

*L. 2068.*  
JAN GRABOWSKI

# MODELE GEOMETRYCZNE

PODREČZNIK

DLA NAUCZYCIELI I UCZNIÓW

~~PAŃSTWOWA~~  
Biblioteka Pedagogiczna  
w BIAŁYMSTOKU.



*N= 64 B.K.*

*Nº 14*  
1919

WYDAWNICTWO M. ARCTA W WARSZAWIE

Biblioteka Pedagogiczna CEN  
nr inw.: KG - 11



BC KSK / 11

11

## TEGOŻ AUTORA:

*Geometria pogładowa.* 3 części. Wyd. M. Arcta.

*Siatki brył geometrycznych* } wydane przez  
*Siatki modeli krystalograficznych* } „Nasz Sklep”,  
Jasna 1.

*Rachunki dla szkół początkowych.* Cz. I.

*Wskazówki metodyczne do Rachunków.*

2068. P.B.P.

Wszystkie prawa autorskie przekładów i przerótek, w szczególności  
masowej fabrykacji modeli według wskazówek w niniejszej książce  
zawartych, zastrzeżone.

Geprüft und auch für die Ausfuhr freigegeben durch die Kais. Deutsche  
Presseabteilung Warschau, den 29. X. 1918. T.-N-o. 11944. Dr. N-o. 1021.

DRUKARNIA M. ARCTA W WARSZAWIE, NOWY-SWIAT 41.

Jan Grabowski  
Modele geometryczne

*Polskiemu nauczycielstwu ludowemu  
poświęcam.*

Książeczka niniejsza nie może obejść się bez paru słów przedmowy. Ma ona dwa zadania do spełnienia i na nie radby autor zwrócić łaskawą uwagę czytelnika. Po pierwsze: nauczyciel, w szczególności zaś nauczyciel ludowy, znajdzie tu łatwe i proste wskazówki co do tego, w jaki sposób niewielkim wysiłkiem wzbogacić zasób pomocy naukowych swej szkoły. Po drugie inny czytelnik, uczeń, znajdzie wskazówki, w jaki sposób ma zbudować narzędzia, które dadzą mu możliwość dokonywania doświadczeń geometrycznych na prostych przyrządach, łatwych do wykonania. Obadwa zaś rodzaje czytelników wówczas dopiero naprawdę skorzystają z książeczki, tak sobie pragnijmniej tego życzy autor, jeżeli prześciną w pomysłowości to, co znajdują w książeczce, jeżeli zdołają zbudować ulepszone modele, jeżeli wniosą do pomysłów autora swój wysiłek twórczy, modyfikując i ulepszając to, co tu niżej znajdują opisane. Wtedy książeczka spełni naprawdę swe zadanie.

Należy jeszcze powiedzieć słów parę o samych modelach. Model ma o tyle wartość, o ile jest przyrządem, pozwalającym na wykonywanie doświadczeń. Model powinien być ruchomy, łatwy w manipulowaniu, prosty w budowie, powinien dawać możliwość eksperymentatorowi dokonywania zmian, odpowiednio do coraz nowych warunków doświadczenia.

Autor niniejszego starał się, aby opisane przezeń modele o ile możliwości odpowiadały tym wymaganiom. W niewielu tylko wypadkach uciekał się do modelu sztywnego, zdając sobie dokładnie w tych razach sprawę z tego, jak wielka przestrzeń dzieli go od ideału.

Jeszcze jedna uwaga. Niech czytelnik nie dziwi się, że tak mało znajdzie wskazówek, dotyczących sposobu używania modelu. Autor uczynił to rozmyślnie, chcąc w ten sposób rozszerzyć zakres zastosowań, pozostawiając je domysłności czytelnika, jego wiadomościom geometrycznym, no i jego dobrej woli. Łatwo zrozumiałe względy pedagogiczne skłoniły go do obrania tej drogi.

*Jan Grabowski.*

Luty, 1918.

## WSTĘP.

Jeżeli filozof grecki, Plato, kazał nad wejściem do szkoły, w której nauczał, wyryć napis: „Niech tu nikt nie wchodzi, komu obcą jest geometria”, my ze swej strony, jako motto dla książeczki moglibyśmy użyć zdania: „Jeżeli masz niezręczne palce, przygotuj się na to, że sporządzony przez ciebie model zawiedzie twe oczekiwania”. Nie powinna jednak nikogo zniechęcać ta przestroga. „Wszystkie Twe bogactwa sprzedajesz nam, Boże, za cenę naszego trudu”, powiedział Lionardo da Vinci, jeden z najgenialniejszych i najpracowitszych ludzi, jakich wydały wieki. Każdy, kto nie przeszedł przez szkołę pracy ręcznej, kto nie potrafi krajać kartonu, kleić, wycinać, będzie miał, szczególnie w początkach swej pracy, pewne do zwalczania trudności, lecz, spodziewam się, nikogo one nie zniechęcą, gdyż każdy musi być na nie przygotowany.

Poniższe uwagi wydadzą się może zbędnymi dla tych, którzy już mają wprawę i nie po raz pierwszy biorą nóż do ręki. Lecz głównie mieć na myśli należy tych, którzy stawiają dopiero pierwsze kroki. Rozpatrzmy się w materiałach, jakich używać będziemy przy budowaniu modeli.

Więc przedewszystkiem **drzewo**. Drzewa używamy w postaci cienkich, wyheblowanych deseczek, z których budujemy podstawy (tablice) pod modele, lub też w postaci tychże deseczek, pociętych na listewki (grubość 3—5 mm., szerokość 1—2 cm.). Najlepiej do naszych celów nadają się deseczki olszowe, zalecające się przedewszystkiem łatwością do obrobienia oraz taniością. Jeszcze tańsze byłyby deszczułki sosnowe, lub świerkowe, lecz wyrazistość słojów, która szczególnie występuje przy barwieniu (bajcowaniu), niezawsze czyni je odpowiedniami.

Grubsze deseczki, cięte z jednolitego drzewa, paczą się. Najlepiej zbudowany model wygląda jak kaleka, gdy się wspiera na spaczonych podstawach. Chcąc zapobiec paczeniu się, najlepiej używać t. zw. dychty albo klejonki, t. j. deseczki sklejonej z kilku warstw cienkich forniów. Klejonka taka nie paczy się. Dychty różnej grubości dostać można w składach drzewa, w wielkich arkuszach różnej wielkości.

**Tekturę** kupujemy w składach papieru w arkuszach (100×70 cm.) różnej grubości. Brunatna tektura kraje się trudniej, niż biała, jest jednak mniej łamliwa od tej ostatniej. Karton biały i kolorowy jest sztywny, gładki, wygląda ozdobnie, lecz jest drogi. Najlepiej używać go jedynie na wskazówki, małe wstawki i t. p.

Trzebaby napisać całe dzieło po to, aby zapoznać kogoś, kto nigdy piły nie trzymał w ręku, z techniką obrabiania drzewa. Krótko załatwimy się z tą sprawą, gdyż nie mamy zamiaru pisanie podobnego dzieła. Kto nie potrafi przyciąć listwy, zheblować deseczki, kto nie wie, jak kleić drzewo—ten niech się uda o pomoc do stolarza.

Tekturę lepiej krajać ostrym nożem, niż nożyczkami. Wystarczy dobrze wyostrzony scyzoryk, choć lepiej używać introligatorskiego noża i żelaznej linijki. Ostrożnie z nożem! Nóż powinien być ostry (należy co pewien czas pociągnąć ostrze na osełce), trzymać go należy z góry, lecz nie w pięści! Najlepiej wprawić się na odpadku tektury w przykrawanie przy linji. Dbać o to, aby nóż przy krajaniu nie odbiegał od linji, nie zmieniał nachylenia, a szczególnie nie błdził samopas po tekturze. Jeżeli w jednej ręce mam nóż, a w drugiej przedmiot krajany, kraję zawsze w kierunku od ręki, trzymającej tekturę.

Ważnym materiałem przy wyrobie modeli jest **klej**. Pamiętać należy o tem, by na dzień co najmniej przed rozpoczęciem pracy namoczyć klej w wodzie. Gotować najlepiej klej stolarski nie bezpośrednio na ogniu, lecz w kąpielu wodnej, którą łatwo sobie sporządzić. Należy wziąć dwa pudełka blaszane (od konserw, kakao, kawy), większe i mniejsze, dobierając je w ten sposób, aby mniejsze wchodziło swobodnie w większe i aby pomiędzy ściankami pudełek była wolna przestrzeń. W mniejszym pudełku u samego wierzchu przebijamy dwa otwory, przez

które przeciągamy drut tak, aby mniejsze pudełko wisało w większym. Do większego pudełka nalewamy wodę, do mniejszego wkładamy rozmoczony klej i stawiamy przyrząd na ogniu. Klej, gotowany na wodnej kąpeli, nie przypala się. Dwa warunki muszą być spełnione po to, aby klej trzymał. Należy kleić **tylko** gorącym klejem i **tylko** zupełnie suche powierzchnie. Jeszcze o jednej zasadzie pamiętać trzeba. Wielkie przedmioty (drzewo, gruba tektura)—wymagają kleju gęstego i gorącego, małe przedmioty—rzadkiego i niezbyt gorącego.

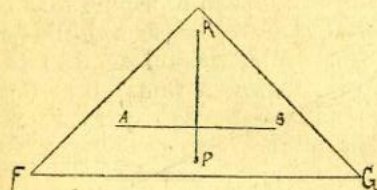
Wielkie płaszczyzny papieru najlepiej kleić klajstrem, sporządzonym z krochmalu lub maki. Dobrze jest do krochmalu (w czasie gotowania) dodać nieco słabego rozczyntu kleju. Ruchome spojenia w drzewie otrzymujemy wbijając w jedną listewkę gwóźdź i wierząc odpowiedni otwór w drugiej. Otwór najlepiej **wypalać** gorącą igłą, lub drutem. Wystający koniec gwóźdź ostrożnie obciąć obciążkami i sklepać. Listewki tekturowe spajamy, wybierając w obu dziurkaczami okrągłe otwory, przez które przeciągamy spinę, jakiej się używa do spinania kopert. Dziurkacz dostać można w każdym sklepie żelaznym.

Wreszcie słówko jeszcze na zakończenie. Sporządzanie podziałki wogóle, podziałki zaś katowej w szczególności, sprawia wiele kłopotu, zajmuje wiele czasu i trudno jest wykonać ją dokładnie. Gotowe taśmy z podziałką, oraz podziałki katowe dostać można po bardzo przystępnej cenie w „Naszym Sklepie”, Jasna 1.

## I. PLANIMETRJA.

### 1. Kierunki: pionowy i poziomy.

1. **Pion.** Obciążając sznurek z jednego końca, otrzymamy najprostszy model pionu. Bardziej złożony, choć jeszcze bardzo prosty model zbudować można w sposób następujący: Z białego kartonu wytnijmy trójkąt równoramienny (bok 15 cm., podstawa 20 cm.). Poprowadzimy AB równoległe do podstawy (rys. 1). U przeciwległego wierzchołka na prostej prostopadłej do FG



Rys. 1.

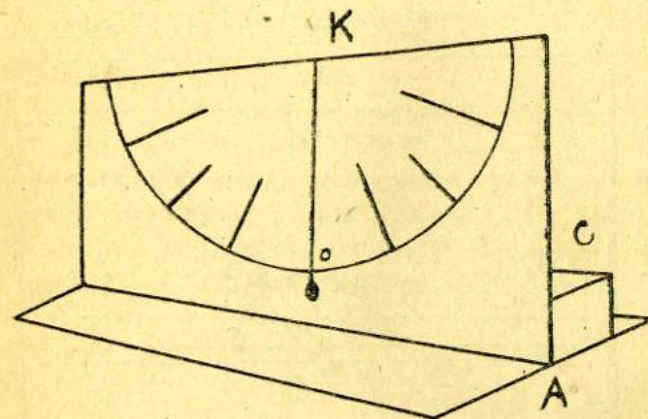
rozpaloną igłą wypalmy otwór R i przeciągnijmy przezeń czarną mocną nitkę. Po to, aby nitka trzymała się w otworze, przywiążmy jeden jej koniec do zapalniczki. Na końcu nici P umocujmy ciężarek (np. plombę).

Zbudowany w ten sposób przyrząd może służyć do oznaczania poziomu. Należy tylko na prostej AB znaleźć punkt, w którym przecinać ją będzie nić, gdy położenie tej prostej (a więc i boku FG) będzie poziome.

Oprzyjmy przyrząd bokiem FG na pochylej płaszczyźnie i oznaczmy na prostej AB punkt przecięcia z nicią. Następnie obróćmy przyrząd o  $180^\circ$  i tym samym bokiem FG oprzyjmy go w tym samym miej-

scu płaszczyzny pochylej. Oznaczmy punkt przecięcia prostej AB nicią. Odległość pomiędzy tymi dwoma punktami przepołowmy i postawmy tam O. Otrzymamy w ten sposób przyrząd, który mularze i cieśle nazywają szyndwagą.

2. **Sródwaga.** Wycinamy z drzewa (lub grubej tektury) deseczkę długości 20 cm., szerokości 10 cm. Przy punkcie K, na połowie dłuższego boku prostokąta, przepalamy otwór, przez który przeciągamy nit-



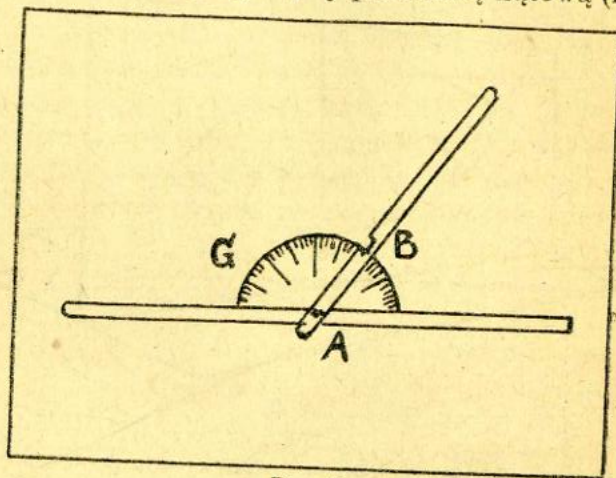
Rys. 2.

kę, obciążając ją na końcu ciężarkiem. Deseczkę umocowujemy prostopadłe na podstawce A, umieszczając poza nią podpórki lub klocek K (rys. 2). Znajdujemy podobnie jak w poprzednim wypadku punkt zerowy, przez ten punkt i otwór K prowadzimy prostą. Naklejamy pół podziałki katowej tak, aby zero podziałki leżało na prostej KO, środek zaś w punkcie K. Odchylenia od pionu odczytujemy na podziałce po obydwu stronach zera. Będą one w stopniach odpowiadały kątowi, jaki tworzy płaszczyzna, do której przyłożymy podstawkę A, z poziomem.

Warto byłoby zdać sobie sprawę z tego, jaki związek zachodzi pomiędzy budową tego przyrządu a twierdzeniem o równości kątów, których ramiona są do siebie prostopadłe.

## 2. Kąty.

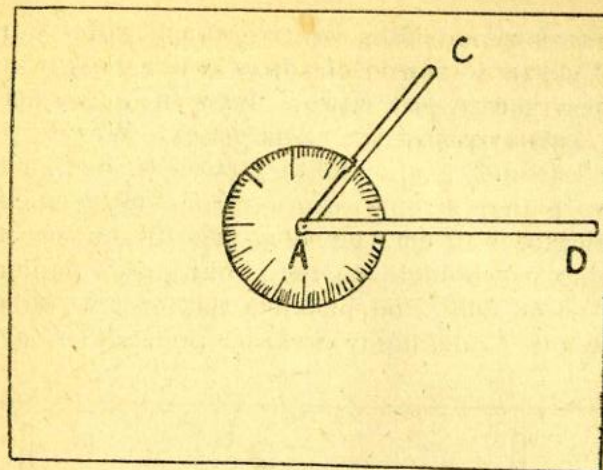
3. **Kąty przyległe.** Weźmy dwie listewki drewniane. Jedną niech będzie dłuższa od drugiej. Krótszą listewkę umocujmy w środku dłuższej tak, aby krótsza mogła się swobodnie obracać koło punktu A. Za większą listewką przyklejmy podziałkę kątową (rys. 3).



Rys. 3

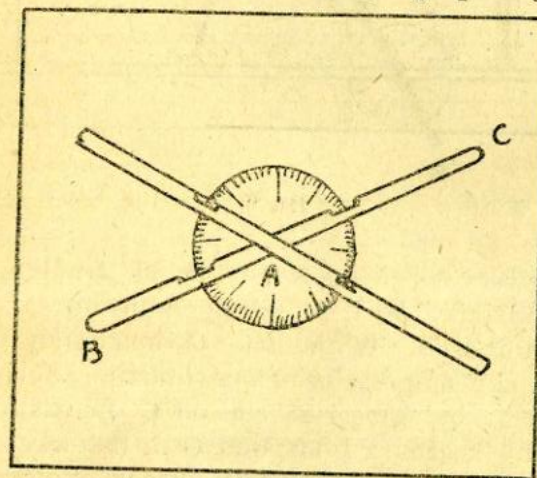
Wykrój przy B niezbędny jest po to, aby szerokość listewki nie przeszkadzała odczytywaniu stopni na podziałce. Zamiast listewki dłuższej użyć można paskę papieru, naklejonego wprost na tablicę.

4. **Kąty: rozwarty, ostry, wypukły, wklęsły.** Rys. 4 wskazuje, jak zbudować model, unaoczniający różnice pomiędzy kątami: rozwartym, ostrym, wypukłym, wklęsłym. Zamiast krążka z podziałką użyć można krążka, podzielonego na cztery części równe (kwadranty).



Rys. 4.

Każdy kwadrant zamalujmy innym kolorem. Przy obracaniu listewki AC widać odrazu, kiedy kąt CAD jest od prostego mniejszy, większy, równy dwu prostym, mniejszy lub większy od kąta półpełnego.

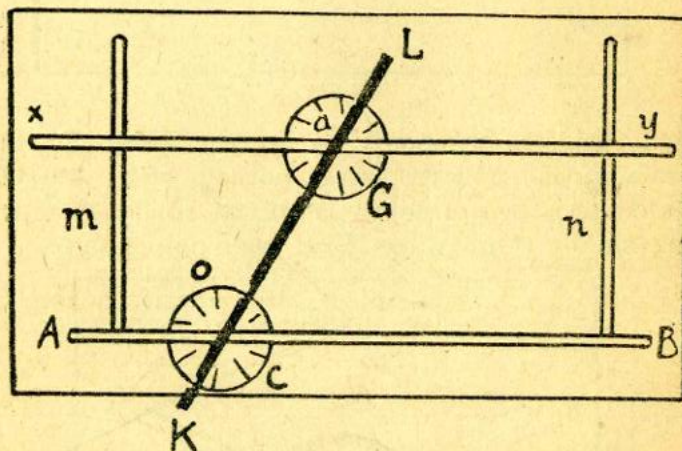


Rys. 5.

5. **Kąty wierzchołkowe.** Dwie listewki szczepiamy (gwoździkiem) w punkcie A (rys. 5). Pod A kładzie-

my krążek z podziałką, w listewkach robimy nacięcia. Wykazanie równości kątów wierzchołkowych na tym przyrządzie jest łatwe i nie wymaga wyjaśnienia.

6. **Kąty przy prostych równoległych.** Weźmy prostokątny kawałek grubej tektury ( $40 \times 60$  cm.), oklejmy go po jednej stronie czarnym matowym papierem. W odległości 10 cm. od dłuższego boku prostokąta naklejmy równoległe do tego boku pasek papieru AB, długi na 50 cm. Pod paskiem papieru w odległości 15 cm. od A naklejmy krążek podziałki C (rys. 6).

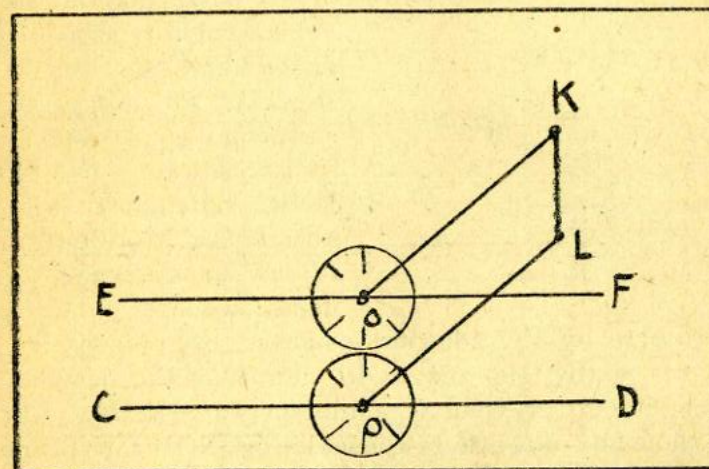


Rys. 6.

W odległości 5 cm. od A i tyluż od B naklejmy dwa paski podziałki M i N prostopadłe do AB (około 30 cm. długości). W punkcie O umocujmy listewkę KL tak, aby mogła się ona swobodnie obracać dookoła O. W odległości 25 cm. od O na listewce KL umocujmy krążek z podziałką G i listewką xy tak, aby mogła się ona swobodnie obracać koło a. Szczepienia o i a muszą chodzić twardo, aby zapewnić sztywność listewkom KL i xy.

Na modelu tym łatwo wykazać, że 1) przez punkt dany do prostej można poprowadzić równoległą, ale tylko jedną; 2) zależności pomiędzy kątami, utworzonymi przez parę równoległych i poprzeczną.

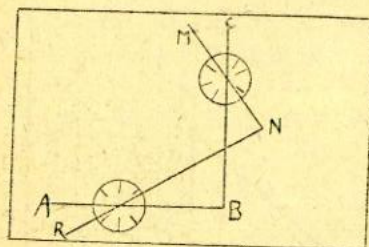
7. **Kąty o ramionach równoległych.** Prostokątny kawałek tektury (jak przy modelu Nr. 6) będzie nam służył za tablicę, na której zbudujemy model właściwy.



Rys. 7.

W odległości 10 cm. od boku AB tablicy (tektury) naklejamy pasek papieru CD i 10 cm. nad nim drugi pasek EF, równoległe do CD (paski długości 50 cm.). Na połowach obydwu pasków w punktach O i O' naklejamy dwa krążki podziałkowe i umocowujemy dwie listewki OK i O'K' długości 20 cm. Końce ich łączymy drutem KL (rys. 7). Odległość od K do L musi być ściśle równa odległości od O do O'. Końce druta zaginamy tak, aby listewki mogły się swobodnie poruszać. Jakikolwiek położenie nadamy jednej z listewek, druga zawsze do niej będzie równoległą.

8. **Kąty o ramionach prostopadłych.** Weźmy deseczkę prostokątną ( $40 \times 30$  cm.), pomalujmy ją na czarno. Na deseczce naklejmy dwa paski papieru AB i BC prostopadłe do siebie. W miejscach K i L naklejmy krążki podziałkowe. Sporządźmy następnie dwie listewki MNR spojone na stałe (sztywno) w N, prostopadłe do siebie. W punktach O i O' (rys. 8) wbijmy



Rys. 8.

Dobrze byłoby zdać sobie sprawę, czy opisany model nie dalby się zużyć do unaocznienia pewnego szczególnego przypadku podobieństwa trójkątów. Czy nie możnaby dowieść równości kątów NOB i NO'B na innej drodze, nie rozważając ich jako kątów, których ramiona są do siebie prostopadłe?

### 3. Koło.

9. **Koło, cięciwa.** Model koła jest niepotrzebny, najlepiej wszystkie własności krzywej, zwanej kołem, wykazać na kole, zakreślonym na tablicy, lub w kacie. Natomiast dobrze jest mieć model, unaoczniający zależność pomiędzy długością cięciwy a odległością jej od środka koła a to w celu wykazania, że zależność ta nie jest proporcjonalnością.

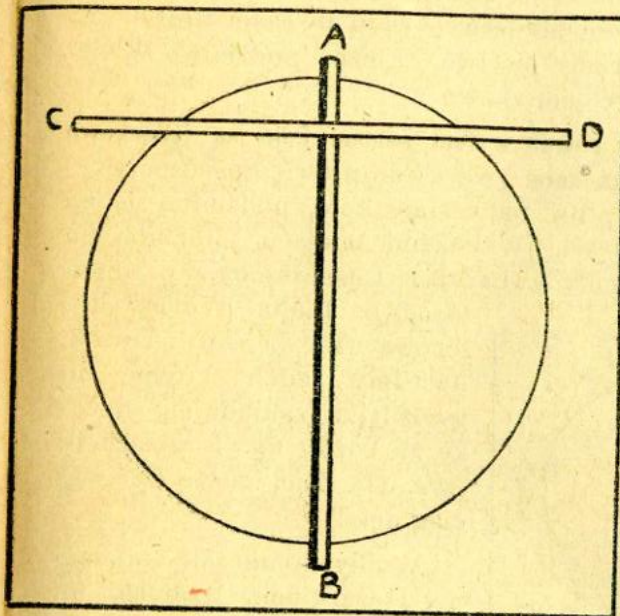
Weźmy deseczkę kwadratową ( $40 \times 40$  cm.) i wykreślmy na niej koło (ze środka deseczki), promie-

my w deszczulkę (tablicę) gwoździe z szerokie-  
mi łóbkami tak, aby li-  
stewki MNR mogły się  
suwać po gwoździach.

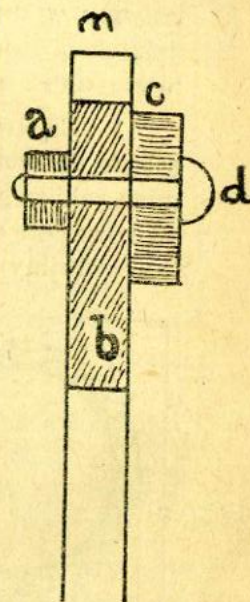
Przesuwając listewki MNR, zmieniamy wielkość kątów, które odczytujemy na krążkach podziałkowych.

niem 15 cm. Wzdłuż średnicy koła wytnijmy wąską szparę AB, obok niej nalepmy wstążkę z podziałką.

Przygotujmy listewkę długości 35 cm., naklejmy na niej wstążkę z podziałką (rys. 9). Zapomocą gwoździka i kawałka deseczki (gwoździk wbij po tamtej stronie!) umocujmy listewkę CD w ten sposób, aby była ona stale prostopadła do szpary AB, i by się



Rys. 9.



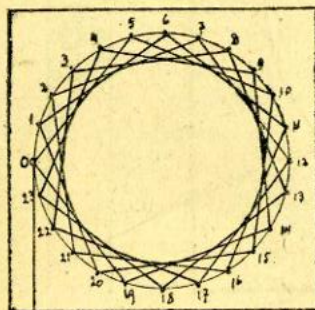
Rys. 10. m—deseczka, a—listewka CD, b—kawałek deseczki, wpuszczonej w szparę AB, c—deseczka zwiększająca tarcie i nie pozwalająca opadać listewce CD, d—gwoździk.

mogła wzdłuż tej szpary przesuwąć, nie zmieniając nachylenia. Szczegółową konstrukcję wskazuje (rys. 10).

Zbliżając listewkę CD do środka koła O wzdłuż AB odliczamy na podziałce długość cięciwy i odległości tychże od środka.

10. Równym cięciwom w tem samem kole odpowiadają łuki równe. Na kwadratowym kawałku brystolu ( $30 \times 30$ ) nakreślmy koło promieniem równym 10 cm. Podzielmy koło na 48 równych części (na 6, 12, 24, 48). Ponumerujmy punkty podziału. Sporządźmy listewkę z kartonu i naklejmy na niej podziałkę. Zmierzmy listewką, odległość pomiędzy jakimikolwiek dwoma punktami podziałki na okręgu koła. Odliczmy gdziekolwiek w innem miejscu okręgu tę samą liczbę podziałek i zmierzmy cięciwę. Liczba podziałek na listewce musi być jednakowa.

11. Cięciwy równe w tem samem kole są jednakowo odległe od środka koła. Na kwadratowej deseczce (wymiar jak w Nr. 10) nakreślmy koło, podzielmy je na 48 równych części. W każdym miejscu podziałki na kole wbijmy mały gwoździć. Deseczkę należy pomalować na białe. Weźmy kolorową włóczkę, lub sznurek, uwięzyjmy jeden koniec do gwoździka i zakładajmy włóczkę za każdy np. 5 gwoździć (rys. 11). Nici muszą być wyciągnięte!



Rys. 11.

Wolny koniec nici obciążmy ciężarkiem. Rzut oka na model przekonywa, że gdyby cięciw było nieskończenie wiele, środki ich tworzyłyby koło, którego promień równałby się odległości którejkolwiek cięciwy od środka koła.

12. Dobrze jest posiadać model koła z kartonu (promień 10 cm.) poprowadzić w nim cięciwę i średnicę. Przeciąć koło wzdłuż cięciwy i średnicy i przecięte miejsca po drugiej stronie podkleić płótnem.

Na takim modelu można unaocznic: 1) że średnica połowi koło; 2) cięciwa dzieli okrąg koła na dwa łuki; 3) dzieli koło na dwa odcinki.

#### 4. Kąty w kole.

14. Kąt obwodowy =  $\frac{1}{2}$  kąta środkowego, wspierającego się na tym samym łuku. <sup>1)</sup> Na kwadratowej deseczce kreślimy koło (deseczkę zabajcować, koło namalować farbą olejną). Przez środek koła od przeciwnej strony przebijamy gwoździć. Na gwoździć nakładamy:

1) Kształek z podziałką.

2) Listwę a z cienkiej deseczki, w którą w tym miejscu, gdzie ona dotyka okręgu koła wbijamy gwoździć z przeciwnej strony. Drugi koniec listewki przycinamy w ten sposób, że zastrzony koniec przesuwamy się po podziałce kształka. Trzy punkty: koniec listewki, oś obrotu i gwoździć na drugim końcu łączymy prostą (wykreślić grubo tuszem).

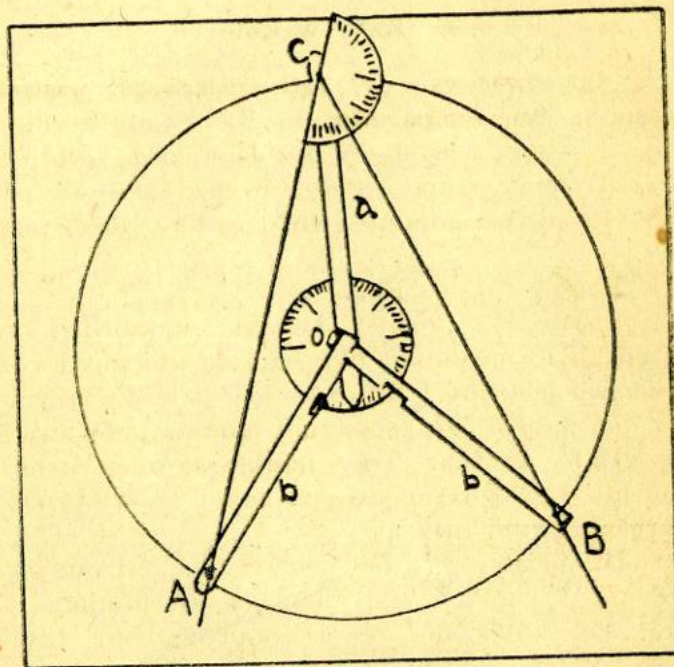
3) Dwie listewki, które będą ramionami kąta środkowego. W końce A i B listewek wśrubujemy dwa kółka. Od kółek do osi O poprowadzimy tuszem proste. W miejscu, w którym listewki przykrywają kształk z podziałką wytnijmy „okienka”. Wreszcie w dowolnem miejscu listewek wbijmy gwoździki, które pozwolą nam umiejscowić obie listewki w dowolnem miejscu koła.

Na gwoździć pierwszej listewki włóży:

1) Pół kształka z podziałką, naklejonego na tekturę (z podziałką od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ ).

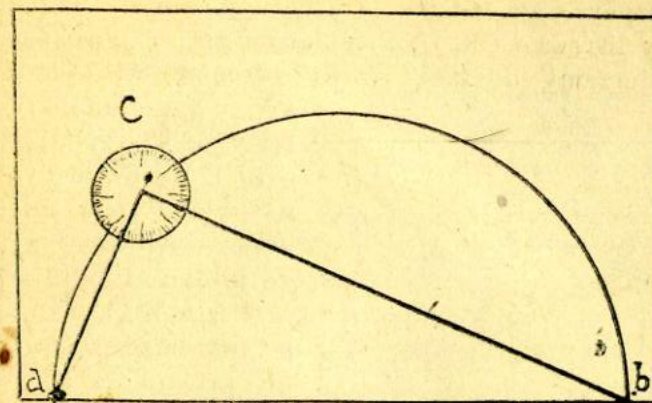
<sup>1)</sup> powtarzam tu konstrukcję, przytoczoną przez K. Giebla w jego książeczce. Anfertigung Mathematischer Modelle. B. G. Teubner. 1915.

2) Dwa druty (2 mm. grube) które w C szezipione są na kołeczku (możliwie małe), dwa inne końce drutów włóżmy w kółka, wkręcone w listewki A i B.



Rys. 12.

14. **Kąt w półkolu.** Na deseczce wykreślmy półkole. Na obydwu końcach średnicy wkręćmy kołeczka (rys. 13) a i b. Naklejmy krążek z podziałką na teksturę i umocujmy go na gwoźdźniku, przechodzącym przez środek krążka (jak frygę). Do kółka a uwiążmy nić. Wbijmy koniec gwoździa z krążkiem w dowolny punkt półokręgu, przeciągnijmy nić przez gwoźdź C i oczko a. Obciążmy wolny koniec nici ciężarkiem.



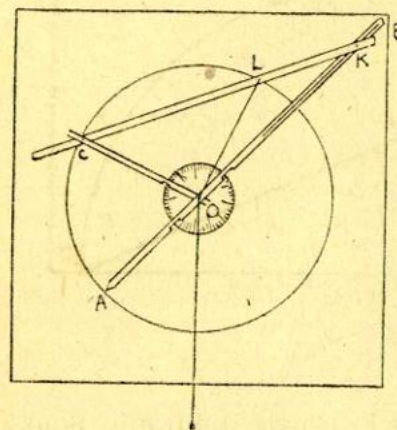
Rys. 13.

Wbijając gwoździk w dowolny punkt, leżący na półokręgu odczytamy na krążku podziałkowym kąt = prostemu.

15. **Trysekcja kąta.** Wiadomo powszechnie, że geometria grecka chciała rozwiązać przy pomocy cyrkla i linijki trzy zagadnienia, o których dziś wiemy, że tymi środkami, jakich chcieli użyć geometrowie greccy, rozwiązać się nie dadzą. Zagadnieniami temi były: kwadratura koła, podwojenie sześcianu i trysekcja (podział na trzy części równe) dowolnego kąta. Jeden z największych matematyków starożytności, Archimedes (287—212 przed Chryst.), stosując sposób przesunięcia zdołał rozwiązać ostatnie zagadnienie.

Na kwadratowej tablicy (p. str. 20, rys. 14) kreśliśmy koło. Na środku koła przyklejamy krążek podziałkowy, oraz przybijamy gwoździem dwie listewki. Jedną AB (jeden jej koniec zaostriżony suwa się po okręgu koła, w drugim końcu B wycięta jest szpara), drugą — OC, wbijając w C gwoździk od wierzchu.

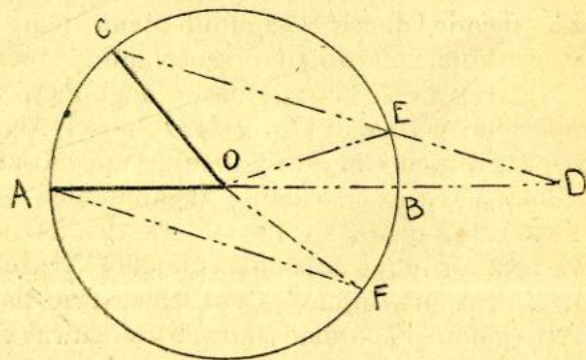
W szparze, gwoździem wbitym od spodu umocowujemy listewkę CK. Na tej listewce od gwoździa K odmierzymy odcinek równy promieniowi koła i na końcu tego odcinka wbijamy (od wierzchu) gwoździem L po to, aby można była w tem miejscu umiejscowić listewkę KL na tablicy.



Rys. 14.

Przez K i L prowadzimy tuszem prostą i wzdłuż tej prostej zaraz za L wycinamy „okienka” aż do końca listewki. U gwoździa L umocowujemy koniec nici, którą przeciągamy przez gwoździem O i obciążamy na końcu. Model gotów!

Tym razem, ponieważ dotykamy przedmiotu nowego i mało znanego, podajemy zastosowanie modelu i pewne wywody teoretyczne.



Rys. 15.

Rozsuńmy listewki AO i OC tak, by tworzyły one żądany kąt AOC. Weiskając gwoździem w tablicę umocujemy listewkę CO i AB. Przesuńmy teraz listewkę KL tak, aby gwoździem L stale sunął po okręgu koła dotąd, aż dłuższy jej koniec oprze się o C. Kąt LOB będzie  $= \frac{1}{3} \angle COA$ .

Istotnie. Poprowadźmy AF równoległe do CE; promienie OE i OF. Widzimy, że

$\angle BOE = \angle EDO$  trójkąt równoramienny

$\angle EDO = \angle OAF$  kąty naprzemianległe

wiec:  $\angle BOE = \angle OAF$  lecz

$\angle OAF = \frac{1}{2} \angle FOB$  (kąt wpisany i środkowy)

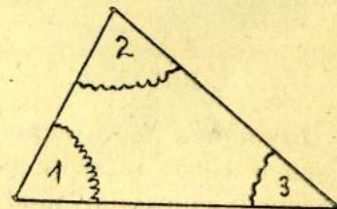
wiec:  $\angle BOE = \frac{1}{3} \angle EOF$  lecz

$\angle AOC = \angle EOF$  oparte na łukach równych

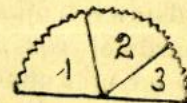
czyli  $\angle BOE = \frac{1}{3} \angle AOC$  c. b. d. d.

## 5. Trójkąty.

16. **Suma kątów w trójkącie.** Najprostszym, a więc najlepszym modelem będzie dorywczo wycięty z kartki papieru trójkąt, którego kąty obrywamy, składamy wierzchołkami i wykazujemy, że w sumie dają one kąt półpełny (rys. 16).

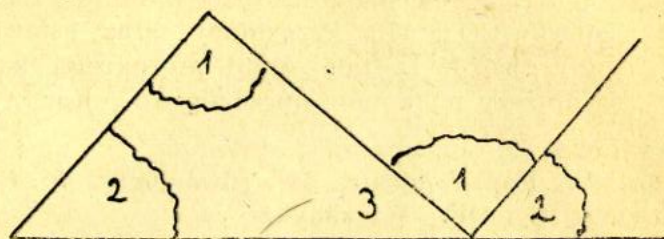


17. **Kąt zewnętrzny trójkąta.** Również najlepszym modelem będzie nakreślony, na kawałku papieru trójkąt, którego jeden bok przedłużamy i wycinamy go tak, aby dwa nieprzyległe kąty trójkąta



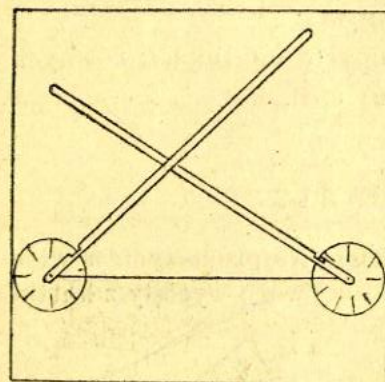
Rys. 16.

dały się odedrzeć i przyłożyć do kąta zewnętrznego (rys. 17).



Rys. 17.

18. **Zasadniczy model.** Na tablicy kartonowej lub drewnianej naklejamy (rys. 18) wąski pasek papieru AB. W A i w B naklejamy dwa krążki podziałkowe i za pomocą gwoździków umocowujemy ruchomo dwie listewki (kartonowe), na które naklejamy paski z podziałką (O podziałki musi wypadać na gwóźdź). Przygotujmy sobie jeszcze dużą pluskiewkę, do której umocujemy nić, obciążoną na wolnym końcu.

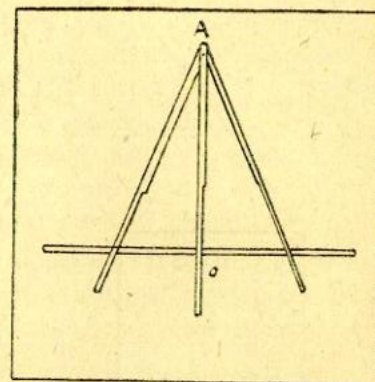


Rys. 18.

Zapomocą tego modelu można zbadać wszystkie niemal własności trójkąta. Umocowując listewki pluskiewką i ustawiając model w ten sposób, aby prosta AB była poziomą (wtedy nić będzie prostą do podstawy trójkąta—jego wysokością), można jeszcze bardziej rozszerzyć zakres zastosowań modelu. Można na nim zbadać zależności pomiędzy długością boków, długością boków i wielkością kąta przeciwległego, własności trójkąta równoramiennego i w. in.

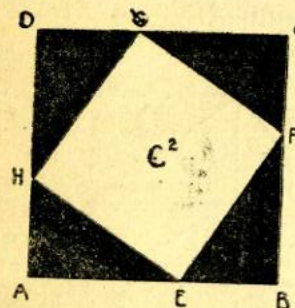
## 6. Trójkąt prostokątny.

19. **Prostopadła i pochyłe.** Na tablicy naklejamy pasek z podziałką; we środku tejże przyklejamy drugi taki sam pasek OA. W A gwoździem umocowujemy ruchomo dwie listewki z naklejoną podziałką (rys. 19). Przesuwając ruchome listewki i odczytując długość od A do przecięcia się z paskiem poziomym, wykazujemy różne zależności, zachodzące pomiędzy długością prostych, długością ich rzutu i t. p.

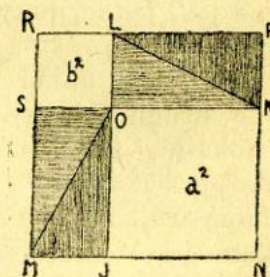


Rys. 19.

20. **Twierdzenie Pytagorasa.** A. Wytnijmy z kartonu dwa jednakowe kwadraty (bok = 15 cm.). Na jednym,



Rys. 20.

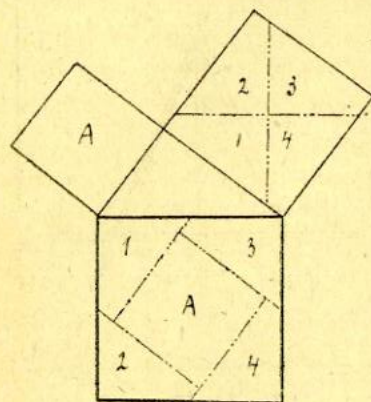


Rys. 21.

od jednego z wierzchołków kąta prostego, odłóżmy w obie strony po 11 cm. Przez punkty podziału poprowadźmy równoległe do boków kwadratu. W drugim kwadracie na każdym z boków odkładamy ko-

lejno 11 cm. i 4 cm. i połączmy punkty podziału (rys. 20 i 21). Rysunek mówi sam za siebie i wyjaśnienia nie potrzebuje.

21. B. Na przyprostokątnych trójkąta kreślimy kwadraty. Znajdujemy środek jednego kwadratu

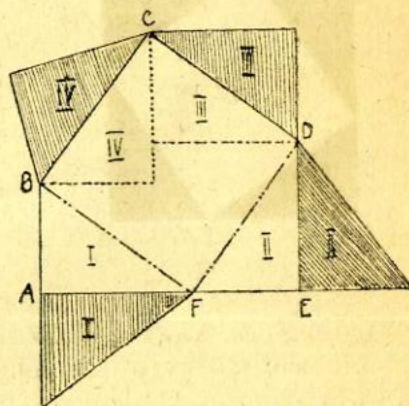


Rys. 22.

O (rys. 22) i przezeń prowadzimy AB równoległe do przeciwprostokątnej oraz drugą prostą prostopadłą do AB. Rysunek wskazuje, jak z odciętych kwadratów, zbudowanych na przyprostokątniach złożyć kwadrat na przeciwprostokątnej.

22. C. *Kartónarzeczony*, tak się nazywa ten dowód, który zawdzięczamy geometrom hinduskim. Wy-

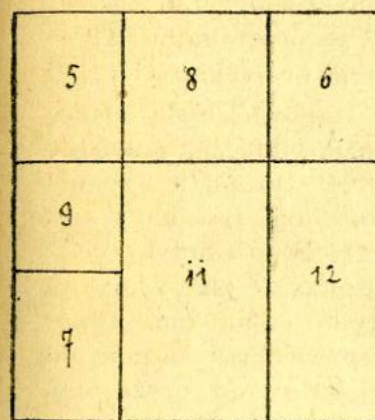
tnijmy z kartonu pięciokąt ABCDE, w którym AB równe jest jednej przyprostokątnej,  $AE \perp$  do AB = sumie dwu przyprostokątnych,  $DE \perp$  do AE równe drugiej przyprostokątnej, zaś BC i CD = przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego. Wytnijmy z kartonu 4 trójkąty prostokątne (AB i AE — przyprostokątne, BC — przeciwprostokątnia). Oklejmy trójkąty 1, 2, 3 i 4 kolorowym papierem i umocujmy je



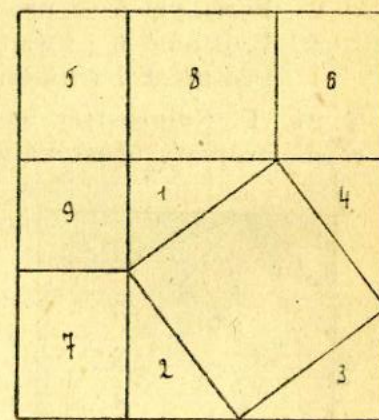
Rys. 23.

(podklejając płótnem tak, jak wskazuje rys. 23. Założmy trójkąty 3 i 4 za pięciokąt, aby ich nie było widać, zaś trójkąty 1 i 2 położmy na pięciokąt tak, jak wskazują linie kropkowane. Otrzymamy kwadrat BCDF, zbudowany na przeciwprostokątnej. Odłóżmy teraz trójkąty 1 i 2 poza prostokąt, opuśćmy trójkąty 3 i 4, jak wskazano na rysunku. Otrzymamy dwa kwadraty, zbudowane na przyprostokątnych. Czyli, odejmując od pięciokąta ABCDE dwa równe trójkąty, otrzymaliśmy raz kwadrat, zbudowany na przyprostokątnej, drugi raz — dwa kwadraty, zbudowane na przyprostokątnych.

23. D. Wykreślimy dwa równe prostokąty. Jeden bok ma być równy dwa razy wziętej mniejszej przyprostokątnej i raz większej, drugi — dwa razy wziętej



Rys. 24.



Rys. 25.

większej i raz mniejszej. Jeden podzielmy tak, jak wskazuje rys. 24, drugi jak rys. 25.

Od prostokąta A odejmijmy tyle, aby pozostał tylko kwadrat, zbudowany na przyprostokątnej. Bierzemy więc:

1. Trójkąty 1, 2, 3, 4.
2. Prostokąt 5.
3. Prostokąt 6 i kwadrat 8.
4. Prostokąt 7 i kwadrat 9.

Od prostokąta B odejmujemy tyle, aby nam pozostały kwadraty, zbudowane na przyprostokątniach, a więc:

1. Prostokąt 6 i 7.
2. Prostokąt 5.
3. Prostokąt 11.
4. Prostokąt 12.

Należy wykazać, że pola odjętych figur są sobie równe.

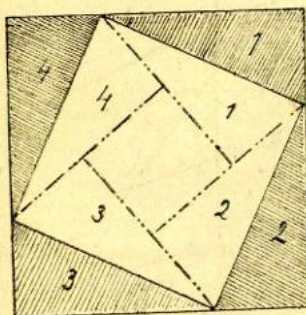
1. Z czterech trójkątów: 1, 2, 3, 4 układamy dwa prostokąty 6 i 7.

2. Prostokąt 5 = prostokątowi 5.

3. Prostokąt 6 i kwadrat 7 = prostokątowi 11.

4. Prostokąt 7 i kwadrat 9 = prostokątowi 12.<sup>1)</sup>

24. E. Najprostszy model stanowią będą cztery równe trójkąty prostokątne złożone tak, jak pokazuje



Rys. 26.

rys. 26. Dowód ten znamy z geometrii Bhāskary (ur. w 1114 r. po Chryst.), choć wiadomo, że znany on był nie tylko hindusom. Chińczycy wiedzieli o nim na 1000 lat przed naszą erą. Kwadrat, zbudowany na przeciwprostokątnej składa się z czterech trójkątów prostokątnych i małego kwadratu. Oznaczmy dłu-

<sup>1)</sup> Patrz: Lietzmann. Der Pythagoreische Lehrsatz. Mathematische Bibliothek. III. B. G. Teubner, 1912, str. 21.

szą przyprostokątną przez  $a$ , krótszą przez  $b$ , przeciwprostokątną przez  $c$ .

Wówczas

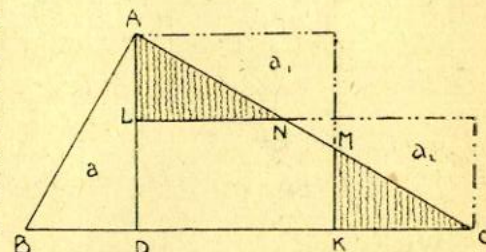
$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2 \text{ (bok małego kwadratu } = a-b\text{)}.$$

Znosząc nawiasy po redukcji otrzymamy:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

25. W trójkącie prostokątnym wysokość jest średnią proporcjonalną między odcinkami przeciwprostokątnej. Na-

kreślmy na kartonie i wytnijmy trójkąt prostokątny, poprowadźmy wysokość z wierzchołka kąta prostego  $AD$ . Na  $DC=b$  od punktu  $D$  odłóżmy  $DK=AD=h$ , na  $AB$  od  $A$  odłóżmy  $DL=DB=a$ .



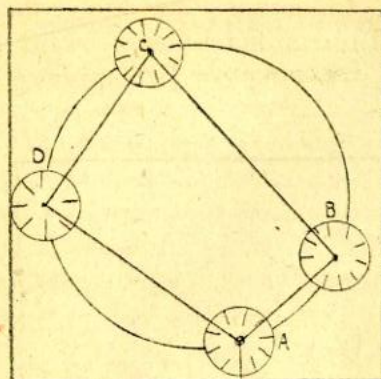
Rys. 27.

Poprowadźmy  $LN$  prostopadłe do  $AD$  i  $KM$  prostopadłe do  $BC$ . Rozetnijmy trójkąt wzdłuż prostych  $AD$ ,  $LN$  i  $KM$ . Otrzymamy 4 figury (rys. 27). Przekonajmy się nałożeniem, że trójkąty  $ALN$  i  $MKC$  są przystające. Następnie przyłóżmy do pięciokąta  $DLMNK$  trójkąty  $ALN$  i  $a_1$ . Otrzymamy kwadrat o boku  $=h$ . Przyłóżmy następnie do tegoż pięciokąta trójkąt  $MKC$  i  $a_2$ —otrzymamy prostokąt, którego pole równe jest  $a \cdot b$ . Czyli

$$h^2 = ab.$$

26. Przyprostokątnia jest średnią proporcjonalną pomiędzy całą przeciwprostokątną, a rzutem na nią tejże przyprostokątnej. Nakreślmy trójkąt prostokątny  $ABC$  (rys. 28) i wysokość  $AD$ . Na  $BC$  zbudujmy prostokąt ( $BE=BD$ ) i kwadrat na  $AB$ . Wytnijmy wielokąt  $BEGAHICKL$





Rys. 30.

Wbijmy gwoźdźniki z kółkami podziałkowymi w dowolnie obranych punktach okręgu koła i przesuwamy je tak, by obejmowała wszystkie gwoźdźniki. Odczytamy kąty na krążkach podziałkowych.

## 8. Wielokąty foremne.

**29. Wielokąty foremne.** Dobrze jest posiadać zbiór modeli wielokątów foremnych, wyciętych z kartonu, szczególniej przydadzą się one do doświadczeń, opisanych

w części drugiej niniejszej książeczki (patrz str. 00). Głównie zależy na tem, by mieć wielokąty o boku jednakowej długości.

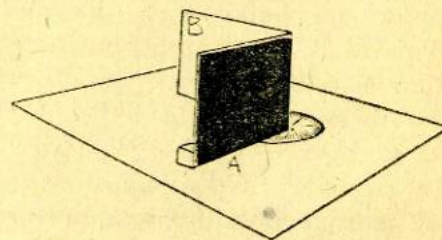
Wykreślenie trójkąta równobocznego o boku = 10 cm., kwadratu o boku takiej samej długości, sześciokąta nie przedstawia trudności — nie będziemy się tu nimi zajmowali. Sposoby kreślenia pięcioboku, siedmioboku, dziewięcioboku, wreszcie wieloboku foremnego o dowolnej liczbie boków znaleźć można w podręcznikach geometrii, lub kreślenia geometrycznego.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> patrz: Jan Grabowski, Geometria Poglądowa. Cz. II.

## 9. Symetria.

**30. Oś symetrii, rysunek symetryczny.** Weźmy arkusz papieru. Zagotujmy rzadki klajster i miękkim, szerokim pędzlem przeciągnijmy gorącym roztworem klajstru po obu połowach arkusza. Pędzelkiem umocznym w farbie wykonajmy na jednej połowie arkusza jakikolwiek rysunek. Złóżmy arkusz, przyciśnijmy mocno obie połowy do siebie i po chwili rozłóżmy arkusz. Otrzymamy po drugiej stronie arkusza rysunek symetryczny do wykonanego.

**31. Model zasadniczy.** Weźmy dwa zwierciadła jednakowej wielkości (prostokąt  $15 \times 25$  cm.), podklejmy je papierem, a później płótnem i przymocujmy do siebie (podklejając je wzdłuż krótszego boku prostokąta) tak, aby dały się złożyć zwierciadlaną stroną do siebie. Przygotujmy drewnianą podstawkę o tej długości, co dłuższy bok prostokąta i czarnej deseczce kwadratowej umocujmy pionowo jedno zwierciadło (rys. 31). Drugie zwierciadło (B) ruchome może być dowolnie odchylane (jak na rysunku), albo też ustawiane do A pod dowolnym kątem. Nie zapomnijmy przed umocowaniem zwierciadła A nalepić na tablicy krążek podziałkowy b! Model gotów!



Rys. 31.

Podajemy tu kilka doświadczeń z modelem, pozostawiając inne domysłności czytelnika.

**a. Symetrala odcinka.** Na kawałku białego papieru przeciągnijmy prostą, po której przetnijmy papier. Do prostej, po której przecięliśmy papier

wystawimy w którymkolwiek jej punkcie prostopadłą. Odchylmy zwierciadło B i do zwierciadła A przysuńmy papier wzdłuż prostej przecięcia. Odcinek prostopadły i jego zwierciadlane odbicie dadzą całkowity odcinek, którego symetralą będzie krawędź zwierciadła A. Na papierze wyznaczmy kilka punktów. W zwierciadle ujrzymy punkty do nich symetryczne.

b. Oś symetrii, figury symetryczne. Na kawałku papieru nakreślmy jakąkolwiek figurę i przysuńmy do zwierciadła A. Odbicie zwierciadlane da figurę symetryczną do danej.

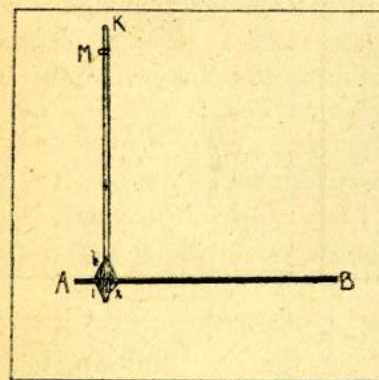
c. Symetrala kąta. Na kawałku papieru nakreślmy dowolny kąt. Wytnijmy go z papieru i jednym ramieniem przyłóżmy do krawędzi zwierciadła A tak, aby wierzchołek kąta znajdował się w środku krążka podziałkowego. Krawędź zwierciadła będzie symetralą. Odczytując na krążku i na jego zwierciadlanym odbiciu liczbę stopni widzimy, że symetrala jest dwusieczną kąta.

d. Osie symetrii figur. Biorę tu dla przykładu kwadrat. Wytnijmy z papieru kwadrat, przyłóżmy jednym bokiem do zwierciadła A tak, aby wierzchołek kąta prostego znajdował się na środku krążka podziałkowego. Przysuńmy zwierciadło B wzdłuż drugiego boku kwadratu. Otrzymamy wówczas (łącznie z położonym kwadratem) kwadrat cztery razy większy niż wycięty z papieru. Krawędzie zwierciadeł będą osiami symetrii kwadratu. Każdą figurę płaską, wycinając z niej części zawarte pomiędzy osiami symetrii, możemy przyłożyć w ten sposób do obu zwierciadeł i sprawdzić, jak przebiegają osie symetrii figury. Liczba doświadczeń z przyrządem jest nieograniczona. Czytelnik-eksperymentator przekona się łatwo jak używać przyrządu i jak mnożyć możliwe do wykonania doświadczenia. Przytoczę tu jeszcze jedno proste doświadczenie.

e. Czy przekątne są osiami symetrii prostokąta? Przetnijmy prostokąt, wycięty z białego papieru wzdłuż którejkolwiek przekątnej i przyłóżmy go przekątnią do zwierciadła. Połowa prostokąta i zwierciadlane odbicie tejże dadzą deltoid, nie zaś prostokąt, czyli że przekątne prostokąta nie są osiami symetrii tej figury.

## 10. Miejsca geometryczne.

32. Równoległa do prostej danej. W kwadratowej desce, pomalowanej na czarno (rys. 32), wytnijmy szparę AB. Wytnijmy z deseczki cienkiej ukośnik b (zacięniowany) i w punktach 1 i 2 wbijmy gwoździe, podkładając po drugiej stronie kawałek deseczki (rys. 33) tak, aby ukośnik b



Rys. 32.

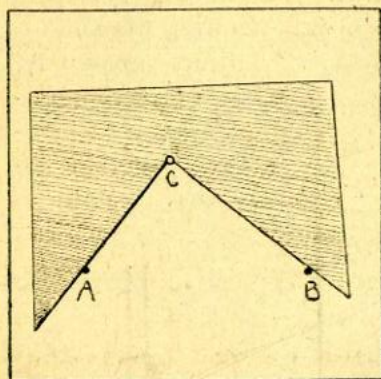


Rys. 33.

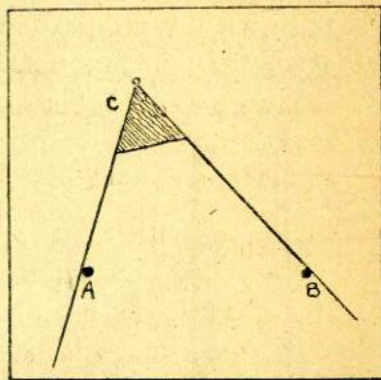
mógł się swobodnie suwać według szpary AB. Pionowo do AB umocujmy do ukośnika b listewkę K, na którą nasuńmy oczko M, zrobione z drutu (kształtu haftki). Oczko to powinno być umocowane w ten sposób, by można je było przesuwając wzdłuż K.

W otwór oczka M włożymy kawałek kredy. Przesuwajmy ukośnik b wzdłuż szpary. Kreda nakerśli prostą, równoległą do AB.

33. **Kąty obwodowe, wspierające się na tym samym łuku.** Na kwadratowej naczernionej tablicy nakerślimy białą farbą odcinek i u obydwu jego końców wbijmy gwoździki (rys. 34). Przytnijmy dwie listewki, oraz trójkątną deseczkę C i przybijmy na stałe listewki do trójkątnej deseczki. W deseczce, tuż przy wierzchołku wytnijmy otwór na kredę. Suwając listewki LCM tak, aby stałe opierały się na gwoździkach A i B, wykreślimy łuk koła.



Rys. 34.



Rys. 35.

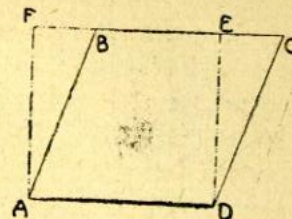
34. **Kąt w półkolu.** Zasadnicza budowa, taka, jak w 33, jedynie zamiast dwu listewek lepiej (ze względu na rozwartość kąta) wyciąć w deseczce kąt prosty i suwać całą deseczkę po gwoździkach A i B, jak wskazuje rys. 35.

## 11. Pola figur.

35. **Przemienić równoległobok na prostokąt.** Wytnijmy z kartonu równoległobok ABCD (rys. 36). Poprowadź-

my DE prostopadle do ED, odetnijmy trójkąt DEC. Przesuwając trójkąt DEC w położenie ABF, otrzymujemy prostokąt ADEF.

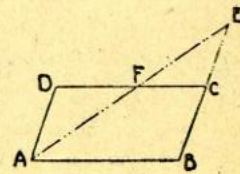
Uwaga. Odcięte części, które mamy przesuwac lub wogóle zmieniać ich położenie, należy okleić papierem kolorowym w celu lepszego uwidocznienia zmian.



Rys. 36.

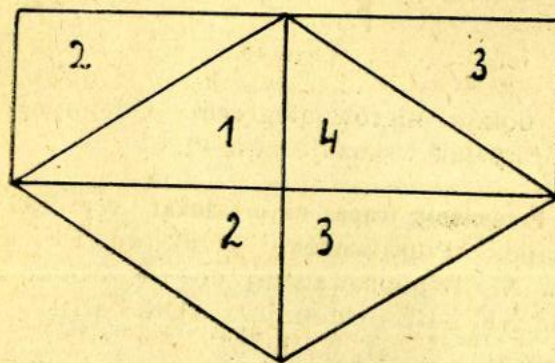
36. **Przemienić równoległobok na trójkąt.** Wytnijmy z kartonu równoległobok ABCD, przepołówmy bok BC i poprowadźmy MD. Odetnijmy trójkąt MCD. Przesuńmy go w położenie BKM. Otrzymamy trójkąt AKD (rys. 37).

Uwaga. W punkcie M należy osadzić zrobioną z dwu krążków tektury, przebitych w środku dziurkaczem, (przez otwór przesunąć spinę) oś do obracania trójkąta, żeby z położenia pierwszego można go przesunąć łatwo w położenie drugie.



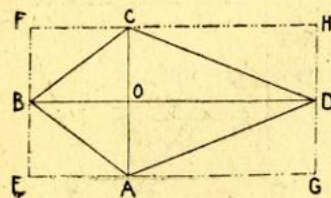
Rys. 37.

37. **Pola figur o przekątniach wzajemnie prostopadłych.**



Rys. 38.

a. Romb (ukośnik). Wytnijmy z kartonu romb. Poprowadźmy obie przekątne. Przetnijmy romb wzdłuż przekątni. Rysunek 38, p. str. 35, objaśni jak z trójkątów ułożyć prostokąt.

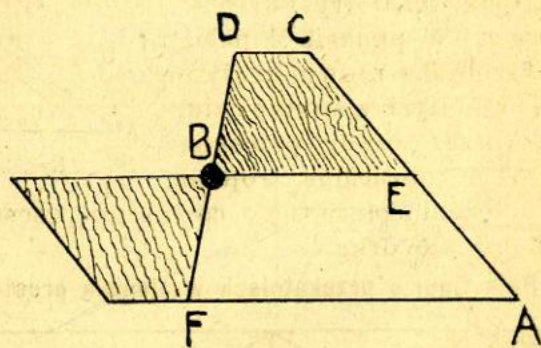


Rys. 39.

b. Kwadrat. Postępujemy, jak w 37-a.

c. Deltoid. Patrz rysunek 39.

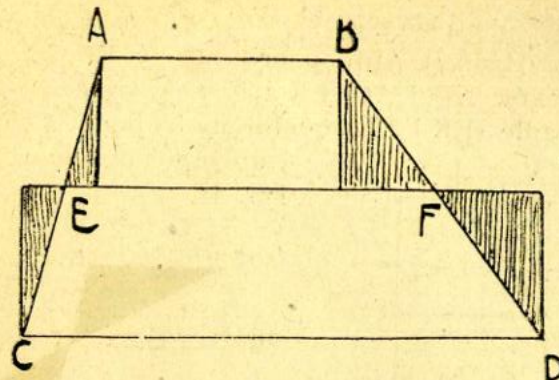
38. Przemienić trapez na równoległobok. Wytnijmy z kartonu trapez. Poprowadźmy środkową AB (przez



Rys. 40

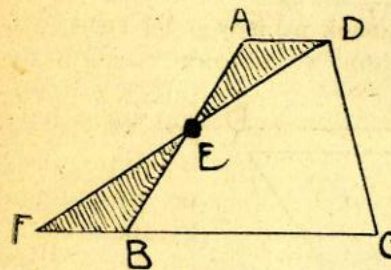
połowy boków nierównoległych). Odetnijmy ABCD i przyłóżmy, jak wskazuje rys. 40.

39. Przemienić trapez na prostokąt. Wytnijmy z kartonu trapez. Poprowadźmy środkową EF, z wierzchołków A i B poprowadźmy do tej środkowej prostopadłe AK i BL. Odetnijmy AEK i BLE i złożmy jak wskazuje rys. 41, p. str. 37.

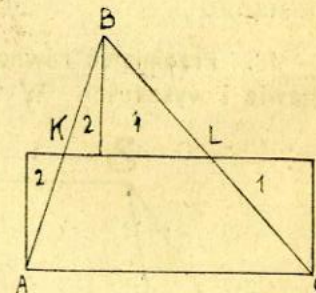


Rys. 41.

40. Przemienić trapez na trójkąt. Wytnijmy z kartonu trapez ABCD. Przepołówmy jeden z boków nierównoległych, np. AB i poprowadźmy DE. Odetnijmy trójkąt DAE i złożmy, jak wskazuje rys. 42.



Rys. 42.

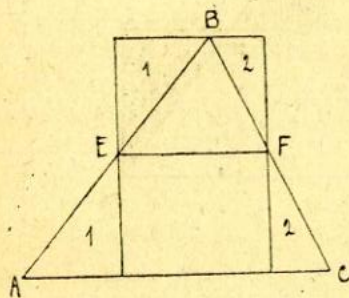


Rys. 43.

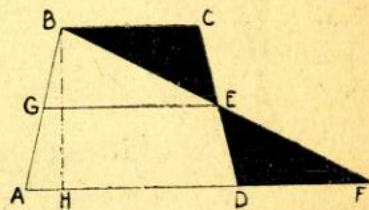
41. Przemienić trójkąt na prostokąt.

a. O jednakowej z trójkątem podstawie. Wytnijmy z kartonu trójkąt równoboczny, poprowadźmy w nim wysokość BD. Na połowie wysokości poprowadźmy prostą KL. Odetnijmy trójkąty KBM i BML i nadajmy im położenie, jak na rys. 43.

b. O jednakowej z trójkątem wysokości. Wytnijmy trójkąt ABC, poprowadźmy EF, łącząc połowy boków AB i AC, LE i F, poprowadźmy do AC prostopadłe (EK i FL), odetnijmy trójkąty AEK i FLC i ułóżmy tak, jak wskazuje rys. 44.



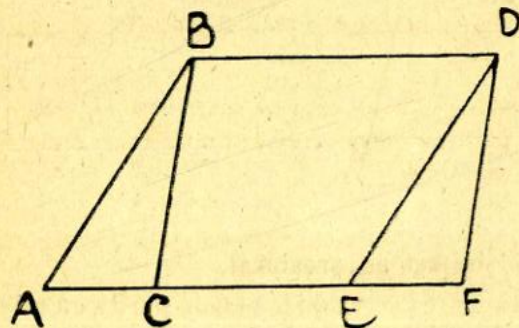
Rys. 44.



Rys. 45.

42. Przemienić trójkąt na równoległobok. Wytnijmy z kartonu trójkąt. Rys. 45 wskazuje nam, jak mamy postąpić.

43. Przemienić równoległobok na inny o tej samej podstawie i wysokości. Wytnijmy z kartonu równoległobok i z jednego wierzchołka poprowadźmy prostą pod kątem do podstawy (rys. 46).

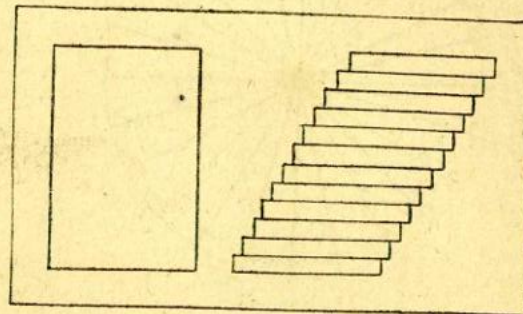


Rys. 46.

Uwaga. Najlepiej modele pokazywać na tle czarnej tablicy! Uczeń powinien samodzielnie z kartki papieru wykonać model dla siebie!

modzielnie z kartki papieru wykonać model dla siebie!

44. Zasada Cavalieri, zastosowana do płaszczyzny. Wytnijmy z cienkiego kartonu prostokąt i, położywszy go na czarnej tablicy, obrysujemy kontury. Następnie potnijmy prostokąt na wąskie (równe!) paski i połóżmy je tak, jak wskazuje rysunek 47.



Rys. 47.

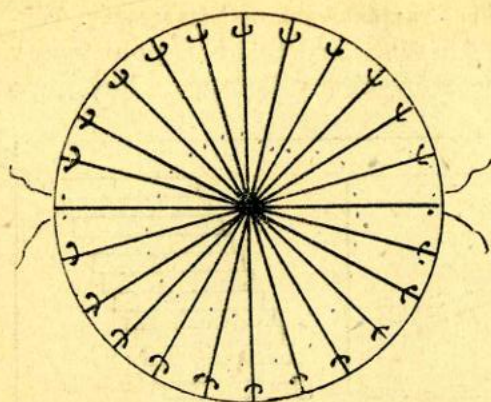
Figura, ułożona z pasków papieru, zmieści się pomiędzy prostymi AB i CD i pod względem kształtu tem mniej różnić się będzie od równoległoboku, im węższe są paski papieru, z których jest ułożona.

Zasadę Cavalieri, stosowaną do figur płaskich, można sformułować w ten sposób: Jeżeli dwie figury płaskie mieszczą się pomiędzy dwiema równoległymi i przecięte trzecią równoległą dają odcinki równe, wówczas są one sobie równoważne.

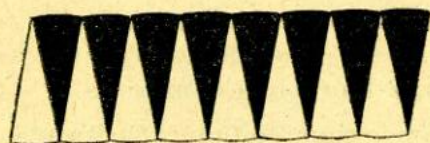
Spróbujmy zastosować tę zasadę do udowodnienia, że dwa trójkąty, mające jednakową podstawę i wysokość, są równoważne.

## 12. Koło.

45. Powierzchnia koła. Promieniem = 20 cm. wykreślmy na kartonie koło. Podzielmy je na 24 części równe ( $6 \times 2 \times 2$ ). Podzielmy koło na 24 równe wycinki. Wycinki wytnijmy i po 12 szczepmy ze sobą,

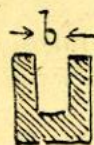


Rys. 48.



Rys. 49.

i tworzyły rodzaj rynienki (rys. 50). Na zewnętrznej stronie tektury naklejmy pasek z podziałką. Listewkę umocujmy pochyło na podstawie (rysunku 51). Wytnijmy z deseczki kilka krążków (starannie opilować pilnikiem brzegi!) Deseczka krążka musi być tej grubości, aby krążek swobodnie wchodził w rynienkę. W środku krążka wypalamy otwór, przez który przeciągamy drut. Na końcach druta przylutujmy dwa ciężarki (rys. 52), tak, aby krążek znajdował się w równowadze stałej, jeżeli postawimy go pionowo. W krążek wbijmy gwoździk tak, iżby łebek gwoździka wystawał ponad drut.

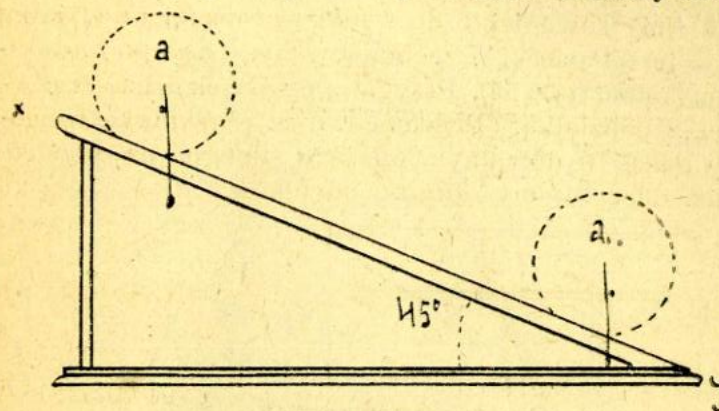


Rys. 50.

przewlekając nitkę przez oczka, jak wskazuje rysunek 48. Składając je tak, jak wskazuje rys. 49, otrzymamy figurę zbliżoną do równoległoboku, którego podstawa =  $\frac{1}{2}$  obwodu koła, wysokość = promieniowi.

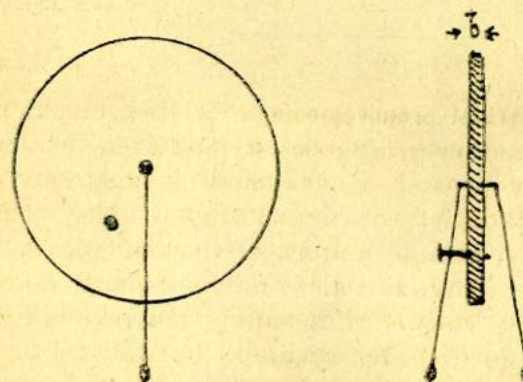
46. Długość okręgu, liczba 51. Długą listewkę drewnianą oklejmy z obu stron tekturą tak, aby brzegi tektury wystawały poza listewkę

Postawmy krążek na rynienkę, bacząc, aby gwoździk znajdował się po lewej stronie drucika, tuż przy nim i zanotujmy miejsce na podziałce. Puśćmy swo-



Rys. 51.

bodnie krążek, który stoczy się po rynience i zatrzyma się wtedy, gdy wykona całkowity obrót.

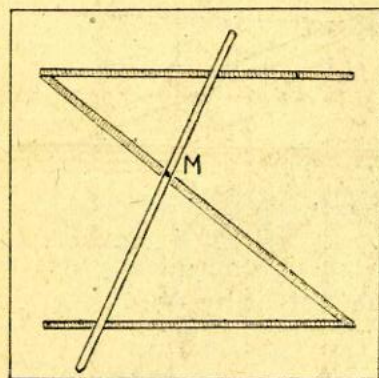


Rys. 52.

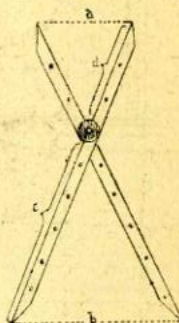
Odliczmy na podziałce długość obwodu krążka, zmierzmy średnicę tegoż, iloraz da nam liczbę 51 (ludolfinę).

### 13. Podobieństwo.

46. **Odcinki proporcjonalne.** Na kwadratowej tablicy naklejmy równoległe do siebie dwa paski z podziałką oraz trzeci pasek, przecinający tamte dwa pod dowolnym kątem (rys. 53). Przygotujmy pasek kartonu również z podziałką. Przymocowując pluskiewką ruchomy pasek w dowolnym punkcie stałego, na podziałkach odczytujemy długość odcinków.



Rys. 53.



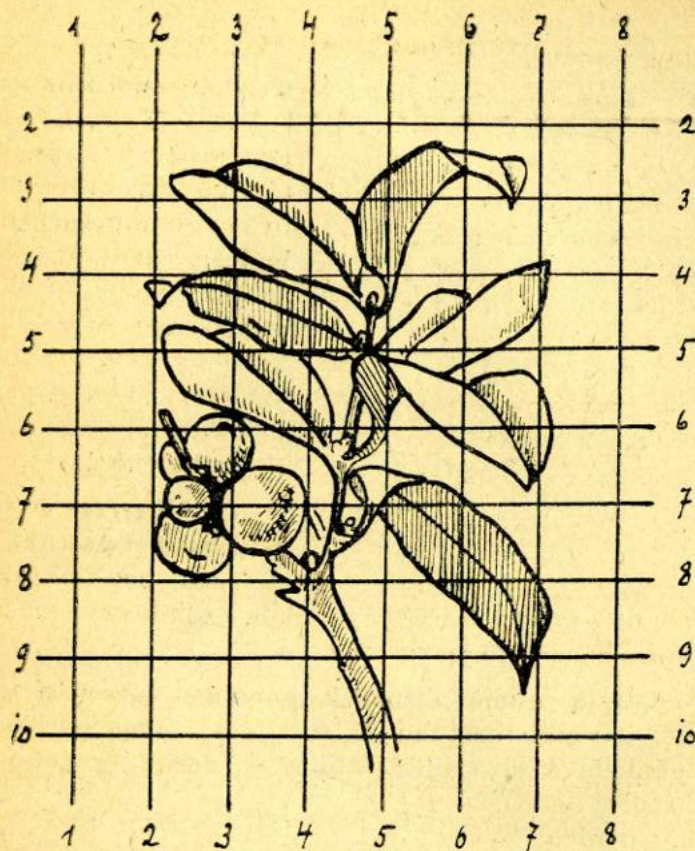
Rys. 54.

47. **Cyrkiel proporcjonalny.** W dwu cienkich listewkach jednakowej długości wypalmy co dwa cm. otwory wzdłuż prostej. Końce listewek zaostriamo (rys. 54). W którykolwiek otwór włożymy śrubkę i zakręcmy po drugiej stronie muterkę. Cyrkiel gotów.

Przypuśćmy, że należy odcinek dany podzielić na trzy części równe. Przesuńmy muterkę tak, aby stosunek  $c$  do  $d$  (patrz rysunek) był jak 1 i 3. Weźmy odcinek  $a$  w cyrkiel, wówczas odcinek  $b$  będzie się równał  $\frac{1}{3}a$ .

48. **Sposoby powiększania lub zmniejszania w skali.**

**A.** Pokrywamy rysunek, który należy przerysować, siatką kwadratową. Na papierze, na którym mamy



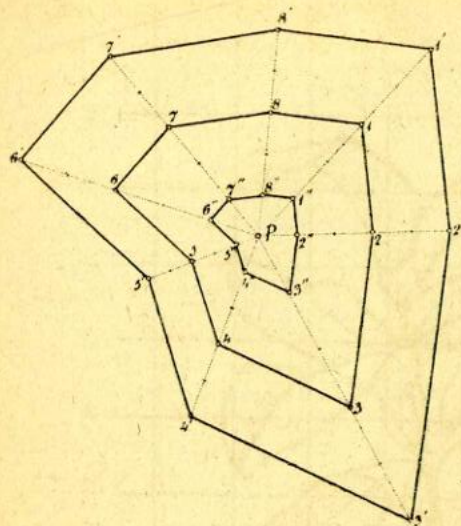
Rys. 55a.

przerysować rysunek, rysujemy siatkę, zwiększając odpowiednio odstępy pomiędzy systemem równoległych i prostopadłych, i punkt po punkcie przenosimy rysunek na nową siatkę, zwiększając proporcjonalnie odległości punktów rysunku od wierzchołków kwadratu.

**B.** Rysunek, który mamy powiększyć, kopujemy na siatkę, umocowujemy go w dowolnym punkcie czy-



Rys. 55b.



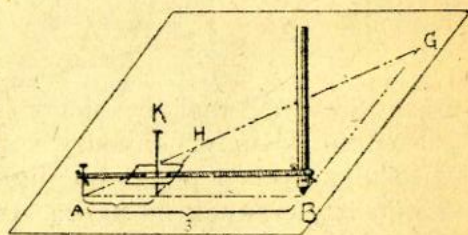
Rys. 56.

stego papieru, obie-  
ramy dowolny punkt  
(środek podobieństwa)  
i przezeń prowadzi-  
my proste do punk-  
tów figury, która ma  
być przerysowana. Od-  
ległość punktów od  
środku podobieństwa  
zwiększamy w stosun-  
ku danym i w ten spo-  
sób otrzymujemy rysun-  
ek w danej skali. Śro-  
dek podobieństwa P.

#### 49. Przyrząd do po- większania rysunków.

Bardzo prosty przy-  
rząd do powiększania rysunków zbudować można  
w sposób następujący:

Okrągłą gumę (sznurek gumowy) przewlekamy  
przez kawałek kartonu K (rys. 57) i umocowujemy  
w punkcie A do szpilki, wbitej w deskę rysunkową,  
na której umocowu-  
jemy papier.



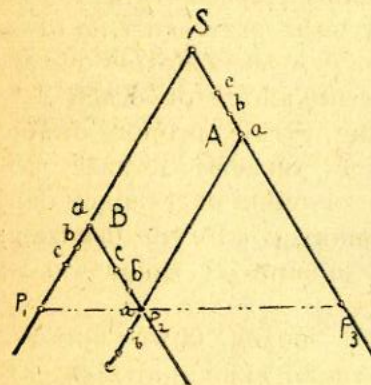
Rys. 57.

Do drugiego koń-  
ca uwiązujemy ołó-  
wek. Przez karton  
K przeciągamy igłę  
ze stępionym koń-  
cem. Poprowadźmy  
od A dowolną pro-  
stą AG i na niej odłóżmy AH tak, aby  $AH : AG =$   
stosunkowi danemu, np. 1 : 3. Przesuńmy teraz ołó-  
wek do G, wtedy tępa igła kartonu znajdzie się

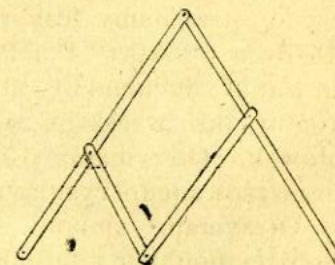
w punkcie H. Nie trudno dowieść, że  $AH = \frac{1}{3} HG$ ,  
oraz że  $BG = 3 LH$ . Przyrząd jest ustawiony.

Prowadźmy ołówkiem po papierze, bacząc, by igła  
sunęła po rysunku. Narysujemy trzy razy zwiększo-  
ny rysunek dany.

50. **Pantograf.** Przyrząd ten został wynaleziony  
przez Włocha Albertiego w 1447 r. i jest o tyle wy-  
godniejszy od poprzedniego, że da się zastosować  
również do zmniejszania. Rys. 58 przedstawia schemat  
przyrządu. W równoległoboku dwa boki przyległe są  
przedłużone, tak aby  $P_1, P_2$  i  $P_3$  leżały na jednej  
prostej. Łatwo jest dowieść, że przy jakimkolwiek  
przesunięciu przyrządu trzy te punkty będą zawsze  
leżały na jednej prostej. Widać, że  $P_1, P_3$  podzie-  
lone jest przez  $P_2$  w tym



Rys. 58.



Rys. 59.

samym stosunku, co  $SP_3$  przez  $A_1$  lub  $SP_1$  przez  $B$ .  
Umocnijmy teraz punkt  $P_1$  gwoździkiem w rajsbrocie  
i prowadźmy  $P_2$  po konturze jakiegokolwiek figury,  
wtedy ołówek osadzony w  $P_3$  zakreśli kontur figury,  
której wszystkie wymiary zostały zwiększone w sto-  
sunku  $SP_3$  do  $SA$ .

Przyrząd budujemy z listewek drewnianych, w któ-  
rych wypalamy otwory (rys. 59). Do połączeń uży-

wamy śrubek z muterkami, które powinny dość szczelnie wchodzić w otwory, w innym bowiem razie cały aparat będzie się chwiać i nie będziemy mieli rysunków dokładnych.

Najlepiej jest zbudować taki przyrząd, który powiększałby (cz. zmniejszał) rysunek 2, 3, 4 i 5 razy. Większe powiększenia są już niedokładne.

Najwygodniejsze wymiary przyrządu będą następujące: Zróbmy oba boki SP przyrządu, licząc od środka otworu S do środka otworu P = 48 cm. Na boku SP<sub>3</sub> w odległości 8, 12 i 16 cm. wypalmy dziurki. Dwom innym bokom równoległoboku dajmy długość 16 cm. i 40 cm. (licząc od środków otworów A i B). W obydwu listewkach wypalmy jeszcze otwory w odległości 8 i 12 cm. Złóżmy teraz przyrząd i na otworach napiszmy litery, jak na rys. 59. Zależnie od tego czy zmocujemy pantograf śrubkami w otworach a, b, czy c, otrzymamy trzy różne cyrkle proporcjonalne. Każdy z punktów P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub> i P<sub>3</sub> możemy uważać albo za punkt nieruchomy, albo za punkt określający dany kontur, lub wreszcie za punkt, w którym osadzamy ołówek. Otrzymamy 6 × 3 możliwości zmian w skali przerysowanego rysunku.

Otrzymane zmiany skali można łatwo obliczyć. Poniżej podajemy tabelkę zmian skali (patrz str. 31).

Przekładając igłę na miejsce ołówka, otrzymujemy powiększenie, będące odwrotnością poprzedniego, czyli gdyby np. punkt nieruchomy był w P<sub>1</sub>, ołówek kreślący obraz w P<sub>2</sub>, zaś po konturze danym suwałby się punkt (śróbka P<sub>3</sub>), wówczas otrzymalibyśmy obraz w skali  $\frac{1}{3}$ .

Jeżeli punkt nieruchomy znajduje się w P<sub>2</sub>, obraz jest symetryczny względem danego, jeżeli się tak wolno wyrazić, jest negatywem, to znaczy zwierciadlanem odbiciem kopjowanego i powiększanego konturu.

| Punkt<br>nieruchomy<br>w P <sub>1</sub> | Po rysunku danym<br>suwa się P <sub>2</sub> | P <sub>3</sub> rysuje obraz<br>powiększony               |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
|                                         | szcep. w a<br>" " b<br>" " c                | 3 krotnie<br>4 "<br>6 "                                  |
| Punkt<br>nieruchomy<br>w P <sub>2</sub> | Po rysunku danym<br>suwa się P <sub>1</sub> | P <sub>3</sub> rysuje obraz<br>powiększony               |
|                                         | szcep. w a<br>" " b<br>" " c                | 2 krotnie<br>3 "<br>5 "                                  |
| Punkt<br>nieruchomy<br>w P <sub>3</sub> | Po rysunku danym<br>suwa się P <sub>1</sub> | P <sub>2</sub> rysuje obraz<br>powiększony               |
|                                         | szcep. w a<br>" " b<br>" " c                | $\frac{2}{3}$ razy<br>$\frac{3}{4}$ "<br>$\frac{5}{6}$ " |

## II. STEREOMETRJA.

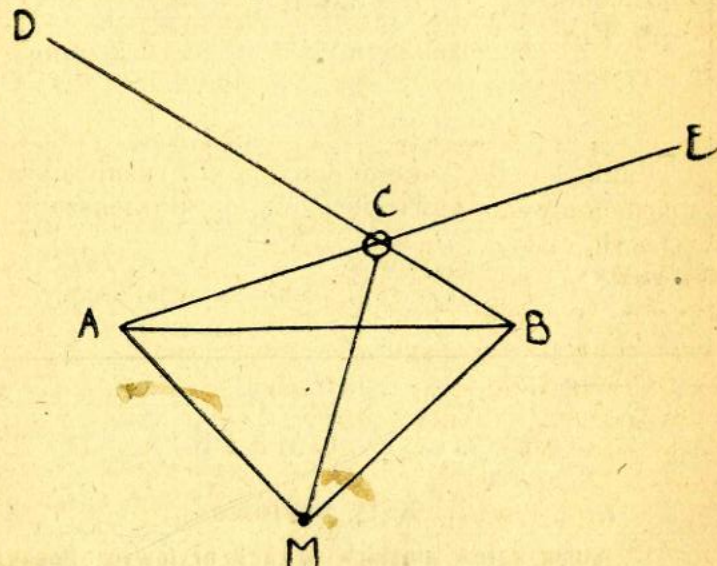
### 1. Kąty bryłowe.

51. **Suma kątów płaskich w kącie bryłowym. Posadzka.** Zwracaliśmy już uwagę na potrzebę przygotowania pewnej liczby wielokątów foremnych, trójkątów, kwadratów, sześciokątów, ośmiokątów. Mając odpowiednią ilość tych wielokątów, spróbujmy ułożyć z nich posadzki, to znaczy wypełnić niemi płaszczyznę.

Ułożmy posadzkę z samych trójkątów, z samych kwadratów i sześciokątów. Z ośmiokątów i kwadratów. Z sześciokątów, trójkątów i kwadratów. Za każdym razem sprawdźmy, dlaczego i jak może być posadzka ułożona.

52. **Model kąta bryłowego.** Weźmy sztywny drut AB i obydwaj jego końce w A i B zawijmy w kółka. Do A i do B przyczepmy dwa inne sztywne druty AE i DB, w których ma się suwać kółko druciane C tak, aby obydwaj druty mogły swobodnie przez nie przechodzić (rys. 60).

Do A, B i C przywiążmy nici, które zwiążujemy razem i do węzła przywieszamy ciężarek M.



Rys. 60.

Wyobraźmy sobie teraz, że przez ACM, ABM i BCM przechodzą płaszczyzny, wówczas otrzymamy kąt bryłowy MABC. Przesuwajmy teraz kółko C wzdłuż drutów AE i BD, trzymając AB nieruchomo. Ciężarek M będzie się podnosił, aż wreszcie znajdzie się w jednej płaszczyźnie z punktami ACB. Nie trudno wykazać, że wówczas kąty płaskie AMC, CMB i BMA będą w sumie dawały  $360^\circ$  (jaką leżące dokoła jednego punktu i wypełniające płaszczyznę).

53. **Kąt linowy kąta dwuściennego.** Prostokąt kartonowy złożmy wzdłuż dłuższej osi symetrii (rys. 61). W dowolnym punkcie zgięcia poprowadźmy do osi symetrii prostopadłą i zróbmy wykrój, do którego włóżmy naklejony na kartecce krążek podziałkowy. Po to, aby krążek się trzymał, należy w środku przebić go drutem i końce druta przykleić płótnem (wewnątrz!) do kartonu.



Rys. 61.

## 2. Bryły.

Zanim przejdę do opisu brył, a raczej siatek, muszę zwrócić uwagę na pewną okoliczność, a mianowicie, że wolalbym siatek w niniejszej książce nie podawać, a to dla zupełnie, moim przynajmniej zdaniem, zrozumiałych powodów. Przedewszystkiem rysunek, podany w zmniejszeniu, będzie tylko rysunkiem orientacyjnym, dalej ze wszech miar korzystnie jest, wiedząc jak wygląda bryła, zdając sobie z niej dokładnie sprawę, jeżeli się tak wolno wyrazić, wykonać siatkę samemu. Dlatego też podawać siatki zamierzam wtedy tylko, gdy zachodzi nieodzowna tego potrzeba.

Siatkę należy kreślić na grubym białym brystolu. Przedtem, zanim ją jednak wykreślimy na brystolu, z którego później wykleimy bryłę, należy próbny rysunek wykonać na zwykłym papierze, siatkę wyciąć, ustalić miejsca, w których należy pozostawić paski do sklejenia i dopiero po dokładnem zbadaniu siatki przenieść ją ostatecznie na brystol.

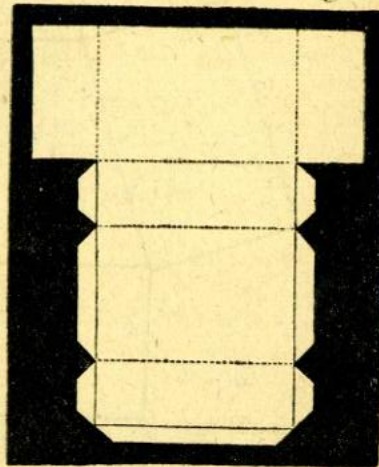
Jak kreślić siatki brył? Weźmy, jako przykład, sześcian. O sześcianie wiem, że ścianami jego są równe kwadraty, że ich jest sześć. Kreślę sześć jednakowych kwadratów, wycinam je z papieru i składam w ten sposób, aby po zwinieniu w jednym narożu spotkały się zawsze trzy kwadraty, wiem bowiem, że na naroże sześcianu składają się trzy kwadraty. Muszę więc o bryle, której siatkę mam wykreślić, wiedzieć: ile ma ścian? jakie ma ściany? po ile ścian schodzi się w narożu?

Tyle o kreśleniu siatek. Jeszcze kilka słów wypadnie dodać o sklejanu siatek już gotowych. Przedewszystkiem w tych miejscach, gdzie mają być krawędzie bryły, należy brystol z lekka naciąć (po jednej stronie!) seyzorykiem, po linijce. W ten tylko bowiem postępując sposób, można być pewnym, że krawędź sklejana będzie prostą. Nie należy natomiast naciąć w tych przypadkach, gdy sklejamy bryłę, ograniczoną powierzchnią krzywą, więc: walec, stożek i t. p. Następnie do klejenia używać mocnego gorącego kleju, któryby szybko i mocno chwycił. Rysując siatkę bryły, liczyć się też należy z materiałem, to znaczy grubością kartonu, z którego ma powstać model. Im grubszy karton, tem większe mogą być wymiary bryły, im cieńszy, tem muszą być one mniejsze, w pierwszym razie model nie będzie dość sztywny i łatwo ulegnie zepsuciu.

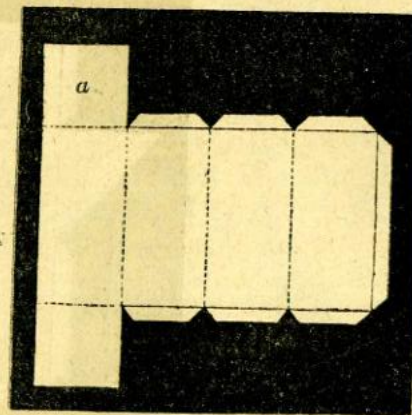
Sklejone bryły przechowywać w suchym miejscu. Inaczej klej puści i sklejony model rozpadnie się.

54. **Sześcian.** Siatka sześcianu zbyt jest znana, by trzeba było ją opisywać.

55. **Prostopadłościan.** Nakreślmy prostokąt i przedłużmy dwa jego boki równoległe, odłóżmy na nich równe odcinki, połączmy końce ich prostą. Za otrzymanym w ten sposób prostokątem nakreślmy jeszcze dwa inne, z których pierwszy równałby się pierwszemu z nakreślonych prostokątów, drugi — drugiemu. Po obydwu stronach któregośkolwiek z czterech prostokątów nakreślmy prostokąty, których jeden bok równałby się bokowi tego prostokąta, na którym budujemy nowy prostokąt, drugi zaś — bokowi sąsiedniego (rys. 61).



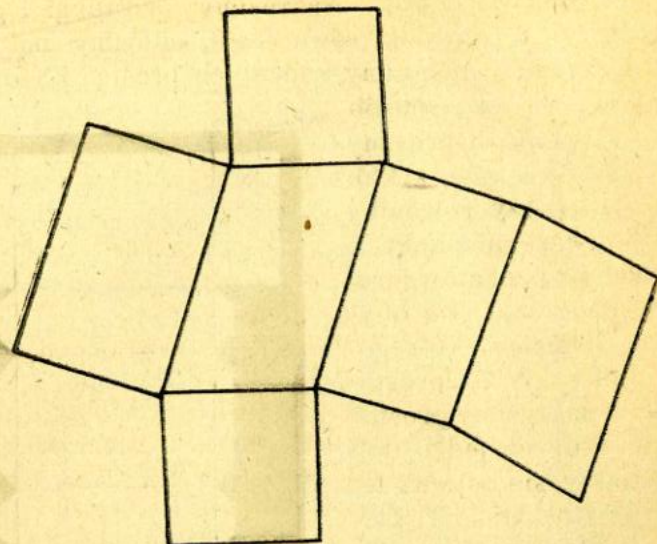
Rys. 61.



Rys. 62.

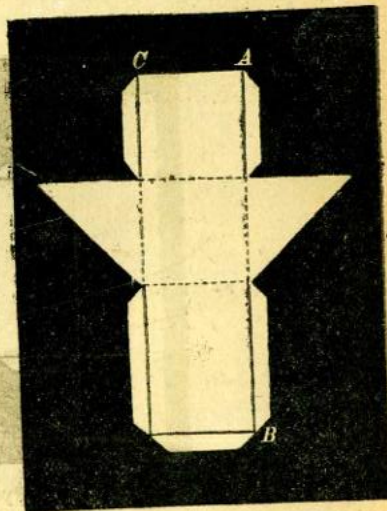
56. **Graniastosłup o kwadratowej podstawie prosty** (rysunek 62).





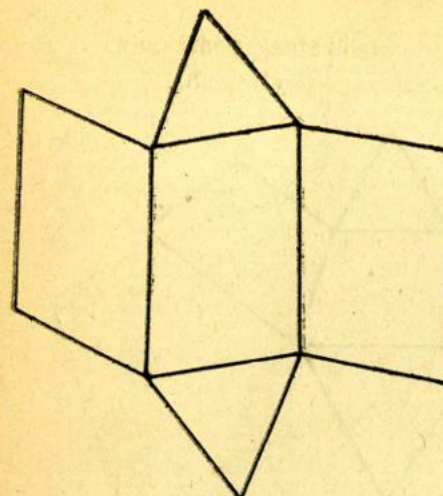
Rys. 63.

57. Graniastosłup o kwadratowej podstawie pochyły (rys. 63).



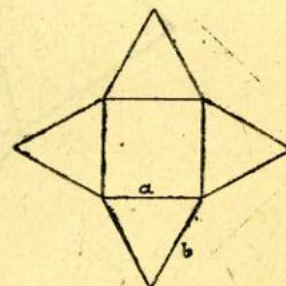
Rys. 64.

58. Graniastosłup o trójkątnej podstawie prostej (rys. 64).



Rys. 65.

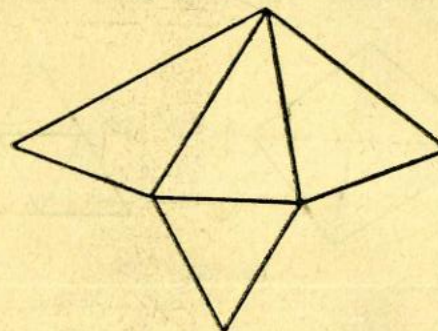
59. Graniastosłup o trójkątnej podstawie pochyły (rys. 65).



Rys. 66.

60. Graniastosłup prosty o wielokątnej podstawie. Po kilku próbach, wykonanych na podstawie podanych w książce siatek, spodziewamy się, że sporządzenie siatki ostrosłupa prostego o wielokątnej podstawie nie będzie sprawiało trudności.

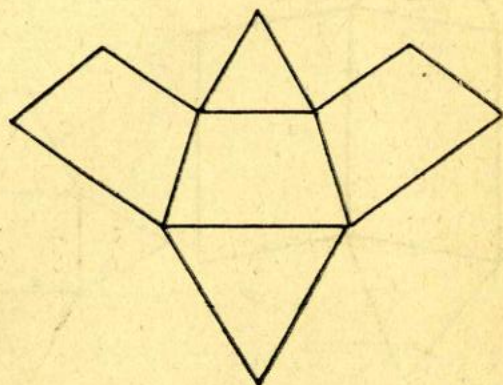
61. Ostrosłup o kwadratowej podstawie prosty (rysunek 66).



Rys. 67.

62. Ostrosłup o trójkątnej podstawie pochyły (rys. 67).

63. Ostrosłup prosty o wielokątnej podstawie. Spodziewamy się, że siatka będzie zbyt duża.

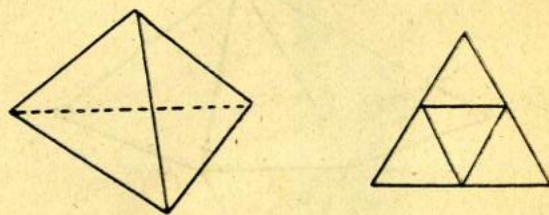


Rys. 68.

64. Pień ostrosłupowy o trójkątnej podstawie (rys. 68).

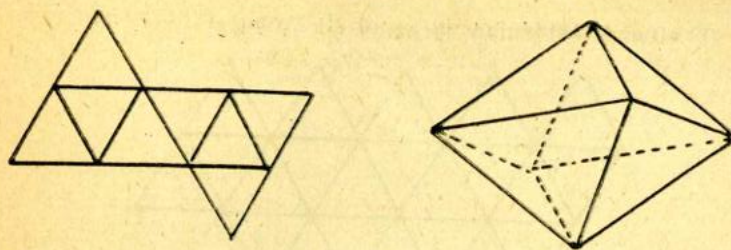
### 3. Wielościany foremne.

65. Czworoscian foremny (tetraedr). Wykreślamy trójkąt równoboczny ABC (rys. 69) i łączymy środki



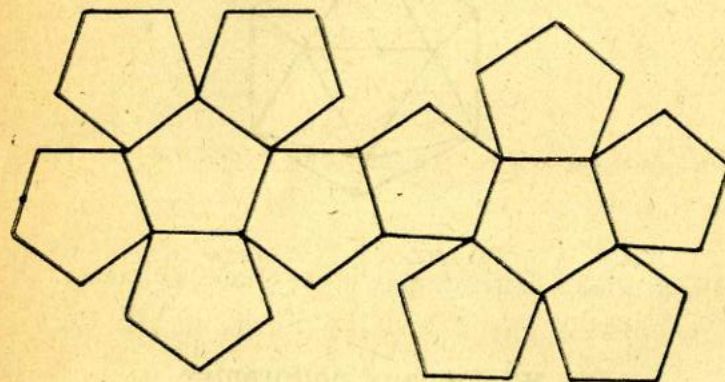
Rys. 69.

jego boków. Otrzymamy cztery trójkąty foremne, oznaczone cyframi 1, 2, 3, 4.



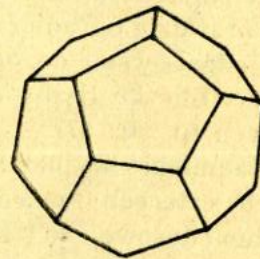
Rys. 70.

66. Ośmiościan foremny (rys. 70).

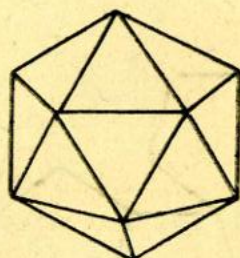
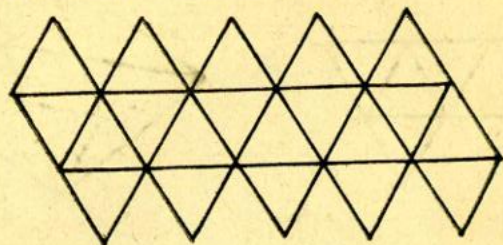


Rys. 71.

67. Dwunastościan foremny (dodekaedr). Weźmy pięciokąt foremny i na każdym jego boku nakreślmy nowy pięciokąt foremny. Powtórzmy tę konstrukcję po raz drugi — otrzymamy siatkę dwunastościanu (rys. 71).



68. Dwudziestościan foremny (ikosaedr) (rys. 72).



Rys. 72.

Piąty wielościan foremny — sześciian już mamy.

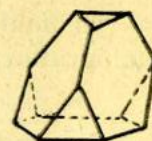
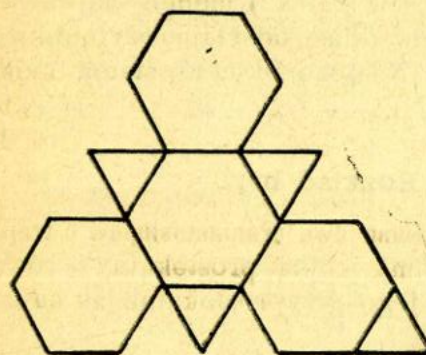
#### 4. Wielościany półforemne.

Wielościanami półforemnymi, inaczej wielościanami Archimedesów, nazywamy takie wielościany, które są wprawdzie ograniczone foremnymi wielokątami, lecz nie jednakowymi co do liczby boków. Poniżej podajemy tabliczkę liczby ścian tych 13 brył Archimedesów (p. str. 57).

Nadmienić wypada, że wykreślenie siatek, pierwszych czterech szczególnie, nie jest trudne. Bryły Archimedesowe są kombinacjami brył foremnych, a mianowicie: 1) dwu czworościanów, 2) i 3) ośmiościanu i sześcianu i t. d.

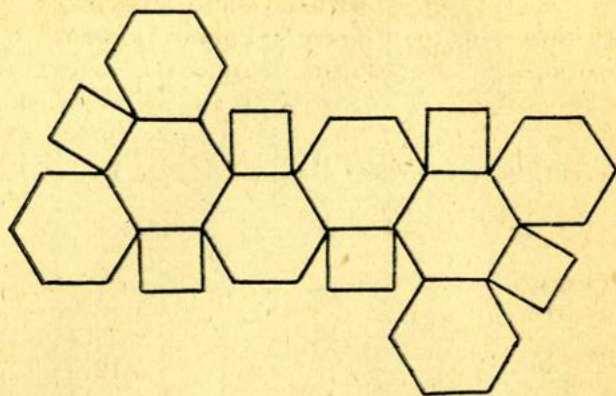
| Nr. | Trójkąty | Sześciokąty | Kwadraty | Ośmiokąty | Pięciokąty | Dziesięciokąty |
|-----|----------|-------------|----------|-----------|------------|----------------|
| 1   | 4        | 4           |          |           |            |                |
| 2   | 8        |             | 6        |           |            |                |
| 3   |          | 8           | 8        |           |            |                |
| 4   | 8        |             |          | 6         |            |                |
| 5   | 8        |             | 18       |           |            |                |
| 6   |          | 8           | 12       |           |            |                |
| 7   | 20       |             |          |           | 12         |                |
| 8   |          | 20          |          |           | 12         |                |
| 9   | 20       |             |          |           |            | 12             |
| 10  | 32       |             | 6        |           |            |                |
| 11  | 20       |             | 30       |           | 12         |                |
| 12  |          | 20          |          | 30        |            | 12             |
| 13  | 80       |             |          |           | 12         |                |

69. Ośmiościan półforemny (rys. 73).



Rys. 73.

70. Czternastościan półforemny (rys. 74).



Rys. 74.

Siatek innych brył nie podajemy, spodziewając się, że czytelnik potrafi, o ile zechce, narysować je sam.

5. Kryształy.

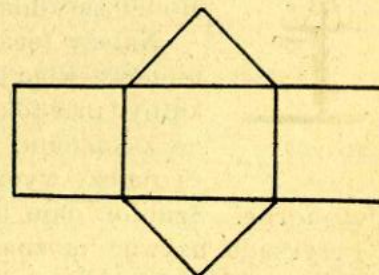
Wielościany foremne i półforemne mogą być z pożytkiem użyte jako modele krystalograficzne. Stanowią one łącznie kryształy klasy foremnej. Nie możemy podawać na tem miejscu siatek<sup>1)</sup> modeli najważniejszych innych systemów (klas), odsyłając czytelnika do wydanych nakładem „Naszego Sklepu” siatek modeli krystalograficznych.

6. Rozkład brył.

71. Sześciąt jako suma dwu graniastosłupów o trójkątnej podstawie. Nakreślmy trójkąt prostokątny i równoramienny i na jednej jego przyprostokątnej, jak na pod-

<sup>1)</sup> Niektóre z pośród tych siatek są trudne do wykreślenia, a bez znajomości zasad geometrii wykreślnej wogóle wykreślić się nie dadzą.

stawie kwadrat, dorysujemy z jednej strony, drugi kwadrat, z drugiej — prostokąt o wysokości równy bokowi kwadratu, którego podstawą byłaby przeciwprostokątnia. Dorysujemy drugą podstawę, drugi trójkąt prostokątny i równoramienny. Powtórzmy ten rysunek po raz drugi. Sklejmy obiedwie bryły. Składając ścianami, zbudowanymi na przeciwprostokątniach, otrzymamy sześciąt (rys. 75).



Rys. 75.

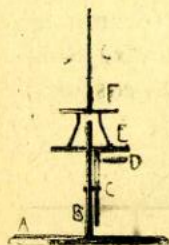
Spróbujmy nakreślić siatkę rozkładu graniastosłupa prostego, który ma w podstawie sześciokąt foremny na graniastosłupy o trójkątnych podstawach. Spróbujmy nakreślić siatkę rozkładu ostrosłupa o kwadratowej podstawie na ostrosłupy trójkątne.

Nakreślmy rysunek perspektywiczny rozkładu graniastosłupa trójkątnego na trzy trójkątne ostrosłupy. Nakreślmy siatkę graniastosłupa trójkątnego. Poprowadźmy na jego ścianach proste przecięcia ścian z płaszczyznami. Postarajmy się wykreślić siatki trzech ostrosłupów. Sklejmy i złożmy, powinniśmy otrzymać graniastosłup trójkątny.

7. Kula, walec, stożek, bryły obrotowe.

72. Model zasadniczy. W drewnianym kążku A umocowujemy pionowo pręt zaokrąglony B, w którym na osi osadzamy kółko C z rączką D. Kółko to obraca się dokoła osi swobodnie (p. rys. 76, str. 60).

Bierzemy krążek F z przymocowanym doń nieco niżej krążkiem E, który ma w środku otwór i opieramy na kole C, tak jednak, aby pręt B nie dotykał do krążków E i F. Obracając kółko C zapomocą rączki D wprawiamy w ruch obrotowy krążek E, a więc i F. W krążek F wbijamy pionowo sztywny pręt G. Model zasadniczy gotów.



Rys. 76.

Należy teraz przygotować kilka szablonów, więc półkole, trójkąt prostokątny, prostokąt. Szablony te, zrobione z kartonu, wsuwamy w szparę, którą należy wyciąć wzdłuż pręta G. Obracamy korbę. Szablon daje bryłę obrotową.

Przyrządu używać można jeszcze w ten sposób: zamiast nakładać szablony, umieścimy w okrągłym otworze, wyświdrowanym w krążku F, pręcik raz prostopadły do krążka, to znów pochylony pod kątem różnym od prostego. Otrzymamy walec, lub stożek, jeden lub dwa.

73. W razie, gdyby sporządzenie przyrządu zasadniczego sprawiło trudności, można sobie poradzić inaczej. Z grubej tektury wyciąć trójkąt równoramienny, prostokąt (kwadrat), koło. Każdą z tych figur okleić w połowie czarnym, w połowie białym papierem, wzdłuż osi symetrii. Po obydwu stronach osi symetrii dziurkaczem wybić otwory i przewlec przez nie sznurek. Skręcając sznurek, nadamy figurom ruch obrotowy około osi symetrii.

74. **Przecięcia stożkowe: koło, elipsa, hiperbola, parabola.** Weźmy kawałek tektury, wytnijmy mały okrągły otwór. Umieścimy ten kawałek tektury pomiędzy płomieniem świecy a ścianą. Przez otwór padać będzie pęk promieni, stożek. Na ścianie otrzymamy koło. Weźmy teraz arkusz sztywnego białego papieru i prze-

tnijmy nim pęk promieni. Zależnie od pochylenia papieru do osi stożka (pęka promieni), otrzymamy jasną powierzchnię oświetloną, kształtu koła, elipsy, hiperboli i paraboli, oraz uwidoczni się łatwo, jak jedna z tych krzywych przechodzi w inne.

### III. P L A N Y.

#### 1. Plany sytuacyjne.

Zazwyczaj trudno jest wyjaśnić, w jaki sposób należy patrzeć na przedmiot, by widzieć go w rzucie poziomym. Jeżeli chodzi o przedmioty drobne, na które można patrzeć z góry bez trudności, sprawa rozstrzyga się łatwo, staje się jednak coraz bardziej złożoną i trudną do rozwiązania, jeżeli przedmiotami, które należy odtworzyć w rzutach poziomych, będzie klasa, dom, wreszcie całe miasto, lub kraj. Odwołujemy się do lotu ptaka i innych fikcyjnych ułatwień, które, zamiast rozwiązywać trudności, odsuwają je tylko.

Często trudno jest zrozumieć, dlaczego plan sytuacyjny a widok perspektywiczny to nie to samo i dlaczego różnią się one tak znacznie od siebie.

Model, który niżej opiszemy, spodziewam się, pomoże do usunięcia trudności.

75. Weźmy dwa duże arkusze papieru. Sklejmy kilka modeli domków (jak najprostszych prostopadłościanów, których krawędzie niech będą wymierne w cm.; na prostopadłościany naklejmy dachy!) Pomalujmy odpowiednio domki, poróbmy w nich okna i drzwi. Na jednym arkuszu papieru rozmieścimy sklejone domki w takiej odległości od siebie, by te odległości były wymierne w cm. Określmy ołówkiem

miejsca, które zajęły domki, i skopjujemy w ten sposób otrzymany plan na drugi arkusz. Jeden arkusz papieru naklejmy na sztywną tekturę i na tym podklejonym arkuszu klejem umocujmy nasze domki.

Dokoła domków zrobmy z tektury ploty, z mehu<sup>1)</sup> (barwionego w farbee) drzewa i krzewy. Ploty, ścieżki, drzewa skopjujemy na drugi arkusz i zamalujmy miejsca, zajęte przez domki czerwoną farbą, ogrody — zieloną, ścieżki — żółtą.

Ustawmy plastyczny model poziomo i pozwólmy uczniom napatrzeć się nań dowoli z różnego oddalenia. Następnie zawieśmy tekturę pionowo.

Obok plastycznego modelu zawieśmy plan. Sądzi-  
my, że nie potrzebujemy dawać wyjaśnień, co mówić  
wówczas należy!

## 2. Modele plastyczne.

Najidealniejszym zbiegiem okoliczności byłoby wykonać plastyczny model tej miejscowości, gdzie mieści się szkoła, ewentualnie miejscowości, którą uczniowie znają o tyle, że dokonywali tam poziomowania (niwelacji) pod kierunkiem nauczyciela. W wypadku jednak, gdy ten idealny zbieg okoliczności nie ma miejsca, należy zdobyć sobie mapę, na której są poziomy. Mapa Polski i krajów przyległych, wydana przez Tow. Uranja, a rysowana przez Oskara Sosnowskiego, ma wyznaczone poziomy.

Weźmy jakikolwiek odcinek tej mapy, skopjujemy go na kalkę (łącznie z linjami poziomów). Mapa wykonana jest w skali 1:1.000.000, poziomy podane są co 50 m. (patrz naprawo przy mapie objaśnienie, za-  
tytułowane „Skala barw”). Skala mapy (1 klm. w 1 mm.)

<sup>1)</sup> mech suchy przyklejać do papieru klejem stolarskim, albo też gipsem, rozrobionym nie wodą, lecz słabym roztworem kleju.

jest tak drobna, że najwyższe wzniesienie w Tatrach nie wznosiłoby się wyżej niż dwa, trzy mm. nad poziomem mapy, grubość zaś warstwy o jednakowym wzniesieniu wynosiłaby setną część mm.

Z tych rozważań widać, że gdybyśmy do wysokości zastosowali tę samą skalę, w jakiej wykonana jest mapa, model plastyczny byłby niemożliwy do wykonania.

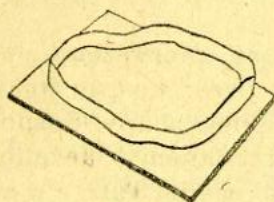
Z trudnego tego położenia są dwa jednakowo możliwe wyjścia. Albo przy pomocy znanych nam już przyrządów do powiększania zwiększyć wymiary wybranego przez nas odcinka mapy, albo też zastosować dwie różne skale: jedną poziomą do odległości, drugą pionową do wzniesień. Rozumie się, możemy kombinować oba sposoby: zwiększyć mapę i zastosować niezależną skalę wysokości.

Spróbujmy zastanowić się nad pierwszym wyjściem. Przypuśćmy, że wybrany przez nas do zbudowania plastycznego modelu odcinek mapy Sosnowskiego mierzy 40 × 40 cm. czyli 1600 cm<sup>2</sup>. Jeżelibyśmy chcieli, na przykład, zbudować model Tatr, a w nim Łomnicę, lub Garłuch mieć choćby 10 cm. wysokie, to należałoby odcinek zwiększyć 50 razy, czyli zamiast 1600 cm. zająć nim 1600 × 2500 = 4.000.000 cm.<sup>2</sup>, a więc 400 m.<sup>2</sup>, czyli kwadrat, którego każdy bok mierzy 20 m. Jasne jest, że taki model zbudowaćby można tylko na otwartym placu i wówczas odległość od patrzącego do Łomnicy lub Garłucha byłaby tak wielka, że 10 cm. wzniesienie byłoby dla oka prawie niedostrzegalne.

Niema więc innej rady, tylko iść się dwu różnych skal. Jedną wybrać dla odległości, drugą — dla wysokości, wzniesień. Wtedy nie potrzeba zwiększać mapy, wystarczy skala 1:1.000.000, czyli mm. za kilometr odległości.

Jeżeli teraz dla wzniesień weźmiemy 50 metrów za cm., każda warstwica, oznaczona jednym kolorem, mieć będzie grubość jednego centymetra, a Łomnica, czy Garluch wznosić się będą nad poziom na pokaźną wysokość kilkudziesięciu cm., uwydatnią się wszystkie wzniesienia i spadki, wykonane w skali 1:5000.

Jak teraz wykonać model? Na skopjowanym odcinku mapy na każdej krzywej, oznaczającej wzniesienie, napisać wyraźnie w m., jakiemu wzniesieniu odpowiada. Dalej, wziąć grubą deskę, wymiarów ściśle odpowiadających odcinkowi mapy. Przygotować długie paski papieru szerokości 3—4 cm. (papier zapisany, byle mocny). Następnie na deskę przekalkować linię najniższej warstwy. Paskiem papieru, usta-



Rys. 77.

wionym pionowo, obwieść wzdłuż całą linię, określając warstwę skopjowaną, umocować taśmę, przyklejając ją klejem tak, aby do wewnątrz miejsca, objętego taśmą, można było nalać roztworu gipsu z wodą i słabym roztworem kleju. <sup>1)</sup> Wzdłuż pas-

ka papierowego odmierzamy wysokość 1 cm., rozrabiamy gips (rzadki) z wodą, dolewamy kleju i wlewamy w formę, utworzoną z deski i paska papieru, do wysokości 1 cm. (rys. 77). Zostawiamy na 24 godziny, w czasie których warstwa gipsu stężeje. Następnie na tej warstwie kalkujemy następną linię poziomą (o 50 m. wyższą), znów obwodzimy paskiem papieru i zalewamy gipsem. W ten sposób postępujemy aż do najwyższej.

Model plastyczny już jest gotów; ma on, co prawda, wygląd chińskiej pagody, czy świątyni hinduskiej.

<sup>1)</sup> Gips z klejem (stiuk) jest mocny, nie kruszy się, da się łatwo malować zwykłymi wodnymi farbami, nie odpada od deski, nie pęka

ale mapa, na której się opieramy, nie daje nam więcej materiału. Resztę potrzebnych nam wiadomości dać muszą szczegółowsze mapy, opisy, nieco też podszepnąć nam musi fantazja.

Okolice, przez nas odtworzona podobna, będzie do schodów o stopniach nieforemnych. Zapelnijmy teraz przestrzeń między stopniami masą i, nie zmieniając w niczem zasadniczego modelu, złagódźmy spadki, pomnając o tem tylko, by nigdzie nie doklejać tam, gdzie już zaznaczyliśmy wysokości. Użyjemy do tego tegoż gipsu z klejem.

Model stał się podobniejszy do rzeczywistości. Teraz farby i pędzel dokonają reszty. Materiał obrazkowy, pocztówki z danej okolicy i t. p. poddadzą nam myśli do ostatecznego wykończenia modelu.

Nie potrzebuje tu rozwodzić się dłużej nad tem, że model będzie tem lepszy, im szczegółowszą będzie mapa. Zatrzymałem się tu na mapie Sosnowskiego, jako na najbardziej u nas rozpowszechnionej, a nadającej się w zupełności do naszych celów.



## TREŚĆ.

|                     |   |
|---------------------|---|
| Przedmowa . . . . . | 3 |
| Wstęp . . . . .     | 5 |

### I. PLANIMETRJA.

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| Kierunki: pionowy i poziomy . . . . . | 8  |
| Kąty . . . . .                        | 10 |
| Koło . . . . .                        | 14 |
| Kąty w kole . . . . .                 | 17 |
| Trójkąty . . . . .                    | 21 |
| Trójkąt prostokątny . . . . .         | 23 |
| Czworokąty . . . . .                  | 28 |
| Wielokąty foremne . . . . .           | 30 |
| Symetria . . . . .                    | 31 |
| Miejsce geometryczne . . . . .        | 33 |
| Pola figur . . . . .                  | 34 |
| Koło . . . . .                        | 38 |
| Podobieństwo . . . . .                | 42 |

### II. STEREOMETRJA.

|                                               |    |
|-----------------------------------------------|----|
| Kąty bryłowe . . . . .                        | 47 |
| Bryły . . . . .                               | 49 |
| Wielościany foremne . . . . .                 | 54 |
| Wielościany półforemne . . . . .              | 56 |
| Kryształy . . . . .                           | 58 |
| Rozkład brył . . . . .                        | 58 |
| Kula, walec, stożek, bryły obrotowe . . . . . | 59 |

### III. PLANY.

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| Plany sytuacyjne . . . . .  | 61 |
| Modele plastyczne . . . . . | 62 |

2068.

P.B.P.

## WYDAWNICTWA M. ARCTA W WARSZAWIE

### ARYTMETYKA.

|                                                                                                                                                                                                         |              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Berkman M. Początki arytmetyki. Najpierwsze wiadomości oparte na metodzie poglądowej, w pogadankach, z zadaniami. Wyd. II, w opr.                                                                       | 2 30         |
| Leszczyńska St. Nauczanie arytmetyki dorosłych alfabetów. Program i wskazówki metodyczne. Wydanie II, poprawione i powiększone.                                                                         | 1 20         |
| Oderfeldowa C. Metodyka nauczania rachunku elementarnego.                                                                                                                                               | 3 60         |
| Werner K. Początkowa nauka rachunków dla ochron, ułożona sposobem poglądowym.                                                                                                                           | 1 —          |
| Baraniecki M. A. Krótka arytmetyka z wielu zadaniami. Cz. I. Liczby całkowite i wielorakie. Wyd. III, w opr.                                                                                            | 2 60         |
| — — Cz. II. Ułamki, stosunki i reguła trzech, w opr.                                                                                                                                                    | 3 —          |
| Dąbrowski A. Zbiór zadań arytmetycznych. Cz. I. Na klasę wstępną i I-szą. Liczby całkowite od tysiąca. Liczby wielorakie. w opr.                                                                        | 2 10         |
| — — Cz. II. Na klasę II-gą. Liczby ułamkowe, w opr.                                                                                                                                                     | 1 80         |
| Grochowski K. Zbiór zadań arytmetycznych dla szkół początkowych. Cz. I. Pierwszy rok nauczania, w opr.                                                                                                  | 1 80         |
| — — Część II. Drugi rok nauczania, w opr.                                                                                                                                                               | 1 80         |
| Jeske A. Arytmetyka. Teoria i zadania na podstawie rachunku pamięciowego. Wyd. 8-me, oprac. Zb. Kamiński. Część I. Cztery działania z liczbami całkowitemi, liczby wielorakie, system metryczny, w opr. | 3 35         |
| — Arytmetyka. Część II. Ułamki zwyczajne i dziesiętne. Cztery działania z ilościami przybliżonymi. Ułamki ciągłe, w opr.                                                                                | 2 40         |
| — Arytmetyka. Część III. Podnoszenie do kwadratu i do sześciu. Wyciąganie pierwiastku. Stosunki i proporcje. Reguła trzech. w opr.                                                                      | 2 —          |
| — Arytmetyka. Trzy części razem, w opr.                                                                                                                                                                 | 6 20         |
| — Arytmetyczka dla rozpoczynających elementarny kurs nauk, podług najdostępniejszej metody okazowej. Wydanie 7-me pomnożone i opracowane przez Zb. Kamińskiego, w opr.                                  | 2 40         |
| Jurewicz. Zbiór zadań arytmetycznych dla szkół początkowych. Przełożył R. Janowski. Rok I i II. Wyd. VI. fen. 90, kart.                                                                                 | 1 35         |
| — — Rok III. Z teorią arytmetyki. Wyd. III, kart.                                                                                                                                                       | — 90<br>1 35 |