BIBLJOTEKA „WEKTORA". SERJA A. № 3.

MARIO PIERI.

GIEOMETRJA ELEMENTARNA

OPARTA NA POJĘCIACH „PUNKTU" I „KULI".

PRZEDSTAWIŁ WŁOSKIEMU TOWARZYSTWU NAUKOWEMU

G. CASTELNUOVO, APROBOWAŁ G. SEGRE.

Z ORYGINAŁU WŁOSKIEGO PRZEŁOŻYŁ

STEFAN KWIETNIEWSKI.

Z zapomogi Kasy pomocy
dla osób pracujących na polu naukowem
im. D-ra Józefa Mianowskiego.

BIBLJOTEKA

WARSZAWA.
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA.
1915.

Cena 1 rb.

BIBLIOTEKA Wojewódzka w Białymstoku
513
21.146

Drukarnia i Litografia Jana Cotty w Warszawie, Kapucyńska 7.

TREŚĆ.

Str.

Przedmowa 1
Wykaz skróceń 5
§ I. Punkt i kula. Własności główne równoodległości od punktu. Pierwsze twierdzenia o prostej i płaszczyźnie. Środek pary punktów. Wprowadza się symetrje względem punktu i względem osi (równoinwersja i półobrót). 7
§ II. Prostopadłość pomiędzy dwiema prostemi, albo między prostą i płaszczyzną, albo między dwiema płaszczyznami. Wprowadza się obrót dokoła osi. Symetrja względem płaszczyzny, albo odzwierciedlenie. Różne własności, dotyczące prostych, płaszczyzn i kul. 25
§ III. Punkty leżące wewnątrz i zewnątrz kuli. Odcinki, promienie, półpłaszczyzny, kąty, trójkąty i t. d. 44
§ IV. Twierdzenia o obrotach. Postulaty Euklidesa i Archimedesa. Podobieństwo i jednomierność (izomerja). Przystawanie odcinków i kątów 63
§ V. Zależności: «większy» i «mniejszy» pomiędzy dwoma odcinkami albo kątami płaskiemi. Przystawanie trójkątów. Suma dwuch odcinków albo dwuch kątów płaskich wypukłych. Różne własności trójkątów, kół, kul i t. d. 82
§ VI. Równoległość prostych i płaszczyzn. Jednokładność i przesunięcie. Własności i konstrukcja podobieństw. Przeciwodwrotność względem kuli. Przecięcie dwuch kul. 94
§ VII. Iloczyny izomerji. Przystawanie i przeciwprzystawanie. Przeciwobrót i przeciwprzesunięcie. Ruch śrubowy. Klasyfikacja izomerji 112
§ VIII. Zwroty prostej i koła. Odcięte. Odwzorowanie prostej za pomocą liczb rzeczywistych. Odległość dwuch punktów. Ciągłość prostej 124
Dodatek 145

ERRATA.

Na str. 94 w tytule § VI zamiast: „Własności i konstrukcja podobieństw względem kuli“ czytaj: „Własności i konstrukcja podobieństw. Przeciwodwrotność względem kuli“.

PRZEDMOWA.

„Większość podręczników gieometrji przechodzi zbyt szybko do przypadków szczególnych, a mianowicie do przystawania i podobieństwa trójkątów; wskutek tego niektóre pojęcia nie są w tych podręcznikach ustalone z należytą ogólnością... Figury podobne nie są niczym innym, jak tylko przedmiotami odpowiedniemi układów przestrzennych podobnych. Rozpatrywanie figur kolineacyjnych powinno być poprzedzone przez rozpatrywanie układów kolineacyjnych, a rozpatrywanie figur symetrycznych — przez rozpatrywanie układów symetrycznych. Jakkolwiek zresztą przyroda i sztuka we wszystkich swoich utworach dążą do symetrji, to jednak pojęcie to w wielu podręcznikach wcale nie bywa rozważane". G. C. von STAUDT, *Geometrie der Lage*, przedmowa (Norymberga, 1847).

„Ostatecznie zdaje się, że elementami konstrukcyjnemi pierwotnemi, które biorą najwybitniejszy udział w formowaniu przestrzeni dotykowej, nie są pojęcia prostej i płaszczyzny, ale raczej pojęcie «odległości», a tym samym pojęcia «kół» i «kul»". F. ENRIQUES. *Problèmi della scienza*, str. 322 (Bologna, 1906).

W jednej z prac z roku 1899 stwierdziłem „możność zbudowania całej gieometrji elementarnej z dwuch tylko pojęć pierwotnych: «p u n k t u» i pewnej zależności między trzema punktami *a, b, c*. Zależność ta da się wyrazić za pomocą takich powiedzeń: «*c* j e s t o d d a l o n e o d *a* j a k *b*», «*c* n a l e ż y d o k u l i p r z e z *b*, m a j ą c e j ś r o d e k w *a*», «p a r y p u n k t ó w *(a, b)* i *(a, c)* s ą p r z y s t a j ą c e» i przedstawić, o ile zechcemy, za pomocą

symbolu «$c \equiv b_a$»". Dodałem wówczas: „wobec nadmiernej zawiłości, cechującej dotychczas taki układ (a wypływającej z wymagań o charakterze logiczno-dedukcyjnym, którym uważamy za właściwe się poddawać), byłoby rzeczą pożądaną, lub nawet potrzebną, podjęcie nowych studjów i dalszych badań" [1]). Owocem takich badań jest niniejsza rozprawa; osiąga ona właśnie (jeżeli się nie mylę) ten stopień prostoty i ścisłości, który miałem na celu od owego czasu, i który w moich oczach stanowi największą wartość badań tego rodzaju.

Pozatym analogje, występujące pomiędzy temi dwiema pracami, są mniejsze, niż możnaby było przypuszczać ze względu na wspólność przedmiotu. Tam w charakterze pojęcia pierwotnego, t. j. określonego tylko za pomocą postulatów, przyjmowaliśmy i stosowaliśmy, więcej nawet niż potrzeba, «ruch», albo «przystawanie figur», jako przekształcenie punktów na punkty. Tutaj, przeciwnie, wszystkie podstawowe działania lub zależności gieometryczne (symetrje, przystawania, podobieństwa i t. d.) będą określone formalnie, lub raczej gienetycznie za pomocą «punktu» i «równej odległości od punktu», do czego doprowadzi nas postępowanie zupełnie podobne do tego, przez które staudtowska Gieometrja Rzutowa, wychodząc jedynie z pojęć «punktu rzutowego» i «prostolinjowego uszeregowania punktów rzutowych», wyprowadza kolineacje i korelacje [2]).

Naprzykład z określeniem kolineacji [3]) zgadza się w zupełności określenie podobieństwa jako przekształcenia punktów, względem którego pozostaje niezmienną zależność: «c jest tak oddalone od a jak b» (§ 4). Są to inowacje, których jedynemi godnemi zaznaczenia poprzednikami były: układ G. VERONESE'go [4]) — gdzie jest znacznie więcej przedmiotów nieokreślonych, i gdzie krytyka i metoda są zupełnie odmiennego rodzaju — oraz *Fondamenti della metrica projettiva* B. LEVI'ego [5]). Zresztą tak płodnym zasadom i ważnym narzędziom gieometrji nowożytnej zawdzięczamy jeszcze wiele innych pomysłów. Pojęcie odwzorowania punktów przez punkty, albo przekształcenia, rozciągniętego na całą

[1]) „*Della Geometria Elementare come sistema ipotetico-deduttivo*", Memorie della Reale Accademia di Torino, tom $XLIX_2$, 1899, str. 176.

[2]) Patrz np. moje *Principi di Geometria di Posizione composti in sistema logico-deduttivo*, Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino, tom $XLVIII_2$, 1898.

[3]) G. C. v. STAUDT. *Die Geometrie der Lage*, § 10 (Nürnberg, 1847).

[4]) *Fondamenti di Geometria a più dimensioni* (Padwa, 1891); *Elementi di Geometria* (Verona, 1897). [Pierwsze z tych dzieł wyszło w przekładzie niemieckim p. t. *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen*. Leipzig, 1894. *Przyp. tłum.*].

[5]) Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino, tom LIV_2, 1904.

przestrzeń, ma w naszym układzie takie samo znaczenie podstawowe, jakie posiada w Gieometrji rzutowej i w Analizie (§§ 2, 4, 6); mierzenie długości i kątów uczyniliśmy niezależnym od istnienia jednostek ruchomych w przestrzeni (§ 8), i t. d. — Oprócz tego analizę danych i przesłanek, które panują w Gieometrji elementarnej, posunęliśmy znacznie dalej naprzód, aniżeli w cytowanej pracy z roku 1899; analiza ta odsłania niejako wszystkie fundamenty budowy enklidesowej [1]).

Rozprawa, którą teraz przedstawiam sądowi publiczności, ma cele spekulacyjne i krytyczne. Mianowicie zamierzam usunąć faktycznie wszelkie wątpliwości co do tego, iż Gieometrja Elementarna zdolna jest poddać się najściślejszym prawom metody i uwolnić się od wszelkiego związku poddańczego z intuicją przestrzeni; że może ona istnieć w całej swojej rozciągłości jako układ hipotetyczno-dedukcyjny; że wreszcie może, jeśli tego zechcemy, przybrać postać «badania nad pewnym porządkiem zależności logicznych» [2]).

Rozprawa ta nie ma szat ani uroszczeń dydaktycznych, ale wcale nie pragnie okazać się tak odległą od szkoły, ani tak ciężko lub kunsztownie zbudowaną, ażeby nie mogła z niej korzystać młodzież, nieco więcej zaawansowana w studjach matematycznych [3]). Jest rzeczą pewną, że naucza-

[1]) Do przedmiotu tych badań zbliżają się prace: A. PADOA, *Un nuovo sistema di definizioni per la Geometria euclidea* (Deuxième Congrès international des Mathématiciens, Paris 1900) i G. PEANO, *La Geometria fondata sulle idee di punto e distanza* (Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, XXXVIII, 1902). Omawiają one ogólnikowo, jak się określa twory gieometryczne jedynie za pomocą pojęć pierwotnych «punktu» i «przystawania pomiędzy parami punktów», nie dotykają zresztą zagadnienia postulatów lub twierdzeń pierwotnych. Mało spólnego z naszym przedmiotem ma piękna rozprawa O. VEBLEN'a: *A system of axioms for Geometry* (Trans. of the Americ. Mathem. Society, tom V, 1904), która — idąc w tym samym kierunku, co M. PASCH i G. PEANO — opiera i utwierdza podstawy gieometrji rzutowej jedynie na pojęciach «punktu» i «odcinka» za pomocą wystarczającego (kategorycznego) i zupełnego układu postulatów, od siebie nie zależnych.

[2]) „Pod względem swej budowy, gieometrja jest układem twierdzeń, wysnutych drogą czysto logiczną z pewnych założeń, niemożliwych do dowiedzenia i stworzonych uprzednio przez samorzutny umysł (auto-active mind) zwierząt i ludzi". G. B. HALSTED, Science N. S. tom XIX, n. 480 (1905). — Patrz również moją notatkę «*Sur la Géométrie envisagée comme un système purement logique*». Congrès international de Philosophie, tome II, Paris 1900. [Porównaj: Z. JANISZEWSKI, *Podstawy Gieometrji* w tomie I „Poradnika dla Samouków", Warszawa, 1915. *Przyp. tłum.*].

[3]) „Błędem byłoby mniemać, że ścisłość dowodzenia jest wrogiem prostoty. Przeciwnie, na wielu przykładach możemy stwierdzić, że ścisła metoda jest zarazem prostsza i łatwiejsza do zrozumienia. Wysiłek, jaki czynimy aby osiągnąć ścisłość, zmusza nas do wyszukiwania prostszych metod dowodzenia". G. B. HALSTED, loc. cit.

nie gieometrji elementarnej, jakie się dziś prowadzi w naszych szkołach średnich, zupełnie nie dorasta do potrzeb tych, dla których matematyka stanie się później głównym przedmiotem studjów. Dla tego też słyszałem nieraz życzenie, wyrażane przez dzielnych i doświadczonych nauczycieli, aby ich uczniowie znaleźli w uniwersytecie możność pogłębienia i przerobienia raz jeszcze tego samego materjału za pomocą środków poręczniejszych i ściślejszych.

Z powyższych wskazówek i ze spisu rozdziałów czytelnik może wyrobić sobie pojęcie o charakterze i treści niniejszej rozprawy. Twierdzeń pierwotnych jest dwadzieścia cztery i każde z nich zostało również wypowiedziane zapomocą terminów: „punkt“ i „kula“. Dodatek przeznaczony jest dla tych, którzy nie są oswojeni z pewnemi pojęciami, potocznemi dla matematyka, jako to: postulat, określenie, dedukcja, odwzorowanie i t. p., które dla nas mają znaczenie zasadnicze.

Wykaz skróceń.

Jeżeli A, B, C są punktami, wtedy oznacza się przez „AB“, „ABC“ prostą (nieograniczoną), łączącą A i B oraz płaszczyznę, łączącą A, B i C; przez „B_A“ kulę (sferę), mającą środek w A i przechodzącą przez B; przez „Sfr (A, B)“ kulę, dla której A i B są biegunami (t. j. punktami średnicowo przeciwległemi). Symbole „$A\,|\,B$“ i „A/B“ oznaczają: pierwszy — punkt środkowy pomiędzy A i B, drugi — punkt symetryczny do A względem B. Przez „$|AB|$“ oznacza się odcinek, mający końce w A i B (z włączeniem obu końców), przez „$|AB$“ półprostą albo promień, mający początek w A i zawierający B. Ażeby oznaczyć kąt wypukły lub wklęsły, którego ramionami są półproste AB, AC, pisze się odpowiednio „$\hat{A}.BC$“ i „$\check{A}.BC$“; natomiast „$|ABC|$“ oznacza trójkąt, którego ramionami są odcinki $|AB|$, $|AC|$, $|BC|$. Znakiem „$\perp$“ pomiędzy dwiema prostemi lub płaszczyznami, albo też pomiędzy prostą i płaszczyzną stwierdzamy prostopadłość wzajemną tych figur. Podobnie „$\asymp$“ jest znakiem przystawania (congruenza); „$\sigma_{A,B}C$“ wyraża: „następuje po C w zwrocie $A \rightarrow B$“. Wszystkie te symbole poszczególne będą stopniowo określane w tekście.

„P“ (podanie [1]) = proposizione); „Df“ albo „Dfn“ (definicja, określenie); „Pst“ (postulat); „Tr“ (twierdzenie, teoremat), „Hip“ (hipoteza), „Tz“ (teza). Pisząc: „P1“, „P2“, ..., powołujemy się na podania 1, 2-gie..., i jeżeli nie cytujemy przytym paragrafu, wówczas mamy na uwadze § bieżący. Przez symbol „$\binom{D, C, A}{A, B, C}$ P 7 § 2“ powołujemy się na P 7 paragrafu 2-go, przyczym nazwy tworów A, B, C zostały odpowiednio zamienione na D, C, A.

Przyjmiemy znak „$\equiv$“ zamiast wyrażenia: „jest równe na zasadzie określenia“. Tak więc $r \equiv AB$ (gdzie A i B są punktami różnemi) oznacza: „r jest (pod inną nazwą) prostą, łączącą A i B“.

[1]) [Z powodu braku ustalonego terminu, któryby oznaczał w języku polskim zarówno twierdzenie, jak i postulat, wprowadziłem termin podanie, używany w dawniejszych książkach matematycznych].

„ε“ poprzedza zawsze nazwę ogólną, czyli symbol klasy, a następuje po nazwie lub po nazwach jednego lub więcej indywiduów tej klasy. Można ten znak rozumieć i czytać jako: „jest jednym z...“, „są...“, „należy (lub należą) do...“.

„$\supset$“ umieszczone pomiędzy dwiema klasami wyraża, że pierwsza (z lewej strony) jest zawarta w drugiej, czyli, że każdy element pierwszej należy i do drugiej jako indywiduum. Umieszczone między dwoma twierdzeniami oznacza, że drugie jest następstwem pierwszego; znak ten zastępuje w tym wypadku wyraz: „wynika“.

„$=$“ Znak równości logicznej. Między dwiema klasami oznacza, że każda z nich jest zawarta w drugiej. Między dwoma punktami wyraża, że zlewają się z sobą. Pomiędzy dwoma twierdzeniami znaczy, że każde z nich jest następstwem drugiego.

„∞“ Znak przeczenia, zastępuje „nie“. Np. pisząc: „$C \infty \varepsilon AB$“ wyrażamy, że C nie należy do AB. Podobnie „$\infty =$“ ma oznaczać: „nie równa się...“.

„$\cap$“ Znak połączenia logicznego. Między dwiema nazwami ogólnemi służy do oznaczenia iloczynu logicznego dwuch klas, czyli zbioru ich indywiduów wspólnych. Między dwoma zdaniami wyraża, że utrzymuje się jedno i drugie jednocześnie. Można czytać: „i“, „wraz z...“.

„$\cup$“ Rozłączenie logiczne. Między dwiema klasami oznacza ich sumę logiczną, to jest najmniejszą klasę, mogącą zawierać jedną i drugą. Między dwoma sądami służy do stwierdzenia jednego lub drugiego, bez rozróżnienia. Czyta się: „lub“, „albo“.

Tych kilku znaków logicznych używać będziemy oszczędnie. Dowodzenia będą w ogólności zamykane w nawiasy prostokątne; ale będzie to przeważnie tylko schemat dedukcji, wskazówka, jak przejść od założenia do tezy.

§ 1.

Punkt i kula. Własności główne równoodległości od punktu. Pierwsze twierdzenia o prostej i płaszczyźnie. Środek pary punktów. Wprowadza się symetrje względem punktu i względem osi (równoinwersja i półobrót).

P 1. — *Df.* [1]) „*Figura* jest to samo, co grupa albo zbiór punktów. Nazwa „figury“ należy do każdego zbioru albo klasy punktów, bez żadnego wyjątku. — Jeżeli φ jest figurą, wówczas ażeby oznaczyć, że A jest punktem figury φ, często się mówi, że A *należy* do φ, albo *leży* na (w) φ, albo że φ *przechodzi* przez A, i t. d.; lub też pisze się: «$A \varepsilon \varphi$»“.

P 2. — *Df.* „Powiedzieć, że figura φ *jest zawarta* w innej figurze ψ — albo że ψ *przechodzi przez* φ — znaczy tyleż, co twierdzić, że każdy punkt figury φ należy również do ψ, co także wyrażamy, pisząc: «$\varphi \supset \psi$». Dwie figury *pokrywają się*, albo «zlewają się w jedną», jeżeli każda z nich jest zawarta w drugiej“. — Zauważmy, że każda figura jest zawarta w sobie samej (własność zwrotna *zawierania*) oraz, że jeżeli $\varphi \supset \psi$ i $\psi \supset \chi$ — gdzie χ jest również figurą — wtedy musi być $\varphi \supset \chi$ (własność przechodnia). Te same cechy posiada zależność *pokrywania się* dwuch figur, która oprócz tego jest przemienna, czyli symetryczna. — O dwuch lub więcej figurach, które mają jakiś punkt wspólny, lub zawierają wszystkie tę samą figurę, mówimy często, że *się przecinają*, lub że *się spotykają* w tych punktach, albo podług tej figury. Klasa punktów, z których każdy należy jednocześnie do dwuch lub więcej figur danych φ, ψ, χ,... (o ile punkty takie istnieją), jest figurą, która się nazywa *przecięciem* (albo iloczynem logicznym) figur danych, i może być oznaczona przez «$\varphi \cap \psi \cap \chi \cap \ldots$». Inną znów figurą jest suma logiczna figur φ, ψ, χ,... — wyrażona przez «$\varphi \cup \psi \cup \chi \cup \ldots$» — czyli klasa punktów, z których każdy należy do φ, albo do ψ, albo do χ,... bez różnicy.

[1]) Patrz przypisek 1 w Dodatku.

P 3. — *Df.* „Dwa punkty *pokrywają się*, albo nie różnią się od siebie, jeżeli jeden z nich należy do każdej figury, przechodzącej przez drugi. Jeżeli natomiast istnieje jakakolwiek figura, do której jeden należy, drugi zaś nie, wówczas te dwa punkty są oddzielne, czyli różne od siebie". — Zauważmy, że i taka zależność (pokrywania się punktów) jest zwrotna, przechodnia i symetryczna. — Gdy dwa punkty pokrywają się, wówczas mówimy o nich zazwyczaj jako o jednym tylko indywiduum; ale często bywa dogodnie pojmować je i rozpatrywać jako figurę (utworzoną przez punkty zlewające się z sobą). — Pokrywanie się punktów lub figur oznacza się zwykle symbolem «=» *(równa się)*.

P 4. — *Df.* „Jeżeli A, B, C są punktami, wówczas sąd: «C należy do *kuli przez B o środku A*» wyraża, że punkt C tak jest oddalony od A, jak B, czyli że B i C są równoodległe od A. Innemi słowy, nazywamy «*kulą przez B o środku A*» figurę, złożoną z tych wszystkich punktów, z których każdy „tak jest oddalony od A jak B". Zamiast «kula przez B o środku A», mówi się też nieraz: «kula przez B *dokoła* A», i pisze się «B_A»; a dla zaznaczenia, że punkt C jest oddalony od A jak B, mówić będziemy często, że punkty B i C są «równoodległe od A», albo że punkt A jest «równooddalony od B i C».— Przez zdanie: «punkt C jest oddalony od A jak B» stwierdza się, że pomiędzy punktami A, B, C zachodzi pewna zależność. Zależności tej nie określa się, podobnie jak się nie określa punktu; ale za pomocą tych dwuch rzeczy — więc ostatecznie za pomocą «punktu» i «kuli przez jeden punkt dokoła drugiego» — określać będziemy te wszystkie przedmioty, które występują w Gieometrji Elementarnej [1]).

POSTULATY I — II [2]).

P 5. — *Istnieje przynajmniej jeden punkt; i, jeżeli dany jest jeden punkt dowolny, wówczas istnieje jeszcze jeden punkt, różny od pierwszego.*

POSTULATY III — IV.

P 6. — *Jakiekolwiek będą punkty A i B, zawsze punkt B należy do kuli przez B o środku A. I jeżeli punkt C należy do kuli przez B o środku A, wówczas sam punkt B musi leżeć na kuli przez C o środku A.* — Dzięki ostatniemu określeniu (**P 4**), zasady te III — IV mówią jedynie: „Jeżeli A i B są punktami, wtedy zawsze punkt B jest oddalony od A jak B; i jeżeli punkt C jest oddalony od A jak B, wtedy i punkt B jest oddalony od A jak C". (Własność zwrotna i przemienna «równoodległości» punktów).

[1]) Patrz uwagę II w Dodatku.
[2]) Patrz uwagę III w Dodatku.

POSTULAT V.

P 7. — *Jeżeli A i B są punktami i jeżeli się zdarzy, że trzeci punkt C należy do kuli przez B o środku A, czwarty zaś punkt D — do kuli przez C o środku A, wówczas punkt D należeć będzie koniecznie do kuli przez B dokoła A.* — Albo innemi słowy (na mocy **P 4**): „Jeżeli A, B, C, D są punktami i «punkt C jest oddalony od A jak B», a D jest oddalony od A jak C; wówczas punkt D jest oddalony od A jak B". (Własność przechodnia „równoodległości").

POSTULAT VI.

P 8. — *O ile punkty A i B są od siebie różne, nie może się zdarzyć, ażeby punkt A leżał na kuli przez B o środku A.* — To znaczy: „Jeżeli punkty B i A nie pokrywają się (**P 3**), wtedy napewno punkt A nie jest oddalony od A jak B". (**P 4**).

P 9. — *Tr.* „Jeżeli punkty A i B pokrywają się, wówczas żaden punkt różny od A nie należy do kuli przez B o środku A, ale punkt A do niej należy". [B napewno należy do kuli B_A (**P 6**), a więc również i A, wobec tego, że $A = B$ wskutek założenia. Z drugiej strony, gdyby jakikolwiek punkt C, różny od A, miał leżeć na B_A, wtedy punkt B musiałby leżeć na kuli C_A (dzięki temu samemu **P 6**); wskutek czego również i punkt A należałby do C_A, wbrew **P 8**]. — Stąd wynika, że kula przez jakikolwiek punkt A dokoła niego samego (czyli figura A_A) jest cała skupiona w A, ze względu na to, że punkty A i A zlewają się dla każdego A (**P 3**). Tak więc (**P 4**) żaden punkt różny od A nie jest tak oddalony od A jak A.

P 10. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są punktami i jeżeli C należy do kuli przez B o środku A, wtedy kule przez B i przez C dokoła A zlewają się

zawsze w jedną figurę". EUKLIDES, ks. 3, pod. V [1]). [Wystarczy dowieść (podług **P 2**), że każdy punkt figury B_A należy również do figury C_A, i że odwrotnie, każdy punkt drugiej figury jest także punktem pierwszej. Niech będzie np. M punktem dowolnym na kuli przez B o środku A. Z **P 6** wynika, że punkt B należy do kuli M_A; ale z założenia wiemy, że punkt C należy do B_A: przeto na mocy **P 7** (czytając M, B, C zamiast B, C, D) musi C należeć i do M_A; a stąd znajdziemy, również za pomocą **P 6**, że M należy do kuli C_A. A więc kula B_A jest zawarta w C_A. Odwrotnie, oznaczając przez N punkt dowolny na kuli przez C dokoła A, z założeń, że C należy do B_A i N do C_A, wyprowadzimy, zawsze na mocy **P 7**, że N należy do B_A; kula C_A będzie przeto zawarta w B_A. A więc wnosimy, że $B_A = C_A$, c. b. d. d.].

P II. — *Df.* „W założeniu, że A, B są to punkty i że punkt A jest różny od B, nazwiemy «*łączącą A z B*» — albo krótko «AB» — klasę wszystkich punktów takich, że dla każdego z nich — niech to będzie np. X — kule przez X dokoła A i B nie mają punktów wspólnych oprócz X". EUKLIDES, ks. 3, pod. XI, XII.

Można powiedzieć (podług **P 4**), że to jest „miejsce wszystkich punktów X, dla których niema punktów różnych od X i tak oddalonych od A i B jak X, — a więc ostatecznie takich, że punkt tak oddalony od A i od B jak X, musi zlewać się z X" [2]). — Zauważmy, że punkt X, o którym mowa, jest napewno wspólny obu kulom X_A i X_B (**P 6**). Dwie kule, spełniające warunek powyższy — spotykania się w jednym tylko punkcie — nazywać się będą «*stycznemi* do siebie» w tym punkcie (w punkcie «*styczności*»); istnienie zaś takiego punktu X, o jakim była mowa wyżej, wypływa z twierdzenia następującego:

P I2. — *Tr.* „W tym samym założeniu, punkty A i B napewno leżą na łączącej A z B, a dwie figury «AB» i «BA» pokrywają się". [Kule A_A i A_B nie spotykają się poza punktem A, gdyż wiemy, że żaden punkt różny od A nie należy do A_A (**P 9**): przeto $A \equiv AB$ (**P II**),

[1]) Cytując EUKLIDES'a, będziemy się powoływali na jedyny przekład polski: *Euklidesa Początków Jeometryi xiąg ośmioro, to jest sześć pierwszych, jedenasta i dwunasta z dodanemi przypisami i trygonometryą. Dla pożytku młodzi akademickiey tłumaczone i wydane przez Józefa Czecha.* W Wilnie. W drukarni Józefa Zawadzkiego. 1807.

[2]) To określenie i drugie podobne, dotyczące płaszczyzny łączącej trzy punkty dane (patrz **P 27**), należy do G. W. LEIBNIZ'a („Haec plani definito mihi est, ut sit locus omnium punctorum sui ad tria puncta in eandem rectam non cadentia situs unicorum" *Characteristica Geometrica*, Math. Schr. t. V, str. 189. r. 1679). Określenie te odkrył powtórnie A. CAUCHY (*Sept leçons de physique générale.* Paris, 1868, str. 44 — 45); zostało ono później przyjęte przez różnych autorów (MANSION, PADOA, PEANO...).

i podobnie $B \equiv AB$. — Pozostała teza opiera się na tym, że określenie poprzednie jest symetryczne względem A i B, to znaczy, że zamienia się na siebie samo, jeżeli te punkty zostaną między sobą przestawione]. — Że wreszcie łącząca AB zawiera i inne punkty oprócz A i B, to zostanie ustalone później: patrz postulaty XII i XIII.

POSTULAT VII.

P I3. — *Jeżeli A, B, C są punktami i jeżeli dwie kule C_A i C_B nie spotykają się poza C, wtedy podobnie i kule przez B dokoła A i C nie mogą mieć punktów wspólnych różnych od B.* — To znaczy (**P 4**), że: „Jeżeli, z wyjątkiem punktu C, żaden inny punkt nie jest oddalony od każdego z punktów A i B tak jak C, wtedy nie będzie też mógł istnieć punkt różny od B, który byłby tak oddalony od A i C jak B (w założeniu, że punkty A i C nie pokrywają się)".

P I4. — *Tr.* „Jeżeli są dane punkty A i B jak wyżej, wówczas powiedzenie, że punkt C, różny od A, należy do łączącej A z B, jest równoznaczne z powiedzeniem, że punkt B należy do łączącej A z C". [W rzeczy samej, drugi z tych dwuch faktów jest następstwem pierwszego dzięki poprzedniemu postulatowi i określeniu **P II**. Ale ten sam postulat **P I3** (o ile w nim czytać będziemy C i B, gdzie jest napisane B i C) upewnia nas, że C należy do AB, jeśli B należy do AC; przeto pierwszy z tych dwuch faktów jest ze swej strony następstwem drugiego].

POSTULAT VIII.

P I5. — *Jakiekolwiek byłyby punkty A i B nie pokrywające się, istnieje niezawodnie taki punkt C, dla którego kule C_A i C_B spotykają się jeszcze poza C.* — Wobec przyjęcia określenia **P II**, sąd ten nie różni się od następującego: „Dla każdej pary punktów różnych można zawsze ustalić istnienie przynajmniej jednego punktu, nie należącego do ich łączącej (czyli takiego, że jakiś punkt, różny od niego, tak jest oddalony od A i od B, jak on)".

POSTULAT IX.

P I6. — *Jeżeli A, B, C są to punkty dane i C jest jedynym punktem wspólnym kulom C_A i C_B, a M punktem dowolnym, wówczas każdy punkt, wspólny kulom M_A i M_B, musi należeć do kuli M_C.* — Albo innemi słowy

(**P 4**): „Przypuśćmy, że A, B, C, M są punktami; jeżeli żaden punkt, różny od C, nie jest oddalony od A i B jak C, wtedy każdy punkt, który jest oddalony od A i B jak M, będzie też i od C oddalony jak M“. Ta teza ustala w gruncie rzeczy (**P 2**), że „przecięcie się obu kul przez M dokoła A i B leży na kuli M_C (czyli, że $M_A \frown M_B \supset M_C$)“.

P 17. — *Tr.* „Jeżeli w założeniu, że A, B są punktami różnemi, punkt C należy do łączącej A z B, ale jest różny od A, wtedy dwie łączące A z B i A z C zlewają się w jedną“. [Dowiedziemy przedewszystkim, że punkt, należący do łączącej A z C, musi również należeć do łączącej A z B. Niech będzie X takim punktem. Gdyby kule X_A i X_B spotykały się w jakimś innym punkcie, różnym od X, wówczas musiałaby przez niego przejść także kula X_C (wobec **P 16**): tak więc nie byłoby już prawdziwym założenie, że X_A i X_B nie spotykają się po za X (**P 11**). Przeto X należy do AB, a więc $AC \supset AB$. Pozostaje jeszcze do okazania, że odwrotnie, każdy punkt, należący do AB, musi leżeć na AC, to znaczy, że $AB \supset AC$. Punkt B napewno należy do łączącej A z C (**P 14**). Ale z tego, że C jest punktem należącym do AB, ale różnym od A, wynika (jak to widzieliśmy właśnie), że łącząca AC jest zawarta w AB; w ten sam sposób z faktu, że B jest punktem należącym do AC, różnym od A, musi wynikać, że łącząca AB jest zawarta w AC].

P 18. — *Tr.* „Jeżeli punkty A i B nie pokrywają się, i jeżeli C jest punktem łączącej A z B, ale różnym od B, wtedy dwie łączące AB i BC pokrywają się“. [Założenie żąda, ażeby punkt C należał do BA (**P 12**); stąd się wyprowadza za pomocą $\binom{B,\ A}{A,\ B}$ **P 17**, że $BA = BC$, z czego wynika, że $AB = BC$].

P 19. — *Tr.* „Jeżeli A, B są to punkty różne, i jeżeli się zdarzy, że dwa punkty C i D, również nie pokrywające się, należą do łączącej A z B, wówczas figury AB i CD zawsze się pokrywają“. [Z założenia wypływa, że punkt C nie zlewa się jednocześnie z A i B (**P 3**). Otóż, jeżeli punkt C jest różny A, to przekonywamy się, że łączące A z B i A z C zlewają się z sobą (**P 17**), że przeto punkt D należy do AC; ale stąd się wyprowadza na mocy $\binom{C,\ D}{B,\ C}$ **P 18**, że łączące A z C i C z D pokrywają się, a więc $AB = CD$. W podobny sposób, jeżeli punkt C jest różny od B, wtedy **P 18** czyni figury AB i BC równemi, punkt D należy więc do BC, a wskutek $\binom{B,\ C,\ D}{A,\ B,\ C}$ **P 18** pokrywają się dwie figury BC i CD, przeto pokrywają się również AB i CD, jak poprzednio. Tak więc w każdym przypadku $AB = CD$].

P 20. — *Tr.* „W założeniu, że A, B, C są to punkty różne, i że C należy do łączącej A z B: przecięcie dwuch kul, poprowadzonych przez punkt jakikolwiek M dokoła A i B, pokryje się zarówno z przecięciem dwuch kul M_B i M_C, jak z przecięciem dwuch kul M_C i M_A“. [Jeżeli punkt M należy do łączącej A z B, wówczas wszystkie trzy przecięcia są skupione w M (**P 11**); ale przypuśćmy, że M nie należy do AB. Zasada IX (**P 16**), wobec określeń **P 2**, **4** upewnia nas, że przecięcie M_A z M_B będzie także musiało leżeć na kuli M_C, będzie więc figurą wspólną zarówno dla kul M_B i M_C, jak i dla kul M_C i M_A. Otóż z założenia wypływa — na mocy **P 14**, **12** i $\binom{B,\ A}{A,\ B}$ **P 14** — że $B \equiv AC$ i $A \equiv BC$, przeto wystarczy powołać się jeszcze raz na zasadę IX, stosując podstawienia $\binom{C,\ B}{B,\ C}$, $\binom{A,\ C}{C,\ A}$, aby się upewnić, że każda z figur $M_C \frown M_A$, $M_B \frown M_C$, zawiera się w figurze $M_A \frown M_B$. Tak więc $M_A \frown M_B = M_B \frown M_C = M_C \frown M_A$ (**P 2**), c. b. d. d.].

P 21. — *Df.* „Jeżeli $A, B, C, \ldots$ są punktami, wtedy zdania: «$A, B, C, \ldots$ są *uszeregowane*», albo «są *współlinjowe*», albo «są *wyrównane*» wyrażają, że istnieją dwa różne punkty X i Y takie, że punkty A, B, $C, \ldots$ leżą wszystkie na łączącej X z Y — to znaczy takie, że (**P 4**, **II**), żaden punkt, różny od A, B, $C, \ldots$, nie jest oddalony od X i od Y tak jak A, albo B, albo $C, \ldots$“. — Nie będziemy się zatrzymywali nad wyszczególnianiem wszystkich konsekwencji, jakie wynikają z cechy symetrji, przysługującej takiemu związkowi *(uszeregowaniu)*, jak również z zależności wzajemnej pomiędzy taką figurą i tą, o której mówiliśmy w **P 11**. W tym rodzaju są np. trzy twierdzenia następujące:

P 22. — *Tr.* „Z trzech punktów niewspółlinjowych, każdy jest różny od dwuch pozostałych i nigdy nie leży na łączącej te dwa pozostałe punkty“. [Jeżeli przynajmniej dwa z tych punktów są od siebie różne — np. A i B, — wtedy założenie samo wyłącza możliwość, ażeby trzeci punkt C należał do ich łączącej (**P 12**, **21**), wskutek czego, punkt C jest różny od A i od B (**P 3**, **12**); nie może się zdarzyć, żeby punkt B należał do AC, albo A do BC. Ale przypuszczenie, że wszystkie trzy zlewają się w jeden, — np. A — jest sprzeczne z założeniem, ponieważ wtedy — oznaczając przez Y punkt różny od A (a punkt taki napewno istnieje, dzięki zasadzie II) — mielibyśmy, że te wszystkie trzy punkty A, B, C leżałyby na łączącej A z Y (**P 3**, **12**), byłyby więc współlinjowe (**P 21**)].

P 23. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są punktami i jeżeli punkt A jest różny od B, wówczas następujące sądy są sobie równoznaczne: «C należy do AB» i «A, B, C są współlinjowe»“.

P 24. — *Tr.* „Jeżeli cztery punkty A, B, C, D są takie, iż zarówno A, B, D jak A, C, D i B, C, D są współlinjowe, wówczas punkty A, B, C są także współlinjowe". — To znaczy, że „jeżeli między czterema punktami są trzy uszeregowania, to musi być między niemi i czwarte". [Jeżeli D zlewa się z A, wtedy teza jest wyraźnie stwierdzona w samym założeniu, dzięki określeniu **P 2I** i dzięki cechom równości pomiędzy punktami (**P 3**). Jeżeli przeciwnie, D nie pokrywa A, wtedy trzy punkty A, B, C leżą na łączącej A z D, ponieważ ta łącząca, wskutek **P I9**, musi być tą samą, na której leżą, stosownie do założenia, punkty A, B, D (**P 2I**), i tą samą, na której leżą A, C, D. I t. d.].

P 25. — *Tr.* „Istnieją punkty niewspółlinjowe". [Z postulatów I — II (**P 5**) wynika odrazu, że istnieją przynajmniej dwa różne punkty, np. A i B, wobec czego nie można już zaprzeczyć istnienia punktu C, nie leżącego na łączącej A z B (**P I5, II**); przeto A, B, C są trzy punkty niewspółlinjowe (**P 23**)].

P 26. — *Df.* „Łączącej dwa jakiekolwiek punkty różne dajemy nazwę ogólną «prostej». Albo też: przez «prostą» rozumieć będziemy klasę wszystkich możliwych łączących w znaczeniu **P II**". Przeto powiedzieć np., że «r jest prostą», jest to samo, co utrzymywać, że istnieją pewne punkty A i B, różne od siebie i takie, że r jest (pod inną nazwą) łączącą A z B. — **P I9** nie różni się przeto od sądu, który się zwykle wyraża, mówiąc: „Przez dwa różne punkty dane nie przechodzi więcej niż jedna prosta", — albo też: „Prosta jakakolwiek jest wyznaczona [1]) przez dwa swoje punkty"; i t. d.

P 27. — *Df.* „Jeżeli A, B, C są to punkty niewspółlinjowe, wtedy nazywać będziemy «*łączącą* A, B, C» albo «*płaszczyzną* ABC», albo poprostu «ABC», figurę, albo miejsce takich punktów, że dla każdego z nich — np. dla X — trzy kule przez X dokoła A, B, C nie mają punktów wspólnych, oprócz X". — Płaszczyzna «ABC» będzie więc (**P 4**) „klasą punktów takich, że dla każdego z nich — np. dla X — nie istnieje punkt różny od X, któryby był oddalony od A, od B i od C tak jak X"; tym sposobem punkt, który jest oddalony od A, B, C jak X, pokrywa się z punktem X. Por. **P II**.

P 28. — *Tr.* „W tym samym założeniu figury ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA zlewają się wszystkie w jedną płaszczyznę, zawierającą

[1]) [W oryginale: individuata, *przyp. tł.*].

proste AB, BC, CA w całości". [Część pierwsza jest prawdziwa dlatego, że w **P 27** określenie jest symetryczne względem punktów A, B, C. Jeżeli dalej X jest punktem prostej AB (wszystko jedno jakim), wtedy kule przez X dokoła A i B nie spotykają się gdzieindziej (**P II**), wskutek czego kule X_A, X_B i X_C nie będą się mogły wcale spotkać w punkcie różnym od X. Przeto X należy do płaszczyzny ABC (**P 27**), a łącząca A z B leży cała na płaszczyźnie (**P 2**). To samo okaże się dla prostych BC, CA].

P 29. — *Tr.* „Proste, które łączą punkt A z różnemi punktami łączącej BC, albo B z punktami łączącej CA, albo C z punktami łączącej AB, leżą całe na płaszczyźnie ABC". [Niech będzie np. D punkt dowolny figury AB. Punkty C i D napewno nie pokrywają się (**P 22**, i t. d.); dowiedziemy, że $CD \supset ABC$. Obierzmy jakikolwiek punkt X na prostej CD. Ponieważ D jest jedynym punktem wspólnym kulom D_A i D_B (**P II**), przeto przecięcie obu kul X_A i X_B leży w każdym razie na kuli X_D, dzięki zasadzie IX (albo też na podstawie tylko III postulatu, jeżeli $X = D$), to znaczy: $X_A \frown X_B \supset X_D$. Przeto te punkty figury $X_A \frown X_B$, któreby wypadły na kuli X_C, byłyby wspólne kulom X_D i X_C; czyli $X_A \frown X_B \frown X_C \supset X_D \frown X_C$. Ale te ostatnie nie mają punktu wspólnego oprócz X, więc z tym większą pewnością powiemy, że X_A, X_B, X_C nie spotykają się gdzieindziej. Przeto X należy do płaszczyzny ABC, a zatym prosta CD cała leży na tej płaszczyźnie, c. b. d. d.].

Zauważmy, że nazwy: «prosta», «płaszczyzna» i t. d. dadzą się łatwo wyrugować za pomocą poprzednich określeń. Tak samo i dalej, każdy termin gieometryczny, o ile nie będzie nim «punkt» albo «kula», moglibyśmy niewątpliwie usunąć, wprowadzając na jego miejsce odpowiednie omówienia, lecz wysławianie się stałoby się przez to nadmiernie rozwlekłe, zawiłe, a najczęściej niezrozumiałe, tak iż zniweczylibyśmy całą korzyść, pochodzącą z określeń gieometrycznych (patrz przypisek I w Dodatku).

POSTULAT X.

P 30. — *A, B, C, D niech będą punktami; jeżeli dwie kule D_A i D_B, ale nie wszystkie trzy D_A, D_B, D_C, spotykają się jeszcze gdzieindziej, niż w D, wtedy kule C_A, C_B, C_D nie mają żadnego punktu wspólnego prócz C.* — Albo, co na jedno wyjdzie: „Jeżeli, co do punktów A, B, C, D sprawdza się, że jakiś punkt różny od D jest oddalony od A i od B, jak D, ale z wyjątkiem D, żaden inny punkt nie jest oddalony od A, B, C jak D;

wtedy żaden punkt różny od C nie może być tak oddalony od A, B, D, jak C". Por. **P 13**.

P 31. — *Tr.* „Dane są punkty niewspółlinjowe A, B, C; jeżeli się zdarzy, że jakiś punkt D należy do płaszczyzny ABC, ale nie do prostej AB, wtedy punkt C leży na płaszczyźnie ABD". Por. **P 14**. [Wniosek z poprzedniego **P 30**, przy uwzględnieniu **P 27, 26, 11, 23.**].

POSTULAT XI.

P 32. — *Niech będą A, B, C, D punktami danemi, a M punktem dowolnym; jeżeli trzy kule D_A, D_B i D_C nie mają punktów wspólnych oprócz D, wtedy każdy punkt wspólny kulom M_A, M_B, M_C musi leżeć również na kuli M_D.* — Albo, jeżeli wolimy: „Jeżeli A, B, C, D, M są punktami i jeżeli, z wyjątkiem D, żaden inny punkt nie jest tak oddalony od każdego z trzech punktów A, B, C, jak D; wtedy każdy punkt, oddalony od A, B, C jak M, jest ponadto tak oddalony od D jak M". Por. **P 16**. — Stąd wynika, że jeżeli do trzech punktów danych n i e w s p ó ł l i n j o w y c h można dobrać parę punktów równooddalonych od każdego z nich (z osobna), wtedy te same dwa punkty będą także równooddalone od każdego innego punktu p ł a s z c z y z n y, łączącej trzy punkty dane".

P 33. — *Tr.* „Niech będą A, B, C punktami niewspółlinjowemi; jeżeli D jest punktem płaszczyzny ABC, ale nie należy do łączącej A z B, wówczas dwie płaszczyzny ABC i ABD pokrywają się". Por. **P 17**. [Na mocy założenia, A, B, D nie są współlinjowe (**P 23**) i C należy do płaszczyzny ABD. Przypuśćmy, że M jest punktem dowolnym płaszczyzny ABD; z faktu, że przecięcie trzech kul M_A, M_B, M_D skupia się w jednym tylko punkcie M (**P 27**), oraz z drugiego faktu, że $M_A \frown M_B \frown M_C \supset M_D$ (**P 32**), że więc $M_A \frown M_B \frown M_C \supset M_A \frown M_B \frown M_D$, wynika, że $M \equiv ABC$, skąd $ABD \supset ABC$. Ale stąd wypływa, że $ABC \supset ABD$, ponieważ zamiana punktów C i D, jak to widzieliśmy, nie osłabia prawdziwości założenia].

P 34. — *Tr.* „Jakiekolwiek byłyby punkty niewspółlinjowe A, B, C, jeżeli D i E są punktami płaszczyzny ABC, ale nie współlinjowemi z A, wtedy płaszczyzna ADE pokrywa się koniecznie z płaszczyzną ABC". [Z założenia wiemy, że B i A, jak również A i D są od siebie różne (**P 22**), i że przynajmniej jeden z punktów D i E nie leży na łączącej A z B (**P 19, 12, 23**). Jeżeli więc D n i e l e ż y n a AB, wtedy płaszczyzny ABC i ABD pokrywają się, na mocy twierdzenia poprzedzającego, a punkt E leży w skutek tego na płaszczyźnie ADB (**P 28**), nie leżąc na AD (**P 22**).

Przeto, na mocy tego samego twierdzenia, zlewają się także płaszczyzny ADB, ADE, a więc $ABC = ADE$. Jeżeli dalej E n i e l e ż y n a AB, wtedy wyprowadza się w podobny sposób, że $ABC = ABE = AEB = AED = ADE$. A więc w każdym przypadku $ABC = ADE$, c. b. d. d.].

P 35. — *Tr.* „Niech będą znowu A, B, C punkty niewspółlinjowe; jeżeli się okaże, że trzy punkty D, E, F, również niewspółlinjowe, należą do płaszczyzny ABC, wtedy płaszczyzny ABC i DEF będą musiały się pokryć". — Por. **P 19**. Krócej: „Dwie płaszczyzny, mające trzy punkty (niewspółlinjowe) wspólne, zlewają się". Albo też: „Każda płaszczyzna jest w y z n a c z o n a przez t r z y swoje punkty, nie leżące na jednej prostej". [Nie może się przytrafić, ażeby były współlinjowemi punkty A, D, E, i jednocześnie współlinjowemi również punkty A, E, F i punkty A, D, F: ponieważ z tego wynikałaby współlinjowość punktów D, E, F, co jest przeciwne założeniu. Otóż — jeżeli np. punkty A, D, E nie są współlinjowe — musimy wnosić, że $ABC = ADE$ (**P 34**), czyli że $ABC = DEA$ (**P 28**), że przeto $F \equiv DEA$, a zatym, że płaszczyzny DEA, DEF pokrywają się (**P 33**); zostało więc dowiedzione pokrywanie się płaszczyzn ABC i DEF. Stąd zaś wynika przez podstawienia $\binom{F, E}{E, F}$, $\binom{F, D}{D, F}$, że jedno lub drugie z założeń: «A, D, F nie są współlinjowe» i «A, E, F nie są współlinjowe» wymaga, żeby płaszczyzna ABC pokryła się z DEF, albo też z FED; przeto w każdym razie $ABC = DEF$].

P 36. — *Tr.* „Jeżeli punkty A, B, C są niewspółlinjowe, a punkty D, E nie pokrywają się i leżą na płaszczyźnie ABC, wtedy łącząca te dwa punkty, czyli prosta DE, leży całkowicie na płaszczyźnie ABC". [Wobec tego, że nie mogą współistnieć wszystkie trzy uszeregowania: (D, E, A), (D, E, B), (D, E, C) — gdyż wynikałaby stąd współlinjowość punktów A, B, C (**P 24**) — przypuśćmy np., że A, D, E nie są współlinjowe. Wtedy dwie płaszczyzny ABC, ADE pokrywają się (**P 34**), a prosta DE, która leży na płaszczyźnie ADE (**P 28**), musi też leżeć na płaszczyźnie ABC, i t. d.]. — Dlatego też mówić będziemy nadal o «p ł a s z c z y ź n i e» jako o rodzaju tworów (albo o «klasie p ł a s z c z y z n»), rozumiejąc przez to — co jest niemal rzeczą zbyteczną dodawać — określenie podobne do tego, jakie było niedawno podane dla tworu «p r o s t a» (**P 26**).

P 37. — *Tr.* „Nie mogą współistnieć d w i e p ł a s z c z y z n y r ó ż n e, z których każda zawierałaby prostą daną i punkt dany zewnątrz tej prostej, albo też dwie proste dane, przecinające się, ale nie pokrywające się; ale j e d n a p ł a s z c z y z n a, czyniąca zadość tym warunkom, napewno istnieje". — Jeżeli r jest prostą, zaś A punktem zewnętrznym, wtedy

CZYTELNIA ... w Katowicach

«płaszczyzna Ar» (łącząca A z r) jest to ta płaszczyzna, — oznaczona i jedyna — która łączy A z dwoma dowolnemi ale różnemi od siebie punktami prostej r (podług **P 27**, **28**, **35**). I t. d.

P 38. — *Df.* „Cztery, lub więcej punktów danych nazywać będziemy «*współpłaszczyznowemi*», jeżeli istnieje płaszczyzna, która je zawiera wszystkie razem, czyli jeżeli istnieją punkty niewspółlinjowe X, Y, Z takie, że wszystkie punkty dane należą do XYZ“. Por. **P 21**.

P 39. — *Tr.* „Cztery punkty napewno są współpłaszczyznowe, jeżeli się zdarzy, że trzy z nich są *współlinjowe*, albo że dwa z nich pokrywają się. Jeżeli zaś nie są współpłaszczyznowe, wtedy każdy z nich będzie wyłączony z płaszczyzny trzech innych“. Por. **P 22**. Istnienie punktów niewspółpłaszczyznowych zostanie ustalone później. Patrz **§ 2 P 16**.

P 40. — *Df.* „«*Koło*» jest to klasa punktów, które leżą na kuli i jednocześnie na płaszczyźnie, zawierającej środek tej kuli. Środek kuli jest też «*środkiem* koła», a płaszczyzna jest «płaszczyzną koła»“. — Np. na płaszczyźnie trzech punktów niewspółlinjowych A, B, C klasa punktów oddalonych od A jak B, jest kołem, a mianowicie przecięciem płaszczyzny ABC z kulą B_A. — O ile to nie będzie prowadziło do dwuznaczności, będziemy oznaczali *koła* temi samemi symbolami, co i kule: B_A, C_A i t. d.; tak więc w przykładzie powyższym, jeżeli mowa o figurach położonych na płaszczyźnie ABC (jak to się często zdarza), można «koło przez B o środku A» stale oznaczać przez «B_A».

POSTULAT XII.

P 41. — *Na prostej, łączącej dwa punkty nie pokrywające się A i B, istnieje taki punkt M, dla którego kula przez A dokoła M przechodzi przez B.* — Albo w innej postaci: „Dla każdej pary punktów A i B, różnych od siebie, istnieje punkt jednakowo oddalony od A i B, mający jeszcze tę własność, że żaden punkt, różny od niego, nie jest tak oddalony od A i od B, jak tamten“.

P 42. — *Tr.* „Taki punkt M jest różny i od A i od B, a dwa takie punkty M nie mogą współistnieć, o ile się nie pokrywają“. [Istotnie, gdyby punkt M pokrywał A, wówczas punkt B nie mógłby leżeć na kuli A_M (**P 9**); gdyby punkt M pokrywał B, wtedy kula A_M, jako przechodząca przez B, zawierałaby M (**P 3**), co być nie może (**P 8**), ponieważ punkt B

(a tym samym i M) jest różny od A. Gdyby dalej istniał na AB punkt N różny od M, ale taki, że punkt B należałby do kuli A_N, wtedy punkt B byłby wspólny obu kulom A_M i A_N, punkt zaś A leżałby na prostej MN (**P 12**, **19**): dwa fakty sprzeczne, ponieważ drugi z nich stwierdza (**P 11**), że kule A_M i A_N nie spotykają się po za A].

P 43. — *Df.* „Jeżeli A, B są punktami i punkt A jest różny od B, wtedy nazywa się «punktem *środkowym* (albo *środkiem*) pary A, B», lub też «punktem środkowym pomiędzy A i B» ten punkt łączącej A z B, — np. niech to będzie punkt M — co do którego się okaże, że kula przez A o środku M przechodzi i przez B: a więc ten punkt prostej AB, od którego punkty A i B są jednakowo oddalone“. (Że punkt taki istnieje, i że jest tylko jeden, to było już powiedziane w **P 41**, **42**). „Jeżeli natomiast punkty A i B zlewają się w jeden, wtedy ten jeden punkt jest zarazem «punktem środkowym albo środkiem figury (A, B)». Tak w jednym, jak i w drugim przypadku, punkt środkowy pary (A, B) oznaczamy przez «$A\,|\,B$»“. — Zauważmy, że ten sam punkt jest środkiem obu par, (A, B) i (B, A), czyli że $B\,|\,A = A\,|\,B$. I t. d.

POSTULAT XIII.

P 44. — *Jeżeli A, B są punktami i punkt A jest różny od B, wtedy kula przez B o środku A, oraz łącząca A z B, spotykają się jeszcze w jednym punkcie, różnym od B, ale nie mogą się przecinać w większej liczbie punktów różnych od siebie i różnych od B.* — To znaczy: „Jeżeli, i t. d., wtedy istnieje na kuli B_A *jedyny* punkt S różny od B, i taki, iż kule B_A i S_B nie spotykają się w innych punktach, jak tylko w S“. Albo inaczej mówiąc: „Jeżeli punkty A i B nie pokrywają się, wtedy istnieje *jedyny* punkt, różny od B, ale tak oddalony od A, jak B i spełniający warunek, że żaden punkt różny od tamtego, nie jest tak oddalony od A i od B jak on“. — Że punkt B należy tak do jednej, jak i do drugiej figury, o tym już wiemy z **P 6** i **P 12**; ale w **P 44** utrzymujemy, że przecięcie AB z B_A nie ogranicza się do tego punktu, ale raczej składa się z dwuch punktów, z których jeden jest B, drugi zaś różny od B (i nie może pokrywać się z A, wobec **P 8**).

P 45. — „W tym samym założeniu wyrażenie «*równoodwrotny*, albo *symetryczny do B względem A*» ma oznaczać ten punkt różny od B, który leży jednocześnie na kuli przez B dokoła A i na łączącej A z B (patrz **P 44**). Ale jeżeli (wbrew powyższemu założeniu) punkty A i B pokrywają się, wtedy to samo wyrażenie oznaczać będzie punkt A,

i w obu przypadkach symbol «B/A» zastępować będzie wyrażenie «symetryczny do B względem A»". — Zauważmy, że jeżeli M jest środkiem pary punktów A, B, wtedy każdy z tych punktów A i B jest symetryczny do drugiego względem M (A i B są to punkty symetryczne do siebie względem M); i że odwrotnie, z $B' \equiv B/A$ wynika $A = B\ B'$, a zatym $B = B'/A$; patrz **P 43**. — „Przy jakimkolwiek punkcie danym A, powyższa zależność wzajemna, albo odpowiedniość, zachodząca między każdym punktem i punktem do niego symetrycznym względem A, nazywa się «*symetrją* względem A», albo «*równoodwrotnością* względem A» (A jest *środkiem* symetrji). «Symetrja względem punktu», albo «równoodwrotność», będzie nazwą ogólną każdej takiej odpowiedniości. Symetrja względem A może być oznaczona symbolem «$/A$» i stanowi odwzorowanie doskonałe klasy «punkt» na sobie samej; jest więc przekształceniem jednoznacznym punktów na punkty, ponadto przekształceniem przemiennym albo wzajemnym, i wreszcie inwolucyjnym [1]). — Z **P 44** wynika jeszcze fakt, że żaden punkt różny od A nie jest symetryczny do siebie samego, czyli, że ze względu na równoodwrotność, żaden punkt różny od środka nie jest «*podwójnym (tautologicznym)*».

P 46. — *Tr.* „Jakikolwiek będzie punkt A, równoodwrotność względem A zamienia zawsze kulę, opisaną dokoła A jako środka, na siebie samą, to jest: zamienia jej punkty na punkty tej samej kuli; inaczej mówiąc: jeżeli B i C są punktami i C leży na kuli B_A, wtedy ta kula przechodzi również przez punkty B/A i C/A. I podobnie każda $\left.\begin{matrix}\text{prosta}\\ \text{płaszczyzna}\end{matrix}\right\}$, przechodząca przez A, jest figurą «symetryczną do siebie samej» (albo «autosymetryczną») względem A". [Tak wypada z **P 45**, **I7**, **36** i t. d.].

POSTULAT XIV.

P 47. — *Jeżeli A, B, C, są punktami niewspółlinjowemi, wtedy kule C_A, C_B i płaszczyzna ABC spotykają się jeszcze w jednym punkcie różnym od C, ale nie mogą się przeciąć w kilku punktach różnych od siebie i od C.* — Albo też: „Jeżeli na tej samej płaszczyźnie dwa koła, mające środki różne, spotykają się po za linją środków, wówczas mają *dwa* i tylko dwa punkty wspólne, różne od siebie. Patrz **P 40**". Por. EUKLIDES, ks. 3-a, pod. X. — Możemy też, stosownie do upodobania, przyjąć jeden lub drugi z następujących sposobów mówienia: „Na płaszczyźnie

[1]) Patrz przypisek IV w Dodatku.

punktów niewspółlinjowych A, B, C musi istnieć punkt, tak oddalony od A i od B jak punkt C, ale różny od C; ale każdy inny punkt płaszczyzny, jeżeli jest oddalony od A i od B jak C, pokrywa się z tamtym punktem, lub z punktem C". — „Przypuśćmy, że A, B, C są to punkty, i że punkt A jest różny od B; jeżeli jakiś punkt, różny od C, jest oddalony od A i od B jak C, wtedy istnieje *jedyny* punkt różny od C, który jest oddalony od A i od B jak C, i spełnia warunek, że żaden punkt różny od niego nie jest tak oddalony od A, B, C, jak ten punkt". Ten ostatni sposób mówienia ma tą zaletę, że wyłącza terminy niepierwotne: «prosta», «płaszczyzna», «kula», «współlinjowe» i t. d.

P 48. — *Tr.* „Jeżeli będą obrane dwa jakiekolwiek punkty D i E na prostej, łączącej A z B, i jeżeli te punkty D i E nie pokrywają się, wtedy zawsze para punktów wspólnych kulom C_D i C_E oraz płaszczyźnie ABC będzie musiała pokryć się z parą punktów wspólnych kulom C_A i C_B oraz płaszczyźnie ABC". [W rzeczy samej, oba koła, poprowadzone przez punkt C dokoła D i E na płaszczyźnie ABC (**P 40**) przejdą przez punkty wspólne kulom C_A i C_B oraz płaszczyźnie ABC, ponieważ przejdą przez nie kule C_D i C_E — dzięki $\left(\begin{smallmatrix}D, C\\ C, M\end{smallmatrix}\right)$ **P 16** i $\left(\begin{smallmatrix}E, C\\ C, M\end{smallmatrix}\right)$ **P 16** — nie będą zaś miały innych punktów wspólnych wskutek $\left(\begin{smallmatrix}D, E\\ A, B\end{smallmatrix}\right)$ **P 47**.].

P 49. — *Df.* „Niech będą znowu A i B punktami różnemi od siebie, C niech będzie punktem nie leżącym na łączącej A z B; przez «*symetryczny do C względem AB*» rozumieć będziemy ten punkt płaszczyzny ABC, który należy do obu kul C_A i C_B, ale jest różny od C. Jeżeli natomiast C jest punktem łączącej AB, wtedy jako «symetryczny do C względem AB», określamy sam punkt C. Tak określony punkt oznacza się symbolem «C/AB»". — **P 47**, **48** świadczą, że taki punkt istnieje, że jest tylko *jeden*, oraz, że nie jest związany z parą punktów A, B, lecz z ich łączącą AB. — Widoczne jest i tutaj, jak poprzednio, że jeżeli punkt C' jest symetryczny do C względem AB, wtedy ze swej strony punkt C jest symetryczny do C'. — Jeżeli tedy r jest prostą, a C punktem dowolnym, to już wiemy, co rozumieć należy przez punkt «*symetryczny do C względem r*». Nazwa ta oznacza punkt C, o ile ten punkt należy do r, jeżeli zaś nie należy, w takim razie ten punkt różny od C, który, stosownie do brzmienia **P 47**, **48**, jest wspólny dwom kulom przez C dokoła punktów A i B prostej r (zresztą dowolnych, byle różnych od siebie) i płaszczyźnie ABC". — „Jeżeli jest dana jakakolwiek prosta r, wtedy zależność, albo podporządkowanie, — które oznaczamy przez «$/r$» — zachodzące między każdym punktem i symetrycznym do niego względem r, otrzymuje nazwę «*symetrji względem r*», albo «*półobrotu dokoła r*» (r jest «*osią* symetrji»); a «sy-

metrja względem prostej», «symetrja osiowa», «*półobrót* dokoła osi», i t. d., będzie nazwą ogólną każdej takiej odpowiedniości". — «Symetrja względem *r*» (jeżeli *r* jest prostą) jest odwzorowaniem doskonałym klasy «punkt» na sobie samej, jest «przekształceniem jednoznacznym, wzajemnym i inwolucyjnym punktów na punkty», ponieważ podporządkowuje każdemu punktowi punkt, ale tylko jeden, w ten sposób, że każdy punkt dany jest zawsze symetryczny do pewnego punktu, ale nie do kilku punktów różnych; oprócz tego każdy punkt jest symetryczny do swego punktu symetrycznego. — Z **P 47** wynika jeszcze, — przy uwzględnieniu **P 23** — że wprawdzie przez symetrję, o której mowa, każdy punkt osi staje się *podwójnym (tautologicznym)*, czyli zamienia się na siebie samego (półobrót «pozostawia bez zmiany» każdy punkt osi), ale po za osią symetrji niema punktów podwójnych. [1]).

P 50. — *Tr.* „Symetrja względem osi musi zamieniać każdą kulę na siebie samą (przez zamianę jej punktów na punkty tejże kuli), jeżeli jej środek leży na osi, i każdą płaszczyznę na siebie samą, jeżeli ta płaszczyzna przechodzi przez oś." [Niech będzie A punkt dowolny osi r, C punkt nie leżący na tej osi i D punkt dowolny na kuli C_A: mówię, że punkt D/r, symetryczny do D względem r, leży na tej samej kuli. Istotnie, gdyby się zdarzyło, że punkt D byłby punktem wspólnym prostej i kuli, wtedy ów punkt D/r pokryłby się z punktem D na kuli (**P 49**). Jeżeli zaś D nie należy do r, wtedy jego punkt symetryczny musi leżeć na płaszczyźnie Dr, łączącej D z r, i na każdej kuli, mającej środek na r i przechodzącej przez D (**P 48, 49**): a więc także na kuli C_A. Dalsze dowodzenie pozostawiamy czytelnikowi].

P 51. — *Df.* „Jeżeli dane są trzy punkty niewspółlinjowe A, B, C, wtedy przez «*kład* płaszczyzny ABC na siebie samą, dokoła punktów A i B jako zawiasów» — albo «dokoła prostej AB jako trzpienia» rozumieć będziemy tę odpowiedniość wzajemną pomiędzy punktami płaszczyzny ABC (symetrja *płaszczyzny ABC z samą sobą*, względem prostej AB jako osi), która się wytwarza przez półobrót dokoła AB, podług **P 49**".

POSTULAT XV.

P 52. — *Jeżeli r jest prostą, a C punktem nie należącym do niej, i jeżeli dla dwuch punktów D i E sprawdza się, że E leży na kuli przez D dokoła C, wtedy punkt E/r należy koniecznie do kuli przez punkt D/r dokoła punktu C/r.* — Albo też: „Jeżeli dwa punkty są równooddalone od trzeciego, wtedy punkty symetryczne do nich względem dowolnej osi, są także równooddalone od punktu symetrycznego do punktu trzeciego". Patrz **P 50**. — Stąd wynika, że przy symetrji względem osi każda kula odwzorowuje się przez kulę i że środek jednej z nich ma za obraz środek drugiej; to znaczy, że jeżeli jakiekolwiek punkty są jednakowo oddalone od tego samego punktu C, (który może leżeć lub nie leżeć na osi symetrji) wtedy punkty do nich symetryczne są jednakowo oddalone od punktu, odpowiadającego punktowi C. — Ktoby chciał wyrugować z zasady powyższej (za pomocą poprzednich określeń) wszelki ślad wyrażeń gieometrycznych niepierwotnych, mógłby ją wyrazić np. pod taką postacią:

„Niech będą dane punkty A, B, C, D, E, przyczym punkt A jest różny od B, a punkty D, E są równooddalone od C: jeżeli trzy punkty C', D', E' są takie, że każda z trzech par (C, C'), (D, D'), (E, E') czyni zadość warunkowi: «punkt X' jest różny od X, ale jest oddalony od A i od B jak X i żaden punkt różny od X' nie jest tak oddalony od A, B, X jak X'»; albo też, jeżeli taki warunek sprawdza się tylko dla punktów C i C', D i D', zaś $E' = E$ i niema punktu różnego od E, który byłby oddalony od A i od B jak E: wówczas punkty D' i E' są jednakowo oddalone od punktu C'".

P 53. — *Tr.* „Przez symetrję względem osi punkty współlinjowe odwzorowują się zawsze w punktach również współlinjowych, co znaczy, że każda prosta odwzorowuje się na prostej; podobnie, punkty symetryczne do wszystkich punktów płaszczyzny tworzą płaszczyznę". [Niech będą A i B punktami danemi jakkolwiek, byle tylko nie pokrywającemi się; X niech będzie punktem dowolnym łączącej A z B; punkt $A' \equiv A/r$ (gdzie r jest prostą jakąkolwiek) jest różny od punktu $B' \equiv B/r$ (**P 47, 48, 49**). Mamy dowieść, że punkt $X' \equiv X/r$ musi leżeć na prostej $A'B'$. Istotnie, kule X_A i $X'_{A'}$ są symetryczne do siebie względem r (**P 52**), tak że każdy punkt jednej odwzorowuje się w punkcie drugiej, i odwrotnie, bez żadnego wyjątku ani ograniczenia; i to samo można powiedzieć o kulach X_B i $X'_{B'}$. Gdyby więc kule $X'_{A'}$ i $X'_{B'}$ miały jakikolwiek punkt wspólny, różny od X', — np. punkt Y' — wówczas kule X_A i X_B musiałyby się też przeciąć w punkcie różnym od X, mianowicie w punkcie symetrycznym do Y', co się nie zgadza z założeniem (**P 11**). Przeto X' należy do łączącej A' z B' (**tamże**). — Niech teraz C będzie punktem, nie należącym do łączącej A z B, i niech X oznacza jakikolwiek punkt płaszczyzny ABC; rozumując tak samo, jak poprzednio, i powołując się na **P 27**, dowodzimy, że punkt X' musi leżeć na płaszczyźnie $A'B'C'$. Tak

[1]) Patrz przypisek IV w Dodatku.

więc zarówno dwie proste AB i $A'B'$, jak i dwie płaszczyzny ABC i $A'B'C'$ są to figury symetryczne do siebie względem osi r; i t. d.].

P 54. — *Tr.* „Jeżeli dwa punkty są symetryczne do siebie względem osi, wtedy ich punkt środkowy należy do tej osi. Każda prosta, symetryczna do samej siebie, przecina oś symetrji w jakimś punkcie (o ile nie pokrywa się z osią)". [Punkty dane niech będą C i D, a r niech będzie osią symetrji; można przyjąć, że C nie należy do r. Niech będzie $E \equiv C \mid D$ (**P 43**). Półobrót dokoła r zamienia punkty C i D jeden na drugi, przeto zamienia prostą CD na nią samą (**P 53, I2**); a więc punkt symetryczny do E względem r — niech to będzie punkt F — musi należeć do CD. Oprócz tego kuli C_E odpowiada kula D_F (**P 52**); a ponieważ C_E przechodzi przez D (**P 43**), przeto D_F przechodzi przez C. Wobec tego F jest punktem środkowym pomiędzy punktami D i C (**tamże**), wskutek czego F pokrywa się z E (**P 42**). Ale żaden punkt, leżący po za osią r, nie może pokryć się ze swoim punktem symetrycznym (**P 49**), a zatym E należy do r. — Dlatego też każda prosta s, która się zamienia na siebie samą przez półobrót dokoła r, ale nie pokrywa się z r, musi przeciąć r w jakimś punkcie, ze względu na to, że na s zawsze będzie jakiś punkt, nie leżący na r, a s pokrywa się z prostą, łączącą ten punkt z punktem symetrycznym do niego względem r (**P I9**)].

P 55. — *Tr.* „Jeżeli o trzech punktach niewspółlinjowych A, B, C wiemy, że C należy do kuli przez B o środku A, wtedy żaden punkt, różny od B i od C, nie może być wspólny dla kuli B_A i dla prostej BC". — Krótko mówiąc, prosta nie może spotkać kuli więcej niż w dwuch punktach różnych. Patrz **P 44**. [Zauważmy, że symetrja względem BC zamienia każdy punkt tej prostej na samego siebie; wskutek tego, rozpatrując (z uwzględnieniem **P 52**) kulę $B_{A'}$, którą półobrót dokoła prostej BC przeciwstawia kuli B_A (jeżeli A' jest punktem symetrycznym do A), musimy dojść do wniosku, że każdy punkt, wspólny kuli B_A i prostej BC musi także należeć do kuli $B_{A'}$. Z drugiej strony, punkty A i A' są od siebie różne (z założenia oraz z **P 47, 49**); nie może się też zdarzyć, żeby punkt B należał do łączącej AA' wobec tego, że punkt różny od B (a mianowicie punkt C) jest wspólny obu kulom B_A i $B_{A'}$. Przeto punkty A, B, A' nie są współlinjowe, a wskutek tego każdy punkt, wspólny prostej BC i kuli B_A, musi być wspólny kulom B_A, $B_{A'}$ i płaszczyźnie ABA', a więc wspólny dwom k o ł o m B_A i $B_{A'}$ leżącym na tej płaszczyźnie. Ale te koła, przechodzące przez B i przez C, nie spotykają się gdzieindziej (**P 47**), a więc żaden inny punkt nie jest wspólny tym figurom, c. b. d. d.].

§ II.

P r o s t o p a d ł o ś ć pomiędzy dwiema prostemi, albo między prostą i płaszczyzną, albo między dwiema płaszczyznami. Wprowadza się o b r ó t dokoła osi. S y m e t r j a względem płaszczyzny, albo o d z w i e r c i a d l e n i e. Różne własności, dotyczące prostych, płaszczyzn i kul.

P I. — *Tr.* „Jeżeli punkty A i B nie pokrywają się, wtedy dwa punkty symetryczne do siebie względem A i jednakowo oddalone od B są zawsze symetryczne do siebie względem łączącej A z B". [Niech te punkty będą C i C', i niech punkt C będzie różny od A, a tym samym różny i od C' (**P 44, 45 § I**). Wskutek założenia, że punkty te, tak jeden jak i drugi, należą do kul C_A, C_B i do prostej CA, punkt C nie może leżeć na łączącej A z B, punkt zaś C' musi leżeć na płaszczyźnie ABC (**P II, 28 § I**); skąd $C' = C/AB$ (**P 49 § I**).

P 2. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są punktami niewspółlinjowemi i jeżeli punkt symetryczny do C względem AB leży na prostej CA, wtedy punkt ten jest tożsamym z punktem symetrycznym do C względem A". [Niech będzie $C' \equiv C/AB$; punkt środkowy dla C i C' musi leżeć jednocześnie na AB i na CC' (**P 54, 43 § I**); ale $CC' = CA$, gdyż punkt C' podług założenia należy do CA, ale jest różny od C (**PI7, 22, 49 § I**); punkt ten pokrywa się przeto z A, ponieważ A jest jedynym punktem wspólnym dla prostych AB i CA; z drugiej strony fakt, że $A = C \mid C'$, obejmuje i ten fakt, że $C' = C/A$ (**P 45 § I**)].

Stąd, oraz z **P 53, 54 § I** otrzymujemy twierdzenie następujące:

P 3. — *Tr.* „Jeżeli punkty A, B, C nie są współlinjowe, wtedy którekolwiek dwa z warunków: 1) «punkt C/A należy do kuli C_B»; 2) «punkt C/AB leży na łączącej CA'»; 3) «punkty C/A i C/AB pokrywają się» — są zawsze zawarte w warunku pozostałym. Oprócz tego sprawdzenie się

któregokolwiek z nich powoduje samo przez się, że półobrót dokoła prostej AB zamienia łączącą AC na samą siebie — i odwrotnie".

P 4. — *Tr.* „Jeżeli w tym samym założeniu, przez półobrót dokoła AB prosta AC zamienia się na siebie samą, wtedy nawzajem prosta AB zamienia się na siebie samą przez półobrót dokoła AC". [Niech będzie $C' = C/A$, $B' = B/A$; dowiedziemy, że punkt B' nie różni się od punktu symetrycznego do B względem prostej CA — poczym wystarczy odwołać się do $\binom{B,\ C}{C,\ B}$ **P 3**. W rzeczy samej, oznaczając przez B'' i M punkty B/AC i BB'', wiemy z jednej strony, że M należy do AC (**P 54 § I**), z drugiej zaś, że półobrót dokoła AC pozostawia C' bez zmiany, a kule C_B i $C_{B''}$ zamienia jedną na drugą (**P 52 § I**); przeto punkt C', należący do C_B, musi też należeć do $C_{B''}$. Ale, ponieważ C' jest punktem wspólnym kul C_B i $C_{B''}$, a M leży na BB'', przeto C' należy do kuli C_M, podług $\binom{B,\ M,\ C}{A,\ C,\ M}$ **P 16 § I**. Tak więc M pokrywa się z punktem środkowym punktów C i C', a tym samym pokrywa się z A (**P 45 § I**); a zatym B'' jest punktem symetrycznym do B względem A, to znaczy $B'' = B'$, c. b. d. d.].

P 5. — *Df.* „Jeżeli r i s są to proste, wtedy przez powiedzenie «*r jest prostopadła do s*» — symbolicznie: «$r \perp s$» — wyrażamy, że prosta r jest symetryczna do samej siebie, albo autosymetryczna względem prostej s, ale nie pokrywa się z nią". — Patrz **P 49, 53 § I**. — Albo, innemi słowy: „Jeżeli s jest prostą, wtedy nazywać się będzie «*prostopadłą, ortogonalną* albo *normalną do s*» każda prosta (różna od s), która wskutek półobrotu dokoła s upadnie na samą siebie". — **P 54 § I** zawiera implicite twierdzenie, że jeżeli jedna prosta jest prostopadła do drugiej, wtedy obie te proste spotykają się w jakimś punkcie. Ale z **P 3** wypływa jeszcze, że jeżeli są dane dwie proste r, s, spotykające się w jakimś punkcie, — np. w A — wtedy dla upewnienia się, że jedna z tych prostych r jest prostopadła do drugiej s, wystarczy stwierdzić istnienie takiego punktu, który, leżąc na r, ale nie na s, tak jest oddalony od jakiegokolwiek punktu prostej s, ale różnego od A, jak punkt symetryczny do niego względem A. Albo też wystarczy stwierdzić istnienie na r takiego punktu, którego punkt symetryczny względem s pozostaje na r; lub takiego wreszcie, którego punkty symetryczne względem A i względem s pokrywają się.

P 6. — *Tr.* „Jeżeli jedna prosta jest prostopadła do drugiej, wtedy druga jest również prostopadła do pierwszej, czyli obie proste są «prostopadłe do siebie»". [Niech będzie prosta r prostopadła do prostej s, i A niech oznacza ich punkt wspólny (**P 5**). Na r istnieje napewno jakiś

punkt C, a na s jakiś punkt B, które oba są różne od A (**P 26 § I**); przeto $r = AC$, $s = AB$, a te trzy punkty A, B, C na pewno nie są współlinjowe, wobec tego, że prosta r jest różna od s. Ponieważ zaś przez półobrót dokoła AB prosta AC zamienia się na siebie samą (**P 5**), przeto pozostaje nam tylko powołać się na **P 4**].

P 7. — *Tr.* „Jeżeli proste r, s są do siebie prostopadłe, i jeżeli obierzemy na jednej z nich, — np. na r — jakikolwiek punkt C, byle tylko różny od ich punktu wspólnego A, wtedy: 1) Punkt symetryczny do C względem s będzie zawsze leżał na r i pokryje się z punktem symetrycznym do C względem A; 2) Punkty C i C/A będą jednakowo oddalone od każdego punktu prostej s". EUKL. ks. 3-a, pod III. [Punkt C/s musi leżeć na CA, ponieważ, stosownie do założenia, prosta CA jest symetryczna do siebie samej względem s. Obrawszy również na s dowolny punkt B, różny od A (i uwzględniwszy, jak poprzednio, że punkty A, B, C nie są współlinjowe), możemy się powołać na **P 4**; i t. d.].

P 8. — *Tr.* „Jeżeli znowu A, B, C są punktami niewspółlinjowemi, a prosta AC jest prostopadła do AB, wtedy nie może się zdarzyć, żeby kula przez A o środku B oraz prosta łącząca A z C spotkały się po za punktem A". EUKL., ks. 3-a, pod. XVI. [Gdyby istniał punkt, różny od A, ale podobnie jak A, wspólny dla A_B i AC, wtedy jego punkt symetryczny względem AB musiałby również należeć do tych obu figur, gdyż każda z nich zamienia się na siebie samą przez półobrót dokoła AB (**P 50 § I, P 5**). Istniałyby więc trzy punkty, wszystkie różne od siebie i wspólne dla prostej i kuli, co jest niemożliwe (**P 55 § I**)].

P 9. — *Tr.* „Jeżeli jest dana jakakolwiek prosta r i zewnątrz niej punkt C, wtedy można zawsze znaleźć na prostej taki punkt A, że prosta CA będzie prostopadła do r; ale nie mogą współistnieć na r dwa punkty A i B, różne od siebie i takie, żeby każda z dwuch prostych CA i BC była prostopadła do r". — Inaczej mówiąc: „Z punktu, leżącego zewnątrz prostej danej, można «spuścić» lub «poprowadzić» prostą do niej prostopadłą, ale nie więcej niż jedną". EUKL., ks. 1-a, pod. XII. [Weźmy punkt C' symetryczny do punktu C względem r, a następnie punkt środkowy pomiędzy C i C', który oznaczamy przez A. Punkt ten musi leżeć na r (**P 54 § I**), prosta zaś CA musi być prostopadła do r wskutek **P 4, 5**. Gdyby, dalej, istniał na r jakiś inny punkt B taki, że prosta CB byłaby również prostopadła do r, wtedy przez symetrję względem r każda z tych prostych CA i CB zamieniłaby się na siebie samą (**P 5**), a więc i punkt C, jako jedyny punkt wspólny tych dwuch prostych, również zamieniłby się

sam na siebie (**P19 § I** i t. d.). Ale punkt C, jako nie leżący na osi r, nie odzwierciadla się na sobie samym (**tamże**). Przeto taki punkt B nie istnieje].

P 10. — *Tr.* „Jeżeli są dane punkty niewspółlinjowe A, B, C tak, że łącząca A z C i kula przez A dokoła B — lub też łącząca A z B i kula przez A o środku C — nie spotykają się poza A, wtedy proste AB i AC są do siebie prostopadłe“: EUKL., ks. 3-a, pod XVIII. [Przypuśćmy, że prosta AC nie jest prostopadła do AB. W takim razie na AC istniałby punkt różny od A, np. D, taki, że prosta BD byłaby prostopadła do prostej AD (**P 9**); a więc prosta AD, po wykonaniu półobrotu dokoła BD, upadłaby na siebie samą (**P 6, 5**), punkt zaś A znalazłby się w punkcie napewno różnym od A, i punkt ten musiałby jednocześnie leżeć na prostej AD i na kuli A_B (**P 50 § I**, i t. d.), co jest sprzeczne z założeniem, ponieważ AD pokrywa się z prostą AC (**P 17 § I**). A więc $AC \perp AB$ i t. d.]. — Prowadzi to, w połączeniu z **P 8**, do twierdzenia następującego: „Ażeby prosta i kula, przechodzące przez jeden punkt *stykały się* (były do siebie *styczne) w tym punkcie* — to jest, ażeby się nie spotykały gdzieindziej — potrzeba i wystarcza, żeby ta prosta była prostopadła do łączącej punkt wspólny ze środkiem kuli“.

P 11. — *Tr.* „Jeżeli jest prawdą, że punkty A, B, C są niewspółlinjowe; że D jest punktem płaszczyzny ABC, nie leżącym zresztą na prostej AB i różnym od C; i że proste AC i AD są obie prostopadłe do AB, wtedy jest również prawdą, że punkty A, C, D są współlinjowe“. — Mamy tutaj twierdzenie, które tak się zwykle wyraża: „Do prostej danej z punktu na niej danego nie można p o p r o w a d z i ć na jednej i tej samej płaszczyźnie, przechodzącej przez tę prostą, d w u c h r ó ż n y c h prostopadłych“. [Niech będzie B' punktem symetrycznym do B względem A. Ponieważ prosta AC jest prostopadła do AB, przeto punkty B i B' są równooddalone od C (**P 7**); a ponieważ AD jest prostopadła do AB, przeto te same punkty są też równooddalone od D, a więc w rezultacie wspólne kulom B_C i B_D; tak więc B nie należy do CD (**P 11 § I**, i t. d.). Ale te punkty leżą oprócz tego na płaszczyźnie BCD, która się nie różni od płaszczyzny ABC (**P 28, 33 § I**): są więc symetryczne do siebie względem osi CD (**P49 § I**), przeto ich punkt środkowy A należy do CD, c. b. d. d.].

P 12. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są punktami niewspółlinjowemi i jeżeli istnieją takie kule, przechodzące przez A i B, że ich środki należą do płaszczyzny ABC, wówczas wszystkie te środki muszą być uszeregowane na prostej, prostopadłej do AB w punkcie środkowym punktów A i B“. [Istotnie, jeżeli M jest tym punktem środkowym i jeżeli D, E, F, ... są punktami płaszczyzny ABC, różnemi od M, a każdy z nich jest jednakowo oddalony od A i od B, wtedy proste MD, ME, MF, ..., które są wszystkie prostopadłe w punkcie M do AB (**P 5**), zlewają się w jedną wskutek **P 11**].

POSTULAT XVI.

P 13. — *Jeżeli A, B, C są punktami niewspółlinjowemi, wtedy istnieje przynajmniej jedna kula, która przechodzi przez A i przez B i której środek leży na płaszczyźnie ABC, ale nie leży na łączącej A z B.* — Albo, co jest to samo: „Dwa punkty dane jakkolwiek na płaszczyznie i różne od siebie, są zawsze równooddalone od jakiegoś punktu płaszczyzny, nie leżącego na ich łączącej“. Por. **P 41 § I**. — Albo, pod postacią p i e r w o t n ą (t. j. wolną od wszelkiego związku z określeniami poprzedzającemi): „Jeżeli A, B, C są punktami i punkt A jest różny od B i jeżeli jakiś punkt, różny od C, jest oddalony od A i od B jak C; w takim razie musi istnieć punkt, od którego punkt A tak jest oddalony, jak B, i który spełnia warunek, że jakiś punkt, różny od niego, tak jest oddalony od A i od B jak ten punkt, ale żaden punkt od niego różny nie jest oddalony od każdego z trzech punktów A, B, C jak ten punkt“. Por. **P 41 § I**.

P 14. — *Tr.* „W tym samym założeniu istnieje zawsze na płaszczyźnie ABC, ale zewnątrz prostej AB, taki punkt D, że prosta DA jest prostopadła do AB“. — Albo pod inną postacią: „Jeżeli dana jest jakakolwiek p ł a s z c z y z n a, na tej płaszczyźnie p r o s t a, a na tej prostej p u n k t, wtedy można zawsze w tej płaszczyźnie i z tego punktu (przez ten punkt) w y p r o w a d z i ć (albo w z n i e ś ć) prostą prostopadłą do prostej danej“. — EUKL., ks. 1-a, pod. XI. [Że nie można poprowadzić z A na płaszczyźnie ABC dwuch różnych prostopadłych do AB, to już wiemy z **P 11**. — Weźmy teraz pod uwagę punkt B', symetryczny do B względem A, a na danej płaszczyźnie ABC niech będzie D punkt równooddalony od B i B', ale różny od A (**P 13**): wtedy prosta AD będzie prostopadła do AB (**P 4, 5**)]. — Stąd — mając na uwadze **P 6, 7, 12** — można bezpośrednio wysnuć wniosek następujący:

P 15. — *Tr.* „M i e j s c e m g e o m e t r y c z n y m punktu równooddalonego od dwuch punktów danych (różnych od siebie) i leżącego na płaszczyźnie danej, przechodzącej przez te punkty, jest p r o s t a, a mianowicie prosta prostopadła do łączącej te punkty i przechodząca przez ich punkt środkowy“.

POSTULAT XVII.

P 16. — *Jeżeli A, B, C są punktami niewspółlinjowemi, to istnieje przynajmniej jeden taki punkt, że kule przez ten punkt dokoła A, B, C przecinają się jeszcze w jakimś punkcie, różnym od niego.* — Krótko mówiąc (**P 27 § I**): „Jeżeli dana jest jakakolwiek płaszczyzna, wtedy istnieje zawsze jakiś punkt, nie należący do niej". Por. **P 15 § I.** — Nie trudno wyrazić ten postulat językiem pierwotnym, przez «punkt» i «równoodległość»: „Jeżeli A, B, C są punktami, przyczym punkt A jest różny od B i jeżeli jakiś punkt różny od C jest oddalony od A i od B jak C: wtedy istnieją przynajmniej d w a punkty różne od siebie, z których każdy tak jest oddalony od A, od B i od C, jak drugi".

P 17. — *Tr.* „Jeżeli prosta jest do dwuch innych prostych, przecinających się, prostopadła w ich punkcie przecięcia, wówczas jest również prostopadła do każdej prostej, leżącej na ich płaszczyźnie i przechodzącej przez ich punkt wspólny". — EUKL., ks. 11-a, pod. IV. — [Niech będą A, B, C punktami niewspółlinjowemi. D punktem płaszczyzny ABC, niepokrywającym się z A, i M punktem nie leżącym na tej płaszczyźnie. Jeżeli się zdarzy, że każda z dwuch prostych AB, AC będzie prostopadła do łączącej A z M, to przekonamy się, że prosta AM będzie prostopadła do AD. Weźmy punkt $N \equiv M/A$. Ponieważ prosta MA jest prostopadła do AB, przeto punkty M, N są równooddalone od punktu B (**P 7**); a ponieważ ta prosta MA jest także prostopadła do AC, przeto te same punkty M, N są także równooddalone od punktu C; każdy z punktów A, B, C jest więc równooddalony od punktów M, N, a tym samym i punkt D, jako leżący na płaszczyźnie ABC (**P 32 § I**); mamy więc $AM \perp AD$ (**P 5**), c. b. d. d.].

P 18. — *Df.* „Prosta nazywa się «*prostopadłą* albo *normalną* d o p ł a s z c z y z n y», jeżeli jest prostopadła do wszystkich prostych, które ją przecinają i leżą na tej płaszczyźnie". — EUKL., ks. 11-a, okr. III. Dzięki temu określeniu można twierdzeniu poprzedzającemu nadać taką postać: „Jeżeli prosta jest do dwuch przecinających się prostych prostopadła w ich punkcie przecięcia, to jest także prostopadła do płaszczyzny, zawierającej te proste". Patrz **P 37 § I**. Jeżeli prosta jest prostopadła do płaszczyzny, to napewno spotyka płaszczyznę, ale nie może leżeć na niej. (**P 27, 36, 19, 21, 26 § I** i **P 11**).

P 19. — *Tr.* „Z punktu położonego zewnątrz płaszczyzny nie można poprowadzić dwuch prostych różnych od siebie, które byłyby prostopadłe do tej płaszczyzny". — Inaczej: „Jeżeli A, B, C, D są punktami niewspółlinjowemi, wtedy nie może się zdarzyć, żeby obie proste DA, DB były prostopadłe do płaszczyzny ABC". — EUKL., ks. 11-a, pod XIII. [Gdyby te proste obie były prostopadłe do płaszczyzny ABC, wówczas musiałyby być, tak jedna jak i druga, prostopadłe do łączącej A z B (**P 18**), co być nie może (**P 9**). Patrz **P 38, 30 § I**].

POSTULAT XVIII.

P 20. — *Każda kula przecina się z każdą prostą, zawierającą jej środek.* — Albo, co na jedno wyjdzie: „Jeżeli A, B, C są punktami niewspółlinjowemi, wtedy istnieje jakiś punkt wspólny dla kuli przez B dokoła A i dla łączącej A z C". — „Jeżeli A, B, C są punktami danemi i punkt A jest różny od B, i jeżeli istnieje punkt różny od C, który jest oddalony od A i od B jak C; wtedy musi istnieć punkt tak oddalony od A, jak B, i spełniający warunek, że żaden punkt od niego różny nie jest oddalony od A i od C jak ten punkt". — Na tej zasadzie, oraz ze względu na **P 44 § I**, mamy:

P 21. — *Tr.* „Każda kula i prosta, zawierająca jej środek, przecinają się w d w u c h p u n k t a c h r ó ż n y c h od siebie i symetrycznych względem środka".

P 22. — *Df.* „Jeżeli r jest prostą, wtedy przez wyrażenie ogólne «*o b r ó t d o k o ł a r*» rozumieć będziemy w y p a d k o w ą albo i l o c z y n p ó ł o b r o t ó w dokoła dwuch prostych różnych, które są obie prostopadłe do prostej r w tym samym punkcie (pozatym jednak są dowolne). «O s i ą o b r o t u» jest ta prosta r". Patrz **P 49 § I** i **P 5.** — Zauważmy, że każdy o b r ó t jest zawsze p r z e k s z t a ł c e n i e m j e d n o z n a c z n y m i w z a j e m n y m punktów na punkty, podobnie jak i półobrót, oraz, że jeżeli są dane osi u i v obu półobrotów s k ł a d o w y c h pewnego «o b r o t u d o k o ł a r» i jeżeli znany jest porządek, w jakim następują po sobie półobroty: wtedy obrót ten jest w zupełności wyznaczony; ale iloczyn z $/u$ przez $/v$ — czyli obrót, powstający przez wykonanie wpierw $/u$, a później $/v$ — jest w ogólności różny od iloczynu z $/v$ przez $/u$; oba zaś te działania złożone są w z a j e m n i e o d w r o t n e, jak widać z równania symbolicznego: $/u \,.\, /v \,.\, /v \,.\, /u = /u \,.\, \{/v^2\} \,.\, /u = /u \,.\, /u = 1$. Tak więc przekształcenie o d w r o t n e do jakiegokolwiek obrotu jest również obrotem. I t. d. [1].

[1]) Patrz uwagę IV w Dodatku.

P 23. — *Tr.* „Obrót dokoła osi, podobnie jak półobrót, podporządkowuje zawsze punktom równooddalonym od dowolnego punktu danego punkty, które są także równooddalone od jednego punktu, a więc przekształca kule na kule w ten sposób, że środki kul odpowiednich są punktami odpowiedniemi. Dlatego też punktom współlinjowym odpowiadają punkty współlinjowe, współpłaszczyznowym — współpłaszczyznowe, parom prostych prostopadłych znowuż pary prostych prostopadłych do siebie; i t. d. Oprócz tego obrót (podobnie jak półobrót) pozostawia bez zmiany każdy punkt osi, każdą zaś kulę, mającą środek na osi, zamienia na siebie samą". [Niech będą, jak poprzednio, u i v prostopadłe do prostej r w tym samym punkcie A i różne od siebie. Dla dowolnego punktu M znajdziemy najpierw punkt symetryczny względem u — niech to będzie np. punkt M' — następnie symetryczny do M' względem v, — który oznaczamy przez M''; ten punkt M'' jest właśnie obrazem punktu M, utworzonym przez obrót $/v \,./u$, będący iloczynem $/u$ przez $/v$. Otóż, jeżeli punkty $E, F, G, \ldots$ są równooddalone od punktu M, to podobnie i punkty $E', F', G', \ldots$ są równooddalone od M' (**P 47, 49 § I**); a z tego samego powodu punkty $E'', F'', G'', \ldots$ są też równooddalone od punktu M'', czyli przekształcenie rozpatrywane zamienia każdy punkt kuli E_M na punkt kuli $E''_{M''}$. Rozumując podobnie, jak w **P 53 § I**, łatwo stąd wyprowadzić wniosek, że każdej prostej odpowiada prosta, każdej płaszczyźnie — płaszczyzna, punktowi środkowemu każdej pary punktów — punkt środkowy odpowiedniej pary, a więc także (**P 5, 7** i t. d.) każdej parze prostych do siebie prostopadłych — para prostych również prostopadłych i t. d. — Dalej jeszcze, jeżeli B jest jakimkolwiek punktem osi obrotu r, wtedy punkt B', symetryczny do B względem u, pokrywa się z punktem B/A, ponieważ $r \perp v$; przeto również punkt B'/v (albo B'') pokrywa się z punktem B, wobec tego, że $r \perp v$; przeto punkt B jest tautologiczny. — Wreszcie każda kula, opisana dokoła B jako środka, musi przeciąć oś r w dwuch punktach (**P 21**); jednym z nich niech będzie np. C. Otóż, wskutek tego, co było powiedziane wyżej, kuli C_B odpowiada kula $C''_{B''}$, oprócz tego $B = B''$ i $C = C''$; przeto kula C_B zamienia się na siebie samą (**P 2, 3, 4 § I**) i t. d.].

P 24. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C, D są czterema punktami niewspółpłaszczyznowemi, proste AB i AC są prostopadłe do AD, a punkt C jest oddalony od A jak B, wtedy punkty B i C są równooddalone od D". [Niech będzie $E \equiv D/A$, $F \equiv B\,|\,C$. Punkt F jest różny od A, ponieważ punkty A, B, C nie są współlinjowe (**P 39 § I** i t. d.); prosta BC jest prostopadła do prostej FA (**P 3, 5**), a punkty B i C są do siebie symetryczne względem FA. Oprócz tego prosta DA, prostopadła podług założenia do obu prostych AB, AC, jest również prostopadła do FA (**P 18** i t. d.); zatym punkty, symetryczne do punktu D względem A i względem prostych AB, FA, zlewają się w jeden punkt E (**P 7**). Stąd wypada, że półobrót dokoła AB pozostawia B bez zmiany i przenosi D na E, odzwierciadlając B_D na B_E (**P 52 § I**), gdy tymczasem półobrót dokoła AF przenosi B na C, a E na D, odzwierciadlając B_E na C_D. Tak więc działanie, czyli przekształcenie, złożone z tych dwuch półobrotów — albo też wypadkowa lub iloczyn z $/AB$ przez $/AF$ — odwzorowuje punkt po punkcie kulę B_D na kuli C_D. Z drugiej strony obrót ten powinien zamieniać kulę B_D na siebie samą (**P 22, 23**); a stąd wnosimy, że obie kule zlewają się w jedną. Istotnie więc C należy do B_D, c. b. d. d.].

P 25. — *Tr.* „Niech będą znowu A, B, C, D punktami niewspółpłaszczyznowemi; jeżeli prosta BA jest prostopadła do obu prostych AC, AD, a prosta AC prostopadła do CD: wtedy prosta CD jest prostopadła do BC, a więc prostopadła do płaszczyzny ABC". Patrz **P 18**. — Jest to «twierdzenie o trzech prostopadłych», którego się dowodzi jak w książce: LEGENDRE, *Éléments de Géométrie*, ks. 5-a, pod. IV. [Niech będzie $E \equiv D/C$; ponieważ $CD \perp CA$, przeto punkty D, E są równooddalone od A (**P 3, 5**); a ponieważ prosta BA jest prostopadła do każdej z prostych AC, AD, a tym samym prostopadła do AE (**P 17**), przeto możemy stwierdzić, powołując się na $\binom{D, E, B}{B, C, D}$ **P 24**, że punkty D i E są równooddalone od B; przeto $CA \perp CB$ (**P 3, 5**) i t. d.].

P 26. — *Tr.* „Z punktu danego zewnątrz płaszczyzny można zawsze poprowadzić prostą prostopadłą do tej płaszczyzny". — EUKL., ks. 11-a, pod. XI. [Punkt dany niech będzie D. Na płaszczyźnie danej istnieją napewno trzy punkty niewspółlinjowe ABC (**P 27 § I**), a na łączącej A z B leży bez wątpienia taki punkt, — np. A — że prosta DA jest prostopadła do AB (**P 9**). Oprócz tego musi istnieć na płaszczyźnie ABC, ale zewnątrz prostej AB, taki punkt, — niech to będzie punkt C — że $CA \perp AB$ (**P 14**). Jeżeli teraz prosta AD okaże się prostopadłą do AC, wtedy ona właśnie będzie prostopadłą do płaszczyzny danej; ale jeżeli tak nie jest, to można znaleźć na prostej CA jakiś punkt różny od A — niech to będzie np. punkt C — dla którego $DC \perp CA$ (**P 9**); a wtedy **P 25** upewnia nas, że taka prosta DC jest bez wątpienia prostopadła do ABC. I t. d.].

P 27. — *Tr.* „Jeżeli punkty A, B, C, D są niewspółpłaszczyznowe, wtedy istnieje zawsze przynajmniej jeden taki obrót dokoła prostej AB, przez który punkt C odwzorowuje się w jakimś punkcie płaszczyzny ABD". Patrz **P 22**. — [Można przyjąć, że A jest tym punktem prostej

AB, dla którego $CA \perp AB$ (**P 9**), i że AD jest prostopadłą, poprowadzoną z A do AB na płaszczyźnie ABD (**P 11, 14**). Ta prosta przecina napewno kulę C_A (**P 20**); niech będzie E jednym z punktów przecięcia. Oznaczmy wreszcie przez F punkt $C\,|\,E$, który jest napewno różny od A. Otóż, ponieważ założyliśmy, że prosta BA jest prostopadła do każdej z prostych AC, AE, przeto jest ona również prostopadła do łączącej A z F (**P 17**), a punkty C i E są symetryczne do siebie względem tejże prostej FA, wskutek czego oba półobroty dokoła AC i AF, wykonane w tym właśnie porządku, składają się na obrót dokoła prostej AB jako osi; wskutek tego obrotu punkt C zostaje przeniesiony do E, a więc na płaszczyznę ABD].

P 28. — *Tr.* „Z punktu, danego na płaszczyźnie, można zawsze poprowadzić prostą, prostopadłą do tej płaszczyzny". — EUKL., ks. 11-a, pod. XII. [Niech będzie dana płaszczyzna σ i punkt A, leżący na tej płaszczyźnie; chcemy znaleźć prostą, przechodzącą przez A i prostopadłą do σ. Obierzmy na tej płaszczyźnie dowolny punkt B, byleby tylko różny od A. (Nie można zaprzeczyć istnieniu różnych punktów płaszczyzny, zważywszy, że np. sąd: «σ jest płaszczyzną» nie różni się od sądu: «istnieją trzy punkty niewspółlinjowe A, B, C, a $\sigma \equiv ABC$», por. **P 26 § I**). Istnieje napewno punkt, nie leżący na σ (**P 16**), a zatym istnieje także płaszczyzna — nazwijmy ją τ — różna od σ i zawierająca prostą AB, podobnie jak σ. W tej drugiej płaszczyźnie poprowadźmy prostą AD prostopadłą do AB (**P 14**), a następnie poprowadźmy jeszcze na płaszczyźnie, zawierającej również tę prostą AD, ale nie pokrywającej się z τ, prostą AC prostopadłą do AD; w ten sposób prosta AD będzie prostopadła do obu prostych AB, AC. Gdyby punkt C, a tym samym i prosta AD upadła na σ, wtedy prosta AD byłaby szukaną prostopadłą; jeżeli zaś tak nie jest, to w każdym razie istnieje — na zasadzie **P 27** — taki obrót dokoła AB jako osi, wskutek którego C odwzorowuje się w jakimś punkcie płaszczyzny σ, i jeżeli oznaczymy przez C' i D' obrazy, które tak wykonany obrót podporządkowuje punktom C i D, wtedy prosta AD' będzie prostopadła zarówno do prostej AB jak i do prostej AC' (**P 23**), a więc także do płaszczyzny σ, zawierającej obie te proste].

POSTULAT XIX.

P 29. — *Jeżeli kule przez punkt D dokoła trzech punktów niewspółlinjowych spotykają się jeszcze w punkcie różnym od niego, np. w E, wtedy nie mogą się przecinać gdzieindziej, czyli nie mają żadnego punktu wspólnego, różnego od D i od E.* — Albo inaczej mówiąc: „Jeżeli A, B, C, D, E są punktami, przyczym A nie pokrywa się z B, ani D z E i jeżeli punkt E jest oddalony od każdego z punktów A, B, C tak, jak D, a jakiś punkt różny od C tak jest oddalony od A i od B, jak C; wtedy każdy punkt, który jest oddalony od każdego z punktów A, B, C jak D, pokrywa się albo z D albo z E". — Stąd wyprowadzimy wniosek, że jeżeli środki trzech kul danych nie są punktami współlinjowemi, to albo niema żadnego punktu, wspólnego tym wszystkim trzem kulom, albo też, że ich przecięcie skupia się w jednym punkcie, lub składa się z dwuch punktów różnych. — Będzie tu na miejscu uwaga, że podczas kiedy zasada XVII (**P 16**) przyznaje przestrzeni trzy wymiary (w zwykłym znaczeniu), to zasada XIX, którą teraz przyjęliśmy, wyłącza wymiar *czwarty*.

P 30. — *Tr.* „Jeżeli, w tym samym założeniu, na płaszczyźnie ABC leżą trzy punkty niewspółlinjowe H, I, L, wtedy para punktów wspólnych kulom D_H, D_I, D_L pokrywa się z parą D, E". [Wszystkie te trzy kule przechodzą istotnie przez D i przez E — na zasadzie $\binom{H,\ I}{D,\ M}$ **P 32 § I** — ale nie mają innych punktów wspólnych (**P 29**)].

P 31. — *Df.* „Jeżeli A, B, C są trzema punktami niewspółlinjowemi, a D jest punktem nie należącym do płaszczyzny A, B, C, wtedy wyrażenie: «*symetryczny do punktu D względem płaszczyzny $A\,B\,C$*» ma oznaczać ten punkt różny od D, który leży jednocześnie na trzech kulach D_A, D_B, D_C". Patrz **P 27 § I** i **P 29**. — Punkt taki — niech to będzie punkt E — napewno istnieje, a określenie jego jest jednoznaczne (**tamże**); punkt ten w rzeczywistości nie jest podporządkowany punktom A, B, C, lecz raczej płaszczyźnie $A\,B\,C$, ponieważ nie zmienia miejsca, jeżeli zamiast A, B, C obierzemy inne punkty płaszczyzny, jak np. H, I, L (**P 30**). — „Jeżeli natomiast D należy do płaszczyzny ABC, wtedy nazwiemy punktem *symetrycznym* do D względem płaszczyzny ABC ten sam punkt D. W obu przypadkach oznaczać będziemy punkt tak określony przez «D/ABC»". — Ostatecznie więc, jeżeli jest dana płaszczyzna π i punkt jakikolwiek D, wtedy punkt «D/π» będzie punktem D, o ile D leży na π; jeżeli zaś D nie leży na π, wówczas będzie to ten punkt różny od D, który — stosownie do **P 27 § I**, **P 29** i **30** — jest wspólny wszystkim kulom przez D dokoła trzech punktów niewspółlinjowych płaszczyzny π (wszystko jedno których), a więc wspólny wszystkim kulom, które przechodzą przez D i których środki leżą na π. — Stąd wynika, że jeżeli punkt E jest symetryczny do punktu D (względem π), to punkt D jest ze swej strony symetryczny do E. — „Zależność albo odpowiedniość, która się wyraża słowami: «symetryczny względem π» i oznacza się przez «$/\pi$»

(gdzie π jest płaszczyzną), a która występuje pomiędzy każdym punktem i punktem do niego symetrycznym, przyjmuje nazwę «symetrji względem π», albo «*odzwierciadlenia w płaszczyźnie* π» (lub «za pomocą π»), która w takim związku nazywa się płaszczyzną *symetrji*. Tak więc «symetrja względem płaszczyzny», «symetrja płaszczyznowa», «odzwierciadlenie» i t. d., są to nazwy ogólne takiej odpowiedniości".

Niektóre objawy, zaznaczone już powyżej w stosunku do symetrji względem punktu i względem osi (**P 45, 49 § I**), powtarzają się i tutaj. Tak więc «symetrja względem płaszczyzny π» jest odwzorowaniem doskonałym «przestrzeni» na sobie samej; jest przekształceniem jednoznacznym, wzajemnym i inwolucyjnym «punktów na punkty», jak i każda symetrja środkowa albo osiowa. — Zauważmy jeszcze, że z wyjątkiem punktów płaszczyzny symetrji π (z których każdy pokrywa się ze swoim własnym obrazem) żaden inny punkt nie jest tautologiczny w stosunku do $/\pi$: to znaczy, że każdy punkt, nie należący do tej płaszczyzny, jest różny od swego punktu symetrycznego. I t. d. [1]).

P 32. — *Tr.* „Za pomocą symetrji względem płaszczyzny każda kula, której środek leży na płaszczyźnie symetrji, odzwierciadla się, punkt po punkcie, na sobie samej; podobnie każda prosta prostopadła do płaszczyzny symetrji jest tautologiczna". [Część pierwsza wynika bezpośrednio z tego, co już było mówione (**P 29, 30, 31**); druga wypływa z **P 3, 5, 18**, za pomocą których się dowodzi, że na prostej, prostopadłej do płaszczyzny symetrji, dwa punkty symetryczne względem spodka są zawsze równooddalone od każdego punktu płaszczyzny].

P 33. — *Tr.* „Z punktu danego na płaszczyźnie nie można poprowadzić dwuch prostych różnych, które obie byłyby prostopadłe do tej płaszczyzny". EUKL., ks. 11-a, pod. XIII. — Albo też, co na jedno wychodzi (**P 17, 18**): „Niech będą A, B, C punktami niewspółlinjowemi, a E, F punktami nie leżącymi na płaszczyźnie ABC; jeżeli punkty A, E, F nie są współlinjowe, wtedy nie może się zdarzyć, żeby zarówno prosta AE jak i prosta AF były prostopadłe do każdej z prostych AB, AC". [Jeżeli to możliwe, niech będzie każda z dwuch prostych AE, AF prostopadła do każdej z prostych AB, AC, a kula przez B o środku A niech przecina łączącą A z C w punktach C i C' (**P 21**). Wypadłoby stąd, że punkty B, C, C', jako równooddalone od A, byłyby także równooddalone od E —

[1]) Patrz uwagę IV w Dodatku.

wskutek $\left(\frac{E}{D}\right)$ **P 24** — i z tego samego powodu, byłyby równooddalone od F; przeto kule przez punkt C dokoła trzech punktów niewspółlinjowych A, E, F przecinałyby się w punktach B i C', różnych od siebie i od C; a to jest sprzeczne z post. XIX (**P 29**). Nie jest przeto możliwe, żeby i t.d.].

P 34. — *Tr.* „Jeżeli prosta jest w jednym punkcie prostopadła do trzech innych prostych, które spotykają sie z nią w tym punkcie, wtedy te trzy proste leżą na jednej płaszczyźnie". — EUKL., ks. 11-a, pod. V. — Albo, innemi słowy: „niech będą A, B, C punktami niewspółlinjowemi, a E, F punktami, nie leżącemi na płaszczyźnie ABC i niewspółlinjowemi z A; jeżeli trzy proste AC, AE, AF są wszystkie jednocześnie prostopadłe do łączącej A z B, wtedy wszystkie trzy muszą leżeć na jednej płaszczyźnie". [Ponieważ prosta AB jest prostopadła do obu prostych AC, AE, przeto prosta, poprowadzona na płaszczyźnie ACE z punktu A prostopadle do AC (**P 11, 14**) — niech to będzie np. AH — jest jednocześnie prostopadła i do AB (**P 17**). Podobnie, prosta AB jest prostopadła do obu prostych AC, AF; jeżeli przeto poprowadzimy z punktu A prostopadłą do AC na płaszczyźnie ACF — niech to będzie np. prosta AK — to ta prosta będzie również prostopadła do AB. A więc proste AH i AK, ze względu na to, że każda z nich jest prostopadła do obu prostych AB i AC, muszą być obie prostopadłe do płaszczyzny ABC (**P 17, 18**), a tym samym zlewają się w jedną prostą (**P 33**); wskutek tego płaszczyzny ACH i ACK pokrywają się wzajemnie. Ale te płaszczyzny nie różnią się od płaszczyzn ACE, ACF (**P 33 § I**) — a więc i te zlewają się w jedną płaszczyznę, zawierającą jednocześnie proste AC, AE, AF (**P 28 § I**), c. b. d. d.].

P 35. — *Df.* „Płaszczyznę, która stosownie do **P 34** zawiera wszystkie proste prostopadłe do prostej danej w jednym jej punkcie, nazywać będziemy «płaszczyzną prostopadłą albo normalną do prostej w tym punkcie»". — Stąd, mając na względzie **P 18, 34**, odrazu dochodzimy do wniosku, że: „jeżeli prosta jest prostopadła do płaszczyzny, to i płaszczyzna jest prostopadła do prostej; i odwrotnie". Dalej ze względu na **P 15 § I, P 9, 14, 16**: „Jeżeli jest dana prosta i punkt jakikolwiek, który może leżeć na prostej, lub też zewnątrz niej; wtedy istnieje zawsze płaszczyzna (i tylko jedna), przechodząca przez punkt i prostopadła do prostej". — Półobrót (**P 5**) zamienia na siebie samą każdą prostą, a tym samym i każdą płaszczyznę, prostopadłą do osi. Ale z **P 23, 34** wynika jeszcze:

P 36. — *Tr.* „Każdy obrót zamienia na siebie samą każdą płaszczyznę prostopadłą do osi, a za pomocą półobrotów albo obrotów

prostych i płaszczyzn prostopadłych do siebie otrzymujemy znowu tylko proste i płaszczyzny prostopadłe".

P 37. — *Tr.* „Dwie płaszczyzny nie pokrywające się i mające punkt wspólny spotykają się wzdłuż prostej". [Dwie płaszczyzny niech będą ρ i σ; niech będzie A ich punktem wspólnym. Stosownie do **P 28** istnieją dwie proste r, s, z których jedna jest prostopadła do płaszczyzny ρ, druga do σ, w tym samym punkcie A; a więc prosta r jest prostopadła do wszystkich prostych płaszczyzny ρ, przechodzących przez A, i podobnie s do wszystkich prostych płaszczyzny σ, przechodzących przez A (**P 18**). Te dwie proste r, s są napewno różne od siebie, bo gdyby się pokrywały, wówczas musielibyśmy wnosić z **P 34**, że płaszczyzny ρ i σ również się pokrywają, a to jest przeciwne założeniu. Istnieje więc prosta t prostopadła w punkcie A do płaszczyzny prostych r, s (**P 37 § I, P 28**); otóż ta prosta t, ponieważ jest prostopadła do r (**P 18**), musi leżeć na płaszczyźnie ρ, która jest prostopadła w punkcie A do prostej r (**P 34, 35**); a ponieważ jest prostopadła do s, przeto leży również na płaszczyźnie σ, a więc ostatecznie jest wspólna obu płaszczyznom danym. Płaszczyzny te nie mogą się spotkać gdzieindziej, ponieważ, gdyby miały jakiś inny punkt wspólny po za tą prostą t, wówczas pokrywałyby się wzajemnie (**P 37 § I**)].

P 38. — *Tr.* „Miejscem każdego punktu równooddalonego od dwuch punktów danych A i B, nie pokrywających się z sobą, jest płaszczyzna prostopadła do łączącej punkty A i B w ich punkcie środkowym («płaszczyzna *biegunowa* punktów A i B»)". — Porównaj **P 15**. [Niech będzie $C \equiv A\,|\,B$, a γ niech będzie płaszczyzną prostopadłą do prostej AB w punkcie C. Chcemy dowieść, że każdy punkt płaszczyzny γ jest równooddalony od punktów A i B, i odwrotnie, że każdy punkt, który jest jednakowo oddalony od A i od B, leży na płaszczyźnie γ. Podług określenia punkt C jest jednakowo oddalony od A i od B (**P 41 § I**); otóż jeżeli X jest jakimkolwiek innym punktem płaszczyzny γ, wtedy prosta CX musi być prostopadła do AB (**P 17, 35**); wystarczy więc powołać się na **P 7**, ażeby dojść do wniosku, że punkty A i B są równooddalone od X. — Jeżeli teraz oznaczymy przez Y jakikolwiek punkt równooddalony od A i od B, ale różny od C, wtedy prosta CY, jako prostopadła do AB w punkcie C (**P 5**), będzie leżała całkowicie na płaszczyźnie γ (**P 34, 35**) i t. d.].

P 39. — *Tr.* „Wynika stąd, że jeżeli dwa punkty są symetryczne do siebie względem płaszczyzny (**P 31**), wtedy ich punkt środkowy leży na tej płaszczyźnie, a płaszczyzna jest prostopadła do ich łączącej".

P 40. — *Tr.* „Kule przez jakikolwiek punkt dokoła punktów niewspółpłaszczyznowych, nie mają punktów wspólnych oprócz tego punktu". Inaczej mówiąc: „Jeżeli A, B, C, D są punktami niewspółpłaszczyznowemi, a M punktem jakimkolwiek, wtedy kule M_A, M_B, M_C, M_D nie spotykają się poza M". [Ponieważ gdyby miały jeszcze jakiś punkt wspólny różny od M, — np. punkt N — wtedy punkty dane, jako równooddalone od M i od N, musiałyby leżeć wszystkie cztery na jednej płaszczyźnie (**P 38**). I t. d.].

P 41. — *Tr.* „Jeżeli dwa punkty są równooddalone od trzeciego punktu, wtedy ich punkty symetryczne względem dowolnej płaszczyzny są również jednakowo oddalone od punktu symetrycznego do tego trzeciego punktu". — Innemi słowy: „Wskutek symetrji względem dowolnej płaszczyzny obraz każdej kuli jest kulą, a oba środki odpowiadają sobie wzajemnie". Por. **P 52 § I**. [A, B, C niech będą punktami, przyczym punkt C niech będzie oddalony od A jak B; chcemy dowieść, że kula przez punkt B/μ (gdzie μ oznacza płaszczyznę dowolną) dokoła punktu A/μ zawiera punkt C/μ. Niech będzie $A' \equiv A/\mu$, $B' \equiv B/\mu$, $C' \equiv C/\mu$, oraz $M \equiv A\,|\,A'$, $N \equiv B\,|\,B'$, $O \equiv C\,|\,C'$. Można przyjąć, że A nie należy do μ (**P 32**), a więc że punkt A' jest różny od A, a prosta AA' jest prostopadła do płaszczyzny μ w punkcie M (**P 39**). Kula B_A przecina tę prostą AA' w dwuch punktach (**P 21**), np. w D i E; ich punkty symetryczne względem μ niech będą D' i E'. Przypuśćmy najprzód, że C nie należy do AA' ani do μ, a więc punkt O jest różny od M, a C od C'; prosta zaś MO jest prostopadła do prostych AA' i CC' w punktach M i O (**P 39, 18, 6**). Punkty A i A' — a tym samym i punkty C i C', D i D' — są do siebie symetryczne względem prostej MO (**P 43, 49, 50 § I, P 5**), a zatym C' i D' są równooddalone od A' wskutek **P 52 § I**. Ale wniosek ten będzie prawdziwy i w założeniu, że punkt C należy do μ, jakkolwiek wtedy nie będzie prostej CC'. Przypuśćmy jeszcze, że C należy do AA', że więc pokrywa się z jednym z punktów D, E; wtedy C' pokrywa się z D' albo E'. Ale punkty D' i E' są także symetryczne do punktów D i E względem punktu M (**P 39**), a więc symetryczne względem każdej prostej leżącej na płaszczyźnie μ i przechodzącej przez M, wobec tego, że $AA' \perp \mu$, skąd wnosimy, że punkty C' i D' są równooddalone od A'. Biorąc teraz B i B' zamiast C i C', dowiedlibyśmy w taki sam sposób, że B' i D' są równooddalone od A'. Będziemy więc mieli jednocześnie, że C' jest oddalone od A' jak D' i D' od A' jak B', a więc C' od A' jak B' wskutek zasady V (**P 7 § I**).].

P 42. — *Tr.* Wskutek tego „te same fakty, które już zaznaczyliśmy w **P 53 § I** i **P 23** w stosunku do symetrji osiowej albo do pół-

obrotu i do obrotu (jako wnioski z zasady XV) istnieją również przy symetrji względem płaszczyzny, czyli przy odzwierciadlaniu przez płaszczyznę. Tak więc, jeżeli prosta jest prostopadła do płaszczyzny (**P 18, 35**), wtedy obrazy ich są również prostopadłe do siebie".

P 43. — *Tr.* Tym samym dowiedliśmy, że: „Każda para kul, symetrycznych do siebie względem płaszczyzny, stanowi też parę kul symetrycznych do siebie względem każdej prostej leżącej na tej płaszczyźnie i przechodzącej przez punkt środkowy środków tych kul. I odwrotnie: dwie kule symetryczne względem prostej są zawsze symetryczne względem płaszczyzny, przechodzącej przez tę prostą i prostopadłej do łączącej ich środki (albo też — jeżeli obie kule zlewają się z sobą — względem każdej płaszczyzny, która przechodzi przez ich wspólny środek; podług **P 50 § I** i **P 32**)".

P 44. — *Tr.* „Jeżeli dwa punkty są równooddalone od trzeciego punktu, wtedy ich punkty równoodwrotne, albo symetryczne względem dowolnego punktu, są jednakowo oddalone od punktu równoodwrotnego czyli symetrycznego do tego trzeciego punktu". Patrz **P 45 § I**. To znaczy: „Jeżeli trzy punkty A, B, C są takie, że punkt C jest oddalony od A jak B, i jeżeli A', B', C' są punktami do nich symetrycznemi względem dowolnie obranego punktu O, wtedy punkty B' i C' są równooddalone od punktu A'". Krótko mówiąc „równoodwrotność zamienia także kule na kule, a ich środki na środki". [Można przyjąć, że punkt A jest różny od M (**P 46 § I**), a wtedy prosta MA przetnie kulę B_A w dwuch punktach (**P 21**); niech to będą punkty D i E, a punkty D' i E' niech będą do nich symetryczne względem M. Jeżeli punkt C nie należy do łączącej A z M, to poprowadźmy przez M prostopadłą r do płaszczyzny ACM (**P 28, 33**); jeżeli zaś C pokrywa się z D lub z E, wtedy poprowadzimy zamiast r prostą prostopadłą do tej łączącej w punkcie M, co jest napewno możliwe, podług **P 14** (oraz ze względu na to, że istnienie płaszczyzny zawierającej oba punkty A i M nie ulega wątpliwości, stosownie do **P 15 § I**). Wtedy punkty A, A' — jak również punkty C i C', D i D' — będą symetryczne do siebie względem r (**P 54 § I, P 18, 6, 5** i t. d.). Wskutek tego, jeżeli C i D są równooddalone od A, to C' i D' muszą być równooddalone od A' (**P 52 § I**). Ale otrzymamy jeszcze wynik zupełnie podobny, jeżeli weźmiemy punkty B i B' zamiast C i C'; to znaczy, że punkty B' i D' są też równooddalone od A', skąd wnosimy, że punkty B' i C' są równooddalone od A' (**P 7 § I**)].

P 45. — *Tr.* Wypada stąd, że „wyniki **P 52 § I**, zaznaczone już w **P 53 § I P 23** i **42** w stosunku do symetrji względem prostej lub płaszczyzny i do obrotu dokoła osi, pozostają słuszne również dla symetrji środkowej czyli równoodwrotności". Na przykład: „Dla każdej z trzech symetrji obrazem pary prostych prostopadłych do siebie jest zawsze para prostych prostopadłych; a także «płaszczyzna i prosta» prostopadłe do siebie odwzorowują się zawsze na «prostą i płaszczyznę», które są prostopadłe do siebie".

P 46. — *Tr.* Oprócz tego: „każda para kul symetrycznych do siebie względem punktu stanowi także parę kul symetrycznych względem każdej prostej, przechodzącej przez ten punkt i prostopadłej do łączącej ich środki, a więc i względem płaszczyzny prostopadłej w tym punkcie do łączącej środki kul (**P 43**) (albo też — jeżeli obie kule zlewają się z sobą — względem każdej prostej lub płaszczyzny, przechodzącej przez wspólny środek kul; patrz **P 46, 50 § I, P 32**). I odwrotnie: dwie kule symetryczne względem osi są również symetryczne względem punktu środkowego ich środków (który to punkt należy do osi)".

P 47. — *Tr.* „Jeżeli dwie płaszczyzny przecinające się przetniemy trzecią i czwartą płaszczyzną, które obie są prostopadłe do prostej wspólnej dwom pierwszym, wtedy ich przecięcie z trzecią płaszczyzną będzie parą prostych, symetrycznych do przecięcia z płaszczyzną czwartą". Patrz **P 37**. — Albo inaczej: „Jeżeli A, B, C, D są punktami niewspółpłaszczyznowemi, a prosta AD jest prostopadła do płaszczyzny ABC, i jeżeli na płaszczyznach ABD, ACD poprowadzimy proste DE, DF, które obie są prostopadłe do AD, wtedy dwie pary prostych (AB, AC), (DF, DE) będą sobie odpowiadały przez symetrję względem osi". [Niech będzie $O \equiv A\ D$; poprowadźmy na płaszczyznach ABD, ACD proste OH, OK prostopadłe do AD (**P 39 § I, P 14**), przyczym punkty H i K uczyńmy równooddalonemi od O, obierając np. K na kuli przez H dokoła O (**P 20**). Wtedy, w założeniu, że $M \equiv H\ K$, symetrja względem prostej MO, prostopadłej do obu prostych AD, HK, zamieni punkty A i D jeden na drugi, a także H i K, a więc uczyni odpowiadającemi sobie płaszczyzny ABD, ACD (które się nie różnią od płaszczyzn ADH, ADK); prosta zaś DA zamieni się na siebie samą. Wskutek tego prosta BA — prostopadła w punkcie A do prostej AD na płaszczyźnie ABD — zamieni się na tę prostą w płaszczyźnie ACD, która jest prostopadła w punkcie D do prostej AD (**P 23, 14, 11**), czyli na prostą DF; w podobny sposób prosta AC zamienia się na prostą DE, c. b. d. d.],

P 48. — *Tr.* „Dwie proste prostopadłe, tak jedna jak i druga, do tej samej płaszczyzny, leżą na jednej płaszczyźnie, ale się nie spotykają". [Proste AC, DG niech będą obie prostopadłe do płaszczyzny μ w punktach A i D (nie pokrywających się wzajemnie); na płaszczyźnie ACD poprowadźmy prostą DF prostopadłą do łączącej A z D, a następnie na płaszczyźnie μ proste AB i DE, obie prostopadłe do tej samej prostej AD. Ponieważ prosta AC jest prostopadła do AB, przeto prosta DF musi być prostopadła do DE wskutek twierdzenia poprzedzającego (i **P 23**). Wobec tego prosta DF jest jednocześnie prostopadła do prostych AD i DE, a więc do płaszczyzny μ, tak samo jak prosta DG. Proste DF i DG zlewają się przeto w jedną (**P 33**), a proste AC i DG leżą obie na płaszczyźnie ACD. Z drugiej strony proste AC i DG nie mogą mieć punktu wspólnego ze względu na **P 19**]. — Stąd wynika odrazu twierdzenie następujące:

P 49. *Tr.* „Jeżeli z punktów tej samej prostej, leżącej na danej płaszczyznie, poprowadzimy proste prostopadłe do płaszczyzny, to wszystkie te prostopadłe będą leżały na jednej płaszczyźnie. Tak samo prostopadłe, poprowadzone do płaszczyzny z różnych punktów tej samej prostej — która nie leży na płaszczyźnie i nie jest do niej prostopadła — leżą wszystkie na jednej płaszczyźnie, a ich spodki leżą wszystkie na tej samej prostej".

P 50. — *Tr.* „Jeżeli płaszczyzna zawiera prostą prostopadłą do innej płaszczyzny, wówczas każda prosta, leżąca na pierwszej (lub na drugiej) z tych dwuch płaszczyzn i prostopadła do ich przecięcia, jest prostopadła do drugiej (lub do pierwszej) płaszczyzny". [Prosta r niech leży na płaszczyźnie ρ i niech będzie prostopadła do płaszczyzny σ w punkcie A. Obie płaszczyzny przetną się z pewnością wzdłuż jakiejś prostej t, przechodzącej przez punkt A (**P 18, 37**). Niech będzie B punktem dowolnym prostej t, a u, v niech będą prostemi prostopadłemi do prostej t w punkcie B i leżącemi na płaszyznach ρ i σ; dowiedziemy, że $u \perp \sigma$ i $v \perp \rho$. W rzeczy samej, prosta, poprowadzona przez B prostopadle do płaszczyzny σ, jest prostopadła do t i leży na płaszczyźnie Br, jeżeli punkt B jest różny od A (**P 37 § I**), albo też zlewa się z r, jeżeli $B = A$ (**P 33**); ta prosta leży więc na ρ (**P 37 § I**), a zatym pokrywa się z u (**P II**); tak więc $u \perp \sigma$. Ale stąd wynika również, że $u \perp v$, przeto prosta v jest prostopadła do każdej z prostych t, u, a więc i do płaszczyzny ρ].

P 51. — *Df.* „Mówimy, że płaszczyzna ρ jest «*prostopadła, ortogonalna* albo *normalna* do innej płaszczyzny σ wzdłuż prostej t tej płaszczyzny», jeżeli na ρ leżą wszystkie proste prostopadłe do σ w różnych punktach prostej t". Patrz **P 49**. — Jeżeli dana jest jakakolwiek płaszczyzna, a na niej jakakolwiek prosta, wtedy istnienie jednej płaszczyzny, ale tylko jednej, prostopadłej do płaszczyzny danej wzdłuż prostej danej, nie ulega wątpliwości wskutek **P 28, 49**. — Z **P 41, 50, 51** wiążą się fakty następujące:

P 52. — *Tr.* „Jeżeli płaszczyzna jest prostopadła do innej płaszczyzny, wtedy ta druga płaszczyzna jest też prostopadła do pierwszej".

P 53. — *Tr.* „Jeżeli dwie płaszczyzny są do siebie prostopadłe, wtedy każda prosta, poprowadzona w jednej z nich prostopadle do ich przecięcia, jest prostopadła do drugiej płaszczyzny". Por. EUKL., ks. 11-a, okr. IV.

P 54. — *Tr.* „Jeżeli prosta jest prostopadła do płaszczyzny, wtedy wszystkie płaszczyzny, które ją zawierają, są również prostopadłe do tej płaszczyzny". — EUKL., ks. 11-a, pod. XVIII. — I odwrotnie: „jeżeli dwie płaszczyzny są do siebie prostopadłe, wtedy każda prosta, prostopadła do jednej z nich, poprowadzona przez jakikolwiek punkt drugiej, leży całkowicie na tej drugiej płaszczyźnie". [Istotnie, ta prostopadła pokrywa się z prostą, poprowadzoną w drugiej płaszczyźnie przez ten sam punkt prostopadle do przecięcia obu płaszczyzn (**P 53, 19, 33**)].

P 55. — *Tr.* „Jeżeli każda z dwuch przecinających się płaszczyzn jest prostopadła do trzeciej płaszczyzny, wtedy ich prosta przecięcia jest również prostopadła do tej trzeciej płaszczyzny". — EUKL., ks. 11-a, pod. XIX. [Istotnie, jeżeli z punktu wspólnego dwom pierwszym płaszczyznom poprowadzimy prostą prostopadłą do płaszczyzny trzeciej, wówczas ta prostopadła musi leżeć na każdej z tych dwuch płaszczyzn (**P 54**)].

P 56. — *Tr.* „Z dwuch płaszczyzn prostopadłych do siebie każda jest symetryczna do siebie samej względem drugiej". (**P 31, 32, 51, 54**). — Odwrotnie: „Dwie płaszczyzny różne, z których każda odzwierciadla się w drugiej na siebie samą, są zawsze do siebie prostopadłe".

§ III.

Punkty leżące wewnątrz i zewnątrz kuli. Odcinki, promienie, półpłaszczyzny, kąty, trójkąty i t. d.

P 1. — *Tr.* „Jeżeli dwie kule mają punkt wspólny, który nie jest współlinjowy z ich środkami, wtedy kule przecinają się podług koła; płaszczyzna koła jest prostopadła do łączącej oba środki w punkcie, który jest środkiem tego koła". Patrz **P 40 § I.** — Inaczej mówiąc: „Jeżeli A, B, C są punktami niewspółlinjowemi, wtedy obie kule C_A i C_B spotykają się we wszystkich punktach koła, którego środkiem jest spodek prostopadłej, poprowadzonej z punktu C do łączącej A z B (na płaszczyźnie ABC), a podkładem [1]) płaszczyzna, prostopadła w tym punkcie do AB". [Niech będzie D tym punktem prostej AB, dla którego $CD \perp AB$ (**P 9 § II**); μ niech będzie płaszczyzną, prostopadłą w punkcie D do AB, a E punktem dowolnym koła przecięcia tej płaszczyzny z kulą C_D. Przedewszystkim dowiedziemy, że punkt taki jest zawsze wspólny obu kulom C_A i C_B. Można przyjąć, że punkt E jest różny od C. Na pewno istnieje taki obrót dokoła AB jako osi (lub półobrót, jeżeli $E = C/AB$), wskutek którego punkt C zostanie przeniesiony na płaszczyznę ABE (**P 27 § II** i t. d.). Otóż obraz C' punktu C, otrzymany przez takie odwzorowanie, musi leżeć: 1) na płaszczyźnie μ, — ponieważ ta płaszczyzna przekształca się, punkt po punkcie, na siebie samą przez obrót (lub półobrót), ze względu na **P 23 § II** — a zatym i na prostej DE, wspólnej obu płaszczyznom μ i ABE; oprócz tego musi on leżeć 2) na każdej z trzech kul C_A, C_B, C_D, ponieważ każda z nich zamienia się również na siebie samą. Przeto punkt C' pokrywa się z jednym z punktów wspólnych prostej DE i kuli C_D, to znaczy z E lub z E/D (**P 21 § II**); ale jeżeli pokryje się z E/D, wtedy

[1]) [Podkład = podłoże = sostegno = Träger, *przyp. tłom.*].

przez symetrję względem AB będzie przeniesiony do E, pozostając na kulach tautologicznych C_A i C_B (**P 50 § I**). Punkt E musi więc koniecznie należeć do obu tych kul. — Obierzmy teraz punkt F, różny od C i od C/AB, ale, podobnie jak i te dwa punkty, wspólny kulom C_A i C_B. Punkt taki nie leży na płaszczyźnie ABC (**P 47 § I**); ale jeżeli wykonamy obrót dokoła prostej AB w taki sposób, że punkt C zostanie przeniesiony na płaszczyznę ABF, wtedy nowy obraz punktu C będzie zawsze punktem wspólnym kulom tautologicznym C_A i C_B, a więc nie będzie różny od punktu F lub F/AB. Przeto prosta FD, jako obraz prostej CD, będzie również prostopadła do AB (**P 23 § II**), a przeto będzie musiała leżeć na płaszczyźnie CDE (**P 34, 35 § II**). Z drugiej strony każdy punkt wspólny kulom C_A i C_B musi leżeć na kuli C_D (**P 16 § I**), będzie więc wspólny figurom C_D i CDE. I t. d].

P 2. — *Tr.* „Jeżeli jedno koło jest wspólne różnym kulom, wtedy środki tych wszystkich kul będą współlinjowe". [Przypuśćmy, że koło $C_A \frown C_B$ twierdzenia poprzedzającego leży również i na kuli C_H. Gdyby środek H tej kuli nie leżał na AB, wtedy płaszczyzna ABH przecięłaby to koło w dwuch różnych punktach M, N (**P 47 § I**); a zatym kule M_A, M_B, M_H — które nie różnią się od kul C_A, C_B, C_H (**P 10 § I**) — przecięłyby się w punktach M, N, co jest niedorzecznością (**P 27 § I**)].

P 3. — *Tr.* „Jeżeli kula i płaszczyzna mają punkt wspólny, wtedy albo nie mają innych punktów wspólnych oprócz niego, albo przecinają się podług koła, którego środek leży na prostej, poprowadzonej przez środek kuli prostopadle do płaszczyzny". — Czytelnik sam się o tem przekona.

P 4. — *Df.* „Dla jakichkolwiek punktów A i B nazwa: «kula *biegunowa*, albo *polosfera* punktów A i B» — w skróceniu «Sfr (A, B)» — oznaczać będzie kulę przez A lub przez B, mającą za środek punkt środkowy punktów A, B. Te punkty A i B nazywać się będą «biegunami» kuli, albo punktami «średnicowo przeciwległemi». Patrz **P 41 — 43 § I.** Podobnie kula, która przechodzi przez koło dane i ma oprócz tego wspólny środek z tym kołem (**P 40 § I**), będzie «*kulą biegunową*» albo «*polosferą*» koła". — Zwróćmy uwagę na to, że jeżeli $M \equiv A\,|\,B$, wtedy będzie Sfr $(A, B) =$ Sfr $(B, A) = A_M = B_M$ i że jeżeli punkty A i B zlewają się w jeden punkt, wtedy kula biegunowa punktów A i B musi być skupiona w tym jednym punkcie. I t. d.

P 5. — *Df.* „«*Wewnętrznym* punktem kuli» nazywa się punkt środkowy każdej pary punktów leżących na kuli i różnych od siebie". —

Dzięki temu, jeżeli A i B są punktami, wtedy zdanie: «X jest punktem wewnętrznym kuli B_A» jest równoznaczne z sądem: „Na kuli B_A istnieją dwa punkty nie pokrywające się wzajemnie, dla których X jest punktem środkowym". — W przeciwieństwie do tego nazywać będziemy «punktem *zewnętrznym*» każdy punkt, dla którego nie istnieją na kuli dwa punkty, chociażby zlewające się z sobą, dla których ten punkt byłby punktem środkowym.

P 6. — *Tr.* „Każdy punkt, który nie należy do kuli, musi być wewnętrznym lub zewnętrznym, ale nie może być jednocześnie i jednym i drugim; punkty leżące na kuli nie są ani wewnętrzne, ani zewnętrzne. Środek kuli jest punktem wewnętrznym, o ile tylko ta kula nie skupia się jednym punkcie; i t. d." — [Że np. żaden punkt wewnętrzny kuli B_A nie może leżeć na B_A (jakiekolwiek zresztą byłyby punkty A i B), to wypada z **P 43, 42, 55 § I**; że zaś punkt A jest wewnętrzny dla B_A (jeżeli punkt A jest różny od B), o tym poucza nas **P 44 § I.** I t. d.].

P 7. — *Tr.* „Jeżeli A, B, X są punktami i punkt A jest różny od B, wtedy zdanie: «punkt X jest wewnętrzny dla B_A» jest równoznaczne ze stwierdzeniem jednego z dwuch faktów następujących: albo, że X pokrywa się ze środkiem kuli A, albo też, że płaszczyzna prostopadła w punkcie X do łączącej A z X spotyka kulę w punkcie różnym od X". Dlatego też równoznaczne sobie są następujące sądy: «Punkt X jest zewnętrzny dla B_A» i «X nie pokrywa się z A, a płaszczyzna prostopadła w punkcie X do łączącej A z X nie spotyka kuli». Patrz **P 6.** [Jeżeli punkt X jest różny od A, ale na kuli B_A istnieją punkty różne od siebie — np. B i C — takie, że $X = B\,C$, wtedy proste AX i BC są do siebie prostopadłe (**P 5 § II**), a płaszczyzna prostopadła w punkcie X do prostej AX zawiera BC (**P 34, 35 § II**) i t. d. — Patrz również **P 3**].

P 8. — *Tr.* „Stosownie do tego, czy X jest punktem wewnętrznym, czy zewnętrznym dla B_A, każdy punkt kuli X_A jest wewnętrznym lub zewnętrznym dla B_A". [Istotnie, obrawszy na kuli X_A punkt dowolny, ale różny od X — niech to będzie punkt Y — widzimy, że płaszczyzna biegunowa pary punktów (X, Y) przechodzi przez A (**P 38 § II**); jeżeli za pomocą tej płaszczyzny odzwierciadlimy punkty B i C, wtedy obrazy tych punktów będą również leżały na kuli B_A i będą symetryczne względem Y (**P 32, 41 § II**): a więc Y jest tak samo punktem wewnętrznym kuli B_A, jak i X. I t. d.].

P 9. — *Df.* „Punkty płaszczyzny nazywają się «*wewnętrznemi*» albo «*zewnętrznemi*» dla koła danego na tej płaszczyźnie, stosownie do tego, czy są wewnętrzne czy zewnętrzne dla kuli biegunowej tego koła". Patrz **P 4, 5.** — Wskutek tego, jeżeli płaszczyzna zawiera punkty A, B, X (punkt A różny od B), to X jest punktem wewnętrznym koła B_A tylko wtedy, jeżeli X pokrywa się z A, albo jeżeli prostopadła, poprowadzona z punktu X do łączącej A z X (na tej płaszczyźnie), spotyka koło w punkcie różnym od X (**P 20 § II** i **P 3, 7**).

P 10. — *Df.* „A, B, X niech będą punktami; mówimy, że «*X leży między A i B*», jeżeli punkt X jest współlinjowy z A i B i oprócz tego wewnętrzny dla kuli biegunowej punktów A i B. Patrz **P 4, 5.** — Przez «*odcinek*» rozumieć będziemy figurę złożoną z tych wszystkich punktów, które leżą między dwoma punktami danemi (*końcami* odcinka), albo pokrywają się z jednym lub z drugim z nich. Odcinek, mający za końce punkty A i B, oznaczać będziemy przez «AB», tak że $AB = BA$. Punkty, leżące między oboma końcami, nazywają się punktami *wewnętrznemi* odcinka". — Z tego samego powodu (i uwzględniając **P 4, 8**), mamy:

P 11. — *Tr.* „Pomiędzy punktami A i B nie leży ani A ani B, a jeżeli $A = B$, to nie leży między niemi żaden punkt; ale jeżeli punkt A jest różny od B, wtedy leży między niemi przynajmniej ich punkt środkowy. Punkty A i B należą zawsze do AB; ale jeżeli $A = B$ (to znaczy, jeżeli końce zlewają się z sobą), wtedy ta figura zawiera jeden tylko punkt. Jeżeli natomiast A i B są od siebie różne, wtedy odcinek AB nie jest niczym innym, jak miejscem tych wszystkich punktów łączącej A z B, z których wyprowadzone prostopadłe do AB spotykają wszystkie kulę biegunową punktów A i B".

POSTULAT XX.

P 12. — *Jeżeli trzy punkty A, B, C są takie, że C leży między A i B, wtedy nie może być, żeby punkt A leżał między A i C (ani też A między B i C).* Innemi słowy (**P 10**): „Jeżeli dane są na jednej prostej trzy punkty A, B, C różne od siebie i jeżeli płaszczyzna prostopadła do tej prostej w punkcie C spotyka kulę biegunową punktów A i B; wtedy nie może się zdarzyć, żeby płaszczyzna prostopadła w punkcie B spotykała kulę biegunową punktów A i C (ani też, żeby płaszczyzna prostopadła w punkcie A spotykała kulę biegunową punktów B i C). Patrz **P 35 § II**

i **P 4**". Przywracając temu postulatowi formę pierwotną (do której dochodzimy bez wielkiego trudu po przez szereg określeń poprzednich), otrzymamy go w takim brzmieniu: „Przypuściwszy: 1) że A, B, C, D, E są punktami, że punkt C jest różny od A i od B i że żaden punkt różny od C nie jest oddalony od A i od B jak C; 2) że punkt $\left.\begin{matrix} D \\ E \end{matrix}\right\}$ jest równooddalony od punktów $\left.\begin{matrix} A \text{ i } B \\ A \text{ i } C \end{matrix}\right\}$, ale żaden punkt różny od $\left.\begin{matrix} D \\ E \end{matrix}\right\}$ nie jest oddalony od każdego z punktów $\left.\begin{matrix} A \text{ i } B \\ A \text{ i } C \end{matrix}\right\}$ jak $\left.\begin{matrix} D \\ E \end{matrix}\right\}$: wtedy, jeżeli istnieją dwa punkty, z których każdy jest oddalony od A i od B jak drugi, a od D jak A, i które spełniają warunek, że żaden punkt różny od C nie jest oddalony od każdego z nich jak C; to nie mogą istnieć dwa punkty, z których każdy jest oddalony od B i od C jak drugi, a od E jak A, pod warunkiem, że żaden punkt różny od E nie jest oddalony od każdego z nich jak E". Ale inna jeszcze zasada występuje wraz z powyższą we wszystkich niemal własnościach odcinkowych, a mianowicie następujący:

POSTULAT XXI.

P 13. — *Jeżeli są dane punkty niewspółlinjowe A, B, C, wtedy każda prosta płaszczyzny ABC, przechodząca między punktami A i B, musi oprócz tego przechodzić między punktami A i C albo między punktami B i C, o ile nie zawiera żadnego z punktów A, B, C.* — Taki sam postulat podaje PASCH jako Grundsatz IV o «powierzchni płaskiej» [1]). Albo, pod postacią nieco odmienną: „Nie istnieje prosta, któraby leżała na płaszczyźnie trzech punktów niewspółlinjowych i któraby przecinała jeden tylko z trzech odcinków, ograniczonych temi punktami". — Fakty gieometryczne o charakterze pierwotnym, zawarte w powyższej zasadzie (po przekształceniu za pomocą długiego szeregu określeń) dadzą się ustalić w słowach następujących: „W założeniu: 1) że A, B, C, D, E, F są punktami, przyczym punkt A jest różny od B, i że istnieje punkt różny od C, oddalony od A i od B jak C; 2) że punkt $\left.\begin{matrix} D \\ E \\ F \end{matrix}\right\}$ jest równooddalony od punktów $\left.\begin{matrix} A \text{ i } B \\ B \text{ i } C \\ C \text{ i } A \end{matrix}\right\}$, ale żaden punkt różny od $\left.\begin{matrix} D \\ E \\ F \end{matrix}\right\}$ nie

[1]) *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882 (str. 21).

jest oddalony od każdego z tych punktów $\left.\begin{matrix} A \text{ i } B \\ B \text{ i } C \\ C \text{ i } A \end{matrix}\right\}$ tak, jak $\left.\begin{matrix} D \\ E \\ F \end{matrix}\right\}$; jeżeli co do dalszych punktów U, V, W wypadnie: 3) że żaden punkt różny od $\left.\begin{matrix} U \\ V \\ W \end{matrix}\right\}$ nie jest oddalony od każdego z punktów $\left.\begin{matrix} A \text{ i } B \\ B \text{ i } C \\ C \text{ i } A \end{matrix}\right\}$ tak, jak punkt $\left.\begin{matrix} U \\ V \\ W \end{matrix}\right\}$ i żaden punkt różny od W nie jest oddalony od U i od V, jak W; 4) że istnieją dwa punkty nie pokrywające się, z których każdy tak jest oddalony od A i od B, jak drugi, a od D jak A, i które spełniają warunek, że żaden punkt różny od U nie jest oddalony od każdego z nich jak U; wówczas ten warunek 4) albo się sprawdzi, jeżeli zamiast punktów A, B, D, U weźmiemy punkty B, C, E, V; albo też się sprawdzi, jeżeli zamiast nich przyjmiemy odpowiednio punkty C, A, F, W".

P 14. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są punktami współlinjowemi, wtedy nie istnieje punkt, któryby należał do jednego tylko z trzech odcinków $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$". [Odrzućmy przypuszczenie, że dwa z tych punktów pokrywają się wzajemnie. — A więc w założeniu, że wszystkie punkty A, B, C są różne od siebie, dowiedziemy, że jeżeli istnieje punkt D wewnętrzny dla odcinka $|AB|$, ale zewnętrzny dla $|AC|$, punkt ten będzie z konieczności wewnętrznym dla $|BC|$. Obierzmy zewnątrz prostej AB jakikolwiek punkt E, a na prostej BE punkt F, zewnętrzny dla odcinka $|BE|$ — a więc również dla prostej BA — np. punkt symetryczny do E względem B (który nie należy do $|BE|$ wobec tego, że $B \equiv |EF|$; patrz **P 45 § I**; **P 10, 11, 12**). Prosta DF, która przechodzi między punktami A i B, nie przechodząc między B i E, musi zawierać jakiś punkt wewnętrzny odcinka $|AE|$ (**P 13**); a ponieważ ta prosta przechodzi między punktami A i E, ale nie przechodzi między C i A, przeto przejdzie między C i E (**P 13**). A więc ta sama prosta DF, ponieważ przechodzi między punktami C i E, ale nie przechodzi między B i E, musi przejść między B i C (**P 13**), przez co stwierdzamy, że $D \equiv |BC|$, gdyż proste BA i DF nie mają żadnego innego punktu wspólnego].

P 15. — *Tr.* „W tym samym założeniu, będzie koniecznie albo punkt C należał do $|AB|$, albo B do $|AC|$, albo A do $|BC|$". — Czyli: „Z trzech punktów współlinjowych jeden przynajmniej leży na odcinku, ograniczonym dwoma punktami pozostałemi". [Podobnie jak poprzednio przyjmujemy, że punkty A, B, C są wszystkie od siebie różne, i dowiedziemy, że z założenia: «C nie należy do $|AB|$ ani też B do $|AC|$» wynika, że «A należy do $|BC|$».

Niech będzie D punktem leżącym zewnątrz prostej AB (**P 15 § I** i t. d.), a E punktem leżącym między B i D, jakim jest np. punkt BD (**P 11**). Punkt B jest zewnętrzny dla odcinka DE, wskutek $\binom{D, E}{A, C}$ **P 12**. Przeto prosta CE, przechodząca między punktami B i D, ale nie między B i A, przejdzie pomiędzy D i A (**P 13**), przecinając odcinek AD np. w punkcie F. A ponieważ punkty A, D, E nie są współlinjowe, a F leży między A i D, natomiast B nie leży między D i E, przeto prosta BF musi przechodzić między punktami A i E (**P 13**), przecinając odcinek AE np. w punkcie G. Dalej, ponieważ G leży między A i E, natomiast B nie leży między A i C, przeto punkt F musi leżeć pomiędzy C i E (**P 13**). Pozostaje więc już tylko zastosować **P 13** do punktów E, B, G i do prostej DA, żeby dojść do wniosku, że A leży między B i C, c. b. d. d.].

P 16. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są punktami niewspółlinjowemi, wtedy żadna prosta płaszczyzny ABC nie może przechodzić jednocześnie między B i C, między C i A i między A i B“. — Czyli: „trzy punkty A', B', C', z których każdy jest wewnętrznym odpowiednio dla jednego z odcinków BC, CA, AB, nigdy nie są współlinjowemi“. Por. **P 13**. — [Gdyby punkt A' mógł leżeć między B' i C', wtedy prosta BC musiałaby przejść między punktami A i B' albo między A i C' (**P 13**); a zatym punkt C leżałby między A i B', albo też punkt B między A i C' (**P 19 § I** i t. d.), co się sprzeciwia **P 12**. W taki sam sposób dowodzi się, że punkt B' nie leży między punktami A' i C', ani też punkt C' między A' i B'; przeto — wskutek **P 15** — punkty A', B' i C' na pewno nie są współlinjowe. — PASCH, l. c., str. 25].

P 17. — *Tr.* „Z założenia, że «A, B, C, D są punktami, C należy do AB i D należy do AC», wynika zawsze, że C należy do BD“. [Wystarczy dowieść, że jeżeli C leży między A i B, a D między A i C, to punkt C musi leżeć między B i D; dlatego też jeżeli dwa lub więcej z tych punktów pokrywa się z sobą, to twierdzenie powyższe wynika samo przez się, z określenia odcinka (**P 10**). — Niech więc będzie E punktem jakimkolwiek, ale zewnętrznym dla prostej, na której leżą te cztery punkty, a F punktem leżącym między D i E, tak że — wskutek $\binom{D, E, F}{A, B, C}$ **P 12** — między punktami D i F nie leży żaden punkt łączącej E z C. Otóż gdyby ta prosta — która nie zawiera F ani też żadnego z punktów A, B, D — przecięła odcinek FA, to musiałaby też przeciąć AD wskutek $\binom{F, D}{B, C}$ **P 13**; z tego powodu punkt C wypadły między punktami A i D, wbrew uczynionemu założeniu, że D należy do AC (**P 12**). Ale jeżeli prosta CE nie przechodzi między punktami A i F, to niewątpliwie spotyka odcinek FB wskutek $\binom{F}{C}$ **P 13** i ze względu na to, że podług założenia C leży między A i B. Tak więc ta prosta przechodzi między punktami F i B, a ponieważ nie ma żadnego punktu wspólnego z FD, musi więc przejść między punktami B i D wskutek $\binom{E, D}{A, C}$ **P 13**, i t. d.]. — Stąd bezpośrednio wypada, przy uwzględnieniu **P 12**, twierdzenie następujące:

P 18. — *Tr.* „Jeżeli punkt C leży między punktami A i B, a punkt D między A i C, wtedy D nie może leżeć między B i C; albo, inaczej mówiąc: jeżeli C leży między A i B, wtedy odcinki AC i CB nie mają żadnego punktu wspólnego oprocz C [1]). — Wskutek tego nie istnieje żaden punkt wewnętrzny i wspólny dla wszystkich trzech odcinków, mających końce w trzech dowolnie obranych punktach“. [Istotnie, jeden z punktów danych — jeżeli one są współlinjowe i wszystkie różne od siebie — leży między dwoma pozostałemi (**P 15**). Pozatym wystarczy powołać się na **P 10, 11**].

P 19. — „*Tr.* „Jeżeli trzy punkty A, B, C są takie, że punkt C leży na odcinku AB, wtedy cały odcinek AC — i podobnie drugi odcinek BC — jest zawarty w AB, a każdy punkt wewnętrzny dla AC albo dla BC jest zarazem punktem wewnętrznym dla AB“. — Krócej: „każdy punkt jakiegokolwiek odcinka wyznacza wraz z jego punktami krańcowemi dwa nowe odcinki, zawarte w odcinku danym“. [Jeżeli $A = B$, wtedy dowodzenie jest zbyteczne. — Przypuśćmy, że A i B nie pokrywają się. W takim razie każdy punkt odcinka AC, różny od A i od C, jest punktem wewnętrznym dla jednego z dwuch odcinków AB, BC (**P 14**); ale nie może być wewnętrznym dla BC (**P 18**), przeto musi być wewnętrznym dla AB].

P 20. — *Tr.* W tym samym założeniu, odcinek AB składa się ze wszystkich punktów, które leżą, bez różnicy, na AC albo na BC, i tylko z tych punktów“. — Czyli: „każdy odcinek jest sumą logiczną

---

[1]) W mojej rozprawie, cytowanej w przedmowie, były podane zamiast postulatu XX dwa inne, **P 14** i **P 18**, które są zależnościami między czterema punktami, gdy tymczasem **P 12** jest zależnością między trzema. Wprowadzone teraz uproszczenie ma początek w «*Grundlagen der Geometrie*» D. HILBERTA (wyd. 2-e § 3; Leipzig 1903), gdzie fakt, że „z trzech punktów współlinjowych jeden i tylko jeden leży między dwoma pozostałemi“ został przyjęty za zasadę podstawową «uporządkowania» («Anordung»), wraz ze znanym pewnikiem PASCHA (u nas **P 13**) i z różnemi innemi postulatami, które zostały wszystkie powtórzone w «*Rational Geometry*» G. B. HALSTEDA (New York, 1904). Zwracamy jeszcze uwagę, że z dwuch części, na które ta zasada może być rozłożona (u nas **P 12** i **P 15**), jedna jest następstwem drugiej, oraz zacytowanego pewnika M. PASCHA.

dwuch odcinków, ograniczonych jakimkolwiek jego punktem i obydwoma końcami". [W rzeczy samej, każdy punkt odcinka $|AB|$ musi leżeć przynajmniej na jednym z dwuch odcinków $|AC|$ i $|BC|$ (**P 14**). Dalsze dowodzenie jak w **P 19**].

P 21. — *Tr.* „Każdy odcinek zawiera wszystkie odcinki, które są ograniczone jakiemikolwiek dwoma jego punktami". — Inaczej mówiąc, z założenia: «A, B, C, D są punktami i C, $D \in |AB|$» wynika, że $|CD| \supset |AB|$. [Punkt D należy z pewnością do $|AC|$ albo do $|BC|$ (**P 20**); przeto odcinek $|CD|$ zawiera się albo w $|AC|$ albo w $|BC|$, a więc w każdym razie w $|AB|$ (**P 19**)].

P 22. — *Tr.* „Jeżeli punkty A, B, C nie są współlinjowe i jeżeli punkty A' i B' zostały obrane na $|BC|$ i $|CA|$, wtedy istnieje punkt wspólny odcinkom $|AA'|$ i $|BB'|$". [Przypuśćmy, że punkt A' jest różny od B i od C, a punkt B' różny od C i od A. Zasada XXI — zastosowana do punktów B, C, B' i do prostej AA' — upewnia nas, że ta prosta spotyka odcinek $|BB'|$ w jakimś punkcie, wobec tego, że punkt A nie może leżeć między B' i C ze względu na **P 12**. Z tego samego powodu prosta BB' musi przeciąć odcinek $|AA'|$ w jakimś punkcie; ale te dwa punkty przecięcia pokrywają się, ponieważ każdy z nich jest wspólny prostym AA' i BB', które nie zlewają się z sobą — gdyż jedna z nich zawiera punkt B, nie leżący na drugiej]. — W podobny sposób dowiedlibyśmy twierdzenia następującego:

P 23. — *Tr.* „Każda prosta, łącząca punkt B z jakimkolwiek punktem odcinka $|AA'|$, spotyka odcinek $|CA|$".

P 24. — *Tr.* „Jeżeli są dane punkty niewspółlinjowe A, B, C oraz czwarty punkt D różny od A i od B, i jeżeli prosta DA przechodzi między B i C, a prosta DB między C i A, wtedy prosta DC przechodzi między A i B". [Punkty C i D nie pokrywają się z pewnością, ponieważ prosta DA nie zawiera punktu C. Niech teraz proste AD i BD przecinają odcinki $|BC|$ i $|CA|$ w punktach A' i B'; punkt D leży wewnątrz odcinka $|AA'|$ (**P 22**), gdy tymczasem C nie może leżeć między A' i B (**P 12**). Stąd wypada prawdziwość twierdzenia na zasadzie $\binom{A', B}{B', C}$ **P 13**].

P 25. — *Tr.* „Jeżeli A i B są punktami, wtedy kule przez B dokoła A i przez A dokoła B spotykają się". — Tym samym stwierdzamy, że istnieje trójkąt równoboczny, mający odcinek dany $|AB|$ za bok. EUKL., ks. 1-a, pod. 1. [Można przyjąć, że punkty A i B nie pokrywają

się (**P 9 § I**). Niech będzie $M \equiv A|B$, $A' \equiv A/B$; możemy być pewni, że punkt M należy do $|AB|$, a B do $|AA'|$ (**P 10, 11**), że zatym punkt M należy do $|AA'|$ (**P 19**) i że jest punktem wewnętrznym tego odcinka. Przeto płaszczyzna prostopadła w punkcie M do prostej AB przecina kulę biegunową punktów A i A' (**P 10**), czyli kulę A_B, w jakimś punkcie różnym od M; jeżeli punkt taki oznaczymy przez X, wtedy prosta MX będzie prostopadła do AB (**P 35 § II**). Wskutek tego symetrja względem prostej MX odwzorowuje A na B, a B na A (**P 5, 6 § II**), przemieniając wzajemnie kule A_B i B_A (**P 52 § I**); zatym punkt X, jako należący do A_B i odpowiadający samemu sobie (**P 49 § I**), musi być punktem wspólnym dla obu tych kul].

P 26. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są punktami niewspółlinjowemi, a proste AB, AC są do siebie prostopadłe, wtedy punkt A jest wewnętrznym dla kuli C_B, a punkt C zewnętrznym dla kuli A_B. Patrz **P 5**". [Wiemy już, że kula C_B i łącząca A z B przecinają się w dwuch punktach, — np. D, E — różnych od siebie i od C (**P 21, § II** i t. d.). Co się tyczy drugiej części twierdzenia, przypuśćmy, że $F \equiv A/B$ i $M \equiv C|D$; wystarczy dowieść, że jeden z dwuch punktów D, E leży zewnątrz odcinka $|FA|$, ze względu na to, że punkty D i C zamieniają się jeden na drugi przez półobrót dokoła prostej BM, który przekształca kulę A_B na siebie samą (**P 50 §I, P 3 § II** i t. d.). Punkt F, zarówno jak punkt A, jest wewnętrzny dla kuli D_B — ponieważ równoodwrotność względem B zamienia punkty A i F, jeden na drugi pozostawiając na swoim miejscu kulę D_B — a przeto oba te punkty leżą — między D i E (**P 10**); punkt F musi więc upaść pomiędzy A i E albo między A i D (**P 20**); ale w jednym przypadku punkt E, w drugim D leży wewnątrz odcinka $|AF|$ (**P 12**)].

P 27. — *Tr.* „Jeżeli prosta i kula *stykają się* z sobą — to znaczy, że spotykają się w jednym, ale tylko w jednym punkcie — wtedy wszystkie punkty prostej są zewnętrzne dla kuli, z wyjątkiem jednego (punktu styczności)".

P 28. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są punktami i punkt A jest wewnętrzny dla kuli C_B, wtedy punkt C jest zewnętrzny dla kuli A_B". [Jeżeli punkt A jest różny od B, wtedy na kuli C_B leży taki punkt D, że prosta DA jest prostopadła do AB (**P 6, 7**); punkt taki jest zewnętrzny dla A_B (**P 26**), a wraz z nim i punkt C (**P 8**)].

P 29. — *Df.* „Jeżeli A, B są punktami niepokrywającemi się, wtedy przez «*cień punktu B z punktu A*» — albo przez «*przedłużenie* odcinka

$|AB|$ p o z a B» — rozumieć będziemy klasę takich punktów, że dla każdego z nich — np. dla X — punkt B należy do odcinka $|AX|$. Natomiast «*półprosta z punktu A przez B*» — albo «*promień z A w kierunku B*» — jest klasą punktów położonych na odcinku $|AB|$ albo na przedłużeniu $|AB$ po za B. Punkt A jest «*początkiem*» tej figury, którą — jako prostą ograniczoną przez punkt A — oznaczać będziemy przez «$|AB$»". — Zauważmy, że punkt B i punkt symetryczny do A względem B leżą zawsze na cieniu punktu B z punktu A, a punkty A i B/A na cieniu punktu A z punktu B (**P 10, 11**, i t. d.), oraz że s y m e t r j a zachowuje własności «odcinka» i «promienia»; to znaczy, że promień $|AB$ albo odcinek $|AB|$, dowolnie dany, jest w s p ó ł z m i e n n y z punktami A i B ze względu na p ó ł o b r ó t, r ó w n o o d w r o t n o ś ć i o d z w i e r c i a d l e n i e p r z e z p ł a s z c z y z n ę. Patrz **P 52, 53 § I, P 42, 44 § II**; i t. d.

P 30. — *Tr.* „W tym samym założeniu, nie istnieje żaden punkt wspólny o b u przedłużeniom odcinka $|AB|$, ani też punkt, któryby leżał jednocześnie na $|AB|$ i na przedłużeniu $|$po za B, o ile wyłączymy punkt B; ale odcinek $|AB|$ wraz ze swoimi przedłużeniami, t. j. z «cieniem punktu A z punktu B» i «cieniem punktu B z punktu A» stanowi całą prostą". [To ostatnie można wyczytać z **P 15**, uwzględniając **P 29**. — Że przypuszczenie: «X należy do cienia punktu A z punktu B i do cienia punktu B z punktu A» — czyli (**P 29**): «$A \varepsilon |BX|$ i jednocześnie $B \varepsilon |AX|$» — prowadzi do sprzeczności, to wypada z **P 11, 12**. — Że zaś punkt Z odcinka $|AB|$ pokrywa się z B, o ile $B \varepsilon |AZ|$, to już wiemy z **P 12**, zważywszy, że podług założenia nie może być jednocześnie $B \varepsilon |AZ|$ i $Z = A$, oraz że dwa warunki: $Z \varepsilon |AB|$, $B \varepsilon |AZ|$ wyłączają się wzajemnie, o ile punkt Z jest różny od B (**P 12**)].

P 31. — *Tr.* „Odcinek $|AB|$ jest m i e j s c e m punktów wspólnych dwom promieniom $|AB$ i $|BA$".

P 32. — *Tr.* „Cienie punktu B z punktu A i punktu A z punktu B są promieniami, a mianowicie jeżeli $C \equiv A/B$, cień punktu B z punktu A nie różni się od promienia $|BC$". [Punkty B i C są wspólne obu figurom (**P 29**), a dla jakiegokolwiek innego punktu X warunek $B \varepsilon |AX|$ wraz z warunkiem $B \varepsilon |AC|$ wyłącza możliwość, ażeby punkt B leżał między C i X, a to ze względu na $\binom{C}{B}\binom{X}{C}$ **P 18**; przeto punkt X należy do $|BC|$, albo C do $|BX|$ (**P 15**); to znaczy: $X \varepsilon |BC$ (**P 29**), o ile tylko należy do cienia punktu B z punktu A. — Odwrotnie, z każdego z dwuch warunków: «$X \varepsilon |BC|$», «$C \varepsilon |BX|$» wynika, że punkt B nie może leżeć pomiędzy C i X (**P 15**); przeto o ile tylko X należy do $|BC$, musi być $B \varepsilon |AX|$ — ze względu na $\binom{X}{B}$ **P 15**].

P 33. — *Tr.* „Jeżeli C, D są dowolnemi punktami promienia, poprowadzonego z punktu A w k i e r u n k u B, wtedy punkt D należy do $|AC$, albo punkt C do $|AD$; ale jeżeli punkty D i C są różne od A, wtedy A nie należy do $|CD|$". [Podług założenia punkty A, B, C, D czynią zadość warunkom: «$C \varepsilon |AB$, albo $B \varepsilon |AC$» i «$D \varepsilon |AB|$, albo $B \varepsilon |AD|$» (**P 29**); jest to równoznaczne z przypuszczeniem, że: «$C \varepsilon |AB$ oraz $D \varepsilon |AB|$, albo $C \varepsilon |AB$ oraz $B \varepsilon |AD$, albo $B \varepsilon |AC$ oraz $D \varepsilon |AB$, albo $B \varepsilon |AC|$ oraz $B \varepsilon |AD$». — Jeżeli jeden z punktów C, D pokrywa się z punktem A albo z B, wtedy prawdziwość twierdzenia jest bezpośrednio widoczna (**P 11, 29** i t. d.), możemy więc przyjąć, że oba są różne od A i od B. Wtedy z pierwszej części założenia: $C, D \varepsilon |AB$ wypływa, że punkt A nie należy do $|BC|$ ani do $|BD|$ (**P 12**, i t. d.), a więc nie należy też do $|CD|$ (**P 14**); wskutek tego, ze względu na **P 15**, punkt D musi należeć do $|AC|$, albo też C do $|AD|$, co jest właśnie naszą tezą. Z drugiej części: «$C \varepsilon |AB|$ i $B \varepsilon |AD|$» wynika, stosownie do brzmienia $\binom{D,}{C,}\binom{B}{C}$ **P 19**, że punkt C należy do $|AD|$. W podobny sposób przekonalibyśmy się, że część trzecia założenia prowadzi do związku $D \varepsilon |AC|$. Wreszcie z części ostatniej «$B \varepsilon |AC|$ oraz $B \varepsilon |AD|$» wynika odrazu, jak i z pierwszej, że punkt A nie może leżeć na $|BC|$ ani też na $|BD|$ (**P 12**), a więc nie może też leżeć na $|CD|$ (**P 14**); i t. d.].

P 34. — *Tr.* „Dwa promienie $|AB$ i $|AC$ pokrywają się wzajemnie, jeżeli C jest punktem promienia $|AB$, ale różnym od A". [Z dowodzenia poprzedniego wynika bezpośrednio, że w tym założeniu każdy punkt D, należący do $|AB$, leży i na $|AC$; ale to samo założenie: «$C \varepsilon |AB$ albo $B \varepsilon |AC$» nie ulegnie zmianie, jeżeli punkty B i C zamienimy jeden na drugi; a więc każdy punkt promienia $|AC$ musi należeć do $|AB$].

P 35. — *Tr.* „Odcinek $|CD$, którego końcami są jakiekolwiek dwa punkty promienia $|AB$, cały leży na tym promieniu". [Omijając przypuszczenie, że punkt C albo D pokrywa się z A, możemy stwierdzić, że $|AB = |AC = AD$ (**P 34**); z drugiej strony odcinek $|CD|$ zawiera się w $|AC|$ albo w $|AD$, stosownie do tego, czy $D \varepsilon |AC$, czy też $C \varepsilon |AD|$ (**P 19, 33**)].

P 36. — *Tr.* „Każdy punkt jakiejkolwiek prostej d z i e l i ją na d w a p r o m i e n i e, symetryczne do siebie względem tego punktu, który jest ich p o c z ą t k i e m. Te promienie nie mają innych punktów wspólnych (oprócz początku), a wzięte oba razem tworzą prostą". [Można zauważyć,

że twierdzenie to zostało już ustalone przez **P 30, 32, 34**; ale można też sprawdzić je oddzielnie w sposób następujący. Oznaczmy przez A punkt dany i obierzmy na prostej danej dowolny punkt B różny od A (**P 26 § I**); niech będzie $B' \equiv B/A$ (**P 44, 45 § I**); dwie półproste, o których mowa, będą wtedy $|AB$ i $|AB'$. Przedewszystkim cień punktu A z punktu B pokrywa się z promieniem $|AB'$ (**P 32**), a promień $|AB$ składa się z odcinka $|AB|$ oraz z cienia punktu B z punktu A (**P 29**), wskutek czego oba promienie razem wzięte stanowią prostą i nie mają punktów wspólnych oprócz A (**P 30**). Jeżeli następnie punkt B zmieni miejsce, przechodząc np. do C, wtedy nowe promienie $|AC$, $|AC'$ nie będą się różniły od poprzednich, co najwyżej przestawionych między sobą (**P 34**), tak że nowy punkt C upadnie z konieczności na $|AB$ albo $|AB'$. Jeżeli wreszcie weźmiemy pod uwagę, że symetrja względem A (wskutek **P 45 § I** i **P 29**) przekształca odcinki $|AB|$ i $|AB'$ jeden na drugi oraz podporządkowuje warunkowi $B \varepsilon |AX|$ warunek $B' \varepsilon |AX'|$ — gdzie X oznacza dowolny punkt prostej AB, a $X' \equiv X/A$ — wtedy dojdziemy do wniosku, że promienie $|AB$ i $|AB'$ są symetryczne do siebie względem punktu A]. Wypada stąd np., że każda kula, opisana dokoła punktu A jako środka, przecina zawsze w jednym punkcie każdy z dwuch promieni dopełniających się $|AB$ i $|AB'$ (**P 21 § 2**), czyli:

P 37. — *Tr.* „Promień dowolnie obrany przecina w jednym punkcie każdą kulę, mającą środek w jego początku; ale nie istnieją na tym samym promieniu dwa punkty różne i jednakowo oddalone od początku".

P 38. — *Df.* „W założeniu **P 34** wyrażenia: punkty C i D są położone «po tej samej *stronie* punktu A», — albo «po *stronach* przeciwnych punktu A» otrzymują ścisłe znaczenie, przez które wyrażamy, że (jeżeli ani C ani D nie pokrywa się z A) punkty C i D leżą oba na jednym z dwuch promieni dopełniających $|AB$ i $|AB'$ — albo też, że jeden leży na jednym promieniu, drugi na drugim". Patrz **P 36**. — Jeden z tych dwuch faktów zawsze musi mieć miejsce, ale oba razem nie występują nigdy. — Obie półproste, na które linja prosta zostaje podzielona przez jeden ze swoich punktów A, nazywają się jeszcze «dwiema *stronami* punktu A na prostej».

P 39. — *Df.* „Jeżeli dana jest prosta r i zewnątrz niej punkt P, wtedy «*cień* prostej r z punktu P» jest miejscem tych wszystkich punktów X, dla których się sprawdza, że $|PX$ spotyka r. — «*Półpłaszczyzna z prostej r przez punkt P*», albo «*od r ku P*», którą oznaczamy przez «$|rP$», jest to klasa punktów, z których każdy — np. Y — leży na

płaszczyźnie Pr w ten sposób, że prosta r nie spotyka odcinka $|PY|$, albo spotyka go co najwyżej w punkcie Y". — Zarówno jedna jak i druga figura zawiera swój własny początek r i jest współzmienną z prostą r i punktem P względem symetrji. I t. d.

P 40. — *Tr.* „Jeżeli, w tym samym założeniu, punkt P' jest symetryczny do P względem prostej r, wtedy «cień prostej r z punktu P» pokrywa się z półpłaszczyzną «od r ku P'»". Por. **P 32**. [Prosta r przechodzi z pewnością między P i P' (**P 54 § I** i **P 11**). Jeżeli tedy punkt X należy do cienia prostej r z punktu P, ale nie należy do prostej r — tak że ta prosta spotyka wprawdzie odcinek $|PX|$, ale nie spotyka go w żadnym z jego końców (**P 39**), czyli, że przechodzi między P i X — wtedy nie może się zdarzyć, żeby prosta r przeszła między P' i X: sprzeciwiają się temu **P 18** lub **P 16**, zależnie od tego, czy X należy czy nie należy do prostej, łączącej P z P'; X jest przeto punktem półpłaszczyzny $|ZP'$ (**P 39**). — Odwrotnie, z założenia, że $Y \varepsilon |rP' \sim r$ (czyli że r nie spotyka odcinka $|P'Y|$, gdyż punkt Y leży wprawdzie na płaszczyźnie $P'r$, ale nie na prostej r) wnosimy, że r przecina odcinek $|PY|$ — na zasadzie **P 14** lub **P 13**, zależnie od tego, czy Y leży, czy też nie leży na PP' — skąd wypada, że punkt ten należy także do cienia prostej r z punktu P].

P 41. — *Tr.* „Dwie półpłaszczyzny $|rP$, $|rQ$ pokrywają się, jeżeli Q jest punktem półpłaszczyzny $|rP$, ale nie należy do r". Por. **P 34**. [Dowodzi się jak twierdzenia poprzedzającego, przy pomocy tych samych zasad — to jest **P 13, 14, 16, 18, 39**].

P 42. — *Tr.* „Żaden punkt zewnętrzny dla prostej r nie jest wspólny obu półpłaszczyznom $|rP$, $|rP'$; ale każdy punkt płaszczyzny Pr musi leżeć na jednej lub na drugiej". Por. **P 30**. — [Obierając punkt jakikolwiek na półpłaszczyźnie $|rP$, ale nie na prostej r — np. punkt X — z faktu, że r przechodzi między P i P', ale nie przechodzi między P i X (**P 54 § I, P 10, 11, 39**), wnosimy, że r przechodzi również między P' i X (**P 13, 14**), że więc X nie jest punktem półpłaszczyzny $|rP'$ (**P 39**). — Jeżeli dalej oznaczymy przez Y dowolny punkt płaszczyzny Pr i przypuścimy, że Y nie należy do półpłaszczyzny, poprowadzonej z r ku P, ani też do prostej r, wtedy prosta r będzie musiała przeciąć odcinek $|PY$ w jednym z jego punktów wewnętrznych (**P 39, 10**). A więc prosta r, która przechodzi między P i P', nie może spotykać odcinka $|P'Y$ (**P 16, 18**); wobec czego punkt Y leży na półpłaszczyźnie $|rP'$].

P 43. — *Tr.* „Jeżeli punkt Q należy do półpłaszczyzny rP, wtedy cały odcinek PQ leży na półpłaszczyźnie rP. Podobnie każdy promień, mający początek na prostej r i przechodzący przez jakikolwiek punkt półpłaszczyzny rP, zawiera się w tej półpłaszczyźnie (o ile tylko początek nie pokrywa się z tym drugim punktem)". Por. **P 35**. [To wynika z **P 19, 33, 35, 39, 41**].

P 44. — *Tr.* „Jeżeli na płaszczyźnie poprowadzimy jakąkolwiek prostą, wówczas płaszczyzna zostanie przez nią podzielona na dwie półpłaszczyzny, które nie mają żadnego punktu wspólnego zewnątrz tej prostej, a które razem wzięte stanowią całą płaszczyznę. Te dwie półpłaszczyzny zamieniają się jedna na drugą (jedna staje się kładem drugiej) za pomocą półobrotu dokoła prostej". — Tak więc, jeżeli przez π i r oznaczymy płaszczyznę i prostą, to iloczyn logiczny obu półpłaszczyzn będzie równy r, a ich suma logiczna będzie równa π. Por. **P 36**. [Twierdzenie opiera się głównie na **P 27, 47, 49 § I** i na **P 39—42**].

P 45. — *Df.* „W tym samym założeniu, o dwuch punktach płaszczyzny π, z wyjątkiem punktów prostej r, mówimy, że leżą «po tej samej *stronie* prostej r», albo «po *stronach* przeciwnych prostej r» stosownie do tego, czy oba leżą czy nie leżą razem na jednej z dwuch półpłaszczyzn, które prosta wyznacza na płaszczyźnie; czyli stosownie do tego, czy r spotyka, czy nie spotyka odcinka, łączącego te dwa punkty". Patrz **P 36, 44**.

P 46. — *Tr.* „Jeżeli są dane punkty niewspółlinjowe A, B, C, wtedy każda płaszczyzna, przechodząca między punktami A i B (to znaczy każda płaszczyzna, przecinająca odcinek AB, ale nie zawierająca ani A ani B) przechodzi również między B i C, albo między C i A, albo też przechodzi przez punkt C; ale nie przechodzi jednocześnie między B i C i między C i A". — Por. **P 13, 16**. [Każda płaszczyzna, przecinająca prostą AB, przecina płaszczyznę ABC wzdłuż jakiejś prostej (**P 37 § 2**); a więc powracamy odrazu do **P 13, 16**].

Stąd wypływają pojęcia «półprzestrzeni» i dwuch «*stron* płaszczyzny», które już teraz stosownie do **P 39 – 45**, mogą być uważane za ustalone. Podobnie jak płaszczyzna jest podzielona za pomocą każdej ze swoich prostych, a prosta za pomocą punktu, który do niej należy (**P 36, 44**), tak również i przestrzeń, czyli klasa punktów, jest podzielona przez każdą płaszczyznę na dwie odrębne figury, dla których ta płaszczyzna jest granicą. Jeżeli płaszczyznę oznaczymy przez π, a przez A, A'

dwa punkty zewnętrzne i symetryczne względem tej płaszczyzny (**P 16, 29, 31 § II**), wówczas temi dwiema figurami są: «półprzestrzeń z płaszczyzny π *przez* punkt A», albo «*od* π *ku* A» i «półprzestrzeń z płaszczyzny π przez A'» albo «*od* π *ku* A'», którym jeszcze możemy nadać nazwy «*cienia płaszczyzny* π *z punktu* A'» i «cienia płaszczyzny π z punktu A». Pierwsza (np.) z tych figur jest miejscem takich punktów X, dla których odcinek AX nie spotyka π, albo spotyka go w punkcie X, albo też (co na jedno wychodzi), odcinek $A'X$ zawsze spotyka π. Por. **P 29, 39**.

P 47. — *Df.* „Niech będą A, B, C punktami niewspółlinjowemi; przez «*kąt wypukły* promieni AB i AC» rozumieć będziemy figurę, złożoną z punktu A i z tych wszystkich punktów różnych od A, z których dla każdego — np. dla X — półprosta poprowadzona z A przez X spotyka odcinek BC. Figurę taką będziemy oznaczali przez «$\hat{A}.BC$». Natomiast «*kąt wklęsły* promieni AB i AC» — który oznaczać będziemy przez «$\breve{A}.BC$» — jest miejscem punktu A i tych wszystkich punktów różnych od A, z których każdy — np. Y — leży wprawdzie na płaszczyźnie ABC, ale w taki sposób, że promień AY nie spotyka odcinka BC, chyba tylko w jego punktach końcowych. — «*Wierzchołkiem* kąta» jest punkt A, «*ramionami* kąta» obie półproste lub promienie AB, AC, punktami «*wewnętrznemi* kąta» wszystkie punkty kąta, nie leżące na jego ramionach. Kątem «*prostym*» nazywać będziemy każdy kąt płaski wypukły, którego ramiona są promieniami prostopadłemi do siebie". Odrazu widać, że kąty $\hat{A}.BC$ i $\hat{A}.CB$ pokrywają się wzajemnie (**P 10**) i tak samo kąty $\breve{A}.BC$ i $\breve{A}.CB$, oraz że jeżeli D jest punktem wewnętrznym kąta, wtedy promień AD zawiera się całkowicie w tym kącie; i t. d.

P 48. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są punktami niewspółlinjowemi, a D, E punktami danemi na ramionach AB, AC, różnemi od A, ale pozatym dowolnemi; wtedy kąt $\hat{A}.DE$ pokrywa się z kątem $\hat{A}.BC$ i podobnie $\breve{A}.DE = \breve{A}.BC$. Jeżeli oprócz tego dany jest punkt F wewnątrz kąta $\hat{A}.BC$, wtedy kąt $\hat{A}.BF$ zawiera się w kącie $\hat{A}.BC$, a każdy punkt kąta $\hat{A}.BC$ leży w jednym z kątów $\hat{A}.BF$ albo $\hat{A}.CF$". [Zbytecznie jest mówić o tym, że punkty A, D, E nie są współlinjowe (**P 19, 21 § I** i t. d.). Prosta, przechodząca przez A i przecinająca BC, albo przecinająca DE, przecina też BE (**P 13** i t. d.), z powodu tego, że punkt A jest zewnętrzny

tak dla CE, jak i dla BD (**P 33**). Dla tej samej przyczyny prosta ta musi też przeciąć w pierwszym przypadku DE, w drugim BC. Ale to samo **P 13**, zastosowane do dwuch trójek punktów (B, F, H) i (E, F, K)— gdzie H, F, K oznaczają punkty przecięcia tej prostej z trzema odcinkami $|BC|$, $|BE|$, $|DE|$ — mówi nam jeszcze, że punkty H i K oba leżą na promieniu $|AF$. Istotnie, ponieważ prosta CA nie przechodzi między punktami B i H, ani też między B i F (**P 12** i t. d.), przeto nie przechodzi między H i F (**P 13** i t. d.); a więc albo H należy do $|AF|$, albo F do $|AH|$ (**P 15**), czyli w każdym razie H należy do AF (**P 29, 34**); i t. d. — Ciąg dalszy pozostawiamy czytelnikowi].

P 49. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są punktami niewspółlinjowemi, wtedy kąt wypukły $\hat{A}.BC$ jest miejscem punktów wspólnych dwom półpłaszczyznom «z AB ku C» i «z AC ku B». Patrz **P 39, 47**". [Przedewszystkim dwa promienie $|AB$, $|AC$ należą jednocześnie do kąta danego i do każdej z tych dwuch półpłaszczyzn (**P 47, 39, 43**). Że zaś każdy punkt kąta jest wspólny obu półpłaszczyznom, to wynika bezpośrednio z cytowanych określeń oraz z **P 12, 13, 33**, wskutek których przypuszczenie, że punkt X leży między punktami B i C, a punkt Y na promieniu $|AX$, doprowadzi do tego, że prosta BA nie przechodzi między C i Y, ani też CA między B i Y. — Niech teraz będzie Z punktem wspólnym obu półpłaszczyznom, ale zewnętrznym dla obu promieni $|AB$ i $|AC$; przypuśćmy (jeżeli to możliwe), że łącząca A z Z nie spotyka odcinka $|BC|$. Jeżeli $D \equiv B'/A$, wtedy prosta AZ musi przejść między C i D — wskutek $\binom{D}{A}$ **P 13** i ze względu na to, że $A \in |BD|$ — i przecina odcinek $|CD|$ np. w punkcie E; wobec tego punkt C nie leży między D i E, ani też D między C i E (**P 12**). Prosta AB nie może przejść między C i Z gdyż Z należy do półpłaszczyzny «od AB ku C»; przeto AB nie przechodzi również między punktami Z i E, a to na zasadzie $\binom{E, Z}{A, B}$ **P 13**; stąd zaś wynika przy pomocy $\binom{D, E, Z}{A, B, C}$ **P 13**, że AC nie przechodzi między D i Z, czyli że punkt Z należy do półpłaszczyzny «od AC ku D». Ale wynik taki jest sprzeczny z założeniem, że punkt Z należy do półpłaszczyzny «od AC ku B», gdyż te dwie półpłaszczyzny nie mają po za prostą AC, żadnego punktu wspólnego (**P 40—42**). Wnosimy więc, że łącząca A z Z przecina odcinek $|BC|$ w jakimś punkcie F, przyczym B nie należy do $|CF|$ (**P 12**), a prosta BA, której żaden punkt nie należy do odcinka $|CZ$, nie przechodzi między F i Z (**P 13**); a więc punkt A jest zewnętrzny dla odcinka $|FZ$, a wskutek tego punkt F leży na promieniu $|AZ$, (**P 15, 29, 34**), czyli Z leży wewnątrz kąta $\hat{A}.BC$ **P 47**), c. b. d. d.].

P 50. — *Tr.* „Jeżeli przy tym samym założeniu mamy dany na płaszczyźnie ABC jakikolwiek punkt P, nie leżący na żadnej z prostych AB, BC, CA, wówczas albo prosta PA musi przechodzić między punktami B i C, albo PB między C i A, albo wreszcie PC między A i B". [Istotnie, zaprzeczenie np. drugiemu i trzeciemu przypadkowi jest równoznaczne z twierdzeniem, że punkt A jest wspólny dwom półpłaszczyznom «z PB przez C» i «z PC przez B»; inaczej mówiąc, że punkt A leży wewnątrz kąta $\hat{P}.BC$ (**P 49**), czyli że prosta PA przechodzi między punktami B i C (**P 47**)].

P 51. — *Df.* „Jeżeli A, B, C są punktami niewspółlinjowemi, wtedy figura, utworzona przez wszystkie odcinki, mające jeden koniec w punkcie A, a drugi na odcinku $|BC|$, nazywa się «*trójkątem*» i oznacza się przez $|A.BC|$". — Ze względu na **P 22, 23** jest rzeczą oczywistą, że każdy punkt, należący do tak określonej figury, musi się również znaleźć na figurze, która powstaje przez podstawienie zamiast A i $|BC|$ elementów B i $|CA|$, i odwrotnie. Tak więc figury, mające za symbole $|A.BC|$, $|B.CA|$, $|C.AB|$, $|A.CB|$, $|B.AC|$, $|C.BA|$ zlewają się w jeden *trójkąt*, — a mianowicie w trójkąt $|ABC|$ — którego *bokami* są odcinki $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$, a *wierzchołkami* punkty A, B, C. Suma logiczna wszystkich trzech boków jest «*konturem*» albo «*obwodem*» trójkąta: punktem «*wewnętrznym*» trójkąta jest każdy punkt tej figury, o ile nie leży na obwodzie; «*zewnętrznym*» dla trójkąta jest każdy punkt płaszczyzny ABC, nie należący do tej figury. Kątami (wewnętrznemi) trójkąta są trzy kąty wypukłe $\hat{A}.BC$, $\hat{B}.CA$, $\hat{C}.AB$. I t. d.

P 52. — *Tr.* „W tym samym założeniu, trójkąt $|ABC|$ jest przecięciem którychkolwiek dwuch z trzech kątów: $\hat{A}.BC$, $\hat{B}.CA$, $\hat{C}.AB$, a także przecięciem trzech półpłaszczyzn: «od AB przez C», «od BC przez A» i «od CA przez B». Patrz **P 2 § 1**". — Czyli: $|ABC| = \hat{A}.BC \frown \hat{B}.CA = \hat{B}.CA \frown \hat{C}.AB = \hat{C}.AB \frown \hat{A}.BC = \hat{A}.BC \frown \hat{B}.CA \frown \hat{C}.AB = |AB.C \frown |BC.A \frown |CA.B$. [To wynika z **P 51** wskutek **P 22, 23, 29, 39, 47, 49** i t. d.]. — Z **P 49, 52** i **43** wynika jeszcze:

P 53. — *Tr.* „Odcinek, którego oba końce są punktami dowolnie obranemi w danym kącie wypukłym, albo w danym trójkącie, leży całkowicie w tym kącie lub trójkącie". — Innemi słowy, trójkąt i kąt płaski wypukły są figurami «*wypukłemi*» — podobnie jak półpłaszczyzna, promień i odcinek (**P 43, 35, 21**).

P 54. — *Tr.* „Jeżeli dwa odcinki pokrywają się, wówczas mają końce wspólne, a jeżeli dwa promienie pokrywają się, wówczas mają początek wspólny“. [Niech np. będą punkty A i B, C i D końcami dwuch odcinków równych i niech nam będzie wolno przypuścić, że punkt A jest różny od B, a wskutek tego i C różny od D. Punkt B, który wraz z punktem A musi leżeć na $|CD|$ (**P 2 § I** i **P 11**), wypadnie niezawodnie na $|CA|$ albo na $|AD|$ (**P 20**); wskutek tego jeden przynajmniej z punktów C i D nie będzie leżał między A i B (**P 12, II**). Ale punkty C i D są ze swej strony zawarte w odcinku $|AB|$, stosownie do założenia; jeżeli więc punkt C nie leży pomiędzy A i B, wtedy z konieczności pokrywa się z punktem A albo z punktem B (**P 10, II**); to samo można powiedzieć o punkcie D. Wnosimy więc, że jeden przynajmniej z punktów C, D pokrywa się z jednym z punktów A i B. Czytelnik sam dokończy. — Gdyby, następnie, dwa promienie $|AB$ i $|A'B$ pokrywały się wzajemnie, nie mając wspólnego początku, — przyczym B niech będzie jednym z ich punktów wspólnych, różnym od punktów początkowych A i A' — wtedy punkt A' musiałby leżeć na $|AB$, a punkt A na $|A'B$; w ten sposób byłyby spełnione jednocześnie dwa warunki: «$A' \in |AB$ albo $B \in |AA'$» i «$A \in |A'B$ albo $B \in |A'A$» (**P 29**), których iloczyn logiczny (jeżeli punkty A, A', B mają być różne od siebie), jest równoważny warunkowi: «$B \in |AA'$» (**P 12**). Pominąwszy to przypuszczenie, żaden punkt X, różny od A, A', B i spełniający warunek $A \in |BX$, nie leży na $|AB$, ani też B nie może leżeć na $|AX$ (**P 12**); to znaczy, że taki punkt (jakim jest np. B/A) byłby wyłączony z promienia $|AB$, jakkolwiek należałby do $|A'B$ wobec tego, że $B \in |A'X$, a to na zasadzie $\left(\frac{A', X}{B, C}\right)$ **P 14**]. — Tą samą drogą stwierdza się, że:

P 55. — *Tr.* „Dwa k ą t y (wypukłe lub wklęsłe) albo dwa t r ó j k ą t y nie mogą się pokrywać, jeżeli r a m i o n a lub b o k i jednego są różne od ramion lub boków drugiego“.

§ IV.

Twierdzenia o obrotach. Postulaty Euklidesa i Archimedesa. P o d o b i e ń s t w o i j e d n o m i e r n o ś ć (i z o m e r j a). P r z y s t a w a n i e odcinków i kątów.

P 1. — *Df.* „*P o d o b i e ń s t w o* jest to nazwa ogólna każdego takiego przekształcenia j e d n o z n a c z n e g o i w z a j e m n e g o punktów na punkty, które każdej parze punktów równooddalonych od trzeciego punktu, podporządkowuje zawsze parę punktów równooddalonych od punktu, będącego przekształceniem tego trzeciego punktu“. — Albo, pod inną postacią: „*Podobieństwo* oznacza takie odwzorowanie p r z e s t r z e n i na sobie samej, przy którym k u l o m opisanym dokoła dowolnego punktu (jako środka) odpowiadają kule opisane dokoła obrazu tego punktu. Dwie figury nazywają się *p o d o b n e m i*, jeżeli istnieje p o d o b i e ń s t w o, które zamienia jedną na drugą punkt po punkcie, jeżeli więc są utworami odpowiedniemi ze względu na jakiekolwiek podobieństwo“.

Pomiędzy tym określeniem, a określeniem *kolineacji*, danym przez v. STAUDTA, zachodzi widoczna analogja. «K o l i n e a c j a» oznacza przekształcenie, przy którym nie zatraca się *współlinjowość* punktów (a więc takie, które zamienia każdą trójkę punktów w s p ó ł l i n j o w y c h na trójkę punktów w s p ó ł l i n j o w y c h); natomiast «p o d o b i e ń s t w o» jest to takie przekształcenie, które nie zatraca *równoodległości* punktów (czyli takie, które każdą trójkę punktów r ó w n o r a m i e n n ą zamienia na inną trójkę punktów r ó w n o r a m i e n n ą).

P 2. — *Tr.* „S y m e t r j a względem punktu, prostej lub płaszczyzny (r ó w n o o d w r o t n o ś ć, p ó ł o b r ó t, o d z w i e r c i a d l e n i e) jest podobieństwem; patrz **P 52 § I** i **P 41, 44 § II**. W y p a d k o w a, albo i l o c z y n dwuch podobieństw jest znowuż podobieństwem. Każdy o b r ó t jest podobieństwem; patrz **P 22, 23 § II**. Przekształcenie o d w r o t n e podobieństwu jest także podobieństwem. T o ż s a m o ś ć jest podobieństwem“.

P 3. — *Tr.* „Każde podobieństwo odwzorowuje punkty współliniowe w punktach współliniowych i zamienia każdą prostą na prostą, każdą płaszczyznę na płaszczyznę; punktowi środkowemu podporządkowuje zawsze punkt środkowy, a symetrycznemu — symetryczny; prostym i płaszczyznom, do siebie prostopadłym — proste i płaszczyzny, również prostopadłe do siebie; każdemu odcinkowi — odcinek, każdemu promieniowi — promień, każdemu trójkątowi — trójkąt i t. d.". [Dowodzi się jak **P 53 § I**, uwzględniając określenia prostej, płaszczyzny, odcinka, promienia i t. d.].

P 4. — *Tr.* „Wypadkowa albo iloczyn symetrji względem dwuch płaszczyzn przecinających się, jest obrotem dokoła prostej wspólnej tym płaszczyznom". [Niech będą α i β dwie płaszczyzny dane, r prosta ich przecięcia, u i v ślady płaszczyzny prostopadłej do r na płaszczyznach α i β (**P 35, 37 § II**); obrawszy jakikolwiek punkt P, załóżmy: $P_1 \equiv P/\alpha$, $P' \equiv P_1/\beta$; punkt P' jest więc obrazem punktu P wskutek podobieństwa $/\beta \,.\, /\alpha$, które jest iloczynem odzwierciadleń $/\alpha$ i $/\beta$ (**P 31 § II** i **P 2**). Można dowieść, że obrót $/v \,.\, /u$ (**P 22 § II**) dokoła prostej r (prostopadłej do obu prostych u, v) również przenosi P do P'. Istotnie, obrót ten — na równi z $/\alpha \,.\, /\beta$ i $/\beta \,.\, /\alpha$ — pozostawia bez zmiany każdy punkt prostej r i każdą płaszczyznę prostopadłą do r (**P 23, 36, 54, 56 § II**), w szczególności płaszczyznę, przechodzącą przez punkt P i prostopadłą do prostej r. Z drugiej strony, dwie prostopadłe, poprowadzone do tej płaszczyzny z punktów P i P_1, są symetryczne do siebie nie tylko względem α (**P 45 § II** i t. d.), ale także względem u, ponieważ ich ślady Q i Q_1 na płaszczyźnie prostych u i v są punktami symetrycznemi względem α, a więc są również symetryczne względem u (**P 39, 18, 7 § II**). W podobny sposób odpowiadają sobie wzajemnie wobec $/v$ obie prostopadłe $P_1 Q_1$ i $P' Q'$, poprowadzone do płaszczyzny π z punktów P_1 i P'. A więc proste PQ i $P'Q'$ odpowiadają sobie zarówno wobec $/\beta \,.\, /\alpha$, jak wobec $/v \,.\, /u$; zatym punkty P, P' odpowiadają sobie wzajemnie]. — Tym samym dowiedliśmy, (o ile dane będą dowolne proste u, v i płaszczyzny α, β), że:

P 5. — *Tr.* „Każdy obrót dowolny jest zawsze równy iloczynowi odzwierciadleń w dwuch płaszczyznach, przecinających się wzdłuż osi obrotu". — Oprócz tego:

P 6. — *Tr.* „Łącząc w którymkolwiek porządku symetrje względem dwuch płaszczyzn do siebie prostopadłych, otrzymamy jako wypadkową półobrót dokoła ich prostej przecięcia". [W rzeczy samej — o ile literom nadamy to samo znaczenie, co w **P 4**, ale przypuścimy, że płaszczyzny α i β są do siebie prostopadłe (**P 51 § II**) — dwie proste, prostopadłe do płaszczyzny β i przechodzące przez punkty P i P_1, z których jedna jest $P'P_1$, zamienią się jedna na drugą zarówno wskutek przekształcenia $/\beta \,.\, /\alpha$ (albo $/\alpha \,.\, /\beta$), jak i wskutek półobrotu dokoła prostej r, a to ze względu na to, że ich spodki są punktami do siebie symetrycznemi względem α (**P 42 § II**), a więc również symetrycznemi względem r, a płaszczyzna β jest symetryczna do siebie samej (**P 50 § I** i t. d.). W podobny sposób proste, prostopadłe do płaszczyzny α i przechodzące przez punkty P_1 i P', z których jedna jest PP', odpowiadają sobie względem $/\beta \,.\, /\alpha$ (albo $/\alpha \,.\, /\beta$) i względem $/r$; a więc punkty P i P' zamieniają się jeden na drugi, wskutek $/\beta \,.\, /\alpha$ (albo $/\alpha \,.\, /\beta$) i okazują się symetrycznemi do siebie względem prostej r]. — Stąd wynika, przy uwzględnieniu **P 28 § II** i **P 4**, że:

P 7. — *Tr.* „Iloczyn dwuch półobrotów dokoła dwuch prostych, do siebie prostopadłych nie różni się od półobrotu dokoła prostej prostopadłej do nich obu w ich punkcie wspólnym. Wskutek tego symetrja względem osi jest obrotem. Patrz **P 22 § II**".

P 8. — *Tr.* „Obrót nie może pozostawić bez zmiany punktu, który nie leży na osi". [Przypuśćmy, że obrót $/v \,.\, /u$ — gdzie u, v są proste, prostopadłe do jakiejkolwiek innej prostej r w tym samym punkcie i różne od siebie, ale zresztą dowolne — pozostawia punkt tautologiczny E, nie leżący na osi. Wtedy, oznaczając przez α i β dwie płaszczyzny, które oś r wyznacza z prostemi u i v, znajdziemy, że obrót $/v \,.\, /u$ jest równoważny obrotowi $/\beta \,.\, /\alpha$ (**P 5**); wskutek czego punkty E i E/α są też symetryczne do siebie względem β, gdyż $\{/\beta \,.\, /\alpha\} E = E$. Ale punkt E nie może leżeć na każdej z dwuch płaszczyzn α i β, które podług założenia są od siebie różne (**P 18 § II**); zatym punkty E i E/α nie mogą pokrywać się wzajemnie (**P 31 § II**). A więc ta sama prosta (łącząca te oba punkty) byłaby prostopadła do obu płaszczyzn α i β (**P 39 § I**), co jest niedorzecznością (**P 35, 9 § II**)].

P 9. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C, D są punktami niewspółpłaszczyznowemi, wtedy istnieje zawsze obrót dokoła prostej AB, wskutek którego półpłaszczyzna $AB.C$ przekształca się na półpłaszczyznę $AB.D$. Patrz **P 2, 3**". [Wystarczy tu przypomnieć dowód **P 27 § II**, zaznaczając, że za punkt E przyjąć należy ten punkt, w którym kula C_A przecina promień AD (**P 37 § III**)].

P 10. — *Tr.* „Ażeby obrót był równoważny półobrotowi, wystarczy, żeby zamieniał na siebie samą płaszczyznę, przechodzącą przez oś. Patrz **P 7**“. [Niech będzie R obrotem dokoła prostej r i przypuśćmy, że jakaś płaszczyzna π, przechodząca przez r, przekształca się na siebie samą. Z punktu A, obranego dowolnie zewnątrz tej płaszczyzny, poprowadźmy płaszczyznę α prostopadłą do r i oznaczmy przez A' punkt RA, który musi leżeć na α — ponieważ ta płaszczyzna jest tautologiczna względem R (**P 36 § II**). Oprócz prostej r jest jeszcze tautologiczny ślad s płaszczyzny π na α, a także prosta t, prostopadła do prostych r i s w ich punkcie wspólnym, który oznaczamy przez M (a który jest śladem prostej r na α); oznaczając teraz przez H i H' spodki prostopadłych, poprowadzonych do prostej s z punktów A i A' — wobec czego będzie $H' = RH$ (**P 36, 54 § II**) — znajdziemy, że kula H_M musi zawierać H', gdyż jej punkty odpowiadają sobie wzajemnie (**P 23 § II**); wskutek tego $M = H\ H'$, a proste AH i $A'H'$ są symetryczne do siebie względem punktu M. W podobny sposób proste AK i $A'K'$ — prostopadłe do t w punktach K i K' — są do siebie symetryczne względem M. A więc punkty A i A' są również symetryczne względem M, a przeto i względem r. I t. d.].

P 11. — *Tr.* „Dwie kule, odpowiadające sobie względem jakiegokolwiek obrotu, są zawsze symetryczne do siebie, a oś obrotu leży na płaszczyźnie symetrji“. [Jeżeli środek jednej z dwuch kul leży na osi obrotu, wtedy prawdziwość twierdzenia jest odrazu widoczna na podstawie **P 23, 32 § II** i **P 46, 50 § I.** — Jeżeli tak nie jest, wtedy niech będą np. B i B' środkami obu kul (które odpowiadają sobie względem obrotu R dokoła osi r); M niech będzie ich punktem środkowym, A zaś jakimkolwiek punktem osi, różnym od M. Pierwsza z tych dwuch kul przecina promień BA w punkcie, który oznaczymy przez C (**P 37 § III**). Kula przez B dokoła A, jako tautologiczna wobec R, przechodzi także przez B', przeto prosta MA jest prostopadła do BB', a punkt B' jest symetryczny do B względem AM (**P 3, 5 § II**). Oprócz tego punkt RC należy do C_A, gdyż ta kula jest również tautologiczna wobec R; a dla podobnych powodów — jeżeli przez S oznaczymy półobrót dokoła AM — punkt SC musi należeć do kuli C_A. Ale każde z tych dwuch podobieństw R i S zamienia promień BA na promień $B'A$ (**P 3**): a więc punkty RC i SC leżą oba i na kuli C_A i na promieniu $B'A$, czyli zlewają się w jeden punkt C' (**P 37 § III**). Wypada stąd, że S, zarówno jak i R, odwzoruje kulę C_B na kuli $C'_{B'}$ i t. d. Ciąg dalszy patrz **P 43 § II**].

POSTULAT XXII.

P 12. — *Przez trzy punkty niewspółlinjowe przechodzi przynajmniej jedna kula.* — Inaczej mówiąc: „Jeżeli są dane punkty A, B, C, przyczym punkt A jest różny od B, i jeżeli istnieje jakiś punkt różny od C, który jest oddalony od A i od B jak C: wtedy musi także istnieć jakiś punkt, od którego każdy z punktów A i B tak jest oddalony, jak C“. Wziąwszy jeszcze pod uwagę, że spodek prostopadłej, poprowadzonej ze środka tej kuli na płaszczyznę trzech punktów danych, jest jednakowo oddalony od każdego z nich (**P 3 § 3**), możemy powiedzieć: „Trzy punkty niewspółlinjowe leżą zawsze na jednym kole. Patrz **P 40 § I**“. — Jest to znana zasada, którą proponował W. BOLYAI [1]) zamiast postulatu EUKLIDESA o równoległych.

P 13. — *Tr.* „Jeżeli dwie kule są symetryczne do trzeciej kuli, wtedy są symetryczne do siebie“. [Ta sama kula γ, odzwierciedlając się w płaszczyznach μ i ν, daje jako obrazy kule α i β (**P 41 § 2**); chcemy dowieść, że te dwie kule α i β są symetryczne do siebie. Wskutek **P 43, 46 § 2** inne założenia (a mianowicie symetrji środkowej lub osiowej) sprowadzają się do tego, które zamierzamy rozpatrzeć. Przypuśćmy najpierw, że środki A, B, C danych kul nie są współlinjowe. Wtedy wskutek zasady XXII (**P 12**) musi istnieć na płaszczyźnie ABC jakiś punkt równooddalony od każdego z punktów A, B, C; punkt taki musi leżeć na obu płaszczyznach μ, ν, prostopadłych do par punktów (A, C) i (B, C) w ich punktach środkowych (**P 38, 39 § 2**). Nie może się zdarzyć, ażeby te dwie płaszczyzny pokryły się wzajemnie, o ile punkty A, B, C nie są współlinjowe; a więc przetną się one wzdłuż jakiejś prostej r (**P 37 § 2**), a symetrje względem μ i ν, które prowadzą od α do γ i od γ do β, dają, jako iloczyn, obrót dokoła prostej r (**P 4**), który przekształca bezpośrednio α na β. Wskutek tego dwie kule α, β są symetryczne do siebie względem osi, prostopadłej do pary punktów (A, B) w jej punkcie środkowym (**P 11**) — a więc także względem tego punktu środkowego i względem płaszczyzny, która jest w tym punkcie prostopadła do łączącej A z B (**P 43, 46 § 2**). — Przypuśćmy dalej, że punkty A, B, C są współlinjowe, ale wszystkie różne od siebie, i obierzmy czwartą kulę δ, która jest symetryczna do γ, jak α i β, ale której środek nie leży na AB. Ponieważ kule α i δ są symetryczne do tej samej kuli γ, a środki A, D, C nie są współlinjowe, przeto kule α i δ muszą być do siebie symetryczne, na zasadzie tego, co było dowie-

[1]) «*Kurzer Grundriss eines Versuches . . .*», 1851, str. 46.

dzione. W ten sam sposób β i δ; a więc α i β są symetryczne do tej samej kuli, której środek nie należy do AB; i t. d. [1])].

P 14. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są punktami i jeżeli C leży między A i B, wtedy punkt A/C musi leżeć między punktami A i A/B". — Albo, innemi słowy, przyjmując zwykłe określenie *sumy* dwuch odcinków, które później ustalimy (§ 5): „Jeżeli jeden odcinek jest mniejszy od drugiego, wtedy i podwojony odcinek pierwszy jest mniejszy od podwojonego drugiego". [Niech będzie $A' \equiv A/B$, $C' \equiv C/B$, $M \equiv C\ A'$; ze względu na to, że punkty A, B, C są od siebie różne i że punkt C należy do $|AB|$, a B do $|AA'|$, czyli że $B, C \varepsilon |AA'|$, natomiast $B \infty \varepsilon |AC|$ (**P 11, 19, 12 § III**), musi być $B \varepsilon |CA'|$ (**P 20 § III**) i $|BA'| \supset |CA'|$. Przeto punkt C/B, jako należący do $|BA'|$ (wskutek symetrji względem B, patrz **P 2, 3**) leży na odcinku $|CA'|$. Jeżeli więc $D \equiv C'/M$, wtedy kula biegunowa punktów C i D, — która jest symetryczna (względem M) do kuli biegunowej punktów A' i C' — jest też symetryczna do kuli biegunowej punktów A i C (**P 13**); wskutek czego, o ile punkt D nie pokrywa się z A, punkt C musi pokryć się z punktem $A\ D$ (wobec tego, że wtedy C jest jedynym punktem wspólnym tym dwom kulom symetrycznym, a zatym jest punktem symetrycznym do siebie samego). Ale punkt D, który, tak samo jak C', musi leżeć na odcinku $|CA'|$ (odwzorowującym się na sobie samym przez równoodwrotność $/M$) nie może pokrywać się z punktem A, gdyż ten punkt musi być zewnętrznym dla odcinka $|CA'|$ (**P 12 § III**), wobec tego, że punkt C leży między A i A'. A więc $D = A/C$; przeto punkt A/C leży na odcinku $|CA'|$, a zatym i na odcinku $|AA'|$, gdyż $|CA'| \supset |AA'|$ wobec tego, że $C \varepsilon |AA'|$]. — Następne twierdzenie ma znaczenie twierdzenia przybranego (lematu) dla **P 21**:

P 15. — *Tr.* „Dwa odcinki, które leżą na sobie nie pokrywając się wzajemnie, nie są do siebie symetryczne". [Niech punkty C i D, różne od siebie, leżą oba na odcinku $|AB|$ i jeden przynajmniej, — np. C — niech będzie różny od punktów krańcowych A i B; dowiedziemy, że ani pary punktów (A, B) i (C, D), ani pary (A, B) i (D, C) nie są do siebie symetryczne. W rzeczy samej, gdyby były symetryczne, musiałyby się pokrywać punkty środkowe par (A, C) i (B, D), albo punkty środkowe par (A, D) i (B, C), zależnie od tego, czy punktowi A odpowiada C czy D.

[1]) Wiadomo, że to twierdzenie daje się udowodnić niezależnie od postulatu EUKLIDESA; ale woleliśmy wyprowadzić je raczej z zasady XXII, aniżeli z jakiejkolwiek innej, po bezowocnych próbach oparcia go wyłącznie na zasadach I—XXI; gdybyśmy zaś wybrali **P 13** jako pierwotne, nie potrzebowalibyśmy uciekać się do postulatu XXII przy rozważaniach pierwszych pięciu §§ i moglibyśmy odłożyć wprowadzenie tego postulatu do § 6.

Przyjmijmy najprzód $D = A$ (a $C \infty = B$); wtedy założenie $A\ C = B\ D$ upada odrazu wskutek tego, że jest tylko jeden punkt symetryczny do A względem $A\ C$ (**P 44 § I**), drugie zaś założenie: $A\ D = B\ C$ upada wskutek tego, że A jest punktem zewnętrznym dla $|BC|$ (**P 12 § III**). Tak samo rozumujemy, jeżeli $D = B$. — Niech teraz każdy z punktów C i D będzie różny od A i od B. Można przyjąć, że punkt D znajduje się na odcinku $|AC|$, gdyż musi koniecznie leżeć na $|AC|$ albo na $|BC|$ (**P 20 § III**). Wtedy założenie $A\ C = B\ D$ zostaje wyłączone przez to, że punkt symetryczny do D względem $A\ C$ musiałby również leżeć na $|AC|$, tymczasem B nie leży na tym odcinku (**P 12 § III**). Drugie założenie: $A\ D = B\ C$ upada wskutek tego, że odcinki $|AD|$ i $|BC|$ nie mają punktów wspólnych, gdyż odcinki $|AC|$ i $|BC|$ nie mają punktów wspólnych z wyjątkiem punktu C, leżącego zewnątrz odcinka $|AD|$ (**P 18, 19, 12 § III**)].

P 16. — *Tr.* „Jeżeli A i A_1 są punktami niepokrywającemi się i jeżeli dla każdego wskaźnika i (większego od 1) założymy:

$$A_i \equiv A_{i-2} / A_{i-1};\ A_0 \equiv A,$$

wtedy każdy punkt tej klasy będzie różny od wszystkich pozostałych punktów i będzie leżał na promieniu $|AA_1|$; oprócz tego wszystkie punkty A_0, A_1, $A_2 \ldots A_i$ leżeć będą na odcinku $|AA_i|$, a odcinki $A_0 A_1$ i $|A_{i-1} A_i|$ będą do siebie symetryczne". [Zważywszy, że twierdzenie jest prawdziwe dla trzech pierwszych punktów A_0, A_1, A_2 (**P 44, 45 § I**; **P 10, 11, 29 § III**; **P 2, 3**), wystarczy dowieść, że jeżeli jest prawdziwe dla punktów A_0, A_1, $\ldots A_l$, to musi być również prawdziwe i dla punktów A_0, A_1, $\ldots A_l$, A_{l+1}. Otóż z założenia $A_{l-1} \varepsilon |AA_l| \infty \setminus A \infty \setminus A_l$ [1]) wynika odrazu na zasadzie **P 12 § III**, że $A_l \infty \varepsilon |AA_{l-1}|$, wskutek czego — ze względu na to, że punkt A_l należy w każdym razie do odcinka $|A_{l-1}, A_{l+1}|$ (**P 11 § III**) — znajdujemy za pomocą $\begin{pmatrix} A_0, & A_{l-1}, & A_{l+1} \\ A, & B, & C, \end{pmatrix}$ **P 14**, że $A_l \varepsilon |AA_{l+1}|$. Przeto $|AA_l| \supset |AA_{l+1}|$ (**P 19 § III**), a $A_{l+1} \infty = A$ i $A_{l+1} \infty \varepsilon |AA_l|$ (**P 11, 12 § III**) wobec tego, że punkt A_l jest różny zarówno od końca A_0 (przez założenie indukcyjne), jak i od końca A_{l+1} (**P 45, 8 § I**). Wypada stąd, że punkty A_0, A_1, $\ldots A_l$, A_{l+1} leżą wszystkie na $|AA_{l+1}|$ i są wszystkie od siebie różne, gdyż punkty A_0, A_1, $\ldots A_l$ leżą na $|AA_l|$ i są wszystkie różne podług założenia. Ale fakt, że $A_1 \varepsilon |AA_{l+1}|$ można interpretować w taki sposób, że punkt A_{l+1} leży na cieniu punktu A_1 z punktu A (**P 29 § III**), a więc na promieniu $|AA_1|$ (**tamże**). Wreszcie kula biegunowa punktów A_{l-1}, A_l (**P 4 § III**) jest symetryczna tak do kuli biegunowej punktów A_0, A_1 (wskutek przypuszczenia indukcyjnego oraz **P 1—3**), jak i do kuli biegunowej punktów A_l, A_{l+1}; a więc kule

[1]) Znak „$\infty \setminus$" czyta się: „*wyłączając*" [*przyp. tłum.*]

biegunowe par punktów (A_0, A_1) i (A_l, A_{l+1}) są do siebie symetryczne, a dzięki temu są też symetryczne do siebie odcinki $A_0 A_1$ i $A_l A_{l+1}$ (**P II § III**)].

P 17. — *Tr.* „Jeżeli przyjmiemy $\alpha_1 = A_2$, $\alpha_2 \equiv A / \alpha_1, \ldots$ i w ogólności $\alpha_i \equiv A / \alpha_{i-1}$ (dla każdego wskaźnika i większego od 1), wtedy będzie $\alpha_i = A_{2i}$". [I tutaj wystarczy dowieść, że jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla $i = 1, 2, \ldots l$, to musi być również prawdziwe dla $i = l + 1$. Istotnie, symetrja względem punktu α_l, zamieniająca na siebie punkty A_0 i A_{l+1}, podporządkowuje punktowi $A_0 \alpha_l$, czyli punktowi α_{l-1}, punkt $\alpha_l \alpha_{l+1}$. Ale podobnie jak punkty A_0 i A_{2l} są do siebie symetryczne względem punktu A_{2l-1} — gdyż, stosownie do uczynionego założenia, punkty A_{2l-1} i A_{2l} nie różnią się od α_{l-1} i α_l — podobnie też punkty A_{2l-1} i $A_{3\cdot 2l-1}$ są symetryczne względem punktu A_{2l}, gdyż jeżeli weźmiemy punkty A_{2l-1} i A_{2l-1+1} zamiast punktów A_0 i A_1, to punkty $A_{2l-1}, A_{2l-1+1}, \ldots A_{2l}, A_{2l+1}, \ldots A_{3\cdot 2l-1}$ zajmą miejsce punktów $A_0, A_1, \ldots A_{2l-1}, A_{2l-1+1}, \ldots A_{2l}$. Podobnie punkty A_{2l} i A_{2l+1} są symetryczne względem punktu $A_{3\cdot 2l-1}$ wskutek podstawienia $\begin{pmatrix} A_0, & A_1 \\ A_{2l}, & A_{2l+1} \end{pmatrix}$, przekształcającego punkty A_{2l}, $A_{3\cdot 2l-1}$, A_{2l+1} na A_0, A_{2l-1}, A_{2l}. A więc punkt symetryczny do α_{l-1} względem α_l nie różni się od punktu $A_{3\cdot 2l-1}$, tak że $\alpha_l \alpha_{l+1} = A_{3\cdot 2l-1}$, a jednocześnie $\alpha_l / A_{3\cdot 2l-1} = A_{2l-1}$; przeto $\alpha_{l+1} = A_{2l+1}$, c. b. d. d.].

O ile nie pozostaniemy przy nazwie «*skali* punktów A_0 i A_1» (w której punkt A_i byłby i-tym *szczeblem*) dla oznaczenia szeregu punktów $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$, to możemy te punkty, w razie potrzeby, nazwać «*ultrasymetrycznemi* do A_0 względem A_1» (począwszy od punktu symetrycznego A_2) w ten sposób, że punkt A_i byłby $(i-1)$-szym ultrasymetrycznym do punktu A_0 względem A_1. Nie byłaby też nieodpowiednią nazwa punktów «*hipersymetrycznych*» dla określonych powyżej punktów $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Te nazwy dadzą się jednak z łatwością ominąć, natomiast następujące określenia są nieuniknione przy wielu dowodzeniach.

P 18. — *Df.* „Niech A i B będą punktami; jeżeli przyjmiemy raz na zawsze: $\delta_0 \equiv B$, $\delta_1 \equiv A\,B$, $\delta_2 \equiv A\,\delta_1$, $\delta_3 = A\,\delta_2, \ldots$ i wogóle dla jakiejkolwiek liczby całkowitej i dodatniej i:

$$\delta_i \equiv A\,\delta_{i-1},$$

wtedy δ_i nazywać się będzie «i-tym punktem pozaśrodkowym[1]) pary punktów A, B w zwrocie A». Jeżeli dalej przyjmiemy raz na zawsze:

[1]) W oryginale: «i-esimo punto ipermedio di A, B verso A» [*przyp. tłum.*]

$\delta_{i,0} \equiv A$, $\delta_{i,1} \equiv \delta_i$, $\delta_{i,2} \equiv \delta_{i,0} / \delta_{i,1}$, $\delta_{i,3} \equiv \delta_{i,1} / \delta_{i,2}, \ldots$, i wogóle dla każdej liczby całkowitej l większej od jedności:

$$\delta_{i,l} \equiv \delta_{i,l-2} / \delta_{i,l-1},$$

wtedy wszystkie punkty tej klasy nazywać się będą «*środkowo-symetrycznemi*» pary (A, B)". — A więc punkt $\delta_{i,l}$, tak określony, będzie «$(l-1)$-szym punktem ultrasymetrycznym do A względem i-ego punktu pozaśrodkowego punktów A, B w zwrocie A», a jedynie przy $l = 1$ punkt $\delta_{i,l}$ nie różni się od punktu pozaśrodkowego δ_i. — Zwróćmy uwagę na to, że wszystkie punkty pozaśrodkowe pary (A, B) należą do odcinka AB, a wszystkie punkty środkowo-symetryczne należą do promienia AB (**P II, 19, 29 § III; P 16** i zasada indukcji), oraz że na mocy **P 3** i zasady indukcji „podobieństwo, które przekształca każdy z punktów A i B na siebie samego, musi pozostawić bez zmiany każdy punkt $\delta_{i,l}$; tak więc wszystkie punkty środkowo-symetryczne pary (A, B) są tautologiczne".

POSTULAT XXIII.

P 19. — *Niech będą A_0 i A_1 punktami niepokrywającemi się, P punktem dowolnym promienia $A_0 A_1$; jeżeli dla każdego wskaźnika* i *większego od 1 oznaczymy przez A_i punkt równoodwrotny do punktu A_{i-2} względem A_{i-1}: wtedy dla jakiejś wartości n wskaźnika* i *odcinek $A_{n-1} A_n$ zawierać będzie punkt P.* — Jest to zasada dobrze znana pod nazwą postulatu ARCHIMEDESA (aksjomat V, *de sphaera et cylindro*). Patrz **P 16.**

P 20. — *Tr.* „Jeżeli punkt A_1 leży między punktami A i B, wtedy zawsze istnieje punkt pozaśrodkowy pary A, B w zwrocie A, leżący między punktami A i A_1. Patrz **P 18**". [Niech będzie $A_0 = A$; ponieważ punkt B — czyli δ_0 — dla pewnej wartości n wskaźnika i należy do odcinka $A_{n-1} A_n$ (**P 19**), przeto bez wątpienia istnieje taka para punktów A_{i-1} i A_i, która zawiera w odcinku $A_{i-1} A_i$ jakiś punkt pozaśrodkowy pary A, B w zwrocie A; niech to np. będzie punkt δ_h. Obierzmy teraz liczbę całkowitą k w ten sposób, żeby było $i < 2^k$, a więc żeby punkty A_{i-1} i A_i były wewnętrzne dla odcinka AA_{2^k} (**P 16**), czyli wewnętrzne dla $A\alpha_k$ (**P 17**). Stąd wynika, — wskutek **P 14** przy uwzględnieniu **P 12 § III** — że punkt δ_{h+1} leżeć będzie między punktami A i α_{k-1}, a więc punkt δ_{h+2} między A i $\alpha_{k-2}, \ldots$, punkt δ_{h+k-1} między A i α_1 i wreszcie punkt δ_{h+k} między A i A_1].

P 21. — *Tr.* „Jeżeli punkty A i B są różne od siebie, wtedy między dwoma dowolnemi, ale różnemi od siebie, punktami promienia z punktu A w zwrocie B będzie zawsze leżał jakiś punkt środkowo-symetryczny pary (A, B). Patrz **P 18**". [Te dwa punkty niech będą P i Q. Możemy przyjąć, że P leży na AQ, ale nie pokrywa się z punktem A (**P 33 § III**), ponieważ założenie $P = A$ było już rozpatrzone w **P 20**. Obierzmy jakikolwiek punkt C między punktami P i Q i oznaczmy przez D taki punkt odcinka AC, że para (A, D) jest symetryczna do (C, P), a więc punkt równoodwrotny do P względem A C (**P 44, 45 § I**). Między punktami A i D upadnie w każdym razie jeden punkt pozaśrodkowy punktów A, B w zwrocie A (**P 20**); takim punktem niech będzie np. A_1. Jeżeli teraz przyjmiemy: $A_0 \equiv A$, $A_2 \equiv A_0 / A_1, \ldots$ i wogóle $A_i \equiv A_{i-2} / A_{i-1}$, to w szeregu punktów $A_0, A_1, \ldots A_i, \ldots$ będą dwa następujące po sobie, — np. A_{n-1} i A_n — które zawierać będą punkt P, tak że $P \equiv A_{n-1} A_n$ (**P 19**). Można jeszcze przyjąć, że punkt P jest różny od drugiego końca A_n, bo gdyby tak nie było, to niby nam nie przeszkadzało wziąć punkty A_n i A_{n+1} zamiast A_{n-1} i A_n, nie zmieniając pozatym dalszego rozumowania. Jeżeli teraz $A_n = C$, wtedy prawdziwość twierdzenia jest odrazu widoczna, ponieważ A_n jest punktem środkowo-symetrycznym pary (A, B) (**P 18**); przyjmijmy więc $A_n \infty = C$. Dowiedziemy, że punkt A_n musi upaść między C i P: tym sposobem twierdzenie zostanie dowiedzione, gdyż $CP \supset PQ$ (**P 19 § III**). W tym celu (wskutek **P 15 § III**) wystarczy dowieść, że punkt P nie może leżeć między A_n i C, ani też C między A_n i P.

1) Niech punkt P, jeżeli to możliwe, upadnie między A_n i C. Podług założenia punkt P jest różny od A i od C (**P 11 § III**), ale leży między temi dwoma punktami wskutek $\left(\begin{smallmatrix} Q, & A, & B, & C \\ A, & B, & C, & D \end{smallmatrix}\right)$ **P 17 § III**. Przeto punkt A_n leżałby jednocześnie na promieniu AB (**P 18**) — który się nie różni od AP (**P 34 § III**) — oraz na cieniu punktu P z punktu C, czyli na promieniu PA (**P 29, 32, 34 § III**): a więc leżałby na odcinku AP (**P 31 § III**), nie pokrywając się ani z A ani z P. Jeżeli z drugiej strony zauważymy, że punkt A_{n-1} należy do odcinka AA_n (**P 16**), a punkt P do odcinka $A_{n-1} A_n$, to musimy przyjść do wniosku, że punkt P (różny od A i A_n) leży między punktami A i A_n (**P 19 § III**). Dlatego też założenie 1) jest sprzeczne z **P 12 § III**.

2) Niech punkt C, jeżeli to możliwe, leży między A_n i P, a więc także na odcinku $A_{n-1} A_n$ (**P 19 § III**); wskutek tego każdy z punktów C i P leżałby na $A_{n-1} A_n$, nie pokrywając się z punktem A_n. Ale odcinek ten jest symetryczny do AA_1 (**P 16**), zarówno jak i odcinek CP; a więc odcinki $A_{n-1} A_n$ i CP są do siebie symetryczne (**P 10 § III, P 13**); przeto założenie 2) zawiera sprzeczność z **P 15**. I t. d.].

P 22. — *Tr.* „Każde podobieństwo, względem którego dwa punkty różne od siebie są tautologiczne, pozostawia bez zmiany każdy punkt, należący do prostej łączącej te dwa punkty". [Przypuśćmy, jeżeli to być może, że na prostej AB istnieją dwa punkty P i P' nie pokrywające się z sobą, ale odpowiadające sobie wobec podobieństwa S, wskutek którego $S A = A$, $S B = B$, $S P = P'$. Punkt P leży na pewno na promieniu AB albo na promieniu BA (**P 29, 30 § III**). Niech np. P leży na AB; wtedy punkt P' będzie również leżał na AB, ponieważ ten promień zamienia się wskutek S na samego siebie (**P 3**); ale oba punkty będą różne od A. A więc musi zajść jedno z dwojga: albo P leży między A i P', albo też P' między A i P (**P 33, II § III**). Stąd wypada, że punkt leżący między P i P', należy do jednego tylko z dwuch odcinków AP i AP' (**P 18 § III**); a ponieważ one sobie odpowiadają, więc nie może być tautologicznym względem S. Z drugiej strony, pomiędzy punktami P i P' leżeć będą napewno punkty środkowo-symetryczne pary (A, B) (**P 21**), które są wszystkie tautologiczne względem S (**P 18**); a więc założenie $P \infty = P'$ prowadzi do sprzeczności].

Nie może ujść uwagi czytelnika analogja pomiędzy tym twierdzeniem i *twierdzeniem zasadniczym* Gieometrji rzutowej, albo twierdzeniem STAUDTA. Istotnie, **P 22** ma to samo znaczenie dla «Gieometrji podobieństw», co i twierdzenie zasadnicze STAUDTA dla «Gieometrji kolineacji» [1]).

P 23. — *Tr.* „Podobieństwo, które pozostawia bez zmiany trzy punkty niewspółlinjowe, musi być symetrją względem płaszczyzny tych trzech punktów, o ile nie jest przekształceniem identycznym. Patrz **P 2**". [Niech będą A, B, C punktami tautologicznemi; każdy punkt zarówno prostej AB, jak i prostych AC, BC, zamieni się na samego siebie, (**P 22**), przeto każda kula, mająca środek w punkcie A, albo w punkcie B, albo w punkcie C, będzie tautologiczna (**P 20 § II, P I**). Wypada stąd, że każdy punkt płaszczyzny ABC odpowiada sam sobie (**P 27 § I**) i że punkt zewnętrzny dla płaszczyzny ABC, — np. punkt D — obrany jakkolwiek, mieć będzie za obraz punkt D' wspólny kulom D_A, D_B, D_C, wskutek czego punkt D' pokryje się z punktem D albo z punktem do niego symetrycznym względem płaszczyzny ABC (**P 29 – 31 § II**). Ale w pierwszym przypadku każdy punkt pokrywa się ze swoim własnym obrazem

[1]) Sposób jej ustalenia nie różni się od sposobu, który autor rozwinął w artykule: „Circa il teorema fondamentale di Staudt. etc.". (Atti d. Acc. di Scienze di Torino, vol. XXXIX, 1904).

(**P 40 § II**) — ponieważ kule dokoła punktu D są również tautologiczne — w drugim zaś przypadku każdy punkt zewnętrzny dla tej płaszczyzny jest różny od punktu, odpowiadającego mu. I t. d.]. — Wynika stąd jeszcze twierdzenie następujące:

P 24. — *Tr.* „Podobieństwo, względem którego istnieją punkty niewspółpłaszczyznowe tautologiczne, jest tożsamością".

P 25. — *Tr.* „Jeżeli są dane punkty niewspółlinjowe A, B, C, wtedy każdy obrót R dokoła prostej BC można zawsze otrzymać, łącząc odzwierciedlenie za pomocą płaszczyzny ABC z odzwierciedleniem za pomocą płaszczyzny biegunowej punktów A i RA. Patrz **P 38 § 2** i **P 4, 5, 8**". [Można przyjąć, że prosta AB jest prostopadła do BC. — Gdyby obrót R był dokładnie półobrotem dokoła prostej BC (**P 7**), wtedy wystarczyłoby powołanie się na **P 6**. Przypuśćmy więc, że obrót, o którym mowa, jest różny od półobrotu i podporządkowuje punktom (różnym od siebie) A_1 i A punkty A i A', że przeto $RA_1 = A$ i $RA = A'$. Punkty A i A' leżą oba na dwuch kulach tautologicznych A_B i A_C (**P 23 § II**), a ich punkt środkowy, — który oznaczymy przez D — nie należy do osi; a więc prosta AA' jest prostopadła do obu prostych DB i DC (**P 3, 5 § II**), a punkty A i A' są do siebie symetryczne względem płaszczyzny BCD. Zauważmy, że jeżeli $D_1 \equiv A_1\ A$, to punkt D_1 leży zewnątrz BC, tak samo jak D, a punkty D_1 i D są odpowiednie względem R (**P 23 § II**), a więc różne od siebie (**P 8**); przeto punkt A_1 jest różny od A', a punkty A_1, A i A', nie są współlinjowe, gdyż leżą wszystkie na kuli $A_{1\,B}$ (**P 55 § I**). Oprócz tego prosta BC, która podług założenia jest prostopadła do BA, jest również prostopadła do każdej z prostych BA_1, BA' (**P 23 § II**). Z drugiej strony, obrót R podporządkowuje kulę biegunową punktów A, A' kuli biegunowej punktów A_1, A; te dwie kule są więc do siebie symetryczne względem tej samej płaszczyzny, jak również i koła A_{1B} i A_B, które płaszczyzna prostopadła do BC w punkcie B (**P 34, 35 § II**) wyznacza na tych kulach. Te dwa koła przecinają się w dwuch różnych punktach A i E, gdyż A nie leży na DD_1 (**P 47 § I**), a płaszczyzna biegunowa punktów A i E zawiera D_1 i D (**P 38 § II**), ale nie zawiera prostej BC, gdyż punkty B, C, D i D_1 nie są współpłaszczyznowe (**P 10**); a więc przez symetrję, która zamienia oba koła jedno na drugie, każdy z punktów A i E zostaje zamieniony na siebie samego; płaszczyzną symetrji będzie przeto płaszczyzna ABC, a wskutek tego punkty A_1 i A' są również symetryczne do siebie względem płaszczyzny ABC. Stąd wynika, jeżeli przez L i M oznaczymy odzwierciedlenia za pomocą płaszczyzn BCA, BCD: $RA = A' = ML\,A$, $RA_1 = A = ML\,A_1$, $RB = B = ML\,B$, $RC = C = ML\,C$. Z tej przyczyny podobieństwo $R^{-1}ML$ zamienia każdy z punktów niewspółpłaszczyznowych A, A_1, B, C na siebie samego, a więc (**P 24**) $R^{-1}ML = 1$, czyli $ML = R$, c. b. d. d.]. — Tym samym rozumowaniem dowiedliśmy zarazem, że

P 26. — *Tr.* „W tym samym założeniu obrót R wynika jeszcze z połączenia odzwierciedlenia za pomocą płaszczyzny BCD z odzwierciedleniem za pomocą płaszczyzny $A'BC$; albo też odzwierciedlenia za pomocą płaszczyzny BCD_1 z odzwierciedleniem za pomocą płaszczyzny ABC". — Dowiedliśmy również:

P 27. — *Tr.* „Jeżeli za pomocą jakiegokolwiek obrotu przechodzi się od dowolnego punktu A_1 do punktu A, różnego od poprzedniego, wtedy ten sam obrót przekształca ten drugi punkt A na punkt symetryczny do A_1 względem płaszczyzny, która łączy punkt A z osią obrotu". — Wskutek tego:

P 28. — *Tr.* „Nie mogą istnieć dwa różne obroty dokoła tej samej osi, które oba podporządkowywałyby punktowi, nie leżącemu na osi, jeden i ten sam punkt". — Stąd wynika:

P 29. — *Tr.* „Istnieje tylko jeden obrót, przekształcający półpłaszczyznę daną na inną półpłaszczyznę, ograniczoną, jak i pierwsza, przez oś obrotu". Patrz **P 9**.

P 30. — *Tr.* „Każde podobieństwo, względem którego punkty jednej i tej samej prostej, ale tylko te punkty są tautologiczne — jest obrotem. Patrz **P 8, 23**". [A, B, C niech będą punktami niewspółlinjowemi; przypuśćmy, że podobieństwo S pozostawia bez zmiany każdy z punktów B i C, a więc również i każdy punkt prostej BC (**P 22**), ale nie ma innych punktów tautologicznych. Oznaczmy przez A' ten punkt, który podobieństwo S podporządkowuje punktowi A, a D niech będzie środkiem tych dwuch punktów. Można przyjąć, że prosta AB — a więc i $A'B$ — jest prostopadła do BC. Punkty A i A', które są na pewno różne od siebie, są równooddalone od punktu B, gdyż kula A_B jest tautologiczna względem S. Istnieje na pewno taki obrót T dokoła prostej BC, który podporządkowuje płaszczyźnie przez BC ku A płaszczyznę przez BC ku A' (**P 9**), a więc i promieniowi z punktu B ku A promień z punktu B ku A', a wskutek tego punktowi A punkt A' (**P 37 § III**). A więc podobieństwo $T^{-1}S$ pozostawia bez zmiany każdy z punktów A, B, C,

przeto $T^{-1}S = 1$ (czyli $S = T$), albo też $T^{-1}S = \angle ABC$ (**P 23**). Ale tę drugą możliwość musimy wyłączyć, gdyż z równości $S = T\{\angle ABC\}$ wynikłoby, ze względu na **P 25**: $S = \angle DBC \,.\, \angle ABC \,.\, \angle ABC$, a zatym $S = \angle DBC$, co się sprzeciwia założeniu (**P 31 § II**)].

P 31. — *Df.* „Będziemy mówili, że pary punktów (A, B) i (C, D) są «*przystające* do siebie», — i pisali «$(A, B) \asymp (C, D)$» — ażeby zaznaczyć, że kule B_A i D_C są do siebie symetryczne". — Mówiąc o symetrji, domyślamy się: „względem punktu środkowego środków obu kul", albo — o ile punkty A i C nie pokrywają się — „względem osi, prostopadłej w punkcie A C do prostej, łączącej oba środki", albo wreszcie: „względem płaszczyzny biegunowej środków", co na jedno wychodzi, ze względu na **P 43, 46 § II**.

P 32. — *Tr.* „W założeniu, że A, B, C, D, E, F są punktami: 1) jeżeli para punktów (A, B) jest przystająca do (C, D), to i odwrotnie para (C, D) jest przystająca do (A, B); 2) jeżeli pary (A, B) i (C, D) są przystające, a także pary (AB) i (E, F) są przystające, wtedy pary (C, D) i (E, F) są również do siebie przystające [**P 13**]; 3) pary (A, B) i (A, B), jak również (A, A) i (B, B), a także (A, B) i (B, A) są do siebie przystające [**P 46 § I, P 44 § II**]".

P 33. — *Tr.* „Jeżeli dwie pary punktów są do siebie przystające, wtedy można zawsze przejść od jednej z nich do drugiej za pomocą półobrotu albo za pomocą dwuch półobrotów". [Jeżeli $(A, B) \asymp (C, D)$ i $A \infty = C$, wtedy półobrót dokoła osi prostopadłej do prostej AC w punkcie A C przenosi punkt A na C, a B przekształca na punkt B', który musi leżeć na kuli D_C podług założenia (**P 31** i t. d.). Jeżeli przytym $B' = D$, wtedy nic więcej nie pozostaje do zrobienia; jeżeli natomiast punkt B' jest różny od D, to ażeby go przekształcić na D, pozostawiając C bez zmiany, wystarczy wykonać jeszcze półobrót dokoła osi, która zawiera punkt C i jest prostopadła do prostej $B'D$ (**P 3—5 § II**)].

P 34. — *Tr.* „Powiedzenie, że pary punktów (A, B) i (C, D) są do siebie przystające, jest równoznaczne z powiedzeniem, że kule biegunowe par (A, B) i (C, D) są symetryczne do siebie. Patrz **P 4 § III**". [Jeżeli np. $(A, B) \asymp (C, D)$, to symetrja względem punktu A C, która przekształca kule B_A i D_C jedną na drugą (**P 31**), odwzorowuje punkt B w punkcie B', leżącym na kuli D_C i zamienia Sfr (A, B) na Sfr (C, B'). Otóż, jeżeli $B' \infty = D$, wtedy kula biegunowa punktów C i B' oraz kula biegunowa punktów C i D są symetryczne do siebie względem osi, zawierającej punkt C i prostopadłej do prostej $B'D$. Przeto kula biegunowa pary (A, B) jest symetryczna do kuli biegunowej pary (C, D) (**P 13**). — I odwrotnie: jeżeli kule biegunowe par (A, B) i (C, D) są symetryczne, a punkty A' i B' odpowiadają punktom A i B, wtedy — o ile punkty B' i D nie pokrywają się — kule D_C i $B'_{A'}$ zamieniają się jedna na drugą za pomocą półobrotu dokoła osi, zawierającej C D i prostopadłej do $B'D$; przeto $(A, B) \asymp (A', B) \asymp (C, D)$ i t. d.]. — Dzięki temu twierdzeniu «*przystawanie* między parami punktów» (**P 31**) możnaby było jeszcze określić, podstawiając zamiast kul B_A i D_C kule biegunowe tych dwuch par; jednakże symetrja wysłowienia nie wynagradza, według mnie, wprowadzenia punktów środkowych i prostych łączących — czego się przy tamtym sposobie unika.

P 35. — *Tr.* „Jeżeli podobieństwo podporządkowuje jednej parze punktów różnych od siebie parę do niej przystającą, wtedy każde dwie pary odpowiednie względem tego podobieństwa są przystające". [Niech podobieństwo S podporządkowuje punktom A i B (różnym od siebie) punkty A' i B', przyczym pary (A, B) i (A', B') niech będą przystające. Oznaczmy przez C podobieństwo (półobrót albo iloczyn dwuch półobrotów), któreby przekształcało (A, B) na (A', B') (**P 33**), tak że $CA = SA = A'$; $CB = SB = B'$. Wtedy przekształcenie $C^{-1}S$ — wypadkowa albo iloczyn z S przez podobieństwo odwrotne do C — będzie podobieństwem (**P 2**), podporządkowującym punkty A i B sobie samym, będzie więc takim podobieństwem, względem którego wszystkie punkty prostej AB są tautologiczne (**P 22**). Ale takie przekształcenie albo jest równoważne jakiemuś obrotowi R dokoła AB, albo staje się odzwierciedleniem P za pomocą płaszczyzny, przechodzącej przez prostą AB, albo wreszcie jest tożsamością (**P 30, 23, 24**); a więc:

$$S = CR, \text{ albo } S = CP, \text{ albo } S = C.$$

Z drugiej strony, każde z przekształceń C, R, P zamienia każdą kulę na kulę do niej symetryczną (**P 52 § I; P 23, 41 § II; P 11, 13**): a więc można to samo powiedzieć i o S. Wystarczy teraz powołać się na **P 31**].

P 36. — *Df.* „Podobieństwo, które każdej parze punktów podporządkowuje parę do niej przystającą — albo (co na jedno wychodzi) każdej kuli kulę do niej symetryczną — przyjmuje nazwę «*jedno-*

mierności (izomerji)» [1]). Dwie figury, które odpowiadają sobie wskutek «jednomierności» nazywać będziemy «*jednomiernemi*»". Tak otrzymana zależność jest oczywiście odwracalna, czyli przemienna albo wzajemna; ażeby stwierdzić, że pomiędzy figurami F, F' istnieje taka zależność, będziemy pisali $F \asymp F'$, gdzie znak «$\asymp$» czyta się «*jest jednomierna z*»". — „Ale jeżeli mówić będziemy o *figurach płaskich* (parach punktów, odcinkach, kątach, trójkątach, kołach i t. d.), odpowiadających sobie wskutek jednomierności, nazywać je będziemy także «*przystającemi*». Patrz **P I, 3I, 35**". Możemy przeto powiedzieć, na zasadzie **P 32**:

P 37. — *Tr.* „Każda figura jest jednomierna z samą sobą, czyli: tożsamość jest jednomiernością. Z $F \asymp F'$ wynika $F' \asymp F$, czyli: działanie odwrotne jednomierności jest jednomiernością. Dwie figury, z których każda jest jednomierna z figurą trzecią, są jednomierne jedna względem drugiej; jednomierność jest więc przechodnia, to znaczy, że każdy iloczyn jednomierności jest jednomiernością".

P 38. — *Tr.* „Symetrja, obrót — i każde przekształcenie, złożone z symetrji albo z obrotów — jest zawsze jednomiernością. I odwrotnie: każda jednomierność, o ile nie jest sama symetrją, równa się iloczynowi dwuch lub więcej symetrji". [Część pierwsza wynika bezpośrednio z **P 22 § II** i **P 2, 35—37**; druga została już ustalona przy dowodzeniu **P 35**].

P 39. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są punktami niewspółlinjowemi, i tak samo D, E, F, wtedy istnieje przynajmniej jedna jednomierność taka, która przekształca punkt A na punkt D, promień od A ku B na promień od D ku E, a półpłaszczyznę przez AB ku C na półpłaszczyznę przez DE ku F". [Równoodwrotność względem punktu A D przekształca B i C na B' i C'; jeżeli B' nie leży na promieniu DE, to niech będzie B'' śladem tego promienia na kuli B'_D (**P 37 § III**). Wtedy — zależnie od tego, czy punkty B', B'', D są czy nie są współlinjowe — równoodwrotność względem D, albo półobrót dokoła prostej, łączącej punkt B' B'' z punktem D, przekształca B' na B'', pozostawiając punkt D bez zmiany, a punkt C' od-

[1]) Nazwa, którą (o ile się nie mylę) zaproponował CH. MÉRAY w *Nouveaux éléments de Géométrie* (Paris, 1874), a która obejmuje wszystkie działania podstawowe, zwane inaczej «ruchami 1-go i 2-go rodzaju», «równościami miarowemi (metrycznemi)», albo po prostu «równościami». Ale wyraz «równość» ma znaczenie o wiele ogólniejsze i więcej oderwane, wspólne niemal wszystkim naukom, należy więc z natury rzeczy do Logiki.

wzorowuje w punkcie, który oznaczymy przez C'' i który nie leży na prostej DE. Jeżeli teraz ten punkt nie należy do półpłaszczyzny przez DE ku F, wtedy istnieje taki obrót (dokoła prostej DE), który przenosi punkt C'' na tę półpłaszczyznę (**P 44, § III, P 7, 9**), nie poruszając ani punktu B'' ani punktu D (**P 23 § II**). Tak więc za pomocą jednomierności (**P 38**) przechodzimy od A, AB, $(AB)\,C$ do D, DE, $(DE)\,F$; pozatym trzeba się tylko powołać na **P 37**]. Jeżeli teraz przypuścimy, że proste AC, DF są prostopadłe do prostych AB, DE, wtedy i promień AC będzie musiał upaść na promień DF (**P II § II** i t. d.), a kąt $\hat{A}.BC$ na kąt $\hat{D}.EF$ (**P 47 § III**), wskutek czego:

P 40. — *Tr.* „Wszystkie kąty proste są do siebie przystające. Patrz **P 36**". — Oprócz tego:

P 4I. — *Tr.* „Dwa jakiekolwiek promienie, albo dwie jakiekolwiek półpłaszczyzny są zawsze do siebie przystające, a ich początki zawsze odpowiadają sobie wzajemnie. Patrz **P 54 § III**".

P 42. — *Tr.* „Jeżeli, w założeniu **P 39**, $\boldsymbol{O}$ jest jednomiernością, która odwzorowuje odpowiednio A, AB, $(AB)\,C$ na D, DE, $(DE)\,F$: wtedy każda jednomierność, prowadząca do tegoż samego rezultatu, jest równoważna jednomierności $\boldsymbol{O}$, albo też jednomierności $\boldsymbol{O}$ i odzwierciedleniu za pomocą płaszczyzny DEF". [W rzeczy samej, jeżeli przyjmiemy $B' \equiv \boldsymbol{O}B$, $C' \equiv \boldsymbol{O}C$, $\boldsymbol{P} \equiv /DEF$ i jeżeli oznaczymy przez $\boldsymbol{I}$ jednomierność, która (podobnie jak $\boldsymbol{O}$) odwzorowuje A, AB, $(AB)\,C$ na D, DE, $(DE)\,F$, wtedy jednomierność $\boldsymbol{I}$ przenosi także punkt B na punkt B' (**P 37 § III**), a więc kule C_A i C_B na kule odpowiadające im przez symetrję względem A D i B B' (**P 3I, 38**), czyli na kule C'_D i $C'_{B'}$, i ostatecznie punkt C — wspólny dla C_A, C_B i $(AB)\,C$ — na punkt C', który jest jedynym punktem wspólnym dla C'_D, $C'_{B'}$ i $(DE)\,F$ (**P 47, 49 § I, P 44 § III** i t. d.). A więc każda z dwuch jednomierności $\boldsymbol{O}$ i $\boldsymbol{I}$, odwzorowuje punkty A, B, C na D, B', C', wskutek czego iloczyn $\boldsymbol{I}\boldsymbol{O}^{-1}$ jest jednomiernością, która pozostawia bez zmiany każdy z punktów niewspółlinjowych D, B', C'. Przeto $\boldsymbol{I}\boldsymbol{O}^{-1} = 1$, albo $\boldsymbol{I}\boldsymbol{O}^{-1} = \boldsymbol{P}$ (**P 23**); tak więc (mnożąc obie strony przez $\boldsymbol{O}$): $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{O}$, albo $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{O}$].

P 43. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są punktami niewspółlinjowemi, wtedy promienie AB i AC są do siebie symetryczne względem jakiejś osi; a więc para promieni AB i AC jest zawsze przystająca do pary AC i AB". EUKL., ks. I, pod. IX. [Jeżeli D jest punktem promienia AC,

oddalonym od A jak B (**P 37 § III**), wtedy te dwa promienie zamieniają się jeden na drugi za pomocą p ó ł o b r o t u dokoła łączącej A z punktem $B\,D$ (**P 3 — 5 § II; P 34 § III**)].

P 44. — *Tr.* „Jeżeli dwa odcinki albo dwa kąty płaskie wypukłe są do siebie przystające, wtedy para punktów końcowych albo ramion jednego jest przystająca do pary punktów końcowych albo ramion drugiego; i odwrotnie". [To wynika z **P 54, 55 § III** i t. d.].

P 45. — *Tr.* „Jeżeli punkty A, B, C są niewspółlinjowe, a D jest punktem półpłaszczyzny przez AB ku C, nie leżącym na promieniu $|AC$, wtedy kąty $\widehat{A}.BC$, $\widehat{A}.BD$ nie mogą być do siebie przystające". [Ponieważ t o ż s a m o ś ć przekształca A, $|AB$, $(AB)\,C$ odpowiednio na A, $|AB$, $(AB)\,C$, przeto ż a d n a i n n a jednomierność nie może doprowadzić do tego samego rezultatu, z wyjątkiem odzwierciedlenia za pomocą płaszczyzny ABC (**P 42**), które nie zmienia żadnego z tych elementów. Ponieważ zaś promień $|AD$ jest różny od promienia $|AC$, przeto para promieni $(|AB, |AC)$ nie jest przystająca do pary $(|AB, |AD)$ (**P 41, 54 § III**), a więc nie jest też przystająca do pary $(|AD, |AB)$ (**P 37, 43**); zatym kąty $\widehat{A}.BC$ i $\widehat{A}.BD$ nie mogą być do siebie przystające (**P 44**)]. — Stąd wynika, przy uwzględnieniu **P 42, 43 § III**:

P 46. — *Tr.* „Jeżeli $C' \equiv C/AB$, wtedy żaden promień, mający początek w punkcie A i leżący na płaszczyźnie ABC, ale różny od każdego z promieni $|AC$, $|AC'$, nie może zawierać z promieniem $|AB$ kąta przystającego do $\widehat{A}.BC$. Patrz **P 47 § I**".

P 47. — *Tr.* „Żaden kąt płaski nie jest symetryczny do siebie samego względem d w u c h r ó ż n y c h p r o s t y c h". [A, B, C niech będą punktami niewspółlinjowemi, przyczym punkt C niech będzie oddalony A jak B. Że kąt $\widehat{A}.BC$ (albo $\overset{\times}{A}.BC$) jest do siebie samego symetryczny względem jakiejś osi r — o tym już wiemy z **P 43, 44**. Z drugiej strony każda s y m e t r j a o s i o w a, która odzwierciedla ten kąt na siebie samego, zamienia w nim ramiona $|AB$ i $|AC$ (**P 55 § III**) jedno na drugie, ponieważ, gdyby mogła odwzorować każde z nich na sobie samym, wtedy pozostawiłaby bez zmiany każdy z punktów A, B, C (**P 37 § III**). Przeto symetrja taka musi przenieść punkty B i C jeden na miejsce drugiego (**tamże**), pozostawiając punkt A bez zmiany; a więc oś symetrji, która zawiera oba punkty (różne od siebie) A i $B\,C$ (**P 54 § I**) musi pokryć się z osią r (**P 19 § I**)].

P 48. — *Df.* „*«Dwusieczną* k ą t a p ł a s k i e g o» jest ta p ó ł p r o s t a, która ma początek w w i e r z c h o ł k u kąta i leży jednocześnie w kącie danym i na jego o s i s y m e t r j i. Patrz **P 47 § III** i **P 43, 47**".

P 49. — *Tr.* „Jeżeli dwa kąty płaskie wypukłe są do siebie przystające, wtedy są też przystające do siebie kąty wypukłe, które d w u s i e c z n e kątów danych tworzą odpowiednio z ramionami jednego i drugiego. Patrz **P 48**". [Istotnie, jednomierność, za pomocą której można doprowadzić do przystawania oba kąty dane (**P 36**), będzie musiała również doprowadzić do przystawania dwusieczne tych kątów, a to na zasadzie **P 47**].

§ V.

Zależności: «większy» i «mniejszy» pomiędzy dwoma odcinkami albo kątami płaskiemi. Przystawanie trójkątów. Suma dwuch odcinków albo dwuch kątów płaskich wypukłych. Różne własności trójkątów, kół, kul i t. d.

P 1. — *Df.* „Jeżeli A, B, C, D są punktami, przyczym punkt A jest różny od B, wtedy powiedzenie, że «odcinek $|AB|$ *jest mniejszy* od odcinka $|CD|$», albo że «odcinek $|CD|$ *jest większy* od odcinka $|AB|$" — ($«|AB|<|CD|»$ albo $«|CD|>|AB|»$) — oznacza: «istnieje takie przekształcenie izomeryczne (jednomierne), wskutek którego jeden z końców, A albo B, pierwszego odcinka zamienia się na jeden z końców, C albo D, drugiego odcinka, a drugi koniec odcinka $|AB|$ zamienia się na punkt, który leży między C i D»; albo też, co jest toż samo: «między punktami C i D istnieje taki punkt, — np. punkt X — że odcinek $|AB|$ jest przystający do $|CX|$ lub do $|DX|$". Patrz **P 10 § III** i **P 36 § IV**. Jeżeli zaś punkty A i B pokrywają się wzajemnie, wtedy wyrażenie $«|AB|<|CD|»$ albo $«|CD|>|AB|»$ oznaczać będzie jedynie, że „punkty C i D są od siebie różne". — Stąd wynikają niemal bezpośrednio wnioski następujące: „Jeżeli punkt C należy do $|AB|$ ale jest różny od B, wtedy odcinek $|AC|$ jest zawsze mniejszy od $|AB|$" (**P 37 § IV**); „jeżeli dwa odcinki są do siebie przystające, i jeżeli pomiędzy pierwszym z nich i jakimś odcinkiem trzecim istnieje zależność: $<$, $\leq$, lub $>$, wtedy ta sama zależność istnieje pomiędzy drugim i trzecim" **(tamże)**.

P 2. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C, D są punktami i jeżeli odcinek $|AB|$ jest mniejszy od $|CD|$, wtedy istnieje niezawodnie przekształcenie izomeryczne, wskutek którego odcinek $|AB|$ będzie pomieszczony w odcinku $|CD|$, przyczym można żądać, ażeby którykolwiek z końców A i B został przeniesiony na punkt C, albo żeby którykolwiek z końców C i D został pokryty przez punkt A. Patrz **P 1**". [Istotnie, jeżeli za pomocą izomerji

można sprawić, że punkt A zostanie przeniesiony do C, a B padnie pomiędzy C i D, to można przenieść następnie punkt A na D przez dołączenie równoodwrotności względem punktu $C|D$, przyczym punkt B pozostaje wewnątrz odcinka danego $|CD|$. I t. d.].

P 3. — *Tr.* „Jeżeli są dane cztery jakiekolwiek punkty A, B, C, D, wtedy istnieje jedna z trzech zależności: albo odcinek $|AB|$ jest przystający do odcinka $|CD|$, albo odcinek $|AB|$ jest mniejszy od $|CD|$, albo odcinek $|AB|$ jest większy od $|CD|$; a każdy z tych przypadków wyłącza dwa pozostałe". [Ograniczam się do przypuszczenia, że $A \infty = B$ i $C \infty = D$. Co do pierwszej części twierdzenia, wystarczy przenieść promień $|AB$ na promień $|CD$ podług **P 41 § IV**; jeżeli przytym punkt B nie upadnie na D, wtedy padnie na jeden z punktów wewnętrznych odcinka $|CD|$ lub też na przedłużenie tego odcinka poza D (**P 29 § III**). — Jeżeli jednak np. $|AB| \leq |CD|$, wtedy nie może istnieć izomerja, któraby przeniosła punkt A na C, a B na punkt B', należący do $|CD|$, ale nie pokrywający się z punktem D, ponieważ odcinek taki $|CB'|$ nigdy nie jest przystający do $|CD|$ (**P 46 § I, P 37 § II, P 31 § IV**). Tak więc dowiedliśmy, że fakt $|AB| \leq |CD|$ nie zgadza się z faktem $|AB| < |CD|$ (**P 2**), ani też z faktem $|CD| < |AB|$, gdyż można tu zastosować podstawienie $\left(\begin{smallmatrix} C, & D, & A, & B \\ A, & B, & C, & D \end{smallmatrix}\right)$. Za pomocą podobnego rozumowania dowodzi się jeszcze sprzeczności założeń: $|AB| < |CD|$ i $|CD| < |AB|$, wyrażających istnienie dwuch izomerji, z których jedna odwzorowałaby punkty (A, B) w punktach (C, B'), — przyczym B' leży między C i D — druga zaś punkty (C, D, B') w punktach (A, D'', B''), — przyczym D'' leży między A i B, a B'' między D'' i A — a więc istnienie izomerji, któreby przeniosły punkt B na B'', nie poruszając punktu A (**P 37 § IV**) i t. d.]. — Tymsamym dowiedliśmy jeszcze twierdzenia następującego:

P 4. — *Tr.* „Jeżeli punkt A nie pokrywa się z punktem B, ani też punkt C z punktem D, wtedy każda izomerja, przenosząca promień $|AB$ na $|CD$, sprawia, że punkt B zamienia się na punkt wewnętrzny albo zewnętrzny odcinka $|CD|$, albo też na punkt pokrywający się z D, zależnie od tego, czy odcinek $|AB|$ jest mniejszy, większy czy równy $|CD|$".

P 5. — *Tr.* „Jeżeli z trzech odcinków danych pierwszy jest mniejszy od drugiego, a drugi mniejszy od trzeciego, wtedy i pierwszy jest mniejszy od trzeciego". [Niech będą dane punkty A, B, C, D, E, F. Jeżeli np. izomerja $\boldsymbol{I}$ przenosi punkt A na punkt C, a B na punkt B', leżący między C i D (**P 1**); i podobnie izomerja $\boldsymbol{L}$ przenosi punkt C na punkt F, a D

na punkt D'', leżący między F i E; wtedy punkt B', wskutek $\boldsymbol{L}$, będzie przeniesiony do punktu B'', leżącego między D'' i F, a ponieważ leżenie między dwoma punktami jest własnością współzmienną tych punktów ze względu na izomerję (**P 3, 36 § IV**), przeto punkt B'' leży między F i E (**P 19 § III**), a więc odcinek $|AB|$, który jest przystający do $|CB'|$, jest mniejszy od odcinka $|FE|$ (**P 1**). I t. d.].

P 6. — *Tr.* „Jeżeli są dane trzy punkty A, B, C, to punkt C jest wewnętrzny, zewnętrzny albo należący do kuli B_A, stosownie do tego, czy odcinek $|AC|$ jest mniejszy, większy czy równy odcinkowi $|AB|$. Patrz **P 5 § III**". [Jeżeli np. $B \infty = A$, a $|AB| < |AC|$, to istnieje taka izomerja, która, pozostawiając punkt A bez zmiany, przenosi punkt B na punkt B', leżący między A i C (**P 1, 2**); a więc punkt C jest zewnętrzny dla odcinka $|AB'|$ (**P 11, 12 § III**). Z drugiej strony punkt C jest zewnętrzny dla odcinka $|AB''|$, — jeżeli $B'' \equiv B'/A$, — gdyż leży na promieniu $|AB'$ (**P 29 § III**), nie mającym punktów wspólnych z promieniem $|AB''$, z wyjątkiem punktu A (**P 30, 32 § III**), ale jest różny od A, B', B''. Przeto punkt C jest zewnętrzny dla odcinka $|B'B''|$ (**P 11, 20 § III**), a tym samym jest zewnętrzny dla kuli B_A (**P 6, 10 § III**). — Podobnie z założenia $C \infty = A$ i $|AC| < |AB|$ wynika $(A, C) \preceq (A, C')$, gdzie C' oznacza punkt zawarty między A i B. Ale punkt taki musi leżeć między B i B/A, przeto punkt C', a więc i punkt C, jest wewnętrzny dla kuli biegunowej punktów B i B/A (**P 10 § III**), czyli dla B_A].

P 7. — *Tr.* „Jakiekolwiek będą punkty A, B, C, jeżeli punkt C jest wewnętrzny dla kuli przez B o środku A, wtedy punkt B będzie zewnętrzny dla kuli C_A, i odwrotnie; oprócz tego każdy punkt wewnętrzny dla C_A będzie też wewnętrznym dla B_A". [To wynika z **P 6, 5** i t. d.].

P 8. — *Tr.* „Każda prosta, przechodząca przez punkt wewnętrzny, przecina kulę w dwuch punktach, które są zawsze od siebie różne". [Niech będzie punkt C, jak poprzednio, wewnętrzny dla kuli B_A. Jeżeli prosta przechodzi przez punkt A, albo jeżeli jest prostopadła do CA, wtedy wracamy do **P 20 § II** albo **P 7, 3 § III**; jeżeli nie, wtedy spodek prostopadłej AD, poprowadzonej do tej prostej, będzie wewnętrzny dla C_A (**P 26 § III**), a więc wewnętrzny i dla B_A (**P 7**); istotnie więc prosta DC (jako prostopadła do DA) spotka kulę dwa razy].

P 9. — *Tr.* „Każda prosta zawiera punkty zewnętrzne każdej kuli". [Niech będzie np. dana kula B_A, przyczym można przyjąć, że $B \infty = A$. Jeżeli prosta jest styczna do kuli w punkcie C, wtedy każdy jej punkt

różny od C jest zewnętrzny dla kuli (**P 27 § III**). Jeżeli zaś punkt D prostej leży wewnątrz kuli, tak że $|AD| < |AB|$ (**P 6**), wtedy obierając jakikolwiek punkt zewnętrzny — np. $A' \equiv A/B$ — znajdziemy, że odcinek $|AB|$ jest mniejszy od $|AA'|$; a więc $|AD| < |AA'|$ (**P 5**), a zatym punkt D jest wewnętrzny dla kuli A'_A (**P 6**). Ta kula spotyka się więc z prostą daną (**P 8**), a punkty wspólne są zewnętrzne dla B_A, jak i punkt A' (**P 8 § III**)].

P 10. — *Tr.* „Niech będą A i B punktami różnemi od siebie, C punktem zewnętrznym dla kuli B_A, ρ płaszczyzną przechodzącą przez te wszystkie trzy punkty; dowiedziemy, że w tej płaszczyźnie można poprowadzić z punktu C dwie proste styczne do kuli". EUKL., ks. 3-a, pod. XVII. [Każdy z dwuch punktów, — np. D — w których prosta CA spotyka kulę B_A (**P 20 § II**) jest wewnętrzny dla kuli C_A (**P 7**); przeto prosta, poprowadzona na płaszczyźnie ρ przez punkt D prostopadle do CA, przecina kulę C_A w dwuch punktach. Jeżeli, oznaczając przez E i E' te dwa punkty, a przez F i F' spodki prostopadłych, poprowadzonych z punktu C do prostych AE, AE', wykonamy półobrót płaszczyzny ρ dokoła (różnych od siebie) punktów A i $C|E$ jako zawiasów (**P 51 § I**), wtedy punkty C i E zamienią się jeden na drugi, i podobnie proste CA, EA. Przeto prosta ED, prostopadła do CA, pokryje prostą CF, prostopadłą do EA (**P 9, 23 § II**), a więc i punkty D i F zamienią się jeden na drugi; a ponieważ punkt D leży na kole B_A, które pozostaje bez zmiany (**P 50 § I**), przeto i punkt F leży na tym kole, a prosta CF będzie do niego styczna, jak i prosta ED (**P 8 § II**). Tak samo i prosta CF' jest styczna, a czytelnik może się przekonać, że te dwie proste CF' i CF nie pokrywają się z sobą].

P 11. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są punktami i jeżeli punkt C leży między A i B, wtedy kula biegunowa pary (A, B) i kula przez C dokoła A spotykają się". [Niech będzie $M \equiv A|B$ i $N = A|C$; wtedy punkt N musi leżeć między M i A, gdyż inaczej punkt M byłby wewnętrzny dla odcinka $|AN|$ (**P 29, 33 § III**) — wobec tego, że punkty M, N, A są od siebie różne i że $M, N \equiv |AB|$ — a zatym punkt B leżałby między A i C (**P 14 § IV**), co się sprzeciwia założeniu (**P 12 § III**). A więc punkt M jest zewnętrzny dla kuli N_A (**P 1, 6**); istnieje przeto na N_A taki punkt D, że $MD \perp DA$ (**P 10** i t. d.). Punkt A/D będzie leżał na kuli A_M (**P 3—5 § II**), która jest kulą biegunową punktów A i B, a także będzie leżał na kuli C_A, gdyż punkt A/D zamienia się z punktem A/N, czyli C, (a kula C_A zamienia się na siebie samą) wskutek półobrotu dokoła osi, przechodzącej przez punkt A].

P 12. — *Df.* „O dwuch kątach płaskich wypukłych (i tak samo o dwuch kątach wklęsłych) mówimy, że pierwszy «*jest mniejszy*» ($«<»$) od drugiego, albo że drugi «*jest większy*» ($«>»$) od pierwszego, jeżeli istnieje takie przekształcenie izomeryczne, wskutek którego jedno ramię kąta pierwszego pokrywa się z jednym ramieniem kąta drugiego, a drugie ramię kąta pierwszego z jednym z promieni wewnętrznych kąta drugiego. Patrz **P 47 § III** i **P 41 § IV**". — To znaczy — jeżeli np. $\hat{A}.BC$ i $\hat{D}.EF$ są kątami danemi (w założeniu, że ani punkty A, B, C, ani D, E, F nie są współlinjowe): — „$\hat{A}.BC < \hat{D}.EF$, jeżeli istnieje punkt X leżący wewnątrz kąta $\hat{D}.EF$ i taki, że kąt $\hat{A}.BC$ jest przystający do $\hat{D}.EX$ albo do $\hat{D}.FX$". Por. **P 1.** — Jeżeli nie chcemy wyróżniać kątów «wypukłych» lub «wklęsłych», możemy jeszcze przyjąć określenie następujące (które, pod nieco odmienną postacią, jest równoznaczne z poprzednim).

„Mówiąc, że kąt α, wypukły lub wklęsły, jest *mniejszy* od kąta β (również wypukłego lub wklęsłego), stwierdzamy, że istnieje kąt przystający do α, mający jedno ramię wspólne z β i zawarty w kącie β, ale nie pokrywający się z β". — Zauważmy jeszcze na zasadzie **P 43 § IV**:

P 13. — *Tr.* „Jeżeli są dane punkty $A, B, \ldots F$, jak wyżej, i jeżeli istnieje przekształcenie izomeryczne, które promieniowi $|AB$ podporządkowuje promień $|DE$, a promieniowi $|AC$ promień wewnętrzny kąta $\hat{D}.EF$ (albo kąta $\breve{D}.EF$), wtedy będzie też istniało przekształcenie izomeryczne, które zamieni $|AB$ na $|DF$, a $|AC$ (jak i poprzednie) na promień wewnętrzny kąta $\hat{D}.EF$ (albo $\breve{D}.EF$)". Por. **P 2.**

P 14. — *Tr.* „Każde przekształcenie izomeryczne, które promieniowi $|AB$ i półpłaszczyźnie $|(AB)C$ podporządkowuje promień $|DE$ i półpłaszczyznę $|(DE)F$, podporządkuje również promieniowi $|AC$ promień wewnętrzny lub zewnętrzny kąta $\hat{D}.EF$, stosownie do tego, czy kąt $\hat{A}.BC$ jest mniejszy czy większy od kąta $\hat{D}.EF$". Por. **P 4.** [Jeżeli np. izomerja (którą możemy oznaczyć przez $\boldsymbol{I}$) zamienia $|DE$ na $|AB$, a F na punkt F', leżący wewnątrz kąta danego $\hat{A}.BC$ (a więc $\hat{A}.BC > \hat{D}.EF'$), wtedy promień $|AF'$ będzie musiał przejść między B i C (**P 47 § III**) i przetnie odcinek $|BC|$ w punkcie G; wskutek tego promień $|AC$, który nie przechodzi między B i G (**P 12 § III**), będzie zewnętrzny względem kąta

$\hat{A}.BF'$ (**P 48 § III**). Stąd wynika, że izomerja odwrotna $\boldsymbol{I}^{-1}$ (**P 37 § IV**), przeniesie $|AB$ na $|DE$, F' na F — a więc $|(AB)C$ na $|(DE)F$ (**P 49, 41 § III**) — a C na punkt zewnętrzny względem kąta $\hat{D}.EF$. Ale, ze względu na **P 42 § IV**, izomerje, które zamieniają $|AB$ na $|DE$ i $|(AB)C$ na $|(DE)F$, są równoważne albo tylko $\boldsymbol{I}^{-1}$, albo też $\boldsymbol{I}^{-1}$ w połączeniu z odzwierciedleniem $/DEF$. I t. d.].

P 15. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C, są punktami niewspółlinjowemi i tak samo D, E, F, wtedy nastąpi jeden z trzech przypadków: kąt wypukły $\hat{A}.BC$ będzie albo mniejszy, albo większy, albo przystający do kąta wypukłego $\hat{D}.EF$; ale dwa z tych trzech przypadków nie mogą istnieć jednocześnie". Por. **P 3.** [To wypada z **P 45 § IV** przy pomocy **P 37, 39 § IV** i **P 14** i t. d.].

P 16. — *Tr.* „Jeżeli pierwszy z trzech kątów jest mniejszy od drugiego albo przystający do drugiego, a drugi jest mniejszy od trzeciego, wtedy i kąt pierwszy jest mniejszy od trzeciego". Por. **P 5.**

P 17. — *Tr.* „Jeżeli zarówno A, B, C jak i D, E, F są punktami niewspółlinjowemi, a boki $|AB|$, $|AC|$ i kąt $\hat{A}.BC$ trójkąta $|ABC|$ są odpowiednio przystające do boków $|DE|$, $|DF|$ i do kąta $\hat{D}.EF$ trójkąta $|DEF|$: wtedy będzie też bok trzeci $|BC|$ przystający do boku trzeciego $|EF|$, a trójkąt przystający do trójkąta; z kątów pozostałych będą do siebie przystające: $\hat{B}.AC$ z $\hat{E}.DF$ i $\hat{C}.AB$ z $\hat{F}.DE$, czyli kąty, zawarte między bokami przystającemi. Patrz **P 51 § III**". — EUKL., ks. 1-a, pod. IV. [Ponieważ $\hat{A}.BC \leq \hat{D}.EF$, przeto musi istnieć izomerja, — np. $\boldsymbol{M}$ — która przekształca punkt A na D, promień $|AB$ na $|DE$, $|AC$ na $|DF$ (**P 44 § IV** i t. d.). Pary punktów (D, E) i $(D, \boldsymbol{M}B)$ są do siebie przystające (**P 37, 44, 32 § IV**); ale na promieniu $|DE$ żaden punkt różny od E nie jest oddalony od D jak E (**P 37 § III**); przeto $\boldsymbol{M}B = E$ (**P 31 § IV**) i podobnie $\boldsymbol{M}C = F$ i t. d.]. — Również i następne twierdzenie dotyczy, chociaż nie bezpośrednio, jednego z przypadków przystawania trójkątów; patrz **P 44 § IV.**

P 18. — *Tr.* „Dwie trójki punktów (A, B, C) i (D, E, F) są do siebie przystające, jeżeli para (A, B) jest przystająca do (DE), para (B, C) do (EF) i para (A, C) do (D, F)". — EUKL., ks. 1-a, pod. VIII. [Przy-

puszczam na początek, że punkty A, B, C nie są współlinjowe. Niech będzie $\boldsymbol{L}$ izomerją, wskutek której $\boldsymbol{L}A = D$, $\boldsymbol{L}B = E$, $\boldsymbol{L}C = C'$, a więc punkty D, E, C' nie są współlinjowe. Otóż z założenia, że $(A, C) \asymp (D, F)$, wynika $(D, C') \asymp (DF)$, przeto $C' \in F_D$ (**P 46 § I P 31 § IV**), a podobnie $C' \in F_E$. Jeżeli więc za pomocą obrotu dokoła prostej DE przeniesiemy punkt C' na płaszczyznę ρ, zawierającą punkty D, E, F (**P 27 § II**), to ten punkt C' upadnie na jeden z punktów wspólnych dwuch kół F_D, F_E, padnie przeto (**P 47 § I** i t. d.) albo wprost na F, albo też będzie go można przenieść na F za pomocą obrotu płaszczyzny ρ dokoła punktów D, E jako zawiasów (**P 49, 51 § I**). — Dokończenie pozostawiamy czytelnikowi].

P 19. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są punktami niewspółlinjowemi, a D jakimkolwiek (ale różnym od C) punktem na cieniu punktu C z punktu B, wtedy kąt $\widehat{C}.AD$ — zewnętrzny dla trójkąta $|ABC|$ — będzie większy od każdego z kątów wewnętrznych nieprzyległych $\widehat{A}.BC$ i $\widehat{B}.AC$". — EUKL., ks. 1-a, pod. XVI. [Niech będzie $E \equiv A|C$, $F \equiv B/E$. Punkt F leży na półpłaszczyźnie $|(AC)D$, ponieważ prosta CA nie mogłaby przechodzić między D i F, gdyż przechodzi między B i D i między B i F (**P 16 § III**); ten punkt leży też na półpłaszczyźnie $|(CD)A$, ponieważ prosta CD nie mogłaby przejść między punktami F i A, gdyż nie przechodzi między A i E ani też między F i E (**P 13 § III**); przeto $F \in \widehat{C}.AD$ (**P 49 § III**), a więc F jest punktem wewnętrznym tego kąta. Wskutek tego $\widehat{C}.AF < \widehat{C}.AD$ (**P 12**). Ale z tego, że punkty C i F są odpowiednio symetryczne do A i B względem E, a więc i odcinki $|BC|$ i $|FA|$, a tym samym i kąty $\widehat{A}.BC$ i $\widehat{C}.FA$ są do siebie symetryczne (**P 47 § III** i t. d.), wnosimy, że te kąty będą do siebie przystające (**P 36 § IV**). Przeto $\widehat{A}.BC < \widehat{C}.AD$ (**P 16**). — Pozostaje jeszcze do dowiedzenia, że i kąt $\widehat{B}.AC$ jest mniejszy od $\widehat{C}.AD$, ale pozostawiamy to czytelnikowi].

P 20. — *Tr.* „Jeżeli w dwuch trójkątach $|ABC|$ i $|DEF|$ kąty $\widehat{B}.AC$ i $\widehat{C}.AB$ jednego z nich są odpowiednio przystające do kątów $\widehat{E}.DF$, $\widehat{F}.DE$ drugiego i jeżeli oprócz tego są przystające do siebie boki $|BC|$ i $|EF|$, zawarte między kątami przystającemi — albo też boki $|AB|$ i $|DE|$, przeciwległe kątom przystającym; wtedy kąt pozostały $\widehat{A}.BC$ będzie przystający do kąta pozostałego $\widehat{D}.EF$, a z boków pozostałych te będą do siebie przystające, które leżą naprzeciwko kątów przystających, czyli $|AB|$ do $|DE|$, $|AC|$ do $|DF|$". — EUKL., ks. 1-a, pod. XXVI. [Niech będzie najprzód $|BC| \asymp |EF|$. Podług założenia istnieje izomerja, — oznaczmy ją przez $\boldsymbol{M}$ — która przekształca parę promieni $|BA$ i $|BC$ na parę $|ED$ i $|EF$ (**P 44 § IV**), a więc taka, że punkt $\boldsymbol{M}C$ pokryje się z punktem F, a punkt $\boldsymbol{M}B$ z punktem E, a to z powodów, podanych w dowodzeniu **P 17**. Gdyby punkt $\boldsymbol{M}A$ nie pokrył się z punktem D, należałoby przyjąć, że leży albo wewnątrz odcinka $|DE|$, albo też na jego przedłużeniu poza D (**P 29 § III**); ale w pierwszym przypadku kąt $\widehat{C}.AB$ musiałby być mniejszy od $\widehat{F}.DE$, w drugim zaś większy (**P 12**); a więc punkt $\boldsymbol{M}A$ musi się pokryć z punktem D (**P 15**) i t. d. – Jeżeli natomiast założymy, że boki $|AB|$ i $|DE|$ są do siebie przystające i jeżeli, jak poprzednio, doprowadzimy kąty $\widehat{B}.AC$ i $\widehat{E}.DF$ do przystawania, to punkt A padnie na D; nie może się zdarzyć, ażeby punkt C upadł na punkt leżący między E i F, ani też, ażeby punkt F upadł pomiędzy E i nowym położeniem punktu C, ponieważ w jednym przypadku kąt $(\widehat{\boldsymbol{M}C})DE$, który jest przystający do $\widehat{C}.AB$, musiałby być większy od $\widehat{F}.DE$, w drugim — mniejszy (**P 19**). I t. d.].

P 21. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są punktami niewspółlinjowemi i jeżeli w trójkącie $|ABC|$ dwa boki $|AB|$ i $|AC|$ są do siebie przystające, wtedy kąty tym bokom przeciwległe są także przystające do siebie, a przedłużając odcinki $|AB|$ i $|AC|$ po za punkty B i C do punktów D i E, otrzymamy kąty $\widehat{B}.CD$ i $\widehat{C}.BE$, które również będą do siebie przystające". EUKL., ks. 1-a, pod. V. [Z założenia, za pośrednictwem **P 44, 31 § 4** i **P 46 § I**, dochodzimy do wniosku, że punkt C należy do kuli B_A, że zatym, jeżeli $M \equiv B|C$, prosta BC jest prostopadła do MA (**P 5 § II**); przeto kład płaszczyzny na siebie samą, otrzymany przez obrót dokoła punktów M, A jako zawiasów (**P 51 § I** i t. d.) zamienia kąty $\widehat{B}.AC$ i $\widehat{C}.AB$ jeden na drugi, i tak samo kąty $\widehat{B}.CD$, $\widehat{C}.BE$].

P 22. — *Tr.* „Jeżeli dwa kąty trójkąta są do siebie przystające, wtedy boki, przeciwległe kątom przystającym, są do siebie przystające". EUKL., ks. 1-a, pod. VI. [Kąty $\widehat{C}.AB$ i $\widehat{B}.AC$ niech będą do siebie przystające; gdyby bok $|AC|$ był mniejszy od $|AB|$, a więc równy odcinkowi $|BD|$, którego koniec D leży między A i B (**P I, 2**), wtedy kąty $\widehat{B}.CA$ i $\widehat{C}.BD$ byłyby do siebie przystające wskutek $\left(\frac{C, A, B, C, D}{A, C, D, E, F}\right)$ **P 17**, czyli: $\widehat{C}.BA \asymp \widehat{C}.BD$; ale to jest w sprzeczności z **P 12, 15**. I t. d.].

P 23. — *Tr.* „Naprzeciwko większego boku trójkąta leży kąt większy". EUKL., ks. 1-a, pod. XVIII. — To znaczy, że jeżeli A, B, C są punktam niewspółlinjowemi i jeżeli odcinek $|AB|$ jest mniejszy od $|AC|$, to wyniknie stąd, że $\widehat{C} . AB < \widehat{B} . AC$. [Można rozumować, jak EUKLIDES w miejscu zacytowanym, powołując się kolejno na **P I, 2, I9, 2I**].

P 24. — *Tr.* „Odwrotnie: kątowi większemu jest przeciwległy bok większy". EUKL., ks. 1-a, pod. XIX. [Z **P 3, 2I, 23**, za pomocą znanego rozumowania euklidesowskiego].

P 25. — *Df.* „Jeżeli są dane jakiekolwiek dwa odcinki α i β, a punkty A, B, C są obrane w taki sposób, że B leży na $|AC|$ i że odcinki $|AB|$ i $|BC|$ są przystające odpowiednio do α, β, wtedy każdy odcinek, przystający do odcinka $|AC|$ — ale tylko taki — charakteryzujemy jako «*sumę* dwuch odcinków α i β»". — Czyli: przez «*sumę* odcinków α i β» — albo «$\alpha+\beta$» — rozumiemy «klasę wszystkich odcinków przystających do odcinka $|AC|$, otrzymanego jak wyżej». Ale najczęściej (stosownie do zwyczaju) nazywać będziemy sumą dwuch odcinków każdy dowolny odcinek tej klasy. — Trzeba tylko nadmienić w celu objaśnienia tego określenia, że «jakkolwiek obierzemy punkty A', B', C', pod warunkiem wszakże, ażeby punkt B' należał do odcinka $|A'C'|$ i ażeby odcinki $|A'B'|$ i $|B'C'|$ były odpowiednio przystające do odcinków $|AB|$ i $|BC|$, to wypadnie, że odcinek $|A'C'|$ będzie zawsze przystający do odcinka $|AC|$», ponieważ (w założeniu, że punkty A i B są od siebie różne) izomerja, która przenosi parę (A, B) na (A', B') (**P 44, 32 § IV**) odwzoruje punkt C w punkcie C_1 promienia $|A'B'$ w taki sposób, że $(B', C_1) \asymp (B'C')$ **P 29 § III, P 36, 37 § IV** i t. d.), a przeto $C_1 = C'$ (**P 37 § III**).

P 26. — *Tr.* „W tym samym założeniu, dodać α i β jest to samo, co dodać β i α, ponieważ w obu przypadkach otrzymuje się odcinki przystające (własność przemienna); i jeżeli pierwszy z trzech odcinków danych jest mniejszy, większy lub przystający do drugiego: wtedy suma pierwszego z trzecim będzie mniejsza, większa lub przystająca do sumy drugiego z trzecim". — [W rzeczy samej, jeżeli $M \equiv A|C$, a $D \equiv B/M$, to przez równoodwrotność względem punktu M odcinek $|AC|$ zamieni się na siebie samego, a odcinki $|AB|$ i $|CD|$, $|BC|$ i $|DA|$ zamienią się jeden na drugi; przeto $|AD| \asymp \beta$, $|DC| \asymp \alpha$, a zatym $\alpha+\beta = \beta+\alpha$. — Jeżeli dalej $\alpha > \beta$, a γ jest odcinkiem dowolnym, to obierzmy punkty D, A, B w taki sposób, ażeby było $|DA| \asymp \gamma$, $|AB| \asymp \alpha$ i $A \varepsilon |DB|$; wtedy pomiędzy punktami A i B będzie musiał leżeć taki punkt C_1, że $|AC_1| \asymp \beta$ (**P I, 2**).

Ale punkt taki musi też leżeć między D i B (**P I9 § III**) i to tak, że $A \varepsilon |DC_1|$ (**P I7 § III**); a więc odcinek $|DB|$, który jest sumą γ i α (**P 25**) będzie większy od odcinka $|DC_1|$, stanowiącego sumę γ i β. I t. d.].

P 27. — *Tr.* „Suma dwuch którychkolwiek boków trójkąta jest zawsze większa od boku pozostałego". EUKL., ks. 1-a, pod. XX. — Albo innemi słowy: Jeżeli A, B, C są punktami niewspółlinjowemi, wtedy każdy odcinek, równoważny sumie dwuch odcinków $|BA|$, $|AC|$, będzie większy od odcinka $|BC|$". Patrz **P 25.** [Znane dowodzenie euklidesowskie opiera się — oprócz rozumowania z **P 25** — na **P 37 § III** i **P I2, I6, 2I, 24**].

P 28. — *Tr.* „Jeżeli D jest punktem wewnętrznym trójkąta $|ABC|$, wtedy odcinki $|BD|$, $|DC|$ dadzą sumę mniejszą od sumy boków $|BA|$, $|AC|$ trójkąta, ale zawierać będą kąt większy, to znaczy, że kąt $\widehat{D} . BC$ będzie zawsze większy od kąta $\widehat{A} . BC$". EUKL., ks. 1-a, pod. XXI. [W dowodzeniu występują **P 5I § III** i **P I6, I9, 25, 26, 27**]. — Że istnieje trójkąt, mający boki przystające do trzech odcinków danych, z których każdy jest mniejszy od sumy dwuch pozostałych, tego możnaby było dowieść później (patrz **P 43 § VI**): ale istnienie trójki punktów (X, Y, Z), spełniających warunek, aby odcinki $|XY|$, $|XZ|$, $|YZ|$ były wszystkie przystające do odcinka danego $|AB|$ — albo takie, ażeby $|XY|$ i $|XZ|$ były przystające do $|AB|$, a odcinek $|YZ|$ przystający do innego odcinka, mniejszego od podwojonego odcinka $|AB|$ — to już nie ulega wątpliwości wobec **P 25 § III** i **P II** [1]).

P 29. — *Tr.* „Niech będzie punkt D spodkiem prostopadłej, poprowadzonej z punktu A do prostej BC (a punkty A, B, C niech będą niewspółlinjowe); jeżeli odcinek $|DB|$ jest mniejszy od odcinka $|DC|$, to będzie też odcinek $|AB|$ mniejszy od $|AC|$. I odwrotnie, odcinek $|AB|$ nie może być mniejszy od $|AC|$, jeżeli odcinek $|DB|$ nie jest mniejszy od $|DC|$". LEGENDRE, *Éléments*, ks. 1-a, pod. XVI. [W założeniu, że punkt B nie leży na odcinku $|CD|$, niech będą A' i B' punkty symetryczne do A i B względem D. Punkt B' jest punktem wewnętrznym odcinka $|CD|$ (**P 4** i t. d.), jest więc wewnętrznym trójkąta $|CAA'|$ (**P 5I § III**); przeto odcinek $|AA'|$ jest mniejszy od sumy $|AB'|$ i $|B'A'|$ (**P 27**), a ta suma jest mniejsza od każdego odcinka, będącego sumą odcinków $|AC|$ i $|CA'|$ (**P 25, 28**). Ponieważ zaś odcinki $|AB'|$ i $|B'A'|$ są do siebie przystające

---

[1]) Wiadomo, że te fakty, pod względem ich zależności od istnienia punktów wspólnych dwuch kół, nie są w zupełności dowiedzione w tekście Euklidesowskim, jaki do nas doszedł. Patrz pod. I i XXII księgi 1-ej.

i podobnie odcinki $|AC|$ i $|CA'|$ (**P 7 § II, P 31 § IV** i t. d.), można się więc powołać na **P 14 § IV** i dojść do wniosku, że $|AB'| < |AC|$ (**P 1, 2** i t. d.). — Dokończenie pozostawiamy czytelnikowi].

P 30. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są punktami i punkt C należy do kuli B_A, wtedy każdy punkt leżący między B i C jest punktem wewnętrznym kuli; i odwrotnie: każdy punkt wewnętrzny kuli, współliniowy z dwoma niepokrywającemi się punktami B i C tej kuli, jest punktem wewnętrznym odcinka $|BC|$". EUKL., ks. 3-a, pod. II. [Niech będzie np. D punktem leżącym między B i C (a więc $B \infty = C$) i $M \equiv B|C$. Jeżeli $M = A$, wtedy powracamy do **P 4, 10 § III**; ale jeżeli punkt M jest różny od A, wtedy prosta MA będzie prostopadła do BC (**P 5, 6 § II**), wskutek czego $|MD| < |MB|$ albo $|MD| < |MC|$, zależnie od tego, czy punkt D leży na odcinku $|MB|$, czy też na odcinku $|MC|$ (**P II, 19 § III, P I**): a więc (**P 29**) odcinek $|AD|$ jest mniejszy od $|AB|$ albo od $|AC|$, co jest jedno i to samo (**P I**); wskutek tego punkt D będzie leżał wewnątrz kuli (**P 6**). — Jeżeli teraz np. punkt E jest współliniowy z punktami B i C i oprócz tego leży wewnątrz kuli B_A, to wiemy, że $|AE| < |AB|$ (**P 6**), a zatym $|ME| < |MB|$ (**P 29**); a więc E jest punktem wewnętrznym względem kuli B_M (**P 6**) i, co za tym idzie, względem odcinka $|BC|$ (**P 10 § III**)]. — Stąd wyprowadzamy, mając na względzie **P 21 § III** i **P 8**:

P 31. — *Tr.* „Odcinek, łączący dwa punkty wewnętrzne kuli, leży cały wewnątrz kuli". Por. **P 53 § III.**

P 32. — *Tr.* „Jeżeli dwa trójkąty mają po dwa boki przystające, ale kąty między niemi zawarte nieprzystające, wtedy bok trzeci będzie większy w tym trójkącie, w którym kąt jest większy". EUKL., ks. 1-a, pod. XXIV.

P 33. — *Tr.* Jeżeli dwa trójkąty mają po dwa boki przystające, ale boki pozostałe nie przystające, wtedy kąt, zawarty między bokami przystającemi, będzie większy w tym trójkącie, w którym bok trzeci jest większy". EUKL., ks. 1-a, pod. XXV.

P 34. — *Df.* „Jeżeli α, β są dwoma kątami płaskiemi wypukłemi i jeżeli zbudujemy kąty $\widehat{O}.AB$, $\widehat{O}.BC$, przystające odpowiednio do kątów α i β, pod warunkiem, ażeby punkt C leżał na płaszczyźnie punktów niewspółliniowych, O, A, B, ale zewnątrz półpłaszczyzny przez OB ku A: wtedy nazwę wspólną «*sumy* kąta α z kątem β», albo «*sumy* kątów α i β», albo «$\alpha+\beta$» nadajemy: 1) każdemu kątowi przystającemu

do kąta $\widehat{O}.AC$ lub do $\overset{\times}{O}.AC$, stosownie do tego, czy punkty B i C leżą po tej samej stronie prostej OA, czy też po stronach przeciwnych; 2) każdej półpłaszczyźnie, jeżeli punkt C padnie na prostą OA (czyli na przedłużenie odcinka $|OA|$ po za O). Patrz **P 39, 45, 47 § III** i **P 39, 41 § IV**". — Por. **P 25.** — I tutaj również należy nadmienić, że (przy danych kątach α i β) „jakkolwiek obierzemy punkty O', A', B', C' (pod warunkiem, i t. d.) kąt $\widehat{O'}.A'C'$ okaże się zawsze przystającym do $\widehat{O}.AC$" dlatego że izomerja, która przekształca promienie $|OA$ i $|OB$ na promienie $|O'A'$ i $|O'B'$ (**P 37, 44, 43 § IV**), zamienia $|OC$ na promień, który musi się pokryć z promieniem $|O'C'$, ze względu na **P 45 § IV.**

P 35. — *Tr.* „W tym samym założeniu, sumować α i β jest to to samo, co sumować β i α; i jeżeli z trzech kątów płaskich wypukłych pierwszy jest mniejszy, większy lub przystający do drugiego, wtedy suma pierwszego z trzecim będzie mniejsza, większa lub przystająca do sumy drugiego z trzecim". — Por. **P 26.** [W rzeczy samej, — jeżeli założymy, że punkty O, A, C nie są współliniowe i oznaczymy przez $|OM$ dwusieczną kąta $\widehat{O}.AC$ (albo kąta $\overset{\times}{O}.AC$), przedstawiającego sumę kątów α i β (**P 48 § IV**) — to kąt ten, przez półobrót dokoła prostej OM, zamieni się na siebie samego; a więc promień $|OB$ przekształci się na $|OD$, również zawarty w tym kącie, a kąty $\widehat{O}.AB$ i $\widehat{O}.CD$, a także $\widehat{O}.BC$ i $\widehat{O}.DA$ zostaną zamienione wzajemnie jeden na drugi: tak więc $\widehat{O}.AD \asymp \beta$, $\widehat{O}.DC \asymp \alpha$. Ale ponieważ punkty A i C leżą podług założenia po stronach przeciwnych prostej OB, będą więc leżały po stronach przeciwnych prostej OD; a zatym $\alpha+\beta = \beta+\alpha$. Dokończenie pozostawiamy czytelnikowi].

P 36. — *Tr.* „Każdy kąt, którego ramiona tworzą z promieniem wewnętrznym (wychodzącym z wierzchołka) kąty odpowiednio przystające do danych kątów wypukłych α i β, jest sumą tych kątów".

§ VI.

Równoległość prostych i płaszczyzn. Jednokładność i przesunięcie. Własności i konstrukcja podobieństw względem kuli. Przecięcie dwuch kul.

P 1. — *Tr.* „Jeżeli nie istnieje punkt wspólny dla dwuch prostych danych, leżących na tej samej płaszczyźnie, wtedy każda prosta, która jest prostopadła do jednej z nich i leży na ich wspólnej płaszczyźnie, jest prostopadła i do drugiej". [Dwie proste, które się nie spotykają, niech będą np. r i s, a na ich płaszczyźnie niech będzie dana trzecia prosta p, prostopadła do r. Na p istnieć będzie napewno punkt — np. A — nie należący do żadnej z prostych r i s, ponieważ prosta p jest różna od każdej z nich (**P 5 § II**), a więc nie spotyka jej więcej niż raz jeden. A więc punkty symetryczne do A względem prostych r i s są różne od A (**P 49 § I**); jeżeli przeto $A' \equiv A/r$, $A'' \equiv A/s$, to prosta AA' pokryje się z prostą p (**P 7 § II**), a prosta AA'' będzie prostopadła do s (**P 54 § I, P 5 § II**), czyli: prosta r jest prostopadła do pary punktów (A, A') w jej punkcie środkowym, i tak samo prosta s do pary (A', A''). Otóż gdyby proste AA' i AA'' nie pokryły się wzajemnie, wtedy musiałby istnieć na płaszczyźnie Ar punkt równooddalony od każdego z trzech punktów A, A', A'' (**P 12 § IV**), a zatym wspólny dla prostych r i s (**P 11, 15 § II**), co się sprzeciwia założeniu]. — Stąd widzimy — mając na uwadze (**P 46 § I P 45 § II**:

P 2. — *Tr.* „Dwie proste współpłaszczyznowe, ale nie mające punktu wspólnego, są zawsze do siebie symetryczne przez równoodwrotność; środkiem symetrji jest punkt środkowy pary spodków każdej wspólnej prostopadłej do tych prostych".

P 3. — *Tr.* „I odwrotnie: dwie proste symetryczne do siebie względem punktu (a więc współpłaszczyznowe) nie mogą się spotkać, o ile

nie zlewają się z sobą". [W powyższym założeniu środek symetrji nie może leżeć na żadnej z prostych danych (**P 46 § I**); gdyby więc te proste miały punkt wspólny, to spotkałyby się też w punkcie do niego symetrycznym, miałyby więc dwa punkty wspólne, różne jeden od drugiego (**P 45 § I**), wbrew **P 19 § I**].

P 4. — *Df.* „«Równoległa do prostej danej» oznacza: «prosta, która nie spotyka prostej danej, ale leży z nią na jednej płaszczyźnie». Innemi słowy: dwie proste, są «do siebie równoległe», jeżeli leżą na jednej płaszczyźnie, nie spotykając się; nie są równoległe, jeżeli się spotykają (mogą też pokrywać się wzajemnie), albo też jeżeli nie leżą na tej samej płaszczyźnie. (Domyślać się tu należy, że «jeżeli jedna prosta jest równoległa do drugiej, to i ta druga ze swej strony jest równoległa do pierwszej»). Możemy jeszcze — wskutek **P 2, 3** — powiedzieć: «równoległa do prostej danej» znaczy: «prosta symetryczna do danej względem punktu do niej nie należącego»". — Oczywiście (**P 45 § III**) «jeżeli dwie proste są do siebie równoległe, to każda z nich musi leżeć całkowicie po tej samej stronie drugiej".

P 5. — *Tr.* „Jeżeli dwie proste są do siebie równoległe, to jakkolwiek obierzemy punkt na jednej i punkt na drugiej, zawsze te proste będą symetryczne do siebie względem środka takiej pary punktów". [Istotnie — jeżeli te dwa punkty będą R i S — ponieważ przez równoodwrotność względem punktu $R|S$, prostopadła, poprowadzona z tego punktu do dwuch równoległych r, s (**P 1, 4** i t. d.), odzwierciedli się na sobie samej i zamieni punkty R i S jeden na drugi, przeto zamieni również proste r, s jedną na drugą (**P 6, 9, II, 45 § II**)].

P 6. — *Tr.* „Jeżeli jest dana prosta i punkt zewnątrz niej, wtedy przez punkt ten przechodzić będzie zawsze prosta równoległa do danej; ale dwie proste, z których każda byłaby równoległa do prostej danej, nie mogą mieć punktu wspólnego, o ile nie zlewają się z sobą". [Na prostej danej — np. r — obierzmy jakikolwiek punkt A; punkt dany niech będzie np. B. Równoodwrotność względem punktu $A|B$ podporządkowuje prostej r pewną prostą s, która jest równoległa do r (**P 3, 4**) i przechodzi przez B. Nie może się zdarzyć, ażeby inna prosta, różna od s, ale przechodząca przez B, była równoległa do r, ponieważ istnieje tylko jedna prosta symetryczna do prostej [danej względem punktu $A|B$ (**P 5**)]. — Stąd wynika:

P 7. — *Tr.* „Jeżeli dwie proste są do siebie równoległe, to każda prosta, przecinająca jedną z nich i leżąca na ich wspólnej płaszczyźnie, przetnie także i drugą".

P 8. — *Tr.* „Jeżeli dwie równoległe r, s są przecięte inną parą równoległych u, v, wtedy punkt środkowy pomiędzy punktami, w których proste u, v spotykają odpowiednio proste r, s, pokrywa się z punktem środkowym pomiędzy przecięciami prostych u, v z prostemi s, r". — Czyli: przekątne równoległoboku przecinają się wzajemnie w punktach środkowych; a więc boki i kąty przeciwległe są do siebie przystające i symetryczne". EUKL., ks. 1-a, pod. XXXIV.

P 9. — *Tr.* Odcinki, które łączą z tych samych stron końce odcinków przystających i równoległych do siebie, są także przystające i równoległe". EUKL., ks. 1-a, pod. XXXIII. — Albo, inaczej mówiąc: „Jeżeli punkty A, B, C, D są wszystkie różne od siebie i jeżeli odcinki $|AC|$ i $|BD|$ są przystające i równoległe i (wyjąwszy punkty A i B) leżą z tej samej strony prostej AB: wtedy odcinek $|CD|$ będzie przystający i równoległy do odcinka $|AB|$". [Ponieważ proste AC i BD są do siebie równoległe podług założenia, a punkt C nie leży na AB (**P 45 § III**), przeto prosta, która przechodzi przez ten punkt i jest równoległa do AB, przecina prostą BD w punkcie (**P 4**), — np. E — który musi leżeć na promieniu $|BD$ (**P 43 — 45 § III**); oprócz tego para punktów (B, E) jest przystająca do (A, C) (**P 8**), a zatym $(B, E) \asymp (B, D)$ (**P 32 § IV**). Ale stąd wynika $E = D$, jak to już widzieliśmy w innych przypadkach. I t. d.].

P 10. — *Tr.* „Jeżeli przedłużymy jeden z boków jakiegokolwiek trójkąta, wtedy kąt zewnętrzny będzie równy sumie obu kątów wewnętrznych, nie przyległych do tego kąta. Patrz **P 34 § V**". EUKL., ks. 1-a, pod. XXXII. — Innemi słowy: „Jeżeli A, B, C są trzema punktami niewspółlinjowemi, a D którymkolwiek punktem cienia punktu B z punktu A (z wyjątkiem B), wtedy kąt $\widehat{B}.CD$ będzie równoważny sumie kątów $\widehat{A}.BC$ i $\widehat{C}.AB$. Patrz **P 29 § III** i **P 34 § V**". [Niech będzie $M \equiv B|C$, $E \equiv A/M$; symetrja względem punktu M zamienia wzajemnie promienie $|CA$ i $|BE$ jeden na drugi, jak również promienie $|CB$ i $|BC$ i odcinki $|AB|$ i $|EC|$, a więc także i kąty $\widehat{C}.AB$ i $\widehat{B}.EC$ (**P 47 § III** i t. d.). W podobny sposób — dzięki symetrji względem punktów $A|B$ i B (**P 36, 38 § IV**) — są do siebie przystające kąty $\widehat{A}.BC$ i $\widehat{B}.AF$ (**P 5**), $\widehat{B}.AF$ i $\widehat{B}.DE$, gdzie F oznacza jakikolwiek (ale różny od B) punkt cienia punktu B z punktu E. A więc kąty $\widehat{A}.BC$ i $\widehat{B}.DE$ są przystające. Ponieważ dalej prosta BE przechodzi między punktami A i D, ale nie spotyka prostej CA (**P 3**), przeto musi przejść między C i D (**P 13 § III**); a więc te dwa punkty C i D leżą po stronach przeciwnych prostej BE; ale punkty D i E są oba pogrążone w cieniu prostej BC z punktu A (**P 38, 39 § III**). Wystarczy więc powołać się na **P 34 § V**].

P 11. — *Tr.* „Dwie proste, prostopadłe do tej samej płaszczyzny, są do siebie równoległe, o ile nie zlewają się z sobą. I jeżeli dwie proste są do siebie równoległe, wtedy każda płaszczyzna, prostopadła do jednej z nich, jest prostopadła i do drugiej". EUKL., ks. 11-a, pod. VI i VIII. [1) Jeżeli płaszczyzna spotyka te dwie proste w punktach R, S, wtedy symetrja względem punktu $R|S$ pozostawia płaszczyznę bez zmiany i zamienia obie prostopadłe jedną na drugą (**P 46 § I, P 33, 45 § II**). — 2) Jeżeli płaszczyzna π jest prostopadła do jednej z dwuch prostych równoległych r, s, — np. prostopadła do prostej s w punkcie S — wtedy płaszczyzna rs przecina płaszczyznę π wzdłuż prostej RS, która spotyka prostą r w jakimś punkcie R (**P 37 § II, P 4, 7**); a symetrja względem punktu $R|S$ zamienia proste r i s jedną na drugą (**P 5**), pozostawiając płaszczyznę π bez zmiany. I t. d.].

P 12. — *Tr.* „Dwie proste, równoległe do tej samej prostej i nie leżące z nią na jednej płaszczyźnie, są do siebie równoległe". EUKL., ks. 11-a, pod. IX. [Ponieważ płaszczyzna, prostopadła do którejkolwiek z nich (**P 35 § II**), jest do każdej prostopadła (**P 11**)].

P 13. — *Tr.* „Dwie płaszczyzny różne, z których każda jest prostopadła do tej samej prostej, nie mogą się spotkać. I odwrotnie, jeżeli dwie płaszczyzny nie mają punktów wspólnych, wtedy każda prosta, prostopadła do jednej z nich, jest prostopadła i do drugiej". Por. **P 1.** — [Część pierwsza wynika bezpośrednio z **P 9, 35 § II**; drugiej części dowodzi się jak **P 1**, powołując się głównie na **P 38 § II** i **P 12 § IV**].

P 14. — *Tr.* „Dla dwuch różnych płaszczyzn nieistnienie punktu wspólnego i symetrja jednej do drugiej względem jakiegoś punktu są warunkami równoważnemi". Por. **P 2, 3.**

P 15. *Df.* „Dwie płaszczyzny nazywają się «*równoległemi do siebie*», jeżeli nie mają żadnego punktu wspólnego; albo, co na jedno wychodzi (**P 14**), jeżeli jedna z nich jest symetryczna do drugiej względem

jakiegokolwiek punktu zewnętrznego". Por. **P 4**. — A więc każda z nich musi leżeć całkowicie po tej samej stronie drugiej płaszczyzny (**P 46 § III**).

P 16. — *Tr.* „Jeżeli dwie płaszczyzny są do siebie równoległe i jeżeli obierzemy dowolnie po jednym punkcie na każdej z nich, wtedy środek tej pary punktów będzie środkiem symetrji płaszczyzn danych". Por. **P 5**.

P 17. — *Tr.* „Zawsze istnieje płaszczyzna, która przechodzi przez punkt dany i jest równoległa do płaszczyzny danej, nie zawierającej tego punktu; a dwie płaszczyzny, równoległe, tak jedna jak i druga, do tej samej płaszczyzny, są do siebie równoległe, albo pokrywają się wzajemnie". Por. **P 6**.

P 18. — *Tr.* „Jeżeli dwie płaszczyzny są do siebie równoległe, wtedy każda płaszczyzna, przecinająca jedną z nich, przecina i drugą, a proste przecięcia są do siebie równoległe. I podobnie każda prosta, która przecina jedną z tych płaszczyzn, musi spotkać i drugą". Por. **P 7**. EUKL., ks. 11-a, pod. XVI.

P 19. — *Tr.* „Jeżeli dwie spotykające się proste są równoległe do dwuch innych spotykających się prostych, wtedy płaszczyzna pierwszych dwuch jest równoległa do płaszczyzny dwuch drugich, o ile się z tamtą nie pokrywa". EUKL., ks. 11-a, pod. XV. [Jeżeli oznaczymy pierwszą parę prostych przez r, s, drugą przez r', s', to symetrja względem punktu środkowego pomiędzy punktami $r.s$ i $r'.s'$ zamienia wzajemnie proste r i r', s i s' jedną na drugą (**P 5**), a więc zamienia także płaszczyznę rs na $r's'$, i odwrotnie].

P 20. — *Df.* „Prosta jest «równoległa do płaszczyzny», a płaszczyzna jest «równoległa do prostej», jeżeli nie istnieje punkt wspólny dla prostej i płaszczyzny". Por. **P 4, 15.** — A więc prosta jest równoległa do płaszczyzny, jeżeli jest równoległa do którejkolwiek prostej tej płaszczyzny, ale sama nie leży na tej płaszczyźnie. I t. d.

P 21. — *Tr.* „Proste, które przechodzą przez punkt dany i są równoległe do tej samej płaszczyzny, leżą wszystkie po jednej stronie tej płaszczyzny i wszystkie należą do jednej płaszczyzny".

P 22. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są punktami niewspółlinjowemi i tak samo punkty A', B', C' i jeżeli proste AB, BC, CA są odpowiednio równoległe do prostych $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$: wtedy trzy łączące AA', BB', CC' spotykają się w jednym punkcie, albo są równoległe". [Założenie wyłącza możliwość pokrywania się punktu A z punktem A', albo B z B', albo C z C'; oprócz tego wymaga, ażeby wszystkie trzy wymienione łączące były od siebie różne (**P 19 § I, P 4**). Przypuśćmy z początku, że płaszczyzny ABC i $A'B'C'$ nie pokrywają się z sobą. Ponieważ proste AA' i BB' leżą obie na płaszczyźnie równoległych AB i $A'B'$, przeto obie spotykają się w jakimś punkcie, albo też są do siebie równoległe (**P 2, 4**). Ale ponieważ w pierwszym przypadku prosta CC' leży w jednej płaszczyźnie z AA' i w jednej płaszczyźnie z BB', ale nie może przeciąć tych prostych w punktach różnych, ani też spotkać się tylko z jedną z nich (**P 35, 36 § I, P 4** i t. d.), przeto musi spotkać obie w ich punkcie spólnym; w drugim zaś przypadku za pomocą podobnego rozumowania dowiedziemy, że prosta CC' nie spotka żadnej z prostych AA' i BB'. — Przypuśćmy teraz, że punkty A, B, C, A', B', C' leżą wszystkie na jednej płaszczyźnie; i tu rozróżnimy dwa przypadki. Po pierwsze, proste AA' i BB' mogą się przeciąć w jakimś punkcie, np. w punkcie O. W takim razie obierzmy zewnątrz płaszczyzny wspólnej ABC jakikolwiek punkt S (**P 16, § II**), a na prostych SA, SB dwa punkty A'', B'' różne od siebie i takie, że prosta, łącząca te dwa punkty, jest równoległa do AB (**P 41, 42 § I; P 4, 6**); równoległe poprowadzone z tych punktów do prostych AC i BC przecinają się (**P 17, 21, 12**) w punkcie, który oznaczymy przez C'' i który musi leżeć na prostej SC, stosownie do tego, co było wyżej powiedziane. Z tego samego powodu proste $A'A''$, $B'B''$ i $C'C''$ zejdą się w jednym punkcie T (różnym od S), o ile zresztą nie są wszystkie trzy do siebie równoległe; a więc w jednym przypadku prosta ST — w drugim prosta, przechodząca przez punkt S i równoległa do $A'A''$ — będzie spólna dla trzech płaszczyzn: $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$ i przejdzie przez punkt O, ponieważ przez ten punkt przechodzą płaszczyzny $AA'A''$ i $BB'B''$. Punkt O jest przeto spólny dla dwuch płaszczyzn ABC i $CC'C''$. — Może się jeszcze zdarzyć, że proste AA' i BB' są do siebie równoległe. W tym założeniu obieramy zewnątrz płaszczyzny spólnej punkty A'', B'', C'' w taki sposób, żeby proste AA'' i BB'' były do siebie równoległe, a proste $A''B''$, $B''C''$, $C''A''$ równoległe odpowiednio do AB, BC, CA; wtedy na zasadzie tego, co już było dowiedzione, prosta CC'' będzie też równoległa do AA''; proste $A'A''$, $B'B''$ i $C'C''$ będą również do siebie równoległe, gdyż płaszczyzny $AA'A''$ i $BB'B''$ są równoległe (**P 19**), a więc proste $A'A''$ i $B'B''$ nie mogą się spotkać. Wskutek tego płaszczyzny $AA'A''$ i $CC'C''$ są do siebie równoległe (**P 19**), a zatym są też równoległe ślady tych płaszczyzn na płaszczyźnie ABC (**P 18**), czyli proste AA' i CC'].

P 23. — *Tr.* „I odwrotnie, jeżeli trzy proste AA', BB' i CC' spotykają się w jednym punkcie, albo jeżeli są wszystkie do siebie równoległe; jeżeli oprócz tego proste AB, BC są równoległe do $A'B'$ i $B'C'$: to pozostałe proste AC i $A'C'$ są także do siebie równoległe".

P 24. — *Tr.* „W każdym trójkącie prosta, łącząca punkty środkowe dwuch boków, jest równoległa do trzeciego boku". Albo: „jeżeli A, B, C są punktami niewspółlinjowemi, wtedy prosta, łącząca punkty $A|B$ i $B|C$ jest równoległa do prostej CA". [Niech będzie $M \equiv A|B$, $N \equiv B|C$, $D \equiv C/M$, $E \equiv M/N$; proste BC, CE, EB są odpowiednio równoległe do prostych DA, AM, MD (**P 4**); a ponieważ oprócz tego prosta AC jest równoległa do prostej BD, przeto obie są równoległe do prostej ME, na zasadzie $\binom{D, M, C, B, E}{B, C, A', B', C'}$ **P 22**]. — Stąd oraz z **P 22, 8** wynika, np., że:

P 25. — *Tr.* „Trzy ś r o d k o w e jakiegokolwiek trójkąta spotykają się zawsze w jednym punkcie".

P 26. — *Tr.* „Jeżeli punkt C, różny od każdego z punktów A i B, jest oddalony od punktu środkowego pary (A, B) jak A: wtedy proste AC i BC są do siebie prostopadłe". Albo też: „kąt, wpisany w p ó ł k o l e, jest p r o s t y". EUKL., ks. 3-a, pod. XXXI. [Stosownie do założenia, punkty A, B, C nie są współlinjowe (**P 8, 43, 44 § I** i t. d.), a prosta, łącząca punkt $A|B$ z punktem $A|C$, jest prostopadła do prostej CA (**P 3 — 5 § II**) i równoległa do prostej BC (**P 24**); wystarczy więc powołać się na **P I, 4**].

P 27. — *Tr.* „I odwrotnie, każdy punkt L, dla którego proste LA, LB są do siebie prostopadłe (o ile tylko punkty A, B, L nie leżą na jednej prostej), leży na kuli biegunowej punktów A i B. Patrz **P 4 § III**".

P 28. — *Df.* „Jeżeli punkty O, A, A' są współlinjowe i wszystkie różne od siebie, wtedy «*j e d n o k ł a d n o ś c i ą* punktu A z punktem A' względem punktu O jako *ś r o d k a*» — albo krócej: «$\left\{O\,\frac{A'}{A}\right\}$» — nazywa się odpowiedniość, określona za pomocą działań następujących": 1) Punktowi O dajemy za «o b r a z» punkt O, a punktowi A punkt A'. 2) Jeżeli B jest punktem dowolnym, ale nie leżącym na prostej OA, wtedy nazywamy «o d p o w i a d a j ą c y m» punktowi B ten punkt B', w którym prosta OB spotyka prostą, poprowadzoną przez punkt A' równolegle do prostej, łączącej punkt A z punktem B. 3) Jeżeli punkt C jest różny od O i od A, ale należy do prostej OA, wtedy zauważmy przedewszystkim, że punkt C',

w którym ta prosta spotyka równoległą z punktu B' do prostej BC, nie zależy od B, ale zależy istotnie od punktów O, A, A', C, które też wystarczają do wyznaczenia go. W rzeczy samej, jeżeli zamiast punktu B weźmiemy jakikolwiek punkt D, nie leżący na OA ani na OB, wtedy punkt odpowiadający punktowi D — niech to będzie D' — padnie, jak poprzednio, na przecięcie prostej OD z prostą $A'D'$, równoległą do AD; prosta $B'D'$ będzie równoległa do BD na zasadzie $\binom{B, A, D, B', A', D'}{A, B, C, A', B', C'}$ **P 23**, a podobnie prosta $C'D'$ będzie równoległa do CD wskutek $\binom{D, D'}{A, A'}$ **P 23**. To samoby wypadło, gdybyśmy wybrali, zamiast punktu B albo D, jakikolwiek punkt E prostej OB (ale różny od O), ponieważ z faktu, że proste AD, AE są odpowiednio równoległe do $A'D'$, $A'E'$, wynika w podobny sposób, że prosta DE jest równoległa do $D'E'$; a z tego powodu z równoległości pomiędzy prostemi CD, DE i $C'D'$, $D'E'$ wynika, że prosta $E'C'$ jest równoległa do EC. Punkt C', do którego prowadzi każda z powyższych konstrukcji, jest więc jednoznacznie podporządkowany punktowi C, przyjmiemy go przeto za «o b r a z» punktu C, albo za punkt «o d p o w i a d a j ą c y» punktowi C. — Z konstrukcji tych wynika, że «jednokładność punktów A i A' względem punktu O» jest «p r z e k s z t a ł c e n i e m j e d n o z n a c z n y m i w z a j e m n y m punktów na punkty» (podobnie jak równoodwrotność, obrót i t. d.), gdyż każdy punkt P' jest obrazem jakiegoś punktu P, a punkty różne mają zawsze obrazy różne. Przekształcenie o d w r o t n e do jednokładności jest także jednokładnością; np. przekształcenie odwrotne do $\left\{O\,\frac{A'}{A}\right\}$ jest $\left\{O\,\frac{A}{A'}\right\}$. I t. d.

P 29. — *Tr.* „Jeżeli pozostawimy bez zmiany poprzednie założenia i znakowania, to jednokładność $\left\{O\,\frac{A'}{A}\right\}$ nie różni się od jednokładności $\left\{O\,\frac{B'}{B}\right\}$ i $\left\{O\,\frac{C'}{C}\right\}$. Jednokładność nie ma «punktów t a u t o l o g i c z n y c h» z wyjątkiem ś r o d k a, ale odwzorowuje na sobie samej każdą prostą i każdą płaszczyznę, przechodzącą przez środek; każdej prostej lub płaszczyźnie, nie zawierającej środka, podporządkowuje zawsze prostą i płaszczyznę do niej równoległą. Jeżeli środek leży między punktami A i A', wtedy dwa jakiekolwiek punkty odpowiednie leżą zawsze po przeciwnych stronach środka; jeżeli się pokrywa z punktem środkowym punktów A i A', wtedy jednokładność $\left\{O\,\frac{A'}{A}\right\}$ staje się symetrją względem punktu O. I t. d.".

P 30. — *Tr.* „Każda j e d n o k ł a d n o ś ć jest zarazem p o d o b i e ń s t w e m. Patrz **P I § IV**". [Przyjmijmy znowu założenie z **P 28** co do

punktów O, A, A', i niech będzie dla krótkości $\boldsymbol{O} \equiv \left\{ O\,\frac{A'}{A} \right\}$; wystarczy dowieść, że jeżeli dwa punkty P i Q są jednakowo oddalone od trzeciego, np. od A, i jeżeli te wszystkie trzy punkty są od siebie różne, to i punkty odpowiadające $\boldsymbol{OP}$, $\boldsymbol{OQ}$ — czyli P' i Q' — będą jednakowo oddalone od A'. Przypuśćmy najprzód, że punkty A, P, Q leżą na jednej prostej, skąd $A = P \mid Q$. Jeżeli teraz obierzemy zewnątrz prostej PQ dwa jakiekolwiek punkty symetryczne względem A — niech to będą np. punkty R i S — i przyjmiemy $R' \equiv \boldsymbol{OR}$, $S' \equiv \boldsymbol{OS}$, wtedy proste $P'R'$ i $Q'S'$ będą do siebie równoległe, podobnie jak i proste PR i QS (**P 4**); a to dlatego, że prosta PR jest równoległa do swego własnego obrazu $P'R'$, o ile z nim się nie zlewa w jedną prostą (**P 29**); tak samo będzie z prostemi QS i $Q'S'$. W podobny sposób znajdziemy, że proste $Q'R'$ i $P'S'$ są do siebie równoległe. A więc proste $P'Q'$ i $R'S'$, odpowiadające prostym PQ i RS, przecinają się w punkcie środkowym pomiędzy P' i Q' (**P 8**), a ich punktem wspólnym będzie A', wobec tego, że proste PQ i RS przecinają się w punkcie A. — Przypuśćmy teraz, że punkty A, P, Q nie są współlinjowe, i oznaczmy przez π płaszczyznę biegunową pary (P, Q) (**P 38 § II**). Ta płaszczyzna napewno zawiera punkt A (**tamże**) i jest jednocześnie prostoprostopadła do prostej $P'Q'$, która jest równoległa do PQ, albo z nią identyczna (**P 13, 15, 29**); wskutek tego płaszczyzna π', odpowiadająca płaszczyźnie π, jest prostopadła do $P'Q'$, gdyż płaszczyzny π i $\boldsymbol{O}\pi$ są do siebie równoległe, albo też pokrywają się z sobą. Ale płaszczyzna π' zawiera punkt A' oraz punkt, odpowiadający punktowi $P \mid Q$, czyli — jak już dowiedliśmy — punkt $P' \mid Q'$; a więc kula $P'_{A'}$ przechodzi przez Q' (**P 38 § II**)].

P 31. — *Tr.* „Dwa różne podobieństwa, ale nie więcej niż dwa, mogą przekształcić trójkąt dowolnie obranych punktów niewspółlinjowych A, B, C na trzy punkty niewspółlinjowe A', B', C', dane w taki sposób, że kąty $\widehat{A}\,.\,B'C'$ i $\widehat{B}\,.\,C'A'$ są odpowiednio przystające do kątów $\widehat{A}\,.\,BC$ i $\widehat{B}\,.\,CA$. Patrz **P 36 § IV**“. [Stosownie do założenia, istnieje takie przekształcenie izomeryczne, które podporządkowuje ramionom $\mid AB$ i $\mid AC$ kąta $\widehat{A}\,.\,BC$ ramiona $\mid A'B'$ i $\mid A'C'$ kąta $\widehat{A}\,.\,B'C'$ (**P 44 § IV**), a więc podporządkowuje punkt A' punktowi A (**P 41 § IV**) i odwzorowuje B i C w dwuch punktach B_1 i C_1, leżących na promieniach $\mid A'B'$ i $\mid A'C'$, ale różnych od A'; tę izomerję oznaczmy przez $\boldsymbol{J}$. Kąty $\widehat{B}'\,.\,A'C'$ i $\widehat{B}_1\,.\,A'C_1$ są do siebie przystające (**P 37 § IV**), wskutek czego — w założeniu, że punkt B_1 jest różny od B' — proste $B'C'$ i B_1C_1 nie mogą się spotkać (**P 19 § V**).

A więc jednokładność $\left\{ A'\,\frac{B'}{B_1} \right\}$ — którą oznaczać będziemy przez $\boldsymbol{O}$ — przekształca odpowiednio punkty A', B_1, C_1 na A', B', C' (**P 4, 6, 28**). Przeto iloczyn podobieństw $\boldsymbol{J}$ i $\boldsymbol{O}$ (**P 36 § IV, P 30**) jest podobieństwem (**P 2 § IV**), które przekształca odpowiednio A, B, C na A', B', C'. — Niech teraz będzie $\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{OJ}$, a $\boldsymbol{S}$ i $\boldsymbol{S}'$ niech będą odzwierciedleniami za pomocą płaszczyzn ABC i $A'B'C'$; $\boldsymbol{M}$ niech będzie podobieństwem, które, zarówno jak $\boldsymbol{L}$, podporządkowuje punktom A, B, C punkty A', B', C'. A więc podobieństwo $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{M}$ (**P 2 § IV**) pozostawia bez zmiany każdy z punktów niewspółlinjowych A, B, C; przeto $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{M} = 1$, albo też $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S}$ (**P 23 § IV**); to znaczy, że albo $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L}$, albo $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{LS}$. Stąd wnosimy, że każde podobieństwo, które może odwzorować punkty A, B, C w punktach A', B', C', jest z konieczności identyczne albo z $\boldsymbol{L}$, albo z $\boldsymbol{LS}$. Z drugiej strony również i podobieństwo $\boldsymbol{ML}^{-1}$ — ponieważ pozostawia punkty A', B', C' bez zmiany — jest identyczne z $\boldsymbol{S}'$, albo z przekształceniem tożsamościowym; przeto $\boldsymbol{LS} = \boldsymbol{S}'\boldsymbol{L}$. A więc dwa podobieństwa, które mogą i t. d., będą: poprzednie $\boldsymbol{OJ}$ oraz to, które powstanie, jeżeli to samo $\boldsymbol{OJ}$ poprzedzimy odzwierciedleniem za pomocą płaszczyzny ABC, albo też jeżeli po $\boldsymbol{OJ}$ wykonamy odzwierciedlenie za pomocą płaszczyzny $A'B'C'$. Wprawdzie przypuściliśmy, że $B_1 \infty = B'$, ale twierdzenie zachowuje moc jeszcze i wtedy, kiedy te dwa punkty pokrywają się z sobą, gdyż wtedy jest $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}$, albo też $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{JS} = \boldsymbol{S}'\boldsymbol{J}$]. Zauważmy, że jeżeli $A = A' = B \mid B' = C \mid C'$, wtedy będzie $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}$, albo $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S}'\boldsymbol{J}$, przyczym za $\boldsymbol{J}$ można przyjąć $/A$. W tym przypadku dwa podobieństwa będą: symetrja względem punktu A i półobrót dokoła prostej prostopadłej do płaszczyzny ABC w punkcie A (jak to każdy może sprawdzić). — Następne twierdzenie ma charakter twierdzenia przybranego w stosunku do dalszego twierdzenia.

P 32. — *Tr.* „Kąty przy podstawie trójkąta prostokątnego równoramiennego są przystające do kątów przy podstawie każdego innego trójkąta prostokątnego równoramiennego“. Albo, pod inną postacią: „Jeżeli $\frac{D,\ E,\ F}{A,\ B,\ C}\Big\}$ są trzema punktami niewspółlinjowemi i jeżeli prosta $\frac{DE}{AB}\Big\}$ jest prostopadła do prostej $\frac{DF}{AC}\Big\}$, a punkt $\frac{F}{C}\Big\}$ jest oddalony od $\frac{D}{A}\Big\}$ jak $\frac{E}{B}\Big\}$; wtedy dowodzi się, że kąty $\widehat{B}\,.\,AC$, $\widehat{E}\,.\,DF$ są do siebie przystające“. [Niech będzie $M \equiv B \mid C$, $N \equiv E \mid F$, $P \equiv A/M$, $Q \equiv D/N$; wtedy proste BP, EQ będą równoległe do prostych AC i DF (**P 4**) i prostopadłe do AB, DE (**P 1, 3**); oprócz tego prosta BC będzie prostopadła do AM (**P 5 § II**) (mieliśmy przytym na uwadze, że punkt M jest różny od A, a punkty P i Q są różne od B i E). Istnieje napewno przekształcenie izomeryczne,

które zamienia punkt E na B, promień z E k u D na promień z B k u A, a półpłaszczyznę przez ED k u F na półpłaszczyznę przez BA k u C (**P 39 § IV**), a więc promień $|EQ$ na promień $|BP$ — na zasadzie **P II § II, P 3, 36 § IV** i ze względu na to, że punkty P i Q leżą wewnątrz kątów $\widehat{A}\,.\,BC$ i $\widehat{D}\,.\,EF$, a więc na półpłaszczyznach $|(AB)C$ i $|(DE)F$ (**P 47, 49 § III**) — a punkty D i Q zamienia na dwa punkty D' i Q', jednakowo oddalone od B i leżące na promieniach $|BA$ i $|BP$. Otóż, wskutek symetrji względem prostej BC, punkty A i P zamieniają się jeden na drugi, jak również i promienie $|BA$ i $|BP$, a kula D'_B zamienia się na siebie samą (**P 50 § I**); a więc punkt Q', w którym ta kula przecina promień $|BP$ (**P 37 § III**), jest punktem, odpowiadającym punktowi D'. Stąd wynika, że punkt $D'|Q'$ — czyli obraz punktu N względem poprzednio rozpatrywanej izomerji — należy do promienia $|BC$ (**P 54 § I** i t. d.) i że wskutek tego ta izomerja przenosi promień $|EF$ na promień $|BC$ i doprowadza kąt $\widehat{E}\,.\,DF$ do przystawania z kątem $\widehat{B}\,.\,AC$ (**P 48 § III**)].

P 33. — *Tr.* „Każde podobieństwo, o ile samo nie jest i z o m e r j ą, jest równoważne i z o m e r j i w połączeniu z j e d n o k ł a d n o ś c i ą, która ją poprzedza, lub (dogodniej jeszcze), która po niej następuje“. [W rzeczy samej, jeżeli jest dane jakiekolwiek podobieństwo $\boldsymbol{M}$ i jeżeli obierzemy trzy punkty niewspółlinjowe A, B, C, spełniające warunek, że prosta AC jest prostopadła do AB i że punkt C jest oddalony od A jak B, — co jest zawsze możliwe (**P 25 § I, P 14, 20 § II**) — wtedy te punkty zostaną zamienione przez podobieństwo $\boldsymbol{M}$ na punkty A', B', C', które są również niewspółlinjowe i takie, że $A'C' \perp A'B'$ i $C' \equiv B'_{A'}$ (**P I, 3 § IV**); wskutek tego kąty $\widehat{B}\,.\,AC$, $\widehat{B'}\,.\,A'C'$ są do siebie przystające (**P 32**). Podobnie $\widehat{C}\,.\,AB \preceq \widehat{C'}\,.\,A'B'$. Ale stąd wnosimy na zasadzie **P 31**, w przypuszczeniu, że figura (A, B, C) nie jest przystająca do (A', B', C'):

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{OJ}, \text{ albo } \boldsymbol{M} = \boldsymbol{OJS},$$

gdzie $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{S}$ mają to samo znaczenie, co i w **P 31**; jeżeli natomiast $(A, B, C) \preceq (A', B', C')$, wtedy będzie:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}, \text{ albo } \boldsymbol{M} = \boldsymbol{JS};$$

tak więc jeżeli dane podobieństwo $\boldsymbol{M}$ nie jest samo izomerją, to jest na pewno wypadkową izomerji i n a s t ę p u j ą c e j po niej jednokładności (**P 37, 38, § IV**). Z drugiej strony iloczyn $\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{OJ}$ ma cechy jednokładności (**P 28**), — jak o tym każdy może się przekonać — a mianowicie równa się $\left\{A\,\frac{B''}{B}\right\}$, gdzie B'' oznacza punkt $\boldsymbol{J}^{-1}B'$; podobnie możemy

powiedzieć o $(\boldsymbol{JS})^{-1}\boldsymbol{OJS}$. Jeżeli więc przyjmiemy $\boldsymbol{O}_1 \equiv \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{OJ}$, skąd $\boldsymbol{JO}_1 = \boldsymbol{OJ}$, to widzimy, że podobieństwo $\boldsymbol{M}$ jest też równoważne wypadkowej z izomerji i p o p r z e d z a j ą c e j ją jednokładności, jeżeli zresztą nie jest identyczne z $\boldsymbol{J}$ albo z $\boldsymbol{JS}$. I t. d. — Zauważmy, że z izomerji nie jest wyłączone przekształcenie tożsamościowe (**P 37 § IV**)].

P 34. — *Tr.* „Podobieństwo jest przekształceniem *równokątnym*, czyli zamienia każdy kąt na kąt do niego p r z y s t a j ą c y“. [Wobec tego co było powiedziane (**P 36 § IV** i **P 33**) wystarczy stwierdzić, że ten fakt jest prawdziwy dla j e d n o k ł a d n o ś c i. Zauważmy, że jednokładność podporządkowuje każdemu p r o m i e n i o w i albo odcinkowi promień lub odcinek, a każdemu k ą t o w i płaskiemu wypukłemu kąt płaski wypukły (**P 30** i t. d.). Otóż jeżeli $|ABC|$ i $|A'B'C'|$ są trójkątami jednokładnemi, to dwa promienie odpowiednie $|AB$ i $|A'B'$ — i podobnie promienie $|AC$ i $|A'C'$ — oprócz tego, że są do siebie równoległe (**P 28**), leżą z tej samej strony, albo po stronach przeciwnych prostej AA' (pominąwszy przypadek, w którym punkty A i A' zlewają się z sobą), stosownie do tego, czy dwa jakiekolwiek punkty odpowiednie, aby tylko różne od siebie — np. punkty A i A' — leżą z tej samej strony, czy też po stronach przeciwnych środka jednokładności (**P 38, 45 § III; P 29**). Stąd wynika, że te promienie, a więc także i kąty $\widehat{A}\,.\,BC$ i $\widehat{A'}\,.\,B'C'$, są symetryczne do siebie względem punktu $A|A'$; albo też, że tak jeden, jak i drugi są symetryczne do tego samego kąta względem punktów A i $A|A'$: a więc zawsze przystające do siebie. I t. d.].

P 35. — *Df.* „Jeżeli A i A' są punktami jakiemikolwiek, ale różnemi od siebie, wtedy nazwa «*p r z e s u n i ę c i e* od A do A'» — w skróceniu $\left\{\begin{matrix}A'\\A\end{matrix}\right\}$ — oznacza odpowiedniość, określoną przez warunki następujące“.
1) Punktowi A dajemy za obraz punkt A'; jeżeli zaś B jest punktem dowolnym, leżącym zewnątrz prostej AA', wtedy nazywamy punktem «o d p o w i e d n i m» do B ten punkt B', w którym równoległa do AA', poprowadzona przez punkt B, spotyka równoległą do AB, poprowadzoną przez punkt A' (**P 6, 7**). 2) Niech C będzie punktem prostej AA', nie pokrywającym się z A. Ponieważ z **P 23** wynika — przez podobne rozumowanie, jakie było niedawno podane w **P 28** — że punkt C', w którym prosta AA' spotyka równoległą do BC, poprowadzoną przez punkt B', nie zależy od punktu B, ale tylko od A, A', C, tak że obierając zamiast B jakikolwiek inny punkt D zewnątrz prostych AA' i BB', albo też jakikolwiek punkt E na prostej BB', otrzymamy zawsze prostą $D'C'$ równoległą do DC, a $E'C'$ do EC: przeto taki punkt C' nazywać będziemy odpowiadającym punktowi C.

Z konstrukcji powyższych wynika, że każdy dowolnie obrany punkt P' jest obrazem jakiegoś punktu P; ale o ile tylko punkty P i Q są od siebie różne, to ich obrazy nie mogą się z sobą pokrywać. Ostatecznie więc «przesunięcie od A do A'» jest «przekształceniem odwracalnym punktów na punkty» (jak i jednokładność) i jego przekształceniem odwrotnym będzie «przesunięcie od A' do A». I t. d. [1])

P 36. — *Tr.* „Przy tych samych założeniach i znaczeniu symboli jak w **P 35**, przesunięcie $\begin{Bmatrix} A' \\ A \end{Bmatrix}$ nie różni się od przesunięć $\begin{Bmatrix} B' \\ B \end{Bmatrix}$ i $\begin{Bmatrix} C' \\ C \end{Bmatrix}$. Przesunięcie nie ma punktów tautologicznych, ale odwzorowuje prostą AA' i każdą prostą, do niej równoległą, na sobie samej, jak również i każdą płaszczyznę, przechodzącą przez prostą AA', albo do niej równoległą; linji prostej, różnej od AA' i nie równoległej do niej, podporządkowuje linję prostą do pierwszej równoległą; podobnie, każdej płaszczyźnie, która nie zawiera prostej AA', ani też nie jest do niej równoległa, podporządkowuje płaszczyznę równoległą do pierwszej. I t. d.“. Por. **P 29.**

37. — *Tr.* „Jeżeli jest dany punkt A'' różny od A i od A', wtedy wypadkowa, czyli iloczyn przesunięć $\begin{Bmatrix} A' \\ A \end{Bmatrix}$ i $\begin{Bmatrix} A'' \\ A' \end{Bmatrix}$ jest nowym przesunięciem $\begin{Bmatrix} A'' \\ A \end{Bmatrix}$, niezależnym od porządku czynników“.

P 38. — *Tr.* „Każde przesunięcie jest jednocześnie izomerją“. Por. **P 30**. [Stwierdzenie, że «przesunięcie» jest «podobieństwem» (ze względu na to, że w przesunięciu proste odpowiednie są do siebie równoległe albo pokrywają się) jest już zawarte w rozumowaniu, z którego wyprowadziliśmy **P 30**. Wystarczy więc — na zasadzie **P 35, 36 § IV** — zaznaczyć fakt następujący: pary punktów, odpowiadające sobie wskutek przesunięcia, są zawsze do siebie przystające, — co dla par niewspółlinjowych wynika bezpośrednio z **P 23, 8**].

P 39. — *Tr.* „Jeżeli A, A' są punktami od siebie różnemi, to przesunięcie od A do A' podporządkowuje punktowi A' punkt symetryczny do A względem tegoż punktu A'“. Por. **P 27 § IV.** [Istotnie, jeżeli

[1]) Zamiast tego określenia przesunięcia można równie dobrze przyjąć (z niejakim pożytkiem, przynajmniej pod pewnemi względami) inne, prostsze: «przesunięcie od A do A'» ≡ «iloczyn symetrji względem A przez symetrję względem punktu środkowego pary (A, A')». Własności, wskazane w **P 35—39**, dadzą się również wyprowadzić i z tego określenia za pomocą twierdzeń o równoległych.

$A'' \equiv A/A'$, to przesunięcie od A do A' zamienia parę punktów (A, A') na (A', A'') albo na (A', A), gdyż $\begin{Bmatrix} A' \\ A \end{Bmatrix}$ jest izomerją (**P 38**), wskutek której prosta AA' jest tautologiczna (**P 36**), a na tej prostej punkty A'' i A i tylko te dwa punkty są oddalone od A' jak A. Ale gdyby punkt A' został przekształcony na A, wtedy przesunięcie pozostawiłoby punkt $A|A'$ bez zmiany (**P 3, 36 § IV**), co się sprzeciwia **P 36**].

P 40. — *Df.* „Niech będzie ω jakąkolwiek kulą, nie skupiającą się w jednym punkcie, a O niech będzie środkiem tej kuli; przez każdy punkt A różny od O poprowadźmy prostą AO, a z punktu O poprowadźmy prostą prostopadłą do AO (**P 15 § I, P 14 § II**); P niech będzie jednym z punktów, w których ta prosta przecina się z kulą (**P 20 § II**). Można podporządkować punktowi A ten punkt, — niech to będzie punkt A' — w którym prosta AO spotyka prostą, poprowadzoną na płaszczyźnie APO prostopadle do AP przez punkt P (**P 9 § II P I** i t. d.): taki punkt A' jest wyznaczony przez A i ω, a więc nie zależy od P. [Istotnie, każdy inny promień kuli $|OQ|$, prostopadły do AO, może być przeniesiony na $|OP|$ za pomocą obrotu dokoła prostej AO, który przekształca proste QA, QA' odpowiednio na PA, PA' (**P II, 23, 27 § II**)]. Powstaje w ten sposób pewne przekształcenie wzajemne i inwolucyjne punktów różnych od O na punkty różne od O; to przekształcenie nazywać będziemy *«przeciwodwrotnością* względem kuli ω»; O jest «środkiem» przeciwodwrotności, ω «kulą podstawową»“. — Iloczyn tego przekształcenia przez równoodwrotność $/O$ jest tak zwaną *«odwrotnością* (dodatnią) względem ω»; a więc punktem «odwrotnym» do punktu A względem kuli ω jest punkt symetryczny do A' względem punktu O. Płaszczyzny prostopadłe do prostej AO w punktach odwrotnym i przeciwodwrotnym do punktu A są płaszczyznami *biegunową* i *przeciwbiegunową* punktu A względem kuli ω. I t. d. — Z konstrukcji powyższej wynika samo przez się: „Za pomocą dowolnej przeciwodwrotności każda prosta lub płaszczyzna, przechodząca przez środek, odwzorowuje się punkt po punkcie na sobie samej (pominąwszy sam środek, który nie ma żadnego obrazu); podobnie i kula podstawowa, na której odpowiadają sobie wzajemnie punkty średnicowo przeciwległe; zaś każdemu kołu i każdej kuli o środku, pokrywającym się ze środkiem równoodwrotności, odpowiadać będzie koło lub kula o tym samym środku. I t. d“.

P 41. — *Tr.* „Jeżeli jest dana kula ω i punkt O, jak wyżej, wtedy każdej płaszczyźnie albo prostej, nie zawierającej punktu O, odpowiada jako figura przeciwodwrotna kula lub koło, przechodzące przez

punkt O (ale sam punkt O należy uważać za wyłączony z tej figury), i odwrotnie; każde koło i każda kula, jeżeli zawiera dwa punkty odpowiadające sobie, będzie figurą przeciwodwrotną do siebie samej". [Niech będzie np. η jakąkolwiek płaszczyzną, nie zawierającą punktu O; E spodkiem prostopadłej, poprowadzonej z punktu O do tej płaszczyzny; A punktem obranym jakkolwiek na płaszczyźnie η, ale różnym od E. Do punktów E i A znajdziemy punkty odpowiednie E' i A' za pomocą promienia kuli podstawowej $|OP|$ (**P 40**), prostopadłego do obu prostych OE, OA (**P 18, 28 § II**); przeto $E'E \perp AE$ (**P 18 § II**), $AE \perp PE$ (**P 53, 54, 18 § II**), $PE \perp PE'$, a wskutek tego $PE' \perp PAE$ (**P 25 § II**). A zatym $PE' \perp PA$; tak więc płaszczyzna prostopadła w punkcie P do prostej PA przechodzi zawsze przez E' (**P 35 § II**), jakikolwiek będzie punkt A (aby tylko leżał na η). Ale taka płaszczyzna musi przecinać prostą, łączącą A z O, w punkcie A' przeciwodwrotnym do A (**P 35 § II** i **P 40**); a więc punkt A' jest wspólny dla dwuch prostych, przechodzących odpowiednio przez punkty O i E' i prostopadłych do siebie, gdyż płaszczyzna OPA, która jest prostopadła do dwuch płaszczyzn OAE, $PA'E'$ (wobec tego, że prosta OP jest prostopadła do obu prostych OA, OE a PA do prostych PA' i PE') będzie także prostopadła do ich prostej przecięcia (**P 55 § II**), to jest do $A'E'$; a więc $A'E' \perp OA$. Przeto miejsce punktu A', czyli figura przeciwodwrotna do płaszczyzny η, nie jest niczym innym, jak kulą biegunową punktów O, E' (**P 27**). Czytelnik będzie mógł dowieść, że i odwrotnie, każda kula przechodząca przez O musi się przekształcić na płaszczyznę. Wskutek tego każda prosta r, która nie zawiera punktu O, ma za obraz koło przechodzące przez O; a mianowicie przecięcie płaszczyzny tautologicznej Or (**P 40**) z kulą η', odpowiadającą płaszczyźnie η, przechodzącej przez r (**P 3 § III** i t. d.); i odwrotnie. — Zauważmy teraz, że trzy punkty P, A, A' są równooddalone od punktu środkowego pary A, A' (**P 27**), a więc prostopadła, poprowadzona z punktu $A \mid A'$ do płaszczyzny PAA' — leżąca z konieczności na płaszyźnie OAE (**P 54, 51 § II**) — będzie miejscem środków wszystkich kul, przechodzących przez te trzy punkty (**P 38, 37, 52, 54, 55 § II**). Z drugiej strony kula tak otrzymana musi przeciąć każdą płaszczyznę, zawierającą OP, wzdłuż koła, symetrycznego do samego siebie względem płaszczyzny OAE (**P 32, 56 § II**), a więc mającego na tej płaszczyźnie środek i dwa punkty średnicowo przeciwległe (**P 31, 21 § II** i t. d.), które więc będą przeciwodwrotne jeden do drugiego (**P 26, 40**). Wypada stąd, że koło leżące na tej płaszczyźnie OAE i przechodzące przez oba punkty A, A', jest z konieczności przeciwodwrotne do samego siebie, ponieważ zawsze istnieje kula, która to koło zawiera i przechodzi przez punkt P. (Pozostawiamy czytelnikowi dowie-

dzenie, że przez koło i punkt nie leżący na jego płaszczyźnie — albo przez dwa koła, przecinające się w dwuch różnych punktach i nie leżące na jednej płaszczyźnie — przechodzi zawsze kula oznaczona i jedyna). Stąd wypada, że równoodwrotność musi zamienić każde koło, przechodzące przez dwa jakiekolwiek punkty odpowiednie, na samo siebie; toż samo można więc powiedzieć i o kuli]. — W tym twierdzeniu i w następnym zebraliśmy w streszczeniu główne własności przeciwodwrotności płaskiej i przestrzennej, — jak również i odwrotności dodatniej (**P 40**), a także własności, dotyczące biegunowości i przeciwbiegunowości względem kół i kul — za pomocą prostych rozważań stereometrycznych, nie uciekając się (jak to się przeważnie dzieje) do nauki o proporcjach i o trójkątach podobnych, albo o równoważności [1]).

P 42. — *Tr.* „Każd$\begin{Bmatrix}\text{emu}\\\text{ej}\end{Bmatrix}$ $\begin{matrix}\text{koła}\\\text{kuli}\end{matrix}$, nie zawierając$\begin{Bmatrix}\text{emu}\\\text{ej}\end{Bmatrix}$ punktu O, przeciwodwrotność względem ω podporządkowuje zawsze $\begin{Bmatrix}\text{koło}\\\text{kulę}\end{Bmatrix}$". [W poprzednich założeniach i znaczeniu symboli, każde koło c płaszczyzny η zostaje przekształcone na koło wspólne kuli η' i tej kuli, która przechodzi przez c i zawiera punkt przeciwodwrotny do któregokolwiek punktu koła c (**P I § III, P 41** i t. d.). — Jeżeli dalej ξ jest kulą nie przechodzącą przez O, a A i B dwoma punktami, obranemi jakkolwiek na tej kuli, ale niewspółlinjowemi z punktem O; wreszcie c i d — przecięciami utworzonemi na kuli ξ przez dwie płaszczyzny (różne od siebie), z których każda zawiera oba punkty A, B, ale nie przechodzi przez O: wtedy dwa koła c' i d', odpowiadające kołom c i d (**P 41**), przecinają się w punktach A' i B', a więc leżą na jednej i tej samej kuli $c'd'$. Ta kula jest figurą przeciwodwrotną kuli ξ. Istotnie, jeżeli X jest punktem dowolnym kuli ξ, ale nie należącym ani do c, ani do d, ani do OA; wtedy każda płaszczyzna η, która zawiera oba punkty A, X, ale nie przechodzi ani przez O, ani przez B, ani też przez żadną z dwuch prostych, stycznych do kół c i d w punkcie A (**P 40 § I, P 8, 14 § II**) — płaszczyzna, która bez wątpienia istnieje, jak to czytelnik może sprawdzić — przecina z konieczności też same koła w dwuch nowych punktach Y i Z, różnych jeden od drugiego i od X (**P 10, 11 § II** i t. d.), a kulę daną ξ wzdłuż koła XYZ (**P 3 § III**), na którym leżą punkty A, X, Y, Z, wszystkie różne od siebie. Ale wiemy już, że takiemu kołu musi odpowiadać koło $X'Y'Z'$, które ma z kulą $c'd'$ trzy różne od siebie punkty wspólne A', Y' i Z', a więc musi na niej leżeć (**P 12 § II** i t. d.); przeto i punkt X' również należy do kuli $c'd'$, i t. d. — Możemy teraz być

---

[1]) Teorję gieometryczną odwrotności, nie powołującą się ani na proporcjonalność ani na równoważność, przedstawił już G. LAZZERI w „Periodico di Matematica", tom II_2, r. 1900.

pewni, że koło, które nie przechodzi przez O, zamienia się zawsze na koło, chociażby jego płaszczyzna przechodziła przez ten punkt: gdyż takie koło jest przecięciem tej płaszczyzny z kulą, nie przechodzącą przez punkt O. I t. d.]. — W twierdzeniu następującym powołujemy się na **P 41**, ale nie na **P 42**:

P 43. — *Tr.* „W założeniu, że A, B są punktami różnemi od siebie, a E, F punktami, leżącemi na prostej AB, jeden wewnątrz, drugi zewnątrz odcinka $|AB|$, dowiedziemy, że kule biegunowe par punktów (A, B) i (E, F) przecinają się". Por. **P II § V.** [Możemy przyjąć, że punkt F leży na przedłużeniu odcinka $|AB|$ poza A. Dowiedziemy, że dwa koła, podług których te kule przecinają płaszczyznę π, przechodzącą przez prostą AB, muszą się przeciąć. W tym celu oznaczmy przez P jeden z punktów, w których prostopadła do prostej AB, poprowadzona przez punkt E na płaszczyźnie π, przecina kulę biegunową punktów A, B (**P II § III**) — i weźmy pod uwagę przeciwodwrotność względem kuli P_E (**P 40**). Wskutek tej przeciwodwrotności punkty A i B zamieniają się jeden na drugi (**P 26, 40**), a koło (A, B) zamienia się na siebie samo (**P 41**); natomiast koło (E, F) zamienia się na prostą, leżącą na płaszczyźnie π (**P 41**), a mianowicie na prostopadłą f', poprowadzoną do AB z punktu F', odpowiadającego punktowi F. Twierdzenie będzie dowiedzione, jeżeli udowodnimy, że punkt F' przypada między A i B, ponieważ w takim razie koło tautologiczne (A, B), które przecina f' dwa razy (**P II § III**), musi też przeciąć figurę przeciwodwrotną do f', czyli koło (E, F), w dwuch punktach różnych. Jeżeli teraz C jest punktem cienia punktu P z punktu B (wszystko jedno jakim, aby tylko różnym od P) — to cień punktu A z punktu B musi leżeć na półpłaszczyźnie «przez PA ku C» (**P 29, 39 § III**) i jednocześnie na półpłaszczyźnie «przez PC ku A», która zawiera cały promień $|BA$ (**P 43 § III**); a więc cień ten będzie całkowicie leżał w kącie $\widehat{P}.AC$ (**P 47, 49 § III**). Stąd wynika, że punkt F' (zewnętrzny dla obu prostych PA i PC) nie może leżeć na cieniu punktu A z punktu B, ponieważ gdyby leżał na nim, to kąt prosty $\widehat{P}.FF'$ byłby mniejszy od kąta prostego $\widehat{P}.AC$ (**P 49 § III, P 12, 16 § V, P 40**), co się sprzeciwia **P 40 § IV** i **P 15 § V.** Ale gdyby tenże punkt F' padł na cień punktu B z punktu A, wtedy byłby wyłączony z odcinka $|BF|$, który leży cały na $|BA$ (**P 35, 29, 30 § III**); i jednocześnie punkt F byłby wyłączony z odcinka $|BF'|$ (**tamże**); a więc punkt B przypadłby między F i F' (**P 15 § III**), wskutek czego byłby $\widehat{P}.BF < \widehat{P}.FF'$ (**P 47 § III, P 12 § V**); z drugiej strony, ponieważ punkt A leży wewnątrz odcinka $|BF|$, przeto (**tamże**) $\widehat{P}.AB < \widehat{P}.BF$.

Ostatecznie więc kąt prosty $\widehat{P}.AB$ byłby mniejszy od kąta prostego $\widehat{P}.FF'$. Dochodzimy więc do wniosku, że punkt F' leży na odcinku $|AB|$ (**P 30 § III**)]. — Na podobnym rozumowaniu (ale nieco krótszym) można oprzeć twierdzenie następujące:

P 44. — *Tr.* „I odwrotnie: jeżeli A, B, E, F są czterema punktami współlinjowemi i jeżeli kule biegunowe par (A, B) i (E, F) spotykają się w punktach różnych: wtedy jeden z punktów E, F leży wewnątrz odcinka $|AB|$, drugi zewnątrz tego odcinka".

§ VII.

Iloczyny izomerji. Przystawanie i przeciwprzystawanie. Przeciwobrót i przeciwprzesunięcie. Ruch śrubowy. Klasyfikacja izomerji.

P 1. — *Tr.* „Wypadkowa albo iloczyn kilku obrotów dokoła tej samej osi nie może być niczym innym, jak tylko obrotem dokoła tej samej osi, albo też przekształceniem tożsamościowym". [Niech będą P i Q dwa dowolne obroty dokoła prostej r, a więc przez izomerję QP każdy punkt prostej r zamienia się na siebie samego. Gdyby wobec tej izomerji istniał punkt tautologiczny A, nie należący do osi r, gdyby więc było $Q(PA)=A$, wtedy — oznaczając przez α płaszczyznę Ar, a przez μ płaszczyznę prostopadłą do pary (A, PA) w jej punkcie środkowym — otrzymalibyśmy: $P=/\mu\,.\,/\alpha$, $Q=/\alpha\,.\,/\mu$ (**P 25, 26 § IV**); a zatym $QP=1$; twierdzenie opiera się więc na **P 30, 8 § IV**].

P 2. — *Tr.* „Każdy obrót jest kwadratem innego obrotu dokoła tej samej osi". [Niech będzie r osią jakiegokolwiek obrotu R, A punktem nie leżącym na osi, a $A'\equiv RA$; poprowadźmy płaszczyznę π, prostopadłą do pary (A, A') w jej punkcie środkowym; ta płaszczyzna przechodzi zawsze przez r, wskutek **P 23, 38 § II**. Istnieje na pewno taki obrót dokoła prostej r, który może podporządkować punktowi A pewien punkt B płaszczyzny π (**P 27 § II**); obrót ten oznaczmy przez P. Obrót P przenosi punkt B do punktu A/π (**P 27 § IV**), czyli P^2 podporządkowuje punktowi A punkt A', tak samo jak i obrót R: przeto $P^2=R$ (**P 28 § IV**)].

P 3. — *Tr.* — „Iloczyn dwuch obrotów dokoła osi różnych, ale spotykających się w jednym punkcie, jest obrotem dokoła prostej, przechodzącej przez punkt wspólny obu osi". [P i Q niech będą dwoma obrotami dokoła osi u i v. Na płaszczyźnie π tych osi obieramy dwa punkty A i B, nie leżące odpowiednio na u i v, ale pozatym jakiekolwiek; a więc

$P^{-1}A\infty=A$ i $QB\infty=B$ (**P 8 § IV**). Oznaczmy teraz przez α i β płaszczyzny biegunowe (**P 38 § II**) par punktów $(A, P^{-1}A)$, (B, QB); α i β jak wiemy, przejdą odpowiednio przez u i v (**P 23 § II**). Wiemy, że $P=/\pi\,.\,/\alpha$ (**P 26 § IV**) a $Q=/\beta\,.\,/\pi$ (**P 25 § IV**), wskutek czego $QP=/\beta\,.\,/\alpha$. Płaszczyzny α i β nie mogą się z sobą pokrywać, gdyż jedna z nich zawiera u, ale nie zawiera A, druga zawiera v, ale nie zawiera B, natomiast płaszczyzna uv zawiera oba te punkty; ale te płaszczyzny spotykają się wzdłuż prostej, ponieważ przechodzą przez punkt wspólny prostych u, v; wystarczy więc powołać się na **P 4 § IV**].

P 4. — *Tr.* „Iloczyn jakiegokolwiek obrotu przez odzwierciedlenie za pomocą płaszczyzny, zawierającej oś obrotu, jest równoważny odzwierciedleniu za pomocą innej płaszczyzny, która również przechodzi przez oś". [Przekształcenia dane niech będą np. R i S; r niech będzie osią obrotu, a σ płaszczyzną symetrji. Punkt A, obrany jakkolwiek na płaszczyźnie σ, ale zewnątrz prostej r, zostanie przekształcony np. na A' wskutek R, a na A_1 wskutek R^{-1}; te dwa punkty A' i A_1 będą różne od A (**P 22 § II, P 8 § IV**). Jeżeli teraz oznaczymy przez δ_1 i δ płaszczyzny biegunowe par punktów (A_1, A) i (A, A'), — które to płaszczyzny przejdą przez r (**P 23 § II** i t. d.) — to będziemy mieli jednocześnie (wskutek **P 25, 26 § IV**): $R=S\,.\,/\delta_1$ i $R=/\delta\,.\,S$, skąd $SR=/\delta_1$, a $RS=/\delta$].

P 5. — *Tr.* „Iloczyn symetrji względem dwuch płaszczyzn równoległych jest przesunięciem prostopadłym do tych płaszczyzn". Por. **P 4 § IV**. [μ i ν niech będą płaszczyznami danemi; A, B, C trzema punktami niewspółlinjowemi płaszczyzny μ, a A', B', C' punktami do nich symetrycznemi względem płaszczyzny ν. Płaszczyzna $A'B'C'$ jest równoległa do μ (**P 42, 31 § II, P 15 § VI**), proste BB' i CC' są równoległe do prostej AA' (**P 11 § VI** i t. d.), a $A'B'$, $A'C'$ równoległe do AB, AC (**P 4, 18 § VI**). Stąd wypada, że przesunięcie od A do A' podporządkowuje punkty A', B', C' punktom A, B, C (**P 35 § VI**), na równi z izomerją $/\nu\,.\,/\mu$, wskutek czego — jeżeli $T\equiv\begin{Bmatrix}A'\\A\end{Bmatrix}$ — przekształcenie $T^{-1}\,.\,/\nu\,.\,/\mu$ jest z konieczności równoważne $/\mu$, albo też tożsamości (**P 35, 38 § VI**). Ale w pierwszym przypadku przesunięcie T byłoby równe $/\nu$, co jest niedorzecznością (**P 36, § VI, P 31 § II**). A więc musi być $T^{-1}\,.\,/\nu\,.\,/\mu=1$, czyli $/\nu\,.\,/\mu=T$]. — Zauważmy, że z równości $/\nu\,.\,/\mu=T$ wypada $/\nu=T\,.\,/\mu$ i $/\mu=/\nu\,.\,T$, a stąd znajdziemy z łatwością:

P 6. — *Tr.* Iloczyn odzwierciedlenia przez poprzedzające je, albo następujące po nim, przesunięcie prostopadłe do płaszczyzny odzwierciedla-

jącej, jest także odzwierciedleniem, a nowa płaszczyzna symetrji jest równoległa do pierwszej".

P 7. — *Tr.* „Wypadkowa dwuch obrotów, wykonanych dokoła dwuch prostych równoległych, jest w każdym razie obrotem albo przesunięciem". Por. **P 3.** [Można tu powtórzyć to samo rozumowanie, które było podane w **P 3**, ażeby przyjść do wniosku, że $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P} = /\beta \,.\, /\alpha$ i że płaszczyzny α i β nie mogą się z sobą pokrywać (**tamże**). Otóż stosownie do tego, czy te płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej, czy też są do siebie równoległe — iloczyn $/\beta \,.\, /\alpha$ jest obrotem (**P 4 § IV**) albo też przesunięciem (**P 5**)].

P 8. — *Tr.* „Łącząc w jakimkolwiek porządku dowolny obrót z przesunięciem prostopadłym do osi tego obrotu, otrzymamy jako wypadkową obrót dokoła osi, równoległej do pierwszej". [W założeniu **P 7** obierzmy na osi u obrotu $\boldsymbol{P}$ jakikolwiek punkt B i oznaczmy przez B' punkt $\boldsymbol{Q}B$. Jeżeli płaszczyzny α i β są do siebie równoległe, wtedy iloczyn $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}$ jest równoważny $\left\{\begin{smallmatrix}B'\\B\end{smallmatrix}\right\}$ (**tamże** i **P 36 § VI**), wskutek czego $\boldsymbol{Q} = \left\{\begin{smallmatrix}B'\\B\end{smallmatrix}\right\} . \boldsymbol{P}^{-1}$, a $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}^{-1} . \left\{\begin{smallmatrix}B'\\B\end{smallmatrix}\right\}$. Ale (jak to każdy może sprawdzić), jeżeli dany jest jakikolwiek obrót $\boldsymbol{P}^{-1}$ dokoła osi u, oraz przesunięcie $\left\{\begin{smallmatrix}B'\\B\end{smallmatrix}\right\}$, prostopadłe do u: wtedy można zawsze wyznaczyć prostą v równoległą do u i obrót $\boldsymbol{Q}$ dokoła v w taki sposób, ażeby iloczyn $\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$ był równy $\left\{\begin{smallmatrix}B'\\B\end{smallmatrix}\right\}$, i t. d.].

P 9. — *Df.* „Izomerję, która powstaje przez połączenie jakiegokolwiek obrotu z następującym po nim odzwierciedleniem za pomocą płaszczyzny prostopadłej do osi, nazywać będziemy «przeciwobrotem»". — Te dwa działania, które oznaczymy np. przez $\boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{S}$, są przemienne; to znaczy $\boldsymbol{S}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{S}$ [o czym czytelnik sam się może przekonać]. Wskutek tego «*przeciwobrót*» można też określić jako „iloczyn odzwierciedlenia przez obrót dokoła osi prostopadłej do płaszczyzny odzwierciedlającej". — Zauważmy, że jeżeli r oznacza oś obrotu $\boldsymbol{R}$, a σ płaszczyznę, za pomocą której wykonywamy odzwierciedlenie $\boldsymbol{S}$, to przeciwobrót $\boldsymbol{S}\boldsymbol{R}$, czyli $\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}$, pozostawia bez zmiany punkt $r\sigma$ (**P 23, 31 § II**), który też jest jedynym punktem tautologicznym względem tego przekształcenia [czytelnik sam sprawdzi]. — Jeżeli $\boldsymbol{R}$ jest półobrotem (**P 7 § IV**) dokoła r, wtedy przeciwobrót $\boldsymbol{S}\boldsymbol{R}$ będzie jednoznaczny z równoodwrotnością względem punktu $r\sigma$. Oznaczmy ten punkt przez O. Podobieństwo $/O \,.\, /\sigma$ pozostawia bez

zmiany każdy punkt prostej r i każdą płaszczyznę, przechodzącą przez r, ale zmienia położenie punktów płaszczyzny σ; to podobieństwo jest półobrotem (**P 30, 23, 10 § IV**), gdyż różni się i od tożsamości i od odzwierciedlenia za pomocą płaszczyzny, przechodzącej przez r (**P 56 § II**). A więc $/O \,.\, /\sigma = /r$, czyli $/O = /r \,.\, /\sigma$].

P 10. — *Tr.* „Każda izomerja, która ma punkt tautologiczny, ale tylko jeden, jest przeciwobrotem". [Zauważmy przedewszystkim, że iloczyn odzwierciedlenia za pomocą jakiejkolwiek płaszczyzny przez półobrót dokoła osi, która przecina tę płaszczyznę, ale w niej nie leży, jest równoważny przeciwobrotowi (mającemu oś na tej płaszczyźnie). Por. **P 4.** W rzeczy samej, oznaczmy płaszczyznę, oś i punkt, o ktorym mowa, przez π, s i O; σ niech oznacza płaszczyznę przechodzącą przez s i prostopadłą do π (**P 54 § II**), r prostą prostopadłą do σ w punkcie O, a τ płaszczyznę rs, która na pewno jest różna od π; będzie więc na zasadzie **P 6 § IV**: $/s \,.\, /\pi = (/\sigma \,.\, /\tau) \,.\, /\pi$. Z drugiej strony przekształcenie złożone $/\tau \,.\, /\pi$ jest równoważne pewnemu obrotowi $\boldsymbol{R}$ dokoła prostej r (**P 4 § IV**), a więc $/s \,.\, /\pi = /\sigma \,.\, \boldsymbol{R}$; i t. d. — Oznaczmy teraz przez $\boldsymbol{J}$ izomerję o jednym tylko punkcie tautologicznym; punktem tym niech będzie O. Obierzmy jakikolwiek punkt A różny od O i załóżmy $A' \equiv \boldsymbol{J}A$, $M \equiv A|A'$; oznaczmy dalej przez s prostą OM, albo też prostą prostopadłą do AA' w punkcie O, zależnie od tego, czy punkt M jest różny od O, czy też pokrywa się z O (co następuje wtedy, jeżeli punkty A, A' są współlinjowe z O). Punkty A i A' są więc do siebie symetryczne względem s (**P 36 § IV, P 54 § I, P 5 § II** i t. d.). Otóż ponieważ iloczyn $/s \,.\, \boldsymbol{J}$ pozostawia bez zmiany punkt O i punkt A, musi więc być albo tożsamością, albo odzwierciedleniem za pomocą jakiejś płaszczyzny π, przechodzącej przez te dwa punkty, albo wreszcie obrotem $\boldsymbol{P}$ dokoła prostej OA (**P 22—24, 30 § IV**). Pierwszy z tych trzech przypadków doprowadziłby odrazu do $\boldsymbol{J} = /s$, a trzeci do $\boldsymbol{J} = /s \,.\, \boldsymbol{P}$; przeto przekształcenie $\boldsymbol{J}$ byłoby obrotem (**P 7 § IV, P 3**), co jest sprzeczne z założeniem (**P 23 § II**). Pozostaje przypadek drugi, w którym $\boldsymbol{J} = /s \,.\, /\pi$. Wtedy, ze względu na poprzednią uwagę, $\boldsymbol{J}$ jest przeciwobrotem, o ile tylko prosta s nie leży na płaszczyźnie π; ale w przypuszczeniu, że s leży na π, każdy punkt tej prostej byłby tautologiczny względem $\boldsymbol{J}$ (**P 4**), co się sprzeciwia założeniu]. — Wskutek tego:

P 11. — *Tr.* „Izomerje, mające punkty tautologiczne, są: tożsamość, symetrja względem płaszczyzny, obrót i przeciwobrót — i tylko te". — Oprócz tego:

P 12. — *Tr.* „Wypadkowa jakiegokolwiek obrotu z poprzedzającym go albo następującym po nim odzwierciedleniem za pomocą płaszczyzny, przecinającej jego oś (ale nie przechodzącej przez tę oś) jest zawsze przeciwobrotem“. [Niech będzie R obrotem, o którym mowa, r jego osią, π płaszczyzną odzwierciedlającą, O punktem $r\pi$. Izomerja $/\pi . R$ nie ma punktów tautologicznych, z wyjątkiem punku O. W rzeczy samej, płaszczyzna biegunowa jakiegokolwiek punktu A, nie leżącego na osi r i punktu RA przechodzi zawsze przez r, a więc jest różna od π; przeto $RA \infty = A/\pi$, a zatym $(RA)/\pi \infty = A$. I podobnie każdy punkt B osi r, różny od O, pokrywa się z punktem RB, ale jest różny od punktu B/π; przeto $RB \infty = B/\pi$. To samo wypadnie względem izomerji $R . /\pi$; wystarczy więc powołać się na **P 10**].

P 13. — *Tr.* „Odzwierciedlenie za pomocą płaszczyzny nie może być równoważne iloczynowi izomerji przez siebie samą“. [Niech będzie π jakąkolwiek płaszczyzną; dowiedziemy, że założenie $J^2 = /\pi$, gdzie J oznacza jakąkolwiek izomerję, jest w sprzeczności z **P 11**. Jeżeli A jest punktem dowolnym płaszczyzny π, a $A' \equiv JA$, wtedy punkt JA' musiałby się pokryć z punktem A, gdyż $J(JA) = J^2A = A/\pi = A$ (**P 31 § II**); a więc punkt $A\,|\,A'$ byłby tautologiczny względem J (**P 42, 43 § I; P 3, 36 § IV**). Ale J nie może być t o ż s a m o ś c i ą, ani o d z w i e r c i e d l e n i e m, ani o b r o t e m, gdyż w takim razie przekształcenie J^2 byłoby tożsamością lub obrotem (**P 1** i t. d.), podczas kiedy $/\pi$ nie jest równoważne żadnemu z tych działań (**P 31 § II, P 8 § IV**). J nie może też być przeciwobrotem, bo gdyby było $J = SR$ (**P 9**), wtedy wypadłoby $J^2 = SR . SR = SSRR$ (**tamże**) $= R^2$. A więc nie istnieje taka izomerja J, dla którejby było $J^2 = /\pi$ (**P 11**)].

P 14. — *Tr.* „Kwadrat izomerji nie może być równoważny przeciwobrotowi“. [Istotnie, jeżeli A oznacza jakikolwiek przeciwobrót, wtedy założenie $J^2 = A$ prowadzi do tej samej sprzeczności, co i poprzednio, gdyż A posiada jakiś punkt tautologiczny O (**P 9**), a więc izomerja J musiałaby pozostawić bez zmiany punkt środkowy pomiędzy O i JO. Ale, jeżeli ma być $A = J^2$, to J nie może być ani tożsamością, ani odzwierciedleniem, ani też przeciwobrotem, ponieważ A nie może być ani obrotem, ani tożsamością (**P 23, § II, P 9**)].

P 15. — *Tr.* „Każde przesunięcie dowolnie obrane może być otrzymane przez połączenie pewnego przesunięcia z samym sobą“. Por. **P 2**. [A, A' niech będą dwoma jakiemikolwiek punktami, M ich punktem środkowym. Ponieważ przesunięcie od A do M (**P 35 § VI**) przenosi punkt M na A' (**P 39 § VI**), przeto kwadrat tego przesunięcia podporządkowuje punkt A' punktowi A; a więc $\begin{Bmatrix} A' \\ A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M \\ A \end{Bmatrix}^2$, na zasadzie **P 37, 35 § VI**].

P 16. — *Tr.* „Każda izomerja, nie posiadająca punktów tautologicznych, jest przesunięciem, jeżeli istnieją t r z y proste równoległe do siebie, ale nie współpłaszczyznowe, z których każda zostaje przekształcona na siebie samą“. [Niech będą u, v, w trzema prostemi, a I izomerją, o której mowa w twierdzeniu. Jeżeli na płaszczyźnie prostych równoległych u, v obierzemy punkt A, nie leżący na żadnej z tych prostych i oznaczymy przez A' punkt IA, to prostopadłe, poprowadzone z tych punktów do prostej tautologicznej u przecinają tę prostą w dwuch punktach odpowiadających sobie P i P', a odpowiednie pary punktów (AP) i $(A'P')$ będą do siebie przystające (**P 36 § IV**). Ale punkty A i A' leżą po tej samej stronie prostej u, ponieważ I pozostawia bez zmiany każdą z dwuch półpłaszczyzn, na które prosta u dzieli płaszczyznę tautologiczną uv (**P 44 § III**), gdyż jedna z tych półpłaszczyzn, zawiera prostą tautologiczną v (**P 4 § VI**). A więc prosta AA' będzie równoległa do u (**P 9 § VI** i t. d.) i wskutek tego będzie tautologiczna (**P 6 § VI**). Podobnie jakikolwiek punkt B, nie leżący na płaszczyźnie uv, zostaje przekształcony za pomocą I na punkt B', który leży z punktem B po tej samej stronie płaszczyzny uv, gdyż I zamienia każdą półprzestrzeń i t. d. na siebie samą, ponieważ w jednej z nich leży prosta tautologiczna w (**P 20, 21 § VI**); a więc i w tym przypadku znajdziemy (prowadząc z punktów B i B' prostopadłe do płaszczyzny tautologicznej uv, i t. d.), że prosta BB' jest równoległa do prostych u, v i na równi z nimi tautologiczna. A więc wszystkie proste równoległe do u są tautologiczne względem I. Z drugiej strony dwie jakiekolwiek, ale różne od siebie proste odpowiednie, np. AB i $A'B'$, leżą zawsze w jednej płaszczyźnie i nie spotykają się, gdyż gdyby miały punkt wspólny, wtedy prosta tautologiczna, wychodząca z tego punktu, przecięłaby te dwie proste w dwuch punktach odpowiednich, ale pokrywających się z sobą; pozostaje więc tylko powołać się na **P 36 § VI**].

P 17. — *Df.* „Iloczyn z p r z e s u n i ę c i a przez o d z w i e r c i e d l e n i e za pomocą płaszczyzny równoległej do tego przesunięcia nazywa się «*p r z e c i w p r z e s u n i ę c i e m*»“. — Albo też (ponieważ te dwie składowe można przestawić, jak o tym czytelnik może się przekonać): «*przeciwprzesunięcie*» oznacza „iloczyn «odzwierciedlenia» przez «przesunięcie» równoległe do płaszczyzny odzwierciedlającej“.

P 18. — *Tr.* „Jeżeli płaszczyzna π jest jakakolwiek, a punkty A, A' są różne od siebie i leżą albo na prostej, równoległej do płaszczyzny π, albo też na płaszczyźnie π, — wtedy przeciwprzesunięcie «$/\pi \cdot \left\{\begin{matrix} A' \\ A \end{matrix}\right\}$» jest izomerją, która nie pozostawia żadnego punktu bez zmiany, ale odwzorowuje na sobie samej każdą prostą płaszczyzny π równoległą do AA' (albo pokrywającą się z AA'), a także każdą płaszczyznę, prostopadłą do π i przechodzącą przez którąkolwiek z tych prostych. Oprócz tylko co wymienionych, niema prostych ani płaszczyzn tautologicznych, a obie strony płaszczyzny π zamieniają się jedna na drugą". I t. d.

P 19. — *Tr.* „Iloczyn odzwierciedlenia przez poprzedzające je, albo następujące po nim przesunięcie ukośne względem płaszczyzny odzwierciedlającej, jest przeciwprzesunięciem". Por. **P 6** i **P 17.** [Niech będzie π płaszczyzną odzwierciedlającą, a B jakimkolwiek punktem na niej leżącym. Przesunięcie jakkolwiek dane przekształca punkt B na jakiś inny punkt B' (różny od B), może więc być oznaczone przez $\left\{\begin{matrix} B' \\ B \end{matrix}\right\}$ (**P 36 § VI**). Podług założenia prosta BB' nie jest prostopadła do π, ani też nie leży na płaszczyźnie π: a więc płaszczyzna równoległa do π i nie przechodząca przez punkt B' musi przeciąć prostopadłą, poprowadzoną z punktu B do płaszczyzny π, w jakimś punkcie B'' różnym od B i od B'. Otóż iloczyn z $\left\{\begin{matrix} B'' \\ B \end{matrix}\right\}$ przez $\left\{\begin{matrix} B' \\ B'' \end{matrix}\right\}$ — albo z $\left\{\begin{matrix} B' \\ B'' \end{matrix}\right\}$ przez $\left\{\begin{matrix} B'' \\ B \end{matrix}\right\}$ — jest równoważny z przesunięciem od B do B' (**P 37 § VI**), wskutek czego $\left\{\begin{matrix} B' \\ B \end{matrix}\right\} \cdot /\pi = \left\{\begin{matrix} B' \\ B'' \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} B'' \\ B \end{matrix}\right\} \cdot /\pi$. Z drugiej strony przekształcenie $\left\{\begin{matrix} B'' \\ B \end{matrix}\right\} \cdot /\pi$ jest równoważne odzwierciedleniu za pomocą pewnej płaszczyzny χ równoległej do π (**P 6**); a więc $\left\{\begin{matrix} B' \\ B \end{matrix}\right\} \cdot /\pi = \left\{\begin{matrix} B' \\ B'' \end{matrix}\right\} \cdot /\chi$; ale to jest przeciwprzesunięcie (**P 17**), ponieważ prosta $B'B''$ jest równoległa do χ (**P 20, 15 § VI**). — W podobny sposób $/\pi \cdot \left\{\begin{matrix} B' \\ B \end{matrix}\right\} = /\pi \cdot \left\{\begin{matrix} B'' \\ B \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} B' \\ B'' \end{matrix}\right\} = /\rho \cdot \left\{\begin{matrix} B' \\ B'' \end{matrix}\right\}$ gdzie ρ oznacza pewną płaszczyznę równoległą do π].

P 20. — *Tr.* „Żadne przeciwprzesunięcie nie jest kwadratem izomerji". [Gdyby kwadrat jakiejkolwiek izomerji $\boldsymbol{I}$ był przeciwprzesunięciem «$/\pi \cdot \left\{\begin{matrix} A' \\ A \end{matrix}\right\}$» (**P 18**), wtedy każda prosta p płaszczyzny π równoległa do prostej AA' (albo pokrywająca się z nią) musiałaby odwzorować się przez $\boldsymbol{I}$ na sobie samej, albo też na innej prostej tej samej klasy; gdyż fakt:

$\boldsymbol{I}^2 p = p$ (**P 18**) pociąga za sobą, że i prosta $\boldsymbol{I}p$ jest tautologiczna względem $\boldsymbol{I}^2$. A więc płaszczyzna π byłaby tautologiczna względem $\boldsymbol{I}$, a obie półprzestrzenie, które ta płaszczyzna wyznacza, odwzorowywałyby się przez $\boldsymbol{I}$ bądź każda na sobie samej, bądź jedna na drugiej, a więc byłyby w każdym razie tautologiczne względem $\boldsymbol{I}^2$, co być nie może w przypadku przeciwprzesunięcia (**P 18**)].

P 21. — *Df.* „Nazywamy «ruchem śrubowym» wypadkową jakiegokolwiek obrotu i poprzedzającego ten obrót albo następującego po nim przesunięcia, równoległego do osi obrotu". Zauważmy, że przesunięcie od A do A' (jeżeli A i A' są punktami różnemi od siebie) jest przemienne z każdym obrotem dokoła prostej AA'.

P 22. — *Tr.* „Ruch śrubowy nie ma punktów tautologicznych, a jedyną jego prostą tautologiczną jest oś". [Jeżeli oznaczymy przez $\boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{T}$ składowe jakiegokolwiek ruchu śrubowego, to łatwo się przekonamy, że ten ruch śrubowy nie może pozostawić bez zmiany żadnego punktu osi r obrotu $\boldsymbol{R}$ (**P 23 § II, P 36 § VI**), ani też żadnego punktu leżącego zewnątrz osi, ponieważ spodek prostopadłej, poprowadzonej z takiego punktu tautologicznego do osi, musiałby sam być tautologiczny. $\boldsymbol{TR}$ nie może też zamienić na siebie samą żadnej płaszczyzny, która przecina prostą r w jednym punkcie, albo jest do niej równoległa; ale jeżeli jedna płaszczyzna przechodząca przez r odpowiada samej sobie, wtedy wszystkie płaszczyzny, przechodzące przez tę prostą, będą tautologiczne, a składowa $\boldsymbol{R}$ będzie półobrotem (**P 8, 10 § IV, P 36 § VI** i t. d.). Oś r obrotu $\boldsymbol{R}$ jest napewno tautologiczna; ale nie może być tautologiczna żadna prosta, przecinająca r ani też równoległa do r. Gdyby zaś jakaś prosta skośna do r była tautologiczna, wtedy byłaby też tautologiczna płaszczyzna, przechodząca przez tę prostą i równoległa do r. I t. d.].

P 23. — *Tr.* „Istnieje zawsze taki ruch śrubowy, którego kwadratem jest dany ruch śrubowy". [Wiemy, że jedna ze składowych $\boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{T}$ jakiegokolwiek ruchu śrubowego jest kwadratem pewnego obrotu $\boldsymbol{P}$ dokoła tej samej osi r (**P 2**), druga zaś kwadratem pewnego przesunięcia $\boldsymbol{G}$ wzdłuż r (**P 15**); a więc $\boldsymbol{TR} = \boldsymbol{GGPP} = \boldsymbol{GPGP}$ (**P 21**) $= (\boldsymbol{GP})^2$].

P 24. — *Tr.* „Iloczyn każdego obrotu przez jakiekolwiek przesunięcie ukośne do osi obrotu jest zawsze ruchem śrubowym (dokoła pewnej osi, która jest do pierwszej równoległa)". Por. **P 8** i **P 21** [Rozkładamy wzmiankowane przesunięcie na dwa przesunięcia: $\left\{\begin{matrix} B'' \\ B \end{matrix}\right\}$ i $\left\{\begin{matrix} B' \\ B'' \end{matrix}\right\}$, z których

jedno jest prostopadłe, drugie równoległe do osi obrotu, jak w **P 19** (przyczym B oznacza punkt, leżący na osi), następnie bierzemy pod uwagę **P 8, 21**].

P 25. — *Tr.* „Każda izomerja, nie mająca punktów tautologicznych, jest z konieczności albo przesunięciem, albo przeciwprzesunięciem, albo ruchem śrubowym“. Por. **P 11**. [Jeżeli taka izomerja I odwzorowuje punkt A w punkcie A', wtedy, ponieważ iloczyn z I przez przesunięcie od A' do A pozostawia punkt A bez zmiany, przeto może być tylko albo 1) tożsamością, albo 2) odzwierciedleniem, albo 3) obrotem, albo wreszcie 4) przeciwobrotem (**P 11**). W 1-ym przypadku $\left\{\begin{matrix}A\\A'\end{matrix}\right\} I = 1$, a więc nasza izomerja jest równoważna *przesunięciu* $\left\{\begin{matrix}A'\\A\end{matrix}\right\}$ (**P 35 § VI**). W 2-im przypadku $\left\{\begin{matrix}A\\A'\end{matrix}\right\} . I = /\pi$ (gdzie π oznacza pewną płaszczyznę, przechodzącą przez A); a więc $I = \left\{\begin{matrix}A'\\A\end{matrix}\right\} . /\pi$, wskutek czego izomerja I będzie albo odzwierciedleniem, albo *przeciwprzesunięciem* (**P 6, 17, 19**), zależnie od tego, czy płaszczyzna π jest prostopadła do prostej AA', czy też nie; ale pierwszy rezultat byłby sprzeczny z założeniem. — W 3-im przypadku $I = \left\{\begin{matrix}A'\\A\end{matrix}\right\} . R$, gdzie R oznacza obrót, którego oś r przechodzi przez punkt A, a więc I może być tylko albo obrotem (**P 8**), albo *ruchem śrubowym* (**P 21, 24**); ale ponieważ I, podług założenia, nie ma punktów tautologicznych, przeto rezultat pierwszy odpada, jak i poprzednio. — W 4-ym przypadku $\left\{\begin{matrix}A\\A'\end{matrix}\right\} . I = R S$ (**P 9**), gdzie S oznacza odzwierciedlenie względem płaszczyzny σ, prostopadłej w punkcie A do osi obrotu r; stąd $I = \left\{\begin{matrix}A'\\A\end{matrix}\right\} . R . S$. Otóż, zależnie od tego, czy oś r jest równoległa do prostej AA', czy też nie, — iloczyn $\left\{\begin{matrix}A'\\A\end{matrix}\right\} . R_r$ będzie obrotem P_u (**P 8**) albo też ruchem śrubowym $Q_v T_v$ (**P 21, 24**) dokoła innej prostej u albo v, równoległej do r, a więc prostopadłej do σ. W ten sposób $I = P_u . S$, albo też $I = Q_v . T_v . S = Q_v . /\rho$ (**P 6**), gdzie ρ oznacza jakąś inną płaszczyznę równoległą do σ; w obu tych przypadkach izomerja I byłaby przeciwobrotem (**P 9**), co być nie może, gdyż I nie ma punktów tautologicznych. I t. d.]. — Stąd wynika bezpośrednio ze względu na **P 11**:

P 26. — *Tr.* „Tożsamość, odzwierciedlenie, obrót, przeciwobrót, przesunięcie, przeciwprzesunięcie i ruch śrubowy stanowią wszystkie izomerje; a więc oprócz nich nie istnieje żaden rodzaj izomerji“. Innemi słowy: Każda izomerja pozostawia bez zmiany albo 1) każdy punkt, albo 2) wszystkie punkty jednej płaszczyzny, albo 3) wszystkie punkty jednej prostej (i tylko te punkty), albo 4) ma tylko jeden punkt tautologiczny; lub też nie ma punktów tautologicznych, ale ma proste tautologiczne (koniecznie równoległe), które 5) nie leżą wszystkie na jednej płaszczyźnie, albo 6) leżą wszystkie na jednej płaszczyźnie; lub wreszcie 7) nie ma punktów tautologicznych, ma natomiast jedną, ale tylko jedną, prostą tautologiczną (**P 22 — 24, 30, 37, 38 § IV; P 38 § 6; P 10, 16, 17, 22, 25**).

P 27. — *Df.* „Są dwa rodzaje izomerji, ściśle odróżniające się od siebie. Izomerje pierwszego rodzaju mogą być otrzymane jako kwadraty innych izomerji, a więc są takie, że każda z nich jest równoważna iloczynowi jakiejś izomerji przez siebie samą; każda izomerja tego rodzaju nazywa się «*ruchem*» albo «*przystawaniem*». Izomerja drugiego rodzaju, a więc taka, która nie jest kwadratem izomerji, czyli nie może być otrzymana jako wypadkowa jakiejś izomerji samej z sobą, nazywa się «*przeciwprzystawaniem*» [1])“. Izomerje pierwszego rodzaju, czyli *przystawania*, są: tożsamość, obrót (**P 2**), przesunięcie (**P 15**) i ruch śrubowy (**P 23**). Izomerje drugiego rodzaju, czyli *przeciwprzystawania*, są: odzwierciedlenie, przeciwobrót i przeciwprzesunięcie (**P 13, 14, 20**). Zauważmy, że przekształcenie odwrotne do każdego $\left\{\begin{matrix}\text{przystawania}\\\text{przeciwprzystawania}\end{matrix}\right\}$ jest znowu $\left\{\begin{matrix}\text{przystawaniem}\\\text{przeciwprzystawaniem}\end{matrix}\right\}$: ponieważ z równości $C = I^2$ (gdzie I jest jakąkolwiek izomerją) wypada zawsze $C^{-1} = (I^{-1})^2$.

P 28. — *Tr.* „Każdy ruch, przy którym choć jeden punkt pozostaje bez zmiany, jest obrotem (o ile nie jest tożsamością)“. — EULER, Form. gen. pro translat corp. rigid. [**P 36 § VI, P 22, 26, 27** i t. d.].

P 29. — *Tr.* „Iloczyn dwuch lub więcej jakichkolwiek przystawań jest znowu przystawaniem“. [Ponieważ są trzy rodzaje ruchu (pominąwszy tożsamość), a mianowicie obrót, przesunięcie i ruch śrubowy, wypadnie

---

[1]) Kryterjum podziału, które tutaj zostało wprowadzone, jest (według mnie) o wiele dogodniejsze od zwykłego, opierającego się na pojęciu *zwrotu* figury przestrzennej — np. trójścianu, czworościanu i t. d.; — oprócz tego jest o wiele ogólniejsze, gdyż nadaje się jeszcze (pominąwszy odmienne znaczenie terminów, które wypadnie przyjąć zamiast izomerji, przystawania i t. d.) do innych podobnych zastosowań, jak np. do odróżnienia *homografji* i *antyhomografji* w Gieometrji rzutowej zespolonej.

więc rozróżnić sześć przypadków. Iloczyn dwuch obrotów był już rozpatrywany w **P I, 3, 7**, jeżeli osi pokrywają się, przecinają się, albo są równoległe; pozostaje więc założenie, że osi u i v obrotów składowych P i Q są prostemi skośnemi. Obierzmy na osi u jakikolwiek punkt A i przyjmijmy $A' \equiv QA$; iloczyn obrotu Q, przez przesunięcie od A' do A, prostopadłe do osi obrotu, jest obrotem R_w dokoła innej osi w, równoległej do v (**P 8**) i przechodzącej przez A. Wskutek tego $\binom{A}{A'} . Q . P = R . P$. Druga strona tego równania jest nowym obrotem G_t dokoła jakiejś innej prostej t, przechodzącej przez punkt A (**P 3**). A więc $Q . P = \binom{A'}{A} . G$; iloczyn QP będzie zatym w każdym razie obrotem, albo ruchem śrubowym (**P 8, 2I, 24**). — Iloczyn dwuch przesunięć będzie zawsze albo przesunięciem, albo tożsamością (**P 37 § VI**). — Dalej, **P 8, 2I, 24** rozpatrują różne założenia co do obrotów, które poprzedza, albo po których następuje przesunięcie. — Wreszcie każde inne połączenie (iloczyn dwuch ruchów śrubowych, albo iloczyn ruchu śrubowego przez przesunięcie, czy też przez obrót) może być zawsze rozłożone na iloczyn obrotów i przesunięć, dzięki **P 2I**].

P 30. — *Tr.* „Z połączenia przystawania i przeciwprzystawania wypada zawsze przeciwprzystawanie". — [Gdyby przystawanie C w połączeniu z przeciwprzystawaniem A prowadziło do przystawania C', gdyby więc było $AC = C'$, albo $CA = C'$, wtedy musiałoby być $A = C'^{-1}C$, albo $A = C^{-1}C'$, gdzie C^{-1} znowu jest przystawaniem (**P 27**); to się sprzeciwia **P 29**].

P 3I. — *Tr.* „Iloczyn dwuch jakichkolwiek przeciwprzystawań jest przystawaniem". [Iloczyn dwuch odzwierciedleń może być tylko albo tożsamością, albo obrotem, albo przesunięciem (**P 4 § IV, P 5**). Iloczyn dwuch przeciwobrotów $SR \quad S'R'$ (**P 9**), — gdzie S i S' oznaczają odzwierciedlenia za pomocą dwuch jakichkolwiek płaszczyzn σ i σ', a R i R' są obrotami dokoła dwuch osi, odpowiednio prostopadłych do tych płaszczyzn — jest równoważny iloczynowi $R'(S'S)R$ (**tamże**), którego każdy z trzech czynników jest przystawaniem. — W podobny sposób, jeżeli R oznacza obrót dokoła osi prostopadłej do płaszczyzny σ, a T przesunięcie równoległe do płaszczyzny π, — to przeciwobrót $/\sigma . R$, w połączeniu z poprzedzającym go, albo z następującym po nim przeciwprzesunięciem $/\pi . T$ (**P I7**), wytworzy przystawanie $T(/\pi . /\sigma)R$, albo $R(/\sigma . /\pi)T$ (**P 29** i t. d.). — Inne przypadki pozostawiamy czytelnikowi].

P 32. — *Tr.* „Dwie figury płaskie izomeryczne są zawsze odpowiadające sobie przez przystawanie". [Jeżeli izomerja, za pomocą której przechodzimy od jednej figury do drugiej, nie jest przystawaniem, to wystarczy wykonać po niej odzwierciedlenie na płaszczyźnie drugiej figury (**P 3I**) i t. d.]. — To usprawiedliwia nadanie nazwy figur «*przystających*» figurom płaskim «izomerycznym» (**P 36 § IV**).

P 33. — *Tr.* „Istnieje tylko jedno $\left\{\begin{smallmatrix}\text{przystawanie}\\ \text{przeciwprzystawanie}\end{smallmatrix}\right\}$, które może przekształcić jednocześnie punkt A, wychodzący z niego promień $|AB$ i ograniczoną przez prostą AB półpłaszczyznę $|(AB)C$ (gdzie A, B, C są punktami niewspółlinjowemi) na punkt A', promień $|A'B'$ i półpłaszczyznę $|(A'B')C'$". [To wypada z **P 39, 42 § IV** przy uwzględnieniu **P 27, 30**]. Stąd wynika bezpośrednio:

P 34. — *Tr.* „Dwa $\left\{\begin{smallmatrix}\text{przystawania}\\ \text{przeciwprzystawania}\end{smallmatrix}\right\}$, z których każde przenosi trójkę danych punktów niewspółlinjowych na jedną i tę samą trójkę punktów, są sobie równe".

§ VIII.

Zwroty prostej i koła. Odcięte. Odwzorowanie prostej za pomocą liczb rzeczywistych. Odległość dwuch punktów. Ciągłość prostej.

P 1. — *Df.* „Jeżeli A i B są punktami różnemi od siebie i jeżeli X jest jakimkolwiek punktem prostej AB, wtedy wyrażenie: «*następujące po X w zwrocie* $A \rightarrow B$, albo *od A ku B*» — w skróceniu «$\sigma_{A,B} X$» — oznacza: 1) jeżeli X należy do $|AB$, — figurę «$|AB \sim |AX|$», która powstaje z półprostej od A ku B przez wyłączenie z niej wszystkich punktów odcinka $|AX|$; 2) jeżeli X nie należy do $|AB$, — figurę «$|XA \sim \iota X$», która powstaje z promienia od X ku A przez wyłączenie z niego samego tylko punktu X. Patrz **P 10, 29 § III**". — W ten sposób określiliśmy pewną funkcję albo przekształcenie $\sigma_{A,B}$ (następujące w zwrocie $A \rightarrow B$); znak tej funkcji, umieszczony przed znakiem któregokolwiek punktu prostej AB, wytwarza na tej prostej całą klasę punktów. Tak otrzymane przekształcenie (prostej AB na klasy prostej AB), które każdemu punktowi X prostej AB podporządkowuje punkty, oznaczone przez $\sigma_{A,B} X$, otrzymuje nazwę «zwrotu $A \rightarrow B$», albo «zwrotu od A ku B». — Zauważmy, że zwrot $A \rightarrow B$ jest współzmiennikiem pary (A, B) względem każdego podobieństwa. I t. d.

P 2. — *Tr.* „W powyższych założeniach, punkt X nie należy do $\sigma_{A,B} X$; czyli: żaden punkt nie jest punktem następującym po sobie samym. Oprócz tego widoczne jest, że $\sigma_{A,B} A = |AB \sim \iota A$, $\sigma_{A,B} B = |AB \sim |AB|$; że punkt A nie następuje po żadnym z punktów promienia $|AB$, ale że każdy inny punkt tego promienia następuje po A; że jeżeli punkt X należy do $|AB$, ale jest różny od A, wtedy punkty po nim następujące utworzą cień punktu X z punktu A, z wyłączeniem początku X".

P 3. — *Tr.* „Jakkolwiek będą obrane punkty X i Y na prostej AB, nie może się zdarzyć, ażeby jednocześnie punkt Y następował po X,

a punkt X po Y w zwrocie $A \rightarrow B$. Czyli: niema takich dwuch punktów, z których każdy następowałby po drugim w tym samym zwrocie". [Jeżeli każdy z punktów X i Y leży na promieniu $|AB$, to założenia $Y \varepsilon \sigma_{A,B} X$ i $X \varepsilon \sigma_{A,B} Y$ wyrażają, że Y nie należy do $|AX|$, ani też X do $|AY|$ (**P I**), że zatym A należy do $|XY|$ (**P 15 § III**); ale to jest w sprzeczności z **P 33 § III**, gdyż punkt A jest różny i od X i od Y (**P 2**). — Jeżeli X leży na promieniu $|AB$, ale Y na nim nie leży, wtedy warunki: $Y \varepsilon \sigma_{A,B} X$ i $X \varepsilon \sigma_{A,B} Y$ są również sprzeczne, gdyż pierwszy z nich wymaga, ażeby punkt Y leżał na promieniu $|AB$ jak i X (**P I**). — Jeżeli wreszcie zarówno X, jak i Y leżą zewnątrz promienia $|AB$ i, co za tym idzie, są różne od A, — jeżeli więc Y leży na $|AX$, a X na $|AY$ (**P 36, 34 § III**) — wtedy jednoczesne założenia $Y \varepsilon |XA \sim \iota X$ i $X \varepsilon |YA \sim \iota Y$ (**P I**) doprowadziłyby do: $Y \varepsilon |AX| \sim \iota A \sim \iota X$ i $X \varepsilon |AY| \sim \iota A \sim \iota Y$ (**P 31 § III**), co się sprzeciwia **P 12 § III**].

P 4. — *Tr.* „Jeżeli A, B są punktami różnemi od siebie, a X, Y punktami prostej AB również nie pokrywającemi się z sobą, wtedy nastąpić musi jedno z dwojga: albo punkt Y następuje po X, albo X po Y, w zwrocie $A \rightarrow B$". [Jeżeli jeden z dwuch punktów X, Y pokrywa się z A, wtedy prawdziwość twierdzenia jest już skonstatowana w **P 2**; możemy więc przyjąć, że punkt A jest różny od X i od Y. Otóż, gdyby oba te punkty leżały na promieniu $|AB$, wtedy albo punkt Y leżałby na $|AX|$, albo też X na $|AY|$ (**P 33 § III**); w pierwszym przypadku punkt X byłby wyłączony z $|AY|$ (**P 12 § III**), ale leżałby na $|AB$, byłby więc $\sigma_{A,B} Y$ (**P I**); podobnie w drugim przypadku punkt Y byłby $\sigma_{A,B} X$. — Gdyby dalej jeden tylko z punktów X, Y, np. punkt X, leżał na promieniu $|AB$, wtedy punkt Y byłby zewnętrzny dla $|AX|$, a X dla $|AY|$ (**P 34, 29 § III**); a więc punkt A leżałby między X i Y (**P 15, 10 § III**), a zatym X na promieniu $|YA$ (**P 29 § III**), skąd: $X \varepsilon \sigma_{A,B} Y$ (**P I**). — Przypuśćmy wreszcie, że oba punkty X, Y leżą zewnątrz promienia $|AB$; wtedy punkt Y leżałby na promieniu $|AX$ (**P 36, 34, § III**), a więc albo punkt Y należałby do $|AX|$, albo X do $|AY|$ (**P 33 § III**); a więc albo Y do $|XA$, albo też X do $|YA$ (**P 29 § III**), a to znaczy tyleż, co «$Y \varepsilon \sigma_{A,B} X$ albo $X \varepsilon \sigma_{A,B} Y$» (**P I**)].

P 5. — *Tr.* „Jeżeli są dane punkty A i B jak wyżej i jeżeli X, Y są takiemi punktami prostej AB, że Y następuje po X w zwrocie $A \rightarrow B$, wtedy wszystkie punkty następujące po Y następują też po X, czyli figura $\sigma_{A,B} Y$ jest zawarta w figurze $\sigma_{A,B} X$". [Jeżeli punkt X pokrywa się z A, wtedy wystarczy powołać się na **P 2**, gdyż figura $|AB \sim |AY|$ leży całkowicie na $|AB \sim \iota A$. Niech więc będzie punkt X różny od A i niech z po-

czątku należy do promienia $|AB$. Ponieważ podług założenia $Y \varepsilon |AB \infty |AX|$ (**P 1**), a $A \infty \varepsilon |XY|$ (**P 33 § III**), przeto punkt X musi należeć do odcinka $|AY|$ (**P 15 § III**), a zatym odcinek $|AX|$ musi być zawarty w $|AY|$ (**P 19 § III**). A więc $|AB \infty |AY| \supset |AB \infty |AX|$, czyli $\sigma_{A,B} Y \supset \sigma_{A,B} X$. — Przypuśćmy teraz, że punkt X nie leży na promieniu $|AB$. Wtedy dla każdego punktu Z, spełniającego warunek $Z \varepsilon |AB \infty \iota A$ będzie $|AZ = |AB$ (**P 34 § III**); a więc punkt Z nie należy do $|AX|$, ani też X do $|AZ|$ (**P 29 § III**), ale A należy do $|XZ|$ (**P 15 § III**); przeto Z należy do $|XA$, a więc $|AB \supset |XA$. Jeżeli więc punkt Y leży na $|AB$, wtedy $\sigma_{B,B} Y \supset \sigma_{A,B} X$ (**P 1**). Ale może się zdarzyć, że punkt Y leży na $|XA \infty |AB$; wtedy $X \infty \varepsilon |YA|$ i $A \infty \varepsilon |XY|$ (**P 33, 36 § III**), a więc $Y \varepsilon |XA|$ (**P 15 § III**) i wskutek tego $|YA| \supset |XA|$ (**P 19 § III**). Z drugiej strony przypuszczenie: $A \varepsilon |YT|$ pociąga za sobą dla każdego punktu T: $A \varepsilon |XT|$ (**P 14 § III**), wobec tego, że $A \infty \varepsilon |XY|$. A więc $|YA \supset |XA$ (**P 29 § III**) i, co za tym idzie: $\sigma_{A,B} Y \supset \sigma_{A,B} X$ (**P 1**)].

P 6. — *Df.* „Pozostawiając bez zmiany główne założenia o A, B, X (**P 1**), mówimy, że punkt Y prostej AB «*poprzedza X*» *w zwrocie* $A \rightarrow B$, jeżeli punkt X następuje po Y w tym samym zwrocie. A więc wyrażenie: «*poprzedzający w zwrocie* $A \rightarrow B$» oznacza przekształcenie *odwrotne* do $\sigma_{A,B}$. Patrz **P 1**“. — Twierdzenia **P 3, 4** pozwalają odrazu wyprowadzić wniosek, że: „punkt X poprzedzają te wszystkie punkty prostej AB, które nie należą do $\sigma_{A,B} X$ i nie pokrywają się z X, i tylko te“. Dowodzi się jeszcze, że:

P 7. — *Tr.* „Figura «poprzedzająca X w zwrocie $A \rightarrow B$» nie różni się od figury «następującej po X w zwrocie $B \rightarrow A$». Albo, inaczej mówiąc, przekształcenie odwrotne do $\sigma_{A,B}$ jest równoznaczne ze zwrotem $B \rightarrow A$: $\sigma_{A,B}^{-1} = \sigma_{B,A}$“. [Ze względu na **P 6**, figura «poprzedzająca X w zwrocie $A \rightarrow B$», — czyli «$\sigma_{A,B}^{-1} X$» — nie jest niczym innym, jak «$AB \infty \sigma_{A,B} X \infty \iota X$». Jeżeli więc (jak to na początek założymy) $X \varepsilon |AB \infty \iota A$, to figura $\sigma_{A,B}^{-1} X$ jest dopełnieniem [1]) cienia punktu X z punktu A (**P 2, 6**), a więc pokrywa się z figurą «$|XA \infty \iota X$» **P 29, 30 § III**). A ponieważ $A \infty \varepsilon |XB|$ (**P 33 § III**), przeto każdy z dwuch warunków $A \varepsilon |BY|$, $A \varepsilon |XY|$ będzie, w stosunku do Y, następstwem drugiego (**P 14 § III**); stąd — w założeniu, że punkt X należy do $|AB|$ i uwzględniając **P 18, 20, 29 § III** — znajdujemy: $|XA \infty \iota X = |BA \infty |BX|$, przeto $\sigma_{A,B}^{-1} X = |BA \infty |BX| = \sigma_{B,A} X$ (**P 1**), co jest jeszcze prawdziwe i przy $X = A$ (**P 2**).

[1]) [do linji prostej, *przyp. tłum.*].

Ale może się również zdarzyć, że X należy do $|AB \infty |AB|$. W takim razie $B \varepsilon |XA|$ (**P 29, 10 § III**), a zatym $|XA = |XB$ (**P 29, 34 § III**); wtedy $\sigma_{A,B}^{-1} X$, co (jak widzieliśmy) jest równoważne $|XA \infty \iota X$, pokrywa się z $|XB \infty \iota X$, czyli z $\sigma_{B,A} X$ (**P 1**), gdyż punkt X nie należy do $|BA$ (**P 29, 30 § III**). — Jeżeli dalej punkt X nie należy do $|AB$, a więc $X \varepsilon |BA$ (**P 30 § III**), wtedy figura $\sigma_{A,B}^{-1} X$, — która jest równoważna z $AB \infty |XB$ (**P 1, 6**) wobec tego, że $B \infty \varepsilon |AX|$, a $X \infty \varepsilon |AB|$ (**P 29 § III**), tak że $A \varepsilon |XB$ (**P 15 § III**) i, co za tym idzie, $|XA = |XB$ (**P 34 § III**) — nie różni się od figury $|BX \infty |BX|$, czyli od $\sigma_{B,A} X$, gdyż tak jedna, jak i druga, dołączona do X, tworzy cień punktu X z punktu B (**P 29, 30 § III**). I t. d.]. — Za pomocą rozumowania zupełnie podobnego do powyższego dowiedlibyśmy jeszcze, że:

P 8. — *Tr.* „Jeżeli punkty A, B, X są dane jak wyżej i jeżeli obierzemy na prostej dwa nowe punkty A' i B' tak, że punkt A' poprzedza B' w zwrocie $A \rightarrow B$: wtedy zwrot $\sigma_{A',B'}$ nie różni się od zwrotu $\sigma_{A,B}$, a więc $\sigma_{A',B'} X = \sigma_{A,B} X$ dla każdego X“. — Z tego powodu i z uwagi na **P 4, 7**:

P 9. — *Tr.* „Jeżeli C i D są punktami dowolnemi prostej AB, ale nie pokrywającemi się z sobą, wtedy zwrot $C \rightarrow D$ pokrywa się ze zwrotem $A \rightarrow B$ albo ze zwrotem $B \rightarrow A$“. — Ostatecznie więc każda prosta ma *dwa zwroty* różne jeden od drugiego, ale nie więcej niż dwa; ze względu na **P 7** nadaje się tym zwrotom miano «*przeciwnych*» jeden drugiemu.

P 10. — *Tr.* „W założeniu **P 8** klasa punktów, które następują po A', ale poprzedzają B' w zwrocie $A \rightarrow B$, składa się z punktów leżących między A' i B'“, [gdyż punkty te są punktami wspólnemi dwuch figur: $|A'B' \infty \iota A'$ i $|B'A' \infty \iota B'$ (**P 31 § III**), czyli punktami wspólnemi klas $\sigma_{A',B'} A'$ i $\sigma_{B',A'} B'$ (**P 2**), które się nie różnią od $\sigma_{A,B} A'$, $\sigma_{B,A} B'$ (**P 8**)]. — Zauważmy jeszcze, że:

P 11. — *Tr.* „Przesunięcie, w którym prosta porusza się wzdłuż siebie samej, nie zmienia ani jednego ani drugiego zwrotu; natomiast każda symetrja prostej do siebie samej (o ile tylko nie odzwierciedla każdego punktu na sobie samym), zamienia zwroty jeden na drugi“. [Wystarczyłoby dowieść części drugiej, gdyż każde przesunięcie jest iloczynem dwuch odzwierciedleń (**P 5 § VII** i t. d.); ale pozostawiamy to czytelnikowi. — Zauważmy jednak, że jeżeli A' jest punktem dowolnym promienia $|AB$, z wyłączeniem jego początku, to przesunięcie od A do A' (**P 35 § VI**) podporządkowuje punktom A i A' punkty A' i A/A' (**P 39 § VI**), a więc zamienia zwrot $A \rightarrow A'$ na zwrot $A' \rightarrow A/A'$ (**P 34 § VI, P 1**), przez co

nie zmienia $\sigma_{A,B}$, gdyż — przyjąwszy $A'' \equiv A/A'$ — będziemy mieli: $A'' \varepsilon |AB \sim |AA'|$ (**P 34, 29, 12 § III**), a zatym $\sigma_{A,B} = \sigma_{A,A''} = \sigma_{A',A''}$ (**P 2, 8**)].

P 12. — *Df.* „O, A, B niech będą trzema punktami niewspółlinjowemi i punkt B niech będzie oddalony od O jak A; k niech będzie kołem przecięcia płaszczyzny OAB z kulą przez A dokoła O. Nazywać będziemy «*półkolem od A przez B o środku O*» — albo krócej: «$O(AB$» — klasę punktów wspólnych koła k i półpłaszczyzny «przez OA ku B»; a «*łukiem* (AB) *o środku O*» — albo krócej: «$O(AB)$» — nazywać będziemy klasę punktów wspólnych koła k i kąta płaskiego wypukłego $\hat{O}.AB$. — Punkty A i A/O, albo A i B, nazywają się «*końcami*» półkola $O(AB$ i łuku $O(AB)$. Punktami «*wewnętrznemi*» jednej lub drugiej figury nazywać się będą te jej punkty, które się nie pokrywają z jej końcami. Punkty wewnętrzne łuku $O(AB)$ leżą «między A i B na kole k» (przyczym punkty A, B i O muszą być niewspółlinjowe). I t. d.“. Patrz **P 39, 47 § III**; **P 45 § I** i t. d.

P 13. — *Df.* „Jeżeli punkty O, A, B są dane jak wyżej, a $A' \equiv A/O$, $B' \equiv B/O$ i jeżeli X jest punktem dowolnym koła k (a więc należącym do klasy $OAB \cap A_O$, jak poprzednio), wtedy przez wyrażenie «*następujące po X w zwrocie A → B względem środka O*»—albo przez symbol «$\sigma_{O,A,B}X$— rozumiemy: 1) klasę punktów wewnętrznych półkola $O(AB$, albo półkola $O(A'B'$ — jeżeli punkt X pokrywa się z A albo z A'; 2) klasę punktów wewnętrznych półkola $O(XA'$ — jeżeli X jest punktem wewnętrznym półkola $O(AB$; 3) klasę punktów wewnętrznych półkola $O(XA$ — jeżeli X jest punktem wewnętrznym półkola $O(A'B'$. — «*Poprzedzającym punkt X*» (w zwrocie $A \to B$ względem środka O) nazywa się każdy punkt, po którym następuje punkt X. Patrz **P 12** i por. **P 1, 6**“. — Ponieważ koło k jest sumą logiczną dwuch półkoli $O(AB$ i $O(A'B'$ (**P 39, 44 § III**), przeto określiliśmy tym sposobem pewne «przekształcenie koła na samo siebie» (a właściwie koła k na klasy koła k), któremu nadajemy nazwę «*zwrotu A → B względem środka O*» i symbol «$\sigma_{O,A,B}$». Jeżeli jeszcze weźmiemy pod uwagę, że określenie powyższe jest symetryczne względem obu par punktów (A, B) i (A', B'), wtedy będziemy mogli odrazu wyprowadzić wniosek, że $\sigma_{O,A,B} = \sigma_{O,A',B'}$, czyli, że równoodwrotność względem środka koła nie zmienia jego zwrotów. — Zauważmy jeszcze, że żaden punkt koła k nie następuje po sobie samym w zwrocie $A \to B$ względem środka O. I t. d.

P 14. — *Tr.* „Jeżeli w tych samych założeniach punkt Y następuje po X w zwrocie $A \to B$ (względem środka O), wtedy punkt X napewno nie będzie następował po Y“. Por. **P 3**. [Niech będzie $X' \equiv X/O$, $Y' \equiv Y/O$.

Jeżeli $X = A$, a więc $Y \varepsilon O(AB \sim \iota A \sim \iota A'$ (**P 13**), wtedy punkty X i A' leżą po stronach przeciwnych prostej OY (**P 38 § III**); przeto punkt X, jako nie należący do półpłaszczyzny $|(OY)A'$, nie może leżeć na półkolu $O(YA'$ (**P 12**), czyli $X \sim \varepsilon \sigma_{O,A,B} Y$ (**P 13**). Jeżeli X jest punktem wewnętrznym półkola od A przez B (o środku O), wtedy punkt Y, jako następujący po X, musi być punktem wewnętrznym łuku $O(XA')$, albo punktem wewnętrznym łuku $O(A'X')$, albo też pokrywa się z punktem A' (**P 13**) — gdyż $O(XA' = O(XA') \smile O(A'X')$ dla każdego X (**P 12** i t. d.). Ale w pierwszym przypadku punkty X i A', w drugim punkty X i A leżą po stronach przeciwnych prostej OY; a więc punkt X nie należy do półkola $O(YA'$, albo nie należy do półkola $O(YA$ (**P 12**); natomiast w trzecim przypadku X wypadnie poza półkolem $O(YB'$, a więc we wszystkich trzech przypadkach $X \sim \varepsilon \sigma_{O,A,B} Y$. — Jeżeli wreszcie $X = A'$, albo też leży wewnątrz półkola $O(A'B'$, wtedy możemy powrócić do przypadków już rozważonych, przestawiając A z A' i B z B' (**P 13**)]. — Również łatwo dowieść, że:

P 15. — *Tr.* „Jeżeli obierzemy na kole k dwa punkty X i Y jakiekolwiek, ale różne od siebie i nie symetryczne względem O, wtedy jedno z dwojga: albo punkt Y będzie następował po X, albo punkt X będzie następował po Y w zwrocie $A \to B$ (względem środka O)“. Por. **P 4**. [Jeżeli X pokrywa się z punktem A, wtedy prawdziwość twierdzenia jest od razu widoczna, gdyż punkt A poprzedza każdy punkt wewnętrzny dla $O(AB$ i następuje po każdym punkcie wewnętrznym dla $O(A'B'$ (**P 13**). Jeżeli każdy z punktów X i Y jest wewnętrzny dla półkola $O(AB$, wtedy punkt Y następuje po X, albo X następuje po Y, zależnie od tego czy Y leży na łuku $O(XA')$, czy też na $O(AX)$; istotnie, w drugim przypadku punkty A i X, zarówno jak A, A', leżą po stronach przeciwnych prostej OY, a więc X i A' po tej samej stronie; przeto $X \varepsilon O(YA'$ i t. d. Przypuśćmy dalej, że punkt X jest wewnętrzny dla półkola $O(AB$, a punkt Y wewnętrzny dla $O(A'B'$; wtedy punkt Y następuje po X, albo X po Y, zależnie od tego, czy Y leży na łuku $O(A'X')$, czy też na łuku $O(X'A)$; istotnie, w drugim przypadku punkty A' i X, zarówno jak A' i A, znajdują się po stronach przeciwnych prostej OY, a więc A i X po tej samej stronie; przeto $X \varepsilon O(YA$ i t. d. Inne możliwe jeszcze przypadki: $X = A'$, albo X, $Y \varepsilon O(AB \sim \iota A' \sim \iota A$, albo $X \varepsilon O(A'B' \sim \iota A' \sim \iota A$ i $Y \varepsilon O(AB \sim \iota A \sim \iota A'$ — sprowadza się do rozpatrzonych wyżej za pomocą przestawienia A z A' i B z B', które nie zmienia zwrotu $A \to B$]. Stąd wypada:

P 16. — *Tr.* „Punkty koła, które w zwrocie $A \to B$ (względem środka O) poprzedzają punkt X, są to te punkty koła, które nie następują po X

i nie pokrywają się z X ani z X'; tak więc z dwuch dowolnych punktów koła k, nie pokrywających się z sobą i nie przeciwnych średnicowo do siebie, zawsze jeden jest poprzedzający, drugi następujący". — Wskutek tego jeżeli $Y \in \sigma_{O,A,B} X$, wtedy punkt Y' (**P 14**) musi poprzedzać X, gdyż nie należy do półkola $O(XY$ i jest różny od X i X'; podobnie punkt Y musi poprzedzać punkt X'.

P 17. — *Tr.* „Na kole k (**P 12**) przekształcenie: «poprzedzające w zwrocie $A \to B$» — czyli $\sigma^{-1}_{O,A,B}$ (**P 13**) — nie różni się od zwrotu $B \to A$". Por. **P 7**. [Jeżeli $X = A$, wtedy figura $\sigma^{-1}_{O,A,B} X$ jest to toż samo, co figura $O(AB' \sim A \sim A'$ (**P 16**), a więc pokrywa się z $\sigma_{O,B,A} X$ (**P 13**). Jeżeli $X \in O(AB) \sim A \sim B$, jeżeli więc punkt X jest wewnętrzny dla półkola $O(BA$, wtedy figura $\sigma^{-1}_{O,A,B} X$ — czyli $O(XA \sim X \sim X'$ — pokrywa się z figurą $O(XB' \sim X \sim X'$, która właśnie stanowi $\sigma_{O,B,A} X$, gdyż punkty A i B leżą wtedy po stronach przeciwnych prostej OX, a więc A i B' po tej samej stronie tej prostej. Jeżeli zaś $X \in O(BA') \sim B \sim A'$, jeżeli więc punkt X jest wewnętrzny dla półkola $O(BA'$, wtedy figura $\sigma^{-1}_{O,A,B} X$, czyli $O(XA \sim X \sim X'$, nie różni się od $O(XB \sim X \sim X'$, czyli od $\sigma_{O,B,A} X$, gdyż wtedy zarówno B i A', jak A i A' leżą po stronach przeciwnych prostej OX, a więc A i B po tej samej stronie. Niech teraz będzie $X = B$; z równości $\sigma^{-1}_{O,A,B} X = O(BA \sim B \sim B'$ widać od razu, że $\sigma^{-1}_{O,A,B} X = \sigma_{O,B,A} X$. Jeżeli wreszcie $X = A'$, albo też jeżeli punkt X jest wewnętrzny dla półkola $O(A'B'$, wtedy będzie, jak już dowiedliśmy, $\sigma^{-1}_{O,A',B'} X = \sigma_{O,B',A'} X$, a zatym $\sigma^{-1}_{O,A,B} X = \sigma_{O,B,A} X$ (**P 13**)]. — Teraz moglibyśmy się przekonać, że:

P 18. — *Tr.* „W tych samych założeniach, jeżeli ponadto C i D są innemi punktami koła k, które się z sobą nie pokrywają i nie są średnicowo przeciwległe: zwrot $\sigma_{O,C,D}$ pokrywa się z konieczności albo ze zwrotem $\sigma_{O,A,B}$, albo też ze zwrotem $\sigma_{O,B,A}$, zależnie od tego, czy punkt C poprzedza D, czy też po nim następuje w zwrocie $A \to B$ względem środka O". Por. **P 9**. — Określenie *porządku zamkniętego* (punktów koła lub promieni pęku), podane w **P 13**, nie ustępuje pod względem symetrji i elegancji żadnym innym, które są mi znane (por. np. LEVI, «*Sull'egualianza diretta e inversa delle figure*» w Periodico di Matematica, XIX, 1904), a twierdzenia, które z niego wynikają, są nie mniej proste od twierdzeń, opierających się na *porządku otwartym* punktów prostej (**P I — II**). Zresztą ten zwrot koła albo kąta (wobec tego, że się nie pokrywa z uporządkowaniem naturalnym i ze zwrotem pęku prostych) nie posiada wszystkich własności zwrotu prostej; tak np. działanie $\sigma_{O,A,B}$ nie jest przechodnie, a więc nie podlega twierdzeniu, odpowiedniemu do **P 5**.

P 19. — *Df.* „Jeżeli między punktami figury a ciągiem liczb naturalnych może istnieć odpowiedniość doskonała, wtedy mówimy, że ta figura jest «klasą *przeliczalną*» punktów. Jeżeli punkty P_1, P_2, P_3, ... P_n, P_{n+1}, ... tej samej klasy przeliczalnej (z których każdy odpowiada własnemu wskaźnikowi) leżą wszystkie na jednej prostej i są kolejno uporządkowane w jednym z dwuch zwrotów tej prostej (**P 9**) — w ten sposób, że punkt P_{n+1} następuje po P_n dla każdego wskaźnika n: — wtedy klasa uporządkowana $\{P\}$ przybiera nazwę «*ciągu podstawowego*» (*Fundamentalreihe* podług G. CANTORA). I jeżeli na prostej są wyznaczone dwa punkty A i B (różne od siebie), wtedy ciąg $\{P\}$ nazywa się «*wstępującym*» albo «*zstępującym*» względem zwrotu $A \to B$ stosownie do tego, czy punkt P_{n+1} następuje po P_n w zwrocie $A \to B$, czy też w zwrocie $B \to A$, czyli zależnie od tego, czy punkt P_{n+1} następuje po P_n, czy też poprzedza P_n w zwrocie $A \to B$ (**P I, 7, 8**). — Punkt S prostej AB nazywa się «*kresem górnym*» ciągu $\{P\}$ wstępującego w zwrocie $A \to B$, jeżeli S nie poprzedza żadnego punktu ciągu $\{P\}$ w zwrocie $A \to B$, przytym między S i każdym poprzedzającym go punktem — a więc między S i każdym punktem $\sigma_{B,A} S$ — leży zawsze jakiś punkt ciągu $\{P\}$. Podobnie punkt J prostej AB jest «*kresem dolnym*» ciągu $\{Q\} \equiv Q_1$, Q_2, Q_3, ... Q_n, Q_{n+1}, ..., zstępującego względem zwrotu $A \to B$, jeżeli punkt J nie następuje po żadnym punkcie ciągu $\{Q\}$ w zwrocie $A \to B$, przyczym między J i każdym punktem następującym po nim — t. j. między J i każdym punktem $\sigma_{A,B} J$ — leży zawsze jakiś punkt ciągu $\{Q\}$. — Pojęcia «zwrotu», «ciągu», «kresu górnego i dolnego» są niezmiennicze względem każdego podobieństwa, gdyż takiemi są pojęcia kuli, prostej, odcinka, promienia i t. d.". Patrz **P I** i **2 § IV**.

P 20. — *Tr.* „Dwa różne kresy $\left\{\begin{smallmatrix}\text{górne}\\\text{dolne}\end{smallmatrix}\right.$ tego samego ciągu $\left\{\begin{smallmatrix}\text{wstępującego}\\\text{zstępującego}\end{smallmatrix}\right.$ nie mogą istnieć jednocześnie". [Przypuśćmy, że dwa punkty S i S', różne od siebie, są kresami górnemi tego samego ciągu $\{P\}$, wstępującego w zwrocie $A \to B$ (**P 19**). Jeden z nich musi następować po drugim w tym zwrocie (**P 4**); niech np. S' następuje po S. Podług założenia punkt S nie poprzedza żadnego punktu ciągu $\{P\}$, ale między S i S' musiałby leżeć jakiś punkt tego ciągu (**P 19**). Otóż te dwa fakty są z sobą sprzeczne wskutek **P 6, 10**].

P 21. — *Tr.* „Jeżeli A, B są dwoma jakiemikolwiek punktami nie pokrywającemi się z sobą, a i, l jakiemikolwiek liczbami całkowitemi dodatniemi, wtedy punkt δ_i — t. j. i-ty punkt pozaśrodkowy pary punktów A, B ku A (**P 18 § IV**) — poprzedza zawsze punkt δ_{i-1} i następuje po A w zwrocie $A \rightarrow B$; natomiast punkt $\delta_{i,\,l}$ (**tamże**) następuje zawsze po $\delta_{i,\,l-1}$". [Z faktu, że punkty pozaśrodkowe i środkowo symetryczne pary A, B ku A leżą wszystkie na promieniu z A przez B (**P 18 § IV**), zaś punkt δ_i leży między δ_{i-1} i A (**P 11 § III**), a $\delta_{i,\,l-1}$ między $\delta_{i,\,l}$ i A (**P 18, 16 § IV**), znajdujemy, że $\delta_{i-1} \varepsilon |AB \infty |A\delta_i|$ i $\delta_{i,\,l} \varepsilon |AB \infty |A\,\delta_{i,l-1}|$ (**P 12 § III**), czyli: $\delta_{i-1} \varepsilon \sigma_{A,B}\ \delta_i$ i $\delta_{i,\,l} \varepsilon \sigma_{A,B}\ \delta_{i,l-1}$ (**P 1**) i t. d.].

P 22. — *Tr.* „Szereg punktów δ_0, δ_1, δ_2,... δ_i, δ_{i+1},... pozaśrodkowych pary A, B ku A (**P 18 § IV**), uporządkowanych podług wartości rosnących wskaźnika, tworzy na odcinku $|AB|$ względem zwrotu $A \rightarrow B$ ciąg zstępujący, dla którego punkt B jest początkiem, a punkt A kresem dolnym. Patrz **P 19**". [W rzeczy samej, punkty te są uporządkowane w zwrocie $B \rightarrow A$ i wszystkie następują po A w zwrocie $A \rightarrow B$ (**P 7, 21**). Oprócz tego, jeżeli C jest punktem dowolnym promienia $|AB$, wtedy każdy punkt pozaśrodkowy pary A, B ku A upadnie niewątpliwie między A i C (**P 20 § IV**); wystarczy więc powołać się na **P 19**].

P 23. — *Tr.* „Jeżeli A i B są znowu punktami różnemi, wtedy każdy punkt A' promienia $|AB$ jest zawsze kresem dolnym pewnego ciągu punktów $\delta_{i,\,l}$ — a więc środkowo-symetrycznych pary (A, B) — zstępującego względem zwrotu $A \rightarrow B$". [Jeżeli $A' = A$, to wystarczy zastosować **P 22**, powołując się na **P 18 § IV**; możemy więc przyjąć, że punkty A' i A są od siebie różne. Przesunięcie od A do A' nie zmienia zwrotu $A \rightarrow B$ (**P 11**) i zamienia rozpatrywany powyżej (**P 22**) ciąg δ_0, δ_1, δ_2,... na δ_0', δ_1', δ_2',..., który jest również zstępujący, którego kresem dolnym jest A' (**P 19**) i który leży całkowicie na promieniu $|AB$; gdyż te nowe punkty, jako następujące po A', muszą też następować po A (**P 2, 5**). Z pośród wszystkich punktów środkowo-symetrycznych pary A, B ku A, które podług **P 21 § IV** przypadają między dwoma kolejnemi elementami nowego szeregu — np. między δ'_n i δ'_{n+1}, gdzie n oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatnią — weźmy te pod uwagę, dla których suma wskaźników i, l (**P 18 § IV**) przybiera wartość najmniejszą, a z pośród tych ostatnich wybierzmy ten punkt, do którego należy wartość najmniejsza drugiego wskaźnika l; niech to będzie np. punkt $\delta_{i_n,\,l_n}$. Punkt taki jest określony jednoznacznie dla każdego wskaźnika n i można dowieść, że szereg (punktów środkowo-symetrycznych:

$$\delta_{i_1,l_1}, \delta_{i_2,l_2}, \ldots \delta_{i_n,l_n}, \ldots$$

jest także ciągiem zstępującym względem zwrotu $A \rightarrow B$ i że ten sam punkt A' jest jego granicą dolną. Istotnie, ponieważ punkt $\delta_{i_{n+1},\,l_{n+1}}$ leży między punktami δ'_{n+1} i δ'_{n+2}, przeto musi poprzedzać punkt δ'_{n+1} (**P 10**), a więc również i punkt $\delta_{i_n,\,l_n}$, leżący między δ'_n i δ'_{n+1} (**P 5, 7, 10**). Oprócz tego punkt $\delta_{i_n,\,l_n}$ podobnie jak δ'_{n+1} musi następować po A' (**P 5**); i jeżeli C' następuje po A', jeżeli więc jakiś punkt ciągu δ'_0, δ'_1, δ'_2... leży między A' i C' (**P 19**) — np. punkt δ'_m, a wskutek tego także punkty δ'_{m+1}, δ'_{m+2},... — to bez wątpienia punkty $\delta_{i_m,\,l_m}$, $\delta_{i_{m+1},\,l_{m+1}}$,... leżą między A' i C'].

P 24. — *Tr.* „Punkty $\delta_{i,\,l}$ i $\delta_{i+1,\,2l}$ pokrywają się z sobą, jakiekolwiek będą wskaźniki i, l. Patrz **P 18 § IV**". [W rzeczy samej, ponieważ $\delta_{i+1} \equiv A\,|\,\delta_i$ (**tamże**), przeto $\delta_i = A\,/\,\delta_{i+1}$ (**P 45 § I**), czyli $\delta_{i,1} = \delta_{i+1,2}$. Oprócz tego $\delta_{i,0} = \delta_{i+1,0}$ (**tamże**), wystarczy więc dowieść, że z założenia $\delta_{i,\,l} = \delta_{i+1,\,2l}$ i $\delta_{i,\,l-1} = \delta_{i+1,\,2l-2}$ wynika $\delta_{i,\,l+1} = \delta_{i+1,\,2l+2}$. Otóż ponieważ podług założenia $\delta_{i+1,\,2l} = \delta_{i+1,\,2l-2}\,/\,\delta_{i+1,\,2l-1}$; $\delta_{i+1,\,2l+1} = \delta_{i+1,\,2l-1}/\delta_{i+1,\,2l}$ i $\delta_{i+1,\,2l+2} = \delta_{i+1,\,2l}\,/\,\delta_{i+1,\,2l+1}$, przeto $\delta_{i+1,\,2l+2}$ musi się pokryć z $\delta_{i+1,\,2l-2}\,/\,\delta_{i+1,\,2l}$, co wypada z rozumowania następującego: jeżeli pomiędzy punktami U, V, X, Y, Z istnieją zależności $V = U\,|\,X$, $X = V\,|\,Y$ i $Y = X\,|\,Z$, wtedy symetrja względem X zamienia jeden na drugi punkty X/V i X/Y, czyli U i Z, gdyż zamienia między sobą V i Y, pozostawiając punkt X bez zmiany; a więc $X = U\,|\,Z$. Ale stosownie do założenia indukcyjnego $\delta_{i+1,\,2l-2}\,/\,\delta_{i+1,\,2l} = \delta_{i,\,l-1}\,/\,\delta_{i,\,l}$; a więc $\delta_{i+1,\,2l+2} = \delta_{i,\,l-1}\,/\,\delta_{i,\,l} = \delta_{i,\,l+1}$, c. b. d. d.].

P 25. — *Tr.* „Klasa punktów $\delta_{i,\,l}$, wziętych w takim porządku, w jakim wzrasta liczba $l : 2^i$, jest uporządkowana w zwrocie $A \rightarrow B$". [Istotnie, z $l : 2^i < l' : 2^{i'}$ otrzymamy zależnie od tego, czy $i < i'$, $i = i'$ lub $i > i'$ odpowiednio: $l \,.\, 2^{i'-i} < l'$, $l < l'$ lub $l < l' \,.\, 2^{i-i'}$. Ale w pierwszym przypadku punkt $\delta_{i,\,l}$ pokrywa się z punktem $\delta_{i',\,l\,.\,2^{i'-i}}$, a w trzecim punkt $\delta_{i',\,l'}$ z punktem $\delta_{i,\,l'\,.\,2^{i-i'}}$ (**P 24**); a więc punkt $\delta_{i',\,l'}$ należy zawsze do $\sigma_{A,B}\ \delta_{i,\,l}$ (**P 21**)].

P 26. — *Tr.* „Jeżeli dla każdej wartości (całkowitej i nieujemnej) wskaźników i i l podporządkujemy punktowi $\delta_{i,\,l}$ (**P 18 § IV**) ułamek $l : 2^i$, i odwrotnie, każdej liczbie wymiernej (dodatniej lub równej zeru) typu $l : 2^i$ podporządkujemy punkt $\delta_{i,\,l}$; wtedy powstanie odpowiedniość doskonała (jednoznaczna i wzajemna) pomiędzy klasą punktów środkowo-symetrycznych pary punktów A, B ku A i klasą ułamków zwyczajnych, których mianownik jest potęgą dwuch (a więc liczb, dających się przedstawić pod postacią skończoną za pomocą dwuch tylko cyfr

w numeracji dwójkowej)". [Z samego określenia punktów środkowo-symetrycznych (**P 18 § IV**) i z **P 42, 44 § I** widoczne jest, że dwie jakkolwiek dane liczby całkowite (dodatnie albo równe zeru) i i l należą zawsze do jednego z punktów tej klasy jako pierwszy i drugi wskaźnik i że nie mogą nigdy należeć do dwuch punktów różnych. Jeżeli oprócz tego dwie takie pary liczb (i, l) i (i', l') czynią zadość równości $l:2^i = l':2^{i'}$, wtedy dwa punkty $\delta_{i,l}$ i $\delta_{i',l'}$ muszą pokryć się z sobą, gdyż punkty $\delta_{i,l}$, $\delta_{i+1,2l}$, $\delta_{i+2,\,2^2.l}$,... $\delta_{i',\,2^{i'-i}.l}$ (jeżeli $i<i'$), albo też punkty $\delta_{i',l'}$, $\delta_{i'+1,2l'}$, $\delta_{i'+2,\,2^2.l'}$,... $\delta_{i,\,2^{i-i'}.l}$ (jeżeli $i>i'$) zlewają się wszystkie w jeden punkt (**P 24**). Jeżeli natomiast $l:2^i \leqq l':2^{i'}$, wtedy punkty $\delta_{i,l}$ i $\delta_{i',l'}$ są od siebie różne wskutek **P 25** i **P I**. I t. d.].

P 27. — *Df.* „Jeżeli A, B są punktami różnemi od siebie, wtedy przez «*odciętą* jakiegokolwiek punktu X prostej AB względem A jako *punktu początkowego* i B jako *punktu jednostkowego*» — albo poprostu «względem A, B» — rozumiemy: 1) liczbę $l:2^i$, jeżeli X należy do klasy punktów środkowo-symetrycznych punktów A, B ku A (**P 18 § IV**); 2) granicę przy $n=\infty$ ułamków zwyczajnych malejących $l_0./2^{i_0}$, $l_1/2^{i_1}$, $l_2/2^{i_2}$,... $l_n/2^{i_n}$,..., które już były rozpatrywane w **P 23** i zostały podporządkowane każdemu punktowi promienia $|AB$ (**tamże**), jeżeli X należy do półprostej z A przez B, ale nie należy do klasy punktów $\delta_{i,l}$; 3) liczbę $-x'$, jeżeli X nie należy do $|AB$, a x' jest odciętą punktu do niego symetrycznego względem A (patrz **P 36 § III**)". — Liczby $l_0/2^{i_0}$, $l_1/2^{i_1}$, $l_2/2^{i_2}$,... są odciętemi punktów $\delta_{i_0,\,l_0}$, $\delta_{i_1,\,l_1}$, $\delta_{i_2,\,l_2}$,..., które — podług prawa podanego w **P 23** — tworzą ciąg zstępujący względem zwrotu $A \to B$ i mają punkt X jako kres dolny. — Zauważmy, że i punkt $\delta_{i,l}$ (dla jakichkolwiek wskaźników i, l) może być zawsze otrzymany jako kres dolny takiego ciągu (**P 23**) i że w tym przypadku granica ułamków $l_n:2^{i_n}$ przy $n=\infty$ równa się właśnie odciętej tego punktu, czyli ułamkowi $l:2^i$. [W rzeczy samej, gdyby granica $\lim\limits_{n=\infty} \frac{l_n}{2^{i_n}}$, którą oznaczymy przez h, była np. mniejsza od $l:2^i$, wtedy musiałaby istnieć w ciągu malejącym $l_0:2^{i_0}$, $l_1:2^{i_1}$,... $l_n:2^{i_n}$,... jakaś liczba, — np. $l_m:2^{i_m}$ — zawarta między h i $l:2^i$; a więc punkt $\delta_{i_m,\,l_m}$, który należy do omawianego ciągu, poprzedzałby (w zwrocie $A \to B$) jego kres dolny $\delta_{i,l}$ (**P 25**), co się sprzeciwia **P 19**. Gdyby zaś przeciwnie, ułamek $l:2^i$ był mniejszy od h, to jeżeli obierzemy jakiś ułamek zwyczajny $p:2^q$ w taki sposób, że $l/2^i < p/2^q < h$, wtedy punkt $\delta_{p,q}$ musiałby następować po punkcie $\delta_{i,l}$ i poprzedzać punkty $\delta_{i_n,\,l_n}$ dla każdego n (**P 25**); tak więc żaden punkt ciągu $\delta_{i_0,\,l_0}$, $\delta_{i_1,\,l_1}$, $\delta_{i_n,\,l_n}$,... nie leżałby między granicą dolną $\delta_{i,l}$ i punktem $\delta_{p,q}$ (**P 10**), co się sprzeciwia **P 19**]. — Widoczne jest

również, że „jeżeli wskutek podobieństwa punkty A, B, X zamieniają się na A', B', X', wtedy odcięta punktu X względem (AB) będzie równa odciętej punktu X' względem (A', B')". — W ten sposób każdemu punktowi X prostej AB odpowiada pewna liczba rzeczywista (odcięta punktu X) dodatnia, ujemna albo zero, a więc prosta AB zostaje odwzorowana jednoznacznie przez klasę liczb rzeczywistych i skończonych. Wartość odciętej *zero* należy do początku A promienia $|AB$, wartość *jeden* do punktu B, liczby *dwa, trzy, cztery,...* będą odciętemi punktu A/B i punktów pozasymetrycznych A_3, A_4,... do punktu A względem B (**P 16 § IV**); i t. d. — Z zasad dotychczas rozwiniętych, a więc jedynie z założeń I—XXIII — nie wynika, ażeby powyższe odwzorowanie liczbowe było odwracalne czyli wzajemne pomiędzy dwiema klasami: «AB» i «liczba rzeczywista skończona», czyli nie wynika, żeby każda dowolna liczba rzeczywista skończona była zawsze odciętą jakiegoś punktu prostej AB. Fakt ten wyniknie dopiero z zasady XXIV i ostatniej. Ale odwzorowanie, o którym mowa, jest na pewno jednomierne, czyli nie może podporządkować tej samej liczby (wymiernej lub niewymiernej) dwom punktom różnym. Innemi słowy:

P 28. — *Tr.* „W tym samym założeniu odcięte, należące do różnych punktów prostej AB, są zawsze różne od siebie". [Po tym, cośmy widzieli w **P 25, 27** wystarczy dowieść, że jeżeli dwa punkty niepokrywające się J i J' są kresami dolnemi dwuch ciągów zstępujących w zwrocie $A \to B$:

$$\eta)\quad \delta_{i_0,\,l_0},\ \delta_{i_1,\,l_1},\ \delta_{i_2,\,l_2},\ldots.\ \delta_{i_n,\,l_n},\ldots$$

$$\text{i}\quad \eta')\quad \delta_{i'_0,\,l'_0},\ \delta_{i'_1,\,l'_1},\ \delta_{i'_2,\,l'_2},\ldots.\ \delta_{i'_n,\,l'_n},\ldots$$

utworzonych podług **P 23**, to nie może się zdarzyć, ażeby dwa ciągi malejące liczb:

$$e)\quad \frac{l_0}{2^{i_0}},\ \frac{l_1}{2^{i_1}},\ \frac{l_2}{2^{i_2}},\ldots\ \frac{l_n}{2^{i_n}},\ldots$$

$$\text{i}\quad e')\quad \frac{l'_0}{2^{i'_0}},\ \frac{l'_1}{2^{i'_1}},\ \frac{l'_2}{2^{i'_2}},\ldots\ \frac{l'_n}{2^{i'_n}},\ldots$$

miały jako granicę tę samą liczbę λ. Istotnie, jeżeli np. punkt J poprzedza J' w zwrocie $A \to B$ (**P 4**), wtedy między temi dwoma punktami musi leżeć jakiś punkt ciągu η), np. punkt $\delta_{i_m,\,l_m}$ (**P 19**). Punkt taki poprzedza wszystkie punkty η') (**P 5**); a więc ułamek $l_m:2^{i_m}$ jest mniejszy od każdego ułamka e') (**P 25**), jest przeto mniejszy lub równy granicy, do której dążą ułamki e') przy $n=\infty$. Tak więc granica ta, jako większa albo równa $l_m:2^{i_m}$, jest na pewno większa od granicy, do któ-

rej dążą ułamki malejące *e*). I t. d.]. — Tym samym dowiedliśmy jeszcze twierdzenia ogólniejszego, a mianowicie:

P 29. — *Tr.* „Odcięta punktu dowolnego prostej AB (względem początku A i punktu jednostkowego B) jest mniejsza albo większa od odciętej innego punktu prostej AB, zależnie od tego, czy punkt pierwszy poprzedza drugi, czy też następuje po nim w zwrocie $A \rightarrow B$". — W sposób podobny do powyższego dowiedlibyśmy jeszcze, że jeżeli ten sam punkt J jest kresem górnym lub dolnym jakiegoś innego ciągu, wstępującego lub zstępującego, $\delta_{i''_0}, \iota''_0, \delta_{i''_1}, \iota''_1, \delta_{i''_2}, \iota''_2, \ldots \delta_{i''_n}, \iota''_n, \ldots$, różnego zupełnie od η) i nie podlegającego prawu, podanemu w **P 23**, to i wtedy jeszcze ciąg liczbowy rosnący lub malejący $l''_0 : 2^{i''_0}$, $l''_1 : 2^{i''_1}$, $l''_2 : 2^{i''_2}, \ldots$ $l''_n : 2^{i''_n}, \ldots$ odciętych odpowiadających tym punktom będzie miał zawsze dla $n = \infty$ tę samą granicę co i ciąg *e*) (**P 28**).

P 30. — *Df.* „Jeżeli X, Y są punktami dowolnemi, ale różnemi od siebie, a u jakimkolwiek odcinkiem danym, nie skupiającym się w jednym punkcie, wtedy wyrażenie: «*odległość punktu Y od X względem u*» (jako «jednostki miary») — lub w skróceniu «$odl_u\,(X, Y)$» — oznacza odciętą punktu Y względem punktów X i U, gdzie U jest tym punktem promienia $|XY$, dla którego odcinek $|XU|$ jest przystający do u. (**P 41 § IV, P 37 § III**). Jeżeli zaś punkty X i Y pokrywają się, wtedy $odl_u\,(XY)$ oznaczać będzie *zero* dla każdego u". — Jeżeli jakakolwiek izomerja przenosi punkty X i Y odpowiednio na X' i Y', wtedy odległość Y' od X', wzięta względem odcinka u, jest zawsze równa $odl_u\,(X, Y)$, dla każdego u; wskutek tego będzie $odl_u\,(X, Y) = odl_u\,(Y, X)$. Jeżeli więc została ustalona jednostka miary u (a tym samym i klasa odcinków przystających do u), wtedy wyrażenie: «odległość wzajemna punktów X, Y», albo: «*długość* odcinka $|XY|$» otrzymuje ścisłą wartość; w wyrażeniu tym rozpoznajemy odrazu niezmiennik symetryczny tych dwuch punktów względem każdej izomerji. Z **P 28** widać, że odcinki «przystające do siebie» i odcinki «równej długości» jest to jedno i to samo.

P 31. — *Tr.* „Jeżeli, w tym samym założeniu, punkt Z należy do odcinka $|XY|$, wtedy pomiędzy odległościami punktów X, Y, Z istnieje zależność «$odl_u\,(X, Z) + odl_u\,(Z, Y) = odl_u\,(X, Y)$»". [Przypuśćmy naprzód, że punkt Z należy do klasy punktów środkowo-symetrycznych pary X, U w zwrocie ku X — np. $Z = \delta_{i,1}$ (**P 18 § IV**) — i że podobnie jest z punktem Y względm punktów Z i U', w założeniu, że punkt U' leży na $|ZY$, jak U na $|XZ$, w taki sposób, że zarówno odcinek $|ZU'|$ jak i $|XU|$ jest przystający do u; jest więc $Y = \delta'_{i',\nu}$, gdzie δ' oznacza punkt środkowo-

symetryczny pary Z, U' ku Z. Stąd znajdziemy, że $odl_u\,(X, Z) = l : 2^i$ i $odl_u\,(Z, Y) = l' : 2^{i'}$ (**P 30, 27**). Przypuśćmy jeszcze, że $i > i'$, a więc $Y = \delta'_{i,2^{i-i'}\cdot l'}$ (**P 24**). Otóż, ponieważ przesunięcie punktu X do Z (**P 35 § VI**), przenosi $|XZ$ na $|ZY$ (**P 11** i t. d.), a zatym U na U', przeto zamienia punkt i-ty pozaśrodkowy pary X, U w zwrocie X na i-ty punkt pozaśrodkowy pary Z, U' w zwrocie Z, czyli punkt $\delta_{i,1}$ na $\delta'_{i,1}$; a więc przesunięcie punktu X do $\delta_{i,1}$, przenosi Z na $\delta'_{i,1}$, a zatym $\begin{Bmatrix}\delta_{i,1}\\ X\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\delta'_{i,1}\\ Z\end{Bmatrix}$ (**P 36 § VI**). Z drugiej strony $\begin{Bmatrix}Z\\ X\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\delta_{i,1}\\ X\end{Bmatrix}^l$, a $\begin{Bmatrix}Y\\ Z\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\delta'_{i,1}\\ Z\end{Bmatrix}^{2^{i-i'}\cdot l'}$ (**P 18 § IV, P 39 § VI**); przeto $\begin{Bmatrix}Y\\ X\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\delta_{i,1}\\ X\end{Bmatrix}^{l+2^{i-i'}\cdot l'}$, a więc $Y = \delta_{i,\,l+2^{i-i'}\cdot l'}$ (**P 18 § IV**), czyli (**P 30**): $odl_u\,(X, Y) = (l + 2^{i-i'}\cdot l') : 2^i = (l : 2^i) + (l' : 2^{i'}) = odl_u\,(X, Z) + odl_u\,(Z, Y)$, c. b. d. d. — Przypuśćmy teraz, że punkt Y jest dany jako kres dolny ciągu zstępującego $\delta'_{i'_0}, \iota'_0, \delta'_{i'_1}, \iota'_1, \delta'_{i'_2}, \iota'_2, \ldots \delta'_{i'_n}, \iota'_n \ldots$ (**P 23**), tak że $odl_u\,(Z, Y)$ staje się granicą ułamków zwyczajnych $l'_0 : 2^{i'_0}$, $l'_1 : 2^{i'_1}$, $l'_2 : 2^{i'_2}, \ldots$ $l'_n : 2^{i'_n}, \ldots$ dla $n = \infty$ (**P 30, 27**). Jeżeli dla krótkości założymy $Y_n \equiv \delta'_{i'_n}, \iota'_n$, wtedy mieć będziemy na zasadzie tego, co było dowiedzione: $odl_u\,(X, Z) + l'_n : 2^{i'_n} = odl_u\,(X, Y_n)$ dla każdego n, przyczym prawa strona równania wyraża odciętą punktu Y_n względem X jako początku i U jako punktu jednostkowego (**P 30**). Przechodząc do granicy dla $n = \infty$ otrzymamy z jednej strony sumę $odl_u\,(XZ) + odl_u\,(Z, Y)$, z drugiej zaś odciętą punktu granicznego Y względem punktów X i U (**P 27**), czyli liczbę $odl_u\,(X, Y)$. — Uczynimy teraz założenie, że punkt Z jest dany jako kres dolny ciągu zstępującego $\delta_{i_0}, \iota_0, \delta_{i_1}, \iota_1, \delta_{i_2}, \iota_2, \ldots \delta_{i_n}, \iota_n, \ldots$, a X, Y pozostają w tych samych warunkach, co i poprzednio. Można przyjąć, że punkt δ_{i_m}, ι_m i następne leżą wszystkie między X i Y, wskutek czego będzie na pewno dla każdego n większego od m: $odl_u\,(X, Z_n) + odl_u\,(Z_n, Y) = odl_u\,(X, Y)$, jeżeli Z_n oznacza punkt δ_{i_n}, ι_n. A więc, przechodząc do granicy przy $n = \infty$, znajdziemy jak poprzednio: $odl_u\,(X, Z) + odl_u\,(Z, Y) = odl_u\,(X, Y)$, gdyż $odl\,(Z_n\,Y) = odl\,(Y, Z_n)$ dla każdego n, a $odl\,(Y, Z) = odl\,(Z\,Y)$. — Pozostaje przypadek, w którym X jest punktem granicznym; ale to czytelnik sam już uzupełni].

P 32. — *Tr.* „W założeniu **P 16 § IV** odległość pomiędzy punktami A i A_i równa się i razy wziętej odległości A_1 od A dla każdej jednostki miary". [Z **P 31** wypada: $odl\,(A, A_2) = 2\,odl\,(A, A_1)$ i $odl\,(A, A_i) = odl\,(A, A_{i-1}) + odl\,(A, A_1)$, gdyż $A_1 \varepsilon |AA_2|$, $A_{i-1} \varepsilon |AA_i|$ i $odl\,(A, A_1 = odl\,(A_1, A_2) = odl\,(A_{i-1}, A_i)$ (**P 16 § IV, P 30**). A więc twierdzenie jest

prawdziwe dla $i = 1, 2$; a przypuściwszy, że jest prawdziwe dla $i = n - 1$, znajdziemy, że jest także prawdziwe dla $i = n$. I t. d.].

P 33. — *Tr.* „Jeżeli punkty A, B są od siebie różne, a B' jest punktem następującym po B w zwrocie $A \to B$, wtedy odcięta każdego punktu promienia $|AB$ względem A jako początku, a B jako punktu jednostkowego jest zawsze w i ę k s z a, aniżeli odcięta tego samego punktu względem (A, B')". [Wystarczy dowieść twierdzenia w stosunku do punktów środkowo-symetrycznych pary A, B w zwrocie ku A. Otóż, jeżeli oznaczymy przez $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_i \ldots$ następujące po sobie punkty pozaśrodkowe pary A, B' ku A, wtedy punkt δ_1 poprzedzać będzie niewątpliwie punkt δ'_1 w zwrocie $A \to B$ (**P 14 § IV, P 2, 4, 6** i t. d.); z tego samego powodu punkt δ_2 poprzedza punkt $\delta'_2, \ldots$, a punkt δ_i poprzedza punkt δ'_i (indukcja). A więc odcięta punktu δ_i względem A jako początku i B' jako punktu jednostkowego, jest m n i e j s z a od $1 : 2^i$ (**P 29**); ponieważ zaś odcięta punktu $\delta_{i,l}$ jest l razy większa od odciętej punktu $\delta_{i,1}$ (**P 32, 30**), przeto jest m n i e j s z a od $l : 2^i$, czyli od odciętej tego samego punktu względem (A, B). I t. d.].

P 34. — *Tr.* „Zmiana p u n k t u j e d n o s t k o w e g o na prostej przy zachowaniu p u n k t u p o c z ą t k o w e g o bez zmiany (**P 27**) jest równoważna z podzieleniem o d c i ę t e j każdego punktu prostej przez odciętą nowego p u n k t u j e d n o s t k o w e g o". Innemi słowy, jeżeli β jest odciętą punktu B' względem A i B (przyczym punkty A i B nie pokrywają się z sobą, a B' jest punktem prostej AB różnym od A), wtedy pomiędzy odciętemi x i x' tego samego (dowolnie obranego) punktu X prostej AB, z których jedna jest wzięta względem A i B, druga względem A i B' (**P 27**), istnieje zależność $x' = x : \beta$. [Odróżniać będziemy za pomocą akcentu punkty środkowo-symetryczne pary A, B' ku A od punktów środkowo-symetrycznych pary A, B ku A. — Dzięki temu, co było wyżej powiedziane, wystarczy dowieść prawdziwości twierdzenia w założeniu, że punkt X jest jednym z punktów środkowo-symetrycznych pary A, B ku A, np. że $X = \delta_{i,l}$ (**P 18, § IV**). 1) Przypuśćmy naprzód, że B' jest punktem środkowo-symetrycznym pary A, B ku A, np. punktem $\delta_{h,1}$, którego odcięta względem (A, B) $\beta = 1 : 2^h$ (**P 27**). Niech będzie $i \leq h$, a więc $\delta_{i,l} = \delta_{h,\, 2^{h-i} \cdot l}$ (**P 24**); wtedy przez podstawienie B' zamiast B, zamieniające $\delta_{h,1}$ na $\delta'_{0,\,1}$, punkt $\delta_{h,\, 2^{h-i} \cdot l}$ zamieni się z konieczności na $\delta'_{0,\, 2^{h-i} \cdot l}$; a więc $x' = 2^{h-i} \cdot l = (l : 2^i) : (1 : 2^h) = x : \beta$. Jeżeli zaś $i > h$, wtedy każdy widzi, że punkt pozaśrodkowy δ_i pokrywa się z punktem pozaśrodkowym δ'_{i-h}, a więc punkt $\delta_{i,l}$ z punktem $\delta'_{i-h,l}$; tak więc $x' = l : 2^{i-h} = x : \beta$, jak i poprzednio. — 2) Załóżmy teraz, że B' jest $(k-1)$-szym punktem

p o z a s y m e t r y c z n y m do A względem B (**P 16, 17 § IV**), a więc punktem $\delta_{0,k}$, mającym względem (A, B) odciętą $\beta = k$. Z **P 32** wypada, że (dla jakiejkolwiek jednostki miary) odl $(A, \delta_{0,k}) = k$ odl $(A, \delta_{0,1})$ i że podobnie (przy uwzględnieniu **P 17, 18 § IV**) odl $(A, \delta_{0,1}) = 2^i$. odl $(A, \delta_{i,1})$. Stąd otrzymamy, przyjmując $|AB'|$ za jednostkę miary (**P 30**), $1 = k \cdot 2^i$. odl $_{|AB'|}(A, \delta_{i,1})$. Przeto odcięta punktu $\delta_{i,1}$ względem punktów A i B' staje się równą $1 : (k \cdot 2^i)$ (**tamże**), a odcięta punktu $\delta_{i,l}$ będzie $l : (k \cdot 2^i)$ (**P 32**). A więc $x' = (l : 2^i) : k = x : \beta$. — 3) Z uwagi na to co było powiedziane wyżej, jeżeli B' pokrywa się z którymkolwiek punktem środkowo-symetrycznym pary A, B ku A — np. z punktem $\delta_{h,k}$, mającym za odciętą $\beta = k : 2^h$ — wtedy wystarczy przekształcić punkt B naprzód na $\delta_{h,1}$, a później na $\delta_{h,k}$. Na zasadzie 1) i 2) wskutek pierwszej zamiany odcięta x punktu X zostanie pomnożona przez 2^h, zaś wskutek drugiej tak zmieniona odcięta zostanie podzielona przez k; a więc $x' = x : (k : 2^h) = x : \beta$. — 4) Pozostaje jeszcze przypadek, w którym punkt B' jest kresem dolnym ciągu zstępującego $\delta_{h_0,k_0}, \delta_{h_1,k_1}, \delta_{h_2,k_2}, \ldots \delta_{h_n,k_n}, \ldots$, stosownie do **P 23.** Niech będzie $B'_n \equiv \delta_{h_n,k_n}$ i $\beta_n = k_n : 2^{h_n}$ (dla każdego n); a więc $\beta = \lim\limits_{n=\infty} (k_n : 2^{h_n}) = \lim\limits_{n=\infty} \beta_n$ (**P 27**), gdzie β oznacza, jak poprzednio, odciętą punktu B' względem (A, B). Oznaczmy jeszcze przez x'_n odciętą punktu X względem (A, B'_n). Wskutek tego, co było dowiedzione w 3), dostaniemy: $x'_0 = x : \beta_0$, $x'_1 = x : \beta_1, \ldots$ $x'_n = x : \beta_n, \ldots$, a granicą tych ułamków (r o s n ą c y c h wraz z n) dla $n = \infty$ będzie $x : \beta$. Gdyby teraz odcięta x' punktu X względem (A, B') była m n i e j s z a od tej granicy, wtedy w przedziale pomiędzy liczbami x' i $x : \beta$ leżałby na pewno jakiś ułamek x'_m, odpowiadający punktowi B'_m powyższego ciągu; to być nie może, gdyż punkt B' poprzedza każdy punkt tego ciągu w zwrocie $A \to B$ (**P 19**), a zatym odcięta x' jest w i ę k s z a od x'_n dla każdego n (**P 33, 8**). Gdyby zaś liczba x' była w i ę k s z a od tej granicy, to niech będzie B'' jednym z takich punktów środkowo-symetrycznych pary A, X ku A, którego odcięta względem A jako punktu początkowego, a X jako punktu jednostkowego, jest zawarta między liczbami $1 : x'$ i $\beta : x$ (co jest zawsze możliwe); ułamek odwrotny do tej odciętej — czyli, jak to już zostało ustalone w 3), odcięta x'' punktu X względem (A, B'') — byłaby m n i e j s z a od x', ale w i ę k s z a od $x : \beta$, a więc punkt B'' następowałby po B' w zwrocie $A \to B$ (**P 33, 8, 4** i t. d.). W ten sposób pomiędzy punktami B' i B'' musiałby leżeć jakiś punkt ciągu $B'_0, B'_1, B'_2, \ldots B'_n, \ldots$, np. punkt B'_m, skąd $x'' < x'_m$ (**P 33, 8** i t. d.). Ale $x'_m < x : \beta$, skąd $x'' < x : \beta$, co jest sprzeczne z założeniem. A więc $x' = x : \beta$. 5) Jeżeli wreszcie punkt B' nie należy do $|AB$, to przyjmując $B'_1 = B'/A$ znajdziemy, że odcięta punktu X względem (A, B'_1) jest równa $x : -\beta$, gdzie β oznacza znowu

odciętą punktu B', a więc $-\beta$ odciętą punktu B'_1 względem (A, B). Ale ta sama liczba $x:-\beta$ wyraża także odciętą punktu X/A względem (A, B') (**P 27**); przeto liczba przeciwna, czyli ułamek $x:\beta$, będzie odciętą punktu X względem (A, B') (**tamże**)].

P 35. — *Tr.* „Jeżeli A, B, C są trzema punktami niewspółlinjowemi, a prosta łącząca dwa punkty D i E, położone odpowiednio na bokach $|AB|$, $|AC|$ trójkąta (i różne od siebie) jest równoległa do boku trzeciego, wtedy ma miejsce proporcja: odl (A, B) : odl (A, D) = odl (A, C) : odl (A, E) = odl (BC) : odl (D, E) względem każdej jednostki miary". EUKL., ks. 6-a, pod. II. [Jeżeli promienie $|AB$, $|AC$ zostaną sobie podporządkowane punkt po punkcie w ten sposób, że dwa punkty odpowiednie leżą zawsze na prostej równoległej do BC (albo pokrywającej się z BC) i jeżeli U, V są dwoma punktami odpowiedniemi, jakkolwiek wybranemi (ale różnemi od A); wtedy odcięte punktów B i D względem (A, U) będą równe odciętym punktów C i E (odpowiadających punktom B i D) względem (A, V), gdyż z **P 24 § VI** przez zastosowanie indukcji znajdziemy, że i-ty punkt pozaśrodkowy punktów A, U ku A odpowiada i-temu punktowi pozaśrodkowemu punktów A, V ku A i że również dwa punkty środkowosymetryczne obu klas odpowiadają sobie wzajemnie, jeżeli wskaźniki jednego nie różnią się od wskaźników drugiego (**P 27**). Otóż jeżeli V' jest punktem promienia $|AC$, oddalonym od A jak U i jeżeli przyjmiemy za punkt jednostkowy V' zamiast V, wtedy nowe odcięte punktów C i E będą równe dawnym, podzielonym przez odciętą punktu V' względem (A, V) (**P 34**); wskutek tego, oznaczając przez u i v odcinki $|AU|$, $|AV|$, będziemy mieli (**P 30**): $\mathrm{odl}_u(A, B) : \mathrm{odl}_u(A, D) = \mathrm{odl}_v(A, C) : \mathrm{odl}_v(A, E) = \mathrm{odl}_u(A, C) : \mathrm{odl}_u(A, E)$. Wykonajmy teraz przesunięcie od D do B; punkt E przekształca się wskutek tego przesunięcia na pewien punkt F prostej BC, zaś A na pewien punkt G prostej AB; a więc prosta FG jest równoległa do EA, a pary (A, D), (D, E) są przystające do par (G, B) (B, F) (**P 35, 36, 38 § VI**). Ponieważ punkt F ma względem (B, C) tę samą odciętą, co punkt E względem (A, C), przeto ten punkt F jest wewnętrzny dla odcinka $|BC|$ (**P 10, 29**); podobnie punkt G jest wewnętrzny dla $|BA|$. A więc, na zasadzie tego, czegośmy tylko co dowiedli, będzie: odl (B, A) : odl (B, G) = odl (B, C) : odl (B, F). Ale odl (B, G) = odl (A, D), a odl (B, F) = odl (D, E) (**P 30**); wskutek tego $\mathrm{odl}_u(A, B) : \mathrm{odl}_u(A, D) = \mathrm{odl}_u(B, C) : \mathrm{odl}_u(D, E)$; i t. d.].

P 36. — *Tr.* „Odwrotnie, jeżeli odetniemy na promieniach $|AB$, $|AC$ odcinki $|AH|$, $|AK|$, których długości (różne od zera) są proporcjonalne do odl (A, B) i odl (A, C), wtedy prosta HK będzie równoległa do prostej BC". EUKL., ks. 6-a, pod. II. [Gdyby prosta HK nie była równoległa do BC, wtedy istniałby na promieniu $|AC$ taki punkt K', że prosta HK' byłaby równoległa do BC (**P 6 § VI** i t. d.), a więc taki, że $\mathrm{odl}_u(A, B) : \mathrm{odl}_u(A, H) = \mathrm{odl}_u(A, C) : \mathrm{odl}_u(AK')$ (**P 35** i t. d.). Ale podług założenia $\mathrm{odl}_u(A, B) : \mathrm{odl}_u(A, H) = \mathrm{odl}_u(A, C) : \mathrm{odl}_u(A, K)$ (**P 30**); a więc $\mathrm{odl}_u(AK') = \mathrm{odl}_u(A, K)$. Wobec tego dwa punkty różne od siebie K i K' miałyby równe odcięte względem A jako punktu początkowego i V' jako punktu jednostkowego (**P 30**), co być nie może (**P 28**)].

P 37. — *Tr.* „W każdym podobieństwie stosunek długości dwuch odcinków odpowiednich jest stały. Patrz **P 30**". [Ze względu na **P 33 § VI** wystarczy dowieść, że twierdzenie jest prawdziwe w przypadku jednokładności $\left\{O\,{}^{A'}_{A}\right\}$ (**P 28 § VI**), gdzie O, A, A' są punktami współlinjowemi i różnemi od siebie, a punkt A' należy do promienia $|OA$. Ale w tym przypadku wynika z **P 35**, że długości dwuch jakichkolwiek odcinków odpowiednich są do siebie w stosunku odl (O, A) : odl (O, A')].

P 38. — *Tr.* „Jeżeli kąty $\hat{A}.BC$, $\hat{B}.CA$ trójkata $|ABC|$ są przystające odpowiednio do kątów $\hat{D}.EF$, $\hat{E}.FD$ innego trójkąta $|DEF|$, wtedy długości boków $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$ pierwszego są proporcjonalne do długości boków $|DE|$, $|EF|$, $|FD|$ drugiego". EUKL., ks. 6-a, pod. IV. [Stosownie do założenia istnieje taka izomerja, która pokrywa kąt $\hat{D}.EF$ z kątem $\hat{A}.BC$, przenosząc punkt D na A, a punkty E, F odpowiednio na dwa punkty E', F' promieni $|AB$, $|AC$. A ponieważ wskutek **P 19 § V, P 4 § VI** i t. d. prosta $E'F'$ jest równoległa do BC (o ile się z nią nie pokrywa), przeto powracamy do **P 35**. — Dla dowiedzenia twierdzenia odwrotnego można rozumować jak EUKLIDES w miejscu wskazanym]. — Zresztą każde z twierdzeń **P 37** i **P 38** jest następstwem drugiego dzięki **P 31, 34 § VI**).

Z tych ostatnich faktów łatwoby było wysnuć — za pomocą **§§ I—VI** — niemal wszystkie twierdzenia księgi VI (jak również ksiąg I—IV, jak np. twierdzenie PITAGORASA i t. p.) i te, które od nich pochodzą, o ile te twierdzenia rozumieć będziemy jako *zależności liczbowe* pomiędzy odległościami wzajemnemi trzech lub więcej punktów danych. Nie może ulegać żadnej wątpliwości możliwość rozwinięcia całej Gieometrji Elementarnej z samych tylko zasad I—XXIII, gdyż co się tyczy *równoważności* figur, *miary* pól i objętości i t. d., to możemy teraz postępować w zupełności lub częściowo drogami, które wska-

zali: F. SCHUR [1]), RAUSENBERGER [2]), L. GÉRARD [3]), G. VERONESE [4]), D. HILBERT [5]), mając możność powoływania się na miarę *odległości* (**P 30, 31** i t. d.). Stąd okazuje się i tutaj, że Gieometrja Elementarna — jako gieometrja «cyrkla», albo gieometrja punktów, odzwierciedlających się w polu liczbowym euklidesowskim [6]) — jest niezależna od *ciągłości* linji prostej, w znaczeniu G. CANTORA [7]) i w rozleglejszym R. DEDEKINDA [8]) i H. WEBERA [9]). — Ale konieczność jakiejś nowej zasady zawsze występuje, ile razy probujemy odwrócić odwzorowanie «prostej» za pomocą «liczby rzeczywistej», określone w **P 27**, czyli wtedy jeżeli chcemy, ażeby istniały punkty, których odległość od punktu danego, względem danej jednostki miary, byłaby równa liczbie dowolnie przepisanej. Po tym, co było powiedziane wyżej, najnaturalniejszym sposobem otrzymania takiego odwzorowania odwrotnego — albo, jak się zwykle mówi, *rozmieszczenia* liczb zmiennych rzeczywistych (z wyjątkiem wartości «nieskończoność») wzdłuż prostej dowolnej i otrzymania przez to odpowiedniości doskonałej pomiędzy punktami prostej i klasą liczb rzeczywistych i skończonych — będzie przyjęcie następującego postulatu:

POSTULAT XXIV.

P 39. — *Jeżeli A i B są punktami niepokrywającemi się, wtedy każdy ciąg $\delta_{i_0}, \iota_0, \delta_{i_1}, \iota_1, \delta_{i_2}, \iota_2, \ldots \delta_{i_n}, \iota_n, \ldots$ zstępujący względem zwrotu $A \rightarrow B$, dający się utworzyć w klasie punktów środkowo-symetrycznych pary punktów A, B ku A, ma kres dolny.* Patrz **P 18 § IV, P 19.**

P 40. — *Tr.* „Jeżeli jest dany na prostej jakikolwiek ciąg wstępujący albo zstępujący względem zwrotu $A \rightarrow B$, wtedy istnieje dla niego

[1]) Sitzungsberichte der Dorpater Naturforschergesellschaft, Jahrg. 1892.
[2]) Math. Annal., XLIII, 1893.
[3]) Bull. de la Soc. Math. de France, XXIII, 1895.
[4]) Atti del R. Ist. Veneto, VI — VII, 1894 — 95.
[5]) Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss - Weber - Denkmals, Göttingen 1899 (wyd. czwarte, uzupełnione: *Grundlagen der Geometrie*, tom VII zbioru „Wissenschaft u. Hypothese", Lipsk, Teubner, 1913). Por. G. B. HALSTED, *Rational Geometry*, New-York 1904 (Chap. X, XII).
[6]) G. CASTELNUOVO. *Sulla risoluzione dei problemi geometrici*, Questioni di Geometria Elementare raccolte da F. ENRIQUES, Bologna, 1900, (przekład polski w przygotowaniu).
[7]) *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Math. Annal. XLVI, 1895.
[8]) *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872.
[9]) *Algebra*, 1898 (tom I, rozdz. 4—12).

zawsze kres górny lub dolny, o ile tylko wszystkie jego punkty poprzedzają jeden i ten sam punkt prostej AB, albo wszystkie następują po takim punkcie". [Możemy przyjąć, że ciąg $\{E_n\} \equiv E_0, E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$, o którym mowa, jest zstępujący; gdyż jeżeli F jest tym punktem, który, stosownie do założenia, następuje po wszystkich punktach tego ciągu, albo je poprzedza i jeżeli (dla każdego wskaźnika i) $E'_i \equiv E_i/F$, wtedy szereg $\{E'_n\} \equiv E'_0, E'_1, E'_2, \ldots E'_n, \ldots$ będzie ciągiem w zwrocie przeciwnym poprzedniemu (**P II, 19**); i jeżeli jeden z tych ciągów ma punkt graniczny, wtedy punkt do niego symetryczny względem F będzie punktem granicznym drugiego. Można jeszcze przyjąć, że ciąg $\{E_n\}$ leży cały na promieniu $|AB$, bo gdyby tak nie było, to wystarczyłoby podstawić zamiast $\{E_n\}$ ciąg również zstępujący $\{E''_n\}$, który powstanie z $\{E_n\}$ za pomocą przesunięcia od F do A (**P II, 19**). — Otóż można różnemi sposobami znaleźć w klasie punktów środkowo-symetrycznych pary A, B ku A ciąg $\{\delta_{i_n}, \iota_n\}$, przenikający $\{E_n\}$, to jest taki, że pomiędzy dwoma sąsiedniemi punktami jednego z tych ciągów leży zawsze jakiś punkt drugiego; w ten sposób kres dolny jednego lub drugiego (o ile istnieje) będzie z konieczności kresem dla obu. Ale wtedy wystarczy zastosować regułę, podaną w **P 23**, a następnie powołać się na postulat XXIV (**P 39**) i zastosować go do ciągu normalnego $\{\delta_{i_n}, \iota_n\}$.]. — Czytelnik może się z łatwością przekonać, że jeżeli η_n oznacza odciętą punktu E_n względem (A, B) — wtedy dwa szeregi liczbowe $\eta_0, \eta_1, \eta_n, \ldots$ i $l:2^{i_0}, l_1:2^{i_1}, \ldots l_n:2^{i_n}, \ldots$ muszą mieć tę samą granicę skończoną dla $n=\infty$ i że wskutek tego odcięte punktów ciągu dowolnego, jak wyżej, dążą zawsze do odciętej punktu granicznego. I t. d.

P 41. — *Tr.* „Każda liczba rzeczywista i skończona jest odciętą punktu oznaczonego i jedynego (prostej AB) względem A jako początku i B jako punktu jednostkowego". [W rzeczy samej, każda liczba rzeczywista dodatnia e, dowolnie obrana, może być zawsze otrzymana jako granica dla $n=\infty$ szeregu ułamków wymiernych $e_1:\varepsilon_1, e_2:\varepsilon_2, e_3:\varepsilon_3, \ldots e_n:\varepsilon_n, e_{n+1}:\varepsilon_{n+1}, \ldots$, gdzie e_n, ε_n są liczbami całkowitemi dodatniemi, a ułamek $e_n:\varepsilon_n$ jest mniejszy od $e_{n+1}:\varepsilon_{n+1}$ dla każdego n. Otóż można różnemi sposobami utworzyć ciąg liczb, któryby miał postać: $l_1:2^{i_1}, l_2:2^{i_2}, \ldots l_n:2^{i_n}, l_{n+1}:2^{i_{n+1}}, \ldots$, gdzie i_n, l_n są liczbami całkowitemi dodatniemi, a ułamek $l_n:2^{i_n}$ jest mniejszy od $l_{n+1}:2^{i_{n+1}}$ dla każdego n, i któryby zarazem miał przy $n=\infty$ tę samą granicę e, co i pierwszy; wystarczy, jak poprzednio, ażeby wyraz n-ty $l_n:2^{i_n}$ nowego ciągu był tym z pośród ułamków zwyczajnych nieprzywiedlnych postaci $l:2^i$ i mających wartości zawarte między $e_n:\varepsilon_n$ i $e_{n+1}:\varepsilon_{n+1}$, dla którego suma $i+l$ jest

minimum i licznik l jest minimum. Z drugiej strony wiemy, że liczby $l_1 : 2^{i_1}$, $l_2 : 2^{i_2}, \ldots l_n : 2^{i_n}, \ldots$ są właśnie odciętemi punktów $\delta_{i_1}, \iota_1, \delta_{i_2}, \iota_2, \ldots \delta_{i_n}, \iota_n, \ldots$ (**P 27**), które przeto są rozłożone na promieniu $|AB$ podług ciągu wstępującego względem zwrotu $A \rightarrow B$ (**P 25**) i dążą do punktu granicznego (**P 30**), którego odciętą będzie dana liczba e (**P 27**). Że ta odcięta nie należy do żadnego innego punktu prostej AB, to już było powiedziane w **P 28**]. — Jeżeli jest dany jakikolwiek postęp liczbowy rosnący albo malejący $c_1 : \gamma_1$, $c_2 : \gamma_2, \ldots c_n : \gamma_n, \ldots$ — gdzie c i γ są liczbami całkowitemi dodatniemi — wtedy ciąg liczbowy postaci $\{l_n : 2^{i_n}\}$, który dla $n = \infty$ ma zawsze tę samą granicę, co i poprzedni, byłby np. $l_1 : 2^1$, $l_2 : 2^2$, $l_3 : 2^3, \ldots l_n : 2^n$, $l_{n+1} : 2^{n+1}, \ldots$, gdzie l_n jest liczbą całkowitą (dodatnią lub zerem), określoną jednoznacznie przez warunki $l_n : 2^n \leq c_n : \gamma^n < (l_n + 1) : 2^n$, czyli jest największą liczbą całkowitą zawartą w liczbie wymiernej $(c_n : \gamma_n) 2^n$. Ale szereg punktów $\delta_1, \iota_1, \delta_2, \iota_2, \ldots \delta_n, \iota_n, \ldots$, do którego się dochodzi za pomocą tego prostszego prawa, nie zawsze jest ciągiem w znaczeniu **P 19.**

DODATEK.

UWAGA 1-a. *Zdefinjować (określić)*, w szerszym znaczeniu, znaczy opisać i wyznaczyć pojęcie za pomocą zdań albo sądów (określenie «*realne*» albo «*uwikłane*»); ale *określenie* w ściślejszym znaczeniu — określenie «*nominalne*» albo «*wyraźne*» — nie jest dla nas niczym innym, jak tylko „*nadaniem nazwy* jakiejkolwiek grupie słów albo znaków“, albo, jeżeli kto woli, *skrótem językowym* (w mowie lub piśmie), który może odzwierciedlić lub wytworzyć pewne *skupienie pojęć*. Jeżeli jest dane jakiekolwiek wyrażenie lub powiedzenie $F(a, b, \ldots; p, q, \ldots)$, złożone z wyrazów lub znaków po części logicznych [1]), np. $a, b, \ldots$, po części *gieometrycznych*, jak $p, q, \ldots$, wtedy wypadnie nam często przyjąć jeden tylko wyraz lub znak g, albo wyrażenie prostsze i dogodniejsze G, ażeby oznaczyć i przedstawić w wykładzie tę grupę znaków i to, co ona oznacza lub przedstawia; nic nie staje temu na przeszkodzie, jeżeli tylko g i G są wyrazami lub wyrażeniami, dotychczas pozbawionemi treści gieometrycznej. Taką umowę zawieramy i ustalamy, pisząc np.:

$$g \equiv F(a, b, \ldots; p, q, \ldots), \text{ albo } G \equiv F(a, b, \ldots; p, q, \ldots);$$

gdzie znak «$\equiv$» należy czytać «*oznacza*» albo «*równa się na mocy określenia*». Ta umówiona tożsamość jest tym, co się nazywa określeniem

[1]) Terminy logiczne są to te terminy, które można nazwać wspólnemi dla wszystkich niemal nauk, które tworzą więc jak gdyby szkielet każdego rozumowania, wyrażając pojęcia najpotrzebniejsze i występujące w działalności umysłowej wszelkiego rodzaju. Takiemi są np. wyrażenia: «*istnieje*», «*jest*», «*nie jest*», «*jest następstwem*», «*odpowiada*» i t. d. Ich znaczenie powinno być znane każdemu rozumującemu i wszyscy powinni zgadzać się co do znaczenia, jakie należy nadać tym wyrazom. Wykład straciłby całą siłę, albo stałby się wprost niemożliwym, gdyby została uszczuplona lub odjęta możność swobodnego posługiwania się temi pojęciami *(stałemi logicznemi)*, których badanie należy do Logiki.

wyraźnym albo nominalnym terminu g lub wyrażenia G. Wyrażenie $F(a, b, \ldots; p, q, \ldots)$ jest *określające*, g albo G *określone*. Cechą zasadniczą określenia jest możność dowolnego podstawienia wyrażenia określonego zamiast określającego i odwrotnie; dlatego też (ze stanowiska formalnego) nie jest bynajmniej rzeczą konieczną, ażeby znaczenia terminów gieometrycznych $p, q, \ldots$ były dokładnie znane; ale wystarczy, ażeby symbol g lub G, wybrany na oznaczenie $F(a, b, \ldots; p, q, \ldots)$ był wolny od znaczenia gieometrycznego, czyli, żeby nie wyrażał gieometrycznie nic poza określeniem, o którym mowa [1]).

Określenie bywa nieraz uzależnione od *hipotezy*, mianowicie poprzedzamy je ustępem, w którym ustalamy warunki lub ograniczenia, dotyczące pojęć, oznaczonych symbolami $a, b, \ldots; p, q \ldots$ W takich przypadkach hipoteza staje się częścią składową określenia i nie powinna być od niego oddzielana. Rzecz należy tak rozumieć: ustaliliśmy i zgodziliśmy sią na to, że F będziemy mieli prawo przedstawiać za pomocą g lub G tylko w tych przypadkach, które są przewidziane w hipotezie.

Być może, że rola określenia, tak jak my ją pojmujemy, wyda się czytelnikowi zbyt skromną. A jednak jest ona doniosła, jeżeli się zważy, że umysł nasz nie byłby w stanie objąć, rozróżnić, zestawić, powiązać, jednym słowem opanować w wykładzie pojęć bardziej złożonych i oderwanych, gdyby nie mógł ich utrwalać i wywoływać *dowolnie* za pomocą prostych słów lub zwięzłych zdań, lecz musiał je za każdym razem opisywać w sposób rozwlekły. Ileż to faktów gieometrycznych, ile związków i twierdzeń bierzemy implicite pod uwagę i, że tak powiem, kondensujemy w jednym pojęciu „figur przystających"!

UWAGA 2-a. W celu zrozumienia faktów gieometrycznych jest rzeczą bardzo pożyteczną mieć zawsze przed sobą *obraz* albo przedstawienie intuicyjne «punktu» i «kuli przez punkt dokoła innego punktu», czyli rozpatrywać znaczenie realne i konkretne, które zazwyczaj nadajemy takim sądom, jak: „A, B, C są punktami i punkt C tak jest oddalony od A, jak punkt B". Jeżeli jest prawdą, że „nihil ist in intellectu, quod non fuerit in sensu" (ARYSTOTELES) i że „cała wiedza ludzka opiera się na intuicji" (KANT), to nie będzie rzeczą zbyteczną odwoływanie się nawet do środków bardzo grubych i empirycznych, ażeby w młodzieży obudzić i ożywić wszelkiego rodzaju wiadomości intuicyjne i doświadczalne o różnych przedmiotach gieometrycznych. Można otrzymać obraz punktu,

[1]) Tak np. dziecko, które nie rozumie jeszcze całej wartości wyrazów «mąż» i «żona», może jednak nauczyć się stosować z pożytkiem określenie: «Szwagier» ≡ «Brat męża albo żony, albo mąż siostry».

rozpatrując np. ziarnko pyłu, otwór zrobiony końcem szpilki w kartce papieru i t. d.; kulę można pojmować jako powierzchnię ciała okrągłego, jak np. piłki, pomarańczy, globusa. Jeżeli drążek sztywny jest umocowany na jednym końcu — np. w A — ale może się obracać dokoła A jak na zawiasie, wtedy położenia drugiego końca B dadzą obrazy różnych punktów, które tak są oddalone od A, jak punkt B. Podobnie nić, napięta między dwoma punkami A i B, z których jeden jest nieruchomy, może służyć do tego, ażeby dać pojęcie zarówno o kuli B_A, jak o odcinku $|AB|$; i t. d. Większość naszych pewników dałaby się dość dobrze sprawdzić doświadczalnie, co można np. uskutecznić za pomocą mechanizmów kolankowych najprostszej budowy, albo za pomocą nitek odpowiednio przymocowanych jednym końcem do listwy sztywnej ramy; i t. d.

Ale Gieometrja, jako nauka formalna, mogłaby też istnieć i być zrozumiałą nawet zupełnie bez odwoływania się do treści intuicyjnej lub fizycznej jej pojęć pierwotnych («punktu» i «kuli»), gdyż umysł wykształcony na pojęciach ogólnych i poparty przez odpowiednie uzdolnienie do abstrahowania staje się zdolnym do postrzegania, oprócz oderwanego znaczenia logicznego, także związku między różnemi twierdzeniami i ich położenia w łańcuchu dedukcyjnym, powiązania poszczególnych części i ich stosunków do całości i t. d., o ile tylko ma w pamięci własności zasadnicze, które różne pewniki albo postulaty Gieometrji nadają tym pojęciom pierwotnym, i o ile odwołuje się ciągle do określeń różnych przedmiotów, o których mowa. Potrzebna jest tylko sprawność w ścisłym rozumowaniu, czyli pewna znajomość związków logicznych pomiędzy przesłanką i wnioskiem, albo, krótko mówiąc, sztuka czy zdolność prawidłowego uzasadniania i wyciągania wniosków; zresztą Gieometrja dopomaga do rozwijania i wzmacniania tej zdolności.

UWAGA 3-a. Jeżeli pojęciom pierwotnym nadajemy treść fizyczną, wtedy «*aksjomaty*», «*pewniki*» czyli «*twierdzenia pierwotne*» są powiedzeniami niedowiedzionemi, sądami więcej lub mniej oczywistemi, których się nie dowodzi, ale za pomocą których można dowieść wszystkich pozostałych sądów drogą rozumowań, nie dających się obalić. Należy je przyjąć bez dyskusji, zadowalając się pewnością intuicyjną lub doświadczalną, ze względu na to, że nie można dowieść wszystkiego. Ze stanowiska formalnego powiedzenia takie (które się wtedy nazywają «*postulatami*») występują jako «warunki lub przesłanki, od których zależy wartość czy ustrój całego układu" — to jest wszystkich wniosków, do których dochodzimy. W każdym razie grupują się zawsze dokoła pojęć pierwotnych (chociażby tylko pośrednio, a więc poprzez szereg określeń), a ich prawdziwość, o ile jest znana lub założona, stanowi dostateczną gwarancję prawdziwości twier-

dzeń pozostałych — to jest wszystkich «twierdzeń pochodnych» (teorematów). Ale (jak już mówiliśmy) można też abstrahować od prawdziwości lub błędności tych przesłanek, zachowując je jako warunki (ani prawdziwe ani fałszywe), które razem wzięte tworzą «określenie uwikłane pojęć pierwotnych", co nie zmniejsza trwałości i harmonji całego układu jako konstrukcji logicznej (patrz uwagę 1-ą). Na początku niech nauczyciel tak mówi do uczniów: Zgódźcie się na prawdziwość tych twierdzeń pierwotnych, a ja was stopniowo doprowadzę, drogą szeregu następujących dedukcji, do tego, że rozpoznacie prawdziwość wszystkich innych twierdzeń gieometrycznych. Aksjomaty (pewniki) są jakgdyby nasieniem wszystkich prawd gieometrycznych; ale ich zarodki nie rozwiną się, o ile nie będą zapłodnione przez rozumowanie. W ten sposób tworzy się np. Gieometrja i Arytmetyka, na tym polega w ogólności proces *dedukcyjny*, za pomocą którego formuje się cała Matematyka czysta".

Powiedzenie, że jakieś twierdzenie P «*jest następstwem*» innych twierdzeń $A, B, \ldots$, — albo że „z twierdzeń $A, B \ldots$ *wysnuwamy* twierdzenie P" — oznacza właśnie, że istota obdarzona rozumem, która przyjmuje twierdzenia $A, B, \ldots$ za prawdziwe, nie może zapoznawać prawdziwości twierdzenia P, albo, krótko mówiąc, że nie możemy potwierdzać $A, B, \ldots$ i jednocześnie zaprzeczyć P. — Zwróćmy uwagę na to, że $A, B, \ldots$ mogą być następstwem innych twierdzeń $A', B', \ldots$, a te znowu następstwem jeszcze innych $A'', B'', \ldots$, (wskutek czego i twierdzenie P daje się wysnuć z $A'', B'', \ldots$) i tak dalej, ale rozumie się, że nie mamy możności ciągnąć bez końca tego szeregu kolejnych redukcji (i stąd wypływa niemożliwość dowiedzenia wszystkiego). Może się jednak zdarzyć, że, postępując w ten sposób, dochodzi się do małej ilości twierdzeń $\alpha, \beta, \ldots$, które są dość dogodne i w które łatwo uwierzyć (to znaczy, które są oczywiste dla każdego, rozpatrującego fizyczne i konkretne znaczenie zależności i figur, o których mowa) i z których można wywnioskować nietylko twierdzenie P, ale jeszcze i wszystkie inne fakty, które powinny być ustalone w Gieometrji. Wypadnie nam więc przyjąć $\alpha, \beta, \ldots$ w charakterze zasad, nad któremi dyskusja byłaby bezużyteczna; otrzymamy w ten sposób *układ pewników* albo *postulatów*, zdolny do panowania nad całokształtem gieometrji. Pozostanie jednak w każdym razie pewna dowolność czy swoboda w wyborze tych zasad; a więc to samo twierdzenie, które jeden matematyk przyjmie za postulat, może być przez innego dowiedzione przy pomocy innych zasad i t. d. Ale jakkolwiek każdy postulat powinien się przedstawiać jako fakt «widoczny sam przez się» każdemu rozpatrującemu znaczenie konkretne terminów gieometrycznych (skąd nazwa aksjomat, pewnik), to nie tak będzie, jeżeli uważać będziemy Gieometrję jako naukę oderwaną i formalną: w takiej Gieometrji te same zasady

mogą i powinny być miane za warunki albo przepisy, którym poddajemy twory niezdefinjowane (jakiemi byłyby «punkt» i «kula»), ażeby stopniowo ograniczyć dowolność, której podlegają, i wyznaczyć w jakiś sposób pojęcie tych tworów. A więc każdy postulat piętnuje nową cechą pojęcia pierwotne (punktu i kuli); przeto wszystkie postulaty razem wzięte określają później te pojęcia w sposób uwikłany (p. uwaga 1-a). Z pierwszego stanowiska zasady I, II i III (**§ I**) wydają się bez wątpienia zbytecznemi (gdyż wypowiadają prawdy zbyt oczywiste); inaczej z drugiego stanowiska. Istotnie, kto nie bierze pod uwagę zwykłego znaczenia zdania: „Punkt C tak jest oddalony od A, jak punkt B", ten nie ma jeszcze powodu utrzymywać, że punkt B jest oddalony od A jak B, czyli że zależność między punktami, jeszcze nie zdefinjowana, ale oznaczona w ten sposób, musi zachodzić pomiędzy punktami B, A, B, a tym mniej, że jest odwracalna i przechodnia względem B i C [1]).

Twierdzenia pierwotne pozwalają decydować od przypadku do przypadku, czy dwa dane przedmioty należą czy nie należą do kategorji «punkt» i «kula»; i to wystarcza, ażeby można było uważać «*pojęcia* ogólne» punktu i kuli za nabyte i oznaczone. Ale analiza nieco więcej drobiazgowa i głębsza (której wymagać niema potrzeby) pozwoliłaby ponadto wypowiedzieć prawdziwą i właściwą definicję nominalną tych pojęć ogólnych przez zaznaczenie własności chatakterystycznych każdego z nich. Takie określenie — które byłoby bez wątpienia dość skomplikowane i zawiłe — zastępują po części postulaty gieometryczne, dzięki którym czytelnik, nawet nie odwołując się do swoich wiadomości intuicyjnych, stopniowo zdobywa i tworzy sobie ścisłe pojęcie tego, co mogą oznaczać i wyrażać punkt i kula. Pojęcia pochodne (jak pojęcia «prostej», «płaszczyzny», «odcinka» i t. d.) stają się znane i oznaczone w tym samym stopniu, co i pierwotne za pomocą schematu określeń nominalnych (uwaga 1-a). I t. d.

UWAGA 4-a. Mówiąc o dwuch figurach F, F', że jedna z nich, np. F' „*odwzorowuje się jednoznacznie na drugiej*", albo „*przekształca się jednoznacznie na drugą*", rozumiemy przez to, że każdemu punktowi figury F *został podporządkowany* pewien punkt figury F' i tylko jeden", a to na mocy jakiejś zależności, istniejącej mię-

[1]) Nie wszystkie zależności są zwrotne, odwracalne i przechodnie; np, zależność pokrewieństwa: „Tycjusz jest synem Kajusa" nie może mieć miejsca, jeżeli Tycjusz i Kajus są tą samą osobą; nie może też istnieć jednocześnie z odwrotną: „Kajus jest synem Tycjusza", ani też, jeżeli Tycjusz jest synem Kajusa, a Sempronjusz synem Tycjusza, nie będzie Sempronjusz synem Kajusa; i t. d.

dzy jedną figurą a drugą. Nie określa się terminów «*odwzorowanie*», «*przekształcenie*» [1]), ale wiadomo, że każdy z nich łączy nazwy dwuch figur (przekształcenie «F na F'», odwzorowanie «F przez F'» i t. d.) i wyraża, że jedna, F', jest obrazem drugiej, że ją odzwierciedla podług jakiegoś prawa w taki sposób, że każdy punkt figury F wyznacza pewien punkt figury F' i tylko ten jeden. Należy się domyślać — jak w ogólnym pojęciu «funkcji» — że od tego samego punktu figury F, albo od kilku równych sobie punktów figury F, umysł nasz przenosi się zawsze do jednego tylko punktu figury F', albo też do punktów, które się również pokrywają z sobą *(jednoznaczność)*; ale nie trzeba zakładać przemienności albo *wzajemności* dwuch figur. Dwie fignry F i F' mogą się z sobą pokrywać, to znaczy, że istnieją także przekształcenia albo odwzorowania «figury na siebie samą»; np. tak jedna figura jak i druga mogą być «klasą punktów» lub «*przestrzenią*» (**P I § I**), stąd otrzymalibyśmy przekształcenia «punktów na punkty», albo odwzorowania «przestrzeni na sobie samej» i t. d. Jeżeli R oznacza odwzorowanie jednoznaczne figury F na F', zaś A punkt dowolny figury F, wtedy *obraz* punktu A, otrzymany wskutek R (albo «za pomocą R») oznacza się przez «RA».

Nie jest powiedziane, że «punkty różne» figury F odwzorowują się w «punktach różnych», ani też, że każdy punkt figury F' jest obrazem jakiegoś punktu figury F, ale jeżeli pierwszy z tych warunków jest spełniony, wtedy przekształcenie nazywa się *izomorficznym*, a jeżeli oba są spełnione, nazywa się *odwracalnym* lub *wzajemnym*. A więc izomorficznym jest każde przekształcenie lub odwzorowanie F na F', przy którym żaden punkt figury F' nie jest podporządkowany kilku odmiennym punktom figury F; wzajemnym jest każde takie przekształcenie izomorficzne figury F na F' że każdy punkt figury F' wyznacza punkt figury F, którego jest obrazem. Jeżeli więc jest dane przekształcenie *wzajemne* figury F na F' — np. przekształcenie S, — to jednocześnie będzie wskazane przekształcenie, również odwracalne i wzajemne, figury F' na F, na mocy którego każdemu punktowi A' figury F' jest podporządkowany ten punkt A figury F, który za pomocą S zamienia się na A'; jest to punkt

[1]) Pojęcia (arytmetyczne i gieometryczne) «przekształcenia», «funkcji», «odpowiedniości» i t. p. — które niemal że się nie różnią od siebie i są zawarte w ogólniejszym pojęciu «zależności» — należą zupełnie słusznie do Logiki, a to wszystko, co mówimy w tej uwadze, zachowuje jeszcze swoje znaczenie w założeniu, że F, F' oznaczają *klasy* albo zbiory jakiegokolwiek rodzaju, przyczym zamiast «punkt» trzeba czytać «indywiduum» albo «element», zamiast «przystawanie» — «równość» i t. d. Patrz np. G. PEANO, *Formulaire mathématique* wyd. V, str. 73 (Turyn, 1905).

oznaczony i jedyny, gdyż, podług określenia, przekształcenie S jest *izomorficzne*. To nowe przekształcenie, związane z S i wyznaczone przez S, przybiera nazwę «przekształcenia *odwrotnego*» do S i oznacza się przez S^{-1}. Jeżeli figura F odwzorowuje się na F' za pomocą przekształcenia wzajemnego S — a tym samym F' odwzorowuje się jednoznacznie na F za pomocą przekształcenia odwrotnego S^{-1} — wtedy się mówi, że między figurami F, F' zachodzi „odpowiedniość *doskonała, jednoznaczna* i *wzajemna*, albo jednoznaczna *w obu zwrotach*, albo jednojednoznaczna i t. d.“, lub też, że te dwie figury „*odpowiadają sobie* punkt po punkcie“ (V. STAUDT). — «Przekształcenie *tożsamościowe* albo *identyczne*» (figury na siebie samą) jest to odwzorowanie, wskutek którego każdy punkt pokrywa się ze swoim własnym obrazem; takie przekształcenie jest na pewno wzajemne i oznacza się zazwyczaj przez 1; jeżeli się rozciąga na całą przestrzeń, wtedy przyjmuje także nazwę po prostu «*tożsamości*».

Dwa przekształcenia P, Q tej samej figury F na inną figurę (albo na siebie samą) nazywają się «*równemi sobie*» — co się oznacza przez $P = Q$ — jeżeli dla każdego punktu A figury F jest $PA = QA$, czyli jeżeli obrazy tego samego punktu figury F (jakimkolwiek on będzie), za pomocą tak jednego jak drugiego przekształcenia, pokrywają się z sobą. Np. każde przekształcenie wzajemne jest zawsze odwrotne do swego własnego odwrotnego, a każde przekształcenie identyczne jest równe swemu własnemu odwrotnemu. I t. d. — Każde przekształcenie R (figury F na F') może być jeszcze uważane za *działanie nad punktami* (figury F), gdyż za pomocą R *przechodzi się* jednoznacznie od punktów figury F do ich obrazów; ale najczęściej sam *proces*, przez który z A otrzymuje się np. RA nie jest ważny; raczej trzeba brać pod uwagę tylko podmiot działania i jego rezultat. Ten sposób (zdobycia wiadomości, o których mówimy) wydaje się też najprzystępniejszym dla młodzieży, która mając już wprawę w wykonywaniu działań arytmetycznych, prowadzących jednoznacznie do liczb (podnoszenie do kwadratu, dzielenie przez dwa i t. d.), będzie potrzebowała małego tylko wysiłku, ażeby wyobrazić sobie działanie (gieometryczne), wykonywane na każdym punkcie figury wskazanej (albo też na jakimkolwiek punkcie) i dające za każdym razem w rezultacie punkt [1]).

[1]) Ten sposób pojmowania rzeczy (powszechny u matematyków) znajduje poparcie w mowie potocznej, np. w terminach: *półobrót, odzwierciedlenie, przesunięcie* i t. p., które odwołują się wyraźnie do pojęcia «działania gieometrycznego», a pomimo to bywają używane z pożytkiem w znaczeniu zależności (t. j. *symetrji, jednomierności* i t. d.).

21146

Jeżeli F, F', F'' są trzema figurami danemi, a $\boldsymbol{P}$ jest przekształceniem F na F', zaś $\boldsymbol{Q}$ przekształceniem F' na F'', wtedy „*iloczynem* $\boldsymbol{P}$ przez $\boldsymbol{Q}$“ albo „*wypadkową* przekształceń $\boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{Q}$“ (w tym porządku, w jakim są napisane) nazywa się przekształcenie F na F'', które każdemu punktowi A figury F daje za obraz punkt $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{P}A)$; jest to więc działanie złożone, które powstaje przez kolejne wykonanie działań $\boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{Q}$ (z których drugie wykonywa się nad rezultatem pierwszego). Nowe przekształcenie tak określone oznacza się przez «$\boldsymbol{QP}$» [zatym $\boldsymbol{QP}A \equiv \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{P}A)$ dla każdego A], ale czyta się od strony prawej ku lewej. Jeżeli $F \equiv F'$, wtedy iloczyn $\boldsymbol{P}$ przez $\boldsymbol{P}$ — czyli $\boldsymbol{P}$ do kwadratu — oznacza się przez «$\boldsymbol{P}^2$» i t. d. Iloczyn przekształcenia wzajemnego przez swoje własne przekształcenie odwrotne jest przekształceniem tożsamościowym: $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{-1} = 1$. W sposób podobny określa się odpowiednio iloczyn *trzech*, *czterech* lub więcej odwzorowań; rozpoznajemy w nim odrazu własność *łączności*, ale iloczyn taki w ogólności nie ma własności *przemienności*. *Przestawialne* są dwa przekształcenia (figury danej na siebie samą), jeżeli iloczyn jest przemienny, a więc nie zależy od porządku czynników. *Inwolucyjne* jest każde przekształcenie *wzajemne* (figury na siebie samą), które się pokrywa ze swoim własnym przekształceniem odwrotnym, a więc którego kwadrat jest równoważny tożsamości. I t. d. — Wreszcie, względem jakiegokolwiek przekształcenia $\boldsymbol{R}$ jednej figury na drugą (albo na siebie samą) nazywa się «punktem *złączonym* albo *tautologicznym*» każdy punkt, który zamienia się przez $\boldsymbol{R}$ na siebie samego.

21146