

CONTENTS

Krzysztof Augustynek <i>Modelling of Joints on Mechanisms by Means of Spring Elements</i>	5
Tomasz Boguszewski, Krzysztof Molski <i>Analysis of Stresses, COD and Energy Released Rate G for Symmetrically Branching Cracks</i>	11
Krzysztof Ciechacki, Tadeusz Szykowny <i>Structure and Mechanical Properties of Welded Joints of Ferritic Steel X2CrNi12 with Austenitic Steel X5CrNi 18-10</i>	17
Michał Czech, Lesław Kyzioł <i>Influence of the Content of the Polymer for Anisotropy of the Wood Strength for Tensile</i>	24
Zenon Hendzel, Marcin Szuster <i>Neural Dynamic Programming in Behavioural Control of a Wheeled Mobile Robot</i>	28
Andrzej Kazberuk <i>Stress Intensity Factors at Crack Tips Located at Rounded V-Notch Vertex</i>	37
Ewa Kulesza <i>Analysis of Corrosion Resistance of the Titanium Alloys Obtained by Powder Metallurgy Method</i>	43
Tadeusz Łagoda, Karolina Walat <i>Methods of Realization of Service Loadings in the Control Systems of Fatigue Test Stands</i>	47
Krzysztof Łukaszewicz, Walenty Osipiuk <i>The Fatigue Life Prediction of Notched Elements</i>	53
Romuald Mosdorf, Tomasz Wyszowski <i>Modelling of Synchronization of Air Bubbles Departing From Two Neighbouring Nozzles</i>	59
Jerzy Nachimowicz, Robert Korbut <i>Energetic Aspects of Needle Bearings Work Performance</i>	67
Grzegorz Puławski <i>Influence of Variable Specific Heats of Working Fluid on Performance of Air Standard Otto, Diesel and Sabathe Cycles</i>	71
Maciej Słowik, Daniel Oldziej <i>Cognitive Architectures Survey of Methods and Implementations</i>	79
Heorgij Sulym, Wiktor Opanasowycz, Igor Jacyk <i>Bending of Reissner's Plate Containing Cracks with the Account of Their Faces Contact Zone Width</i>	85
Tomasz J. Teleszewski, Sławomir A. Sorko <i>Application of Boundary Element Method for Solution of Two Dimensional Flows</i>	94
Adam Tomczyk <i>The Effect of Crack on Contact Pressure Distribution in a Plane Problem Accounting for Friction</i>	106
Adam Tomczyk <i>Experimental Investigations of Fatigue Crack Propagation in Polymethyl Methacrylate Specimen</i>	114
Grzegorz Wołkowycki <i>Experimental Determination of Fixed Matrix Regenerator Effectiveness Based on Operation Parameters of Regenerators Working at a Glass Melting Furnace</i>	121
Robert Zabielski, Roman Trochimczuk <i>Chosen Problems of Design Procedures of High Speed Milling Electrospindle with Non -Standard Bearings</i>	131

Agata Zajkowska, Łukasz Derpeński, Andrzej Seweryn <i>Methods of Determination of Real Hardening Curve</i>	137
Agata Zajkowska, Łukasz Derpeński, Andrzej Seweryn <i>Methods of Determination of Real Hardening Curve</i>	143
Krzysztof K. Żur <i>A New Idea of Modelling and Dynamic Analysis of a Man Walking Apparatus</i>	148

MODELOWANIE PAR KINEMATYCZNYCH MECHANIZMÓW Z ZASTOSOWANIEM ELEMENTÓW SPRĘŻYSTYCH

Krzysztof AUGUSTYNEK*

*Katedra Informatyki Stosowanej, Wydział Zarządzania i Informatyki, Akademia Techniczno-Humanistyczna,
ul. Willowa 2, 43-309 Bielsko-Biała

kaugustynek@ath.eu

Streszczenie: Mechanizmy są przykładami łańcuchów kinematycznych zamkniętych o strukturze drzewa. Zapis równań ruchu takich układów we współrzędnych złączowych, wymaga wcześniejszego myślowego rozcięcia łańcuchów zamkniętych i sformułowania równań więzów domykających. W rezultacie dynamika mechanizmu jest opisana układem równań różniczkowo-algebraicznych, które są trudne do rozwiązania. W pracy przedstawiono sposób, w którym oddziaływania między rozciętymi myślowo ciałami modelowane są z użyciem sprężyn o odpowiednio dobranych współczynnikach sztywności. Podejście takie eliminuje równania więzów domykających, dzięki czemu równania ruchu przyjmują postać równań różniczkowych zwyczajnych.

1. WSTĘP

Modelowanie mechanizmów we współrzędnych złączowych wymaga myślowego rozcięcia wszystkich łańcuchów zamkniętych (Harlecki, 2002). W rezultacie otrzymuje się zastępczy układ otwarty, którego ruch opisują współrzędne złączowe (Wittbrodt i inni, 2006). Dynamiczne równania ruchu mechanizmu otrzymuje się w wyniku połączenia równań ruchu układu zastępczego z równaniami więzów domykających rozciętych par kinematycznych. Stanowią one układ równań różniczkowo-algebraicznych o indeksie 3. Rozwiązywanie równań o tak wysokim indeksie jest trudne i najczęściej sprowadza się je do układu równań różniczkowych zwyczajnych przez wykonanie kolejnych różniczek równań więzów (Blajer, 1998; Harlecki, 2002). Podejście takie może prowadzić do naruszenia równań więzów oraz ich pierwszej pochodnej, co można zniwelować przez zastosowanie metod stabilizacji równań więzów np. metody Baumgarte'a, wzbogaconego sformułowania Lagrange'a czy też podejścia Brauna-Goldfarba (Blajer, 1998, 2011; Frączek, 2002).

Inny sposób modelowania rozciętych par kinematycznych polega na odbieraniu możliwości ruchu łączonym elementom przez zastosowanie układu sprężyn translacyjnych lub/i rotacyjnych o odpowiednio dużych współczynnikach sztywności (Adamiec-Wójcik i inni, 2008). Zaletą takiego podejścia jest mniejsza liczba równań opisujących ruch mechanizmu oraz brak niewiadomych sił oraz momentów reakcji, działających w rozciętych połączeniach. W pracy (Adamiec-Wójcik i inni, 2008) przedstawiono model zastępczy połączenia sferycznego, w którym deformacje elementów sprężystych określono w układzie bazowym. W niniejszej pracy przedstawione będą modele zastępcze połączeń: sferycznego, obrotowego, przesuwne oraz cylindrycznego. Odształcenia zastępczych elementów sprężystych wyznaczane będą w układzie lokalnym związanym z jednym z łączonych ciał.

2. OPIS RUCHU MECHANIZMU

W niniejszej pracy przyjęto, że mechanizm może być złożony z członów sztywnych lub podatnych, przy czym do dyskretyzacji członów podatnych stosowana jest metoda sztywnych elementów skończonych (Wittbrodt i inni, 2006). Na Rys. 1 przedstawiono mechanizm w postaci łańcucha kinematycznego o strukturze drzewa z pojedynczym łańcuchem zamkniętym. Łańcuch ten rozcięto myślowo w parze łączącej człon l oraz człon p . W szczególnym przypadku, gdy człon l jest podatny, rozcięta para łączy sztywne elementy skończone, na jakie je podzielono. W miejsce rozciętej pary wprowadzono siły oraz momenty reakcji określające oddziaływania zachodzące między łączonymi ciałami. W dalszych rozważaniach przyjęto, że oddziaływania te przekazywane są przez układ sprężyn translacyjnych oraz rotacyjnych o odpowiednio dobranych współczynnikach sztywności.

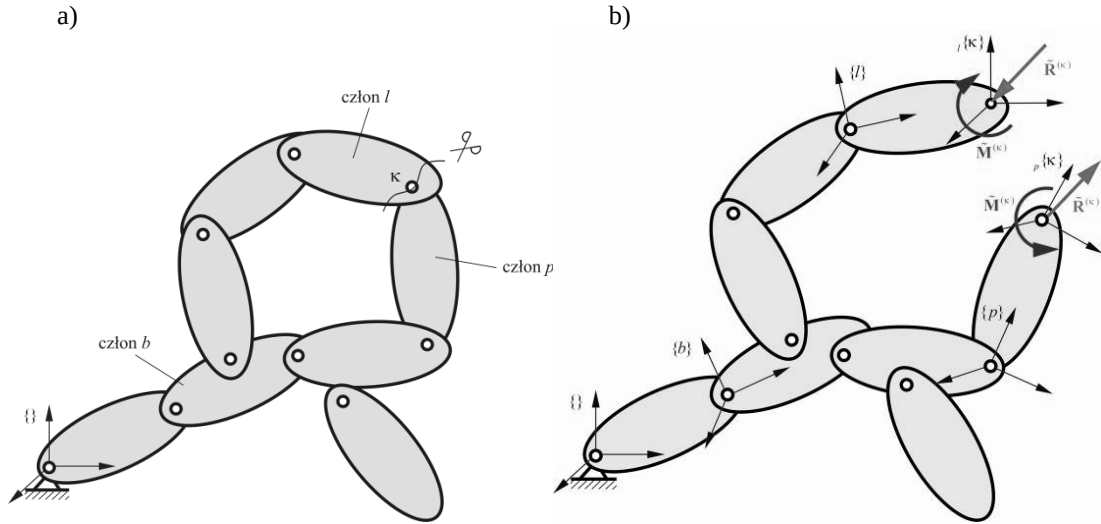
Współrzędne uogólnione opisujące ruch członów l oraz p względem podstawy można zapisać w postaci:

$$\mathbf{q}^{(l)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(b)} \\ \mathbf{q}^{(l)} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{q}^{(p)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(b)} \\ \mathbf{q}^{(p)} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

gdzie: $\tilde{\mathbf{q}}^{(l)} = [\tilde{q}_i^{(l)}]_{i=1, \dots, \bar{n}^{(l)}}$, $\tilde{\mathbf{q}}^{(p)} = [\tilde{q}_i^{(p)}]_{i=1, \dots, \bar{n}^{(p)}}$ – współrzędne określające ruch łączonych ciał względem członu b , $\mathbf{q}^{(b)} = [q_i^{(b)}]_{i=1, \dots, n^{(b)}}$ – wektor współrzędnych uogólnionych określających ruch ciała b względem podstawy.

Ruch członu bazowego b oraz ciał poprzedzających ten człon w łańcuchu kinematycznym jest wspólny dla obu łączonych ciał. Można wykazać, że siły działające w rozciętym połączeniu nie zależą od współrzędnych uogólnionych członu bazowego, lecz są zależne jedynie od współrzędnych uogólnionych opisujących ruch członów l oraz p względem członu bazowego.



Rys. 1. Przykładowy mechanizm przed (a) oraz po (b) rozcięciu łańcucha zamkniętego

Macierze transformacji z układów $\{l\}$ oraz $\{p\}$, związanych z członami l oraz p , do układu inercyjnego można wyrazić jako złożenie:

$$\mathbf{B}^{(l)} = \mathbf{B}^{(b)} \tilde{\mathbf{B}}^{(l)} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B}^{(p)} = \mathbf{B}^{(b)} \tilde{\mathbf{B}}^{(p)} \quad (2.2)$$

gdzie: $\mathbf{B}^{(b)} = \mathbf{B}^{(b)}(\mathbf{q}^{(b)})$ - macierz transformacji z układu bazowego $\{b\}$ do układu inercyjnego $\{i\}$, $\tilde{\mathbf{B}}^{(l)} = \tilde{\mathbf{B}}^{(l)}(\tilde{\mathbf{q}}^{(l)})$, $\tilde{\mathbf{B}}^{(p)} = \tilde{\mathbf{B}}^{(p)}(\tilde{\mathbf{q}}^{(p)})$ - macierze określające położenie i orientację łączonych ciał względem układu $\{b\}$.

Z członami l oraz p związane dodatkowo układy ${}_l\{\kappa\}$ oraz ${}_p\{\kappa\}$ tak, aby ich początki znajdowały się w punkcie κ określającym połączenie. Macierze transformacji z tych układów do układu bazowego można zapisać w postaci:

$${}_l\tilde{\mathbf{B}}^{(\kappa)} = \tilde{\mathbf{B}}^{(l)} {}_l\mathbf{A}^{(\kappa)} \quad (3.1)$$

$${}_p\tilde{\mathbf{B}}^{(\kappa)} = \tilde{\mathbf{B}}^{(p)} {}_p\mathbf{A}^{(\kappa)} \quad (3.2)$$

gdzie ${}_l\mathbf{A}^{(\kappa)}$, ${}_p\mathbf{A}^{(\kappa)}$ są macierzami transformacji o stałych elementach. Macierze te określają położenie oraz orientację układów ${}_l\{\kappa\}$ oraz ${}_p\{\kappa\}$ względem układów lokalnych ciał, z którymi je związane.

3. MODEL ZASTĘPCZY POŁĄCZENIA SFERYCZNEGO

Na Rys. 2 przedstawiono przegub kulisty łączący ciała l oraz p . Przegub ten zastąpiono układem trzech sprężyn translacyjnych, z których każda działa w kierunku równoległym do osi układu ${}_l\{\kappa\}$.

Energię odkształcenia sprężystego układu zastępczego określa zależność:

$$V_s = \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)T} \mathbf{C}_T^{(\kappa)} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)} \quad (4)$$

gdzie: $\Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)}$ – wektor określający położenie początku układu ${}_p\{\kappa\}$ względem układu ${}_l\{\kappa\}$, $\mathbf{I}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$, $\mathbf{C}_T^{(\kappa)}$ – macierz współczynników sztywności sprężyn translacyjnych,

$$\Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)} = \Phi {}_l\tilde{\mathbf{B}}^{(\kappa)-1} {}_p\tilde{\mathbf{B}}^{(\kappa)} \mathbf{I}_0, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ – ma-}$$

$$\text{cierz zwięzająca, } \mathbf{C}_T^{(\kappa)} = \begin{bmatrix} C_{T,x}^{(\kappa)} & 0 & 0 \\ 0 & C_{T,y}^{(\kappa)} & 0 \\ 0 & 0 & C_{T,z}^{(\kappa)} \end{bmatrix}.$$

Energia ta jest zależna tylko od współrzędnych opisujących ruch członów l oraz p względem członu bazowego. Pochodne z energii (4) względem współrzędnych uogólnionych można zapisać następująco:

$$\frac{\partial V_s}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(l)}} = {}_l\tilde{\mathbf{E}}^{(\kappa)T} \mathbf{C}_T^{(\kappa)} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial V_s}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(p)}} = {}_p\tilde{\mathbf{E}}^{(\kappa)T} \mathbf{C}_T^{(\kappa)} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)} \quad (5.2)$$

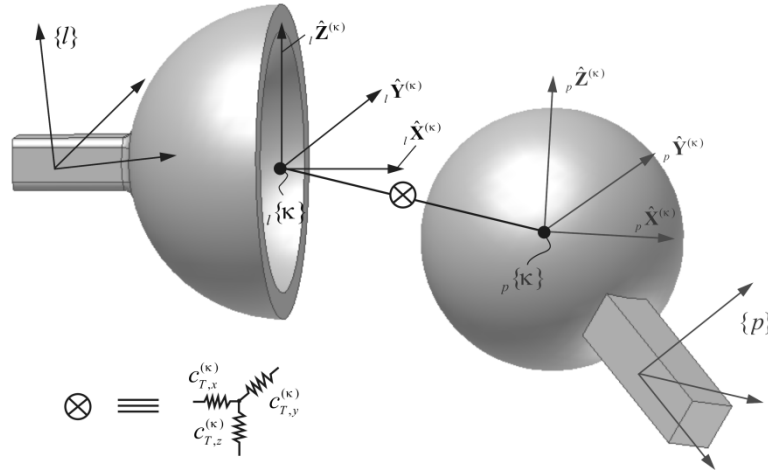
$$\text{gdzie: } {}_l\tilde{\mathbf{E}}^{(\kappa)} = \left[\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)}}{\partial \tilde{q}_\xi^{(l)}} \right]_{\xi=1, \dots, \tilde{n}^{(l)}}, \quad {}_p\tilde{\mathbf{E}}^{(\kappa)} = \left[\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(p)}} \right]_{\eta=1, \dots, \tilde{n}^{(p)}},$$

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)}}{\partial \tilde{q}_\xi^{(l)}} = \Phi {}_l\tilde{\mathbf{B}}_\xi^{(\kappa)-1} {}_p\tilde{\mathbf{B}}^{(\kappa)} \mathbf{I}_0, \quad \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(p)}} = \Phi {}_l\tilde{\mathbf{B}}^{(\kappa)-1} {}_p\tilde{\mathbf{B}}_\eta^{(\kappa)} \mathbf{I}_0.$$

Przy odpowiednio dużych współczynnikach sztywności sprężyn, człon l oraz p poruszają się ruchem zbliżonym do kulistego. Siły reakcji, działające w modelowanym połączeniu, można otrzymać po obliczeniu sił sprężystych zgodnie ze wzorem:

$$\tilde{\mathbf{R}}^{(\kappa)} = \mathbf{C}_T^{(\kappa)} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(\kappa)} \quad (6)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{R}}^{(\kappa)} = [\tilde{R}_x^{(\kappa)} \ \tilde{R}_y^{(\kappa)} \ \tilde{R}_z^{(\kappa)}]^T$ jest wektorem sił reakcji działających w przegubie kulistym.



Rys. 2. Model zastępczy połączenia sferycznego

4. MODEL ZASTĘPCZY POŁĄCZENIA OBROTOWEGO, POSTĘPOWEGO I CYLINDRYCZNEGO

W modelu zastępczym połączenia obrotowego, postępowego oraz cylindrycznego oprócz sprężyn translacyjnych występują sprężyny rotacyjne, odbierające możliwość względnego obrotu członów l oraz p . Całkowita energia potencjalna takiego połączenia jest sumą energii potencjalnej pochodzącej od deformacji sprężyn translacyjnych oraz rotacyjnych, co można zapisać następująco:

$$V_R^{(k)} = \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(k)T} \mathbf{C}_T^{(k)} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(k)} + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)T} \mathbf{C}_R^{(k)} \Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)} \quad (6)$$

gdzie: $\Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)} = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\varphi}_x^{(k)} \\ \Delta \tilde{\varphi}_y^{(k)} \\ \Delta \tilde{\varphi}_z^{(k)} \end{bmatrix}$, $\Delta \tilde{\varphi}_x^{(k)}$, $\Delta \tilde{\varphi}_y^{(k)}$, $\Delta \tilde{\varphi}_z^{(k)}$ – kąty po-

między osiami ${}_l \hat{\mathbf{X}}^{(k)}$, ${}_l \hat{\mathbf{Y}}^{(k)}$, ${}_l \hat{\mathbf{Z}}^{(k)}$ układu ${}_l \{\kappa\}$ a osiami ${}_p \hat{\mathbf{X}}^{(k)}$, ${}_p \hat{\mathbf{Y}}^{(k)}$, ${}_p \hat{\mathbf{Z}}^{(k)}$ układu ${}_p \{\kappa\}$ (Rys. 3), $\mathbf{C}_R^{(k)}$ – macierz współczynników sztywności sprężyn rotacyjnych,

$$\mathbf{C}_R^{(k)} = \begin{bmatrix} c_{R,x}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & c_{R,y}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & c_{R,z}^{(k)} \end{bmatrix}, \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(k)}, \mathbf{C}_T^{(k)} - \text{zdefiniowane w (4)}.$$

Pochodne z energii (6) względem współrzędnych uogólnionych określają zależności:

$$\frac{\partial V_R^{(k)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(l)}} = \left[\frac{\Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(k)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(l)}} \right]^T \mathbf{C}_T^{(k)} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(k)} + \left[\frac{\Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(l)}} \right]^T \mathbf{C}_R^{(k)} \Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)} \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial V_R^{(k)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(p)}} = \left[\frac{\Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(k)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(p)}} \right]^T \mathbf{C}_T^{(k)} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(k)} + \left[\frac{\Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(p)}} \right]^T \mathbf{C}_R^{(k)} \Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)} \quad (7.2)$$

Dla elementów wektora $\Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(k)}$ zachodzą związki:

$${}_l \hat{\mathbf{X}}^{(k)T} {}_p \bar{\mathbf{X}}^{(k)} = \cos \Delta \tilde{\varphi}_x^{(k)} \quad (8.1)$$

$${}_l \hat{\mathbf{Y}}^{(k)T} {}_p \bar{\mathbf{Y}}^{(k)} = \cos \Delta \tilde{\varphi}_y^{(k)} \quad (8.2)$$

$${}_l \hat{\mathbf{Z}}^{(k)T} {}_p \bar{\mathbf{Z}}^{(k)} = \cos \Delta \tilde{\varphi}_z^{(k)} \quad (8.3)$$

gdzie: ${}_l \hat{\mathbf{X}}^{(k)} = {}_p \hat{\mathbf{X}}^{(k)} = [1 \ 0 \ 0]^T$, ${}_l \hat{\mathbf{Y}}^{(k)} = {}_p \hat{\mathbf{Y}}^{(k)} = [0 \ 1 \ 0]^T$, ${}_l \hat{\mathbf{Z}}^{(k)} = {}_p \hat{\mathbf{Z}}^{(k)} = [0 \ 0 \ 1]^T$, ${}_p \bar{\mathbf{X}}^{(k)} = {}_p \mathbf{R}^{(k)} {}_p \hat{\mathbf{X}}^{(k)}$, ${}_p \bar{\mathbf{Y}}^{(k)} = {}_p \mathbf{R}^{(k)} {}_p \hat{\mathbf{Y}}^{(k)}$, ${}_p \bar{\mathbf{Z}}^{(k)} = {}_p \mathbf{R}^{(k)} {}_p \hat{\mathbf{Z}}^{(k)}$, ${}_p \mathbf{R}^{(k)}$ – macierz rotacji z układu ${}_p \{\kappa\}$ do układu ${}_l \{\kappa\}$.

Biorąc pod uwagę, że:

$${}_p \mathbf{R}^{(k)} = {}_l \bar{\mathbf{R}}^{(k)T} {}_p \bar{\mathbf{R}}^{(k)} \quad (9)$$

gdzie ${}_l \bar{\mathbf{R}}^{(k)}$, ${}_p \bar{\mathbf{R}}^{(k)}$ są macierzami rotacji występującymi w macierzach transformacji ${}_l \bar{\mathbf{B}}^{(k)}$, ${}_p \bar{\mathbf{B}}^{(k)}$, oraz wykonując odpowiednie przekształcenia można napisać:

$$({}_l \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_1^T ({}_p \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_1 = \cos \Delta \tilde{\varphi}_x^{(k)} \quad (10.1)$$

$$({}_l \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_2^T ({}_p \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_2 = \cos \Delta \tilde{\varphi}_y^{(k)} \quad (10.2)$$

$$({}_l \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_3^T ({}_p \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_3 = \cos \Delta \tilde{\varphi}_z^{(k)} \quad (10.3)$$

gdzie $({}_l \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_i$, $({}_p \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_i$, $i=1,2,3$, jest i -tą kolumną macierzy rotacji.

Różniczkując zależności (8) względem współrzędnych uogólnionych otrzymuje się:

- dla $\xi=1, \dots, \bar{n}^{(l)}$:

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\varphi}_x^{(k)}}{\partial \tilde{q}_\xi^{(l)}} = \frac{1}{\cos \Delta \tilde{\varphi}_x^{(k)}} ({}_l \bar{\mathbf{R}}_\xi^{(k)})_1^T ({}_p \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_1 \quad (11.1)$$

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\varphi}_y^{(k)}}{\partial \tilde{q}_\xi^{(l)}} = \frac{1}{\cos \Delta \tilde{\varphi}_y^{(k)}} ({}_l \bar{\mathbf{R}}_\xi^{(k)})_2^T ({}_p \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_2 \quad (11.2)$$

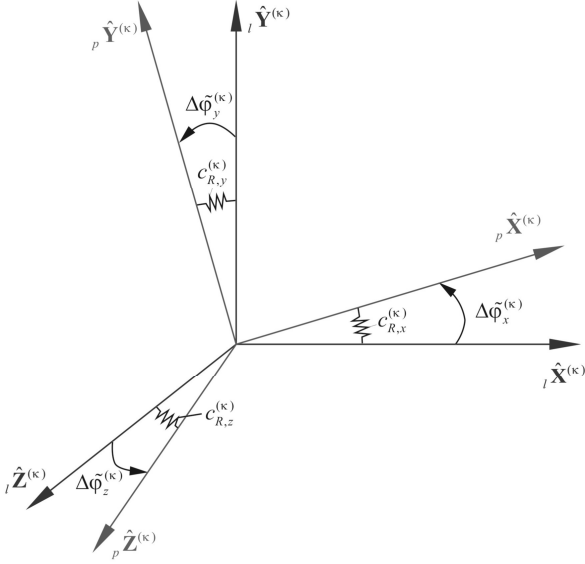
$$\frac{\partial \Delta \tilde{\varphi}_z^{(k)}}{\partial \tilde{q}_\xi^{(l)}} = \frac{1}{\cos \Delta \tilde{\varphi}_z^{(k)}} ({}_l \bar{\mathbf{R}}_\xi^{(k)})_3^T ({}_p \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_3 \quad (11.3)$$

- dla $\eta=1, \dots, \bar{n}^{(p)}$:

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\varphi}_x^{(k)}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(p)}} = \frac{1}{\cos \Delta \tilde{\varphi}_x^{(k)}} ({}_l \bar{\mathbf{R}}^{(k)})_1^T ({}_p \bar{\mathbf{R}}_\eta^{(k)})_1 \quad (12.1)$$

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\phi}_y^{(k)}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(p)}} = \frac{1}{\cos \Delta \tilde{\phi}_y^{(k)}} \left({}_l \tilde{\mathbf{R}}^{(k)} \right)_2^T \left({}_p \tilde{\mathbf{R}}_\eta^{(k)} \right)_2 \quad (12.2)$$

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\phi}_z^{(k)}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(p)}} = \frac{1}{\cos \Delta \tilde{\phi}_z^{(k)}} \left({}_l \tilde{\mathbf{R}}^{(k)} \right)_3^T \left({}_p \tilde{\mathbf{R}}_\eta^{(k)} \right)_3 \quad (12.3)$$



Rys. 3. Schemat wyznaczania deformacji sprężyn rotacyjnych

Po uwzględnieniu związków (11), (12) pochodne z energii odkształcenia sprężystego przyjmują postać:

$$\frac{\partial V_R^{(k)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(l)}} = {}_l \tilde{\mathbf{E}}^{(k)T} \mathbf{C}_T^{(k)} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(k)} + {}_l \tilde{\mathbf{A}}^{(k)} \mathbf{C}_R^{(k)} \Delta \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{(k)} \quad (13.1)$$

$$\frac{\partial V_R^{(k)}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^{(p)}} = {}_p \tilde{\mathbf{E}}^{(k)T} \mathbf{C}_T^{(k)} \Delta \tilde{\mathbf{r}}^{(k)} + {}_p \tilde{\mathbf{A}}^{(k)} \mathbf{C}_R^{(k)} \Delta \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{(k)} \quad (13.2)$$

gdzie: ${}_l \tilde{\mathbf{A}}^{(k)} = \left[\frac{\partial \Delta \tilde{\phi}_\xi^{(k)}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(l)}} \right]_{\xi=1, \dots, \tilde{n}^{(l)}}$, ${}_p \tilde{\mathbf{A}}^{(k)} = \left[\frac{\partial \Delta \tilde{\phi}_\eta^{(k)}}{\partial \tilde{q}_\eta^{(p)}} \right]_{\eta=1, \dots, \tilde{n}^{(p)}}$.

Modele poszczególnych połączeń otrzymuje się przez odpowiedni dobór współczynników sztywności sprężyn. Jeśli przyjąć, że osie ${}_l \hat{\mathbf{Z}}^{(k)}$ oraz ${}_p \hat{\mathbf{Z}}^{(k)}$ pokrywają się z osią połączenia, to wartości współczynników sztywności dla połączenia obrotowego, postępowego i cylindrycznego są określone w Tab. 1.

Tab. 1. Wartości współczynników sztywności modeli podatnych połączeń

Typ połączenia	$C_{T,x}^{(k)}$	$C_{T,y}^{(k)}$	$C_{T,z}^{(k)}$	$C_{R,x}^{(k)}$	$C_{R,y}^{(k)}$	$C_{R,z}^{(k)}$
Obrotowe	∞	∞	∞	0	0	∞
Postępowe	∞	∞	0	∞	∞	∞
Cylindryczne	∞	∞	0	0	0	∞

W obliczeniach numerycznych, w miejsce sztywności równych nieskończoności, stosuje się liczby o dużych wartościach. Należy zauważyć, że zbyt wysoka wartość tych współczynników może prowadzić do komplikacji numerycznych. W rzeczywistości współczynniki sztywności

dobiera się na podstawie kilku symulacji numerycznych, w trakcie których sprawdza się czy łączone ciała wykonują ruch względny.

5. RÓWNANIA RUCHU MECHANIZMU

Dynamiczne równania ruchu mechanizmu wyprowadzono z równań Lagrange'a II rodzaju w postaci:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (14)$$

gdzie: E – energia kinetyczna członów sztywnych oraz podatnych, V – energia potencjalna odkształcenia sprężystego członów podatnych oraz połączeń zastępczych, $\mathbf{Q}$ – wektor sił zewnętrznych oraz sił wynikających z bezwładności członów, $\mathbf{q}$ – wektor wszystkich współrzędnych uogólnionych.

Po wykonaniu przekształceń opisanych w pracy (Wittbrodt i inni, 2006) równania ruchu można zapisać następująco:

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} \quad (15)$$

gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą mas, natomiast $\mathbf{F}$ jest wektorem prawych stron zawierającym pozostałe składniki występujące w równaniach Lagrange'a. W rezultacie dynamika mechanizmu jest opisana układem równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu. Liczba występujących równań

jest co prawda mniejsza, w porównaniu do podejścia z więzami, natomiast otrzymany układ może być źle uwarunkowany (sztywny).

6. EKSPERYMENT NUMERYCZNY

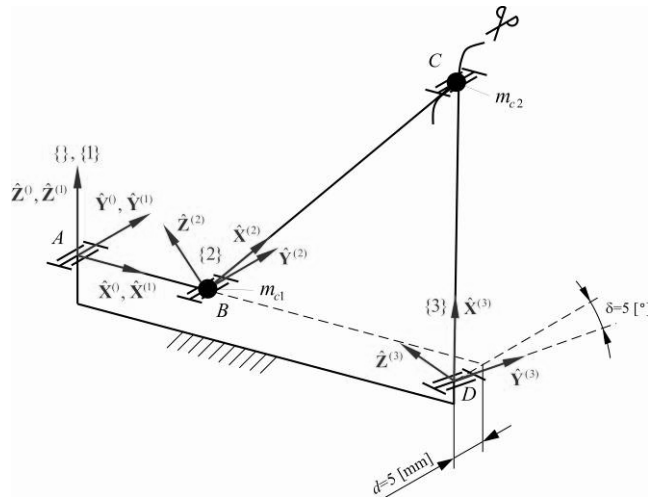
W symulacjach numerycznych badano czworobok przegubowy złożony ze sztywnej korby oraz podatnego łącznika i wahacza (Rys. 4). Wymiary czworoboku oraz dane poszczególnych członów wzięto z pracy (Adamiec-Wójcik i Augustynek, 2005). W wyniku przesunięcia oraz obrotu pary łączącej wahacz z ostoją mechanizm staje się układem przestrzennym.

Ruch układu wymuszano momentem działającym na korbę w postaci:

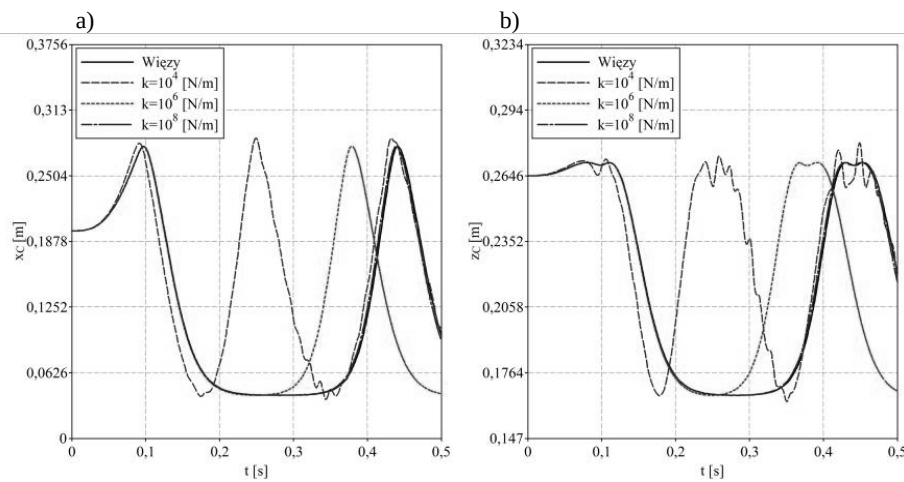
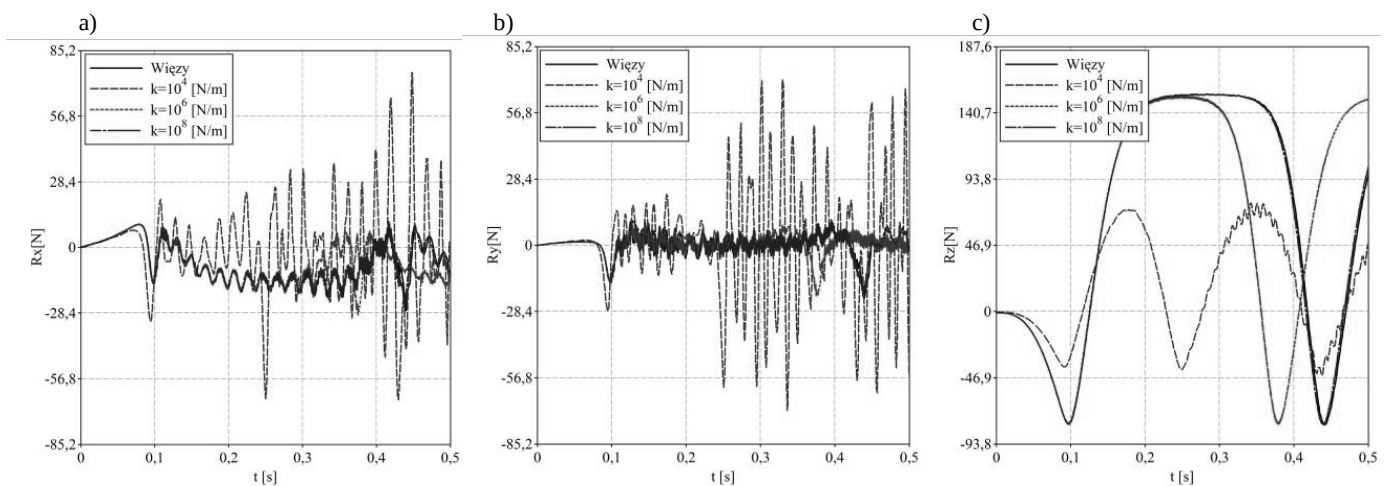
$$M^{(1)} = \begin{cases} M_0 \frac{t}{t_0}, & t \leq t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases} \quad (16)$$

gdzie M_0 jest momentem działającym w chwili t_0 . W obliczeniach przyjęto, że $M_0 = 1.5[\text{Nm}]$ oraz $t_0 = 0.1[\text{s}]$.

Do dyskretyzacji członów podatnych stosowano metodę sztywnych elementów skończonych (Wittbrodt i inni, 2006). Na podstawie przeprowadzonych testów numerycznych przyjęto podział łącznika oraz wahacza na 5 sztywnych elementów skończonych.



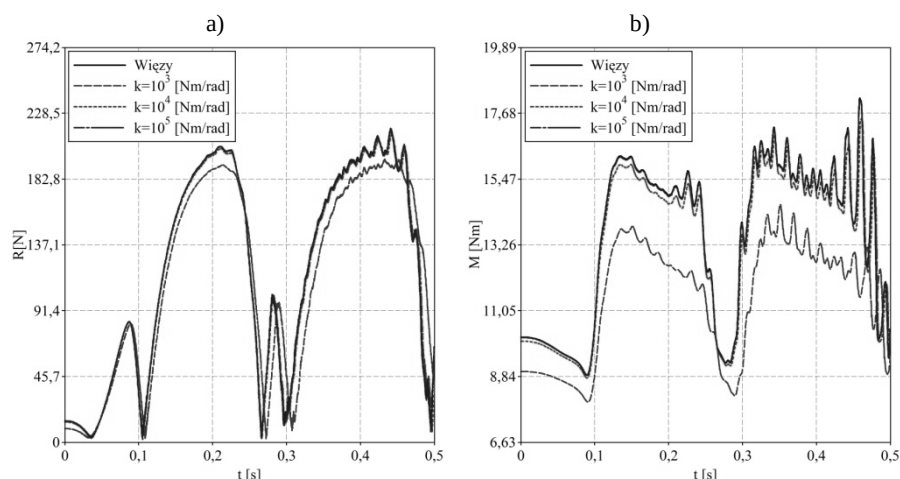
Rys. 4. Schemat czworoboku przegubowego

Rys. 5. Przebieg przemieszczeń punktu C w układzie $\{ \}$ w zależności od sztywności sprężyn zastępczego połączenia sferycznego

Rys. 6 Przebieg sił działających w zastępczym połączeniu sferycznym w zależności od sztywności sprężyn translacyjnych

Występujący łańcuch zamknięty rozcięto w parze kinematycznej C, łączącej łącznik z wahaczem. W symulacjach przyjmowano, że para ta może być kulista lub obrotowa, a do jej modelowania stosowano opisane wcześniej modele zastępcze. Wyniki otrzymane z użyciem modeli zastępczych porównywano z wynikami otrzymanymi dla modelu, w którym formułowano równania więzów domykających.

Wpływ współczynników sztywności sprężyn translacyjnych zastępczego połączenia sferycznego na przemieszczenia punktu C oraz siły działające w tym połączeniu przedstawiono na Rys. 5 oraz 6. W symulacjach przyjmowano, że współczynniki sztywności wszystkich sprężyn są jednakowe.



Rys. 7. Przebieg wypadkowej (a) siły oraz (b) momentu reakcji w zastępczym połączeniu obrotowym w zależności od sztywności sprężyny rotacyjnej

Z przedstawionych przebiegów wynika, że ruch mechanizmu jest zgodny z więzami, jeśli przyjmie się współczynniki sztywności równe 10^8 [N/m]. Współczynniki te, stosowano dalej w odniesieniu do sprężyn translacyjnych występujących w zastępczym połączeniu obrotowym. Wpływ współczynnika sztywności sprężyny rotacyjnej na wypadkową siłę oraz moment reakcji występujący w parze kinematycznej C pokazano na Rys. 7.

Z przedstawionych przebiegów można zauważyć, że siły działające w połączeniu otrzymane dla sztywności 10^4 oraz 10^5 [Nm/rad] niewiele różnią się między sobą.

7. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono modele zastępcze połączeń w mechanizmach z zastosowaniem elementów sprężystych. Cechą przedstawionego podejścia jest mniejszy rozmiar zagadnienia, wynikający z braku równań więzów domykających. Skutkiem przyjęcia dużych sztywności zastępczych sprężyn wyjściowy układ równań różniczkowych, opisujący dynamikę mechanizmu, może być źle uwarunkowany. W dalszych pracach badany będzie wpływ metod całkowania, w tym metod przeznaczonych dla układów sztywnych, na efektywność obliczeń modeli mechanizmów z połączeniami zastępczymi.

LITERATURA

1. **Adamiec-Wójcik I., Augustynek K.** (2005) Modelling dynamics of flexible multibody systems by means of the rigid finite element method, *Multibody Dynamics 2005 on Advances in Computational Dynamics: ECCOMAS Thematic Conference*, Madrid.
2. **Adamiec-Wójcik I., Maczyński A., Wojciech S.** (2008), *Zastosowanie metody transformacji jednorodnych w modelowaniu dynamiki urządzeń offshore*, Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa.
3. **Blajer W.** (1998), *Metody dynamiki układów wieloczłonowych*, Wydawnictwo Politechniki Radomskiej, Radom.
4. **Blajer W.** (2011), *Methods for constraint violation suppression in numerical simulation of constrained multibody systems – A comparative study*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200, pp. 1568-1576.
5. **Frączek J.** (2002), *Modelowanie mechanizmów przestrzennych metodą układów wieloczłonowych*, *Prace Naukowe-Mechanika*, z.196, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
6. **Harelcki A.** (2002), *Metoda analizy dynamicznej mechanicznych układów wieloczłonowych z tarciami suchymi w parach kinematycznych*, *Rozprawy Naukowe*, Nr 2, Wydawnictwo Akademii Techniczno-Humanistycznej, Bielsko-Biała.
7. **Wittbrodt E., Adamiec-Wójcik I., Wojciech S.** (2006), *Dynamics of flexible multibody systems: rigid finite element method*, Springer, Berlin.

MODELLING OF JOINTS IN MECHANISMS BY MEANS OF SPRING ELEMENTS

Abstract: Mechanisms are examples of closed kinematic chains with a tree-like structure. In order to derive the equations of motion, closed kinematic chains have to be cut and constraint equations have to be formulated. As a result equations of motion form set of differential-algebraic equations with index 3, which are difficult to solve. The paper presents a method modeling interactions between bodies at the cut joints by means of spring elements with appropriate stiffness. Such approach eliminates constraints equations, and thus the equations of motion form a set of ordinary differential equations.

EFEKTY NAPRĘŻENIOWE, DEFORMACYJNE I ENERGETYCZNE W OKOLICY WIERZCHOŁKOWEJ SZCELINY Z PODWÓJNYM SYMETRYCZNYM ODGAŁĘZIENIEM

Tomasz BOGUSZEWSKI*, Krzysztof MOLSKI*

*Katedra Budowy i Eksploatacji Maszyn, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

tboguszewski@doktoranci.pb.edu.pl, kmolski@pb.edu.pl

Streszczenie: W pracy analizowano pola naprężeń i względne przemieszczenia brzegów niewielkich symetrycznych pęknięć powstałych w wierzchołku płaskiej szczeliny pod pewnym kątem do jej płaszczyzny. Zaproponowano analityczno-numeryczną metodę wyznaczania uogólnionej wartości współczynnika uwalniania energii G . Dla płaskiego i antypłaskiego stanu odkształcenia wyznaczono względne przemieszczenia brzegów odgałęzionych szczelin w zależności od kierunku nachylenia odgałęzionego pęknięcia i rodzaju obciążenia zewnętrznego. W obliczeniach wykorzystano metodę elementów skończonych MES. Względne rozwarcie brzegów odgałęzień szczeliny opisano odpowiednimi funkcjami uwzględniającymi charakter osobliwości pola naprężeń w okolicy wierzchołkowej umożliwiającymi obliczenie współczynników G .

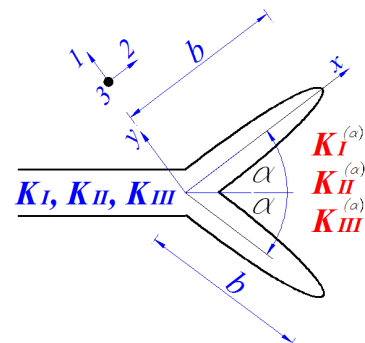
1. WPROWADZENIE

Blizsze badania wielu przyczyn uszkodzeń elementów konstrukcyjnych wskazują, że jedną z najczęstszych przyczyn występowania awarii są pęknięcia i wady materiałowe – nieciągłości (szczeliny) wynikające z procesu technologicznego, oddziaływania obciążenia oraz środowiska. Rozwój tych wad do rozmiarów krytycznych jest główną przyczyną uruchomienia procesu pęknięcia i występowania złomu kruchego lub zmęczeniowego.

Teoretyczne kryteria inicjacji i propagacji szczelin są niezbędne do określenia trwałości i wytrzymałości konstrukcji przy danym obciążeniu. Problem ten jest szczególnie skomplikowany w przypadkach występowania złożonego stanu obciążenia, zwłaszcza zmiennego, gdzie potencjalna trajektoria pęknięcia jest krzywoliniowa i rozgałęziona. Obliczanie komponentów σ_{ij} pól naprężeń w okolicy wierzchołkowej pęknięcia jest ważnym elementem oceny wytrzymałości elementów konstrukcyjnych i nie stanowi problemu w sytuacji, gdy pęknięcie wzrasta stycznie do kierunku szczeliny głównej lub wtedy, gdy trajektoria szczeliny zmęczeniowej łagodnie się zakrzywia. Można wówczas zastosować znane rozwiązania analityczne opracowane przez Sneddon (1946) i Irwina (1957) wykorzystywane w liniowej mechanice pęknięcia. Wyznaczone w ten sposób wartości naprężeń i względnych przemieszczeń stanowią podstawę do wyznaczania wielkości charakterystycznych decydujących o prędkości pęknięcia, w tym energii uwalnianej w czasie propagacji pęknięcia. Ma ona istotne znaczenie przy formułowaniu kryteriów pęknięcia, zwłaszcza w złożonych stanach obciążeń.

W przypadku, gdy odgałęzione pęknięcie lub pęknięcia powstają pod pewnym kątem α do kierunku szczeliny głównej (Rys. 1), względne przemieszczenia brzegów nie są znane, a wartości współczynników intensywności naprężenia $K_I^{(\alpha)}$, $K_{II}^{(\alpha)}$ i $K_{III}^{(\alpha)}$ w otoczeniu wierzchołków powstałych szczelin mogą diametralnie odbiegać od ich odpowiedników K_I , K_{II} i K_{III} prawdziwych dla szczeliny głównej

bez odgałęzień. Zagadnieniom tym poświęcono wiele prac, jak np.: Palaniswamy i Knauss (1972), Husain i inni (1974), Chatterjee (1975), Wang (1978), Seweryn (2004), w których zaproponowano różne metody oszacowania pól przemieszczeń oraz zmian energii w zależności od kąta nadpęknięcia i obciążeń zewnętrznych.



Rys. 1. Niewielkie symetryczne pęknięcia o długości b powstałe pod kątem α do płaszczyzny szczeliny głównej oraz odpowiednie współczynniki intensywności naprężenia

2. CEL I ZAKRES PRACY

Celem pracy było wyznaczenie względnych przemieszczeń brzegów niewielkich symetrycznych szczelin powstałych w strefie wierzchołkowej szczeliny głównej. Umożliwiają one określenie wartości uwalnianej energii, której nie można wyznaczyć za pomocą znanych rozwiązań analitycznych. Rozpatrywano niewielkie symetryczne odgałęzienia o długości b powstałe w wierzchołku szczeliny głównej pod kątem α . Uwzględniono trzy niezależne przypadki obciążenia odniesione do płaszczyzny szczeliny głównej: dwuosiowe rozciąganie, ścinanie wzdłużne i ścinanie antypłaskie (poprzeczne). Wartości pól względnych przemieszczeń brzegów odgałęzienia wyznaczono metodą elementów skończonych – MES. Istotne są również zmiany

rozkładów pól naprężeń w okolicy wierzchołkowej szczeliny głównej spowodowane obecnością dwóch odgałęzień.

Zakres pracy obejmował:

- wybór geometrii pęknięcia i sposobu jego modelowania;
- dobranie odpowiedniej siatki elementów skończonych;
- obliczenie względnych przemieszczeń brzegów;
- aproksymację względnych przemieszczeń brzegów odgałęzionego pęknięcia odpowiednimi funkcjami uwzględniającymi charakter osobliwości pola naprężeń;
- obliczenie współczynnika G uwalniania energii;
- obliczenie pól naprężeń zredukowanych w okolicy wierzchołkowej w obecności dodatkowych odgałęzień.

3. MODEL NUMERYCZNY MES

Trzy płaskie prostokątne tarcze, przedstawione schematycznie na Rys. 2, opisano odpowiednio zagęszczoną siatką elementów skończonych (Rys. 3).

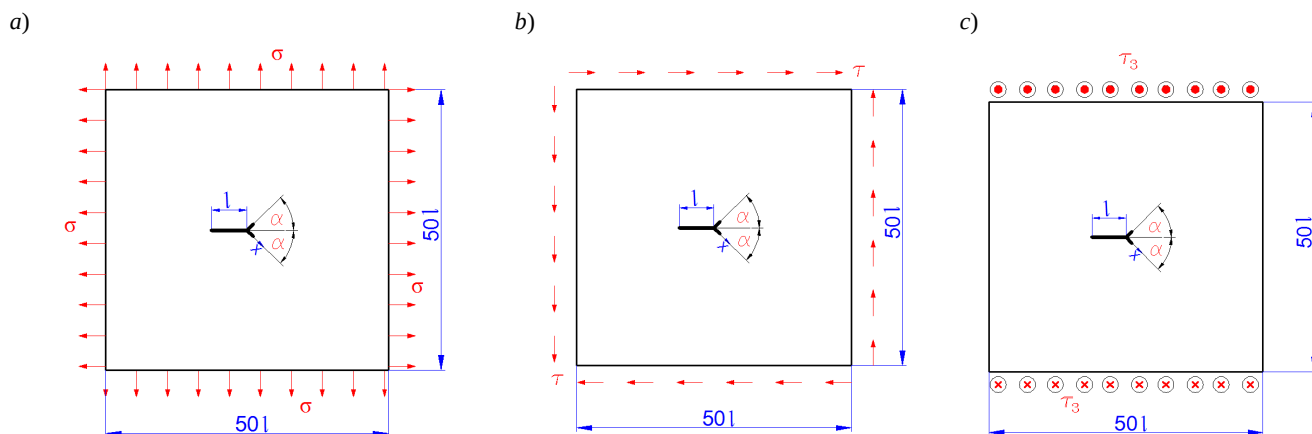
Przyjęto następujące obciążenia:

- dla rozciągania i ścinania wzdłużnego – jednostkowe obciążenie nominalne, σ i τ , odniesione do płaszczyzny szczeliny głównej;

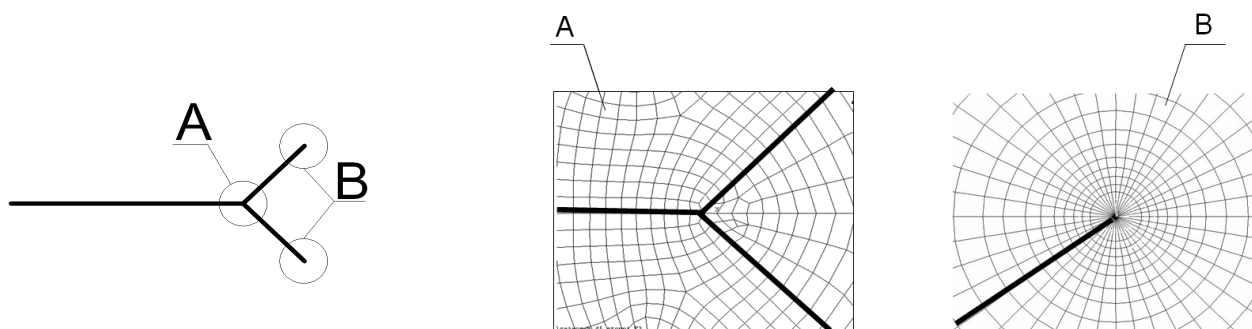
- dla ścinania poprzecznego (w antypłaskim stanie odkształcenia), jednostkowe naprężenie styczne τ_3 skierowane prostopadle do płaszczyzny tarczy i również odniesione do płaszczyzny szczeliny głównej.

W rozpatrywanych przypadkach przyjęto jednostkową długość szczeliny głównej l oraz stosunek długości b/l równy 0,01 i 0,005, w celu sprawdzenia stabilności uzyskanego rozwiązania numerycznego. Względna zmiana długości odgałęzień nie spowodowała znaczących różnic pól naprężeń i przemieszczeń. Zmniejszając dwukrotnie długość odgałęzień, różnice wyników nie przekraczały 1%.

Zmieniano kąt α nachylenia odgałęzień w stosunku do szczeliny głównej w zakresie od 45° do 90° , co 15° . Do obliczeń wykorzystano program ANSYS. Dla przypadku rozciągania i ścinania wzdłużnego użyto ośmiowzłowych elementów skończonych typu PLANE82 w płaskim stanie odkształcenia, natomiast dla przypadku ścinania poprzecznego – ośmiowzłowego elementu PLANE77. Wierzchołki szczelin otoczono specjalnymi elementami trójkątnymi, o wielkości względnej rzędu 1% długości b , uwzględniającymi charakter osobliwości pola naprężeń typu $r^{-0,5}$, gdzie r oznacza odległość od wierzchołka szczeliny.



Rys. 2. Szczelina o długości l z niewielkim symetrycznym odgałęzieniem pod kątem α , w tarczy: a) rozciąganej, b) ścinanej wzdłużnie oraz c) ścinanej poprzecznie, gdzie obciążenia zewnętrzne odniesione są do płaszczyzny szczeliny głównej



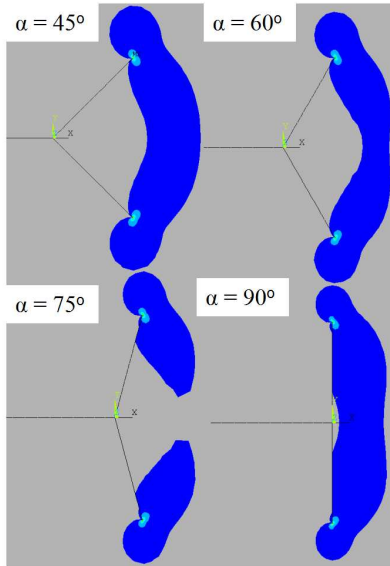
Rys. 3. Siatka elementów skończonych w okolicy rozwidlenia szczeliny A oraz wierzchołka symetrycznego odgałęzienia B.

4. POLA NAPRĘŻEŃ W STREFIE ODGAŁĘZIENIA

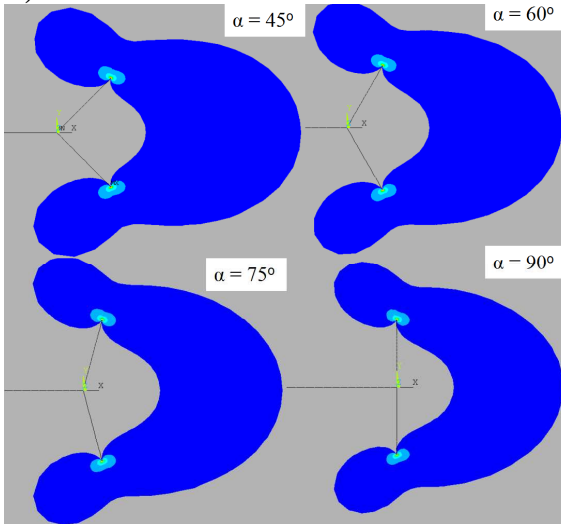
Na Rys. 4a i 4b przedstawiono mapy naprężeń zredukowanych według hipotezy H-M-H, a na rysunku 4c) pola naprężeń $\tau_{\max}$ w strefie odgałęzionych pęknięć dla trzech

przypadków obciążenia. Odpowiednie obciążenia nominalne przyłożone na odległych brzegach tarczy miały wartość jednostkową. Wyniki obliczeń numerycznych wskazują, że wielkość i kształt osobliwego pola naprężeń tworzącego się w strefie wierzchołkowej zależy od kąta α oraz rodzaju obciążenia.

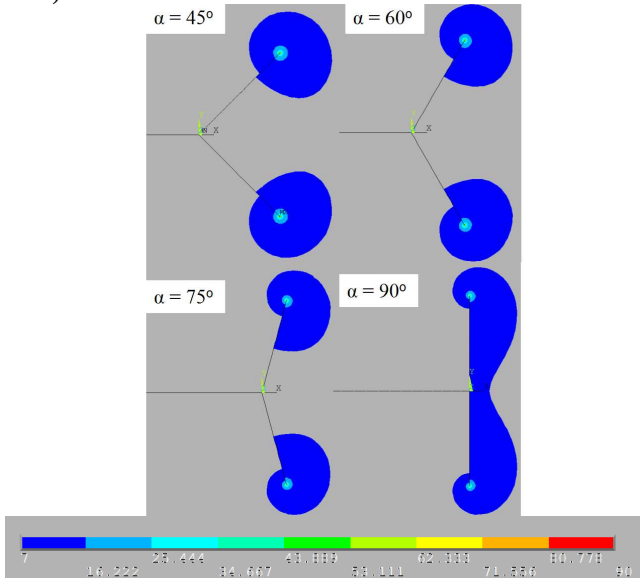
a)



b)



c)



Rys. 4. Pola naprężeń zredukowanych według hipotezy H-M-H w okolicy odgałęzień dla: a) dwuosiowego rozciągania, b) ścinania wzdłużnego oraz wartości $\tau_{\max}$ dla ścinania antypłaskiego c). Jednostkowe obciążenia nominalne odniesione do płaszczyzny szczeliny głównej

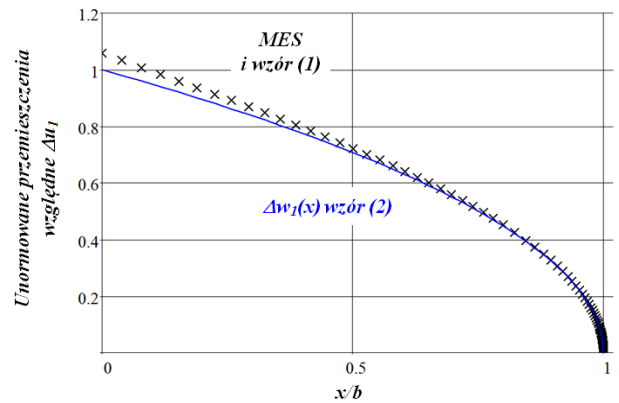
5. OPIS ANALITYCZNY ROZWARCIA SZCZELINY

Względne przemieszczenia brzegów odgałęzienia, uzyskane dla obciążeń wzdłużnych ($j=1$), poprzecznych ($j=2$) oraz prostopadłych do płaszczyzny tarczy ($j=3$), aproksymowano w każdym przypadku następującą funkcją:

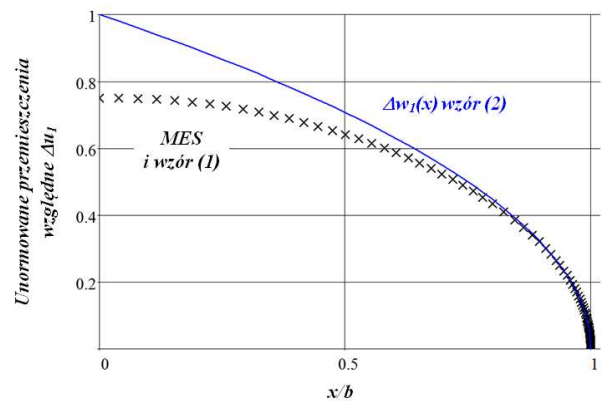
$$\Delta u_j(x, \alpha) = (A_j \cdot x^3 + B_j \cdot x^2 + C_j \cdot x + D_j) \cdot \sqrt{b-x} \quad (1)$$

której współczynniki zależne od kąta α : $A_j(\alpha)$, $B_j(\alpha)$, $C_j(\alpha)$, $D_j(\alpha)$, dopasowywano za każdym razem metodą najmniejszych kwadratów do rozwiązania numerycznego MES. Przyjęta funkcja (1) uwzględnia charakter osobliwości związanej z wierzchołkiem odgałęzienia i opisuje odpowiednimi wielomianami wartości obliczonych przemieszczeń. Początek układu współrzędnych umieszczono w wierzchołku szczeliny głównej, a położenie wierzchołka odgałęzienia odpowiadało wartości b .

a)



b)



Rys. 5. Unormowane przemieszczenie względne brzegów odgałęzienia przy ścinaniu w płaszczyźnie szczeliny głównej: $\alpha=75^\circ$ - obliczenia według $K_I^{(a)}$ (Rys. 5a), $\alpha=90^\circ$ (Rys. 5b) - obliczenia według $K_{II}^{(a)}$, x - rozwiązanie MES, linia ciągła w wierzchołku odgałęzienia - obliczenia na podstawie wzoru (2)

W celu wyznaczenia zasięgu oddziaływania osobliwych pól naprężeń w okolicy wierzchołkowej dokonano, w każdym przypadku, aproksymacji względnych przemieszczeń obydwu brzegów odgałęzienia, wykorzystując znane klasyczne wzory na przemieszczenia względne w zależności

od lokalnego współczynnika $K_j^{(a)}$:

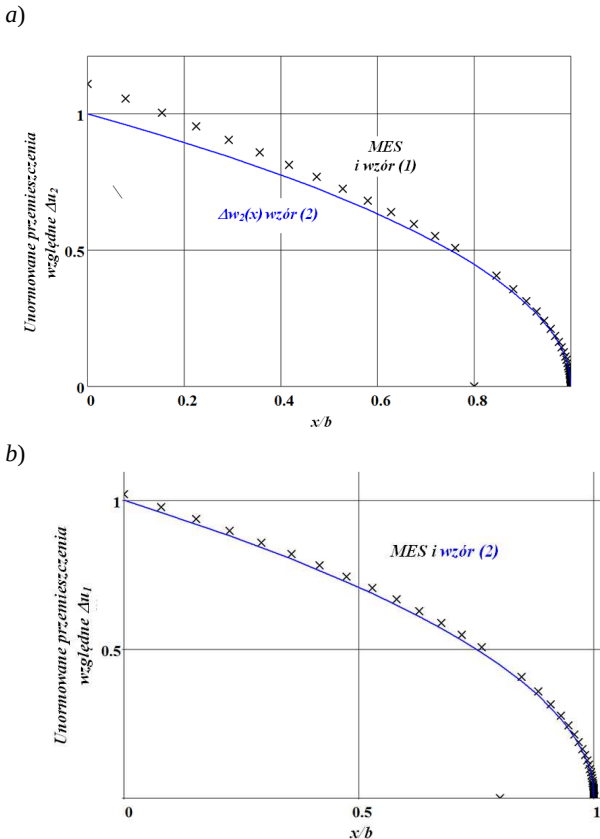
$$\Delta w_j(x, \alpha) = \frac{4\sqrt{2} \cdot (1 - \nu^2)}{\sqrt{\pi} \cdot E} \cdot K_j^{(\alpha)} \cdot \sqrt{b - x}, \text{ dla } j = 1, 2 \quad (2)$$

$$\Delta w_j(x, \alpha) = \frac{4\sqrt{2} \cdot (1 + \nu)}{\sqrt{\pi} \cdot E} \cdot K_j^{(\alpha)} \cdot \sqrt{b - x}, \text{ dla } j = 3$$

W celu umożliwienia porównania otrzymanych wyników *MES* z rozwiązaniem analitycznym ważnym w okolicy wierzchołkowej pojedynczej szczeliny (Ishida i Nishino, 1982; Tada i inni, 1973), wszystkie wyznaczone względne przemieszczenia brzegów małego odgałęzienia unormowano względem wartości N_j opisanych wzorami (3), które odpowiadają przemieszczeniom w *PSO* brzegów w odległości b za wierzchołkiem hipotetycznej szczeliny prostoliniowej o współczynniku intensywności naprężenia $K_j^{(a)}$.

$$N_j = \frac{4\sqrt{2} \cdot (1 - \nu^2)}{\sqrt{\pi} \cdot E} \cdot K_j^{(\alpha)} \cdot \sqrt{b}, \text{ dla } j = 1, 2 \quad (3)$$

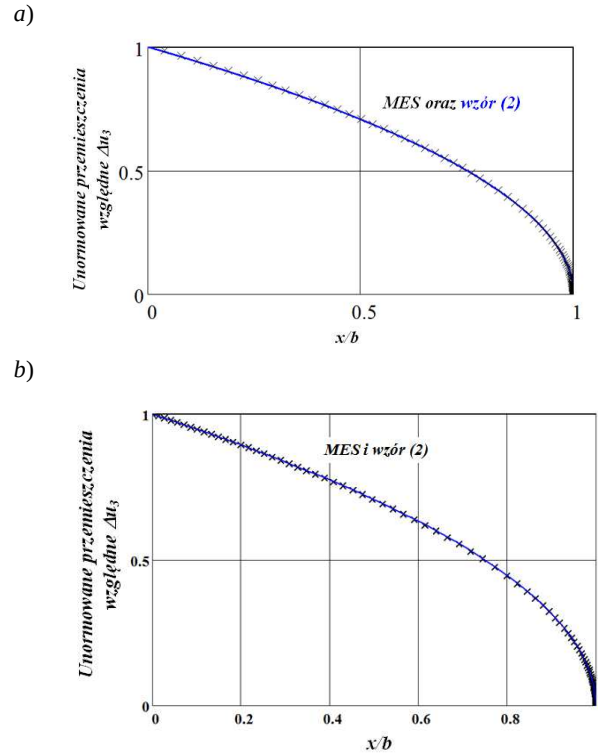
$$N_j = \frac{4\sqrt{2} \cdot (1 + \nu)}{\sqrt{\pi} \cdot E} \cdot K_j^{(\alpha)} \cdot \sqrt{b}, \text{ dla } j = 3$$



Rys. 6. Przemieszczenie względne brzegów odgałęzienia przy rozciąganiu w płaszczyźnie szczeliny głównej, $\alpha=75^\circ$, x – rozwiązanie *MES*. Linia ciągła: a) – obliczenia według $K_{II}^{(a)}$ oraz b) według $K_I^{(a)}$ na podstawie wzoru (2)

Na Rys. 5a przedstawiono unormowane przemieszczenia względne brzegów odgałęzienia w kierunku osi x dla kąta $\alpha=75^\circ$, przy jednostkowym obciążeniu ścinającym

w płaszczyźnie szczeliny głównej. Dla porównania zamieszczono hipotetyczne przemieszczenia obliczone według wzoru (2). Widoczne są znaczące różnice ilościowe i jakościowe między rozwiązaniem *MES* a rozwiązaniami wykorzystującymi lokalne człony osobliwe przemieszczeń. W wyniku zastosowania wzoru (1) do opisu rozwarcia brzegów na całej długości nadpęknięcia otrzymano krzywe praktycznie pokrywające się z rozwiązaniem *MES*, których nie pokazano na Rys. 5 – 7 dla zachowania przejrzystości.



Rys. 7. Przemieszczenie względne brzegów odgałęzienia dla ścinania antypłaskiego: a) $\alpha=75^\circ$, b) $\alpha=90^\circ$, x – *MES*. Linia ciągła – obliczenia według $K_{III}^{(a)}$, wzór (2)

Podobne porównanie przedstawiono na Rys. 5b) dla odgałęzienia pod kątem $\alpha=90^\circ$ i przy obciążeniu ścinającym τ w płaszczyźnie szczeliny głównej. Wybrane krzywe względnych przemieszczeń brzegów odgałęzionego pęknięcia przedstawiono również na Rys. 6 i 7.

Z przeprowadzonej analizy względnych przemieszczeń brzegów pęknięcia wynika, że zarówno kształt jak i wielkość rozwarcia zależą od kąta α oraz typu obciążenia, ponadto są one jakościowo odmienne od znanego rozwiązania opartego na teorii szczelin prostoliniowych.

Wyznaczenie wartości przemieszczeń brzegów w strefie początkowej odgałęzionego pęknięcia możliwe jest wyłącznie metodami numerycznymi, a wszelkie próby interpolacji, bez uwzględniania rozwiązania *MES*, mogą być obciążone poważnymi błędami.

6. WSPÓŁCZYNNIK UWALNIANIA ENERGII

Wielkość energii uwalnianej dla każdego z dwóch symetrycznych odgałęzień o długości b , wyrażonej współ-

czynnikiem G , wyznaczono z następującego wzoru:

$$G(\alpha) = \left| \begin{array}{c} G_I(\alpha) \\ G_{II}(\alpha) \\ G_{III}(\alpha) \end{array} \right| = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cdot b} \left| \begin{array}{c} \int_0^b \sigma_{\alpha\alpha}(x) \cdot \Delta u_1(x, \alpha) \cdot dx + \\ \int_0^b \tau_{xy}(x) \cdot \Delta u_2(x, \alpha) \cdot dx + \\ \int_0^b \tau_{yz}(x) \cdot \Delta u_3(x, \alpha) \cdot dx \end{array} \right| \quad (4)$$

gdzie: $\sigma_{\alpha\alpha}$, τ_{xy} , τ_{yz} – naprężenie normalne i styczne w płaszczyźnie odgałęzienia wynikające z rozwiązania analitycznego dla szczeliny głównej, Δu_j – względne przemieszczenia (wzdłużne lub poprzeczne) brzegów odgałęzienia obliczone MES i opisane wzorem (1), b – długość odgałęzienia.

Tab. 1. Unormowane wartości współczynników $G_I^*(\alpha)$ i $G_{II}^*(\alpha)$ dla rozciągania, obliczone proponowaną metodą oraz według lokalnych wartości współczynnika intensywności naprężeń $K_I^{(a)}$ oraz $K_{II}^{(a)}$

Dwuosiowe rozciąganie						
Kąt $\alpha [^\circ]$	Obecne rozwiązanie			Rozwiązanie według [8]		
	$G_I^*(\alpha)$	$G_{II}^*(\alpha)$	$G^*(\alpha)$	$G_{IPK}^*(\alpha)$	$G_{IIPK}^*(\alpha)$	$G_{PK}^*(\alpha)$
45	0,485	0,028	0,513	0,488	0,019	0,507
60	0,383	0,067	0,449	0,380	0,053	0,432
75	0,259	0,098	0,357	0,247	0,085	0,333
90	0,145	0,107	0,253	0,155	0,095	0,250

Tab. 2. Unormowane wartości współczynników $G_I^*(\alpha)$ i $G_{II}^*(\alpha)$ dla ścinania w płaszczyźnie szczeliny obliczone proponowaną metodą oraz według lokalnych wartości współczynnika intensywności naprężeń $K_I^{(a)}$ oraz $K_{II}^{(a)}$ (Seweryn, 2004)

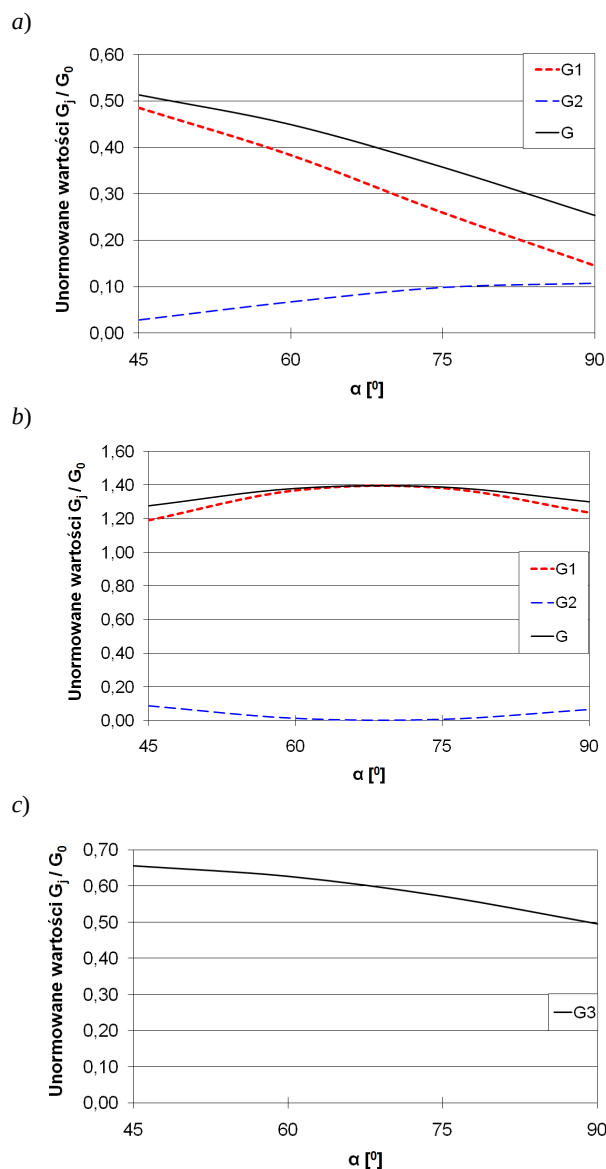
Ścinanie w płaszczyźnie szczeliny						
Kąt $\alpha [^\circ]$	Obecne rozwiązanie			Rozwiązanie według $K_I^{(a)}$ oraz $K_{II}^{(a)}$		
	$G_I^*(\alpha)$	$G_{II}^*(\alpha)$	$G^*(\alpha)$	$G_{IPK}^*(\alpha)$	$G_{IIPK}^*(\alpha)$	$G_{PK}^*(\alpha)$
45	1,191	0,086	1,277	1,324	0,008	1,332
60	1,369	0,012	1,381	1,338	0,008	1,347
75	1,383	0,006	1,389	1,342	0,006	1,348
90	1,237	0,065	1,302	1,187	0,055	1,243

Tab. 3. Unormowane wartości współczynników $G_{III}^*(\alpha)$ dla ścinania antypłaskiego obliczone proponowaną metodą oraz według lokalnych wartości współczynnika intensywności naprężeń $K_{III}^{(a)}$ (Seweryn, 2004)

Ścinanie antypłaskie		
Kąt $\alpha [^\circ]$	Obecne rozwiązanie	Rozwiązanie według $K_{III}^{(a)}$
	$G_{III}^*(\alpha)$	$G_{IIIPK}^*(\alpha)$
45	0,656	0,649
60	0,627	0,621
75	0,572	0,564
90	0,496	0,487

Wzór ten wyraża klasyczną definicję współczynnika uwalniania energii prawdziwą dla szczeliny prostoliniowej z tą różnicą, że obecnie wartości względnych przemieszczeń brzegów pęknięcia na długości b nie są znane. Zmienia x , (wzdłuż odgałęzienia) związana jest z lokalnym ukła-

dem współrzędnych (Rys. 1). Wartości naprężeń normalnych i stycznych, uwalnianych wzdłuż powierzchni odgałęzienia, są znane i zależą od wartości współczynników K_I , K_{II} i K_{III} szczeliny głównej, natomiast funkcje względnych przemieszczeń brzegów odgałęzienia nie są znane (oprócz kąta $\alpha=0$) i muszą być wyznaczone metodami numerycznymi. Zagadnienie to rozwiązano obecnie dla trzech niezależnych przypadków obciążenia zdefiniowanych wcześniej i przyłożonych dostatecznie daleko od szczeliny z symetrycznym odgałęzieniem. Unormowane wartości $G_j^*(\alpha)$ współczynnika $G(\alpha)$ dla odpowiednich obciążeń przedstawiono w Tab. 4, 5 i 6. Zostały one odpowiednio unormowane względem wartości $G_0(0)$, czyli dla prostej szczeliny głównej o długości $l+b$.



Rys. 8. Unormowane wartości energii uwalnianej $G_j(\alpha)$ dla a) rozciągania, b) ścinania wzdłużnego i c) ścinania poprzecznego

Dla porównania zamieszczono hipotetyczne wartości unormowane $G_{jPK}(\alpha)$ wyliczone według wzorów podanych w pracy Palaniswamy i Knaussa (1972) w oparciu o lokalne współczynniki intensywności naprężenia $K_I^{(a)}$, $K_{II}^{(a)}$ i $K_{III}^{(a)}$.

Wyniki obliczeń unormowanych współczynników $G_I^*(\alpha)$, $G_{II}^*(\alpha)$ i $G_{III}^*(\alpha)$ przedstawiono na Rys. 8a – 8c.

Podobne zagadnienia dotyczące szczeliny głównej z pojedynczym odgałęzieniem przedstawiono w pracy Chatterjee (1975).

7. WNIOSKI

Na podstawie przeprowadzonej analizy numerycznej można stwierdzić, że kształt względnego rozwarcia brzegów każdego z symetrycznych odgałęzień odbiega pod względem jakościowym od kształtu rozwarcia okolicy wierzchołka szczeliny prostej. Dotyczy to przede wszystkim przypadków rozciągania i ścinania wzdłużnego, gdzie różnice między rozwarciem obliczonym z wykorzystaniem MES a wyznaczonym ze wzorów klasycznych z uwzględnieniem lokalnych wartości $K_I^{(a)}$ i $K_{II}^{(a)}$ zasadniczo się różnią. Natomiast w przypadku ścinania antypłaskiego różnice przemieszczeń i odpowiadających im energii $G_{III}(\alpha)$ są nieznaczne. W pracy analizowano kąt α w zakresie 45° – 90° , dla którego kształty rozwarcia odgałęzień są znacząco odmienne od przemieszczeń brzegów szczeliny prostoliniowej oraz odpowiadają kątom spotykanym w zagadnieniach praktycznych.

Zaproponowana metoda wyznaczania współczynnika $G(\alpha)$ umożliwia uogólnienie koncepcji współczynnika uwalniania energii w sytuacji powstawania podwójnego odgałęzienia w wierzchołku szczeliny głównej. Przeprowadzona analiza pozwala opisać ilościowo i jakościowo wartość energii uwalnianej w czasie powstawania takich odgałęzień, przy czym możliwe jest wyznaczenie nie tylko wartości całkowitej współczynnika uwalniania energii, ale również poszczególnych jego składników $G_I(\alpha)$, $G_{II}(\alpha)$ i $G_{III}(\alpha)$.

W przypadku rozciągania współczynnik $G_I(\alpha)$ maleje monotonicznie ze wzrostem kąta pęknięcia, natomiast współczynnik $G_{II}(\alpha)$ wzrasta wraz z narastaniem kąta α .

W przypadku ścinania wzdłużnego szczeliny głównej, maksimum uwalnianej energii odpowiada kątowi około 75° stopni.

Wartości $G_j(\alpha)$ obliczane metodą bezpośrednią, przez całkowanie iloczynu przemieszczeń i uwalnianych naprężeń, są zbliżone do ich odpowiedników obliczanych z lokalnych wartości współczynników intensywności naprężeń $K_j^{(a)}$ dla wierzchołka odgałęzienia.

LITERATURA

1. **Boguszewski T., Molski K.** (2008), Energetyczne aspekty wzrostu szczelin rozgałęzionych, XVI Francusko-Polskie Seminarium Mechaniki, Instytut PBM PW, Warszawa, 13-20.
2. **Boguszewski T., Molski K.** (2009), Efekty naprężeniowe, deformacyjne i energetyczne w okolicy wierzchołkowej szczeliny z pojedynczym odgałęzieniem, *Acta Mechanica et Automatica*, Vol. 3 No. 3, Politechnika Białostocka, Białystok, 9-15.
3. **Chatterjee S.N.** (1975) The stress field in the neighborhood of a branched crack in infinite elastic sheet, *Int. J. Solid Struct.*, 11.
4. **Husain M.A., Pu S.L., Underwood J.** (1974), *Strain energy release rate for a crack under combined Mode-I and II*, ASTM STP, 560, 2-28.
5. **Irwin G.R.** (1957), Analysis of stress and strains near the end of crack traversing a plate, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 24, 361-365.
6. **Ishida M., Nishino T.** (1982) Formulae of Stress Intensity Factor of Bent Cracks in Plane Problems, *Trans. Japan Soc. Mech. Engr.*, Vol 48-430, 729-738.
7. **Murakami Y.**, ed. (1987), *Stress Intensity Factors Handbook*, Sec. 7, *Nonlinear Shaped Cracks in an Infinite Plate*, Pergamon Press, 349-372.
8. **Palaniswamy K., Knauss E.G.** (1972), Propagation of a crack under general in-plane tension, *Int. J. Fract. Mech.*, 8, 114-117.
9. **Seweryn A.** (2004), *Modelowanie zagadnień kumulacji uszkodzeń i pęknięcia w złożonych stanach obciążeń*, Białystok, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, 2004.
10. **Sneddon I.N.** (1946), The distribution of stress in the neighborhood of crack in a elastic solid, *Proc. Roy Soc. London*, A 187, 229-260,
11. **Tada H., Paris P., Irwin G.R.** (1973), *The stress analysis of crack handbook*, Boston, Academic Press.

ANALYSIS OF STRESSES, COD AND ENERGY RELEASED RATE G FOR SYMMETRICALLY BRANCHING CRACKS

Abstract: Mutual interactions between two neighboring singular stress fields for symmetrically branching cracks are analyzed. Using the finite element method and ANSYS program, relative crack opening displacements and range of validity of the singular stress fields have been obtained. Some special functions were chosen for describing crack face opening and calculating the energy release rate G and its particular components. Numerical results made it possible to explain the influence and applicability of stress intensity factors for such cracks and show qualitatively additional effects and cracking conditions around the crack tip for plane and anti-plane crack problems.

STRUKTURA I WŁAŚCIWOŚCI MECHANICZNE ZŁĄCZY SPAWANYCH STALI FERRYTYCZNEJ X2CrNi12 ZE STAŁĄ AUSTENITYCZNĄ X5CrNi 18-10

Krzysztof CIECHACKI*, Tadeusz SZYKOWNY*

*Zakład Inżynierii Materiałowej, Wydział Inżynierii Mechanicznej, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy,
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

krzysztof.ciechacki@utp.edu.pl, tadeusz.szykowany@utp.edu.pl

Streszczenie: Podstawowym celem pracy jest powiązanie charakteru mikrostruktury różnoimiennych złączy spawanych z podstawowymi właściwościami mechanicznymi. W badaniach właściwości mechanicznych określono rozkład makro i mikrotwardości w obrębie złącza, wytrzymałość na rozciąganie, uderzenie oraz wykonano próbę zginania. W badaniach strukturalnych posłużono się metodą mikroskopii świetlnej i mikroskopii skaningowej SEM oraz badań dyfrakcyjnych rentgenowskich. Do badań przyjęto stal o strukturze ferrytycznej X2CrNi12 i stal o strukturze austenitycznej X5CrNi 18-10 w postaci blach o grubości 5mm. Spawanie wykonano metodą GMA przy zastosowaniu trzech różnych gatunków spoiwa: 307 (G 18 8 Mn); 309LSi (G 23 12 L Si); OK. Tubrot 14.27.

1. WPROWADZENIE

Ze względu na bardzo wysoki, ciągle rosnący koszt niklu, oraz czynników ekonomicznych uzasadnione jest spawanie stali kwasoodpornej austenitycznej ze stałą odporną na korozję o strukturze ferrytycznej. Według danych z grudnia 2009, cena stali odpornej na korozję o strukturze ferrytycznej gatunku X2CrNi12 wynosi 251€ za tonę natomiast stali o strukturze austenitycznej typu X5CrNi 18-8 wynosi 1022€ za tonę. Cena podstawowego składnika stali austenitycznych – niklu, w styczniu 2010 roku kształtowała się na poziomie 22 000 \$ i według prognoz cena ta do końca półrocza wzrośnie o 26÷30% (<http://www.stalnierdzenia.com>). W świetle przytoczonych danych zastępowanie lub łączenie stali ferrytycznej z austenityczną jest pod względem ekonomicznym w pełni uzasadnione.

Ze względów technicznych od złączy spawanych wymaga się odpowiednich właściwości mechanicznych takich jak: wytrzymałość na rozciąganie, zginanie, ciągliwość, uderzenie oraz odporności na działanie agresywnych mediów. Połączenia różnoimienne mają zastosowanie w budowie chemikaliowców, aparatury i instalacji chemicznych, siłowniach parowych itp. (Lancaster, 1967; Dunn i Bergstrom, 2003; Łabanowski, 2005).

Autorzy prac dotyczących spawania stali typu „Duplex” (Ciechacki i Medaj, 2008; Łabanowski, 1997; Pocica i Bański, 2002; Bruzda i Łomozik, 2002; Łukoć i Nowacki, 2004; Nowacki, 2009; Przetakiewicz i Kozak, 1995) w wyniku przeprowadzonych badań sygnalizują następujące problemy: możliwość powstawania pęknięć gorących, konieczność utrzymania optymalnej relacji ilościowej ferrytu i austenitu oraz możliwość wystąpienia fazy σ - FeCr.

W różnoimiennych złączach stali austenitycznej i ferrytycznej w obrębie złącza struktura w sposób ciągły zmienia się od austenitycznej poprzez obszar dwufazowy do struktury ferrytycznej. Nie do uniknięcia jest więc w złączu różnoimiennym tych stali wystąpienie sytuacji strukturalnej niekorzystnej z punktu widzenia połączeń stali duplex.

Możliwość kształtowania struktury i własności złącza stwarza zastosowanie odpowiedniego gatunku spoiwa. Autor (Lancaster, 1967) wskazuje, że złącza spawane bezpośrednio między rurami ze stali austenitycznej i stali ferrytycznej zachowują się zadowalająco w eksploatacji siłowni parowych i instalacji chemicznych. Spoiwem, które łączy w sobie najlepszą odporność na pękanie gorące i dobrą stabilność metalurgiczną w wysokiej temperaturze jest gatunek zawierający: 17% Cr, 13% Ni, 2,5% Mo.

W niniejszej pracy przyjęto do badań trzy gatunki spoiwa o strukturze austenitycznej, różne pod względem składu chemicznego i postaci (druć lity, druc proszkowy). Celem pracy jest ocena wpływu spoiwa na strukturę i wynikające z niej właściwości mechaniczne złącza różnoimiennego stal austenityczna-stal ferrytyczna.

2. MATERIAŁ, PROGRAM I METODYKA BADAŃ

Do badań przyjęto dwa gatunki stali wysokostopowych o składzie chemicznym podanym w tabeli 1. Blachy o grubości 5mm, ukosowane na V, spawano trzema gatunkami spoiwa oznaczonymi odpowiednio A, B, C. W dalszym ciągu pracy przyjęto oznaczenie poszczególnych złączy zgodnie z wyżej wymienionymi gatunkami spoiwa. Skład chemiczny przyjętych stali przedstawia tabela 1.

Tab. 1. Skład chemiczny materiałów podstawowych, % mas

Gatunek	C	Cr	Mn	Ni	P	Si
X2CrNi12	0,020	11,240	0,540	0,350	0,021	0,660
X5CrNi 18-10	0,017	18,112	1,797	8,070	0,028	0,292

Właściwości mechaniczne materiałów podstawowych podano w tabeli 2.

Tab. 2. Właściwości mechaniczne materiałów podstawowych

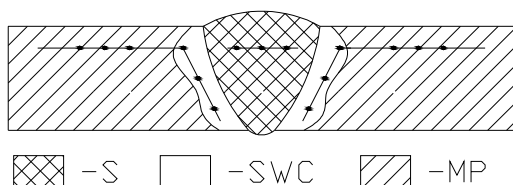
Gatunek	R _m , MPa	R _{p0,2} , MPa	A ₅ , %	HRB
X2CrNi12	538,0	419,0	20,7	87,7
X5CrNi 18-10	638,7	363,7	52,7	94,6

Skład chemiczny zastosowanych spoiw podano w tabeli 3.

Tab. 3. Skład chemiczny spoiw, % mas

Ozn	Gatunek /postać	C	Cr	Mn	Ni	P	Si
A	309L-Si Drut lity	0,020	23,200	1,900	13,800	0,016	0,780
B	307/G18 8 Mn Drut lity	0,079	19,223	6,737	8,816	0,002	0,817
C	OK. Tubrot 14.27 Drut proszkowy	0,030	22,000	0,900	9,000	-	0,900

Doczołowe złącza spawane blach wykonano w dwóch przejściach stosując pierwszy ścieg przetopowy oraz drugi wypełniający. Spawano prądem stałym (DC-) metodą MAG z zastosowaniem gazu osłonowego będącego mieszkanką 97,5% Ar + 2,5% CO₂.

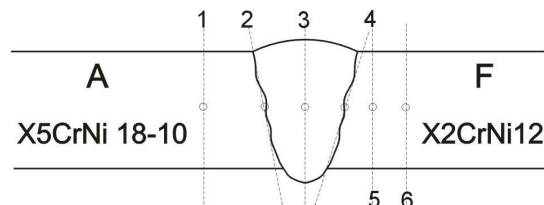


Rys. 1. Schemat złącza z zaznaczonymi miejscami pomiarów twardości HV10, S – spoina, SWC – strefa wpływu ciepła, MP – materiał podstawowy

Ze spawanych blach wycięto próbki do badań wytrzymałości na rozciąganie wg PN-EN ISO 6892-1. Badania udarności przeprowadzono na próbkach z karbem V zgodnie z PN-EN 10045-1 w temperaturze -20°C. Próbkę do zginania odpowiadały wymaganiom podanym w normie PN-EN 15614-1. Z każdego złącza wykonano poprzeczne szlify makroskopowe trawione odczynnikiem Adlera. Obserwacjom mikroskopowym poddano zglądy poprzeczne trawione odczynnikiem na bazie kwasu fluorowodorowego. Na zglądach złączy spawanych określano rozkład twardości metodą Vickersa HV10 zgodnie ze schematem zamieszczonym na rysunku 1.

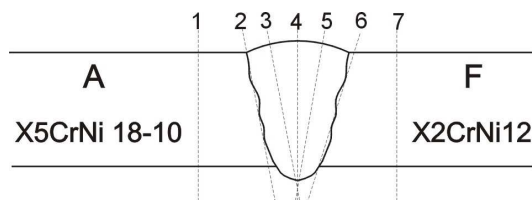
Pomiarów mikrotwardości na przekroju złączy spa-

wanych dokonano przy użyciu obiektywu Hannemana stosując obciążenie 1N. W miejscach zaznaczonych na rysunku 2 wykonano po 7 pomiarów mikrotwardości.



Rys. 2. Schemat złącza z zaznaczonymi miejscami pomiarów mikrotwardości

W celu pełniejszej charakterystyki faz wchodzących w skład badanych złączy na zglądach wzdłużnych wykonano dyfrakcyjne badania rentgenowskie, naświetlając wiązką promieniowania Rtg powierzchnie, których ślady zaznaczono na rysunku 3.



Rys. 3. Schemat złącza z zaznaczonymi śladami powierzchni zglądów naświetlanych wiązką promieniowania Rtg A – stal austenityczna, F – stal ferrytyczna

Zastosowano promieniowanie lampy z anodą kobaltową filtrowane żelazem. Dyfraktogramy rejestrowano w zakresie kątowym 2θ od 49,50° do 53,50° z krokiem 0,01°. W analizowanym przedziale kątowym występują linie dyfrakcyjne od płaszczyzn krystalograficznych {111} austenitu oraz {110} ferrytu. Na podstawie położenia kąowego maksimum tych linii wyliczono parametry sieciowe występujących faz wg wzoru:

$$a = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}, \quad (1)$$

gdzie: a – parametr sieciowy analizowanej fazy, nm; λ – długość fali promieniowania Rtg 0,179021, nm; θ – położenie kątowe maksimum linii dyfrakcyjnej, °; h , k , l – wskaźniki płaszczyzn wg Millera.

Analizie poddano również szerokości kątowe $b_{1/2}$ linii dyfrakcyjnych zmierzone w połowie ich maksymalnej intensywności względnej. Ilościową analizę fazową wykonano metodą bezpośredniego porównania Averbacha-Cohena (Karp i in., 1970). Udział objętościowy austenitu wyznaczano ze wzoru:

$$V_\gamma = \frac{1}{1 + \frac{I_\alpha}{I_\gamma} \cdot R} \cdot 100\%, \quad (2)$$

gdzie: I_α – intensywność całkowita względna linii {110} ferrytu; I_γ – intensywność całkowita względna linii {111} austenitu; R – współczynnik wynoszący 0,85.

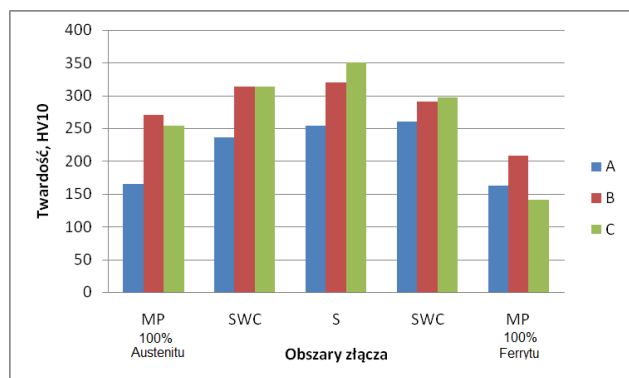
3. WYNIKI BADAŃ WRAZ Z ANALIZĄ

Skład chemiczny przyjętych do badań stali (Tab. 1) odpowiada gatunkom: X2CrNi12 o strukturze ferrytycznej i X5CrNi18-8 o strukturze austenitycznej. Wytrzymałość na rozciąganie R_m stali X2CrNi12 powinna zgodnie z normą PN-EN 10088-1 wynosić 450÷650 MPa przy wydłużeniu względnym A_5 nie mniejszym od 20%. Wymagania wobec stali X5CrNi 18-10 są następujące: $R_m = 500÷700$ MPa przy $A_5 \geq 50\%$. Przyjęte do badań dwa gatunki stali spełniają wymagania określone normą (Tab. 2).

Tab. 4. Właściwości mechaniczne złączy – statyczna próba rozciągania

Lp.	Oznaczenie złącza	R_m , MPa	Wydł. A_5 , %	Miejsce zerwania
1.	A	502,0	16,7	SWC po stronie stali X2CrNi12
2.	B	496,1	19,1	
3.	C	502,0	16,7	

Zniszczenie złączy spawanych następowało we wszystkich przypadkach w stali o strukturze ferrytycznej w bezpośrednim sąsiedztwie strefy wpływu ciepła. Należy zauważyć, iż zarówno wartości R_m jak i A_5 określone na złączach spawanych są mniejsze od uzyskanych w badaniach testowych dla materiału podstawowego stali X2CrNi12. Ta obserwacja wskazuje na zachodzenie podczas cyklu cieplnego spawania zjawisk strukturalnych obniżających w konsekwencji równocześnie właściwości wytrzymałościowe jak i plastyczne stali X2CrNi12. Skutkuje tu zapewne przesycenie roztworu stałego i rozrost ziaren fazy α w strefie przegrzania.



Rys. 4. Twardość średnia HV10 w poszczególnych strefach złączy spawanych

Wyniki prób zginania wszystkich złączy, zarówno w przypadku naprężeń rozciągających od strony lica, jak i grani spoiny dały rezultat pozytywny. Kąt gięcia osiągnął 180°. Badania wizualne złączy poddanych próbie zginania nie wykazały obecności naderwań ani pęknięć. Jest to wynik świadczący o dużej plastyczności, prawidłowej, pozbawionej wad makrostruktury jak i braku kruchych składni-

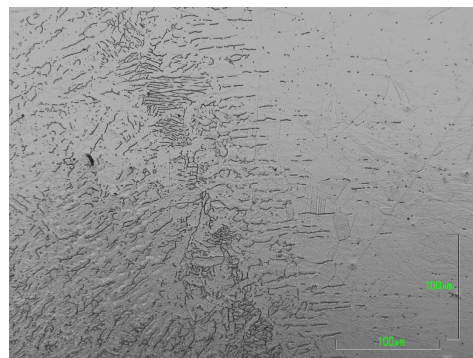
ków mikrostruktury. Przeprowadzone badania radiograficzne nie wykazały występowania wad złączy spawanych typu pęknięcia, przyklejenia, pęcherze.

Rozkład twardości HV10 dla poszczególnych obszarów złączy przedstawia wykres na rysunku 4. W każdej strefie złączy wykonano po 3 pomiary twardości wg. schematu na rysunku 1.

Twardość w SWC (Rys. 4) jest podwyższona względem materiału podstawowego zarówno po stronie stali austenitycznej jak i ferrytycznej. Maksimum twardości przypada w strefie spoiny. Wystąpienie maksimum twardości w centralnej strefie spoiny należy przypisać umocnieniu roztworowemu oraz drobnoziarnistości struktury. W przypadku każdego ze złączy, spoiwo wprowadza do strefy spoiny zwiększoną zawartość składników stopowych (Cr, Ni, Mn, Si), od występującej w materiałach podstawowych. Spoiwo B i C wprowadza do spoin dodatkowo podwyższony udział węgla (Tab. 1, Tab. 3).

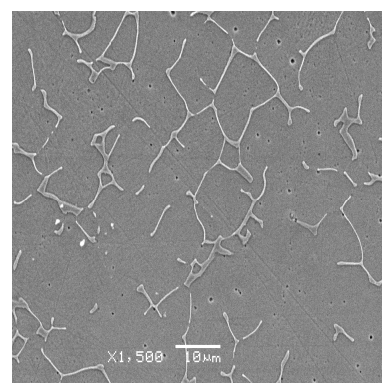
Badania makroskopowe złączy spawanych wykazały w każdym przypadku prawidłowy przetop, brak pęknięć, przyklejeń, pęcherzy, wtrąceń i poprawne uformowanie lica i grani spoiny. Strefa wpływu ciepła po stronie stali ferrytycznej jest szersza aniżeli po stronie stali austenitycznej.

Charakterystyczne obszary złącza spawanego wykonane spoiwem A przedstawiają Rys. 5, 6, 7. Rys. 5 przedstawia mikrostrukturę na granicy materiału podstawowego i spoiny od strony stali austenitycznej

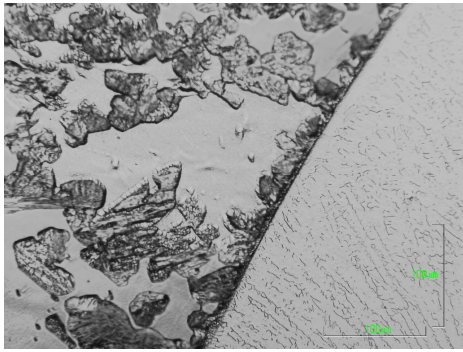


Rys. 5. Mikrostruktura obszaru granicznego, spoina – materiał podstawowy od strony stali austenitycznej, spoiwo A

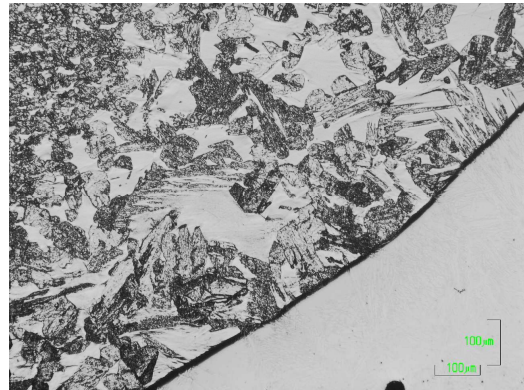
Rysunek 6 przedstawia obszar środkowy spoiny natomiast rysunek 7 ilustruje obszar graniczny spoina – materiał podstawowy od strony stali ferrytycznej.



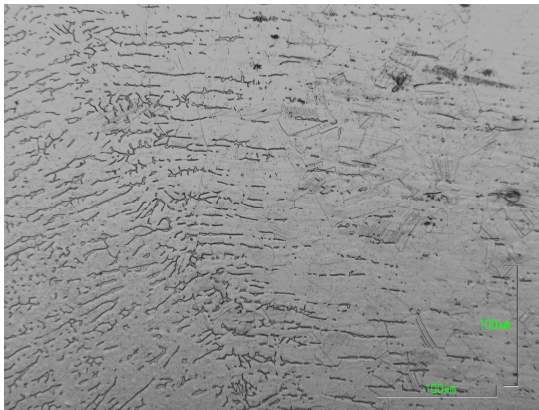
Rys. 6. Mikrostruktura obszaru środkowego spoiny, spoiwo A



Rys. 7. Mikrostruktura obszaru granicznego, spoina – materiał podstawowy, od strony stali ferrytycznej, spoiwo A



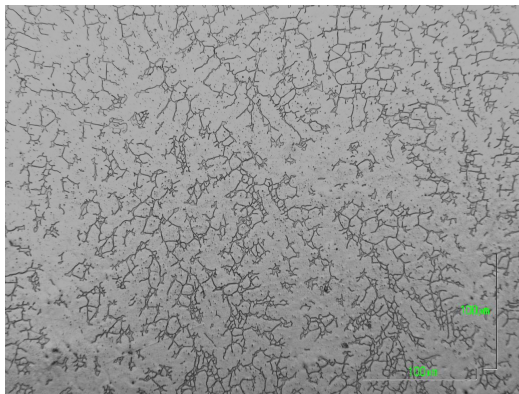
Rys. 10. Mikrostruktura obszaru granicznego, spoina – materiał podstawowy, od strony stali ferrytycznej, spoiwo B



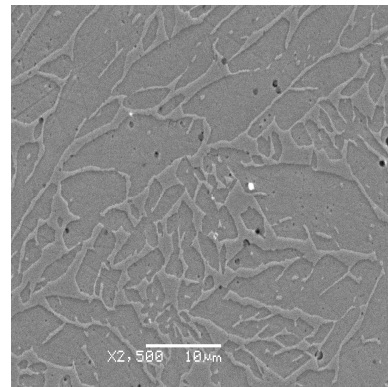
Rys. 8. Mikrostruktura obszaru granicznego, spoina – materiał podstawowy, od strony stali austenitycznej, spoiwo B



Rys. 11. Mikrostruktura obszaru granicznego, spoina – materiał podstawowy, od strony stali austenitycznej, spoiwo C



Rys. 9. Mikrostruktura obszaru środkowego spoiny, spoiwo B



Rys. 12. Mikrostruktura obszaru środkowego spoiny, spoiwo C

Wybrane mikroobszary złącza spawanego przy użyciu spoiwa B przedstawiają rysunki 8, 9, 10. Rysunek 8 przedstawia mikrostrukturę na granicy materiału rodzimego i spoiny od strony stali o strukturze austenitycznej.

Rys. 9 przedstawia obszar środkowy spoiny natomiast Rys. 10 ilustruje obszar graniczny spoina – materiał podstawowy od strony stali ferrytycznej.

Wybrane mikroobszary złącza spawanego przy użyciu spoiwa C przedstawiają Rys. 11, 12, 13. Rys. 11 przedstawia mikrostrukturę na granicy materiału podstawowego i spoiny od strony stali o strukturze austenitycznej.

Rys. 12 przedstawia obszar środkowy spoiny natomiast Rys. 13 ilustruje granicę spoiny od strony stali ferrytycznej.



Rys. 13. Mikrostruktura obszaru granicznego, spoina – materiał podstawowy, od strony stali ferrytycznej, spoiwo C

Analiza mikrostruktury złączy A,B,C przedstawionych na Rys. 5, 8, 11 wykazuje, iż w mikroobszarze stal austenityczna – spoina występują kryształy międzykomórkowego ferrytu na tle austenitu. W przypadkach złączy A i B są one względem siebie równoległe (Rys. 5, 8) natomiast w złączy C brak jest wyraźnej orientacji (Rys. 11). Granica materiał podstawowy – spoina ma łagodne przejście. W środkowej strefie złączy A, B i C (Rys. 6, 9, 12) występuje mieszanina austenityczno – ferrytyczna o siatkowym rozmieszczeniu ferrytu. Siatkowa postać ferrytu pozwala na wyznaczenie średniej średnicy ziarna austenitu. Wynosi ona odpowiednio dla złączy A, B, C: 14,8; 19,4; 13,6 μm . W strefie spoiny graniczącej bezpośrednio ze stalą ferrytyczną, występują jasne ziarna ferrytu i trawiące się szaro ziarna mieszaniny ferrytu i austenitu (Rys. 7, 10, 13). Średni rozmiar ziaren ferrytu w poszczególnych złączach wynosi: A – 136 μm , B – 150 μm , C – 152 μm . Jest więc około o jeden rząd wielkości większy od rozmiaru ziaren austenitu w środku spoiny. Granica spoina – materiał podstawowy w przypadku każdego złącza jest ostra (Rys. 7, 10, 13).

Tab. 5. Wyniki pomiarów mikrotwardości

Spoivo	Skład fazowy	Miejsce pomiaru wg Rys.2	Mikrotwardość HV0,1		Odchylenie standardowe, s
A	F	1	MP	242,5	14,2
	F+A	2	SWC/S	268,9	15,8
		3	S	290,7	25,2
		4	S/SWC	ziarna białe 187,8 ziarna szare 368,7	ziarna białe 6,8 ziarna szare 34,1
		5	SWC	319,2	15,4
	A	6	MP	157	9,6
B	F	1	MP	295,9	24,8
	F+A	2	SWC/S	294,7	7,5
		3	S	251,9	11,7
		4	S/SWC	ziarna białe 192,8 ziarna szare 318,0	ziarna białe 8,3 ziarna szare 17,9
		5	SWC	275,7	27,1
	A	6	MP	203,1	7,5
C	F	1	MP	330,8	24,4
	F+A	2	SWC/S	341,2	7,6
		3	S	348,1	11,0
		4	S/SWC	ziarna białe 195,0 ziarna szare 325,5	ziarna białe 9,8 ziarna szare 45,3
		5	SWC	285,4	24,1
	A	6	MP	170,1	5,8

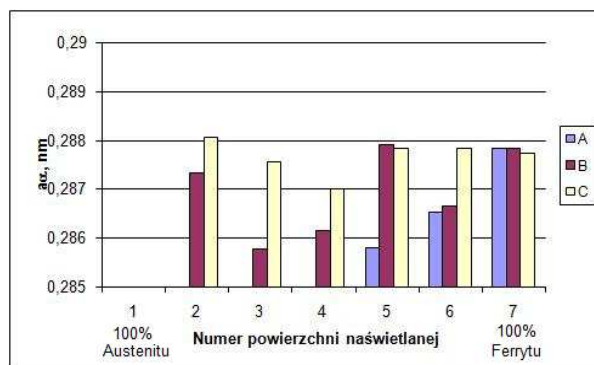
Pomiary mikrotwardości wykazują wzrost μHV01 w kierunku osi spoiny idąc zarówno od strony stali ferrytycznej jak i austenitycznej. Otrzymane wartości μHV01 zawierają się w granicach od 157 do 348 (Tab. 5). Takim wartościom μHV01 odpowiadają przekątne odcinków

od 23,1 do 34,4 μm . Są to wartości przekraczające średnią średnicę ziaren austenitu. W przypadku mieszaniny fazowej pod węglbikiem znajdowały się zarówno ziarna austenitu jak i ferrytu. Dlatego też rozkład mikrotwardości w złączach jest analogiczny do rozkładu makrotwardości. Duży rozmiar ziaren ferrytu i mieszaniny ferrytyczno – austenitycznej w miejscu pomiaru nr 4, (Tab. 5), (Rys. 7, 10, 13) pozwolił na jednoznaczne wyznaczenie mikrotwardości tych składników struktury. Mikrotwardość ferrytu mieści się pomiędzy 188 a 195 μHV01 , natomiast mieszaniny ferrytyczno – austenitycznej od 318 do 369 μHV (Tab. 5).

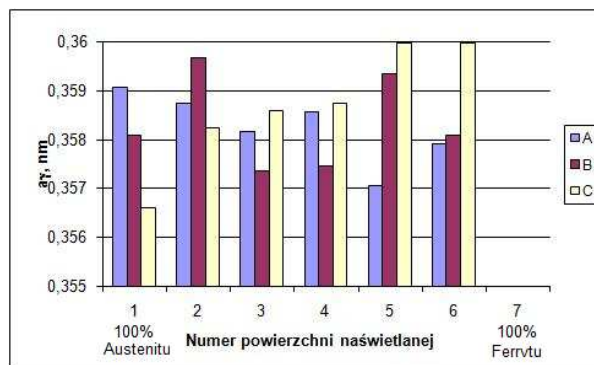
Pomiary mikrotwardości nie wykazały występowania w jakimkolwiek miejscu złączy fazy $\sigma\text{-FeCr}$, której to mikrotwardość wg literatury wynosi około 940 HV (Przybyłowicz, 2008).

Badania jakościowe rentgenograficzne materiałów podstawowych wykazały, iż w przypadku stali X2CrNi12 jedyłą fazą jest ferryt, natomiast w stali X5CrNi 18–8 wyłącznie austenit. Wyniki dyfrakcyjnych badań rentgenowskich potwierdzają obserwacje mikroskopowe.

Sporządzono wykresy parametru sieciowego i szerokości połówkowej linii dyfrakcyjnej $\{110\}$ fazy α oraz $\{111\}$ fazy γ , w zależności od usytuowania powierzchni naświetlanej wiązka promieniowania Rtg zgodnego ze schematem na Rys. 3. Zmiany parametru sieciowego ferrytu a_α w obrębie złączy przedstawia Rys. 14, natomiast austenitu a_γ , Rys. 15.

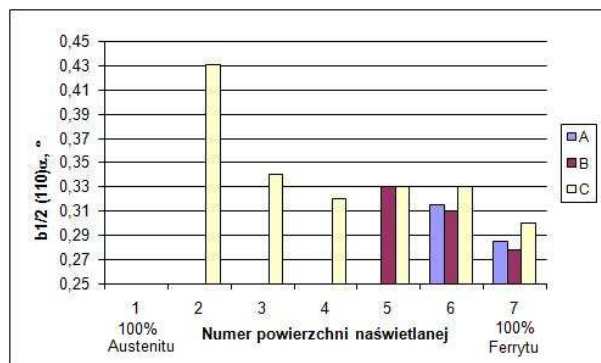


Rys. 14. Parametr sieciowy ferrytu w zależności od usytuowania powierzchni naświetlanej

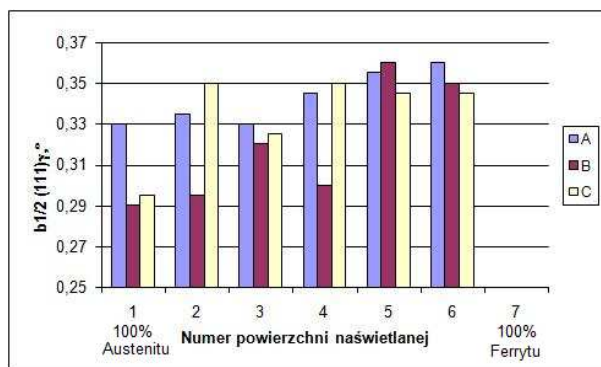


Rys. 15. Parametr sieciowy austenitu w zależności od usytuowania powierzchni naświetlanej

Zmiany szerokości połówkowej linii dyfrakcyjnej ferrytu $\{110\}$ $b_{1/2(110)\alpha}$ w obrębie złączy przedstawia Rys. 16, natomiast austenitu $\{111\}$ $b_{1/2(111)\gamma}$ Rys. 17.



Rys. 16. Szerokość połówkowa linii $\{110\}$ ferrytu w zależności od usytuowania powierzchni naświetlanej



Rys. 17. Szerokość połówkowa linii $\{111\}$ austenitu w zależności od usytuowania powierzchni naświetlanej

Parametr sieciowy ferrytu i austenitu nie wykazuje jednoznacznego związku z usytuowaniem powierzchni naświetlania wiązką promieniowania Rtg (Rys. 14, 15). Spostrzeżenie to dotyczy wszystkich analizowanych złączy.

Parametr sieciowy roztworu stałego dwuskładnikowego zmienia się liniowo wraz ze zmianą stężenia składnika rozpuszczonego. Zależność ta, znana jak prawo Vegarda, wykazuje w różnym stopniu dodatnie lub ujemne odchylenie (Cullity, 1964).

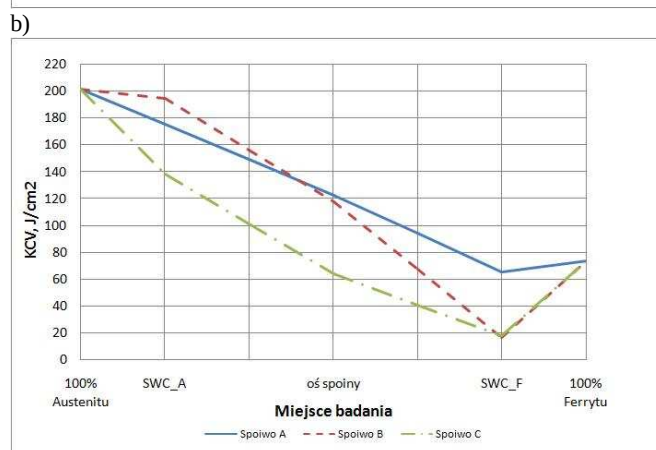
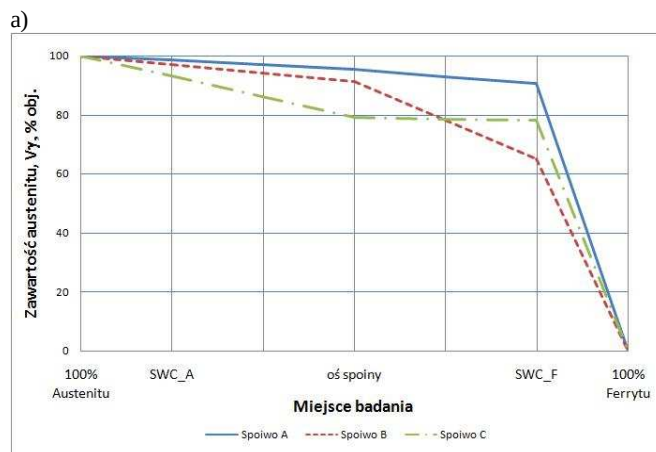
W analizowanych złączach występują wieloskładnikowe roztwory stałe (ferryt, austenit), ze składnikami, których atomu zajmują pozycję węzłowe (chrom, nikiel, mangan, krzem) lub międzywęzłowe (węgiel, azot) w sieci metalu podstawowego – żelaza.

Atomy pierwiastków rozmieszczone międzywęzłowo (C, N) oraz chrom, mangan i nikiel powodują każde z osobna z różną intensywnością ekspansję sieci ferrytu, natomiast krzem wywołuje jej silną kontrakcję. Parametr sieciowy austenitu maleje w miarę zwiększania zawartości niklu (Glocker, 1936).

Wobec nieaddytywnego oddziaływania składników stopowych na parametr sieciowy analizowanych roztworów stałych i nieznajomość rzeczywistego rozdziału pierwiastków pomiędzy współistniejące fazy w poszczególnych obszarach złączy trudno zinterpretować otrzymane zależności.

Szerokość połówkowa linii dyfrakcyjnej $\{110\}$ ferrytu oraz $\{111\}$ austenitu ma natomiast wyraźny związek z usytuowaniem powierzchni, z której wykonano dyfraktogram (wg Rys. 3).

Szerokość połówkowa linii $\{110\}$ ferrytu zmniejsza się wraz z przemieszczaniem badanej powierzchni od strony stali austenitycznej w kierunku stali ferrytycznej (Rys. 16). Szerokość połówkowa linii dyfrakcyjnej $\{111\}$ austenitu zmniejsza się od strony stali ferrytycznej w kierunku stali austenitycznej (Rys. 17).



Rys. 18. Zawartość austenitu (a) oraz udarność KCV (b) w poszczególnych obszarach złączy

Szerokość połówkowa linii dyfrakcyjnej roztworu stałego w głównej mierze zależna jest od wielkości ziarna (rozmiarów bloków mozaiki) oraz obecności naprężeń własnych drugiego rodzaju. Zmniejszenie wielkości ziarna i występowanie naprężeń o różnych znakach równoważących się pomiędzy ziarnami powoduje poszerzenie linii dyfrakcyjnych (Rusakov, 1977). Należy przyjąć, iż swój wkład w poszerzenie linii dyfrakcyjnych wnoszą również stopień nasilenia mikrosegregacji chemicznej. Szerokość połówkowa linii dyfrakcyjnych ma bezpośredni związek z udziałem objętościowym poszczególnych faz. Wraz ze zmniejszaniem udziału objętościowego danej fazy wzrasta szerokość połówkowa linii dyfrakcyjnej tej fazy. Rozmiary ziaren międzykomórkowego ferrytu w obszarze granicznym spoiny z SWC od strony stali austenitycznej są bardzo małe. Podobnie płytkowe krystalizaty austenitu wchodzące w skład

mieszaniny austenityczno-ferrytycznej w strefie spoiny graniczącej ze stalą ferrytyczną mają bardzo małą grubość. Strefy wpływu ciepła po obu stronach spoiny są obszarami o też największym gradientie temperatury podczas cieplnego cyklu spawania, stąd można się spodziewać generowania tutaj dużych naprężeń. Wykres zawartości austenitu oraz udarności KCV w poszczególnych obszarach złączy przedstawia Rys. 18.

Zawartość austenitu zmniejsza się łagodnie począwszy od strony stali austenitycznej do SWC po stronie stali ferrytycznej po czym wykazuje spadek.

Zawartość austenitu określona na przekroju osiowym spoiny ma ścisły związek ze składem chemicznym zastosowanego spoiwa. Zawartość niklu w spoiwie A wynosi 13,8% Ni i jest największa spośród użytych spoiw. W konsekwencji udział objętościowy austenitu jest w tym przypadku 96,5% obj. Zawartość austenitu w przekroju osiowym złącza B jest nieco mniejsza i wynosi 91,4% obj. Spoiwo B zawiera najmniej niklu spośród zastosowanych spoiw (8,8% Ni), ale w jego składzie występuje w znacznej ilości austenitotwórczy mangan (6,7% Mn). Najmniejszą zawartość austenitu (79,1% obj.) otrzymano przy użyciu spoiwa C. Spoiwo C ma zawartość niklu zbliżoną do spoiwa B, lecz zawartość manganu wynosi 0,9% Mn.

Udarność KCV wykazuje związek ze składem strukturalnym. Największą udarność w newralgicznej strefie SWC po stronie stali ferrytycznej wykazuje złącze A wykonane spoiwem o największej zawartości niklu. Udarność w tej strefie jest nieznacznie mniejsza od udarności materiału podstawowego - stali ferrytycznej. Udarność złączy B i C w tej strefie jest około 3 krotnie mniejsza aniżeli w złączu A. (Rys. 18).

4. PODSUMOWANIE

Spawanie doczołowe blach stali X2CrNi12 o strukturze ferrytycznej ze stalą X5CrNi 18-10 o strukturze austenitycznej metodą MAG przy użyciu każdego z zastosowanych spoiw pozwala uzyskać poprawne pod względem makrostruktury złącza. Statyczna próba rozciągania wykazuje, iż zniszczenie następuje w materiale podstawowym blachy o strukturze ferrytycznej w pobliżu SWC. Wartość wytrzymałości na rozciąganie jak i wydłużenia odpowiadają materiałowi podstawowemu. Dla każdego złącza próba statycznego zginania ma wynik pozytywny. W złączach występują wyłącznie dwie fazy ferryt i austenit bez wydzielenia fazy σ -FeCr. Wzajemna relacja ilościowa tych faz zależy od rodzaju spoiwa.

Pośród przyjętych spoiw za najkorzystniejsze pod względem kompleksu właściwości wytrzymałościowych, twardości i udarności należy uznać spoiwo A o największej zawartości niklu.

Ostra granica pomiędzy spoiną a materiałem podstawowym ferrytycznym (karb strukturalny) oraz przesycenie faz w tym mikroobszarze spoiny są okolicznościami negatywnie oddziałującymi na własności dynamiczne złączy.

Dalsze badania różnorodnych połączeń spawanych stali austenitycznych z ferrytycznymi należałoby uzupełnić o mikroanalizę składu chemicznego (MAR) w poszczególnych obszarach złączy. Pozwoliłoby to na powiązanie składu chemicznego spoiwa oraz warunków spawania z rzeczywistym rozkładem

składników stopowych w obrębie złączy, decydującym o składzie fazowym.

LITERATURA

1. **Brózda J., Łomozik M.** (2002), Spawanie stali nierdzewnych o strukturze dwufazowej (duplex). Własności złączy spawanych., *Biuletyn Instytutu Spawalnictwa* nr 2.
2. **Ciechacki K., Medaj D.** (2008), The properties of welded joints from austenitic-ferrite steel of duplex type made using smaw method, *12th International Conference on Developments in Machinery Design and Control Nowogród*.
3. **Cullity B. D.** (1964), *Podstawy dyfrakcji promieni rentgenowskich*, WNT, Warszawa.
4. **Dunn J. J., Bergstrom D. S.** (2003), Development of new "lean" duplex stainless steel, Alloy (UNS S32003)" *Stainless Steel World*.
5. **Glocker R.** (1936), *Materialprüfung mit Röntgenstrahlen*, Verlag von Julius Springer, Berlin.
6. **Karp J. i In.** (1970), Problemy związane z określaniem austenitu szczątkowego metodą rentgenowską, *Zeszyty naukowe AGH nr 265, Metalurgia i Odlewnictwo*.
7. **Lancaster J. F.** (1967), *Metalurgia procesów spawalniczych*, WNT, Warszawa.
8. **Łabanowski J.** (1997), Problemy spawalności odpornych na korozję stali austenityczno-ferrytycznych", *Krajowa Konferencja Dobór i Eksploatacja Materiałów Inżynierskich, Politechnika Gdańska, Wydział Mechaniczny*, 467-473.
9. **Łabanowski J.** (2005), Mechanical properties of dissimilar welded joints for chemical tankers, *Marine Technology Transactions*, Vol.16, 139-149.
10. **Łukojć A., Nowacki J.** (2004), Przemiany SWC podczas spawania stali duplex, *Przegląd Spawalnictwa* nr 4.
11. **Nowacki J.** (2009), *Stal duplex i jej spawalność*, WNT, Warszawa.
12. **Pocica A., Bański R.** (2002), Badania połączeń spawanych ze stali austenityczno-ferrytycznej, *42 Naukowo-Techniczna Konferencja Spawalnicza Techniki Komputerowe w Spawalnictwie*, 116-119.
13. **Przetakiewicz W., Kozak R.** (1995), Niektóre aspekty spawalności ferrytyczno-austenitycznych stali typu duplex i superduplex", *Przegląd Spawalnictwa* nr 3.
14. **Przybyłowicz K.** (2008), *Inżynieria stopów żelaza*, Politechnika Świętokrzyska, Kielce.
15. **Rusakov A. A.** (1977), *Rentgenografia metallov*, Atomizdat, Moskwa.
16. <http://www.stalnierdzewna.com> (29.01.2010)

STRUCTURE AND MECHANICAL PROPERTIES OF WELDED JOINTS OF FERRITIC STEEL X2CrNi12 WITH AUSTENITIC STEEL X5CrNi 18-10

Abstract: The basic aim of this work is the connection of the microstructure of different joints with mechanical properties. In the range of mechanical properties the micro and macro hardness, impact tests, tensile and bending strength of welded joints were measured. For microstructure investigations the light scanning electron microscopy SEM and X – ray diffraction methods were used.

The ferritic X2CrNi12 and austenitic X5CrNi 18-10 steels in the form of 5 mm thick sheets were taken for investigation.

WPŁYW ZAWARTOŚCI POLIMERU NA ANIZOTROPIĘ WYTRZYMAŁOŚCI DREWNA PRZY ROZCIĄGANIU

Michał CZECH*, Lesław KYZIÓŁ**

*Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka,
ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

**Wydział Mechniczno-Elektryczny Akademii Marynarki Wojennej, ul. Śmidowicza 69, 81-103 Gdynia

mceh@pb.edu.pl, lkyziol@amw.gdynia.pl

Streszczenie: Do opisu wytrzymałości drewna i kompozytu D-PMM przy rozciąganiu w zależności od kąta wycięcia próbek zastosowano kryterium Tsai-Wu dla materiałów anizotropowych. Przyjęto przy tym, że krzywa wytrzymałości przechodzi przez punkty określające wytrzymałość w głównych osiach ortotropii. Współczynniki wyznaczono metodą najmniejszych kwadratów. Weryfikację adekwatności opisu przeprowadzono w oparciu o test F-Snedocora.

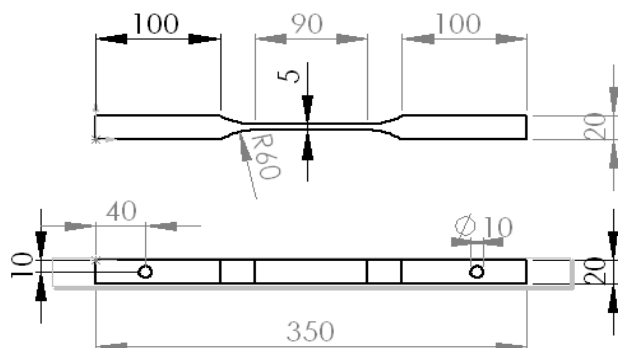
1. WPROWADZENIE

Niektórzy autorzy (Kyziół, 1999; Noah, Foudjet, 1998; Wójtowicz, Jabłoński, 1981) podają, że własności wytrzymałościowe i odkształceniowe drewna modyfikowanego wzrastają lub maleją proporcjonalnie do ilości substancji modyfikującej.

Celem pracy było określenie wpływu modyfikacji biela-stego drewna sosny na anizotropię wytrzymałości przy rozciąganiu.

2. DANE DOŚWIADCZALNE

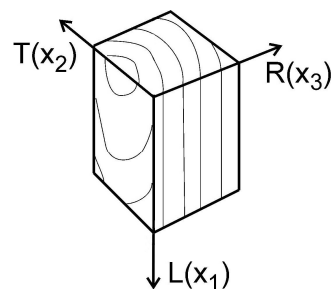
Badanie na rozciąganie przeprowadzono na próbkach normowych według PN-81/D-04107, których kształt i wymiary przedstawiono na Rys. 1.



Rys. 1. Próbką na rozciąganie

Próbki były wycinane z graniaka drewnianego sezonowanego w warunkach naturalnych w temperaturze $295 \pm 2K$. Przeciętna wilgotność próbek wynosiła $\sim 8\%$.

Próbki były wycinane w płaszczyźnie x_1x_2 dla sześciu kątów $\alpha[^\circ] = 0, 15, 30, 45, 60, 90$, gdzie α to kąt między kierunkiem działającej siły a kierunkiem włókien (Rys. 2).



Rys. 2. Kierunki anatomiczne drewna

Badania przeprowadzono na próbkach z drewna naturalnego i próbkach poddanych procesowi modyfikacji. Modyfikacja polegała na nasycaniu go metakrylanem metylu stabilizowanym eterem metylowym hydrotionu (MM) a następnie polimeryzacji termicznej (Kyziół, 2004). Stopień nasycenia próbek monomerem regulowano czasem (0,5; 2; 4; 24 godziny) ich przebywania w autoklawie, w sposób podany w pracy (Kyziół, 2004).

Próby rozciągania przeprowadzono na uniwersalnej maszynie wytrzymałościowej MTS-810.

3. WYNIKI PRÓB I ICH ANALIZA

3.1. Wyniki prób

Wyniki badań wytrzymałości na rozciąganie dla różnych kątów i różnych zawartości polimeru wyrażonych stosunkiem wagowym polimeru do wagi drewna zestawiano w Tab. 1.

Tab. 1. Wielkości statystyczne wytrzymałości biele i kompozytu D-PMM

Rodzaj materiału	Wielkości Statystyczne	$\alpha [^\circ]$					
		0	15	30	45	60	90
Biel	$\bar{R} [MPa]$	95	58	38	25	16.4	4.5
	p_i	10	10	10	10	7	4
	$S_{n-1} [MPa]$	2.261	3.682	4.082	5.033	2.070	0.577
	$v [\%]$	2.38	6.35	10.74	20.13	12.6	12.8
	K_1	1.399	1.431	1.807	1.466	1.878	0.111
Kompozyt 0.35	$\bar{R} [MPa]$	102	74	54.5	38	26.5	6.3
	p_i	10	10	10	10	8	9
	$S_{n-1} [MPa]$	2.789	3.830	5.212	3.590	3.665	1.581
	$v [\%]$	2.73	5.18	9.56	9.45	13.83	29.10
	K_1	1.864	2.268	2.064	2.055	1.604	0.787
Kompozyt 0.43	$\bar{R} [MPa]$	110	78	62	43	28	7.6
	p_i	10	10	10	10	10	8
	$S_{n-1} [MPa]$	6.200	3.559	6.200	4.082	2.708	1.408
	$v [\%]$	5.63	4.56	10.00	9.49	9.67	18.53
	K_1	2.04	1.777	2.040	1.807	1.557	1.822
Kompozyt 0.48	$\bar{R} [MPa]$	112	82	66	48	32	7.9
	p_i	10	10	10	10	10	7
	$S_{n-1} [MPa]$	3.801	3.162	3.055	2.449	4.163	1.345
	$v [\%]$	3.33	3.86	4.63	5.10	13.01	17.03
	K_1	1.664	1.333	2.070	1.721	1.772	1.687
Kompozyt 0.56	$\bar{R} [MPa]$	118	88	70.9	55	38	8.9
	p_i	10	10	10	10	10	8
	$S_{n-1} [MPa]$	5.925	3.944	2.923	3.367	4.546	1.808
	$v [\%]$	5.02	4.48	4.12	6.12	11.96	20.31
	K_1	1.245	1.871	1.479	1.565	1.855	1.833

Wyniki badań wytrzymałości na rozciąganie dla różnych kątów i różnych zawartości polimeru wyrażonych stosunkiem wagowym polimeru do wagi drewna zestawiano w Tab. 1. W tabeli tej podano następujące wielkości statystyczne: średnią wytrzymałość ($\bar{R}$), liczbę powtórzeń (p_i), odchylenie standardowe (S_{n-1}) i współczynnik zmienności (v). Podano również statystykę K_1 do eliminacji błędów grubych. Wartości krytyczne k_1 dla poziomu istotności 0,05 i liczbie powtórzeń p_i wynoszą odpowiednio (Zieliński, 1972):

$$k_1(0.05; 4) = 1.689; k_1(0.05; 7) = 2.093; k_1(0.05; 8) = 2.172; \\ k_1(0.05; 9) = 2.237; k_1(0.05; 10) = 2.294.$$

3.2. Analiza wyników

Kryterium Tsai-Wu zgodnie z pracą (Tsai, Wu, 1971) dla jednoosiowego rozciągania ma postać

$$P'_{11}R' + P'_{1111}R'^2 = 1 \quad (1)$$

gdzie: P'_{11} , P'_{1111} – współrzędna tensorów wytrzymałości w układzie obróconym, R' – wytrzymałość w układzie obróconym.

Współrzędne tensorów wytrzymałości we wzorze (1) podlegają transformacji następująco:

$$P'_{11} = \alpha_{1m}\alpha_{1n}P_{mn}, \quad (2)$$

$$P'_{1111} = \alpha_{1m}\alpha_{1n}\alpha_{1o}\alpha_{1p}P_{mnop},$$

gdzie współczynniki α_{ij} (kosinusy kierunkowe między osiami nowego i starego układu przy obrocie dookoła osi x_3), zgodnie z Tab. 2.

Tab. 2. Kosinusy kątów między osiami przy obrocie dookoła osi x_3

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	0
x'_2	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	0
x'_3	0	0	1

Uwzględniając wzory (2) i tablicę 2 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P'_{11} &= P_{11} \cos^2 \alpha + P_{22} \sin^2 \alpha = a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha, \\ P'_{1111} &= P_{11} \cos^4 \alpha + (0,5P_{1122} + P_{1212}) \sin^2 2\alpha + P_{2222} \sin^4 \alpha = \\ &= c \cos^4 \alpha + d \sin^2 2\alpha + e \sin^4 \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Zakładając, że krzywa wytrzymałości przechodzi przez punkty dla $\alpha = 0^\circ$ i 90° z równań (3) i (1) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} aR_0 + cR_0^2 &= 1, \\ bR_0 + eR_0^2 &= 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Uwzględniając (3) i (4) w (1) mamy

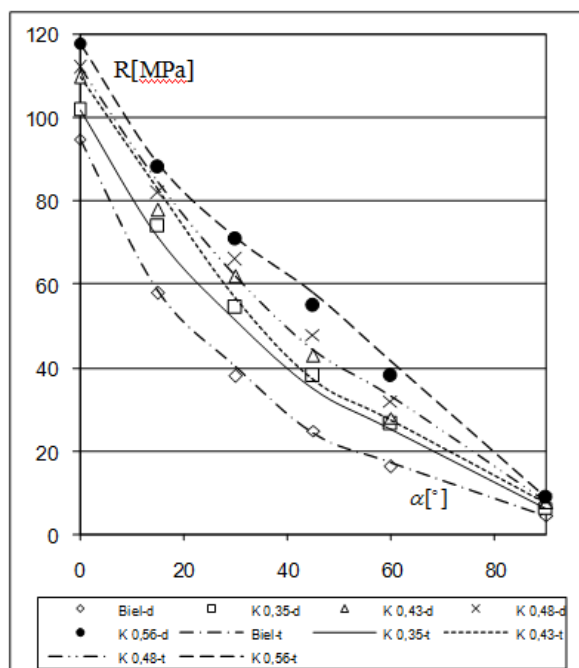
$$cx + dy + ez = w \quad (5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} x &= R_\alpha^2 \cos^4 \alpha - R_0 R_\alpha \cos^2 \alpha, \\ y &= R_\alpha^2 \sin^2 2\alpha, \\ z &= R_\alpha^2 \sin^4 \alpha - R_\alpha R_0 \sin^2 \alpha, \\ w &= 1 - \frac{R_\alpha}{R_0} \cos^2 \alpha - \frac{R_\alpha}{R_0} \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Tab. 3. Wytrzymałość teoretyczna bieli i kompozytu D-PMM

Materiał	$R_m [MPa]$ dla $\alpha [^\circ]$					
	0	15	30	45	60	90
Biel	95	58,3	40,4	24,3	17,4	4,5
K 0,35	102	71,4	51,3	34,8	25,4	6,3
K 0,43	110	82,9	56,6	37,0	27,6	7,6
K 0,48	112	84,5	62,1	44,4	33,2	7,9
K 0,56	118	89,2	71,3	58,2	41,7	8,9



Rys. 3. Zestawienie wytrzymałości na rozciąganie; punkty – dane doświadczalne, linie – krzywe teoretyczne

Stałe c, d, e , we wzorze (5) wyznaczono metodą najmniejszych kwadratów (MNK) przy wykorzystaniu wzoru (6) i Tab. 1.

Następnie stałe uzależniono od zawartości polimeru (p) w postaci:

$$\begin{aligned} c &= 4,186 \cdot 10^{-5} + 9,643 \cdot 10^{-5} p - 20,796 \cdot 10^{-5} p^2, \\ d &= 4,535 \cdot 10^{-4} + 5,073 \cdot 10^{-4} p, \quad r = 0,9819, \\ e &= -16,353 \cdot 10^{-3} + 24,127 \cdot 10^{-3} p, \quad r = 0,9954. \end{aligned} \quad (7)$$

Stałe we wzorze (7) wyznaczono MNK i wartości stałych c, d, e , wyliczonych poprzednio.

Na podstawie stałych wyliczonych ze wzoru (7) wyliczamy stałe a, b ze wzoru (4) oraz P'_{11} i P'_{1111} ze wzoru (3). Wytrzymałość teoretyczną R'_m wyliczoną ze wzoru (1) zestawiono w Tab. 3.

Natomiast na Rys. 3 zestawiono średnie wyniki badań doświadczalnych wzięte z tablicy 1 oraz krzywe teoretyczne zgodnie z Tab. 3.

4. WERYFIKACJA STATYSTYCZNA OPISU

Weryfikacja adekwatności opisu wytrzymałości przeprowadzono testem F-Snedocora (Zieliński, 1972)

$$F = \frac{\sum_{i=1}^m (\bar{R}_i^e - R_i^t)^2}{f_1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{p_i} (R_{ij}^e - \bar{R}_i^e)^2}{f_2}, \quad (8)$$

gdzie: $\bar{R}_i^e$ – średnia wytrzymałość eksperymentalna dla i -tego kąta (Tab. 1), R_i^t – wytrzymałość obliczeniowa dla i -tego kąta, R_{ij}^e – wytrzymałość eksperymentalna dla i -tego kąta i j -tego powtórzenia, $m = 6$ – liczba kątów wycięcie próbek (Tab. 1), p_i – liczba powtórzeń dla i -tego kąta (Tab. 1), $f_1 = m - M$ – stopnie swobody licznika, $M = 3$

– liczba stałych w równaniu (5), $f_2 = \sum_{i=1}^m (p_i - 1)$ – stopnie swobody mianownika.

Wartości F wyliczone ze wzoru (8) zestawiono w Tab. 4.

Tab. 4. Wartość F ze wzoru (8)

Materiał	F	$F_{0,05; f_1; f_2}$
Biel	0,192	2,815
K 0,35	0,715	2,79
K 0,43	1,535	2,785
K 0,48	1,161	2,79
K 0,56	1,869	2,785

W tablicy tej podano również wartości krytyczne dla poziomu istotności $\alpha = 0,05$.

5. WNIOSKI

Z Rys. 3 i Tab. 4 ($F < F_{0,05; f_1; f_2}$) widać poprawny opis wytrzymałości na rozciąganie.

LITERATURA

1. **Kyzioł L.** (1999), Mechanical properties of modified wood- *IUTAM symposium on Theoretical and Numerical Methods in Continuum Mechanics of Porous Materials*, University of Stuttgart, Germany, September 5-15, 221-227.
2. **Kyzioł L.** (2004), Analiza własności drewna konstrukcyjnego nasyczonego powierzchniowo polimerem MM, *Zeszyty Naukowe AMW w Gdyni*, Rok XLV, Nr 156 A, 150.
3. **Noah J. N., Foudjet A.** (1998), Wood-polymer composites from some typical hardwoods, *Wood Science and Technology*, Vol.22, 115-119.
4. **Tsai S. W., Wu E. M.** (1971), A general theory of strength for anisotropic materials, *J. Composite Materials*, Vol. 5, No 7, 125-143.
5. **Wójtowicz A., Jabłoński M.** (1981), Niektóre własności fizykomechaniczne drewna zmodyfikowanego polimetakrylanem metylu jako funkcje jego zawartości w kompozycie, „Zeszyty problemowe postępów nauk rolniczych”. *Materiały konferencyjne „Modyfikacja Drewna”*, Z. 299, 179-185.
6. **Zieliński R.**, (1972), *Tablice Statystyczne*, PWN, Warszawa.

INFLUENCE OF THE CONTENT OF THE POLYMER FOR ANISOTROPY OF THE WOOD STRENGTH FOR TENSILE

Abstract: The criterion Tsai-Wu for anisotropy materials in description of the wood and the composite strengths D-PMM related to the cutting angle of the specimens was applied. It was assumed that the strength curves run through the points denoting the strength in the principal axes of orthotropy. The coefficients were determined by the least square method. Verification of the accuracy of the description was made on the base of the test F-Snedecor'a.

Pracę wykonano w ramach pracy statutowej S/WM/2/2008.

NEURONOWE PROGRAMOWANIE DYNAMICZNE W STEROWANIU BEHAVIORALNYM MOBILNYM ROBOTEM KOŁOWYM

Zenon HENDZEL*, Marcin SZUSTER*

*Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki, Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa, Politechnika Rzeszowska,
Al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów

zenhen@prz.edu.pl, mszuster@prz.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono problematykę generowania bezkolizyjnych trajektorii ruchu mobilnego robota kołowego (MRK) z zastosowaniem algorytmów Neuronowego Programowania Dynamicznego (NDP – Neural Dynamic Programming) oraz układów z logiką rozmytą (FL – Fuzzy Logic). Proponowany hierarchiczny układ sterowania składa się z warstwy generowania trajektorii ruchu, opartej na odruchowej nawigacji MRK w nieznanym środowisku dwuwymiarowym ze statycznymi przeszkodami, oraz warstwy realizacji ruchu. Badania symulacyjne zaproponowanego algorytmu generowania bezkolizyjnych trajektorii oraz realizacji ruchu MRK Pioneer 2-DX przeprowadzono w wirtualnym środowisku obliczeniowym.

1. WPROWADZENIE

Rozwój robotyki mobilnej znacznie poszerzył obszary jej zastosowań, jednocześnie zwiększając poziom złożoności realizowanych zadań, co pociągnęło za sobą konieczność opracowania odpowiednich algorytmów sterowania realizacją ruchu platform mobilnych. Wzrost złożoności konstrukcji MRK, ilości dostępnej informacji o otaczającym środowisku, oraz stopnia zaawansowania jednostek obliczeniowych, otworzyły możliwość projektowania układów sterowania generujących trajektorie ruchu na bieżąco, w czasie ruchu MRK, z możliwością jej modyfikowania pod wpływem warunków środowiska, np. pojawiających się przeszkód. W zagadnieniach tych szerokie zastosowanie znalazły nowoczesne metody sztucznej inteligencji, obejmujące sztuczne sieci neuronowe (SN) oraz układy z logiką rozmytą (Drainkov i Saffiotti, 2001; Hendzel, 2004).

W pracy przedstawiono nowe ujęcie problematyki generowania bezkolizyjnych trajektorii ruchu MRK z zastosowaniem algorytmów NDP. Proponowany hierarchiczny układ sterowania składa się z warstwy generowania trajektorii ruchu, opartej na odruchowej nawigacji MRK w nieznanym środowisku dwuwymiarowym ze statycznymi przeszkodami, oraz warstwy realizacji ruchu. Zagadnienie odruchowej nawigacji MRK, w prezentowanym algorytmie generowania bezkolizyjnych trajektorii ruchu, obejmuje implementację realizacji dwóch elementarnych zachowań: „podążaj do celu” (GS – Goal Seeking) oraz „podążaj środkiem wolnej przestrzeni/omijaj przeszkodę” (OA – Obstacle Avoiding) z zastosowaniem algorytmów NDP w postaci struktury Zależnego od Sterowania Heurystycznego Programowania Dynamicznego (ADHDP - Action Dependent Heuristic Dynamic Programming) (Ferrari i Stengel, 2001; Hendzel, 2007; Hendzel i Szuster, 2009, Powell, 2007; Prokhorov i Lunch, 1997; Sutton i Barto, 1999). Połączenie dwóch elementarnych zachowań (CB – Combination

of Behaviours) odruchowej nawigacji GS oraz OA, w celu realizacji złożonego zadania generowania bezkolizyjnej trajektorii ruchu MRK w nieznanym środowisku, obejmującego podążanie do celu z omijaniem statycznych przeszkód, zrealizowano przy pomocy układu FL. Zadanie generowania sterowania dla ruchu nadążnego, w warstwie realizacji ruchu, zrealizowano z zastosowaniem SN do kompensacji nieliniowości MRK. Badania symulacyjne zaproponowanego algorytmu generowania bezkolizyjnych trajektorii oraz realizacji ruchu MRK Pioneer 2-DX przeprowadzono w wirtualnym środowisku symulacyjnym.

Wyniki badań przedstawione w artykule stanowią kontynuację wcześniejszych prac autorów związanych z opracowaniem układów generowania bezkolizyjnych trajektorii ruchu dla MRK oraz ich realizacji z zastosowaniem nowoczesnych metod sztucznej inteligencji, takich jak SN (Giergiel i inni, 2002), układy FL (Hendzel, 2004), oraz algorytmy oparte na uczeniu ze wzmocnieniem (Hendzel, 2007; Hendzel i Szuster, 2009). Artykuł składa się z sześciu części. Część pierwsza zawiera krótkie wprowadzenie, w części drugiej przedstawiono model MRK Pioneer 2-DX. Część trzecia zawiera syntezę warstwy realizacji ruchu nadążnego, w części czwartej przedstawiono algorytm NDP w postaci struktury ADHDP. Część piąta zawiera syntezę warstwy generowania bezkolizyjnej trajektorii ruchu MRK, część szósta podsumowuje projekt badawczy.

2. MOBILNY ROBOT DWUKOŁOWY

W pracy analizowany jest ruch dwukołowego MRK z trzecim kołem samonastawnym, w płaszczyźnie xy. Schemat MRK Pioneer 2-DX pokazano na Rys. 1.

W modelu matematycznym MRK uwzględniono dynamiczne równania ruchu Maggie’go (Giergiel i inni, 2002; Giergiel i Żylski, 2005) oraz własności dynamiczne układów wykonawczych, zbudowanych z silnika elektrycznego

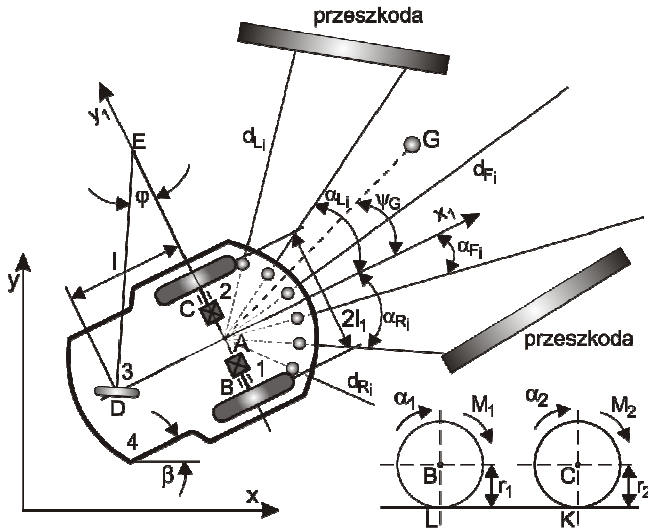
prądu stałego, przekładni oraz enkodera. Przyjęto wektor współrzędnych uogólnionych

$$\mathbf{q} = [\alpha^T, \dot{\alpha}^T]^T, \quad (1)$$

gdzie $\alpha = [\alpha_i]^T$, α_i to kąt obrotu własnego odpowiedniego koła napędowego MRK, $i=1,2$. Dynamiczne równania ruchu MRK przyjmują postać

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\tau}_d = \mathbf{u}, \quad (2)$$

gdzie budowa macierzy $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ oraz wektora $\mathbf{F}$ wynika z zastosowania dynamicznych równań ruchu Maggie'go do opisu dynamiki MRK, oraz uwzględnienia dynamiki układów wykonawczych, $\boldsymbol{\tau}_d$ jest wektorem ograniczonych zakłóceń, natomiast $\mathbf{u}$ oznacza wektor sterowań.



Rys. 1. Schemat MRK Pioneer 2-DX

3. WARSTWA REALIZACJI RUCHU

W zadaniu sterowania ruchem nadążnym MRK warstwy realizacji ruchu założymy, że znana jest zadana trajektoria ruchu $[\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d] \in \mathbf{R}^2$. Celem syntezy układu sterowania nadążnego z zastosowaniem SN do kompensacji nieliniowości MRK (Giergiel i inni, 2002), jest taki dobór struktury

sygnału sterowania oraz prawa adaptacji wag SN, dla którego realizowana trajektoria ruchu MRK będzie zbieżna do trajektorii zadanej.

Przyjęto błąd nadążania $\mathbf{e}$, uogólniony błąd nadążania $\mathbf{s}$ oraz sygnał $\mathbf{v}$ dane zależnościami

$$\mathbf{e} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}, \quad (3)$$

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e}, \quad (4)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}_d + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e}, \quad (5)$$

gdzie $\boldsymbol{\Lambda}$ to diagonalna macierz projektowa dodatnio określona. Wówczas równanie (2) opisujące dynamikę MRK możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{u} - \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}})\mathbf{v} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\tau}_d. \quad (6)$$

Zdefiniowano nieliniową funkcję

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}})\mathbf{v} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}), \quad (7)$$

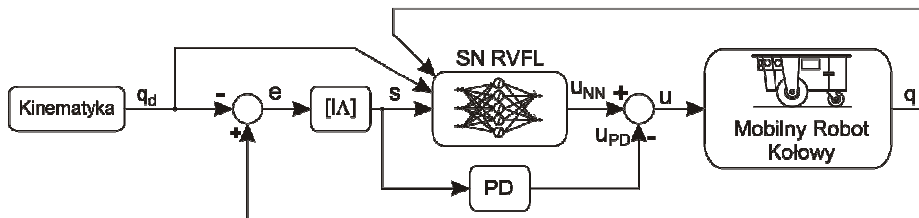
gdzie $\mathbf{x} = [\mathbf{v}^T, \dot{\mathbf{v}}^T, \dot{\mathbf{q}}^T]^T$, oraz przyjęto prawo sterowania z uwzględnieniem kompensacji nieliniowości MRK w postaci zależności

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}_D\mathbf{s}, \quad (8)$$

gdzie $\mathbf{K}_D$ to diagonalna macierz projektowa dodatnio określona.

W praktyce prawo sterowania MRK (8) jest trudne do zrealizowania z powodu braku znajomości dokładnych wartości parametrów MRK oraz możliwości ich zmiany w czasie ruchu np. pod wpływem zmiany przewożonego obciążenia czy zmiany rodzaju nawierzchni, po której MRK się porusza.

W prezentowanym algorytmie realizacji ruchu MRK do aproksymacji nieliniowej funkcji $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ zastosowano liniową ze względu na wagi SN Random Vector Functional Link (RVFL) z losowym doбором wag warstwy wejściowej, sigmoidalnymi bipolarnymi funkcjami aktywacji neuronów oraz adaptowanymi wagami warstwy wyjściowej. Na Rys. 2 przedstawiono schemat układu sterowania z zastosowaniem SN do kompensacji nieliniowości MRK.



Rys. 2. Schemat układu sterowania ruchem nadążnym

Estymatę nieliniowej funkcji $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ realizowaną przez SN zapiszemy jako

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(\mathbf{V}^T \mathbf{x}), \quad (9)$$

gdzie $\hat{\mathbf{W}}$ to macierz wag warstwy wyjściowej, $\mathbf{S}(\cdot)$ to wek-

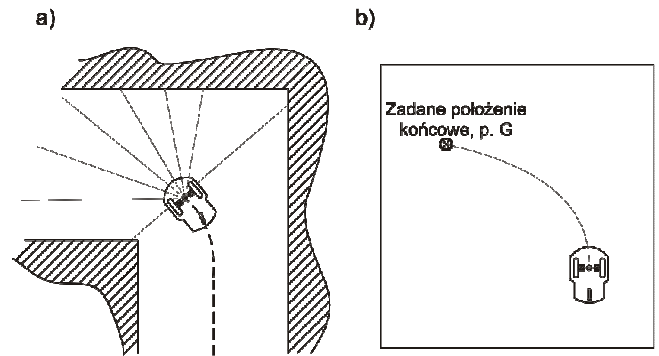
tor sigmoidalnych bipolarnych funkcji aktywacji neuronów opisanych zależnością

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \frac{2}{1 + \exp(-\beta \mathbf{V}^T \mathbf{x})} - 1, \quad (10)$$

Struktura ADHDP składa się z SN aktora w kroku k -tym, oraz SN krytyka w kroku k -tym oraz $k+1$.

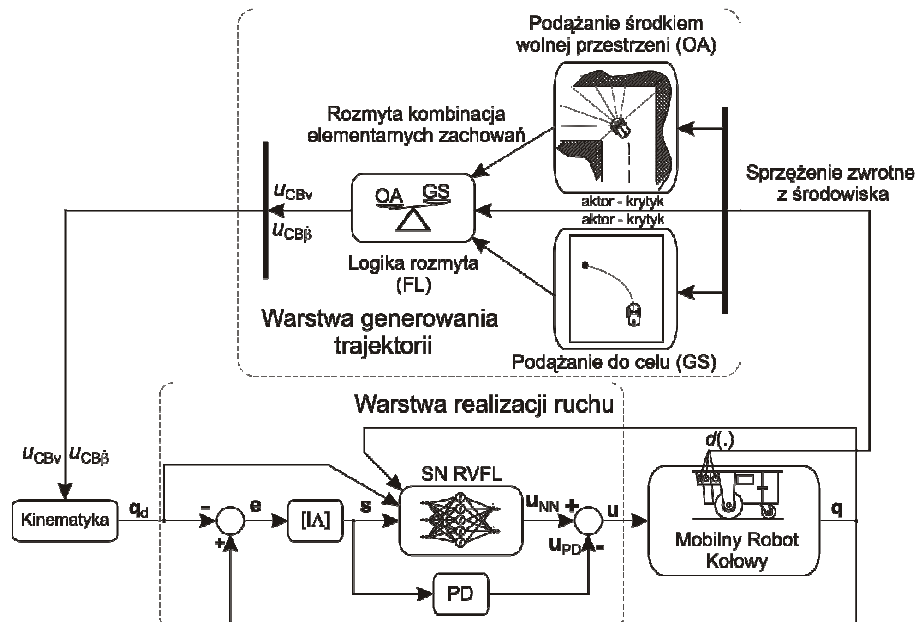
5. WARSTWA PLANOWANIA TRAJEKTORII RUCHU

W proponowanym hierarchicznym układzie sterowania warstwa generowania bezkolizyjnej trajektorii ruchu w nieznanym środowisku składa się z dwóch algorytmów realizujących elementarne zachowania nawigacji odruchowej: „podążania środkiem wolnej przestrzeni” (OA) i „podążania do celu” (GS), oraz algorytmu łączącego elementarne zachowania (CB) w celu realizacji złożonych zadań. Algorytmy realizujące elementarne zachowania nawigacji odruchowej zaimplementowano w postaci struktur NDP w konfiguracji ADHDP, natomiast algorytm służący do łączenia tych zachowań zbudowano w oparciu o układ z logiką rozmytą. Schematycznie zagadnienia realizacji elementarnych zachowań nawigacji odruchowej OA oraz GS przedstawiono na Rys. 4.



Rys. 4. a) Schemat realizacji elementarnego zachowania „podążania środkiem wolnej przestrzeni” (OA), b) schemat realizacji zachowania „podążania do celu” (GS)

Schemat proponowanego hierarchicznego układu sterowania przedstawiono na Rys. 5.



Rys. 5. Schemat hierarchicznego układu sterowania z warstwą generowania trajektorii ruchu

W nieruchomym globalnym układzie odniesienia (x,y) położenie MRK opisują współrzędne zdefiniowane jako $[x_A, y_A, \beta]^T$, gdzie współrzędne wybranego punktu A wynoszą (x_A, y_A) , natomiast β to kąt obrotu ramy MRK. Kinematykę robota opisuje równanie

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_A^* \cos(\beta) & 0 \\ v_A^* \sin(\beta) & 0 \\ 0 & \omega^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{CBv} \\ u_{CB\beta} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

gdzie v_A^* to maksymalna prędkość liniowa ruchu punktu A, ω^* to maksymalna prędkość kątowa obrotu własnego ramy mobilnego robota. W przypadku realizacji jednego z zachowań behawioralnych wektor u_{CB} jest zastępowany przez u_{GS} lub u_{OA} . MRK Pioneer 2-DX jest wyposażony

w 8 sonarów ultradźwiękowych $(s_1, \dots, s_8)$, dla których maksymalny zasięg pomiaru wynosi $d_{smax}=6$ [m]. Sensory podzielono na grupy składające się z dwóch sąsiednich sensorów (odrzucając pierwszy oraz ostatni), rejestrują one odległości od przeszkód d_{L1}, d_{L2} dla grupy czujników s_2 oraz s_3 znajdujących się po lewej stronie ramy MRK, d_{F1}, d_{F2} dla grupy czujników znajdujących się z przodu (s_4, s_5), oraz d_{R1}, d_{R2} dla grupy czujników znajdujących się z lewej strony ramy (s_6, s_7). Wartość pomiarów z sensorów ultradźwiękowych mieści się w przedziale $d_{smin} \leq d(\cdot) \leq d_{smax}$, przy czym $d_{smin}=0.5$ [m]. Kąty odchylenia osi pomiarów czujników względem osi ramy MRK wynoszą odpowiednio $\alpha_{Li}, \alpha_{Fi}, \alpha_{Ri}$, dla $i=1,2$.

Zadaniem warstwy generowania trajektorii hierarchicznego układu sterowania jest wygenerowanie w czasie rzeczywistym współrzędnych wybranego punktu A ramy

MRK, zdefiniowanych jako $\mathbf{x}_d = [x_A, y_A, \beta]^T$. Współrzędne te są generowane przez jedną ze struktur warstwy generowania trajektorii w zależności od typu realizowanego zadania, na podstawie informacji ze środowiska w postaci pomiarów z sonarów ultradźwiękowych $d(\cdot)$. Rozważane są dwa elementarne zachowania zrealizowane przy pomocy algorytmów NDP: „podążaj środkiem wolnej przestrzeni” (OA) i „podążaj do celu” (GS), w których zadana trajektoria ruchu generowana jest poprzez zadanie odpowiednich wartości wektora $\mathbf{u}_{OA} = [u_{OAv}, u_{OA\dot{\beta}}]^T$ lub $\mathbf{u}_{GS} = [u_{GSv}, u_{GS\dot{\beta}}]^T$.

Rozpatruje się również kombinację powyższych elementarnych zachowań zrealizowaną przy pomocy układu FL, w celu realizacji złożonego zadania podążania do celu z omijaniem przeszkód, w którym trajektoria zadana generowana jest poprzez zadanie odpowiednich wartości wektora $\mathbf{u}_{CB} = [u_{CBv}, u_{CB\dot{\beta}}]^T$.

Sygnały wejściowe do struktur warstwy generowania trajektorii ruchu układu sterowania znormalizowano do przedziału $<-1,1>$ lub $<0,1>$ poprzez odpowiednią transformację: dla pomiaru odległości przez prawą grupę czujników $d_R^* = d_R / (d_L + d_R)$, przez lewą grupę czujników $d_L^* = d_L / (d_L + d_R)$, oraz przez przednią grupę czujników $d_F^* = d_F / d_{\max}$, gdzie $d_F = \min(d_{F1}, d_{F2})$, $d_L = \min(d_{L1}, d_{L2})$, $d_R = \min(d_{R1}, d_{R2})$.

5.1. Zadanie „podążania środkiem wolnej przestrzeni” (OA)

Elementarne zachowanie „podążania środkiem wolnej przestrzeni” polega na wyborze trajektorii ruchu MRK, która maksymalizuje odległość od przeszkód.

Zdefiniujmy błąd prędkości e_{OAv} oraz błąd podążania środkiem wolnej przestrzeni $e_{OA\dot{\beta}}$

$$e_{OAv} = d_F^* - v_A / v_A^*, \quad (20)$$

$$e_{OA\dot{\beta}} = d_R^* - d_L^*, \quad (21)$$

gdzie v_A to realizowana prędkość ruchu p. A, $v_A^* = 0.6$ [m/s] to maksymalna liniowa prędkość ruchu MRK.

Przyjęto funkcję kosztu lokalnego w postaci zależności

$$L_{Ci}(\mathbf{e}_{OAik}, \mathbf{u}_{OAik}) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{e}_{OAik} \mathbf{P}_{OAii} \mathbf{e}_{OAik} \} + \frac{1}{2} \{ \mathbf{u}_{OAik} \mathbf{R}_{OAii} \mathbf{u}_{OAik} \} \quad (22)$$

gdzie $i=1,2$, $\mathbf{e}_{OA} = [e_{OAv}, e_{OA\dot{\beta}}]^T$, $\mathbf{P}_{OA}$, $\mathbf{R}_{OA}$ to diagonalne macierze projektowe dodatnio określone.

Algorytm ADHDP_{OA} składa się z dwóch struktur aktor-krytyk, z których każda zawiera SN aktora oraz krytyka. Sygnał sterowania generowany przez strukturę ADHDP_{OA}, $\mathbf{u}_{OANDP} = [u_{OAVNDP}, u_{OA\dot{\beta}NDP}]^T$, poszerzono o sygnał regulatora proporcjonalnego, generującego sterowanie

$$\mathbf{u}_{OAPk} = \mathbf{K}_{OA} \mathbf{e}_{OAk}, \quad (23)$$

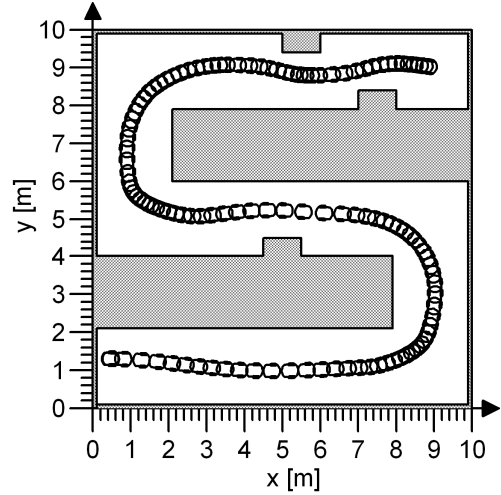
gdzie $\mathbf{K}_{OA}$ to stała diagonalna macierz projektowa wzmoc-

nień regulatora proporcjonalnego.

Całkowity sygnał sterowania opisuje zależność

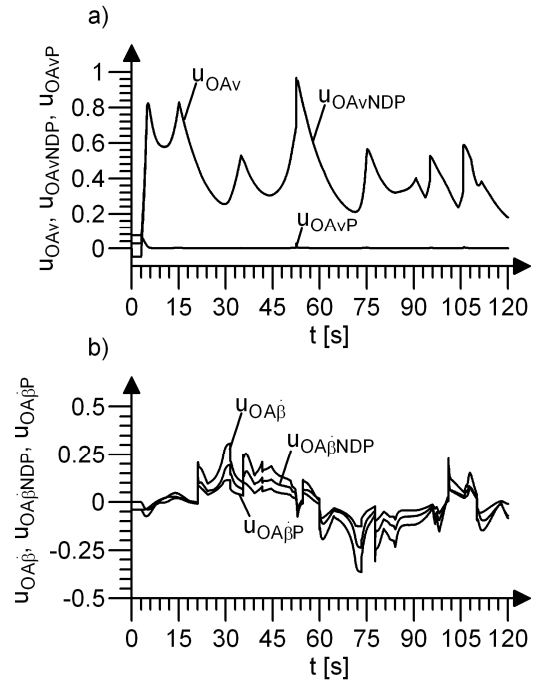
$$\mathbf{u}_{OAK} = \mathbf{u}_{OANDPk} + \mathbf{u}_{OAPk}. \quad (24)$$

Dla układu sterowania złożonego z warstwy generowania trajektorii ruchu dla zadania OA, oraz warstwy realizacji ruchu, w środowisku obliczeniowym przeprowadzono symulację ruchu MRK Pioneer 2-DX w zadanej przestrzeni roboczej, przedstawionej na Rys. 6.



Rys. 6. Realizacja elementarnego zadania podążania środkiem wolnej przestrzeni (OA) przez MRK

Sygnały sterowania wygenerowane przez warstwę generowania trajektorii przedstawiono na Rys. 7.



Rys. 7. a) Przebieg wartości sygnałów sterowania u_{OAv} , u_{OAVNDP} oraz u_{OAVP} , b) przebieg wartości sygnałów sterowania $u_{OA\dot{\beta}}$, $u_{OA\dot{\beta}NDP}$, $u_{OA\dot{\beta}P}$

5.2. Zadanie „podążania do celu” (GS)

Elementarne zachowanie „podążania do celu” polega na wygenerowaniu trajektorii ruchu MRK, która gwarantuje osiągnięcie przez wybrany punkt A MRK zadanego położenia (p. G). Zadanie to może być widziane jako zagadnienie minimalizacji odległości $l_G = \|A, G\|$ oraz kąta ψ_G zdefiniowanego jako odchylenie osi ramy MRK od prostej przechodzącej przez p. A i G. Zadanie wyznaczenia sterowań $\mathbf{u}_{GS} = [u_{GSv}, u_{GS\beta}]^T$, gwarantujących realizację zachowania GS, zrealizowano przy pomocy struktury NDP w postaci algorytmu ADHDP_{GS}.

Zdefiniujmy błąd prędkości e_{GSv} oraz błąd odchylenia osi ramy MRK od kierunku prostej przechodzącej przez p. A i G, $e_{GS\beta}$

$$e_{GSv} = v_{Ad}(l_G) - v_A, \quad (25)$$

$$e_{GS\beta} = \psi_G - \beta, \quad (26)$$

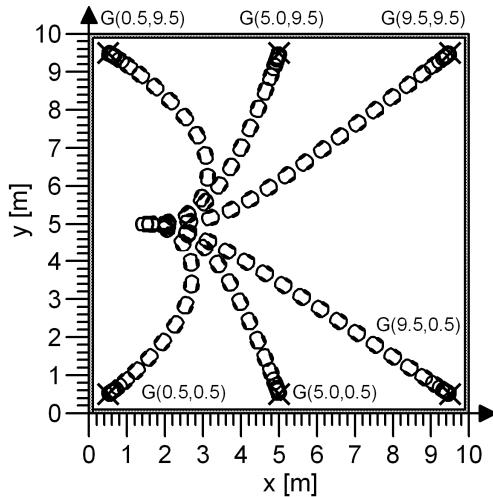
gdzie

$$v_{Ad}(l_G) = \frac{2}{1 + \exp(-l_G)} - 1. \quad (27)$$

Przyjęto funkcję kosztu lokalnego dla struktury NDP w postaci zależności

$$L_{Ci}(\mathbf{e}_{GSik}, \mathbf{u}_{GSik}) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{e}_{GSik}^T \mathbf{P}_{GSii} \mathbf{e}_{GSik} \} + \frac{1}{2} \{ \mathbf{u}_{GSik}^T \mathbf{R}_{GSii} \mathbf{u}_{GSik} \} \quad (28)$$

gdzie $i=1,2$, $\mathbf{e}_{GS} = [e_{GSv}, e_{GS\beta}]^T$, $\mathbf{P}_{GS}$, $\mathbf{R}_{GS}$ to diagonalne macierze projektowe dodatnio określone.



Rys. 8. Realizacja elementarnego zadania podążania środkiem wolnej przestrzeni (OA) przez MRK

Algorytm ADHDP_{GS} składa się z dwóch struktur aktor-krytyk, z których każda zawiera SN aktora oraz krytyka. Sygnał sterowania generowany przez strukturę ADHDP_{GS}, $\mathbf{u}_{GSNDP} = [u_{GSvNDP}, u_{GS\beta ND P}]^T$, poszerzono o sterowanie generowane przez regulator proporcjonalny

$$\mathbf{u}_{GSPk} = \mathbf{K}_{GS} \mathbf{e}_{GSk}, \quad (29)$$

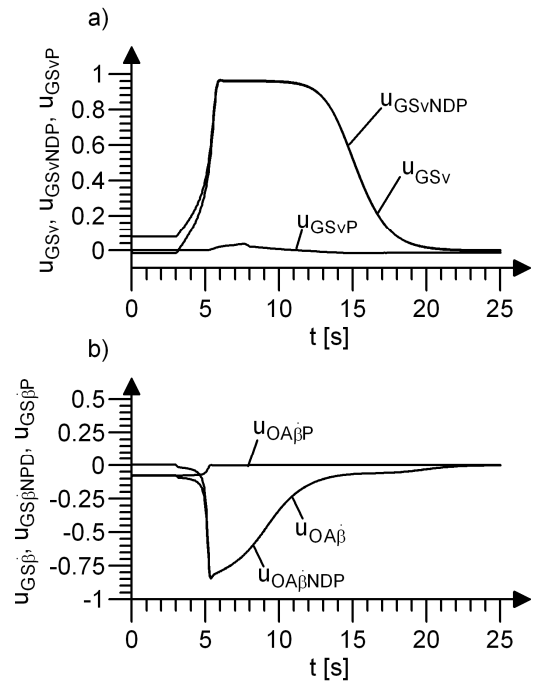
gdzie $\mathbf{K}_{GS}$ to stała diagonalna macierz projektowa wzmocnień regulatora proporcjonalnego.

Całkowity sygnał sterowania w zadaniu GS opisuje zależność

$$\mathbf{u}_{GSk} = \mathbf{u}_{GSNDPk} + \mathbf{u}_{GSPk}. \quad (30)$$

Dla zadania GS, przeprowadzono symulację ruchu MRK Pioneer 2-DX w zadanej przestrzeni roboczej. Na Rys. 8 przedstawiono tor ruchu p. A MRK dla realizacji zadania GS dla wybranych współrzędnych p. G.

Sygnały sterowania wygenerowane przez warstwę generowania trajektorii ruchu MRK dla elementarnego zachowania GS i punktu G o współrzędnych G(0.5;0.5), przedstawiono na Rys. 9.



Rys. 9. a) Przebieg wartości sygnałów sterowania u_{GSv} , u_{GSvNDP} oraz u_{GSvP} , b) przebieg wartości sygnałów sterowania $u_{GS\beta}$, $u_{GS\beta ND P}$, $u_{GS\beta P}$

5.3. Rozmyta kombinacja elementarnych zachowań (CB)

Zadaniem rozmytego układu nawigacji jest dobór współczynnika skalowania zachowań behawioralnych OA oraz GS, który zagwarantuje realizację złożonego zadania podążania do celu z omijaniem statycznych przeszkód w nieznanym środowisku dwuwymiarowym. W prezentowanym układzie rozmytej nawigacji, służącym do koordynacji elementarnych zachowań (CB), funkcje przynależności do zbiorów rozmytych zostały dostosowane metodą prób i błędów. Zastosowano model rozmyty Mamdaniego, z rozmytą implikacją typu MIN, trójkątnymi lub trapezowymi funkcjami przynależności do zbiorów rozmytych przesłanek i konkluzji, oraz metodą wyostrażania typu średnia z maksimów (Center Average Defuzzyfication).

Układ z logiką rozmytą CB posiada bazę $m=25$ reguł o postaci

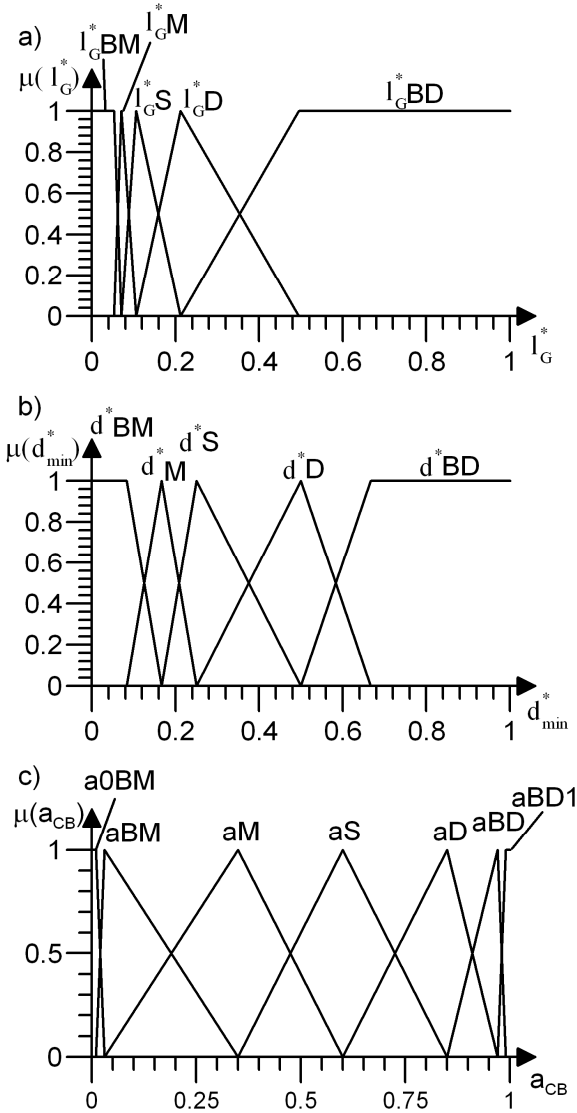
R_{CB}^m : JEŻELI (l_G^* jest IBM) I (d_{min}^* jest dBM) TO (a_{CB} jest aBD1),

(31)

gdzie l_G^* to znormalizowana odległość od celu, d_{min}^* to znormalizowana minimalna odległość od przeszkód, $a_{CB} \in \langle 0,1 \rangle$ jest współczynnikiem skalowania poszczególnych zachowań elementarnych OA oraz GS zgodnie z zależnością

$$u_{CB} = u_{OA} \cdot (1 - a_{CB}) + u_{GS} \cdot a_{CB}. \quad (32)$$

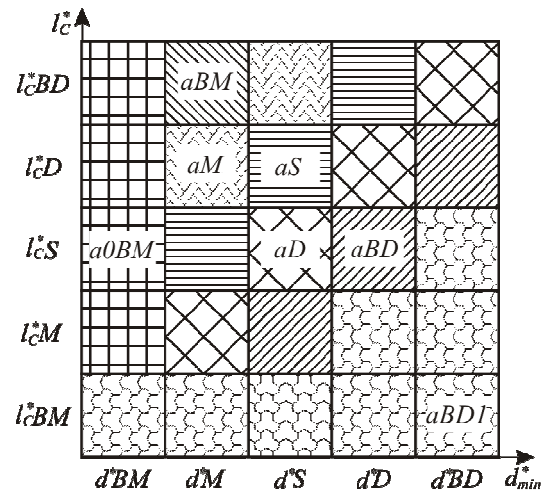
Zastosowanie bazy 25 reguł (31) jest związane z podziałem przestrzeni znormalizowanej odległości od celu l_G^* na pięć zbiorów rozmytych trójkątnych oraz trapezowych: „bardzo mała” (l_{GBM}^*), „mała” (l_{GM}^*), „średnia” (l_{GS}^*), „duża” (l_{GD}^*), „bardzo duża” (l_{GBD}^*). Funkcje przynależności do odpowiednich zbiorów rozmytych pokazano na Rys. 10.



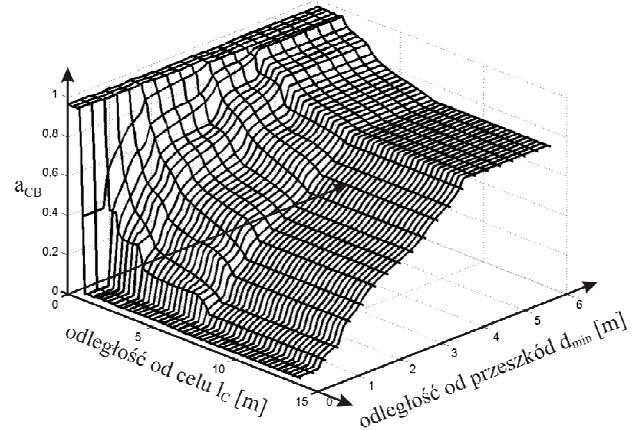
Rys. 10. a) Rozkład funkcji przynależności do zbiorów rozmytych przesłanek dla odległości od celu l_G^* , b) rozkład funkcji przynależności do zbiorów rozmytych przesłanek dla minimalnej odległości od przeszkód d_{min}^* , c) rozkład funkcji przynależności do zbiorów rozmytych konkluzji dla współczynnika skalowania a_{CB}

Przestrzeń znormalizowanej minimalnej odległości od przeszkód d_{min}^* podzielono na pięć zbiorów rozmytych trójkątnych oraz trapezowych: „bardzo mała” (d_{BM}^*), „mała” (d_M^*), „średnia” (d_S^*), „duża” (d_D^*), „bardzo duża” (d_{BD}^*). Do podziału przestrzeni wyjścia z układu rozmytego - współczynnika skalowania elementarnych zachowań a_{CB} zastosowano siedem funkcji przynależności do zbiorów rozmytych trójkątnych oraz trapezowych, oznaczonych etykietami lingwistycznymi: „bardzo mały, bliski zera” (a_{0BM}), „bardzo mały” (a_{BM}), „mały” (a_M), „średni” (a_S), „duży” (a_D), „bardzo duży” (a_{BD}), „bardzo duży, bliski jeden” (a_{1BD}).

Ilustrację graficzną bazy reguł pokazano na Rys. 11. Dla bazy 25 reguł rozmytego układu koordynacji elementarnych zachowań CB w warstwie generowania trajektorii ruchu hierarchicznego układu sterowań, wyznaczono powierzchnię modelu $a_{CB}(l_G, d_{min})$, pokazaną na Rys.12.



Rys. 11. Ilustracja bazy 25 reguł

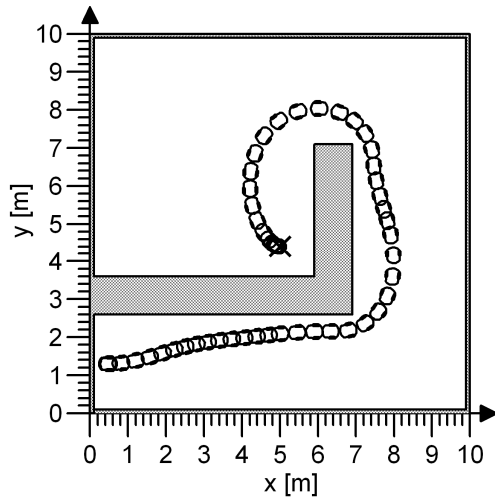


Rys. 12. Graficzna interpretacja powierzchni modelu rozmytego $a_{CB}(l_G, d_{min})$

Kształt powierzchni modelu rozmytego związany z doborem bazy reguł układu FL można interpretować jako wybór:

- elementarnego zachowania OA gdy odległość od przeszkód jest bardzo mała, bez względu na odległość od celu (poza sytuacją, gdy odległość do celu jest bardzo mała),

- elementarnego zachowania GS, gdy odległość od celu jest bardzo mała,
- płynne przełączanie zachowań OA i GS w zależności od odległości od celu oraz przeszkód.

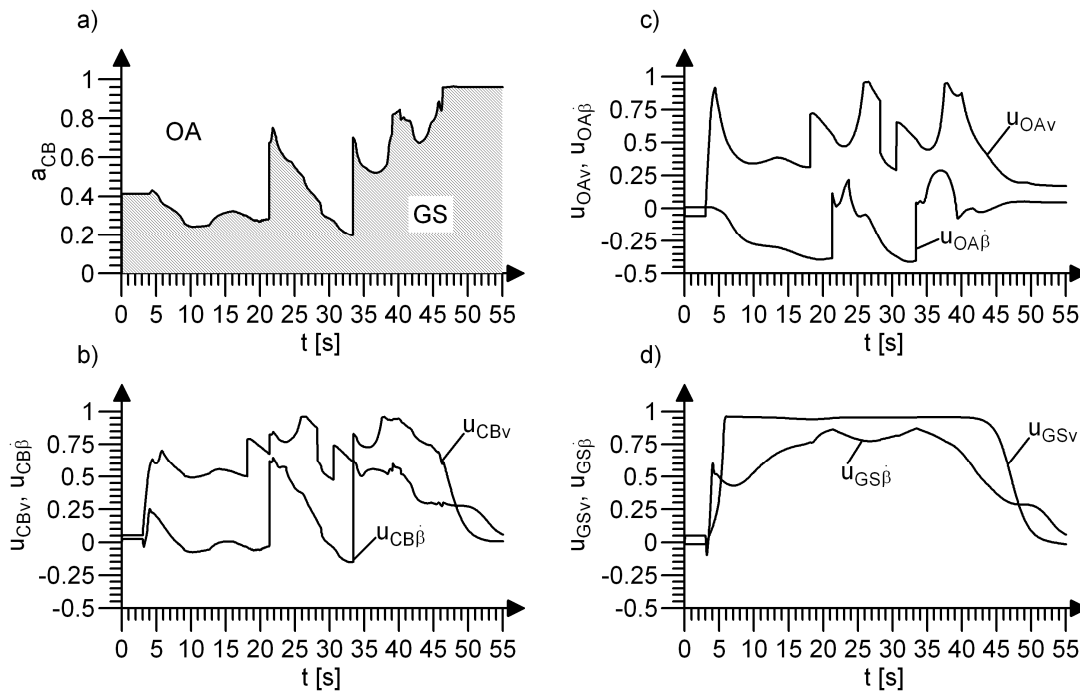


Rys. 13. Realizacja rozmytego połączenia dwóch elementarnych zachowań: GS oraz OA przez MRK

Zadanie generowania bezkolizyjnej trajektorii ruchu MRK w nieznanym środowisku z punktu startowego $A_0(0.5, 1.3)$ do punktu $G(5.0, 4.4)$, oraz realizację zadanej trajektorii przez zaprojektowany hierarchiczny układ sterowania przedstawiono na Rys. 13.

Przebieg sygnału a_{CB} skalującego sygnały sterowania zachowań behawioralnych w czasie ruchu MRK przedstawiono na Rys. 14.a). W początkowej fazie ruchu, gdy odległość od celu jest duża i odległość od przeszkód mała, dominujący udział w całkowitym sterowaniu warstwy generowania trajektorii u_{CB} (Rys. 14.b) ma sygnał generowany przez zachowanie OA u_{OA} (Rys. 14.c), jednakże gdy odległość do celu zmniejsza się, oraz odległość od przeszkód jest większa, decydującą rolę w sterowaniu ma zachowanie GS u_{GS} (Rys. 14.d).

Dobór odpowiedniej bazy reguł oraz funkcji przynależności do zbiorów rozmytych wejść układu FL pozwoliły na gładkie przełączenie realizacji elementarnych zachowań OA i GS podczas ruchu MRK w nieznanym środowisku, oraz realizację złożonego zadania podążania do celu z ominięciem przeszkód.



Rys. 14. a) Współczynnik skalowania elementarnych zachowań a_{CB} , b) przebiegi wartości sygnałów u_{CBv} oraz $u_{CB\beta}$, c) przebiegi wartości sygnałów u_{OAv} oraz $u_{OA\beta}$, d) przebiegi wartości sygnałów u_{GSv} oraz $u_{GS\beta}$

6. PODSUMOWANIE

W pracy zaproponowano zastosowanie hierarchicznego układu sterowania, składającego się z warstwy generowania bezkolizyjnej trajektorii ruchu w nieznanym otoczeniu ze statycznymi przeszkodami, oraz warstwy realizacji ruchu. Warstwa realizacji ruchu realizuje zadanie generowania sterowań w ruchu nadążnym, dla trajektorii zadanej wygenerowanej przez wyższą warstwę układu sterowania.

Zadanie generowania bezkolizyjnej trajektorii ruchu w nieznanym otoczeniu zostało dekomponowane na dwa elementarne zachowania: „omijania przeszkód” oraz „podążania do celu”, zrealizowane w postaci struktur NDP z zastosowaniem nowoczesnych metod sztucznej inteligencji. Każde z elementarnych zachowań jest realizowane poprawnie, pozwalając na generowanie bezkolizyjnej trajektorii ruchu (OA) lub trajektorii gwarantującej osiągnięcie założonego celu (GS).

Kombinację dwóch elementarnych zachowań zrealizowano przy pomocy układu z logiką rozmytą w oparciu o wiedzę eksperta, co pozwoliło na płynne przełączanie realizacji poszczególnych zachowań elementarnych w zależności od sygnału ze środowiska. Badania symulacyjne przeprowadzono na emulatorze MRK Pioneer 2-DX.

Analizowany hierarchiczny układ sterowania składający się z warstwy generowania bezkolizyjnej trajektorii ruchu oraz realizacji ruchu MRK pracuje poprawnie realizując założone zadania w nieznanym otoczeniu ze statycznymi przeszkodami. Analizowane rozwiązania zostaną zastosowane w nawigacji MRK w czasie rzeczywistym.

LITERATURA

1. **Bellman R.**, (1957), *Dynamic programming*, Princeton University Press, New York.
2. **Drainkov D., Saffiotti A.** (2001), *Fuzzy logic techniques for autonomous vehicle navigation*, Springer-Verlag, New York.
3. **Ferrari S., Stengel R.F.** (2004), Model-based adaptive critic design, W: *Handbook of Learning and Approximate Dynamic Programming*, Wiley - IEEE Press, New York, 65-95.
4. **Giergiel J., Żylski W.** (2005), Description of motion of a mobile robot by Maggie's Equations, *J. Theor. and App. Mech.*, Vol. 43, No 3, 511-521.
5. **Giergiel M., Hendzel Z., Żylski W.** (2002), *Modelowanie i sterowanie mobilnych robotów kołowych*, PWN, Warszawa.
6. **Hendzel Z.** (2004), Fuzzy reactive control of wheeled mobile robot, *J. Theor. App. Mech.*, Vol. 42, No 3, 503-517.
7. **Hendzel Z.** (2007), An adaptive critic neural network for motion control of a wheeled mobile robot, *Nonlin. Dyn.*, Vol. 50, No 4, 849-855.
8. **Hendzel Z., Szuster M.** (2009), Discrete action dependant heuristic dynamic programming in wheeled mobile robot control, W: *V International Conf. on Mechatronic Systems and Materials 2009*, Wilno, 114-119.
9. **Powell W.B.** (2007), *Approximate dynamic programming: Solving the curses of dimensionality*, Willey-Interscience, Princeton.
10. **Prokhorov D., Wunch D.C.** (1997), Adaptive critic designs, *IEEE Trans. on Neural Net.*, Vol. 8, No 5, 997-1007.
11. **Sutton R.S., Barto A.G.** (1999), *Reinforcement learning: an introduction*, MIT Press, Cambridge, 1999.

NEURAL DYNAMIC PROGRAMMING IN BEHAVIOURAL CONTROL OF A WHEELED MOBILE ROBOT

Abstract: In this paper an innovative approach to a collision-free trajectory generating for a wheeled mobile robot (WMR) with Neural Dynamic Programming (NDP) and Fuzzy Logic (FL) algorithms, is proposed. The presented hierarchical control system consists of a trajectory generating algorithm based on reactive navigation of the WMR in unknown 2D environment with static obstacles, and a tracking control system. A strategy of reactive navigation is developed including two main behaviours: obstacle avoiding behaviour (OA) and goal-seeking behaviour (GS) realized in a form of NDP algorithms. These simple, individual behaviours are combined by the fuzzy combiner of behaviours (CB), that determines influence of the individual behaviours according to environment conditions. A computer simulations of the proposed control algorithm have been conducted in virtual environment for the WMR Pioneer 2-DX.

WSPÓŁCZYNNIKI INTENSYWNOŚCI NAPRĘŻEŃ W SZCZELINACH WYCHODZĄCYCH Z WIERZCHOŁKA KARBU V

Andrzej KAZBERUK*

*Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka,
ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

a.kazberuk@pb.edu.pl

Streszczenie: Przedstawiono metodę obliczania współczynników intensywności naprężeń w szczelinach wychodzących z wierzchołka zaokrąglonego karbu V w nieskończonej, izotropowej, rozciąganej płaszczyźnie sprężystej. Wartości numeryczne współczynników intensywności naprężeń otrzymano dla dwóch podstawowych symetrycznych przypadków – pojedynczej szczeliny i układu dwóch równych szczelin. Przeprowadzono analizę wpływu wielkości promienia zaokrąglenia wierzchołka karbu V na obliczane współczynniki intensywności naprężeń szczelin. Uzyskane rozwiązanie asymptotyczne ma charakter ogólny – współczynniki intensywności naprężeń w szczelinach są wyrażone poprzez współczynnik intensywności naprężeń w wierzchołku karbu V – umożliwiając oszacowanie parametrów mechaniki pęknięcia w symetrycznych ciałach skończonych osłabionych rozrywaniem karbami.

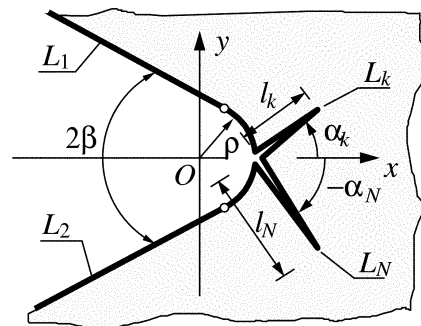
1. WPROWADZENIE

Problemy mechaniki pęknięcia dotyczące szczelin wychodzących z wierzchołka nieskończonego karbu w płaszczyźnie sprężystej, są często wykorzystywane jako asymptotyczne przybliżenia rozwiązań w obszarach skończonych. Model ten jest adekwatny, ponieważ długość tworzącej się szczeliny w procesie poprzedzającym pęknięcie jest mała w stosunku do pozostałych wymiarów ciała. Ponadto, znajomość współczynników intensywności naprężeń w wierzchołkach szczelin wychodzących z wierzchołka karbu, umożliwia rozwiązywanie zagadnień sprężysto-plastycznych mechaniki pęknięcia w ramach modelu pasm plastyczności (Panasiuk i in., 1975, Panasiuk i Savruk, 1992). Bardzo istotnym zagadnieniem przy tworzeniu kryteriów pęknięcia, jest również uwzględnienie wpływu zaokrąglenia wierzchołka karbu na wartości współczynników intensywności naprężeń w szczelinach wychodzących z jego wierzchołka (Leguillon i Yosibash, 2003).

Problemowi rozkładu naprężeń w sprężystym klinie z symetryczną szczeliną w wierzchołku poświęcone są prace Doran'a (1969), Ouchterlony (1977), Smetanina (1993) i innych. Rozwiązanie uzyskiwano zazwyczaj używając transformacji Mellin'a i faktoryzacji Wiener'a-Hopf'a. Zamknięte, przybliżone rozwiązanie problemu ostrego karbu V z symetryczną szczeliną w wierzchołku uzyskali Savruk i Ritsar (1999) metodą osobliwych równań całkowych. Przyjmując obciążenie w postaci asymptotyki pola naprężeń, Savruk i Kazberuk (2006) otrzymali związek pomiędzy współczynnikiem koncentracji naprężeń w wierzchołku karbu zaokrąglonego i współczynnikiem intensywności naprężeń w wierzchołku odpowiedniego karbu ostrego. Wykorzystując zbliżone podejście można obliczyć współczynniki intensywności naprężeń dla układu szczelin wychodzących z wierzchołka zaokrąglonego karbu V podanego rozrywania.

2. UKŁAD SZCZELIN W WIERZCHOŁKU ZAOKRĄGLONEGO KARBU V

Rozważa się nieskończony, symetrycznie rozrywany karb typu V, wycięty w jednorodnej płaszczyźnie sprężystej. Karb ma ramiona proste rozwarłe pod kątem 2β ($0 \leq 2\beta \leq \pi$) i wierzchołek zaokrąglony odcinkiem łuku kołowego o promieniu ρ . Z wierzchołka karbu wychodzą szczeliny o długościach l_k . Kąty nachylenia szczelin do osi Ox oznaczono α_k . Stosunki promienia zaokrąglenia karbu do długości szczelin określają parametry $\varepsilon_k = \rho/l_k$.



Rys. 1. Szczeliny wychodzące z wierzchołka karbu zaokrąglonego

W pracy przyjęto za Sewerynem (1994) następującą definicję współczynnika intensywności naprężeń w wierzchołku karbu ostrego:

$$\tilde{K}_I^V = \lim_{r \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0} [(2\pi r)^\lambda \sigma_{\theta\theta}(r, \theta)],$$

gdzie λ jest najmniejszym dodatnim pierwiastkiem równania charakterystycznego (Williams 1952)

$$(1 - \lambda) \sin(2\alpha) + \sin(2\alpha(1 - \lambda)) = 0, \quad \alpha = \pi - \beta.$$

Zadanie rozwiązano metodą osobliwych równań całkowych (Savruk, 1981), przyjmując że kontur karbu modelują dwie zakrzywione szczeliny. Zespolone potencjały naprężeń Kolosova-Muskhelishvili (1966) zapisano w postaci superpozycji

$$\Phi_*(z) = \Phi_0(z) + \Phi(z), \quad \Psi_*(z) = \Psi_0(z) + \Psi(z).$$

Brzegi karbu są nieobciążone, a stan naprężeń w nieskończoności opisują następujące potencjały $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ (Benthem 1987):

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= -\frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi z)^\lambda} \frac{\lambda-1}{A(\lambda)} \sin(2\alpha), \\ \Psi_0(z) &= -\frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi z)^\lambda} \frac{\lambda-1}{A(\lambda)} \sin(2\lambda\alpha), \end{aligned} \quad (1)$$

$$A(\lambda) = (\lambda-1)[(\lambda-2)\sin(2\alpha) + \sin(2\lambda\alpha)], \quad \alpha = \pi - \beta.$$

Nieznane zespolone potencjały $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ opisują zaburzenie pola naprężeń wywołane obecnością karbu (kontury L_1+L_2) oraz szczelin (L_k , $k=3,...,N$). Równowagę na konturach brzegowych określa warunek graniczny:

$$\begin{aligned} N(t) + iT(t) &= p(t) = \\ &= -\left\{ \Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + \frac{dt}{dt} \left[t \overline{\Phi_0'(t)} + \overline{\Psi_0(t)} \right] \right\}, \\ t \in L_k, \quad k &= 1, ..., N \end{aligned} \quad (2)$$

Poszukiwane potencjały naprężeń mają następujące przedstawienia całkowe (Savruk, 1981):

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{g'(t)}{t-z} dt, \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{\overline{g'(t)}}{t-z} dt - \frac{\bar{t}g'(t)}{(t-z)^2} dt \right], \quad L = \bigcup_{k=1}^N L_k. \end{aligned}$$

Spełniając warunek graniczny (2), otrzymuje się osobliwe równanie całkowe (Savruk, 1981; Savruk i inni, 1989):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \int [K_{km}(t, t') g'(t) dt + L_{km}(t, t') \overline{g'(t)} \overline{dt}] &= p(t'), \\ t' \in L_m, \quad m &= 1, 2, ..., N, \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie

$$\begin{aligned} K_{km}(t, t') &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t-t'} + \frac{\overline{dt'}}{dt'} \frac{1}{\bar{t}-\bar{t}'} \right], \\ L_{km}(t, t') &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\bar{t}-\bar{t}'} + \frac{\overline{dt'}}{dt'} \frac{t-t'}{(\bar{t}-\bar{t}')^2} \right], \quad t \in L_k, \quad t' \in L_m. \end{aligned} \quad (4)$$

Uzyskanie rozwiązania równania (3) wymaga spełnienia warunku jednoznaczności przemieszczeń na konturach brzegowych (Savruk, 1981):

$$\int_L g'(t) dt = 0, \quad L = \bigcup_{k=1}^N L_k. \quad (5)$$

Można wykazać (Savruk i inni, 1989), że warunek (5) będzie automatycznie spełniony jeżeli jądra (4) równania całkowego (3) w punktach ($t = l_k^-$, $k = 1, 2, ..., N$) przecięcia konturów L_k przyjmą wartości zerowe. Uwzględniając tą właściwość, równanie (3) zapisano w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{L_k} [K_{km}^*(t, t') g_k'(t) dt + L_{km}^*(t, t') \overline{g_k'(t)} \overline{dt}] &= p(t'), \\ t' \in L_m, \quad m &= 1, 2, ..., N, \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie

$$\begin{aligned} K_{km}^*(t, t') &= K_{km}(t, t') - K_{km}(l_k^-, t'), \\ L_{km}^*(t, t') &= L_{km}(t, t') - L_{km}(l_k^-, t'). \end{aligned} \quad (8)$$

Jak widać, dla $t = l_k^-$ oba zmodyfikowane jądra (8) są równe zero

$$K_{km}^*(l_k^-, t') = L_{km}^*(l_k^-, t') = 0, \quad k = 1, 2, ..., N.$$

Przyjmując promień zaokrąglenia wierzchołka karbu ρ jako podstawową jednostkę długości równania konturów brzegowych zapisuje się w postaci parametrycznej

$$t = \rho \omega_k(\xi), \quad t \in L_k, \quad k = 1, 2, ..., N, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad (9)$$

gdzie

$$\omega_1(\xi) = \exp(i\varphi(\xi)) \begin{cases} 1, & 0 \leq \varphi(\xi) \leq \varphi_B, \\ \operatorname{cosec}(\varphi(\xi) + \beta), & \varphi(\xi) > \varphi_B, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \frac{1}{2}(\xi+1)(\pi-\beta), \quad \varphi_B = \pi/2 - \beta, \\ \omega_2(\xi) &= \overline{\omega_1(\xi)}, \end{aligned}$$

$$\omega_k(\xi) = 1 + \frac{1}{2\varepsilon_k}(\xi+1)\exp(i\alpha_k), \quad 0 \leq \alpha_k < \alpha.$$

Dokonując zamiany zmiennych (9), równanie całkowe (7) zapisuje się w formie kanonicznej

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 [M_{km}(\xi, \eta) g_k'(\xi) + N_{km}(\xi, \eta) \overline{g_k'(\xi)}] d\xi &= p_m(\eta), \\ -1 \leq \eta \leq 1, \quad m &= 1, 2, ..., N, \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie

$$M_{km}(\xi, \eta) = \rho K_{km}^*(\rho\omega_k(\xi), \rho\omega_m(\eta)) = \\ = \rho [K_{km}(\rho\omega_k(\xi), \rho\omega_m(\eta)) - K_{km}(\rho\omega_k(-1), \rho\omega_m(\eta))],$$

$$N_{km}(\xi, \eta) = \rho L_{km}^*(\rho\omega_k(\xi), \rho\omega_m(\eta)) = \\ = \rho [L_{km}(\rho\omega_k(\xi), \rho\omega_m(\eta)) - L_{km}(\rho\omega_k(-1), \rho\omega_m(\eta))]$$

oraz

$$g'_k(\xi) = g'(\rho\omega_k(\xi))\omega'(\xi), \quad p_m(\eta) = p(\rho\omega_m(\eta)).$$

Uwzględniając zależność asymptotyczną (1), prawa strona równania (10) ma postać następującą:

$$p_m(\eta) = -\frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi\rho)^\lambda} \left[\Phi_0(\omega_m(\eta)) + \overline{\Phi_0(\omega_m(\eta))} + \right. \\ \left. + \frac{\omega'_m(\eta)}{\omega'_m(\eta)} \left[\omega_m(\eta) \overline{\Phi'_0(\omega_m(\eta))} + \overline{\Psi_0(\omega_m(\eta))} \right] \right].$$

Rozwiązania osobliwego równania całkowego (10) poszukuje się w klasie funkcji nieograniczonych na brzegach (Savruk, 1981)

$$g'_k(\xi) = \frac{u_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

Stosując kwadraturę całkową Gauss'a-Chebyshev'a otrzymuje się układ algebraicznych równań liniowych będący dyskretnym analogiem równania całkowego (10)

$$\sum_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} [M_{km}(\xi_i, \eta_j) u_k(\xi_i) + \right. \\ \left. + N_{km}(\xi_i, \eta_j) \overline{u_k(\xi_i)}] \right\} = p_m(\eta_j)$$

$$m = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n_k - 1,$$

$$\xi_i = \cos \frac{\pi(2i-1)}{2n_k}, \quad i = 1, \dots, n_k,$$

$$\eta_j = \cos \frac{\pi j}{n_k} \quad j = 1, \dots, n_k - 1.$$

Wynikowy układ $\sum_{k=1}^N n_k - N$ równań liniowych uzupełnia się N równaniami wynikającymi z warunku

$$u_k(-1) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

zerowania współczynników intensywności naprężeń w punktach przecięcia szczelin. Stosując interpolację Lagrange'a na węzłach Chebyshev'a, oblicza się wartości funkcji $u_k(\xi)$ w dowolnych punktach $\xi \neq \xi_i$:

$$u_k(\xi) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (-1)^{i+1} u_k(\xi_i) \frac{T_{n_k}(\xi) \sqrt{1-\xi_i^2}}{\xi - \xi_i}. \quad (12)$$

W rezultacie, rozwiązywany jest następujący układ równań liniowych:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} [M_{km}(\xi_i, \eta_j) u_k(\xi_i) + N_{km}(\xi_i, \eta_j) \overline{u_k(\xi_i)}] \right\} = \\ = p_m(\eta_j), \quad j = 1, \dots, n_k - 1, \quad m = 1, 2, \dots, N, \\ \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (-1)^{i+n_k} \tan \frac{\pi(2i-1)}{4n_k} u_k(\xi_i) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (13)$$

Współczynniki intensywności naprężeń w wierzchołkach szczelin L_k ($k=3, N$) obliczane są w sposób następujący (Savruk i inni 1989):

$$K_{I,k}(l_k^+) - iK_{II,k}(l_k^+) = -\lim_{t \rightarrow l_k^+} \sqrt{2\pi|t - l_k^+|} g_k'(t) = \\ = (F_I - iF_{II}) \tilde{K}_I^V(\pi l_k)^{1/2-\lambda}, \quad t \in L_k, \quad k = 3, \dots, N \quad (14)$$

gdzie bezwymiarowe współczynniki intensywności naprężeń F_I i F_{II} obliczane są ze wzoru (Savruk 1981):

$$F_I - iF_{II} = -\frac{1}{2^\lambda} \sqrt{|\omega'_k(+1)|} \frac{u_k(+1)}{\omega'_k(+1)}.$$

Wartości funkcji $u_k(+1)$ w wierzchołkach szczelin obliczane są ze wzoru

$$u_k(+1) = -\frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (-1)^i u_k(\xi_i) \cot \frac{\pi(2i-1)}{4n_k}.$$

wynikające z ogólnej zależności (12).

3. POJEDYNCZA SYMETRYCZNA SZCZELINA W WIERZCHOŁKU KARBU

Przyjmując $N = 3$, $\alpha_3 = 0$ i $l_3 = l$ otrzymuje się symetryczny układ karbu z pojedynczą szczeliną w wierzchołku. Symetria układu i obciążenia względem osi Ox implikuje następujące zależności (Savruk i inni 1989):

$$u_2(\xi_i) = \overline{u_1(\xi_i)}, \quad n_1 = n_2, \quad i = 1, \dots, n_2, \\ \text{Im } u_3(\xi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n_3,$$

i pozwala na dwukrotną redukcję rzędu rozwiązywanego układu równań.

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla kątów rozwarcia karbu w przedziale $5^\circ \leq 2\beta \leq 175^\circ$. Względny promień krzywizny wierzchołka zmieniano w zakresie $0,001 \leq \varepsilon = \rho/l \leq 1000$. Uzyskane wartości bezwymiarowe

wych współczynników intensywności naprężeń przedstawiono na rys. 2a. Dla karbu ostrego ($\varepsilon=0$) wartości współczynników intensywności naprężeń obliczono modyfikując równania parametryczne krzywych L_1 i L_2 opisujących kontur karbu $t = l\omega_k(\xi)$, $k = 1, 2$,

$$\omega_1(\xi) = -\frac{1+\xi}{1-\xi} \exp(-i\beta), \quad \omega_2(\xi) = \overline{\omega_1(\xi)}, \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

Jak można zauważyć, krzywe na rys. 2a szybko osiągają wartości asymptotyczne. Dla $\varepsilon < 1$, tzn. gdy długość szczeliny jest większa od promienia zaokrąglenia wierzchołka karbu, obliczone wartości współczynników intensywności naprężeń są bliskie wartościom otrzymywanym dla szczelin w wierzchołku odpowiedniego karbu ostrego.

Jak należało się spodziewać dla $2\beta \rightarrow 0$, karb przechodzi w szczelinę i obliczony współczynnik intensywności naprężeń $F_I \rightarrow 1$. Przy $2\beta \rightarrow \pi$ ramiona karbu tworzą krawędź półpłaszczyzny i wówczas współczynnik intensywności naprężeń w wierzchołku szczeliny osiąga dobrze znaną wartość $F_I \rightarrow 1,1215$ (patrz np. Savruk, 1988).

Obliczone wartości $F_I(\beta)$ porównano z zależnością aproksymacyjną uzyskaną na drodze analitycznej (Savruk, Ritsar 1999):

$$F_I = \frac{2^{1/2-\lambda} \Gamma((1-\lambda)/c)}{\sqrt{\pi c} \Gamma((1-\lambda)/c + 0,5)},$$

$$c = \frac{\pi}{2} \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha}, \quad \alpha = \pi - \beta. \quad (15)$$

Maksymalna różnica porównywanych wielkości F_I obliczonych numerycznie i przybliżonych zależnością (15) wystąpiła dla $\beta \approx 70^\circ$ nie przekraczając 1%.

Obliczone, asymptotyczne wartości współczynników intensywności naprężeń w szczelinach zlokalizowanych w wierzchołku nieskończonego karbu V mogą posłużyć do oszacowania współczynnika intensywności naprężeń dla szczeliny wychodzącej z wierzchołka karbu o skończonej głębokości. Na przykład współczynnik intensywności naprężeń dla szczeliny w wierzchołku ostrego karbu o kącie rozwarcia $2\beta = \pi/3$ wyciętego w krawędzi półpłaszczyzny jest równy (Savruk 1988):

$$\tilde{K}_I^V = 1,186\sqrt{\pi}pd^\lambda = 1,203p(\pi d)^\lambda,$$

gdzie d jest głębokością karbu a wykładnik osobliwości naprężeń jest równy $\lambda = 0,4878$. Obliczona, asymptotyczna wartość współczynnika intensywności naprężeń w wierzchołku szczeliny zlokalizowanej w wierzchołku karbu nieskończonego wynosi $F_I = 1,000$. Zatem szacunkowa wartość współczynnika intensywności naprężeń w wierzchołku szczeliny jest równa:

$$K_I = F_I \tilde{K}_I^V (\pi l)^{1/2-\lambda} = 1,203(l/d)^{-\lambda} F_I p\sqrt{\pi l} = F_I^* p\sqrt{\pi l}. \quad (16)$$

Wartości bezwymiarowych współczynników F_I^* obliczono dla różnych stosunków l/d długości szczeliny do głębokości karbu i zestawiono w tab. 1.

Dla szczelin o niewielkiej długości (w porównaniu z głębokością karbu), względny błąd oszacowania (16) wynosi ok. 2%. Dla szczelin o większej długości, błąd oszacowania narasta asymptotycznie. Podobne wyniki otrzymano porównując dane i oszacowane wartości współczynników intensywności naprężeń dla szczeliny wychodzącej z wierzchołka karbu zaokrąglonego wyciętego w rozciąganej półpłaszczyźnie [15]. Dla stałej względnej długości szczeliny $l/d = 0,1$ wyrażenie (16) przyjmuje postać:

$$K_I = 3,699F_I p\sqrt{\pi l} = F_I^* p\sqrt{\pi l} \quad (17)$$

Tab. 1. Porównanie współczynników intensywności naprężeń oszacowanych ze wzoru (16) i opublikowanych przez Hasebe and Iida (1978)

l/d	0,005	0,098	0,016	0,186	0,548
F_I^*	16,44	11,49	8,93	2,73	1,61
$F_I^{H,I}$	16,07	11,25	8,76	2,83	1,88
$\Delta F_I^* [\%]$	2,3	2,1	1,9	-3,4	-14,2

Tab. 2. Porównanie współczynników intensywności naprężeń oszacowanych ze wzoru (17) i opublikowanych Nisitani i Oda (Savruk, 1988)

$\varepsilon = \rho/l$	1,25	2,5	5,0	10,0
ρ/d	0,125	0,25	0,5	1,0
F_I	0,9679	0,9105	0,8008	0,5650
F_I^*	3,580	3,368	2,962	2,423
$F_I^{N,O}$	3,668	3,532	3,250	2,856
$\Delta F_I^* [\%]$	-2,4	-4,6	-8,9	-15,2

Jak pokazano w tab. 2, dla niewielkich wartości promienia zaokrąglenia wierzchołka karbu (w porównaniu z jego głębokością), błąd oszacowania (17) jest akceptowalny.

4. DWIE SYMETRYCZNE SZCELINY W WIERZCHOŁKU KARBUR

Rozważa się dwie prostoliniowe szczeliny (kontury L_3 i L_4), symetryczne względem osi Ox , o równych długościach $l_3 = l_4 = l$, wychodzące z zaokrąglonego wierzchołka karbu V. Kąt jaki tworzą szczeliny oznaczono $2\tilde{\alpha}$ (patrz schemat na rys. 3). Podobnie jak w poprzednim przykładzie, $\varepsilon = \rho/l$ jest względnym promieniem zaokrąglenia wierzchołka karbu. Symetria układu oraz symetria obciążenia powoduje, że zachodzą następujące warunki:

$$u_2(\xi_i) = \overline{u_1(\xi_i)}, \quad n_1 = n_2, \quad i = 1, \dots, n_2,$$

$$u_4(\xi_i) = \overline{u_3(\xi_i)}, \quad n_3 = n_4, \quad i = 1, \dots, n_3. \quad (18)$$

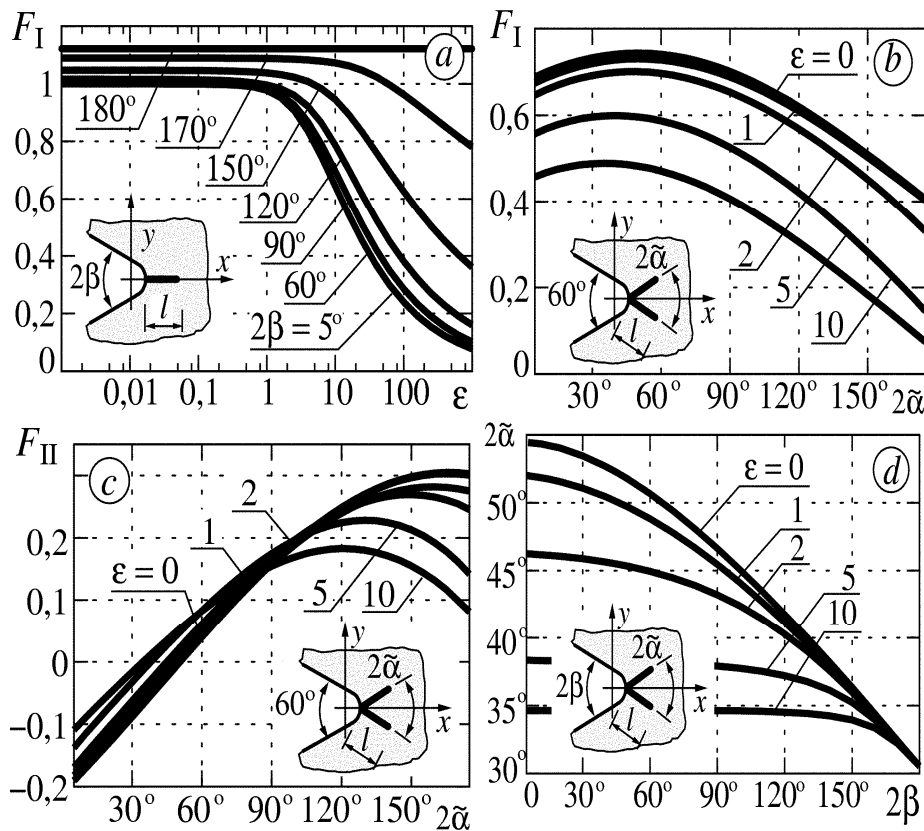
Podstawiając warunki (18) do (13), otrzymuje się wynikiowy układ równań liniowych.

Obliczenia udało się przeprowadzić dla dowolnej kombinacji parametrów β , ε , i $\tilde{\alpha}$ z przedziałów: $5^\circ \leq 2\beta \leq 175^\circ$, $0,001 \leq \varepsilon \leq 100$, $5^\circ \leq 2\tilde{\alpha} \leq 170^\circ$. Otrzymane wartości bezwymiarowych współczynników intensywności naprężeń dla skrajnych wartości kąta rozwarcia karbu 2β są zgodne z wynikami dla układu rozgałęzionych szczelin w nieograniczonej, rozciąganej płaszczyźnie $2\beta \rightarrow 0$ oraz dla układu dwóch szczelin w krawędzi rozciąganej półpłaszczyzny $2\beta \rightarrow \pi$ (patrz Savruk 1988).

Ze względu na dużą liczbę niezależnych parametrów zadania, prezentację wyników ograniczono do przypadków o znaczeniu praktycznym. Na rys. 2b,c przedstawiono zależność współczynników intensywności naprężeń dla szcze-

lin umieszczonych w wierzchołku karbu o kącie rozwarcia ramion $2\beta=60^\circ$ od względnego promienia zaokrąglenia wierzchołka karbu. Podobnie jak w przypadku pojedynczej szczeliny, dla $\varepsilon < 1$ wpływ zaokrąglenia na obliczane współczynniki intensywności naprężeń jest niewielki, a otrzymywane wartości F_I i F_{II} są zbliżone do odpowiednich wartości dla karbu ostrego.

Dla pewnych wartości kąta $2\tilde{\alpha}$ (rys. 2d) wartości współczynnika intensywności naprężeń F_I osiągają maksimum. Wartości te otrzymano rozwiązując równanie nieliniowe $K_{II}(\tilde{\alpha}) = 0$ (dla kątów rozwarcia karbu z przedziału $5^\circ \leq 2\beta \leq 180^\circ$) metodą siecznych.



Rys. 2. Bezwymiarowy współczynnik intensywności naprężeń F_I w wierzchołku pojedynczej szczeliny w funkcji względnego promienia zaokrąglenia karbu (a); bezwymiarowe współczynniki intensywności naprężeń F_I (b) i F_{II} (c) dla symetrycznego układu szczelin, w funkcji kąta pomiędzy szczelinami $2\tilde{\alpha}$ dla kąta rozwarcia karbu $2\beta=60^\circ$; kąt $2\tilde{\alpha}$ przy $F_{I,max}$, $F_{II}=0$ w zależności od kąta rozwarcia karbu 2β (d)

5. WNIOSKI

Dokonano obliczeń współczynników intensywności naprężeń dla ważnego problemu mechaniki pękania. Otrzymane rozwiązanie asymptotyczne ma ogólny charakter – współczynniki intensywności naprężeń w wierzchołkach szczelin są wyrażone poprzez współczynnik intensywności naprężeń w wierzchołku karbu V, z którego wychodzą. Jak pokazano, zależność ta może być wykorzystana do szacowania współczynników intensywności naprężeń

w wielu przypadkach szczególnych elementów z karami V poddanych symetrycznemu rozrywaniu

Zaprezentowano nową technikę metody osobliwych równań całkowych umożliwiającą efektywne rozwiązywanie zagadnień z układami przecinających się szczelin. Używając typowego sprzętu komputerowego, w krótkim czasie, obliczono z dużą dokładnością wartości współczynników intensywności naprężeń dla praktycznie pełnych zakresów zmienności parametrów geometrycznych zadania. Dane te mogą być podstawą opracowania wzorów aproksymacyjnych o charakterze inżynierskim.

LITERATURA

STRESS INTENSITY FACTORS AT CRACK TIPS LOCATED AT ROUNDED V-NOTCH VERTEX

1. **Aleksandrov V.M., Smetanie B.I., Cobol' B.V.** (1993) *Tonkie koncentratory naprâženij v uprugih telah*, Nauka, Moskva.
2. **Benthem J. P.** (1987) Stresses in the region of rounded corners, *International Journal of Solids and Structures*, 23(2), 239 – 252.
3. **Doran H.E.** (1969) The wedge with a symmetrical crack at the vertex in plane elastostatics, *J. Inst. Maths Applics.*, 5(4), 363-372.
4. **Hasebe N., Iida J.** (1978) A crack originating from triangular notch on a rim of semi-infinite plate, *Eng. Fract. Mech.*, 13(7), 773-782.
5. **Leguillon D., Yosibash Z.** (2003) Crack onset at a v-notch. Influence of the notch tip radius, *Int. J. Fract.* 122, 1-21.
6. **Muskhelišvili N. I.** (1966) *Nekotorye osnovnye zadachi matematičeskoj teorii uprugosti*, Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR, 5 edn.
7. **Ouchterlony F.** (1977) Symmetric cracking of wedge by concentrated loads, *Int. J. Eng. Sci.*, 15(2), 109-116.
8. **Panasjuk V.V., Savruk M.P.** (1992) Plastic strips model in elastic-plastic problems of fracture mechanics, *Advances in Mechanics*. 15(3-4), 123–147.
9. **Panasjuk V.V., Vitvitskii P.M., Yarema S.Ya.** (1975) Plastic deformation around crack and fracture criteria, *Eng. Fract. Mech.*, 7(2), 305-319.
10. **Savruk M. P., Kazberuk A.** (2007) *A unified approach to problems of stress concentration near V-shaped notches with sharp and rounded tip.*, 43(2), 182-196.
11. **Savruk M. P.** (1981) *Dvumernye zadachi uprugosti dla tel s trešinami*, Naukova Dumka, Kiev.
12. **Savruk M. P.** (1988) *Koëfficienty intensivnosti naprâženij v telah s trešinami*, vol. 2 of *Mehanika razrušeniâ i pročnosť materialov: Sprav. posobie pod red. V.V. Panasûka*, Naukova Dumka, Kiev.
13. **Savruk M. P., Osiv P. N., Prokopčuk I. V.** (1989) *Čislennyj analiz v ploskih zadachah teorii trešin*, Naukova Dumka, Kiev.
14. **Savruk M. P., Ricar R.B.** (1999) Zamknij nabliženij rozvâzok ploskoi teorii pryžnosti dla klina s simetričnoû trešinoû, *Mehanika rujnuvannâ materialiv i konstrukcij (vip. 2)*, v z-t pid red. V.V. Panasûka –Lviv, Kamenar, 2, 125-128.
15. **Savruk M.P., Kazberuk A.** (2006) Relationship between the stress intensity and stress concentration factors for sharp and rounded notches, *Materials Science*, 42(6), 725-738.
16. **Seweryn A.** (1994) Brittle fracture criterion for structures with sharp notches. *Engineering Fracture Mechanics*, 47, 673 – 681.
17. **Williams M.L.** (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension, *J. Appl. Mech.*, 19(4), 526-530.

Abstract: The problem of the stress intensity factors for system of cracks emanating from infinite rounded V-notch apex subjected to tearing load was solved. Numerical values was obtained for two most important symmetrical cases – the single crack and the system of two cracks of equal length. The influence of the notch apex rounding radius on the stress intensity factors at crack tips was analyzed. The asymptotic solution which was obtained has general nature – stress concentration factors at the crack tip are expressed as a function of V-notch stress intensity factor, so this relationship could be applied to estimate essential fracture mechanics parameters in the wide range of particular symmetrical problems of fracture of V-notched structural elements subjected to tearing loads.

OCENA ODPORNOŚCI KOROZYJNEJ NOWYCH STOPÓW TYTANU OTRZYMANÝCH METODĄ METALURGII PROSZKÓW

Ewa KULESZA*

*Zakład Inżynierii Materiałowej i Biomedycznej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka,
ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

ewa.kulesza1@gmail.com

Streszczenie: W pracy przedstawiono analizę odporności korozyjnej nowych stopów tytanu otrzymanych metodą metalurgii proszków. Przedmiotem analizy były krzywe potencjodynamiczne wykonane na podstawie danych uzyskanych z urządzenia ATLAS 9933 ELEKTROCHEMICAL INTERFACE. Korzystając z programu POL-99 wyznaczono wartości potencjałów korozyjnych oraz prądów korozji spieków tytanowych. Porównano charakterystyki korozyjne nowych stopów tytanowych i litego stopu handlowego – Ti6Al4V. Stwierdzono przesunięcie potencjału korozyjnego badanych spieków w stronę wyższych potencjałów względem stopu handlowego.

1. WSTĘP

Tytan i jego stopy wykorzystuje się obecnie w wielu dziedzinach przemysłu. Duże zastosowanie tytan zawdzięcza przede wszystkim wysokiej wytrzymałości właściwej oraz bardzo dobrej odporności korozyjnej. Ze stopów tytanu wytwarza się m.in.: łopatkę sprężarek, belki nośne kół, wymienniki ciepła, kondensatory, zbiorniki wybielające, układy odsalania, narzędzia profilujące, płomienice w instalacjach odsiarczania spalin, wymienniki ciepła, zawory i inne części maszyn (Dobrzański, 2008).

W ostatnich latach obserwuje się tendencję do coraz szerszego zastosowania tytanu w medycynie, głównie na implanty i narzędzia chirurgiczne. Obecnie najszerszej stosowany w praktyce medycznej jest stop Ti6Al4V o dwufazowej strukturze ($\alpha + \beta$) jak również czysty tytan. Zastosowanie czystego tytanu jest ograniczone ze względu na zbyt słabe właściwości mechaniczne. W ostatnich latach prowadzone są poszukiwania nowych stopów charakteryzujących się biogodnością. Ze względu na wysoką toksyczność wanadu, a także negatywny wpływ glinu na układ nerwowy, dąży się do wyeliminowania tych pierwiastków stopowych i opracowania nowych stopów, w skład których wejdą pierwiastki biogodne. Od szeregu lat obserwuje się tendencję intensyfikacji badań stopów o jednofazowej strukturze β charakteryzujących się lepszymi właściwościami wytrzymałościowymi (Long and Rack, 1998). Szerokie zastosowanie tytanu i jego stopów wynika z wysokiej odporności korozyjnej zarówno w środowisku kwasów i innych związkach chemicznych agresywnych pod względem korozji, jak również w otoczeniu związków organicznych (Mystkowska i inni, 2010). Dzięki wysokiej odporności korozyjnej w środowisku tkankowym implanty tytanowe są bardzo dobrze biotolerowane, co zostało potwierdzone wieloletnimi obserwacjami klinicznymi (Katti, 2004; Kohn, 1998).

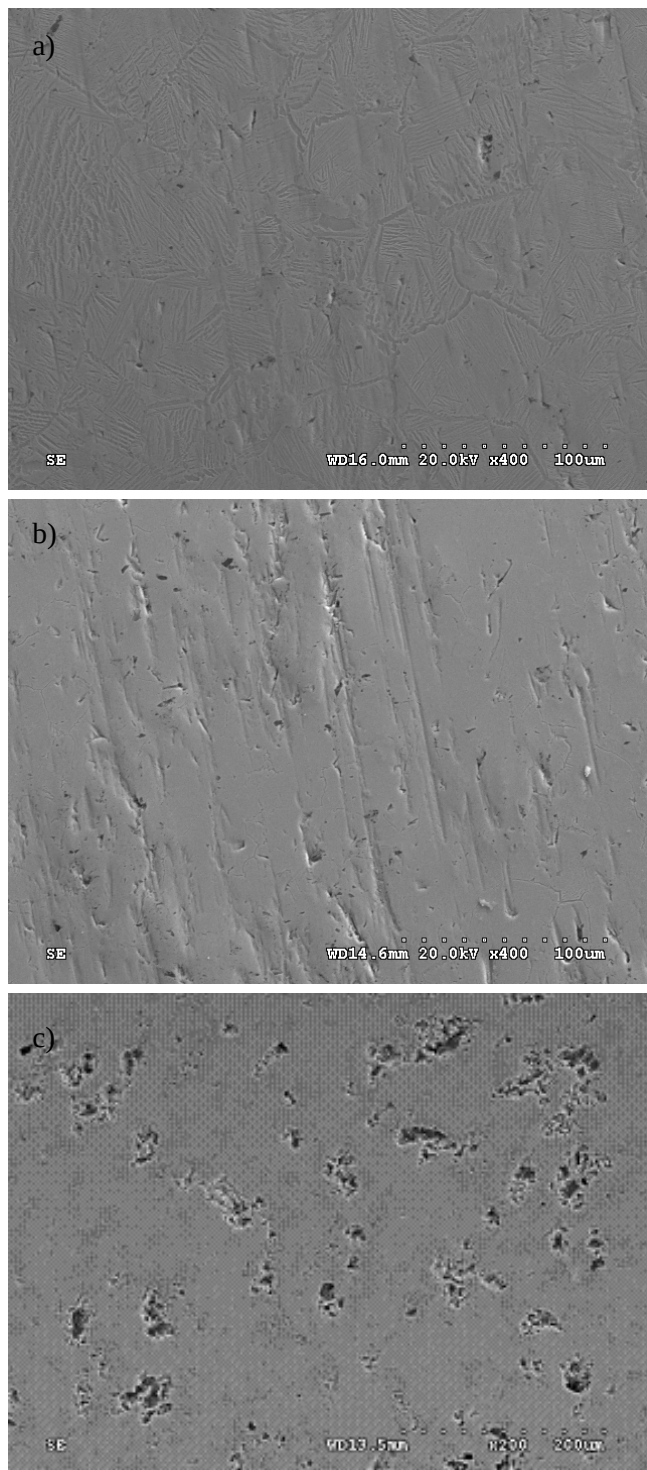
Prowadzone są badania odporności korozyjnej β -fazowych stopów tytanu jak również stopów o dwufazowej strukturze. Potwierdzają one wysoką odporność korozyjną stopów tytanowych. Badania te odnoszą się jednak do stopów litych. Stopy o strukturze β -fazowej zawierające różne kombinacje pierwiastków stopowych badali m.in. Edith i inni (2006), Mythili i inni (2007); Seah i inni (1998). Natomiast charakterystyki korozyjne stopów o strukturze dwu i jedno fazowej zostały przedstawione w artykułach Catana i innych (2009) oraz Seah'a i innych (1998). Określano również odporność korozyjną stopu Ti6Al4V w środowisku kwasu solnego i siarkowego (Mogoda i Badaway, 2004).

Jedną z konkurencyjnych metod otrzymywania technicznych stopów tytanu jest metalurgia proszków. Materiały wykonywane tą metodą są także coraz częściej wykorzystywane do produkcji różnego rodzaju wszczepów implantowanych w organizmie człowieka (Sidun i Dąbrowski, 2009). Metoda ta pozwala na otrzymanie stopów o dowolnym składzie chemicznym i fazowym oraz różnorodnych materiałów kompozytowych (Deptuła i inni, 2007a, b). Ponadto zaletami tej technologii jest jej mała ubytkowość oraz możliwość wykonywania elementów o różnych kształtach. Jedną z najważniejszych cech biofunkcjonalnych stopów implantacyjnych jest ich odporność korozyjna.

W literaturze jest bardzo niewiele doniesień na temat odporności korozyjnej stopów tytanu otrzymanych metodą metalurgii proszków (Blackwood i inni, 2000). Zagadnienia te są interesujące, dlatego podjęto próbę oceny wpływu sposobu wytwarzania na charakterystyki potencjodynamiczne spiekanych materiałów tytanowych. Badania przedstawione w niniejszym artykule dotyczyły analizy nowych stopów tytanu otrzymywanych metodą metalurgii proszków. Skład oraz optymalizacja parametrów wytwarzania nowych stopów tytanu były przedmiotem badań zespołu naukowców z Zakładu Inżynierii Materiałowej i Biomedycznej Politechniki Białostockiej w ostatnich latach (Deptuła i inni, 2007a, b; Grądzka-Dahlke i inni; 2007).

2. MATERIAŁY I METODYKA BADAŃ

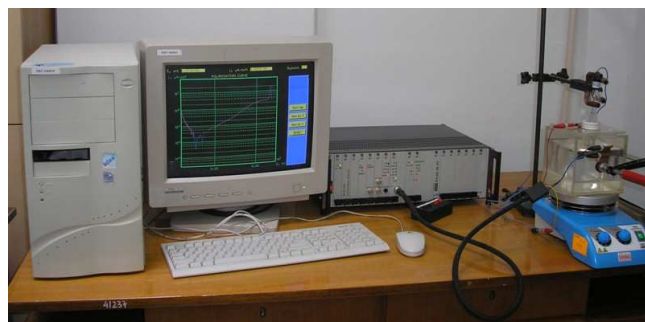
Na podstawie analizy literaturowej oraz doświadczeń własnych wytypowano dwa stopy o osnowie bogatej w fazę β : Ti7,5Mo2Fe, Ti15Mo2,8Nb oraz kompozyt na bazie tytanu z dodatkiem grafitu (Ti + 10% C) (Rys. 1.) (Deptuła i inni, 2007b; Grądzka-Dahlke i inni; 2007). Materiały zostały wykonane metodą metalurgii proszków.



Rys. 1. Mikrostruktury stopów: a) Ti-7,5Mo-2Fe, b) Ti15Mo2,8Nb (pow. 400x) oraz c) kompozytu na bazie tytanu z dodatkiem grafitu (pow. 200x) spiekanych w temp. 1230°C przez 3h w próżni

Materiałem bazowym do otrzymania próbek był proszek tytanu o ziarnistości do 150 μm . Jako dodatki stopowe wykorzystano proszki: molibdenu, niobu, żelaza, grafitu. Przygotowano mieszaniny proszków o odpowiednim składzie chemicznym. Proszki poddano prasowaniu pod ciśnieniem 500MPa i spiekaniu w próżni w temperaturze 1230°C przez 3h.

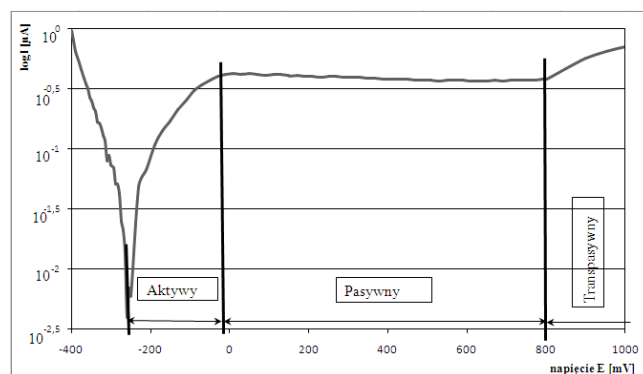
Oceniano odporność korozyjną uzyskanych materiałów. Potencjodynamiczne badanie wykonano na urządzeniu ATLAS 9933 ELEKTROCHEMICAL INTERFACE (Rys. 2). Badania przeprowadzono w układzie elektrochemicznym trójelektrodowym. Jako elektrolit zastosowano roztwór soli fizjologicznej. Elektroda odniesienia w tym zestawie była elektroda kalomelowa. Ze względu na możliwość ekranowania powierzchni roboczej badanego materiału elektroda odniesienia została umieszczona w szklanej rurce z kapilarą Luggina, którą wypełniano nasyconym roztworem KCl. Elektrode pomocniczą w badaniu stanowiła elektroda platynowa. Powierzchnia elektrody pomocniczej wynosiła ok. 220 mm^2 ($S = (\pi d^2 l)/4$). Powierzchnia próbek eksponowana do badań wynosiła 100 mm^2 .



Rys. 2. Zestaw do badań elektrochemicznych Atlas 9933 wraz z oprogramowaniem

3. WYNIKI BADAŃ I DYSKUSJA

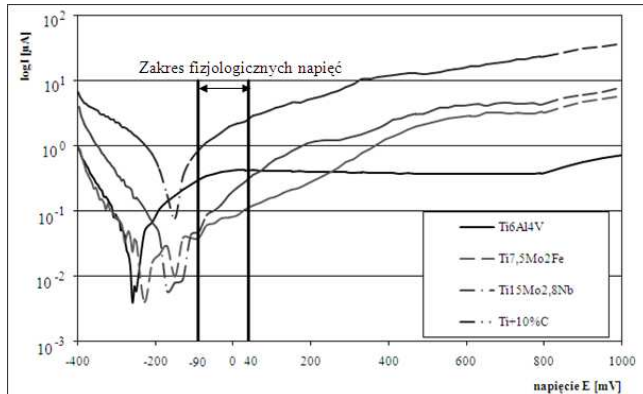
Wyniki badań korozyjnych otrzymanych stopów przedstawiono na Rys. 4 i w Tab. 1. Dla porównania załączono dane uzyskane w analogicznych warunkach badań dla handlowego litego stopu implantacyjnego Ti6Al4V w postaci przerabianej plastycznie (Rys. 3).



Rys. 3. Krzywa polaryzacji Ti6Al4V

Tab. 1. Charakterystyka korozyjna badanych materiałów

Nr serii	Materiał	E_{kor} [mV]	I [μ A]
0	Ti6Al4V - lity	-267	0,0497
1	Ti7,5Mo2Fe	-215	0,0222
2	Ti15Mo2,8Nb	-186	0,0347
3	Ti+10%C	-157	1,28

**Rys. 4.** Krzywe polaryzacji stopów tytanu

W pasywnym stanie elektrochemicznym warstwy ochronne uwodnionych amorficznych tlenków charakteryzują się najwyższymi właściwościami ochronnymi. Na krzywej potencjodynamicznej litego stopu można zaobserwować charakterystyczny obszar pasywacji w zakresie potencjałów od -30 mV do około 800 mV (Rys. 3). Materiały tytanowe otrzymywane metodą metalurgii proszków charakteryzują się mniej wyraźnym zakresem pasywacji w porównaniu z litym stopem Ti6Al4V. Natężenie prądu w tym obszarze wzrasta systematycznie, co jest zjawiskiem charakterystycznym dla metalicznych materiałów spiekanych (Becker i Bolton, 1995, 1997; Krasicka-Cydzik i inni, 2005; Li i inni, 2003; Seah i inni, 1998). Zazwyczaj krzywe potencjodynamiczne są przedstawiane jako zmiany gęstości prądu korozji w funkcji napięcia. Jednak spieki posiadają w strukturze pory, które zwiększają powierzchnię rzeczywistego kontaktu z elektrolitem. W tej sytuacji trudno jest oszacować rzeczywistą powierzchnię metalu, co uniemożliwia porównanie gęstości prądu dla materiałów spiekanych i litego stopu. Dlatego na Rys. 3 i 4 na osi rzędnych zostały umieszczone wartości natężenia prądu. Powierzchnia nominalna wszystkich badanych materiałów była jednakowa, wynosiła 100 mm^2 . Należy zwrócić uwagę, że w zakresie potencjałów, które występują w organizmie człowieka i są wynikiem procesów fizjologicznych (-90 do $+40$ mV), natężenie prądu odczytane z krzywych polaryzacji stopów spiekanych jest znacząco niższe od wartości natężenia prądu dla litego stopu handlowego (Pilawski, 1985). Szczególnie zależność tę widać w przypadku stopu Ti7,5Mo2Fe. Jedynie dla materiału kompozytowego zaobserwowano wzrost natężenia prądu, co można tłumaczyć wpływem wielofazowej struktury kompozytu na procesy korozyjne. W zaznaczonym na Rys. 4 przedziale potencjałów widać, iż stop handlowy jest w stanie wyraźnej pasywacji. Natomiast charakterystyki korozyjne pozostałych badanych materiałów, ze względu na leżący bliżej tego zakresu potencjałów korozji i rosnącą gęstość prądu bez wyraźnego osią-

gnięcia stabilizacji, mogą być w tym zakresie w stanie aktywnym (z rozpoczynającym się procesem pasywacji). Z tego względu widzi się konieczność wykonania badań potencjostatycznych z dłuższym zakresem czasowym obserwacji w celu dokonania oceny długookresowego zachowania się tych stopów.

W Tab. 1 zestawiono wartości potencjałów korozyjnych i prądów korozji obliczone metodą ekstrapolacji odcinków krzywych anodowej i katodowej z wykorzystaniem programu POL-99.

Uzyskane wyniki wskazują na korzystne właściwości korozyjne nowych stopów otrzymanych metodą MP, o czym świadczy przesunięcie potencjału korozji w kierunku wartości dodatnich w stosunku do stopu handlowego. Można zaobserwować zakłócenia w początkowym etapie polaryzacji anodowej stopów o strukturze bogatej w fazę β (Ti7,5Mo2Fe, Ti15Mo2,8Nb). Wyjaśnienie przyczyny tych zjawisk wymagałoby głębszej analizy procesów elektrochemicznych zachodzących w powstałych ogniwach oraz powiązania z porowatością struktury badanych materiałów.

4. PODSUMOWANIE

Celem prezentowanych badań była ocena odporności korozyjnej nowych stopów tytanu otrzymanych metodą metalurgii proszków.

Badania potencjodynamiczne wykazały, że obszar pasywacji materiałów spiekanych jest mniej wyraźny niż w przypadku handlowego stopu litego, co jest zgodne z danymi literaturowymi. Natomiast przesunięcie potencjału korozyjnego badanych spieków względem stopu Ti6Al4V świadczy o ich korzystnych właściwościach korozyjnych. Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że badane spieki mogą być atrakcyjnym materiałem implantacyjnym.

Niniejsza praca uzyskała wsparcie finansowe w ramach projektu badawczego (grantu) nr PR/WM/1/07.

LITERATURA

1. **Becker B. S., Bolton J. D.** (1995), Production of porous sintered Co-Cr-Mo alloys for possible surgical implant applications, Part 2: Corrosion behaviour, *Powder Metallurgy*, 38 (3), 305-313.
2. **Becker B. S., Bolton J. D.** (1997), Corrosion behaviour and mechanical properties of functionally gradient materials developed for possible hard-tissue applications, *J. Mater. Science: Materials in Medicine*, 8, 793-797.
3. **Blackwood D. J., Chua A. W. C., Seah K. H. W., Thampuran R., Teoh S. H.** (2000), Corrosion behaviour of porous titanium-graphite composites designed for surgical implants, *Corrosion Science*, 42 (2000), 481-503.
4. **Catana D., Scarneciu I., Popescu R.** (2009), Technological processes influence regarding titanium alloys, *DAAAM World Symposium*, Volume 20, No. 1, ISSN 1726-9679.
5. **Deptuła P., Grądzka-Dahlke M., Dąbrowski J. R.** (2007), Influence of sintering temperature on properties of titanium-graphite composites, *Adv. Mater. Sci.*, Vol.7, nr 4 (2007), 12-17.

6. Deptuła P., Grądzka-Dahlke M., Dąbrowski J. R. (2007), Nowe stopy tytanu do zastosowań biomedycznych wytwarzane metodą metalurgii proszków, *Inż. Biomater. R.10*, nr 65-66 (2007), 13-16.
7. Dobrzański L. A. (2008), *Metaloznawstwo opisowe stopów metali nieżelaznych*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej.
8. Edith M. i inni (2006), Corrosion behaviour of a beta-titanium alloy, *Bio-Medical Materials and Engineering* 16 (2006), 171-182, IOS Press.
9. Grądzka-Dahlke M., Deptuła P., Dąbrowski J. R. (2007), Usage of the powder metallurgy method for fabrication of titanium implant alloy, *J. Vibroeng.*, Vol. 9, nr 3 (2007), 100-105.
10. Katti K.: Biomaterials in total hip replacement, *Colloids and Surfaces B: Biointerfaces* 39 (2004), 133-142.
11. Kohn D. H. (1998), Metals in medical applications, *Current Opinion in Solid State and Materials Science*, 309-316.
12. Krasicka-Cydzik E., Oksiuta Z., Dąbrowski J.R. (2005), Corrosion testing of sintered samples made of the Co-Cr-Mo alloy for surgical applications, *J. Mater. Science: Materials in Medicine*, 16, 197-202.
13. Li Y.-H., Rao G.-B., Rong L.-J., KeW. (2003), Effect of pores on corrosion characteristics of porous NiTi alloy in simulated body fluid, *Mater. Science and Engineering A*, 363, 356-359.
14. Lon, M and Rack H. J. (1998), Titanium alloys in total joint replacement – a materials science perspective, *Biomaterials*, 19 (18), 16269-1639.
15. Mogoda, Y. H. A., Badawy W. A. (2004), Corrosion behaviour of Ti-6Al-4V alloy in concentrated hydrochloric and sulphuric acids, *Journal of Applied Electrochemistry* 34, 873-878.
16. Mystkowska J., Deptuła P., Bakier S., Sidun J. (2010), Surface activity and fluid sorption of titanium alloys soaked in SBF solution, *Solid State Phenomena*, Vol. 165 (2010), 147-152.
17. Mythili R., Ravi Shankar C. A., Saroja C. S. (2007), *Influence of microstructure on corrosion behavior of Ti-5%Ta-1.8%Nb alloy*, Springer Science+Business Media (2007) 42:5924-5935.
18. Pilawskiego A. [red.] (1985), *Podstawy biofizyki*, Państwowy Zakład Wydawnictwa Lekarskiego, 208-222.
19. Seah K.H.W., Thampuran R., Teoh S.H. (1998), The influence of pore morphology on corrosion, *Corrosion Science*, 40 (4/5), 547-556.
20. Shapovalov O. V., Shapovalova O. M., Ivchenko T. I. (2006), Corrosion and mechanical properties of titanium alloyed with aluminum, iron, and molybdenum, *Materials Science*, Vol. 42, No 5, 615-619.
21. Sidun J., Dąbrowski J.R. (2009), Bone ingrowth processes on porous metallic implants, *Solid State Phenomena*, Vol. 147-149 (2009), pp. 776-781.

ANALYSIS OF CORROSION RESISTANCE OF THE TITANIUM ALLOYS OBTAINED BY POWDER METALLURGY METHOD

Abstract: This article presents analysis of corrosion resistance of the titanium alloys obtained by powder metallurgy method. The potentiodynamic curves made from data obtained from the ATLAS 9933 ELEKTROCHEMICAL INTERFACE device were analyzed. Corrosion potentials and corrosion currents of sintered titanium were evaluated by the POL-99. The characteristics of corrosion of new titanium alloys and solid commercial alloy-Ti6Al4V were compared. It was found that corrosion potentials of sintered materials are displaced into higher potential than commercial alloy.

SPOSOBY REALIZACJI OBCIĄŻEŃ EKSPLOATACYJNYCH W UKŁADACH STEROWANIA MASZYN ZMĘCZENIOWYCH

Tadeusz ŁAGODA*, Karolina WALAT*

*Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, Wydział Mechaniczny, Politechnika Opolska,
ul. Mikołajczyka 5, 45-271 Opole

t.lagoda@po.opole.pl, k.walat@po.opole.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono pięć metod generowania sygnałów, które mogą być wykorzystane do symulacji obciążeń eksploatacyjnych na stanowiskach do badań zmęczenia. Są to: metoda blokowych programów obciążeń cyklicznych, metoda matrycowa generowania ekstremów obciążeń losowych, metoda kongruencyjna generowania sygnałów losowych i kształtowanie ich charakterystyk probabilistycznych za pomocą filtrów cyfrowych, metoda generowania sygnałów losowych jako sumy przebiegów harmonicznym według zadanej funkcji gęstości widmowej mocy, metoda generowania sygnałów losowych za pomocą odwrotnej transformaty Fouriera według zadanej funkcji gęstości widmowej mocy.

1. WPROWADZENIE

Istnieją trzy główne grupy źródeł losowych sygnałów, które mogą być wykorzystane do symulacji obciążeń eksploatacyjnych na stanowiskach do badań zmęczenia. Są to historycznie taśmowe generatory magnetyczne, generatory sygnałów losowych i komputery przystosowane do sterowania.

Do niedawna najbardziej rozpowszechnione były generatory sygnałów losowych w postaci specjalistycznych przyrządów elektronicznych. Generatory znane też są jako generatory sprzętowe (ang. TRNG - True Random Number Generator). Generatory te jednak pozwalają tylko na ograniczone kształtowanie charakterystyk sygnałów wyjściowych. Obecnie komputerowe generatory sygnałów losowych, które mogą pracować w czasie rzeczywistym, są najbardziej dogodnym źródłem losowych sygnałów sterujących. Generatory te znane są pod nazwą generatorów programowych (ang. PRNG - Pseudo Random Number Generator) - działające na zasadzie deterministycznego obliczania ciągu liczb, które przypominają liczby losowe i tak je można traktować. Opracowano już wiele metod generowania sygnałów. Metody te można zestawić w czterech grupach. Pierwsza grupa polega na odtworzeniu zarejestrowanej liczby cykli przy pomocy metody blokowej lub matrycowej. Druga grupa polega na kongruencyjnym generowaniu sygnałów losowych i kształtowaniu ich charakterystyk probabilistycznych za pomocą filtrów cyfrowych. Trzecia grupa polega na generowaniu sygnałów losowych jako sumy przebiegów harmonicznym lub za pomocą odwrotnej transformaty Fouriera według zadanej funkcji gęstości widmowej mocy. Ostatnia grupa metod generowania komputerowej ciągów losowych o kształtowanych charakterystykach probabilistycznych odpowiadających warunkom eksploatacyjnym lub stanom prognozowanym. Służą do tego typowe programy opracowane w niektórych ośrodkach badawczych. Niektóre ze znanych standardów to WASH1

dla symulacji obciążeń platform wiertniczych proponowany przez Schütza i innych (1990a), Broad64 i MMMOD64 przedstawione przez Agerskova i Ibso (1993) (cytujemy za Agerskovem (2000) – również dla platform wiertniczych, CARLOS opracowane w LBF przez Schütza i innych (1990b) lub SAE dla obciążeń kół samochodowych, obciążenie wiatrem zaproponowane przez Borgmana (1969).

W przypadku zastosowania generatorów programowych bardzo często istotny jest okres generowania aby przebieg taki nie był o zbyt krótkim okresie. Najnowsze generatory mają już okresy sięgające 10^{58221} wygenerowanych liczb (Deng, 2010).

W pracy zestawiono pięć metod generowania sygnałów:

- metoda blokowych programów obciążeń cyklicznych,
- metoda matrycowa generowania ekstremów obciążeń losowych (metoda Markowa),
- metoda kongruencyjna generowania sygnałów losowych i kształtowanie ich charakterystyk probabilistycznych za pomocą filtrów cyfrowych,
- metoda generowania sygnałów losowych jako sumy przebiegów harmonicznym według zadanej funkcji gęstości widmowej mocy,
- metoda generowania sygnałów losowych za pomocą odwrotnej transformaty Fouriera według zadanej funkcji gęstości widmowej mocy.

Celem niniejszej pracy jest zestawienie możliwych do zastosowania metod generowania sygnałów przy realizacji obciążeń eksploatacyjnych w układach sterowania maszyn zmęczenia.

2. METODA BLOKOWYCH PROGRAMÓW OBCIĄŻEŃ CYKLICZNYCH

Na podstawie danego histogramu amplitud o znanej liczbie cykli w przedziałach klasowych, określa się poziomy amplitud generowanych cykli odpowiadające granicom kolejnych przedziałów klasowych. Następnie określa się

liczbę cykli na danym poziomie. Liczba cykli powinna być tak dobrana, aby liczba bloków powtarzała się podczas eksperymentu co najmniej 10 razy. Zmiany amplitud można realizować poprzez narastanie lub zmniejszanie ich wartości, lub w sposób mieszany. Najczęściej stosuje się generowanie kolejnych bloków przebiegów cyklicznych metodą narastająco malejącą, przy czym początek generowania jest na poziomie amplitud średnich jak to przedstawił Kocańda i Szala (1985).

2.1. Metoda matrycowa generowania ekstremów obciążeń losowych

Metoda matrycowa generowania sygnałów losowych polega na generowaniu wartości ekstremalnych z macierzy reprezentującej dwuwymiarowy histogram wartości maksymalnych i minimalnych historii naprężeń zwana też macierzą przejścia. Macierze te mogą powstawać bądź z wyznaczenia wartości maksymalnych i minimalnych bezpośrednio z zarejestrowanego przebiegu podczas zliczania cykli lub z generacji odpowiednimi programami do tworzenia tych macierzy przejścia. Zakres wartości maksymalnych i minimalnych dzielona jest najczęściej na 32 klasy jak to przedstawił Huck i inni (1976). Podczas generacji można ją stosować wielokrotnie.

Liczby lokowane wewnątrz macierzy przejścia oznaczają częstość poszczególnych przejść z wartości maksymalnej na minimalną i odwrotnie. Generowanie można zacząć od wartości na poziomie dowolnej klasy. Następnie program komputerowy kieruje wybór wzdłuż tej klasy do przekątnej, po czym pionowo losuje się z zadaną gęstością prawdopodobieństwa jedną z klas, która reprezentuje wartość maksymalną. Następnie wybór przesuwają się poziomo w prawo do przekątnej wzdłuż tej klasy. Kolejny krok to przemieszczenie się w dół i wylosowanie wartości minimalnej. Następny krok jest analogiczny do kroku.

2.2. Symulacja obciążeń losowych i kształtowanie charakterystyk probabilistycznych generowanych sygnałów za pomocą filtrów cyfrowych

Na Rys. 1 przedstawione są kolejne etapy kształtowania charakterystyk probabilistycznych generowanych ciągów losowych.

2.2.1. Generacja ciągu losowego o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa

W bloku 1 (Rys.1) generowany jest przebieg losowy $\{x_i\}$ o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa. Wykorzystuje się w tym celu najczęściej odpowiednią funkcję „random” znajdującą się zwykle w oprogramowaniu komputera.

1. Generacja ciągu o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa

2. Generacja ciągu o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa

3. Kształtowanie funkcji gęstości widmowej mocy

4. Kształtowanie rozkładu prawdopodobieństwa

Rys. 1. Schemat kształtowania charakterystyk probabilistycznych generowanej historii losowej

2.2.2. Generacja ciągu losowego o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa

W praktyce najdogodniej jest uzyskiwać rozkład normalny za pomocą centralnego twierdzenia granicznego ze względu na szybkość obliczeń. Jeżeli $x_1, x_2, \dots, x_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie równomiernym w przedziale $<0, 1>$, to zmienna losowa, która jest sumą

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (1)$$

dla dostatecznie dużych wartości n ma rozkład normalny z wartością średnią $n/2$ oraz wariancją $n/12$. Metoda ta polega na uśrednianiu n zmiennych losowych $x_1, x_2, \dots, x_n$ według następującej formuły

$$y_j = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \quad (2)$$

Najczęściej stosuje się $n = 12$ co daje wystarczającą w praktyce dokładność przy czym, wtedy wariancja ciągu liczb $\{y_j\}$ wynosi 1, a wartość oczekiwana 0. W efekcie otrzymuje się rozkład $N(0,1)$.

2.2.3. Kształtowanie gęstości widmowej mocy sygnału losowego

Ogólna zależność między sygnałem wejściowym $y(t)$ a sygnałem wyjściowym $z(t)$ filtru liniowego może być wyznaczona za pomocą operacji splotu

$$z(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)y(t-\tau)d\tau, \quad (3)$$

przy czym $h(\tau)$ jest odpowiedzią impulsową filtru. Transmancja filtru $H(f)$ jest transformatą Fouriera funkcji $h(\tau)$ i jest określona wzorem

$$H(f) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (4)$$

Skończona suma równoważna całce (3) dla $t = k\Delta t$, $k = 1, 2, \dots, M$ dla nierekurencyjnego filtru cyfrowego może być wyrażona w następującej postaci

$$z_n = \sum_{k=1}^M h_k (y_{n+k} + y_{n-k}), \quad \text{gdzie } n = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Należy zauważyć, że sygnał na wyjściu tego filtru stanowi wynik skończonego sumowania składników sygnału wejściowego mnożonych przez M współczynników h_k przy czym występują tu też „przyszłe” wartości sygnału wejściowego. Zazwyczaj okres próbkowania Δt jest dla ułatwienia włączony do odpowiedzi impulsowej filtru h_k . W praktyce filtry nierekurencyjne wymagają wielu współczynników h_k (100 lub więcej), tak, że rozważany sposób nie stanowi zbyt efektywnej metody filtracji i ustępują filtrom rekurencyjnym.

W rekurencyjnych filtrach cyfrowych sygnał wyjściowy wynika z N składników sygnału wejściowego i M wcześniej pojawiających się składników sygnału wyjściowego

$$z_n = \sum_{k=0}^N c_k y_{n-k} + \sum_{k=1}^M h_k z_{n-k}. \quad (6)$$

Zaletą filtrów rekurencyjnych jest ich duża efektywność bo wymagają zaledwie dwóch współczynników c_k i h_k .

Zasada kształtowania charakterystyki gęstości widmowej mocy sygnału losowego bazuje na równaniu

$$G_z(f) = |H(f)|^2 G_y(f), \quad (7)$$

gdzie: $|H(f)|$ – moduł transmitancji filtru kształtującego, $G_y(f)$ – gęstość widmowa mocy sygnału $y(t)$ na wejściu filtru, $G_z(f)$ – gęstość widmowa mocy sygnału $z(t)$ na wyjściu filtru.

Z równania (7) wynika, że przy znanym $G_y(f)$ i żądanym $G_z(f)$ można wyznaczyć transmitancję filtru kształtującego

$$H(f) = \sqrt{\frac{G_z(f)}{G_y(f)}}. \quad (8)$$

Jeżeli ciąg liczb pseudolosowych $\{y_j\}$ ma stałą gęstość widmową mocy $G_y(f) = K$ (biały szum) w paśmie częstotliwości $(0 - f_g)$, to gęstość widmowa mocy sygnału na wyjściu filtru dolnoprzepustowego o częstotliwości granicznej f_g jest określona jedynie przez transmitancję tego filtru, to jest

$$G_z(f) = K |H(f)|^2. \quad (9)$$

Projektowanie rekurencyjnego filtru kształtującego polega na obliczeniu wartości współczynników c_k i h_k w równaniu (6) na podstawie danej – wynikającej z równania (9) transmitancji $H(f)$. Jedną z metod wyznaczenia tych współczynników jest metoda czynnikowa omówiona w literaturze specjalistycznej dotyczącej projektowania filtrów cyfro-

wych. Przyjmuje się, że funkcja gęstości widmowej mocy sygnału losowego $z(t)$ ma postać

$$G_z(f) = \frac{4\mu}{f_g \left[1 + \left(\frac{f}{f_g} \right)^2 \right]^2}, \quad (10)$$

gdzie: μ – wariancja sygnału losowego $z(t)$, f_g – częstotliwość graniczna (maksymalna) sygnału $z(t)$.

Zwykle częstotliwość maksymalną (graniczną) f_g sygnału losowego określa się z zależności

$$G_z(f_g) \approx 0,05 \cdot \max_f \{G_z(f)\}, \quad (11)$$

co oznacza, że przy f_g wartość gęstości widmowej spada do 5% jej wartości maksymalnej.

Poniżej przedstawiono dwa najczęściej stosowane dolnoprzepustowe filtry rekurencyjne: dwustopniowy i jednostopniowy Butterwortha.

Dwustopniowy filtr rekurencyjny

Równanie (6) dla tego filtru przyjmuje postać

$$z_n = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + b_1 z_{n-1} + b_2 z_{n-2} \quad \text{dla } n \geq 2, \quad (12)$$

gdzie współczynniki a_0, a_1, b_1, b_2 wyznacza się z odpowiedniej procedury. Filtrowanie z wykorzystaniem równania (12) jest realizowane za pomocą kolejnej procedury, w której należy zadeklarować między innymi wartości początkowe z_0 i z_1 ciągu liczbowego $\{z_n\}$ oraz wartość początkową y_1 ciągu $\{y_j\}$.

Jednostopniowy filtr rekurencyjny Butterwortha

Tu równanie (6) ma następującą postać

$$z_n = a_1 (y_n + y_{n-1}) + b_1 z_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 1, \quad (13)$$

gdzie współczynniki a_1, b_1 zależą od częstotliwości granicznej f_g i okresu próbkowania Δt . We wzorze (13) należy zadeklarować wartość początkową z_0 i y_0 .

2.2.4. Kształtowanie rozkładu prawdopodobieństwa

W wyniku wcześniejszych obliczeń uzyskano przebiegi o rozkładach normalnych. Często jednak należy wygenerować przebiegi o innych rozkładach niż normalnych. Wtedy stosuje się np. metodę odwracania dystrybucyj. W niniejszej pracy nie będzie ta metoda prezentowana. Szczegóły można znaleźć np. w pracy Kocańdy i Szali (1985).

2.3. Generowanie sygnałów losowych przez sumowanie przebiegów harmoniczných według zadanej funkcji gęstości widmowej mocy

Gęstość widmowa mocy sygnału losowego opisuje ogólną jego strukturę częstotliwościową za pomocą wartości średniokwadratowych tego sygnału dla poszczególnych

częstotliwości. Średniokwadratowa wartość Ψ_x^2 losowej historii $x(t)$ w czasie obserwacji T w przedziale częstotliwości między f i $f+\Delta f$ może być wyznaczona na drodze filtrowania tej historii za pomocą wąskopasmowego filtru i obliczenia średniej wartości kwadratowej na wyjściu tego filtru. W zapisie matematycznym operację tę opisuje następująca zależność

$$\Psi_x^2(f, \Delta f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_0^T x^2(t, f, \Delta f) dt \right], \quad (14)$$

gdzie $x(t, f, \Delta f)$ jest częścią $x(t)$ w przedziale częstotliwości od f do $f + \Delta f$.

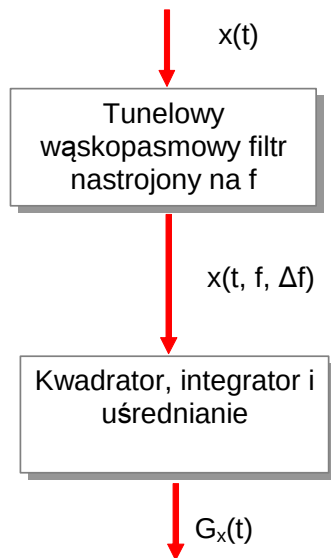
Jednostronna gęstość widmowej mocy $G_x(f)$ może być zdefiniowana następująco

$$G_x(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Psi_x^2(f, \Delta f)}{\Delta f} = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t, f, \Delta f) dt \right], \quad (15)$$

a sposób jej wyznaczenia zilustrowano na Rys. 2. Warto pamiętać, że

$$G_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} G_x(f), \quad (16)$$

gdzie $\omega = 2\pi f$ jest częstotliwością.



Rys. 2. Sposób wyznaczenia jednostronnej funkcji gęstości widmowej mocy za pomocą przestrajalnego filtru wąskopasmowego o szerokości Δf

Gęstość widmowa mocy własna przebiegu losowego jest nieujemną funkcją rzeczywistą. Głównym celem pomiaru gęstości widmowej mocy procesu fizycznego $x(t)$ jest badanie jego struktury częstotliwościowej, która z kolei daje istotną informację o zasadniczych charakterystykach badanych układów fizycznych. Gęstość widmową najczęściej oblicza się poprzez zastosowanie szybkiej transformaty Fouriera (FFT - Fast Fourier Transform) zgodnie z pracą

Bendata i Piersola (1971). W praktyce gęstość widmowa mocy sygnału zmiennego w czasie ilustruje poszczególne częstotliwości przebiegów sinusoidalnych zawarte w sygnale, co umożliwia odtworzenie przebiegu losowego jako sumę harmonik o tej samej strukturze częstotliwościowej, co sygnał zmierzony.

Jedną z bardzo dogodnych metod generowania sygnałów losowych jest sumowanie przebiegów harmonicznnych. Postępowanie to ma tę zaletę, że umożliwia bezpośrednie uzyskanie żądanej gęstości widmowej mocy, eliminując potrzebę stosowania filtrów kształtujących. Gęstość prawdopodobieństwa sumy przebiegów harmonicznnych ma postać gaussowską. Sygnał losowy o żądanej funkcji gęstości widmowej mocy $G_z(\omega)$ jest aproksymowany następującą sumą przebiegów cosinusoidalnych

$$z(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(\omega_k t + \phi_k) = \sum_{k=1}^N [2G_z(\omega_k) \Delta\omega_k]^{1/2} \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (17)$$

gdzie: A_k – amplitudy składowych przebiegów harmonicznnych, ω_k – częstotliwości poszczególnych składowych przebiegów harmonicznnych, ϕ_k – fazy przebiegów harmonicznnych, $\Delta\omega_k$ – szerokość przedziałów częstotliwości, $k = 1, 2, \dots, N$ – numery kolejnych przebiegów harmonicznnych, $G_z(\omega)$ – wartości jednostronnej gęstości widmowej mocy sygnału $z(t)$ dla częstotliwości ω_k .

Fazy ϕ_k są niezależnymi zmiennymi losowymi o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa. Wyznacza się je przez przyporządkowanie liczbom losowym z przedziału $<0, 1>$ (generowanym w komputerze za pomocą procedury generowania liczb losowych o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa) wartości kątów z przedziału $<0, 2\pi>$. Spośród kilku metod przedstawionych przez Borgmana (1969), Kochenburgera (1975), Shinozuka (1977), Wróbla (1983, 1985), czy też Zielińskiego (1997) wyznaczania amplitud A_k i częstotliwości ω_k należy zwrócić uwagę na metodę Rice'a, według której cały zakres częstotliwości sygnału $z(t)$ od $\omega_{\min}$ do $\omega_{\max}$ dzieli się na N równych przedziałów o szerokości

$$\Delta\omega = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{N}, \quad (18)$$

a amplitudy A_k zgodnie ze wzorem (17)

$$A_k = \sqrt{2G_z(\omega_k) \Delta\omega} \quad (19)$$

określa się dla częstotliwości środkowych tych przedziałów, to jest

$$\omega_k = (k - 0,5) \Delta\omega + \omega_{\min} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (20)$$

Gdy liczba składowych miejsc przebiegów harmonicznnych N dąży do nieskończoności, funkcja gęstości prawdopodobieństwa ich sumy dąży do rozkładu normalnego. Wynika to z centralnego twierdzenia granicznego statystyki. Można jednak pokazać, że w praktyce nawet mała liczba (np. $N = 10$) składowych przebiegów harmonicznnych daje

już dobre przybliżenie do normalnego rozkładu prawdopodobieństwa.

2.4. Generowanie sygnałów losowych za pomocą odwrotnej transformaty Fouriera na podstawie zadanej gęstości widmowej mocy

Metody analizy sygnału oparte na szeregach Fouriera i metody oparte na transformacji Fouriera znalazły szerokie zastosowanie w różnych dziedzinach nauki i techniki. Dużą zaletą szeregu Fouriera jest możliwość obliczenia go, dla skończonego zakresu zwanego często okresem danego szeregu, na podstawie danych zdyskretyzowanych. Jednym z głównych powodów dużego znaczenia szybkiej transformaty Fouriera jest to, że umożliwia ona uzyskanie estymatorów funkcji gęstości widmowej mocy i funkcji korelacji. Funkcja gęstości widmowej mocy $G(f)$ używana jest często do opisu zmiennej losowej w dziedzinie częstotliwości. W tym punkcie pokazany jest sposób generacji przebiegu $x(t)$ (dziedzina czasu) z danej funkcji gęstości widmowej mocy $G(f)$ (dziedzina częstotliwości) przy wykorzystaniu odwrotnej transformaty Fouriera.

Szybka transformata Fouriera i transformata odwrotna

Transformata Fouriera w nieskończonym przedziale realizacji (funkcji) $x(t)$ o wartościach rzeczywistych lub zespolonych jest określona następującą wielkością zespoloną

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad (21)$$

gdzie j oznacza jednostkę urojoną.

Można zdefiniować także funkcję odwrotną zwaną odwrotną transformatą Fouriera

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (22)$$

W roku 1965 Cooley i Tukey, jak to pokazali Bendat Piersol (1971), opracowali bardzo szybkie algorytmy obliczania transformaty i transformaty odwrotnej Fouriera dla dyskretnych danych. Na podstawie tych algorytmów powstały procedury numeryczne pozwalające na przeprowadzenie szybkich obliczeń za pomocą komputerów. W literaturze spotyka się często oznaczenia FFT dla szybkiej transformaty Fouriera, która w zapisie dla wartości dyskretnych przyjmuje postać

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left[-j \frac{2\pi kn}{N}\right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (23)$$

oraz IFFT (Inverse Fast Fourier Transform) dla transformaty odwrotnej

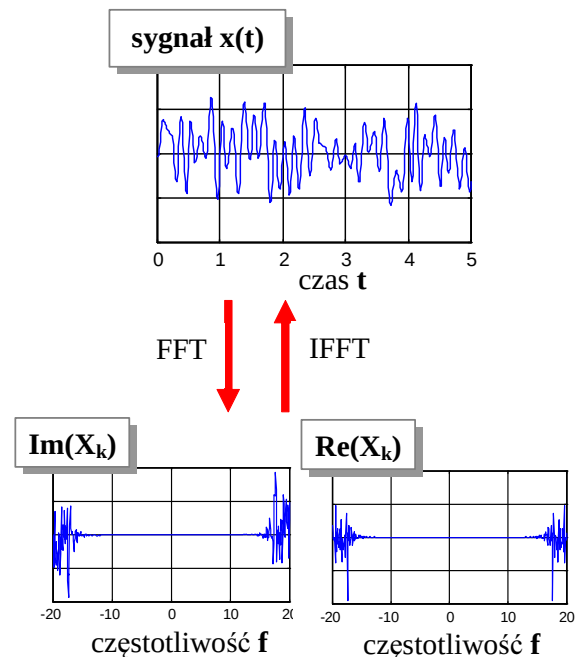
$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp\left[j \frac{2\pi kn}{N}\right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (24)$$

Powyższe wzory otrzymano przy założeniach:

- transformata Fouriera realizowana jest w skończonym zakresie czasu $(0, T)$,
- wycinek realizacji $x(t)$ jest próbkowany w N punktach jednakowo odległych od siebie o h ,
- h dobrane jest tak, aby uzyskać odpowiednio wysoką częstotliwość graniczną,
- dyskretne wartości częstotliwości f_k powiązane z dyskretnymi wartościami transformaty X_k wyznacza się na podstawie wzoru

$$f_k = kf = \frac{k}{T} = \frac{k}{Nh}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (25)$$

Można zauważyć, że za pomocą (23) i (24) istnieje możliwość dowolnego przechodzenia pomiędzy dyskretnymi wartościami sygnału x_n a transformatą X_k (Rys. 3).



Rys. 3. Interpretacja przejścia pomiędzy sygnałem a jego transformatą za pomocą algorytmów FFT oraz IFFT

Generacja przebiegu na podstawie jego funkcji gęstości widmowej mocy

Dla losowych sygnałów stacjonarnych stosuje się dwie metody cyfrowego wyznaczania gęstości widmowej mocy. Pierwsza metoda – konwencjonalna nazywana też metodą Blackmana-Tukeya, oparta jest na obliczaniu gęstości widmowej mocy poprzez przekształcenie Fouriera funkcji autokorelacji. Druga metoda, bezpośredniej transformaty Fouriera, nazywana metodą Cooleya-Tukeya, jest oparta na obliczaniu gęstości widmowej mocy przy zastosowaniu szybkiej transformaty Fouriera w skończonym przedziale czasu sygnału oryginalnego. Czytając pozycje literaturowe dotyczące generacji sygnałów losowych można zauważyć, że metoda konwencjonalna, ze względu na jej małą efektywność, jest rzadko stosowana.

Za pomocą algorytmu FFT można przeprowadzić estymację gęstości widmowej mocy bezpośrednio z pierwotnych próbek sygnału. W zasadzie analizie można poddać dowolną liczbę próbek N , ale w praktyce procedury FFT

są zwykle przystosowane do liczności próbki $N = 2^p$ dla $p > 2$. Dlatego też aby otrzymać prawidłową liczbę próbek sygnał obcina się lub dodaje się do sygnału pierwotnego zera. Przy odpowiednio długim losowym stacjonarnym procesie obcięcie ciągu danych nie wpływa na wartość estymatora gęstości widmowej mocy. W zmęczeniu materiałów spotyka się przebiegi o znacznej długości i najczęściej stosuje się obcięcie sygnału do wartości $N = q2^p$ dla $p > 2$, gdzie q oznacza liczbę bloków sygnału uczestniczących w procesie uśredniania odcinkowego. Kolejne bloki otrzymuje się poprzez wymnożenie realizacji $x(t)$ przez funkcję bramki (okna) o skończonej długości.

3. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono pięć metod generowania sygnałów, które mogą być wykorzystane do symulacji obciążeń eksploatacyjnych na stanowiskach do badań zmęczeniowych. Mogą one być wykorzystane do symulowania stanów prognozowanych na rzeczywistych obiektach. Generowanie tych sygnałów można też stosować do celów symulacyjnych na komputerze podczas budowy algorytmów oceny trwałości zmęczeniowej przy obciążeniach losowych

W dalszym ciągu należy rozwijać metody generowania ciągów losowych, a w szczególności zasadne wydaje się opracować sposoby generowania sygnałów losowych, a w szczególności w złożonych stanach obciążenia, gdzie istotne znaczenie mają, nie tylko charakterystyki własne, ale i wzajemne pomiędzy generowanymi sygnałami.

LITERATURA

1. **Agerskov H.:** (2000), Fatigue in steel structures under random loading, *J. Constructional Steel Research*, Vol.53, 283-305.
2. **Agerskov H., Ibsø J.B.:** (1993), Fatigue life of plate elements with welded transverse attachments subjected to stochastic loading, *Blom A.F., Ed., Proc. of Nordic Conference on Fatigue*, West Midlands, UK, EMAS Publishers
3. **Bendat J.S., Piersol A.G.:** (1971), *Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych*, PWN, Warszawa.
4. **Borgman L.E.:** (1969), Ocean wave simulation for engineering design, *J. of Waterways and Harbours Division*, Vol.95, No WW4, 557-583.
5. **Deng L.-B., Lu H. H.-S., Chen T. B.:** (2010), 64-Bit and 128-bit DX random number generators, *Computing*, Vol. 89, 27-43.
6. **Huck M., Schultz W., Fischer R., Kobler G.:** (1976), A standard random load sequence of Gaussian type recommended for general application in fatigue testing, *LBF-Report No 2909*, IABG-Report No TF-570, 21.
7. **Kocańda S., Szala J.:** (1985), *Podstawy obliczeń zmęczeniowych*, PWN, Warszawa.
8. **Kochenburger R.J.:** (1975), *Modelowanie układów dynamicznych przy użyciu maszyn matematycznych*, WNT, Warszawa.
9. **Schütz W., Klätschke H., Hück M., Sonsino C.M.:** (1990a), Standardized load sequence for offshore structures – Wash 1, *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, Vol. 13, -29.
10. **Schütz W., Klätschke H., Steinhilber H., Heuler P.:** (1990b), Standardized load sequence for wheel suspension components – CARLOS, *LBF Report No. FB-191*, Darmsadt.
11. **Shinozuka M.:** (1977), Simulation of multivariate and multi-dimensional random processes, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 49, 357-367.
12. **Wróbel J.:** (1983), Badanie efektywności metod analizy nieliniowych układów stochastycznych na przykładzie układów mechanicznych, *Sprawozdanie R.I.2.04.5*, IPBM PW, Warszawa.
13. **Wróbel J.:** (1985), Symulacyjne badanie jakości w nieliniowej stochastycznej dynamice maszyn, *Prace Naukowe, Mechanika*, z.92, Politechnika Warszawska, Warszawa, 131.
14. **Zieliński R., Wiczorkowski R.:** (1997), *Komputerowe generatory liczb losowych*, Warszawa, WNT.

METHODS OF REALIZATION OF SERVICE LOADINGS IN THE CONTROL SYSTEMS OF FATIGUE TEST STANDS

Abstract: The paper presents five methods of signal generation which can be applied for simulation of service loadings at fatigue test stands. They are: the method of block programs of cyclic loadings, the matrix method for generation of random loading extrema, the congruence method for generation of random loading and formation of their probabilistic characteristics with use of digital filters, the method of generation of random signals as a sum of harmonic histories according to the given spectral power density function, the method of random signal generation with the inverse Fourier transform according to the given spectral power density function.

PROGNOZOWANIE TRWAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ ELEMENTÓW Z KARBAMI

Krzysztof ŁUKASZEWICZ*, Walenty OSIPIUK*

*Katedra Budowy i Eksploatacji Maszyn, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok

k.lukaszewicz@pb.edu.pl, osipiuk@pb.edu.pl

Streszczenie: W pracy zaproponowano wyznaczanie efektywnego współczynnika działania karbu przez określenie lokalnych naprężeń σ_z^d w pewnej odległości d od dna karbu, właściwej dla danego materiału. Przedstawiono w sposób graficzny zmiany wartości współczynnika działania karbu β_k^d , w zależności od liczby cykli dla trzech badanych promieni dna karbu. W celach porównawczych dokonano także obliczeń współczynnika β_k przy wykorzystaniu dwóch ogólnie znanych zależności Neubera oraz Petersona.

1. WPROWADZENIE

Właściwe uwzględnienie oddziaływania karbu na trwałość zmęczeniową jest jednym z podstawowych zadań przy projektowaniu elementów maszynowych pracujących w warunkach obciążeń cyklicznie zmiennych. Pomimo nagromadzonej dużej ilości wyników doświadczalnych i opracowań teoretycznych określenie stanu rzeczywistego wyęczenia w pobliżu karbu, w przypadku działania obciążeń okresowo zmiennych, stanowi jedno z trudniejszych i dotychczas w zadowalający sposób nie rozwiązanych zagadnień wytrzymałości zmęczeniowej. Problem staje się jeszcze bardziej skomplikowany przy występowaniu cykli niesymetrycznych.

Właściwości rzeczywistych materiałów konstrukcyjnych różnią się od ich właściwości modelowych. Z tego powodu wprowadzono praktyczną miarę wpływu spiętrzenia naprężeń na trwałość zmęczeniową, którą jest współczynnik działania karbu β_k . Doświadczalne wyznaczanie wartości β_k dla poszczególnych materiałów i rodzajów karbów jest jednak długotrwałe i kosztowne. W związku z tym podejmowane są próby opracowania ogólnych wzorów do wyznaczania współczynnika β_k , przy wykorzystaniu współczynnika kształtu i stałych materiałowych. Różne postacie tych zależności można prześledzić w pracach Atzori, Zappalorto, Berto (2010); Buch (1988); Pluinage (1998); Ciavarella i Meneghetti (2004).

Uważa się, iż β_k jest niezależny od liczby cykli obciążeń w obszarze poniżej granicy zmęczenia. Sytuacja ta ulega zmianie w przypadku trwałości zmęczeniowej ograniczonej, konieczne staje się wówczas uwzględnienie dodatkowego parametru, jakim jest czas (liczba cykli) do zniszczenia. Badania doświadczalne wykazują, że β_k (w zakresie ograniczonej trwałości zmęczeniowej) wzrasta ze wzrostem liczby cykli obciążeń (Troščenko i inni, 1978, Kocańda i Szala, 1999). Określenie współczynnika β_k w obszarze ograniczonej trwałości zmęczeniowej niewątpliwie wiąże się z właściwym wyznaczeniem wartości spiętrzonych naprężeń, przy których następuje uszkodzenie elementu. Jednak rzeczywisty rozkład naprężeń w obszarze karbu najczęściej nie jest dokładnie znany, a analiza stanu naprężeń i odkształceń ciał sprężysto-plastycznych w obszarach oddziaływania karbu jest trudna. Niekiedy wymagane jest

stosowanie wielu uproszczeń i założeń modelowych. Znane zależności opisujące rozkład naprężeń i deformacji w obszarze karbu dotyczą na ogół obciążeń statycznych (jednokrotnego obciążenia). W warunkach obciążeń cyklicznych sytuacja ta ulega zmianie na skutek chociażby bardzo złożonych procesów umocnienia i osłabienia materiału. Ciekawe podejście prezentują autorzy prac (Glinka i Radon, 1984; Kwai i Chan, 2003; Ostash, 2006; Ostash i Panasyuk, 2001; Taylor, 2008), którzy przyjmują za parametr charakteryzujący sprężysto - plastyczny stan materiału w obszarze oddziaływania karbu tzw. zakres naprężenia $\Delta\sigma^d$ działającego w pewnej odległości d od dna karbu o promieniu ρ .

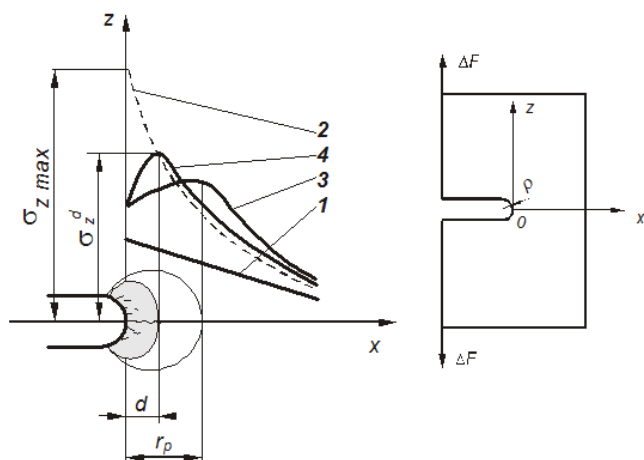
Niektórzy badacze (Evans, 1999, Ostash, 2006, Sumsel, 2008) wyrażają pogląd, że w trakcie zmęczenia ciała sprężysto - plastycznego formowanie inkubacyjnej strefy uszkodzeń zachodzi dwuetapowo (Rys. 1), tj.:

- powstanie obszernej strefy plastycznej, o wielkości r_p , w wierzchołku karbu, przy pierwszych cyklach obciążenia,
- stopniowe nasycanie strefy mikrouszkodzeniami połączone ze zmianą jej rozmiarów, aż do momentu wyczerpania wszystkich możliwych mikrodeformacji przy następnych cyklach obciążenia.

Wyniki eksperymentów zamieszczone w wielu pracach (Ostash, 2006; Romaniv, 1990; Qylafku i inni, 1999) ukazują, że liczba cykli do inicjacji pęknięcia praktycznie nie zależy od promienia karbu, jeśli jest on mniejszy od pewnej wartości. Wartość ta zależy od właściwości materiału. Przy tym, autorzy proponują, aby zakres naprężenia $\Delta\sigma$ określać jako wartość naprężenia w pewnej odległości d od dna karbu obliczoną tak jak dla ciała liniowo - sprężystego. Istnieje pogląd (Adib-Ramezani i Jeong, 2007; Billon, 1982; Ostash i Panasyuk, 2001), iż w wyniku lokalnej, cyklicznej deformacji plastycznej naprężenia maksymalne w dnie karbu, obliczone na podstawie liniowej mechaniki pęknięcia, relaksują do pewnej wartości, a ich maksimum σ_z^d znajduje się w odległości d od dna karbu (Rys. 1, krzywa - 4). Jednocześnie zakłada się, że rozmiar strefy uszkodzeń nie zależy od promienia dna karbu i reglamentowany jest warunkami obciążeń oraz właściwościami materiału.

Aktualna jest koncepcja uzasadniania inicjacji pęknięć jako wyniku gromadzenia się pętli dyslokacyjnych wzdłuż pasm poślizgu (Zhang i Wang, 2008; Kwai, 2010). Inicjacja nastąpi wtedy, gdy gęstość dyslokacji osiągnie wartość

krytyczną. Odbywa się to w pewnym czasie, który można nazwać okresem inkubacyjnym. W okresie tym w obszarze karbu wytwarza się charakterystyczna strefa uszkodzeń o rosnącej do pewnej wartości krytycznej gęstości mikropęknięć wywołanych lokalnymi poślizgami. Wielkość tej warstwy określa wymiar d . Od momentu wyjścia któregośkolwiek mikropęknięcia z warstwy powierzchniowej określonej wielkością d kończy się pierwsze stadium zmęczenia, a rozpoczyna drugie. Rozwój pęknięcia w drugim stadium zaczyna być kontrolowany procesami w jego wierzchołku. Mikropęknięcie przekształca się w makropęknięcie. Od tego momentu można traktować element jako posiadający szczelinę o długości $l \geq d$, i jak sugerują autorzy (Ostasz i Panasyuk, 2001; Romaniv, 1990) stosować metody liniowej mechaniki pękania.

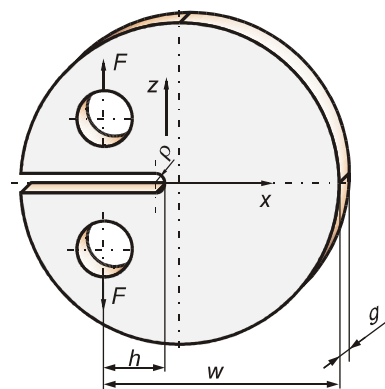


Rys. 1. Poglądowe przedstawienie różnych ujęć rozkładów naprężeń σ_z w okolicy dna karbu płaskiej próbki, przy jednoosiowym rozciąganiu siłą F : 1 – naprężenia nominalne, 2 – naprężenia przy przyjęciu liniowo sprężystego modelu materiału, 3 – naprężenia przy przyjęciu modelu materiału sprężysto-plastycznego i nieuwzględnianiu zmian właściwości mechanicznych na skutek cykliczności odkształceń, 4 – z uwzględnieniem charakterystycznego parametru uszkodzeń d

Do badań zjawisk zmęczenia wykorzystuje się prawie wszystkie środki doświadczalne, jakimi dysponuje technika. Umożliwiają one nierzadko śledzenie przebiegu powstawania uszkodzeń bez kłopotliwych i nie zawsze możliwych w warunkach praktycznych przygotowań powierzchni. Niektóre pozwalają na głębokie wnikiwanie w materiał bez potrzeby uszkodzania otaczających obszarów. Wymagają jednak często skomplikowanej i kosztownej aparatury. Pomimo dużego rozwoju wspomnianych metod przy wsparciu nowoczesną elektroniką i techniką cyfrową, bezpośrednie obserwacje mikroskopowe nadal stanowią, w niektórych przypadkach, wystarczająco dokładne, uniwersalne i tanie sposoby badań rozwoju uszkodzeń zmęczeniowych. Z wymienionych względów, w pracy, jako kryterium przejścia z fazy inicjacji do fazy rozwoju przyjęto pęknięcie o długości umożliwiającej jego jednoznaczную identyfikację przy wykorzystaniu metody obserwacji mikroskopem optycznym. Takie podejście wielokrotnie wymieniane jest w literaturze dotyczącej tematu, np.: Robak i Gasiak, 2008; Nasr i inni, 2010; Sonsino, 2001; Sumsel, 2008.

2. BADANIA EKSPERYMENTALNE

Testy prowadzono na stanowisku składającym się z trzech podstawowych zespołów funkcjonalnych: maszyny do badań zmęczeniowych INSTRON 8502 wyposażonej w oś skrętną, mikroskopu pomiarowego z układem stroboskopowym oraz komputera. Wykorzystano, próbki ze stali C45, w kształcie okrągłej tarczy z promieniowym przecięciem, jak na Rys. 2. Badania wykonano przy zastosowaniu próbek o grubości $g=4\text{mm}$ oraz trzech różnych promieniach zaokrąglenia dna karbu $\rho=1,5; 3; 6\text{mm}$, przy niezmiennych wymiarach $h=20\text{mm}$ i $w=74\text{mm}$. Eksperymenty wykonano w cyklu obciążeń sinusoidalnym odzerowo – tętniącym, realizowanym poprzez przyłożenie cyklicznego obciążenia o wartości maksymalnej F jak na Rys. 2. Pomiary długości pęknięć wykonywano okresowo, ale bez przerywania procesu obciążania. Jako parametr uszkodzenia przyjęto liczbę cykli, po której mikropęknięcie osiągało wielkość d .



Rys. 2. Próbka tarczowa z zaznaczonymi wielkościami charakterystycznymi (opis w tekście)

Należy zaznaczyć, iż rozważania prowadzone w niniejszej pracy odnoszą się do obciążeń cyklicznie zmiennych, odzerowo – tętniących dodatnich (rozciągających). W celu zachowania większej przejrzystości zapisu wzorów w miejsce wyrażen $\Delta\sigma$ stosowany będzie zapis uproszczony σ , określający zakres zmian naprężeń cyklu.

W przypadku zastosowanych próbek tarczowych maksymalną wartość naprężenia na dnie karbu o promieniu ρ (przy założeniu liniowej sprężystości materiału) wyrażono następującą przybliżoną zależnością (Romaniv, 1990):

$$\sigma_{z \max} = \left(1/\sqrt{\rho}\right) K_I(\lambda) \cdot \left(1,128 + 6,595a - 116,5a^2 + 705a^3\right) \quad (1)$$

gdzie: $K_I(\lambda)$ – współczynnik intensywności naprężenia w dnie karbu o ekwiwalentnej długości $\lambda=h/w$, obliczony, jak w pracy Newmana (1999), $a=\rho/w$, wymiary h i w oznaczono na Rys. 2.

Wykorzystując założenie, iż makroszczelina pojawi się wówczas, gdy w warstwie powierzchniowej wytworzy się odpowiednio duża gęstość mikrouszkodzeń na określonej głębokości d charakteryzującej właściwości materiału, i że wielkość d nie jest zależna od promienia dna karbu ρ , to dla przyjętego rodzaju próbek i obciążenia wartość na-

prężen $\sigma_z(x=d)$ można, zgodnie z pracą Romaniva (1990), wyrazić następująco:

$$\sigma_z^d = \sigma_{z_{max}} (1 + d/\rho)(1 - 30 d \rho / w^2)(1 + 2 d / \rho)^{-\frac{3}{2}} \quad (2)$$

Aproksymację wyników eksperymentów prowadzono przy wykorzystaniu komputerowego oprogramowania statystycznego Statistica 6 PL. W programie tym szacowanie parametrów nieliniowych funkcji regresji prostej odbywało się z wykorzystaniem procedury regresji użytkownika zawartej w module estymacja nieliniowa. Dokonywano doboru najlepiej dopasowanej funkcji regresji, przy czym brano pod uwagę możliwość wyrównania regresji empirycznej do postaci liniowej, kwadratowej, potęgowej i logarytmicznej. Estymatory parametrów tych funkcji każdorazowo otrzymywano pojedynczą metodą najmniejszych kwadratów. Na podstawie kryterium minimalnej wartości funkcji straty (Łuszniewicz i Słaby, 2003) do dalszych rozważań przyjęto funkcję logarytmiczną.

W literaturze dotyczącej problematyki zmęczenia można zauważyć ogólną zgodność, co do wykorzystywania funkcji logarytmicznych w aproksymacji wyników doświadczalnych. Świadczy to o poprawności, dokonanego w pracy, doboru postaci funkcji.

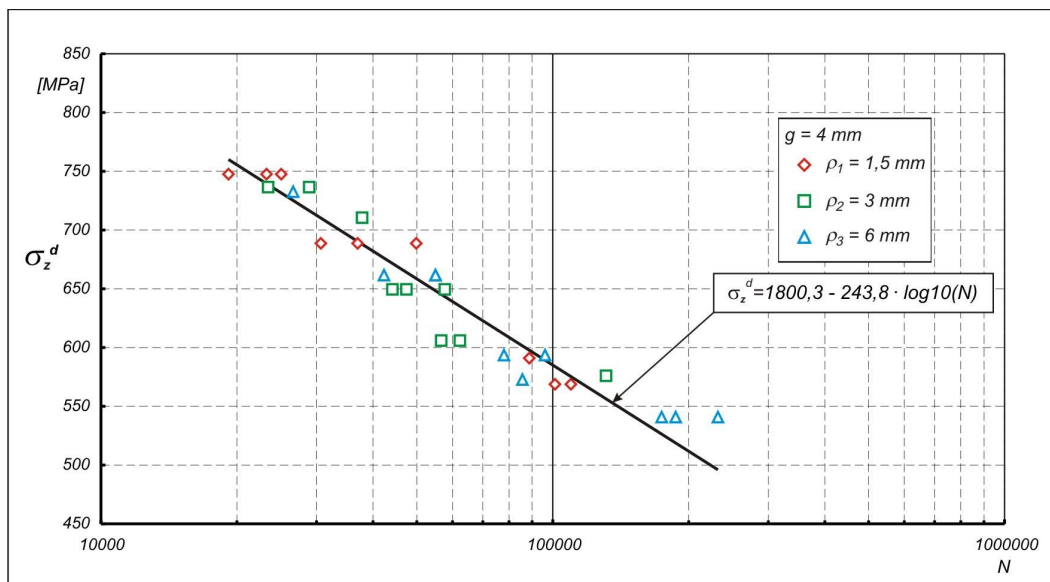
Dobór optymalnej odległości d odbywał się w sposób empiryczny z wykorzystaniem oprogramowania statystycznego. Na podstawie zmierzonych długości obliczano wartości σ_z^d i dla odpowiadających im ilości cykli konstruowano zależności $\sigma_z^d - N$. Następnie dokonywano aproksymacji uzyskanych danych do postaci funkcji logarytmicznej. Wybrano odległość d , dla której suma kwadratów odchyleń reszt (funkcja straty) była najniższa. Zaobserwowano, że przy wzroście odległości od $d=0,1\text{mm}$ wartość funkcji straty malała, a następnie zaczynała rosnąć. Minimum funkcji straty osiągnięto przy przyjęciu $d=0,22\text{mm}$.

Na podstawie obliczonych wartości σ_z^d dla różnych promieni ρ i zaobserwowanej liczby cykli do inicjacji pęknięcia N sporządzono wykres zbiorczy zależności w układzie $\sigma_z^d - \log N$ (Rys. 3).

Wartość naprężeń nominalnych σ_n określano na podstawie wzoru:

$$\sigma_n = 2F(2w+h)/g(w-h)^2, \quad (3)$$

gdzie: F – wartość maksymalna przyłożonego obciążenia jak na Rys. 2, g – grubość próbki.



Rys. 3. Zależność liczby cykli obciążenia do inicjacji pęknięcia od wartości naprężeń σ_z^d

3. OPIS TEORETYCZNY

W niniejszym artykule proponuje się wyznaczanie efektywnego współczynnika działania karbu poprzez określenie lokalnych naprężeń σ_z^d w pewnej odległości d od dna karbu, właściwej dla danego materiału, mianowicie:

$$\beta_k^d = \frac{\sigma_z^d}{\sigma_n}. \quad (4)$$

Na Rys. 4 przedstawiono zmiany wartości współczynnika działania karbu β_k^d , liczonego wg wzoru (4), w zależności od liczby cykli dla trzech badanych promieni dna karbu i grubości próbek $g=4\text{mm}$.

W celach porównawczych dokonano także obliczeń współczynnika β_k przy wykorzystaniu dwóch ogólnie zna-

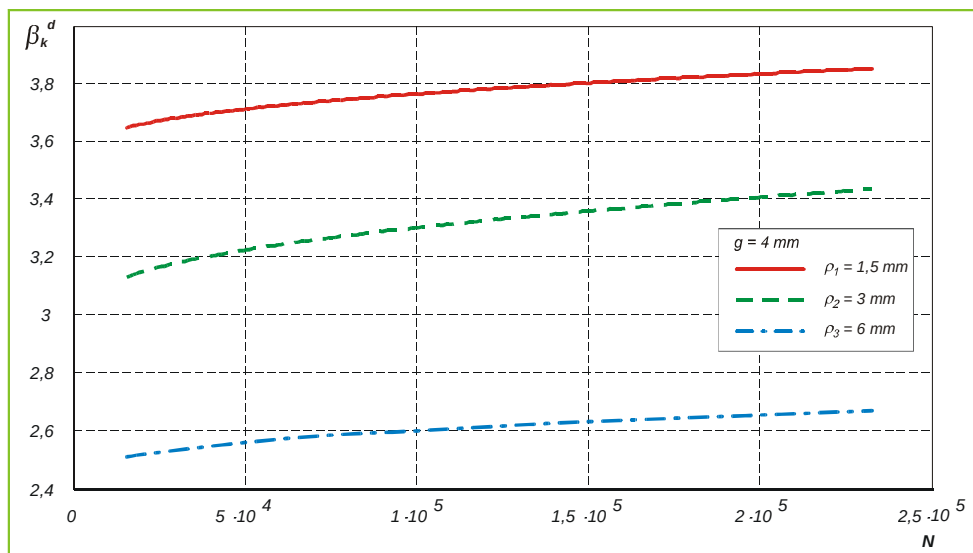
nych zależności Neubera oraz Petersona. Zależność wg Neubera (1946) zapisano w postaci:

$$\beta_k^N = 1 + \frac{\alpha_k^d - 1}{1 + \sqrt{\frac{A}{\rho}}}, \quad (5)$$

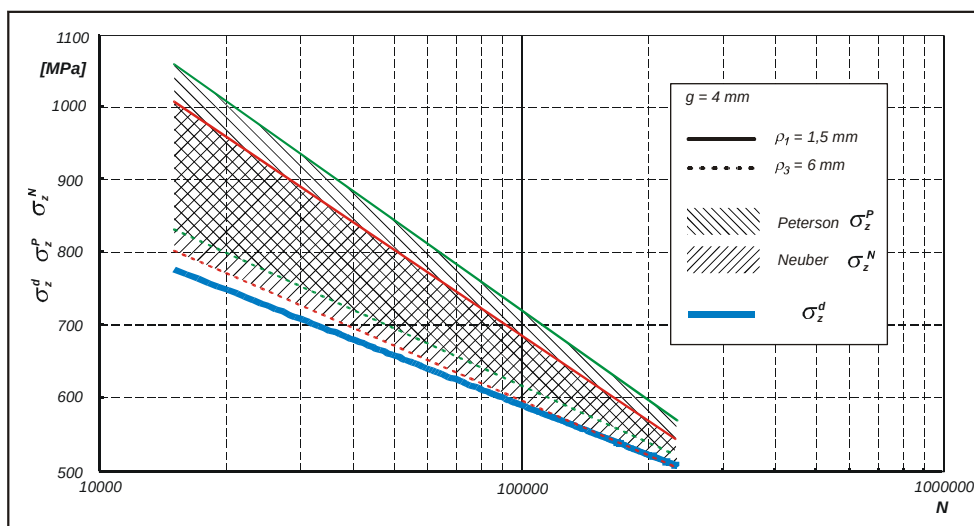
gdzie: A – stała materiałowa, α_k^d – teoretyczny współczynnik spiętrzenia naprężeń. Natomiast zależność wg Petersona (1974) przedstawiono w postaci:

$$\beta_k^P = 1 + \frac{\alpha_k^d - 1}{1 + \frac{a}{\rho}}, \quad (6)$$

gdzie: a – stała materiałowa.



Rys. 4. Zmiana wartości współczynnika działania karbu β_k^d w zależności od liczby cykli N



Rys. 5. Wykres porównawczy zależności liczby cykli obciążeń do inicjacji pęknięcia od wartości naprężeń obliczanych jako $\sigma_z = \beta_k \cdot \sigma_n$

Stałe materiałowe A , a , autorzy prac (Ostasz i Panasiuk, 2001; Neuber, 1946; Peterson, 1974) proponują wyznaczać na podstawie wytrzymałości na rozciąganie R_m , mianowicie:

$$A = 624,8 \cdot e^{-0,0034 \cdot R_m}, \quad (7)$$

oraz

$$a = \left(\frac{270}{R_m} \right)^{1,8}, \text{ lub } a = 0,0254 \left(\frac{2079}{R_m} \right)^{1,8} \quad (8)$$

Na podstawie zależności (7), (8) oraz R_m dla badanej stali obliczono wartości parametrów materiałowych, mianowicie: $A=0,043\text{mm}$, $a=0,147\text{mm}$.

Wartość współczynnika kształtu określano wg klasycznego wzoru, tj.:

$$\alpha_k^d = \frac{\sigma_{z \max}}{\sigma_n}. \quad (9)$$

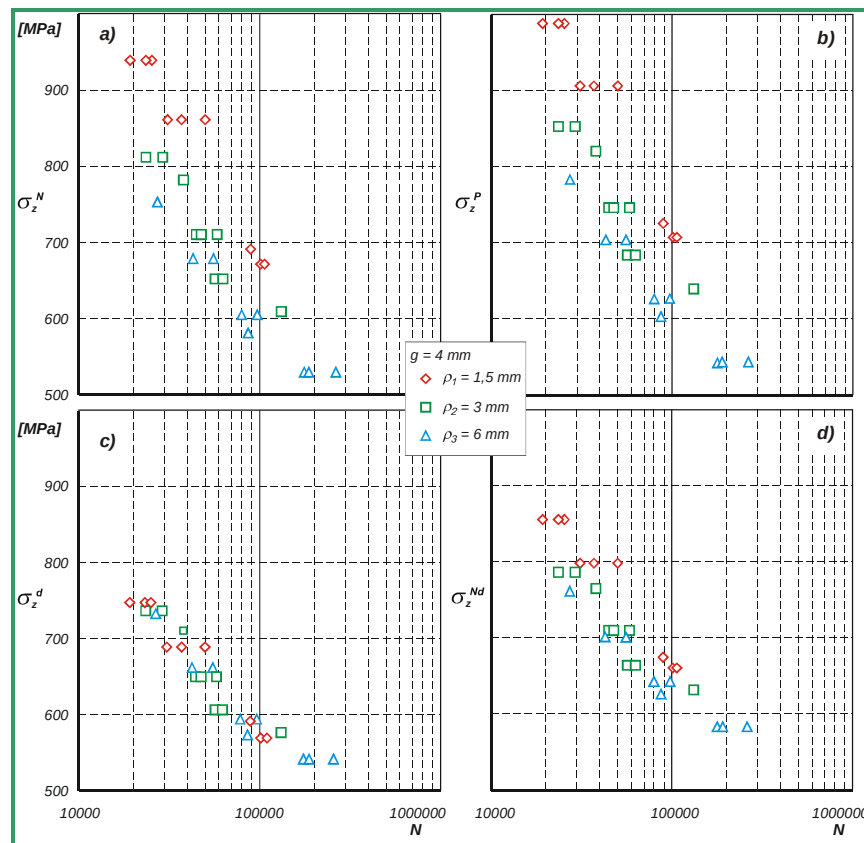
Wyniki szacowania wartości naprężeń obliczanych jako $\sigma_z = \beta_k \cdot \sigma_n$, przy wykorzystywaniu wyrażeń (4), (5), (6)

ukazano w postaci wykresu przedstawionego na Rys. 5. W celu zachowania przejrzystości rysunku pominięto punkty doświadczalne, zastępując je pasmami rozrzutu, którego granicami są proste powstałe w efekcie aproksymacji funkcją logarytmiczną.

Zależność liczby cykli obciążeń do inicjacji pęknięcia od wartości naprężeń $\sigma_z = \beta_k \cdot \sigma_n$ z naniesionymi danymi eksperymentalnymi przedstawiono na Rys. 6. Wykres ukazany na Rys. 6d, powstał przy wykorzystaniu zależności Neubera (5), po zastąpieniu parametru A wielkością d , tj.:

$$\beta_k^{Nd} = 1 + \frac{\alpha_k^d - 1}{1 + \sqrt{\frac{d}{\rho}}}, \quad (10)$$

Podobnie potraktowano zależność wg Petersona (6). Otrzymane wyniki charakteryzowały się jednak dużym rozrzutem, przez co zrezygnowano z ich zamieszczenia w niniejszej pracy.

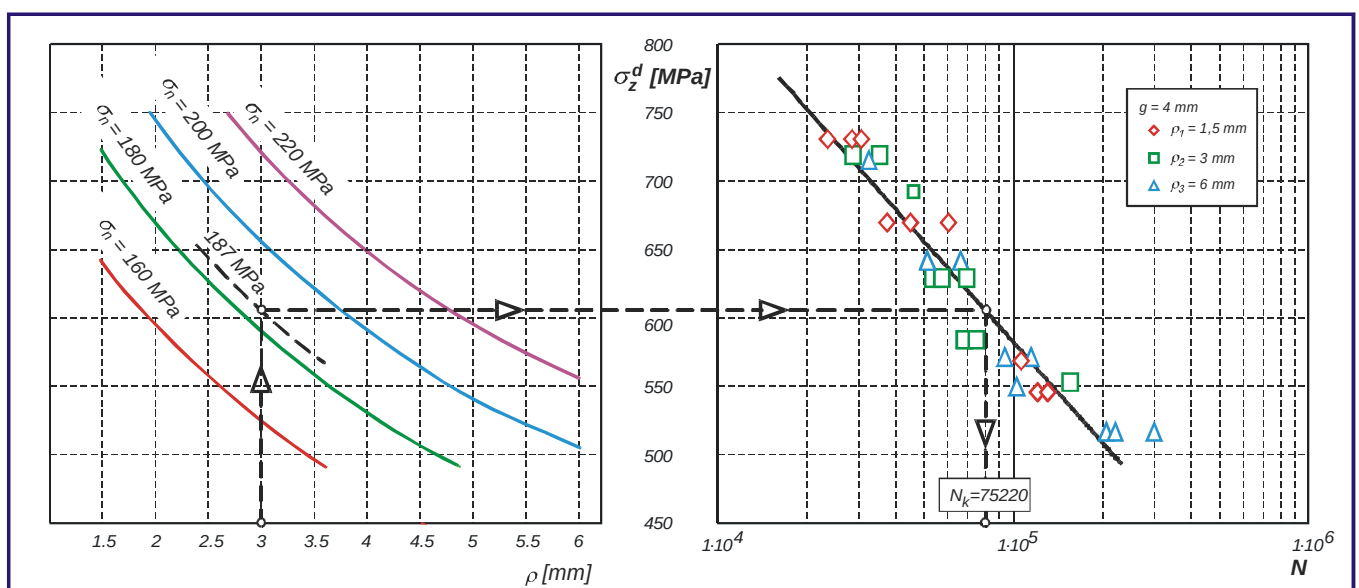


Rys. 6. Zależność liczby cykli obciążeń do inicjacji pęknięcia od wartości naprężeń obliczanych jako $\sigma_z = \beta_k \cdot \sigma_n$ ($g=4$ mm), gdzie β_k obliczano przy wykorzystaniu wzorów: a) (5), b) (6), c) (4), d) (10)

4. PODSUMOWANIE

Analizując wykres przedstawiony na Rys. 4 stwierdzono wzrost β_k^d wraz ze wzrostem liczby cykli do inicjacji pęknięcia, niezależnie od promienia dna karbu. Szczególnie wyraźny wzrost współczynnika β_k^d można zaobserwować w zakresie liczby cykli do ok. 50000. Powyżej tej wartości

współczynnik β_k^d zmienia się wolniej, w sposób zbliżony do liniowego. Można sądzić, iż β_k doznaje przyrostu w miarę zwiększania się liczby cykli zmian obciążeń, w warunkach, gdy wartość spiętrzonych naprężeń przekracza granicę stabilizacji deformacji.



Rys. 7. Nomogram do obliczania trwałości zmęczeniowej wraz z przykładową ścieżką jej wyznaczenia

Największy rozrzut wyników otrzymano przy zastosowaniu zależności Petersona (6) (Rys. 5, Rys. 6b), natomiast najmniejszy przy wykorzystaniu (4) i przyjęciu $d=0,22\text{mm}$ (Rys. 6c). Metoda Neuber'a (5) charakteryzuje się pośrednimi wartościami rozrzutu (Rys. 5, Rys. 6a) w stosunku do (4) i (6). Dobre rezultaty otrzymano w wyniku zastosowania modyfikacji wzoru (5) do postaci (10). Rozrzut w tym przypadku uległ zmniejszeniu, chociaż nie osiągnięto zbieżności takiej jak przy wykorzystaniu (4). Należy dodać, że przy wysokich poziomach obciążeń, naprężenia lokalne, otrzymane na podstawie (2) charakteryzują się znacznie niższymi wartościami (Rys. 5, Rys. 6), w odniesieniu do innych rozważanych metod, co bardziej odpowiada sytuacji występującej w realnych materiałach.

Na Rys. 7 przedstawiono nomogram do wyznaczania liczby cykli do inicjacji pęknięcia próbek. Pozwala on w prosty sposób przewidywać trwałość zmęczeniową bazując na wartości promienia dna karbu oraz wartości zastosowanego obciążenia nominalnego.

Przedstawiona propozycja określania współczynnika β_k^d wydaje się być korzystna z punktu widzenia prognozowania trwałości przy projektowaniu elementów maszyn pracujących przy obciążeniach cyklicznie zmiennych. Dotyczy to szczególnie zakresu ograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej, gdzie obserwuje się duże zmiany wartości współczynnika β_k (Troščenko i inni, 1978; Kocańda i Szala, 1999), a co za tym idzie wątpliwą przydatność tej wielkości wyznaczonej metodami klasycznymi, które dotyczą obszaru poniżej granicy zmęczenia.

LITERATURA

1. **Adib-Ramezani H., Jeong J.** (2007), Advanced volumetric method for fatigue life prediction using stress gradient effects at notch roots, *Computational Materials Science*, 39, 649–663.
2. **Atzori B., Zappalorto M., Berto F.** (2010), A theoretical treatise for notch and defect sensitivity under torsion, *Mechanics Research Communications*, 37, 173–176.
3. **Buch A.** (1998), Fatigue strength calculation, *Material Science Surveys*, USA, No. 6.
4. **Ciavarella M., Meneghetti G.** (2004), On fatigue limit in the presence of notches: classical vs. recent unified formulations, *International Journal of Fatigue*, 26, 289–298.
5. **Glinka G., Radon J.** (1984), *Near – threshold crack growth prediction*, Fatigue.
6. **Kocańda A. Kocańda S.** (1998), *Niskocyklowa wytrzymałość zmęczeniowa metali*, Wyd. Naukowe PWN. Warszawa.
7. **Kocańda S., Szala J.** (1999), *Podstawy obliczeń zmęczeniowych*, Wyd. Naukowe PWN. Warszawa.
8. **Kwai S.** (2010), Roles of microstructure in fatigue crack initiation, *International Journal of Fatigue*, 32, 1428–1447.
9. **Kwai S., Chan A.** (2003), Microstructure – Based Fatigue Crack Initiation Model. *Metallurgical and Materials Transactions, ProQuest Science Journals*, 34A, 1, 43 – 58.
10. **Luszniewicz A., Słaby T.** (2003), *Statystyka z pakietem komputerowym STATISTICA PL. Teoria i zastosowania*. Wyd. C.H. BECK, Warszawa.
11. **Mazanek E.** (red.) (2005), *Przykłady obliczeń z podstaw konstrukcji maszyn*, tom. 1, WNT, Warszawa.
12. **Nasr A., Nadot Y., Bouraoui Ch., Fathallah R., Jouiad M.** (2010), Fatigue initiation in C35 steel: Influence of loading and defect, *International Journal of Fatigue*, 32, 780–787.
13. **Neuber H.** (1946), *Theory of notch stress*, Ann Arbor, MI: J.W. Edwards Company.
14. **Newman J. C.** (1999), Stress-intensity factors and crack-opening displacements for round compact specimens, *International Journal of Fracture*, 17, No. 6, 567–578.
15. **Ostasz O. P.** (2006), New approaches in fatigue fracture mechanics, *Materials Science*, Vol. 42, No. 1, 5–18.
16. **Ostasz O. P., Panasyuk V. V.** (2001), Fatigue process zone at notches, *International Journal of Fatigue*, 23, No. 7, 627–636.
17. **Peterson R. E.** (1974), *Stress concentration factor*, New York. John Wiley and Sons.
18. **Pluvinage G.** (1998), Fatigue and fracture emanating from notch; the use of the notch stress intensity factor, *Nuclear Engineering and Design*, 185, 173–184.
19. **Robak G., Gasiak G.** (2008), Zestaw badawczy do pomiaru rozwoju pęknięć zmęczeniowych przy obciążeniach złożonych, *Przegląd Mechaniczny*, Zeszyt 2, 34–36.
20. **Romaniv O. N.** (1990), *Ustalost i cikličeskaja treščinostojkost konstrukcyjnych materialov*, *Mechanika razruszenija i pročnost materialov*, tom 4, Naukova Dumka, Kijew.
21. **Sonsino C.M.** (2001) Influence of load and deformation-controlled multiaxial tests on fatigue life to crack initiation, *International Journal of Fatigue*, 23, 159–167.
22. **Susmel L.** (2008), The theory of critical distances: a review of its applications in fatigue, *Engineering Fracture Mechanics*, 75, 1706–1724.
23. **Taylor D.** (2008) The theory of critical distances, *Engineering Fracture Mechanics*, 75, 1696–1705.
24. **Troščenko V. T., Chamaza L. A., Miščenko J. D.** (1978), Issledovanije ustalostnoj pročnosti obrazcov s koncentradorami naprjaženij s uczotom nieuprugich cikličeskich deformacij, *Problemy Pročnosti*, No. 4, 13–16.
25. **Ylaffku G., Azari Z., Kadi N., Gjonaj M., Pluvinage G.** (1999) Application of a new model proposal for fatigue life prediction on notches and key-seats. *International Journal of Fatigue* 21, 1999.
26. **Zhang Z. F., Wang Z.G.** (2008) Grain boundary effects on cyclic deformation and fatigue damage, *Progress in Materials Science*, 53, 1025–1099.

THE FATIGUE LIFE PREDICTION OF NOTCHED ELEMENTS

Abstract: The paper presents a method of evaluating of fatigue life under uniaxial loads conditions. Experiments verifying the above method have been conducted on INSTRON 8502 PLUS machine using steel C45 specimens. For testing applied disc specimens with radius cut under uniaxial loads state. In the calculations of coefficient β_k utilization two well-known Neuber's and Peterson's dependences were executed.

Opracowano w ramach pracy statutowej S/WM/4/2010, realizowanej w Politechnice Białostockiej.

MODELOWANIE ZJAWISKA SYNCHRONIZACJI ODRYWAJĄCYCH SIĘ PĘCHERZY GAZOWYCH Z SĄSIADUJĄCYCH DYSZ

Romuald MOSDORF*, Tomasz WYSZKOWSKI*

*Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka,
ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

r.mosdorf@pb.edu.pl, wyszkowski.tomasz@gmail.com

Streszczenie: W pracy przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych oddziaływania kolumn pęcherzy powietrza generowanych z dwóch sąsiadujących dysz. W przypadku odległości pomiędzy dyszami równej 4 mm i częstotliwości 30 Hz obserwowano synchronizację odrywania się pęcherzy. W celu analizy struktury przepływu cieczy pomiędzy dwoma oddziałującymi pęcherzami przeprowadzono symulację w programie COMSOL Multiphysics, wykorzystując metodę level set. Chaotyczne zmiany częstotliwości odrywania się pęcherzy modelowano z zastosowaniem układu równań różniczkowych zwyczajnych opisujących zmiany masy gazu w układzie zasilania dysz. W trakcie symulacji, podobnie jak w eksperymencie, obserwowano występowanie ujemnej korelacji pomiędzy odrywającymi się pęcherzami. Oba przedstawione w pracy modele mają charakter jakościowy.

1. WSTĘP

Wiedza dotycząca dynamiki pęcherzy gazowych ma kluczowe znaczenie w fizyce, biologii, w medycynie a także w wielu gałęziach przemysłu. Stąd nieustanne próby wyjaśnienia wielu zjawisk fizycznych z nią związanych. Duża ilość parametrów fizycznych na przykład takich jak właściwości fizyczne faz, natężenie przepływu gazu oraz ciśnienie gazu i cieczy ma wpływ na formowanie się pęcherzy gazowych. Wiele badań dotyczących pęcherzy gazowych odnosi się do eksperymentów, w których gaz wydostaje się z dyszy lub otworów w płytach do cieczy. Wyniki tych badań zostały opublikowane między innymi w pracach (Peebles et al., 1953; Hughes et al., 1955; Davidson et al., 1956; Davidson et al., 1971; Kyriakides et al., 1997). Przewadzone są również badania eksperymentalne dotyczące dynamiki pęcherzy (Oguz et al., 1993; Sanada et al., 2005; Zhang et al., 2001). Pokazują one, że wraz ze wzrostem wydatku powietrza obserwuje się zjawisko łączenia się kolejno wydostających się pęcherzy gazowych (Zhang et al., 2001). Coraz częściej analizuje się proces oddziaływania kolejno odrywających się pęcherzy z przepływem turbulentnym generowanym przez ruch poprzecznie oderwanego pęcherza (Luewisutthichat, et al., 1997; Zhang et al., 2001). Badanie dynamiki wzrostu pęcherzy zmusiło badaczy do szukania nowych metod analizy skomplikowanej dynamiki ruchu ścianki pęcherza (Mosdorf et al., 2003).

Istnieje wiele artykułów dotyczących chaotycznych zmian zachodzących w procesie powstawania i przepływu pęcherzy przez ciecz (Luewisutthichat, et al., 1997; Zhang et al., 2001; Tufaile et al., 2000a; Tufaile et al., 2000b; Ruzicka et al., 1997; Tritton et al., 1993; Ramakrishnan et al., 1969; Clift et al., 1978; Raymond et al., 2000). W badaniach omówionych w pracy (Luewisutthichat, et al., 1997) zaobserwowano chaotyczne zmiany kształtu i prędkości pęcherzy. Artykuł (Nguyen et al., 1996) opisuje zależność pomiędzy chaotycznym zachowaniem się pęcherzy

a niestabilnością przepływu wywołanego przez interakcje pomiędzy nimi. W pracy (Tritton et al., 1993) pokazano, że chaotyczne zmiany częstotliwości odrywania się pęcherzy poprzedzone są zjawiskiem występowania dwóch charakterystycznych częstotliwości odrywania się pęcherzy.

Wyniki badań przedstawione w pracy (Vazquez et al., 2008) pokazują, że chaotyczne zmiany sygnałów akustycznych generowanych przez pęcherze oraz zmiany ciśnienia gazu charakteryzują się różnymi sposobami manifestowania się chaosu. W pracy (Mosdorf et al., 2003) pokazano, że wzrostowi wydatku gazu towarzyszy wzrost wykładnika Lapunowa. Przejście z przepływu, w którym występują pojedyncze pęcherze do przepływu, w którym następuje łączenie się pęcherzy charakteryzuje się jako spadek entropii Kołmogorowa i wymiaru korelacyjnego (analizowano zmiany ciśnienia powietrza) (Ruzicka et al., 1997).

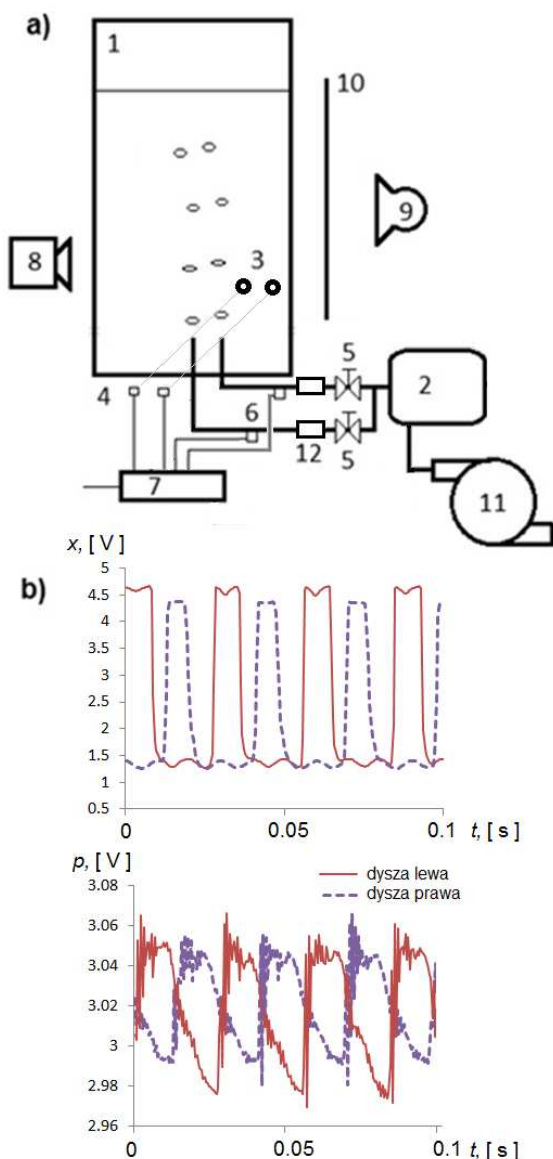
W prezentowanej pracy przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych wzajemnego oddziaływania pęcherzy wydostających się z dwóch sąsiadujących dysz. Wykryto występowanie zjawiska synchronicznego odrywania się pęcherzy przy odległości pomiędzy dyszami równej 4 mm i częstotliwości 30 Hz.

Do modelowania zjawiska zastosowano dwa modele. Pierwszy w oparciu o metodę level set dla cieczy nieściśliwych, opracowano w programie COMSOL Multiphysics z wykorzystaniem MES (Berthelsen, 2002; Smolianski 2005; Nagrath et al., 2006). Drugi posłużył do opisu zmian masy gazu w układzie zasilania dyszy, a także uwzględnił sprężyste oddziaływanie ścianki pęcherza na masę otaczającej go cieczy

Pierwszy model posłużył do opisu mechanizmu hydrodynamicznego oddziaływania pomiędzy pęcherzami wydostającymi się z sąsiednich dysz. Z uwagi na niestabilność metody numerycznej model ten może być stosowany tylko w krótkim przedziale czasu. Drugi model wykorzystano do modelowania zmian zachowań pęcherzy w długich przedziałach czasu.

2. BADANIA EKSPERYMENTALNE

Schemat stanowiska pomiarowego przedstawiono na Rys. 1. Badania prowadzono w szklanym zbiorniku o wymiarach (300x300x1000 mm) wypełnionym wodą destylowaną.



Rys. 1. Schemat stanowiska pomiarowego oraz przykładowe wyniki rejestrowanych danych a) Schemat stanowiska pomiarowego: 1 – szklany zbiornik, 2 – zbiornik z powietrzem, 3 – laser, 4 – fototranzystor, 5 – zawór powietrzny, 6 – czujnik ciśnienia, 7 – stacja akwizycji danych, 8 – kamera, 9 – oświetlenie, 10 – przesłona rozpraszająca światło, 11 – pompa, 12 – rotametry. b) Przykładowe zmiany w czasie rejestrowanego sygnału z fototranzystora (x) i czujnika ciśnienia (p)

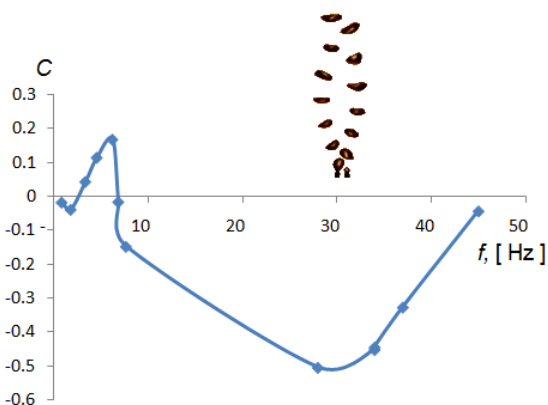
Pęcherze powietrza generowane były z mosiężnych dysz o średnicy wewnętrznej $\varnothing$ 1.1 mm. Układ zasilający dysze w powietrze wyposażony został w pompkę pneumatyczną oraz zbiornik. Wydatek powietrza regulowano zaworami. System pomiarowy wyposażony był w: kamerę

Casio EX FX1 rejestrującą obraz z szybkością 600 klatek na sek., dwa systemy składające się z laserów oraz fototranzystorów, których zadaniem było badanie częstotliwości odrywających się pęcherzy. Fluktuacje ciśnienia w układzie zasilania w powietrze rejestrowano z zastosowaniem czujników ciśnienia MPX12DP (o zakresie pomiarowym 0 – 10 kPa). System laserów z fototranzystorami a także czujniki ciśnienia podłączone były do stacji akwizycji danych DT9800 o częstotliwości próbkowania 1 kHz. Badania prowadzono dla częstotliwości odrywania się pęcherzy w zakresie od 1 do 40 Hz. Dane rejestrowano dla przypadku, gdy częstotliwości odrywania się pęcherzy z dwóch sąsiadujących dysz różniły się o mniej niż 1 Hz. Wiązka lasera umieszczona była na wysokości 3 mm ponad wylotem dyszy.

Przykładowy sygnał rejestrowany w trakcie eksperymentu pokazano na Rys. 1a. Do ilościowego opisu synchronicznego odrywania się pęcherzy zastosowano współczynnik korelacji wyznaczony pomiędzy fluktuacjami ciśnienia w lewej i prawej dyszy, opisany zależnością:

$$C = \frac{\text{cov}(p_l, p_p)}{\sigma_l \sigma_p} \quad (1)$$

gdzie: σ_l , σ_p – odchylenie standardowe zmian ciśnienia w dyszach, cov – kowariancja wyznaczona pomiędzy zmianami ciśnienia w prawej i lewej dyszy.



Rys. 2. Zmiany współczynnika korelacji (1) w funkcji częstotliwości odrywania się pęcherzy. Odległość pomiędzy dyszami wynosiła 4 mm. Zdjęcie wykonane przy częstotliwości 32 Hz

Zmiany współczynnika korelacji w funkcji częstotliwości odrywania się pęcherzy pokazano na Rys. 2. Przy niskich częstotliwościach odrywania się pęcherzy współczynnik korelacji przyjmuje wartości bliskie zero, co oznacza, że pęcherze odrywają się w sposób nieskorelowany. Natomiast przy częstotliwości około 30 Hz wartość współczynnika korelacji zmniejsza się do wartości -0.5 , co oznacza, że pęcherze odrywają się w sposób skorelowany – na przemian z sąsiadującymi dysz. Na Rys. 2 pokazano zdjęcie ilustrujące synchroniczne odrywanie się pęcherzy z sąsiednich dysz. Wzrost częstotliwości odrywania się pęcherzy powoduje zanik zjawiska synchronizacji.

3. MODELOWANIE HYDRODYNAMICZNEGO ODDZIAŁYWANIA PĘCHERZY Z WYKORZYSTANIEM MES

W pracy zjawisko oddziaływania a także strukturę i mechanizm przepływu cieczy pomiędzy pęcherzami wydostającymi się z dwóch sąsiadujących dysz modelowano przy użyciu programu COMSOL Multiphysics. Przepływ cieczy modelowano z zastosowaniem metody elementów skończonych, natomiast do ustalenia położenia granicy rozdziału faz wykorzystano metodę level set. Jest to metoda numeryczna, którą stosuje się w symulacji przepływów dwufazowych mieszanin nieściśliwych (COMSOL Multiphysics). Zakłada się w niej, że ciecze są lepkie i nie mieszają się, natomiast powierzchnia rozdziału faz ma zerową grubość (COMSOL Multiphysics; Berthelsen, 2002).

Modelowanie ruchu powierzchni międzyfazowej odbywa się z wykorzystaniem ciągłej funkcji ϕ , zdefiniowanej jako funkcja odległości w postaci: (Berthelsen, 2002).

$$\phi(x, t) = \begin{cases} < 0 & \text{dla } x \in \Omega_1 \\ = 0 & \text{dla } x \in \Gamma \\ > 0 & \text{dla } x \in \Omega_2 \end{cases} \quad (2)$$

gdzie: x reprezentuje geometryczne położenie powierzchni międzyfazowej, Ω_1 i Ω_2 – oznacza obszary wypełnione jedną fazą: cieczą lub gazem, Γ – oznacza granicę rozdziału faz.

Wymiar funkcji level set jest o jeden większy od liczby wymiarów, w których prowadzona jest symulacja. Położenie granicy rozdziału faz, Γ , określane jest poprzez warunek (Nagrath, 2006):

$$\Gamma = \{x | \phi(x, t) = 0\} \quad (3)$$

Funkcja ϕ pozwala na aproksymację normalnej do powierzchni międzyfazowej oraz jej krzywizny w oparciu o następujące zależności (COMSOL):

$$\kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \Big|_{\phi=0} \quad (4)$$

$$n = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \Big|_{\phi=0} \quad (5)$$

Ponieważ granica rozdziału faz przemieszcza się zgodnie z przepływem adwekcyjnym dlatego zmiany wartości ϕ opisuje równanie (COMSOL):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (6)$$

Wartość prędkości obliczana jest w oparciu o równanie Navier'a-Stokesa na płaszczyźnie (x, y) . Uwzględnia ono zależności pomiędzy ciśnieniem, prędkością i gęstością cieczy nieściśliwych (COMSOL). Układ równań opisujący przepływ cieczy i gazu ma postać:

$$\rho(\phi) \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) - \nabla [\mu(\phi) (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T)] + \nabla p = \sigma \kappa \vec{n} \delta + \rho(\phi) \vec{g} \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (8)$$

W równaniu (7) wyrażenie $\sigma \kappa \vec{n} \delta$ opisuje siłę napięcia powierzchniowego, gdzie δ jest funkcją, której całka ma wartość jeden i przyjmuje wartość maksymalną na granicy międzyfazowej a w pozostałej części obszaru ma wartość równą zero. Siła masowa działająca na ciecz opisana jest zależnością $\rho(\phi) \vec{g}$, gdzie ρ jest odpowiednio gęstością

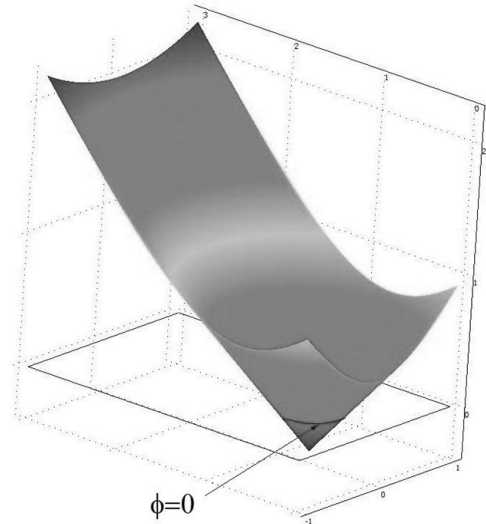
cieczy i gazu uzależnioną od wartości funkcji ϕ (COMSOL).

Na Rys. 3 pokazano sposób modelowania położenia powierzchni rozdziału faz z zastosowaniem powierzchni stożkowej opisanej zależnością:

$$\phi(0, x, y) = \sqrt{\{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2\}} - D \quad (9)$$

gdzie: x_p, y_p – położenie pęcherza, D – średnica pęcherza.

Przecięcie funkcji ϕ z płaszczyzną (x, y) wyznacza położenie powierzchni międzyfazowej. Granicę powierzchni pęcherza zaznaczono czarnym okręgiem na Rys. 3.



Rys. 3. Funkcja ϕ w chwili czasu $t = 0$.

Ponieważ powierzchnia ϕ wraz z granicą rozdziału faz zmienia położenie w trakcie trwania symulacji, dlatego dochodzi do zmian objętości pęcherzy. Jest to wynik błędów numerycznych spowodowanych niedokładnością obliczeń podczas rozwiązywania równania ruchu powierzchni międzyfazowej. Aby wyeliminować zmiany objętości nieściśliwych faz zachodzi potrzeba ciągłej re-inicjalizacji funkcji ϕ (Smolianski, 2005; Berthelsen, 2002). Istnieje wiele technik re-inicjalizacji. Jedną z metod została zaproponowana przez Sussmana (Berthelsen, 2002).

W pracy zastosowano metodą re - inicjalizacji opartą na wprowadzeniu do równania ruchu powierzchni ϕ dodatkowego członu opisującego sztuczny strumień dyfuzji kompensujący zmiany objętości faz wywołane błędami numerycznymi. Wówczas równanie ruchu powierzchni ϕ przyjmuje postać (COMSOL):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \phi = \delta(\phi) \cdot \nabla \cdot (D \nabla \phi) \quad (10)$$

Funkcja δ przyjmuje wartość maksymalną na granicy rozdziału faz. W ten sposób strumień dyfuzji występuje tylko na granicy rozdziału faz. Dobór odpowiedniej wartości współczynnika dyfuzji odbywa się na podstawie kolejnych przybliżeń w oparciu o zmiany współczynnika $M = \int \rho(t) dx dy / \int \rho(t_0) dx dy$. W pracy przyjęto, że zmiany te powinny być mniejsze od 0.1%. Wartości współczynnika M zmieniają się w czasie, dlatego zastosowana metoda eliminacji zmian objętości faz pozwala

na prowadzenie obliczeń tylko w krótkich przedziałach czasu. W pracy czas ten wynosił 0.05s.

Gęstość substancji oraz jej lepkość zmienia się w zależności od fazy. Zależność ta opisana została w następujący sposób (Nagrath et al., 2006):

$$\mu(\phi) = \mu_g + H(\phi)(\mu_l - \mu_g) \quad (11)$$

$$\rho(\phi) = \rho_g + H(\phi) \cdot (\rho_l - \rho_g) \quad (12)$$

gdzie: $H(\phi)$ jest funkcją Heaviside'a. W obliczeniach zastosowano następującą postać funkcji (COMSOL):

$$H_\varepsilon(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \phi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\phi}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right) \right] & \text{dla } \phi = 0 \\ 1 & \text{dla } \phi > \varepsilon \end{cases} \quad (13)$$

Obliczenia przeprowadzono dla wody i powietrza o parametrach: $\rho_l = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_g = 1 \text{ kg/m}^3$, $\sigma = 0.07 \text{ N/m}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\nu = 0.075 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Symulację wykonano w obszarze roboczym 2D o wymiarach 40mmx15mm, podzielonym na trójkątne elementy skończone. Siatka zawierała 6400 elementów.

Przyjęto, że prędkość płynu na granicy zbiornika równa jest zero, natomiast dla równania opisującego metodę level-set przyjęto, że strumień ϕ jest równy zero.

Jako warunek początkowy dla równania Navier'a-Stokesa przyjęto, że $u(0,x,y) = 0$, zaś ϕ opisane jest zależnością:

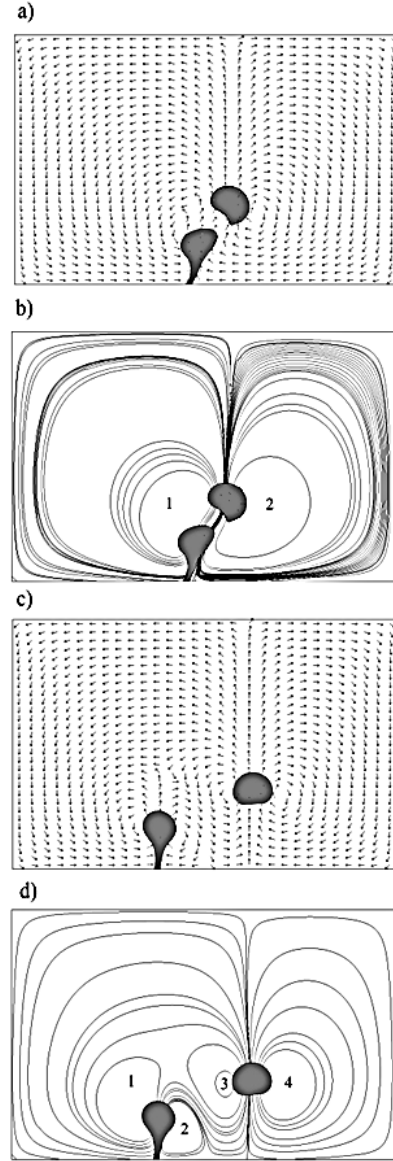
$$\phi(0,x,y) = \min \left\{ \sqrt{[(x+d/2)^2 + (y-y_p)^2]} - D, \sqrt{[(x-d/2)^2 + (y-y_p)^2]} - D \right\} \quad (14)$$

gdzie: d – pozioma odległość pomiędzy pęcherzami, y_p – pionowe położenie pęcherzy, D – średnica pęcherzy.

Celem przeprowadzonych symulacji była identyfikacja mechanizmu oddziaływania pęcherzy znajdujących się w sąsiednich kolumnach pęcherzy. Mechanizm ten jest odpowiedzialny za zjawisko synchronizacji odrywania się pęcherzy z sąsiadujących dysz. Badania eksperymentalne pokazały, że do zjawiska synchronizacji dochodzi w przypadku gdy pęcherza odrywają się z sąsiednich dysz naprzemian. Dlatego w wykonanych symulacjach początkowa pionowa odległość pomiędzy pęcherzami wynosiła 3 mm. Pęcherz położony niżej odpowiada pęcherzowi znajdującemu się w końcowej fazie wzrostu, zaś pęcherz położony wyżej był pęcherzem, który oderwał się od sąsiadującej dyszy. Wykonano dwie symulacje dla różnych poziomych odległości pomiędzy pęcherzami. Średnica pęcherzy w chwili $t = 0$ wynosiła $D = 5 \text{ mm}$ co odpowiada średnicy pęcherzy obserwowanych w eksperymencie. Wyniki obu symulacji przedstawiono na Rys.4.

Na Rys. 4 pokazano strukturę przepływów adwekcyjnych indukowanych przez pęcherze o różnej początkowej odległości poziomej. Na Rys. 4a, b przedstawiono pola prędkości oraz położenie pęcherzy. Natomiast na Rys. 4 b, d pokazano linie prądu. W przypadku gdy początkowa pozioma odległość pęcherzy wynosiła 4 mm (Rys. 4 a, b) indukowany przez pęcherze adwekcyjny przepływ cieczy uformował dwie komórki oznaczone numerami 1 i 2 (Rys. 4 b). W tym przypadku oba pęcherze poruszają się wzdłuż

obszaru łączącego komórki adwekcyjne, w którym pionowa składowa prędkości cieczy jest dodatnia. Następuje przyciąganie się pęcherzy - zachodzi zjawisko formowania się wspólnego łańcucha pęcherzy.



Rys. 4. Struktura przepływu cieczy i linie prądu w pobliżu pęcherzy formujące się po czasie $t = 0.05 \text{ s}$ przy różnych początkowych odległościach poziomych pomiędzy pęcherzami. a, b – 4 mm, c, d – 10 mm

Na Rys. 4 d pokazano 4 komórki adwekcyjne uformowane w wyniku przepływu indukowanego przez pęcherze gdy ich odległość początkowa wynosiła 10 mm. Między pęcherzami występują komórki adwekcyjne o numerach 2 i 3 w obszarze pomiędzy tymi komórkami pionowa składowa prędkości cieczy przyjmuje wartość ujemną. Pęcherze poruszają się w obszarach cieczy oddzielających odpowiednio komórki 1, 2 i 3, 4. W tym przypadku nie występuje formowanie się wspólnego łańcucha pęcherzy.

Podsumowując można stwierdzić, że jeżeli pęcherze są dostatecznie blisko siebie wówczas poruszają się we wspólnym przepływie cieczy tworzonym przez wyżej położony pęcherz, tak jak pokazano to na Rys. 4 a,b.

4. MODELOWANIE ODDZIAŁYWANIA PĘCHERZY W DŁUGIM PRZEDZIALE CZASU

W pracach (Mosdorf et al., 2010a, Mosdorf et al., 2010b) przedstawiono model numeryczny symulujący chaotyczne zmiany strumienia powietrza pobieranego przez kolejno odrywające się pęcherze. Model ten opracowano w oparciu o wyniki badań eksperymentalnych przeprowadzonych dla pojedynczej i dwóch dysz. Uwzględniał on dwa podstawowe założenia:

- reakcja układu pęcherz + układ zasilania dyszy w powietrze na oddziaływanie z cieczą ma charakter nieliniowy;
- wielkość odrywającego się pęcherza zależy od oddziaływania pęcherza z cieczą.

W prezentowanej pracy zmodyfikowano model przedstawiony w pracy (Mosdorf et al., 2010b). Zmiana ilości masy gazu, M_g , w układzie zasilania dyszy opisana była równaniem różniczkowym o postaci:

$$\frac{dM_g}{dt} = j_g - j_p \quad (15)$$

gdzie: j_g – masowy strumień gazu dostarczany do układu zasilania dyszy, j_p – masowy strumień gazu wydostający się z układu poprzez pęcherz.

Dla uproszczenia przyjęto, że strumień j_g jest stały w czasie. Na podstawie wyników badań eksperymentalnych przyjęto, że czas napełniania się pęcherza gazem wynosi 0.02 s. Strumień gazu j_p opisano uproszczoną zależnością:

$$j_p = \begin{cases} A \{ \sin[\omega(t - t_p) + \pi/2] + 1 \} & \text{gdy } M_g > M_{gk} \\ 0 & \text{gdy } M_g \leq M_{gk} \end{cases} \quad (16)$$

dla $t_p = 0.02$ s

gdzie: t_p – czas początkowy, w którym rozpoczyna się napełnianie pęcherza, M_{gk} – masa gazu u układzie zasilania, przy której rozpoczyna się napełnianie pęcherza gazem, A – współczynnik określający wielkość pęcherza.

W zależności (16) zastosowano funkcję $\sin$ w celu zapewnienia ciągłości funkcji $j_p(t)$ oraz jej pochodnej w trakcie numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych. Zjawiska zachodzące nad dyszą takie jak hydrodynamiczne oddziaływanie kolejno odrywających się pęcherzy oraz ich łączenie się zmieniają częstotliwość oraz wielkość odrywających się pęcherzy. Dlatego przyjęto, że wielkość współczynnika A oraz częstotliwość odrywania się pęcherzy ω zależy od sił hydrodynamicznych działających na powstający pęcherz. Na pęcherz działają następujące siły:

- siła wyporu, opisana zależnością (Zhang et al., 2001):

$$F_B = V(\rho_c - \rho_g)g \quad (17)$$

gdzie: ρ_c – gęstość wody, ρ_g – gęstość powietrza, V – objętość

- strumień pędu gazu, opisany zależnością (Zhang et al., 2001):

$$F_M = \rho_p \frac{q^2}{\left(\frac{\pi}{4}\right)D_o^2} \quad (18)$$

gdzie: D_o – średnica dyszy, q – objętościowy strumień dostarczanego gazu;

- siła napięcia powierzchniowego u podstawy pęcherza, opisana zależnością (Zhang et al., 2001):

$$F_\sigma = \pi D_o \sigma \quad (19)$$

gdzie: σ – napięcie powierzchniowe wody.

- siła inercji związana z poruszaniem się dodanej masy cieczy (Zhang et al., 2001):

$$F_i = (\rho_g + \xi_1 \rho_c) \frac{d}{dt} \left(V \frac{dx}{dt} \right) \quad (20)$$

gdzie: ξ_1 – współczynnik dodanej masy.

- siła oporu cieczy, opisana zależnością (Zhang et al., 2001):

$$F_d = \frac{1}{2} \rho_c \frac{\pi}{4} (D)^2 C_D \left(\frac{dx}{dt} - v_{pp} \right) \left| \frac{dx}{dt} - v_{pp} \right| \quad (21)$$

gdzie: dx/dt jest prędkością środka masy pęcherza, v_{pp} jest prędkością cieczy wywołaną przez wcześniej odrywające się pęcherze, D – średnica pęcherza, zaś $C_D = 18.5/Re_B^{0.6}$ dla $1 < Re_B < 1000$ oraz $C_D = 0.44$ dla $Re_B > 1000$. Natomiast $Re_B = (D(dr/dt))/\eta$, gdzie: η – kinematyczny współczynnik lepkości cieczy.

Warunek wzrostu pęcherza zapisuje się w postaci (Zhang et al., 2001):

$$F_B + F_M > F_\sigma + F_i + F_d \quad (22)$$

Masę gazu u układzie zasilania, przy której rozpoczyna się napełnianie pęcherza gazem, M_{gk} , można zatem wyznaczyć z warunku: $F_B + F_M = F_\sigma + F_i + F_d$.

Wydostający się z dyszy pęcherz unosi ciecz znajdującą się przed jego czołem. Następnie ciecz ta opada w trakcie odrywania się pęcherza. W przypadku periodycznie odrywających się pęcherzy przyjęto, że wprawiają one w ruch pionowy (w górę i w dół) ciecz o stałej masie M . Dla dysku o średnicy D masa ta nazywa się masą dodaną (Martin, 1998) i wynosi:

$$M = \frac{8}{3} (D/2)^3 \rho_c \quad (23)$$

Siły działające na masę M ze strony wzrastającego pęcherza wynoszą:

$$F_{MW} = (F_B + F_M) - (F_\sigma + F_i + F_d) = F_N - F_t \quad (24)$$

gdzie: F_N – siła unosząca pęcherz i tym samym masę M zaś F_t – siła hamująca ruch pęcherza.

Siły powodujące wzrost pęcherza F_N to siła wyporu i strumień pędu gazu wydostającego się z dyszy. Przy założeniu, że q jest stałe, zmiany w czasie siły napędzającej ruch pęcherza będą związane jedynie ze zmianą objętości pęcherza. W pracy (Mosdorf et al., 2010a) oszacowano zmianę siły unoszącej ciecz i występującej w wyniku zmiany objętości kulistego pęcherza. Równanie opisujące siłę ma postać:

$$\Delta F_s = 3 \cdot (r_1 + \Delta r)^2 \cdot m \cdot R \cdot T \cdot \left[\frac{C_2(p_r, T_r)}{(r_1 + \Delta r)^3 + V_o} - \frac{C_1(p_r, T_r)}{r_1^3 + V_o} \right] \quad (25)$$

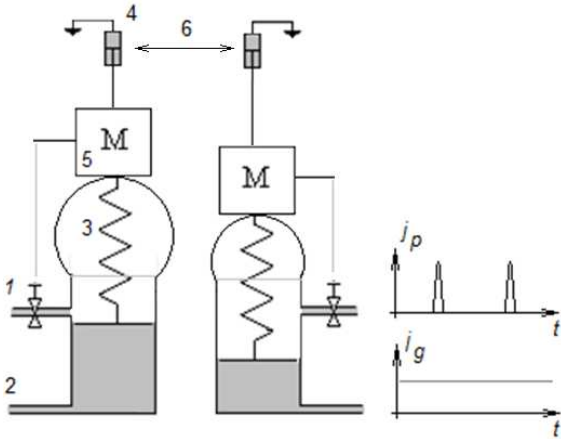
gdzie: V_o – objętość powietrza w układzie zasilania poniżej pęcherza.

Siła (25) ma charakter nieliniowej siły sprężystej, występującej na skutek zmiany promienia pęcherza, związanej z oddziaływaniem pęcherza z cieczą. Nieliniowość występuje na skutek kulistego kształtu pęcherza oraz proporcji

między objętością pęcherza a objętością układu zasilania dyszy w powietrze. Zależność (25) określa zmianę siły oddziaływania pęcherza na ciecz w odniesieniu do chwilowej wielkości pęcherza. Wielkość pęcherza zależy od ilości gazu znajdującego się w układzie zasilania, dlatego siłę modelowano poprzez nieliniową sprężynę, której jeden koniec przytwierdzony jest do masy M a położenie drugiego określone jest przez ilość gazu w układzie zasilania dyszy. Siłę F_s opisuje równanie:

$$F_s = -\kappa \cdot \text{sign}(x - m_g - \delta) \cdot (x - m_g - \delta)^a \quad (26)$$

gdzie: m_g położenie końca sprężyny związanej z ilością gazu w układzie zasilania, $m_g = (M_g/\rho_g)/(\pi(D_0/2)^2)$, D_0 – średnica dyszy, δ – wymiar sprężyny, w modelu – 10 mm, a – współczynnik nieliniowości sprężyny – w modelu $a = 2$ (Mosdorf et al., 2010a), x – położenie masy cieczy M .



Rys. 5. Model układu oddziaływania pomiędzy układami zasilania dwóch sąsiadujących dysz. 1. wypływ gazu na skutek oderwania się pęcherza, 2. dopływ gazu z układu zasilania w gaz, 3. model siły oddziaływania pęcherza na ciecz, 4. tłumienie ruchu cieczy, 5. masa cieczy wprowadzanej w ruch przez pęcherze, 6. oddziaływanie pomiędzy pęcherzami

Siła hamująca ruch pęcherza jest sumą sił: oporu lepkiej cieczy, inercji oraz napięcia powierzchniowego. Dla uproszczenia zapisano ją w postaci:

$$F_t = \Gamma v \quad (27)$$

gdzie: współczynnik Γ opisuje tłumienie przepływu, v jest prędkością środka masy cieczy M .

Ruch środka ciężkości masy M opisano z zastosowaniem drugiej zasady dynamiki Newtona, w postaci:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = F_N - F_t \quad (28)$$

W końcowej fazie wzrostu pęcherza siła oporu cieczy F_d zależy od prędkości cieczy otaczającej pęcherz. Tym samym siły hydrodynamiczne zmieniają wielkość odrywającego się pęcherza (zmiany takie obserwowano w badaniach eksperymentalnych). Przyjęto, że współczynnik A we wzorze (16) jest funkcją położenia masy M (Mosdorf et al., 2010a). Ponieważ pęcherze odrywające się z sąsiedniej dyszy generują dodatkowy przepływ cieczy dlatego współ-

czynnik Γ jest funkcją prędkości masy M . Na Rys. 5 pokazano schemat układu wykorzystanego do modelowania oddziaływania pęcherzy wydostających się z sąsiednich dysz.

Układ równań opisujący ruch pęcherzy ma postać (29). Występujące w układzie równań (29) stałe dobrano w taki sposób aby $M = 0.002$ g (masa kulki wypełnionej wodą o średnicy 1.4 mm) wykonywała ruch w pionie odbywający się w zakresie 3 mm. Współczynnik $\kappa = K/M = 30$, zaś $\gamma = \Gamma/M = 0.004$, strumień $j_g = 3.3 \cdot 10^{-7}$ kg/s.

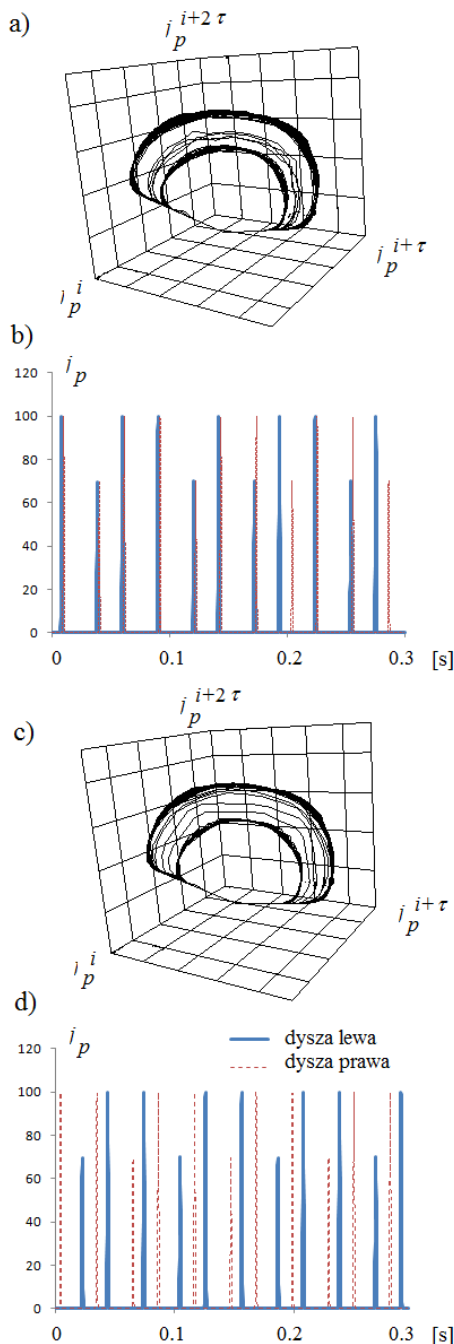
Występująca w układzie siła tłumienia odpowiada sile Stokesa występującej przy ruchu kulki o promieniu 1 mm w wodzie. Siła ugięcia sprężyny przy odkształceniu jednostkowym odpowiada sile napięcia powierzchniowego wody działającego na kulkę o promieniu około 1 mm. Oddziaływanie pomiędzy pęcherzami odrywającymi się z sąsiednich dysz opisano przy pomocy współczynnika γ zmieniającego współczynnik tłumienia Γ . Jego wielkość uzależniono od stałej z , określającej wielkość oddziaływania.

$$\begin{aligned} \frac{dm_{g1}}{dt} &= j_{g1} - j_{p1} \\ j_{g1} &= \text{const} \\ j_{p1} &= \begin{cases} A_1 \cdot \{\sin[\omega(t - t_p) + \pi/2] + 1\} & \text{jeżeli } m_{g1} > 11 \text{ dla } t_p = 0.02s \\ 0 & \text{jeżeli } x_1 > 21 \end{cases} \\ A_1 &= \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } x_1 > 21 \\ 0.15 \cdot x_1 - 2.15 & \text{jeżeli } x_1 < 19 \end{cases} \\ \frac{dx_1}{dt} &= v_1 \\ \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{\kappa}{M} \cdot \text{sign}(x_1 - m_{g1} - \delta) \cdot (x_1 - m_{g1} - \delta)^2 - \frac{(\gamma - \gamma_{o1})}{M} \cdot v_1 \\ \gamma_{o1} &= \begin{cases} z \cdot \cos|x_1 - x_2 + x_g| + 1 & \text{jeżeli } |x_1 - x_2 + x_g| \leq \pi \\ 0 & \text{jeżeli } |x_1 - x_2 + x_g| > \pi \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{dm_{g2}}{dt} &= j_{g2} - j_{p2} \\ j_{g2} &= \text{const} \\ j_{p2} &= \begin{cases} A_2 \cdot \{\sin[\omega(t - t_p) + \pi/2] + 1\} & \text{jeżeli } m_{g2} > 11 \text{ dla } t_p = 0.02s \\ 0 & \text{jeżeli } x_2 > 21 \end{cases} \\ A_2 &= \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } x_2 > 21 \\ 0.15 \cdot x_2 - 2.15 & \text{jeżeli } x_2 < 19 \end{cases} \\ \frac{dx_2}{dt} &= v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{\kappa}{M} \cdot \text{sign}(x_2 - m_{g2} - \delta) \cdot (x_2 - m_{g2} - \delta)^2 - \frac{(\gamma - \gamma_{o2})}{M} \cdot v_2 \\ \gamma_{o2} &= \begin{cases} z \cdot \cos|x_1 - x_2 + x_g| + 1 & \text{jeżeli } |x_1 - x_2 + x_g| \leq \pi \\ 0 & \text{jeżeli } |x_1 - x_2 + x_g| > \pi \end{cases} \end{aligned}$$

Przyjęto, że przy pewnej granicznej pionowej odległości pomiędzy pęcherzami równej x_g na skutek przepływu o strukturze pokazanej na Rys. 4b opór stawiany przez ciecz pęcherzowi zmniejsza się na skutek przepływu cieczy generowanego przez sąsiedni pęcherz. Dlatego przyjęto, że obecność pęcherza wydostającego się z sąsiedniej dyszy w odległości bliskiej x_g zwiększa wartość współczynnika γ , a tym samym zmniejsza siłę oporu opisaną zależnością $(\gamma - \gamma_o) \cdot v / M$. Dla zapewnienia ciągłości funkcji γ przyjęto, że ma postać funkcji $\cos$. Pionową odległość pęcherzy określano poprzez odległość środków masy cieczy M . Układ równań (29) rozwiązano z wykorzystaniem programu SCILAB. Procedura całkująca napisana była w taki sposób, aby całkowanie odbywało się w kolejnych prze-

działach, w których funkcje występujące w układzie równań (29) są ciągłe. Na Rys.6 pokazano przykładowe wyniki obliczeń.



Rys. 6. Wyniki symulacji synchronizacji odrywania się pęcherzy gazowych. a) 3D rekonstrukcja atraktora z szeregu j_p^i , dla $z = 0$, lewa dysza, c) wielkości i ilości odrywających się pęcherzy z dwóch sąsiadujących dysz (kolor szary dysza lewa, kolor czarny dysza prawa) dla $z = 0$, $C = 0.01$ b) 3D rekonstrukcja atraktora z szeregu j_p^i , dla $z = 0.004$, lewa dysza d) wielkości i ilości odrywających się pęcherzy z dwóch sąsiadujących dysz, dla $z = 0.004$, $C = -0.87$

Dla $z = 0$ (brak oddziaływania) uzyskano rozwiązanie, w którym środki ciężkości mas M poruszają się chaotycznie. Tym samym odrywające się z sąsiednich dysz pęcherze są nieskorelowane, co pokazano na Rys.6b. Dla $z = 0.004$ w układzie występuje zjawisko synchronizacji pomiędzy

dwoma podukładami. Pęcherze odrywają się na przemian z dwu sąsiednich dysz, co pokazano na Rys. 6d. Przedziały czasu, w których występuje synchronizacja przerywane są przedziałami czasu, w których odrywające się pęcherze nie są skorelowane. Zjawisko to obserwowane było w badaniach eksperymentalnych, których wyniki pokazano na Rys. 2. Na Rys. 6a,c pokazano 3D rekonstrukcje atraktorów uzyskane z szeregu j_p dla jednego z podukładów.

5. PODSUMOWANIE

Przedstawione w pracy wyniki badań eksperymentalnych pokazały, że gdy odległość pomiędzy dyszami jest wystarczająco mała (4 mm) wówczas dochodzi do synchronizacji odrywania się pęcherzy z dwóch sąsiadujących dysz. W tym przypadku pęcherze odrywają się z dysz na przemian. W celu wyjaśnienia mechanizmu synchronizacji w pracy przedstawiono wyniki symulacji wykonane z zastosowaniem dwóch modeli.

Pierwszy model (wykonany w programie COMSOL Multiphysics) ma charakter ilościowy i pozwolił na obserwację zmian przepływu cieczy przemieszczającej się pomiędzy pęcherzami. Obserwowano mechanizm przyciągania się pęcherzy. W tym przypadku tworzyły się linie prądu łączące sąsiadujące pęcherze (Rys.4b) – pęcherze przyciągały się, ponieważ pęcherz umieszczony niżej przemieszczał się w przepływie cieczy tworzoną przez pęcherz znajdujący się wyżej.

Do modelowania oddziaływania pęcherzy w długich przedziałach czasu zastosowano model oparty na analizie zmian ilości powietrza w układzie zasilania dysz. Wyniki modelu pozwoliły na symulację synchronizacji odrywających się pęcherzy gazowych.

Uzyskane wyniki pokazały, że synchronizacja pomiędzy chaotycznie odrywającymi się z dwóch sąsiednich dysz pęcherzami może następować na skutek ich hydrodynamicznego oddziaływania. Zaproponowany w pracy mechanizm modelowania oddziaływania pomiędzy pęcherzami pozwala stwierdzić, że: pęcherze odrywają się naprzemian ponieważ taka struktura przepływu minimalizuje opór cieczy stawiany przepływowi pęcherzy.

LITERATURA

1. **Berthelsen P. A.** (2002), *Short Introduction to the Level Set Method and Incompressible Two-Phase Flow, A Computational Approach* http://www.petronics.ntnu.no/publications/berthelsen/berthelsen_report2002.pdf
2. **Clift R., Grace J.R., Weber M.E.** (1978), *Bubbles, Drops and Particles*, Academic Press, New York.
3. **COMSOL Multiphysics**, *Rising Bubble Modeled with the Level Set Method*, <http://www.comsol.com/showroom/gallery/177.php?highlight=bubble>
4. **Davidson J.F., Schüler B.O.G.** (1960), Bubble formation at an orifice in an inviscid liquid, *Trans. Instn. Chem. Engrs*, 38, 335-345.
5. **Davidson L., Amick E.** (1956), Formation of gas bubbles at horizontal orifices, *AIChE J.*, 2, 337-342.
6. **Hughes R.R., et al.**, (1955), The formation of bubbles at simple orifices, *Chem. Engng Progr.*, 51, 557-563.

7. **Kyriakides N.K., Kastrinakis E.G., Nychas S.G.** (1997), Bubbling from nozzles submerged in water: transitions between bubbling regimes, *Canadian J. Chemical Engng*, 75, 684-691.
8. **Luewisutthichat W., Tsutsumi A., Yoshida K.** (1997), Chaotic hydrodynamics of continuous single-bubble flow systems, *Chemical Engineering Science*, Vol. 52, No. 21-22, 3685-3691
9. **Martin P.A.** (1998). On the added mass of rippled discs, *Journal of Engineering Mathematics*, 33, 421-435.
10. **McCann D.J., Prince R.G.H.** (1971), Regimes of bubbling at a submerged orifice, *Chemical Engng Sc.*, 26, 1505-1512.
11. **Mosdorf R., Shoji M.** (2003), Chaos in bubbling - nonlinear analysis and modelling, *Chemical Engineering Science*, Vol. 58, 3837-3846.
12. **Mosdorf R., Wyszowski T.** (2010a), Odrywanie się pęcherzy gazowych od krawędzi dysz badanie eksperymentalne i modelowanie, *Acta Mechanica et Automatica*, Vol. 4, no.1, 72-79.
13. **Mosdorf R., Wyszowski T.** (2010b), Modelowanie synchronizacji odrywania się pęcherzy gazowych z dwóch sąsiadujących cylindrycznych dysz, *Modelowanie Inżynierskie*, nr 40, 9, 179-186.
14. **Nagrath S., Jansen K. E., Lahey R. T., Akhatov I.** (2006), Hydrodynamic simulation of air bubble implosion using a level set approach, *Journal of Computational Physics*, Vol. 215, Issue 1, 98-132
15. **Nguyen K., et al.**, (1996), Spatio-temporal dynamics in a train of rising bubbles, *The Chemical Engng J.*, 65191-197.
16. **Oguz H. N., Prosperetti A.** (1993), Dynamics of bubble growth and detachment from a needle, *J. Fluid Mech.*, Vol. 257, 111-145.
17. **Peebles F.N., Garber H.J.** (1953), Studies on the motion of gas bubbles in liquids, *Chem. Engng Progr.*, 49, 88-97.
18. **Ramakrishnan S., Kumar R., Kuloor N.R.** (1969), Studies in bubble formation-I: Bubble formation under constant flow conditions, *Chemical Engng Sc.*, 24, 731-747.
19. **Raymond F., Rosant J.M.** (2000), A numerical and experimental study of the terminal velocity and shape bubbles in viscous liquids, *Chemical Engng Sc.*, 55, 943-955.
20. **Ruzicka M.C., et al.**, (1997), Intermittent transition from bubbling to jetting regime in gas-liquid two phase flows., *Int. J. Multiphase Flow*, 23, 671-682.
21. **Sanada T., Watanabe M., Fukano T., Kariyasaki A.** (2005), Behavior of a single coherent gas bubble chain and surrounding liquid jet flow structure, *Chemical Engineering Science*, Vol. 60, No. 17, 4886-4900.
22. **Smolianski A.** (2005), Finite-element/level-set/operator-splitting (FELSOS) approach for computing two-fluid unsteady flows with free moving interfaces, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 48, Issue 3, 231-269.
23. **Tritton D.J., Egde C.** (1993), Chaotic bubbling, *Phys. Fluids A*, 5, 503-505.
24. **Tufaile A., Sartorelli J.C.** (2000a), Hénon-like attractor in air bubble formation, *Physics Letters A*, 275, 211-217.
25. **Tufaile A., Sartorelli J.C.** (2000b), Chaotic behavior in bubble formation dynamics, *Physica A*, 275, 336-346.
26. **Tufaile A., Sartorelli J.C.** (2001), The circle map dynamics in air bubble formation, *Physics Letters A*, 287, 74-80.
27. **Vazquez A., Manasseh R., Sánchez R.M., Metcalfe G.** (2008), Experimental comparison between acoustic and pressure signals from a bubbling flow, *Chemical Engineering Science*, 63, 5860-5869.
28. **Zhang L., Shoji M.** (2001), Aperiodic Bubble Formation from a Submerged Orifice. *Chemical Engineering and Science*, Vol. 56, No.18, 5371-5381.

MODELLING OF SYNCHRONIZATION OF AIR BUBBLES DEPARTING FROM TWO NEIGHBOURING NOZZLES

Abstract: Results of experimental investigation of interaction between bubble columns generated from two nozzles have been presented. The synchronization between departing bubbles has been observed for distance between nozzles equal to 5mm and bubble departure frequency equal to 30 Hz. The analysis of liquid flow regime between interacting bubbles has been made using the COMSOL Multiphysics program. The gas-liquid interface movement has been described using the level set method. The bubble departures from neighboring nozzles in the long period of time have been modeled using the set of ODE describing the changes of mass of gas in the gas supplying system. During the simulation, similarly to the experiment, the correlation between behaviors of two interacting chaotic systems has been observed.

Praca finansowana w ramach grantu: Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego, N N503 138936

ENERGETYCZNE ZAGADNIENIA PRACY ŁOŻYSKOWAŃ IGIEŁKOWYCH

Jerzy NACHIMOWICZ*, Robert KOR BUT*

*Katedra Budowy i Eksploatacji Maszyn, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka,
ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

nachim@pb.edu.pl, robert.korbut@gmail.com

Streszczenie: W pracy przedstawiono analizę równania zużycia w ujęciu energetycznym na przykładzie łożyskowania igiełkowego wału głównego skrzyni biegów ciągnika rolniczego. Przeanalizowano wpływ zewnętrznych oddziaływań na charakter zużycia w funkcji czasu w węzle tarciovym. Właściwości, którymi charakteryzują się zdeformowane obszary powierzchni tarcia mają zasadniczy wpływ na trwałość elementów pary tarcia. Konieczny jest prawidłowy wybór materiałów na elementy tarciove, charakteryzujące się strukturą o największej odporności na pękanie pod wpływem eksploatacyjnych oddziaływań zewnętrznych. Oznacza to, że materiałoznawstwo tribotechniki powinno być rozpatrywane na bazie analizy mikrostruktur.

1. WSTĘP

Genezą konstrukcji łożysk tocznych był powszechny pogląd, że straty tarcia przy toczeniu są nieporównywalnie mniejsze niż przy ślizganiu. Niemniej jednak istnieją one podczas tarcia tocznego i ślizgowego, a powodowane są przez różne niżej wymienione źródła:

- histerezę odkształceń,
- tarcie wewnętrzne w środku smarującym,
- poślizg i mikropoślizg wywołany odkształceniami, geometrią styku, ruchem spowodowanym momentem giroskopowym,
- poślizg między koszykiem a częściami tocznymi i pierścieniem,
- poślizg w uszczelnieniach.

W rzeczywistych warunkach ciał odkształcalnych zjawisko czystego toczenia występuje w przypadku, gdy obydwie współpracujące części mają taką samą średnicę, długość, właściwości materiału oraz równoległe osie obrotu. Także chropowatości powierzchni powinny być możliwie małe. W tych warunkach przy braku środka smarnego występują jedynie straty histerezy odkształceń. Wynika to z faktu, że różnica długości łuku styku i odpowiadających mu łuków przed odkształceniem jest jednakowa dla obu ciał. Wskutek tego w strefie odkształceń nie występuje wzajemne ślizganie się powierzchni.

Jeśli krzywizny współpracujących powierzchni są różne, przy sprężystym ugięciu długość łuku styku obu ciał jest jednakowa, podczas gdy przed ugięciem była ona różna. W rezultacie w strefie styku odkształceniom towarzyszy mikropoślizg, jeżeli jednak prędkości obrotu współpracujących powierzchni są jednakowe, wzajemny ich ruch jest nazywany toczeniem.

Przykładem klasycznym, gdy przy toczeniu się dwóch ciał ich prędkości obrotowe są różne, występuje toczenie z poślizgiem, ta właśnie sytuacja jest przedmiotem badań, a celem będzie ustalenie udziału tarcia poślizgu w ogólnym bilansie oporów ruchu.

2. ENERGETYCZNA TEORIA TARCIA I ZUŻYCIA

Równanie zużycia, przedstawione w postaci energetycznej opisuje realne procesy, przebiegające przy różnych zewnętrznych oddziaływaniach na materiały, prowadzących do ich zniszczenia i tworzenia produktów zużycia. Wyściowa postać energetycznego podejścia do procesów zużycia się przedstawia się następująco:

$$E_{y\partial} = A_{wn} / V, \quad (1)$$

gdzie: $E_{y\partial}$ – energia właściwa zużywającego się materiału o objętości V w chwili powstania produktów zużycia, A_{wn} – praca sił zewnętrznych, działających na objętość w ciągu okresu czasu t lub przy liczbie N cykli (uderzeń) obciążenia.

Wiadomo, że

$$A_{wn} = A_i N = A_i \omega t, \quad (2)$$

gdzie: A_i – zewnętrzna praca przy pojedynczym obciążeniu objętości V , ω – częstość obciążenia.

Z relacji (1) i (2) wynika równanie zużycia się wnaśtępującej postaci:

$$V = \frac{A_i}{E_{y\partial}} \omega t, \quad (3)$$

Wyrażenie (3) opisuje zużycie, kiedy produkty zużycia powstają równomiernie w czasie, tj. zużycie liniowe.

Dla nieliniowego zużycia:

$$V = \frac{A_i}{E_{y\partial}} f(\omega t), \quad (4)$$

gdzie: funkcja $f(\omega t)$ może być przedstawiona (oprócz liniowej) jako potęgowa, wykładnicza, logarytmiczna i inną zależnością.

Przy dynamicznym charakterze obciążenia (uderzeniowym, hydrościernym, kawitacyjnym zużyciu) wyrażenie (4) powinno uwzględniać prędkość uderzenia:

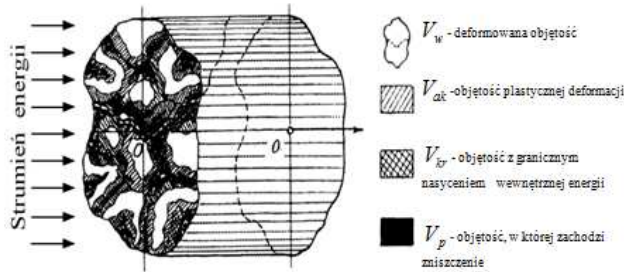
$$V = \frac{A_i \vartheta_i}{E_{y\partial} \vartheta_{kr}} f(\alpha t), \quad (5)$$

gdzie: ϑ_i – średnia wartość prędkości obciążenia uderowego, ϑ_{kr} – krytyczna prędkość uderzenia, powodująca zniszczenie zużywanego materiału, $A_i \vartheta_i$ – strumień energii, wprowadzony do materiału przy oddzielnym uderzeniu, $E_{y\partial} \vartheta_{kr}$ – krytyczna gęstość strumienia energii odkształcenia – krytyczna gęstość mocy odkształcenia.

Oznaczając $A_i \vartheta_i = w_i$ i $E_{y\partial} \vartheta_{kr} = W_{kr}^*$, zapiszemy

$$V = \frac{w_i}{W_{kr}^*} f(\alpha t). \quad (6)$$

Licznik i mianownik tego równania upraszcza się po uwzględnieniu osobliwości konkretnego typu zużywania się. Strumień energii zewnętrznej w_i powinien być wyrażony przez siłę tarcia przy tarcu zewnętrznym. Model rozdziału energii plastycznej deformacji przedstawia Rys. 1.



Rys. 1. Schemat rozdziału strumienia energii w deformowanej objętości

Kryterium odporności na zużycie W_{kr}^* powinno uwzględniać właściwości materiałów (mechaniczne, fizyczne, chemiczne i inne), mające wpływ na zniszczenie w konkretnych warunkach zewnętrznego oddziaływania. Konkretna wartość W_{kr}^* zależy od charakteru obciążenia zewnętrznego i przyjmuje wartości uśrednione w zużytej objętości (* – oznaczenie uśrednienia).

Przedstawiając ϑ_{kr} w postaci sumy składowych sprężystej i plastycznej deformacji, odpowiednio ϑ_{kr}^{spr} i ϑ_{kr}^{pl} , otrzymamy:

$$W_{kr}^* = \frac{1}{3} E_{y\partial}^* \vartheta_{kr} = \frac{1}{3} E_{y\partial}^* (\vartheta_{kr}^{spr} + \vartheta_{kr}^{pl}). \quad (7)$$

Właściwą energię odkształceń $E_{y\partial}^*$, nieodwracalnie pochłoniętą przez materiał w chwili powstawania produktów zużycia, można wyznaczyć przykładowo wg wykresu wytrzymałości lub twardości jako pole powierzchni pod krzywą $\sigma(e_i)$ lub $H(e_i)$, ograniczoną z prawej strony deformacją zniszczenia e_p , wyznaczoną w konkretnych warunkach zużywania się, metodą pomiaru mikrotwardości bezpośredniego na zużytej powierzchni materiału.

Składowa sprężysta ϑ_{kr}^{spr} w wyrażeniu (7) określa się prędkością fali sprężystej deformacji c_0 i sprężystej deformacji e_{spr}

$$\vartheta_{kr}^{spr} = c_0 e_{spr} = \sqrt{\frac{E}{\rho_M}} e_{spr}^2, \quad (8)$$

gdzie: E – moduł sprężystości, ρ_M – gęstość zużywającego się materiału. Składowa plastyczna ϑ_{kr}^{pl} w (7) zależy od prędkości fali deformacji plastycznej c_{pl} i skumulowanej przy zużywaniu się sumarycznej deformacji plastycznej.

$$\vartheta_{kr}^{pl} = \int_{e_{spr}}^{e_p} c_{pl} de = \int_{e_{spr}}^{e_p} \left(\frac{d\sigma/de}{\rho_M} \right)^{0.5} de, \quad (9)$$

gdzie: $d\sigma/de$ – lokalne nachylenie stycznej do krzywej rozciągania (ściskania), sporządzonej we współrzędnych na-prężenie – odkształcenie ($\sigma - e$).

Wyrażając prawe strony wzorów (8) i (9) jako energię kruchego E_{kr} i plastycznego E_{pl} zniszczenia, otrzymamy

$$\vartheta_{kr} = \sqrt{\frac{2E_{kr}}{\rho_M}} + \sqrt{\frac{2E_{pl}}{\rho_M}}, \quad (10)$$

gdzie: $E_{kr} = \sigma_b^2/2E$, $E_{pl} = (\sigma_b - \sigma_T)^2/2D$, σ_b , σ_T – wytrzymałość materiału i granica plastyczności, D – moduł umocnienia (tg kąta nachylenia stycznej do krzywej $\sigma(e)$ w zakresie deformacji plastycznych, przy liniowym charakterze deformacyjnego umocnienia materiału). Krytyczna prędkość uderzenia, związana z osobliwościami rozprzestrzeniania w materiałach zużywających się, sprężystych i plastycznych fal deformacji, charakteryzuje odporność na zużycie materiałów przy dynamicznym wysoko prędkościowym obciążeniu i może być wyrażona przez wytrzymałościowe charakterystyki zużywających się objętości, tak to następujące z wyrażen (8) – (10).

Analiza danych doświadczalnych pokazuje, że w warunkach rozciągania przy uderzeniu (uderzenie w powierzchnię czołową pręta) między ϑ_{kr} i σ_b istnieje zależność potęgowa

$$\vartheta_{kr} = \text{const} \sigma_b^n, \quad (11)$$

gdzie: $n = 2.5$ dla stali z $\sigma_b \leq 500$ MPa, const. – stała wyznaczona doświadczalnie, uwzględniająca konkretne warunki eksperymentu, lub współczynnik proporcjonalności między rozpatrywanymi charakterystykami.

Uwzględniając (11) kryterium odporności na zużycie dla stopów na osnowie żelaza z $\sigma_b \geq 500$ MPa okaże się proporcjonalnym ϑ_{kr} i σ_b do sześciannu.

$$W_{kr}^* \approx \text{const} \vartheta_{kr}^3 \approx \text{const} \sigma_b^3 \quad (12)$$

Poszczególne zależności (12) przedstawiają znaczące praktyczne zainteresowania z punktu widzenia prognozowania zużycia materiałów i powłok. Podstawiając wyrażenie (10) do równania (7) otrzymamy:

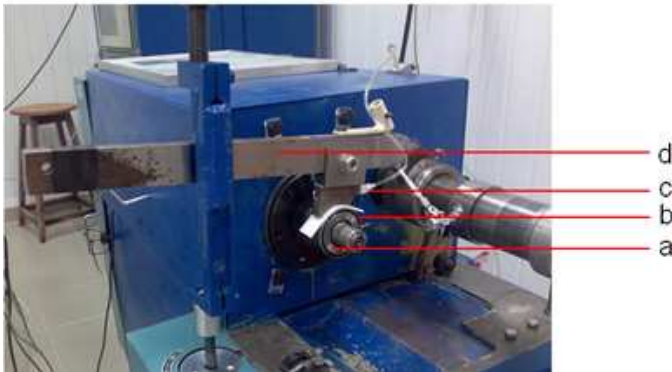
$$W_{kr}^* = \frac{1}{3} E_{y\partial}^* \left(\sqrt{\frac{2E_{kr}}{\rho_M}} + \sqrt{\frac{2E_{pl}}{\rho_M}} \right). \quad (13)$$

W tym wyrażeniu ogólna energochłonność materiału $E_{y\partial}^*$ i jej składowe E_{kr} i E_{pl} można wyznaczyć według wykresu mikrotwardości (wytrzymałości). Jeżeli wymienione wykresy twardości lub wytrzymałości nie są możliwe do wyznaczenia, to ocena odporności na zużycie materiałów przy uderowym zewnętrznym działaniu jest możliwa w wyniku przeprowadzenia analogii do kryterium W_{kr}^* . Przy tym obserwuje się w tym stanie, że przy obniżeniu

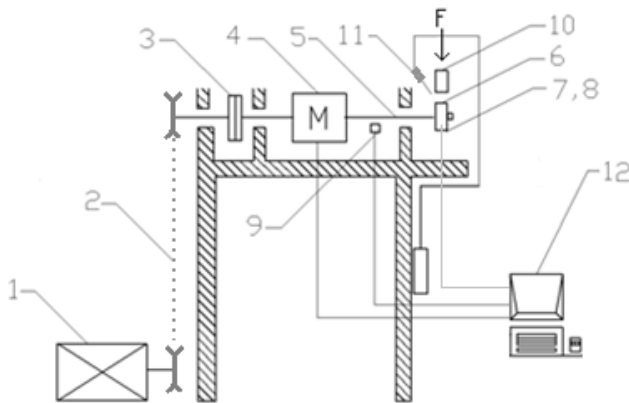
sztywnego uderzeniowego obciążenia i zbliżeniu warunków zewnętrznego (siłowego) oddziaływania do statycznych, kryterium W_{kr}^* będzie przyjmować bardzo proste postacie. Na przykład może wyrażać się obniżaniem wskaźnika w potęgę przy σ_{kr} i σ_b lub twardości (12) (Nachimowicz i Kaczyński, 2003; Nachimowicz, 2004, Nachimowicz i Chulkin, 2002).

3. WYNIKI BADAŃ

Badania były prowadzone na stanowisku badawczym, którego widok przedstawiono na Rys. 2, a jego schemat z aparaturą pomiarową na Rys. 3.



Rys. 2. Stanowisko badawcze – węzeł tarcowy: a – nakładka na czop wału, b – łożysko, c – iglica dozująca środek smarny, d – ramię, przez które przekazywane jest obciążenie



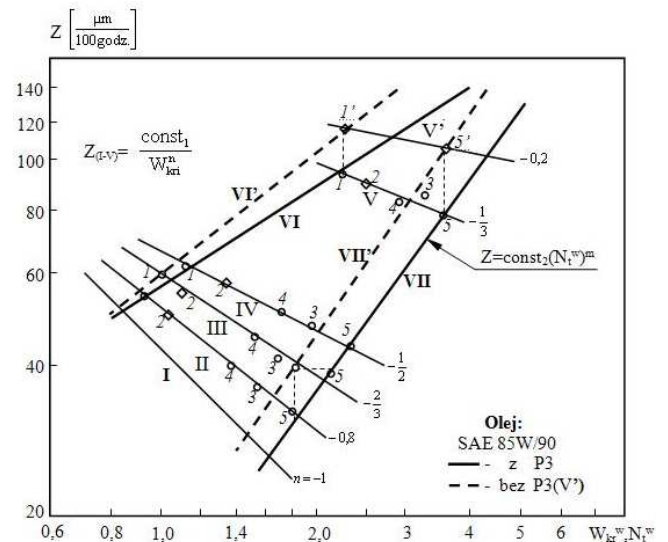
Rys. 3. Schemat stanowiska badawczego: 1 – silnik elektryczny, 2 – przekładnia pasowa, 3 – sprzęgło, 4 – momentomierz, 5 – czop wału o średnicy D , 6 – igielka łożyska o średnicy d , 7 – czujnik obrotów n_2 igielki względem jej osi symetrii, 8 – czujnik obrotów n_3 igielki wokół osi wałka, 9 – czujnik obrotów n_1 wałka, 10 – ramię obciążające próbkę promieniowo, 11 – iglica wprowadzająca środek smarny do układu, 12 – komputer z przetwornikiem do zapisu danych

Stanowisko badawcze (Rys. 3) składa się z silnika elektrycznego (1) o płynnej regulacji prędkości obrotowej w zakresie 0–1500 obr/min połączonego z wałkiem za pomocą przekładni pasowej (2), sprzęgła (3), momentomierza (4) zapewniającego ciągły pomiar momentu tarcia, czujnika obrotów: wałka (9), igielki wokół osi wałka (8) i jej osi

symetrii (7), ramienia (10) zapewniającego zadawanie obciążenia F na łożysko, iglicy wprowadzającej środek smarny do układu (11), oraz komputera z przetwornikiem do zapisu danych (12). Łożysko igielkowe z unieruchomionym pierścieniem zewnętrznym jest osadzone na nakładce zamontowanej na czopie wału i obciążone promieniową siłą F . Silnik i wał połączone są za pomocą przekładni pasowej. Silnik napędza czop wału do określonej prędkości, a następnie czujniki obrotów i momentomierz rejestrują odpowiednio prędkości obrotowe wałka i igielki oraz moment tarcia. Badanie łożysk o zmiennych średnicach wewnętrznych jest możliwe dzięki zastosowaniu wymiennych nakładek o różnej średnicy montowanych na czopie wałka. Nakładki te mogą również służyć do regulacji luzu wyjściowego w węźle tarcowym

Na Rys. 2 przedstawiono zależności wpływu kryterium energetycznego na zużycie czopa wału w funkcji zmiany materiału i parametrów smarnych ośrodka.

Analiza danych doświadczalnych pokazuje, że przy ogólnym kryterium odporności na zużycie materiałów przy zewnętrznym tarcu występuje uśredniona, w zużytych objętościach, krytyczna gęstość mocy tarcia W_{kr}^* .



Rys. 4. Intensywność zużycia czopa wału – kryterium energetyczne: Nt^w – względna gęstość mocy tarcia; W_{kr}^w – względna krytyczna gęstość mocy odkształcenia; czop wału: 1 – 16MnCr5, 2 – 20MoCrS4 + nawęglanie (0,6mm); napawany: 3 – 80G; 4 – 35X5M1,5; 5 – 50X10GC1,5; P3 – dodatek do oleju Acorox 88, naciski powierzchniowe 950MPa, $n=1500 \text{ min}^{-1}$, łożysko igielkowe K40 × 45 × 17

Jeżeli na procesy tworzenia różnorodnego rodzaju wtórnych struktur i produktów zużycia znaczący wpływ mają reakcje chemiczne, powierzchniowo – aktywna substancja i inne czynniki, to ustalenie w tych warunkach dostatecznej niezawodności kryteriów odporności na zużycie okazuje się trudnym problemem, na przykład, przy mało intensywnym utleniającym zużyciu tribopowłóczenia. Kryteriami odporności na zużycie w takich warunkach mogą okazać się: gęstość dyslokacji w cienkiej warstwie powierzchniowej materiału, energia aktywacji reakcji chemicznych i charakterystyki wytrzymałościowe (Nachimowicz i Jałbrzykowski, 2008; Nachimowicz i Pogodaev, 2002).

4. PODSUMOWANIE

Wykaz kryteriów odporności na zużycie materiałów – niezmienniki uniwersalnego kryterium W_{kr}^* (krytyczna gęstość mocy deformacji) świadczy o dużej różnorodności i złożoności procesów powierzchniowego zniszczenia materiałów.

Należy zauważyć, że całokształt właściwości, którymi charakteryzują się zdeformowane obszary materiałów w chwili ich zniszczenia (początek tworzenia produktów zużycia) ukazuje reakcje tych obszarów na zewnętrzne oddziaływanie. Po to, aby skierować te reakcje w żądanym kierunku, w tym przypadku – zapewnić wysoką odporność na ścieranie (długotrwałość) elementów, konieczny jest prawidłowy wybór znanych materiałów lub wytwarzać nowe, charakteryzujące się strukturą o największej odporności na pękanie wywołanych oddziaływaniem zewnętrznymi (eksploatacyjnymi) czynnikami. Oznacza to, że materiałoznawstwo problemów tribotechniki powinno być rozwiązywane na bazie analizy mikrostruktur.

LITERATURA

1. **Nachimowicz J.** (2004,) Tribological characteristics of bearing system of road wheels, *International Conference "Friction 2004". Modelling and simulation of the friction phenomena in the physical and technical systems*. Warsaw University of Technology, 59-63.
2. **Nachimowicz J., Chulkin S.** (2002), The comprehensive approach to problem solving on a heightening of longevity both endurance of materials and elements of machines, *Mechanical Engineering*, Vol. 4, 42-44.
3. **Nachimowicz J., Jalbrzykowski M.** (2008), Selected energetic aspects of needle bearings work performance, *Machine Dynamics Problems*, Vol. 32, No 1, 73-96.
4. **Nachimowicz J., Kaczynski R.** (2003), On the criteria of the influence of the lubrication medium on the durability of ball bearings, *Mechanical Engineering*, Vol. 12, 49-52.
5. **Nachimowicz J., Pogodaev L.I.** (2002), *Modelirovanie processa iznašivaniya i prognozirovanie dolgovečnosti opor kačeniya*, Izd. SPBG TU, s.129 Sankt-Peterburg.

ENERGETIC ASPECTS OF NEEDLE BEARINGS WORK PERFORMANCE

Abstract: The paper presents the analysis of wear equation in energetic approach exemplified by a needle bearing of tractors third motion shaft. The authors analysed the influence of external factors on the type of wear in the function of time in frictional contact. Properties which are typical of deformed sections of friction surface have essential influence on the durability of the elements of friction couple. It is crucial to make the right choice of materials for friction elements which ought to have structure of the largest resistance to cracking as a result of external exploitation influences. This means that the material science of tribotechnology should be considered on the basis of micro-structure analyses.

WPLYW ZMIENNYCH WŁASNOŚCI CZYNNIKA ROBOCZEGO NA PARAMETRY KLASYCZNYCH OBIEGÓW OTTO, DIESLA I SABATHEGO

Grzegorz PUŁAWSKI*

*Zakład Techniki Ciepłnej i Chłodnictwa, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka,
ul. Wiejska 45C 15-351 Białystok

gpulawski@gmail.com

Streszczenie: W artykule przedstawiono wpływ zmiennych właściwości czynnika roboczego na parametry w charakterystycznych punktach klasycznych obiegów silników tłokowych wewnętrznego spalania takich jak Otto, Diesel i Sabathe oraz na sprawność konwersji energii wyznaczaną z zastosowaniem tych obiegów. Wyniki analiz przedstawiono w postaci tabel i wykresów obrazujących zmiany parametrów obiegu wskutek zmienności ciepła właściwego czynnika roboczego.

1. WPROWADZENIE

Rzeczywiste obiegi przedstawiane są na wykresach indykatorowych w układzie współrzędnych p-V. W celu analitycznego badania procesów konwersji w obiegach, wykresy indykatorowe zostają przybliżone obiegami porównawczymi, złożonymi jedynie z termodynamicznych przemian odwracalnych. Obiegi takie zachowują sekwencję przemian cyklu oraz przybliżają ich drogę relatywnie prostymi formułami.

Szereg opracowań dotyczących analizy obiegów porównawczych (Rychter i Teodorczyk, 2006; Szargut, 1998, 2000) zawiera założenie, iż czynnik roboczy obiegu posiada stałe właściwości, co przy znacznych różnicach temperatur w trakcie cyklu powoduje, że pozyskiwane wyniki znacznie odbiegają od rzeczywistych wartości. Jest to spowodowane tym, iż w warunkach rzeczywistych czynnik roboczy zmienia swe właściwości wraz ze zmianą temperatury. Zatem różnicę między obiegami porównawczymi a rzeczywistymi można zmniejszyć poprzez wprowadzenie zmienności wartości ciepła właściwego od temperatury. Analiza obiegów porównawczych z uwzględnieniem wpływu zmienności ciepła właściwego podejmowane były kilkakrotnie przez badaczy (Ge i inni, 2005; Al-Sarkhi i inni, 2006; Chen i inni, 2006). Autorzy prezentowali wyniki uwzględniające wpływ zmiennych właściwości na parametry badanych obiegów, natomiast nie skonfrontowali otrzymanych wyników z wykresami dla obiegów ze stałymi właściwościami. Dlatego też w niniejszym artykule analizie poddane zostaną zarówno parametry obiegów ze stałymi właściwościami, jak również ze zmiennymi właściwościami czynnika roboczego w celu określenia wpływu tego założenia na wyniki analiz. W tym celu stworzono modele matematyczne obiegów ze stałymi i zmiennymi właściwościami czynnika oraz przeprowadzono analizę każdego z nich, a wyniki zestawiono na wspólnych wykresach obrazujących różnice między obydwoma obiegami.

2. ANALIZA OBIEGÓW ZE STAŁYMI WŁAŚCIWOŚCIAMI CZYNNIKA ROBOCZEGO

Jako bazę odniesienia do oceny wpływu zmiennych właściwości czynnika roboczego w artykule najpierw przedstawiono obiegi o stałych właściwościach. W obiegach tych powietrze bezustannie porusza się w układzie zamkniętym i zachowuje się jak gaz doskonały. Wszystkie procesy tworzące cykl są wewnętrznymi odwracalnymi. Proces spalania zastąpiony jest przez dostarczenie ciepła z zewnętrznego źródła. Proces wymiany ładunku zastąpiony jest procesem odprowadzenia ciepła, po którym czynnik powraca do stanu początkowego.

Czynnik roboczy posiada stałe ciepło właściwe, zatem wartości przyjmowane są dla powietrza suchego w temperaturze $T=300K$ oraz ciśnieniu $P=95kPa$, zgodnie z 0.

Tab. 1. Parametry obiegów ze stałymi właściwościami

c_v [kJ/kg·K]	c_p [kJ/kg·K]	R [kJ/kg·K]	k [-]
0,718	1,005	0,287	1,4

2.1. Obieg Otto

Obieg Otto to obieg z doprowadzeniem ciepła przy stałej objętości. Składa się z czterech wewnętrznie odwracalnych procesów: izentropowego sprężania 1-2, izochorycznego doprowadzenia ciepła 2-3, izentropowego rozprężania 3-4, izochorycznego odprowadzenia ciepła 4-1.

Do stworzenia modelu matematycznego obiegu posłużyły zależności (1-6), natomiast parametry obiegu zaprezentowano w 0. W modelu obliczeniowym przyjęto stopień sprężania $\varepsilon=8$ oraz stopień przyrostu ciśnienia $\alpha=2,8$.

W przypadku obiegu Otto ciepło doprowadzone opisuje poniższe równanie:

$$Q_{dop} = c_v(T_3 - T_2) \quad (1)$$

Przyrost entropii na skutek doprowadzonego ciepła:

$$s_3 - s_2 = c_v \ln \frac{T_3}{T_2} + R \ln \frac{V_3}{V_2} \quad (2)$$

Ciepło odprowadzone:

$$Q_{odp} = c_v (T_4 - T_1) \quad (3)$$

Posługując się równaniem izentropy, dla sprężania 1-2 i rozprężania 3-4 można zapisać zależności:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} = \varepsilon_s^{k-1} \quad (4)$$

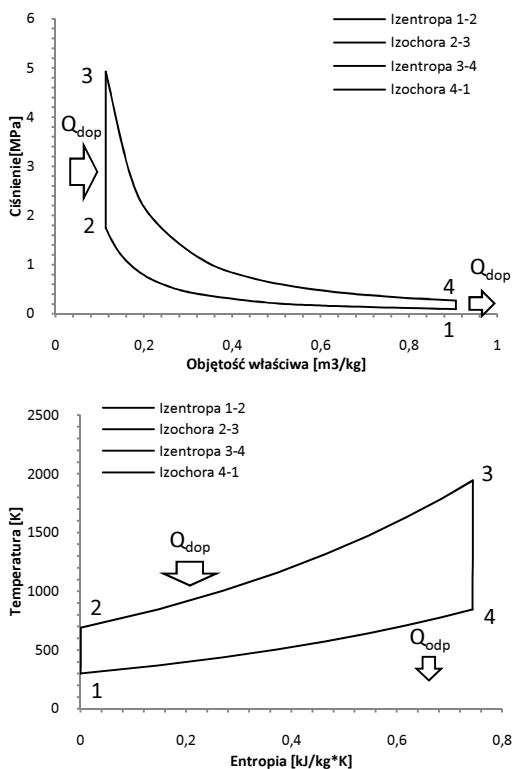
$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_2}\right)^{k-1} = \varepsilon_s^{k-1} \quad (5)$$

Natomiast sprawność opisuje równanie:

$$\eta_t = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\varepsilon_s^{k-1}} \quad (6)$$

Tab. 2. Parametry obiegu Otto ze stałymi właściwościami

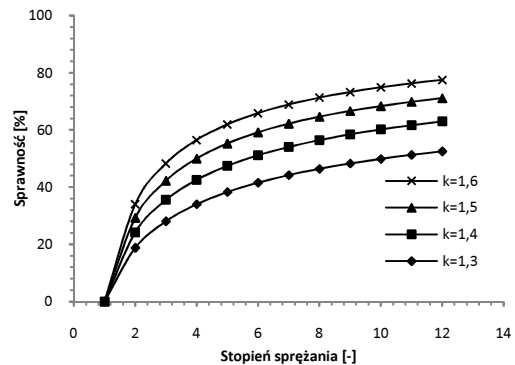
Q_{dop} [kJ/kg]	Q_{odp} [kJ/kg]	L_{otto} [kJ/kg]	η [%]
900,00	391,75	508,25	56,47



Rys. 1. Wykresy p-V i T-s teoretycznego obiegu Otto

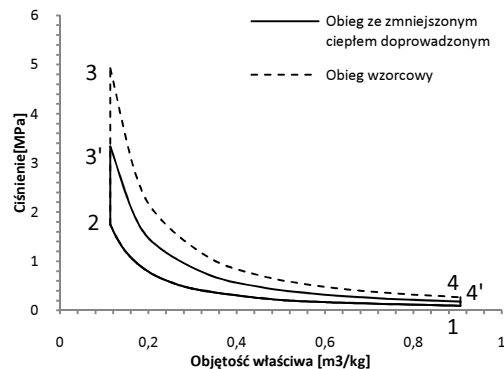
Z powyższego równania wynika, że sprawność teoretyczna obiegu ze stałymi właściwościami czynnika roboczego zależy od stopnia sprężania silnika ε oraz od wartości wykładnika adiabaty k czynnika roboczego, a wzrost sprawności uzyskuje się przez zwiększanie zarówno stopnia sprężania jak i wykładnika adiabaty. O przedstawia wpływ zwiększania stopnia sprężania na sprawność obiegu przy różnych wartościach wykładnika adiabaty. Wartość wykładnika adiabaty 1,4 jest typowa dla powietrza w temperaturze pokojowej. Dla danej wartości stopnia sprężania uży-

cie gazu o wykładniku adiabaty wyższym od 1,4 będzie skutkować wyższą sprawnością.

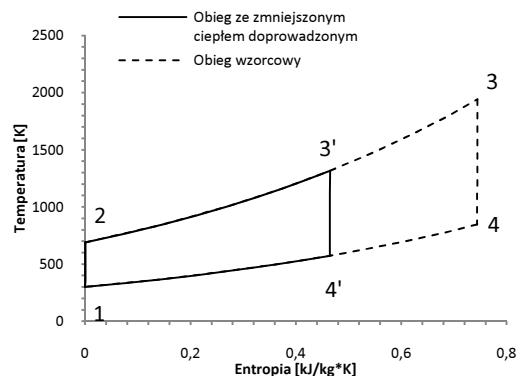


Rys. 2. Wykres sprawności obiegu Otto w funkcji stopnia sprężania i wykładnika adiabaty

Na wykresie możemy również zaobserwować, iż dla niskich wartości stopnia sprężania wykres sprawności ma stromy przebieg, po czym wygładza się i dla wysokich wartości stopnia sprężania wzrost sprawności jest nieznaczny. Dodatkowo w odniesieniu do obiegów rzeczywistych dążenie do zwiększenia stopnia sprężania powoduje zwiększenie podatności paliwa do samozapłonu. Dlatego też maksymalny stopień sprężania, jaki może być wykorzystywany jest ograniczony przez konieczność uniknięcia szkodliwego dla silnika spalania stukowego.



Rys. 3. Wykres p-V obiegu Otto dla obniżonego ciepła doprowadzonego

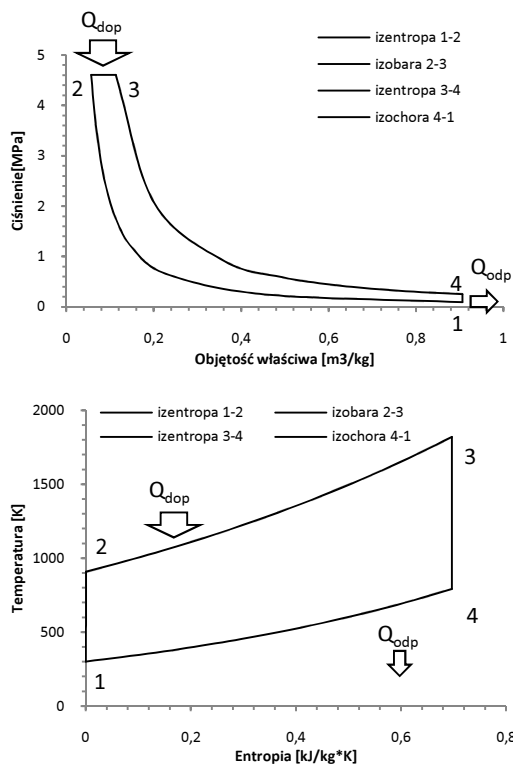


Rys. 4. Wykres T-s obiegu Otto dla obniżonego ciepła doprowadzonego

Ze wzoru (6) wynika również, iż sprawność teoretyczna takiego obiegu nie zależy od ilości doprowadzonego ciepła, czyli od obciążenia silnika odwzorowywanego tym obiegiem. Na 0 i 4 obniżenie doprowadzenia ciepła przedstawia się w postaci obniżonej izentropy rozprężania.

2.2. Obieg Diesla

W odróżnieniu od obiegu Otto stopień sprężania nie jest taki sam jak stopień rozprężania, ponieważ jak widać na 0 sprężanie odbywa się od V_1 , natomiast rozprężanie przy mniejszej objętości V_1-V_3 . Wartości w 0 otrzymano przy założeniu stopnia sprężania $\varepsilon_s=16$ oraz stopnia obciążenia $\phi=2$.



Rys. 5. Wykresy p-V i T-s teoretycznego obiegu Diesla

Tab. 3. Parametry obiegu Diesla

Q_{dop} [kJ/kg]	Q_{odp} [kJ/kg]	L_{diesel} [kJ/kg]	η [%]
900,00	346,96	553,03	61,45

W przypadku obiegu Diesla ciepło doprowadzone opisuje równanie:

$$Q_{dop} = c_p(T_3 - T_2) \quad (7)$$

Przyrost entropii na skutek doprowadzonego ciepła:

$$s_3 - s_2 = c_p \ln \frac{T_3}{T_2} - R \ln \frac{P_3}{P_2} \quad (8)$$

Ciepło odprowadzone:

$$Q_{odp} = c_v(T_4 - T_1) \quad (9)$$

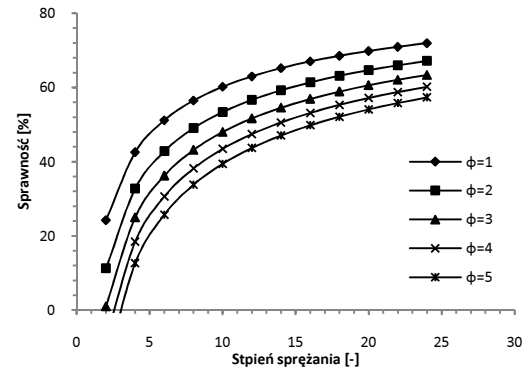
Dla sprężania 1-2 i rozprężania 3-4 można zapisać zależności:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} = \varepsilon_s^{k-1} \quad (10)$$

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{k-1} = \varepsilon_r^{k-1} \quad (11)$$

Zatem sprawność:

$$\eta_t = 1 - \frac{1}{\varepsilon_s^{k-1}} \left[\frac{\phi^k - 1}{k(\phi - 1)} \right] \quad (12)$$



Rys. 6. Wykres sprawności obiegu Diesla w funkcji stopnia sprężania i stopnia obciążenia

Porównując ze sobą wzory na sprawność obiegu Otto i Diesla przy stałych właściwościach czynnika roboczego można dostrzec, iż różnią się jedynie członem w nawiasach w równaniu (12), która zawsze przyjmuje wartości większe od jedności. Wówczas przy założeniu tego samego stopnia sprężania obu obiegów okazuje się, iż sprawność teoretycznego obiegu Otto jest większa niż obiegu Diesla. Aczkolwiek porównanie to jest poprawne jedynie dla obiegów teoretycznych, gdyż dla rzeczywistego obiegu Diesla stosuje się znacznie wyższe stopnie sprężania, dzięki czemu uzyskuje on wyższą sprawność. Dla szczególnego przypadku, kiedy stopień obciążenia ϕ obiegu jest bliski jedności sprawności obiegów są sobie równe. Wraz ze wzrostem stopnia obciążenia sprawność obiegu Diesla zmniejsza się (0).

2.3. Obieg Sabathego

W obiegu Sabathego ciepło doprowadzane jest częściowo przy stałej objętości 2-3, a częściowo przy stałym ciśnieniu 3-4 co obrazuje 0.

Zatem całkowite ciepło doprowadzone jest sumą ciepła doprowadzonego izochorycznie i izobarycznie:

$$Q_{dop} = Q_{v\ dop} + Q_{p\ dop} = c_v(T_3 - T_2) + c_p(T_4 - T_3) \quad (13)$$

Przyrost entropii w procesach 2-3 i 3-4:

$$s_3 - s_2 = c_v \ln \frac{T_3}{T_2} + R \ln \frac{V_3}{V_2} \quad (14)$$

$$s_4 - s_3 = c_p \ln \frac{T_4}{T_3} - R \ln \frac{P_4}{P_3} \quad (15)$$

Ciepło odprowadzone izochorycznie:

$$Q_{odp} = c_v(T_5 - T_1) \quad (16)$$

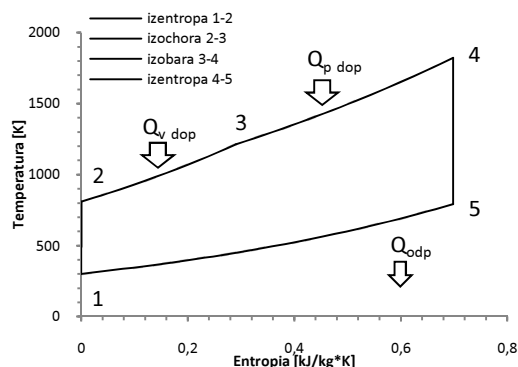
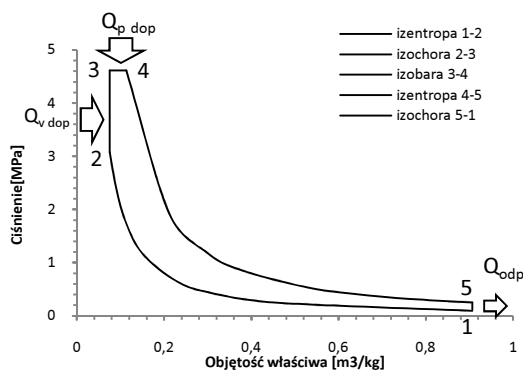
Dla sprężania 1-2 i rozprężania 4-5 można zapisać zależności:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} = \varepsilon_s^{k-1} \quad (17)$$

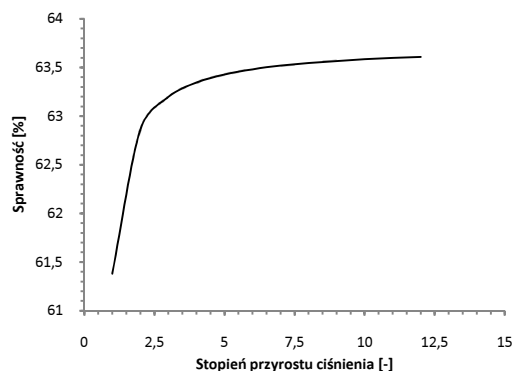
$$\frac{T_4}{T_5} = \left(\frac{V_5}{V_4}\right)^{k-1} = \varepsilon_r^{k-1} \quad (18)$$

Zatem sprawność:

$$\eta_t = 1 - \frac{1}{\varepsilon_s^{k-1}} \left[\frac{\alpha_v \varphi^k - 1}{(\alpha_v - 1) + k \alpha_v (\varphi - 1)} \right] \quad (19)$$



Rys. 7. Wykresy p-V i T-s teoretycznego obiegu Sabathego



Rys. 8. Wykres sprawności obiegu Sabathego w funkcji stopnia przyrostu ciśnienia

Charakter zmian sprawności teoretycznej obiegu w zależności od stopnia przyrostu ciśnienia przedstawia wykres na 0. Przy pomocy parametrów φ i α , odpowiednio zmieniając ich wartości można zmieniać proporcje między ilościami ciepła doprowadzonego izochorycznie i izobarycznie.

Tab. 4. Parametry obiegu Sabathego

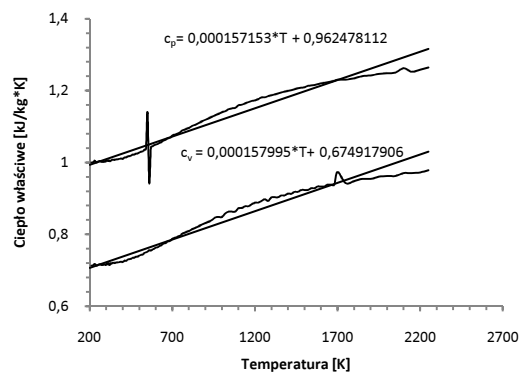
Q_{dop} [kJ/kg]	Q_{odp} [kJ/kg]	$L_{sabathe}$ [kJ/kg]	η [%]
900,00	353,82	546,18	60,69

Zatem przyjmując wartość $\varphi=1$ otrzymuje się wartość sprawności odpowiadającą obiegu Otto, natomiast dla $\alpha=1$ otrzymuje się wartość sprawności odpowiadającą obiegu Diesla.

W modelu obliczeniowym obiegu Sabathego przyjęto stopień sprężania $\varepsilon_s=12$ stopień przyrostu ciśnienia $\alpha=1,5$ oraz stopnia obciążenia $\varphi=1,5$

3. ANALIZA OBIEGÓW ZE ZMIENNYMI WŁAŚCIWOŚCIAMI CZYNNIKA ROBOCZEGO

W przypadku obiegów ze zmiennymi właściwościami czynnika roboczego stosuje się te same założenia, co w cyklach ze stałymi właściwościami za wyjątkiem zastosowania zmiennego ciepła właściwego w funkcji temperatury. Charakter zmian ciepła właściwego od zmiany temperatury przedstawia 0.



Rys. 9. Ciepło właściwe c_p i c_v w funkcji temperatury dla powietrza

Zależność ciepła właściwego od temperatury jest prawie liniowa, dlatego też można przyjąć, że zmienność ciepła właściwego w bardzo bliskim przybliżeniu opisują następujące równania liniowe:

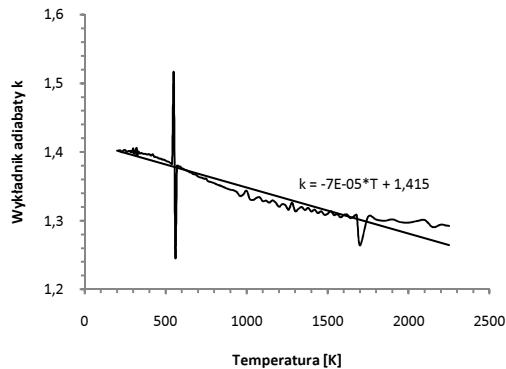
$$c_p = k_1 T + a_p \quad (20)$$

$$c_v = k_1 T + b_v \quad (21)$$

gdzie a_p , b_v , k_1 są stałymi, których wartości widoczne są na 0 w równaniach poszczególnych linii trendu.

Wraz ze zmiennością ciepła właściwego czynnika roboczego od temperatury uzależniony jest również wykładnik

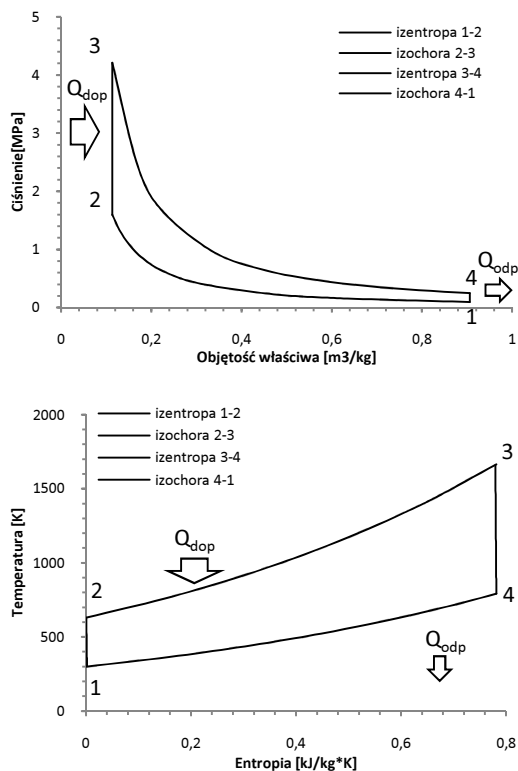
adiabaty k . W przypadku stałych właściwości jego wartość przyjmowana jest, jako 1,4, natomiast przy zmiennych właściwościach czynnika wykładnik adiabaty w zależności od temperatury przyjmuje wartości zgodnie z poniższym wykresem (0).



Rys. 10. Wykładnik adiabaty k w funkcji temperatury dla powietrza suchego

3.1. Obieg Otto

Przebieg poszczególnych procesów w obiegu Otto ze zmiennymi właściwościami prezentuje 0. Obieg posiada ten sam charakter, co jego odpowiednik za stałymi właściwościami, aczkolwiek zależności, które posłużyły do stworzenia modelu w tym przypadku posiadają inną postać (22-25).



Rys. 11. Wykresy p-V i T-s teoretycznego obiegu Otto

Wartości parametrów analogicznie jak w poprzedniej części zaprezentowane są w 0 przy założeniu stopnia sprężania $\varepsilon_s=12$ oraz stopnia przyrostu ciśnienia $\alpha=1,5$.

Tab. 5. Parametry obiegu Otto

Q_{dop} [kJ/kg]	Q_{odp} [kJ/kg]	L_{otto} [kJ/kg]	η [%]
900,00	371,94	528,06	58,67

W przypadku obiegu Otto ze zmiennymi właściwościami czynnika roboczego równanie opisujące ciepło doprowadzone przyjmuje następującą postać całkową:

$$Q_{dop} = \int_{T_2}^{T_3} c_v dT \quad (22)$$

Podobnie przyrost entropii:

$$s_3 - s_2 = \int_{T_2}^{T_3} c_v \frac{dT}{T} + R \ln \frac{V_3}{V_2} \quad (23)$$

Ciepło odprowadzone:

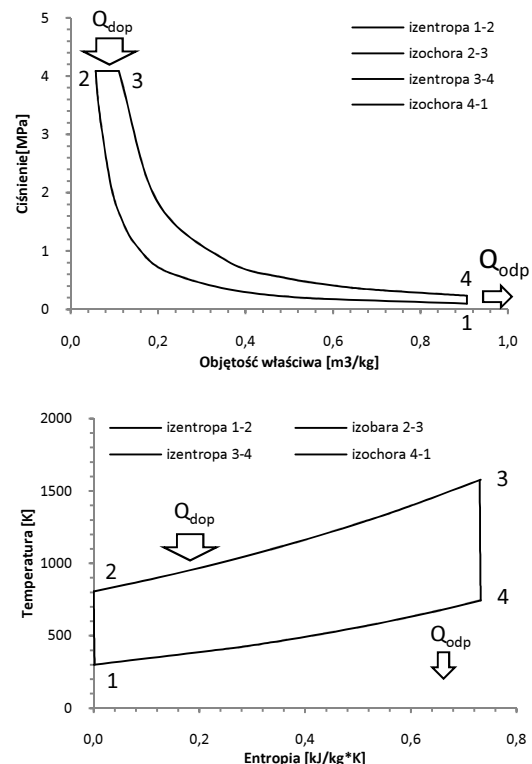
$$Q_{odp} = \int_{T_4}^{T_1} c_v dT \quad (24)$$

Sprawność obiegu:

$$\eta_t = \frac{L_{otto}}{Q_{dop}} = \frac{\int_{T_2}^{T_3} c_v dT - \int_{T_4}^{T_1} c_v dT}{\int_{T_2}^{T_3} c_v dT} \quad (25)$$

3.2. Obieg Diesla

Poniżej przedstawiono przebieg poszczególnych procesów w obiegu Diesla ze zmiennymi właściwościami (0) oraz zależności opisujące model obiegu (26-29).



Rys. 12. Wykresy p-V i T-s teoretycznego obiegu Diesla

W przypadku obiegu Diesla ze zmiennymi właściwościami równanie opisujące ciepło doprowadzone ma postać:

$$Q_{dop} = \int_{T_2}^{T_3} c_p dT \quad (26)$$

Natomiast przyrost entropii przedstawia równanie:

$$s_3 - s_2 = \int_{T_2}^{T_3} c_p \frac{dT}{T} - R \ln \frac{P_3}{P_2} \quad (27)$$

Ciepło odprowadzone:

$$Q_{odp} = \int_{T_4}^{T_1} c_v dT \quad (28)$$

Sprawność obiegu:

$$\eta_t = \frac{L_{diesel}}{Q_{dop}} = \frac{\int_{T_2}^{T_3} c_p dT - \int_{T_4}^{T_1} c_v dT}{\int_{T_2}^{T_3} c_p dT} \quad (29)$$

Tab. 6. Parametry obiegu Diesla

Q_{dop} [kJ/kg]	Q_{odp} [kJ/kg]	L_{diesel} [kJ/kg]	η [%]
900,00	333,81	566,19	62,91

Wartości w 0 otrzymano przy założeniu stopnia sprężania $\varepsilon_s=16$ oraz stopnia obciążenia $\varphi=1,49$. Natomiast w (0) odpowiednio $\varepsilon_s=16$, $\alpha=1,5$, $\varphi=1,49$.

3.3. Obieg Sabathego

Poniżej przedstawiono przebieg poszczególnych procesów w obiegu Sabathego ze zmiennymi właściwościami (0) oraz zależności opisujące model obiegu (30-34).

Tab. 7. Parametry obiegu Sabathego

Q_{dop} [kJ/kg]	Q_{odp} [kJ/kg]	$L_{sabathe}$ [kJ/kg]	η [%]
900,00	339,74	560,21	62,25

W przypadku obiegu Sabathego ze zmiennymi właściwościami równanie opisujące ciepło doprowadzone ma postać:

$$Q_{dop} = Q_{v dop} + Q_{p dop} = \int_{T_2}^{T_3} c_v dT + \int_{T_3}^{T_4} c_p dT \quad (30)$$

Przyrost entropii:

$$s_3 - s_2 = \int_{T_2}^{T_3} c_v \frac{dT}{T} + R \ln \frac{V_3}{V_2} \quad (31)$$

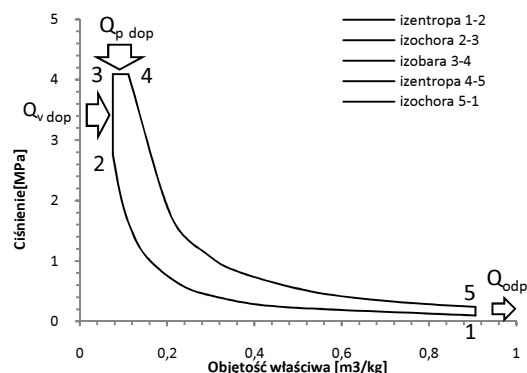
$$s_4 - s_3 = \int_{T_3}^{T_4} c_p \frac{dT}{T} - R \ln \frac{P_4}{P_3} \quad (32)$$

Ciepło odprowadzone:

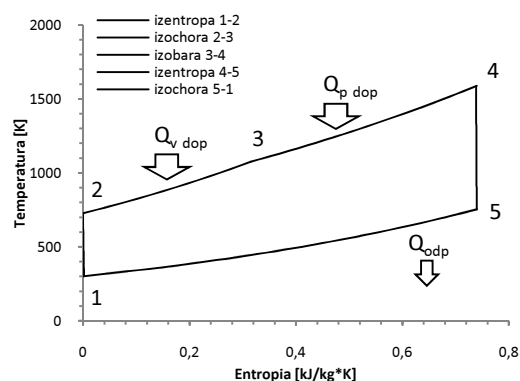
$$Q_{odp} = \int_{T_5}^{T_1} c_v dT \quad (33)$$

Sprawność obiegu:

$$\eta_t = \frac{L_{sabathe}}{Q_{dop}} = \frac{\int_{T_2}^{T_3} c_v dT + \int_{T_3}^{T_4} c_p dT - \int_{T_5}^{T_1} c_v dT}{\int_{T_2}^{T_3} c_v dT + \int_{T_3}^{T_4} c_p dT} \quad (34)$$



Rys. 13. Wykres p-V teoretycznego obiegu Sabathego



Rys. 14. Wykres T-s teoretycznego obiegu Sabathego

4. ZESTAWIENIE

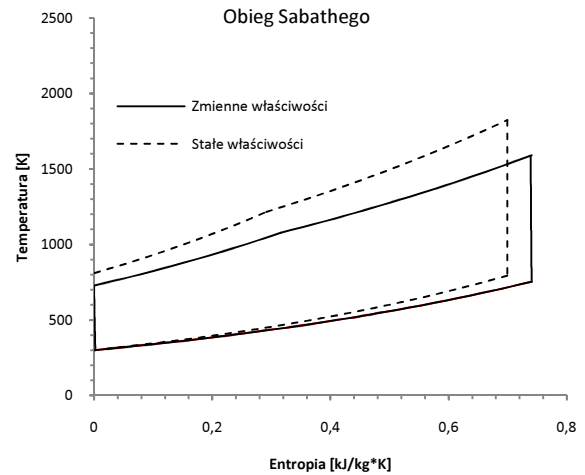
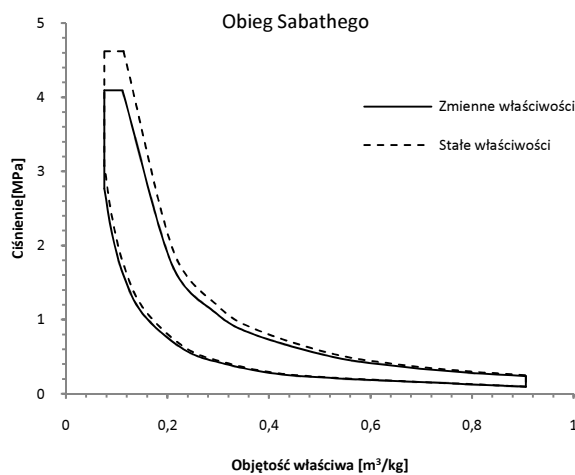
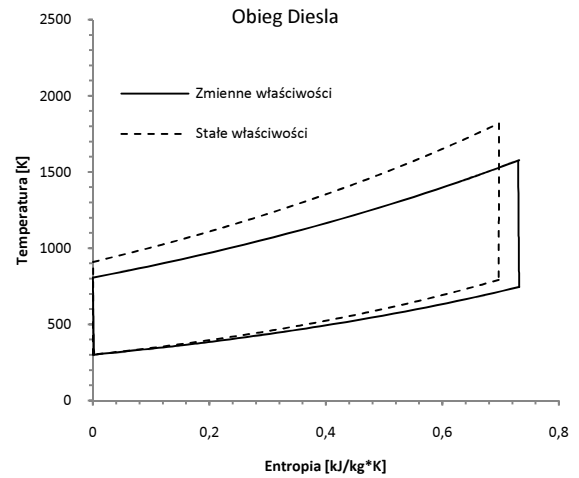
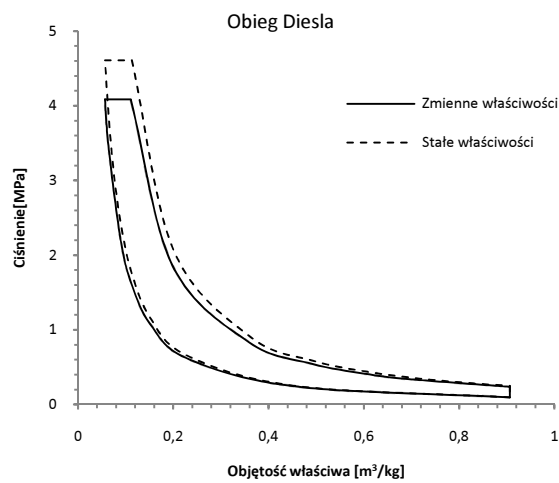
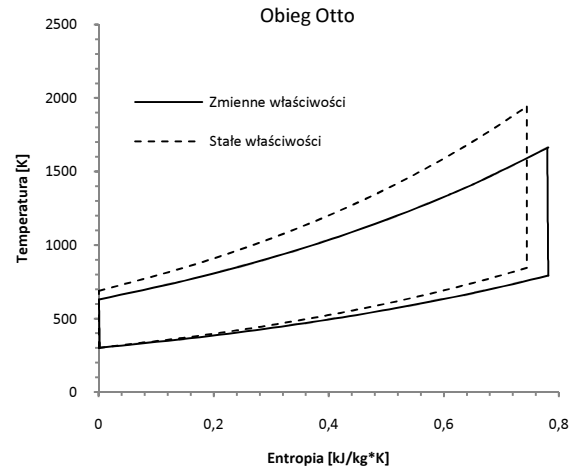
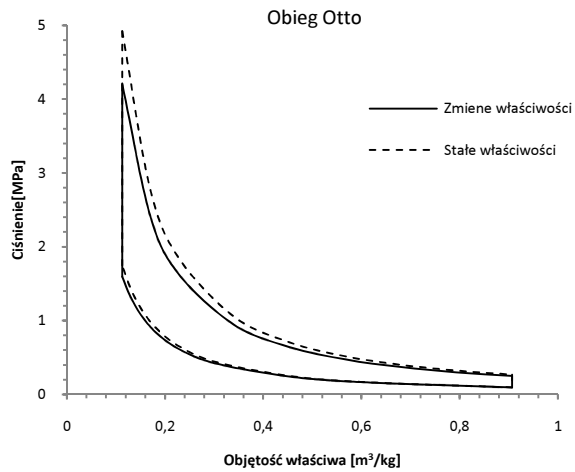
W celu zobrazowania znaczenia zmienności ciepła właściwego na właściwości obiegu posłużą wykresy na 0 oraz 0.

Wykresy przedstawiają przebiegi ciśnienia w funkcji objętości właściwej oraz temperatury w funkcji entropii z wykorzystaniem stałego oraz zmiennego ciepła właściwego czynnika roboczego. Przy czym należy podkreślić, iż w celu porównywania wyników należy przyjąć założenie, że całkowite ciepło doprowadzone do każdego obiegu jest takie samo i wynosi $Q_{dop} = 900$ [kJ/kg] oraz zbliżona jest wartość pracy obiegu $L = 508 \div 566$ [kJ/kg].

Na każdym z poniższych rysunków zauważalne są znaczące różnice między przebiegami ze stałymi i zmiennymi właściwościami czynnika roboczego. Podczas, gdy charakter przebiegu pozostaje ten sam. Widoczne jest, iż wartości zarówno ciśnienia jak i temperatury są znacznie wyższe w przypadku stałego ciepła właściwego. Tendencja ta obecna jest w każdym z obiegów i nasila się wraz ze wzrostem temperatury.

Tab. 8. Wartości odchyłek temperatury w charakterystycznych punktach obiegu Otto, Diesla, Sabathego

Nr. p- ktu	Otto			Diesel			Sabathe		
	Temperatura [K]		Odchyłka [%]	Temperatura [K]		Odchyłka [%]	Temperatura [K]		Odchyłka [%]
	Stałe	Zmienne		Stałe	Zmienne		Stałe	Zmienne	
1	300,00	300,00	0,00	300,00	300,00	0,00	300,00	300,00	0,00
2	689,22	630,13	9,38	909,43	806,32	12,79	810,58	727,89	11,36
3	1942,70	1663,65	16,77	1804,95	1576,47	14,49	1214,48	1076,26	12,84
4	845,61	792,26	6,73	783,24	744,81	5,16	1821,44	1588,51	14,66
5	-	-	-	-	-	-	792,78	752,23	5,39

**Rys. 15.** Zestawienie wykresów p-v i T-s obiegów Otto, Diesla oraz Sabathego ze stałymi i zmiennymi właściwościami czynnika roboczego

Na podstawie danych zamieszczonych w 0 można założyć, iż w niskim zakresie temperatur obliczone wartości różnią się znacznie, a obliczona odchyłka wyników oscyluje w granicy 10%. Natomiast dla temperatur odpowiadających punktowi trzeciemu w obiegu Otto, czyli na końcu izochorycznego doprowadzenia ciepła, gdzie temperatura osiąga wartość maksymalną, różnica między obiegami ze stałymi, a zmiennymi właściwościami czynnika roboczego jest już bardzo znaczna, a odchyłka wyniku ma wartość blisko 17%. Odchyłka wyniku może jeszcze wzrosnąć wraz ze wzrostem przyrostu temperatury względem poziomu odniesienia.

5. WNIOSKI

Obiegi ze stałymi właściwościami czynnika roboczego są poprawne w zakresie niskich przyrostów temperatur. W przypadku dużych różnic obiegi takie wprowadzają znaczący błąd fałszujący otrzymane wartości. Zakres odchylek przedstawiono w 0.

Tab. 9. Wartości odchylek w odniesieniu do sprawności obiegów Otto, Diesla, Sabathego

Typ obiegu	Sprawność [%]		Odchyłka [%]
	Stale	Zmienne	
Otto	56,47	58,67	-3,75
Diesel	61,45	62,91	-2,32
Sabathe	60,69	62,25	-2,51

W przypadku sprawności obiegów otrzymujemy odchyłki od wartości wahające się w granicy $2 \div 4$ %. Jest to różnica na tyle duża, iż ma znaczący wpływ na wyniki analizy, zatem jest na tyle istotna, iż nie powinna być pomijana. Jeżeli więc celem jest uzyskanie wyników najbardziej zbliżonych do wartości rzeczywistych niezbędnym jest uwzględnienie zmiennych wraz z temperaturą wartości ciepła właściwego czynnika roboczego.

Oznaczenia: c_p – ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu [$\text{kJ/kg}\cdot\text{K}$]; c_v – ciepło właściwe przy stałej objętości [$\text{kJ/kg}\cdot\text{K}$]; k – wykładnik adiabaty [-]; L – praca obiegu [kJ/kg]; P – ciśnienie [kPa]; R – stała gazowa czynnika [$\text{kJ/kg}\cdot\text{K}$]; s – entropia [kJ/kgK]; T – temperatura [K]; Q_{dop} – ciepło doprowadzone [kJ/kg]; Q_{odp} – ciepło odprowadzone [kJ/kg]; V – objętość właściwa [m^3/kg]

Znaki greckie: α – stopień przyrostu ciśnienia; φ – stopień obciążenia; ε_s – stopień sprężania; ε_r – stopień rozprężania; η – sprawność

LITERATURA

1. **Abu-Nada E. i inni** (2006), Thermodynamic modeling of spark-ignition engine: Effect of temperature dependent specific heats, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 33, 1264-1272.
2. **Al-Sarkhi A. i inni** (2006), Effects of friction and temperature-dependent specific-heat of the working fluid on the performance of a Diesel-engine, *Applied Energy* 83, 153-165.
3. **Cengel Y. A., Boles M. A.** (2008), *Thermodynamics. An engineering approach*, MHHE, USA.
4. **Chen L. i inni** (2006), Effects of heat transfer, friction and variable specific heats of working fluid on the performance of an irreversible dual cycle, *Energy Conversion and Management* 47, 3224-3234.
5. **Ge Y. i inni** (2005), Thermodynamic simulation of performance of an Otto cycle with heat transfer and variable specific heats of working fluid, *International Journal of Thermal Sciences* 44, 506-511.
6. **Moran M. J., Sharpio H. N.** (2007), *Fundamentals of engineering thermodynamics*, Wiley, USA
7. **Rychter T., Teodorczyk A.** (2006), Teoria silników tłokowych, WKŁ, Warszawa.
8. **Szargut J.** (1998), *Termodynamika*, PWN, Warszawa
9. **Szargut J.** (2000), *Termodynamika techniczna*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.

INFLUENCE OF VARIABLE SPECIFIC HEATS OF WORKING FLUID ON PERFORMANCE OF AIR STANDARD OTTO, DIESEL AND SABATHE CYCLES

Abstract: This paper presents influence of variable specific heats of working fluid on the performance of air standard Otto, Diesel and Sabathe cycles. The mathematic models of air standard cycles with temperature dependent specific heats were made and compared to those which use constant specific heats. The results obtained in this study, presented in tables and charts, show significant variations between the performance of cycles with constant and variable specific heats of working fluid.

WYBRANE ARCHITEKTURY KOGNITYWNE W ROBOTYCE – PORÓWNANIE I ZASTOSOWANIA

Maciej SŁOWIK*, Daniel OŁDZIEJ*

*Katedra Automatyki i Robotyki, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

maciejslowik@gmail.com, danoj@wp.pl

Streszczenie: Autonomiczne roboty mobilne są wykorzystywane w wielu nowych zastosowaniach. Zastosowania te wymagają autonomii trudnej do przewidzenia przez projektanta systemów robotycznych. Stąd też potrzeba zastosowania architektur sterowania zwanych kognitywnymi. Architektury kognitywne mają zaimplementowane mechanizmy, dzięki którym potrafią autonomicznie rozwiązywać nowe problemy oraz uczyć się na podstawie rozwiązań problemów już napotkanych. W artykule omówiono trzy różne architektury kognitywne oraz implementacje dwóch z nich oraz dokonano symulacji.

1. WSTĘP

Współcześnie wymaga się od autonomicznych robotów mobilnych realizacji coraz bardziej złożonych zadań w złożonych środowiskach. Zwykle algorytmy działania oparte na planowaniu oraz interakcji danych z sensorów z elementami wykonawczymi są w wielu wypadkach niewystarczające. Ponadto w złożonych, nieznanych środowiskach, w których wymagamy interakcji z otoczeniem, nie sposób przewidzieć i zaplanować odgórnie, reakcji robota na zdarzenia, które będą wymagać jego reakcji. Wymaga to więc innego podejścia, opartego nie na zaprogramowanych rozwiązaniach, lecz działania „inteligentnego” w sytuacjach wcześniej dla robota nieznanych. Z pomocą przychodzą nam tu architektury sterowania przejawiające zachowania zwane kognitywnymi. Ich wspólne cechy wg Newella (Newell i inni, 1989) to:

- zorientowanie na cel;
- działanie w złożonym, bogatym i kompleksowym środowisku;
- wymóg posiadania dużej wiedzy;
- możliwość używania symboli oraz abstrakcji;
- elastyczność;
- wymóg uczenia się przy zmianach środowiska oraz przez doświadczenia.

Wymienione cechy realizują architektury kognitywne (nie wszystkie). Ponadto charakteryzuje je podejście całościowe do modelowanych systemów, odporność na błędy (wynikające z braku uwzględnienia jakiejś sytuacji), uczenie się oraz budowa warstwowa. Użycie tych architektur w sterowaniu autonomicznym robotem mobilnym wymaga opisanego środowiska (podania ram ograniczających, wprowadzenia wiedzy, symboli, abstrakcji) oraz stworzenia interfejsu pośredniczącego pomiędzy oprogramowaniem sterującym sensorami oraz elementami wykonawczymi robota, a implementowaną architekturą.

Uogólniając, architektury te cechują się dużą różnorodnością, od takich, które, mają emulować cechy ludzkiej psychiki do sterowania autonomicznymi aparatami powietrznymi. Tak wielka rozpiętość implementacji powoduje

trudności we właściwej analizie oraz użyciu konkretnej architektury. W poniższym referacie przedstawiono wybrane architektury kognitywne oraz ich implementacje na rzeczywistych autonomicznych robotach bądź symulowanych robotach mobilnych.

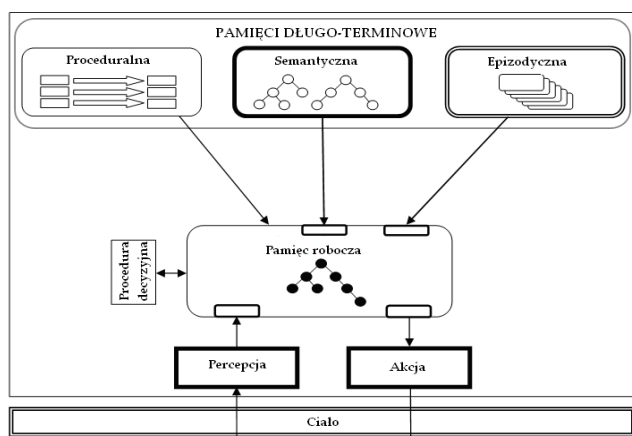
2. SOAR

Soar, wcześniej znane jako SOAR (od State Operator And Result) to architektura kognitywna stworzona przez J. Laird’a, P. Rosenbloom’a oraz A. Newell’a na uniwersytecie Carnegie Mellon, od 2000 roku wspierana i rozwijana na uniwersytecie Michigan. Aktualna wersja architektury oraz oprogramowania to Soar 9.0. Podstawowe właściwości:

- Posiadanie stanów i operatorów – stany cechują właściwości np.: stan początkowy, stan zamierzony. Ponadto opisują one całą obecną sytuację, uwzględniając aktualne informacje (percepcje) oraz opis aktualnych celów i przestrzeni problemu, gdzie operatory opisują kolejne kroki (opisują znaczenie kolejnych kroków) w przestrzeni stanów.
- Rodzaje pamięci: a) pamięć robocza WM (Working Memory) – zawiera percepcje oraz hierarchie stanów i powiązane z nimi operatory. b) pamięć długoterminowa (LTM-Long-Term Memory) jest miejscem tworzenia się wiedzy z posiadanych danych. W Soar możemy wyszczególnić następujące rodzaje wiedzy: proceduralną - zapisaną jako reguły używane automatycznie podczas realizacji cyklu decyzyjnego, semantyczną - zapisaną jako struktury deklaratywne oraz epizodyczną - zapisaną jako epizody. Do dwóch ostatnich rodzajów wiedzy dostęp uzyskujemy poprzez adnotację w pamięci roboczej (WM). Dostęp do LTM uzyskać możemy tylko poprzez WM (Lehman i inni, 2006).
- Interfejs percepcji/ruchu – interfejs ze światem zewnętrznym, dzięki niemu percepcja i akcja mogą odbywać się równolegle.
- Cykl decyzyjny- podzielony na trzy etapy: 1) faza wy-

pracowania operatora z LTM, sugerowania nowego operatora oraz oceny operatorów 2) stan spoczynku oznacza rozpoczęcie fazy drugiej tj. fazy decyzyjnej, opartej na preferencjach. Rezultatem jest zmiana (wybór) operatora lub impas, w przypadku konfliktu lub braku preferencji 3) ostatnia fazą jest faza aplikacji, gdzie reguły zmieniają wartości stanów (Newell i inni, 1989).

- Impasy – oznaczają brak wiedzy, a tym samym stan wymagający nauki nowego rozwiązania. W razie wystąpienia impasu architektura generuje automatycznie podstawy w celu rozwiązania impasu.
- Cztery mechanizmy uczenia – porcjowanie (ang. chunking), uczenie wzmacnione, uczenie epizodyczne oraz uczenie semantyczne. Porcjowanie tworzy nowe reguły podczas rozwiązywania impasów. Uczenie wzmacnione (reinforcement learning) dodaje nowe wartości do preferencji operatorów, uczenie epizodyczne korzysta z poprzednich doświadczeń natomiast semantyczne produkuje bardziej abstrakcyjne schematy deklaratywne (Newell i inni, 1989).



Rys. 1. Schemat architektury Soar, z wyszczególnionymi rodzajami pamięci (Lehman i inni, 2006)

W ostatnich latach (od 2006 roku) wprowadzono dodatki do architektury Soar, mające na celu jeszcze wierniejsze symulowanie ludzkiej kognitywności. Są to: aktywacja pamięci roboczej, dodanie emocji, grupowanie danych oraz wizualny zbiór obrazów (Laird, 2008).

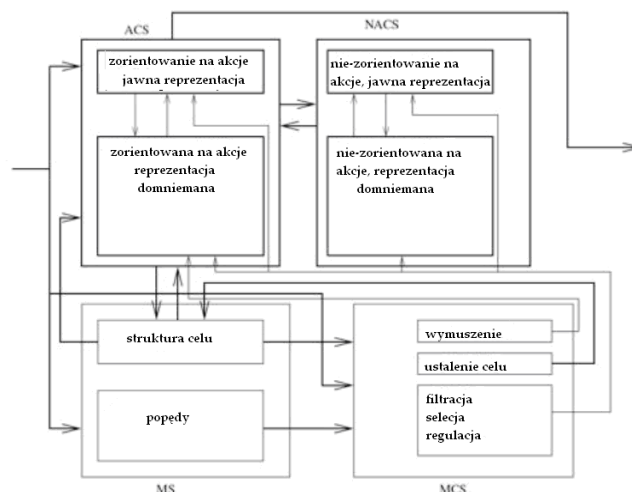
Ze względu na powyższe właściwości architektura Soar została wielokrotnie zaimplementowana, np.

- TacAirSoar, symulacja pilota jako agenta podczas teatru lotniczych działań wojennych;
- sterowanie zadaniami sześćo-nóżnego robota mobilnego;
- sterowanie mobilnym robotem SuperDroid (Hanford i inni, 2009).

3. CLARION

CLARION (Cennectionist Learning with Adaptive Rule Induction ON-line), jest architekturą kognitywną rozwijaną przez prof. Ron'a Suna'a z Rensselaer Polytechnic Institute. Wprowadza podział na warstwy: na procesy ukryte, do-

mniemane (ang. implicate) oraz procesy jawne (ang. explicit). Ze względu na zajmowanie się interakcjami pomiędzy tymi procesami architektura CLARION sprawdziła się w symulowaniu zadań psychologii kognitywnej oraz w zastosowaniach sztucznej inteligencji np. sterowanie inteligentnymi agentami. W architekturze CLARION możemy wyróżnić cztery podsystemy, z których każdy bazuje zarówno na procesach ukrytych (warstwa dolna) jak i jawnych (warstwa górna).



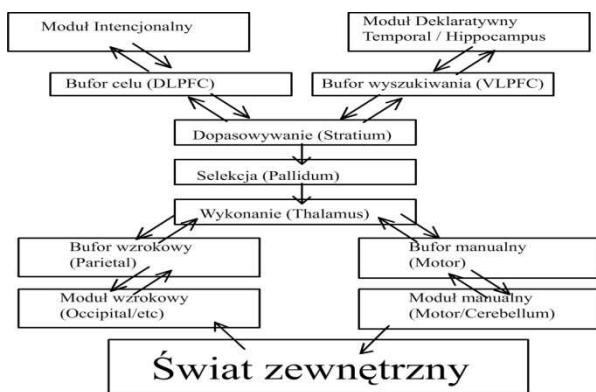
Rys. 2. Schemat budowy i wymiany informacji w architekturze CLARION (Sun, 2007)

- Podsystem skupiony na akcji (ang. action centered subsystem – ACS) – skoncentrowany na sterowaniu wyborem akcji. Nauczenie „w górę”, tj. zapis wiedzy jawnej na podstawie wiedzy ukrytej. Ponadto w podsystemie tym zawarte jest nauczanie „w dół” oraz wykorzystanie zewnętrznej wiedzy jako struktur pojęciowych (zasady, reguły, plany), która to może zostać powiązana z wiedzą niskiego bądź wysokiego poziomu.
- Podsystem „nieskupiony” na akcji (ang. non-action centered subsystem – NACS) – zajmujący się reprezentacją ogólnej wiedzy, zwanej semantyczną (Sun, 2007), podporządkowany podsystemowi skupionemu na akcji, przeprowadzającemu zróżnicowane odczyty oraz łączenia na pamięci. Na poziomie wiedzy ukrytej, podsystem ten koduje wiedzę nie zorientowaną na akcję w „pamięć asocjacyjną”, z rozproszoną reprezentacją mikro-elementów. W warstwie wiedzy jawnej, wiedza ogólna zapisywana jest jako węzeł (koncept) oraz łączona z odpowiadającymi jej mikro-elementami. Ponadto mamy tu do czynienia z możliwością podejmowania decyzji na zasadzie podobieństwa (np. do poprzednich) oraz łączenia reguł.
- Podsystem motywujący (ang. motivational subsystem MS) – fundament dla motywacji, o który oparte są percepcja, akcja oraz kognitywność. Skupia się na akcjach, które motywują agenta, poprzez maksymalizację wzmacnień (ang. gains), nagrody za wybór danej akcji. Dotyczy wyboru popędów oraz ich interakcji prowadzących do akcji. Możemy podzielić go na niższe (psychologiczne), np.: głód, pragnienie oraz wyższe (społeczne). Możemy też wyróżnić dodatkowe popędy wynika-

- jące z procesu realizacji popędów głównych.
- Podsystem meta-kognitywny (ang. meta-cognitive subsystem MCS) – jego rola sprowadza się do sterowania, monitorowania oraz modyfikacji operacji pozostałych podsystemów. Podsystem realizuje dążenie do zachowań poprzez wybór celów (przedstawienie celów) oraz dobór funkcji wzmacniających (ang. reinforcement functions), filtrację informacji (skupienie się na wymiarach wejść podukładów ACS i NACS). Ponadto steruje metodami akwizycji informacji poprzez wybór metod nauczania dla podsystemów ACS i NACS (Sun, 2007). Steruje wykorzystaniem informacji oraz wyborem informacji zwrotnej z podsystemów ACS i NACS. Następnie steruje kognitywnością wyboru węzłów, zarówno w warstwie niższej jak i wyższej lub ich kombinacji.

4. ACT-R

ACT-R (ang. Adaptive Control of Thought – Rational) architektura kognitywna rozwijana głównie przez John’a Robert’a Andersona. Tak jak dwie poprzednie architektury dotyczy teorii oraz narzędzi służących do symulacji modeli architektury. Od wydania w 1993 roku przy pomocy ACT-C stworzono ponad 100 modeli kognitywnych, dla takich zagadnień jak pamięć implikatywna, przetwarzanie metafor, emocje oraz naukę gry tryk-traka (ang. Backgammon). Najaktualniejsza wersja to ACT-R 6.0. Wersja ta jest bardziej odporna na błędy, osiąga większą zgodność dla parametrów dla różnych zadań, posiada więcej mechanizmów generowania produkcji. Podsumowując, bardziej odpowiada naszej wiedzy o funkcjonowaniu mózgu.



Rys. 3. Schemat architektury ACT-R jako modelu ludzkiego mózgu, nazwy w nawiasach – nazwy obszarów odpowiedzialnych wg teorii ACT-R za realizację tych zadań w mózgu człowieka (Anderson i inni, 2004)

Wybrane właściwości architektury ACT-R:

- nauka na przykładach – polega na uczeniu się poprzez pozyskiwanie z pamięci dawnych doświadczeń;
- nauka użyteczności – nauka wyboru, która z dostępnych strategii jest najkorzystniejsza ze względu na koszty i prawdopodobieństwo sukcesu;
- pojemność pamięci roboczej – modele, w których mamy różną ilość aktywacji, różnią się ilością zajmowanej pamięci w przestrzeni roboczej;

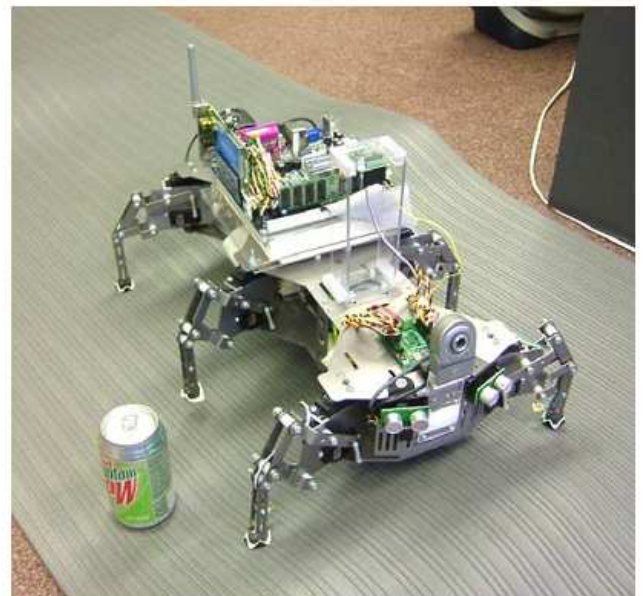
- percepcyjne/motoryczne przetwarzanie powiązań – w modelach realizujących ludzkie zachowania, percepcja i motoryka znajdują się w ramach ograniczających te zjawiska, w ich ograniczeniach (Anderson i inni, 2004).

Ponadto architekturę ACT-R wyróżnia możliwość dołączania modułów np. ACT-R PM, ACT-R R/E (Anderson i inni, 2004), które poszerzają jej zastosowania oraz funkcjonalność, jednocześnie zachowując zgodność z teorią, na której bazuje ACT-R.

5. IMPLEMENTACJA SOAR NA PRZYKŁADZIE STEROWANIA SZCZONIOŻNYM AUTONOMICZNYM ROBOTEM MOBILNYM HEXACRAWLER

Architektura Soar została użyta do kontroli chodu robota 6-nożnego na podstawie danych sensorycznych z dwóch czujników nacisku oraz dwóch sonarów. Ponadto w sterowaniu użyto innych danych sensorycznych. Cele - to omijanie przeszkód i dążenie do określonego celu, poprzez kontrolę chodu. Elementy budowy robota:

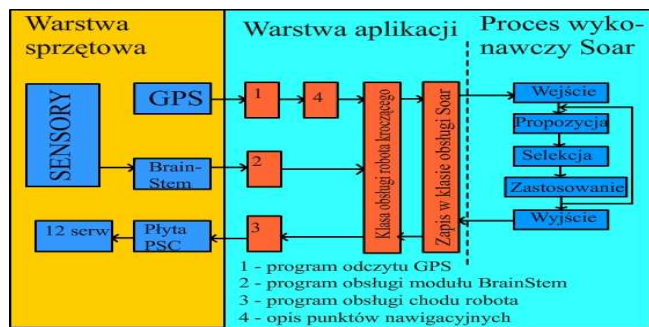
- moduł odbiornika GPS – służący do lokalizacji celu oraz samego robota;
- dwa sonary;
- dwa czujniki nacisku (siły);
- kompas elektroniczny;
- kamera internetowa;
- każde „odnóże” wyposażone jest w dwa serwomechanizmy, jeden umieszczony poziomo a drugi pionowo, razem dwanaście serw.



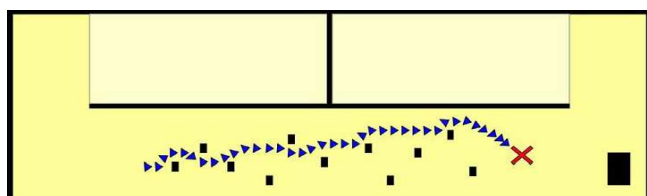
Rys. 4. Robot Hexcrawler (Janrathitikikarn i Long, 2008)

Ze schematu na Rys. 5 wynika sposób działania oraz interakcji, warstwy sprzętowej, warstwy pośredniczącej (ang. middleware) oraz implementacji architektury Soar. Warstwa pośrednicząca przesyła, tłumaczy oraz filtruje odpowiednie sygnały, po czym wprowadza je na wejście imple-

mentacji architektury Soar. Z wejścia sygnały przechodzą poprzez proces decyzyjny. Wyjście z procesu decyzyjnego jest przesyłane z powrotem do warstwy pośredniczącej, tam są odpowiednio dekodowane, po czym trafiają do warstwy sprzętowej, która decyduje o ruchu robota. W badaniach nad ruchem robota, zadaniem było przejście przez teren parkingu oraz ominięcie przeszkód (Janrathitikarn i Long, 2008).



Rys. 5. Schemat interakcji warstwy sprzętowej, warstwy pośredniczącej oraz implementacji architektury Soar



Rys. 6. Rysunek przedstawiający rzeczywiste testy na parkingu Uniwersytetu Stanowego Pennsylvanii (Janrathitikarn i Long, 2008)

Na Rys. 6 poniżej widać, drogę robota podczas testu polegającego na omijaniu przeszkód oraz na zatrzymaniu się w odległości 3 m od celu. Test miał miejsce na parkingu o powierzchni 36 na 160 metrów.

6. IMPLEMENTACJA ARCHITEKTURY KOGNITYWNEJ ACT-R NA PRZYKŁADZIE KOOPERACJI ROBOTA Z CZŁOWIEKIEM PODCZAS MISJI ZWIADOWCZEJ

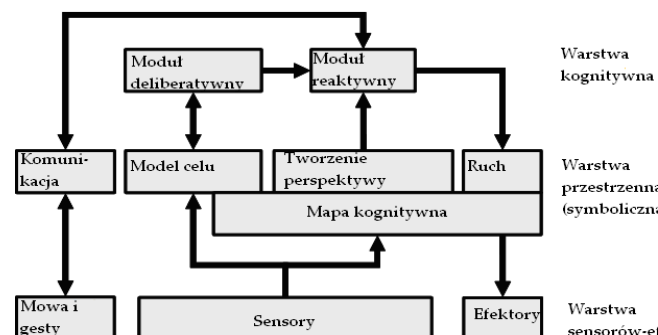
Kolejnym przykładem na implementację architektury kognitywnej jest użycie architektury ACT-R jako warstwy kognitywnej w sterowaniu robotem mobilnym. Zadaniem drużyny jest interakcja robota z człowiekiem podczas (ang. HRI – Human-Robot Interaction) wykonywania zwiadu. Zadaniem drużyny człowiek-robot jest użycie wiedzy na temat pozycji celu, pola widzenia celu oraz przeszkód w środowisku realizacji działania w celu maksymalnego zbliżenia się do celu, będąc jednocześnie maksymalnie ukrytym (Kennedy i inni, 2007). Architektura robota została zbudowana w oparciu o model Stealthbot, składający się z trzech warstw (Rys. 7).

Warstwa pierwsza składa się z elementów sprzętowych, czujników, efektorów oraz systemu wizji i rozpoznawania mowy. Warstwa druga, nazywana warstwą przestrzenną (symboliczną), stanowi warstwę pośrednią pomiędzy war-

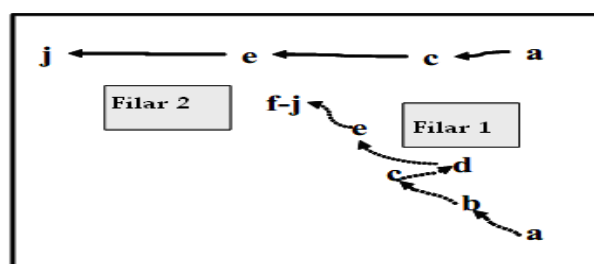
stwą pierwszą, a warstwą trzecią tj. warstwą kognitywną (z podziałem na moduły: decyzyjny, reaktywny oraz deliberyatywny). Warstwa pierwsza dostarczała danych w systemie metrycznym, które to były odpowiednio przetwarzane przez warstwę drugą. Przetwarzanie to miało na celu zapis środowiska symbolicznego jako mapy kognitywnej. Mapa ta jest zapisem w postaci wzajemnych relacji pomiędzy elementami środowiska, w którym znajduje się robot. Ponadto warstwa druga opisuje właściwości ruchu celu.



Rys. 6. Scenariusz misji zwiadowczej: robot, cel (człowiek stojący) oraz członek drużyny (osoba kucająca) (Kennedy i inni, 2007)



Rys. 7. Warstwy robota w oparciu o model Stealthbot (Kennedy i inni, 2007)



Rys. 8. Schemat drogi celu (górna trasa od a do j) oraz robota Stealthbot (prawy dolny róg od a do j)

Przesłanie informacji z warstwy drugiej odbywa się poprzez porcjowanie danych (ang. chunking) i umieszczanie ich w pamięci deklaratywnej architektury ACT-R. Przesłanie występuje podczas zmian położenia celu lub kierunku ruchu w warstwie mapy kognitywnej. Wpływa to na wygenerowane produkcje oraz na reakcje systemu Stealthbot.

Wiedzę w implementacji architektury ACT-R możemy podzielić na dwa rodzaje: wiedzę deklaratywną oraz proce-

duralną. Wiedza deklaratywna zawiera porcje informacji opisane atrybutami. Informacje te pobierane są z warstwy przestrzennej (symbolicznej). Opisują one zmiany w ruchu celu oraz ogólne postrzeganie przestrzenne robota. Wiedza proceduralna to opis reguł oraz metod tworzenia produkcji odpowiedzialnych za, m.in.: przewidywanie następnego położenia celu, komunikacje z członkiem drużyny oraz wybór miejsca do ukrycia przed celem.

Na Rys. 8 widzimy poruszającego się człowieka za filarami z punktu a do punktu j (górna ścieżka). Jednocześnie robot porusza się dolną ścieżką (a-f). W pewnym momencie (punkt c) wykrył, że jest widoczny i ukrył się za filarem w pozycji d. Następnie wykonał ruch do pozycji e, od której ponownie śledził cel do pozycji f-j (Kennedy i inni, 2007).

Podsumowując, naukowcom z Naval Reaserch Laboratory, udało się zaimplementować architekturę ACT-R w systemie Stealthbot. Robot poprawnie realizował zadanie śledzenia celu oraz uniknął wykrycia dzięki ukrywaniu się za przeszkodami (filar 1, filar 2). Ponadto, robot komunikował się z ludzkim członkiem drużyny (człowiek kucający).

7. SYMULACJE W ŚRODOWISKU SOARSUITE

Badania symulacyjne architektury SOAR zostały przeprowadzone dla scenariusza o nazwie Tanksoar w środowisku Soar-Suite-9.3.0-win-x86 (Rys. 9). Scenariusz ten symuluje walkę dwóch lub więcej czołgów (agentów) na mapie z przeszkodami (na wzór gry komputerowej Tanks! z lat siedemdziesiątych). Celem symulacji oznaczającym zwycięstwo danego agenta jest osiągnięcie 50 punktów. Agenci posiadają następujące atrybuty – ilość punktów, liczba pozostałych pocisków, ilość punktów zdrowia oraz ilość energii osłon. Agent zdobywa punkty poprzez trafienie lub zniszczenie przeciwnika. Analogicznie agent traci punkty życia oraz osłony gdy zostanie trafiony pociskiem przeciwnika. Parametry symulacji które można ustawić to również m.in:

Parametr	Wartość domyślna
maksymalna liczba pocisków	15
maksymalna liczba energii osłon	1000
maksymalna liczba zdrowia	1000
liczba punktów za trafienie przeciwnika	2
liczba punktów za zniszczenie przeciwnika	3
liczba punktów za zostanie trafionym pociskiem przeciwnika	- 1
liczba punktów za zostanie zniszczonym przez pocisk przeciwnika	- 2
ilość energii oraz punktów życia po trafieniu przez pocisk przeciwnika	odpowiednio - 250 oraz - 400

W scenariuszu Tanksoar, Agent posiada źródła informacji takie jak: radar, dźwięk oraz potrafi wykryć zbliżający się pocisk przeciwnika. Potrafi również określić istnienie przeszkód w jego najbliższej odległości (Rys. 9. Blocked – zablokowany z prawej i lewej strony). W celu pokonania przeciwnika (osiągnięcia 50 punktów) agent korzysta z następujących trybów działania:

- tryb ataku – gdy przeciwnik został wykryty na radarze w polu rażenia oraz gdy liczba punktów życia oraz energia osłon wynosi więcej niż 200;
- tryb pogoni – gdy agent „usłyszy” przeciwnika

oraz został on wykryty przy pomocy radaru;

- tryb ucieczki – gdy agent „usłyszy” przeciwnika, jeśli wykryje go przy pomocy radaru lub zauważy zbliżający się pocisk a poziom energii oraz punktów życia wynosi mniej niż 200;
- tryb wędrówki – gdy agent nie wykrywa przeciwnika przy pomocy radaru ani przez dźwięk (oba źródła są aktywne ich zmiana wprowadza zmianę trybu agenta) oraz zbliżającego się do niego pocisku.



Rys. 9. Program symulacyjny, z wybranym scenariuszem Tanksoar, 1 – obszar symulacji, 2 – panel sterowania symulacją, 3 – informacje dotyczące aktualnego stanu agentów oraz informacji które posiadają

W symulacjach przeprowadzonych przez autorów zbadano wpływ pominięcia informacji sensorycznej na rozgrywkę pomiędzy agentami. Autorzy środowiska Soar-Suite dostarczają trzy rodzaje agentów:

- obscure-bot – według autorów Soar najbardziej zaawansowany oraz służący do testowania oraz współzawodnictwa z innymi agentami;
- simple-bot – agent posługujący się tylko radarem;
- simple-sound-bot – agent posługujący się radarem oraz dźwiękiem

W symulacjach po pozbawieniu agentów wybranych źródeł informacji zewnętrznych tj.:dźwięku dla trybu wędrówki oraz radaru dla trybu pogoni, określano ilość iteracji potrzebnych do osiągnięcia 50 punktów przez jednego z dwóch agentów. Każdy wariant symulacji powtarzano piętnastokrotnie. Poniżej porównano wyniki symulacji:

Rezultaty symulacji:

Nr symulacji	Nazwa agenta (zablokowane źródła sygnałów)	Przedział iteracji	Średnia iteracji
1	Obscure-bot	476-1320	786
2	Simple-bot	1189-2390	1641
3	Simple-sound-bot	512-1923	1372
4	Simple-sound-bot (radar)	855-2712	1712
5	Simple-sound-bot (radar, dźwięk)	1146-3825	2376

Odebranie źródeł informacji sensorycznych powoduje wzrost czasu (kolejnych iteracji wykonania zadania przez agenta). Doprowadza również do sytuacji, w których

agent działa w sposób nieprzewidywany (zderzenia ze ścianami, brak ucieczki lub powstawanie impasów). W pierwszych trzech symulacjach, zachowano wszystkie źródła sygnałów zewnętrznych. W czwartej odebrano możliwość korzystania z informacji udostępnianych przez radar w trybie pogoni. W symulacji piątej usunięto sygnał pochodzący z radaru oraz możliwość reagowania na dźwięki pochodzące od przeciwnika w trybie wędrówki. Wydłużyło to prawie dwukrotnie liczbę iteracji potrzebną do osiągnięcia 50 punktów – celu misji w scenariuszu Tanksoar.

8. PORÓWNANIE I PODSUMOWANIE

Możemy zauważyć wspólne płaszczyzny na których możemy porównać wybrane właściwości wyżej wymienionych architektur, dodając, że ich wybór był trudny ze względu na różnice w ich budowie.

- 1) Rodzaje pamięci – wszystkie trzy pamięci architektur posiadają podział na pamięć roboczą oraz pamięć długoterminową z informacjami zapisanymi w postaci symbolicznej. Różnią się natomiast ilością oraz rodzajami danych zapisywanych w poszczególnych pamięciach.

Tab. 1. Porównanie rodzajów pamięci architektur kognitywnych

Architektura	Pamięć robocza	Pamięć długoterminowa
Soar	informacje z aktualnego wejścia (np. czujniki), aktualne stany	Wiedza proceduralna, deklaracyjna oraz epizodyczna
ACT-R	Cel, aktualne informacje ze świata zewnętrznego dostępne przez różne bufor	Wiedza deklaracyjna w module deklaracyjnym oraz proceduralna w proceduralnym
CLARION	Informacje tymczasowe	Wiedza proceduralna w warstwie górnej, deklaracyjna w warstwie dolnej

- 2) Uczenie się – każda z architektur realizuje to na swój własny sposób.

Tab. 2. Porównanie mechanizmów uczenia się architektur

Architektura	Mechanizmy uczenia
Soar	Porcjowanie (ang. chunking) – metoda główna oraz uczenie wzmocnione
ACT-R	Kompilacja najlepszej reguły (produkcji) ze zbioru posiadanych reguł
CLARION	Nauczanie funkcją Q (warstwa dolna), ekstrakcja reguł (warstwa górna)

W powyższej pracy przedstawiono różne architektury kognitywne Soar, ACT-R oraz CLARION. Każda z nich reprezentuje różne podejście do modelowania oraz implementacji kognitywności jako systemu opisu oraz implementacji sztucznej inteligencji. Celem było modelowanie oraz symulacja kognitywności człowieka, jako odpowiedzi na problem modelowania ludzkiej inteligencji w systemach agentowych, autonomicznych robotach mobilnych oraz tworzeniu coraz lepszych jej modeli. W zależności od rozwoju prac nad badanymi architekturami zauważamy

coraz większe możliwości ich implementacji w robotyce. Szczególnie w aplikacjach wieloagentowych, gdzie występuje współpraca wielu agentów-robotów oraz współpraca robota z człowiekiem (Masłowski i Ulatowski, 2005). Zwłaszcza w środowiskach dynamicznych, zmiennych, gdzie człowiek musi estymować pewne wartości, opierając się na życiowym doświadczeniu. Podczas realizacji coraz bardziej złożonych celów w złożonych środowiskach, to samo zadanie będą musiały spełniać roboty autonomiczne pozbawione jednak bagażu wiedzy wynikającej z doświadczenia. W zastosowaniu tym sprawdzają się systemy oparte na architekturach kognitywnych, które z założenia tworzą „doświadczenie” (bazę wiedzy), które robot sterowany taką architekturą wykorzysta dla rozwiązania problemu.

LITERATURA

1. Anderson, J. R., Bothell, D., Byrne, M. D., Douglass, S., Lebiere, C., Qin, Y. (2004), An Integrated Theory of the Mind, *Psychological Review*, 111, (4), 1036-1060.
2. Hanford S. D, Janrathitakorn O., Long L. N. (2009), Control of Mobile Robots Using the Soar Cognitive Architecture, *Journal of Aerospace Computing Information and Communication*, Vol. 6, strony 69-91 .
3. Janrathitakorn O., Long L. N. (2008), Gait Control of a Six-Legged Robot on Unlevel Terrain Using a Cognitive Architecture, *IEEE Aerospace Conference*, Big Sky, Montana, 1-9.
4. Kennedy W. G., Bugajska, M. D., Marge, M., Adams, W., Fransen, B. R., Perzanowski, D., Schultz, A.C., Trafton, J. G. (2007), Spatial Representation and Reasoning for Human-Robot Collaboration, *Proceedings of the Twenty-Second Conference on Artificial Intelligence*, Vancouver, Canada: AAAI Press, 1554-1559
5. Laird J. E. (2008), Extending the Soar Cognitive Architecture, *Artificial General Intelligence Conference*, Memphis, 224-235.
6. Lehman J. F., Laird J. E., Rosenbloom P. (2006), A Gentle Introduction To Soar, *An Architecture For Human Cognition*, <http://ai.eecs.umich.edu/soar/.../GentleIntroduction-2006.pdf>
7. Masłowski. A, Ulatowski. W. (2005), Modelowanie działań operatora w sterowaniu wieloagentowym podsystemem transportowym w systemie wytwarzania, *Pomiary Automatyka Sterowanie*, 2, strony 6-11.
8. Newell A., Rosenbloom, P. S., Laird J. E. (1989) Symbolic architectures for cognition, strony 91-131.
9. Posner M. I. (Ed.) (1989), *Foundations of Cognitive Science*, Cambridge, MA: Bradford Books/MIT Press.
10. Sun R. (2007), The Importance of Cognitive Architectures: An Analysis Based on CLARION, *Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence Archive*, Vol. 19 Issue 2, strony 159-193.

COGNITIVE ARCHITECTURES SURVEY OF METHODS AND IMPLEMENTATIONS

Abstract: Autonomous mobile robots are used in different new applications. These applications put different requirements on the autonomy tasks of robotic systems. The more advances in autonomy solutions are connected with these cognitive architectures. Cognitive architectures have build-in mechanisms, which can cope with new problems arriving in uncertain environments. In the paper three different cognitive architectures, implementations and simulation of them have been described and compared.

SPIS TREŚCI

Krzysztof Augustynek <i>Modelowanie par kinematycznych mechanizmów z zastosowaniem elementów sprężystych</i>	5
Tomasz Boguszewski, Krzysztof Molski <i>Efekty naprężeniowe, deformacyjne i energetyczne w okolicy wierzchołkowej szczeliny z podwójnym symetrycznym odgałęzieniem</i>	11
Krzysztof Ciechacki, Tadeusz Szykowny <i>Struktura i właściwości mechaniczne złączy spawanych stali ferrytycznej X2CrNi12 ze stalą austenityczną X5CrNi 18-10</i>	17
Michał Czech, Lesław Kyziol <i>Wpływ zawartości polimeru na anizotropię wytrzymałości drewna przy rozciąganiu</i>	24
Zenon Hendzel, Marcin Szuster <i>Neuronowe programowanie dynamiczne w sterowaniu behawioralnym mobilnym robotem kołowym</i>	28
Andrzej Kazberuk <i>Współczynniki intensywności naprężeń w szczelinach wychodzących z wierzchołka karbu V</i>	37
Ewa Kulesza <i>Ocena odporności korozyjnej nowych stopów tytanu otrzymanych metodą metalurgii proszków</i>	43
Tadeusz Łagoda, Karolina Walat <i>Sposoby realizacji obciążeń eksploatacyjnych w układach sterowania maszyn zmęczeniowych</i>	47
Krzysztof Łukaszewicz, Walenty Osipiuk <i>Prognozowanie trwałości zmęczeniowej elementów z karbami</i>	53
Romuald Mosdorf, Tomasz Wyszkowski <i>Modelowanie zjawiska synchronizacji odrywających się pęcherzy gazowych z sąsiadujących dysz</i>	59
Jerzy Nachimowicz, Robert Korbut <i>Energetyczne zagadnienia pracy łożyskowań igiełkowych</i>	67
Grzegorz Puławski <i>Wpływ zmiennych własności czynnika roboczego na parametry klasycznych obiegów Otto, Diesla i Sabathego</i>	71
Maciej Słowik, Daniel Ołdziej <i>Wybrane architektury kognitywne w robotyce – porównanie i zastosowania</i>	79
Heorgij Sulym, Wiktor Opanasowycz, Igor Jacyk <i>Zginanie płyty Reissnera ze szczelinami przy uwzględnieniu szerokości strefy kontaktu brzegów szczelin</i>	85
Tomasz J. Teleszewski, Sławomir A. Sorko <i>Zastosowanie metody elementów brzegowych do wyznaczania płaskich przepływów cieczy lepkiej</i>	94
Adam Tomczyk <i>Wpływ szczeliny na rozkład ciśnienia kontaktowego w płaskim zagadnieniu z uwzględnieniem tarcia</i>	106
Adam Tomczyk <i>Badania eksperymentalne propagacji szczeliny zmęczeniowej w próbkach wykonanych z polimetakrylanu metylu</i>	114
Grzegorz Wołkowycki <i>Doświadczalne wyznaczanie efektywności regeneratora o nieruchomym wypełnieniu na podstawie parametrów eksploatacyjnych regeneratorów pieca szklarskiego</i>	121
Robert Zabielski, Roman Trochimczuk <i>Wybrane problemy projektowania wysokoobrotowych elektrowrzecion frezarskich o niestandardowym łożyskowaniu</i>	131

Agata Zajkowska, Łukasz Derpeński, Andrzej Seweryn

Metody wyznaczania rzeczywistej krzywej umocnienia materiału – Cz. I. Test rozciągania próbki 137

Agata Zajkowska, Łukasz Derpeński, Andrzej Seweryn

Metody wyznaczania rzeczywistej krzywej umocnienia materiału – Cz. II. Test wciskania kulistego wgłębnika 143

Krzysztof K. Żur

Nowa koncepcja modelowania i analizy dynamiki aparatu kroczenia człowieka 148

ZGINANIE PŁYTY REISSNERA ZE SZCZELINAMI PRZY UWZGLĘDNIENIU SZEROKOŚCI STREFY KONTAKTU BRZEGÓW SZCZELIN

Heorgij SULYM*, Wiktor OPANASOWYCZ**, Igor JACYK**

*Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka,
ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

**Katedra Mechaniki, Lwowski Uniwersytet imienia Iwana Franko, ul. Uniwersytetska, 1, 79000, Lwów, Ukraina

sulym@pb.edu.pl, kafmech@franko.lviv.ua, ihoryatsyk@i.ua

Streszczenie: W pracy zbadano zagadnienie zginania nieograniczonej izotropowej płyty obciążonej jednorodnie rozłożonymi momentami gnącymi w nieskończoności. Płyta jest osłabiona trzema równoległymi szczelinami, których brzegi są wolne od obciążeń zewnętrznych. Zakłada się, że brzegi szczelin w górnej swojej części kontaktują się wzdłuż całej długości, a strefa kontaktu ma stałą szerokość dla każdej szczeliny. Rozwiązanie zagadnienia jest superpozycją rozwiązań dwóch zagadnień: tarczy płaskiej oraz zagadnienia zginania płyty typu Reissnera. Wykorzystując metody teorii funkcji zmiennych zespolonych i potencjałów zespolonych, otrzymano układ osobliwych równań całkowych rozwiązywanych numerycznie metodą mechanicznych kwadratur. Przedstawiono wyniki analizy numerycznej przykładów dla jednej, dwóch i trzech szczelin.

1. WPROWADZENIE

Szerokie wykorzystanie w technice, a zwłaszcza w budownictwie, elementów w postaci płyt, wymaga rozwoju metod oceny ich wytrzymałości z uwzględnieniem istniejących szczelin. Defekty takie są potężnymi koncentratorami naprężeń i istotnie obniżają skalę dopuszczalnych obciążeń. Szczeliny, które powstają i rozwijają się podczas eksploatacji elementów konstrukcji, są główną przyczyną ich zniszczenia.

Sformułowanie zagadnienia zginania płyt ze szczelinami i metody ich rozwiązywania są dostatecznie dobrze znane (Bereżnickij i inni, 1979; Prusov, 1975; Savruk, 1981). Tym nie mniej w wymienionych oraz w większości innych prac dotyczących tego tematu prawie nigdy nie uwzględnia się możliwości wzajemnego kontaktowania się brzegów szczeliny, co powoduje kinematyczną sprzeczność: przenikanie jednego brzegu przez drugi w tych miejscach, gdzie normalne naprężenia są ujemne. W ostatnich latach (patrz Opanasovyč, 2007; Opanasovyč i Seliverstov, 2001; Opanasovyč i Seliverstov, 2000; Šac'kyj, 1988; Šac'kyj i Perepička, 1992; Šac'kyj i inni, 2000) otrzymano wiele rozwiązań zagadnień zginania płyt ze szczelinami z uwzględnieniem kontaktu brzegów szczelin wzdłuż górnej krawędzi brzegów (linii), sprowadzając rozwiązanie do układu osobliwych równań całkowych. Niektóre z tych zagadnień rozwiązano również przy bliższym rzeczywistości założeniu o kontakcie nie wzdłuż linii, a pewnej strefy o stałej szerokości. Główną uwagę koncentrowano dotychczas na płytach cienkich, wykorzystując równania Kirchhoffa, a dopiero w ostatnich pracach stosowane są w tym celu modele tarcz typu Reissnera.

Ważną stroną powyższych zagadnień jest uwzględnienie wzajemnego wpływu dwóch i większej ilości szczelin. Z tego powodu celem niniejszej pracy jest analiza układu z trzema szczelinami w zginanej płycie typu Reissnera, w przypadku, gdy dochodzi do wzajemnego kontaktu (bez

tarcia) brzegów szczelin wzdłuż pasma o stałej szerokości. Rozwiązania poszukuje się w postaci superpozycji rozwiązań dwóch geometrycznie jednakowych zagadnień – tarczy w płaskim stanie naprężenia oraz zagadnienia zginania płyty według teorii Reissnera. Wykorzystując metody funkcji zmiennej zespolonej oraz potencjały zespolone, otrzymano układ osobliwych równań całkowych, który jest rozwiązywany numerycznie metodą kwadratur mechanicznych. Przedstawiono wyniki analizy numerycznej siły oddziaływania kontaktowego między brzegami szczelin oraz wartości współczynników intensywności naprężeń. W przypadkach szczególnych otrzymano zgodność wyników ze znanymi z literatury.

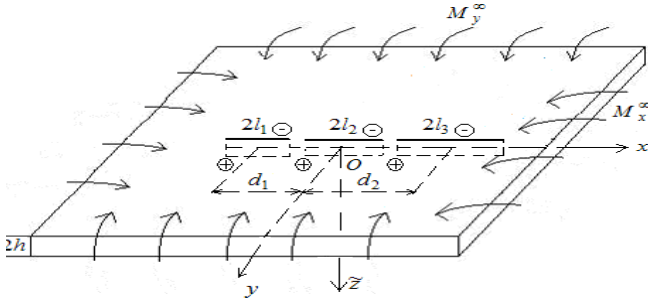
2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Rozważamy izotropową płytę o stałej grubości $2h$ z trzema szczelinami o długości $2l_k$ ($k = 1, 2, 3$) leżącymi na jednej prostej (Rys. 1). Interesujące nas zagadnienie zginania płyty przy obciążeniu w nieskończoności równomiernie rozłożonymi momentami gnącymi. Odległość pomiędzy środkami sąsiednich szczelin oznaczmy przez d_j ($j = 1, 2$).

Zakładamy, że pod wpływem takiego obciążenia zewnętrznego dochodzi do gładkiego kontaktu brzegów szczelin wzdłuż całej długości. Strefa kontaktu w górnej części brzegów ma stałą (jednakową dla wszystkich szczelin) szerokość h_1 . Do chwili zginania brzegi szczelin nie były obciążane.

Wprowadzamy kartezjański układ współrzędnych Oxy z osiami Ox , Oy w płaszczyźnie środkowej płyty i środkiem O w środku drugiej szczeliny. Oś Ox skierujemy wzdłuż osi szczelin. Odcinki $[-d_1 - l_1, -d_1 + l_1]$, $[-l_2, l_2]$ oraz $[d_2 - l_3, d_2 + l_3]$ osi Ox , wzdłuż których leżą szczeliny, oznaczamy odpowiednio L_k i $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$; rozłożone siły kontaktowe między brzegami szczeliny z numerem k – przez N_k ($N_k > 0$), a rozłożone momenty gnące w nieskończoności

$-M_x^\infty, M_y^\infty$. Pozostałe oznaczenia to: μ – moduł Kirchhoffa; E – moduł Younga; ν – współczynnik Poissona; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ – stała Muscheliszwilliego. Zakładamy, że wskaźnik k przyjmuje trzy wartości: 1, 2, 3; a wskaźnik j – dwie: 1 i 2.



Rys. 1. Schemat obciążenia płyty ze szczelinami

Wskutek kontaktu brzegów szczelin rozwiązanie zagadnienia podzielimy na dwie części: zagadnienie płaskiej teorii sprężystości oraz zagadnienie zginania płyty według teorii Reissnera.

Na brzegach szczeliny k , zgodnie ze sformułowaniem zagadnienia, mamy następujące warunki brzegowe:

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = -N_k/(2h), \quad \sigma_{xy}^+ = \sigma_{xy}^- = 0, \quad x \in L_k, \quad (1)$$

$$M_y^+ = M_y^- = M_k, \quad Q_y^+ = Q_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ = H_{xy}^- = 0, \quad x \in L_k, \quad (2)$$

$$M_k = \beta h N_k, \quad \partial_x[v_p] + \alpha h \partial_x[\varphi_y] = 0, \quad x \in L_k, \quad (3)$$

gdzie σ_{xy} , σ_{yy} i v_p – to odpowiednio współrzędne tensora naprężeń i rzut wektora przemieszczeń na oś Oy w zagadnieniu tarczy płaskiej; φ_y – uśredniony wzdłuż grubości tarczy kąt obrotu normalnej do środkowej płaszczyzny płyty w zagadnieniu zginania (Timoshenko and Woinowsky-Krieger, 1959); M_y – moment gnący, Q_y i H_{xy} odpowiednio: siła ścinająca i moment skręcający; $\partial_x = \partial/\partial x$, $[f] = f^+ - f^-$; wskaźniki «+» i «-» oznaczają wartości graniczne funkcji przy dążeniu punktu płaszczyzny do brzegów szczelin przy $y \rightarrow \pm 0$; $\alpha = 0,5 [1 + (1 - \gamma)^2]$, $\beta = 1 - \gamma/3$ i $\gamma = h_1/h$ – jest bezwymiarową szerokością strefy kontaktu (Opanasovych, 2007).

Poszukuje się naprężeniowo-odkształceniowego stanu tarczy.

3. ROZWIĄZYWANIE ZAGADNIENIA

Płaski stan naprężeń określamy za pomocą potencjałów zespolonych $\Phi_p(z)$, $\Omega_p(z)$, które dążą do zera w nieskończoności i pozwalają opisać naprężenia i odkształcenia w tarczy za pomocą wzorów (Muskhelishvili, 1977b):

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi_p(z) + \Omega_p(\bar{z}) + (z - \bar{z})\Phi_p'(z), \quad (4)$$

$$2\mu\partial_x(u_p + iv_p) = \kappa\Phi_p(z) - \Omega_p(\bar{z}) - (z - \bar{z})\Phi_p'(z).$$

Dolny wskaźnik P w naprężeniach pomijamy, ponieważ są to te same naprężenia, co w (1).

Warunki brzegowe dla tego zagadnienia mają postać

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ - (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- = 0, \quad x \in L,$$

co, z uwzględnieniem (4), daje

$$(\Phi_p(x) - \Omega_p(x))^+ - (\Phi_p(x) - \Omega_p(x))^- = 0, \quad x \in L. \quad (5)$$

Rozwiązanie zagadnienia sprzężenia liniowego wartości granicznych funkcji analitycznych (5) daje

$$\Phi_p(z) = \Omega_p(z). \quad (6)$$

Biorąc pod uwagę (4) i (6), z warunku granicznego (1)

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ + (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- = -N_k/h, \quad x \in L_k$$

otrzymujemy

$$N_k = -2h(\Phi_p^+(x) + \Phi_p^-(x)), \quad x \in L_k. \quad (7)$$

Potencjał zespolony $\Phi_p(z)$ poszukujemy w postaci (Panasuk i inni, 1976)

$$\Phi_p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tilde{g}'(t) dt}{t - z}, \quad (8)$$

gdzie

$$2\mu\partial_x[u_p + iv_p]/(1 + \kappa) = \tilde{g}'(x) = \tilde{g}_1'(x) + i\tilde{g}_2'(x), \quad x \in L. \quad (9)$$

Z relacji (8), z uwzględnieniem (7), mamy

$$-\frac{N_k}{2h} = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\tilde{g}_2'(t) dt}{t - x}, \quad x \in L_k, \quad (10)$$

$$\int_L \frac{\tilde{g}_1'(t) dt}{t - x} = 0, \quad x \in L_k. \quad (11)$$

Rozwiązaniem równania osobliwego (11), z uwzględnieniem warunku $\int_{L_k} \tilde{g}_1'(t) dt = 0$, jest

$$\tilde{g}_1'(t) = 0, \quad t \in L_k.$$

W celu otrzymania rozwiązania zagadnienia zginania płyty wykorzystamy potencjały zespolone $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$, funkcję $\Omega(z, \bar{z})$ oraz zależności (Mazurak i Bereżnickij, 1990)

$$M_x + M_y = -2D(1 + \nu)\{\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}\}, \quad (12)$$

$$M_y - M_x + 2iH_{xy} = 2D(1 - \nu)\{z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} + \frac{4}{k_*^2(1 - \nu)}[2\overline{\Phi''(z)} + i\partial_{zz}^2\Omega(z, \bar{z})]\}; \quad (13)$$

$$Q_x - iQ_y = -2D\{2\Phi'(z) - i\partial_z\Omega(z, \bar{z})\}, \quad (14)$$

$$\text{gdzie } D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \quad k_*^2 = \frac{5}{2h^2}, \quad \partial_z = 0.5(\partial_x - i\partial_y);$$

funkcja $\Omega(z, \bar{z})$ – rozwiązanie równania Helmholtza $4\partial_{zz}^2 \Omega(z, \bar{z}) = k_*^2 \Omega(z, \bar{z})$, $\partial_{\bar{z}} = 0.5(\partial_x + i\partial_y) = \overline{\partial_z}$.

Zależności (12) i (13) przepisujemy w postaci:

$$\begin{aligned} M_y + iH_{xy} &= 2m \operatorname{Re} \Phi(z) + n \left\{ z \overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \right\} + \\ &+ \rho \left\{ 2\overline{\Phi''(z)} + i\partial_{zz}^2 \Omega(z, \bar{z}) \right\}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$m = -D(1+\nu), \quad n = D(1-\nu), \quad \rho = \frac{4D}{k_*^2}.$$

Potencjałów zespolonych $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ poszukujemy w postaci (Prusov, 1975)

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_*(z) + \Gamma, \quad \Psi(z) = \Psi_*(z) + \Gamma', \\ \Gamma &= -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}, \quad \Gamma' = -\frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2D(1-\nu)}, \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie $\Phi_*(z)$ i $\Psi_*(z)$ – są to funkcje holomorficzne, które zerają się w nieskończoności.

Przedstawimy funkcje $\Phi_*(z)$ i $\Omega(z, \bar{z})$ w postaci całek (Opanasovyč, 2007; Opanasovyč i inni., 1999):

$$\Phi_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)dt}{t-z}, \quad g(t) = g_1(t) + i g_2(t), \quad (17)$$

$$\Omega(z, \bar{z}) = \frac{k_*}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \int_L \frac{r K_1(k_* r)}{t-z} \omega(t) dt \right\}, \quad (18)$$

$$\omega(t) = \omega_1(t) + i\omega_2(t), \quad r = \sqrt{(t-z)(t-\bar{z})},$$

gdzie $g_1(t)$, $g_2(t)$, $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ – niewiadome funkcje rzeczywiste; $K_j(x)$ – funkcja MacDonalda (zmodyfikowana funkcja Bessela drugiego rodzaju) rzędu j (Abramowitz and Stegun, 1970).

Pochodne funkcji $\Omega(z, \bar{z})$ we wzorach (14) i (15), przedstawiamy w sposób następujący:

$$\partial_z \Omega(z, \bar{z}) = \Omega_1(z, \bar{z}) - \frac{i}{2\pi} \int_L \frac{\omega(t)dt}{(t-z)^2}, \quad (19)$$

$$\partial_{zz}^2 \Omega(z, \bar{z}) = \Omega_2(z, \bar{z}) - \frac{i}{\pi} \int_L \frac{\omega(t)dt}{(t-z)^3}. \quad (20)$$

Tutaj

$$\begin{aligned} \Omega_1(z, \bar{z}) &= \frac{ik_*^2}{2\pi} \int_L \left\{ \frac{r^2 \tilde{K}_1'(k_* r)}{(t-z)^2} \omega(t) + \right. \\ &+ \left. \frac{(t-\bar{z}) K_0(k_* r)}{r^2} \operatorname{Re} \{ (t-\bar{z}) \omega(t) \} \right\} dt; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\Omega_2(z, \bar{z}) = \frac{k_*^2}{2\pi} \int_L \frac{r^2 \tilde{K}_2(k_* r)}{i(t-z)^3} \omega(t) dt - \frac{k_*}{2} \operatorname{Im} \left\{ \int_L \frac{K_1(k_* r)}{t-z} \times \right.$$

$$\left. \times r \omega(t) dt \right\} + k_* \int_L \frac{t-x}{r^3} K_1(k_* r) (t-\bar{z}) \operatorname{Im} \{ (t-\bar{z}) \omega(t) \} dt \Big\} \quad (22)$$

$$\tilde{K}_1(x) = K_1(x) - 1/x, \quad \tilde{K}_2(x) = K_2(x) - 2/x^2.$$

Wykorzystując funkcję

$$V(z) = q \bar{\Phi}_*(z) + z \bar{\Phi}'_*(z) + \bar{\Psi}_*(z) + \frac{m_1}{k_*^2 \pi i} \int_L \frac{\delta(t)dt}{(t-z)^3}$$

oraz wzory (16)-(22), zależności (14) i (15) przepisujemy następująco:

$$\begin{aligned} M_y + iH_{xy} &= n \left\{ q (\Phi_*(z) + 2\Gamma) + \Gamma' + V(\bar{z}) + \right. \\ &+ \left. (z-\bar{z}) \overline{\Phi'_*(z)} + im_1 k_*^{-2} \overline{\Omega_2(z, \bar{z})} \right\}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$Q_x - iQ_y = -2D \{ P(z) - i\Omega_1(z, \bar{z}) \}, \quad (24)$$

gdzie

$$P(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\delta(t)dt}{(t-z)^2}, \quad q = -\frac{1+\nu}{1-\nu}, \quad m_1 = \frac{4}{1-\nu},$$

$\delta(t) \equiv \delta_1(t) + i\delta_2(t) = -2g(t) + i\omega(t)$, $\delta_1(t)$ i $\delta_2(t)$ – funkcje rzeczywiste.

Ze wzorów (18), (21), (22) i właściwości funkcji MacDonalda wynika, że funkcja $\Omega_1(z, \bar{z})$ jest ciągła, a funkcje $\Omega(z, \bar{z})$ i $\Omega_2(z, \bar{z})$ spełniają warunki

$$\Omega^+(x, x) - \Omega^-(x, x) = \begin{cases} 2\omega_1(x) & (x \in L); \\ 0 & (x \notin L), \end{cases}$$

$$\overline{\Omega_2^+(x, x)} - \overline{\Omega_2^-(x, x)} = \begin{cases} -0.5k_*^2 \omega_1(x) & (x \in L); \\ 0 & (x \notin L). \end{cases}$$

Zakładamy, że również są spełnione warunki

$$\delta(-d_1 \pm l_1) = \delta(\pm l_2) = \delta(d_2 \pm l_3) = 0 \quad (25)$$

Uwzględnienie zależności (25)

$$P(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\delta'(t)dt}{t-z},$$

według wzorów Sochockiego – Plemelja (Muskhelishvili, 1977a) daje:

$$P^+(x) - P^-(x) = -\delta'(x) \quad (x \in L). \quad (26)$$

Wykorzystując wzory (24), (26) spełniamy drugi warunek brzegowy, otrzymując:

$$\delta_2'(x) = 0. \quad (27)$$

Uwzględnienie zależności (25) daje $\delta_2(x) = 0$, a zatem

$$\omega_1(x) = 2g_2(x), \quad \omega_2(x) = -2g_1(x) - \delta_1(x).$$

Na podstawie wzoru (23), z pierwszego i trzeciego warunków brzegowych (2), wynika zagadnienie sprzężenia

liniowego wartości granicznych funkcji analitycznych dla wyznaczenia funkcji $V(z)$

$$V^+(x) - V^-(x) = \begin{cases} q g_1(x) - im_2 g_2(x) & (x \in L); \\ 0 & (x \notin L), \end{cases}$$

rozwiązaniem, którego jest

$$V(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q g_1(t) - im_2 g_2(t)}{t - z} dt, \quad m_2 = \frac{5+\nu}{1-\nu}. \quad (28)$$

Wykorzystanie zależności

$$\begin{aligned} \partial_x (\varphi_x + i\varphi_y) &= \Phi_*(z) + \frac{m_1}{2} \overline{\Phi_*(z)} + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_*(z)} + \\ &+ V(\bar{z}) + im_1 \left\{ \frac{\overline{\Omega_2(z, \bar{z})}}{k_*^2} + \frac{\Omega(z, \bar{z})}{4} \right\} \end{aligned}$$

daje

$$\partial_x [\varphi_x + i\varphi_y] = m_1 (g_1(x) + i g_2(x)), \quad x \in L. \quad (29)$$

Drugi warunek (3) na podstawie (9) i (29) daje

$$\tilde{g}'_2(t) = -\frac{2\alpha h m_1 \mu}{1+\kappa} g_2(t), \quad t \in L. \quad (30)$$

Biorąc pod uwagę (30), rozłożona siła (10) jest równa

$$N_k = \frac{4\alpha h^2 m_1 \mu}{\pi(1+\kappa)} \int_L \frac{g_2(t)}{t-x} dt, \quad x \in L_k. \quad (31)$$

Z uwzględnieniem (17), (23), (24), (28), (31) z warunków brzegowych (2) i (3) otrzymamy układ równań całkowych, z którego wyznaczamy funkcje $g_1(x)$ i $\delta_1(x)$:

$$g_1(x) = \delta_1(x) = 0,$$

oraz równanie względem funkcji $g_2(x)$:

$$\begin{aligned} \int_L \frac{n_1 + n_2/n + 2m_1 \tilde{K}_2(k_*|t-x|)}{t-x} g_2(t) dt &= \frac{2\pi M_y^\infty}{n}, \\ x \in L_k; \quad n_1 &= \frac{2(3+\nu)}{1-\nu}, \quad n_2 = \frac{8\alpha\beta h^3 m_1 \mu}{1+\kappa}. \end{aligned} \quad (32)$$

która ma spełniać warunek dodatkowy

$$\int_{L_k} g_2(t) dt = 0, \quad (33)$$

oznaczający jednoznaczność pochodnej z uśrednionego wzdłuż grubości tarczy kąta φ_y obrotu normalnej do środkowej płaszczyzny tarczy podczas obchodzenia wzdłuż konturu k -ej szczeliny.

Trzeba zaznaczyć, że w przypadku szczególnym, gdy $\gamma = 0$ i $d_2 \rightarrow \infty$ lub $l_3 \rightarrow 0$, równania (32) pokrywają się z równaniami w pracy (Opanasovych i Seliverstov, 2000), a w przypadku szczelin o jednakowej długości – z równaniami w pracy (Opanasovych i Seliverstov, 2001).

Wykorzystując w (32) i (33) dla $t \in L_k$ i $x \in L_k$ oznaczenia

$$\begin{aligned} T &= \frac{t - (k-2)d_{0.5(k+1)}}{l_k}, \quad X = \frac{x - (k-2)d_{0.5(k+1)}}{l_k}, \\ \eta_j &= \frac{l_{j+1}}{l_1}, \quad \xi_j = \frac{d_j}{l_1}, \quad \lambda = \frac{1}{k_* l_1}, \quad R(T, X) = \\ &= \sqrt{1-T^2} \frac{3+\nu+3\alpha\beta(1+\nu)+4\tilde{K}_2(|T-X|/\lambda)}{T-X}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$g_{2k}^*(T) = \frac{D}{\pi M_y^\infty} \sqrt{1-T^2} g_2(l_k T + (k-2)d_{0.5(k+1)}),$$

przepisujemy (32) i (33) dla każdej z trzech szczelin w postaci

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left\{ R(T, X) g_{21}^*(T) + \eta_1 R(T\eta_1 + \xi_1, X) g_{22}^*(T) + \right. \\ \left. + \eta_2 R(T\eta_2 + \xi_1 + \xi_2, X) g_{23}^*(T) \right\} dT = 1, \\ \int_{-1}^1 \left\{ R(T, X\eta_1 + \xi_1) g_{21}^*(T) + \eta_1 R(T\eta_1, X\eta_1) \times \right. \\ \left. \times g_{22}^*(T) + \eta_2 R(T\eta_2 + \xi_2, X\eta_1) g_{23}^*(T) \right\} dT = 1, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left\{ R(T, X\eta_2 + \xi_1 + \xi_2) g_{21}^*(T) + \right. \\ \left. + \eta_1 R(T\eta_1, X\eta_2 + \xi_2) g_{22}^*(T) + \right. \\ \left. + \eta_2 R(T\eta_2, X\eta_2) g_{23}^*(T) \right\} dT = 1 \quad (X \in [-1, 1]); \\ \int_{-1}^1 g_{2k}^*(T) / \sqrt{1-T^2} dT = 0. \end{aligned}$$

Do wyznaczenia współczynników intensywności sił ścinających $K_{1k}^\pm$ i momentów $K_{Mk}^\pm$ wykorzystamy zależności z monografii (Mazurak i Bereżnickij, 1990; Savruk, 1981), które w rozważanym przypadku mają postać

$$\begin{pmatrix} K_{1k}^\pm \\ K_{Mk}^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \frac{2\alpha E h^2}{1-\nu} \\ \mp m \end{pmatrix} \frac{\sqrt{l_k} \pi M_y^\infty}{D} g_{2k}^*(\pm 1). \quad (36)$$

Na podstawie (30) i (36) związek pomiędzy współczynnikami $K_{1k}^\pm$ i $K_{Mk}^\pm$ ma postać:

$$K_{1k}^\pm = 3\alpha K_{Mk}^\pm / h.$$

Po uwzględnieniu wzorów (34) i (36), bezwymiarowe współczynniki intensywności sił $\tilde{K}_{1k}^\pm = K_{1k}^\pm h / (M_y^\infty \sqrt{l_k})$ i momentów $\tilde{K}_{Mk}^\pm = K_{Mk}^\pm / (M_y^\infty \sqrt{l_k})$ (WIM) można zapisać następująco:

$$\tilde{K}_{Mk}^\pm = \pm \pi (1+\nu) g_{2k}^*(\pm 1), \quad \tilde{K}_{1k}^\pm = 3\alpha \tilde{K}_{Mk}^\pm.$$

Zaznaczmy, że gdy $\gamma = 0$ i $h/l_1 \rightarrow 0$ wartości $\tilde{K}_{Mk}^\pm$ różnią się od odpowiednich wartości otrzymanych z zało-

żeń klasycznej teorii zginania płyt (Šac'kyj, 1988), stałym współczynnikiem $(1 + \nu)/(3 + \nu)$.

Układ równań (35) rozwiązuje się numerycznie za pomocą metody mechanicznych kwadratur (Panas'uk i inni, 1976), co prowadzi do układu liniowych równań algebraicznych względem węzłowych wartości $g_{2k}^*(T_s)$; przy czym wartości funkcji określające WIM są

$$g_{2k}^*(\pm 1) = \mp \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (-1)^{s+0.5(1\mp 1)S} g_{2k}^*(T_s) \operatorname{tg}^{\mp 1} \left(\frac{2s-1}{4S} \pi \right),$$

gdzie $T_s = \cos \left(\frac{2s-1}{2S} \pi \right)$, S – ilość węzłów metody mechanicznych kwadratur.

4. ANALIZA NUMERYCZNA I WNIOSKI

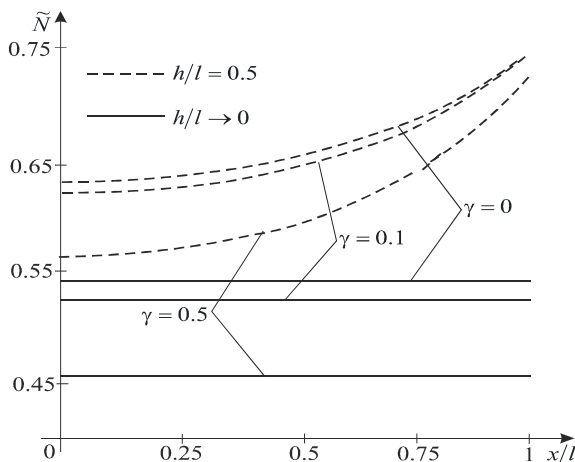
Numeryczna analiza zagadnienia przeprowadzona została dla materiału o współczynniku Poissona $\nu = 0,3$.

4.1. Przypadek jednej szczeliny

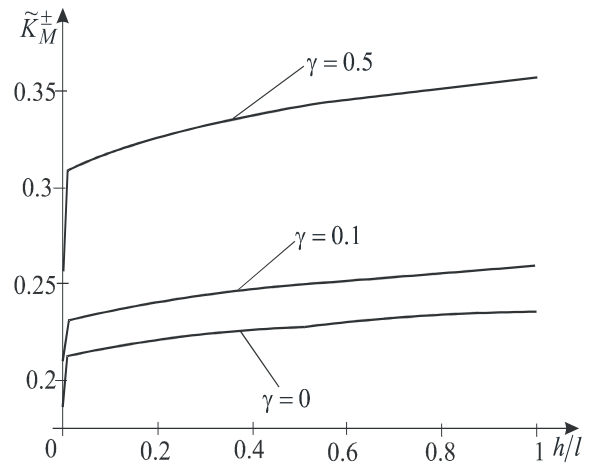
Rys. 2 przedstawia rozkład bezwymiarowych sił kontaktowych $\tilde{N} = Nh/M_y^\infty$ wzdłuż szczeliny przy różnych względnych grubościach tarczy h/l i szerokościach strefy kontaktu brzegów szczeliny. Widać, że uwzględnienie szerokości strefy kontaktu powoduje zmniejszenie obliczonej bezwymiarowej siły kontaktowej, przy czym w przypadku granicznym $h/l \rightarrow 0$ jej wartość nie zmienia się wzdłuż szczeliny.

Na Rys. 3 pokazano zależności bezwymiarowych WIM $\tilde{K}_M^\pm$ od względnej grubości tarczy przy różnych wartościach γ . Te dane dają podstawę do wniosku, że uwzględnienie rzeczywistej szerokości strefy kontaktu prowadzi do zwiększenia obliczonych wartości WIM.

W przypadkach szczególnym $\gamma = 0$ i $h/l \rightarrow 0$ otrzymujemy wyniki zgodne z pracami (Opanasovych i inni, 2002) oraz (Šac'kyj, 1988).



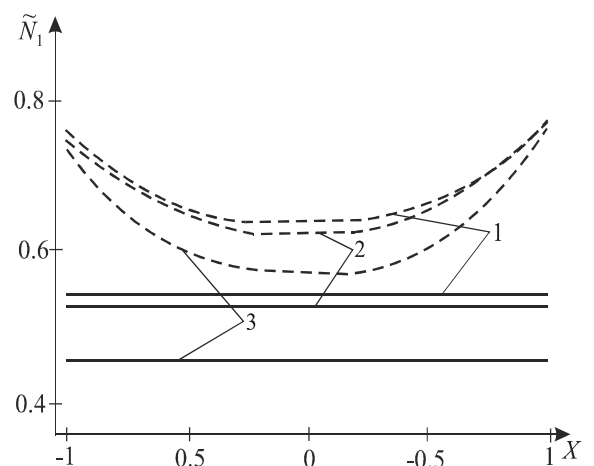
Rys. 2. Zależności rozłożonej bezwymiarowej siły kontaktowej przy różnych wartościach h/l i γ



Rys. 3. Zależności bezwymiarowych WIM przy różnych wartościach γ

4.2. Przypadek dwóch szczelin

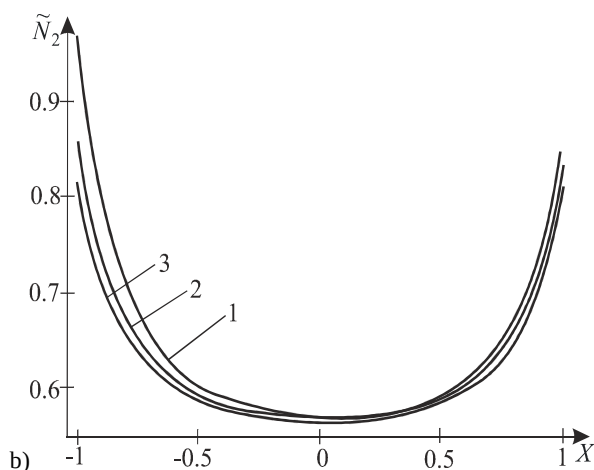
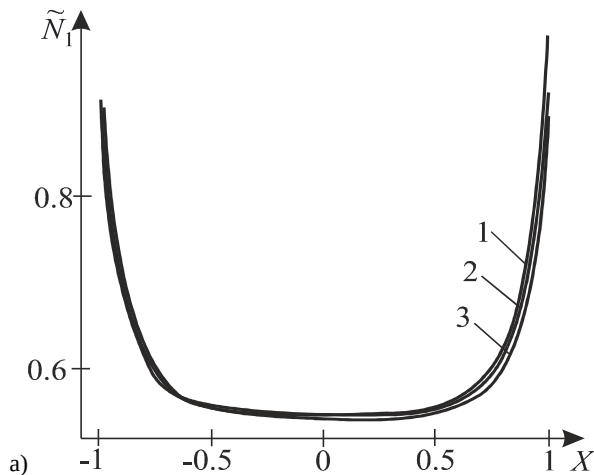
Rys. 4 – 8 ilustrują rozkłady bezwymiarowej siły kontaktowej $\tilde{N}_j = N_j h/M_y^\infty$ między brzegami j -ej szczeliny od bezwymiarowej współrzędnej X . Dane na Rys. 4 odpowiadają wartościom parametrów $\eta = l_2/l_1 = 1$, $\xi = d_1/l_1 - 1 - \eta = 1$: krzywa 1 odpowiada wartości parametru $\gamma = 0$, krzywa 2 – $\gamma = 0,1$, krzywa 3 – $\gamma = 0,5$; linie ciągłe odpowiadają przypadkowi $h/l_1 \rightarrow 0$, a przerywane – $h/l_1 = 0,5$. Rysunki te świadczą o tym, że uwzględnienie szerokości strefy kontaktu w przypadku jednej szczeliny prowadzi do zmniejszenia obliczonej bezwymiarowej siły kontaktowej, a w przypadku granicznym $h/l_1 \rightarrow 0$ jej wartość wzdłuż szczeliny pozostaje niezmienna. Oprócz tego, teoria Reissnera przewiduje większe niż to wynika z technicznej teorii zginania siły kontaktowe. Obecność drugiej szczeliny prowadzi do zwiększenia sił kontaktowych między brzegami szczelin porównywalnie z przypadkiem jednej szczeliny (patrz Rys. 2).



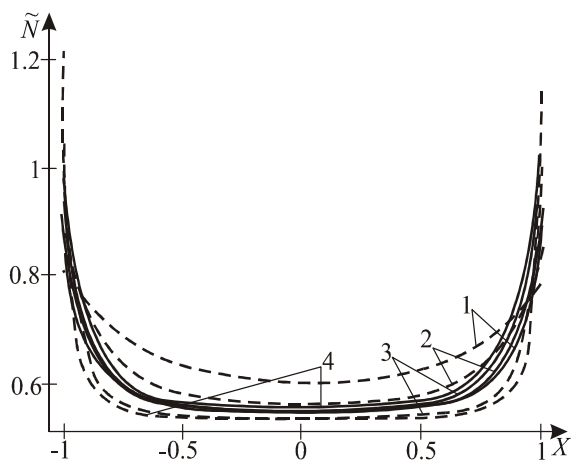
Rys. 4. Zależności bezwymiarowej siły kontaktowej przy różnych wartościach h/l_1 i γ

Na Rys. 5 przedstawiono zależność bezwymiarowej siły kontaktowej $\tilde{N}_j$ między brzegami szczelin, gdy $\gamma = 0,1$,

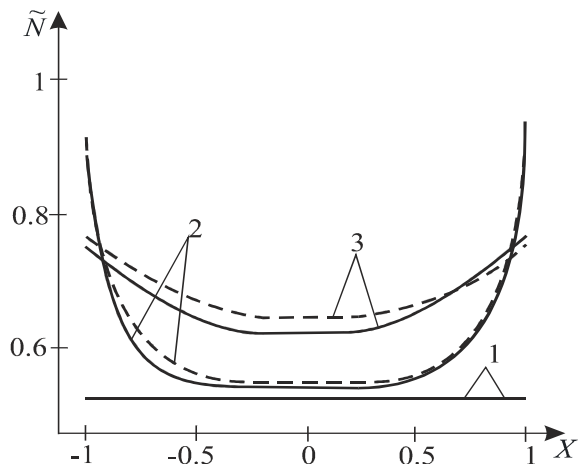
$h/l_1 = 0,1$, $\eta = 0,5$. Przy czym, krzywe 1 otrzymano przy $\xi = 0,3$, krzywe 2 – przy $\xi = 1$, krzywe 3 – przy $\xi = \infty$. Analiza numeryczna wykazała, że podczas zwiększenia odległości względnej ξ między szczelinami, wartości sił $\tilde{N}_j$ dążą do wyników dla jednej izolowanej szczeliny w nieograniczonej tarczy.



Rys. 5. Zależności bezwymiarowej siły kontaktowej przy różnych wartościach ξ



Rys. 6. Zależności bezwymiarowej siły kontaktowej przy różnych wartościach η

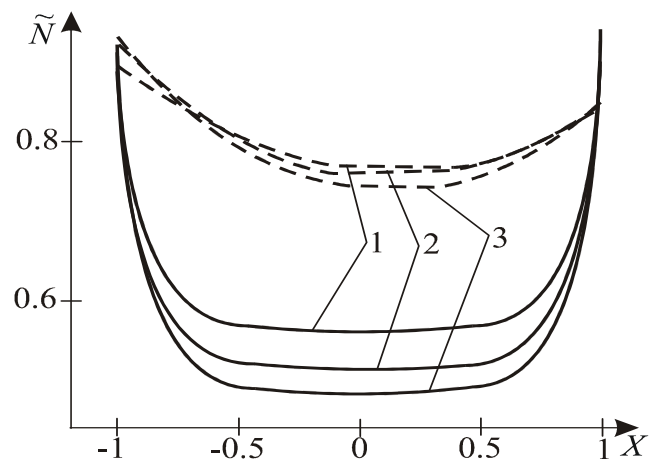


Rys. 7. Zależności bezwymiarowej siły kontaktowej przy różnych wartościach h/l_1

Na Rys. 6 – 8 linie ciągłe odpowiadają pierwszej szczelinie, a przerywane - drugiej.

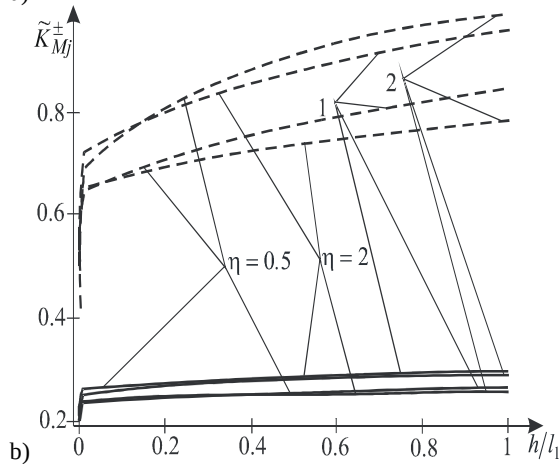
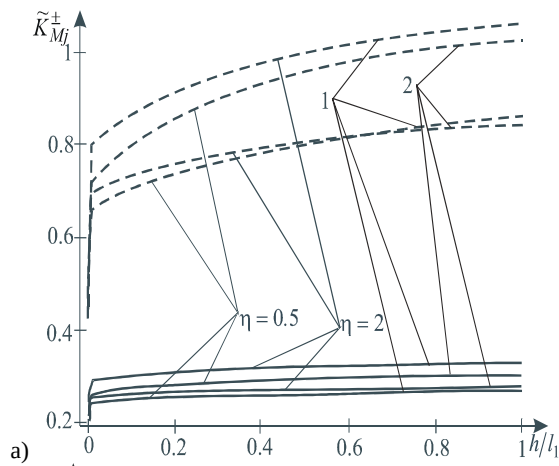
Rys. 6 otrzymano przy $\gamma = 0,1$, $h/l_1 = 0,1$, $\xi = 1$. Krzywym 1 – 4 odpowiadają następujące bezwymiarowe długości szczelin: $\eta = 0,3; 0,6; 2; 3$. Otrzymane wyniki pozwalają wnioskować, że zwiększenie względnej długości drugiej szczeliny prowadzi do nieznacznego zwiększenia sił kontaktowych na pierwszej szczelinie i jej zmniejszenia na drugiej. Przy $\eta \rightarrow 0$ siły kontaktowe na pierwszej szczelinie, a przy $\eta \rightarrow \infty$ – na drugiej są takie, jak dla przypadku jednej izolowanej szczeliny.

Dane dla Rys. 7 otrzymano przy $\gamma = 0,1$, $\eta = 0,8$, $\xi = 1$, przy czym krzywe 1 odpowiadają $h/l_1 \rightarrow 0$, krzywe 2 – $h/l_1 = 0,1$, a krzywe 3 – $h/l_1 = 0,5$. Zwiększenie względnej grubości tarczy powoduje zmniejszenie sił kontaktowych obok końców szczelin. Siły kontaktowe na drugiej szczelinie są większe od sił na pierwszej.

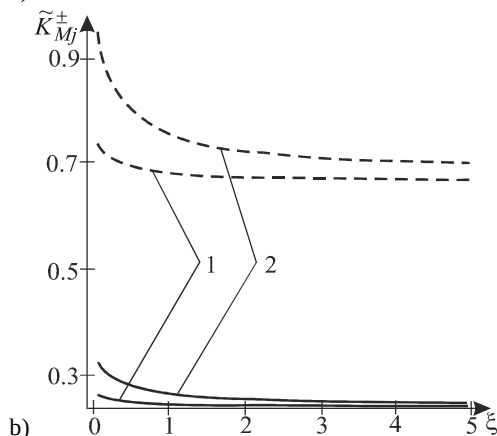
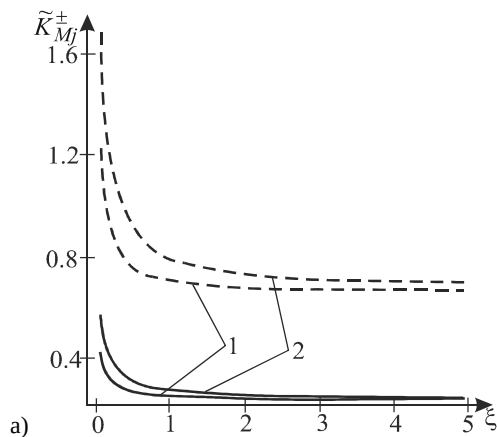


Rys. 8. Zależności bezwymiarowej siły kontaktowej przy różnych wartościach γ

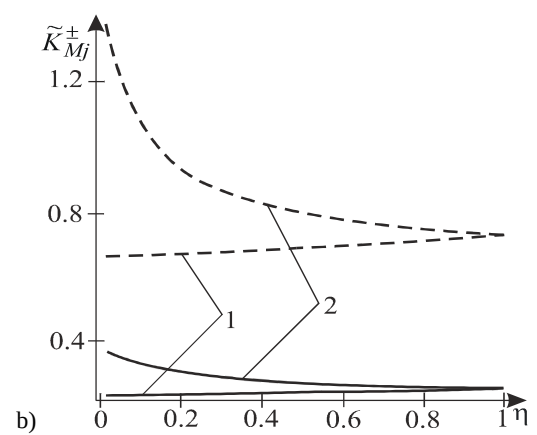
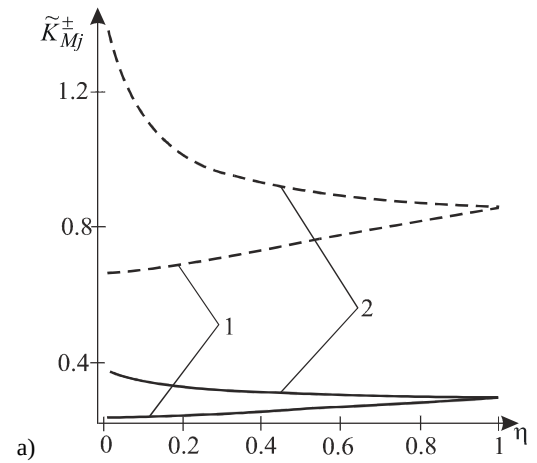
Dane dla Rys. 8 otrzymano przy $h/l_1 = 0,1$, $\eta = 0,1$, $\xi = 0,1$; krzywym 1 odpowiada $\gamma = 0$, krzywym 2 – $\gamma = 0,3$; krzywym 3 – $\gamma = 0,5$. Widać, że zwiększenie szerokości γ strefy kontaktu zwiększa siły kontaktowe na końcach szczelin.



Rys. 9. Zależności bezwymiarowych WIM od h/l_1 dla różnych wartości względnej długości szczeliny η



Rys. 10. Zależności bezwymiarowych WIM od względnej odległości ξ między szczelinami



Rys. 11. Zależności bezwymiarowych WIM od względnej długości η drugiej szczeliny

Na podstawie Rys. 4 – 8 można wnioskować, że siły kontaktowe między brzegami szczelin będą większe w wewnętrznych względem układu wierzchołkach szczelin.

Na Rys. 9 – 11 pokazano zależności bezwymiarowych WIM $\tilde{K}_{Mj}^{\pm}$ w bardziej bliskich (rysunki a) i oddalonych (rysunki b) wierzchołkach j -tej szczeliny. Na rysunkach tych krzywymi 1 odpowiadają WIM dla pierwszej szczeliny; a krzywymi 2 – WIM dla drugiej szczeliny. Liniami ciągłymi oznaczono wyniki otrzymane przy założeniu kontaktu brzegów, a liniami przerywanymi - z jego pominięciem.

Rys. 9 otrzymano przy założeniu $\gamma = 0,1$ i $\xi = 0,1$. Widać, że zwiększenie długości drugiej szczeliny zwiększa WIM szczeliny pierwszej i zmniejsza jej własny WIM. Oprócz tego uwzględnienie kontaktu brzegów szczelin prowadzi do dużego zmniejszenia WIM.

Rys. 10 odpowiada wartości parametrów $h/l_1 = 0,1$, $\eta = 0,5$. Wraz z oddalaniem szczelin od siebie WIM każdej z nich zmniejsza się i w granicy dąży do wartości, właściwej dla jednej izolowanej szczeliny w nieograniczonej tarczy.

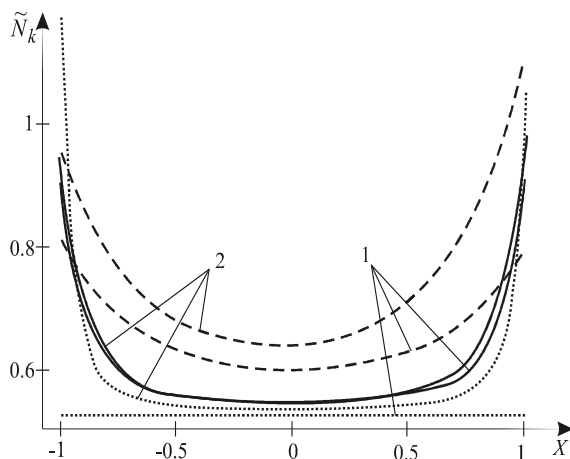
Rys. 11 otrzymano przy $\gamma = 0,1$; $h/l_1 = 0,1$; $\xi = 0,5$ i zmiennej wartości η . Widać, że zmiana względnej długości drugiej szczeliny zwiększa WIM szczeliny pierwszej i zmniejsza WIM szczeliny drugiej, chociaż ostatnie pozostają zawsze większe od pierwszych.

W przypadku $\gamma = 0$ obliczenia sprowadzają się do wyników podanych w pracy (Opanasovych i Seliverstov, 2000), a w przypadku $\eta = 1$ – (Opanasovych i Seliverstov, 2001).

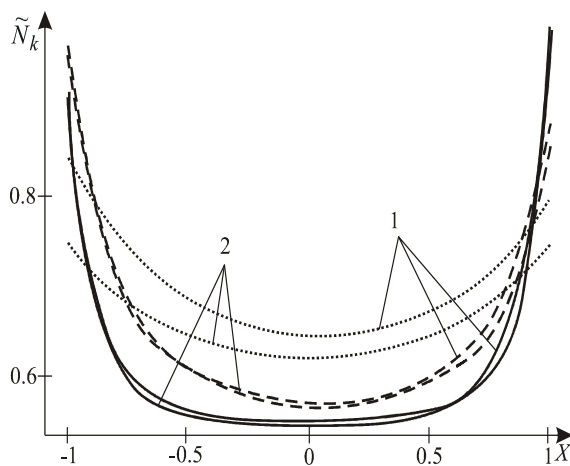
4.3. Przypadek trzech szczelin

Na Rys. 12–14 przedstawiono wyniki obliczeń dla przypadku trzech szczelin. Linie ciągłe odpowiadają pierwszej szczelinie, przerywane – drugiej, a linie kreskowo-kropkowe – trzeciej szczelinie.

Rys. 12–13 ilustrują zależności bezwymiarowych sił kontaktowych $\tilde{N}_k(X) = N_k h / M_y^\infty$ między brzegami k -tej szczeliny od bezwymiarowej współrzędnej X , $k = 1, 2, 3$. Rys. 12 otrzymano przy $\gamma = 0,1$; $h/l_1 = 0,1$; $\eta_1 = l_2/l_1 = 0,3$; $\xi_1 = d_1/l_1 = 2,3$; $\xi_2 = d_2/l_1 = 2,5$ dla równych długości trzeciej szczeliny. Krzywym 1 odpowiada wartość $\eta_2 = l_3/l_1 \rightarrow 0$, krzywym 2 – $\eta_2 = 2$. Widać, że zwiększenie η_2 powoduje zwiększenie sił kontaktowych na szczelinach (przy $\eta_2 \rightarrow 0$ otrzymuje się wyniki dla dwóch szczelin (patrz Rys. 6)).



Rys. 12. Zmiana bezwymiarowej siły kontaktowej dla różnych długości trzeciej szczeliny

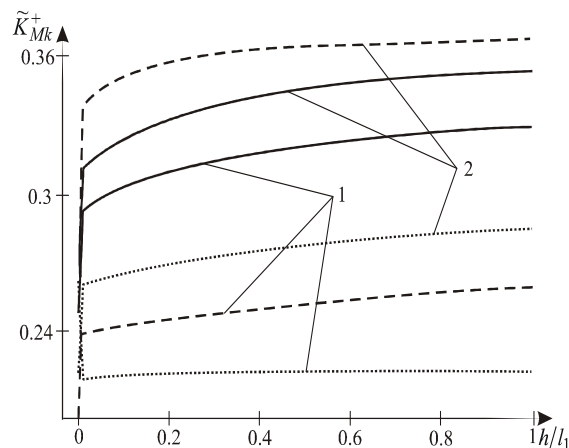


Rys. 13. Zmiana bezwymiarowej siły kontaktowej przy różnych odległościach środków drugiej i trzeciej szczeliny

Rys. 13 otrzymany został przy $\gamma = 0,1$; $h/l_1 = 0,1$; $\eta_1 = 0,5$; $\eta_2 = 0,2$; $\xi_1 = 1,8$ i różnych odległościach środków drugiej i trzeciej szczeliny. Krzywym 1 odpowiada wartość $\xi_2 = 1$, krzywym 2 – wartość graniczna $\xi_2 \rightarrow \infty$. Zaprezentowane wyniki pozwalają wnioskować, że zwiększenie ξ_2

prowadzi do zmniejszenia sił kontaktowych na szczelinach. Analiza numeryczna wykazała, że oddalenie w nieskończoność trzeciej szczeliny prowadzi do wyników dla dwóch szczelin (patrz Rys. 6) oraz dla jednej wyodrębnionej szczeliny (patrz Rys. 2).

Na podstawie Rys. 12 i 13 można stwierdzić, że obecność trzeciej szczeliny wykazuje mały wpływ na wartość sił kontaktowych na pierwszej szczelinie.



Rys. 14. Zależności bezwymiarowych WIM od h/l_1 dla różnych wartości długości drugiej szczeliny

Rys. 14 odzwierciedla zależności bezwymiarowych WIM $\tilde{K}_{Mk}^+$ w wierzchołkach k -tej szczeliny przy następujących wartościach parametrów zagadnienia: $\gamma = 0,1$; $\eta_1 = 2$; $\xi_1 = 4$; $\xi_2 = 4,5$ przy czym, krzywym 1 odpowiada przypadek $\eta_2 \rightarrow 0$, krzywym 2 – $\eta_2 = 2$. Można stwierdzić, że zwiększenie długości drugiej szczeliny zwiększa WIM, a w przypadku granicznym $\eta_2 \rightarrow 0$ otrzymuje się wyniki numeryczne dla dwóch szczelin (patrz Rys. 9).

BIBLIOGRAFIA

1. Bereżnickij L. T., Delâvskij M. V., Panasûk V. V. (1979) *Izgib tonkih plastin s defektami tipa trešin*, Kiev.
2. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables* (1970), Ed. by M. Abramowitz and I. A. Stegun, Dover, New York.
3. Mazurak L. P., Bereżnickij L. T. (1990) *Izgib transversal'no-izotropnyh plastin s defektami tipa trešin*, Nauk. dumka, Kiev.
4. Muskhelishvili N. I. (1977a) *Singular Integral Equations*, Berlin: Springer.
5. Muskhelishvili N. I., (1977b) *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Berlin: Springer.
6. Opanasovyč V. K. (2007) Zgyn plastyny z naskriznoû prâmoliniñoû trišynoû z urahuvannâm šyryny oblasti kontaktu iï poverhon', *Naukovi notatky Luc'kogo tehničnogo universytetu*, Vol. 20 (2), 123-127.
7. Opanasovyč V. K. (2001) Syngulârni integral'ni rivnânnâ zadači zgynu plastyny z trišynoû za teoriêu Rajssnera, *Praci naukovogo tovarystva im. Ševčenko*, Tom VI, Materialoznavstvo i mehanika materialiv, L'viv, 120-125.

8. **Opanasovych V. K., Delavs'kyj M. V., Podhorecki A.** (1999) Novyj pidhid do rozrahunku napruženogo stanu plyty z trišynoū za teoriū Rejssnera, *Mehanika rujnuvannâ materialiv i micnist' konstrukcij: v 3-h t.*, Pid zag. red. Panasūka V., Tom 2, Analityčni metody v mehanici rujnuvannâ materialiv, 186-189.
9. **Opanasovych V. K., Novosad V. P., Seliverstov R. G.** (2002) Vrahuvannâ kontaktu beregiv trišyny pid čas zgynu transversal'no-izotropnoï plastyny, *Mehanika i fizyka rujnuvannâ budivel'nyh materialiv ta konstrukcij*, Zbirnyk naukovykh prac', Vol. 5, Za zag. red. O. Ê. Andrejkiva, J. J. Lučka, V. V. Božydarnyha, Kamenâr, L'viv, 148-153.
10. **Opanasovych V. K., Seliverstov R. G.** (2001) Zgyn plyty z dvoma rivnymy prâmoliniynymy kolinearnymy trišynamy za teoriū Rejssnera, *Fiz.-him. mehanika materialiv*, No 1, 53-56.
11. **Opanasovych V. K., Seliverstov R. G.** (2000) Napruženij stan plyty z dvoma prâmoliniynymy kolinearnymy trišynamy za teoriū Rejssnera, *Visnyk L'viv. un-tu*, Ser. meh.-mat., Vol. 57, 124-127.
12. **Panasuk V. V., Savruk M. P., Dacyšyn A. P.** (1976) *Raspredeleniê naprâženij okolo trešin v plastinah i obolockah*, Nauk. dumka, Kiêv.
13. **Prusov I. A.** (1975) *Metod soprâženiâ v teorii plit*, Izd-vo Belorus. un-ta, Minsk.
14. **Savruk M. P.** (1981) *Dvumernyê zadači uprugosti dlâ tel s trešinami*, Nauk. dumka, Kiêv.
15. **Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.** (1959) *Theory of plates and shells*: 2d ed. New York : McGraw-Hill.
16. **Šac'kyj I. P.** (1990) Vzaimodejstviê kollinearnykh razrezov s kontaktiruišimi kromkami v izgibaemoj pllastine, *Fiz.-him. mehanika materialov*, 70-75.
17. **Šac'kyj I. P.** (1988) Zgyn plastyny, oslablenoï rozrizom z kontaktuūčymy beregamy, *Dop. AN URSR*, Ser. A. Fiz.-mat. ta tehn. nauky, No 7, 49-51.
18. **Šac'kyj I. P., Perepička V. V.** (1992) Zgyn napivneskinčenoï plastyny, oslablenoï rozrizom z kontaktuūčymy beregamy, *Fizyko-himična mehanika materialiv*, Tom 28, No 2, 54-58.
19. **Šac'kyj I., Perepička V., Dalâk T., Šerbij A.** (2000) Zadači teorii plastyn ta obolonok iz vzaêmopov'âzanymy krajovymy umovamy na rozrizah, *Matem. problemy mehaniky neodnorodnyh struktur v 2-h t.*, T. 2, L'viv, 51-54.

BENDING OF REISSNER'S PLATE CONTAINING CRACKS WITH THE ACCOUNT OF THEIR FACES CONTACT ZONE WIDTH

Abstract: This paper considers the bending of unbounded isotropic plate loaded at infinity with uniformly distributed bending moments. The plate is weakened with three collinear cracks with traction-free faces. It is assumed that the crack faces are in a smooth contact on the top face of a plate along their length. The contact region for each crack has a constant height. Due to the contact of crack faces the solution of the problem is obtained as a superposition of two ones: plane stress problem and problem of Reissner plate bending. Basing on the complex variable method the system of singular integral equations is obtained. It is solved numerically using the mechanical quadrature technique. The analysis of numerical data is provided.

Pracę wykonano w ramach pracy statutowej S/WM/1/03 w Politechnice Białostockiej.

ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH DO WYZNACZANIA PŁASKICH PRZEPŁYWÓW CIECZY LEPKIEJ

Tomasz J. TELESZEWSKI*, Sławomir A. SORKO*

*Katedra Ciepłownictwa, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Białostocka,
ul. Wiejska 4E, 15-351 Białystok

tjt@pb.edu.pl, s.sorko@pb.edu.pl

Streszczenie: Przedmiotem pracy jest implementacja metody brzegowych równań całkowych (elementów brzegowych) do rozwiązywania zagadnień ruchu cieczy lepkiej. Przedstawiono algorytm wyznaczania laminarnych przepływów cieczy lepkiej (przepływów Stokesa) przy użyciu metody brzegowych równań całkowych polegający na wykorzystaniu sprzężonych równań całkowych opisujących pola prędkości i naprężeń lepkich w płynie do wyznaczenia naprężeń lepkich przy warunkach brzegowych sformułowanych dla prędkości, wyznaczeniu pola prędkości ze związków całkowych, a w dalszej kolejności wyznaczeniu ciśnienia, wirowości i funkcji prądu przez wykorzystanie różniczkowych związków pomiędzy tymi wielkościami i prędkością ruchu płynu. Przedstawiono wyniki rozwiązania zagadnienia testowego przepływu płaskiego w zagłębieniu kwadratowym i porównano rezultaty obliczeń metody elementów brzegowych z wynikami obliczeń metodą elementów skończonych. Dokonano porównania przebiegu linii potencjału prądu dla szeregu laminarnych przepływów w układach o różnej konfiguracji ścianek ograniczających przepływ z rezultatami eksperymentalnych wizualizacji przepływów.

1. WPROWADZENIE

Przepływy płynu lepkiego z małymi prędkościami (przy niewielkich liczbach Reynoldsa), są przepływami, w których matematycznym opisie, w równaniach Naviera-Stokesa (równania zachowania pędu), człony konwekcyjnego transportu pędu są pomijalnie małe w porównaniu z członami dyfuzyjnego transportu pędu. Przepływy takie są określane mianem przepływów Stokesa, lub przepływów pełzających i w przypadku ruchu newtonowskiej cieczy lepkiej są opisane układem równań (Batchelor, 1967; Prosnak, 2006):

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{c} \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = 0 \quad (1b)$$

gdzie: w układzie współrzędnych $\{xyz\}$ $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}(c_x, c_y, c_z)$ jest wektorem prędkości płynu, $\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}(g_x, g_y, g_z)$ wektorem sił masowych, p oznacza ciśnienie, a ρ i ν odpowiednio oznaczają gęstość i lepkość kinematyczną płynu.

W pracy przedstawiono rozwiązania szeregu zagadnień płaskich ustalonych przepływów cieczy lepkiej w obszarach ograniczonych ściankami o różnorodnej konfiguracji oraz obiektami na drodze strugi metodą elementów brzegowych (metodą brzegowych równań całkowych).

Metoda elementów brzegowych (MEB) polega w ogólności na matematycznym sformułowaniu zagadnień początkowo-brzegowych dla równań różniczkowych opisujących procesy nieustalone lub zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych opisujących procesy ustalone i sprowadzeniu zagadnień do równań całkowych, rozwiązywanych dalej metodami numerycznymi.

W przypadku opływu różnych obiektów płynem lepkiem i przepływów wewnętrznych płynu lepkiego tylko najprostsze przypadki tych przepływów tj. takie, w których nie zakłada się przeszkód na ściankach, można wyznaczyć metodą analityczną (Prosnak, 1993), natomiast zastosowanie metody różnic skończonych (MRS) (Hirsch, 2007) i metody elementów skończonych (MES) (Zienkiewicz i Taylor, 2000) do rozwiązywania zagadnień przepływowych wewnętrznych i zewnętrznych wiąże się koniecznością pracochłonnego generowania siatek różnicowych, bądź układów elementów skończonych w obszarze rozwiązania.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA. RÓWNANIA CAŁKOWE OPISUJĄCE DWUWYMIAROWY RUCH CIECZY LEPKIEJ

Ustalony, dwuwymiarowy przepływ cieczy lepkiej w prostokątnym układzie współrzędnych $\{xy\}$ przy zaniebdaniu sił masowych opisują równania:

$$\left[\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} \right) &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial^2 c_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial y^2} \right) &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \right], \quad (2)$$

z warunkiem brzegowym braku poślizgu cieczy na materialnym brzegu (L) ograniczającym przepływ i warunkiem nieprzenikalności materialnego brzegu:

$$\left[\begin{aligned} c_s(x, y) &= 0, \quad \forall (x, y) \in L \\ c_n(x, y) &= 0, \quad \forall (x, y) \in L \end{aligned} \right]. \quad (2^*)$$

2.1. Brzegowe równania całkowe opisujące ruch dwuwymiarowy cieczy lepkiej

Stosując metodę residuów zagadnienie brzegowe dla równań różniczkowych (2) można sprowadzić do układu dwóch brzegowych równań całkowych względem składowych tensora naprężeń lepkich $\bar{f}(\mathbf{q}) = [f_x(\mathbf{q}), f_y(\mathbf{q})]$ w płynie w postaci (Brebbia, 1984; Teleszewski, 2008):

$$\begin{aligned} & -4\pi\mu \left[\begin{matrix} \tilde{c}_x(\mathbf{p}) \\ \tilde{c}_y(\mathbf{p}) \end{matrix} \right] + \mu \int_{(L)} \left[\begin{matrix} \tilde{c}_x(\mathbf{q}) \\ \tilde{c}_y(\mathbf{q}) \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} E_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) & E_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ E_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) & E_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{matrix} \right] dL_q \\ & = \int_{(L)} \left[\begin{matrix} f_x(\mathbf{q}) \\ f_y(\mathbf{q}) \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} K_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) & K_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ K_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) & K_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{matrix} \right] dL_q, \quad (3) \\ & \mathbf{p} \in (L); \mathbf{q} \in (L) \end{aligned}$$

Składowe jąder całkowych $K_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ i funkcji $E_{mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ w równaniach (3) są odpowiednio równe:

$$K_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \ln \left(\frac{1}{r_{pq}} \right) + \frac{(x_q - x_p)^2}{(r_{pq})^2}, \quad (3.1^1)$$

$$K_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \ln \left(\frac{1}{r_{pq}} \right) + \frac{(y_p - y_q)^2}{(r_{pq})^2}, \quad (3.1^2)$$

$$K_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = K_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{(x_p - x_q)(y_p - y_q)}{(r_{pq})^2} \quad (3.1^{3,4})$$

oraz:

$$\begin{aligned} E_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= E_{xxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + \\ &+ E_{xxy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \end{aligned} \quad (3.1^5)$$

$$\begin{aligned} E_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= E_{xyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + \\ &+ E_{xyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \end{aligned} \quad (3.1^6)$$

$$\begin{aligned} E_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= E_{yxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + \\ &+ E_{yxy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \end{aligned} \quad (3.1^7)$$

$$\begin{aligned} E_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= E_{yyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + \\ &+ E_{yyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \end{aligned} \quad (3.1^8)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} E_{xxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= 2\nabla_{xq} K_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - P_x(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \\ &= -\frac{4(x_p - x_q)^3}{(r_{pq})^4}, \end{aligned} \quad (3.2^1)$$

$$\begin{aligned} E_{yyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= 2\nabla_{yq} K_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - P_y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \\ &= -\frac{4(y_p - y_q)^3}{(r_{pq})^4}, \end{aligned} \quad (3.2^2)$$

$$\begin{aligned} E_{xyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= 2\nabla_{xq} K_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - P_y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \\ &= -\frac{4(y_p - y_q)(x_p - x_q)^2}{(r_{pq})^4}, \end{aligned} \quad (3.2^3)$$

$$\begin{aligned} E_{yxy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= 2\nabla_{yq} K_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - P_x(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \\ &= -\frac{4(x_p - x_q)(y_p - y_q)^2}{(r_{pq})^4}, \end{aligned} \quad (3.2^4)$$

$$\begin{aligned} E_{xxy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \nabla_{yq} K_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \nabla_{xq} K_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \\ &= -\frac{4(y_p - y_q)(x_p - x_q)^2}{(r_{pq})^4}, \end{aligned} \quad (3.2^5)$$

$$\begin{aligned} E_{xyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \nabla_{yq} K_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \nabla_{xq} K_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \\ &= -\frac{4(x_p - x_q)(y_p - y_q)^2}{(r_{pq})^4}, \end{aligned} \quad (3.2^6)$$

$$\begin{aligned} E_{yyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \nabla_{xq} K_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \nabla_{yq} K_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \\ &= -\frac{4(x_p - x_q)(y_p - y_q)^2}{(r_{pq})^4}, \end{aligned} \quad (3.2^7)$$

$$\begin{aligned} E_{yxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \nabla_{xq} K_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \nabla_{yq} K_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \\ &= -\frac{4(y_p - y_q)(x_p - x_q)^2}{(r_{pq})^4}, \end{aligned} \quad (3.2^8)$$

$$P_x(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -2 \frac{(x_p - x_q)}{(r_{pq})^2}, \quad (3.3^1)$$

$$P_y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -2 \frac{(y_p - y_q)}{(r_{pq})^2}. \quad (3.3^2)$$

Po dyskretnym wyznaczeniu wartości naprężeń w płynie $f_x(\mathbf{q})$, $f_y(\mathbf{q})$ w rezultacie rozwiązania równań (2) pole prędkości w obszarze (Λ) wyznacza się z zależności:

$$\begin{aligned} c_x(\mathbf{p}) &= -\frac{1}{4\pi\mu} \int_{(L)} \left[f_x(\mathbf{q}) K_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_y(\mathbf{q}) K_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_q + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{(L)} \left[\tilde{c}_x(\mathbf{q}) E_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \tilde{c}_y(\mathbf{q}) E_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_q, \end{aligned} \quad (4a)$$

$\mathbf{p} \in (\Lambda); \mathbf{q} \in (L)$

$$\begin{aligned} c_y(\mathbf{p}) &= -\frac{1}{4\pi\mu} \int_{(L)} \left[f_x(\mathbf{q}) K_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_y(\mathbf{q}) K_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_q + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{(L)} \left[\tilde{c}_x(\mathbf{q}) E_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \tilde{c}_y(\mathbf{q}) E_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_q, \end{aligned} \quad (4b)$$

$\mathbf{p} \in (\Lambda); \mathbf{q} \in (L)$

Rozkład ciśnienia w obszarze (Λ) wyznacza się w dyskretnej formie z równania (Brebbia i inni 1984, Porykidis, 1991):

$$p(\mathbf{p}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{(L)} [f_x(\mathbf{q})M_x(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_y(\mathbf{q})M_y(\mathbf{p}, \mathbf{q})] dL_q + \\ + \frac{\mu}{4\pi} \int_{(L)} [\tilde{c}_x(\mathbf{q})N_x^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \tilde{c}_y(\mathbf{q})N_y^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})] dL_q, \\ \mathbf{p} \in (\Lambda); \mathbf{q} \in (L) \quad (5)$$

Funkcje podcałkowe (jądra całkowe) $M_x(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $M_y(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ i $N_x^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $N_y^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ są odpowiednio równe:

$$M_x(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{2(x_p - x_q)}{(r_{pq})^2}, \quad (5.1^1)$$

$$M_y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{2(y_p - y_q)}{(r_{pq})^2}, \quad (5.1^2)$$

oraz:

$$N_x^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = N_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + \\ + N_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \quad (5.1^3)$$

$$N_y^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = N_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + \\ + N_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \quad (5.1^4)$$

gdzie:

$$N_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{4}{(r_{pq})^2} + \frac{8(x_q - x_p)^2}{(r_{pq})^4}, \quad (5.2^1)$$

$$N_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{4}{(r_{pq})^2} + \frac{8(y_q - y_p)^2}{(r_{pq})^4}, \quad (5.2^2)$$

$$N_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = N_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{8(x_q - x_p)(y_q - y_p)}{(r_{pq})^4}, \quad (5.2^{3,4})$$

Ważną charakterystyką pola przepływu cieczy lepkiej jest wirowość pola prędkości opisana w przypadku dwuwymiarowego przepływu cieczy związkiem:

$$\omega_z(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial c_y(\mathbf{p})}{\partial x} - \frac{\partial c_x(\mathbf{p})}{\partial y} \right], \quad (6) \\ (\mathbf{p}) \in \Lambda$$

Wyznaczenie rozkładu wirowości z równania całkowego wywiedzionego z przekształconych równań Naviera-Stokesa jest uciążliwe z uwagi na postać tych równań i złożone relacje pomiędzy prędkością i wirowością w tych równaniach (Souli, 1996,).

Alternatywnym sposobem wyznaczenia wirowości proponowanym i przeanalizowanym na niżej prezentowanych przykładach obliczeniowych w niniejszej pracy jest sposób polegający na bezpośrednim wykorzystaniu zależności (6) i wprowadzeniu do niej związków całkowych będących rezultatem różniczkowania równań (4a) i (4b) odpowiednio względem argumentów (x) i (y) w wyniku czego otrzymuje się prostsze strukturalnie równanie opisujące pole wirowości rozpatrywanego przepływu.

Różniczkując równanie (4a) względem argumentu (y) i równanie (4b) względem argumentu (x) otrzymuje się:

$$\nabla_{yp} c_x(\mathbf{p}) = \\ -\frac{1}{4\pi\mu} \int_{(L)} [f_x(\mathbf{q})\nabla_{yp} K_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_y(\mathbf{q})\nabla_{yp} K_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q})] dL_q + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{(L)} [\tilde{c}_x(\mathbf{q})\nabla_{yp} E_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \tilde{c}_y(\mathbf{q})\nabla_{yp} E_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})] dL_q, \\ \mathbf{p} \in (L); \mathbf{q} \in (L) \quad (7a)$$

$$\nabla_{xp} c_y(\mathbf{p}) = \\ -\frac{1}{4\pi\mu} \int_{(L)} [f_x(\mathbf{q})\nabla_{xp} K_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_y(\mathbf{q})\nabla_{xp} K_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q})] dL_q + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{(L)} [\tilde{c}_x(\mathbf{q})\nabla_{xp} E_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \tilde{c}_y(\mathbf{q})\nabla_{xp} E_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})] dL_q, \\ \mathbf{p} \in (L); \mathbf{q} \in (L) \quad (7b)$$

Wprowadzając związki całkowe (7a) i (7b) do równania (6) otrzymuje się:

$$\omega_z(\mathbf{p}) = \\ = \frac{1}{8\pi} \left[-\frac{1}{\mu} \int_{(L)} f_x(\mathbf{q}) [\nabla_{yp} K_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \nabla_{xp} K_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q})] dL_q + \right. \\ + \int_{(L)} \tilde{c}_x(\mathbf{q}) [\nabla_{yp} E_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \nabla_{xp} E_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})] dL_q + \\ + \frac{1}{\mu} \int_{(L)} f_y(\mathbf{q}) [\nabla_{yp} K_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \nabla_{xp} K_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q})] dL_q + \\ \left. + \int_{(L)} \tilde{c}_y(\mathbf{q}) [\nabla_{yp} E_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \nabla_{xp} E_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})] dL_q \right], \quad (8) \\ \mathbf{p} \in (L); \mathbf{q} \in (L)$$

gdzie:

$$\nabla_{yp} K_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{(y_p - y_q)^3 + 3(x_p - x_q)^2(y_p - y_q)}{(r_{pq})^4}, \quad (8.1^1)$$

$$\nabla_{xp} K_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{-(y_p - y_q)^3 + 3(x_p - x_q)^2(y_p - y_q)}{(r_{pq})^4}, \quad (8.1^2)$$

$$\nabla_{yp} K_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{-(x_p - x_q)^3 + 3(x_p - x_q)(y_p - y_q)^2}{(r_{pq})^4}, \quad (8.1^3)$$

$$\nabla_{xp} K_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{(x_p - x_q)^3 + 3(x_p - x_q)(y_p - y_q)^2}{(r_{pq})^4} \quad (8.1^4)$$

oraz:

$$\begin{aligned} \nabla_{yp} E_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \nabla_{yp} E_{xxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) \\ &+ \nabla_{yp} E_{xyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \end{aligned} \quad (8.1^5)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{xp} E_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \nabla_{xp} E_{xyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + \\ &+ \nabla_{xp} E_{xyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \end{aligned} \quad (8.1^6)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{yp} E_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \nabla_{yp} E_{yxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + \\ &+ \nabla_{yp} E_{yxy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \end{aligned} \quad (8.1^7)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{xp} E_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \nabla_{xp} E_{yyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + \\ &+ \nabla_{xp} E_{yyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \end{aligned} \quad (8.1^8)$$

gdzie:

$$\nabla_{yp} E_{xxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{16(x_p - x_q)^3(y_p - y_q)}{(r_{pq})^6}, \quad (8.2^1)$$

$$\nabla_{xp} E_{yyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{16(x_p - x_q)(y_p - y_q)^3}{(r_{pq})^6}, \quad (8.2^2)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{xp} E_{xyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \\ &= -\frac{4\left(2(x_p - x_q)^3(y_p - y_q) - 2(x_p - x_q)(y_p - y_q)^3\right)}{(r_{pq})^6}, \end{aligned} \quad (8.2^3)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{yp} E_{yxy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \\ &= -\frac{4\left(2(x_p - x_q)(y_p - y_q)^3 - 2(x_p - x_q)^3(y_p - y_q)\right)}{(r_{pq})^6}, \end{aligned} \quad (8.2^4)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{xp} E_{xyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \\ &= -\frac{4\left(3(x_p - x_q)^2(y_p - y_q)^2 - (y_p - y_q)^4\right)}{(r_{pq})^6}, \end{aligned} \quad (8.2^5)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{yp} E_{yxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \\ &= -\frac{4\left(3(x_p - x_q)^2(y_p - y_q)^2 - (x_p - x_q)^4\right)}{(r_{pq})^6} \end{aligned} \quad (8.2^6)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{xp} E_{yyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \\ &= -\frac{4\left(3(x_p - x_q)^2(y_p - y_q)^2 - (y_p - y_q)^4\right)}{(r_{pq})^6}, \end{aligned} \quad (8.2^7)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{yp} E_{xxy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \\ &= -\frac{4\left(3(x_p - x_q)^2(y_p - y_q)^2 - (x_p - x_q)^4\right)}{(r_{pq})^6}, \end{aligned} \quad (8.2^8)$$

W podobny sposób wyznacza się funkcję $\Psi(x, y)$ po uprzednim wyznaczeniu $f_x(\mathbf{q})$ i $f_y(\mathbf{q})$ (z dokładnością do addytywnej stałej) ze związku całkowego wynikającego bezpośrednio z definicji funkcji prądu w przepływie dwuwymiarowym (Batchelor, 1967):

$$\Psi(\mathbf{p}) = -\frac{1}{4\pi\mu} \int_{(L)} \left[f_x(\mathbf{q}) S_x(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_y(\mathbf{q}) S_y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_q +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{(L)} \left[\tilde{c}_x(\mathbf{q}) W_x^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \tilde{c}_y(\mathbf{q}) W_y^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] dL_q,$$

$$\mathbf{p} \in (L); \mathbf{q} \in (L)$$

gdzie:

$$S_x(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = +\frac{1}{2}(y_p - y_q) \ln \left(\frac{1}{(r_{pq})^2} \right) - (y_p - y_q), \quad (9.1^1)$$

$$S_y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2}(x_p - x_q) \ln \left(\frac{1}{(r_{pq})^2} \right) + (x_p - x_q), \quad (9.1^2)$$

oraz:

$$\begin{aligned} W_x^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= W_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + \\ &+ W_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \end{aligned} \quad (9.1^3)$$

$$\begin{aligned} W_y^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= W_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + \\ &+ W_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q), \end{aligned} \quad (9.1^4)$$

gdzie:

$$W_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -2 \arctg \left(\frac{y_p - y_q}{x_p - x_q} \right) - 2 \frac{(x_p - x_q)(y_p - y_q)}{(r_{pq})^2}, \quad (9.2^1)$$

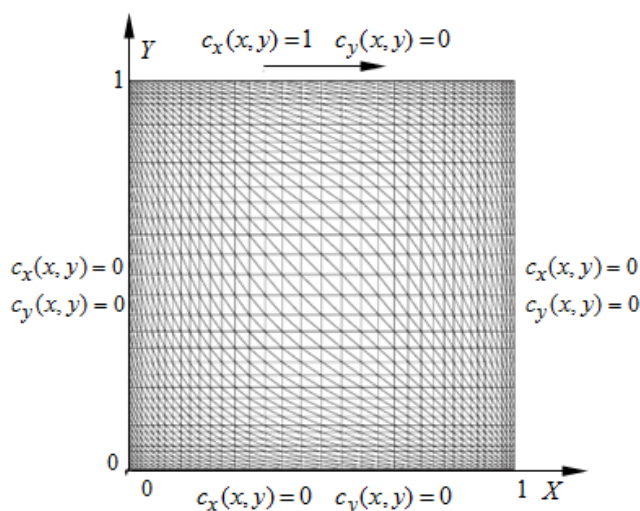
$$W_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -2 \arctg \left(\frac{y_p - y_q}{x_p - x_q} \right) + 2 \frac{(x_p - x_q)(y_p - y_q)}{(r_{pq})^2}, \quad (9.2^2)$$

$$W_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = W_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \frac{(x_p - x_q)^2 - (y_p - y_q)^2}{(r_{pq})^2}. \quad (9.2^{3,4})$$

2.2. Porównanie rozwiązań przepływu cieczy lepkiej metodą brzegowych równań całkowych z rozwiązaniami przy użyciu metod siatkowych

W celu wykazania dokładności metody brzegowych równań całkowych dokonano porównania rezultatów rozwiązania zagadnienia przepływu w kwadratowym zagłębieniu z jedną poruszającą się ścianką (Rys. 1) metodą brzegowych równań całkowych z wynikami obliczeń metodą elementów skończonych.

Zagadnienie to jest szeroko prezentowane w literaturze i piśmiennictwie poświęconym dyskretnym metodom wyznaczania przepływów Stokesa i jest ogólnie przyjętym sformułowaniem zadania testowego dla tych metod (Zienkiewicz i Taylor, 2000; Erturk i inni, 2005).



Rys. 1. Testowa siatka podziału obszaru (Zienkiewicz i Taylor, 2000)
 Warunki brzegowe dla zagłębienia z poruszającą się ścianką

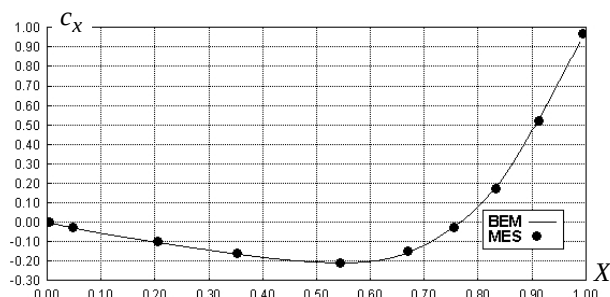
W sformułowaniu zadania obliczeniowego zakłada się że, ścianka $y=1$ porusza się ze stałą prędkością $c_x(x,y) = 1$ równoległe do osi $\{X\}$, a warunki brzegowe na pozostałych granicach obszaru wyrażają nieprzenikalność brzegu i brak poślizgu na ściankach

Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono porównanie przebiegów składowych prędkości c_x i c_y w przekroju $x=0.5$ wyznaczonymi przy użyciu metody elementów brzegowych z rozkładami tych wielkości otrzymanymi metodą elementów skończonych przy użyciu programu komputerowego opublikowanego w pracy Zienkiewicza i Taylora (2000)

Dla analizowanego przekroju wartości składowych prędkości c_x i c_y błąd rozwiązania porównywanymi metodami: metodą elementów brzegowych i i metodą elementów skończonych zestawiono w tabelach 1 i 2.

Względne błędy obliczeń poszczególnych wielkości do przedstawionych niżej zestawień tabelarycznych wyznaczono według formuły:

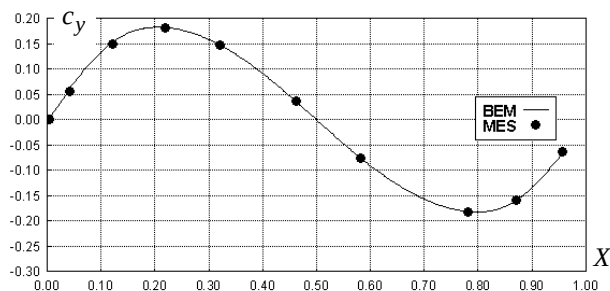
$$\Delta f_{MEB} = \left| \frac{f_{MES} - f_{MEB}}{f_{MES}} \right| * 100\% \quad (10)$$



Rys. 2. Porównanie przebiegu składowej prędkości c_x ($x=0.5$) wyznaczonej MEB z rozwiązaniem MES (Zienkiewicz i Taylor, 2000)

Tab. 1. Przepływ cieczy lepkiej w zagłębieniu kwadratowym składowa prędkości c_x - błąd rozwiązania MEB.

Współrzędne węzłów		Roz. num. MES	Roz. num. MEB	Błąd met. MEB
		400 elementów		
X_M	Y_M	$C_{X_{MES}}$ [m/s]	$C_{X_{MEB}}$ [m/s]	$\Delta C_{X_{MEB}}$ [%]
-	-			
5,0E-01	4,9E-02	-3,000E-02	-2,979E-02	6,927E-01
5,0E-01	2,0E-01	-1,010E-01	-1,000E-01	9,747E-01
5,0E-01	3,5E-01	-1,630E-01	-1,627E-01	1,547E-01
5,0E-01	5,4E-01	-2,080E-01	-2,069E-01	5,236E-01
5,0E-01	6,7E-01	-1,560E-01	-1,559E-01	6,404E-02
5,0E-01	7,5E-01	-3,300E-02	-3,279E-02	6,361E-01
5,0E-01	8,3E-01	1,690E-01	1,684E-01	3,544E-01
5,0E-01	9,1E-01	5,280E-01	5,247E-01	6,292E-01
5,0E-01	9,9E-01	9,140E-01	9,125E-01	1,692E-01
		800 elementów		
5,0E-01	4,9E-02	-3,000E-02	-2,992E-02	2,767E-01
5,0E-01	2,0E-01	-1,010E-01	-1,014E-01	3,901E-01
5,0E-01	3,5E-01	-1,630E-01	-1,631E-01	6,196E-02
5,0E-01	5,4E-01	-2,080E-01	-2,075E-01	2,212E-01
5,0E-01	6,7E-01	-1,560E-01	-1,560E-01	1,923E-02
5,0E-01	7,5E-01	-3,300E-02	-3,308E-02	2,455E-01
5,0E-01	8,3E-01	1,690E-01	1,693E-01	2,012E-01
5,0E-01	9,1E-01	5,280E-01	5,293E-01	2,519E-01
5,0E-01	9,9E-01	9,140E-01	9,134E-01	6,783E-02



Rys. 3. Porównanie przebiegu składowej prędkości c_y ($y=0.5$) wyznaczonej MEB z rozwiązaniem MES (Zienkiewicz i Taylor, 2000)

Tab. 2. Przepływ cieczy lepkiej w zagłębieniu kwadratowym
składowa prędkości c_y – błąd rozwiązania MEB

Współrzędne węzłów		Roz. num. MES	Roz. num. MEB	Błąd met. MEB
		400 elementów		
X_M	Y_M	C_{yMES} [m/s]	C_{yMEB} [m/s]	ΔC_{yMEB} [%]
-	-			
3,8E-02	5,0E-01	5,800E-02	5,765E-02	6,075E-01
1,2E-01	5,0E-01	1,520E-01	1,506E-01	9,305E-01
2,2E-01	5,0E-01	1,820E-01	1,816E-01	2,234E-01
3,2E-01	5,0E-01	1,480E-01	1,477E-01	1,704E-01
4,6E-01	5,0E-01	3,800E-02	3,785E-02	4,008E-01
5,8E-01	5,0E-01	-7,400E-02	-7,359E-02	5,593E-01
7,8E-01	5,0E-01	-1,810E-01	-1,797E-01	7,051E-01
8,7E-01	5,0E-01	-1,590E-01	-1,588E-01	1,340E-01
9,6E-01	5,0E-01	-6,300E-02	-6,295E-02	7,302E-02
		800 elementów		
3,8E-02	5,0E-01	5,8000E-02	5,8167E-02	2,8793E-01
1,2E-01	5,0E-01	1,5200E-01	1,5264E-01	4,2105E-01
2,2E-01	5,0E-01	1,8200E-01	1,8218E-01	1,0110E-01
3,2E-01	5,0E-01	1,4800E-01	1,4812E-01	8,1081E-02
4,6E-01	5,0E-01	3,8000E-02	3,7924E-02	2,0000E-01
5,8E-01	5,0E-01	-7,4000E-02	-7,3803E-02	2,6622E-01
7,8E-01	5,0E-01	-1,8100E-01	-1,8160E-01	3,3260E-01
8,7E-01	5,0E-01	-1,6100E-01	-1,5890E-01	6,2893E-02
9,6E-01	5,0E-01	-6,3000E-02	-6,2977E-02	3,6508E-02

Do obliczeń metodą elementów skończonych przyjęto siatkę składającą się z 2888 węzłów, natomiast w przypadku metody elementów brzegowych założono 400 punktów kolokacji na brzegu, a w drugim wariancie 800 punktów.

Wyznaczony błąd metody MEB składowych prędkości dla brzegu składającego się z $N=400$ elementów nie przekracza 1%, natomiast dla brzegu łożonego z $N=800$ elementów błąd nie przekracza 0,5%. Wraz ze wzrostem zagęszczenia linii brzegowej, błąd metody brzegowych równań całkowych maleje.

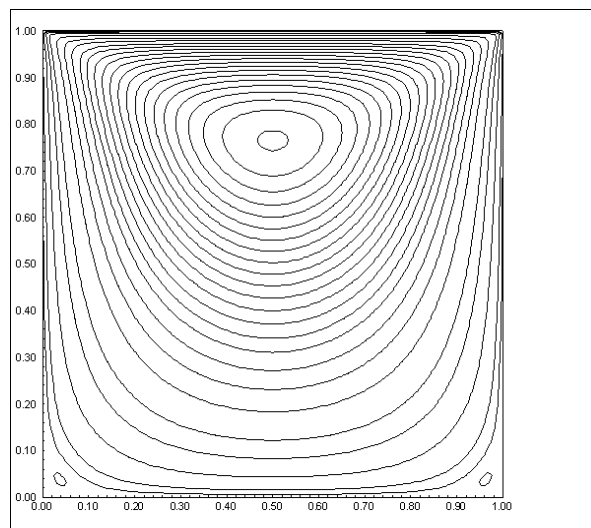
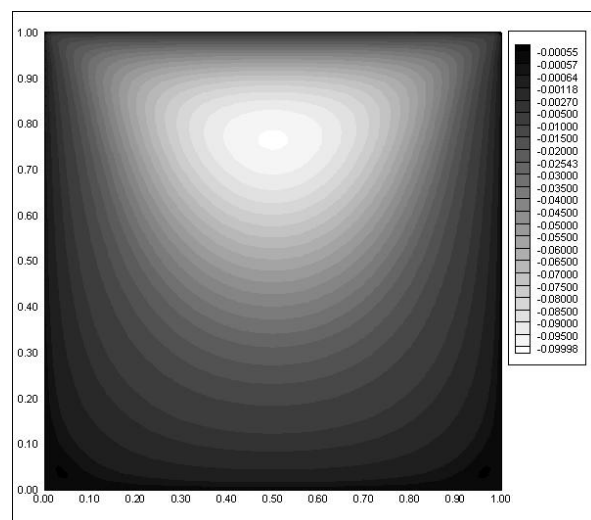
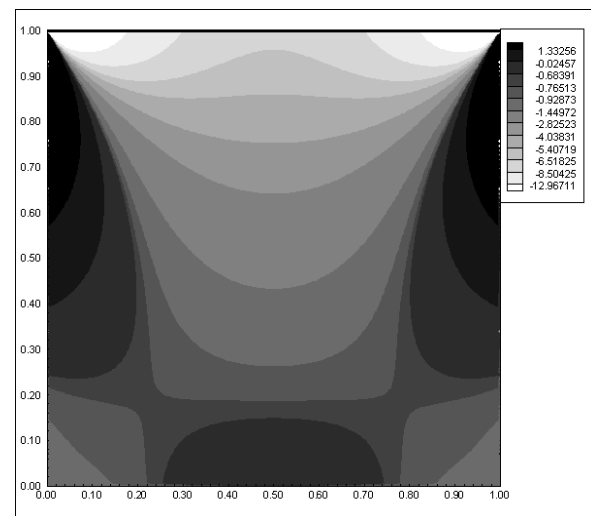
Niewielkie różnice pomiędzy rezultatami metodą elementów skończonych, uznawanymi w tym zagadnieniu testowym za wartości referencyjne i wynikami obliczeń metodą elementów brzegowych wskazują, że algorytmy obliczeniowe proponowanego sformułowania metody elementów brzegowych charakteryzują się dużą dokładnością.

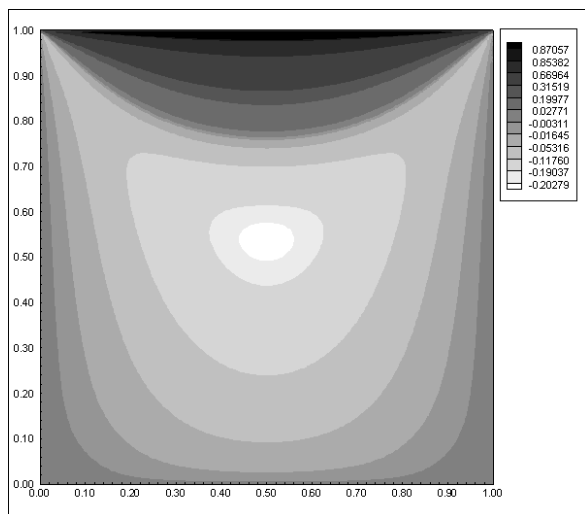
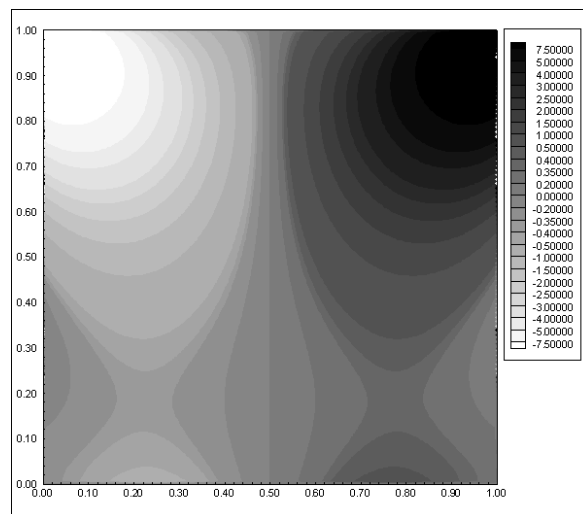
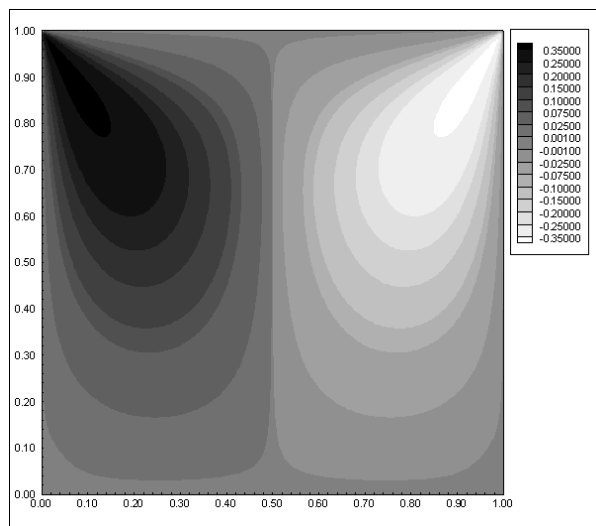
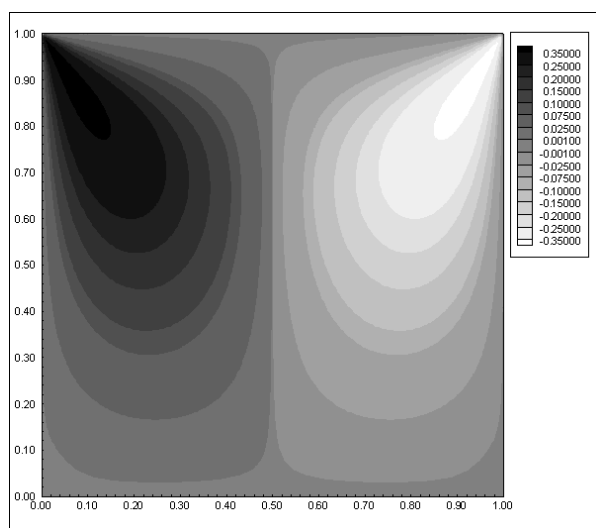
Graficzne rezultaty obliczeń zagadnienia testowego przepływu w kwadratowym zagłębieniu metodą elementów brzegowych przedstawiono na rysunkach 4.a. – 4.f.

Na rysunku 4a. przedstawiono wykresy linii prądu dwuwymiarowego przepływu Stokes'a w kwadratowym zagłębieniu, a na rysunku 4a*. wykres warstwicowy funkcji prądu $\Psi(x,y)$. Na wykresie 4b. zaprezentowano rozkład wirowości $\omega(x,y)$ w ruchu cieczy w zagłębieniu powodowanym jednorodnym przepływem cieczy nad zagłębieniem.

Na rysunkach 4c., 4d. i 4e. przedstawiono odpowiednio:

- składową prędkości $c_x(x,y)$ przepływu w zagłębieniu;
- składową prędkości $c_y(x,y)$ przepływu w zagłębieniu;
- prędkość $c(x,y)$, a na rysunku 4f. rozkład ciśnienia.

**Rys. 4.a*.** Kwadratowe zagłębienie – funkcja prądu $\Psi(x,y)$
Wykres linii prądu**Rys. 4.a.** Kwadratowe zagłębienie – funkcja prądu $\Psi(x,y)$
Wykres warstwicowy linii prądu**Rys. 4.b.** Kwadratowe zagłębienie – wirowość $\omega(x,y)$

Rys. 4.c. Kwadratowe zagłębienie – składowa prędkości $c_x(x,y)$ Rys. 4.f. Kwadratowe zagłębienie – ciśnienie $p(x,y)$ Rys. 4.d. Kwadratowe zagłębienie – składowa prędkości $c_y(x,y)$ Rys. 4.e. Kwadratowe zagłębienie – prędkość $c(x,y)$

W celu porównania rezultatów rozwiązań zagadnień obliczeniowych przy użyciu metody elementów brzegowych z eksperymentem, dokonano zestawień przebiegu linii prądu (potencjału prądu) przepływów płaskich w kanałach o różnej geometrii ścianek i obiektów na drodze przepływu wyznaczonych z obliczeń z wynikami doświadczalnej wizualizacji przepływów (Taneda, 1979).

Obliczenia wykonano dla geometrii brzegu, w którym wymiary zostały przyjęte zgodnie z wymiarami obszaru przepływu na stanowisku laboratoryjnym (Taneda, 1979).

Poniżej przedstawiono graficzne porównania obrazów przepływów zrealizowanych doświadczalnie z rezultatami obliczeń numerycznych metodą brzegowych równań całkowych:

Na rysunkach 5.1.a. i 5.1.b. porównano obraz linii prądu przepływu nad prostokątną cienką przeszkodą z wykresem funkcji prądu, natomiast na rysunkach 5.2.a. i 5.2.b. obraz linii prądu przepływu wokół cienkiej przeszkody nachylonej pod kątem 105° do kierunku przepływu.

Na rysunkach 6.a. i 6.b. przedstawiono przebieg linii prądu przepływu nad kwadratową przeszkodą oraz wykres l funkcji prądu dla tego przypadku.

Na rysunkach 7.1.a.b. – 7.4.a.b. przedstawiono obrazy linii prądu przepływu nad prostokątnym uskokiem przy różnym stosunku szerokości uskoku b do wysokości h uskoku, uzyskane eksperymentalnie, porównując je z przebiegiem funkcji prądu.

Rysunki 7.1.a. i 7.1.b. przedstawiają linie prądu przepływu nad uskokiem i przebieg funkcji prądu dla $b/h = 0.5$

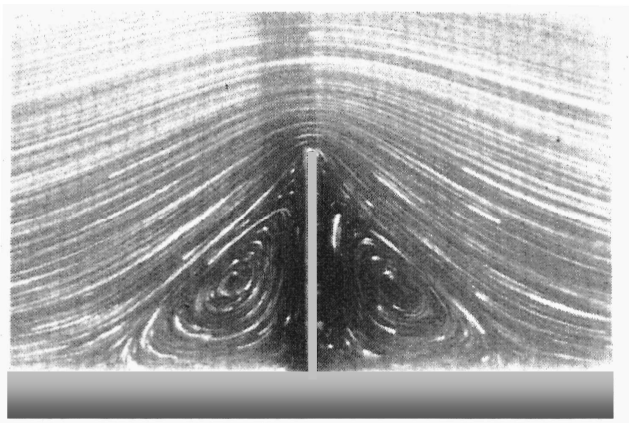
Rysunki 7.2.a. i 7.2.b. przedstawiają linie prądu przepływu nad uskokiem i przebieg funkcji prądu dla $b/h = 0.1$

Rysunki 7.3.a. i 7.3.b. przedstawiają linie prądu przepływu nad uskokiem i przebieg funkcji prądu dla $b/h = 0.2$

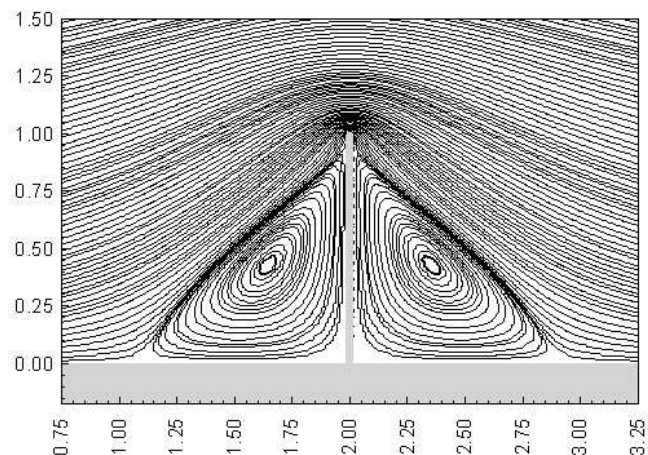
Rysunki 7.4.a. i 7.4.b. przedstawiają linie prądu przepływu nad uskokiem i przebieg funkcji prądu dla $b/h = 0.3$

Na rysunkach 8.a. i 8.b. przedstawiono linie prądu i przebieg funkcji prądu przepływu w trójkątnym uskoku.

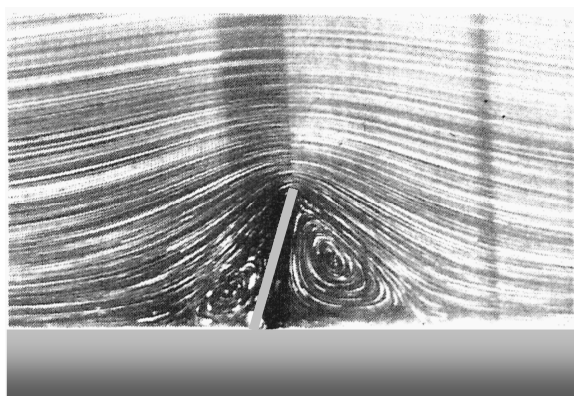
Rysunek 9.a. przedstawia linie prądu przepływu nad cylindryczną przeszkodą otrzymane drogą eksperymentu, natomiast na rysunku 9.b. wykreślono przebieg funkcji prądu wyznaczony metodą brzegowych równań całkowych.



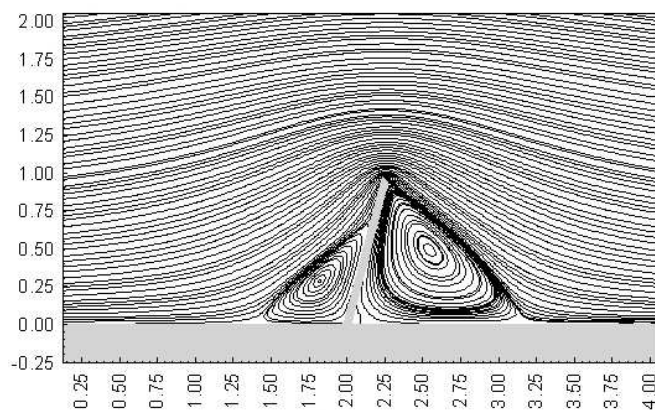
Rys. 5.1.a. Linie prądu przepływu nad prostopadłą przeszkodą.
Fotografia eksperymentu $Re=1.40E-02$ (Taneda, 1979).



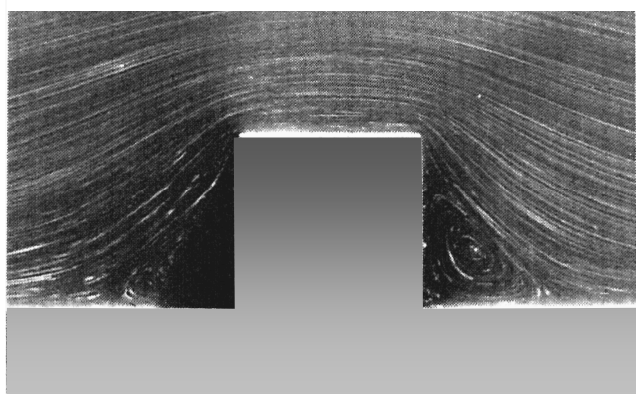
Rys. 5.1.b. Funkcja prądu $\Psi(x, y)$ przepływu nad prostopadłą przeszkodą – rozwiązanie numeryczne MEB.



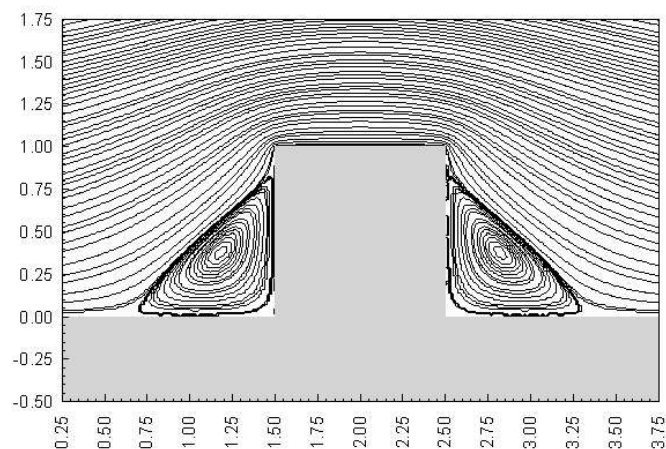
Rys. 5.2.a. Linie prądu przepływu nad przeszkodą
ustawioną pod kątem 105° w stosunku do podstawy.
Fotografia eksperymentu $Re=1.4E-02$ (Taneda, 1979).



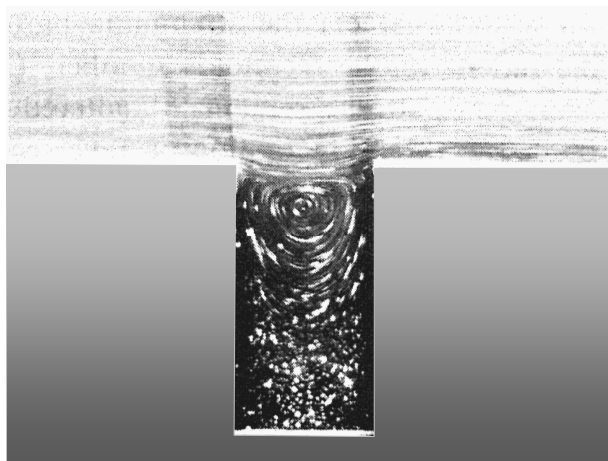
Rys. 5.2.b. Funkcja prądu $\Psi(x, y)$ przepływu nad przeszkodą
ustawioną pod kątem 105° w stosunku do podstawy.
Rozwiązanie numeryczne MEB.



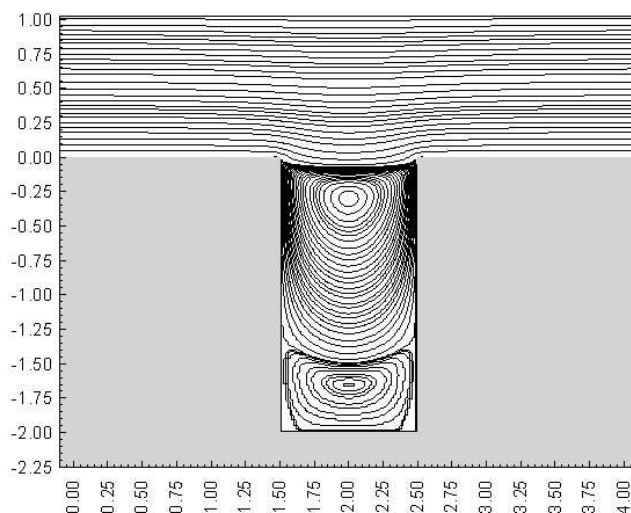
Rys. 6.a. Linie prądu przepływu nad kwadratową przeszkodą .
Fotografia eksperymentu $Re=2.0E-02$ (Taneda, 1979).



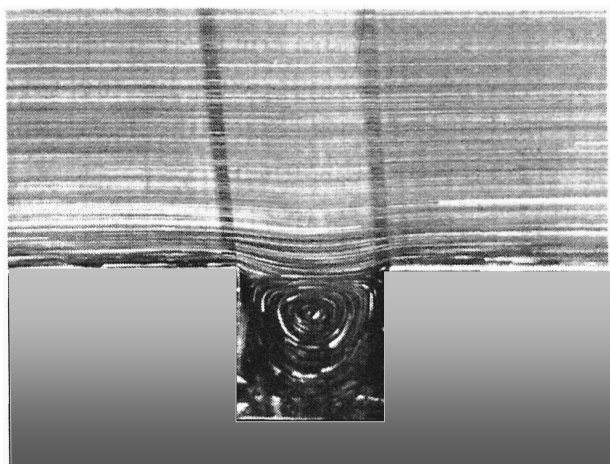
Rys. 6.b. Funkcja prądu $\Psi(x, y)$ przepływu nad przeszkodą
kwadratową . Rozwiązanie numeryczne MEB.



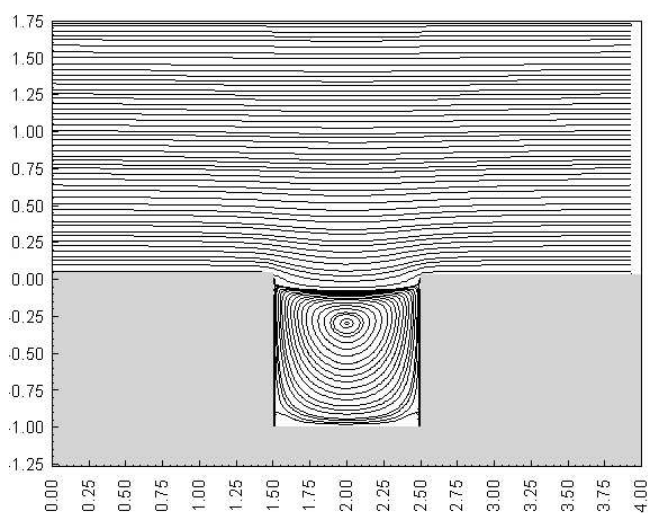
Rys. 7.1.a. Linie prądu przepływu nad prostokątnym uskokiem o stosunku boków: $b/h = 0.5$ – Fotografia eksperymentu $Re=1.0E-02$ (Taneda, 1979).



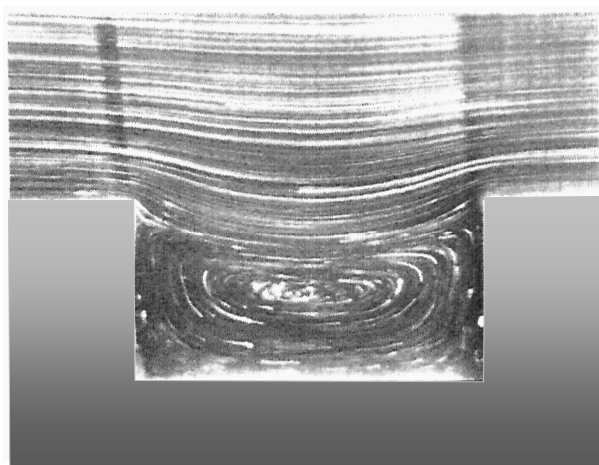
Rys. 7.1.b. Funkcja prądu $\Psi(x, y)$ przepływu nad prostokątnym uskokiem o stosunku boków: $b/h = 0.5$ Rozwiązanie numeryczne MEB.



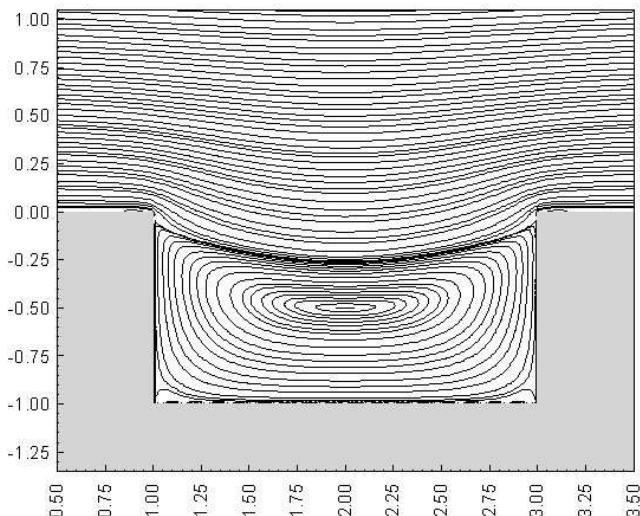
Rys. 7.2.a. Linie prądu przepływu nad prostokątnym uskokiem o stosunku boków: $b/h = 1.0$ Fotografia eksperymentu $Re=1.0E-02$ (Taneda, 1979).



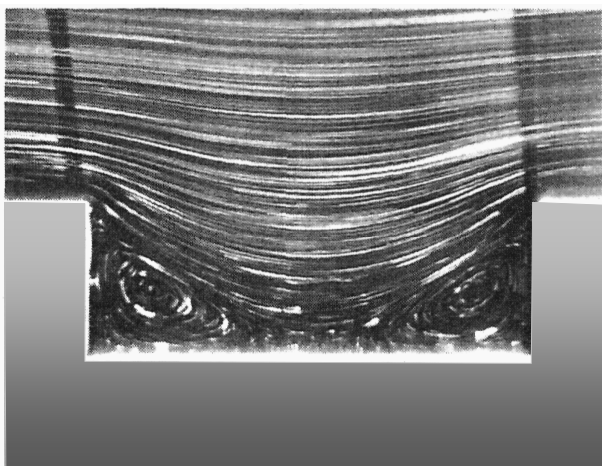
Rys. 7.2.b. Funkcja prądu $\Psi(x, y)$ przepływu nad prostokątnym uskokiem o stosunku boków: $b/h = 1.0$ Rozwiązanie numeryczne MEB.



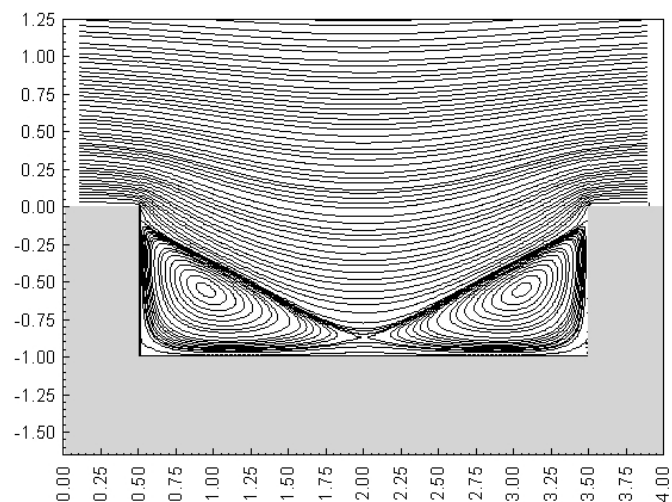
Rys. 7.3.a. Funkcja prądu przepływu nad prostokątnym uskokiem o stosunku boków: $b/h = 2.0$ Fotografia eksperymentu $Re=1.0E-02$ (Taneda, 1979).



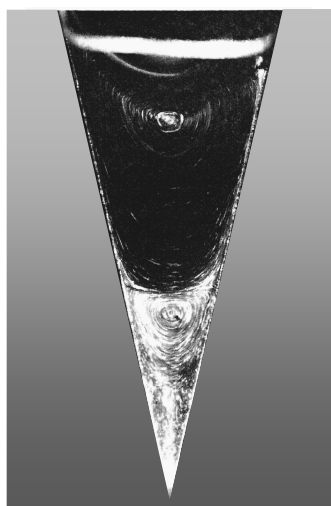
Rys. 7.3.b. Funkcja prądu $\Psi(x, y)$ przepływu nad prostokątnym uskokiem o stosunku boków: $b/h = 2.0$ Rozwiązanie numeryczne MEB.



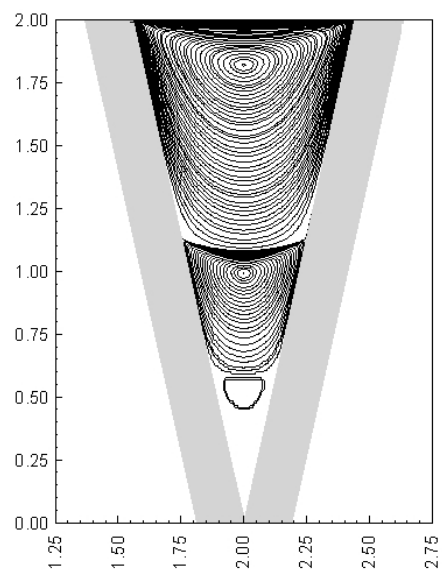
Rys. 7.4.a. Linie prądu przepływu nad prostokątnym uskokiem o stosunku boków: $b/h = 3.0$
Fotografia eksperymentu $Re=1.0E-02$ (Taneda, 1979).



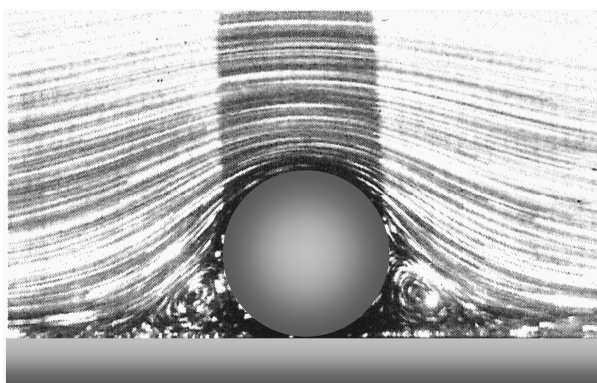
Rys. 7.4.b. Funkcja prądu $\Psi(x, y)$ przepływu nad prostokątnym uskokiem o stosunku boków: $b/h = 3.0$
Rozwiązanie numeryczne MEB.



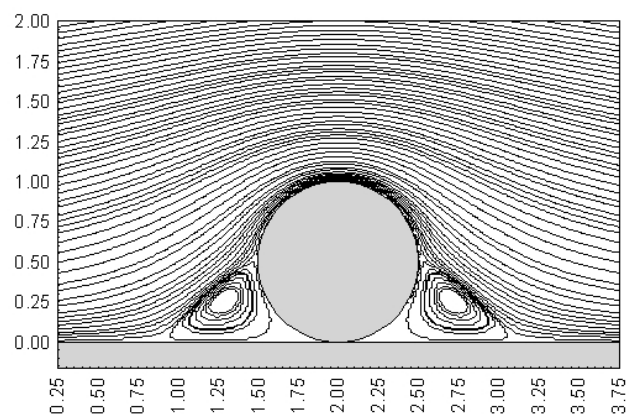
Rys. 8.a. Linie prądu przepływu w trójkątnym uskoku
Fotografia eksperymentu $Re=1.7E-01$ (Taneda, 1979).



Rys. 8.b. Funkcja prądu $\Psi(x, y)$ przepływu w trójkątnym uskoku
Rozwiązanie numeryczne MEB.



Rys. 9.a. Linie prądu przepływu Stokesa nad walcem
Fotografia eksperymentu $Re= 1.1E-02$ (Taneda, 1979).

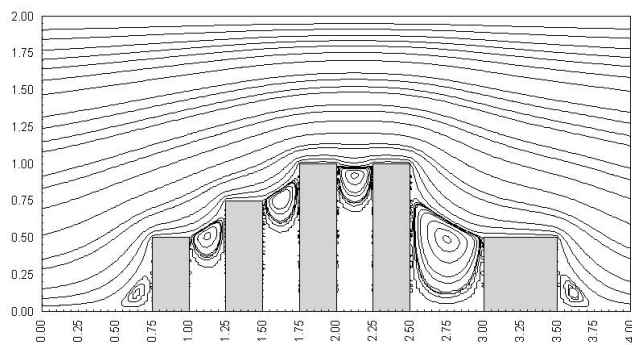


Rys. 9.b. Funkcja prądu $\Psi(x, y)$ przepływu nad walcem
Rozwiązanie numeryczne MEB.

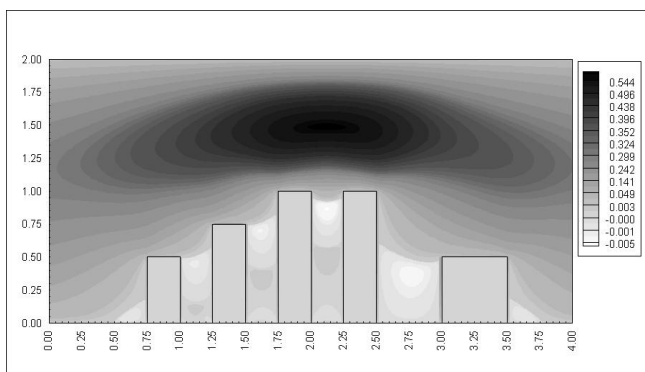
Niżej przedstawiono graficzne rezultaty obliczeń przepływu nad ścianką ożebrowaną.

Na rysunkach 10.a -10.f wykreślono charakterystyki płaskiego przepływu cieczy lepkiej w kanale nad ścianką ożebrowaną:

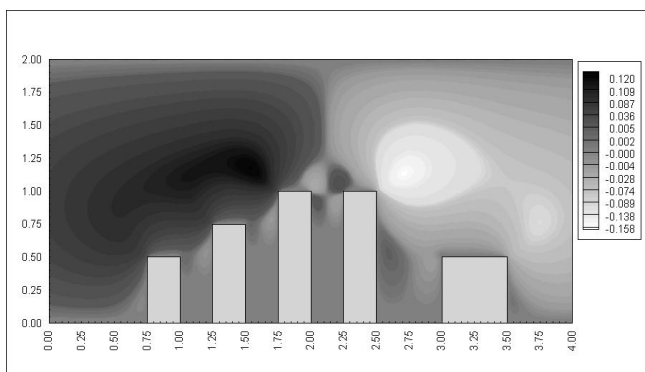
- linie prądu Ψ (Rys.10.a);
- składową prędkości c_x (Rys.10.b);
- składową prędkości c_y (Rys.10.c);
- prędkość wypadkową c (Rys. 10.d);
- rozkład wirowości ω (Rys. 10.e);
- oraz pole ciśnienia p (Rys. 10.f).



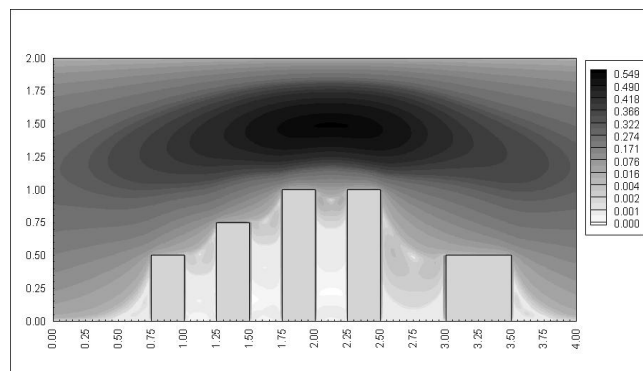
Rys. 10.a. Funkcja prądu $\Psi(x,y)$ przepływu cieczy lepkiej w kanale nad ścianką ożebrowaną.



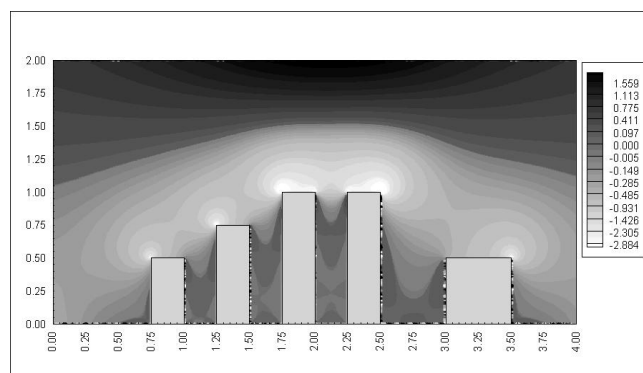
Rys. 10.b. Składowa prędkości $c_x(x,y)$ przepływu cieczy lepkiej w kanale nad ścianką ożebrowaną



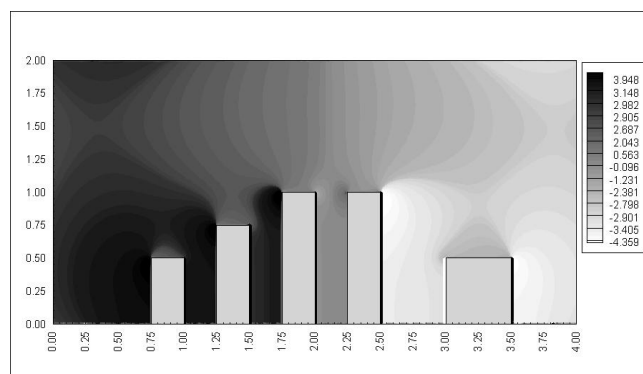
Rys. 10.c. Składowa prędkości $c_y(x,y)$ przepływu cieczy lepkiej w kanale nad ścianką ożebrowaną



Rys. 10.d. Pole prędkości $c(x,y)$ przepływu cieczy lepkiej w kanale nad ścianką ożebrowaną



Rys. 10.e. Rozkład wirowości $\omega(x,y)$ w przepływie cieczy lepkiej w kanale nad ścianką ożebrowaną



Rys. 10.f. Pole ciśnienia $p(x,y)$ w przepływie cieczy lepkiej w kanale nad ścianką ożebrowaną

3. WNIOSKI

Metoda brzegowych równań całkowych nie jest rozpo-
wszechniona i stosowana tak szeroko jak metody siatkowe.
Jednak niewątpliwie walory metody brzegowych równań
całkowych, w tym zasadniczy, polegający na sprowadzeniu
zagadnień brzegowych i początkowo-brzegowych dla rów-
nań różniczkowych w obszarze rozwiązania do właściwych
zagadnień na brzegu obszaru bez konieczności dyskretyzacji
obszaru są istotnym czynnikiem stymulującym rozwój
metody.

Klasyczne metody siatkowe do rozwiązywania zagad-
nień opisanych złożonymi układami równań różniczkowych

w skomplikowanych geometrycznie obszarach pomimo prostoty sformułowania wymagają generowania rozległych, zaawansowanych strukturalnie siatek, absorbujących pamięć maszyn liczących i pomnażających czas obliczeń.

Metoda brzegowych równań całkowych jakkolwiek bardziej skomplikowana w matematycznym dyskretnym opisie zagadnień generuje znacznie mniejsze układy algebraicznych równań liniowych w procesie numerycznego całkowania zdyskretyzowanych brzegowych równań całkowych, przy tym z reguły dobrze uwarunkowane, co ma istotne znaczenie przy doborze metod ich rozwiązywania.

Metoda elementów brzegowych ze względu na możliwości formułowania złożonego matematycznego opisu zjawisk przepływowych i zagadnień brzegowych dla równań opisujących przepływy jest efektywną metodą rozwiązywania zagadnień inżynierskich o dużej skuteczności i dokładności, co wykazują prezentowane wyżej porównania rezultatów obliczeń z rozwiązaniami analitycznymi i danymi eksperymentalnymi.

LITERATURA

1. **Batchelor G. K.** (1967), *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University.
2. **Brebbia C. A.** (1984), *Topics in Boundary Element Research, Vol. 1. Basic Principles and Applications*, Springer-Verlag, NY.
3. **Brebbia C. A., Telles J. F. C., Wrobel L. C.** (1984), *Boundary element Techniques. Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, NY.
4. **Erturk E., Corke T. C., Gokcol C.** (2005), Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers, *International Journal Numerical Methods in Fluids*, Vol. 48, No 7, 747 – 774.
5. **Hirsh Ch.** (2007), *Numerical Computation of Internal and External Flows. The Fundamentals of computational Fluid Dynamics*, Elsevier.
6. **Pozrikidis C.** (1991), *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flows*, Cambridge University Press, NY.
7. **Prosnak W. J.** (1993), *Wprowadzenie do numerycznej mechaniki płynów, Podstawowe metody numeryczne*. Ossolineum.
8. **Prosnak W. J.** (2006), *Równania klasycznej mechaniki płynów*, Wydawnictwo Naukowe PWN.
9. **Souli M.** (1996), Vorticity boundary conditions for Navier-Stokes equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 134, No 3, 311-323.
10. **Taneda S.** (1979), Visualization of Separating Stokes Flows, *J. Phys. Soc. Japan*, Vol. 46, No 6, 1935-1942.
11. **Teleszewski T. J.** (2008), *Zastosowanie metody brzegowych równań całkowych do analizy wybranych zagadnień przepływu cieczy lepkiej (rozprawa doktorska)*, Pol. Białostocka.
12. **Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.** (2000), *The Finite Element Method, Vol. 3. Fluid Dynamics*, Butterworth-Heinemann.

APPLICATION OF BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR SOLUTION OF TWO DIMENSIONAL FLOWS

Abstract: Object of presented work is implementation of method of boundary integral equations to solving of viscous liquid flow problems. The computing algorithm for laminar flows of viscous liquid flows (Stokes flows) at use of method of the boundary integral equations consisting in to application of conjugate integral equations describing of speed and stresses in liquid to delimitation of stress at boundary conditions formulated for speed, to delimitation of speed from integral relationships, and in further order delimitation of the pressure, vorticity and stream function by utilization of differential relationships among these quantities and speed of movement of liquid. One represented results of solution of the test problem of flat flow in square cavity and one compared results of calculations of boundary element method with results of calculations with finite element method. One made comparisons streamlines obtained by experimental visualizations of the flows with stream function charts for row laminar flows in flat ducts with various configuration.

Opracowanie wykonano w ramach pracy statutowej S/WBIIŚ/5/2011 i projektu współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego WIEM/POKL/MD/II/2010/6.

WPŁYW SZCELINY NA ROZKŁAD CIŚNIENIA KONTAKTOWEGO W PŁASKIM ZAGADNIENIU Z UWZGLĘDNIENIEM TARCIA

Adam TOMCZYK*

*Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka,
ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

a.tomczyk@pb.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono rozwiązanie problemu, w którym sztywny stempel przesuwany się po powierzchni półprzestrzeni osłabionej pojedynczą szczeliną wnikałą w powierzchnię w pewnej odległości od osi stempla. Rozważono przy tym sytuację kiedy stempel ma podstawę płaską lub podstawę o kształcie parabolicznym badając tym samym efekt kształtu stempla. Określono rozkłady naprężeń kontaktowych pod stemplem dla różnych wartości odległości szczeliny od stempla, długości szczeliny i jej orientacji oraz dla różnych wartości współczynnika tarcia i współczynnika Poissona. Dokonano także analizy wpływu wspomnianych parametrów na wielkość strefy kontaktu oraz na wartość mimośrodów strefy względem osi stempla parabolicznego. Zwrócono uwagę, że w pewnych sytuacjach zastąpienie działania stempla regularnymi rozkładami ciśnienia kontaktowego bez uwzględnienia wzajemnego oddziaływania szczeliny (lub układu szczelin) i stempla może prowadzić do znacznych błędów.

1. WPROWADZENIE

Praktyka inżynierska zwłaszcza z zakresu budowy i eksploatacji maszyn czy też z zakresu technologii procesów obróbki skrawaniem bardzo często dostarcza zagadnień związanych z problemami tarcia współpracujących ze sobą elementów. Wiele klasycznych przykładów tego typu zagadnień odnajdziemy np. we wszelkiego rodzaju hamulcach ciernych, przekładniach zębatych, w procesie szlifowania, czy też w zagadnieniu hamowania koła na szynie kolejowej. W analizie tego typu zagadnień w przeważającej większości zakłada się, że oba współpracujące ze sobą elementy pozbawione są jakichkolwiek uszkodzeń np. w postaci pęknięć powierzchniowych lub podpowierzchniowych czy też otworów. Jest rzeczą oczywistą, że pojawienie się takich uszkodzeń pociąga za sobą redystrybucję a przede wszystkim silną koncentrację naprężeń związaną z efektem działania karbu czy szczeliny. Znajomość wartości współczynników intensywności naprężeń – a więc znajomość charakteru tej koncentracji – pozwala na prognozowanie pęknięcia tych elementów i nierzadko na zapobieżenie katastrofie.

W niniejszej pracy skupiono się głównie na analizie efektów związanych z przesuwaniem się dociskanego stempla po powierzchni półprzestrzeni sprężystej osłabionej pojedynczą szczeliną powierzchniową. Rozpatrzono tu płaskie zagadnienie zakładając jednocześnie, że stempel jest idealnie sztywny i pomijając efekty związane z generacją ciepła na skutek tarcia. W literaturze najczęściej modeluje się tego typu zagadnienia zadając obciążenie w postaci odpowiedniego ciśnienia kontaktowego na powierzchni półprzestrzeni w miejscu działania stempla.

Takie podejście znajdziemy np. w cyklu prac Keera i współautorów (Keer i Bryant, 1983; Keer et al., 1982; Fan et al., 1992). Autorzy poddali tu analizie między innymi problem zmęczenia koła osłabionego pojedynczą szczeliną (Keer i Bryant, 1983), a także zagadnienie gdzie półprzestrzeń osłabiona jest dwoma szczelinami: pionową szczeliną

brzegową i poziomą podpowierzchniową (Keer et al., 1982). Podjęto także próbę zbadania wzajemnego oddziaływania szczeliny i cylindrycznego stempla ale tylko dla przypadku kiedy szczelina znajduje się dokładnie pod stemplem (Bryant et al., 1984). Podobną tematykę czytelnik odnajdzie także w pracach Hasebe i współautorów (np. Hasebe, 1981; Hasebe et al., 1989; Okumura et al., 1990; Hasebe i Qian, 1995, 1997, 1998; Qian i Hasebe, 1997) gdzie np. rozważano stempel, którego jeden koniec był zaokrąglony a drugi ostry (Hasebe i Qian, 1998). Problem kontaktu między stemplem a półpłaszczyzną osłabioną pęknięciami był też przedmiotem badań Panasyuka i współautorów (np. Panasyuk et al., 1995, 2000). Należy zwrócić uwagę, że przedyskutowano tu problem zamykania się szczeliny brzegowej znajdującej się w obszarze naprężeń ściskających z uwzględnieniem możliwości wystąpienia tarcia na jej powierzchniach (Panasiuk et al., 2000).

W pracach Goshimy i współautorów znajdziemy także efekty związane z generacją ciepła na skutek tarcia między stemplem a powierzchnią półprzestrzeni (Goshima i Keer, 1990; Goshima i Kamishima, 1994, 1996; Goshima, 2003; Goshima i Soda, 1997; Goshima et al., 1990). Uwzględniono tu jednocześnie efekty związane ze zmęczeniem materiału. Analizowano przy tym uszkodzenie w postaci pojedynczej szczeliny brzegowej (Goshima i Keer, 1990), układu dwóch szczelin brzegowych o różnym kącie nachylenia (Goshima i Kamishima, 1996) oraz układu szczelin periodycznych (Goshima i Kamishima, 1994; Goshima, 2003). W omawianym cyklu prac znajdziemy także rozwiązanie zagadnienia płaskiego z uszkodzeniem w postaci pojedynczej szczeliny podpowierzchniowej (Goshima i Soda, 1997) a także zagadnienia z powierzchniową szczeliną trójwymiarową (Goshima, 2003; Goshima i inni, 1990).

Niniejsza praca stanowi kontynuację wcześniejszych prac (np. Savruk i inni, 2007, 2008, Savruk i Tomczyk, 2010). Zasadniczym problemem jaki tu analizowano było określenie wpływu obecności szczeliny brzegowej na roz-

kłady ciśnienia kontaktowego pod stemplem. Rozpatrzono przy tym sytuacje kiedy podstawa stempla ma kształt paraboliczny oraz płaski. Należy podkreślić, że podobny temat był podejmowany w literaturze gdzie wykorzystano model dyslokacyjny (np. Fujimoto et al., 1992) jednak tylko dla stempla parabolicznego i szczeliny podpowierzchniowej bez uwzględnienia tarcia między stemplem i powierzchnią półprzestrzeni. W prezentowanej pracy szczególny nacisk położono na stworzenie procedur numerycznych i wykorzystanie ich do szczegółowej analizy numerycznej wspomnianego wcześniej zagadnienia.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

We wcześniejszych pracach (np. Savruk et al., 2007, 2008, Savruk i Tomczyk, 2010) przedstawiono rozwiązanie ogólne zagadnienia, w którym stempel dociskany jest do powierzchni półprzestrzeni sprężystej osłabionej uszkodzeniami w postaci układu szczelin podpowierzchniowych jak i powierzchniowych także krzywoliniowych (Rys. 1). Pomiędzy idealnie sztywnym stemplem a powierzchnią półprzestrzeni występuje tarcie scharakteryzowane współczynnikiem tarcia ρ .

Obciążenie stempla stanowi siła P zaś a jest połową strefy kontaktu. Sam stempel znajduje się w stanie równowagi granicznej. Do rozwiązania zagadnienia wykorzystano do tego celu ogólne potencjały zespolone naprężeń (zob. Muskhelishvili, 1962; Savruk, 1981) dla układu szczelin krzywoliniowych w półprzestrzeni, na powierzchni której zadane jest obciążenie zewnętrzne uzyskując odpowiedni układ równań całkowych (1) wraz z warunkiem równowagi stempla (2) oraz warunkiem jednoznaczności przemieszczeń (3) podczas „obchodzenia” każdej wewnętrznej szczeliny:

$$\varepsilon \rho \sigma(x) + \frac{1}{\pi} \int_{L_0} \frac{\sigma(t) dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_L [K_1(t, x) g'(t) dt +$$

$$+ L_1(t, x) \overline{g'(t)} dt] = \frac{4G}{\kappa+1} f'(x), \quad x \in L_0, \quad (1a)$$

$$\int_L [K_2(t, t') g'(t) dt + L_2(t, t') \overline{g'(t)} dt] +$$

$$+ \int_{L_0} M(t, t') \sigma(t) dt = \pi p(t'), \quad t' \in L, \quad (1b)$$

$$\int_{L_0} \sigma(t) dt = -P, \quad (2)$$

$$\int_{L_k} g'(t) dt = 0, \quad k = \overline{2, n}. \quad (3)$$

gdzie: $\varepsilon = (\kappa - 1)/(\kappa + 1)$, $\kappa = 3-4\nu$, G – moduł sztywności, ν – współczynnik Poissona, $g'(t)$ – pochodna wektora skośków przemieszczeń na konturach szczelin, $f(x)$ – funkcja opisująca kształt podstawy stempla, $p(t)$ – samorzównoważone obciążenie na brzegach szczelin.

Jądra układu równań (1) można przedstawić w postaci:

$$K_1(t, x) = \frac{2}{\kappa+1} [\kappa f_{21}(t, x) - \overline{f_{22}(t, x)} - x \overline{g_{22}(t, x)} - \overline{h_{22}(t, x)}],$$

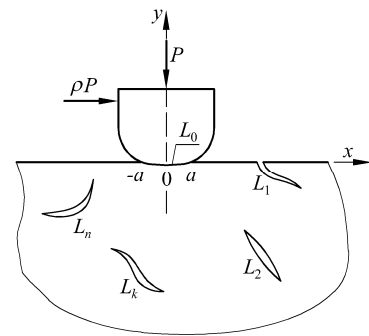
$$L_1(t, x) = \frac{2}{\kappa+1} [\kappa f_{22}(t, x) - \overline{f_{21}(t, x)} - x \overline{g_{21}(t, x)} - \overline{h_{21}(t, x)}],$$

$$K_2(t, t') = f_{21}(t, t') + \overline{f_{22}(t, t')} + \frac{dt'}{dt} [t' \overline{g_{22}(t, t')} + \overline{h_{22}(t, t')}],$$

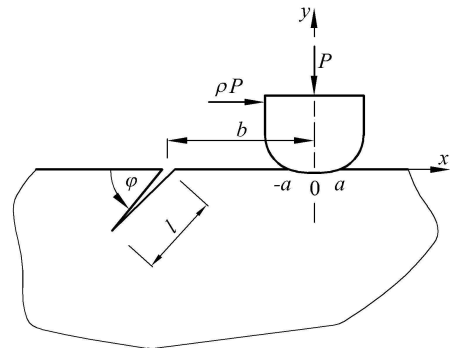
$$L_2(t, t') = f_{22}(t, t') + \overline{f_{21}(t, t')} + \frac{dt'}{dt} [t' \overline{g_{21}(t, t')} + \overline{h_{21}(t, t')}], \quad (4)$$

$$M(t, t') = f_{11}(t, t') + \overline{f_{11}(t, t')} + \frac{dt'}{dt} [t' \overline{g_{11}(t, t')} + \overline{h_{11}(t, t')}].$$

Wielkości f_{ij} , g_{ij} i h_{ij} ($i, j = 1, 2$) określone są funkcjami zmiennych zespolonych t i z oraz współczynnika tarcia ρ .



Rys. 1. Stempel na powierzchni półprzestrzeni osłabionej układem szczelin



Rys. 2. Schemat dociskanego stempla przesuwającego się po powierzchni półprzestrzeni osłabionej pojedynczą szczeliną

Rozpatrzmy obecnie przypadek, w którym półprzestrzeń osłabiona jest tylko jedną prostoliniową szczeliną brzegową o długości l w sposób przedstawiony na Rys. 2. Odległość szczeliny od osi stempla wynosi b .

Wprowadźmy parametryczny zapis konturów szczeliny L i strefy kontaktu stempla z powierzchnią półprzestrzeni L_0 :

$$t = a\xi, \quad x = a\eta, \quad (t, x \in L_0); \quad t = a\omega(\xi),$$

$$t' = a\omega(\eta) \quad (t, t' \in L), \quad -1 < \xi, \eta < 1, \quad (5)$$

$$\omega(\xi) = -b^* - \frac{l^*}{2}(\xi + 1)e^{i\varphi}, \quad b^* = \frac{b}{a}, \quad l^* = \frac{l}{a},$$

oraz bezwymiarowe zmienne i funkcje:

$$\begin{aligned}\sigma(a\eta) &= \sigma(\eta), & g'(a\omega(\xi))\omega'(\xi) &= g'(\xi), \\ p(a\omega(\xi)) &= p(\eta), & 4G(\kappa+1)^{-1} f'(a\eta) &= F(\eta), \\ aK_1(a\omega(\xi), a\eta) &= K_1(\xi, \eta), \\ aL_1(a\omega(\xi), a\eta) &= L_1(\xi, \eta), \\ aK_2(a\omega(\xi), a\omega(\eta)) &= K_2(\xi, \eta), \\ aL_2(a\omega(\xi), a\omega(\eta)) &= L_2(\xi, \eta), \\ aM(a\xi, a\omega(\eta)) &= M(\xi, \eta).\end{aligned}\quad (6)$$

Wówczas układ równań całkowych rozwiązania ogólnego oraz warunków równowagi stempla przyjmą postać:

$$\begin{aligned}\varepsilon\rho\sigma(\eta) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(\xi)d\xi}{\xi-\eta} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-1}^1 \left[K_1(\xi, \eta) g'(\xi) + \right. \\ \left. + L_1(\xi, \eta) \overline{g'(\xi)} \right] d\xi, & \quad |\eta| < 1, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[K_2(\xi, \eta) g'(\xi) + L_2(\xi, \eta) \overline{g'(\xi)} \right] d\xi + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 M(\xi, \eta) \sigma(\xi) d\xi &= p(\eta), \quad |\eta| < 1.\end{aligned}\quad (7)$$

$$\int_{-1}^1 \sigma(\xi) d\xi = A = \frac{-P}{a}, \quad (8)$$

Należy podkreślić, że z uwagi na fakt iż jeden z wierzchołków szczeliny „wychodzi” na powierzchnię warunek jednoznaczności przemieszczeń musimy zastąpić warunkiem zerowania się współczynników intensywności naprężeń w tym wierzchołku tj. dla $\xi = -1$:

$$u(-1) = 0. \quad (9)$$

Rozwiązania układu równań całkowych (7), spełniające warunki (8) i (9), będziemy poszukiwać w klasie funkcji, posiadających osobliwości całkowne:

$$\begin{aligned}\sigma(\xi) &= w(\xi)q(\xi), \\ w(\xi) &= (1-\xi)^\alpha (1+\xi)^\beta, & -1 < \alpha, \beta < 0, \\ g'(\xi) &= (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}} u(\xi),\end{aligned}\quad (10)$$

gdzie $q(\xi)$ i $u(\xi)$ są funkcjami ciągłymi w przedziale obustronnie domkniętym $[-1, 1]$, a parametry α i β pierwiastkami $\alpha = -0.5 + \mu$, $\beta = -0.5 - \mu$, $\mu = \arctan \varepsilon\rho$ równań charakterystycznych $\cot \pi\alpha = -\varepsilon\rho$, $\cot \pi\beta = \varepsilon\rho$.

W celu numerycznego rozwiązania układu równań (7) zastosowano metodę kwadratur (np. Savruk, 1981; Savruk et al., 1999) z wykorzystaniem węzłów Gaussa-Chebysheva. W wyniku otrzymano układ liniowych równań algebraicznych w następującej postaci:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_{mk} q(\xi_k) + \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\bar{n}} \left[b_{1mk} u(\xi_k) + \right. \\ \left. + c_{1mk} \overline{u(\xi_k)} \right] = F(\eta_m), & \quad m = 1, \dots, n-1,\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\bar{n}} \left[b_{2mk} u(\xi_k) + c_{2mk} \overline{u(\xi_k)} \right] + \\ + \sum_{k=1}^n d_{mk} q(\xi_k) = p(\bar{\eta}_m), & \quad m = 1, \dots, \bar{n}-1,\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{nk} q(t_k) = A, \quad \sum_{k=1}^{\bar{n}} (-1)^k \sqrt{\frac{1-\xi_k}{1+\xi_k}} u(\xi_k) = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\xi_k &= \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, & \eta_m &= \cos \frac{\pi m}{n}, \\ \bar{\xi}_k &= \cos \frac{2k-1}{2\bar{n}} \pi, & \bar{\eta}_k &= \cos \frac{\pi m}{\bar{n}}.\end{aligned}\quad (13)$$

Wielkościami poszukiwanymi są tu funkcje $q(\xi)$ i $u(\xi)$ w węzłach ξ_k i $\bar{\xi}_k$. Współczynniki przy niewiadomych w układzie równań (11)-(12) dane są wzorami:

$$\begin{aligned}a_{mk} &= -\frac{1}{n} (-1)^k \sqrt{1-\xi_k^2} \left\{ \frac{X_0}{1-\eta_m} \left[\frac{1}{1-\xi_k} - \frac{T_n(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} \right] + \right. \\ &+ \frac{R_0}{1+\eta_m} \left[\frac{(-1)^n}{1+\xi_k} + \frac{T_n(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} \right] + X_3(\eta_m) + X_4(\eta_m) \frac{T_n(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} \Big\}, \\ a_{nk} &= \frac{\pi}{n} \sqrt{1-\xi_k^2} \left[w(\xi_k) - (-1)^k \frac{X_0}{1-\xi_k} + (-1)^{k+n} \frac{R_0}{1+\xi_k} \right], \\ b_{1mk} &= \frac{1}{n} K_1(\xi_k, \eta_m), & b_{2mk} &= \frac{1}{n} K_2(\xi_k, \eta_m), \\ c_{1mk} &= \frac{1}{n} L_1(\xi_k, \eta_m), & c_{2mk} &= \frac{1}{n} L_2(\xi_k, \eta_m), \\ d_{mk} &= \frac{1}{n} \sqrt{1-\xi_k^2} \left[M(\xi_k, \eta_m) w(\xi_k) - \right. \\ &- (-1)^k \frac{X_0 M(1, \eta_m)}{1-\xi_k} + (-1)^{n+k} \frac{R_0 M(-1, \eta_m)}{1+\xi_k} \Big],\end{aligned}\quad (14)$$

$$\begin{aligned}X_0 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2\alpha}{\sin \pi\alpha} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X(\xi_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \right] \\ R_0 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2\beta}{\sin \pi\beta} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R(\xi_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \right] \\ X_1(x) &= \frac{1}{2} \left[X(x) \cot \pi\alpha - \frac{1}{\sin \pi\alpha} - R(x) \cot \pi\beta + \frac{1}{\sin \pi\beta} \right], \\ X_3(x) &= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n w(\xi_r) \sqrt{1-\xi_r^2} F(x, \xi_r, \xi_k), \\ X_4(x) &= \varepsilon\rho w(x) + X_1(x),\end{aligned}$$

$$X(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^\alpha, \quad R(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\beta,$$

$$F(x, \xi_r, \xi_k) = \begin{cases} \frac{T_n(x)}{(x-\xi_k)(x-\xi_r)}, & x \neq \xi_k, x \neq \xi_r, \xi_k \neq \xi_r, \\ -\frac{n(-1)^r}{\sqrt{1-\xi_r^2}(\xi_r-x)} + \frac{T_n(x)}{(\xi_r-x)^2}, & x \neq \xi_k = \xi_r, \end{cases}$$

gdzie $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ jest wielomianem Chebysheva pierwszego rodzaju stopnia n .

Z wykorzystaniem interpolacyjnego wielomianu Lagrange'a dla węzłów ξ_k znajdujemy wartości funkcji $q(\xi)$ w dowolnym punkcie

$$q(\xi) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k q(\xi_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \frac{T_n(x)}{\xi-\xi_k}. \quad (15)$$

W szczególności, na końcach przedziału $[-1, 1]$ otrzymaliśmy

$$q(\pm 1) = \mp \frac{(\pm 1)^n}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{\frac{1 \pm \xi_k}{1 \mp \xi_k}} q(\xi_k). \quad (16)$$

W podobny sposób szukamy wartości funkcji $u(\xi)$ w węzłach ξ_k , a mianowicie:

$$u(\xi) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k u(\xi_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \frac{T_n(x)}{\xi-\xi_k}, \quad -1 \leq \xi \leq 1. \quad (17)$$

$$u(\pm 1) = \mp \frac{(\pm 1)^n}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{\frac{1 \pm \xi_k}{1 \mp \xi_k}} u(\xi_k). \quad (18)$$

Współczynniki intensywności naprężeń w wierzchołku szczeliny dla $\xi = 1(K_{I,II}^+)$ wyznaczamy według wzoru (np. Savruk, 1981):

$$K_I^+ - iK_{II}^+ = -\sqrt{\pi a |\omega'(1)|} \frac{u(1)}{\omega'(1)}. \quad (19)$$

Należy przypomnieć, że autor analizował zagadnienie, w którym podstawa stempli jest płaska lub paraboliczna. W przypadku stempli płaskiego wymiar strefy kontaktu L_0 jest znany i równy szerokości stempli. Natomiast, w przypadku stempli parabolicznego wymiar tej strefy nie jest znany i trzeba go wyznaczać. Dodatkowo następuje „przesunięcie” środka strefy kontaktu względem osi stempli. Przesunięcie to w literaturze anglojęzycznej nazywane jest „mimośrodowością” czy też „promieniem mimośrodów” (eccentricity) więc w dalszej części pracy autor będzie używał tej właśnie nazwy. Obie wielkości tj. wymiar strefy jak i promień jej mimośrodów były przedmiotem szczegółowych badań autora i wyznaczano je z warunku zerowania się naprężeń kontaktowych na granicy strefy tj.:

$$q(-1) = q(1) = 0. \quad (20)$$

3. ANALIZA NUMERYCZNA

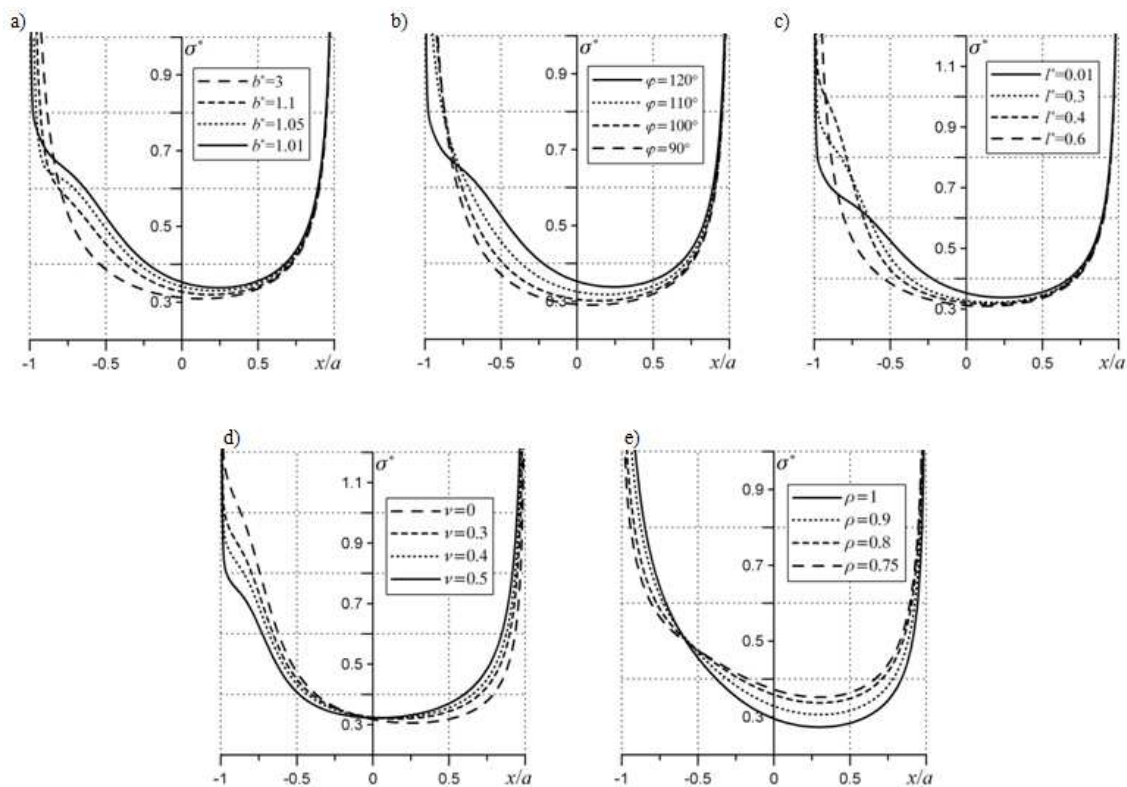
Przedstawione w poprzednim paragrafie zależności teoretyczne posłużyły do stworzenia numerycznych algorytmów obliczeniowych pozwalających na określenie rozkładów naprężeń kontaktowych oraz wartości współczynników intensywności naprężeń w otoczeniu wierzchołka szczeliny. Przedstawione poniżej wykresy obrazują efekt wpływu obecności szczeliny na rozkłady ciśnienia kontaktowego. Jak już wspomniano rozpatrzono dwa różne kształty podstawy stempli tj. płaski oraz paraboliczny. Należy podkreślić, że ciśnienie kontaktowe pod stemplem σ , wymiar strefy kontaktu a oraz mimośrodowość e środka strefy względem osi stempli zostały unormowane zgodnie ze schematem:

$$\sigma^* = \frac{\sigma a}{P}, \quad e^* = \frac{e}{a}, \quad a^* = \frac{a}{a_0}, \quad (21)$$

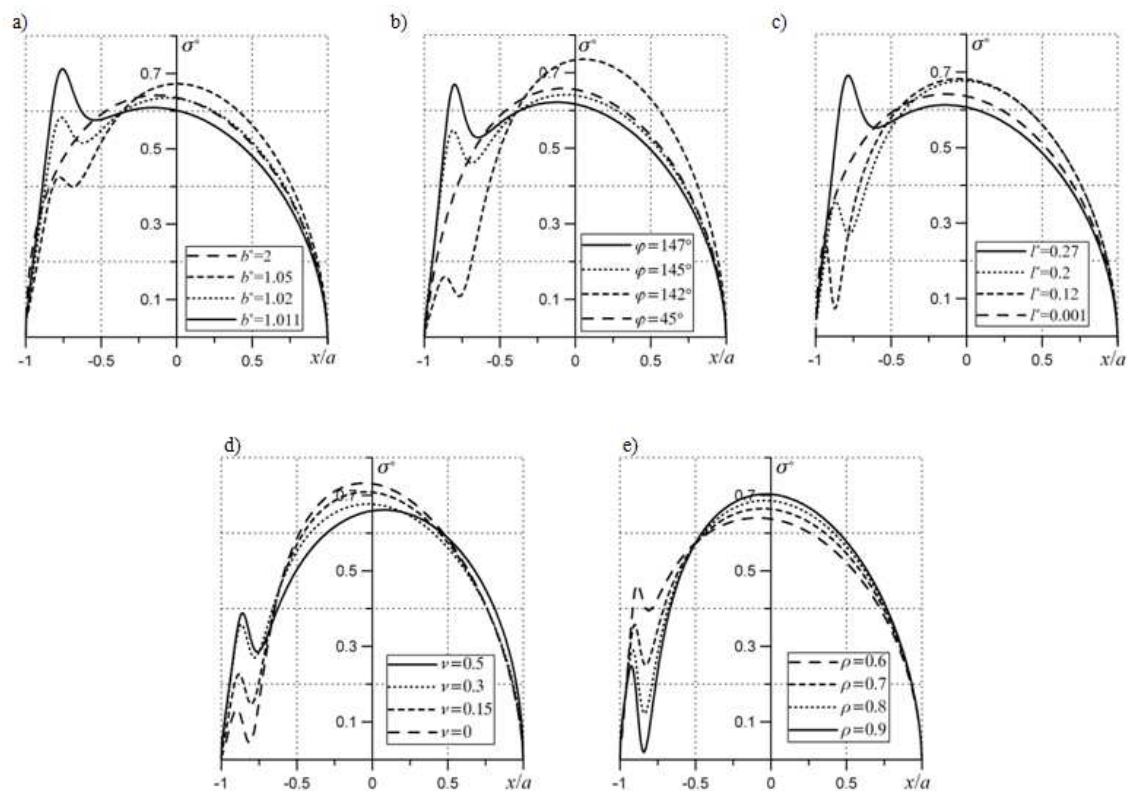
$$a_0^2 = \frac{2}{\pi} \frac{PR}{G} (1-\nu),$$

gdzie R jest parametrem paraboli, zaś a_0 – połową strefy kontaktu w zagadnieniu Hertza – wciskania (bez tarcia) cylindrycznego stempli w powierzchnię jednorodnej półprzestrzeni.

Przeprowadzona analiza numeryczna dowiodła, że obecność szczeliny ma znaczny wpływ na rozkłady ciśnienia kontaktowego. Dotyczy to zarówno stempli płaskiego jak również parabolicznego szczególnie dla kątów pochylenia szczeliny należących do przedziału $(90^\circ, 180^\circ)$. Dla takich kątów wierzchołek szczeliny może znaleźć się bezpośrednio w obszarze pod strefą kontaktu i powodować dość gwałtowne „zaburzenie” rozkładu ciśnienia (Rys. 3, Rys. 4). Dokonano szczegółowej analizy rozkładów ciśnienia kontaktowego również dla $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ jednak wykazała ona znaczący wpływ obecności szczeliny na te rozkłady – nawet dla szczelin położonych blisko stempli. Tak więc w wielu przypadkach tego typu zagadnień wprowadzanie regularnych rozkładów ciśnienia kontaktowego w miejscu działania stempli może prowadzić do znacznych błędów. Dopiero uwzględnienie wzajemnego oddziaływania stempli i szczeliny (układu szczelin) daje dokładne informacje o charakterze rozkładów ciśnienia. W przypadku półprzestrzeni jednorodnej lub gdy szczelina jest wystarczająco odległa od stempli wspomniane różnice można zaniedbać. Należy podkreślić, że wyraźny efekt wpływu szczeliny na rozkłady ciśnienia można osiągnąć poprzez: zmniejszanie odległości stempli od szczeliny (Rys. 3a, Rys. 4a), zwiększanie kąta φ w zakresie od 90° do 180° (Rys. 3b, Rys. 4b), zwiększanie długości szczeliny (Rys. 3c, Rys. 4c), zwiększanie współczynnika Poissona (Rys. 3d, Rys. 4d), zmianę współczynnika tarcia (Rys. 3e, Rys. 4e). Zwróćmy uwagę, że Rys. 3 i 4 odpowiadają sytuacji kiedy szczelina jest ścinana i rozrywana ($F_I > 0$). Chcąc analizować zagadnienia, w których szczelina znajduje się w obszarze naprężeń ściskających należałoby uwzględniać kontakt brzegów szczeliny.



Rys. 3. Rozkład ciśnienia kontaktowego pod stępem płaskim: a) efekt odległości szczeliny od stępła ($\varphi = 120^\circ$, $l^* = 0.6$, $\nu = 0.3$, $\rho = 0.7$), b) efekt orientacji szczeliny ($b^* = 1.01$, $l^* = 0.6$, $\nu = 0.3$, $\rho = 0.7$), c) efekt długości szczeliny ($\varphi = 120^\circ$, $b^* = 1.01$, $\nu = 0.3$, $\rho = 0.7$), d) efekt współczynnika Poissona ($\varphi = 120^\circ$, $l^* = 0.35$, $b^* = 1.01$, $\rho = 0.7$), e) efekt tarcia ($\varphi = 120^\circ$, $l^* = 1$, $\nu = 0.3$, $b^* = 1.01$)



Rys. 4. Rozkład ciśnienia kontaktowego pod stępem parabolicznym: a) efekt odległości szczeliny od stępła ($\varphi = 145^\circ$, $l^* = 0.3$, $\nu = 0.3$, $\rho = 0.75$), b) efekt orientacji szczeliny ($b^* = 1.01$, $l^* = 0.25$, $\nu = 0.3$, $\rho = 0.75$), c) efekt długości szczeliny ($\varphi = 145^\circ$, $b^* = 1.01$, $\nu = 0.3$, $\rho = 0.75$), d) efekt współczynnika Poissona ($\varphi = 145^\circ$, $l^* = 0.2$, $b^* = 1.01$, $\rho = 0.75$), e) efekt tarcia ($\varphi = 145^\circ$, $l^* = 0.15$, $\nu = 0.3$, $b^* = 1.01$)

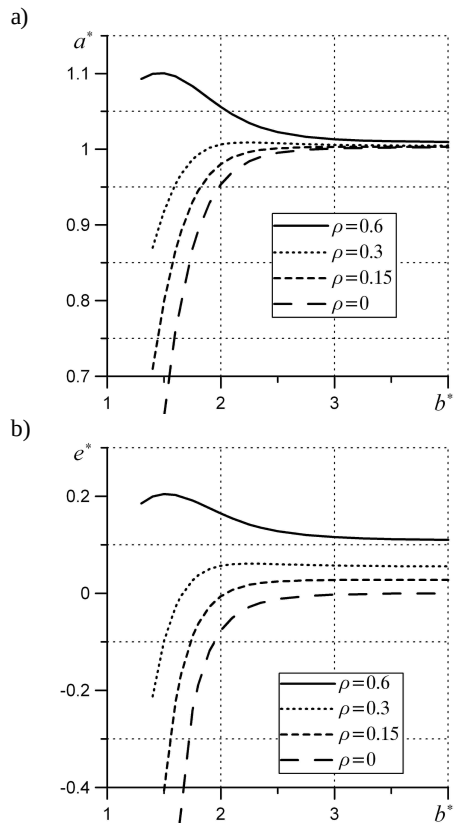


Fig. 5. Wpływ odległości szczeliny od stępła na wielkość strefy kontaktu (a) i przesunięcie jej środka (b) dla różnych wartości tarcia ($l^* = 1$, $\varphi = 135^\circ$, $\nu = 0.3$)

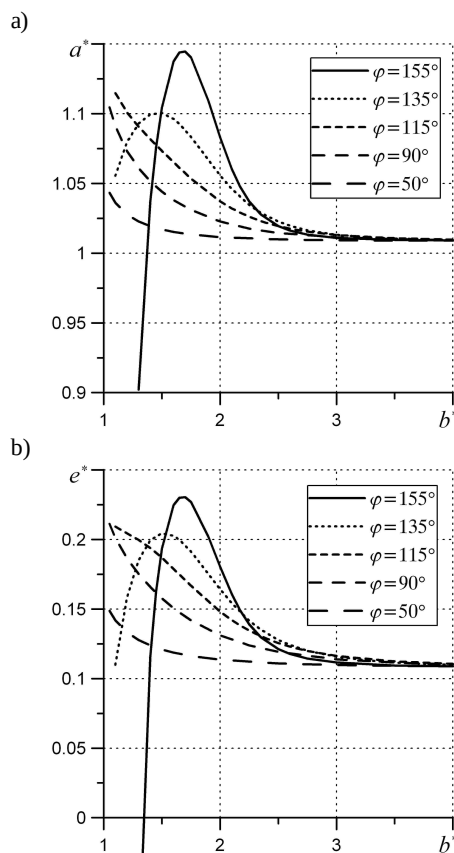


Fig. 6. Wpływ odległości szczeliny od stępła na wielkość strefy kontaktu (a) i przesunięcie jej środka (b) dla różnych orientacji szczeliny ($l^* = 1$, $\rho = 0.6$, $\nu = 0.3$)

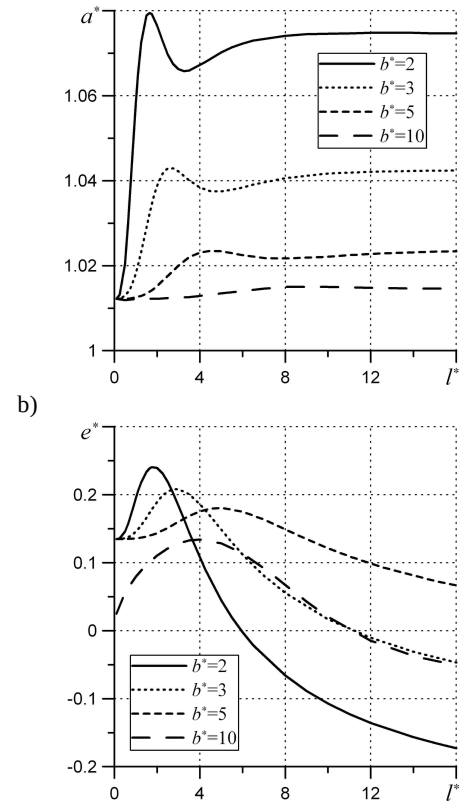


Fig. 7. Wpływ długości szczeliny na wielkość strefy kontaktu (a) i jej mimośród (b) dla różnych odległości szczeliny od stępła ($\varphi = 120^\circ$, $\rho = 0.75$, $\nu = 0.3$)

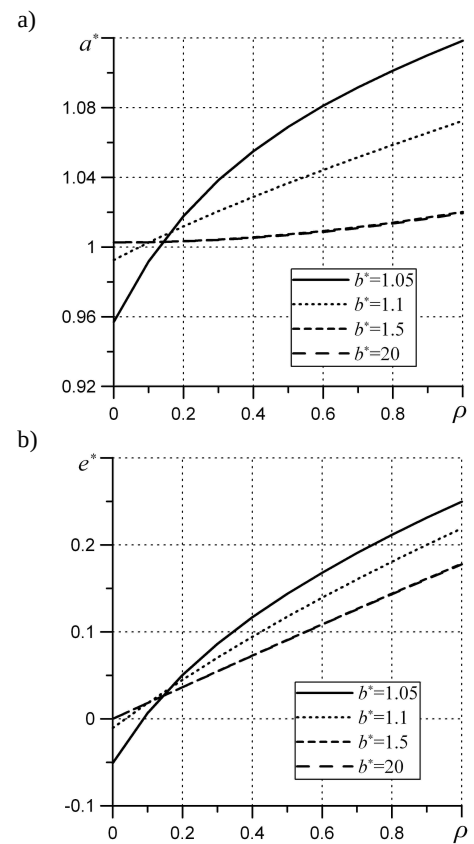


Fig. 8. Wpływ tarcia na wielkość strefy kontaktu (a) jej mimośród (b) dla różnych odległości szczeliny od stępła ($l^* = 0.1$, $\varphi = 120^\circ$, $\nu = 0.3$)

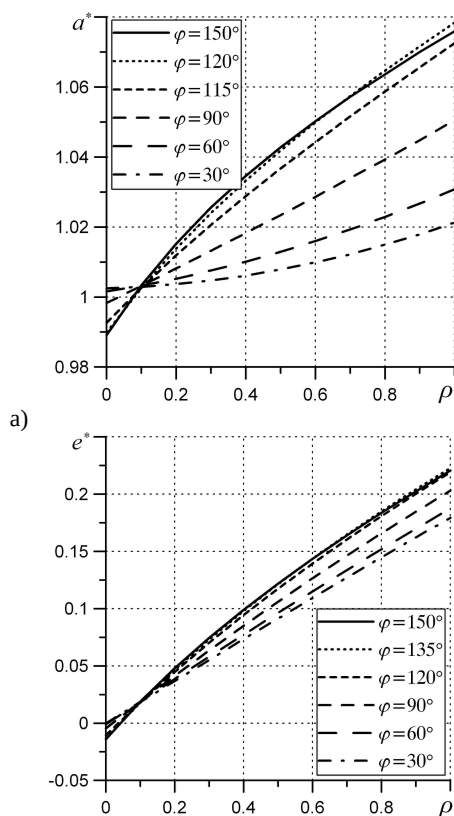


Fig. 9. Wpływ tarcia na wielkość strefy kontaktu (a) i jej mimośród (b) dla różnych orientacji szczeliny ($l^* = 0.1$, $b^* = 1.1$, $\nu = 0.3$)

Jak już wspomniano, w przypadku stempla płaskiego wymiar strefy kontaktu jest znany. W przypadku stempla parabolicznego wymiar ten musi być wyznaczony z warunku zerowania się naprężeń na brzegach strefy (zob. równanie (20)). W pracy dokonano również szczegółowej analizy zarówno wielkości strefy jak i jej mimośrodu w zależności od odległości szczeliny od stempla, długości szczeliny i jej orientacji oraz wartości współczynnika tarcia. Należy podkreślić, że wszystkie te efekty zaznaczają się szczególnie wyraźnie dla szczelin znajdujących się blisko stempla. W miarę oddalania się szczeliny od stempla wymiar strefy kontaktu stabilizuje się na jednym poziomie odpowiadającym wymiarowi strefy w zagadnieniu Hertza (Rys. 5a, 6a). Przy dużych wartościach tarcia wspomniany poziom stabilizacji osiągany jest dla szczelin dużo bardziej odległych od stempla niż przy małym tarcu. W przypadku analizy zmian wielkości strefy kontaktu w funkcji długości szczeliny dla kątów $\varphi \in (90^\circ, 180^\circ)$ poziom stabilizacji nie musi odpowiadać wymiarowi strefy w zagadnieniu Hertza (Rys. 7a). Wzrost długości szczeliny powyżej pewnej wartości nawet dla szczelin bliskich nie ma większego wpływu na wielkość strefy kontaktu w odróżnieniu od wartości mimośrodu (Rys. 7b). Zwrócić uwagę, że przy małym tarcu środek strefy może przesuwać się w przeciwnym kierunku niż przy dużych wartościach współczynnika tarcia (Rys. 5b, Rys. 6b). Tak więc przy odpowiednim usytuowaniu i orientacji szczeliny oraz wartości współczynnika tarcia może zdarzyć się sytuacja, że mimośród nie wystąpi nawet przy bardzo dużym tarcu. Sytuacje takie nastąpią tym wcześniej (tj. dla krótszych

szczelin) im szczelina położona jest bliżej stempla zaś współczynnik tarcia osiąga większe wartości.

Jednocześnie im większy współczynnik tarcia i kąt φ bliższy 180° wielkość strefy gwałtownie wzrasta aby po osiągnięciu maksimum maleć – w przeciwieństwie do kątów φ bliskich i mniejszych od 90° (Rys. 6a). Dla bardzo dużych wartości współczynnika tarcia, efekt odległości szczeliny od stempla i efekt orientacji szczeliny zaznaczają się najwyraźniej (Rys. 8, Rys. 9).

4. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W niniejszej pracy wykorzystano metodę potencjałów zespolonych naprężeń do określania rozkładów ciśnienia kontaktowego w zagadnieniu „przesuwania się” stempla po powierzchni półprzestrzeni sprężystej osłabionej pojedynczą szczeliną brzegową. Rozpatrzono przy tym sytuację, w której podstawa stempla ma kształt paraboliczny lub płaski badając tym samym wpływ kształtu podstawy stempla na rozkłady wspomnianego ciśnienia kontaktowego. Rozwiązanie zagadnienia przedstawiono w postaci układu równań całkowych. W celu numerycznego rozwiązania tego układu wykorzystano metodę kwadratur, która pozwoliła uzyskać układ liniowych równań algebraicznych co oczywiście znacznie ułatwiło rozwiązanie. Należy podkreślić, że metoda pozwala na jednoczesne obliczanie wartości współczynników intensywności naprężeń przed wierzchołkiem szczeliny. Uwzględnić przy tym wzajemne oddziaływanie szczeliny oraz stempla.

Wykazano znaczący wpływ obecności szczeliny brzegowej na rozkłady ciśnienia kontaktowego pod stemplem. W szczególnych przypadkach szczelina może powodować bardzo silne zaburzenia regularnych rozkładów ciśnienia. Sytuację taką możemy zaobserwować szczególnie wyraźnie dla szczelin położonych blisko stempla kiedy kąt φ należy do przedziału $(90^\circ, 180^\circ)$. Dla kątów $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ wpływ szczeliny na rozkłady ciśnienia kontaktowego można zaniedbać. W związku z powyższym w pewnych przypadkach należy unikać zastępowania działania stempla regularnymi rozkładami ciśnienia bo może to prowadzić do znacznych błędów.

W dalszych pracach planuje się wykorzystanie przedstawionej procedury do rozwiązywania zagadnień bardziej złożonych. Autor ma tu na myśli np. zagadnienia, w których półprzestrzeń osłabiona jest układem powierzchniowych szczelin periodycznych. Można także podjąć próbę wykorzystania wspomnianych rozwiązań do analizy zagadnień gdzie pojedyncze szczeliny lub układy tych szczelin występują pod powierzchnią półprzestrzeni czy też gdy mamy do czynienia z makroinkluzjami.

LITERATURA

1. Bryant M.D., Miller G.R., Keer L.M. (1984): Line contact between a rigid indenter and a damaged elastic body, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* Vol. 37, 467-478.

2. **Fan H., Keer L.M., Mura T.** (1992), Near surface crack initiation under contact fatigue, *Tribology Transactions*, Vol. 35, 121-127.
3. **Fujimoto K., Ito H., Yamamoto T.** (1992), Effect of cracks on the contact pressure distribution, *Tribology Transactions*, Vol. 35, 683-695.
4. **Goshima T.** (2003), Thermomechanical effects on crack propagation in rolling contact fatigue failure, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 26, 615-639.
5. **Goshima T., Hanson M.T., Keer L.M.** (1990), Three-dimensional analysis of thermal effects on surface crack propagation in rolling contact, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 13, 237-261.
6. **Goshima T., Kamishima Y.** (1994), Mutual interference of multiple surface cracks due to rolling-sliding contact with frictional heating, *Int. J. JSME, Ser. A*, Vol. 37, No. 3, 216-223.
7. **Goshima T., Kamishima Y.** (1996), Mutual interference of two surface cracks in semi-infinite body due to rolling contact with frictional heating by a rigid roller, *Int. J. JSME, Ser. A*, Vol. 39, No. 1, 26-33.
8. **Goshima T., Keer L.M.** (1990), Thermoelastic contact between a rolling rigid indenter and a damaged elastic body, *Journal of Tribology, Trans. ASME*, Vol. 112, 382-391.
9. **Goshima T., Soda T.** (1997), Stress intensity factors of a subsurface crack in a semi-infinite body due to rolling/sliding contact and heat generation, *Int. J. JSME, Ser. A*, Vol. 40, No. 3, 263-270.
10. **Hasebe N.** (1981), An edge crack in a semi-infinite plate welded to a rigid stiffener, *Proc. Jap. Civ. Eng.*, No. 314, 149-157.
11. **Hasebe N., Okumura M., Nakamura T.** (1989), Frictional punch and crack in plane elasticity, *ASCE, J. Eng. Mech.*, Vol. 115, No. 6, 1127-1149.
12. **Hasebe N., Qian J.** (1995), Circular inclined punch problem with two corners to contact with a half-plane with a surface crack, *Proc. 2nd Int. Conf. Computational Methods in Contact Mechanics*, Computational Mechanics Publications, Southampton, Boston, 159-166.
13. **Hasebe N., Qian J.** (1997), Circular rigid punch with one smooth and another sharp ends on a half-plane with edge crack, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, 73-79.
14. **Hasebe N., Qian J.** (1998), Edge crack due to circular rigid punch in incomplete contact, *Mechanics of Materials*, Vol. 28, 271-279.
15. **Keer L.M., Bryant M.D.** (1983), A pitting model for rolling contact fatigue, *Trans ASME, Journal of Lubrication Technology*, Vol. 105, 198-205.
16. **Keer L.M., Bryant M.D., Haritos G.K.** (1982), Subsurface and surface cracking due to Hertzian contact, *Trans ASME, Journal of Lubrication Technology*, Vol. 104, 347-357.
17. **Muskhelishvili N.I.** (1962), Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Nauka, Moscow, (in Russian).
18. **Okumura M., Hasebe N., Nakamura T.** (1990), Crack due to wedge shaped punch with friction, *ASCE, J. Eng. Mech.*, Vol. 116, 2173-2185.
19. **Panasjuk V.V., Datsyshyn O.P., Marchenko H.P.** (1995), Contact problem for a half-plane with cracks under action of a rigid punch on its boundary, *Physicochemical Mechanics of Materials*, Vol. 31, No. 6, 7-16.
20. **Panasjuk V.V., Datsyshyn O.P., Marchenko H.P.** (2000), Stress state of a half-plane with cracks under rigid punch action, *International Journal of Fracture*, Vol. 101, 347-363.
21. **Qian J., Hasebe N.** (1997), Circular rigid punch on a semi-infinite plate with an oblique edge crack subjected to concentrated forces on point dislocations, *Proc. Jap. Civ. Eng.*, No. 570, 149-159.
22. **Savruk M.P.** (1981), *Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks*, Naukova Dumka, Kiev, (in Russian)
23. **Savruk M.P., Tomczyk A.** (2010), Pressure with friction of a rigid punch upon an elastic half-space with cracks, *Physicochemical Mechanics of Materials* (in press).
24. **Savruk M.P., Tomczyk A., Yevtushenko O.** (2007), Płaskie kontaktowe zagadnienie z uwzględnieniem tarcia dla półprzestrzeni ze szczeliną, *Acta Mech. Autom.* Vol. 1, s41-44.
25. **Savruk M.P., Yevtushenko O., Tomczyk A.** (2008), Wciskanie płaskiego stempla z uwzględnieniem tarcia w półprzestrzeni osłabionej powierzchniową szczeliną, W *Zagadnienia Mechaniki Pękania i Skrawania Materiałów Plastycznych* (red. Jonak J.) Lubelskie Towarzystwo Naukowe, Lublin, 14-23.

THE EFFECT OF CRACK ON CONTACT PRESSURE DISTRIBUTION IN A PLANE PROBLEM ACCOUNTING FOR FRICTION

Abstract: The paper presents the solution of the problem of interaction between a rigid punch and an elastic half-space weakened by a single edge crack. It was assumed the parabolic or flat punch to analyze the influence of punch base shape. The contact pressure distributions were obtained for various values of distance between crack and punch, crack length and its orientation, Poisson ratio and also for various values of friction coefficient. A detailed influence of these parameters on contact zone size and its eccentricity is presented for the case of parabolic punch. It was found that assuming regular contact pressure distribution in the place where punch acting can produce considerable errors in many contact problems.

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego statutowego nr S/WM/2/08 realizowanego w Politechnice Białostockiej.

BADANIA EKSPERYMENTALNE PROPAGACJI SZCELINY ZMĘCZENIOWEJ W PRÓBKACH WYKONANYCH Z POLIMETAKRYLANU METYLU

Adam TOMCZYK*

*Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka,
ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

a.tomczyk@pb.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych wzrostu szczeliny zmęczeniowej w płaskich próbkach wykonanych z materiału kruchego – polimetakrylanu metylu. Rozważono przy tym jednoosiowy (mode I) i dwuosiowy (mode I + mode II) stan obciążenia. Zbadano wpływ wartości obciążenia na prędkość propagacji szczeliny jak również efekt udziału rozrywania i ścinania poprzecznego zarówno na prędkość pęknięcia jak i na kąt inicjacji oraz propagacji szczeliny.

1. WPROWADZENIE

Polimetakrylan metylu (PMMA) jest obecnie jednym z najpopularniejszych przedstawicieli polimerów powszechnie stosowanych zarówno w technice jak i medycynie. Ze względu na swoją dużą wytrzymałość oraz przezroczystość jest szczególnie wykorzystywany w budownictwie np. w konstrukcjach osłon przeciwwiatrowych, w przemyśle lotniczym np. jako osłony kabin pilotów (Gao i Yue, 2007; Liu i inni, 2008), czy też do produkcji rozmaitych przedmiotów użytku domowego (Antunes et al., 2002). Ma on również swoje bardziej „subtelne” zastosowania zwłaszcza w ortopedii gdzie jest wykorzystywany do budowy sztucznych zespołów kości biodrowych czy kolanowych (Race i inni, 2008; Hoey i Taylor, 2008).

W wielu przypadkach rzeczywistych warunków eksploatacji elementy wykonane z polimetakrylanu metylu mogą być poddane działaniu obciążeń zmęczeniowych w tym również cyklicznie zmiennych. W elementach takich na skutek zmęczenia następuje kumulacja uszkodzeń mogąca prowadzić do inicjacji i propagacji szczeliny a w efekcie do zniszczenia elementu. Zatem badanie oraz modelowanie wzrostu pęknięć zmęczeniowych w polimetakrylanie metylu ma ogromne znaczenie zarówno poznawcze jak i praktyczne i wciąż pozostaje tematem aktualnym. Świadczyć może o tym znaczna liczba prac poświęconych zarówno poznaniu mechanizmów rządzących wzrostem szczeliny zmęczeniowej jak i modelowaniu numerycznemu i teoretycznemu tego wzrostu. Warto tu wspomnieć o pracy Heydera i Kuhna (2006) oraz Heydera i innych (2005) gdzie badano (również doświadczalnie) trójwymiarowy wzrost brzegowej szczeliny o różnym kształcie w beleczkach poddanych czteropunktowemu zginaniu. W pracach tych zwrócono szczególną uwagę na nierównomierne rozprzestrzenianie się frontu szczeliny. Znacznie częściej do badań wykorzystuje się różnego rodzaju próbki płaskie. Tak na przykład do zbadania efektów wpływu częstotliwości obciążenia oraz pojedynczych przeciążeń na wzrost szczeliny w PMMA Yuen i Taheri

(2004) wykorzystali prostokątne próbki płaskie z centralną szczeliną na wskroś. Kompaktowe próbki ze szczeliną w dnie karbu były przedmiotem badań Dinga i innych (2007), przy czym analizowano tu wpływ udziału rozrywania i ścinania poprzecznego na propagację szczeliny. Próbek kompaktowych użyto także w pracy Ramsteinera i Armbrusta (2001) gdzie wyniki porównano z wynikami uzyskanymi w zmęczeniowych próbach trójpunktowego zginania belki.

Obecnie obserwuje się również duże zainteresowanie badaniami propagacji szczeliny zmęczeniowej w polimerach w szerokim spektrum temperatur. Zwrócono przy tym szczególną uwagę na znaczący wpływ zmian temperatury na prędkość wzrostu szczeliny jak również na charakter powierzchni pęknięcia (np. Gao i Yue, 2007; Liu i inni, 2008). Okazuje się na przykład, że niektóre polimery wykazują brak wrażliwości na zmiany częstotliwości w pokojowych temperaturach podczas gdy w temperaturach podwyższonych wpływ ten jest znaczący (np. Hertzberg i Manson, 1980; Kim i Wang, 1994; Saghir i inni, 2005).

W literaturze znajdziemy także prace poświęcone wzrostowi szczeliny w elementach polimerowych w zagadnieniach dynamicznych. W przypadku wielu następujących po sobie impulsów dynamicznych zagadnienie często rozpatrywane jest w aspekcie zmęczenia (np. Jang i inni, 1992; Sahoo i inni, 2008). Z uwagi na częste zastosowania polimerów w bimateryałach z udziałem metali również ważne stają się badania zjawisk w których np. propagująca szczelina trafia na granicę faz (np. Shah i inni, 2005; Shatil i inni, 2008).

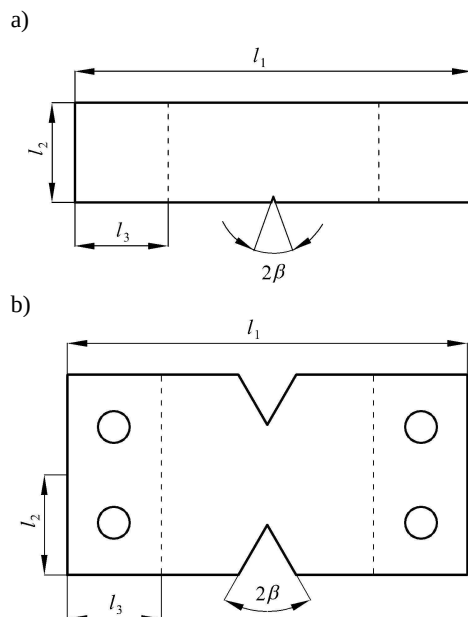
W niniejszej pracy przedstawiono wyniki badań doświadczalnych wzrostu szczeliny zmęczeniowej w dwuosiowym stanie obciążenia. Badania te koncentrowały się wokół dwóch zasadniczych zagadnień. Pierwsze – najistotniejsze z punktu widzenia trwałości – dotyczy określenia prędkości wzrostu szczeliny wyrażonej przyrostem długości na cykl obciążenia. Drugie zagadnienie wiąże się z koniecznością wyznaczenia trajektorii szczeliny i nabiera szczególnego znaczenia w przypadku obciążeń złożonych.

2. MATERIAŁ I PRÓBKII WYKORZYSTANE W BADANIACH

W badaniach wykorzystano próbki wykonane z polimektakrylanu metylu funkcjonującego szerzej pod handlową nazwą pleksiglas. Materiał ten jest powszechnie uważany za materiał kruchy o liniowo-sprężystej charakterystyce. Z uwagi na swoją przezroczystość pozwala na łatwą i precyzyjną obserwację wierzchołka inicjującej oraz propagującej szczeliny bez konieczności stosowania skomplikowanej aparatury pomiarowej.

Materiałem wyjściowym do wykonania próbek były wielkoformatowe arkusze o grubości 5 mm wytwarzane w procesie lania na gorąco (bez walcowania). Taki proces gwarantował izotropowość materiału co potwierdziły proste testy monotonicznego rozciągania próbek wycinanych w różnych kierunkach z arkusza. Wszystkie próbki wykonano z tej samej partii materiału.

W pracy wykorzystano próbki dwójakiego rodzaju. Do analizy wpływu wartości obciążenia na prędkość wzrostu szczeliny zmęczeniowej wykonano próbki prostokątne z jednostronnym płytkim karbem trójkątnym (Rys. 1a). Dokładnie w środkowej części próbek, których szerokość wynosiła $l_2 = 50$ mm, wykonano karb trójkątny o głębokości 3 mm. Długość próbek wynosiła $l_1 = 200$ mm, kąt rozwarcia karbu $2\beta = 40^\circ$. Wymiar $l_3 = 47$ mm określa część próbki znajdującą się w szczękach uchwytu maszyny zmęczeniowej. W dalszej części pracy próbki te nazywane będą próbkami pierwszego rodzaju.



Rys. 1. Płaskie próbki pierwszego (a) i drugiego (b) rodzaju wykorzystane w badaniach

Próbki drugiego rodzaju (Rys. 1b) wykonano w celu określenia zarówno prędkości wzrostu szczeliny jak również kierunku jej inicjacji oraz propagacji w złożonym stanie obciążenia. Dokładnie w środkowej części próbek, których szerokość $l_2 = 100$ mm, wykonano dwa przeciwległe, symetryczne karby, każdy o głębokości 25 mm. Długość próbek wynosiła $l_1 = 200$ mm, kąt rozwarcia karbu

$2\beta = 60^\circ$, zaś odległość między wierzchołkami karbów 50 mm. Karby wykonano na frezarce pionowej frezem krążkowym o kacie 60° . Dzięki takiej obróbce uzyskano promień zaokrąglenia dna karbu o wartości 0.01 mm. W celu wyeliminowania możliwości inicjacji i dalszej propagacji szczelin z dwóch karbów jednocześnie, dno jednego z nich zostało celowo zaokrąglone. Wymiar $l_3 = 47$ mm określa część próbki znajdującą się w zaciskach specjalnego uchwytu opisanego w punkcie 3.

3. WARUNKI PROWADZENIA BADAŃ, SPECJALNY UCHWYT DO REALIZACJI DWUOSIOWEGO STANU OBCIĄŻENIA

Badania przeprowadzono na serwohydraulicznej maszynie wytrzymałościowej MTS model 332.31, przeznaczonej zarówno do prób statycznych, jak i zmęczeniowych. Maszyna zasilana była zasilaczem hydraulicznym SilentFlo 505.11 MTS o wydajności 41.6 l/min, natomiast jej sterowanie odbywało się poprzez układ TESTAR sprzęgnięty z komputerem. Dzięki specjalistycznemu oprogramowaniu TestWare użytkownik miał możliwość układania własnego programu badań, określając w nim parametry obciążenia, takie jak np. amplituda, współczynnik asymetrii cyklu, liczbę cykli w pojedynczym bloku, ilość bloków cykli, przystanek czasowy itd.

Eksperyment miał na celu określenie zmian długości szczeliny w funkcji liczby cykli obciążenia dla obu rodzajów próbek. W przypadku próbek drugiego rodzaju określano także kąt inicjacji szczeliny oraz jej trajektorię. Badania prowadzono przy cyklach odzerowotniących po stronie dodatniej tj. dla współczynnika asymetrii cyklu $R = 0$ przy wymuszeniu siłowym. Temperatura otoczenia podczas realizacji badań wahała się w granicach $19^\circ\text{--}21^\circ\text{C}$. We wstępnej fazie badań w próbkach inicjowano szczeliny wstępne przy czym warunki prowadzenia badań były identyczne z warunkami fazy właściwej badań.

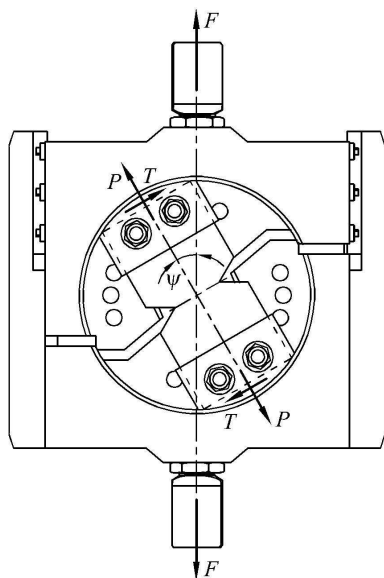
Próbki pierwszego rodzaju poddawane były jedynie obciążeniom jednoosiowym (mode I) więc montowane były bezpośrednio w szczękach uchwytu maszyny wytrzymałościowej. Badania przeprowadzono dla trzech różnych wartości maksymalnej siły w cyklu obciążenia tj. 1.2 kN, 1.4 kN, 1.6 kN. Pomiarów przyrostu długości szczeliny dokonano za pomocą mikroskopu spiralnego (VEB Carl Zeiss JENA) o dokładności 0,001 mm. W niektórych przypadkach szczelina inicjowała w dnie karbu przy czym wyraźnie nierównomiernie po grubości próbki. Można to zaobserwować na rysunku 9a który przedstawia co prawda wyniki uzyskane dla obciążeń statycznych ale doskonale odzwierciedla wspomniane zjawisko. W związku z powyższym za początkową długość szczeliny przyjmowano taką, przy której szczelina posiadała jednakową długość na wskroś.

W przypadku próbek drugiego rodzaju wykorzystano specjalny uchwyt do badania inicjacji i propagacji szczeliny w dwuosiowym stanie obciążenia. Uchwyt ten posłużył wcześniej do weryfikacji wybranych kryteriów kruchego pęknięcia (Seweryn, 1997; Seweryn i inni, 1997) zaś jego zmodyfikowaną wersję wykorzystano w pracy Seweryna i Łukaszevicza (2002). Szczegóły konstrukcji uchwytu

można znaleźć w pracy Łukaszewicza (2003). Pierwotna wersja uchwytu jest przedmiotem ochrony patentowej (Kaczyński i inni, 2003). Zasadniczym elementem przyrządu jest korpus rozcięty na dwie części. Płaskie próbki umieszcza się pod pewnym kątem ψ do kierunku rozciągania przyrządu siłą F realizowaną na maszynie wytrzymałościowej. Kąt ten może być zmieniany co 15° , zgodnie z rozstawem otworów na obwodzie korpusu. W przypadku gdy $\psi = 0^\circ$, zakłada się, że próbki poddawane są czystemu rozciąganiu, zaś gdy $\psi = 90^\circ$ próbki są ścinane i zginane, przy czym przekrój środkowy próbki (wzdłuż płaszczyzny karbu) poddany jest czystemu ścinaniu. Dla kątów zawartych między 0° , a 90° uzyskujemy złożony stan obciążenia. Siłę rozciągającą i ścinającą obliczmy według zależności:

$$T = F \sin \psi, \quad P = F \cos \psi. \quad (1)$$

Próbki mocowane są za pomocą dwóch pasowanych śrub do górnej części korpusu i dwóch śrub do części dolnej. W celu równomiernego rozłożenia docisku próbek do korpusu przyrządu oraz lepszego utwierdzenia próbek w przyrządzie użyto radełkowanych podkładek.



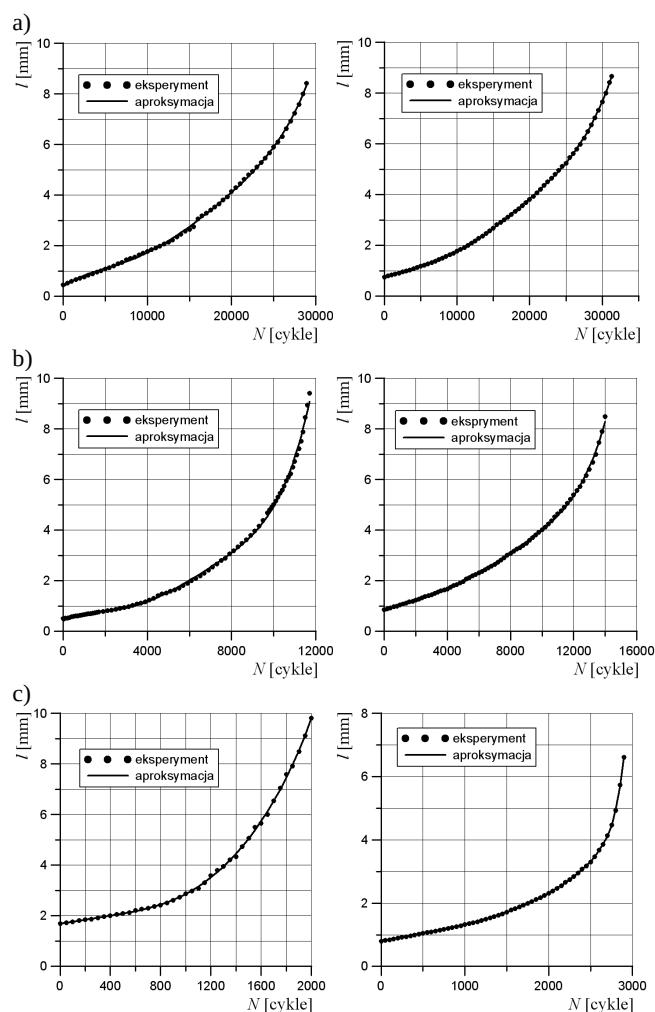
Rys. 2. Specjalny uchwyt do zadawania dwuosowego stanu obciążenia w próbkach płaskich

Badania z wykorzystaniem specjalnego uchwytu przeprowadzono dla wszystkich możliwych do uzyskania kątów ψ z zakresu 0° – 90° zmieniając go co 15° . Zastosowano tu wymuszenie siłowe z maksymalną siłą w cyklu obciążenia 1.6 kN.

4. WYNIKI EKSPERYMENTU

Bezpośrednie wyniki badań eksperymentalnych przedstawiono w postaci wykresów bieżącej długości szczeliny l w funkcji liczby cykli obciążenia N . Rys. 3 i 4 dotyczą próbek pierwszego rodzaju zaś rysunki 5, 6, 7, 8, 9 – próbek rodzaju drugiego. Dla podkreślenia powtarzalności na Rys. 3 i 4 przedstawiono wyniki dla dwóch próbek pierwszego rodzaju przy tej samej wartości obciążenia.

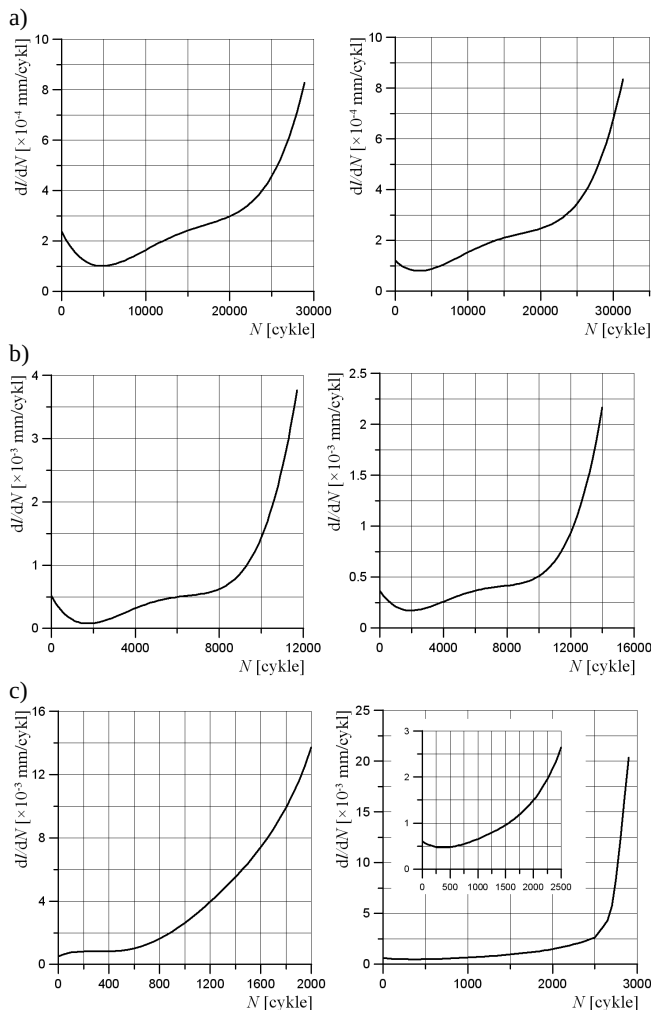
Chcąc określić prędkość pękania zmęczeniowego dokonano aproksymacji średniokwadratowej punktów uzyskanych w doświadczeniu za pomocą wielomianu co najwyżej 6-go stopnia. Ciągłe linie na Rys. 3 i 5 odpowiadają tym właśnie wielomianom. W przypadkach kiedy nie udało się przybliżyć wyników eksperymentu za pomocą jednej krzywej część punktów aproksymowano jednym wielomianem zaś pozostałe innym. Należy tu podkreślić, że aproksymacji dokonywano w taki sposób aby zarówno wartości funkcji $l = l(N)$ w punkcie wspólnym dla obu wielomianów były zbliżone i jednocześnie aby wartość drugiej pochodnej w tym punkcie także były zbliżone. Pozwoliło to na określenie prędkości pękania dla poszczególnych długości szczeliny jako pierwszej pochodnej dl/dN funkcji $l = l(N)$.



Rys. 3. Zależność długości rozrywanej szczeliny od liczby cykli dla różnych wartości obciążenia (próbki pierwszego rodzaju): a) $P_{\max} = 1.2 \text{ kN}$, b) $P_{\max} = 1.4 \text{ kN}$, c) $P_{\max} = 1.6 \text{ kN}$

Propagacja szczeliny w badanych próbkach ma wyraźny trzyetapowy charakter (Rys. 4, Rys. 8). W pierwszym, początkowym etapie, prędkość wyraźnie maleje. Etap drugi związany jest ze stabilnym wzrostem szczeliny. Etap ostatni charakteryzuje się gwałtownym wzrostem prędkości pękania i prowadzi do powstania złomu rozdzielczego. Przyrosty prędkości w ostatnim etapie są na tyle gwałtowne, że na niektórych rysunkach autor zmuszony był przedstawić

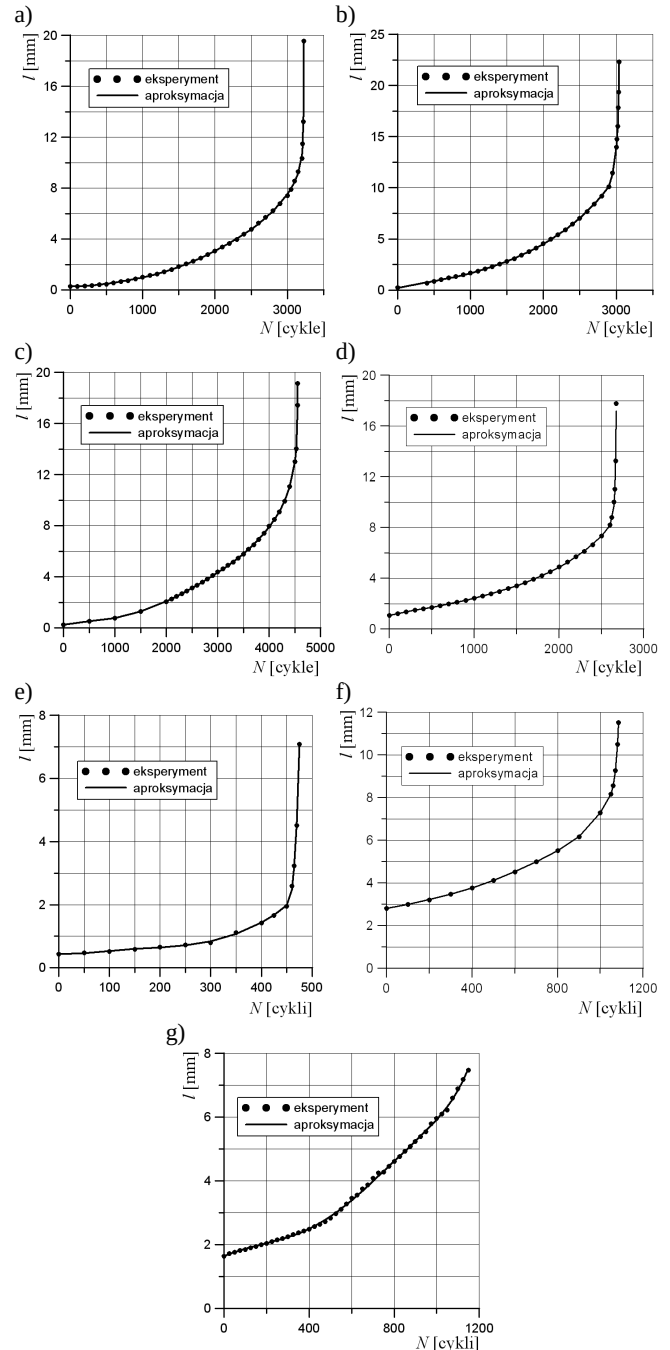
dotatkowe rozkłady prędkości w etapach I i II aby zmiany prędkości były tu zauważalne. Niezwykle ciekawy wydaje się spadek prędkości w etapie I mający miejsce w większości analizowanych próbek. Można by go tłumaczyć faktem kumulacji uszkodzeń w otoczeniu wierzchołka karbu trójkątnego zarówno podczas procesu technologicznego wykonywania tego karbu jak również w trakcie inicjowania szczeliny wstępnej. Szczelina ma łatwiejszą drogę do przebycia przez powstałą strefę kumulacji uszkodzeń. W miarę „opuszczania” strefy trafia w materiał mało uszkodzony stąd jej prędkość może maleć. We wcześniejszych pracach autora (np. Mróz i inni, 2000; 2005) dokonano analitycznego opisu takiego zachowania się szczeliny wynikającego właśnie z obecności strefy kumulacji uszkodzeń mikroplastycznych przed jej wierzchołkiem.



Rys. 4. Prędkość propagacji rozrywanej szczeliny dla różnych wartości obciążenia (próbki pierwszego rodzaju): a) $P_{\max}=1.2\text{kN}$, b) $P_{\max}=1.4\text{kN}$, c) $P_{\max}=1.6\text{kN}$

Wzrost udziału ścinania poprzecznego w stosunku do rozrywania szczeliny powoduje wyraźny spadek trwałości zmęczeniowej (Rys. 5, Rys. 7). Jednocześnie zwróćmy uwagę, że krytyczne długości dla szczeliny rozrywanej są znacznie mniejsze niż dla szczelin gdzie przeważa ścinanie poprzeczne. Sam wzrost obciążenia przy czystym rozrywaniu nie powoduje w zasadzie wyraźnej zmiany w wartościach krytycznych szczeliny (Rys. 3).

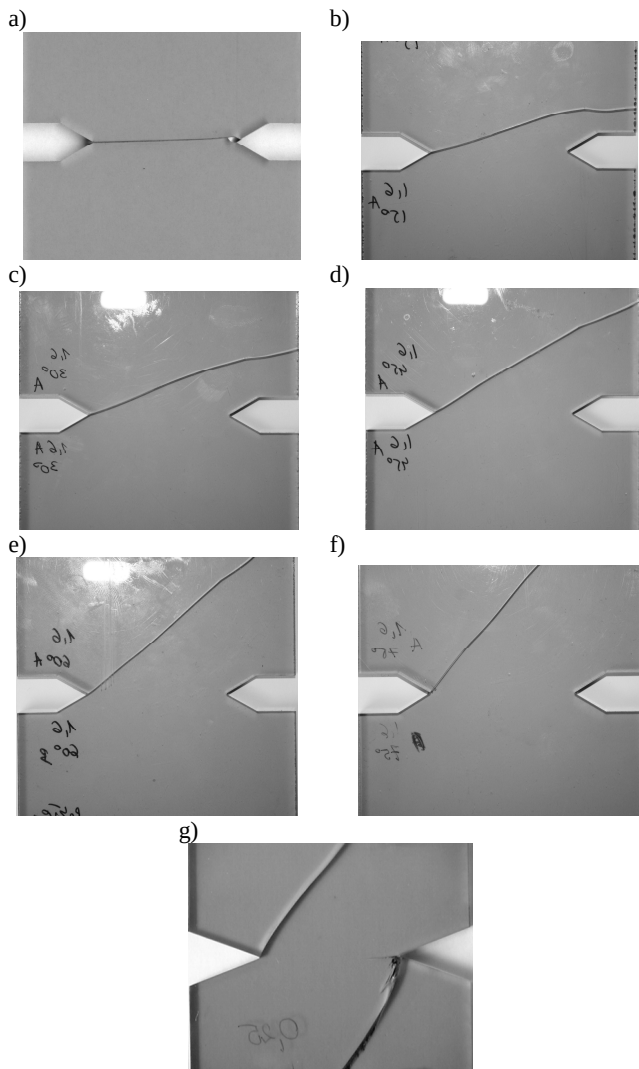
Najbardziej widocznym objawem zmiany udziału rozrywania i ścinania poprzecznego jest kąt inicjacji szczeliny (Rys. 7) oraz kształt trajektorii szczeliny (Rys. 6). W przypadku czystego rozrywania zarówno kąt inicjacji jak trajektoria są oczywiste. W pozostałych przypadkach zaobserwowano nieproporcjonalny wzrost kąta inicjacji w miarę wzrostu udziału ścinania w stosunku do rozrywania.



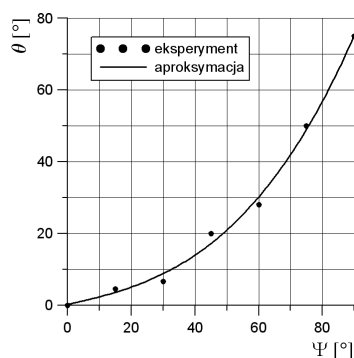
Rys. 5. Zależność długości szczeliny od liczby cykli dla różnych kombinacji rozrywania i ścinania poprzecznego (próbki drugiego rodzaju): a) $\Psi=0^\circ$, b) $\Psi=15^\circ$, c) $\Psi=30^\circ$, d) $\Psi=45^\circ$, e) $\Psi=60^\circ$, f) $\Psi=75^\circ$, g) $\Psi=90^\circ$

Należy tu wyjaśnić sytuację widniejącą na Rys. 6g. Szczelina propagująca z dna drugiego karbu pojawiła się dopiero w chwili osiągnięcia przez szczelinę właściwego wymiaru krytycznego. Nie miało więc to w żaden sposób

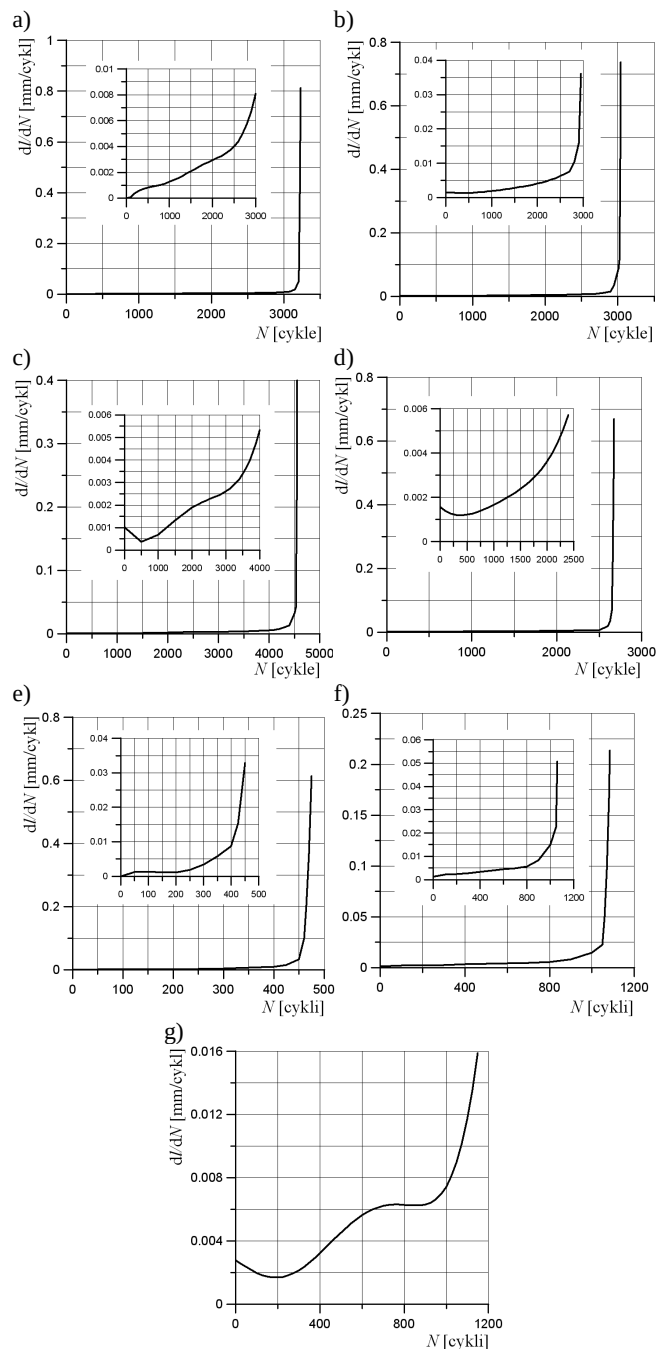
wpływu na wyniki pomiarów. Taką sytuację obserwowano zawsze dla kąta obciążenia $\Psi = 90^\circ$ kiedy to kierunek propagacji powodował, że już po przekroczeniu wartości krytycznych wierzchołek szczeliny „dostawał się” pod zaciski uchwytu. W tej samej chwili w przeciwnym karbie inicjowała i propagowała lawinowo druga szczelina.



Rys. 6. Przykładowe trajektorie szczeliny zmęczeniowej uzyskane w doświadczeniu dla różnych kombinacji rozrywania i ścinania poprzecznego (próbki drugiego rodzaju): a) $\Psi = 0^\circ$, b) $\Psi = 15^\circ$, c) $\Psi = 30^\circ$, d) $\Psi = 45^\circ$, e) $\Psi = 60^\circ$, f) $\Psi = 75^\circ$, g) $\Psi = 90^\circ$



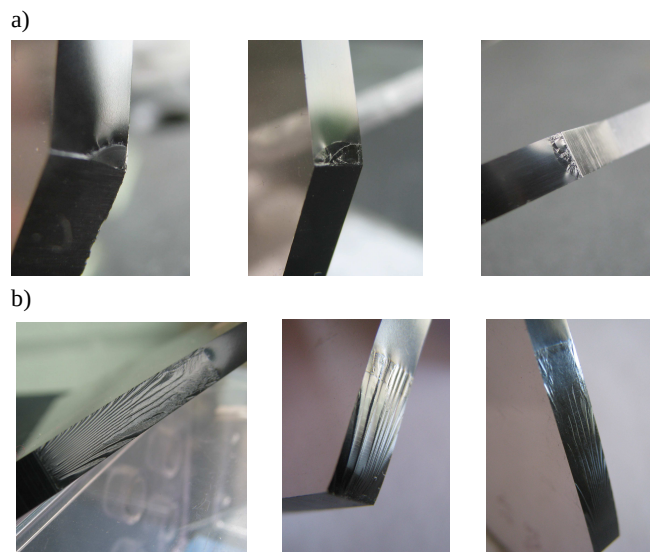
Rys. 7. Kąt θ inicjacji szczeliny dla różnych kombinacji rozrywania i ścinania poprzecznego



Rys. 8. Prędkość wzrostu szczeliny w funkcji liczby cykli dla różnych kombinacji rozrywania i ścinania poprzecznego (próbki drugiego rodzaju): a) $\Psi = 0^\circ$, b) $\Psi = 15^\circ$, c) $\Psi = 30^\circ$, d) $\Psi = 45^\circ$, e) $\Psi = 60^\circ$, f) $\Psi = 75^\circ$, g) $\Psi = 90^\circ$

Należy również zwrócić uwagę na charakter powierzchni złomów zmęczeniowych. Na Rys. 9 porównano je z powierzchniami szczelin powstałych pod wpływem obciążeń monotonicznych. W przypadku powierzchni złomów zmęczeniowych obserwujemy wyraźne bruzdy układające się wzdłuż kierunku propagacji szczeliny. Ponadto możemy zauważyć, co prawda ledwie dostrzegalne na zdjęciach (Rys. 9b), charakterystyczne prążki odpowiadające kolejnym położeniom przemieszczającego się frontu szczeliny. Szczególnie wyraźnie widać je na środkowej fotografii na rysunku 9b. Nie należy ich utożsamiać z klasycznymi prążkami zmęczeniowymi jakie

obserwujemy np. w stalach. Te bowiem są widoczne dopiero przy znacznych powiększeniach przełomów i w zasadzie jeden prążek odpowiada jednemu cyklowi obciążenia (np. Kocańda S., 1985). Powierzchnie szczelin statycznych pozbawione są oczywiście takich prążków (Rys. 9a). Jednocześnie powierzchnie te są całkowicie pozbawione bruzd lub bruzdy te są znikome. Wyraźnie widać, na przykładzie szczelin statycznych, że mogą one propagować nierównomiernie po grubości próbki. Zwracano na to uwagę w cytowanych już pracach Heydera i Kuhna (2006) oraz Heydera i innych (2005). Taka sytuacja często obserwujemy także w przypadku zmęczeniowego wzrostu szczeliny jednak na zdjęciach złomów trudno to zaobserwować.



Rys. 9. Zdjęcia przykładowych powierzchni szczeliny uzyskane ze złomów rozdzielczych próbek: a) monotoniczne rozrywanie, b) zmęczeniowe rozrywanie i ścinanie poprzeczne

5. PODSUMOWANIE

W pracy dokonano szczegółowej analizy wyników badań eksperymentalnych propagacji szczeliny zmęczeniowej w polimetakrylanie metylu. Zbadano zależność kąta inicjacji szczeliny w dnie karbu dla różnych konfiguracji rozrywania i ścinania poprzecznego. Zwrócono uwagę na zasadniczy wpływ nie tylko wartości obciążenia ale również kierunku obciążenia na prędkość wzrostu szczeliny. Zaobserwowano trzy etapowy charakter procesu pęknięcia zmęczeniowego w pleksiglasie. W pierwszym etapie następuje spadek prędkości wzrostu szczeliny. Etap drugi związany jest ze stabilnym jej wzrostem, zaś w etapie trzecim prędkość gwałtownie wzrasta prowadząc do zniszczenia.

Wyniki badań przedstawione w niniejszej pracy pozwoliły oczywiście na zaobserwowanie pewnych prawidłowości w procesie wzrostu szczeliny w kruchym materiale jakim jest polimetakrylan metylu. Ich drugim zasadniczym przeznaczeniem jest wykorzystanie w celu weryfikacji oryginalnego modelu opisującego wzrost szczeliny w warunkach dwuosiowego stanu obciążeń (Mróz i inni, 2000, 2005; Tomczyk, 2003, 2006). Model ten zakłada istnienie przedwierzchołkiem propagującej szczeliny strefy kumulacji

uszkodzeń o zmiennym kształcie i daje możliwość określania zarówno prędkości jak i kierunku pęknięcia. Ponadto prezentowane wyniki umożliwią weryfikację zaproponowanego w cytowanych pracach warunku kruchego pęknięcia.

LITERATURA

1. **Antunes F. V., Ferreira J. M., Costa J. D., Capela C.** (2002), Fatigue life prediction in polymer particle composites, *International Journal of Fatigue*, Vol. 24, 1095-1105.
2. **Ding F., Zhao T., Jiang Y.** (2007), A study of fatigue crack growth with changing loading direction, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 74, 2014-2029.
3. **Gao Z. Z., Yue Z. F.** (2007), Fatigue failure in polyethylene methacrylate in adhesive assembly under unsymmetrical bending, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 48, 89-96.
4. **Hertzberg W. R., Manson J. A.** (1980), *Fatigue of Engineering Plastics*, Academic, New York.
5. **Heyder M., Kolk K., Kuhn G.** (2005), Numerical and experimental investigations of the influence of corner singularities on 3D fatigue crack propagation, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 72, 2095-2105.
6. **Heyder M., Kuhn G.** (2006), 3D fatigue crack propagation: Experimental studies, *International Journal of Fatigue*, Vol. 28, 627-634.
7. **Hoey D., Taylor D.** (2008), Fatigue in porous PMMA: The effect of stress concentrations, *International Journal of Fatigue*, Vol. 30, 989-995.
8. **Jang B. P., Kowbel W., Jang B. Z.** (1992), Impact behavior and impact-fatigue testing of polymer composites, *Compos. Sci. Technol.*, Vol. 44, 107-114.
9. **Kaczyński R., Seweryn A., Poskrobko S.** (2003), Przyrząd do badania wytrzymałości w złożonym stanie obciążenia, Politechnika Białostocka, Polska, *Opis patentowy* PL 186264.
10. **Kim H. S., Wang X. M.** (1994), Temperature and Frequency effects on fatigue crack growth of uPVC, *Journal of Materials Science*, Vol. 29, 3209-3214.
11. **Kocańda S.** (1985), *Zmęczeniowe pękanie metali*, WNT, Warszawa.
12. **Liu Y., Gao Z., Liu W., Yue Z.** (2008), Analytical and experimental investigation of fatigue crack propagation for polyethylene methacrylate, *Materials Science and Engineering, Ser. A*, Vol. 486, 363-368.
13. **Łukaszewicz A.** (2003), Uniwersalny przyrząd do zadawania dwuosiowego stanu obciążenia dla płaskich próbek, *II Sympozjum Mechaniki Zniszczenia Materiałów i Konstrukcji, Augustów*, 219-222;
14. **Mróz Z., Seweryn A., Tomczyk A.** (2000), A non-local critical plane model for the analysis of fatigue crack propagation, In: *Continuous Damage and Fracture*, (Ed. Benallal A.), Elsevier, 373-384.
15. **Mróz Z., Seweryn A., Tomczyk A.** (2005), Fatigue crack growth prediction accounting for the damage zone, *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, Vol. 28, 61-71.
16. **Race A., Miller M. A., Mann K. A.** (2008), A modified PMMA cement (Sub-cement) for accelerated fatigue testing of cemented implant constructs using cadaveric bone, *Journal of Biomechanics*, Vol. 41, 3017-3023.
17. **Ramsteiner F., Armbrust T.** (2001), Fatigue crack growth in polymers, *Polymer Testing*, Vol. 20, 321-327.
18. **Saghir F. Merah N., Khan Z., Bazoune A.** (2005), Modeling the combined effects of temperature and frequency on fatigue crack growth of chlorinated polyvinyl chloride (CPVC), *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 164-165, 1550-1553.

19. **Sahoo S. K., Silbersmidt V. V.** (2008), Effect of multi-impacts on a PMMA sheet material, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 204, 206-212.
20. **Seweryn A.** (1997), *Kumulacja uszkodzeń i pękanie elementów konstrukcyjnych w złożonych stanach obciążeń*, Rozpr. Nauk. Polit. Białost., Nr 42, Białystok, 295 s.
21. **Seweryn A., Łukaszewicz A.** (2002), Verification of brittle fracture criteria for elements with V-shaped notches, *Engng Fract. Mech.*, Vol. 69, 1487-1510.
22. **Seweryn A., Poskrobko S., Mróz Z.** (1997), Brittle fracture in plane elements with sharp notches under mixed-mode loading, *J. Engng Mech.*, Vol. 123, 535-543.
23. **Shah Q. H., Hommah H., Liyas M. H., Ismail A. F.** (2005), The effect of material property gradient on the fracture toughness of a PMMA/PC biomaterial with a crack normal to the interface, *J. Appl. Sci.*, Vol. 3, 476-481.
24. **Shatil G., Saimoto A., Ren. X. J.** (2008), Ductile-brittle fatigue and fracture behaviour of aluminium/PMMA biomaterial 3PB specimens, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, 647-681.
25. **Tomczyk A.** (2003), Propagacja szczeliny zmęczeniowej w dwuosiowym stanie obciążenia, *Rozprawa doktorska*, Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych Politechniki Warszawskiej.
26. **Tomczyk A.** (2006), Trajektorie szczeliny zmęczeniowej według podejścia nielokalnego opartego na koncepcji płaszczyny krytycznej, *Materiały XXI Sympozjum Zmęczenie i Mechanika Pękania*, 421-428.
27. **Yuen B. K. C., Taheri F.** (2004), The effect of loading frequency, tensile overload and compressive underload on the fatigue crack propagation behaviour of polymethyl methacrylate, *Polymer Testing*, Vol. 23, 491-500.

EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS OF FATIGUE CRACK PROPAGATION IN POLYMETHYL METHACRYLATE SPECIMENS

Abstract: The paper presents the results of experimental investigations of crack growth in PMMA V-notched plane specimens. A uniaxial (mode I) and biaxial (mode I + mode II) loading conditions are considered. It is described the effect of various loading values and also the effect of biaxiality of loading on crack growth rate and crack initiation and propagation directories. It was observed a three-stages process of crack propagation in brittle PMMA glass.

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego
nr W/WM/2/2008 realizowanego w Politechnice Białostockiej.

DOŚWIADCZALNE WYZNACZANIE EFEKTYWNOŚCI REGENERATORA O NIERUCHOMYM WYPEŁNIENIU NA PODSTAWIE PARAMETRÓW EKSPLOATACYJNYCH REGENERATORÓW PIECA SZKLARSKIEGO

Grzegorz WOŁKOWYCKI*

*Politechnika Białostocka, Wydział Mechaniczny, Zakład Techniki Ciepłej i Chłodnictwa,
ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

g.wolkowycki@interia.pl

Streszczenie: W pracy opisano regeneratory, w które wyposażony jest piec szklarski znajdujący się w Hucie Szkła BIAGLASS w Białymstoku. Przedstawiono szczegółowo konstrukcję regeneratorów, własności termofizyczne wypełnienia oraz pomiarowe oprzyrządowanie eksploatacyjne. Pokazano jak wyznaczyć dysponując wynikami pomiarów eksploatacyjnych efektywność regeneratora. Zamieszczono, również wyniki symulacji wpływu błędów pomiaru temperatur spalin i powietrza na wielkość błędu tak wyznaczonej efektywności.

1. WSTĘP

Rozwój technologii topienia wsadu w wannie szklarskiej wiąże się z opracowaniem coraz to nowszych ich rozwiązań konstrukcyjnych pieców do topienia szkła, oraz właściwym doбором parametrów ściśle związanych z ich założonymi wymaganiami technologicznymi tak, aby uzyskać wymaganą jakość produktów finalnych.

Aby spełniać te wymagania to nowoczesny proces topienia wsadu w wannie szklarskiej powinien charakteryzować się:

- dużą stabilnością utrzymania temperatury i ciśnienia w części topliwej (gdzie układ jest utrzymywany w fazie ciekłej) i części wyrobowej pieca (skąd pobierane jest szkło do produkcji wyrobów),
- najmniejszym zużyciem paliwa (gazu ziemnego) poprzez uzyskanie możliwie wysokiej sprawności energetycznej procesu poprawie odzysku ciepła odpadowego. Konieczność taka jest rezultatem wysokiej temperatury spalin wylotowych z części topliwej wanny wynoszącej około 1400°C. W takich warunkach temperaturowych odzysk ciepła odpadowego z odprowadzonych spalin możliwy jest tylko poprzez zastosowanie regeneratorów o ceramicznej nieruchomej masie akumulacyjnej, prosty w budowie i niezawodnych w działaniu. Dla zapewnienia ciągłości procesu instalowane są minimum dwa regeneratory pracujące w naprzemiennych cyklach, współpracujące z jedną wanną.

Nowoczesne układy regeneratorów pieców szklarskich pozwalają na:

- zapewnienie wysokiej sprawności energetycznej pieca, a przez to uzyskanie oszczędności energii cieplnej i poprawę sprawności akumulacyjnej pieca, co osiąga się przez optymalne ukształtowanie wypełnień regeneratorów i dobór odpowiednich materiałów na te wypełnienia
- utrzymanie wysokiego poziomu sprawności eksploatacyjnej pieca przez cały okres kampanii, dzięki ograniczeniu procesu starzenia się wypełnień regeneratorów wskutek korozji i tworzenia się osadów ze składników wsadu unoszących ze spalinami zmniejszających prze-

kroje dla przepływu spalin i powietrza (Wrona i Witek, 1994)

- unikanie nieoczekiwanych przestojów, które przeważnie wiążą się z uszkodzeniem wypełnień (korozja, pełzanie itp.) oraz nieodwracalnego zatykania się części kanałów spalinowych koncentrującymi się osadami (Wrona i Witek, 1994).

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie jak wyznaczyć efektywność regeneratora o nieruchomym wypełnieniu na podstawie pomiarów parametrów eksploatacyjnych wraz z oceną błędu pomiarowego. Całość rozważań odnosi się do regeneratorów pracujących w Hucie Szkła Biaglass w Białymstoku. Zakres pracy obejmuje opis pieca, opis układu pomiarowego temperatur i przepływów gazu, spalin i powietrza w obrębie pieca i regeneratorów, metodologię doświadczalnego wyznaczania efektywności regeneratorów oraz symulację wyznaczania błędu określenia tej efektywności.

2. KONSTRUKCJA PIECA SZKLARSKIEGO I KOMÓR REGENERACYJNYCH W HUCIE SZKŁA BIAGLASS

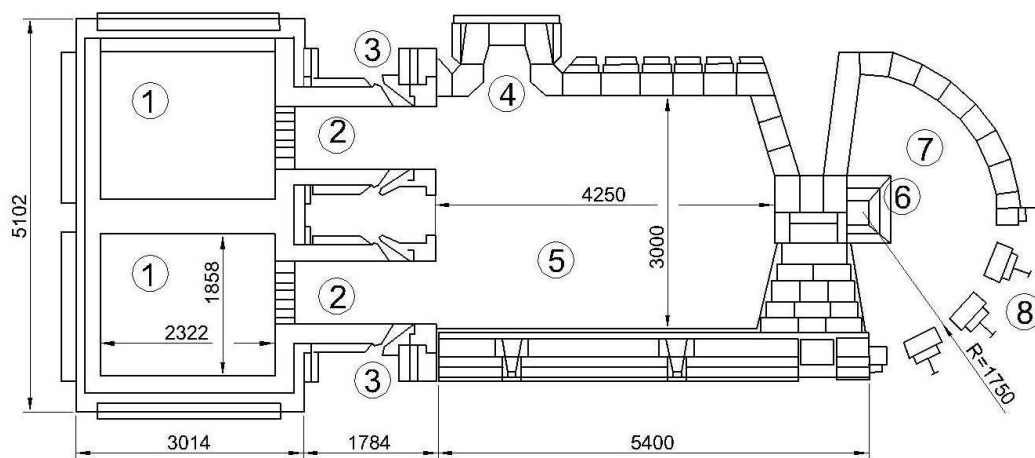
2.1. Piec szklarski

Huta Szkła Biaglass w Białymstoku istnieje od roku 1929 i zajmuje się głównie wyrobem szkła oświetleniowego. Obecnie w hucie szkła Biaglass Białystok pracuje piec szklarski zmianowy z przepływem głębinowym o pojemności 40 ton masy szklanej. Piec ma zdolność wytopową 7 ton masy szklanej na dobę i składa się z dwóch części: topliwej i wyrobowej połączonych przepustem na dnie wanny szklarskiej. Objętość części topliwej tego pieca wynosi 15 m³, natomiast części wyrobowej wynosi 4 m³ (Wołkowycki, 2008).

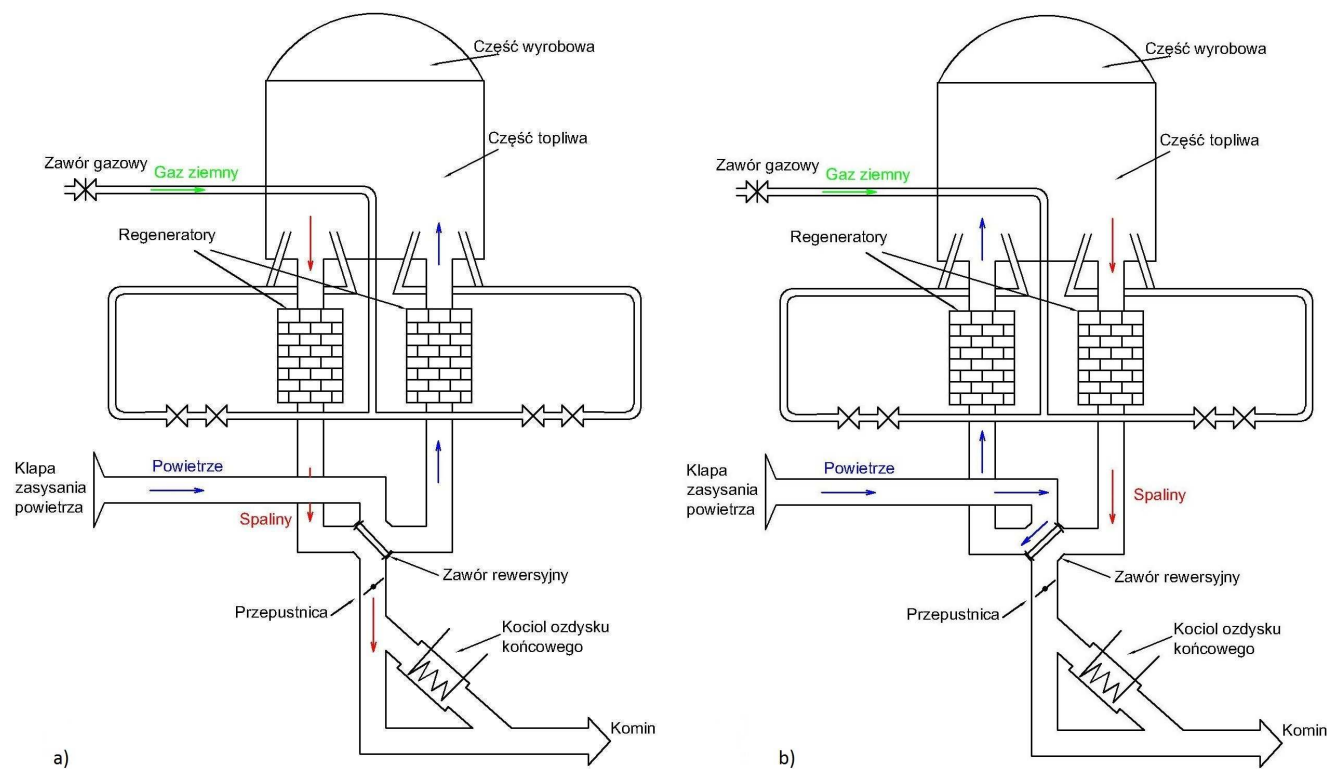
Na Rys. 1. pokazano przekrój poziomy całości pieca szklarskiego z komorami regeneratorów, kanałami przepływowymi do powietrza i spalin, wanną szklarską, która składa się z dwóch części – topliwej i wyrobowej. W części

topliwej szkło jest utrzymywane w fazie ciekłej, a w części wyrobowej pobierana jest masa szklana do produkcji.

Układ przepływu gazu, powietrza i spalin omawianego pieca szklarskiego jest pokazany na Rys. 2.



Rys. 1. Przekrój poziomy pieca szklarskiego pracującego w Hucie Szkła Biaglass; 1 – komory regeneratorów, 2 – kanał przepływu gazów spalinowych i powietrza do części wyrobowej pieca, 3 – palniki gazowe, 4 – zasyp mieszanki do wyrobu szkła, 5 – część topliwa, 6 – kanał przepływowy między częścią topliwą, a wyrobową, 7 – część wyrobowa, 8 – okna do poboru masy szklanej



Rys. 2. Schemat układu przepływowego pieca szklarskiego w Hucie Szkła Biaglass

a) prawy regenerator chłodzony, lewy ogrzewany, b) lewy regenerator chłodzony, prawy ogrzewany

Ciągłość działania pieca szklarskiego wymaga zawsze wyposażenia go w dwa regeneratory. Regeneratory działają, więc w sposób okresowy, tzn. gdy jeden nagrzewa się czyli akumuluje energię (wewnętrzną) odprowadzaną od spalin, drugi jest studzony oddając zakumulowaną energię do powietrza doprowadzonego do spalania. Po odpowiednim nagrzaniu regeneratora, nazywany okresem grza-

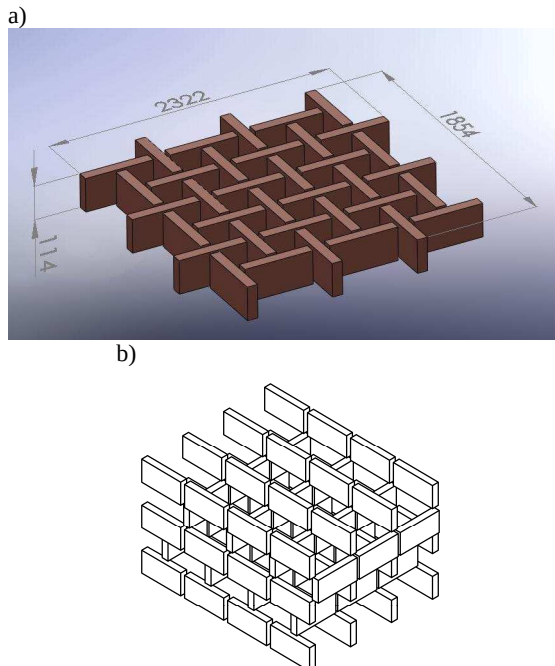
nia, przez który przepływają spaliny, co trwa pewien czas, zmienia się układ przepływu gazów, co nazywa się rewersją. Zatem regenerator nagrzany uprzednio spalinami jest przełączany na przepływ powietrza zimnego i doprowadzenie następnie oddaje ciepło przepływającemu powietrzu do palników. Długość okresów przepływu gazów reguluje odpowiednio do czasu nagrzewania się wypełnienia,

co określa się według zmieniającej się jego temperatury. Czas nagrzewania się kratownicy w hucie szkła Biaglass do odpowiedniej temperatury, czyli ok. 1320°C wynosi 30 minut, a więc w tych odstępach czasu następuje zmiana kierunku przepływu gazów. Ten okresowy sposób działania regeneratora powoduje, również wahania temperatury nagrzewanego powietrza, co odzwierciedla się na temperaturach panujących w piecu. Podczas jednego cyklu wypełnienie regeneratora maksymalnie schładza się do temperatury ok. 330°C. W celu zmniejszenia strat ciepła przez przewodzenie przez ściany komór na zewnątrz stosuje się izolację cieplną, komór regeneracyjnych.

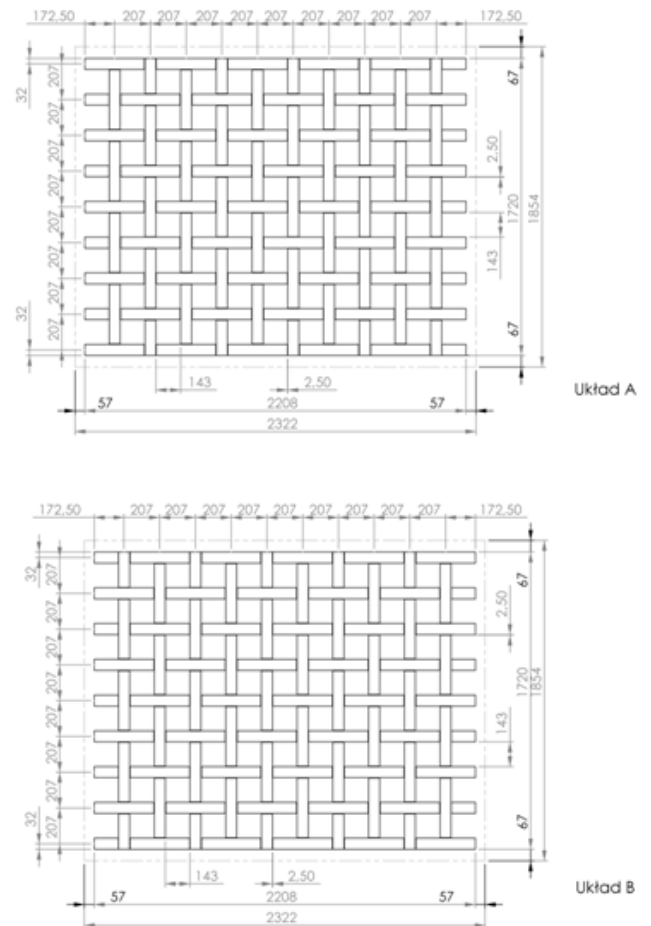
Jako paliwo do nagrzania oraz wytopienia wsadu używa się gazu ziemnego wysoko metanowego Gz 50, który jest gazem zawierającym w swoim składzie około 98 % metanu. Zużycie gazu wynosi 200 m³ w ciągu godziny, czyli ponad 4000 m³ na dobę. 75% ilości zużywanego gazu jest wykorzystywane na podtrzymanie „życia” wanny szklarskiej (utrzymanie masy szklarskiej w fazie ciekłej), natomiast reszta 25%, jest wykorzystywana do wytopienia nowo zasypanej mieszanki uzupełniającej ubytku wykorzystanej do produkcji wyrobów (Wołkowycki, 2008).

2.2. Konstrukcja regeneratorów zainstalowanych w Hucie Szkła w Białymstoku

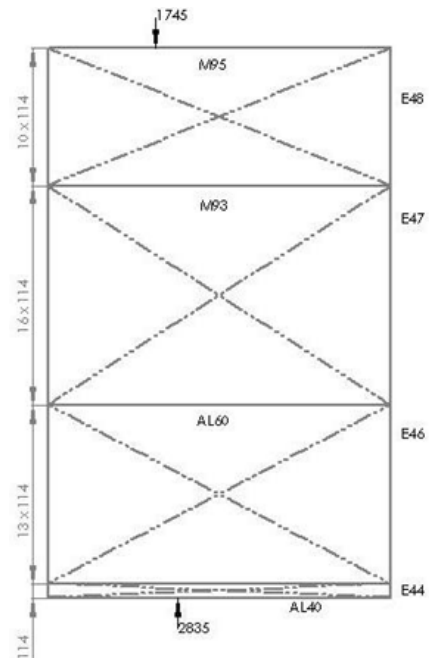
Masą akumulacyjną regeneratorów stanowi ceramiczny materiał ogniotrwały w formie prostek (cegół) tworzących kratownicę, a to w celu umożliwienia przepływu spalin oraz powietrza. Jedna warstwa kratownicy w Białymstoku posiada wysokość 64 mm, zaś dwa pozostałe wymiary wynoszą 2322 mm x 1720 mm. Natomiast łączna wysokość wszystkich warstw wynosi 4560 mm. Kratownice regeneratora pokazano na Rys. 3 i Rys. 4.



Rys. 3. Widok kratownicy regeneratora zastosowanej w piecu w Hucie Szkła w Białymstoku; a) pojedyncza warstwa, b) ułożenie warstw



Rys. 4. Naprzemienne układy cegieł kratownicy regeneratora



Rys. 5. Przekrój poprzeczny kratownicy z uwzględnieniem kolejnych warstw wykonanych z różnych materiałów

Jedna warstwa kratownicy składa się w sumie z 99 prostek o trzech różnych wymiarach. Najwięcej prostek jest o wymiarach 345 x 114 x 64 i jest ich 80 szt. w jednej warstwie. Do dopasowania i zakończenia jednej warstwy

tak, aby pasowały do ściany komory służą cegły o wymiarach 205 x 114 x 64 (10 sztuk) i 140 x 144 x 64 (9 sztuk). Na Rys.4. pokazano układy cegieł kratownicy regeneratora pracującego w Hucie Szkła w Białymstoku. Cegły są ułożone w naprzemiennym układzie A i B Rys.4 tak, aby prostej jednej konfiguracji opierały się na drugiej.

Porowatość ε układu cegieł definiuje się wzoru (1):

$$\varepsilon = \frac{V_p}{V_t} \quad (1)$$

gdzie: V_p – objętość pustek w jednej warstwie, V_t – objętość łączna pustek i (prostok) wypełnień w jednej warstwie.

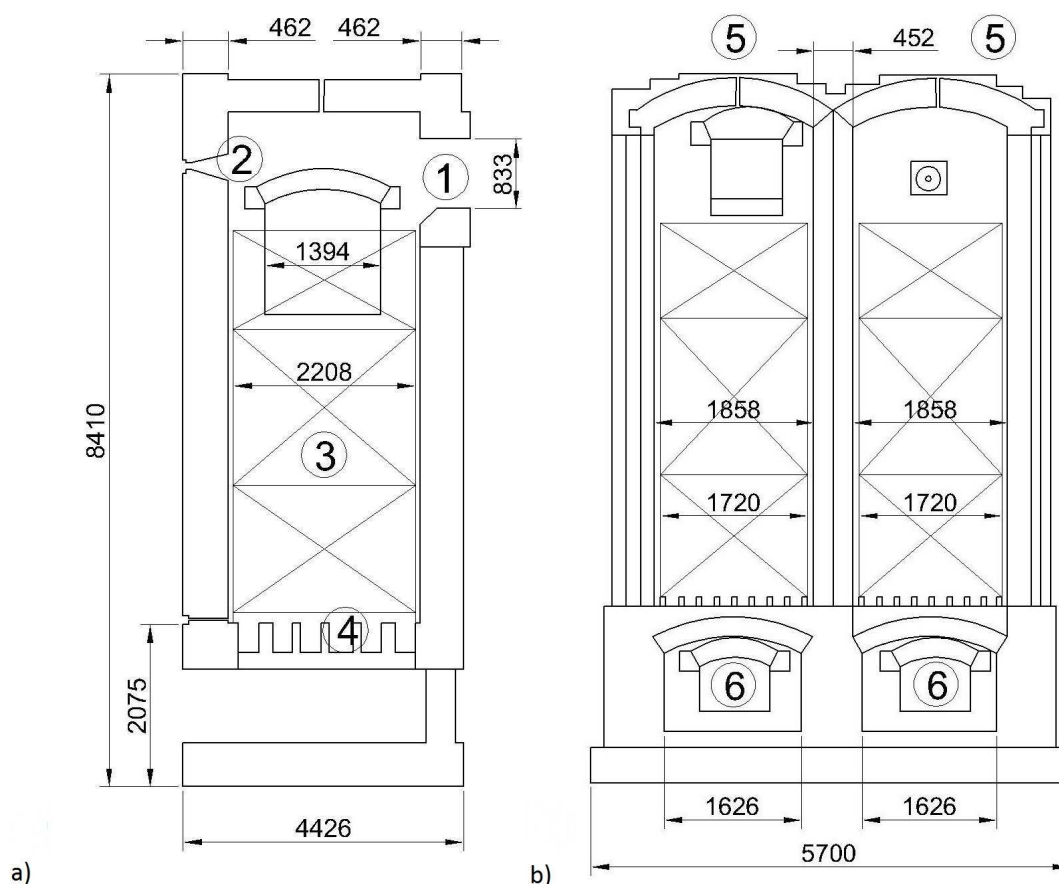
Podstawiając do wzoru: $V_p = 207425280 \text{ mm}^3$ oraz $V_t = 432944640 \text{ mm}^3$ otrzymuje się wartość porowatości równą 0,479.

Natomiast Y jest powierzchnią wymiany ciepła w jednostce objętości, którą wyznacza się dzieląc powierzchnie kontaktu cegieł ze spalinami/powietrzem wszystkich cegieł w warstwie przez objętość zajętej warstwy.

Zatem:

$$Y = \frac{A}{V} = \frac{44,5 \text{ m}^2}{0,43 \text{ m}^3} = 103,5 \frac{1}{\text{m}}, \quad (2)$$

Regenerator jest zbudowany z 4 warstw różnych materiałów ogniotrwałych Rys.5, które są różne pod względem składu chemicznego, od którego zależy odporność na oddziaływanie wysokiej temperatury gazów przepływających przez regenerator.



Rys. 6. Komory regeneracyjne pracujące w Hucie Szkła Biaglas – przekroje pionowe; 1 – kanał łączący regenerator z częścią topliwą pieca, 2 – wziernik do podglądu, 3 – kratownica regeneratora, 4 – ruszt podkomorowy, 5 – górne czujniki temperatury spalin i powietrza komór regeneracyjnych, 6 – przepływ gazów spalinowych oraz powietrza do komina oraz do komory

Najniżej, a więc w strefie najmniejszych temperatur usytuowane są cegły glinowo - krzemianowe AL44, których jest jedna warstwa, a jej skład chemiczny zawiera SiO_2 – 50%, Al_2O_3 – 46%, Fe_2O_3 – 1,8%, TiO_2 – 0,9%.

Dalej w górę w kierunku większych temperatur, ułożonych jest kolejnych 13 warstw prostek wykonanych z materiału, również glonowo - krzemianowego AL60. W składzie chemicznym zawiera głównie Al_2O_3 – 60% oraz SiO_2 – 37,5%. Następnie umieszczonych jest 16 warstw cegieł

z materiału M93, którego głównym składnikiem jest magnez 92,4%. Ostatnia warstwa najbardziej odporna na działanie wysokich temperatur składa się z prostek z materiału M95, których jest 10 warstw, w skład chemiczny, których wchodzi w 96,2% MgO . Kratownice regeneratora konstruuje się z różnych warstw ze względów czysto ekonomicznych, gdyż cegły usytuowane w strefie niższych temperatur są tańsze, bo różnią się składem chemicznym od prostek znajdujących się wyżej. Niżej w Tab. 1 przedstawiono

wartości ciepła właściwego, przewodności cieplnej oraz porowatości otwartej (stosunek objętości otwartych porów materiału do całkowitej jej objętości, łącznie materiałów porami) dla materiałów użytych w każdej warstwie.

Tab.1. Właściwości materiałów kratownicy regeneratora

Materiał ogniotrwały	Wartość ciepła właściwego [kJ/kg* K]	Przewodność cieplna w temp. 700°C [W/mk]	Przewodność cieplna w temp. 1000°C [W/mk]	Przewodność cieplna w temp. 1200°C [W/mk]	Porowatość otwarta [%]
AL44	1,05	1,40	1,50	-	17
AL60	1,0	1,60	1,70	-	16
M93	1,20	3,7	3,1	2,4	19
M95	1,16	4,2	3,7	3,0	18

Masa akumulacyjna regeneratora w formie kratownicy ułożona jest na ruszcie pod komorowym, złożonym z szamotowych kształtek tworzących sklepienie. W komorach znajdujących się w hucie szkła w Białymstoku jest ich sześć. Są one ułożone na spodzie komory tak, aby między nimi pozostawały dość szerokie szczeliny, którymi przepływają gazy. Pod rusztem komorowym znajduje się kanał pod komorowy, połączony z kanałami urządzenia rewersyjnego tj. zaworu służącego do przełączania przepływu gazu podczas cyklicznej pracy regeneratorów. Nad kratownicą pod sklepieniem komory znajduje się kanał dla przepływu gazów przez kratownicę, który łączy się z kanałem gdzie umieszczone są palniki.

3. OPRZYRZĄDOWANIE POMIAROWE PIECA SZKLARSKIEGO I KOMÓR REGENERACYJNYCH

3.1. Schemat rozmieszczenia czujników pomiarowych układu

Głównym elementem sterowania wanny szklarskiej jest sterownik Siemens S7-300. Do sterownika są podłączone przewodami czujniki pomiarowe i elementy wykonawcze. Układ sterowania wyposażony jest w zasilacz bezprzewodowy pozwalający na pracę stacji operatorskiej, sterownika oraz ważniejszych wskaźników przy braku napięcia w sieci. Niżej na Rys. 7. przedstawiono schemat rozmieszczenia czujników pomiarowych i nastawników.

Do pomiaru temperatury w komór regeneracyjnych w Hucie Szkła Biaglass w Białymstoku zastosowano dwa różne termoelementy. W górnej części regeneratora znajduje się termoelement platyna – 10% rod/platyna oznaczonego symbolem S lub Pt Rh 10 – Pt, maksymalna temperatura stosowania wynosi 1540°C, zaś jego błąd pomiarowy wynosi $\pm 0.0025|t|$. W dolnej części komory znajduje się termoelement nikiel-chrom/nikiel-aluminium oznaczonego symbolem K lub NiCr-NiAl, którego maksymalna temperatura stosowania wynosi 1200°C, w którym błąd pomiarowy wynosi $\pm 0.0075|t|$.

W Tab. 2 przedstawiono zestawienie czujników pomiarowych zastosowanych w piecu szklarskim.

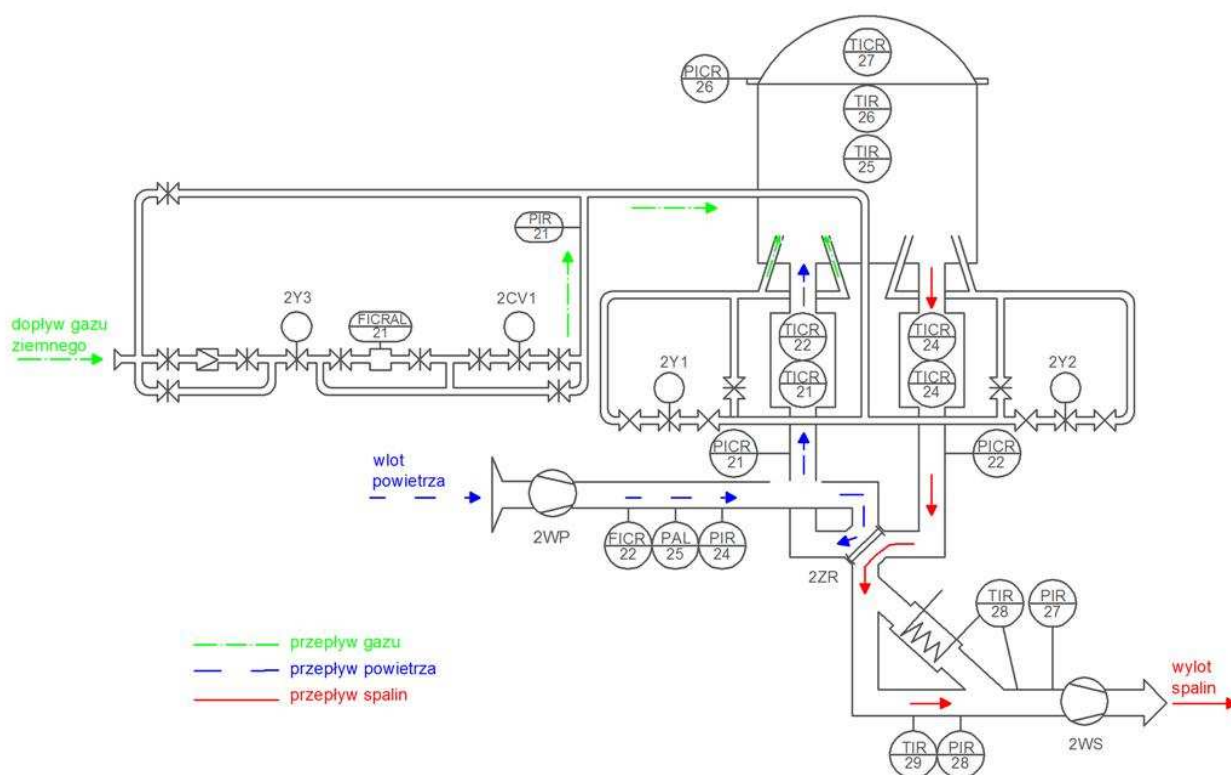
Tab. 2. Czujniki pomiarowe pieca szklarskiego pracującego w Hucie Szkła Biaglass

Lp	Symbol	Producent/model	Przeznaczenie	Dokładność (błąd pomiarowy)
1.	TICR 27	PtRh10-Pt	Pomiar temperatury spalin w części wyrobowej	$\pm 0.0025 t $
2.	TIR 26	PtRh10-Pt	Pomiar temperatury w części wyrobowej	$\pm 0.0025 t $
3.	PICR 26	AKAPIS typ PRC-1	Pomiar ciśnienia spalin w części wyrobowej wanny	(-30...+30)Pa - błąd 0,3%
4.	TIR 25	PtRh10-Pt	Pomiar temperatury w części topliwej	$\pm 0.0025 t $
5.	TICR 22	PtRh10-Pt	Pomiar temperatury spalin w komorze strona L – góra	$\pm 0.0025 t $
6.	TICR 24	PtRh10-Pt	Pomiar temperatury spalin w komorze strona P – góra	$\pm 0.0025 t $
7.	TICR 23	NiCr-NiAl	Pomiar temperatury spalin w komorze strona L – dół	$\pm 0.0075 t $
8.	TICR 21	NiCr-NiAl	Pomiar temperatury spalin w komorze strona P – dół	$\pm 0.0075 t $
9.	PICR 21	APLISENS typ PC50	Pomiar ciśnienia spalin komora lewa	PC-50/-0,5÷+0,5kPa - błąd 0,3%
10.	PICR 22	APLISENS typ PC50	Pomiar ciśnienia spalin komora prawa dół	PC-50/-0,5÷+0,5kPa - błąd 0,3%
11.	PIR 27	LABOR typ UDL-7K	Pomiar ciśnienia spalin – czopach	(0 ... 600)°C-KW-L)
12.	PIR 28	LABOR typ UDL-7K	Pomiar ciśnienia spalin – kanał spalin	(0 ... 600)°C-KW-L)
13.	PIR 23	APLISENS typ PC-28/EEEx	Ciśnienie gazu	PC-28/EEEx/0÷10 kPa/PD/M - błąd 0,4%
14.	FICRA L 01	YOKO-GAWA typ DY050	Ilość gazu do wanny	$\pm 1\%$
15.	PIR 24	APLISENS typ PC-28	Ciśnienie powietrza	0÷2kPa/PD/M - błąd 0,4%
16.	FICR 02	FUJI typ FKK	Ilość powietrza do wanny	(0 ... 1,49)kPa
17.		BN-76/5531-09	Pomiar temperatury powietrza wlotowego do komór regeneratora	$\pm 0.02 t $

Przeznaczenie zastosowanych czujników uwidocznionych na schemacie Rys. 7.

- TICR 27 pomiar temperatury w części wyrobowej wanny szklarskiej – góra;
- TIR 26 pomiar temperatury w części wyrobowej – masa szklana;
- PICR 26 pomiar ciśnienia w części wyrobowej wanny szklarskiej;
- TIR 25 pomiar temperatury w części topliwej wanny szklarskiej;
- TICR 22 pomiar temperatury powietrza i spalin w komorze lewej górna część;
- TICR 24 pomiar temperatury powietrza i spalin w komorze prawej górna część;
- TICR 23 pomiar temperatury powietrza i spalin w komorze prawej dolna część;
- TICR 21 pomiar temperatury powietrza i spalin w komorze lewa dolna część;
- PICR 21 pomiar ciśnienia spalin komora lewa;
- PICR 22 pomiar ciśnienia spalin komora prawa;
- PIR 27 pomiar ciśnienia spalin – czopach – na wylocie do komina za kotłem wymiennikowym;
- PIR 28 pomiar ciśnienia spalin – kanał spalin – na wylocie do komina;

- TIR 28 pomiar temperatury spalin – czopach – na wylocie do komina za kotłem wymiennikowym;
- TIR 29 pomiar temperatury spalin – kanał spalin – na wylocie do komina;
- PIR 21 ciśnienie gazu dostarczonego do wanny szklarskiej;
- FICRAL 01 ilość gazu do wanny – znajduje się w rozdzielni gazu;
- PIR 24 ciśnienie powietrza na wlocie przed zaworem rewersyjnym;
- FICR 02 ilość powietrza do wanny na wlocie przed zaworem rewersyjnym;
- 2CV1 zawór dławiący gazowy z siłownikiem elektrycznym;
- 2Y1 zawór gazowy odcinający gaz na czas rewersji strona prawa;
- 2Y2 zawór gazowy odcinający gaz na czas rewersji strona prawa;
- 2Y3 zawór gazowy odcinający węzeł główny;
- 2WS wentylator spalin na wlocie do komina;
- 2WP wentylator powietrza za czerpnią powietrza;
- 2ZR zawór rewersyjny do przełączania kierunku przepływu powietrza oraz spalin.



Rys. 7. Schemat układu przepływowego pieca szklarskiego i rozmieszczenie oprzyrządowania pomiarowego (Karolczak, 2004)

3.2. Charakterystyki poszczególnych układów pomiarowych

TICR 27 Pomiar temperatury spalin w części wyrobowej – góra:

Obwód pomiarowy wykorzystuje termooogniwo typu S zabudowane w wannie oraz kabel przewodów kompensacyjnych, które wprowadzono na dwuprzewodowy przetwornik U/I (produkcji CIBA typ T1249 ustawiony na (800...1600)°C) zasilany z miernika cyfrowego (produk-

cji LUMEL typ N15) oraz na kartę AI sterownika (S7-300 SIEMENS).

TIR 26 Pomiar temperatury w części wyrobowej :

Obwód pomiarowy wykorzystuje termooogniwo typu S zabudowane w wannie oraz kabel przewodów kompensacyjnych, które wprowadzono na dwuprzewodowy przetwornik U/I (produkcji CIBA typ T1249 ustawiony na (800...1600)°C) zasilany z miernika cyfrowego oraz na kartę AI sterownika.

PICR 26 Pomiar ciśnienia spalin w części wyrobowej wanny:

Obwód pomiarowy wykonano zabudowując dwuprzewodowy przetwornik różnicy ciśnienia (produkcji AKAPIS typ PRC-1 o zakresie pomiarowym: (-30...+30)Pa) na uśredniającej trasie impulsowej (łącznie lewą i prawą stronę komory wyrobowej). Sygnał z przetwornika wprowadzono na kartę AI sterownika.

TIR 25 Pomiar temperatury w części topliwej:

Obwód pomiarowy wykorzystuje termooogniwo typu S zabudowane w wannie oraz kabel przewodów kompensacyjnych, które wprowadzono na dwuprzewodowy przetwornik U/I (produkcji CIBA typ T1249 ustawiony na (800...1600)°C) zasilany z miernika cyfrowego oraz na kartę AI sterownika.

TICR 24 Pomiar temperatury spalin w komorze strona P – góra:

Obwód pomiarowy wykorzystuje termooogniwo typu S zabudowane w wannie oraz kabel przewodów kompensacyjnych, które wprowadzono na dwuprzewodowy przetwornik U/I (produkcji CIBA typ T1249 ustawiony na (0...1400)°C) zasilany z miernika cyfrowego oraz na kartę AI sterownika.

TICR 22 Pomiar temperatury spalin w komorze strona L – góra:

Obwód pomiarowy wykorzystuje termooogniwo typu S zabudowane w wannie oraz kabel przewodów kompensacyjnych, które wprowadzono na dwuprzewodowy przetwornik U/I (produkcji CIBA typ T1249 ustawiony na (0...1400)°C) zasilany z miernika cyfrowego oraz na kartę AI sterownika.

TICR 22 Pomiar temperatury spalin w komorze strona P – dół:

Obwód pomiarowy wykorzystuje termooogniwo typu K zabudowane w wannie oraz kabel przewodów kompensacyjnych, które wprowadzono na dwuprzewodowy przetwornik U/I (produkcji LABOR typ UDL-9K-(0...1000)°C-KW-L) zasilany z miernika cyfrowego oraz na kartę AI sterownika.

TICR 21 Pomiar temperatury spalin w komorze strona L – dół:

Obwód pomiarowy wykorzystuje termooogniwo typu K zabudowane w wannie oraz kabel przewodów kompensacyjnych, które wprowadzono na dwuprzewodowy przetwornik U/I (produkcji LABOR typ UDL-9K-(0...1000)°C-KW-L) zasilany z miernika cyfrowego oraz na kartę AI sterownika.

PICR 21 Pomiar ciśnienia spalin komora lewa:

Obwód pomiarowy wykonano zabudowując dwuprzewodowy przetwornik ciśnienia (produkcji APLISENS typ PC-50/-0,5÷+0,5kPa/4÷20mA/M), którego sygnał wprowadzono na kartę AI sterownika.

PICR 22 Pomiar ciśnienia spalin komora prawa dół:

Obwód pomiarowy wykonano zabudowując dwuprzewodowy przetwornik ciśnienia (produkcji APLISENS typ PC-50/-0,5÷+0,5kPa/4÷20mA/M), którego sygnał wprowadzono na kartę AI sterownika.

PIR 27 Pomiar ciśnienia spalin – czopach:

Obwód pomiarowy wykonano zabudowując dwuprzewodowy przetwornik ciśnienia (produkcji APLISENS typ PC-50/-0,5÷+0,5kPa/4÷20mA/M), którego sygnał wprowadzono na kartę AI sterownika.

PIR 28 Pomiar ciśnienia spalin – kand spalin:

Obwód pomiarowy wykonano zabudowując dwuprzewodowy przetwornik ciśnienia (produkcji APLISENS typ PC-50/-0,5÷+0,5kPa/4÷20mA/M), którego sygnał wprowadzono na kartę AI sterownika.

PIR 27 Pomiar temperatury spalin – czopach:

Obwód pomiarowy wykorzystuje termooogniwo typu K zabudowane w czopuchu oraz kabel przewodów kompensacyjnych, które wprowadzono na dwuprzewodowy przetwornik U/I (produkcji LABOR typ UDL-7K-(0 ... 600)°C-KW-L), z którego sygnał prądowy wprowadzono na kartę AI sterownika.

PIR 28 Pomiar temperatury spalin – kanał:

Obwód pomiarowy wykorzystuje termooogniwo typu K zabudowane w kanale spalin oraz kabel przewodów kompensacyjnych, które wprowadzono na dwuprzewodowy przetwornik U/I (produkcji LABOR typ UDL-7K-(0 ... 600)°C-KW-L), z którego sygnał prądowy wprowadzono na kartę AI sterownika.

PIR 23 Ciśnienie gazu:

Obwód pomiarowy wykonano z dwuprzewodowego przetwornika ciśnienia w wersji iskrobezpiecznej (produkcji APLISENS typ PC-28/EEEx/0÷10kPa/PD/M) zamontowany na zaworze odcinającym wstawianym w gazociąg (węzeł gazowy wanny). Sygnał z przetwornika wprowadzono na kartę AI EEx sterownika.

FICRAL 01 Ilość gazu do wanny:

Obwód pomiarowy wykonano dwuprzewodowego przetwornika szybkości przepływu (produkcji YOKOGAWA typ DY050 ECL AD4-4AD EX zakres pomiarowy: (0...250)Nm³ gazu/h) wstawiony bezpośrednio w gazociąg (węzeł gazowy wanny). Sygnał z przetwornika wprowadzono na kartę AI EEx sterownika.

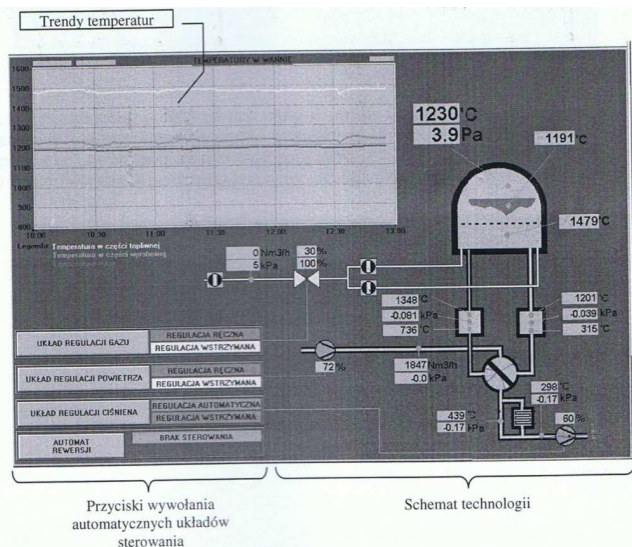
PIR 24 Ciśnienie powietrza:

Obwód pomiarowy wykonano dwuprzewodowego przetwornika ciśnienia (produkcji APLISENS typ PC-28/0÷2kPa/PD/M) zamontowany na króćcu kanału powietrza do wanny. Sygnał z przetwornika wprowadzono na kartę AI sterownika.

FICR 02 Ilość powietrza do wanny:

Obwód pomiarowy wykonano z przetwornika różnicy ciśnienia (produkcji FUJI typ FKK o ustawionym zakresie (0 ... 1,49)kPa, który odpowiada przepływowi (0 ... 2000) Nm³ powietrza/h) zabudowany na zaworze blokowym pięciodrogowym zabudowanym bezpośrednio przy kryzie pomiarowej, wstawionej bezpośrednio w kanał powietrza do wanny. Sygnał z przetwornika wprowadzono na kartę AI sterownika (Karolczak, 2004).

Na Rys. 8. pokazano schemat wizualizacyjny układu przepływowego gazu, powietrza i spalin w obrębie wanny szklarskiej (Bobowski, 2004).

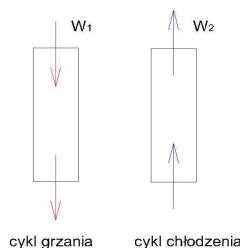


Rys. 8. Wizualizacja systemów pomiarowych i wykonawczych wanny szklarskiej Huty Szkła Biaglass w Białymstoku

4. DOŚWIADCZALNE WYZNACZANIE EFEKTYWNOŚCI REGENERATORA

4.1. Podstawy teoretyczne

Całkowanie równań bilansowych regeneratora dostarcza rozwiązań w postaci pól temperatury gazów i wypełnień. Jednak ze względów aplikacyjnych istotna jest wielkość wymienianego strumienia ciepła. Metodologia obliczeń takiego strumienia regeneratorów opiera się na pojęciu efektywności wymiany ciepłej wymiennika, nazywanej w rozważanym przypadku efektywnością regeneratora (Skiepko i Shah, 2005). Efektywność ta definiowana jest jako stosunek, obliczanego na podstawie wyznaczanych temperatur gazów, ilości ciepła Q wymienianego w regeneratorze podczas cyklu do ilości ciepła $Q_{\max}$, którą byłaby wymieniana przy tych samych wlotowych właściwościach czynników wymieniających ciepło w rekuperatorze przeciwprądowym z wbudowaną nieskończenie wielką powierzchnią wymiany ciepła.



Rys. 9. Kierunek przepływu strumienia pojemności cieplnej w cyklu grzania oraz chłodzenia

Ilość ciepła wymienionego w okresie grzania w przedziale czasu τ_1 dla regularnie periodycznego stanu pracy jest zbilansowana równoważną ilością ciepła przenoszonego w okresie chłodzenia regeneratora w przedziale czasu τ_2 , stąd

$$Q = (\dot{W}_1 \tau_1) (\bar{t}_1 - \bar{t}_1'') = (\dot{W}_2 \tau_2) (\bar{t}_2'' - \bar{t}_2') \quad (3)$$

Zatem, efektywność regeneratora wyznacza się na podstawie następującej zależności (Skiepko, 1998):

$$\varepsilon = \frac{(\dot{W}_1 \cdot \tau_1) (\bar{t}_1' - \bar{t}_1'')}{(\dot{W} \cdot \tau)_{\min} (\bar{t}_1' - \bar{t}_2')} = \frac{(\dot{W}_2 \cdot \tau_2) (\bar{t}_2'' - \bar{t}_2')}{(\dot{W} \cdot \tau)_{\min} (\bar{t}_1' - \bar{t}_2')} \quad (4)$$

Zazwyczaj występuje następująca zależność (Skiepko, 1998):

$$W_1 \cdot \tau_1 > W_2 \cdot \tau_2, \quad (5)$$

W rezultacie bazując na cyklu grzania do wyznaczenia efektywności regeneratora stosuje się wzór:

$$\varepsilon = \frac{(\dot{W}_1 \cdot \tau_1) (\bar{t}_1' - \bar{t}_1'')}{(\dot{W} \cdot \tau)_{\min} (\bar{t}_1' - \bar{t}_2')} = \frac{\dot{W}_1 \cdot \tau_1 (\bar{t}_1' - \bar{t}_2')}{\dot{W}_2 \cdot \tau_2 (\bar{t}_1' - \bar{t}_2')} \quad (6)$$

Przy zastosowaniu formuły (4) z uwzględnieniem (5) wyznaczenie efektywności regeneratora na podstawie cyklu chłodzenia, dla którego $W_2 \tau_2 = (W\tau)_{\min}$ prowadzi do wzoru

$$\varepsilon = \frac{\bar{t}_2'' - \bar{t}_2'}{\bar{t}_1' - \bar{t}_2'} \quad (7)$$

4.2. Analiza błęd pomiarowego efektywności

Błędy pomiarowe wielkości mierzonych bezpośrednio

Pomiar bezpośredni polega na zmierzeniu wielkości fizycznej przez odczyt wskazań jej wartości wprost z zastosowanego narzędzia pomiarowego. Wartości te mogą być odczytane również z systemu rejestracji i zbierania danych pomiarowych sprzężonego z zastosowanym narzędziem. Wielkość błędu bezwzględnego bezpośrednio zależy od przypadkowych, a więc nieprzewidywalnych, co do wielkości i kierunku, zmian wielkości mierzonej, które ujawniają się podczas kolejnych powtórzeń pomiarów, przy czym wartość średnia wielkości mierzonej jest zazwyczaj celem pomiarów, które wyznacza się ze wzoru (Moffat, 1988):

$$y_{sr} = \frac{\sum_{j=1}^J y_j}{J} \quad (8)$$

Wkład tego rodzaju zmian do błędu bezwzględnego określa się jako błąd przypadkowy $\Delta_{y,p}$ wielkości mierzonej, który w odniesieniu do wartości średniej y_{sr} określony jest wzorem:

$$\Delta_{y_{sr},p} = \sqrt{\frac{1}{J \cdot (J-1)} \cdot \sum_{j=1}^J (y_j - y_{sr})^2} \quad (9)$$

Na dokładność pozyskiwanych wyników pomiarów wpływa nie tylko wielkość błędu przypadkowego, ale i błędy systematyczne. Jeśli dla kolejnych powtórzeń pomiarów dokonywanych w tych samych warunkach błąd bezwzględny wielkości mierzonej jest znany i pozostaje stały to określa się go jako systematyczny. Zazwyczaj błąd systematyczny jest skutkiem znanego błędu narzędzia pomiarowego, znanych błędów odnoszącego się do wybranej metodologii pomiaru, błędów wprowadzanych przez sys-

tem zbierania danych pomiarowych. Wszystkie tego rodzaju błędy systematycznie można sklasyfikować do czterech podstawowych kategorii, a mianowicie:

- Błąd systematyczny wielkości y spowodowany niedokładnością kalibracji narzędzia pomiarowego, $\delta_{y,kal}$;
- Błąd systematyczny wielkości y spowodowany niedokładnością systemu zbierania danych pomiarowych, $\delta_{y,zb,dan}$;
- Błąd systematyczny wielkości y spowodowany zmiennością przestrzenną lub niedokładnością oszacowania zmienności przestrzennej wielkości y , $\delta_{y,zm,przest}$;
- Błąd systematyczny wielkości y spowodowany niedokładnością zainstalowania narzędzia pomiarowego, $\delta_{y,inst}$;

Jeśli więc wielkość y_{sr} jest mierzona bezpośrednio to wynikowy jej błąd pomiaru uwzględniający wkład błędów przypadkowego / systematycznych wyznacza się ze wzoru:

$$\delta_{ysr} = \sqrt{\delta_{y,inst}^2 + \delta_{y,kal}^2 + \delta_{y,zm,przest}^2 + \delta_{y,zb,dan}^2 + (2 \cdot \Delta_{ysr,p})^2}, \quad (10)$$

W rezultacie pomiaru wartości rzeczywiste wielkości y mogą być zapisane w jako znajdujące się w przedziale (Moffat, 1988):

$$y = y_{sr} \pm \delta_{ysr} \quad (11)$$

Błędy pomiarowe wielkości mierzonych pośrednio

W pomiarze pośrednim mierzona wielkość wyznacza się ze wzoru (lub kilku sprzężonych zależności), który uzależnia wielkość mierzona pośrednio od jednej lub kilku wielkości mierzonych bezpośrednio. Niech wielkość z jest mierzona pośrednio, co oznacza, że jest ona wyznaczana z formuły obliczeniowej oparciu o pewną liczbę wielkości pomierzonych bezpośrednio, gdzie każda z wielkości mierzonych bezpośrednio zostaje wyznaczona z błędem δ_y . Wówczas błąd wyznaczenia wielkości mierzonej pośrednio wynosi

$$\delta_z = \sqrt{\sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial z}{\partial y_k} \cdot \delta_{y_k} \right)^2} \quad (12)$$

W rezultacie pomiaru wartości rzeczywiste wielkości z mogą być zapisane w jako znajdujące się w przedziale

$$z = z_{sr} \pm \delta_z \quad (13)$$

Tak określona metodologia wyznaczania błędów pomiaru wielkości mierzonych bezpośrednio i pośrednio została zastosowana w niniejszej publikacji.

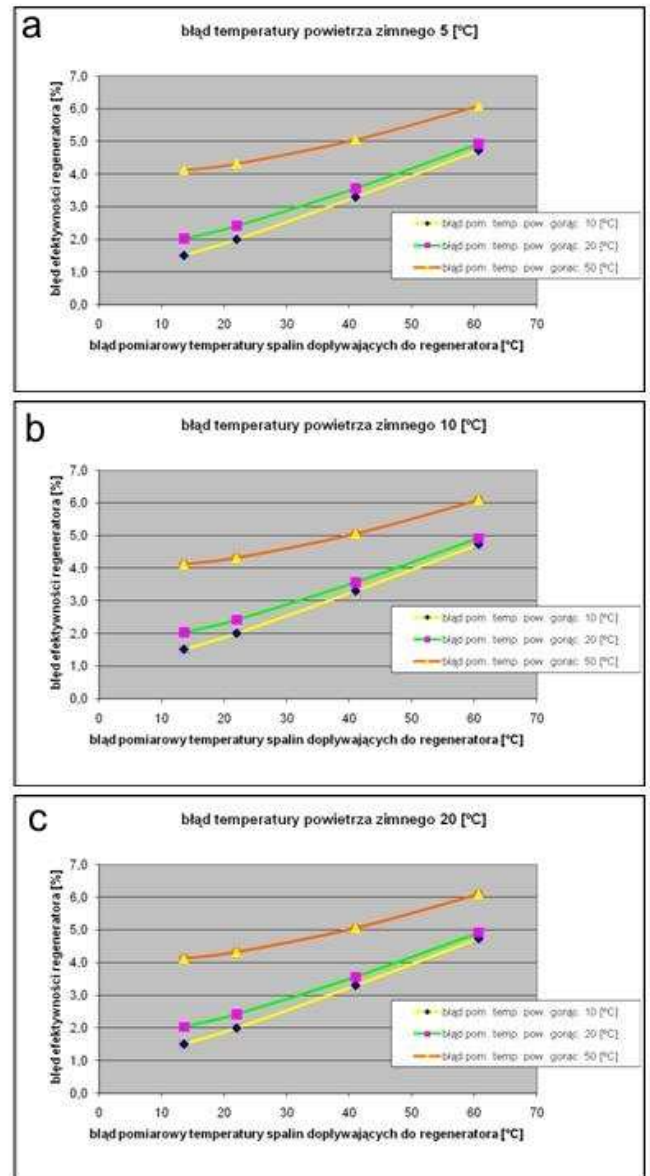
Zależność (7) jest zastosowana do wyznaczania efektywności regeneratora. Zatem wyznacza się ją doświadczalnie metodą pośrednią. W rezultacie zastosowanie wzoru (12) błąd pomiarowy efektywności jest określony następującą formułą

$$\Delta \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t_2''} \cdot \Delta t_2'' \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t_2'} \cdot \Delta t_2' \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t_1'} \cdot \Delta t_1' \right)^2}, \quad (14)$$

Po wyznaczeniu wyników pochodnych cząstkowych otrzymujemy następującą zależność końcową:

$$\Delta \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{1}{t_1' - t_2'} \cdot \Delta t_2'' \right)^2 + \left(\frac{t_2'' - t_1'}{(t_1' - t_2')^2} \cdot \Delta t_2' \right)^2 + \left(-\frac{t_2'' - t_2'}{(t_1' - t_2')^2} \cdot \Delta t_1' \right)^2}, \quad (15)$$

5. WYNIKI SYMULACJI BŁĘDU WYZNACZANIA EFEKTYWNOŚCI



Rys. 9. Błędy wyznaczania efektywności regeneratora w funkcji błędów pomiarowych temperatury powietrza gorącego na wylocie z regeneratora oraz temperatury spalin na wlocie do regeneratora: a) dla błędu pomiarowego temperatury powietrza zimnego 5°C, b) dla błędu pomiarowego temperatury powietrza zimnego 10°C, c) dla błędu pomiarowego temperatury powietrza zimnego 20°C

Po założeniu szacunkowych wartości liczbowych średnich temperatur dla komory regeneratora lewego wynoszących odpowiednio:

$\bar{t}_1 = 1343^\circ\text{C}$ – temperatura spalin na dopływie do komory regeneratora,

$\bar{t}_2 = 1301^\circ\text{C}$ – temperatura powietrza za regeneratorem (średnia),

$\bar{t}_2 = 22^\circ\text{C}$ – temperatura powietrza, dopływającego do regeneratora, (na dolocie zimne powietrze).

Na wykresach Rys. 9. przedstawiono wyniki dokonanej symulacji błędu pomiarowego $\Delta\epsilon$ efektywności regeneratora określoną na podstawie cyklu chłodzenia. Wykresy pokazują jak zmienia się błąd pomiarowy efektywności w zależności od wartości wynikowej błędu pomiarowego temperatury powietrza gorącego na wyjściu z regeneratora. Przyjęto wartość błędu temperatury powietrza gorącego z regeneratora $\Delta\bar{t}_2$ wynoszący 10°C , 20°C , 50°C oraz założono błąd pomiaru temperatury spalin z pieca szklarskiego do regeneratora $\Delta\bar{t}_1$, odpowiednio 10°C , 20°C , 40°C , 60°C .

Po dokonaniu symulacji stwierdzono, iż wartość błędu pomiarowego efektywności podlega bardzo małym wahaniom zmieniając wartość zmiennej przestrzennej temperatury powietrza zimnego dopływającego do regeneratora. Wartość tą w pierwszym zakresie założono na 5°C drugim 10°C natomiast trzecim 20°C , pokazało to, że błąd zmienia się o wartość liczbową dopiero czwartego miejsca po przecinku.

6. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono budowę, zasadę działania oraz oprzyrządowanie pomiarowe regeneratorów ciepłych zainstalowanych w Hucie Szkła Biaglass w Białymstoku. Pokazano jak wyznaczyć efektywność regeneratora na podstawie cyklu chłodzenia. Wyniki wykonanej symulacji dowodzą, że przy wykorzystaniu eksploatacyjnego oprzyrządowania pomiarowego można dokonać wyznaczenia efektywności regeneratorów o nieruchomym wypełnieniu. Analiza wyznaczonych pomiarowych pracy błędów pomiarowych wykazała, że pozyskane tą drogą rezultaty doświadczalne określające efektywność są dostatecznie dokładne dla celów analiz ciepło – przepływowych.

Oznaczenia: $\dot{W}_1$ – strumień masy spalin [kg/s], $\dot{W}_2$ – strumień masy powietrza [kg/s], τ_1 – czas trwania okresu grzania [s], τ_2 – czas trwania okresu chłodzenia [s], $\bar{t}_1$ – średnia temperatura spalin na dopływie do komory regeneratora [$^\circ\text{C}$], $\bar{t}_2$ – średnia temperatura spalin za regeneratorem [$^\circ\text{C}$], $\bar{t}_2$ – średnia temperatura powietrza zimnego, dopływającego do regeneratora [$^\circ\text{C}$],

LITERATURA

1. **Bobowski J.** (2004), *Instrukcja obsługi komputerowego systemu sterowania wanną gazową nr 2 w Hucie Szkła „Biaglass” w Białymstoku.*
2. **Karolczak. M.** (2004), *System automatyki wanny gazowej W2 w Biaglass Huta Szkła Białystok.*
3. **Moffat R.J.** (1988), Describing the Uncertainties In Experimental Results, *Experimental Thermal and Fluid Science*, 1, pp.3-17.
4. **Skiepmo T.**(1998), *Teoria wymienników z wypełnieniem, dodatek F, w Madejski J.: Teoria wymiany ciepła*, Politechnika Szczecińska, Szczecin, wydanie II poprawione i uzupełnione.
5. **Skiepmo T., Shah R.K.** (2005), Modeling and effect of leakages on heat transfer performance of fixed matrix regenerators, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 48, 1608-1632.
6. **Wołkowycki G.** (2008), *Układ sterowania procesem topienia wsadu w wannie szklarskiej*, Praca magisterska Politechnika Białostocka.
7. **Wrona J., Witek E.** (1994), Regenerator – jego znaczenie dla dobrej pracy pieca szklarskiego i problemy eksploatacyjne. „*Gospodarka Paliwami i Energią*”, nr 12/1994

EXPERIMENTAL DETERMINATION OF FIXED MATRIX REGENERATOR EFFECTIVENESS BASED ON OPERATION PARAMETERS OF REGENERATORS WORKING AT A GLASS MECTING FURNACE

Abstract: This paper describes the regenerators, in which it is fitted with glass oven located in the Glassworks Huta BIAGLASS in Bialystok. Presents in detail the design of regenerators, thermo-physical properties of filling and measuring equipment performance. Having shown how to determine the operational effectiveness of the test results regenerator. Posted on, the results of simulation the impact of measurement errors and the temperature of exhaust air volume so as to be fixed efficiency bug.

WYBRANE PROBLEMY PROJEKTOWANIA WYSOKOOBROTOWYCH ELEKTROWRZECION FREZARSKICH O NIESTANDARDOWYM ŁOŻYSKOWANIU

Robert ZABIELSKI*, Roman TROCHIMCZUK*

*Katedra Automatyki i Robotyki, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

r.zabielski@doktoranci.pb.edu.pl, politechnikaroman@interia.pl

Streszczenie: W pracy przeprowadzono analizę podstawowych problemów budowy i projektowania elektrowrzecion łożyskowanych magnetycznie. Starano się przy tym zwrócić szczególną uwagę na problemy związane z konstrukcją i doбором komponentów projektowanego systemu. Ponadto ogólnie omówiono budowę, zastosowanie łożysk magnetycznych oraz zdefiniowano wady i zalety ich stosowania w maszynach wirnikowych. Na tej podstawie zaproponowano koncepcyjne dwa rozwiązania elektrowrzeciona łożyskowanego magnetycznie. Pracę uzupełnia opis ogólnie przyjętej procedury projektowania złożonych systemów mechatronicznych, do których zaliczyć można nowoczesne wysokoobrotowe elektrowrzeciono łożyskowane magnetycznie. Oparto się przy tym o metodykę zaproponowaną przez Rolfa Isermanna.

1. WPROWADZENIE

Szybki rozwój technologii materiałowej był przyczynkiem do opracowywania coraz nowszych narzędzi skrawających, mogących pracować z wysokimi i ekstremalnie wysokimi prędkościami obrotowymi (*High Speed Cutting*). Pozwoliło to, m.in. na uzyskanie nowej, wyższej jakości wytwarzanych produktów, oraz na zwiększenie wydajności samego procesu obróbczego. Wykorzystanie systemów CAD/CAM w procesie projektowania technologii obróbki powierzchni oraz nadawania ostatecznego kształtu produktowi, oraz stosunkowo prosty sposób przeniesienia zaprogramowanych ruchów obróbczych na obrabiarkę, sprawił że koniecznym stał się również rozwój układów wrzecionowych mogących sprostać zadaniom przez technologa, coraz bardziej wygórowanym parametrom obróbki (Tarnowski, 1997).

Z obecnie dostępnych na rynku rozwiązań wysokoobrotowych elektrowrzecion frezarskich można dobrać takie, które będą spełniać założone, podstawowe wymagania dotyczące zapewnienia odpowiedniej mocy wrzeciona i jego prędkości obrotowej. Jednak cechą wspólną dużej większości z tych układów jest zmniejszona żywotność użytych w nich łożysk. Przyspieszone zużycie łożysk może wynikać między innymi z nieodpowiedniego zabezpieczenia elektrowrzecion od wpływu niekorzystnych czynników środowiska pracy, zużycia użytego w elektrowrzecionie narzędzia oraz drgań niewyrównoważonego wału napędu. Podwyższenie niezawodności układu w większości wypadków można nieznacznie zwiększyć stosując nowoczesne łożyska ceramiczne o podwyższonej niezawodności i trwałości. Pozwalają one na uzyskanie prędkości obrotowych przekraczających 25 tys. obr./min. Jednak i to rozwiązanie niewiele, w stosunku do rozwiązań klasycznych, zwiększa okres całkowitej eksploatacji urządzenia.

Alternatywę dla opisanych wyżej rozwiązań klasycznych może stanowić elektrowrzeciono z łożyskami magnetycznymi. Takie połączenie z klasycznym rozwiązaniem przyczyni się do znacznego wydłużenia okresu bezawaryjnego

użytkowania urządzenia, a co za tym idzie zmniejszy koszty jego obsługi. Dodatkowo pozwoli na komputerowe diagnozowanie stanu wrzeciona, oraz stanu zużycia narzędzia, a także co jest bardzo istotne pozwoli na zwiększenie prędkości obrotowej do wartości przekraczających 60 tys. obr./min. Układ magnetyczny nie będzie potrzebować smarowania odpowiednimi olejami, wydłużającymi okres eksploatacji, co znacząco poprawi jakość środowiska pracy.

2. ANALIZA PROBLEMÓW BUDOWY I PROJEKTOWANIA ELEKTROWRZECION

Opracowując konstrukcję wysokoobrotowych elektrowrzecion frezarskich, należy odpowiedzieć m.in. na następujące pytania:

- W jaki sposób będziemy łożyskować wał napędu?
- Czy i ewentualnie w jaki sposób układ ma być smarowany?
- Jaką prędkość obrotową wrzeciona chcemy osiągnąć?
- W jaki sposób zdiagnozujemy stan komponentów systemu?
- Jaki ma być przekrój wirnika napędu?
- Z jaką siłą i w jaki sposób ma być mocowane narzędzie?
- W jaki sposób ma być układ chłodzony?
- W jaki sposób określane ma być położenie wału wrzeciona?
- W jaki sposób ograniczyć drgania wrzeciona?
- Jakie mają być gabaryty urządzenia?

Zdajemy sobie sprawę, że to tylko niewielka część z możliwych pytań. W pracy tej jednak ograniczymy się tylko do przedstawienia sposobu łożyskowania, napędzania i chłodzenia, nowo projektowanego w Katedrze Automatyki i Robotyki Politechniki Białostockiej, wysokoobrotowego elektrowrzeciona frezarskiego, pracującego z prędkościami wyższymi niż 60 tys. obr./min.

Aktualnymi sposobami łożyskowania są przeważnie łożyska toczne (stożkowe i kulkowe skośne przenoszące obciążenia wzdłużne i poprzeczne) oraz ślizgowe (olejowe hydrostatyczne i hydrodynamiczne). Układy takie posiadają jednak poważne ograniczenia wynikające z ich budowy, a także ze sposobu dostarczania czynnika smarującego.

Pierwsze ograniczenie w stosowaniu w elektrowrzecionach wynika z okresu ich trwałości.

Trwałością łożyska określa się czas pracy łożyska wyrażony w milionach obrotów lub godzinach pracy, przy danej prędkości obrotowej, obliczany do chwili wystąpienia pierwszych oznak zmęczenia materiału. Analizując literaturę z zakresu konstrukcji układów łożyskowych (Krzemiński-Freda, 1989; Osiński i in., 1986; Mazanek, 2005), można stwierdzić na podstawie opisanych licznych doświadczeń autorów, że zjawisko zmęczenia powierzchniowego przebiega nieregularnie i dla pozornie identycznych łożysk pracujących w tych samych warunkach może się zmieniać w szerokich granicach.

Dlatego też przyjęto za trwałość umowną łożyska taką liczbę obrotów, jaką osiągnie ono bez objawów zmęczenia w określonych warunkach, w 90% badanych przypadków. Oznacza to, że pozostałe 10% łożysk może wykazać mniejszą trwałość, co mieści się jednak w dopuszczalnych granicach. W maszynach i urządzeniach pracujących przy stałej liczbie obrotów na minutę, trwałość łożysk określa się często w godzinach pracy łożyska L_h ze wzoru (<http://pcws.ia.polsl.pl/bearings/index.php?action=teoria08>):

$$L_h = \frac{L \cdot 10^6}{n \cdot 60} = \frac{16666}{n} \left(\frac{C}{P} \right)^p, \quad (1)$$

gdzie: L_h – trwałość wyrażona w godzinach pracy łożyska, L – trwałość [w mln obrotów], C – nośność ruchowa [N], P – obciążenie zastępcze [N], p – wykładnik potęgowy, wynoszący dla łożysk kulkowych $p=3$, a dla łożysk wałeczkowych $p=10/3$, n – szybkość obrotowa łożyska [obr./min].

Jeżeli wymagane osiągi są bliskie granicom możliwości łożyska wykonanego ze stali, lub jeśli potrzebna jest wyższa ich sztywność lub trwałość, alternatywnie można zastosować łożyska hybrydowe. Niestety łożyska hybrydowe też mają swoje ograniczenia. Wśród nich najważniejszymi są: duże zapotrzebowanie na materiały smarujące, zwiększone opory (tarcie) podczas ich pracy.

Tab. 1. Zastosowanie łożysk oraz określenie stosunku ich kosztów do otrzymywanych osiągnięć

Materiał łożyska	Osiągi	Koszt	Typowe zastosowanie
Łożyska całkowicie wykonane ze stali			Obrabiarki, sprzęt precyzyjny, walcarki szybkoobrotowe, szybkoobrotowe silniki elektryczne itd.
Łożyska hybrydowe			Obrabiarki, sprzęt precyzyjny, turbosprężarki doładowujące, szybkoobrotowe silniki elektryczne itd.
Łożyska całkowicie wykonane z materiału ceramicznego			Przemysł lotniczy i kosmonautyczny, sprzęt do pracy w ekstremalnych warunkach, wysokie temperatury, zagrożenie korozją itd.

Alternatywnym rozwiązaniem do omówionych są łożyska magnetyczne, których ograniczenia są znacznie mniejsze, niż w przypadku wspomnianego łożyskowania klasycznego.

Jak przedstawiono w tabeli 1 (<http://pcws.ia.polsl.pl/bearings/index.php?action=teoria08>) wyższe osiągi łożysk, znacznie zwiększają koszt łożyskowania. W kosztach tych należy ująć również koszty smarowania i obsługi układu.

Kolejnym problemem jest prędkość obrotowa elektrowrzeciona, która ściśle wiąże się z sztywnością wirnika (z przyjętym jego przekrojem).

O ile dobór profilu wirnika jest bardzo istotnym problemem, to należy wcześniej się zastanowić w jakim przedziale prędkości obrotowych ma pracować konstruowane elektrowrzeciono. Należy przy tym określić jakiego typu ma to być silnik (jednofazowy, czy trójfazowy), oraz w jaki sposób ma być on zasilany? Przykładowe, możliwe do zastosowania rozwiązanie przedstawiono na Rys. 1 (<http://www.eunda.ch>).

Sama prędkość obrotowa jest niewystarczającym do przyjęcia parametrem. Należy określić również konieczną moc napędu. Wymienione dwa parametry mają znaczący wpływ na ostateczną konstrukcję i gabaryty projektowanego do wrzeciona wirnika.



Rys. 1. Widok przykładowego silnika do zabudowy w elektrowrzecionie – typ ENCA firmy „E+A” (EUNDA)

Mając już dobrany silnik, możemy zacząć projektować wirnik elektrowrzeciona. W tym miejscu pojawia się kolejny duży problem. Jak ma być zbudowany wirnik, aby jego pierwsza częstość własna występowała jak najpóźniej (Gosiewski, Muszyńska, 1992; Gosiewski 1989). Jednym ze sposobów obejścia tego problemu jest zastosowanie podatnych podpór wirnika. W tym celu stosujemy łożyska magnetyczne. Łożyska te w przeciwieństwie do łożysk tocznych, które są podporami sztywnymi, umożliwiają łożyskowanie bezkontaktowe.

W łożyskach magnetycznych pierwsze dwie postacie częstości własnych są postaciami przemieszczeniowymi. Dopiero trzecia postać drgań jest postacią giętną. Inaczej jest w przypadku łożysk tocznych. Tutaj pierwsza postać drgań jest już postacią giętną. Przykład ilustrujący omawiane zagadnienie zamieszczono na Rys. 2 (Gosiewski, Muszyńska, 1992).

Wynika z tego następujący wniosek: przy takiej samej średnicy łożyskowanego wirnika korzystniejsze jest stosowanie łożyskowania magnetycznego, niż tocznego, ponieważ mamy pierwsze dwie postacie drgań przemieszczeniowe, przy zbliżonych częstościach własnych wirnika.

Kolejną decyzją, którą musimy podjąć rozpoczynając projektowanie, jest wybór sposobu mocowania narzędzia. Najprostszym sposobem mocowania narzędzia jest mocowanie ręczne, z wykorzystaniem stożka ER i pierścienia zaciskowego. Dla dużych prędkości obrotowych wrzeciona zaleca się stosowanie oprawki typu HSK.

W konstrukcji przewidzieć można również system automatycznej zmiany narzędzia obróbczego. System taki jest o wiele bardziej skomplikowany od mocowania ręcznego narzędzia.



Rys. 2. Postacie drgań wirnika sztywno i podatnie zawieszzonego

Elementy składowe takiego mocowania mogą wprowadzać niewyrównoważenie wirnika i w efekcie prowadzić do dużych niestabilności podczas pracy z dużymi prędkościami.

Po uporaniu się z powyższymi problemami należy zająć się następnie rozważaniem problemów nadmiernego grzania się wrzeciona. W tym miejscu musimy zdecydować w jaki sposób zapewnić chłodzenie układu. I tu koniecznie należy rozpatrzyć dwie możliwości:

- 1) występujący wzrost temperatury można pominąć, ponieważ równoważony będzie przez odpowiednie warunki panujące w środowisku pracy,
- 2) występujący w układzie wzrost temperatury wymaga zastosowania dodatkowego systemu chłodzenia.

O ile pierwsza możliwość wyklucza powyższe rozważanie, to druga powoduje dalsze komplikacje projektowe. Nie wdając się w szczegóły można założyć wiele rodzajów chłodzenia, począwszy od chłodzenia powietrznego, poprzez układy z cieczą chłodzącą, aż do chłodzenia łączącego wskazane możliwości.

Z ogólnie zaprezentowanych powyżej problemów konstrukcyjnych wynika, że konstruktor podejmując decyzję o zaprojektowaniu wysokoobrotowego elektrowrzeciona łożyskowanego magnetycznie napotyka na wiele różnych i skomplikowanych problemów technicznych. Niejednokrotnie duża część z nich zazębia się o różne dziedziny nauki. Rozwiązanie omawianych zagadnień jest możliwe tylko w zespole składającym się z inżynierów różnych specjalności, mogących się porozumieć na jednej płaszczyźnie w sprawach opracowania konstrukcji od strony mechanicznej, elektrycznej i informatycznej (sterowanie i diagnozowanie).

3. ZASTOSOWANIE ŁOŻYSK MAGNETYCZNYCH W MASZYNACH WIRNIKOWYCH

Początek rozwoju łożysk magnetycznych należy kojarzyć z pierwszym patentem Jesse Beams'a z University of Virginia w czasach drugiej wojny światowej (<http://www.phys.virginia.edu/History/Beams>). W latach 70 XX wieku opracowano pierwsze komercyjne konstrukcje łożysk magnetycznych. Jednym z pierwszych urządzeń z wirnikiem

łożyskowanym magnetycznie był turbokompresor firmy NOVA Gas Transmission.

Obecnie maszyny wirnikowe z łożyskami magnetycznymi są coraz częściej stosowane w różnych aplikacjach. Znanymi konstrukcjami wykorzystującymi układy magnetyczne są: silniki elektryczne (*Bearingless Magnetic Drives*), zasobniki energii kinetycznej (*Flywheels*), pompy, turbogeneratory, kompresory, turbiny (prędkości obrotowe do 120 tys. obr./min), satelity okołoziemskie, statki kosmiczne, pociągi magnetyczne (*Maglev train*), itd.

Zastosowanie łożyskowania magnetycznego daje wiele korzyści w stosunku do tradycyjnych metod łożyskowania (tocznego, czy ślizgowego). Do głównych zalet łożyskowania magnetycznego można zaliczyć (Gosiewski, Muszyńska, 1992; Gosiewski, Falkowski, 2003; Gosiewski i in., 2007):

- bezstykowe łożyskowanie sprawia, że brak jest mechanicznego zużycia elementów składowych,
- duża niezawodność rozwiązania,
- układ łożyskowany stale jest pod kontrolą komputera – pozwala to monitorować wał i ostrzegać przed możliwymi pęknięciami,
- układ wolny jest od smarowania olejami - rozwiązanie przyjazne dla środowiska,
- niski poziom emitowanych drgań w układzie oraz aktywne tłumienie drgań i zmiana sztywności układu przez odpowiednio dobrane sterowanie,
- sterowanie położeniem wirnika (wykorzystanie ruchu obrotowego i translacyjnego w obróbce precyzyjnej),
- praca dzięki redukcji sił niewyrównoważenia z bardzo dużymi prędkościami obrotowymi maszyn wirujących (do 120 tys. obr./min),
- samo pomiar sił, prędkości obrotowej wirnika oraz poziomu drgań i wibracji,
- możliwa diagnostyka i identyfikacja maszyny wirnikowej,
- łożyska magnetyczne mogą jednocześnie być traktowane jako aktuatory i sensory.

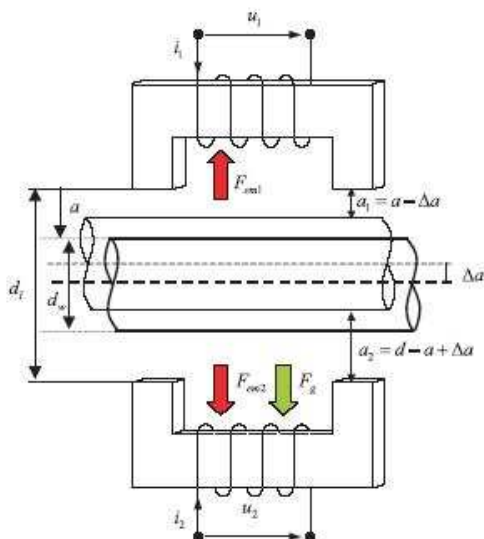
Do wad zastosowania magnetycznego sposobu łożyskowania zaliczyć można (Gosiewski, Muszyńska, 1992; Gosiewski, Falkowski, 2003; Gosiewski i in., 2007):

- duży koszt wykonania aplikacji w stosunku do tradycyjnych metod łożyskowania,
- wymagany jest układ sterowania w co najmniej jednej osi (często wymagane jest stosowanie wielokanałowych układów regulacji),
- konieczność stosowania wydajnych układów chłodzenia w szybkoobrotowych urządzeniach łożyskowanych magnetycznie,
- konieczność stosowania układów pomiarowych mierzących położenie wirnika w szczelinie powietrznej (nie dotyczy łożysk samopomiarowych z obserwatorem).

Analizując obecnie rozwijane konstrukcje łożysk magnetycznych w maszynach wirnikowych można uszeregować je w trzech grupach:

- łożyska osiowe (siły magnetyczne działają równolegle do osi wirnika);
- łożyska promieniowe (siły magnetyczne działają prostopadle do osi wirnika);
- łożyska skośne (pole magnetyczne działa pod kątem do osi wirnika).

Niezależnie od klasyfikacji łożyska wał pełni rolę zwory obwodu magnetycznego. Cewki elektromagnesów są wykorzystywane do generowania elektromagnetycznej siły punktu pracy i siły sterującej położeniem wirnika w szczelinie powietrznej (Rys. 3 – Piłat, 2002).



Rys. 3. Łożysko magnetyczne z klasycznym siłownikiem elektromechanicznym (Piłat, 2002)

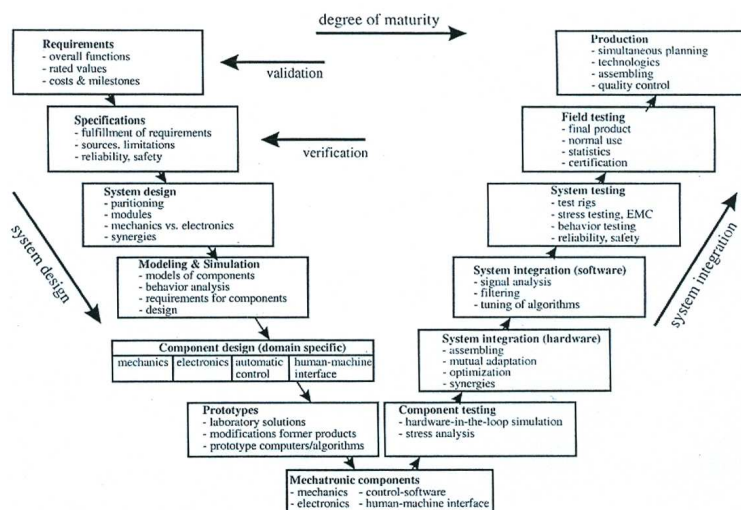
Przez cewki elektromagnesów przepływa prąd, który jest sumą algebraiczną prądu punktu pracy i prądu sterującego. Stąd cewki elektromagnesów, zasilane są prądem wypadkowym, który generuje wypadkowy strumień magnetyczny. Proces sumowania prądu punktu pracy i prądu sterowania realizowany jest przez układ sterowania łożyskiem magnetycznym.

4. ETAPY PROJEKTOWANIA MECHATRONICZNEGO WG R. ISERMANNA

Patrząc na nowoczesne elektrowrzeciono szybkoobrotowe można określić je mianem przykładowego urządzenia mechatronicznego. Do utworzenia takiej konstrukcji, konieczne jest przestrzeganie ogólnie przyjętej procedury projektowania systemów mechatronicznych. Pamiętać przy tym należy przede wszystkim, że istota projektowania mechatronicznego różni się od klasycznego projektowania maszyn. Zasadnicza różnica polega na tym, że projektowanie mechanicznego systemu wykonawczego oraz elektronicznego systemu informacyjnego, oraz pozostałych podsystemów musi przebiegać równolegle. Konieczne jest również zapewnienie przy tym płaszczyzn, które będą integrować projektowanie i modelowanie całego systemu. W tym celu korzystniej jest przewidzenie w zespole projektowym, poza specjalistami z dziedzin takich jak: mechanika, elektronika i elektrotechnika, automatyka, termodynamika, informatyka, itd. dobrze wykształconych inżynierów mechatroników. Ich zadaniem będzie tworzenie wspomnianej płaszczyzny porozumienia pomiędzy specjalistami z różnych, często odległych dziedzin.

Metodyka projektowania urządzeń i systemów mechatronicznych w najbardziej ogólnej, a przez to i uniwersalnej (użytecznej) formie została zaproponowana przez Rolf'a Isermanna w pracy (Isermann, 2009). W dalszej części pracy zostaną pokrótce przedstawione ogólne założenia metody „...harmonijnie integrującej różne techniki” (Gawrysiak, 2002).

W celu zapoznania się z istotą zaproponowanej metodyki, należy rozpatrzyć, tzw. V-model obrazujący istotę problemów, jakie należy rozwiązać, aby można byłoby wytworzyć konkurencyjny produkt mechatroniczny (Rys. 4 – Isermann, 2009).



Rys. 4. V – model prezentujący procedurę projektowania systemów mechatronicznych, wg R. Isermanna

Pierwszym etapem jest utworzenie specyfikacji, w której określone zostaną wymagania systemu. W przypadku wysokoobrotowych elektrowrzecion głównym celem jest utworzenie urządzenia, które ograniczyłoby koszty eksploatacji wynikające ze skróconej żywotności stosowanych w nich układów łożyskowych, przy jednoczesnym podniesieniu prędkości obrotowej, a tym samym wydajności systemu

obróbczego. Etap ten bezpośrednio związany jest z utworzeniem stosownej specyfikacji ze wstępnym zdefiniowaniem komponentów poszczególnych podsystemów, z pierwszym podziałem na moduły wykonawcze, z ograniczeniami charakterystyk roboczych, oraz zasadami bezpiecznego użytkowania. Etap ten zwnięczy utworzenie stosownej dokumentacji.

Kolejnym istotnym etapem jest projekt systemu mechatronicznego. W trakcie jego szczegółowo powinno się opracować moduły realizujące funkcje: mechaniczne, elektroenergetyczne, elektroniczne i informacyjne. Dokonany powinien być tu podział zadań pomiędzy wspomniane moduły elektroniczne, elektryczne, mechaniczne i informacyjne. Tu powinien też powstać projekt:

- układu zasilania poszczególnych komponentów i modułów,
- dodatkowych układów sensorycznych, wykonawczych, oraz magistral informacyjnych,
- architektury układów elektronicznych z określeniem mikroprocesorów, systemów okablowania i zabezpieczeń,
- architektury oprogramowania sterującego (wybór struktury, języka i kompilatora).

Te działania mają na celu otrzymanie efektu synergii poprzez integrację projektowanych systemów. Etap zwieńcza, podobnie jak wcześniej, opracowanie stosownej dokumentacji projektowej.

Po zakończeniu etapu konstruowania należy przeprowadzić czynności związane z modelowaniem i symulacją konstrukcji. W tym celu należy opracować modele matematyczne systemu mechatronicznego elektrowrzeciona, używając nowoczesnych narzędzi inżynierskich do modelowania (np. MATLAB i Simulink, COMSOL Multiphysics, Solidworks/Inventor, Catia, ANSYS, VHDL itd.). Wykonanie wskazanych w tym etapie czynności zmierzać będzie do przeprowadzenia dalszej analizy, poprzez symulację komponentów i podsystemów. A tym etapie uwzględnienia się właściwości materiałowe, energetyczne (zasilanie) i informacyjne (charakterystyki układu sterowania).

Etap poprzedni przynieść powinien odpowiedź na wytyczne do opracowaniu projektu konstrukcji poszczególnych komponentów systemu mechatronicznego. Powstać powinien wtedy ogólny projekt uwzględniający założenia integracji komponentów i podsystemów: 1) w części mechanicznej z wykorzystaniem narzędzi CAD/CAE i FEM; 2) w części elektronicznej i elektrycznej z wykorzystaniem narzędzi VHDL, P-Spice; 3) w części związanej z opracowaniem układu sterowania z wykorzystaniem pakietu MATLAB. Na tym etapie konieczne jest również opracowanie projektu interfejsu człowiek maszyna, oraz projektu systemu zabezpieczeń.

Po zakończeniu omówionego wcześniej etapu można przejść do budowania prototypu urządzenia oraz wykonania badań laboratoryjnych. Etap ten pozwoli na wytworzenie prototypowych komponentów systemu mechatronicznego, tj.: mechanicznych, elektronicznych, sterowania i interfejsu człowiek-maszyna (HMI).

Po realizacji omówionych zdań można przejść do testowania komponentów, np. z wykorzystaniem metod szybkiego prototypowania układów sterowania (np. *hardware in the loop*), czy też analizy termicznej, wytrzymałościowej itd.

Po tym nastąpić musi integracja opracowanych podsystemów mechanicznego i elektronicznego, poprzez integrację sensorów, aktorów oraz magistral danych i zasilania, a także integracja podsystemu informatycznego wraz ze sterowaniem. Integracja dotyczyć ma zarówno części sprzętowej, jak i programowej.

Omówiony etap zwieńczony powinien być przeprowadzeniem różnego rodzaju kompleksowych, wielopłaszczyznowych testowań. Tu też powinna nastąpić walidacja otrzymanych

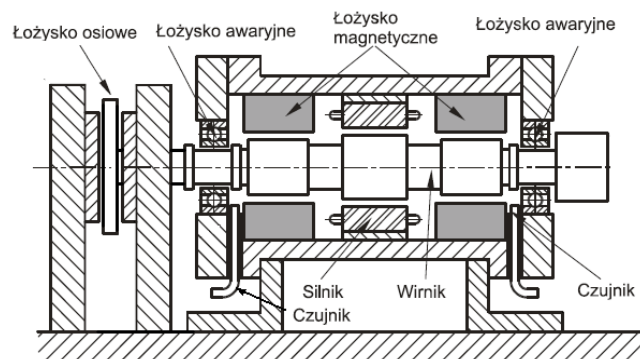
rezultatów z założeniami przyjętymi w specyfikacji projektu. W razie niespełnienia założonych wymagań nastąpić musi przeprojektowanie i iteracyjne powtórzenie procedur, aż do czasu spełnienia wstępnych założeń projektu.

W momencie kiedy uda się zrealizować opisane wyżej etapy, można ostatecznie opracować i wdrożyć do produkcji jednolite urządzenie mechatroniczne, jakim w naszym przypadku byłoby wysokoobrotowe elektrowrzeciono frezarskie.

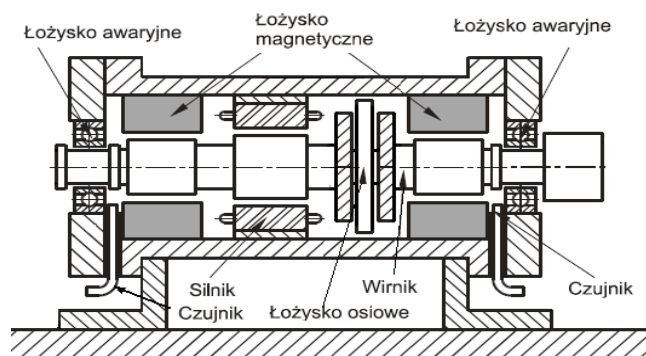
Analizując konieczne do realizacji działania w scharakteryzowanych wyżej etapach, proces projektowania mechatronicznego można podzielić na dwa główne nurty. Pierwszym z nich jest konstruowanie podsystemów. Drugim jest natomiast ich integracja.

5. KONCEPCJA ELEKTROWRZECIONA ŁOŻYSKOWANEGO MAGNETYCZNIE

Projektując elektrowrzeciono szybkoobrotowe można wzorować się na istniejących rozwiązaniach z klasycznym łożyskowaniem. Zasadnicza różnica polega na tym, że we wrzecionie łożyskowanym magnetycznie pojawia się dodatkowe łożysko, które nie występuje w konstrukcji z łożyskami tocznymi, czy ślizgowymi. Mowa tutaj jest o łożysku magnetycznym osiowym, niezbędnym do zapewnienia odpowiedniej sztywności układu obróbczego.



Rys. 5. Koncepcja elektrowrzeciona z zewnętrznym łożyskiem magnetycznym osiowym



Rys. 6. Koncepcja elektrowrzeciona z wewnętrznym łożyskiem magnetycznym osiowym

Układ łożysk i elementów im towarzyszących, zasadniczo zmienia konstrukcję, jej gabaryty oraz strukturę wewnętrznego układu chłodzenia takiego elektrowrzeciona.

W danej chwili można sprowadzić konstrukcję elektrowrzecion łożyskowanych magnetycznie do dwóch typów.

Pierwszym z nich jest typ z zewnętrźnie umieszczonym łożyskiem magnetycznym (Rys. 5).

Drugim jest układ z wewnętrznym łożyskiem magnetycznym (Rys. 6). Drugi z opisywanych typów charakteryzuje się łatwiejszą formą konstrukcyjną. W nim tarcza do łożyska osiowego umieszczona jest w centralnej części wirnika. Przez to wirnik może być rozpatrywany jako model Jefcotta (Gosiewski, Muszyńska, 1992). W tym przypadku punkt ciężkości wirnika znajduje się blisko środka wału.

Inną widoczną różnicą jest obecność łożysk tocznych. Są one traktowane jako łożyska awaryjne. Ich znaczącą rolę jest zabezpieczenie stojana silnika i stojanów łożysk przed uderzeniem wirnika, w momencie kiedy wypadnie on z pola magnetycznego łożysk promieniowych. Łożyska te spełniają również funkcję „leżaka spoczynkowego” wału podczas przerw w pracy wrzeciona.

W konstrukcji elektrowrzeciona konieczne jest przewidywanie różnego rodzaju czujników położenia wału w łożyskach magnetycznych. Oczywistym staje się wybór czujników wiropędowych (lub podobnych), których działanie oparte jest na zjawisku indukcji magnetycznej. Konieczne staje się także odpowiednie dobranie bieźni dla takiego sensora. Musi ona być zrealizowana w taki sposób, aby mógł on bezpiecznie i z bardzo wysoką dokładnością pracować przy ekstremalnie szybkich prędkościach obrotowych układu (wielkość koniecznej szczeliny powietrznej wynosi 0.3-0.7 mm).

Wspomniana geometria wirnika elektrowrzeciona musi spełniać warunki zdefiniowane w rozdziale drugim pracy. Mówimy tutaj przede wszystkim o częstościach własnych. O ile możemy zaakceptować dwie częstości przemieszczeniowe, to pierwsza postać giętą musi się znajdować znacznie powyżej granicy założonej prędkości obrotowej. Na szczęście możemy to jeszcze regulować poprzez odpowiednio dobrany algorytm sterowania.

Dobry napęd elektrowrzeciona, odpowiednio wyliczony wirnik i łożyska magnetyczne, muszą być sprzężone ze sobą komputerowym układem sterowania. W nim zaimplementowane zostaną odpowiednie prawa sterowania i regulacji, w taki sposób, aby można było spełnić założone wymagania procesowe.

6. PODSUMOWANIE

Wykorzystanie technologii High Speed Cutting stawia dużą przyszłość przed rozwiązaniami opartymi na elektrowrzecionach łożyskowanych magnetycznie. Szybsza obróbka, dokładniejsze wykończenie obrabianej powierzchni, sprawiają, że zwiększa się konkurencyjność przedstawianych rozwiązań, w stosunku do elektrowrzecion łożyskowanych klasycznie. Stąd też powstała potrzeba zajęcia się proponowaną tematyką i rozwiązania trudnych, ale też i bardzo istotnych problemów konstrukcyjnych, eksploatacyjnych i wdrożeniowych.

Omówione w pracy zagadnienia mogą stanowić swego rodzaju studium problemów, z jakimi mogą się spotkać konstruktorzy wysokoobrotowych elektrowrzecion o niestandardowym łożyskowaniu.

LITERATURA

1. **Gawrysiak M.** (2002), *Etapy projektowania mechatronicznego według R. Isermanna*, materiały Warsztatów Projektowania Mechatronicznego, AGH, Kraków 7-8.05.2002, s.3-10, Kraków.
2. **Gosiewski Z.** (1989) *Aktywne sterowanie drganiami wirników*, Wydawnictwo Uczelniane Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Koszalinie, Koszalin.
3. **Gosiewski Z.**, (2008) Control-oriented modelling and control of rotor vibration, *Acta Mechanica et Automatica*, vol. 2 no. 2 21-38, Białystok.
4. **Gosiewski Z., Falkowski K.** (2003), *Wielofunkcyjne łożyska magnetyczne*, Biblioteka Naukowa Instytutu Lotnictwa, Warszawa.
5. **Gosiewski Z., Muszyńska A.** (1992), *Dynamika maszyn wirnikowych*, Wyższa Szkoła Inżynierska w Koszalinie, Koszalin.
6. **Gosiewski Z., Sawicki J.T., Zabielski R.**, (2007) Sygnały pobudzające drgania maszyn wirnikowych na potrzeby diagnostyki pęknięcia wałów, *Acta Mechanica et Automatica*, vol. 2 no. 1 27-32, Białystok.
7. **Isermann R.** (2009), *Mechatronics System. Fundamentals*, SPRINGER.
8. **Krzemiński-Freda H.** (1989), *Łożyska toczne*, PWN, Warszawa
9. **Mazanek E.** (2005), *Przykłady obliczeń z podstaw konstrukcji maszyn - łożyska, sprzęgła i hamulce, przekładnie mechaniczne*, WNT, Warszawa.
10. **Osiński Z., Bajon W., Szucki T.** (1986), *Podstawy konstrukcji maszyn*, PWN, Warszawa.
11. **Piłat A.K.** (2002), *Sterowanie układami magnetycznej lewitacji* – rozprawa doktorska, Akademia Górniczo-Hutnicza
12. **Tarnowski W.** (1997), *Podstawy projektowania technicznego*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.
13. <http://pcws.ia.polsl.pl/bearings/index.php?action=teoria08> – ostatni dostęp 10.04.2010r.
14. <http://www.eunda.ch> - materiały katalogowe firmy Eunda – ostatni dostęp 10.04.2010r.
15. <http://www.phys.virginia.edu/History/Beams> – ostatni dostęp 10.04.2010r.

CHOSEN PROBLEMS OF DESIGN PROCEDURES OF HIGH SPEED MILLING ELECTROSPINDLE WITH NON -STANDARD BEARINGS

Abstract: The analysis of basic problems considering structure and design of milling electrospindles with magnetic bearings was performed in the paper. The attention was especially paid to problems related to construction and proper selection of components of the system being designed. Moreover, general structure and applications of magnetic bearings was discussed, and advantages as well as disadvantages of using magnetic bearings in rotary machinery were defined. On this basis, two conceptions of electrospindle with magnetic bearings were proposed. Additionally, the paper describes general design procedure of complex mechatronic systems, as which the modern high speed electrospindles with magnetic bearings can be classified, proposed by R. Isermann.

Pracę wykonano w ramach realizacji badań pracy statutowej nr S/WM/1/2008 Katedry Automatyki i Robotyki Wydziału Mechanicznego Politechniki Białostockiej.

METODY WYZNACZANIA RZECZYWISTEJ KRZYWEJ UMOCNIENIA MATERIAŁU

Cz. I. Test rozciągania próbki

Agata ZAJKOWSKA*, Łukasz DERPEŃSKI*, Andrzej SEWERYN*

* Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka,
ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

a.zajkowska@doktoranci.pb.edu.pl, l.derpenski@pb.edu.pl, a.seweryn@pb.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono dwie metody wyznaczania rzeczywistej krzywej umocnienia materiału. W części pierwszej pracy opisano pierwszą z nich, w której wykorzystuje się wyniki testu rozciągania próbki gładkiej (zależność siły rozciągającej od przemieszczenia) oraz wielokrotne obliczenia numeryczne za pomocą metody elementów skończonych z uwzględnieniem sprężysto-plastycznego modelu materiału z nieznanym a priori umocnieniem. Dzięki temu uwzględnia się bardzo ważny efekt niejednorodności pól naprężeń i odkształceń wywołanych tworzeniem się szyjki.

1. WPROWADZENIE

Krzywa umocnienia opisuje zachowanie materiału w zakresie odkształceń plastycznych w teście jednoosiowego rozciągania (lub ściskania). Na stany wieloosiowe (szczególnie w przypadku obciążeń nieproporcjonalnych) może być ona rozszerzona za pomocą odpowiedniego modelu matematycznego, np. wielopowierzchniowego modelu umocnienia materiału (Mróz, 1967; Garud, 1981).

Znajomość rzeczywistych krzywych umocnienia materiałów ma duże znaczenie praktyczne, pozwala np. na ustalenie parametrów obróbki plastycznej oraz właściwości kształtowanych elementów. Szczególnie ważne jest dokładne wyznaczenie rzeczywistej krzywej umocnienia w przypadku zastosowania jej w obliczeniach numerycznych pól naprężeń i odkształceń (np. za pomocą metody elementów skończonych), a także podczas wyznaczania trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych w zakresie obciążeń niskocyklowych.

Krzywą umocnienia materiału można wyznaczyć z określonej w normie PN-EN 10002-1:2002 próby monotonicznego rozciągania gładkich próbek wykonanych z tego materiału. W czasie eksperymentu mierzona jest siła rozciągająca $F(t)$ oraz chwilowa długość roboczej części (bazy pomiarowej) próbki $u = l(t)$. Wielkości te pozwalają na wyznaczanie stanu naprężenia oraz odkształcenia w próbce. Krzywa umocnienia może przedstawiać zależności pomiędzy:

a) inżynierskim naprężeniem uplastyczniającym s_{11} a inżynierskim odkształceniem e_{11} , obliczonych z zależności:

$$s_{11}(t) = \frac{F(t)}{S_0}, \quad (1)$$

$$e_{11}(t) = \frac{l(t) - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l(t)}{l_0} \quad (2)$$

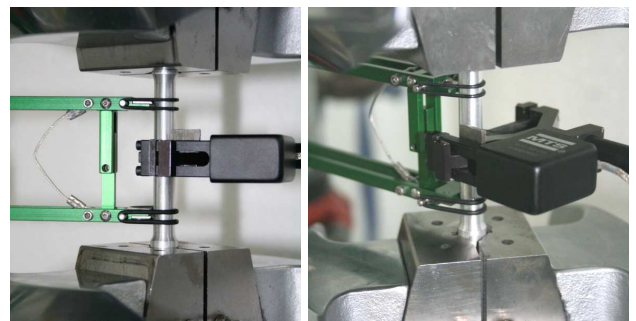
gdzie: S_0 – pole przekroju pierwotnego próbki (jej części pomiarowej), l_0 – początkowa długość części roboczej (bazy pomiarowej) próbki, t – czas;

b) rzeczywistym naprężeniem powodującym uplastycznienie materiału a rzeczywistym odkształceniem:

$$\sigma_{11} = \frac{F(t)}{S(t)}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{11} = \ln \frac{l(t)}{l_0} = \ln \left[\frac{l_0 + \Delta l(t)}{l_0} \right], \quad (4)$$

gdzie: $S(t)$ – chwilowe pole przekroju poprzecznego części pomiarowej próbki.



Rys. 1. Próbką gładką z ekstensometrami

W obu przedstawionych powyżej metodach nie uwzględnia się niejednorodności rozkładu naprężeń i odkształceń w przekroju poprzecznym próbki wywołanej jej „szyjkowaniem” (co daje efekt podobny do działania karbu). Ponadto w pierwszym podejściu nie uwzględnia się zmiany przekroju poprzecznego próbki w zakresie pomiarowym, co wiąże się z dużymi błędami. Jest to zatem najmniej dokładna metoda.

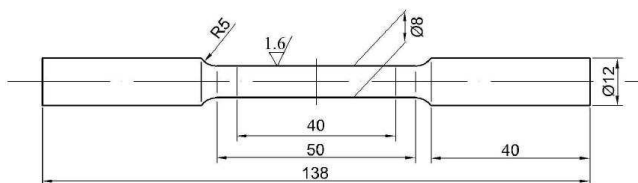
W niniejszej pracy rzeczywiste krzywe umocnienia materiału do momentu powstania „szyjki” wyznaczono na podstawie zależności (3) – (4). Wyznaczenie krzywych wzmocnienia w tym przedziale było możliwe dzięki zastosowaniu dwóch ekstensometrów, mierzących zmianę długości bazy pomiarowej i średnicy osiowoosymetrycznej próbki podczas rozciągania (Rys. 1). Pozostały zakres

krzywych wzmocnienia wyznaczono za pomocą wielokrotnie powtarzanych obliczeń numerycznych z uwzględnieniem efektu powstawania szyjki, aż do momentu, gdy kształt krzywej siła – przemieszczenie ($F - u$) otrzymany z obliczeń numerycznych był bliski krzywej siła - przemieszczenie uzyskanej z badań doświadczalnych (Zienkiewicz, 2000).

Druga z przedstawionych w pracy metod wykorzystuje krzywą zagłębienie kulistego wgłębnika (wraz z odcinkami opisującymi lokalne odciążenie) wciskanego zadaną siłą. Pozwala to na wyznaczenie zależności siła – zagłębienie plastyczne. Na jej podstawie obliczono rzeczywistą krzywą umocnienia materiału (Kucharski, 2002).

2. WYZNACZANIE RZECZYWISTEJ KRZYWEJ UMOCNIENIA MATERIAŁU W TEŚCIE MONOTONICZNEGO ROZCIĄGANIA

Do wyznaczenia krzywych rozciągania materiałów wykorzystano osiowosymetryczne próbki bez karbu (gładkie) wykonane według wytycznych zamieszczonych w PN-EN 10002-1:2002 – Próba rozciągania (rys. 2).



Rys. 2. Próbka osiowosymetryczna użyta w teście rozciągania

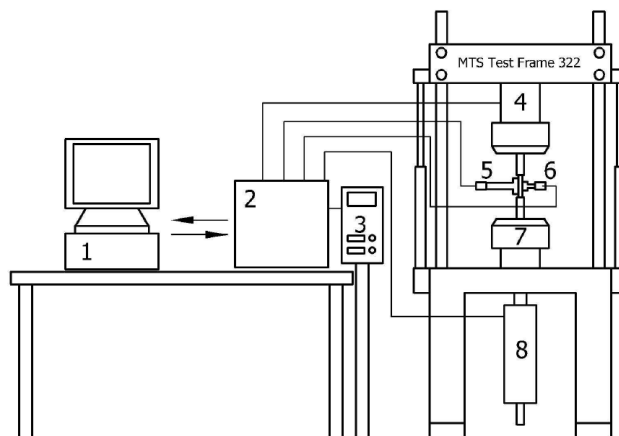
Badania doświadczalne przeprowadzono w temperaturze pokojowej na programowalnej, hydraulicznej, jednoosiowej maszynie wytrzymałościowej typu MTS TestFrame 322, pracującej w pętli sprzężenia zwrotnego, sterowanej za pomocą systemu TestStarII, będącej na wyposażeniu Katedry Mechaniki i Informatyki Stosowanej Wydziału Mechanicznego Politechniki Białostockiej. Zakres obciążenia rozciągającego (ściskającego) zadawanego na maszynie wynosił ± 50 kN.

Na Rys. 3 przedstawiono schemat stanowiska badawczego. Próbkę rozciągano stosując wymuszenie przemieszczeniowe sterowane ekstensometrem osiowym 5 działającym z maszyną wytrzymałościową w pętli sprzężenia zwrotnego. Ten typ sterowania maszyną zapewniał dopasowanie odpowiedzi maszyny do sygnału zadanego na ekstensometrze.

Przemieszczenia odcinka pomiarowego wyznaczono za pomocą osiowego ekstensometru firmy Epsilon 3542-050M-025-HT1 (rys. 4.a) o bazie pomiarowej 40 mm i zakresie pomiaru ± 12.5 mm. Dla badanych stopów aluminium zastosowano prędkość przemieszczenia bazy pomiarowej $\dot{\Delta l} = 0.1$ mm/s, co odpowiada prędkości odkształcenia równej $\dot{\epsilon} = 0.0025$ 1/s zgodnie z PN-EN 10002-1.

W przeprowadzonych badaniach doświadczalnych zarejestrowano zależności siły rozciągającej od wydłużenia bazy pomiarowej ekstensometru (rys. 5) dla obu materia-

łów. Za pomocą ekstensometru średnicowego odczytano zmianę średnicy przekroju poprzecznego badanych próbek do momentu pojawienia się przewężenia („szyjki”).



Rys. 3. Schemat stanowiska badawczego: 1 – komputer z oprogramowaniem użytkowym MTS, 2 – sterownik cyfrowy TestStarII maszyny wytrzymałościowej MTS Test Frame 322, 3 – pulpit sterowniczy, 4 – dynamometr, 5 – ekstensometr osiowy Epsilon 3542-050M-025-HT1, 6 – ekstensometr średnicowy MTS 632.18F-20, 7 – ruchoma głowica maszyny, 8 – serwowawór z czujnikiem pomiaru przemieszczenia

a)

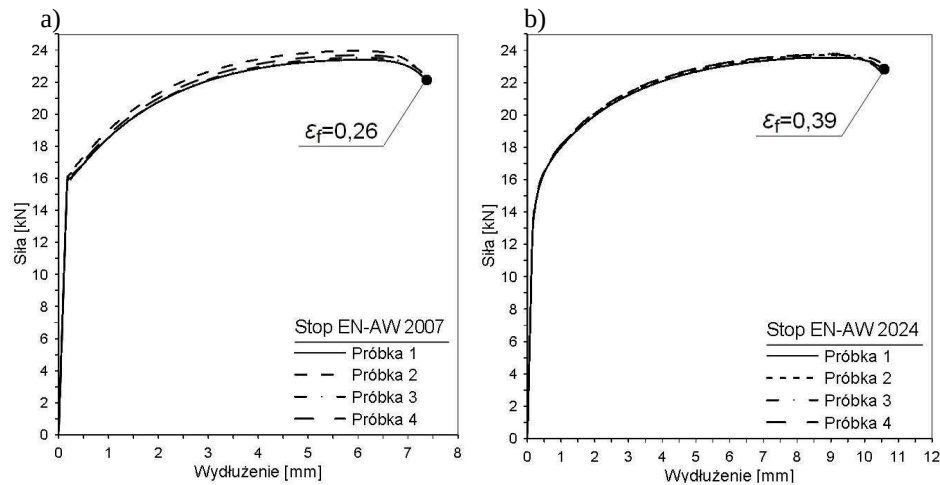


b)

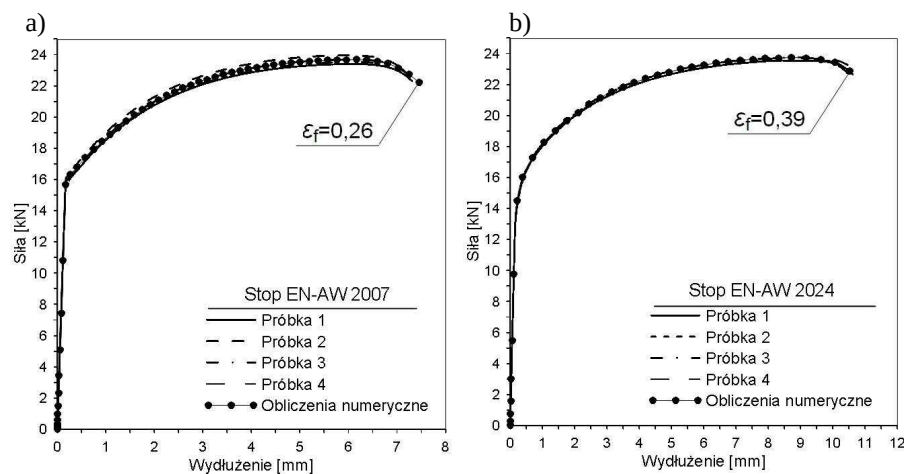


Rys. 4. Ekstensometry: (a) osiowy Epsilon 3542-050M-025-HT1, (b) średnicowy MTS 632.18F-20

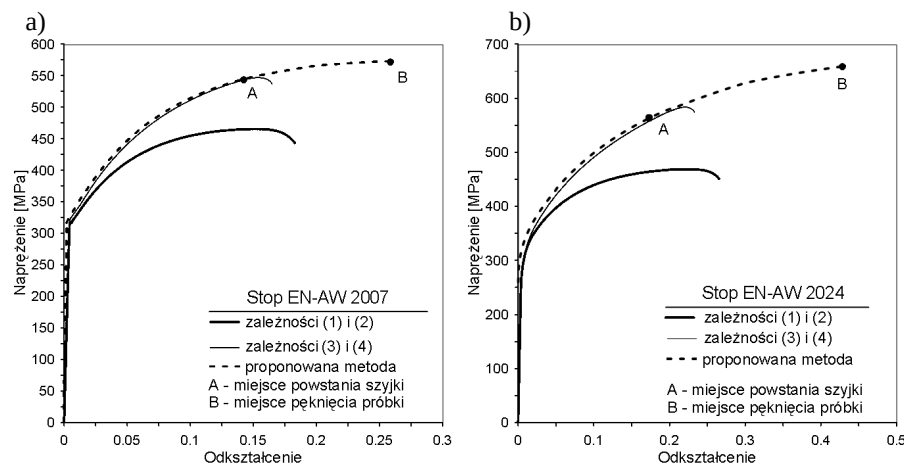
W doświadczeniu zastosowano także ekstensometr średnicowy MTS 632.18F-20 (rys. 4.b) o bazie pomiarowej równej średnicy badanej próbki i zakresie pomiaru ± 1 mm. Pozwoliło to na pomiar zmiany średnicy podczas obciążania próbki, aż do momentu pojawienia się przewężenia, zwanego „szyjką”. Dla wszystkich próbek pękanie występowało zawsze w obszarze ograniczonym bazą pomiarową osiowego ekstensometru. Wykonano cztery próby rozciągania dla każdego materiału.



Rys. 5. Wykres siła – wydłużenie bazy pomiarowej dla stopów aluminium: EN-AW 2007 (a) i EN-AW 2024 (b)



Rys. 6. Zależności siły od przemieszczenia otrzymane z badań doświadczalnych i obliczeń numerycznych:
a) stop aluminium EN-AW 2007, b) stop aluminium EN-AW 2024



Rys. 7. Zależność naprężenia od odkształcenia: a) stop aluminium EN-AW 2007, b) stop aluminium EN-AW 2024

Tab. 1. Zestawienie parametrów wytrzymałościowych otrzymanych z próby monotonicznego rozciągania

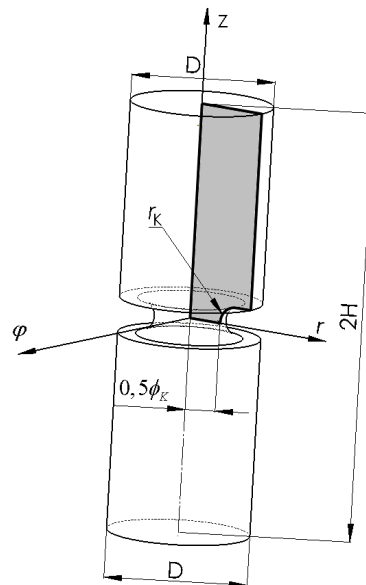
Materiał	d_0 [mm]	d_f [mm]	ϵ_f [%]	F_H [kN]	F_{max} [kN]	A_5 [%]	Z [%]
EN-AW 2024	8.00	6.52	39	13.07	23.69	26.25	18.50
EN-AW 2007	8.00	7.03	26	15.91	23.65	18.19	12.16

W Tab. 1 przedstawiono parametry wytrzymałościowe badanych materiałów, otrzymane z próby monotonicznego rozciągania (F_H – maksymalna siła rozciągająca w zakresie sprężystym, F_u – maksymalna siła rozciągająca, A_5 – wydłużenie po rozerwaniu, Z – przewężenie przekroju). Wyniki otrzymano uśredniając wartości dla czterech powtórzeń.

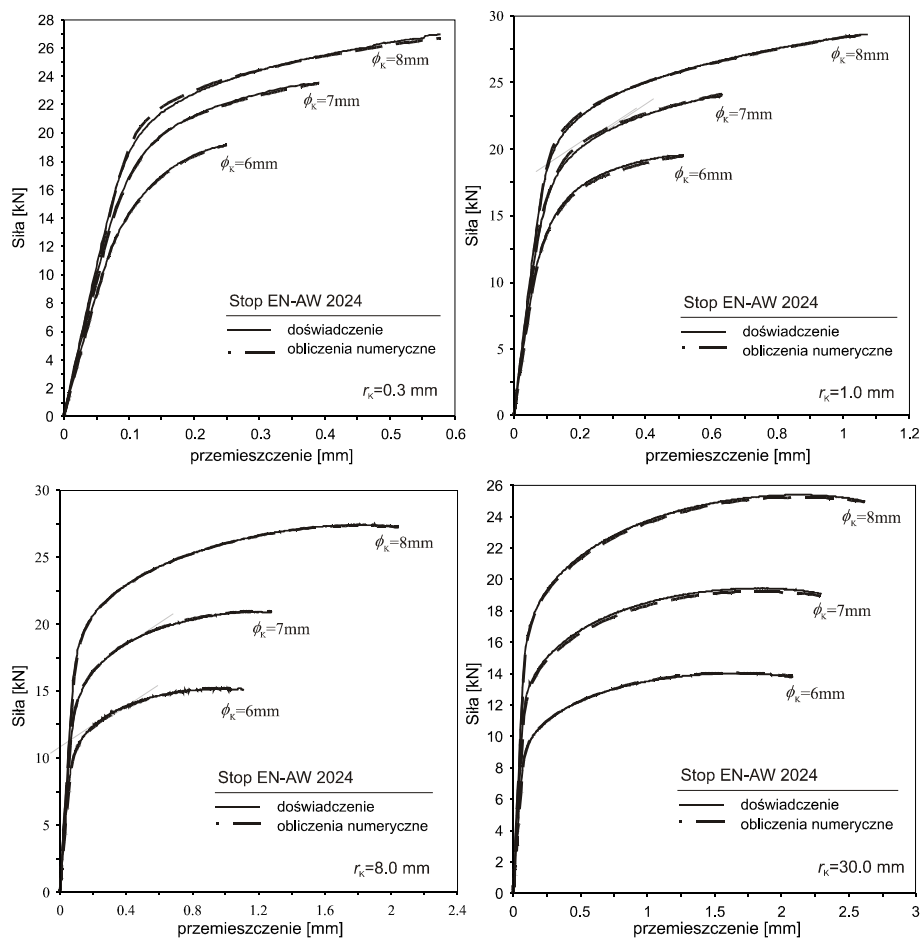
Obliczenia numeryczne pól naprężeń i odkształceń w próbkach gładkich wykonanych ze stopu aluminium EN-

AW 2024 oraz EN-AW 2007 określono za pomocą programu MSC.MARC bazującego na metodzie elementów skończonych. W obliczeniach uwzględniono osiową symetrię próbki oraz symetrię karbu. Zastosowano czterowzłowe izoparametryczne elementy skończone przeznaczone do analizy zagadnień osiowosymetrycznych. Uwzględniono nieliniowość geometryczną i materiałową. Do opisu zależności pomiędzy naprężeniem a odkształceniem osiowym w badanych próbkach w zakresie plastycznym (po przekroczeniu granicy plastyczności $R_{0,2}$), wykorzystano sprężysto-plastyczny model materiału, ze wzmocnieniem izotropowym. Przyjęto warunek plastyczności Hubera - von Misesa. Krzywą wzmocnienia materiału aproksymowano linią łamaną (odcinkami prostymi). Kształt rzeczywistej krzywej odkształcenie – naprężenie rzeczywiste do momentu powstawania „szyjki” określono doświadczalnie w sposób bezpośredni za pomocą wzorów (3) i (4). Wyznaczenie krzywych wzmocnienia w tym przedziale było możliwe dzięki zastosowaniu dwóch ekstensometrów, mierzących zmianę długości bazy pomiarowej i średnicy próbki podczas rozciągania. Pozostały zakres krzywych wzmocnienia wyznaczono za pomocą wielokrotnie powtarzanych obliczeń numerycznych z uwzględnieniem efektu powstawania szyjki. Obliczenia wykonuje się dla każdego odcinka krzywej umocnienia, zakładając różne moduły wzmocnienia materiału dla tego odcinka, aż do momentu, gdy kształt krzywej siła-przemieszczenie ($F-u$) otrzymany z obliczeń numerycz-

nych był bliski krzywej siła – przemieszczenie uzyskanej z badań doświadczalnych (Derpeński i Seweryn, 2010).



Rys. 8. Kształt próbki przyjęty do analizy ($D=10\text{mm}$, $H=120\text{mm}$)



Rys. 9. Porównanie zależności siły od przemieszczenia otrzymanych z badań doświadczalnych i obliczeń numerycznych dla próbek o różnym promieniu zaokrąglenia karbu r_k (stop aluminium EN-AW 2024)

Na Rys. 6 przedstawiono porównanie zależności siły od przemieszczenia otrzymanych z badań doświadczalnych i obliczeń numerycznych dla poszczególnych materiałów, a na Rys. 7 rzeczywiste krzywe wzmocnienia $\sigma - \varepsilon$ w całym zakresie obciążenia dla obu stopów aluminium.

W Tab. 2 zestawiono podstawowe parametry wytrzymałościowe badanych materiałów. W Tab. 3 zestawiono natomiast wartości ε_f – odkształcenia osiowego w momencie pęknięcia.

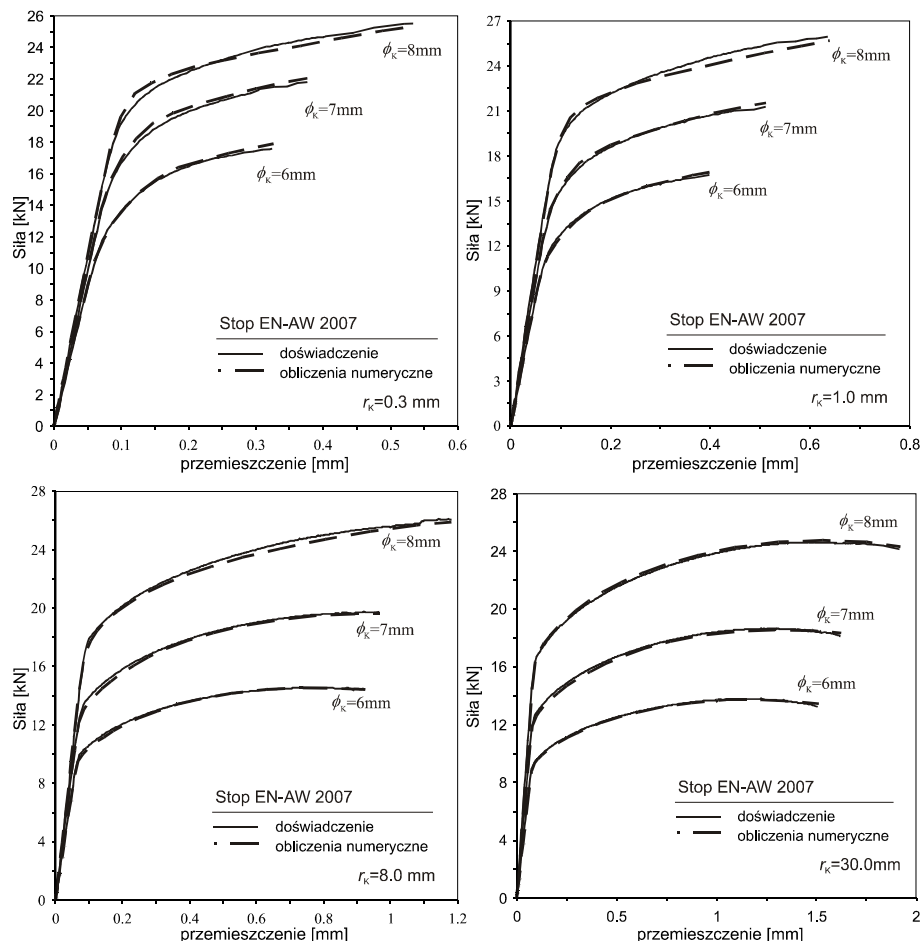
Weryfikacja hybrydowej (doświadczalno – numerycznej) metody wyznaczania rzeczywistej krzywej umocnienia materiału polegała na porównaniu kształtu wykresów rozciągania (zależności siła rozciągająca – wydłużenie bazy pomiarowej $l_0 = 25$ mm) otrzymanej dla osiowosymetrycznych próbek z korbami o różnym promieniu zaokrąglenia dna karbu ($r_k = 0.3; 0.5; 1.0; 2.0; 4.0; 8.0; 15; 30$ mm) oraz o różnej średnicy w dnie karbu ($\phi_k = 6; 7; 8$ mm) (Derpeński, 2008). Kształt próbek przyjętych do analizy pokazano na Rys. 8.

Tab. 2. Wartości stałych materiałowych badanych stopów aluminium

Materiał	E [GPa]	ν	R_e [MPa]	R_u [MPa]
EN-AW 2007	73.965	0.32	317.11	572.86
EN-AW 2024	69.652	0.34	260.02	658.34

Tab. 3. Wartości odkształcenia osiowego w momencie pęknięcia (ε_f)

Materiał	Nr próbki	d_0 [mm]	d_f [mm]	ε_f
EN-AW 2024	1	8.00	6.55	0.40
	2	8.00	6.67	0.36
	3	7.99	6.50	0.41
	4	8.00	6.60	0.39
EN-AW 2007	1	8.00	7.04	0.26
	2	8.00	7.04	0.26
	3	8.00	7.02	0.26
	4	7.99	7.01	0.26



Rys. 10. Porównanie zależności siły od przemieszczenia otrzymanych z badań doświadczalnych i obliczeń numerycznych dla próbek o różnym promieniu zaokrąglenia karbu r_k (stop aluminium EN-AW 2007)

Przykładowe zależności siły od przemieszczenia dla wybranych próbek z korbami o różnym kształcie przedstawiono na rysunkach 9 i 10. Bardzo dobra zgodność wykresów siły w funkcji przemieszczenia bazy pomiarowej otrzymanych na podstawie obliczeń numerycznych i badań ekspe-

rymentalnych potwierdza poprawność przyjętych metod modelowania numerycznego oraz wyznaczania rzeczywistej krzywej umocnienia materiału. Błąd względny pomiędzy porównywanymi wykresami nie przekraczał bowiem 1.5%.

3. WNIOSKI

Wyznaczenie rzeczywistej krzywej umocnienia materiału wymaga zastosowania podejścia hybrydowego: badań eksperymentalnych, pozwalających na wyznaczenie zmiennych globalnych (np. obciążenia i wydłużenia krytycznego) oraz nieliniowych obliczeń numerycznych, które umożliwiają określenie lokalnych zmiennych stanu (składowych tensorów naprężenia i odkształcenia). Podejście to daje zdecydowanie dokładniejsze wyniki niż podejście tylko doświadczalne (z uwzględnieniem zmiany długości bazy pomiarowej oraz średnicy próbki), choć trudno określić błąd modelowania w zakresie dużych odkształceń plastycznych i powstawania „szyjki”.

Rozwinięcie tej metody może polegać na wykorzystaniu osiowosymetrycznych próbek z karbami o dużym promieniu zaokrąglenia dna karbu. Wówczas mamy prostsze modelowanie numeryczne. Podejście takie wymaga jednak przede wszystkim weryfikacji doświadczalnej oraz opracowania metodologii doboru kształtu próbki.

LITERATURA

1. **Derpeński Ł., Seweryn A.** (2010), Experimental research into fracture of EN-AW 2024 and EN-AW 2007 aluminum alloy specimens with notches subjected to tension, *Experimental Mechanics* (w druku).
2. **Derpeński Ł.** (2008), *Prognozowanie pękania elementów z karbami wykonanych z materiałów sprężysto-plastycznych*, rozprawa doktorska, Wydział Mechaniczny Politechniki Białostockiej.
3. **Garud Y.S.** (1981), A new approach to the evaluation of fatigue under multiaxial loadings, *J. Engng. Mater. Technol.*, ASME, 103, 118-125.
4. **Mróz Z.** (1967), *On the description of anisotropic workhardening*, *J. Mech. Phys. Solids*, 15, 163-175.
5. **PN-EN 10002-1:2002**, *Próba rozciągania, Metoda badań w temperaturze otoczenia*, PKN.
6. **Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.** (2000) *Finite Element Method*, Elsevier

METHODS OF DETERMINATION OF REAL HARDENING CURVE

Abstract: The paper is devoted to real hardening curve determination. Two methods are used in this paper. In this part based on uniaxial tensile test – FEM. Material resilient-plastic model with isotropic hardening and Huber – von Mises plasticity condition was used to describe the relations between the tension and axial strain in researched samples in plastic range. Hardening curves was determined by means of multiply repeated numeric calculations taking the “neck” creation effect into consideration. Experiments were performed on aluminum alloy EN-AW 2024 and EN-AW 2007.

METODY WYZNACZANIA RZECZYWISTEJ KRZYWEJ UMOCNIENIA MATERIAŁU

Cz. II. Test wciskania kulistego wgłębnika

Agata ZAJKOWSKA*, Łukasz DERPEŃSKI*, Andrzej SEWERYN*

* Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

a.zajkowska@doktoranci.pb.edu.pl, l.derpenski@pb.edu.pl, a.seweryn@pb.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono dwie metody wyznaczania rzeczywistej krzywej umocnienia materiału. W drugiej części pracy opisano drugą z nich, w której wykorzystuje się wyniki testu wciskania kulistego wgłębnika w płaską próbkę z wielokrotnym lokalnym odciążeniem (zależność siły wciskającej wgłębnik od jego zagłębienia w materiał próbki). Na ich podstawie wyznacza się zależność siły od zagłębienia wywołanego odkształceniami plastycznymi. Za pomocą tej zależności i rozwiązania analitycznego wyznacza się parametry krzywej umocnienia badanego materiału. Obie metody wykorzystano do wyznaczenia rzeczywistych krzywych umocnienia stopów aluminium EN-AW 2024 oraz EN-AW 2007. Porównano krzywe umocnienia wyznaczoną za pomocą obu metod i wskazano na duże możliwości zastosowania w praktycznych zagadnieniach inżynierskich.

1. WPROWADZENIE

Twardość jest to umowna miara, która określa cechę ciał stałych, świadcząca o podatności lub odporności na odkształcenia powierzchni, zgniecenie jej lub zarysowanie, pod wpływem zewnętrznego nacisku (działającej siły). Pojęcie twardości materiałów jako pierwszy zdefiniował H. Hertz w 1882 roku, przy czym opierał się on na klasycznej teorii sprężystości, uważając za twardość naprężenie występujące między dwoma dociskanyymi kulami w momencie gdy naprężenie w jednym punkcie osiąga granicę sprężystości. Tak określona twardość była zależna od stałych sprężystości materiału oraz od średnic dociskanych kul (Tabor, 1951).

Metody badania twardości dzielimy ze względu na zastosowanie i zasadę odczytu.

Ze względu na metodę odczytu możemy wyróżnić 3 podstawowe grupy:

- odczyt bezpośredni głębokości wejścia wgłębnika;
- odczyt wielkości odcisku;
- odczyt poprzez konwersję z innej właściwości fizycznej. Możemy również wyróżnić dwie grupy metod pomiaru:
- statyczne metody pomiaru twardości, w których odczytuje się twardość poprzez obliczenia z wielkości odcisku (przy czym odcisk musi zachowywać pewną trwałość);
- dynamiczne metody pomiaru twardości, w których odczytuje się twardość z głębokości wejścia wgłębnika (odczyt poprzez konwersję z innej właściwości fizycznej).

W ostatnich latach szczególnie rozwinęły się metody, które oprócz wyznaczenia samej twardości, dały możliwość wyznaczenia także innych wybranych parametrów materiałowych.

Jedną z głównych metod identyfikacji właściwości materiału jest metoda Brinella. Twardość Brinella zależy od siły obciążającej, dlatego możemy otrzymać zależność siła

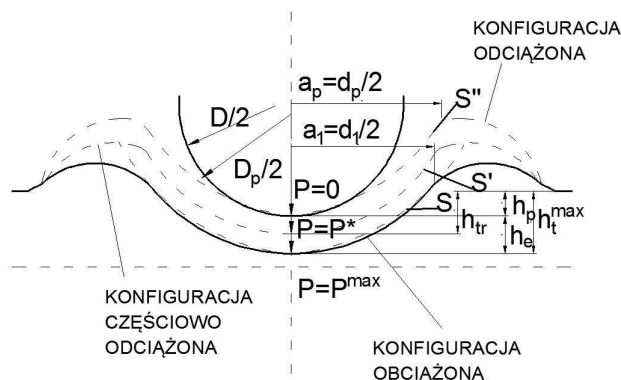
– twardość lub siła – zagłębienie (obciążając kulę różnymi siłami). Uzyskujemy więc więcej informacji o właściwościach badanego materiału, niż przy badaniu za pomocą ostrych wgłębników, takich jak stożek bądź ostrosłup. Przy badaniu twardości za pomocą stożka bądź ostrosłupa otrzymujemy tylko jedną liczbę - wartość twardości. Zatem badając materiał za pomocą klasycznej metody Vickersa możemy zidentyfikować co najwyżej jeden parametr materiałowy. Aby zidentyfikować większą liczbę parametrów konieczny jest pomiar krzywej siła – zagłębienie.

2. WYZNACZANIE RZECZYWISTEJ KRZYWEJ UMOCNIENIA MATERIAŁU W TEŚCIE WCISKANIA KULISTEGO WGLEBNIKA

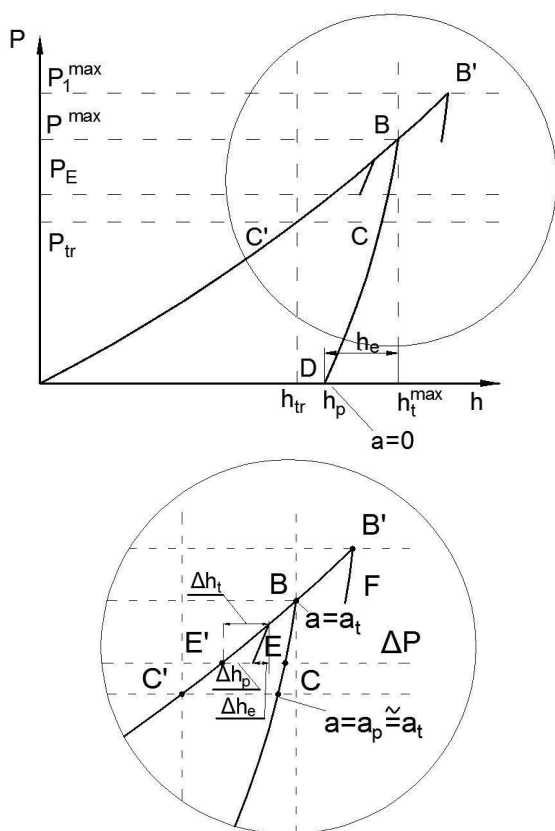
Badanie wciskania kulistego wgłębnika na maszynie wytrzymałościowej polega na obciążeniu, a następnie odciążeniu próbki, dzięki czemu otrzymujemy zależność siła – zagłębienie (Mroziński, 2008). Podczas procesu obciążania pod kulą powstają odkształcenia sprężyste i plastyczne. Czasza kulista, która wówczas powstaje, ma zbliżony promień, do promienia kulki. Jeżeli założymy, że kulka jest sztywna, promień kulistej czaszy jest równy promieniowi kulki. Promień a_t brzegu kontaktu rośnie aż do wartości maksymalnej $a_t = a_t^{\max}$, dla maksymalnej siły $P = P^{\max}$ oraz maksymalnego zagłębienia $h_t^{\max}$. Możemy wówczas zaobserwować wypływkę na brzegu materiału. Kontur brzegu kontaktu przy maksymalnym obciążeniu oznaczono na Rys. 1 jako S. Od tego momentu ma miejsce proces odciążania. Wraz z przemieszczeniem kuli, przemieszcza się brzeg kontaktu.

Przyrosty przemieszczenia kulki są takie same jak przyrosty brzegu kontaktu. Kontur S przemieszcza się wraz z kulą. Zakończenie tej fazy oznaczono jako punkt C, a kontur S przemieścił się do konturu S'. Na Rys. 2 punktow C odpowiada siła P_{tr} . Gdy siła ta jest mniejsza od P_{tr}

zmieniają się warunki kontaktu. Większym przyrostom przemieszczenia kulki odpowiadają mniejsze przyrosty przemieszczenia brzegu kontaktu. Kula traci kontakt z konturem S' , a promień kontaktu gwałtownie maleje. Faza ta kończy się, gdy siła osiągnie wartość $P = 0$ (a tym samym promień brzegu kontaktu jest równy 0). Kontur brzegu kontaktu po odciążeniu oznaczono na rys. jako S'' .



Rys. 1. Konfiguracje powstałe w czasie testu wciskania wgłębnika



Rys. 2. Zależność siła-zagłębienie dla testu wciskania wgłębnika

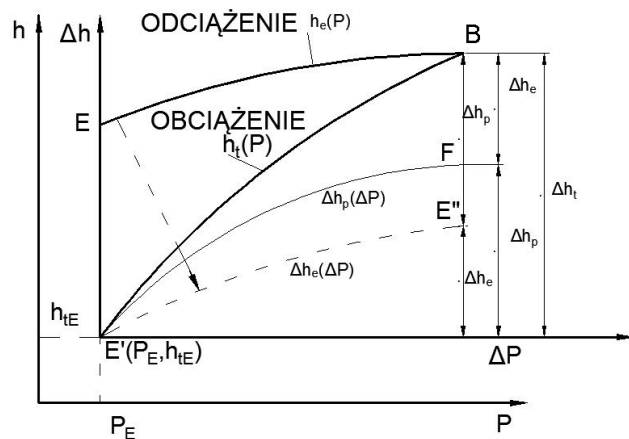
Podsumowując, etapy procesu wciskania wgłębnika możemy podzielić na (Kucharski, 2002):

- zetknięcie się kulki z powierzchnią materiału: $P = 0$, $h_t = 0$, $a_t = 0$;
- obciążanie - siła zmienia się od $P = 0$ do $P^{\max}$, zagłębienie zmienia się od $h_t = 0$ do $h_t^{\max}$, promień a_t brzegu kontaktu rośnie od $a_t = 0$ do $a_t^{\max}$.

- odciążanie - siła zmienia się od $P^{\max}$ do $P = 0$, zagłębienie zmienia się od $h_t^{\max}$ do h_t , promień a_t brzegu kontaktu maleje od $a_t^{\max}$ do $a_t = 0$.

Na krzywej OB (faza obciążania), (Rys. 1), zaznaczono punkt C' odpowiadający sile P_{tr} . Zagłębienie i promień kontaktu dla tej siły oznaczamy jako h_{tr} i a_{tr} . Proces obciążania i odciążania na odcinkach OC' i CD nie może być ze sobą porównywany. Są to dwie inne konfiguracje materiału. Można jednak znaleźć konfiguracje, które są sobie podobne – są to odcinki $C'B$ oraz BC . Na odcinku $C'B$ promień brzegu kontaktu ulega zwiększeniu od a_{tr} do $a_t^{\max}$, na odcinku BC jest on stały i wynosi $a_t^{\max}$. Założenie, że $a_{tr} \approx a_t^{\max}$ jest poprawne dla punktów B i C położonych blisko siebie, pozwala porównywać te dwie konfiguracje. Jeśli jednak obrane punkty nie leżą dostatecznie blisko siebie, należy wyznaczyć inny punkt leżący między punktami $C'B$ (punkt E). Na odcinku $C'B$ mamy odkształcenia sprężyste i plastyczne, natomiast na odcinku BC tylko sprężyste odciążenie. Ponieważ konfiguracje $C'B$ oraz BC są podobne, przyjmujemy że dla $P > P_{tr}$ możliwe jest odejmowanie (dodawanie) przyrostów odkształceń w trakcie obciążania do przyrostów w trakcie odciążania.

Zagłębienie h kulki to całka z pola odkształceń. Jeśli odejmiemy przyrosty zagłębienia w czasie odciążania Δh_e (przyrosty sprężyste) od przyrostów zagłębienia w trakcie obciążania Δh_t (przyrosty sprężysto - plastyczne), otrzymamy przyrosty zagłębienia plastycznych Δh_p . Stanowi to istotę opisaną powyżej metody (Kucharski, 2002).

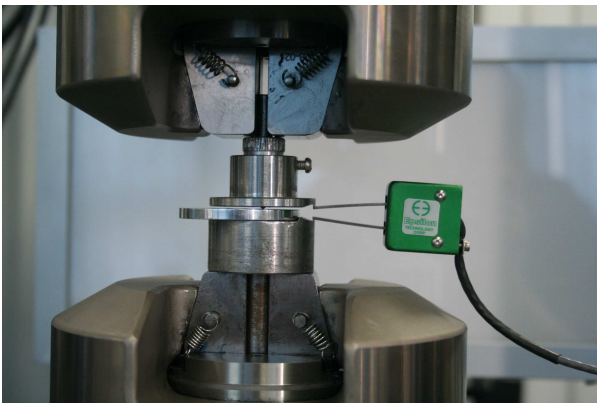


Rys. 3. Tworzenie krzywej zagłębienie plastyczne – siła $h_p(P)$

Na Rys. 3 przemieszczeniu h odpowiada oś rzędnych, a sile P oś odciętych. Równania krzywych $C'B$ i BC można zapisać wówczas jako $h_t = h_t(P)$ (obciążenie) i $h_e = h_e(P)$ (odciążenie). Między punktami C' i B (krzywa obciążenia) wprowadzono punkt $E'(h_{tE}, P_E)$, odpowiadający mu punkt na krzywej odciążenia to $E(P_{tr} < P_E < P^{\max})$. Na Rys. 3 pokazano fragment krzywej obciążenie – odciążenie EBE' . Umieszczono tam dodatkowy układ współrzędnych zaczepiony w punkcie E' . Oś rzędnych tego układu to Δh , a oś odciętych ΔP . Krzywą BE przesunięto następnie wzdłuż osi rzędnych do punktu E' (krzywa $E'E''$). Krzywe $E'E''$ oraz $E'B$ można przedstawić odpowiednio jako $\Delta h_e(\Delta P)$ i $\Delta h_t(\Delta P)$. Przyrosty zagłębienia plastycznego $\Delta h_p(\Delta P)$

przedstawia krzywa $E'F$, wyznaczona jako różnica funkcji $\Delta h_p(\Delta P) = \Delta h_i(\Delta P) - \Delta h_e(\Delta P)$.

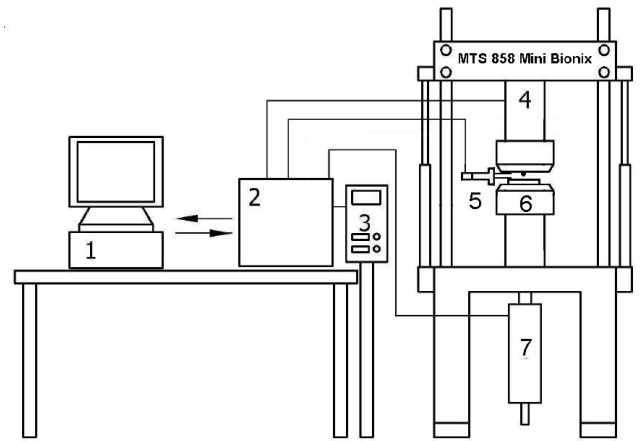
Krzywa, którą otrzymujemy ($\Delta h_p(\Delta P)$), jest tak samo nachylona w każdym punkcie, jak poszukiwana krzywa $h_p(P)$, w przedziale $(P_E, P^{\max})$, ale ma inny punkt początkowy – na razie nieznany. W celu wyznaczenia krzywej $\Delta h_p(\Delta P)$ w kolejnych przedziałach tzn. $(P^{\max}, P_1^{\max})$, gdy $P_1^{\max} > P^{\max} = P_B$, należy przeprowadzić eksperyment: obciążanie od punktu E przez punkt B do kolejnego punktu zwrotu obciążenia B' i dalej odciążenie do punktu F . Odejmowanie opisane powyżej przeprowadzamy w tym i w kolejnych przedziałach, otrzymując fragmenty krzywej $h_p(P)$. Wyznaczanie całej krzywej $h_p(P)$ wiąże się z przeprowadzeniem eksperymentu obciążania – częściowego odciążania. Punkty zwrotne z przedziału $(P_e^{\max}; P^{\max})$ można zapisać jako $P_1, P_3, \dots, P_n$. $P_e^{\max}$ oznacza maksymalną siłę, która wywołuje jedynie odkształcenia sprężyste pod kulką. Jeśli oznaczymy punkty, dla których odciążenie przechodzi w ponowne obciążenie jako $P_2, P_4, \dots, P_{n+1}$, to przyrosty obciążenia można zapisać jako $\Delta P_i^L = P_i - P_{i-2}$, a odciążenia jako $\Delta P_i^U = P_i - P_{i+1}$, dla którego $\Delta P_i^U = \Delta P_i^L$, a następnie kolejne obciążenie $\Delta P_i^L = \Delta P_i^U$. Zakładamy, że ΔP_i^U jest takim samym ułamkiem wartości P_i dla wszystkich punktów zwrotnych. Wówczas otrzymujemy $\Delta P_i^U = f P_i$ oraz $P_i = (P_{i-2}) / (1-f)$ dla $i=1, 3, 5, \dots, n$. Widzimy, iż wartości P_i , we wszystkich punktach zwrotnych, tworzą ciąg geometryczny (Kucharski, 2002).



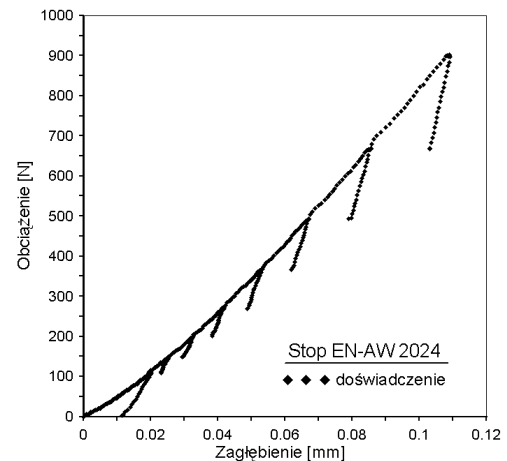
Rys. 4. Wciskanie kulki w płaską próbkę, pomiar zagłębienia za pomocą ekstensometru

Fragmenty krzywej $h_p(P)$ otrzymujemy poprzez odejmowanie fragmentów krzywych obciążania i odciążania. Krzywe te nie łączą się ze sobą, ponieważ ich początkowe punkty położone są na krzywej $h_i(P)$. Aby wyznaczyć krzywą $h_i(P)$ obieramy układ $h_p - P$ z początkiem w punkcie $(h_e^{\max}; P_e^{\max})$. Do tego punktu przesuwamy wzdłuż osi h_p fragment krzywej $h_p(P)$ z przedziału $(P_e^{\max}, P_n)$, a następnie kolejne fragmenty, w taki sposób, żeby koniec jednego był początkiem następnego.

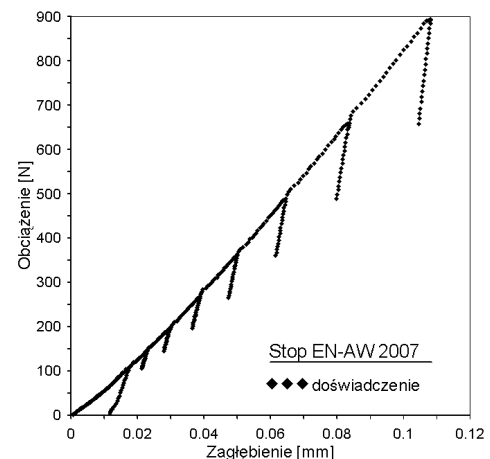
Próbie wciskania wgłębnika przeprowadzono na podstawie normy PN-EN ISO 6506-1. Dobrana została średnica kulki wynosząca $D = 2,5$ mm oraz obciążenie nominalne: 919,5 N. Wykonano okrągłe płaskie próbki grubości 5 mm i średnicy 40 mm. Powierzchnia, na której miały być wykonane testy wciskania wypolerowano ręcznie co zapobiegło ewentualnemu umocnieniu warstwy wierzchniej.



Rys. 5. Schemat stanowiska badawczego: 1 – komputer z oprogramowaniem użytkowym MTS, 2 – sterownik cyfrowy maszyny wytrzymałościowej MTS 858 Mini Bionix, 3 – pulpit sterowniczy, 4 – ruchoma głowica maszyny, 5 – ekstensometr osiowy Epsilon 3541-005M-025-ST, 6 – ruchoma głowica maszyny, 7 – serwowawór z czujnikiem pomiaru przemieszczenia



Rys. 6. Eksperymentalna zależność obciążenie – zagłębienie dla stopu aluminium EN-AW 2024



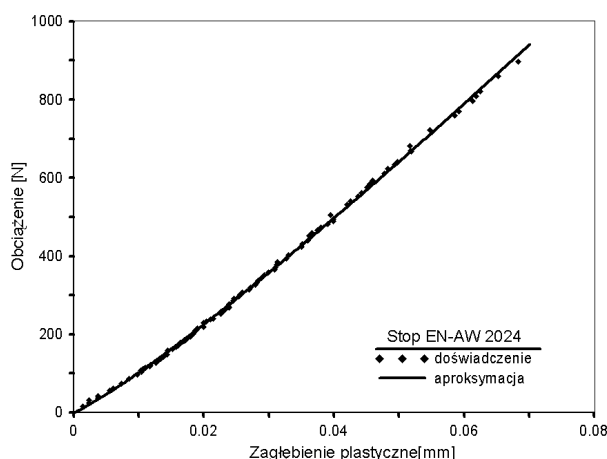
Rys. 7. Eksperymentalna zależność obciążenie – zagłębienie dla stopu aluminium EN-AW 2007

Dobre zostały kolejne przyrosty obciążenia, aż do jego wartości nominalnej. Przyjęto $\Delta P_i = 0,26 P_i$, $i = 1, \dots, 8$.

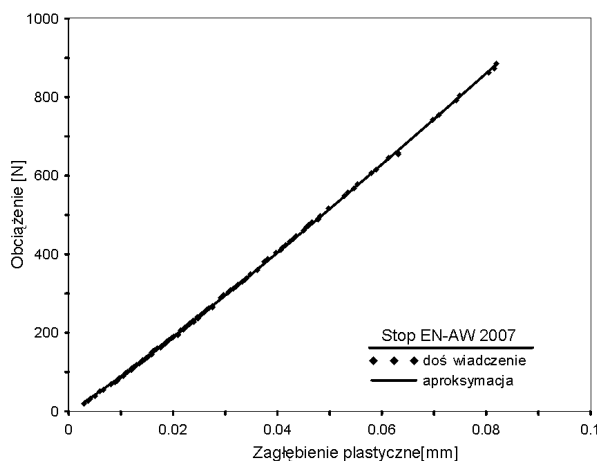
Otrzymano w ten sposób ciąg obciążeń i odciążeń: $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$, a mianowicie: $P_1=111,7$, $P_2=150,9$, $P_3=204$, $\dots, P_7=680,4$, $P_8=919,5$ N (Rys. 6 i 7).

Następnie przeprowadzono eksperyment, otrzymując zależność $P-h$ (siła – zagłębienie).

Próbka zastała umieszczona na sztywnej podstawie umocowanej w szczękach mechanicznych maszyny wytrzymałościowej MTS 858 Mini Bionix. Kulisty wgłębnik zamocowano w stemplu. Przesunięcie wgłębnika było rejestrowane za pomocą ekstensometru osiowego Epsilon 3541-005M-025-ST o bazie pomiarowej 5 mm i zakresie $+2,5$ mm / -1 mm (Rys. 4). Schemat stanowiska badawczego przedstawiono na Rys. 5.



Rys. 8. Doświadczalna krzywa $P(h_p)$ dla stopu EN-AW 2024



Rys. 9. Doświadczalna krzywa $P(h_p)$ dla stopu EN-AW 2007

Dane otrzymane z eksperymentu (zależność siły od zagłębienia) poddano obróbce zgodnie z uprzednio opisaną procedurą. Sporządzono wykres $P-h_p$ (siła – zagłębienie plastyczne). Krzywą siła – plastyczne zagłębienie $P(h_p)$ aproksymowano krzywą potęgową (Rys. 8 i 9). Otrzymano przybliżoną postać funkcji: $P = 16238 h_p^{1,089}$ dla stopu aluminium EN-AW 2024 oraz $P = 14606 h_p^{1,113}$ dla stopu aluminium EN-AW 2007.

Kolejnym etapem było wyznaczenie stałych materiałowych, metodą regresji liniowej, z zależności:

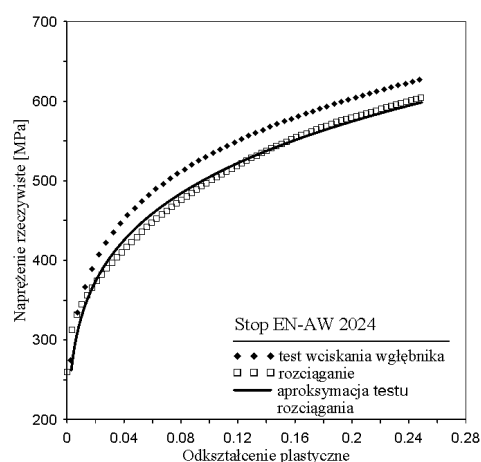
$$P = \pi \alpha k \beta^m c^{2+m} D^2 \left(\frac{h_p}{D} \right)^{\frac{m}{2}+1} \quad (1)$$

gdzie współczynniki: $\alpha = 2,8$ oraz $\beta = 0,4$ przyjęto dla materiału nieliniowo sprężystego (Hill i inni, 1989; Kucharski, 2002), $c^2 = 2,5((2n-2)/(4n+1))$ - niezmiennik procesu zagłębiania kulki w określony materiał, $n = 8$ – liczba punktów zwrotnych, D – średnica kulki, k oraz m – szukane parametry materiałowe.

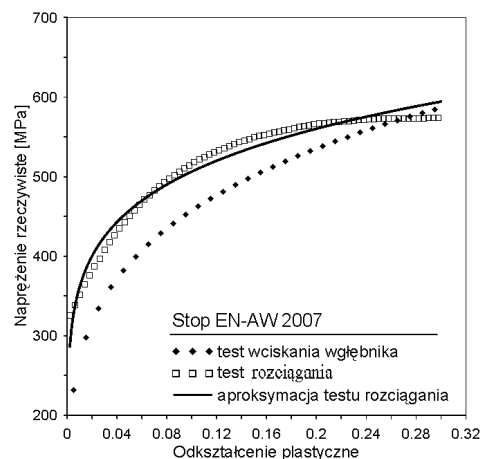
Na ich podstawie wygenerowano krzywą umocnienia badanego materiału w postaci:

$$\sigma = k \varepsilon_p^m, \quad (2)$$

gdzie: σ – naprężenie normalne (osiowe), ε_p – osiowe odkształcenie plastyczne.



Rys. 10. Porównanie rzeczywistych krzywych umocnienia otrzymanych z wykresu rozciągania próbki oraz wciskania kulistego wgłębnika dla stopu aluminium EN-AW 2024



Rys. 11. Porównanie rzeczywistych krzywych umocnienia otrzymanych z wykresu rozciągania próbki oraz wciskania kulistego wgłębnika dla stopu aluminium EN-AW 2007

Do opisu właściwości badanego materiału można użyć większej ilości parametrów niż w powyższej zależności. W literaturze można znaleźć również opis krzywej umoc-

nienia materiału za pomocą trzech parametrów (Kucharski, Mróz, 2004).

Na podstawie zależności (1) wyznaczono wartości współczynników: dla stopu aluminium EN-AW 2024: $k = 805,7$ oraz $m = 0,1798$ oraz dla stopu aluminium EN-AW 2007: $k = 771$ oraz $m = 0,226$.

Tab. 1. Porównanie wartości współczynników badanych stopów aluminium

Materiał	k	m	k_1	m_1
EN-AW 2007	771	0,226	709,7	0,146
EN-AW 2024	805,7	0,1798	759,7	0,1749

Weryfikacji powyższej metody dokonano porównując krzywą umocnienia materiału wyznaczoną z wykresu siła – plastyczne zagłębienie, z krzywą uzyskaną metodą hybrydową z wykorzystaniem testu rozciągania próbki, przedstawioną w pierwszej części pracy. Krzywe wyznaczone oboma metodami zamieszczono na Rys. 10 i 11.

Także krzywą umocnienia (naprężenie rzeczywiste – odkształcenie plastyczne) otrzymaną za pomocą testu rozciągania aproksymowano funkcją potęgową. Otrzymano wartości współczynników: dla stopu aluminium EN-AW 2024: $k_1 = 759,7$ oraz $m_1 = 0,1749$, zbliżone do tych otrzymanych za pomocą metody wciskania kulistego wgłębnika, oraz dla stopu aluminium EN-AW 2007: $k_1 = 709,7$ oraz $m_1 = 0,146$. Jak więc można zauważyć, w przypadku stopu aluminium EN-AW 2007 otrzymane wyniki były mniej dokładne (Rys. 11).

3. WNIOSKI

W pracy zaprezentowano dwie metody wyznaczania rzeczywistej krzywej umocnienia materiału. Pierwsza z nich wykorzystuje krzywą rozciągania próbki wykonanej z danego materiału oraz wielokrotne obliczenia za pomocą metody elementów skończonych (z uwzględnieniem modelu ciała sprężysto – plastycznego ze wzmocnieniem oraz nieliniowości geometrycznej). Metoda ta pozwala na dokładne wyznaczenie krzywej umocnienia, jej wadą jest konieczność przygotowania próbek lub minipróbek (o bardzo małym wymiarze i bazie pomiarowej) w przypadku materiału niejednorodnego. Nie ma zatem w tym przypadku możliwości analizy zmian parametrów umocnienia materiału elementu konstrukcyjnego podczas obciążeń zmęczeniowych i określenia na tej podstawie stanu uszkodzenia.

Druga z metod, polegająca na analizie procesu wciskania kulistego wgłębnika, jest mniej dokładna od poprzedniej, ale pozwala na wyznaczanie parametrów umocnienia materiału w różnych punktach materiału elementu konstrukcyjnego (badania lokalne) bez konieczności przygotowywania specjalnych próbek. Umożliwia ona także analizę zmian właściwości plastycznych materiału podczas procesu zmęczenia i wykorzystanie tego do prognozowania stanu uszkodzenia.

LITERATURA

1. Hill R., Storakers F. R. S. B., Zdunek A. B. (1989), A theoretical study of the Brinell hardness test, *Proc. R. Soc. Lond. A* 423, 301-330.
2. Kucharski S. (2002), *Identyfikacja własności i ewolucja stanu technologicznej warstwy wierzchniej elementów obciążonych monotonicznie i cyklicznie*, Warszawa, IPPT PAN.
3. Kucharski S., Mróz Z. (2004) *Identification of material parameters by means of compliance moduli In spherical indentation test*, Materials Science and Engineering A 379 448-456
4. Mroziński S. (2008), *Stabilizacja własności cyklicznych metali i jej wpływ na trwałość zmęczeniową*, Wydawnictwo UTP w Bydgoszczy.
5. PN-EN ISO 14577-1 (2005), *Metale – Instrumentalna próba wciskania wgłębnika do określania twardości i innych własności materiałów - Część 1: Metoda badania, PKN*
6. PN-EN ISO 6506-1 (2008), *Metale – Pomiar twardości sposobem Brinella – Część 1: Metoda badań, PKN*
7. Tabor D. (1951), *The Hardness of Metals*, Clarendon Press, Oxford.

METHODS OF DETERMINATION OF REAL HARDENING CURVE

Abstract: The paper is devoted to real hardening curve determination. Two methods are used in this paper. In this part based on spherical cyclical indentation test. The values of force and translocation measured during an experiment were used to determine the force-hollow curve and afterwards the force-plastic hollow curve. Basing on the force-plastic hollow relation, the material hardening curve was generated. Experiments were performed on aluminum alloy EN-AW 2024 and EN-AW 2007.

NOWA KONCEPCJA MODELOWANIA I ANALIZY DYNAMIKI APARATU KROCZENIA CZŁOWIEKA

Krzysztof K. ŻUR*

*doktorant, Katedra Automatyki i Robotyki, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka,
ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

krzysztof.zur@gmail.com

Streszczenie: W artykule przedstawiono nową koncepcję opisu i analizy dynamiki aparatu kroczenia człowieka. Zaproponowano własny matematyczny model aparatu kroczenia człowieka w przestrzeni stanu. Wykorzystano metodę płaszczyzny fazowej oraz tzw. „efekt mocy wykresów fazowych” w analizie dynamiki stawu kolanowego podczas pełnego cyklu ruchu osób młodych, zdrowych i sprawnych oraz osób zdrowych i sprawnych w wieku podeszłym. Wysunięto hipotezę badawczą dotyczącą możliwości wykorzystania pól małych pętli fazowych do oceny koordynacji nerwowo-mięśniowej aparatu kroczenia człowieka.

1. WSTĘP

Chód jest jedną z naturalnych czynności ruchowych człowieka, która zapewnia przemieszczenie całego ciała w dowolnym kierunku. Człowiek dopiero w dziesiątym roku swego życia osiąga pełną sprawność aparatu kroczenia. Zakładając średnią długość życia 70 lat, 1/7 tego czasu jest poświęcona na osiągnięcie pełnej koordynacji układu nerwowo-mięśniowego aparatu kroczenia człowieka.



Rys. 1. Petroglif pochodzący z około 5000 lat p.n.e. znajdujący się w Qobustan (Azerbejdżan)
http://republika.pl/blog_ce_4246446/5982381/tr/300px

Zainteresowanie oraz obserwacje związane z chodem człowieka trwają już od przeszło 5000 lat p.n.e., o czym np. świadczą rysunki wykonane na skałach (petroglify) (Rys. 1), na których są widoczni ludzie w wybranych fazach chodu i biegu. W dobie renesansu, także można zauważyć wielkie zainteresowanie chodem człowieka obserwując wiele rzeźb i obrazów charakterystycznych dla tego okresu. Malarze i rzeźbiarze zatrzymując w swoich dziełach czas i utrwalając wybrane fazy chodu, popełniali bardzo wiele błędów, gdyż nieznane im były prawa ruchu całego ciała

i jego poszczególnych segmentów.

Przełomu w rejestracji ruchu zwierząt i ludzi dokonali w XIX w. Francuz E. Marey i Amerykanin E. Muybridge, którzy jako pierwsi wykorzystali technikę fotograficzną (Woltring, 1987). Następnie badacze niemieccy W. Braune i O. Fisher wykorzystując metodę stroboskopową, umożliwili analizę trójwymiarowego ruchu człowieka (Woltring, 1987).

Największym postępem w rozwoju techniki pomiarowej ruchu człowieka było zastosowanie techniki telewizyjnej oraz optoelektroniki do szybkiego odczytu z komputerowego obrazu, współrzędnych znaczników umieszczonych na badanym obiekcie a następnie dokonywania obliczeń i zobrazowania wyników on-line. Można było uzyskać parametry kinematyczne chodu, jednak nadal brakowało pomiaru wielkości dynamicznych, takich jak np. siły reakcji podłoża. W związku z tym zbudowano platformy dynamometryczne działające na zasadzie pomiaru odkształceń i przemieszczeń sprężystych elementów mechanicznych.

Francuz L. Lauru w 1957 roku skonstruował pierwszą piezoelektryczną platformę dynamometryczną, w której było wykorzystywane zjawisko piezoelektryczne odkryte w 1880 roku przez braci Curie (Woltring, 1987). Platformę piezoelektryczną udoskonaliła szwajcarska firma Kistler. Zwiększono jej czułość do tego stopnia, że bez przeszkód można było zarejestrować bicie serca osobnika stojącego względnie nieruchomo na platformie.

Rozwój systemów pomiarowych przez ostatnie 100 lat, wykorzystał np. badacz kanadyjski D. Winter z University of Waterloo, który przeprowadził badania aparatu kroczenia człowieka w płaszczyźnie strzałkowej ruchu, obejmujące normę i patologię chodu osób młodych oraz w wieku podeszłym, a następnie umieścił wszystkie pomiary w swojej monografii (Winter, 1991).

Autorzy pracy (Żur i Jaworek, 2011) wykorzystali dane pomiarowe (Winter, 1991) dotyczące stawu kolanowego osób młodych, zdrowych i sprawnych do opisu kroczenia robotów antropomorficznych typu – DAR (Żur i Jaworek,

2011) w przestrzeni stanu. Opis ten, będący uniwersalnym narzędziem matematycznym, można także stosować w lokomocji dwunożnej człowieka – w ruchu płaskim.

Autor artykułu wykorzystał dane pomiarowe (Winter, 1991) dotyczące stawu kolanowego osób młodych, zdrowych i sprawnych oraz osób zdrowych i sprawnych w wieku podeszłym do wykreślenia ich trajektorii fazowych będących graficzną reprezentacją dynamiki aparatu kroczenia, bez znajomości równań ruchu układu.

2. MODELOWANIE APARATU KROCZENIA W LOKOMOCJI DWUNOŻNEJ CZŁOWIEKA

2.1. Klasyczne metody modelowania aparatu kroczenia człowieka

Układ ruchowy człowieka jest bardzo złożony i wymaga wielu uproszczeń, gdyż nie można zbudować matematycznego modelu wiernie odzwierciedlającego tak skomplikowany mechanizm.

Pierwszy model matematyczny lokomocji człowieka został opracowany przez braci Weberów z Getyngi w 1836 roku. Zaproponowali oni model „podwójnego odwróconego wahadła” do opisu fazy wymachu kończyny dolnej (Jaworek, 1992).

Wybór właściwego modelu wymaga wyboru odpowiedniej liczby stopni swobody, a także ustalenia geometrii, kinematyki oraz dynamiki obiektu. Zakładając, że kości są członami sztywnymi, a stawy tworzą pary kinematyczne umożliwiające wykonanie tylko ruchów obrotowych, można uzyskać model o 250 stopniach swobody, gdzie liczba stopni swobody przypadająca na kończyny dolne wynosi 120 (Jaworek, 2011).

Uproszczenie modelu można uzyskać poprzez redukcję stopni swobody, ale trzeba mieć na uwadze, że model musi utrzymywać podobieństwo do oryginału.

Najbardziej znany model ruchu człowieka został opracowany przez Hatzego, składał się z 17 członów o 44 stopniach swobody (Jaworek, 1992).

Opisując biomechanizmy, zwykle korzysta się z (Morecki i inni, 1984):

- praw Newtona;
- zasady d'Alemberta;
- równań Lagrange'a II rodzaju;
- równań Boltzmana-Hamela;
- równań Mangerona-Deleanu.

Wykorzystanie równań Lagrange'a do ułożenia równań dynamiki lokomocji człowieka jest mało efektywne przy większej liczbie stopni swobody. Klasyczne metody mechaniki analitycznej zawodzą, jeżeli na układ nałożone są więzy nieholonomiczne rzędu wyższego niż drugi (Jaworek, 1992).

2.2. Własny model matematyczny aparatu kroczenia człowieka w przestrzeni stanu

Autorzy artykułu (Żur i Jaworek, 2011) zaproponowali matematyczny opis ruchu kończyn dolnych robota antropomorficznego typu - DAR w przestrzeni stanu (Takahashi

i inni, 1976). W pracy (Żur i Jaworek, 2011) podano hipotezę badawczą dotyczącą wektora sterowania aparatem ruchu człowieka oraz antropomorficznego robota typu - DAR. Zaproponowano jako wektor sterowania, przebieg znormalizowanej mocy chwilowej $p_i(t)/m$ rozwijanej w i-tym stawie nogi człowieka kroczącego w płaszczyźnie strzałkowej w postaci:

$$u_i(t) = \frac{p_i(t)}{m} = \frac{\bar{M}_i(t)}{m} \cdot \bar{\omega}_i(t), \quad W/kg, \quad (1)$$

gdzie: $u_i(t)$ – wektor sterowania, którym jest przebieg znormalizowanej mocy chwilowej $p_i(t)/m$ rozwijanej w i-

tym stawie nogi człowieka $[W/kg]$, $\frac{\bar{M}_i(t)}{m}$ – znormalizowa-

wany moment sił mięśniowych rozwijanych w i-tym stawie kończyny dolnej $[(N \cdot m)/kg]$, $\bar{\omega}_i(t)$ – prędkość kątowa rozwijana w i-tym stawie nogi człowieka $[rad/s]$.

Zgodnie z hipotezą badawczą, autor pracy proponuje opisać aparat kroczenia człowieka w postaci (Żur i Jaworek, 2011):

$$\dot{\phi}_i(t) = a_i(t) \cdot \phi_i(t) + b_i(t) \cdot \frac{p_i(t)}{m}, \quad rad/s, \quad (2)$$

$$\phi_i(t = t_0) = \phi_{i0} = CONST, \quad (3)$$

gdzie: $\dot{\phi}_i(t)$ – zmienna stanu, wyrażające prędkość kątową rozwijaną odpowiednio w i-tym stawie nogi człowieka $[rad/s]$, $a_i(t)$ – współczynniki macierzy stanu $[1/s]$, $b_i(t)$ – współczynniki macierzy sterowania $[(rad \cdot kg)/J]$, $p_i(t)/m$ – przebieg znormalizowanej mocy chwilowej rozwijanej w zespołach mięśniowych obsługujących i-ty staw nogi człowieka $[W/kg]$.

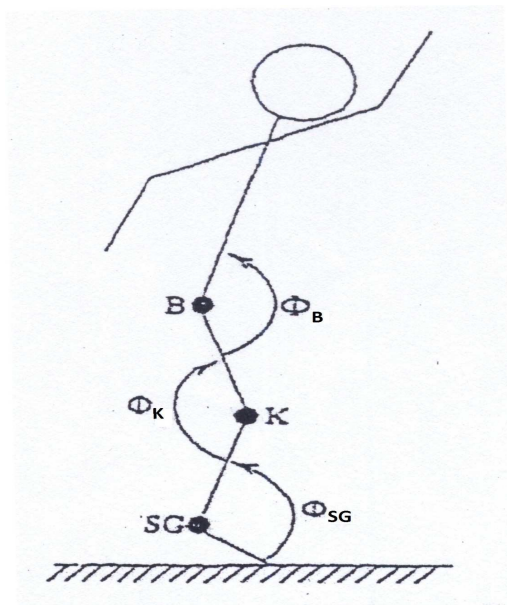
Współczynniki macierzy stanu $a_i(t)$ i sterowania $b_i(t)$ zostały wyznaczone w pracy (Żur i Jaworek, 2011) na podstawie danych kinematycznych i dynamicznych, dla pewnego zbioru osób zdrowych, sprawnych, młodych i starych – płci obojga, opracowanych przez D. Wintera (Winter, 1991; 2009).

3. ZASTOSOWANIE METODY PŁASZCZYZNY FAZOWEJ DO OPISU I ANALIZY LOKOMOCJI DWUNOŻNEJ CZŁOWIEKA W PŁASZCZYŹNIE STRZAŁKOWEJ RUCHU

Sterowanie ruchem kończyny dolnej podczas chodu z równoczesnym zachowaniem pozycji pionowej jest bardzo złożonym zadaniem, wykonywanym przez układ nerwowo-mięśniowy. Proces ten jest wielowymiarowy i silnie nieliniowy oraz trudny do opisu matematycznego. Sygnalami wejściowymi do układu można uznać pobudzenia mięśni lub znormalizowane moce chwilowe $p_i(t)/m$ rozwijane przez te mięśnie (Żur i Jaworek, 2011), a sygnały wyjściowe to trzy przebiegi kątów względnych $\phi_i(t)$ między miednicą a udem, udem a golenią oraz między golenią a stopą (Rys. 2).

Bioelektryczna aktywność mięśni kończyny dolnej zależy od położenia kończyny, a nie od czasu, więc metoda płaszczyzny fazowej (Kaczorek i inni, 2005) okazuje się dogodnym graficznym sposobem analizy wybranych seg-

mentów kończyny dolnej, ponieważ czas jest w tej metodzie wyeliminowany. Metodę tą stosuje się szczególnie w nieliniowych układach automatycznej regulacji. Rodziny trajektorii fazowych układów automatycznej regulacji pozwalają stwierdzić stabilność badanego układu oraz przedstawiają jego właściwości dynamiczne. Szczególną przydatność tej metody stwierdzono w analizie silnie nieliniowych układów niskiego rzędu, jednakże są prace (Jaworek, 1992), gdzie stosuje się ją nawet do układów rzędu III i wyższych.



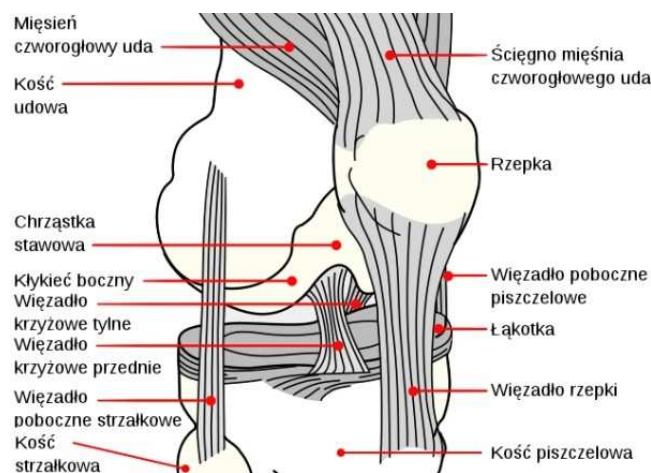
Rys. 2. Uproszczony schemat aparatu kroczenia człowieka z zaznaczonymi współrzędnymi stanu, gdzie:
 Φ_B – kąt między tułowiem a udą, Φ_K – kąt między udą a golenią, Φ_{SG} – kąt między golenią a stopą

3.1. Wykres fazowy stawu kolanowego w lokomocji dwunożnej człowieka

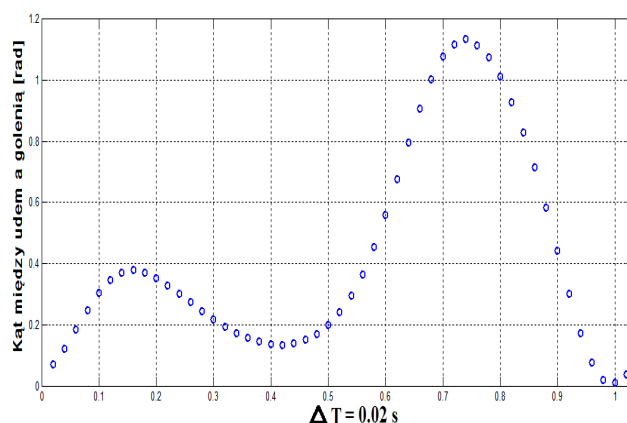
Winter w swojej monografii (Winter, 1991) umieścił dyskretne przebiegi m.in. kątów względnych $\varphi_i(n)$ (z okresem próbkowania $\Delta t = 0,02s$) w stawie kolanowym (Rys. 3) osób zdrowych, sprawnych i młodych oraz w wieku podeszłym kroczących ze stałą częstotliwością f i prędkością naturalną v . Jeden cykl ruchu trwał $\sim 1,02s$ i odpowiada dokładnie jednemu krokowi, na który składa się faza podporowa i faza wymachu kończyny dolnej.

W pracy Wintera [8], umieszczono tylko przebiegi kąta względnego $\varphi_K(n)$ w stawie kolanowym (Rys. 4) a pominięto przebiegi prędkości kątowej $\dot{\varphi}_K(n)$. Autor wyznaczył z rachunku wyrównawczego (Jaworek, 1992) dyskretne przebiegi prędkości kątowych $\dot{\varphi}_K(n)$ rozwijanych w stawie kolanowym osób młodych, zdrowych i sprawnych oraz osób w wieku podeszłym, także zdrowych i sprawnych. Przykładowy przebieg prędkości kątowej $\dot{\varphi}_K(n)$ rozwijanej w stawie kolanowym osób młodych przedstawiono na Rys. 5. O dokładności metody rachunku wyrównawczego można przekonać się, poprzez sprawdzenie

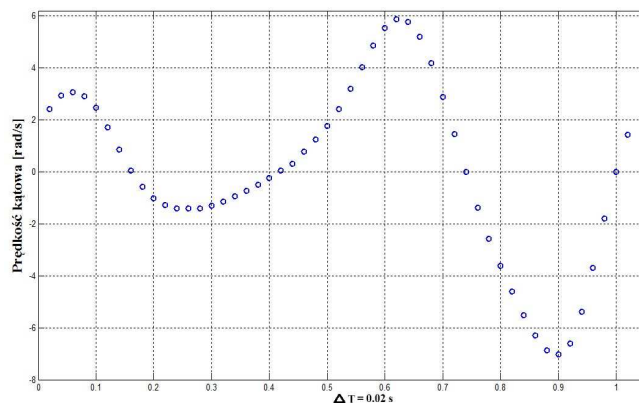
czy maksima i minima funkcji przebiegu kąta względnego $\varphi_K(n)$ w kolanie, są odpowiednio miejscami zerowymi funkcji przebiegu prędkości kątowej $\dot{\varphi}_K(n)$ rozwijanej podczas kroczenia w płaszczyźnie strzałkowej ruchu?



Rys. 3. Przykład anatomicznej budowy stawu kolanowego człowieka
http://republika.pl/blog_ce_4246446/5982381/tr/300px

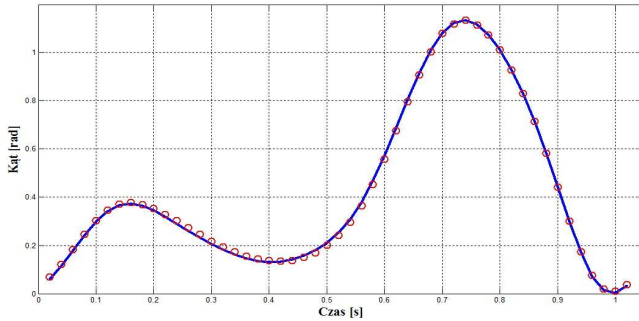


Rys. 4. Przebieg kąta względnego $\varphi_K(n)$ w stawie kolanowym u osób młodych, zdrowych i sprawnych, poruszających się z prędkością naturalną

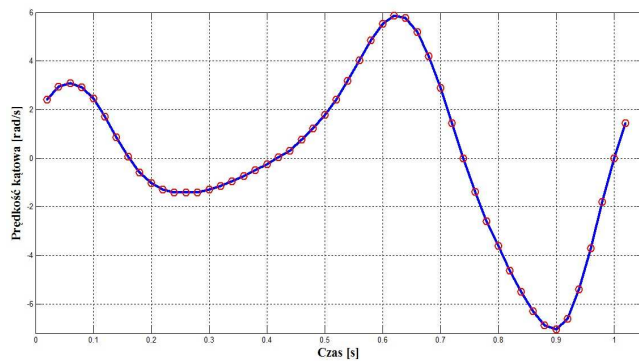


Rys. 5. Przebieg prędkości kątowej $\dot{\varphi}_K(n)$ rozwijanej w stawie kolanowym u osób młodych, zdrowych i sprawnych, poruszających się z prędkością naturalną

Chcąc uzyskać ciągle czasowe wykresy fazowe $(\dot{\phi}_K(t), \phi_K(t))$ określające dynamikę chodu w stawie kolanowym, aproksymowano przebieg kąta względnego $\phi_K(n)$ i prędkości kątowej $\dot{\phi}_K(n)$ osób młodych oraz w wieku podeszłym, funkcją szeregu Fouriera VIII rzędu, uzyskując 97% zgodności z przebiegiem wartości dyskretnych (Rys. 6, 7).



Rys. 6. Aproksymacja dyskretnego przebiegu kąta względnego $\phi_K(n)$ w stawie kolanowym osób młodych, zdrowych i sprawnych, szeregiem Fouriera VIII rzędu

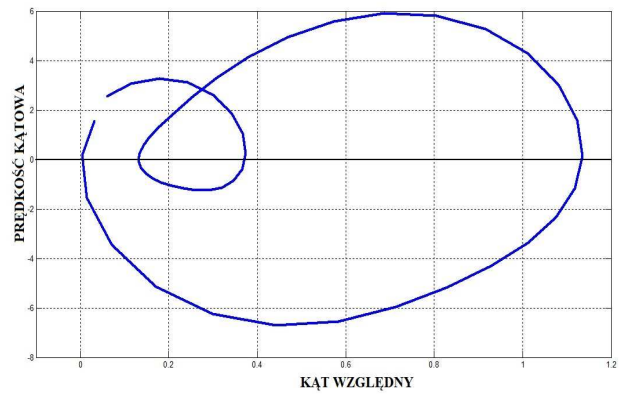


Rys. 7. Aproksymacja dyskretnego przebiegu prędkości kątowej $\dot{\phi}_K(n)$ rozwijanej w stawie kolanowym osób młodych, zdrowych i sprawnych, szeregiem Fouriera VIII rzędu

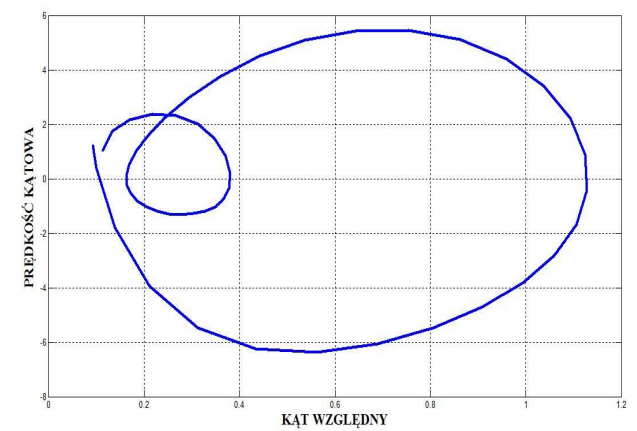
Posiadając ciągle w czasie funkcje przebiegu kąta względnego $\phi_K(t)$ oraz prędkości kątowej $\dot{\phi}_K(t)$ rozwijanej w kolanie osób młodych oraz osób w wieku podeszłym, można wygenerować odpowiednie wykresy fazowe opisujące dynamikę aparatu kroczenia w stawie kolanowym (Rys. 8, 9).

Badacze Paul, Gustafsson oraz Lanshammer (Jaworek, 1992) zauważyli, że uzyskiwane tory fazowe na płaszczyźnie Poincarégo pozornie przecinają się w miejscach, które nie są punktami osobliwymi, co przeczy przyjętej regule, że tory fazowe układów II rzędu mogą tylko przecinać się w punktach równowagi. Powyższe wykresy fazowe są dowodem pośrednim na to, że aparat ruchu człowieka jest układem co najmniej III rzędu lub nawet wyższym. W rzeczywistości trajektoria (Rys. 8, 9) nie przecina się,

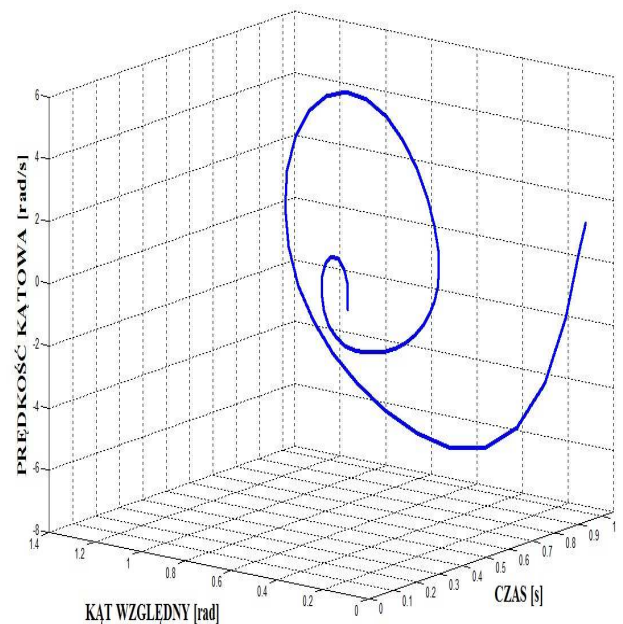
lecz tylko jej rzut z przestrzeni fazowej $(\dot{\phi}_K, \phi_K, t)$ (Rys. 10) na płaszczyznę fazową $(\dot{\phi}_K, \phi_K)$.



Rys. 8. Wykres fazowy stawu kolanowego $(\dot{\phi}_K(t), \phi_K(t))$ osób młodych, zdrowych i sprawnych, poruszających się z naturalną prędkością



Rys. 9. Wykres fazowy stawu kolanowego $(\dot{\phi}_K(t), \phi_K(t))$ osób w wieku podeszłym, zdrowych i sprawnych, poruszających się z naturalną prędkością



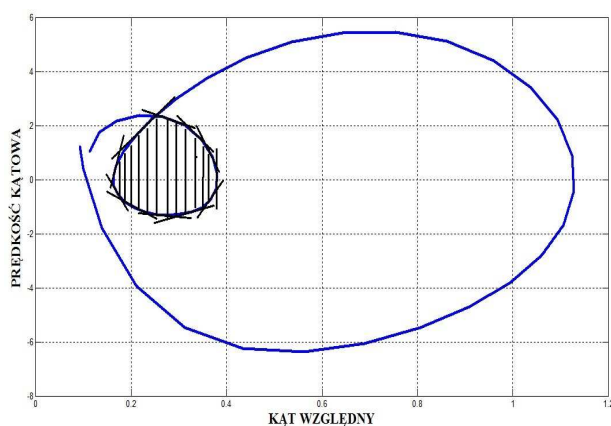
Rys. 10. Trajektoria stawu kolanowego w przestrzeni fazowej $(\dot{\phi}_K, \phi_K, t)$ osób w wieku podeszłym, zdrowych i sprawnych, poruszających się z naturalną prędkością

4. „EFEKT MOCY WYKRESÓW FAZOWYCH” W ANALIZIE I OCENIE KOORDYNACJI NERWOWO - MIĘŚNIOWEJ APARATU KROCZENIA CZŁOWIEKA

Lokomocja człowieka jest ruchem cyklicznym, anharmonicznym, w którym trajektorie fazowe tworzą dwie pętle (Rys. 8, 9). Mała pętla odpowiada fazie podporowej stopy z podłożem, a duża pętla fazie wymachu kończyny dolnej. „Efekt mocy wykresów fazowych” został opracowany przez autora pracy (Jaworek, 2011), a jego definicja brzmi: „im większa prędkość i częstotliwość kroczenia tym większe jest pole małej pętli na wykresie fazowym”. Autor pracy (Jaworek, 2011) zaobserwował, że mała pętla jest wprost proporcjonalna do mocy rozwijanej w fazie podporowej stopy z podłożem. W fazie tej wykorzystuje się 80% mocy rozwijanej przez główne zespoły mięśniowe w jednym cyklu ruchu.

Autor artykułu wysunął hipotezę badawczą dotyczącą pól małych pętli na wykresie fazowym i tego stawu nogi człowieka, która brzmi: „... im pole małej pętli na wykresie fazowym i tego stawu nogi człowieka jest większe, tym koordynacja nerwowo-mięśniowa aparatu kroczenia człowieka jest lepsza...”

Autor twierdzi, że za pomocą mierzenia wielkości pól małych pętli osób badanych, poruszających się z jednakową prędkością w normie, patologii oraz wieku starczym, można ocenić zmianę koordynacji nerwowo-mięśniowej aparatu kroczenia poprzez porównanie poszczególnych pól małych pętli osób badanych w danym czasie eksploatacyjnym (bergsonowskim). Im większe pole małej pętli tym aparat ruchu człowieka potrafi rozwijać większą prędkość lokomocji oraz rozwijać większą moc w mięśniach obsługujących dany staw nogi człowieka, co świadczy o lepszej koordynacji układu nerwowo-mięśniowego nóg człowieka.



Rys. 11. Przykładowa metoda „stycznych” służąca do obliczania pola małej pętli na wykresie fazowym

Wykresy fazowe stawu kolanowego osób młodych, zdrowych i sprawnych (Rys. 8) oraz osób w wieku podeszłym, także zdrowych i sprawnych (Rys. 9), zostały wygenerowane dla stałej, normalnej prędkości i częstotliwości kroczenia. Aparat kroczenia człowieka w wieku podeszłym jest mniej sprawny od aparatu kroczenia osoby młodej, więc pole małej pętli powinno być większe u osób młodych

i sprawnych niż u osób w wieku podeszłym, lecz także zdrowych i sprawnych poruszających się z jednakową prędkością. Autor dokonał obliczeń pól małych pętli dwiema metodami.

Pierwsza metoda jest bardzo pracochłonna, gdyż wymaga poprowadzenia stycznych przez punkty należące do małej pętli (Rys. 11), a następnie obliczenie pola jej wnętrza metodą trapezów (Dreszer i inni, 1971).

Autor znalazł, także inną metodę numeryczno-graficzną, polegającą na oznaczeniu odpowiednich obszarów wykresu dwoma różnymi barwami i wczytania ich do programu Matlab-Simulink w postaci macierzowej. Ze zwykłej proporcji można obliczyć pola pętli bazując na wartościach macierzy przypisanych odpowiednim barwom wykresu. Obie metody dały podobne wyniki, które różniły się o pomijalną wartość $0.00012 \text{ rad}^2/\text{s}$.

Pola małych pętli odpowiednio wynoszą:

$$- S_M = 0.701 \frac{\text{rad}^2}{s} \quad \text{– dla osób młodych, zdrowych i sprawnych;}$$

$$- S_S = 0.585 \frac{\text{rad}^2}{s} \quad \text{– dla osób w wieku podeszłym, zdrowych i sprawnych.}$$

Pole małej pętli osób młodych, kroczących z prędkością naturalną jest większe o $0.116 \text{ rad}^2/\text{s}$ od pola osób starszych, także kroczących z tą samą prędkością.

5. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W pracy przedstawiono własną koncepcję opisu aparatu kroczenia człowieka w przestrzeni stanu. Przedstawiono sposób opisu dynamiki aparatu kroczenia człowieka na płaszczyźnie fazowej, na której trajektorie fazowe są wykreślone na podstawie danych pomiarowych bioobiektu (uzyskanych bezinwazyjnie, np. za pomocą systemu ELITE-3D (Jaworek, 1992)) bez znajomości jego równań ruchu.

Wykorzystano „efekt mocy wykresów fazowych” do oceny zmian dynamiki stawu kolanowego aparatu kroczenia człowieka w czasie bergsonowskim. Wysunięto hipotezę dotyczącą możliwości wykorzystania pól małych pętli na wykresie fazowym do oceny koordynacji nerwowo-mięśniowej aparatu lokomocji człowieka.

Na podstawie otrzymanych wyników, nasuwa się wniosek, że pola małych pętli opisujących m.in. koordynację nerwowo-mięśniową aparatu kroczenia człowieka, zmniejszają się wraz z utratą mocy w mięśniach nóg człowieka (np. spowodowanych starzeniem się układu nerwowo-mięśniowego aparatu kroczenia), a co za tym idzie malejąc opisują spadek ich sprawności i na odwrót.

W dalszych badaniach, można także na podstawie danych pomiarowych osób np. z hemiplegią, umieszczonych w pracy Wintera (1991), wykreślić tory fazowe ich ruchu oraz policzyć pole małej pętli dla każdego ze stawów nóg człowieka i porównać je z polami małych pętli fazowych osób sprawnych.

Metody takie mogą mieć zastosowanie w przyszłości, gdyż są metryzowalne i mogą być wykorzystane w ośrodkach rehabilitacyjnych, do oceny postępów indywidualnej

rehabilitacji np. osób z niedowładem kończyn dolnych, poddanym bezinwazyjnym pomiarom przed rehabilitacją oraz po jej zakończeniu.

LITERATURA

1. **Dreszer J., Koch E., Kulesza Cz., Trajdos T., Wojdat M.** (1971), *Matematyka. Poradnik inżyniera*, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa.
2. **Jaworek K.** (2011), *Biocybernetyczne metody oceny lokomocji dwunożnej człowieka (w przygotowaniu do druku w Instytucie Biocybernetyki i Inżynierii Biomedycznej PAN)*.
3. **Jaworek K.** (1992), *Metoda wskaźnikowa oceny lokomocji dwunożnej człowieka na przykładzie chodu i biegu*, Prace Instytutu Biocybernetyki i Inżynierii Biomedycznej, Zeszyt nr 32, Warszawa.
4. **Kaczorek T. i inni** (2005), *Teoria Sterowania*, Wyd. PWN, Warszawa.
5. **Morecki A., Ekiel J., Fidelus K.** (1979), *Cybernetic systems of limb movements in man, animals and robots*, PWN-Polish Scientific Publishers Warszawa, 1979, Ellis Horwood Limited Publishers. Chester, 1984.
6. **Takahashi Y., Rabins M. J., Auslander D. M.** (1976), *Sterowanie i systemy dynamiczne*, Wyd. Naukowo-Techniczne WNT, Warszawa..
7. **Winter D. A.** (1991), *The biomechanics and motor control of human gait: normal, elderly and pathological*, Ed. by University of Waterloo Press, Ontario, Canada.
8. **Winter D. A.** (2009), *The biomechanics and motor control of human movement*, Fourth Edition, Published by John Wiley & Sons Inc., New Jersey, USA.
9. **Woltring H. J.** (1987), Data acquisition and processing systems in functional movement analysis, *Estratto da Minerva Ortopedica e Traumatologica*, 38-N, 12, 703-716.
10. **Żur K. K., Jaworek K.** (2011), Nowa koncepcja sterowania antropomorficznym robotem kroczącym typu – DAR, *Pomiary. Automatyka. Robotyka, PAR*, Miesięcznik naukowo-techniczny, nr 2, Warszawa, s. 462-473.
11. http://republika.pl/blog_ce_4246446/5982381/tr/300px

A NEW IDEA OF MODELLING AND DYNAMIC ANALYSIS OF A MAN WALKING APPARATUS

Abstract: In this paper a new idea of description and dynamic analysis of a man walking apparatus. Own mathematical model of a man walking apparatus in the space state was presented. Method of phase plane by using „phase effect of diagram” was used. During own investigation of young and old subjects were choosen from monograph elaborated by very famous Canadian investigator D.A. Winter (Winter, 1991, 2009). A new hypothesis about using a small phase loops for assessment of neuro-muscular coordination system of a man was proposed.

ABSTRACTS

Krzysztof Augustynek

Modelling of Joints on Mechanisms by Means of Spring Elements

Mechanisms are examples of closed kinematic chains with a tree-like structure. In order to derive the equations of motion, closed kinematic chains have to be cut and constraint equations have to be formulated. As a result equations of motion form set of differential-algebraic equations with index 3, which are difficult to solve. The paper presents a method modeling interactions between bodies at the cut joints by means of spring elements with appropriate stiffness. Such approach eliminates constraints equations, and thus the equations of motion form a set of ordinary differential equations.

Tomasz Boguszewski, Krzysztof Molski

Analysis of Stresses, COD and Energy Released Rate G for Symmetrically Branching Cracks

Mutual interactions between two neighboring singular stress fields for symmetrically branching cracks are analyzed. Using the finite element method and ANSYS program, relative crack opening displacements and range of validity of the singular stress fields have been obtained. Some special functions were chosen for describing crack face opening and calculating the energy release rate G and its particular components. Numerical results made it possible to explain the influence and applicability of stress intensity factors for such cracks and show qualitatively additional effects and cracking conditions around the crack tip for plane and anti-plane crack problems.

Krzysztof Ciechacki, Tadeusz Szykowny

Structure and Mechanical Properties of Welded Joints of Ferritic Steel X2CrNi12 with Austenitic Steel X5CrNi 18-10

The basic aim of this work is the connection of the microstructure of different joints with mechanical properties. In the range of mechanical properties the micro and macro hardness, impact tests, tensile and bending strength of welded joints were measured. For microstructure investigations the light scanning electron microscopy SEM and X – ray diffraction methods were used. The ferritic X2CrNi12 and austenitic X5CrNi 18-10 steels in the form of 5 mm thick sheets were taken for investigation.

Michał Czech, Lesław Kyzioł

Influence of the Content of the Polymer for Anisotropy of the Wood Strength for Tensile

The criterion Tsai-Wu for anisotropy materials in description of the wood and the composite strengths D-PMM related to the cutting angle of the specimens was applied. It was assumed that the strength curves run through the points denoting the strength in the principal axes of orthotropy. The coefficients were determined by the least square method. Verification of the accuracy of the description was made on the base of the test F-Snedocor'a.

Zenon Hendzel, Marcin Szuster

Neural Dynamic Programming in Behavioural Control of a Wheeled Mobile Robot

In this paper an innovative approach to a collision-free trajectory generating for a wheeled mobile robot (WMR) with Neural Dynamic Programming (NDP) and Fuzzy Logic (FL) algorithms, is proposed. The presented hierarchical control system consists of a trajectory generating algorithm based on reactive navigation of the WMR in unknown 2D environment with static obstacles, and a tracking control system. A strategy of reactive navigation is developed including two main behaviours: obstacle avoiding behaviour (OA) and goal-seeking behaviour (GS) realized in a form of NDP algorithms. These simple, individual behaviours are combined by the fuzzy combiner of behaviours (CB), that determines influence of the individual behaviours according to environment conditions. A computer simulations of the proposed control algorithm have been conducted in virtual environment for the WMR Pioneer 2-DX.

Andrzej Kazberuk

Stress Intensity Factors at Crack Tips Located at Rounded V-Notch Vertex

The problem of the stress intensity factors for system of cracks emanating from infinite rounded V-notch apex subjected to tearing load was solved. Numerical values was obtained for two most important symmetrical cases – the single crack and the system of two cracks of equal length. The influence of the notch apex rounding radius on the stress intensity factors at crack tips was analyzed. The asymptotic solution which was obtained has general nature – stress concentration factors at the crack tip are expressed as a function of V-notch stress intensity factor, so this relationship could be applied to estimate essential fracture mechanics parameters in the wide range of particular symmetrical problems of fracture of V-notched structural elements subjected to tearing loads.

Ewa Kulesza

Analysis of Corrosion Resistance of the Titanium Alloys Obtained by Powder Metallurgy Method

This article presents analysis of corrosion resistance of the titanium alloys obtained by powder metallurgy method. The potentiodynamic curves made from data obtained from the ATLAS 9933 ELEKTROCHEMICAL INTERFACE device were analyzed. Corrosion potentials and corrosion currents of sintered titanium were evaluated by the POL-99. The characteristics of corrosion of new titanium alloys and solid commercial alloy-Ti6Al4V were compared. It was found that corrosion potentials of sintered materials are displaced into higher potential than commercial alloy.

Tadeusz Łagoda, Karolina Walat

Methods of Realization of Service Loadings in the Control Systems of Fatigue Test Stands

The paper presents five methods of signal generation which can be applied for simulation of service loadings at fatigue test stands. They are: the method of block programs of cyclic loadings, the matrix method for generation of random loading extrema, the congruence method for generation of random loading and formation of their probabilistic characteristics with use of digital filters, the method of generation of random signals as a sum of harmonic histories according to the given spectral power density function, the method of random signal generation with the inverse Fourier transform according to the given spectral power density function.

Krzysztof Łukaszewicz, Walenty Osipiuk

The Fatigue Life Prediction of Notched Elements

The paper presents a method of evaluating of fatigue life under uniaxial loads conditions. Experiments verifying the above method have been conducted on INSTRON 8502 PLUS machine using steel C45 specimens. For testing applied disc specimens with radius cut under uniaxial loads state. In the calculations of coefficient β_k utilization two well-known Neuber's and Peterson's dependences were executed.

Romuald Mosdorf, Tomasz Wyszowski

Modelling of Synchronization of Air Bubbles Departing From Two Neighbouring Nozzles

Results of experimental investigation of interaction between bubble columns generated from two nozzles have been presented. The synchronization between departing bubbles has been observed for distance between nozzles equal to 5mm and bubble departure frequency equal to 30 Hz. The analysis of liquid flow regime between interacting bubbles has been made using the COMSOL Multiphysics program. The gas-liquid interface movement has been described using the level set method. The bubble departures from neighboring nozzles in the long period of time have been modeled using the set of ODE describing the changes of mass of gas in the gas supplying system. During the simulation, similarly to the experiment, the correlation between behaviors of two interacting chaotic systems has been observed.

Jerzy Nachimowicz, Robert Korbut

Energetic Aspects of Needle Bearings Work Performance

The paper presents the analysis of wear equation in energetic approach exemplified by a needle bearing of tractors third motion shaft. The authors analysed the influence of external factors on the type of wear in the function of time in frictional contact. Properties which are typical of deformed sections of friction surface have essential influence on the durability of the elements of friction couple. It is crucial to make the right choice of materials for friction elements which ought to have structure of the largest resistance to cracking as a result of external exploitation influences. This means that the material science of tribotechnology should be considered on the basis of microstructure analyses.

Grzegorz Puławski

Influence of Variable Specific Heats of Working Fluid on Performance of Air Standard Otto, Diesel and Sabathe Cycles

This paper presents influence of variable specific heats of working fluid on the performance of air standard Otto, Diesel and Sabathe cycles. The mathematic models of air standard cycles with temperature dependent specific heats were made and compared to those which use constant specific heats. The results obtained in this study, presented in tables and charts, show significant variations between the performance of cycles with constant and variable specific heats of working fluid.

Maciej Słowik, Daniel Oldziej

Cognitive Architectures Survey of Methods and Implementations

Autonomous mobile robots are used in different new applications. These applications put different requirements on the autonomy tasks of robotic systems. The more advances in autonomy solutions are connected with these cognitive architectures. Cognitive architectures have build-in mechanisms, which can cope with new problems arriving in uncertain environments. In the paper three different cognitive architectures, implementations and simulation of them have been described and compared.

Heorgij Sulym, Wiktor Opanasowycz, Igor Jacyk

Bending of Reissner's Plate Containing Cracks with the Account of Their Faces Contact Zone Width

This paper considers the bending of unbounded isotropic plate loaded at infinity with uniformly distributed bending moments. The plate is weakened with three collinear cracks with traction-free faces. It is assumed that the crack faces are in a smooth contact on the top face of a plate along their length. The contact region for each crack has a constant height. Due to the contact of crack faces the solution of the problem is obtained as a superposition of two ones: plane stress problem and problem of Reissner plate bending. Basing on the complex variable method the system of singular integral equations is obtained. It is solved numerically using the mechanical quadrature technique. The analysis of numerical data is provided.

Tomasz J. Teleszewski, Sławomir A. Sorko

Application of Boundary Element Method for Solution of Two Dimensional Flows

Object of presented work is implementation of method of boundary integral equations to solving of viscous liquid flow problems. The computing algorithm for laminar flows of viscous liquid flows (Stokes flows) at use of method of the boundary integral equations consisting in to application of conjugate integral equations describing of speed and stresses in liquid to delimitation of stress at boundary conditions formulated for speed, to delimitation of speed from integral relationships, and in further order delimitation of the pressure, vorticity and stream function by utilization of differential relationships among these quantities and speed of movement of liquid. One represented results of solution of the test problem of flat flow in square cavity and one compared results of calculations of boundary element method with results of calculations with finite element method. One made comparisons streamlines obtained by experimental visualizations of the flows with stream function charts for row laminar flows in flat ducts with various configuration.

Adam Tomczyk

The Effect of Crack on Contact Pressure Distribution in a Plane Problem Accounting for Friction

The paper presents the solution of the problem of interaction between a rigid punch and an elastic half-space weakened by a single edge crack. It was assumed the parabolic or flat punch to analyze the influence of punch base shape. The contact pressure distributions were obtained for various values of distance between crack and punch, crack length and its orientation, Poisson ratio and also for various values of friction coefficient. A detailed influence of these parameters on contact zone size and its eccentricity is presented for the case of parabolic punch. It was found that assuming regular contact pressure distribution in the place where punch acting can produce considerable errors in many contact problems.

Adam Tomczyk

Experimental Investigations of Fatigue Crack Propagation in Polymethyl Methacrylate Specimen

The paper presents the results of experimental investigations of crack growth in PMMA V-notched plane specimens. A uniaxial (mode I) and biaxial (mode I + mode II) loading conditions are considered. It is described the effect of various loading values and also the effect of biaxiality of loading on crack growth rate and crack initiation and propagation directories. It was observed a three-stages process of crack propagation in brittle PMMA glass.

Grzegorz Wołkowycki

Experimental Determination of Fixed Matrix Regenerator Effectiveness Based on Operation Parameters of Regenerators Working at a Glass Melting Furnace

This paper describes the regenerators, in which it is fitted with glass oven located in the Glassworks Huta BIAGLASS in Białystok. Presents in detail the design of regenerators, thermophysical properties of filling and measuring equipment performance. Having shown how to determine the operational effectiveness of the test results regenerator. Posted on, the results of simulation the impact of measurement errors and the temperature of exhaust air volume so as to be fixed efficiency bug.

Robert Zabielski, Roman Trochimczuk

Chosen Problems of Design Procedures of High Speed Milling Electrospindle with Non -Standard Bearings

The analysis of basic problems considering structure and design of milling electrospindles with magnetic bearings was performed in the paper. The attention was especially paid to problems related to construction and proper selection of components of the system being designed. Moreover, general structure and applications of magnetic bearings was discussed, and advantages as well as disadvantages of using magnetic bearings in rotary machinery were defined. On this basis, two conceptions of electrospindle with magnetic bearings were proposed. Additionally, the paper describes general design procedure of complex mechatronic systems, as which the modern high speed electrospindles with magnetic bearings can be classified, proposed by R. Isermann.

Agata Zajkowska, Łukasz Derpeński, Andrzej Seweryn

Methods of Determination of Real Hardening Curve

The paper is devoted to real hardening curve determination. Two methods are used in this paper. In this part based on uniaxial tensile test – FEM. Material resilient-plastic model with isotropic hardening and Huber – von Mises plasticity condition was used to describe the relations between the tension and axial strain in researched samples in plastic range. Hardening curves was determined by means of multiply repeated numeric calculations taking the “neck” creation effect into consideration. Experiments were performed on aluminum alloy EN-AW 2024 and EN-AW 2007.

Agata Zajkowska, Łukasz Derpeński, Andrzej Seweryn

Methods of Determination of Real Hardening Curve

The paper is devoted to real hardening curve determination. Two methods are used in this paper. In this part based on spherical cyclical indentation test. The values of force and translocation measured during an experiment were used to determine the force-hollow curve and afterwards the force-plastic hollow curve. Basing on the force-plastic hollow relation, the material hardening curve was generated. Experiments were performed on aluminum alloy EN-AW 2024 and EN-AW 2007.

Krzysztof K. Żur

A New Idea of Modelling and Dynamic Analysis of a Man Walking Apparatus

In this paper a new idea of description and dynamic analysis of a man walking apparatus. Own mathematical model of a man walking apparatus in the space state was presented. Method of phase plane by using „phase effect of diagram” was used. During own investigation of young and old subjects were choosen from monograph elaborated by very famous Canadian investigator D.A. Winter (Winter, 1991, 2009). A new hypothesis about using a small phase loops for assessment of neuro-muscular coordination system of a man was proposed.