

Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej

BUDOWNICTWO

Zeszyt 24



Wydawnictwo Politechniki Białostockiej

Białystok 2003

Redaktor naukowy
prof. zw. dr hab. inż. Rościsław Tribińko

Recenzenci:

prof. dr hab. inż. Tadeusz Bobko – 15
prof. dr hab. inż. Michał Bołtryk – 6
dr hab. prof. PB – Jerzy Bryłka – 3
dr hab. inż. Henryk Krause, prof. PŚ – 16
dr hab. Zdzisław Kurowski, prof. WAT – 19
prof. dr hab. inż. Leszek Litwinowicz – 10, 11
prof. Wojciech Marks – 2
prof. dr hab. inż. Czesław Miedziałowski – 4, 9, 18
prof. dr hab. Stefan Przewłocki – 5, 8
prof. dr hab. inż. Kazimierz Szulborski – 17
prof. zw. dr hab. inż. Rościsław Tribińko – 1, 7, 12, 13, 14

Opracowanie redakcyjne:
Jadwiga Żukowska

© Copyright by Politechnika Białostocka 2003

ISSN 0239-569X

Publikacja nie może być powielana i rozpowszechniana, w jakikolwiek sposób,
bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich

Skład, redakcja techniczna i druk:
Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej

Spis treści

1. Aleksander Afonin, Beata Backiel-Brzozowska, Vadim Nikitin – Wyznaczenie parametrów migracji wilgoci w ceramice ściennej	7
2. Michał Boltryk, Dorota Małaszkiwicz – Podstawy wibracyjnej technologii zagęszczania spoiwstych ośrodków drobnoziarnistych	15
3. Michał Boltryk, Włodzimierz Jezierski, Walery Jezierski, Dzienis Krolewieckij – Technologia pianoceramicznych wyrobów z domieszkami koagulacyjnymi	23
4. Tadeusz Chyży, Janusz Krentowski, Rościśław Tribillo – Procesy wybuchu gazu i awarie zbiorników oczyszczalni ścieków	29
5. Piotr Dobosz, Edwin Koźniewski – Parametry prymitywów sklepień i przekryć budowlanych w aspekcie wizualizacji komputerowej	47
6. Walery Jezierski, Marta Kosior-Kazberuk – Mrozooodporność betonu z dodatkiem bitumicznym	61
7. Andrzej Kazberuk – Implementacja warunków brzegowych w algorytmach rozwiązywania wielkich układów równań metody elementów skończonych	71
8. Edwin Koźniewski, Marcin Orłowski – Rysunki w środowisku AutoCADa wykonywane poza AutoCADem	81
9. Janusz Krentowski, Romuald Szeląg, Rościśław Tribillo – Współczynniki zagrożenia katastrofą sprężysto-plastycznej struktury przekrycia. Prognoza sukcesu	89
10. Joanna Krętowska – Elementy półnieskończone typu „displacement descent” wykorzystywane przy analizowaniu współpracy budowl i z podłożem gruntowym	103
11. Joanna Krętowska – Synteza elementów półnieskończonych typu „coordinate ascent” stosowanych w analizie zagadnień statycznych metodą elementów skończonych	117
12. Ireneusz Ligocki – Nośność podatnego połączenia stopy słupa z fundamentem według metody składnikowej	135
13. Ireneusz Ligocki – Sztywność połączenia stopy słupa z fundamentem według metody składnikowej	151
14. Mikołaj Malesza, Czesław Miedziałowski – Wpływ czasu na nośność i podatność elementów konstrukcji szkieletowych budynków drewnianych	161
15. Zygmunt Orłowski – Proces betonowania w warunkach zimowych	179

16. Robert Stachniewicz – Metoda wyznaczania efektywnej grubości izolacji termicznej w budynkach mieszkalnych i użyteczności publicznej przy uwzględnieniu źródła ciepła	191
17. Mikołaj Syczewski, Józef Wiszniewski – Analiza wyężenia materiałów w elemencie żelbetowym poddanym procesom destrukcji	203
18. Romuald Szelaę, Roćisław Tribillo – Globalny efekt przemieszczeń struktur kratowych w sprężysto-plastycznych stanach naprężeń	213
19. Roćisław Tribillo, Adam Walendziuk – Analiza numeryczna rozkładu naprężeń na granicy faz w ośrodku stałym	231

Contents

1. Aleksander Afonin, Beata Backiel-Brzozowska, Vadim Nikitin – EVALUATION OF MOISTURE TRANSFER PARAMETERS IN WALL CERAMICS MATERIALS	14
2. Michał Boltryk, Dorota Małaszkiwicz – BASIS OF TECHNOLOGY OF VIBRATORY CONSOLIDATION OF FINE-GRAINED COHESIVE MEDIUMS	21
3. Michał Boltryk, Włodzimierz Jezierski, Walery Jezierski, Dzienis Krolewieckiej – UPON THE TECHNOLOGY OF FOAM-CERAMIC GOODS	28
4. Tadeusz Chyży, Janusz Krentowski, Rościsław Tribillo – THE GAS EXPLOSION PROCESSES. THE DISASTERS OF TANKS IN THE SEWAGE-TREATMENT PLANTS	46
5. Piotr Dobosz, Edwin Koźniewski – THE PRIMITIVES OF VALTS AND BUILDING ROOFS IN THE ASPECT OF THE COMPUTER VISUALIZATION	59
6. Walery Jezierski, Marta Kosior-Kazberuk – FROST RESISTANCE OF CONCRETE WITH BITUMINOUS ADDITION	70
7. Andrzej Kazberuk – LINEAR CONSTRAINTS IN THE ITERATIVE SOLUTION OF FINITE ELEMENT EQUATIONS	80
8. Edwin Koźniewski, Marcin Orłowski – DRAWINGS IN SYSTEM AUTOCAD EXECUTED OUTSIDE THE APPLICATION	867
9. Janusz Krentowski, Romuald Szela, Rościsław Tribillo – THE CATASTROPHE CONDITION FACTORS OF LINEAR-ELASTIC COVER STRUCTURE. THE SUCCESS FORECAST	102
10. Joanna Krętowska – INFINITE ELEMENTS TYPE „DISPLACEMENT DESCENT” USED IN SOIL-STRUCTURE INTERACTION PROBLEMS	116
11. Joanna Krętowska – SYNTHESIS OF INFINITE ELEMENTS TYPE „COORDINATE ASCENT” USED IN ANALYSING STATIC PROBLEMS BY FEM	133
12. Ireneusz Ligocki – THE LOAD CAPACITY OF THE FLEXIBLE COLUMN – TO FOUNDATION CONNECTION ACCORDING TO THE COMPONENT METHOD	150

13. Ireneusz Ligocki – THE STIFFNESS OF THE FLEXIBLE COLUMN – TO – FUNDATIOMN CONNECTION ACCORDING TO THE COMPONENT METHOD	162
14. Mikołaj Malesza, Czesław Miedziałowski – INFLUENCE OF TIME ON LOAD CAPACITY AND DEFORMABILITY OF WOOD-FRA- MED BUILDING STRUCTURES	177
15. Zygmunt Orłowski – COLD WEATHER CONCRETING	189
16. Robert Stachniewicz – METHODS IF DETERMINATE THE EFFECTIVENESS THERMOISOLATION THICKNESS OF DWEL- LING AND PUBLIC BUILDINGS IN HEATING PLANT CONNEC- TION	202
17. Mikołaj Syczewski, Józef Wiszniewski – THE ANALYSIS OF THE REINFORCED CONCRETE ELEMENT EFFORT WHICH HAS BEEN SUBJECTED TO THE DESTRUCTIVE PROCESSES	212
18. Romuald Szelağ, Rościsław Tribillo – GLOBAL RESULT OF TRUSS STRUCTURES DISPLACEMENT IN ELASTIC-PLASTIC STRESS CONDITIONS	229
19. Rościsław Tribillo, Adam Walendziuk – NUMERICAL ANALYSIS OF STRESS DISTRIBUTION AT AN INTERFACE BETWEEN DIS- SIMILAR SOLIDS	238

Aleksander Afonin, Beata Backiel-Brzozowska, Vadim Nikitin

WYZNACZENIE PARAMETRÓW MIGRACJI WILGOCI W CERAMICE ŚCIENNEJ

Streszczenie: Głównymi parametrami charakteryzującymi materiał w stosunku do migracji wilgoci są współczynnik przepływu wilgoci i rozkład objętości porów w funkcji promienia. W pracy opublikowano metodę wyznaczania funkcji współczynnika przepływu wilgoci, służącą do określania dystrybuanty porowatości materiału. Część doświadczalna metody polega na zbadaniu kinetyki jednokierunkowego podciągania kapilarnego.

Słowa kluczowe: ceramika ścienna, porowatość ceramiki, algorytm matematyczny, współczynnik przepływu wilgoci

1. Wstęp

Wskutek oddziaływania czynników atmosferycznych w ścianach budynków z cegły zachodzą intensywne procesy migracji ciepła i wilgoci. Niedostateczne rozpoznanie tych zjawisk jest przyczyną błędnego projektowania przegród budowlanych. W okresie eksploatacji budowli w materiałach ściennych kumuluje się wilgoć, która intensyfikuje degradację materiału.

Dla opisu niestacjonarnych procesów przepływu ciepła i wilgoci w materiałach kapilarno-porowatych opracowano ponad 10 modeli matematycznych. Przy praktycznym wykorzystaniu modeli należy uzyskać dane o parametrach charakteryzujących badany materiał, odnoszących się do procesu przepływu wilgoci. Jednym z tych parametrów jest współczynnik przepływu wilgoci materiału, którego wartość zależy od charakteru związku wilgoci z materiałem, struktury porowatości, wilgotności i temperatury. Wartość współczynnika można obecnie wyznaczyć doświadczalnie.

Przy zastosowaniu metody Brylinga [1] długość próbki prostopadłościennej powinna być większa niż wysokość podciągania kapilarnego wilgoci, której wartość dla badanego materiału może różnić się nawet kilkakrotnie, w zależności od charakteru porowatości. Ponadto przy zastosowaniu tej metody konieczny jest

podział próbek na kilka jednakowych części prostopadle do ich długości, co powoduje zakłócenie rzeczywistego rozkładu wilgoci. Powstają komplikacje przy różniczkowaniu krzywej doświadczalnej zmian wilgotności próbki po jej długości.

Do wyznaczenia współczynnika przepływu wilgoci Gaffner [2] zaleca wykonywać próbki w kształcie belki opartej na dwóch podporach, z których jedną umieszcza się na wadze. W chwili początkowej eksperymentu końce próbki powinny mieć różną wilgotność. Od wartości różnicy zależy dokładność wyznaczenia wartości liczbowej współczynnika przepływu wilgoci. Nie podano jednak konkretnych wskazań dotyczących wartości wilgotności końców próbki.

Niedoskonałość wymienionych metod sprawia, że w specjalistycznej literaturze przedstawiono dowolnie ograniczoną liczbę danych o współczynniku przepływu wilgoci w materiałach budowlanych.

W pracy zaprezentowano metodę, w której część doświadczalna polega jedynie na przeprowadzeniu badania kinetyki jednokierunkowego podciągania kapilarnego. Główną charakterystyką liczbową struktury materiałów kapilarno-porowatych jest rozkład objętości porów w funkcji promienia. Doświadczalne określenie dystrybucji rozmiarów porów wymaga zastosowania kosztownej aparatury. W pracy przedstawiono obliczeniową metodę wyznaczenia dystrybucji przy znanej funkcji współczynnika przepływu wilgoci w materiale.

2. Ocena współczynnika przepływu wilgoci

2.1. Sformułowanie zagadnienia

Niestacjonarny, jednokierunkowy ruch wilgoci opisany jest równaniem dyfuzji [1, 2]

$$\rho_p \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (1)$$

gdzie:

$w(x, t)$ – wilgotność wagowa, zależna od współrzędnej x i czasu t ,

ρ_p – gęstość pozorną materiału $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$,

$\beta(w)$ – współczynnik przepływu wilgoci materiału $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right]$.

Na początku eksperymentu ($t = 0$) próbka była sucha, co można zapisać następująco:

$$\omega(x, 0) = 0, \quad 0 < x \leq L, \quad (2)$$

gdzie:

L – długość próbki.

W trakcie badania dolna podstawa próbki ($x = 0$) pozostawała w kontakcie z wodą, co można zapisać w następujący sposób:

$$w(0, t) = w_{\max}, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

gdzie $w_{\max}$ jest maksymalną wilgotnością wagową materiału, mierzona przy podstawie próbki [%].

Zaizolowano górną powierzchnię próbki prostopadłościenną i powierzchnie boczne, co uniemożliwiło wydostawanie się wilgoci z badanego materiału:

$$\beta(w) \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = L, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Zmianę masy próbki w czasie opisano w następujący sposób

$$m(t) = m_0 + \rho_p \cdot S \int_0^L w(x, t) dx, \quad (5)$$

gdzie:

m_0 – masa początkowa próbki w czasie $t = 0$ [kg],

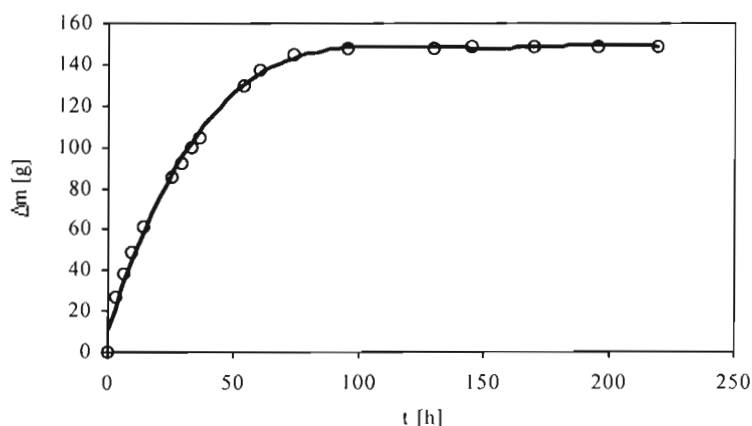
S – pole powierzchni przekroju poprzecznego próbki [m²].

Sformułowane zagadnienie polega na wyznaczeniu nieznanej funkcji $\beta(w)$ na podstawie wzorów (1)÷(5).

2.2. Opis eksperymentu

W celu uzyskania danych o kinetyce procesów kapilarnych autorzy przeprowadzili eksperyment. Z masy ceramicznej składającej się z bardzo drobnego ilu (85%) z dodatkiem piasku kwarcowego (15%) przygotowano 3 próbki w formie prostopadłościanu o wysokości 23 cm i polu powierzchni podstawy 25 cm². Wysokość próbek przyjęto na podstawie metody Brylinga [1]. Głównym minerałem

ilu jest illit. Próbkę wypalono w temperaturze 900°C , przy prędkości nagrzewania i studzenia $3^{\circ}\text{C}/\text{min}$. Wszystkie powierzchnie prostopadłościanu, z wyjątkiem dolnej podstawy, pokryto parafiną. Próbkę usytuowano w kuwecie wypełnionej wodą destylowaną. Poziom zanurzenia próbek wynosił 1 cm i był stały przez czas trwania badania. Utrzymywano również niezmienną wilgotność względną i temperaturę powietrza. Pomiary polegały na kontroli masy próbek przy założonych odstępach czasowych. W pracy zamieszczono wyniki eksperymentu uzyskane dla próbki o gęstości pozornej 1750 kg/m^3 (rys. 1).

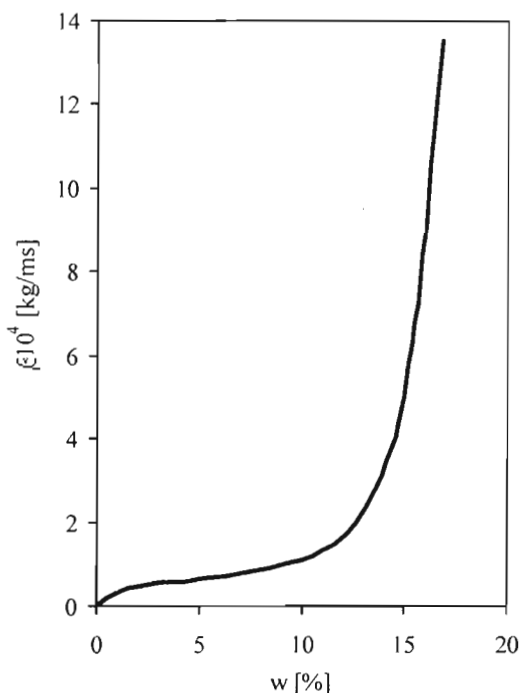


Rys. 1. Przyrost masy próbki w czasie (gęstość pozorna materiału 1750 kg/m^3)

2.3. Analiza obliczeniowa

Autorzy opracowali program komputerowy służący do obliczenia współczynnika przepływu wilgoci, który rozwiązuje quasi-liniowe różniczkowe równanie dyfuzji (1) z warunkami początkowymi i brzegowymi (2)÷(4). Uzyskane rozwiązanie $w(x,t)$ całkowano zgodnie z równaniem (5).

Rozwiązanie zagadnienia (1)÷(5) polegało na wyznaczeniu funkcji $m(t)$ i porównaniu z danymi doświadczalnymi (rys. 1). Na rysunku 2 pokazano wyniki obliczeń współczynnika przepływu wilgoci.



Rys. 2. Zależność wartości współczynnika przepływu wilgoci od wilgotności próbki o gęstości pozornej 1750 kg/m³, uzyskana na drodze doświadczalnej

3. Ocena rozkładu objętości porów w funkcji promienia

3.1. Opis matematyczny zadania

W pracy [5] ustalono zależność współczynnika przepływu wilgoci od rozkładu objętości porów w funkcji promienia. Bez uwzględnienia wilgoci sorpcyjnej zależność tę można zapisać następująco:

$$\beta(w) = \frac{\sigma \cdot \cos \varphi \cdot w_V^3}{\rho_{Pw} \cdot V \cdot \xi(w_V) \cdot S_V^2(r_w) \cdot f_V(r_w) \cdot r_w^2} \quad (6)$$

Składowe równania (6) wyznaczono ze wzorów

$$w_v = \frac{\rho_p}{\rho_{pw}} w, \quad (7)$$

$$w_v = \int_0^{r_w} f_v(r) dr, \quad (8)$$

$$S_v(r_w) = 2 \int_0^{r_w} \frac{f_v(r)}{r} dr, \quad (9)$$

$$\xi(w_v) = \left\{ \frac{1}{2} + \sin \left[\frac{\arcsin(2w_v - 1)}{3} \right] \right\}^{-2}, \quad (10)$$

w których:

ρ_{pw} – gęstość pozorna wilgoci zawartej w próbce $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$,

v – lepkość kinematyczna wilgoci $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$,

φ – kąt zwilżania,

w_v – wilgotność objętościowa,

ξ – współczynnik kształtu kapilary,

S_v – pole powierzchni kapilar (kontaktu wody ze szkieletem materiału) $[\text{m}^2]$.

f_v – rozkład objętości porów w funkcji promienia $\left[\frac{1}{\text{m}} \right]$,

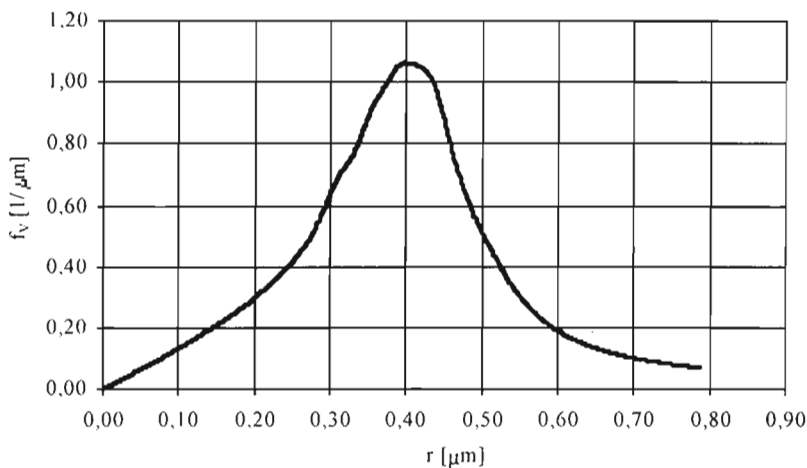
r_w – krytyczny promień kapilary, powyżej którego nie utrzymuje się menisk $[\text{m}]$.

3.2. Wyniki obliczeń

Analizując wzory (6)÷(10) można zauważyć, że wartość współczynnika przepływu wilgoci przy określonej wilgotności zależy tylko od funkcji $f_v(r_w)$

oraz – odwrotnie – rozkład objętości porów przy danym promieniu r_w zależy tylko od wartości współczynnika przepływu wilgoci β (w).

Uzyskano funkcję rozkładu objętości porów względem promieni tworzywa ceramicznego o gęstości pozornej 1750 kg/m^3 , pokazaną na rysunku 3. Przy obliczeniach przyjęto wartość $\cos \varphi = 0,16$.



Rys. 3. Rozkład objętości por w funkcji promienia wyznaczony dla próbki o gęstości pozornej 1750 kg/m^3

Z rysunku 3 wynika, że w próbce ceramicznej wśród porów biorących udział w podciąganiu kapilarnym przeważają pory wielkości $0,2 \div 0,5 \mu\text{m}$. Według [6, 7] taka porowatość jest charakterystyczna dla materiału ceramicznego przygotowanego z ilu wysokodispersyjnego.

4. Zakończenie

W pracy wykazano, że metodę obliczeniowo-doświadczalną można wykorzystywać w badaniach materiałów kapilarno-porowatych prowadzących do oceny współczynnika przepływu wilgoci i rozkładu objętości porów względem promieni. Metodę cechują następujące zalety:

- eksperyment nie wymaga specjalistycznej aparatury,
- wykorzystując tylko jedną próbkę można uzyskać dostateczną liczbę danych doświadczalnych,

- możliwe jest kilkakrotne badanie próbki, na przykład po wielokrotnym oddziaływaniu wilgoci lub ujemnych temperatur, i możliwe są obserwacje wpływu czynników na strukturę materiału, a także na charakter zmian współczynnika przepływu wilgoci.

Literatura

- [1] **Fokin K. F.:** *Stroitel'naja teplotekhnika ograždajuščih častej zdanij*, Strojizdat, Moskwa, 1973.
- [2] **Wyrwał J., Świrski J.:** *Problemy zawilgocenia przegród budowlanych*, Polska Akademia Nauk, Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej, IPPT, Warszawa, 1998.
- [3] **Afonin A. V., Nikitin V. I.:** *Wyčislenie koefficientow perenosa židkoj vlagi v kapilarno-poristyh stroitel'nyh materialah*, Vestnik Breskogo Gosudarstvennogo Tehničeskogo Universiteta, 13, 2002, s.10-15.
- [4] **Marčuk G. I.:** *Metody vyčislitel'noj matematyki*, Nauka, Moskwa, 1997.
- [5] **Dziubiński I., Świątkowski T.:** *Poradnik matematyczny*, Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa, 1985.
- [6] **Pogovoj M. I.:** *Tehnologija iskusstvennych poristych zapolnitelej i keramiki*, Strojizdat, Moskwa, 1974.
- [7] **Brylska E., Hejmo J.:** *Powstanie i właściwości „czarnego rdzenia” w ceramicznych materiałach budowlanych*, Ceramika – Polski biuletyn ceramiczny Vol.72 (w druku), Kraków, 2003.

EVALUATION OF MOISTURE TRANSFER PARAMETERS IN WALL CERAMICS MATERIALS

Summary: The method of diffusion coefficient evaluation is presented in this work. Experimental part is based on one way water capillary pulling examination. The main numerical characteristics of capillary-porous materials is a function of pore size distribution. The known function of diffusion coefficient was used to evaluate distribution curve of ceramic wall material.

Key words: wall ceramics, ceramics porosity, mathematical algorithm, diffusion coefficient

Artykuł zrealizowano w ramach współpracy nr 10/2002/2003 z Brzeskim Państwowym Uniwersytetem Technicznym, badania sfinansowano ze środków pracy statutowej S/IIB/1/02.

Michał Bołtryk, Dorota Małaszkievicz

PODSTAWY WIBRACYJNEJ TECHNOLOGII ZAGĘSZCZANIA SPOISTYCH OŚRODKÓW DROBNOZIARNISTYCH

Streszczenie. W artykule przedstawiono analizę wibracyjnego zagęszczania ośrodków drobnoziarnistych typu mieszanki betonowe, grunty spoiste i betony drobnoziarniste. Wykazano wpływ cząstek koloidalnych na tiksotropowe rozrzedzenie ośrodków drobnoziarnistych. Ponadto na podstawie teorii podobieństwa i analizy wymiarowości przedstawiono wnioski praktyczne co do doboru parametrów drgań urządzeń wibracyjnych.

Słowa kluczowe: zagęszczanie wibracyjne, tiksotropia

Zjawisko wibracji stosuje się powszechnie w wielu dziedzinach techniki: w procesie zagęszczania mieszanek betonowych i gruntów, w procesach hydrotechnicznych podczas zabijania pali i ścianek szczelnych, w intensyfikacji procesu kruszenia i domiału, a także podczas wywoływania zjawisk flokulacji, dezagregacji i dyspersyjacji cząstek stałych w procesach fizykochemicznych [1].

Mieszanki betonowe składają się z cząstek różniących się pod względem dyspersyjności: żwiru ($5\div 32,5$ mm), piasku ($0,125\div 2$ mm), części pylastych ($0,01\div 0,125$ mm), cementu ($0,005\div 0,03$ mm) oraz wody. Podstawowymi właściwościami mieszanek są: wytrzymałość strukturalna oraz lepkość.

Mieszanki betonowe półciekle i ciekłe charakteryzują się małą wytrzymałością strukturalną i nieznaczną lepkością, stąd do ich zagęszczania nie trzeba używać szczególnie złożonych urządzeń. Pod działaniem siły ciężkości lub małych sił zewnętrznych ciekle mieszanka betonowa dobrze zapełnia założony kształt formy, otacza stal zbrojeniową i wyciska zbędne powietrze.

Mieszanki gęstoplastyczne i wilgotne o niewielkiej ilości wody zarobowej (bez plastyfikatorów lub superplastyfikatorów) podczas układania w formie tworzą spulchnioną strukturę o wysokiej wytrzymałości i lepkości. Do ich zagęszczania trzeba użyć znacznej energii i często skomplikowanych i specjalistycznych urządzeń formujących. Nakłady te rekompensuje wyższa jakość uzyskanych wy-

robów oraz znaczna oszczędność cementu (przy zachowaniu wytrzymałości średniej R_{sr}) i wzrost wytrzymałości (przy zużyciu takiej samej ilości cementu na 1 m^3 betonu).

Mieszanki betonowe z uwagi na swoje reologiczne właściwości są quasi-jednorodnymi i quasi-izotropowymi ośrodkami ciągłymi. Wibracyjne zagęszczanie plastycznych mieszanek betonowych można opisać modelem reologicznym Newtona; w bardziej złożonych stanach naprężeń, podczas wibrowania trudno urabialnych mieszanek betonowych – modelami Bingham’a lub Kelvina-Voigta [1].

Model Bingham’a składa się wg drzewa reologicznego M. Reinera z połączonych ze sobą modeli: Newtona, Saint Venanta i Hooke’a. Równanie reologiczne takiego ciała przyjmuje następującą postać:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{(\sigma - \tau_o) \cdot t}{\eta_d}, \quad (1)$$

gdzie:

ε – odkształcenie postaciowe ośrodka,

E – moduł sprężystości ośrodka,

τ_o – graniczne naprężenie ścinające,

η_d – współczynnik lepkości dynamicznej,

t – czas oddziaływania naprężeń σ wywołanych obciążeniem zewnętrznym (wibracją).

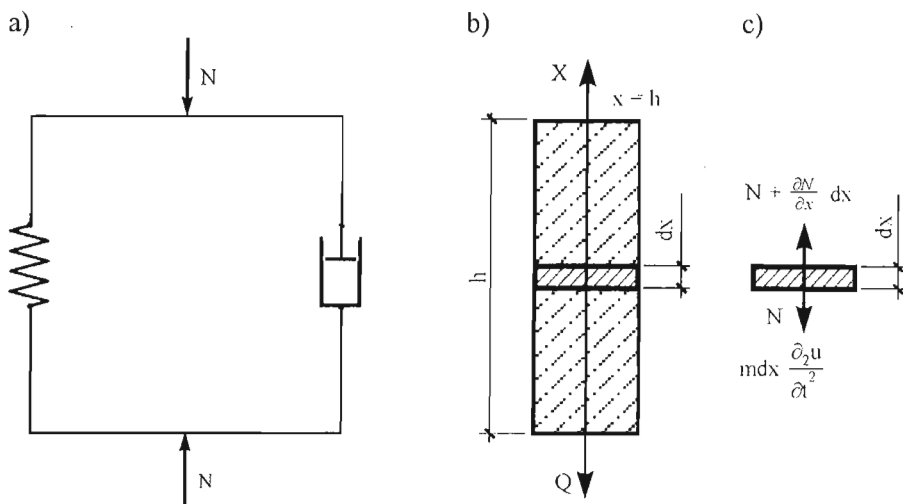
Przy początkowym naprężeniu $\sigma < \tau_o$, kiedy $\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E}$, ośrodek zachowuje się

jak ciało sprężyste Hooke’a. Dopiero kiedy $\sigma > \tau_o$, tj. dla $\varepsilon = \varepsilon_1 + \frac{(\sigma - \tau_o) \cdot t}{\eta_d}$,

ciało zaczyna płynąć.

Ciała Bingham’a, w tym zaczyny, zaprawy, mieszanki betonowe i grunty spoiste dobrej urabialności podlegają zjawisku tiksotropii. Jeżeli na przykład mieszanekę betonową poddamy wibrowaniu, to wzajemne oddziaływania jej cząsteczek ulegną osłabieniu i w ten sposób mieszanka straci chwilowo wytrzymałość strukturalną ($\tau_o \approx 0$). Zacznie się też mieszanka zachowywać jak ciężka lepka ciecz dobrze wypełniająca formę pod wpływem własnej siły ciężkości. Po zdjęciu obciążenia zewnętrznego (wibracji) mieszanka betonowa przyjmie ponownie stabilną strukturę z zachowaniem poprzednich wewnętrznych sił τ_o i η_d). Taką właściwość mieszanki betonowej można określić w przybliżeniu jako tiksotropię. Nie wszystkie mieszanki betonowe mogą być dostatecznie opisane mode-

lem Bingham. Mieszanki gęstoplastyczne i wilgotne, tj. trudnourabialne, w których zawartość powietrza przed zagęszczeniem wynosi ponad 3%, najlepiej jest opisać modelem Kelvina (Voigta) składającym się z równoległego połączenia cieczy Newtona i ciała Hooke'a (rys. 1).



Rys. 1. Schemat działania sił na mieszankę betonową podczas jej zagęszczania: a – model Kelvina (Voigta); b – schemat słupa mieszanki betonowej; c – siły działające na elementarny odcinek mieszanki betonowej podczas wibrozagęszczania

Wartość siły N , niezbędnej do komprymacji (zagęszczenia) mieszanki betonowej dla słupa mieszanki (rys. 1), wynosi:

$$N = EF\varepsilon + \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (2)$$

gdzie:

F – powierzchnia zagęszczanego słupa mieszanki,

η – współczynnik lepkości oporu na wysokości słupa mieszanki,

$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ – szybkość komprymacji.

Autorzy w celu poznania zjawisk zachodzących w procesie zagęszczania wibracyjnego wykorzystali teorię podobieństwa i analizę wymiarowości [1, 4]. Na proces zagęszczania mają wpływ następujące wielkości (k): siła N , czas θ , długość (wymiar) L . Wykorzystując dotychczasową wiedzę można stwierdzić, że

wpływ na ten proces wywierają również parametry urządzeń wibracyjnych i właściwości mieszanki betonowej: N_w – moc wibracyjnego oddziaływania wzbudnika drgań, którego wymiarowość określa się jako pochodną $[NL/\theta]$; A – amplituda drgań $[L]$; ω – częstość kątowna drgań $[1/t]$; t – czas oddziaływania wibracji $[\theta]$; σ – naprężenia powstające w słupie mieszanki podczas wibrowania $[N/L^2]$; β – liniowy współczynnik tłumienia $[1/L]$; ρ – jednostkowy ciężar mieszanki $[N\theta^2/L^4]$; τ – wytrzymałość strukturalna mieszanki $[N/L^2]$; η – lepkość mieszanki $[N\theta/L^2]$; d – średnica grubego wypełniacza $[L]$; g – przyspieszenie siły ciężkości $[L/\theta^2]$; l – graniczny wymiar strefy zagęszczania (oddziaływania wibracji) $[L]$. Na przebieg procesu zagęszczania będzie miało więc wpływ 12 czynników (m):

$$y = f(N_w, A, \omega, t, \sigma, \beta, \rho, \tau, \eta, d, g, l). \quad (3)$$

Zgodnie z twierdzeniem Buckingham'a (Buckingham's Pi Theorem) [3], które mówi: „Jeżeli istnieje jednoznaczna zależność typu $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$ pomiędzy „ m ” czynnikami, do opisania których wykorzystuje się „ k ” podstawowych wielkości, to istnieje także zależność typu $\varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{m-k}) = 0$ pomiędzy ($m - k$) bezwymiarowymi kombinacjami”. Liczba bezwymiarowych kombinacji w danym eksperymencie wyniesie: $m - k = 12 - 3 = 9$.

Podczas budowania poszczególnych bezwymiarowych kombinacji należy uwzględnić znane fizyczne i empiryczne zależności. Przykładowo, w procesie wibracyjnego zagęszczania istotne znaczenie mają różne kombinacje amplitudy i częstości: $A\omega$; $A\omega^2$; $A^2\omega^2$; $A^2\omega^3$. Powyższe fizyczne znane zależności znacznie ułatwiają tworzenie bezwymiarowych kombinacji opisujących dany proces:

$$\frac{\rho A^2 \omega^3 l^3}{N_w}; \frac{\rho A^2 \omega^3 l^3}{N_w t}; \frac{\rho A^2 \omega}{\nu}; \frac{N_w t}{l^3 \tau}; \frac{N_w t^2}{l^3 \nu}; \frac{\sigma}{\tau}; \frac{A \omega^2}{g}; \frac{A}{d}; \beta l \quad (4)$$

Korzystając ze znanych zależności występujących w procesie zagęszczania wibracyjnego mieszanek betonowych można układ kombinacji (4) zapisać w postaci funkcji:

$$\rho \left(\frac{A^2 \omega^3 l^3}{N_w}; \frac{A^2 \omega^3 l^3}{N_w t}; \frac{A^2 \omega}{\nu} \right) = f \left(\frac{N_w t}{l^3 \tau}; \frac{N_w t^2}{l^3 \nu}; \frac{\sigma}{\tau}; \frac{A \omega^2}{g}; \frac{A}{d}; \beta l \right) \quad (5)$$

Bezwymiarowość poszczególnych ilorazów i iloczynu (4) uzyskano grupując czynniki w taki sposób, aby ich jednostki wzajemnie się redukowały.

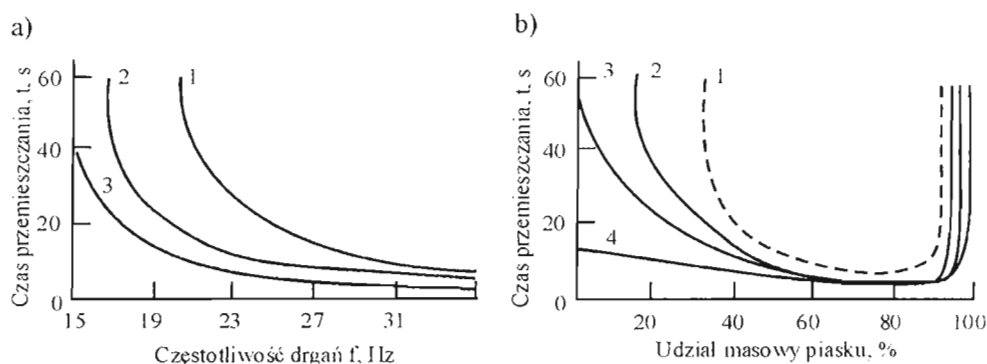
Z zależności (5) wynika kilka istotnych wniosków:

- proces wibracyjnego zagęszczania jest zależny, w sensie funkcji, od przyspieszenia drgań $A\omega^2$, a jego czas zagęszczania od jednostkowej mocy źródła drgań (N_w/l^3) i właściwości mieszanki betonowej (η i τ);
- wraz ze wzrostem średnicy grubego wypełniacza (d) należy zwiększać wartość amplitudy drgań (A);
- przy dużych wartościach τ należy zwiększać wartość siły kompresji (stosować dociążenie);
- strefa zagęszczania zależy od wartości współczynnika tłumienia (β) mieszanki;
- wraz ze zmniejszaniem się urabialności mieszanki betonowej (duże wartości η i β) należy zwiększać wartości $A\omega^2$ i $A^2\omega^2$ w ruchu drgającym wibratora.

Z uzyskanych bezwymiarowych kombinacji (4) wynika, że proces zagęszczania zależy w znacznej mierze od sił tarcia i spójności mieszanki betonowej (τ), a także od sił lepkiego oporu (η). Jakość wibracyjnego zagęszczania będzie: po pierwsze – od zmniejszenia odległości pomiędzy ziarnami kruszywa grubego i drobnego, dla których istotne jest przewyższenie sił tarcia i spójności w zaczynie cementowym; po drugie – zagęszczanie to równomierne rozmieszczenie zaczynu cementowego w ośrodku. Bezwarunkowo te dwa zjawiska tego samego procesu należy rozpatrywać kompleksowo. Jednakże w wypadku określonych właściwości mieszanki betonowej proces wibrowania będzie uzależniony od charakteru i wielkości parametrów źródła drgań. W wypadku dużych przemieszczeń (podwójna wartość amplitudy drgań) zachodzą względnie duże przemieszczenia cząstek ośrodka oraz intensywniej realizuje się proces zmniejszenia sił tarcia wewnętrznego – oporu plastycznego, z którym związane jest tiksotropowe upłynnienie mieszanki betonowej. W wypadku dużych częstotliwości ($f > 50$ Hz) i małych przemieszczeń, dzięki szybszemu tiksotropowemu upłynnieniu zaczynu cementowego, intensywniej maleją siły lepkiego oporu, lecz tylko w wypadku plastycznych, dobrze urabialnych mieszanek betonowych. Fizyka procesu formowania wibracyjnego mieszanek betonowych została dokładnie opisana między innymi w pracach [1, 2, 4].

W wypadku mieszanek drobnoziarnistych (piaskobeton, beton komórkowy, spoiste gliny itp.) decydujące znaczenie ma efekt tiksotropii w trakcie ich wibracyjnego zagęszczania. W badaniach własnych [2] określono wpływ zawartości cząstek koloidalnych na właściwości tiksotropowe mieszanin. Glinę piaszczystą

(frakcji od 0,001 do 0,31 mm) mieszano z piaskiem, tworząc mieszanę o stałej wartości $\tau = 0,42$ kPa. Zawartość gliny wynosiła około 5÷7%. Zawartość piasku zmieniano od 0 do 100% w stosunku wagowym. Jak wynika z uzyskanych danych, przedstawionych na rysunku 2b, zawartość drobnych cząsteczek w ilości 5÷7% zapewnia wysoki stopień tiksotropowego rozrzedzenia. Przez analogię można wywnioskować, że zawartość 250÷300 kg cementu w 1 m³ (2400 kg) mieszanki betonowej pozwoli uzyskać wysokie tiksotropowe upłynnienie tej mieszanki. W celu uzyskania dobrych warunków zagęszczenia spoiwystych ośrodków dyspersyjnych należy postępować tak, by w ich składzie było około 5% cząstek koloidalnych.



Rys. 2. Zależność czasu przemieszczania kulki w mieszance gliniano-piaskowej badana w viskozymetrze kulkowym od parametrów drgań; a – częstotliwość drgań; b – masowy udział piasku; 1÷4 amplituda drgań odpowiednio 0,75; 0,9; 1,0 i 2,7 mm

Należałoby przeprowadzić badania w zakresie jednorodności zagęszczenia na wysokości słupa mieszanek drobnoziarnistych typu betonu komórkowego z uwzględnieniem ich napowietrzenia. W wypadku pozostałych mieszanek drobnoziarnistych należy przeprowadzić badania optymalizacyjne dotyczące skuteczności niskich i średnich częstotliwości drgań o określonej wartości przyspieszeń.

Literatura

- [1] **Bołtryk M.:** *Rola wibracji w kształtowaniu właściwości cementowych ośrodków dyspersyjnych*. PAN KILiW IPPT. Studia z zakresu inżynierii. Rozprawy Naukowe Nr 28. Warszawa-Białystok, 1999.

- [2] **Bołtryk M., Gusiew B. W.:** *Fizičeskije osnovy vibracionnoj technologii uplotnenija silikatnych mass.* Promyšlennoje i Graždanskoje Stroitelstvo 2/2001.
- [3] **Corrsin S.:** *Simple Geometrical Proof of Buckingham's Pi Theorem,* Am. J. Phys., Nr 19, 180 (1951).
- [4] **Gusiew B. W., Zazimko W. G.:** *Wibracionnaja tehnologija betona.* Kiev. Budvelnik, 1991.

BASIS OF TECHNOLOGY OF VIBRATORY CONSOLIDATION OF FINE-GRAINED COHESIVE MEDIUMS

Summary: Analysis of vibratory consolidation of fine-grained mediums like concrete mix, cohesive soil and fine-grained concrete is presented in this paper. The influence of colloidal particles upon thixotropic dilution of cohesive fine-grained mediums has been demonstrated. Practical conclusions for selection of parameters of vibratory devices are given.

Key words: vibratory consolidation, thixotropy

Artykuł zrealizowano w ramach pracy badawczej statutowej S/IIB/1/2002.

Michał Bołtryk, Włodzimierz Jezierski, Walery Jezierski,
Dzienis Krolewieckij

TECHNOLOGIA PIANOCERAMICZNYCH WYROBÓW Z DOMIESZKAMI KOAGULACYJNYMI

Streszczenie: W pracy przedstawiono wieloetapową technologię wytwarzania budowlanych wyrobów pianoceramicznych w przedziale gęstości od 320 do 880 kg/m³ i wytrzymałości na ściskanie od 0,8 do 11 MPa z domieszkami koagulacyjnymi. Otrzymany według opracowanej technologii materiał ceramiczny, poza dobrą wytrzymałością na ściskanie, charakteryzuje się wysoką ciepłozolacyjnością, obniżoną wilgotnością sorcyjną i podatnością na obróbkę mechaniczną.

Słowa kluczowe: wyroby ceramiczne, domieszki koagualcyjne, solwatacja i napowietrzanie

1. Wstęp

W ostatnim pięćdziesięcioleciu w wielu krajach wdrożono dużo rozwiązań technologicznych w procesie produkcyjnym wyrobów ceramicznych o obniżonej gęstości. Najbardziej znanymi są:

- technologia produkcji lekkiej cegły ceramicznej formowanej z mas plastycznych z dodatkiem wypełniaczy organicznych,
- technologia produkcji poryzowanych wyrobów metodą wysokotemperaturowego spęczniania gliny,
- technologia produkcji pianoceramicznych wyrobów metodą napowietrzania surowca.

Każda z powyższych technologii stosowana jest w jednym zasadniczym celu – dla zwiększenia właściwości ciepłozolacyjnych wyrobów ściennych. W ostatnich latach dużą popularnością cieszą się wyroby ścienne z lukami powstałymi w wyniku wypalania organicznych dodatków, zwłaszcza trocin. Ta technologia nie wymaga zasadniczo nowego oprzyrządowania linii produkcyjnej w warunkach istniejących wytwórni produkujących zwykłą ceramikę budowlaną. Ponadto przy zastosowaniu tej technologii uzyskuje się częściowe rozwiązanie takich proble-

mów jak oszczędność energii cieplnej, zmniejszenie gęstości pozornej wyrobów, zamiana wysokojakościowych glin wysokokalorycznymi odpadami, utylizacja tych odpadów i inne. Jednakże w wypadku wyrobów o gęstości poniżej 1000 kg/m³ przedstawiona technologia stwarza wiele problemów, a wyroby cechują się niższą jakością.

Inną technologią, która znalazła niewielkie zastosowanie w produkcji, jest technologia spęczniania cząsteczek gliny w różnorodnych formach. Zasadniczymi wadami tej technologii są bardzo wysokie wymagania w stosunku do surowca oraz brak możliwości określenia ostatecznego kształtu wyrobu po zakończeniu operacji spęczniania surowca.

W wielu krajach prowadzone są badania w zakresie ceramiki poryzowanej przez napowietrzanie glinianej gęstwy. Napowietrzona gęstwa w stanie płynnym rozlewana jest do form, przy czym porowatą strukturę materiału stabilizuje się w temperaturze od 50 do 200°C, a następnie wyroby poddaje się wypalaniu bez form. W procesie napowietrzania gęstwy wykorzystuje się metodę poryzacji lub rzadziej metodę aeracji. Jednym ze sposobów napowietrzania gęstwy jest równoczesne dozowanie do homogenizatora wody i środka gazotwórczego, będącego rozdrobnioną mieszaniną określonych komponentów. Do napowietrzanej gęstwy wprowadza się również dodatek stabilizujący w postaci gipsu. Następnie tak przygotowaną napowietrzoną gęstwę rozlewa się do form. Wyroby suszy się w dwóch etapach. Najpierw w formach, a po uzyskaniu określonej wytrzymałości strukturalnej, na podkładach form – ze zdjętymi bokami. Po wysuszeniu wyroby poddaje się wypalaniu.

W wypadku aeracji zmieloną glinę wprowadza się do wodnego roztworu elektrolitów. Do tak przygotowanego układu dodaje się środki pianotwórcze i wszystko razem poddaje się homogenizacji do momentu uzyskania określonej porowatości. Następnie dodaje się gips i, po wymieszaniu, gęstwę rozlewa się do form.

Należy zauważyć, że stabilizację napowietrzanej gęstwy, praktycznie w każdej z tych technologii, uzyskuje się poprzez zastosowanie gipsu w ilości od 5 do 20% w stosunku do masy suchych składników. Obecnie takie technologie nie mogą być stosowane z uwagi na skażenie atmosfery tlenkami siarki, powstającymi w wyniku zastosowania do wyrobów ceramicznych gipsu. Z kolei wyeliminowanie z gęstwy gipsu powoduje, że technologia poryzacji staje się bardzo długa i kosztowna.

W takiej sytuacji autorzy podjęli próbę opracowania technologii poryzowanej ceramiki bez stosowania gipsu jako dodatku stabilizującego strukturę porów.

2. Badania własne

Krzemiany stosowane do produkcji wyrobów ceramicznych mają skład polimorficzny. Minerale ilaste o budowie warstwowej składają się głównie z montomorylonitu, kaolinitu, dykitu, illitu, haloizytu i nakrytu. Uwzględniając fakt, że montomorylonit jest najpowszechniej występującym minerałem pośród krzemianów, badania koagulacji i solwatacji przeprowadzono właśnie na cząsteczkach gliny montomorylonitowej. Po rozpoznaniu zjawisk zachodzących w procesie formowania porowatej struktury pianoceramicznych wyrobów można było rozpocząć badania na glinach o składzie polimorficznym.

Jako czystą próbkę bazową wybrano glinę askanitową. W trakcie badań stwierdzono, że zmieniając pH ośrodka oraz wprowadzając odpowiednie dodatki, można w szerokim przedziale sterować procesem koagulacji montomorylonitu, przy czym uzyskana w ten sposób koagulacyjna struktura zachowuje swoje właściwości przez kilka miesięcy. Trwałość tej struktury jest proporcjonalna do stopnia koagulacji wyjściowej zawiesiny.

W naszych eksperymentach maksymalną stabilność struktury koagulacyjnej osiągnięto dodając wodorotlenek wapnia; współczynnik spęczniania wynosił wtedy 3,4.

Analogiczne doświadczenia przeprowadzono z innymi wzorcowymi glinami, zawierającymi tyszczki i kaolinit. Powyższe minerale ilaste w określonych warunkach również pozwalają uzyskiwać przestrzenną koagulacyjną strukturę, tj. strukturę o różnym stopniu trwałości. Sterowanie procesem koagulacji w glinach zawierającym w swoim składzie kaolinit i/lub mikę okazało się z technologicznego punktu widzenia, bardziej proste i stabilne niż sterowanie procesem koagulacji gliny zawierającej czysty montomorylonit.

W wyniku uzyskania pewnych doświadczeń w koagulacji cząstek (pojedynczych) ilastych minerałów (montomorylonitu, miki i kaolinitu) rozpoczęto podobne badania z poliminerálnymi glinami. Proces formowania koagulacyjnych (solvatowanych do optymalnego stopnia) struktur zachodził znacznie trudniej w poliminerálnych glinach, lecz zjawiska były podobne jak i w wypadku solwatacji monomorficznych glin.

Do badań nad uzyskaniem pianoceramicznych wyrobów wybrano glinę ze złoża Grudinowskoje, znajdującego się na terytorium Białorusi. Gлина z tego złoża charakteryzuje się łatwością dyspersji z jednoczesnym powstawaniem stabilnej suspensji. Ponadto glina ta stosowana jest w Obolskim Zakładzie Ceramiki Budowlanej, który wytwarza pianoceramiczne wyroby ścienne.

Wybrana glina cechuje się dużą ilością drobnych frakcji. Głównymi minerałami ilastymi są: kaolinit, montomorlonit i hydrolysczyk (illit). Zasadniczymi zaś komponentami złoża są: minerały ilaste – 65%, substancja piaskowo-aleu-rytowa – 12%, domieszki – 23%. Część ilasta zespolona jest piaskowo-aleu-rytowym materiałem; typ spoiwa cementującego-bazaltowe narosty. Jako składniki występują również węglany – 12%, opale – 6%, sole – 4% i nieznaczna część substancji organicznych-części procenta. Mogą też występować chloryty, drobne cząsteczki kwarcu, skalenia i miki. Wyznaczona powierzchnia właściwa gliny wynosiła 54 m²/g.

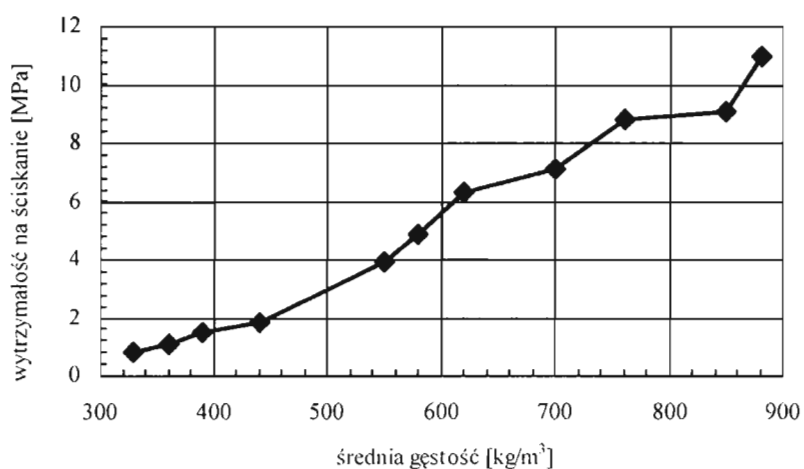
Produkcja pianoceramicznego materiału składa się z kilku etapów, w każdym z nich należy zapewnić określone warunki charakteryzujące się określonym składem mieszaniny i parametrami technologicznymi.

Na pierwszym etapie nieodzowne jest zapewnienie właściwego procesu dyspersji wyjściowych agregatów gliny, pozwalającego uzyskać stabilną zawiesinę o określonym stopniu ciekłości. W tym celu wykorzystano jako dodatki węglan sodu, szkło wodne, disiarczan(VI) sodu i aktywator węglanoługujący (WŁA). W trakcie uzyskiwania stabilnej suspensji (zawiesiny) okazało się, że powyższe dodatki oddziaływały według następującej skuteczności: WŁA > disiarczan(VI) sodu > szkło wodne + soda. Tym niemniej powyższe dodatki oddziaływały na zawiesinę gliny różnorodnie. Przykładowo WŁA pozwala bardzo szybko uzyskać stabilną zawiesinę, jednakże stopień ciekłości tej zawiesiny jest niższy niż przy wykorzystaniu pozostałych dodatków. Najkorzystniejsze właściwości zawiesiny uzyskano w wypadku zastosowania disiarczanu(VI) sodu.

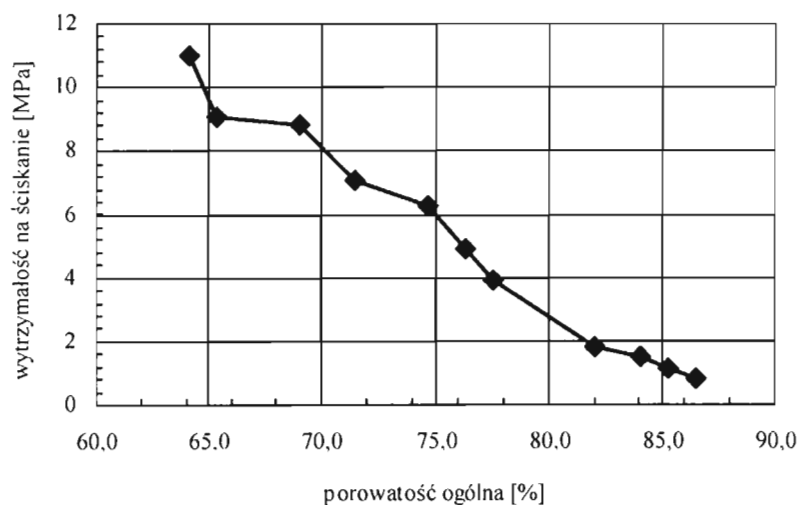
W drugim etapie należało uzyskać określoną porowatość zawiesiny. Stopień poryzacji suspensji określano rodzajem i ilością wprowadzonego pianotwórczego dodatku, konsystencją (rozplywem) mieszaniny i parametrami napowietrzania. Proces napowietrzania prowadzono w mieszarce szybkoobrotowej.

Na kolejnym etapie należało intensyfikować proces koagulacji z jednoczesnym utworzeniem stabilnej przestrzennej struktury suspensji. Proces ten powinien odbywać się po zalaniu gęstwy do form i po wprowadzeniu odpowiedniego do niej dodatku.

Wstępne badania w tym zakresie wykazały, że najlepsze efekty koagulacji pozwalają uzyskać dodatki zawierające w swoim składzie wapń. W postaci takiego dodatku zastosowano cement w ilości 4÷5% w stosunku do suchej masy surowca. Zastosowanie cementu jako dodatku pozwoliło zarówno uzyskać zadowalającą prędkość koagulacji jak i zwiększyć wytrzymałość na ściskanie wyrobów po wysuszeniu. Wzrost wytrzymałości następuje przy tym już w pierwszych 20-60 minutach, co pozwala na szybsze zdjęcie boków form oraz przyspieszenie procesu suszenia wyrobów.



Rys. 1. Zależność wytrzymałości na ściskanie, MPa, próbek pianoceramicznych wyrobów od średniej gęstości [kg/m³]



Rys. 2. Zależność wytrzymałości na ściskanie, MPa pianoceramicznych wyrobów od porowatości ogólnej [%]

Proces suszenia wyrobów pianoceramicznych staje się bardziej złożony (szczególnie jego początek) niż proces suszenia tradycyjnych materiałów ceramicznych. Wyroby napowietrzone mają niższy stopień nagrzewu (drobne pęcherzyki gazu są złym przewodnikiem ciepła). Jednakże, w miarę odparowywania wilgoci i nagrzewu gazów w porach, proces suszenia można później znacznie intensyfikować.

Z kolei wypalanie pianoceramicznych wyrobów można znacznie przyspieszyć bez obawy mikrospekkań, gdyż z powodu dużej ilości mikroporów nie powstają problemy pęknięcia.

Według opisanej technologii otrzymano wyroby pianoceramiczne o szerokim zakresie zmiany średniej gęstości oraz porowatości ogólnej. Na rysunkach 1 i 2 pokazano zależności wytrzymałości na ściskanie tych wyrobów od średniej gęstości i porowatości ogólnej.

3. Podsumowanie

W wyniku przeprowadzonych badań wykazano, że w wypadku zastosowania określonej technologii i zmian składu gęstwy można regulować gęstość pozorną wyrobów pianoceramicznych w przedziale od 320 do 880 kg/m³. Wytrzymałość na ściskanie zmienia się przy tym od 0,8 do 11 MPa.

Otrzymany według przedłożonej technologii pianoceramiczny materiał, charakteryzuje się poza dostateczną wytrzymałością na ściskanie, obniżoną wilgotnością sorbcyjną, wysoką ciepłozolacyjnością. Można go ponadto łatwo obrabiać mechanicznie (poprzez wbijanie gwoździ, piłowanie, frezowanie itp.).

UPON THE TECHNOLOGY OF FOAM-CERAMIC GOODS

Summary: Results of the investigation upon the foam-ceramic heat-effective materials are presented. It has been shown that application of a clayey substance coagulation process during formation of a porous structure permits to obtain goods of high strength, give up gypsum and significantly shorten the time period when goods are inside moulds. The foam ceramic material obtained revealed a wide range of characteristics: it's average density was from 320 up to 880 kg/m³; the limit strength under compression was from 0,8 up to 11,0 MPa.

Key words: foam – ceramic, substance coagulation, during formation, porous structure

Artykuł zrealizowano w ramach prac statutowych: S/IIB/1/2002, S/IIB/5/2002.

Tadeusz Chyży, Janusz Krentowski, Rościław Tribiło

PROCESY WYBUCHU GAZU I AWARIE ZBIORNIKÓW OCZYSZCZALNI ŚCIEKÓW

Streszczenie: Autorzy opublikowali kryteria i wyniki analiz umożliwiające badanie przyczyn i skutków wybuchu gazu w zbiornikach zamkniętych. Treść pracy odniesiono do komór oczyszczalni ścieków, z których pozyskiwany gaz wykorzystuje się jako medium w procesach grzewczych. Publikację ilustrują przykłady skutków wybuchów gazu mających miejsce w wielu badanych w ostatnich kilku latach obiektów zbudowanych w rozmaitych kompleksach konglomeracji ekologicznych.

Słowa kluczowe: zbiornik, wybuch, gaz, ciśnienie, zapłon, zniszczenie

1. Wstęp

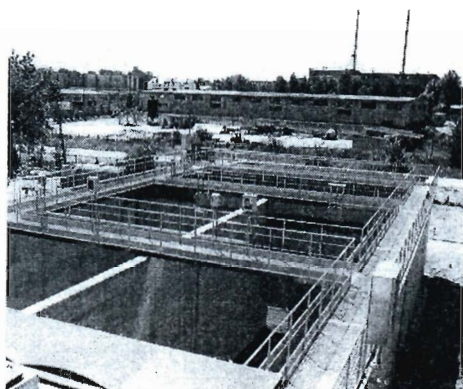
Gaz ziemny jest obecnie w Polsce jednym z tańszych mediów energetycznych, wykorzystywanych zarówno przez przemysł jak i gospodarstwa domowe. W perspektywie pierwszej dekady XXI wieku planuje się dalsze zwiększanie jego zużycia, mając na uwadze długoterminowe prognozy gospodarcze. Powodowane jest to wieloma czynnikami. Do najważniejszych należy zaliczyć niski koszt energetycznej jednostki przeliczeniowej. Gaz ziemny, jako efektywne medium, ma tę wadę, że w niewłaściwych warunkach użytkowania może powodować zagrożenie dla życia ludzkiego, oraz destrukcję konstrukcji inżynierskich, ponieważ jest podatny na zjawiska stymulujące procesy wybuchu.

W publikacji autorzy prezentują zjawiska wybuchów gazu w przestrzeniach zamkniętych, w których ciśnienie wybuchu i dynamika procesu stanowią o efektach w zakresie zapewnienia warunków eksploatacji tego typu zbiorników i destrukcyjnych skutków w eksploatowanych i badanych obiektach przemysłowych.

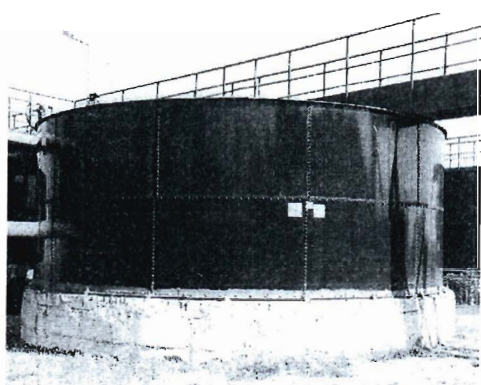
W komorach fermentacyjnych oczyszczalni ścieków, kształtowanych z betonu zbrojonego w formie zbiorników walcowych, biogaz wydzielany jest jako naturalny produkt procesów chemicznych. W zbiornikach otwartych, kształtowanych zarówno z żelbetu jak z elementów stalowych biogaz staje się składnikiem

makrosfery, a następnie atmosfery. Procesy awarii zbiorników otwartych nie są konsekwencją wybuchu, ale efektywność wykorzystania zbiorników jest mniejsza. Nowoczesne technologie przewidują odzyskiwanie medium w stadium fermentacji. Przykłady kształtowania zbiorników otwartych ilustruje rysunek 1.

a)



b)



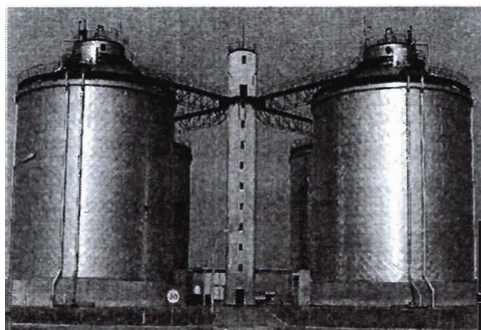
Rys. 1. Komory fermentacyjne: a) żelbetowe, b) stalowe, z których w procesie technologicznym nie przewidziano pozyskiwania biogazu

Szczególnie przydatny jest biogaz w miejscowościach niezasilanych centralnie gazem ziemnym. Taki biogaz, przeznaczony przeważnie dla celów grzewczych, magazynowany jest w zbiornikach, a następnie kierowany do sieci przemysłowej. Przy mniejszej wydajności procesów fermentacyjnych i małym zużyciu gaz gromadzi się w górnej części zbiornika, skąd przez system zabezpieczeń kierowany jest do eksploatacji. Ilustracją sposobu kształtowania komór fermentacyjnych, realizowanych w formie masywnych grubościennych żelbetowych powłok walcowych zamkniętych powłokami stożkowymi jest rysunek 2a.

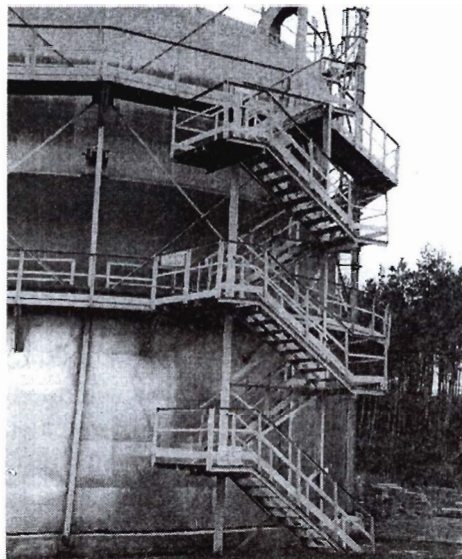
Typowy przekrój takiego zbiornika ilustruje rysunek 3. Ze względu na procesy zamarzania fermentujących ścieków zewnętrzne powierzchnie zbiorników są przeważnie ocieplane i trwale zabezpieczone blachami odpornymi na korozję chemiczną.

Przykład stalowego zamkniętego zbiornika magazynującego wyłącznie gaz zamieszczono na rysunku 2b. Zbiornik taki to przeważnie obiekt stalowy z ruchomymi powłokami górnymi, przystosowanymi do zmian objętości medium. Zbiorniki magazynowe nie wymagają docieplania.

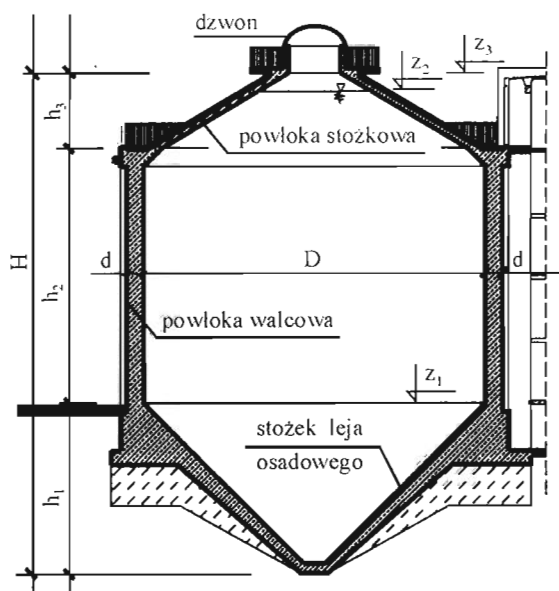
a)



b)



Rys. 2. a) Bateria docieplonych żelbetowych zbiorników fermentacyjnych, b) zbiornik magazynowy biogazu w stadium zaawansowanych procesów eksploatacyjnych

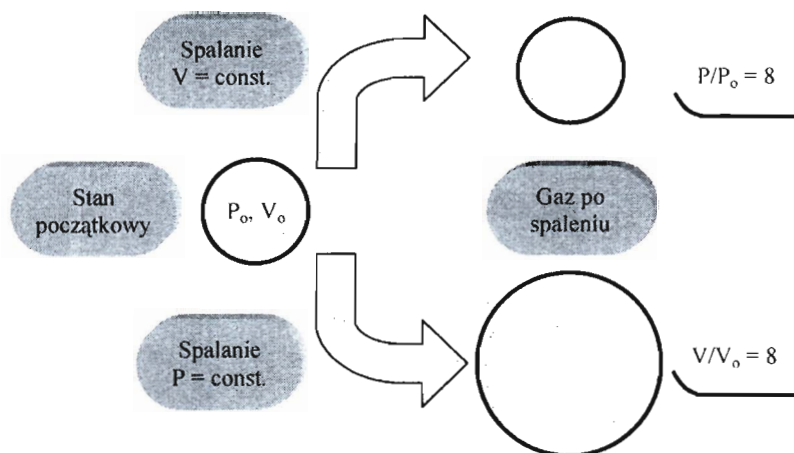


Rys. 3. Typowy przekrój zbiornika żelbetowego komory fermentacyjnej

W pracy autorzy prezentują metody badań i oceny stanu bezpieczeństwa obiektów żelbetowych, kształtowanych jako przemysłowe obiekty trwałe, których okres eksploatacji trwa nie krócej niż 50 lat. Zbiorniki stalowe, kształtowane z cienkich arkuszy blach poszycia mocowanych do elementów szkieletu są zazwyczaj wymieniane stosownie do szybkości procesów korozyjnych. Czynnikiem decydującym są wyniki okresowych kontroli ubytków grubości poszycia, jakości połączeń spawanych i stanu powłok malarskich.

2. Ciśnienie i parametry wybuchu w zbiornikach zamkniętych

Ciśnienie wybuchu i charakterystyka dynamiczna zjawiska stanowią o energii destrukcji. Zgodnie z prawami termodynamiki gazów, ich spalanie może odbywać się w przedziale między dwoma stanami brzegowymi: spalaniem przy stałej objętości lub spalaniem przy stałym ciśnieniu $P = \text{const.}$ W obu tych stanach charakterystyki procesów pokazane na rysunku 4, nie są jednakowe.

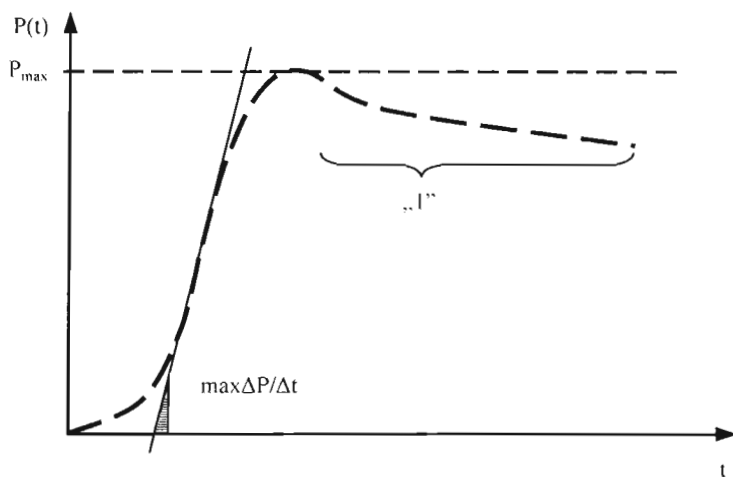


Rys. 4. Warunki brzegowe procesu spalania metanu

Dla większości gazów palnych, w tym także metanu, objętość produktów spalania jest około 8 razy większa niż objętość początkowa. W zamkniętych zbiornikach powoduje to równoważny wzrost ciśnienia P . Zestawiono wyniki badań [1] charakteryzujące przyrost objętości gazów wskutek ich spalania w stężeniu stechiometrycznym, w temperaturze 25°C i przy ciśnieniu początkowym 1.013 bar (1 at):

- wodór $P = 8,15$ bar, $V/V_o = 6,89$;
- etylen $P = 9,51$ bar, $V/V_o = 8,06$;
- propan $P = 9,44$ bar, $V/V_o = 7,98$;
- metan $P = 8,94$ bar, $V/V_o = 7,72$.

Parametry wodoru, etylenu i propanu zamieszczono dla celów porównawczych. Istotna dla badanych procesów jest funkcja ciśnienia $P(t)$. Na rysunku 5 pokazano taką funkcję dla zbiorników zamkniętych, które są przedmiotem publikacji.



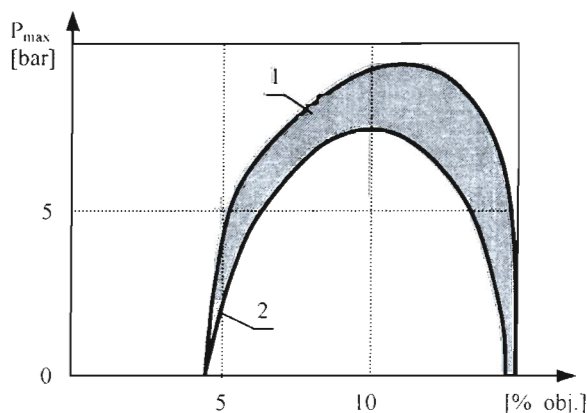
Rys. 5. Charakterystyka ciśnienia $P(t)$ w procesie wybuchu gazu przy stałej objętości: „l” – funkcja stygnięcia produktów spalania

Stwierdzono, że metan, podobnie jak większość gazów palnych i palnych par cieczy w stężeniu stechiometrycznym, zapalony w przestrzeni zamkniętej, wytwarza produkty spalania, powodując wzrost ciśnienia P_{max} do około 7÷8 barów.

Wartości funkcji $P(t)$ mogą być modyfikowane przez następujące parametry:

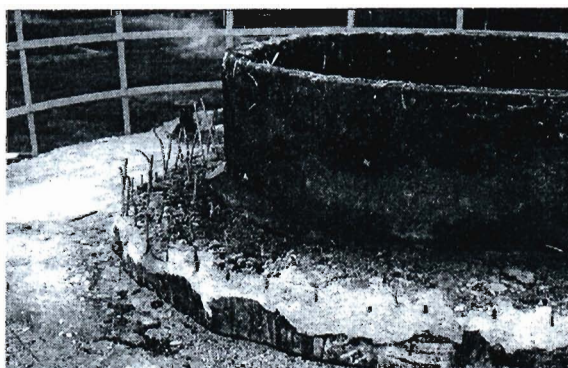
- turbulencja mieszanki przed zapłonem,
- ciśnienie początkowe P_o ,
- stężenie mieszanki i procent wypełnienia przestrzeni,
- geometria i aranżacja przestrzeni,
- elementy odprowadzające – wentyle.

Procesy modyfikacji decydują często o bezpieczeństwie lub stopniu rozprzestrzenienia się awarii lub katastrofy.



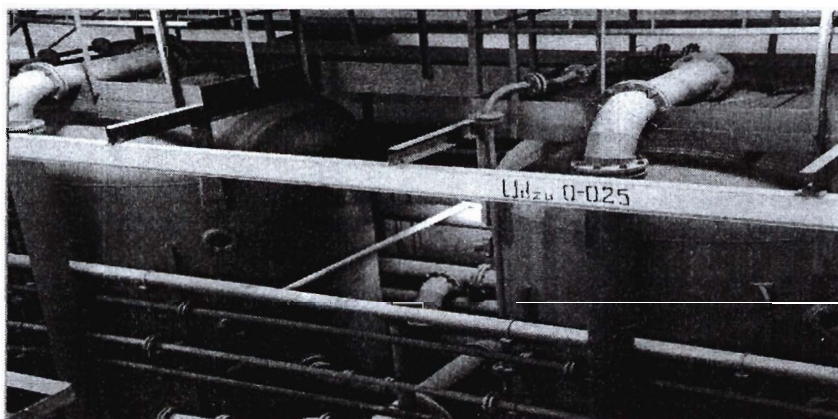
Rys. 6. Wpływ turbulencji na wartość ciśnienia maksymalnego $P_{\max}$ dla metanu: 1 – zapłon przy wysokiej turbulencji, 2 – zapłon przy zerowej turbulencji

Wpływ turbulencji na wartość ciśnienia maksymalnego dla mieszanki metanu z powietrzem pokazano na rysunku 6 – energia zapłonu $E = 10 \text{ J}$, [2]. Analiza rezultatów wskazuje na to, że wpływ turbulencji na modyfikację $P_{\max}$ w procesach praktycznych skutkuje niewielkimi przyrostami. Dominujący wpływ ma natomiast ciśnienie początkowe P_0 mieszanki nie zapalanej. Potwierdzają to badania, które uzyskali autorzy. W procesie prognozowania badań lub projektowania komór o potrzebie ekspozycji czynnika P_0 powinny przekonać ilustracje zamieszczone na rysunku 7.



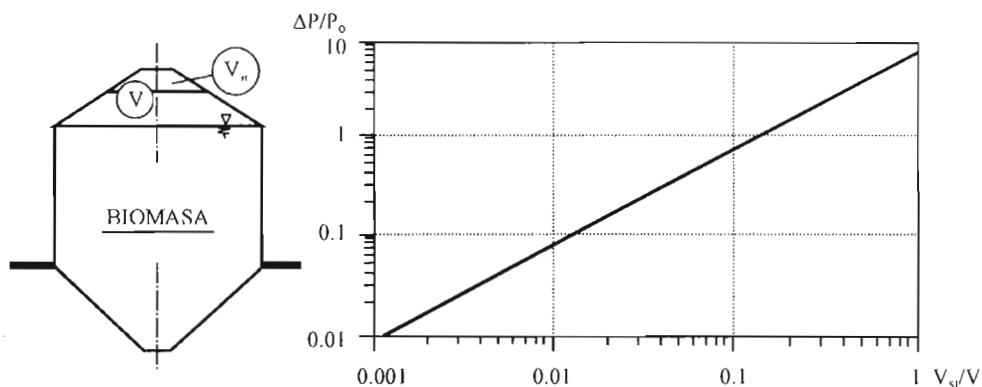
Rys. 7. Zewnętrzny fragment żelbetowej konstrukcji „latarni” i „dzwonu” zniszczony całkowicie bez możliwości napraw, pod wpływem wstępnego sprężenia metanu

Zwiększenie obszaru katastrofy może mieć miejsce w sytuacji zbiorników połączonych [11]. Fakt ten nie był przedmiotem analizy. Autorzy uczestniczyli w procesach napraw zbiorników łączonych w system, na przykład takich jak pokazano na rysunku 8.



Rys. 8. Przykład kształtowania technologicznego zamkniętych zbiorników gazów, szczególnie podatnych na procesy rozprzestrzeniania się strefy zagrożenia

Część stożka powłoki z systemem urządzeń technologicznych kontroli przepływu nazywana dzwonem, wypełniona jest metanem. Na rysunku 9 zilustrowano przyrost wartości ciśnienia stosownie do stopnia wypełnienia V_{st}/V , gdzie V jest objętością komory gazowej, a V_{st} określa objętość gazu w stężeniu stechiometrycznym. Skutki przyrostu ciśnienia ΔP ilustruje rysunek 9.

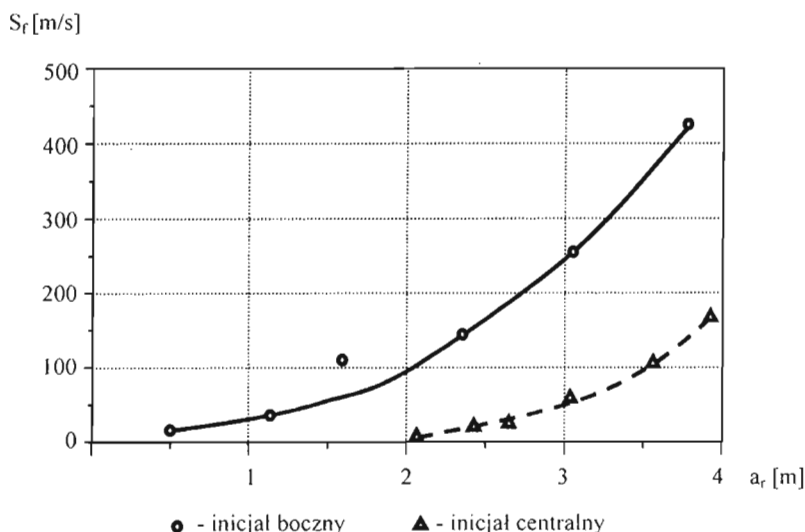


Rys. 9. Przyrost ciśnienia ΔP w zależności od stanu wypełnienia zbiornika

3. Analiza mechaniki wybuchu w zbiornikach zamkniętych

Określenie maksymalnego ciśnienia wybuchu $P_{\max}$ w zbiornikach zamkniętych jest sprawą złożoną, gdyż należy uwzględnić:

- stężenie gazu,
- turbulizację procesu spalania,
- lokalizację i energię zapłonu,
- mechanizm spalania mieszanki w zbiorniku.



Rys. 10. Wpływ lokalizacji inicjału na prędkość płomienia S_f ; a_r – odległość strefy zapłonu od ściany zbiornika

Na podstawie informacji świadków zdarzenia, autorzy publikacji określali niekiedy lokalizację i energię inicjału zapłonowego. Ustalono na przykład, że bezpośrednią przyczyną powstania katastrofy przekroczenia był przypadkowy zapłon w strefie dzwonu rewizyjnego zbiornika fermentacyjnego. Moc energetyczna inicjału spowodowana iskrzeniem była mała w stosunku do objętości V części zbiornika wypełnionej gazem i w dalszej analizie wpływ energii inicjału zapłonowego na wartość ciśnienia wybuchu pominięto. Króciec rewizyjny i zawór bezpieczeństwa był zlokalizowany centralnie. Funkcję lokalizacji miejsca zapłonu i prędkość płomienia pokazano na rysunku 10. Prędkość spalania zapłonu bocznego może być wielokrotnie większa w stosunku do zapłonu centralnego, co

zwiększa efekt dynamiki wybuchu. Na osi odciętych, rysunek 10, zaznaczona jest odległość strefy zapłonu od ściany zbiornika. Zbadane i określone w opisany sposób uwarunkowania ograniczyły zniszczenia do strefy dzwonu i strefy wieńca monolityzującego powłoki: stożkową i walcową. Stan degradacji tej strefy ilustruje rysunek 11.



Rys. 11. Stan degradacji wieńca w strefie połączenia powłok: stożkowej i walcowej

Dynamika wybuchu charakteryzowana jest prędkością przyrostu ciśnienia w czasie i interpretowana jako gradient przyrostu ciśnienia dP/dt . Wartość maksymalną można wyznaczyć z prawa sześciennego:

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_{\max} \cdot V^{1/3} = K_g = \text{const}, \quad (3.1)$$

gdzie:

K_g – stała gazowa,

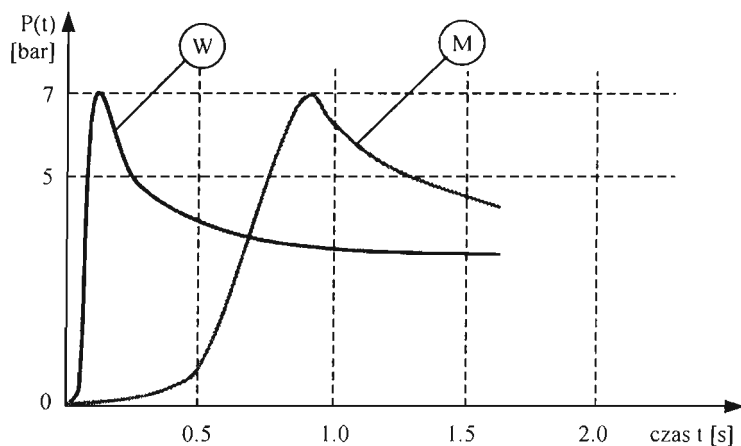
V – objętość komory gazowej.

Stała dla metanu wynosi $K_g = 55 \text{ bar} \cdot \text{m/s} = 5500 \text{ kPa} \cdot \text{m/s}$.

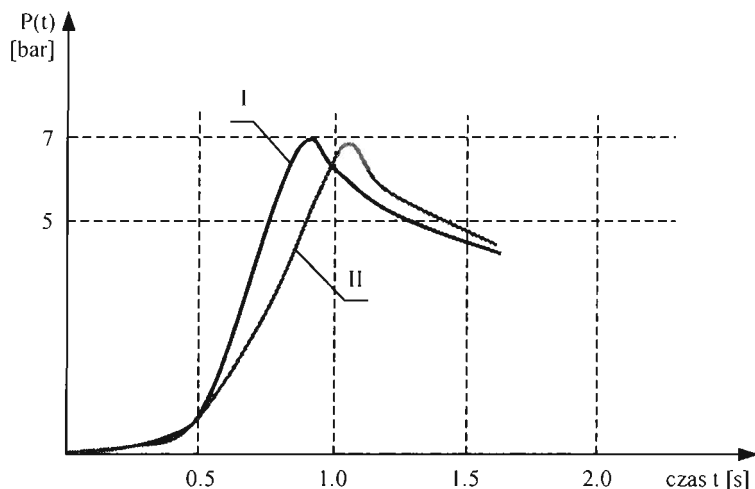
Prawo (3.1) definiuje największą chwilową bezwzględną wartość pochodnej ciśnienia wybuchu gazu w stężeniu stechiometrycznym. Wpływ objętości zbiornika V na wzrost ciśnienia wybuchu opracowano na podstawie pracy [2] i wykorzystano do celów analizy procesów w zbiornikach biogazu.

Wpływ stałej K_g metanu w odniesieniu do stałej wodoru $K_g = 55000 \text{ kPa} \cdot \text{m/s}$ ilustrują krzywe na rysunku 12, gdzie mimo zróżnicowanych wartości K_g uży-

skuje się zbliżone wartości ciśnienia $P(t)$. Efekt ten jest szczególnie ważny dla wiotkich zbiorników metanu, gdy w czasie $t < 1$ s można uzyskać lokalne efekty „wentyli”, stąd zakres katastrofy i przyszłych napraw może okazać się mniejszy od spodziewanego.



Rys. 12. Charakterystyki czasowe wybuchu wodoru i metanu



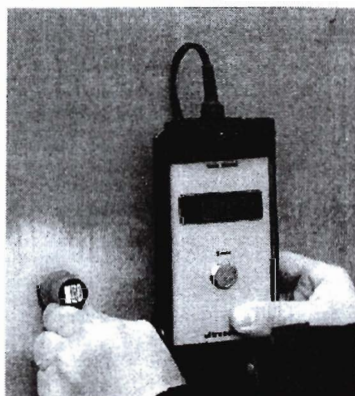
Rys. 13. Funkcja wybuchu metanu jako efekt lokalizacji inicjału zapłonowego

Funkcja zmian ciśnienia przy decentralizacji miejsca inicjału zapłonowego i wpływ na proces destrukcji uwzględniono na rysunku 13. Przedstawiono wyniki pomiarów dla wybuchu inicjowanego zapłonem centralnym oraz zapłonem zlokalizowanym przy ścianie zbiornika. Widoczne jest, że najwyższy gradient przyrostu ciśnienia nastąpi przy inicjale zlokalizowanym w bezpośrednim kontakcie z poboczną walca.

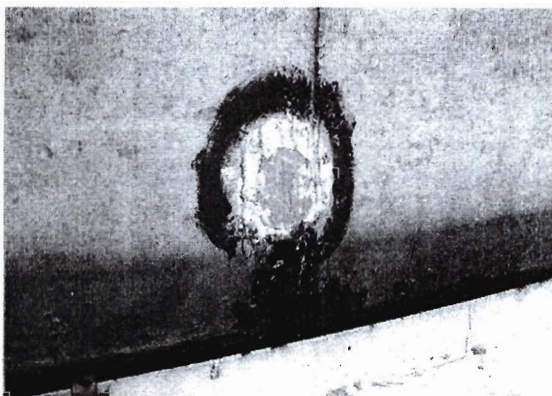
Taki efekt potwierdzono badaniem magazynowych zbiorników stalowych, w których inicjacja zapłonu mogła wystąpić wyłącznie w miejscach wad poszycia. Procesy korozji i ubytki grubości stalowej powłoki określono badaniami nieniszczącymi z jednostronnym, zewnętrznym dostępem głowicy pomiarowej. W analogiczny sposób określono lokalne perforacje, oznaczone w celu natychmiastowego wyeliminowania. Opisane procesy badań ilustruje rysunek 14.

Zgodność określania i identyfikacji oraz efektów wybuchowości mieszanki metanu w zbiornikach potwierdziły wyniki publikowane w pracy [12].

a)

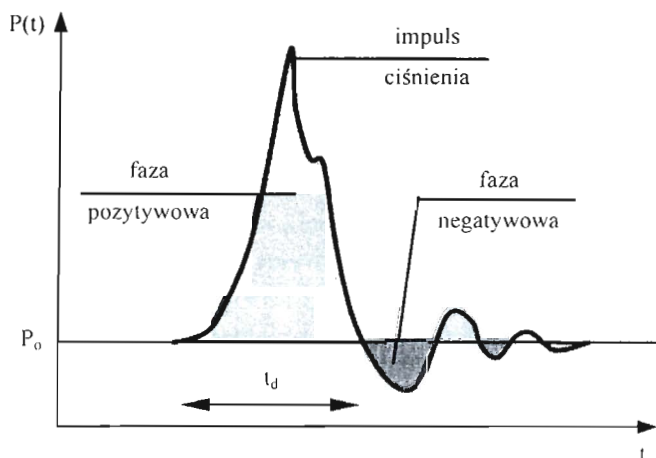


b)



Rys. 14. a) Badania ultradźwiękowe grubości powłok stalowych zbiorników metanu, b) oznaczanie miejsc perforacji

Badania i relacje między objętością gazu, ciśnieniem i skutkami wybuchu, które obserwowali autorzy w oczyszczalniach ścieków, potwierdzają poprawność opracowanych koncepcji i analiz. Świadczą też o tym skutki procesów destrukcyjnych. Potwierdza się to również w zakresie pomiarów ciśnienia wybuchu, objętości przestrzeni wybuchu i powierzchni odprężającej. Czas wybuchu jest bardzo krótki i zawiera się w ułamkach sekundy. Interpretację wybuchu z uwzględnieniem zjawiska odprężania na przykład przez proces wentylowania ilustruje rysunek 15.



Rys. 15. Przykład rzeczywistej relacji parametrów: ciśnienie-czas

Czas trwania fazy pozytywowej, która ma zasadnicze znaczenie w procesie destrukcji konstrukcji określono przez t_d .

W sztywnych masywnych komorach żelbetowych, przy szczelnym osadzeniu mieszań i małych przekrojach rur króćców rewizyjnych, wpływ efektu wentyla jest pomijalny. Ciśnienie wybuchu w żelbetowych komorach fermentacyjnych osiąga zatem wartości maksymalne. Przy rozszczelnieniu wiotkiego poszycia zbiorników stalowych wystąpią efekty wentyla zmniejszające ciśnienie wybuchu. Dla wybuchu w stałej objętości $V = \text{const}$ decydujące jest ciśnienie początkowe. Przy ciśnieniu atmosferycznym równym 1 at, chwilowe maksymalne ciśnienie wybuchu w impulsie mogłoby osiągnąć wartość nawet zbliżoną do $P_{\max} = 800 \text{ kPa}$.

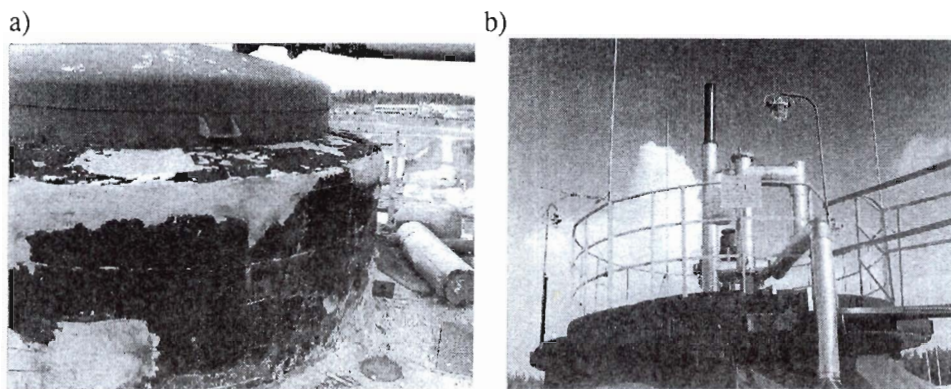
4. Wpływ konstrukcji zbiornika na zakres strefy destrukcji

Prezentując procesy destrukcji, autorzy sformułowali warunki w zakresie charakterystycznych cech awarii zbiorników żelbetowych i stalowych.

4.1. Żelbetowe komory fermentacyjne

Kilkudziesięcioletnie obserwacje wskazują na pewną prawidłowość częstego niszczenia strefy dzwonu. Ilustruje ten proces rysunek 16a). Rozwiązania kon-

strukcyjne dostosowane do zakresu i typu zniszczeń, pozwalały autorom odbudować zniszczone obiekty. Przykład nowej, zrealizowanej powłoki stożkowej i dzwonu z instalacjami pokazano na rysunku 16b).

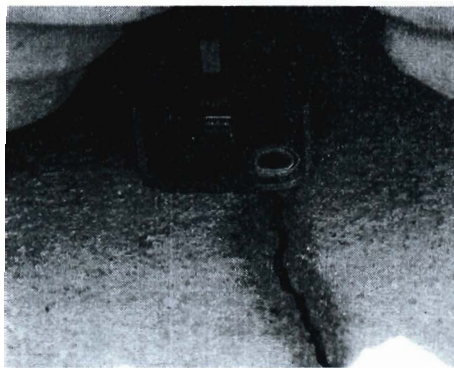


Rys. 16. a) Przykład zniszczonej powłoki stożkowej w strefie „dzwonu”. b) odbudowana konstrukcja, spełniająca warunki nośności granicznej, wraz z systemem instalacji

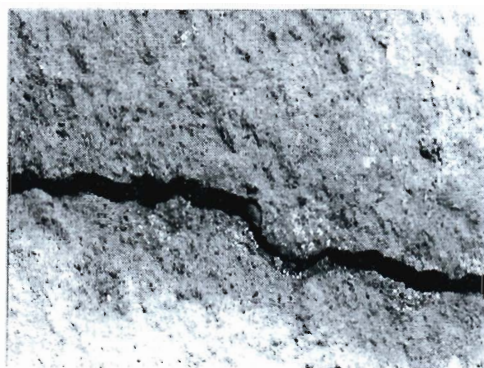
Formy niszczenia strefy wieńców są w zasadzie podobne, natomiast formy niszczenia powłok stożkowych są zróżnicowane. Stosownie do wymiarów obiektu, grubości, wytrzymałości betonu, sposobu kształtowania krzywizny powłok i rzeczywistego przekroju poprzecznego zbrojenia, zarysowania lub pęknięcia i wszystkich określonych w publikacji parametrów wybuchu, realizowane były pomiary w zakresie mikro i makrometrycznym. Ponieważ główną potrzebą była naprawa skutków awarii, zakres badań był zwykle ograniczony przez użytkownika do czynności niezbędnych. Wynikało to z potrzeby minimalizowania kosztów. Sposób pomiarów szerokości rozwarcia zarysowań ilustruje rysunek 17a); pęknięcia konstrukcji o szerokości od kilkunastu do kilkudziesięciu milimetrów typu pokazanego na rysunku 17b) mierzono przymiarami z podziałką milimetrową.

W przekryciach stożkowych realizowanych monolitycznie następuje rozwarstwienie między sztywną pionową powłoką walcową a mniej sztywną powłoką stożkową, ukształtowaną radialnie z siatką prętów zbrojenia, która nadaje strukturze cechy cylindrycznej ortotropii technicznej. Strefę zniszczenia, po rozszczelnieniu, charakteryzuje propagacja pęknięć i zarysowań powierzchni stożka, od strefy wieńca do sztywnej monolitycznej strefy dzwonu.

a)

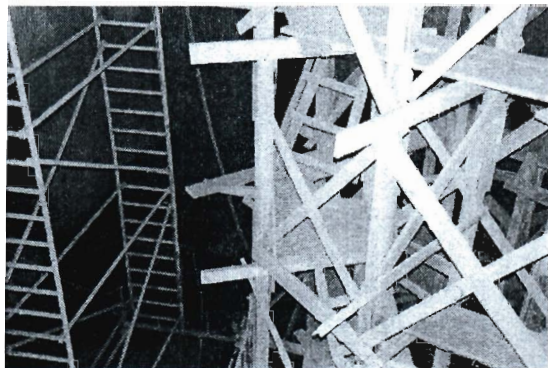


b)

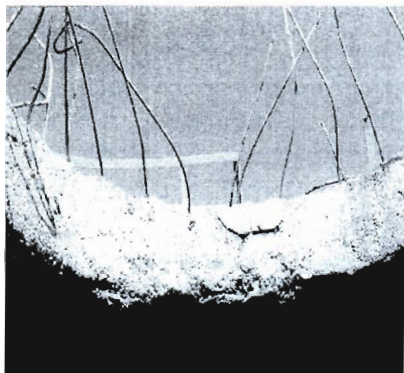


Rys. 17. a) Sposób pomiarów szerokości rozwarcia rys spowodowanych wybuchem, b) przykład pęknięcia konstrukcji powłok żelbetowych z destrukcją zbrojenia

a)



b)



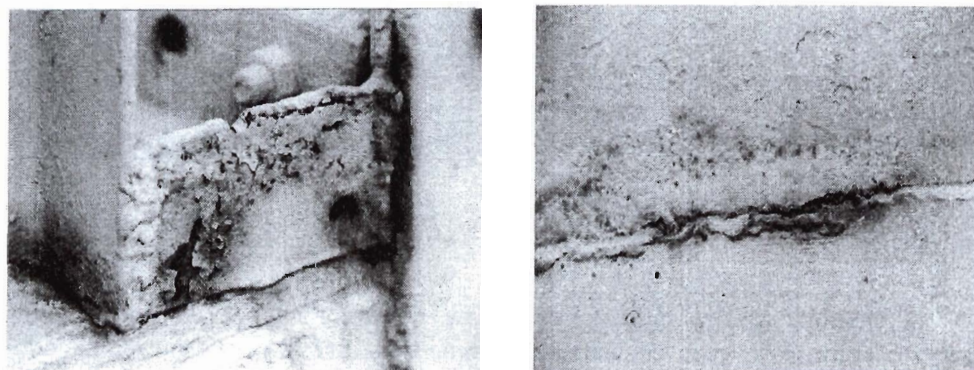
Rys. 18. a) Indywidualne rusztowania wznoszone wewnątrz obiektu, b) przekucia, odkucia i pozyskiwanie istniejących prętów zbrojenia do realizacji odbudowy

Procesy odbudowy zapewniające nośność, trwałość, szczelność i efekty zespolenia w nowej odbudowanej komorze okazywały się w każdym przypadku pracochłonne, zarówno na etapie kształtowania koncepcji jak i na etapie szczegółowej dokumentacji konstrukcyjnej. Odpowiedzialność i nadzór nad robotami inżynierskimi w zakresie odbudowy i uszczelniania komór i powłok, o średnicach i wysokościach odpowiadających zazwyczaj kilkupiętrowym budynkom, była potwierdzona świadectwami jakości, a obecnie stosowną deklaracją zgodności. W zakresie organizacji prac niezbędne jest projektowanie sztywnych, odpowie-

działnych indywidualnych i nietypowych rusztowań oraz wykonanie dokumentacji powykonawczej z zakresu realizacji robót rozbiórkowych. Istniejące zbrojenie odsłonięte w procesach robót rozbiórkowych powinno być wykorzystane do zapewnienia laminarnych zmian sztywności. Uzyskuje się to w efekcie łączenia prętów technologią spawania. Zbrojenie pokazane na rysunku 18 wykorzystano do ukształtowania nowej, zespolonej konstrukcji.

4.2. Stalowe zbiorniki metanu

Analogicznym do procesu zarysowań elementów komór fermentacyjnych są rozszczelnienia spoin, przeważnie między arkuszami blach poszycia, gdzie stal jest osłabiona procesami spawania a ciśnienie wybuchu powoduje przekroczenie bezpiecznych wartości naprężeń.



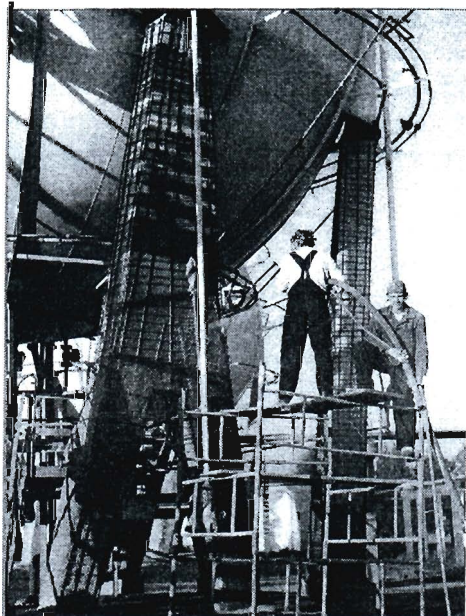
Rys. 19. Uszkodzone wybuchem lokalne strefy stalowych zbiorników metanu, rozszczelniające konstrukcję płaszcza

Przykład zniszczonych i naprawianych podpór stalowych zbiorników metanu pokazano na rysunku 20. Zniszczeniu ulegają również elementy stalowe, usztywniające zbiorniki, które wskutek wad konserwacji lub braku konserwacji poddane zostały procesom korozji. Wybuch powoduje pęknięcia i rozszczelnienia również w strefie karbów. Opisane zjawisko ilustruje rysunek 19. Odształcone i zdegradowane stalowe elementy poszycia i szkieletu przekazują efekty wybuchu na konstrukcje wsporcze, kształtowane stosownie do konstrukcji zbiorników. Funkcje decyzyjne w zakresie odbudowy należy zatem odnieść zarówno do konstrukcji zbiorników jak też sposobu naprawy konstrukcji wsporczych.

a)



b)



Rys. 20. a) Zniszczony wybuchem fundament zbiornika stalowego, b) roboty wzmacniające konstrukcje wsporcze powłok kulistych

5. Wnioski

Wieloletnie analizy zjawisk wybuchów w komorach oczyszczalni ścieków i awarii zbiorników gazu pozwalają autorom stwierdzić, że zastosowana metodologia w utylitarnym stopniu definiuje procesy zaistniałe w wyniku zapłonu gazu. Rezultaty prac analitycznych, konstrukcyjnych i realizacyjnych potwierdzano pomiarami przeprowadzonymi w strefach katastrof. Mierzono odkształcenia trwałe powłok i deformacje stref wieńców, sprawdzano warunki geometrii i opracowywano koncepcje odbudowy.

Obserwacje i badania wskazują na to, że większość wypadków wybuchu gazu następuje z powodu błędów popełnianych przez personel techniczny. Publikowane opisy katastrof zostały spowodowane brakiem świadomości technicznej. Do sprawdzenia szczelności pracujących zbiorników nie używano np. stosownej aparatury, nie wymieniano urządzeń kontrolnych lub zaniechano procesów ich legalizacji. Autorzy uważają, że jednym z podstawowych działań zwiększających bezpieczeństwo użytkowania zbiorników biogazu powinno być podnoszenie kultury technicznej pracowników i dbałość o stosowne wyszkolenie personelu tech-

nicznego, który musi posiadać potrzebne uprawnienia. Urządzenia mają być dopuszczone do eksploatacji przez służby techniczne instytucji odpowiedzialnych za nadzór i okresową kontrolę. Potwierdzają to również badania innych autorów [10].

Inżynierowie lub naukowcy przejmujący kontrolę nad obiektami po zaistnieniu katastrofy powinni mieć wieloletnie doświadczenie w realizowaniu tego typu robót, posiadać stosowne uprawnienia administracyjne, a pełniąc funkcje kierownicze bądź kontrolne zapewnić i gwarantować dobrą jakość odbudowywanego obiektu. Fakty te potwierdza się obecnie zgodnie z przepisami normy PN/EN 45014, spełniającej kryteria wymagań międzynarodowych.

Literatura

- [1] **Baker W. E., Cox P. A., Westine P. S., Kulesz J. J., Strehlow R. A.:** *Explosion hazards and evaluation*, London, Elsevier Scientific Publishing Company, 1983.
- [2] **Bartknecht W.:** *Explosions, Course, Prevention, Protection*, New York, Springer Verlag, 1981.
- [3] **Bąkowski K.:** *Gazyfikacja. Gazociągi, stacje redukcyjne, instalacje i urządzenia gazowe*, Warszawa, WNT, 1996.
- [4] **Bjørkhaug M.:** *Investigation of turbulent explosion properties for hydrogen-air and some hydrocarbon-air mixtures*, Bergen, CMI Report No. 865110-2, Chr. Michelson Institute 1988.
- [5] **Bjørkhaug M.:** *Investigation of the behavior of louver panels subjected to gas explosion*, Bergen, CMI Report No. 25110-1, Chr. Michelson Institute 1988.
- [6] **Chyży T.:** *Parametry wybuchu wewnętrznego gazu*, Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Budownictwo Z. 21 (2001) 63-74.
- [7] **Chyży T.:** *Zjawisko wybuchu gazu w budynku – pojęcia podstawowe*, Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Budownictwo Z. 21 (2001) 51-62.
- [8] **Chyży T.:** *Zjawisko odprężenia ciśnienia wewnętrznego wybuchu gazu w budynkach – wentyle naturalne*, Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Budownictwo Z. 22 (2002) 35-46.
- [9] **Chyży T., Cholewicki A.:** *Zjawisko wybuchu gazu w budynkach mieszkalnych – analiza zaistniałych przypadków katastrof*, I Ogólnopolskie Sympozjum „Kompleksowa ochrona budynków przed zagrożeniem wybuchem gazu”, Katowice, 1999.

- [10] *Ochrona budynków przed zagrożeniem wybuchem gazu*, red. J. Krzystolik, Główny Instytut Górnictwa, Katowice, 2002.
- [11] **Heinrich H. J.:** *Ablauf von Gas- und Staubexplosionen Gemeinsamkeiten und Unterschiede*, (VDI Berichte nr. 701), Sichere Handhabung Brennbare Stäube, Bind I, VDI Verlag, 1988.
- [12] **Hustad J. E., Sønju O. K.:** *Experimental studies of lower flammability limits of gases and mixtures of gases at elevated temperatures*, Combustion and Flame 71:3 (1988).
- [13] **Niepenberg von H. P., Oppenberg R.:** *Zusammenstellung sicherheitstechnischer Daten zur Vermeidung von Explosionen in Feuerräumen*, Industrie-feuerung 11 (1978).
- [14] **Rasbash D. J., Stretch K. L.:** *Explosion in domestic structures*, The Structural Engineer, vol. 47, 10 (1969) 403-411.
- [15] **Ryng M.:** *Bezpieczeństwo techniczne w przemyśle chemicznym*, Warszawa, WNT, 1985.
- [16] **Sapko M. J., Furno A. L., Kuchta J. M.:** *Flame and pressure development of large scale CH₄-air-N₂ explosions*. Bouyancy effects and venting requirements, Bureau of Mines Report of Investigations R18176, 1976.
- [17] **Yao C., De Ris J., Bajolai S. N.:** *Evaluation of protection from explosion over-pressure in AEC gloveboxes*, Factory Mutual Research Corp., Ser. No 16215, 1969.

THE GAS EXPLOSION PROCESSES.

THE DISASTERS OF TANKS IN THE SEWAGE-TREATMENT PLANTS

Summary: The criteria and analysis results which allow to study the whys and wherefores of gas explosion in the closed tanks, have been published by authors. The fermenting tanks in the sewage-treatment plant, where gas is gained and then is used in the heating process, have been described in the paper. The result obtained for one at the many analysed structures built in the ecological conglomeration are the supplement of the work.

Key words: gas, tank, explosion, pressure, ignition, destruction

Artykuł zrealizowano w ramach pracy badawczej statutowej S/IIB/4/99.

Piotr Dobosz, Edwin Koźniewski

PARAMETRY PRYMITYWÓW SKLEPIEŃ I PRZEKRYĆ BUDOWLANYCH W ASPEKcie WIZUALIZACJI KOMPUTEROWEJ

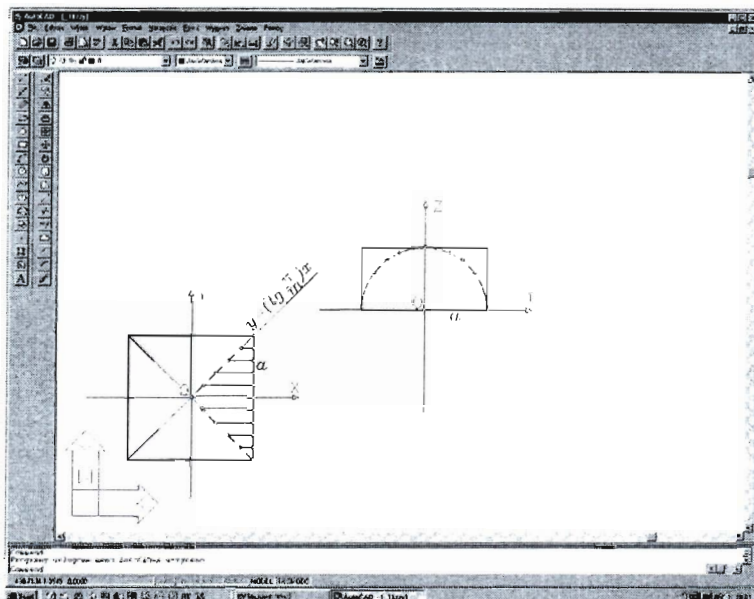
Streszczenie: W pracy podjęto próbę opisanie i oprogramowania prymitywów sklepień i przekryć budowlanych jako nakładek do popularnego na świecie i w Polsce systemu komputerowego wspomagania projektowania. Przyjęty sposób rozwiązania problemu stanowi praktyczną propozycję uzupełnienia standardowego oprogramowania CADD w zakresie modelowania (projektowania) architektonicznego. Omawia się tu powierzchnie prostokątne jako te, które dają się technologicznie kształtować w dość prosty sposób i są najczęściej stosowane w praktyce.

Słowa kluczowe: powierzchnia prostokątna, konoida, sklepienie krzyżowe, sklepienie klasztorne, sklepienie marsylijskie, nakładka, CAD, AutoLISP, AutoCAD

1. Wstęp

Współczesne programy komputerowe wspomagające projektowanie mają biblioteki elementów składowych (obiektów elementarnych, prymitywów) tworzonego obiektu finalnego. Przez *prymitywy* (*obiekty elementarne*) rozumiemy obiekty („cegiełki”) geometryczne, rysowane za pomocą jednego polecenia edytora graficznego. Są to np. sfera, półsfera, walec, prostopadłościan, klin itp. Obiekty te mają swoje parametry jednoznacznie je określające. Na przykład, półsferę określa jej jedyny parametr – promień, walec – promień i wysokość. Jeśli chcemy mieć półsferę o pewnej grubości, to, obok promienia podajemy grubość powłoki lub dwa promienie – wewnętrzny i zewnętrzny. Na elementach tych, także na złożonych fragmentach docelowej konstrukcji, można dokonywać operacji logicznych (część wspólna, suma, różnica). Każdy element podstawowy (prymityw) scharakteryzowany jest przez parametry, które po przyjęciu określonych wartości umożliwiają dopasowanie składanych elementów. W wypadku prostych brył, tak jak na przykład ściany, podciągi, belki itp. o przekrojach będących figurami rozkładalnymi na prostokąty lub trójkąty, parametry charakteryzujące ich

kształt i wielkość (długość, szerokość, wysokość) są oczywiste. Nawet w wypadku kopuły wskazanie parametrów pozostaje proste. Trudniej jest z bardziej złożonymi sklepieniami bądź przekryciami, gdy charakteryzowanie geometrycznych parametrów je opisujących jest bardziej skomplikowane.



Rys. 1. Parametry sklepienia krzyżowego: m – liczba boków wielokąta ($m = 4$), a – promień walca kozuby (innych parametrów: grubości powłoki, wskaźnika podniesienia klucza, wskaźnika eliptyczności tworzącego z okręgu elipsę na rysunku – nie wskazano)

Istnieje wiele programów pozwalających kształtować powierzchnie poczynając od autonomicznych pisanych w języku Pascal [3, 6], poprzez realizowane w systemie AutoCAD i napisane w AutoLISPie [1, 7], często mające charakter pakietu bibliotecznego o bardzo dużych możliwościach [1]. Wiele bowiem powierzchni opisuje się za pomocą wzorów matematycznych, uzyskiwanych drogą uniemożliwiającą prostą, praktyczną, w sensie projektowania inżynierskiego, interpretację [1, 4]. Trudno jest na przykład wykorzystać w trakcie modelowania w AutoCADzie procedurę rysującą nawet najefektniej hiperboloidę opracowaną autonomicznie w języku PASCAL bez relacyjnego powiązania z AutoCADem. Tym bardziej, jeśli program powstał na bazie algorytmu opartego np. na równaniu $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Nawet zrealizowane w środowisku programu CAD sposo-

by modelowania powierzchni, dające efektowną wizualizację [1] z uwagi na potrzebę „umocowania”, „dołączania” otrzymanych tą metodą płatów do istniejących standardowych konstrukcji, nie dają oczekiwanych możliwości. Ważne jest więc określenie geometrycznych założeń do ewentualnego projektowania i technicznego wytwarzania prefabrykatów stanowiących elementy konstrukcji sklepień czy przekryć.

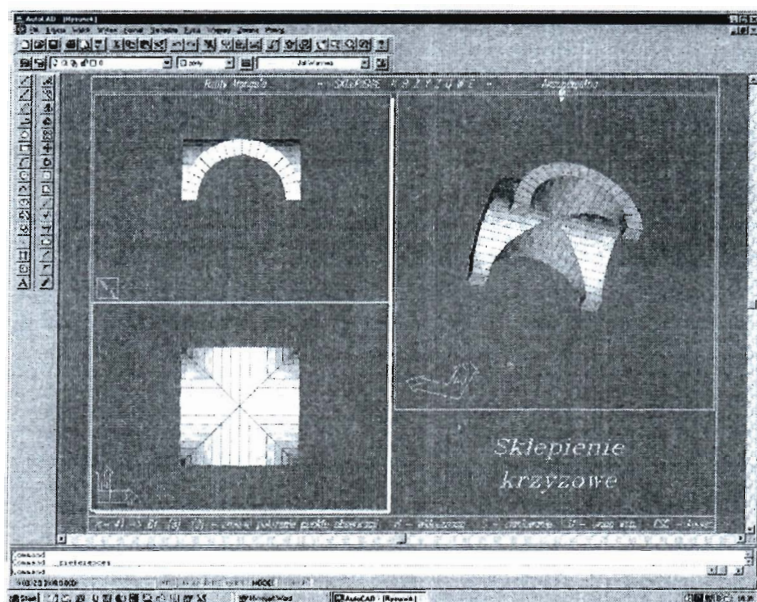
Autorzy zajęli się jedynie parametrami geometrycznymi elementów, istotnymi z punktu widzenia komputerowego kształtowania i modelowania obiektów, pomijając na razie niezwykle ważne cechy wytrzymałościowe, optymalizację parametrów ekonomicznych czy czasowych wytwarzania technicznego omawianych elementów.

2. Kształtowanie obiektów elementarnych niestandardowych sklepień budowlanych

2.1. Teoretyczne podstawy kształtowania powierzchni prostokreślnych

Szansę na znalezienie sposobu naturalnego parametryzowania powierzchni, jak również na „inżynierską” definicję powierzchni służącej do modelowania powierzchni dają podejścia stosowane w geometrii wykreślnej [5, 9, 10, 11, 13]. Przedstawimy je poniżej.

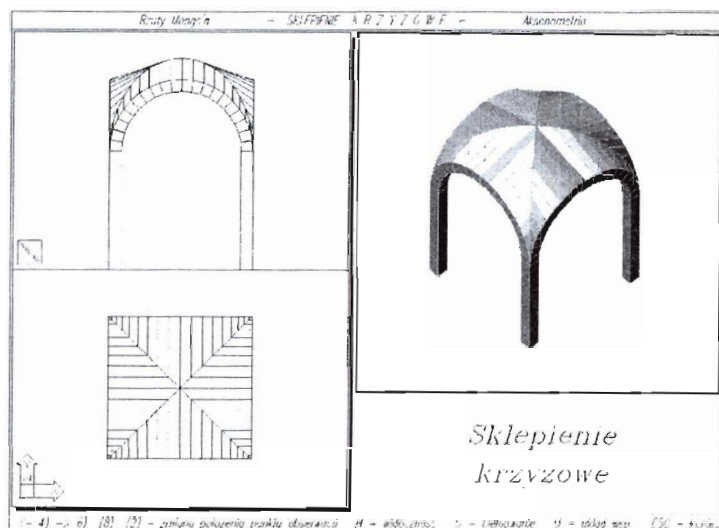
Niech będą dane trzy krzywe (linie) c_i , $i = 1, 2, 3$ o tej własności, że istnieje taki łuk niezerowy jednej z nich, że każdy punkt X_i tego łuku wyznacza wraz z krzywymi c_j , c_k powierzchnie stożkowe $\Gamma_{ij}(X_i, c_j)$, $\Gamma_{ik}(X_i, c_k)$ jako zbiory tworzących $\bigcup_{X_i \in c_i} \Gamma_{ij} \cap \Gamma_{ik}$ dla $\neq (i, j, k)$ o tej własności, że $\Gamma_{ij}(X_i, c_j) \cap \Gamma_{ik}(X_i, c_k) \neq \emptyset$. Zbiór $\Gamma(c_1, c_2, c_3)$ punktów, będący sumą prostych zbioru jest pewną *powierzchnią prostokreślną*. O zbiorze (1) inaczej mówimy, że jest to zbiór prostych przecinających równocześnie trzy krzywe (linie) c_i , $i = 1, 2, 3$. Krzywe c_i , $i = 1, 2, 3$ są nazywane kierownicami tej powierzchni $\Gamma(c_1, c_2, c_3)$.



Rys. 2. Dwa rzuty prostokątne i aksonometria sklepienia krzyżowego nad kwadratem

Powierzchnia ta nie zależy od wyboru kolejności krzywych c_i , $i = 1, 2, 3$, to znaczy $\Gamma(c_1, c_2, c_3) = \Gamma(c_{\pi(1)}, c_{\pi(2)}, c_{\pi(3)})$, gdzie π jest dowolną permutacją zbioru $\{1, 2, 3\}$. Powierzchnia $\Gamma(c_1, c_2, c_3)$ jest *powierzchnią nierozwijalną*, gdy w każdym otoczeniu dowolnie wybranej tworzącej tej powierzchni istnieje tworząca t taka, że styczne do kierownic c_1, c_2, c_3 w punktach ich przecięcia z tworzącą t są prostymi niewspółpłaszczyznowymi. Jeśli powierzchnia posiada tę właściwość, to wyznaczające ją kierownice są parami rozłączne i niewspółpłaszczyznowe.

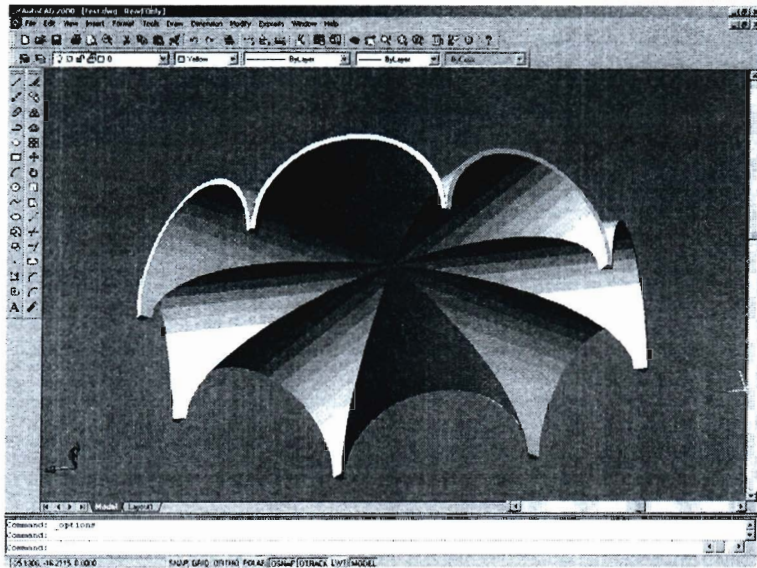
Niech zbiór $\{\Gamma(c_1, c_2, c_3)\}$ (krócej $\{\Gamma\}$) oznacza rodzinę wszystkich powierzchni prostokreślnych, gdzie $c_i \in C$, $i = 1, 2, 3$, przy czym C jest zbiorem wszystkich krzywych, dla których takie powierzchnie istnieją. W rodzinie $\{\Gamma\}$, ze względu na własności trójek kierownic c_i , $i = 1, 2, 3$, możemy wyróżnić trzy rodziny $\{\Gamma\}_1, \{\Gamma\}_2, \{\Gamma\}_3$ w następujący sposób: powierzchnia nierozwijalna Γ należy do zbioru $\{\Gamma\}_i$ ($i = 1, 2, 3$) (jest typu), gdy istnieje trójka kierownic tej powierzchni, w skład której wchodzi co najmniej i prostych.



Rys. 3. Dwa rzuty prostokątne i aksonometria prymitywu sklepienia krzyżowego z podniesionym kluczem nad kwadratem w połączeniu ze standardowymi kostkami AutoCADa (kolumnami)

Ponadto każdy zbiór $\{\Gamma\}_i$ ($i=1,2,3$) dzieli się na uzupełniające się zbiory $\{\Gamma\}_i^n$, $\{\Gamma\}_i^w$ ($i=1,2,3$), gdzie powierzchnia prostokreślna nierozwijalna Γ jest powierzchnią typu $\{\Gamma\}_i^n$, gdy w skład trójki kierownic tej powierzchni wchodzi prosta niewłaściwa oraz jest powierzchnią typu $\{\Gamma\}_i^w$, gdy w skład trójki kierownic tej powierzchni nie wchodzi prosta niewłaściwa.

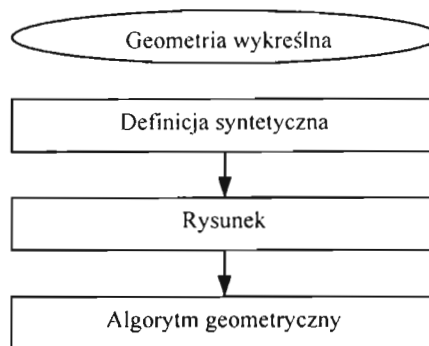
Powierzchnie typu $\{\Gamma\}_1^n$ są powierzchniami cylindroidalnymi (cylindroidami) zaś powierzchnie typu $\{\Gamma\}_1^w$ są powierzchniami konusoidalnymi (konusoidami), powierzchnie typu $\{\Gamma\}_2^n$ są konoidami. Powierzchnie typu $\{\Gamma\}_3$ znane są jako kwadryki prostokreślne, w tym powierzchnie typów $\{\Gamma\}_3^n$, $\{\Gamma\}_3^w$ noszą nazwy odpowiednio *paraboloid hiperbolicznych* i *hiperboloid jednopowłokowych*.

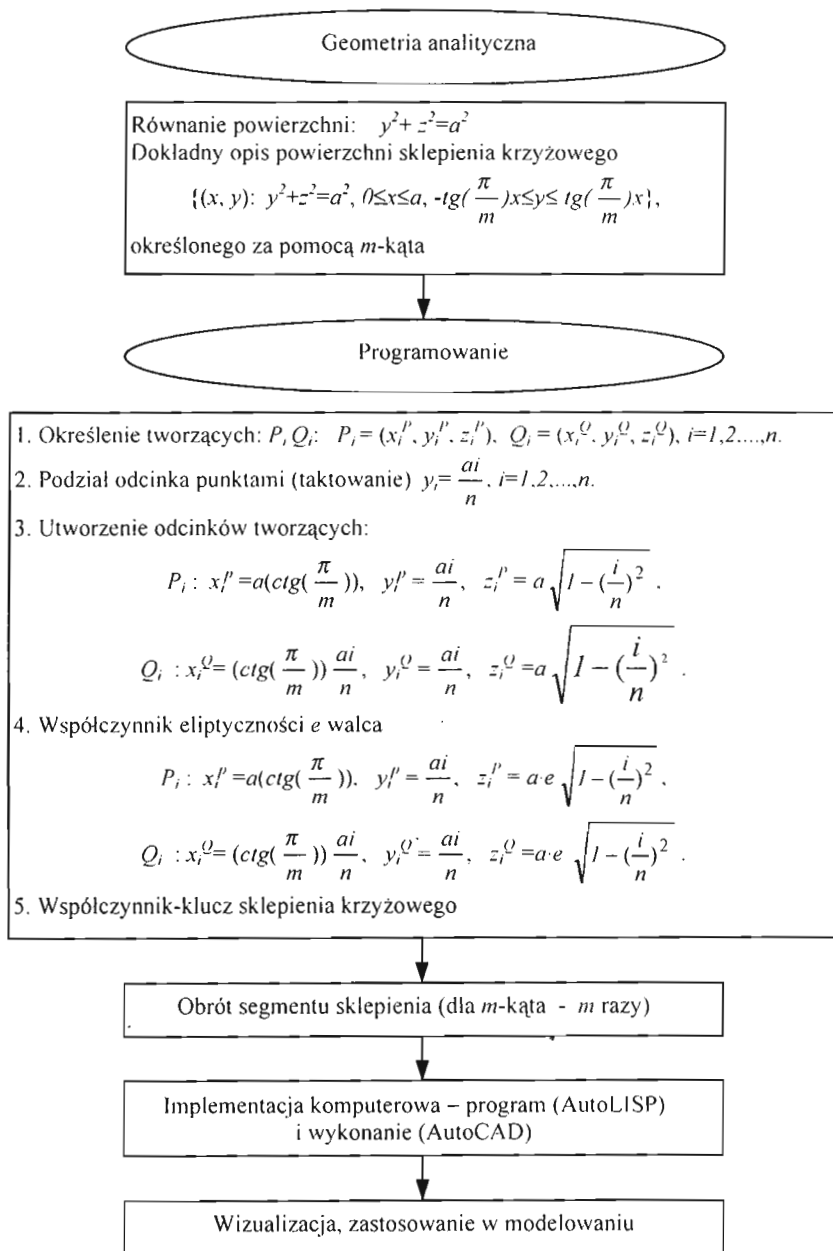


Rys. 4. Aksonometria sklepienia krzyżowego z podniesionym kluczem nad ośmiokątem

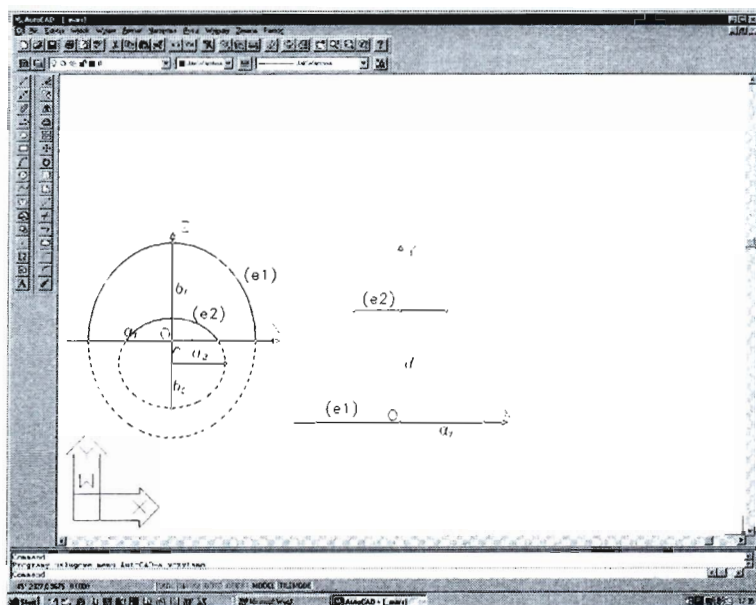
2.2. Analiza obiektu geometrycznego w aspekcie implementacji komputerowej

Analiza obiektu geometrycznego przeprowadzona została za pomocą następującego schematu (przedstawionego tu na przykładzie powierzchni sklepienia krzyżowego):





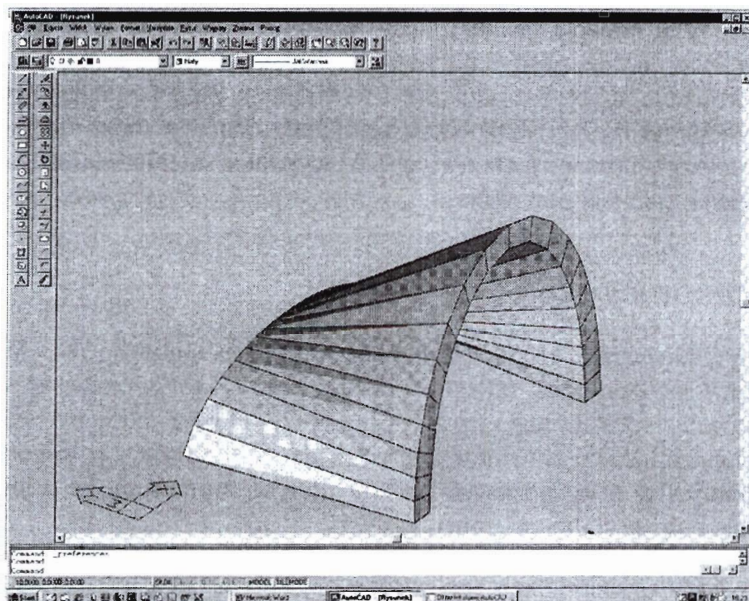
Pojawia się więc pytanie, jak określać parametry powierzchni, by na ich podstawie modelować fragmenty powierzchni takich na przykład jak: powierzchnia *jednopowłokowej hiperboloidy obrotowej* lub *nieobrotowej*, *powierzchni siodłowej*, *konoidy* (grubość płata), *cylindroidy*, *konusoidy*, *sklepienia krzyżowego*, *krzyżowego z podniesionym kluczem*, *krzyżowego nad dowolnym wielokątem foremym*, *krzyżowego na bazie walców eliptycznych o zadanej elipsie przekroju*, *klasztornego*, *klasztornego z podniesionym kluczem*, *klasztornego nad dowolnym wielokątem foremnym*, *klasztornego nad dowolnym wielokątem foremnym na bazie walców eliptycznych o zadanej elipsie przekroju*.



Rys. 5. Parametry sklepienia marsylijskiego: a_1 , b_1 – półosie pierwszej elipsy, a_2 , b_2 – półosie drugiej elipsy, c – przesunięcie środków elips względem siebie w płaszczyźnie pionowej, d – odległość płaszczyzn pionowych, w których zawarte są omawiane elipsy. Grubości powłoki na rysunku nie zaznaczono.

W pracy [4] dokonano prezentacji powierzchni pod kątem wizualizacji komputerowej w aspekcie nauczania geometrii obiektów i odwzorowań inżynierskich. Nie zakładano więc tam, że procedury, które realizują interesujące, z punktu widzenia inżyniera budownictwa, powierzchnie będzie można wykorzystać w praktycznej realizacji projektu architektonicznego. Trzeba jednak zaznaczyć,

że powierzchnie otrzymuje się tam podając parametry, a nie równania, a użyty tam język programowania AutoLISP jest jednym z języków programowania AutoCADa i napisane programy są nakładkami.



Rys. 6. Sklepienie marsylijskie

3. Parametry prymitywów wybranych powierzchni

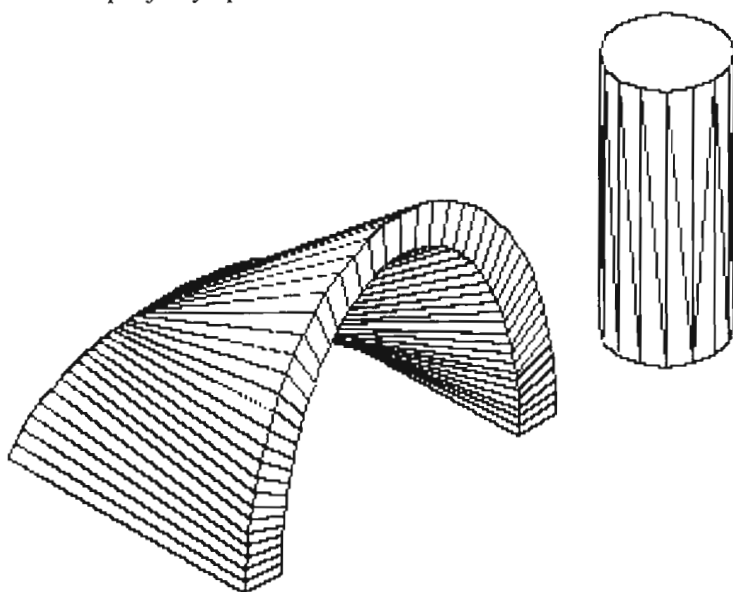
Omawiane prymitywy płatów powierzchni autorzy opisali tak, by można było konstruować przekrycie lub sklepienie na geometrycznym planie budowli lub na zbudowanym wcześniej obiekcie (ściany budynku). Autorzy zakładają możliwość, a nawet konieczność doskonalenia charakteru prymitywów w zależności od praktycznych potrzeb modelowania. Jest to zresztą rutynowe postępowanie projektantów systemów komputerowych. Dalsze unowocześnianie może polegać na takim definiowaniu prymitywów, by jak najwięcej danych do określenia – konstrukcji pochodziło z „istniejących już na ekranie entycji”. I tak na przykład, jako bok wielokąta podstawy sklepienia krzyżowego przyjmujemy istniejący już w modelowanym obiekcie docelowym odcinek.

3.1. Sklepienie skośne

Prymityw *sklepienia skośnego* zbudowanego na elipsach (SKL_SKO.LSP) ma parametry: półosie elips, odległość płaszczyzn, w których zawarte są te elipsy, wielkość przesunięcia jednej elipsy względem drugiej, grubość powłoki. Przyjęcie takich parametrów umożliwia konstrukcję przekrycia skośnego nad dowolnym równoległobokiem o znanych wymiarach: długość jednego boku, wysokość prostopadła do tego boku, kąt nachylenia drugiego boku do pierwszego lub „przesunięcie” boków równoległych. W wypadku sklepienia tunelu skośnego grubość powłoki nie jest potrzebna.

3.2. Sklepienie marsylijskie

Prymityw *sklepienia marsylijskiego* zbudowanego na elipsach (SKL_MAR.LSP) ma parametry: półosie elips, odległość płaszczyzn, w których zawarte są te elipsy, przesunięcie środków elips, grubość powłoki. Obiekt może być zbudowany nad dowolnym trapezem równoramiennym o danych bokach i wysokości. Pozostałe parametry, takie jak pozostałe półosie elips oraz przesunięcie w pionie muszą być zadane w specjalny sposób.



Rys. 7. Sklepienie marsylijskie i standardowy prymityw walca

3.3. Sklepienie krzyżowe

Prymityw *sklepienia krzyżowego* (SKL_KRZ.LSP) ma parametry: liczbę boków wielokąta, nad którym rozpięte jest sklepienie, tzw. wskaźnik eliptyczności definiujący drugą półoś elipsy (pierwszą jest bok wielokąta), wskaźnik podniesienia klucza, grubość powłoki.

3.4. Sklepienie klasztorne

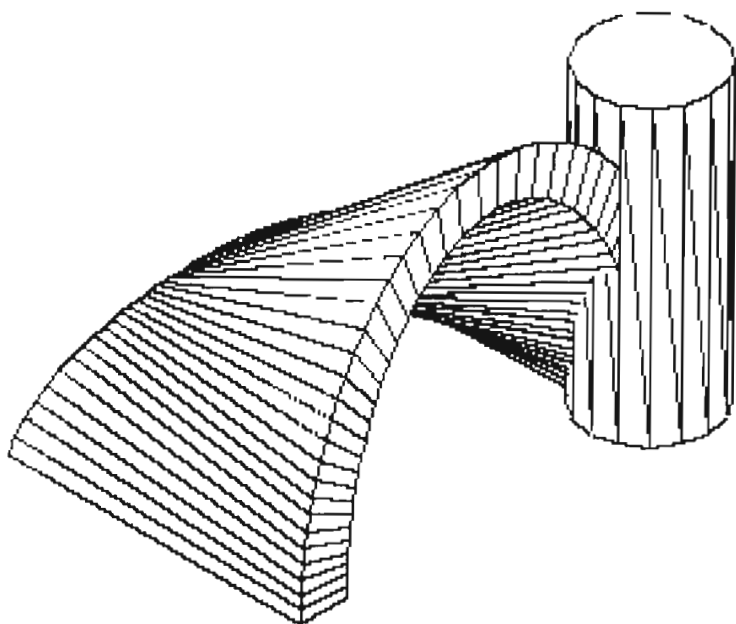
Prymityw *sklepienia klasztornego* (SKL_KLA.LSP) ma parametry: liczbę boków wielokąta, nad którym rozpięte jest sklepienie, tzw. wskaźnik eliptyczności definiujący drugą półoś elipsy (pierwszą jest bok wielokąta), wskaźnik podniesienia klucza, grubość powłoki.

3.5. Sklepienie konoidalne

Prymityw *konoidy* (SKL_KON.LSP) ma parametry: wymiary prostokąta, nad którym rozpięte jest sklepienie, tzw. wskaźnik eliptyczności definiujący drugą półoś elipsy (pierwszą jest bok wielokąta), położenie środka (przesunięcie elipsy względem poziomu), grubość powłoki.

3.6. Sklepienie cylindroidalne

Prymityw *cylindroidy* (SKL_CYL.LSP) ma parametry: wymiary prostokąta, nad którym rozpięte jest sklepienie, tzw. wskaźnik eliptyczności definiujący drugie półosie elips (pierwszą osią w obu wypadkach jest jeden z boków wielokąta), położenie środków (przesunięcia elips względem poziomu), grubość powłoki.



Rys. 8. Sklepienie marsylijskie i standardowy prymityw walca w połączeniu
(w kompozycji architektonicznej)

Literatura

1. **Andrzejowski Z., Przewłocki S.:** *Kształtowanie geometryczne powierzchni pochodnych w systemie AutoCAD*. Międzyuczelniane Czasopismo Naukowe <<Geometria wykreślna i grafika inżynierska>>. Tom III, 1997.
2. **Dobosz P., Koźniewski E.:** *Komputerowa wizualizacja sklepień i przekryć budowlanych*. Konferencja naukowo-techniczna na temat „Konservacja, wzmacnianie i modernizacja budowlanych obiektów historycznych i współczesnych”, Kielce 22-23 lutego 2001.
3. **Górska R. A., Piekarski L.:** *CAM Methods for shaping 3D Surfaces Patches*. Journal „Selected Problems of Computer Methods and Geometry Engineering”, Vol. 5, 1995.
4. **Górska R. A., Koźniewski E.:** *Visualisation of Some Rectilinear Surfaces in AutoCAD*, Drezno, 2000.

5. **Grochowski B.:** *Geometria wykreślna z perspektywą stosowaną*. PWN, Warszawa, 1988.
6. **Horczyzak, M., Siekierski, J.:** *AutoLISP dla użytkowników AutoCAD'a*, PLJ Publishers, Warszawa, 1991.
7. **Koźniewski E.:** *Dachy, sklepienia, przekrycia* – cykl programów w języku TurboPASCAL wizualizujących wielościany i powierzchnie mające zastosowanie w konstrukcji dachów, sklepień i przekryć w budownictwie. Białystok, 1993.
8. **Koźniewski E.:** *Dachy, sklepienia, przekrycia* – cykl programów w języku AutoLISP-AutoCAD wizualizujących wielościany i powierzchnie mające zastosowanie w konstrukcji dachów, sklepień i przekryć w budownictwie. Białystok, 1998.
9. **Otto F., Otto E.:** *Podręcznik geometrii wykreślnej*. PWN, Warszawa, 1994.
10. **Polński St. (red.):** *Geometria wykreślna t. 2*. PWN, Warszawa, 1976.
11. **Przewłocki S.:** *Geometria wykreślna w budownictwie*. Arkady, Warszawa, 1982.
12. **Siwek, J. B.:** *AutoCAD + AutoLISP*, JESAD Publishers, Warszawa, 1991.
13. **Szerszeń St.:** *Nauka o rzutach*. PWN, Warszawa, 1978.

THE PRIMITIVES OF VALTS AND BUILDING ROOFS IN THE ASPECT OF THE COMPUTER VISUALIZATION

Summary: In this paper an attempt of the description and the software of the primitives of the builder's vaults and covers have been presented. Suitable subroutines out in the AutoLISP language as overlays to the AutoCAD system. The accepted manner of the solution of this problem to state a practical proposal of the supplementing standard – software CADD in a range of the architectural modeling. One wrote the programs-overlays for the non-typical rectilinear surfaces, which surrender technologically to shape in a practice.

Key words: rectilinear surface, conoid, cross vault, cloister vault, Marseille vault, overlay, CAD, AutoLISP, AutoCAD

Artykuł został zrealizowany w ramach pracy własnej W/IIB/7/03.

Walery Jezierski, Marta Kosior-Kazberuk

MROZOODPORNOŚĆ BETONU Z DODATKIEM BITUMICZNYM

Streszczenie: Skuteczną metodą ochrony betonów przed wpływem środowiska zewnętrznego może być ich modyfikacja poprzez wprowadzenie, w trakcie przygotowania mieszanki betonowej, substancji bitumicznych. W pracy przedstawiono wyniki badań nad mrozoodpornością w obecności wody wodociągowej i 3% roztworu NaCl (soli odładzającej), przeprowadzonych na próbkach betonów drobnodziarnistych z dodatkiem pasty bitumicznej. Opracowane funkcje regresji dają możliwość szacunkowego prognozowania mrozoodporności, dzięki czemu pozwalają dokonać doboru optymalnej receptury betonu w zależności od konkretnego jego zastosowania.

Słowa kluczowe: mrozoodporność betonu, dodatek bitumiczny, analiza wariancji, regresja wielomianowa

1. Wprowadzenie

Niszczenie konstrukcji betonowych i żelbetowych pod wpływem przemienego zamrażania i odmrażania jest charakterystyczne dla wszystkich budowli odsłoniętych pracujących w warunkach wpływów atmosferycznych z jednoczesnym nasyceniem wilgocą. W takim wypadku na intensywność niszczenia betonu wpływają nie tylko zmiany temperatury i wilgotności, ale również przemiany fazowe wody. Istotną rolę w rozwoju procesów niszczenia wskutek oddziaływania mrozu odgrywa charakter kapilarno-porowatej struktury materiału, wpływający na szybkość wymiany ciepła i masy z otaczającym środowiskiem.

Obiekty drogowe są dodatkowo narażone na działanie soli stosowanych do zimowego utrzymania dróg. Beton ulega szczególnie intensywnemu niszczeniu podczas zamrażania i jednoczesnego oddziaływania roztworów soli. Między stwardniałym zaczynem cementowym a cieczą zawartą w porach betonu naruszona zostaje równowaga termiczna i chemiczna.

Jak wykazały wcześniejsze badania [1, 2], efektywnym sposobem ochrony strukturalnej betonu przed szkodliwym działaniem mrozu, zmierzającym do uży-

skania szczelnej, nieprzeziąkliwej dla wody struktury może być wprowadzenie dodatku bitumicznego, w charakterze domieszki wgłębnej, na etapie przygotowania mieszanki betonowej. Dąży się w ten sposób do przerywania kapilar i pokrycia ich powierzchni hydrofobowym materiałem organicznym, by utrudnia penetrację środowiska ciekłego i ogranicza jego kontakt ze stwardniałym zaczynem cementowym [3].

W wypadku kompozytów cementowo-bitumicznych problemem jest uzyskanie homogeniczności masy, to jest otrzymanie materiału o jednakowych właściwościach w całej objętości. Dotychczasowe próby wprowadzenia substancji bitumicznych do betonu cementowego polegały na dodawaniu ich w trakcie produkcji cementu, impregnacji rur betonowych i zbiorników stopionym asfaltem przy zastosowaniu nadciśnienia oraz dodawaniu sproszkowanego wysokotopliwego asfaltu na etapie sporządzania zaczynu cementowego lub na wprowadzaniu emulsji asfaltowych wraz z wodą zarobową.

Równomierne rozmieszczenie domieszki w kompozycie uzyskuje się w rozważanym przypadku, wprowadzając do zarobu roztwór asfaltu w wysoko wrzącym rozpuszczalniku organicznym tzw. pastę bitumiczną. Dodatek pasty ma działanie hydrofobizujące. Przeciwdziała kapilarnemu podciąganiu wody i przez to utrudnia wnikanie środowiska agresywnego.

W pracy przedstawiono wyniki badania mrozoodporności betonu, ocenianej na podstawie masy złuszczeń powierzchniowych w zależności od liczby cykli zamrażania i odmrażania oraz od zawartości dodatku bitumicznego w mieszance betonowej.

2. Metoda badania mrozoodporności w obecności roztworu soli odladzającej

Badania wykonano na próbkach z betonów drobnoziarnistych. Zachowano jednakową, plastyczną konsystencję mieszanek betonowych, co wymagało każdorazowo odpowiedniej korekty ilości potrzebnej wody zarobowej. Dodatek pasty bitumicznej uwzględniano w zarobie poprzez zmniejszenie zawartości kruszywa, przeliczając odpowiednio zamieniane materiały na ich objętości. Zastosowano dwa cementy portlandzkie, których skład podano w tabeli 1, tj. cement CEM I 42.5 HSR NA (C1), który spełnia wymagania stawiane cementom do konstrukcji mostowych, oraz CEM I 42.5 MSR NA (C2) – cement portlandzki drogowy. Zawartość cementu w badanych betonach była stała i wynosiła 450kg/m³.

Tabela 1.

Skład chemiczny stosowanych cementów

Cement	Zawartość [% masy]						
	SiO ₂	Fe ₂ O ₃	Al ₂ O ₃	CaO	MgO	SO ₃	Na ₂ O _{eq}
CEM I 42.5 HSR (C1)	21.23	4.08	5.12	64.80	0.75	2.33	0.49
CEM I 42.5 MSR (C2)	21.07	3.45	5.17	65.01	0.84	1.79	0.54

Badania przeprowadzono na próbkach wykonanych według dwóch receptur, z każdego cementu, zawierających pastę bitumiczną, a także na próbkach kontrolnych – bez dodatku pasty. Dobierając receptury wzięto pod uwagę wyniki dotychczas przeprowadzonych badań nad betonami modyfikowanymi pastą bitumiczną [1, 2]. W wypadku próbek z cementu C1 zastosowano dodatek bitumiczny w ilości 11% i 13% w stosunku do masy cementu, a z cementu C2 – w ilości 9.5% i 11% w stosunku do masy cementu. Zawężenie wartości stosunku p/c , który oznacza zawartość pasty bitumicznej w odniesieniu do masy cementu, miało na celu uzyskanie wysokiej odporności na działanie mrozu i środków odładzających.

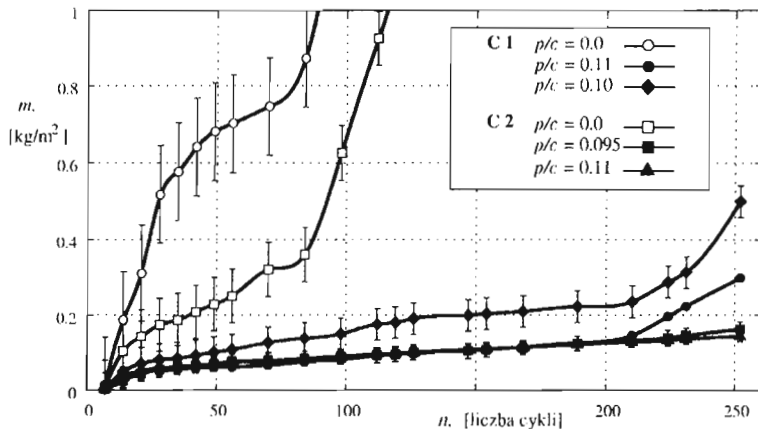
Odporność betonu na powierzchniowe łuszczenie pod wpływem cyklicznego zamrażania i odmrażania w obecności środków odładzających badano zgodnie z procedurą opisaną w normie europejskiej [4], szczegółowo przedstawioną w pracy [5]. Procedura ta uchodzi za najbardziej surową metodę badania mrozoodporności.

Próbki z dodatkiem bitumicznym poddano 252 cyklom zamrażania i odmrażania. Zamrażanie próbek kontrolnych przerwano po 126 cyklach ze względu na głębokie uszkodzenia, uniemożliwiające dalsze badanie.

3. Wyniki badań i ich analiza

Wyniki badań przedstawiono na rysunku 1. Jakościową ocenę odporności betonów na działanie mrozu w obecności roztworu soli odładzającej zamieszczono w pracy [5].

Z danych zaprezentowanych na rysunku 1 wynika, że betony z dodatkiem bitumicznym charakteryzowały się znacznie większą odpornością na powierzchniowe łuszczenie niż beton kontrolny. W zakresie 40÷80 cykli przyrost masy złuszczeń, w wypadku betonów bez dodatku, miał charakter ustabilizowany, ale przekraczał dziesięciokrotnie odpowiednie wartości dla betonów modyfikowanych, wykonanych przy zastosowaniu obu cementów.



Rys. 1. Zależność masy złuszczeń powierzchniowych m [kg/m²] od liczby cykli zamrażania i odmrażania n , wartości p/c i rodzaju cementu (na krzywych pokazano zakresy dokładności)

Przy liczbie cykli przekraczającej 80 obserwuje się gwałtowny wzrost masy złuszczeń w wypadku próbek kontrolnych, która po 126 cyklach osiąga 2.768 kg/m² (cement C1) i 1.570 kg/m² (cement C2). Próbkę z tych samych cementów z dodatkiem bitumicznym charakteryzowały się około osiemnastokrotnie (cement C1) i 16-krotnie (cement C2) mniejszą masą złuszczeń niż próbki kontrolne.

W wypadku betonów z dodatkiem bitumicznym, wykonanych przy zastosowaniu cementu C1, stwierdzono zależność masy złuszczeń od zawartości dodatku w betonie. Przy czym przy $p/c = 0.13$ obserwowano większy wzrost masy złuszczeń niż przy $p/c = 0.11$. Jednocześnie dla próbek z cementem C2 przyrost masy złuszczeń był dwukrotnie mniejszy i praktycznie nie zależał, w badanym zakresie, od zmiany wartości p/c .

Wstępna analiza statystyczna wyników badania wykazała, że w wypadku obu cementów istnieje rozrzut wartości masy złuszczeń próbek z różnym stosunkiem p/c , przy różnej liczbie cykli zamrażania i odmrażania.

Do określenia istotności wpływu liczby cykli zamrażania i odmrażania n (czynnik A), stosunku (czynnik B) i rodzaju cementu (czynnik C – jakościowy) na tle rozrzutu wartości masy złuszczeń m (zmienna Y) w poszczególnych próbkach, zastosowano analizę wariancji rezultatów eksperymentu. Analizą objęto wyniki pomiarów wykonanych po 14, 42, 70, 98 i 126 cyklach zamrażania i odmrażania.

Obliczono oceny średnich wartości prób Y_{ijk} i ich wariancje S_{ijk}^2 . Jednolitość rzędu wariancji poszczególnych prób sprawdzono za pomocą kryterium Cochra [6]. Sprawdzenie wykazało, że przy liczbie stopni swobody $f = 2$ oraz liczbie porównywanych wariancji $k = 30$, obliczeniowa wartość kryterium Cochra równa:

$$G_{ijk \max} = S_{ijk \max}^2 / \sum S_{ijk}^2 = 0.0174 / 0.0972 = 0.1790$$

i przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ jest mniejsza niż krytyczna wartość $G_{0.05;2;30} = 0.1980$ [6]. Można więc uważać, że wariancje prób są jednorodne, a rezultaty badania są odtwarzalne. Stąd ocena generalnej wariancji powtarzalności eksperymentu, obliczona, przy liczbie stopni swobody $f = 30(3 - 1) = 60$, według wzoru:

$$S_y^2 = \sum S_i^2 / k = 0.0972 / 30 = 0.0032,$$

została przyjęta jako jednakowa dla całego obszaru oddziaływania czynników.

Analiza wariancji została przeprowadzona zgodnie ze schematem podanym w pracy [6]. Założono, że wyniki pomiaru masy złuszczeń powierzchniowych układają się zgodnie z rozkładem normalnym i mogą być przedstawione w postaci wielomianu:

$$Y_{ijkm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \chi_k + \alpha_i \beta_j + \alpha_i \chi_k + \beta_j \chi_k + \alpha_i \beta_j \chi_k + \varepsilon_{ijkm},$$

gdzie:

- μ – średnia ogólna,
- α_i – efekt wpływu czynnika A na i -tym poziomie ($i = 1, 2, \dots, a$),
- β_j – efekt wpływu czynnika B na j -tym poziomie ($j = 1, 2, \dots, b$),
- χ_k – efekt wpływu czynnika C na k -tym poziomie ($k = 1, 2, \dots, c$),
- $\alpha_i \beta_j$ – efekt wpływu wzajemnego oddziaływania czynników A i B,
- $\alpha_i \chi_k$ – efekt wpływu wzajemnego oddziaływania czynników A i C,
- $\beta_j \chi_k$ – efekt wpływu wzajemnego oddziaływania czynników B i C,
- $\alpha_i \beta_j \chi_k$ – efekt wpływu wzajemnego oddziaływania czynników A, B i C,
- ε_{ijkm} – zmienna losowa, określająca błąd pomiaru przy m -tej obserwacji, dla każdej kombinacji A, B i C.

Wyniki analizy wariancji przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2.

Wyniki analizy wariancji wpływu czynników A, B i C na masę złuszczeń próbek betonów

Źródło zmienności	Suma kwadratów	Liczba stopni swobody	Wariancja	F_{eksp}	F_{tab}	η [%]
Czynnik A	$S_A^2 = 5.841$	4	1.460	449.86	2.52	19.08
Czynnik B	$S_B^2 = 11.744$	2	5.872	1809.00	3.15	38.36
A i B	$S_{AB}^2 = 9.393$	8	1.174	361.72	2.10	30.68
Czynnik C	$S_C^2 = 0.922$	1	0.922	284.14	4.00	3.01
A i C	$S_{AC}^2 = 0.391$	4	0.098	30.10	2.52	1.28
B i C	$S_{BC}^2 = 1.496$	2	0.748	230.45	3.15	4.28
A i B i C	$S_{ABC}^2 = 0.637$	8	0.080	24.52	2.10	2.08
Błąd pomiaru	$S_Z^2 = 0.195$	60	0.003	–	–	0.64

Hipotezę o istotności wpływu czynników A, B i C na odporność betonu na powierzchniowe łuszczenie sprawdzono zgodnie z kryterium Fishera [6]. Aby ocenić istotność wpływu czynnika A, obliczono wartość stosunku:

$$F = S_A^2 / S_Z^2,$$

gdzie S_A^2, S_Z^2 - odpowiednie sumy kwadratów (tab. 2).

Wpływ czynnika A uznaje się za istotny, jeżeli

$$S_A^2 / S_Z^2 > F_{\alpha, f_1, f_2},$$

gdzie:

$\alpha = 0.05$ – poziom istotności,

$f_1 = 5$; $f_2 = 60$ – stopnie swobody.

Analogicznie dokonano oceny istotności wpływu pozostałych czynników i ich wspólnego oddziaływania.

W wyniku analizy wariancji ustalono, że wszystkie czynniki i ich wspólne oddziaływanie mają wpływ na masę powierzchniowych złuszczeń próbek betonowych, wywołanych cyklicznym zamrażaniem i odmrażaniem. Wskazuje na ten fakt porównanie kryteriów Fishera – eksperymentalnych i tablicowych. Obliczono również, procentowy wpływ wybranych czynników η (tab. 2).

Zakresy dokładności pomiarów dla poszczególnych krzywych (rys. 1) obliczono według wzoru:

$$\Delta_i = \pm t \sqrt{S_i^2 / n},$$

gdzie:

$t = 1.96$ – wartość argumentu funkcji Laplace’a przy poziomie ufności 0.95 [6];

S_i^2 – średnia wariancja i -tej krzywej;

$n = 3$ – liczba pomiarów w próbie.

Aby zapewnić możliwość prognozowania odporności betonu na powierzchniowe łuszczenie, opracowano równania opisujące przyrost masy złuszczeń m (funkcja $\hat{Y}$) w zależności od wybranych czynników. Rozpatrywano wpływ jedynie czynników ilościowych: stosunku p/c (czynnik X_1) oraz liczby cykli zamrażania i odmrażania n (czynnik X_2), oddzielnie dla każdego cementu.

Przy opracowaniu równań regresji wyodrębniono istotne dla praktyki poziomy czynników:

- czynnik X_1 : 0.11, 0.13 (dla cementu C1); 0.095, 0.11 (dla cementu C2),
- czynnik X_2 : 14, 49, 84, 119, 154, 189, 224 cykli.

Jako funkcję opisującą przyrost masy złuszczeń pod wpływem cyklicznego zamrażania i odmrażania przyjęto wielomian ortogonalny niepełnego 2. stopnia. Wartości współczynników funkcji wyznaczono metodą najmniejszych kwadratów. Do obliczeń wykorzystano pakiet programów „|STAT” [7]. Dla uproszczenia obliczeń wartości czynnika X_2 podzielono przez 250.

Dla betonów z cementem C1 funkcja przybiera postać:

$$\hat{Y}_1 = -0.5828X_2 + 6.6820X_1X_2 + 0.0287, \quad (1)$$

dla betonów z cementem C2:

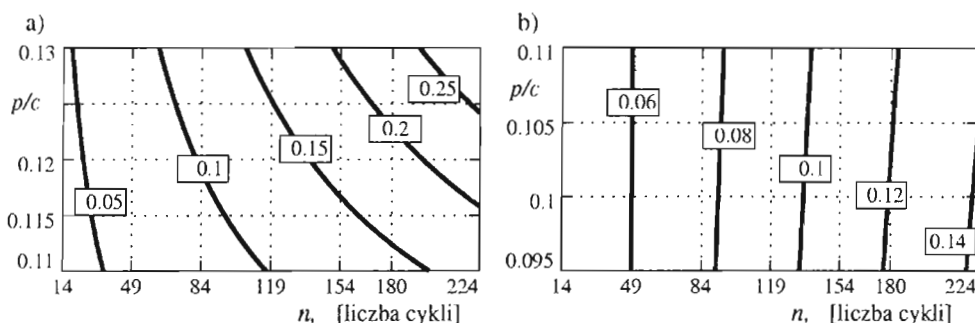
$$\hat{Y}_2 = 0.1469X_2 - 0.3081X_1X_2 + 0.0371. \quad (2)$$

Adekwatność otrzymanych zależności sprawdzono za pomocą kryterium Fishera. Wartość eksperymentalna kryterium dla betonów z cementem C1 wynosi $F_{eksp1} = 0.92$, a dla betonów z cementem C2 – $F_{eksp2} = 0.86$. Wartość krytyczna tego kryterium, przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$, liczbie stopni swobody $f_1 = N - d^* = 14 - 3 = 11$ oraz $f_2 = N(n - 1) = 14(3 - 1) = 28$, wynosi $F_{kr} = 2.15$.

Ponieważ obliczone wartości F_{eksp} okazały się mniejsze od wartości krytycznej F_{kr} , opracowane równania uważa się za adekwatne.

4. Interpretacja wyników badania

W celu ułatwienia interpretacji wyników badania uzyskane zależności (1) i (2) przedstawiono graficznie w postaci izolinii (rys. 2).



Rys. 2. Izolinie masy złuszczeń powierzchniowych $\hat{Y}$ (m , kg/m^2) w zależności od wartości X_1 (p/c) i liczby cykli zamrażania i odmrażania X_2 (n): a) dla betonów z cementem C1; b) dla betonów z cementem C2

Analizując zależność $m = f(p/c, n)$ (rys. 2a) dla betonów z cementem C1, można zauważyć wyraźne różnice przyrostu masy złuszczeń dla różnych wartości p/c pod wpływem cyklicznego zamrażania i odmrażania. Przy $p/c = 0.11$ w trakcie badania (pomiędzy 14 a 224 cyklem) przyrost wartości m wynosił 0.14 kg/m^2 . W przypadku $p/c = 0.13$, w tym samym czasie, masa złuszczeń osiągnęła 0.24 kg/m^2 , to jest blisko 1.7 razy więcej. Na wykresie widoczny jest wzrost masy złuszczeń dla rosnących wartości p/c . Stąd można wysnuć wniosek, że zwiększenie wartości p/c od 0.11 do 0.13 powoduje oddalanie się od optymalnej zawartości dodatku w stosunku do masy cementu.

Analizując wykres tej samej zależności dla próbek betonowych z cementem C2 (rys. 2b) stwierdzono, że przyrost m w trakcie 210 cykli zamrażania – odmrażania dla $p/c = 0.095$ wynosił 0.098 kg/m^2 , a dla $p/c = 0.11 - 0.095$ kg/m^2 .

Przy zwiększeniu p/c masa złuszczeń nieznacznie się zmniejszyła. Świadczy to o tym, że wartości $p/c \sim 0.11$ są bliskie wartościom optymalnym.

Otrzymane wykresy umożliwiają szacunkowe prognozowanie podatności betonu na powierzchniowe łuszczenie w zależności od wartości p/c i liczby cykli zamrażania-odmrażania.

5. Wnioski

1. Próbkki betonowe, wykonane z obu cementów, zawierające dodatek bitumiczny, charakteryzują się znacznie większą odpornością na powierzchniowe łuszczenie niż próbkki kontrolne. Po 126 cyklach zamrażania-odmrażania masa złuszczeń próbek z dodatkiem bitumicznym okazała się 18 razy (z cementu C1) i 16 razy (z cementu C2) mniejsza niż masa złuszczeń.
2. Istotny wpływ na masę złuszczeń powierzchniowych próbek betonów z dodatkiem bitumicznym wykazują takie czynniki jak: rodzaj cementu, zawartość dodatku w betonie wyrażona stosunkiem p/c oraz liczba cykli zamrażania i odmrażania. Największy wpływ, mierzony w procentach, wykazuje stosunek p/c (38%) i liczba cykli zamrażania i odmrażania (19%), najmniejszy wpływ wykazuje rodzaj cementu.

Literatura

- [1] **Wieczorek G.:** *Beton z dodatkiem asfaltu zwiększającym szczelność i odporność korozyjną*. Cement, Wapno, Beton 1999, nr 6, s. 199.
- [2] **Wieczorek G., Kosior-Kazberuk M.:** *Asphalt modified concretes and mortars*. In: Science of Cement and Concrete. Kurdowski W, Gawlicki M. (Eds.), Kraków 2001, p. 315-330.
- [3] **Ramachandran V. S.:** *Concrete admixtures handbook*. Properties, Science and Technology, Noyes Publications, New Jersey, 1988.
- [4] CEN/TC 51/WG 12 *Test methods for freeze-thaw resistance of concrete*. Part 1: Scaling. Draft, April 1999.
- [5] **Kosior-Kazberuk M.:** *Ocena mrozoodporności betonu zgodnie z wymogami nowej normy europejskiej*. Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Budownictwo Z. 23, Białystok, 2003.

- [6] **Hartman K., Lecki E., Schäfer W.:** *Statistische Versuchplanung und Auswertung in der Stoffwirtschaft*. Leipzig, 1977.
- [7] **Perlman G.:** *The STAT Handbook*. Data Analysis Programs on UNIX and MSDOS, 1986.

FROST RESISTANCE OF CONCRETE WITH BITUMINOUS ADDITION

Summary: The modification by introducing bituminous addition, during mix preparation, may be an effective method of concrete, protection against external environment influence. The experimental results of resistance to cyclic freezing and thawing in the presence of water and 3% NaCl (deicing agent) of fine-grained concrete with asphalt addition, are presented in the paper. The regression equations make the estimation of frost resistance of concrete possible and this way, allow choosing the optimal composition of concrete for specific applications.

Key words: concrete freeze-thaw resistance, bituminous addition, analysis of variance, polynomial regression

Andrzej Kazberuk

IMPLEMENTACJA WARUNKÓW BRZEGOWYCH W ALGORYTMACH ROZWIĄZYWANIA WIELKICH UKŁADÓW RÓWNAŃ METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Streszczenie: W pracy przedstawiono systematyczny sposób wprowadzania więzów sformułowanych w postaci liniowej kombinacji stopni swobody do układów równań metody elementów skończonych. Rozważania dotyczą rzeczywistych, dużych układów równań liniowych rozwiązywanych iteracyjnie, metodą gradientów sprzężonych z algorytmami wstępnego poprawienia uwarunkowania.

Słowa kluczowe: MES, warunki brzegowe, metoda gradientów sprzężonych, PCG

1. Wstęp

Sformułowanie odpowiednich warunków brzegowych jest integralną częścią zadania rozwiązywanego metodą elementów skończonych. Na stopnie swobody nakładane są więzy w postaci jawnie określonej wartości przemieszczenia, najczęściej zerowego. Orientacja stopni swobody, a tym samym więzów, jest zgodna z kierunkami globalnego układu współrzędnych. Realizacja tak postawionego problemu w programie metody elementów skończonych nie nastręcza żadnych trudności i sprowadza się do kilku schematów postępowania:

- numeracja stopni swobody dotyczy jedynie tych, których wartości są nieznanne; wiersze i kolumny globalnej macierzy sztywności odpowiadające

usztynionym stopniom swobody zostają pominięte na etapie agramacji macierzy,

- wartości wyrazów pozadiagonalnych macierzy współczynników układu równań odpowiadające więzom są zerowane; na głównej przekątnej wstawiana jest jedynka,
- do wyrazów diagonalnych stopni swobody więzów dodawana jest duża liczba B , taka że $1/B \approx 0$, w przyjętej skali wartości uzyskiwanych rozwiązań.

Eliminacja zbędnych stopni swobody, w trakcie rozwiązania układu równań, została zrealizowana w algorytmie metody frontalnej Ironsa [4].

Symulacja więzów nieortogonalnych do przyjętego globalnego układu współrzędnych, czyli tzw. podpory kątovej, w literaturze przedmiotu sprowadza się do zaleceń

- obrotu lokalnego, węzłowego układu współrzędnych na kierunek więzu [11] lub
- zastosowania dostatecznie sztywnego, jednowymiarowego elementu sprężystego zgodnego z kierunkiem podpory [1].

W literaturze brakuje systematycznych rozwiązań realizacji więzów wewnętrznych, uzgadniających przemieszczenia poszczególnych węzłów, bądź dostosowujących lokalne pole przemieszczeń do znanego rozwiązania analitycznego [9]. Pewne ogólne schematy postępowania dotyczące podpory kątovej lub zginania ramy, z pominięciem odkształceń podłużnych prętów, opisywane w podręcznikach akademickich [8], dotyczą układów prostych o małej liczbie stopni swobody.

W pracy przedstawiono systematyczny sposób wprowadzania więzów sformułowanych w postaci liniowej kombinacji stopni swobody do układów równań metody elementów skończonych. Koncepcje dotyczą rzeczywistych, dużych układów równań liniowych rozwiązywanych iteracyjnie, metodą gradientów sprzężonych z algorytmami wstępnego poprawienia uwarunkowania (PCG, *preconditioned conjugate gradient*).

2. Warunek brzegowy w postaci kombinacji liniowej

Rozważa się liniowy układ równań metody elementów skończonych rzędu n postaci

$$Ku = F, \quad (1)$$

o wyrazach

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & & & \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{bmatrix}.$$

Warunek brzegowy w postaci kombinacji liniowej

$$\underbrace{\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{bmatrix}}_t \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = c. \quad (2)$$

sprowadza odwzorowanie (1) do przestrzeni $(n - 1)$ wymiarowej.

2.1. Eliminacja stopni swobody globalnej macierzy sztywności

Przedstawiając zależność (2) w funkcji $(n - 1)$ parametrów x_i uzyskuje się

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = x_1 \\ u_2 = x_2 \\ \dots \\ u_{i-1} = x_{i-1} \\ u_i = \frac{1}{t_i} [c - (t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_{i-1} x_{i-1} + t_{i+1} x_i + \dots + t_n x_{n-1})] \\ u_{i+1} = x_i \\ \dots \\ u_n = x_{n-1}, \end{array} \right.$$

przy założeniu, że

$$t_i \neq 0.$$

W zapisie macierzowym odwzorowanie n wymiarowego wektora u do $n - 1$ wymiarowej przestrzeni parametrów x ma postać następującą:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \dots & & & & \\ & & 1 & & & \\ -\frac{t_1}{t_i} & \dots & -\frac{t_{i-1}}{t_i} & -\frac{t_{i+1}}{t_i} & \dots & -\frac{t_n}{t_i} \\ & & & 1 & & \\ & \dots & & & & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{i-1} \\ x_i \\ \dots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \frac{c}{t_i} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$G = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & \dots & & & & \\ & & 1 & & & \\ -\frac{t_1}{t_i} & -\frac{t_2}{t_i} & \dots & -\frac{t_{i-1}}{t_i} & -\frac{t_{i+1}}{t_i} & \dots & -\frac{t_n}{t_i} \\ & & & & 1 & & \\ \dots & & & & & & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$G_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{c}{t_i} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T,$$

przekształcenie (3) można zapisać w zwięzłej formie

$$u = Gx + G_0. \quad (4)$$

Podstawiając wyrażenie (4) do równania (1) uzyskuje się

$$K(Gx + G_0) = F.$$

Doprowadzenie do symetrii współczynników macierzy układu równań wymaga wymnożenia obu stron układu przez G^T . Po uporządkowaniu uzyskano postać

$$(G^T K G)x = G^T F - G^T K G_0. \quad (5)$$

2.2. Zastosowanie funkcji kary

Sformułowano sposób wprowadzania więzów analitycznych, wykorzystujący funkcję kary [4, 2].

Warunek brzegowy (2) zapisuje się w sposób następujący:

$$t_1 u_1 + t_2 u_2 + \dots + t_n u_n + 0 \times u_{n+1} = c,$$

wprowadzając fikcyjny stopień swobody u_{n+1} .

Zakłada się istnienie dostatecznie dużej, skończonej liczby B , takiej że

$$\frac{1}{B} \approx 0,$$

oraz

$$0 \times B = 0.$$

Układ równań (1) można przedstawić w następującej formie:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} & 0 \\ \dots & & & & \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{B} \end{bmatrix}}_{K^*} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix}}_{u} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \\ 0 \end{bmatrix}}_{F^*}, \quad (6)$$

a warunek brzegowy w postaci

$$t_1 u_1 + t_2 u_2 + \dots + t_n u_n + \frac{1}{B} u_{n+1} = c.$$

Stąd otrzymano

$$\begin{cases} u_1 = x_1 \\ u_2 = x_2 \\ \dots \\ u_n = x_n \\ u_{n+1} = Bc - B(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n) \end{cases}.$$

Macierze warunków brzegowych G i G_0 są równe

$$G^{(n+1) \times n} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \dots & & & \\ & & & 1 \\ -Bt_1 & -Bt_2 & \dots & -Bt_n \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$G_0^{(n+1) \times 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & Bc \end{bmatrix}^T. \quad (8)$$

Dokonując operacji analogicznych do uzyskania zależności (5) otrzymano następującą postać iloczynu:

$$\begin{aligned} G^T K^* G &= \begin{bmatrix} K_{11} + Bt_1t_1 & K_{12} + Bt_1t_2 & \dots & K_{1n} + Bt_1t_n \\ K_{21} + Bt_2t_1 & K_{22} + Bt_2t_2 & \dots & K_{2n} + Bt_2t_n \\ \dots & & & \\ K_{n1} + Bt_nt_1 & K_{n2} + Bt_nt_2 & \dots & K_{nn} + Bt_nt_n \end{bmatrix} \\ &= K + B \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{bmatrix} = K + Bt^T t. \end{aligned}$$

Prawą stronę równania (6) po dokonaniu niezbędnych przekształceń zapisano w formie

$$G^T (F^* - K^* G_0) = \begin{bmatrix} F_1 + Bct_1 \\ F_2 + Bct_2 \\ \dots \\ F_n + Bct_n \end{bmatrix} = F + Bct^T.$$

Zatem uwzględnienie w układzie równań metody elementów skończonych (1) więzu w postaci kombinacji liniowej (2) przybliża się zależnością

$$(K + Bt^T t)u = F + Bct^T. \quad (9)$$

Warunki brzegowe t dotyczące kilku określonych stopni swobody układu, tworzą substytut elementu skończonego. Korzystając z zależności (9), odpowiedniki macierzy sztywności i wektora obciążeń, wylicza się z równań

$$g = Bt^T t, \quad g_0 = Bct^T. \quad (10)$$

3. Algorytmy rozwiązywania globalnego układu równań

Do rozwiązywania dużych, symetrycznych układów równań liniowych utworzonych w wyniku aproksymacji metodą elementów skończonych, stosowane są metody iteracyjne [3]. Za najbardziej efektywną, dla układów dodatnio określonych, uważana jest metoda gradientów sprzężonych. Przyspieszenie zbieżności uzyskuje się mnożąc obie strony układu równań przez macierz Q^{-1} aproksymującą macierz odwrotną do macierzy współczynników K . Macierz Q tworzy się w taki sposób, aby uzyskanie macierzy odwrotnej Q^{-1} , było znacznie mniej kosztowne obliczeniowo niż uzyskanie K^{-1} , a promień spektralny $I - Q^{-1}K$ był mały. W najprostszym przypadku układ równań przyjmuje postać

$$Q^{-1}Ku = Q^{-1}F. \quad (11)$$

Możliwy jest również prekondycjonowanie prawostronne

$$(KQ^{-1})(Qu) = F, \quad (12)$$

a także obustronne

$$(Q_L^{-1}KQ_R^{-1})(Q_Ru) = Q_L^{-1}F. \quad (13)$$

Najprostszą i bardzo efektywną [6] macierzą poprawiającą uwarunkowanie jest

$$Q = D = \text{diag}(K).$$

4. Implementacja warunków brzegowych

Zmiana rzędu globalnego układu równań, związana z eliminowaniem przeszywnionych stopni swobody, skutkuje powstaniem nowego układu równań o

strukturze znacznie różniącej się od układu uzyskanego na drodze agregacji macierzy elementów. Nawet w prostych przypadkach przechowywania macierzy w formie profilu półpasma algorytmy wyznaczające nowy profil są skomplikowane i obliczeniowo kosztowne. Operacja mnożenia $G^T K G$ wymaga rezerwacji pamięci operacyjnej o wielkości porównywalnej z rezerwacją dla macierzy K i jest wykonalna jedynie dla niewielkich układów.

Wprowadzenie warunków brzegowych w postaci funkcji kary przy zachowaniu rzędu pierwotnego układu równań, znacznie uzależnia dokładność uzyskiwanego rozwiązania od trafnego wyboru wartości B . W wypadku korzystania ze zwartych schematów eliminacji Gaussa fakt ten prowadzi do ograniczenia wielkości rozwiązywanego układu i znacznego pogorszenia tempa zbieżności metod iteracyjnych.

Opisane wady metod klasycznych stosowanych do rozwiązywania wielkich układów można częściowo wyeliminować przez staranne zaprojektowanie algorytmu iteracyjnego.

Wykorzystując rzadką strukturę macierzy warunków brzegowych G , można zastąpić lewą stronę równania (5), zawierającą dwukrotne mnożenie macierzy przez macierz, serią mnożeń macierzy przez wektor, wykonywanych w każdym kroku iteracyjnym

$$G^T(K(Gx)) = G^T F - G^T K G_0.$$

Przy odpowiednim doborze reprezentacji G wzrost liczby operacji jest stosunkowo niewielki. Stosując prekondycjonowanie lewostronne uzyskuje się zależność

$$(Q^{-1}G^T)(K(Gx)) = Q^{-1}(G^T F - G^T K G_0). \quad (14)$$

Iloczyn $Q^{-1}G^T$ jest stały i wymaga tylko jednokrotnego obliczenia, podobnie jak prawa strona równania (14). Dla prekondycjonowania wprowadzenie warunków brzegowych sprowadza się do jednokrotnej modyfikacji macierzy Q i Q^{-1} nie zwiększając kosztów obliczeniowych pojedynczej iteracji.

Warunki brzegowe w postaci funkcji kary najwygodniej wprowadza się używając osobnej macierzy znacznikowej o strukturze odwzorowującej spakowaną postać macierzy K . Rezygnując z modyfikacji macierzy współczynników dużą wartością B eliminuje się kłopoty związane z jej właściwym wyborem, a obli-

czając Q^{-1} korzysta się z zależności $1/B = 0$, co znacznie poprawia stabilność rozwiązania.

5. Wnioski

W pracy przedstawiono metody implementacji przemieszczeniowych warunków brzegowych w postaci liniowej kombinacji stopni swobody do układów równań metody elementów skończonych. Zaprezentowane koncepcje dotyczą układów wielkich, o rzędzie macierzy współczynników przekraczającym 10^5 , rozwiązywanych metodą gradientów sprzężonych.

Przedstawione algorytmy umożliwiają efektywną analizę zagadnień dwu- i trójwymiarowych mechaniki kontinuum. Zakres zastosowań tzw. więzów analitycznych obejmuje analizę w otoczeniu punktów nieciągłości, interfejsy elementów nieskończonych, analizę ośrodków ze sztywnymi wtrąceniami. Eliminowanie zbędnych stopni swobody na kierunkach zaniedbywalnych odkształceń powoduje znaczną poprawę uwarunkowania rozwiązywanego układu równań, a tym samym przyspieszenie zbieżności metod iteracyjnych.

Literatura

- [1] Bathe K.J.: Finite element procedures in engineering analysis, Prentice-Hall, Inc. 1982.
- [2] Carey F.G., Oden J.T.: Finite Elements: A Second Course, Prentice-Hall, Inc., 1983.
- [3] Hackbusch W.: Iterative solution of large sparse systems of equations, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [4] Irons B., Ahmad S.: Techniques of Finite Elements. Wiley, 1980.
- [5] Kazberuk A., Seweryn A.: Analityczne warunki brzegowe w metodzie elementów skończonych, Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Nauki Techniczne Nr 124, Budownictwo Z. 19, 1999, s. 145–156.

- [6] Kazberuk A., Tribiło R.: Efektywność metody gradientów sprzężonych w analizie trójwymiarowych zagadnień kontinuum, *Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Nauki Techniczne* Nr 124, Budownictwo Z. 19, 1999, s. 157–166.
- [7] Oppe T.C., Joubert W.D., Kincaid D.R.: NSPCG User's Guide. Package for Solving Large Sparse Linear Systems by Various Iterative Methods (z dokumentacji pakietu NSPCG, *netlib.org*).
- [8] Pietrzak J., Rakowski G., Wrześniowski K.: Macierzowa analiza konstrukcji, PWN, Warszawa–Poznań, 1986.
- [9] Seweryn A.: Modelowanie osobliwych pól naprężeń z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Część I: Specjalne elementy skończone i metoda więzów analitycznych, *Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Nauki Techniczne* Nr 121, Mechanika Z. 20, 1998, s. 215–242.
- [10] Seweryn A.: Metody numeryczne w mechanice pękania. Biblioteka Mechaniki Stosowanej, Wyd. IPPT PAN, Warszawa, 2003.
- [11] Szmelter J.: Metody komputerowe w mechanice, PWN, Warszawa, 1980.

LINEAR CONSTRAINTS IN THE ITERATIVE SOLUTION OF FINITE ELEMENT EQUATIONS

Summary:

The systematic approach of implementation of the Dirichlet boundary condition in the form of linear constraint into the equation systems of the finite elements method was presented. The huge systems of the order of coefficients matrix exceeding 105, solved with preconditioned conjugate gradient method, were considered.

Key words: finite element method, boundary conditions, linear equation solvers, preconditioned conjugate gradient.

Edwin Koźniewski, Marcin Orłowski

RYSUNKI W ŚRODOWISKU AUTOCADA WYKONYWANE POZA AUTOCADEM

Streszczenie: W pracy przedstawiono metodę praktycznego tworzenia skomplikowanych prymitywów obiektów budowlanych jako nakładek na system AutoCAD poza środowiskiem tego systemu. Na przykładzie schodów kręconych zrealizowano nakładkę w języku PASCAL jako plik DXF. Rozwiązanie jest istotnym uzupełnieniem programu AutoCAD w aspekcie projektowania architektonicznego.

Słowa kluczowe: schody kręcone, nakładka, AutoCAD, PASCAL, format DXF, projektowanie architektoniczne

1. Wstęp

W modelowaniu przestrzennym wiele rysunków może być tak złożonych, że wykonanie ich jest niezwykle pracochłonne, jeśli w ogóle możliwe. Projektanci systemu przewidzieli jednak możliwość automatyzacji procesu tworzenia rysunku nawet w sytuacji już „bardzo zautomatyzowanego” programu jakim jest AutoCAD [5]. System ten można rozszerzać na przykład poprzez stworzenie odpowiednich funkcji w języku AutoLISP, którego interpreter system AutoCAD posiada [3]. Wówczas napisany w języku AutoLISP program, zwany często nakładką, w trakcie wykonania tworzy zaprogramowany rysunek wewnątrz sprzężonego systemu AutoCAD-AutoLISP. Można także dany rysunek wykonać zupełnie na zewnątrz systemu AutoCAD. Tworzy się w tym celu specjalny program, na przykład w języku PASCAL, za pomocą którego konstruuje się rysunek jako plik (w odpowiednim formacie) dający się importować do środowiska AutoCADa.

Istnieje kilka sposobów przesyłania informacji między AutoCADem i „światem zewnętrznym”. Odbyna się to poprzez zbiory:

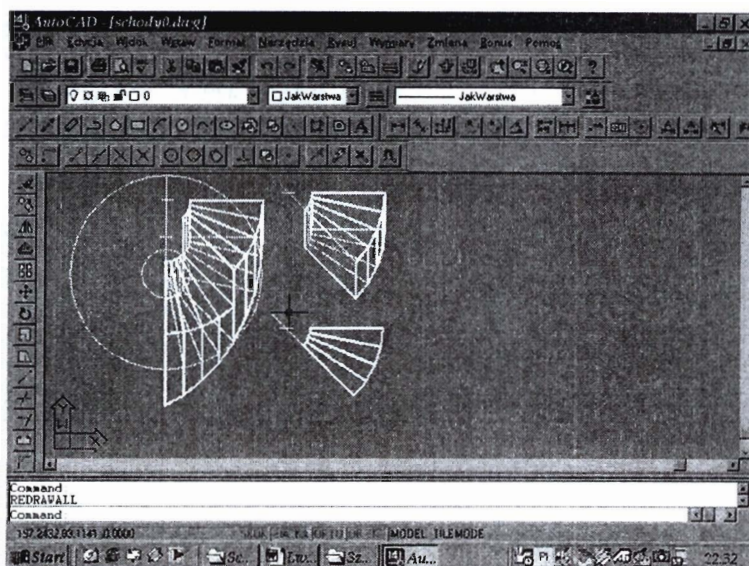
- *.DXF (Drawing eXchange Files),
- *.SCR (SCRipt files),
- *.DXB (Binary Drawing eXchange files),
- *.EAL (Entity Association List),

*.DWG (DraWinG files) – pliki standardowo tworzone przez AutoCADa, lub inne zbiory w formacie zdefiniowanym przez użytkownika [5].

Artykuł mieści się w szeregu rozwiązań zwiększających możliwości systemu AutoCAD w zakresie modelowania przestrzennego obiektów niestandardowych z punktu widzenia tego systemu, obok programów-funkcji napisanych w języku AutoLISP, realizujących specjalne sklepienia lub przekrycia [1].

2. Importowanie rysunku za pomocą pliku *.DXF

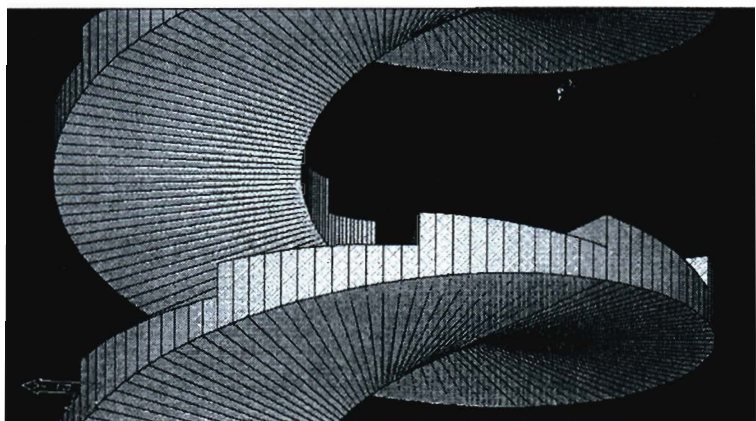
Format DXF (*Drawing eXchange File*) został utworzony specjalnie w celu komunikacji AutoCADa ze światem zewnętrznym [5]. Zbiory DXF to zbiory tekstowe z rozszerzeniem „DXF” służą zarówno do importu danych do AutoCADa jak i do eksportu rysunków do innych programów. Polecenia DXFIN (import) i DXFOUT (eksport) realizują powyższe funkcje. W szczególności poprzez DXF przenosimy rysunki z AutoCADa do tekstu pisanego w edytorze WORD. Postać .DXF jest bardzo wygodna, warto jednak zaznaczyć, że pliki mają dużą pojemność i skomplikowany format (strukturę). Pliki te przez AutoCAD są tworzone automatycznie („bez udziału” użytkownika) i importowane przez wiele aplikacji (np. WORD) też automatycznie. Jednak często zachodzi potrzeba „ręcznej” obróbki pliku DXF, tak jak to ma miejsce w niniejszym referacie, i w związku z tym podamy krótki zarys jego budowy. Zbiór typu DXF składa się z czterech głównych sekcji oraz znacznika końca zbioru: **Nagłówek** (*Header*), **Tabele** (*Tables*), **Definicja Bloków** (*Blocks*), **Obiekty** (*Entities*). Informacje w zbiorze typu DXF kodowane są za pomocą tzw. kodów kontrolnych (*Group Code*). Najpierw występuje kod kontrolny wskazujący, jak należy interpretować wartość następującą po tym kodzie w nowej linii [5].



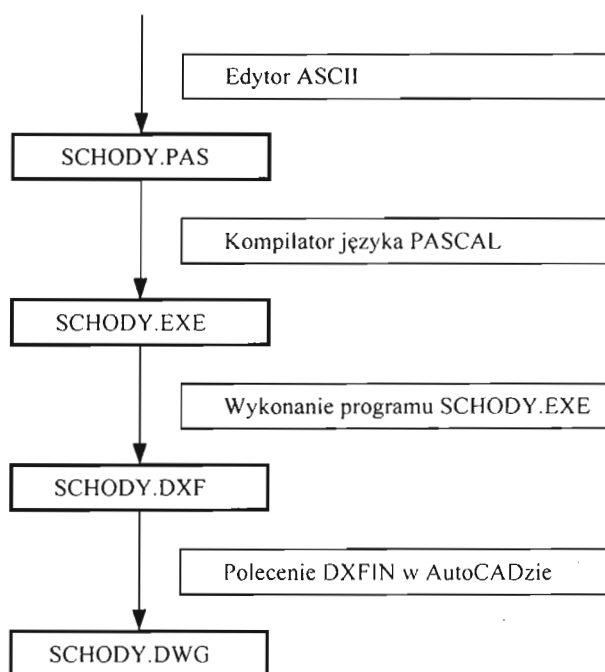
Rys. 1. Rysunek schodów kręconych zrealizowany w trybie 2D za pomocą standardowych poleceń systemu AutoCAD

3. Tworzenie pliku *.DXF za pomocą programu w języku PASCAL

Współczesne programy komputerowe wspomagające projektowanie posiadają biblioteki elementów składowych (obiektów elementarnych, prymitywów) tworzonego obiektu finalnego. Na elementach tych, także na złożonych fragmentach docelowej konstrukcji, można dokonywać operacji logicznych (część wspólna, suma, różnica). Każdy z elementów podstawowych (prymitywów) scharakteryzowany jest przez parametry, które po przyjęciu określonych wartości umożliwiają dopasowanie składanych elementów. W wypadku prostych brył, tak jak na przykład ściany, podciąg, belki itp. o przekrojach będących figurami rozkładalnymi na prostokąty lub trójkąty parametry charakteryzujące ich kształt i wielkość (długość, szerokość, wysokość) są oczywiste. Nawet w wypadku kopuły wskazanie parametrów pozostaje proste. W artykule tym przedstawiamy realizację prymitywu schodów kręconych [2, 6] autonomicznie w języku PASCAL [4]. Proces tworzenia docelowego pliku do importu do środowiska AutoCADA przedstawia diagram na rysunku 3.



Rys. 2. Fragment schodów kręconych zrealizowanych jak plik SCHODY.DXF za pomocą programu SCHODY.EXE w języku PASCAL



Rys. 3. Proces tworzenia pliku za pomocą programu w języku PASCAL

Poniżej zamieszczamy fragmenty plików opisanych na diagramie (rys. 3).

Fragm. programu SCHODY. PAS w języku PASCAL:

```

program schody;
var dxf_ofi: text;                                {zmienna plikowa}
ZbiorDXF: string;                                {nazwa zbioru DXF}
ip: integer;                                      {liczba schodów}
dlugosc, szerokosc, r2,przekatna: real;          {rozmiary schodka}
wysokosc,wysokosc1: real;                        {wysokość schodów}
alfa, beta, gamma, fi: real;                    {kąty pomocnicze}
alfa1,beta1:real;
podst:integer;
kat: real;                                        {kat=liczba skoków
linii sch.}
x1,y1,z1,x2,y2,z2,x3,y3,z3,x4,y4,z4: real;      {wsp. rogów schodka}
i,j: integer;                                    {zmienna sterująca}
wx1,wy1,wz1,wx2,wy2,wz2,wx3,wy3,wz3,wx4,wy4,wz4: real; {wsp. rogów schodka}

procedure Naglowek_Sekcji_Entities;
begin
Writeln(dxf_ofi,' 0'); Writeln(dxf_ofi,'SECTION');
Writeln(dxf_ofi,' 2'); Writeln(dxf_ofi,'ENTITIES');
Writeln(dxf_ofi,' 0');
end;
procedure Koniec_Sekcji;
begin

```

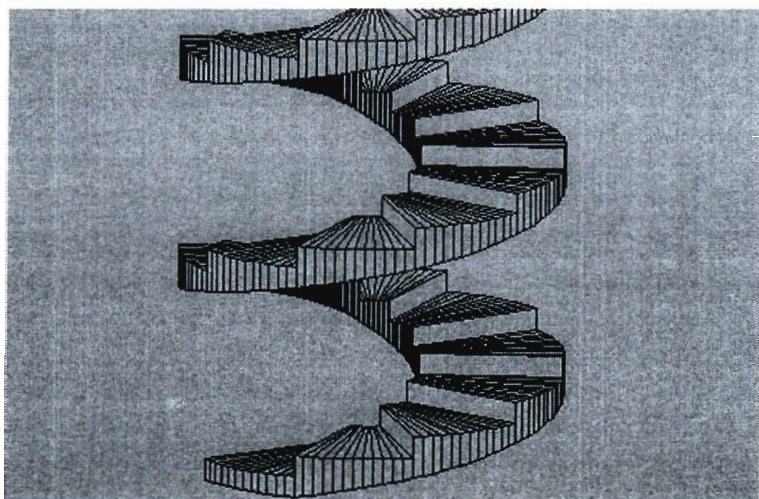
Oto fragm. pliku SCHODY.DXF:

```

0
SECTION
2
ENTITIES
0
3DFACE
8
0
10
4.0000000000E+01
20
0.0000000000E+00
30
4.5000000000E+00
11
3.9945181390E+01
21
2.0934382497E+00
31

```

Rysunek schodów, realizowany za pomocą programu SCHODY.EXE, jest określany następującymi parametrami: promień walca wewnętrznego, promień walca zewnętrznego, wysokość schodów dla jednego skoku powierzchni śrubowej kształtującej schody i liczba skoków. Ponadto ustalamy liczbę części z jakich składa się modelowany stopień (odpowiednik stałych SURFTAB1 i SURFTAB2 w systemie AutoCAD). Otrzymana entycja może być użyta do modelowania w środowisku AutoCADa obiektów architektonicznych zawierających schody kręcone. Możliwość doboru powyższych parametrów pozwala łączyć fragmenty schodów z innymi obiektami skonstruowanymi w systemie AutoCAD.



Rys. 4. Fragment schodów kręconych zrealizowanych jako plik SCHODY.DXF za pomocą programu SCHODY.EXE w języku PASCAL widziany z góry

Literatura

1. **Dobosz P., Koźniewski E.:** *Prymitywy sklepień i przekryć budowlanych w aspekcie wizualizacji komputerowej*. Międzynarodowa Konferencja „Współczesne problemy modelowania geometrycznego”. Lwów, 20-23 października 2003.
2. **Grochowski B.:** *Geometria wykreślna z perspektywą stosowaną*. PWN, Warszawa, 1995.

3. **Horczyczak, M., Siekierski, J.:** *AutoLISP dla użytkowników AutoCADa*, PLJ Publishers, Warszawa, 1991.
4. **Marciniak A.:** *TurboPASCAL wersja 6.0*. Wydawnictwo Nakom, Poznań, 1991.
5. **Pikoń A.:** *AutoCAD wersja 10 & 11. Modelowanie przestrzenne, AutoCAD wersja 2000*. Helion, Gliwice, 1992, 1999.
6. **Przewłocki S.:** *Geometria wykreślna w zastosowaniach dla budownictwa i architektury*. Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego, Warszawa, 2000.

DRAWINGS IN SYSTEM AUTOCAD EXECUTED OUTSIDE THE APPLICATION

Summary: In report one presented on an example of spiral staircases the creation of primitives of complicated objects. One realized this by means of the program written in PASCAL language by a creation of drawing in DXF format. The report is situated in row of solutions enlarging possibilities of the system AutoCAD in a range of the modeling of spatial standard architectural objects not.

Key words: spiral stairs, overlay, AutoCAD, PASCAL, DXF format, architectural design

Artykuł zrealizowano w ramach pracy własnej W/IIB/7/03.

Janusz Krentowski, Romuald Szelaǳ, Rościszław Tribińo

WSPÓŁCZYNNIKI ZAGROŻENIA KATASTROFĄ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEJ STRUKTURY PRZEKRYCIA. PROGNOZA SUKCESU

Streszczenie: W publikacji przedstawiono etapy analizy stanu przekrycia pływalni sportowej, kwalifikując obiekt jako znajdujący się w stadium poprzedzającym katastrofę. Koncepcja obliczania wartości współczynnika zagrożenia, sformułowana na podstawie analizy procesu rozproszenia mocy w stadium uplastycznienia, została wykorzystana do prognozy w zakresie bezpieczeństwa przeciążonej konstrukcji stalowej. Uzupełniając analizę stanu uplastycznienia o wyniki badań nad przemieszczeniami struktury kratowej w skali naturalnej, uzasadniono ryzyko realizacji robót naprawczych.

W efekcie podjętych działań wyeliminowano stan zagrożenia a bezpieczną eksploatację przekrycia uzasadniono wynikami obliczeń zrealizowanych metodą stanów granicznych i pomiarami przemieszczeń węzłów struktury kratowej.

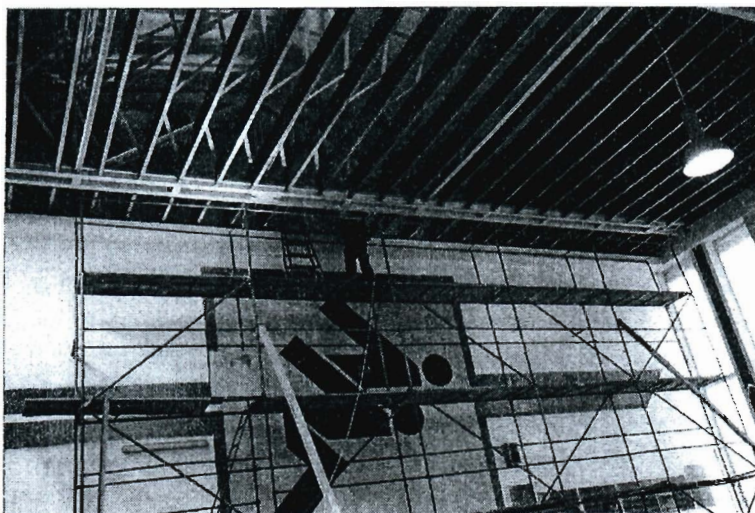
Słowa kluczowe: stan zagrożenia, rozproszenie mocy, katastrofa

1. Wstęp

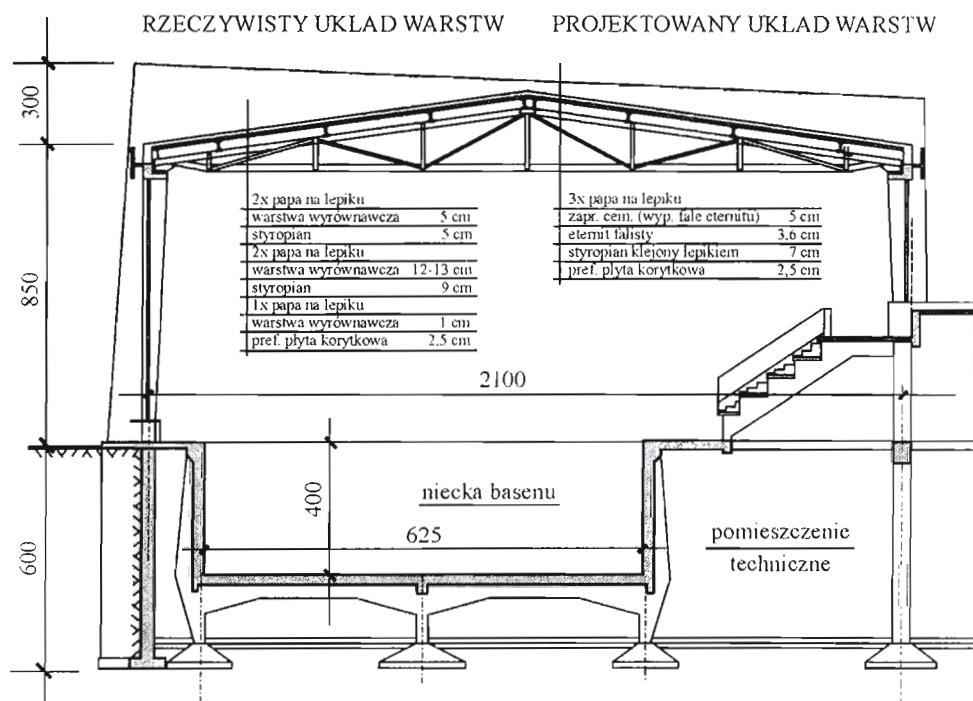
W miejskim kompleksie obiektów sportowych zrealizowano w latach siedemdziesiątych krytą pływalnię wraz z towarzyszącą infrastrukturą. Budynek pływalni poddano kilka lat temu procesowi termorenowacji, zgodnie ze zmienionymi przepisami, dotyczącymi izolacyjności obiektów budowlanych. Po wykonaniu robót i około trzyletniej eksploatacji stwierdzono wystąpienie zjawiska rozszczelnienia przekrycia, czego konsekwencją było przedostawanie się wody opadowej do wnętrza pływalni. Protokół odbioru robót termoizolacyjnych określał, że roboty związane z termorenowacją dachu zostały wykonane zgodnie z obowiązującymi normami, warunkami technicznymi i sztuką budowlaną.

2. Analiza rozwiązań konstrukcji obiektu

Przekrycie hali głównej pływalni wykonano ze złożonych wielogłęziowych elementów kratownic i systemu usztywnień. Rozpiętość modularna przekrycia wynosi 21,0 m, a maksymalna wysokość dwuspadowych dźwigarów kratowych jest równa 2,10 m. Połączenia głównych elementów nośnych wykonano technologią spawania, a część połączeń przy wykorzystaniu nieklasyfikowanych śrub. Węzły przekrycia obciążono płytami w formie systemu belek ciągłych, ukształtowanymi przez rozcięcie i zespawanie dwuteowych ażurowych profili walcowanych. Na płytach usytuowanych w rozstawach co 3,0 m zmontowano żelbetowe płyty korytkowe zamknięte. Układ stalowych elementów stężających łączony jest śrubami i blachami węzłowymi. Podpory dźwigarów stalowych wykonano w formie głowic słupów żelbetowych, przystosowanych do kotwienia stalowej struktury, a każdą strefę podporową mocowano śrubami M20. Układ elementów konstrukcyjnych przekrycia ilustruje rysunek 1. Na rysunku 2 pokazano sposób kształtowania konstrukcji przekrycia oraz żelbetowej niecki basenu, usytuowanej w poziomie piwnic budynku.



Rys. 1. Wnętrze hali głównej pływalni z konstrukcją dachu przesłoniętą ażurowym sufitem podwieszanym



Rys. 2. Przekrój budynku pływalni. Układ elementów konstrukcyjnych

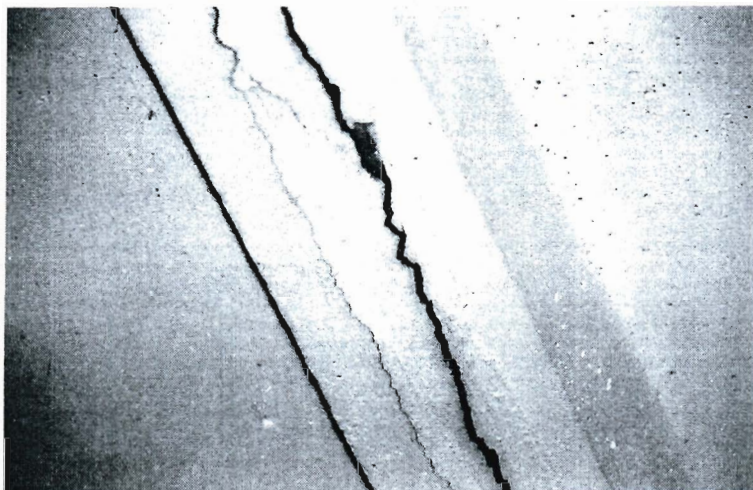
3. Procesy stymulujące stan zagrożenia

Konstrukcja przekrycia powinna bezpiecznie przejmować obciążenia zewnętrzne i spełniać warunki przegrody termoizolacyjnej.

Basen eksploatowano zgodnie z przeznaczeniem do okresu stwierdzenia nieuszczelności elementów przekrycia. Dokonano niezwłocznych oględzin makroskopowych i stwierdzono, że od zewnątrz pofałdowana jest i spękana powierzchnia z papy i warstw wyrównujących, a wewnątrz zarysowane są połączenia płyt korytkowych i uszkodzone elementy stalowej konstrukcji przekrycia.

Decyzję o natychmiastowym zamknięciu obiektu i zabezpieczeniu otoczenia przed dostępem osób podjęto po wykonaniu odkrywek. Na podstawie badań stwierdzono, że łączna grubość warstw docieplających i wyrównawczych, obciążających lekką, stalową, prętową konstrukcję przekrycia, wynosi około 35 cm. Gładź betonową ułożono na płytkach korytkowych za pośrednictwem falistych płyt eternitowych, które miały zapewnić wentylację połaci. W trakcie prac bu-

dowlanych niektóre pasma wentylacyjne zostały całkowicie zniszczone, a przez to kanały straciły drożność i przestały spełniać swoją funkcję. Konsekwencją tego zjawiska było zawilgocenie warstw docieplających, co dodatkowo wpłynęło na zwiększenie obciążenia elementów konstrukcyjnych przekrycia.



Rys. 3. Przykład spękania warstw przekrycia, umożliwiającego penetrację wody opadowej



Rys. 4. Stan warstw docieplających i wyrównawczych obciążających przeto-
wą konstrukcję przekrycia

Przykład spękania widocznego na wewnętrznej powierzchni płytek korytkowych oraz fragmenty rzeczywistego stanu materiałów docieplających i wyrównawczych pokazano na rysunkach 3 i 4.

Graniczne ugięcie dachowych dźwigarów kratowych określone w normie [6] wynosi

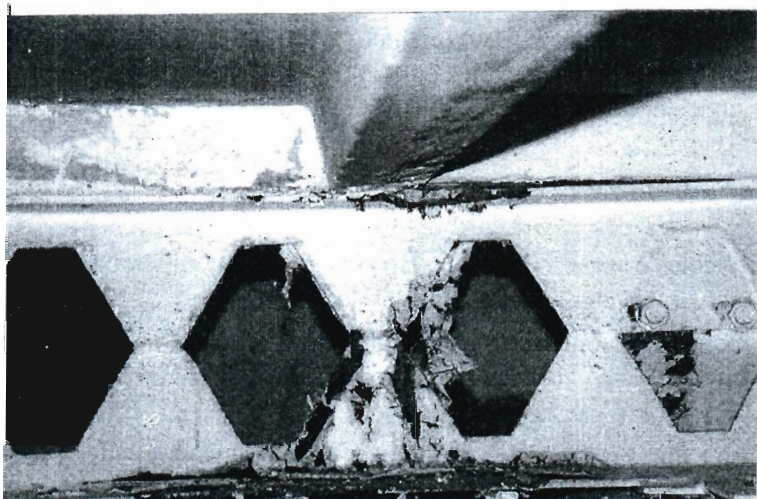
$$a_{gr} = l_o / 250 = 8,4 \text{ cm} \quad (1)$$

podczas gdy ugięcia węzłów środkowych pasa dolnego, zmierzone w fazie rozpoznania stanu istniejącego, zawierały się w przedziale $a_z = 12,7 \div 17,2$ cm. Na podstawie pomiarów i analiz ustalono wartości obciążeń powodujących opisany stan destrukcji. Ciężar charakterystyczny odniesiony do powierzchni dachu był równy $q_k = 6,45 \text{ kN/m}^2$, a ciężar obliczeniowy $q_o = 8,11 \text{ kN/m}^2$. W wyniku studiów fragmentów dokumentacji technicznej dokonano identyfikacji obciążeń projektowanych w stadium bezpiecznej eksploatacji obiektu. Ze względu na odmienną metodę projektowania, w publikacji obciążenia usystematyzowano według kryteriów stanów granicznych i uzyskano wartości obciążeń projektowanych $q_{kp} = 3,87 \text{ kN/m}^2$ i $q_{op} = 4,76 \text{ kN/m}^2$.

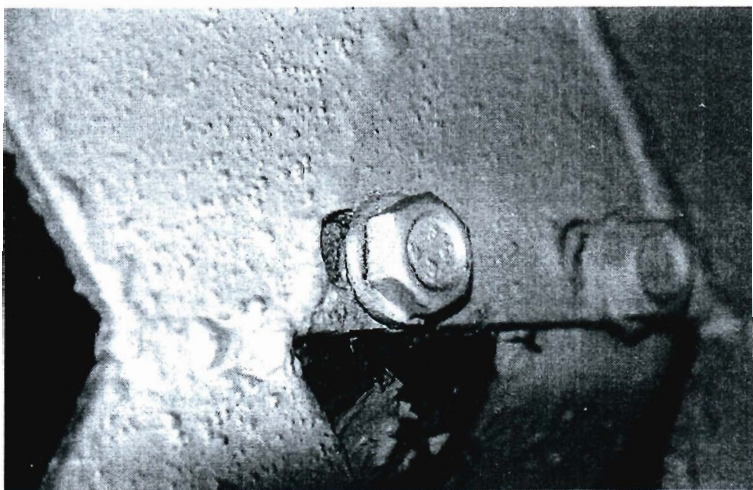
Porównując wstępne wartości obciążeń projektowanych i rzeczywistych oceniono, że wewnątrz obiektu nie można bezpiecznie prowadzić żadnych prac ani realizować zabezpieczeń doraźnych, które zalecane są do wykonania w stanach przedawaryjnych. Stan przeciążenia przekrycia, nadmierne ugięcia, deformacja elementów konstrukcyjnych i początkowe procesy destrukcji połączeń uznano za dostateczne uzasadnienie, sygnalizujące fakt, że katastrofa może nastąpić w sposób nagły. Wskutek efektu przeciążenia zostały zniszczone niektóre połączenia śrubowe oraz lokalnie zdeformowane pręty struktury.

Spawane połączenia elementów płatwi ażurowych lokalnie uległy całkowitej destrukcji w wyniku procesów korozyjnych, prowadzących do wyczerpania nośności złącza i powstania stanu zagrożenia.

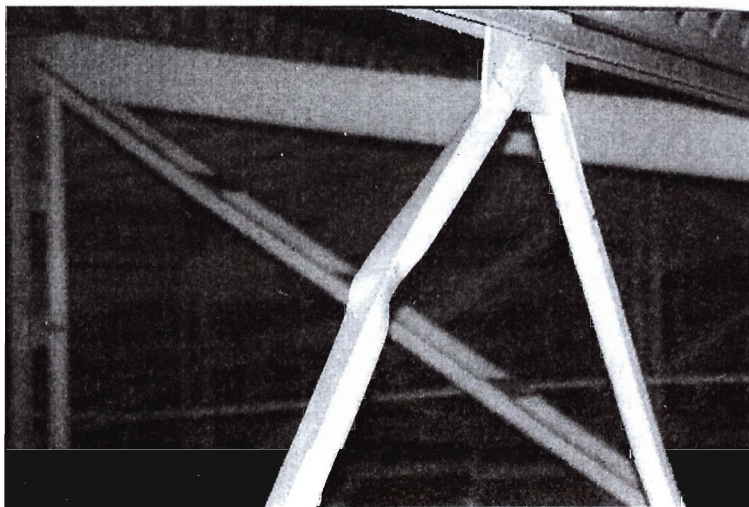
Połączenie śrubowe pokazane na rysunku 6, osłabione w wyniku procesów korozji wżerowej, nie przeniesie projektowanych i zrealizowanych obciążeń. Przykład wybozonego przestrzennie pręta struktury przekrycia ze strefami uplastycznienia pokazano na rysunku 7.



Rys. 5. Lokalna destrukcja spawanego połączenia ażurowej platwi



Rys. 6. Przykład zniszczenia śruby w złączu konstrukcji



Rys. 7. Przykład deformacji i utraty stateczności pręta struktury, wskutek przeciążenia i odkształcenia przekrycia

Technologie zabezpieczeń doraźnych należało wyeliminować również ze względu na to, że cienka powłoka niecki basenu i konstrukcja wsporcza niecki nie zostały przystosowane do nadmiernych obciążeń stanu awaryjnego, a w stanie katastrofy zostałyby również zniszczone.

Tak interpretowane procesy stymulujące stan zagrożenia uzasadniły konieczność analizy stanów naprężeń w zakresie określenia stopnia zagrożenia katastrofą i podjęcie decyzji o sposobie przeciwdziałania, stosownej do otrzymanych wyników.

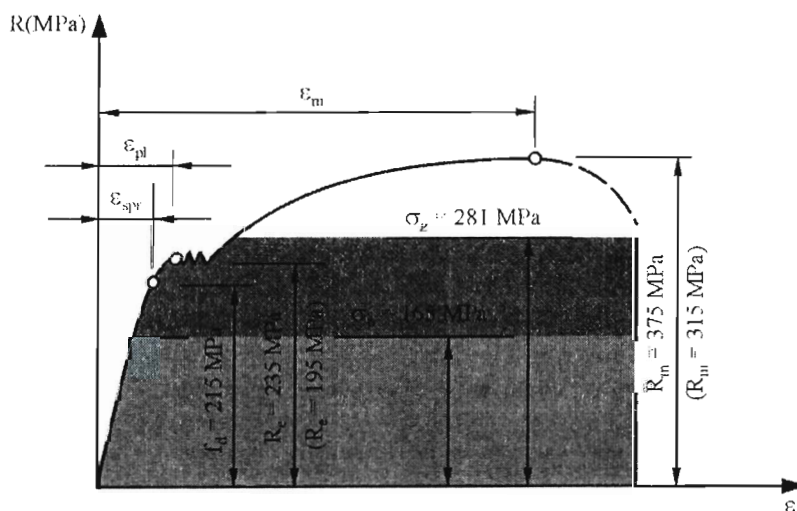
4. Naprężenia i odkształcenia plastyczne. Zagrożenie katastrofą

Zrealizowano analizę stanu naprężeń i odkształceń głównych elementów przekrycia, dźwigarów kratowych o rozpiętości $l_o = 21,0$ m, których stadium wytężenia materiałów [5] warunkowało opracowanie metody przeciwdziałania katastrofie nie wykluczając rozbiórki obiektu. W wyniku równoważenia sił w węzłach [4] otrzymano przyrosty sił wewnętrznych w prętach dźwigarów o 170% w porównaniu z siłami projektowanymi. W takim stadium konieczna okazała się analiza i określenie procesu zmian liniowej funkcji naprężeń, przez sprężystą strefę nieliniową, do nieliniowej funkcji w przedziale odkształceń plastycznych, co uzasadniały wyniki pomiarów wartości przemieszczeń węzłów konstrukcji.

Relacje liniowe w stanie kształtowania przekrycia uzasadnia nierówność, z której wynika, że normowy warunek w zakresie ugięć granicznych był spełniony, co potwierdza wynik

$$a_{gr} = 8,4 \text{ cm} > a_p = 5,2 \text{ cm}.$$

We wstępnej fazie analizy przyjęto założenie, że przekrycie zostało zrealizowane ze stali St3SX, dla której naprężenia obliczeniowe $f_d = 215 \text{ MPa}$ usytuowane są w przedziale liniowej funkcji $\sigma = f(\epsilon)$, co wyjaśnia rysunek 4, na którym oznaczono granicę plastyczności $R_e = 235 \text{ MPa}$ i wytrzymałość na rozciąganie $R_m = 375 \text{ MPa}$.



Rys. 8. Funkcje i parametry wykorzystywane do określenia stopnia zagrożenia katastrofą

Uwzględniając rzeczywiste charakterystyki przekroji elementów przekrycia obliczono, że maksymalne naprężenia rozciągające w wyniku działania projektowanej siły obliczeniowej N_p nie przekraczały wartości $\sigma_p = 165 \text{ MPa}$ i uzasadniały sprężystą pracę konstrukcji nawet dla stali gatunku St0S o granicy plastyczności $R_e = 195 \text{ MPa}$. Wynikiem przeciążenia okazał się przyrost naprężeń w pasie dolnym do wartości $\sigma_z = 281 \text{ MPa}$, które są większe od wartości obliczeniowych $f_d = 215 \text{ MPa}$, a w początkowym stadium badań nie można było wykluczyć, że konstrukcji przekrycia nie wykonano ze stali St0S, o naprężeniach

$f_d = 175$ MPa. W obu sytuacjach naprężenia charakteryzuje nierówność $\sigma_z = 281$ MPa $> f_d$, co potwierdza istniejący stan zagrożenia i konieczność wyłączenia obiektu z eksploatacji. Tak sformułowana nierówność nie uzasadniła natomiast czynności, które w stanach uplastycznienia należy zrealizować w stadium zagrożenia, co potwierdzają efekty publikowane w pracy [3].

Niezbędne w takim stadium wyężenia okazało się oznaczenie stopnia zagrożenia konstrukcji katastrofą, który określa uogólniony związek między mocą obciążeń zewnętrznych i wewnętrznych [1] w wirtualnym stanie przemieszczeń wyrażony stosunkiem (2)

$$k = \dot{L} / \dot{D} \quad (2)$$

gdzie:

$\dot{L}$ – moc obciążeń zewnętrznych w wirtualnym stanie przemieszczeń,

$\dot{D}$ – moc obciążeń wewnętrznych odniesiona do warunku plastyczności.

W jednoosiowym stanie naprężenia, stosownie do charakterystyki materiału konstrukcyjnego [2] wykorzystano kryteria (3)

$$\dot{D}(R_e) \quad \text{lub} \quad \dot{D}(R_m), \quad (3)$$

przy czym po wyeliminowaniu prędkości przemieszczeń i wirtualnych mocy rozproszonych otrzymano dla prętów struktury wartości współczynników stopnia zagrożenia katastrofą w formach

$$k = \sigma / R_e \quad \text{lub} \quad k = \sigma / R_m. \quad (4)$$

Doświadczenie konstruktora, stan konstrukcji oraz znajomość zagadnień z zakresu inżynierii materiałowej wpływa na stopień ryzyka przy ocenie wartości współczynników k dla kolejnych stadiów analizy. W początkowym stadium realizacji konstrukcji stopnie zagrożenia konstrukcji przekrycia oszacowane na podstawie kryteriów (4) wynosiły dla stali St3SX:

$$\begin{aligned} k(R_e) &= 165/235 = 0,70, \\ k(R_m) &= 165/375 = 0,44. \end{aligned} \quad (5)$$

Po latach eksploatacji przy braku dokumentacji i danych o procesie realizacji inwestycji oraz przy braku możliwości przeprowadzenia badań laboratoryjnych

z zakresu identyfikacji materiałowych [5], bezpieczniej jest określić współczynnik katastrofy, zakładając że przekrycie zrealizowano ze stali St0S:

$$\begin{aligned} k(R_e) &= 165/195 = 0,85, \\ k(R_m) &= 165/315 = 0,52. \end{aligned} \quad (6)$$

Analizując parametry f_d, a_{gr} i k jednoznacznie stwierdzono bezpieczny stan eksploatacji przekrycia, dla projektowanych wartości obciążeń i naprężeń.

W sytuacji istniejącego przeciążenia przeanalizowano stopnie zagrożenia, które wzrosły do wartości:

$$\left. \begin{aligned} k(R_e) &= 281/235 = 1,20 \\ k(R_m) &= 281/375 = 0,75 \end{aligned} \right\} \text{ St3SX}, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} k(R_e) &= 281/195 = 1,44 \\ k(R_m) &= 281/315 = 0,89 \end{aligned} \right\} \text{ St0S}; \quad (8)$$

oraz stany naprężeń spowodowane przeciążeniem

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 281 \text{ MPa} > f_d = 215 \text{ MPa}, \\ \sigma_z &= 281 \text{ MPa} > f_d = 175 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (9)$$

a uwzględniając rzeczywiste przemieszczenia otrzymano nierówność

$$a_{gr} = 8,4 \text{ cm} < a_z = 17,2 \text{ cm}. \quad (10)$$

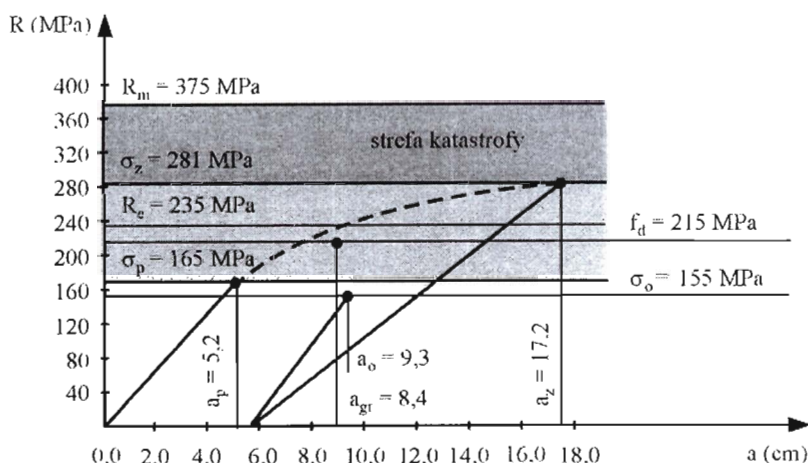
Stan przekrycia scharakteryzowany nierównościami (7)÷(10) poprzedza katastrofę budowlaną.

5. Efekt histerezy. Prognoza sukcesu

Zrealizowano symulacje stanu przekrycia w sytuacji odciążenia konstrukcji przez całkowity demontaż warstw ocieplających i wyrównawczych do powierzchni żelbetowych płyt korytkowych, pomimo że nie dysponowano żadną bezpieczną koncepcją wykonania takich robót. Do analizy problemu zmobilizo-

wał fakt, że masa wadliwie i niepotrzebnie ułożonych materiałów, które mogłyby odciążyć przekrycie wynosiła 300 t, co odpowiadało obciążeniu 3000 kN.

Zrealizowano obliczenia, których wynikiem było zmniejszenie maksymalnej siły w prętach pasa dolnego do wartości $N'_z = 455,63$ kN co stanowiło 47% siły spowodowanej obciążeniem projektowanym. Wartość siły N_z obliczono po wyeliminowaniu również obciążenia dachu śniegiem. Stan taki umożliwił na przykład realizację rozbiórki w sposób przewidziany stosownym projektem, tak by nie została uszkodzona niecka basenu i elementy wyposażenia wewnątrz. Uzasadniał to fakt uplastycznienia materiału, co uniemożliwiało liniową interpretację stanów przemieszczeń i naprężeń jako konsekwencje zjawiska histerezy. Symulację stanu przemieszczeń zrealizowano na podstawie rzeczywistych pomiarów ugięć po odciążeniu dachu. Opracowano koncepcję demontażu materiałów przy użyciu żurawia o osi równoległej do zewnętrznej ściany podłużnej pływalni. Dach odciążono realizując systematycznie pomiary ugięć węzłów dźwigarów metodą niwelacji precyzyjnej, tak że w końcowej fazie związki między przemieszczeniami a naprężeniami okazały się liniowe z efektem trwałego odkształcenia. Przemieszczenie trwałe po odciążeniu ustabilizowało się przyjmując wartość $a_t = 5,8$ cm, a zmierzone maksymalne przemieszczenie z efektem nieliniowym, w przedziale naprężeń $R_e \leq \sigma_z < R_m$ spowodowane przeciążeniem wyniosło $a_z = 17,2$ cm.

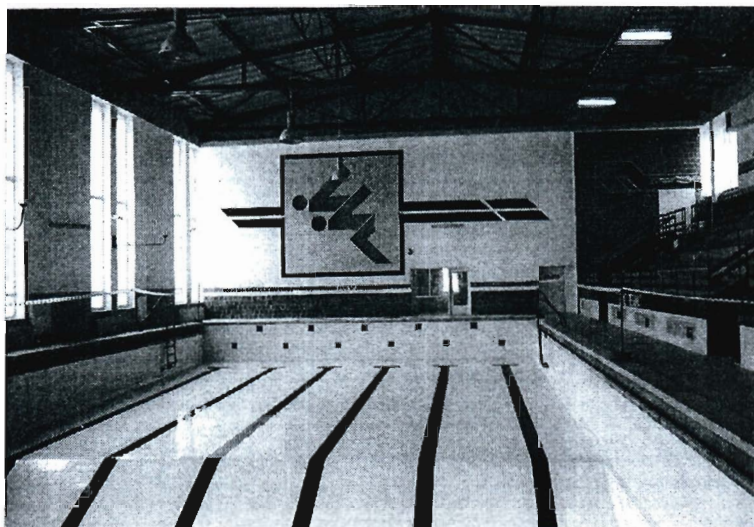


Rys. 9. Strefa zagrożenia katastrofą. Sprężyste i trwałe ugięcia dźwigarów kratowych wykonanych ze stali St3SX

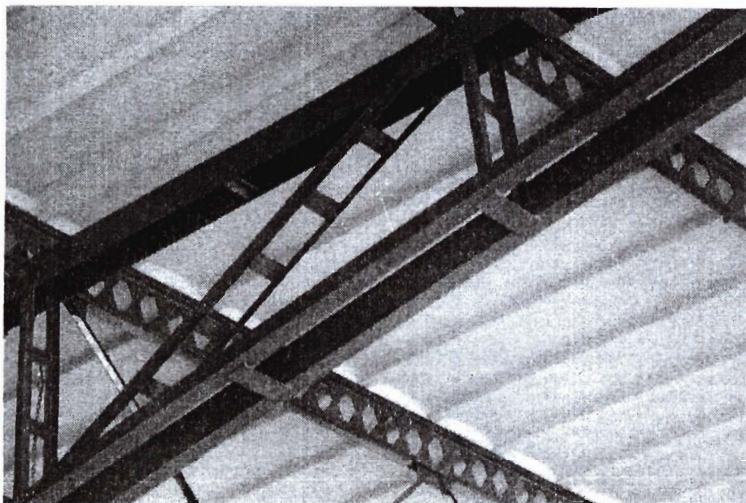
Na rysunku 9 pokazano efekt odciążenia z pętlą histerezy, gdy uzyskano trwały stan naprężeń $\sigma_o = 155 \text{ MPa}$ dla nowych lekkich warstw ocieplających i pokrywowych oraz stowarzyszone przemieszczenie $a_o = 9,3 \text{ cm} > a_{gr} = 8,4 \text{ cm}$. W przedziale przemieszczeń $a_l \leq a < a_o$ funkcja $\sigma(a)$ jest liniowa. Rozproszenie energii w stanie uplastycznienia obniżyło naprężenia obliczeniowe do skorygowanej doświadczalnie wartości $f_{ds} = 177 \text{ MPa} > \sigma_o = 155 \text{ MPa}$. W efekcie prezentowanych wyników badań przekrycia w skali naturalnej sformułowano pozytywną prognozę realizacji docieplenia z wyeliminowaniem wad spowodowanych w okresie eksploatacji przeciążonej konstrukcji, zrealizowanej jak ostatecznie ustalono, ze stali St3S.

6. Utylitarne efekty badań i weryfikacja prognozy

Po demontażu warstw obciążających dach pływalni o masie 300 t, wykonano projekt i zrealizowano docieplenie z płyt warstwowych Metalplast ISOTHERM typu PW 8/B-U2, sprawdzając nośność graniczną elementów przekrycia zgodnie z normą [6]. W analizie nośności przyjęto skorygowaną wartość naprężeń obliczeniowych f_{ds} , którą uwzględniono również w analizie zagrożeń stateczności prętów ściskanych i nośności połączeń. Wzmocniono i ustabilizowano połączenia ażurowych płatwi, przywracając projektowane modele elementów ciągłych.



Rys. 10. Widok wzmocnionej konstrukcji przekrycia pływalni



Rys. 11. Fragment wzmocnionej konstrukcji dźwigarów, płatwi i stężeń zabezpieczonych powłokami antykorozyjnymi

Uzyskany efekt ilustrują rysunki 10 i 11.

Wyeliminowano obciążenie pasów dolnych ciężarem stropu podwieszonego i zrealizowano prace wykończeniowe. Obiekt dopuszczono do eksploatacji.

Literatura

- [1] **Krentowski J., Tribillo R.:** *Koncepcja prognozowania zagrożenia konstrukcji katastrofą budowlaną.* „Inżynieria i Budownictwo”, nr 4/1999.
- [2] **Krentowski J., Tribillo R.:** *Analiza wpływu efektu plastycznego wzmocnienia na nośność konstrukcji żelbetowych.* Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Budownictwo nr 21/2001.
- [3] **Moy Stuart S. J.:** *Plastic Methods for Steel and Concrete Structures.* „Departments of Civil and Environmental Engineering University of Southampton”, London, 1996.
- [4] **Karczewski J. A.:** *Wpływ rozmieszczenia prętów w sprężysto-plastycznej przestrzennej konstrukcji prętowej na jej nośność graniczną.* „Inżynieria i Budownictwo”, nr 4/1999.
- [5] PN-88/H-84020 *Stal niestopowa konstrukcyjna ogólnego przeznaczenia. Gatunki.*
- [6] PN-90/B-03200 *Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie.*

THE CATASTROPHE CONDITION FACTORS OF LINEAR-ELASTIC COVER STRUCTURE. THE SUCCESS FORECAST

Summary: The paper presents the analysis of cover construction state over swimming pool. The result of classical computation using linear-elastic theory proved that the construction must be reinforced. The analysis regarding yield criterions has lead to another conclusion. The work has been recapitulated by presentation of experimental studies which enable to verify results of the analysis and computations.

Key words: failure condition, energy dissipation, disaster

Artykuł zrealizowano w ramach pracy badawczej własnej W/IIB/16/03.

Joanna Krętowska

ELEMENTY PÓLNIESKOŃCZONE TYPU „DISPLACEMENT DESCENT” WYKORZYSTYWANE PRZY ANALIZOWANIU WSPÓŁPRACY BUDOWLI Z PODŁOŻEM GRUNTOWYM

Streszczenie: Przy rozwiązywaniu wielu problemów inżynierskich metodą elementów skończonych pojawia się potrzeba analizowania zagadnień w obszarze nieograniczonym. Obszar ten dosyć często bywa „obcinany” wzdłuż fikcyjnego brzegu i modelowany klasycznymi elementami skończonymi, co wprowadza bardzo dużą liczbę niewiadomych układu równań MES, którego rozwiązanie jest czasochłonne a czasami wręcz niemożliwe. Znacznie bardziej efektywne jest zamodelowanie tego obszaru elementami półnieskończonymi. Celem pracy jest synteza występujących w literaturze elementów półnieskończonych typu „displacement descent” oraz wyznaczenie macierzy sztywności przestrzennych elementów półnieskończonych z eksponentyjną funkcją zaniku.

Słowa kluczowe: elementy półnieskończone, metoda elementów skończonych, funkcje zaniku

1. Wprowadzenie

W wielu zagadnieniach inżynierskich analizowanych metodą elementów skończonych potrzebna jest znajomość naprężeń, przemieszczeń czy odkształceń z uwzględnieniem wpływu obszaru znacznie oddalonego od miejsca przyłożenia obciążenia, co ma miejsce np. przy analizowaniu zagadnień współpracy budowli z podłożem gruntowym.

W 1975 roku Bettles i Zienkiewicz opublikowali pierwszą pracę na temat elementów półnieskończonych (były to elementy 1-D i 2-D) [8], jednakże jeszcze do końca lat siedemdziesiątych problem uwzględniania w analizach MES obszarów nieograniczonych był rozwiązywany poprzez modelowanie dostatecznie dużego obszaru klasycznymi elementami skończonymi, co wymagało zastosowania bardzo dużej liczby elementów skończonych a tym samym wprowadzało bar-

dzo dużą liczbę niewiadomych układu równań MES, którego rozwiązanie było bardzo czasochłonne a czasami wręcz niemożliwe.

Rozwój elementów półnieskończonych przebiegał w dwóch kierunkach:

1. zastosowanie funkcji zanikających (decay functions) w połączeniu z konwencjonalnymi funkcjami kształtu – elementy typu „displacement descent” [1], [2], [3], [4], [5],
2. odwzorowywanie (mapping) elementu skończonego do nieskończonego, czyli stworzenie całkowicie nowych funkcji kształtu elementu półnieskończonego – elementy typu „coordinate ascent”.

2. Elementy półnieskończone typu „displacement descent”

Podstawową ideą elementów półnieskończonych typu „displacement descent” jest wykorzystanie w opisie pola przemieszczeń funkcji kształtu analogiczne do tego, jakie się wykorzystuje dla klasycznych elementów skończonych, ale zmodyfikowanych poprzez wprowadzenie funkcji zaniku (ang. decay function) [1], [2], [3], [4].

Funkcja kształtu elementu półnieskończonego ma w związku z tym postać

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = f_i(\xi, \eta, \zeta) M_i(\xi, \eta, \zeta) \quad (1)$$

gdzie:

M_i – funkcja kształtu klasycznego elementu skończonego,

f_i – funkcja zaniku,

N_i – funkcja kształtu elementu półnieskończonego,

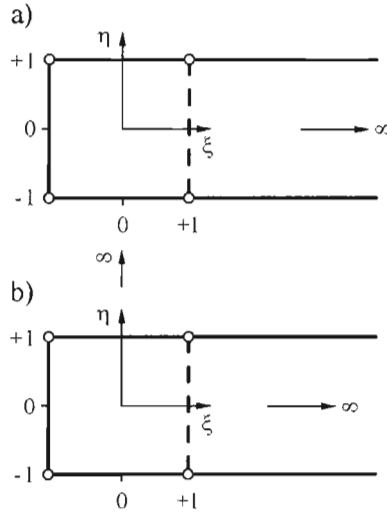
ξ, η, ζ – współrzędne lokalne,

$i = 1, 2, \dots, n$, n – liczba węzłów w elemencie półnieskończonym.

Funkcja zaniku $f_i(\xi, \eta, \zeta)$ musi być równa jedności w swoim węźle, tzn. $f_i(\xi, \eta, \zeta) = 1$ (nie ma przy tym żadnych specjalnych wymagań co do jej wartości w pozostałych węzłach elementu półnieskończonego). Funkcja zaniku musi jednak zapewniać realistyczny opis badanego zjawiska. N_i musi natomiast dążyć do wartości jaką przyjąłaby poszukiwana zmienna w punkcie obszaru nieskończenie odległym od rozpatrywanego.

Najczęściej stosowanymi funkcjami zaniku są:

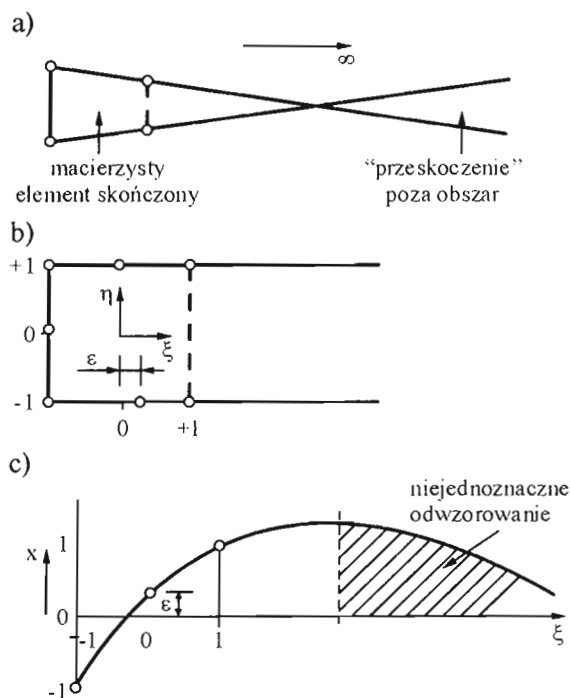
- a) funkcje expotencjalne,
- b) funkcje wymierne.



Rys. 1. Dwuwymiarowy element półnieskończony

Jeżeli M_i ($i = 1, \dots, n$) jest funkcją kształtu macierzystego klasycznego elementu skończonego typu C^0 (n – liczba węzłów), to możemy określić macierz Jakobiego odwzorowującą element rodzimy w element o zmienionym kształcie (z tą samą ilością węzłów). Choć odwzorowanie to zostało dokonane wewnątrz elementu macierzystego jest ono zdefiniowane wszędzie. Wyznacznik macierzy Jakobiego musi mieć, oczywiście, wartość dodatnią. Jeżeli z kolei wyślemy element do nieskończoności, to odwzorowanie bazujące na funkcji kształtu elementu skończonego jest nadal ważne, przy czym należy się upewnić, że odwzorowanie nie traci ważności w pewnym obszarze elementu półnieskończonego [2], [4], czyli czy nie dochodzi do następujących sytuacji:

- krawędzie elementu, które zmierzają do nieskończoności przecinają się w pewnym punkcie, prowadzą do wypadnięcia poza obszar, (rys. 2a),
- dla ośmiowęzłowego elementu macierzystego (rys. 2b i rys. 2c), jeżeli węzeł środkowy nie pokrywa się z osiami układu współrzędnych układu globalnego i lokalnego odwzorowanie może być niejednoznaczne w pewnych węzłach elementu.



Rys. 2. Odwzorowanie elementu półnieskończonego dwuwymiarowego

2.1. Ekspotencjalne funkcje zaniku [2], [4]

Funkcje ekspotencjalne są często wykorzystywane jako funkcje zaniku w elementach półnieskończonych. Różniczkowanie czy całkowanie tych funkcji przebiega w sposób równie prosty jak w wypadku wielomianów, a zasadniczą ich cechą jest szybsza zbieżność do zera w porównaniu z funkcjami wymiernymi. W wypadku zanikania jedynie w kierunku dodatnim ξ funkcja zaniku przybiera postać:

$$f_i(\xi, \eta, \zeta) = \exp\left(\frac{\xi_i - \xi}{L}\right) \quad \text{dla } \xi \rightarrow \infty, \quad (2)$$

W wypadku zanikania w obu kierunkach:

$$f_i(\xi, \eta, \zeta) = \exp\left(\frac{\xi_i - \eta_i - \xi - \eta}{L}\right) \quad \text{dla } \xi \rightarrow \infty, \quad (3)$$

W wypadku gdy $\xi \rightarrow -\infty$ funkcja zaniku przybiera postać

$$f_i(\xi, \eta, \zeta) = \exp\left(\frac{\xi - \xi_i}{L}\right) \quad \text{dla } \xi \rightarrow -\infty, \quad (4)$$

Wielkość L (ang. the severity of the decay) [4] jest to współczynnik, który decyduje o „sile” zaniku. Można przy tym przyjąć, że $L = 1$, a zanikaniem sterować poprzez zmianę odległości między węzłami.

Sposób optymalizacji eksponentjalnej funkcji zaniku opisał Magda w pracy [6].

2.2. Wymierne funkcje zaniku [2], [3], [4]

W wypadku zanikania jedynie w kierunku dodatnim ξ funkcja zaniku ma postać:

$$f_i(\xi, \eta) = \left(\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0}\right)^n \quad (5)$$

Dla zanikania w kierunkach ξ i η mamy:

$$f_i(\xi, \eta) = \left(\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0}\right)^n \left(\frac{\eta_i - \eta_0}{\eta - \eta_0}\right)^n \quad (6)$$

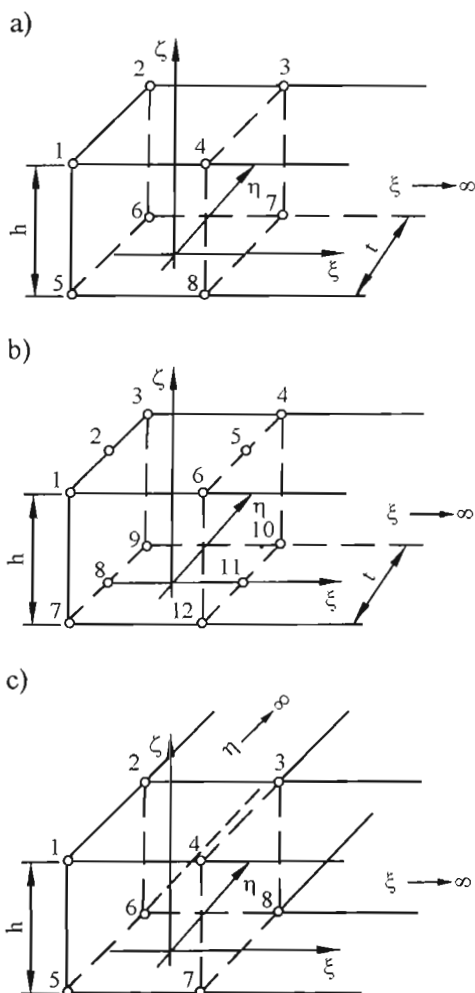
Gdy $\xi \rightarrow -\infty$ funkcja zaniku przybiera postać

$$f_i(\xi, \eta) = \left(\frac{\xi_0 - \xi_i}{\xi_0 - \xi}\right)^n \quad (7)$$

gdzie ξ_0 jest specjalnie dobranym punktem, który musi znajdować się na zewnątrz elementu i po przeciwnej stronie niż strona dążąca do nieskończoności. Przy dodatnim zwrocie ξ musi być więc zachowany warunek $\xi_0 < -1$, co pozwala na uniknięcie osobliwości wewnątrz elementu. Wykładnik n musi natomiast być większy niż najwyższa potęga ξ w wyjściowej funkcji kształtu M_i . Zapewnia to, że jeżeli $\xi \rightarrow -\infty$ to $N_i \rightarrow 0$.

3. Wyznaczanie macierzy sztywności przestrzennych elementów półnieskończonych z eksponentalną funkcją zaniku

Analizie poddano półnieskończone przestrzenne elementy 8 węzłowe przy $\xi \rightarrow \infty$, elementy 8 węzłowe przy $\xi \rightarrow \infty$ i $\eta \rightarrow \infty$ oraz 12 węzłowe przy $\xi \rightarrow \infty$ (rys. 3).



Rys. 3. Przestrzenne elementy półnieskończone

Przemieszczenie w dowolnym punkcie elementu możemy zatem zapisać jako

$$\mathbf{q} = [\mathbf{I}N_1 \quad \mathbf{I}N_2 \quad \mathbf{I}N_3 \quad \dots \quad \mathbf{I}N_n] \mathbf{d}^e, \quad (8)$$

gdzie:

N_i – funkcja kształtu i -tego węzła elementu półnieskończonego,

$\mathbf{I}$ – macierz jednostkowa o wymiarze 3×3 .

W elementach półnieskończonych przedstawionych na rysunku 3 zastosowano funkcje zaniku postaci [2], [4]

$$\begin{aligned} f_i(\xi, \eta, \varsigma) &= \exp\left(\frac{\xi_i - \xi}{L}\right) & \text{dla } \xi \rightarrow \infty, \\ f_i(\xi, \eta, \varsigma) &= \exp\left(\frac{\xi_i + \eta_i - \xi - \eta}{L}\right) & \text{dla } \xi \rightarrow \infty, \eta \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie:

L – współczynnik wyznaczający „ostrość” zaniku (ang. the severity of the decay) [4], [5].

W wypadku gdy $\xi \rightarrow -\infty$, funkcja zaniku przybiera postać

$$f_i(\xi, \eta, \varsigma) = \exp\left(\frac{\xi - \xi_i}{L}\right). \quad (10)$$

Dla elementu dwunastowęzłowego (rys. 3) M_i ma postać

▪ węzły narożne:

$$M_i(\xi, \eta, \varsigma) = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)\eta_0(1 + \eta_0)f_z, \quad \xi_0 = \xi\xi_i \quad \eta_0 = \eta\eta_i, \quad (11)$$

▪ węzły pośrednie:

$$M_i(\xi, \eta, \varsigma) = \frac{1}{2}(1 + \xi_0)(1 - \eta^2)f_z. \quad (12)$$

Dla elementu ośmiowęzłowego M_i ma postać

$$M_i(\xi, \eta, \varsigma) = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)f_z, \quad \xi_0 = \xi\xi_i \quad \eta_0 = \eta\eta_i. \quad (13)$$

Związek pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami węzłów ma postać:

$$\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{d}^e, \quad (14)$$

$$\varepsilon = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_n] \mathbf{d}^e, \quad (15)$$

gdzie n – liczba węzłów elementu,

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Niezbędne do określenia macierzy $\mathbf{B}$ pochodne cząstkowe $\frac{\partial N_i}{\partial x}, \frac{\partial N_i}{\partial y}, \frac{\partial N_i}{\partial z}$, wyznaczamy w sposób analogiczny do tego, jaki przyjmujemy w wypadku klasycznych elementów MES [7]

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

Pochodne cząstkowe $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \frac{\partial N_i}{\partial \eta}, \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$ obliczamy ze wzorów:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial M_i}{\partial \xi} f_i + M_i \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \quad \text{dla } \xi \rightarrow \infty, \quad (18)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial M_i}{\partial \eta} f_i$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial M_i}{\partial \xi} f_i + M_i \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \quad \text{dla } \begin{matrix} \xi \rightarrow \infty \\ \eta \rightarrow \infty \end{matrix} \quad (19)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial M_i}{\partial \eta} f_i + M_i \frac{\partial f_i}{\partial \eta}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^*}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2^*}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3^*}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_n^*}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1^*}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2^*}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3^*}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_n^*}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1^*}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2^*}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_3^*}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_n^*}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Pochodne cząstkowe $\frac{\partial N_i^*}{\partial \xi}, \frac{\partial N_i^*}{\partial \eta}, \frac{\partial N_i^*}{\partial \zeta}$, obliczamy jak dla macierzystych elementów skończonych ze wzorów:

$$N_i^*(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4} [1 + \xi \xi_i] [1 + \eta \eta_i] f_z, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \xi_i &= \pm 1, & \eta &= \pm 1 \\ f_z &= \zeta & \text{dla } z = h & \text{lub } f_z = 1 - \zeta & \text{dla } z = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Macierz sztywności elementu wyznaczamy ze wzoru [7]:

$$\mathbf{K}_e = \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dV, \quad (23)$$

gdzie:

B – macierz zależności pomiędzy odkształceniami a przemieszczeniami węzłowymi elementu,

D – macierz sprężystości.

Macierze sztywności elementów półnieskończonych zostały wyprowadzone na drodze całkowania bezpośredniego, co w wypadku elementów o nieskomplikowanej geometrii nie jest uciążliwe. Jednakże w wypadku elementów o bardziej złożonych kształtach zaleca się wykorzystywanie reguł całkowania numerycznego dla zakresu $< 0, \infty$ (np.: formuły Gaussa-Laguerre'a).

Pierwsze wyrazy macierzy sztywności elementu półnieskończonego ośmiowęzłowego przy $\xi \rightarrow \infty$ mają postać:

$$K_{11} = \frac{E_0}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu) \frac{tac}{6} + \frac{1-2\nu}{2} \frac{h^2 b}{16t} \left(\frac{2}{3} + \frac{d}{3} \right) \right\} + \\ + \frac{E_0}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{td^2 c}{24} \left(\frac{15}{2L} - \frac{L^3}{2} + \frac{5L}{2} - \frac{5}{2} - \frac{L^2}{2} \right) + \frac{td}{48} \left(4L - 2L^2 - 2 + \frac{L^3}{2} \right) + \frac{tb}{12} \right\},$$

$$K_{12} = \frac{E_0}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \nu \frac{h}{12} + \frac{1-2\nu}{2} \frac{h}{12} \right\},$$

$$K_{13} = \frac{E_0}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \nu \frac{tdc}{12} \left(\frac{4}{L} + \frac{L}{2} + 1 - \frac{L^2}{8} \right) - \frac{t}{2} \right\} + \\ + \frac{E_0}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \frac{1-2\nu}{2} \frac{tdc}{12} \left(\frac{4}{L} + \frac{L}{2} + 1 - \frac{L^2}{8} \right) - \frac{t}{2} \right\},$$

gdzie:

h – wysokość elementu,

t – szerokość elementu,

L – ostrość zaniku wyznaczona według [4],

$d = \operatorname{tg} \alpha$,

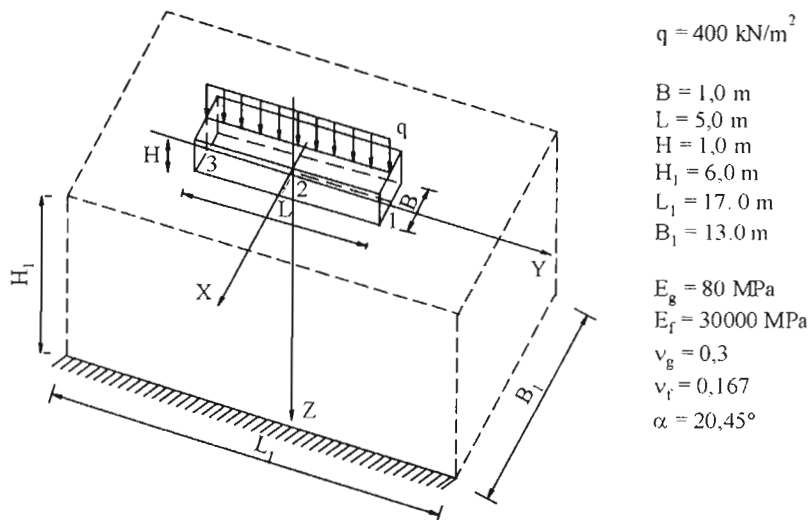
$$c = \frac{1}{2d} - \frac{2}{d^3} + \frac{4}{d^3} \ln \frac{2+d}{2},$$

$$a = \frac{2}{L} + 1,$$

$$b = 2L + L^2.$$

4. Przykład obliczeniowy

Przeprowadzono analizę przemieszczeń w gruncie pod łąwą fundamentową (rys. 4), który zamodelowano według rys (wariant I) oraz rys (wariant II).

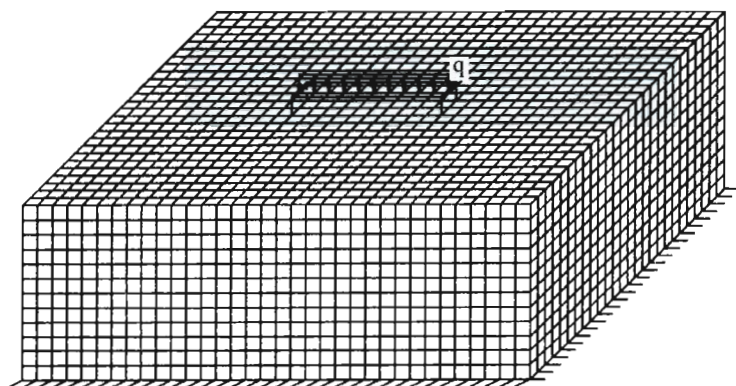


Rys. 4. Ława fundamentowa posadowiona na gruncie

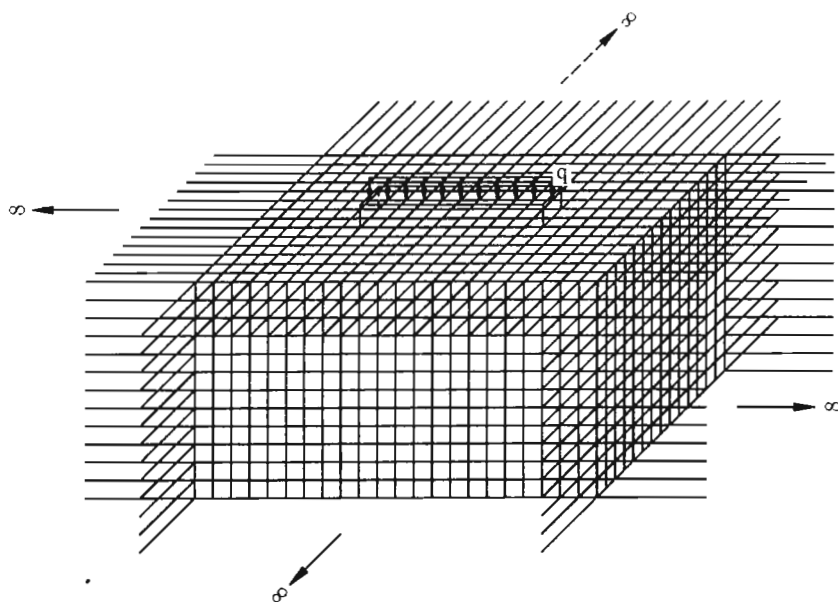
Wariant I – bryłę gruntu $17 \times 13 \times 6 \text{ m}$. zamodelowano ośmiowęzłowymi elementami skończonymi o wymiarach $0,5 \times 0,5 \times 0,5 \text{ m}$ (rys. 5), wprowadzając 12285 węzłów oraz narzucając warunki brzegowe (przemieszczenia równe 0) na powierzchniach bocznych oraz powierzchni dolnej rozpatrywanej bryły gruntu.

Wariant II – grunt $11 \times 7 \times 6 \text{ m}$. zamodelowano ośmiowęzłowymi elementami skończonymi $0,5 \times 0,5 \times 0,5 \text{ m}$ oraz ośmiowęzłowymi elementami półnieskończonymi typu “displacement descent” z eksponentialną funkcją zaniku (rys. 6), wprowadzając 4785 węzłów.

W tabeli1 przedstawiono porównawczą analizę przemieszczeń pionowych w węzłach elementów gruntowych przy wykorzystaniu wariantu I. i II. (układ współrzędnych, według którego opisano węzły zamieszczone w tabeli, znajduje się na rys. 4).



Rys. 5. Modelowanie obszaru gruntu pod ławą fundamentową według wariantu I



Rys. 6. Modelowanie obszaru gruntu pod ławą fundamentową według wariantu II

Tabela 1.

Przemieszczenia na kierunku z [mm]

Głębokość z [m]		Współrzędne y [m] badanych węzłów ($x=0$)									
		0.0	1.0	2.0	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	8.5
0.0	I	5.112	4.952	4.381	2.752	1.812	1.082	0.713	0.355	0.020	0.000
	II	5.261	5.091	4.514	2.834	1.863	1.110	0.731	0.364	0.021	
1.0	I	4.383	4.012	3.643	1.851	1.331	0.891	0.671	0.331	0.020	0.000
	II	4.511	4.141	3.752	1.906	1.371	0.918	0.691	0.341	0.021	
2.0	I	3.041	2.912	2.181	1.467	1.223	0.712	0.642	0.212	0.016	0.000
	II	3.132	2.999	2.246	1.514	1.260	0.733	0.661	0.218	0.016	
3.0	I	2.181	2.033	1.812	1.122	1.018	0.597	0.412	0.152	0.014	0.000
	II	2.246	2.093	1.866	1.156	1.048	0.615	0.424	0.156	0.014	
4.0	I	1.084	0.991	0.923	0.718	0.662	0.544	0.351	0.114	0.014	0.000
	II	1.116	1.021	0.951	0.737	0.681	0.561	0.361	0.117	0.014	

Analiza z wykorzystaniem elementów półnieskończonych pozwoliła uwzględnić całą półprzestrzeń gruntową pod ławą fundamentową, wprowadzając przy tym o około 40% mniej węzłów niż przy analizie przeprowadzanej według wariantu I-go, zmniejszył się przy tym również znacząco czas obliczeń.

3. Podsumowanie

Elementy półnieskończone wykazały swoją przydatność w analizowaniu wielu zagadnień dotyczących obszarów nieograniczonych (zarówno statycznych jak i dynamicznych). Zastosowanie ich w analizach przeprowadzanych MES znacznie zmniejszyło liczbę niewiadomych a tym samym znacznie uprościło rozwiązanie układu równań oraz skróciło czas obliczeń. Pomimo to w większości powszechnie dostępnych systemów analiz konstrukcji nadal jest brak bibliotek tych elementów.

Literatura

1. **Bettes P.:** *Infinite elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11, 53-64, 1977.
2. **Bettes P.:** *More on infinite elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15, 1613-1626, 1980.

3. **Bettes P., J. A. Bettles.:** *Infinite elements for static problems*, Engineering Computations, 1, 4-16, 1984.
4. **Bettes P.:** *Infinite elements*, Penshaw Press, 1992.
5. **Cheng Y. M.:** The use of the infinite element, Computers and Geotechnics, 18, 1, 65-70, 1996.
6. **Magda W.:** *Optymalizacja wykładniczej funkcji zaniku elementu nieskończonego w analizie MES sprężystej półprzestrzeni gruntowej*, Materiały X Krajowej Konferencji Mechaniki Gruntów i Fundamentowania, 65-69, 1993.
7. **Zienkiewicz O. C.:** *The finite element method*, 3rd edn., McGraw-Hill, London, 1978.
8. **Zienkiewicz O. C., Bettles P.:** *Infinite elements in the study of fluid-structure interaction problems*, Proceedings of the Second International Symposium on Computational Methods in Applied Sciences, 1975, Lecture Note in Physics, vol.58, Berlin, 1976.

INFINITE ELEMENTS TYPE „DISPLACEMENT DESCENT” USED IN SOIL-STRUCTURE INTERACTION PROBLEMS

Summary: In many engineering problems analysed by using Finite Element Method the influence of the unbounded domains have to be taken into consideration. Before the development of the infinite elements, an analyst used to truncate the domain analysis at large but finite distances what required a large numbers of finite elements leading to large number of simultaneous equations and a large computational time. The main goal of the paper is synthesize all infinite elements „displacement descent” type known from the literature. The paper also presents the 3-D infinite elements stiffness matrices with exponential decay function.

Key words: infinite elements, Finite Element Method, decay functions

Joanna Krętowska

SYNTEZA ELEMENTÓW PÓLNIESKOŃCZONYCH TYPU „COORDINATE ASCENT” STOSOWANYCH W ANALIZIE ZAGADNIENI STATYCZNYCH METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Streszczenie: Wiele problemów inżynierskich rozwiązywanych metodą elementów skończonych wymaga analizowania zagadnień w obszarze nieograniczonym. Obszar ten dość często bywa modelowany klasycznymi elementami skończonymi po uprzednim „wycięciu” wzdłuż fikcyjnego brzegu. Postępowanie takie wprowadza bardzo dużą liczbę niewiadomych układu równań MES, którego rozwiązanie jest czasochłonne a czasami wręcz niemożliwe. Znacznie bardziej efektywne jest zamodelowanie tego obszaru elementami półnieskończonymi, które ze względu na sposób formułowania ich opisu zostały w literaturze podzielone na: „displacement descent” i „coordinate ascent”. Celem pracy jest synteza elementów półnieskończonych typu „coordinate ascent”.

Słowa kluczowe: elementy półnieskończone, metoda elementów skończonych, elementy typu „coordinate ascent”

1. Wprowadzenie

Wiele zagadnień inżynierskich analizowanych metodą elementów skończonych wymaga uwzględnienia wpływu obszaru nieograniczonego na rozkład naprężeń czy przemieszczeń w elementach konstrukcji, co ma miejsce np. przy analizowaniu zagadnień współpracy budowli z podłożem gruntowym.

Do końca lat siedemdziesiątych problem ten był rozwiązywany poprzez analizę MES dostatecznie dużego obszaru elementami skończonymi, co wymagało zastosowania bardzo dużej liczby elementów skończonych a tym samym wprowadzało bardzo dużą liczbę niewiadomych układu równań MES, a zatem znacznie powiększało koszty obliczeń. Zastosowanie elementów półnieskończonych w analizach przeprowadzanych MES było przełomem w modelowaniu rozległych obszarów.

Rozwój elementów półnieskończonych przebiegał w dwóch kierunkach:

1. zastosowanie funkcji zanikających (decay functions) w połączeniu z konwencjonalnymi funkcjami kształtu – elementy typu „displacement descent”,
2. odwzorowywanie (tzw. mapping) elementu skończonego do nieskończonego, czyli stworzenie całkowicie nowych funkcji kształtu w kierunku nieskończoności – elementy typu „coordinate ascent”. Ponieważ funkcje kształtu elementów półnieskończonych są dostosowywane do problemów inżynierskich jakie te elementy mają opisywać, to w ciągu ostatnich 25 lat pojawiła się duża różnorodność tych elementów [3].

2. Elementy półnieskończone typu „coordinate ascent”

Pierwszą pracę na temat elementów półnieskończonych typu „coordinate ascent” opublikowali w 1981 roku Beer i Meek [2], którzy zastosowali funkcje (zawierające czynnik postaci $1/(1-\xi)$) odwzorowujące skończony obszar opisany zmienną ξ w obszar nieskończony opisany zmienną $x = 1/(1-\xi)$. Odwzorowanie zostało tu rozdzielone na dwie części i zawierało czynniki postaci $2(\xi + 0.5)\xi/(1-\xi)$ dla $0 < \xi < 1$ oraz $2(\xi + 0.5)\xi$ dla $-1 < \xi < 0$.

Pierwsza część była bardzo podobna do odwzorowania zaproponowanego przez Zienkiewicza [8].

2.1. Półnieskończone elementy Zienkiewicza

Charakterystyczną cechą elementów Zienkiewicza [8] było zastosowanie dwóch rodzajów odwzorowań: jednego dla opisu funkcji kształtu, a drugiego dla całkowania numerycznego.

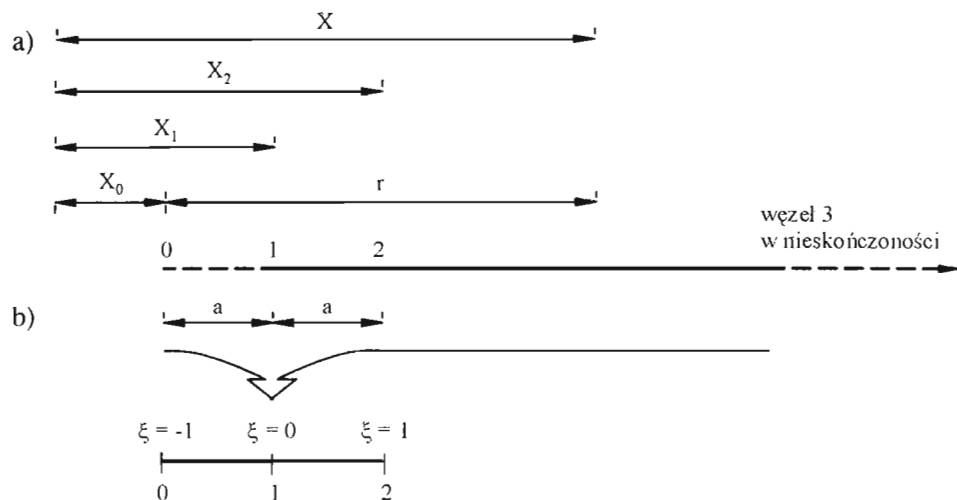
Zasadniczą różnicą w stosunku do klasycznych elementów skończonych było wprowadzenie nowego sposobu wyznaczania macierzy Jakobiego.

Aby zrozumieć istotę tych elementów, rozważmy w pierwszej kolejności geometrię problemu jednowymiarowego.

Element rozciąga się od współrzędnej x_1 poprzez x_2 do x_3 , która jest w nieskończoności (rys. 1).

Element ten odwzorowany jest do skończonego w obszarze $-1 < \xi < 1$.

Współrzedną x_0 określa się mianem bieguna.



Rys. 1. Jednowymiarowy element półnieskończony Zienkiewicza: a) współrzędne globalne, b) współrzędne lokalne, r – odległość bieguna od wybranego punktu

Odpowiednie odwzorowanie ma postać:

$$x = \tilde{N}_0(\xi) x_0 + \tilde{N}_2(\xi) x_2 \quad (1)$$

gdzie:

$$\tilde{N}_0(\xi) = \frac{-\xi}{1-\xi} \quad \tilde{N}_2(\xi) = 1 + \frac{\xi}{1-\xi} \quad (2)$$

dla

$$\begin{aligned} \xi = 1, \quad x &= \frac{\xi}{1-\xi} (x_2 - x_0) + x_2 = x_3 = \infty \\ \xi = 0 \quad x &= x_2 \\ \xi = -1, \quad x &= (x_0 + x_2)/2 = x_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Punkt $\xi = 1$ odpowiada punktowi x_1 , który jest zdefiniowany w połowie odległości między x_0 i x_2 . (W późniejszych publikacjach Zienkiewicza x_1 znajduje się w dowolnym miejscu pomiędzy x_0 i x_2 , ale oczywiście spełniony musi być warunek: $x_1 = \gamma x_2 + x_0(1-\gamma)$).

Dla x_1 , który jest w połowie odległości między x_0 i x_2 $a = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$.

Wówczas mamy:

$$x = \tilde{N}_0(\xi)2x_1 - x_2 + \tilde{N}_2(\xi)x_2 \quad (4)$$

$\tilde{N}_0(\xi)$ i $\tilde{N}_2(\xi)$ muszą spełniać warunek:

$$\tilde{N}_0(\xi) + \tilde{N}_2(\xi) = 1 \quad (5)$$

Zienkiewicz w swojej pracy [8] wprowadził funkcję kształtu $\tilde{N}_0(\xi)$, odniesioną do bieguna leżącego poza elementem. Znacznie bardziej dogodne jest odniesienie odwzorowania do węzłów elementu. Osiągnąć to można poprzez zmianę funkcji odwzorowujących, co też uczynili w 1984 roku Marques i Owen [4].

2.2. Elementy półnieskończone Marquesa i Owena

Marques i Owen [4] wprowadzili w miejsce funkcji kształtu $\tilde{N}_0(\xi)$ i $\tilde{N}_2(\xi)$ zaproponowanych przez Zienkiewicza [8], funkcje odwzorowujące (tzw. mapping functions) $M_1(\xi)$ i $M_2(\xi)$ (dla elementu jednowymiarowego).

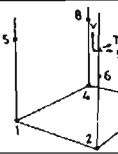
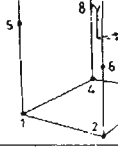
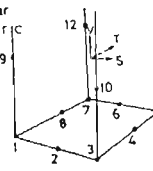
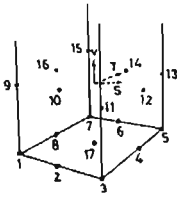
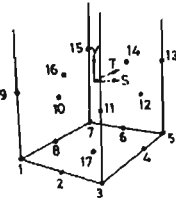
Stąd

$$x = M_1(\xi)x_1 + M_2(\xi)x_2 \quad (6)$$

Funkcje odwzorowujące $M_1(\xi)$ oraz $M_2(\xi)$ wprowadzone przez Marquesa i Owena mają postać:

$$\begin{aligned} M_1(\xi) &= 2 * \tilde{N}_0(\xi) = \frac{-2\xi}{1-\xi} \\ M_2(\xi) &= \tilde{N}_2(\xi) - \tilde{N}_0(\xi) = \frac{1+\xi}{1-\xi} \end{aligned} \quad (7)$$

Opracowane przez Zienkiewicza oraz Marguesa i Owena mapping funkcje odpowiadały zanikowi przebiegającemu zgodnie z funkcją $1/r$ (r – odległość bieguna od punktu wewnątrz elementu)

Element	Mapping functions	Shape functions
4 Noded super parametric	 $ \begin{aligned} M1 &= (1 - S)(1 - T)(-V)/2(1 - V) \\ M2 &= (1 + S)(1 - T)(-V)/2(1 - V) \\ M3 &= (1 + S)(1 + T)(-V)/2(1 - V) \\ M4 &= (1 - S)(1 + T)(-V)/2(1 - V) \\ M5 &= (1 - S)(1 - T)(1 + V)/4(1 - V) \\ M6 &= (1 + S)(1 - T)(1 + V)/4(1 - V) \\ M7 &= (1 + S)(1 + T)(1 + V)/4(1 - V) \\ M8 &= (1 - S)(1 + T)(1 + V)/4(1 - V) \end{aligned} $	$ \begin{aligned} N1 &= (1 - S)(1 - T)(1 - V)/8 \\ N2 &= (1 + S)(1 - T)(1 - V)/8 \\ N3 &= (1 + S)(1 + T)(1 - V)/8 \\ N4 &= (1 - S)(1 + T)(1 - V)/8 \end{aligned} $
8 Noded isoparametric	 As for the 4 noded element	$ \begin{aligned} N1 &= (1 - S)(1 - T)(VV - V)/8 \\ N2 &= (1 + S)(1 - T)(VV - V)/8 \\ N3 &= (1 + S)(1 + T)(VV - V)/8 \\ N4 &= (1 - S)(1 + T)(VV - V)/8 \\ N5 &= (1 - S)(1 - T)(1 - VV)/4 \\ N6 &= (1 + S)(1 - T)(1 - VV)/4 \\ N7 &= (1 + S)(1 + T)(1 - VV)/4 \\ N8 &= (1 - S)(1 + T)(1 - VV)/4 \end{aligned} $
12 Noded serendipity isoparametric	 $ \begin{aligned} M1 &= (1 - S)(1 - T)(-S - T - V - 2)/2(1 - V) \\ M2 &= (1 - SS)(1 - T)/(1 - V) \\ M3 &= (1 + S)(1 - T)/(+S - T - V - 2)/2(1 - V) \\ M4 &= (1 + S)(1 - TT)/(1 - V) \\ M5 &= (1 + SS)(1 + T)(+S + T - V - 2)/2(1 - V) \\ M6 &= (1 - SS)(1 + T)/(1 - V) \\ M7 &= (1 - S)(1 + T)(-S + T - V - 2)/2(1 - V) \\ M8 &= (1 - S)(1 - TT)/(1 - V) \\ M9 &= (1 - S)(1 - T)(1 + V)/4(1 - V) \\ M10 &= (1 + S)(1 - T)(1 + V)/4(1 - V) \\ M11 &= (1 + S)(1 + T)(1 + V)/4(1 - V) \\ M12 &= (1 - S)(1 + T)(1 + V)/4(1 - V) \end{aligned} $	$ \begin{aligned} N1 &= (1 - S)(1 - T)(1 - V)(-S - T - V - 2)/8 \\ N2 &= (1 - SS)(1 - T)/(1 - V)/4 \\ N3 &= (1 + S)(1 - T)/(+S - T - V - 2)/8 \\ N4 &= (1 + S)(1 - TT)/(1 - V)/4 \\ N5 &= (1 + SS)(1 + T)(1 - V)(+S + T - V - 2)/8 \\ N6 &= (1 - SS)(1 + T)/(1 - V)/4 \\ N7 &= (1 - S)(1 + T)(1 - V)(-S + T - V - 2)/8 \\ N8 &= (1 - S)(1 - TT)(1 - V)/4 \\ N9 &= (1 - S)(1 - T)(1 - VV)/4 \\ N10 &= (1 + S)(1 - T)(1 - VV)/4 \\ N11 &= (1 + S)(1 + T)(1 - VV)/4 \\ N12 &= (1 - S)(1 + T)(1 - VV)/4 \end{aligned} $
16 Noded super parametric	 $ \begin{aligned} M1 &= (SS - S)(TT - T)(-V)/2(1 - V) \\ M2 &= (1 - SS)(TT - T)(-V)/(1 - V) \\ M3 &= (SS + S)(TT - T)(-V)/2(1 - V) \\ M4 &= (SS + S)(1 - TT)(-V)/(1 - V) \\ M5 &= (SS + S)(TT + T)(-V)/2(1 - V) \\ M6 &= (1 - SS)(TT + T)(-V)/(1 - V) \\ M7 &= (SS - S)(1 - TT)(-V)/2(1 - V) \\ M8 &= (SS - S)(1 - TT)(-V)/(1 - V) \\ M9 &= (SS - S)(TT - T)(1 + V)/4(1 - V) \\ M10 &= (1 - SS)(TT - T)(1 + V)/2(1 - V) \\ M11 &= (SS + S)(TT - T)(1 + V)/4(1 - V) \\ M12 &= (SS + S)(1 - TT)(1 + V)/2(1 - V) \\ M13 &= (SS + S)(TT + T)(1 + V)/4(1 - V) \\ M14 &= (1 - SS)(TT + T)(1 + V)/2(1 - V) \\ M15 &= (SS - S)(TT + T)(1 + V)/4(1 - V) \\ M16 &= (SS - S)(1 - TT)(1 + V)/2(1 - V) \\ M17 &= (1 - SS)(1 - TT)(-2V)/(1 - V) \\ M18 &= (1 - SS)(1 - TT)(1 + V)/(1 - V) \end{aligned} $	$ \begin{aligned} N1 &= (1 - S)(1 - T)(VV - V)(-S - T - 1)/8 \\ N2 &= (1 - SS)(1 - T)(VV - V)/4 \\ N3 &= (1 + S)(1 - T)(VV - V)(+S - T - 1)/8 \\ N4 &= (1 + S)(1 - TT)(VV - V)/4 \\ N5 &= (1 + S)(1 + T)(VV - V)(+S + T - 1)/8 \\ N6 &= (1 - SS)(1 + T)(VV - V)/4 \\ N7 &= (1 - S)(1 + T)(VV - V)(-S + T - 1)/8 \\ N8 &= (1 - S)(1 - TT)(VV - V)/4 \\ N9 &= (1 - S)(1 - T)(1 - VV)(-S - T - 1)/4 \\ N10 &= (1 - SS)(1 - T)(1 - VV)/2 \\ N11 &= (1 + S)(1 - T)(1 - VV)(+S - T - 1)/4 \\ N12 &= (1 + S)(1 - TT)(1 - VV)/2 \\ N13 &= (1 + S)(1 + T)(1 - VV)(+S + T - 1)/4 \\ N14 &= (1 - SS)(1 + T)(1 - VV)/2 \\ N15 &= (1 - S)(1 + T)(1 - VV)(-S + T - 1)/4 \\ N16 &= (1 - S)(1 - TT)(1 - VV)/2 \end{aligned} $
18 Noded lagrangian isoparametric	 As for the 16 noded element	$ \begin{aligned} N1 &= (SS - S)(TT - T)(VV - V)/8 \\ N2 &= (1 - SS)(TT - T)(VV - V)/4 \\ N3 &= (SS + S)(TT - T)(VV - V)/8 \\ N4 &= (SS + S)(1 - TT)(VV - V)/4 \\ N5 &= (SS + S)(TT + T)(VV - V)/8 \\ N6 &= (1 - SS)(TT + T)(VV - V)/4 \\ N7 &= (SS - S)(TT + T)(VV - V)/8 \\ N8 &= (SS - S)(TT + T)(VV - V)/4 \\ N9 &= (SS - S)(TT - T)(1 - VV)/4 \\ N10 &= (1 - SS)(TT - T)(1 - VV)/2 \\ N11 &= (SS + S)(TT - T)(1 - VV)/4 \\ N12 &= (SS + S)(1 - TT)(1 - VV)/2 \\ N13 &= (SS + S)(TT + T)(1 - VV)/4 \\ N14 &= (1 - SS)(TT + T)(1 - VV)/2 \\ N15 &= (SS - S)(TT + T)(1 - VV)/4 \\ N16 &= (SS - S)(1 - TT)(1 - VV)/2 \\ N17 &= (1 - SS)(1 - TT)(VV - V)/2 \\ N18 &= (1 - SS)(1 - TT)(1 - VV) \end{aligned} $

Rys. 2. Odwzorowanie elementów i ich funkcje kształtu według Owena i Marquesa [1]

U Zienkiewicza

$$\begin{aligned} \text{dla } \xi = -1 \quad \tilde{N}_0(\xi) &= \frac{1}{2} \\ \text{dla } \xi = 0 \quad \tilde{N}_0(\xi) &= 0, \\ \text{dla } \xi \rightarrow 1 \quad \tilde{N}_0(\xi) &= \infty \end{aligned} \quad (8)$$

U Marguesa i Owena

$$\begin{aligned} \text{dla } \xi = -1 \quad M_1(\xi) &= 1 \quad M_2(\xi) = 0 \\ \text{dla } \xi = 0 \quad M_1(\xi) &= 0 \quad M_2(\xi) = 1 \\ \text{dla } \xi \rightarrow 1 \quad M_1(\xi) &= -\infty \quad M_2(\xi) = \infty \end{aligned} \quad (9)$$

Marques i Owen podali również w swojej pracy (po raz pierwszy) funkcje odwzorowujące dla elementów trójwymiarowych, jakimi były nimi osiemnastowęzłowe izoparametryczne elementy rodziny Lagrange'a, szesnastowęzłowe superparametryczne elementy Lagrange'a i dwunastowęzłowe izoparametryczne elementy rodziny Serendipa (rys. 2). Elementy te wykorzystano przy analizie cylindrycznej komory w ośrodku półnieskończonym, rozważanym jako materiał sprężysto-plastyczny, poddanej działaniu ciśnienia wewnętrznego.

2.3. Odwzorowane elementy półnieskończone. Viladkara, Godbole'a i Noorzaei

Dlaśże udoskonalenia elementów Meraquesa i Owena wprowadzili między innymi Viladkar, Godbole i Noorzaei, którzy w 1990 roku [5], [6] przedstawili nowe funkcje odwzorowujące dla elementów półnieskończonych, wykorzystywanych przez nich do analizy współpracy budowli z podłożem gruntowym.

Geometria i nieznanym zmienny sposób rozchodzenia się wprowadzany przy opisie elementów półnieskończonych są odnoszone (podobnie jak u Owena i Marquesa) do pewnego punktu lub do grupy punktów zwanych biegunami.

Przy ustalaniu pozycji bieguna muszą być brane pod uwagę zarówno geometria jak i fizyczne cechy rozpatrywanego zagadnienia. Biegun odniesienia musi być umiejscowiony zawsze zewnątrz do elementu. Krawędzie elementu przedłużane do nieskończoności muszą być albo równoległe albo rozbieżne (w żadnym wypadku nie mogą być narzędziami typu zbieżnego), gdyż zbieżność mogłaby spowodować zachodzenie na siebie elementów i niejednoznaczność odwzorowania. Aby zapewnić ciągłość na granicy między elementem skończonym a półnieskończonym, liczba węzłów łączących musi ściśle sobie odpowiadać. Charakterystyką zaniku można sterować poprzez sterowanie położeniem bieguna.

Type of element	Element figure	Mapping/shape functions	
		(1/r) type decay	(1/√r) type decay
8 noded		$N_1 = \frac{-\xi(1-\eta)(1-\zeta)}{2(1-\xi)}$	$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1-\eta)(1-\zeta)$
		$N_2 = \frac{-\xi(1-\eta)(1-\zeta)}{2(1-\xi)}$	$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1-\eta)(1-\zeta)$
		$N_3 = \frac{-\xi(1+\eta)(1-\zeta)}{2(1-\xi)}$	$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1+\eta)(1-\zeta)$
		$N_4 = \frac{-\xi(1+\eta)(1-\zeta)}{2(1-\xi)}$	$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1+\eta)(1-\zeta)$
		$N_5 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)}{6(1-\xi)}$	$\frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1-\eta)(1-\zeta)$
		$N_6 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)}{6(1-\xi)}$	$\frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1+\eta)(1-\zeta)$
		$N_7 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)}{6(1-\xi)}$	$\frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1+\eta)(1-\zeta)$
		$N_8 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)}{6(1-\xi)}$	$\frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1-\eta)(1-\zeta)$
12 noded		$N_1 = \frac{-\xi(1-\eta)\xi(1+\zeta)}{2(1-\xi)}$	$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1-\eta)\xi(1+\zeta)$
		$N_2 = \frac{-\xi(1-\eta)(1-\zeta^2)}{(1-\xi)}$	$\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1-\eta)(1-\zeta^2)$
		$N_3 = \frac{\xi(1-\eta)\xi(1-\zeta)}{2(1-\xi)}$	$-\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1-\eta)\xi(1-\zeta)$
		$N_4 = \frac{\xi(1+\eta)\xi(1-\zeta)}{2(1-\xi)}$	$-\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1+\eta)\xi(1-\zeta)$
		$N_5 = \frac{-\xi(1+\eta)(1-\zeta^2)}{(1-\xi)}$	$\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1+\eta)(1-\zeta^2)$
		$N_6 = \frac{-\xi(1+\eta)\xi(1+\zeta)}{2(1-\xi)}$	$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1+\eta)\xi(1+\zeta)$
		$N_7 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)\xi(1-\zeta)}{6(1-\xi)}$	$\frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1-\eta)\xi(1-\zeta)$
		$N_8 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2)}{6(1-\xi)}$	$\frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1-\eta)(1-\zeta^2)$
		$N_9 = \frac{-(1+\xi)(1-\eta)\xi(1-\zeta)}{6(1-\xi)}$	$-\frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1-\eta)\xi(1-\zeta)$
		$N_{10} = \frac{-(1+\xi)(1-\eta)\xi(1-\zeta)}{6(1-\xi)}$	$-\frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1-\eta)\xi(1-\zeta)$
		$N_{11} = \frac{(1+\xi)(1+\eta)\xi(1-\zeta^2)}{6(1-\xi)}$	$\frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1+\eta)\xi(1-\zeta^2)$
		$N_{12} = \frac{(1+\xi)(1+\eta)\xi(1+\zeta)}{6(1-\xi)}$	$\frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right)(1+\eta)\xi(1+\zeta)$

Rys. 3. Półnieskończone elementy rodziny serendipowskiej według Viladkara, Goldbolea i Noorzaei

Każda funkcja M_i (mapping function) musi mieć wartość 1 w węźle „i” oraz 0 w pozostałych węzłach; poza tym:

$$\sum_{i=1}^n M_i = 1 \quad (10)$$

$$\sum \frac{\partial M_i}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial M_i}{\partial \eta} = \sum \frac{\partial M_i}{\partial \zeta} = 0 \quad (11)$$

Całkowanie może przebiegać przy wykorzystaniu powszechnie stosowanych metod całkowania numerycznego.

Viladkar i Godbole i Noorzaei w [5],[6],[7] przedstawili elementy 2-D i 3-D.

rodziny serendipowskiej z $\frac{1}{r}$ oraz $\frac{1}{\sqrt{r}}$ funkcjami zaniku (r – odległość bie-

guna odniesienia od punktu wewnątrz elementu). Przykładowe, opracowane przez Viladkara i Godbole’a i Noorzaei, elementy przestrzenne i odpowiadające im odwzorowania węzłów oraz funkcje zaniku przedstawia rysunek 3.

Elementy te zmierzają do nieskończoności tylko w jednym kierunku.

2.4. Inne odwzorowane elementy półnieskończone

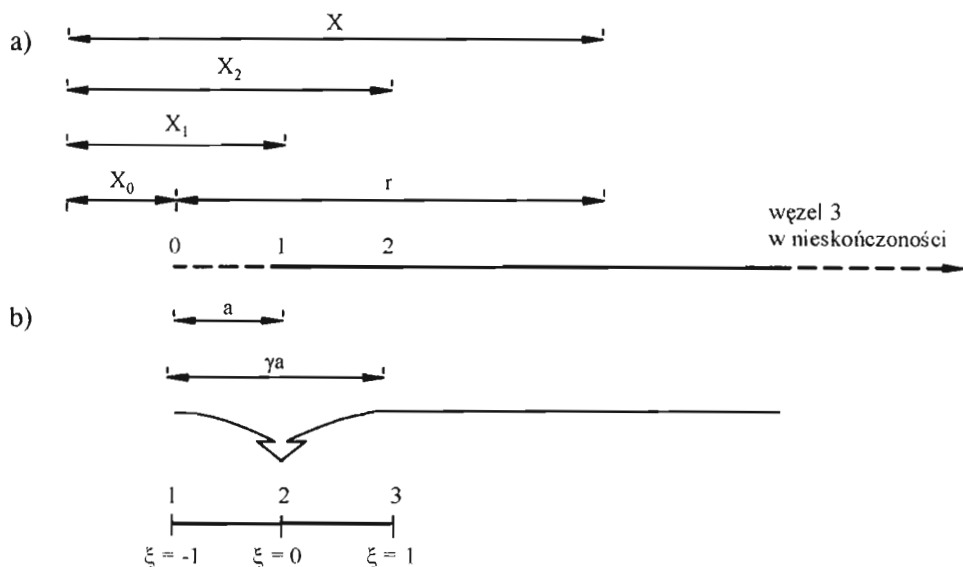
Innymi elementami półnieskończonymi, które zaliczyć można do grupy drugiej są elementy opracowane przez T. T. Aabdela-Fattaha, H. A. Hodhoda i A. Y. Akla [1]. W elementach tych wprowadza się funkcje odwzorowujące

$M_1(\xi)$ i $M_2(\xi)$, uzależnione od trzech różnych typów zaniku $\frac{1}{r^n}$, $\frac{1}{e^{nr}}$,

$$\left(\frac{1}{\ln r} \right)^n.$$

Przedstawione przez Aabdela-Fattaha, Hodhoda i Akla główne reguły tworzenia elementu 1-D odnoszą się również do elementów 2-D i 3-D.

Element rozchodzi się od węzła pierwszego poprzez węzeł drugi do węzła trzeciego, który leży w nieskończoności. Globalny układ współrzędnych $X \in (X_0, \infty)$ jest odwzorowany do układu lokalnego $\xi \in (-1, 1)$ (rys. 4).



Rys. 4. Jednowymiarowy element półnieskończony: a – układ globalny, b – układ lokalny, według [1]; r – odległość bieguna od wybranego punktu

Lokalizacja początku zaniku X_0 jest określona przez parametr γ zdefiniowany jako:

$$\gamma = \frac{X_2 - X_0}{X_1 - X_0} \quad (12)$$

Odwzorowanie z układu globalnego do lokalnego ma postać:

$$X = M_1(\xi)X_1 + M_2(\xi)X_2 \quad (13)$$

gdzie suma odnosi się tylko do węzłów skończonych.

Funkcja odwzorowująca ma postać:

$$\begin{aligned} M_1(\xi) &= A_0 + A_1 r(\xi) \\ M_2(\xi) &= B_0 + B_1 r(\xi) \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie $r(\xi)$ funkcja zależna od rodzaju zaniku.

Stałe A_0 , A_1 , B_0 oraz B_1 są wyznaczone poprzez podstawienie głównych wymagań $M_i(\xi_j) = 1$ dla $i=j$ oraz $M_i(\xi_j) = 0$ dla $i \neq j$ do równań (14). Wówczas:

$$A_0 = \frac{-r(\xi_2)}{r(\xi_1) - r(\xi_2)}, \quad (15)$$

$$A_1 = \frac{1}{r(\xi_1) - r(\xi_2)}, \quad (16)$$

$$B_0 = \frac{r(\xi_1)}{r(\xi_1) - r(\xi_2)}, \quad (17)$$

$$B_1 = \frac{-1}{r(\xi_1) - r(\xi_2)}. \quad (18)$$

Podstawowe pole zmiennej u jest interpolowane poprzez użycie standardowej funkcji kształtu

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (19)$$

gdzie:

$$N_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \quad (20a)$$

$$N_2 = 1 - \xi^2 \quad (20b)$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \quad (20c)$$

Zmienna $r(\xi)$ w równaniach (14) jest wyznaczana w zależności od rodzaju zaniku.

Dla funkcji zaniku typu odwrotnego $\frac{1}{r^n}$, zmienne w węzłach mają formę:

$$u_1 = \left[\frac{r(\xi)}{a} \right]^n u, \quad (21)$$

$$u_2 = \left[\frac{r(\xi)}{\gamma a} \right]^n u. \quad (22)$$

Rozwiązując równania (19÷22) dla $r(\xi)$ oraz zakładając, że $u_3 = 0$ autorzy [1] otrzymali

$$r(\xi) = \frac{2^{\frac{1}{n}}}{\left[\xi^2 (\gamma^n - 2) - \xi \gamma^n + 2 \right]^{\frac{1}{n}}} \gamma a, \quad (23)$$

Dla funkcji zaniku typu eksponentialnego $\left(\frac{1}{e^{nr}} \right)$ zmienne węzłowe mają postać:

$$u_1 = \frac{e^{nr(\xi)}}{e^{na}} u, \quad (24)$$

$$u_2 = \frac{e^{nr(\xi)}}{e^{n\gamma a}} u. \quad (25)$$

Stąd $r(\xi)$ ma postać:

$$r(\xi) = \frac{1}{n} \ln \left[\frac{2e^{na} e^{\gamma na}}{f_1(\xi)} \right], \quad (26)$$

gdzie

$$f_1(\xi) = 2e^{na} (1 - \xi^2) - e^{n\gamma a} \xi (1 - \xi), \quad (27)$$

Podobne analizy autorzy [1] przedstawili jeszcze dla funkcji zaniku typu $\left(\frac{1}{\ln r} \right)^n$.

W zaprezentowanych powyżej sformułowaniach funkcji zaniku odpowiednie trzy punkty opisano następująco:

$$\begin{aligned} \text{dla } \xi_1 = -1 \quad X &= X_1, \\ \text{dla } \xi_2 = 0 \quad X &= X_2, \\ \text{dla } \xi_3 = 1 \quad X &= X_3 = \infty. \end{aligned} \quad (28)$$

Jakobian formułowanego opisu jest dogodnie przedstawiony w postaci:

$$J = M_1(\xi),_{\xi} X_1 + M_2(\xi),_{\xi} X_2. \quad (29)$$

2.3.1. Określenie pozycji bieguna

Badając Jakobian sformułowanego elementu stwierdzono, że wyznacznik Jakobianu ma dodatnią wartość tylko wówczas, gdy parametr γ ma wartość podaną w wyrażeniu:

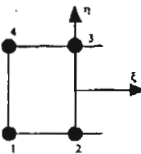
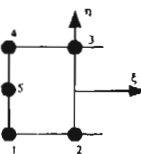
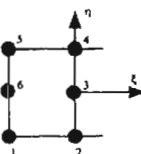
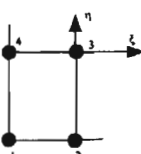
- (30) – dla zaniku typu odwrotnego,
- (31) – dla zaniku typu eksponentialnego,
- (32) – dla zaniku typu logarytmicznego.

$$(4/3)^{1/n} \leq \gamma \leq (4)^{1/n}, \quad (30)$$

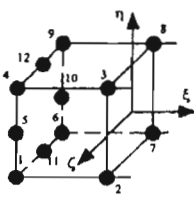
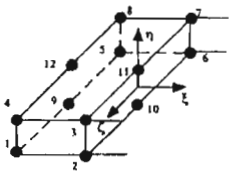
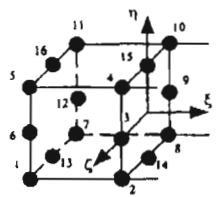
$$\ln \frac{4e^{na}}{3} \leq \gamma \leq \frac{\ln(4e^{na})}{na}, \quad (31)$$

$$\frac{\exp[(4/3)^{1/n} \ln(a)]}{a} \leq \gamma \leq \frac{\exp((4)^{1/n} \ln(a))}{a}. \quad (32)$$

Przykładowe elementy 2D i 3D opracowane przez autorów i ich funkcje kształtu przedstawiają rysunki 5 i 6.

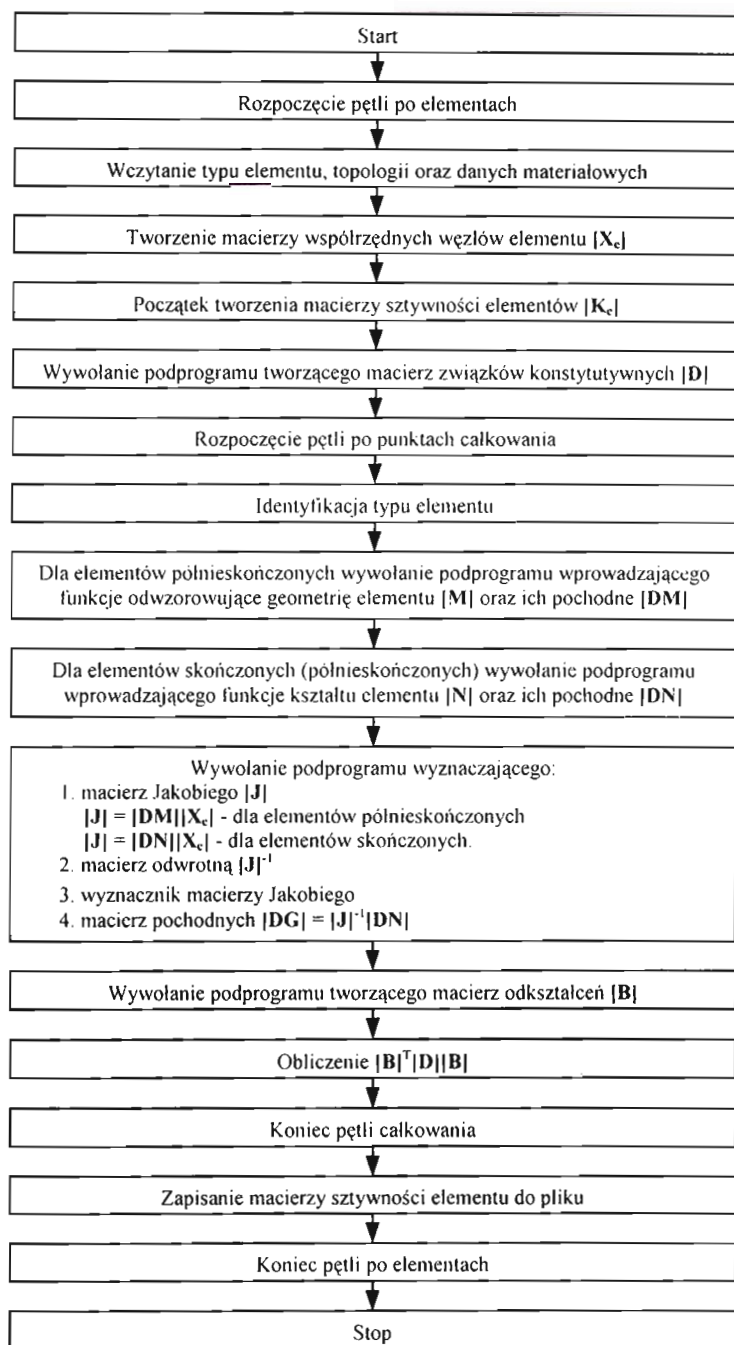
Element	Mapping functions	Shape functions
4-node Lagrangian isoparametric element 	Nodes 1,4 $M_1 = M_1(\xi)(1 + \eta\eta_i)/2$ Nodes 2,3 $M_2 = M_2(\xi)(1 + \eta\eta_i)/2$	Nodes 1,4 $N_1 = -\xi(1 - \xi)(1 + \eta\eta_i)/4$ Nodes 2,3 $N_2 = (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)/2$
5-node serendipity isoparametric element 	Nodes 1,4 $M_1 = M_1(\xi)(1 + \eta\eta_i)\eta\eta_i/2$ Nodes 2,3 $M_2 = M_2(\xi)(1 + \eta\eta_i)\eta\eta_i/2$ Node 5 $M_5 = M_1(\xi)(1 - \eta^2)$	Nodes 1,4 $N_1 = (1 + \xi^2)(1 + \eta\eta_i)(-1 + \frac{\xi}{\eta_i} + \eta\eta_i)$ Nodes 2,3 $N_2 = (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)/2$ Node 5 $N_5 = (1 - \eta^2)(1 - \xi)/2$
6-node Lagrangian isoparametric element 	Nodes 1,5 $M_1 = M_1(\xi)(1 + \eta\eta_i)\eta\eta_i/2$ Nodes 2,4 $M_2 = M_2(\xi)(1 + \eta\eta_i)\eta\eta_i/2$ Node 3 $M_3 = M_2(\xi)(1 - \eta^2)$ Node 6 $M_6 = M_1(\xi)(1 - \eta^2)$	Nodes 1,5 $N_1 = (1 + \xi^2)(1 + \eta\eta_i)\xi\xi_i\eta\eta_i$ Nodes 2,4 $N_2 = (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)\eta\eta_i/2$ Node 3 $N_3 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$ Node 6 $N_6 = -\xi(1 - \eta^2)(1 - \xi)/2$
4-node Lagrangian isoparametric corner element 	$M_1 = M_1(\xi)M_1(\eta)$ $M_2 = M_2(\xi)M_1(\eta)$ $M_3 = M_2(\xi)M_2(\eta)$ $M_4 = M_1(\xi)M_2(\eta)$	$N_1 = \xi\eta(1 - \xi)(1 - \eta)/4$ $N_2 = -\eta(1 - \xi^2)(1 - \eta)/2$ $N_3 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$ $N_4 = -\xi(1 - \eta^2)(1 - \xi)/2$

Rys. 5. Elementy półnieskończone 2-D i ich funkcje kształtu według [1]

Element	Mapping Functions	Shape Functions
8-node Lagrangian isoparametric element 	Nodes 1,4,5,8 $M_1 = M_1(\xi)(1 + \eta\eta_z)(1 + \zeta\zeta_z)/4$ Nodes 2,3,6,7 $M_2 = M_2(\xi)(1 + \eta\eta_z)(1 + \zeta\zeta_z)/4$	Nodes 1,4,5,8 $N_1 = (\xi^2 - \xi)(1 + \eta\eta_z)(1 + \zeta\zeta_z)/8$ Nodes 2,3,6,7 $N_2 = (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_z)(1 + \zeta\zeta_z)/4$
12-node serendipity isoparametric element 	Nodes 1,4,6,9 $M_1 = M_1(\xi)(1 + \eta\eta_z)(1 + \zeta\zeta_z) \times (-1 + \eta\eta_z + \zeta\zeta_z)/4$ Nodes 2,3,7,8 $M_2 = M_2(\xi)(1 + \eta\eta_z)(1 + \zeta\zeta_z)/4$ Nodes 11,12 $M_3 = M_3(\xi)(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_z)/2$ Nodes 5,10 $M_4 = M_4(\xi)(1 - \eta^2)(1 + \zeta\zeta_z)/2$	Nodes 1,4,6,9 $N_1 = (1 + \xi\xi_z)(1 + \eta\eta_z)(1 + \zeta\zeta_z) \times (-2 + \xi\xi_z - \eta\eta_z + \zeta\zeta_z)/8$ Nodes 2,3,7,8 $N_2 = (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_z)(1 + \zeta\zeta_z)/4$ Nodes 11,12 $N_3 = (1 - \xi^2)(1 + \xi\xi_z)(1 + \eta\eta_z)/4$ Nodes 5,10 $N_4 = (1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_z)(1 + \zeta\zeta_z)/4$
12-node Lagrangian isoparametric element 	Nodes 1,4,5,8 $M_1 = M_1(\xi)(1 + \eta\eta_z)(1 + \zeta\zeta_z)/4$ Nodes 2,3,6,7 $M_2 = M_2(\xi)(1 + \eta\eta_z)(1 + \zeta\zeta_z)/4$ Nodes 9,12 $M_3 = M_3(\xi)(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_z)/2$ Nodes 10,11 $M_4 = M_4(\xi)(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_z)/2$	Nodes 1,4,5,8 $N_1 = (1 + \xi\xi_z)(1 + \eta\eta_z)(1 + \zeta\zeta_z) \times (-1 + \xi\xi_z + \zeta\zeta_z)/8$ Nodes 2,3,6,7 $N_2 = (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_z)(1 + \zeta\zeta_z)/4$ Nodes 9,12 $N_3 = -\xi(1 - \xi^2)(1 - \xi)(1 + \eta\eta_z)/4$ Nodes 10,11 $N_4 = (1 - \xi^2)(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_z)/2$
16-node Lagrangian isoparametric element 	Nodes 1,5,7,11 $M_1 = M_1(\xi)(1 + \eta\eta_z)(1 + \zeta\zeta_z) \times (-1 + \eta\eta_z + \zeta\zeta_z)/4$ Nodes 2,4,8,10 $M_2 = M_2(\xi)(1 + \eta\eta_z)(1 + \zeta\zeta_z) \times (-1 + \eta\eta_z + \zeta\zeta_z)/4$ Nodes 3,9 $M_3 = M_3(\xi)(1 - \eta^2)(1 + \zeta\zeta_z)/2$ Nodes 6,12 $M_4 = M_4(\xi)(1 - \eta^2)(1 + \zeta\zeta_z)/2$ Nodes 14,15 $M_5 = M_5(\xi)(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_z)/2$ Nodes 13,16 $M_6 = M_6(\xi)(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_z)/2$	Nodes 1,5,7,11 $N_1 = (1 + \xi\xi_z)(1 + \eta\eta_z)(1 + \zeta\zeta_z) \times (-2 + \xi\xi_z - \eta\eta_z + \zeta\zeta_z)/8$ Nodes 2,4,8,10 $N_2 = (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_z)(1 + \zeta\zeta_z) \times (-1 + \eta\eta_z + \zeta\zeta_z)/4$ Nodes 3,9 $N_3 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(1 + \zeta\zeta_z)/2$ Nodes 6,12 $N_4 = -\xi(1 - \eta^2)(1 - \xi)(1 + \zeta\zeta_z)/4$ Nodes 14,15 $N_5 = (1 - \xi^2)(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_z)/2$ Nodes 13,16 $N_6 = -\xi(1 - \xi^2)(1 - \xi)(1 + \eta\eta_z)/4$

Rys. 6. Elementy półnieskończone 3-D i ich funkcje kształtu według [1]

Schemat działania podprogramu do obliczania macierzy sztywności elementów półnieskończonych przedstawiono na rysunku 7.



Rys. 7. Schemat działania podprogramu do obliczania macierzy sztywności elementów półnieskończonych według [1]

3. Podsumowanie

Elementy półnieskończone wykazały swoją przydatność w analizowaniu wielu zagadnień dotyczących obszarów nieograniczonych. Są one prostym i łatwym do implementacji rozszerzeniem klasycznej metody elementów skończonych. Wykorzystanie elementów półnieskończonych typu „coordinate ascent” ma tę dodatkową zaletę, że całkowanie odbywa się po obszarze skończonym, co umożliwia zastosowanie klasycznych metod całkowania numerycznego. Zastosowanie ich w analizach przeprowadzanych MES znacznie zmniejszyło liczbę niewiadomych, a tym samym znacznie uprościło rozwiązanie układu równań oraz skróciło czas obliczeń. Jednakże w większości powszechnie dostępnych systemach analiz konstrukcji nadal brak bibliotek tych elementów.

Literatura

1. **Abdel-Fattah T. T., Hodhod H. A., A. Y. Akl.:** *A novel formulation of infinite elements for static analysis*, Computers & Structures, 77, 371-379, 2000.
2. **Beer G., Meek J. L.:** *Infinite domain elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17, 1, 43-52, 1981.
3. **Cheng Y. M.:** *The use of the infinite element*, Computers and Geotechnics, 18, 1, 65-70, 1996.
4. **Marques J. M. M. C., Owen D. R. J.:** *Infinite elements in quasi-static materially non-linear problems*, Computers & Structures, 18, 4, 739-751, 1984.
5. **Viladkar M. N., Godbole P. N., Noorzaee J.:** *Nonlinear soil-structure interaction using coupled finite-infinite elements*, Computers & Structures, 36, 6, 1089-1096, 1990.
6. **Viladkar M. N., Godbole P. N., Noorzaee J.:** *Some new three-dimensional elements*, Computers & Structures, 34, 4, 455-467, 1990.
7. **Viladkar M. N., Godbole P. N., Noorzaee J.:** *Soil-structure interaction in plane frames using coupled finite-infinite elements*, Computers & Structures, 39, 5, 535-546, 1991.
8. **Zienkiewicz O. C., Emson C., Bettles P.:** *A novel boundary infinite elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19, 393-404, 1983.

**SYNTHESE OF INFINITE ELEMENTS TYPE „COORDINATE ASCENT”
USED IN ANALYSING STATIC PROBLEMS BY FEM**

Summary: In many engineering problems analysed by using Finite Element Method the influence of the unbounded domains have to be taken into consideration. Before the development of the infinite elements, an analyst used to truncate the domain analysis at large but finite distances what required a large numbers of finite elements leading to large number of simultaneous equations and a large computational time. Infinite elements can be categorised, according to their formulation, into two types namely displacement descent and coordinate ascent. The paper presents the synthesis of all infinite elements coordinate ascent type known from the literature of the subject.

Key words: infinite elements, Finite Element Method, „coordinate ascent” elements

Ireneusz Ligocki

NOŚNOŚĆ PODATNEGO POŁĄCZENIA STALOWEJ STOPY SŁUPA Z FUNDAMENTEM WEDŁUG METODY SKŁADNIKOWEJ

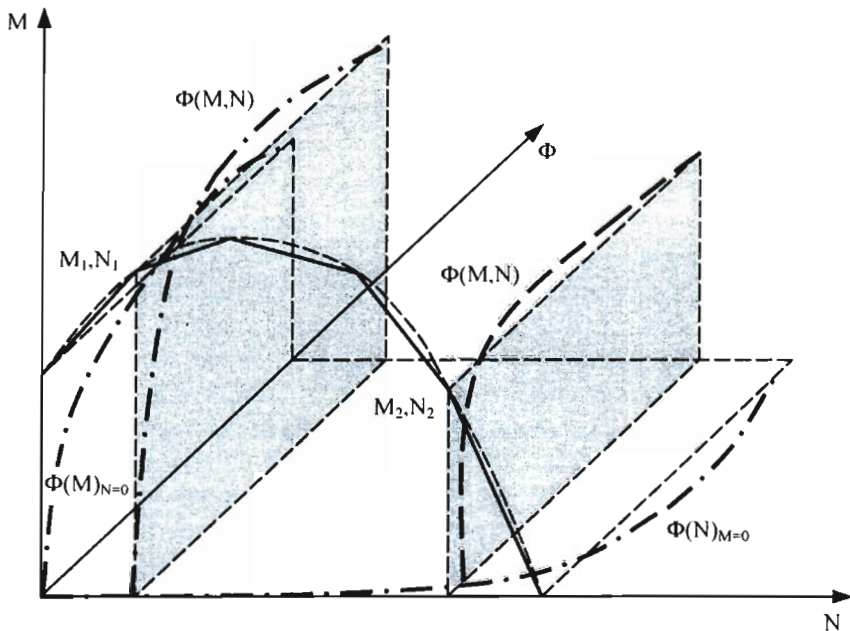
Streszczenie: W publikacji przedstawiono procedurę określania nośności połączenia stalowej stopy słupa z fundamentem opartą na metodzie składnikowej. Analizę, na podstawie wytycznych Eurokodu 3 oraz uwag i wniosków z literatury dotyczącej podobnych zagadnień, przeprowadzono dla wybranego złącza z grupy połączeń przygotowanych przez autora do badań eksperymentalnych. Rozwiązano przykład liczbowy, określając nośność tego połączenia. Oszacowanie nośności przygotowanych złączy jest niezbędne dla sporządzenia programu obciążeń.

Słowa kluczowe: słup, fundament, połączenie podatne, nośność, procedura obliczeniowa

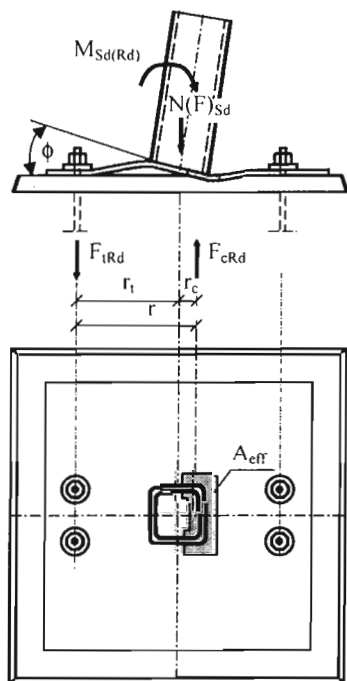
1. Wstęp

W praktyce inżynierskiej, dla uproszczenia obliczeń, połączenia klasyfikuje się zazwyczaj według dwu podstawowych modeli – połączenia sztywnego i przegubowego. Dotyczy to również złączy słupów stalowej konstrukcji z fundamentem. Stosowane rozwiązania, z których wybrane zaprezentowano w pozycjach [1-3], odpowiadają przypadkom pośrednim, a tylko niektóre z nich są co najwyżej zbliżone do połączenia quasi-przegubowego lub sztywnego. Wyjaśniono to w opracowaniach [1, 2]. Uwzględnienie w obliczeniach faktycznej charakterystyki pracy węzła (tzw. podatności) pozwala dostosować teoretyczny model do rzeczywistego zachowania się konstrukcji, umożliwiając ekonomiczne projektowanie układów nośnych. Na rysunku 1 przedstawiono graficzną interpretację charakterystyki pracy $M - N - \Phi$ (moment - siła osiowa - kąt obrotu) połączenia słupa z fundamentem z rysunku 2. Pokazane krzywe $\Phi(M, N)$ są teoretycznym opisem zachowania się węzła poddanego czterem różnym kombinacjom obciążenia momentem zginającym M i siłą osiową N . Szczegółowo opisano to w pozycji [4]. Uzyskanie tych funkcji jest skomplikowane. Wymaga uwzględnienia w analizie:

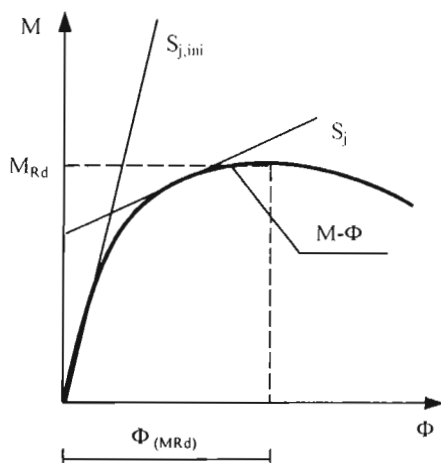
współpracy elementów złącza (stalowej płyty podstawy, kotew, dolnej części trzonu słupa, podlewki, ewentualnych usztywnień), różnych cech mechanicznych (granicy plastyczności, wytrzymałości) zastosowanych materiałów, zmiennej liczby śrub kotwiących i zmiennych układów tych śrub, zmian kształtu otworów na śruby oraz zmian kształtu przekrojów słupa. W pokazanym na rysunku 2 przykładowym połączeniu słup z rury kwadratowej, zakończony blachą podstawy, zespolono z betonową podporą czterema śrubami. Przestrzeń pomiędzy podstawą i fundamentem wypełnia podlewka. Dla teoretycznego oszacowania krzywej obrotowej $M - \Phi$ tego złącza (rys. 1 i 3) niezbędne jest określenie charakterystycznych wartości, tj.: nośności obliczeniowej M_{Rd} połączenia przy zginaniu, sztywności początkowej S_{jini} oraz współczynnika kształtu μ – krzywej $M - \Phi$. Przy ich wyznaczaniu posłużono się metodą składnikową opisaną w pracach [5-7] oraz uwagami i wnioskami zawartymi w pracach [5-10]. W opracowaniu ograniczono się do przedstawienia procedury określenia nośności obliczeniowej M_{Rd} . Pozostałe wartości (S_{jini} i μ) będą omówione w następnej publikacji.



Rys. 1. Charakterystyka pracy $M - N - \Phi$ połączenia



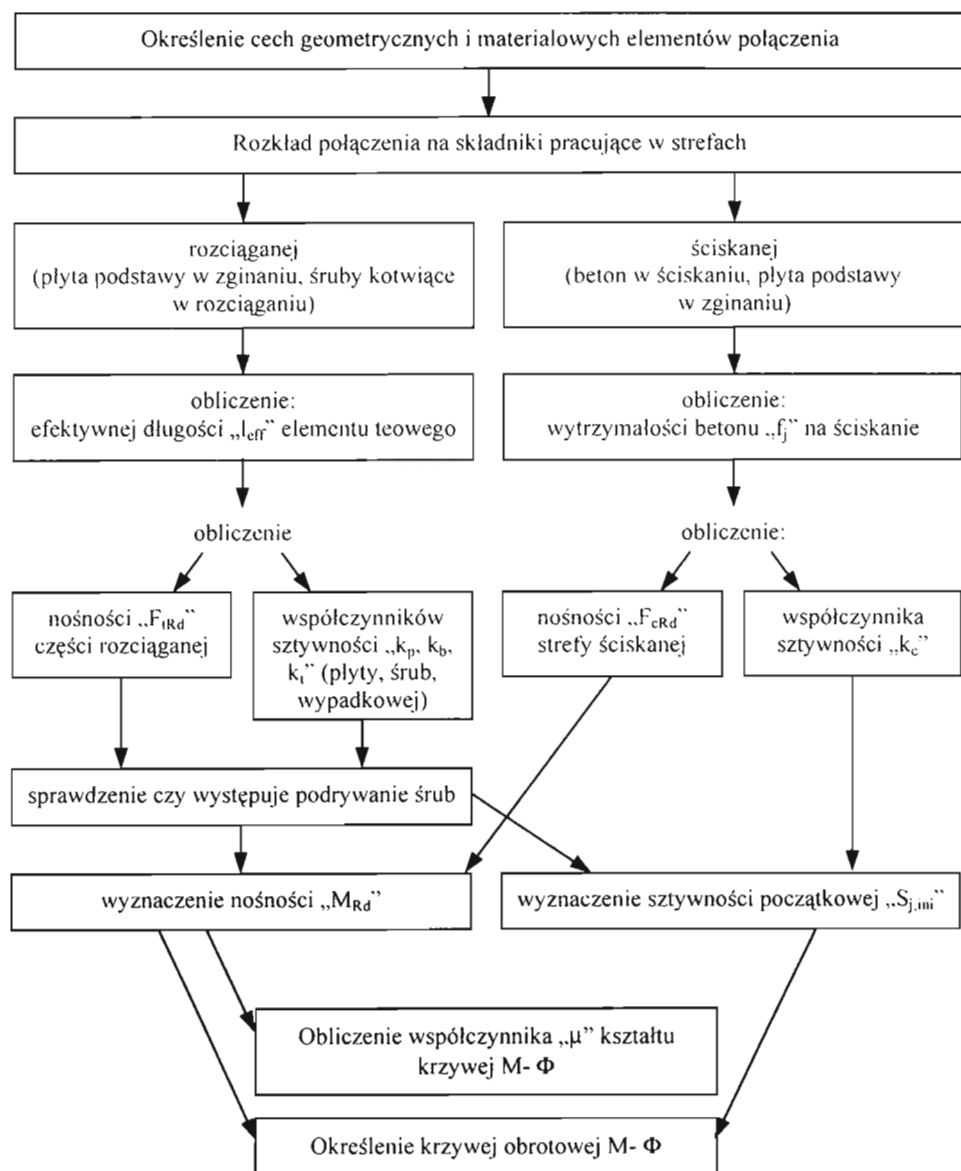
Rys. 2. Połączenie słupa z fundamentem



Rys. 3. Krzywa obrotowa $M - \phi$

2. Idea metody składnikowej

Metoda sprowadza się do oznaczenia cech geometrycznych i mechanicznych poszczególnych składników połączenia (w części rozciąganej – kotew i blachy, w części ściskanej – betonu) i złożenia ich w celu uzyskania poszukiwanych wartości M_{Rd} , S_{jin} , μ . Na rysunku 4 przedstawiono schemat blokowy procedury sporządzony z wykorzystaniem cytowanej metody.



Rys. 4. Schemat blokowy dla obliczenia parametrów charakterystyki $M-\Phi$ połączenia według metody składowkowej

3. Określenie nośności obliczeniowej M_{Rd}

W efekcie obciążania połączenia z rysunku 2 zewnętrzną siłą obliczeniową F_{Sd} i zewnętrznym momentem M_{Sd} połączenie to ulega obrotowi o kąt Φ . W strefie rozciąganej ulega deformacji blacha podstawy i śruby, a w strefie ściskanej – blacha podstawy wraz z cementową podlewką. W celu określenia granicznej nośności obliczeniowej M_{Rd} połączenia przy zginaniu, z uwzględnieniem działającej jednocześnie w słupie obliczeniowej siły osiowej N_{Sd} , należy oszacować nośności: części rozciąganej F_{tRd} i ściskanej F_{cRd} , oznaczone na rysunku 2.

3.1. Określenie nośności F_{tRd}

W rozciąganej części połączenia mogą wystąpić trzy formy zniszczenia przedstawione na rysunku 5, za pomocą zastępczego elementu teowego poddanego rozciąganiu.

Nośność F_{tRd} rozciąganej części złącza z rysunku 2 należy przyjmować jako najmniejszą z trzech wartości (związanych z formami zniszczenia z rys. 5) obliczonych na podstawie zależności

$$F_{tRd1} = \frac{4 \cdot l_{eff} \cdot m_{plRd}}{m} \quad (1)$$

$$F_{tRd2} = \frac{2 \cdot l_{eff} \cdot m_{plRd} + n \cdot \sum B_{tRd}}{m + n} \quad (2)$$

$$F_{tRd3} = \sum B_{tRd} \quad (3)$$

gdzie:

$m_{plRd} = 0,25t^2 f_y / \gamma_{Mo}$ – moment plastyczny na jednostkę długości załomu,

t – grubość płyty podstawy,

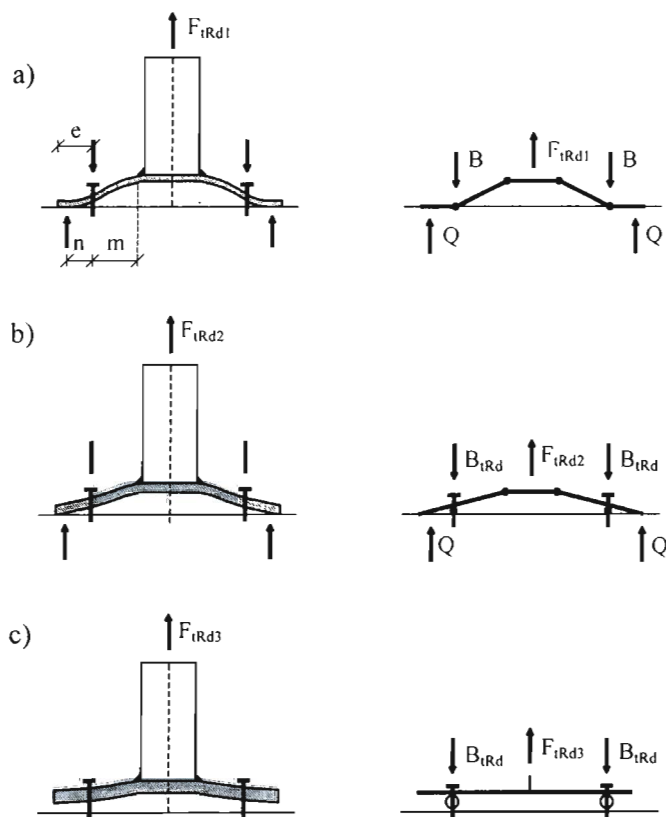
f_y – granica plastyczności stali,

γ_{Mo} – częściowy współczynnik bezpieczeństwa,

$\sum B_{tRd}$ – nośność śrub rozciąganych w połączeniu według pozycji [10],

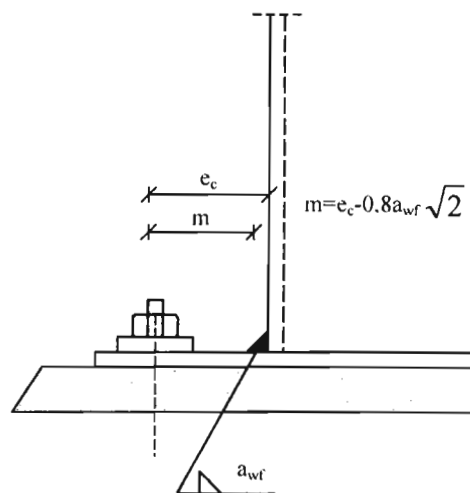
m, n – według rysunku 5a; sposób wyznaczania wartości „ m ” przedstawiono na rysunku 6,

l_{eff} – najmniejsza wartość efektywnych długości odpowiadających możliwym mechanizmom linii załomów, według rysunku 7 jakie mogą powstać w rozpatrywanym połączeniu.

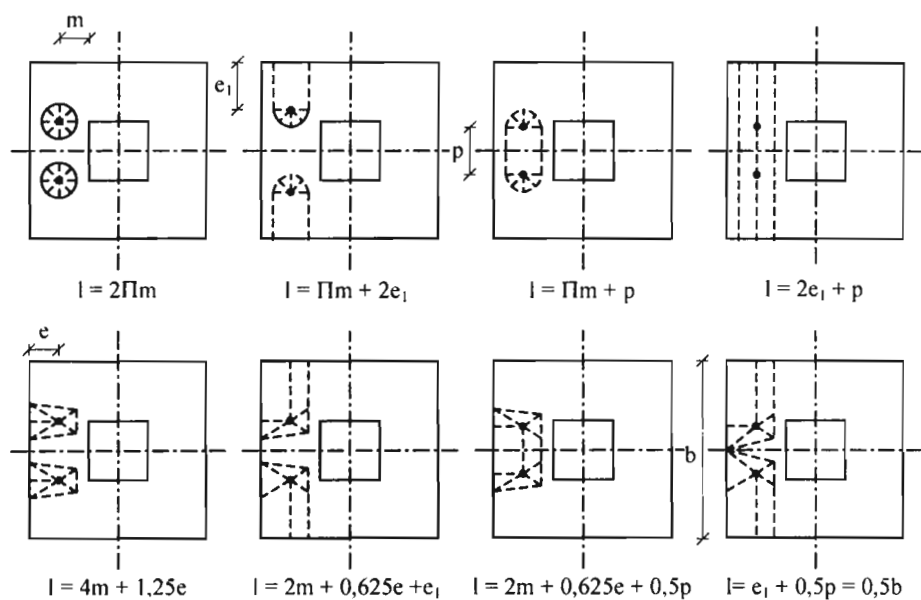


Rys. 5. Formy zniszczenia teowego złącza w rozciąganiu: a) całkowite uplastycznienie blachy podstawy, b) zniszczenie śrub połączone z uplastycznieniem blachy podstawy, c) zniszczenie śrub

Na rysunku 7 podano wartości l_{eff} dla modeli zniszczenia rozpatrywanego złącza, w których pojawia się efekt dźwigni ($Q > 0$ – rys. 5a,b).



Rys. 6. Wyznaczenie umownej odległości „ m ” pomiędzy osią śruby a spoiną



Rys. 7. Długości efektywne l_{eff}

Ma to miejsce, jeżeli

$$t < t_p = 2,07 m \sqrt[3]{\frac{A_S}{L_{bef} \cdot l_{eff}}} \quad (4)$$

gdzie:

t – grubość płyty podstawy,

t_p – grubość porównawcza płyty podstawy,

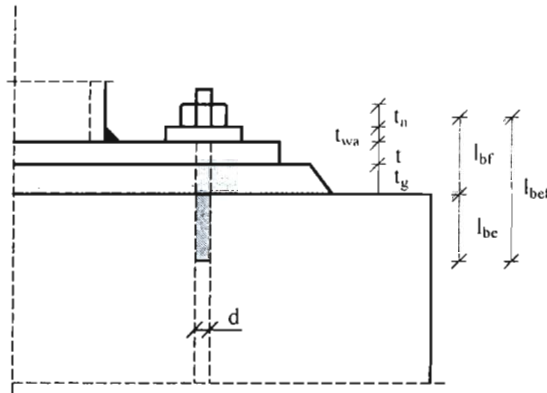
l_{eff} – minimalna z długości efektywnych według rysunku 7,

A_S – pole przekroju śruby netto,

$L_{bef} = L_{bf} + L_{be}$ – efektywna długość zakotwienia według rysunku 8,

$L_{bf} = t_g + t + t_{wa} + t_n/2$ – fizyczna swobodna długość według rysunku 8,

$L_{be} \equiv 8d$ – „uwalniana” osadzona w fundamencie długość zakotwienia według rysunku 8.



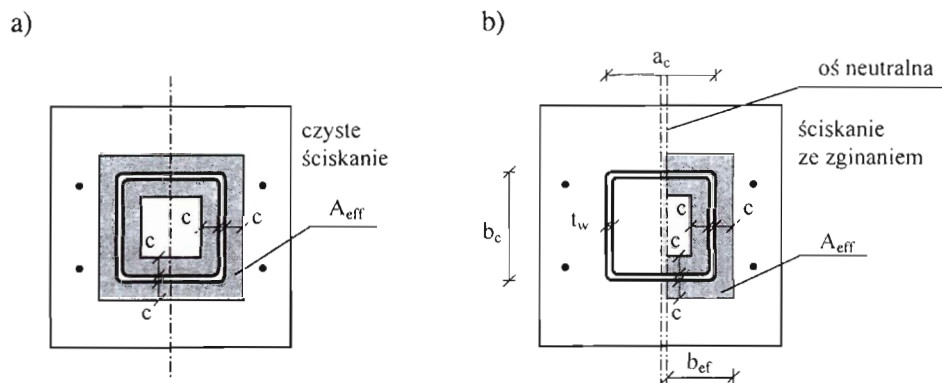
Rys. 8. Efektywna długość zakotwienia

Dla modelu zniszczenia połączenia, w którym nie występuje efekt dźwigni ($Q = 0$ – rys. 5c) długości l_{eff} podano w pracy [6].

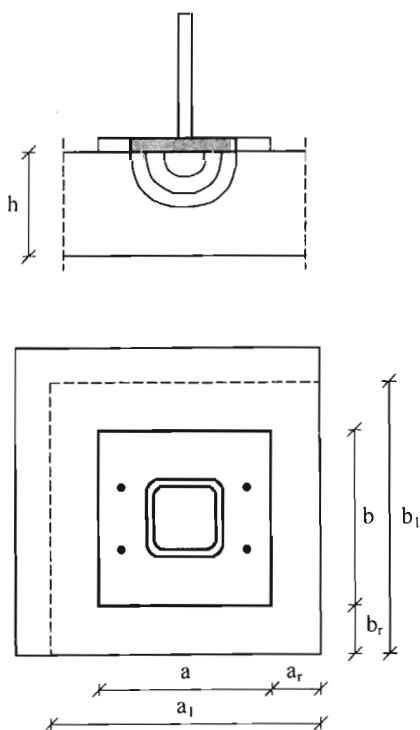
3.2. Określenie nośności F_{cRd}

Dla oszacowania nośności F_{cRd} części ściskanej z rysunków 2 i 9 należy określić wytrzymałość f_j styku betonowego na docisk oraz powierzchnię efek-

tywną A_{eff} ściskanej części fundamentu. Powierzchnia A_{eff} obejmuje równoważną, sztywną płytę (o zasięgu poza obrys rury słupa równym c) zastępującą podatną blachę podstawy.



Rys. 9. Efektywne pole docisku



$$a_1 = \min \begin{cases} a + 2a_r \\ 5a \\ a + h \\ 5b_1 \end{cases} \quad \text{lecz } a_1 \geq a$$

$$b_1 = \min \begin{cases} b + 2b_r \\ 5b \\ b + h \\ 5a_1 \end{cases} \quad \text{lecz } b_1 \geq b$$

Rys. 10. Strefa docisku

W celu określenia f_j , na podstawie rysunku 10, wyznaczany jest współczynnik k_j koncentracji naprężeń

$$k_j = \sqrt{\frac{a_1 b_1}{ab}} \quad (5)$$

Wytrzymałość styku betonowego na docisk wynosi

$$f_j = \frac{\beta \cdot k_j \cdot f_{ck}}{\gamma_c} \quad (6)$$

gdzie:

β – współczynnik, który można przyjmować jako równy 2/3, pod warunkiem, że wytrzymałość charakterystyczna podlewki f_{ckg} jest nie mniejsza niż 0,2 wytrzymałości charakterystycznej betonu f_{ck} w fundamencie oraz że grubość podlewki t_g jest nie większa niż 0,2 mniejszego z wymiarów a , b blachy podstawy.

γ_c – częściowy współczynnik bezpieczeństwa, odniesiony do materiału i ustalony według cz. 1-1 Eurokodu 2.

Dla oszacowania powierzchni A_{eff} wyznacza się parametry c oraz b_{ef} (rys. 9).

Wymiar c wspornika równoważnej płyty wynosi

$$c = t \sqrt{\frac{f_y}{3f_j \cdot \gamma_{Mo}}} \quad (7)$$

gdzie:

f_j – według wzoru (6),

t, f_y, γ_{Mo} – wyjaśniono przy wzorach (1-3).

Przyjmuje się, że rozkład naprężeń ściskających w obrębie powierzchni A_{eff} jest równomierny.

Mając na uwadze rysunek 2 i zależność (6), można zapisać, że

$$F_{cRd} = A_{eff} \cdot f_j \quad (8)$$

oraz

$$F_{cRd} = F_{tRd} + F_{Sd} \quad (9)$$

Na tej podstawie

$$A_{eff} = \frac{F_{tRd} + F_{Sd}}{f_j} \quad (10)$$

Zasięg b_{ef} dla przypadku z rysunku 9 b wyniesie

$$b_{ef} = \frac{A_{eff} - (2c + t_w)[b_c - 2(c + t_w)]}{2(2c + t_w)} \quad (11)$$

Nośność części ściskanej wyrażona jest poprzez

$$F_{cRd} = A_{eff}(c, b_{ef}) \cdot f_j \quad (12)$$

3.3. Określenie nośności M_{Rd}

Nośność obliczeniowa M_{Rd} połączenia na zginanie, przy obciążeniu słupa siłą osiową F_{Sd} , (rys. 2) wynosi

$$M_{Rd} = F_{tRd} \cdot r_t + F_{cRd} \cdot r_c \quad (13)$$

gdzie:

r_t, r_c – ramiona dźwigni wypadkowych nośności (F_{tRd}, F_{cRd}) części rozciąganej i ściskanej względem osi słupa,

F_{tRd} i F_{cRd} – określono z wzorami (1-3) i (12),

4. Sprawdzenie nośności trzonu słupa

Należy sprawdzić nośność trzonu słupa w stosunku do obliczonej nośności M_{Rd} połączenia.

Nośność przekroju przy czystym ściskaniu i zginaniu wynosi odpowiednio

$$N_{pl,Rd} = \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{Mo}}; \quad M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} \cdot f_y}{\gamma_{Mo}} \quad (14)$$

gdzie:

A – pole przekroju słupa,

W_{pl} – plastyczny wskaźnik przekroju słupa.

Zredukowana nośność przekroju słupa na zginanie uwzględniająca siłę osiową F_{Sd} wynosi

$$M_{F_{Sd},Rd} = M_{pl,Rd} \cdot \frac{1 - \frac{F_{Sd}}{N_{pl,Rd}}}{1 - 0,5 \frac{A - 2b_c \cdot t_w}{A}} \quad (15)$$

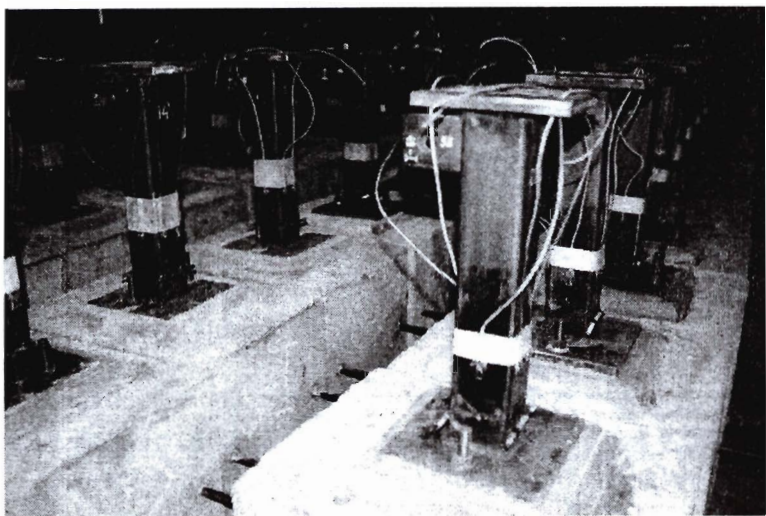
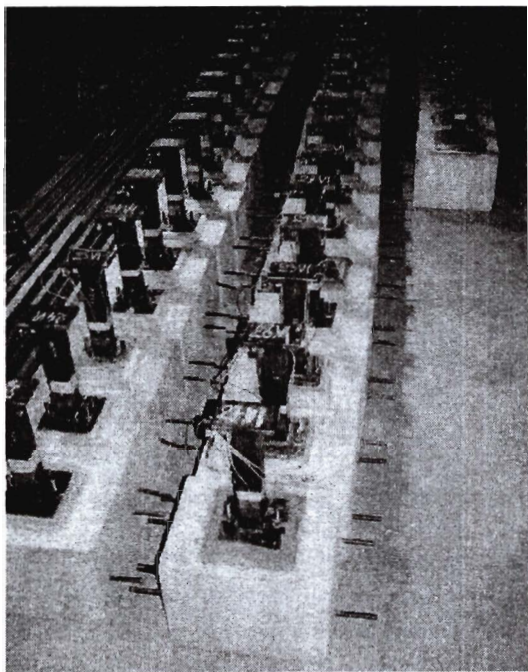
gdzie parametry b_c i t_w oznaczono na rysunku 9.

5. Rozwiązanie przykładu liczbowego

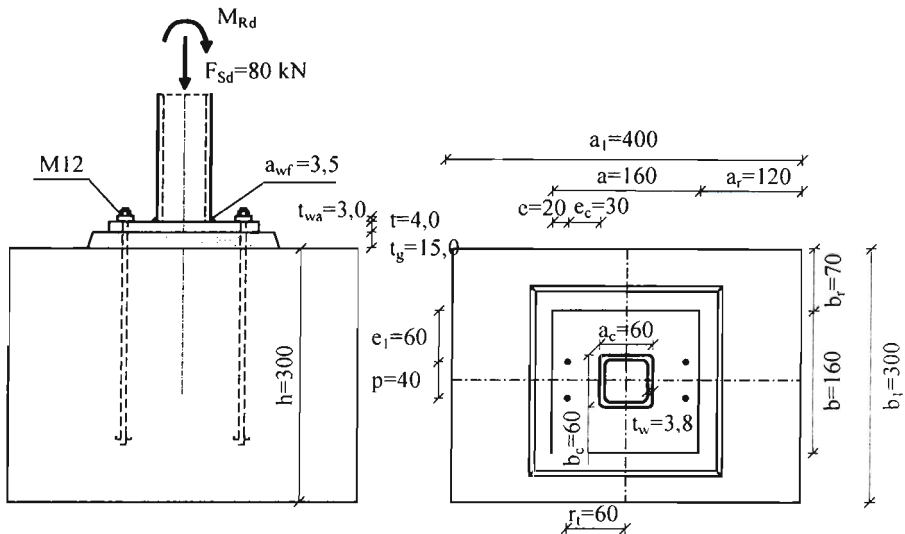
Autor opracowania przygotował badania 46 modeli połączenia słupa z fundamentem pokazanych na rysunku 11.

Elementy wykonano w skali 1:3. Na wykonanie trzonów słupów użyto rur kwadratowych $60 \times 60 \times 4$. Zmienną podatność złącza kształtowano poprzez zmianę liczby śrub kotwiących i ich układów oraz zmianę grubości blachy podstawy. Szczegółowe informacje dotyczące programu badawczego podano w [4].

Dla wybranego przygotowanego połączenia, o charakterystyce podanej na rysunku 12, przy obciążeniu go siłą osiową $F_{Sd} = 80$ kN (zblizoną do połowy prognozowanej nośności złącza przy czystym ściskaniu – rys. 13), stosując publikowaną procedurę, wyznaczono wartości pośrednie i nośność obliczeniową M_{Rd} .



Rys. 11. Modele połączeń przygotowane do badań



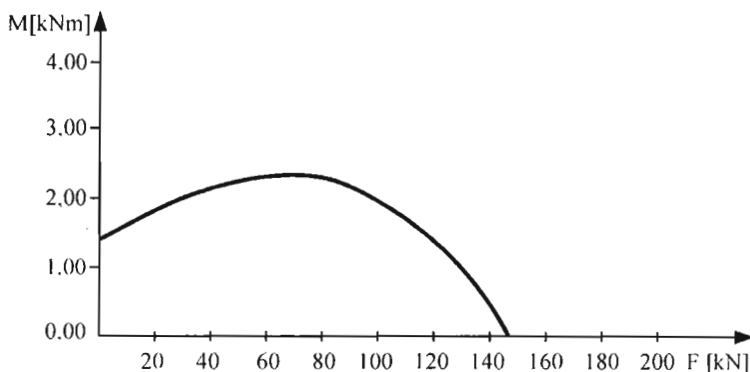
Rys. 12. Charakterystyka geometryczno-materiałowa wybranego połączenia: $f_y = 338,45$ (390,53) MPa – granica plastyczności stali blachy podstawy (trzonu słupa), $f_{ck} = 38,5$ MPa – wytrzymałość charakterystyczna betonu w fundamencie, $E_b = 35700$ MPa – moduł sprężystości betonu, $f_{yb} = 354,25$ MPa – granica plastyczności stali śruby, $\gamma_{Mo} = 1,1$; $\gamma_{Mb} = 1,25$; $\gamma_c = 1,5$ – współczynniki bezpieczeństwa odpowiednio dla stali, śrub, betonu

Uzyskano kolejno: $m = 26$ mm, $l_{eff} = 80$ mm, $L_{bef} = 123$ mm, $t_p = 11,3$ mm ($t_p > t = 4$ mm – występuje efekt dźwigni), $F_{tRd} = F_{tRd1} = 14,80$ kN, $k_j = 2,16$, $f_j = 36,92$ MPa, $A_{eff} = 2568$ mm², $c = 6,67$ mm, $b_{eff} = 55,4$ mm, $r_c = 13,97$ mm i ostatecznie $M_{Rd} = 2,21$ kNm.

Zredukowana nośność przekroju słupa na zginanie, uwzględniająca siłę osiową $F_{Sd} = 80$ kN, wynosiła $M_{F_{Sd}, Rd} = 5,02$ kNm $> M_{Rd} = 2,21$ kNm.

Wynika z tego, że połączenie zaprojektowano na działającą siłę, a nie na nośność słupa.

Obciążenie połączenia z rysunku 2 innymi wartościami obliczeniowej siły F_{Sd} powoduje zmianę jego nośności obliczeniowych M_{Rd} na zginanie. Na rysunku 13 przedstawiono krzywą interakcji $M - F$ dla analizowanego złącza.



Rys. 13. Krzywa interakcji $M - F$ dla analizowanego złącza

6. Podsumowanie

Teoretyczna interpretacja zachowania się podatnego połączenia słupa z fundamentem pod obciążeniem siłą i momentem jest skomplikowana ze względu na konieczność uwzględnienia współpracy różnych materiałów – stali i betonu, elementów składowych złącza, różnej liczby śrub kotwiących i zmiennego ich układu, różnych kształtów poprzecznych przekrojów słupów oraz usztywnień (żeber i ostróg). Metoda składnikowa łącząca charakterystyki zachowania się poszczególnych elementów złącza jest jednym ze sposobów uzyskania parametrów niezbędnych do teoretycznego opisu pracy tego połączenia. Jednym z tych parametrów jest analizowana obliczeniowa nośność zgięciowa M_{Rd} , wyznaczona i oszacowana liczbowo dla wybranego modelu węzła z grupy połączeń przygotowanych przez autora do badań eksperymentalnych. Określenie nośności M_{Rd} jest niezbędne do sporządzenia programu obciążeń elementów próbnych.

Literatura

- [1] Bródka J., Kozłowski A.: *Sztywność i nośność węzłów podatnych*. Monografia, Politechnika Białostocka i Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, 1996.

- [2] **Bródka J., Ligocki I.:** *Nośność połączenia stalowej stopy słupa z fundamentem – tło eksperymentalne i teoretyczne*. Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Budownictwo, 18/1998.
- [3] **Lubiński M., Filipowicz A., Żółtowski W.:** *Konstrukcje metalowe cz. 1*. Arkady, Warszawa, 1986.
- [4] **Ligocki I., Dziatkowski T.:** *Badania podatnego połączenia słupa z fundamentem – założenia programu eksperymentalnego*. Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Budownictwo, 21/2001.
- [5] **Wald F.:** *Column bases*. České vysoké učení technické, Praha, 1995.
- [6] **Wald F.:** *Resistance and stiffness model off column bases by component method*. Węzły podatne w konstrukcjach metalowych i zespolonych. Politechnika Warszawska, Warszawa, 24 – 25 XI 2000.
- [7] **Guisse S., Vandegans D., Jaspert J. P.:** *Application of the component method to column bases – experimentation and development of mechanical model for characterisation*. Centre de Recherches Scientifiques et Techniques de l' Industrie des Fabrications Métalliques. Bruxelles, (Stel Construction Department, MT 195), December 1996.
- [8] **Jaspert J. P.:** *Recent Advances in the Field of Steel Joints Column Bases and Further Configurations for Beam – to – Column Joints and Beam Splices*. Université De Liege, Faculté Des Sciences Appliquées, 1996/7.
- [9] **Bródka J., Cwalina W.:** *Sztywność i nośność ram stężonych o węzłach podatnych*. Politechnika Białostocka, 1998.
- [10] Eurokod 3, *Projektowanie konstrukcji stalowych*. PN-ENV 1993-1-1/AK.

**THE LOAD CAPACITY OF THE FLEXIBLE COLUMN –
– TO FOUNDATION CONNECTION ACCORDING TO THE COMPONENT METHOD**

Summary: In this paper the procedure of determination of load capacity of the flexible column – to – foundation connection with apply the component method exploited are presented. The analysis based on the instructions of Eurocode 3 and notices and corollaries from literature. It was made for the chosen of connection. The solution of the numerical example is made.

Key words: column, foundation, flexible connection, load capacity, procedure of calculation

Artykuł zrealizowano w ramach pracy własnej W/IIB/6/01.

Ireneusz Ligocki

SZTYWNOŚĆ PODATNEGO POŁĄCZENIA STALOWEJ STOPY SŁUPA Z FUNDAMENTEM WEDŁUG METODY SKŁADNIKOWEJ

Streszczenie: W opracowaniu przedstawiono procedurę określania sztywności podatnego połączenia stalowej stopy słupa z fundamentem przy zastosowaniu metody składnikowej. Praca jest kontynuacją publikacji [1] dotyczącej wyznaczania nośności tego złącza. Wykorzystano w niej wytyczne Eurokodu 3 [2] oraz uwagi i wnioski z prac [3-6]. Analizę przeprowadzono dla połączenia przyjętego w opracowaniu [1], wybranego przez autora z grupy elementów przygotowanych do badań eksperymentalnych. Rozwiązano przykład liczbowy, wyznaczając sztywność złącza oraz wartości pomocnicze. Przedstawiono charakterystykę obrotową tego węzła.

Słowa kluczowe: słup, fundament, połączenie podatne, sztywność

1. Wstęp

Podatne połączenie stalowej stopy słupa z fundamentem pokazane na rysunku 1 w wyniku obciążania go siłą osiową N_{sd} i momentem zginającym M_{sd} obraca się o kąt Φ . Graficzną interpretacją zachowania się złącza przy określonej stałej sile N_{sd} i zmieniającym się momencie M_{sd} jest krzywa $M - \Phi$ (moment – obrót) z rysunku 3 z pracy [1]. Przebieg tej krzywej zależy od konstrukcji węzła. W wypadku projektowanych tzw. połączeń quasi-przegubowych funkcja zbliża się do poziomej osi Φ układu współrzędnych $M - \Phi$ z rysunku 3 w opracowaniu [1], a w wypadku projektowania tak zwanych złączy sztywnych odpowiednio do osi pionowej M tego układu. Osie współrzędnych $M - \Phi$ odpowiadają skrajnym rozwiązaniom połączenia w pełni sztywnego i idealnego przegubu, które w rzeczywistości nie występują. Pełne zamocowanie słupa trudno osiągnąć, bowiem nawet jeśli styk elementu stalowego i żelbetowej podpory można uznać za sztywny, zwykle występuje pewien obrót stopy fundamentowej względem gruntu. Ciężkie, betonowe fundamenty i przeguby bolcowe lub śli-

zgowe projektuje się w zasadzie bardzo rzadko, a rozwiązania te zbliżają tylko połączenie do idealnego przegubu. Projektowane zwykle przeguby techniczne w związku z istnieniem pola docisku między blachą podstawy a fundamentem przenoszą pewien moment zginający. Szczegółowo opisano to w pracach [7, 8]. W większości wypadków projektowane i wykonywane złącza mają krzywe obrotowe $M - \Phi$, lokujące je między rozwiązaniami skrajnymi. Dla połączenia o określonej charakterystyce geometryczno – materiałowej przebieg takiej krzywej uzależniony jest od wartości siły osiowej N_{sd} w słupie. Zbiór wszystkich krzywych $M - \Phi(N)$ tworzy zakrzywioną powierzchnię o konstrukcji pokazanej na rysunku 1 w opracowaniu [1].

Dla teoretycznego oszacowania przebiegu funkcji $M - \Phi$ niezbędne jest określenie jej charakterystycznych wartości, tj.: nośności obliczeniowej M_{Rd} złącza przy zginaniu, sztywności początkowej $S_{j,ini}$ oraz współczynnika kształtu μ krzywej $M - \Phi$. Schemat blokowy wyznaczania tych parametrów, oparty na metodzie składnikowej, wraz z procedurą obliczania wartości M_{Rd} przedstawiono w pracy [1]. Niniejsze opracowanie zawiera tryb postępowania umożliwiający określenie sztywności początkowej $S_{j,ini}$ i współczynnika kształtu μ krzywej $M - \Phi$. Sztywność połączenia utożsamiana jest z nachyleniem stycznej do krzywej $M - \Phi$. Sztywność $S_{j,ini}$ odpowiada tangensowi kąta nachylenia stycznej w początkowym punkcie wykresu $M - \Phi$, gdy kąt Φ zdąży do zera. Podobnie jak w pracy [1], analizę przeprowadzono dla połączenia wybranego z grupy węzłów przygotowanych przez autora do badań eksperymentalnych. Rozwiązano przykład liczbowy wyznaczając wartości $S_{j,ini}$ i μ . Na podstawie obliczonych parametrów przedstawiono oszacowaną krzywą $M - \Phi$ wybranego złącza.

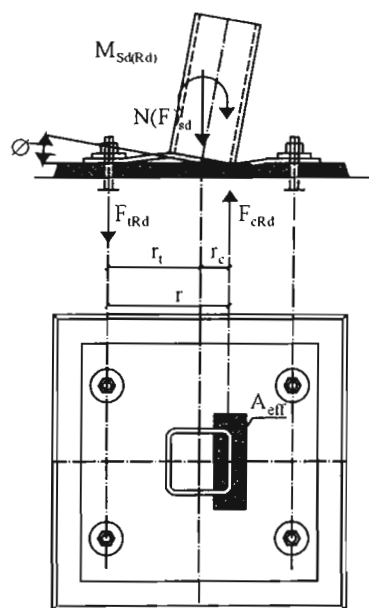
2. Określenie sztywności początkowej $S_{j,ini}$

Przeprowadzając analizę sztywnościową połączenia przyjmuje się upraszczające założenie (w stosunku do przyjętego w pozycji [1]), że efektywna powierzchnia A_{eff} części ściskanej, zgodnie z rysunkami 1 i 2, jest zlokalizowana wyłącznie pod półką rury słupa, a wypadkowa siła F_{cRd} ułożona jest w środku tej półki. Założenie to jest dopuszczalne ze względu na niewielki wpływ przyjętego uproszczenia na sztywność złącza.

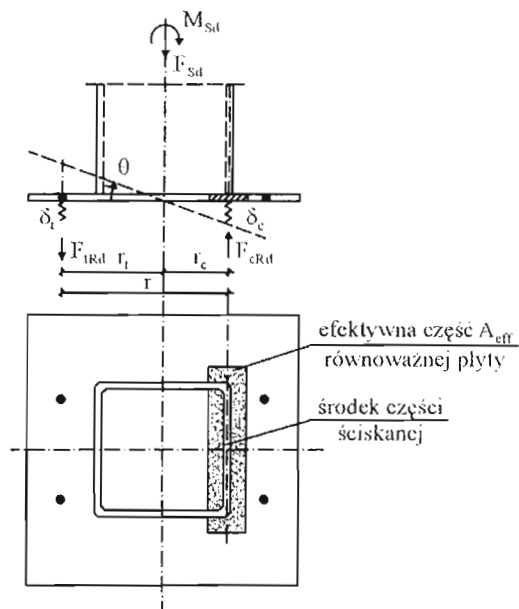
Rozpatrywane są dwa przypadki:

- dużego mimośrod, gdy $e = M_{Sd} / F_{Sd} \geq r_c$, kiedy występuje rozciąganie śrub kotwiących,
- małego mimośrod, gdy $e = M_{Sd} / F_{Sd} < r_c$, kiedy nie występuje rozciąganie śrub kotwiących.

Oznaczenia M_{Sd} , N_{Sd} , F_{Sd} i r_c pokazano na rysunkach 1 i 2. Dalszej analizie opartej na mechanicznym modelu połączenia z rysunku 2 poddano przypadek dużego mimośrod.



Rys. 1. Schemat pracy węzła



Rys. 2. Mechaniczny model połączenia

W celu rozwiązania zagadnienia wyznaczane są tak zwane współczynniki sztywnościowe k_i charakteryzujące elementy składowe strefy rozciąganej (płytę i kotwy – $k_i = k_p$ i $k_i = k_b$) oraz strefę ściskaną ($k_i = k_c$). Wartości współczynników k_p (k_b), w zależności od występowania bądź niewystępowania efektu dźwigni, wynoszą

- gdy efekt dźwigni występuje (rys. 5a,b z pracy [1])
dla płyty podstawy dla kotew

$$k_p = \frac{0,85 \cdot l_{eff} \cdot t^3}{m^3} \qquad k_b = 1,6 \cdot \frac{A_s}{L_{bef}} \qquad (1)$$

- gdy efekt dźwigni nie występuje (rys. 5c z pracy [1])
dla płyty podstawy dla kotew

$$k_p = \frac{0,45 \cdot l_{eff} \cdot t^3}{m^3} \qquad k_b = 2,0 \cdot \frac{A_s}{L_{beff}} \qquad (2)$$

gdzie:

l_{eff}, m – wartości według rysunku 7 z pracy [1],

t – grubość płyty podstawy,

A_s – pole netto przekroju śruby,

L_{bef} – efektywna długość zakotwienia według rysunku 8 z pracy [1].

Uproszczona zależność dla wyznaczenia współczynnika $k_i = k_c$ strefy ściskanej wyrażona jest wzorem

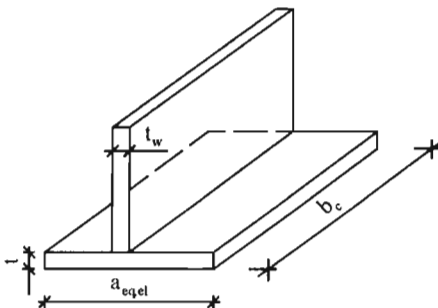
$$k_c = \frac{E_c}{1,275 \cdot E} \cdot \sqrt{a_{eq,el} \cdot L} \qquad (3)$$

gdzie:

$a_{eq,el} = t_w + 2,5t$ – równoważna szerokość umownego elementu teowego w strefie ściskanej według rysunku 3,

$L = b_c$ – długość elementu teowego według rysunku 3, przyjmowana jako równa szerokości przekroju słupa b_c według rysunku 9 z pracy [1],

E_c i E – moduły sprężystości betonu i stali.



Rys. 3. Parametry umownego elementu teowego w strefie ściskanej

Wypadkowa sztywność rozciąganego elementu obejmującego zginaną płytę i rozciągane kotwy jest określona współ-

czynnikiem k_t , związanym ze współczynnikami sztywności k_p i k_b części składowych zależnością

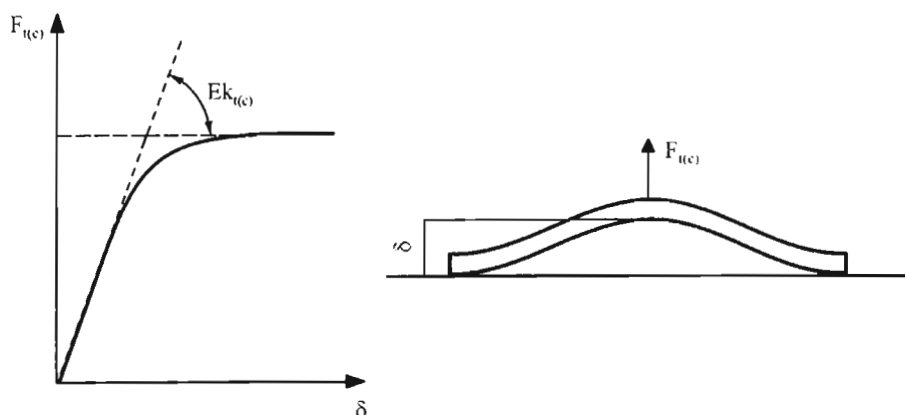
$$\frac{1}{k_t} = \frac{1}{k_p} + \frac{1}{k_b} \quad (4)$$

Kąt obrotu Φ połączenia z rysunku 2 wynosi

$$\Phi = \frac{\delta_t + \delta_c}{r} \quad (5)$$

Zgodnie z rysunkiem 4

$$\frac{F_t}{\delta_t} = E \cdot k_t \quad \text{ i } \quad \frac{F_c}{\delta_c} = E \cdot k_c \quad (6)$$



Rys. 4. Zależność $\delta(F)$

Z rysunku 1 wynika, że

$$\begin{cases} \frac{M_{Sd}}{r} - \frac{F_{Sd} \cdot r_c}{r} \leq F_{tRd} \\ \frac{M_{Sd}}{r} + \frac{F_{Sd} \cdot r_t}{r} \leq F_{cRd} \end{cases} \quad (7)$$

Na podstawie zależności (5), (6) i (7), kąt Φ można wyrazić wzorem

$$\Phi = \frac{1}{E_s \cdot r^2} \cdot \left(\frac{M_{Sd} - F_{Sd} \cdot r_c}{k_t} + \frac{M_{Sd} + F_{Sd} \cdot r_t}{k_c} \right) \quad (8)$$

Mimośród e_0 , przy którym $\Phi = 0$ ($e_{(0)} = M_{Sd}/F_{Sd}$) wynosi

$$e_0 = \frac{r_c \cdot k_c - r_t \cdot k_t}{k_c + k_t} \quad (9)$$

Sztywność początkową

$$S_{j,ini} = \lim_{\Phi \rightarrow 0} \frac{M_{Sd}}{\Phi}, \quad (10)$$

po uwzględnieniu Φ według (8) i e_0 według (9) można zapisać jako

$$S_{jini} = \frac{M_{Sd}}{M_{Sd} + F_{Sd} \cdot e_0} \cdot \frac{E_s \cdot r^2}{\sum_i \frac{1}{k_i}} = \frac{e}{e + e_0} \cdot \frac{E \cdot r^2}{\sum_i \frac{1}{k_i}} \quad (11)$$

3. Określenie współczynnika μ

Nieliniowa część krzywej $M - \Phi$ według rysunku 3 z pracy [1] może być zamodelowana poprzez zastosowanie współczynnika

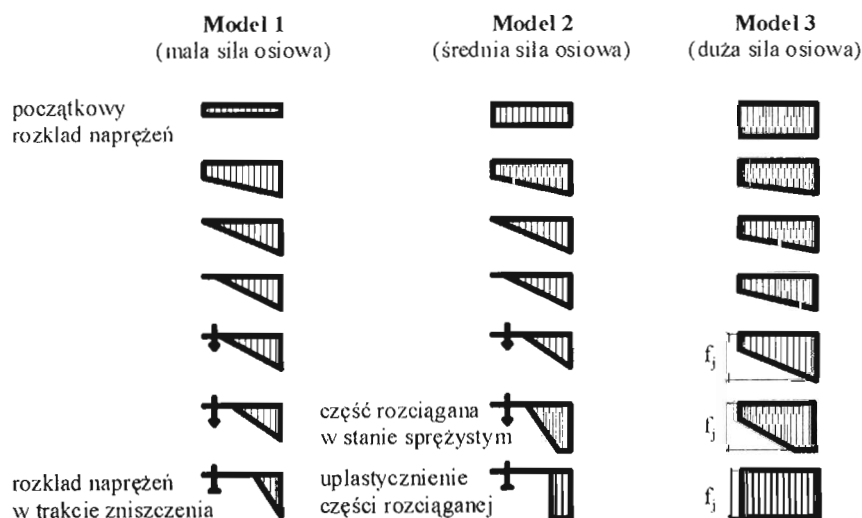
$$\mu = \frac{S_{jini}}{S_j} = \left(\kappa \cdot \frac{M_{Sd}}{M_{Rd}} \right)^\xi \geq 1,0, \quad (12)$$

który zależy od momentu jak również od siły osiowej w słupie. Ostatecznie, chwilową sztywność obrotową połączenia wyraża się jako

$$S_j = \frac{e}{e + e_0} \cdot \frac{E_s \cdot r^2}{\mu \cdot \sum_i \frac{1}{k_i}} \quad (13)$$

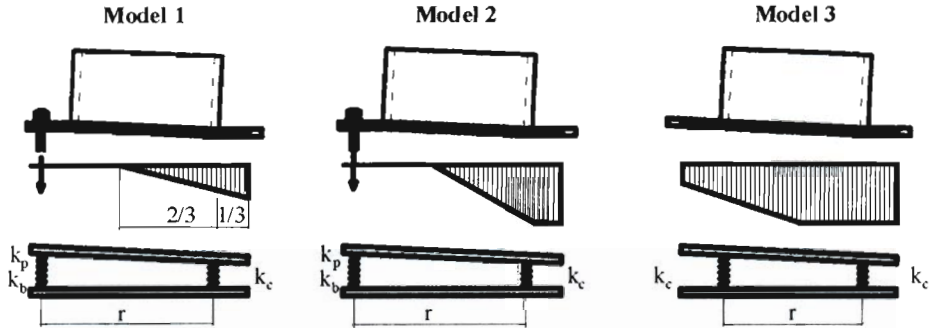
Współczynniki κ, ξ dobierane są stosownie do każdego z trzech wyodrębnionych, możliwych modeli zniszczenia połączenia. Modele te odpowiednio do war-

tości czynnej siły osiowej F_{Sd} w słupie (małej, średniej lub dużej) różnią się rozkładem naprężeń podporowych pod płytą podstawy z odniesieniem również do części rozciąganej (rys. 5). Gdy siła osiowa jest mała nie osiąga się wytrzymałości betonu na ściskanie f_j , określonej wzorem (6) w pracy [1], a zniszczenie następuje albo poprzez uplastycznienie śrub, albo w wyniku utworzenia się mechanizmu w rozciąganej części płyty podstawy. Przy średniej sile F_{Sd} w trakcie zniszczenia złącza w strefie ściskanej osiąga się wytrzymałość betonu f_j , a w strefie rozciąganej efektywną wytrzymałość f_t , wyjaśnioną przy wzorach (14) i (15). Jeśli przyłożona jest duża siła osiowa, następuje zniszczenie ściskanego betonu, zaś nie rozwija się strefa rozciągana.



Rys. 5. Przykład rozkładu naprężeń w trzech modelach zniszczenia połączenia zależnych od poziomu siły osiowej

Na rysunku 6 przedstawiono mechaniczne modele deformacji płyty odpowiadające trzem omawianym przypadkom.



Rys. 6. Mechaniczne modele deformacji płyty

Na podstawie szczegółowej analizy określono wartości sił osiowych N_{1-2} i N_{2-3} stanowiące granice funkcjonowania modeli 1, 2, 3. Wynoszą one

$$N_{1-2} = \frac{a_p \cdot b_p^2 \cdot f_j^2 \cdot (2 \cdot r_t + a_p) \cdot \frac{1}{k_c}}{4 \left(a_p \cdot b_p \cdot f_j \cdot \frac{1}{k_c} + 4 \cdot A_s \cdot f_t \left(\frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_p} \right) \right)} - 2 \cdot A_s \cdot f_t \quad (14)$$

$$N_{2-3} = \frac{(2 \cdot r_t + a_p) \cdot b_p \cdot f_j - 2 \cdot A_s \cdot f_t}{2} \leq a_b \cdot b_p \cdot f_j \quad (15)$$

gdzie:

a_p, b_p – wymiary efektywnej powierzchni wyznaczonej na podstawie gabarytowych wymiarów przekroju słupa i szerokości współpracującej c , równe $a_p = a_c + 2c$ i $b_p = b_c + 2c$ – według rysunku 9 z pracy [1],

r_t – ramię działania siły w rozciąganych śrubach względem osi słupa zgodnie z rysunkiem 1,

$f_t = F_{tRd} / A_s$ – efektywna wytrzymałość rozciąganej części połączenia (F_{tRd} – nośność części rozciąganej według wzorów (1-3) z pracy [1], A_s – jak we wzorach (1) i (2)),

f_j – wytrzymałość betonu na ściskanie według wzoru (6) z pracy [1],

k_p, k_b, k_c – według wzorów (1), (2) i (3).

W zależności od wielkości czynnej siły osiowej F_{Sd} w stosunku do wartości granicznych N_{1-2} i N_{2-3} , w tabeli 1 podano odpowiednie współczynniki κ, ζ . Dodatkowo zamieszczono skorygowane wartości ramienia r wypadkowych nośności części rozciąganej i ściskanej (ściskanych), uwzględniające charakter realizującego się modelu.

Tabela 1.

Wartości do określenia sztywności połączenia w zależności od wybranego modelu

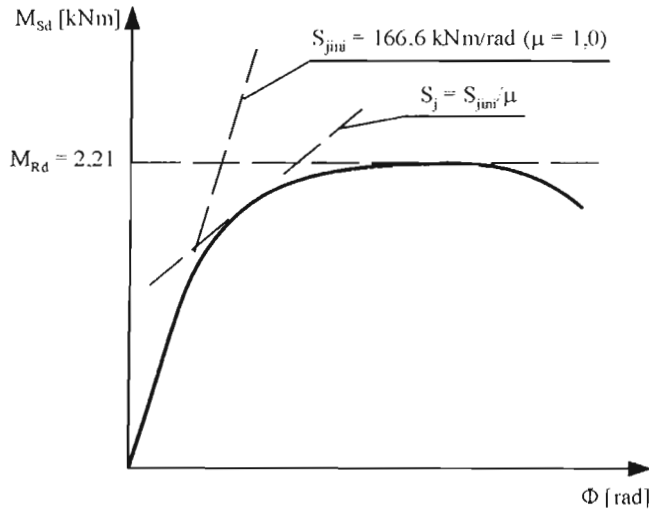
Model	κ	ζ	r
1 $F_{Sd} \leq N_{1-2}$	1,1	6	$r_1 = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot r_b + a_p)$
2 $N_{1-2} < F_{Sd} < N_{2-3}$	interpolacja liniowa		interpolacja liniowa pomiędzy $r_1 \quad i \quad r_3 \sqrt{\frac{\sum \frac{1}{k} \text{ mod el1}}{\sum \frac{1}{k} \text{ mod el3}}}$
3 $F_{Sd} \geq N_{2-3}$	1,5	8	$r_3 = \frac{a_p}{\sqrt{3}}$

4. Rozwiązanie przykładu liczbowego i krzywa $M - \Phi$

Określone wzorami 11 i 12 parametry $S_{j,ini}$ (k_b, k_p, k_c) i μ oraz wyznaczona w pracy [1] nośność zgięciowa M_{Rd} stanowią końcowe elementy schematu blokowego przedstawionej na rysunku 4 w pozycji [1], procedury opartej na metodzie składnikowej. Umożliwiają one oszacowanie krzywej obrotowej $M - \Phi$ złącza przy założonej sile osiowej F_{Sd} . Taką przykładową funkcję pokazano na rysunku 7. Opisuje ona zachowanie się analizowanego w opracowaniu wybranego połączenia (z grupy węzłów przygotowanych przez autora do badań eksperymentalnych) o charakterystyce geometryczno-materiałowej i sile F_{Sd} , które są podane w przykładzie liczbowym w [1].

W celu uzyskania opisujących tę krzywą parametrów $S_{j,ini}$ i μ , (M_{Rd} obliczono w [1]) dane połączenia wprowadzono do przedstawionych zależności, wyznaczając kolejno: $k_p = 0,25$ mm, $k_t = 1,11$ mm, $k_l = 0,20$ mm, $a_{eq} = 13,8$ mm,

$k_c = 3,82 \text{ mm}$, $r = r_t + r_c = 60 + 28,1 = 88,1 \text{ mm}$, $e = M_{Rd} / F_{Sd} = 27,62 \text{ mm}$, $e_0 = 23,72 \text{ mm}$, $S_{j,ini} = 166,6 \text{ kNm/rad}$, $N_{1-2} = 19,73 \text{ kN}$, $N_{2-3} = 198,4 \text{ kN}$, oraz $\kappa = 1,23$, $\zeta = 6,67$, (przy $F_{Sd} = 80 \text{ kN}$) i $\mu = (1,23 M_{Sd} / 2,21)^{6,67}$.



Rys. 7. Charakterystyka $M - \Phi$ połączenia

Obciążenie połączenia innymi wartościami obliczeniowej siły osiowej F_{Sd} powoduje zmianę przebiegu funkcji $M - \Phi$ (zgodnie z rysunkiem 1 z opracowania [1]).

5. Podsumowanie

Zastosowanie metody składnikowej umożliwia określenie nośności zgięciowej M_{Rd} , sztywności początkowej $S_{j,ini}$ i współczynnika kształtu μ , które są niezbędne do opisu funkcji $\Phi(M, N)$ charakteryzującej zachowanie się połączenia pod obciążeniem. W publikacji przedstawiono procedurę wyznaczania zależności służących do obliczania $S_{j,ini}$ i μ . Nośność M_{Rd} określono w pozycji [1]. Przedstawione wzory umożliwiają oszacowanie przebiegu teoretycznych krzywych $\Phi(M, N)$, charakteryzujących pracę połączeń przygotowanych do badań przez autora. Pozwoli to na sporządzenie optymalnego programu obciążeń. Jedną

z tych funkcji przedstawiono w opracowaniu. Uzyskane w testach eksperymentalne krzywe $\Phi(M, N)$ posłużą ocenie poprawności rozwiązania teoretycznego. Zmiana konfiguracji połączenia (liczby śrub kotwiących i ich układu, kształtu przekroju słupa, otworów na śruby i usztywnień) wymaga wprowadzenia korekt przy wyprowadzaniu pośrednich zależności służących do wyznaczenia M_{Rd} , $S_{j,ini}$ i μ .

Literatura

- [1] **Ligocki I.:** *Nośność podatnego połączenia stalowej stopy słupa z fundamentem według metody składnikowej*. Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Budownictwo Z. 24, Białystok, 2003.
- [2] **Eurokod 3.** *Projektowanie konstrukcji stalowych*. PN-ENV 1993-1-1/AK.
- [3] **Wald F.:** *Column Bases*. České vysoké učení technické, Praha, 1995.
- [4] **Wald F.:** *Resistance and stiffness model of column bases by component method*. Węzły podatne w konstrukcjach metalowych i zespolonych. Politechnika Warszawska, Warszawa, 24-25 XI 2000.
- [5] **Guisse S., Vandegans D., Jaspart J. P.:** *Application of the component method to column bases – experimentation and development of mechanical model for characterization*. Centre de Recherches Scientifiques et Techniques de l'Industrie des Fabrications Métalliques Bruxelles, Steel Construction Department MT 195, December 1996.
- [6] **Jaspart J. P.:** *Recent Advances in the Field of Steel Joints Column Bases and Further Configurations for Beam - to - Column Joints and Beam Splices*. Université De Liege, Faculté Des Sciences Appliquées, 1996/7.
- [7] **Bródka J., Ligocki I.:** *Nośność połączenia stalowej stopy słupa z fundamentem – tło eksperymentalne i teoretyczne*. Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Budownictwo Z. 18, Białystok, 1998.
- [8] **Bródka J., Kozłowski A.:** *Sztywność i nośność węzłów podatnych*. Monografia. Politechnika Białostocka, Oficyna wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Białystok – Rzeszów, 1996.

THE STIFFNESS OF THE FLEXIBLE COLUMN – TO – FUNDATIOMN CONNECTION ACCORDING TO THE COMPONENT METHOD

Summary: In this paper the procedure of determination of stiffness of the flexible column – to – foundation connection with apply the component method is presented. The paper is a continuation of the article [1] concerned the evaluation of load capacity this connection. It`s partly based on the informations which were included in [1]. The analysis was based on the instructions of Eurocode 3 [2] and notices and corollaries from literature [3-6]. It was made for the choosen connection. The solution of the numerical example and rotationally characteristic of the consideration were shown.

Key words: column, foundation, flexible connection, stiffness

Artykuł zrealizowano w ramach pracy własnej W/IIB/6/01.

Mikołaj Malesza, Czesław Miedziałowski

WPŁYW CZASU NA NOŚNOŚĆ I PODATNOŚĆ ELEMENTÓW KONSTRUKCJI SZKIELETOWYCH BUDYNKÓW DREWNIANYCH

Streszczenie: W pracy przedstawiono niektóre problemy pełzania drewna i połączeń stosowanych w konstrukcjach drewnianych. Analizowane są schematy pełzania drewna oraz zjawisko pełzania połączeń w świetle prowadzonych badań w różnych krajach. Podano zasady ustalania obciążeń pełzania dla połączeń stosowanych w konstrukcjach drewnianych na podstawie modeli zniszczenia złączy. Przedstawiono stanowisko do badań nad pełzaniem połączeń typu drewno-płyta. Podano wybrane wyniki badań nad pełzaniem i pełzaniem z odciążeniem. W pracy podano przewidywania dotyczące wpływu pełzania połączeń na trwałe przemieszczenia konstrukcji szkieletowej drewnianej tarczy ściennej.

Słowa kluczowe: Pełzanie drewna, materiał lepko-sprężysty, pełzanie z odciążeniem, modele zniszczenia łącznika, model pełzania złącza

1. Wprowadzenie

1.1. Pełzanie drewna i materiałów drewnopochodnych stosowanych w konstrukcjach drewnianych w świetle badań

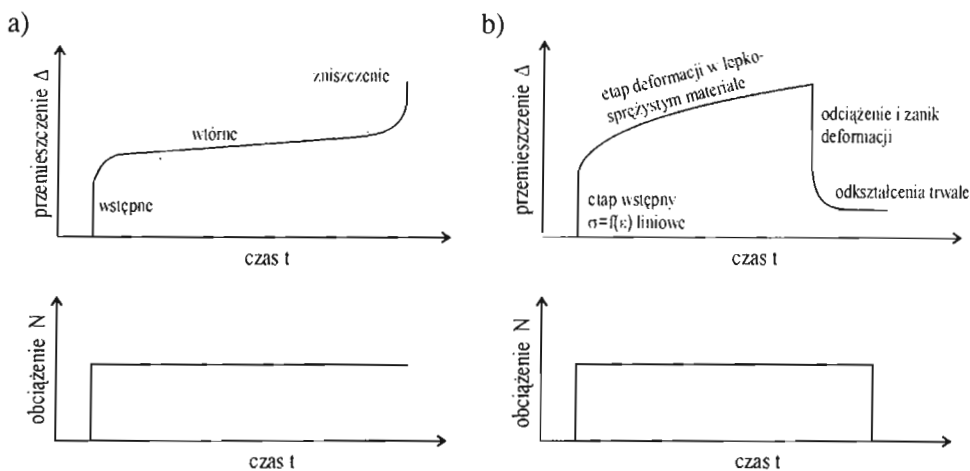
Dla niskiego poziomu naprężeń zależność $\sigma = f(\epsilon)$ dla drewna jest zbliżona do liniowej i materiał może być traktowany jako sprężysty. Takie założenie przyjmuje w analizie konstrukcji norma EC5 i PN-B-03150:2000 [5]. W jednych warunkach drewno może być więc traktowane jako materiał liniowo-sprężysty, w innych zaś jako liniowo- lepko-sprężysty. W rzeczywistości jednak drewno, a szczególnie materiały drewnopochodne będące swego rodzaju kompozytami, zachowuje się w sposób bardziej złożony, szczególnie przy wysokim poziomie obciążeń.

Pełzanie do zniszczenia w inżynierii konstrukcji drewnianych znane jest jako efekt czasu trwania obciążenia (DOL – duration of load effect) i objawia się

w postaci wyraźnego zmniejszenia wytrzymałości materiału na działanie długotrwałego obciążenia. Efekt ten jest mało poznany. Występują tu dwa rodzaje typowych krzywych opisujących deformacje dla materiałów lepkosprężystych [2]:

- pełzanie do zniszczenia,
- pełzanie z odciążeniem.

Na rysunku 1 przedstawiono schematycznie oba zjawiska pełzania.



Rys. 1. Dwa rodzaje schematów pełzania drewna [2]: a) obciążenie długotrwałe i jego idealizacja, b) pełzanie z odciążeniem

1.2. Zjawisko pełzania połączeń w konstrukcjach drewnianych

W połączeniach konstrukcji drewnianych nieliniowość, będąca wynikiem różnych czynników, jest widoczna od początku obciążenia. Czynniki te to:

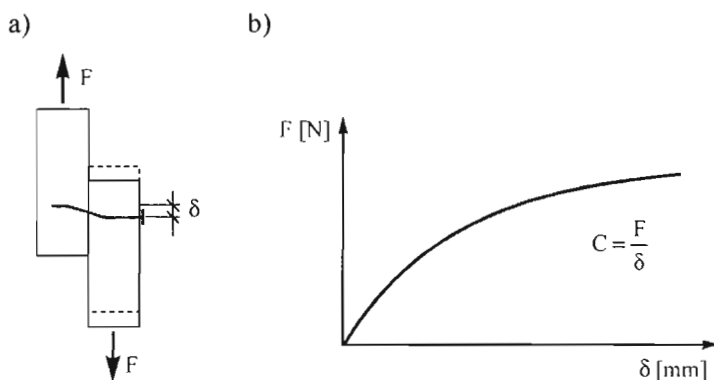
- a) rodzaj materiału i jego podstawowe charakterystyki mechaniczne,
- b) rodzaj łącznika i jego średnica
- c) obciążenie, jego rodzaj i jego charakterystyka w czasie.

Istotnym elementem są również efekty wilgotnościowe i termiczne.

Charakterystykę połączenia, a więc zależność siły obciążającej złącze od jego przemieszczeń i deformacji przedstawia rysunek 2.

Efekt czasu trwania obciążenia w połączeniach a więc zjawisko pełzania, różni się zasadniczo od pełzania samego drewna jako materiału konstrukcyjnego. Do dziś nie ma dostatecznego rozpoznania wpływu efektu czasu trwania obciążenia na połączenia stosowane w konstrukcjach drewnianych. Nadal nie są znane

zasady uwzględniania w praktyce wpływu tego efektu na nośność i podatność złączy. Wiele prac z zakresu wpływu czasu na połączenia prowadzono w USA, Europie i Japonii [3], [4].



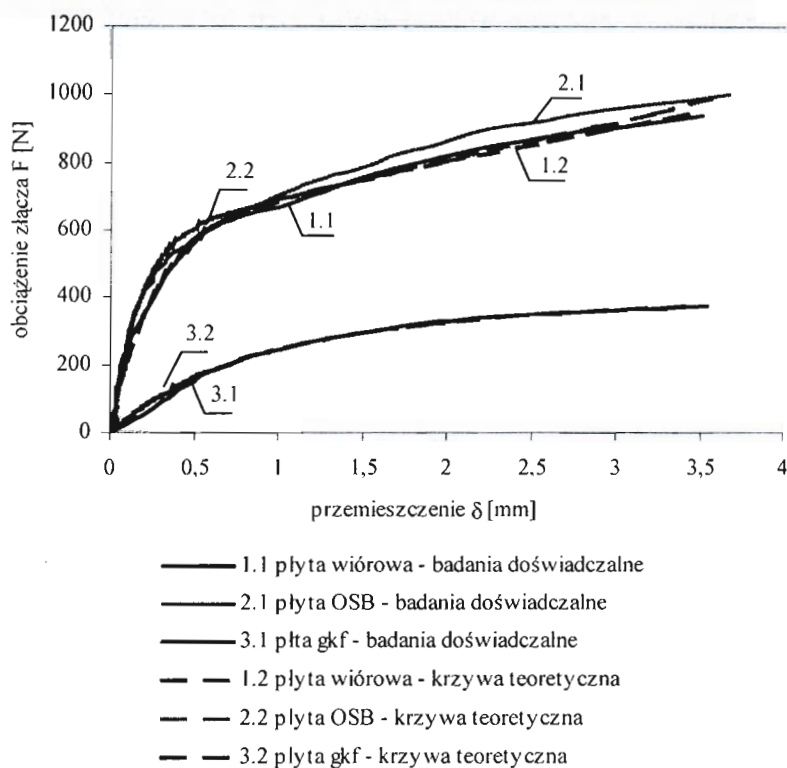
Rys. 2. Wykres zależności $F = f(\delta)$ dla łącznika typu trzpieniowego

Badania te pokazały, że zniszczenie materiału konstrukcji w wyniku wpływu czasu trwania obciążenia może nastąpić w przypadku rzeczywistych obciążeń wielokrotnie mniejszych niż przyjmowane obecnie na etapie projektowania konstrukcji. Efekt czasu trwania obciążenia powinien być odniesiony do połączeń, a nie do materiału elementu. Rezultaty niektórych badań [3] wskazują, że zależny od czasu poślizg w złączu wynosi około 35% początkowego przemieszczenia węzła (poślizgu) i ma tendencję do zwiększania się ze wzrostem obciążenia. Wy tłumaczenie tego zjawiska można znaleźć w lokalnym zgniataniu drewna wokół trzpienia łącznika przy wyższym poziomie obciążeń. Odciążenie badanego złącza powoduje zmniejszenie deformacji o 20-45% doraźnej wartości deformacji poślizgu.

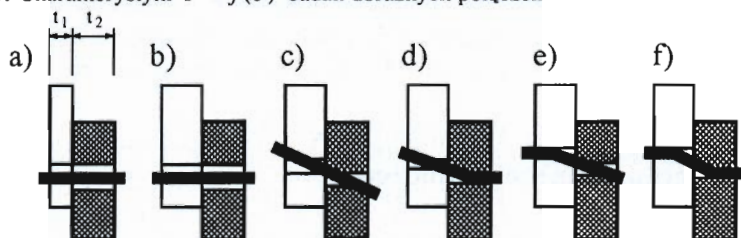
2. Badania nad pełzaniem połączeń

2.1. Charakterystyki podatności badanych złączy i nośność złączy

Badania doraźne nad połączeniami wykonano dla różnych typów złączy płyta-drewno, w których zastosowano łączniki trzpieniowe. Badania te przeprowadzono zgodnie z Normą PN-EN 26891 (PN-ISO 6891):1997 celem ustalenia podstawowych charakterystyk podatności połączeń $F = f(\delta)$ oraz nośności tych połączeń.



Rys. 3. Charakterystyki $F = f(\delta)$ badań doraźnych połączeń



Rys. 4. Modele zniszczenia połączeń jednociętych typu płyta-drewno [5]

Na rysunku 3 podano charakterystyki będące wynikiem badań doraźnych dla trzech typów płyt poszycia: płyty wiórowej płasko prasowanej, płyty wiórowej OSB i płyty gipsowo-kartonowej gkf. Równocześnie wyznaczono poziomy nośności charakterystycznych połączeń zgodnie z PN-B-03150:2000.

Doraźne nośności charakterystyczne połączeń dla różnych płyt poszycia obliczono dla różnych modeli zniszczenia złącza według PN-B-03150:2000.

Modele zniszczenia podano na rysunku 4.

Charakterystyczną nośność połączenia określono jako minimalną dla jednego z modeli zniszczenia połączenia według zależności:

$$R_d = \min \left\{ \begin{array}{ll} f_{h,1,d} t_1 d & \text{a} \\ f_{h,1,d} t_2 d \beta & \text{b} \\ \frac{f_{h,1,d} t_1 d}{1 + \beta} \left[\sqrt{\beta + 2\beta^2 \left[1 + \frac{t_2}{t_1} + \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^2 \right]} + \beta^3 \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^2 - \beta \left(1 + \frac{t_2}{t_1} \right) \right] & \text{c} \\ 1,1 \frac{f_{h,1,d} t_1 d}{2 + \beta} \left[\sqrt{2\beta(1 + \beta) + \frac{4\beta(2 + \beta)M_{y,d}}{f_{h,1,d} d t_1^2}} - \beta \right] & \text{d} \\ 1,1 \frac{f_{h,1,d} t_2 d}{1 + 2\beta} \left[\sqrt{2\beta^2(1 + \beta) + \frac{4\beta(2 + \beta)M_{y,d}}{f_{h,1,d} d t_2^2}} - \beta \right] & \text{e} \\ 1,1 \sqrt{\frac{2\beta}{1 + \beta}} \sqrt{2M_{y,d} f_{h,1,d} d} & \text{f} \end{array} \right.$$

Procesy pełzania badano dla określonych dwóch etapów obciążenia:

a) charakterystycznego, wynikającego z minimalnej nośności złącza dla modelu zniszczenia (e) przyjmując siły działające na złącze:

$P = 310, 420, 570, 600$ N – złącze z płytą wiórową,

$P = 420, 475, 630$ N – złącze z płytą OSB,

$P = 260$ N – złącze z płytą gkf.

b) wynikającego z poziomu obliczeniowych obciążeń połączenia w wielkości:

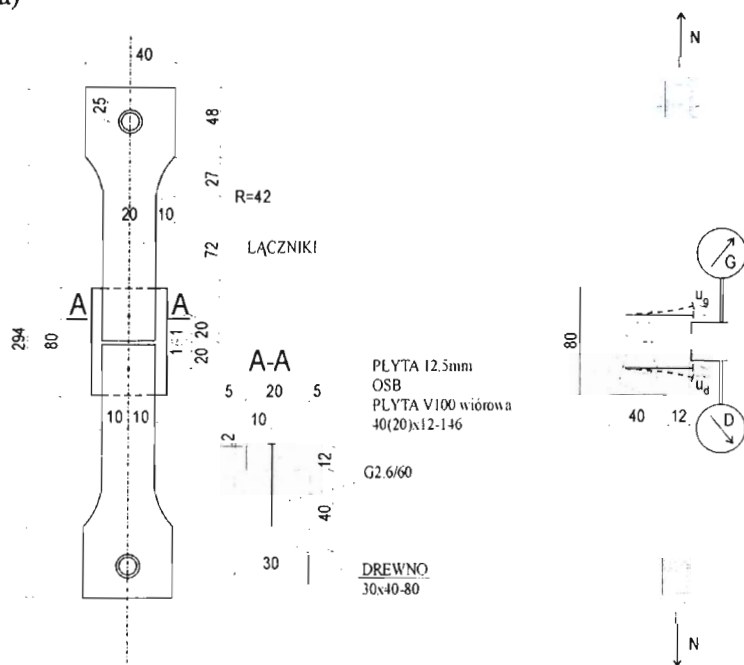
$P = 400$ N – złącze z płytą wiórową,

$P = 400$ N – złącze z płytą OSB,

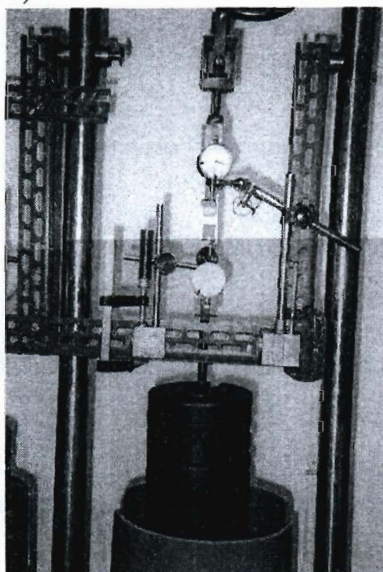
$P = 190$ N – złącze z płytą gkf.

Próbki użyte do badań i schemat ich obciążenia przedstawiono na rysunku 5.

a)



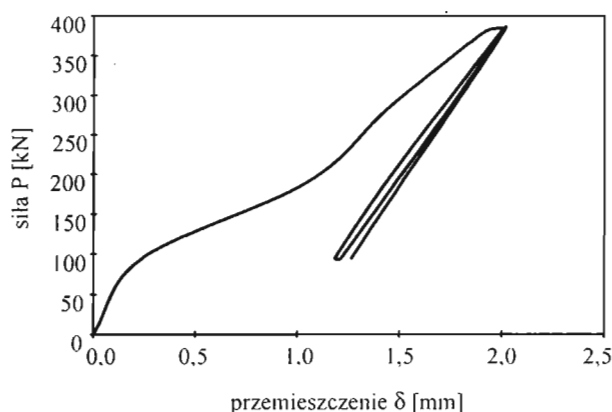
b)



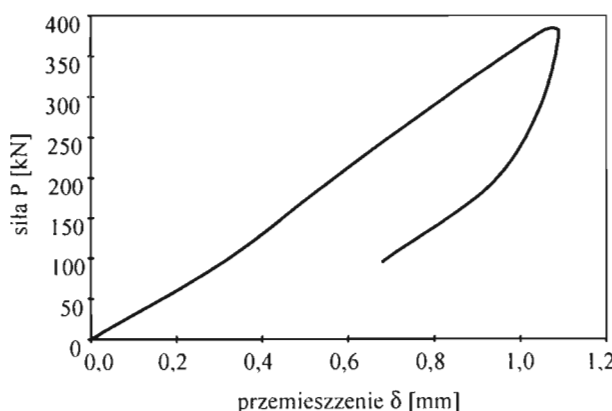
Rys. 5. Próbkę i schemat ich obciążenia

2.2. Niektóre wyniki badań nad połączeniami

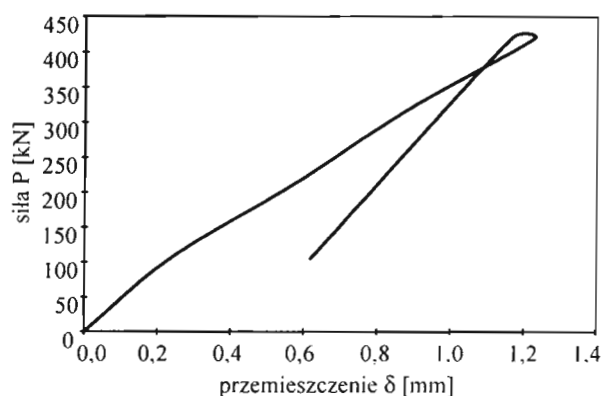
Badanie charakterystyk pełzania połączeń konstrukcji drewnianych z płytą drewnopochodną poszycia wykonano po wstępnym obciążeniu złącza siłą $P = 0,4 \cdot P_{\max}$ z odciążeniem do wartości obciążenia $P_1 = 0,10 \cdot P_{\max}$. Wartość obciążenia $P_{\max}$ określono na podstawie charakterystyk poszczególnych typów złącz i rodzajów płyt poszycia jak na rysunku 6.



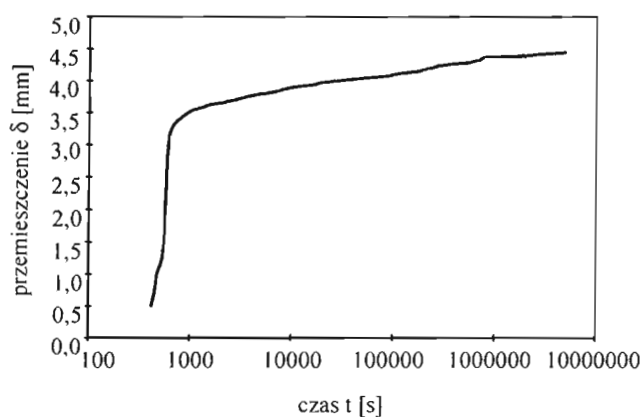
Obciążenie wstępne złącza z płytą wiórową z efektem odciążenia (dla $P = 0,40 P_{\max}$), dla $P = 570$ N



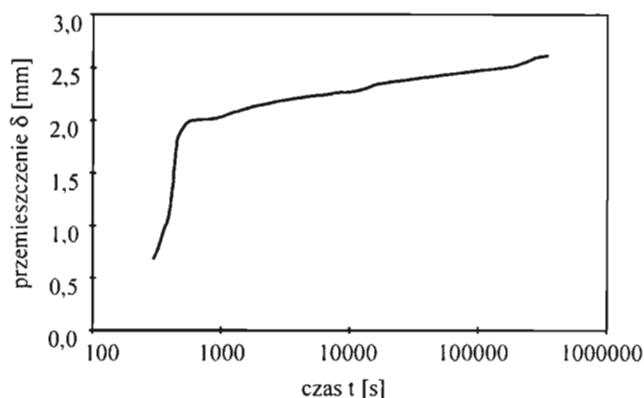
Obciążenie wstępne złącza z płytą wiórową dla $P = 570$ N z efektem odciążenia



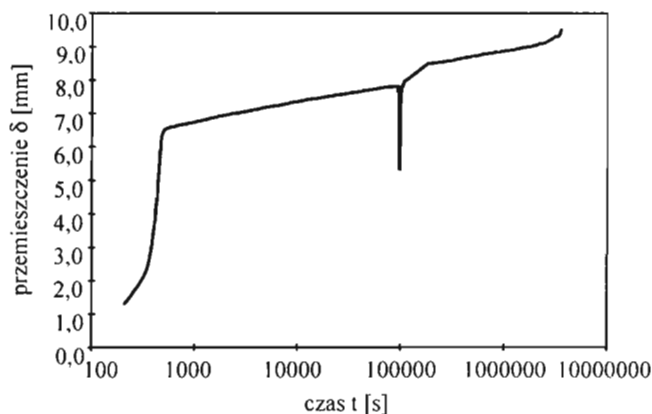
Obciążenie wstępne z odciążeniem złącza z płytą wiórową dla $P = 600$ N



Wykres pełzania złącza z płytą wiórową pod obciążeniem $P = 570$ N



Wykres pełzania złącza z płytą wiórową pod obciążeniem $P = 570$ N



Wykres pełzania złącza z odciążeniem (DOL effect) dla poszycia z płyty wiórowej, przy obciążeniu $P = 600$ N

Rys. 6. Wykresy $P = f(\delta)$ dla wstępnego obciążenia złącza i wykresy pełzania złącz dla określonych poziomów obciążeń

2.3. Model mechaniczny opisujący efekt pełzania połączenia

Na podstawie wstępnych wyników badań przyjęto model mechaniczny opisujący efekt pełzania połączeń płyt poszycia z konstrukcją drewnianą za pomocą łącznika trzpieniowego.

Znane modele: Maxwella, Kelvina, liniowy i Burgersa dla ciała lepko-sprężystego opisują zjawisko pełzania drewna jako materiału konstrukcyjnego [1]. Jeden z nowszych modeli, model Burgersa, pozwala opisać deformację pełzania według zależności [2]:

$$\delta = \frac{P}{K_2} + \frac{P \cdot t}{R_2} + \frac{P}{K_1} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{K_1 \cdot t}{R_1}\right) \right]$$

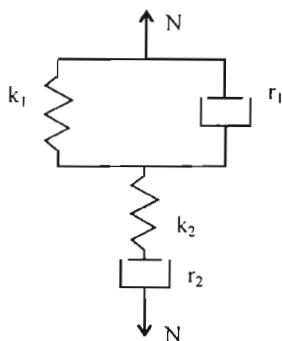
gdzie:

δ – deformacja poślizgu pod stałym obciążeniem P w okresie trwania t ,

K_1, K_2 – stałe sprężyny,

R_1, R_2 – stałe dla tłumika tłokowego.

Model mechaniczny połączenia jako zespół materiałów o cechach lepko-sprężystych przedstawiono na rysunku 7.



Rys. 7. Model mechaniczny połączenia płyty poszycia z konstrukcją drewnianą

Opracowano analityczną funkcję opisu pełzania połączenia. Funkcję tę zaadaptowano dla pełzania złącza z płytą wiórową, obciążonego siłą $P = 570$. Na rysunku 8 przedstawiono część wykresu pełzania tego złącza w obszarze czasowym od $t = 0$ do 20000 s.

Funkcję opisującą przebieg pełzania przyjęto w postaci:

$$\delta = c - at^{m+bt}$$

gdzie:

δ – deformacja w złączu (przemieszczenie w wyniku pełzania drewna otaczającego łącznik i łącznika,

c – jest asymptotycznym przemieszczeniem w złączu dla czasu $t = \infty$,

a, m, b – stałe w funkcji.

Dla wybranych wykresów charakterystyk pełzania złączy określono wartość parametrów (stałych).

Dla połączenia z płytą wiórową dla poziomego obciążenia pełzania złącza siłą $P = 570$ N (schemat – wykres krzywej pełzania złącza z płytą wiórową dla $P = 570$) parametry a, m, b są odpowiednio równe:

górna krzywa:

$$a = 8,4449$$

$$b = 9,7016 \cdot 10^{-5}$$

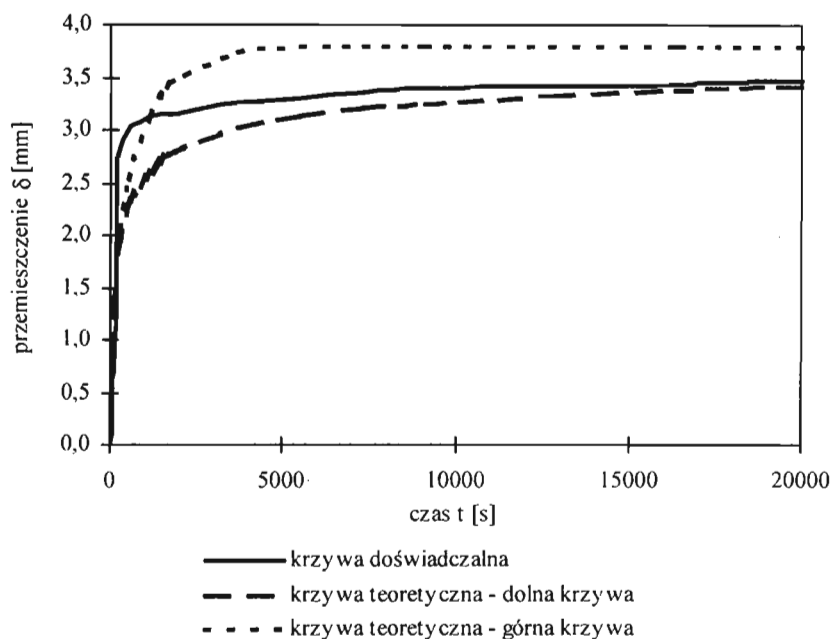
$$m = -0,2494$$

dolna krzywa:

$$a = 9,4065$$

$$b = -7,7928 \cdot 10^8$$

$$m = -0,2559$$

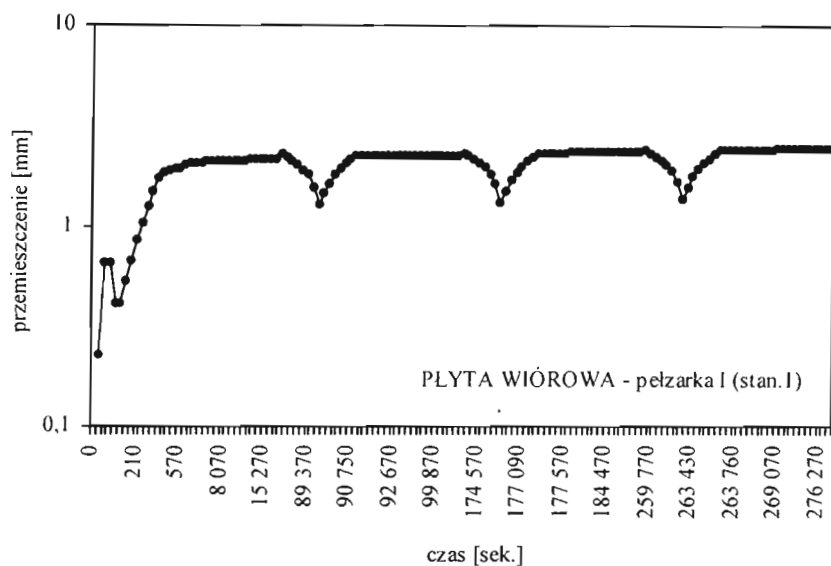


Rys. 8. Wykres pełzania złącza przyjęty do opisu funkcją matematyczną

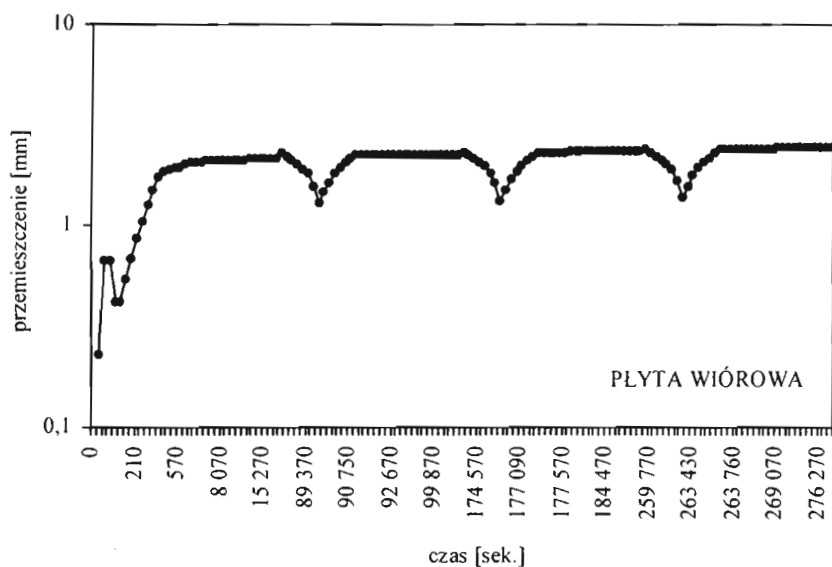
Teoretyczna krzywa pełzania, opisana wyżej równaniem dla określonych parametrów a, b, m , dość dobrze odpowiada uzyskanym wartościom z badań doświadczalnych.

W podobny sposób można opisać pełzanie z ociążeniem, przyjmując odpowiednią funkcję matematyczną.

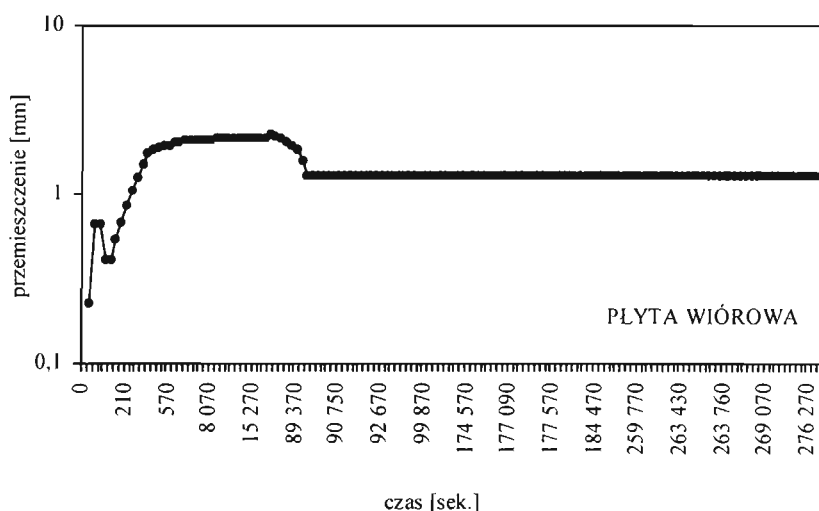
Badano połączenia płyt poszycia z różnych materiałów z konstrukcją drewnianą przy obciążeniu pełzania 400 N z łącznikami typu trzpieniowego o średnicy 2.5 mm. Wybrane rezultaty badań przedstawiono na rysunkach 9, 10 i 11.



Rys. 9. Krzywa pelzania złącza z poszyciem z płyty OSB



Rys. 10. Seria krzywych pelzania z krótkotrwałymi odciążeniami dla płyty wiórowej w złączu

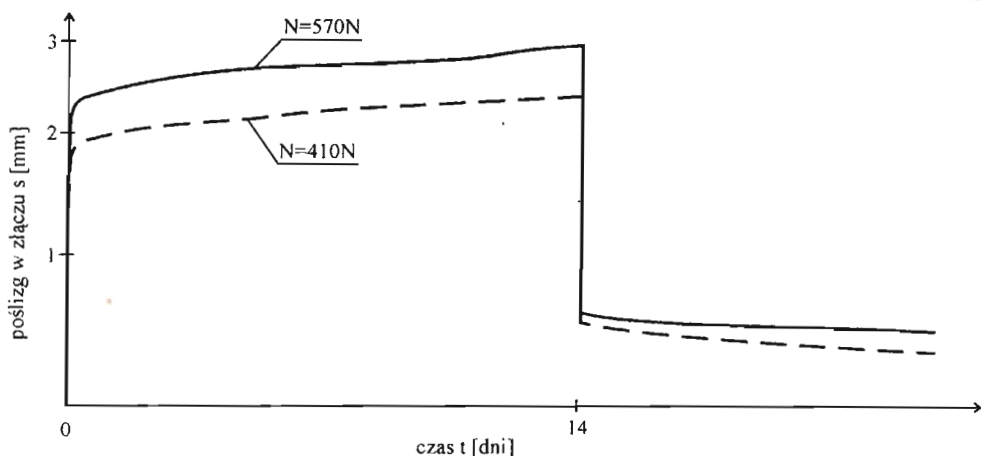


Rys. 11. Krzywa pełzania z odciążeniem połączeń

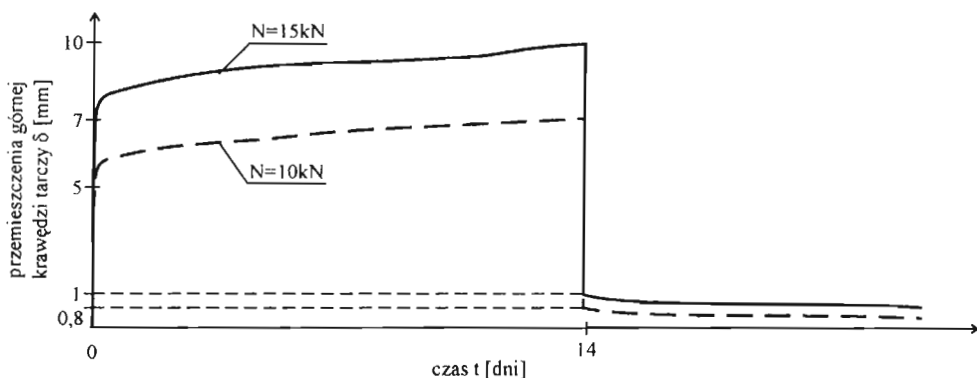
3. Wpływ pełzania połączeń na przemieszczenia konstrukcji tarczy ściennej

Na rysunkach 12 i 13 przedstawiono krzywe pełzania połączeń poszycia i konstrukcji drewnianej dla różnych poziomów obciążeń łącznika i odpowiadające przemieszczenia w czasie tarczy ściennej dla odpowiadających wielkości siły poziomej, przy której występują rozpatrywane poziomy obciążenia łącznika.

Krzywe pełzania połączeń konstrukcji drewnianej z płytą poszycia, jak również krzywe pełzania tarcz ściennych z zastosowaniem takich połączeń wykazują relatywnie małą wrażliwość na efekty czasowe dla eksploatacyjnych poziomów obciążeń tarczy.



Rys. 12. Krzywa pełzania i pełzania z odciążeniem połączenia płyty wiórowej z konstrukcją drewnianą dla różnych poziomów obciążeń złącza



Rys. 13. Przesunięcia pełzania górnej krawędzi ściany dla różnych poziomów obciążeń tarczy

4. Podsumowanie

Dotychczasowe badania nad połączeniami pozwalają sformułować następujące wnioski:

- wysoki poziom obciążenia połączeń, wynoszący 80% doraźnej nośności złącza, prowadzi do nagłego zniszczenia złącza po kilku dniach badań,
- pod działaniem obciążenia 410 N, stanowiącego 43% doraźnej nośności, stabilizacja pełzania występuje po 30 dniach badań,

- przemieszczenia doraźne ścian stanowią 80 % całkowitych deformacji pomierzonych w czasie 30 dni badań,
- badania długotrwale tarcz i złączy są kontynuowane.

Literatura

1. **Fridley K. J., Tang R. C., Soltis L. A.:** *Creep behaviour model for structural lumber*. Journal of Structural Engineering, Vol. 118 (8). 1992.
2. **Cai Z., Fridley K. J., Hunt M. O., Rosowsky D. V.:** *Creep and creep recovery models for wood under high stress levels*. Wood & Fiber Science 34 (3), 2002.
3. **Rosowsky D. V., Bulleit W. M.:** Another look at load duration effects in wood. Journal of Structural Engineering Vol.128 (3). 2002.
4. **Rosowsky D., Reinhold T. A.:** *Rate of load and duration-of-load effects for wood fasteners*. Journal of Structural Engineering Vol.125 (5). 1999.
5. PN-B-03150:2000. *Konstrukcje drewniane. Obliczenia statyczne i projektowanie*. PKN 2000.

INFLUENCE OF TIME ON LOAD CAPACITY AND DEFORMABILITY OF WOOD-FRAMED BUILDING STRUCTURES

Summary: Paper present selected problems of creep of joints used in timber structure. Long term effects in wood and creep of mechanically fastened joints phenomena are analyzed in the light of investigations conducted abroad. The level of creep loading is analyzed on the basis of failure modes of joints. Paper presents setup for experimental tests of wood-to wood base panel joints. Predicted long-term displacements of the wood framed wall diaphragm and influence of creep of joints on these displacements ends up the paper.

Key words: creep of wood, visco-elastic material, creep with recover, failure models of fastener, creep model for connection

Artykuł zrealizowano w ramach pracy własnej W/WB/5/02.

Zygmunt Orłowski

PROCES BETONOWANIA W WARUNKACH ZIMOWYCH

Streszczenie: W pracy dokonano analizy zjawisk występujących podczas prowadzenia robót betonowych w obniżonych temperaturach. Przedstawiono metody techniczne (stosowane w Polsce i zagranicą), umożliwiające realizację robót w warunkach zimowych. Omówiono również wymogi organizacyjne, które powinny być zachowane podczas wykonywania tych robót.

Słowa kluczowe: warunki zimowe, świeży beton, dojrzewanie betonu, pielęgnacja betonu

1. Analiza zjawisk towarzyszących betonowaniu w warunkach obniżonej temperatury

O warunkach zimowych dojrzewania betonu mówimy, za normą [10], gdy średnia temperatura dobowa jest niższa od $+5^{\circ}\text{C}$. Temperaturę średnią dobową oblicza się ze wzoru:

$$T_{sr} = \frac{T_7 + T_{13} + 2T_{21}}{4} \quad (1)$$

w którym:

T_7, T_{13}, T_{21} – temperatura powietrza zmierzona o godzinach 7^{00} , 13^{00} i 21^{00} .

Wyróżnia się także temperaturę krytyczną, tj. taką, przy której zamarza w betonie około 50% wody wolnej. Temperatura krytyczna waha się od -1°C do -3°C , w zależności od ilości soli rozpuszczalnych w wodzie wolnej podczas hydratacji cementu, które obniżają temperaturę zamarzania. Na ogół w literaturze krajowej przyjmuje się, że temperatura krytyczna równa się -1°C [5, 12]. Przy tej temperaturze beton, bez względu na jego wytrzymałość, nie ulega uszkodzeniu; ponadto postępuje powolny proces jego wiązania. Według Neville [8] nawet w temperaturze około -12°C wytrzymałość betonu wzrasta powoli. Gdy proces betono-

wania przeprowadzany jest w ujemnych temperaturach, a woda zarobowa zamrze przed rozpoczęciem procesu wiązania, beton zwiększy swoją objętość o około 9-13%, a brak wody mogącej reagować chemicznie opóźnia lub nawet uniemożliwia wiązanie i twardnienie. Nie wytwarza się mikrostruktura twardniejącego zaczynu. Kiedy w późniejszym terminie nastąpi odmrożenie, beton powinien być zawibrowany powtórnie, gdyż tylko wtedy dojdzie do jego związania i stwardnienia bez straty wytrzymałości. Brak rewibracji sprawi, że w betonie będzie duża objętość porów i w konsekwencji jego wytrzymałość będzie bardzo niska.

Jeżeli zamrożenie betonu nastąpi po związaniu betonu, ale zanim uzyska on dostateczną wytrzymałość, tworzący się lód zniszczy świeżo powstałe produkty procesu hydratacji, przyczyniając się do nieodwracalnych strat wytrzymałości. Na utworzenie tych produktów została już zużyta część cementu. Zakłada się, że im później nastąpi zakłócenie wiązania, tym szkodliwość lodu będzie większa. Jeżeli beton w wyniku zaawansowanej hydratacji cementu osiągnął dostateczną, wystarczającą wytrzymałość, będzie mniej wrażliwy na działanie mrozu. Jamroży [5] wyróżnia odporność warunkową i pełną. Odporność warunkowa jest wystarczająca wtedy, kiedy do betonu w okresie dojrzewania, aż do uzyskania odporności pełnej, nie będzie przedostawać się woda z otoczenia. W przeciwnym wypadku beton powinien osiągnąć odporność pełną przed zamrożeniem. Odporności warunkowej odpowiadają następujące bezpieczne wytrzymałości na ściskanie:

- 2 MPa, gdy beton jest wykonany z cementu portlandzkiego,
- 8 MPa, gdy beton jest wykonany z innego cementu.

Odporności pełnej odpowiada natomiast wytrzymałość:

- 5 MPa przy zastosowaniu cementu portlandzkiego,
- 10 MPa przy zastosowaniu innego cementu.

Według norm amerykańskich [7] odporność warunkową osiągnie beton wówczas, gdy jego wytrzymałość na ściskanie będzie wynosić minimum 3,5 MPa. W przepisach brytyjskich dotyczących wykonywania robót betonowych zaleca się, aby temperatura świeżego betonu nie obniżyła się poniżej 5°C przed osiągnięciem wytrzymałości 5 MPa [3]. Normy rosyjskie są bardziej wymagające w tym zakresie [1, 2]. Tak zwana wytrzymałość krytyczna betonów (odpowiadająca odporności pełnej) uzależniona jest od klas betonu. Dla betonów klasy mniejszej niż B20 wytrzymałość ta wynosi minimum 50% wytrzymałości projektowanej i nie mniej niż 5 MPa, dla betonów klas B20-B30 – nie mniej niż 40% a dla betonów klasy B40-B50 – nie mniej niż 30%.

2. Warunki realizacji robót w obniżonych temperaturach

Prowadzenie robót betonowych w warunkach zimowych wymaga przede wszystkim uwzględnienia takich działań, które pozwolą, aby świeżo ułożony beton uzyskał odpowiednią wytrzymałość przed ewentualnym zamarznięciem. Wytrzymałość tę można określić podając minimalny wiek betonu przechowywanego w określonej temperaturze. Przykładowe dane przedstawiono w tabeli 1. Ponadto często są stosowane inne dodatkowe wymagania wytrzymałościowe jakie młody beton powinien spełnić. Dotyczy to minimalnej wytrzymałości pozwalającej rozdeskować element oraz wytrzymałości umożliwiającej prowadzenie dalszych prac.

Tabela 1.

Orientacyjny czas niezbędny do uzyskania odporności młodego betonu na zamarzenie [12]

Beton wykonywany z cementu	Temperatura dojrzewania [°C]		
	+20	+10	+5
Portlandzkiego o dużej wytrzymałości wcześniejszej: CEM I 32,5R; 42,5R; 52,5R	12 godz.	12 godz.	18 godz.
Portlandzkiego zwykłego CEM I 32,5; 42,5; 52,5 Hutniczego CEM III 32,5; 42,5	24 godz.	36 godz.	48 godz.

Czas dojrzewania, mierzony od momentu ułożenia betonu w elemencie do jego rozdeskowania, w zależności od temperatury dojrzewania, jak i od zastosowanego rodzaju cementu, podawany jest w tabelach [4]. Powyższe informacje dotyczą takich warunków dojrzewania, w których utrzymuje się stałą określoną wartość temperatury, wyższą niż 5°C. Na placu budowy, gdzie ułożony beton poddany jest rzeczywistym działaniom klimatu mamy do czynienia z dość znacznymi wahaniami temperatury w okresie doby jak również ze zmianą warunków atmosferycznych. Instrukcja [4] nakazuje, aby każdorazowo przed przystąpieniem do rozdeskowania konstrukcji betonowych i żelbetonowych, wykonywanych w okresie obniżonych temperatur, sprawdzić wytrzymałość betonu na próbkach przechowywanych w takich samych warunkach, w jakich dojrzewał beton w konstrukcji.

Na podstawie własnych obserwacji stwierdzam, że na budowach, gdzie roboty betonowe były realizowane w warunkach obniżonych temperatur, kierownicy chętnie określali wytrzymałość betonu metodami nieniszczącymi, stosując sklerometr oraz zestaw Lok-Test.

W razie projektowania wykonywania robót betonowych w okresie zimowym w dokumentacji technicznej należy uwzględnić organizację i metody wykonywania tych robót w temperaturach ujemnych. Projekt taki powinien zawierać dane o rzeczywistych warunkach budowy oraz informacje o maszynach i urządzeniach, którymi dysponuje przedsiębiorstwo. W projekcie powinny być podane wymagania w zakresie wykonywania tych robót dla następujących zakresów temperatury: do $+5^{\circ}\text{C}$; od $+5^{\circ}\text{C}$ do -3°C , od -3°C do -10°C oraz od -10°C do -15°C . Betonowanie konstrukcji w temperaturze poniżej minus 15°C nie powinno być wykonywane [4].

2.1. Czynniki technologiczne umożliwiające wykonywanie robót betonowych w warunkach zimowych

W dokumentacji technicznej dotyczącej wykonywania robót w okresie obniżonych temperatur powinny być wskazane metody prowadzenia robót pozwalające na uzyskanie przez beton wymaganej pełnej mrozoodporności.

W literaturze krajowej wyszczególnia się następujące metody prowadzenia robót betonowych w warunkach zimowych [4, 5, 13]:

- 1) metoda podgrzewania,
- 2) metoda modyfikacji wykonania mieszanki betonowej,
- 3) metoda zachowania ciepła,
- 4) metoda tzw. ciepłaków.

W literaturze brytyjskiej uwzględnia się dwie metody prowadzenia robót w warunkach zimowych:

- stosowanie mieszanek o podwyższonej temperaturze,
- modyfikacja projektu mieszanki.

Metoda zachowania ciepła i metoda tzw. ciepłaków w literaturze angielskiej jest opisywana w działach dotyczących warunków technologicznych określających pielęgnację – ochronę przed warunkami otoczenia – ułożonej mieszanki.

Metoda podgrzewania. Stosowanie mieszanek betonowych o podwyższonej temperaturze zapewnia szybsze rozpoczęcie wiązania betonu i wcześniejsze uzyskanie założonych wytrzymałości. W zakładach produkcji mieszanki betonowej podgrzewane są oddzielnie poszczególne składniki betonu: przeważnie kruszywo i woda. Według Jamrożego [5] kruszywa nie powinno się podgrzewać do temperatury wyższej niż 35°C . Przepisy brytyjskie dopuszczają podgrzewanie kruszywa do temperatury 52°C [8]. Według zaleceń podawanych w literaturze rosyjskiej kruszywo można podgrzewać do temperatury około 90°C [1]. Wodę uży-

waną do produkcji mieszanki można podgrzewać, według Jamrożego, do temperatury 60°C [5], według Neville [8] do temperatury 60-80°C.

W okresie zimowym powszechnie zaleca się podgrzewanie stosu kruszywa przez układ rur perforowanych, do których włącza się parę wodną. Temperatura pary wodnej (wnikającej w stos kruszywa) wynosi ponad 100°C. Tak więc utrzymanie temperatury kruszywa na poziomie 35°C (zalecane w pracy [5]) w całej masie jest mało prawdopodobne. Na podstawie obserwacji wielu obiektów realizowanych w warunkach zimowych można stwierdzić, że kontrolowana jest temperatura mieszanki betonowej załadowywanej na środki transportu.

Zgodnie z normą PN-EN 206-1 temperatura mieszanki betonowej w momencie dostarczenia nie powinna być niższa niż 5°C. Neville [8] a także norma branżowa [11] dotycząca betonu towarowego podają, że nie powinna ona być wyższa niż około +30°C. Norma [9] wymaga ponadto, aby w temperaturze otoczenia poniżej -3°C, temperatura dostarczanej mieszanki nie była niższa niż +10°C. Wszelkie wymagania dotyczące sztucznego podgrzewania mieszanki przed jej dostarczeniem powinny być uzgodnione między producentem a wykonawcą. Aby podane wymagania mogły być spełnione, projektant zmuszony jest przeprowadzić dosyć skomplikowany rachunek bilansu energii cieplnej, w którym uwzględnione powinny być takie czynniki jak: wyjściowa temperatura składników mieszanki (ewentualna potrzeba ich ogrzewania), ich ciepło właściwe, ilość ciepła wydzielonego w początkowym okresie hydratacji spoiwa, rodzaj stosowanego środka transportowego i izolacyjność cieplna jego ścian, czas transportu oraz temperatura otoczenia [2, 5, 7]. Omawiana technologia prowadzenia robót betonowych z wykorzystaniem „cieplej mieszanki” wymaga stosowania deskowań o odpowiednio dużej izolacyjności cieplnej, umożliwiających utrzymanie podwyższonej temperatury w dostatecznie długim czasie.

Celem modyfikacji projektu składu mieszanek betonowych jest nadanie mieszanekom cech zwiększających przyrost wytrzymałości betonu. Wzrost ten można osiągnąć poprzez następujące przedsięwzięcia:

- stosowanie cementu portlandzkiego zwykłego (bez dodatków),
- stosowanie cementów portlandzkich o wysokiej wytrzymałości w początkowym okresie twardnienia (CEM I 42,5R zamiast CEM I 42,5),
- stosowanie cementów wysokiej wytrzymałości (CEM I 52,5 zamiast CEM I 42,5),
- stosowanie domieszek uplastyczniających (stosowanie mieszanek w warunkach podwyższonego W/C),
- stosowanie tzw. domieszek zimowych (przyspieszających wiązanie i twardnienie betonu).

Metoda zachowania ciepła polega na maksymalnym wykorzystaniu samocieplenia się mieszanki betonowej w wyniku hydratacji cementu oraz ciepła skumulowanego w ewentualnie wcześniej podgrzanej mieszance. Bazuje ona na bilansie cieplnym analizowanym w założonym wymaganym czasie, po którym świeży beton może być bez większych konsekwencji poddany działaniu niskiej temperatury.

Wszechstronnym opracowaniem z zakresu optymalizacji potencjału energetycznego tężenia mieszanki betonowej w aspekcie wymaganej mrozoodporności betonu jest monografia Bobki [2]. Według Bobki wpływ na wartość potencjału energetycznego procesu mają następujące czynniki:

- ciepło uwodnienia cementu (skład chemiczny cementu),
- początkowa temperatura betonu,
- temperatura powietrza,
- czynnik kształtu elementu konstrukcyjnego,
- współczynnik przenikania ciepła formy ocieplanej,
- stopień nasycenia elementu konstrukcyjnego przez metal.

Kolejność przedstawionych czynników odpowiada ich stopniowi oddziaływania na potencjał energetyczny procesu.

Przepisy brytyjskie dosyć szczegółowo określają sposoby formowania elementów w warunkach zimowych [3]. Na dzień przed rozpoczęciem procesu betonowania wykonawca powinien zapoznać się z prognozą pogody (w instrukcji podany jest nawet adres internetowy), aby dokonać odpowiednich korekt w recepturze mieszanki i sposobie pielęgnacji betonu. Przed ułożeniem mieszanki należy z powierzchni deskowania i zbrojenia usunąć śnieg oraz lód. Powierzchnia formy, w momencie układania mieszanki betonowej, powinna mieć temperaturę minimum $+2^{\circ}\text{C}$. Podczas układania mieszanki, szczególnie w płytach stropowych, zalecane jest stosowanie ekranów osłaniających przed wiatrem. Niezwłocznie po zabetonowaniu konkretnego elementu w konstrukcji należy beton zabezpieczyć przed stratami ciepła przez odpowiednie przykrycie materiałami ciepłochronnymi. Zalecane są maty z wełny mineralnej oraz maty piankowe wielowarstwowe. Szczególną uwagę należy zwrócić na szczelność zabezpieczenia naroży słupów oraz obrzeży płyt. Beton powinien być chroniony przed zamarzaniem przez co najmniej 24 godziny.

Na budowach, w celu utrzymania w betonowanym elemencie temperatury zapewniającej szybki przyrost wytrzymałości, stosowany jest tzw. elektrogrzew. Metoda ta jest znana i stosowana od wielu lat. Ten sposób podgrzewania, przy jednoczesnym zastosowaniu termoregulatorów, ułatwia utrzymanie zabetonowanego elementu w warunkach termicznych pozwalających na optymalny

przebieg procesu wiązania i twardnienia betonu. Jako element grzewczy stosuje się izolowany drut oporowy. Przewody te (jako tracone) montuje się podczas robót zbrojarskich. Innym skutecznym rozwiązaniem stosowanym do nagrzewu świeżego betonu jest użycie specjalnych mat, w których elementem grzewczym jest tkanina grafitowa [6].

Jedną z ważniejszych czynności podczas pielęgnacji betonu w warunkach zimowych jest usuwanie izolacji w taki sposób, aby uniknąć nagłej zmiany temperatury na powierzchni betonu i powstania dużego gradientu temperatury wewnątrz elementu betonowego.

Metoda tzw. cieplaków jest najbardziej radykalną metodą, umożliwiającą prowadzenie robót w warunkach zimowych. Jej istota sprowadza się do zamknięcia przestrzeni, w której dojrzewa beton. Cieplak jest to prowizoryczne pomieszczenie, w którym można utrzymać wyższą temperaturę w stosunku do temperatury otoczenia. Utrzymanie wysokiej temperatury w cieplakach jest dość trudne ze względu na duże straty ciepła. Ze względu na wysokie koszty metodę tę stosuje się w praktyce rzadko.

2.2. Uwarunkowania organizacyjne

Beton towarowy wymaga specyficznego transportu, odbywającego się w określonej przestrzeni i w czasie. W warunkach zimowych najczęściej wysokość temperatury otoczenia i mieszanki betonowej w momencie załadunku wpływa na dopuszczalny czas trwania transportu. We współczesnych warunkach realizacji obiektów zakład wytwarzający mieszankę betonową dostarcza ją własnymi środkami transportowymi na plac budowy, a często także w miejsce ułożenia. Skład mieszanki betonowej i sposób jej transportu musi być taki, oprócz innych standardowych wymagań, aby była zapewniona także odpowiednia stabilność właściwości mieszanki aż do chwili dostarczenia jej do miejsca wbudowania. Chodzi tu przede wszystkim o konsystencję i temperaturę.

Beton towarowy, przygotowany w wytwórni o danej temperaturze T_1 , podczas transportu zewnętrznego, przeładunku na placu budowy i transportu pionowego poddany jest oddziaływaniu temperatury otoczenia i ulega ochłodzeniu; mieszanka betonowa w miejscu układania w formie ma temperaturę T_2 . Zakres obniżenia temperatury mieszanki betonowej ΔT zależy od dwu czynników: temperatury otoczenia oraz od czasu trwania jej oddziaływania. Czas oddziaływania $t_{oddz.}$ temperatury otoczenia na mieszankę betonową liczy się od momentu rozpoczęcia

załadunku betonu towarowego do mieszalników samochodowych do momentu jej ułożenia w deskowaniu.

Czas ten obliczamy ze wzoru:

$$t_{oddz} = \sum_{i=1}^n t_i < t_{dop} \quad [\text{min}] \quad (2)$$

gdzie:

$\sum_{i=1}^n t_i$ – suma czasów składowych związanych z produkcją, przeładunkami i układaniem mieszanki betonowej.

t_{dop} – dopuszczalny czas transportu, w którym temperatura mieszanki betonowej w danych warunkach nie przekroczy T^{dop} oraz nie nastąpi rozpoczęcie procesu wiązania betonu.

W instrukcji [4] podane są wskaźniki umożliwiające obliczenie spadku temperatury mieszanki betonowej w czasie transportu poziomego i pionowego. Wskaźniki te uwzględniają rodzaj środka transportu, sposób ocieplenia oraz czas trwania transportu. Nie uwzględniają one jednak wielu, zdaniem autora istotnych, czynników takich jak: parametry mieszanki (rodzaj kruszywa, wskaźnika W/C), warunków atmosferycznych (prędkość wiatru) oraz różnicy temperatury pomiędzy mieszanką a otoczeniem.

Z badań własnych przeprowadzonych na budowach realizowanych w warunkach zimowych wielkość czasu t_{dop} dla danych warunków klimatycznych wynika, że ustala się go w sposób empiryczny. Zakłady wytwarzające mieszankę betonową mają własny bank danych, utworzony na podstawie wieloletnich doświadczeń, i są w stanie, dla zadanej temperatury mieszanki w momencie produkcji T^M oraz znanej wartości temperatury otoczenia T° , określić w pewnym przybliżeniu jaką temperaturę będzie miała mieszanka podczas układania po czasie t_{oddz} .

Elementami składowymi t_i są: czas przygotowania mieszanki t_1 , czas transportu zewnętrznego t_2 oraz czas wyładunku i transportu pionowego t_3 . Wielkości pierwszych dwóch składników t_1 i t_2 zależą od wydajności betoniarki i odległości z zakładu do miejsca przeznaczenia. Czas trwania wyładunku i transportu pionowego mieszanki – t_3 zależy od ilości dostarczonej mieszanki betonowej, od

wydajności maszyny transportującej mieszankę w pionie do miejsca ułożenia oraz od tempa układania mieszanki. Wpływ tych czynników na wielkość t_3 określono na podstawie własnych obserwacji, opisanych w poniższym przykładzie.

W lutym 2003 roku na ostatniej kondygnacji wieżowca, na wysokości około 150 m, realizowano konstrukcję betonową pod specjalistyczne urządzenia techniczne. Objętość mieszanki betonowej w wykonywanych elementach konstrukcyjnych wynosiła 72 m³. Transport betonu towarowego z wytwórni na plac budowy, podczas realizacji całego obiektu, odbywał się za pomocą mieszarek samochodowych o pojemności 9 m³. Z przyczyn technologicznych, przy realizacji omawianych robót na ostatniej kondygnacji, nie można było stosować pompy stacjonarnej do transportu mieszanki. Transport wewnętrzny mieszanki odbywał się w pojemnikach o pojemności 1 m³ przy użyciu żurawia wieżowego. Średni czas transportu mieszanki z zakładu na budowę wynosił około 12 min. Temperatura mieszanki w momencie jej dostarczania na plac budowy wynosiła 26-30°C. Średni cykl transportu pojemnika, obejmujący załadunek, transport na ostatnią kondygnację, wyładunek i opuszczenie pojemnika po następnym załadunku, wynosił 14 min. Ten rodzaj transportu wewnętrznego powodował, że w przypadku dostarczania na budowę w jednej mieszarce samochodowej 9 m³ czas wyładunku wynosiłby około 120 minut, a to z kolei spowodowałoby znaczne oziębienie dostarczonej mieszanki. Kierownictwo zakładu dostarczającego mieszankę, kierując się wieloletnim doświadczeniem prowadzenia robót w warunkach obniżonych temperatur, zdecydowało, że jednorazowo na budowę będzie dostarczany ładunek 4 m³ betonu towarowego. Podczas każdego cyklu rozładunku mierzono temperaturę mieszanki. W dniu przeprowadzanych badań temperatura powietrza wynosiła -3°C, temperatura mieszanki w momencie jej dostarczenia na budowę (4 m³) wynosiła +26°C. W końcowej fazie wyładunku, w ostatnim czwartym cyklu transportowym pojemnika, temperatura mieszanki obniżyła się do +16°C. Sprawna łączność pomiędzy brygadą wykonującą prace betonowe a zakładem produkcji mieszanki umożliwiła utrzymanie ciągłości prac bez tworzenia się kolejek mieszarek samochodowych na placu budowy.

3. Zakończenie

Podczas wykonywania robót betonowych w warunkach zimowych, niezależnie od przyjętej metody przygotowania mieszanki betonowej (modyfikacji receptury, podgrzewania składników) należy zapewnić pielęgnację świeżego betonu poprzez odpowiednią izolację termiczną betonu. Pielęgnacja ta rozpoczyna się od

przygotowania odpowiednio zaizolowanego deskowania, podgrzania form (mieszanka betonowa nie powinna być układana w formach mających ujemną temperaturę) a następnie chronienia ułożonego świeżego betonu przed utratą ciepła. Roboty betonowe powinny być tak zaprojektowane, między innymi poprzez odpowiedni dobór jednostek transportowych oraz wielkości brygad układających mieszankę, aby czas trwania poszczególnych procesów, a w szczególności transportu wewnętrznego i układania, był jak najkrótszy. Zorganizowana poprawnie łączność pomiędzy budową a zakładem produkcji mieszanki betonowej pozwala zapewnić dostarczenie w systemie Just In Time.

Poprzez zastosowanie odpowiednich zabiegów technologicznych oraz stworzenie warunków organizacyjnych roboty monolityczne, można prowadzić w naszym klimacie, bez względu na porę roku, w każdych warunkach atmosferycznych.

Literatura

1. **Атаев С. С., Данилов Н. Н., Прыкин Б.В. и др.** *Технология строительного производства*. Стройиздат, Москва, 1984.
2. **Bobko T. F.**: *Optymalizacja potencjału energetycznego tężenia mieszanki w aspekcie zapewnienia wymaganej mrozoodporności betonu i elementów konstrukcyjnych*. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej. Częstochowa 1997.
3. **Day R., Watson N.**: *Could-weather concreting*. CONCRETE, September, 2002, pp. 55-56.
4. Instrukcja ITB 282. *Wytyczne wykonywania robót budowlano-montażowych w okresie obniżonych temperatur*. Instytut Techniki Budowlanej. Dział Wydawniczo-Poligraficzny. Warszawa, 1995.
5. **Jamroży Z.**: *Beton i jego technologie*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa- Kraków, 2000, 484 p.
6. **Łysow W. P.**: *Wykorzystanie polimerowych przewodów grzewczych przy wznoszeniu, eksploatacji i remontach obiektów monumentalnych*. Międzynarodowa konferencja: Budownictwo sakralne i monumentalne. Białystok, 2002.
7. **Masterton, G. G. T. and Wilson, R. A.**: *The planning and design of concrete mixes for transporting placing and finishing*. CIRA, Report 165, London, 1997.
8. **Neville A. M.**: *Właściwości betonu*. Polski Cement, Kraków, 2000.

9. PN-EN 206-1. Beton. Część 1: *Wymagania, właściwości, produkcja i zgodność*.
10. PN-88/B-06250. *Beton zwykły*.
11. PN-63/B-06251. *Roboty betonowe i żelbetowe. Wymagania techniczne*.
12. **Sienkiewicz P.:** *Betonowanie w warunkach obniżonych temperatur*. Materiały Budowlane. 2/2002.
13. **Śliwiński J.:** *Betonowanie zimą*. Cement Polski. 1/2000, s. 28-29.

COLD WEATHER CONCRETING

Summary: One of the very important factor that influence the durability of concrete in winter concreting is curing. This articule reviews methods (make using in Poland and another country) placing and curing of concret in low-temperature.

Key words: winter concreting (wintry weather), fresh concrete, curing of concrete

Artykuł realizowano w ramach pracy statutowej S/IIB/4/02.

Robert Stachniewicz

METODA WYZNACZANIA EFEKTYWNEJ GRUBOŚCI IZOLACJI TERMICZNEJ W BUDYNKACH MIESZKALNYCH I W BUDUNKACH UŻYTECZNOŚCI PUBLICZNEJ PRZY UWZGLĘDNIENIU ŹRÓDŁA CIEPŁA

Streszczenie: W artykule przedstawiono analizę efektywnych grubości warstwy docieplenia w miejskich systemach grzewczo-budowlanych, wykonaną na bazie Masterplanów w 19 miastach. Wprowadzono podział systemów na trzy rodzaje (z deficytem mocy, zrównoważone i z nadwyżką mocy w źródle ciepła). Dla każdego z nich przedstawiono algorytm obliczeń efektywnej grubości docieplenia z uwzględnieniem dopasowania mocy źródła. Sformułowane algorytmy uwzględniają efekty unikniętego inwestowania w rozbudowę źródła ciepła oraz efekty ekologiczne. Wykorzystując opracowane algorytmy przeprowadzono obliczenia efektywności wybranych przedsięwzięć termomodernizacyjnych i analizę porównawczą tych obliczeń z wynikami obliczeń optymalizacyjnych wykonanymi według obowiązujących aktów wykonawczych do Ustawy o wspieraniu przedsięwzięć termomodernizacyjnych.

Słowa kluczowe: budynki, termomodernizacja, system ciepłowniczy, efektywność inwestycji, ekologia

1. Wstęp

Rozpatrując całkowite zużycie energii w gospodarce narodowej, można powiedzieć, że sektor komunalno-bytowy jako całość zużywa znaczną jej część. W latach 80. XX wieku zużycie energii przez ten sektor szacowano w Polsce szacowano na blisko 40%; obecnie po zmniejszeniu produkcji w przemyśle ciężkim, może ono wynosić 45% (oficjalnych danych statystycznych brak). Zużycie energii w sektorze komunalno-bytowym może więc w znacznym stopniu wpływać na bezpieczeństwo energetyczne kraju, zanieczyszczenie środowiska lub na sytuację ekonomiczną (w Polsce do końca lat osiemdziesiątych XX wieku węgiel był głównym towarem eksportowym).

W 1989 roku zapoczątkowano w Polsce przemiany gospodarcze, w kierunku wprowadzenia gospodarki rynkowej. Działania te zaowocowały, między innymi, podażą na rynek nieograniczonej ilości materiałów izolacji cieplnej, jak również nowej techniki w zakresie instalacji wewnętrznych i ciepłownictwa. Następowало urealnianie kosztów surowców energetycznych i energii, co stwarzało możliwość opłacalności inwestowania w oszczędzanie energii i przyczyniło się do zainteresowania odbiorców końcowych oszczędnością energii. Od 1991 roku wprowadzono obowiązek wyposażania węzłów cieplnych w budynkach (lub tzw. węzłów cieplnych grupowych) w urządzenia do pomiaru ilości ciepła sprzedawanego przez dostawcę odbiorcy (na koszt dostawcy ciepła). Inwestowanie w rozwiązania techniczne obniżające zużycie energii na ogrzewanie i przygotowanie ciepłej wody użytkowej stawało się opłacalne (zwrot kosztu inwestycji z przyszłych oszczędności był możliwy w stosunkowo krótkim czasie).

W 1994 roku w ekspertyzie KILiW PAN i Fundacji Poszanowania Energii została przedstawiona koncepcja kredytów na termomodernizację. Na podstawie tej ekspertyzy trzy Komisje Sejmowe zwróciły się do Rządu z dezyderatem opracowania programu działań zmierzających do racjonalizacji użytkowania energii w sektorze komunalno-bytowym. Program taki został w 1995 roku opracowany i zaakceptowany przez Sejm. Przewidywał on wspieranie przez państwo przedsięwzięć termomodernizacyjnych, finansowanych w drodze kredytów. Odpowiednia ustawa [4] została uchwalona w grudniu 1998 roku (znowelizowana w lipcu 2001 roku).

Ustawa o wspieraniu przedsięwzięć termomodernizacyjnych dotyczy między innymi przedsięwzięć, które mają na celu zmniejszenie zużycia energii dostarczonej na potrzeby c.o. i c.w.u. do budynków mieszkalnych, budynków zamieszkania zbiorowego i budynków służących do wykonywania przez jednostki samorządu terytorialnego zadań publicznych (podobne uregulowania dotyczą źródeł ciepła i sieci ciepłych).

Algorytmy rachunku opłacalności, przyjęte w rozporządzeniach wykonawczych do Ustawy termomodernizacyjnej, nie uwzględniają innych korzyści, wynikających z termomodernizacji budynku, niż tylko obniżenie kosztu ogrzewania.

W latach 1994-2002 na zlecenie Zarządów Miast i Gmin leżących na terenach wschodniej Polski, w ramach działalności Narodowej Agencji Poszanowania Energii (filia w Białymstoku) wykonano wiele opracowań dotyczących racjonalizacji użytkowania energii (tak zwane „Masterplany”), w których opracowaniu uczestniczył autor artykułu.

W kilkunastu z tych miast analiza wykazała, że istnieje lub może w niedalekiej przyszłości wystąpić (na skutek planowanej rozbudowy miasta) deficyt mocy

w lokalnych źródłach ciepła. W miastach tych przy kompleksowej termomodernizacji (w tym docieplenia) budynków można by zaniechać rozbudowy źródła ciepła lub przesunąć jego rozbudowę na odleglejszy termin. Inwestycje w termomodernizację budynków mogą więc spowodować możliwość zaniechania inwestowania w źródło ciepła i wydatków na opłaty z tytułu użytkowania środowiska. Związane jest to ze zmniejszeniem (na skutek termomodernizacji budynków) zapotrzebowania na ciepło i moc w źródle ciepła, co daje możliwość przyłączenia do tego samego źródła ciepła dodatkowej liczby odbiorców. Wiąże się to ponadto ze spadkiem opłat ponoszonych przez wytwórców ciepła za zanieczyszczenie środowiska naturalnego.

2. Konstrukcja modelu obliczeniowego efektywnej grubości izolacji termicznej dla budynków mieszkalnych i budynków użyteczności publicznej zasilanych z centralnego źródła ciepła

Przedstawione w artykule Systemy Grzewczo-Budowlane (oznaczone w dalszej części jako SGB), dla których analizowano efektywną grubość warstwy docieplającej przegród zewnętrznych, znajdowały się na terenie zabudowy miejskiej. W systemach tych można było spotkać się z trzema przypadkami pokrycia zapotrzebowania na moc cieplną w budynkach podłączonych do źródła ciepła. Wyróżniono trzy przypadki: system zrównoważony (zapotrzebowanie na moc w budynkach – możliwości źródła), system z nadwyżką oraz system z deficytem mocy cieplnej.

Aby obliczyć efektywną grubość warstwy docieplającej zewnętrzne przegrody pełne w budynkach zasilanych z jednego źródła ciepła w SGB zmodyfikowano wzór na zaktualizowaną wartość netto inwestycji NPV , przedstawioną w Instrukcji UNIDO [1].

Podstawowa postać wzoru, na której bazuje algorytm oceny efektywności przedsięwzięć termomodernizacyjnych przedstawia się następująco:

$$NPV = \sum_{t=1}^n \frac{\Delta E_t}{(1+r)^t} - \sum_{t=0}^n \frac{I_t}{(1+r)^t} \quad [\text{zł}] \quad (1)$$

w którym:

ΔE_t – roczne oszczędności eksploatacyjne w roku t [zł/a],

I_t – nakłady inwestycyjne na przedsięwzięcie termomodernizacyjne [zł/a],

r – stopa dyskonta (utrata wartości pieniądza w czasie) [%],

n – liczba okresów (lat) uwzględnionych w rachunku efektywności (okres „życia” inwestycji).

W artykule analizowane są przedsięwzięcia wpływające na zmianę wielkości deficytu w źródle ciepła, tak więc rozpatruje się przede wszystkim poprawę izolacyjności przegród zewnętrznych. Do przedsięwzięć tych można zaliczyć między innymi ocieplenie przegród zewnętrznych (stropodachów, dachów, ścian, stropów nad piwnicami nieogrzewanymi).

W związku z tym, że zabiegi termomodernizacyjne zmniejszają zapotrzebowanie na energię cieplną i moc cieplną, uzyskujemy oszczędność energii, a zatem takie zmniejszenie opłat za emisję do atmosfery szkodliwych związków, które wytwarza źródło ciepła zasilając budynki. Zmniejsza się także moc cieplna potrzebna na pokrycie strat w budynkach poddanych procesowi termomodernizacji. Wpływa na zmniejszenie deficytu mocy cieplnej w źródłach, które mają taki deficyt, i pozwala na uniknięcie potrzeby rozbudowy deficytowego źródła, a zatem uniknięcia dodatkowych kosztów.

Uwzględniając koszty, przewidziane na rozbudowę źródła oraz wychodząc ze wzorów na koszt jednostki ciepła i mocy w opłacie dwuczłonowej otrzymujemy następujące zależności:

$$K_{jm} = A \left(\frac{K_{0u}}{N} + \frac{WOK}{MWOK \Delta N_{def}} \right) [\text{zł/MW}] \quad (2)$$

$$K_{jc} = (1 - A) \left(\frac{K_{0u}}{Q} + \frac{WOK}{MWOK \Delta Q_{def}} \right) [\text{zł/GJ}] \quad (3)$$

gdzie:

- K_{jm} – koszt jednostkowy stanowiący podstawę do ustalenia bazowej ceny za moc cieplną [zł/MW],
- K_{0u} – uzasadnione koszty w zakresie wytwarzania, przetwarzania, magazynowania ciepła związane z dostarczaniem ciepła do określonej grupy odbiorców [zł],
- A – wskaźnik opłat za zamówioną moc cieplną w łącznych opłatach w roku dla określonej grupy odbiorców, którego wartość może być zawarta w przedziale 0,3-0,4,
- N – określona w umowach sprzedaży ciepła moc cieplna zamówiona przez konkretną grupę odbiorców w poprzednim roku lub średnia moc cieplna, obliczona jako średnia arytmetyczna mocy cieplnej zamówionej w kolejnych 12 miesiącach poprzedniego roku [MW],

- Q – ilość ciepła dostarczona określonej grupie odbiorców w poprzednim roku [GJ],
- WOK – wartość bieżąca kotłowni pokrywającej deficyt ciepła w systemie grzewczo-budowlanym [zł],
- $MWOK$ – mnożnik bieżącej wartości kotłowni, służący do ustalenia bieżącej wartości, przyjmowany ze średnich rocznych kosztów związanych z nakładami inwestycyjnymi na modernizację lub jej rozbudowę $K_{sr.z}$,
- ΔN_{def} – moc kotłowni pokrywającej deficyt [MW],
- ΔQ_{def} – ilość ciepła jaką może wyprodukować kotłownia pokrywająca deficyt w standardowym sezonie grzewczym [GJ].

W celu uwzględnienia kosztu opłat za emisję szkodliwych związków do atmosfery posłużono się zaktualizowaną metodą Gaja [2]. Opłaty te uwzględniono w algorytmie poprzez dodanie do kosztu jednostki energii kosztów szkód ekologicznych, wyrażonych wzorem:

$$K_{eko} = \frac{s_n}{W_p \cdot \eta} \quad [\text{zł/GJ}] \quad (4)$$

gdzie:

- s_n – współczynnik strat ekologiczno-ekonomicznych,
- W_p – średnia wartość opałowa nośnika energii używanego w źródle ciepła,
- η – sprawność sezonowa źródła ciepła.

Precyzyjne określenie zdyskontowanych dla każdego roku (w okresie obliczeniowym) oszczędności energetycznych wymaga znajomości stopy dyskonta, obowiązującej przez cały okres trwania inwestycji. Na jej podstawie można określić współczynnik dyskonta a_t .

Wielkość stopy dyskontowej przyjmowana jest różnie, w zależności od specyfiki analizowanego przedsięwzięcia, a w szczególności od sposobu finansowania inwestycji. Gdy projekt inwestycyjny finansowany jest za pomocą funduszu obcego, stopę dyskontową przyjmuje się jako równą stopie procentowej płaconej od uzyskanego kredytu, bądź równą rynkowej stopie oprocentowania kredytów długookresowych lub średniookresowych (zależnie od wymaganego przez przedsięwzięcie sposobu kredytowania). Tak przyjęta stopa dyskontowa oznacza koszt pozyskania kapitału na określone przedsięwzięcie inwestycyjne.

Przy założeniu oprocentowania kredytów długoterminowych (np. kredyty termo-modernizacyjne) na poziomie 10% i średniej stopy inflacji na poziomie średnio $i_t = 30\%/a$. Przy tym poziomie oprocentowania kredytu i przy tej stopie inflacji otrzymujemy realną stopę dyskonta w wysokości $r_{real} = 6,8\%$. Taką stopę dyskonta przyjęto do oceny efektywności przedsięwzięć termomodernizacyjnych w niniejszej pracy.

W sytuacji gdy obliczamy stopę dyskonta oraz współczynnik dyskontujący dla inwestycji związanych z użytkowaniem energii (termomodernizacyjnych), aby zwiększyć wagę kosztów energii w obliczeniach efektywności, przyjmuje się wzrost tego kosztu ponad inflację o 2-3%. Wtedy do obliczeń przyjmujemy współczynnik dyskonta wyrażony wzorem:

$$a_t = \frac{(1+s)^t}{(1+r)^t}, \quad (5)$$

Obliczenia efektywności oparte na wskaźniku *NPV* obejmują wszystkie trzy przypadki przy uwzględnieniu odpowiednich wielkości oszczędności rocznych. W każdym z 3 przypadków bilansu mocy cieplnej w systemie grzewczo-budowlanym algorytm przyjmuje różną postać, zależnie od czynników mogących wpłynąć na wysokość oszczędności rocznych. Oszczędności te zależą od ceny energii cieplnej i od mocy u końcowych jej odbiorców. Uwzględniają one efekt kosztów na rozbudowę lub budowę nowego źródła pokrywającego deficyt mocy oraz efekty ekologiczne, uzyskane dzięki zmniejszeniu emisji zanieczyszczeń do atmosfery.

Ostatecznie zmodyfikowany wzór służący do określenia efektywnej grubości docieplenia zewnętrznych przegród pełnych dla przypadku miejskiego systemu grzewczo-budowlanego z deficytem mocy cieplnej przyjmuje postać:

$$NPV = 1,2 \cdot 10^{-5} (U_0 - U_1) \left[(t_{wo} - t_{zo}) A \left(\frac{K_{0u}}{N} + \frac{W N K}{M W N K \cdot \Delta N_{def}} \right) + \right. \\ \left. + 7,2 S d \left(\frac{s_n}{W_p \cdot \eta} + (1-A) \left(\frac{K_{0u}}{Q} + \frac{W O K}{M W O K \cdot \Delta Q_{def}} \right) \right) \right] \sum_{t=1}^n \frac{(1+s)^t}{(1+r)^t} - I_0 \quad (6)$$

w którym:

U_0, U_1 – współczynnik przenikania ciepła przegrody zewnętrznej przed termomodernizacją i po termomodernizacji [$W/(m^2 \cdot K)$],

t_{wo}, t_{zo} – temperatura obliczeniowa: wewnętrzna i zewnętrzna, przyjęta według PN-82/B-02402 i PN-82/B-02403 [°C],

Sd – liczba stopniodni w standardowym sezonie grzewczym $K \cdot d/a$,

I_0 – nakłady na termomodernizację zewnętrznych przegród pełnych, poniesione w całości w roku bazowym (na początku) [zł].

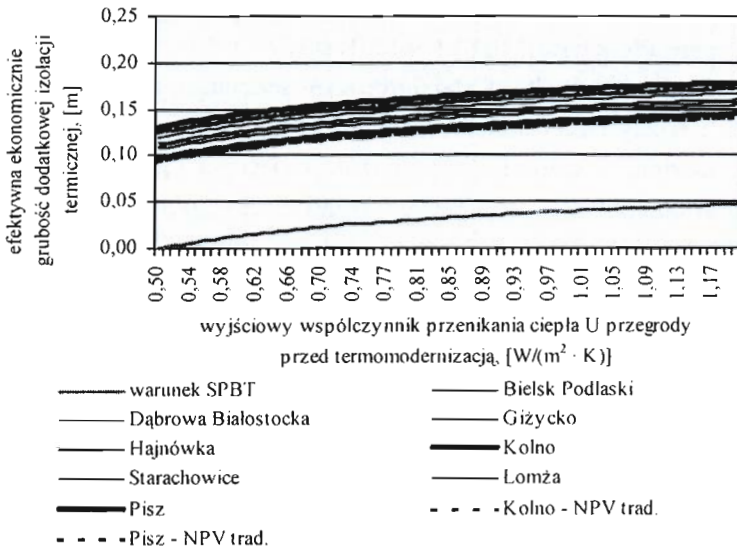
W algorytmie obliczeń efektywnej grubości dodatkowej izolacji przegród zewnętrznych w systemach z nadwyżką mocy w źródle na skutek braku deficytu mocy w SGB, nie uwzględniono czynnika kosztów rozbudowy źródła ciepła, których nie poniesiono. Występują natomiast (jak w systemie z deficytem mocy w źródle) koszty szkód ekologicznych. Algorytm w takim wypadku przyjmuje następującą postać:

$$NPV = (U_0 - U_1) \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \left[(t_{wo} - t_{zo}) \cdot A \cdot \frac{K_{0u}}{N} + \right. \\ \left. + 7,2 \cdot Sd \cdot \left(\frac{s_n}{W_p \cdot \eta} + (1 - A) \cdot \frac{K_{0u}}{Q} \right) \right] \sum_{t=1}^n \frac{(1 + s)^t}{(1 + r)^t} - I_0 \quad [\text{zł}] \quad (7)$$

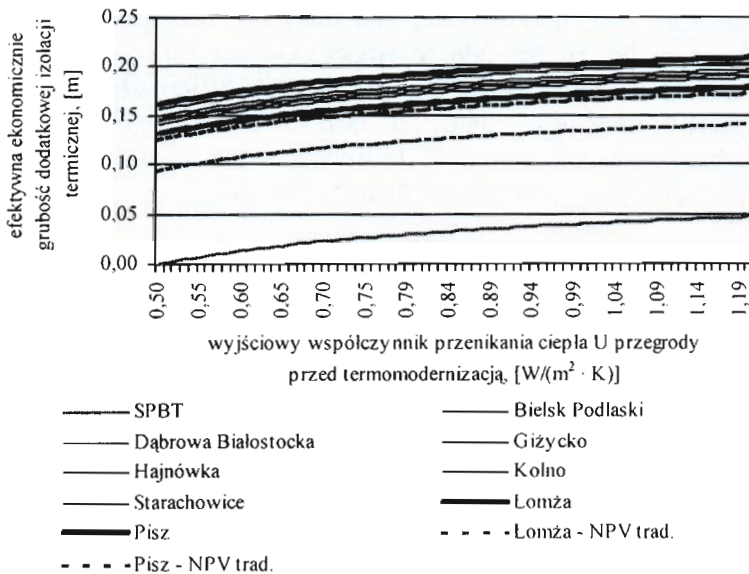
W obliczeniach efektywnej grubości warstwy docieplenia dla niektórych zrównoważonych systemów grzewczo-budowlanych, posłużono się algorytmem uwzględniającym koszty rozbudowy źródła, których nie poniesiono, ponieważ analizy perspektywiczne wykazały, że w niedalekiej przyszłości wystąpi deficyt mocy cieplnej (rozbudowa istniejących zasobów mieszkalnych, likwidacja przestarzałych bądź wyeksploatowanych lokalnych źródeł ciepła o niskiej sprawności). W takim przypadku zastosować można wzór (6).

3. Efekty zastosowania stworzonych algorytmów

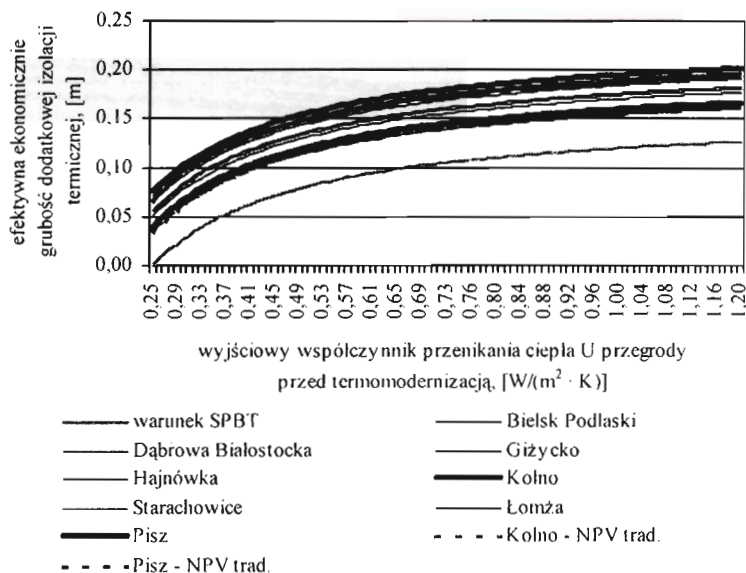
Wykonano obliczenia porównawcze stosując jednakowy poziom kosztów robocizny oraz jednakowe ceny materiałów termoizolacyjnych [5]. Ceny energii cieplnej przyjęto do obliczeń dla każdego systemu oddzielnie, według stawek opłat stosowanych przez wytwórcę lub dystrybutora ciepła.



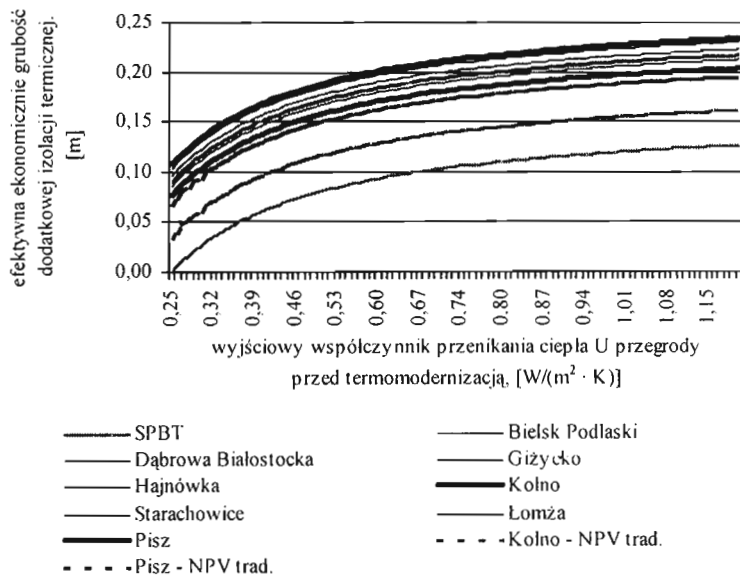
Rys. 1. Efektywna grubość warstwy docieplenia stropu nad piwnicą nieogrzewaną w SGB z deficytem mocy źródła ciepła



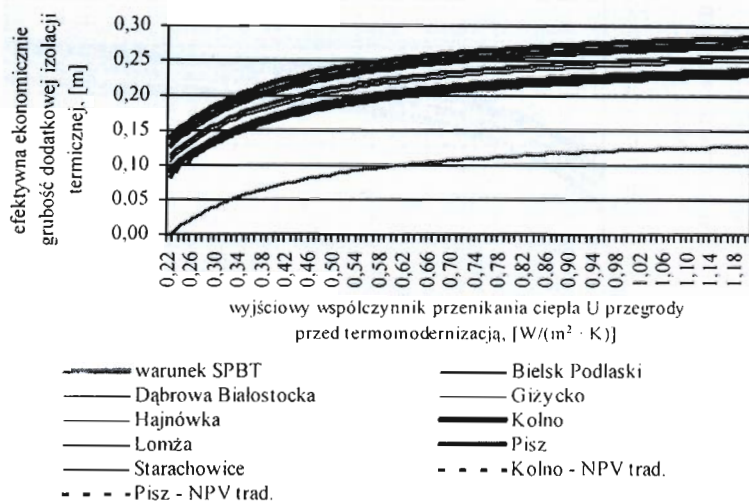
Rys. 2. Efektywna grubość warstwy docieplenia stropu nad piwnicą nieogrzewaną w SGB z deficytem mocy źródła ciepła i przy uwzględnieniu kosztów szkód ekologicznych



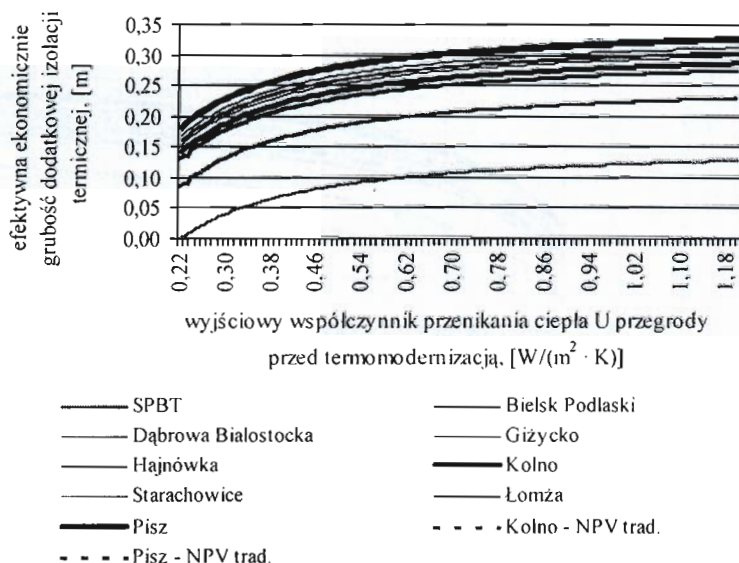
Rys. 3. Efektywna grubość warstwy docieplenia ściany zewnętrznej w SGB z deficytem mocy źródła ciepła



Rys. 4. Efektywna grubość warstwy docieplenia ściany zewnętrznej w SGB z deficytem mocy źródła ciepła i przy uwzględnieniu kosztów szkód ekologicznych



Rys. 5. Efektywna grubość warstwy docieplenia stropodachu w SGB z deficytem mocy źródła ciepła



Rys. 6. Efektywna grubość warstwy docieplenia stropodachu w SGB z deficytem mocy źródła ciepła i przy uwzględnieniu kosztów szkód ekologicznych

Przyrost efektywnej grubości warstwy docieplenia w budynkach należących do systemu grzewczo-budowlanego, w którym występuje deficyt mocy, w odniesieniu do algorytmów optymalizacyjnych *SPBT* (obowiązujący w ustawie „termomodernizacyjnej”) jest znaczący (rys. 1, 3, 5) i wynosi odpowiednio:

- od 9 cm do 14 cm dla stropodachów,
- od 4 cm do 8 cm dla ścian zewnętrznych,
- od 10 cm do 13 cm dla stropu nad piwnicą nieogrzewaną.

Przy uwzględnieniu dodatkowych (oprócz nieponiesionych kosztów rozbudowy źródła ciepła) kosztów szkód ekologicznych, powstałych wskutek zanieczyszczenia powietrza podczas spalania nośników energii w źródle, przyrost efektu docieplenia (rys. 2, 4, 6) w odniesieniu do obliczeń według *SPBT* wynosi odpowiednio:

- od 14 do 18 cm dla stropodachów,
- od 8 do 11 cm dla ścian zewnętrznych,
- od 13 do 16 cm dla stropu nad piwnicą nieogrzewaną.

4. Podsumowanie

Algorytm oceny efektywności grubości docieplenia przegród zewnętrznych budynku powinien uwzględniać oszczędności powstałe z nieponiesionych kosztów rozbudowy źródła ciepła i efektów ekologicznych. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że uwzględnienie kosztów zaniechania rozbudowy źródła ciepła w wypadku deficytu mocy w systemie ciepłowniczym podnosi znacznie efektywną grubość docieplenia przegród zewnętrznych. Uwzględnienie w rachunku efektywności, oprócz kosztów zaniechanych rozbudowy źródła ciepła (w systemach z deficytem mocy), efektów ekologicznych podnosi dodatkowo efektywną grubość dodatkowej izolacji termicznej nawet o 94 % przy uwzględnieniu rzeczywistych strat ekologicznych, natomiast tylko o 3,7 % przy uwzględnieniu obowiązujących opłat ekologicznych.

W wypadku gdy właściciel budynków i źródła ciepła jest ten sam, np. gmina (budynki komunalne i PEC) lub spółdzielnie mieszkaniowe posiadające własne kotłownie, celowe staje się rozpatrywanie docieplenia budynków i samego źródła ciepła. Uzyskujemy w ten sposób rzeczywisty efekt ekonomiczny termomodernizacji, ponieważ uwzględniamy nie tylko efekty wynikające z docieplenia budynków, ale również osiągnęte w samym źródle ciepła.

Literatura

- [1] **Behrens W., Hawranek P.M.:** *Manual for the Preparation of Industrial Feasibility Studies*, UNIDO 1991.
- [2] **Gaj H.:** *Metodyka obliczania strat ekologiczno-ekonomicznych*, Gospodarka Paliwami i energia, nr 9/1992.
- [3] **Stempniak A., Sarosiek W., Ickiewicz I., Żukowski M., Stachniewicz R., Wydrycki J.:** *Koncepcje energooszczędnej modernizacji gospodarki ciepłej miast (Masterplany) oraz Projekty założeń do planu zaopatrzenia w ciepło miast*, NAPE S.A., Białystok 1994-2002.
- [4] Ustawa z 18 grudnia 1998 roku o wspieraniu przedsięwzięć termomodernizacyjnych. Dz. U. nr 162 z 30 grudnia 1998 roku, poz. 1121 (z późniejszymi zmianami – tekst jednolity Dz. U. nr 76 poz. 808 z 25 lipca 2001 roku).
- [5] *Zbiór jednostkowych wskaźników cenowych z zakresu budownictwa ogólnego mieszkaniowego oraz przemysłowego – na roboty inwestycyjne*. Bistyp – Consulting sp. z o.o., Warszawa, 2002.

METHODS OF DETERMINATE THE EFFECTIVENESS THERMOISOLATION THICKNESS OF DWELLING AND PUBLIC BUILDINGS IN HEATING PLANT CONNECTION

Summary: The thesis includes an analyse of urban heat – building systems. The analyse was made on the basis of Masterplans in 19 towns. The division of systems into 3 types (a shortage of power, balanced power, surplus power in the source of heat) was showed in the article. The algorithm of efficiency of thermal modernization undertakings was given for systems mentioned above. The algorithms take a lack of modernization investments in the thermal source and ecological effect into consideration. Thanks to the algorithms, efficiency of thermal modernization investments was calculated. The results were compared with the calculations that are showed in legislative bills in force.

The algorithm can be used to calculate the efficiency of thermal modernization undertakings if there is only one owner of buildings and thermal source.

Key words: buildings, thermal modernisation, heating system, effectiveness of investment, ecology

Artykuł zrealizowano w ramach pracy statutowej S/WB/5/2002.

Mikołaj Syczewski, Józef Wiszniewski

ANALIZA WYŁĘŻENIA MATERIAŁÓW W ELEMENTE ŻELBETOWYM PODDANYM PROCESOM DESTRUKCJI

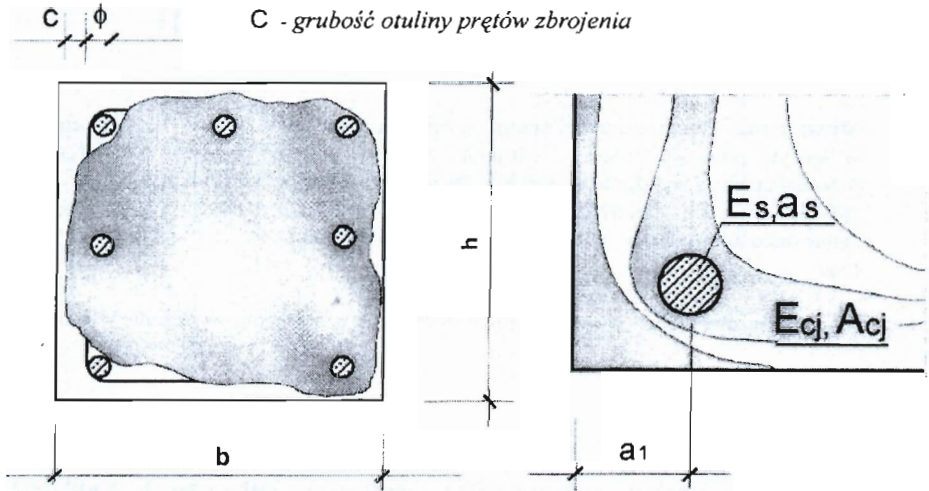
Streszczenie: Przeprowadzono analizę wyłężenia materiałów w elemencie żelbetowym, w którym powstały procesy destrukcji. Na podstawie hipotez wytrzymałościowych przeanalizowano wyłężenie w prętach zbrojenia oraz w betonie. Określono dla betonu naprężenia główne zmodyfikowane w stadium zniszczenia i nośności granicznej oraz zamieszczono przykłady obliczania wartości współczynnika k dla wybranych klas betonu.

Słowa kluczowe: konstrukcje żelbetowe, wyłężenie w zbrojeniu, wyłężenie w betonie

1. Wprowadzenie

Badanie stanu naprężeń oraz nośności elementów żelbetowych poddanych procesom destrukcji i powstałej w ten sposób niejednorodnej struktury przeprowadzono z zastosowaniem metod numerycznych z uwzględnieniem badań laboratoryjnych. Badania te przeprowadzono stosując analizę metod wyłężenia materiałów, które – w określonym przekroju o ustalonej geometrii – utworzą strukturę o cechach ciągłych lub wielospójnych. Fragment pola powierzchni przekroju stanowią pręty stalowe, które w analizie wytrzymałości traktuje się jako materiały ciągliwe o dużej odkształcalności, a część przekroju stanowią materiały utworzone na bazie cementu o różnych cechach sprężystych, które są materiałami kruchymi. Ilustrację analizowanego przekroju stanowi rysunek 1. Przedstawiona na rysunku struktura ciągła zostanie zastąpiona strukturą dyskretną. Ze względu na planowany program badań laboratoryjnych, bardziej dokładną analizę porównawczą i dokładniejsze wyniki uzyska się dla struktury przestrzennej. Analiza publikacji i monografii [3], [5], [6], [7], [8], [9] potwierdziła tę hipotezę, a rezultaty opublikowane w monografii [10] zainspirowały analizę wyłężenia w przestrzennych stanach naprężeń. Rozpatrując hipotezy w płaskim stanie naprężeń lub od-

kształceń, wykorzystuje się wektor naprężeń $\sigma_{\Omega}^T = \{\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}\} \Omega$ w obszarze Ω , podczas gdy w przestrzennym stanie liczba składowych wektora naprężeń podwaja się i otrzymuje się $\sigma_{\Omega}^T = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\} \Omega$. Wyrażając stan naprężenia przez wartości naprężeń głównych zmniejsza się wymiar wektorów: w układzie płaskim $\sigma_{\Omega}^T = \{\sigma_1 \sigma_2\}$ lub w przestrzeni $\sigma_{\Omega}^T = \{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3\}$, co ułatwia proces analizy, a odkształcenia postaciowe występują w formach niejawnych.



Rys. 1. Przekrój elementu złożony z materiałów o różnych cechach i kryteriach analiz stanu wyężenia

2. Wyężenie stali w prętach zbrojenia

Przyjęto założenie, że struktura materiału jest contynualna w strefie elementu skończonego, co oznacza, iż naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia są funkcjami ciągłymi i różniczkowalnymi [12], [13]. Założenie to jest poprawne i zapewnione przez funkcje kształtu. Na trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyznach określone zostaną w elemencie naprężenia główne [1], $\sigma_g^T = \{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3\}$, przy czym $\sigma \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. W wypadku, gdy jedno z naprężeń normalnych jest równe zero, wyężenie można rozpatrywać wykorzystując kryteria sformułowane dla płaskiego stanu naprężeń. Niszczenie stali w prętach zbrojenia następuje w formie plastycznego poślizgu z zachowaniem kryterium małych deformacji.

Jeśli założyć, że wytrzymałość stali zależy od stanu naprężenia i stałych materiałowych, warunek wytrzymałości będzie wyrażony nierównością [2]

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq C \quad (1)$$

przy czym stałe materiałowe C , określone dla przyjętej klasy stali na podstawie badań eksperymentalnych, są znane. W normie [17] przyjęto trzy podstawowe wytrzymałości stali:

f_{tk} – wytrzymałość charakterystyczna stali zbrojeniowej na rozciąganie,

f_{yk} – charakterystyczna granica plastyczności stali zbrojeniowej,

f_{yd} – obliczeniowa granica plastyczności stali zbrojeniowej,

przy czym

$$f_{yk} = \frac{f_{tk}}{\gamma_s}, \quad f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}. \quad (2)$$

Wartości częściowego współczynnika bezpieczeństwa ze względu na materiał wynoszą:

$\gamma_s = 1,15$ - w sytuacji stałej i przejściowej,

$\gamma_s = 1,00$ - w sytuacji wyjątkowej.

Dla stali klasy A-I w analizie przyjęto następujące wartości:

$$f_{tk} = 310 \text{ MPa}, \quad f_{yk} = 240 \text{ MPa}, \quad f_{yd} = 210 \text{ MPa},$$

a moduł sprężystości stali $E_s = 200 \cdot 10^3 \text{ MPa}$ [17].

W analizie stanów granicznych nośności elementów żelbetowych przyjmuje się, że wytrzymałość stali na rozciąganie jest równa wytrzymałości na ściskanie. Zgodnie z najstarszą hipotezą największego naprężenia normalnego sformułowanego przez Galileusza, kryteria wytrzymałości dla przestrzennego stanu naprężenia sprowadzają się do trzech nierówności:

$$\sigma_1 \leq C, \quad \sigma_2 < C, \quad \sigma_3 \leq C, \quad (3)$$

przy czym C jest jedną z wytrzymałości:

$$f_{tk}, f_{yk}, f_{yd}.$$

Największe rozbieżności przy stosowaniu tej metody odniesione do badań eksperymentalnych występują w trójosiowym stanie naprężeń materiałów kruchych. Rozbieżności te będą eliminowane w analizie stanu wyężenia betonu.

Najlepszą zbieżność rezultatów uzyskanych w wyniku analiz numerycznych z wynikami analiz doświadczalnych uzyskuje się dla przestrzennych stanów naprężeń, z wyłączeniem stanu trójosiowego rozciągania, wykorzystując metodę sformułowaną w roku 1904 przez Hubera i potwierdzoną przez Misesa w roku 1913 i przez Hencky'ego w roku 1924. Ze względu na środowisko uczonych z zakresu fizyki ciała stałego upowszechniła się nazwa hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego [14] oznaczona skrótem HMM. Warunki hipotetyczne wynikają z faktu, że wykorzystuje się tylko człon równania określający wartość energii właściwej odkształcenia postaciowego

$$U_y = \frac{1}{2} [\alpha_x \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_{sr}) + \alpha_y \cdot (\varepsilon_y - \varepsilon_{sr}) + \alpha_z \cdot (\varepsilon_z - \varepsilon_{sr}) + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx}] \quad (4)$$

i wprowadza się pojęcie naprężenia zastępczego lub naprężenia zredukowanego oznaczonego symbolem $\sigma_{red} > 0$. Jest to takie naprężenie rozciągające w jednoosiowym stanie naprężenia, któremu odpowiada energia właściwa odkształcenia U_y^o w jednoosiowym stanie naprężenia, odpowiadająca uplastycznieniu się materiału. Naprężenia zredukowane w kartezjańskim układzie współrzędnych wyrażone są wzorem

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]^{1/2} \quad (5)$$

W przestrzeni płaszczyzn głównych, przedstawiając $\sigma_{red} = C$, otrzymuje się warunek

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2C^2 \quad (6)$$

który dla płaskiego stanu naprężeń upraszcza się do postaci

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 \leq C^2 \quad (7)$$

Sposób interpretacji Hipotezy HMM zamieszczono, by wykazać, że stosowanie hipotezy ma sens w warunkach uplastycznienia się materiału, co zostało również

potwierdzone doświadczalnie [15]. Wadę hipotezy HMM wykazuje się przekonująco poddając materiał hydrostatycznemu stanowi napężenia, w którym

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma, \quad (8)$$

stąd otrzymuje się ze wzoru (7) wartość napężenia $\sigma_{red} = 0$, co oznacza, że nieskończenie duże wartości napężeń σ nie mogą spowodować zniszczenia materiału. Stan taki nie dotyczy natomiast klasy zagadnień, które będą przedmiotem badań laboratoryjnych. Do oceny stanu wyężenia prętów zbrojenia może być wykorzystywana zarówno klasyczna metoda Galileusza (3) jak też metoda HMM (6).

3. Wyężenie betonu w strukturach dyskretnych

Funkcję (1) można również wykorzystywać do oceny wyężenia betonu mimo niejednorodności jego struktury [3]. W procesie analizy stanu wyężenia betonu wykorzystano pogląd, że miarą tego stanu może być potencjalna energia odkształcenia, nagromadzona do chwili osiągnięcia granicznego stanu wytrzymałości w jednostce objętości materiału. Taką jednostką w analizie numerycznej może być objętość elementu skończonego w każdym z analizowanych stanów napężeń. Wykorzystanie energii odkształcenia objętościowego i postaciowego w postaci sumy

$$U = U_c + U_p \quad (9)$$

i wyrażeniu obu energii przez napężenia główne prowadzi do kryterium Beltramego

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu_c \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) \leq C_r^2, \quad (10)$$

w którym:

ν_c – współczynnik odkształcenia poprzecznego betonu,

C_r – stała betonu, oznaczająca jego cechy na rozciąganie.

Ukształtowana powierzchnia okazuje się niepraktyczna ze względu na cechy materiałów kruchych, a głównie stałą C , oznaczającą parametry charakteryzujące odporność betonu na rozciąganie w próbie jednoosiowej.

W pracy [4] zaproponowano zamiast napężeń głównych rozciągających σ_j wprowadzenie napężeń głównych zmodyfikowanych w sposób

$$\hat{\sigma}_j = k \cdot \sigma_j \quad (11)$$

gdzie

$$k = \frac{C_s}{C_r} \quad (12)$$

C_s, C_r – cechy tworzywa betonowego związane z wytrzymałością betonu – odpowiednio na ściskanie i rozciąganie

Dla naprężeń głównych ściskających naprężenia główne zmodyfikowane

$$\hat{\sigma}_j = \sigma_j \quad (13)$$

Otrzymuje się nowe, zmodyfikowane kryterium w postaci nierówności

$$\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2 - 2\nu_c \cdot (\hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_2 \cdot \hat{\sigma}_3 + \hat{\sigma}_3 \cdot \hat{\sigma}_1) \leq C_s^2 \quad (14)$$

wykorzystujące cechy betonu w zakresie wytrzymałości na ściskanie.

W elementach skończonych usytuowanych w strefie nieobciążonych powierzchni bocznych warunki brzegowe wyrażają się przez naprężenia $\sigma_3 = 0$.

Dla takich elementów rozróżnia się przypadki:

$$\begin{aligned} * \quad & \sigma_1 > 0, \quad \sigma_2 < 0, \quad \hat{\sigma}_1 = k \cdot \sigma_1, \quad \hat{\sigma}_2 = k \cdot \sigma_2, \\ & k \cdot \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2k\nu_c \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \leq C_s^2; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} * \quad & \sigma_1 > 0, \quad \sigma_2 > 0, \quad \hat{\sigma}_1 = k \cdot \sigma_1, \quad \hat{\sigma}_2 = k \cdot \sigma_2, \\ & k^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu_c \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2) \leq C_s^2; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} * \quad & \sigma_1 < 0, \quad \sigma_2 < 0, \quad \hat{\sigma}_1 = \sigma_1, \quad \hat{\sigma}_2 = \sigma_2, \\ & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu_c \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \leq C_s^2; \end{aligned} \quad (17)$$

Istotne jest określenie stałych materiałów C dla betonu; ponieważ w praktyce inżynierskiej nośność elementów ocenia się na podstawie kryteriów normy [17], wykorzystano do tego celu stosowane przepisy normowe.

Do określenia stałych C przydatne będą następujące wartości:

f_{ck} – wytrzymałość charakterystyczna betonu na ściskanie,

f_{ctk} – wytrzymałość charakterystyczna betonu na rozciąganie,

f_{ctm} – wytrzymałość średnia betonu na rozciąganie.

Wytrzymałości obliczeniowe wyznacza się dzieląc wartości charakterystyczne przez częściowe współczynniki bezpieczeństwa, które wynoszą:

- w sytuacjach stałych i przejściowych
 $\gamma_c = 1,5$ dla konstrukcji żelbetowych,
 $\gamma_c = 1,8$ dla konstrukcji betonowych;
- w sytuacji wyjątkowej
 $\gamma_c = 1,3$ dla konstrukcji żelbetowych,
 $\gamma_c = 1,6$ dla konstrukcji betonowych.

Wytrzymałość charakterystyczną betonu na ściskanie f_{ck} można obliczać ze wzoru

$$f_{ck} = 0,8 f_{c,cube}^G, \quad (18)$$

w którym

$f_{c,cube}^G$ – jest wytrzymałością gwarantowaną o liczbie odpowiadającej klasie betonu.

Wytrzymałość średnią betonu na ściskanie f_{cm} oblicza się ze wzoru

$$f_{cm} = f_{ck} + 8, \quad [\text{MPa}]. \quad (19)$$

Wytrzymałość średnią betonu na rozciąganie f_{ctm} określa wzór

$$f_{ctm} = 0,30 f_{ck}^{2/3}, \quad (20)$$

a wytrzymałość charakterystyczną betonu na rozciąganie f_{ctk} wyznacza się ze wzoru

$$f_{ctk} = 0,70 f_{ctm}. \quad (21)$$

Wytrzymałość na ściskanie f_{ck} w idealizowanej krzywej normowej odpowiada odkształceniu betonu $\varepsilon_c = 0,0035$.

W zróżnicowanych stadiach zaawansowania procesów degradacji tworzywa betonowego, współczynnik k określony wzorem (12) w stadium zniszczenia, proponuje się przyjmować dla wartości

$$\begin{aligned} C_s &= f_{cm} = f_{ck} + 8, \\ f_{ctm} &= 0,30 f_{ck}^{2/3}, \end{aligned} \quad (22)$$

stąd otrzymuje się wzór określający parametr k

$$k = \frac{f_{cm}}{f_{ctm}} = \frac{f_{ck} + 8}{0,30 f_{ck}^{2/3}}. \quad (23)$$

Przykład obliczenia współczynnika k dla betonu klasy B30:

$$C_s = 25 + 8 = 33 \text{ MPa}, \quad C_r = 0,30 \cdot 25^{2/3} = 2,56 \text{ MPa},$$

$$k = \frac{33}{2,56} = 12,9.$$

Analogicznie dla betonu klasy B15 otrzymuje się:

$$C_s = 12 + 8 = 20 \text{ MPa}, \quad C_r = 0,30 \cdot 12^{2/3} = 1,57 \text{ MPa},$$

$$k = \frac{20}{1,57} = 12,7;$$

a dla betonu B60

$$C_s = 50 + 8 = 58 \text{ MPa}, \quad C_r = 0,30 \cdot 50^{2/3} = 4,07 \text{ MPa},$$

$$k = \frac{58}{4,07} = 14,2.$$

W stadium analizy nośności granicznej proponuje się wykorzystywać wartości:

f_{cd} – wytrzymałość obliczeniową betonu na ściskanie,

f_{ctd} – wytrzymałość obliczeniową betonu na rozciąganie.

Współczynniki k dla klas betonu B30, B15 i B60 w fazie analizy nośności granicznej wynoszą:

$$\text{B30} \quad C_s = f_{cd} = 16,7 \text{ MPa}, \quad C_r = f_{ctd} = 1,20 \text{ MPa}, \quad k = \frac{C_s}{C_r} = \frac{16,7}{1,20} = 13,9;$$

$$\text{B15} \quad C_s = f_{cd} = 8,0 \text{ MPa}, \quad C_r = f_{ctd} = 0,73 \text{ MPa}, \quad k = \frac{C_s}{C_r} = \frac{8,0}{0,73} = 11,0;$$

$$\text{B60} \quad C_s = f_{cd} = 33,3 \text{ MPa}, \quad C_r = f_{ctd} = 1,93 \text{ MPa}, \quad k = \frac{C_s}{C_r} = \frac{33,3}{1,93} = 17,3.$$

4. Zakończenie

Zaprogramowano badania laboratoryjne elementów żelbetowych, w których wystąpiły zjawiska destrukcji. Przedstawiona metoda analizy wytrzymałości materiałów jest podstawą do analizy wyników zaprogramowanych badań laboratoryjnych.

Literatura

- [1] **Brzoska Z.:** *Wytrzymałość materiałów*. PWN, Warszawa, 1972.
- [2] **Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z.:** *Wytrzymałość materiałów*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1996.
- [3] **Godycki-Ćwirko T.:** *Mechanika betonu*. PWN, Warszawa, 1982.
- [4] **Hruban K., Hruban J.:** *Schubbewehrung von Stahlbetonbalken bei Berechnung nach Grenzzuständen*. Baupl.-Bautechnik 3/1963.
- [5] Katalog Hilti. *Technika zamocowań*. Hilti Poland, 1999.
- [6] **Kiernozyski W.:** *Wytrzymałość i współczynnik sprężystości betonu o różnym stopniu przemian strukturalnych*. Archiwum Inżynierii Lądowej. T. XXXVII. Z. 1. 1991.
- [7] **Kobiak J., Stachurski W.:** *Konstrukcje żelbetowe*. Arkady. Warszawa, 1984, 1987, 1989, 1991.
- [8] **Kubik J., Zybura A.:** *Stan naprężenia w warstwach powierzchniowych betonu zbrojonego narażonego na działanie substancji nieobojętnych*. Archiwum Inżynierii Lądowej. T. XXXV. Z. 1/1989.
- [9] **Miller D.:** *Economic Impact of Corrosion of Steel In Concrete*. Proc. 3rd Biennial Corrosion Seminar, The Atlanta Section of NACE, Atlanta, May, 1986.
- [10] **Praca zbiorowa:** *Finite elemente in der Baupraxis. Modellierung, Berechnung und Konstruktion*. Stuttgart. Ernst und Sohn, 1998.
- [11] **Rakowski G., Kacprzyk Z.:** *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej. Warszawa, 1993.
- [12] **Szmelter J.:** *Metody Komputerowe w mechanice*. PWN, Warszawa, 1980.
- [13] **Szmelter J., Dacko M., Dobrociński S., Wieczorek M.:** *Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji*. Arkady, Warszawa, 1979.
- [14] **Timoshenko S., Goodier J. N.:** *Theory of elasticity*. Mc Graw-Hill Book Company. New York-Toronto-London, 1951.

- [15] **Żuchowski R.:** *Wytrzymałość materiałów*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej. Wrocław, 1996.
- [16] PN-82/H-93215 Walcówka i pręty stalowe do zbrojenia betonu.
- [17] PN-B-03264:2002. Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie.

THE ANALYSIS OF THE REINFORCED CONCRETE ELEMENT EFFORT WHICH HAS BEEN SUBJECTED TO THE DESTRUCTIVE PROCESSES

Summary: The analysis of the materials effort in reinforced concrete element subjected to destructive processes has been done. Taking into consideration the strength hypothesis, the effort in concrete and reinforcement bars have been analysed.

In the stage of failure and the ultimate load capacity the modified principal stresses have been determined. The examples of the calculation the k coefficient value for the selected concrete class have been presented.

Key words: reinforced concrete, materials effort (concrete, reinforcement)

Romuald Szelaǳ, Rościsław Tribillo

GLOBALNY EFEKT PRZEMIESZCZEŃ STRUKTUR KRATOWYCH W SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH STANACH NAPRĘŻEŃ

Streszczenie: Praca jest prezentacją algorytmu analizy stanów naprężeń i odkształceń prętów struktur kratowych w aspekcie uzyskania globalnego efektu przemieszczeń konstrukcji. Algorytm jest uniwersalny w zakresie nieregularnych konfiguracji geometrycznych konstrukcji, kryteriów oceny i wykorzystania sprężystych i plastycznych charakterystyk materiałów. Stabilizowane są wartości naprężeń i odkształceń na określonym poziomie dokładności oraz interpretacji wyników w sposób kompatybilny z kryteriami metody stanów granicznych nośności i użytkowania. Szczególnie istotne jest uwzględnienie przepisów normy PN-EN 10002:1998.

Słowa kluczowe: struktura kratowa, sprężystość, plastyczność, temperatura otoczenia, temperatura wirtualna

1. Wstęp

Użytkowane przez wiele lat struktury prętowe, kształtowane przeważnie w formie przekryć dużych rozpiętości ze stalowych elementów konstrukcyjnych, poddawane są nierzadko zmianom obciążenia, przy czym szczególnie ważny jest przyrost wartości obciążeń odniesiony do stanu początkowego. W publikacji przedstawione są wyniki badania przydatności wykonanych przekryć obiektów inżynierskich zrealizowanych bądź w formie płaskich dźwigarów z uporządkowaną geometrycznie strukturą usztywnień bądź w formie struktur trójwymiarowych. Badania przeprowadzano przeważnie w sytuacjach: modernizacji, procesów termorenowacji, zmiany właściciela lub stwierdzonych uszkodzeń i wad oraz podczas okresowych przeglądów technicznych, do których obligują przepisy ustawy [7].

Obowiązującą i wykorzystywaną metodą oceny stanu bezpieczeństwa konstrukcji obiektów inżynierskich, wykonanych z różnych materiałów konstrukcyjnych, jest metoda stanów granicznych.

Analizy i wyniki publikowane w odniesieniu do stalowych struktur kratowych będą formułowane na podstawie zasadniczych kryteriów normy [8], dotyczących sprężystych relacji $\sigma = f(\varepsilon)$ między naprężeniami a odkształceniami w obszarze sprężystym oznaczonym symbolem $\partial(R_s)$. Wzrost obciążeń powoduje przyrost naprężeń w określonych prętach struktury, tak że przekraczają one wartości naprężeń obliczeniowych $|\sigma| > f_d$, i taka struktura poddawana jest analizie w prezentowanej pracy. Badaniom należy poddać stan przemieszczeń, obliczając nierówność $a < a_{gr}$ charakteryzującą warunek stanu granicznego użytkowania. W publikacji rozwiązywane są zagadnienia równowagi w takich układach kratowych, które nie spełniają warunków stanu granicznego nośności, a w których z przydatną w praktyce dokładnością można wyznaczyć globalny wektor przemieszczeń węzłów jako rezultat złożonych przyrostów odkształceń sprężystych i plastycznych. Efekt obliczeń uznany jest za pozytywny, jeżeli spełnione zostaną kryteria w przedziałach naprężeń

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_j [0 \div R_e] \\ \sigma_j [R_e \div R_m] \end{array} \right\} \rightarrow \{a_1^T \ a_2^T \ \dots \ a_i^T\}^T \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \dots n \\ j = 1, 2 \dots m \end{array} \quad (1)$$

gdzie oznaczono:

- σ_j – jednoosiowy stan naprężeń w liczbie „m” prętów, spowodowany działaniem obciążeń zewnętrznych,
- R_e – granica plastyczności stali,
- R_m – wytrzymałość określona zgodnie z normą [9],
- a_i – składowe wektora przemieszczeń węzłów w liczbie „n”.

2. Minimalna granica plastyczności. Interpretacja i zastosowania

Ustalenie minimalnej granicy plastyczności $R_{e\min}$ wykorzystywanej w przepisach normy [8] w sposób statystyczny, uwzględniający populację rozciąganych próbek w liczbie n , jest zawile na tyle, że uniemożliwia praktyczne wykorzystanie w badaniach stanów struktur kratowych [5]. Nie zachęca i nie gwarantuje efektywnych wyników wykorzystanie rozkładu prawdopodobieństwa granicy plastyczności w formie funkcji

$$f(R_{e\min}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} R_{e\min} v_{R_{e\min}}} \exp \left[-\frac{\ln^2(R_{e\min} / R_{e\min}^{\vee})}{2v_{R_{e\min}}^2} \right], \quad (2)$$

w której

$R_{e\min}^{\vee}$ – mediana, której sposób interpretacji wyjaśniono w pracy [5];
 $v_{R_{e\min}}$ – logarytmiczny wskaźnik zmienności;

przy czym

$$R_{e\min}^{\vee} = \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln R_{e\min,i} \right), \quad (3)$$

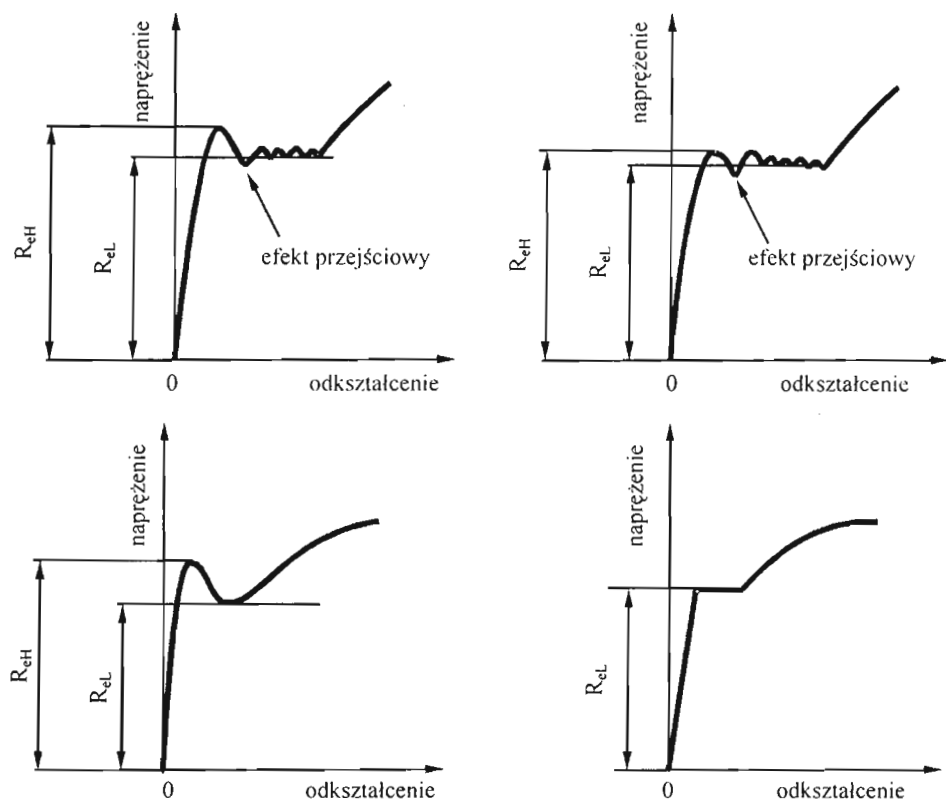
$$v_{R_{e\min}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \ln^2 \frac{R_{e\min,i}}{R_{e\min}^{\vee}}}. \quad (4)$$

Opublikowane wartości $R_{e\min}^{\vee}$ i $v_{R_{e\min}}$ oparto na wynikach badania wyrobów polskich hut produkujących stale konstrukcyjne w latach 1976÷1980. Nie są one dostatecznie przekonujące, a interpretacja wartości $R_{e\min}$ jest dla indywidualnie badanego obiektu na drodze statystycznej nierealna. Obowiązujące przepisy europejskie [9] eliminują wartość $R_{e\min}$, a definiują jednoznacznie wartości brzegowe granicy plastyczności określając oznaczenia:

R_{eH} – górna granica plastyczności,

R_{eL} – dolna granica plastyczności.

Wartość R_{eL} jest interpretowana jako najmniejsze naprężenie w strefie płynięcia stali z pominięciem ewentualnego efektu przejściowego, co wyjaśnia treść rysunku 1. Tak określona przez producenta wyrobu wartość będzie wykorzystywana jako początek procesu płynięcia.



Rys. 1. Górna i dolna granica plastyczności dla stali konstrukcyjnych

3. Strefa plastyczności $\delta(R_e \div R_m)$ i efekt wzmocnienia

Granica plastyczności R_e określa umowny początek plastycznej fazy odkształceń, a istotna w procesie analizy konstrukcji jest funkcja odkształceń w strefie $\delta(R_e \div R_m)$. We wcześniejszych normatywach, publikacjach i monografiach granice plastyczności oznaczano również symbolem Q_r , [1], który w publikacji nie będzie wykorzystywany. Interpretacja przyjęta w rozdziale 2 jest praktyczna i jednoznaczna, dzięki zastąpieniu funkcji $R_{e\min}$ stałą R_{eL} . Metoda nośności granicznej wykorzystuje sprężystą fazę materiału w zakresie naprężeń $\sigma \leq f_d$,

umożliwiają rozszerzenie przyrostu sprężystej fazy naprężeń w przedziale odkształceń

$$\varepsilon(f_d) < \varepsilon \leq \varepsilon(R_e) . \quad (5)$$

Taka praktyczna interpretacja umożliwia wykorzystanie liniowej funkcji Hooke'a w przedziale naprężeń rozciągających

$$0 < \sigma \leq R_{eL} \quad (6)$$

i wykorzystanie algorytmów numerycznych metod przemieszczeniowych do obliczenia globalnego wektora przemieszczeń

$$\mathbf{a}^T = \{a_1^T \ a_2^T \ a_3^T \ \dots \ a_i^T\}^T , \quad (7)$$

którego składowe w przestrzennym kartezjańskim układzie współrzędnych definiuje zbiór

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} a_{xi} \\ a_{yi} \\ a_{zi} \end{Bmatrix} . \quad (8)$$

Dalszy przyrost odkształceń charakteryzuje strefa płynięcia $\delta(R_e) = \delta(R_{eL})$, w której dla niestopowych stali konstrukcyjnych odkształcenia w tym przedziale wynoszą $\varepsilon(R_{eL}) = 2 \div 3\%$. Kolejnym etapem jest wzrost odkształceń do wartości $\varepsilon(R_m)$, stowarzyszony z nieliniową funkcją przyrostu naprężeń. W wynikach badań naprężenia R_m są identyfikowane z doraźną wytrzymałością stali na rozciąganie, oznaczaną symbolem R_r . W przedziale odkształceń

$$\varepsilon(R_e) < \varepsilon \leq \varepsilon(R_m) \quad (9)$$

krzywa $\sigma = f(\varepsilon)$ dla stali konstrukcyjnych o małej zawartości węgla jest gładka o dużym przyroście odkształceń i geometrii określonej w przybliżeniu granicą pochodnej

$$\lim_{d\varepsilon} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} (R_e < \sigma < R_m) \approx 0 . \quad (10)$$

Taką interpretację autorzy wykorzystują w badaniach odkształceń i przemieszczeń węzłów globalnej struktury kratowej.

Kontynuowanie procesu badania funkcji odkształceń dla wartości naprężeń

$$\sigma \geq R_m \quad (11)$$

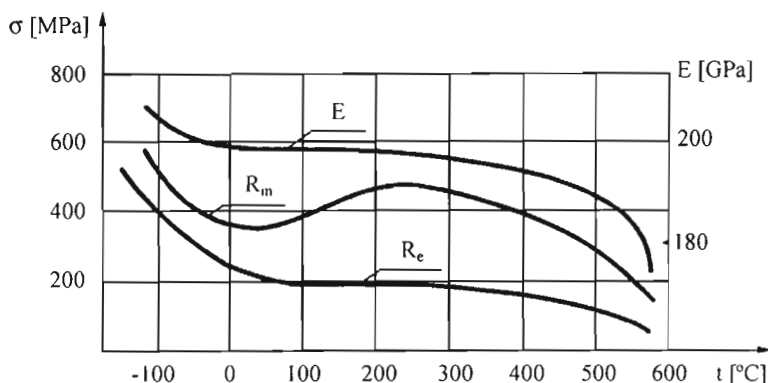
w sensie oceny bezpieczeństwa lub stanu zagrożenia autorzy uznali za nieracjonalne ze względu na to, że nierówność (11) jest interpretacją stanu awarii lub katastrofy, stosownie do definicji określonych w przepisach [7].

W fazie zaawansowanych procesów plastycznych w strefie $\partial(R_m)$ nie istnieje uogólnione spójne prawo w zakresie relacji między naprężeniami i odkształceniami, co wynika z faktu budowy materiału związanego z układem monokryształów [6], stąd procesy nieliniowe w tym obszarze ustala się indywidualnie na podstawie danych specyfikowanych przez producenta. Analizę takich procesów realizuje się nieczęsto, bowiem symptomy katastrofy mogą być sygnalizowane wcześniej przez lokalne procesy destrukcji lub katastrofa może nastąpić w sposób nagły.

Temperaturą normalną odniesioną do badań laboratoryjnych i elementów stalowych jest wartość $t_n = 20^\circ\text{C}$, określona na podstawie monografii [1]. W znowelizowanych normatywach europejskich [9] zakres temperatury normalnej zmieniono określając przedział

$$10^\circ\text{C} \leq t_n \leq 35^\circ\text{C}. \quad (12)$$

Rzeczywiste stany temperatury, w których realizowane są struktury przekryć kratowych, praktycznie nie wpływają na zmiany parametrów E, R_e, R_m , co wyjaśnia treść rysunku 2.

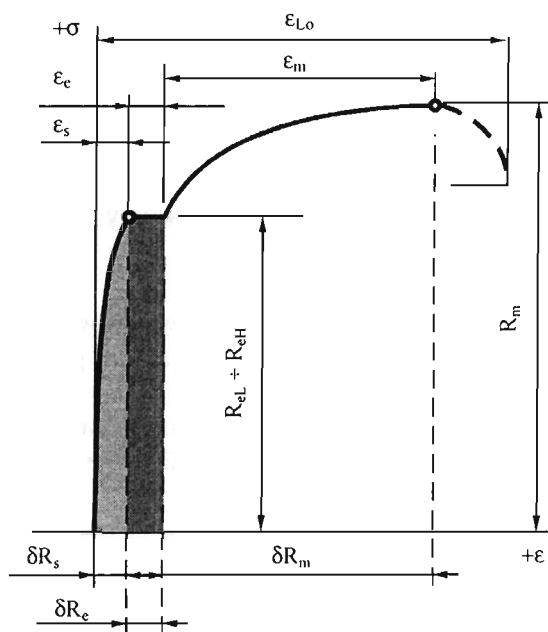


Rys. 2. Zmiana parametrów materiałowych stali w zależności od temperatury

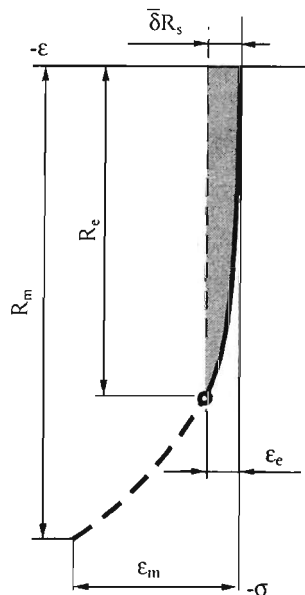
O poprawności interpretacji algorytmu analizy numerycznej utwierdza autorów publikacji pogląd prezentowany w monografii [2]. Symulacji numerycznej należy poddać pręty wbudowane w globalną strukturę, badając najpierw stan naprężeń, a następnie wykorzystać metodę przyrostową w zakresie odkształceń, co w strefie $\partial(R_e)$ można sformułować w formie kryterium

$$\sigma > f_d \rightarrow \sigma \approx R_e \rightarrow \lim \Delta \varepsilon(R_e) = 2 \div 3 \% . \quad (13)$$

a)



b)



Rys. 3. Naprężenia i odkształcenia stalowych prętów struktur kratowych poddanych procesom:

a) rozciągania, b) ściskania

Warunek (13) wykorzystywany jest wyłącznie do prognozy odkształceń i oceny stanu zagrożenia oraz sformułowania warunków decyzyjnych. W fazie granicznych odkształceń $\lim \Delta \varepsilon$ obserwuje się destrukcyjne procesy powierzchniowe w formie drobnych liniowych mikropęknięć, powodujących w profilach walcowych odpryski kory walcowniczej. Ma to bezpośredni związek z redukcją odporności korozyjnej i warunkami odporności na działanie temperatury w warunkach pożaru. W przedziale naprężeń $R_e < \sigma \leq R_m$ odzyskiwana jest częściowa równo-

waga wewnętrzna w wyniku przebudowy krystalicznej. Niewielki przyrost obciążenia konstrukcji powoduje duże odkształcenia, stąd kształtowanie opinii na podstawie związków nieliniowych strefy $\partial(R_m)$ powinno być starannie uzasadnione. Na rysunku 3a oznaczono badane strefy prętów rozciąganych, a fragment 3b ilustruje procesy w ściskanych elementach stalowych. Interpretacja procesów ściskania jest analogiczna, gdy jest odniesiona do bezwzględnych wartości naprężeń i odkształceń. Wyeliminować należy natomiast prawo płynięcia, które przy wzroście naprężeń powodowałoby efekt pęcznienia. Pręty ściskane w strukturach kratowych, z powodu zastosowania rozwiązań konstrukcyjnych spełniających warunki smukłości [8], tracą stateczność nawet w strefie $\partial(\bar{R}_s)$, stąd górnym kresem procesów sprężystych jest relacja $|\sigma| \leq \bar{R}_e$. Zjawisko pęcznienia w prętach kratownic nie istnieje.

4. Globalny proces wyrównania naprężeń a wirtualne stany temperatury

W zakresie wykorzystywanym do realizacji pracy i publikacji wyników autorzy prezentują wpływy normatywów europejskich [9], zastępujących polskie normy.

Ważnym kryterium warunkującym stosowanie określonego gatunku stali jest ciągliwość, która w interpretacji przepisów [9] oznacza trwałe wydłużenie długości pomiarowej po rozerwaniu

$$A = \frac{L_u - L_o}{L_o} \times 100\% \quad (14)$$

i jest wyrażona w procentach a stosowane symbole oznaczają:

L_o – długość pomiarowa przed przyłożeniem siły,

L_u – długość pomiarowa po rozerwaniu.

Powinny być stosowane między innymi następujące oznaczenia:

L – długość pomiarowa,

S_o – początkowa powierzchnia przekroju poprzecznego,

A_t – procentowe wydłużenie całkowite przy rozerwaniu,

A_{gt} – procentowe wydłużenie całkowite przy największej sile,

A_e – przyrost na granicy plastyczności mierzony między początkiem miejscowego płynięcia a rozpoczęciem procesu wzmocnienia wyrażony w procentach względem długości pomiarowej L_o ,

F_m – największa siła występująca w procesie obciążenia po przekroczeniu granicy plastyczności,

R_m – wytrzymałość na rozciąganie odpowiadająca największej sile F_m ,

R_r – naprężenie graniczne przy wydłużeniu trwałym, które powinno być uzupełnione wskaźnikiem określającym umowny procent trwałego wydłużenia, na przykład $R_{r; 0,2}$.

Jeśli wykorzystuje się procesy w strefach $\partial(R_s)$, $\partial(R_e)$ i $\partial(R_m)$ prętów rozciąganych, globalne warunki równowagi będą określały stan przemieszczeń węzłów struktury, dopowiadający przyrostom długości pomiarowych L_{oj} , w sposób określony wzorem (15)

$$\Delta L_{oj} = [\Delta L_o(R_s) + \Delta L_o(R_e) + \Delta L_o(R_m)]_j, \quad (15)$$

w którym przyrosty ΔL_o interpretują:

$\Delta L_o(R_s)$ – wydłużenie bezwzględne w strefie relacji sprężystych,

$\Delta L_o(R_e)$ – wydłużenie w strefie płynięcia,

$\Delta L_o(R_m)$ – wydłużenie nieliniowe w strefie wzmocnienia.

Podobnie interpretowane są bezwzględne zmiany długości L_o w prętach ściskanych, gdzie wykorzystuje się procesy odkształceń tylko w strefie $\bar{\delta}(R_s)$, stąd skrócenie prętów struktury wynosi

$$\Delta \bar{L}_{oj} = \Delta \bar{L}_o(R_s). \quad (16)$$

W oznaczonych na rysunku 3 strefach oblicza się przyrosty Δ , uwzględniając to, że w fazie sprężystej wartości przyrostów ΔL_{oj} są zbliżone do analogicznych wartości odpowiadających skróceniom prętów ściskanych $\Delta \bar{L}_{oj}$. Taka interpretacja uzasadnia stosowanie kryterium

$$\Delta L_{oj}(R_s) = |\Delta \bar{L}_{oj}(R_s)| \quad (17)$$

i równoważność bezwzględnych wartości granic plastyczności R_e

$$R_e = |\bar{R}_e|. \quad (18)$$

Przyrosty (15) i (16) oblicza się wykorzystując rzeczywisty współczynnik rozszerzalności liniowej stali $\epsilon_T = 12 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ oraz wirtualne przyrosty temperatury $\Delta\bar{T}$.

Ewentualną cząstkową zmianę długości pomiarowej L_o wykorzystywaną w procesach symulacji i wyrównywania stanów naprężeń w prętach struktury, korelowaną zmianą wirtualnych przyrostów temperatury, wyrażono wzorem

$$\partial(\Delta L_o) = \epsilon_T \times L_o \times \partial\Delta\bar{T}. \quad (19)$$

Stanem korelowanym jest równowaga sił zewnętrznych i wewnętrznych w liczbie „n” węzłów sprężystej struktury kratowej. Jeżeli spełniona jest nierówność

$$|\sigma_j| < R_e, \quad j = 1, 2, 3 \dots m \quad (20)$$

przyrosty $\Delta L_o(R_s)$ uznaje się za poprawne, a globalny stan przemieszczeń jest równoważny stanowi sprężystemu. Proces redystrybucji sił i przemieszczeń ma miejsce wówczas, gdy w liczbie prętów $p < m$ stwierdzono

$$|\sigma_p| \geq R_e. \quad (21)$$

Wirtualne przyrosty temperatury $\partial\Delta\bar{T}$ w strefie płynięcia określone są stosownie do wartości σ_p stymulującej fakt czy nierówność (21) jest silna lub słaba.

Innym kryterium jest graniczna wartość odkształceń stali w strefie płynięcia $\epsilon_{gr} < 3\%$. W procesie symulacji wyrównywania naprężeń w prętach przyjęto interpretację

$$\partial(\Delta L_o) = \alpha \times \epsilon_{gr}. \quad (22)$$

Wirtualny cząstkowy przyrost temperatury wynosi zatem

$$\partial\Delta\bar{T} = \frac{\alpha \times \epsilon_{gr}}{\epsilon_T} \quad (23)$$

stąd przy wartości granicznej $\epsilon_{gr} = 3\%$ obliczono

$$\partial\Delta\bar{T} = \frac{0,03 \cdot \alpha}{\epsilon_T}. \quad (24)$$

Ilustrując proces przyrostowy na przykład dla współczynnika $\alpha = 0,01$, otrzymuje się wartość wirtualną

$$\partial \Delta \bar{T} = \frac{0,03 \times 0,01}{12 \times 10^{-6} / ^\circ \text{C}} = \bar{25} \text{ } ^\circ \text{C}. \quad (25)$$

Proces iteracji uznaje się za zakończony po spełnieniu nierówności (20) i kryterium $\varepsilon_{gr} \leq 3\%$ lub wykazaniu, że we wszystkich prętach

$$|\sigma_j| \geq R_m, \quad j = 1, 2, 3 \dots m. \quad (26)$$

Warunek (26) definiuje stan katastrofy.

5. Analiza przekrycia kratowego w stadium przeciężenia

Opublikowano wyniki ilustrujące procesy przemieszczeń sprężysto-plastycznej struktury globalnej wielu zrealizowanych i badanych struktur. Analizie poddano konstrukcję przekrycia obiektu użyteczności publicznej o rozpiętości $L_s = 21$ m, obejmującej obciążenia zewnętrzne o wartościach pokazanych na rysunku 4. W nawiasach podano ich charakterystyczne wartości wykorzystywane do obliczenia składowych a_{yi} wektorów (7) i (8). Stalowe pręty dźwigarów charakteryzują się granicą plastyczności

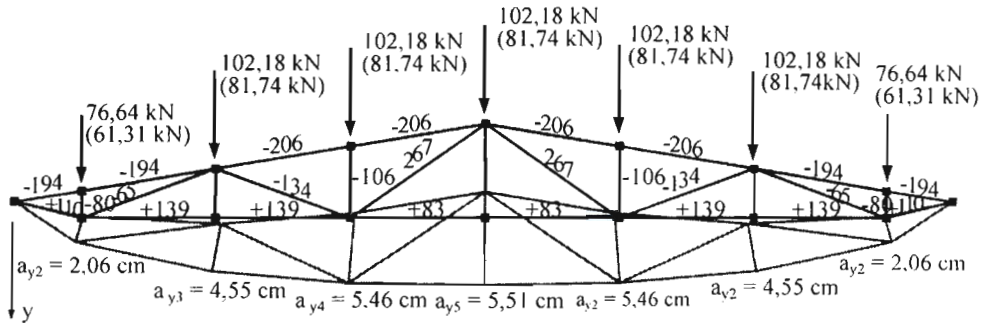
$$R_e = 235 \text{ MPa}, \quad (27)$$

która jest interpretowana jako wartość R_{eL} stali o znakach St3SX, St3SY, St3S, St3V i St3W. Przeprowadzona analiza statyczna układu metodą przemieszczeń w zakresie liniowym z wykorzystaniem interpretacji deformacji w stadium przyrostów wydłużeń $\Delta L_o(R_s)$ w strefach relacji sprężystych, wykazała powstanie największych naprężeń rozciągających w dwóch krzyżulcach, przy czym obliczone wartości spełniają nierówność

$$\sigma = 267 \text{ MPa} > R_e, \quad (28)$$

co odpowiada stanowi uplastycznienia lokalnej strefy konstrukcji. Naprężenia rozciągające oznaczono zwyczajowo jako dodatnie, a ściskające jako ujemne i pokazano na rysunku 4. Naprężenia są wyrażone w megapaskalach, stan deformacji

zilustrowano wartościami przemieszczeń a_{yi} , przy czym jednostki wyrażono w centymetrach.



Rys. 4. Naprężenia w prętach przekrycia i przemieszczenia a_{yi} węzłów konstrukcji

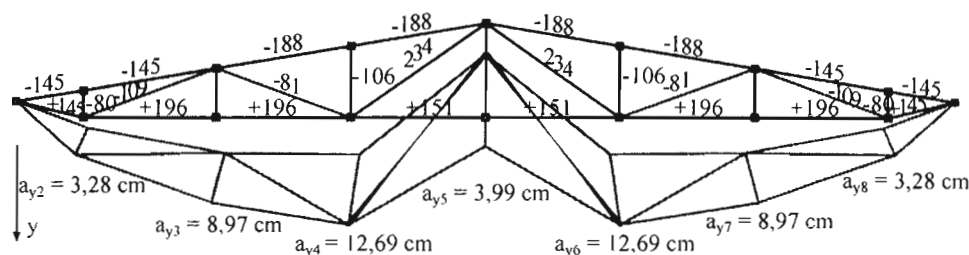
Ugięcie graniczne struktury kratowej, ustalone zgodnie z normatywem [8], nie powinno przekraczać wartości

$$a_{gr} \leq L_s / 250 = 21,00 / 250 = 0,084 \text{ m} = 8,40 \text{ cm} . \quad (29)$$

Analizując sprężystą fazę rozwiązania sugerującą, że nie uzyskano przekroczenia granicznej wartości ugięcia, bowiem

$$a_{\max} = 5,51 \text{ cm} < a_{gr} = 8,40 \text{ cm} \quad (30)$$

nie zostały przekroczone, popełnia się błąd, który w przybliżeniu wynosi przeszło 200%. Wykorzystując koncepcję uwzględnienia w analizie uplastycznienia prętów techniką stosowania wirtualnych stanów temperatury w sposób opracowany w rozdziale 4, przeprowadzono symulację metodą przyrostową przyjmując jako kryterium zbieżności globalne wyrównanie naprężeń do wartości 235 MPa. Symulowano obciążenie temperaturą wirtualną najpierw uplastycznionych krzyżulców, przyjmując kryterium $\alpha = 0,01$ i dla każdego kolejnego stanu równowagi sił zwiększając wartość temperatury wirtualnej o $\partial \Delta \bar{T} = 25^\circ \text{C}$. Po 44 symulacjach dla wartości wirtualnej 1100°C uzyskano globalne wyrównanie sił i naprężeń. Wyniki analizy w warunkach stanu sprężysto-plastycznego podano na rysunku 5.



Rys. 5. Stan rzeczywistych naprężeń i przemieszczeń w stadium sprężysto-plastycznych warunków równowagi

W procesie każdej iteracji sprawdzano warunek granicznego odkształcenia prętów w fazie płynięcia, który może być utożsamiany z maksymalną wartością wirtualnej temperatury równą

$$\partial \Delta \bar{T} = \frac{0,03}{12 \times 10^{-6} / ^\circ \text{C}} = \overline{2500}^\circ \text{C} . \quad (31)$$

Proces iteracyjny został zakończony poprzez spełnienie warunku (20) we wszystkich prętach struktury. W stanie lokalnego uplastycznienia konstrukcji i w globalnej strukturze sprężysto-plastycznej ugięcie przekracza wartość graniczną, co uzasadnia nierówność

$$a_{\max} = 12,69 \text{ cm} > a_{gr} = 8,40 \text{ cm} \quad (32)$$

a ponadto

$$a_{\max} = 12,69 \text{ cm} \gg a_{gr} = 5,46 \text{ cm} .$$

Prezentowany przykład dokumentuje fakt realizowania pomiarów przemieszczeń wszystkich węzłów przekrycia, bowiem wartości maksymalne nie muszą występować w rutynowo oczekiwanych węzłach. Obliczone wartości $a_{\max}$ dotyczą węzłów usytuowanych w odległości $L_{a_{\max}} = 3,00 \text{ m}$.

6. Procesy starzenia. Aneks

W badaniach nośności elementów i konstrukcji stalowych prezentowanych w rozdziale 5 ważnym czynnikiem może okazać się wiek materiału. Na ogół

skutkiem długoletniej eksploatacji, który poddawany jest ocenie, są procesy korozji. Obserwacje jednak tych procesów w aspekcie tematyki publikacji należy traktować oddzielnie. Silne zaawansowanie destrukcyjnych procesów korozyjnych można zaobserwować również w konstrukcjach kilkuletnich, eksploatowanych w środowisku silnie agresywnym. Stosownie do poziomu posiadanej wiedzy i doświadczenia należy wykorzystywać fakt dobrze zachowanych powierzchni zewnętrznych elementów struktur nawet po dziesiątkach lat użytkowania w środowiskach neutralnych lub w dobrze zabezpieczonych przed wpływami agresji zewnętrznej. Dla omówionych procesów ważna jest reguła, że stan zestarzenia charakteryzują podwyższone wartości R_e i R_m [5]. Wyjaśnione jest to w ten sposób, że proces starzenia stali niskowęglowych jest skutkiem wydzielania się przesyconego roztworu nadmiaru azotu i tworzenia się atmosfery Cottrella, w której blokowane są ruchy poślizgowe mikrostruktur wewnętrznych. Stal zwiększa wytrzymałość, ale zmniejsza cechy plastyczne.

W konstrukcjach efekt starzenia okazuje się najsilniejszy w miejscach powtórnego obciążenia materiału po pierwszej deformacji plastycznej na zimno [5]. W procesach badania obiektów użytkowanych trwale, obciążonych siłami symulowanymi statycznie, głównym czynnikiem starzenia jest temperatura, a początek procesu występuje przy około 50°C.

Intensyfikacja procesu starzenia stali konstrukcyjnych niskowęglowych następuje w temperaturze wyższej niż 140°C.

Przyrost granicy plastyczności wskutek starzenia można obliczyć wykorzystując wzór

$$\Delta R_e^S = (2750 \times N_2 + 35,3) \text{ MPa}, \quad (33)$$

w którym

N_2 – procentowa zawartość azotu.

Dla stali gatunku St3 wartość $\lim N_2 = 0,01\%$, stąd graniczny przyrost wytrzymałości w strefie płynięcia wynosi

$$\Delta R_e^S = (2750 \cdot 0,01 + 35,3) \text{ MPa} = (27,5 + 35,3) \text{ MPa} = 62,8 \text{ MPa}. \quad (34)$$

Korekty i przybliżenia w aspekcie wpływu temperatury na wytrzymałość R_e można uwzględnić w procesach praktycznych wykorzystując także wzór

$$R_{eT} = R_e \cdot \exp \left[\beta_e \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_o} \right) \right], \quad (35)$$

w którym

T - temperatura bezwzględna,

$T_o = 293\text{ K}$,

$$\beta_e = 170 - 100 \cdot \ln \frac{R_e}{200}. \quad (36)$$

Wykres funkcji β_e w przedziale wytrzymałości $200\text{ MPa} \leq R_e \leq 1200\text{ MPa}$ określają autorzy publikacji [1].

Wpływ prędkości odkształcenia na granicę plastyczności stali można interpretować wartościami funkcji

$$R_{e\dot{\epsilon}} = R_e \cdot \left(1 + \frac{\ln A}{1,35 R_e^n} \right), \quad (37)$$

w której

$$\begin{aligned} A &= 1 + 0,1 \cdot 3^{0,22 \ln \dot{\epsilon}} \\ n &= 0,8 \text{ dla } R_e < 1\text{ GPa}, \\ n &= 2,0 \text{ dla } R_e \geq 1\text{ GPa}. \end{aligned} \quad (38)$$

Wzór ważny jest dla $R_e > 0,1 \div 2,0\text{ GPa}$ i $\dot{\epsilon} = (10^{-4} \div 10^6)\text{s}^{-1}$, a dla tak określonych zakresów efekt wzmocnienia może być nawet dwukrotny, co oznacza

$$1 < R_{e\dot{\epsilon}} / R_e \leq 2. \quad (39)$$

Wzory (37)÷(39) mogą być wykorzystane tylko wówczas, gdy zostaną ocenione wpływy charakterystyk wartości własnych konstrukcji i wymuszonych wpływów obciążeń.

Sposób wykorzystania wzmocnień określonych wzorami (33) i (35) zależy od doświadczenia osoby realizującej prace badawcze lub inżynierskie. Autorzy publikacji zalecają stosowanie bezpiecznego algorytmu, który umożliwia uzyskanie przydatnych rezultatów, w sposób prezentowany w rozdziale 5. Przy badaniu dużych struktur wymagających nakładów finansowych uwarunkowanych wynikami pomiarów i interpretacją wyników, decyzje należy konsultować z uprawnionym, kompetentnym personelem techniczny bądź naukowym.

7. Efekty praktyczne i sugestie w zakresie stosowania normatywów PN-EN

W strukturach kratowych wskazujących na stan zagrożenia, gdy wypełniane są postanowienia przepisów [7], konieczny jest pomiar przemieszczeń węzłów.

Fakt ten uzasadniono jednoznacznie, a prezentowany przykład powinien przekonywać, że nawet przy symetrycznym, statycznym i laminarnym obciążeniu pomiary ugięć węzłów w środkach rozpiętości struktur nie stanowią o poprawnej ocenie warunków maksymalnych przemieszczeń porównywalnych w metodzie stanów granicznych z ugięciami granicznymi.

Stan przemieszczeń węzłów struktury należy poddać analizie kompatybilnej z oceną stanu naprężeń w prętach, co w wynikach uzasadniających wady konstrukcji skutkuje przeważnie uplastycznieniem fragmentów lub globalnym efektem płynięcia. Na podstawie opublikowanej koncepcji, w której do symulacji wyrównania naprężeń wykorzystano wirtualne stany temperatury, można określać jednoznacznie stany obciążenia i zakres eksploatacji struktur, sposób niezbędnych zabezpieczeń doraźnych lub technologii wzmocnień łącznie z wymianą prętów i połączeń, w których stan naprężeń kształtuje obszar strukturalnego wzmocnienia.

Prezentowane przez autorów algorytmy opracowano na podstawie wieloletnich badań płaskich i przestrzennych przekryć kratowych, realizowanych w obiektach przemysłowych i obiektach użyteczności publicznej, a w prezentacji wyników wykorzystano zmiany terminologii stosowanej w normatywach europejskich. Autorzy sugerują wykorzystywanie normatywów PN-EN również w procesie dydaktycznym i jest to jednym z uzasadnień publikowania pracy w zeszytach naukowych.

Literatura

- [1] Hildebrandt E., Łubiński M.: *Konstrukcje metalowe. Materiały, metody wymiarowania i rodzaje połączeń*. Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1966.
- [2] Jankowiak W.: *Konstrukcje metalowe*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa-Poznań, 1983.
- [3] Karczewski J. A.: *Wpływ rozmieszczenia prętów w sprężysto-plastycznej przestrzennej konstrukcji prętowej na jej nośność graniczną*. „Inżynieria i Budownictwo”, nr 1/2003.

- [4] **Karczewski J. A.:** *The limit load of the space trusses*. Arch. Civ. Eng. Vol. 26 (1980).
- [5] **Rychaluk K.:** *Pęknięcia w konstrukcjach stalowych*. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, 2000.
- [6] **Wendorff Z.:** *Metaloznawstwo z obróbką cieplną*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1968.
- [7] Ustawa z dnia 7 lipca 1994 roku Prawo Budowlane, Dziennik Ustaw nr 89 z późniejszymi zmianami (tekst jednolity obowiązujący od dnia 11.07.2003 roku).
- [8] PN-90/B-03200 *Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie*.
- [9] PN-EN 10002-1 + AC1:1998 *Metale. Próba rozciągania. Metoda badania w temperaturze otoczenia*.

GLOBAL RESULT OF TRUSS STRUCTURES DISPLACEMENT IN ELASTIC-PLASTIC STRESS CONDITIONS

Summary: The paper presents the algorithm of stress-strains conditions of bar truss structures analysis to aspect obtainment global result of strains construction. The algorithm is universal in the range of irregular geometric configurations of constructions, test estimation and it is used elasticity and plastic stuff characteristic. Stabilization of stress and strain value on the definitive range of the precision and results interpretation in method with standards of the boundary range and exploit. It is very important to compliance of the standard PN-EN 10002:1998.

Key words: truss structures, elasticity, plastic, environment temperature, virtual temperature

Artykuł zrealizowano w ramach pracy badawczej statutowej S/IIB/4/99.

Rościsław Tribińko, Adam Walendziuk

ANALIZA NUMERYCZNA ROZKŁADU NAPRĘŻEŃ NA GRANICY FAZ W OŚRODKU STAŁYM

Streszczenie: Przeanalizowano numerycznie modelowy ośrodek typu kompozyt. Określono rozkład naprężeń na granicy faz pod działaniem zewnętrznych pól naprężeń.

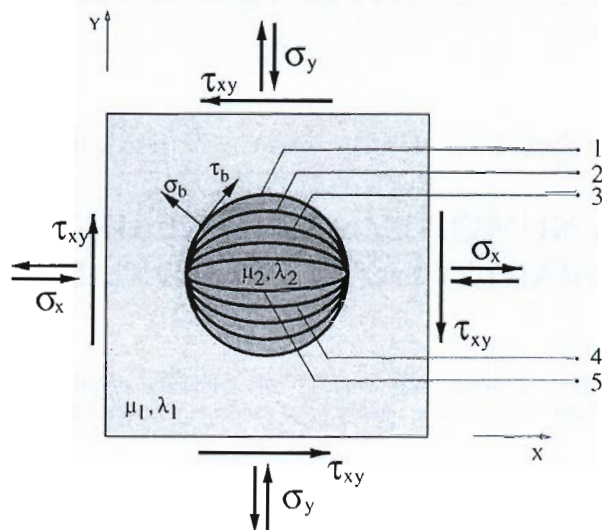
Słowa kluczowe: niejednorodność, wtrącenie, metoda elementów skończonych (MES), stan naprężeń.

1. Wprowadzenie

Wiele materiałów składa się z dwóch lub więcej faz, których opis w znacznej mierze zależy od skali obserwacji budowy materii (mikro-, mezo-, makro-skala). Materiał wielofazowy posiada właściwości fizykochemiczne różne od tych jakie posiadają poszczególne komponenty. W niniejszej pracy ograniczono się do przedstawienia pojęcia fazy jako jednorodnej, pod względem makroskopowym, części materiału stałego o jednakowych właściwościach mechanicznych. Przy założeniu jednorodności struktury w obrębie faz, założono również ich izotropowy charakter.

W materiałach takich jak kompozyty struktura wielofazowa wytwarzana jest celowo, ponieważ jej właściwości są wyraźnie lepsze od właściwości substancji jednofazowej. Jednym ze sposobów odróżniania (wskazania) składników kompozytu jest podział na osnowę (matrycę), w którą wbudowane są pozostałe składniki kompozytu (wtrącenia, inkluzje).

Opis pól mechanicznych w materiałach zawierających inkluzje możliwy jest na drodze analitycznej bądź numerycznej. Metody analityczne bazują na rozwiązaniach funkcji zmiennej zespolonej [6]. Pionierskie prace w tym zakresie opublikował Eshelby [1], [2], który analizował nieskończony ośrodek zawierający elipsoidalne wtrącenie, rozumiane jako obszar materiału ograniczony zamkniętą powierzchnią,



Rys. 1. Geometrie niejednorodności oraz schematy obciążenia.

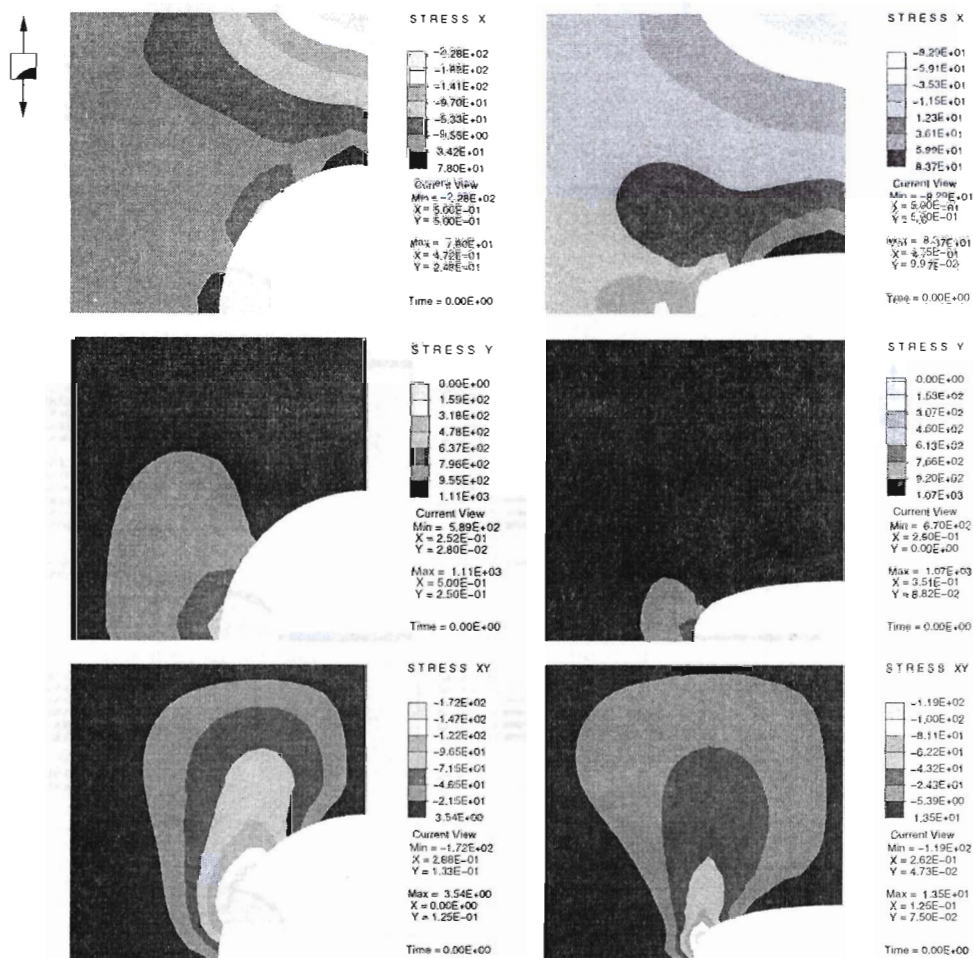
poddany działaniu wewnętrznej deformacji.

Dzisiejsze poglądy dotyczące opisanej problematyki można odnaleźć między innymi w pracach Mury [7], Gao [3], Shena [9], Onaki [8].

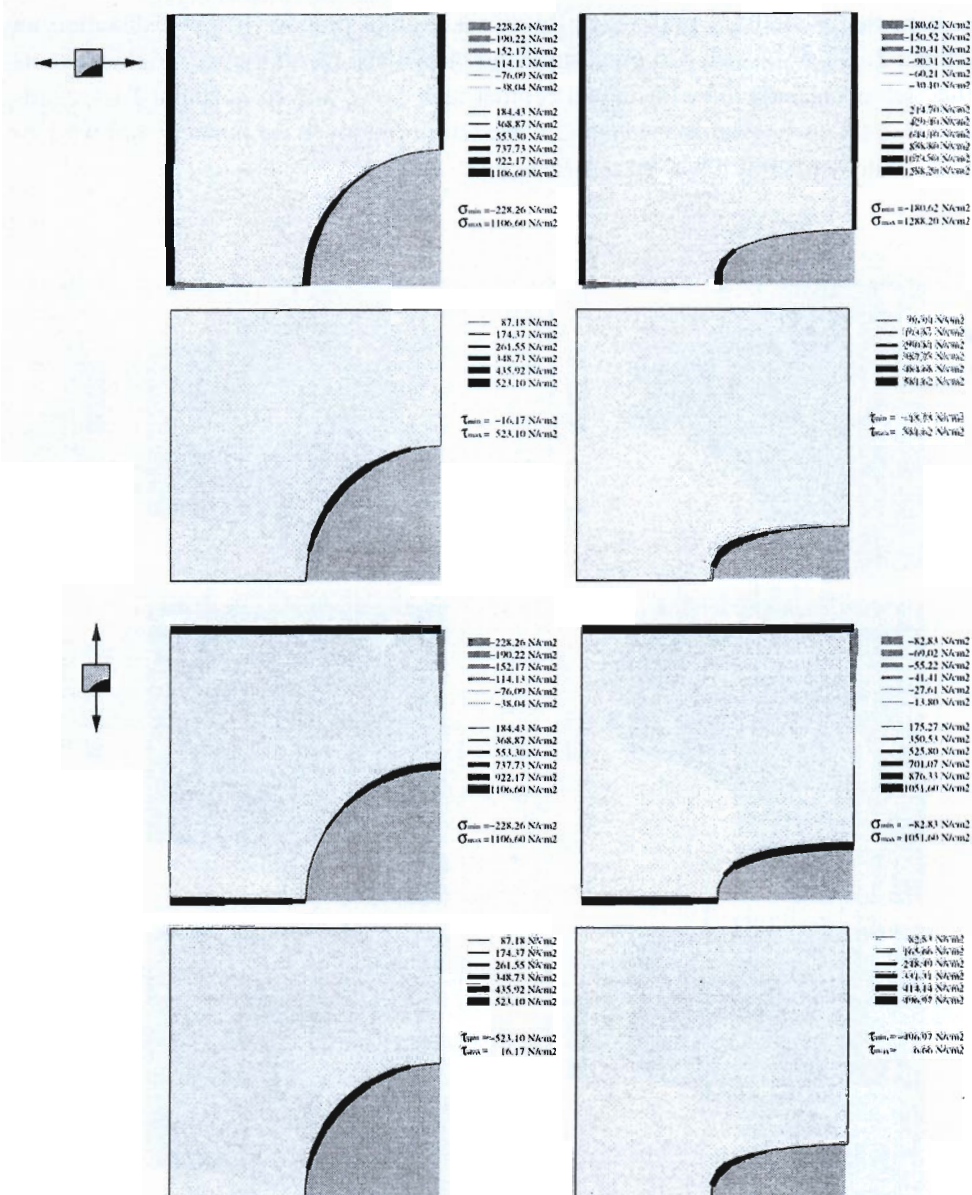
2. Rozkład pola naprężeń na granicy niejednorodności ośrodka

Przeanalizowano zagadnienie wtrącenia w postaci płaskiej niejednorodności opisanej odmiennymi, w porównaniu z matrycą, stałymi Lamego λ_2, μ_2 , poddanej zewnętrznemu polu naprężeń. Rozpatrzono wpływ zmiany geometrii niejednorodności i obciążenia zewnętrznego na rozkład naprężeń na granicy faz ośrodków przy założeniu ciągłości przemieszczeń. Geometrię kształtu wtrącenia oraz obciążenie przedstawiono schematycznie na rysunku 1. Przyjęto jednostkowe wymiary matrycy oraz wartości obciążeń $\sigma_x = \pm 1000 \text{ N/cm}^2$, $\sigma_y = \pm 1000 \text{ N/cm}^2$, $\tau_{xy} = 1000 \text{ N/cm}^2$. Obliczenia wykonano metodą elementów skończonych. Wykorzystano symetrię modelu i obciążenia. Właściwości materiału matrycy w postaci modułu Younga i współczynnika Poissona **przyjęto** jako równe $E_1 = 3.7 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$, $\nu_1 = 0.19$, wtrącenia zaś odpowiednio $E_2 = 8.1 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$, $\nu_2 = 0.25$. Tensory naprężeń uzyskane na drodze rozwiązań numerycznych transformowano do układów $\tau_b - \sigma_b$, których osie są styczne i normalne do granicy rozdziału ośrodków. Przykładową mapę rozkładu

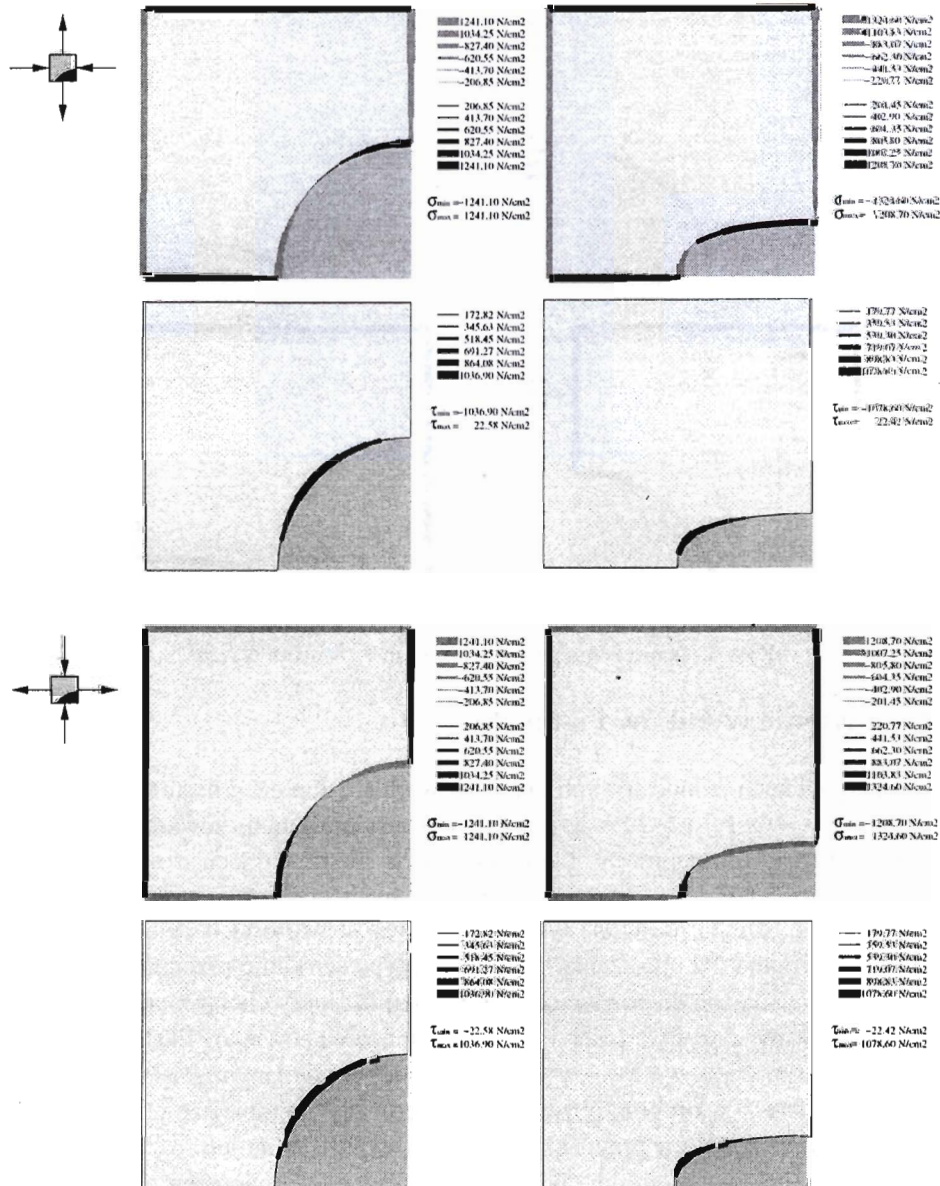
pól naprężeń w matrycy przy rozciąganiu w kierunku pionowym przedstawiono na rysunku 2. Na rysunkach 3–5 przedstawiono otrzymane rezultaty przy różnych kombinacjach obciążenia dla wtrącenia o geometriach oznaczonych liczbami 1 i 4, zgodnie z rysunkiem 1. Wartości dodatnie naprężeń normalnych do powierzchni wtrącenia σ_b , należy interpretować jako rozciąganie.



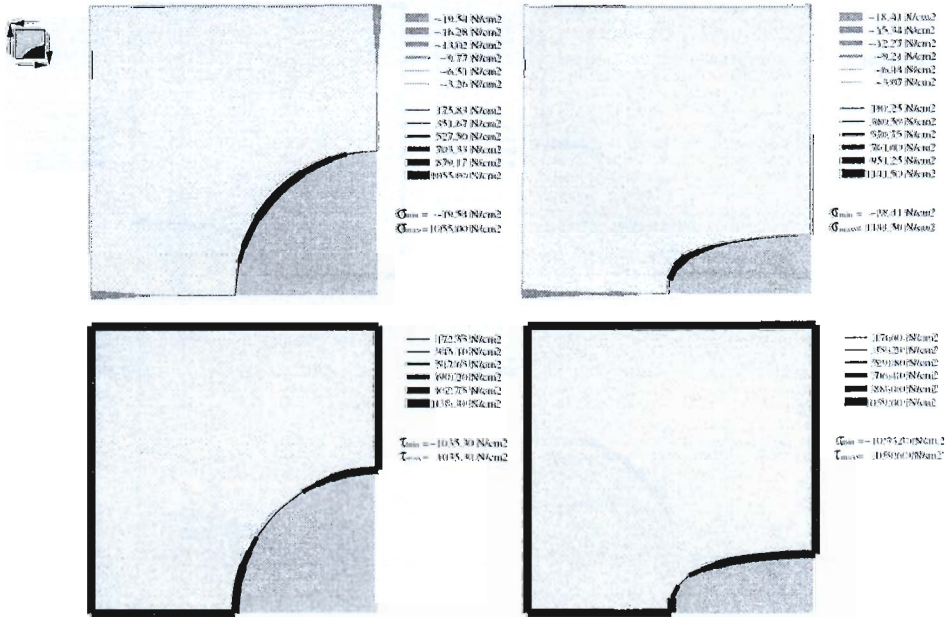
Rys. 2. Mapa naprężeń dla przypadku obciążenia $\sigma_y = 1000\text{N}/\text{cm}^2$.



Rys. 3. Naprężenia pod obciążeniem a) $\sigma_x = 1000 \text{ N/cm}^2$, b) $\sigma_y = 1000 \text{ N/cm}^2$.



Rys. 4. Naprężenia pod obciążeniem a) $\sigma_x = -1000 N/cm^2, \sigma_y = 1000 N/cm^2$; b) $\sigma_x = 1000 N/cm^2, \sigma_y = -1000 N/cm^2$.



Rys. 5. Naprężenia pod obciążeniem $\tau_{xy} = 1000 \text{ N/cm}^2$.

3. Omówienie wyników i wnioski

W przypadkach jednoosiowych obciążeń wartości naprężeń normalnych do granicy faz były wyższe o 5-29% w porównaniu z naprężeniem zewnętrznym. Najwyższe wartości tych naprężeń otrzymano dla geometrii wtrąceń oznaczonych numerami 4 oraz 5 (rys. 1). W stanach generowanych przez dwuosiowe obciążenia zewnętrzne naprężenia normalne wykazywały wzrost wartości o 19-33%. Wyższe wartości otrzymano dla obciążenia mieszanego, typu ściskanie-rozciąganie.

Naprężenia styczne do powierzchni granicznej faz, przy obciążeniach jednoosiowych, oscylowały wokół wartości 50% obciążenia zewnętrznego. Ekstremalne, największe co do modułu, wartości wystąpiły w modelu poddanym ścisnaniu – w jednym i rozciąganiu – w drugim, prostopadłym kierunku. Najmniejsze wartości naprężeń stycznych wystąpiły w przypadku dwuosiowego ściskania lub rozciągania.

W każdej omawianej grupie obciążeń wyższe wartości naprężeń otrzymano dla niejednorodności, których granica faz miała mniejszy promień krzywizny.

Przeprowadzona analiza dotyczyła problemu wtrąceń o regularnej, wypukłej geometrii brzegu. Z punktu widzenia analizy kompozytów, istotna wydaje się analiza

wtrącenia o dowolnym kształcie brzegu niejednorodności. Analityczne rozwiązania tak postawionego problemu napotykają obecnie trudności [5], [4].

Analiza mikromechaniczna ośrodków wielofazowych wymaga również uwzględnienia takich zagadnień jak niejednorodność oraz wady połączenia faz w kompozytach. Nad tymi zagadnieniami autorzy niniejszego artykułu prowadzą obecnie prace.

Literatura

- [1] **Eshelby J.D.:** *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems.* Proceedings of the Royal Society, London, Series A, vol. 241, 1957. s. 376-396.
- [2] **Eshelby J.D.:** *The elastic field outside an ellipsoidal inclusion.* Proceedings of the Royal Society, London, Series A, vol. 252, 1959. s. 561-569.
- [3] **Gao Z.:** *A circular inclusion with imperfect interface: Eshelby's tensor and related problems.* Journal of Applied Mechanics, ASME, vol. 62, no. December, 1995. s. 860-866.
- [4] **Kawashita M., Nozaki H.:** *Eshelby tensor of a polygonal inclusion and its special properties.* Journal of Elasticity, vol. 64, 2001. s. 71-84.
- [5] **Markenscoff X.:** *On the shape of the Eshelby inclusions.* Journal of Elasticity, vol. 49, 1998. s. 163-166.
- [6] **Mura T.:** *Micromechanics of defects in solids* (2nd ed.). Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, 1987.
- [7] **Mura T.:** *Inclusion problems.* Applied Mechanics Reviews, ASME, vol. 41, no. 1, 1988. s. 15-20.
- [8] **Onaka S.:** *Averaged Eshelby tensor and elastic strain energy of a superspherical inclusion with uniform eigenstrains.* Philosophical Magazine Letters, vol. 81, no. 4, 2001. s. 265-272.
- [9] **Shen H., Schiavone P., Ru C.Q., Mioduchowski A.:** *Stress analysis of an elliptic inclusion with imperfect interface in plane elasticity.* Journal of Elasticity, vol. 62, 2001. s. 25-46.

NUMERICAL ANALYSIS OF STRESS DISTRIBUTION AT AN INTERFACE BETWEEN DISSIMILAR SOLIDS

Summary: An inclusion embedded within an matrix has been analysed numerically. Stress distribution at an interface between dissimilar media has been evaluated for mixed external loads.

Key words: inhomogeneity, inclusion-matrix interface, finite element analysis, state of stresses.

Artykuł zrealizowano w ramach pracy statutowej S/IIB/4/99.