

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI BIAŁOSTOCKIEJ

ROK LXI TECHNICZNE NR 04

ELEKTRYKA NR 7

Mikołaj Busłowicz

**ASYMPTOTYCZNA STABILNOŚĆ
DYNAMICZNYCH UKŁADÓW LINIOWYCH STACJONARNYCH
Z OPÓŹNIENIEM**

WYDAWNICTWA POLITECHNIKI BIAŁOSTOCKIEJ

Recenzenci

prof.dr hab. Krzysztof Kuźmiński

doc.dr hab.inż. Andrzej Olbrot



Opracowanie redakcyjne

Jolanta Grabowska

Prace kreślarskie

Tadeusz Malewicz

Druk wykonano w Dziale Poligrafii Politechniki Białostockiej.
Nakład 150 egz. Format B-5. Ark.wyd. 7,0. Ark.druk. 11,5. Złożono do
druku we wrześniu 1987 r. Druk ukończono - wrzesień 87r. Zam. 26/87.

P-2 Cena 140 zł

SPIS TREŚCI

	Strona
WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ.....	6
1. WSTĘP.....	9
2. WPROWADZENIE.....	13
2.1. Postać quasi-wielomianu charakterystycznego.....	13
2.2. Właściwości rozkładu zer asymptotycznych.....	16
2.3. Typy quasi-wielomianów.....	20
2.4. Rozkład zer asymptotycznych quasi-wielomianu typu neutralnego ze współmiernymi opóźnieniami.....	22
2.5. Ciągłość granicy spektralnej.....	24
3. PODSTAWOWE DEFINICJE I TWIERDZENIA.....	26
3.1. Definicje stabilności.....	26
3.2. Kryteria stabilności.....	28
3.3. Kryteria asymptotycznej stabilności niezależnie od wiel- kości opóźnienia.....	34
4. STABILNOŚĆ NIEZALEŻNIE OD WIELKOŚCI OPÓŹNIENIA.....	42
4.1. Badanie na podstawie znajomości quasi-wielomianu charakterystycznego.....	42
4.2. Badanie na podstawie znajomości macierzy stanu.....	51
4.3. Metoda Lapunowa.....	55
5. WARUNKI POŁOŻENIA WSZYSTKICH ZER QUASI-WIELOMIA- NU W OLP.....	58
5.1. Prosty warunek konieczny.....	59
5.2. Uogólnienie kryterium Routha-Hurwitza.....	63
5.3. Metoda D-podziału.....	65
5.4. Kryterium Pontriagina.....	68
5.5. Metoda Czebotariewa i Mejmmana.....	70

	Strona
5.6. Kryterium Michajłowa.....	74
5.6.1. Zmodyfikowane kryterium Michajłowa.....	76
5.7. Inne metody.....	80
6. BADANIE ROZKŁADU ZER QUASI-WIELOMIANU ZA POMOCĄ METODY H-PODZIAŁU.....	81
6.1. Wyznaczanie wskaźników przejścia.....	85
6.1.1. Jednokrotny pierwiastek ω_r	85
6.1.2. l-krotny pierwiastek ω_r	87
6.2. Wyznaczanie granic h-podziału.....	88
6.2.1. Metoda 1.....	90
6.2.2. Metoda 2.....	93
6.2.3. Metoda 3.....	95
6.2.4. Metoda 4.....	100
6.2.5. Metoda 5.....	103
6.3. Podsumowanie.....	108
7. γ -STABILNOŚĆ QUASI-WIELOMIANÓW.....	111
7.1. Warunki γ -stabilności quasi-wielomianu typu opóźnio- nego stopnia pierwszego z jednym opóźnieniem.....	111
7.1.1. Quasi-wielomian o zespolonych współczynni- kach.....	112
7.1.2. Quasi-wielomian o zespolonych współczynni- kach z czystym opóźnieniem.....	115
7.1.3. Quasi-wielomian o rzeczywistych współczynni- kach.....	122
7.2. Badanie γ -stabilności ogólnego quasi-wielomianu typu opóźnionego.....	126
7.2.1. Wyznaczanie linii pierwiastkowych.....	126
7.2.2. Metoda postępowania przy badaniu γ -stabil- ności.....	130
8. γ -STABILNOŚĆ WIELOWYMIAROWYCH UKŁADÓW Z JED- NYM OPÓŹNIENIEM.....	142
8.1. Przypadek szczególny $A_0 = 0$	143
8.2. Przypadek szczególny $A_0 A_1 = A_1 A_0$	146
8.3. Warunek dostateczny γ -stabilności w przypadku ogólnym.....	149

	Strona
9. ZAKOŃCZENIE.....	156
9.1. Nie rozwiązane problemy dotyczące tematu pracy.....	160
10. DODATEK.....	165
10.1. Rozwiązanie zespolonego równania Lapunowa.....	165
10.1.1. Metoda 1.....	166
10.1.2. Metoda 2.....	167
10.1.3. Metoda 3.....	169
LITERATURA.....	174
STRESZCZENIA.....	184

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- R - ciało liczb rzeczywistych,
- R_+ - zbiór liczb rzeczywistych dodatnich,
- C - ciało liczb zespolonych,
- R^n - n -wymiarowa przestrzeń euklidesowa nad ciałem liczb rzeczywistych,
- C^n - n -wymiarowa przestrzeń euklidesowa nad ciałem liczb zespolonych,
- $C([a,b]; R^n)$ - przestrzeń funkcji ciągłych odwzorowujących przedział $[a,b]$ w przestrzeń R^n ,
- $Re s$ - część rzeczywista zmiennej zespolonej s ,
- $Im s$ - część urojona zmiennej zespolonej s ,
- $j = j^2 = -1$,
- $\lambda_i(A)$ - i -ta wartość własna macierzy A ,
- $\mu_k(A)$ - miara macierzy A ($k = 1, 2$ lub ∞),
- A^T - macierz A transponowana,
- A^* - macierz A sprzężona i transponowana,
- $adj A$ - macierz dołączona macierzy A ,
- $\det A$ - wyznacznik macierzy A ,
- I - macierz jednostkowa,
- $\otimes$ - iloczyn Kroneckera,
- OLP - otwarta lewa półpłaszczyzna płaszczyzny zmiennej zespolonej,
- OPP - otwarta prawa półpłaszczyzna płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Ponieważ stabilność układu z opóźnieniem jest w pełni scharakteryzowana przez rozkład zer jego quasi-wielomianu charakterystycznego, w pracy będziemy równoważnie mówić o stabilności układu z opóźnieniem i o stabilności jego quasi-wielomianu charakterystycznego.

Mikołaj Białowicz

ASYMPTOTYCZNA STABILNOŚĆ
DYNAMICZNYCH UKŁADÓW LINIOWYCH STACJONARNYCH
Z OPÓŹNIENIEM

Streszczenie

W pracy dokonano krytycznego przeglądu bogatej literatury, dotyczącej asymptotycznej stabilności dynamicznych układów liniowych stacjonarnych o parametrach skupionych z dyskretnymi, głównie wspólnymi, opóźnieniami. Usystematyzowano wiele spraw związanych z tym problemem i podano wiele nowych rezultatów. Uwzględniono w tym przeglądzie wszystkie dostępne w kraju ważniejsze publikacje na temat stabilności rozważanej klasy układów, które ukazały się w literaturze światowej do końca 1986 roku. W ostatnich latach było ich bardzo dużo. Ostatnie prace, w których podsumowano aktualny (w danym okresie) stan wiedzy o stabilności rozważanej klasy układów z opóźnieniem ukazały się w roku 1971. Były to monografie: Góreckiego [58] oraz Elsgolca i Norkina [52]. W późniejszych pracach, takich jak np. [49,64], nie podsumowywano aktualnego stanu wiedzy o stabilności liniowych układów z opóźnieniem, a jedynie podano pewne rezultaty z tej dziedziny.

Na początku pracy podano podstawowe wiadomości o quasi-wielomianach charakterystycznych liniowych stacjonarnych układów z opóźnieniem, zwracając szczególną uwagę na właściwości rozkładu ich zer asymptotycznych (o dużych modułach). Następnie rozpatrzono podane niżej rodzaje stabilności:

- (i) asymptotyczna stabilność przy ustalonej wartości opóźnienia,
- (ii) asymptotyczna stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia,
- (iii) asymptotyczna stabilność w funkcji wielkości opóźnienia,
- (iv) asymptotyczna stabilność z szybkością zanikania γ ($\gamma > 0$), a właściwie z szybkością zanikania nie mniejszą niż γ , tzw. γ -stabilność.

Warunki każdego rodzaju stabilności sformułowano w innej postaci dla układu typu neutralnego niż dla układu typu opóźnionego. Położenie wszystkich zer quasi-wielomianu charakterystycznego układu typu neutralnego w otwartej lewej półpłaszczyźnie nie zawsze jest bowiem równoważne z jego asymptotyczną stabilnością. Fakt ten w wielu pracach nie był uwzględniany.

Zamiast istniejącej w literaturze jednej nazwy - asymptotyczna stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia - w pracy zaproponowano wprowadzenie dwóch nazw (i definicji) tego rodzaju stabilności, a mianowicie: asymptotyczna stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia (w skrócie ASNO) i mocna asymptotyczna stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia (w skrócie MASNO). Ma to na celu rozdzielenie dwóch grup prac poświęconych badaniu tego rodzaju stabilności, w których podano nierównoważne sobie w przypadku ogólnym kryteria. Uwzględniając wprowadzoną terminologię, w pracy dokonano krytycznego przeglądu metod badania asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia i podano pewne nowe rezultaty.

W pracy omówiono również metodę h -podziału, służącą do badania asymptotycznej stabilności w funkcji opóźnienia h . Zaproponowano trzy nowe metody wyznaczania wartości opóźnienia, przy których quasi-wielomian charakterystyczny ma zera na osi urojonej. Jedna z tych metod wymaga rozwiązywania macierzowego zespolonego równania Lapunowa. Sposoby rozwiązywania tego równania omówiono w Dodatku. Wyprowadzono też analityczną postać tego rozwiązania.

W pracy wyprowadzono analityczne warunki γ -stabilności (także asymptotycznej stabilności) w zależności od wielkości opóźnienia prostych quasi-wielomianów typu opóźnionego i pewnej klasy wielowymiarowych układów z jednym opóźnieniem. W przypadku ogólnym quasi-wielomianów zaproponowano badanie γ -stabilności na podstawie analizy przebiegu ich linii pierwiastkowych w funkcji wielkości opóźnienia. Omówiono sposób numerycznego wyznaczania tych linii.

Przedstawione w pracy metody badania asymptotycznej stabilności i γ -stabilności są dogodne do obliczeń numerycznych przy pomocy minikomputerów.

Rozważania zilustrowano licznymi przykładami.

1. WSTĘP

Istnieje szeroka klasa procesów fizycznych, w których stan przyszły zależy nie tylko od stanu w danej chwili, ale także od stanów przeszłych (w pewnym przedziale czasu), których wpływu nie można pominąć. Takie procesy są nazywane procesami z opóźnieniem, bądź z opóźnieniami. Chcąc uwzględnić czas opóźnienia w ich modelu matematycznym należy stosować równania o ogólniejszej postaci niż różniczkowe, a mianowicie równania funkcyjne. Opóźnienie może być rozłożone bądź dyskretne (skupione). W tym ostatnim przypadku procesy opisuje się równaniami różniczkowo-różnicowymi (z odchylnym argumentem), liniowymi bądź nieliniowymi. Pewne klasy układów z opóźnieniem rozłożonym też można w przybliżeniu dobrze opisać takimi równaniami.

Zjawisko opóźnienia występuje nie tylko w technice, ale także w biologii, biochemii, ekonomii i innych dziedzinach. Typowymi procesami z opóźnieniem są procesy mieszania, spalania czy też inne, w których występuje transport mas, energii itp. Efekt opóźnienia wpływa w sposób istotny na pracę między innymi parowych i gazowych turbin, energetycznych urządzeń jądrowych, na sterowanie samolotami, raketami czy aparatami kosmicznymi. Do układów z opóźnieniem należy też układ człowiek-maszyna. Udział człowieka w procesie sterowania wprowadza opóźnienie w sygnale sterującym. Wynika ono z psychofizycznych właściwości człowieka.

Matematyczny opis wielu procesów o parametrach rozłożonych może być sprowadzony do modeli układów z opóźnieniem. Do takich układów należą np. linie długie elektryczne, ciepłe, hydrauliczne czy pneumatyczne.

Matematyczne modele różnych dynamicznych procesów z opóźnieniem są opisane np. w pracach: [1,10,49,56,58,63,89,90,96,108,123,137].

Istnienie opóźnienia wpływa w sposób istotny na stabilność i jakość regulacji procesów.

Przedmiotem rozważań niniejszej pracy są liniowe układy dynamiczne o parametrach skupionych i o stałych, dyskretnych opóźnieniach. Wielomian charakterystyczny takich układów jest funkcją przestępną (wielomianem transcendentnym) i nosi nazwę quasi-wielomianu. Liczba jego zer jest na ogół nieskończenie wielka. Z tego też powodu badanie stabilności takiej klasy układów jest problemem bardzo złożonym.

Metody badania asymptotycznej stabilności liniowych układów stacjonarnych z dyskretnym opóźnieniem, które można już nazwać klasycznymi, są omówione w licznych pozycjach książkowych, takich jak: [8,49,51,52,58,64,89]. Problemowi stabilności nieliniowych układów z opóźnieniem jest poświęcona praca [137].

W ostatnim dwudziestolecu ukazało się wiele prac, w których bądź to rozwijano niektóre klasyczne metody badania stabilności układów z opóźnieniem, bądź też podano nowe. Ważniejsze z tych publikacji są omówione w niniejszej pracy.

W ostatnich latach wiele prac było poświęconych głównie dwóm problemom:

- (i) asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia, przy czym istnieją tu dwie grupy kryteriów, nie zawsze sobie równoważnych;
- (ii) asymptotycznej stabilności w funkcji opóźnienia.

Ponadto w wielu pracach warunki stabilności układów typu opóźnionego i neutralnego sformułowano w tej samej postaci, co nie zawsze jest prawdziwe. Fakt ten szerzej omówiono w rozdziale 3 niniejszej pracy.

Celem niniejszej pracy jest dokonanie krytycznego przeglądu bardzo bogatej literatury poświęconej problemowi asymptotycznej stabilności liniowych układów stacjonarnych z dyskretnym opóźnieniem, usystematyzowanie wielu spraw związanych z tym problemem i podanie szeregu nowych rezultatów.

Wśród liniowych stacjonarnych układów z opóźnieniem istnieje klasa układów o skończonym widmie, których quasi-wielomian charakterystyczny jest wielomianem (patrz np. [16,22,88,157]). Badanie stabilności takich układów na podstawie znajomości quasi-wielomianu charakterystycznego przeprowadza się dokładnie w ten sam sposób jak

układów bez opóźnienia. Dlatego też ten typ układów z opóźnieniem nie jest tematem rozważań niniejszej pracy.

Praca składa się z 10 rozdziałów. W rozdziale 2 podano podstawowe wiadomości o quasi-wielomianie charakterystycznym układów z opóźnieniem, zwracając szczególną uwagę na właściwości rozkładu jego zer asymptotycznych (o dużych modułach). W przypadku quasi-wielomianu typu neutralnego podano prosty sposób wykrywania istnienia łańcuchów zer asymptotycznych dążących do osi urojonej. Istnienie takich łańcuchów zer może bowiem powodować niestabilność quasi-wielomianu typu neutralnego nawet wówczas, gdy wszystkie jego zera mają ujemne części rzeczywiste.

W rozdziale 3 podano podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące różnych rodzajów stabilności układu z opóźnieniem. We wszystkich tych twierdzeniach uwzględniono tzw. przypadek asymptotycznie krytyczny (wszystkie zera leżą w OLP i istnieje przynajmniej jeden łańcuch zer asymptotycznych, dążących do osi urojonej z lewej strony), który może wystąpić w przypadku quasi-wielomianu typu neutralnego. W literaturze przypadek asymptotycznie krytyczny nie zawsze był uwzględniany i warunki asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu typu opóźnionego i neutralnego formułowano w tej samej postaci, co nie zawsze jest poprawne.

W przypadku stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia istnieją dwie grupy prac, w których podano nierównoważne sobie w przypadku ogólnym kryteria. Aby rozdzielić te kryteria wprowadzono dwie różne nazwy (i definicje) tego rodzaju stabilności: asymptotyczna stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia (w skrócie ASN0) i mocna asymptotyczna stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia (w skrócie MASN0). Uwzględniając te nazwy, jak i możliwość wystąpienia przypadku asymptotycznie krytycznego, w rozdziale 4 dokonano przeglądu literatury poświęconej badaniu stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia. Podano też pewne nowe rezultaty.

W rozdziale 5 dokonano krytycznego przeglądu klasycznych warunków położenia wszystkich zer quasi-wielomianu w OLP i podano też pewne kryteria z nich wynikające.

W rozdziale 6 omówiono metodę h -podziału (będącą pewnym uogólnieniem klasycznej metody D -podziału), na podstawie której bada się rozkład zer quasi-wielomianu w funkcji wielkości opóźnienia h . Podano też trzy nowe metody wyznaczania granic h -podziału.

Rozdział 7 jest poświęcony problemowi $\mathcal{J}$ -stabilności quasi-wielomianu typu opóźnionego. Wyprowadzono w nim analityczne kryteria tego rodzaju stabilności w przypadku prostych quasi-wielomianów stopnia pierwszego. Natomiast w przypadku ogólnym zaproponowano badanie $\mathcal{J}$ -stabilności na podstawie analizy przebiegu linii pierwiastkowych w funkcji wielkości opóźnienia h . Możliwość stosowania tej metody jest uwarunkowana możliwością numerycznego wyznaczania zer quasi-wielomianu.

W rozdziale 8, na podstawie rezultatów uzyskanych w p.7.1, podano analityczne warunki konieczne i wystarczające $\mathcal{J}$ -stabilności wielowymiarowego układu typu opóźnionego z jednym opóźnieniem w pewnych przypadkach szczególnych. Natomiast w przypadku ogólnym wyprowadzono analityczny warunek dostateczny tego rodzaju stabilności.

W rozdziale 9 dokonano krótkiego podsumowania uzyskanych rezultatów i podano pewne nie rozwiązane problemy, związane z tematem pracy.

W Dodatku (rozdział 10) omówiono metody rozwiązywania zespolonego macierzowego równania Lapunowa. Wyprowadzono analityczną postać tego rozwiązania.

Załączony na końcu pracy spis literatury nie pretenduje do pełnego z zakresu stabilności rozważanych układów z opóźnieniem. Uwzględniono w nim ważniejsze publikacje bezpośrednio związane z podanymi w niniejszej pracy rozważaniami. Dalsza bibliografia dotycząca tego tematu jest podana w wymienionych w spisie literatury monografiach i artykułach.

2. WPROWADZENIE

2.1. Postać quasi-wielomianu charakterystycznego

Dynamiczny, wielowymiarowy układ liniowy stacjonarny z opóźnieniami opisuje się w przestrzeni stanów następującym układem równań:

$$\sum_{i=0}^m (A_i x(t - \tau_i) + B_i \dot{x}(t - \tau_i)) = f(t), \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

gdzie:

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad A_i, B_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad \dot{x}(t) = (d/dt)x(t), \quad \tau_0 = 0,$$

$$\tau_i \in \mathbb{R}_+, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Jeżeli brak takiego τ , że $\tau_i = i\tau$ dla $i=0,1,\dots,m$, to równanie (2.1) opisuje układ z niewspółmiernymi opóźnieniami. Jeżeli zaś $\tau_i = i\tau$ dla $i=0,1,\dots,m$, to równanie (2.1) opisuje układ ze współmiernymi opóźnieniami.

Macierz charakterystyczna układu (2.1) ma postać

$$H(s, e^{-s\tau}) = \sum_{i=0}^m (A_i + sB_i) \exp(-s\tau_i), \quad (2.2)$$

gdzie $H(s, e^{-s\tau}) \triangleq H(s, \exp(-s\tau_1), \dots, \exp(-s\tau_m))$, a jej wyznacznik, zwany quasi-wielomianem charakterystycznym, można napisać w postaci [8]

$$q(s, e^{-s\tau}) \triangleq \det H(s, e^{-s\tau}) = \sum_{k=0}^P w_k(s) \exp(-s\tau_k), \quad (2.3)$$

gdzie:

$$w_k(s) = \sum_{i=0}^n a_{ik} s^i, \quad a_{ik} \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

a h_k jest kombinacją opóźnień $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_m$ o postaci

$$h_k = \sum_{i=0}^m c_{ik} \tau_i, \quad (2.5)$$

gdzie liczby całkowite dodatnie c_{ik} spełniają równość

$$c_{0k} + c_{1k} + \dots + c_{mk} = n \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, m.$$

We wzorze (2.3) zastosowaliśmy oznaczenie $q(s, e^{-sh}) \triangleq q(s, \exp(-sh_1), \dots, \exp(-sh_p))$.

Ze wzorów (2.2) i (2.3) wynika, że:

$$w_0(s) = \det(A_0 + sB_0), \quad (2.6)$$

$$w_p(s) = \det(A_m + sB_m), \quad (2.7)$$

a więc $w_0(s)$ ($w_p(s)$) jest stopnia n wtedy i tylko wtedy, gdy $\det B_0 \neq 0$ ($\det B_m \neq 0$).

W przypadku skalarnym, tzn. gdy $x \in \mathbb{R}$, równanie opisujące dynamikę układu liniowego stacjonarnego z opóźnieniem ma postać

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^p a_{ik} x^{(i)}(t - h_k) = f_1(t), \quad t \geq 0, \quad (2.8)$$

gdzie:

$$a_{ik} \in \mathbb{R}, \quad f_1 \in \mathbb{R}, \quad x^{(i)}(t) = (d^i/dt^i) x(t), \quad h_0 = 0, \quad h_k \in \mathbb{R}_+,$$

$$k = 1, 2, \dots, p.$$

Quasi-wielomian charakterystyczny układu (2.8) ma postać:

$$q(s, e^{-sh}) = \sum_{k=0}^p \sum_{i=0}^n a_{ik} s^i \exp(-sh_k). \quad (2.9)$$

Ze wzorów (2.3), (2.4) i (2.9) wynika, że quasi-wielomian charakterystyczny dynamicznego układu liniowego stacjonarnego z opóźnieniem można napisać w ogólnej postaci (2.9).

Dla prostoty dalszych rozważań przyjmiemy, że opóźnienia h_k spełniają nierówności

$$0 = h_0 < h_1 < \dots < h_p < \infty. \quad (2.10)$$

Analityczne wyznaczanie quasi-wielomianu charakterystycznego wielowymiarowego układu (2.1), poprzez klasyczne liczenie wyznacznika macierzy charakterystycznej (2.2), jest bardzo trudne już dla $n \geq 2$ i $m \geq 2$ z tego powodu, że elementy macierzy $H(s, e^{-s\tau})$ są funkcjami wielu zmiennych: s i $\exp(-s\tau_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Dlatego też pojawiła się konieczność opracowania metod obliczania quasi-wielomianu charakterystycznego bez konieczności klasycznego liczenia wyznacznika macierzy charakterystycznej. Takie algorytmy, dogodne do obliczeń numerycznych, są podane w pracy [17] dla układu

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^m A_i x(t - h_i), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.11)$$

przy $m=1$ i $h_1=h$; w [18,19] (różne algorytmy) dla układu (2.11) przy m dowolnym skończonym i $h_1 = h$; w pracach [20,21] dla układu (2.11) przy m dowolnym skończonym i opóźnieniach h_i spełniających nierówności (2.10); w [23] dla układu

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^m A_i x(t - h_i) + \sum_{i=1}^m B_i \dot{x}(t - h_i), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.12)$$

w przypadku opóźnień niewspółmiernych spełniających (2.10) i współmiernych, tzn. $h_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, m$. W wyżej wymienionych pracach, w celu podania algorytmu obliczania quasi-wielomianu charakterystycznego, uogólniono znaną metodę Faddiejewych odwracania macierzy charakterystycznej układu bez opóźnień.

Najbardziej ogólną metodę obliczania quasi-wielomianu charakterystycznego układu (2.1), również dogodną do obliczeń numerycznych, a opartą na teorii grafów Masona podano w pracy [103].



Quasi-wielomian (2.9) jest funkcją analityczną. Jeżeli nie staje się on wielomianem, tzn. jeżeli w (2.9) w sposób istotny wchodzi opóźnienie, to ma nieskończoną liczbę zer, których jedynym punktem granicznym jest nieskończoność.

Zera quasi-wielomianu (2.9) można podzielić na dwie grupy: zera o dużych modułach, tzw. zera asymptotyczne, i zera nieasymptotyczne. Zera asymptotyczne, których jest nieskończenie wiele, tworzą tzw. łańcuchy.

2.2. Właściwości rozkładu zer asymptotycznych

Właściwości rozkładu zer asymptotycznych quasi-wielomianu (2.9) omówimy na podstawie pracy [8].

Założmy, że dla quasi-wielomianu (2.9) spełniony jest warunek $a_{ip} \neq 0$ dla pewnych i , $i = 0, 1, \dots, n$. Utwórzmy quasi-wielomian

$$q_1(s, e^{sh}) = q(s, e^{-sh}) \exp(sh_p), \quad (2.13)$$

który ma te same zera co quasi-wielomian (2.9).

Quasi-wielomian $q_1(s, e^{sh})$ ma postać

$$q_1(s, e^{sh}) = \sum_{i=0}^n s^i \sum_{k=0}^p a_{ik} \exp(s(h_p - h_k)) \quad (2.14)$$

lub

$$q_1(s, e^{sh}) = \sum_{k=0}^p g_k(s) \exp(\alpha_k s), \quad (2.15)$$

gdzie:

$$g_k(s) = \sum_{i=0}^n s^i a_{i, p-k}, \quad (2.16)$$

$$\alpha_k = h_p - h_{p-k}. \quad (2.17)$$

Oznaczmy przez n_k ($n_k < n$) stopień wielomianu $g_k(s)$, a przez $\tilde{a}_k$ współczynnik stojący przy największej potędze zmiennej s tego wielomianu, czyli

$$\tilde{a}_k = a_{n_k, p-k} . \quad (2.18)$$

Możemy więc napisać

$$g_k(s) = \tilde{a}_k s^{n_k} (1 + \varepsilon_k(s)) , \quad (2.19)$$

gdzie $\varepsilon_k(s)$ jest ciągłą funkcją argumentu s , spełniającą warunek

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \varepsilon_k(s) = 0 . \quad (2.20)$$

Uwzględniając (2.19) quasi-wielomian (2.15) napiszemy w postaci

$$q_1(s, e^{sh}) = \sum_{k=0}^p \tilde{a}_k s^{n_k} (1 + \varepsilon_k(s)) \exp(s \alpha_k) . \quad (2.21)$$

Z powyższego wzoru wynika, że zera o dużych modułach quasi-wielomianu (2.21) leżą blisko zer funkcji

$$\tilde{q}_1(s, e^{sh}) = \sum_{k=0}^p \tilde{a}_k s^{n_k} \exp(\alpha_k s) . \quad (2.22)$$

Na płaszczyźnie kartezjańskiej quasi-wielomianowi (2.22) można przyporządkować graf wielokątny, zwany diagramem dystrybucji lub diagramem Newtona, powstały z połączenia punktów D_k (niekoniecznie wszystkich) o współrzędnych (α_k, n_k) . Linia łamana L , tworząca ten graf, ma następujące właściwości:

- (i) łączy punkt D_0 z D_p , ale nie musi przechodzić przez wszystkie pozostałe punkty D_k ,
- (ii) ma wierzchołki tylko w zbiorze punktów D_k ,
- (iii) jest wypukła,
- (iv) nie leży nad nią żaden punkt D_k ,
- (v) pod nią mogą leżeć niektóre punkty D_k .

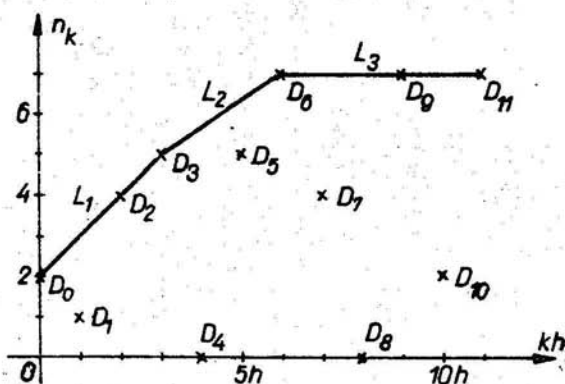
Zauważmy, że jeżeli quasi-wielomian (2.9) ma współmierne opóźnienia, tzn. $h_k = kh$ dla $k = 0, 1, \dots, p$, to odpowiadająca mu funkcja (2.22) ma postać

$$\tilde{q}_1(s, \exp(sh)) = \sum_{k=0}^p \tilde{a}_k s^{n_k} \exp(shk), \quad (2.23)$$

a punkty D_k mają współrzędne (hk, n_k) .

PRZYKŁAD 2.1.

Quasi-wielomian (2.23) przy $p = 11$ i $n_0 = 2, n_1 = 1, n_2 = 4, n_3 = 5, n_4 = 0, n_5 = 5, n_6 = 7, n_7 = 4, n_8 = 0, n_9 = 7, n_{10} = 2, n_{11} = 7$ ma diagram dystrybucji pokazany na rysunku 2.1. $\square$



Rys.2.1. Diagram dystrybucji quasi-wielomianu z przykładu 2.1.

Na podstawie diagramu dystrybucji, utworzonego dla funkcji (2.22) w wyżej opisany sposób, można w pełni scharakteryzować rozkład zer asymptotycznych (o dużych modułach) quasi-wielomianu $q_1(s, e^{sh})$, a więc quasi-wielomianu (2.9).

Oznaczmy przez $L_1, \dots, L_r$ kolejne segmenty diagramu dystrybucji, numerując je od lewej strony do prawej (patrz rys.2.1), a przez $\mu_1, \dots, \mu_r$ współczynniki kąta nachylenia tych segmentów. Każdemu segmentowi L_k odpowiada na płaszczyźnie zmiennej zespolonej obszar V_k , ograniczony krzywymi, zdefiniowany następująco:

$$V_k = \{s \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Re}(s + \mu_k \ln s)| < c\}, \quad (2.24)$$

gdzie c jest stałą o dowolnie dużej wartości.

Obszary V_k i zera asymptotyczne quasi-wielomianu (2.21) mają następujące właściwości [8]:

- (i) obszary V_k są od siebie oddzielone obszarami U_k , przy czym V_{k+1} leży na prawo od obszaru V_k ,
- (ii) żadne zero o dostatecznie dużym module quasi-wielomianu (2.21) nie leży w obszarze U_k ,
- (iii) zera asymptotyczne quasi-wielomianu (2.21) w obszarach V_k układają się wzdłuż kilku krzywych symetrycznych względem osi rzeczywistej, tworząc tzw. łańcuchy; jeżeli $\mu_k > 0$, to te krzywe leżą całkowicie w OLP i $\operatorname{Re} s \rightarrow -\infty$ przy $|s| \rightarrow \infty$; jeżeli $\mu_k < 0$, to w OPP i $\operatorname{Re} s \rightarrow \infty$ przy $|s| \rightarrow \infty$; jeżeli zaś $\mu_k = 0$, to przy $|s| \rightarrow \infty$ łańcuchy zbiegają asymptotycznie do pewnych prostych równoległych do osi urojonej,
- (iv) składniki funkcji (2.22), odpowiadające punktom leżącym na L_k , mają większy rząd wielkości na zbiorze V_k niż inne składniki; o rozkładzie zer w danym obszarze V_k decydują więc tylko te składniki sumy (2.22), które odpowiadają punktom leżącym na odcinku L_k diagramu dystrybucji.

Typy łańcuchów zer asymptotycznych, które omówiono powyżej w punkcie (iii), quasi-wielomianu (2.21), a więc i (2.9), przyjęto nazywać: opóźnionym, wyprzedzonym i neutralnym.

Łańcuch zer asymptotycznych jest typu:

- a) opóźnionego, jeżeli leży całkowicie w OLP i $\operatorname{Re} s \rightarrow -\infty$, przy $|s| \rightarrow \infty$,
- b) wyprzedzonego, jeżeli leży całkowicie w OPP i $\operatorname{Re} s \rightarrow \infty$, przy $|s| \rightarrow \infty$,
- c) neutralnego, jeżeli $\operatorname{Re} s \rightarrow c = \text{const}$, przy $|s| \rightarrow \infty$.

Jeżeli więc diagram dystrybucji jest taki, że $\mu_k \geq 0$ dla $k = 1, 2, \dots, r$, to quasi-wielomian (2.9) nie ma łańcuchów zer typu wyprzedzonego.

Quasi-wielomian (2.9) też może być typu opóźnionego, wyprzedzonego lub neutralnego, w zależności od typów łańcuchów jego zer asymptotycznych [8, 51, 52].

2.1 Typy quasi-wielomianów

Quasi-wielomian (2.9) jest typu opóźnionego, jeżeli wszystkie łańcuchy jego zer asymptotycznych są typu opóźnionego. Zachodzi to wtedy, gdy ostatni punkt D_p diagramu dystrybucji jest położony wyżej niż wszystkie pozostałe punkty D_k . Oznacza to, że we wzorze (2.9) największa potęga zmiennej s występuje bez czynnika typu $\exp(-sh_k)$, czyli gdy

$$a_{n0} \neq 0, a_{nk} = 0 \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (2.25)$$

Quasi-wielomian (2.9) jest typu wyprzedzonego, jeżeli przynajmniej jeden łańcuch jego zer asymptotycznych jest typu wyprzedzonego. Wtedy przynajmniej jeden z segmentów L_k diagramu Newtona ma ujemne nachylenie. Oznacza to, że we wzorze (2.9) najwyższa potęga zmiennej s występuje tylko z czynnikiem $\exp(-sh_p)$, czyli gdy

$$a_{np} \neq 0, a_{nk} = 0 \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \dots, p-1. \quad (2.26)$$

Quasi-wielomian (2.9) jest typu neutralnego, jeżeli nie jest typu wyprzedzonego i przynajmniej jeden łańcuch jego zer asymptotycznych jest typu neutralnego. Zachodzi to wtedy, gdy ostatni segment diagramu dystrybucji jest położony poziomo. Oznacza to, że we wzorze (2.9) największa potęga zmiennej s występuje bez czynnika typu $\exp(-sh_k)$ i z tym czynnikiem dla co najmniej jednego k , czyli gdy

$$a_{n0} \neq 0, a_{nk} \neq 0 \quad \text{dla pewnych } k, k = 1, 2, \dots, p. \quad (2.27)$$

Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli quasi-wielomian (2.9) jest typu opóźnionego lub neutralnego, to istnieje także $b \in \mathbb{R}$, że wszystkie jego zera spełniają nierówność

$$\operatorname{Re} s < b. \quad (2.28)$$

Jeżeli zaś jest typu wyprzedzonego, to istnieje taka stała $c \in \mathbb{R}$, że wszystkie jego zera spełniają warunek

$$\operatorname{Re} s > c. \quad (2.29)$$

Typ układu z opóźnieniem jest określony poprzez typ jego quasi-wielomianu charakterystycznego. Na podstawie warunków (2.25), (2.26) i (2.27) możemy od razu określić typ układu z opóźnieniem, opisanego równaniem (2.8). Natomiast w przypadku układu wielowymiarowego (2.1) należy najpierw wyznaczyć jego quasi-wielomian charakterystyczny (2.9) i następnie określić jego typ na podstawie warunków (2.25), (2.26) i (2.27). W zależności od macierzy równania (2.1) można postawić tylko pewne warunki dostateczne, pozwalające określić jego typ. Mianowicie na podstawie wzorów (2.6), (2.7) i (2.3) oraz warunków (2.25), (2.26) i (2.27) można stwierdzić, że [8]:

- (I) jeżeli $\det B_0 \neq 0$, to układ (2.1) jest typu opóźnionego lub neutralnego,
- (II) jeżeli $\det B_0 \neq 0$ i $B_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, to układ (2.1) jest typu opóźnionego,
- (III) jeżeli $\det B_m \neq 0$ i $B_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, to układ (2.1) jest typu wyprzedzonego.

W praktyce najczęściej spotyka się układy z opóźnieniem typu opóźnionego, rzadziej typu neutralnego, a prawie wcale nie spotyka się układów typu wyprzedzonego.

Występujące w równaniu (2.1) opóźnienia τ_i są liczbami rzeczywistymi dodatnimi i jeżeli są podane liczbowo, to ze skończoną liczbą miejsc po przecinku. Jeżeli są one współmierne, to w quasi-wielomianie charakterystycznym (2.3) otrzymamy $h_k = k\tau$. Jeżeli zaś opóźnienia nie są współmierne, to możemy znaleźć taką dodatnią liczbę τ , że każde τ_i jest albo całkowitą krotnością τ albo mało się od niej różni. Możemy więc przyjąć

$$\tau_i = k_i \tau, \quad k_i - \text{liczba całkowita.} \quad (2.30)$$

Podobnie możemy postąpić w przypadku układu opisanego równaniem (2.8), jeżeli opóźnienia h_k są niewspółmierne.

Układ z niewspółmiernymi opóźnieniami możemy więc z praktycznej zadowalającą dokładnością opisać za pomocą równania o współmiernych opóźnieniach. Ponadto badanie stabilności układu ze współmiernymi opóźnieniami jest znacznie prostsze niż przy opóźnieniach niewspółmiernych. Dlatego też dalej będziemy rozważać głównie układy ze współmiernymi opóźnieniami, których quasi-wielomian charakteryzujący

ma postać

$$q(s, \exp(-sh)) = \sum_{j=0}^n s^j \sum_{k=0}^p a_{jk} \exp(-shk) . \quad (2.31)$$

2.4. Rozkład zer asymptotycznych quasi-wielomianu typu neutralnego ze współmiernymi opóźnieniami

Zera asymptotyczne quasi-wielomianu typu neutralnego tworzą łańcuchy, które zbiegają do pewnych prostych równoległych do osi urojonej. Proste te mogą leżeć w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej s , w prawej, bądź też mogą pokrywać się z osią urojoną.

Przedstawiony zostanie teraz sposób określania położenia tych prostych dla quasi-wielomianu (2.31), spełniającego warunki (2.27). Wykorzystamy omówiony powyżej diagram dystrybucji. Nie zmniejszając ogólności rozważań założymy, że

$$a_{n0} = 1 . \quad (2.32)$$

Z opisu diagramu dystrybucji wynika, że nasze rozważania możemy ograniczyć do obszaru występowania tylko łańcuchów neutralnych. Należy więc brać pod uwagę jedynie te składniki quasi-wielomianu (2.31), które są dominujące w tym obszarze. Są to składniki, którym odpowiadają punkty $D_k = (hk, n_k)$, leżące na ostatnim, poziomym segmencie diagramu dystrybucji. Sumę tych składników nazwiemy członem dominującym quasi-wielomianu typu neutralnego i oznaczmy przez $d(\theta)$, gdzie

$$\theta = \exp(sh) . \quad (2.33)$$

Ze wzoru (2.16) wynika, że jeżeli zachodzi (2.32), to wielomian $g_p(s)$ jest stopnia n , a więc $n_p = n$. Ostatniemu, poziomemu segmentowi L_r diagramu dystrybucji odpowiada więc wartość $n_k = n_p = n$. Uwzględniając powyższe oraz wzór (2.18), zdefiniowany wcześniej człon dominujący $d(\theta)$ napiszemy w postaci

$$d(\theta) = \sum_{\substack{k=0 \\ n_k=n}}^p a_{n,p-k} \theta^k. \quad (2.34)$$

Jeżeli dla pewnego $k < p$ punkt D_k leży pod poziomym segmentem I_r (czyli $n_k < n$), to wielomian $g_k(s)$ o postaci (2.16) ma stopień mniejszy od n , a więc $a_{n,p-k} = 0$. Oznacza to, że we wzorze (2.34) warunek $n_k = n$ można pominąć. Człon dominujący $d(\theta)$ możemy więc napisać w postaci

$$d(\theta) = \sum_{k=0}^p a_{nk} \theta^{p-k}, \quad (2.35)$$

gdzie a_{nk} są to współczynniki quasi-wielomianu (2.31), a θ ma postać (2.33).

Stosując podstawienie (2.33) quasi-wielomian (2.31) napiszemy w postaci

$$q(s, \theta^{-1}) = \sum_{i=0}^n s^i \beta_i (\theta^{-1}), \quad (2.36)$$

gdzie

$$\beta_i (\theta^{-1}) = \sum_{k=0}^p a_{ik} \theta^{-k}. \quad (2.37)$$

Ze wzorów (2.35) i (2.37) wynika, że

$$d(\theta) = \theta^p \beta_n (\theta^{-1}). \quad (2.38)$$

Wzór (2.35) (lub (2.38)), pozwalający wyznaczyć człon dominujący $d(\theta)$ quasi-wielomianu (2.31) typu neutralnego, jest znacznie prostszy od podanego w pracach [11,146].

Jeżeli θ_i , $i = 1, 2, \dots, p$, jest zerem wielomianu $d(\theta)$ o postaci (2.35), to ze wzoru (2.33) otrzymujemy równanie $\theta_i = \exp(sh)$, a więc

$$\operatorname{Re} s = (\ln |\theta_i|) / h. \quad (2.39)$$

Powyższy wzór opisuje punkty przecięcia z osią rzeczywistą asymptot, do których dążą zera quasi-wielomianu (2.31) typu neutralnego, przy $|s| \rightarrow \infty$. Wartości modułów zer wielomianu $d(\theta)$ decydują więc o położeniu tych asymptot. Jeżeli dla pewnego zera θ_i zachodzi $|\theta_i| < 1$, to odpowiadająca mu asymptota leży w OLP, jeżeli $|\theta_i| > 1$ - to w OPP, jeśli zaś $|\theta_i| = 1$, to asymptota pokrywa się z osią urojoną.

Z powyższych rozważań wynika, że warunek konieczny położenia wszystkich zer quasi-wielomianu (2.31) typu neutralnego w OLP ma postać

$$|\theta_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (2.40)$$

gdzie θ_i jest zerem funkcji $d(\theta)$ o postaci (2.35) lub (2.38).

2.5. Ciągłość granicy spektralnej

W teorii stabilności układów z opóźnieniem, szczególnie przy badaniu asymptotycznej stabilności w zależności od wielkości opóźnienia, ważną rolę odgrywa twierdzenie o ciągłości granicy spektralnej.

Dla quasi-wielomianu $q(s, \exp(-sh))$ o postaci (2.31) granicę spektralną definiujemy następująco:

$$g_h(q) = \sup \{ \operatorname{Re} s : q(s, \exp(-sh)) = 0 \}. \quad (2.41)$$

Twierdzenie 2.1. [11, 146]

Jeżeli quasi-wielomian (2.31) nie jest typu wyprzedzonego i wielomian $d(\theta)$ o postaci (2.35), charakteryzujący część neutralną, ma wszystkie zera o module mniejszym od 1, to granica spektralna $g_h(q)$ jest ciągłą funkcją argumentu h w przedziale $[0, \infty)$. $\square$

W przypadku opóźnień niewspółmiernych (przypadek ogólniejszy) podobne twierdzenie zostało udowodnione w pracy [43].

Ze wzorów (2.35) i (2.25) wynika, że dla quasi-wielomianu typu opóźnionego mamy $d(\theta) = a_{no} \theta^P$. Oznacza to, że dla układu typu opóźnionego granica spektralna jest zawsze ciągłą funkcją argumentu h w przedziale $[0, \infty)$.

Zauważmy, że jeżeli dla quasi-wielomianu typu neutralnego wielomian $d(\theta)$ o postaci (2.35) ma przynajmniej jedno zero θ_1 spełniające warunek $|\theta_1| > 1$, to ze wzoru (2.39) mamy

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \operatorname{Re} s = \lim_{h \rightarrow 0+} (\ln |\theta_1|)/h = \infty.$$

Ze wzoru (2.31) zaś wynika, że jeżeli $h=0$, to quasi-wielomian $q(s, \exp(-sh))$ staje się wielomianem $q(s, 1)$, którego zera mają skończoną część rzeczywistą. W rozważanym przypadku granica spektralna nie jest więc ciągła w punkcie $h=0$.

Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli dla quasi-wielomianu typu neutralnego wielomian $d(\theta)$ ma przynajmniej jedno zero o module większym od 1, to granica spektralna nie jest ciągła w punkcie $h=0$.

3. PODSTAWOWE DEFINICJE I TWIERDZENIA

3.1. Definicje stabilności

Dany jest wielowymiarowy układ liniowy stacjonarny z opóźnieniami, opisany w przestrzeni stanów jednorodnym równaniem o postaci

$$\sum_{i=0}^m (A_i x(t-ih) + B_i \dot{x}(t-ih)) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

gdzie: $x \in \mathbb{R}^n$, $A_i, B_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $h = \text{const.} > 0$.

Aby zapewnić jednoznaczność rozwiązania równania (3.1) należy na przedziale $[-mh, 0]$ określić funkcję początkową φ . Będziemy zakładać, że $\varphi \in C([-mh, 0]; \mathbb{R}^n)$. Możemy też rozpatrywać funkcje φ , które nie są ciągłe w przedziale $[-mh, 0]$ (np. [109]).

Dla $\varphi \in C([-mh, 0]; \mathbb{R}^n)$ definiujemy normę $\|\varphi\|$ następująco:

$$\|\varphi\| = \sup_{\theta \in [-mh, 0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

gdzie $\|\varphi(\theta)\|$ oznacza normę wektora $\varphi(\theta) \in \mathbb{R}^n$.

Niech $x_t = x(t+\theta)$, $\theta \in [-mh, 0]$ oznacza rozwiązanie równania (3.1) odpowiadające funkcji początkowej $\varphi \in C([-mh, 0]; \mathbb{R}^n)$. Normę wektora $x_t \in C([-mh, 0]; \mathbb{R}^n)$ definiujemy następująco:

$$\|x_t\| = \sup_{\theta \in [-mh, 0]} \|x(t+\theta)\|.$$

Na podstawie prac [8, 51, 52, 58, 64, 85] definicje stabilności układu (3.1) można sformułować tak, jak niżej.

Definicja 3.1.

Układ (3.1) nazywać będziemy stabilnym, jeżeli dla każdej funkcji początkowej $\varphi \in C([-mh, 0]; \mathbb{R}^n)$ istnieje takie $K > 0$, że rozwiązanie x_t spełnia warunek $\|x_t\| < K \|\varphi\|$, $t \geq 0$. $\square$

Definicja 3.2.

Układ (3.1) nazywać będziemy asymptotycznie stabilnym, jeżeli jest on stabilny i dla każdej funkcji początkowej $\varphi \in C([-mh, 0]; \mathbb{R}^n)$ rozwiązanie x_t spełnia warunek $\|x_t\| \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow \infty$. $\square$

Definicja 3.3.

Układ (3.1) nazywać będziemy wykładniczo stabilnym z szybkością zanikania γ , jeżeli istnieją stałe $K > 0$ i $\gamma > 0$ takie, że dla każdej funkcji początkowej $\varphi \in C([-mh, 0]; \mathbb{R}^n)$ rozwiązanie x_t spełnia warunek $\|x_t\| \leq K \|\varphi\| \exp(-\gamma t)$, $t \geq 0$. $\square$

Definicja 3.4.

Układ (3.1) nazywać będziemy asymptotycznie stabilnym niezależnie od wielkości opóźnienia (w skrócie ASN0), jeżeli jest on asymptotycznie stabilny dla każdego $h \in [0, \infty)$. $\square$

Wprowadźmy definicję nowego rodzaju asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia.

Definicja 3.5.

Układ (3.1) nazywać będziemy mocno asymptotycznie stabilnym niezależnie od wielkości opóźnienia (w skrócie MASNO), jeżeli jest on asymptotycznie stabilny dla każdego $h \in [0, \infty)$ i spełniony jest warunek

$$\det \sum_{i=0}^m A_i z^i \neq 0 \quad \text{dla } |z| = 1. \quad (3.2)$$

$\square$

Warunek (3.2) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy quasi-wielomian charakterystyczny układu (3.1) nie ma zer na osi urojonej dla $h = \infty$ (patrz punkt 3.3).

Z definicji 3.4 i 3.5 wynika, że jeżeli układ (3.1) jest MASNO, to też jest ASNO. Stwierdzenie odwrotne nie zawsze jest prawdziwe.

Wprowadzenie definicji 3.5 pozwoli nam rozdzielić dwie grupy prac, w których podane są nierównoważne sobie w przypadku ogólnym kryteria, a noszące jedną wspólną nazwę asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia.

3.2. Kryteria stabilności

Quasi-wielomian charakterystyczny układu opisanego równaniem (3.1) ma postać

$$q(s, \exp(-sh)) = \sum_{i=0}^n s^i \sum_{k=0}^p a_{ik} \exp(-shk), \quad (3.3)$$

gdzie $p \leq nm$, $a_{ik} \in \mathbb{R}$.

Warunkiem koniecznym stabilności układu (3.1) jest położenie wszystkich zer jego quasi-wielomianu (3.3) w OLP [8,51,52,58,64]. Z powyższego oraz ze wzoru (2.29) wynika, że układ typu wyprzedzonego jest niestabilny. Dalej zajmujemy się więc problemem stabilności tylko układów typu opóźnionego i neutralnego. Z warunków (2.25) i (2.27) wynika, że $a_{n0} \neq 0$ dla quasi-wielomianów typu opóźnionego i neutralnego. Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy więc przyjąć

$$a_{n0} = 1. \quad (3.4)$$

Kryterium asymptotycznej stabilności układu (3.1) typu opóźnionego można sformułować następująco [8,51,52,58,64].

Twierdzenie 3.1.

Układ (3.1) typu opóźnionego jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$q(s, \exp(-sh)) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0. \quad (3.5)$$

□

Warunek (3.5) jest też warunkiem koniecznym asymptotycznej stabilności wszystkich układów (3.1) typu neutralnego i dostatecznym dla

prawie wszystkich układów tego typu, tzn. wszystkich z wyjątkiem pewnej klasy. Tą klasę stanowią te układy, których quasi-wielomiany charakterystyczne mają zera asymptotyczne, dążące do osi urojonej z lewej strony [52,61].

Z rozważań podanych w punkcie 2.4 wynika, że quasi-wielomian typu neutralnego ma dążące do osi urojonej łańcuchy zer asymptotycznych wtedy i tylko wtedy, gdy człon dominujący $d(\theta)$ o postaci (2.35) ma zera o module równym jedności.

Jeżeli spełniony jest warunek (3.5) i $d(\theta)$ ma pojedyncze zera na okręgu jednostkowym, to układ typu neutralnego jest asymptotycznie stabilny. W takim przypadku stabilność nie jest wykładnicza a wielomianowa, tzn. norma wektora rozwiązania równania (3.1) nie jest ograniczona przez funkcję $\exp(-bt)$, $b > 0$, a przez t^{-a} , gdzie a jest stałą dodatnią, zależną od gładkości tego rozwiązania i od szybkości z jaką zera asymptotyczne quasi-wielomianu charakterystycznego dążą do osi urojonej [15,61]. Jeżeli w omawianym przypadku funkcja początkowa φ jest nieciągła, to skoki występujące w punktach nieciągłości rozwiązania równania (3.1) mogą nie zanikać, a więc układ nie musi być asymptotycznie stabilny.

W pracy [61] stwierdzono, że jeżeli spełniony jest warunek (3.5) i $d(\theta)$ ma wielokrotne zera na okręgu jednostkowym, o dostatecznie dużej krotności, to rozwiązania równania (3.1) są niestabilne w sensie Lapunowa. Podany poniżej przykład ilustruje, że już przy dwukrotnym zerze wielomianu $d(\theta)$, o module równym jedności, układ (3.1) typu neutralnego może być niestabilny.

PRZYKŁAD 3.1.

Dany jest układ typu neutralnego z opóźnieniem $h=1$, którego quasi-wielomian charakterystyczny ma postać

$$q(s, \exp(-s)) = (s(\exp(-s) - 1) - 1)^2. \quad (3.6)$$

Quasi-wielomian (3.6) ma podwójny łańcuch zer asymptotycznych dążących do osi urojonej z lewej strony, bowiem jego człon dominujący $d(\theta) = (1 - \theta)^2$ ma podwójne zero w punkcie $\theta = 1$.

W pracy [45] wykazano, że ten quasi-wielomian ma wszystkie zera w OLP, a więc warunek (3.5) jest spełniony, ale rozpatrywany

układ z opóźnieniem nie jest stabilny. Ten ostatni fakt wykazano na podstawie analizy właściwości rozwiązania równania typu neutralnego, którego quasi-wielomian charakterystyczny ma postać (3.6). $\square$

Jeżeli spełniony jest warunek (3.5) i quasi-wielomian typu neutralnego ma łańcuchy zer asymptotycznych dążące do osi urojonej z lewej strony, to zachodzi tzw. przypadek asymptotycznie krytyczny [61]. Ponieważ w takim przypadku stabilność:

- (i) może być tylko wielomianowa, a nie wykładnicza,
 - (ii) zależy od krotności zer wielomianu $d(\theta)$, leżących na okręgu jednostkowym,
 - (iii) zależy od klasy funkcji początkowej φ ,
- to w dalszych rozważaniach nie będziemy rozpatrywać przypadku asymptotycznie krytycznego. Jest on omówiony w pracach [15,61,62] i w cytowanej tam literaturze. Zauważmy, że w przypadku asymptotycznie krytycznym układ typu neutralnego nie jest wykładniczo asymptotycznie stabilny.

Z rozważań podanych w punkcie 2.4 niniejszej pracy wynika, że jeżeli

$$\exists \theta \in \mathbb{C} \text{ takie, że } |\theta| > 1 \text{ i } d(\theta) = 0, \quad (3.7)$$

to quasi-wielomian typu neutralnego ma nieskończenie wiele zer asymptotycznych leżących w OPP.

Z powyższych rozważań wynika podane niżej twierdzenie.

Twierdzenie 3.2.

Jeżeli

$$d(\theta) \neq 0 \text{ dla } |\theta| \geq 1, \quad (3.8)$$

gdzie wielomian $d(\theta)$ ma postać (2.35), to układ (3.1) typu neutralnego jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (3.5). Jeżeli zaś zachodzi (3.7), to układ ten jest niestabilny.

W większości prac, z wyjątkiem [11,146], warunek asymptotycznej stabilności układów typu opóźnionego i neutralnego formułuje się w tej samej postaci, podanej w twierdzeniu 3.1. Nie uwzględnia się w nich faktu, że pomimo spełnienia warunku (3.5) układ typu neutralnego może być niestabilny w przypadku asymptotycznie krytycznym.

Podane w pracach [11,146] kryterium asymptotycznej stabilności układu typu neutralnego, uwzględniające przypadek asymptotycznie krytyczny, sformułowano w innej postaci niż twierdzenie 3.2.

Zauważmy, że warunek (3.8) można sprawdzić stosując znane metody badania położenia wszystkich zer wielomianów rzeczywistych wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zmiennej zespolonej θ . Metody te są stosowane w badaniu asymptotycznej stabilności liniowych stacjonarnych układów impulsowych (np. [76,81]).

Zajmiemy się teraz problemem wykładniczej stabilności z szybkością zanikania γ . Kryterium tego rodzaju stabilności podamy w sformułowaniu trochę innym niż w pracy [85].

Twierdzenie 3.3.

Układ (3.1) typu opóźnionego jest wykładniczo stabilny z szybkością zanikania nie mniejszą niż γ (w skrócie γ -stabilny), gdzie γ jest daną liczbą nieujemną, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$q(s, \exp(-sh)) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq -\gamma. \quad (3.9)$$

Zauważmy, że jeżeli w twierdzeniu 3.3 przyjmiemy $\gamma = 0$, to otrzymamy podane w twierdzeniu 3.1 kryterium asymptotycznej stabilności. Warunkiem koniecznym γ -stabilności układu z opóźnieniem przy $\gamma > 0$ jest więc jego asymptotyczna stabilność.

Utwórzmy quasi-wielomian $q_\gamma(w, \exp(-wh))$ w następujący sposób:

$$q_\gamma(w, \exp(-wh)) \triangleq q(s, \exp(-sh)) \Big|_{s=w-\gamma}. \quad (3.10)$$

Łatwo zauważyć, że warunek (3.9) jest równoważny warunkowi

$$q_\gamma(w, \exp(-wh)) \neq 0, \quad \operatorname{Re} w \geq 0. \quad (3.11)$$

Badanie γ -stabilności quasi-wielomianu $q(s, \exp(-sh))$ typu opóźnionego jest więc równoważne badaniu asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (3.10).

Zauważmy, że jeżeli spełniony jest warunek (3.11), to zera quasi-wielomianu $q_\gamma(w, \exp(-wh))$ spełniają nierówność $\operatorname{Re} w < 0$, a więc zera quasi-wielomianu (3.3) leżą w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s < -\gamma$. Oznacza to, że szybkość zanikania przebiegów przejściowych w układzie z opóźnieniem jest nie mniejsza niż γ .

Quasi-wielomian (3.3) typu neutralnego może mieć łańcuchy zer asymptotycznych dążących do prostej $\operatorname{Re} s = -\gamma$, gdzie γ jest ustaloną liczbą rzeczywistą nieujemną. W takim przypadku, przy spełnieniu warunku (3.9), układ typu neutralnego może być γ -stabilny lub nie. Zauważmy, że w opisanym powyżej przypadku quasi-wielomian $q_\gamma(w, \exp(-wh))$, utworzony w sposób (3.10), ma łańcuchy zer asymptotycznych dążących do osi urojonej z lewej strony, a więc zachodzi przypadek asymptotycznie krytyczny.

Ze wzoru (2.39) wynika, że quasi-wielomian (3.3) typu neutralnego ma przynajmniej jeden łańcuch zer asymptotycznych dążących do prostej $\operatorname{Re} s = -\gamma$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego człon dominujący $d(\theta)$ o postaci (2.35) ma zera spełniające warunek $\ln|\theta| = -h\gamma$, czyli $|\theta| = \exp(-h\gamma)$.

Uwzględniając powyższe rozważania oraz właściwości γ -stabilności, kryterium γ -stabilności układu typu neutralnego sformułujemy w postaci podobnej do podanego w twierdzeniu 3.2 warunku asymptotycznej stabilności.

Twierdzenie 3.4.

Jeżeli przy zadanych wartościach h i γ zachodzi:

- (i) dla każdego zera $d(\theta)$ spełniona jest nierówność

$$|\theta| < \exp(-h\gamma), \quad (3.12)$$

to układ (3.1) typu neutralnego jest γ -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (3.9),

- (ii) $\exists \theta \in \mathbb{C}$ takie, że $|\theta| > \exp(-h\gamma)$ i $d(\theta) = 0$, (3.13)

to układ ten nie jest γ -stabilny,

- (iii) $\exists \theta \in \mathbb{C}$ takie, że $|\theta| = \exp(-h\gamma)$ i $d(\theta) = 0$, (3.14)

to przy spełnionym warunku (3.9) układ typu neutralnego jest $\tilde{\gamma}$ -stabilny, gdzie $\tilde{\gamma} = \gamma - \varepsilon$, a ε jest dowolnie małą stałą dodatnią, mniejszą od γ . □

Podane w powyższym twierdzeniu kryterium γ -stabilności można też stosować w przypadku, gdy jeden z parametrów h i γ nie jest zadany.

Jeżeli jest ustalona tylko wartość γ i układ (3.1) typu neutralnego jest asymptotycznie stabilny, to zawsze istnieje $h_1 > 0$ takie, że dla

każdego $h \in [0, h_1)$ warunek (3.12) jest spełniony. Aby zbadać γ -stabilność, należy więc znaleźć wartości h z przedziału $[0, h_1)$, dla których spełniony jest warunek (3.9) lub, równoważnie, (3.11).

Jeżeli jest zadana tylko wartość h , to na podstawie twierdzenia 3.4 można znaleźć maksymalną wartość γ taką, że wszystkie zera quasi-wielomianu $q(s, \exp(-sh))$ spełniają nierówność $\operatorname{Re} s < -\gamma$ i nie ma zer asymptotycznych dążących do prostej $\operatorname{Re} s = -\gamma$. Ta wartość γ określa γ -stabilność układu typu neutralnego.

PRZYKŁAD 3.2.

Dany jest układ typu neutralnego z opóźnieniem $h=1$, którego quasi-wielomian charakterystyczny ma postać

$$q(s, \exp(-sh)) = (s(\exp(-s-1)-1) + \exp(-s-1)-2)^2 \quad (3.15)$$

Obliczając ze wzoru (2.35) lub (2.38) człon dominujący powyższego quasi-wielomianu, otrzymamy

$$d(\theta) = (e^{-1} - \theta)^2 \quad (3.16)$$

Wielomian (3.16) ma podwójne zero w punkcie $\theta = e^{-1}$.

Z warunku (ii) twierdzenia 3.4 wynika, że rozpatrywany układ nie jest γ -stabilny przy $\gamma > 1$.

Rozpatrzmy przypadek $\gamma = 1$. Zauważmy, że przy $\gamma = 1$ warunek (3.12) nie jest spełniony. Natomiast jest spełniony warunek (3.14).

Obliczając ze wzoru (3.10) quasi-wielomian $q_\gamma(w, \exp(-wh))$ otrzymamy

$$q_\gamma(w, \exp(-wh)) = (w(\exp(-w)-1) - 1)^2 \quad (3.17)$$

Quasi-wielomian (3.17) ma wszystkie zera OLP [45] (patrz też przykład 3.1), a więc warunek (3.9) przy $h = \gamma = 1$ jest spełniony.

Na podstawie warunku (iii) twierdzenia 3.4 możemy więc stwierdzić, że rozpatrywany układ jest $\tilde{\gamma}$ -stabilny, gdzie $\tilde{\gamma} = 1 - \varepsilon$, a ε jest dowolnie małą stałą dodatnią.

Zauważmy, że przy $\gamma = \tilde{\gamma}$ i $h=1$ spełniony jest też warunek (i) twierdzenia 3.4. Rozpatrywany układ jest więc γ -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma = \tilde{\gamma} = 1 - \varepsilon$.

Zauważmy, że gdybyśmy przy $\gamma=1$ badali γ -stabilność rozpatrywanego układu tylko na podstawie warunku (3.9), to otrzymalibyśmy, że dla $\gamma=1$ jest on γ -stabilny, co nie jest prawdą. $\square$

Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli dla skończonych wartości opóźnienia h quasi-wielomian (3.3) typu opóźnionego nie ma zer w OPP i na osi urojonej, to też nie ma ich w OLP w dostatecznie bliskim sąsiedztwie tej osi. Oznacza to, że wtedy istnieje taka liczba rzeczywista dodatnia γ , że spełniony jest warunek (3.9). Dlatego też asymptotyczna stabilność układu (3.1) typu opóźnionego jest w rzeczywistości stabilnością asymptotyczną wykładniczą. Powyższa właściwość zachodzi tylko dla tych quasi-wielomianów typu neutralnego, dla których spełniony jest warunek (3.8).

3.3. Kryteria asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia

W ostatnich latach w wielu pracach rozpatruje się asymptotyczną stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia. Formułuje się w nich warunki, przy spełnieniu których układ (3.1) jest asymptotycznie stabilny dla każdej wartości $h \geq 0$. Istnieją przy tym dwie grupy prac, w których podane są nierównoważne sobie w przypadku ogólnym kryteria, a noszące jedną wspólną nazwę asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia. Uwzględniając wprowadzoną w p.3.1 niniejszej pracy terminologię, można je rozdzielić na kryteria ASNO i kryteria MASNO.

Macierz charakterystyczna układu (3.1) ma postać

$$H(s, \exp(-sh)) = \sum_{i=0}^m (A_i + sB_i) \exp(-shi), \quad (3.18)$$

a jej wyznacznik, będący quasi-wielomianem charakterystycznym tego układu, ma postać (3.3).

Stosując w macierzy charakterystycznej (3.18) podstawienie $\exp(-sh) = z$ i obliczając jej wyznacznik, otrzymamy wielomian $q(s, z)$ dwóch zmiennych s i z . Łatwo zauważyć, że

$$q(0, z) = \det \sum_{i=0}^m A_i z^i. \quad (3.19)$$

Z powyższego wzoru wynika, że warunek (3.2) możemy napisać w postaci

$$q(0, z) \neq 0, |z| = 1. \quad (3.20)$$

Stosując w quasi-wielomianie charakterystycznym (3.3) podstawienie $s = w/h$, otrzymamy jego postać unormowaną $q(w/h, \exp(-w))$. Podstawiając z kolei $w = jy$, warunek (3.20) napiszemy w postaci [88]

$$\lim_{h \rightarrow \infty} q(jy/h, \exp(-jy)) = q(0, \exp(-jy)) \neq 0, \forall y \in [0, 2\pi].$$

Oznacza to, że warunek (3.20) (i też (3.2)) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy quasi-wielomian (3.3) nie ma zer na osi urojonej dla $h = \infty$.

Twierdzenie 3.5.

Układ (3.1) typu opóźnionego jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia (w skrócie ASNO) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$q(s, \exp(-sh)) \neq 0, \operatorname{Re} s \geq 0, \forall h \in [0, \infty). \quad (3.21)$$

□

Powyższe twierdzenie wynika w sposób bezpośredni z definicji 3.4 i twierdzenia 3.1. Metody badania ASNO układu typu opóźnionego są podane w pracach [65, 153].

Z definicji 3.4, 3.5, twierdzenia 3.5 i z powyższych rozważań wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.6.

Układ (3.1) typu opóźnionego jest mocno asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia (w skrócie MASNO) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki (3.21) i (3.20), lub, równoważnie, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$q(s, \exp(-sh)) \neq 0, \operatorname{Re} s \geq 0, \forall h \in [0, \infty], \quad (3.22)$$

przy czym podstawienia $h = \infty$ dokonuje się w quasi-wielomianie charakterystycznym (3.3), zapisanym w postaci unormowanej $q(w/h, \exp(-w))$, gdzie $w = sh$ jest nową zmienną.

□

Zauważmy, że jeżeli do zbioru wartości opóźnienia h , określonego w twierdzeniu 3.5, dołączymy punkt $h = \infty$, to otrzymamy zbiór określony w twierdzeniu 3.6.

Twierdzenie 3.7.

Układ (3.1) typu opóźnionego jest MASNO wtedy i tylko wtedy, gdy

$$q(s, z) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad |z| = 1, \quad (3.23)$$

gdzie $q(s, z)$ otrzymuje się z quasi-wielomianu charakterystycznego (3.3) po zastosowaniu w nim podstawienia $\exp(-sh) = z$.

Dowód wynika z twierdzenia 3.6 i prac [84, 86], w których wykazano, że dla quasi-wielomianu typu opóźnionego warunek (3.23) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki (3.21) i (3.20).

Należy zaznaczyć, że w pracy [84] wykazano (błędnie), że warunki (3.21) i (3.23) są sobie równoważne. Podano też analityczne metody sprawdzania (3.23). Potem jednak okazało się, że równoważność ta zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy do (3.21) dołączymy dodatkowy warunek (3.20) [86].

W pracy [153] (bez znajomości pracy [86]) wprowadzono pojęcie wykładniczej asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia i podano warunek konieczny i wystarczający tego rodzaju stabilności dla układu opisanego równaniem (2.11). Jest on cytowany w twierdzeniu 4.7 niniejszej pracy. Łatwo zauważyć, że podany w twierdzeniu 4.7 warunek (4.42) jest równoważny z warunkami (3.21) i (3.20). Z powyższego wynika, że podane w twierdzeniu 3.6 kryterium MASNO można nazwać kryterium wykładniczej asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia. Jednakże taka nazwa nie jest poprawna z tego powodu, że przy $h \rightarrow \infty$ układ typu opóźnionego lub neutralnego może być asymptotycznie stabilny, ale nie wykładniczo. W pracy [132] wykazano bowiem, że jeżeli układ z opóźnieniem jest ASNO, to dla każdej dowolnie małej liczby rzeczywistej dodatniej γ istnieje takie $H \in \mathbb{R}_+$, że jeżeli $h > H$, to quasi-wielomian charakterystyczny tego układu ma zera spełniające warunek $0 > \operatorname{Re} s > -\gamma$. Oznacza to, że przy $h \rightarrow \infty$ zera quasi-wielomianu charakterystycznego układu z opóźnieniem, który jest ASNO lub MASNO, asymptotycznie zbliżają się do osi urojonej z lewej strony. Dla $h \rightarrow \infty$ nie może więc być

mowy o wykładniczej asymptotycznej stabilności. Dlatego też w niniejszej pracy będziemy stosować nazwę MASNO zamiast wprowadzonej w pracy [153] nazwy wykładnicza asymptotyczna stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia. W pozostałych pracach, poza wymienioną powyżej pracą [153], kryteria nazwane w niniejszej pracy jako ASNO i MASNO noszą tę samą nazwę asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia. Nie jest to poprawne, bowiem stosuje się tę samą nazwę dla różnych, nierównoważnych sobie w przypadku ogólnym, kryteriów (por. podany dalej przykład 3.3).

Metody badania MASNO układu typu opóźnionego podane są w [153], gdzie noszą nazwę kryteriów wykładniczej asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia, oraz w pracach [12,79,84,85]. W ostatniej grupie prac warunki (3.21) i (3.23) traktuje się jako równoważne. Fakt, że do (3.21) należy dołączyć warunek (3.20)) jest sygnalizowany w [80,86]. Ponadto w pracach [12,79,84,85] jest mowa o badaniu ASNO, gdy w rzeczywistości bada się w nich MASNO, zgodnie z twierdzeniem 3.7.

Zauważmy, że jeżeli dla układu typu opóźnionego warunek (3.20)) jest spełniony, to kryteria ASNO i MASNO są sobie równoważne. W przypadku ogólnym kryteria te nie są sobie równoważne, przy czym MASNO jest warunkiem dostatecznym ASNO. Istnieją bowiem quasi-wielomiany typu opóźnionego, które mają wszystkie zera w OLP dla każdego $h \in [0, \infty)$, ale nie spełniają warunku (3.20).

PRZYKŁAD 3.3.

Dany jest układ z opóźnieniem, którego quasi-wielomian charakterystyczny ma postać

$$q(s, \exp(-sh)) = s^2 + 2as + a^2 + b^2 \exp(-sh), \quad (3.24))$$

gdzie

$$a, b, \in \mathbb{R}, \quad h > 0.$$

Z pracy [65, przykład 2] wynika, że quasi-wielomian (3.24) jest ASNO wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a > 0 \quad \text{ i } \quad a^2 \geq b^2.$$

Zauważmy, że dla quasi-wielomianu (3.24) warunek (3.20) jest równoważny warunkowi $a^2 \neq b^2$. Z powyższego i z twierdzenia 3.6 wynika więc, że quasi-wielomian (3.24) jest MASNO wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a > 0 \quad \text{ i } \quad a^2 > b^2.$$

Jeżeli więc $a > 0$ i $a^2 = b^2$, to rozpatrywany układ z opóźnieniem jest ASNO, ale nie jest MASNO. Wtedy bowiem quasi-wielomian (3.24) ma wszystkie zera w OLP dla każdego $h \in [0, \infty)$, ale nie spełnia warunku (3.20). $\square$

Rozpatrzymy teraz problem asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia układu typu neutralnego.

Kryterium ASNO układu (3.1) typu neutralnego możemy sformułować w postaci podobnej do podanego w twierdzeniu 3.2 warunku asymptotycznej stabilności.

Twierdzenie 3.8.

Jeżeli zachodzi (3.8), to układ (3.1) typu neutralnego jest ASNO wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (3.21). Jeżeli zaś zachodzi (3.7), to układ ten nie jest asymptotycznie stabilny dla dowolnego $h > 0$ i nie jest też ASNO. $\square$

Metody sprawdzania warunku (3.21) dla układu typu neutralnego i opóźnionego są podane w pracy [65]. Są one też cytowane w lemacie 4.1 niniejszej pracy.

W pracach [62,79] podano kryterium asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia układu typu neutralnego, wymagające między innymi sprawdzania warunku (3.23), który nie zawsze jest równoważny warunkowi (3.21) (patrz przykład 4.2). Jest to więc kryterium MASNO (według terminologii przyjętej w niniejszej pracy).

Stosując podstawienie

$$z = \exp(-sh), \quad (3.25)$$

quasi-wielomian (3.3) napiszemy w postaci

$$q(s, z) = \sum_{i=0}^n s^i \beta_i(z), \quad (3.26)$$

gdzie:

$$\beta_1(z) = \sum_{k=0}^p a_{1k} z^k. \quad (3.27)$$

Ze wzorów (2.33), (2.36) - (2.38) i (3.25) - (3.27) wynika, że człon dominujący quasi-wielomian (3.3) możemy napisać w postaci

$$d(z^{-1}) = z^{-p} \beta_n(z). \quad (3.28)$$

Z rozważań podanych w p.2.4 niniejszej pracy i ze wzoru (3.28) wynika, że quasi-wielomian (3.3) typu neutralnego nie ma łańcuchów zer asymptotycznych, dążących do asymptot położonych w OPP lub pokrywających się z osią urojoną, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\beta_n(z) \neq 0 \text{ dla } |z| \leq 1. \quad (3.29)$$

Oznacza to, że jeżeli quasi-wielomian (3.3) ma takie łańcuchy zer, to wtedy w wielomianie dwóch zmiennych $q(s, z)$ o postaci (3.26) następuje redukcja stopnia ze względu na zmienną s (n na $n-1$).

Uwzględniając możliwość redukcji stopnia $q(s, z)$ ze względu na zmienną s w przypadku, gdy $|z| \leq 1$, w pracy [62] (uogólniając rezultaty pracy [84]) podano szereg warunków koniecznych i wystarczających asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia quasi-wielomianu (3.3) typu neutralnego. Są one warunkami MASNO (według terminologii przyjętej w niniejszej pracy).

Twierdzenie 3.9. [62, 79]

Układ typu neutralnego, którego quasi-wielomian charakterystyczny ma postać (3.3), jest MASNO wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (3.23) i

$$q(s, z) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s = 0, \quad |z| \leq 1. \quad (3.30)$$

□

Metody sprawdzania warunków (3.23) i (3.30) są podane w pracy [79]. Są one też cytowane w rozdziale 4 niniejszej pracy.

Uwzględniając powyższe rozważania i pracę [62], możemy podać kryterium MASNO układu typu neutralnego, nie wymagające sprawdzania warunku (3.30).

Twierdzenie 3.10.

Jeżeli zachodzi (3.8), to układ typu neutralnego, którego quasi-wielomian charakterystyczny ma postać (3.3), jest MASNO wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (3.23).

Dowód

W pracy [62] wykazano, że quasi-wielomian (3.3) typu neutralnego jest MASNO wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (3.23) i

$$q(j\omega, z) \neq 0 \quad \text{dla} \quad |z| \leq 1 \quad \text{i dla pewnego } \omega \in \mathbb{R}. \quad (3.31)$$

Jeżeli zachodzi (3.8), to wtedy spełniony jest warunek (3.29).

To zaś oznacza, że dla $|z| \leq 1$ quasi-wielomian (3.26) możemy napisać w postaci

$$q(s, z) = \tilde{q}(s, z) \beta_n(z), \quad (3.32)$$

gdzie:

$$\tilde{q}(s, z) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} s^i \tilde{\beta}_i(z), \quad (3.33)$$

$$\tilde{\beta}_i(z) = \beta_i(z) / \beta_n(z), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.34)$$

Podobnie jak w pracy [84] możemy wykazać, że dla dostatecznie dużych wartości ω zachodzi

$$\tilde{q}(j\omega, z) \neq 0 \quad \text{dla} \quad |z| \leq 1.$$

Z powyższego wynika, że jeżeli zachodzi (3.8), to dla quasi-wielomianu (3.3) typu neutralnego, warunek (3.31) jest zawsze spełniony. To zaś oznacza, że wtedy (3.23) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym MASNO. $\square$

W przypadku układu typu neutralnego (podobnie jak w przypadku typu opóźnionego) kryterium MASNO jest warunkiem dostatecznym ASNO. Kryteria te są sobie równoważne, jeżeli warunek (3.20) jest spełniony.

Z rozważań podanych w pracy [132] (i omówionych częściowo powyżej) wynika, że jeżeli układ typu opóźnionego lub neutralnego jest asymptotycznie stabilny dla małych wartości h , to przy $h \rightarrow \infty$ zera jego quasi-wielomianu charakterystycznego albo przechodzą w OPP albo pozostają w OLP i zbliżają się do osi urojonej nieskończenie blisko. W pierwszym przypadku układ nie jest ASNO, zaś w drugim jest. Jednocześnie w drugim przypadku przy dużych wartościach opóźnienia h układ może być bardzo wrażliwy na zmianę parametrów i np. mała ich zmiana może powodować przejście zer quasi-wielomianu charakterystycznego w OPP i oczywiście niestabilność układu.

W układach praktycznych zmiany opóźnienia h są w zasadzie skończone. Jeżeli więc taki układ jest ASNO (lub MASNO), to oczywiście pozostanie on asymptotycznie stabilny, jeżeli wartości h będą się wahać w skończonym przedziale zmian, wynikającym z danych technologicznych. Należy jednak pamiętać, że przy dostatecznie dużych wartościach h , zera quasi-wielomianu charakterystycznego będą leżały w OLP dostatecznie blisko osi urojonej, co nie jest korzystne. W przypadku ogólnym trudno jest przy tym stwierdzić, jakie są liczbowo te dostatecznie duże wartości opóźnienia i jak blisko osi urojonej leżą zera quasi-wielomianu charakterystycznego dla tych wartości h . W przypadku konkretnego quasi-wielomianu typu opóźnionego można to wyznaczyć liczbowo badając f -stabilność dla h z pewnego zadanego przedziału $[0, H]$ (patrz p.7.2 niniejszej pracy).

4. STABILNOŚĆ NIEZALEŻNIE OD WIELKOŚCI OPÓŹNIENIA

W niniejszym rozdziale przedstawimy główne wyniki prac poświęconych badaniu asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień układów liniowych stacjonarnych, ze stałymi współmiernymi dyskretnymi opóźnieniami. W pracach tych punktem wyjścia jest albo znajomość quasi-wielomianu charakterystycznego albo macierzy stanu układu z opóźnieniem. W tym ostatnim przypadku nie musimy wyznaczać quasi-wielomianu charakterystycznego, co jest bardzo pracochłonne dla układów wielowymiarowych z dużą liczbą opóźnień.

W przypadku układu z niewspółmiernymi opóźnieniami asymptotyczną stabilność niezależnie od wielkości opóźnień można badać za pomocą metody Lapunowa-Krasowskiego (patrz p.4.3 niniejszej pracy) lub na podstawie podanego w pracy [91] warunku dostatecznego, wymagającego liczenia promienia spektralnego pewnej nieujemnie określonej macierzy, utworzonej bezpośrednio na podstawie równań opisujących układ. Inne metody badania asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień (także w przypadku opóźnień rozłożonego) są podane w pracach [44,46].

Na podstawie znajomości quasi-wielomianu charakterystycznego asymptotyczną stabilność niezależnie od wielkości niewspółmiernych opóźnień można badać za pomocą cytowanego w pracy [52, str.163] kryterium Żywotowskiego.

4.1. Badanie na podstawie znajomości quasi-wielomianu charakterystycznego

Niech dany będzie układ z opóźnieniem, którego quasi-wielomian charakterystyczny ma postać

$$q(s, \exp(-sh)) = \sum_{k=0}^P w_k(s) \exp(-shk), \quad (4.1)$$

gdzie:

$$w_k(s) = \sum_{l=0}^n a_{lk} s^l. \quad (4.2)$$

W zależności od tego, który z warunków (2.25), (2.26) i (2.27) jest spełniony, quasi-wielomian (4.1) jest typu, odpowiednio: opóźnionego, wyprzedzonego lub neutralnego. Ponieważ quasi-wielomian typu wyprzedzonego jest niestabilny, dalej będziemy rozpatrywać tylko quasi-wielomiany typu opóźnionego i neutralnego.

Kryterium ASNO podane jest w twierdzeniu 3.5 dla układu typu opóźnionego i w twierdzeniu 3.8 dla układu typu neutralnego. W obu tych twierdzeniach występuje warunek (3.21). Poniżej podamy sposób jego sprawdzania.

Lemat 4.1. [65]

Dla quasi-wielomianu (4.1), typu opóźnionego lub neutralnego, warunek (3.21) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są trzy poniższe warunki:

$$(i) \quad f_1(s) = \sum_{k=0}^P w_k(s) \neq 0 \quad \text{dla} \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad (4.3)$$

$$(ii) \quad f_2(s) = \sum_{k=0}^P (-1)^k w_k(s) \neq 0 \quad \text{dla} \quad \operatorname{Re} s = 0 \quad (s \neq 0), \quad (4.4)$$

$$(iii) \quad f_3(s) = \sum_{k=0}^P w_k(s) (1-sT)^k (1+sT)^{P-k} \neq 0 \quad \text{dla} \quad \operatorname{Re} s = 0, \forall T \in (0, \infty). \quad (4.5)$$

□

Wielomian $f_1(s)$ otrzymuje się z (4.1) podstawiając $h=0$; $f_2(s)$ podstawiając $\exp(-sh) = -1$, a $f_3(s) = (1+sT)^P q(s, \exp(-sh))$, gdzie w (4.1) zastosowano podstawienie $\exp(-sh) = (1-sT)/(1+sT)$.

Wielomiany $f_1(s)$ i $f_2(s)$ zależą tylko od współczynników quasi-wielomianu (4.1), zaś $f_3(s)$ zależy też od parametru T . Sprawdzenie warunków (4.3), (4.4) i (4.5) przeprowadza się na podstawie znanych kryteriów Hurwita lub Routha.

W przypadku układu typu opóźnionego quasi-wielomian (4.1), (4.2) można napisać w postaci

$$q(s, \exp(-sh)) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^p a_{ik} s^i \exp(-shk). \quad (4.6)$$

Z twierdzenia 3.5 i lematu 4.1 wynika podane niżej twierdzenie.

Twierdzenie 4.1.

Quasi-wielomian typu opóźnionego (4.6) jest ASNO wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki (4.3), (4.4) i (4.5). $\square$

Z twierdzenia 3.8 wynika, że spełnienie warunków (4.3), (4.4) i (4.5) nie jest wystarczające dla ASNO układu typu neutralnego w przypadku ogólnym. Fakt ten nie jest sygnalizowany w pracy [65].

Twierdzenie 4.2.

Jeżeli zachodzi (3.8), to układ typu neutralnego jest ASNO wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki (4.3), (4.4) i (4.5). $\square$

Dowód wynika z twierdzenia 3.8 i lematu 4.1.

PRZYKŁAD 4.1.

Rozpatrzmy układ typu neutralnego, którego quasi-wielomian charakterystyczny ma postać

$$q(s, \exp(-sh)) = \sum_{k=0}^2 w_k(s) \exp(-shk). \quad (4.7)$$

gdzie:

$$w_0(s) = (s+1)^2, \quad w_1(s) = -2s^2 - 2s, \quad w_2(s) = s^2.$$

Obliczając w sposób podany w lemacie 4.1 wielomiany $f_1(s)$, $f_2(s)$ i $f_3(s)$ otrzymamy:

$$f_1(s) = 1, \quad f_2(s) = 4s^2 + 4s + 1,$$

$$f_3(s) = 4T^2 s^4 + 4T^2 s^3 + (4T + T^2) s^2 + 2Ts + 1.$$

Łatwo sprawdzić, że warunki (4.3), (4.4) i (4.5) są w tym przypadku spełnione, a więc spełniony jest warunek (3.21). Z pracy [65] wynika, że quasi-wielomian (4.7) jest ASNO, gdy w rzeczywistości tak nie jest.

Z przykładu 3.1 wynika, że człon dominujący $d(\theta)$ quasi-wielomianu (4.7) ma podwójne zero w punkcie $\theta = 1$, a więc zachodzi przypadek asymptotycznie krytyczny. Przypadek ten nie jest rozpatrywany w niniejszej pracy. Nie możemy więc stosować twierdzenia 4.2 (i też 3.8) do quasi-wielomianu (4.7).

Asymptotyczna stabilność quasi-wielomianu (4.7) była rozpatrywana w pracy [45]. Wykazano tam, że przy $h=1$ quasi-wielomian (4.7) nie jest asymptotycznie stabilny. Stąd wniosek, że rozpatrywany układ typu neutralnego nie jest ASNO. $\square$

W innych pracach, poświęconych badaniu stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia, rozpatruje się oddzielnie quasi-wielomiany (typu opóźnionego (i formułuje się w nich warunki MASNO, według terminologii przyjętej w rozdziale 3) i neutralnego (też warunki MASNO)).

Kryterium MASNO układu typu opóźnionego podane jest w twierdzeniu 3.7. Wymaga ono sprawdzania warunku

$$q(s, z) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0; \quad |z| = 1, \quad (4.83)$$

gdzie $q(s, z)$ otrzymuje się z quasi-wielomianu (4.6), stosując podstawienie $\exp(-sh) = z$.

Stosując z kolei podstawienie $z = \exp(jy)$ (można też podstawić $z = \exp(-jy)$) z quasi-wielomianu $q(s, z)$ otrzymamy wielomian $f(s) = q(s, \exp(jy))$ zmiennej s o współczynnikach zespolonych. Utwórzmy dla tego wielomianu macierz Hermite'a $H(\exp(jy))$.

Przypomnijmy, że macierz Hermite'a dla wielomianu zespolonego

$$f(s) = \sum_{i=0}^n b_i s^i \quad (4.89)$$

tworzy się w następujący sposób [77, 79]:

$$H = [d_{rk}], \quad d_{rk} = d_{kr}; \quad r, k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.10)$$

gdzie:

$$d_{rk} = 2(-1)^{(r+k)/2} \sum_{i=1}^r (-1)^i \operatorname{Re}(b_{n-i+1} \bar{b}_{n-k-r+i}), \quad r \leq k, \quad (4.11)$$

jeżeli $r+k$ jest liczbą parzystą;

$$d_{rk} = 2(-1)^{(r+k-1)/2} \sum_{i=1}^r (-1)^i \operatorname{Im}(b_{n-i+1} \bar{b}_{n-k-r+i}), \quad r \leq k, \quad (4.12)$$

jeżeli $r+k$ jest liczbą nieparzystą.

We wzorach (4.11) i (4.12) kreska oznacza sprzężenie.

Lemat 4.2. [79,84]

Warunek (4.8) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(i) \quad H(\exp(j0)) \text{ jest macierzą dodatnio określoną,} \quad (4.13)$$

$$(ii) \quad \det H(\exp(jy)) > 0 \quad \text{dla każdego } y \in [0, 2\pi], \quad (4.14)$$

gdzie $H(\exp(jy))$ jest macierzą Hermite'a utworzoną dla wielomianu $f(s) = q(s, \exp(jy))$. $\square$

Z powyższych rozważań oraz z twierdzenia 3.7 wynika poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.3.

Układ typu opóźnionego o quasi-wielomianie charakterystycznym (4.6) jest MASNO wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki (4.13) i (4.14). $\square$

$H(\exp(j0))$ jest macierzą rzeczywistą i warunek (4.13) można sprawdzić stosując np. metodę Sylwestera (np. [82,83]). Łatwo zauważyć, że jeżeli zachodzi (4.13), to warunek (4.14) można napisać w postaci

$$\det H(\exp(jy)) \neq 0 \quad \text{dla } y \in [0, 2\pi]. \quad (4.15)$$

Zauważmy, że elementy macierzy $H(\exp(jy))$ są rzeczywistymi wielomianami stopnia nie większego niż p względem zmiennych $\cos(y)$ i $\sin(y)$, a jej wyznacznik jest wielomianem rzeczywistym stopnia np. względem $\cos(y)$. Stosując podstawienie $\cos(y) = x$ można go zapisać jako $F(x)$, wielomian zmiennej x stopnia np. Warunek (4.14) moż-

na więc napisać w postaci

$$F(x) > 0 \quad \text{dla } x \in [-1, 1] . \quad (4.16)$$

Metody sprawdzania warunku (4.16) podane są w pracach [77,78, 79,80].

Wobec twierdzenia 3.9 układ typu neutralnego jest MASNO wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi (4.8) i

$$q(s, z) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s = 0, \quad |z| \leq 1, \quad (4.17)$$

a quasi-wielomian charakterystyczny ma postać (4.1), przy $a_{n_0} = 1$.

Warunek (4.8) dla quasi-wielomianu typu neutralnego sprawdza się dokładnie w ten sam sposób jak dla typu opóźnionego, tzn. w oparciu o lemat 4.2.

Omówimy teraz sposób sprawdzania warunku (4.17), który można napisać w postaci

$$q(j\omega, z) \neq 0, \quad |z| \leq 1, \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty), \quad (4.18)$$

gdzie $q(j\omega, z)$ jest wielomianem stopnia p względem zmiennej z o współczynnikach zależnych od $j\omega$. Zbudujmy macierz Schura-Cohna $S(j\omega)$ dla wielomianu zespolonego

$$q_1(j\omega, z) = z^p q(j\omega, z^{-1}) . \quad (4.19)$$

Przypomnijmy, że macierz Schura-Cohna S , która jest macierzą hermitowską, dla wielomianu zespolonego

$$f(z) = \sum_{i=0}^p c_i z^i \quad (4.20)$$

tworzy się w następujący sposób [77,79]:

$$\left. \begin{aligned} S = [\delta_{rk}], \quad \delta_{rk} = \bar{\delta}_{kr} \quad \text{dla } r > k; \quad r, k = 1, 2, \dots, n, \\ \delta_{rk} = \sum_{i=1}^r (c_{p-r+i} \bar{c}_{p-k+i} - \bar{c}_{r-i} c_{k-i}), \quad r \leq k . \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Lemat 4.3. [79]

Warunek (4.18) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(i) \quad S(j0) \text{ jest macierzą dodatnio określoną,} \quad (4.22)$$

$$(ii) \quad \det S(j\omega) > 0 \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty), \quad (4.23)$$

gdzie $S(j\omega)$ jest macierzą Schura-Cohna, utworzoną dla wielomianu (4.19). $\square$

Warunek (4.22) sprawdza się w ten sam sposób jak (4.13), natomiast przy sprawdzaniu warunku (4.23) wykorzystuje się rezultaty prac [77,78,80].

Z powyższych rozważań i z twierdzenia 3.9 wynika poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.4.

Układ typu neutralnego, którego quasi-wielomian charakterystyczny ma postać (4.1) przy $a_{n0} = 1$, jest MASNO wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki (4.13), (4.14), (4.22) i (4.23). $\square$

Z twierdzenia 3.10 i lematu 4.2 wynika prostsze kryterium MASNO układu typu neutralnego.

Twierdzenie 4.5.

Jeżeli zachodzi (3.8), to układ typu neutralnego, którego quasi-wielomian charakterystyczny ma postać (4.1), (4.2), jest MASNO wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki (4.13) i (4.14). $\square$

PRZYKŁAD 4.2.

Rozpatrzmy układ z opóźnieniem, którego quasi-wielomian charakterystyczny ma postać

$$q(s, \exp(-sh)) = s(1+b \exp(-sh)) + a_1 \exp(-sh) + a_0. \quad (4.24)$$

Jeżeli $b \neq 0$, to quasi-wielomian (4.24) jest typu neutralnego.

Obliczając wielomian $d(\theta)$ ze wzoru (2.38), otrzymamy

$$d(\theta) = \theta + b. \quad (4.25)$$

Warunek (3.8) jest więc spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|b| < 1. \quad (4.26)$$

Wielomian $f(s) = q(s, \exp(jy))$ ma postać

$$f(s) = sb_1 + b_0,$$

gdzie:

$$b_1 = 1 + b \cos(y) + jb \sin(y), \quad b_0 = a_0 + a_1 \cos(y) + ja_1 \sin(y).$$

Obliczając ze wzorów (4.10) - (4.12) macierz $H(\exp(jy))$ otrzymamy

$$H(\exp(jy)) = d_{11} = 2[a_0 + a_1 b + (a_1 + a_0 b) \cos(y)]. \quad (4.27)$$

Łatwo zauważyć, że warunki (4.13) i (4.14) są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy [79]

$$a_0 + a_1 b > |a_1 + a_0 b|, \quad (4.28)$$

czyli gdy spełnione są nierówności

$$a_0 > |a_1| \quad \text{ i } \quad |b| < 1. \quad (4.29)$$

Na podstawie twierdzenia 4.5 możemy więc stwierdzić, że rozpatrywany układ z opóźnieniem jest MASNO wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (4.29).

Aby sprawdzić warunki (4.22) i (4.23), należy wyznaczyć macierz Schura-Cohna $S(j\omega)$ dla wielomianu zespolonego

$$q_1(j\omega, z) = zc_1 + c_0,$$

gdzie:

$$c_1 = a_0 + j\omega, \quad c_0 = a_1 + j\omega b.$$

Ma ona postać

$$S(j\omega) = a_0^2 + \omega^2 - (a_1^2 + \omega^2 b^2). \quad (4.30)$$

Ze wzoru (4.30) wynika, że warunki (4.22) i (4.23) są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy;

$$(i) \quad a_0^2 - a_1^2 > 0;$$

$$(ii) \quad 1 - b^2 > 0,$$

czyli gdy zachodzi (4.29).

Zauważmy, że dla quasi-wielomianu (4.24) warunki (4.8) i (4.17) są sobie równoważne. Wynika to z faktu, że nierówność (4.26) jest zawarta w warunku (4.8), który dla rozpatrywanego quasi-wielomianu ma postać (4.29).

Sprawdźmy teraz, na podstawie twierdzenia 4.2, dla jakich wartości współczynników quasi-wielomian (4.24) jest ASNO.

Dla quasi-wielomianu (4.24) warunki (4.3), (4.4) i (4.5) mają następujące postaci:

$$f_1(s) = s(1+b) + a_0 + a_1 \neq 0 \quad \text{dla } \operatorname{Re} s \geq 0,$$

$$f_2(s) = s(1-b) + a_0 - a_1 \neq 0 \quad \text{dla } \operatorname{Re} s = 0, (s \neq 0),$$

$$f_3(s) = s^2(T-bT) + s(1+b+T(a_0-a_1)) + a_0 + a_1 \neq 0$$

$$\text{dla } \operatorname{Re} s = 0, \forall T \in \mathbb{R}_+.$$

Powyższe warunki są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(|b| < 1) \wedge [(a_0 > |a_1|) \vee (a_0 = a_1 > 0)]. \quad (4.31)$$

Z twierdzenia 4.2 i nierówności (4.26) wynika, że rozpatrywany układ z opóźnieniem typu neutralnego jest ASNO wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (4.31).

Dla quasi-wielomianu (4.24) warunki ASNO i MASNO nie są więc sobie równoważne.

Jeżeli założymy, że $b=0$ we wzorze (4.24), to z twierdzeń 4.3, 4.1 i powyższych rozważań otrzymamy następujące kryterium.

Układ typu opóźnionego, którego quasi-wielomian charakterystyczny ma postać

$$q(s, \exp(-sh)) = s + a_0 + a_1 \exp(-sh) \quad (4.32)$$

jest MASNO wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_0 > |a_1|, \quad (4.33)$$

natomiast jest ASNO wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_0 > |a_1| \text{ lub } a_0 = a_1 > 0. \quad (4.34)$$

Ze wzorów (4.33) i (4.34) wynika, że jeżeli do obszaru MASNO dołączymy półprostą $a_0 = a_1 > 0$, to otrzymamy obszar ASNO rozpatrywanego układu. $\square$

Innego rodzaju metody badania stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia są podane w pracach [40,41,104]. W [40 i 41] podano warunek konieczny i wystarczający MASNO (według terminologii wprowadzonej w rozdz.3 niniejszej pracy) quasi-wielomianu typu opóźnionego, uogólniając metodę badania stabilności układów 2D.

4.2. Badanie na podstawie znajomości macierzy stanu

Na podstawie znajomości macierzy stanu formułuje się warunki stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia dla układu typu opóźnionego, opisanego równaniem

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^m A_i x(t-ih), \quad t \geq 0, \quad (4.35)$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $h > 0$.

W pracy [153] podano warunki ASNO i MASNO w zależności od macierzy stanu układu (4.35), natomiast ich sprawdzenie (warunków) wymaga znajomości quasi-wielomianu charakterystycznego.

Twierdzenie 4.6. [153]

Układ (4.35) jest ASNO wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(i) \quad \operatorname{Re} \lambda_i \left(\sum_{i=0}^m A_i \right) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.36)$$

$$(ii) \quad \det[j\omega I - \sum_{i=0}^m A_i \exp(j\omega i h)] \neq 0, \quad \forall \omega \neq 0, \quad \forall y \in [0, \pi]. \quad (4.37)$$

Zauważmy, że nierówność (4.36) jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy układ (4.35) jest asymptotycznie stabilny dla $h=0$. Nierówność ta jest więc równoważna podanemu w lemacie 4.1 warunkowi (4.3), gdzie $f_1(s) = q(s, \exp(-s0))$, a $q(s, \exp(-sh))$ jest quasi-wielomianem charakterystycznym układu (4.35).

Przedstawiony zostanie teraz sposób w jaki z (4.37) można otrzymać warunki (4.4) i (4.5).

Z twierdzeń 3.5 i 4.6 wynika, że warunek (4.37) można napisać w równoważnej postaci

$$q(s, \exp(-sh)) \neq 0, \operatorname{Re} s \geq 0, \forall h \in (0, \infty). \quad (4.38)$$

Stosując podstawienie [136,150]

$$\exp(-sh) = (1-sT)/(1+sT), \quad T \in (0, \infty), \quad (4.39)$$

warunek (4.38) napiszemy w postaci (4.5). Aby warunki (4.38) i (4.5) były równoważne, należy założyć (4.38) dla [65]

$$s = jT/h, \quad (4.40)$$

co prowadzi do zależności (4.4), bowiem $\exp(-sh) = \exp(-jT) = -1$.

W pracy [151] zaproponowano zastosowanie podstawienia

$$\exp(-sh) = (1-sT)^2/(1+sT)^2, \quad T \in (0, \infty), \quad (4.41)$$

zamiast (4.39), bowiem samo podstawienie (4.39), bez spełnienia warunku (4.38) dla s o postaci (4.40), prowadziło do błędnych rezultatów. W praktyce wygodniej jest stosować podstawienie (4.39), bowiem prowadzi ono do wielomianu względem s stopnia niższego niż podstawienie (4.41).

Twierdzenie 4.7. [153,85]

Układ (4.35) jest MASNO wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$\operatorname{Re} \lambda_i \left(\sum_{j=0}^m A_j \exp(jy_i) \right) < 0, \forall y_i \in [0, T], i = 1, 2, \dots, n_i \quad (4.42)$$

lub równoważnie, gdy spełniony jest warunek (4.36) i

$$\det[j\omega I - \sum_{i=0}^m A_i \exp(jyI)] \neq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in [0, \pi]. \quad (4.43)$$

Jeżeli w zależności (4.37) uwzględnimy przypadek $\omega = 0$, tzn. dołączymy warunek

$$\det[-\sum_{i=0}^m A_i \exp(jyI)] \neq 0, \quad \forall y \in [0, \pi], \quad (4.44)$$

to otrzymamy warunek (4.43).

Zauważmy, że (4.44) jest inną postacią warunku (3.20), zapisaną w zależności od macierzy stanu układu (4.35). Jeżeli więc warunek (4.44) jest spełniony, to kryteria ASNO (twierdzenie 4.6) i MASNO (twierdzenie 4.7) są sobie równoważne.

Bezpośrednie sprawdzenie warunku (4.42) (który jest równoważny z zależnością (3.23)) jest trudne, wymaga bowiem liczenia wartości własnych macierzy zespolonej, której elementy są funkcjami $\cos(y)$ i $\sin(y)$. Można tego dokonać w prosty sposób jedynie w przypadku układu (4.35), przy $n=1$ (patrz przykład 2 w pracy [153]).

Warunek (4.42) można w przypadku ogólnym sprawdzić w sposób podany w poniższym twierdzeniu.

Wprowadźmy oznaczenie

$$A(\exp(-sh)) = \sum_{i=0}^m A_i \exp(-shi). \quad (4.45)$$

Twierdzenie 4.8 [12].

Układ (4.35) jest MASNO (tj. spełniony jest warunek (4.42)) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej dodatnio określonej macierzy hermitowskiej $Q(\exp(jy))$, $y \in [0, \pi]$, rozwiązanie $P(\exp(jy))$ zespolonego równania Lapunowa

$$A^*(\exp(jy))P(\exp(jy)) + P(\exp(jy))A(\exp(jy)) = -Q(\exp(jy)), \quad (4.46)$$

jest także dodatnio określoną macierzą hermitowską dla każdego $y \in [0, \pi]$. $\square$

W pracy [12] przedział zmian y jest określony jako $[0, 2\pi]$. Wystarczy jednak rozpatrywać tylko przedział $[0, \pi]$ [100]. W pracach [12, 13, 100] jest mowa o badaniu ASNO, gdy w rzeczywistości bada się tam w przypadku ogólnym MASNO, a ASNO tylko w przypadku, gdy warunek (4.44) jest spełniony.

Metody obliczania macierzy $P(\exp(jy))$, będącej rozwiązaniem równania (4.46), są omówione w rozdziale 10 niniejszej pracy.

PRZYKŁAD 4.3.

Dany jest układ z opóźnieniem, opisany równaniem (4.35) przy $m=1$, $n=2$ i o macierzach

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}, \quad (4.47)$$

gdzie a, b i c są to stałe, dodatnie współczynniki.

W rozważanym przykładzie macierz (4.45) ma postać

$$A(\exp(-sh)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b-c \exp(-sh) \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

a więc $\det A(\exp(jy)) = a > 0$. Oznacza to, że warunek (4.44) jest zawsze spełniony i kryteria ASNO i MASNO są sobie równoważne.

Dla rozpatrywanego układu z opóźnieniem rozwiązanie zespolonego równania Lapunowa (4.46) przy $Q(\exp(jy)) = I$ zostało wyznaczone w przykładzie 10.1, podanym w p. 10.1 niniejszej pracy. Ma ono postać

$$P(z) = \frac{1}{af(y)} \begin{bmatrix} |b+cz|^2 + a(a+1) & b+c\bar{z} \\ b+cz & a+1 \end{bmatrix}, \quad (4.49)$$

gdzie: $f(y) = 2(b+c \cos(y))$, $z = \exp(jy)$, $\bar{z} = \exp(-jy)$.

Łatwo zauważyć, że $P(\exp(jy))$ o postaci (4.49) jest macierzą dodatnio określoną wtedy i tylko wtedy, gdy $b+c \cos(y) > 0$ dla każdego $y \in [0, \pi]$, czyli, gdy $b > c$.

Na podstawie twierdzenia 4.8 możemy więc stwierdzić, że rozpatrywany układ jest MASNO (i także ASNO) wtedy i tylko wtedy, gdy $b > c$.

Ostatnio ukazała się praca [69], w której rozpatruje się stabilność niezależnie od wielkości opóźnień układów opisanych równaniem

$$A_n x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^m A_{ik} x^{(i)}(t-kh) = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.50)$$

gdzie: $x \in \mathbb{R}^n$; $A_n, A_{ik} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x^{(i)}(t) = (d^i/dt^i) x(t)$, $h > 0$.

Podano w niej warunek dostateczny MASNO układu typu opóźnionego ($N=n-1$ w (4.50)) i warunek dostateczny MASNO układu typu neutralnego ($N=n$ w (4.50)). Warunki te wyprowadzono uogólniając rezultaty pracy [79], w której rozpatrywano układy opisane równaniem (4.50), ale przy $x \in \mathbb{R}$.

Stosując wyniki pracy [69] do układu (4.35) i uwzględniając wprowadzoną w rozdziale 3 niniejszej pracy terminologię, otrzymamy podane niżej twierdzenie.

Twierdzenie 4.9.

Jeżeli $D(\exp(jy)) = -A(\exp(jy)) - A^*(\exp(jy))$, gdzie $A(\exp(-sh))$ ma postać (4.45), jest macierzą dodatnio określoną dla każdego $y \in [0, 2\pi]$, to układ (4.35) jest MASNO, a więc i ASNO. $\square$

Zauważmy, że w oparciu o twierdzenie 4.9 nie możemy badać MASNO układu analizowanego w przykładzie 4.3. Wynika to z postaci (4.48) macierzy $A(\exp(-sh))$.

4.3. Metoda Lapunowa

Zastosowanie drugiej metody Lapunowa do układów liniowych lub nieliniowych, z opóźnieniami współmiernymi lub niewspółmiernymi, prowadzi do mocnych warunków dostatecznych stabilności, które nie zależą od opóźnień. Są one więc warunkami stabilności niezależnie od wielkości opóźnień.

Dla układu typu opóźnionego można też sformułować twierdzenie o niestabilności [140], analogiczne do znanego z teorii układów bez opóźnień.

Zasadniczą ideą drugiej metody Lapunowa jest znalezienie takiej dodatnio określonej funkcji $V(x)$, odgrywającej rolę uogólnionej odległości od początku układu współrzędnych, aby jej pochodna względem czasu wzdłuż trajektorii stanu układu była niedodatnio określona lub ujemnie określona dla stabilności asymptotycznej. Zastosowanie drugiej metody Lapunowa do układów bez opóźnienia omówione jest np. w pracach [49,82,130].

W przypadku układów typu opóźnionego twierdzenie Lapunowa można sformułować analogicznie jak dla układów bez opóźnienia [51,52]. Jednakże w tym przypadku jego efektywność jest niewielka. Bardziej przydatny okazał się pomysł Krasowskiego [93], który zamiast funkcji Lapunowa rozpatrywał funkcjonały mające te same właściwości. Oryginalne wyniki Krasowskiego są cytowane np. w pracach [51,52,58]. Pomysł Krasowskiego został wykorzystany w licznych pracach poświęconych układom z opóźnieniami, np. w [49,64]. Został on też uogólniony na przypadek układów typu neutralnego [52, rozdz.III, §9].

Przykłady zastosowań metody Lapunowa-Krasowskiego do badania asymptotycznej stabilności (lub stabilizowalności) układów typu opóźnionego podane są w pracach [53,55,74,95,99,116,119,124,127,129,145].

Jako przykład podamy warunek dostateczny asymptotycznej stabilności, wynikający z pracy [55]. Warunek ten został sformułowany dla układu opisanego równaniem

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \quad t \geq 0, \quad (4.51)$$

gdzie: $x \in R^n$; $A_0, A_1 \in R^{n \times n}$, $h > 0$.

Jako funkcjonał Lapunowa dla rozpatrywanego układu przyjęto

$$V(x_t) = x^T(t) P x(t) + \int_{-h}^0 x_t^T(\theta) Q x_t(\theta) d\theta, \quad (4.52)$$

gdzie: $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, a P i Q są to symetryczne dodatnio określone macierze (w tym przypadku $Q=I$).

Twierdzenie 4.10. [55]

Jeżeli istnieje symetryczna dodatnio określona macierz P taka, że

$$S = A_0^T P + P A_0 + I + P A_1 A_1^T P \quad (4.53)$$

jest macierzą ujemnie określoną, to układ (4.51) jest asymptotycznie stabilny. $\square$

Zauważmy, że funkcjonal (4.52) zależy od wartości h , natomiast podany w twierdzeniu 4.10 warunek dostateczny nie zależy od wielkości opóźnienia h . Jest więc on warunkiem dostatecznym ASNO.

W pracy [75] dla układu (4.51) zaproponowano funkcjonal Lapunowa o bardziej ogólnej postaci niż (4.52). Jego stosowanie daje nie tylko warunek dostateczny, ale i konieczny asymptotycznej stabilności.

W pracy [97] dla układu (4.51) funkcjonal Lapunowa przyjęto w innej postaci niż (4.52) i wyprowadzono warunek konieczny i wystarczający asymptotycznej stabilności. Jednakże warunek dostateczny okazał się nieprawdziwy [25,36,138]. Poprawna jego wersja jest podana w pracy [154]. Stosowanie kryterium podanego w [97 i 154] jest jednak bardzo trudne, wymaga bowiem wyznaczania rozwiązania $P_1(0)$ nieliniowego równania macierzowego o postaci

$$\exp[(A_0 + P_1(0))h]P_1(0) = A_1. \quad (4.54)$$

Stosowanie kryterium Lapunowa do badania asymptotycznej stabilności układów z opóźnieniem jest trudne, wymaga bowiem dobierania odpowiedniego funkcjonu $V(x_t)$. Ogólna postać tego funkcjonu dla rozważanej klasy układów jest najczęściej znana, ale jego współczynniki (najczęściej macierzowe) należy dobierać. Na przykład dla układu (4.51) funkcjonal Lapunowa można wybrać w postaci (4.52), ale jego macierze P i Q nie są określone. Jeżeli przyjmiemy $Q=I$, to należy tak dobrać symetryczną dodatnio określoną macierz P , aby macierz S o postaci (4.53) była ujemnie określona. Jeżeli to nam się uda, to stwierdzimy, że układ ten jest asymptotycznie stabilny dla każdego $h \geq 0$.

5. WARUNKI POŁOŻENIA WSZYSTKICH ZER QUASI-WIELOMIANU W OLP

W niniejszym rozdziale dokonamy przeglądu metod badania położenia wszystkich zer quasi-wielomianu w OLP i podamy też pewne nowe rezultaty. Omówione poniżej metody prowadzą w przypadku ogólnym do warunków zależnych od wielkości opóźnienia i często wymagają znajomości jego wartości liczbowej.

Przypomnijmy, że położenie wszystkich zer w OLP jest warunkiem koniecznym i wystarczającym asymptotycznej stabilności wszystkich quasi-wielomianów typu opóźnionego i prawie wszystkich typu neutralnego (patrz p.3,2 niniejszej pracy).

Dany jest quasi-wielomian typu opóźnionego lub neutralnego o postaci

$$q(s, \exp(-sh)) = \sum_{i=0}^n s^i \sum_{k=0}^p a_{ik} \exp(-shk), \quad a_{n0} = 1. \quad (5.1)$$

Utwórzmy quasi-wielomian

$$q_1(s, \exp(sh)) = q(s, \exp(-sh)) \exp(shp), \quad (5.2)$$

który ma te same miejsca zerowe co quasi-wielomian (5.1). Można go napisać w postaci

$$q_1(s, \exp(sh)) = \sum_{i=0}^n s^i \sum_{k=0}^p a_{ik} \exp(sv_k), \quad a_{n0} = 1, \quad (5.3)$$

gdzie:

$$v_k = h(p-k). \quad (5.4)$$

Stosując oznaczenia

$$q(j\omega, \exp(-j\omega h)) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (5.5)$$

$$q_1(j\omega, \exp(j\omega h)) = P_1(\omega) + jQ_1(\omega), \quad (5.6)$$

ze wzoru (5.2) otrzymamy

$$P_1(\omega) = P(\omega) \cos(\omega h p) - Q(\omega) \sin(\omega h p), \quad (5.7)$$

$$Q_1(\omega) = Q(\omega) \cos(\omega h p) + P(\omega) \sin(\omega h p). \quad (5.8)$$

Poniżej omówione zostaną metody sprawdzania warunku

$$q(s, \exp(-sh)) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad (5.9)$$

dla quasi-wielomianu o postaci (5.1). Warunek ten oznacza, że wszystkie zera quasi-wielomianu leżą w OLP.

Najpierw podamy prosty warunek konieczny położenia wszystkich zer quasi-wielomianu (5.1) w OLP.

5.1. Prosty warunek konieczny

Rozwijając $\exp(sv_k)$ w szereg potęgowy quasi-wielomian (5.3) napiszemy w postaci

$$q_1(s, \exp(sh)) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i s^i, \quad (5.10)$$

gdzie:

$$b_i = \sum_{r=0}^p a_{ir} + \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{r=0}^{p-1} a_{kr} \frac{v_r^{i-k}}{(i-k)!} \quad \text{dla } i=0,1,\dots,n, \quad (5.11)$$

$$b_i = \sum_{k=0}^n \sum_{r=0}^{p-1} a_{kr} \frac{v_r^{i-k}}{(i-k)!} \quad \text{dla } i \geq n+1, \quad (5.12)$$

przy czym v_k ma postać (5.4).

Wzór (5.12) możemy przekształcić następująco:

$$b_i = \frac{v_0^{i-n}}{(i-n)!} \left\{ a_{n0} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{ko} \frac{v_0^{n-k} (i-n)!}{(n-k)!} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^n \sum_{r=1}^{p-1} a_{kr} \frac{v_r^{i-k} (i-n)!}{v_0^{i-n} (i-k)!} \right\}. \quad (5.13)$$

Ze wzorów (5.13) i (5.4) wynika, że zawsze istnieje taka liczba naturalna $N > n$, że

$$\text{sign } b_i = \text{sign } a_{10} \quad \text{dla każdego } i \geq N. \quad (5.14)$$

Ponieważ $a_{n0} = 1$, z powyższej zależności mamy $b_i > 0$ dla $i \geq N$. Ponadto, ze wzoru (5.12) wynika, że $b_i \rightarrow 0$ dla $i \rightarrow \infty$. Dla dużych wartości wskaźnika i współczynniki b_i są więc bardzo małe, ale dodatnie.

W pracy [32], na podstawie warunku podanego przez Czebotariewa i Mejmana [37], udowodniono następujący lemat.

Lemat 5.1.

Jeżeli quasi-wielomian (5.1) ma wszystkie zera w OLP, to współczynniki b_i , obliczone ze wzorów (5.11) i (5.12), spełniają warunek

$$b_i > 0, \quad i = 0, 1, \dots. \quad (5.15)$$

□

Nierówność (5.15) jest warunkiem koniecznym asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (5.10) typu Stodoli [58, str.152].

Sformułowany w lemacie 5.1 warunek jest też podany w [103], lecz bez dowodu. W pracy tej bez dowodu podano sposób określania liczby N , zdefiniowanej przez (5.14), ale błędnie, co jest wykazane w podanym poniżej przykładzie 5.1. Metoda określania liczby N w przypadku ogólnym nie jest znana.

Zauważmy, że jeżeli dla każdego quasi-wielomianu moglibyśmy określić liczbę N w sposób analityczny, to aby sprawdzić warunek (5.15), wystarczyłoby sprawdzić tylko N nierówności $b_i > 0$ dla $i = 0, 1, \dots, N-1$.

Zachodzą równości [32]:

$$\text{il } b_i = (-1)^{1/2} P_1^{(i)}(0) \quad \text{dla } i = 0, 2, 4, \dots, \quad (5.16)$$

$$\text{il } b_i = (-1)^{(i-1)/2} Q_1^{(i)}(0) \quad \text{dla } i = 1, 3, 5, \dots, \quad (5.17)$$

gdzie:

$$F^{(i)}(0) = (d^i/d\omega^i) F(\omega) \text{ w punkcie } \omega = 0.$$

W szczególności mamy więc

$$b_0 = P_1(0), \quad b_1 = \dot{Q}_1(0), \quad (5.18)$$

orzy czym, jak to wynika z (5.7) i (5.8),

$$P_1(0) = P(0) = q(0,1) = q_1(0,1); \quad \dot{Q}_1(0) = \dot{Q}(0) + ph P(0). \quad (5.19)$$

Współczynniki b_0 i b_1 można więc obliczać bezpośrednio ze wzorów (5.11) i (5.12) lub też ze wzorów (5.18) albo (5.19).

Prosty warunek konieczny asymptotycznej stabilności można więc sformułować tak, jak niżej.

Twierdzenie 5.1.

Quasi-wielomian (5.1) nie jest asymptotycznie stabilny jeżeli

$$b_0 = P(0) \leq 0 \quad \text{lub} \quad b_1 = \dot{Q}(0) + ph P(0) \leq 0, \quad (5.20)$$

gdzie $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ są odpowiednio jego częścią rzeczywistą i urojoną dla $s = j\omega$. $\square$

Podobny, ale słabszy warunek konieczny asymptotycznej stabilności jest podany w pracach [24,27,29], w których rozpatrywano układy typu opóźnionego i neutralnego, z opóźnieniami niewspółmiernymi i współmiernymi. Układy te były opisane równaniami stanu lub równaniami różniczkowo-różnicowymi n -tego rzędu. Podany w wyżej wymienionych pracach warunek ma postać $P_1(0) \dot{Q}_1(0) \leq 0$. Został on wypróbowany na podstawie kryterium Pontriagina [134], podczas gdy warunek (5.20) na podstawie kryterium Czebotariewa i Mejmana [37].

PRZYKŁAD 5.1. [31]

Dany jest quasi-wielomian o postaci (5.1) dla $n=1$, $p=3$ i o współczynnikach:

$$a_{10}=1; a_{1k}=0 \text{ dla } k=1,2,3; a_{00}=-1, a_{01}=5, a_{02}=1, a_{03}=4. \quad (5.21)$$

Obliczając b_i ze wzorów (5.11) i (5.12) otrzymamy $b_0=a_{00}+a_{01}+a_{02}+a_{03}=9$,

$$b_i = [i 3^{i-1} + h(-3^i + 2^i 5 + 1)] h^{i-1}/i \quad \text{dla } i \geq 1. \quad (5.22)$$

Łatwo zauważyć, że $b_i > 0$ dla $i=0,1,\dots,4$ i dla każdego $h > 0$. Prosty warunek konieczny asymptotycznej stabilności jest więc spełniony.

Jeżeli $b_i > 0$ dla $i \geq 5$, to ze wzoru (5.22) mamy

$$h < c_i, \quad (5.23)$$

gdzie:

$$c_i = \frac{i 3^{i-1}}{3^i - 2^i 5 - 1}, \quad i=5,6,\dots \quad (5.24)$$

Obliczając c_i ze wzoru (5.24) otrzymamy: $c_5=4,939$, $c_6=3,574$, $c_7=3,30$ i $c_i > c_7$ dla $i \geq 8$. Z powyższego wynika, że jeżeli $h < 3,3$, to warunek (5.23) jest spełniony dla $i \geq 5$. Z lematu 5.1 wynika więc, że rozpatrywany quasi-wielomian nie jest asymptotycznie stabilny dla $h \geq 3,3$.

W pracy [103] bez dowodu podano, że jeżeli $b_i > 0$ dla $i=0,1,\dots,2n+1$, gdzie n jest stopniem quasi-wielomianu (5.1) względem s , to $b_i > 0$ dla $i \geq 2n+2$. Pokażemy, że powyższe stwierdzenie nie jest prawdziwe w przypadku ogólnym. Jeżeli w rozpatrywanym quasi-wielomianie przyjmiemy $h=4$, to z (5.22) otrzymamy, że $b_i > 0$ dla $i=1,2,\dots,5$ i dla $i \geq 12$, lecz $b_i < 0$ dla $i=6,7,\dots,11$. Uwzględniając, że $b_0 > 0$ mamy więc $b_i > 0$ dla $i=0,1,\dots,2n+1=3$, ale nie wszystkie b_i są dodatnie dla $i \geq 2n+2=4$. $\square$

5.2. Uogólnione kryterium Routha-Hurwita

Ze wzorów (5.6) i (5.10) dla $s=j\omega$ mamy:

$$P_1(\omega) = b_0 - b_2 \omega^2 + b_4 \omega^4 - \dots,$$

$$Q_1(\omega) = b_1 \omega - b_3 \omega^3 + b_5 \omega^5 - \dots.$$

Utwórzmy dla quasi-wielomianu (5.10) wyznaczniki D_i w następujący sposób:

$$D_1 = b_1; D_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}; \dots; D_i = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & \dots & b_{2i-1} \\ b_0 & b_2 & b_4 & \dots & b_{2i-2} \\ 0 & b_1 & b_3 & \dots & b_{2i-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 \end{vmatrix} \quad (5.25)$$

Wyznaczniki te tworzy się w ten sam sposób jak wyznaczniki Hurwita dla wielomianów.

Twierdzenie 5.2. [37]

Jeżeli $P_1(\omega)$ i $Q_1(\omega)$ nie mają wspólnych zer i $q(0,1) > 0$, to quasi-wielomian (5.10) (a więc i (5.1)) ma wszystkie zera w OLP wtedy i tylko wtedy, gdy

$$D_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.26)$$

Dla quasi-wielomianu (5.10) można też utworzyć nieskończoną tablicę Routha. Dwa pierwsze wiersze tej tablicy mają postać

$$\begin{array}{cccc} b_0 & b_2 & b_4 & \dots \\ b_1 & b_3 & b_5 & \dots \end{array}$$

Pozostałe wiersze wyznacza się dokładnie w ten sam sposób jak dla wielomianów skończonego stopnia.

Oznaczmy przez d_i , $i = 0, 1, \dots$, elementy pierwszej kolumny tablicy Routha, utworzonej dla quasi-wielomianu (5.10). Oczywiście $d_0 = b_0$, $d_1 = b_1$.

W podobny sposób jak dla wielomianów skończonego stopnia (np. [130]) można wykazać, że

$$D_i = d_{i+1} D_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, \quad (5.27)$$

gdzie D_i oznacza wyznacznik utworzony w sposób podany w (5.25).

L e m a t 5.2.

Jeżeli $P_1(\omega)$ i $Q_1(\omega)$ nie mają wspólnych zer i $q(0,1) > 0$, to quasi-wielomian (5.10) (i też (5.1)) ma wszystkie zera w OLP wtedy i tylko wtedy, gdy

$$d_i > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.28)$$

gdzie d_i są to elementy pierwszej kolumny nieskończonej tablicy Routha, utworzonej dla quasi-wielomianu (5.10) w sposób opisany powyżej. Dowód wynika z twierdzenia 5.2 i wzoru (5.27). $\square$

Stosowanie uogólnionego kryterium Hurwita wymaga obliczania wyznaczników stopnia coraz to wyższego ($i=1,2,3,\dots$), podczas gdy przy stosowaniu uogólnionego kryterium Routha należy obliczać tylko wyznaczniki stopnia drugiego. Stosowanie kryterium Routha jest więc wygodniejsze. Jednakże ze względu na fakt, że przy obu tych kryteriach należy sprawdzić nieskończoną liczbę nierówności, ich efektywność jest niewielka. Na przykład na podstawie uogólnionego kryterium Routha można w niektórych przypadkach stwierdzić niestabilność quasi-wielomianu, jeżeli po pewnej skończonej liczbie obliczeń pojawi się w pierwszej kolumnie wyraz ujemny.

PRZYKŁAD 5.2.

Rozpatrzmy quasi-wielomian analizowany w przykładzie 5.1. Załóżmy, że $h=0,2$. Z przykładu 5.1 wynika, że przy $h=0,2$ wszystkie współczynniki b_i są dodatnie. Przykładowo podamy wartości niektórych z nich: $b_0=9$, $b_1=2,6$, $b_2=0,84,\dots$, $b_{10}=0,2625 \cdot 10^{-7}, \dots$, $b_{20}=0,4859 \cdot 10^{-21}$. Wyznaczając uogólnioną tablicę Routha otrzymamy następujące wartości elementów jej pierwszej kolumny: $d_0=9$, $d_1=2,6$, $d_2=0,1526$, $d_3=-0,1097$, $d_4=0,01575$, $d_5=0,108 \cdot 10^{-2}$, $\dots$, $d_{20}=0,6966 \cdot 10^{-26}$, $d_{21}=0,1079 \cdot 10^{-27}, \dots$. Z obliczonych 22 współczynników d_i tylko d_3 jest ujemny, a pozostałe są dodatnie. Z lematu 5.2 wynika więc, że rozpatrywany quasi-wielo-

mian dla $h=0,2$ ma zera w prawej półpłaszczyźnie, a więc nie jest asymptotycznie stabilny. $\square$

5.3. Metoda D-podziału

Metoda D-podziału, omówiona dla wielomianów np. w [81], znajduje też zastosowanie w przypadku quasi-wielomianów [51,52,58,125]. Jej idea polega na tym, że przestrzeń współczynników quasi-wielomianu (5.1) dzielimy hiperpłaszczyznami na obszary, które odpowiadają quasi-wielomianom mającym jednakową liczbę zer w OPP. Zmiana liczby tych zer, przy ciągłej zmianie współczynników, może zaistnieć tylko przy przejściu zera przez oś urojoną, tzn. przy przejściu punktów przestrzeni współczynników przez granicę D-podziału. Każdemu obszarowi O_k D-podziału można przyporządkować liczbę k zer quasi-wielomianu o dodatniej części rzeczywistej. Wśród obszarów tego podziału znajdują się też obszary O_0 (jeżeli istnieją), którym odpowiadają quasi-wielomiany nie mające zer w OPP. Znajdowanie granic D-podziału dla quasi-wielomianów oraz sprawdzanie, który z obszarów jest obszarem O_0 , bo tylko takie nas interesują, przeprowadza się dokładnie w ten sam sposób jak dla wielomianów. Na przykład w celu wydzielenia O_0 , jeżeli jest on spójny, wystarczy sprawdzić, czy chociaż jeden jego punkt odpowiada quasi-wielomianowi o zerach z ujemną częścią rzeczywistą.

Przykłady zastosowań metody D-podziału dla prostych quasi-wielomianów są podane w pracach [51,52,58,89].

Metodę D-podziału stosuje się najczęściej do znajdowania obszarów asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu w przestrzeni współczynników. Metodę tę można stosować do znajdowania obszarów O_0 , również w przypadku zmian opóźnienia h , bowiem zera quasi-wielomianu są ciągłymi funkcjami h dla $h > 0$, przy czym dla $h=0$ ciągłość zachodzi dla quasi-wielomianów typu opóźnionego i dla tych typu neutralnego, których człon dominujący $d(\theta)$ ma wszystkie zera o module mniejszych od 1 (patrz p.2.5 niniejszej pracy). W przypadku ogólnym nie będzie to jednak metoda D-podziału, a jej rozwinięcie zwane metodą h -podziału (patrz rozdział 6 niniejszej pracy).

Niezmodyfikowaną metodę D-podziału można stosować, przy zmianach h i współczynników (bądź tylko h), do quasi-wielomianu (5.1).

przy $n=1$, po przekształceniu go do postaci

$$q(z, \exp(-z)) = z \sum_{k=0}^P a_{1k} \exp(-zk) + h \sum_{k=0}^P a_{0k} \exp(-zk), \quad a_{n0}=1, \quad (5.29)$$

przy założeniu

$$d(\theta) = \sum_{k=0}^P a_{1k} \theta^{P-k} \neq 0, \quad |\theta| \geq 1. \quad (5.30)$$

Postać (5.29) quasi-wielomianu (5.1), przy $n=1$, otrzymaliśmy po zastosowaniu w (5.1) podstawienia $sh=z$.

PRZYKŁAD 5.3.

Dany jest quasi-wielomian

$$q(s, \exp(-sh)) = s + a_1 \exp(-sh) + a_2 \exp(-2sh). \quad (5.31)$$

Quasi-wielomian (5.31) jest typu opóźnionego, a więc warunek (5.30) jest spełniony. Przekształcając go do postaci (5.29) otrzymamy

$$q(z, \exp(-z)) = z + \tilde{a}_1 \exp(-z) + \tilde{a}_2 \exp(-2z), \quad (5.32)$$

gdzie:

$$\tilde{a}_1 = a_1 h, \quad \tilde{a}_2 = a_2 h.$$

Obliczając część rzeczywistą i urojoną quasi-wielomianu (5.32) dla $z=j\omega$ otrzymamy:

$$P(\omega) = \tilde{a}_1 \cos(\omega) + \tilde{a}_2 \cos(2\omega); \quad Q(\omega) = \omega - \tilde{a}_1 \sin(\omega) - \tilde{a}_2 \sin(2\omega). \quad (5.33)$$

Z twierdzenia 5.1 i wzorów (5.33) wynika, że prosty warunek konieczny położenia wszystkich zer quasi-wielomianu (5.32) w OLP ma postać

$$\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 > 0, \quad 1 + \tilde{a}_1 > 0. \quad (5.34)$$

Z równań $P(\omega) = 0$, $Q(\omega) = 0$ i z nierówności (5.34) wynika, że na płaszczyźnie $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ granice D-podziału można opisać równaniami:

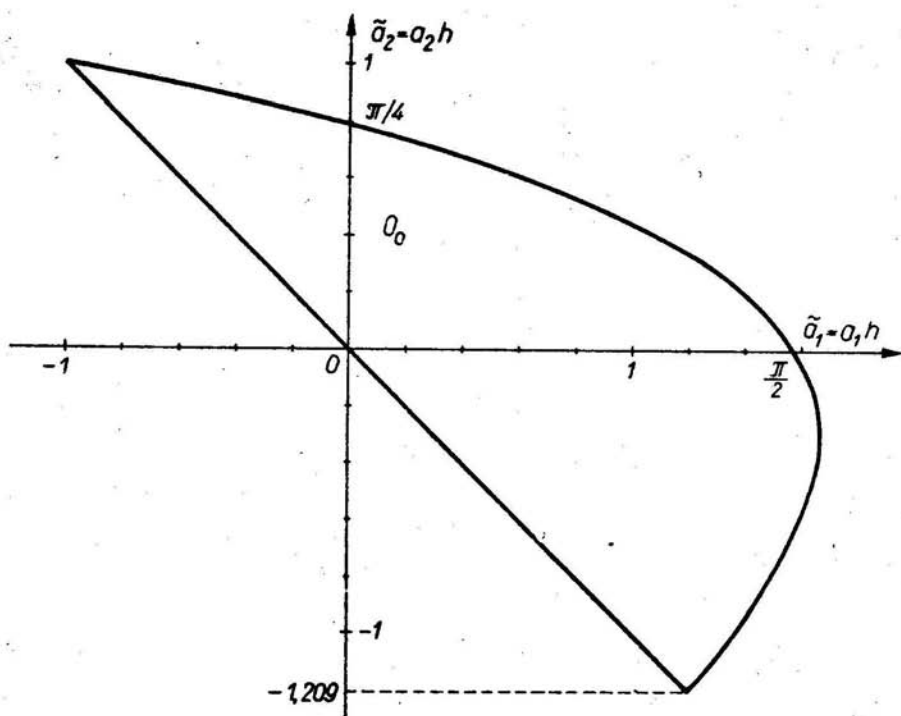
$$(I) \quad \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 = 0, \quad 1 + \tilde{a}_1 = 0.$$

$$(II) \quad \tilde{a}_1 = -\omega \cos(2\omega)/\sin(\omega), \quad \tilde{a}_2 = \omega \cos(\omega)/\sin(\omega). \quad (5.35)$$

Wykreślając krzywą opisaną parametrycznie równaniami (5.35) i uwzględniając warunki (5.34) otrzymamy, że granicą obszaru O_0 jest krzywa (5.35) dla $\omega \in (0, 2\pi/3]$. Ponieważ Jakobian

$$J = \begin{vmatrix} \partial P / \partial \tilde{a}_1 & \partial P / \partial \tilde{a}_2 \\ \partial Q / \partial \tilde{a}_1 & \partial Q / \partial \tilde{a}_2 \end{vmatrix} = -\sin(\omega)$$

jest ujemny dla ω z rozważanego przedziału, obszar O_0 leży po prawej stronie krzywej (5.35), jeżeli posuwamy się po niej dla ω rosnącego od zera do $2\pi/3$. Obszar O_0 quasi-wielomianu (5.31) na płaszczyźnie $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ jest pokazany na rysunku 5.1. Jeżeli wartości $\tilde{a}_1$ i $\tilde{a}_2$ leżą na brzegu obszaru O_0 , to quasi-wielomian (5.31) ma zera na osi urojonej. $\square$



Rys.5.1. Obszar O_0 asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (5.31)

5.4. Kryterium Pontriagina

Do podstawowych publikacji w teorii stabilności układów liniowych stacjonarnych z opóźnieniami należy praca Pontriagina [134]. Podane w niej kryterium położenia wszystkich zer quasi-wielomianu w OLP, zwane kryterium Pontriagina, jest cytowane w wielu pozycjach książkowych, np. [8,58,64]. Sposób korzystania z tego kryterium przy badaniu asymptotycznej stabilności pewnej klasy układów z opóźnieniami, jest omówiony w [30], przy czym w twierdzeniu 1 (i w warunkach z niego wynikających) tej pracy podany jest tylko warunek konieczny, a nie konieczny i wystarczający położenia wszystkich zer quasi-wielomianu w OLP.

Podane zostanie teraz kryterium sformułowane przez Pontriagina, ale w postaci nieco zmodyfikowanej.

Twierdzenie 5.3.

Quasi-wielomian (5.3), a więc i (5.1), ma wszystkie zera w OLP wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z następujących warunków:

(i) pierwiastki równań

$$P_1(\omega) = 0, \quad (5.36)$$

$$Q_1(\omega) = 0, \quad (5.37)$$

są rzeczywiste, jednokrotne i wzajemnie się przedzielają oraz spełniona jest nierówność

$$P_1(0) \dot{Q}_1(0) > 0; \quad (5.38)$$

(ii) wszystkie pierwiastki równania (5.36) są rzeczywiste, jednokrotne i dla każdego z nich spełniona jest nierówność

$$P_1(\omega) \dot{Q}_1(\omega) - \dot{P}_1(\omega) Q_1(\omega) > 0; \quad (5.39)$$

(iii) wszystkie pierwiastki równania (5.37) są rzeczywiste, jednokrotne i dla każdego z nich spełniona jest nierówność (5.39). $\square$

W powyższym twierdzeniu wszystkie warunki są wyrażone w zależności od części rzeczywistej $P_1(\omega)$ i urojonej $Q_1(\omega)$ quasi-wielomianu (5.3) dla $s = j\omega$. Jeżeli zaś znamy część rzeczywistą $P(\omega)$ i urojoną $Q(\omega)$ quasi-wielomianu (5.1) dla $s = j\omega$, to korzystając ze wzorów (5.7) i (5.8) równania (5.36) i (5.37) napiszemy w postaci

$$P(\omega) \cos(\omega hp) - Q(\omega) \sin(\omega hp) = 0, \quad (5.36a)$$

$$Q(\omega) \cos(\omega hp) + P(\omega) \sin(\omega hp) = 0, \quad (5.37a)$$

zaś nierówności (5.38) i (5.39) zapiszemy następująco:

$$P(0) [\dot{Q}(0) + hpP(0)] > 0, \quad (5.38a)$$

$$P(\omega) \dot{Q}(\omega) - \dot{P}(\omega) Q(\omega) + ph(P^2(\omega) + Q^2(\omega)) > 0. \quad (5.39a)$$

W pracy [134] podano też warunki konieczne i dostateczne istnienia tylko rzeczywistych zer funkcji $P_1(\omega)$ i $Q_1(\omega)$.

Kryterium Pontriagina jest trudne w stosowaniu i prowadzi do warunków wymagających rozwiązywania równań trygonometrycznych. Daje ono efektywne wyniki tylko dla pewnych klas quasi-wielomianów (5.3) (a więc i (5.1)), najczęściej stopnia $n=1$ lub $n=2$, przy $p=1$.

Na podstawie kryterium Pontriagina wyprowadzono warunki konieczne i wystarczające (w zależności od współczynników) położenia wszystkich zer quasi-wielomianu (5.1) w OLP w następujących przypadkach:

- 1) $n=p=1$ i wszystkie współczynniki niezerowe oraz przypadki szczególne: (i) $a_{11}=0$, (ii) $a_{11}=a_{00}=0$, (iii) $a_{00}=0$ [26],
- 2) $n=2, p=1, a_{10}=a_{00}=0$ [33],
- 3) $n=2, p=1$ w następujących przypadkach: (i) $a_{21}=a_{11}=0$, (ii) $a_{21}=a_{01}=0$, (iii) $a_{11}=a_{01}=0$ [9,73],
- 4) $n=3, p=1, a_{31}=a_{21}=a_{11}=0, a_{00}=0$ [71],
- 5) $n=4, p=1, a_{41}=a_{31}=0$, przy czym dopuszczono zmiany współczynników a_{21}, a_{11}, a_{01} , a pozostałym nadano konkretne wartości wynikające ze struktury rozważanego układu regulacji [149],
- 6) $n=p=1, a_{11}=0$, przy czym $a_{10}, a_{00} \in \mathbb{R}, a_{01} \in \mathbb{C}$ [6].

W wyżej wymienionych pracach, poza [26,33], przyjmowano $h=1$.

W pracy [87], wykorzystując rezultaty podane przez Pontriagina, wyznaczono obszary asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (5.1) w przypadku, gdy $n=3$, $p=1$, $a_{31}=a_{21}=a_{00}=0$, $a_{30}=1$, $a_{20}=2$, $a_{10}=1$.

Przykłady zastosowań kryterium Pontriagina są też podane w [8, rozdz.13].

PRZYKŁAD 5.4.

Dany jest quasi-wielomian typu opóźnionego o postaci

$$q(s, \exp(-sh)) = s + a_0 + a_1 \exp(-sh), \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}. \quad (5.40)$$

Na podstawie kryterium Pontriagina można sformułować podany niżej warunek.

Lemat 5.3. [26]

Quasi-wielomian (5.40) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki

- (i) $a_0 h > -1$,
- (ii) $a_0 + a_1 > 0$,
- (iii) $a_1 + \sqrt{\omega_1^2 + a_0^2} < 0$, gdzie $\omega_1 \in (0, \pi/h)$ i jest rozwiązaniem równania $\omega = a_0 \operatorname{tg}(\omega h)$. □

Zauważmy, że nierówności (i) i (ii) wynikają z prostego warunku koniecznego, podanego w twierdzeniu 5.1. □

5.5. Metoda Czebotariewa i Mejmana

Do podstawowych publikacji w teorii stabilności układów z opóźnieniami, obok [134], należy praca Czebotariewa i Mejmana [37]. Podano w niej, między innymi, warunki położenia wszystkich zer w OLP quasi-wielomianów

$$f_1(s) = (b_1 s + b_0) \cosh(s) + (d_1 s + d_0) \sinh(s), \quad (5.41)$$

$$f_2(s) = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0) \cosh(s) + (d_2 s^2 + d_1 s + d_0) \sinh(s), \quad (5.42)$$

gdzie $\cosh(s)$ i $\sinh(s)$ oznaczają odpowiednio cosinus hiperboliczny i sinus hiperboliczny zmiennej s . Warunki te wyprowadzono korzystając z kryterium Pontriagina, przy czym badanie, kiedy $P(\omega)$ i $Q(\omega)$, gdzie $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ oznacza odpowiednio część rzeczywistą i urojoną $f_1(s)$ lub $f_2(s)$ dla $s=j\omega$, mają jednokrotne, rzeczywiste i nawzajem przedzielające się zera, przeprowadzono na podstawie analizy uogólnionego ciągu Sturma, utworzonego dla $P(\omega)$ i $Q(\omega)$. Rezultaty pracy [37] są cytowane w [58].

Rozpatrzmy teraz szczegółowiej quasi-wielomian (5.42). Warunki położenia wszystkich jego zer w OLP mają różne postaci, w zależności od znaku współczynników b_1 i d_1 . Możemy wyróżnić 6 przypadków, kiedy to quasi-wielomian (5.42) może mieć wszystkie zera w OLP.

Jeżeli

$$b_0 > 0, \quad b_2 > 0, \quad d_0 > 0, \quad d_2 > 0,$$

to wyróżniamy cztery przypadki:

- 1) $b_1 > 0, \quad d_1 > 0,$
- 2) $b_1 < 0, \quad d_1 < 0,$
- 3) $b_1 > 0, \quad d_1 < 0,$
- 4) $b_1 < 0, \quad d_1 > 0.$

Jeżeli zaś

$$b_0 > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad d_2 > 0,$$

to wyróżniamy dwa przypadki

- 5) $d_1 > 0, \quad d_0 < 0,$
- 6) $d_1 < 0, \quad d_0 < 0.$

Przypadki 1)-4) rozpatrzono w [37], ale wskutek błędnego założenia pominięto tam 5) i 6). Zostały one rozpatrzone w [58], ale w przypadku 6) jeden z warunków podano tam błędnie. Poprawną postać warunków położenia wszystkich zer quasi-wielomianu (5.42) w OLP w przypadku 6) podano w pracy [33]. Zacytujemy teraz te warunki.

Twierdzenie 5.4. [33]

Quasi-wielomian (5.42) w przypadku 6) ma wszystkie zera w OLP wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

$$(i) \quad b_1 + d_0 > 0, \quad b_2 + b_0/2 + d_1 > 0, \quad (5.43)$$

$$(ii) \quad 0 < \frac{\tau}{\pi} - \frac{1}{\pi} \frac{(b_0 d_2 - b_2 d_0) \operatorname{tg} \tau}{b_1 b_2 - d_1 d_2 \operatorname{tg}^2 \tau} < 1, \quad (5.44)$$

gdzie

$$\operatorname{tg} \tau = \sqrt{\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}},$$

oraz

$$A = b_0 b_1^2 b_2, \quad B = b_1 d_1 (b_0 d_2 + b_2 d_0) - (b_0 d_2 - b_2 d_0)^2, \quad C = d_0 d_1^2 d_2. \quad \square$$

W pracy [58, str.162, przyp.VI] zamiast podanej w twierdzeniu 5.4 nierówności (5.44) jest inna zależność, która nie jest jej równoważna. Pozostałe zależności są takie same jak w powyższym twierdzeniu.

Wyniki, uzyskane przez Czebotariewa i Mejmiana dla quasi-wielomianów (5.41) i (5.42), uogólniono w [5] na przypadek quasi-wielomianu

$$f_3(s) = (b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0) \cosh(s) + (d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0) \sinh(s). \quad (5.45)$$

Uzyskane w pracy [5] warunki sformułowano jednak w postaci niezbyt dogodnej do praktycznego wykorzystania, tzn. nie w postaci jawnych, zwartych wzorów wiążących współczynniki.

Podane w pracy [37] warunki można stosować do tych quasi-wielomianów (5.1), przy $n=1$ lub $n=2$, które dadzą się przekształcić do postaci (5.41) lub (5.42).

Sposób korzystania z kryterium Czebotariewa i Mejmiana ilustruje poniższy przykład.

PRZYKŁAD 5.5.

Zbadajmy asymptotyczną stabilność quasi-wielomianu (5.40), analizowanego w przykładzie 5.4.

Równanie $q(s, \exp(-sh)) = 0$ ma postać

$$s + a_0 + a_1 \exp(-sh) = 0. \quad (5.46)$$

Stosując w równaniu (5.46) podstawienie $sh=z$, mnożąc obustronnie przez $h \exp(-z/2)$ i ponownie stosując podstawienie $z=2w$ otrzymamy

$$(2w + ha_0) \exp(w) + ha_1 \exp(-w) = 0. \quad (5.47)$$

Uwzględniając, że

$$\exp(w) = \cosh(w) + \sinh(w), \quad \exp(-w) = \cosh(w) - \sinh(w),$$

z równania (5.47) po przekształceniach otrzymamy

$$(2w + ha_0 + ha_1) \cosh(w) + (2w + ha_0 - ha_1) \sinh(w) = 0.$$

Lewą stronę powyższego równania możemy napisać w postaci (5.41), gdzie:

$$b_1 = d_1 = 2, \quad b_0 = h(a_0 + a_1), \quad d_0 = h(a_0 - a_1). \quad (5.48)$$

Stosując kryterium Czebotariewa i Mejmmana, sformułowane dla quasi-wielomianu (5.41) i uwzględniając wzory (5.48), po licznych przekształceniach otrzymamy podany niżej lemat.

L e m a t 5.4.

Quasi-wielomian (5.40) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(i) \quad a_0 + a_1 > 0, \quad a_0 - a_1 \geq 0, \quad h \geq 0 \quad (5.49)$$

lub

$$(ii) \quad a_0 + a_1 > 0, \quad a_0 - a_1 < 0, \quad 0 \leq h < \frac{2}{\sqrt{a_1^2 - a_0^2}} \arctg \sqrt{\frac{a_1 + a_0}{a_1 - a_0}}. \quad (5.50) \quad \square$$

Zauważmy, że (5.49) jest warunkiem ASNO (porównaj warunki (4.34)). Natomiast w (5.50) podany jest przedział wartości opóźnienia h , dla których quasi-wielomian (5.40) jest asymptotycznie stabilny. $\square$

W lemacie 5.4 podana jest druga postać, inna niż w lemacie 5.3; warunku koniecznego i wystarczającego asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (5.40). Zauważmy, że nie zachodzi tu konieczność rozwiązywania równania trygonometrycznego, jak ma to miejsce w przypadku warunku podanego w lemacie 5.3.

5.6. Kryterium Michajłowa

Dany jest quasi-wielomian typu opóźnionego o postaci

$$q(s, \exp(-sh)) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} s^i \sum_{k=0}^p a_{ik} \exp(-shk). \quad (5.51)$$

Sformułowanie kryterium Michajłowa dla quasi-wielomianu (5.51) jest takie samo jak w przypadku wielomianów.

Twierdzenie 5.5 [135,142]

Quasi-wielomian (5.51) ma wszystkie zera w OLP (jest asymptotycznie stabilny) wtedy i tylko wtedy, gdy krzywa zakreślona końcem wektora $q(j\omega, \exp(-j\omega h))$ (hodograf Michajłowa) przy zmianie ω od 0 do ∞ przechodzi w kierunku dodatnim, nie trafiając w początek układu współrzędnych, przez n ćwiartek płaszczyzny $(P(\omega), Q(\omega))$, gdzie $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ oznacza odpowiednio część rzeczywistą i urojoną quasi-wielomianu (5.51), dla $s=j\omega$. $\square$

Łatwo zauważyć, że $Q(0) = 0$. Z twierdzenia 5.1 wynika więc, że aby quasi-wielomian (5.51) był asymptotycznie stabilny, musi być spełniony warunek $P(0) > 0$. Hodograf Michajłowa takiego quasi-wielomianu musi zatem rozpoczynać się dla $\omega = 0$ na dodatniej półosi rzeczywistej.

W przypadku ogólnym quasi-wielomianów hodograf Michajłowa tworzy pętle, a więc $\varphi(\omega) = \arg q(j\omega, \exp(-j\omega h))$ nie rośnie jednostajnie przy zmianie wartości ω od 0 do ∞ . Ponadto przy $\omega \rightarrow \infty$ wartości bezwzględne $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ też dążą do nieskończoności, przy czym jeśli n jest parzyste, to $Q(\omega)$ (a jeśli nieparzyste to $P(\omega)$) rośnie nieograniczenie co do modułu oscylując wokół osi rzeczywistej (urojonej).

Z powodu wyżej wymienionych faktów wykreślenie hodografu Michajłowa dla quasi-wielomianu napotyka na duże trudności. Bezpośred-

Używanie kryterium Michajłowa w przypadku ogólnym quasi-wielomianów nie jest proste.

Ciekawą metodą badania asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (5.51), w przypadku opóźnień współmiernych lub też niewspółmiernych, zaproponowano w pracy [103]. Polega ona na komputerowej analizie przebiegu hodografu Michajłowa, bez konieczności jego wykreślenia.

Podstawowe idee tej metody są następujące:

a) jeżeli n jest parzyste, to liczba rzeczywistych zer $P(\omega)$ w przedziale $[0, \infty)$ jest skończona i dla quasi-wielomianu asymptotycznie stabilnego nie jest mniejsza od $n/2$ (może być większa o liczbę parzystą),

b) jeżeli n jest nieparzyste, to liczba rzeczywistych zer $Q(\omega)$ w przedziale $[0, \infty)$ jest skończona i dla quasi-wielomianu asymptotycznie stabilnego nie jest mniejsza od $(n-1)/2$ (może być większa o liczbę parzystą),

c) dla wszystkich rzeczywistych zer $P(\omega)$ lub $Q(\omega)$, w zależności od tego, czy n jest parzyste czy nie, muszą być spełnione odpowiednie nierówności, wyprowadzone w [103] na podstawie tzw. fałlowego kryterium stabilności. Mają one postać dość złożoną i nie będą tu cytowane.

Stosowanie podanej w [103] metody polega więc na tym, że znajdujemy wszystkie rzeczywiste zera $P(\omega)$ lub $Q(\omega)$ i następnie dla każdego z nich sprawdzamy odpowiednie nierówności, podane w tej pracy. Jeżeli liczba tych zer jest różna od podanej w punkcie a) lub b)), albo też nie wszystkie nierówności są spełnione dla każdego z tych zer, to quasi-wielomian nie jest stabilny.

W pracy [103] zaproponowano też komputerową metodę znajdowania rzeczywistych zer funkcji $P(\omega)$ i $Q(\omega)$.

Po modyfikacji odpowiednich zależności w sposób podany w [103], zaproponowaną tam metodę można też wykorzystać do sprawdzania warunku (5.9) dla quasi-wielomianu typu neutralnego. Przypomnijmy, że spełnienie warunku (5.9) nie zawsze jest równoważne asymptotycznej stabilności tego typu quasi-wielomianów, co nie jest uwzględnione w pracy [103].

Z twierdzenia 3.2, podanego w punkcie 3.2 niniejszej pracy, wynika, że przy badaniu asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu typu

neutralnego należy sprawdzić warunek (5.9), np. w oparciu o kryterium Michajłowa, tylko w przypadku, gdy człon dominujący tego quasi-wielomianu ma wszystkie zera o module mniejszym od jedności.

5.6.1. Zmodyfikowane kryterium Michajłowa

W pracy [155] zaproponowano pewną modyfikację kryterium Michajłowa, aby móc badać asymptotyczną stabilność układów wielowymiarowych, z opóźnieniami lub bez, opisanych równaniami stanu wysokiego rzędu. Quasi-wielomian charakterystyczny takiego układu z opóźnieniami typu opóźnionego ma postać (5.51), gdzie n przyjmuje duże wartości. Proponowaną w [155] metodę można oczywiście stosować w przypadku quasi-wielomianu typu opóźnionego dowolnego stopnia. Celem tej modyfikacji było wyeliminowanie niedogodności występującej przy wykreślaniu hodografu Michajłowa lub jego komputerowej analizie, a polegającej na tym, że:

- (i) należy rozpatrzyć duży przedział wartości ω ,
- (ii) składowa rzeczywista $P(\omega)$ i urojona $Q(\omega)$ hodografu dla układu wysokiego rzędu mogą być bardzo małe lub bardzo duże, co prowadzi do kłopotów z niedomiarem lub nadmiarem przy obliczeniach na maszynie cyfrowej.

Rezultaty pracy [155] są omówione w [126] w przypadku układu bez opóźnień.

Zaproponowaną w [155] metodę można stosować do badania asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (5.51) w przypadku opóźnień współmiernych i niewspółmiernych.

Utwórzmy quasi-wielomian $\tilde{q}(s, \exp(-sh))$ w następujący sposób:

$$\tilde{q}(s, \exp(-sh)) = q(s, \exp(-sh)) / w(s), \quad (5.52)$$

gdzie $q(s, \exp(-sh))$ ma postać (5.51), a $w(s)$ jest wielomianem stopnia n o postaci

$$w(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0, \quad (5.53)$$

którego wszystkie zera leżą w OLP.

Twierdzenie 5.6 [155]

Quasi-wielomian (5.51) ma wszystkie zera w OLP (jest asymptotycznie stabilny) wtedy i tylko wtedy, gdy zmodyfikowany hodograf Michajłowa $\tilde{q}(j\omega, \exp(-j\omega h))$ przy zmianie ω od 0 do ∞ nie obejmuje początku układu współrzędnych. Jeżeli zaś ten hodograf przy zmianie ω od $-\infty$ do ∞ obejmuje w kierunku ujemnym m razy początek układu współrzędnych, to quasi-wielomian (5.51) ma m zer o dodatniej części rzeczywistej. $\square$

Stosując oznaczenie

$$\tilde{q}(j\omega, \exp(-j\omega h)) = \tilde{P}(\omega) + j\tilde{Q}(\omega), \quad (5.54)$$

łatwo zauważymy, że

$$\tilde{P}(0) = P(0)/a_0, \quad \tilde{Q}(0) = 0, \quad (5.55)$$

gdzie $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ oznacza odpowiednio część rzeczywistą i urojoną quasi-wielomianu (5.51) dla $s = j\omega$. Ponadto zachodzi [155]

$$\tilde{P}(\omega) \rightarrow 1, \quad \tilde{Q}(\omega) \rightarrow 0 \quad \text{przy } \omega \rightarrow \infty. \quad (5.56)$$

Zmodyfikowany hodograf Michajłowa rozpoczyna się więc w punkcie $(P(0)/a_0, j0)$ i dąży do punktu $(1, j0)$ przy $\omega \rightarrow \infty$. Z twierdzenia 5.11 wynika, że jeżeli quasi-wielomian (5.51) jest asymptotycznie stabilny, to zmodyfikowany hodograf Michajłowa rozpoczyna się na dodatniej półosi rzeczywistej.

Przy sporządzaniu wykresu $\tilde{q}(j\omega, \exp(-j\omega h))$ nie wystąpią więc niedogodności jak przy wykreślaniu $q(j\omega, \exp(-j\omega h))$, kiedy to $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ dążą do ∞ co do modułu. Ponadto, ze względu na (5.56), można tu ograniczyć z góry przedział wartości ω , dla których wykreślamy $\tilde{q}(j\omega, \exp(-j\omega h))$, jeżeli np. stwierdzimy, że wykres ten zaczyna przebiegać wokół punktu $(1, j0)$.

Zauważmy, że we wzorze (5.52) zamiast wielomianu $w(s)$ można przyjąć quasi-wielomian typu opóźnionego o wszystkich zerach w OLP.

Od doboru wielomianu lub quasi-wielomianu $w(s)$ zależy gładkość przebiegu krzywej $\tilde{q}(j\omega, \exp(-j\omega h))$. W pracy [155], w przypadku układu z opóźnieniem lub bez, opisanego równaniem stanu, zapropono-

wano sposób doboru wielomianu $w(s)$, zapewniającego gładki przebieg wykresu $\tilde{q}(j\omega, \exp(-j\omega h))$. Na podstawie znajomości quasi-wielomianu trudno jest określić sposób doboru $w(s)$, zapewniającego gładki przebieg krzywej $\tilde{q}(j\omega, \exp(-j\omega h))$. Z pracy [155] wynika, że przy zmianie ω moduł $w(j\omega)$ powinien zmieniać się z tą samą szybkością co moduł $q(j\omega, \exp(-j\omega h))$.

Zauważmy, że jeżeli $\tilde{q}(s, \exp(-sh))$ utworzymy w następujący sposób:

$$\tilde{q}(s, \exp(-sh)) = q(s, \exp(-sh)) / w(s) - 1 ; \quad (5.57)$$

gdzie $w(s)$ jest wielomianem lub quasi-wielomianem stopnia n względem s , którego wszystkie zera leżą w QLP, to w twierdzeniu 5.6 sformułowanie "nie obejmuje początku układu współrzędnych" należy zastąpić sformułowaniem "nie obejmuje punktu $(-1, j0)$ ". W ten sposób otrzymamy warunek asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (5.51) typu Nyquista. Wtedy bowiem w twierdzeniu 5.6 będzie podany warunek konieczny i wystarczający asymptotycznej stabilności układu zamkniętego, którego transmitancja operatorowa układu otwartego ma postać

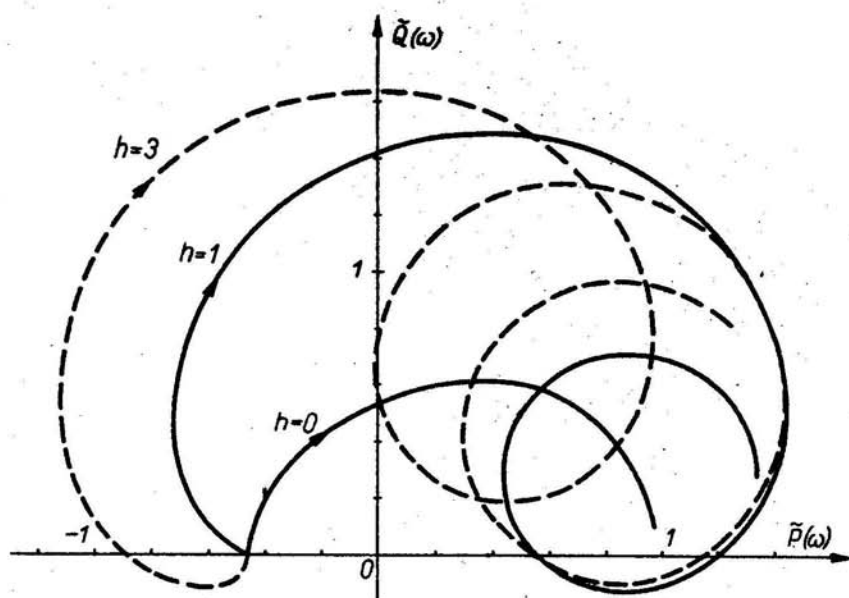
$$G_o(s) = \frac{q(s, \exp(-sh)) - w(s)}{w(s)} .$$

PRZYKŁAD 5.6.

Dany jest quasi-wielomian

$$q(s, \exp(-sh)) = s^2 + 4s - 5 + (2,7 - 3,8s) \exp(-sh) . \quad (5.58)$$

Wykres zmodyfikowanego hodografu Michajłowa $\tilde{q}(j\omega, \exp(-j\omega h)) = q(j\omega, \exp(-j\omega h)) / w(j\omega)$, gdzie $w(s) = s^2 + 6s + 5$, jest pokazany na rysunku 5.2 dla $h=0$ i $\omega \in [0; 30]$, $h=1$ i $\omega \in [0; 8,7]$, $h=3$ i $\omega \in [0; 4,8]$. Na podstawie tego rysunku, wykonanego dla małego przedziału zmian wartości ω , można stwierdzić, że jeżeli ω zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$, to zmodyfikowany hodograf Michajłowa obejmuje jeden raz początek układu współrzędnych dla rozpatrywanych wartości opóźnienia, tj. dla $h=0$, $h=1$, i $h=3$. Z twierdzenia 5.6 wynika więc, że dla tych wartości opóźnienia quasi-wielomian (5.58) ma jedno zero w OPP, a więc nie jest stabilny.



Rys.5.2. Wykresy zmodyfikowanego hodografu Michajłowa quasi-wielomianu (5.58) dla kilku wartości opóźnienia

Łatwo sprawdzić, że przy $h=0$ quasi-wielomian (5.58) ma jedno zero $s=s_1=1,419868$ leżące w OPP, a drugie zero w OLP. Z wykresu funkcji s^2+4s-5 i $(3,8s-2,7)\exp(-sh)$ wynika, że dla każdego $h \geq 0$ istnieje taka wartość rzeczywista s , przy której te wykresy się przecinają, ale tylko jeden raz. Dla $h \rightarrow \infty$ quasi-wielomian (5.58) staje się wielomianem $q(s,0) = s^2 + 4s - 5$, który ma zero $s=s_2=1$ leżące w OPP (drugie leży w OLP). Ponieważ równania $P(\omega) = 0$ i $Q(\omega) = 0$, gdzie $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ są to odpowiednio, część rzeczywista i urojona quasi-wielomianu (5.58) dla $s=j\omega$, nie mają rozwiązania rzeczywistego dla każdego $h \geq 0$, zera quasi-wielomianu (5.58) nie przecinają osi urojonej przy h zmieniającym się od 0 do ∞ . Z powyższych rozważań wynika, więc, że rozpatrywany quasi-wielomian ma jedno zero w OPP dla każdego $h \geq 0$. Jest to zero rzeczywiste, które przy h rosnącym od 0 do ∞ przesuwa się po osi rzeczywistej od punktu $s=s_1=1,419868$ do punktu $s=s_2=1$. $\square$

5.7. Inne metody

Wśród metod badania położenia zer w OLP quasi-wielomianów dużą grupę stanowią metody oparte o znaną z teorii funkcji analitycznych zasadę argumentu, omówioną np. w [102,8]. Należy do nich cytowana w [51,52,58] tzw. metoda amplitudowo-fazowa Cypkina, omówione w p.5.6 niniejszej pracy kryterium Michajłowa, czy też inne metody, omówione w pracach [4,92,107,141,143]. Z metodami opartymi o zasadę argumentu ściśle wiąże się uogólnienie dla quasi-wielomianów graficznych metod typu Nyquista [92,104,120,158].

W pracach [110,139] podano numeryczne metody wyznaczania zer, spełniających warunków $\operatorname{Re} s \geq -\alpha$ ($\alpha \geq 0$) quasi-wielomianu typu opóźnionego. Metody te mogą być wykorzystane do wykrywania istnienia zer quasi-wielomianów w prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej s .

Znaną z teorii układów bez opóźnienia metodę badania rozkładu zer wielomianów (w funkcji pewnego parametru) na podstawie analizy linii pierwiastkowych uogólniono w pracy [144] na przypadek pewnej klasy quasi-wielomianów. Metodę linii pierwiastkowych wykorzystano w p.7.2 niniejszej pracy do badania w funkcji opóźnienia h asymptotycznej stabilności z szybkością zanikania γ quasi-wielomianów typu opóźnionego.

Pewne uogólnienie omówionej w p.5.3 niniejszej pracy metody D-podziału stanowi tzw. metoda h -dekompozycji lub h -podziału. Metoda ta jest opisana w następnym rozdziale niniejszej pracy.

6. BADANIE ROZKŁADU ZER QUASI-WIELOMIANU ZA POMOCĄ METODY H-PODZIAŁU

Dany jest quasi-wielomian o postaci

$$q(s, \exp(-sh)) = \sum_{k=0}^p \sum_{i=0}^n a_{ik} s^i \exp(-shk), \quad a_{n0} = 1. \quad (6.1)$$

Założmy, że wartości wszystkich współczynników a_{ik} są ustalone, a opóźnienie h zmienia się w sposób ciągły w przedziale $[0, \infty)$.

Wprowadźmy też następujące założenia:

(i) wielomiany $w_k(s) = \sum_{i=0}^n a_{ik} s^i$, $a_{n0} = 1$, (6.2)

$k=0, 1, \dots, p$, nie mają wspólnych zer na osi urojonej,

(ii) spełniony jest warunek

$$d(\theta) \neq 0, \quad |\theta| \geq 1, \quad (6.3)$$

gdzie $d(\theta)$ jest członem dominującym quasi-wielomianu (6.1) o postaci (2.35), co oznacza, że granica spektralna tego quasi-wielomianu jest ciągłą funkcją h na przedziale $[0, \infty)$ (patrz twierdzenie 2.1).

Zauważmy, że jeżeli spełniony jest warunek (6.3), to położenie wszystkich zer w OLP quasi-wielomianu (6.1), typu opóźnionego lub neutralnego, jest równoważne jego asymptotycznej stabilności (patrz twierdzenia 3.1 i 3.2).

Przy powyższych założeniach, do badania rozkładu zer quasi-wielomianu (6.1) w funkcji opóźnienia h , stosuje się pewną modyfika-

cję omówionej w p.5.3 niniejszej pracy metody D-podziału, zwaną metodą h-podziału (lub τ -podziału, gdy opóźnienie oznacza się przez τ). W tej metodzie oś liczbowa opóźnienia h dzieli się punktami h_k , zwanymi granicami h-podziału, na przeliczalną liczbę rozłącznych przedziałów. W każdym z tych przedziałów quasi-wielomian (6.1) ma ustaloną liczbę zer o dodatniej części rzeczywistej. Liczba tych zer, przy ciągłej zmianie wartości h od 0 do ∞ , może ulec zmianie tylko przy przejściu zera przez oś urojona, czyli przy przejściu wartości h przez granicę h-podziału.

Metoda h-podziału pozwala określić wartości opóźnienia h , dla których quasi-wielomian (6.1) ma wszystkie zera w OLP. Ma to duże znaczenie praktyczne w przypadku, gdy opóźnienie h nie jest znane dokładnie lub może zmieniać się w pewnych granicach.

W pracach [42,43,50,72,98,105 i 34,106] zastosowano metodę h-podziału do badania rozkładu zer wybranych klas quasi-wielomianów, często bez znajomości metody D-podziału.

W ogólnym przypadku quasi-wielomianu, o postaci (6.1), metodę h-podziału przedstawiono w pracy [146], gdzie granice h-podziału wyznacza się na podstawie omówionych w [98] tzw. krzywych testowych oraz w [11], w której między innymi wykorzystano wyniki nie publikowanej pracy [131]. Omówimy teraz główne rezultaty prac [11,146], dotyczące metody h-podziału.

Jak wspomniano powyżej, dla $h=h_k$, gdzie h_k jest granicą h-podziału, quasi-wielomian (6.1) ma parę zer $s = \pm j\omega_k$ na osi urojonej. Aby wyznaczyć te wartości ω i h , odpowiadające granicy h-podziału, należy rozwiązać równanie

$$q(j\omega, \exp(-j\omega h)) = 0, \quad (6.4)$$

względem $\omega \in \mathbb{R}$ (ale $\omega \neq 0$) i $h > 0$. Można je napisać w postaci następującego układu równań:

$$\left. \begin{aligned} P(\omega, \exp(-j\omega h)) &= 0, \\ Q(\omega, \exp(-j\omega h)) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

gdzie $P(\omega, \exp(-j\omega h))$ jest częścią rzeczywistą, a $Q(\omega, \exp(-j\omega h))$ częścią urojoną quasi-wielomianu (6.1) dla $s=j\omega$. Ponieważ część rzeczywista tego quasi-wielomianu jest funkcją parzystą, a część uro-

joną funkcją nieparzystą zmiennej ω , rozwiązując układ równań (6.5) wystarczy ograniczyć się do wartości ω i h należących do zbioru R_+ .

Jeżeli układ równań (6.5) nie ma rozwiązania względem ω i h ze zbioru R_+ , to przy h zmieniającym się od 0 do ∞ zera quasi-wielomianu (6.1) nie przecinają osi urojonej ani też nie leżą na niej. Jeżeli ponadto $q(s,1)$ ma wszystkie zera w OLP, to w takim przypadku quasi-wielomian (6.1) też ma wszystkie zera w OLP dla każdego $h \geq 0$, a więc jest ASNO. Jeżeli zaś zbiór rozwiązań układu (6.5) nie jest pusty, to istnieje skończona liczba rozwiązań względem $\omega \in R_+$, oznaczmy ją przez M , i nieskończona względem $h \in R_+$. Z okresowości funkcji $\cos(\omega h)$ i $\sin(\omega h)$ wynika bowiem, że jeżeli dla $\omega = \omega_r$ i $h = h_r$ układ równań (6.5) jest spełniony, to też jest on spełniony dla $\omega = \omega_r$ i $h = h_{ri}$, $i=1,2,\dots$, gdzie

$$h_{ri} = h_r + 2\pi i / \omega_r. \quad (6.6)$$

Jeżeli wyznaczymy wszystkie wartości h_{ri} , $r=1,2,\dots,M$, $i=0,1,2,\dots$, spełniające dla $\omega = \omega_r$ równania (6.5), to należy je uporządkować w następujący ciąg rosnący (dołączając $h_0=0$):

$$0 = h_0 < h_1 < h_2 < \dots < h_k < \dots. \quad (6.7)$$

Elementy ciągu (6.7) dzielą przestrzeń $[0, \infty)$ na przeliczalną liczbę rozłącznych przedziałów takich, że dla każdego $h \in (h_{k-1}, h_k)$, $k=1,2,\dots$, quasi-wielomian (6.1) ma określoną liczbę zer w OPP. Tą liczbę można wyznaczyć np. na podstawie zmodyfikowanego kryterium Michajłowa, wybierając dla poszczególnych wartości $k=1,2,\dots$ dowolną wartość $h \in (h_{k-1}, h_k)$. Można ją też określić prościej w inny sposób, omówiony w dalszej części pracy.

Niech $N(h)$ oznacza, dla ustalonego h , liczbę zer quasi-wielomianu (6.1) o dodatniej części rzeczywistej. Z przyjętego podziału przestrzeni liczbowej opóźnienia $[0, \infty)$ wynika, że dla każdego ustalonego $h \in [0, \infty)$ mamy $N(h) < \infty$ i jeśli $\tilde{h}, \tilde{\tilde{h}} \in (h_{k-1}, h_k)$ dla dowolnego $k=1,2,\dots$, to $N(\tilde{h}) = N(\tilde{\tilde{h}})$.

Liczba $N(h)$ i zera quasi-wielomianu (6.1) mają następujące właściwości [11]:

a) dla dostatecznie małego h liczba $N(h)$ jest równa liczbie zer wielomianu $q(s,1)$ o dodatniej części rzeczywistej,

b) jeśli zero quasi-wielomianu (6.1) przechodzi przez punkt $s=j\omega_r$ dla $h=h_r$, to też przechodzi przez ten sam punkt dla $h=h_{ri}$ określonego wzorem (6.6), dla $i=1,2,\dots$. Kierunek jego przejścia przez punkt $j\omega_r$ jest jednakowy dla każdego h_{ri} określonego wzorem (6.6) dla $i=0,1,2,\dots$. Kierunek przejścia zera przez punkt $s=j\omega_r$ dla $h=h_r$ określa się za pomocą tzw. współczynnika (wskaźnika) przejścia p_r , zdefiniowanego wzorem (6.10). Sposób wyznaczania wskaźników przejścia p_r jest omówiony poniżej w p.6.1,

c) dla h dostatecznie dużego część zer quasi-wielomianu (6.1) w obszarze $\text{Re } s > 0$ zbiega do zer wielomianu $q(s,0)$, a pozostałe łączą do osi urojonej.

Liczba $N(h)$ przyjmuje wartości całkowite i może zmieniać się o wartości skończone jedynie w wyżej zdefiniowanych punktach h_k , będących granicami h -podziału. Dla ustalonego $h > 0$ wartość $N(h)$ można obliczyć, na podstawie znajomości $N(0)$ i odpowiadających granicom $h_k \in [0, h]$ wartości współczynników przejścia p_k (obliczonych w sposób podany w p.6.1), ze wzoru

$$N(h) = N(0) + \sum_{k=0}^{n_h} 2p_k, \quad (6.8)$$

gdzie n_h jest liczbą elementów ciągu (6.7) leżących w przedziale $[0, h]$, a $N(0)$ jest liczbą zer o dodatniej części rzeczywistej wielomianu $q(s,1)$.

Zauważmy, że jeżeli rozwiązując układ równań (6.5) otrzymamy, że jest on spełniony dla par (ω_r, h_r) , $r=1,2,\dots,M$, to jest on też spełniony dla par (ω_r, h_{ri}) , gdzie h_{ri} oblicza się ze wzoru (6.6) dla $i=1,2,\dots$. Z właściwości b) wynika, że odpowiadający parom (ω_r, h_{ri}) współczynnik przejścia p_{ri} jest taki sam jak dla pary (ω_r, h_r) , czyli dla $i=0,1,2,\dots$ zachodzi $p_{ri}=p_r$. Wygodnie jest zatem określić wartości współczynnika przejścia dla par (ω_r, h_r) , $r=1,2,\dots,M$, a następnie przyjmując $p_{ri}=p_r$ dla $i=0,1,2,\dots$. W ten sposób każdej wartości h_{ri} $r=1,2,\dots,M$, $i=0,1,2,\dots$, przyporządkujemy odpowiednią wartość współczynnika przejścia p_{ri} . Po uporządkowaniu tych wartości h_{ri} w ciąg h_k o postaci (6.7), będziemy mieli przyporządkowaną określoną wartość współczynnika przejścia p_k poszczególnym wartościom h_k granic h -podziału. Pary (h_k, p_k) noszą nazwę par krytycznych.

Z powyższych rozważań wynika, że quasi-wielomian (6.1) ma wszystkie zera w OLP (jest asymptotycznie stabilny) wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in H_0$, gdzie zbiór H_0 jest zdefiniowany następująco:

$$H_0 = \{h \in [0, \infty) : N(h) = 0\}. \quad (6.9)$$

6.1. Wyznaczanie wskaźników przejścia

Sposób wyznaczania wskaźników przejścia p_r omówimy głównie na podstawie pracy [11], w której uogólniono na przypadek quasi-wielomianu o postaci (6.1) podane w innym sformułowaniu wyniki pracy [98].

Wskaźnik przejścia p_r zera quasi-wielomianu (6.1) przez punkt $s = j\omega_r$ dla $h = h_r$ wyznacza się w różny sposób w zależności od tego, czy dla $h = h_r$ układ równań (6.5) ma jednokrotny czy też wielokrotny pierwiastek $\omega = \omega_r$.

6.1.1. Jednokrotny pierwiastek ω_r

Jeżeli dla $h = h_r$ układ równań (6.5) ma jednokrotny pierwiastek $\omega = \omega_r$, to kierunek przejścia zer quasi-wielomianu (6.1) przez punkt $s = s_r = j\omega_r$ dla $h = h_r$ określa się przez wskaźnik przejścia p_r zdefiniowany następująco:

$$p_r = \text{sign} \text{Re} \left(\frac{ds}{dh} \bigg|_{\substack{s=s_r \\ h=h_r}} \right), \quad (6.10)$$

gdzie:

$$\frac{ds}{dh} = - \left(\frac{\partial q(s, \exp(-sh))}{\partial h} \right) / \left(\frac{\partial q(s, \exp(-sh))}{\partial s} \right). \quad (6.11)$$

Uwzględniając (6.11) i (6.1), (6.2) oraz fakt, że $\text{sign}(\text{Re } z) = -\text{sign}(\text{Re } z^{-1})$ dla dowolnej liczby zespolonej z , wzór (6.10) napiszemy w postaci:

$$p_r = \text{sign} \left(\text{Re} \frac{\sum_{i=0}^P \dot{w}_i(s_r) \exp(-s_r h_r i)}{s_r \sum_{i=0}^P w_i(s_r) \exp(-s_r h_r i)} \right), \quad (6.112)$$

gdzie $\dot{w}_i(s_r) = (dw_i(s))/ds$ w punkcie $s=s_r$, a wielomian $w_k(s)$ ma postać (6.2).

Jeżeli wartość opóźnienia h rośnie oraz:

- (i) $p_r=1$, to dla $h=h_r$ para zer sprzężonych przechodzi w OPP, czyli

$$N(h_r+0) = N(h_r-0)+2, \quad (6.13)$$

- (ii) $p_r=-1$, to dla $h=h_r$ para zer sprzężonych przechodzi w OLP, czyli

$$N(h_r+0) = N(h_r-0)-2. \quad (6.14)$$

Oddzielnie należy rozpatrzyć nie uwzględniony w pracy [11] przypadek, gdy $\text{Re}(ds/dh) = 0$ dla $s=s_r$ i $h=h_r$. Wskaźnik przejścia w takim przypadku wyznacza się w opisany poniżej sposób [65].

Wprowadźmy oznaczenie

$$W_i(s_r, h_r) = \text{Re} \left(\frac{d^i s}{dh^i} \right) \bigg|_{\substack{s=s_r \\ h=h_r}} \quad (6.15)$$

i załóżmy, że:

$$W_i(s_r, h_r) = 0 \quad \text{dla} \quad i=1, 2, \dots, K,$$

$$W_i(s_r, h_r) \neq 0 \quad \text{dla} \quad i \geq K+1.$$

Jeżeli K jest nieparzyste, to zera quasi-wielomianu (6.1) nie przekraczają osi urojonej (linie pierwiastkowe są styczne do tej osi w punkcie $s=s_r$ dla $h=h_r$), czyli

$$N(h_r+0) = N(h_r-0), \text{ a więc } p_r = 0. \quad (6.16)$$

Jeżeli K jest parzyste, to

$$p_r = \text{sign } W_{K+1}(s_r, h_r), \quad (6.17)$$

gdzie $W_i(s_r, h_r)$ ma postać (6.15).

6.1.2. L-krotny pierwiastek ω_r

Jeżeli dla $h=h_r$ układ równań (6.5) ma L-krotny pierwiastek $\omega=\omega_r$, to współczynnik przejścia wyznacza się w sposób opisany poniżej [11].

1) Jeśli L jest parzyste, to zera quasi-wielomianu (6.1) nie przecina ją osi urojonej, a więc zachodzi (6.16).

2) Jeśli L jest nieparzyste, to:

$$N(h_r+0) = N(h_r-0) + 2 \quad \text{przy } L^+ > L^-, \quad (6.18)$$

$$N(h_r+0) = N(h_r-0) - 2 \quad \text{przy } L^+ < L^-, \quad (6.19)$$

gdzie L^- oznacza ilość liczb φ_i , spośród zbioru L-elementowego, spełniających relację

$$\pi/2 < \varphi_i < 3\pi/2, \quad (6.20)$$

a L^+ oznacza ilość pozostałych liczb φ_i , tzn. $L^+ = L - L^-$, przy czym

$$\varphi_i = \arg_i \left(\frac{ds}{dh} \bigg|_{\substack{s=s_r \\ h=h_r}} \right) = \frac{\varphi + 2\pi i}{L}, \quad i=0,1,\dots,L-1. \quad (6.21)$$

Przy L nieparzystym wskaźnik przejścia jest więc równy:

$$p_r = 1, \quad \text{jeśli } L^+ > L^-, \quad (6.22)$$

$$p_r = -1, \quad \text{jeśli } L^+ < L^-. \quad (6.23)$$

W powyższych rozważaniach został pominięty bardzo szczególny przypadek, gdy $\operatorname{Re}(ds/dh) = 0$ dla $s=s_r$ i $h=h_r$ (i układ równań (6.5) ma L-krotny pierwiastek $\omega=\omega_r$ dla $h=h_r$). Jest on rozpatrzony w pracy [98] za pomocą krzywych testowych, dla quasi-wielomianu o postaci

$$q(s, \exp(-sh)) = w_0(s) + w_1(s) \exp(-sh),$$

gdzie stopień wielomianu $w_0(s)$ względem s jest większy od stopnia wielomianu $w_1(s)$.

6.2. Wyznaczanie granic h-podziału

Aby wyznaczyć granice h-podziału, należy rozwiązać układ równań (6.5) względem ω i h ze zbioru $\mathbb{R}_+$. Jedyne dla quasi-wielomianów o prostej postaci można podać analityczne wzory na obliczanie ω_r i h_r , a więc i na wyznaczanie wartości opóźnienia h , dla których quasi-wielomian ma wszystkie zera w OLP (np. [42,105,106]). Przy rozwiązywaniu układu równań (6.5) w przypadku ogólnym quasi-wielomianów o postaci (6.1), należy wykorzystać odpowiednie metody, omówione w dalszej części niniejszego rozdziału.

PRZYKŁAD 6.1.

Wyznamy wartości opóźnienia, dla których quasi-wielomian

$$q(s, \exp(-sh)) = s + a_0 + a_1 \exp(-sh) \quad (6.24)$$

ma wszystkie zera w OLP,

Dla quasi-wielomianu (6.24) układ równań (6.5) ma postać

$$\left. \begin{aligned} a_0 + a_1 \cos(\omega h) &= 0, \\ \omega - a_1 \sin(\omega h) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

Z twierdzenia 5.1 wynika, że warunek konieczny położenia wszystkich zer quasi-wielomianu (6.24) w OLP ma postać

$$a_0 + a_1 > 0. \quad (6.26)$$

Łatwo zauważyć, że jeżeli

$$a_0 > |a_1| \quad \text{lub} \quad a_0 = a_1 > 0, \quad (6.27)$$

to spełniona jest nierówność (6.26) i układ równań (6.25) nie ma rozwiązania dla ω i h z $\mathbb{R}_+$, a więc quasi-wielomian (6.24) ma wszystkie zera w OLP dla każdego $h \geq 0$, a więc jest ASNO (por. przykład 4.2).

Jeżeli spełniona jest nierówność (6.26) i

$$a_0 - a_1 < 0, \quad (6.28)$$

to układ równań (6.25) ma rozwiązanie $\omega = \omega_1$ i $h = h_1$, gdzie

$$\omega_1 = a_1 \sin(\arccos(-a_0/a_1)) , \quad (6.29)$$

$$h_1 = (\arccos(-a_0/a_1)) / \omega_1 . \quad (6.30)$$

Równania (6.25) są też spełnione dla $\omega = \omega_1$ i $h = h_{1l}$, $l=1,2,\dots$, gdzie

$$h_{1l} = h_1 + 2\pi l / \omega_1 . \quad (6.31)$$

Obliczając ze wzoru (6.12) dla $\omega = \omega_1$ i $h = h_1$ wskaźnik przejścia oraz uwzględniając drugie z równań (6.25) otrzymamy

$$p_1 = \text{sign}((\sin(\omega_1 h_1)) / a_1 \omega_1) = \text{sign}(1/a_1^2) = 1.$$

Taki sam wskaźnik przejścia odpowiada każdej wartości h_{1l} , obliczonej ze wzoru (6.31) dla $l=0,1,2,\dots$.

Porządkując wartości h_{1l} w rosnący ciąg h_k otrzymamy

$$h_k = h_1 + 2\pi(k-1)/\omega_1, \quad k=1,2,\dots, \quad (6.32)$$

gdzie ω_1 i h_1 mają postaci (6.29) i (6.30). Każdej wartości h_k odpowiada wskaźnik przejścia $p_k=1$, $k=1,2,\dots$.

Dołączając do utworzonego ciągu h_k wartość $h_0=0$ oraz uwzględniając fakt, że przy założeniu (6.26) $N(0)=0$, ze wzoru (6.8) otrzymamy

$$N(h) = 2(k-1) \text{ dla } h \in (h_{k-1}, h_k), \quad k=1,2,\dots$$

Jeżeli spełnione są warunki (6.26) i (6.28), to quasi-wielomian (6.24) ma wszystkie zera w OLP (jest asymptotycznie stabilny) wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in [0, h_1)$, gdzie h_1 oblicza się ze wzoru (6.30).

Taki sam warunek asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (6.24) podany jest w lemacie 5.4, przy czym wartość h_1 wyznacza się tam z innego wzoru. $\square$

W przypadku ogólnym wyznaczanie wartości ω_r i h_r przeprowadza się na podstawie metod dogodnych do obliczeń numerycznych na maszynie cyfrowej. Na ich podstawie można też wyprowadzić dla pewnych klas quasi-wielomianów analityczne wzory, pozwalające wyznaczyć

przedziały wartości opóźnienia, dla których quasi-wielomian jest asymptotycznie stabilny (np. [11,146]).

Omówimy teraz pięć dogodnych do obliczeń numerycznych metod rozwiązywania układu równań (6.5) i wyznaczania przedziałów wartości opóźnienia, dla których quasi-wielomian (6.1) ma ustaloną liczbę zer w OPP. Dwie pierwsze metody są znane i przedstawione w pracy [11], natomiast trzy następne są to nowe metody. Trochę inny sposób rozwiązywania układu równań (6.5), za pomocą tzw. krzywych testowych (stosowanych w [98]) jest podany w pracy [146].

W opisie tych metod będziemy zakładać, że każdej wartości $h=h_r$ odpowiada jednokrotna wartość $\omega = \omega_r$ taka, że równania (6.5) są spełnione. Aby wyznaczyć krotność pierwiastka $\omega = \omega_r$, co jest potrzebne do obliczenia wskaźnika przejścia p_r , należy sprawdzić dla jakich wartości i spełnione jest równanie

$$q^{(i)}(j\omega_r \exp(-j\omega_r h_r)) = 0, \quad (6.33)$$

gdzie:

$$q^{(i)}(j\omega_r \exp(-j\omega_r h_r)) = (d^i q(s, \exp(-sh_r))/ds^i$$

w punkcie $s = j\omega_r$.

Jeżeli równanie (6.33) jest spełnione tylko dla $i=0$, to pierwiastek $\omega = \omega_r$, odpowiadający wartości $h=h_r$, jest jednokrotny. Jeżeli zaś równanie (6.33) jest spełnione dla $i=0,1,\dots,L-1$, a nie jest spełnione dla $i \geq L$, to pierwiastek $\omega = \omega_r$ jest L -krotny.

6.2.1. Metoda 1

Metoda ta została podana w nie publikowanej pracy [131] i jest cytowana w [11].

Stosując oznaczenia:

$$\tilde{z}_1 = \cos(\omega h), \quad \tilde{z}_2 = \sin(\omega h), \quad z = \exp(-j\omega h) = \tilde{z}_1 - j\tilde{z}_2 \quad (6.34)$$

układ równań (6.5) napiszemy w postaci:

$$\left. \begin{aligned} X(\omega, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2) &= P(\omega, \tilde{z}_1 - j\tilde{z}_2) = 0, \\ Y(\omega, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2) &= Q(\omega, \tilde{z}_1 - j\tilde{z}_2) = 0, \\ \tilde{z}_1^2 + \tilde{z}_2^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

Powyższy układ równań ma co najwyżej skończoną ilość rozwiązań względem ω , z powodu wielomianowej zależności funkcji X i Y od wszystkich swoich argumentów, lub nie ma ich wcale.

Algorytm metody 1:

1) Wyznaczamy rugownik R dla wielomianów $X(\omega, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ i $Y(\omega, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ zmiennej ω przy ustalonych chwilowo wartościach $\tilde{z}_1$ i $\tilde{z}_2$. Rugownik ten jest wyznacznikiem o wymiarach $(m_1 + m_2) \times (m_1 + m_2)$, gdzie m_1 i m_2 oznaczają odpowiednio stopień wielomianów $X(\omega, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ i $Y(\omega, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ względem zmiennej ω ($m_1 \leq n$, $m_2 \leq n$). Elementy tego wyznacznika zależą od $\tilde{z}_1$ i $\tilde{z}_2$, a jego wartość jest wielomianem stopnia nie większego niż $2np$, ze względu na te zmienne. W wielomianie tym zmienna $\tilde{z}_2$ występuje tylko w potęgach parzystych. Stosując podstawienie $\tilde{z}_2^2 = 1 - \tilde{z}_1^2$, wynikające z ostatniego z równań (6.35), otrzymamy więc wielomian $R(\tilde{z}_1)$ jednej zmiennej $\tilde{z}_1$. Szczegółowa analiza wskazuje, że po zastosowaniu tego podstawienia zerują się współczynniki stojące przy $\tilde{z}_1$ w potęgach większych niż np (patrz przykład 6.2). Oznacza to, że $R(\tilde{z}_1)$ jest wielomianem zmiennej $\tilde{z}_1$ stopnia np .

2) Obliczamy wszystkie pierwiastki $\tilde{z}_{1i}$, $i=1,2,\dots,m$, równania $R(\tilde{z}_1)=0$, leżące w przedziale $[-1,1]$. Z ostatniego równania układu (6.35) mamy $\tilde{z}_{2i} = \pm \sqrt{1 - \tilde{z}_{1i}^2}$, a więc $z_i = \tilde{z}_{1i} \mp j\tilde{z}_{2i}$, $i=1,2,\dots,m$. Z dwóch alternatywnych liczb z_i wybieramy taką, która po wstawieniu do równań (6.35) daje wielomiany $X(\omega)$ i $Y(\omega)$ mające co najmniej jedno wspólne zero rzeczywiste dodatnie.

3) Wyznaczamy wszystkie dodatnie rzeczywiste rozwiązania ω_{ir} , $r=1,2,\dots,n_i$, układu (6.35), odpowiadające poszczególnym wartościom z_i . Istnieje co najmniej jedno takie rozwiązanie dla każdego $i=1,2,\dots,m$.

4) Rozwiązując równanie

$$z_i = \exp(-j\omega_{ir}h_{ir}) , \quad (6.36)$$

dla wartości z_i wyznaczonych w kroku 2) i ω_{ir} w kroku 3), wyznaczymy kolejne liczby $h_{ir} \in [0, 2\pi/\omega_{ir}]$, $i=1,2,\dots,m$, $r=1,2,\dots,n_i$. Równanie (6.36) ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie w przedziale $[0, 2\pi/\omega_{ir}]$.

5) Układ równań (6.5) jest spełniony dla $\omega = \omega_{ir}$ i $h = h_{ir}$, $i=1,2,\dots,m$, $r=1,2,\dots,n_i$. Przy ustalonym $\omega = \omega_{ir}$, dodatkowe wartości opóźnienia

(oprócz h_{lr}), dla których zera quasi-wielomianu (6.1) pojawiają się na osi urojonej, oblicza się ze wzoru

$$h_{lrl} = h_{lr} + 2\pi i / \omega_{lr}, \quad l=1,2,\dots, \quad (6.37)$$

przy czym kierunek przejścia zer przez oś urojoną dla $h=h_{lrl}$ przy $l=1,2,\dots$ jest taki sam jak dla $h_{lr}=h_{lro}$.

PRZYKŁAD 6.2.

Dany jest quasi-wielomian

$$q(s, \exp(-sh)) = s^2 + 4s + 5 + (2,7 - 3,8s) \exp(-sh). \quad (6.38)$$

Stosując oznaczenia (6.34) układ równań (6.35) dla quasi-wielomianu (6.38) napiszemy w postaci

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 - 3,8\tilde{z}_2\omega + 5 + 2,7\tilde{z}_1 &= 0, \\ (4 - 3,8\tilde{z}_1)\omega - 2,7\tilde{z}_2 &= 0, \\ \tilde{z}_1^2 + \tilde{z}_2^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

Rugownik, utworzony dla wielomianów zmiennej ω , będących lewymi stronami dwóch pierwszych równań układu (6.39), ma postać:

$$R(\tilde{z}_1) = \begin{vmatrix} -1 & -3,8\tilde{z}_2 & 5+2,7\tilde{z}_1 \\ 4-3,8\tilde{z}_1 & -2,7\tilde{z}_2 & 0 \\ 0 & 4-3,8\tilde{z}_1 & -2,7\tilde{z}_2 \end{vmatrix}.$$

Obliczając wartość powyższego wyznacznika i uwzględniając ostatnie z równań (6.39) otrzymamy

$$R(\tilde{z}_1) = -33,75\tilde{z}_1^2 + 2,388\tilde{z}_1 + 31,67. \quad (6.40)$$

Wielomian $R(\tilde{z}_1)$ ma dwa zera w przedziale $[-1,1]$, są to: $\tilde{z}_{11} = 0,885801$, $\tilde{z}_{12} = 0,929856$. Z ostatniego z równań (6.39) mamy $\tilde{z}_{2l} = \pm \sqrt{1 - \tilde{z}_{1l}^2}$, $l=1,2$. Z dwóch alternatywnych liczb $\tilde{z}_{2l}$ wybieramy dla $l=1$ i $l=2$ te wartości, które po wstawieniu do (6.39) dają rozwiązanie w będące liczbą rzeczywistą dodatnią. Są to: $\tilde{z}_{21} = 0,464066$,

$\tilde{z}_{22}=0,367924$. Odpowiadające im wartości ω są następujące:

$$\omega_{11} = 1,976439, \quad \omega_{21} = 2,129246.$$

Rozwiązując równanie (6.36) względem h_{ir} dla $i=1,2$, $r=1$ otrzymamy $h_{11} = 0,244166$, $h_{21} = 0,176953$.

Zera quasi-wielomianu (6.38) pojawiają się więc na osi urojonej dla następujących wartości opóźnienia: $h_{11l} = h_{11} + 2\pi l / \omega_{11}$, $h_{21l} = h_{21} + 2\pi l / \omega_{21}$, $l=0,1,2,\dots$. Porządkując te wartości opóźnienia w ciąg rosnący h_k otrzymamy:

$$h_k = h_{21} + \pi(k-1)/\omega_{21}, \quad k=1,3,5,\dots, \quad (6.41)$$

$$h_k = h_{11} + \pi(k-2)/\omega_{11}, \quad k=2,4,6,\dots, \quad (6.42)$$

bowiem $h_{11l} > h_{21l}$ dla $l=0,1,2,\dots$.

Obliczając ze wzoru (6.12) dla $r=1$ i $r=2$ wskaźniki przejścia, przy czym $s_1 = j\omega_{21}$, $h_1=h_{21}$; $s_2=j\omega_{11}$, $h_2=h_{11}$, otrzymamy $p_1=1$, $p_2=-1$, a więc $p_k=1$ dla $k=1,3,5,\dots$; $p_k=-1$ dla $k=2,4,6,\dots$. Wartości p_k odpowiadają poszczególnym wartościom h_k , obliczonym ze wzorów (6.41) i (6.42).

Ponieważ wielomian $q(s,1) = s^2 + 0,2s + 7,7$ ma wszystkie zera w OLP, $N(0) = 0$, ze wzoru (6.8) wynika, że:

$$N(h) = 0 \text{ dla } h \in (h_{k-1}, h_k), \quad k=1,3,5,\dots, \quad (6.43)$$

$$N(h) = 2 \text{ dla } h \in (h_{k-1}, h_k), \quad k=2,4,6,\dots, \quad (6.44)$$

gdzie $h_0=0$, a poszczególne wartości h_k , $k=1,2,\dots$, liczy się ze wzorów (6.41) i (6.42).

Quasi-wielomian (6.38) jest więc asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wartości h leżą w przedziałach podanych w (6.43), []

6.2.2. Metoda 2

W pracy [11], uwzględniając metodę 1 i wyniki pracy [65], zaproponowano drugą metodę wyznaczania par (ω, h) , spełniających układ równań (6.5).

Stosując we wzorze (6.1) podstawienie $s=j\omega$ i $\exp(-j\omega h) = z$, równanie $q(j\omega, z) = 0$ napiszemy w postaci:

$$\sum_{k=0}^p \sum_{i=0}^n a_{ik}(j\omega)^i z^k = 0. \quad (6.45)$$

Stosując z kolei w równaniu (6.45) podstawienie

$$z = (1 - jx)/(1 + jx), \quad x \in \mathbb{R} \quad (6.46)$$

i mnożąc obustronnie przez $(1+jx)^p$, otrzymamy

$$\sum_{k=0}^p \sum_{i=0}^n a_{ik}(j\omega)^i (1 - jx)^k (1 + jx)^{p-k} = 0. \quad (6.47)$$

Aby wyznaczyć położone na osi urojonej punkty $s_r = j\omega_r$, przez które przechodzą zera $q(s, \exp(-sh))$ dla $h=h_r$, należy rozwiązać równanie (6.47) względem ω i x ze zbioru $\mathbb{R}_+$.

Wyrażenie (6.46) definiuje jednoznaczne odwzorowanie prostej rzeczywistej na okrąg jednostkowy bez punktu $(-1, j0)$. Dlatego też przypadek, gdy $\omega h = -\pi$ lub równoważnie

$$\omega h = \pi, \quad (6.48)$$

należy rozpatrzyć oddzielnie.

Lewa strona równania (6.47) jest wielomianem zespolonym dwóch zmiennych ω i x . Równanie to jest równoważne następującemu układowi:

$$\left. \begin{aligned} P(\omega, x) &= 0, \\ Q(\omega, x) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

gdzie $P(\omega, x)$ jest częścią rzeczywistą lewej strony równania (6.47), a $Q(\omega, x)$ częścią urojoną.

Algorytm rozwiązywania układu równań (6.49) jest następujący.

1) Wyznaczamy rugownik R dla wielomianów $P(\omega, x)$ i $Q(\omega, x)$ zmiennej x , traktując zmienną ω jako ustaloną. Jest on wyznacznikiem o wymiarach $2p \times 2p$, którego wartość jest wielomianem $R(\omega^2)$ stopnia nie większego niż np względem ω^2 .

2) Rozwiązujemy równanie $R(\omega^2) = 0$ względem ω^2 i obliczamy wartości $\omega \in \mathbb{R}_+$. Założmy, że równanie to ma $m \leq np$ rozwiązań $\omega_i, i=1,2,\dots,m$ ($\omega_i \in \mathbb{R}_+$).

3) Każdą wartość $\omega_i, i=1,2,\dots,m$, podstawiamy do (6.45) i obliczamy liczby z_i jako zera wielomianu zespolonego jednej zmiennej zespolonej z .

4) Na podstawie wyznaczonych wartości ω_i i z_i z równania

$$z_i = \exp(-j\omega_i h_i) \quad (6.50)$$

obliczamy wartości $h_i, i=1,2,\dots,m$.

5) Sprawdzamy, czy dla $z=-1$ równanie (6.45) ma zera $\omega \in \mathbb{R}_+$. Jeżeli tak, to oznaczmy je przez $\tilde{\omega}_i, i=1,2,\dots,M$. Odpowiadają im wartości $\tilde{h}_i = \pi/\tilde{\omega}_i, i=1,2,\dots,M$.

6) Granicami h -podziału są wyznaczone w p.4) liczby $h_i, i=1,2,\dots,m$, oraz dodatkowe wartości $h_{ir} = h_i + 2\pi r/\omega_i, r=1,2,\dots$. Jeżeli zbiór wartości $\tilde{h}_i$, wyznaczony w p.5), nie jest pusty, to granicami h -podziału są też liczby $\tilde{h}_i, i=1,2,\dots,M$ oraz dodatkowe wartości $\tilde{h}_{ir} = \tilde{h}_i + 2\pi r/\tilde{\omega}_i, r=1,2,\dots$. Kierunek przejścia zer przez oś urojoną dla h_{ir} ($\tilde{h}_{ir}$), $r=1,2,\dots$, jest taki sam jak dla $h_{i0}=h_i$ ($\tilde{h}_{i0}=\tilde{h}_i$).

PRZYKŁAD 6.3.

Zbadajmy asymptotyczną stabilność quasi-wielomianu

$$q(s, \exp(-sh)) = s^2 + s + 1 + s \exp(-sh). \quad (6.51)$$

Dla quasi-wielomianu (6.51) układ równań (6.49) ma postać

$$\left. \begin{aligned} 1 - \omega^2 &= 0, \\ 2\omega - \omega^2 x + x &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Łatwo zauważyć, że powyższy układ równań nie ma rozwiązania dla rzeczywistych wartości ω i x . Wystarczy więc rozpatrzyć tylko przypadek, gdy zachodzi (6.48). Stosując w (6.51) podstawienie $s=j\omega$ i uwzględniając równość (6.48) otrzymamy rozwiązanie równania $q(j\omega, \exp(-j\pi)) = 0$ w postaci $\tilde{\omega}_1=1$, a więc $\tilde{h}_1=\pi$. Dla $\tilde{h}_1=\pi$ quasi-

-wielomian (6.51) ma więc parę zer $s = \pm j$ na osi urojonej. Granicami h-podziału są liczby

$$h_k = \pi + 2\pi(k-1), \quad k=1,2,\dots \quad (6.52)$$

Ponieważ dla $s=j$ i $h=\pi$ $\operatorname{Re}(ds/dh) = 0$, ale $\operatorname{Re}(d^2s/dh^2) \neq 0$, z podanych w p.6.1.1 rozważań wynika, że $p_k=0$ dla $k=1,2,\dots$. Oznacza to, że zera quasi-wielomianu (6.51) nie przechodzą w OPP dla $h=h_k$, a jedynie linie pierwiastkowe są styczne do osi urojonej. Ponieważ wielomian $q(s,1) = s^2 + 2s + 1$ ma wszystkie zera w OLP, to $N(0) = 0$ i ze wzoru (6.8) wynika, że $N(h) = 0$ dla $h \in (h_{k-1}, h_k)$, $k=1,2,\dots$, gdzie $h_0=0$ a h_k oblicza się ze wzoru (6.52).

Quasi-wielomian (6.51) jest więc asymptotycznie stabilny dla dowolnych wartości h , z wyjątkiem punktów $h=(2k+1)\pi$, $k=0,1,2,\dots$. $\square$

6.2.3. Metoda 3

Granice h-podziału quasi-wielomianu (6.1) można wyznaczyć na podstawie kryterium Hermite'a, służącego do badania rozkładu zer wielomianów zespolonych.

Stosując we wzorze (6.1) podstawienie $\exp(-sh) = \exp(-jy)$ otrzymamy wielomian zmiennej s o współczynnikach zespolonych

$$q(s, \exp(-jy)) = \sum_{i=0}^n b_i s^i, \quad (6.53)$$

gdzie

$$b_i = \sum_{k=0}^p a_{ik} \exp(-jy_k), \quad i=0,1,\dots,n. \quad (6.54)$$

Utwórzmy dla wielomianu zespolonego (6.53) macierz Hermite'a $H(\exp(-jy))$, w sposób (4.10) - (4.12). Wszystkie zera wielomianu (6.53) mają ujemne części rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy macierz Hermite'a $H(\exp(-jy))$ jest dodatnio określona, czyli wszystkie jej wartości własne są dodatnie. Wartości własne tej macierzy są liczbami rzeczywistymi, zmieniającymi się w sposób ciągły wraz ze zmianą parametru y w przedziale $[0, 2\pi]$. Mogą one zmienić znak jedynie w tych punktach y , dla których $\det H(\exp(-jy)) = 0$. Jeżeli więc np. dla $y=y_1$ $\det H(\exp(-jy_1)) = 0$, to wielomian (6.53) ma na osi urojonej zero $s=j\omega_1$, czyli $q(j\omega_1, \exp(-jy_1)) = 0$.

Z porównania wzoru (6.1) dla $s=j\omega$ z wielomianem (6.53) wynika, że

$$y = \omega h. \quad (6.55)$$

Z powyższego wynika więc, że jeżeli dla $y=y_1$ i $s=j\omega_1$ wielomian (6.53) ma zera na osi urojonej, to quasi-wielomian (6.1) też ma zera na osi urojonej dla $s=j\omega_1$ i $h=y_1/\omega_1$.

Elementy macierzy $H(\exp(-jy))$ są funkcjami rzeczywistymi $\cos(y)$ i $\sin(y)$, a jej wyznacznik jest funkcją rzeczywistą zależną od $\cos(y)$ i od $\sin^2(y)$. Stosując podstawienie $\cos(y) = \tilde{z}_1$, można go napisać jako wielomian $F(\tilde{z}_1)$ zmiennej $\tilde{z}_1$ stopnia np.

Z powyższych rozważań wynika podany niżej algorytm wyznaczania granic h -podziału.

1) Stosując podstawienie (6.55) oraz

$$\tilde{z}_1 = \cos(y), \quad \tilde{z}_2 = \sin(y), \quad z = \exp(-jy) = \tilde{z}_1 - j\tilde{z}_2 \quad (6.56)$$

równanie $q(j\omega, \exp(-jy)) = 0$ zapisujemy w postaci następującego układu równań:

$$\left. \begin{aligned} X(\omega, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2) &= 0, \\ Y(\omega, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2) &= 0, \\ \tilde{z}_1^2 + \tilde{z}_2^2 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (6.57)$$

gdzie $X(\omega, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ jest częścią rzeczywistą, a $Y(\omega, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ częścią urojoną quasi-wielomianu $q(j\omega, \exp(-jy))$.

2) Stosując podstawienie $\exp(-sh) = \exp(-jy)$ i uwzględniając oznaczenia (6.56) quasi-wielomian (6.1) zapisujemy w postaci

$$q(s, \tilde{z}_1 - j\tilde{z}_2) = \sum_{l=0}^n b_l s^l, \quad (6.58)$$

gdzie

$$b_l = \sum_{k=0}^p a_{lk} (\tilde{z}_1 - j\tilde{z}_2)^k, \quad l=0, 1, \dots, n. \quad (6.59)$$

3) Dla wielomianu (6.58) tworzymy macierz Hermite'a $H(\tilde{z}_1 - j\tilde{z}_2)$ w sposób (4.10) - (4.12) i uwzględniając trzecie z równań (6.57), obliczamy jej wyznacznik $F(\tilde{z}_1)$, będący wielomianem rzeczywistym zmiennej $\tilde{z}_1$ stopnia np.

4) Obliczamy wszystkie pierwiastki $\tilde{z}_{1i}$, $i=1,2,\dots,m$, równania $F(\tilde{z}_1)=0$, leżące w przedziale $[-1,1]$. Z trzeciego z równań (6.57) mamy $\tilde{z}_{2i} = \pm \sqrt{1 - \tilde{z}_{1i}^2}$. Z dwóch alternatywnych liczb $\tilde{z}_{2i}$ wybieramy taką, dla której dwa pierwsze równania układu (6.57) mają co najmniej jedno wspólne zero $\omega \in \mathbb{R}_+$.

5) Obliczamy wszystkie wartości $\omega_{ir} \in \mathbb{R}_+$, $r=1,2,\dots,n_i$, spełniające dwa pierwsze równania układu (6.57) dla liczb $\tilde{z}_{1i}$ i $\tilde{z}_{2i}$ wyznaczonych w p.4).

6) Rozwiązując równanie

$$\exp(-jy_i) = z_i, \quad (6.60)$$

gdzie $z_i = \tilde{z}_{1i} - j\tilde{z}_{2i}$, wyznaczamy wartości y_i , $i=1,2,\dots,m$.

7) Ze wzoru

$$h_{ir} = y_i / \omega_{ir} \quad (6.61)$$

obliczamy wartości granic h-podziału. Granicami są też liczby $h_{irl} = h_{ir} + 2\pi l / \omega_{ir}$, dla $l=1,2,\dots$.

PRZYKŁAD 6.4.

Dany jest quasi-wielomian

$$q(s, \exp(-sh)) = s^2 + 8 - (0,2s + 2)\exp(-sh) - \exp(-2sh). \quad (6.62)$$

Stosując oznaczenia (6.56), odpowiadające quasi-wielomianowi (6.62) dwa pierwsze równania układu (6.57) napiszemy w postaci:

$$\left. \begin{aligned} X(\omega, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2) &= -\omega^2 + 9 - 2\tilde{z}_1^2 - 2\tilde{z}_1 - 0,2\omega\tilde{z}_2 = 0, \\ Y(\omega, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2) &= -0,2\omega\tilde{z}_1 + 2\tilde{z}_2 + 2\tilde{z}_1\tilde{z}_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.63)$$

Dla quasi-wielomianu (6.62) wielomian (6.58) stopnia $n=2$ ma współczynniki

$$b_2=1; b_1=-0,2\tilde{z}_1 + j0,2\tilde{z}_2; b_0=9 - 2\tilde{z}_1^2 - 2\tilde{z}_1 + j(2\tilde{z}_2 + 2\tilde{z}_1\tilde{z}_2). \quad (6.64)$$

Macierz Hermite'a dla wielomianu (6.58) o współczynnikach (6.64) ma postać

$$H(\tilde{z}_1 - j\tilde{z}_2) = \begin{bmatrix} -0,4\tilde{z}_1 & -4\tilde{z}_2(1+\tilde{z}_1) \\ -4\tilde{z}_2(1+\tilde{z}_1) & -2,8\tilde{z}_1+0,8 \end{bmatrix},$$

a więc

$$F(\tilde{z}_1) = 16\tilde{z}_1^4 + 32\tilde{z}_1^3 + 1,12\tilde{z}_1^2 - 32,32\tilde{z}_1 - 16. \quad (6.65)$$

Wielomian (6.65) w przedziale $[-1,1]$ ma dwa zera; są to: $\tilde{z}_{11} = -0,69568$, $\tilde{z}_{12} = 0,993785$. Układ równań (6.63) ma rozwiązanie $\omega \in \mathbb{R}_+$, jeżeli $\tilde{z}_{21} = -0,718351$, $\tilde{z}_{22} = 0,111313$. Tymi wartościami są liczby: $\omega_{11} = 3,142363$, $\omega_{21} = 2,233222$.

Rozwiązując równanie (6.60) dla $i=1$ i $i=2$ otrzymamy $y_1 = 3,943022$, $y_2 = 0,111544$.

Granicami h-podziału są więc liczby $h_{11} = 1,254795$, $h_{21} = 0,049948$ oraz $h_{i1} = h_{11} + 2\pi l/\omega_{i1}$, dla $i=1,2$, $l=1,2,\dots$.

Obliczając ze wzoru (6.12) wskaźniki przejścia dla $s_r = j\omega_{11}$, $h_r = h_{11}$ i $s_r = j\omega_{21}$, $h_r = h_{21}$ otrzymamy $p_{11} = 1$, $p_{21} = -1$.

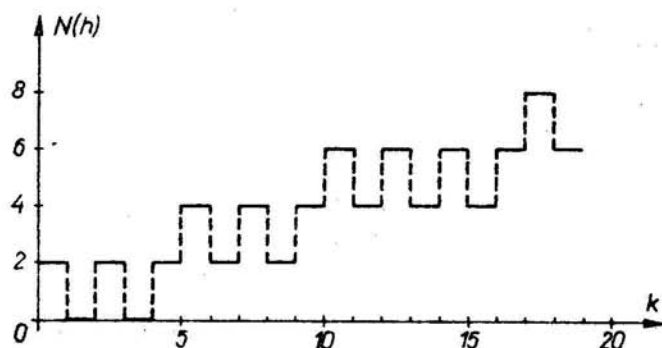
Porządkując liczby h_{i1} dla $i=1,2$, i $l=1,2,\dots$ w ciąg rosnący i dołączając $h_0 = 0$ otrzymamy: $h_0 = 0$, $h_1 = h_{21} = 0,049948$, $h_2 = h_{11} = 1,254795$, $h_3 = h_{211} = 2,863454$, $h_4 = h_{111} = 3,254305$, $h_5 = h_{112} = 5,253815$, $h_6 = h_{212} = 5,676961$, $h_7 = h_{113} = 7,253324$, $h_8 = h_{213} = 8,490467$, $h_9 = h_{114} = 9,252834$, $h_{10} = h_{115} = 11,252344$, $h_{11} = h_{214} = 11,303973$, $h_{12} = h_{116} = 13,251853$, $h_{13} = h_{215} = 14,11748$, $h_{14} = h_{117} = 15,251364$, $h_{15} = h_{216} = 16,930986$, $h_{16} = h_{118} = 17,250873$, $h_{17} = h_{119} = 19,250383$, $h_{18} = h_{217} = 19,744493, \dots$

Poszczególnym wartościom h_k odpowiadają następujące wskaźniki przejścia:

$$p_k = -1 \quad \text{dla } k=1,3,6,8,11,13,15,18,\dots,$$

$$p_k = 1 \quad \text{dla } k=2,4,5,7,9,10,12,14,16,17,\dots$$

Dla $h=0$ quasi-wielomian (6.62) ma dwa zera w OPP, a więc $N(0)=2$. Obliczając ze wzoru (6.8) wartości $N(h)$ otrzymamy pokazany na rysunku 6.1 wykres ilustrujący zmiany $N(h)$ w zależności od indeksu k granic h_k . Wynika z niego, że $N(h)=0$ dla $h \in (h_1, h_2)$ i $h \in (h_3, h_4)$. Quasi-wielomian (6.62) nie jest stabilny dla $h=0$, ale jest asymptotycznie stabilny dla $h \in (h_1, h_2)$ i $h \in (h_3, h_4)$. Wprowadzenie opóźnień w sposób podany w (6.62) powoduje więc, że niestabilny wielomian $q(s,1)$ staje się asymptotycznie stabilnym quasi-wielomianem.



Rys. 6.1. Zmiany liczby leżących w OPP zer quasi-wielomianu (6.62) w zależności od indeksu k granic h_k h -podziału

6.2.4. Metoda 4

Wartości $\omega = \omega_{lr}$ można wyznaczyć w inny sposób, niż poprzez rozwiązywanie układu równań (6.57) dla poprzednio obliczonych liczb $\tilde{z}_{1i}$ i $\tilde{z}_{2i}$.

Przy badaniu MASNO układu typu neutralnego, oprócz (4.8) musi być spełniony warunek (4.18), który sprawdza się na podstawie analizy macierzy Schura-Cohna $S(j\omega)$, utworzonej dla wielomianu zespolonego (4.19). Wartości własne tej macierzy są liczbami rzeczywistymi, które w sposób ciągły zależą od parametru $\omega \in (-\infty; \infty)$. Warunek (4.18) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $S(j\omega)$ jest dodatnio określona dla $\omega \in (-\infty, \infty)$, czyli gdy wszystkie jej wartości własne są dodatnie dla każdego $\omega \in (-\infty; \infty)$. Wartości własne macie-

rzy $S(j\omega)$ mogą zmieniać znak jedynie dla tych wartości ω ; dla których $\det S(j\omega) = 0$. Jeżeli więc $\det S(j\omega_1) = 0$, to wielomian $q(j\omega_1, z)$ ma zero na okręgu jednostkowym, czyli istnieje $y \in \mathbb{R}_+$ takie, że $q(j\omega_1, \exp(-jy)) = 0$. Punkty $s_k = j\omega_k$, przez które przechodzą zera quasi-wielomianu (6.1) typu neutralnego, gdy h przekracza granicę h -podziału, można więc wyznaczyć jako pierwiastki równania $\det S(j\omega) = 0$.

Wartości $\omega = \omega_k$, jako pierwiastki równania $\det S(j\omega) = 0$, można też wyznaczać w przypadku quasi-wielomianu typu opóźnionego. Wynika to z faktu, że warunki (4.8) i (4.17) są też konieczne i wystarczające dla MASNO układu typu opóźnionego [84].

Zauważmy, że możemy tutaj rozpatrywać macierz Schura-Cohna $S(j\omega)$, utworzoną dla quasi-wielomianu $q(j\omega, z)$, zamiast dla quasi-wielomianu (4.19).

Algorytm wyznaczania granic h -podziału jest następujący.

1) Wykonujemy działania opisane w punktach 1), 2) i 3) algorytmu podanego w opisie metody 3.

2) Obliczamy wszystkie pierwiastki $\tilde{z}_{1i}$ równania $F(\tilde{z}_1) = 0$; $i=1, 2, \dots, m$ leżące w przedziale $[-1, 1]$ i obliczamy $\tilde{z}_{2i} = \pm \sqrt{1 - \tilde{z}_{1i}^2}$.

3) Ze wzoru

$$c_k = \sum_{i=0}^n a_{ik}(j\omega)^i \quad (6.66)$$

obliczamy współczynniki wielomianu zespolonego

$$f(z) = \sum_{k=0}^p c_k z^k. \quad (6.67)$$

4) W sposób (4.21) tworzymy dla wielomianu zespolonego (6.67) macierz Schura-Cohna $S(j\omega)$ i obliczamy jej wyznacznik, który jest wielomianem rzeczywistym zmiennej ω^2 .

5) Obliczamy wszystkie leżące w przedziale $(0, \infty)$ pierwiastki ω_k , $k=1, 2, \dots, m_1$, równania $\det S(j\omega) = 0$.

6) Dla każdego ustalonego i , $i=1, 2, \dots, m$, wyznaczone wartości $\tilde{z}_{1i}$ i $\tilde{z}_{2i}$ i ω_k , $k=1, 2, \dots, m_1$, podstawiamy do układu równań (6.57) i sprawdzamy, kiedy jest on spełniony. W ten sposób z tego zbioru wartości

wyberzemy takie, które spełniają ten układ równań. Oznaczmy je przez $\tilde{z}_{1r}, \tilde{z}_{2r}, \omega_r, r=1,2,\dots,n_1$.

7) Wykonujemy działania opisane w p.6) i 7) algorytmu metody 3.

PRZYKŁAD 6.5.

Dany jest quasi-wielomian typu neutralnego

$$q(s, \exp(-sh)) = s^2 + (0,5s^2 + 2s + 1)\exp(-sh), \quad (6.68)$$

dla którego warunek (6.3) jest spełniony, bowiem $d(\theta) = \theta + 0,5$.

Uwzględniając oznaczenia (6.56), dla quasi-wielomianu (6.68) dwa pierwsze równania układu równań (6.57) napiszemy w postaci

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 - 0,5\omega^2\tilde{z}_1 + 2\omega\tilde{z}_2 + \tilde{z}_1 &= 0, \\ 0,5\omega^2\tilde{z}_2 + 2\omega\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.69)$$

Wielomian (6.58) stopnia $n=2$ ma następujące współczynniki:

$$b_0 = \tilde{z}_1 - j\tilde{z}_2, \quad b_1 = 2(\tilde{z}_1 - j\tilde{z}_2), \quad b_2 = 1 + 0,5\tilde{z}_1 - j0,5\tilde{z}_2. \quad (6.70)$$

Obliczając dla wielomianu (6.58), o współczynnikach (6.70), macierz Hermite'a i przyrównując do zera jej wyznacznik otrzymamy równanie

$$F(\tilde{z}_1) = \tilde{z}_1^2 + 4\tilde{z}_1 + 1 = 0, \quad (6.71)$$

które ma jedno rozwiązanie $\tilde{z}_{11} = -0,267949$, leżące w przedziale $[-1,1]$. Z trzeciego równania układu (6.57) mamy $\tilde{z}_{21} = +0,963433$.

Dla quasi-wielomianu (6.68) wielomian (6.67) jest stopnia $p=1$ o współczynnikach $c_0 = -\omega^2$, $c_1 = 1 - 0,5\omega^2 + j2\omega$. Obliczając ze wzorów (4.21) macierz Schura-Cohna otrzymamy

$$S(j\omega) = r_{11} = c_1 \bar{c}_1 - \bar{c}_0 c_0 = -0,75\omega^4 + 3\omega^2 + 1. \quad (6.72)$$

Jedyne rozwiązanie $\omega \in \mathbb{R}_+$ równania $\det S(j\omega) = 0$ jest równe $\omega_1 = 2,07591$.

Łatwo sprawdzić, że układ równań (6.69) jest spełniony dla $\tilde{z}_{11} = -0,267949$, $\tilde{z}_{21} = 0,963433$, $\omega_{11} = \omega_1 = 2,07591$. Rozwiązując dla

$z_1 = \bar{z}_{11} - j\bar{z}_{21}$ równanie (6.60), otrzymamy $y_1 = 1,84206$. Ze wzoru (6.61) mamy więc $h_{11} = 0,887351$. Granicami h -podziału są więc liczby $h_{11l} = h_{11} + 2\pi l / \omega_{11}$, $l=0,1,2,\dots$, czyli $h_k = h_{11} + 2\pi(k-1)/\omega_{11}$, $k=1,2,\dots$, przy czym $h_0 = 0$. Ponieważ wskaźnik przejścia, obliczony ze wzoru (6.12) dla $s_r = j\omega_{11}$, $h_r = h_{11}$ jest dodatni, mamy $p_k = 1$ dla $k=1,2,\dots$.

Łatwo zauważyć, że $N(0) = 0$, a więc na podstawie wzoru (6.8) mamy

$$N(h) = 2k \quad \text{dla } h \in (h_k, h_{k+1}), \quad k=0,1,2,\dots$$

Quasi-wielomian (6.68) jest więc asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in [0, h_1)$, gdzie $h_1 = 0,887351$. $\square$

6.2.5. Metoda 5

W przypadku quasi-wielomianu typu opóźnionego, tj. o postaci

$$q(s, \exp(-sh)) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} s^i \sum_{k=0}^p a_{ik} \exp(-shk), \quad (6.73)$$

wartości granic h -podziału można wyznaczyć korzystając z rozwiązania zespolonego równania Lapunowa.

Stosując oznaczenia (6.56) quasi-wielomian (6.73) napiszemy w postaci

$$q(s, z) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} s^i \sum_{k=0}^p a_{ik} z^k, \quad (6.74)$$

przy czym istnieje macierz $A(z)$ taka, że

$$q(s, z) = \det(sI - A(z)). \quad (6.75)$$

Jeżeli układ z opóźnieniem jest opisany równaniem

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^m A_i x(t - ih), \quad t \geq 0, \quad (6.76)$$

to

$$A(z) = \sum_{i=0}^m A_i z^i, \quad z = \exp(-sh). \quad (6.77)$$

Jeżeli dany jest quasi-wielomian (6.74), to odpowiadającą mu macierz $A(z)$ można wyznaczyć stosując np. metodę bezpośrednią wyboru zmiennych stanu. Ma ona wtedy postać

$$A(z) = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ -G(z) \end{bmatrix}, \quad (6.78)$$

gdzie 0 jest $(n-1)$ -wymiarowym wektorem zerowym, I_{n-1} jest macierzą jednostkową o wymiarach $(n-1) \times (n-1)$, a $G(z)$ jest wektorem wierszowym o postaci

$$G(z) = [-g_0(z), -g_1(z), \dots, -g_{n-1}(z)], \quad (6.79)$$

gdzie

$$g_i(z) = \sum_{k=0}^p a_{ik} z^k, \quad i=0,1,2,\dots,n-1. \quad (6.80)$$

Utwórzmy zespolone równanie Lapunowa o postaci

$$A^*(z)P(z) + P(z)A(z) = -Q(z), \quad (6.81)$$

gdzie $P(z)$ i $Q(z)$ są to macierze hermitowskie, a ponadto $Q(z)$ jest macierzą dodatnio określoną dla $|z|=1$. Metody wyznaczania macierzy $P(z)$, będącej rozwiązaniem równania (6.81), są podane w Dodatku.

Wszystkie wartości własne macierzy $A(z)$, $z = \exp(-jy)$, mają ujemne części rzeczywiste dla $y \in [0, 2\pi]$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $P(z)$ jest dodatnio określona dla $y \in [0, 2\pi]$ [12].

Oznaczmy przez $f(\tilde{z}_1)$ najmniejszy wspólny mianownik wszystkich elementów macierzy $P(z)$. Jest on wielomianem o rzeczywistych współczynnikach i zależy od $\tilde{z}_1 = \cos(y)$ i $\tilde{z}_2 = \sin^2(y)$. Wynika to z faktu, że macierz $P(z)$ jest hermitowska. Korzystając z równania $\tilde{z}_1^2 + \tilde{z}_2^2 = 1$, można go więc napisać w postaci wielomianu rzeczywistego zmiennej $\tilde{z}_1$.

Macierz $P(z)$ można więc napisać w postaci

$$P(z) = P_1(z)/f(\tilde{z}_1), \quad (6.82)$$

gdzie $P_1(z)$ też jest macierzą hermitowską.

Niech λ będzie wartością własną macierzy $P(z)$, a w odpowiadającym jej wektorem własnym tej macierzy.

Łatwo wykazać, że

$$\operatorname{Re} \lambda = -\frac{1}{2} \frac{w^* Q(z) w}{w^* P_1(z) w} f(\tilde{z}_1) . \quad (6.83)$$

Ponieważ $Q(z)$ jest macierzą dodatnio określoną dla $|z| = 1$, ze wzoru (6.83) wynika, że $\operatorname{Re} \lambda = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(\tilde{z}_1) = 0 . \quad (6.84)$$

Jeżeli równanie (6.84) ma rozwiązanie $\tilde{z}_{1i} \in [-1, 1]$, $i=1, 2, \dots, m_1$, to istnieje $z_i = \tilde{z}_{1i} + j\tilde{z}_{2i}$, $\tilde{z}_{2i} = \sqrt{1 - \tilde{z}_{1i}^2}$ takie, że macierz $A(z_i)$ ma wartości własne na osi urojonej. Dla każdego $i=1, 2, \dots, m_1$ istnieje więc co najmniej jedna wartość $\omega_{ir} \in \mathbb{R}_+$, $r=1, 2, \dots, n_i$, taka, że

$$\det(j\omega_{ir}I - A(z_i)) = 0 , \quad (6.85)$$

czyli dla quasi-wielomianu (6.74) spełnione jest równanie

$$q(j\omega_{ir}, z_i) = 0 , \quad (6.86)$$

dla $i=1, 2, \dots, m_1$, $r=1, 2, \dots, n_i$.

Z powyższych rozważań wynika następujący algorytm wyznaczania granic h-podziału.

1) Uwzględniając oznaczenia (6.56) wyznaczamy ze wzoru (6.77) lub (6.78) macierz $A(z)$.

2) Rozwiązujemy zespolone równanie Lapunowa (6.81) (w sposób opisany w Dodatku) i wyznaczamy $f(\tilde{z}_1)$, najmniejszy wspólny mianownik wszystkich jej elementów.

3) Znajdujemy wszystkie pierwiastki $\tilde{z}_{1i} \in [-1, 1]$, $i=1, 2, \dots, m_1$, równania (6.84) i obliczamy wartości $z_i = \tilde{z}_{1i} + j\tilde{z}_{2i}$, $\tilde{z}_{2i} = \sqrt{1 - \tilde{z}_{1i}^2}$. Z dwóch alternatywnych liczb z_i wybieramy taką, dla której równanie (6.85) lub (6.86) ma co najmniej jeden pierwiastek $\omega_{ir} \in \mathbb{R}_+$. Jeżeli dla pewnych i równanie (6.85) (lub (6.86)) ma przynajmniej jedno rozwiązanie $\omega \in \mathbb{R}_+$ dla $z_i = \tilde{z}_{1i} + j\tilde{z}_{2i}$ i dla $z_i = \tilde{z}_{1i} - j\tilde{z}_{2i}$, to np. pierwszej z tych dwóch liczb zespolonych przyporządkowujemy numer i , a drugiej pierwszy numer większy od m_1 , który dotychczas nie występował.

W ten sposób otrzymamy zbiór $m_2 (m_1 \leq m_2 \leq 2m_1)$ liczb z_i , dla których równanie (6.85) ma przynajmniej jedno rozwiązanie $\omega_{ir} \in R_+$.

4) Wyznaczamy wszystkie wartości $\omega_{ir} \in R_+$, $i=1,2,\dots,m_2$, $r=1,2,\dots,n_i$, spełniające równanie (6.85) lub (6.86).

5) Wykonujemy dla $m=m_2$ działania wymienione w punktach 6) i 7) algorytmu metody 3.

PRZYKŁAD 6.6.

Dany jest quasi-wielomian

$$q(s,z) = s^2 + bs + csz + a, \quad (6.87)$$

gdzie a, b, c są to stałe dodatnie współczynniki, a $z = \exp(-sh)$.

Quasi-wielomianowi (6.87) odpowiada macierz $A(z)$, wyznaczona ze wzorów (6.78) - (6.80), o postaci

$$A(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b-cz \end{bmatrix}. \quad (6.88)$$

W przykładzie 4.2 wykazano, że quasi-wielomian (6.87) jest ASNO wtedy i tylko wtedy, gdy $b > c$. Załóżmy, że

$$a=1, \quad b=1, \quad c=2. \quad (6.89)$$

Rozwiązanie zespolonego równania Lapunowa (6.81) dla macierzy $A(z)$ o postaci (6.88) zostało wyznaczone w Dodatku. Ma ono postać (D.33), a więc

$$f(\tilde{z}_1) = 2a(b + c\tilde{z}_1) = 2(1 + 2\tilde{z}_1) = 0.$$

Z powyższego równania wynika, że $\tilde{z}_{11} = -0,5$, a więc $z_1 = -0,5 + j\sqrt{0,75}$.

Równanie $q(j\omega, z) = 0$ dla quasi-wielomianu (6.87), o współczynnikach (6.89), można napisać w postaci następującego układu równań:

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 + 2\omega\tilde{z}_2 + 1 &= 0, \\ \omega + 2\omega\tilde{z}_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.90)$$

Układ równań (6,90) ma rozwiązanie ω rzeczywiste dodatnie zarówno dla $\tilde{z}_1 = -0,5$, $\tilde{z}_2 = -\sqrt{0,75}$ jak i dla $\tilde{z}_1 = -0,5$, $\tilde{z}_2 = \sqrt{0,75}$. Zgodnie z p.3) algorytmu przyjmujemy $z_1 = -0,5 + j\sqrt{0,75}$, $z_2 = -0,5 - j\sqrt{0,75}$. Odpowiadające wartościom z_1 i z_2 rozwiązania układu równań (6,90) są następujące: $\omega_{11} = 0,456850$, $\omega_{21} = 2,188901$.

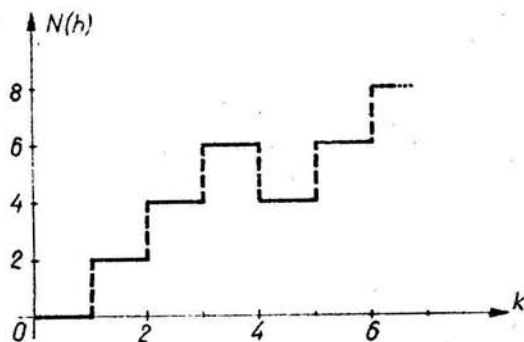
Rozwiązując równanie (6,60) dla $i=1$ i $i=2$, otrzymamy $y_1=4,18879$, $y_2 = 2,094395$, a więc z (6,61) mamy: $h_{11}=9,168847$, $h_{21}=0,956825$.

Granice h -podziału są więc liczby:

$$h_{11l}=h_{11}+2\pi l/\omega_{11}, \quad h_{21l}=h_{21}+2\pi l/\omega_{21}, \quad l=0,1,2,\dots \quad (6.91)$$

Obliczając ze wzoru (6,12) wskaźniki przejścia dla $s_r = j\omega_{11}$, $h_r = h_{11}$ i dla $s_r = j\omega_{21}$, $h_r = h_{21}$ otrzymamy $p_{11} = -1$, $p_{21} = 1$.

Dla $h=0$ quasi-wielomianu (6,87) o współczynnikach (6,89) ma wszystkie zera w OLP, a więc $N(0) = 0$. Wartości $N(h)$, obliczone ze wzoru (6,8) po uporządkowaniu liczb (6,91) w ciąg rosnący, pokazane są na rysunku 6.2 w zależności od indeksu k granic h_k h -podziału, przy czym $h_1=0,956825$, $h_2=3,8273$, $h_3=6,697774$, $h_4=9,168847$, $h_5=9,568249$, $h_6 = 12,438724,\dots$.



Rys.6.2. Zmiany liczby leżących w OLP zer quasi-wielomianu (6,87) o współczynnikach (6,89) w zależności od indeksu k granic h_k h -podziału

Z rysunku 6.2 wynika, że quasi-wielomian (6,87) o współczynnikach (6,89) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in [0, h_1)$, gdzie $h_1 = 0,956825$. $\square$

6.3. Podsumowanie

Powyżej omówiono pięć metod badania asymptotycznej stabilności w zależności od wielkości opóźnienia. Można je stosować do układów typu opóźnionego, spełniających podane na początku niniejszego rozdziału założenie (i), jak i do układów typu neutralnego, spełniających dodatkowo warunek (6.3) ciągłości granicy spektralnej. We wszystkich tych metodach współczynniki przejścia wyznacza się w ten sam sposób, omówiony w p.6.1. Inaczej natomiast wyznacza się granice h-podziału, czyli przedziały wartości opóźnienia h , dla których quasi-wielomian charakterystyczny ma określoną liczbę zer w OPP.

Zauważmy, że przy wyznaczaniu granic h-podziału na podstawie metod 3,4 i 5 korzystamy z warunków służących do badania MASNO. Przypomnijmy, że jeżeli układ z opóźnieniem nie jest MASNO, to albo istnieją wartości ω i h ze zbioru $\mathbb{R}_+$, dla których $q(j\omega, \exp(-j\omega h))=0$, albo też $q(0, \exp(-jy)) = 0$ dla pewnych wartości $y \in [0, 2\pi]$. Zauważmy, że w algorytmach metody 3,4 i 5 (i również 1 i 2) ten ostatni przypadek nie jest uwzględniony. Poszukujemy bowiem niezerowych wartości ω , dla których są spełnione odpowiednie równania.

Omówione w p.6.2 cztery pierwsze metody wymagają znajomości quasi-wielomianu charakterystycznego układu z opóźnieniem, zaś metoda 5, mająca zastosowanie tylko w przypadku układów typu opóźnionego, wymaga znajomości macierzy stanu tego układu. Możliwość badania asymptotycznej stabilności w funkcji opóźnienia, na podstawie znajomości macierzy stanu układu, ma duże znaczenie praktyczne w przypadku wielowymiarowych układów wielkich z opóźnieniem. Wyznaczanie quasi-wielomianu charakterystycznego takich układów jest bowiem procesem bardzo złożonym.

Podczas badania asymptotycznej stabilności na podstawie metody 5 wyznaczania granic h-podziału, podobnie jak i na podstawie pozostałych metod, celowe jest stosowanie obliczeń z wykorzystaniem minikomputera, który na podstawie odpowiednich programów dokonuje między innymi operacji na macierzach wielomianowych i wielomianach.

Stosując metodę 1 należy obliczać wyznacznik (rugownik) o wymiarach $2n \times 2n$ dla quasi-wielomianu typu neutralnego i o wymiarach $(2n-1) \times (2n-1)$ dla quasi-wielomianu typu opóźnionego. Elementy tego wyznacznika są wielomianami stopnia p ze względu na zmienne $\tilde{z}_1$ i $\tilde{z}_2$.

a jego wartość jest wielomianem stopnia co najwyżej $2np$ zmiennych $\tilde{z}_1$ i $\tilde{z}_2$, przy czym zależy on od $\tilde{z}_1$ i $\tilde{z}_2^2$. Uwzględniając, że $\tilde{z}_1^2 + \tilde{z}_2^2 = 1$, możemy go napisać w postaci wielomianu jednej zmiennej $\tilde{z}_1$ stopnia np.

W metodzie 2 należy obliczać wyznacznik o wymiarach $2p \times 2p$ i o elementach będących wielomianami zmiennej ω^2 stopnia n . Wartość tego wyznacznika jest wielomianem stopnia np względem ω^2 .

W metodzie 3 należy wyznaczać macierz Hermite'a o wymiarach $n \times n$, której elementy są wielomianami stopnia nie większego niż p ze względu na zmienne $\tilde{z}_1$ i $\tilde{z}_2$. Jej wyznacznik można napisać w postaci wielomianu stopnia np zmiennej $\tilde{z}_1$. Aby wyznaczyć macierz Hermite'a $H(\exp(-jy))$ należy ze wzorów (4.10) - (4.12) obliczyć $n(n+1)/2$ jej elementów.

Metoda 4 jest pewną modyfikacją metody 3. Współrzędne położonych na osi urojonej punktów, przez które przechodzą linie pierwiastkowe dla h przyjmującego wartości granic h -podziału, wyznacza się tu poprzez obliczanie zer wyznacznika macierzy Schura-Cohna.

Z powyższych rozważań wynika, że biorąc pod uwagę wymiary wyznacznika, którego wartość będącą wielomianem należy obliczyć, wygodnie jest stosować metodę 1 przy małych wartościach n i dużych wartościach p , metodę 2 przy dużych n i małych p , a metodę 3 przy dużych wartościach p i n .

Uwzględniając cały nakład obliczeń, które należy wykonać podczas badania asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu z wykorzystaniem podanych w niniejszym rozdziale metod, trudno jest od razu stwierdzić, który sposób obliczeń jest szybszy i zajmuje najmniejszy obszar pamięci minikomputera. Można tego dokonać na podstawie szczegółowej analizy zastosowanych metod numerycznych, służących do wykonywania operacji na macierzach wielomianowych i wielomianach, jak też do rozwiązywania równań zespolonych i (lub) układów równań rzeczywistych.

Oprócz podanych w p.6.2 analityczno-numerycznych metod wyznaczania granic h -podziału, można też zastosować metodę czysto numeryczną, będącą pewną modyfikacją metody omówionej w p.7.2.1 niniejszej pracy. Polega ona na numerycznym rozwiązywaniu układu równań

$$P(\omega, h) = 0, \quad Q(\omega, h) = 0, \quad (6.92)$$

gdzie $P(\omega, h)$ jest częścią rzeczywistą, a $Q(\omega, h)$ częścią urojoną quasi-wielomianu $q(j\omega, \exp(-j\omega h))$. Jednakże ze względu na fakt, że układ równań (6.92), jeżeli nie jest sprzeczny, to ma skończoną liczbę rozwiązań ze względu na zmienną ω i nieskończoną ze względu na h , prostsze jest stosowanie omówionych w p.6.2 niniejszej pracy metod analityczno-numerycznych.

Asymptotyczna stabilność w zależności od wielkości opóźnienia h , rozpatrywanych w przykładach 6.2 i 6.4 quasi-wielomianów, była też badana w pracy [146] za pomocą krzywych testowych i w [11] na podstawie opisanej w p.6.2.2. metody 2.

7. γ -STABILNOŚĆ QUASI-WIELOMIANÓW

Kryterium γ -stabilności quasi-wielomianu typu opóźnionego jest podane w twierdzeniu 3.3, a typu neutralnego w twierdzeniu 3.4. Badanie γ -stabilności quasi-wielomianu $q(s, \exp(-sh))$ jest równoważne badaniu asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu $q_\gamma(s, \exp(-sh))$, powstałego z $q(s, \exp(-sh))$ po zastosowaniu w nim podstawienia $s = \gamma$ zamiast s . Współczynniki $q_\gamma(s, \exp(-sh))$ są funkcjami γ i $\exp(h\gamma)$. Z tego powodu nie można stosować omówionej w rozdziale 6 niniejszej pracy metody h-podziału do badania asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu $q_\gamma(s, \exp(-sh))$ w funkcji opóźnienia przy zadanym γ . W przypadku zadanego quasi-wielomianu typu opóźnionego można na płaszczyźnie (h, γ) wyznaczyć obszary (lub obszar) asymptotycznej stabilności $q_\gamma(s, \exp(-sh))$ na podstawie analizy przebiegu jego linii pierwiastkowych w funkcji opóźnienia h (patrz punkt 7.2 niniejszego rozdziału). Linie te wyznacza się w sposób numeryczny. Tak wyznaczone obszary asymptotycznej stabilności $q_\gamma(s, \exp(-sh))$ są obszarami γ -stabilności quasi-wielomianu $q(s, \exp(-sh))$.

Jeżeli wartości h i γ są ustalone, to asymptotyczną stabilność $q_\gamma(s, \exp(-sh))$ można badać za pomocą metod podanych w rozdziale 5 niniejszej pracy. W przypadku ogólnym najbardziej przydatne będzie tu zmodyfikowanie kryterium Michajłowa.

Dla pewnej klasy prostych quasi-wielomianów warunki γ -stabilności można podać w postaci analitycznej.

7.1. Warunki γ -stabilności quasi-wielomianu typu opóźnionego stopnia pierwszego z jednym opóźnieniem

Korzystając z kryterium Czebotariewa i Mejmana [37] podamy analityczne warunki γ -stabilności quasi-wielomianu typu opóźnionego

stopnia pierwszego o współczynnikach zespolonych i rzeczywistych. Konieczność rozpatrywania takich quasi-wielomianów pojawia się przy badaniu γ -stabilności wielowymiarowych układów z jednym opóźnieniem (patrz rozdział 8 niniejszej pracy).

7.1.1. Quasi-wielomian o zespolonych współczynnikach

Dany jest quasi-wielomian o postaci

$$q(s, \exp(-sh)) = s + a_0 + jb_0 + (a_1 + jb_1) \exp(-sh), \quad (7.1)$$

gdzie $a_i, b_i \in \mathbb{R}, h > 0$.

Stosując podstawienie $s = z/h - \gamma$ ($\gamma \geq 0$) i dokonując pewnych przekształceń równanie $q(s, \exp(-sh)) = 0$ napiszemy w postaci

$$z \exp(z) + (a_0 - \gamma + jb_0)h \exp(z) + (a_1 + jb_1)h \exp(h\gamma) = 0. \quad (7.2)$$

W podobny sposób jak w pracy [128] można wykazać, że wszystkie pierwiastki równania (7.2) leżą w OLP wtedy i tylko wtedy, gdy w OLP leżą wszystkie pierwiastki równania

$$(z + u_0) \exp(z) + u + jv = 0, \quad (7.3)$$

gdzie:

$$u_0 = h(a_0 - \gamma), \quad u = hu_1 \exp(h\gamma), \quad v = hv_1 \exp(h\gamma), \quad (7.4)$$

$$u_1 = a_1 \cos(hb_0) - b_1 \sin(hb_0), \quad v_1 = a_1 \sin(hb_0) + b_1 \cos(hb_0). \quad (7.5)$$

Z powyższych rozważań wynika, że quasi-wielomian (7.1) jest γ -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy równanie (7.3) ma wszystkie pierwiastki w OLP.

Warunek konieczny położenia wszystkich pierwiastków równania (7.3) w OLP ma postać [128] $u_0 > -1$. Dla równania (7.2) ma on postać

$$h(a_0 - \gamma) > -1. \quad (7.6)$$

Mnożąc obustronnie równanie (7.3) przez $\exp(-z/2)$ i stosując podstawienie $z = 2p$ otrzymamy

$$(2p + u_0)\exp(p) + (u + jv)\exp(-p) = 0. \quad (7.7)$$

Uwzględniając, że $\exp(p) = \cosh(p) + \sinh(p)$, $\exp(-p) = \cosh(p) - \sinh(p)$, równanie (7.7) napiszemy w postaci

$$(\alpha_1 p + \alpha_0) \cosh(p) + (\beta_1 p + \beta_0) \sinh(p) = 0, \quad (7.8)$$

gdzie:

$$\alpha_1 = 2, \alpha_0 = u_0 + u + jv, \beta_1 = 2, \beta_0 = u_0 - u - jv. \quad (7.9)$$

Stosując oznaczenia

$$\alpha_k = d_k + jd'_k, \beta_k = r_k + jr'_k, k = 0, 1, \quad (7.10)$$

ze wzorów (7.9) otrzymamy

$$d_1 = 2, d'_1 = 0, d_0 = u_0 + u, d'_0 = v, r_1 = 2, r'_1 = 0, r_0 = u_0 - u, r'_0 = -v. \quad (7.11)$$

Kryterium Czebotariewa i Mejmmana jest sformułowane dla równań (7.8) ze współczynnikami o postaci (7.10). Stosując to kryterium należy obliczyć współczynniki A, B i C ze wzorów:

$$A = d_0 d_1 + d'_0 d'_1, B = -r'_0 d_1 + d'_0 r_1 + r_0 d'_1 - d_0 r'_1, \\ C = r_0 r_1 + r'_0 r'_1. \quad (7.12)$$

W pracy [37] (i także w [58]) wzory na obliczanie A i B podano błędnie. Pomyłono tam znaki niektórych składników. Uwzględniając (7.11), ze wzorów (7.12) otrzymamy

$$A = 2(u_0 + u), B = 4v, C = 2(u_0 - u). \quad (7.13)$$

Obliczając $\Delta = B^2 - 4AC$ i uwzględniając (7.13), (7.4) i (7.5) otrzymamy

$$\Delta = 16h^2 [(a_1^2 + b_1^2) \exp(2h\gamma) - (a_0 - \gamma)^2]. \quad (7.14)$$

Twierdzenie 7.1.

Quasi-wielomian (7.1) jest γ -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(W1): (i) \quad a_0 - \gamma + u_1 \exp(h\gamma) > 0,$$

$$(ii) \quad (a_1^2 + b_1^2) \exp(2h\gamma) - (a_0 - \gamma)^2 < 0, \text{ albo}$$

$$(W2): (i) \quad a_0 - \gamma + u_1 \exp(h\gamma) > 0,$$

$$(ii) \quad (a_1^2 + b_1^2) \exp(2h\gamma) - (a_0 - \gamma)^2 > 0,$$

$$(iii) \quad E\left[\frac{-\tau_1}{\pi} - \frac{h\gamma}{2\pi}\right] = E\left[\frac{-\tau_2}{\pi} + \frac{h\gamma}{2\pi}\right], \text{ albo}$$

$$(W3): (i) \quad a_0 - \gamma + u_1 \exp(h\gamma) < 0,$$

$$(ii) \quad (a_1^2 + b_1^2) \exp(2h\gamma) - (a_0 - \gamma)^2 > 0,$$

$$(iii) \quad E\left[\frac{-\tau_2}{\pi} + \frac{h\gamma}{2\pi}\right] = E\left[\frac{-\tau_1}{\pi} - \frac{h\gamma}{2\pi}\right] = -1.$$

W powyższych wzorach $E[x]$ (entier) oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż x , u_1 i v_1 mają postaci (7.5) oraz:

$$F = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2) \exp(2h\gamma) - (a_0 - \gamma)^2}, \quad (7.15)$$

$$\tau_1 = \arctg \frac{v_1 \exp(h\gamma) - F}{u_1 \exp(h\gamma) + \gamma - a_0}, \quad \tau_1 \in (0, \pi), \quad (7.16)$$

$$\tau_2 = \arctg \frac{v_1 \exp(h\gamma) + F}{u_1 \exp(h\gamma) + \gamma - a_0}, \quad \tau_2 \in (0, \pi). \quad (7.17)$$

Dowód

Quasi-wielomian (7.1) jest γ -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy równanie (7.3) (a więc i (7.8)) ma wszystkie pierwiastki w OLP. Grupy

warunków (W1), (W2) i (W3) wynikają z trzech grup zależności, podanych w [37] (i [58]) dla równania (7.8), oraz ze wzorów (7.8)-(7.14) i (7.4), (7.5). $\square$

Inną postać warunku położenia w OLP wszystkich pierwiastków równania (7.3), podano w pracy [128]. Wyprowadzono ją korzystając z kryterium Pontriagina.

Łatwo zauważyć, że quasi-wielomian (7.1) ma zera o tej samej części rzeczywistej co quasi-wielomian

$$q_1(s, \exp(-sh)) = s + a_0 - jb_0 + (a_1 - jb_1) \exp(-sh). \quad (7.18)$$

W twierdzeniu 7.1 jest więc podany warunek γ -stabilności quasi-wielomianu

$$\begin{aligned} \tilde{q}(s, \exp(-sh)) &= q(s, \exp(-sh)) q_1(s, \exp(-sh)) = \\ &= s^2 + 2(a_0 + a_1 \exp(-sh))s + a_0^2 + b_0^2 + \\ &+ 2(a_0 a_1 + b_0 b_1) \exp(-sh) + (a_1^2 + b_1^2) \exp(-2sh). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Przyjmując w twierdzeniu 7.1 $\gamma = 0$ otrzymamy kryterium asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (7.1) (i także (7.18) i (7.19)).

7.1.2. Quasi-wielomian o zespolonych współczynnikach z czystym opóźnieniem

Quasi-wielomian pierwszego stopnia o zespolonych współczynnikach z czystym opóźnieniem ma postać

$$q(s, \exp(-sh)) = s + (a_1 + jb_1) \exp(-sh), \quad a_1 \neq 0. \quad (7.20)$$

Można go otrzymać z (7.1) przyjmując $a_0 = b_0 = 0$.

Z nierówności (7.6) przy $a_0 = 0$ wynika, że warunek konieczny γ -stabilności quasi-wielomianu (7.20) ma postać

$$h \gamma < 1. \quad (7.21)$$

Znajdziemy najpierw obszary γ -stabilności quasi-wielomianu (7.20) na płaszczyźnie $(\tilde{u}, \tilde{v})$, gdzie

$$\tilde{u} = a_1 h, \quad \tilde{v} = b_1 h. \quad (7.22)$$

Zastosujemy w tym celu metodę D-podziału do równania (7.2) przy $a_0 = b_0 = 0$, które wtedy przyjmie postać

$$(z - h\gamma)\exp(z) + h(a_1 + jb_1)\exp(h\gamma) = 0. \quad (7.23)$$

Uwzględniając oznaczenia (7.22) i podstawiając $z = jy$, równanie (7.23) napiszemy w postaci następującego układu równań:

$$\tilde{u} = (y \sin(y) + h\gamma \cos(y))\exp(-h\gamma), \quad (7.24)$$

$$\tilde{v} = (-y \cos(y) + h\gamma \sin(y))\exp(-h\gamma). \quad (7.25)$$

Krzywa opisana parametrycznie wzorami (7.24) i (7.25) dzieli, przy ustalonym $c = h\gamma$, płaszczyznę $(\tilde{u}, \tilde{v})$ na obszary, w których równanie (7.23) ma ustaloną liczbę pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej z . Interesujący nas obszar, w którym równanie to ma wszystkie pierwiastki o ujemnej części rzeczywistej, leży wewnątrz krzywej opisanej wzorami (7.24) i (7.25) dla $|y| \leq y_0 \leq \pi/2$, gdzie y_0 oznacza najmniejszą dodatnią wartość y dla której $\tilde{v} = 0$. Łatwo zauważyć, że $y_0 = \pi/2$ dla $c=0$ ($\gamma=0$). Dla pozostałych wartości $c=h\gamma < 1$ mamy $y_0 < \pi/2$.

Oznaczmy przez $S(c)$, gdzie $c=h\gamma$, obszary γ -stabilności quasi-wielomianu (7.20). Dla każdego ustalonego $c \in [0,1)$, obszar $S(c)$ leży wewnątrz odpowiedniej krzywej zamkniętej, opisanej parametrycznie wzorami (7.24) i (7.25) dla $|y| \leq y_0$, gdzie $y_0 \in [0, \pi/2]$ i jest rozwiązaniem równania

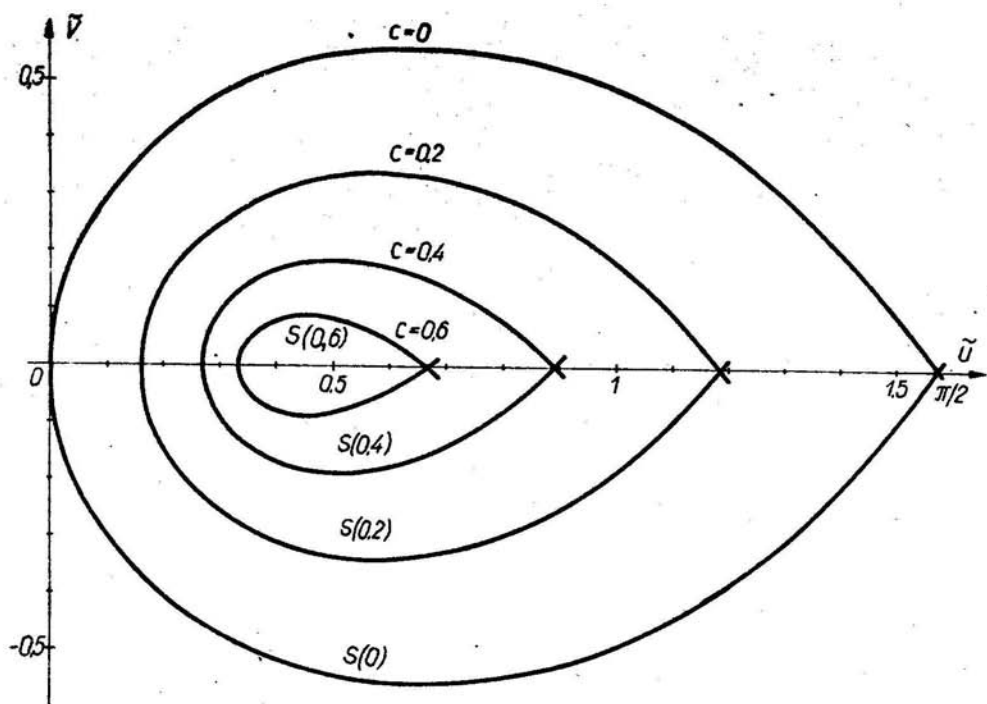
$$c \sin(y_0) - y_0 \cos(y_0) = 0. \quad (7.26)$$

Obszar $S(0)$ jest obszarem asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (7.20).

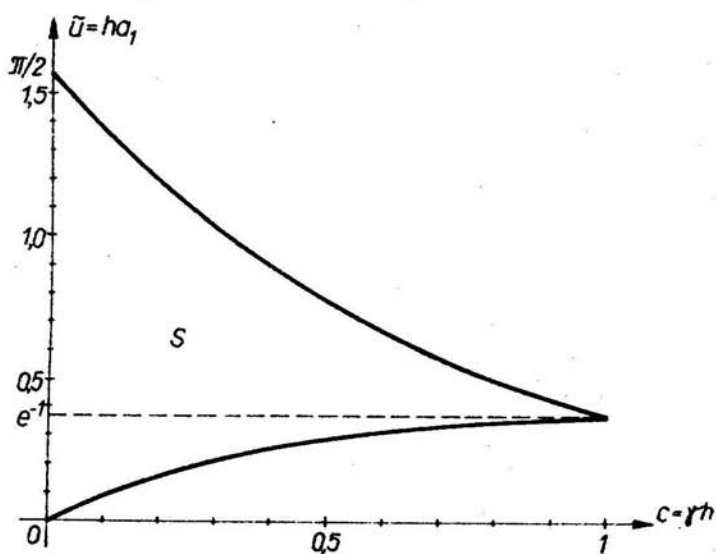
Kształty brzegów obszarów $S(c)$ są pokazane na rysunku 7.1 dla kilku wartości c . Z tego rysunku i ze wzorów (7.24), (7.25) wynika, że wraz ze wzrostem wartości współczynnika $c=h\gamma$ maleje długość przedziału, w którym leży $\tilde{u} = ha_1$. Przedział ten można opisać nierównościami

$$c \exp(-c) < \tilde{u} < (y_0 \sin(y_0) + c \cos(y_0))\exp(-c), \quad (7.27)$$

gdzie $y_0 \in [0, \pi/2]$ i jest rozwiązaniem równania (7.26).



Rys.7.1. Obszary $S(c)$ γ -stabilności quasi-wielomianu (7.20) dla kilku wartości współczynnika $c = h\gamma$



Rys.7.2. Obszar S γ -stabilności quasi-wielomianu (7.20) przy $b_1 = 0$

Wykres obszaru S , w którym powinny leżeć wartości $\tilde{u} = ha_1$ dla poszczególnych wartości współczynnika $c = h\gamma$ jest pokazany na rysunku 7.2. Jest to obszar γ -stabilności quasi-wielomianu (7.20) przy $b_1 = 0$.

Z powyższych rozważań wynika poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 7.2.

Przy ustalonej wartości $c = h\gamma$ quasi-wielomian (7.20) jest γ -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wartości ha_1 i hb_1 leżą na płaszczyźnie $(\tilde{u}, \tilde{v})$ w obszarze $S(c)$. Jeżeli $b_1 = 0$, to ten quasi-wielomian jest γ -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wartość $\tilde{u} = ha_1$ spełnia nierówność (7.27), czyli gdy leży w obszarze S pokazanym na rysunku 7.2.

Przyjmując w twierdzeniu 7.2 $\gamma = 0$, otrzymamy podany w pracy [118] warunek konieczny i wystarczający asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (7.20). Można go podać w prostej postaci analitycznej [35] (patrz też lemat 7.1).

Wyprowadzimy teraz analityczne warunki γ -stabilności quasi-wielomianu (7.20).

Z zależności (7.27) wynika, że warunek konieczny γ -stabilności quasi-wielomianu (7.20) ma postać

$$a_1 \exp(h\gamma) - \gamma > 0. \quad (7.28)$$

Ponadto z rysunku 7.1 wynika, że obszary $S(c)$ są symetryczne względem osi odciętych. Oznacza to, że γ -stabilność quasi-wielomianu (7.20) nie zależy od znaku współczynnika b_1 . Dlatego też dla prostoty rozważań będziemy dalej przyjmować, że b_1 jest ujemne, czyli $b_1 = -|b_1|$.

Twierdzenie 7.3.

Quasi-wielomian (7.20) jest γ -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest nierówność (7.28) i

$$hF - 2 \arctg \frac{F - |b_1| \exp(h\gamma)}{a_1 \exp(h\gamma) + \gamma} < 0, \quad (7.29)$$

gdzie

$$F = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2) \exp(2h\gamma) - \gamma^2}. \quad (7.30)$$

Dowód

Quasi-wielomian (7.20) jest przypadkiem szczególnym quasi-wielomianu (7.1). Przyjmując $a_0 = b_0 = 0$ w twierdzeniu 7.1 i we wzorach (7.4) i (7.5), otrzymamy więc warunki γ -stabilności quasi-wielomianu (7.20). Jeżeli spełniony jest warunek konieczny (7.28), to ze wzoru (7.14) przy $a_0 = 0$ wynika, że wtedy $\Delta > 0$. Oznacza to, że spośród podanych w twierdzeniu 7.1 trzech grup warunków może być spełniona jedynie grupa (W2). Przy $a_0 = 0$ warunki (i) i (ii) tej grupy są spełnione, jeżeli zachodzi (7.28).

Rozpatrzmy teraz warunek (iii) z grupy (W2). Uwzględniając wzory (7.15) - (7.17) przy $a_0 = 0$ oraz fakt, że $b_1 = -|b_1|$, można go napisać w postaci

$$E[f_1(h)] = E[f_2(h)], \quad (7.31)$$

gdzie:

$$f_1(h) = -1 - (\arctan d_1)/\pi - hF/2\pi; \quad f_2(h) = -(\arctan d_2)/\pi + hF/2\pi, \quad (7.32)$$

$$d_1 = \frac{-|b_1| \exp(h\gamma) - F}{a_1 \exp(h\gamma) + \gamma}, \quad d_2 = \frac{-|b_1| \exp(h\gamma) + F}{a_1 \exp(h\gamma) + \gamma}, \quad (7.33)$$

a F ma postać (7.30).

Obliczając pochodne funkcji $f_1(h)$ i $f_2(h)$ względem h , otrzymamy

$$\text{sign } f_1'(h) = -\text{sign } f_2'(h) = \text{sign}[2\gamma^2 - (a_1^2 + b_1^2)(1 + h\gamma) \exp(2h\gamma)]. \quad (7.34)$$

Z powyższego wzoru wynika, że dla dużych wartości h $f_1'(h)$ ma znak ujemny, a $f_2'(h)$ znak dodatni. Pochodne $f_1'(h)$ i $f_2'(h)$ mogą zmienić znak tylko raz i to dla tej samej małej wartości h .

Łatwo zauważyć, że $d_1 < 0$ a $d_2 > 0$. Ze wzorów (7.32) wynika więc, że dla każdych wartości h i γ , takich że zachodzi (7.28), mamy

$f_1(h) < -0,5$, $f_2(h) > -0,5$, przy czym $f_1(h) \rightarrow -\infty$, $f_2(h) \rightarrow \infty$ przy $h \rightarrow \infty$. Warunek (7.31) jest więc spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f_1(h) \geq -1, \quad f_2(h) < 0. \quad (7.35)$$

Ze wzorów (7.32) i (7.33) mamy

$$f_1(h) + f_2(h) = -1 + (\arctg(|b_1|/a_1))/\mathcal{T}, \quad (7.36)$$

a więc suma funkcji $f_1(h)$ i $f_2(h)$ nie zależy od h i jest wielkością stałą z przedziału $(-1; -0,5)$. Jej wartość zależy od $|b_1|$ i a_1 . Jedynie dla $b_1 = 0$ suma ta jest równa -1 .

Ze wzoru (7.36) wynika, że jeżeli $f_1(h) \leq -1$, to $f_2(h) \geq 0$ (równe przy $b_1 = 0$). Jeżeli zaś $f_2(h) \in (-0,5; 0]$, to $f_1(h) \in (-1, 0)$. Nierówności (7.35) są więc spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $f_2(h) < 0$, czyli gdy spełniona jest nierówność (7.29). Twierdzenie zostało udowodnione. $\square$

Inną postać warunku $\mathcal{T}$ -stabilności quasi-wielomianu (7.20) podano w pracy [6]. Został on wyprowadzony na podstawie kryterium Pontriagina i jest trudniejszy w stosowaniu w porównaniu z warunkiem podanym w twierdzeniu 7.3.

Z dowodu twierdzenia 7.3 wynika następująca metoda wyznaczania przedziału wartości opóźnienia h , dla których quasi-wielomian (7.20) jest $\mathcal{T}$ -stabilny przy zadanym $\mathcal{T} > 0$.

- 1) Jeżeli $a_1 > \mathcal{T}$, to quasi-wielomian (7.20) jest $\mathcal{T}$ -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in [0, h_2)$, gdzie h_2 jest rozwiązaniem równania

$$h\mathcal{T} - 2 \arctg \frac{\mathcal{F} - |b_1| \exp(h\mathcal{T})}{a_1 \exp(h\mathcal{T}) + \mathcal{T}} = 0, \quad (7.37)$$

a $\mathcal{F}$ ma postać (7.30).

- 2) Jeżeli $a_1 \leq \mathcal{T}$, to quasi-wielomian (7.20) jest $\mathcal{T}$ -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in (h_1, h_2)$, gdzie h_1 i h_2 są to rozwiązania równania (7.37), spełniające warunek $h_0 < h_1 < h_2$, gdzie

$$h_0 = (\ln(\mathcal{T}/a_1))/\mathcal{T}. \quad (7.38)$$

Jeżeli równanie (7.37) nie ma dwóch różnych pierwiastków, to quasi-wielomian (7.20) nie jest γ -stabilny.

Zauważmy, że jeżeli $f_2'(h)$ w punkcie $h = h_0$ jest dodatnia lub równa zero, czyli

$$\frac{b_1^2}{a_1^2} + \left(1 + \frac{b_1^2}{a_1^2}\right) \ln \frac{\gamma}{a_1} - 1 \geq 0, \quad (7.39)$$

to $f_2(h)$ nie ma zer dla $h \geq h_0$, a więc quasi-wielomian (7.20) nie jest γ -stabilny.

Jeżeli $b_1 = 0$, to w omawianym powyżej przypadku 2) mamy $h_1 = h_0$, gdzie h_0 liczy się ze wzoru (7.38), a $h_2 > h_1 = h_0$ jest jedynym rozwiązaniem równania (7.37) przy $b_1 = 0$.

Z powyższych rozważań wynika następujący warunek asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (7.20).

Lemat 7.1.

Quasi-wielomian (7.20) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 > 0$ i $h \in [0, h_2)$, gdzie

$$h_2 = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \arctg \frac{a_1}{|b_1|}. \quad (7.40)$$

Twierdzenie 7.3 (lemat 7.1) można stosować do badania γ -stabilności (asymptotycznej stabilności) quasi-wielomianu

$$q(s, \exp(-sh)) = s^n + \sum_{i=1}^n a_{n-i} s^{n-i} \exp(-shi), \quad (7.41)$$

po rozłożeniu go na czynniki w następujący sposób:

$$q(s, \exp(-sh)) = \prod_{i=1}^n (s - s_i \exp(-sh)), \quad (7.42)$$

gdzie $s_i = \alpha_{1i} + j \beta_{1i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, są to zera wielomianu

$$w(s) = s^n + \sum_{i=1}^n a_{n-i} s^{n-i}. \quad (7.43)$$

7.1.3. Quasi-wielomian o rzeczywistych współczynnikach

Quasi-wielomian stopnia pierwszego z jednym opóźnieniem i o rzeczywistych współczynnikach ma postać

$$q(s, \exp(-sh)) = s + a_0 + a_1 \exp(-sh). \quad (7.44)$$

Można go otrzymać z (7.1), przyjmując $b_0 = b_1 = 0$. W takim przypadku równanie (7.2) ma postać

$$(z + (a_0 - \gamma)h) \exp(z) + a_1 h \exp(h\gamma) = 0. \quad (7.45)$$

Twierdzenie 7.4.

Quasi-wielomian (7.44) jest γ -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są nierówności:

$$a_1 \exp(h\gamma) + a_0 - \gamma > 0, \quad (7.46)$$

$$a_1 \exp(h\gamma) - a_0 + \gamma \leq 0, \quad (7.47)$$

albo (7.46) i

$$a_1 \exp(h\gamma) - a_0 + \gamma > 0, \quad (7.48)$$

$$h \sqrt{a_1^2 \exp(2h\gamma) - (a_0 - \gamma)^2} < 2 \arctan \sqrt{\frac{a_1 \exp(h\gamma) + a_0 - \gamma}{a_1 \exp(h\gamma) - a_0 + \gamma}}. \quad (7.49)$$

Dowód

Z twierdzenia 5.1 wynika, że równanie (7.45) może mieć wszystkie pierwiastki w OLP, jeżeli spełniona jest nierówność (7.46). Nierówność ta jest więc warunkiem koniecznym γ -stabilności quasi-wielomianu (7.44). Oznacza to, że spośród podanych w twierdzeniu 7.1 trzech grup warunków przy $b_0 = b_1 = 0$ mogą być spełnione tylko grupy (W1) i (W2). Nierówności (7.46) i (7.47) wynikają z grupy (W1) przy $b_1 = 0$. Zauważmy, że w nierówności (7.47) występuje znak $\leq$ zamiast $<$. Jeżeli w zależności (7.47) przyjmiemy znak $=$ i otrzymamy

w ten sposób równość uwzględnimy we wzorze (7.14) przy $b_1 = 0$, to otrzymamy $\Delta = 0$. W takim przypadku kryterium Czebotariewa i Mejmana nie może być bezpośrednio stosowane do równania (7.8). Mamy wtedy bowiem do czynienia z jednym z przypadków szczególnych, który nie był rozpatrywany podczas badania γ -stabilności quasi-wielomianu (7.1). Ogólny sposób postępowania w przypadkach szczególnych równania (7.8) jest omówiony w pracy [37]. Podczas badania γ -stabilności quasi-wielomianu (7.44) przypadek szczególny $\Delta = 0$ można dołączyć do podanej w twierdzeniu 7.1 grupy (W1) przy $b_1 = 0$. Wynika to np. z kryterium Pontriagina. Stąd w nierówności (7.47) występuje znak $\leq$.

Warunki (7.46) i (7.48) wynikają z nierówności (i) i (ii) (przy $b_1 = 0$) z grupy (W2) podanej w twierdzeniu 7.1. Warunek (iii) tej grupy można napisać w postaci (7.31), gdzie $f_1(h)$ i $f_2(h)$ mają postaci (7.32) oraz

$$d_2 = -d_1 = \sqrt{\frac{a_1 \exp(h\gamma) + a_0 - \gamma}{a_1 \exp(h\gamma) - a_0 + \gamma}}, \quad F = \sqrt{a_1^2 \exp(h\gamma) - (a_0 - \gamma)^2}. \quad (7.50)$$

Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 7.3 możemy wykazać, że warunek (7.31) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $f_2(h) < 0$, czyli gdy spełniona jest nierówność (7.49). Twierdzenie zostało zatem udowodnione. $\square$

Łatwo zauważyć, że przy zadanym $\gamma > 0$ nierówności (7.46) i (7.47) są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_0 - \gamma > a_1 > 0, \quad 0 \leq h < \frac{1}{\gamma} \ln \frac{a_0 - \gamma}{a_1}, \quad (7.51)$$

albo

$$0 > a_1 > \gamma - a_0, \quad 0 \leq h \leq \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\gamma - a_0}{a_1}. \quad (7.52)$$

Rozpatrzmy teraz warunki (7.46), (7.48) i (7.49). Oznaczmy przez h_γ rozwiązanie równania

$$h \sqrt{a_1^2 \exp(2h\gamma) - (a_0 - \gamma)^2} - 2 \arctg \sqrt{\frac{a_1 \exp(h\gamma) + a_0 - \gamma}{a_1 \exp(h\gamma) - a_0 + \gamma}} = 0. \quad (7.53)$$

Zauważmy, że jeżeli spełnione są nierówności (7.46) i (7.48), to nierówność (7.49) jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \leq h < h_r$.

Przy danym $r > 0$ warunki (7.46), (7.48) i (7.49) są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(a_1 > a_0 - r \geq 0) \vee (a_1 = a_0 - r) \vee (a_1 r - a_0 \geq 0), \quad 0 \leq h < h_r, \quad (7.54)$$

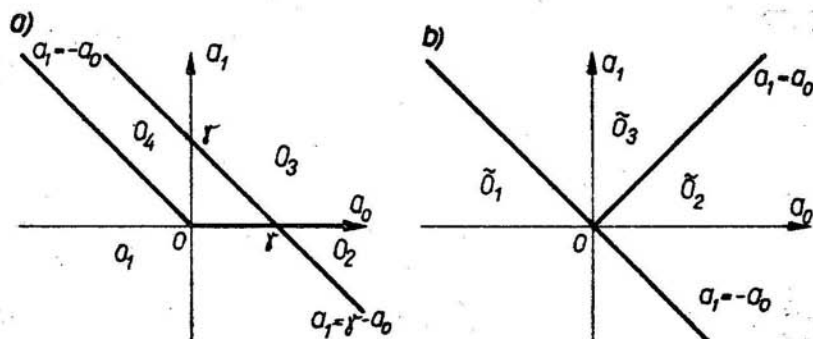
albo

$$0 < a_1 < a_0 - r, \quad \frac{1}{r} \ln \frac{a_0 - r}{a_1} < h < h_r, \quad (7.55)$$

albo

$$\left. \begin{aligned} (0 < a_1 \leq r - a_0) \wedge (a_1 > -a_0), \quad \frac{1}{r} \ln \frac{r - a_0}{a_1} < \frac{1}{r - a_0}, \\ \frac{1}{r} \ln \frac{r - a_0}{a_1} < h < h_r. \end{aligned} \right\} \quad (7.56)$$

Z warunków (7.51), (7.52) i (7.54) - (7.56) wynika, że przy ustalonym $r > 0$ płaszczyznę (a_0, a_1) parametrów quasi-wielomianu (7.44) można podzielić na obszary $0_1, \dots, 0_4$ w sposób podany na rysunku 7.3a).



Rys. 7.3. Podział płaszczyzny (a_0, a_1) na obszary, w których quasi-wielomian (7.44) ma różne właściwości a) r -stabilności, b) asymptotycznej stabilności

W każdym z tych obszarów quasi-wielomian (7.44) ma inne właściwości r -stabilności.

1) Obszar $0_1 (0 < a_1 \leq -a_0 < 0 \text{ lub } 0 > a_1 \leq r - a_0)$. Quasi-wielomian

(7.44) nie jest γ -stabilny dla dowolnego $\gamma > 0$ i każdego $h \geq 0$.

2) Obszar O_2 ($0 < a_1 < \gamma - a_0$). Quasi-wielomian (7.44) jest γ -stabilny

$$\text{dla } 0 \leq h < \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\gamma - a_0}{a_1}.$$

3) Obszar O_3 ($a_1 > 0$ i $a_1 > \gamma - a_0$). Quasi-wielomian (7.44) jest γ -stabilny dla $0 \leq h < h_r$.

4) Obszar O_4 ($0 < a_1 \leq \gamma - a_0$ i $a_1 > -a_0$). Jeżeli

$$\frac{1}{\gamma} \ln \frac{\gamma - a_0}{a_1} < \frac{1}{\gamma - a_0}, \quad (7.57)$$

to quasi-wielomian (7.44) jest γ -stabilny dla $\frac{1}{\gamma} \ln \frac{\gamma - a_0}{a_1} < h < h_r$.

Jeżeli zaś zależność (7.57) nie jest spełniona, to ten quasi-wielomian nie jest γ -stabilny dla dowolnego $\gamma > 0$ i każdego $h \geq 0$.

W przypadku gdy $\gamma = 0$, płaszczyznę (a_0, a_1) można podzielić na obszary $\tilde{O}_1$, $\tilde{O}_2$ i $\tilde{O}_3$ w sposób pokazany na rysunku 7.3b). W każdym z tych obszarów quasi-wielomian (7.44) ma inne właściwości asymptotycznej stabilności, przy czym (porównaj lemat 5.4):

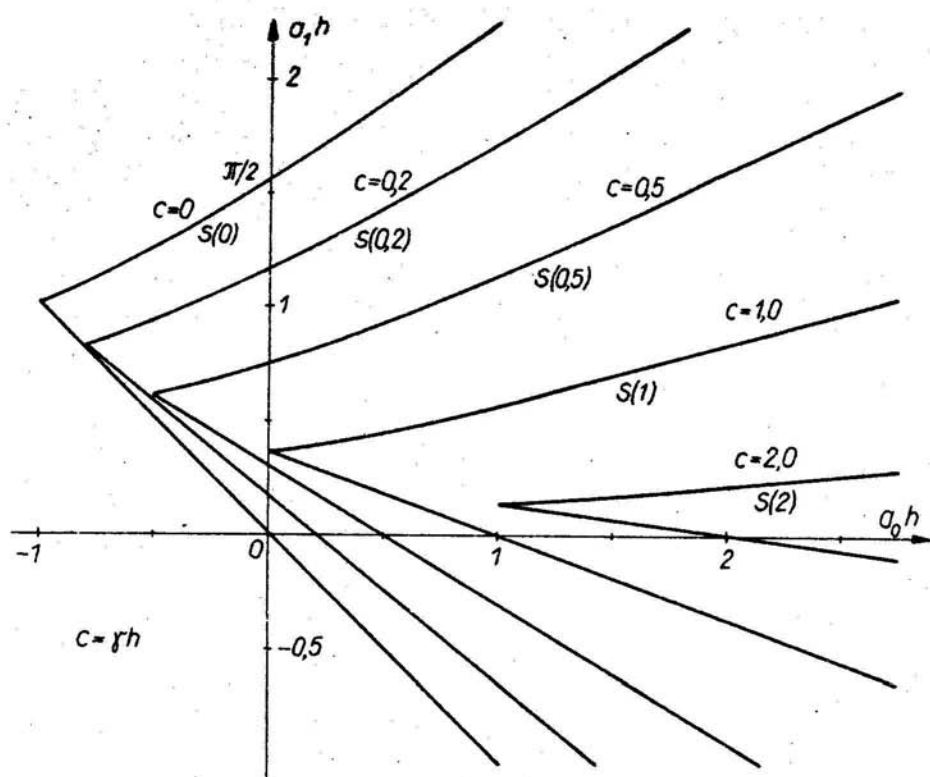
a) w obszarze $\tilde{O}_1$ ($a_1 \leq -a_0$) nie jest on asymptotycznie stabilny dla dowolnego $h \geq 0$,

b) w obszarze $\tilde{O}_2$ ($a_1 > -a_0$ i $a_1 \leq a_0$) jest on asymptotycznie stabilny dla każdego $h \geq 0$ (ASNO),

c) w obszarze $\tilde{O}_3$ ($a_1 > |a_0|$) jest on asymptotycznie stabilny dla

$$0 \leq h < \frac{2}{\sqrt{a_1^2 - a_0^2}} \arctg \sqrt{\frac{a_1 + a_0}{a_1 - a_0}}. \quad (7.58)$$

Na rysunku 7.4 pokazane są granice γ -stabilności quasi-wielomianu (7.44), wykreślone na płaszczyźnie (a_0, a_1) dla kilku wartości współczynnika $c = h\gamma$. Zostały one wyznaczone na podstawie metody D-podziału. Obszary $S(c)$ γ -stabilności leżą na prawo od poszczególnych granic, wykreślonych dla ustalonego współczynnika $c = h\gamma$. Obszar $S(0)$ jest obszarem asymptotycznej stabilności.



Rys.7.4. Obszary $S(c)$ γ -stabilności quasi-wielomianu (7.44) dla kilku wartości współczynnika $c = h\gamma$

7.2. Badanie γ -stabilności ogólnego quasi-wielomianu typu opóźnionego

Dany jest quasi-wielomian typu opóźnionego o postaci

$$q(s, \exp(-sh)) = s^n + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^p a_{lk} s^l \exp(-shk), \quad (7.59)$$

gdzie $a_{lk} \in \mathbb{R}$, $h > 0$.

Badanie γ -stabilności quasi-wielomianu (7.59) przy $\gamma > 0$ ma sens tylko wtedy, gdy jest on asymptotycznie stabilny. Aby to sprawdzić, możemy wykorzystać podane w p.4.1 metody badania ASNO (lub MASNO) i (lub) opisaną w rozdziale 6 metodę h -podziału.

Warunki γ -stabilności quasi-wielomianu (7.59) możemy sformuło-

wać w postaci analitycznej jedynie w pewnych przypadkach szczególnych (patrz p.7.1). Natomiast w przypadku ogólnym możemy podać metodę postępowania podczas badania γ -stabilności na podstawie analizy położenia zer quasi-wielomianu (7.59) w funkcji opóźnienia, a więc na podstawie analizy jego linii pierwiastkowych. Linie te wyznacza się w sposób numeryczny, rozwiązując dla każdego ustalonego h równanie $q(s, \exp(-sh)) = 0$ lub odpowiedni układ dwóch równań rzeczywistych. Możliwość stosowania proponowanej metody badania γ -stabilności jest więc uwarunkowana możliwościami numerycznego wyznaczania zer quasi-wielomianu (7.59).

Dla $h=0$ quasi-wielomian (7.59) jest wielomianem $q(s,1)$ i ma n zer. Natomiast dla każdego $h>0$ liczba jego zer jest nieskończenie wielka. Przy h rosnącym od zera n zer wychodzi z zer wielomianu $q(s,1)$, a pozostałe "wychodzą z $-\infty$ ". Wszystkie te zera wraz ze wzrostem wartości h poruszają się po nieskończonej liczbie linii pierwiastkowych. Ponieważ quasi-wielomian (7.59) ma rzeczywiste współczynniki, jego zera zespolone są parami sprzężone. Wystarczy więc rozpatrywać tylko te linie pierwiastkowe, po których poruszają się zera o nieujemnych częściach urojonych.

Zera o dużych modułach quasi-wielomianu typu opóźnionego dla każdego skończonego $h>0$ spełniają warunek $\operatorname{Re} s \rightarrow -\infty$, przy $|s| \rightarrow \infty$. Dla każdego ustalonego h ten quasi-wielomian ma więc skończoną liczbę zer spełniających warunek $\operatorname{Re} s \geq -\gamma$, gdzie γ jest skończoną liczbą dodatnią. Liczba tych zer jest tym większa im większa jest wartość opóźnienia h . Załóżmy, że dla pewnego ustalonego $h=h_0$ quasi-wielomian (7.59) jest asymptotycznie stabilny, czyli istnieje $\gamma>0$ takie, że dla każdego zera $\operatorname{Re} s < -\gamma$. Wraz ze wzrostem wartości h zera tego quasi-wielomianu zbliżają się do osi urojonej, przy czym niektóre z nich mogą najpierw się oddalać (patrz przykład 7.2). Prosta $\operatorname{Re} s = -\gamma$ osiągną najpierw te zera, chociaż niekoniecznie wszystkie, które dla $h=h_0$ leżały najbliżej. Zera o większych modułach, które dla $h=h_0$ leżały dalej od osi urojonej, osiągną prostą $\operatorname{Re} s = -\gamma$ dla wartości h odpowiednio większych. O γ -stabilności quasi-wielomianu typu opóźnionego decyduje więc pewna skończona liczba jego zer, które dla małych wartości h leżą najbliżej osi urojonej. Analizując przebieg linii pierwiastkowych, po których poruszają się te zera dla h z pewnego skończonego przedziału, możemy na płaszczyźnie (h, γ)

wyznaczyć obszar (lub obszary) γ -stabilności quasi-wielomianu (7.59).

Zauważmy, że podobnych rozważań nie można przeprowadzić dla quasi-wielomianu typu neutralnego, ma on bowiem dla każdego ustalonego $h > 0$ nieskończenie wiele zer o prawie jednakowej odległości od osi urojonej.

7.2.1. Wyznaczanie linii pierwiastkowych

Wyznaczanie skończonej liczby linii pierwiastkowych quasi-wielomianu (7.59) wymaga numerycznego obliczania jego zer. Jest to bardzo złożony problem, znacznie wykraczający poza zakres niniejszej pracy. Sposób obliczania według numerycznej metody Newtona zer funkcji zespolonej, jaką jest quasi-wielomian (7.59), przedstawiono w pracy [110]. Omówiono tam też problemy z tym związane.

Poniżej przedstawimy sposób obliczania zer quasi-wielomianu (7.59), zastosowany w przykładach podanych w dalszej części niniejszej pracy. Różni się on od opisanego w [110] tym, że zamiast znajdowania zer quasi-wielomianu (7.59) jako funkcji zespolonej, rozwiązuje się tu równoważny układ dwóch równań rzeczywistych.

γ -stabilność quasi-wielomianu (7.59) jest równoważna asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu

$$q_{\gamma}(s, \exp(-sh)) = (s - \gamma)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^p a_{ik} (s - \gamma)^i \exp(-hk(s - \gamma)), \quad (7.60)$$

który dla $s = j\omega$ można napisać w postaci

$$q_{\gamma}(j\omega, \exp(-j\omega h)) = P(\gamma, \omega, h) + jQ(\gamma, \omega, h), \quad (7.61)$$

gdzie $P(\gamma, \omega, h)$ jest częścią rzeczywistą, a $Q(\gamma, \omega, h)$ częścią urojoną quasi-wielomianu (7.60), dla $s = j\omega$. Są one funkcjami $\gamma, \omega, \exp(h\gamma), \sin(\omega h)$ i $\cos(\omega h)$.

Obliczanie zer quasi-wielomianu (7.59), przy ustalonej wartości h , jest równoważne rozwiązywaniu następującego układu dwóch równań nieliniowych:

$$\left. \begin{aligned} P(\gamma, \omega, h) &= 0, \\ Q(\gamma, \omega, h) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.62)$$

Parę liczb (γ, ω) , spełniających układ równań (7.62), nazywać będziemy jego rozwiązaniem. Zauważmy, że pomiędzy rozwiązaniem układu (7.62) a zerami quasi-wielomianu (7.59) zachodzi związek

$$\operatorname{Re} s = -\gamma, \operatorname{Im} s = \omega. \quad (7.63)$$

Dla każdego ustalonego $h > 0$ istnieje nieskończenie wiele rozwiązań (γ, ω) układu równań (7.62). Aby znaleźć wszystkie jego rozwiązania, leżące na płaszczyźnie (γ, ω) w zadanym obszarze, należy najpierw zlokalizować położenie każdego z nich. Można to zrobić na podstawie opisanej w [110] metody Kuhna lokalizacji położenia zer funkcji całkowitych. Omówimy teraz główną ideę tej metody w zastosowaniu do quasi-wielomianu (7.60), a więc i układu równań (7.62).

Zdefiniujemy indeks M w następujący sposób:

$$M = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } -\pi/3 \leq \varphi \leq \pi/3 \text{ lub } q_\gamma(j\omega, \exp(-j\omega h)) = 0, \\ 2 & \text{jeśli } \pi/3 < \varphi \leq \pi \\ 3 & \text{jeśli } -\pi < \varphi < -\pi/3, \end{cases}$$

gdzie φ jest argumentem funkcji (7.61).

Załóżmy, że poszukujemy rozwiązań układu równań (7.62) w obszarze $\gamma \in [0, \tilde{\gamma}]$, $\omega \in [0, \Omega]$. Dzielimy ten obszar na małe prostokąty o bokach $\Delta\gamma$ i $\Delta\omega$. Powstaje w ten sposób na płaszczyźnie (γ, ω) siatka, w węzłach której liczymy wartości indeksu M . Jeżeli w trzech sąsiednich węzłach indeks M przyjmuje różne wartości, tj. 1, 2 i 3, to w trójkącie T , którego wierzchołkami są te węzły, leży rozwiązanie układu równań (7.62). Znajdując wszystkie takie trójkąty, zlokalizujemy położenie wszystkich rozwiązań układu równań (7.62), leżących w rozpatrywanym obszarze. Za przybliżenie początkowe każdego z tych rozwiązań należy przyjąć punkt (γ, ω) , leżący w środku odpowiedniego z wyznaczonych, w wyżej opisany sposób, trójkątów.

W pracy [110] jest podany sposób postępowania podczas lokalizacji położenia zer funkcji całkowitych, nie wymagający liczenia indeksu M w każdym z węzłów siatki.

Znając przybliżenie początkowe (γ_p, ω_p) dowolnego rozwiązania układu równań (7.62), można je z zadaną dokładnością obliczyć rozwiązując numerycznie ten układ równań. Do numerycznego rozwiązywania

układu równań (7.62) względem γ i ω , przy h ustalonym, wygodnie jest stosować metodę gradientu lub Newtona. Wyznaczając na podstawie tych metod kolejne przybliżenia rozwiązania układu równań (7.62), należy obliczać dla ustalonych wartości h, γ i ω macierz Jacobiego o postaci [47]

$$\begin{bmatrix} \partial P / \partial \gamma & \partial P / \partial \omega \\ \partial Q / \partial \gamma & \partial Q / \partial \omega \end{bmatrix},$$

gdzie $P \hat{=} P(\gamma, \omega, h)$, $Q \hat{=} Q(\gamma, \omega, h)$.

Quasi-wielomian (7.60), (7.61) jest funkcją analityczną, a więc spełnia warunki Cauchy-Riemanna [14,102], czyli

$$\partial P / \partial \omega = \partial Q / \partial \gamma, \quad \partial Q / \partial \omega = - \partial P / \partial \gamma.$$

Oznacza to, że wystarczy obliczać z odpowiednich wzorów tylko wartości $\partial P / \partial \gamma$ i $\partial Q / \partial \gamma$, co znacznie skraca czas obliczeń na maszynie cyfrowej.

Jeżeli dla $h = h_1$ znamy jedno z rozwiązań, np. (γ_1, ω_1) , układu równań (7.62), to aby wyznaczyć na płaszczyźnie (γ, ω) fragment linii pierwiastkowej przechodzącej przez punkt (γ_1, ω_1) , należy rozwiązać ten układ równań dla kolejnych wartości h z zadanego przedziału (z zadanym krokiem Δh), przyjmując każdorazowo za przybliżenie początkowe wartości γ i ω obliczone dla poprzedniej wartości h . Krok Δh musi być odpowiednio mały w porównaniu z aktualną wartością h .

7.2.2. Metoda postępowania przy badaniu γ -stabilności

Przeanalizujemy teraz, które z nieskończonej liczby linii pierwiastkowych należy rozpatrzyć przy badaniu γ -stabilności quasi-wielomianu (7.59). Będziemy zakładać, że jest on asymptotycznie stabilny albo dla pewnych wartości opóźnienia h albo dla każdego $h \geq 0$.

Dla bardzo małych wartości h o asymptotycznej stabilności i o γ -stabilności quasi-wielomianu (7.59) decydują zera wielomianu $q(s,1)$. Należy więc wyznaczyć w opisany w p.7.2.1 sposób wszystkie linie pierwiastkowe, wychodzące przy h rosnącym od zera z zera o nieujemnych częściach urojonych wielomianu $q(s,1)$. Linii tych jest co najwyżej n .

Omówione powyżej zera i linie będziemy dalej nazywać odpowiednio zerami i liniami pierwszej grupy. Pozostałe zera o nieujemnej części urojonej i odpowiadające im linie będziemy nazywać odpowiednio zerami i liniami drugiej grupy.

Aby określić, które z nieskończonej liczby linii drugiej grupy należy wyznaczyć podczas badania γ -stabilności wyszczególnimy dwa przypadki.

Przypadek pierwszy

Założmy, że quasi-wielomian (7.59) jest asymptotycznie stabilny w kilku (lub jednym) przedziałach wartości opóźnienia, wyznaczonych na podstawie opisanej w rozdziale 6 niniejszej pracy metody h-podziału. Dla niektórych quasi-wielomianów przedziałów tych może być bardzo dużo lub też nieskończenie wiele (porównaj przykład 6.2). W układzie praktycznym opóźnienie może zmieniać się tylko w pewnym skończonym przedziale. Dlatego też w dalszych rozważaniach badanie γ -stabilności ograniczymy co najwyżej do kilku przedziałów asymptotycznej stabilności. Oznaczmy przez $\tilde{h}$ ostatni moment utraty asymptotycznej stabilności, jeżeli h zmienia się w tych przedziałach. Aby zbadać γ -stabilność należy więc przeanalizować przebieg linii pierwiastkowych dla $h \in [0, H]$, gdzie $H \geq \tilde{h}$. Zauważmy, że w tak określonym przedziale można wyznaczyć tylko linie pierwiastkowe pierwszej grupy. Dla linii drugiej grupy należy przyjąć przedział $[H_0, H]$, gdzie H_0 jest małą liczbą dodatnią.

Aby wyznaczyć skończoną liczbę linii pierwiastkowych drugiej grupy, należy najpierw dla $h=H_0$, w oparciu o metodę Kuhna, zlokalizować położenie zer drugiej grupy w pewnym prostokącie $0 \leq \gamma \leq \tilde{\gamma}$, $0 \leq \omega \leq \Omega$. Omówimy teraz ogólne wytyczne dotyczące doboru $\tilde{\gamma}$ i Ω .

Linie pierwiastkowe quasi-wielomianu (7.59) przecinają oś urojonej w skończonej liczbie punktów ω_i , które wyznacza się za pomocą metody h-podziału. Niech $\tilde{\omega} = \max_i \omega_i$. Aby przeanalizować możliwie dużą liczbę linii pierwiastkowych, należy przyjąć np. $\Omega \approx 2\tilde{\omega}$. Wartość $\tilde{\gamma}$ należy przyjąć odpowiednio dużą, taką, aby dla $h = H_0$ w prostokącie $0 \leq \gamma \leq \tilde{\gamma}$, $0 \leq \omega \leq \Omega$ leżało odpowiednio dużo rozwiązań układu równań (7.62). Następnie należy zlokalizować położenie wszystkich rozwiązań układu (7.62), leżących w tym prostokącie. Mogą w nim oczywiście

leżeć zera pierwszej grupy, których nie będziemy rozpatrywać, jeżeli zostały już wyznaczone linie pierwiastkowe pierwszej grupy. Jeżeli otrzymamy, że w zadanym prostokącie przy $h = H_0$ np. nie ma zer drugiej grupy lub jest ich bardzo mało, to należy zwiększyć $\tilde{\gamma}$ albo Ω albo też H_0 . Wygodniej będzie chyba zwiększyć najpierw $\tilde{\gamma}$, a w następnej kolejności Ω . Dla nowego prostokąta należy znowu przy ustalonej wartości $h = H_0$ zlokalizować położenie zer drugiej grupy. W razie konieczności należy tę procedurę powtórzyć kilkakrotnie.

Jeżeli uznamy, że zlokalizowana liczba zer drugiej grupy może być wystarczająca, należy w opisany w p.7.2.1 sposób wyznaczyć linie pierwiastkowe, po których poruszają się te zera przy $h \in [H_0, H]$. Otrzymamy w ten sposób wartości $\tilde{\gamma}$ i ω w funkcji h , odpowiadające każdej z wyznaczonych linii pierwiastkowych. Sporządzając na płaszczyźnie $(h, \tilde{\gamma})$ wykres wartości $\tilde{\gamma}$ w funkcji h (wystarczy brać pod uwagę $\tilde{\gamma} \geq 0$), odpowiadających wszystkim wyznaczonym liniom pierwiastkowym (pierwszej i drugiej grupy), otrzymamy szereg linii ilustrujących zmiany w funkcji opóźnienia odległości od osi urojonej poszczególnych zer quasi-wielomianu (7.59), uprzednio zlokalizowanych dla $h = H_0$. Obszar ograniczony półosiąmi $h \geq 0$ i $\tilde{\gamma} \geq 0$ i położonymi najbliższej osi odciętych liniami może być obszarem $\tilde{\gamma}$ -stabilności quasi-wielomianu (7.59). Aby przekonać się o tym, należy przyjąć nową wartość $H_0 = H'_0$, odpowiednio większą od poprzedniej, zlokalizować położenie zer w tym samym co poprzednio prostokącie i wyznaczyć dla $h \in [H'_0, H]$ linie pierwiastkowe, po których poruszają się zera, które pojawiły się w tym prostokącie dla $h = H'_0$. Jeżeli nowe linie nie wchodziły w wyznaczony poprzednio na płaszczyźnie $(h, \tilde{\gamma})$ obszar, to jest on obszarem $\tilde{\gamma}$ -stabilności. Jeżeli zaś wchodziły, to należy skorygować obszar $\tilde{\gamma}$ -stabilności i znowu sprawdzić w wyżej opisany sposób, czy jest on istotnie obszarem $\tilde{\gamma}$ -stabilności. W zależności od wyniku sprawdzania, znowu bądź korygujemy ten obszar, bądź przerywamy procedurę sprawdzania. W ten sposób wyznaczymy obszar $\tilde{\gamma}$ -stabilności quasi-wielomianu (7.59).

Przy wyznaczaniu obszaru $\tilde{\gamma}$ -stabilności możemy też sporządzić pomocniczy wykres linii pierwiastkowych na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s . Należy wtedy uwzględnić wzory (7.63).

Powyższe rozważania zilustrujemy teraz przykładami. W podanych poniżej przykładach 7.1 i 7.2, jak i w podanym dalej przykładzie 7.3,

przy numerycznym rozwiązywaniu układu równań (7.62) za pomocą metody gradientu, jako kryterium stopu przyjęto warunek

$$\max \left\{ |P(\gamma, \omega, h)|, |Q(\gamma, \omega, h)| \right\} \leq \varepsilon, \quad (7.64)$$

gdzie $\varepsilon = 10^{-6}$.

PRZYKŁAD 7.1.

Zbadajmy γ -stabilność quasi-wielomianu

$$q(s, \exp(-sh)) = s^2 + s + 2s \exp(-sh) + 1, \quad (7.65)$$

dla którego układ równań (7.62) ma postać

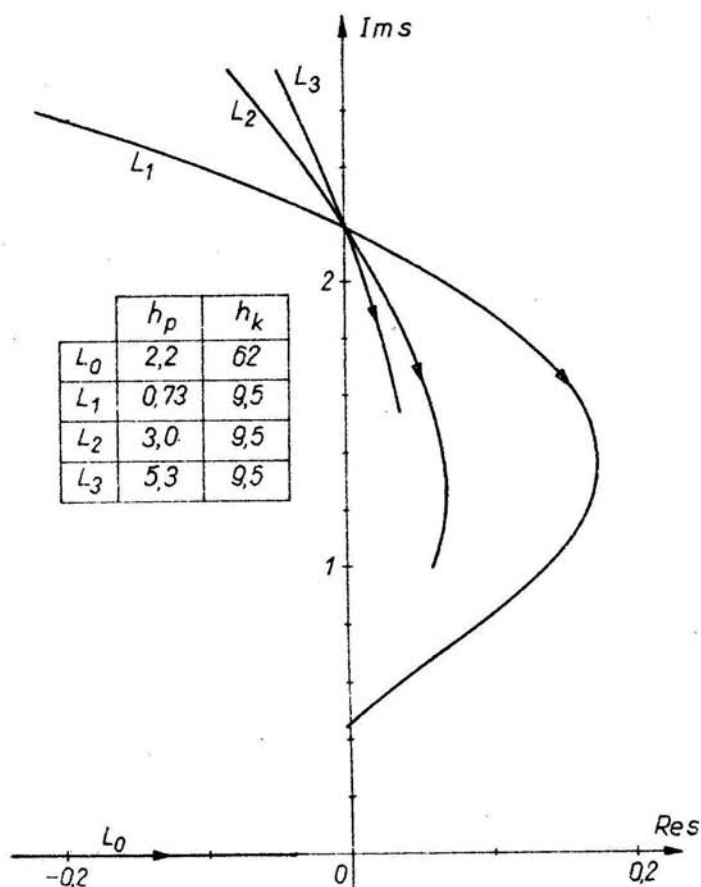
$$\left. \begin{aligned} \gamma^2 - \gamma - \omega^2 + 1 + 2(\omega \sin(\omega h) - \gamma \cos(\omega h)) \exp(h\gamma) &= 0, \\ \omega - 2\omega\gamma + 2(\omega \cos(\omega h) + \gamma \sin(\omega h)) \exp(h\gamma) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.66)$$

Asymptotyczna stabilność quasi-wielomianu (7.65) była badana w przykładzie 6.6. Jest on asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in [0, h_1]$, gdzie $h_1 = 0,956825$. Podczas badania γ -stabilności należy więc przeanalizować jego linie pierwiastkowe, przebiegające dla $h \in [0, H]$, gdzie $H = 1$, najbliższej osi urojonej. Jednakże dla celów poznawczych przyjęto wartość H odpowiednio większą.

Postępując w wyżej opisany sposób wyznaczono pokazane na rysunku 7.5 fragmenty czterech linii pierwiastkowych $L_0, \dots, L_3$. Każda z nich została wykreślona dla $h \in [h_p, h_k]$, przy czym wartości h_p i h_k są podane w tabelce obok wykresów. Linia L_1 wchodzi w OPP przy $h=h_1$, wychodzi przy $h=h_4$ i pozostaje w OLP dążąc do punktu $(0,0)$, przy $h \rightarrow \infty$. Linie L_2 i L_3 wchodzi w OPP odpowiednio przy $h=h_2$ i $h=h_3$. Wartości liczbowe h_i są podane w przykładzie 6.6.

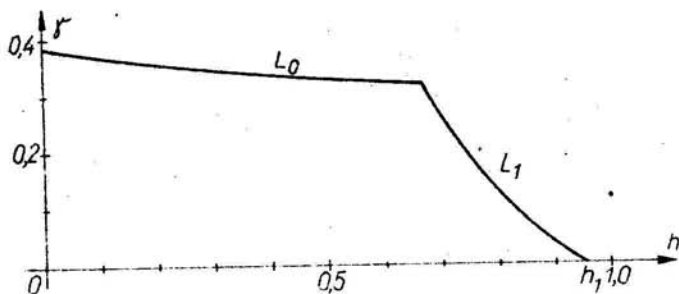
Wielomian $q(s, 1) = s^2 + 3s + 1$ ma dwa zera rzeczywiste $s_0 = -1,5 + \sqrt{5}/2$, $s_1 = -1,5 - \sqrt{5}/2$. Zero s_0 wraz ze wzrostem wartości h porusza się po linii L_0 , zaś s_1 najpierw się oddala od punktu $(0,0)$, przy $h \approx 0,1603$ pokrywa się w punkcie $\text{Re } s \approx -6,8986$ z rzeczywistym zerem, które "wyszło z $-\infty$ " i dalej przesuwają się po linii L_1 .

Aby wyznaczyć w wyżej opisany sposób odejście tej linii od osi rzeczywistej, należało przyjąć $\Delta h = 0,0001$, podczas gdy dla wyznaczenia dalszego fragmentu tej linii, jak i pozostałych linii pierwiastkowych, wystarczyło przyjąć np. $\Delta h = 0,05$.



Rys.7.5. Fragment linii pierwiastkowych quasi-wielomianu (7.65)

Nanosząc na płaszczyźnie (h, γ) wartości γ w funkcji h , odpowiadające liniom pierwiastkowym L_0 i L_1 , otrzymamy pokazany na rysunku 7.6 obszar γ -stabilności quasi-wielomianu (7.65). Na rysunku tym zaznaczono, które brzegi obszaru γ -stabilności zostały wyznaczone przez linie L_0 i L_1 . Wykresy $\gamma(h)$ dla pozostałych linii pierwiastkowych przebiegają znacznie wyżej dla $h \in [0, 1]$. Na przykład dla $h=0,3$ wartości zer s_i , leżących na pokazanych na rysunku 7.5 liniach L_i , $i=1,2,3$, są następujące: $s_1 = -2,3825 + j3,9897$, $s_2 = -8,5867 + j25,2025$, $s_3 = -10,5516 + j46,4472$.



Rys.7.6. Obszar γ -stabilności quasi-wielomianu (7.65)

Czas potrzebny na obliczenie jednego rozwiązania (γ, ω) układu równań (7.66) (przy h ustalonym), na podstawie metody Newtona przy kryterium stopu (7.64) i przy 3-4 iteracjach, wyniósł około 0,0017 sekundy. Obliczenia wykonano na maszynie cyfrowej ODRA 1305, stosując zapis podwójnej precyzji dla liczb rzeczywistych. Taki sam czas jest też potrzebny do wyznaczenia jednego rozwiązania układu równań (7.70), podanego dalej w przykładzie 7.3. $\square$

PRZYKŁAD 7.2.

Dany jest quasi-wielomian

$$q(s, \exp(-sh)) = s^2 + 8 - (0,2s+2)\exp(-sh) - \exp(-2sh), \quad (7.67)$$

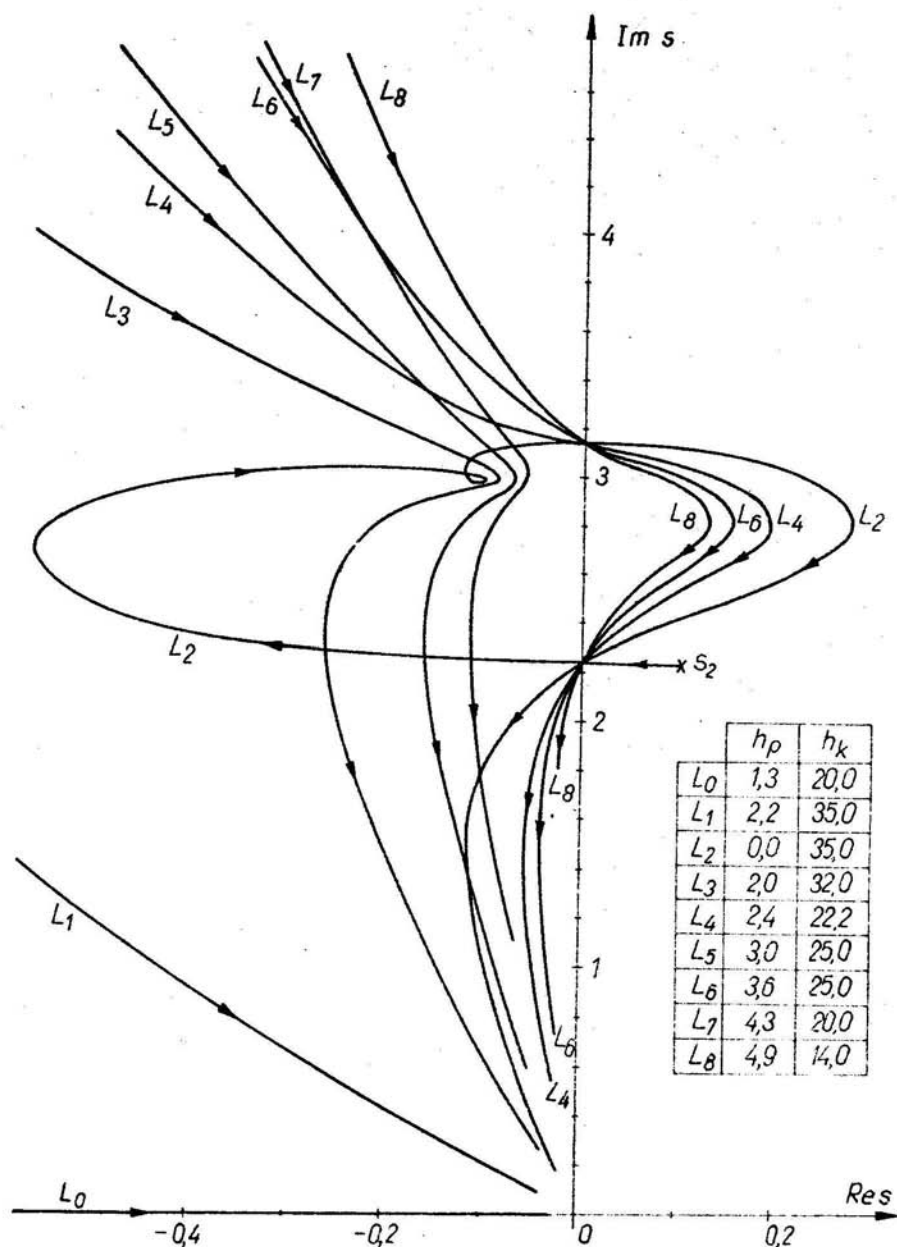
dla którego układ równań (7.62) ma postać

$$\left. \begin{aligned} \gamma^2 - \omega^2 + 8 + [-0,2\omega \sin(\omega h) + (0,2\gamma - 2)\cos(\omega h)]\exp(h\gamma) - \\ - \exp(2h\gamma)\cos(2\omega h) = 0, \\ -2\omega\gamma - [0,2\omega\cos(\omega h) + (0,2\gamma - 2)\sin(\omega h)]\exp(h\gamma) + \\ + \exp(2h\gamma)\sin(2\omega h) = 0. \end{aligned} \right\} (7.68)$$

Asymptotyczna stabilność quasi-wielomianu (7.67) była badana w przykładzie 6.4. Otrzymano tam, że jest on asymptotycznie stabilny dla $h \in (h_1, h_2)$ i $h \in (h_3, h_4)$, gdzie $h_1 = 0,049948$, $h_2 = 1,254795$, $h_3 = 2,863454$, $h_4 = 3,254305$. W celu zbadania γ -stabilności quasi-wielomianu (7.67) wystarczy więc przeanalizować przebieg jego linii pierwiastkowych dla $h \in [0, H]$, gdzie $H \geq h_4$. Można np. przyjąć $H=3,5$. Jednakże przedział ten znacznie zwiększymy, aby poznać bliżej przebieg linii pierwiastkowych tego quasi-wielomianu.

Wielomian $q(s,1)$ ma parę zer zespolonych sprzężonych, leżących w OPP. Oznaczmy przez s_2 zero o dodatniej części urojonej, czyli $s_2 = 0,1 + j2,233831$. Wyznaczając w opisany w p.7.2.1 sposób linię pierwiastkową wychodzącą z zera s_2 otrzymamy pokazaną na rysunku 7.7 linię L_2 . Linia ta przy $h=h_1$ wchodzi w OLP, przy $h=h_2$ wchodzi w OPP, by dla $h=h_3$ znowu wejść w OLP. Dla $h>h_3$ linia ta pozostaje w OLP i dąży do punktu $(0,0)$ przy $h \rightarrow \infty$. Na rysunku 7.7 pokazano fragmenty dziewięciu linii pierwiastkowych, wyznaczonych na podstawie opisanej w p.7.2.1 metody, przy uwzględnieniu podanych na początku niniejszego punktu rozważań. Każdy z nich został wykreślony dla $h \in [h_p, h_k]$. Wartości h_p i h_k dla poszczególnych linii są podane w tabelce obok wykresów. Na rysunku 7.7 nie wykreślono innych linii, które dla dużych wartości h (rzędu kilkunastu lub kilkudziesięciu) też pojawiają się w pokazanym na nim obszarze (porównaj przykład 6.4). Linie te nie mają jednak żadnego wpływu na γ -stabilność.

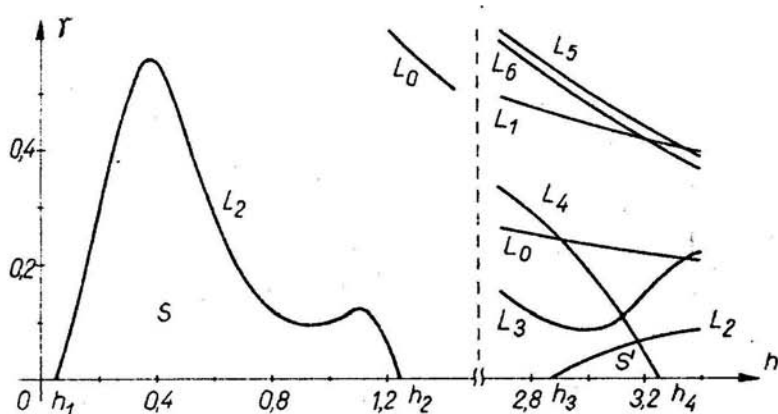
Pokazane na rysunku 7.7 linie L_0, L_1, L_3, L_5 i L_7 cały czas pozostają w OLP i dla $h \rightarrow \infty$ dążą do punktu $(0,0)$. Linia L_4 przy $h=h_4$ przekracza oś urojoną i wchodzi w OPP, by przy $h=h_6$ znowu przejść w OLP.



Rys.7.7. Fragment linii pierwiastkowych quasi-wielomianu (7.67)

Linia L_6 przy $h=h_5$ wchodzi w OPP, a przy $h=h_8$ w OLP. Linia L_8 wchodzi w OPP przy $h=h_7$, zaś przy $h=h_{11}$ wchodzi w OLP. Wartości liczbowe h_i są podane w przykładzie 6.4.

Nanosząc na płaszczyznę (h, γ) wyznaczone dla poszczególnych linii pierwiastkowych wartości γ w funkcji h otrzymamy szereg pokazanych na rysunku 7.8 krzywych, ilustrujących zmiany odległości γ rozpatrywanych zer quasi-wielomianu (7.67) od osi urojonej.



Rys. 7.8. Wykresy $\gamma(h)$ dla kilku zer quasi-wielomianu (7.67) i obszary S i S' jego γ -stabilności

Z rysunku 7.8 wynika, że dla $h \leq 1,5$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s najbliższej osi urojonej leży linia L_2 , a pozostałe leżą znacznie dalej. Z obliczeń otrzymaliśmy, że np. dla $h=0,5$ $s_2 = -0,436 + j2,96$, natomiast $s_0 = -2,0506$, $s_1 = -4,301 + j8,1739$, $s_3 = -5,6942 + j15,084$, $s_4 = -6,0077 + j21,346$. Linie te jednak szybko zbliżają się do osi urojonej i dla $h \in [2,7; 3,4]$ ich odległość od osi urojonej jest już niewielka.

Pokazane na rysunku 7.8 obszary S i S' są obszarami γ -stabilności quasi-wielomianu (7.67). Z rysunku tego wynika, że dla $h \in (h_1, h_2)$ o γ -stabilności decyduje linia L_2 , zaś dla $h \in (h_3, h_4)$ linie L_2 i L_4 . Pozostałe linie nie mają wpływu na γ -stabilność.

Czas numerycznego wyznaczania jednego rozwiązania układu równań (7.68) przy kryterium stopu (7.64) i przy 3-4 iteracjach wynosi około 0,002 sekundy. $\square$

Przypadek drugi

Założmy, że quasi-wielomian (7.59) jest asymptotycznie stabilny dla każdego $h \geq 0$. W takim przypadku nie możemy sformułować ogólnych wytycznych dotyczących doboru wartości H , $\tilde{\gamma}$ i $\tilde{\Omega}$ w taki sam sposób jak w przypadku pierwszym.

W układach praktycznych opóźnienie h może zmieniać się w pewnym skończonym przedziale. Dlatego też za H można przyjąć wartość równą lub większą od górnej granicy tego przedziału. Natomiast wartości $\tilde{\gamma}$ i $\tilde{\Omega}$ należy przyjąć odpowiednio duże, aby w prostokącie $0 \leq \gamma \leq \tilde{\gamma}$, $0 \leq \omega \leq \tilde{\Omega}$ dla $h = H_0 > 0$ leżało dostatecznie dużo rozwiązań układu równań (7.62). Dalej należy postępować w podobny sposób, jak w przypadku pierwszym.

PRZYKŁAD 7.3.

Dany jest quasi-wielomian

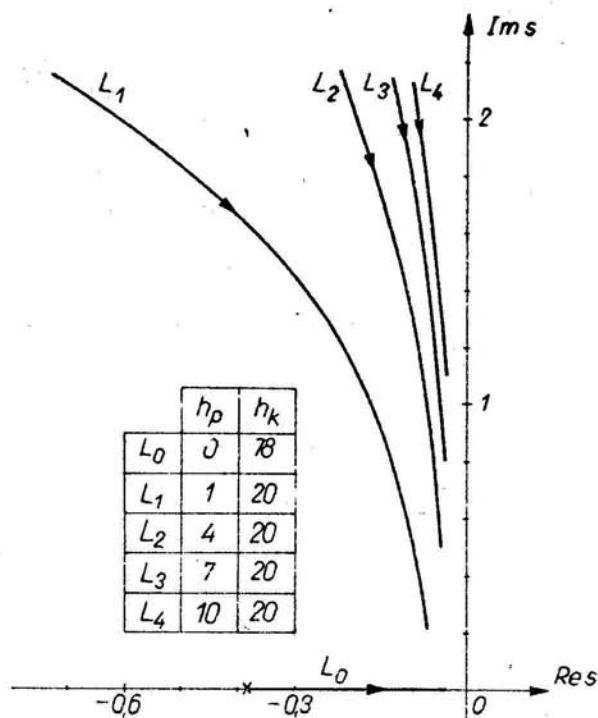
$$q(s, \exp(-sh)) = s^2 + 2s + 1 + s \exp(-sh). \quad (7.69)$$

Z przykładu 4.3 wynika, że powyższy quasi-wielomian jest ASNO.

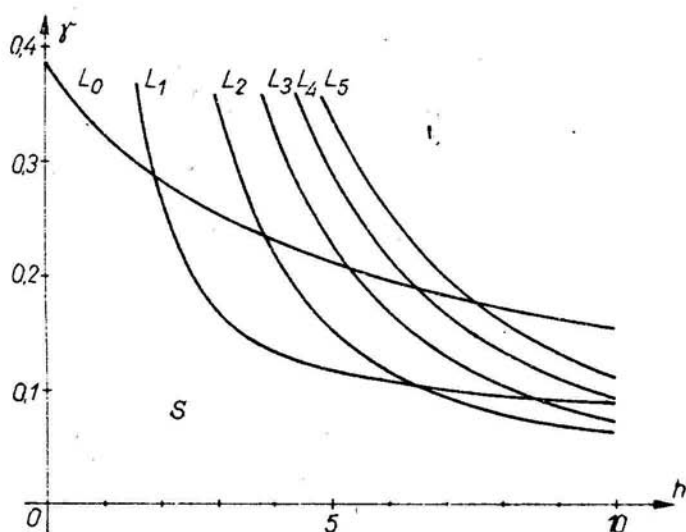
Zbadajmy γ -stabilność quasi-wielomianu (7.69) dla $h \leq 10$. W rozpatrywanym przypadku układ równań (7.62) ma postać

$$\left. \begin{aligned} \gamma^2 - \omega^2 - 2\gamma + 1 + (\omega \sin(\omega h) - \gamma \cos(\omega h)) \exp(h\gamma) &= 0, \\ 2\omega - 2\omega\gamma + (\omega \cos(\omega h) + \gamma \sin(\omega h)) \exp(h\gamma) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.70)$$

Zauważmy, że dla quasi-wielomianów (7.69) i (7.65) wielomian $q(s, 1)$ ma tę samą postać i te same zera. Linie pierwiastkowe L_0 i L_1 , wychodzące z tych zer, mają podobny początkowy przebieg dla obu tych quasi-wielomianów. Fragmenty tych linii dla quasi-wielomianu (7.69) pokazane są na rysunku 7.9, przy czym linia L_1 , podobnie jak i wszystkie pozostałe, pozostaje w OLP dla każdego $h \geq 0$, podczas gdy dla quasi-wielomianu (7.65) przechodzi w OPP.



Rys.7.9. Fragment linii pierwiastkowych quasi-wielomianu (7.69)



Rys.7.10. Wykresy $\gamma(h)$ dla kilku zer quasi-wielomianu (7.69) i obszar S jego γ -stabilności dla $h \leq 10$

Na rysunku 7.9 pokazano też fragmenty linii pierwiastkowych L_2, L_3 i L_4 , wyznaczonych w sposób opisany w p.7.2.1, przy uwzględnieniu rozważań podanych na początku niniejszego punktu. Wszystkie te linie dążą do punktu $(0,0)$ przy $h \rightarrow \infty$.

Nanosząc na płaszczyźnie (h, γ) wartości γ w funkcji h (dla $h \leq 10$), odpowiadające pokazanym na rysunku 7.9 liniom $L_0 - L_4$ i dodatkowej linii L_5 , otrzymamy pokazane na rysunku 7.10 krzywe, ilustrujące zmiany w funkcji wielkości opóźnienia odległości od osi urojonej rozpatrywanych sześciu zer quasi-wielomianu (7.69) dla $h \in [0, 10]$.

Z tego rysunku wynika, że wraz ze wzrostem wartości h , linie pierwiastkowe szybko zbliżają się do osi urojonej. Dla bardzo dużych wartości h w bardzo małej odległości od osi urojonej będzie więc przebiegać dużo linii pierwiastkowych. W takim przypadku nawet małe zmiany współczynników quasi-wielomianu (7.69) mogą powodować jego niestabilność. Fakt ten jest sygnalizowany w pracy [132] w przypadku ogólnym quasi-wielomianów asymptotycznie stabilnych dla każdego $h \geq 0$.

Obszar, oznaczony na rysunku 7.10 przez S, jest obszarem γ -stabilności quasi-wielomianu (7.69) dla $h \leq 10$. □

8. $\mathcal{J}$ -STABILNOŚĆ WIELOWYMIAROWYCH UKŁADÓW Z JEDNYM OPÓŹNIENIEM

Dany jest wielowymiarowy układ z opóźnieniem, opisany równaniem

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \quad t \geq 0, \quad (8.1)$$

gdzie:

$$x \in \mathbb{R}^n, A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad h > 0.$$

Asymptotyczną stabilność i $\mathcal{J}$ -stabilność układu (8.1) można badać na podstawie opisanych w niniejszej pracy metod, wymagających znajomości quasi-wielomianu charakterystycznego, bądź tylko macierzy stanu.

W przypadku ogólnym układu (8.1) podano też szereg innych warunków (ale tylko dostatecznych) asymptotycznej stabilności [111, 113, 116, 117, 118, 119, 152] i $\mathcal{J}$ -stabilności [114, 67, 112, 156], [57], [2, 3, 70], [68]. W ostatnim wykazie wyszczególniono cztery grupy prac. W pierwszej pracy grupy pierwszej i trzeciej jest podany warunek dostateczny $\mathcal{J}$ -stabilności, a w pozostałych są podane pewne rozwinięcia, komentarze dotyczące tego warunku lub komentarze do tych komentarzy. W wyżej wymienionych pracach warunki asymptotycznej stabilności i $\mathcal{J}$ -stabilności sformułowano w zależności od macierzy A_0 i A_1 . Są one dosyć mocne i nie będą tu cytowane. Jedynie w dalszej części niniejszego rozdziału podamy nowy warunek dostateczny $\mathcal{J}$ -stabilności.

Szereg graficznych warunków dostatecznych asymptotycznej stabilności i dostatecznych niestabilności układu (8.1) podano w pracy [115]. Zaś w pracach [39, 147] podano warunki konieczne i wystarczające asymptotycznej stabilności tego układu, przy $n=2$.

Rozpatrzmy teraz pewne przypadki szczególne układu (8.1).

8.1. Przypadek szczególny $A_0 = 0$

W przypadku szczególnym, gdy $A_0 = 0$, równanie (8.1) przyjmie postać

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t-h), \quad t \geq 0, \quad (8.2)$$

gdzie: $x \in \mathbb{R}^n$, $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $h > 0$.

Łatwo zauważyć, że quasi-wielomian charakterystyczny układu (8.2) można napisać w postaci

$$q(s, \exp(-sh)) = \det(sI - A_1 \exp(-sh)) = \prod_{i=1}^n q_i(s, \exp(-sh)), \quad (8.3)$$

gdzie:

$$q_i(s, \exp(-sh)) = s - s_{1i} \exp(-sh), \quad (8.4)$$

przy czym

$$s_{1i} = \alpha_{1i} + j \beta_{1i} \quad (8.5)$$

jest i -tą wartością własną macierzy A_1 .

γ -stabilność układu (8.2) jest więc równoważna γ -stabilności n quasi-wielomianów $q_i(s, \exp(-sh))$ o postaci (8.4).

Uwzględniając oznaczenie (8.5), quasi-wielomian (8.4) napiszemy w postaci (7.20). Do badania γ -stabilności quasi-wielomianów (8.4) należy więc stosować analityczne kryterium podane w twierdzeniu 7.3.

Twierdzenie 8.1.

Układ (8.1) jest γ -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego z quasi-wielomianów $q_i(s, \exp(-sh))$, o postaci (8.4) dla $i=1, 2, \dots, n$, spełnione są podane w twierdzeniu 7.3 warunki (7.28) i (7.29). W warunkach tych należy zamiast a_1 i b_1 wstawić odpowiednio $a_{1i} = -\alpha_{1i}$ i $b_{1i} = \beta_{1i}$.

Dowód wynika ze wzorów (8.3), (8.4) i (8.5) oraz z powyższych rozważań. $\square$

Inny warunek konieczny i wystarczający γ -stabilności układu (8.2) jest podany w pracy [6]. Został on wyprowadzony na podstawie kryterium Pontriagina, zastosowanego do quasi-wielomianu (8.4). Jest

on trudniejszy w stosowaniu w porównaniu z warunkiem podanym w twierdzeniu 8.1.

Z twierdzenia 8.1 wynika, że jeżeli układ (8.2) nie jest asymptotycznie stabilny dla $h=0$, to nie jest też γ -stabilny dla dowolnego $\gamma \geq 0$ i dowolnego $h \geq 0$.

Założmy, że układ (8.2) jest asymptotycznie stabilny dla $h=0$. Algorytm postępowania przy wyznaczaniu przedziału wartości opóźnienia h , dla których układ ten jest γ -stabilny przy zadanym $\gamma > 0$, jest następujący.

- 1) Obliczamy wartości własne s_{1i} (o postaci (8.5)) macierzy A_1 . Z m ($m \leq n$) różnych wartości własnych tej macierzy, spełniających warunek $\beta_{1i} \geq 0$, tworzymy m quazi-wielomianów o postaci

$$q_i(s, \exp(-sh)) = s + (a_{1i} + jb_{1i}) \exp(-sh), \quad (8.6)$$

$$\text{gdzie } a_{1i} = -\alpha_{1i}, \quad b_{1i} = -\beta_{1i}.$$

- 2) Na podstawie opisanej w p.7.1.2, dla quazi-wielomianu (7.20), metody, wyznaczamy dla każdego z m quazi-wielomianów (8.6) przedział (h_{1i}, h_{2i}) jego γ -stabilności. We wzorach (7.37) - (7.39) wstawiamy przy tym zamiast a_1 i b_1 odpowiednio wartości a_{1i} i b_{1i} .
- 3) Jeżeli przynajmniej jeden z tych m quazi-wielomianów nie jest γ -stabilny dla dowolnego $h \geq 0$, to układ (8.2) też nie jest γ -stabilny dla $h \geq 0$. Jeżeli zaś dla każdego z m quazi-wielomianów (8.6) istnieje przedział (h_{1i}, h_{2i}) γ -stabilności i spełniony jest warunek $h_d < h_g$, gdzie

$$h_d = \max_{1 \leq i \leq m} \{h_{1i}\}, \quad h_g = \min_{1 \leq i \leq m} \{h_{2i}\}, \quad (8.7)$$

to układ (8.2) jest γ -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in (h_d, h_g)$. Jeżeli natomiast $h_d \geq h_g$, to przy zadanym γ układ (8.2) nie jest γ -stabilny dla $h \geq 0$.

Zauważmy, że jeżeli dla i -tego quazi-wielomianu (8.6) spełniony jest warunek $\gamma < a_{1i}$, to $h_{1i} = 0$ i jego przedział γ -stabilności ma postać $[0, h_{2i})$. Jeżeli zaś ten warunek jest spełniony dla $i=1, 2, \dots, m$, to przedział γ -stabilności układu (8.2) ma postać $[0, h_g)$.

Zadając z odpowiednio małym krokiem $\Delta \gamma$ kolejne wartości $\gamma \geq 0$, wyznaczmy w wyżej opisany sposób h_d i h_g , odpowiadające tym wartościom γ . Obliczenia przerywamy, jeżeli dla pewnego γ otrzymamy $h_d \geq h_g$. Wykreślając na płaszczyźnie (γ, h) krzywe, ilustrujące zmiany wartości h_d i h_g w funkcji γ , otrzymamy obszar γ -stabilności układu (8.2). Jest on ograniczony tymi krzywymi i półosiąmi $\gamma \geq 0$, $h \geq 0$.

Twierdzenie 8.2.

Jeżeli układ (8.2) jest asymptotycznie stabilny dla $h=0$, to przy $h > 0$ jest on asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in [0, h_a)$, gdzie

$$h_a = \min_i \{h_i\}, \quad (8.8)$$

$$h_i = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2}} \arctg \left| \frac{\alpha_{1i}}{\beta_{1i}} \right|, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (8.9)$$

a $s_{1i} = \alpha_{1i} + j\beta_{1i}$ jest i -tą wartością własną macierzy A_1 taką, że $\beta_{1i} \geq 0$.

Dowód wynika z lematu 7.1 i ze wzorów (8.3), (8.4), (8.5) i (7.20). $\square$

Podane w powyższym twierdzeniu kryterium asymptotycznej stabilności układu (8.2) zostało też wyprowadzone w pracy [35], ale w inny sposób.

PRZYKŁAD 8.1.

Dany jest układ z opóźnieniem, opisany równaniem (8.2) o macierzy A_1

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1,3 & 0,7 \\ 0,2 & -4 & 1,8 \\ 0,8 & 0,2 & -2 \end{bmatrix}. \quad (8.10)$$

Macierz (8.10) ma następujące wartości własne: $s_1 = -1,162298$, $s_2 = -3,918851 \pm j0,594021$, a więc $m=2$ i rozpatrywany układ jest asymptotycznie stabilny dla $h=0$. Jego γ -stabilność jest równoważna γ -stabilności dwóch quasi-wielomianów

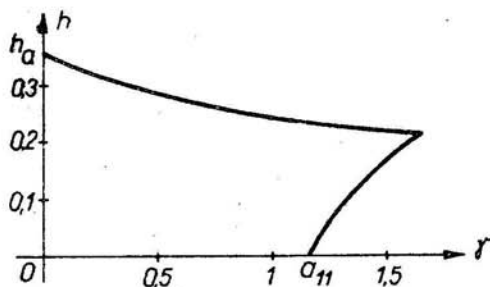
$$q_i(s, \exp(-sh)) = s + (a_{1i} + jb_{1i})\exp(-sh), \quad i=1,2, \quad (8.11)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\alpha_{11} = 1,162298, \quad b_{11} = 0, \quad a_{12} = -\alpha_{12} = 3,918851, \\ b_{12} &= \beta_{12} = 0,594021. \end{aligned}$$

Zbadajmy najpierw asymptotyczną stabilność rozpatrywanego układu. Obliczając wartości h_1, h_2 i h_a ze wzorów (8.9) i (8.8), otrzymamy $h_1 = 1,351457, h_2 = 0,35835, h_a = h_2$. Z twierdzenia 8.2 wynika że układ (8.2) o macierzy A_1 o postaci (8.10) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in [0, h_a]$, gdzie $h_a = 0,35835$.

Zadając kolejne wartości $\gamma > 0$ i obliczając h_d i h_g według podanego powyżej algorytmu, otrzymamy pokazany na rysunku 8.1 obszar γ -stabilności rozpatrywanego układu z opóźnieniem. $\square$



Rys. 8.1. Obszar γ -stabilności układu (8.2) o macierzy A_1 o postaci (8.10)

8.2. Przypadek szczególny $A_0 A_1 = A_1 A_0$

Jeżeli macierze A_0 i A_1 komutują, czyli $A_0 A_1 = A_1 A_0$, to można je jednocześnie przekształcić do postaci diagonalnej [7]. Istnieje wtedy macierz W , o wymiarach $n \times n$ taka, że

$$W^{-1} [sI - A_0 - A_1 \exp(-sh)] W = \text{diag} [q_1(s, \exp(-sh)), \dots, q_n(s, \exp(-sh))], \quad (8.12)$$

gdzie:

$$q_i(s, \exp(-sh)) = s - s_{0i} - s_{1i} \exp(-sh), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.13)$$

a $s_{oi} = \alpha_{oi} + j\beta_{oi}$ i $s_{1i} = \alpha_{1i} + j\beta_{1i}$, $i=1,2,\dots,n$, są to, odpowiednio, wartości własne macierzy A_0 i A_1 . Zauważmy, że w (8.13) istnieje ściśle przyporządkowanie wartości własnych s_{oi} macierzy A_0 poszczególnym wartościom własnym s_{1i} macierzy A_1 . To przyporządkowanie, dla danych macierzy A_0 i A_1 , otrzymamy sprowadzając macierz charakterystyczną układu (8.1) do postaci diagonalnej w sposób (8.12).

Jeżeli $A_0 A_1 = A_1 A_0$, to quasi-wielomian charakterystyczny układu (8.1) można napisać w postaci

$$q(s, \exp(-sh)) = \prod_{i=1}^n q_i(s, \exp(-sh)), \quad (8.14)$$

gdzie quasi-wielomiany $q_i(s, \exp(-sh))$ mają postać (8.13). W rozważanym przypadku szczególnym γ -stabilność układu (8.1) jest więc równoważna γ -stabilności n quasi-wielomianów (8.13).

Twierdzenie 8.3.

Jeżeli macierze A_0 i A_1 komutują, to układ (8.1) jest γ -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego z quasi-wielomianów (8.13) spełnione są warunki podane w twierdzeniu 7.1. W warunkach tych zamiast a_0 , a_1 , b_0 i b_1 należy wstawić odpowiednio a_{oi} , a_{1i} , b_{oi} i b_{1i} , przy czym

$$a_{oi} = -\alpha_{oi}, \quad a_{1i} = -\alpha_{1i}, \quad b_{oi} = -\beta_{oi}, \quad b_{1i} = -\beta_{1i}, \quad (8.15)$$

dla $i=1,2,\dots,n$.

Dowód wynika z powyższych rozważań i ze wzorów (8.14), (8.13) i (7.1). $\square$

Zauważmy, że jeżeli niektóre ze współczynników (8.15) są równe zeru, czyli pewne quasi-wielomiany $q_i(s, \exp(-sh))$ przyjmują postać (7.20) lub (7.44), to do badania ich γ -stabilności wygodniej jest stosować odpowiednio twierdzenie 7.3 lub 7.4.

PRZYKŁAD 8.2.

Dany jest układ (8.1) przy $h=0,5$ o macierzach

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0,6 & 0,2 \\ 0,2 & -0,9 \end{bmatrix}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} -2,1 & -1 \\ -1 & -0,6 \end{bmatrix} d, \quad (8.16)$$

gdzie d jest rzeczywistym parametrem. Należy wyznaczyć wartości parametru d , dla których rozpatrywany układ jest f -stabilny.

Łatwo sprawdzić, że macierze (8.16) spełniają warunek $A_0 A_1 = A_1 A_0$.

Macierz A_0 ma dwie różne rzeczywiste wartości własne: $-0,5$ i -1 , a więc macierze A_0 i A_1 mają te same wektory własne [7]. Tworząc z wartości własnych macierzy A_1 macierz W otrzymamy

$$W = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (8.17)$$

Ze wzoru (8.12) dla macierzy A_0, A_1 i W o postaciach odpowiednio (8.16) i (8.17) otrzymamy, że macierz charakterystyczną rozpatrywanego układu można napisać w postaci

$$D(s) = \text{diag}[q_1(s, \exp(-sh)), q_2(s, \exp(-sh))], \quad (8.18)$$

gdzie:

$$q_1(s, \exp(-sh)) = s + 0,5 + 2,6 d \exp(-0,5s), \quad (8.19)$$

$$q_2(s, \exp(-sh)) = s + 1 + 0,1 d \exp(-0,5s). \quad (8.20)$$

f -stabilność układu (8.1) o macierzach (8.16) jest więc równoważna f -stabilności dwóch quasi-wielomianów (8.19) i (8.20), którą można badać korzystając z twierdzenia 7.4.

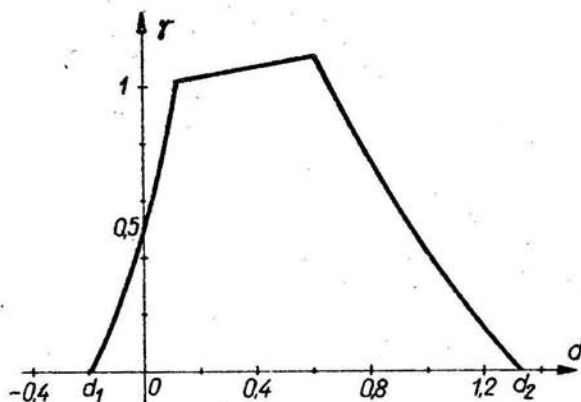
Sprawdźmy najpierw, dla jakich wartości parametru d quasi-wielomiany (8.19) i (8.20) są jednocześnie asymptotycznie stabilne. Podane w twierdzeniu 7.4 nierówności są spełnione przy $f = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla quasi-wielomianu (8.19) $d \in (-0,192308; 1,33356)$, a dla quasi-wielomianu (8.20) $d \in (-10; 38,06883)$. Wspólny warunek ma więc postać

$$d \in (d_1, d_2), \quad d_1 = -0,192308, \quad d_2 = 1,33356. \quad (8.21)$$

Rozpatrywany wielowymiarowy układ z opóźnieniem $h=0,5$ jest więc asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (8.21).

Asymptotyczna stabilność układu (8.1) przy $h=0,5$ i o macierzach (8.16) była badana w pracach [152] i [111]. W oparciu o podane tam warunki dostateczne odpowiednio otrzymano $d \in [0; 0,796)$ i $d \in [0; 1,333)$.

Zadając kolejne wartości $\gamma > 0$ i obliczając wartości d , dla których podane w twierdzeniu 7.4 nierówności są jednocześnie spełnione dla obu quasi-wielomianów (8.19) i (8.20), otrzymamy pokazany na rysunku 8.2 obszar γ -stabilności rozpatrywanego układu wielowymiarowego. Z tego rysunku wynika, że np. w rozważanym układzie przebiegi przejściowe zanikają szybciej niż $\exp(-t)$ ($\gamma > 1$), jeżeli $d \in (\tilde{d}_1, \tilde{d}_2)$, gdzie $\tilde{d}_1 \approx 0,12$, $\tilde{d}_2 \approx 0,66$. $\square$



Rys.8.2. Obszar γ -stabilności układu (8.1) o macierzach (8.16) przy $h = 0,5$

8.3. Warunek dostateczny γ -stabilności w przypadku ogólnym

Równanie charakterystyczne układu (8.1) ma postać

$$\det(sI - A_0 - A_1 \exp(-sh)) = 0. \quad (8.22)$$

Stosując podstawienie $s = z/h - \gamma$ powyższe równanie napiszemy w postaci

$$\det(zI \exp(z) - h D(z)) = 0, \quad (8.23)$$

gdzie:

$$D(z) = A \exp(z) + A_1 \exp(h\gamma) , \quad (8.24)$$

$$A = A_0 + I\gamma . \quad (8.25)$$

Położenie wszystkich pierwiastków równania (8.23) w OLP jest równoważne położeniu wszystkich pierwiastków równania (8.22) w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s < -\gamma$.

Równanie (8.23) można napisać w postaci

$$\prod_{i=1}^n (z \exp(z) - h d_i(z)) = 0 , \quad (8.26)$$

gdzie $d_i(z)$ jest i -tą wartością własną macierzy $D(z)$.

Równanie

$$z \exp(z) - h d_i(z) = 0 \quad (8.27)$$

ma wszystkie pierwiastki w OLP, jeżeli wszystkie pierwiastki równania

$$z \exp(z) - h d_i(jy) = 0 , \quad (8.28)$$

też leżą w OLP dla każdego $y \in (-\infty, \infty)$. Ponieważ wartości własne macierzy $D(jy)$ są funkcjami okresowymi o okresie 2π , przedział zmian zmiennej y można ograniczyć do $[0, 2\pi]$.

Zauważmy, że przyjmując w równaniu (7.23) $\gamma = 0$, otrzymamy równanie (8.28), przy czym

$$a_1 = -\operatorname{Re} d_1(jy), \quad b_1 = -\operatorname{Im} d_1(jy) . \quad (8.29)$$

Oznaczmy przez S obszar leżący wewnątrz krzywej zamkniętej, opisanej parametrycznie równaniami

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u} &= y \sin(y), \\ \tilde{v} &= -y \cos(y) \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

dla $y \in [-\pi/2, \pi/2]$. Obszar S jest pokazany na rysunku 7.1. Jest on tam oznaczony jako $S(0)$.

Lemat 8.1.

Jeżeli wszystkie wartości własne macierzy $D(jy)$, wzięte ze znakiem przeciwnym i pomnożone przez h , leżą dla każdego $y \in [0, 2\pi]$ w otwartym obszarze S , to układ (8.1) jest γ -stabilny.

Dowód wynika z powyższych rozważań i twierdzenia 7.2. $\square$

Niech $\mu_k(X)$ oznacza miarę macierzy $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$, odpowiadającą odpowiedniej normie tej macierzy. Dla $k=1, 2, \infty$ mamy [48]

$$\mu_1(X) = \max_r [\operatorname{Re}(x_{rr}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^n |x_{ir}|], \quad (8.31)$$

$$\mu_2(X) = 0,5 \max_i \lambda_i(X + X^*), \quad (8.32)$$

$$\mu_\infty(X) = \max_i [\operatorname{Re}(x_{ii}) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n |x_{ir}|]. \quad (8.33)$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \max_y \mu(A \exp(jy)), & m_2 &= \max_y \mu(-A \exp(jy)), \\ m_3 &= \max_y \mu(-jA \exp(jy)), & m_4 &= \max_y \mu(jA \exp(jy)), \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

gdzie $y \in [0, 2\pi]$, a macierz A ma postać (8.25),

$$\left. \begin{aligned} m_5 &= \exp(h\gamma) \mu(A_1), & m_6 &= \exp(h\gamma) \mu(-A_1), \\ m_7 &= \exp(h\gamma) \mu(-jA_1), & m_8 &= \exp(h\gamma) \mu(jA_1). \end{aligned} \right\} \quad (8.35)$$

Oznaczmy przez P_i punkty płaszczyzny $(\tilde{u}, \tilde{v})$ określone następująco:

$$P_i = (-hu_i, -hv_i), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (8.36)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_4 = -m_2 - m_6, & u_2 &= u_3 = m_1 + m_5, & v_1 &= v_2 = m_3 + m_7, \\ v_3 &= v_4 = -m_4 - m_8. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Twierdzenie 8.4.

Jeżeli punkty (8.36) leżą w otwartym obszarze S , to układ (8.1) jest f -stabilny.

Dowód

Postępując podobnie jak w pracy [118] możemy wykazać, że wartości własne $d(j\gamma)$ macierz $D(j\gamma)$ spełniają następujące nierówności:

$$-\mu(-A \exp(j\gamma)) - \exp(h f) \mu(-A_1) \leq \operatorname{Re} d(j\gamma) \leq \mu(A \exp(j\gamma)) + \\ + \exp(h f) \mu(A_1),$$

$$-\mu(jA \exp(j\gamma)) - \exp(h f) \mu(jA_1) \leq \operatorname{Im} d(j\gamma) \leq \mu(-jA \exp(j\gamma)) + \\ + \exp(h f) \mu(-jA_1).$$

Uwzględniając oznaczenia (8.34) - (8.37), z powyższych wzorów otrzymamy, że dla każdego $\gamma \in [0, 2\pi]$ wartości własne macierzy $D(j\gamma)$, wzięte ze znakiem przeciwnym i pomnożone przez h , leżą w prostokącie P o wierzchołkach $P_1, \dots, P_4$. Jeżeli więc prostokąt P leży całkowicie w otwartym obszarze S , to zgodnie z lematem 8.1, układ (8.1) jest f -stabilny. Z kształtu brzegu obszaru S wynika, że prostokąt P leży w otwartym obszarze S , jeżeli wszystkie jego wierzchołki leżą w tym obszarze. Twierdzenie zostało udowodnione. $\square$

Zauważmy, że twierdzenie 8.4 można stosować tylko w przypadku, gdy prostokąt P o wierzchołkach (8.36) leży całkowicie w OPP.

Obliczając współrzędne wierzchołków prostokąta P , z wykorzystaniem wzorów (8.36), (8.37), (8.34) i (8.35), należy przyjąć $\mu(\cdot) = \mu_k(\cdot)$ dla $k=1, 2$ lub ∞ .

Jeżeli w twierdzeniu 8.4 przyjmiemy $f=0$, to otrzymamy warunek dostateczny asymptotycznej stabilności układu (8.1). Warunek ten jest podany w pracy [118].

Podany w twierdzeniu 8.4 warunek można sformułować w następującej postaci analitycznej.

Twierdzenie 8.5.

Jeżeli spełnione są warunki:

$$(i) \quad u_1 < 0 \quad \text{dla } k=1 \text{ i } 2, \quad (8.38)$$

$$(II) \quad h \sqrt{u_i^2 + v_i^2} - \arctg |u_i/v_i| < 0 \quad \text{dla } i=1, \dots, 4, \quad (8.39)$$

gdzie u_i i v_i liczy się ze wzorów (8.37), (8.34) i (8.35), to układ (8.1) jest γ -stabilny.

Dowód

Obszar S leży całkowicie w OPP. Ze wzorów (8.36) i (8.37) wynika, że aby punkty P_i leżały w OPP musi być spełniona nierówność (8.38).

Z rozważań podanych w p.7.1.2 wynika, że położenie wszystkich punktów P_i w otwartym obszarze S jest równoważne asymptotycznej stabilności czterech quasi-wielomianów o postaci (7.20) i o współczynnikach

$$a_i = -u_i, \quad b_i = -v_i, \quad i=1, \dots, 4, \quad (8.40)$$

gdzie u_i i v_i liczy się ze wzorów (8.37), (8.34) i (8.35).

Uwzględniając oznaczenia (8.40) i postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 7.3 przy $\gamma=0$, otrzymamy warunek

$$h \sqrt{u_i^2 + v_i^2} - 2 \arctg \frac{\sqrt{u_i^2 + v_i^2} - |v_i|}{|u_i|} < 0, \quad i=1, \dots, 4, \quad (8.41)$$

który jest odpowiednikiem podanej w twierdzeniu 7.3 nierówności (7.29). Warunek (8.41) można zapisać w prostszej postaci (8.39). Twierdzenie zostało zatem udowodnione. $\square$

Zauważmy, że przy $\gamma > 0$ wielkości u_i i v_i , obliczone ze wzorów (8.37), (8.34) i (8.35) są funkcjami γ i $\exp(h\gamma)$. Natomiast dla $\gamma=0$ są one stałymi wielkościami. Warunek dostateczny asymptotycznej stabilności układu (8.1) możemy więc sformułować tak, jak niżej.

Lemat 8.2.

Jeżeli spełniony jest warunek (8.38), to układ (8.1) jest asymptotycznie stabilny dla $h \in [0, h_a)$, gdzie:

$$h_a = \min_i \{h_i\}, \quad (8.42)$$

$$h_i = \frac{1}{\sqrt{u_i^2 + v_i^2}} \arctg \left| \frac{u_i}{v_i} \right|, \quad i=1, \dots, 4, \quad (8.43)$$

przy czym u_1 i v_1 liczy się ze wzorów (8.37), (8.34) i (8.35) przy $\gamma = 0$.

Dowód wyniku z powyższych rozważań i z twierdzenia 8.5 przy $\gamma = 0$. $\square$

PRZYKŁAD 8.3.

Dany jest układ opisany równaniem (8.1) o macierzach

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1,5 & 1 \\ 1 & -1,5 \end{bmatrix}. \quad (8.44)$$

Obliczając ze wzorów (8.34) i (8.35) współczynniki m_k , $k=1,2,\dots,8$, i uwzględniając różne miary $\mu_k(\cdot)$ (wzory (8.31)-(8.33)), otrzymamy:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \gamma + 0,5 \quad \text{dla } k = 1,2 \text{ lub } \infty,$$

$$m_5 = -0,5 \exp(h\gamma) \quad \text{dla } k=1 \text{ lub } \infty, \quad m_5 = -1,5 \exp(h\gamma) \quad \text{dla } k=2,$$

$$m_6 = 2,5 \exp(h\gamma) \quad \text{dla } k=1 \text{ lub } \infty, \quad m_6 = 1,5 \exp(h\gamma) \quad \text{dla } k=2,$$

$$m_7 = m_8 = \exp(h\gamma) \quad \text{dla } k=1,2 \text{ lub } \infty.$$

Ze wzorów (8.37) wynika, że dla $k=1$ lub ∞ mamy $u_2=u_3=\gamma+0,5+ -0,5 \exp(h\gamma)$, $v_1=v_2=\gamma+0,5 + \exp(h\gamma)$, a więc przy $\gamma = 0$ nierówność (8.38) nie jest spełniona dla $k=2$. Może ona być spełniona tylko dla $\gamma > 0$, ale dla odpowiednio dużych wartości h . Wtedy v_2 będzie dużo większe od $|u_2|$ i nierówność (8.39) nie będzie spełniona dla $k=2$.

Rozpatrzmy teraz przypadek gdy $k=2$. Ze wzorów (8.37) mamy

$$\left. \begin{aligned} u_1=u_4 &= -\gamma-0,5-1,5 \exp(h\gamma), \quad u_2=u_3 = \gamma+0,5-1,5 \exp(h\gamma), \\ v_1=v_2 &= \gamma+0,5 + \exp(h\gamma), \quad v_3=v_4 = -\gamma-0,5 - \exp(h\gamma). \end{aligned} \right\} \quad (8.45)$$

Zbadajmy najpierw asymptotyczną stabilność. Obliczając h_a ze wzorów (8.42) i (8.43) i uwzględniając (8.45), otrzymamy $h_a=h_2=h_3=-0,3262$. Z lematu 8.2 wynika więc, że jeżeli $h \in [0, h_a)$, to rozpatrywany układ jest asymptotycznie stabilny.

Układ (8.1) o macierzach (8.44) był też rozpatrywany w pracy [118], w której na podstawie graficznego warunku dostatecznego asymptotycznej stabilności (podanego powyżej w twierdzeniu 8.4 przy

$\gamma = 0$) otrzymano wartość $h_a = 0,25$, a więc mniejszą od otrzymanej powyżej.

Zbadajmy teraz, dla jakich wartości h rozpatrywany układ jest γ -stabilny przy $\gamma = 0,3$. Łatwo zauważyć, że dla $\gamma = 0,3$ nierówność (8.38) jest spełniona dla $h \geq 0$. Ponieważ przy badaniu asymptotycznej stabilności otrzymaliśmy $h_a = h_2 = h_3$, wyznaczmy wartość opóźnienia $h = h_r$, będącą rozwiązaniem równania

$$h \sqrt{u_2^2 + v_2^2} - \arctg |u_2/v_2| = 0, \quad (8.42)$$

gdzie u_2 i v_2 mają postaci podane w (8.45). Otrzymamy $h_r = 0,1989$. Nierówność (8.39) jest więc spełniona dla $i=2$, jeżeli $h < h_r$. Łatwo zauważyć, że dla $h < h_r$ ta nierówność jest też spełniona dla $i=1,3$ i 4. Z twierdzenia 8.5 wynika więc, że jeżeli $h \in [0; 0,1989)$, to rozpatrywany układ jest γ -stabilny dla $\gamma = 0,3$.

Do badania γ -stabilności układu (8.1) o macierzach (8.44) nie można stosować warunków dostatecznych, podanych w pracach [2,57, 68,114]. □

9. ZAKOŃCZENIE

W pracy dokonano krytycznego przeglądu metod badania asymptotycznej stabilności dynamicznych układów liniowych stacjonarnych o parametrach skupionych, z dyskretnymi współmiernymi opóźnieniami i podano szereg nowych rezultatów. Niektóre z podanych kryteriów można też stosować w przypadku opóźnień niewspółmiernych, co jest sygnalizowane przy ich omawianiu.

Rozpatrzono następujące rodzaje stabilności:

- (i) asymptotyczna stabilność przy ustalonej wartości opóźnienia h ,
- (ii) asymptotyczna stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia,
- (iii) asymptotyczna stabilność w funkcji wielkości opóźnienia,
- (iv) asymptotyczna stabilność z szybkością zanikania γ , a właściwie z szybkością zanikania nie mniejszą niż γ , tzw. γ -stabilność.

Warunki każdego rodzaju stabilności dla układu typu neutralnego sformułowano w innej postaci niż dla układu typu opóźnionego. W przypadku układu typu neutralnego może bowiem wystąpić tzw. przypadek asymptotycznie krytyczny i wtedy układ może nie być asymptotycznie stabilny przy spełnieniu warunku stabilności słusznego dla układu typu opóźnionego. Fakt ten nie zawsze jest uwzględniany w literaturze. Przypadek asymptotycznie krytyczny dla quasi-wielomianu typu neutralnego występuje wówczas, gdy jego człon dominujący (o postaci (2,35) dla quasi-wielomianu (2,31)) ma zera o module równym jedności. W takim przypadku układ typu neutralnego może być asymptotycznie stabilny lub nie, przy czym asymptotyczna stabilność może być tylko wielomianowa. W rozważanym przypadku układ typu neutralnego nie jest więc wykładniczo asymptotycznie stabilny.

W literaturze istnieją dwie grupy metod badania asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia. Nie są one sobie równoważne w przypadku ogólnym. Dlatego też, zamiast istniejącej w litera-

turze jednej nazwy asymptotyczna stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia, w p.3.1 niniejszej pracy zaproponowano wprowadzenie dwóch nazw (i definicji) tego rodzaju stabilności, a mianowicie: asymptotyczna stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia (w skrócie ASNO) i mocna asymptotyczna stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia (w skrócie MASNO). Przy dokonywaniu przeglądu metod badania stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia w rozdziale 4, uwzględniono wprowadzone nazwy dwóch rodzajów takiej stabilności.

W rozdziale 5 dokonano krytycznego przeglądu podstawowych klasycznych metod badania położenia w OLP wszystkich zer quasi-wielomianów charakterystycznych rozważanej klasy układów z opóźnieniem. Podano też pewne nowe rezultaty.

Badanie rozkładu zer quasi-wielomianu w funkcji wielkości opóźnienia omówiono w rozdziale 6. Zaproponowano tam trzy nowe metody wyznaczania wartości h , przy których zera quasi-wielomianu leżą na osi urojonej. Krótkiego porównania tych metod z metodami znanymi wcześniej dokonano w p.6.3. Stosowanie zaproponowanej w p.6.2.5 metody 5 (podobnie jak i podanego w twierdzeniu 4.8 kryterium MASNO) wymaga rozwiązywania zespolonego macierzowego równania Lapunowa. Rozwiązanie tego równania wyznacza się na podstawie metod opisanych w rozdziale 10 niniejszej pracy. W tym rozdziale podano też analityczną postać rozwiązania zespolonego macierzowego równania Lapunowa.

Problemowi γ -stabilności układu typu opóźnionego poświęcone są rozdziały 7 i 8. W rozdziale 7 podano analityczne warunki γ -stabilności prostych quasi-wielomianów stopnia pierwszego. Zaś w przypadku ogólnym zaproponowano czysto numeryczną metodę badania γ -stabilności na podstawie analizy przebiegu linii pierwiastkowych quasi-wielomianu w funkcji wielkości opóźnienia h .

Wykorzystując rezultaty p.7.1, w rozdziale 8 podano analityczne warunki γ -stabilności (i także asymptotycznej stabilności) wielowymiarowych układów z jednym opóźnieniem.

Omówione w niniejszej pracy metody badania asymptotycznej stabilności układów z dyskretnym opóźnieniem można też stosować w przypadku pewnej klasy układów z opóźnieniem rozłożonym, których quasi-wielomian charakterystyczny da się sprowadzić do postaci (2.31). Na przykład podane w rozdziale 6 metody badania asymptotycznej sta-

bilności, w zależności od wielkości opóźnienia, można też stosować do badania takiej stabilności układu z opóźnieniem rozłożonym, opisanego równaniem

$$\dot{x}(t) = -a_0 x(t) - \sum_{i=1}^m a_i \int_{-h(m-i+1)}^{-h(m-i)} x(t+\theta) d\theta, \quad t \geq 0, \quad (9.1)$$

gdzie: $x \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $h > 0$.

Quasi-wielomian charakterystyczny układu (9.1) ma postać

$$\begin{aligned} q(s, \exp(-sh)) &= s + a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \int_{-h(m-i+1)}^{-h(m-i)} \exp(s\theta) d\theta = \\ &= s + a_0 + \sum_{i=1}^m a_i [\exp(-h(m-i)s) - \exp(-h(m-i+1)s)]/s. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Zauważmy, że $s=0$ nie jest zerem quasi-wielomianu (9.2). Utwórzmy quasi-wielomian $q_1(s, \exp(-sh)) = s q(s, \exp(-sh))$. Ma on postać

$$\begin{aligned} q_1(s, \exp(-sh)) &= s^2 + a_0 s + \sum_{i=1}^m a_i [\exp(-h(m-i)s) - \\ &- \exp(-h(m-i+1)s)]. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Quasi-wielomian (9.3) ma te same zera co quasi-wielomian (9.2) i dodatkowe zero $s=0$. Zero to nie zmienia swego położenia dla dowolnego $h \geq 0$. Jeżeli więc znajdziemy wartości opóźnienia h , dla których quasi-wielomian (9.3) ma jedno zero $s=0$ i wszystkie pozostałe zera w OLP, to w ten sposób wyznaczmy przedziały wartości opóźnienia h , dla których układ (9.1) jest asymptotycznie stabilny.

PRZYKŁAD 9.1.

Dany jest układ z opóźnieniem, opisany równaniem

$$\dot{x}(t) = -x(t) - 3 \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta. \quad (9.4)$$

Quasi-wielomian charakterystyczny układu (9.4) ma postać

$$q(s, \exp(-sh)) = s + 1 + \beta(1 - \exp(-sh))/s, \quad (9.5)$$

oraz

$$q_1(s, \exp(-sh)) = s^2 + s + 3(1 - \exp(-sh)). \quad (9.6)$$

Dla quasi-wielomianu (9.6) układ równań (6.35) ma postać

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 + 3 - 3\tilde{z}_1 &= 0, \\ \omega + 3\tilde{z}_2 &= 0, \\ \tilde{z}_1^2 + \tilde{z}_2^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Zauważmy, że jednym z rozwiązań układu równań (9.7) jest:

$\tilde{z}_1=1, \tilde{z}_2=0, \omega=0$. Jednak ze względu na fakt, że rozwiązanie to odpowiada dodatkowemu zeru $s=0$ quasi-wielomianu (9.6), nie będziemy go rozpatrywać. Drugie z rozwiązań układu równań (9.7) takie, że $\omega \in \mathbb{R}_+$, $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in [-1, 1]$ ma postać: $\tilde{z}_1 = -2/3, \tilde{z}_2 = -\sqrt{5}/3, \omega_1 = \sqrt{5}$. Rozwiązując równanie (6.36) otrzymamy, że quasi-wielomian (9.6) ma zera $s = -j\omega_1$ na osi urojonej, poza $s=0$, dla $h=h_1=1,7811$ i dla $h_{1i}=h_1 + 2\pi i/\omega_1, i=1,2,\dots$. Łatwo sprawdzić, że wraz ze wzrostem wartości h (od $h=h_{1i}, i=0,1,2,\dots$) zera quasi-wielomianu (9.6) przechodzą w OPP.

Dla $h=0$ quasi-wielomian (9.5) jest asymptotycznie stabilny. Z powyższego oraz z rozważań podanych w rozdziale 6 wynika, że układ (9.4) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in [0; 1,7811]$.

W bardziej ogólnym przypadku układu (9.1), gdy funkcja stojąca w (9.1) pod znakiem całki ma postać $f_i(\theta) \times (t+\theta)$, gdzie $f_i(\theta)$ jest wielomianem zmiennej θ (patrz np. [110]), quasi-wielomian charakterystyczny ma niektóre współczynniki zależne od wartości opóźnienia h . W takim przypadku nie można stosować metody h -podziału, ale można badać asymptotyczną stabilność tego układu (przy zadanej wartości h) np. na podstawie kryterium Michajłowa lub zmodyfikowanego kryterium Michajłowa).

PRZYKŁAD 9.2.

Dany jest układ z opóźnieniem opisany równaniem

$$\dot{x}(t) = -0,5x(t) - \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta - \int_{-2h}^{-h} (2\theta+1,5)x(t+\theta) d\theta, \quad (9.8)$$

którego quasi-wielomian charakterystyczny ma postać

$$\begin{aligned} q(s, \exp(-sh)) &= s+0,5 + \int_{-h}^0 \exp(s\theta) d\theta + \int_{-2h}^{-h} (2\theta+1,5) \exp(s\theta) d\theta = \\ &= s + 0,5 + [1 + (0,5-2h)\exp(-sh) + \\ &+ (4h-1,5)\exp(-s2h)]/s + 2(\exp(-s2h) - \\ &- \exp(-sh))/s^2. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Zbadajmy asymptotyczną stabilność układu (9.8) dla $h=0,5$. Podstawiając we wzorze (9.9) $s=j\omega$, $h=0,5$ i obliczając część rzeczywistą $P(\omega)$ i urojoną $Q(\omega)$, otrzymamy:

$$P(\omega) = 0,5 + 0,5(\sin(\omega/2) - \sin(\omega))/\omega + 2(\cos(\omega/2) - \cos(\omega))/\omega^2, \quad (9.10)$$

$$Q(\omega) = \omega - [1 - 0,5(\cos(\omega/2) - \cos(\omega))]/\omega - 2(\sin(\omega/2) - \sin(\omega))/\omega^2 \quad (9.11)$$

Z powyższych wzorów wynika, że jeżeli $\omega \rightarrow 0$, to $P(\omega) \rightarrow 1$, $Q(\omega) \rightarrow 0$. Jeżeli zaś $\omega \rightarrow \infty$, to $P(\omega) \rightarrow 0,5$, $Q(\omega) \rightarrow \infty$. Ze wzoru (9.10) wynika ponadto, że $P(\omega) > 0$ dla każdego $\omega > 0$, a więc hodoğraf Michajłowa nie obejmuje początku układu współrzędnych jeżeli ω zmienia się od 0 do ∞ . Oznacza to, że układ (9.8) przy $h=0,5$ jest asymptotycznie stabilny. $\square$

9.1. Nie rozwiązane problemy dotyczące tematu pracy

Problem P1. Najbardziej ogólną metodą badania asymptotycznej stabilności (i także γ -stabilności) jest opisana w p.5.6.1 niniejszej

pracy zmodyfikowana metoda Michałtowa. Można ją stosować zarówno w przypadku opóźnień współmiernych jak i niewspółmiernych (oczywiście przy znajomości ich wartości liczbowych), jak i pewnej klasy układów z opóźnieniem rozłożonym. Stosowanie tej metody nie sprawia dużych kłopotów, jeżeli stosujemy obliczenia numeryczne, np. z wykorzystaniem minikomputerów, otrzymując od razu wykres hodografu. Wygodnie jest dobrać asymptotycznie stabilny wielomian $w(s)$, tego samego stopnia co $q(s, \exp(-sh))$, tak aby moduł $w(j\omega)$ przy zmianie ω zmieniał się z tą samą szybkością co moduł $q(j\omega, \exp(-j\omega h))$ [155]. Należy podać, jak np. na podstawie znajomości współczynników quasi-wielomianu $q(s, \exp(-sh))$ można utworzyć asymptotycznie stabilny wielomian $w(s)$ mający wyżej opisaną właściwość.

Problem P2. Quasi-wielomian charakterystyczny $q(s, e^{-sh})$ układu o niewspółmiernych znanych opóźnieniach h_i można zadaną dokładnością napisać w postaci quasi-wielomianu $\tilde{q}(s, \exp(-sh))$ ze współmiernymi opóźnieniami. Należy w tym celu znaleźć wartości k_i i h takie, aby zachodziło

$$h_i = k_i h, \quad k_i - \text{liczby całkowite dodatnie.} \quad (9.12)$$

Quasi-wielomian $\tilde{q}(s, \exp(-sh))$ ma najczęściej dużą liczbę współmiernych opóźnień, zależną od stosunku największej wartości h_i do najmniejszej niezerowej, i wiele jego współczynników równa się zeru. Jeżeli jest on asymptotycznie stabilny dla każdego $h \geq 0$ (lub dla wartości h z pewnych przedziałów), to quasi-wielomian $q(s, e^{-sh})$ też będzie asymptotycznie stabilny, jeżeli wszystkie jego opóźnienia h_i będą zmieniać się proporcjonalnie do h , czyli zgodnie ze wzorem (9.12). Problem jest następujący: czy w takim przypadku quasi-wielomian $q(s, e^{-sh})$ też będzie asymptotycznie stabilny, jeżeli opóźnienia h_i będą zmieniać się dowolnie w przedziale $[0, \infty)$ (lub w pewnych skończonych przedziałach). Należy oczekiwać, że raczej przy takiej zmianie wartości h_i asymptotyczna stabilność nie musi być zachowana. Ale być może będzie zachowana dla pewnej klasy quasi-wielomianów, tylko jakiej?

Problem P3. W przypadku układu z niewspółmiernymi opóźnieniami być może możliwe jest podanie algebraicznych metod badania asymptotycznej stabilności:

- (i) niezależnie od wielkości opóźnień, będących pewnym uogólnieniem metod podanych w rozdziale 4 niniejszej pracy,
- (ii) w zależności od wielkości niewspółmiernych opóźnień (wszystkich lub niektórych z nich), będących pewnym uogólnieniem metod podanych w rozdziale 6.

W pracy [133] podano warunek konieczny i wystarczający asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości dwóch opóźnień h_1 i h_2 quasi-wielomianu o postaci

$$q(\exp(-sh_1), \exp(-sh_2)) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} \exp(-sih_1) \exp(-skh_2). \quad (9.13)$$

Zauważmy, że w (9.13) zmienna s występuje tylko w wykładniku funkcji $\exp$.

Problem P4. Problem asymptotycznej stabilności układów o niedokładnie znanych parametrach i o współmiernych opóźnieniach (też być może niedokładnie znanych).

P4a. Niedokładnie znane współczynniki quasi-wielomianu charakterystycznego.

W tym przypadku można znaleźć obszary asymptotycznej stabilności w przestrzeni niedokładnie znanych współczynników na podstawie opisanej w p.5.3 niniejszej pracy metody D-podziału. Jej stosowanie jest jednak dosyć trudne w przypadku, gdy liczba niedokładnie znanych współczynników jest większa niż 2. Wynika to z faktu, że otrzymane na podstawie tej metody granice obszarów asymptotycznej stabilności są opisane parametrycznie układem dwóch równań i dodatkowo pewnymi równaniami, wynikającymi np. z prostego warunku koniecznego asymptotycznej stabilności (patrz p.5.1 niniejszej pracy). Granice te można efektywnie w sposób graficzny wyznaczyć w przypadku dwóch niedokładnie znanych współczynników quasi-wielomianu i ewentualnie opóźnień (por. przykład 5.3).

W przypadku wielomianów istnieje prosta metoda badania ich asymptotycznej stabilności przy niedokładnie znanych współczynnikach. Jeżeli współczynniki a_i wielomianu zmieniają się odpowiednio w przedziałach $[b_i, c_i]$ ($b_i \leq c_i$), to asymptotyczna stabilność takiego wielomianu jest równoważna asymptotycznej stabilności utworzonych w odpowiedni sposób czterech wielomianów, których współczynnikami są liczby b_i i c_i [38].

Metody Charłtonowa nie można jednak uogólnić na przypadek quasi-wielomianów. Wynika to między innymi z faktu, że w przestrzeni ich współczynników obszary asymptotycznej stabilności nie zawsze są spójne (por. przykład 2 w pracy [51, str.80-81]).

Istnieje jednakże klasa quasi-wielomianów, których asymptotyczna stabilność przy niedokładnie znanych współczynnikach jest równoważna asymptotycznej stabilności pewnej skończonej liczby quasi-wielomianów.

PRZYKŁAD 9.3.

Rozpatrzmy quasi-wielomian (5.31), którego obszar asymptotycznej stabilności w przestrzeni współczynników jest pokazany na rysunku 5.1. Załóżmy, że współczynniki a_i tego quasi-wielomianu nie są dokładnie znane, przy czym $a_i \in [b_i, c_i]$ i $b_i \leq c_i$ dla $i=1$ i $i=2$. Z rysunku 5.1 wynika, że dla każdego ustalonego $h > 0$ asymptotyczna stabilność rozpatrywanego quasi-wielomianu o niedokładnie znanych współczynnikach jest równoważna asymptotycznej stabilności czterech następujących quasi-wielomianów: $q_1(s, \exp(-sh)) = s + b_1 \exp(-sh) + b_2 \exp(-2sh)$; $q_2(s, \exp(-sh)) = s + c_1 \exp(-sh) + b_2 \exp(-2sh)$; $q_3(s, \exp(-sh)) = s + c_1 \exp(-sh) + c_2 \exp(-2sh)$; $q_4(s, \exp(-sh)) = s + b_1 \exp(-sh) + c_2 \exp(-2sh)$. Jeżeli więc każdy z quasi-wielomianów $q_i(s, \exp(-sh))$, $i=1, \dots, 4$, jest asymptotycznie stabilny dla $h \in [0, h_i]$, to rozpatrywany quasi-wielomian (5.31) o niedokładnie znanych współczynnikach jest asymptotycznie stabilny dla $h \in [0, H]$, gdzie $H = \min_i \{h_i\}$. $\square$

Uogólnimy teraz wnioski wynikające z powyższego przykładu. Załóżmy, że quasi-wielomian ma m niedokładnie znanych współczynników $a_{ik} \in [b_{ik}, c_{ik}]$ ($b_{ik} \leq c_{ik}$), czyli mamy rodzinę quasi-wielomianów, których współczynniki leżą w m -wymiarowej przestrzeni wewnątrz lub na ścianach m -wymiarowego prostopadłościanu. Jeżeli w przestrzeni niedokładnie znanych współczynników obszar asymptotycznej stabilności rozpatrywanego quasi-wielomianu jest spójny i wypukły, to jego asymptotyczna stabilność jest równoważna asymptotycznej stabilności 2^m quasi-wielomianów o współczynnikach odpowiadających wierzchołkom tego prostopadłościanu.

Na podstawie powyższych rozważań można sformułować następujące problemy:

- (i) jak można sprawdzić, czy obszar asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu w przestrzeni jego współczynników (wszystkich lub tylko niektórych) jest spójny i wypukły, ale bez konieczności jego wyznaczania,
- (ii) czy w przypadku ogólnym quasi-wielomianu o niedokładnie znanych współczynnikach jego asymptotyczna stabilność jest równoważna asymptotycznej stabilności pewnej skończonej liczby, utworzonych w odpowiedni sposób, quasi-wielomianów? Jeżeli tak, to jak należy je utworzyć?

Należy jednak oczekiwać, że odpowiedź na wyżej postawione pytanie będzie negatywna. Dlatego też pojawia się konieczność opracowania metody badania asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu o niedokładnie znanych współczynnikach w przypadku ogólnym.

Warunek dostateczny asymptotycznej stabilności pewnej rodziny quasi-wielomianów podano w pracy [148].

P4b. Niedokładnie znane elementy macierzy stanu układu.

Ten problem był rozpatrywany w pracy [91], w której podano pewien warunek dostateczny, oraz w pracy [104]. Podano w niej warunek konieczny i wystarczający asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień pewnej klasy układów (systemy wielkie), przy perturbacjach elementów macierzy stanu.

Wydaje się, że dla pewnych klas wielowymiarowych układów z opóźnieniem, o niedokładnie znanych elementach macierzy stanu, można uogólnić pewne rezultaty znane z teorii układów bez opóźnienia. Problem ten będzie tematem przyszłych publikacji.

10. DODATEK

10.1. Rozwiązywanie zespolonego równania Lapunowa

Zespolone równanie Lapunowa, odpowiadające układowi z opóźnieniem

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^m A_i x(t-h_i), \quad t \geq 0, \quad (D.1)$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $h > 0$, ma postać [12]

$$A^*(\exp(jy))P(\exp(jy)) + P(\exp(jy))A(\exp(jy)) = -Q(\exp(jy)), \quad (D.2)$$

gdzie

$$A(\exp(jy)) = \sum_{i=0}^m A_i \exp(jy_i), \quad (D.3)$$

a $P(\exp(jy))$ i $Q(\exp(jy))$ są to hermitowskie, dodatnio określone macierze dla $y \in [0, \pi]$, przy czym macierz $Q(\exp(jy))$ jest zadana, a rozwiązywaniem jest $P(\exp(jy))$.

Jeżeli

$$\lambda_i(y) + \bar{\lambda}_k(y) \neq 0 \quad \forall i, k=1, 2, \dots, n, \quad \forall y \in [0, \pi], \quad (D.4)$$

gdzie $\lambda_i(y)$ jest i -tą wartością własną macierzy $A(\exp(jy))$, to równanie (D.2) ma jednoznaczne rozwiązanie [100]. Zauważmy, że warunek (D.4) jest spełniony, jeżeli macierz $A(\exp(jy))$ ma wszystkie wartości własne w OLP dla każdego $y \in [0, \pi]$.

Ponieważ $P(\exp(jy))$ jest macierzą hermitowską, wystarczy wyznaczyć tylko w $n(n+1)/2$ jej elementów, w tym n rzeczywistych, leżących na głównej przekątnej i $n(n-1)/2$ zespolonych, leżących np. po-

wyżej głównej przekątnej. Jeżeli elementy zespolone rozdzielimy na część rzeczywistą i urojoną, to wystarczy obliczyć n^2 elementów rzeczywistych.

Oznaczmy elementy macierzy $P(\exp(jy))$ i $Q(\exp(jy))$ odpowiednio, przez p_{ik} i q_{ik} ($i, k=1, 2, \dots, n$), przy czym $p_{ik} = \overline{p_{ki}}$, $q_{ik} = \overline{q_{ki}}$, gdzie kreska oznacza sprzężenie.

10.1.1. Metoda 1

Wariant 1

Utwórzmy następujące macierze wierszowe:

$$P_i = [p_{ii}, p_{i,i+1}, \dots, p_{in}], \quad q_i = [q_{ii}, q_{i,i+1}, \dots, q_{in}], \quad (D.5)$$

dla $i=1, 2, \dots, n$, oraz

$$P_1 = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T, \quad Q_1 = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T. \quad (D.6)$$

Z n^2 równań zespolonych, zapisanych w postaci macierzowej (D.2), wybieramy w równań odpowiadających wszystkim elementom macierzy $Q(\exp(jy))$, leżącym na głównej przekątnej i powyżej. Uwzględniając powyższe oznaczenia, te w równań napiszemy w postaci $G_1 P_1 = -Q_1$, gdzie $P_1, Q_1 \in \mathbb{C}^w$, a $G_1 \in \mathbb{C}^{w \times w}$ i jest macierzą utworzoną z odpowiadających wybranemu układowi w równań współczynników. Są one funkcjami $\exp(jy)$ i mogą być zapisane jako wielomiany zespolone dwóch zmiennych: $\cos(y)$ i $\sin(y)$.

Jeżeli $\det G_1 \neq 0$, to P_1 obliczamy ze wzoru

$$P_1 = -G_1^{-1} Q_1 \quad (D.7)$$

i na jego podstawie wyznaczamy całą macierz $P(\exp(jy))$.

Wariant 2

Aby uniknąć odwracania macierzy zespolonej dwóch zmiennych, można $n(n-1)/2$ równań zespolonych, które wchodzi w wydzielony powyżej układ w równań, zapisać jako układ $n(n-1)$ równań rzeczywistych.

stych, wydzielając część rzeczywistą i urojoną z każdego równania zespolonego. Otrzymamy w ten sposób układ n^2 równań rzeczywistych.

Niech $p_{lk} = u_{lk} + jv_{lk}$, $q_{lk} = \tilde{u}_{lk} + j\tilde{v}_{lk}$, oraz:

$$\left. \begin{aligned} p_l &= [u_{1l}, u_{1l+1}, v_{1l+1}, \dots, u_{ln}, v_{ln}] \\ q_l &= [\tilde{u}_{1l}, \tilde{u}_{1l+1}, \tilde{v}_{1l+1}, \dots, \tilde{u}_{ln}, \tilde{v}_{ln}] \end{aligned} \right\} \quad (D.8)$$

$$P_2 = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T, \quad Q_2 = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T. \quad (D.9)$$

Układ n^2 równań rzeczywistych, o którym była mowa powyżej, możemy napisać w postaci $G_2 P_2 = -Q_2$, gdzie $P_2, Q_2 \in \mathbb{R}^{n^2}$, a macierz G_2 o wymiarach $n^2 \times n^2$ jest macierzą współczynników, odpowiadających wybranemu układowi równań. Jej elementy mogą być zapisane jako rzeczywiste wielomiany dwóch zmiennych $\cos(y)$ i $\sin(y)$, stopnia co najwyżej m ze względu na te zmienne.

Jeżeli $\det G_2 \neq 0$, to

$$P_2 = -G_2^{-1} Q_2. \quad (D.10)$$

Do odwracania macierzy G_2 możemy wykorzystać zaproponowany w pracy [28] algorytm odwracania rzeczywistych macierzy wielomianowych wielu zmiennych. Jest on dogodny do obliczeń numerycznych.

10.1.2. Metoda 2

Wariant 1

Równanie (D.2) można napisać w postaci [100]

$$G_3 P_3 = -Q_3, \quad (D.11)$$

gdzie wektory P_3 i Q_3 ($\in \mathbb{C}^{n^2}$) są utworzone z wierszy macierzy $P(\exp(jy))$ i $Q(\exp(jy))$, odpowiednio, a macierz zespoloną G_3 o wymiarach $n^2 \times n^2$ oblicza się ze wzoru

$$G_3 = A^*(\exp(jy)) \otimes I_n + I_n \otimes A^T(\exp(jy)), \quad (D.12)$$

gdzie $\otimes$ oznacza iloczyn Kroneckera (np. [83]), a I_n jest macierzą jednostkową o wymiarach $n \times n$.

Jeżeli $\det G_3 \neq 0$, to utworzony z wierszy macierzy $P(\exp(jy))$ wektor P_3 oblicza się ze wzoru

$$P_3 = -G_3^{-1} Q_3. \quad (D.13)$$

Aby uniknąć odwracania G_3 , zespolonej macierzy wielomianowej dwóch zmiennych, można zastosować podany poniżej wariant metody 2.

Wariant 2

Stosując oznaczenia:

$$P(\exp(jy)) = P_r + jP_u, \quad Q(\exp(jy)) = Q_r + jQ_u,$$

$$A(\exp(jy)) = A_r + jA_u, \quad A^*(\exp(jy)) = A_r^T - jA_u^T$$

zespolony układ równań (D.2) napiszemy w postaci dwóch układów równań rzeczywistych

$$\left. \begin{aligned} P_r A_r + A_r^T P_r + A_u^T P_u - P_u Q_u &= -Q_r, \\ P_r A_u - A_u^T P_r + P_u A_r + A_r^T P_u &= -Q_u. \end{aligned} \right\} \quad (D.14)$$

Oznaczmy przez p_r, p_u i q_r, q_u wektory utworzone z wierszy macierzy P_r, P_u i Q_r, Q_u , odpowiednio, oraz utwórzmy wektory

$$P_4 = \begin{bmatrix} p_r \\ p_u \end{bmatrix}, \quad Q_4 = \begin{bmatrix} q_r \\ q_u \end{bmatrix}, \quad (D.15)$$

przy czym $P_4, Q_4 \in \mathbb{R}^{2n^2}$.

Korzystając z właściwości iloczynu Kroneckera [83] i uwzględniając powyższe oznaczenia układ równań (D.14) napiszemy w postaci

$G_4 P_4 = -Q_4$, gdzie G_4 jest macierzą blokową o postaci

$$G_4 = \begin{bmatrix} I_n \otimes A_r^T + A_r^T \otimes I_n & A_u^T \otimes I_n - I_n \otimes A_u^T \\ I_n \otimes A_u^T - A_u^T \otimes I_n & A_r^T \otimes I_n + I_n \otimes A_r^T \end{bmatrix}. \quad (D.16)$$

Macierz G_4 ma wymiary $2n^2 \times 2n^2$ i jej elementy są rzeczywistymi wielomianami zmiennych $\cos(y)$ i $\sin(y)$ stopnia m ze względu na te zmienne. Do jej odwracania można wykorzystać algorytm podany w pracy [28].

Jeżeli $\det G_4 \neq 0$, to wektor P_4 obliczamy ze wzoru

$$P_4 = -G_4^{-1} Q_4. \quad (D.17)$$

10.1.3. Metoda 3

Podamy teraz analityczne zależności, pozwalające obliczyć macierz $P(\exp(jy))$, będącą rozwiązaniem równania (D.2). Dla prostoty zapisu wprowadźmy oznaczenie

$$z = \exp(jy). \quad (D.18)$$

Uwzględniając powyższe oznaczenie, równanie (D.2) napiszemy w postaci

$$A^*(z)P(z) + P(z)A(z) = -Q(z). \quad (D.19)$$

W pracy [13] podano analityczną postać rozwiązania równania (D.19) w przypadku, gdy parametr z jest rzeczywisty. Poniżej wykazemy (w inny sposób niż w [13]), że rozwiązanie równania (D.19) w przypadku zespolonego parametru z ma analityczną postać bardzo podobną do podanej w pracy [13].

Wprowadźmy oznaczenia:

$$D_1(s) = \det(sI - A(z)) = s^n + b_1(z)s^{n-1} + \dots + b_n(z), \quad (D.20)$$

$$\bar{D}_1(s) = \det(sI - A^*(z)) = s^n + b_1(\bar{z})s^{n-1} + \dots + b_n(\bar{z}), \quad (D.21)$$

gdzie kreska oznacza sprzężenie, a $\bar{b}_i(z) = b_i(\bar{z})$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Oznaczmy przez $D_1(-A^*)$ ($\bar{D}_1(-A)$) macierz, którą otrzymamy z (D.20) (z (D.21)) stosując podstawienie $s = -A^*(z)$ ($s = -A(z)$), czyli

$$D_1(-A^*) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} b_k(z) A^{*(n-k)}(z), \quad (D.22)$$

$$\bar{D}_1(-A) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} b_k(\bar{z}) A^{n-k}(z) . \quad (D.23)$$

Macierz $\text{adj}(sI-A(z))$ można napisać w postaci

$$\sum_{k=0}^{n-1} s^k \sum_{i=0}^{n-k-1} b_i(z) A^{n-k-1-i}(z) .$$

Stosując w powyższym wzorze podstawienie $s = -A^*(z)$ otrzymamy macierz, którą oznaczmy przez $X_1(z)$, czyli

$$X_1(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (-A^*(z))^k \sum_{i=0}^{n-k-1} b_i(z) A^{n-k-1-i}(z) . \quad (D.24)$$

Twierdzenie 10.1.

Hermitowska macierz $P(z)$, gdzie z ma postać (D.18), będąca rozwiązaniem równania (D.19) przy $Q(z) = I$, wyraża się wzorem

$$P(z) = D_1^{-1}(-A^*)X_1(z) . \quad (D.25)$$

Dowód

Wstawiając (D.25) do równania (D.19) przy $Q(z) = I$ i uwzględniając fakt, że $D_1^{-1}(-A^*)A^*(z) = A^*(z)D_1^{-1}(-A^*)$, po przekształceniach otrzymamy

$$A^*(z)X_1(z)\bar{D}_1(-A) + X_1(z)\bar{D}_1(-A)A(z) = -D_1(-A^*)\bar{D}_1(-A) . \quad (D.26)$$

Aby udowodnić tezę twierdzenia, należy wykazać, że dla macierzy $D_1(-A^*)$, $\bar{D}_1(-A)$ i $X_1(z)$ o postaciach odpowiednio (D.22), (D.23) i (D.24), równanie (D.26) jest spełnione.

Wykażemy najpierw, że zachodzi równość

$$A^*(z)X_1(z) = -D_1(-A^*) - X_1(z)A(z) . \quad (D.27)$$

Uwzględniając (D.22) i (D.24), lewą stronę wzoru (D.27) możemy przekształcić następująco:

$$\begin{aligned}
 A^*(z)X_1(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k A^{*(k+1)}(z) \sum_{i=0}^{n-k-1} b_i(z) A^{n-k-1-i}(z) = \\
 &= -D_1(-A^*) + b_n(z)I - \left[X_1(z) - \sum_{i=0}^{n-1} b_i(z) A^{n-i-1}(z) \right] A(z) = \\
 &= -D_1(-A^*) - X_1(z)A(z) + \sum_{i=0}^n b_i(z) A^{n-i}(z) = -D_1(-A^*) - \\
 &- X_1(z)A(z) .
 \end{aligned}$$

Równość (D.27) jest więc prawdziwa.

Wstawiając (D.27) do lewej strony wzoru (D.26) i uwzględniając, że $\bar{D}_1(-A)A(z) = A(z)\bar{D}_1(-A)$ otrzymamy prawą stronę tego wzoru. Macierz $P(z)$ o postaci (D.25) spełnia więc równanie (D.19) przy $Q(z) = I$

Wykażemy teraz, że macierz (D.25) jest hermitowska.

Wzór (D.27) możemy napisać w postaci

$$X_1^*(z)A(z) = -\bar{D}_1(-A) - A^*(z)X_1^*(z) , \quad (D.28)$$

bowiem $D_1^*(-A^*) = \bar{D}_1(-A)$, co wynika ze wzorów (D.22) i (D.23).

Wykażemy, że macierz

$$P(z) = X_1^*(z)\bar{D}_1^{-1}(-A) \quad (D.29)$$

jest rozwiązaniem równania (D.19) przy $Q(z)=I$.

Wstawiając (D.29) do równania (D.19) przy $Q(z) = I$, po przekształceniach otrzymamy

$$D_1(-A^*)A^*(z)X_1^*(z) + D_1(-A^*)X_1^*(z)A(z) = -D_1(-A^*)\bar{D}_1(-A). \quad (D.30)$$

Łatwo zauważyć, że wstawiając (D.28) do lewej strony równości (D.30) otrzymamy jej prawą stronę. Oznacza to, że macierz (D.29) jest rozwiązaniem równania (D.19) przy $Q(z) = I$.

Przy założeniu (D.4) równanie (D.19) ma jednoznaczne rozwiązanie, a więc

$$P(z) = D_1^{-1}(-A^*)X_1(z) = X_1^*(z)\bar{D}_1^{-1}(-A) = P^*(z),$$

co oznacza, że macierz $P(z)$ o postaci (D.25) jest hermitowska. Twierdzenie zostało udowodnione. $\square$

Jeżeli założymy, że parametr z jest rzeczywisty, to z twierdzenia 10.1 otrzymamy podaną w pracy [13] metodę wyznaczania rozwiązania równania (D.19) w takim przypadku. Analityczną postać tego rozwiązania w pracy [13] wyprowadzono stosując przekształcenia podobieństwa odpowiednich macierzy wielomianowych.

PRZYKŁAD 10.1.

Dany jest układ z opóźnieniem, opisany równaniem (D.1) przy $n=2$, $m=1$ i o macierzach

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}, \quad (D.31)$$

gdzie a, b i c są to liczby rzeczywiste.

W rozpatrywanym przypadku mamy

$$A(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b-cz \end{bmatrix}, \quad A^*(z) = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 1 & -b-c\bar{z} \end{bmatrix},$$

$$D_1(s) = b_0(z)s^2 + b_1(z)s + b_2(z), \quad \text{gdzie } b_0(z) = 1, \quad b_1(z) = b + cz, \\ b_2(z) = a.$$

Obliczając ze wzorów (D.22) i (D.24) macierze $D_1(-A^*)$ i $X_1(z)$, otrzymamy

$$D_1(-A^*) = \begin{bmatrix} 0 & a(2b+c(z+\bar{z})) \\ -2b-c(z+\bar{z}) & (b+c\bar{z})(2b+c(z+\bar{z})) \end{bmatrix},$$

$$X_1(z) = \begin{bmatrix} b+cz & 1+a \\ -a-1 & b+c\bar{z} \end{bmatrix}.$$

Ze wzoru (D.25) mamy więc

$$P(z) = \frac{1}{a(2b+c(z+\bar{z}))} \begin{bmatrix} |b+cz|^2 + a(a+1) & b+c\bar{z} \\ b+cz & 1+a \end{bmatrix}. \quad (D.32)$$

Uwzględniając podstawienie (D.18), ze wzoru (D.32) otrzymamy

$$P(\exp(jy)) = \frac{1}{2a(b+c \cos(y))} \begin{bmatrix} |b+c \exp(jy)|^2 + a(a+1) & b+c \exp(-jy) \\ b+c \exp(jy) & 1+a \end{bmatrix}. \quad (D.33)$$

W rozpatrywanym przykładzie rozwiązanie zespolonego równania Lapunowa (D.2) przy $Q(\exp(jy)) = I$ ma więc postać (D.33). $\square$

L I T E R A T U R A

1. Allen R.G.D.: Mathematical Economics, Mac Millan Co. Ltd., London 1960.
2. Amemiya T.: Delay-independent stabilization of linear systems. Int. J. Control, vol. 37, No. 5, 1983, 1071-1079.
3. Amemiya T., Akazawa K., Tokumaru H.: Conditions for the delay-independent stabilization and the decay rate assignability of linear systems. Int. J. Control, vol. 44, No. 6, 1986, 1725-1735.
4. Ansoff H.J., Krumhansl J.A.: A general stability criterion for linear oscillating systems with time-lag. Quart. Appl. Math., vol. 6, No. 3, 1948, 337-341.
5. Barchin G.S., Chovanski A.N.: Veščestvenye kvazipolinomy s $r=3$, $s=1$. W: Čebotarev N.G., Mejman N.N.: Problema Rausa-Hurvica dla polinomov i celych funkcij. Trudy Mat. Inst. im. V.A. Steklova, vol. XXVI, Izd. AN SSSR, Moskva 1949.
6. Barszcz M., Olbrot A.: Stability criterion for a linear differential-difference system. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-24, No. 2, 1979, 368-369.
7. Bellman R.: Vvedenie v teoriju matric, Izd. Nauka, Moskva 1976.
8. Bellman R., Cooke K.L.: Differential-Difference Equations, Academic Press, New York 1963.
9. Bhatt S.J., Hsu C.S.: Stability criteria for second-order dynamical systems with time lag. Trans. of ASME, Journ. of Appl. Mech., vol. E-33, No. 1, 1966, 113-118.
10. Bojadziev G.: Second order population models with delay. W: Kisielewicz M.: Functional-Differential Systems and Related Topics IV, Zielona Góra 1985, 7-14.
11. Borek Z.: Stabilność quasi-wielomianów dla dowolnego opóźnienia. Praca dypl. mag., Wyd. FTMS PW, Warszawa 1985.
12. Brierley S.D., Chiasson J.N., Lee E.B., Zak S.H.: On stability independent of delay for linear systems. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-27, No. 1, 1982, 252-254.

13. Brierley S.D., Lee E.B.: Solution of the equation $A(z)X(z)+X(z)B(z)=C(z)$ and its application to the stability of generalized linear systems. *Int.J.Control*, vol.40, No.6, 1984, 1065-1075.
14. Bronsztejn I.N., Siemiendiajew K.A.: *Matematyka, poradnik encyklopedyczny*, PWN, Warszawa 1968.
15. Brumley W.E.: On the asymptotic behavior of solutions of differential-difference equations of neutral type. *J.Diff.Eqs.*, vol.7, No.1, 1970, 175-188.
16. Busłowicz M.: Wyznaczanie równoważnego układu bez opóźnienia dla liniowego stacjonarnego układu z opóźnieniem o skończonej liczbie wartości własnych. *Prace Nauk. PW, Elektryka*, Nr 51, 1978, 17-28.
17. Busłowicz M.: Wyznaczanie transmitancji macierzowej wielowymiarowego układu z opóźnieniem na podstawie równań stanu. *Podstawy Sterowania*, t.9, z.1, 1979, 17-27.
18. Busłowicz M.: On the computation of a characteristic quasi-polynomial from the state equations for the multidimensional time-lags system. W: Kisielwicz M.: *Functional-Differential Systems and Related Topics*, Zielona Góra 1980, 56-61.
19. Busłowicz M.: On the determination of a transfer function matrix from the given state equations for linear multivariable time-lags system. *Control and Cybernetics*, vol.9, Nr 3, 1980, 121-129.
20. Busłowicz M.: The computation of a transfer function matrix from the given state equations for time-delays systems. *IEEE Trans. Autom.Control*, vol.AC-26, No.4, 1981, 949-951.
21. Busłowicz M.: Algorytm obliczania quasi-wielomianu charakterystycznego wielowymiarowego układu liniowego stacjonarnego z niewspółmiernymi opóźnieniami na podstawie równania stanu. *Archiwum Autom. i Telemek.*, t.XXVI, z.1, 1981, 125-131.
22. Busłowicz M.: Rozwiązywanie równania stanu wielowymiarowego układu liniowego stacjonarnego z opóźnieniem o skończonym zbiorze wartości własnych. *Zesz.Nauk. PB, Nauki Techn.*, Nr 36, 1981, 5-20.
23. Busłowicz M.: Inversion of characteristic matrix of the time-delay systems of neutral type. *Found. Control Eng.*, vol.7, No. 4, 1982, 195-210.
24. Busłowicz M.: Sufficient conditions for instability of delay differential systems. *Int.J.Control*, vol.37, No.6, 1983, 1311-1321.
25. Busłowicz M.: Additional comments on Stability of time-delay systems, *IEEE Trans.Autom.Control*, vol.AC-28, No.9, 1983, 934-935.
26. Busłowicz M.: Warunki stabilności skalarnych układów liniowych stacjonarnych z opóźnieniem. *Podstawy Sterowania*, t.13, Nr 4, 1983, 315-324.
27. Busłowicz M.: Sufficient condition for instability of time-delay system of the retarded type. W: Kisielwicz M.: *Functional-Differential Systems and Related Topics III*, Zielona Góra, 1983, 19-23.

28. Busłowicz M.: Odwracanie macierzy wielomianowych wielu zmiennych. Zesz.Nauk. PB, Elektrotechnika, Nr 1, 1983, 31-42.
29. Busłowicz M.: Warunki konieczne asymptotycznej stabilności pewnej klasy układów liniowych stacjonarnych z opóźnieniami. Zesz.Nauk. PB, Elektrotechnika, Nr 1, 1983, 5-16.
30. Busłowicz M.: Badanie stabilności układów liniowych stacjonarnych ze współmiernymi opóźnieniami na podstawie kryterium Pontriagina. Mat.Konf.Nauk.-Techn. PB, tom I, Automatyka, 1984, 5-15.
31. Busłowicz M.: Necessary condition for asymptotic stability of time-delay systems of the retarded type - the new results. W: Kisielewicz M.: Functional-Differential Systems and Related Topics IV, Zielona Góra 1985, 15-20.
32. Busłowicz M.: The new sufficient conditions for instability of delay differential systems. Found. Control Eng., vol.10, No 1, 1985, 11-23.
33. Busłowicz M.: Stabilność układów liniowych stacjonarnych drugiego rzędu z czystym opóźnieniem. Podstawy Sterowania, t.15, z.3, 1985, 201-210.
34. Busłowicz M.: Comments on Stability test and stability conditions for delay differential systems. Int. J.Control, vol.45, No.2, 1987, s.745.
35. Busłowicz M.: Simple stability criterion for a class of delay differential systems. Int.J.Syst.Science, vol.18, No.5, 1987, 993-995.
36. Carroll R.L.: Comments on Stability of time-delay systems. IEEE Trans. Autom.Control, vol.AC-27, No.6, 1982, 1264-1266.
37. Čebotarev N.G.; Mejman N.N.: Problema Rausa-Hurvica dla polinomów i celych funkcji. Trudy Mat.Inst.im.V.A.Steklova, vol.XXVI, Izd. AN SSSR, Moskva 1949.
38. Charitonov W.L.: Ob asimptotičeskoj ustojčivosti položenija ravnovesija semejstva sistem linejnych differencialnych uravnenij. Diff.Uravn., t.XIV, No.11, 1978, 2086-2088.
39. Chhotaray R.K., Mohanty A.K.: Stabilization of a second order retarded differential difference system. Systems Science, vol.8, No.2-3, 1982, 125-135.
40. Chiasson J.N., Brierley S.D., Lee E.B.: A simplified derivation of the Zeheb-Walach 2-D stability test with applications to time-delay systems. IEEE Trans. Autom. Control, vol.AC-30, No.4, 1985, 411-414.
41. Chiasson J.N., Brierley S.D., Lee E.B.: Correction to A simplified derivation of the Zeheb-Walach 2-D stability test with applications to time-delay systems. IEEE Trans.Autom.Control, vol.AC-31, No.1, 1986, 91-92.
42. Cooke K.L., Grossman Z.: Discrete delay, distributed delay and stability switches. J.Math.Anal.Appl., vol.86, No.2, 1982, 592-627.

43. Datko R.: A procedure for determination of the exponential stability of certain differential-difference equations. *Quart. Appl. Math.*, vol.36, No.4, 1978, 279-292.
44. Datko R.: Stabilization of delay systems using constant gain feedback. W: Kisielewicz M.: *Functional-Differential Systems and Related Topics II*, Zielona Góra 1981, 88-95.
45. Datko R.: An example of an unstable neutral differential equation. *Int.J.Control*, vol.38, No.1, 1983, 263-267.
46. Datko R.: A sufficient condition for the asymptotic stability of certain linear processes. *Int.J.Control*, vol.41, No.5, 1985, 1337-1342.
47. Demidovič B.P., Maron I.A.: *Osnovy vychislitelnoj matematiki*, Gosud. Izd. Fiz.-Mat. Lit., Moskva 1963.
48. Desoer Ch.A., Vidyasagar M.: *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Acad. Press, New York 1975.
49. Driver R.D.: *Ordinary and Delay Differential Equations*. Springer Verlag, New York 1977.
50. Eisenberg L.: Stability of linear systems with transport lag. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.AC-11, No.2, 1966, 247-254.
51. Elsgolc L.E.: *Równania różniczkowe z odchyłonym argumentem*. *Mat. Mon.* PWN, Matematyka, Warszawa 1966.
52. Elsgolc L.E., Norkin S.B.: *Vvedenie v teoriju differencialnych uravnenij s otklonjajuščimsja argumentom*. Izd. Nauka, Moskva 1971.
53. Feliachi A., Thowsen A.: Memoryless stabilization of linear delay-differential systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.AC-26, No.2, 1981, 586-587.
54. Fiagbedzi Y.A., Pearson A.E.: Feedback stabilization of linear autonomous time lag systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.AC-31, No.9, 1986, 847-855.
55. Furukawa T., Shimemura E.: Stabilizability conditions by memoryless feedback for linear systems with time-delay. *Int. J.Control*, vol.37, No.3, 1983, 553-565.
56. Glikman B.F.: *Avtomatičeskoe regulirovanie židkostnyh raketnyh dvigatelej*, Mašinostroenie, Moskva 1974.
57. Gosiewski A., Olbrot A.W.: The effects of feedback delays on the performance of multivariable linear control systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC-25, No.4, 1980, 729-735.
58. Górecki H.: *Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem*. WNT, Warszawa 1971.
59. Górecki H.(red.): *Algorytmy i programy sterowania*. WNT, Warszawa 1980.
60. Górecki H., Szymkat M.: Application of an elimination method to the study of the geometry of zeros of real polynomials. *Int.J.Control*, vol.38, No.1, 1983, 1-26.

61. Gromova P.S.: On the stability of solutions of differential-difference equations in the critical case. W: Farkas M.: Differential Equations. North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1977, 231-241.
62. Guiver J.P., Bose N.K.: On test for zero-sets of multivariable polynomials in noncompact polydomains. Proc IEEE, vol.69, No.4, 1981, 467-469.
63. Györi L.: Delay differential and integro-differential equations in biological compartment models. Systems Science, vol.8, No.2-3, 1982, 165-187.
64. Hale J.K.: Theory of Functional Differential Equations. Springer Verlag, New York 1977.
65. Hertz D., Jury E.L., Zeheb E.: Simplified analytic stability test for systems with commensurate time delays. IEEE Proc., Part D, Control Th. and Appl., vol. 131, No.1, 1984, 52-56.
66. Hirai K., Satch Y.: Stability of a system with variable time delay. IEEE Trans. Autom.Control, vol. AC-27, No.3, 1980, 552-554.
67. Hmamed A.: Comments on On an estimate of the decay rate for stable linear delay systems. Int.J.Control, vol.42, No.2, 1985, 539-540.
68. Hmamed A.: On the stability of time-delay systems: new results. Int.J.Control, vol.43, No.1, 1986, 321-324.
69. Hmamed A.: Stability conditions of delay-differential systems. Int.J.Control, vol.43, No.2, 1986, 455-463.
70. Hmamed A., Radouane L.: Comments on Delay-independent stabilization of linear systems. Int.J.Control, vol.39, No.5, 1984, 1109-1110.
71. Ho K.W., Chan W.K.: Stability of third-order control systems with time-lag using Pontryagin's method for zero determination. Proc. IEE, vol.116, No.2, 1969, 2064-2068.
72. Hsu C.S.: Application of the τ -decomposition method to dynamical systems subjected to retarded follower forces. J.Appl. Mech., Trans. of ASME, vol.E-37, No.2, 1970, 259-266.
73. Hsu C.S., Bhatt S.J.: Stability charts for second-order dynamical systems with time lag. Trans. of ASME, J.Appl. Mech., vol.E-33, No.1, 1966, 119-124.
74. Ikeda M., Ashida T.: Stabilization of linear systems with time-varying delay. IEEE Trans.Autom.Control, vol.AC-24, No.2, 1979, 369-370.
75. Infante E.F., Castelan W.B.: A Liapunov functional for a matrix difference-differential equation. J.Diff.Eqs., vol.29, No.3, 1978, 439-451.
76. Jury E.L.: Przekształcenie Z i jego zastosowania. WNT, Warszawa 1970.
77. Jury E.L.: Inners and Stability of Dynamical Systems. J.Wiley, New York 1974.

78. Jury E.I., Mansour M.: Positivity and nonnegativity conditions of a quartic equation and related problems. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.AC-26, No.2, 1981, 444-451.
79. Jury E.I., Mansour M.: Stability conditions for a class of delay differential systems. *Int.J.Control*, vol.35, No.4, 1982, 689-699.
80. Jury E.I., Mansour M.: A note on sufficient conditions for positivity in $x \in [-1,1]$. *Int.J.Control*, vol.42, No.6, 1985, 1519-1521.
81. Kaczorek T.: *Teoria sterowania*, t.1, PWN, Warszawa 1977.
82. Kaczorek T.: *Teoria sterowania*, t.2, PWN, Warszawa 1981.
83. Kaczorek T.: *Macierze w automatyce i elektrotechnice*. WNT, Warszawa 1984.
84. Kamen E.W.: On the relationship between zero criteria for two-variable polynomials and asymptotic stability of delay differential systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.AC-25, No.5, 1980, 983-984.
85. Kamen E.W.: Linear systems with commensurate time delays: stability and stabilization independent of delay. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.AC-27, No.2, 1982, 367-375.
86. Kamen E.W.: Correction to Linear systems with commensurate time delays: stability and stabilization independent of delay. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.AC-28, No.2, 1983, 248-249.
87. Karmarkar J.S., Šiljak D.D.: Stability analysis of systems with time delay. *Proc. IEE*, vol.117, No.7, 1970, 1421-1424.
88. Karpuk W.W.: Kriterij konečnosti spektra sistem a zapazdyvanijem. *DAN BSSR*, t.XXII, No.3, 1978, 212-213.
89. Kolmanovskij W.B., Nosov W.R.: *Ustojčivost' i periodičeskie režimy reguliruemych sistem s posledejstviem*. Izd. Nauka, Moskva 1981.
90. Kolmanovskij W.B., Nosov W.R.: *Sistemy s posledejstviem nejtralnogo tipa*. *Avtom. i Telemekh.*, No.1, 1984, 5-35.
91. Konstantinov M.M., Petkov P.H., Patarinski S.P., Christov N.D.: Absolute stability and stabilization of differential delay system. *Arch. Autom. i Telemekh.*, vol.24, No.3, 1979, 339-350.
92. Krall A.M.: Stability criteria for systems with time lag. *SIAM J. Control*, ser.A, vol.2, No.2, 1965, 160-170.
93. Krasovskij N.N.: *Nekotorye zadači teorij ustojčivosti dviženija*. Fizmatgiz, Moskva 1959.
94. Kudrewicz J.: *Analiza funkcjonalna dla automatyków i elektro-ników*. PWN, Warszawa 1976.
95. Kwon W.H., Pearson A.E.: A note on feedback stabilization of a differential-difference systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.AC-22, No.3, 1977, 468-470.

96. Ladde G.S.: Stability and oscillations in single-species processes with past memory. *Int.J.Syst.Sci.*, vol.10, No.6, 1979, 621-648.
97. Lee T.N., Dianat S.: Stability of time-delay systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.AC-26, No.4, 1981, 951-953.
98. Lee M.S., Hsu C.S.: On the τ -decomposition method of stability analysis for retarded dynamical systems. *SIAM J.Control*, vol.7, No.2, 1969, 242-259.
99. Lee E.B., Lu W.S., Wu N.E.: A Lyapunov theory for linear time-delay systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.AC-31, No.3, 1986, 259-261.
100. Lee E.B., Zak S.H., Brierley S.D.: Stabilization of generalized linear systems via the algebraic Riccati equation. *Int. J.Control*, vol.39, No.5, 1984, 1025-1041.
101. Lehnigk S.H.: *Stability Theorems for Linear Motions*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, New York 1966.
102. Leja F.: *Funkcje zespolone*. PWN, Warszawa 1976.
103. Lekus W.D., Rovinskiy W.E.: *Ocenka ustojčivosti sistem s zapazdyvaniem*. Energoatomizdat, Leningrad 1982.
104. Lewis R.M., Anderson B.D.O.: Necessary and sufficient conditions for delay-independent stability of linear autonomous systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.AC-25, No.4, 1980, 735-739.
105. Liu X.Y., Mansour M.: Stability test and stability conditions for delay differential systems. *Int. J.Control*, vol.39, No.6, 1984, 1229-1242.
106. Liu X.Y., Mansour M.: Stability analysis and stability conditions in the delay intervals for second-order systems. *Int. J.Control*, vol.40, No.2, 1984, 317-327.
107. Mahaffy J.M.: A test for stability of linear differential delay equations. *Quart. Appl.Math.*, vol.40, No.2, 1982, 193-202.
108. Manitius A.: *Mathematic models of hereditary systems*. Report CRM-462, Centre de Recherches Mathematiques, Universite de Montreal, Montreal, Quebec, 1974.
109. Manitius A.: *Optimal control of hereditary systems*. W: *Control Theory and Topics in Functional Analysis*, vol.III, Atomic Energy Agency, Vienna 1979, 43-178.
110. Manitius A., Tran H., Payre G., Roy R.: *Computation of eigenvalues associated with functional differential equation*. Report, Math. Sci., Rensselaer Polytechnic Institute, May 1984.
111. Mori T.: Criteria for asymptotic stability of linear time-delay systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.AC-30, No.2, 1985, 158-161.
112. Mori T.: Further comments on Comments on On an estimate of the decay rate for stable linear delay systems. *Int.J.Control*, vol.43, No.5, 1986, 1613-1614.

113. Mori T., Fukuma N., Kuwahara M.: Simple stability criteria for single and composite linear systems with time delays. *Int.J.Control*, vol.34, No.6, 1981, 1175-1184.
114. Mori T., Fukuma N., Kuwahara M.: On an estimate of the decay rate for stable linear delay systems. *Int. J.Control*, vol.36, No.1, 1982, 95-97.
115. Mori T., Kokame H., Kuwahara M.: Analysis of time-delay systems: stability and instability. *Proc. of 25 th Conf. on Decision and Control*, Athens, Greece, December 1986, vol.2, 895-898.
116. Mori T., Kuwahara M.: A way to stabilize linear systems with delay. *Preprint of 8th IFAC World Congress*, Kyoto, Japan 1981.
117. Mori T., Kuwahara M.: Small delay-term type stabilizability criteria for linear systems with delay. *Int.J.Syst. Sci.*, vol.13, No.3, 1982, 265-272.
118. Mori T., Noldus E.: Stability criteria for linear differential difference systems. *Int.J.Syst.Sci.*, vol.15, No.1, 1984, 87-94.
119. Mori T., Noldus E., Kuwahara M.: A way to stabilize linear systems with delayed state. *Automatica*, vol.19, No.5, 1983, 571-573.
120. Mossaheb S.: A Nyquist type stability criterion for linear multivariable delayed systems. *Int.J.Control*, vol.32, No.5, 1980, 821-847.
121. Mostowski A., Stark M.: *Elementy algebry wyższej*. PWN, Warszawa 1975.
122. Mufti I.H.: A note on the stability of an equation of third order with time-lag. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.AC-9, No.2, 1964, 190-191.
123. Mufti I.H.: On the stability of single-species population model with time-lag. *Int.J.Syst.Sci.*, vol.10, No.10, 1979, 1149-1154.
124. Nazarov G.J.: Stability and stabilization of linear differential delay systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.AC-18, No.3, 1973, 317-318.
125. Nejmark Ju.I.: D-razbienie prostranstva kvazipolinomov. *Prikl. Mat. Mech.*, vol. XIII, No.4, 1949, 349-380.
126. Niederliński A.: *Układy wielowymiarowe automatyki, podstawy teoretyczne*. WNT, Warszawa 1974.
127. Noldus E.: Stabilization of a class of distributional convolution equations. *Int.J.Control*, vol.41, No.4, 1985, 947-960.
128. Noonburg V.W.: Roots of a transcendental equation associated with a system of differential-difference equations. *SIAM J.Appl. Math.*, vol.17, No.1, 1969, 198-205.
129. Nosov V.R.: Kriterii ustojčivosti Matrosova dla funkcionalno-differencialnych uravnenij zapazdyvajuščego tipa. *Diff. Uravn.*, vol.XIII, No.7, 1977, 1202-1207.

130. Ogata K.: Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania. WNT, Warszawa 1974.
131. Olbrot A.W.: Fixed frequencies and a simple stability test for linear difference-differential systems. Referat wygłoszony podczas Międz. Konf.: Functional-Differential Systems and Related Topics III, Białejewko, Maj 1983.
132. Olbrot A.W.: A sufficiently large time delay in feedback loop must destroy exponential stability of any decay rate. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-29, No. 4, 1984, 367-368.
133. Öztürk N.: On the stability of time delay systems. Proc. of 25th Conf. on Decision and Control, Athens, Greece, December 1986, vol. 2, 912-913.
134. Pontriagin L.S.: O nulach nekotorich prostych transcendentnych funkcij. Izv. AN SSSR., Ser. Mat., vol. 6, 1942, 115-13.
135. Popov E.P.: Dinamika sistem avtomatičeskogo regulirovanija. Gostechizdat, Moskva 1954.
136. Rekasius Z.V.: A stability test for systems with delays. Proc. 1980 Joint Autom. Control Conf., San Francisco, CA, paper TP9-A, 1980.
137. Rezvan W.: Absolutnaja ustojčivost' avtomatičeskich sistem s zapazdyvaniem. Izd. Nauka, Moskva 1983.
138. Sasagawa T.: Comments on Stability of time-delay systems. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-28, No. 9, 1983, s. 934.
139. Sikora A., Kocięcki M.: Numerical evaluation of roots of quasi-polynomials. W: Kisielewicz M.: Functional-Differential Systems and Related Topics, Zielona Góra 1980, 306-316.
140. Šimanov S.N.: O neustojčivosti dviženija sistem s zapazdyvaniem po vremieni. Prikl. Mat. i Mech., vol. 24, No. 1, 1960, 55-63.
141. Sokolov A.A.: Kriterij ustojčivosti sistem regulirovanija s raspredelennymi parametrami i ego priloženija. Inż. Sbornik, vol. 2, No. 2, 1942.
142. Solodovnikov W.W.: Techničeskaja kibernetika, t. 2, rozdz. II, Mašinostroenie, Moskva 1967.
143. Stepan G.: Stability investigation of retarded differential equations. Acta Techn. Acad. Sci. Hung., vol. 90, No. 1-2, 1980, 109-132.
144. Suh L.H., Bien Z.: A root-locus technique for linear systems with delay. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-27, No. 1, 1982, 205-208.
145. Suh L.H., Bien Z.: A note on the stability of large scale systems with delays. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-27, No. 1, 1982, 256-258.
146. Szymkat M.: Jednolite podejście do analitycznych kryteriów stabilności układów o parametrach skupionych. Praca doktorska, Inst. Autom., Inż. Syst. i Telekom. AGH im. St. Staszica, Kraków, 1983.

147. Szymkat M.: The analytical stability criterion for a system of linear difference-differential equations of second order obtained by an elimination method. W: Kisielwicz M.: Functional-Differential Systems and Related Topics III, Zielona Góra 1983, 233-240.
148. Szymkat M.: The analytical criteria for the stability of the family of linear difference-differential equations. W: Kisielwicz M.: Functional-Differential Systems and Related Topics IV, Zielona Góra 1985, 109-116.
149. Thompson W.M., Vaccroux A.G., Hoffman C.H.: Application of Pontryagin's time lag stability criterion to force reflecting servomechanisms, 9th Joint Aut. Control Conf., Ann Arbor, Mich., USA, 1968, 432-443.
150. Thowson A.: An analytic stability test for a class of time-delay systems. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-26, 1981, 735-736.
151. Thowson A.: The Routh-Hurwitz method for stability determination of linear differential-difference systems. Int. J. Control, vol. 33, No. 5, 1981, 991-995.
152. Thowson A.: A transformation for stability analysis of linear delay system. Int. J. Syst. Sci., vol. 13, No. 12, 1982, 1371-1378.
153. Thowson A.: Delay-independent asymptotic stability of linear systems. IEE Proc., Part D, vol. 129, No. 3, 1982, 73-75.
154. Thowson A.: Further comments on Stability of time-delay systems. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-28, No. 9, 1983, s. 935.
155. Wright W.C., Kerlin T.W.: An efficient computer oriented method for stability analysis of large multivariable systems. Trans. ASME, J. Basic Eng., vol. 92, No. 2, 1970, 279-286.
156. Xu D.: Counter example to a recent result on the decay rate for stable linear delay systems by A. Hmamed. Int. J. Control, vol. 44, No. 6, 1986, 1779-1780.
157. Żak S.H., Busłowicz M.: Computation of the state transition matrix for a class of delay-differential systems. Int. J. Control, vol. 42, No. 3, 1985, 725-733.
158. Marshall J.E.: Control of time-delay systems. Peter Peregrinus Ltd., London 1979.

ASYMPTOTIC STABILITY OF LINEAR DYNAMIC TIME-INVARIANT SYSTEMS WITH DELAY

Summary

In the paper, the problem of asymptotic stability of dynamic, linear time-invariant systems with discrete, mainly commensurate, time delays is discussed. A critical review of the literature is given. Many questions connected with this problem are systematized and a number of the new results are presented.

In the first part of the paper, basic information on characteristic quasi-polynomials of linear time-invariant systems with delay is given. In particular, the asymptotic location of the zeros of quasi-polynomials is discussed.

In the next part, the following kinds of stability of time-delay systems are considered:

- (i) asymptotic stability for a given value of delay,
- (ii) asymptotic stability independent of delay,
- (iii) asymptotic stability in the delay interval,
- (iv) asymptotic stability with a decay rate of γ ($\gamma \geq 0$), to be exact with a decay rate of not less than γ , the so-called γ -stability.

The location of all the zeros of the characteristic quasi-polynomial in the open left-half plane is not always equivalent to the asymptotic stability of the time-delay system of the neutral type. In many works this fact has not been taken into consideration. Therefore, in this paper the criteria of each kind of stability for the time-delay system of the neutral type are formulated differently from those for the system of the retarded type.

In several works, various criteria for asymptotic stability independent of delay, which are not always equivalent are given. In order to

distinguish between these criteria, in the present paper, two different names (and definitions) of such a type of stability are introduced, namely: asymptotic stability independent of delay (abbreviation - ASNO) and strong asymptotic stability independent of delay (MASNO).

Three new methods for calculating the values of the delay, for which the quasi-polynomial has zeros on an imaginary axis, are proposed. One of this methods requires the solution of the complex Lyapunov matrix equation. Methods for the solution of this equation are presented. The analytical form of this solution is also given.

The analytical conditions for γ -stability (and also asymptotic stability) in the delay interval for some simple quasi-polynomials of the retarded type and for some classes of multivariable systems with one delay are presented. Investigation of γ -stability for a general case of quasi-polynomials of the retarded type on the basis of an analysis of the root-locus as a function of the values of the delay is proposed. A numerical method for calculating the branches of the root-locus is presented.

The discussion is illustrated by several examples.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Р е з ю м е

В работе рассматривается проблема асимптотической устойчивости динамических, линейных, стационарных систем с дискретными, прежде всего соизмеримыми запаздываниями. Представлен критический обзор литературы. Много вопросов связанных с этой проблемой приводится в порядок и даётся ряд новых результатов.

Во вступительной части работы приводятся основные сведения об характеристических квазиполиномах линейных стационарных систем с запаздыванием. В частности анализируются свойства распределения асимптотических нулей квазиполиномов. Затем рассматриваются следующие роды устойчивости системы с запаздыванием:

- /I/ асимптотическая устойчивость при определенном значении запаздывания,
- /II/ асимптотическая устойчивость при произвольных значениях запаздывания,

/ш/ асимптотическая устойчивость в пределах значений запаздывания,

/iv/ асимптотическая устойчивость со скоростью убывания γ / $\gamma \geq 0$ /, а в действительности со скоростью убывания не меньшей чем γ , так называемая γ - устойчивость.

Отрицательность действительных частей всех нулей характеристического квазиполинома не всегда является достаточным условием асимптотической устойчивости системы нейтрального типа. Многие работы не учитывают этого факта. Поэтому в работе критерии каждого рода устойчивости системы с запаздыванием нейтрального типа даются в другом виде чем для системы запаздывающего типа.

Во многих работах даны критерии асимптотической устойчивости при произвольных значениях запаздывания, которые не всегда равновесны друг другу. Чтобы разделить эти критерии, в работу вводятся два различные названия / и определения / такого рода устойчивости, а именно: асимптотическая устойчивость при произвольных значениях запаздывания / в сокращении $ASNO$ / и сильная асимптотическая устойчивость при произвольных значениях запаздывания / в сокращении $MASNO$ /.

В работе даются три новых метода вычисления значений запаздывания, при которых квазиполином имеет нули на мнимой оси. Один из этих методов требует решения комплексного матричного уравнения Ляпунова. Представлены методы решения этого уравнения. Дан тоже аналитический вид этого решения.

В работе даются аналитические условия γ -устойчивости /и тоже асимптотической устойчивости / в пределах значений запаздывания простых квазиполиномов запаздывающего типа и не- которого класса многомерных систем с одним запаздыванием. В общем случае квазиполинома запаздывающего типа предполагается исследование γ -устойчивости на основании анализа корневого годографа в зависимости от значений запаздывания. Представляется численный метод вычисления ветвей этого годографа.

В работе даются многие примеры иллюстрирующие приведённые результаты.

