

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA TOM 1.

PODREČZNIK TEORYI MOSTÓW

CZĘŚĆ I., TOM II.

BELKI PROSTE STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE,

DLA

INŻYNIERÓW I SŁUCHACZÓW SZKÓŁ POLITECHNICZNYCH

Z 106 RYSUNKAMI W TEKŚCIE I 4 TABLICAMI

OPRACOWAŁ

Dr. MAKSYMILIAN THULLIE,

DYPLOMOWANY INŻYNIER, PROFESOR SZKOŁY POLITECHNICZNEJ WE LWOWIE.

WYDANIE DRUGIE.

Cena 8 kor.

WE LWOWIE.

NAKŁADEM AUTORA.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI SEYFARTHA I CZAJKOWSKIEGO.

Z I. Związkowej drukarni we Lwowie.

1906.

Dr. Thullie

PRZEDMOWA DO DRUGIEGO WYDANIA.

Drugie wydanie niniejszego dziełka nie wiele różni się od pierwszego.

W rozdziale drugim dodałem §. 18., w trzecim §. 51., omawiające kształt i sposoby wykreślenia linii wpływowych. Nowy jedynie jest cały rozdział X., obejmujący najprostsze zastosowanie prawa pracy odkształcenia, którego znajomość obecnie inżynierom jest koniecznie potrzebna.

W końcu wywiązać się muszę z miłego obowiązku podziękowania asystentom moim pp. Ursiniemu i Maćkowskiemu, którzy przeliczyli przykłady i pomagali w przygotowaniu tablic.

Dr. Maksymilian Thullie.

We Lwowie, w październiku 1906.

SPROSTOWANIE OMYŁEK.

	Zamiast:	Czytaj:
Str. 2. w. 16. z góry	$=C$	$+C$
" 3. " 14. z dołu	$=\int_0^l Xdx$	$+\int_0^l Xdx$
" 10. " 2. "	$M_2=$	$M_3=$
" 11. " 10. z góry	$\frac{2(n+l_{n-1})}{l_{n+1}}$	$\frac{2(l_n+l_{n-1})}{l_{n+1}}$
" 26. " 7. "	$5\cdot5$	$0\cdot5$
" 30. " 1. "	$g_1 l_1$	$g_1 l_1^3$
" 33. " 5. "	$4\frac{l_2}{l_2}$	$4\frac{l_1}{l_2}$
" 75. rys. 59.	długość fb ma być oznaczona przez t_2 nie b , zaś zamiast t	
" 80. " 65.		t_1
pierwsze przeszło	u_1	u



3804

Egz. Archiwalny

SPIS RZECZY.

	Str
§. 1. Wstęp	1

A. Belka ciągła bezprzegubowa.

I. Ogólne analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych belki ciągłej o ściance pełnej i przekroju stałym.

§. 2. Ogólne uwagi	1
§. 3. Belka pochyło utwierdzona	2
§. 4. Belka poziomo utwierdzona	4
§. 5. Momenty podporowe belki ciągłej o równo wysokich podporach	7
§. 6. Momenty, siły poprzeczne i oddziaływania	8
§. 7. Obciążenie zupełne jednostajnie rozłożone	9
§. 8. Momenty podporowe w przęsłach nieobciążonych	10
§. 9. Siły poprzeczne, oddziaływania i momenty w przęsłach nieobciążonych	11
§. 10. Momenty podporowe przęsła obciążonego	14
§. 11. Obciążenie najniekorzystniejsze dla sił poprzecznych	15
§. 12. Największe siły poprzeczne	16
§. 13. Bezwzględnie największe i najmniejsze siły poprzeczne	17
§. 14. Najniekorzystniejsze obciążenie dla momentów	18
§. 15. Wyznaczenie największych momentów dla obciążenia ciągłego	23
§. 16. Wielkość ciężaru jednostajnego ciągłego	24

II. Belka ciągła dwu- i trzyprzęsłowa.

§. 17. Momenty podporowe belki dwuprzęsłowej	25
§. 18. Linie wpływowe	26
§. 19. Ciężar własny	29
§. 20. Ciężar ruchomy	31
§. 21. Momenty podporowe belki trzyprzęsłowej	37
§. 22. Ciężar własny	38
§. 23. Największe siły poprzeczne	39
§. 24. Największe oddziaływania	41
§. 25. Największe momenty	42
§. 26. Przykład	46

III. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych.

§. 27. Zasada	53
§. 28. Najniekorzystniejsze obciążenia	56
§. 29. Belka trzyprzęsłowa	56
§. 30. Przykład sposobem Lebera	58

IV. Belka o nieskończonej ilości przęseł.

	Str.
§. 31. Ogólne uwagi	61
§. 32. Obciążenie zupełne jednostajne ciągle	61
§. 33. Momenty podporowe dla obciążenia układem ciężarów skupionych 63	
§. 34. Największe momenty dla obciążenia układem ciężarów skupionych 65	
§. 35. Największe siły poprzeczne i oddziaływania	66

V. Wykreślne wyznaczenie sił zewnętrznych dla przekroju stałego.

§. 36. Pierwszy wielobok sznurowy	67
§. 37. Linia ugięcia	68
§. 38. Wielobok ugięcia	70
§. 39. Wyznaczenie momentów podporowych	72
§. 40. Porównanie z belką poziomą obu końcami utwierdzoną	73
§. 41. Przęsło nieobciążone	75
§. 42. Dwa przęsła sąsiednie nieobciążone	76
§. 43. Siły poprzeczne, oddziaływania i momenty w przęsłach nieobciążonych	77
§. 44. Przęsło obciążone	78
§. 45. Dwa sąsiednie przęsła obciążone	79
§. 46. Dowolne obciążenie przęseł	80
§. 47. Obciążenie jednostajne zupełne	82
§. 48. Obciążenie jednostajne częściowe	84
§. 49. Obciążenie jednym ciężarem skupionym	84
§. 50. Wyznaczenie wykreślne linii wpływowych	86
§. 51. Własności linii wpływowych i tablice do ich wykreślenia . . .	88
§. 52. Najniekorzystniejsze obciążenie dla sił poprzecznych i momentów 93	
§. 53. Największe siły zewnętrzne	93

VI. Obliczenie analityczne belki ciągłej o przekroju zmiennym.

§. 54. Belka pochyło utwierdzona	96
§. 55. Wyznaczenie ilości pomocniczych	97
§. 56. Wyznaczenie ilości $\mathcal{N}'$ i $\mathcal{N}''$	98
§. 57. Momenty podporowe belki ciągłej	99
§. 58. Punkty stałe	99
§. 59. Przykład	100

VII. Obliczenie dokładne belki kratowej ciągłej o przekroju zmiennym.

§. 60. Dokładność rozmaitych sposobów obliczenia	101
§. 61. Zasada dokładnego obliczenia	102
§. 62. Prawo pracy przygotowanej	104
§. 63. Prawo Maxwella	106
§. 64. Linia wpływowa ugięcia	107
§. 65. Linia wpływowa oddziaływania belki dwuprzęsłowej	107
§. 66. Linie wpływowe sił poprzecznych i momentów	108

VIII. Wpływ podpór.

	Str.
§. 67. Ogólne uwagi	109
§. 68. Momenty podporowe przy nierówno wysokich podporach . . .	109
§. 69. Wpływ zmiany wysokości jednej podpory	110
§. 70. Najkorzystniejsze wysokości podpór	111
§. 71. Belka dwu- i trzyprzęsłowa	112
§. 72. Podwójne łożyska	113
§. 73. Wpływ przytwierdzenia belek do filarów	114

B. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne i natężenia drugorzędne.

IX. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne.

§. 74. Pręty nadliczbowe	116
§. 75. Obliczenie sił wewnętrznych prętów nadliczbowych	117
§. 76. Belka równoległa o kracie złożonej	121
§. 77. Belka wieloboczna	124
§. 78. Belka Howe'a	124
§. 79. Belka ciągła	125
§. 80. Wpływ zmiany ciepłoty	125

X. Zastosowanie prawa pracy odkształcenia.

§. 81. Pochodne pracy odkształcenia belki kratowej	125
§. 82. Pochodne pracy odkształcenia dźwigaru o przekroju pełnym . .	127
§. 83. Prawo najmniejszości pracy odkształcenia	131
§. 84. Zastosowanie tego prawa do belek statycznie niewyznaczalnych	132

XI. Natężenia drugorzędne.

§. 85. Określenie natężeń drugorzędnych	138
§. 86. Zasada obliczenia natężeń drugorzędnych	139
§. 87. Zmiana kątów w trójkacie	139
§. 88. Kąt odchylenia osi prętów	140
§. 89. Równanie momentów węzłowych	140
§. 90. Wykreślne wyznaczenie momentów węzłowych	141
§. 91. Wpływ mimośrodowego utwierdzenia prętów	145
§. 92. Wpływ przekroju prętów	146
§. 93. Wpływ obciążenia	147
§. 94. Wpływ ustroju belki	148
§. 95. Połączenia przegibne	149

Dodatek. Literatura	150
-------------------------------	-----



§. 1. Wstęp.

W pierwszym tomie Podręcznika teorii mostów podzieliśmy teorię belek prostych na siedm działów. Cztery pierwsze działy stanowiły tom pierwszy, w niniejszym tomie wyłożymy trzy ostatnie działy. Mówić będziemy mianowicie o belce ciąglej bezprzegubowej, o belkach kratowych statycznie niewyznaczalnych i o natężeniach drugorzędnych.

A. Belka ciągła bezprzegubowa.

1. Ogólne analityczne wyznaczenie sił wewnętrznych belki ciąglej o ściance pełnej i przekroju stałym.

§. 2. Ogólne uwagi.

Mówiliśmy już w tomie I., że belkę prostą, spoczywającą na więcej, niż dwu podporach, nazywamy belką ciągłą lub wieloprzęsłową (n. *continuirlicher Träger*, f. *poutre continue*, a. *continuous beam*). Mówiliśmy też, że oddziaływań podpór nie możemy tu wyznaczyć zapomocą prawideł statyki, lecz badamy odkształcenie belki, które zależne jest od obciążenia i stąd otrzymujemy równania, brakujące do wyznaczenia sił zewnętrznych.

Przy wyznaczeniu odkształcenia wchodzi jednak w rachubę przekrój, przed obliczeniem belki jeszcze nieznany; stąd powstaje bardzo wielka trudność. Gdybyśmy chcieli wprowadzić w rachunek przekrój niewiadomy jako funkcją sił wewnętrznych, zadanie nie byłoby rozwiązalnem. Dlatego obliczamy belkę ciągłą najprzód w przybliżeniu, przyjmując przekrój stały. Na podstawie w ten sposób uzyskanych sił, zewnętrznych obliczamy przekroje w poszczególnych punktach, a wtedy dopiero, znając w przybliżeniu przekroje, możemy przystąpić do dokładnego obliczenia belki.

W bieżącym rozdziale wyznaczmy więc siły zewnętrzne tylko dla przekroju stałego i to w sposób analityczny, odstępując w tym wypadku wyjątkowo od równoczesnego używania obu sposobów analitycznego i wykreślonego, gdyż w tym wypadku oba te sposoby znacznie się różnią.

W następnych rozdziałach uwzględnimy zmienność przekroju. W rozdziale tym trzymać się będziemy toku dowodzenia Winklera.

§. 3. Belka pochyło utwierdzona.

Wiadomo ze statyki budowli*), że równanie różniczkowe linii ugięcia, jest:

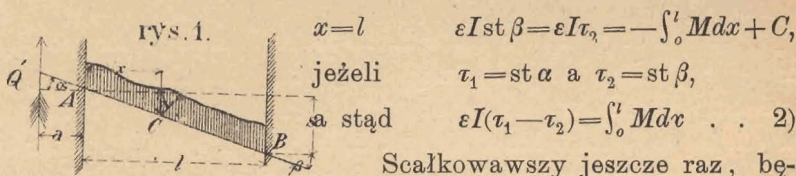
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{\epsilon I}, \dots\dots\dots 1)$$

jeżeli M oznacza moment statyczny sił zewnętrznych, I moment bezwładności przekroju, ϵ współczynnik sprężystości.

Jeżeli scałkujemy równanie 1), otrzymamy:

$$\epsilon I \frac{dy}{dx} = -\int_0^x M dx = C, \text{ więc}$$

dla $x=0$ (rys. 1.) $\epsilon I \sin \alpha = \epsilon I \tau_1 = C$, a dla



$$x=l \quad \epsilon I \sin \beta = \epsilon I \tau_2 = -\int_0^l M dx + C,$$

jeżeli $\tau_1 = \sin \alpha$ a $\tau_2 = \sin \beta$,

$$\text{a stąd} \quad \epsilon I (\tau_1 - \tau_2) = \int_0^l M dx \dots\dots\dots 2)$$

Scałkowawszy jeszcze raz, będziemy mieli

$$\epsilon I y = -\int \int M dx^2 + Cx + C_1.$$

Wyraz $-\int \int M dx^2$ możemy częściowo scałkować i otrzymamy

$$\epsilon I y = -x \int M dx + \int M x dx + Cx + C_1.$$

Jeżeli teraz za $\int M dx$ wstawimy wartość, będziemy mieli

$$\epsilon I y = \epsilon I x \frac{dy}{dx} + \int M x dx + C_1 \dots\dots\dots 3)$$

Dla $x=0$ jest $y=0=C_1$,

dla $x=l$ jest $\epsilon I s = \epsilon I \tau_2 + \int_0^l M x dx$,

$$\text{więc} \quad \epsilon I (s - l \tau_2) = \int_0^l M x dx \dots\dots\dots 4)$$

*) p. Podręcznik Statyki budowli II. w. str. 246 rów. 379.

Nazwijmy X_0 moment wypadkowej wszystkich ciężarów (bez oddziaływania) na długości AC , M moment wszystkich sił zewnętrznych (z oddziaływaniem), po lewej stronie będących, ze względu na punkt C , Q' siłę poprzeczną w A , a M' i M'' momenty w punktach A i B na podporach, które nazywamy momentami podporowymi (*Stützenmoment*, *Normalmoment*), to

$$M' = Q'a, \quad M = Q'(a+x) + X_0 = M' + Q'x + X_0 \quad \dots \quad 5)$$

Dla punktu B będzie

$$M'' = M' + Q'l + X'' \quad \dots \quad 6)$$

Stąd otrzymamy $Q' = \frac{M'' - M'}{l} - \frac{X''}{l}$, a wstawwszy to w równanie 5.)

$$M = M' + \frac{M'' - M'}{l} x - \frac{X'' x}{l} + X_0.$$

Dla belki, w dwu punktach podpartej, jest $M' = M'' = 0$, więc $M = X_0 - \frac{X'' x}{l} = X$, gdy X oznacza moment sił zewnętrznych dla belki, w dwu punktach podpartej.

A więc możemy napisać $M = \frac{M'(l-x) + M''x}{l} + X \quad \dots \quad 7)$

Podstawiwszy tę wartość w równaniu 2), otrzymamy

$$\varepsilon I(\tau_1 - \tau_2) = \int_0^l \frac{M'(l-x) + M''x}{l} dx = \int_0^l X dx,$$

albo

$$2\varepsilon I(\tau_1 - \tau_2) = (M' + M'')l + 2 \int_0^l X dx.$$

Podstawiwszy zaś wartość za M w równ. 4), otrzymamy

$$\varepsilon I(s - l\tau_2) = \int_0^l \frac{M'(l-x)x + M''x^2}{l} dx + \int_0^l X x dx,$$

a stąd

$$6\varepsilon I(s - l\tau_2) = (M' + 2M'')l^2 + 6 \int_0^l X x dx.$$

Rozwiązawszy te dwa równania ze względu na M' i M'' , będziemy mieli

$$\left. \begin{aligned} M'l^2 &= 2 \int_0^l X(3x - 2l) dx + 2\varepsilon I(2l\tau_1 + l\tau_2 - 3s) \\ M''l^2 &= 2 \int_0^l X(l - 3x) dx - 2\varepsilon I(l\tau_1 + 2l\tau_2 - 3s) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 8)$$

Nazwijmy $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ momenty na podporach belki poziomo utwierdzonej o tej samej rozpiętości i tak samo obciążonej, to tu $s=0$, $a=\beta=0$, więc $\tau_1=\tau_2=0$, a zatem według równ. 8) będzie

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}'l^2 &= 2 \int_0^l X(3x - 2l) dx \\ \mathfrak{M}''l^2 &= 2 \int_0^l X(l - 3x) dx \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 9)$$

Możemy więc napisać

$$\left. \begin{aligned} M' &= \mathfrak{M}' + 2\epsilon l \frac{l(2\tau_1 + \tau_2) - 3s}{l^2} \\ M'' &= \mathfrak{M}'' - 2\epsilon l \frac{l(\tau_1 + 2\tau_2) - 3s}{l^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 10)$$

Z tych dwóch równań możemy wyznaczyć τ_1 i τ_2 , mianowicie otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= + \frac{1}{6\epsilon l} (2M' + M'' - \mathfrak{N}') + \frac{s}{l} \\ \tau_2 &= - \frac{1}{6\epsilon l} (M' + 2M'' - \mathfrak{N}'') + \frac{s}{l} \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots 11)$$

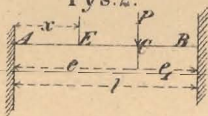
jeżeli dla skrócenia nazwiemy

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{N}' &= 2\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' \\ \mathfrak{N}'' &= \mathfrak{M}' + 2\mathfrak{M}'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 12)$$

§. 4. Belka poziomo utwierdzona.

Momenty M' i M'' dla belki poziomo utwierdzonej możemy dla danego obciążenia obliczyć według równania 9). Zbadamy tu kilka przypadków.

a) Obciążenie jednym ciężarem skupionym. Tu musimy rozdzielić całkę naznaczoną w równ. 9), bo $X=f(x)$ zmienia się, gdy E (rys. 2.) przekracza punkt C , a mianowicie



dla $0 < x < e$ jest $X = \frac{Pe_1 x}{l}$,

a dla $e < x < l$ jest $X = \frac{Pe_1 x}{l} - P(x - e)^*$,

a więc pierwszy wyraz całkować będziemy od 0 do l , a drugi od e do l .

Zatem będzie na podstawie równania 9)

$$\mathfrak{M}' l^2 = 2P \int_0^l \frac{e_1 x}{l} (3x - 2l) dx - 2P \int_e^l (x - e) (3x - 2l) dx.$$

Pierwszy wyraz jest między granicami 0 i l równy zeru, drugi zaś upraszcza się bardzo i otrzymujemy:

$$\mathfrak{M}' l^2 = -Pe(l^2 + e^2 - 2el) = -Pe e_1^2.$$

Podobnie otrzymamy $\mathfrak{M}'' l^2 = -Pe^2 e_1$, więc,

$$\mathfrak{N}' = -\frac{Pe e_1^2}{l^2} \} \dots \dots \dots 13)$$

*) p. Podr. Statyki budowli wyd. II. str. 20.

$$\mathfrak{M}'' = -\frac{Pe^2e_1}{l^2} \} \dots\dots\dots 13)$$

Teraz możemy obliczyć wyrazy $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ z równania 12), a mianowicie będzie

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}' &= -\frac{Pee_1(2l-e)}{l^2} = -\frac{Pe_1(l^2-e_1^2)}{l^2} \\ \mathfrak{M}'' &= -\frac{Pee_1(1+e)}{l^2} = -\frac{Pe(l^2-e^2)}{l^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 14)$$

Równanie 13) otrzymaliśmy w inny sposób w Podręczniku Statyki budowli*). — Tam też rozważaliśmy wypadek, gdy belka jest ciężarem q

b) całkowicie obciążona i otrzymaliśmy

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = -\frac{1}{2}ql^{2**}) \dots\dots\dots 15)$$

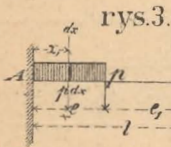
a na podstawie równania 12)

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = -\frac{1}{4}ql^2 \dots\dots\dots 16)$$

c) Częściowe obciążenie jednostajne.

a) Obciążenie z lewej strony.

W punkcie C działa na długości dx (rys. 3.) ciężar pdx . Możemy uważać go jako ciężar skupiony, otrzymamy więc moment, wywołany tym ciężarem, według 13)



$$d\mathfrak{M}' = -\frac{pdx x_1(l-x_1)^2}{l^2},$$

a zatem moment w A

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}' &= + \int_0^e d\mathfrak{M}' = -\frac{p}{l^2} \int_0^e x_1(l-x_1)^2 dx = \\ &= -\frac{p}{l^2} \int_0^e (x_1 l^2 - 2lx_1^2 + x_1^3) dx = -\frac{pe^2}{12l^2} (6l^2 - 8el + 3e^2), \text{ wręście} \\ \mathfrak{M}' &= -\frac{pe^2}{12l^2} (l^2 + 2e_1 l + 3e_1^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Podobnie otrzymamy } \mathfrak{M}'' &= \int_0^e d\mathfrak{M}'' = -\int_0^e x^2(l-x_1) dx = \\ &= -\frac{pe^3}{12l^2} (4l - 3e) = -\frac{pe^3}{12l^2} (l + 3e_1) \dots\dots\dots 17) \end{aligned}$$

*) Podręcznik Statyki budowli 2 wyd. str. 258. równ. 427.).

**) " " " " " 260. " 441.).

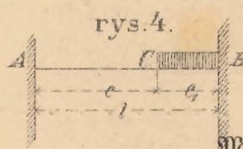
stąd

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}' &= -\frac{pe^2}{12l^2}(2l^2 + 4e_1l + 6e_1^2 + le + 3e_1e) = -\frac{pe^2}{4l^2}(1 + e_1)^2 \\ \mathfrak{M}'' &= -\frac{pe}{12l^2}(2le + 6ee_1 + l^2 + 2le + 3e_1^2) = -\frac{pe^2}{4l^2}(2l^2 - e^2) \end{aligned} \right\} \dots 18)$$

β) Obciążenie z prawej strony.

Dla obciążenia jednostajnego z prawej strony punktu *C* (rys. 4.) aż do prawej podpory otrzymamy momenty podporowe, wstawiając w równanie 17) *e*₁ zamiast *e* i na odwrót i *M*'' zamiast *M*'. A więc

rys. 4.



$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}' &= -\frac{pe_1^3}{12l^2}(l + 3e) \\ \mathfrak{M}'' &= -\frac{pe_1^2}{12l^2}(l^2 + 2el + 3e^2) \end{aligned} \right\} \dots 19)$$

Stąd otrzymamy dalej:

$$\mathfrak{M}' = -\frac{pe_1^2}{4l^2}(2l^2 - e_1^2), \quad \mathfrak{M}'' = -\frac{p}{4l^2}(l^2 - e^2)^2 \dots 20)$$

Winkler podaje dla ułatwienia następną tabliczkę dla *M*' i *M*'', obliczoną z równań 18) i 20) dla rozmaitych wartości *e*:

<i>e</i>	obciążenie z lewej strony (rys. 3)		obciążenie z prawej strony (rys. 4.)	
	<i>M</i> '	<i>M</i> ''	<i>M</i> '	<i>M</i> ''
0	—	—	—	—
0.1	0.00903	0.00497	0.24097	0.24503
0.2	0.03240	0.01960	0.21760	0.23040
0.3	0.06503	0.04298	0.18497	0.20703
0.4	0.10240	0.07360	0.14760	0.17640
0.5	0.14063	0.10938	0.10938	0.14063
0.6	0.17640	0.14760	0.07360	0.10240
0.7	0.20703	0.18497	0.04298	0.06503
0.8	0.23040	0.21760	0.01960	0.03240
0.9	0.24503	0.24097	0.00497	0.00903
1.0	0.25000	0.25000	0	0
<i>l</i>	<i>pl</i> ²	<i>pl</i> ²	<i>pl</i> ²	<i>pl</i> ²

Widzimy więc, że otrzymujemy $(n-1)$ równań, które wystarczą nam do wyznaczenia $(n-1)$ momentów podporowych. Równania te nazywamy równaniami momentów podporowych (*n. Normalmomentgleichungen*).

Jeżeli belka na pierwszej podporze jest poziomo utwierdzona, to M_0 nie jest $=0$. Aby M_0 wyznaczyć, pomyślny sobie, że przed l_1 jest jeszcze jedno przęsło o długości $l_0=0$, wtedy dwa punkty podparcia tego przęsła wyznaczają dwa punkty linii ugięcia, a zatem styczną poziomą. Widzimy więc, że potrzebujemy tylko zastosować równ. 21) także do przęsła zerowego, czyli wstawić wartość $m=0$.

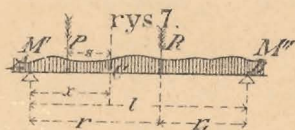
$$\text{Otrzymamy więc } 2M_0l_1 + M_1l_1 = \mathfrak{N}_1'l_1, \\ \text{czyli} \quad 2M_0 + M_1 = \mathfrak{N}_1 \quad \dots \dots \dots 23)$$

Otrzymujemy zatem jedno równanie więcej, wystarczające do wyznaczenia jeszcze jednej niewiadomej M_0 .

$$\text{Tak samo, jeżeli belka jest poziomo utwierdzona na } n \text{ tej} \\ \text{podporze, otrzymamy: } M_{n-1}l_n + 2M_nl_n = \mathfrak{N}_n''l_n, \\ \text{czyli} \quad M_{n-1} + 2M_n = \mathfrak{N}_n'' \quad \dots \dots \dots 24)$$

§. 6. Momenty, siły, poprzeczne i oddziaływania.

Niech przęsło AB (rys. 7.) belki ciągłej będzie dowolnie obciążone, wypadkowa wszystkich ciężarów na długości AB działających niech będzie R , a r_1 jej odstęp od B . — Nazwijmy dalej momenty podporowe w A i B M' i M'' , siłę poprzeczną Q' przy podporze A , Q'' przy podporze B , (obiedwie wewnątrz przęsła), to otrzymamy z równ. 5)



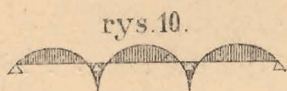
$$M'' = M' + Q'l - Rr_1, \text{ a}$$

$$\left. \begin{aligned} Q'' = Q' - R, \text{ stąd wynika } Q' &= \frac{M'' - M'}{l} + \frac{Rr_1}{l} \\ Q'' &= \frac{M'' - M'}{l} - \frac{Rr}{l} \end{aligned} \right\} \dots \dots 25)$$

Chcąc wyznaczyć siłę poprzeczną Q w dowolnym punkcie C , nazwijmy P wypadkową ciężarów, działających na długości $AC=x$, a s jej odstęp od C , to $Q = Q' - P \dots \dots \dots 26)$

$$M = M' + Q'x - Ps \dots \dots \dots 27)$$

To równanie przedstawia parabolę o osi pionowej. — Jeżeli ciężar jednostkowy jest ten sam, to parabole mają ten sam parametr (rys. 10.). Chcąc znaleźć naj-



żeśmy napisać

$$x_1 = \frac{Q'}{g} = \frac{1}{2}l - \frac{(M' - M'')}{gl} \quad \dots \quad 33)$$

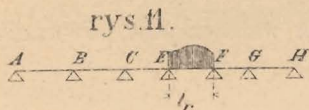
Tę wartość wstawmy w równanie 32), a otrzymamy

$$\text{najw } M = \frac{1}{8}gl^2 + \frac{1}{2}(M' + M'') + \frac{M' - M''}{2gl^2} \quad \dots \quad 34)$$

Jeżeli $M' = M''$, to $x_1 = \frac{1}{2}l$, a zatem *najw* M jest w środku przęsła, w innym razie wychyla się trochę ze środka.

§. 8. Momenty podporowe w przęsłach nieobciążonych.

Niechaj *rte* przęsło belki ciągłej będzie obciążone (rys. 11.), a inne przęsła nieobciążone, wtedy otrzymamy następujące równania momentów podporowych



$$\left. \begin{aligned} 2M_1(l_1 + l_2) + M_2l_2 &= 0 \\ M_1l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3l_3 &= 0 \\ \dots \dots \dots \\ M_{r-2}l_{r-1} + M_{r-1}(l_{r-1} + l_r) + M_rl_r &= \mathfrak{N}_r'l_r \\ M_{r-1}l_r + 2M_r(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}l_{r+1} &= \mathfrak{N}_r''l_r \\ \dots \dots \dots \\ M_{n-2}l_{n-1} + 2M_{n-1}(l_{n-1} + l_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 35)$$

Z pierwszego równania mamy:

$$M_2 = -\frac{2M_1}{l_2}(l_1 + l_2) = -M_1\left(2 + \frac{2l_1}{l_2}\right),$$

a więc M_2 i M_1 mają przeciwne znaki, a bez względu na znak $M_2 > 2M_1$. Dalej otrzymamy

$$M_2 = -M_2\left(2 + \frac{2l_2}{l_3}\right) - M_1\frac{l_3}{l_3} = -M_2\left[2 + \frac{l_2}{l_3}\left(2 + \frac{M_1}{M_2}\right)\right], \frac{M_1}{M_3} \text{ jest ujem-}$$

nem i $< \frac{1}{2}$, więc $\left(2 + \frac{M_1}{M_3}\right) > \frac{3}{2}$, a zatem bez względu na znak

$M_3 > M_2 \left(2 + \frac{3}{2} \frac{l_2}{l_3} \right)$; M_3 znów ma znak przeciwny, niż M_2 . Ogólnie możemy napisać $M_{m+1} > M_m \left(2 + \frac{3}{2} \frac{l_m}{l_{m+1}} \right)$ 36)

A zatem momenty podporowe przęseł nieobciążonych są naprzemian dodatnie i ujemne i każdy następny jest więcej, niż 2 razy, większy od poprzedniego.

Nazwijmy $M_2 = -\mu_2 M_1$ a $M_3 = -\mu_3 M_2$, to wtedy $\mu_2 = \frac{2(l_1 + l_2)}{l_2}$, zaś $\mu_3 = \frac{2(l_2 + l_3)}{l_3} - \frac{l_2}{l_3 \mu_2}$. Jeżeli będziemy liczyli od drugiego końca belki H , to otrzymamy podobnie

$$\nu_{n-1} = \frac{2(n + l_{n-1})}{l_{n-1}}, \quad \nu_{n-2} = \frac{2(l_{n-1} + l_{n-2})}{l_{n-2}} - \frac{l_{n-1}}{\nu_{n-1}} \quad . . . \quad 37)$$

Ogólnie możemy napisać na podstawie równania 36)

$$\mu_m > 2 + \frac{3 l_{m-1}}{2 l_m} \quad \quad 38)$$

Spółczynniki μ i ν zależne są tylko od rozpiętości przęseł i dla danej belki dadzą się łatwo obliczyć.

Dla używanych stosunków $\frac{l_m}{l_{m+1}} = 0.9$ do 1.3 waha się μ i ν między granicami 3.5 a 4.2 .

§. 9. Siły poprzeczne, oddziaływania i momenty w przęsłach nieobciążonych.

Jeżeli przęsło jest nieobciążone, to $R=0$, więc dla m go przęsła otrzymamy z równ. 25)

$$Q_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{l_m} \quad \quad 39)$$

Ponieważ tu M_m i M_{m-1} mają znaki przeciwne, więc Q_m będzie miało ten sam znak, co M_m , a więc naprzemian będzie raz dodatniem, drugi raz ujemnem. W $(m+1)$ przęśle będzie

$$Q_{m+1} = \frac{M_{m+1} - M_m}{l_{m+1}}.$$

Podzielimy to równanie przez równ. 39), otrzymamy

$$\frac{Q_{m+1}}{Q_m} = \frac{M_{m+1} - M_m}{M_m - M_{m-1}} \cdot \frac{l_m}{l_{m+1}} = \frac{1 + \mu_{m+1}}{-\frac{1}{\mu_m} - 1} \cdot \frac{l_m}{l_{m+1}} = \frac{-\mu_m(1 + \mu_{m+1})}{\mu_m + 1} \cdot \frac{l_m}{l_{m+1}} \quad . \quad 40)$$

μ_m i μ_{m+1} są dodatnie, więc cały wyraz jest ujemnym. Ponieważ $1 + \mu_{m+1} > 3$, a $1 + \frac{1}{\mu} < \frac{3}{2}$, więc

$$-\frac{Q_{m+1}}{Q_m} > 2 \frac{l_m}{l_{m+1}} \dots \dots \dots 41)$$

Z tego wynika, że siły poprzeczne są naprzemian dodatnie i ujemne i wzrastają ku przęsłu obciążonemu, jeżeli, jak zwykle, $2l_m > l_{m+1}$.

Według równ. 28) jest $O_m = -Q_m'' + Q_{m+1}'$; ponieważ Q mają znaki przeciwne, więc z tego wynika, że O_m będzie miało ten sam znak, co Q_{m+1}' , a więc także będzie naprzemian dodatnie i ujemne. — Podobnie możemy napisać

$$O_{m+1} = -Q_{m+1}'' + Q_{m+2}'.$$

Podzieliwszy to drugie równanie przez pierwsze, otrzy-

$$\text{mamy } \frac{O_{m+1}}{O_m} = \frac{-Q_{m+1}'' + Q_{m+2}'}{-Q_m'' + Q_{m+1}'} = \frac{-\frac{Q_{m+2}}{Q_{m+1}} + 1}{\frac{Q_m}{Q_{m+1}} - 1}, \text{ przyczem opuścili-}$$

śmy znaczki, bo w przęsle nieobciążonem $Q' = Q'' = Q$.

Licznik jest tu dodatni i większy, niż $1 + 2 \frac{l_{m+1}}{l_{m+2}}$, zaś mianownik ujemny i mniejszy, niż $1 + \frac{1}{2} \frac{l_{m+1}}{l_m}$, więc

$$-\frac{O_{m+1}}{O_m} > \frac{1 + 2 \frac{l_{m+1}}{l_{m+2}}}{1 + \frac{1}{2} \frac{l_{m+1}}{l_m}} \dots \dots \dots 42)$$

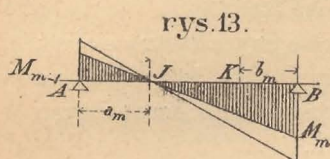
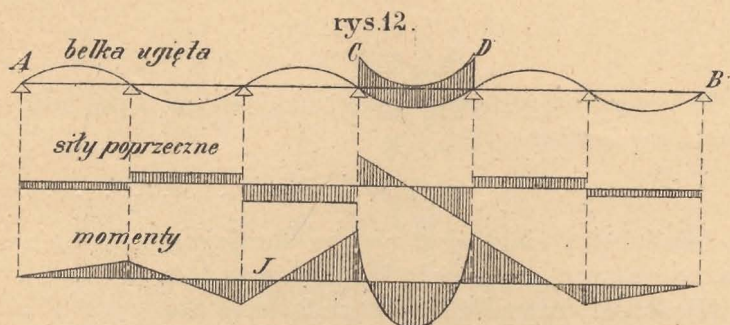
Z równania 42) widzimy, że oddziaływania są naprzemian dodatnie i ujemne i wzrastają ku przęsłu obciążonemu (jeżeli $4l_m$ nie jest $< l_{m+2}$). Momenty obliczymy z równania 27), mianowicie będzie $M = M_{m-1} + Q_m'x$.

Wstawmy wartość za Q_m , to otrzymamy

$$M = M_{m+1} + \frac{M_m - M_{m-1}}{l_m} x, \text{ czyli}$$

$$M = M_{m+1} \left(1 - \frac{x}{l_m} \right) + \frac{M_m x}{l_m} \dots \dots \dots 43)$$

Ze względu na x jest to równanie 1go stopnia, linia momentów będzie więc prostą. Wyniki te przedstawiliśmy na rysunku 12.



Jeżeli w każdym przęśle są momenty dodatnie i ujemne, to musi być w każdym przęśle punkt, w którym $M=0$. Nazwijmy a_m odnośnie x (rys. 13.), to z równania 43) otrzymamy

$$0 = M_{m+1} \left(1 - \frac{a_m}{l_m} \right) + \frac{M_m a_m}{l_m}, \text{ a stąd } a_m = \frac{M_{m-1} l_m}{M_{m-1} - M_m}, \text{ czyli } a_m = \frac{l_m}{1 - \frac{M_m}{M_{m-1}}}. \text{ A gdy } \frac{M_m}{M_{m-1}} = -\mu_m, \text{ będzie } a_m = \frac{l_m}{1 + \mu_m} \dots 44)$$

Stąd widzimy, że ponieważ μ_m zależy tylko od rozpiętości, a nie zależy od obciążenia, a_m pozostaje niezmiennem, którekolwiek przęsło z prawej strony danego przęsła dowolnie jest obciążonem. Zawsze wtedy linia momentów przechodzi przez I , więc I jest punktem stałym (n. *Fixpunkt*, f. *foyer*, *point fixe*, a. *inflexion point*). Gdy jest obciążone przęsło z lewej strony danego przęsła, wtedy otrzymujemy punkt stały K , możemy wtedy podobnie napisać

$$b_m = \frac{l_m}{1 + \nu_m} \dots 45)$$

Moment w lewym punkcie stałym jest niezależnym od obciążenia z prawej strony, zaś moment w prawym punkcie stałym jest niezależny od obciążenia z lewej strony.

Jeżeli belka jest na zerowej podporze poziomo utwierdzona, wtedy $l_0=0$,

$$\mu_1 = \frac{2l_1}{l_1} = 2 \text{ więc}$$

$$a_1 = \frac{l_1}{1+2} = \frac{1}{3} l_1 \quad \dots \quad 46)$$

Tak samo otrzymamy, jeśli belka jest na n tej podporze poziomo utwierdzona,

$$b_n = \frac{l_n}{3} \quad \dots \quad 47)$$

Jeżeli belka ciągle jest na obu skrajnych podporach podparta, to na tych podporach $M=0$, więc $a_1=b_n=0 \quad \dots \quad 48)$

Według równania 38) jest $\mu > 2$, więc

$$a_m < \frac{l_m}{1+2}, \text{ stąd } a_m < \frac{l_m}{3}, b_m < \frac{l_m}{3} \quad \dots \quad 49)$$

a zatem punkty stałe leżą w skrajnych trzecich częściach przęsła. W przęsłach skrajnych leżą one na skrajnych podporach, a w razie utwierdzenia poziomego tych przęseł w jednej trzeciej długości przęsła.

§. 10. Momenty podporowe przęsła obciążonego.

Dla przęsła obciążonego mamy według równania 35)

$$\begin{aligned} M_{r-2} l_{r-1} + 2 M_{r-1} (l_{r-1} + l_r) + M_r l_r &= \mathfrak{N}_r' l_r \\ M_{r-1} l_r + 2 M_r (l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} l_{r+1} &= \mathfrak{N}_r'' l_r \quad \dots \quad 50) \end{aligned}$$

Przypuśćmy na chwilę, że nie r -te przęsło jest obciążone, lecz inne na prawo leżące, to byłoby

$$M_{r-2} l_{r-1} + 2 M_{r-1} (l_{r-1} + l_r) + M_r l_r = 0.$$

A ponieważ $M_r = -\mu_r M_{r-1}$, więc

$$M_{r-2} l_{r-1} + 2 M_{r-1} (l_{r-1} + l_r) - \mu_r M_{r-1} l_r = 0 \quad \dots \quad 51)$$

To równanie przedstawia związek między M_{r-1} i M_{r-2} , który, jak wiemy, jest niezależny od obciążenia r -tego przęsła, więc także prawdziwy, gdy r -te przęsło jest dowolnie obciążone.

Podobnie otrzymamy

$$M_{r+1} l_{r+1} + 2 M_r (l_r + l_{r+1}) - \nu_r M_r l_r = 0 \quad \dots \quad 52)$$

Te dwa równania dają w połączeniu z równaniami 50) następujące:

$$\left. \begin{aligned} \mu_r M_{r-1} + M_r &= \mathfrak{N}_r' \\ \nu_r M_r + M_{r-1} &= \mathfrak{N}_r'' \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 53)$$

Z tych dwu równań otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} M_{r-1} &= \frac{\nu_r \mathfrak{N}_r' - \mathfrak{N}_r''}{\mu_r \nu_r - 1} \\ M_r &= \frac{\mu_r \mathfrak{N}_r'' - \mathfrak{N}_r'}{\mu_r \nu_r - 1} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 54)$$

Wiemy, że współczynniki μ i ν są większe, niż 2, więc mianowniki równania 54) są dodatnie.

Według równania 12) jest $\mathfrak{M}_r' = 2\mathfrak{M}_r' + \mathfrak{M}_r''$,

$$\mathfrak{M}_r'' = 2\mathfrak{M}_r'' + \mathfrak{M}_r',$$

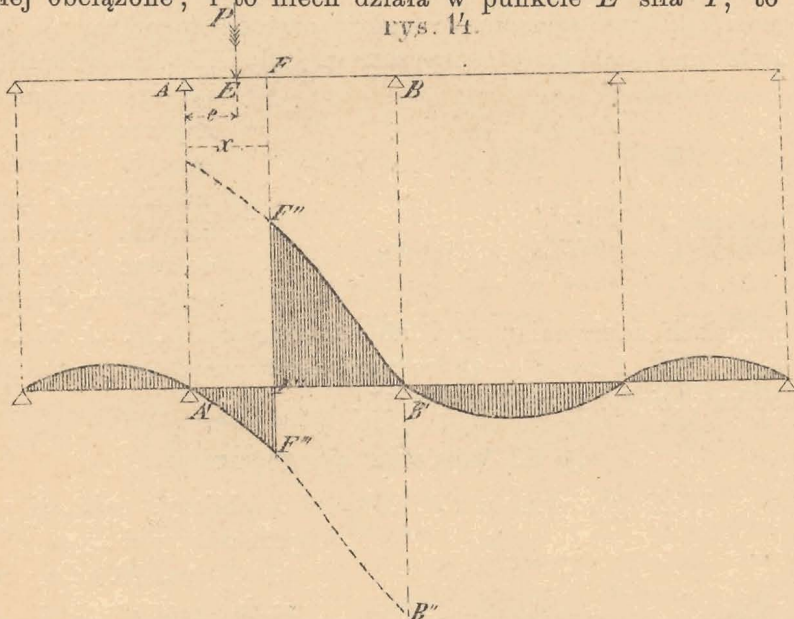
$$\begin{aligned} \text{więc} \quad \nu_r \mathfrak{M}_r' - \mathfrak{M}_r'' &= 2\nu_r \mathfrak{M}_r' + \nu_r \mathfrak{M}_r'' - 2\mathfrak{M}_r'' - \mathfrak{M}_r' = \\ &= \mathfrak{M}_r' (2\nu_r - 1) + \mathfrak{M}_r'' (\nu_r - 2). \end{aligned}$$

Ponieważ momenty $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ są zawsze ujemne (według rów. 13), a $2\nu_r - 1$ i $\nu_r - 2$ zawsze dodatnie, więc licznik jest ujemny, a mianownik dodatni; a zatem M_{r-1} jest ujemnem. To samo możemy udowodnić dla M_r . A zatem momenty podporowe przęsła obciążonego są zawsze ujemne.

§. 11. Obciążenie najniekorzystniejsze dla sił poprzecznych.

a) Obciążenie odnośnego przęsła.

Niechaj będzie tylko jedno przęsło AB (rys. 14.) belki ciąglej obciążonej, i to niech działa w punkcie E siła P , to



siła poprzeczna Q w punkcie F będzie według 25) i 26), gdy $x > e > 0$,

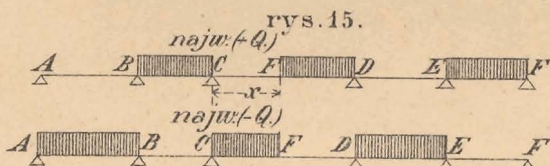


$$Q = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{P(l-e)}{l} - P, \quad \left. \begin{array}{l} \text{a gdy } l > e > x \\ Q = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{P(l-e)}{l} \end{array} \right\} \dots \dots \dots 55)$$

Z równań powyższych widzimy, że linia wpływowa będzie funkcją e wyższego stopnia, niż pierwszego (bo M' i M'' są $f(e)$), a więc będzie to linia krzywa. Wiemy jednak, że dla $e=0$ i $e=l$ jest $Q=0$ i że różnica rzędnych w F wynosi $P = F''F'''$. Linie $A'F'''$ i $F''B'$ będą się mało co różniły od prostych, bo wyraz pierwszy jest stosunkowo mały. Z kształtu linii wpływowej widzimy, że dla *najw* Q musi być obciążona długość FB , a dla *najmn* Q długość AF , a więc tak samo, jak dla belki jednoprzęsłowej. Tak samo musi też dla ciężarów skupionych jeden ciężar, zwykle pierwszy, stać w F , największe i najgęstsze ciężary blisko F .

b) Obciążenie reszty przęsła.

Przypuśćmy teraz, że odnośne przęsło nie jest obciążone, wtedy $Q=Q'$. Z rys. 12. widzimy, że, aby to Q było dodatniem, musi być lewe sąsiednie przęsło obciążone, a prawe nieobciążone, inne zaś przęsła naprzemian, gdyżśmy udowodnili, że

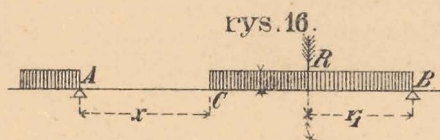


siły poprzeczne są naprzemian dodatnie i ujemne w przęsłach nieobciążonych. Stosownie do tego będzie linia wpływowa w innych

przęsłach naprzemian pod lub nad osią (rys. 14). A więc dla *najw* $(+Q)$ i *najmn* $(-Q)$ w punkcie F przęsła CD musi być belka obciążona według rys. 15).

§. 12. Największe siły poprzeczne.

Według równania 25) i 26) można obliczyć *najw.* siły po-



przezne w danym punkcie C (rys. 16.) dla obciążenia jednostajnego ciągłego. Wiemy, że przytem musi być długość BC ob-

ciążona.

Podstawmy w tych równaniach

$$R=p(l-x), \quad r_1=\frac{1}{2}(l-x), \quad P=0,$$

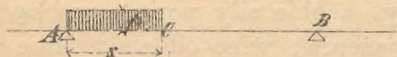
to

$$\text{najw } (+Q) = \frac{M''-M'}{1} + \frac{1}{2} \frac{p(l-x)^2}{1} \dots\dots\dots 56)$$

Dla najmniejszości sił poprzecznych musi być obciążona długość AC (rys. 17), więc

$$R=px, \quad r_1=l-\frac{x}{2}, \quad P=px.$$

rys. 17.



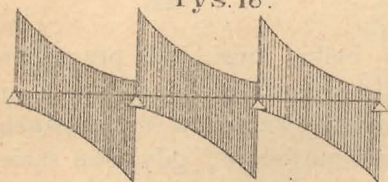
Wstawmy te wartości w równania 25) i 26), a otrzymamy

$$\text{najw } (-Q) = \frac{M''-M'}{1} - \frac{1}{2} \frac{px^2}{1} \dots\dots\dots 57)$$

Według rys. 15 widzimy, że obciążenia, wywołujące *najw* $(+Q)$ i *najw* (Q) , dopełniają się do obciążenia zupełnego, zatem

$$\text{najw } (-Q) = Q - \text{najw } (+Q) \dots\dots\dots 58)$$

rys. 18.



Linie największych i najmniejszych sił poprzecznych, będą prawie paraboliczne, wyraz pierwszy bowiem jest wprawdzie funkcją x , ale jest zazwyczaj bardzo małym (rys. 18).

§. 13. Bezwzględnie największe i najmniejsze siły poprzeczne.

Z rys. 18. i z poprzednich równań widzimy, że największe siły poprzeczne są na podporach i to na lewych każdego przęsła dodatnie, na prawych ujemne. W rys. 19. oznaczyliśmy obciążenie dla *najw* $(+Q)$ w C . Bezwzględnie największe $(+Q)$ jest dla $x=0$, więc oba przęsła, między którymi leży

rys. 19.



punkt A , muszą być wtedy obciążone. W rys. 20. oznaczyliśmy znow obciążenie dla

rys. 20.



najmn Q w C . Bezwzględnie największe $(-Q)$ jest dla $x=l$, więc oba przęsła, między którymi leży podpora B , muszą

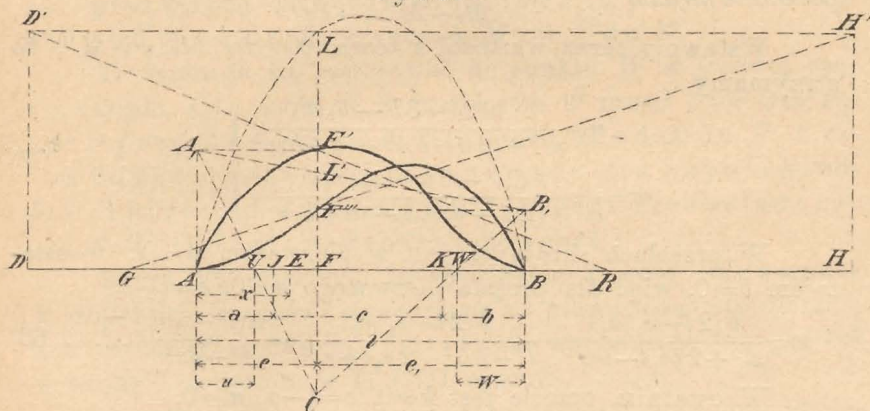
Podstawmy w tych równaniach wartości z równań 44) i 45) $\mu = \frac{l}{a} - 1$ i $\nu = \frac{l}{b} - 1$, z rys. 21. $c = l - a - b$ i wartości za $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}''$ z równ. 12), to otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} M_{r-1} &= -\frac{Pae_1}{cl^2}(2l-3b-e) \\ M_r &= -\frac{Pbe_1}{cl^2}(l-3a+e) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 60)$$

Na podstawie równ. 60) dadzą się linie wpływowe dla momentów podporowych M_{r-1} i M_r według Šolína w następny sposób wykreślić (rys. 22.). Zróbmy $BR = l - 3b = AB - 3BK$, $RD = \frac{c}{a} = AB \frac{IK}{AI}$, FL momentowi dla belki w dwu punktach podpartej $= \frac{Pe_1}{l}$, $DD' = FL$ i wykreślmy $D'R$, to

$$FF' = \frac{DD' \cdot RF}{RD} = \frac{Pe_1}{l} \cdot \frac{(l-3b+e_1)}{\frac{c}{a}} = \frac{Pae_1e}{cl^2}(2l-3b-e) = M_{r-1}.$$

rys.22.



Podobnie otrzymamy $FF'' = M_r$. W ten sam sposób możemy otrzymać momenty M_{r-1} i M_r dla innego położenia siły P , a połączywszy końce rzędnych, przedstawiających momenty, otrzymamy linie wpływowe $AF'B$ i $AF''B$. Zróbmy teraz $AA_1 = FF'$, i $BB_1 = FF''$, połączmy A_1 z B_1 i zróbmy $L'C = FL$, to A_1CB_1 będzie przedstawiać linię momentów w przęśle AB , jeżeli siła P działa w F . Ponieważ L' leży zawsze niżej L ,

więc C będzie zawsze poniżej AB , a zatem moment w punkcie zaczepienia siły jest zawsze dodatni. Z rysunku widzimy, że jeżeli siła P leży w F , w punktach U i W jest moment równy zeru. Wyznamy położenie tych punktów obojętnych.

Z rysunku wynika, że $AA_1U \sim UFC$, więc $u:(e-u) = (-M_{r-1}):M_1$, gdy $M_1 = FC$, zatem

$$u:e = (-M_{r-1}):(M_1 - M_{r-1}), \text{ więc}$$

$$u = \frac{M_{r-1}e}{M_{r-1} - M_1}.$$

Z rysunku dalej wynika:

$$M_1 = CL' - FL' = \frac{Pe e_1}{l} + \left\{ M_r + (M_{r-1} - M_r) \frac{e_1}{l} \right\}.$$

W równaniu tem dajemy znak $(+)$, bo M_r i M_{r-1} są ujemne.

Wstawiając wartość za M_1 w poprzednie równanie, otrzymamy po skróceniu

$$u = \frac{M_{r-1}l}{M_{r-1} - M_r - Pe_1} \left. \vphantom{\frac{M_{r-1}l}{M_{r-1} - M_r - Pe_1}} \right\} \dots \dots \dots 61)$$

podobnie będzie

$$w = \frac{M_r l}{M_r - M_{r-1} - Pe}$$

Wstawmy teraz wartości z równ. 60) za M_{r-1} i M_r , to otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{a(2l - 3b - e)el}{cl^2 + (2a - b)el - (a + b)e^2} \\ w &= \frac{b(2l - 3a - e_1)e_1l}{cl^2 + (2b - a)e_1l - (a + b)e_1^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 62)$$

W przęsłach skrajnych jest w pierwszym $a=0$, w ostatnim $b=0$, więc dla przęsła pierwszego $u=0$, $c=l-b$,

$$w = \frac{b(2l - e_1)e_1l}{cl^2 + 2be_1l - be_1^2} = \frac{b(2l - e_1)e_1l}{l^3 - b(l^2 - 2e_1l + e_1^2)} = \frac{b(l^2 - e^2)l}{l^3 - bc^2} \dots \dots 63)$$

W ostatnim przęsle jest $b=0$, $c=l-a$, $w=0$,

$$u = \frac{a(2l - e)el}{(l - a)l^2 + 2ael - ae^2} = \frac{a(l^2 - e_1^2)l}{l^3 - ae_1^2} \dots \dots 64)$$

Z rysunku 22. widzimy więc, że, jeżeli siła P stoi w F , momenty na długościach u i w są ujemne, zaś na długości UW dodatnie.

Zbadajmy najprzód, jak wielkie może być u i w .

Z równ. 62) wynika, że dla $e=0$ jest $u=0$,

zaś dla $e=l$ jest $u=a$.

Podobnie dla $e_1=0$ jest $w=0$,
dla $e_1=l$ jest $w=b$.

A zatem widzimy, że gdy u może być najwięcej $=a$, a najw $w=b$, a zatem na długości IK między punktami stałymi moment jest zawsze dodatni, zaś na długościach AI i KB może być moment ujemnym lub dodatnim. Rozróżniamy z tego powodu trzy części w każdym przęśle, część pierwszą AI , część drugą, średnią IK i trzecią KB . Rozumie się, że w przęśle pierwszym część pierwsza $AI=0$, a w przęśle ostatnim $KB=0$.

A zatem możemy powiedzieć: W części średniej przęsła belki ciągłej każdy ciężar, gdziekolwiek na tem przęśle działający, sprawia moment dodatni, a więc dla największego M musi być to całe przęsło obciążone, dla najmniejszości wcale nieobciążone.

Dla punktu U , leżącego w części pierwszej, jest moment równy zeru, jeżeli P stoi w punkcie F . Jeżeli siła P posunie się na lewo, moment w punkcie U jest dodatnim, jeżeli na prawo, ujemnym. A zatem dla najw M w punkcie U w części pierwszej przęsła musi być to przęsło obciążone od A aż do F , dla najmn M od F do B .

To samo da się zastosować do punktu W w trzeciej części przęsła. Dla najw M w punkcie W musi być obciążone przęsło od F do B , dla najmn M od A do F . A zatem badany przekrój jest zawsze dla największości obciążony, a dla najmniejszości nieobciążony.

b) Obciążenie reszty przęseł.

Z rys. 12. widzimy, że obciążenie przęsła CD sprawia w części I i II przęsła sąsiedniego na prawo momenty ujemne, a w części III dodatnie, dla przęsła sąsiedniego lewego zaś w części I dodatnie, w II i III ujemne.

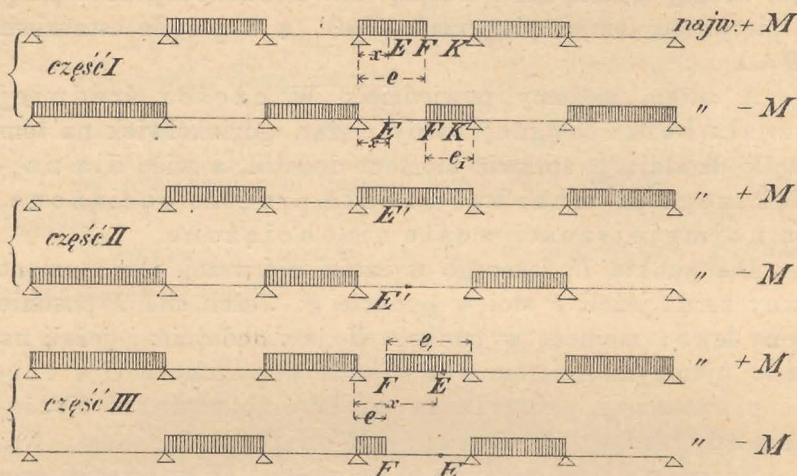
A zatem dla części I dla największości musi być sąsiednie prawe przęsło obciążone, sąsiednie lewe nieobciążone, a reszta przęseł naprzemian (rys. 23.). Dla części średniej muszą być sąsiednie oba przęsła nieobciążone, a inne naprzemian, dla części III zaś musi być sąsiednie prawe przęsło nieobciążone, a lewe obciążone, inne zaś naprzemian.

Ogólnie więc możemy powiedzieć dla wszystkich trzech części: Do części obciążonej danego przęsła przy-

tyka przeszło nieobciążone, do części nieobciążonej obciążone przeszło. Inne przęsła mają być naprzemian obciążone.

W rys. 23. wykreśliliśmy schemat najniekorzystniejszych obciążeń ciężarem jednostajnie rozłożonym. Jeżeli mamy belkę

rys. 23.



obciążać układem ciężarów skupionych, to ponieważ tu otrzymamy linie wpływowe krzywe, nie uzyskujemy tak prostych prawideł dla najniekorzystniejszego położenia, jak dla belki jednoprzęsłowej. Linia wpływowa będzie miała jednak w danym przęśle także kształt trójkąta, lecz o bokach krzywych, z wierzchołkiem w punkcie badanym tak, że w przybliżeniu możemy zastosować dla najniekorzystniejszego obciążenia prawidła dla momentów belki w dwu punktach podpartej.

Co do obciążenia reszty przęseł kształt linii wpływowych, które otrzymamy później wykreślnie, da nam pewne wskazówki co do ustawienia ciężarów skupionych w rozmaitych przęsłach. Zwrócić jednak musimy uwagę, że obciążenie tego rodzaju, jak na rys. 23., jest w praktyce nieprawdopodobnem, a przy mostach kolejowych wprost niemożliwem. Przy mostach drogowych, gdzie obciążenie takie jest możliwe, przypuszczamy przy obliczeniu rzeczywiście ciężar ruchomy podzie-

lony na kilka części, przy kolejowych możnaby albo przypuszczając jeden pociąg przyjąć na długości, któraby nie powinna być obciążoną, wozy próżne ważące 9 t dla kolei normalnotorowych i wąskotorowych z jazdą na podwoziach, zaś 6 ton dla kolei wąskotorowych bez jazdy na podwoziach, a zresztą parowozy i wozy ładowne, albo też przyjmujemy tylko dane przeszło obciążone. Przyjmowanie niemożliwych obciążeń dla obliczenia belki wydaje nam się nieusprawiedliwionem.

Rozporządzenie austr. minist. kolejow. z d. 1. września 1904. §. 7. ust. 18. Przy dźwigarach, spoczywających na więcej, niż dwu podporach, tudzież przy dźwigarach łukowych należy przyjąć kilka pociągów w najniekorzystniejszym położeniu celem obliczenia największych możliwych sił zewnętrznych.

§. 15. Wyznaczenie największych momentów dla obciążenia ciągłego.

a) Średnia część przeszła. Dla największych momentów musi być dane przeszło całe obciążone, dla najmniejszości zaś całe nieobciążone, reszta przeszła naprzemian (rys. 23.). Dla *najw* ($-M$) otrzymamy z równ. 25) i 27), gdy $P=R=0$,

$$\text{najw } (-M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} \dots \dots \dots 65)$$

Jestto równanie linii prostej.

Jeżeli $M' = M''$, to *najw* ($-M$) = M' ; $\dots \dots \dots 66)$

jestto równanie linii poziomej.

Podobnie otrzymamy z równ. 25) i 27)

$$\text{najw } (+M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{1}{2} p x (l - x) \dots \dots 67)$$

b) Pierwsza część przeszła. Dla *najw* ($-M$) musi być przeszło dane AB obciążone od F do B (rys. 22.). Według równ. 25) otrzymamy więc $Q' = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{pe_1^2}{2l}$.

Wedle równ. 27) $M = M' + Q'x$, więc

$$\text{najw } (-M) = M' - \frac{M' - M''}{l} x + \frac{pe_1^2 x}{2l} \dots \dots \dots 68)$$

Dla *najw* ($+M$) musi być przeszło AB obciążone od A do F . Tu jest $Q' = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{pe(2l - e)}{2l}$, a $M = M' + Q'x - \frac{1}{2} px^2$, więc

$$\text{najw } (+M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{px}{2l} (2el - e^2 - lx) \dots \dots 69)$$

c) Trzecia część belki. Podobnie otrzymamy dla trzeciej części

$$\text{najw } (-M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{pe^2(1-x)}{2l} \dots 70)$$

$$\text{najw } (+M) = M' - (M' - M'') \frac{x}{l} + \frac{p(1-x)(lx - e^3)}{2l} \dots 71)$$

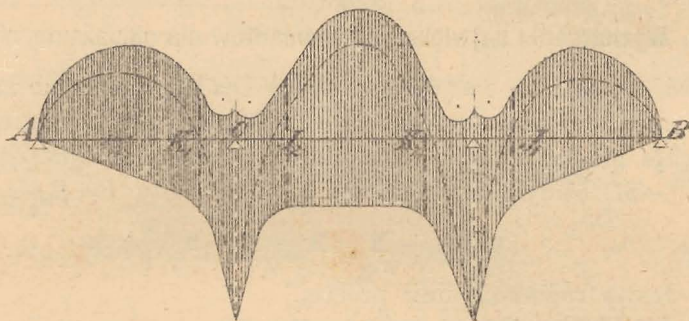
We wszystkich częściach przeszła jest

$$\text{najw } (+M) + \text{najw } (-M) = M_z, \dots 72)$$

jeżeli M_z oznacza moment dla obciążenia zupełnego.

Jeżeli wykreślnie przedstawimy linie największych i najmniejszych momentów, to otrzymamy rysunek 24. Dla ujem-

rys. 24.



nych największych momentów otrzymujemy w średniej części każdego przeszła linie proste, dla dodatnich parabole.

§. 16. Wielkość ciężaru jednostajnego ciągłego.

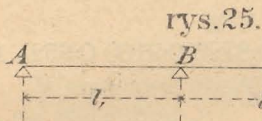
W poprzednich paragrafach przypuszczaliśmy, że ciężar jednostkowy p jest w danym przeszle jednostajny. Dla mostów drogowych jest ciężar ruchomy p dla wszystkich przeszeli jednostajny, jeśli liczymy na podstawie obciążenia tłumem ludzi. Jeżeli rozpiętości są nierówne, może się wszelako ciężar własny g poszczególnych przeszeli różnić. Przy mostach kolejowych jednak, jeżeli rozpiętość przeszeli jest nierówna, przyjąć należy dla rozmaitych przeszeli różne wartości nie tylko dla ciężaru własnego g , ale też i dla ciężaru zastępczego p , jeżeli wogóle używamy ciężaru zastępczego. Dla ciężaru zastępczego dla sił poprzecznych należy przyjmować zmienne p nie według długości przeszeli, lecz według długości obciążonej.

Rozporządzenie austriackie z r. 1904 nie zna ciężarów zastępczych, liczyć więc należy największe siły zewnętrzne, obciążając belki ciągle kilku pociągami normalnymi.

II. Belka ciągła dwu- i trzyprzęsłowa.

§. 17. Momenty podporowe belki dwuprzęsłowej.

Jeżeli rozpiętości pierwszego i drugiego przęsła belki dwuprzęsłowej nazwiemy l_1 i l_2 (rys. 25.), to otrzymamy według równ. 22.), zważywszy, że



$$M_0 = 0 \text{ i } M_2 = 0,$$

$$2 M_1 (l_1 + l_2) = \mathfrak{N}_1'' l_1 + \mathfrak{N}_2' l_2,$$

więc moment podporowy na środkowej podporze B

$$M_1 = \frac{\mathfrak{N}_1'' l_1 + \mathfrak{N}_2' l_2}{2 (l_1 + l_2)} \dots \dots \dots 73)$$

Jeżeli oba przęsła są równe, to $l_1 = l_2 = l$, więc

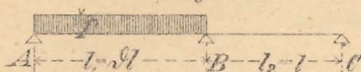
$$M_1 = \frac{\mathfrak{N}_1'' + \mathfrak{N}_2'}{4} \dots \dots \dots 74)$$

Przypuśćmy, że p oznacza ciężar jednostkowy ruchomy.

Jeżeli pierwsze przęsło jest obciążone (rys. 26.), to

$$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{1}{4} p l_1^2, \quad \mathfrak{N}_2' = 0.$$

rys. 26.



Wstawiawszy to w równ. 73), otrzymamy

$$M_1 = -\frac{p l_1^3}{8 (l_1 + l_2)} \dots \dots \dots 75)$$

Założmy, że $l_1 = 9l$, $l_2 = l$, to

$$M_1 = -\frac{9}{1+9} \frac{p l_1^2}{8} = -\frac{9^3}{1+9} \frac{p l^2}{8} \dots \dots \dots 76)$$

rys. 27.



Jeżeli drugie przęsło jest obciążone (rys. 27.), to otrzymamy odnośne wzory, jeżeli zamienimy l_1 na l_2 i l_2 na l_1 , zatem

$$M_1 = -\frac{p l_2^3}{8 (l_1 + l_2)} = -\frac{1}{1+9} \frac{p l^2}{8} \dots \dots \dots 77)$$

Jeżeli teraz oba przęsła są obciążone, to otrzymamy

$$M_1 = -\frac{p l_1^3 + p l_2^3}{8 (l_1 + l_2)} = -\frac{(1+9^3) p l^2}{8 (1+9)} \dots \dots \dots 78)$$

mamy $M_1 = \frac{\mathfrak{N}_1'' + \mathfrak{N}_2'}{4}$. Jeżeli siła $P=1$ działa w E w odstępie e od A (rys. 28.), to wedle 14)

$$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{Pe(l^2 - e^2)}{l^2}$$

$$\mathfrak{N}_2' = 0, \text{ więc}$$

$$M_1 = -\frac{Pe(l^2 - e^2)}{4l^2} = -\frac{Pe(l+e)(l-e)}{4l^2} = -Pl \frac{e(l+e)}{4l^2} \frac{l-e}{l}$$

$$\text{Dla } P=1 \quad \frac{M_1}{l} = \frac{e(l-e)}{4l^2} \cdot \frac{l+e}{l} = u \cdot v \dots \dots \dots 79)$$

$$\text{gd}y \quad u = \frac{e(l-e)}{4l^2}, \quad v = \frac{l+e}{l}.$$

Wyraz ten da się skonstruować, $u = \frac{e(l-e)}{4l^2}$ przedstawia parabolę. Dla $e = \frac{l}{2}$ $u = \frac{1}{16} = nn'$. Przez a n' i b wykreślimy parabolę. Rzędne tej paraboli musimy powiększyć w stosunku $\frac{l+e}{l}$, więc n. p. dla punktu n kreślimy nn_1 poziomą, łączymy cz n_1 aż do n' . To samo robimy z innymi punktami, a zupełnie taką samą linię kreślimy w drugim przęśle.

Wyznamy styczną kąta nachylenia stycznej do linii wpływowej z równ. 79), a otrzymamy

$$\text{st } \varphi = \frac{l^2 - 3e^2}{4l^3} \dots \dots \dots 80)$$

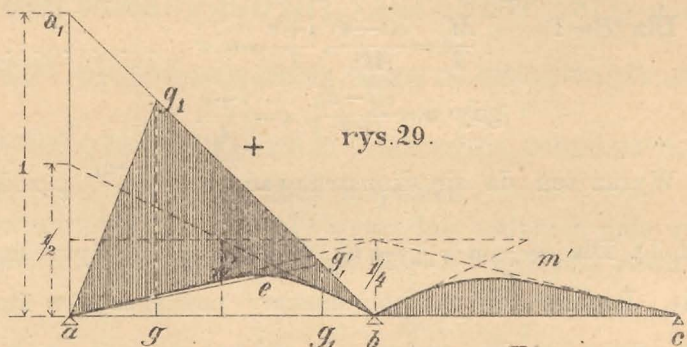
$$\text{więc dla } e=0 \quad \text{st } \varphi = \frac{1}{4l}$$

$$\text{dla } e=l \quad \text{st } \varphi = -\frac{1}{2l}$$

Jeżeli więc zrobimy $nn'' = \frac{1}{4}l = b'b_1$, to ab_1 i $n''b$ są stycznymi do linii wpływowej.

Dla dowolnego punktu G w odstępie x od A jest wedle równ. 79), ponieważ $M' = 0$, $M'' = M_1$, $M = \frac{M_1 x}{l} + X$, albo gdy M_1 oznacza wartość bez względu na znak, to ponieważ M_1 jest ujemne, $M = X - \frac{M_1 x}{l} = x \left(\frac{X}{x} - \frac{M_1}{l} \right)$, $\dots \dots \dots 81)$ przyczem X oznacza moment belki zwykłej w dwu punktach podpartej.

W rysunku 29. wyznaczaliśmy wedle poprzedniego linie wpływowe dla $\frac{M_1}{l}$. Rzędne tych linii mamy według 81) odciągnąć od rzędnych linii $\frac{X}{x}$, które, jak wiadomo, otrzymamy, zrobiwszy $aa_1=1$, wykreśliwszy w g pionową gg_1 i połączywszy a z g_1 . Wtedy powierzchnia wpływowa dodatnia jest ag_1bn' ,



ujemna $bm'c$. Jeżeli punkt g jednak zbliżać się będzie do b , to linia ag_1 będzie się obracać około a , otrzymamy położenie jej stycznej do linii $an'b$, a w dalszym ciągu posuwania się przecinać ona będzie $an'b$. Wtedy otrzymamy punkt obojętny e .

Dla siły poprzecznej w punkcie G (rys. 28.) jest wedle 25) i 26) ze względu, że $M'=0$, $M''=M_1$, $Q=\frac{M_1}{l}+\frac{Rr_1}{l}-P$, albo gdy $[Q]=\frac{Rr_1}{l}-P$ jest siłą poprzeczną dla belki w dwu punktach podpartej, to gdy uwzględnimy, że M_1 ujemne,

$$Q=[Q]-\frac{M_1}{l}.$$

Wedle tego równania wykreślono na rys. 30. linią wpływową dla dowolnego punktu G .

Griot obliczył rzędne linii wpływowych i ułożył wyniki w tablicach*). Podajemy tu tablicę dla $l_1=l_2=l$, przyczem wszystkie cyfry w danym razie pomnożyć należy przez l (rys. 31.).

*) por. Griot Gustaw. Interpolierbare Tabellen zum raschen Antragen der Einflusslinien für Momente und Scheerkräfte. Zürich 1904.

$$M_1 = -\frac{g_1 l_1 + g_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)} = -\frac{(\vartheta^3 g_1 + g_2) l^2}{8(1 + \vartheta)} \quad 82)$$

Jeżeli, jak zwykle, $l_1 = l_2 = l$, więc $\vartheta = 1$, a $g_1 = g_2 = g$, to

$$M_1 = -\frac{g l^2}{8} \quad 83)$$

Chcąc teraz wyznaczyć siły poprzeczne w pierwszym przęśle, zastosujemy równ. 30), zważywszy, że tu jest $M' = 0$, $M'' = M_1$,

$$Q' = \frac{1}{2} g_1 l_1 - \frac{g_1 l_1^3 + g_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2) l_1} = \frac{1}{2} g_1 l_1 - \frac{(\vartheta^3 g_1 + g_2) l}{8(1 + \vartheta) \vartheta} \quad . . . 84)$$

a dla $\vartheta = 1$ i $g_1 = g_2 = g$,

$$Q' = -\frac{1}{2} g l - \frac{1}{8} g l = -\frac{3}{8} g l = +0.375 g l; \quad 85)$$

zaś

$$Q'' = -\frac{1}{2} g_1 l_1 - \frac{\vartheta^3 g_1 + g_2}{8(1 + \vartheta) \vartheta^2} l, \quad 86)$$

a dla przęseł równych

$$Q'' = -\frac{1}{2} g l - \frac{1}{8} g l = -\frac{5}{8} g l = -0.625 g l \quad 87)$$

Według równ. 31) mamy dalej ogólnie $Q = Q' - g x$, a dla przęseł równych $Q = \frac{3}{8} g l - g x = \frac{1}{8} g (3l - 8x) \quad 88)$

Jestto równanie linii prostej.

Moment otrzymamy według 32)

$$M = \frac{1}{2} g_1 x (l_1 - x) + \frac{M_1 x}{l_1}, \quad 89)$$

a dla przęseł równych będzie

$$M = \frac{1}{2} g x (l - x) - \frac{1}{8} g l^2 \frac{x}{l} = \frac{1}{8} g x (3l - 4x) \quad 90)$$

Jestto równanie paraboli.

Dla *najw* M niech będzie $x = x_1$, to znajdziemy x_1 , różniczkując równanie 89), więc $\frac{dM}{dx} = \frac{1}{2} g_1 (l_1 - 2x_1) + \frac{M_1}{l_1} = 0$, zatem $x_1 = \frac{1}{2} l_1 + \frac{M_1}{g_1 l_1}$. Dla przęseł równych $M_1 = -\frac{1}{8} g l^2$, więc $x_1 = \frac{3}{8} l = 0.375 l$.

Wstawmy tę wartość w równ. 90), to będziemy mieli

$$\text{najw } M = \frac{1}{8} g \cdot \frac{3}{8} l (3l - \frac{3}{2} l) = \frac{9}{128} g l^2 = 0.0703175 g l^2 \quad . . 91)$$

Z równ. 90) widzimy, że $M = 0$ dla $3l = 4x'$, więc dla

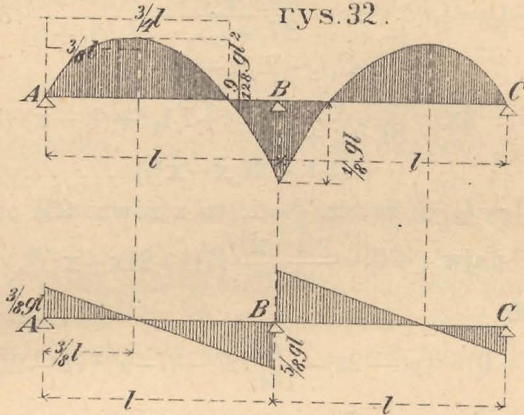
$$x' = \frac{3}{4} l = 0.75 l.$$

Wyniki te zestawiliśmy na rys. 32., z którego jeszcze widzimy, że oddziaływanie w B jest

$$O_1 = \frac{5}{8} g l + \frac{5}{8} g l = \frac{5}{4} g l \quad 92)$$

Ogólnie jest

$$O_1 = \frac{1}{8l_1l_2} [g_1l_1^2(4l_2+l_1) + g_2l_2^2(4l_1+l_2)] \quad 93)$$

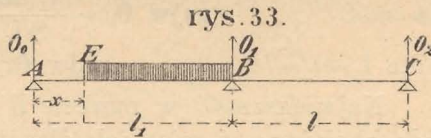


§. 20. Ciężar ruchomy.

Teraz obliczymy siły zewnętrzne, wywołane ciężarem ruchomym.

a) Siły poprzeczne.

Dla *najw* (+Q) w p. E (rys. 33.) musi być obciążona długość EB, a drugie przęsło nieobciążone.



Otrzymamy więc z równ. 20)

$$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{p(l_1^2 - x^2)^2}{4l_1^2}, \quad \mathfrak{N}_2' = 0.$$

Moment w B będzie według równ. 73)

$$M_1 = \frac{\mathfrak{N}_1'' l_1}{2(l_1 + l_2)} = -\frac{p(l_1^2 - x^2)^2}{8l_1(l_1 + l_2)} \quad 94)$$

Dalej otrzymamy wedle równ. 56), wstawiawszy $M'' = 0$, $M'' = M_1$,

$$\text{najw } (+Q) = -\frac{p(l_1^2 - x^2)^2}{8l_1^2(l_1 + l_2)} + \frac{1}{2} \frac{p(l_1 - x)^2}{l_1}$$

$$\text{czyli najw } (+Q) = \frac{p(l_1 - x)^2}{8l_1^2(l_1 + l_2)} \{3l_1^2 + 4l_1l_2 - 2l_1x - x^2\} \quad . . . 95)$$

Ponieważ dla obciążenia zupełnego według równ. 84) i 31)
 $Q_z = \frac{1}{2} p l_1 - \frac{p(l_1^3 + l_2^3)}{8(l_1 + l_2)l_1} - px$, więc otrzymamy najw. ujemną siłę
 poprzeczną, odciągawszy *najw* (+*Q*) od Q_z , zatem

$$\begin{aligned} \text{najw}(-Q) &= \frac{1}{2} p(l_1 - 2x) - \frac{p(l_1^3 + l_2^3)}{8(l_1 + l_2)l_1} - \frac{p(l_1 - x)^2}{8l_1^2(l_1 + l_2)} (3l_1^2 + \\ &\quad + 4l_1l_2 - 2l_1x - x^2) = \\ &= \frac{1}{2} p(l_1 - 2x) - \frac{p}{8l_1^2(l_1 + l_2)} \{l_1^4 + l_1l_2^3 + (l_1 - x)^2(3l_1^2 + \\ &\quad + 4l_1l_2 - 2l_1x - x^2)\} \dots\dots\dots 96) \end{aligned}$$

Jeżeli $l_1 = l_2 = l$, zatem $\vartheta = 1$, to z równ. 95) otrzymamy

$$\text{najw}(+Q) = \frac{p(1-x)^2}{16l^3} \{7l^2 - 2lx - x^2\}, \dots\dots\dots 97)$$

a z równ. 96)

$$\begin{aligned} \text{najw}(-Q) &= \frac{1}{2} p(l - 2x) - \frac{p}{16l^3} (2l^4 + (l - x)^2(7l^2 - 2lx - x^2)) = \\ &= -\frac{p}{16l^3} (l^4 + 10l^2x^2 - x^4) \dots\dots\dots 98) \end{aligned}$$

b) Ciśnienia na podpory. O_0 , ciśnienie na podporę
A, jest największe, gdy pierwsze przęsło jest obciążone, a dru-
 gie nie. Otrzymamy więc z równ. 95)

$$\begin{aligned} \text{dla } x=0 \quad \text{najw } O_0 &= \frac{pl_1(3l_1 + 4l_2)}{8(l_1 + l_2)} \left. \vphantom{\frac{pl_1(3l_1 + 4l_2)}{8(l_1 + l_2)}} \right\} \dots\dots\dots 99) \\ \text{a dla } l_1 = l_2 = l \quad \text{najw } O_0 &= \frac{7}{16} pl \end{aligned}$$

Największe O_1 w punkcie *B* otrzymamy, gdy oba przęsła
 będą obciążone, a więc jak dla ciężaru własnego według 93)

$$\text{najw } O_1 = \frac{p}{8l_1l_2} [l_1^2(4l_2 + l_1) + l_2^2(4l_1 + l_2)] \left. \vphantom{\frac{p}{8l_1l_2}} \right\} \dots\dots\dots 100)$$

a dla równych przęseł

$$\text{najw } O_1 = \frac{5}{4} pl$$

Najw ($-O_0$) powstaje, gdy drugie przęsło jest obciążone,
 a pierwsze nie. Wtedy otrzymamy z równ. 84) i 99), odcią-
 gnawszy O_0 dla obciążenia zupełnego od *najw* O_0

$$\begin{aligned} \text{najw}(-O_0)_p &= \frac{1}{2} pl_1 - \frac{p(l_1^3 + l_2^3)}{8(l_1 + l_2)l_1} - \frac{pl_1(3l_1 + 4l_2)}{8(l_1 + l_2)} = \\ &= -\frac{pl_2^3}{8(l_1 + l_2)l_1} \left. \vphantom{-\frac{pl_2^3}{8(l_1 + l_2)l_1}} \right\} \dots\dots\dots 101) \end{aligned}$$

Dla przęseł równych jest $\text{najw}(-O)_p = -\frac{1}{16} pl$
 Równocześnie działa jednak ciężar własny, więc

$$\begin{aligned} najw (-O_0) &= \frac{1}{2}g_1l_1 - \frac{g_1l_1^3 + g_2l_2^3}{8(l_1 + l_2)l_1} - \frac{pl_2^3}{8(l_1 + l_2)l_1}, \\ najw (-O_0) &= \frac{4g_1(l_1 + l_2)l_1^2 - (g_1l_1^3 + g_2l_2^3 + pl_2^3)}{8(l_1 + l_2)l_1}. \quad . . . 102) \end{aligned}$$

A więc *najw* ($-O_0$) jest ujemnem, jeżeli

$$g_1l_1^3 + (g_2 + p)l_2^3 > 4g_1(l_1 + l_2)l_1^2,$$

czyli jeżeli

$$p > \left(3\frac{l_1^3}{l_2^3} + 4\frac{l_2}{l_1}\right)g_1 - g_2. \quad 103)$$

Jeżeli rozpiętości są równe, oddziaływanie O_0 jest ujemne, gdy $p > 6g$.

Możliwem zatem jest oddziaływanie ujemne tylko, jeśli p w stosunku do g_1 i g_2 jest wielkiem i jeżeli l_2 , a zatem i g_2 jest znacznie większe, niż l_1 , względnie g_1 . Przy równych długościach przęsł mogłoby to nastąpić tylko przy bardzo małych rozpiętościach około $l=10 m$. O_1 nie może być wcale ujemnem.

c) Momenty. Przęsło pierwsze, część druga.

W przęśle skrajnem, jak wiemy, niema części pierwszej, tu punkt stały wpada na punkt A (rys. 34.). Według równ. 37) mamy

$$v_1 = \frac{2(l_1 + l_2)}{l_1},$$

więc według 45)

$$b_1 = \frac{l_1}{1 + v_1} = \frac{l_1^2}{3l_1 + 2l_2}. \quad 104)$$

a dla $l_1 = l_2 = l$

$$b = \frac{1}{3}l = 0.2l \quad 105)$$

Dla *najw* ($-M$) musi być pierwsze przęsło nieobciążone

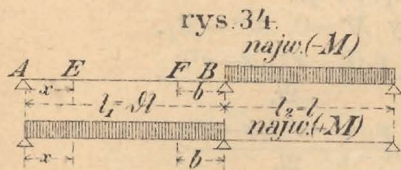
a drugie obciążone, więc według 77) $M_1 = -\frac{pl_2^3}{8(l_1 + l_2)}$.

Wstawivszy w równ. 65) $M' = 0$, $M'' = M_1$, otrzymamy

$$najw (-M) = M_1 \frac{x}{l_1} = -\frac{pl_2^3 x}{8l_1(l_1 + l_2)}. \quad 106)$$

Najw ($+M$) jest dla obciążenia uzupełniającego, więc uwzględniając równ. 89),

$$najw (+M) = \frac{1}{2}px(l_1 - x) - \frac{p(l_1^3 + l_2^3)x}{8(l_1 + l_2)l_1} + \frac{pl_2^3 x}{8l_1(l_1 + l_2)},$$



$$\text{najw } (+M) = \frac{Px}{3(l_1 + l_2)} [3l_1 + 4l_2]l_1 - 4(l_1 + l_2)x] \quad . \quad . \quad 107)$$

Dla pręseł równych otrzymamy z równ. 106)

$$\text{najw } M = -\frac{1}{16}plx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 108)$$

a z równ. 107) $\text{najw } (+M) = \frac{1}{16}px(7l - 8x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 109)$

Pręseł pierwsze, część trzecia.

Najw (+*M*) (rys. 35)

będzie w punkcie *W* części trzeciej, jeśli obciążymy długość *FB*, a drugiego pręseła nie będziemy wcale obciążać.

Wtedy wedle 20)

$$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{p(l_1^2 - e^2)^2}{4l_1^2}, \quad \mathfrak{N}_2' = 0,$$

a zatem wedle równ. 73)

$$M_1 = -\frac{p(l_1^2 - e^2)^2}{8l_1(l_1 + l_2)},$$

a wedle równ. 71), wstawiając $M' = 0$, $M'' = M_1$,

$$\begin{aligned} \text{najw } (+M) &= M_1 \frac{x}{l_1} + \frac{p_1(l_1 - x)(l_1 x - e^2)}{2l_1} = \\ &= -\frac{p_1(l_1^2 - e^2)^2 x}{8l_1^2(l_1 + l_2)} + \frac{p_1(l_1 - x)(l_1 x - e^2)}{2l_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{najw } (+M) &= \frac{P_1}{8l_1^2(l_1 + l_2)} [(4l_1 l_2 (l_1^2 + e^2) + 3l_1^2 (l_1^2 + 2e^2) - e^4)x + \\ &\quad - 4l_1^2 (l_1 + l_2)(x^2 + e^2)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 110) \end{aligned}$$

Długość zaś *e* znajdziemy z równ. 63)

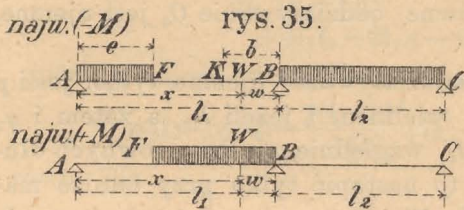
$$w = \frac{b(l^2 - e^2)l}{l^3 - be^2} \quad \text{dla } b = \frac{l_1^2}{3l_1 + 2l_2}$$

$$e = l \sqrt{\frac{(b-w)l}{b(l-w)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 111)$$

przyczem

$$w = l - x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 112)$$

Możnaby teraz wartość tę dla *e* wstawić w równanie 110 i otrzymalibyśmy *najw* (+*M*) jako funkcję *x*. Odciągnąwszy tę wartość od wartości dla obciążenia zupełnego, otrzymalibyśmy *najw* (−*M*). Ale ponieważ wzory te byłyby za zawile, więc zaniechamy ich wyprowadzenia. Wskazany jednak po-



wyżej sposobem możemy w każdym danym przypadku wyznaczyć $najw (+M)$ i $najw (-M)$.

Jeśli $l_1 = l_2 = l$, to otrzymamy z równ. 110)

$$najw (+M) = \frac{p}{16l^3} (7l^4x + 10l^2ex - e^4x - 8l^3e^2 - 8l^3x^2) \quad . \quad 113)$$

Z równ. 111) otrzymamy dla $b = \frac{1}{5}l$

$$e = l \sqrt{\frac{l(\frac{1}{5}l - l + x)}{\frac{1}{5}lx}} = l \sqrt{5 - 4\frac{l}{x}} \quad . \quad . \quad . \quad 114)$$

Wstawiwszy tę wartość za e w 113), otrzymamy

$$najw (+M) = \frac{1}{2}p \left(4lx - x^2 - 5l^2 + 2\frac{l^3}{x} \right) \quad . \quad . \quad . \quad 115)$$

M_z dla obciążenia zupełnego jest według równ. 90)

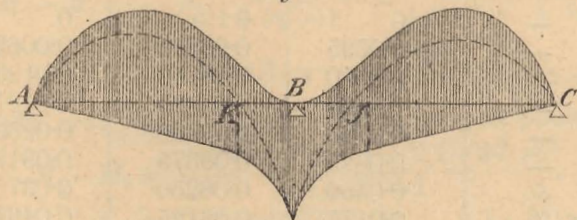
$$M_z = -\frac{1}{8}px(4x - 3l), \text{ więc}$$

$$najw (-M) = -\frac{1}{8}px(4x - 3l) - najw(+M), \text{ zatem}$$

$$najw (-M) = -\frac{1}{8}pl^2 \left(13\frac{x}{l} - 20 + 8\frac{l}{x} \right) \quad . \quad . \quad . \quad 116)$$

Na podstawie tych równań wykreśliśmy linie najw. momentów dla belki dwuprzęsłowej o równych przęsłach (rys.

rys. 36.



36.). Dla takiejże belki obliczył Winkler tablice według poprzednich wzorów, które tu podajemy.

Ciśnienie na podpory.

$$najw (+O_0) = 0.3750 gl + 0.4375 pl$$

$$najw (-O_0) = 0.3750 gl - 0.0625 pl$$

$$najw (+O_1) = 1.25 (g + p) l$$

$$najm (+O_1) = 1.25 gl$$

Sily poprzeczne.

x	Sily poprzeczne		
	ciężar własny	ciężar ruchomy	
		Q	
		najw (+ Q)	najw (— Q)
0	+0.375	+	—
0.1	+0.275	0.4375	0.0625
0.2	+0.175	0.3437	0.0687
0.3	+0.075	0.2624	0.0874
0.375	0	0.1932	0.1182
0.4	—0.025	0.1491	0.1491
0.5	—0.125	0.1359	0.1609
0.6	—0.225	0.0898	0.2148
0.7	—0.325	0.0544	0.2794
0.8	—0.425	0.0287	0.3537
0.9	—0.525	0.0119	0.4369
1.0	—0.625	0.0027	0.5277
		0	0.6250
l	gl	pl	pl

M o m e n t y.

x	e	m o m e n t		
		ciężar własny	ciężar ruchomy	
			M	
			najw (+ M)	najw (— M)
0	—	0	+	—
0.1	—	+0.0325	0	0
0.2	—	0.0550	0.03875	0.00620
0.3	—	0.0675	0.06750	0.01250
0.4	—	0.0700	0.08625	0.01875
0.5	—	0.0625	0.09500	0.02500
0.6	—	0.0450	0.09375	0.03125
0.7	—	0.0175	0.08250	0.03750
0.75	—	0	0.06125	0.04375
0.8	0	—0.0200	0.04688	0.04688
0.85	0.5423	—0.0200	0.03000	0.05000
0.9	0.7454	—0.0425	0.01523	0.05773
0.95	0.8885	—0.0675	0.00611	0.07361
1.00	1.00	—0.0950	0.00138	0.09638
		—0.1250	0	0.12500
l	l	gl^2	pl^2	pl^2

$$najw (+M_g) = +0.07031 \text{ } gl^2, \text{ dla } x=0.3750 \text{ } l.$$

$$n \quad (+M_p) = +0.09566 \text{ } pl^2, \quad n \quad x=0.4374 \text{ } l.$$

§. 21. Momenty podporowe belki trzyprzęsłowej.

Tu przypuścimy, że przęsła skrajne są równe i że ich rozpiętość $l_1 = \vartheta l$, zaś rozpiętość przęsła średniego l .

Otrzymamy wtedy według 22)

$$2M_1(l_1 + l) + M_2 l = \mathfrak{N}_1'' l_1 + \mathfrak{N}_2' l$$

$$M_1 l + 2M_2(l + l_1) = \mathfrak{N}_2'' l + \mathfrak{N}_3' l_1,$$

albo

$$2M_1(1 + \vartheta) + M_2 = \mathfrak{N}_1'' \vartheta + \mathfrak{N}_2'$$

$$M_1 + 2M_2(1 + \vartheta) = \mathfrak{N}_2'' + \mathfrak{N}_3' \vartheta,$$

a stąd otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{2(1 + \vartheta)(\mathfrak{N}_1'' \vartheta + \mathfrak{N}_2') - (\mathfrak{N}_2'' + \mathfrak{N}_3' \vartheta)}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \\ M_2 &= \frac{2(1 + \vartheta)(\mathfrak{N}_2'' + \mathfrak{N}_3' \vartheta) - (\mathfrak{N}_1'' \vartheta + \mathfrak{N}_2')}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \end{aligned} \right\} \dots \dots 117)$$

Jeżeli obciążone jest tylko całe pierwsze przęsło ciężarem jednostkowym p , to

$$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{1}{4} p l_1^2 \quad \mathfrak{N}_3' = \mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = 0, \text{ więc}$$

$$M_1 = -\frac{4\vartheta(1 + \vartheta)}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \frac{p l_1^2}{8} = -\frac{4\vartheta^3(1 + \vartheta)}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \frac{p l^2}{8} \} \dots \dots 118)$$

$$M_2 = \frac{2\vartheta}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \frac{p l_1^2}{8} = \frac{2\vartheta^3}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \frac{p l^2}{8} \} \dots \dots 119)$$

Jeżeli obciążone jest tylko całe drugie przęsło ciężarem jednostkowym p , to

$$\mathfrak{N}_1'' = \mathfrak{N}_3' = 0, \quad \mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = -\frac{1}{4} p l^2, \text{ więc}$$

$$M_1 = M_2 = -\frac{2(1 + \vartheta)\frac{1}{4} p l^2 - \frac{1}{4} p l^2}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} = -\frac{2(1 + 2\vartheta)}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \frac{p l^2}{8}, \text{ albo}$$

$$M_1 = M_2 = -\frac{2}{3 + 2\vartheta} \frac{p l^2}{8} \dots \dots \dots 120)$$

Jeśli wszystkie przęsła są całkowicie obciążone, otrzymamy

$$M_1 = M_2 = -\frac{4\vartheta^3(1 + \vartheta) - 2\vartheta^3 + 2(1 + 2\vartheta) p l^2}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \frac{1}{8},$$

$$M_1 = M_2 = -\frac{(1 + 2\vartheta)2\vartheta^3 + 2(1 + 2\vartheta) p l^2}{4(1 + \vartheta^2) - 1} \frac{1}{8} = -\frac{2(1 + \vartheta^3)}{3 + 2\vartheta} \frac{p l^2}{8} \dots \dots 121)$$

Leber obliczył dla rozmaitych wartości współczynniki rów. 118), 119), 120) i 121). Podajemy tu z nich niektóre:

dla $\vartheta = 0.5, \quad 0.6, \quad 0.7, \quad 0.8, \quad 0.85, \quad 0.9, \quad 0.95, \quad 1.00$

$$\frac{4\vartheta(1 + \vartheta)}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} = 0.375 \quad 0.416 \quad 0.451 \quad 0.482 \quad 0.496 \quad 0.509 \quad 0.521 \quad 0.533$$

$$\frac{4\vartheta^3(1 + \vartheta)}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} = 0.094 \quad 0.150 \quad 0.221 \quad 0.308 \quad 0.358 \quad 0.412 \quad 0.471 \quad 0.533$$

dla $\vartheta=0.5,$	0.6,	0.7	0.8,	0.85,	0.9,	0.95,	1.00
$\frac{2}{3+2\vartheta}$	=0.500	0.476	0.455	0.435	0.426	0.417	0.408
$\frac{2(1+\vartheta^3)}{3+2\vartheta}$	=0.563	0.579	0.610	0.657	0.687	0.720	0.758
$\frac{2\vartheta}{4(1+\vartheta)^2-1}$	=0.125	0.130	0.133	0.134	0.134	0.134	0.133
$\frac{2\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2-1}$	=0.031	0.047	0.065	0.086	0.097	0.108	0.121

§. 22. Ciężar własny.

a) Momenty podporowe otrzymamy analogicznie do

$$121) \quad M_1 = M_2 = \frac{2(\vartheta^3 g_1 + g) l^2}{3 + 2\vartheta} \cdot \frac{1}{8} \quad . \quad . \quad . \quad 122)$$

$$a \text{ dla } g = g_1 \quad M_1 - M_2 = -\frac{2(1 + \vartheta^3) g l^2}{3 + 2\vartheta} \cdot \frac{1}{8} \quad . \quad . \quad . \quad 123)$$

b) Siły poprzeczne.

W pierwszym przęśle jest $M' = 0$, $M'' = M_1$, więc według

$$30) \quad Q_1' = \frac{1}{2} g l_1 + \frac{M_1}{l_1} = \frac{1}{2} g l_1 - \frac{2(\vartheta^3 g_1 + g) l_1}{3 + 2\vartheta} \cdot \frac{1}{8\vartheta^2}$$

$$Q_1' = \{3g_1 \vartheta^2 (\vartheta + 2) - g\} \frac{l_1}{4\vartheta^2 (3 + 2\vartheta)} \quad . \quad . \quad . \quad 124)$$

$$a \quad Q_1'' = Q_1' - g_1 l_1 = -\{g_1 \vartheta^2 (5\vartheta + 6) + g\} \frac{l_1}{4\vartheta^2 (3 + 2\vartheta)} \quad . \quad . \quad 125)$$

$$a \text{ dla dowolnego punktu } Q = Q' - g_1 x \quad . \quad . \quad . \quad 126)$$

W drugim przęśle otrzymamy $M' = M'' = M_1$, więc

$$Q_2' = \frac{1}{2} g l, \quad Q_2'' = -\frac{1}{2} g l, \quad . \quad . \quad . \quad 127)$$

$$a \text{ dla dowolnego punktu } Q = Q_2' - g x = \frac{1}{2} g (1 - 2x) \quad . \quad . \quad . \quad 128)$$

jak dla belki jednoprzęsłowej.

c) Oddziaływanie O_0 na podporze skrajnej równe jest Q_1' , na drugiej według 28)

$$O_1 = Q_2' - Q_1'' = \frac{1}{2} g l + \frac{g_1 \vartheta^2 (5\vartheta + 6) + g}{4\vartheta^2 (3 + 2\vartheta)} l_1,$$

$$O_1 = \frac{g(6\vartheta + 4\vartheta^2 + 1) + g_1(5\vartheta^3 + 6\vartheta^2)}{4\vartheta^2 (3 + 2\vartheta)} l_1 \quad . \quad . \quad . \quad 129)$$

d) Moment otrzymamy w dowolnym punkcie na podstawie rów. 32)

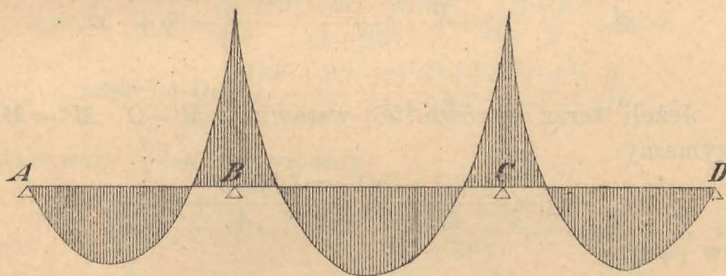
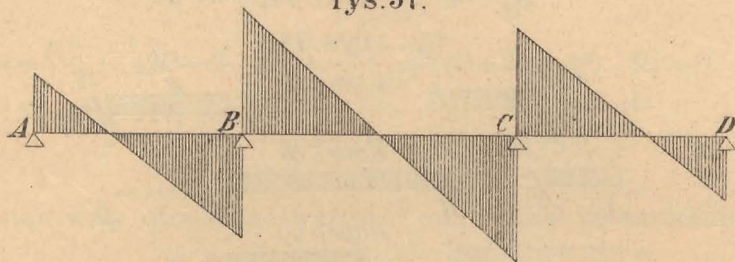
W pierwszym przęśle jest $M' = 0$, $M'' = M_1$, więc

$$M = M_1 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2} g_1 x (l_1 - x) \quad . \quad . \quad . \quad 130)$$

W drugim przęśle jest $M' = M'' = M_1$, więc

$$M = M_1 + \frac{1}{2} g_1 x (1 - x) \quad . \quad . \quad . \quad 131)$$

rys. 37.



Wykreślenie przedstawiliśmy siły poprzeczne i momenty na rys. 37. dla $\vartheta = 0.77$, $g_1 = 0.891 g$.

§. 23. Największe siły poprzeczne.

W pierwszym przęśle otrzymamy *najw* ($+Q$), obciążając pierwsze przęśło od E do B i całe trzecie przęśło (rys. 38).

Wtedy otrzymamy z równ. 16) i 20)

$$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{p(l_1^2 - x^2)^2}{4l_1^2}, \quad \mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = 0, \quad \mathfrak{N}_3' = -\frac{1}{4} p l_1^2,$$

więc według 117)

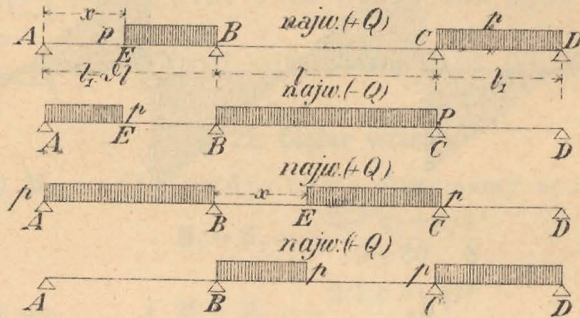
$$M_1 = -\frac{2(1 + \vartheta)p(l_1^2 - x^2)^2\vartheta - p l_1^4 \vartheta}{4l_1^2[4(1 + \vartheta)^2 - 1]},$$

a nazwawszy $\frac{x}{l_1} = m$,

$$M_1 = -\frac{2(1+\vartheta)(1-m^2)^2-1}{4(1+\vartheta)^2-1} \frac{pl_1^2\vartheta}{4},$$

$$M_1 = \left[-\frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3(1-m^2)^2-2\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2-1} \right] \frac{pl^2}{8} \dots 132)$$

rys. 38.



Jeżeli teraz w równ. 56) wstawimy $M'=0$, $M''=M_1$, to otrzymamy

$$najw (+Q) = \frac{1-2(1+\vartheta)(1-m^2)^2}{4(1+\vartheta)^2-1} \frac{pl_1\vartheta}{4} + \frac{1}{2}p(1-m)^2l_1,$$

$$najw (+Q) = \frac{1-2\vartheta(1+\vartheta)(1-m^2)^2+2(1-m)^2(4(1+\vartheta)^2-1)}{4(1+\vartheta)^2-1} \frac{pl_1}{4} \dots 133)$$

Dla $najw (-Q)$ musi być przeszło pierwsze obciążenie od A do E i drugie całe przeszło. A więc wedle 16) i 18)

$$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{px^2}{4l_1^2}(2l_1^2-x^2), \mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = -\frac{1}{4}pl^2, \mathfrak{N}_3' = 0,$$

więc według 117)

$$M_1 = -\frac{2(1+\vartheta) \left[\frac{px^2(2l_1^2-x^2)\vartheta}{4l_1^2} + \frac{1}{4}pl^2 \right] - \frac{1}{4}pl^2}{4(1+\vartheta)^2-1}, \text{ a dla } \frac{x}{l_1} = m,$$

$$M_1 = -\left[\frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3m^2(2-m^2)+2(1+2\vartheta)}{4(1+\vartheta)^2-1} \right] \frac{pl^2}{8} \dots 134)$$

Jeżeli teraz w równanie 57) wstawimy $M'=0$, $M''=M_1$, otrzymamy

$$najw (-Q) = \frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2} \frac{px}{l_1} \dots 135)$$

Dla najw. sił poprzecznych w punkcie E drugiego przęsła musimy obciążyć całe pierwsze przęsło, a drugie od E do C . A więc będzie wedle 16) i 20)

$$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{1}{4}pl_1^2, \quad \mathfrak{N}_2'' = -p \frac{(l^2 - x^2)^2}{4l^2},$$

$$\mathfrak{N}_2' = -\frac{p(l-x)^2}{4l^2} [2l^2 - (l-x)^2] = -\frac{p(l-x)^2}{4l^2} (l^2 + 2lx - x^2). \quad \mathfrak{N}_3' = 0.$$

Według 117) jest

$$M_1 - M_2 = \frac{\mathfrak{N}_1'' \vartheta + \mathfrak{N}_2' - \mathfrak{N}_2'' - \mathfrak{N}_3' \vartheta}{1 + 2\vartheta},$$

a wstawivszy otrzymane wartości, otrzymamy po skróceniu

$$M_1 - M_2 = \frac{2(l-x)^2 x^2 - l^4 \vartheta^3}{1 + 2\vartheta} \frac{p}{4l^2},$$

a więc według 56) i zważywszy, że $M' = M_1$, $M'' = M_2$,

$$najw (+Q) = \frac{p}{4l^3} \frac{l^4 \vartheta^3 - 2(l-x)^2 x^2}{(1 + 2\vartheta)} + \frac{1}{2} p \frac{(l-x)^2}{l}, \text{ albo}$$

$$najw (+Q) = \frac{l^4 \vartheta^3 + 2(l-x)^2 (l^2 + 2\vartheta l^2 - x^2)}{(1 + 2\vartheta)} \frac{p}{4l^3},$$

a wstawivszy $\frac{x}{l} = n$, otrzymamy

$$najw (+Q) = \frac{\vartheta^3 + 2(1-n)^2(1+2\vartheta-n^2)}{4(1+2\vartheta)} pl \dots 136)$$

$Najw (-Q)$ otrzymamy z równania 136), zmieniawszy znak i x na $(l-x)$, lub n na $(1-n)$, więc

$$najw (-Q) = -\frac{l^4 \vartheta^3 + 2x^2(2\vartheta l^2 + 2lx - x^2)}{(1 + 2\vartheta)} \frac{p}{4l^3} \text{ lub}$$

$$najw (-Q) = -\frac{\vartheta^3 + 2n^2(2\vartheta + 2n - n^2)}{4(1 + 2\vartheta)} pl \dots 137)$$

§. 24. Największe oddziaływania.

Największe oddziaływanie ujemne w A otrzymamy wstawivszy w równ. 134) i 135) $x=0$ i $m=0$. Otrzymamy więc

z rów. 134) $M_1 = \frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)}$, zatem

$$najw (-O_0) = -\frac{pl}{4\vartheta(3+2\vartheta)} \dots 138)$$

$Najw (+O_0)$ otrzymamy, odciaǳnawszy $najw (-O_0)$ z rów. 138) od O_0 dla obciążenia zupełnego z rów. 124), zmieniawszy w niem g_1 i g na p . Więc

$$\text{najw } (+O_0) = \frac{3\vartheta^2(\vartheta+2)-1}{4\vartheta^2(3+2\vartheta)}pl_1 + \frac{pl}{4\vartheta(3+2\vartheta)} = \frac{3\vartheta(\vartheta+2)}{4(3+2\vartheta)}pl \quad . \quad 139)$$

Najw ($-O_1$) otrzymamy, wstawivszy w równ. 137) $x=0$ i $n=0$, a mianowicie

$$\text{najw } (-O_1) = -\frac{pl^3}{4(1+2\vartheta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 140)$$

Najw ($+O_1$) otrzymamy, odcinagivszy wartość równania 140) od wartości równania 129) dla obciążenia zupełnego i zamieniivszy g_1 i g na p

$$\begin{aligned} \text{najw } (+O_1) &= \frac{1+6\vartheta+10\vartheta^2+5\vartheta^3}{4\vartheta^2(3+2\vartheta)}pl_1 + \frac{pl^3}{4(1+2\vartheta)}, \\ \text{najw } (+O_1) &= \frac{(1+2\vartheta)(6\vartheta+10\vartheta^2+5\vartheta^3)+\vartheta^4(3+2\vartheta)}{4(1+\vartheta)^2-1} \frac{pl}{4\vartheta} \quad . \quad . \quad 141) \end{aligned}$$

§. 25. Największe momenty.

I. przęsło, część średnia. Największy ujemny moment w części średniej otrzymamy przy obciążeniu średniego przęsła, największy dodatni przy obciążeniu obu skrajnych przęseł. Dla *najw* ($-M$) otrzymamy więc $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{N}_3=0$, $\mathfrak{N}_2=+ -\frac{1}{4}pl^2$, więc według 117)

$$M_1 = -\frac{(1+2\vartheta)pl^2}{4(4(1+\vartheta)^2-1)} = -\frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)}.$$

A więc według 65), wstawivszy $M'=0$ i $M''=M_1$, otrzymamy

$$\text{najw } (-M) = -\frac{pl_1^2}{4\vartheta^2(3+2\vartheta)} \frac{x}{l_1} = -\frac{pl_1 x}{4\vartheta^2(3+2\vartheta)} = -\frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)} \frac{x}{l_1} \quad 142)$$

Najw ($+M$) otrzymamy, jeśli pierwsze i trzecie przęsło są obciążone, więc $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{N}_3=-\frac{1}{4}pl_1^2$, $\mathfrak{N}_2=0$.

A zatem według 117)

$$M_1 = -\frac{\vartheta(1+2\vartheta)pl_1^2}{4(4(1+\vartheta)^2-1)} = -\frac{\vartheta pl_1^2}{4(3+2\vartheta)} = -\frac{2\vartheta^3}{3+2\vartheta} \frac{p_1 l^2}{8},$$

a więc według 67)

$$\text{najw } (+M) = -\frac{\vartheta pl_1 x}{4(3+2\vartheta)} + \frac{1}{2}px(l_1-x) =$$

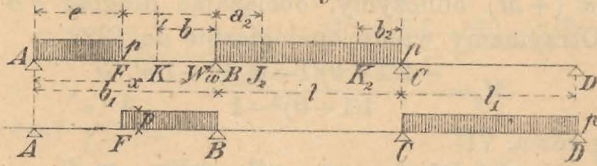
$$\text{najw } (+M) = \frac{3(2+\vartheta)l_1-2(3+2\vartheta)x}{4(3+2\vartheta)}px =$$

$$= \frac{3(2+\vartheta)-2(3+2\vartheta)m}{4(3+2\vartheta)} p_1 l_1^2 m \quad . \quad . \quad . \quad 143)$$

jeśli $m = \frac{x}{l_1}$.

Trzecia część. Najw (—M) otrzymamy w punkcie W, gdy pierwsze przęsło obciążone jest od A do F i całe drugie przęsło (rys. 39.).

rys.39.



Według 63) jest

$$w = \frac{b_1(2l_1 - e_1)e_1l_1}{l_1^3 - b_1(l_1^2 - 2e_1l_1 + e_1^2)}, \text{ a stąd}$$

$$e_1 = l_1 \left(1 - \sqrt{\frac{(b_1 - w)l_1}{b_1(l_1 - w)}} \right), \dots \dots \dots 144)$$

czyli

$$e = l_1 \sqrt{\frac{l_1 b_1 - w}{b_1 l_1 - w}} \dots \dots \dots 145)$$

Odstęp b_2 punktu stałego K_1 od C w drugim przęsle jest według 45) $b_2 = \frac{l}{1 + \nu_4}$, zaś według 37) $\nu_2 = \frac{2(l_1 + l)}{l} = 2(1 + \vartheta)$,

więc

$$b_2 = \frac{l}{3 + 2\vartheta} = a_2 \dots \dots \dots 146)$$

Dalej $\nu_1 = \frac{2(l + l_1) - \frac{l}{\nu_2}}{l_1} = \frac{2(1 + \vartheta)}{\vartheta} \frac{1}{2\vartheta(1 + \vartheta)}$,

$$\nu_1 = \frac{(3 + 2\vartheta)(1 + 2\vartheta)}{2\vartheta(1 + \vartheta)}, \text{ więc, ponieważ } b_1 = \frac{l_1}{1 + \nu_1},$$

$$b_1 = \frac{2\vartheta(1 + \vartheta)}{3 + 10\vartheta + 6\vartheta^2} l_1 \dots \dots \dots 147)$$

Dla obciążenia pierwszego przęsła od A do F i całego drugiego przęsła jest wedle 16) i 18)

$$\mathfrak{N}_1'' = -\frac{pe^2}{4l_1^2}(2l_1^2 - e^2), \quad \mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = +\frac{1}{4}pl^2, \quad \mathfrak{N}_3' = 0,$$

więc według rów. 134), wstawivszy e zamiast x , gdy $\frac{e}{l_1} = m_1$,

$$M_1 = -\frac{4(1 + \vartheta)\vartheta^3 m_1^2(2 - m_1^2) + 2(1 + 2\vartheta)pl^2}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \frac{1}{8}$$

$$= -\left[\frac{4(1 + \vartheta)\vartheta^3}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} m_1^2(2 - m_1^2) + \frac{2}{3 + 2\vartheta} \right] \frac{pl^2}{8}.$$

Teraz otrzymamy wedle 70)

$$\text{najw } (-M) = \frac{M_1 x}{l_1} + \frac{pe^2(1-x)}{2l_1} \dots 148)$$

Najw (+*M*) obliczymy, obciążając długość *FB* i trzecie przęsło. Otrzymamy wtedy analogicznie do 132)

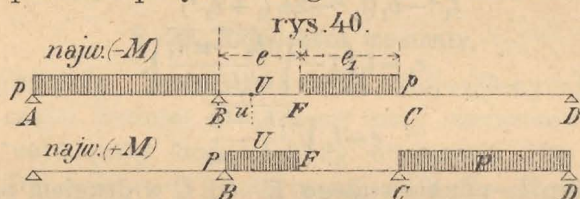
$$M_1 = \frac{-2(1+\vartheta)(1-m_1^2)^2 + 1}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \frac{pl_1^2 \vartheta}{4} \dots 149)$$

a według równ. 71)

$$\text{najw } (+M) = M_1 \frac{x}{l} + \frac{p(1-m)(m-m_1^2)}{2} l_1^2 \dots 150)$$

II. przęsło, część pierwsza.

Tu dla *najw* (−*M*) w punkcie *U* (rys. 40.) musi być obciążone całe pierwsze przęsło i drugie od *F* do *C*. Dla *najw* (+*M*)



musi być przeciwnie obciążone drugie przęsło od *B* do *F* i trzecie przęsło. Według 62)

$$u = \frac{a(2l - 3b - e)el}{cl^2 + (2a - b)el - (a + b)e^2}$$

a ponieważ $a_2 = b_2$, więc $c = l - 2b_2$,

$$u = \frac{b_2(2l - 3b_2 - e)el}{l^3 - 2b_2l^2 + b_2el - 2b_2e^2}$$

a ze względu na 146)

$$u = \frac{(3 + 4\vartheta)l - (3 + 2\vartheta)e}{(1 + 2\vartheta)l^2 + el - 2e^2} \frac{el}{3 + 2\vartheta} \dots 151)$$

albo, rozwiązawszy to równanie ze względu na *e*,

$$e^2 - el \frac{l(3 + 4\vartheta) - u(3 + 2\vartheta)}{(3 + 2\vartheta)(l - 2u)} + \frac{(1 + 2\vartheta)ul^2}{l = 2u} = 0 \dots 152)$$

Przy obciążeniu, dla którego otrzymamy *najw* (−*M*) jest wedle równania 16) i 20)

$$\mathfrak{N}_1 = -\frac{1}{4}pl_1^2, \quad \mathfrak{N}_2'' = -p \frac{(l^2 - e^2)^2}{4l^2},$$

$$\mathfrak{N}_2' = -\frac{p(l - e)^2}{4l^2} (l^2 + 2le - e^2),$$

a więc według 117)

$$M_1 = \frac{2(1+\vartheta) \left[\frac{1}{4} p l_1^2 \vartheta + \frac{p(l-e)^2}{4l^2} (l^2 - 2le - e^3) \right] - p \frac{(l^2 - e^2)^2}{4l^2}}{4(1+\vartheta)^2 - 1},$$

$$M_1 = \frac{2(1+\vartheta) [p l_1^2 l^2 \vartheta + p(l-e)^2 (l^2 + 2el - e^2)] - p(l^2 - e^2)^2}{4l^2 [4(1+\vartheta)^2 - 1]},$$

a wstawiając $\frac{e}{l} = n_1$,

$$M_1 = \left[-\frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2 - 1} - \frac{4(1+\vartheta)(1-n_1)^2(1+2n_1-n_1^2)}{4(1+\vartheta)^2 - 1} + \right. \\ \left. + \frac{2(1-n_1^2)^2}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \right] \frac{pl^2}{8} \dots \dots \dots 153)$$

a

$$M_1 - M_2 = \frac{2p(l-e)^2 e^3 - pl^4 \vartheta^3}{4l^2(1+2\vartheta)} =$$

$$= \left(\frac{4}{1+2\vartheta^3} (1-n_1)^2 n_1^2 + \frac{2\vartheta^3}{1+2\vartheta} \right) \frac{pl^2}{8} \dots \dots \dots 154)$$

Teraz otrzymamy według rów. 68)

$$\text{najw } (-M) = M_1 - \frac{M_1 - M_2}{1} x + \frac{pe_1^2 x}{2l} \dots \dots \dots 155)$$

Najw (+M) otrzymamy, obciążwszy drugie przęsło od B do F, i całe trzecie przęsło, a zatem wedle 16) i 18)

$$\mathfrak{N}_1 = 0, \quad \mathfrak{N}_2' = -\frac{pe^2}{4l^2} (2l - e^2),$$

$$\mathfrak{N}_2'' = -\frac{pe^2}{4l^2} (2l^2 - e^2), \quad \mathfrak{N}_3 = -\frac{1}{4} p l_1^2.$$

Wedle 117) otrzymamy

$$M_1 = \frac{2(1+\vartheta) \frac{pe^2}{4l^2} (2l-e)^2 - \frac{pe^2}{4l^2} (2l^2 - e^2) - \frac{1}{4} p l_1^2 \vartheta}{4(1+\vartheta)^2 - 1},$$

$$M_1 = - \left[\frac{2n_1^2}{4(1+\vartheta)^2 - 1} (2(1+\vartheta)(2-n_1)^2 - (2-n_1^2)) + \right. \\ \left. + \frac{2\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2 - 1} \right] \frac{pl^2}{8} \dots \dots \dots 156)$$

Dalej mamy

$$M_1 - M_2 = \frac{-\frac{pe^2}{4l^2} (2l-e)^2 + \frac{pe^2}{4l^2} (2l^2 - e^2) + \frac{1}{4} p l_1^2 \vartheta}{1+2\vartheta},$$

$$M_1 - M_2 = \left(-\frac{4}{1+2\vartheta} n_1^2 (1-n_1)^2 + \frac{2\vartheta^3}{1+2\vartheta} \right) \frac{pl^2}{8} \quad . \quad . \quad 157)$$

$$\text{najw } (+M) = M_1 - (M_1 - M_1)n + \frac{pn}{2} (2n_1 - n_1^2 - n)l^2 \quad . \quad 158)$$

jeśli $n = \frac{x}{l}$.

Średnia część.

Dla średniej części otrzymamy *najw* ($-M$), obciążwszy pierwsze i trzecie przęsło, zaś *najw* ($+M$), obciążwszy drugie przęsło. Jeśli pierwsze i trzecie przęsło jest obciążone, otrzymamy z rów. 132, robiąc $m=0$,

$$M_1 = M_2 = -\frac{2\vartheta^3}{3+2\vartheta} \frac{pl^2}{8} \quad . \quad . \quad . \quad 159)$$

Wstawivszy w rów. 65) $M' = M_1 = M_2 = M''$, otrzymamy

$$\text{najw } (-M) = M' = M_1 = -\frac{2\vartheta^3}{3+2\vartheta} \frac{pl^2}{8} \quad . \quad . \quad . \quad 160)$$

Jestto równanie linii poziomej.

Dla *najw* ($+M$) należy obciążyć drugie przęsło, więc

$$\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_3 = 0, \quad \mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = -\frac{1}{4}pl^2,$$

$$\text{zatem} \quad M_1 = M_2 = \frac{2(1+\vartheta)\mathfrak{N}_2' - \mathfrak{N}_2''}{4(1+\vartheta)^2 - 1} = -\frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)},$$

$$\text{a według 67) } \text{najw } (+M) = -\frac{pl^2}{4(3+2\vartheta)} + \frac{1}{2}px(1-x) \quad . \quad . \quad 161)$$

§. 26. Przykład.

Dane: Most drogowy drewniany leżajowy dla drogi III. kl. 500 m szeroki bez chodników. — Dajemy 5 belek głównych. — Rozpiętość przęseł skrajnych przyjmijmy 1000 m a średniego przęsła 1300 m, a więc stosunek 1:13:1.

Obliczyć należy największe siły poprzeczne i momenty, przyjmując ciężar tłumu ludzi, przepisany dla dróg III. kl. 340 kg/m², gdyż ciężar tłumu ludzi będzie tu niekorzystniejszy od ciężaru wozów.

Jako ciężar stały przyjmijmy dla przęseł skrajnych

$$*) g = 8.25 t + 230 \text{ kg/m}$$

$$g = 8.25 \times 10 + 230 = 82.5 + 230 = 312.5 \text{ kg/m, więc}$$

$$g = 0.3125 \text{ t/m dla przęseł skrajnych. — Zaś dla przęsła średniego}$$

$$g_1 = 8.25 \times 13 + 230 \text{ kg/m} = 337.25 \text{ kg/m,}$$

$$g_1 = 0.33725 \text{ t/m}$$

*) Patrz Podręcznik Teorii mostów wyd. II. tom I. str. 9.

$g' = 0.0625 \text{ t/m}$ na jedną belkę przesła skrajnego
 $g_1' = 0.06745 \text{ tm}$ na jedną belkę przesła średniego.

Ciężar stały.

Spółczynnik $\gamma = \frac{l}{l_1} = \frac{1}{1.2} = 0.77$, więc według 122)

$$M_1 = M_2 = - \frac{2 [0.77^3 \times 0.0625 + 0.06745]}{3 + 2 \times 0.77} \cdot \frac{13^2}{8} = - 0.89317 \text{ tm}$$

Siły poprzeczne według 124)

$$Q_1' = (3 \times 0.0625 \times 0.77 (2 + 0.77) - 0.77) \frac{10}{4 \times 0.77^2 (3 + 2 \times 0.77)} =$$

$$= Q_1' = + 0.3515 \text{ ton}$$

$$Q_1'' = - 0.3515 - 0.0625 \times 10 = - 0.9765 \text{ ton}$$

W drugim prześle

$$Q_2' = + \frac{1}{2} 0.06745 \times 13 = 0.448 \text{ ton}$$

$$Q_2'' = - \frac{1}{2} 0.06745 \times 13 = - 0.448 \text{ ton}$$

$$Q_1 = Q_1' = 0.3515 \text{ ton}$$

$$Q_2 = - 0.9765 - 0.448425 = - 1.425 \text{ ton}$$

Momenty.

W pierwszym prześle otrzymamy według 130)

$$M = M_1 \cdot \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2} g_1 x (l_1 - x)$$

$$M = - 0.89317 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2} 0.0625 \frac{x}{l_1} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) l_1$$

$$M = - 0.89317 \frac{x}{l_1} + 3.125 \frac{x}{l_1} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right)$$

Dla $\frac{x}{l_1} = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$M = 0$	0.191	0.321	0.388	0.393	0.335
$\frac{x}{l} = 0.6$	0.7	0.8	0.9	1.	
$M = 0.214$	0.031	-0.214	-0.524	-0.893	tm

W drugim prześle otrzymamy według 131)

$$M = - 0.893 + \frac{1}{2} 0.06745 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) l^2 =$$

$$M = - 0.893 + 5.6995 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) =$$

Dla $\frac{x}{l} =$	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$M = - 0.893$	-0.380	+0.019	+0.304	+0.475	
$\frac{x}{l} =$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$M = + 0.532$	+0.475	+0.304	+0.019	-0.38	

$$\frac{x}{l} = 1$$

$$M = -0.893 \text{ tm.}$$

b) Ciężar ruchomy.

α) Siły poprzeczne.

W pierwszym przęśle otrzymamy największe dodatnie siły poprzeczne, obciążając pierwsze przęsło od *E* do *B* (rys. 37.) i całe trzecie przęsło.

Otrzymamy według 133)

$$n_{ajw} (+Q) = -\frac{2(1+0.77)p(1-m^2)^2 + 3.073}{4(1+0.77)^2 - 1} \cdot \frac{10.077}{4} + \frac{1}{2}p(1-m^2)10$$

$$n_{ajw} (+Q) = -\frac{3.54p(1-m^2)^2 + 3.073}{11.53} \cdot 1.925 + 5p(1-m^2) =$$

$$= -\frac{6.81p(1-m^2)^2 + 5.91}{11.53} + 5p(1-m^2)$$

p ciężar tłumy ludzi dla dróg III. klasy wynosi 340 kg/m², a ponieważ belki główne są w odstępach 1m, także na *m* b, gdy *m*=0 i *p*=0.34 t/m

$$n_{ajw} + Q = -\frac{6.81 \times 0.34 + 5.91}{11.53} + 5 \times 0.34 = 2.02 \text{ tm.}$$

Wstawiając dla innych *m* wartości, otrzymamy

dla <i>m</i> =0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
+ <i>Q</i> =-0.31	0.012	0.13	0.30	0.487	0.646	0.769
<i>m</i> =0.8	0.9	1.0				
+ <i>Q</i> =0.814	0.74	0.5 tm.				

Największe (*-Q*) otrzymamy z równania 134) i 135

$$M_1 = -\left[\frac{4(1+5)5^3}{4(1+5)^2 - 1} p m^2 (2-m^2) + \frac{2}{3+2 \times 5} p \right] \frac{l^2}{8}$$

$$n_{ajw} (-Q) = \frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2} p \frac{x}{l_1}, \text{ a że } 5=0.77$$

$$M_1 = -\left[\frac{4(1+0.77)0.77^3}{4(1+0.77)^2 - 1} 0.34 m^2 (2-m^2) + \frac{2}{(3+2 \times 0.77)} 0.34 \right] \frac{13^2}{8}$$

$$M_1 = -[0.096 m^2 (2-m^2) + 0.16] \frac{13^2}{8}$$

$$M_1 = -[0.096 m^2 (2-m^2) + 0.16] 21.125$$

$$M_1 = -2.03 m^2 (2-m^2) - 3.38$$

$$n_{ajw} (-Q) = \frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2} p m^2 l_1. \text{ A że } l_1=10$$

$$n_{ajw} (-Q) = -0.203 m^2 (2-m^2) - 0.338 - \frac{1}{2} 0.34 m^2 \cdot 10$$

$$n_{ajw} (-Q) = -0.203 m^2 (2-m^2) - 0.338 - 1.7 m^2.$$

Wstawiając wartości za *m*= $\frac{x}{l_1}$ i za *p*=0.34 otrzymamy dla

$m=0$	0.1	0.2	0.3	0.4	
$n_{ajw}(-Q)=-0.338$	-0.360	-0.422	-0.53	-0.616	
$m=0.5$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.
$n_{ajw}(-Q)=-0.852$	-1.07	-1.32	-1.61	-1.91	-2.24 ton

W drugim przęśle otrzymamy *najw* *Q* z równania 136)

$$\begin{aligned} \text{najw } (+Q) &= \frac{3^3 + 2(1-n)^2(1+2\vartheta - n^2)}{4(1-2\vartheta)} p l \\ + Q &= \frac{0.73^3 + 2(1-n)^2(1+2 \times 0.77 - n^2)}{4(1+2 \times 0.77)} l p \\ &= \frac{0.457 + 2(1-n)^2(2.44 - n^2)}{9.76} 13 \times 0.84 \\ \text{najw } (+Q) &= \frac{2.02 + 8.84(1-n)^2(2.44 - n^2)}{9.76} \end{aligned}$$

Wstawiając wartość za $n = \frac{x}{l}$, otrzymamy dla

$n=0$	0.1	0.2	0.3	0.4
$+Q=2.41$	1.99	1.60	1.25	0.95
$n=0.6$	0.7	0.8	0.9	1.0
$+Q=0.51$	0.36	0.27	0.22	0.20

Ponieważ belka jest symetryczną, więc *najw* (+ *Q*) dla *n* jest razem równe — *najw* (— *Q*) dla (1— *n*). Powyższe wartości dają nam więc razem *najw* (— *Q*).

β) Momenty. Pierwsze przęsło część średnia

Według 37) jest $v_2 = 2(1+\vartheta) = 2(1+0.77) = 3.5$,

$$\text{zaś } b_2 = \frac{l}{1+v_2} = \frac{l}{1+3.54} = \frac{l}{4.54} = 0.22 l = 0.22 \times 13 = 2.86 m.$$

$$v_1 = \frac{2(1+\vartheta)}{\vartheta} - \frac{1}{\vartheta v_2} = \frac{2(1+0.77)}{0.77} - \frac{1}{0.77 \times 3.54} = 4.231$$

$$b_1 = \frac{l_1}{1+4.231} = \frac{l_1}{5.231} = 0.1912 l_1 = 1.912 m$$

Wprost możemy otrzymać b_1 z rów. 147)

$$b_1 = \frac{2 \times 0.77(1+0.77)}{3 + 10 \times 0.77 + 6 \times 0.77^2} \cdot 10 = 1.912 m$$

Według równania 142) i 143) otrzymamy

$$\text{najw } (-M) = - \frac{p l^2}{4 \cdot (3+2\vartheta)} \cdot \frac{x}{l_1} = - \frac{0.84 \times 13^2}{4(3+2 \times 0.77) l_1} x$$

$$\text{najw } (-M) = - \frac{57.46 x}{18.16 l_1} = - 3.16 \frac{x}{l_1}$$

$$\text{najw } (+M) = \frac{3(2+\vartheta) - 2(3+2\vartheta)m}{4(3+2\vartheta)} p l_1^2 m$$

$$\text{najw } (+M) = \frac{3(2+0.77) - 2(3+2 \times 0.77)m}{4(3+2 \times 0.77)} 0.84 \times 10^2 m =$$

$$\text{najw } (+M) = 15.908 m - 17 m^2.$$

Dla $m=0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\text{najw } (+M)=0$	1.421	2.502	3.242	3.643	3.704 <i>tm</i>
$\text{najw } (-M)=0$	-0.316	-0.632	-0.948	-1.264	-1.580 „
$m=0.6$	0.7	0.8 <i>m</i>			
$\text{najw } (+M)=3.425$	2.806	1.846 <i>tm</i>			
$\text{najw } (-M)=-1.896$	-2.212	-2.528 „			

Pierwsze przeszło część trzecia.

Tu wyznaczmy $najw (+M)$ i $najw (-M)$ tylko jeszcze dla punktów, dla których $m=0.9$ i 1.0 czyli dla $w=0.1$ i $w=0$.

Z równania 145) otrzymamy dla

$$w=0.1 \quad e_1 = l_1 \sqrt{\frac{l_1}{b_1} \cdot \frac{b_1 - w}{l_1 - w}} = 10 \sqrt{\frac{10}{1.912} \cdot \frac{1.912 - 1}{10 - 1}} = 7.32 \text{ m},$$

$$w=0 \quad e_1 = l_1$$

Dalej mamy dla $w=0.1$ $p=0.34$,

$$m_1 = \frac{7.32}{10} = 0.732, \text{ więc według 148)}$$

$$M_1 = - \left[\frac{4(1+0.77)0.77^3}{4(1+0.77)^2 - 1} \cdot 0.732^2(2 - 0.732^2) + \frac{2}{3+2 \times 0.77} \right] \frac{0.34 \cdot 13}{8}$$

$$M_1 = - (0.28 \times 0.536 \times 1.464 + 0.45) 7.183 = - 4.813 \text{ tm}$$

$$Najw (-M) = - \frac{M_1 x}{l_1} + \frac{p e^2 (l_1 - x)}{2 l}$$

$$najw (-M) = - 4.813 \times 0.9 + \frac{0.34 \times 7.32^2 \times (1 - 0.9)}{2}$$

$$najw (-M) = - 4.332 + 0.912 = - 3.42 \text{ tm}$$

Dla $w=0$, $p=0.34$, $m_1=1$

$$M_1 = - \left[\frac{4(1+0.77)0.77^3}{4(1+0.77)^2 - 1} \cdot 0.34 + \frac{2}{3+2 \times 0.77} \cdot 0.34 \right] \frac{13^2}{8} = - 5.239 \text{ tm}.$$

Dalej otrzymamy według 149) dla $najw (+M)$

$$M_1 = - \frac{[2(1+5)(1-m_1^2)^2 + 1] p l_1^{2.5}}{4(1+5)^2 - 1} \cdot \frac{1}{4},$$

$$M_1 = - \frac{2(1+0.77)(1-0.732^2)^2 + 1}{4(1+0.77)^2 - 1} \cdot \frac{0.34 \times 10^2 \cdot 0.77}{4}$$

$$= \frac{0.239}{11.53} \cdot \frac{26.18}{4} = \frac{6.257}{46.12} = + 0.135 \text{ tm},$$

a według równania 150)

$$najw (+M) = M_1 \frac{x}{l} + \frac{p(1-m)(m-m_1^2)}{2} l^2$$

$$najw (+M) = 0.135 \times 0.9 + \frac{0.34 \times 0.1(0.9 - 0.732^2)}{2} 13^2$$

$$najw (+M) = 0.1215 + 1.048 = 1.1695 \text{ tm}.$$

Dla $w=0$, $p=0$, otrzymamy więc z rów. 149)

$$M_1 = \frac{0.34 \times 13^2 \cdot 0.77}{4(4(1+0.77)^2 - 1)} = \frac{44.244}{46.13} = 965 \text{ tm}$$

a więc otrzymamy dla

$m =$	0.9	1.0
$najw (+M) =$	1.170	0.965 tm
$najw (-M) =$	-3.42	-5.239 tm

Drugie przeszło, część pierwsza.

Otrzymaliśmy pierwiej $b_2 = 0.22 l = a_2$, a więc wyznaczmy największe i najmniejsze momenty dla $u = 0.1 l$ i $u = 0.2 l$, bo dla $w=0$ czyli dla średniej podpory, jużśmy otrzymali $najw (+M)$ i $najw (-M)$.

Z rów. 152) otrzymamy, wstawiając $v = \frac{u}{l}$

$$e^2 - e l \frac{l(3+4\mathfrak{S}) - u(3+2\mathfrak{S})}{(3+2\mathfrak{S})(l-2u)} + \frac{(1+2\mathfrak{S})u l^2}{l-2u} = 0$$

$$e^2 - e 13 \frac{(3+4 \times 0.77) - v(3+2 \times 0.77)}{(3+2 \times 0.77)(1-2v)} + \frac{(1+2 \times 0.77)v}{1-2v} 13^2 = 0$$

$$e^2 - 13 e \frac{6.08 - 4.54 v}{4.54(1-2v)} + \frac{2.54 \times v}{(1-2v)} 169 = 0$$

$$e^2 - 2.86 e \frac{6.08 - 4.54 v}{1-2v} + \frac{2.54 v}{1-2v} \cdot 169 = 0.$$

Stąd otrzymamy dla $v = 0.1$

$$e^2 - 20.10 e + 54.08 = 0$$

$$e^2 = 10.05 - \sqrt{10.05^2 - 54.08} = 3.28 \text{ m}$$

dla $v = 0.2$

$$e^2 - 24.65 e + 143.65 = 0$$

$$e = 12.33 - \sqrt{12.33^2 - 143.65} = 9.44 \text{ m.}$$

M_1 wyznaczamy z równania 153);

zatem dla $v = \frac{u}{l} = 0.1$, $m_1 = \frac{3.28}{1.3} = 0.252$, $p = 0.34 t/m$.

$$M_1 = \left[-\frac{4(1+\mathfrak{S})\mathfrak{S}^3}{4(1+\mathfrak{S})^2-1} - \frac{4(1+\mathfrak{S})(1-n_1)^2(1+2n_1-n_1^2)}{4(1+\mathfrak{S})^2-1} + \right. \\ \left. + \frac{2(1+n_1^2)^2-1}{4(1-\mathfrak{S})^2} \right] \frac{p l^2}{8}$$

$$M_1 = \left[-\frac{4(1+0.77)0.77^3}{4(1+0.77)^2-1} - \frac{4(1+0.77)(1-m_1)^2(1+2m_1-m_1^2)}{4(1+0.77)^2-1} + \right. \\ \left. + \frac{2(1-m_1^2)^2}{4(1+0.77^2)-1} \right] \frac{0.34 \cdot 13^2}{8}$$

$$M_1 = \left[-\frac{3.23}{11.53} - \frac{7.08 \times 0.559 \times 1.44}{11.53} + \frac{1.752}{11.53} \right] 7.183$$

$$M_1 = \left[-\frac{3.23}{11.53} - \frac{5.70}{11.53} + \frac{1.752}{11.53} \right] 7.183 = [-0.28 - 0.495 + 0.152] 7.183$$

$$M_1 = -4.475 \text{ tm.}$$

Dalej $M_1 - M_2 = \frac{2p(l-e^2)e^2 - p l^4 \mathfrak{S}^3}{4 l^2 (1+2\mathfrak{S})} =$

$$M_1 - M_2 = \frac{2 \times 0.34 (1 - 0.252)^2 0.252^2 - 0.34 \times 0.77^3}{4 (1 + 2 \times 0.77)} 13^2 =$$

$$M_1 - M_2 = \frac{0.0245 - 0.155}{10.16} \times 169 = -2.178 \text{ tm}$$

Według 155) $najw (-M) = M_1 - \frac{M_1 - M_2}{l} x + \frac{p e_1^2 x}{2 l}$,

$$najw (-M) = -4.475 + 2.178 \times 0.1 + \frac{0.34 \times 9.72^2 \times 0.1}{2} =$$

$$najw (-M) = -2.644 \text{ tm.}$$

Dla $v = \frac{u}{l} = 0.2$, $m_1 = \frac{9.44}{13} = 0.727$, $p = 0.3$, $\mathfrak{S} = 0.77$

otrzymamy według 155)

$$M_1 = \left[-\frac{4(1+\mathfrak{S})\mathfrak{S}^3}{4(1+\mathfrak{S})^2-1} - \frac{4(1+\mathfrak{S})(1-m_1)^2(1+2m_1-m_1^2)}{4(1+\mathfrak{S})^2-1} + \frac{2(1-m_1^2)^2}{4(1+\mathfrak{S})^2-1} \right] \times \frac{p l^2}{8}$$

Z rów. 152) otrzymamy, wstawiając $v = \frac{u}{l}$

$$e^2 - e l \frac{l(3+4\mathfrak{S}) - u(3+2\mathfrak{S})}{(3+2\mathfrak{S})(l-2u)} + \frac{(1+2\mathfrak{S})u l^2}{l-2u} = 0$$

$$e^2 - e 13 \frac{(3+4 \times 0.77) - v(3+2 \times 0.77)}{(3+2 \times 0.77)(1-2v)} + \frac{(1+2 \times 0.77)v}{1-2v} 13^2 = 0$$

$$e^2 - 13e \frac{6.08 - 4.54v}{4.54(1-2v)} + \frac{2.54 \times v}{(1-2v)} 169 = 0$$

$$e^2 - 2.86e \frac{6.08 - 4.54v}{1-2v} + \frac{2.54v}{1-2v} \cdot 169 = 0.$$

Stąd otrzymamy dla $v = 0.1$

$$e^2 - 20.10e + 54.08 = 0$$

$$e^2 = 10.05 - \sqrt{10.05^2 - 54.08} = 3.28 \text{ m}$$

dla $v = 0.2$

$$e^2 - 24.65e + 143.65 = 0$$

$$e = 12.33 - \sqrt{12.33^2 - 143.65} = 9.44 \text{ m.}$$

M_1 wyznaczamy z równania 153);

zatem dla $v = \frac{u}{l} = 0.1$, $m_1 = \frac{3.28}{13} = 0.252$, $p = 0.34 \text{ t/m.}$

$$M_1 = \left[-\frac{4(1+\mathfrak{S})\mathfrak{S}^3}{4(1+\mathfrak{S})^2-1} - \frac{4(1+\mathfrak{S})(1-m_1)^2(1+2m_1-m_1^2)}{4(1+\mathfrak{S})^2-1} + \right. \\ \left. + \frac{2(1+m_1^2)^2-1}{4(1-\mathfrak{S})^2} \right] \frac{p l^2}{8}$$

$$M_1 = \left[-\frac{4(1+0.77)0.77^3}{4(1+0.77)^2-1} - \frac{4(1+0.77)(1-m_1)^2(1+2m_1-m_1^2)}{4(1+0.77)^2-1} + \right. \\ \left. + \frac{2(1-m_1^2)^2-1}{4(1+0.77^2)-1} \right] \frac{0.34 \cdot 13^2}{8}$$

$$M_1 = \left[-\frac{3.23}{11.53} - \frac{7.08 \times 0.559 \times 1.44}{11.53} + \frac{1.752}{11.53} \right] 7.183$$

$$M_1 = \left[-\frac{3.23}{11.53} - \frac{5.70}{11.53} + \frac{1.752}{11.53} \right] 7.183 = [-0.23 - 0.495 + 0.152] 7.183$$

$$M_1 = -4.475 \text{ tm.}$$

Dalej

$$M_1 - M_2 = \frac{2p(l-e^2)e^2 - p l^4 \mathfrak{S}^3}{4 l^2 (1+2\mathfrak{S})} =$$

$$M_1 - M_2 = \frac{2 \times 0.34 (1 - 0.252^2) 0.252^2 - 0.34 \times 0.77^3}{4(1+2 \times 0.77)} 13^2 =$$

$$M_1 - M_2 = \frac{0.0245 - 0.155}{10.16} \times 169 = -2.178 \text{ tm}$$

$$\text{Według 155) } najw (-M) = M_1 - \frac{M_1 - M_2}{l} x + \frac{p e_1^2 x}{2l},$$

$$najw (-M) = -4.475 + 2.178 \times 0.1 + \frac{0.34 \times 9.72^2 \times 0.1}{2} =$$

$$najw (-M) = -2.644 \text{ tm.}$$

$$\text{Dla } v = \frac{u}{l} = 0.2, m_1 = \frac{9.44}{13} = 0.727, p = 0.3, \mathfrak{S} = 0.77$$

otrzymamy według 155)

$$M_1 = \left[-\frac{4(1+\mathfrak{S})\mathfrak{S}^3}{4(1+\mathfrak{S})^2-1} - \frac{4(1+\mathfrak{S})(1-m_1)^2(1+2m_1-m_1^2)}{4(1+\mathfrak{S})^2-1} + \frac{2(1-m_1^2)^2}{4(1+\mathfrak{S}^2)-1} \right] \times \frac{p l^2}{8}$$

$$M_1 = \left[-0.28 - \frac{7.08(1 - 0.727)^2(1 + 2 \times 0.727 - 0.727^2)}{11.53} + \frac{2(1 - 0.727^2)^2}{11.53} \right] \frac{0.34 \times 169}{8},$$

$$M_1 = [-0.28 - 0.76 + 0.088] \cdot \frac{0.34 \times 169}{8},$$

$$M_1 = -2.2842 \text{ tm.}$$

Dalej mamy

$$M_1 - M_2 = \left(\frac{4}{1 + 2\vartheta} (1 - m_1)^2 m_1^2 - \frac{2\vartheta^3}{1 + 2\vartheta} \right) \frac{p l^2}{8},$$

$$M_1 - M_2 = \left(\frac{4}{1 + 2 \times 0.77^2} (1 - 0.727)^2 0.727^2 + \frac{2 \times 0.77^3}{1 \times 2 \times 0.77} \right) \cdot \frac{0.34}{8} \cdot 169$$

$$M_1 - M_2 = (0.0620 - 0.36) \cdot 7.18,$$

$$M_1 - M_2 = -2.1396 \text{ tm, więc według 154)}$$

$$najw (-M) = -2.2842 + 2.1396 \times 0.2 + \frac{1}{4} 0.34 \times 3.56^2 \times 0.2 =$$

$$najw (-M) = -1.954 \text{ tm.}$$

Najw (+M) otrzymamy według równ. 156), 157), 158), a mianowicie dla $v = 0.1$ wstawimy $e = 3.28$, $p = 0.34$.

$$M_1 = - \left[\frac{2n_1^2}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} (2(1 + \vartheta)(2 - n_1)^2 - (2 - n_1^2)) + \frac{2\vartheta^3}{4 \cdot (1 + \vartheta)^2 - 1} \right] \frac{p l^2}{8},$$

$$M_1 = - \left[\frac{2 \times 0.252^2}{4(1 + 0.77)^2 - 1} (2(1 + 0.77)(2 - 0.252)^2 - (2 - 0.252^2)) + \frac{2 \times 0.77^3}{4(1 + 0.77)^2 - 1} \right] \frac{0.34 \times 169}{8},$$

$$M_1 = -[0.011 \times 3.48 + 0.078] 7.18 = +0.8348 \text{ tm}$$

Dalej otrzymamy

$$M_1 - M_2 = \left[-\frac{4}{1 + 2\vartheta} n_1^2 (1 - n_1^2) + \frac{2\vartheta^3}{1 + 2\vartheta} \right] \frac{p l^2}{8}$$

$$M_1 - M_2 = \left[-\frac{4}{1 + 2 \times 0.77} 0.252^2 (1 - 0.252^2) + \frac{2 \times 0.77^3}{1 + 2 \times 0.77} \right] \frac{0.34 \cdot 169}{8}$$

$$M_1 - M_2 = [-0.98415 + 0.36] 7.18 = -4.1224 \text{ tm}$$

$$najw (+M) = M_1 - (M_1 - M_2) 0.1 + \frac{p n}{2} (2n_1 - n_1^2 - n) l^2,$$

$$najw (+M) = -0.8348 + 0.41224 + \frac{0.34}{2} 0.1 (2 \times 0.252 - 0.252^2 - 0.1) 169,$$

$$najw (+M) = +0.5576.$$

Dla $v = 0.2$ jest $e = 9.44$ $p = 0.34 \text{ t/m}^2$

$$m_1 = \frac{9.44}{18} = 0.727$$

$$\text{więc } M_1 = \left[-\frac{2m_1^2}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} (2(1 + \vartheta)(2 - m_1)^2 - (2 - m_1)) + \frac{2\vartheta^3}{4(1 + \vartheta)^2 - 1} \right] \frac{p l^2}{8}$$

$$M_1 = \left[-\frac{2 \times 0.727^2}{11.53} (2 \times 1.77 \times (2 - 0.727)^2 - (2 - 0.727^2)) + \frac{2 \times 0.77^3}{11.53} \right] 7.18 = -0.243 \times 7.18 = -1.745 \text{ tm}$$

$$\begin{aligned} \text{Dalej mamy } M_1 - M_2 &= \left(-\frac{4}{1 + 2.5} n_1^2 (1 - n_1)^2 + \frac{2.5^3}{1 + 2.5} \right) \frac{p l^2}{8} = \\ &= \left(-\frac{4}{1 + 2 \times 0.77} 0.727^2 (1 - 0.727)^2 + \frac{2 \times 0.77^3}{1 + 2 \times 0.77} \right) \frac{0.34 \times 13^2}{8} = (-0.062 + \\ &\quad + 0.36) \times 17.18 = 2.1396 \text{ tm} \end{aligned}$$

Zatem *najw* (+ *M*) =

$$\begin{aligned} \textit{najw} (+ M) &= M_1 - (M_1 - M_2) n + \frac{p n}{2} (2 n_1 - n_1^2 - n) l^2 \\ (+ M) &= -1.745 - 2.1396 \times 0.2 + \frac{0.34 \times 0.2}{2} (2 \times 0.727 - 0.727^2 - 0.2) 169 \\ &= -1.817 + 4.225 = +2.908 \text{ tm.} \end{aligned}$$

Przeszło drugie część druga.

$$\begin{aligned} \textit{Najw} (- M) &= -\frac{2.5^3}{3 + 2.5} 0.34 \frac{10^2}{8} \\ \textit{najw} (- M) &= -1.082 \text{ tm} \end{aligned}$$

Najw (+ *M*) otrzymamy z rów. 161), mianowicie

$$\begin{aligned} \textit{najw} (+ M) &= -\frac{p l^2}{4(3 + 2.5)} + \frac{1}{2} p x (l - x) \\ &= -\frac{0.34 \times 13^2}{4(3 + 2 \times 0.77)} + \frac{1}{2} 0.34 n (1 - n) 13^2 \\ &= -3.16 + 28.73 n (1 - n) \end{aligned}$$

$$\text{a więc dla } n = \frac{x}{l} = 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5$$

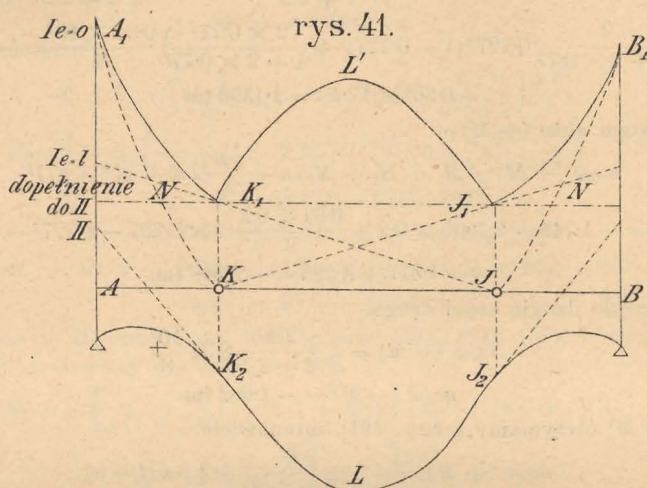
$$\textit{najw} (+ N) = 2.873 \quad 3.735 \quad 4.023 \text{ tm.}$$

III. Przybliżone wyznaczenie sił wewnętrznych.

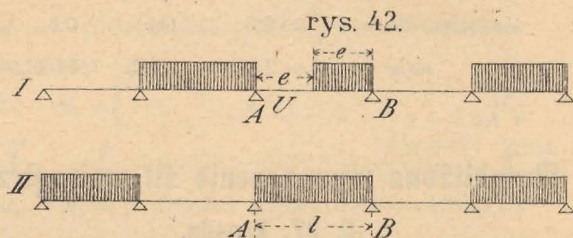
§. 27. Zasada.

Widzieliśmy na przykładzie, jak żmudne jest obliczenie sił zewnętrznych belki ciągłej trójprzęsłowej. Jeżeli belka ma więcej przęseł, obliczenie staje się jeszcze żmudniejszem. Znacznie uprościć da się jednak rachunek, jeżeli według Lebera przyjmować będziemy dla momentów tylko całkowite obciążenie przęseł. Wiemy z poprzedniego rozdziału, że każde przęsło średnie da się podzielić na trzy części. W części średniej otrzymamy największe lub najmniejsze momenty, gdy dane przęsło jest całe obciążone lub całe nieobciążone, a inne przęsła na-

przemian. W pierwszej i trzeciej części linie największych i najmniejszych M są liniami czwartego stopnia, które jednak dadzą się w przybliżeniu zastąpić prostą i parabolami, przy-
czem otrzymamy zamiast A_1K_1 (rys. 41.) linią A_1NK_1 . Ta linia



łamana odpowiada obciążeniu całkowitemu przeseł, i tak *najw* ($-M$) w A odpowiada obciążeniu I (rys. 42.), gdy $e=0$, dla



którego otrzymujemy parabolę A_1N . *Najw* ($-M$) w K odpowiada obciążeniu I, gdy $e=l$, dla którego otrzymujemy prostą NK_1 , przechodzącą przez punkt stały I.

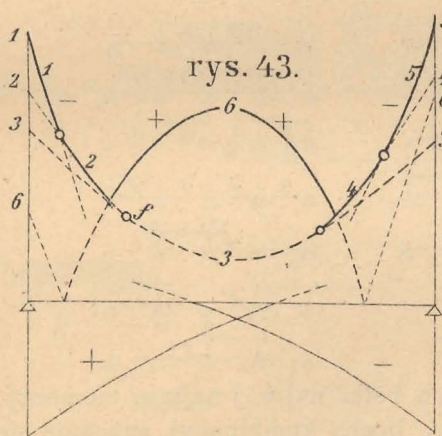
Leber udowadnia, że linie te *najw* ($-M$) przybliżonych mają wspólne styczne z linią dokładną w A_1 i K_1 tak, że wykreśliwszy te linie moglibyśmy jeszcze na podstawie tych stycznych wykreślić krzywą A_1K_1 . Leber nie kresli tych linii*),

*) Weyrauch przyjmuje nawet w przybliżeniu proste A_1K_1 i I_1B_1 , linie te są jednak zanadto niedokładne.

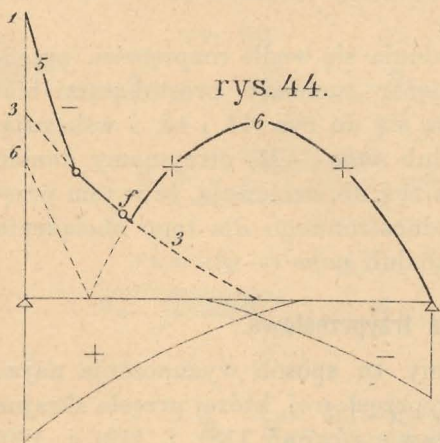
jednak wykreślenie ich jako parabolii wedle poprzedniego nie podlega najmniejszej trudności, a daje wyniki znacznie więcej zbliżone do dokładnych.

Ponieważ dla obliczenia przekroju chodzi zwykle głównie o bezwzględnie największe wartości, więc, jeśli chcemy je otrzymać, obrócimy najw ($-M$) około osi poziomej. Przelóżmy je na górę, wtedy punkt L przypadnie na L' . Widzimy stąd, że bezwzględnie największe momenty możemy łatwo wyznaczyć w przybliżeniu, przyjmując obciążenie całkowite przesz.

Metoda Lebera polega na tem, że obliczamy momenty podporowe dla obciążenia całkowitego każdego przeszła z osobna. Obciążenia te i momenty kombinujemy w ten sposób, aby otrzymać przybliżoną linią momentów. Leber uwzględnia zarazem ciężar własny, inny dla każdego przeszła; można jednak łatwo obliczyć osobno momenty podporowe w skutek ciężaru własnego, a osobno w skutek ciężaru ruchomego. Znając momenty podporowe, łatwo obliczymy albo wykreślimy zapomocą szablonu parabolicznego momenty w drugim przeszle całkowicie obciążonem lub nieobciążonem. Dla sił poprzecznych musi być w danem przeszle obciążenie jednostronne. Dla tego obciążenia oblicza się momenty podporowe i dodaje do nich momenty, powstałe z obciąż.



rys. 43.



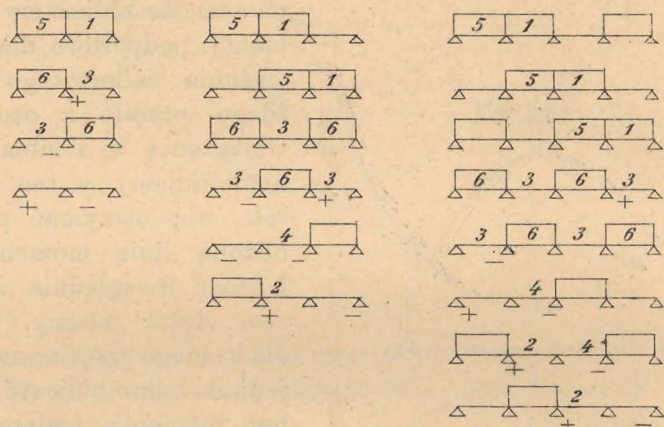
rys. 44.

żenia całkowitego innych przęseł. Na tej podstawie oblicza się największe siły poprzeczne w kilku punktach przęsa.

§. 28. Najniekorzystniejsze obciążenia.

Na rysunku 43. i 44. są wykreślone linie największych i najmniejszych momentów i sił poprzecznych dla sumy ciężarów stałego i ruchomego dla przęsa średniego i skrajnego. Na rys. 45. podajemy wedle Lebera schemat obciążeń, które

rys. 45.



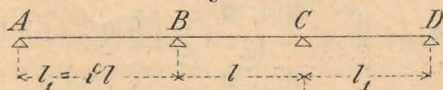
sprawiają w różnych częściach belki najw. i najmn. momenty. Jeśli belka jest symetryczna, liczba kombinacyj znacznie się zmniejsza.

Ciężar własny, który zmienia się wedle rozpiętości, przedstawiliśmy czarną kreską, ciężar ruchomy prostokątami białymi. Liczby wpisane odnoszą się do rys. 43. i 44. i wskazują, którą część linii *najw* (+ M) lub *najw* (− M) otrzymamy danem obciążeniem. Znaki + i − na rys. 45. oznaczają, że w tem przęśle po dodaniu obciążenia jednostronnego dla tego obciążenia przęseł otrzymamy *najw* (+ Q) lub *najw* (− Q).

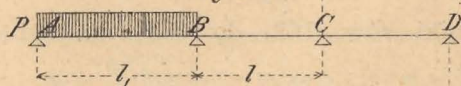
§. 29. Belka trzyprzęsłowa.

Jako przykład wskażemy tu sposób wyznaczenia najw. sił zewnętrznych dla belki trzyprzęsłowej, której przęsa skrajne są równe (rys. 46.). Na podstawie równań 118) i 119) i 120) otrzymamy, jeżeli pierwsze przęsło jest obciążone (rys. 47.)

rys. 46.

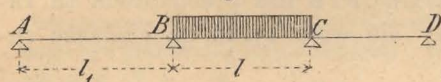


rys. 47.



$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{4\vartheta(1+\vartheta)}{4(1+\vartheta)^2-1} \frac{pl^2_1}{8} \\ M_2 &= -\frac{2\vartheta}{4(1+\vartheta)^2-1} \frac{pl^2}{8} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 162)$$

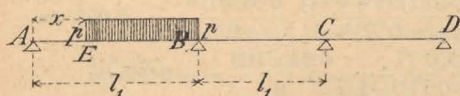
rys. 48.



Jeżeli drugie przęsło jest całkowicie obciążone (rys. 48), otrzymamy

$$M_1 = M_2 = -\frac{2}{3+2\vartheta} \frac{pl^2}{8} \dots \dots \dots 163)$$

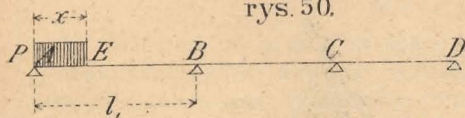
rys. 49.



Jeżeli pierwsze przęsło jest obciążone od E do B (rys. 49.), to otrzymamy z 132), gdy $m = \frac{x}{l_1}$,

$$M_1 = -\frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2-1} (1-m^2)^2 \frac{pl^2}{8} \dots \dots \dots 164)$$

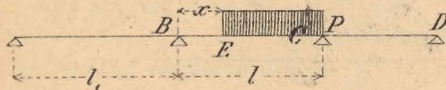
rys. 50.



Jeżeli pierwsze przęsło (rys. 50.) jest obciążone od A do E, to według 134)

$$M_1 = -\frac{4(1+\vartheta)\vartheta^3}{4(1+\vartheta)^2-1} m^2(2-m^2) \frac{pl^2}{8} \dots \dots \dots 165)$$

rys. 51.



Jeżeli drugie przęsło jest obciążone od E do C (rys. 51.), to według 136), jeżeli $\frac{x}{l} = n$,

$$M_1 - M_2 = \frac{4(1-n)^2 n^2}{1+2\vartheta} p \frac{l^2}{8} \dots \dots \dots 166)$$

$$M_1 = -2.057 + 0.965 = 1.092 \text{ tm}$$

Wykreślnie moglibyśmy zrobić $B_1 6 = 1.092 \text{ tm}$ i wykreślić szabloną paraboliczną dla $p = 0.34$ linii 6. Szablonę tę możemy wyciąć z papieru, wykreśliwszy parabolę momentów według równania:

$$M = \frac{p}{2} x(l-x), \text{ jak dla belki zwykłej.}$$

Liczebnie możemy obliczyć punkty linii 6 wedle rów. 67);

$$\begin{aligned} \text{najw } (+M) &= -M_1 + \frac{l_1^2}{2} 0.34 m(1-m) = -1.092 m + \frac{10^2}{2} 0.34 m(1-m), \\ &= -1.092 m + 17 m - 17 m^2 = 15.908 m - 17 m^2. \end{aligned}$$

a więc zupełnie tak samo, jak w §. 26.

Z wzoru tego otrzymamy, jak poprzednio, dla

dla $m=0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\text{najw. } (+M)=0$	1.421,	2.502,	3.242,	3.643,	3.704,	3.425,	2.806,	1.846

Linia 3 leży poniżej 6, nie potrzebujemy więc jej koniecznie wyznaczać, co zresztą nie przedstawia żadnej trudności. Dla $\text{najw } (-M)$ musi być przeszło średnie obciążone (rys. 45) a zatem $\text{najw } (-M) = -2.109 m$, jak w §. 26 a więc

dla $m=0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$\text{najw } (-M)=0$	-0.211	-0.422,	-0.633,	-0.844,	-1.055,	-1.265
		0.7	0.8			
		-1.476	-1.687	tm		

Dla wyznaczenia linii 5) obciążymy pierwsze i trzecie przeszło (rys. 45), a więc

$$M_1 = -2.057 - 3.160 = -5.217 \text{ (punkt } B_1 \text{ rys. 52). Dla } m = \frac{x}{l_1} \text{ otrzymamy:}$$

$$M = -5.217 m + \frac{l_1^2}{2} \cdot 0.34 m(1-m) = -5.217 m + 17 m - 17 m^2 = 11.783 m - 17 m^2$$

$$\begin{aligned} \text{Więc dla } m &= 0.8 & 0.9 \\ M &= -1.954 & -3.165 \text{ tm.} \end{aligned}$$

Widzimy, że w §. 26 otrzymaliśmy dla $m=0.9$ $M = -3.42 \text{ tm}$. Jeżeli jednak zaokrąglimy kąt przy F łukiem parabolicznym, to zbliżymy się znacznie do wartości dokładnych. Punkt B_2 możemy także łatwo otrzymać, gdyż dla $\text{najw } +M$ musi być wtedy obciążone tylko trzecie przeszło, więc $M_1 = 0.965 \text{ tm}$, jak w §. 26.

Drugie przeszło.

Dla wyznaczenia linii 1. w drugim przeszle obciążymy pierwsze dwa przeszła, więc $M_1 = -5.217 \text{ tm}$.

$$M_2 = +0.965 - 3.16 = -2.195 \text{ tm},$$

a według równania 67).

$$M = -5.217 - (-5.217 + 2.195) n + \frac{13^2}{2} 0.34 n(1-n),$$

$$M = -5.217 + 3.022 n + 28.73 n(1-n).$$

$$\text{A zatem dla } n = 0.1 \quad n = 0.2$$

$$M = -2.329 \quad -0.016 \text{ tm}$$

Dla wyznaczenia linii 2 obciążamy tylko pierwsze przęsło, więc

$$M_1 = -2.027, M_2 = 0.965$$

$$M = -2.057 - (-2.047 - 0.965)n = -2.057 + 3.022n$$

$$\text{Stąd dla } n = \begin{array}{cccc} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{array}$$

$$M = \begin{array}{cccc} -1.755 & -1.453 & -1.150 & -0.829 \text{ tm.} \end{array}$$

I tu widzimy, że linie 1, 2, dość znacznie odstępują od linii *najw* ($-M$), że jednak wrysowawszy między te dwie linie łuk paraboliczny, znacznie się zbliżymy do prawdy.

Dla wyznaczenia poziomej 3 obciążymy oba przęsła skrajne, więc

$$M_1 = M_2 = M = -2.057 + 0.965 = M = -1.092 \text{ tm.}$$

Dla wyznaczenia paraboli 6 obciążamy tylko średnie przęsło, więc $M_1 = -3.16 \text{ tm}$ a $M = -3.16 + 28.73n(1-n)$, zatem jak w §. 26.

$$\text{dla } n = \begin{array}{cccc} 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \end{array}$$

$$M = \begin{array}{cccc} 1.437 & 2.873 & 3.735 & 4.023 \text{ tm.} \end{array}$$

b) Siły poprzeczne.

Pierwsze przęsło. Dla *najw* ($+Q$) w pierwszym przęśle musi być oprócz obciążenia jednostronnego w tem przęśle obciążone także trzecie przęsło według 164).

$$M_1 = -\frac{4(1+q)^3}{4(1+q)^2-1} (1-m^2)^2 \frac{pl^2}{8} + 0.965$$

$$M_1 = -0.2803(1-m^2)^2 \times \frac{0.34 \cdot 13^2}{8} + 0.965 =$$

$$M_1 = -2.0125(1-m^2) + 0.965.$$

$$\text{Jeżeli teraz w rów. 56) wstawimy } M'=0 \text{ i } M''=M_1, \text{ to } najw (+Q) = -\frac{6.81p(1-m^2)^2+5.91}{11.53} + 5p(1-m^2), \text{ jak w §. 26.}$$

Dla *najw*. ($-Q$) obciążamy przęsło pierwsze z lewej strony danego punktu i drugie przęsło, więc według 165.

$$M_1 = -\frac{4 \cdot (1+q)^3}{4(1+q)^2-1} m^2(2-m^2) \frac{pl^2}{8} - 3.16,$$

$$M_1 = -2.0125 m^2(2-m^2) - 3.16.$$

Jeżeli teraz wstawimy w rów. 57) tę wartość, to

$$najw(-Q) = \frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2} p m l^2 q = -0.203 m^2(2-m^2) - 0.338 - 1.7 m^2, \text{ jak w §. 26.}$$

Drugie przęsło.

Dla *najw* $+Q$ obciążymy pierwsze przęsło całe a drugie po prawej stronie danego punktu, więc według 166).

$$M_1 - M_2 = -2.057 - 0.965 + \frac{4(1-n)^2 n^2}{1+2q} p \frac{l^2}{8} = -3.022 + 47.740(1-n^2) n^2 p$$

Więc według 167)

$$najw (+Q) = + \frac{3.022 - 47.74 p (1-n^2) n^2}{13} + \frac{1}{2} p (1-n^2)^2 B$$

$$= 0.207 + 0.906(1-n^2)(2.44-n^2), \text{ jak w §. 26.}$$

IV. Belka o nieskończonej ilości przęseł.

§. 31. Ogólne uwagi.

Jeżeli belka ciągła ma 4 lub 5 przęseł, to możemy w praktyce obliczać siły zewnętrzne w ten sposób, jak gdyby ilość przęseł była nieskończona. Stosuje się to zwłaszcza do obliczenia szyn kolejowych i podłużnic. Z tego powodu zastanowimy się tu nad belką o nieskończonej ilości przęseł.

Przypuśćmy przytem, że wszystkie przęsła są równe, to według rów. 37)

$$\mu_2 = 4, \quad \mu_3 = \frac{4l - \frac{l}{4}}{l} = 3.75, \quad \mu_4 = 3.733$$

$$\mu_5 = \mu_6 = 3.732, \text{ więc otrzymamy z rów. 44)}$$

dla przęsła	2	3	4	5
$\frac{a}{l}$	0.2000	0.2105	0.2113	0.2113.

Przy dowolnem obciążeniu możemy teraz momenty i siły poprzeczne obliczyć według rozdziału II. My tu jednak zastanowimy się bliżej nad tym wypadkiem, gdy belka jest obciążona ciężarem stałym jednostajnie rozłożonym g i gdy jeden tylko ciężar skupiony może leżeć w jednym przęsle.

§. 32. Obciążenie zupełne jednostajne ciągłe.

Jeżeli belka o nieskończonej ilości równych przęseł jest obciążona całkowicie ciężarem jednostkowym g , to według rów. 29) otrzymamy następujące równania.

$$2 M_1 (l + l) + M_2 l + -\frac{1}{4} g (l^3 + l^3) = -\frac{1}{2} g l^3,$$

$$M_1 l + 2 M_2 (l + l) + M_3 l = -\frac{1}{2} g l^3$$

czyli

$$\left. \begin{aligned} 4 M_1 + M_2 &= -\frac{1}{2} g l^2 \\ M_1 + 4 M_2 + M_3 &= -\frac{1}{2} g l^2 \\ \dots \dots \dots \\ M_m + 4 M_{m+1} + M_{m+2} &= -\frac{1}{2} g l^2 \\ \dots \dots \dots \\ M_{n-1} + 4 M_n &= -\frac{1}{2} g l^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 168$$

Jeżeli n jest nieskończenie wielkie, to możemy przyjąć $M_m = M_{m+1} = M_{m+2}$, więc $6 M_m = -\frac{1}{2} gl^2$, a stąd momenty podporowe przęsła średniego

$$M_m = -\frac{1}{12} gl^2 = -0.0833 gl^2 \dots \dots \dots 169)$$

Wstawiawszy w pierwsze dwa równania 168) $M_3 = -\frac{1}{12} gl^2$, otrzymamy $4 M_1 + M_2 = -\frac{1}{2} gl^2$,

$$\left. \begin{aligned} M_1 + 4 M_2 + (-\frac{1}{12} gl^2) &= -\frac{1}{2} gl^2, \text{ z czego wynika} \\ M_2 &= \frac{7}{90} gl^2 = -0.07778 gl^2 \\ M_1 &= -0.10556 gl^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 170)$$

Na podstawie tych momentów podporowych możemy wyznaczyć siły poprzeczne i momenty.

Według rów. 30) otrzymamy
dla przęsła skrajnego

$$\left. \begin{aligned} Q_1' &= \frac{1}{2} gl + \frac{M_1}{l} = +0.3944 gl \\ Q_1'' &= -\frac{1}{2} gl + \frac{M_1}{l} = -0.6056 gl \\ Q_1 &= 0.3944 gl - gx, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 171)$$

dla przęsła drugiego

$$\left. \begin{aligned} Q_2' &= \frac{1}{2} gl - \frac{M_1 - M_2}{l} = +0.5278 gl \\ Q_2'' &= -\frac{1}{2} gl - \frac{M_1 - M_2}{l} = -0.4722 gl \\ Q_2 &= 0.5278 gl - gx, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 172)$$

a dla przęseł średnich

$$\left. \begin{aligned} Q' &= \frac{1}{2} gl = +0.5 gl \\ Q'' &= -\frac{1}{2} gl = -0.5 gl \\ Q &= 0.5 gl - gx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 173)$$

Momenty zaś otrzymamy z równania 32) dla przęsła skrajnego

$$M = \frac{1}{2} gx(l-x) + \frac{M''x}{l} = \frac{1}{2} gx(1-x) - 0.1056 glx \dots \dots 174)$$

Najw (+M) jest dla x_0 , dla którego $Q=0$, więc według rów. 171) $x_0 = 0.3944l$, zatem

$$\text{najw (+M)} = +0.0778 gl^2 \dots \dots \dots 176)$$

Dla przęseł średnich otrzymamy z powodu, że

$$\begin{aligned} M' &= M'', \text{ najw (+M) dla } x_0 = \frac{1}{2} l, \text{ więc} \\ \text{najw (+M)} &= 0.125 gl^2 - 0.0833 gl^2 = +0.0417 gl^2 \dots \dots 176) \end{aligned}$$

§. 33. Momenty podporowe dla obciążenia układem ciężarów skupionych.

Jeżeli r -te przęsło jest obciążone ciężarem skupionym P , to według 14)

$$\mathfrak{N}_r' = -\frac{Pe_1(l^2 - e_1^2)}{l^3}, \quad \mathfrak{N}_r'' = -\frac{Pe(l^2 - e^2)}{l^3},$$

zaś według 54)

$$M_{r-1} = \frac{\nu_r \mathfrak{N}_r' - \mathfrak{N}_r''}{\mu_r \nu_r - 1},$$

albo wstawiając $\nu_r = \mu_r = 3.7321$

$$\begin{aligned} M_{r-1} &= -\frac{3.7321 Pe_1(l^2 - e_1^2) - Pe(l^2 - e^2)}{12.9287 l^2} = \\ &= \frac{P}{12.9287 l^2} (3.7321 e(l-e)(2l-e) - e(l^2 - e^2)) \quad \dots 177) \end{aligned}$$

Najw M_{r-1} , a zatem i największe wszystkie momenty podporowe po lewej stronie r -tego przęsła, otrzymamy dla e_0 ,

dla którego $\frac{dM_{r-1}}{de} = 0$, zatem

$$3.7321(2l^2 - 2e_0 l - 4e_0^2 l + 3e_0^2) - l^2 + 3e_0^2 = 0, \text{ a stąd}$$

$$e_0 = 0.7886l - \sqrt{0.7887^2 l^2 - 0.4554 l^2} = 0.3804l,$$

a wstawiając to w r. 177), otrzymamy dla obciążenia r -tego przęsła

$$\text{najw } M_{r-1} = -0.08505 Pl \quad \dots 178)$$

$$\text{Dalej otrzymamy } M_{r-2} = -\frac{1}{3.7321} M_{r-1} = +0.02279 Pl$$

$$M_{r-3} = -0.268^2 \times 0.08505 Pl = -0.0061 Pl$$

$$M_{r-4} = -0.268^3 \times 0.08505 Pl = +0.00164 Pl$$

$$M_{r-5} = -0.268^4 \times 0.08505 Pl = -0.00046 Pl$$

$$M_{r-6} = +0.00012 Pl.$$

Jeżeli więc co drugie przęsło na prawo r -tej podpory jest obciążone ciężarem skupionym P , to

$$\begin{aligned} \text{najw } (-M_r) &= -(0.08505 + 0.00610 + 0.00046) Pl = \\ &= -0.09161 Pl \quad \dots 179) \end{aligned}$$

Jeżeli co drugie przęsło z obu stron r -tej podpory jest najniekorzystniej obciążone, to

$$\text{najw } (-M_r) = -(0.09161 + 0.09161) Pl = -0.18322 Pl \quad \dots 180)$$

Dla przęsła skrajnego jest

$$a=0, \quad b=0.21132l, \quad c=0.78868l.$$

Wstawiawszy to w rów. 60), jeżeli ciężar P znajduje się w skrajnem przeszle, otrzymamy

$$M_0 = 0, \quad M_1 = -\frac{Pbe_1}{cl^2}(l+e) = -\frac{Pbe(l^2-e^2)}{cl^2},$$

a *najw* ($-M_1$) jest dla e_0 , dla którego $\frac{dM_1}{dx} = 0$,

$$\text{więc } \frac{Pb}{cl^2}(l^2-3e_0^2) = 0, \text{ stąd } e_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0.5774l.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \text{najw } (-M_1) &= -\frac{Pl \cdot 0.21132 \times 0.5774(1-0.5774^2)}{0.78868} = \\ &= -0.10313Pl \dots\dots\dots 181) \end{aligned}$$

Dla drugiego przeszła jest

$$a = 0.2l, \quad b = 0.21132l, \quad c = 0.58868l, \text{ więc według 60)}$$

$$M_1 = -\frac{Pae(l-e)}{cl^2}(2l-3b-e),$$

$$\frac{dM_1}{de} = -\frac{Pa}{cl^2}(2l^2-3bl-6le_0+6e_0b+3e_0^2) = 0,$$

więc

$$e_0 = (l-b) - \sqrt{(l-b)^2 - \frac{2}{3}l^2 + bl},$$

a po wstawieniu wartości

$$e_0 = 0.78868l - 0.40827l = 0.38041l.$$

Dla tej wartości e_0 będzie zatem

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{Pl \cdot 0.2 \times 0.3804 \times 0.6196(2-3 \times 0.21132-0.38041)}{0.58868}, \\ M_1 &= -0.07893Pl \dots\dots\dots 182) \end{aligned}$$

A zatem, gdy obciążone przeszło 1, 2, 4 i 6,

$$\begin{aligned} \text{najw } (-M_1) &= -(0.10313 + 0.07893 + 0.006 + 0.00046)Pl = \\ &= -0.1886Pl \dots\dots\dots 183) \end{aligned}$$

Chcąc otrzymać *najw* ($+M_r$) na r -tej podporze, musimy umieścić ciężary P w przeszłach przedtem nieobciążonych, otrzymamy więc

$$\begin{aligned} \text{najw } (+M_r) &= +(0.02279 + 0.00164 + 0.00012)Pl, \\ \text{najw } (+M_r) &= +0.02455Pl, \dots\dots\dots 184) \end{aligned}$$

a jeśli obciążymy w ten sposób belkę po obu stronach r -tej podpory, to

$$\text{najw } (+M_r) = 0.04910Pl \dots\dots\dots 185)$$

Aby otrzymać *najw* ($+M_1$) możemy zastosować wzór 180),

zmniejszwszy tylko moment w stosunku $\frac{3.732}{4.000}$, bo $\mu_2 = 4.0$,

a zatem

$$\text{najw } (+M_1) = +0.02290Pl \dots\dots\dots 186)$$

§. 34. Największe momenty dla obciążenia układem ciężarów skupionych.

Momenty podporowe, któreśmy wyznaczyli w poprzednim paragrafie są największymi momentami ujemnymi, dodatnie najw. momenty otrzymamy zawsze w punktach zaczepienia siły P . W tym wypadku mamy według 25)

$$Q = \frac{M'' - M'}{l} + \frac{Pe_1}{l},$$

a według 27) $M = M' + (M'' - M') \frac{e}{l} + \frac{Pe_1 e}{l} \dots 187)$

Przeszło skrajne.

Jeżeli tylko przęsło skrajne jest obciążone ciężarem P , to według 60) $M' = 0$,

$$M'' = -\frac{Pbe(l^2 - e^2)}{cl^2}, \text{ więc}$$

$$M = -\frac{Pbe(l^2 - e^2)}{cl^3} + \frac{Pe(l - e)}{l}.$$

Chcąc wyznaczyć *najw* ($+M$), zróbmy

$$\frac{dM}{de} = -\frac{Pb}{cl^3}(2e_0 l^2 - 4e_0^3) + \frac{P}{l}(l - 2e_0) = 0, \text{ zatem}$$

$$-\frac{2b}{cl}e_0 + \frac{4b}{cl^3}e_0^3 + 1 - \frac{2}{l}e_0 = 0, \text{ a stąd } e_0 = 0.427l,$$

a zatem $\text{najw } (+M) = +0.2047 Pl.$

Jeżeli oprócz tego obciążymy inne przęsła najniekorzystniej, to otrzymamy według 186)

$$M_1 = 0.02290 Pl, \text{ a } M = 0.02290 Pl \frac{x}{l}.$$

Wstawiając $x = 0.427l$ i dodawszy ten moment do poprzedniej wartości, otrzymamy

$$\text{najw } (+M) = 0.2047 Pl + 0.0098 Pl = +0.2145 Pl \dots 188)$$

Przędło średnie.

W przęśle średnim największy moment otrzymamy, gdy $e_0 = \frac{1}{2}l$, a to z powodu, że $M' = M''$, a zatem według rów. 187),

$$M = M' + \frac{Pl}{4} \dots 189)$$

Wstawiając $e = \frac{l}{2}$ w rów. 177), otrzymamy wreszcie

$$M = -\frac{P}{12.9287l^2}(3.7321\frac{3}{8}l^3 - \frac{3}{8}l^3) + \frac{Pl}{4} = 0.17076 Pl \dots 190)$$

raz wykreślimy w wieloboku sił równoległe do zamykających, to otrzymamy oddziaływania O_0, O_1, O_2, O_3 .

Jeżeli mamy oddziaływania, wyznaczenie momentów i sił poprzecznych nie podlega już najmniejszej trudności *). Widzimy więc, że w celu wyznaczenia sił zewnętrznych belki ciąglej dążyć nam wypada najpierw do wyznaczenia momentów podporowych.

§. 37. Linia ugięcia.

Wiemy ze statyki budowli **), że równanie linii ugięcia jest:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{\epsilon I} = -\frac{\left(\frac{M}{a^2}\right)}{\left(\frac{\epsilon I}{a^2}\right)} \dots\dots\dots 198)$$

w którym moment sił zewnętrznych M wyrazić mamy jako funkcję x , a a oznacza długość, którą możemy dowolnie przyjąć.

Równanie zaś linii sznurowej ***) jest

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{b} \dots\dots\dots 199)$$

jeśli q oznacza ciężar jednostkowy a b odległość biegunową.

Widzimy więc, że obie linie będą te same, gdy zrobimy $q = \frac{M}{a^2}$, a $b = \frac{\epsilon I}{a^2}$, a zatem linia ugięcia jest linią sznurową, dla której obciążenie jednostkowe jest proporcjonalne do momentu M a odległość biegunowa do ϵI , iloczynu momentu bezwładności i współczynnika sprężystości.

Więc jeśli powierzchnię momentów uważamy jako powierzchnię obciążenia i do wykreślenia wieloboku sznurowego użyjemy odległości biegunowej $b = \frac{\epsilon I}{a^2}$ (b w podziałce sił), to ten wielobok sznurowy będzie przedstawiał oś belki. Jestto twierdzenie Mohra.

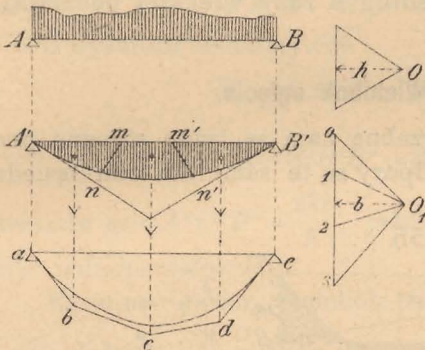
*) por. Podręcznik Statyki budowli wyd. II. str. 16.

**) " " " " " " " 246 rów. 379.

***) " " " " " " " 262 " 447.

Jeżeli zamiast $b = \frac{\epsilon I}{a^2}$ przyjmiemy $b = \frac{1}{n} \frac{\epsilon I}{a^2}$, to rzędne linii ugięcia będą n razy większe. Jeżeli więc długości były wykreślone w podziałce $\frac{1}{n}$, to teraz rzędne linii ugięcia będą w naturalnej wielkości.

Jeżeli więc belka AB (rys. 54.) jest dowolnie obciążona i dla tego obciążenia wyznaczmy zapomocą odległości biegunowej h momenty, to



uważamy teraz według twierdzenia Mohra powierzchnię momentów jako powierzchnię obciążenia, dzielimy ją na części dowolnie liniami mn i $m'n'$, kreślimy wielobok sił 0123 , używając dla przemiany powierzchni na linie podstawy a , obieramy biegun O_1

w odległości b i kreślimy drugi wielobok sznurowej. Jeżeli linie podziału są pionowe, to, jak wiemy*), wielobok ten jest styczny do linii sznurowej. W ten sposób otrzymujemy wykreślenie ugięcia belki o przekroju stałym. Jeżeli zaś linie podziału mn i $m'n'$ nie są pionowe, to wielobok sznurowej $abcde$ nie będzie stycznym do linii sznurowej. Tylko boki skrajne, równoległe do promieni skrajnych wieloboku są styczne w a i e do linii sznurowej, która według twierdzenia Mohra przedstawia ugiętą oś belki. Boki skrajne drugiego wieloboku sznurowego są więc stycznymi do linii sznurowej na podporach czyli tak zwanymi stycznymi podporowemi (n. *Stütz tangente*, a. *tangential lines over the points of support*).

Z równ. 198) i 199) wynika, że

$$\frac{q}{b} = \frac{M}{\epsilon I}, \dots \dots \dots 200)$$

a jeśli chcemy, aby rzędne linii ugięcia były n razy większe,

*) por. Podręcznik Statyki Budowli wyd. II. str. 22.

to robimy $\frac{q}{b} = \frac{nM}{\varepsilon I} = \frac{nhy}{\varepsilon I}$, gdzie y oznacza rzędną linii momentów, a h pierwszą odległość biegunową. Jeżeli zrobimy teraz $aq = y \cdot 1$, to $\frac{y}{ab} = \frac{nhy}{\varepsilon I}$, więc

$$n = \frac{\varepsilon I}{abh}, \dots \dots \dots 201)$$

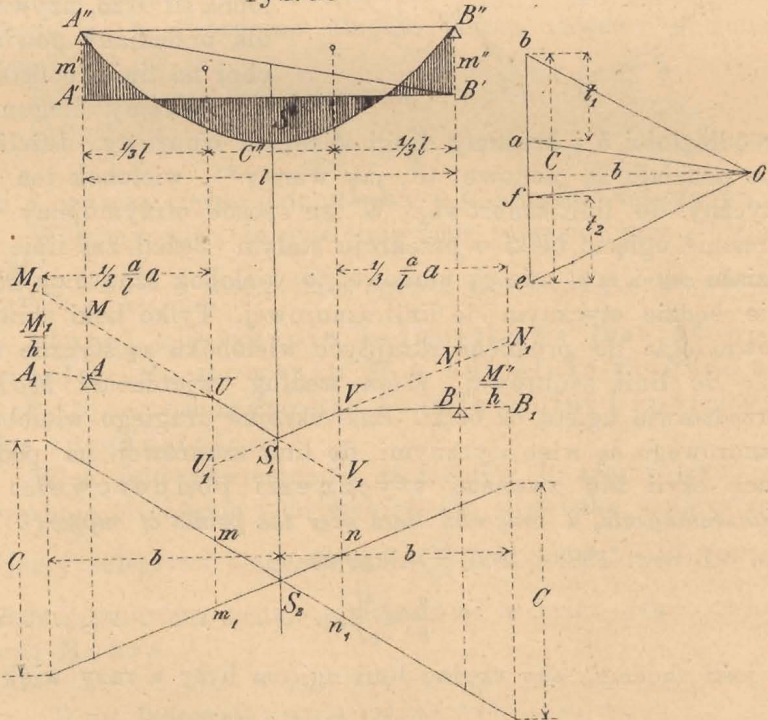
przyczem b odczytać należy w podziałce sił.

Jeżeli podpory są w nierównej wysokości, to należy różnice wysokości rysować według n razy większej podziałki niż długość.

§. 38. Wielobok ugięcia.

Dla belki ciągłej potrzebne nam są tylko styczne podpory, które dla pewnej podpory są te same dla obu sąsiednich

rys. 55.



prześel. W takim razie powierzchnię momentów możemy po-

dzielić prostemi ukośnemi, a że na podporach momenty zwykłe są ujemne, więc dzielimy powierzchnię momentów, jak to uwidoczniliśmy, na rys. 55., na trzy części prostemi $A''B'$ i $A''B''$.

Powierzchnię $A''C''B''$, którąbyśmy otrzymali jako powierzchnię momentów dla belki jednoprzęsłowej, gdyby $A''B''$ była zamykającą, nazywamy zwykłą powierzchnią momentów (*einfache Momentenfläche*). Niech będzie wielkość jej ac , to

$$A'A''C''B''A' = -A'A''B' - A''B''B' + A''C''B'' = a(-t_1 - t_2 + c).$$

Z rysunku widzimy, że

$$at_1 = A'A''B' = \frac{1}{2}m'l = \frac{1}{2}\frac{M'l}{h},$$

$$at_2 = A'B''B'' = \frac{1}{2}m''l = \frac{1}{2}\frac{M''l}{h},$$

nareszcie $ac = A''C''B'' = \frac{\mathfrak{M}l}{h}$, jeżeli $\mathfrak{M}$ oznacza średni moment belki jednoprzęsłowej.

Kreślimy teraz wielobok sił $abef$, obieramy biegun O w odległości $b = \frac{\varepsilon I}{a^2 n}$ według poprzedniego paragrafu, więc będzie

$$t_1 = \frac{1}{2}M'\frac{l}{ah}, \quad t_2 = \frac{1}{2}M''\frac{l}{ah}, \quad c = \mathfrak{M}\frac{l}{ah}, \quad b = \frac{\varepsilon I}{a^2 n} \dots 202)$$

Długość a , służącą za podstawę przy wyrażaniu płaszczyzny przez proste, możemy przyjąć dowolnie, a więc n. p. możemy przyjąć a = średniej rozpiętości albo jednej z rzeczywistych rozpiętości. Gdy wszystkie przęsła są równe, wtedy przyjmujemy $a = l$, więc mamy następne siły:

$$t_1 = \frac{1}{2}\frac{M'}{h}, \quad t_2 = \frac{1}{2}\frac{M''}{h}, \quad c = \frac{\mathfrak{M}}{h}.$$

Gdyby styczne podporowe były znane, to konstrukcja drugiego wieloboku sznurowego byłaby następną:

W odstępach b od pionowej przez środek ciężkości S zwykłej powierzchni momentów odcinamy z obu stron długość $c = \mathfrak{M}\frac{l}{ah}$ i łączymy te punkty na krzyż, otrzymane w ten sposób proste nazywamy liniami krzyżowymi (n. *Kreuzlinien*, fr. *transversales, lignes en croix*), które pierwszy wprowadził Culmann, a które przedstawiają promienie wieloboku sił.

Jeżeli znamy styczne podporowe A_1U i B_1V , to zróbmy $UU_1=mm_1$ i $VV_1=nn_1$, połączmy U z V_1 i U_1 z V , a otrzymamy drugi wielobok sznurowy, który przedstawia linię ugięcia i który dlatego nazywamy drugim wielobokiem sznurowym lub wielobokiem ugięcia (n. *elastisches Polygon, zweites Seilpolygon, fr. le second polygon funiculaire*). Konstrukcyę powyższą podał Mohr.

§. 39. Wyznaczenie momentów podporowych.

Z rys. 55. widzimy, że $AMU \sim abO$ i $BNV \sim Ofc$, a więc $AM:t_1=\frac{1}{3}l:b$ i $BN:t_2=\frac{1}{3}l:b$, a stąd

$$AM=\frac{t_1 l}{3b} \text{ i } BN=\frac{t_2 l}{3b}.$$

Podstawmy wartości za t_1 i t_2 , a otrzymamy

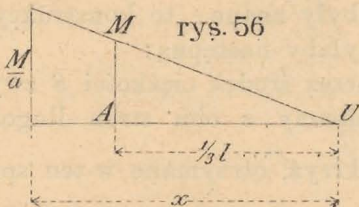
$$AM=\frac{\frac{1}{2}M' \frac{l}{ah} l}{3b}=\frac{M' l^2}{6abh}, \quad BN=\frac{M'' l^2}{6abh},$$

a więc odcinki AM i BN są proporcjonalne do momentów podporowych. Jeżeli przyjmiemy $b=\frac{1}{6}a$, to

$$\left. \begin{aligned} AM &= \frac{M'}{h} \left(\frac{l}{a} \right)^2 \\ BN &= \frac{M''}{h} \left(\frac{l}{a} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 203)$$

a jeżeli $a=l$, to

$$\left. \begin{aligned} AM &= \frac{M'}{h} = m' \\ BN &= \frac{M''}{h} = m'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 204)$$



Jeżeli chcemy wyznaczyć odległość x (rys. 56.), w której pionowy odcinek między przedłużeniami pierwszego i drugiego boku drugiego wieloboku sznurowego równa się $\frac{M'}{h}$, to

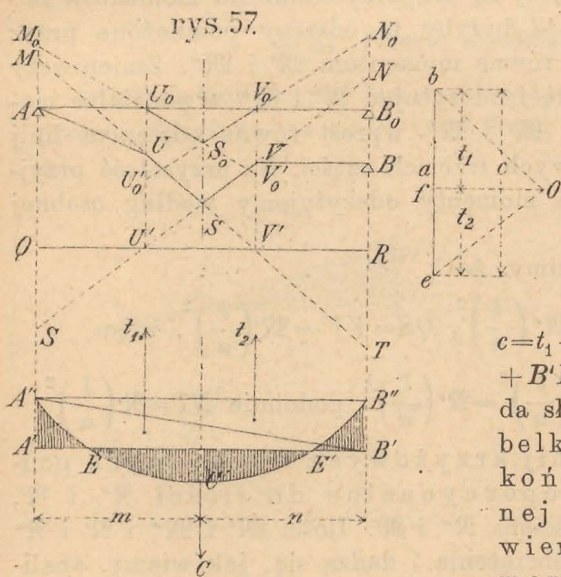
otrzymamy $\frac{M'}{h} : AM = x : \frac{1}{3}l$, więc

$$x = \frac{M' \frac{1}{3} l}{h \frac{M'}{h} \left(\frac{l}{a} \right)^2} = \frac{1}{3} \frac{a}{l} a, \text{ a zatem pionowa w odległości } x = \frac{1}{3} \frac{a}{l} a$$

odcina $\frac{M'}{h}$ (rys. 56.). Gdy $a=l$, to $AM = \frac{M'}{h}$.

§. 40. Porównanie z belką poziomą obu końcami utwierdzoną.

Poprzednia konstrukcja da się wprost zastosować do belki jednostronnie lub obustronnie poziomo utwierdzonej. Poprzednio przyjęliśmy $b = \frac{\varepsilon I}{\alpha^2 n}$, przyczem b mierzymy według podziałki sił, teraz przypuszczamy $b = \frac{1}{6} a$ według podziałki długości. Jeśli więc zrobimy oba te przypuszczenia, to stosunek podziałki sił do podziałki długości jest już dany.



Dla belki obustronnie poziomo utwierdzonej są obie styczne podporowe poziome, więc oba odnośne promienie Oa i Of (rys. 57.) poziome; zatem punkt a wpada na f , a stąd

$c = t_1 + t_2$, albo $A'A''E + B'B''E' = EE'C'$, co się da słowami wyrazić: Dla belki poziomo obu końcami utwierdzonej jest suma powierzchni ujemnych momentów równa powierzchni momentów dodatnich*).

A zatem $Ml = \frac{1}{2} M'l + \frac{1}{2} M''l$, jeżeli M' i M'' oznaczają momenty podporowe belki poziomo utwierdzonej, a więc $M' = \frac{1}{2} (M' + M'')$. Dla belki poziomo utwierdzonej otrzy-

*) por. Podręcznik Statyki Budowli II. wyd. str. 267.

mamy więc drugi wielobok sznurowy $AU_0S_0V_0B_0$, a dla tak samo obciążonej belki ciągłej $AUSVB$.

Z rys. 57. widzimy, że $AU_0M_0 \cong U_0V_0V'_0$, więc $AM_0 = V_0V'_0 = VV'$, odstępowi linii krzyżowych MT i NS . Dalej otrzymamy $AM_0 : \frac{1}{3}l = \frac{1}{3}l : b$, a zatem wstawivszy wartość za t_1 ,

$$AM_0 = \frac{\frac{1}{2}\mathfrak{M}' \frac{l}{ha} \cdot \frac{1}{3}l}{b} = \frac{\mathfrak{M}' l^2}{6abh'}$$

a jeżeli $b = \frac{1}{6}a$, więc

$$AM_0 = \mathfrak{M}' \left(\frac{l}{a} \right)^2 = V_0V' = VV',$$

a podobnie $B_0N_0 = \frac{\mathfrak{M}''}{h} \left(\frac{l}{a} \right)^2 = U_0U'_0 = UU'$.

Widzimy stąd, że odstępów linii krzyżowych w pionowych trzecich części (n. *Drittelverticale*, fr. *verticale tri-sectrice*, *verticale au tiers*) są proporcjonalne do momentów $\mathfrak{M}''$ i $\mathfrak{M}'$. Dla $a=l$ a $b=\frac{1}{6}l$ byłyby te odstępów pomnożone przez odległość biegunową równe momentom $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$. Zmieniwszy odpowiednio podziałkę i odczytując $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ w podziałce momentów, otrzymamy $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ wprost równe odstępom linii krzyżowych w pionowych trzecich części. Na przyszłość przyjmować będziemy, że momenty odczytujemy według osobnej podziałki momentów.

Z rysunku widzimy, że

$$QM = 2UU' = 2\mathfrak{M}'' \left(\frac{l}{a} \right)^2, \quad QS = VV' = \mathfrak{M}' \left(\frac{l}{a} \right)^2, \quad \text{więc}$$

$$MS = (2\mathfrak{M}'' + \mathfrak{M}') \left(\frac{l}{a} \right)^2 = \mathfrak{N}'' \left(\frac{l}{a} \right)^2, \quad \text{podobnie } NT = \mathfrak{N}' \left(\frac{l}{a} \right)^2,$$

a więc odstępów linii krzyżowych w pionowych podporowych są proporcjonalne do ilości $\mathfrak{N}''$ i $\mathfrak{N}'$, a dla $a=l$ równe ilościom $\mathfrak{N}''$ i $\mathfrak{N}'$. Iłości $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ i $\mathfrak{N}'$ i $\mathfrak{N}''$ są zależne tylko od obciążenia i dadzą się, jak wiemy, analitycznie wyznaczyć (§. 4.). Znając je, możemy linie krzyżowe wykreślić.

Z rysunku widzimy też, że odcinki MS i NT są to momenty statyczne siły c , działającej w S , ze względu na pionowe podporowe AS i BT^*). Mamy więc

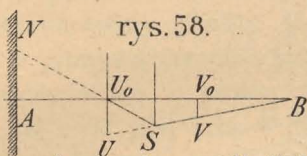
*) por. Podręcznik Statyki Budowli II. wyd. str. 15.

$$\left. \begin{aligned} MS \cdot b &= cm, \quad MS = \frac{c \cdot m}{b} \\ NT \cdot b &= c \cdot n, \quad NT = \frac{cn}{b} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 205)$$

Długości c , m i n są znane, jeżeli obciążenie jest dane, dla danego b możemy więc obliczyć także w ten sposób MS i NT i wykreślić linie krzyżowe.

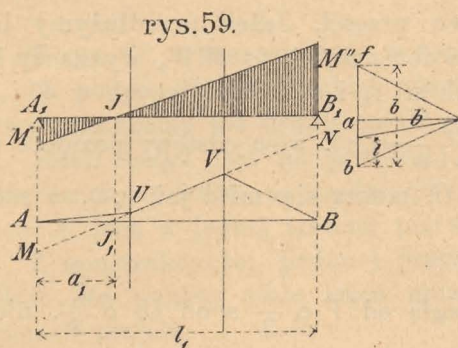
Jeżeli belka jest tylko z jednej strony poziomo utwierdzona, to tylko ta strona ma styczną poziomą AU_0 (rys. 58).

Ponieważ na drugiej podporze B moment jest równy zeru, $BN=0$, zatem UVB jest linią prostą. Znajdąc linie krzyżowe, potrzebujemy więc tylko wykreślić UU_0 = odstępowi odpowiedniemu linii krzyżowych i wykreślić BS i U_0S .



§. 41. Przęsło nieobciążone.

Jeżeli dane przęsło jest nieobciążone, a którekolwiek inne przęsło obciążone, to $c=0$, więc drugi wielobok sił składa się tylko z dwóch sił



$$t_1 = \frac{1}{2} M' \frac{l}{ah} \quad \text{ i } \quad t_2 = \frac{1}{2} M'' \frac{l}{ah}$$

Jeżeli styczne podporowe są dane, to jest on zupełnie oznaczony. Wiemy z poprzedniego, że momenty podporowe w przęsłach nieobciążonych są naprzemian dodatnie i ujemne i wzrastają ku przęsłu ob-

ciążonemu (rys. 59.). Wykreśliwszy drugi wielobok sznurowy, mamy: $AM = \frac{M'}{h} \left(\frac{l}{a} \right)^2$, $BN = \frac{M''}{h} \left(\frac{l}{a} \right)^2$, więc $AM:BN = M':M''$.

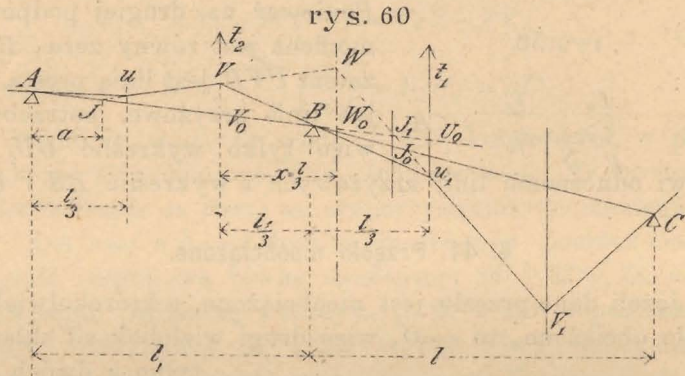
Z rysunku widzimy, też, że $a_1:(l-a_1) = AM:BN$, więc $a_1:(l-a_1) = M':M''$, a że także $A_1I:IB_1 = M':M''$, więc

$$a_1 = A_1I, \quad (l-a_1) = IB_1.$$

A zatem punkt I_1 przecięcia się boku średniego UV z prostą AB wyznacza punkt, w którym moment staje się zerem w przęśle nieobciążonem. Jestto ów punkt stały znany z §. 9.; że rzeczywiście jest on punktem stałym, udowodnimy to w następnym paragrafie.

§. 42. Dwa przęśła sąsiednie nieobciążone.

Jeżeli teraz weźmiemy pod uwagę dwa sąsiednie przęśła nieobciążone (rys. 60.), to wiemy, że styczna podporowa w B

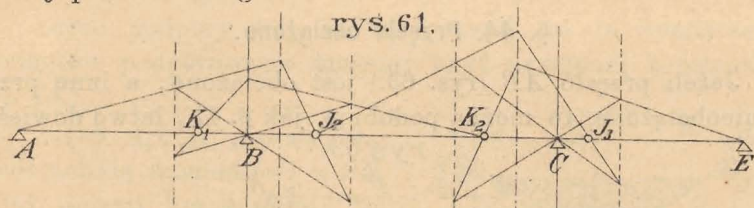


jest wspólna dla obydwu przęseł. Jeżeli przedłużymy boki średnie wieloboku ugięcia obu przęseł, to WW_0 wyznaczy kierunek wypadkowej dwóch sił t_2 i t_1' , działających w V i U_1 . A że $t_2 : t_1' = \frac{1}{2} \frac{M_1}{h} \frac{l_1}{a} : \frac{1}{2} \frac{M_1}{h} \frac{l}{a} = l_1 : l$, więc odstęp poziomy wypadkowej W_0W od V i U , muszą się mieć jak $l : l_1$, a zatem $x = \frac{l}{3}$.

Pionową WW_0 , odległą od V o $\frac{l}{3}$ a od U_1 o $\frac{l_1}{3}$, niezależną od obciążenia, nazywamy przesuniętą pionową podporową (n. *verschränkte Stützenverticale*, fr. *verticale auxiliaire, contreverticale, verticale adjacente*); widzimy więc, że przedłużenia boków średnich dwóch przęseł nieobciążonych przecinają się w przesuniętej podporowej.

Z rysunku widzimy dalej, że $I_1 U_0 : I_1 W_0 = U_0 U_1 : WW_0$, a także $U_0 U_1 : V_0 V = l : l_1$, $V_0 V : WW_0 = IV_0 : IW_0$, a więc $U_0 U_1 : WW_0 = l IV_0 : l_1 IW_0$, nareszcie $I_1 U_0 : I_1 W_0 = l IV_0 : l_1 IW_0$.

Widzimy więc, że położenie punktu I_1 jest przy danych l i l_1 zależne tylko jeszcze od położenia punktu I , więc dla jakiegokolwiek wieloboku sznurowego pozostaje punkt I_1 ten sam, jeżeli punkt I się nie zmienia. Ponieważ w przeszle skrajnem punkt I , w którym moment staje się zerem, jest zawsze na podporze, więc położenie jego się nie zmienia, a zatem i w następnych przeszłach punkty I nie zmieniają swego położenia, są więc stałymi. Z tego wynika następna konstrukcja wyznaczenia punktów stałych: Z punktu stałego I (a w pierwszym przeszle z podpory A) kreślimy dowolną prostą IW i otrzymujemy punkty V i W , kreślimy VB aż do przecięcia się z pionową trzecich części w U_1 i łączymy U_1 z W . Punkt przecięcia się z prostą AB wyznacza punkt stały I_1 . Jeżeli A , B i C nie leżą w linii prostej, to właściwym punktem stałym dla przęsła BC jest punkt I_0 , a punkt I_1 leży w pionowej punktu stałego.



Z rys. 61. wyznaczyliśmy w ten sposób punkty stałe I_2 i I_3 dla podpór równo wysokich. Zaczynając z drugiego końca E , wyznaczyliśmy też drugie punkty stałe K_2 i K_1 .

Jeżeli belka jest na pierwszej podporze w A poziomo utwierdzona, to wedle poprzedniego (§. 9.) punkt stały I_1 leży nie w A , lecz w jednej trzeciej pierwszego przęsła.

Z konstrukcyi tej, podanej przez Mohra, wynika bezpośrednio, że punkty stałe leżeć muszą w skrajnych trzecich częściach przęsła.

§. 43. Siły poprzeczne, oddziaływania i momenty w przeszłach nieobciążonych.

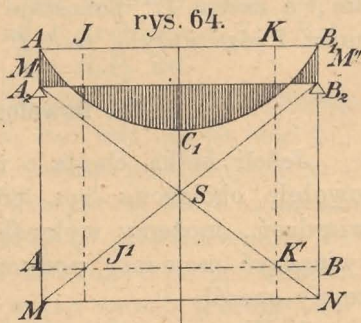
Rysunek 62. przedstawia pierwszy wielobok sznurowy dla belki ciągłej, której n -te przęsło jest obciążone. Linie momentów są w przeszłach nieobciążonych proste i przechodzą przez punkty stałe, stąd momenty podporowe są naprzemian

względnie BE i pionowej przez punkt stały. Aby więc wykreślić drugi wielobok sznurowy przeszła obciążonego, postępujemy w następny sposób. Jeżeli mamy dane obciążenie, wykreślamy linie krzyżowe. W §. 40. udowodniliśmy, że UU_1 i VV_1 są równe odnośnym odstępom linii krzyżowych, a że odnosi się to i do innych odcinków, więc i do II_1 i KK_1 , które robimy równe odnośnym odstępom linii krzyżowych, kreślimy IK_1 i KI_1 i w ten sposób otrzymujemy dwa średnie boki drugiego wieloboku sznurowego. Odcinki AM i BN , któreśmy teraz uzyskali, są proporcjonalne do momentów podporowych.

Ponieważ $AI < \frac{1}{3}l$, a $AUS < 180^\circ$, więc siła działająca w $U = \frac{1}{2}M' \frac{l}{a}$ działa do góry i jest ujemna, a stąd i M' jest ujemnem. Widzimy więc, że momenty podporowe przeszła obciążonego są ujemne.

Jeżeli podpory leżą w linii prostej, to do wyznaczenia momentów podporowych możemy użyć następnej konstrukcyi (rys. 64.).

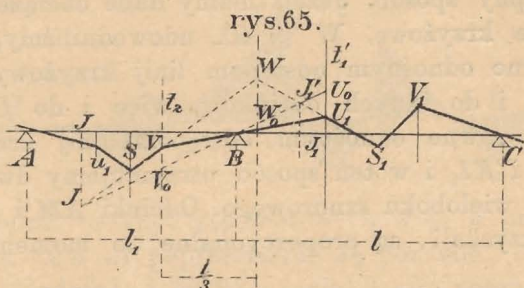
Jeżeli A, C, B_1 jost zwykłą powierzchnią momentów, a SN i MS liniami krzyżowymi, to kreślimy w punktach stałych I i K pionowe, które przecinają linie krzyżowe w I' i K' , a IK' jest wtedy linią zamykającą AB , jak w (rys. 63.), odcinki zatem AM i BN są równe (jeżeli $a_1 = l$), albo proporcjonalne do momentów M' i M'' . Robimy teraz momenty $M' = A_1A_2$ i $M'' = B_1B_2$, a A_2B_2 jest linią zamykającą dla belki ciąglej.



§. 45. Dwa sąsiednie przeszła obciążone.

I tu (rys. 65.) $W_0 W$ jest wypadkową sił t_2 i t_1' , leży więc w odległości $\frac{l}{3}$ od V , a zatem przedłużenia boków średnich dwóch sąsiednich przeszół przecinają się w przesuniętej podporowej. Możemy tu także udowodnić, że prosta II_1' po-

prowadzona przez punkt B przecina przedłużenia boków średnich VS i U_1S_1 w pionowych punktach stałych. Widzimy bo-



wiem z rysunku, że: $U_0U_1:VV_0=l:l_1$ i $VV_0:WW_0=IV_0:IW_0$, a zatem $U_0U_1:WW_0=lIV_0:l_1IW_0$.

Dalej mamy $U_0U_1I' \sim W_0WI'$, więc

$$U_0U_1:WW_0=U_0I_1':W_0I_1', \text{ zatem}$$

$$U_0I_1':W_0I_1'=l:IV_0:l_1IW_0.$$

Gdy punkt I' porusza się w pionowej, nie zmienia się stosunek $IV_0:IW_0$, więc i stosunek $U_0I_1':W_0I_1'$ zostaje ten sam, a zatem I_1' pozostaje w tej samej pionowej. Gdy więc punkt I jest stałym, to i I' jest także punktem stałym.

§. 46. Dowolne obciążenie przęseł.

Jeżeli belka ciągła o nierówno wysokich podporach jest dowolnie obciążona (rys. 66.), to korzystając z poprzednich twierdzeń, możemy wykreślić drugi wielobok sznurowy i zeń wyznaczyć momenty podporowe. Postępujemy wtedy w następujący sposób.

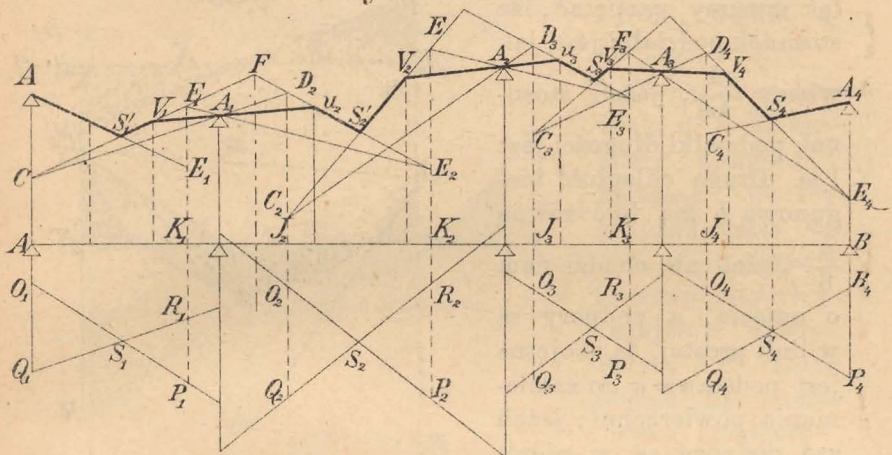
1. Wyznaczamy punkty stałe $A_1, I_2, I_3 \dots K_1, K_2 \dots$ za pomocą konstrukcyi, opisanej w §. 42.

2. Wykreślamy we wszystkich przęsłach linie krzyżowe, a to według §. 38., wykreśliwszy drugi wielobok sił i przyjmąwszy odpowiednią odległość biegunową $b=\frac{1}{6}a$, lub też, co lepiej i prędzej, obliczając $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}''$, a stąd odstępów linii krzyżowych w pionowych podporowych według §. 40.

Względem §. 38. odstęp między średnimi bokami w pionowych trzecich części, a zatem i w innych pionowych jest równy odpowiedniemu odstępowi linii krzyżowych. A więc robimy $AC=O_1Q_1$, kreślimy CA , aż do D_2 , do przecięcia się

z pionową punktu stałego w drugim przęśle, wtedy D_2 jest punktem boku średniego drugiego wieloboku sznurowego we-

rys.66.



dług §. 45. Dalej robimy $D_2C_2=O_2Q_2$, kreślimy C_2A_2 aż do D_3 i t. d. Potem zaczynamy znów od A_4 , robimy $A_4E_4=R_4P_4$, kreślimy E_4A_3 aż do F_3 , robimy $F_3E_3=R_3P_3$ itd.

4. W ten sposób otrzymamy dla każdego boku średniego dwa punkty C i F_1 , C_2 i F_2 , A i E_1 itd. tak, że te boki możemy wykreślić. Pionowe trzecich części, przecinające boki średnie, wyznaczają punkty boków skrajnych, które teraz możemy wykreślić. Odcinki pionowe między przedłużeniami boków średnich a podporami są, jak wiadomo, proporcjonalne do momentów podporowych, które w ten sposób możemy wyznaczyć. Czy konstrukcja była dokładna, możemy sprawdzić w następujący sposób:

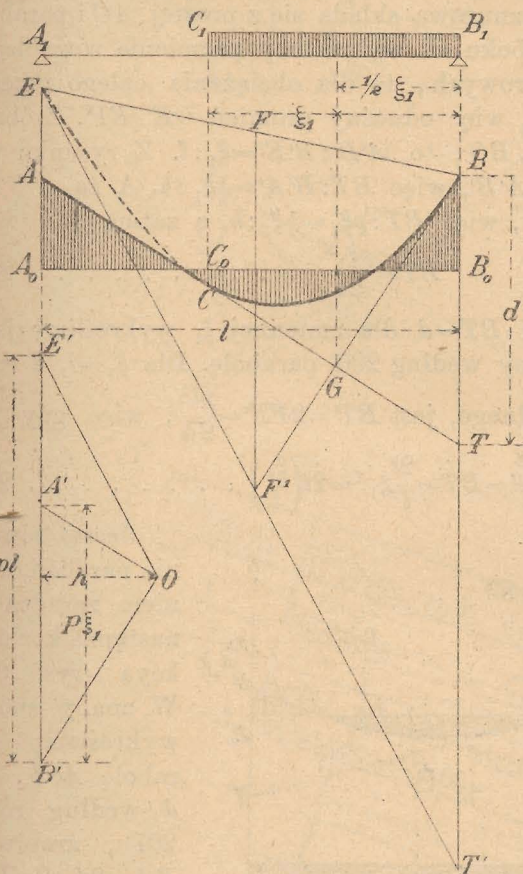
1. Boki średnie przecinają się w przesuniętych podporowych n. p. CF_1 i E_2D_2 w F .

2. Punkt przecięcia się boków średnich jednego przęsła musi leżeć w pionowej nad punktem przecięcia się linii krzyżowych n. p. S_1' nad S_1 .

3. Prosta, łącząca punkty przecięcia się boków średnich z pionowymi trzecich części w przęsłach sąsiednich, musi przechodzić przez podporę, n. p. punkty V_1 , A_1 i U_2 muszą leżeć w prostej. Jeżeli przęsło które nie jest obciążone, to obie linie

Wyznaczenie momentów podporowych w ogóle odbywa się według poprzedniego paragrafu, w razie, jeśli podpory znajdują się w linii prostej według §. 44. (rys. 64.).

rys. 64.



Z punktów stałych J i K kreślimy pionowe i łączymy punkty ich przecięcia się J' i K' z liniami krzyżowemi. Otrzymujemy wtedy prostą $J'K'$, która odcina na pionowych podporowych momenty podporowe.

Znając momenty podporowe AA' i BB' , kreślimy $A'B'$ i w połowie przesła pionową $DE = \frac{1}{4} gl^2$, wtedy $A'E$ i EB' są stycznymi parabol i $DC = \frac{DE}{2} = \frac{1}{8} gl^2$. Si-

ły poprzeczne wyznaczamy w następujący sposób: Robimy $ef = gl$, $fO_1 \parallel EB'$ i $eO_1 \parallel A'E$, to otrzymamy biegun O_1 i pierwszą odległość biegunową h . Prowadzimy teraz $Og \parallel AB$, jako zamykającej, a będzie $eg = Q'$, $gf = Q''$. Zróbmy teraz $A_1A_1' = Q' = eg$ i $BB' = Q'' = gf$, to A_1B_1' jest linią sił poprzecznych.

A_1A_1' i B_1B_1' możemy też wprost otrzymać.

Zróbmy

$$B_1H = A_1S = h,$$

dalej

$$SA_1' \parallel EA' \parallel \text{ i } HB_1' \parallel B'E,$$

to otrzymamy Q' i Q'' .

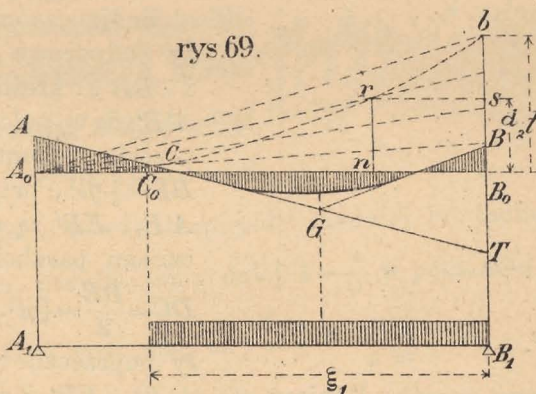
§. 48. Obciążenie jednostajne częściowe.

Jeżeli tylko część przęśła C_0B_0 (rys. 68.) jest jednostajnie obciążona, to linia sznurowa składa się z prostej AC i paraboli CB . Jeżeli w wieloboku sił wykreślimy promienie równoległe do stycznych podporowych, to dla obciążenia całego przęśła styczna byłaby EF' , więc odnośny promień $OE' \parallel EF'$. Zróbmy też $OA' \parallel CA$ i $OB' \parallel BG$, to $A'B':B'E' = \xi_1:l$. Z rysunku widzimy, że $GBT \sim OA'B'$, więc $BT:B'A' = \frac{1}{2}\xi_1:h$. A że

$A'B' = p\xi_1$, więc $BT:p\xi_1 = \frac{1}{2}\xi_1:h$, a zatem

$$BT = \frac{p\xi_1^2}{2h} \dots \dots \dots 206)$$

Jeżeli długości $BT=d$ dla zmiennej ξ_1 wykreślimy jako rzędne, to otrzymamy według 206) parabolę. Dla $\xi_1=l$, a więc dla obciążenia zupełnego, jest $BT'=2FF'=\frac{pl^2}{2h}$, więc gdy nazwiemy $FF'=t$, to $d=BT=\frac{2t\xi_1^2}{l^2} = 2t\left(\frac{\xi_1}{l}\right)^2 \dots \dots \dots 207)$



Jestto równanie paraboli, a na niem zasada się następna konstrukcja (rys. 69.). W znany sposób wykreślamy parabolę $Acrb$, dla d według równ. 207), zrobiwszy $B_0b=2t$. Zróbmy $A_0n=\xi_1$, to $nr=d$, robimy więc $d=nr=BT$, łączymy

A z T , w połowie C_0B_0 kreślimy pionową, otrzymujemy G i styczną GB , poczem wykreślamy bez trudności paraboliczną linię sznurową CB .

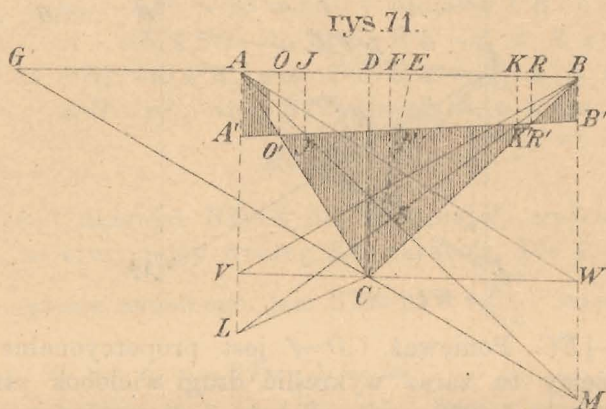
§. 49. Obciążenie jednym ciężarem skupionym.

Jeżeli ciężar skupiony P działa w punkcie D_0 (rys. 70.), a trójkąt ACB jest pojedynczą powierzchnią momentów, to

$$BM:CD = BG:GD, \text{ czyli} \\ BM:CD = (2AB - AD):AB, \text{ jak pierwiej.}$$

Podobnie otrzymamy, przedłużając linią HC , punkt L .

Jeżeli punkt G wypada za papier, użyć możemy drugiego sposobu wyznaczenia punktów L i M .



Wykreślmy $VW \parallel AB$ (rys. 71.), $CL \parallel BV$ i $CM \parallel AW$. Wtedy linie AM i BL są liniami krzyżowymi, jak to zaraz udowodnimy. Przedłużmy AB i MC aż do G , to $GDC \cong ABW$, bo $DC = BW$, a wszystkie boki równoległe, więc $GD = AB$, a zatem na mocy poprzedniego dowodu punkt M jest punktem linii krzyżowej. To samo możemy udowodnić co do punktu L . Z konstrukcyi powyższej wynika, że punkt S musi leżeć wewnątrz trójkąta ABC . Po wykreśleniu linii krzyżowych możemy teraz łatwo według §. 44. wyznaczyć momenty w danym przęśle. Kreślimy w punktach stałych pionowe aż do przecięcia się z liniami krzyżowymi w I' i K' , a przez I' i K' zamykającą $A'B'$. Powierzchnia kreskowana przedstawia powierzchnię momentów.

§. 50. Wyznaczenie wykreślne linii wpływowych.

Na podstawie poprzednich twierdzeń możemy wyznaczyć łatwo linie wpływowe sił poprzecznych i momentów. Tok konstrukcyi wedle Steinera (tabl. I., rys. 1.) jest następujący:

1. Wyznaczamy punkty stałe (rys. α) według §. 42. w znany sposób.

2. Dzielimy każde przesło na pewną ilość części n. p. na 4 części i wyznaczamy momenty dla położenia ciężaru w punktach 1, 2, 3, 5, 6. Niech n. p. ciężar $P=1t$ działa w punkcie

2. Przyjąwszy podziałkę $\frac{1t}{2cm}$ i $\frac{1mm}{1m}$, wykreślamy wielobok sił, a mianowicie $a'b'=P$ (rys. γ), obieramy biegun O w odległości $h=\frac{1}{2}t$, kreślimy promienie, a wielobok sznurowy (rys. β). $A'2'A'$ jest pojedynczą powierzchnią momentów.

Zrobiwszy $2H=A'B'$, kreślimy $H2'$ aż do A'' , a prosta $B'A''$ jest linią krzyżową. Druga linia krzyżowa przechodzi przez A , jej jednak tu nie potrzebujemy. W punktach stałych A i K_1 kreślimy pionowe aż do przecięcia się z liniami krzyżowymi, łączymy punkty przecięcia się i otrzymujemy zamykającą $A'b$, która odcina na pionowej w B odcinek $B'b$, równy momentowi podporowemu dla tego obciążenia. Linię tę momentów sprowadzamy teraz do poziomej zamykającej (rys. δ) i wykreślamy też momenty w innych przesłach, prowadząc linie momentów przez punkty stałe. Linie te momentów oznaczyliśmy na rysunku cyframi 2. Tak samo wykreślamy linie momentów dla położenia ciężaru P w punktach 1 aż do 6 i linie te oznaczone są znaczkiem punktu zaczepienia siły. Teraz możemy wykreślić linie wpływowe momentów (rys. η). Jeżeli chcemy n. p. wykreślić linią wpływową dla punktu 2, to gdy siła P stoi w 1, w punkcie 2 $M=2''a$, robimy więc (rys. η) $1'a'=2''a$. Gdy ciężar P stoi w punkcie 2, to moment w tym punkcie $2''2$, robimy więc (rys. η) $2'2=2''2$ i t. d.

Jeżeli ciężar stoi w punkcie 7, to sprawia ten sam moment w punkcie 2, co ciężar w punkcie 5 sprawia w punkcie 10, więc $b10''$, robimy więc $b10''=7'b'$ i t. d. Połączywszy poszczególne punkty, otrzymamy linię wpływową momentów dla 2. Tak samo wykreślamy linie wpływowe dla innych punktów.

Stosunek podziałki dla momentów będzie $\frac{1mm}{1m^{1/2}t} = \frac{1mm}{1/2tm}$.

Na rys. ϵ wykreśliliśmy linie wpływowe dla sił poprzecznych. Pełna linia jest dla punktu 2, dla innych linie kreskowane. Jeżeli ciężar P stoi w punkcie 2, jak w danym wypadku, to kreślimy w wieloboku sił promień $Om//A'b$, a wtedy $Om=O_0$. Na długości od A do 2 jest więc $Q=O_0=a'm$, dla punktów zaś od 2 do 4 $Q=O_0-P=mb'$. Widzimy więc, że

wszystkie linie wpływowe dla punktów od A do 2 będą miały w 2 tę samą rzędną, zaś linie wpływowe dla punktów od 2 do B mają w 2 rzędną $c2'$. Długość $2'2=P$. Wyznaczenie linii wpływowych dla sił poprzecznych jest więc bardzo łatwe, bo te nakrywają się po części.

Jeżeli ciężary przenoszą się na belkę zapomocą poprzecznic, to linie te zmieniają się wskutek tego tak, jak przy belce jednoprzęsłowej. Zamiast linii wpływowych krzywych otrzymujemy wieloboki, których wierzchołki, odpowiadające poprzecznicom, leżą na tych liniach krzywych.

§. 51. Własności linii wpływowych i tablice do ich wykreślenia.

Inż. Da u j o n udowadnia*), że linie wpływowe momentów składają się z części paraboli sześciennych i określa ich własności. Jeżeli przekrój C leży w części średniej, to niema linia wpływowa w danem przęśle punktów zwrotnych. Jeżeli zaś leży w części pierwszej, to punkt zwrotny leży w części trzeciej i na odwrót. W sąsiednich przęsłach linia wpływowa ma punkt zwrotny w pionowej punktu stałego i to w lewych punktu stałego lewego, prawych prawego. Jeżeli będziemy badali dwie linie wpływowe przęseł sąsiednich dla punktów C i C' , to rzędne ich w przęsłach na lewo leżących mają się jak odstęp C i C' od punktu stałego na prawo i na odwrót.

Linie wpływowe sił poprzecznych składają się także z parabol 3 rzędu.

Inżynierowie Dupuy i Cuënot obliczyli dla belek wieloprzęśłowych rzędne linii wpływowych dla rozmaitych stosunków rozpiętości ϑ **). W osobnem dziele p. n. „Calcul des ponts métalliques“ zestawili inżynierowie Adryan Cart i Leon Portes (1895) także takie tablice, zaś Griot w dziele: Interpolierbare Tabellen zum Eintragen der Einflusslinien (1904).

W §. 8. podaliśmy sposób wykreślenia linii wpływowych dla belki dwuprzęsłowej, gdy $l_1=l_2=l$. Tu podamy jako przykład rzędne tych linii dla tego samego wypadku według Carta i Portesa, a także rzędne linii wpływowych belki trzyprzęśłowej dla $\vartheta=0.9$.

*) por. Annal. des ponts et chaussées 1894 I. str. 959.

**) „ „ „ „ „ „ 1897 III. str. 91.

Linie wpływowe belki dwuprzęsłowej

$$\text{dla } l_1 = l_2 = l.$$

u rzędna przekroju, x rzędna ciężaru ruchomego $P=1$.

A. Momenty. a . Dane przesło.

$\frac{x}{l}$	$\frac{u}{l}=0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Pierwsze przesło	0.1	+0.0751	+0.0626	+0.0501	+0.0376	+0.0252	+0.0127	+0.0002	-0.0123	-0.0248
	0.2	+0.0752	+0.1504	+0.1008	+0.0760	+0.0512	+0.0264	+0.0016	-0.0232	-0.0480
	0.3	+0.0682	+0.1264	+0.1527	+0.1159	+0.0790	+0.0422	+0.0054	-0.0314	-0.0683
	0.4	+0.0516	+0.1032	+0.1548	+0.1580	+0.1096	+0.0612	+0.0128	-0.0356	-0.0840
	0.5	+0.0406	+0.0813	+0.1219	+0.2031	+0.1438	+0.0844	+0.0250	-0.0344	-0.0936
	0.6	+0.0304	+0.0608	+0.0912	+0.1520	+0.1824	+0.1128	+0.0432	-0.0264	-0.0960
	0.7	+0.0211	+0.0422	+0.0632	+0.1054	+0.1265	+0.1475	+0.0686	-0.0103	-0.0893
	0.8	+0.0128	+0.0256	+0.0384	+0.0640	+0.0768	+0.0896	+0.1024	+0.0152	-0.0720
	0.9	+0.0057	+0.0115	+0.0172	+0.0286	+0.0344	+0.0401	+0.0458	+0.0515	-0.0428
Drugie przesło	0.1	+0.0515	+0.0458	+0.0401	+0.0286	+0.0229	+0.0172	+0.0115	+0.0057	-0.0428
	0.2	+0.0152	+0.1024	+0.0896	+0.0640	+0.0512	+0.0384	+0.0256	+0.0128	-0.0720
	0.3	-0.0103	+0.0686	+0.1475	+0.1054	+0.0843	+0.0632	+0.0422	+0.0211	-0.0893
	0.4	-0.0264	+0.0432	+0.1128	+0.1520	+0.1216	+0.0912	+0.0608	+0.0304	-0.0960
	0.5	-0.0344	+0.0250	+0.0844	+0.2031	+0.1625	+0.1219	+0.0813	+0.0406	-0.0938
	0.6	-0.0356	+0.0128	+0.0612	+0.1580	+0.2064	+0.1548	+0.1032	+0.0516	-0.0840
	0.7	-0.0314	+0.0054	+0.0422	+0.1159	+0.1527	+0.1895	+0.1264	+0.0632	-0.0683
	0.8	-0.0232	+0.0016	+0.0264	+0.0760	+0.1008	+0.1256	+0.1504	+0.0752	-0.0480
	0.9	-0.0123	+0.0002	+0.0127	+0.0376	+0.0501	+0.0626	+0.0751	+0.0875	-0.0248

B. Drugie przęsło.

	$\frac{x}{l}$	$\frac{u}{l} = 0.1$	0.9	U w a g a.
Przekrój w drugim przęsle	0.1	—0		Wstawiać należy według linii prostej
	0.2	—0 0223	—0.0025	
	0.3	—0.0432	—0.0048	
	0.4	—0.0756	—0.0084	
	0.5	—0.0844	—0.0094	
	0.6	—0.0864	—0.0096	
	0.7	—0.0803	—0.0089	
	0.8	—0.0648	—0.0072	
	0.9	—0.0385	—0.0043	
Przekrój w pierwszym przęsle	0.1	—0.0043	—0.0385	
	0.2	—0.0072	—0.0640	
	0.3	—0.0089	—0.0809	
	0.4	—0.0096	—0.0864	
	0.5	—0.0094	—0.0844	
	0.6	—0.0084	—0.0756	
	0.7	—0.0068	—0.0614	
	0.8	—0.0048	—0.0432	
	0.9	—0.0025	—0.0223	

B. Siły poprzeczne.

	$\frac{x}{l}$	$\frac{u}{l} = 1.0$	0	Rzędne w sąsiednim przęśle
Pierwsze przęsło	0.1	—0.1248	+0.8753	Drugie przęsło +0.0248
	0.2	—0.2480	+0.7520	+0.0480
	0.3	—0.3683	+0.6318	+0.0683
	0.4	—0.4840	+0.5160	+0.0840
	0.5	—0.5938	+0.4063	+0.0937
	0.527	—0.6736	+0.3264	+0.0962
	0.6	—0.6960	+0.3040	+0.0960
	0.7	—0.7893	+0.2108	+0.0893
	0.8	—0.8720	+0.1280	+0.0720
	0.9	—0.9428	+0.0573	+0.0428
Drugie przęsło	0.1	—0.0573	+0.9428	Pierwsze przęsło 0.0428
	0.2	—0.1280	+0.8720	—0.0720
	0.3	—0.2108	+0.7893	—0.0893
	0.4	—0.3040	+0.6960	—0.0960
	0.423	—0.3264	+0.6736	—0.0962
	0.5	—0.4063	+0.5978	—0.0938
	0.6	—0.5160	+0.4840	—0.0840
	0.7	—0.6318	+0.3683	—0.0683
	0.8	—0.7520	+0.2480	—0.0480
	0.9	—0.8753	+0.1248	—0.0248

Linie wpływowe belki trzyprzęsłowej

$$\text{dla } l_1 = l_3 = 0.9l.$$

u rzędne przekroju, x rzędne ciężaru ruchomego $P=1$.

A. Momenty. a. Dane przęsło.

	$\frac{x}{l}$	$\frac{u}{l}=0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Pierwsze przęsło	0.1	+0.0875	+0.0750	+0.0624	+0.0499	+0.0374	+0.0249	+0.0124	-0.0002	-0.0127	-0.0252 l_1
	0.2	+0.0751	+0.1502	+0.1253	+0.1005	+0.0756	+0.0507	+0.0258	+0.0009	-0.0240	-0.0489 l_1
	0.3	+0.0631	+0.1261	+0.1892	+0.1522	+0.1153	+0.0783	+0.0414	+0.0044	-0.0325	-0.0695 l_1
	0.4	+0.0515	+0.1029	+0.1544	+0.2058	+0.1573	+0.1087	+0.0602	+0.0116	-0.0370	-0.0855 l_1
	0.5	+0.0405	+0.0809	+0.1214	+0.1618	+0.2023	+0.1427	+0.0732	+0.0237	-0.0359	-0.0954 l_1
	0.6	+0.0302	+0.0605	+0.0907	+0.1209	+0.1511	+0.1814	+0.1116	+0.0418	-0.0279	-0.0977 l_1
	0.7	+0.0209	+0.0418	+0.0627	+0.0837	+0.1046	+0.1255	+0.1464	+0.0673	-0.0118	-0.0938 l_1
	0.8	+0.0127	+0.0253	+0.0380	+0.0507	+0.0634	+0.0760	+0.0887	+0.1014	+0.0140	-0.0733 l_1
	0.9	+0.0056	+0.0113	+0.0179	+0.0226	+0.0282	+0.0339	+0.0395	+0.0452	+0.0508	-0.0435 l_1
Drugie przęsło	0.1	+0.0516	+0.0442	+0.0367	+0.0293	+0.0219	+0.0144	+0.0070	-0.0004	-0.0078	-0.0410 l_2
	0.2	+0.0163	+0.0997	+0.0831	+0.0666	+0.0500	+0.0334	+0.0169	+0.0003	-0.0163	-0.0671 l_2
	0.3	-0.0076	+0.0654	+0.1384	+0.1114	+0.0844	+0.0574	+0.0304	+0.0034	-0.0236	-0.0806 l_2
	0.4	-0.0219	+0.0399	+0.1016	+0.1633	+0.1250	+0.0867	+0.0484	+0.0101	-0.0231	-0.0836 l_2
	0.5	-0.0281	+0.0219	+0.0719	+0.1219	+0.1719	+0.1219	+0.0719	+0.0219	-0.0231	-0.0781 l_2
	0.6	-0.0281	+0.0101	+0.0484	+0.0867	+0.1250	+0.1633	+0.1016	+0.0399	-0.0219	-0.0664 l_2
	0.7	-0.0236	+0.0034	+0.0304	+0.0574	+0.0844	+0.1114	+0.1384	+0.0654	-0.0076	-0.0506 l_2
	0.8	-0.0163	+0.0003	+0.0169	+0.0334	+0.0500	+0.0666	+0.0831	+0.0997	+0.0163	-0.0329 l_2
	0.9	-0.0078	-0.0004	+0.0070	+0.0144	+0.0219	+0.0293	+0.0367	+0.0442	+0.0516	-0.0153 l_2

b. Sąsiednie przesło.

	$\frac{x}{l}$	$\frac{u}{l}=0.1$	0.9	1		$\frac{u}{l}=0.1$	0.9
Przekrój w pierwszym przesle	0.1	- 0.0041	- 0.0369	- 0.0410 l_2	Przekrój w trzecim przesle	- 0.0137	- 0.0015 l_2
	0.2	- 0.0067	- 0.0604	- 0.0671 l_2		- 0.0296	- 0.0033 l_2
	0.3	- 0.0081	- 0.0726	- 0.0806 l_2		- 0.0456	- 0.0051 l_2
	0.4	- 0.0084	- 0.0752	- 0.0836 l_2		- 0.0598	- 0.0066 l_2
	0.5	- 0.0078	- 0.0703	- 0.0781 l_2		- 0.0703	- 0.0078 l_2
	0.6	- 0.0066	- 0.0598	- 0.0664 l_2		- 0.0752	- 0.0084 l_2
	0.7	- 0.0051	- 0.0456	- 0.0506 l_2		- 0.0726	- 0.0081 l_2
	0.8	- 0.0033	- 0.0296	- 0.0329 l_2		- 0.0604	- 0.0067 l_2
	0.9	- 0.0015	- 0.0137	- 0.0153 l_2		- 0.0369	- 0.0041 l_2
Przekrój w drugim przesle	0.1	- 0.0220	+ 0.0034	+ 0.0066 l_1			
	0.2	- 0.0427	+ 0.0067	+ 0.0129 l_1			
	0.3	- 0.0607	+ 0.0095	+ 0.0183 l_1			
	0.4	- 0.0747	+ 0.0117	+ 0.0225 l_1			
	0.5	- 0.0834	+ 0.0131	+ 0.0251 l_1			
	0.6	- 0.0854	+ 0.0134	+ 0.0257 l_1			
	0.7	- 0.0794	+ 0.0124	+ 0.0239 l_1			
	0.8	- 0.0640	+ 0.0100	+ 0.0193 l_1			
	0.9	- 0.0380	+ 0.0060	+ 0.0115 l_1			

B. Siły poprzeczne.

	$\frac{x}{l}$	$\frac{u}{l}=1.0$	0	Rzędne w przesle sąsiednim	
				Przesło lewe	Przesło prawe
Pierwsze przesło	0.1	- 0.1252	+ 0.8748		Przekrój w 2 przesle + 0.0286 + 0.0555 + 0.0790 + 0.0972 + 0.1085 + 0.1113 + 0.1111 + 0.1033 + 0.0833 + 0.0495
	0.2	- 0.2489	+ 0.7511		
	0.3	- 0.3695	+ 0.6305		
	0.4	- 0.4850	+ 0.5145		
	0.5	- 0.5954	+ 0.4046		
	0.577	- 0.6753	+ 0.3247		
	0.6	- 0.6977	+ 0.3023		
	0.7	- 0.7908	+ 0.2092		
	0.8	- 0.8733	+ 0.1267		
	0.9	- 0.9435	+ 0.0565		
Drugie przesło	0.1	- 0.0743	+ 0.9257	Przekrój w 1 przesle - 0.0455 - 0.0746 - 0.0896 0.0929 - 0.0868 - 0.0738 - 0.0563 - 0.0365 - 0.0170	Przekrój w 3 przesle + 0.0170 + 0.0365 + 0.0563 + 0.0738 + 0.0868 + 0.0929 + 0.0896 + 0.0746 + 0.0455
	0.2	- 0.1657	+ 0.8343		
	0.3	- 0.2700	+ 0.7300		
	0.4	- 0.3829	+ 0.6171		
	0.5	- 0.5000	+ 0.5000		
	0.6	- 0.6171	+ 0.3829		
	0.7	- 0.7300	+ 0.2700		
	0.8	- 0.8343	+ 0.1657		
	0.9	- 0.9257	+ 0.0743		

§. 52. Najniekorzystniejsze obciążenie dla sił poprzecznych i momentów.

Z kształtu linii wpływowych sił poprzecznych widzimy, że siła poprzeczna w danym przekroju jest największą lub najmniejszą, gdy obciążenie sięga od przekroju do prawej lub lewej podpory tegoż przęsła, a następne przęsła są naprzemian obciążone. Chcąc wyznaczyć najniekorzystniejsze położenie dla momentów, założmy, że w punkcie D przęsła AB (rys. 71.) działa ciężar P . Dla tego położenia ciężaru wyznaczyliśmy linię zamykającą $A'B'$, a więc jeśli $a=l$, AA' i BB' są równe momentom podporowym. Z rysunku widzimy, że jeżeli ciężar jest w D , w O moment jest równy zeru. Jeżeli ciężar posunie się na prawo, w O moment jest ujemny, jeżeli na lewo, dodatni. Dla *najw* M w punkcie O musi więc być obciążona długość AD , dla *najmn* M długość DB . Ponieważ punkt S jest wewnątrz trójkąta ABC , więc punkty O i R leżą po za punktami stałymi. Widzimy więc, że tylko dla punktów pierwszej i trzeciej części przęsła mamy punkt obojętny, dla punktów części średniej między punktami stałymi nie ma takiego punktu obojętnego, moment jest zawsze dodatni, a zatem *najw* M jest dla zupełnego obciążenia (tabl. I, rys. 2η). Inne przęsła muszą być naprzemian obciążone.

§. 53. Największe siły zewnętrzne.

Siły poprzeczne i momenty dla obciążenia układem ciężarów skupionych najlepiej obliczymy zapomocą linii wpływowych. Sposób wyznaczenia największych sił zewnętrznych na podstawie linii wpływowych podaliśmy w Podr. Teorii Most. w tomie I. (wyd. II., str. 39.). Jeżeli belka jest obciążona ciężarem jednostajnym ciągłym, to największe siły poprzeczne i momenty wyznaczmy w następujący sposób:

1. Wyznaczamy najpierw punkty stałe znany sposób według §. 42. (tabl. I., rys. 2α).

2. Dla wyznaczenia momentów podporowych (rys. β) postępujemy w następujący sposób:

Na pionowej przez podporę A odcinamy T_4 odległość linii krzyżowych na podporach dla obciążenia zupełnego

pierwszego przęsła. Według §. 47. jest $T_4 = \mathfrak{N}' \left(\frac{l_1}{a} \right)^2 = \frac{1}{4} p l_1^2 \left(\frac{l_1}{a} \right)^2$.

Gdy przyjmiemy $a = l_1$, to $T_4 = \mathfrak{N}' = \frac{1}{4} p l_1^2$, a z konstrukcyi otrzymamy wprost moment podporowy M . T_4 możemy też otrzymać zapomocą konstrukcyi, łącząc B z wierzchołkiem paraboli wykreślonej dla belki zwykłej, T_4 będzie wtedy także $= 2 \frac{1}{8} p l_1^2 = = \frac{1}{4} p l_1^2$. Dalej obliczymy T_3 , T_2 i T_1 dla obciążeń częściowych pierwszego przęsła od podpory A do punktu 3, 2 lub 1. Jeżeliśmy, jak tu, przyjęli $a = l_1$, to $T_3 = \mathfrak{N}_3'$ i t. d., zaś $\mathfrak{N}'$ wyznaczymy według równania (). Punkty w ten sposób wyznaczone łączymy z B_1 , a punkty przecięcia się tych prostych z pionową punktu stałego K_1 , połączone z A , wyznaczają na podporowej B punkta 1, 2, 3, 4. Odcinki $B1$, $B2$, $B3$, $B4$ są to momenty podporowe dla obciążeń długości $A1$, $A2$, $A3$ i AB .

Podobnie otrzymujemy i w drugim przęsle momenty podporowe $B5$, $B6$, $B7$, $B8$ i $C5$, $C6$, $C7$, $C8$. I tu odcinamy najpierw na obu pionowych podporowych ilości T_5 , $T_6 \dots T_5'$, $T_6' \dots$ łączymy te punkty z C , a względnie z B i przez punkty przecięcia się z pionowymi punktów stałych prowadzimy zamykające, które odcinają momenty podporowe dla odnośnych obciążeń częściowych drugiego przęsła.

3. Teraz rysujemy najmniejsze momenty i to najprzód w pierwszym przęsle. Na długości AK_1 są najmniejsze momenty, gdy jest obciążone przęsło średnie (obciążenie I., rys. γ), wtedy moment na podporze B jest $B8$. Zróbmy (rys. δ) $B'O'' = B9$ i połączmy A' z O'' , wtedy prosta ta do K_1 będzie linią najmniejszych momentów. Dla wykreślenia dalszej części tej linii najlepiej będzie wyznaczyć ją stycznymi dla obciążenia $\frac{l_1}{4}$, $\frac{2l_1}{4}$, $\frac{3l_1}{4}$ i $\frac{4l_1}{4}$ i dla równoczesnego obciążenia dru-

giego przęsła [II, III, IV, V, rys. γ]. Najprzód wyznaczymy według rów. 207) długość $d = 2t \left(\frac{\xi_1}{l_1} \right)$ dla powyższych obciążeń

i otrzymamy $d_4 = 2t = A'4''$ (rys. δ), $d_3 = A'3''$, $d_2 = A'2''$, $d_1 = = A'1''$. Moment podporowy dla obciążenia II jest $= B1 + B8 = = B'O'' + O''1'' = B'1''$, zatem $1''1''$ jest styczną do linii sznurowej dla obciążenia II. Podobnie otrzymamy styczne $2''2''$, $3''3''$, $4''4''$ dla obciążenia III, IV i V, które wyznaczają resztę linii najmniejszych momentów w pierwszym przęsle.

W przeszle średnim także najpierw wykreślimy linię najmniejszych momentów. Dla obciążenia IV (rys. γ) otrzymamy moment ujemny w C $C'O' = B4$. Połączmy O' z F_2 , a otrzymamy moment podporowy w B . Punkt K_2' tej prostej wyznacza najmn. moment w punkcie K ; jeżeli więc przez K_2' poprowadzimy poziomą, to $F_2 K_2'$ będzie linią najmniejszych momentów. Pozostaje jeszcze krzywa 4go stopnia $K_2'S'$, którą znowu wyznaczymy stycznymi.

Dla najmniejszych momentów na trzeciej części średniego przeszła musi być obciążona pewna długość od B i trzecie przeszło (obciąż. VII do X, rys. γ). Najprzód więc wyznaczymy momenty podporowe dla każdego obciążenia. Np. dla obciążenia VII otrzymamy ujemny moment w C , dodając $C'O'$ do $C5$, otrzymamy więc $C'5'$, na podporze zaś B będzie $M = B5 - B0$. Teraz wyznaczamy według §. 48 $d_8 = 2t_8 = B'8'$, $d_7' = B7'$ itd., odcinamy od tego odnośny moment podporowy w B i otrzymujemy wtedy punkty $8''7''$ itd.; które połączone z punktami $8'$ i $7'$ itd. dają styczne do linii najmniejszych momentów.

Resztę linii najmniejszych momentów dopełniamy, rysując symetrycznie do środka belki.

Linie największych momentów otrzymamy przez odcinanie rzędnych linii najmniejszych momentów od linii momentów dla całkowitego obciążenia. Aby zaś tę linię otrzymać, zauważymy, że dla zupełnego obciążenia otrzymamy momenty podporowe, dodając momenty, wywołane obciążeniem każdego przeszła, więc w punkcie B będzie $M = -B4 - B8 + B0$. W C będzie moment także tak wielki, a znając teraz momenty podporowe, wykreślić możemy z łatwością paraboliczne linie sznurowe.

Wyznaczenie sił poprzecznych jest łatwe; zważyć nam tylko trzeba, że obciążenia, w schemacie (rys. γ) uwidocznione, wywołują *najmn* Q dla odnośnych punktów. Jeżeli więc od punktu A , 1, 2, 3, B , 5, 6 itd. (rys. ε) na lewo odetniemy odległość biegunową a i wykreślimy równoległe do odnośnych stycznych $A0''$, $1''1''$, $2''2''$ i t. d., otrzymamy punkty linii *najmn.* sił poprzecznych.

Dla obciążenia zupełnego linie sił poprzecznych są proste, dość więc wyznaczyć dla każdej po dwa punkty, co robimy w ten sam sposób, kreśląc n. p. $On' // A'n$ i t. d. Linie największ-

szych sił poprzecznych otrzymujemy znów przez odciąganie rzędnych *najmn* Q od linii sił poprzecznych dla obciążenia zupełnego. Ostatnie 3 rysunki (ξ , η , δ) przedstawiają wyznaczenie sił zewnętrznych, wywołanych ciężarem własnym. Tu wyznaczamy tylko momenty podporowe dla obciążenia całkowitego przęsła, a więc B_4 , B_8 i C_0 . Moment w B będzie $M = -B_4 - B_8 + C_0$; dalsza konstrukcja jest wobec tego, cośmy wyżej powiedzieli, zupełnie jasną.

VI. Obliczenie analityczne belki ciągłej o przekroju zmiennym.

§. 54. Belka pochyło utwierdzona.

Dotychczas przypuszczaliśmy, że przekrój belki ciągłej, a więc i moment bezwładności był stały, teraz zbadajmy, o ile obliczenie to się zmieni, jeśli przekrój będzie zmienny, przy czem wyłożymy rzecz według Winklera.

Dla belki pochyło utwierdzonej otrzymamy wtedy zamiast równań 2) 3) i 4), jeśli I jest zmienne,

$$\varepsilon(\tau_1 - \tau_2) = \int_0^l \frac{M}{I} dx \quad 208)$$

$$\varepsilon y = \varepsilon x \frac{dy}{dx} + \int \frac{M}{I} x dx \quad 209)$$

$$\varepsilon(s - lt_2) = \int_0^l \frac{M}{I} x dx \quad 210)$$

Równanie 5) i 7) pozostaje niezmienione. Wstawiając rów. w rów. 208) i 210), otrzymamy

$$\varepsilon(\tau_1 - \tau_2) = \frac{M'}{l} \int_0^l \frac{(l-x)dx}{I} + \frac{M''}{l} \int_0^l \frac{x dx}{I} + \int_0^l \frac{X dx}{I} \quad . . 211)$$

$$\varepsilon(s - lt_2) = \frac{M'}{l} \int_0^l \frac{x(l-x)dx}{I} + \frac{M''}{l} \int_0^l \frac{x^2 dx}{I} + \int_0^l \frac{X x dx}{I} \quad . . 212)$$

Nazwijmy I_0 średni moment bezwładności, t. j. taki, aby

$$\frac{l}{I_0} = \int_0^l \frac{dx}{I} , \quad 213)$$

przyczem całkować mamy od początku do końca belki przez wszystkie przęsła.

Nazwijmy dalej dla pewnego przęsła

$$\frac{I_0}{l} \int_0^l \frac{dx}{I} = A, \quad \frac{2I_0}{l^2} \int_0^l \frac{x dx}{I} = B, \quad \frac{3I_0}{l^3} \int_0^l \frac{x^2 dx}{I} = C,$$

to, jeśli I stałe, $A=B=C=1$.

Nazwijmy jeszcze dla skrótowania

$$-\frac{6I_0}{l^2} \int_0^l \frac{X dx}{I} = \mathfrak{N}', \quad \frac{6I_0}{l^2} \int_0^l \frac{X(l-x)d(l-x)}{I} = \mathfrak{N}'', \quad \dots \quad 214)$$

$$\text{to} \quad \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}'' = -\frac{6I_0}{l} \int_0^l \frac{X dx}{I} \quad \dots \quad 215)$$

Wstawiawszy te wartości w rów. 211) i 212), otrzymamy

$$6\varepsilon I_0 l(\tau_1 - \tau_2) = 3(2A - B)M'l^2 + 3BM''l^2 - (\mathfrak{N}' + \mathfrak{N}'')l^2,$$

$$6\varepsilon I_0(s - l\tau_2) = (3B - 2C)M'l^2 + 2CM''l^2 - \mathfrak{N}''l^2.$$

A stąd otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{6\varepsilon I_0} (2\alpha M' + \gamma M'' - \mathfrak{N}') + \frac{s}{l} \\ \tau_2 &= -\frac{1}{6\varepsilon I_0} (\gamma M' + 2\beta M'' - \mathfrak{N}'') + \frac{s}{l} \end{aligned} \right\} \dots \quad 216)$$

$$\text{jeżeli} \quad \alpha = 3A - 3B + C, \quad \beta = C, \quad \gamma = 3B - 2C \quad \dots \quad 217)$$

Dla przekroju stałego otrzymamy znowu $\alpha = \beta = \gamma = 1$, a wtedy rów. 216), przechodzi w rów. 11).

Jeżeli dla belki poziomo utwierdzonej nazwiemy, jak pierwszej, momenty podporowe $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$, to według rów. 216)

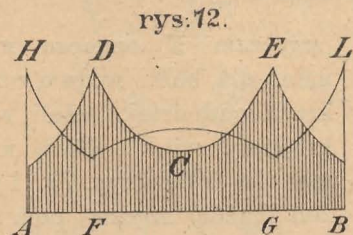
$$0 = 2\alpha \mathfrak{M}' + \gamma \mathfrak{M}'' - \mathfrak{N}', \quad 0 = \gamma \mathfrak{M}' + 2\beta \mathfrak{M}'' - \mathfrak{N}'',$$

$$\text{więc} \quad \mathfrak{N}' = 2\alpha \mathfrak{M}' + \gamma \mathfrak{M}'', \quad \mathfrak{N}'' = \gamma \mathfrak{M}' + 2\beta \mathfrak{M}'' \quad \dots \quad 218)$$

Dla przekroju stałego przechodzi rów. 218) w rów. 12).

§. 55. Wyznaczenie ilości pomocniczych.

W celu wyznaczenia ilości pomocniczych α , β i γ wykreślmy w każdym punkcie belki rzędną proporcjonalną do odwrotności momentu bezwładności, więc $\frac{1}{I}$ (rys. 72.).



Końce tych rzędnych, wyznaczają linię krzywą, a powierzchnia między tą linią a osią niech się nazywa odwrotną powierzchnią bezwładności (n. *Krümmungsfläche*).

Podr. Teor. mostów. II.

Całki $\int_0^l \frac{dx}{I}$, $\int_0^l \frac{x dx}{I}$, $\int_0^l \frac{x^2 dx}{I}$ oznaczają zatem powierzchnię odwrotną bezwładności A' , moment jej statyczny S' i bezwładności I' ze względu na AH , więc

$$A = \frac{I_0 A'}{l}, \quad B = \frac{2I_0 S'}{l^2}, \quad C = \frac{3I_0 I'}{l^3}.$$

Nazwijmy moment statyczny i bezwładności ze względu na BL S'' i I'' i $B_1 = \frac{2I_0 S''}{l^2}$, $C_1 = \frac{3I_0 I''}{l^3}$, to

$$S'' = \int_0^l \frac{(l-x)^2 dx}{I} = l \int_0^l \frac{dx}{I} - \int_0^l \frac{x dx}{I} = A'l - S',$$

$$I'' = \int_0^l \frac{(l-x)^2 dx}{I} = l^2 \int_0^l \frac{dx}{I} - 2l \int_0^l \frac{x dx}{I} + \int_0^l \frac{x^2 dx}{I} = A_1 l^2 - 2l S' + I',$$

więc
$$B_1 = \frac{2I_0}{l^2} (A'l - S') = 2A - B,$$

$$C_1 = \frac{3I_0}{l^3} (A_1 l^2 - 2l S' + I') = 3A - 3B + C,$$

a zatem według 217)

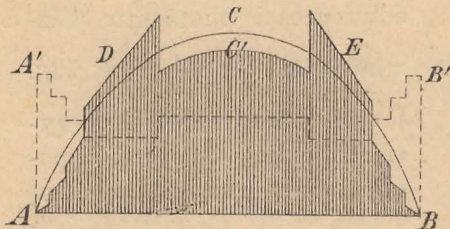
$$\alpha = C_1, \quad \beta = C, \quad \gamma = 3B - 2C = 3A - \alpha - \beta \dots 219)$$

Do wyznaczenia ilości pomocniczych α , β i γ potrzebujemy więc tylko A , B , C i C_1 , a więc powierzchnię i momenty statyczne bezwładności odwrotnej powierzchni bezwładności, co możemy wyznaczyć albo rachunkiem sposobem zwykłym lub Simpsona lub konstrukcją albo planimetrem.

§. 56. Wyznaczenie ilości $\mathfrak{N}'$ i $\mathfrak{N}''$.

Według rów. 214)

rys. 73.



$$\mathfrak{N}'' = -\frac{6I_0}{l^2} \int_0^l \frac{X x dx}{I},$$

$$\mathfrak{N}' = +\frac{6I_0}{l^2} \int_0^l \frac{X(l-x)d(l-x)}{I},$$

przyczem X oznacza moment dla belki w dwu punktach podpartej. Jeżeli wykreślimy zwykłą linią momentów ACB (rys. 73.) i jeżeli każdą rzędną pomnożymy przez $\frac{l_0}{I}$, to nowe rze-

odne dadzą nam powierzchnię kreskowaną $ADC'EB$, którą nazwiemy skurczoną powierzchnią momentów (n. *verzerrte Momentenfläche*).

Nazwijmy S_1 moment statyczny tej powierzchni dla pionowej AA' a S_2 dla pionowej BB' , to

$$\mathfrak{N}'' = -\frac{6S_1}{l^2}, \mathfrak{N}' = +\frac{6S_2}{l^2} \dots \dots \dots 220)$$

§. 57. Momenty podporowe belki ciągłej.

Jeżeli równanie 216) zastosujemy do dwóch sąsiednich przęseł belki ciągłej o równo wysokich podporach, jak w §. 5., to otrzymamy

$$6\varepsilon I_0 \tau_m = -l_m(\gamma_m M_{m+1} + 2\beta_m M_m - \mathfrak{N}_m''),$$

$$6\varepsilon I_0 \tau_m = +l_{m+1}(2\alpha_{m+1} M_m + \gamma_{m+1} M_{m+1} - \mathfrak{N}_{m+1}'),$$

a stąd

$$\gamma_m l_m M_{m-1} + 2(\beta_m l_m + \alpha_{m+1} l_{m+1}) M_m + \gamma_{m+1} l_{m+1} M_{m+1} =$$

$$= l_m \mathfrak{N}_m'' + l_{m+1} \mathfrak{N}_{m+1}' \dots \dots \dots 221)$$

Równanie to posłuży nam do wyznaczenia momentów podporowych, jak dla przekroju stałego.

§. 58. Punkty stałe.

Jeżeli tylko jedno przęsło jest obciążone, to w nieobciążonych przęsłach otrzymamy momenty podporowe, podstawiając w rów. 221) $m=1, 2$, itd. i $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'' = 0$, więc

$$2(\beta_1 l_1 + \alpha_2 l_2) M_1 + \gamma_2 l_2 M_2 = 0,$$

$$\gamma_2 l_2 M_1 + 2(\beta_2 l_2 + \alpha_3 l_3) M_2 + \gamma_3 l_3 M_3 = 0,$$

.....

Z pierwszego równania wynika

$$M_2 = -2\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_2} + \frac{\beta_1 l_1}{\gamma_2 l_2}\right) M_1, \text{ z drugiego}$$

$$M_3 = -\left[2\frac{\alpha_3}{\gamma_3} + \frac{l_2}{l_3}\left(2\frac{\beta_2}{\gamma_2} + \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \frac{M_1}{M_2}\right)\right] M_2, \text{ a zatem}$$

$$\mu_2 = \frac{2(\beta_1 l_1 + \alpha_2 l_2)}{\gamma_2 l_2}, \mu_3 = \frac{2(\beta_2 l_2 + \alpha_3 l_3) - \frac{\gamma_2 l_2}{\mu_2}}{\gamma_3 l_3} \dots \dots 222)$$

Podobnie więc, jak dla przekroju stałego, momenty podporowe są naprzemian dodatnie i wzrastają ku przęsłu obcią-

zonemu; podobnie też w każdym przęśle znajdują się dwa punkty stałe, dla których, jak w 44) i 45),

$$a = \frac{1}{1+\mu}, \quad b = \frac{1}{1+\nu} \dots\dots\dots 223)$$

Dalsze obliczenie odbywa się zupełnie, jak dla przekroju stałego.

§. 59. Przykład.

Jako przykład obliczmy momenty, wywołane ciężarem własnym, dla tej samej belki trzyprzęsłowej, którą obliczyliśmy dla przekroju stałego w §. 26. A więc niech będzie $l_1=10\cdot00\text{ m}$, $l=13\cdot00\text{ m}$, $g_1=0\cdot0625$, $g=0\cdot06745$. Na rysunku 1. tabl. II. wyznaczaliśmy na podstawie poprzedniego obliczenia przybliżonego przekrój belki. Wysokość belki drewnianej otrzymaliśmy $h=35\text{ cm}$, szerokość $b=28\text{ cm}$, wysokość siodelka 28 cm . Obliczamy teraz momenty bezwładności $J=\frac{1}{12}bh^3$ w dwu miejscach to znaczy tam, gdzie belka jest pojedynczą i tam gdzie złożoną.

$$J_1 = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} 28 \times 35^3 = 100036\text{ cm}^4,$$

$$J_2 = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} 28 \cdot 63^3 = 583443\text{ cm}^4.$$

Na rysunku 3 wykreśliśmy na tej podstawie $\frac{1}{J}$ (linie kreskowane) i wypisaliśmy $\frac{100000}{J}$. Dla połowy belki obliczyliśmy teraz powierzchnię prostokątów, odczytując długości w mm , wysokość według liczb na rysunku $\left(\frac{100000}{J}\right)$ i otrzymaliśmy powierzchnię $140\cdot1$. Podzieliwszy tę powierzchnię przez długość 165 mm , otrzymaliśmy $0\cdot849$ czyli właściwie $0\cdot00000849$ jako średni odwrotny moment bezwładności $\frac{1}{J_0}$. Aby wyznaczyć $\frac{J_0}{J}$ podzieliłmy $\frac{1}{J}$ przez $\frac{1}{J_0}$ i wykreślili na rysunku $\frac{J_0}{J}$ (linie pełne).

Siodelko teoretycznie powinno sięgać do tego punktu, gdzie moment ujemny przybiera wartość największego momentu dodatniego, ze względu na który został przekrój belki pojedynczej wyznaczony, a ta granica nie przekracza w naszym przypadku 1 metra na lewo i prawo od podpory, ze względu jednak na przytwierdzenie dajemy siodelko 3 m długie.

Jeżeli $l_3=l_1$ mierzyć będziemy w mm , więc $l_3=100mm$, to $A'=85\cdot273$, a że $J_0=0\cdot849$, więc $A=\frac{J_0 A'}{l}$, gdzie A' jest powierzchnią średnich odwrotnych momentów bezwładności dla przęsła 1go, J_0 średnim odwrotnym momentem bezwładności dla tegoż przęsła a l rozpiętości w mm , więc

$$A = \frac{0\cdot849 \times 85\cdot275}{100} = 0\cdot74325.$$

Dla pierwszego przęsła jest $J'=192\cdot312$, $J''=282207$, więc gdy $J_0=0\cdot849$.

$$C = \frac{3 \times 192\cdot319}{100^3} \times 0\cdot849 = 0\cdot4889 = \beta_1 \quad C_1 = \frac{3 \times 282207}{100^3} 0\cdot849 = 0\cdot7187 = \alpha_1$$

$$\gamma_1 = 3.074325 - 0.4889 - 0.7187 = 1.02215.$$

Podobnie otrzymamy dla drugiego przęsła $A' = 102.16$, $l_2 = 130$ mm, przeto $A = \frac{102.13}{130} = 0.78585$, $J' = J'' = 620.953$, J_0 dla przęsła drugiego = 1.

$$\alpha_2 = \beta_2 = \frac{3 \times 620.958}{130^3} = 0.8475,$$

$$\gamma_2 = 0.6627.$$

W celu wyznaczenia $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ wykreślamy zwykle powierzchnie momentów rys. (2). W pierwszym przęśle otrzymamy dla $x = \frac{1}{2} l_1$

$$M = \frac{1}{8} g l^2 = \frac{1}{8} 0.0625 \times 10^2 = 0.781 \text{ tm}$$
 w drugim

$$M = \frac{1}{8} g l^2 = \frac{1}{8} 0.06745 \times 13^2 = 1.43613 \text{ tm}.$$

Mnożąc odnośne rzędne momentów przez $\frac{J_0}{J}$, otrzymaliśmy skurczoną powierzchnię momentów. Dalej otrzymamy moment statyczny tej powierzchni w pierwszym przęśle ze względu na oś AA' i BB'

$$S_1 = 26.62 \text{ tm}^3 \text{ zaś } S_2 = 27.71 \text{ tm}^3$$

$$\mathfrak{M}_1'' = - \frac{6 \times 26.62}{10^2} = 1.5974 \text{ tm}$$

$$\mathfrak{M}_1' = + \frac{6 \times 27.71}{10^2} = 1.6626 \text{ tm}.$$

Dla drugiego przęsła otrzymamy $S_1 = S_2 = 78 \text{ tm}^3$ ze względu na podporowe osie BB' i CC' , a więc według 220)

$$\mathfrak{M}_2'' = \mathfrak{M}_2' = - \frac{6 \times 78}{13^2} = -2.769 \text{ tm}.$$

Teraz ustawimy równanie momentów podporowych. Ponieważ tu z powodu symetrii $M_1 = M_2$, więc wystarczy jedno równanie, które otrzymamy z 221., wstawiając $m = 1$, a więc

$$2(\beta_1 l_1 + \alpha_2 l) M_1 + \gamma_2 l M_2 = l_1 \mathfrak{M}_1'' + l \mathfrak{M}_2',$$

a po wstawieniu wartości

$$\{2(0.4889 \times 10 + 0.8475 \times 13) + 0.6627 \times 13\} M_1 = 10 \times 1.6704 + 13 \times 2.92$$

$$M_1 = M_2 = -1.1589 \text{ tm}.$$

W §. 26. otrzymaliśmy dla przekroju stałego

$$M_1 = M_2 = -0.89317 \text{ tm}.$$

Widzimy więc, że wpływ zmienności przekroju jest znaczny.

VII. Obliczenie dokładne belki ciągłej kratowej o przekroju zmiennym.

§. 60. Dokładność rozmaitych sposobów obliczenia.

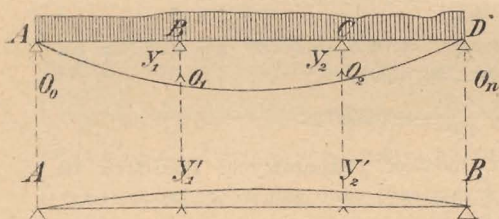
Powyżej wyłożony sposób obliczenia belki ciągłej o przekroju zmiennym jest bardzo żmudny, a pomimo tego dla belek

kratowych, o które tu często chodzi, niedokładny. Obliczając bowiem belki ciągłe kratowe, według poprzedniego sposobu uwzględnimy przy wyznaczeniu momentu bezwładności tylko przekrój pasów, krzyżulców zaś wcale nie uwzględniamy. Błąd, jaki z tego powodu popełniamy w wyznaczeniu momentów podporowych, jest bardzo znaczny, tak dalece, że mniejszy błąd popełniamy, licząc według sposobu dla przekroju stałego, niż uwzględniając zmienność pasów, a nie uwzględniając krzyżulców. Dlatego, licząc sposobem przybliżonym, będziemy zawsze przyjmować przekrój stały, a licząc dokładnie, musimy uwzględnić także i krzyżulce.

§. 61. Zasada dokładnego obliczenia.

Zasada obliczenia dokładnego belki ciągłej polega na tem*), że uważamy belkę jako w dwu punktach na skrajnych podporach A i D (rys. 74.) podpartą i wyznaczamy ugięcie obciążonej belki liczebnie lub

rys. 74.



wykreślnie. Otrzymujemy w ten sposób ugięcia na podporach $y_1, y_2 \dots$

Teraz przypuszczamy, że na podporze B działa do góry siła $O_1 = 1$ na belkę nieobciążoną (nawet ciężarem własnym) i wyznaczamy ugięcia na podporach $-y_1'$ i $-y_2'$. Tak samo wyznaczamy ugięcia, jeśli siła $= 1$ działa na drugiej podporze i otrzymujemy $-y_1''$, $-y_2''$ i t. d. Dla belki ciągłej ugięcia w punktach B, C... muszą być równe zeru, więc

$$\left. \begin{aligned} y_1 - O_1 y_1' - O_2 y_1'' - \dots &= 0 \\ y_2 - O_1 y_2' - O_2 y_2'' - \dots &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 224)$$

Otrzymamy w ten sposób $(n-1)$ równań, właśnie tyle, co mamy nieznanymi. Z równań tych wyznaczymy teraz $O_1, O_2 \dots$ dla danego obciążenia.

Ponieważ dla rozmaitych prętów belki najniekorzystniejsze obciążenia są rozmaite, więc dla każdego z nich musieliśmy powtórzyć cały żmudny rachunek.

*) p. sposób Fontviolanta. Köchlin. Statique graphique str. 338.

Prét	A cm ²	l cm	P t	dl mm	P' t	dl'	P'' t	Prét	A cm ²	l cm	P t	dl mm	P' t	dl'	P'' t
a	35	600	+ 31.0	+ 2.7	- 20.15	- 1.7	+ 11.5	a'	48	420	- 43	- 1.9	+ 28.5	+ 1.2	- 15.8
b	90	600	+ 86.5	+ 2.9	- 60.4	- 2.0	+ 26.4	a''	42	420	+ 42	+ 2.1	- 28.5	- 1.4	+ 13.5
c	60	600	+ 131.5	+ 6.6	- 100.65	- 6.0	+ 29.8	b'	18	420	- 36.5	- 4.3	+ 28.5	+ 3.3	- 8.0
d	75	600	+ 166.0	+ 6.6	- 140.9	- 7.5	+ 22.5	b''	18	420	+ 34.8	+ 3.8	- 28.5	- 3.3	+ 5.0
e	75	600	+ 193.5	+ 7.7	- 140.9	- 7.5	+ 50.5	c'	36	420	- 29.5	- 1.7	+ 28.5	+ 1.6	- 0.5
f	60	600	+ 196.6	+ 9.7	- 100.65	- 6.0	+ 92.7	c''	55	420	+ 26.8	+ 1.0	- 28.5	- 1.05	- 2.5
g	90	600	+ 150.0	+ 5.0	- 60.4	- 2.0	+ 88	d'	75	420	- 21.8	- 0.6	+ 28.5	+ 0.8	+ 7.0
h	35	600	+ 57.8	+ 4.7	- 20.15	- 1.7	+ 37.2	d''	90	420	+ 20.0	+ 0.5	- 28.5	- 0.7	- 9.5
i	55	300	- 0.45	- 0.02	0	0	- 0.45	e'	60	300	- 0.9	- 0.02	0	0	- 0.9
k	38	300	0	0	0	0	0	e''	90	420	- 18.5	- 0.6	- 28.5	- 0.7	- 48.0
l	60	600	- 114.8	- 5.7	+ 40.25	+ 2.0	- 73.4	f'	75	420	+ 16.5	+ 0.7	+ 28.5	+ 0.8	+ 45.2
m	70	600	- 183.5	- 7.9	+ 80.5	+ 3.4	- 101.2	f''	55	420	+ 14.0	+ 0.5	- 28.5	- 1.05	- 15.0
n	60	600	- 205.0	- 10.2	+ 120.75	+ 6.0	- 82.0	g'	36	420	- 17.0	- 1.0	+ 28.5	+ 1.6	+ 12.4
o	110	600	- 180.5	- 4.9	+ 161.0	+ 8.05	- 17.0	g''	18	420	+ 47.2	+ 5.2	- 28.5	- 3.3	+ 18.8
p	60	600	- 150.5	- 7.5	+ 120.75	+ 6.0	- 28.0	h'	18	420	- 50.0	- 5.5	+ 28.5	+ 3.3	- 21.0
r	70	600	- 110.5	- 4.7	+ 80.5	+ 3.4	- 29.8	h''	42	420	+ 30.2	+ 4.0	- 28.5	- 1.4	+ 50.8
s	60	600	- 60.5	- 3.0	+ 40.25	+ 2.0	- 20.8								
t	38	300	0	0	0	0	0								
u	55	300	- 0.45	- 0.01	0	0	- 0.45								

Dla wyznaczenia linii wpływowych trzeba przyjąć $P=1$, działające po kolei we wszystkich węzłach dolnych i dla tych przypadków wyznaczyć siły wewnętrzne. Droga to dość żmudna, do wykreślenia linii wpływowych możemy dojść jeszcze innym sposobem, który poniżej podamy.

Przykład. Belka ciągła ABC (t. III. r. 1.) dwuprzęsłowa o rozpiętości 2 razy po 24 m jest obciążona tylko w drugim przęśle BC , pierwsze przęsło AB nie jest wcale obciążone. Niechaj będzie ciężar własny jednej belki $0.9 t/m$, z czego wypada $0.6 t/m$ na pas dolny a $0.3 t/m$ na górny. Ciężar ruchomy niech będzie $3.16 t/m$. Według tego obliczone ciężary węzłowe są oznaczone na rysunku.

Przekroje pojedynczych prętów, które należy tymczasowo wyznaczyć wedle przybliżonej zwykłej teorii, uwidoczniliśmy powyżej w tabliczce. Przypuszczając, że belka jest tylko podparta na podporach skrajnych A i C , kreślimy wielobok sznurowy i plan sił (rys. 2. i 3.), obliczamy skrócenia i przedłużenia wszystkich prętów i wyznaczamy ugięcie belki sposobem Williota *) (rys. 4.). Otrzymaliśmy w ten sposób ugięcie punktu B $y_1 = 168 mm$.

Teraz przypuścimy, że w B działa siła $P=40 t$ do góry. Dla tego obciążenia kreślimy plan sił (rys. 5.) i otrzymujemy siły, zestawione w tabliczce w rubryce P' . Obliczywszy odpowiednie dl' , wykreślamy połowę (z powodu symetrii) ugiętej belki i otrzymujemy ugięcie punktu B $165 mm$. Zatem dla siły $P=1$ $y_1' = \frac{165}{40}$, a według 224)

$$168 - O_1 \frac{165}{40} = 0, \text{ stąd } O_1 = 40 \cdot \frac{168}{165} = 40.7 t.$$

W rysunku 2. otrzymaliśmy $O_0 = 31.7$, $O_2 = 58.18$, od tego odjąć należy $\frac{40.7}{2} = 20.35$, więc

$$O_0 = 11.35 t, O_1 = 40.7 t, O_2 = 37.83 t.$$

Na tej podstawie wykreśliliśmy plan sił (rys. 7.), z którego otrzymujemy dokładne siły wewnętrzne dla danego obciążenia (P'' w tabliczce).

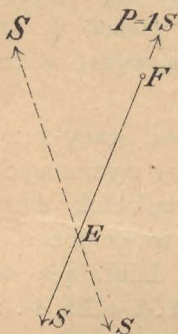
§. 62. Prawo pracy przygotowanej.

Jeżeli na pręt jakiś belki kratowej działają równe i wprost przeciwne siły S (rys. 75.), to praca ich, t. j. iloczyn sił przez drogi w kierunku sił, jest w czasie jakiegokolwiek ruchu pręta $= 0$. Ruch ten możemy bowiem rozłożyć na postępowy, podczas którego prace obu sił S są równe i wprost przeciwne i znoszą się, i na obrotowy około dowolnego punktu pręta E ,

*) patrz Podr. teorii mostów tom I. 2 wydanie str. 216.

podczas którego praca jest równa zero, bo kierunki sił przechodzą przez punkt obrotu.

rys.75.



Jeżeli długość pręta wzrośnie z jakichkolwiek przyczyn (a więc niekoniecznie wskutek sił S) o Δs , to praca sił S da się wyrazić równaniem

$$A = S \int_0^{\Delta s} d\Delta s = S\Delta s.$$

Ponieważ odnosi się ona do jakichkolwiek, byle nadzwyczaj małych możliwych przesunięć, więc nazywa się ona pracą możliwą, przygotowaną (n. *virtuelle Arbeit*). Dla całej belki kratowej będzie

$$A = \sum Sds \dots \dots \dots 225)$$

Siły wewnętrzne, działające w prętach belki, możemy zastąpić każdą dwiema siłami S , działającymi w kierunku pręta, zaczepiającymi w węzłach. Ponieważ mają one zatem kierunek wprost przeciwny, więc praca ich jest $-\sum Sds$. Przypuśćmy, że na belkę tę działają siły zewnętrzne P , które są w równowadze między sobą i z siłami wewnętrznymi, a rzuty przesunięć się odnośnych punktów zaczepienia na kierunki tych sił nazwiemy dp , to w każdym węźle dla równowagi suma składowych pionowych i poziomych wszystkich sił jest równa zero, a na podstawie zasady momentów przygotowanych*) i praca ich jest równa zero. Zatem praca możliwa wszystkich sił zewnętrznych i wewnętrznych musi być równa zero. Więc

$$\sum Pdp - \sum Sds = 0 \dots \dots \dots 226)$$

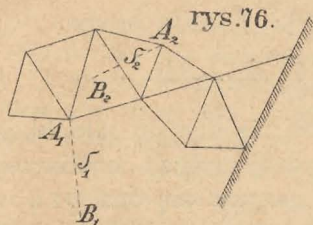
Prawo powyższe zwane prawem pracy przygotowanej**) lub możliwych przesunięć (n. *Princip der virtuellen Arbeit, der virtuellen Verchiebungen*) można w ten sposób wyrazić: W stanie równowagi sił zewnętrznych i wewnętrznych praca przygotowana sił zewnętrznych równa się pracy odkształcenia belki kratowej (n. *Formänderungsarbeit*).

*) p. Franke. Mechanika teoretyczna str. 163.

**) Mohr. Beitrag zur Theorie des Fachwerkes Z. d. Ar. u. J. V. zu Hann. 1874. 1875.

§. 63. Prawo Maxwella.

Przypuśćmy, że wskutek jakichkolwiek sił zewnętrznych zmieniły się długości s prętów belki kratowej $A_1 A_2$ (rys. 76.)



o Δs , przyczem węzeł A_1 zrobił drogę $\delta_1 = A_1 B_1$ a węzeł A_2 drogę $\delta_2 = A_2 B_2$.

Na mocy prawa pracy przygotowanej możemy wyznaczyć δ_1 , które powstają wskutek Δs , nazwawszy S_1 siły wewnętrzne, wywołane siłą $=1$, działającą w A_1 w kierunku $A_1 B_1$. Mianowicie mamy wtedy 1. $\delta_1 = \sum S_1 \Delta s$.

Podobnie wyznaczmy δ_2 , nazwawszy S_2 siły wewnętrzne, wywołane siłą $=1$, działającą w A_2 w kierunku $A_2 B_2$. Otrzymamy wtedy 1. $\delta_2 = \sum S_2 \Delta s$.

Dla pewnego obciążenia jest

$$\Delta s = \frac{S s^*}{\epsilon A}, \dots \dots \dots 227)$$

jeżeli S oznacza siłę wewnętrzną, odpowiadającą danemu obciążeniu a A przekrój pręta. A zatem otrzymamy

$$\delta_1 = \sum \frac{S_1 S s}{\epsilon A}, \quad \delta_2 = \sum \frac{S_2 S s}{\epsilon A} \dots \dots \dots 228)$$

$$\text{Założmy, że } S = S_2, \text{ to } \delta_1 = \sum \frac{S_1 S_2 s}{\epsilon A}, \dots \dots \dots 229)$$

$$\text{a gdy } S = S_1, \text{ to } \delta_2 = \sum \frac{S_2 S_1 s}{\epsilon A}, \dots \dots \dots 230)$$

a ponieważ wtedy $\delta_1 = \delta_2$, zatem możemy wypowiedzieć następane twierdzenie:

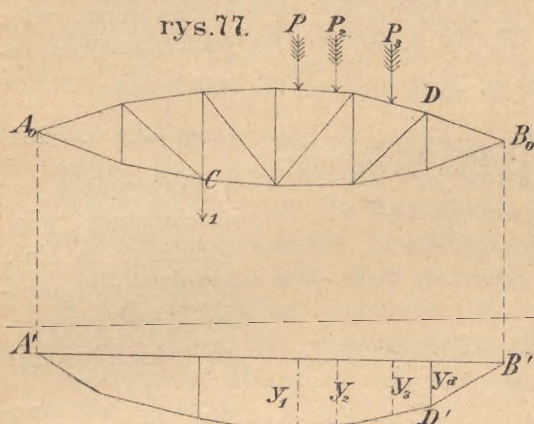
Siła równa jedności, zaczepiająca w A_1 , a działająca w kierunku $A_1 B_1$, przesuwa punkt A_2 w kierunku $A_2 B_2$ o długość, która jest tak wielką, jak długość $A_1 B_1$, o którą przesuwa się A_1 , gdy w A_2 działa siła $=1$ w kierunku $A_2 B_2$.

Twierdzenie to nazywamy twierdzeniem Maxwella.

*) p. Podręcznik statyki budowlanej 2 wyd. str. 36.

§. 64. Linia wpływowa ugięcia.

Aby wynaleźć linię wpływową ugięcia punktu C (rys. 77.) postąpimy według Müllera Breslaua w następujący sposób:



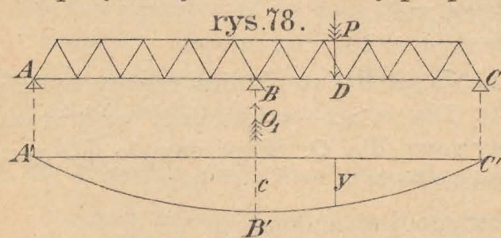
Zaczepmy w C siłę pionową $=1$ i wyznaczmy w znany sposób liczebny lub wykreslny wielobok ugięcia pasu, na którym leży pomost (n. p. pasu górnego), to rzędna y_d oznacza ugięcie punktu D , gdy w C działa siła $=1$.

Uwzględniamy tu jednak tylko ugięcia pionowe. Na mocy prawa Maxwella będzie jednak y_d oznaczać także ugięcie punktu C , jeżeli w punkcie D działa siła $=1$. To samo możemy powiedzieć o każdym innym punkcie pasu ADB , a zatem linia $A'D'B'$ jest linią wpływową ugięcia punktu C .

Jeżeli więc siły P_1 , P_2 i P_3 działają na belkę, to ugięcie w punkcie C będzie $y_c = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3$.

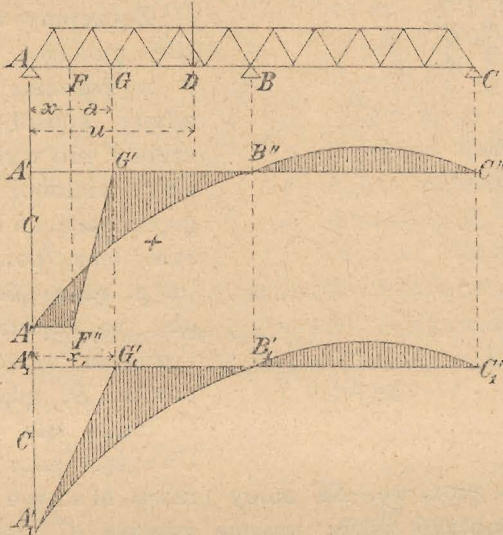
§. 65. Linia wpływowa oddziaływania belki dwuprzęsłowej.

Jeśli mamy wyznaczyć oddziaływanie Q_1 belki ciągłej dwuprzęsłowej na środkowej podporze B (rys. 78.), przypuszczamy, że belka jest podparta tylko w A i C , a w B działa na dół siła pionowa $=1$ i kreślimy dla niej wielobok ugięcia pasu dolnego $A'B'C'$. Na mocy poprzedniego paragrafu jest $A'B'C'$, zarazem linią wpływową ugięcia punktu B .



Przypuśćmy teraz, że na belkę ciągłą ABC działa w D siła P , to w B powstanie oddziaływanie nieznane nam jeszcze O_1 . Z linii wpływowej otrzymamy ugięcie punktu B , które dla

rys. 79.



belki ciągłej jest równe zero, więc $Py - O_1 c = 0$, a zatem

$$O_1 = \frac{1}{c} Py \quad (231)$$

Ponieważ c jest ilością stałą, więc widzimy, że linia $A'B'C''$ jest zarazem linią wpływową oddziaływania O_1 , a $\frac{1}{c}$ jest mnożnikiem dla tej linii.

W podobny sposób przypuszczając, że belka podparta jest w B i C a obciążona siłą $=1$ w A , otrzymamy (rys. 79.) linię wpływową $A''B''C''$ dla oddziaływania O_0 , przyczem $O_0 = \frac{1}{c} Py$.

§. 66. Linie wpływowe sił poprzecznych i momentów.

Wyznamy teraz linie wpływowe siły poprzecznej w przedziale FG (rys. 79.).

$$\begin{aligned} \text{Jeżeli } u < x & \quad Q = O_0 - P, \\ \text{" } u > x + a & \quad Q = O_0. \end{aligned}$$

Jeśli więc zrobimy $A''F'' \parallel A'B''$, to różnica rzędnych linii $A''F''$ i $A''F'$ wyznacza Q . Dla $u > x + a$ jest linia wpływowa dla O_0 zarazem linią wpływową dla Q . W przedziale FG jest linia wpływowa prosta, więc $F''G'$.

Dla momentu statycznego jest znowu,
jeśli $u > x_1$, $M = O_0 x_1$,
" $u < x_1$, $M = O_0 x_1 - P(x_1 - u)$.

Niech będzie $M' = \frac{M}{x_1}$, to dla $u > x_1$ $M' = O_0$,

$$\text{a } \text{ " } u < x_1 \quad M' = O_0 - P \frac{x_1 - u}{x_1}.$$

A więc dla $u > x_1$ linia wpływowa dla O_0 jest zarazem linią wpływową dla M' , a więc i dla M z mnożnikiem x_1 , dla długości AG mamy od rzędnej linii O_0 odciągnąć $y_1 = P \frac{x_1 - u}{x_1}$.

Dla $u=0$ jest $y_1=P$, dla $u=x_1$ jest $y_1=0$, a więc powierzchnia kreskowana jest powierzchnią wpływową momentów.

Widzimy więc, że do wykreślenia linii wpływowych sił poprzecznych i momentów potrzebujemy jednego tylko wykresu ugiętej belki i kilku linii prostych.

W jaki sposób na podstawie linii wpływowych wyznaczamy największe siły poprzeczne i momenty i największe siły wewnętrzne, wiemy z tomu pierwszego.

VIII. Wpływ podpór.

§. 67. Ogólne uwagi.

Dotychczas przypuszczaliśmy, badając belkę analitycznie, że podpory znajdowały się w jednej linii, a właściwie, że belka jest tak podparta w kilku punktach, że przez to podparcie nie powstają żadne momenty, gdy ciężaru własnego nie uwzględnimy. Badając belkę ciągłą sposobem wykreślnym, przypuszczaliśmy już jednak także nierówno wysokie podpory, to samo musimy teraz zrobić przy użyciu sposobu liczebnego zwłaszcza, że podpory czasami umyślnie umieszczamy w nierównej wysokości, czasem zaś skutek osiadania się filarów niektórych nierówność ta powstaje pomimo naszej woli.

Pokrótkie wspomnimy też w tym rozdziele o wpływie na momenty łożysk szerokich albo podwójnych i przytwierdzenia belki stałej do filaru.

§. 68. Momenty podporowe przy nierówno wysokich podporach.

Niechaj odstępów pionowe podpór od poziomej, przechodzącej przez pierwszą podporę będą $s_1, s_2 \dots s_n$, przyczem oznaczamy je jako dodatnie dla podpór niżej leżących, to jeśli

przypuścimy, że belka nie jest wcale obciążona, więc $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'' = 0$, otrzymamy dla m -tej podpory belki ciągłej, analogicznie jak §. 5., na podstawie rów. 11)

$$\tau_m = -\frac{l_m}{6\epsilon I}(M_{m-1} + 2M_m) + \frac{s_m - s_{m-1}}{l_m},$$

$$\tau_m = +\frac{l_{m+1}}{6\epsilon I}(2M_m + M_{m+1}) + \frac{s_{m+1} - s_m}{l_{m+1}}.$$

A stąd

$$M_{m-1}l_m + 2M_m(l_m + l_{m+1}) + M_{m+1}l_{m+1} = 6\epsilon I \left(\frac{s_m - s_{m-1}}{l_m} - \frac{s_{m+1} - s_m}{l_{m+1}} \right) \dots \dots \dots 232)$$

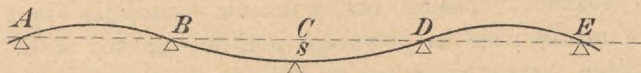
Wstawiając w tem równaniu za m wartości od 1 do $n-1$, otrzymamy $n-1$ równań momentów podporowych, z których możemy wyznaczyć $n-1$ niewiadomych momentów podporowych, wywołanych nierówną wysokością podpór.

Do tych momentów dodać należy momenty, wywołane obciążeniem, które wyznaczyliśmy w poprzednich rozdziałach. Widzimy stąd, że najniekorzystniejsze obciążenie i linie wpływowe sił poprzecznych i momentów dla obciążenia są niezależne od wysokości podpór, których wpływ zupełnie osobno obliczamy.

§. 69. Wpływ zmiany wysokości jednej podpory.

Jeżeli jedna podpora się zniży o s (rys. 80.), to na tej podporze linia ugięcia jest ku dołowi wypukłą, a zatem powstaje tu moment dodatni. Przez podwyższenie podpory średniej powstaje przeciwnie moment ujemny.

rys. 80.



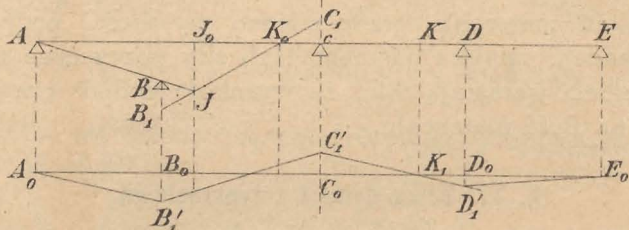
Ponieważ obciążenie belki sprawia na średnich podporach moment ujemny, zatem przez podwyższenie podpory moment ten się powiększa, przez zniżenie zmniejsza, na sąsiednich podporach przez podwyższenie podpory C moment ujemny się zmniejsza, przez zniżenie powiększa.

Przez podwyższenie podpory powstaje na prawo od niej dodatnia, na lewo ujemna siła poprzeczna.

Momenty na sąsiednich podporach zmieniają znak i stają się coraz mniejsze, co możnaby udowodnić zupełnie w ten sam sposób, co dla obciążenia jednego przęsła w §. 8.

Udowodnione w §. 9. twierdzenia co do sił poprzecznych i oddziaływań stosują się i tutaj.

rys. 81.

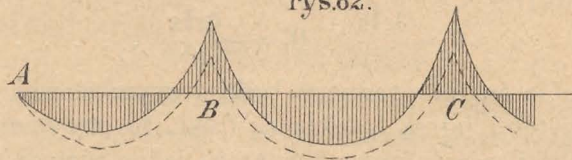


Wykreślnie możemy wyznaczyć wpływ zniżenia się jednej podpory B (rys. 81.) w sposób, wskazany przez W. Rittera. Jeżeli belka nie jest obciążona, to belki średnie wieloboku schodzą się w jedną linię. Wedle §. 42. prosta AB przecina przedłużenie boku średniego w pionowej punktu stałego J_0J . Prosta JK_0 jest bokiem średnim, więc BB_1 i CC_1 są równe momentom podporowym. Zróbmy $B_0B'_1 = BB_1$ i $C_0C'_1 = CC_1$, poprowadźmy $A_0B'_1$, $B_1C'_1$ i C'_1K_1 , a otrzymamy linie momentów w tym wypadku.

§. 70. Najkorzystniejsza wysokość podpór.

Przez zmianę wysokości podpór zmieniają się momenty. Zachodzi więc teraz pytanie, w jakiej wysokości muszą leżeć podpory dla najmniejszej ilości materiału.

rys. 82.



Jeżeli przekrój belki ciąglej jest stały, to obliczamy go według największego momentu. Bezzględnie największe momenty są tu ujemne na podporach (rys. 82.). Jeżeli środkowe podpory zniżymy, zmniejszamy *najw* ($-M$), za to wzrasta *najw* ($+M$). Najkorzystniej byłoby więc zniżyć o tyle pod-

pory średnie, aby *najw* ($-M$) było bez względu na znak równe *najw* ($+M$).

Jeżeli przekrój belki ciągłej jest zmienny, wtedy o ilości materyału rozstrzyga powierzchnia momentów i sił poprzecznych. Tu musimy w każdym wypadku szukać, kiedy te powierzchnie będą najmniejsze. Wiele nie możemy jednak zaoszczędzić na materyale przez zmianę wysokości podpór, bo jeśli w jednym miejscu momenty lub siły poprzeczne maleją, to w drugim wzrastają tak, że wysokość podpór prawie nie wpływa na ilość materyału.

§. 71. Belka dwu- i trzyprzęsłowa.

Jeżeli średnia podpora belki dwuprzęsłowej zniży się o s , to z rów. 232) otrzymamy

$$2M_1(l_1 + l_2) = 6\epsilon I \left(\frac{s}{l_1} + \frac{s}{l_2} \right), \text{ zatem}$$

$$M_1 = \frac{3\epsilon I s}{l_1 + l_2} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) = \frac{3\epsilon I s}{l_1 l_2} \dots \dots \dots 233)$$

$$\text{a dla } l_1 = l_2 = l \quad M_1 = \frac{3\epsilon I s}{l^2} \dots \dots \dots 234)$$

Rozumie się, że dla podwyższenia podpory średniej o s otrzymamy równie wielki moment ujemny.

Ponieważ $M_1 = O_0 l_1$, więc

$$O_0 = \frac{M_1}{l_1} = \frac{3\epsilon I s}{l_1^2 l_2}, \dots \dots \dots 235)$$

$$\text{a} \quad O_1 = -(O_0 + O_2) = -\frac{3\epsilon I s}{l_1^2 l_2} (l_1 + l_2) \dots \dots \dots 236)$$

Dla $l_1 = l_2 = l$

$$O_0 = \frac{3\epsilon I s}{l^3}, \quad O_1 = -\frac{6\epsilon I s}{l^3} \dots \dots \dots 237)$$

Jeśli obie średnie podpory belki trzyprzęsłowej zniżą się o s , a rozpiętości jej są $l_1 = 2l = l_3$, $l_2 = l$, to otrzymamy $M_1 = -M_2$, do określenia którego wystarcza jedno równanie według

$$232) \quad 2M_1(l_1 + l) + M_2 l = 6\epsilon I \frac{s}{l_1}, \text{ a zatem}$$

$$M_1 = \frac{6\epsilon I s}{(3 + 29)9l^2}, \dots \dots \dots 238)$$

$$O_0 = -O_1 = \frac{6\epsilon I s}{(3 + 29)9l^3} \dots \dots \dots 239)$$

Równ. 234) i 238) możemy ogólnie wyrazić $M_w = a \cdot \frac{Is}{l^2}$, gdzie a oznacza pewien współczynnik. Moment średni, wywołany obciążeniem, da się przedstawić w kształcie $b \cdot ql^2$, siła wewnątrz w pasie $\frac{bql^2}{h}$, przekrój pasu $\frac{bql^2}{h\tau}$ a moment bezwładności $I = \frac{Ah^2}{4} = \frac{bql^2h}{4\tau}$, zatem $M_w = a \frac{bql^2hs}{4\tau l^2} = \frac{abnqls}{4\tau} = c \cdot ls$, jeżeli przyjmiemy $h = ln$, przyczem c i n oznaczają pewne ilości stałe.

Jeżeli największy moment, wywołany obciążeniem, nazwiemy $M_c = b_1 ql^2$, to

$$\frac{M_w}{M_c} = \frac{cls}{b_1 ql^2} = c_1 \frac{s}{l} \dots \dots \dots 240)$$

Zatem stosunek momentu podporowego, wywołanego zmianą wysokości podpór do momentu, wywołanego obciążeniem, jest wprost proporcjonalny do różnicy wysokości s a odwrotnie do rozpiętości.

Winkler oblicza, że jeśli s wyrazimy w mm , a l w m , to dla belki dwuprzęsłowej $c_1 = 0.25$, dla belki trzyprzęsłowej $c_1 = 0.11$, a więc jeśli $s = 10 mm$ będzie

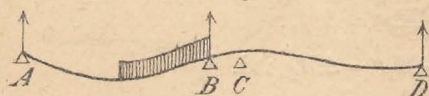
	dla $l = 10$	30	50	100	150 m
dla belki dwuprzęsłowej	$\frac{M_w}{M_c} = 0.25$	0.08	0.05	0.025	0.016
" " trzyprzęsłowej	$\frac{M_w}{M_c} = 0.11$	0.04	0.02	0.011	0.007.

Wpływ małej zmiany względnej wysokości podpór jest więc dla belki ciągłej bardzo znaczny przy małych rozpiętościach, mały przy wielkich.

§. 72. Podwójne łożysko.

Dawniej używano często dla belek ciągłych na jednej podporze dwu łożysk tak, że właściwie powstawały oprócz

rys. 83.



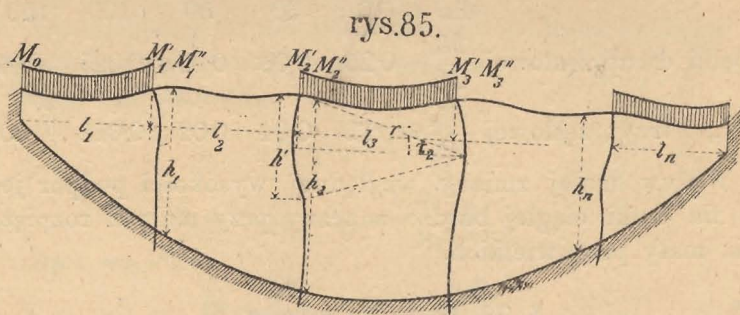
wielkich przęseł, także przęsła małe między dwoma łożyskami jednej podpory. Chociaż teraz nie używamy już nigdy dwu łożysk na jednej podporze, to także szerokie jedno łożysko działa podobnie, jak dwa łożyska.

Mogą przytem zajść dwa wypadki. Jeżeli oddziaływanie w C (rys. 83.) wypada ujemne, a belka nie jest zakotwioną, to belka w tem miejscu się podnosi i przy obliczeniu przyjąć należy, że belka w C nie jest podpartą. Jeżeli oddziaływania w B i C są dodatnie (rys. 84.), to wtedy długość BC stanowi rzeczywiste przęsło, które przy obliczeniu należy uwzględnić.

Z powodu, że obecnie unikamy tak podwójnych, jak i szerokich łożysk, nie będziemy wchodzić w szczegóły obliczenia takich belek, które zresztą mało się różni od obliczenia belek o pojedynczych łożyskach, trzeba tylko dodatkowo badać, czy oddziaływania są ujemne, czy dodatnie.

§. 73. Wpływ przytwierdzenia belek do filarów.

Jeżeli belki są stale połączone z filarami, to filary muszą wziąć udział w ugięciu belek (rys. 85.), a więc pewna część



momentu podporowego ΔM zostaje zużyta na ugięcie filaru. Jeżeli moment przy podporze po lewej stronie oznaczmy jedną, a po prawej dwiema kreskami, to

$$\begin{aligned} M_1' - M_1'' &= \Delta M_1, \\ M_2' - M_2'' &= \Delta M_2 \text{ itd.} \end{aligned}$$

Nazwijmy kąty nachylenia stycznej linii ugięcia na podporach $\tau_0, \tau_1, \tau_2 \dots \tau_n$, to na podstawie rów. 11) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} 6\varepsilon I r_1 &= -l_1(2M_1' - \mathfrak{N}_1'') \\ 6\varepsilon I r_1 &= +l_2(2M_1'' + M_2' - \mathfrak{N}_2') \\ 6\varepsilon I r_2 &= -l_2(M_1'' + 2M_2' - \mathfrak{N}_2'') \\ 6\varepsilon I r_2 &= +l_3(2M_2'' + M_3' - \mathfrak{N}_3') \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 241)$$

Z rysunku widzimy, że $r_2 = \frac{h'}{2r}$, a że $\varepsilon I_2 = \Delta M_2 r$, jeżeli I_2 oznacza moment bezwładności filaru, a możemy przyjąć

$$\left. \begin{aligned} h' = 0.7 h_2, \text{ to } r_2 &= \frac{0.7 h_2 \Delta M_2}{2 \varepsilon I_2} = \frac{0.35}{\varepsilon I_2} h_2 (M_2'' - M_2') \\ \text{podobnie } r_2 &= \frac{0.35}{\varepsilon I_1} h_1 (M_1'' - M_1') \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 242)$$

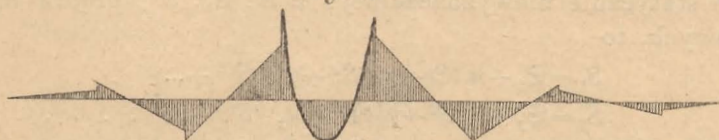
Z porównania rów. 241) i 242) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} 2.1 \frac{I}{I_1} h_1 (M_1'' - M_1') &= -l_1(2M_1' - \mathfrak{N}_1'') \\ 2.1 \frac{I}{I_1} h_1 (M_1'' - M_1') &= +l_2(2M_1'' + M_2' - \mathfrak{N}_2') \\ 2.1 \frac{I}{I_2} h_2 (M_2'' - M_2') &= -l_2(M_1'' + 2M_2' - \mathfrak{N}_2'') \\ 2.1 \frac{I}{I_3} h_3 (M_2'' - M_2') &= +l_3(2M_2'' + M_3' - \mathfrak{N}_3') \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 243)$$

Otrzymujemy w ten sposób $2(n-1)$ równań, które nam służą do wyznaczenia $2(n-1)$ niewiadomych.

Ponieważ równania 243) mają ten sam kształt, co równania momentów podporowych 21), więc też i wszystkie twierdzenia co do najniekorzystniejszego obciążenia, co do stosunków momentów podporowych przeseł nieobciążonych, co do zmiany znaku sił poprzecznych i oddziaływań są i tu ważne.

rys. 86.



Odstępy punktów stałych obliczyć można ze stosunku dwóch momentów podporowych.



Momenty po obu stronach każdej podpory mają ten sam znak (rys. 86.).

B. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne i nateżenia drugorzędne.

IX. Belki kratowe statycznie niewyznaczalne.

§. 74. Pręty nadliczbowe.

Belki kratowe mogą być, jak wiadomo*), albo statycznie wyznaczalne albo statycznie niewyznaczalne albo też chwiejne. Belek kratowych prostych ostatniego rodzaju nie powinniśmy w praktyce używać, o statycznie wyznaczalnych jużśmy mówili, teraz mówić mamy o belkach kratowych statycznie niewyznaczalnych.

Jeżeli ilość węzłów nazwiemy m , ilość prętów n , to otrzymamy belkę kratową statycznie niewyznaczalną, jeśli $2m-3 < n$. Chcąc z takiej belki kratowej utworzyć belkę statycznie wyznaczalną, musimy $n-2m+3$ prętów opuścić, a zatem te $k=n-2m+3$ pręty nazywamy nadliczbowymi (n. *überzählig*), inne pręty nazywamy potrzebnymi (n. *nothwendig*).

Opuściwszy pręty nadliczbowe, możemy dla danego obciążenia wyznaczyć w pozostałych prętach siły wewnętrzne $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3 \dots$, poczem w miejsce prętów nadliczbowych przyczepiamy po kolei za każdy pręt dwie siły równe jedności i wprost przeciwnie, działające w kierunku tego pręta. Nazwijmy siły wewnętrzne, wywołane siłami $=1$ zamiast pierwszego pręta nadliczbowego, $u_1', u_2', u_3' \dots$, zamiast drugiego pręta $u_1'', u_2'', u_3'' \dots$, zamiast trzeciego $u_1''', u_2''', u_3''' \dots$, nareście nazwijmy $S_1, S_2, S_3 \dots$, rzeczywiste siły wewnętrzne prętów potrzebnych belki statycznie niewyznaczalnej, a S', S'', S''' prętów nadliczbowych, to

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \mathfrak{S}_1 + u_1' S' + u_1'' S'' + u_1''' S''' + \dots \\ S_2 &= \mathfrak{S}_2 + u_2' S' + u_2'' S'' + u_2''' S''' + \dots \\ S_3 &= \mathfrak{S}_3 + u_3' S' + u_3'' S'' + u_3''' S''' + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 244)$$

*) por. Podręcznik statyki budowl. II. wyd. str. 324.

§. 75. Obliczenie sił wewnętrznych prętów nadliczbowych.

Z powyższych równań widzimy, że moglibyśmy łatwo obliczyć $S_1, S_2, \dots$, gdybyśmy znali siły wewnętrzne prętów nadliczbowych S', S'', S''' . Siły te wyznaczymy na podstawie odkształceń. Nazwijmy odkształcenia prętów potrzebnych $ds_1, ds_2, ds_3, \dots$ a prętów nadliczbowych ds', ds'', ds''' , to na mocy prawa pracy (§. 62.), możemy napisać

$$\Sigma P dp - \Sigma S ds = 0, \dots \dots \dots 245)$$

a wstawiając wartość za S

$$\Sigma P dp - \Sigma S ds - S' ds \Sigma u' - S'' ds \Sigma u'' - \dots = 0 \dots \dots 246)$$

Równanie to jest ważne ogólnie dla jakichkolwiek sił w równowadze zostających i dla jakichkolwiek przesunięć możliwych wskutek zmiany długości prętów. Załóżmy, że wszystkie P są równe zeru, $S' = 1, S'' = S''' = 0$, to

$$\Sigma ds u' = 0, \text{ czyli}$$

$$u_1' ds_1 + u_2' ds_2 + u_3' ds_3 + \dots ds' = 0$$

Podobnie możemy napisać

$$u_1'' ds_1' + u_2'' ds_2 + u_3'' ds_3 + \dots ds'' = 0$$

$$u_1''' ds_1 + u_2''' ds_2 + u_3''' ds_3 + \dots ds''' = 0$$

} k równań 247)

Jeżeli ciepłota prętów potrzebnych jest τ_0 , to dla tej ciepłoty są długości prętów, a zatem i położenie wszystkich węzłów oznaczone. Jeśli przy tej ciepłocie wstawimy pręty nadliczbowe tak, że przez to nie nastąpi zmiana kształtu belki, to przy każdej innej ciepłocie odstępów węzłów są inne i wstawienie prętów nadliczbowych wywołuje natężenia.

Dla innej ciepłoty τ i dla obciążenia innego zmieniają się siły wewnętrzne, a zatem i długości prętów, przyczem możemy napisać ogólnie

$$ds = \alpha(\tau - \tau_0)s + \frac{Ss}{\epsilon A}, \dots \dots \dots 248)$$

jeżeli α oznacza współczynnik rozszerzalności, s długość pręta, a A przekrój.

Nazwijmy $q = \frac{s}{\epsilon A} \dots \dots \dots 249)$

i $U = \alpha(\tau - \tau_0)\epsilon A \dots \dots \dots 250)$

to $ds = q(U + S) \dots \dots \dots 251)$

Widzimy zatem, że wpływ zmiany ciepłoty możemy uwzględnić jako zmianę siły wewnętrznej, że podwyższenie ciepłoty o $(\tau - \tau_0)$ odpowiada ciągnięciu $\alpha(\tau - \tau_0)\epsilon$.

Przyjąć możemy dla żelaza $\alpha = 0.000012$, $\varepsilon = 2000000 \text{ kg/cm}^2$
dla stali $\alpha = 0.000011$, $\varepsilon = 2150000 \text{ kg/cm}^2$, więc w przybliżeniu
dla obydwoch $\varepsilon\alpha = 24 \text{ kg/cm}^2$.

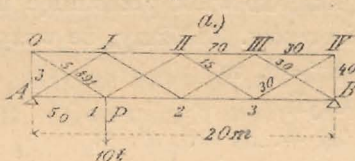
Równanie 247) możemy więc teraz napisać:

$$\left. \begin{aligned} u_1' \varphi_1(U_1 + S_1) + u_2' \varphi_2(U_2 + S_2) + \dots + \varphi'(U' + S') &= 0 \\ u_1'' \varphi_1(U_1 + S_1) + u_2'' \varphi_2(U_2 + S_2) + \dots + \varphi''(U'' + S'') &= 0 \\ u_1''' \varphi_1(U_1 + S_1) + u_2''' \varphi_3(U_3 + S_3) + \dots + \varphi'''(U''' + S''') &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} k \text{ równań 252)}$$

Jeżeli mamy dane przekroje prętów, względnie jeśli je
po obliczeniu belki w sposób przybliżony przyjmiemy, jeśli

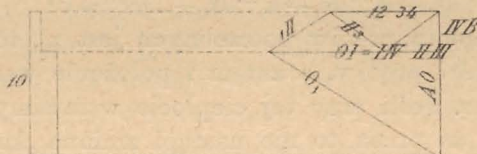
znana nam jest ciepłota τ_0 ,
przy której belkę zestawiono
i ciepłota w danej chwili τ ,
to możemy obliczyć dla każ-
dego pręta φ i U . Siły S są
funkeyami sił znanych nam
 $\mathfrak{S}$, u i nieznanymi S' , S'' , S''' .
Widzimy więc, że w równ.

rys. 87.

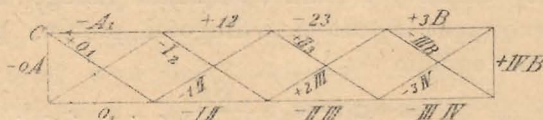


$$\frac{1+}{2mm}$$

b.)



c.)



252) mamy tylko k nieznanomych S' , S'' , S''' ..., dla których wy-
znaczenia mamy k równań. W ten sposób wyznaczymy siły
zewnętrzne prętów nadliczbowych.

Jeśli ciepłota się nie zmieniła, czyli $\tau = \tau_0$, to $U = 0$, więc
rów. 252) nieco się upraszczają i możemy napisać

$$\left. \begin{aligned} u_1' \varphi_1 S_1 + u_2' \varphi_2 S_2 + u_3' \varphi_3 S_3 + \dots + \varphi' S' &= 0 \\ u_1'' \varphi_1 S_1 + u_2'' \varphi_2 S_2 + u_3'' \varphi_3 S_3 + \dots + \varphi'' S'' &= 0 \\ u_1''' \varphi_1 S_1 + u_2''' \varphi_2 S_2 + u_3''' \varphi_3 S_3 + \dots + \varphi''' S''' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots 253)$$

Jeżeli w rów. 252) i 253) wszystkie ilości ρ pomnożymy przez dowolną stałą liczbę, to przez to wartości S' , S'' , S''' się nie zmieniają. Widzimy więc, że aby otrzymać w rachunku liczby wygodniejsze, możemy wszystkie ρ przez stosowną liczbę stałą pomnożyć, co zupełnie na wynik rachunku nie wpływa.

Przykład. Belka równoległa o kracie równoramiennej podwójnej (rys. 87.) obciążona jest w punkcie 1 ciężarem 10 t. Belka ta jest statycznie niewyznaczalna, bo $m=10$, $n=18$, więc

$$k = n + 3 - 2m = 18 + 3 - 20 = 1,$$

a zatem jestto belka statycznie niewyznaczalna pierwszego rzędu, która ma jeden pręt nadliczbowy. Niech zastrzał AI będzie prętem nadliczbowym.

Na rys. 87 a) z lewej strony wypisaliśmy długości prętów, z prawej przekroje w cm^2 . Wyznamy za pomocą planu sił siły $\mathcal{S}$ dla danego obciążenia (rys. 87b).

Nazwa pręta	$\mathcal{S}$	u	s	A	$\frac{1000000}{\rho}$	$u\rho$	$u\rho\mathcal{S}$	$u^2\rho$	S
	t	t	m	cm^2	$\frac{\text{cm}}{\text{kg}}$				t
A 0	- 7.5	- 0.50	3.0	40	3.75	- 1.875	+ 14.06	0.937	- 7.64
0 I	- 12.5	- 0.87	5.0	30	8.33	- 7.247	+ 90.59	6.305	- 12.75
I II	- 12.5	+ 0.87	5.0	70	3.57	+ 8.106	- 38.82	2.702	- 12.25
II III	- 4.2	- 0.87	5.0	70	3.57	- 3.106	+ 13.05	2.702	- 4.45
III IV	- 4.2	+ 0.87	5.0	30	8.33	+ 7.247	- 30.44	6.305	- 3.95
A 1	0	- 0.87	5.0	30	8.33	- 7.247	0	6.305	- 0.25
1 2	+ 8.5	+ 0.87	5.0	70	3.57	+ 3.106	+ 26.40	2.702	+ 8.75
2 3	+ 8.5	- 0.87	5.0	70	3.57	- 3.106	- 26.40	2.702	+ 8.25
3 B	0	+ 0.87	5.0	30	8.33	+ 7.247	0	6.305	+ 0.25
0 1	+ 14.9	+ 1.00	5.831	30	9.72	+ 9.72	+ 144.83	9.72	+ 15.19
I 2	0	- 1.00	5.831	15	19.44	- 19.44	0	19.44	- 0.29
II 3	- 4.8	+ 1.00	5.831	15	19.44	+ 19.44	- 93.31	19.44	- 4.51
III B	0	- 1.00	5.831	30	9.72	- 9.72	0	9.72	- 0.29
1 II	+ 4.8	- 1.00	5.831	15	19.44	- 19.44	- 93.31	19.44	+ 4.51
2 III	0	+ 1.00	5.831	15	19.44	+ 19.44	0	19.44	+ 0.29
3 IV	+ 4.8	- 1.00	5.831	30	9.72	- 9.72	- 46.66	9.72	+ 4.51
IV B	- 2.5	+ 0.50	3.0	40	3.75	+ 1.875	- 4.44	0.937	- 2.36
A I	-	-	5.831	30	9.72	-	-	-	+ 0.29
							- 44.55	144.822	

Przypuśćmy teraz, że zamiast AI działają na belkę 2 siły $=1$ w A i I wprost przeciwnie. Siły, powstające wtedy we wszystkich prętach potrzebnych, znajdziemy również za pomocą planu sił (87c). Są to siły u , których wielkość i znak, jakoteż i wielkość sił $\mathcal{S}$ zestawiliśmy w tabliczce. W tabliczce tej zestawiliśmy też długości prętów s , przekroje A i obliczyliśmy 100000ρ .

Ponieważ tu jest jeden pręt nadliczbowy, czyli $k=1$, więc otrzymamy z rów. 244)

$$S_1 = \mathfrak{S}_1 + u_1 S', \quad S_2 = \mathfrak{S}_1 + u_2 S', \quad \quad 254)$$

itd. Zatem rów. 253) przedstawi się w następnym kształcie

$$u_1 \varrho_1 (\mathfrak{S}_1 + u_1 S') + u_2 \varrho_2 (\mathfrak{S}_2 + u_2 S') + \dots + \varrho' S' = 0,$$

czyli

$$\Sigma u \varrho \mathfrak{S} + (\Sigma u^2 \varrho + \varrho') S' = 0,$$

zatem

$$S' = - \frac{\Sigma u \varrho S}{\Sigma u^2 \varrho + \varrho'} 253)$$

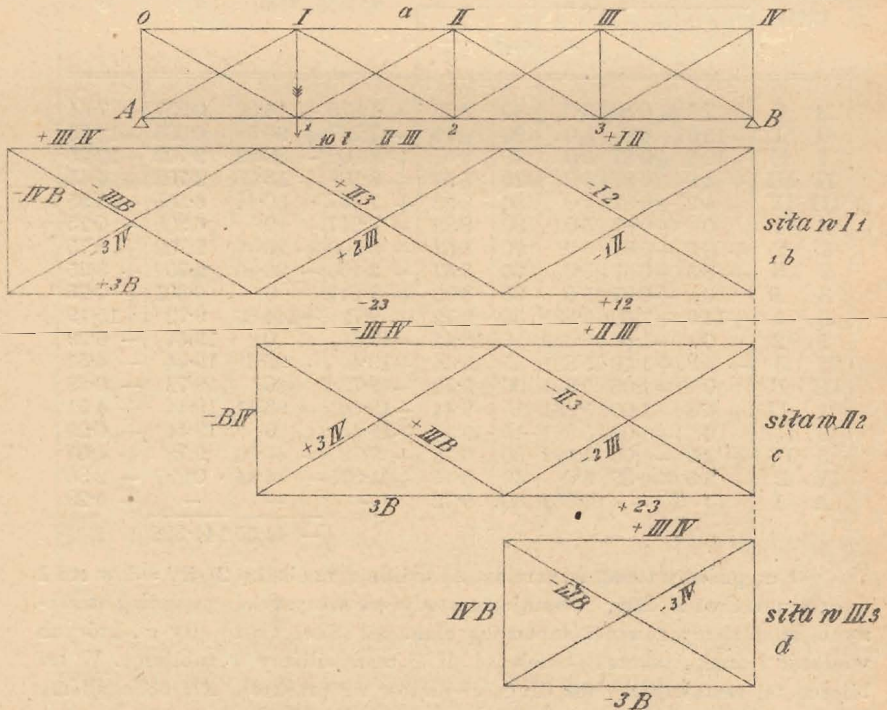
Wstawiając wartości, otrzymamy

$$S' = -\frac{-44.55}{144.822 + 9.72} = 0.288 t. \text{ Gdy } t_0 \text{ war-}$$

tość za S' wstawimy w 254), otrzymamy S_1, S_2 i t. d., które to wartości uwidoczniliśmy w ostatnim rzędzie tabliczki.

Z porównania rubryk $\mathfrak{S}$ i S widzimy, o ile się różnią wyniki dokładne od przybliżonych. Ze znaków sił u widzimy

rys. 88.



też, że gdyby siła $10t$ działała w 3, otrzymalibyśmy u , a zatem i uS' równe, lecz ze znakiem przeciwnym. Jeżeliby więc

Nazwa preta		$u^2\rho$	$uu'\rho$	$uu''\rho$	$uu'''\rho$	$u'\rho$	$u'\rho\mathfrak{E}$	$u'^2\rho$
A	0	0.937	0	0	0	0	0	0
0	I	6.305	0	0	0	0	0	0
1	II	2.702	+ 5.001	0	0	+ 5.75	- 71.88	+ 9.26
II	III	2.702	+ 5.001	- 5.001	0	- 5.75	+ 24.15	9.26
III	IV	6.305	+ 11.668	- 11.668	+ 11.668	+ 13.49	- 49.00	21.71
A	I	6.305	0	0	0	0	0	0
1	2	2.702	+ 5.001	0	0	+ 5.75	+ 48.88	9.26
2	3	2.702	+ 5.001	- 5.001	0	- 5.75	- 48.88	9.26
3	B	6.305	+ 11.668	- 11.618	+ 11.668	+ 13.49	0	21.71
0	1	9.72	0	0	0	0	0	0
I	2	19.44	+ 36.936	0	0	- 36.94	0	70.19
II	3	19.44	+ 36.936	- 36.936	0	+ 36.94	- 177.31	70.19
III	B	9.72	+ 18.468	- 18.468	+ 18.468	- 18.47	0	35.10
1	II	19.44	+ 36.936	0	0	- 36.94	- 177.31	70.19
2	III	19.44	+ 36.936	- 36.936	0	+ 36.94	0	70.19
3	IV	9.72	+ 18.468	- 18.468	+ 18.468	- 18.47	- 88.65	35.10
IV	B	0.937	- 1.875	+ 1.875	- 1.875	- 3.75	+ 9.38	3.75
A	I	—	—	—	—	—	—	—
1	I	—	—	—	—	—	—	—
2	II	—	—	—	—	—	—	—
3	III	—	—	—	—	—	—	—
		144.82	226.15	- 142.27	+ 58.39		- 530.62	+ 435.17

Nazwa preta		$u'u''\rho$	$u'u'''\rho$	$u'^2\rho$	$u''u'''\rho$	$u''\rho\mathfrak{E}$	$u'''\rho\mathfrak{E}$	$u'''^2\rho$	S
A	0	0	0	0	0	0	0	0	- 4.66
0	I	0	0	0	0	0	0	0	- 7.55
1	II	0	0	0	0	0	0	0	- 10.97
II	III	- 9.26	0	9.26	0	- 24.15	0	0	- 6.08
III	IV	- 21.71	21.71	21.71	- 21.71	+ 49.00	- 49.00	21.71	- 2.54
A	1	0	0	0	0	0	0	0	+ 4.95
1	2	0	0	0	0	0	0	0	+ 10.08
2	3	- 9.96	0	9.26	0	+ 48.88	0	0	+ 6.62
3	B	- 21.71	21.71	21.71	- 21.71	0	0	21.71	+ 1.40
0	1	0	0	0	0	0	0	0	+ 9.21
I	2	0	0	0	0	0	0	0	- 1.96
II	3	- 70.19	0	70.19	0	+ 177.31	0	0	- 2.42
III	B	- 35.10	35.10	35.10	- 35.10	0	0	35.10	- 1.61
1	II	0	0	0	0	0	0	0	+ 2.841
2	III	- 70.19	0	70.19	0	0	0	0	+ 2.38
3	IV	- 35.10	35.10	35.10	- 35.10	+ 88.65	- 88.65	35.10	+ 3.19
IV	B	- 3.75	3.75	3.75	- 3.75	- 9.38	+ 9.38	3.75	- 7.30
A	I	—	—	—	—	—	—	—	- 5.69
1	I	—	—	—	—	—	—	—	+ 4.03
2	II	—	—	—	—	—	—	—	- 0.22
3	III	—	—	—	—	—	—	—	- 0.30
		- 276.27	117.37	276.27	- 117.37	+ 320.31	- 128.27	117.37	

Siły $\mathfrak{S}$ i u zostają te same, co w poprzednim paragrafie. Rys. 88b przedstawia plan sił, jeżeli zamiast I 1 działają w I i 1 siły równe jedności i wprost przeciwnie, rys. 88c, jeśli w II i 2 działają siły równe jedności, a 88d, jeśli w III i 3 działają siły równe jedności. Siły wewnętrzne w pierwszym wypadku nazwijmy u' , w drugim u'' , w trzecim u''' . Wyniki zestawiliśmy w tabliczce.

Według rów. 244) mamy

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \mathfrak{S}_1 + u_1 S' + u_1' S'' + u_1'' S''' + u_1''' S^{IV} \\ S_2 &= \mathfrak{S}_2 + u_2 S' + u_2' S'' + u_2'' S''' + u_2''' S^{IV} \\ S_3 &= \mathfrak{S}_3 + u_3 S' + u_3' S'' + u_3'' S''' + u_3''' S^{IV} \end{aligned} \right\} \dots \dots 256)$$

Gdy wstawimy wartości za S_1 w rów. 253), otrzymamy
 $u_1 \varrho_1 (\mathfrak{S}_1 + u_1 S' + u_1' S'' + u_1'' S''' + u_1''' S^{IV}) + u_2 \varrho_2 (\mathfrak{S}_2 + u_2 S' + u_2' S'' + u_2'' S''' + u_2''' S^{IV}) + \dots + \varrho' S' = 0$, czyli

$$\left. \begin{aligned} \Sigma u \varrho \mathfrak{S} + (\Sigma u^2 \varrho + \varrho') S' + S'' \Sigma u u' \varrho + S''' \Sigma u u'' \varrho + S^{IV} \Sigma u u''' \varrho &= 0 \\ \Sigma u' \varrho \mathfrak{S} + S' \Sigma u' u \varrho + S'' (\Sigma u^2 \varrho + \varrho'') + S''' \Sigma u' u'' \varrho + S^{IV} \Sigma u' u''' \varrho &= 0 \\ \Sigma u'' \varrho \mathfrak{S} + S' \Sigma u'' u \varrho + S'' \Sigma u'' u' \varrho + S''' (\Sigma u''^2 \varrho + \varrho''') + &+ S^{IV} \Sigma u'' u''' \varrho = 0 \\ \Sigma u''' \varrho \mathfrak{S} + S' \Sigma u''' u \varrho + S'' \Sigma u''' u' \varrho + S''' \Sigma u''' u'' \varrho + S^{IV} (\Sigma u'''^2 \varrho + &+ \varrho^{IV}) = 0 \end{aligned} \right\} 257)$$

Wstawivszy wartości otrzymamy

$$\begin{aligned} -44 \cdot 55 + (144 \cdot 82 + 9 \cdot 72) S' + 226 \cdot 15 S'' - 142 \cdot 27 S''' + 58 \cdot 39 S^{IV} &= 0, \\ -530 \cdot 62 + 226 \cdot 15 S' + (435 \cdot 17 + 10) S'' - 276 \cdot 27 S''' + 117 \cdot 36 S^{IV} &= 0, \\ + 330 \cdot 31 - 142 \cdot 27 S' - 276 \cdot 27 S'' + (276 \cdot 27 + 10) S''' - 117 \cdot 37 S^{IV} &= 0, \\ -128 \cdot 27 + 58 \cdot 39 S' + 117 \cdot 37 S'' - 117 \cdot 37 S''' + (117 \cdot 37 + 10) S^{IV} &= 0. \end{aligned}$$

A stąd po rozwiązaniu równań mamy

$$S' = -5 \cdot 694, \quad S'' = +4 \cdot 026, \quad S''' = -0 \cdot 220, \quad S^{IV} = -0 \cdot 296.$$

Na podstawie tych wartości i wartości u możemy nareście obliczyć według 256) dokładne wartości sił wewnętrznych S , które znajdują się w ostatnim rzędku tabliczki.

Z porównania tych sił ze siłami wewnętrznymi, któreśmy otrzymali w poprzednim paragrafie widzimy, że przez dodanie słupów zmieniliśmy zupełnie siły wewnętrzne i to nietylko w krzyżulcach, ale i w pasach. N. p. otrzymujemy w 12 zamiast $+8 \cdot 75 + 10 \cdot 03$. A zatem obliczenie kraty złożonej o krzyżulcach tęgich przez nieuwzględnienie słupów i rozłożenia na dwa układy daje wyniki zupełnie niezgodne z rzeczywistością,

choć przewaźnie większe, dodanie słupów wzmagają jednak w niektórych prętach siły wewnętrzne. A że obliczenie dokładne jest nadzwyczaj żmudne, więc lepiej nie używać takiej kraty.

§. 77. Belka wieloboczna.

Sposób obliczenia belki wielobocznej statycznie niewyznaczalnej jest taki sam, jak belki równoległej; nie potrzebujemy się więc powtarzać. Wyniki jednak obliczenia są tu inne, niż w poprzednich paragrafach. Winkler oblicza jako przykład belkę paraboliczną zbieżną o kracie równoramiennej dwukrotnej i dwóch słupach*) i otrzymuje wprawdzie dla pasów wyniki dokładne, mało co się różniące od przybliżonych, dla krzyżulców zaś zupełnie odmienne.

Jeżeli krata jest więcej, niż dwukrotną, to liczba prętów nadliczbowych jest większa, niż 1. Dla belki równoległej rozkładanie na pojedyncze układy jest dozwolone, gdyż błąd jest bardzo mały, dla belki wielobocznej daje sposób ten przybliżony tylko dla pasów dość dokładne wyniki, dla kraty zaś nie.

To samo stosuje się także do belek o kracie prostokątnej i podwójnych gibkich krzyżulcach. Belki takie równoległe możemy snadnie obliczać według sposobu przybliżonego.

§. 78. Belka Howe'a.

Belka Howe'a ma kratę złożoną ze sztucznem natężeniem. W celu obliczenia jej dokładnego należy obliczyć ją naprzód bez względu na sztuczne natężenie, a więc według §. 75., uwzględniając tę okoliczność, że drzewo ma inny współczynnik sprężystości, niż żelazo, a potem uwzględnić wpływ sztucznego natężenia**).

Wprawdzie obliczenie przybliżone kraty złożonej daje wyniki bardzo niedokładne, jednak z powodu, że natężenia sztuczne nie dadzą się dokładnie wyznaczyć, więc dokładniejsze wyznaczenie sił wewnętrznych już z tej przyczyny nie jest możliwe. W praktyce wystarcza więc wyznaczenie przybliżone.

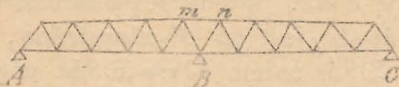
*) p. Winkler. Theorie der gegliederten Balkenträger, str. 252.

**) p. Podr. t. most. tom I. wyd. II. str. 108.

§. 79. Belka ciągła.

Sposób ten wyznaczenia sił wewnętrznych da się zastosować także do belki wieloprzęsłowej. Jeżeli w belce dwuprzęsłowej (rys. 89.), opu-

rys. 89.



ścimy pręt mn , to otrzymamy dwie belki statycznie wyznaczalne. Pręt

mn jest więc tu prętem nadliczbowym. W belce trzyprzęsłowej mamy dwa takie pręty nadliczbowe, w czteroprzęsłowej trzy. Jeżeli przytem krata jest podwójna lub potrójna, liczba prętów nadliczbowych wzrasta. Dalsze obliczenie jest takie samo, jak w poprzednich paragrafach.

§. 80. Wpływ zmiany ciepłoty.

Jeżeli ciepłota τ_0 belki statycznie niewyznaczalnej się zmieni o $(\tau - \tau_0)$, to zamiast rów. 253) musimy użyć pierwotnych rów. 252) i wprowadzić w rachunek ilości $U = \alpha(\tau - \tau_0)\epsilon A$ według rów. 250).

Jeżeli belka składa się z części drewnianych i żelaznych, musimy uwzględnić tę okoliczność, że α i ϵ są inne dla części drewnianych a inne dla żelaznych.

X. Zastosowanie prawa pracy odkształcenia.

§. 81. Pochodne pracy odkształcenia belki kratowej.

Przypuśćmy, że na belkę działają ciężary $P_1, P_2, P_3, \dots, P_4$, które są między sobą w równowadze. Niechaj siła wewnętrzna w pewnym przecie nazywa się S , przekrój jego A , długość s . Pręty przyjmijmy na razie niesprężyste, ale przypuśćmy, że z jakichkolwiek powodów stają się dłuższe o Δs , wtedy punkty zaczepienia ciężarów w kierunku ciężarów przesuną się o $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$.

Na podstawie prawa pracy przygotowanej (§. 62.) możemy napisać

$$P_1 v_1 + P_2 v_2 + \dots + P_n v_n = \Sigma S \Delta s \dots \dots \dots 258)$$

Jeżeli chcemy między siłami zewnętrznymi rozróżnić oddziaływanie, to napiszemy to równanie

$$\Sigma P v + \Sigma 0 \Delta c = \Sigma S \Delta s \dots\dots\dots 259)$$

Przesunięcia podpór Δc zwykle nie dają się przewidzieć. Jeżeli grunt jest dobry, przyjmujemy zwykle $\Delta c = 0$.

Dotychczas Δs były zupełnie dowolne. Teraz przypuśćmy, że jedna z sił P zmienia się o dP . Wtedy lewa strona równ. 258) zmieni się o dPv . A że Δs jest od P niezależne, więc prawa strona zmieni się o $\Sigma \partial S \Delta s$ zatem $dPv = \Sigma \partial S \Delta s$, więc

$$v = \Sigma \frac{\partial S}{\partial P} \Delta s \dots\dots\dots 260)$$

Jeżeli teraz zamiast dowolnych Δs wprowadzimy przedłużenie sprężyste wskutek sił S , to wedle 227) $\Delta s = \frac{Ss}{\Sigma A}$, więc

$$v = \Sigma \frac{Ss}{\varepsilon A} \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial \Sigma \frac{S^2 s}{2 \varepsilon A}}{\partial P}, \dots\dots\dots 261)$$

bo wykonawszy częściowe różniczkowanie prawej strony, otrzymamy lewą.

Wyraz $\Sigma \frac{S^2 s}{2 \varepsilon A}$ jestto praca odkształcenia całej belki kratowej od stanu bez natężenia do natężenia S . Praca ta bowiem równa się dla każdego pręta $\frac{1}{2} S \Delta s = \frac{1}{2} S \frac{Ss}{\varepsilon A} = \frac{S^2 s}{2 \varepsilon A}$, dla całej więc belki

$$\Sigma \frac{S^2 s}{2 \varepsilon A} = L \dots\dots\dots 262)$$

Wstawiając tę wartość w 261) otrzymamy

$$v = \frac{\partial L}{\partial P} \dots\dots\dots 263)$$

Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie. Jeżeli belka była pierwotnie bez natężenia i ciepłota się nie zmieniła, to przesunięcie punktu zaczepienia siły P w kierunku tej siły równa się częściowej pochodnej wedle P pracy odkształcenia belki.

Uwaga. Jeśliby pręty były mimośrodowo połączone, to powstałyby w prętach oprócz ciągnięcia i ciśnienia także momenty, które należałoby uwzględnić.

Przykład. Wyznaczyć należy ugięcie f punktu C belki trójkątnej (rys. 90.).

Jeżeli w punkcie C działa siła P , to z trójkąta sił widzimy, że jeżeli nazwiemy a siłę wewnętrzną w AC , A_1 przekrój, s długość

b " " " AB , A_2 " l "

$$a = \frac{P}{2wst\alpha} = \frac{Ps}{2h}, \quad b = \frac{P}{2st\alpha} = \frac{Pl}{4h}.$$

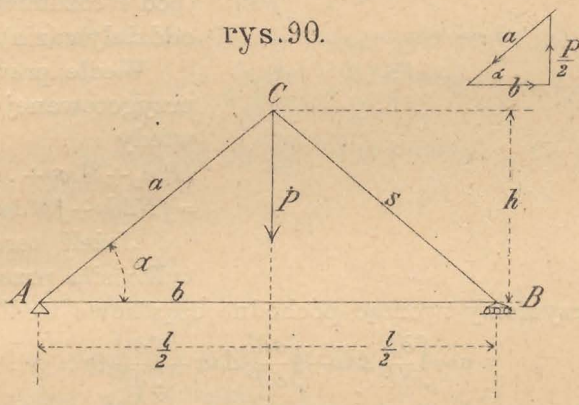
Praca odkształcenia będzie więc

$$L = \sum \frac{S^2 s}{2\varepsilon A} = 2 \cdot \frac{a^2 s}{2\varepsilon A_1} + \frac{b^2 l}{2\varepsilon A_2}.$$

Z rów. 263) otrzymamy

$$f = \frac{\partial L}{\partial P} = \frac{2as}{\varepsilon A_1} \frac{\partial a}{\partial P} + \frac{bl}{\varepsilon A_2} \frac{\partial b}{\partial P} \dots \dots \dots 264)$$

rys. 90.



Mamy dalej

$$\frac{\partial a}{\partial P} = \frac{s}{2h}, \quad \frac{\partial b}{\partial P} = \frac{l}{4h}.$$

Wstawiawszy to w 264) i wartości za a i b, otrzymamy

$$f = \frac{2 \cdot \frac{Ps}{2h} s}{\varepsilon A_1} \frac{s}{2h} + \frac{Pl}{4h} \frac{l}{\varepsilon A_2} \frac{l}{4h} = \frac{Ps^3}{2\varepsilon A_1 h^2} + \frac{Pl^3}{16\varepsilon A_2 h^2}$$

$$f = \frac{P}{2\varepsilon b^2} \left(\frac{s^3}{A_1} + \frac{l^3}{8A_2} \right) \dots \dots \dots 265)$$

Jeśli przekroje obliczone zostały dla równych napięć, to

$$A_1 = \frac{a}{\tau} = \frac{Ps}{2h\tau}, \quad A_2 = \frac{b}{\tau} = \frac{Pl}{4h\tau}.$$

Wstawiawszy to w rów. 265) otrzymamy

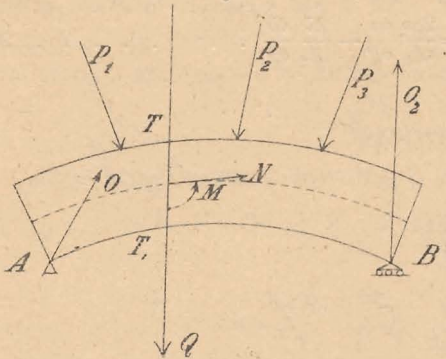
$$f = \frac{\tau}{\varepsilon h} \left(s^2 + \frac{l^2}{4} \right) \dots \dots \dots 266)$$

§. 82. Pochodna pracy odkształcenia dźwigaru o przekroju pełnym.

Mamy dany dźwigar AB (rys. 91.) o przekroju pełnym. W A jest łożysko stałe, w B przesuwowe bez tarcia. Na belkę działają siły P_1, P_2, P_3 i oddziaływania O_1 i O_2 . W przekroju TT_1 niech działa moment M , siła podłużna N i poprzeczna Q .

Przypuśćmy najprzód, że przedłużenie osi wynosi Δds , obrót przekroju $\Delta d\varphi$, przesunięcie Δq i przypuśćmy, że te wartości są dowolne i od sił niezależne.

rys. 91.



Wskutek tego nastąpi przesunięcie v punktów zaczepienia sił P (pod P rozumiemy także oddziaływania).

Wedle prawa pracy przygotowanej mamy wtedy

$$P_1 v_1 + P_2 v_2 + \dots + P_n v_n = \int N \Delta ds + \int M \Delta d\varphi + \int Q \Delta q. \quad (267)$$

Jeżeli teraz jedna tylko siła przesunie się o v , to otrzymamy tworząc pochodne cząstkowe wedle tego P

$$v = \frac{\partial N}{\partial P} \Delta ds + \frac{\partial M}{\partial P} \Delta d\varphi + \frac{\partial Q}{\partial P} \Delta q. \quad (267)$$

Jeżeli teraz zamiast odkształceń dowolnych przyjmujemy odkształcenie wskutek sił P , to otrzymamy*)

$$\left. \begin{aligned} \Delta ds &= \frac{N ds}{\epsilon A} \\ \Delta d\varphi &= \frac{M ds}{\epsilon J} \\ dq &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (268)$$

Wstawiwszy te wartości w rów. 267) otrzymamy

$$v = \int \frac{\partial N}{\partial P} \frac{N}{\epsilon A} ds + \int \frac{\partial M}{\partial P} \frac{M}{\epsilon J} ds,$$

zamiast czego możemy napisać

$$v = \frac{\partial \left\{ \int \frac{N^2}{2\epsilon A} ds + \int \frac{M^2}{2\epsilon J} ds \right\}}{\partial P} \dots \dots \dots (269)$$

Wyraz w klamrze jestto praca odkształcenia dźwigaru, bo natężenie $v = \frac{N}{A} + \frac{Mv}{J}$, odkształcenie zaś $\frac{v ds}{\epsilon}$, więc praca $\frac{v^2}{2\epsilon} ds dA$, a dla całego przekroju

*) por. Podr. Stat. Budowli. 2. wyd. str. 410.

$$dL = \frac{ds}{2\varepsilon} \int v^2 dA = \frac{ds}{2\varepsilon} \int_{-e}^e \left(\frac{N}{A} + \frac{Mv}{J} \right)^2 dA,$$

$$dL = \frac{ds}{2\varepsilon} \left(\frac{N^2}{A^2} \int dA + 2 \frac{MN}{AJ} \int v dA + \frac{M^2}{J^2} \int v^2 dA \right).$$

Jeżeli naznaczone całkowanie w całym przekroju wykonamy, otrzymamy, zważywszy, że $\int v dA = 0$, $\int v^2 dA = J$, $\int dA = A$,

$$dL = \frac{N^2 ds}{2\varepsilon A} + \frac{M^2 ds}{2\varepsilon J}.$$

Zatem praca odkształcenia całego dźwigaru wynosi

$$L = \int \frac{N^2 ds}{2\varepsilon A} + \int \frac{M^2 ds}{2\varepsilon J}, \quad \dots \dots \dots 270)$$

a wstawiając tę wartość w 269), otrzymamy

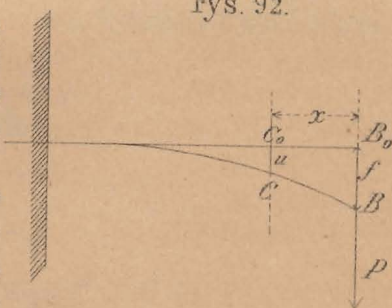
$$v = \frac{\partial L}{\partial P} \quad \dots \dots \dots 271)$$

zupełnie, jak rów. 263).

Zatem twierdzenie wypowiedziane w poprzednim paragrafie, dotyczące się belki kratowej, jest ważne także dla dźwigaru o przekroju pełnym.

Zauważyć musimy, że praca odkształcenia jest niezależna od znaku N i M , a tak samo od znaku S (rów. 261.), bo mamy tu tylko kwadraty tych ilości.

rys. 92.



1. Przykład. Wyznaczyć strzałkę ugięcia f belki jednym końcem utwierdzonej (rys. 92.), obciążonej na drugim końcu ciężarem P .

W przybliżeniu możemy tu przyjąć $N = 0$, $ds = dx$, więc wedle 270)

$$L = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2\varepsilon J}, \quad \text{zatem wedle 271)} \quad f = \int_0^l \frac{M}{\varepsilon J} \frac{\partial M}{\partial P} dx.$$

Z rysunku widzimy, że w punkcie C

$$M = Px, \quad \text{więc} \quad \frac{\partial M}{\partial P} = x, \quad \text{zatem}$$

$$f = \int_0^l \frac{M}{\varepsilon J} x dx = \int_0^l \frac{Px^2}{\varepsilon J} dx = \frac{Pl^3}{3\varepsilon J} \quad \dots \dots \dots 272)$$

2. Przykład. Belka AC (rys. 93.) podparta jest w C i zawieszona w B zapomocą pręta BD . W A działa siła P , należy wyznaczyć ugięcie w punkcie A .

Powierzchnia momentów w AC przedstawia się jako trójkąt. Moment w B wynosi $M = -Pl_1$, w punkcie E $M = Px$ w punkcie E_1 $M = -\frac{Pl_1 x'}{l_2}$.

Ciągnięcie w BD

$$a = P \frac{l_1 + l_2}{l_2} \text{ siecz } \alpha,$$

ciśnienie w BC

$$b = -P \frac{l_1 + l_2}{l_2} \text{ dot } \alpha.$$

Mamy więc:

dla AB $N=0$, $M = -Px$,

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x, \quad \text{dla } BC$$

$$N = -P \frac{l_1 + l_2}{l_2} \text{ dot } \alpha,$$

$$M = -P \frac{l_1}{l_2} x', \quad \frac{\partial N}{\partial P} = 0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -\frac{l_1}{l_2} x', \quad \text{dla } BD$$

$$N = +P \frac{l_1 + l_2}{l_2} \text{ siecz } \alpha,$$

$$M = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial P} = \frac{l_1 + l_2}{l_2} \text{ siecz } \alpha.$$

Jeżeli przekrój belki AC stały A , pręta BD A_1 , to otrzymamy wedle 263) i 271) $f = \frac{\partial L}{\partial P}$.

Pochodne pracy dla AB otrzymamy

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon_1 A_1} \frac{\partial M}{\partial P} dx &= - \\ &= - \int_{\varepsilon_1 J} \frac{M}{J} x dx = + \\ &= + \int_0^{l_1} \frac{Px^2}{\varepsilon_1 J} dx = \frac{Pl_1^3}{3\varepsilon_1 J}. \end{aligned}$$

Pochodna pracy dla BD będzie

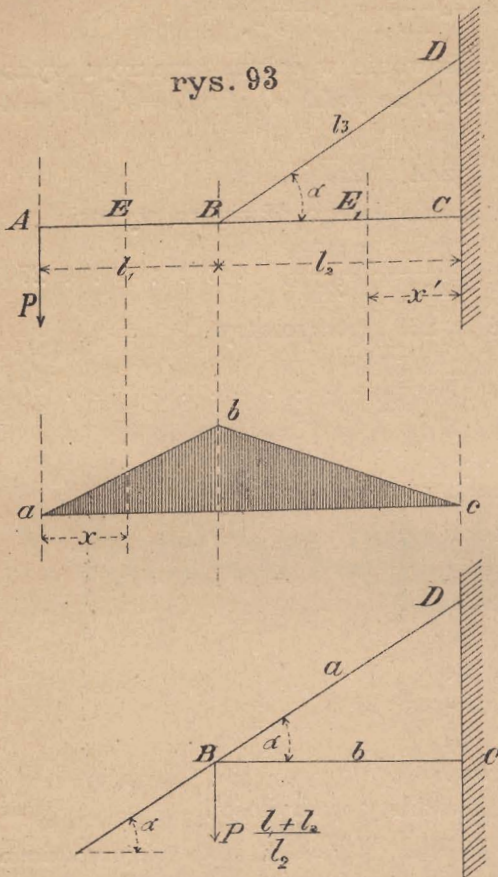
$$\int_{\varepsilon_1 A_1} \frac{\partial N}{\partial P} dx = \int_{\varepsilon_1 A_1} P \frac{(l_1 + l_2)^2}{2l_2^2} \text{ siecz}^2 \alpha dx = \frac{P(l_1 + l_2)^2}{\varepsilon_1 A_1 l_2^2} l_3 \text{ siecz}^2 \alpha.$$

Pochodna pracy dla BC będzie

$$\int_{\varepsilon A} \frac{\partial N}{\partial P} dx + \int_{\varepsilon J} \frac{\partial M}{\partial P} dx = + \int_{\varepsilon J} P \frac{l_1^2 x'}{l_2} \frac{l_1}{l_2} x' dx = \frac{Pl_1^2 l_2^3}{3\varepsilon J l_2^2} = \frac{Pl_1^2 l_2^3}{3\varepsilon J}.$$

Zatem pochodne pracy całego dźwigaru

$$f = \frac{Pl_1^3}{3\varepsilon J} + \frac{Pl_1^2 l_2^3}{3\varepsilon J} + \frac{P(l_1 + l_2)^2 l_3}{\varepsilon_1 A_1 l_2^2} \text{ siecz}^2 \alpha. \quad \dots \quad 273)$$



§. 83. Prawo najmniejszości pracy odkształcenia.

Jeżeli dźwigar posiada punkty podparcia stałe w kierunku oddziaływań, to dla nich $v=0$. Nazwijmy te oddziaływania statycznie niewyznaczalne X , to wedle 263)

$$\frac{\partial L}{\partial X}=0. \quad \dots \quad 274)$$

Więc siły X muszą być takie, aby praca odkształcenia zależna od X była najmniejszą lub największą. Ponieważ tu druga pochodna jest dodatnią, więc praca L musi być najmniejszością.

Pod powyższymi warunkami brzmi to prawo, które nazywamy też prawem Castigliana*), jak następuje:

Oddziaływania podpór statycznie niewyznaczalne mają wedle prawideł sprężystości takie wartości, jakie odpowiadają najmniejszości pracy odkształcenia.

1. Przykład. Znaleźć oddziaływanie O_1 belki jednym końcem utwierdzonej, drugim podpartej, obciążonej zupełnie ciężarem jednostkowym g (rys. 94.).

Tu $N=0$, więc wedle 274) i 270)

$$\int_0^l M \frac{\partial M}{\partial O_1} dx = 0, \text{ a gdy przekrój stały } \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial O_1} dx = 0.$$

Dalej mamy $M = O_1 x - \frac{gx^2}{2}$, więc $\frac{\partial M}{\partial O_1} = x$, zatem

$$\int_0^l M x dx = 0 = \int_0^l \left(O_1 x - \frac{gx^2}{2} \right) x dx = \frac{O_1 l^3}{3} - \frac{gl^4}{8},$$

$$\text{stad} \quad O_1 = \frac{3}{8} gl \quad ** \quad \dots \quad 275)$$

$$\text{a moment w } C \quad M = \frac{3}{8} glx - \frac{gx^2}{2}.$$

$$\text{Dla } x = \frac{3}{8} l \text{ jest} \quad \text{najw } M = \frac{9}{128} gl^2 \quad \dots \quad 276)$$

$$\text{dla } x = l \quad M_B = -\frac{1}{8} gl^2$$

*) p. Castigliano Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications. Paryż 1879.

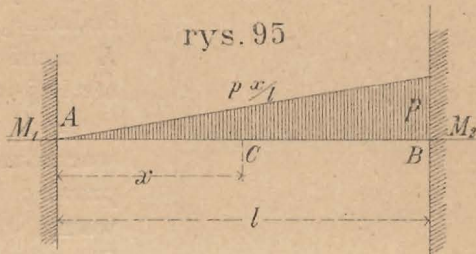
**) por. Podr. Statyki Budowli II. wyd. str. 255. rów. 415.

2. Przykład. Wyznaczyć oddziaływania i momenty belki obu końcami poziomo utwierdzonej, obciążonej ciężarem, wzrastającym od 0 do p (r. 95.).

Tu w punkcie C $M = D_1x - p \frac{x}{l} \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} + M_1$, jeżeli M_1 oznacza moment podporowy lewy.

Tu znowu $N = 0$, więc na mocy 274) i 270)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial O_1} &= \int_{\varepsilon J} \frac{\partial M}{\partial O_1} dx = 0, \text{ a gdy } \varepsilon J \text{ stałe,} \\ \int M \frac{\partial M}{\partial O} dx &= 0 \text{ i } \int M \frac{\partial M}{\partial M_1} dx = 0 \quad \dots \dots \dots 277) \end{aligned}$$



Dalej mamy $\frac{\partial M}{\partial O_1} = x$, $\frac{\partial M}{\partial M_1} = 1$, więc

$$0 = \int_0^l Mx dx = \int_0^l \left(O_1x^2 - \frac{px^4}{6l} + M_1x \right) dx = \frac{O_1l^3}{3} - \frac{pl^4}{30} + \frac{M_1l^2}{2} \quad \dots \dots 278)$$

Dalej mamy $\int_0^l M \cdot 1 dx = 0$, zatem

$$0 = \int_0^l \left(O_1x - \frac{px^3}{6l} + M_1 \right) dx = \frac{O_1l^2}{2} - \frac{pl^3}{24} + M_1l \quad \dots \dots 279)$$

Z równań 278) i 279) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} O_1 &= \frac{3}{20} pl \\ M_1 &= -\frac{pl^2}{30} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 280)$$

A więc w punkcie C $M = \frac{3}{20} plx - \frac{px^3}{6l} - \frac{1}{30} pl^2$

$$M = \frac{p}{2} \left(\frac{3}{10} lx - \frac{x^3}{3l} - \frac{l^2}{15} \right), \text{ a dla } x = l \sqrt[3]{0.3}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{najw (+ M)} &= + 0.02144 pl^2 \\ \text{zaś dla } x = l_1 \quad M_2 &= - \frac{1}{20} pl^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 281)$$

§. 84. Zastosowanie tego prawa do belek statycznie niewyznaczalnych.

Długości prętów belki kratowej s niech się zmieniają o Δs , przytem niech będzie Δc przesunięcie podpory w kierunku oddziaływania a δ przesunięcie jakiejkolwiek siły P w kierunku P .

Prawo pracy przygotowanej brzmi wtedy wedle 226)

$$\Sigma P\delta + \Sigma S\Delta c = \Sigma S\Delta s \dots\dots\dots 282)$$

Jeżeli nazwiemy S' , S'' , S''' siły w prętach nadliczbowych, to wedle 244) możemy napisać

$$\Sigma P\delta + \Sigma (C_0 + c'S' + c''S'' + \dots)\Delta c = \Sigma (\mathfrak{C} + u'S' + u''S'' + \dots)\Delta s \quad 283)$$

Jeżeli teraz przyjmiemy $S'=1$, $S''=S'''=\dots 0$, to

$$\left. \begin{aligned} \Sigma c'\Delta c &= \Sigma S'\Delta s, \text{ a podobnie} \\ \Sigma c''\Delta c &= \Sigma S''\Delta s \\ \Sigma c'''\Delta c &= \Sigma S'''\Delta s \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} k \text{ równań} \dots\dots\dots 284)$$

Jeżeli teraz zamiast dowolnych przesunięć Δs i Δc przyjmujemy rzeczywiste sprężyste przedłużenia prętów Δc i $\Delta\delta$, to otrzymamy równanie Maxwella

$$\left. \begin{aligned} \Sigma c'\Delta c &= \Sigma S'\Delta s \\ \Sigma c''\Delta c &= \Sigma S''\Delta s \\ \Sigma c'''\Delta c &= \Sigma S'''\Delta s \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} k \text{ równań} \dots\dots\dots 285)$$

Ponieważ $\frac{\partial c}{\partial S'} = c'$, $\frac{\partial c}{\partial S''} = c'' \dots \frac{\partial S}{\partial S'} = u'$, $\frac{\partial S}{\partial S''} = u''$, zatem możemy to równanie napisać

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \frac{\partial c}{\partial S'} \Delta c &= \Sigma \frac{\partial S}{\partial S'} \Delta s \\ \Sigma \frac{\partial c}{\partial S''} \Delta c &= \Sigma \frac{\partial S}{\partial S''} \Delta s \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} k \text{ równań} \dots\dots\dots 286)$$

Równania 286) możemy otrzymać wprost z rów. 282) przez częściowe różniczkowanie według wszystkich nieznanomych z wyjątkiem dowolnych przesunięć δ .

W razie, jeżeli przyjmujemy stałe lub przesuwowe podpory, $\Delta c=0$, a zatem otrzymamy z 279)

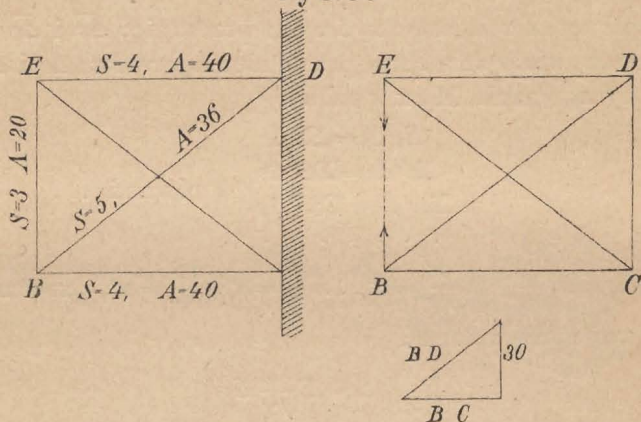
$$\left. \begin{aligned} \Sigma \frac{\partial S}{\partial S'} \Delta s &= \Sigma \frac{\partial S}{\partial S'} \frac{Ss}{\varepsilon A} = 0 \\ \Sigma \frac{\partial S}{\partial S''} \Delta s &= \Sigma \frac{\partial S}{\partial S''} \frac{Ss}{\varepsilon A} = 0 \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 287)$$

Ponieważ praca odkształcenia $A = \Sigma \frac{S's}{2\varepsilon A}$, więc równanie to możemy inaczej wyrazić.

Siły prętów nadliczbowych S' , S'' ... muszą być tak wielkie, aby praca odkształcenia była najmniejszością.

Widzimy więc, że prawo najmniejszości pracy odkształcenia, które przedtem udowodniliśmy dla oddziaływań, ważne jest także dla sił wewnętrznych prętów nadliczbowych, a dałoby się udowodnić ogólnie, że jeżeli siły wewnętrzne S belki kratowej statycznie niewyznaczalnej wyrazimy jako funkcje niezależnie zmiennych x' , x'' ..., to x muszą mieć takie wartości, aby praca odkształcenia A była najmniejszością.

rys. 96



1. Przykład (według Ostenfelda). Wspornik $EBCD$ (rys. 96.) ma stałe łożysko w C i D . W B obciążony jest 30 tonami. Wyznaczyć siły wewnętrzne. Belka jest statycznie niewyznaczalną pierwszego stopnia, uważamy pręt BE jako nadliczbowy. Opuściwszy ten pręt, otrzymamy

$$\begin{array}{lll} \text{siłę wewnętrzną w } BD & 30 \cdot \frac{5}{13} = +50 \text{ t} \\ \text{" " " } BC & 30 \cdot \frac{4}{13} = -40 \text{ t.} \end{array}$$

Siły u otrzymamy, zaczepiając w E i B siły równe jedności. Wtedy otrzymamy siły u' w ED $1 \cdot \frac{4}{13} = 1.33$

$$\text{w } EC \quad 1 \cdot \frac{5}{13} = -1.67$$

$$\text{w } BD \quad 1 \cdot \frac{5}{13} = +1.67$$

$$\text{w } BC \quad 1 \cdot \frac{4}{13} = -1.33.$$

Z rów. 287) otrzymamy tu, zważywszy, że $S = S_0 + u_1 S'$,

$$\frac{\partial S}{\partial S'} = u_1, \quad \sum_{\epsilon A} u_1 S s = 0 = \sum_{\epsilon A} u_1 s S_0 + \sum_{\epsilon A} u_1^2 s S' \quad \dots \dots \dots 288)$$

a stąd

$$S' = - \frac{\sum \frac{u_1 s S_0}{A}}{\sum \frac{u_1^2 s}{A}} \quad \dots \dots \dots 289)$$

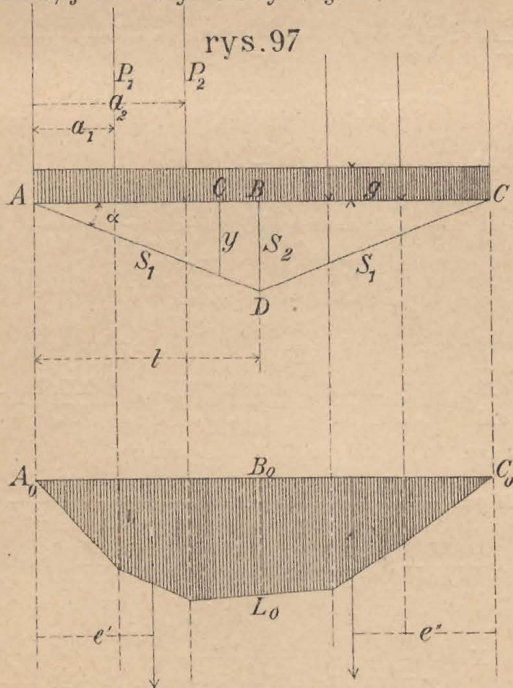
Ustawmy następną tabliczkę

Pręt	$\mathfrak{S}_0$	u_1	s	A	$\frac{u_1 s \mathfrak{S}}{A}$	$\frac{u_1^2 s}{A}$	S
ED	0	1.33	400	40	0	17.7	-19.1
EC	0	-1.67	500	48	0	28.9	+23.9
BD	+50	+1.67	100	36	1157	38.6	+26.1
BC	-40	-1.33	400	40	533	17.7	-20.9
EB	0	1	300	20	0	15.0	-14.3
					1690	117.9	

$$S = -\frac{1690}{117.9} = -14.33.$$

Teraz możemy obliczyć rzeczywiste natężenie S według wzoru $S = \mathfrak{S}_0 + u_1 S'$. Wypisaliśmy je w ostatniej rubryce.

Z powyższego widzimy, że sposób ten prowadzi do tych samych wzorów i wyników, jakie otrzymaliśmy w §. 75.



2. Przykład podajemy tu wedle Müllera Breslaua.

Belka wzmocniona ABC leży na podporach A i C (rys. 97.).

Niewiadoma niechaj będzie tu X składowa pozioma siły wewnętrznej w ścięgnach AD i DC .

Wtedy

$$\begin{aligned} S_1 &= X \operatorname{sech} \alpha, \\ S_2 &= -2X \operatorname{st} \alpha \end{aligned}$$

Zróbmy przekrój pionowy w G . to dla belki

$$\begin{aligned} \text{poziomej } N &= -S_1 \operatorname{dost} \alpha = -X, \\ \text{moment } M &= M_0 - S_1 y \operatorname{dost} \alpha = M_0 - Xy, \end{aligned}$$

jeżeli M_0 oznacza moment belki zwykłej AC dla tego samego obciążenia a $A_0 L_0 C_0$ zwykłą powierzchnię momentów.

Tu mamy belkę o przekroju pełnym połączoną z kratową, więc

$$\int \frac{M \partial M}{\varepsilon J \partial X} dx + \int \frac{N \partial N}{\varepsilon A \partial X} dx + \Sigma \frac{S_s \partial S}{\varepsilon A \partial X} = 0 \quad 290)$$

Niech będzie dla współczynnik sprężystości moment bezwładności przekrój belki AC

	ε	J	A
ścięgien AD i DC	ε_1		A_1
słupa BD	ε_2		A_2

$$\text{to } \frac{\partial S_1}{\partial x} = \operatorname{sech} \alpha, \quad \frac{\partial S_2}{\partial x} = -2 \operatorname{st} \alpha,$$

$$\begin{aligned} \text{więc } \Sigma \frac{S_s \partial S}{\varepsilon A \partial X} &= 2 \frac{S_1 s_1}{\varepsilon_1 A_1} \operatorname{sech} \alpha - \frac{S_2 s_2}{\varepsilon_2 A_2} 2 \operatorname{st} \alpha = \frac{2Xl \operatorname{sech}^3 \alpha}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{2Xl}{\varepsilon_2 A_2} 2 \operatorname{st}^3 \alpha \\ \Sigma \frac{S_s \partial S}{\varepsilon A \partial X} &= X \left[\frac{2l \operatorname{sech}^3 \alpha}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{4l \operatorname{st}^3 \alpha}{\varepsilon_2 A_2} \right] \quad 291) \end{aligned}$$

Dalej mamy $\frac{\partial M}{\partial X} = -y$, $\frac{\partial N}{\partial X} = -1$, więc

$$\begin{aligned} \int_0^{2l} \frac{M \partial M}{\varepsilon J \partial X} dx + \int_0^{2l} \frac{N \partial N}{\varepsilon A \partial X} dx &= - \int_0^{2l} \frac{M}{\varepsilon J} y dx - \int_0^{2l} \frac{N}{\varepsilon A} dx = - \frac{l}{\varepsilon J} \int_0^{2l} M y dx = \\ &+ \frac{X}{\varepsilon J} \int_0^{2l} y^2 dx + \frac{X}{\varepsilon A} \int_0^{2l} dx \varepsilon. \end{aligned}$$

Wstawiwszy $y : x = h : l$, $y = \frac{xh}{c}$, otrzymamy wreszcie

$$\int_0^{2l} \frac{M \partial M}{\varepsilon J \partial X} dx + \int_0^{2l} \frac{N \partial N}{\varepsilon A \partial X} dx = - \frac{1}{\varepsilon J} \int_0^{2l} M_0 y dx + \frac{2Xh^2 l}{3\varepsilon J} + \frac{2Xl}{\varepsilon A} \quad . . . 292)$$

Wstawiwszy 291) i 292) w 290), otrzymamy

$$\frac{l}{\varepsilon J} \int_0^{2l} M_0 y dx + \frac{2Xh^2 l}{3\varepsilon J} + \frac{2Xl}{\varepsilon A} + X \left[\frac{2l \operatorname{sech}^3 \alpha}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{4l \operatorname{st}^3 \alpha}{\varepsilon_2 A_2} \right] = 0$$

$$\text{stad } X \left(2h^2 l + \frac{6lJ}{A} + 3 \left[2l \operatorname{sech}^3 \alpha \frac{\varepsilon J}{\varepsilon_1 A_1} + 4l \operatorname{st}^3 \alpha \frac{\varepsilon J}{\varepsilon_2 A_2} \right] \right) = 3 \int_0^{2l} M_0 y dx$$

$$\begin{aligned} \text{więc } X &= \frac{3 \int_0^{2l} M_0 y dx}{2h^2 l \left(1 + \frac{3J}{Ah^2} + \frac{3J}{h^2} \left(\operatorname{sech}^3 \alpha \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1 A_1} + 2 \operatorname{st}^2 \alpha \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2 A_2} \right) \right)} \end{aligned}$$

$$\text{lub } X = \frac{3 \int_0^{2l} M_0 y dx}{2h^2 l \mu} \quad 293)$$

$$\text{jeżeli } \mu = l + \frac{3J}{Ah^2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \frac{A}{A_1} \operatorname{sech}^3 \alpha + 2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \frac{A}{A_1} \operatorname{st}^2 \alpha \right) \quad . . . 294)$$

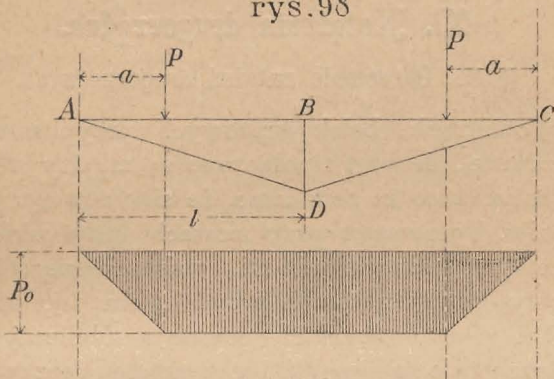
Spółczynnik μ zależny jest tylko od wymiarów belki i dla tej samej belki stały.

Jeżeli powierzchnię zwykłą momentów podzielimy pionową B_0L_0 na dwie części, a odstęp środków ciężkości obu części od podpór A_0 i C_0 nazwiemy e' i e'' , to

$$\int_0^l M_0 y dx = \frac{h}{l} \int_0^l M_0 x dx = \frac{h}{l} A'e',$$

$$\text{dla całej belki } \int_0^l M_0 y dx = \frac{h}{l} (A'e' + A''e'').$$

rys. 98



Wstawiawszy tę wartość w 293) otrzymamy

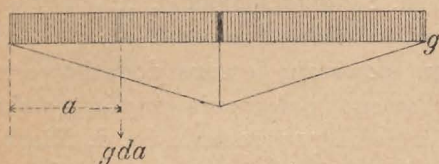
$$X = \frac{3(A'e' + A''e'')}{2\mu hl^2} \dots \dots \dots 294)$$

Dla dwu sił równych i w równych odstępach (rys. 98.) jest

$$A'e' = A''e'' = Pal \cdot \frac{l}{2} - Pa \frac{a}{2} \frac{a}{3} = \frac{Pa}{6} (3l^2 - a^2)$$

$$\text{więc } X = \frac{Pa(3l^2 - a^2)}{2\mu hl^2}.$$

rys. 99



Ponieważ każda ze sił P przyczynia się tak samo do X , więc dla jednej siły P

$$X = \frac{Pa(3l^2 - a^2)}{4\mu hl^2} \dots \dots 295)$$

Dla ciężaru jednostajnie rozdzielonego otrzymamy X , jeżeli gda , działająca w odstępnie a (rys. 99.) będziemy uważać za siłę skupioną, wyrazimy X wedle 295) i scał-

kujemy, otrzymamy wtedy $X = 2 \int_0^l \frac{ga(3l^2 - a^2)}{4\mu hl^2} da$

$$X = \frac{2g}{4\mu hl^2} \int_0^l (3l^2 a - a^3) da = \frac{g}{2\mu hl^2} \left(\frac{3}{2} l^4 - \frac{l^4}{4} \right) = \frac{5gl^3}{8\mu h} \dots \dots 295)$$

Jeżeli więc belka obciążona jest ciężarem własnym g i układem ciężarów skupionych P , to $X = \frac{5gl^4 + 2\Sigma Pa(3l^2 - a^2)}{8\mu hl^2} \dots \dots \dots 297)$

Znając X możemy teraz obliczyć siły wewnętrzne we wszystkich prętach.

XI. Natężenia drugorzędne.

§. 85. Określenie natężeń drugorzędnych.

Przy obliczeniu belek kratowych przypuszczaliśmy dotychczas zawsze, że pręty połączone są między sobą przegibnie, bez tarcia, a co za tem idzie, że siły zewnętrzne działają w osi prętów. Tymczasem przy mostach europejskich łączymy pojedyncze pręty zawsze nitami, wskutek czego kąty, jakie tworzą pręty belki kratowej przy ugięciu jej, nie mogą się zmieniać, a więc w węzłach powstają momenty, zginające pręty, których osie nie są już teraz proste, lecz wyginają się w jednym kierunku lub esowato. A nawet, jeżeli połączenie prętów jest przegibnem (w mostach amerykańskich), to występuje zawsze tarcie, w skutek czego siły wewnętrzne przyjmują położenie mniej lub więcej mimośrodkowe.

Natężenia, wywołane siłami wewnętrznymi w przypuszczeniu połączenia przegibnego beztarciowego nazywamy natężeniami pierwszorzędnymi (n. *Grundspannung*, *primäre Spannung*), natężenia, które powstają wskutek stałych połączeń węzłowych (a. *rigidity of joints*), nazywamy natężeniami drugorzędnymi (n. *Secundärspannung*, fr. *effort secondaire*, a. *secondary stress*, cz. *sekunderne napjeti*).

Oprócz tych natężeń powstają jeszcze dodatkowe natężenia wskutek mimośrodkowego połączenia prętów, wskutek naglej zmiany przekroju, ugięcia poprzecznie i t. d. Niektórzy nazywają te natężenia także drugorzędnymi, my jednak dla odróżnienia od natężeń, powstałych z powodu stałych połączeń węzłowych będziemy je nazywać dodatkowymi (n. *Zusatzspannung*). W tym rozdziale mówić będziemy tylko o natężeniach drugorzędnych i wyłożymy rzecz tę według Rittera*).

*) Ritter W. Anwendungen der graphischen Statik. 1890.

§. 86. Zasada obliczenia nateżeń drugorzędnych.

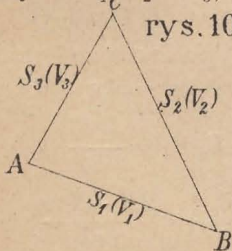
Według Manderli *), który rozwiązał pierwszy trudne zadanie wyznaczenia nateżeń drugorzędnych, postępujemy w następujący sposób:

Obliczamy najprzód siły wewnętrzne pierwszorzędne w przypuszczeniu połączeń beztarciowych przegibnych, z tych nateżenia pierwszorzędne i zmianę kątów przy ugięciu, któreby powstały przy połączeniach przegibnych beztarciowych. Momenty, które powstają wskutek stałych połączeń węzłowych, uważamy jako nieznanne, które wyznaczamy w ten sposób, aby przez ugięcie prętów wskutek tych momentów, kąty te odzyskały pierwotną wielkość. Z momentów węzłowych wyznaczamy wreszcie w zwykły sposób nateżenia drugorzędne.

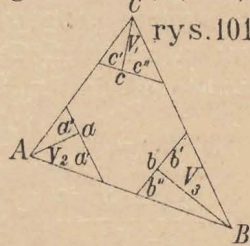
Dla obliczenia nateżeń drugorzędnych potrzeba według poprzedniego wyznaczenia nateżeń pierwszorzędnych i znajomości przekrojów. A zatem musimy zawsze najprzód wyznaczyć w zwykły sposób siły wewnętrzne i obliczyć przekroje, a potem dopiero możemy obliczać nateżenie drugorzędne.

§. 87. Zmiana kątów w trójkącie.

Zmianę kątów trójkąta wskutek zmiany długości jego boków wyznaczyliśmy już w tomie I**). Nazwijmy zmianę kąta przy A (rys. 100.) δ_a , przy B δ_b , przy C δ_c , v_1 , v_2 i v_3 nateżenia prętów s_1 , s_2 i s_3 , to według rów. 292) (t. I, str. 214)



rys. 100



rys. 101

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \delta_a &= (v_2 - v_1) \text{ dot } B + (v_2 - v_3) \text{ dot } C \\ \varepsilon \delta_b &= (v_3 - v_1) \text{ dot } A + (v_3 - v_2) \text{ dot } C \\ \varepsilon \delta_c &= (v_1 - v_2) \text{ dot } B + (v_1 - v_3) \text{ dot } A \end{aligned} \right\} \dots 298)$$

*) p. Allgemeine Bauzeitung 1880.

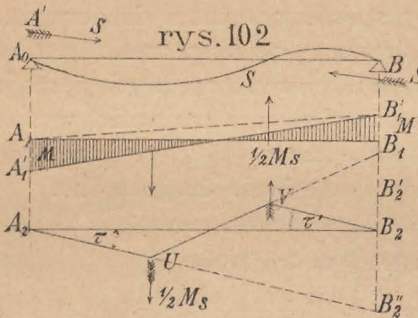
**) p. Podręcznik Teorii Mostów tom I, wyd. II. str. 213.

Równanie 298) da się wykreślić też przedstawić. Spuśćmy z A , B i C (rys. 101.) prostopadłe na przeciwległe boki i odetnijmy na nich natężenia v przeciwległych boków, poczem wykreślimy do nich równoległe, a otrzymamy

$$\begin{aligned} v_2 \text{ dot } B &= a', \quad v_2 \text{ dot } C = a'', \quad v_1 \text{ dot } B = c'', \quad v_3 \text{ dot } C = b', \text{ więc} \\ \left. \begin{aligned} \varepsilon \delta_a &= a - b' - c'' \\ \varepsilon \delta_b &= b - c' - a'' \\ \varepsilon \delta_c &= c - a' - b'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 299) \end{aligned}$$

§. 88. Kąt odchylenia osi od prętów.

Teraz będziemy się starali wyznaczyć styczne kątów odchylenia osi prętów (n. *Stabdrehwinkel*) w węzłach.



Powiedzieliśmy wyżej, że siła wewnętrzna S nie działa w osi pręta i wywołuje momenty węzłowe M i M' (rys. 102.), wskutek czego pręt się wygina. Nazwijmy styczne kątów nachylenia linii ugięcia w A i B τ i τ' , to otrzymamy je, wykreśliwszy drugi wielobok sznurowy, jak dla belki ciągłej. Powierzchnię

momentów dzielimy na dwa trójkąty, których powierzchnie $\frac{1}{2} Ms$ i $-\frac{1}{2} M's$ zaczepiają w pionowych trzecich części. $A_2 U$ i $V B_2$ są to styczne podporowe.

Z rysunku widzimy, że $B_2' B_2''$, pomnożone przez odległość biegunową εJ , jest moment statyczny siły $\frac{1}{2} Ms$, a więc

$$B_2' B_2'' = \frac{\frac{1}{2} Ms \cdot \frac{2}{3} s}{\varepsilon J} = \frac{2 Ms^2}{6 \varepsilon J}, \quad B_2 B_2' = \frac{M's^2}{6 \varepsilon J},$$

$$\begin{aligned} \text{więc } B_2 B_2'' &= \frac{(2M - M')s^2}{6 \varepsilon J}, \text{ stąd } \tau = \frac{B_2 B_2''}{s} = \frac{(2M - M')s}{6 \varepsilon J} \\ &\text{a podobnie } \tau' = \frac{(2M' - M)s}{6 \varepsilon J} \end{aligned} \dots \dots 300)$$

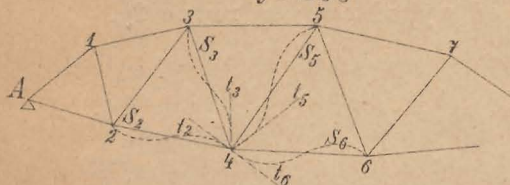
§. 89. Równania momentów węzłowych.

Przypuśćmy, że rys. 103. przedstawia nam ugiętą belkę, przyczem wykreśliliśmy pełno cięciwy prętów, a wykreskowa-

liśmy ugięte pręty, schodzące się w węźle 4. Kąt zawarty między ugiętymi prętami 24 i 34 byłby taki sam, jaki był przed

ugięciem z powodu połączenia stałego nitami, lecz z powodu obciążenia i odkształcenia (§. 87.) zamienił się i jest obecnie kąt 342 o $\tau_2 - \tau_3$

rys. 103



wiekszy od tego kąta, zatem $\delta_{2\cdot3} = \tau_2 - \tau_3$, a ze względu na

$$\text{rów. 300)} \quad \varepsilon \delta_{2\cdot3} = \frac{s_2(2M_2 - M_2')}{6J_2} - \frac{s_3(2M_3 - M_3')}{6J_3}, \dots \dots \dots 301)$$

przyczem M_2 i M_3 oznaczają momenty węzłowe przy danym węźle M_2' i M_3' w przeciwnym końcu prętów.

Podobne równania otrzymamy dla $\delta_{3\cdot5}$ i $\delta_{5\cdot6}$.

Ponieważ wszystkie momenty węzłowe w węźle 4 muszą być w równowadze, więc

$$M_2 + M_3 + M_5 + M_6 = 0 \dots \dots \dots 302)$$

Otrzymamy więc dla węzła 4 cztery równania, które możemy także inaczej napisać, nazwawszy

$$\frac{sM}{6J} = \mu \dots \dots \dots 203)$$

Otrzymamy mianowicie dla węzła 4

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \delta^{2\cdot3} &= (2\mu_2 - \mu_2') - (2\mu_3 - \mu_3') \\ \varepsilon \delta_{3\cdot5} &= (2\mu_3 - \mu_3') - (2\mu_5 - \mu_5') \\ \varepsilon \delta_{5\cdot6} &= (2\mu_5 - \mu_5') - (2\mu_6 - \mu_6') \\ \frac{J_2}{s_2} \mu_2 + \frac{J_3}{s_3} \mu_3 + \frac{J_5}{s_5} \mu_5 + \frac{J_6}{s_6} \mu_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 304)$$

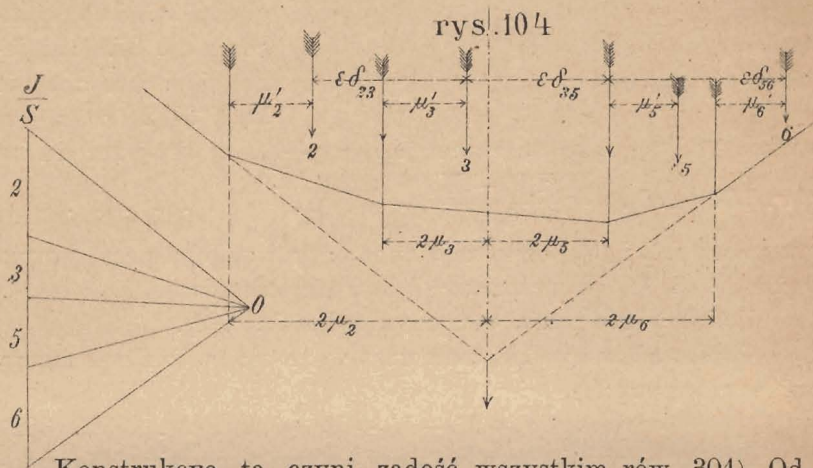
Podobne równania dadzą się ustawić dla każdego węzła, a otrzymamy ich tyle, ile jest momentów węzłowych; możemy je zatem obliczyć, rozwiązawszy równania wedle μ .

§. 90. Wykreślne wyznaczenie momentów węzłowych.

Rozwiązanie $2n$ równań byłoby rzeczą bardzo żmudną, prędzej, chociaż próbowaniem, dojdziemy do celu drogą wykreślną, podaną przez Rittera.

Przypuśćmy, że znamy μ' dla węzła 4., a staramy się wyznaczyć μ .

Wykreślmy wielobok sił (rys. 104.), odcinając siły $\frac{J}{s}$, potem wykreślmy kierunki tych sił w odstępach $\varepsilon\delta$ i przesunmy te siły o μ' . Złożmy teraz te siły, a otrzymamy wypadkową 4. Odstępy przesuniętych sił od wypadkowej są równe 2μ .

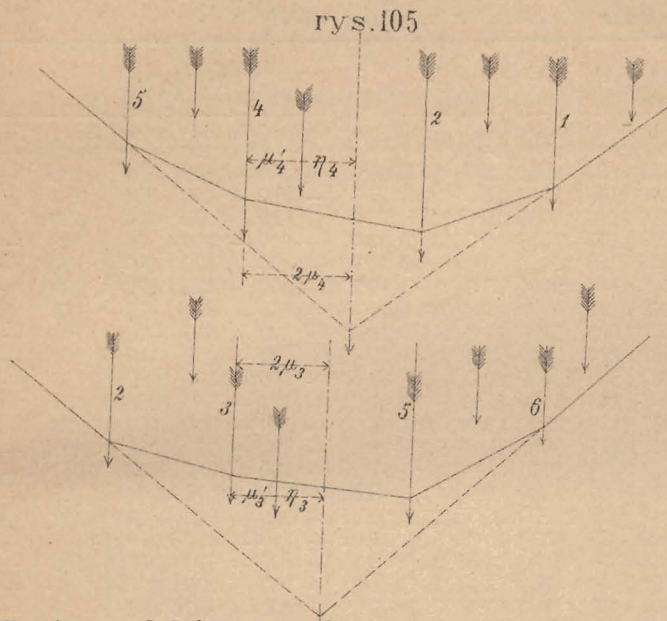


Konstrukcyja ta czyni zadość wszystkim rów. 304). Odstępy sił nieprzesuniętych od wypadkowej są $2\mu - \mu'$, a różnica tych odstępów równa się $\varepsilon\delta$, przezco wypełniają się pierwsze trzy równania. Ostatnie rów. 304) orzeka, że suma momentów dotyczących sił $\frac{J}{s}$ ze względu na wypadkową jest równą zeru, co wedle konstrukcyi się sprawdza.

Zachodzi tylko ta okoliczność, że nie znamy wielkości μ' . Nie pozostaje nam nic innego, jak w pierwszym przybliżeniu przyjąć $\mu' = 0$. Otrzymamy przybliżone wartości μ , które dla sąsiednich węzłów dadzą nam μ' , możemy więc tam już dokładniej wyznaczyć μ , które znów są dla sąsiednich węzłów μ' . Na podstawie tych μ' obliczamy po raz drugi, a jeśli potrzeba i trzeci, μ tak długo, aż nie okażą się już więcej znaczniejsze różnice.

Przy tej konstrukcyi trzeba, rozumie się, uwzględniać znak $\varepsilon\delta$ i μ' . Kreślimy więc w każdym węźle pręty w porządku, jak wskazówka posuwa się na zegarze, i odcinamy dodatnie δ na prawo, na prawo od wypadkowej leżące μ uważamy jako dodatnie, na lewo jako ujemne.

Na rys. 105. widzimy dwa wieloboki sznurowe dla węzła 3 i 4 (rys. 103.). Nazwijmy odstęp nieprzesuniętej siły od wypadkowej η , to $2\mu_4 = \mu_4' + \eta_4$ i $2\mu_3 = \mu_3' + \eta_3$.



Ponieważ dalej $\mu_4 = \mu_3'$ i $\mu_3 = \mu_4'$, więc

$$\mu_3' = \frac{\eta_3 + 2\eta_4}{3}, \quad \mu_4 = \frac{\eta_4 + 2\eta_3}{3} \dots \dots \dots 305)$$

Gdybyśmy znali położenie wypadkowych, tobyśmy mogli wprost obliczyć μ' , tymczasem ponieważ zwykle wypadkowe niewiele się przesuwają, więc na podstawie tych równań możemy w przybliżeniu wyznaczyć μ' . Podwajamy cyrklem η_4 , dodajemy do tego η_3 i dzielimy przez 3, o tę długość μ_3' przesuwamy siłę 3 na lewo.

Wyznaczywszy w ten sposób μ , możemy łatwo obliczyć natężenie v' . Mamy bowiem $v'I = Me$, a że według 303)

$$M = \frac{6I\mu}{s}, \quad \text{więc } v' = \frac{6e}{s}\mu \dots \dots \dots 306)$$

Przykład. Jako przykład wyznaczmy natężenia drugorzędne mostu nad Pegnicą kolei Norymbergia — Neuhaus o rozpiętości 36 m (tabl. IV.), dla którego Steiner wyznaczył te natężenia innym sposobem (liczebnym*).

*) p. Handbuch der Ingenieurwissenschaften t. II. str. 362.

Pomost leży u góry, ciężar własny wynosi dla pasu dolnego 0.29 t/m, dla górnego 0.71 t/m, ciężar ruchomy 2.94 t/m jednej belki. Belka jest całkowicie obciążona. Siły wewnętrzne pierwszorzędne S , przekroje prętów A , momenty bezwładności I , odstęp włókna skrajnego od osi obojętnej e i długości prętów s podane są w poniższej tablicy.

Pręt	s	A	I	e	S	$\frac{I}{s}$	μ_2	μ_1	v_1	v_1'	v
	cm	cm ²	cm ⁴	cm	t	cm ³	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²
1 3	400	86	2040	13.6	35.3	5.1	-1270	-1400	254	286	-410
3 5	400	166	7110	18.0	93.0	17.75	-360	-690	104	186	-560
5 7	400	226	13000	20.0	134.8	32.5	-20	-400	6	120	-596
7 9	400	253	13000	20.0	159.7	32.5	+220	-460	66	138	-621
9 11	400	253	15100	20.0	168.0	37.75	+400	-400	120	120	-664
0 2	200	48	2140	13.8	15.0	10.7	-1200	-1470	497	609	+312
2 4	400	95	4270	13.8	66.4	10.67	-360	-860	75	178	+699
4 6	400	182	5960	16.0	116.7	14.90	-300	-650	72	156	+642
6 8	400	224	12260	20.0	149.3	30.65	-50	-690	15	207	+667
8 10	400	239	13000	20.0	165.9	32.5	+600	+500	180	150	+694
0 1	380	143	4410	12.6	70.9	11.61	+1120	+540	223	107	-496
2 3	429	136	6920	18.0	70.6	16.13	+740	+390	186	98	-527
4 5	429	117	5690	17.8	52.8	13.26	+730	+600	182	149	-451
6 7	429	89	3200	14.8	35.0	7.45	+760	+710	157	147	-393
8 9	429	55	1640	12.6	17.2	3.82	+340	+140	57	25	-313
1 2	429	96	12800	20.0	71.9	29.84	+60	+360	17	107	+749
3 4	429	77	6550	16.0	54.1	15.27	+310	+490	69	110	+708
5 6	429	56	3660	14.0	36.3	8.53	+800	+570	159	112	+648
7 8	429	40	740	9.6	18.5	1.73	+750	+280	107	98	+462
9 10	429	48	1130	11.1	0.66	2.63	+400	+30	62	5	+14

Najprzód wyznaczyliśmy natężenia pierwszorzędne i dotychczasowe kąty i oznaczyli je na rys. 1. Na podstawie rów. 298) obliczyliśmy potem zmianę kątów ε i z z uwzględnieniem znaku oznaczyliśmy wartości te w rys. 2., poczem przystępujemy do wyznaczenia μ i μ' według §. 90. (rys. 3. do 13). W każdym z tych rysunków wykreśliśmy dla danego węzła wielobok sił n. p. w rys. 4. dla węzła 4 siły $\frac{I}{s}$ dla prętów 13, 12, 10 zawsze w porządku tym, w jakim natrafiamy pręty, posuwając się, jak wskazówka na zegarze.

Dalej kreślimy kierunki tych sił w odstępach ε w podziale $\frac{1mm}{100kg/cm^2}$ licząc dodatnie ε na prawo, ujemne na lewo; kierunki te wyciągnąć należy od razu tuszem. Siły te składamy teraz zapomocą wieloboku sznurowego i otrzymujemy tymczasowe położenie wypadkowej. Teraz przesuwamy kierunki o μ' , które nam jednak jeszcze nie jest znane, przyjmujemy więc μ w przybliżeniu, korzystając z rów. 305), μ i μ' , leżące na prawo od wypadkowej, uważamy jako dodatnie, na lewo jako ujemne i przesuwamy odpowiednio kierunki sił w pierwszym wypadku na lewo, w drugim na prawo. Dla przesuniętych sił kreślimy znów wielobok sznurowy i otrzymujemy poprawiony kierunek wypadkowej. Teraz sprawdzamy, czy dla jednego pręta μ otrzymane z jednego rysunku równa się μ' w drugim, n. p. czy odstęp wypadkowej 1 w rys. 4. (węzeł 1) od siły 3, więc $2\mu_3$ równa

się podwójnemu odstępowi wypadkowej 3 (rys. 6.) i poprawiamy rysunki te dopóty, aż tę zgodność osiągniemy; wtedy odczytujemy μ z rysunków według podziałki $\varepsilon \delta$ (tu $\frac{1 \text{ mm}}{100 \text{ kg/cm}^2}$). Wpisaliśmy wartości te w tabliczkę w rubrykach μ i μ' . Na podstawie rów. 305 obliczamy stąd wreszcie v_1 i v_1' , natężenia drugorzędne na obu końcach pręta.

§. 91. Wpływ mimośrodkowego utwierdzenia prętów.

Jeśli niektóre pręty są mimośrodkowo utwierdzone, to powstają wskutek tego dodatkowe natężenia, a oprócz tego zmieniają się natężenia drugorzędne.

Nazwijmy odstęp osi pręta od węzła c , dodatnie lub ujemne wedle tego, czy wskutek tego koniec pręta zgina się na prawo lub lewo, to odnośne momenty są $M=Sc$ i $M'=Sc'$,

a według 299)
$$\tau_c = \frac{(2M-M')s}{6EI} = \frac{(2c-c')Ss}{6EI} \dots\dots\dots 307)$$

Kąty zmieniają się więc nietylko wskutek odkształcenia prętów, ale i mimośrodkowego utwierdzenia. Konstrukcja, wskazana w poprzednim paragrafie, mało się zmienia, mianowicie każde poprzednie δ powiększa się o τ_c , każde następne pomniejsza się o tę ilość, a więc w rys. 103. i 104., posuwamy kierunki sił o τ_c na prawo. Zresztą konstrukcja się nie zmienia. W ten sposób otrzymujemy natężenia drugorzędne, oprócz tego obliczamy wprost natężenia, powstałe wskutek mimośrodkowego utwierdzenia; mają one zwykle znak przeciwny tak, że natężenia tę po części się znoszą.

§. 92. Wpływ przekroju prętów.

Aby zbadać wpływ przekroju prętów na natężenia drugorzędne, pomyślny, że momenty bezwładności I wszystkich prętów stały się n razy większe, a przekrój ich A i odstęp skrajnej warstwy od osi pozostał niezmienny, to przez to μ się nie zmniejsza, natężenia drugorzędne pozostaną te same. Przypuśćmy teraz, że także wszystkie A stały się n razy większe, c pozostały te same, wtedy natężenia stały się n razy mniejsze, a więc i δ i μ n razy mniejsze, zatem natężenia zmniejszyły się n razy. Jeżeli zaś A nie zmienimy, lecz c stanie n razy większem, to natężenia n razy wzrosną.

Z powyższego widzimy, że natężenia drugorzędne są w prostym stosunku proporcjonalne do szerokości prętów i na-

tężeń pierwszorzędnych, a w odwrotnym do przekroju prętów. A zatem chcąc uniknąć wielkich nateżeń drugorzędnych, należy robić pręty tak wąskie, jak to pozwala dokładne połączenie nitami i wzgląd na wyboczenie prętów ciśnionych.

Ponieważ w mostach dla małych rozpiętości szerokości prętów są w stosunku do ich długości największe, więc też przy takich mostach powstają największe nateżenia drugorzędne.

§. 93. Wpływ obciążenia.

Jeżeli na belkę działa ciężar ruchomy, to powstaje pytanie, dla jakiego obciążenia powstają największe nateżenia drugorzędne. Najprędzej wyznaczyć je możemy zapomocą linii wpływowych. Wprawdzie tu metoda linii wpływowych nie da się ściśle zastosować, bo tu zmiany ramion momentów wskutek odkształceń sprężystych nie są w stosunku do wymiaru prętów nadzwyczaj małe, ale i cała powyższa teoria jest tylko przybliżoną, możemy więc równem prawem używać linii wpływowych. W tym celu należałoby badać wpływ ciężaru $P=1$, zaczepionego w pojedynczych węzłach; badanie takie byłoby jednak za żmudne. Winkler doszedł przytem do wyniku, że w ogóle można przyjąć, że nateżenia drugorzędne są największe dla tego samego obciążenia, co pierwszorzędne.

§. 94. Wpływ ustroju belki.

Winkler badał nateżenia drugorzędne dla rozmaitych belek kratowych; my tu podamy tylko wyniki, do jakich on doszedł.

W belce kratowej równoległej o kracie prostokątnej powstają nateżenia drugorzędne, wynoszące w pasach 10 do 24%, w kracie równoramiennej 5—14% pierwszorzędnych. Nateżenia drugorzędne w kracie są również w pierwszym przypadku większe, niż w drugim.

Jeśli belki kratowe o kracie wielokrotnej obciążymy tak, że tylko jeden układ jest obciążony, powstają bardzo znaczne nateżenia drugorzędne w pasach. Winkler otrzymał w pewnym wypadku nateżenia drugorzędne, sięgające do 88% pierwszorzędnych, średnio 45%. Przy obciążeniu wszystkich węzłów otrzymał on tylko nateżenia, wynoszące 12%.

Jeżeli przytem krzyżulce są połączone, natężenia drugorzędne wzrastają jeszcze bardziej. Winkler otrzymał w pasach natężenia drugorzędne, wynoszące 27 do 113%, przeciętnie 65%, w krzyżulcach przeciętnie 51%.

Na średniej podporze belek ciągłych powstają znaczne natężenia drugorzędne w pasie zwłaszcza dolnym, natężenia te mogą być dwa razy większe, niż w innych częściach belki.

§. 95. Połączenia przegibne.

Jeżeli pręty belki kratowej połączone są przegibnie, to jednak obrót pręta około sworznia nastąpi dopiero wtedy, gdy moment M_r , wywołany tarcie, mniejszy jest niż moment węzłowy M , obliczony poprzednim sposobem. Siła S (rys. 106.) rozkłada się na $N = S \times \text{dost} \varphi$ i $T = S \text{wst} \varphi = N \text{st} \varphi$, przyczem φ jest kąt tarcia, więc $\text{st} \varphi = f$. Jeżeli wykreślimy promieniem a koło, to dopóki kierunek siły S przecina koło, nie może ruch nastąpić, a zatem największy mimośród możliwy jest $a = \frac{d}{2} \text{wst} \varphi$ 308)

Mimowśród ten największy możemy odrazu obliczyć.

Wyznaczenie więc natężeń drugorzędnych pozostaje takie samo, jak wprzód, tylko baczyć musimy, że *najw* $M_r = Sa$.

Z powyższego wynika, że aby natężenia były jak najmniejsze, powinny być jak najcieńsze sworznie, o ile tylko wytrzymałość materiału na to pozwala. Tam więc, gdzie natężenia drugorzędne są wielkie, dadzą się urządzeniem połączeń przegibnych zmniejszyć natężenia drugorzędne, ale tylko do pewnej granicy, zależnej od wielkości średnicy sworznia. Na każdy sposób widzimy, że nawet przy użyciu połączeń przegibnych nie dadzą się natężenia drugorzędne zupełnie usunąć.

DODATEK.

LITERATURA.

Podajemy tu w porządku chronologicznym spis podręczników i niektórych ważniejszych artykułów i nowszych dzieł, odnoszących się do części teorii mostów, zawartej w niniejszym tomie.

1. Ogólne dzieła.

- Rebhann: *Theorie der Holz- und Eisenconstructionen*. Wieden 1856.
- Mollinos i Pronnier: *Traité théorique et pratique de la construction des ponts métalliques*. Paryż 1857.
- Laissle i Schübler: *Der Bau der Brückenträger*. Stuttgart 1857. 4 wyd. 1876.
- Bresse: *Cours de la mécanique appliquée*. II. część. Paryż 1862.
- Scheffler: *Uiber Gitter und Bogenträger*. Brunszwik 1862.
- Culmann: *Die graphische Statik*. Zurych 1866. 2 wyd. 1875.
- Winkler: *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit*. Praga 1867.
- Collignon: *Cours de la mécanique appliquée aux constructions*. Paryż 1869.
- Ott: *Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik*. Praga 1870. 4 wyd. 1885.
- Ritter W.: *Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken*. Zurych 1871. 2 wyd. 1883.
- Ott: *Vorträge über Baumechanik*. Praga 1872. 2 wyd. 1878—1891.
- Weyrauch: *Allgemeine Theorie der continuirlichen und einfachen Träger*. Lipsk 1873.

- Levy: *La statique graphique et ses applications aux constructions*. Paryż 1874. 2 wyd.
- Winkler: *Vorträge über Brückenbau I. Heft Aeussere Kräfte gerader Träger*. 1875. 3 wyd. 1886.
- Ritter: *Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik*. Hannover 1876.
- Jay du Bois: *The elements of graphical statics and their application to framed structures*. Nowy York 1875. 2 wyd. 1877.
- Winkler: *Vorträge über Brückenbau. II. H. Innere Kräfte. gerader Träger*. 2 wyd. 1881.
- Eddy: *Researches in graphical statics*. Nowy York 1878., tłóm. niem. 1880.
- Castigliano: *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Turyn 1879.
- Burr: *A course on the stresses in bridge and roof trusses*. Nowy York 1880.
- Chalmers: *Graphical determination of forces in engineering structures*. Londyn 1881.
- Schäffer i Sonne: *Handbuch der Ingenieurwissenschaft II. B. Der Brückenbau*. Lipsk 1882. 2 wyd. 1886—1890.
- Stelzel: *Grundzüge der graphischen Statik und deren Anwendung auf den continuirlichen Träger*. Gradziec 1882.
- Weyrauch: *Theorie elastischer Körper*. Lipsk 1884.
- Résal: *Ponts métalliques*. Paryż 1885—1889.
- Müller Breslau: *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre*. Lipsk 1886. 3 wyd. Lipsk 1904.
- Müller Breslau: *Graphische Statik der Bauconstructionen*. Berlin 1879. 2 wyd. 1887—1891. 3 wyd. Stuttgart 1905.
- Planat: *Pratique de la mécanique appliquée*. Paryż 1887.
- Leber: *Die neue Brückenverordnung der österr. Handelsministeriums*. Wiedeń 1886.
- Koechlin: *Applications de la statique graphique*. Paryż 1889.
- Ritter W.: *Anwendungen der graphischen Statik II. Th. Das Fachwerk*. Zurych 1890. *III. Th. Der Continuirliche Balken*. Zurych 1900.
- Keck W.: *Die Vorträge über die Elasticitätslehre*. Hanower 1893.

Johnson: *The theory and practice of modern framed structures*. Nowy York 1894.

Ostenfeld: *Die Technische Statik*. Lipsk 1904.

2. Belka ciągła.

Clapeyron: *Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement exposés*. *Comptes rendus*. 1857.

Winkler: *Beiträge zur Theorie der continuirlichen Brückenträger*. *Civilingenieur*. 1862.

Schmidt: *Ueber die Bestimmung der äusseren auf ein Brückensystem wirkenden Kräfte*. *Allg. Bauz.* 1866.

Lippich: *Theorie des continuirlichen Trägers konstanten Querschnittes*. *Allg. Bauz.* 1871.

Šolin: *Geometrische Theorie der continuirlichen Träger*. *Mittheil. d. Arch. u. Ing. Ver. in Böhmen*. 1873., 1874.

Greene: *Graphical method for the analysis of bridge trusses extended to continuous girders and draw spans*. Nowy York 1875.

Meriman: *On the theory and calculation of continuous bridges*. Nowy York 1876.

Schäffer: *Belastungsgesetze für den geraden stabförmigen Körper*. *Zeit. f. Bauw.* 1876.

Kleitz: *Note sur les calculs de stabilité des poutres continues, ayantes des moments d'inertie variables*. *An. d. ponts et chaus.* 1876., 1877.

Hulewicz: *Obliczenie wytrzymałości belek wieloprzęsłowych*. *Pam. tow. nauk ścisłych*. Paryż 1876., to samo po franc. *Ann. d. pon. et cha.* 1882.

Krohn: *Berechnung continuirlicher Fachwerksträger auf Grund der Deformationen der einzelnen Fachwerkstäbe*. *Civilingenieur*. 1880.

Landsberg: *Beitrag zur graphischen Berechnung continuirlicher Träger*. *Centr. der Beuver.* 1881.

Rytiř: *Der continuirliche Balken*. *Allg. Bauzeit.* 1882.

Müller Breslau: *Infuenzlinien für den continuirlichen Träger auf drei Stützen*. *Wochenb. f. Arch. u. Ing.* 1883.

Thullie: *Graphische Bestimmung der im continuirlichen Gitterträger mit 2 Feldern wirkenden Kräfte auf Grund der*

- Durchbiegung.* (Woch. der Arch. u. Ing. 1884. i po polsku Przegl. Techn. 1887).
- Šolin: *Zur Theorie des kontinuierlichen Trägers veränderlichen Querschnittes.* Civilingenieur. 1885.
- Šolin: *Theorie zevnitřních sil trávu přímých,* Praga 1885.
- Steiner: *Über den Einfluss einer Erwärmung der Gurte auf den kontinuierlichen Träger.* 1887., 1888.
- Müller-Peterwitz: *Einflusslinien für kontinuierliche Träger.* Deutsche Bauz. 1888.
- Thullie: *Bestimmung der Einflusslinien für die inneren Kräfte des kontinuierlichen Trägers mit drei Stützpunkten.* Woch. d. österr. Ing. u. Arch. 1891.
- Cart et Portes: *Calcul des ponts métalliques par la méthode des lignes d'influence.* Paryż 1895.
- Griot G.: *Interpolierbare Tabellen zum raschen Auftragen der Einflusslinien für Momente und Scheerkräfte.* Zurich 1904.
- Ritter Dr. W.: *Anwendungen der graphischen Statik. III. Th. Der kontinuierliche Balken.* Zurich 1900.
- Vierendeel: *Cours de stabilité des constructions, t. 3. Ponts continus* Leodjy. 1901.
- Francke Adolf: *Der kontinuierliche Balken mit veränderlichem Querschnitte.* Zeitsch. f. Architektur. 1903.

3. Belki kratowe statyczne niewyznacalne.

- Fränkel: *Das Princip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte elastischer Systeme* Z. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hann. 1882.
- Müller Breslau: *Über die Anwendung des Principes der Arbeit in der Festigkeitslehre* Woch. f. Arch. und Ing. 1883.
- Mohr: *Über das sogen. Princip der kleinsten Deformationsarbeit* Woch. f. Arch. u. Ing. 1883.
- Weyrauch: *Arbeitsbedingungen für statisch unbestimmte Körper.* Woch. f. Ar. und Ing. 1884.
- Krohn: *Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen,* Z. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hann. 1884.
- Melan: *Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Stabsysteme.* Z. d. österr. Ing. u. Arch. V. 1884.
- Steiner: *Theorie statisch unbestimmter Systeme.* Z. d. österr. Ing. u. Arch. V. 1886.

Müller Breslau: *Theorie statisch unbestimmter Systeme. Z. d. österr. Ing. u. Arch. V. 1887.*

4. Nateżenia drugorzędne.

Manderla: *Die Berechnung der Secundärspannungen. Allg. Bauz. 1880.*

Landsberg: *Beitrag zur Theorie der Fachwerke. Zeit. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hann. 1885., 1886.*

Müller Breslau: *Zur Theorie der Biegungsspannungen im Fachwerksträger. Allg. Bauz. 1885., 1886.*

Ritter W.: *Die secundären Spannungen in Fachwerken. Schw. Bauz. 1885.*

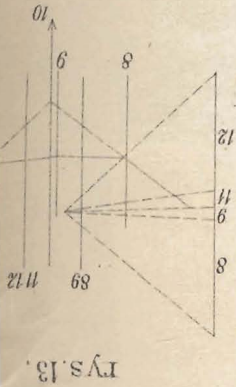
Manderla: *Uiber die Wirkungsweise gelenkförmiger Knotenverbindungen. Allg. Bauz. 1886.*

Engesser: *Uiber die Biegungsspannungen der Fachwerken. Zeit. d. Ver. deutsch. Ingen. 1888.*

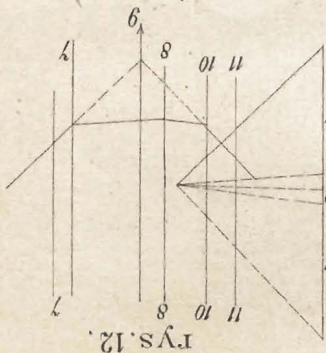
Mohr: *Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenpunkten. Civilingenieur. 1892. str. 578.*

Engesser: *Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken. I. Zusatzkräfte. Berlin 1892. II. die Nebenspannungen. Berlin 1893.*

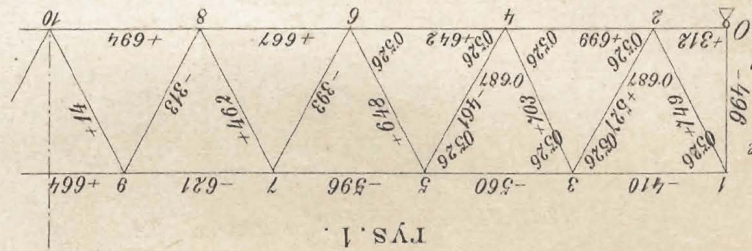




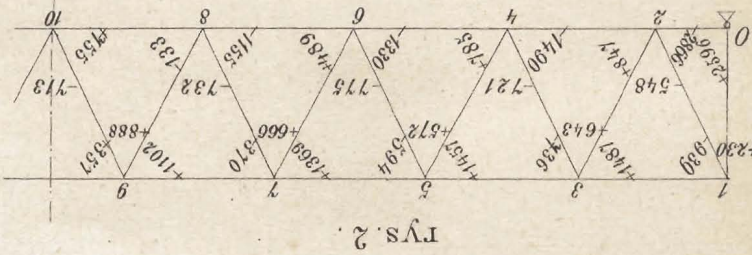
rys. 13.



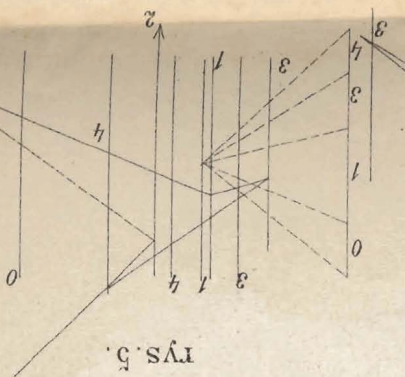
rys. 12.



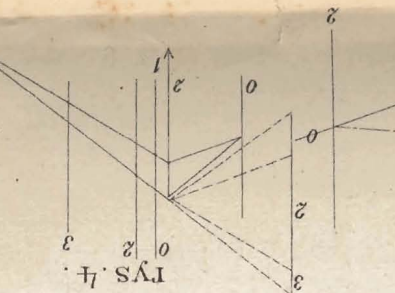
rys. 1.



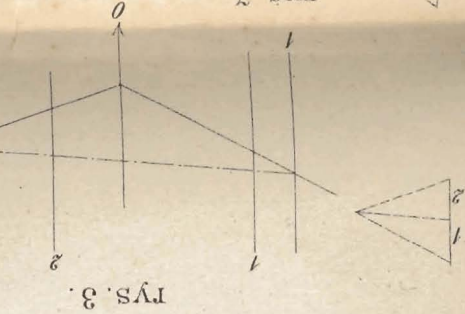
rys. 2.



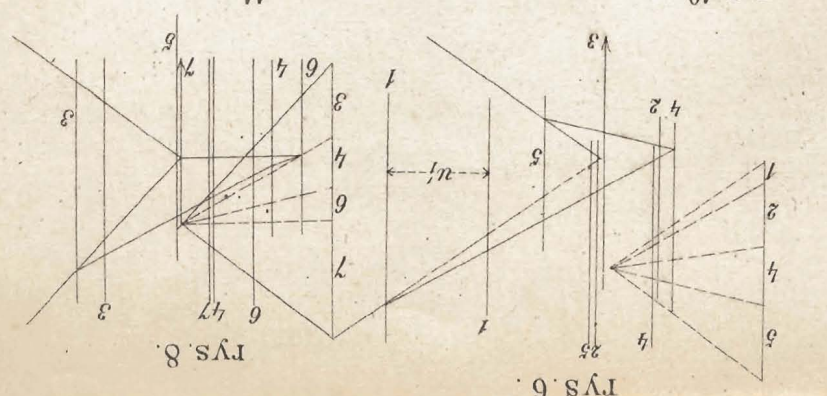
rys. 5.



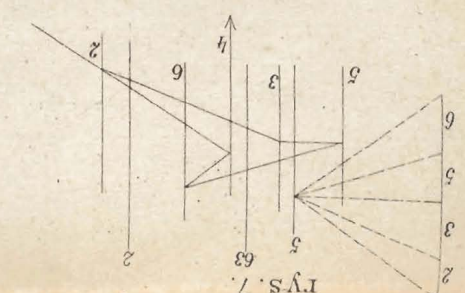
rys. 4.



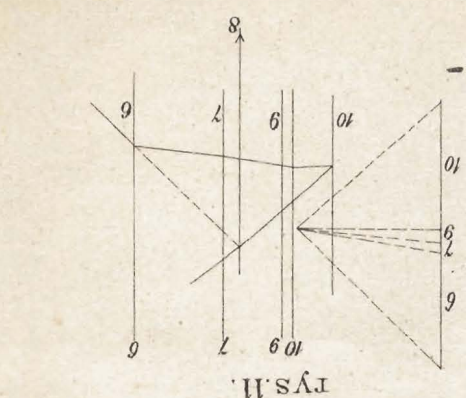
rys. 3.



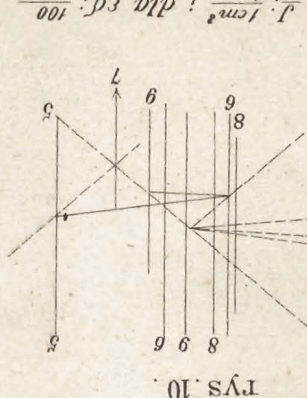
rys. 6.



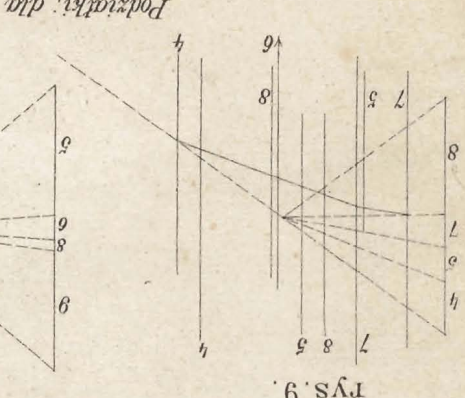
rys. 7.



rys. 8.



rys. 10.



rys. 9.

Podziałki dla $\frac{J}{J_{cm^2}}$ dla $\epsilon d: 100$