WŁ. WOJTOWICZ

ZARYS GEOMETRJI ELEMENTARNEJ

DO UŻYTKU SZKÓŁ ŚREDNICH

WYDANIE V

Cena zł. 5·40

LWÓW — WARSZAWA — KRAKÓW
WYDAWNICTWO ZAKŁADU NAR. IMIENIA OSSOLIŃSKICH
1926

WŁ. WOJTOWICZ

ZARYS GEOMETRJI ELEMENTARNEJ

DO UŻYTKU SZKÓŁ ŚREDNICH

WYDANIE V

Cena zł. 5·40

LWÓW — WARSZAWA — KRAKÓW
WYDAWNICTWO ZAKŁADU NAR. IMIENIA OSSOLIŃSKICH
1926

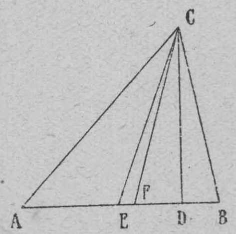
Z DRUKARNI ZAKŁADU NAR. IMIENIA OSSOLIŃSKICH WE LWOWIE
POD ZARZĄDEM JÓZEFA ZIEMBIŃSKIEGO

Spis liter greckich, użytych w książce niniejszej:

α	czytaj	alfa
β	„	beta
γ	„	gama
δ	„	delta
ε	„	epsilon
η	„	eta
ϑ	„	teta
λ	„	lambda
π	„	pi
ϱ	„	ro
σ, Σ	„	sigma
φ	„	fi
ψ	„	psi
ω	„	omega.

Spis symbolów, używanych w zadaniach konstrukcyjnych.

I.



W trójkącie dowolnym $\triangle ABC$

boki BC, CA, AB oznaczamy	przez	a, b, c;
kąty $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$	„	A, B, C;
wysokość CD	„	h_c
analogicznie, wysokości poprowadzone do boków a, b,	„	h_a, h_b;
dwusieczną CE	„	d_C;
dwusieczne kątów A i B	„	d_A, d_B;
środkową CF	„	s_c;
środkowe, poprowadzone do boków a, b,	„	s_a, s_b;
odcinki BE, EA, wyznaczone przez dwusieczną d_C	„	u_a, u_b;
odcinki BD, AD, jako rzuty boków a, b	„	r_a, r_b;
promień koła wpisanego	„	ϱ,
promienie kół zawpisanych, stycznych do boków a, b, c,	„	ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c;
promień koła opisanego	„	R.
kąt między środkową s_a i bokiem a	„	$\sphericalangle(s_a, a)$ it.p.

II.

W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$ boki a, b równają się sobie, a więc C oznacza kąt, zawarty między równemi bokami.

III.

W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$ kąt prosty oznaczamy przez C.

Inne oznaczenia, jak poprzednie.

IV.

W czworoboku dowolnym $ABCD$

boki AB, BC, CD, DA oznaczamy	przez	a, b, c, d,
kąty czworoboku	„ „	A, B, C, D,
przekątne AC, BD	„ „	e, f,
kąt między przekątnemi	„ „	ω.
punkt przecięcia się przekątnych	„	E.

Spis pewników,
na których został oparty wykład w książce niniejszej.

I. Pewniki, dotyczące połączenia pojęć podstawowych: punktu, prostej i płaszczyzny.

Pewnik I a. Przez każde dwa punkty przechodzi prosta, ale tylko jedna.
Inaczej: dwa punkty wyznaczają prostą.

„ I b. Prosta i punkt, nie leżący na niej, wyznaczają płaszczyznę.
Inaczej: dwie proste, przecinające się, wyznaczają płaszczyznę.
Albo też: trzy punkty, nieleżące na jednej prostej, wyznaczają płaszczyznę.

„ I c. Prosta, łącząca dwa dowolne punkty płaszczyzny, leży na tej płaszczyźnie.

„ I d. Dwie płaszczyzny, mające wspólny punkt, przecinają się według prostej.

II. Pewniki, dotyczące uporządkowania punktów.

Pewnik II a. Każdy punkt na prostej dzieli ją na dwie części (zwane półprostemi), z których każda zawiera dowolną ilość punktów.

„ II b. Każda prosta, leżąca na płaszczyźnie, dzieli ją na dwie części (zwane półpłaszczyznami), z których każda zawiera dowolną ilość punktów.

Pewnik II c. Każda płaszczyzna dzieli przestrzeń na dwie części, z których każda zawiera dowolną ilość punktów.

III. Pewniki, dotyczące równości odcinków, kątów i trójkątów.

Pewnik III a. Po każdej stronie danego punktu A na prostej istnieje jeden i tylko jeden taki punkt B, że odcinek AB równa się danemu odcinkowi.

„ III b. O ile nie uwzględniamy zwrotu odcinka, możemy powiedzieć, że $AB=BA$.

„ III c. Dwa odcinki, równe trzeciemu, są sobie równe.

„ III d. Sumy równych odcinków są sobie równe.

Pewnik III a. Po każdej stronie danej półprostej istnieje jedna i tylko jedna półprosta, tworząca z nią kąt, równy danemu kątowi.

„ III b. O ile nie uwzględniamy zwrotu kąta, możemy powiedzieć, że $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOA$.

„ III c. Dwa kąty, równe trzeciemu, są sobie równe.

„ III d. Sumy równych kątów są sobie równe.

„ III e. Kąty proste są sobie równe.

Pewnik III f. Jeżeli trzy boki jednego trójkąta równają się trzem bokom drugiego, wówczas i kąty jednego trójkąta równają się kątom drugiego, czyli trójkąty są sobie równe.

„ III g. Jeżeli mamy dany trójkąt $\triangle ABC$, a prócz tego na dowolnej prostej m mamy odcinek $A'B'=AB$, wówczas po każdej stronie prostej m istnieje przynajmniej jeden taki punkt C', że $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$.

VI. Pewnik o równoległych.

Pewnik IV. Jeżeli dwie proste na płaszczyźnie tworzą z poprzeczną kąty naprzemianległe wewnętrzne nierówne, wówczas proste te nie są równoległe (zatem przecinają się).

V. Pewnik, dotyczący figur równoważnych.

Pewnik V. Żaden wielokąt nie może być równoważny swej części.

VI. Pewniki, dotyczące ciągłości.

Pewnik VI a. (pewnik Archimedesa dla odcinków). Jeżeli mamy dane dwa odcinki a, b, przyczem $a > b$, wówczas możemy znaleźć tak wielką liczbę n, że będzie $nb > a$.

„ VI b. (pewnik Archimedesa dla kątów). Jeżeli mamy dane dwa kąty $\sphericalangle\alpha$ i $\sphericalangle\beta$, przyczem $\sphericalangle\alpha > \sphericalangle\beta$, wówczas możemy znaleźć tak wielką liczbę n, że będzie $n\sphericalangle\beta > \sphericalangle\alpha$.

„ VI c. Jeżeli punkt wewnętrzny koła połączymy z punktem zewnętrznym zapomocą odcinka prostej, wówczas odcinek ten przetnie okrąg koła w jednym i tylko w jednym punkcie.

„ VI d. Jeżeli punkt wewnętrzny koła połączymy z punktem zewnętrznym zapomocą łuku jakiegokolwiek innego koła, wówczas łuk ten przetnie dany okrąg w jednym i tylko w jednym punkcie.

Pewnik VI e. Jeżeli na prostej mamy dwa zbiory punktów H i K, przyczem wszystkie punkty H leżą w lewo od punktów K, i jeżeli do każdego dowolnie zadanego odcinka ε możemy dobrać takie dwa punkty H_n i K_n, że odległość pomiędzy niemi jest mniejsza od ε, wówczas na prostej istnieje jeden i tylko jeden punkt P, który rozdziela wszystkie punkty H od punktów K.

Wiadomości wstępne.

§ **1**. W geometrji istnieją pojęcia tak proste, że nie wymagają żadnych objaśnień. Są to: **punkt, prosta** (albo linja prosta) **i płaszczyzna.**

Punkty oznaczamy wielkiemi literami łacińskiemi A, B, G..., proste małemi literami łacińskiemi a, b, c, ... wreszcie płaszczyzny oznaczamy literami greckiemi α, β, γ...

Każdy zbiór punktów nazywamy *figurą geometryczną* lub krótko: *figurą*.

§ **2**. O punktach, prostych i płaszczyznach możemy wypowiedzieć szereg oczywistych prawd, które nazwiemy pewnikami.

Pewnik I a. *Przez każde dwa punkty przechodzi prosta, ale tylko jedna.*

Ten sam pewnik wyrażamy słowami:

dwa punkty wyznaczają prostą).*

Prostą, przechodzącą przez punkty A i B, nazywamy prostą AB.

Mówimy też, że punkty A i B leżą na prostej AB lub, że prosta AB łączy punkty A i B.

*) W mowie potocznej używają wyrazu „wyznaczać" w sposób niejednostajny i niekonsekwentny. Ponieważ w dalszym wykładzie wypadnie nam nieraz posługiwać się tym terminem, musimy umówić się raz na zawsze, co on dla nas oznaczać będzie.

Jeżeli mamy dwa rodzaje przedmiotów A i B i jeżeli każdemu przedmiotowi A odpowiada jeden i tylko jeden przedmiot B, wówczas powiadam, że przedmiot B jest wyznaczony przez A. Tak więc wyraz „wyznaczać" zawsze wyrażać dla nas będzie dwie prawdy: 1-o każdemu przedmiotowi A odpowiada jakiś przedmiot B; 2-o każdemu przedmiotowi A odpowiada jeden tylko przedmiot B.

Wniosek. *Dwie proste mogą mieć co najwyżej jeden spólny punkt,* gdyby bowiem miały dwa punkty spólne, musiałyby zlewać się w jedną prostą.

§. 3. Pewnik I b. *Prosta i punkt nie leżący na niej wyznaczają płaszczyznę.* Symbolem „płaszczyzna $[a, C]$" oznaczać będziemy płaszczyznę, wyznaczoną przez prostą a i przez punkt C, nie leżący na tej prostej.

Ten sam pewnik możemy zastąpić następującym:

trzy punkty, nie leżące na jednej prostej, wyznaczają płaszczyznę.

Istotnie, niech będą dane trzy punkty A, B, C, nie leżące jednej prostej. Pierwsze dwa punkty wyznaczają prostą AB, punkt C na niej nie leży, a więc musi razem z prostą AB wyznaczać płaszczyznę.

Możemy wreszcie ten sam pewnik zastąpić jeszcze innym pewnikiem, mianowicie:

dwie przecinające się proste wyznaczają płaszczyznę.

Jeżeli bowiem proste a, b przecinają się w punkcie B, wówczas na prostej b wystarczy obrać punkt C, różny od B, a będziemy mieli prostą a i punkt C, nie leżący na niej, które wyznaczają płaszczyznę $[a, C]$.

Pewnik I c. *Prosta, łącząca dwa dowolne punkty płaszczyzny, leży na tej płaszczyźnie.*

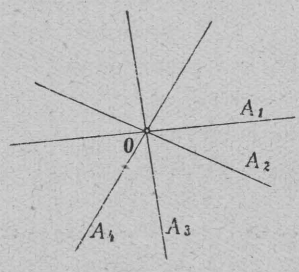
Fakt, że prosta a leży na płaszczyźnie α, wyrażamy również słowami: płaszczyzna α przechodzi przez prostą a, albo: została przesunięta przez prostą a.

Własności prostej.

§ 4. Wyobraźmy sobie, że na dowolnej płaszczyźnie obraliśmy punkty O i A_1. Prostą OA_1 oznaczmy przez a_1 i obierzmy

Jeżeli np. w pewnej klasie ponumerowaliśmy wszystkich uczniów, możemy powiedzieć, że numer wyznacza ucznia, gdyż 1-o) każdemu numerowi odpowiada jakiś uczeń, 2-o) każdemu numerowi odpowiada tylko jeden uczeń. Jeżeli natomiast ponumerowaliśmy nie uczniów, lecz ławki i jeżeli na każdej ławce siedzi po dwu lub więcej uczniów, wówczas możemy wprawdzie powiedzieć, że numer wyznacza ławkę (dlaczego?), ale nie mamy prawa powiedzieć, że numer wyznacza ucznia, gdyż każdemu numerowi odpowiada teraz grupa uczniów, nie zaś jeden tylko uczeń.

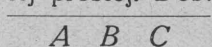
w tej samej płaszczyźnie jakikolwiek punkt A_2, nie leżący na prostej a_1. Punkty O i A_2 wyznaczają nową prostą a_2. Obierając w tej samej płaszczyźnie punkt A_3, nie leżący ani na a_1, ani na a_2, otrzymamy trzecią prostą OA_3 czyli a_3 i t. d. Rzecz jasna, że możemy otrzymać dowolną ilość prostych, przechodzących przez punkt O i leżących w jednej płaszczyźnie (rys. 1).



Rys. 1

Określenie. Zbiór wszystkich prostych, przechodzących przez jeden punkt i leżących w jednej płaszczyźnie, nazywamy *pękiem prostych.* Punkt przecięcia się tych prostych nazywamy *wierzchołkiem pęku.* W powyższym przykładzie punkt O jest wierzchołkiem pęku.

§ 5. Wyobraźmy sobie, że obraliśmy na prostej dowolną ilość punktów $A, B, C...$ (rys. 2) i że jakieś ciało porusza się po tej prostej. Doświadczenie powiada nam, że ciało może przebiegać te punkty w porządku $A, B, C...$, albo też w porządku odwrotnym $...C, B, A$. To spostrzeżenie prowadzi do rozróżnienia na prostej d w ó c h z w r o t ó w, wprost sobie przeciwnych.



Rys. 2.

§ 6. Pewnik II a. *Każdy punkt prostej dzieli ją na dwie części* (zwane *półprostemi), z których każda zawiera dowolną ilość punktów.*

Np. na rys. 2 punkt B dzieli prostą na dwie półproste; na jednej z tych półprostych leży punkt A, na drugiej punkt C.

Dwie półproste, o których mowa w naszym pewniku, posiadają tylko jeden spólny punkt, który nazywamy ich *początkiem*. O każdej z tych półprostych mówimy, że jest p r z e d ł u ż e n i e m drugiej.

§ 6. Określenie. *Odcinkiem nazywamy część prostej, zawartą między dwoma jej punktami.* Punkty te nazywają się *końcami odcinka.*

Np. na rys. 2 mamy odcinek AB, którego końcami są punkty A i B.

Każdy inny punkt odcinka nazywa się *wewnętrznym.*

Określenie. Jeżeli na tej samej prostej mamy dwa lub więcej odcinków, przyczem każdy z nich ma z następnym jeden spólny koniec, a nie ma żadnych innych punktów spólnych, wówczas odcinki te nazywamy *kolejnemi.*

Na rys. 2 odcinki AB i BC są kolejne. Jak nazywa się spólny ich koniec?

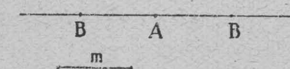
§ 7. Określenie. *Jeżeli mamy dwa kolejne odcinki AB, BC* (rys. 2), *wówczas odcinck AC nazywać będziemy ich sumą i będziemy pisali:*

$$AB+BC=AC.$$

§ 8. Każde dwa odcinki są albo **równe** sobie, albo **nierówne.** Chcąc zaznaczyć, że odcinki MN, PR są sobie równe, piszemy:

$$MN=PR \text{ lub też } PR=MN.$$

Pewnik III a. *Jeżeli na prostej mamy dany punkt A, wówczas po każdej stronie tego punktu istnieje jeden i tylko jeden taki punkt B, że odcinek AB równa się pewnemu z góry zadanemu odcinkowi* **m** (rys. 3).



Rys. 3.

§ 9. Chcąc dodawać i odejmować odcinki według tych samych praw, które rządzą dodawaniem i odejmowaniem liczb, musimy ustalić szereg następujących zasad i określeń (§§ 9—12):

§ 9. Pewnik III b. *O ile nie uwzględniamy zwrotu odcinka, możemy powiedzieć, że*

$$AB=BA.$$

Pewnik III c. *Dwa odcinki, równe trzeciemu, są sobie równe.*

§ 10. Pojęcie sumy możemy rozciągnąć na dowolną liczbę odcinków, nawet niekolejnych. Jeżeli mianowicie mamy odcinki niekolejne $a, b, c,... k$, wówczas sumą ich $a+b+c+...+k$ nazywać będziemy sumę odpowiednio równych im odcinków kolejnych $a'+b'+c'...+k'$.

Pewnik III d. *Jeżeli mamy odpowiednio równe sobie odcinki*

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}', \ \mathbf{b}=\mathbf{b}',$$

wówczas musi być również

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{a}'+\mathbf{b}'.$$

Innemi słowy: *sumy równych odcinków są sobie równe.*

Twierdzenie. Jeżeli przez **a**, **b** oznaczamy dowolne odcinki, będziemy zawsze mieli

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}.$$

Twierdzonie. Jeżeli **a**, **b**, **c** są dowolnemi odcinkami, wówczas

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

§ 11. Określenie *Jeżeli* **a, b, c** *są trzema odcinkami, przyczem*

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c},$$

wówczas odcinek **c** *nazywamy większym od każdego z odcinków* **b, a,** *te zaś nazywamy mniejszemi i piszemy*

$$\mathbf{a}<\mathbf{c},\ \mathbf{b}<\mathbf{c},\ \mathbf{c}>\mathbf{a},\ \mathbf{c}>\mathbf{b}.$$

Z tego określenia i z pewników III c i III d wynika, że

1°) *jeśli* $\mathbf{a}>\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\geqq\mathbf{c}$, *wówczas* $\mathbf{a}>\mathbf{c}$:

2°) *jeśli* $\mathbf{a}>\mathbf{b}$, $\mathbf{c}=\mathbf{d}$, *wówczas* $\mathbf{a}+\mathbf{c}>\mathbf{b}+\mathbf{d}$.

§ 12. Określenie. *Jeżeli* **a, b, c** *są trzema odcinkami, przyczem*

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c},$$

wówczas **a** *nazywamy różnicą odcinków* **c** *i* **b**, *odcinek zaś* **b** *nazywamy różnicą odcinków* **c** *i* **a** *i piszemy*

$$\mathbf{a}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$$
$$\mathbf{b}=\mathbf{c}-\mathbf{a}.$$

Z tego określenia wynika, że

1° jeżeli $\mathbf{a}=\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}=\mathbf{b}'$ oraz $\mathbf{a}>\mathbf{b}$,

wówczas $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}'-\mathbf{b}'$;

2° jeżeli $\mathbf{a}>\mathbf{b}$ oraz $\mathbf{a}'\leqq\mathbf{b}'$, wówczas musi być

$$\mathbf{a}-\mathbf{a}'>\mathbf{b}-\mathbf{b}',$$

oczywiście w założeniu, że odejmowanie daje się wykonać.

§ 13. Określenie. *Sumę* n *odcinków, równych odcinkowi* **a**, *nazywamy* n-*tą wielokrotną odcinka* **a** *i oznaczamy symbolem*

$$n\,\mathbf{a}.$$

Odcinek **a** *nazywamy* n-*tą podwielokrotną albo* n-*tą częścią odcinka n* **a**.

Chcąc oznaczyć, że odcinek **b** jest n-tą częścią odcinka **c**, piszemy:

$$\mathbf{b}=\frac{1}{n}\,\mathbf{c} \qquad \text{lub} \qquad \mathbf{b}=\frac{\mathbf{c}}{n}.$$

Pewnik VI a (zwany **pewnikiem Archimedesa dla odcinków**). *Jeżeli mamy dwa nierówne odcinki* **a, b,** *przyczem* $\mathbf{a}<\mathbf{b}$, *wówczas możemy znaleźć tak wielką liczbę* n, *że* $n\,\mathbf{a}>\mathbf{b}$.

§ 14. Jeżeli mamy dwa lub więcej odcinków, z których każdy poprzedni ma wspólny koniec z następnym i jeżeli odcinki te nie leżą na jednej prostej, wówczas tworzą one *linję łamaną*.

O pojęciu kąta.

§ 15. Pewnik II b. *Każda prosta* **a**, *leżąca na płaszczyźnie* α, *dzieli ją na dwie części (na dwa obszary), zwane półpłaszczyznami i zawierające każda dowolną ilość punktów.*

Wyraz „dzieli“ należy rozumieć w następujący sposób:

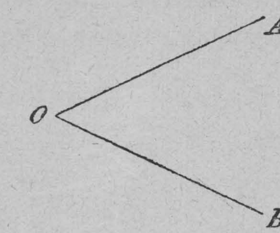
1-mo każdy punkt płaszczyzny α albo leży na prostej **a**, albo też należy do jednej z dwu części płaszczyzny, o których mowa w pewniku;

2-o jeżeli punkty A, B należą do jednej części płaszczyzny, wówczas odcinek AB nie przecina prostej **a**;

3-o jeżeli punkty A, B należą do dwu różnych części płaszczyzny, wówczas odcinek AB przecina prostą **a**.

O prostej **a** mówimy że *oddziela* te dwie części płaszczyzny, że stanowi ich *spólną granicę*.

Zamiast mówić: „punkty A, B należą do jednej części (lub: do dwu różnych części) płaszczyzny“, będziemy nieraz mówili: „punkty A, B leżą po jednej stronie (lub: po dwu stronach) prostej **a**“.



Rys. 3.

§ 16. Dwie półproste, mające spólny początek, dzielą płaszczyznę na dwa obszary, z których każdy nazywa się *kątem płaskim* albo krótko: *kątem*. Obie półproste nazywamy *ramionami* kąta, spólny ich początek nazywa się *wierzchołkiem kąta*. Na rys. 3 OA, OB są ramionami, O jest wierzchołkiem kąta.

Kąt oznaczamy zazwyczaj trzema literami, przyczem w środku wymieniamy literę, którą oznaczyliśmy wierzchołek kąta. Np. kąt, przedstawiony na rys. 3, oznaczamy symbolem $\sphericalangle AOB$ lub $\sphericalangle BOA$.

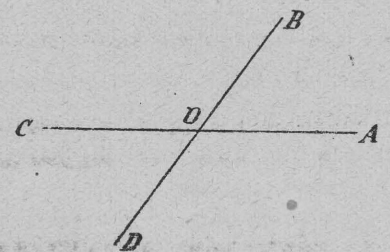
Jeżeli półproste, które są ramionami kąta, oznaczyliśmy małemi literami, wówczas kąt możemy oznaczyć innym, prostszym symbolem. Będziemy np. pisali $\sphericalangle (a, b)$, mając na myśli kąt między dwiema półprostemi a, b, wychodzącemi z jednego punktu.

Czasem, o ile nie będziemy się obawiali nieporozumień, będziemy oznaczali kąty numerami; będziemy tedy pisali $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2$ (t. j. kąt pierwszy, kąt drugi i t. d.). Czasem też używamy liter greckich, np. $\sphericalangle \alpha$.

§ 17. Jeżeli dwie proste przecinają się, powstają różne pary kątów, którym nadajemy specjalne nazwy.

Określenie. *Jeżeli ramiona jednego kąta są przedłużeniem ramion drugiego, wówczas dwa te kąty nazywamy wierzchołkowemi.*

Jeżeli dwa kąty mają spólne ramię, drugie zaś dwa ramiona tworzą jedną prostą, wówczs kąty nazywamy przyległemi.

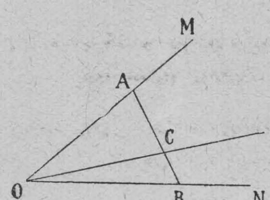


Rys. 4.

Np. na rys. 4 kąty $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle COD$ są wierzchołkowe, kąty zaś $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ są przyległe.

Wyliczyć wszystkie znajdujące się na tym rysunku kąty wierzchołkowe; wszystkie kąty przyległe.

§ 18. Na dwu ramionach kąta $\sphericalangle MON$ obierzmy dowolne dwa punkty A, B. Łącząc wierzchołek O (rys. 5) z jakimkolwiek punktem C, należącym do odcinka AB, otrzymujemy półprostą OC, o której powiadamy, że *leży wewnątrz kąta* $\sphericalangle MON$. O każdym punkcie tej półprostej (z wyjątkiem punktu O) powiadamy również, że leży wewnątrz kąta $\sphericalangle MON$.



Rys. 5.

§ 19. Odpowiednio do dwu zwrotów prostej (lub odcinka) możemy odróżniać dwa zwroty kąta. Pojęcie to daje się uzmysłowić w następujący sposób: wyobraźmy sobie, że półprostą OM obracamy dookoła początku O; zakreśla ona kąt, przyczem punkt jej przecięcia z prostą AB porusza się po tej prostej albo od A ku B,

albo od B ku A. Odpowiednio do tego powiadamy, że kąty $\sphericalangle MON$ i $\sphericalangle NOM$ mają zwroty przeciwne.

§ **20. Określenia.** *Kątami kolejnemi* nazywamy takie kąty o spólnym wierzchołku, z których każdy ma z następnym spólne ramię i nie ma żadnych więcej punktów spólnych.

Np. na rys. 4 kąty $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ są kolejne. *Sumą dwu lub więcej kątów kolejnych* nazywamy zbiór wszystkich punktów, leżących wewnątrz tych kątów.

§ 21. Jeżeli sumę kątów kolejnych chcemy zawsze uważać za kąt, musimy wprowadzić pojęcia kąta *półpełnego i pełnego.*

Określenia. *Półpełnym nazywamy kąt, którego oba ramiona tworzą jedną prostą.* Np. na rys. 4 suma kątów $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC$ tworzy kąt półpełny $\sphericalangle AOC$, którego ramiona OA i OC leżą na jednej prostej. Każda prosta i punkt na niej wyznaczają na płaszczyźnie dwa kąty półpełne, leżące po dwu stronach tej prostej; sumę takich dwu kątów półpełnych nazywamy *kątem pełnym.*

Np. na rys. 4 suma kątów kolejnych

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOA$$

tworzy kąt pełny. Kąt ten jest zarazem sumą dwu kątów półpełnych, leżących po dwu stronach prostej AC.

Wniosek. Z określeń kątów półpełnych i kątów przyległych wynika, że *suma dwu kątów przyległych równa się kątowi półpełnemu.*

§ 22. Każde dwa kąty są albo **równe** sobie, albo **nierówne.** Chcąc zaznaczyć, że kąty $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle CMD$ równają się sobie, piszemy:

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle CMD \text{ albo też } \sphericalangle CMD = \sphericalangle AOB.$$

Pewnik III a. *Po każdej stronie danej półprostej istnieje jedna i tylko jedna półprosta, tworząca z nią kąt równy danemu.*

§ **23. Określenie.** *Jeżeli mamy dwa równe sobie kąty przyległe, wówczas każdy z nich nazywamy kątem prostym.*

Ponieważ suma obu kątów przyległych równa się kątowi półpełnemu, zatem określenie nasze można sformułować inaczej: *kątem prostym nazywamy połowę kąta półpełnego.* Oczywiście zakładamy przytem, że istnieje jeden tylko sposób dzielenia kąta półpełnego na połowy.

Kąt prosty będziemy niekiedy oznaczali literą grecką δ. Wobec tego kąt półpełny możnaby oznaczyć symbolem 2δ. Np. mając na myśli kąty na rys. 4, możnaby napisać równość następującą:

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 2\delta.$$

Pewnik III e. *Wszystkie kąty proste są sobie równe.*

O dwu kątach, których suma równa się kątowi prostemu, mówimy, że dopełniają się do kąta prostego. Jeżeli suma dwóch kątów równa się kątowi półpełnemu, mówimy, że kąty spełniają się. Jeżeli proste AA', BB' przecinają się pod kątem prostym, mówimy, że są do siebie prostopadłe i piszemy $AA' \perp BB'$.

§ 24. Chcąc dodawać i odejmować kąty według tych samych praw, które rządzą dodawaniem i odejmowaniem odcinków, tworzymy szereg następujących określeń i pewników:

Pewnik III b'. *O ile nie uwzględniamy zwrotu kąta, wówczas mamy zawsze równość*

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOA.$$

Pewnik III c'. *Dwa kąty, równe trzeciemu, równają się sobie.*

§ 25. Określenie. *Sumą kątów niekolejnych* nazywamy sumę odpowiednio równych im kątów kolejnych.

Pewnik III d'. *Sumy równych kątów są sobie równe.* Innemi słowy: jeżeli mamy $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\alpha'$, $\sphericalangle\beta = \sphericalangle\beta'$, wówczas musi być

$$\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta = \sphericalangle\alpha' + \sphericalangle\beta'.$$

§ 26. Jeżeli mamy $\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta = \sphericalangle\gamma$, wówczas powiadamy, że kąt $\sphericalangle\gamma$ jest *większy* od każdego z dwu kątów $\sphericalangle\alpha$, $\sphericalangle\beta$, te zaś nazywamy *mniejszemi* od kąta $\sphericalangle\gamma$ i piszemy:

$$\sphericalangle\alpha < \sphericalangle\gamma \text{ lub } \sphericalangle\gamma > \sphericalangle\alpha \text{ i t. d.}$$

§ 27. Określenie. *Jeżeli mamy*

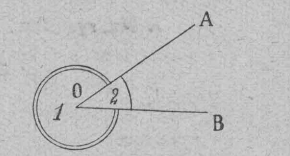
$$\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta = \sphericalangle\gamma,$$

wówczas kąt $\sphericalangle\alpha$ nazywamy różnicą kątów $\sphericalangle\gamma$ i $\sphericalangle\beta$, kąt zaś $\sphericalangle\beta$ nazywamy różnicą kątów $\sphericalangle\gamma$ i $\sphericalangle\alpha$ i piszemy:

$$\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\gamma - \sphericalangle\beta$$
$$\sphericalangle\beta = \sphericalangle\gamma - \sphericalangle\alpha.$$

§ 28. Określenie. *Kąt większy od półpełnego nazywamy wklęsłym, kąt mniejszy od półpełnego nazywamy wypukłym.*

Mówiliśmy w § 16, że dwie półproste o spólnym początku dzielą płaszczyznę na dwa obszary, z których każdy nazywamy kątem. Otóż jeden z tych kątów jest zwykle wklęsły, drugi wypukły. Np. na rys. 6. półproste OA, OB wyznaczają kąt wklęsły, opatrzony numerem 1 i kąt wypukły, opatrzony na rysunku numerem 2.



Rys. 6.

§ 29. Określenie. *Sumę* n *kątów równych kątowi $\sphericalangle\alpha$ nazywamy n-tą wielokrotnością kąta $\sphericalangle\alpha$ i oznaczamy symbolem*

$$n \sphericalangle \alpha.$$

Kąt $\sphericalangle\alpha$ nazywamy n-tą podwielokrotną albo n-tą częścią kąta $n \sphericalangle\alpha$.

Pewnik VI b. (pewnik Archimedesa dla kątów). *Jeżeli mamy dane dwa kąty $\sphericalangle\alpha$ i $\sphericalangle\beta$, przyczem $\sphericalangle\alpha > \sphericalangle\beta$, wówczas możemy znaleźć tak wielką liczbę n, iż*

$$n \sphericalangle\beta > \sphericalangle\alpha.$$

§ 30. Twierdzenie. *Kąty wierzchołkowe są sobie równe.*

Istotnie, mamy (rys. 4)

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 2\delta$$
$$\sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = 2\delta,$$

zatem $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD$

stąd zaś wynika, że $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$.

Ćwiczenie I. 1. Na prostej obieramy pięć dowolnych punktów A, B, C, D, E; przedstawić odcinek AD jako sumę dwóch odcinków; jako sumę trzech odcinków; jako różnicę dwóch odcinków.

2. Na prostej obieramy sześć dowolnych punktów A, B, C, D, E, F; przedstawić na wszelkie możliwe sposoby odcinek BE jako sumę dwu odcinków; jako różnicę dwu odcinków.

3. W poprzedniem zadaniu odcinek BD przedstawić różnemi sposobami w postaci sumy algebraicznej odcinków $m-n-p$, w postaci sumy algebraicznej odcinków $m+n-p$.

4. Z punktu O prowadzimy półproste OA, OB, OC, OD, OE, OF.

1-o odczytać wszystkie kąty kolejne i wskazać wspólne ramiona każdych dwóch kątów kolejnych;

2-o kąt $\sphericalangle BOE$ przedstawić jako sumę dwu kątów; jako sumę trzech kątów; jako różnicę dwu kątów:

3-o kąt $\sphericalangle BOD$ przedstawić rozmaitemi sposobami w postaci sumy algebraicznej kątów $\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta - \sphericalangle\gamma$, lub też $\sphericalangle\alpha - \sphericalangle\beta - \sphericalangle\gamma$.

5. Wykreślić dwa kąty przyległe $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle BOC$. Jak wielki jest każdy z nich, jeżeli pierwszy jest 3 razy mniejszy od drugiego?

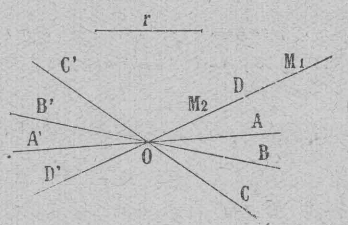
6. Z dowolnego punktu O prowadzimy półproste OA, OB, OC, OD, OE; kąty kolejne $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$, $\sphericalangle EOA$ mają się do siebie tak, jak $1:2:3:4:5$; jak wielki jest każdy z nich?

7. Na rysunku, odnoszącym się do poprzedniego zadania, wyszczególnić wszystkie możliwe kąty i obliczyć wielkość każdego z nich.

8. Proste AB, CD przecinają się w punkcie O, przyczem kąty $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle COB$ mają się do siebie, jak $1:2$; obliczyć wszystkie kąty, jakie powstały na rysunku.

Koło i okrąg koła.

§ 31. Wyobraźmy sobie, że mamy dany pęk prostych, którego wierzchołek oznaczamy literą O. Niech również będzie dany dowolny odcinek r. Wiemy, że na każdej prostej, należącej do naszego pęku, możemy odłożyć, poczynając od punktu O, po dwa odcinki równe odcinkowi r (np. OA, OA' lub OB, OB' na rys. 7). Dwa takie odcinki leżą po przeciwnych stronach punktu O [p e w n i k III a]. Ponieważ w pęku mamy nieskończenie wiele prostych, zatem otrzymujemy nieskończenie wiele takich odcinków. Końce ich A, A' B, B', C, C' ... tworzą figurę, którą nazywamy o k r ę g i e m k o ł a. Punkt O nazywamy ś r o d k i e m k o ł a, wszystkie zaś równe odcinki $OA = OA' = OB = OB' = OC = \ldots$ nazywamy p r o m i e n i a m i k o ł a.



Rys. 7.

Mając dany dowolny punkt M płaszczyzny, możemy go połączyć z punktem O, przez co otrzymujemy prostą, należącą do naszego pęku. Na tej prostej istnieją dwa i tylko dwa punkty — powiedzmy D i D' — takie, że

$$OD = OD' = r.$$

Możliwe są trzy przypadki:

punkt M zlewa się z D lub z D', a więc leży na okręgu koła;

punkt M jest punktem wewnętrznym odcinka OD lub odcinka OD', czyli odcinek OM jest mniejszy od promienia r; powiadamy wówczas, że punkt M l e ż y w e w n ą t r z o k r ę g u lub w e w n ą t r z k o ł a;

punkt M leży zewnątrz odcinka DD'; odcinek OM jest wówczas większy od promienia, o punkcie zaś M powiadamy, że l e ż y z e w n ą t r z k o ł a.

Jak widzimy, mając dane koło, możemy twierdzić, że każdy punkt płaszczyzny leży albo na jego okręgu, albo wewnątrz, albo wreszcie zewnątrz okręgu.

Mamy tedy następujące określenia i płynące z nich wnioski:

Określenia. *Okręgiem koła nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, równo odległych od jednego punktu, zwanego środkiem koła.*

Promieniem koła nazywamy odcinek, łączący środek koła z dowolnym punktem okręgu.

Cięciwą nazywamy odcinek, łączący dwa punkty okręgu.

Średnicą koła nazywamy odcinek, łączący dwa punkty okręgu i przechodzący przez środek koła.

Każdy punkt płaszczyzny, którego odległość od środka koła jest mniejsza od promienia, nazywamy punktem wewnętrznym koła, jeżeli i zaś odległość jego od środka jest większa od promienia, wówczas punkt ten nazywa się zewnętrznym względem koła.

Kołem nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, leżących bądź na okręgu, bądź wewnątrz okręgu.

Łukiem koła nazywamy każdą część okręgu, zawartą między dwoma jego punktami.

Łuk, którego punkty końcowe są zarazem końcami średnicy, nazywa się półokręgiem.

Punkt, poruszający się po płaszczyźnie w ten sposób, że odległość jego od pewnego innego, nieruchomego punktu pozostaje stała, kreśli okrąg koła, którego środkiem jest ów punkt nieruchomy. Na tem spostrzeżeniu opiera się zastosowanie cyrkla do kreślenia kół.

Wnioski. 1. *Koło jest wyznaczone, jeżeli znamy jego środek i promień.*

Innemi słowy: z d a n e g o ś r o d k a d a n y m p r o m i e n i e m m o ż e m y z a w s z e w y k r e ś l i ć k o ł o, a l e t y l k o j e d n o.

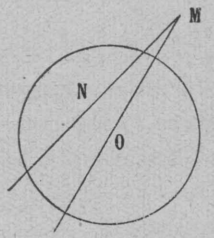
2. *Wszystkie promienie tego samego koła są sobie równe, a więc i wszystkie jego średnice równają się sobie.*

3. *Każda prosta, przechodząca przez środek koła, ma z okręgiem dwa i tylko dwa punkty spólne.*

§ 32. W dalszym ciągu będziemy się często posługiwali symbolem $(O)r$ w celu oznaczenia koła, zakreślonego ze środka O promieniem r. Tak samo symbol $(O)A$ oznaczać będzie koło, zakreślone ze środka O i przechodzące przez punkt A, czyli mające odcinek AO za promień.

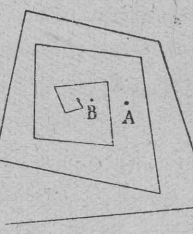
§ 33. Wyliczyliśmy kilka cech charakterystycznych, które przypisujemy figurom, zwanym w życiu codziennem kołami lub okręgami kół. Nie wymieniliśmy jednak dotąd dwóch z pośród najważniejszych cech. Jeżeli np. nakreślimy cyrklem koło, wówczas nie ulega dla nas żadnej wątpliwości, że linja, którą widzimy na papierze, j e s t c i ą g ł a (czyli nie posiada przerw) i że d z i e l i o n a p ł a s z c z y z n ę n a d w i e c z ę ś c i: wewnętrzną i zewnętrzną, których spólną granicę stanowi okrąg koła*).

W dotychczasowych rozważaniach nie uwzględniliśmy tych dwu cech okręgu i z naszych określeń nie wynika bynajmniej, żeby na okręgu jakiegoś koła nie miała istnieć jedna lub więcej przerw. Jeśli więc mamy dane koło O, punkt zewnętrzny M i punkt wewnętrzny N, nie leżący na prostej OM, wówczas wiemy wprawdzie, że prosta OM przecina okrąg w dwóch punktach, nie możemy jednak mieć pewności, czy prosta MN spotyka okrąg koła, gdyż mogłaby ona natrafiać na przerwy w okręgu, o ile takie przerwy istnieją.



Rys. 9.

*) Rzecz jasna, że granica nie może posiadać przerw, nie wolno jednak twierdzić, że każda linja ciągła, choćby nieograniczona, stanowić może granicę dwóch obszarów płaskich, że może dzielić płaszczyznę na dwie części. Np. na rys. 8 mamy linję łamaną, którą możemy przedłużać nieograniczenie, z tem tylko zastrzeżeniem, że linja ta nigdzie samej siebie nie przetnie; otóż dostrzegamy odrazu, że z każdego punktu płaszczyzny możemy przejść do każdego innego (np. z A do B) nie przecinając nigdzie naszej łamanej, a więc linja ta nie może oddzielić, odgraniczyć żadnej części płaszczyzny. Widzimy tedy, że ciągłość linji, a zdolność dzielenia płaszczyzny na części, są to istotnie dwie różne cechy.



Rys. 8.

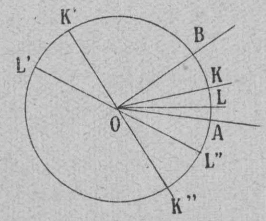
Chcąc tedy, żeby nasze określenia odpowiadały temu, co w doświadczeniu codziennem nazywamy kołem, musimy uzupełnić je zapomocą dwóch następujących pewników:

Pewnik VI c. *Jeżeli punkt wewnętrzny koła połączymy z punktem zewnętrznym zapomocą odcinka prostej, wówczas odcinek ten przetnie okrąg koła w jednym i tylko w jednym punkcie.*

Pewnik VI d. *Jeżeli punkt wewnętrzny koła połączymy z punktem zewnętrznym zapomocą łuku jakiegokolwiek innego koła, wówczas łuk ten przetnie okrąg dany w jednym i tylko w jednym punkcie.*

§ 34. Przypuśćmy, że na okręgu koła O, mamy dane dowolne dwa punkty A, B. Łącząc je z punktem O, otrzymujemy kąt $\sphericalangle AOB$. W pęku prostych, mającym wierzchołek w punkcie O, istnieją zarówno półproste, leżące wewnątrz kąta $\sphericalangle AOB$, jak i półproste, leżące zewnątrz tego kąta. Wobec tego na okręgu naszego koła mamy zarówno punkty, leżące wewnątrz kąta $\sphericalangle AOB$ (np. punkty K, L na rys. 10), jak i takie, które leżą zewnątrz tego kąta (np. punkty K', K'', L', L'').

Mamy tedy prawo twierdzić, ż e k a ż d e d w a p u n k t y A, B o k r ę g u d z i e l ą t e n o k r ą g n a d w a ł u k i, k t ó r e n i e m a j ą ż a d n y c h p u n k t ó w s p ó l n y c h p r ó c z s w y c h k o ń c ó w A, B.



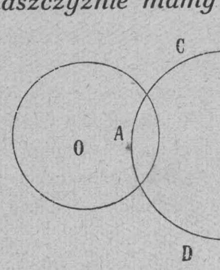
Rys. 10.

Uwaga. Wynika stąd, że powiedzenie: „łuk AB danego koła" jest dwuznaczne, gdyż mamy dwa łuki, których końcami są punkty A, B. Wobec tego łuk należy oznaczać trzema literami, wymieniając dwa jego końce i jakikolwiek trzeci punkt, na tym łuku leżący, np. „łuk AKB" lub „łuk $AK'B$".

W celu oznaczenia łuku AKB będziemy się czasem posługiwali symbolem $A\breve{K}B$.

§ 35. Twierdzenie. *Jeżeli na płaszczyźnie mamy dane dwa okręgi, przyczem jeden z nich przechodzi przez punkt wewnętrzny i przez punkt zewnętrzny drugiego okręgu, wówczas okręgi te mają dwa i tylko dwa punkty spólne.*

Niech będą dane dwa okręgi O i O'. Przypuśćmy, że punkt A okręgu O' leży wewnątrz, punkt zaś B tegoż okręgu leży zewnątrz



Rys. 11.

koła O; powiadam, że okręgi O i O' mają dwa i tylko dwa punkty spólne.

Istotnie, na okręgu O' punkty A i B wyznaczają dwa łuki (ACB i ADB), z których każdy łączy punkt wewnętrzny A z punktem zewnętrznym B, a więc musi mieć z okręgiem O jeden i tylko jeden punkt spólny [pewnik VI d].

§ 36. **Określenie.** *Równemi kołami* (lub okręgami) *nazywamy koła* (lub okręgi), *zakreślone równemi promieniami.*

Z powyższego określenia i z wniosku (1) w § 31 (str. 19) wynika, *że z każdego punktu płaszczyzny, jako ze środka, możemy zakreślić koło równe danemu.*

Ćwiczenia II. 1. Danym promieniem r wykreślić okrąg koła, przechodzący przez dany punkt A. Ile takich kół można wykreślić?

2. Jaką linję tworzą środki wszysfkich kół, o których mowa w poprzedniem ćwiczeniu? Wykreślić tę linję, obierając punkt A dowolnie w płaszczyźnie rysunku i kładąc $r=4$ *cm.*

3. Mając dany okrąg $(O)r$ i punkt A na nim, wykreślić z tego punktu, jako ze środka, okrąg koła, przechodzący przez punkt O. Dowieść, że okręgi $(O)r$ i $(A)O$ muszą mieć dwa punkty spólne. [Wskazówka: czy możemy wskazać na okręgu $(A)O$ punkt, który na pewno leży wewnątrz koła $(O)r$? czy możemy na tym samym okręgu $(A)O$ wskazać punkt, który na pewno leży zewnątrz koła $(O)r$?].

4. Oznaczmy przez M_1, M_2 punkty spólne kół $(O)r$ i $(A)O$ w poprzedniem ćwiczeniu i połączmy punkty O, A, M_1, M_2 na wszelkie możliwe sposoby zapomocą odcinków prostych; czy śród tych odcinków istnieją równe sobie i które mianowicie?

5. Uogólnić ćwiczenie 3-cie w następujący sposób:

Mamy dane koło $(O)r$ i punkt A na jego okręgu; najpierw kreślimy okrąg $(A)O$ czyli $(A)r$, o którym już wiemy, że ma on dwa punkty spólne z okręgiem danym; następnie kreślimy z punktu A okręgi coraz większemi promieniami. Do jakiej granicy możemy zwiększać te promienie, jeżeli mamy mieć pewność, że każdy wykreślony przez nas okrąg ma dwa punkty spólne z okręgiem danym $(O)r$?

Jeżeli, przeciwnie, z punktu A kreślić będziemy okręgi coraz mniejszym promieniem, tak jednak, by miały one po dwa punkty spólne z okręgiem $(O)r$, czy możemy zmniejszać promień nieograniczenie?

6. Odpowiedzieć na takie same dwa pytania, jak w poprzedniem ćwiczeniu, zakładając jednak, że punkt A leży nie na okręgu $(O)r$, lecz wewnątrz tego okręgu.

7. Po okręgu koła (materjalnego) nieruchomego $(O)r$ toczy się drugie koło, którego promień równa się r'. Jaką linję zakreśla środek toczącego się koła: *a*) jeżeli toczy się ono po stronie zewnętrznej okręgu $(O)r$? *b)* jeżeli toczy się po stronie wewnętrznej tego okręgu?

[Wykonać trzy rysunki, biorąc we wszystkich trzech $r = 4^1/_2$ *cm.* Na pierwszych dwóch rysunkach bierzemy $r' = 1{,}7$ *cm*, przyczem pierwszy rysunek powinien ilustrować przypadek (*a*), drugi rysunek — przypadek (*b*). Na trzecim rysunku bierzemy $r' = 6^1/_2$ *cm*, i zakładamy, że koło nieruchome $(O)r$ leży wewnątrz koła ruchomego. Na każdym z tych trzech rysunków należy wykreślić toczące się koło przynajmniej w kilku różnych położeniach i zaznaczyć wyraźnie linję, którą zakreśla jego środek.]

KSIĘGA I.

O równości i symetrji figur płaskich.

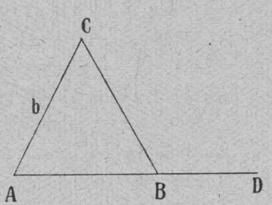
ROZDZIAŁ I.

Pojęcie o trójkącie. O równości trójkątów.

§ 37. Niech będą dane trzy dowolne punkty A, B, C, byle nie leżące na jednej prostej. Wyznaczają one trzy odcinki AB, BC, CA i trzy kąty $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$. Trzy te odcinki tworzą linję łamaną zamkniętą, która dzieli płaszczyznę na dwa obszary: wewnętrzny i zewnętrzny.

Określenie. *Trójkątem ABC nazywamy figurę, utworzoną przez wszystkie punkty płaszczyzny, które leżą czy to na łamanej zamkniętej ABC, czy wewnątrz tej łamanej.*

Punkty A, B, C nazywamy *wierzchołkami trójkąta.*



Rys. 12.

Odcinki AB, BC, CA są *to boki trójkąta.*

Łamana zamknięta ABC stanowi *kontur trójkąta.*

Sumę trzech boków $AB+BC+CA$ nazywamy *obwodem trójkąta.*

Kąty $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$, są to *kąty wewnętrzne trójkąta;* przyległe do nich kąty nazywamy *zewnętrznemi.*

Boki i kąty wewnętrzne trójkąta nazywamy niekiedy jego *elementami.*

Często, mając na myśli kąt wewnętrzny trójkąta, mówimy poprostu: „kąt trójkąta“; taki sposób mówienia dopuszczalny jest tylko wtedy, gdy nie może wywołać nieporozumienia.

Wierzchołek, który nie jest końcem danego boku trójkąta, nazywamy *przeciwległym temu bokowi.* Np. o wierzchołku A powiadamy, że jest przeciwległy bokowi BC.

Trójkąt ABC będziemy często oznaczali symbolem $\triangle ABC$.

Każdy bok trójkąta możemy oznaczyć j e d n ą m a ł ą literą, obierając w tym celu taką samą literę, jaką oznaczyliśmy przeciwległy wierzchołek. Np. na rys. 12 bok CA możemy oznaczyć literą b, gdyż przeciwległy temu bokowi wierzchołek oznaczyliśmy literą B.

§ 38. Pojęcie trójkąta daje się z łatwością uogólnić. Niech będą dane na płaszczyźnie n punktów $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Łącząc pierwszy punkt z drugim, drugi z trzecim,... ostatni z pierwszym, otrzymamy linję łamaną zamkniętą.

Zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, leżących bądź na łamanej zamkniętej, bądź wewnątrz łamanej, nazywamy wielokątem (wielobokiem). Łamana stanowi *kontur* wielokąta.

Rozróżniamy dwa rodzaje wielokątów: wypukłe i wklęsłe.

Wielokąt nazywamy wypukłym, jeżeli żaden jego bok, ani przedłużenie żadnego boku nie przecina jego konturu, w przeciwnym zaś razie wielokąt nazywamy wklęsłym.

To samo dałoby się wyrazić innemi słowami: w i e l o k ą t w y p u k ł y l e ż y p o j e d n e j s t r o n i e k a ż d e g o s w e g o b o k u.

Śród wielokątów wklęsłych zasługują na uwagę wielokąty *związane*, t. j. takie, w ktorych przecinają się dwa niesąsiednie boki.

W dalszym ciągu będzie zawsze mowa o wielokątach wypukłych, o ile nie uczynimy specjalnego zastrzeżenia.

Punkty $A_1, A_2, \ldots A_n$ nazywamy *wierzchołkami* wielokąta.

Kąty (wypukłe) $\sphericalangle A_n A_1 A_2$, $\sphericalangle A_1 A_2 A_3 \ldots$, $\sphericalangle A_{n-1} A_n A_1$ nazywamy *wewnętrznemi,* przyległe zaś kąty nazywamy *zewnętrznemi.*

Ćwiczenia III. 1. Rysujemy trójkąt ABC i na boku AC lub na przedłużeniu tego boku obieramy dowolny punkt D. Wymienić wszystkie trójkąty, wyznaczone przez punkty A, B, C, D.

Przypuśćmy, ze punkt D obraliśmy nie na boku AC, lecz wewnątrz trójkąta ABC; ile powstało przytem trójkątów i jakie mianowicie?

Zkolei obieramy punkt D zewnątrz trójkąta ABC, lecz nie na przedłużeniu boku; wymienić wszystkie trójkąty, wyznaczone przez punkty A, B, C, D.

2. Nie patrząc na rysunek, wymienić końce boku a w trójkącie ABC oraz kąt przeciwległy temu bokowi. Powtórzyć to samo z dwoma drugiemi bokami.

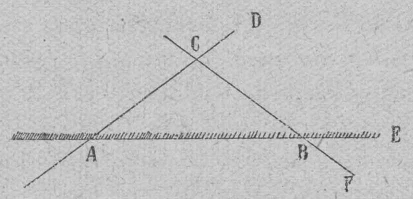
3. W trójkącie ABC przedłużyć wszystkie boki; ile powstało kątów zewnętrznych? Czy niema śród nich równych sobie?

4. Kąt wewnętrzny trójkąta możemy określić, jako kąt zawarty między dwoma bokami trójkąta. Czy można utworzyć analogiczne określenie dla kąta zewnętrznego?

5. Wykreślić trzy proste, przecinające się po dwie w punktach M, N, L. Wskazać kąt, zawarty między bokiem m a przedłużeniem boku n; między bokiem n a przedłużeniem boku m; między n a przedłużeniem boku l; między przedłużeniami boków m, n. Czy ten ostatni kąt jest kątem zewnętrznym?

6. Na ile obszarów została podzielona płaszczyzna przez trzy proste m, n, l, o których mowa w poprzedniem ćwiczeniu? Czy można wykreślić czwartą prostą, przecinającą dwa (i tylko dwa) z pośród tych obszarów? Jaka jest największa liczba obszarów, które ta prosta może przeciąć?

Kreślimy trzy proste, przecinające się po dwie w punktach A, B, C, nie leżących na jednej prostej. Każda z tych trzech prostych dzieli płaszczyznę na dwa obszary. Z dwóch obszarów, wyznaczonych przez prostą AB, nazwijmy d o d a t n i m ten, w którym leży punkt C (na rys. 13 obszar ten został zaznaczony kreskami), drugi zas obszar nazwijmy u j e m n y m.



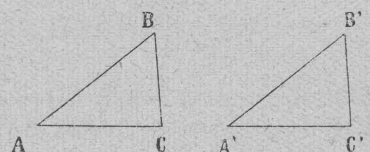
Rys. 13.

7. Wykreślić trzy proste, jak na rys. 13 i oznaczyć kreskami obszary dodatnie, wyznaczone przez proste AB, BC, CA.

W jaki sposób określić można punkty wewnętrzne trójkąta ABC? Jak określić punkty, należące do kątów zewnętrznych $\sphericalangle DCB$, $\sphericalangle EBC$? Punkty należące do kąta $\sphericalangle EBF$?

8. Na rysunku, odpowiadającym ćwiczeniu 5-emu, znaleźć punkty, leżące wewnątrz dwóch kątów zewnętrznych i jednego wewnętrznego.

§ 39. Określenie. *Dwa trójkąty nazywamy równemi, jeżeli boki i kąty jednego z nich równają się odpowiednim bokom i kątom drugiego,* przyczem o d p o w i e d n i e m i k ą t a m i nazywamy te, które leżą naprzeciwko równych boków, o d p o w i e d n i e m i b o k a m i te, które leżą naprzeciwko równych kątów.



Rys. 14.

Jeżeli np. trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ (rys. 14) równają się sobie, wówczas muszą zachodzić następujące równości:

$$AB=A'B',\quad BC=B'C',\quad CA=C'A'$$
$$\sphericalangle A=\sphericalangle A',\quad \sphericalangle B=\sphericalangle B',\quad \sphericalangle C=\sphericalangle C'.$$

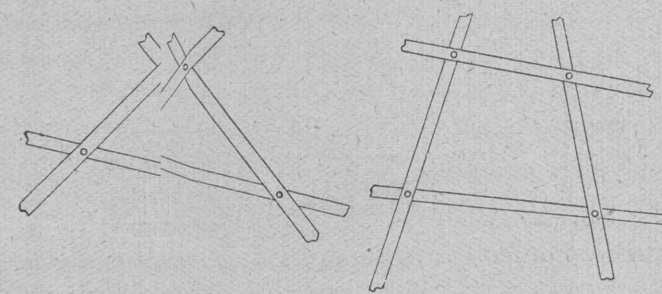
Równość dwóch trójkątów oznaczamy symbolem $\equiv$. Chcąc tedy zaznaczyć, że trójkąty ABC, $A'B'C'$ są sobie równe, piszemy:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$$

Z określenia równości trójkatów wynika bezpośrednio, że *dwa trójkąty, równe trzeciemu, są sobie równe.*

§ 40. Wiemy już, że gdy mowa o równości dwóch trójkątów, mamy właściwie na myśli s z e ś ć r ó w n o ś c i, z których trzy zachodzą między bokami, trzy zaś między kątami trójkątów. Zobaczymy jednak zaraz, że chcąc sprawdzić, czy dwa trójkąty są sobie równe, wystarczy stwierdzić, że z a c h o d z ą t r z y r ó w n o ś c i o d p o w i e d n i o d o b r a n e z p o ś r ó d p o w y ż s z y c h s z e ś c i u.*) W ten sposób otrzymamy t. zw. c e c h y r ó w n o ś c i t r ó j k ą t ó w czyli sposoby praktyczne poznawania tej równości.

Pierwszą z tych cech możemy oprzeć na następującem doświadczeniu. Weźmy siedem (lub więcej) pasków tektury, dostatecznie sztywnej. Paski te łączymy zapomocą pluskiewek lub drucików, tak, by dwa połączone z sobą paski mogły obracać się dokoła pluskiewki, jak na zawiasach. Z trzech pasków tworzymy


Rys. 15.

trójkąt, z pozostałych zaś czworobok (lub wogóle wielobok), jak na rys. 15.

---

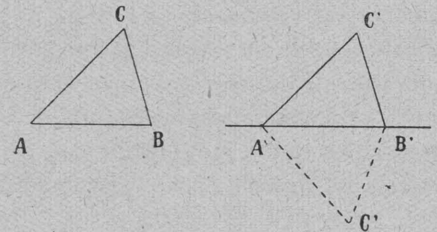
*) Fakt ten wskazuje, że między bokami i kątami trójkąta istnieją jakieś związki, tak iż trzy, odpowiednio dobrane elementy trójkąta wyznaczają pozostałe trzy jego elementy. Zobaczymy np., że kąty trójkąta są w zupełności wyznaczone, gdy znamy trzy jego boki.

Spostrzegamy odrazu, że trójkąt jest sztywny, natomiast w czworoboku (lub w wieloboku) wszystkie boki swobodnie poruszają się na zawiasach, tak, iż kształt tego czworoboku możemy dowolnie zmieniać. Widzimy tedy, że z trzech boków można utworzyć (zbudować) jeden tylko trójkąt i że kąty w nim są niezmienne, natomiast z czterech boków możemy zbudować dowolnie wiele czworoboków.

Dochodzimy w ten sposób do następującego pewnika:

§ 41. Pewnik III f. (I cecha równości trójkątów). *Jeżeli trzy boki jednego trójkąta równają się trzem bokom drugiego, wówczas i kąty jednego trójkąta równają się odpowiednim kątom drugiego, czyli trójkąty są sobie równe.*

§ 42. Możemy również wypowiedzieć następujący oczywisty pewnik:



Rys. 16.

Pewnik III g. *Jeżeli mamy dany trójkąt ABC, a prócz tego na dowolnej prostej* m *mamy dany odcinek A'B', równy bokowi AB tego trójkąta, wówczas po każdej stronie prostej* m *istnieje przynajmniej jeden taki punkt C', że trójkąt A'B'C' równa się trójkątowi ABC.*

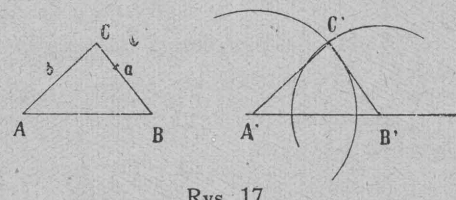
§ 43. Samo przez się nasuwa się pytanie, w jaki sposób można faktycznie zbudować trójkąt, o którym mowa w pewniku III g? Mamy tedy do rozwiązania następujące

Zadanie. *Po jednej stronie prostej* m *zbudować trójkąt, równy danemu trójkątowi ABC, tak, by jeden jego bok leżał na tej prostej.*

Zadanie rozwiążemy w zupełności, jeżeli potrafimy wyznaczyć trzy wierzchołki żądanego trójkąta. Dwa z nich możemy znaleźć odrazu. W tym celu wystarczy odłożyć na prostej m odcinek, równy któremukolwiek bokowi trójkąta ABC, np. odcinek $A'B' = AB$ (rys. 17). Pozostaje tedy do znalezienia trzeci wierzchołek C'.

Wiemy, iż wierzchołek C' musi być: 1) odległy od wierzchołka A' o odcinek równy bokowi b trójkąta danego; 2) odległy

od wierzchołka B' o odcinek równy bokowi a. Otóż z określenia okręgu (§ 31) wiemy, że wszystkie punkty płaszczyzny, odległe od punktu A' o odcinek b, leżą na okręgu koła $(A')b$, wszystkie zaś punkty, odległe od B' o odcinek a, leżą na okręgu $(B')a$ i odwrotnie: wszystkie punkty tych okręgów odległe są od A' i B' o odcinki b i a. Pozostaje tedy wykreślić te dwa okręgi; spólny ich punkt, leżący po wskazanej stronie prostej m, musi być żądanym wierzchołkiem C'.



Rys. 17.

Tu jednak nasuwają się dwie wątpliwości:

1-o czy okręgi te mają na pewno wspólny punkt?

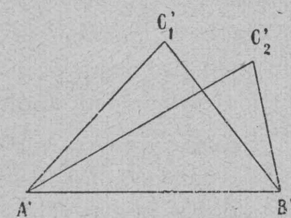
2-o czy po wskazanej stronie prostej m istnieje jeden taki punkt, czy też okręgi nasze mają dwa lub więcej punktów spólnych? Rzecz jasna, że gdyby tych punktów było kilka, nie wiedzielibyśmy, który z nich wybrać.

Na pierwsze pytanie mamy gotową odpowiedź w pewniku III g. Ponieważ, na mocy tego pewnika, istnieje punkt C', a punkt ten musi leżeć jednocześnie na obu okręgach $(A')b$ i $(B')a$, zatem okręgi te na pewno mają bodaj jeden punkt spólny.

Co się tyczy drugiego pytania, to łatwo jest przekonać się, że po jednej stronie prostej m okręgi nasze mają tylko jeden punkt spólny.

Jakoż przypuśćmy, że okręgi nasze mają dwa spólne punkty C'_1, C'_2. Połączmy te punkty z punktami A', B' i porównajmy z sobą trójkąty $A'C'_1B'$ i $A'C'_2B'$ (rys. 18).

Mają one spólny bok $A'B'$, a oprócz tego $A'C'_1 = A'C'_2$ (dlaczego?), $B'C'_1 = B'C_2'$, zatem $\triangle A'B'C_1' \equiv \triangle A'B'C_2'$.



Rys. 18.

Ale to jest niemożliwe. Istotnie odpowiadające sobie kąty ($\sphericalangle C_1'A'B'$ i $\sphericalangle C_2'A'B'$ oraz $\sphericalangle C_1'B'A'$ i $\sphericalangle C_2'B'A'$) tych trójkątów nie mogą równać się sobie, jeżeli punkt C_1' nie zlewa się z punktem C_2'.

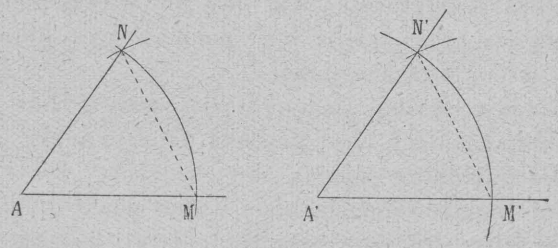
Widzimy, że przypuszczenie, jakoby okręgi nasze miały po jednej stronie prostej m dwa punkty spólne, prowadzi do niedorzecznego wniosku. Wynika stąd, że okręgi te mają tylko jeden punkt spólny C', który jest wierzchołkiem żądanego trójkąta $\triangle A'B'C'$.

§ 44. Za przypadek szczególny poprzedniego zadania można uważać następujące

Zadanie. *Po jednej stronie danej prostej zbudować kąt, równy danemu kątowi.*

Istotnie, jeżeli mamy dany $\sphericalangle A$, możemy na jego ramionach obrać dwa dowolne punkty M, N, a następnie zbudować przy prostej m trójkąt, równy trójkątowi MAN.

Rzecz prosta, że zaoszczędzimy sobie pracy przy rysowaniu, jeżeli punkty M, N tak zostały obrane, że $MA=NA$. To spostrzeżenie prowadzi do następującego rozwiązania:



Rys. 19.

Z wierzchołka A kreślimy dowolnym promieniem koło, przecinające ramiona kąta danego w punktach M, N; z punktu A' na prostej m kreślimy tym samym promieniem koło, przecinające prostą m w punkcie M', a następnie z punktu M' kreślimy drugie koło promieniem, równym MN. Dwa te koła mają po jednej stronie prostej m spólny punkt N'; łącząc N' z A' otrzymamy $\triangle A'M'N' \equiv \triangle ANM$ (dlaczego? na mocy którego pewnika?), a więc $\sphericalangle N'A'M' = \sphericalangle NAM$.

§ 45. Zadanie. *Dany kąt podzielić na połowy.*

Niech będzie dany dowolny kąt $\sphericalangle BAC$ (rys. 20). Z wierzchołka A, jako ze środka, kreślimy dowolnym promieniem okrąg koła, przecinający ramiona kąta w punktach M, N; z punktów M, N, jako ze środków, kreślimy dwa nowe okręgi promieniem równym odcinkowi MN.

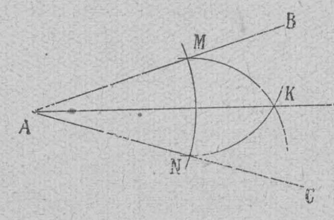
Te dwa okręgi mają, po jednej stronie prostej MN, spólny punkt K (dlaczego? porówn. ćwiczenie II, 3, str. 22); powiadam, że półprosta AK dzieli kąt $\sphericalangle BAC$ na połowy.

Istotnie $\triangle AMK \equiv \triangle ANK$,

gdyż $AM=AN$, $MK=NK$,

odcinek zaś AK jest spólnym bokiem tych trójkątów, a ponieważ w równych trójkątach kąty $\sphericalangle MAK$, $\sphericalangle KAN$ leżą naprzeciwko równych boków MK, NK, zatem są sobie równe.

Półprosta, dzieląca kąt na połowy, nazywa się dwusieczną tego kąta.



Rys. 20.

§ 46. Twierdzenie (II cecha równości trójkątów). *Jeżeli dwa boki i kąt między niemi zawarty jednego trójkąta równają się odpowiednio dwom bokom i kątowi między niemi zawartemu drugiego trójkąta, wówczas trójkąty te są sobie równe* (czyli pozostałe ich elementy odpowiednio równają się sobie).

Niech będą dane dwa trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$, w których $AB=A'B'$, $AC=A'C'$ oraz $\sphericalangle BAC=\sphericalangle B'A'C'$.

Powiadam, że wówczas musi być

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$$

Jakoż na mocy pewnika IIIg wiemy, że po tej samej stronie prostej $A'C'$, po której leży wierzchołek B', musi istnieć taki punkt X, że

$$\triangle A'XC' \equiv \triangle ABC,$$

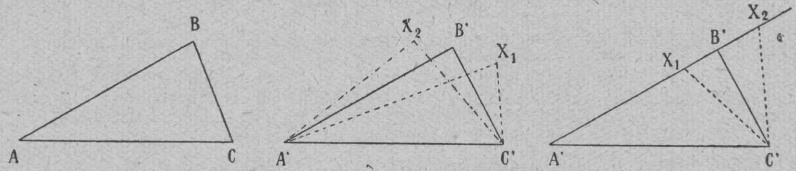
przyczem $\sphericalangle BAC = XA'C'$, $AB=A'X'$, $AC=A'C'$.

Pozostaje dowieść, że punkt X musi zlewać się z punktem B'.

Istotnie, punkt X nie może leżeć ani wewnątrz kąta $\sphericalangle B'A'C'$, ani zewnątrz tego kąta (rys. 21), gdyż wówczas kąt $\sphericalangle X'A'C'$ nie równałby się kątowi $\sphericalangle BAC$, zatem X leży na amieniu $B'A'$.

Ale w takim razie X musi zlewać się z punktem B' gdyż naczej (rys. 21) bok $A'X'$ trójkąta $\triangle A'X'C'$ nie równałby się bokowi AB trójkąta $\triangle ABC$.

§ 47. Twierdzenie. (III cecha równości trójkątów). *Jeżeli dwa kąty i przyległy do nich bok jednego trójkąta równają się odpowiednio dwom kątom i przyległemu do nich bokowi drugiego*



Rys. 21.

trójkąta, wówczas oba trójkąty są sobie równe (czyli pozostałe ich elementy równają się sobie).

Niech będą dane (rys. 21) trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ w których

$$AC = A'C',\ \sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B',\ \sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A';$$

powiadam, że musi być również

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$$

Zastosujemy dokładnie takie samo rozumowanie jak w twierdzeniu poprzedniem.

Na mocy p e w n i k a III g wiemy, iż po tej stronie prostej $A'C'$, po której leży wierzchołek B', musi istnieć taki punkt X że

$$\triangle A'XC' \equiv \triangle ABC,$$

przyczem $\sphericalangle XA'C' = \sphericalangle BAC,\ \sphericalangle XC'A' = \sphericalangle BCA.$

Pozostaje dowieść, że punkt X zlewa się z punktem B'.

Jakoż X nie może leżeć ani wewnątrz, ani zewnątrz kąta $\sphericalangle B'A'C'$ (rys. 21), gdyż wówczas kąt $\sphericalangle XA'C'$ nie równałby się kątowi $\sphericalangle BAC$. Zatem X leży na ramieniu $A'B'$.

Dalej, X nie może leżeć ani wewnątrz, ani zewnątrz odcinka $A'B'$ (rys. 21), gdyż w takim razie kąt $\sphericalangle XC'A'$ nie równałby się kątowi $\sphericalangle BCA$.

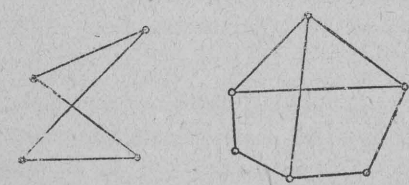
Widzimy tedy, że X musi zlewać się z punktem B', czyli $\triangle A'B'C'$ jest właśnie owym trójkątem, równym trójkątowi $\triangle ABC$, o którym mowa w pewniku III g.

Ćwiczenia IV. 1. Mamy dany czworobok przegubowy, t. j. taki, którego boki są stałej długości, ale mogą się obracać dokoła wierzchołków; czy można usztywnić go zapomocą dodatkowego (piątego) pręta?

To samo pytanie w zastosowaniu do pięciokąta przegubowego.

2. W pięciokącie przegubowym, którego wierzchołki ponumerowaliśmy kolejno od 1 do 5, łączymy zapomocą dodatkowych prętów pierwszy wierzchołek z trzecim i drugi z piątym; czy pięciobok jest teraz sztywny?

3. Czy wielokkąty przegubowe, przedstawione na rys. 22, są sztywne? Ile zbytecznych połączeń wytworzy się w każdym z nnich, jeżeli na wszelkie możliwe ssposoby połączymy wierzchołki dodatkowemi prętami?



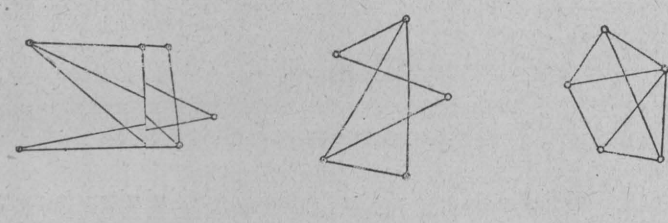
Rys. 22.

4. Czy wielolokąty przegubowe, przedstawionme na rys. 23, są sztywne? Jeżeli tı tak, to czy nie mają zbytecznych usztsztywnień? Jeżeli nie, to jak usztsztywnić je zapomocą możliwie najmniejszej liczby prętów?

5. Jaka jest n najmniejsza liczba prętów, zapomocą których można połączyć 4, 5, 6, 7, 8,... punknktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, tak, by otrzymać wielokąt sz sztywny?

6. Zbudować ć trójkąt, którego wszystkie trzy boki równałyby się danemu odcinkowi a. Ile takakich trójkątów zbudować można po jednej stronie danego odcinka a?

7. Mamy dadany $\triangle ABC$; na d o w o l n e j p r o s t e j m o d k ł a d a m y o d c i n e k $A'B' = AlAB$,. p o c z e m z p u n k t u A', j a k o z e ś r o d k a, k r e ś l i m y



Rys. 23.

k o ł o p r o m i e n i e m m r ó w n y m a, z p u n k t u zaś B' k r e ś l i m y d r u g i e k o ł o p r o m i e n i e m r ó w n w n y m b. C z y o k r ę g i t y c h k ó ł m a j ą p u n k t s p ó l n y? I l e m a j ą p u n k t ó w ó w s p ó l n y c h? W s z c z e g ó l n o ś c i: c z y p o j e d n e j s t r o n i e p r o s t e j m o k r c r ę g i t e m o g ą m i e ć w i ę c e j n i ż j e d e n p u n k t s p ó l n y?

I l e w o b e c t e g o r o z w i ą z a ń p o s i a d a z a d a n i e, o k t ó r e m b y ł a m o w a w § 43?

8. Niech będzdą dane dwa kąty przyległe $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle CBD$; zbudować ich dwusieczne BX i i BY. Jak wielki jest kąt $\sphericalangle XBY$?

9. N i e c h b ę d z i e d a n y k ą t w y p u k ł y $\sphericalangle AOB$; z b u d o w a ć j e g o d w u s i e c z n ą, p r z e d ł u ż y ć j ą p o d r u g i e j s t r o n i e w i e r z c h o ł k a O i d o w i e ś ć, ż e t o o p r z e d ł u ż e n i e j e s t d w u s i e c z n ą k ą t a w k l ę s ł e g o $\sphericalangle AOB$; i o d w r o b t n i e: p r z e d ł u ż e n i e d w u s i e c z n e j k ą t a w k l ę s ł e g o $\sphericalangle AOB$ j e s t z a r a z z e m d w u s i e c z n ą k ą t a w y p u k ł e g o $\sphericalangle AOB$.

10. Mamy dane dwa kąty wierzchołkowe $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle COD$; wykreślić dwusieczną kąta $\sphericalangle AOB$ i dowieść, że jej przedłużenie jest dwusieczną kąta $\sphericalangle COD$.

11. Mamy dane dwa kąty wierzchołkowe $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle COD$; wykreślić ich dwusieczne i dowieść, że tworzą one jedną prostą.

12. Zbudować trójkąt, mając dane dwa boki a, b i kąt $\sphericalangle C$. Ile mamy rozwiązań?

13. Zbudować trójkąt, mając dane: $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ i bok c. Ile mamy rozwiązań?

14. Mając dany $\triangle ABC$, zbudowoć równy mu $\triangle DAE$ tak, by kąt $\sphericalangle BAC$ pierwszego trójkąta był wierzchołkowy względem kąta $\sphericalangle DAE$ drugiego trójkąta. Ile można zbudować trójkątów $\triangle DAE$, odpowiadających warunkom zadania?

15. Dowieść, że każdy kąt $\sphericalangle A$ można podzielić na połowy w następujący sposób:

na ramionach kąta okładamy, poczynając od wierzchołka, po dwa równe odcinki, np. $AB=AC$, $BD=CE$, poczem łączymy B z E oraz C z D; jeżeli przez M oznaczymy punkt przecięcia się prostych BE, CD, wówczas półprosta AM musi być dwusieczną kąta danego $\sphericalangle BAC$.

16. Dwa czworoboki są sobie równe, jeżeli trzy boki i dwa kąty między niemi zawarte jednego czworoboku równają się odpowiednio trzem bokom i dwom kątom między niemi zawartym drugiego czworoboku.

17. Dwa czworoboki równają się sobie, jeżeli kąty przy trzech kolejnych wierzchołkach i dwa między niemi zawarte boki jednego czworoboku równają się odpowiednim kątom i bokom drugiego czworoboku.

ROZDZIAŁ II.

Trójkąt równoramienny.

§. 48. Określenie. *Trójkąt nazywamy równoramiennym, jeżeli ma dwa równe boki.* Trzeci bok tego trójkąta będziemy często nazywali jego *podstawą.*

Trójkąt, którego wszystkie trzy boki równają się sobie, nazywamy równobocznym albo foremnym.

Wysokością trójkąta nazywamy odcinek, poprowadzony z wierzchołka prostopadle do przeciwległego boku lub do jego przedłużenia. Punkt, w którym wysokość spotyka bok trójkąta (lub jego przedłużenie), nazywa się *spodkiem wysokości.*

Środkową trójkąta nazywamy odcinek, łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

Narysuj trójkąt równoramienny; co możesz powiedzieć o dwóch jego kątach, leżących przy podstawie: czy one są równe sobie? jeżeli nie, to który z nich jest większy?

Wytnij z papieru trójkąt równoramienny i sprawdź na nim swoje przypuszczenie. Opowiedz dokładnie, w jaki sposób wykonałeś swoje doświadczenie. Czy otrzymałeś przytem jakąś nową linję, której nie było w pierwotnym trójkącie? Czem jest ta linja dla kąta przy wierzchołku trójkąta równoramiennego? Jak leży ona względem podstawy trójkąta równoramiennego? Na czem opierasz swoje twierdzenie?

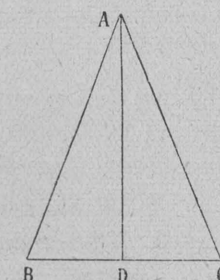
Odkryłeś przypuszczalnie nowe własności trójkąta równoramiennego; sformułuj je w postaci twierdzeń.

§ 49. Twierdzenie. *W trójkącie równoramiennym kąty, przeciwległe równym bokom, są sobie równe.*

§ 50. Twierdzenie. *W trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta, zawartego między równemi bokami, jest zarazem wysokością i środkową.*

Obu tych twierdzeń możemy dowieść razem, a to w następujący sposób.

Niech będzie dany trójkąt równoramienny $\triangle ABC$, w którym mianowicie $AB=AC$; powiadam, że



Rys. 24.

1) $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$,

2) $BD=DC$,

3) $AD \perp BC$.

Aby dowieść tych trzech własności trójkąta równoramiennego, postępuję tak, jak w poprzedniem doświadczeniu, t. j. kreślę dwusieczną AD kąta, zawartego między równemi bokami, i otrzymuję dwa równe trójkąty

$$\triangle BAD \equiv \triangle ADC.$$

Istotnie, trójkąty te mają spólny bok AD; prócz tego $AB=AC$, kąty zaś $\sphericalangle BAD$ i $\sphericalangle DAC$ są sobie równe.

Z równości trójkątów $\triangle BAD$, $\triangle ADC$ wynika, iż

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB \text{ (dlaczego?)},$$
$$BD=DC,$$
$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC,$$

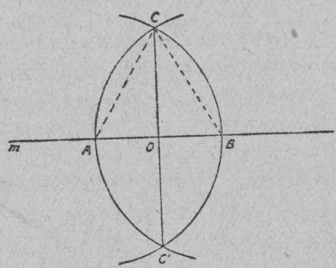
a ponieważ dwa ostatnie kąty są do siebie przyległe, zatem każdy z nich jest prosty i odcinek AD jest, istotnie, prostopadły do BC, czyli jest wysokością trójkąta $\triangle ABC$.

Wniosek. *W trójkącie równobocznym:* 1) *wszystkie kąty są sobie równe;* 2) *dwusieczna każdego z trzech kątów jest zarazem wysokością i środkową.*

§ 51. Z powyższych własności trójkąta równoramiennego wynikają rozwiązania trzech bardzo ważnych zadań konstrukcyjnych.

Zadanie. *Dany odcinek podzielić na połowy.*

W tym celu wystarczy na danym odcinku, jako na podstawie, zbudować jakikolwiek trójkąt równoramienny i poprowadzić w tym trójkącie dwusieczną kąta przeciwległego podstawie. Ponieważ trójkąt równoboczny umiemy już budować (ćwiczenia IV, 6, str. 33), mamy tedy następujące rozwiązanie:



Rys. 25.

z końców A, B danego odcinka (rys. 25) kreślimy koła promieniami równemi temu odcinkowi; okręgi tych kół mają dwa spólne punkty C, C', leżące po dwóch różnych stronach prostej AB; w trójkącie równoramiennym $\triangle ACB$ prosta CC' jest dwusieczną kąta $\measuredangle ACB$ (dlaczego?), a więc dzieli odcinek AB na połowy w punkcie O.

§ 52. Zadanie. *Dana jest prosta m i na niej punkt O; wystawić w tym punkcie prostopadłą do prostej m.*

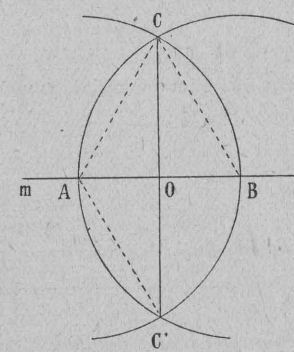
Zadanie da się rozwiązać zapomocą tej samej konstrukcji, którą stosowaliśmy w § 51, o ile uczynimy punkt O środkiem jakiegokolwiek odcinka, leżącego na prostej m.

Mamy tedy rozwiązanie następujące: po obie strony punktu O odkładamy na prostej m dwa dowolne, lecz równe sobie odcinki $OA=OB$; z punktów A i B, jako ze środków, kreślimy okręgi $(A)B$ i $(B)A$; prosta CC', łącząca spólne punkty tych okręgów, jest żądaną prostopadłą, gdyż na mocy poprzedniego zadania przechodzi przez punkt O, na mocy zaś twierdzenia § 50 jest prostopadła do prostej m.

§ 53. Zadanie. *Daną jest prosta m i punkt C, nie leżący na niej; z C poprowadzić prostopadłą do prostej m.*

Przyglądając się rysunkowi 26, widzimy, że zadanie będzie

rozwiązane, jeżeli potrafimy zbudować trójkąt równoramienny $\triangle CAC'$ tak, by prosta m była w nim dwusieczną kąta, przeciwległego podstawie CC'. To znów da się osiągnąć, jeżeli po dwu stronach prostej m potrafimy zbudować dwa równe sobie (zresztą dowolne) trójkąty $\triangle ACB \equiv \triangle AC'B$, gdyż w takim razie będziemy mieli zarówno $AC=AC'$, jak $\measuredangle CAB = \measuredangle BAC'$.

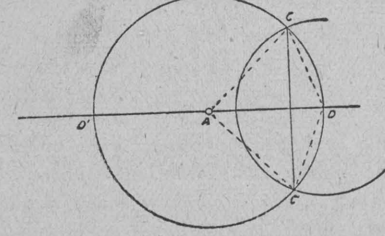


Rys. 26.

To spostrzeżenie prowadzi do następującej konstrukcji (rys. 27):

na prostej m obieramy dowolny pnnkt A i kreślimy okrąg $(A)C$, przecinający prostą m w punktach D i D'; z punktu D, jako ze środka, kreślimy okrąg $(D)C$, który z poprzednim okręgiem ma dwa spólne punkty C i C'; prosta CC' jest żądaną prostopadłą. (Skąd wiemy, że $\measuredangle C'AD = \measuredangle CAD$?)

Uwaga. Ponieważ wiemy (ćwiczenia IV, 9, str. 33), że dwusieczna kąta wklęsłego $\measuredangle C'AC'$, jest zarazem dwusieczną kąta wypukłego $\measuredangle CAC'$, zatem zamiast budować, jak w powyższem rozwiązaniu, $\measuredangle DAC' = \measuredangle DAC$, moglibyśmy zbudować $\measuredangle C'AD' = CAD'$. Innemi słowami: zamiast kreślić okrąg koła $(D)C$, moglibyśmy równie dlobrze wykreślić okrąg $(D')C$.



Rys. 27.

Ćwiczenia V. 1. Dany jest odcinek AB i na nim punkt P; po jednej stronie tego odcinka budujemy dowolne, ale równe sobie kąty $\measuredangle APM = \measuredangle BPN$, następnie zaś prowadzimy dwusieczną kąta $\measuredangle MPN$; dowieść, że dwusieczna ta jest prostopadła do AB w punkcie P.

2. Mając dane: sumę a dwóch niewiadomych odcinków x, y oraz różnicę ich b, znaleźć x, y.

3. W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$, w którym $AB=AC$, wykreślić środkowe BB', CC' i dowieść, że $BB'=CC'$.

4. W tym samym trójkącie wykreślić dwusieczne BB_1, CC_1 kątów wewnętrznych i dowieść, że $BB_1 = CC_1$.

5. Czy własność, o której mowa w ćwiczeniu poprzedniem, można uogólnić na dwusieczne kątów zewnętrznych? Jak należałoby ją w takim razie sformułować?

6. Na bokach trójkąta równobocznego $\triangle ABC$ odkładamy w tym samym zwrocie*) trzy równe odcinki $AK = BL = CM$; dowieść, że $\triangle KLM$ jest równoboczny.

Czy twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeżeli odkładane odcinki są większe od boku trójkąta danego $\triangle ABC$? Czy możnaby odkładać je nie na bokach, lecz na przedłużeniach boków trójkąta?

Dowieść, że dwa trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ są sobie równe, jeżeli mają odpowiednio równe następujące odcinki i kąty:**)

7. a, b, s_a, 8. $u_a, d_C, \sphericalangle (c, d_C)$. 9. $a, s_b, \sphericalangle (a, s_b)$.
10. $A, c, \sphericalangle (c, s_b)$. 11. a, b, s_c. [Wskazówka: przedłużyć środkowe obu trójkątów i na przedłużeniach odłożyć odcinki, równe środkowym s_c, $s_{c'}$. Jak wielki jest odcinek, łączący B z końcem przedłużenia środkowej?]

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:**)

12. r_a, r_b, h_c.	17. r_a, B, C.	22. $b, s_b, \sphericalangle (s_b, b)$.
13. r_a, c, h_c.	18. r_a, h_c, C.	23. $b, s_a, \sphericalangle (s_a, b)$.
14. r_a, r_b, A.	19. $c, a, \sphericalangle (h_a, c)$.	24. $b, C, \sphericalangle (s_a, b)$.
15. $r_a, h_c, \sphericalangle (h_c, b)$.	20. A, d_A, r_b.	25. a, B, d_B.
16. $r_a, B, \sphericalangle (h_c, b)$.	21. $c, B, \sphericalangle (c, s_a)$.	26. $u_a, d_{C'}, (d_{C'}, c)$.

27. Dany jest kąt $\sphericalangle A$ i wewnątrz niego punkt M; przez M poprowadzić prostą, któraby przecięła ramiona kąta w punktach B i C tak, by otrzymać trójkąt równoramienny $\triangle ABC$, w którym $AB = AC$.

Zbudować trójkąt równoramienny $\triangle ABC$, mając dane:**)

28. c, h_c. 29. h_c, C. 30. c, B. 31. C, d_C.

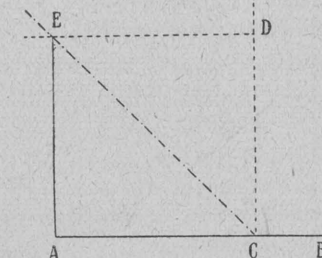
32. Podana w § 52 konstrukcja zawodzi, jeżeli mamy wystawić prostopadłą w końcu odcinka i jeżeli odcinka tego nie wolno przedłużać. W takim razie można zastosować następujące rozwiązanie, znalezione przez Herona z Aleksandrji: jeżeli w końcu A odcinka danego AB mamy wystawić prostopadłą, wówczas na AB obieramy dowolny punkt C, wystawiamy w nim prostopadłą, na niej odkładamy $CD = CA$, w punkcie D wystawiamy znów prostopadłą do CD, wreszcie prowadzimy dwusieczną kąta $\sphericalangle DCA$. Niech E będzie punktem

*) Wyobraźmy sobie, że obchodzimy kontur trójkąta $\triangle ABC$, poczynając od wierzchołka A. Możemy to uczynić w dwojaki sposób: albo idąc od A przez B do C i z powrotem do A, albo też od A przez C do B i z powrotem do A. Odpowiednio do tego rozróżniamy na konturze trójkąta dwa wprost sobie przeciwne zwroty.

**) Co się tyczy oznaczeń, porówn. spis I i II na str. 2.

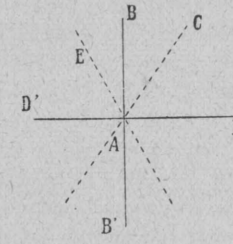
przecięcia się dwusiecznej z prostopadłą, wystawioną w punkcie D; prosta AE jest żądaną prostopadłą. Dowieść tego*) (rys. 28).

§ 54. Twierdzenie. *Z punktu, leżącego na prostej, można poprowadzić do tej prostej tylko jedną prostopadłą.*



Rys. 28.

Jeżeli prosta AB jest w punkcie A prostopadła do prostej danej DD' (rys. 29), wówczas żadna inna prosta, przechodząca przez punkt A, nie może być prostopadła do DD'. Jakoż, każda inna prosta (np. AC lub AE) musi leżeć albo wewnątrz kąta $\sphericalangle BAD$ (i wierzchołkowego kąta $\sphericalangle B'AD'$), albo wewnątrz kąta $\sphericalangle BAD'$ i (wierzchołkowego kąta $\sphericalangle DAB'$), a więc nie może tworzyć z prostą DD' kąta prostego. Istotnie, gdyby proste AB, AC były obie prostopadłe do DD', wówczas mielibyśmy dwa kąty proste $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle CAD$ nie równające się sobie, co przeczy pewnikowi III*e*.



Rys. 29.

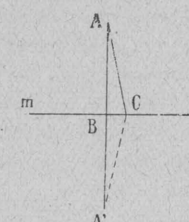
§ 55. Twierdzenie. *Z punktu, nie leżącego na prostej, można przeprowadzić do tej prostej tylko jedną prostopadłą.*

Jakoż przypuśćmy, że z punktu A, nie leżącego na prostej m, można do tej prostej poprowadzić prostopadłe: AB i AC (rys. 30). Wykażemy, że takie przypuszczenie prowadzi do sprzeczności.

Na prostopadłej AB odłóżmy po drugiej stronie prostej m odcinek $BA' = BA$ i połączymy A' z C.

Rzecz oczywista, że $\triangle ABC \equiv \triangle CBA'$, gdyż mają one spólny bok BC, a oprócz tego $AB = BA'$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CBA'$, (dlaczego?).

Z równości tych trójkątów wynika, że $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'CB$ (dlaczego?).
a ponieważ przypuściliśmy, że $\sphericalangle ACB$ jest prosty, zatem i kąt $\sphericalangle A'CB$ musi być prosty. Widzimy tedy, że linja ACA' nie może być (jak na rys. 30) łamaną, lecz musi być prostą.



Rys. 30.

*) Później poznamy inne, dogodniejsze rozwiązania tego zagadnienia.

Otóż wniosek ten jest niedorzeczny, gdyż w takim razie dwie różne proste ABA', ACA' miałyby dwa punkty spólne, co przeczy pewnikowi I a.

Przypuszczenie, że z punktu A można wykreślić do prostej m dwie prostopadłe, prowadzi do wniosku niedorzecznego, a więc musimy uznać za prawdę, że przez punkt A przechodzi tylko jedna prosta, prostopadła do m.

§ 56. W dwóch ostatnich twierdzeniach, jak również w niektórych poprzednich (np. w §§ 46, 47), stosowaliśmy dowód, zwany *sprowadzeniem do sprzeczności lub do niedorzeczności* (reductio ad absurdum). Ponieważ w matematyce często uciekamy się do takich dowodów, musimy przyjrzeć się nieco bliżej ich budowie.

Każde twierdzenie matematyczne ująć można w formę zdania warunkowego. Np. twierdzenie ostatnie (§ 55) da się wypowiedzieć w następujący sposób:

Jeżeli punkt nie leży na danej prostej, wówczas przez punkt ten można poprowadzić tylko jedną prostopadłą do danej prostej.

Zdanie warunkowe (a więc i każde twierdzenie matematyczne) składa się z dwóch części: z założenia i z wniosku*). W powyższym przykładzie założenie rozpoczyna się od wyrazu: „jeżeli“, wniosek zaś od wyrazu: „wówczas“. Mamy więc założenie: „punkt nie leży na danej prostej“, wniosek: „przez punkt ten można poprowadzić tylko jedną prostopadłą do danej prostej“.

Otóż dowód przez sprowadzenie do niedorzeczności polega na wykazaniu, że kto zgadza się z założeniem twierdzenia, musi zgodzić się z wnioskiem, gdyż popadłby w sprzeczność czy to z tem samem założeniem, czy z jakąś inną, poprzednio ustaloną prawdą. Jeżeli np. w § 55 odrzucimy wniosek twierdzenia, staniemy w sprzeczności z pewnikiem: „dwa punkty wyznaczają prostą“; tak samo w § 54 stajemy w sprzeczności z pewnikiem: „wszystkie kąty proste są sobie równe“.

Chcąc tedy zastosować ten sposób rozumowania, winniśmy *zachować bez zmiany założenia twierdzenia, lecz zaprzeczyć wnioskowi, przez co z twierdzenia, którego prawdziwości chcemy dowieść, tworzymy nowe twierdzenie* (przeczące poprzedniemu) *i dowodzimy, że to nowe twierdzenie jest niedorzeczne.* Chcemy np. dowieść, że

„jeżeli punkt leży na danej prostej, wówczas przez punkt ten można poprowadzić do danej prostej tylko jedną prostopadłą“;

w tym celu tworzymy nowe twierdzenie:

„jeżeli punkt leży na danej prostej, wówczas przez punkt ten można poprowadzić do danej prostej nietylko jedną prostopadłą (a więc co najmniej dwie)“

*) Właściwie twierdzenie może mieć kilka założeń, jak się o tem wkrótce przekonamy, ale fakt ten nie wpływa na metodę rozumowania, o której obecnie mówimy.

i dowodzimy, że to nowe twierdzenie przeczy znanej prawdzie o równości kątów prostych.

Przy zastosowaniu tej metody należy zachować pewną ostrożność. Mianowicie zdarza się często, że po odrzuceniu wniosku jakiegoś twierdzenia mamy do wyboru kilka możliwych przypuszczeń; w takim razie musimy je zbadać wszystkie bez wyjątku; gdybyśmy opuścili chociaż jedno z tych możliwych przypuszczeń, dowód nasz nie byłby przekonywujący. Rzecz prosta, że w takim wypadku z twierdzenia danego tworzymy nie jedno nowe twierdzenie, lecz tyle nowych twierdzeń, ile różnych przypuszczeń można uczynić po odrzuceniu wniosku w twierdzeniu danem.

Np. w § 46 dowiedliśmy, że

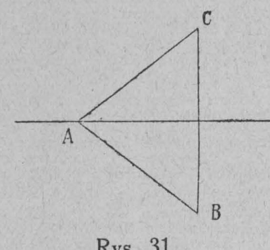
jeżeli $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$,

wówczas $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

W tym celu, zachowując bez zmiany założenia twierdzenia, odrzuciliśmy wniosek, mianowicie przypuściliśmy, że $\triangle A'B'C'$ nie równa się trójkątowi $\triangle ABC$. Ponieważ z pewnika III g wiedzieliśmy o istnieniu takiego punktu X, że $\triangle A'X'C' \equiv \triangle ABC$, zatem stanęliśmy wobec czterech możliwości: punkt X mógł leżeć 1) wewnątrz kąta $\sphericalangle B'A'C'$, 2) zewnątrz tego kąta, 3) na jego ramieniu pomiędzy B' i A', 4) na ramieniu zewnątrz odcinka $A'B'$. Rzecz jasna, że żadne inne położenie punktu X nie da się pomyśleć. Wypadło tedy zbadać pokolei każde z tych czterech przypuszczeń i wykazać, że każde z nich jest niedorzeczne.

§ 57. Twierdzenie. *W każdym kącie istnieje tylko jedna dwusieczna.*

Istotnie, mając dany dowolny kąt wypukły $\sphericalangle A$, możemy odłożyć na jego ramionach równe odcinki $AB = AC$, przez co otrzymujemy trójkąt równoramienny $\triangle ABC$. Dwusieczna kąta $\sphericalangle A$ jest zarazem prostopadła do odcinka BC (§ 55); gdyby więc kąt $\sphericalangle A$ posiadał więcej niż jedną dwusieczną, wówczas z punktu A można byłoby poprowadzić do prostej BC więcej niż jedną prostopadłą — co przeczyłoby twierdzeniu § 55.



Rys. 31.

Twierdzenie nasze jest prawdziwe i dla kątów wklęsłych, gdyż np. dwusieczna kąta wklęsłego $\sphericalangle BAC$ (rys. 31) jest zarazem dwusieczną kąta wypukłego $\sphericalangle BAC$ (ćwiczenie IV, 9, str. 33).

§ 58. W § 55 poznaliśmy twierdzenie, że w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta, zawartego między równemi bokami, jest zarazem wysokością i środkową tego trójkąta. Obecnie wiemy już, że z danego wierzchołka można poprowadzić w trójkącie tylko jedną dwusieczną kąta wewnętrznego (§ 57), tylko jedną wysokość (§ 55) i tylko jedną środkową, jak również, że w środku boku można wystawić tylko jedną prostopadłą (§ 54).

Mamy więc prawo twierdzić, że w trójkącie równoramiennym te cztery linje, o ile są poprowadzone do podstawy trójkąta, zlewają się zawsze w jedną całość, czyli możemy wypowiedzieć następujące

Twierdzenia odwrotne (względem tw. § 50): I. *W trójkącie równoramiennym wysokość, poprowadzona do podstawy, jest zarazem środkową i dwusieczną.*

II. *W trójkącie równoramiennym środkowa, poprowadzona do podstawy, jest zarazem dwusieczną i wysokością.*

III. *Prostopadła, wystawiona w środku podstawy trójkąta równoramiennego, przechodzi przez wierzchołek i jest dwusieczną kąta między równemi bokami.*

§ 59. Jeżeli między dwoma twierdzeniami zachodzi taki związek, że założenie pierwszego jest w drugiem twierdzeniu wnioskiem, wniosek zaś pierwszego twierdzenia jest w drugiem twierdzeniu założeniem, wówczas jedno (którekolwiek) z tych twierdzeń nazywamy *prostem*, drugie zaś *odwrotnem*.

W ten sposób z twierdzenia:

„jeżeli suma $a+b$ dwóch odcinków jest mniejsza od trzeciego odcinka c, wówczas każdy z odcinków a, b jest mniejszy od odcinka c"

otrzymujemy twierdzenie odwrotne:

„jeżeli każdy z odcinków a, b jest mniejszy od odcinka c, wówczas suma ich $a+b$ jest też mniejsza od odcinka c".

Jak widzimy na tym przykładzie, twierdzenie odwrotne może nie być prawdziwe, mimo że twierdzenie proste jest prawdziwe. Stąd wynika potrzeba specjalnego badania twierdzeń odwrotnych.

Może się zdarzyć, że jakieś twierdzenie posiada dwa lub więcej założeń: w takim razie można z niego utworzyć tyle twierdzeń odwrotnych, ile mamy założeń. Dla przykładu weźmy następujące twierdzenie, posiadające dwa założenia:

Założenie I: jeżeli mamy dany trójkąt równoramienny.

Założenie II: i jeżeli pewna prosta jest w nim wysokością, poprowadzoną do podstawy.

Wniosek: wówczas prosta ta jest zarazem środkową.

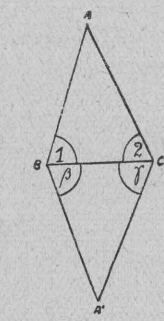
Możemy utworzyć z niego dwa twierdzenia odwrotne. Jeżeli mianowicie przestawimy wniosek z założeniem II, otrzymamy twierdzenie odwrotne, dowiedzione w poprzednim paragrafie. Jeżeli jednak przestawimy wniosek z założeniem I, otrzymamy następujące, nowe twierdzenie odwrotne, którego czytelnik z łatwością sam dowiedzie:

§ 60. Twierdzenie odwrotne: *Jeżeli środkowa trójkąta jest zarazem jego wysokością, wówczas trójkąt jest równoramienny* (a mianowicie: bok, do którego ta środkowa została poprowadzona, jest podstawą trójkąta równoramiennego).

§ 61. Twierdzenie odwrotne (względem tw. § 49). *Jeżeli dwa kąty trójkąta są sobie równe, wówczas przeciwległe im boki równają się sobie.*

Niech będzie dany $\triangle ABC$, w którym $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ (rys. 29); powiadam, że wówczas $AB = AC$.

Jakoż po drugiej stronie prostej BC zbudujmy trójkąt $\triangle BCA' \equiv \triangle BCA$ tak, by $\sphericalangle 1 = \sphericalangle \beta$ i $\sphericalangle 2 = \sphericalangle \gamma$. (Porówn. ćwiczenie IV. 10.)



Rys. 32.

W równych trójkątach naprzeciwko równych kątów leżą równe boki, a więc

$AB = BA'$ i $AC = CA'$,

gdyż $\sphericalangle 1 = \sphericalangle \beta$ i $\sphericalangle 2 = \gamma$,

ale zarazem mamy

$AB = CA'$ i $AC = BA'$ gdyż $\sphericalangle 1 = \sphericalangle \gamma$ i $\sphericalangle 2 = \sphericalangle \beta$.

Z tych równości wynika, że musi być

$$AB = AC.$$

Ćwiczenia VI. 1. Ile założeń posiada następujące twierdzenie: „jeżeli $a < 5$ oraz $b < 3$, to $a+b < 8$"? Ile można utworzyć twierdzeń odwrotnych? Czy są one prawdziwe?

2. Ile założeń posiada twierdzenie: „jeżeli a i b są liczbami dodatniemi, to ab jest też liczbą dodatnią"? Ile wobec tego utworzyć można twierdzeń odwrotnych i jakie mianowicie? Zbadać ich prawdziwość.

3. „Jeżeli mianownik ułamka nie zawiera innych czynników prócz 2 i 5, możemy ten ułamek napisać w postaci ułamka dziesiętnego skończonego". Jak brzmi twierdzenie odwrotne? Czy jest ono prawdziwe?

4. Twierdzeniu: „w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta, zawartego między równemi bokami, jest zarazem wysokością" nadać postać zdania warunkowego i uwidocznić, że ma ono 2 założenia. Utworzyć i zbadać twierdzenia odwrotne.

5. Znaną własność kątów przyległych można sformułować w sposób następujący: „jeżeli kąty $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle A'OB$ leżą po przeciwnych stronach spólnego ramienia OB i jeżeli ramiona ich AO, OA' tworzą jedną prostą, wówczas suma tych dwu kątów równa się kątowi półpełnemu". Ile mamy tu założeń? Jak brzmią twierdzenia odwrotne? Czy są prawdziwe?

6. Sformułować i zbadać twierdzenie odwrotne względem ćwicz. IV, 5 (str. 33).

7. Matematyk arabski an-Nairizi (w. IX po Chr.) w następujący sposób dowodzi twierdzenia § 61: jeżeli w $\triangle ABC$ mamy $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ i chcemy dowieść, że $AB = AC$, wówczas odkładamy na tych bokach równe (zresztą dowolnej wielkości) odcinki $BL = CK$, poczem dowodzimy, że $\triangle BLC \equiv \triangle BCK$ oraz $\triangle ABK \equiv \triangle ACL$. Przeprowadzić szczegółowo ten dowód.

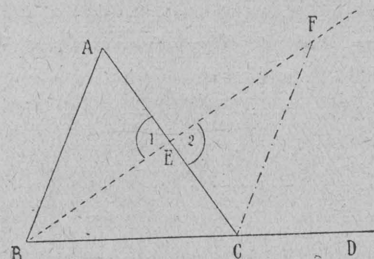
8. Czy w zadaniu poprzedniem można odłożyć odcinki BL i CK równe sobie, lecz większe od boków AB i AC?

9. Po dwóch stronach prostej AB dane są dwa punkty X i Y. Znaleźć na prostej AB taki punkt Z, żeby było $\sphericalangle AZX = \sphericalangle AZY$. [Najpierw rozważyć przypadek, gdy X i Y tak są położone, że prosta AB jest prostopadła do odcinka XY i dzieli go na połowy. Ile mamy wtedy rozwiązań? Dalej możemy rozważyć przypadek, gdy XY nie jest prostopadły do AB. Czy można sprowadzić ten przypadek do poprzedniego? Ile teraz mamy rozwiązań? Wreszcie możemy zastanowić się nad przypadkiem, gdy prosta AB jest wprawdzie prostopadła do XY, lecz nie dzieli tego odcinka na połowy. Czy teraz potrafimy rozwiązać zadanie?]

ROZDZIAŁ III.

Kąt zewnętrzny. Klasyfikacja trójkątów. Cechy równości trójkątów prostokątnych.

62. Twierdzenie. *Kąt zewnętrzny trójkąta jest większy od każdego z dwóch wewnętrznych do niego nieprzyległych.*



Rys. 33.

Niech będzie dany trójkąt ABC i kąt jako *zewnętrzny* $\sphericalangle ACD$; powiadam, że $\sphericalangle ACD$ jest większy zarówno od kąta $\sphericalangle BAC$, jak od kąta $\sphericalangle ABC$.

Chcąc tego dowieść, prowadzimy środkową BE i na jej przedłużeniu odkładamy odcinek $EF = BE$, wreszcie łączymy F z C.

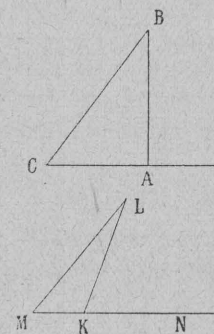
Ponieważ	$EA = EC,\ EB = EF,\ \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2,$
zatem	$\triangle ABE \equiv \triangle ECF,$
wobec czego	$\sphericalangle BAC = ACF.$
Ale	$\sphericalangle ACF < \sphericalangle ACD$ *),
zatem	$\sphericalangle BAC < \sphericalangle ACD.$

*) Nierówność tę można uzasadnić w następujący sposób: punkty F i B leżą niewątpliwie po przeciwnych stronach prostej AC, ale zarazem punkt F, jako położony na przedłużeniu środkowej BE, leży wewnątrz kąta $\sphericalangle ABC$ (§ 18). Wobec tego punkt F musi leżeć wewnątrz kąta ACD, czyli kąt $\sphericalangle ACF$ musi być mniejszy od $\sphericalangle ACD$.

Czytelnik sam dowiedzie drugiej części twierdzenia, mianowicie tego, że

$$\sphericalangle ABC < \sphericalangle ACD,$$

Wniosek. *W trójkącie, w którym jeden kąt jest prosty lub rozwarty, drugie dwa kąty są ostre.*



Rys. 34.

Istotnie, jeżeli mamy dany trójkąt $\triangle ABC$ (rys. 34), w którym $\sphericalangle A$ jest prosty, wówczas kąt zewnętrzny $\sphericalangle BAD$ musi być też prosty; ale na mocy powyższego twierdzenia kąt $\sphericalangle BAD$ jest większy od każdego z dwóch kątów wewnętrznych $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$.

Czytelnik sam uzasadni ten wniosek w przypadku, gdy w trójkącie $\triangle KLM$ kąt $\sphericalangle LKM$ jest rozwarty.

§ 63. Z powyższego wniosku wynika bezpośrednio, że wszystkie trójkąty możemy podzielić na trzy kategorje: na trójkąty rozwartokątne, prostokątne i ostrokątne, zależnie od tego, czy mają one jeden kąt rozwarty, czy jeden kąt prosty, czy też wszystkie trzy ich kąty są ostre. W trójkącie prostokątnym bok, przeciwległy kątowi prostemu, nazywa się *przeciwprostokątną*, dwa drugie jego boki nazywamy *przyprostokątnemi*.

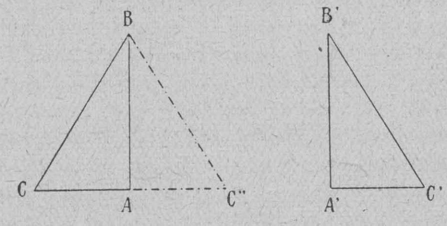
§ 64. Prócz trzech cech równości trójkątów, które poznaliśmy poprzednio, przy badaniu trójkątów prostokątnych bywa często potrzebna następująca cecha:

Twierdzenie (cecha równości trójkątów prostokątnych). *Jeżeli przyprostokątna i przeciwprostokątna jednego trójkąta równają się odpowiednio przyprostokątnej i przeciwprostokątnej drugiego trójkąta, wówczas dwa te trójkąty są sobie równe.*

Niech będą dane dwa trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, w których kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle A'$ niech będą proste. Jeżeli mamy $AB = A'B'$ oraz $BC = B'C'$, wówczas powiadam, że $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Aby tego dowieść, buduję na boku AB, po stronie przeciwległej wierzchołkowi, C, trójkąt $\triangle ABC'' \equiv \triangle A'B'C'$ *).

*) Gdybyśmy mieli do czynienia z figurami materjalnemi, np. wyciętemi z papieru, powiedzielibyśmy poprostu: do trójkąta $\triangle ABC$ przystawiamy $\triangle A'B'C'$ tak, by równe przyprostokątne AB, $A'B'$ przystały do siebie; wówczas z tych dwu trójkątów tworzy się jeden trójkąt równoramienny.



Rys. 35.

Odcinki AC, AC'' leżą na jednej prostej (dlaczego?), a więc figura CBC'' jest trójkątem równoramiennym (mianowicie $BC = BC''$), w którym AB jest wysokością, poprowadzoną do podstawy. Wiemy, (§ 58, str. 42), że wysokość jest zarazem dwusieczną kąta $\sphericalangle CBC''$, a więc

$$\triangle CBA \equiv \triangle BAC''$$

i co zatem idzie $\triangle CBA \equiv \triangle A'B'C'$.

Ćwiczenia VII. 1. Wymienić wszystkie kąty na rys. 33, które są na pewno większe od kąta $\sphericalangle A$. Wszystkie kąty większe od $\sphericalangle F$. Wszystkie kąty, które są na pewno mniejsze od kąta $\sphericalangle AEF$. Wszystkie kąty mniejsze od kąta $\sphericalangle AEB$.

2. Jeżeli w dowolnym trójkącie $\triangle ABC$ poprowadzimy dwusieczną kąta wewnętrznego $\sphericalangle A$ i jeżeli dwusieczna ta przecina bok BC w punkcie D, wówczas $\sphericalangle ADC > \sphericalangle DAC$ oraz $\sphericalangle ADB > \sphericalangle DAB$.

3. Narysować dowolny trójkąt ABC i, wykreśliwszy przy dwóch jego wierzchołkach po jednym kącie zewnętrznym, zbadać, czy suma tych dwu kątów może równać się kątowi półpełnemu. Czy może ona być mniejsza od kąta półpełnego?

4. Z punktu zewnętrznego nie można poprowadzić do danej prostej więcej, niż dwa równe odcinki. [W s k a z ó w k a: dowód przez sprowadzenie do niedorzeczności.]

5. Dowieść, że suma dwóch kątów wewnętrznych trójkąta jest mniejsza od dwóch kątów prostych. [W s k a z ó w k a: chcąc dowieść, że suma $\sphericalangle A + \sphericalangle B$ jest mniejsza od kąta półpełnego, prowadzimy z C dowolną prostą, przecinającą bok AB w punkcie D i rozważamy kąty, które powstały przy D].

6. Wewnątrz trójkąta ABC obrać dowolny punkt O i zbadać, który z dwóch kątów jest większy: $\sphericalangle BAC$ czy $\sphericalangle BOC$?

7. Wykreślić trójkąt ostrokątny ABC i w nim wysokość BD. Co dzieje się z punktem D, gdy zwiększamy stopniowo kąt $\sphericalangle BAC$, przyczem bok AB pozostaje bez zmiany? W szczególności, gdzie leży punkt D, gdy $\sphericalangle BAC$ staje się prosty? gdy $\sphericalangle BAC$ staje się rozwarty? Co wobec tego powiedzieć możemy o położeniu wysokości w trójkącie ostrokątnym? Jak względem konturu trójkąta leżą wysokości w trójkącie rozwartokątnym?

Sformułować te spostrzeżenia w postaci twierdzenia i dowieść go, stosując metodę sprowadzenia do niedorzeczności.

8. Mamy dany $\triangle ABC$, w którym $\sphericalangle A$ jest rozwarty; prowadzimy wysokość BD, z punktu D prowadzimy prostopadłą DE do boku AB i przedłużamy ją do przecięcia się w punkcie F z bokiem BC. W ten sposób otrzymujemy czworobok $AEFC$. Dowieść, że jego kąt zewnętrzny przy wierzchołku C jest większy od każdego z trzech kątów wewnętrznych nieprzyległych.

Czy to twierdzenie byłoby prawdziwe, gdybyśmy zamiast prostopadłej DE poprowadzili pochyłą?

9. Wzorując się na § 64 dowieść następującej c e c h y r ó w n o ś c i t r ó j k ą t ó w p r o s t o k ą t n y c h: dwa trójkąty prostokątne są sobie równe, jeżeli przyprostokątna i przeciwległy jej kąt ostry jednego trójkąta równają się przyprostokątnej i przeciwległemu kątowi ostremu drugiego trójkąta.

10. Wzorując się na § 64, dowieść następującej c e c h y r ó w n o ś c i t r ó j k ą t ó w p r o s t o k ą t n y c h: dwa trójkąty prostokątne są sobie równe, jeżeli przeciwprostokątna i kąt ostry jednego trójkąta równają się przeciwprostokątnej i kątowi ostremu drugiego trójkąta. [W s k a z ó w k a: jeżeli $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ kąty zaś $\sphericalangle C$, $\sphericalangle C'$ są proste i jeżeli zestawiamy trójkąty tak, by otrzymać trójkąt równoramienny $\triangle BAB''$ wówczas należy dowieść przedewszystkiem, że boki a i a' muszą leżeć na jednej prostej.]

11. W trójkącie równoramiennym wysokości, poprowadzone do równych boków, są sobie równe.

12. Jeżeli dwie wysokości trójkąta są sobie równe, wówczas trójkąt jest równoramienny, a mianowicie równają się sobie boki, do których te wysokości zostały poprowadzone.

Zbudować trójkąt prostokątny $\triangle ABC$, mając dane*):

13. A, r_b. 14. a, d_C. 15. A, d_A. 16. b, s_b. 17. b, s_a.

Dowieść równości dwóch trójkątów $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, w których wymienione poniżej odcinki i kąty jednego trójkąta równają się odpowiednim odcinkom i kątom drugiego*).

18. a, h_a, B_a, B.	19. A, B, h_c.	20. A, B, h_a.
21. a, h_b, h_b, h_c.	22. a, h_a, s_a.	23. a, s_a, $\sphericalangle(s_a, h_a)$.
24. r_a, h_c, $\sphericalangle(s_c, a)$.	25. C, d_C, $(\sphericalangle h_c, b)$.	

ROZDZIAŁ IV.

O nierównych elementach w trójkącie.

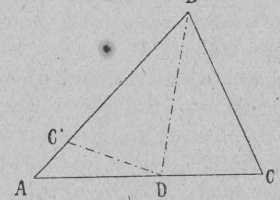
§ 65. Twierdzenie. *Jeżeli dwa boki trójkąta nie równają się sobie, wówczas kąt przeciwległy większemu bokowi, jest większy.*

Niech będzie dany $\triangle ABC$, w którym

*) Co się tyczy symbolów, porów. spisy I i III na str. 2 i 3.

$$AB > BC;$$

powiadam, że musi być $\sphericalangle C > \sphericalangle A.$



Rys. 36.

Zastosujemy tę samą metodę, zapomocą której dowiedliśmy w § 50, że kąty, przeciwległe równym bokom, są sobie równe. Poprowadzimy mianowicie w kącie $\sphericalangle B$ dwusieczną BD, odłożymy odcinek $BC' = BC$, wreszcie połączymy C' z D*). W ten sposób mamy równe trójkąty

$$\triangle BCD \equiv \triangle BC'D,$$

wobec czego $\sphericalangle BC'D = \sphericalangle BCD.$

Ale $\sphericalangle BC'D > \sphericalangle BAC$ (§ 62 str. 44) a więc

musi być $\sphericalangle BCD > \sphericalangle BAC.$

§ 66. Twierdzenie odwrotne (względem § 65). *Jeżeli dwa kąty trójkąta nie równają się sobie, wówczas bok, przeciwległy większemu kątowi, jest większy.*

Niech będzie dany $\triangle ABC$, w którym $\sphericalangle A > \sphericalangle B$; powiadam, że musi być $a > b$.

Zastosujemy metodę sprowadzenia do niedorzeczności. Gdyby bok a nie był większy od boku b, wówczas musiałoby być jedno z dwojga:

albo $a = b$, albo $a < b$.

W pierwszym przypadku trójkąt $\triangle ABC$ byłby równoramienny, co przeczyłoby założeniu, że $\sphericalangle A > \sphericalangle B$. W drugim przypadku mielibyśmy na mocy poprzedniego twierdzenia nierówność $\sphericalangle A < \sphericalangle B$, co znów przeczy założeniu twierdzenia.

Wobec tego musimy uznać, że istotnie $a > b$.

§ 67. Dwa twierdzenia nazywamy *przeciwnemi* sobie, jeżeli założenie i wniosek jednego z nich są zaprzeczeniem założenia i wniosku drugiego twierdzenia.

Np. z twierdzenia:

„jeżeli trzy boki jednego trójkąta równają się trzem bokom drugiego, wówczas i kąty ich są sobie równe“,

utworzyć można twierdzenie przeciwne:

„jeżeli trzy boki jednego trójkąta *nie* równają się trzem bokom drugiego, wówczas i kąty ich *nie* są sobie równe“,

---

*) Gdybyśmy mieli do czynienia z figurą materjalną, powiedzielibyśmy, że przełamujemy trójkąt $\triangle ABC$ wzdłuż dwusiecznej BD, wskutek czego trójkąt $\triangle BCD$ przybiera położenie $BC'D$.

Widzimy na tym przykładzie, że twierdzenie przeciwne może być fałszywe, mimo że twierdzenie proste było prawdziwe.

Między twierdzeniem odwrotnem a przeciwnem zachodzi bliski związek, który najlepiej wyjaśnimy sobie na przykładzie.

Z twierdzenia prostego (ćwiczenie VII, 11, str. 47):

„jeżeli dwa boki trójkąta równają się sobie, wówczas wysokości do nich poprowadzone równają się sobie“, tworzymy

twierdzenie odwrotne (ćwiczenie VII, 11, 12):

„jeżeli dwie wysokości trójkąta równają się sobie, wówczas boki do których wysokości zostały poprowadzone, równają się sobie“,

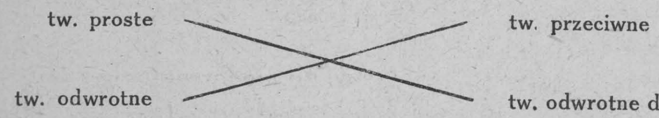
jak również twierdzenie przeciwne:

„jeżeli dwa boki trójkąta *nie* równają się sobie, wówczas wysokości do nich poprowadzone *nie* równają się sobie“,

oraz twierdzenie odwrotne do przeciwnego:

„jeżeli dwie wysokości trójkąta nie równają się sobie, wówczas i boki, do których one zostały poprowadzone, nie są sobie równe“.

Wypiszemy te cztery twierdzenia w postaci następującego schematu, łatwego do zapamiętania:



Twierdzenia, połączone w tym schemacie kreskami, są zawsze jednocześnie prawdziwe lub też jednocześnie fałszywe. W szczególności możemy wypowiedzieć następującą, bardzo ważną zasadę:

Zasada I. *Twierdzenia: odwrotne i przeciwne są albo oba prawdziwe, albo oba fałszywe.*

Istotnie, jeżeli np. z równości dwóch wysokości wynika równość dwóch boków trójkąta, wówczas trójkąt, nie mający równych boków, nie może też mieć równych wysokości.

Wobec tego, skoro tylko twierdzenie proste zostało dowiedzione, możemy badać dowolnie, czyto twierdzenie przeciwne, czy odwrotne: z prawdziwości lub myślności jednego z nich wyniknie prawdziwość lub mylność drugiego.

Powyższą zasadę można uogólnić w następujący sposób:

Zasada II. *Dajmy na to, że o jakimś przedmiocie uczynić możemy tylko trzy przypuszczenia, które się nawzajem wyłączają, i że z tych trzech przypuszczeń wypływają trzy wnioski, które również wyłączają się wzajemnie; jeżeli te dwa warunki są spełnione, wówczas wszystkie te trzy twierdzenia możemy odwrócić.*

Np. w §§ 49, 65 poznaliśmy następujące twierdzenia:

jeżeli $a = b$, to $\sphericalangle A = \sphericalangle B$,
„ $a > b$, to $\sphericalangle A > \sphericalangle B$,
„ $a < b$, to $\sphericalangle A < \sphericalangle B$.

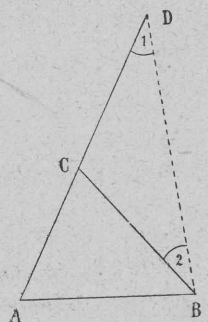
Założenia tych twierdzeń wyłączają się wzajemnie, to znaczy, że jeżeli jedno z nich, np. pierwsze $a = b$ jest prawdziwe, to dwa inne muszą być fałszywe. To samo powiedzieć można o wnioskach, a więc twierdzenia możemy odwrócić, czyli musi być prawdą, że

jeżeli $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, to $a = b$
" $\sphericalangle A > \sphericalangle B$, to $a > b$
" $\sphericalangle A < \sphericalangle B$, to $a < b$.

Jak widzimy, opierając się na tej zasadzie można było nie podawać specjalnego dowodu prawdziwości twierdzeń §§ 61 i 66.

Oczywista rzecz, że zasada powyższa pozostanie słuszną, jeżeli zamiast trzech wyłączających się twierdzeń można o jakimś przedmiocie wypowiedzieć 4, 5, 6... takich twierdzeń*).

§ 68. Twierdzenie. *Suma dwu boków trójkąta jest większa od trzeciego boku, różnica zaś mniejsza od trzeciego boku.*


Rys. 37.

Niech będzie dany $\triangle ABC$ i niech AB będzie największym jego bokiem; powiadam, że suma $AC + CB$ jest wiąksza od AB.

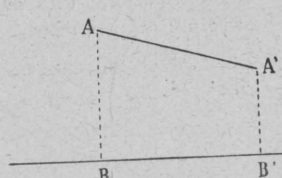
Aby się o tem przekonać, wprowadzamy do rysunku sumę boków $AC + CB$, mianowicie na przedłużeniu boku AC odkładamy odcinek $CD = CB$.

W ten sposób mamy $AD = AC + CB$.

Pozostaje wykazać, że $AD > AB$. W tym celu zwróćmy uwagę na to, że trójkąt $\triangle CBD$ jest równoramienny, a mianowicie $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$; wobec tego w trójkącie $\triangle ADB$ zachodzi nierówność $\sphericalangle ABD > \sphericalangle ADB$,

zatem $AD > AB$.

Drugiej części twierdzenia czytelnik dowiedzie sam, wprowadząjąc do rysunku różnicę dwóch boków trójkąta i opierając się na twierdzeniu § 49-go i na wniosku § 21.


Rys. 38.

§ 69. Określenie. *Rzutem punktu* na daną prostą nazywamy spodek prostopadłej, poprowadzonej z tego punktu do prostej.

Rzutem odcinka AA' na daną prostą nazywamy odcinek BB', zawarty między rzutami punktów A, A' na tę prostą (zwaną *osią rzutów*).

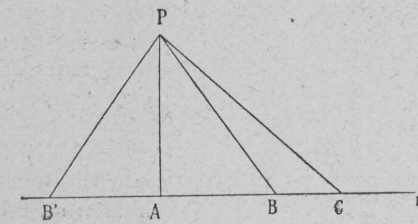
*) Układ twierdzeń, spełniających warunki w tej zasadzie wyrażone, nazywa się zwykle *układem zamkniętym.*

§ 70. Twierdzenie. *Jeżeli z punktu zewnętrznego poprowadzono do prostej wszelkie możliwe odcinki, wówczas*

1) *odcinek prostopadłły jest najmniejszy,*
2) *dwa odcinki pochyłe są sobie równe, jeżeli mają równe rzuty,*
3) *z dwóch nierównych odcinków pochyłych ten jest większy, który ma większy rzut.*

Niech będzie dana prosta m i punkt zewnętrzny P.

I. Jeżeli PA jest prostopadłą, wówczas w trójkącie $\triangle PAB$ musi być $PB > PA$, gdyż bok PA leży naprzeciwko kąta ostrego, bok zaś PB naprzeciw kąta prostego (§ 62, wniosek).


Rys. 39.

II. Jeżeli na tym rysunku mamy $BA = B'A$, wówczas pochyłe PB, PB', równają się sobie, gdyż trójkąt $\triangle PBB'$ jest równoramienny (§ 60).

III. Jeżeli wreszcie mamy $AC > AB$, wówczas musi być również $PC > PB$. W rzeczy samej, w trójkącie $\triangle PAB$ kąt wewnętrzny $\sphericalangle PAB$ jest mniejszy od zewnętrznego $\sphericalangle PBC$, a więc kąt PBC musi być rozwarty. Wobec tego w trójkącie $\triangle PBC$ bok PC, jako przeciwległy kątowi rozwartemu, musi być większy od boku PB, przeciwległego kątowi ostremu (§ 62, wniosek).

§ 71. Określenie. *Odległością punktu od prostej* nazywamy odcinek prostopadły, poprowadzony z tego punktu do prostej.

Ćwiczenia VIII. 1. Dowieść twierdzenia, że suma dwóch boków trójkąta jest większa od trzeciego, nie przedłużając boku trójkąta. Należy mianowicie w tym celu

a) albo wykreślić wysokość,
b) albo wykreślić dwusieczną.

2. Jeżeli w trójkącie równobocznym $\triangle MKL$ połączyliśmy K z dowolnym punktem N na boku ML, wówczas odcinek KN jest mniejszy od KM, lecz większy zarówno od MN, jak od NL.

3. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ oznaczymy przez s_c środkową, poprowadzoną do boku c, wówczas muszą zachodzić dwie następujące nierówności:

$$a + b - c < 2s_c < a + b.$$

4. W każdym trójkącie $\triangle ABC$ zachodzą dwie nierówności:

$$\frac{a+b+c}{2} < s_a + s_b + s_c < a + b + c.$$

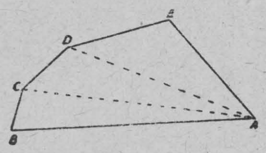
5. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ dowolny punkt wewnętrzny M połączymy z A i z B, wówczas musi być

$$MA + MB < a + b.$$

6. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ dowolny punkt wewnętrzny M połączymy z trzema wierzchołkami, wówczas musi być

$$\frac{a+b+c}{2} < MA + MB + MC < a + b + c.$$

7. Z punktu zewnętrznego A poprowadzono do prostej m prostopadłą AB oraz pochyłe AC, AD, AE..., których długości rosną wciąż o stały odcinek. Dowieść, że odcinki BC, CD, DE... maleją. [Wskazówka: zwrócić uwagę na to, że $AC = \frac{1}{2}(AB + AD)$, następnie poprowadzić w $\triangle ABD$ środkową AK i oprzeć się na drugiej nierówności, dowiedzionej powyżej w ćwiczeniu 3-em].



Rys. 40.

8. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ mamy $a > b$, wówczas wysokość h_c tworzy większy kąt z bokiem a, niż z bokiem b.

9. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ mamy $a > b$, wówczas środkowa s_c tworzy większy kąt z bokiem b, niż z bokiem a. [Wskazówka: na przedłużeniu środkowej odkładamy równy jej odcinek].

10. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy $a > b$. Niech środkowa, wysokość i dwusieczna, poprowadzone z wierzchołka C, przecinają bok c odpowiednio w punktach S, C', D. Zbadać, w jakim porządku muszą następować po sobie punkty A, B, S, C', D.

11. Dowieść, że jeżeli dwa trójkąty prostokątne ABC, $A'B'C'$, mają równe przeciwprostokątne $c = c'$, ale między przyprostokątnemi zachodzi nierówność $a < a'$, wówczas musi być $b > b'$. [Wskazówka: po drugiej stronie przeciwprostokątnej AB budujemy $\triangle ABC'' \equiv \triangle A'B'C'$ i łączymy punkty C'' i C*)].

12. Jeżeli jedna przyprostokątna trójkąta pozostaje stała, druga zaś rośnie, wówczas i przeciwprostokątna rośnie.

13. Jeżeli jedna przyprostokątna pozostaje stała, lecz przeciwprostokątna rośnie, wówczas i druga przyprostokątna rośnie.

14. Wykazać, że w § 70 mamy właściwie nie jedno twierdzenie, lecz układ zamknięty twierdzeń (porów. odsyłacz na str. 50) i że zatem wszystkie twierdzenia tego układu mamy prawo odwrócić.

15. Niech będzie dany trójkąt ABC (rys. 40), w którym, jak wiemy, $AB < BC + CA$. Budując na boku AC trójkąt ACD, otrzymujemy czworobok $ABCD$. Porównaj w nim bok AB z sumą boków $BC + CD + DA$.

Na boku AD budujemy nowy trójkąt ADE. Jaką otrzymamy figurę? Porównaj bok AB z sumą boków $BC + CD + DE + EA$.

Czy możemy w ten sposób otrzymać wielokąt o dowolnej liczbie boków, a przytem wielokąt dowolnego kształtu? Czy dostrzeżona własność boków wielokąta pozostanie prawdziwa, jeżeli, postępując jak poprzednio, zwiększymy liczbę jego boków o 1, o 2, o 3 i t. d.?

Jakie wobec tego możemy wypowiedzieć twierdzenie o wszystkich wielokątach?

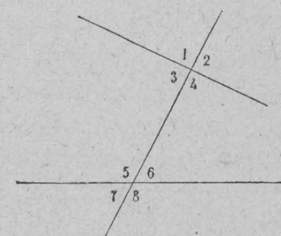
*) Twierdzenie to można wysłowić inaczej, mianowicie: jeżeli w trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna pozostaje stała, lecz jedna z przyprostokątnych rośnie, wówczas druga maleje.

ROZDZIAŁ V.

Teorja równoległych.

A. O prostych równoległych.

§ 72. Jeżeli dwie jakiekolwiek proste, leżące w jednej płaszczyźnie, przetniemy trzecią prostą, otrzymamy osiem kątów, które w dalszych rozważaniach będziemy grupowali parami, nadając im następujące nazwy:



Rys. 41.

kąty 3 i 6 lub 4 i 5 nazywają się *naprzemianległe wewnętrzne;*
„ 1 i 8 lub 2 i 7 „ „ *naprzemianległe zewnętrzne;*
„ 1 i 5, 3 i 7, 2 i 6 lub 4 i 8 „ *odpowiadające sobie;*
„ 3 i 5 lub 4 i 6 „ „ *jednostronne wewnętrzne;*
„ 1 i 7 lub 2 i 8 „ „ *jednostronne zewnętrzne;*

§ 72. **Określenie.** *Dwie proste, leżące w jednej płaszczyźnie i nie przecinające się, nazywamy równoległemi.*

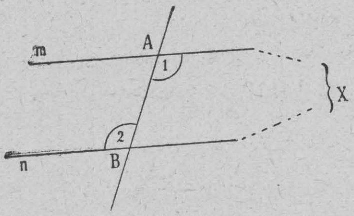
Chcąc zaznaczyć, że proste AB, CD są do siebie równoległe, piszemy $AB // CD$.

§ 73. **Twierdzenie.** *Dwie proste, które z trzecią prostą tworzą kąty naprzemianległe wewnętrzne równe, są do siebie równoległe*).*

*) Jeżeli określamy jakieś nowe pojęcie, winniśmy zawsze wykazać, że nie jest ono pustym dźwiękiem, że naprawdę istnieje przedmiot, o którym mowa w określeniu. W danym wypadku powinniśmy wykazać, że na-

Przypuśćmy, że proste dane m, n tworzą z trzecią prostą AB kąty naprzemianległe wewnętrzne równe, a mianowicie

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2.$$



Rys. 42.

Powiadam, że proste m, n nie mogą przeciąć się. Istotnie, gdyby proste te spotkały się np. po prawej stronie poprzecznej AB w punkcie X, wówczas powstałby trójkąt $\triangle AXB$, w którym kąt $\sphericalangle 2$ byłby zewnętrzny, kąt zaś $\sphericalangle 1$ byłby wewnętrzny, nieprzyległy do kąta $\sphericalangle 2$. Wobec tego kąt $\sphericalangle 2$ powinienby być większy od kąta $\sphericalangle 1$, co przeczy założeniu, że kąty te równają się sobie.

Wnioski. 1. *Jeżeli dwie proste, przecięte trzecią, tworzą kąty odpowiadające sobie równe, albo kąty naprzemianległe zewnętrzne równe, wówczas proste są do siebie równoległe.*

2. *Jeżeli dwie proste zostały przecięte trzecią tak, że kąty jednostronne wewnętrzne (lub zewnętrzne) spełniają się, wówczas proste te są do siebie równoległe.*

3. *Dwie proste, prostopadłe do tej samej trzeciej prostej, są do siebie równoległe.*

§ 74. Wiemy już, iż po ustaleniu jakiegoś twierdzenia należy zbadać twierdzenie odwrotne (lub przeciwne), gdyż zdarza się, że są one fałszywe, mimo że twierdzenie proste było prawdziwe. Otóż badania uczonych wykazały, że, nie uciekając się do jakichś nowych pewników, twierdzenia przeciwnego (ani odwrotnego) do twierdzenia § 73 dowieść nie można, mimo, że prawdziwość jego jest dla każdego oczywista. Wobec tego nic innego nie pozostaje, jak uznać za pewnik owo twierdzenie przeciwne.

Pewnik VI (zwany pewnikiem Euklidesa*)). *Jeżeli*

---

prawdę istnieją proste, które nie przecinają się, mimo, że leżą w jednej płaszczyźnie. Otóż najłatwiej przeprowadzimy dowód istnienia figury, jeżeli pokażemy, w jaki sposób figurę tę można zbudować. Taki właśnie jest sens niniejszego twierdzenia: wskazuje ono sposób zbudowania dwóch prostych równoległych i przez to samo stanowi dowód istnienia takich prostych.

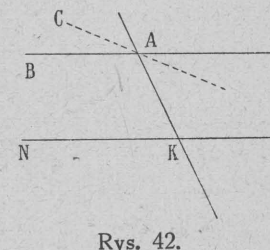
*) Od imienia słynnego matematyka greckiego, który nauczał w Aleksandrji około 300 r. przed Chr. Dzieło Euklidesa p. t. Στοιχεια czyli „Elementy“

dwie proste tworzą z poprzeczną kąty naprzemianległe wewnętrzne nierówne, wówczas proste te nie są do siebie równoległe (zatem przecinają się).

§ 75. Twierdzenie. *Przez dany punkt można poprowadzić jedną tylko równoległą do danej prostej.*

Jakoż przypuśćmy, że przez punkt A przechodzi prosta AB równoległa do danej prostej MN. Jeżeli poprowadzimy poprzeczną AK, wówczas na mocy powyższego pewnika musi być

$$\sphericalangle BAK = \sphericalangle MKA.$$



Rys. 42.

Gdyby jakakolwiek inna prosta, przechodząca przez ten sam punkt A, np. CA, była równoległa do MN, wówczas mielibyśmy na tej samej zasadzie równość

$$\sphericalangle CAK = \sphericalangle MKA.$$

Ale te dwie równości nie mogą być jednocześnie prawdziwe, gdyż kąty $\sphericalangle CAK$, $\sphericalangle BAK$ nie są sobie równe.

Wnioski. *Jeżeli prosta przecina jedną z dwóch równoległych, wówczas przecina i drugą.*

Istotnie, jeżeli mamy dane dwie równoległe m, n i jeżeli prosta p przecina prostą m w punkcie A, wówczas musi przeciąć i prostą n, gdyż w przeciwnym razie byłaby równoległa do n, a więc — wbrew powyższemu twierdzeniu — przez punkt A przechodziłyby dwie proste m, p równoległe do n.

2. *Dwie proste, równoległe do tej samej trzeciej prostej, są do siebie równoległe.*

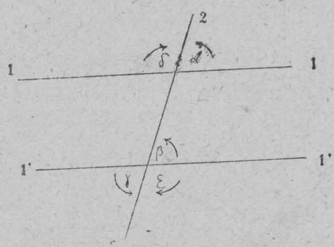
Jeżeli proste m, n są równoległe do prostej p, wówczas są do siebie równoległe; gdyby bowiem przecinały się w jakimś punkcie X, wówczas przez punkt X przechodziłyby dwie proste równoległe do p.

---

stanowi najdawniejszy ze znanyeh nam podręczników naukowych geometrji. U Euklidesa pewnik powyższy brzmi nieco inaczej, mianowicie uznaje on za pewnik twierdzenie przeciwne do wniosku 2-go w § 73 i powiada: *jeżeli dwie proste tworzą z trzecią prostą kąty jednostronne wewnętrzne, których suma nie równa się kątowi półpełnemu, wówczas proste te przecinają się, a mianowicie przecinają się po tej stronie poprzecznej, po której suma kątów jednostronnych wewnętrznych jest mniejsza od kąta półpełnego.*

3. *Poprzeczna, prostopadła do jednej z dwu prostych równoległych, jest prostopadła i do drugiej.*

§ 76. **Twierdzenie.** *Jeżeli ramiona jednego kąta są równoległe do ramion drugiego, wówczas kąty te równają się sobie, o ile mają ten sam zwrot, natomiast kąty spełniają się, o ile mają zwroty przeciwne.*

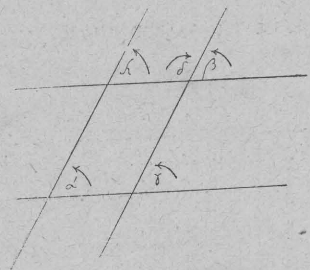


Rys. 44.

W celu rozpoznania zwrotu kątów ponumerujemy ich ramiona.

Przedewszystkiem zauważmy, że jeżeli dwie równoległe, oznaczone na rysunku numerami 1 i 1', zostały przecięte trzecią prostą, którą oznaczamy numerem 2, wówczas kąty równe ∢ α, β, γ, mają wszystkie ten sam zwrot, natomiast spełniające się z niemi kąty, jak ∢ δ, ∢ ε mają zwrot przeciwny. Twierdzenie zatem jest dowiedzione w przypadku, gdy dwa kąty o równoległych ramionach tak są położone, że na pewnej prostej leży jedno ramię pierwszego kąta i jedno ramię drugiego.

Przypadek ogólny da się sprowadzić do poprzedniego.

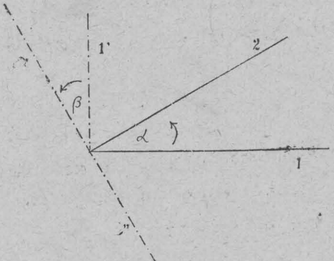


Rys. 45.

Jeżeli mamy dane (rys. 45) kąty ∢ α, ∢ β o tym samym zwrocie i równoległych ramionach, wówczas możemy którykolwiek z nich zastąpić przez równy mu kąt ∢ γ, mający ten sam zwrot, a wówczas stanie się oczywistem, że ∢ α = ∢ γ = ∢ β.

Jeżeli chodzi o porównanie kątów ∢ α i ∢ δ, mających zwroty przeciwne, wówczas zastępujemy ∢ α przez równy mu kąt ∢ γ, mający ten sam zwrot.

§ 77. **Twierdzenie.** *Jeżeli ramiona jednego kąta są prostopadłe do ramion drugiego, przyczem kąty mają ten sam zwrot, wówczas kąty równają się sobie; jeżeli natomiast kąty mają zwroty przeciwne, wówczas spełniają się.*



Rys. 46.

Wystarczy zbadać przypadek, gdy dwa kąty o ramionach odpowiednio do siebie prostopadłych mają wspólny wierzchołek. Istotnie, gdyby chodziło o kąty ∢ α, ∢ β, nie mające wspólnego wierzchołka, wówczas przy wierzchołku kąta ∢ α zbudowalibyśmy ∢ β o ramionach równoległych do ramion kąta ∢ γ i mający z nim spólny zwrot; na mocy poprzedniego twierdzenia mielibyśmy ∢ β = ∢ γ.

Szczegółowy dowód pozostawiamy czytelnikowi. Zauważmy tylko, że kąty ∢ α ∢ β, których ramiona oznaczyliśmy numerami 1, 2 oraz 1', 2', mają ten sam

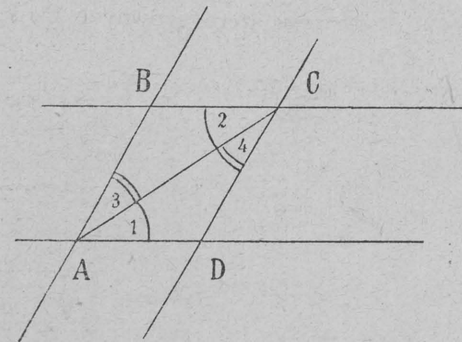
zwrot, natomiast kąt, którego ramionami są półproste 1' i 2'', ma zwrot przeciwny.

§ 78. **Twierdzenie.** *Odcinki równoległe, zawarte między prostemi równoległemi, są sobie równe.*

Jeżeli mamy $AB \| CD$ oraz $BC \| AD$, wówczas musi być

$$AB = CD$$

Jakoż łącząc A z C, otrzymujemy dwa trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle ADC$, które równają się sobie, ponieważ ∢ 1 = ∢ 2, ∢ 3 = ∢ 4, bok zaś AC mają spólny.

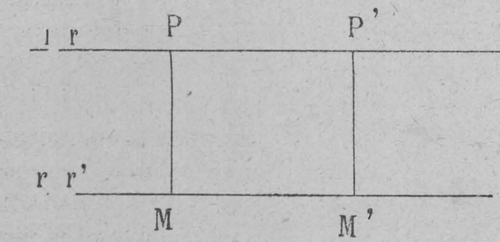


Rys. 47.

Wnioski. *Jeżeli mamy a dane dwie proste równoległe, wówczas:*

1. *Wszystkie punkty jednej prostej są równo odległe od drugiej* (np. na rys. 48 $PM = P'M'$, gdzie P, P' są dowolnemi punktami na prostej r);

2. *Odległość punktów pierwszej prostej od drugiej równa się odległości punktów drugiej prostej od pierwszej* (gdyż np.np. odcinek PM może być uważany za odległość punktu M od prostostej r' lub też za odległość punktu M od prostej r).



Rys. 48.

§ 79. **Twierdzenie.** *Jeżeżeli na jednej z dwu przecinających się prostych odłożymy, poczynając od ich punktu przecięcia, dowolną ilość równych odcinkóżów i przez końce tych odcinków poprowadzimy równoległe, wówwczas na drugiej prostej otrzymamy tyleż równych sobie odcinkóww.*

Jeżeli na prostej m odłdożyliśmy kolejno odcinki $OA = OB = BC = CD = \ldots$ i jeżeli $AA' \| BBB' \| CC' \| DD' \| \ldots$, wówczas powiadam, że na prostej p mamy tyleż odcinków, przyczem $OA' = OB' = B'C' = C'D' = \dots$

Aby tego dowieść, wystarczy przez punkty B, C,... poprowadzić odcinki BK, $CL\dots$ równoległe do prostej p, przez co otrzymamy szereg równych trójkątów

$$\triangle OAA' \equiv \triangle OBB' \equiv \triangle BKC \equiv \triangle CLD \equiv \dots$$

Istotnie, np. $OB = BC$, $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ i $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$, jako odpowiadające sobie, a więc

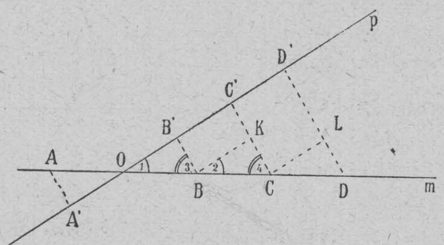
$$\triangle OBB' \equiv \triangle BKC.$$

Stąd wynika, że

$$OB' = BK = B'C'$$

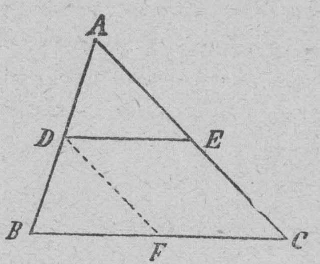
(na mocy § 78).

W taki sam sposób dowodzimy równości innych odcinków.



Rys. 49.

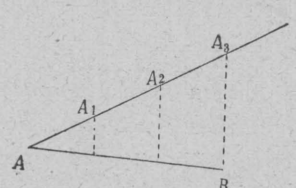
Wnioski. 1. *Jeżeli przez środek D boku AB trójkąta poprowadzimy równoległą do boku BC, przejdzie ona przez środek E boku AC, przyczem odcinek DE równać się będzie połowie boku BC* (rys. 50).



Rys. 50.

Ponieważ przez punkt D możemy poprowadzić tylko jedną równoległą do BC i ponieważ istnieje jeden tylko środek boku AC, zatem równoległa, o której mowa w powyższym wniosku, jest tożsama z prostą, łączącą środki D, E boków trójkąta. To daje nam możność odwrócenia powyższego twierdzenia. Mamy więc:

2. *Odcinek, łączący środki dwóch boków trójkąta, jest równoległy do trzeciego boku i równa się jego połowie.*



Rys. 51.

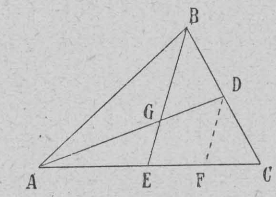
§ 80. Zadanie. *Dany odcinek podzielić na jakąkolwiek zgóry zadaną ilość części równych.*

Jeżeli np. chcemy podzielić odcinek AB na trzy równe części, prowadzimy przez A dowolną prostą, na niej odkładamy trzy dowolne, byle

równe sobie, odcinki $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, łączymy A_3 z B, przez punkty zaś A_1 i A_2 prowadzimy równoległe do prostej A_3B.

§ 81. Twierdzenie. *Trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie tak, że odcinek między wierzchołkiem a punktem przecięcia jest dwa razy większy od odcinka między tym punktem a bokiem trójkąta.*

Niech będzie dany $\triangle ABC$ i dwie jego środkowe AD, BE. Proste te niewątpliwie przecinają się, gdyż pierwsza z nich łączy dwa punkty A, D, leżące po dwóch stronach drugiej prostej. Oznaczmy przez G ich punkt przecięcia i poprowadźmy prostą $DF // BE$. Ponieważ w $\triangle EBC$ punkt D jest środkiem boku BC, zatem F musi być środkiem boku EC. Mamy tedy



Rys. 52.

$$EF = \tfrac{1}{2}\, EC = \tfrac{1}{2}\, AE,$$

a wobec tego musi być również $GD = \tfrac{1}{2} AG$ (§ 79).

Jeżeli teraz wykreślimy trzecią środkową (której brak na rysunku), podzieli ona środkową AD na dwa odcinki, z których jeden, zawarty między wierzchołkiem A i punktem przecięcia musi być dwa razy większy od drugiego. Ponieważ istnieje tylko jeden punkt G, dzielący w ten sposób środkową AD, zatem wszystkie trzy środkowe spotykają się w punkcie G.

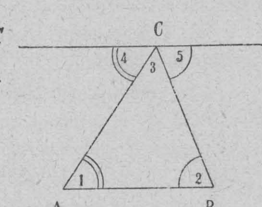
Punkt G nazywa się *środkiem ciężkości trójkąta*.

§ 82. Twierdzenie. *Suma kątów wewnętrznych trójkąta równa się dwom kątom prostym.*

Przez wierzchołek C trójkąta $\triangle ABC$ prowadzimy prostą CD równoległą do boku AB. Mamy wówczas

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 4, \quad \sphericalangle 2 = \sphericalangle 5,$$

a więc $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 5 =$ kątowi półpełnemu.

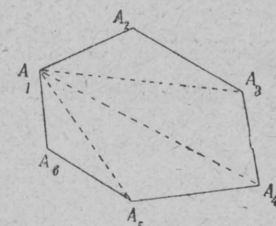


Rys. 53.

Wniosek. *Kąt zewnętrzny trójkąta równa się sumie dwóch kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych.*

§ 83. Twierdzenie. *Suma kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego wyraża się wzorem* $2\,\delta\,(n-2)$ *gdzie* δ *oznacza kąt prosty,* n *zaś liczbę boków wielokąta.*

Jeżeli wielokąt ma n boków (a więc i n wierzchołków), wówczas z dowolnego wierzchołka można poprowadzić $n - 3$ przekątne, które dzielą wielokąt na $n - 2$ trójkąty. Suma kątów każdego z tych trójkątów równa się $2\,\delta$, a więc suma kątów wewnętrznych wielokąta $= 2\,\delta\,(n - 2)$.



Rys. 54.

Wniosek. *Jeżeli przy każdym wierzchołku wielokąta wypukłego utworzymy po jednym kącie zewnętrznym, wówczas suma wszystkich tych kątów* $= 4\,\delta$ *bez względu na to, ile boków ma wielokąt.*

Ćwiczenie IX. 1. Jeżeli kąty naprzemianległe wewnętrzne są sobie równe, wówczas *a)* kąty naprzemianległe zewnętrzne równają się sobie, *b)* kąty odpowiadające równają się sobie, *c)* kąty jednostronne (zarówno wewnętrzne, jak zewnętrzne) spełniają się.

2. Jeżeli kąty jednostronne wewnętrzne lub zewnętrzne spełniają się, wówczas kąty naprzemianległe wewnętrzne są sobie równe.

3. Przez punkt A poprowadzić równoległą do danej prostej m, posługując się własnościami: 1-o kątów naprzemianległych wewnętrznych, 2-o naprzemianległych zewnętrznych, 3-o odpowiadających sobie.

4. Jeżeli w kątach przyległych $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle DBC$ poprowadzono dwusieczne i jeżeli prosta, równoległa do AD, przecina te dwusieczne odpowiednio w punktach E, F, ramię zaś BC przecina w punkcie K, wówczas musi być $EK = KF$.

5. Jeżeli przez punkt W, w którym przecinają się dwusieczne kątów $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ trójkąta $\triangle ABC$, poprowadzimy równoległą do boku AB i jeżeli równoległa ta przetnie boki AC, BC odpowiednio w punktach M, N, wówczas $MN = AM + BN$.

Czy twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeżeli równoległą poprowadziliśmy przez punkt przecięcia się dwusiecznych kątów zewnętrznych?

6. Czy można odwrócić (i na ile sposobów) twierdzenie, zawarte w poprzedniem ćwiczeniu.

7. W trójkącie ABC dwusieczna kąta $\sphericalangle B$ przecina bok AC w punkcie B'. Przez B' poprowadzimy równoległą do BC, przecinającą bok AB w punkcie C'. Co można powiedzieć o odcinkach $B'C'$ i BC'?

8. W trójkącie ABC poprowadzić odcinek $B_1C_1 // BC$ tak, by jego końce B_1, C_1 leżały odpowiednio na bokach AB, BC i żeby było:

$$(1)\ B_1C_1 = B_1B;\quad (2)\ B_1C = C_1C;\quad (3)\ B'_1C_1 = B_1B + C_1C;;$$
$$(4)\ B_1C_1 = B_1B - C_1C.$$

9. Opierając się na własności kątów odpowiadających sobie, dowieść, że dwie proste, równoległe do trzeciej prostej, są do siebie równoległe.

10. Jeżeli końce odcinka AB leżą na dwóch równoległych prostych i jeżeli przez środek O tego odcinka poprowadzimy dowolny odcinek CD, którego końce leżą na tych samych równoległych, wówczas musi być $CO = OD$.

11. Jeżeli w trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$ (w którym $AB = AC$) poprowadzimy z dowolnego punktu M podstawy równoległe do boków AB, AC i jeżeli proste te przecinają boki AB, AC odpowiednio w punktach N, P, wówczas suma odcinków $MN + MP$ jest wielkością stałą.

Jakiej zmianie ulegnie powyższe twierdzenie, jeżeli punkt M, poruszając się po prostej BC, znajdzie się w jednym z wierzchołków B lub C? Jeżeli M znajdzie się na przedłużenie BC?

12. W danym kącie $\sphericalangle \alpha$ umieścić dany odcinek h w taki sposób, żeby oba jego końce leżały na ramionach kąta i żeby odcinek ten był prostopadły do jednego ramienia kąta $\sphericalangle \alpha$.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane

13. A, b, h_b. 14. A, h_b, B. 15. A, h_c, r_a. 16. C, h_b, d_C.
17. A, h_b, h_c. 18. B, h_c, $\sphericalangle (s_c, a)$.

Zbudować trójkąt równoramienny $\triangle ABC$, mając dane

19. C, h_a. 20. A, h_b.

21. W danym kącie $\sphericalangle \alpha$ umieścić dany odcinek k tak, by oba jego końce leżały na ramionach kąta i żeby odcinek ten był równoległy do danej prostej m. (Czy zadanie to jest uogólnieniem zad. 12?)

22. Dana jest prosta m i punkt X, nie leżący na niej. Poprowadzić przez X prostą, któraby z prostą m tworzyła kąt, równający się kątowi danemu $\sphericalangle \alpha$,

23. Zbudować trójkąt równoramienny $\triangle ABC$, mając dane A, d_A.

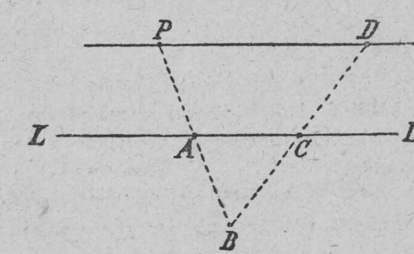
Zbudować trójkąt prostokątny $\triangle ABC$, mając dane:

24. A, h. 25. r_b, $\sphericalangle (a, h)$. 26. A, d_C.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

27. A, d_A, B. 28. r_a, A, B. 29. B, A, b. 30. B, d_C, $\sphericalangle (c, d_C)$.

31. Matematyk włoski XVI w. N. Tartaglia podaje następujący sposób kreślenia równoległych: jeżeli do prostej danej LL' (rys. 55) chcemy przez P poprowadzić równoległą, wówczas prowadzimy dowolną poprzeczną PA, odkładamy $AB = PA$, łączymy B z dowolnym punktem C na prostej LL', wreszcie na prostej BC odkładamy $CD = BC$; prosta PD jest żądaną równoległą. Dlaczego?



Rys. 55.

32. Dowieść, że dany odcinek MN można w następujący sposób podzielić na trzy części równe: na MN budujemy trójkąt równoboczny $\triangle MNP$, prowadzimy dwusieczne kątów $\sphericalangle M$, $\sphericalangle N$, przecinające się w punkcie I; przez I prowadzimy równoległe do boków PM, PN. Równoległe te dzielą bok MN na trzy części równe.

33. Dany jest kąt $\sphericalangle \alpha$ i punkt A, wewnątrz niego leżący; poprowadzić przez A prostą tak, by punkt A był środkiem odcinka tej prostej, zawartego między ramionami kąta $\sphericalangle \alpha$. [Wskazówka: Wykreślić od ręki figurę, odpowiadającą mniej więcej, warunkom zadania; niech O będzie wierzchołkiem kąta $\sphericalangle \alpha$; M i N niech będą końcami żądanego odcinka. Czy zadanie byłoby rozwiązane, gdybyśmy znali długość odcinka ON?]

34. Dany jest kąt $\sphericalangle \alpha$ i punkt A, zewnątrz niego leżący; przez A poprowadzić prostą, przecinającą ramiona kąta w punktach M, N tak, że $AM = MN$.

35. Dany jest stały kąt $\sphericalangle MON$ oraz stały punkt A, leżący na ramieniu OM w odległości a od wierzchołka kąta. Przez A przechodzi ruchoma prosta która obraca się dokoła A. Oznaczmy przez K punkt (zmienny), w którym ta prosta przecina ramię ON. Na prostej ruchomej AK odkładamy w każdem jej położeniu odcinek $KX = AK$. Jakie jest miejsce geometryczne punktu X? [Wskazówka: gdzie leży punkt X, gdy prosta AK pada na ramię OM? Wykreślić prostą AK w kilku różnych położeniach i za każdym razem wyznaczyć punkt X.].

36. Jeżeli z punktu, obranego dowolnie na boku trójkąta równobocznego, poprowadzimy prostopadłe do dwu drugich boków, wówczas suma ich równa się wysokości trójkąta.

37. Uogólnić poprzednie twierdzenie, obierając punkt wewnątrz trójkąta równobocznego i prowadząc prostopadłe do wszystkich boków.

Jak należy zmienić wysłowienie twierdzenia (albo jaką wprowadzić umowę), żeby pozostało ono prawdziwe nawet i wówczas, gdy punkt został obrany zewnątrz trójkąta?

38. W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$, w którym $AB = AC$, łączymy dowolny punkt D, leżący na boku AC, z wierzchołkiem B i przez środek F odcinka BD prowadzimy równoległą do BC. Jeżeli równoległa ta przecina boki, AB, AC w punktach G, H, wówczas $GH = BD_1$, gdzie D_1 jest spodkiem prostopadłej, poprowadzonej z D do BC. [Wskazówka: prowadzimy $DE // CB$ i dowodzimy, że $BD_1 = {}^1/_2\,(ED + BC)$.]

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

39. s_a, s_b, $\sphericalangle(s_a, s_b)$. 40. s_b, $\sphericalangle(a, s_b)$, $\sphericalangle(s_b, s_c)$.

---

41. Czy suma dwóch kątów trójkąta może równać się trzeciemu kątowi? czy może być mniejsza od trzeciego kąta?

42. Dwusieczne kątów jednostronnych wewnętrznych są do siebie prostopadłe.

43. W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$, w którym $AB = AC$, dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku A jest równoległa do podstawy BC. Sformułować i zbadać twierdzenie odwrotne.

44. W trójkącie prostokątnym poprowadzić przez wierzchołek kąta prostego poprzeczną tak, by podzielić dany trójkąt na dwa trójkąty równoramienne.

45. Opierając się na poprzedniem zadaniu, znaleźć sposób wystawienia prostopadłej w końcu odcinka, którego nie możemy przedłużyć. (Rozwiązanie takie podał w XV w. matematyk niemiecki Regiomontanus czyli Jan Müller z Królewca we Frankonji. Porów. rozwiązanie tego samego zadania przez Herona — ćwiczenie V, 31.).

46. Jak wielki jest kąt trójkąta równobocznego?

47*a*. Jeżeli w trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych jest dwa razy większy od drugiego, wówczas przyprostokątna przeciwległa mniejszemu kątowi jest dwa razy mniejsza od przeciwprostokątnej. [Wskazówka: zestawić dwa trójkąty prostokątne tak, by utworzyć z nich jeden nowy trójkąt].

47*b*. Sformułować i zbadać twierdzenie odwrotne do poprzedniego.

47*c*. Podzielić kąt prosty na trzy części równe.

47*d*. Jeżeli na każdym boku trójkąta równobocznego, którego bok $= a$, odłożymy w tym samym zwrocie, poczynając od wierzchołka, odcinek $= \frac{a}{3}$, wówczas otrzymamy nowy trójkąt równoboczny, którego boki będą prostopadłe do boków danego trójkąta.

47*e*. W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$ prowadzimy do podstawy BC lub do jej przedłużenia taki odcinek AD, żeby było $\sphericalangle ADC = {}^2/_3\,\delta$; wykazać, że $AD = DC + BD$ lub $AD = DC - BD$ i zbadać, kiedy mianowicie mamy sumę, kiedy zaś różnicę odcinków.

47*f*. Zbudować trójkąt równoboczny, mając daną jego wysokość.

48. W trójkącie $\triangle ABC$ przedłużamy bok AB poza wierzchołek B, na przedłużeniu odkładamy $BD = BC$ i łączymy C z D. Wykazać, że mamy wówczas $AD = a + c$, $\sphericalangle CDA = \frac{1}{2} \sphericalangle CBA$.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

49. $a + c$, b, A. 50. $a + c$, A, h_c. 51. $a + c$, A, oraz warunek, że $a = b$.
52. $a + c$, A, h_b. 53. $a + c$, B, h_c. 54. $a + c$, A, $\sphericalangle(d_B, b)$.

55. Na rys. 36 (str. 48) wykazać, że $AC' = c - a$, $\sphericalangle C'DA = \sphericalangle C - \sphericalangle A$.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

56. $c - a$, C, u_a. 57. u_a, u_c, $C - A$. 58. u_c, A, $c - a$.

59. Dowieść wzoru na sumę kątów wielokąta wypukłego, łącząc dowolny jego punkt wewnętrzny ze wszystkiemi wierzchołkami.

60. **Sofizmat.** Znaleźć błąd w następującym dowodzie twierdzenia o sumie kątów trójkąta:

mając dany trójkąt, łączymy jego wierzchołki z dowolnym punktem M. Niech suma kątów wewnętrznych trójkąta będzie x. Ponieważ trzy kąty, jakie powstały dokoła punktu M, tworzy kąt pełny, zatem mamy równanie

$$3x - 4\delta = x,$$

skąd

$$x = 2\delta,$$

61. Mamy dany trójkąt $\triangle ABC$, w którym kąt C jest prosty. Nie wyjmując trójkąta z jego płaszczyzny, obracamy go dokoła wierzchołka C, dopóki przeciwprostokątna c nie przejdzie przez wierzchołek A większego z dwóch jego kątów ostrych. Oznaczmy trójkąt nasz w tem nowem położeniu symbolem $\triangle A'B'C$. Jeżeli D jest punktem przecięcia się boku a' z bokiem c, wówczas $\sphericalangle ADC = 3 \sphericalangle ABC$.

62. Mając dane kąty $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ trójkąta, obliczyć kąt:

1-o między dwusiecznemi kątów wewnętrznych $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$;

2- między dwusiecznemi kątów zewnętrznych, utworzonych przy wierzchołkach A i B.

3-o między dwusieczną kąta wewnętrznego $\sphericalangle A$ i dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku B;

4-o między wysokością h_b i dwusieczną d_A;

5-o między wysokościami h_a i h_b;

6-o między wysokością h_b i dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku A.

63. Kąt między wysokością h_a i dwusieczną d_A równa się połowie różnicy kątów $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$.

64. Jeżeli w $\triangle ABC$ bok BC jest największy i jeżeli na nim odłożymy $BA' = BA$ oraz $CA'' = CA$, wówczas musi być $\sphericalangle A'AA'' = \dfrac{\sphericalangle B + \sphericalangle C}{2}$.

65. Niech będzie dany $\triangle ABC$, w którym $AB = AC$ oraz $\sphericalangle ABC = 3\sphericalangle BAC$. Jeżeli półproste BK, BL dzielą kąt $\sphericalangle ABC$ na trzy równe części, wówczas trójsieczne te wyznaczają w danym trójkącie trzy nowe trójkąty równoramienne.

66. Jeżeli w trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$, w którym $AB = AC$, mamy $\sphericalangle BAC = \frac{2}{5}\,\delta$, wówczas dwusieczna kąta przy podstawie dzieli trójkąt ABC na dwa równe trójkąty równoramienne.

---

67. Dowieść, że jeżeli przyjmiemy jako pewnik, iż „przez dany punkt do danej prostej można poprowadzić tylko jedną równoległą“, wówczas wyniknie z niego, że „dwie proste nie są równoległe, jeżeli tworzą z poprzeczną kąty naprzemianległe wewnętrzne nierówne“.

68. Dowieść, że jeśli przyjmiemy jako pewnik, iż „suma kątów trójkąta równa się kątowi półpełnemu“, wówczas wyniknie z niego, że „przez dany punkt do danej prostej można poprowadzić tylko jedną równoległą“. [W s k a z ó w k a. Przy wierzchołku A budujemy kąty naprzemianległe wewnętrzne z kątam $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$.]

B. O równoległobokach.

§ 84. W rozdziale niniejszym będzie mowa tylko o czworobokach wypukłych.

Dwa boki czworoboku, nie mające wspólnego wierzchołka, nazywamy *przeciwległemi*.

Określenia. *Czworobok, którego dwa przeciwległe boki są do siebie równoległe, nazywamy trapezem.* Dwa równoległe boki trapezu nazywamy jego *podstawami*, drugie dwa poprostu *bokami*.

Równoległobokiem nazywamy czworobok, który ma dwie pary równoległych boków.

Jak widzimy, równoległobok można uważać za szczególny rodzaj trapezu.

§ 85. Twierdzenie. *Przeciwległe boki równoległoboku równają się sobie.*

Wynika odrazu z § 78.

Twierdzenie. *Przeciwległe kąty równoległoboku równają się sobie, kolejne zaś spełniają się.*

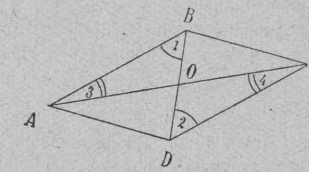
§ 86. Twierdzenie. *Przekątne równoległoboku dzielą się na połowy.*

Istotnie, $\triangle AOB \equiv \triangle COD$, ponieważ mamy

$AB = CD$, $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$.

Stąd wynika, że

$AO = OC$, $BO = OD$.



Rys. 56.

§ 87. Określenie. *Rombem nazywamy równoległobok, którego dwa sąsiednie boki są sobie równe.*

Wobec tego wszystkie boki rombu równają się sobie (d l a c z e g o?).

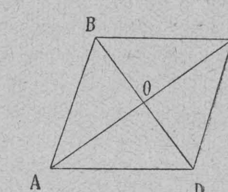
Twierdzenie. *Przekątne rombu:*

1-o) *dzielą się na połowy,*

2-o) *są dwusiecznemi kątów rombu,*

3-o) *są do siebie prostopadłe.*

Pierwsza własność wynika z tego, że romb jest szczególnym rodzajem równoległoboku. Druga i trzecia własność wynikają z tego, że trójkąt $\triangle ABD$ jest równoramienny ($AB = AD$) i że punkt O jest środkiem jego podstawy BD, a więc AO, będąc środkową, musi być dwusieczną i wysokością trójkąta.



Rys. 57.

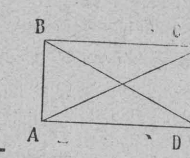
§ 88. Określenie. *Prostokątem nazywamy równoległobok, mający jeden kąt prosty.*

Wynika stąd, że wszystkie cztery kąty prostokąta równają się sobie (d l a c z e g o?).

Twierdzenie. *Przekątne prostokąta:*

1-o) *dzielą się na połowy,*

2-o) *równają się sobie.*



Rys.

Pierwsza własność wynika z tego, że prostokąt jest równoległobokiem. Co się tyczy drugiej własności, to wynika ona z równości trojkątów $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$.

§ 89. Określenie. *Kwadratem nazywamy równoległobok, którego boki i kąty równają się sobie.*

Z określenia tego wynika, że kwadrat jest jednocześnie rombem i prostokątem, a więc musi posiadać wszystkie własności obu tych figur, wyliczone w §§ 87, 88.

Ćwiczenia X. Sformułować i zbadać twierdzenia odwrotne względem twierdzeń §§ 85, 86. Jakie stąd wynikają sposoby poznania, czy dany czworobok jest, czy nie jest równoległobokiem?

2. Sformułować i zbadać twierdzenia odwrotne względem § 87. Jak poznać, czy dany równoległobok jest, czy nie jest rombem?

3. Sformułować i zbadać twierdzenie odwrotne względem § 88. Jak poznać, czy dany równoległobok jest prostokątem?

4. Punkt przecięcia się przekątnych równoległoboku jest środkiem każdego odcinka, który przechodzi przez ten punkt i którego końce leżą na bokach równoległoboku (porówn. ćwiczenie IX. 10, str. 61).

Punkt ten będziemy z tego powodu nazywali *środkiem równoległoboku.*

5. Każda prosta, przechodząca przez środek równoległoboku, dzieli równoległobok na dwie figury równe.

6. Jeżeli na dwóch przeciwległych bokach równoległoboku odłożymy, poczynając od przeciwległych wierzchołków, dwa równe sobie odcinki, wówczas prosta, łącząca końce tych odcinków, musi przejść przez środek równoległoboku.

7. Wierzchołki równoległoboku nie mieszczą się na rysunku, tak, iż mamy wykreślone tylko części czterech jego boków; znaleźć środek równoległoboku.

Określenie. Jeżeli dwa wielokąty tak zostały zbudowane, że wszystkie wierzchołki jednego z nich leżą na bokach drugiego, wówczas pierwszy wielokąt nazywamy *wpisanym* w drugi, drugi zaś nazywamy *opisanym* na pierwszym.

8. W dany równoległobok wpisać dowolny równoległobok i dowieść, że mają one spólny środek (porówn. ćwiczenie 6).

9. Środki boków każdego czworoboku są wierzchołkami równoległoboku, wpisanego w ten czworobok.

Jaką figurę otrzymamy, łącząc środki boków równoległoboku? rombu? prostokąta? kwadratu?

9*a*. W każdym czworokącie odcinki KL, MN, łączące środki przeciwległych boków, oraz odcinek PR, łączący środki przekątnych, przecinają się w jednym punkcie i dzielą się w tym punkcie na połowy.

10. W czworoboku $ABCD$ połączyliśmy środki boków i otrzymaliśmy prostokąt; czy można twierdzić, że $ABCD$ jest rombem?

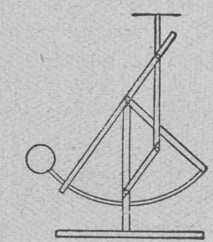
Jeżeli środki boków czworoboku $ABCD$ tworzą romb, czy wolno twierdzić, że $ABCD$ jest prostokątem?

Jeżeli środki boków czworoboku $ABCD$ tworzą kwadrat, czy wolno twierdzić, że $ABCD$ jest kwadratem?

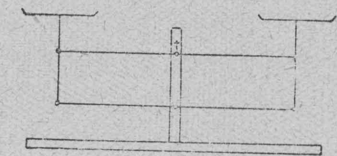
11. Jeżeli prostokąt dany przetniemy dwiema prostemi, równoległemi do jednej przekątnej i jednakowo od niej odległemi, wówczas otrzymamy równoległobok, wpisany w dany prostokąt i mający obwód równy sumie przekątnych prostokąta danego. Czy można uogólnić to twierdzenie na dowolny równoległobok?

12. Prowadzimy dwusieczne kątów wewnętrznych i zewnętrznych równoległoboku; dowieść, że 1-o punkty przecięcia się tych dwusiecznych są wierzchołkami prostokątów; 2-o że przekątne tych prostokątów przechodzą przez środki boków równoległoboku; 3-o że przekątna większego prostokąta równa się sumie dwóch kolejnych boków równoległoboku.

Jak wielka jest przekątna mniejszego prostokąta?



Rys. 59.



Rys. 60.

13. Przez wierzchołek równoległoboku prowadzimy dowolną prostą MN, nie przecinającą równoległoboku i z trzech pozostałych wierzchołków prowadzimy prostopadłe do tej prostej. Dowieść, że prostopadła ze środkowego wierzchołka równa się sumie dwu drugich prostopadłych.

Jak zmieni się twierdzenie, jeżeli prosta NM przecina równoległobok?

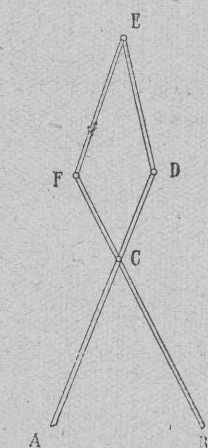
14. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ poprowadzimy dwusieczną kąta A i przez punkt jej przecięcia się z bokiem a poprowadzimy równoległe do boków b, c, otrzymamy romb.

Czy można uogólnić to twierdzenie na dwusieczne kątów zewnętrznych?

15. Na każdym boku równoległoboku budujemy nazewnątrz kwadrat; dowieść, że środki tych czterech kwadratów są wierzchołkami nowego kwadratu.

16. Rysunek 59 przedstawia schemat wagi do listów. Opisać sposób działania wagi i wyjaśnić, dlaczego pręt, podtrzymujący szalkę, jest zawsze pionowy?

17. Rysunek 60 przedstawia schematycznie t. zw. wagę Robervala. Wyjaśnić, dlaczego szalki wagi pozostają zawsze poziome.

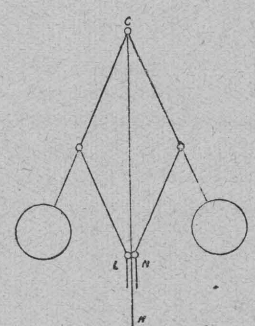


Rys. 61.

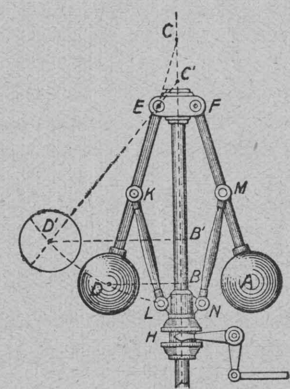
18. Cztery sztywne pręty AD, FB, EF, ED osadzamy na zawiasach w punktach E, F, C, D (rys. 61). Jak należy dobrać długość prętów i gdzie umieścić zawias C, żeby przy rozsuwaniu punktów A, B prosta FD była zawsze równoległa do AB i żeby punkty E, C kreśliły prostopadłą do AB?

19. Rysunek 62 przedstawia schematycznie (w przekroju) regulator machiny parowej. Opisać sposób działania przyrządu i wyjaśnić, jak wielkie powinny być pręty i jak należy umieścić zawiasy, żeby uniknąć zbytecznego tarcia pierścienia LN o pręt CH?

Rys. 63 przedstawia taki sam regulator, widziany z boku.



Rys. 62.



Rys. 63.

20. Odcinek, łączący środki dwóch boków trapezu, jest równoległy do obu jego podstaw i równa się połowie ich sumy.

20 a. Odcinek, łączący środki dwóch przekątnych trapezu, jest równoległy do obu podstaw trapezu i równa się połowie ich różnicy.

21. Jeżeli każda z przekątnych trapezu dzieli na polowy jeden jego kąt, wówczas trapez ma trzy równe sobie boki. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

Zbudować równoległobok, mając dane:

22. e, f, ω, 23. $a, \omega \sphericalangle (a, f)$. 24. $A, f, \sphericalangle (f, d)$.
25. $d, \sphericalangle (d, f), h_b$ *). 26. A, d, h_b. 27. A, h_a, h_b.

28. Dane są dwa punkty A, B i prosta m; zbudować prostą równoległą do m i przechodzącą w równej odległości od punktów A i B.

29. Dane są trzy punkty A, B, C, nie leżące na jednej prostej; przez A wykreślić prostą tak, by odcinki, poprowadzone do tej prostej z punktów B, C i jednakowo do niej nachylone, były sobie równe.

Czy zadanie jest możliwe, jeżeli A, B, C leżą na jednej prostej?

30. Dane są trzy punkty A, B, C, nie leżące na jednej prostej; zbudować

*) Wysokością równoległoboku nazywamy odległość jednego jego boku od boku przeciwległego. Wobec tego równoległobok ma, wogóle mówiąc, dwie różne wysokości.

prostą równo odległą od wszystkich trzech punktów. Ile rozwiązań posiada zadanie?

Zbudować romb, mając dane:

31. e, f. 32. $a, \sphericalangle (a, e)$. 33. A, h_a, 34. $e. \sphericalangle (a. e)$.

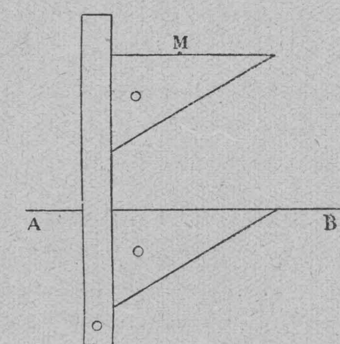
35. Zbudować kwadrat tak, by jedna jego przekątna leżała na danej prostej i jeden bok przechodził przez dany punkt. Ile rozwiązań posiada zadanie? Jaki warunek możnaby dodać tak, aby zadanie posiadało 1 rozwiązanie?

36. Dane są trzy punkty A, M, N, nie leżące na jednej prostej; zbudować kwadrat $ABCD$ tak, by punkt M leżał na boku a (lub na jego przedłużeniu), punkt zaś N na boku c (lub na jego przedłużeniu).

Ćwiczenia XI. Wszystkie zadania konstrukcyjne rozwiązywaliśmy zapomocą dwóch przyrządów: linjału i cyrkla. Można jednak posługiwać się innemi przyrządami, np. ekierką i linjałem lub też dwiema ekierkami.

Ekierka, jest to deseczka, mająca kształt trójkąta prostokątnego. Nadaje się ona specjalnie do kreślenia prostopadłych i równoległych. Kreślenie prostopadłych nie wymaga specjalnych wyjaśnień; co się tyczy kreślenia równoległych, to możemy postąpić w sposób następujący:

Chcąc przez punkt M poprowadzić równoległą do prostej AB, przykładamy brzeg ekierki do tej prostej, do drugiego brzegu ekierki przykładamy linjał i przesuwamy ekierkę wzdłuż linjału (rys. 64), aż natrafimy na punkt M.



Rys. 54.

Posługując się wyłącznie linjałem i ekierką (a więc kreśląc proste, proste równoległe i proste prostopadłe), rozwiązać następujące zadania:

1. Na prostej m dany jest odcinek AB; wykreślić odcinek równy AB i równoległy do niego.

1 a. Przy tem samem założeniu, co w poprzedniem zadaniu, odłożyć na prostej m odcinek równy AB.

W szczególności podwoić, potroić... odcinek AB.

2. Podzielić dany odcinek AB na 3 równe części.

3. Zbudować trójkąt równoramienny.

4. Podwoić kąt dany.

Następujące trzy zadania wymagają znajomości figur symetrycznych lub też własności kątów, wpisanych w koło.

5. Zbudować punkt symetryczny z punktem A względem danej osi m. [Wskazówka: na m obieramy dowolnie punkty B, D, wykreślamy równoległobok $ABCD$, przez C prowadzimy $p//m$, wreszcie $AA' \perp p$].

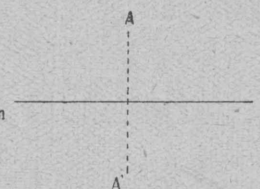
6. Podzielić kąt dany na połowy.

7. W końcu danego odcinka AB poprowadzić prostą m i na niej odłożyć $AX = AB$.

ROZDZIAŁ VI.

O figurach symetrycznych.

§ 90. Jeżeli punkty A, A' leżą po dwóch stronach prostej m tak, że prosta m jest prostopadła do odcinka AA' i dzieli go na połowy, wówczas powiadamy, że punkty A, A' *są z sobą symetryczne względem osi m*. Jeżeli, mając dany punkt A i oś symetrji m, budujemy symetryczny z nim punkt A', wówczas powiadamy, że *przekształcamy A na punkt A', symetryczny z nim względem osi m.*



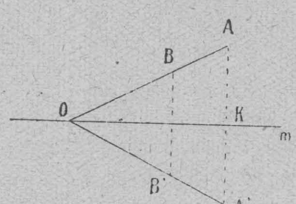
Rys. 65.

Rzecz jasna, że jeżeli A został przekształcony symetrycznie na A', wówczas możemy też odwrotnie uważać A za przekształcenie symetryczne punktu A'. Punkt A nazywamy niekiedy *obrazem symetrycznym* punktu A', i odwrotnie.

Określenie. *Dwie figury nazywamy symetrycznemi względem osi, jeżeli każdemu punktowi jednej figury odpowiada punkt drugiej figury, symetryczny z nim względem tej osi.*

Zauważmy, że jeśli mamy dany dowolny punkt A i oś symetrji, wówczas istnieje tylko jeden punkt A', symetryczny z punktem A względem tej osi. Spostrzeżenie to pozwoli nam z łatwością odwracać twierdzenia, które zaraz poznamy.

§ 91. Twierdzenie. *Jeżeli dwie półproste, wychodzące z tego samego punktu na osi, leżą po dwóch stronach tej osi i są do niej jednakowo nachylone, wówczas półproste są z sobą symetryczne względem tej osi.*



Rys. 66.

Istotnie, jeżeli z dowolnego punktu A jednej półprostej poprowadzimy prostopadłą AK do osi m, otrzymamy trójkąt równoramienny $\triangle AOA'$ (gdyż wysokość jego OK jest zarazem dwusieczną kąta $\sphericalangle AOA'$), musi więc być $AK=KA'$ i punkty A, A' muszą być z sobą symetryczne względem osi m.

Ponieważ dla każdego punktu istnieje tylko jeden punkt

symetryczny z nim względem danej osi m, zatem musi być prawdziwe następujące twierdzenie przeciwne:

Twierdzenie przeciwne. *Żaden punkt płaszczyzny, nie leżący na półprostej OA' nie może być symetryczny z jakimkolwiek punktem półprostej OA.*

Mamy tedy prawo twierdzić, że *obrazem symetrycznym półprostej OA względem osi m jest półprosta OA', tak położona, że $\sphericalangle AOK = \sphericalangle A'OK$.*

§ 92. Twierdzenie. *Obrazem symetrycznym odcinka jest równy mu odcinek.* Twierdzenie jest oczywiste dla odcinków takich, jak OA lub OA', których jeden koniec leży na osi symetrji. Chcąc dowieść twierdzenia w przypadku ogólnym, wystarczy zauważyć (rys. 66), że $AB = AO - BO = A'O - BO = A'B'$.

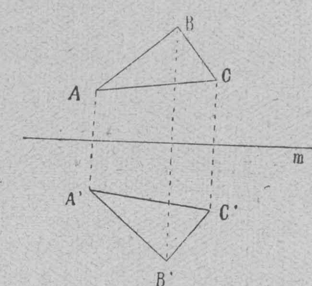
§ 93. Twierdzenie. *Obrazem symetrycznym prostej równoległej do osi jest druga prosta równoległa do osi i leżąca po drugiej jej stronie w tej samej od niej odległości, co i pierwsza prosta.*

§ 94. Twierdzenie. *Obrazem symetrycznym trójkąta jest równy mu trójkąt.*

Każde dwa odcinki, mające spólny koniec, muszą się przekształcać na dwa odcinki o spólnym końcu, zatem obrazem trójkąta jest trójkąt. Na mocy twierdzenia § 92 mamy

$AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$.

a więc $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C$.



Rys. 67.

Wniosek. *Obrazem symetrycznym wielokąta jest równy mu wielokąt.*

§ 95. Istnieje inny jeszcze rodzaj symetrji. Jeżeli mianowicie punkt O dzieli na połowy odcinek AA', wówczas powiadamy, że punkty A, A' *są symetryczne z sobą względem środka O.*

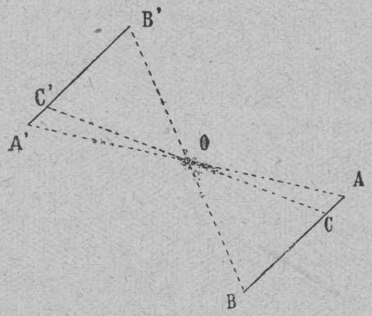
Dla każdego punktu istnieje tylko jeden punkt symetryczny z nim względem danego środka O.

§ 96. Twierdzenie. *Jeżeli odcinek przekształcimy symetrycznie względem środka, otrzymamy równy mu odcinek.*

Niech będzie dany odcinek AB i środek symetrji O. Łącząc punkty A, B ze środkiem O i odkładając $OB' = OB$, $OA' = OA$, otrzymujemy odcinek $A'B'$. Powiadam, że odcinek ten 1-o równa się odcinkowi AB i 2-o jest z nim symetryczny względem punktu O.

1-o Istotnie $OA = OA'$, $OB = OB'$, $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB'$, zatem $\triangle AOB \equiv \triangle A'OB$ i $AB = A'B'$.

2-o Jeżeli przez punkt C, obrany dowolnie na jednym odcinku, poprowadzimy prostą CO, przetnie ona drugi odcinek w punkcie C' (gdyż leży ona w kącie $\sphericalangle AOB$, a więc i w wierzchołkowym kącie $\sphericalangle A'OB'$), przyczem musi być $OC = OC'$, ponieważ mamy



Rys. 68.

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle A'OC',$$

$$\sphericalangle CAO = \sphericalangle C'A'O, \quad OA = OA',$$

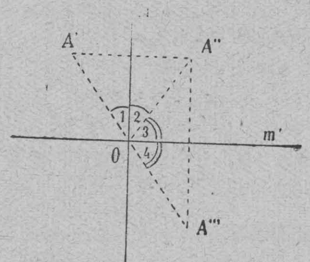
czyli $\triangle AOC \equiv \triangle A'OC'$.

§ 97. Twierdzenie. *Figurą symetryczną z danym trójkątem względem danego środka jest równy mu trójkąt.*

Wynika z powyższego twierdzenia i z pewnika IIIf.

§ 98. Pomiędzy temi dwoma rodzajami symetrji istnieje bliski związek, o którym mówi następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Jeżeli figurę przekształcimy kolejno względem dwu prostopadłych do siebie osi symetrji, wówczas punkt przecięcia tych osi będzie środkiem symetrji dla pierwszej i dla ostatniej figury.*



Rys. 69.

Niech będą dane dwie prostopadłe do siebie osie m i m'. Jeżeli punkt A' przekształcimy (względem osi m) na punkt A'', ten zaś przekształcimy (względem osi m') na punkt A''', wówczas A' i A''' muszą być z sobą symetryczne względem środka O.

Jakoż mamy odrazu

$$OA' = OA'' = OA'''.$$

Pozostaje wykazać, że OA' i OA''' tworzą jedną prostą.

Istotnie, $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$.
a więc $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 =$ kątowi prostemu.
skąd $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 =$ kątowi półpełnemu.

§ 99. Mówiliśmy dotąd o dwóch figurach symetrycznych z sobą. Zdarza się jednak, że jakaś figura składa się z dwóch części równych i tak względem siebie położonych, że jedna z nich jest do drugiej symetryczna względem pewnej osi lub też względem środka. Przykładami takich figur mogą być trójkąt równoramienny (w którym osią symetrji jest dwusieczna kąta między równemi bokami) i równoległobok (w którym środkiem symetrji jest punkt przecięcia się przekątnych).

Osie i środek symetrji nazywamy *elementami symetrji* danej figury.

Uwaga. Łatwo jest przekonać się doświadczalnie, że dwie (materjalne) figury symetryczne względem osi, pomimo że są sobie równe, nie dadzą się jednak doprowadzić do przystania, jeżeli poruszać je będziemy w ich płaszczyźnie: musimy jedną z nich wyjąć z płaszczyzny i odwrócić na drugą stronę. Natomiast dwie figury symetryczne względem środka doprowadzić możemy do przystania, jeśli jedną z nich obrócimy (w jej płaszczyźnie) dokoła środka symetrji o kąt półpełny.

Ćwiczenia XII.*) 1. Dana jest oś symetrji m i punkty A, B po jednej jej stronie oraz punkt A', symetryczny z A. Znaleźć punkt symetryczny z B. [W s k a z ó w k a: odwrócić sposób budowania dwusiecznej, podany w ćwicz. IV, 12 na str. 34.]

2. Dane są dwie pary punktów A, A' oraz B, B', symetrycznych z sobą względem tej samej osi; wykreślić oś symetrji.

3. Czy dwie pary punktów symetrycznych wystarczają do rozwiązania poprzedniego zadania, jeżeli proste AB, $A'B'$ są do siebie równoległe?

4. Dane są: oś symetrji m, prosta b oraz dwa punkty A, A', symetryczne z sobą (przyczem A nie leży na prostej b); zbudować prostą b', symetryczną z b. [W s k a z ó w k a: dowolne dwa punkty prostej b przekształcamy symetrycznie.]

5. Dany jest środek symetrji O i dwie proste a, a', względem niego symetryczne; zbudować prostą b', symetryczną względem O z daną prostą b.

6. Dany jest środek symetrji O i dwie proste a, a' względem niego symetryczne; zbudować punkt P', symetryczny względem O z danym punktem P. [W s k a z ó w k a: przez punkt P prowadzimy dwie dowolne proste i przekształcamy je symetrycznie.]

7. Jakie są elementy symetrji odcinka? dwóch równoległych do siebie

---

*) Zadania Nr. 1—6 należy rozwiązać z a p o m o c ą l i n j a ł u; nie wolno tedy posługiwać się w tych wypadkach cyrklem.

odcinków? dwóch odcinków równoległych i równych sobie? dwóch prostych równoległych? dwóch prostych przecinających się?

8. Jakie są elementy symetrji trójkąta równoramiennego? trójkąta równobocznego?

9. Jakie są elementy symetrji równoległoboku? rombu? prostokąta? kwadratu? trapezu równoramienego?

10. Dany jest równoległobok i prosta m, przecinająca dwa jego sąsiednie boki; wpisać w niego drugi równoległobok tak, by jeden bok tego nowego równoległoboku leżał na prostej m *).

11. Na danym równoległoboku opisać drugi równoległobok tak, by jeden jego wierzchołek leżał w danym punkcie P.

12. Dany jest równoległobok i prosta m, nie przecinająca jego konturu; wykreślić równoległą do m.

13. W dany trapez równoramienny wpisać romb, jeżeli mamy zaznaczony na rysunku środek jednego z nierównoległych boków trapezu.

14. Dany jest prostokąt wraz z swemi osiami symetrji i prosta m, nie przechodząca przez żaden wierzchołek prostokąta. Wykreślić romb, którego jeden bok leżałby na m i który miałby obie osie symetrji spólne z prostokątem.

15. W dany romb wpisać prostokąt tak, by jeden jego wierzchołek leżał w danym punkcie. [W s k a z ó w k a: porówn. zadanie 1.]

ROZDZIAŁ VII.

O pojęciu miejsca geometrycznego.

§ 100. Określenie. *Miejscem geometrycznem punktów, mających pewną własność, nazywamy figurę, która spełnia dwa następujące warunki:*

1-o każdy punkt tej figury posiada ową własność,

2-o żaden punkt, nie leżący na naszej figurze, nie posiada tej własności.

Możemy np. okrąg koła nazwać miejscem geometrycznem punktów płaszczyzny, równo odległych od jednego punktu, zwanego środkiem koła, gdyż: 1) wszystkie punkty odległe są od środka o promień; 2) żaden inny punkt płaszczyzny nie jest odległy od środka o promień.

Chcąc tedy dowieść, że jakaś figura jest miejscem geometrycznem punktów, mających taką a taką własność, m u s i m y d o w i e ś ć d w ó c h t w i e r d z e ń: p r o s t e g o i p r z e c i w n e g o.

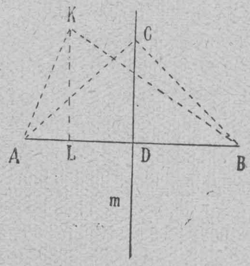
*) Przy rozwiązaniu zadań Nr. 10—15 wolno posługiwać się tylko linjałem.

Oczywista rzecz, że zamiast twierdzenia przeciwnego możemy dowieść twierdzenia odwrotnego, ponieważ oba te twierdzenia są zawsze jednocześnie prawdziwe lub jednocześnie fałszywe*).

§ 101. Twierdzenie. *Miejscem geometrycznem punktów płaszczyzny, równo odległych od końców danego odcinka, jest oś symetrji tego odcinka.*

Jeżeli prosta m jest osią odcinka AB, wówczas

1) powiadam, że jakkolwiek obierzemy na osi punkt C, zawsze musi być $AC=CB$, gdyż $\triangle ABC$ jest równoramienny (d l a c z e g o)?



Rys. 70.

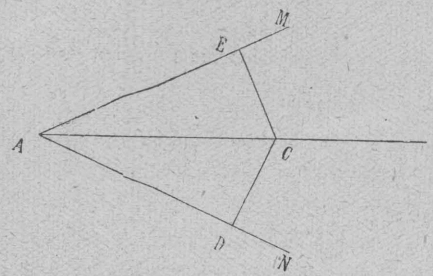
2) powiadam, że dla punktów, nie leżących na osi, równość ta zachodzić nie może, a mianowicie dla każdego punktu K płaszczyzny, leżącego z tej strony osi, z której znajduje się punkt A, musi zachodzić nierówność $KA < KB$.

Istotnie, jeżeli poprowadzimy KL prostopadle do AB, wówczas musi być $KL \| CD$, a więc punkt L musi leżeć po tej samej stronie osi, po której znajduje się koniec A odcinka. Wobec tego mamy

$$AL < LB,$$

a więc (§ 70)

$$KA < KB$$



Rys. 71.

§ 102. Twierdzenie. *Miejscem geometrycznem punktów płaszczyzny, równo odległych od ramion kąta, jest dwusieczna tego kąta.*

Niech będzie dany kąt $\sphericalangle MAN$ i jego dwusieczna AC i niech będą $CE \perp AM$, $CD \perp AN$.

1-o Dla każdego punktu C tej dwusiecznej musi być $EC=CD$, gdyż $\triangle AEC = \triangle ACD$ (d l a c z e g o?).

*) Zgodnie z tem możnaby nieco inaczej określić miejsce geometryczne, a mianowicie w następujący sposób: *miejscem geometrycznem punktów, posiadających pewną własność, nazywamy figurę, która spełnia dwa następujące warunki: 1-o każdy punkt figury posiada tę własność, 2-o każdy punkt, mający ową własność, leży na naszej figurze.*

2-o Jeżeli punkt C płaszczyzny jest równo odległy od obu ramion kąta, wówczas punkt ten leży na dwusiecznej, gdyż w trójkątach prostokątnych $\triangle ECA$, $\triangle DCA$

$$EC = CD, \text{ bok } AC \text{ jest wspólny,}$$

a więc $\triangle ECA \equiv \triangle DCA$ i $\sphericalangle EAC = \sphericalangle CAD$.

Wniosek. *Miejsce geometryczne punktów płaszczyzny, równo odległych od dwóch przecinających się prostych. składa się z dwóch dwusiecznych kątów, zawartych między temi prostemi.*

Ćwiczenia XIII. 1. Miejsce geometryczne punktów płaszczyzny, jednakowo odległych od danej prostej m, składa się z dwóch prostych równoległych do niej i symetrycznie względem niej położonych.

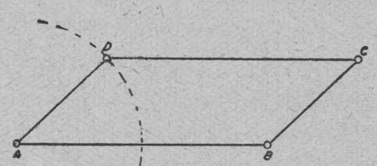
2. Miejscem geometrycznem punktów płaszczyzny, jednakowo odległych od dwóch prostych równoległych, jest trzecia prosta, rownoległa do nich i stanowiąca ich oś symetrji.

3. Dany jest punkt A i prosta m, nie przechodząca przez ten punkt; znaleźć miejsce geometryczne środków wszystkich odcinków, poprowadzonych z punktu A do prostej m.

4. Z punktu A prowadzimy proste, przecinające prostą daną m w punktach B_1, B_2, B_3,... Na tych prostych odkładamy (po jednej, którejkolwiek stronie prostej m) odcinki $B_1C_1 = 3AB_1$, $B_2C_2 = 3AB_2$, $B_3C_3 = 3AB_3$,... Jakie jest miejsce punktów C_1, C_2, C_3,...?

5. Na ramieniu danego kąta odkładamy, poczynając od wierzchołka, dowolne odcinki kolejne, na drugiem zaś ramieniu odkładamy (poczynając również od wierzchołka) kolejne odcinki odpowiednio równe poprzednim, wreszcie przez końce równych odcinków prowadzimy równoległe do ramion kąta. Jakie jest miejsce geometryczne punktów przecięcia się tych równoległych?

6. Mamy cztery pręty, które tworzą równoległobok $ABCD$. Pręty AB, AD pozostają nieruchome, pręty zaś BC, CD przesuwamy tak, by 1-o figura $ABCD$ była zawsze równoległobokiem, 2-o żeby odcinki AB, AD zmieniały się zawsze w tym samym stosunku*). Jakie jest miejsce geometryczne punktu C?



Rys. 72.

7. Równoległobok przegubowy $ABCD$ (rys. 72) poruszamy tak, iż bok AB pozostaje nieruchomy, wierzchołek zaś D kreśli okrąg koła. Jaką linję zakreśla wierzchołek C? Czy taką samą linję kreśli każdy punkt na boku CD? na przedłużeniu tego boku?

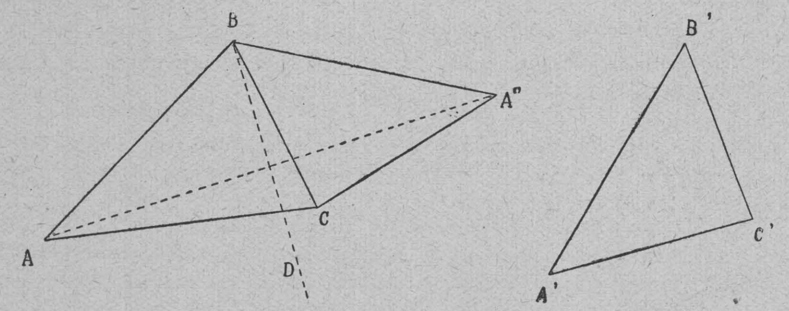
Czy przy kołach parowozu istnieje podobny mechanizm i do czego służy?

*) To znaczy, że jeśli odcinek AB wzrósł (lub zmalał) n razy, wówczas odcinek AD musiał wzrosnąć (lub zmaleć) n razy.

ROZDZIAŁ VIII.

O trójkątach nierównych.

§ 103. Twierdzenie. *Jeżeli dwa boki jednego trójkąta równają się odpowiednio dwom bokom drugiego, lecz kąty między niemi zawarte nie są sobie równe, wówczas trzecie ich boki nie są równe, a mianowicie większy jest ten bok, który leży naprzeciwko większego kąta.*



Rys. 73.

Niech będą dane trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ takie, że $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ ale $\sphericalangle ABC > \sphericalangle A'B'C'$; powiadam, że wówczas musi być $AC > A'C'$.

Jakoż zbudujmy po drugiej stronie boku BC trójkąt $\triangle CBA'' \equiv \triangle C'B'A'$ *). Łącząc punkty A i A'', otrzymamy trójkąt równoramienny $\triangle ABA''$ tak, iż dwusieczna jego BD musi być osią odcinka AA''. Ale dwusieczna ta leży niewątpliwie wewnątrz kąta $\sphericalangle CBA$ (dlaczego?), wobec czego punkty C i A'' leżą po jednej stronie osi symetrji odcinka AA'',

a więc musi być (§§ 101) $AC > CA''$

lub, co na jedno wychodzi, $AC > A'C'$.

§ 104. Weźmy pod uwagę dwa trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ w których $b = b'$, $c = c'$. Twierdzenia, dowiedzione w §§ 46 i 103, powiadają, że

*) Gdybyśmy mieli do czynienia z figurami materjalnemi, powiedzielibyśmy: przysuńmy trójkąt $\triangle A'B'C'$ do trójkąta $\triangle ABC$ tak, by równe ich boki $B'C'$ i BC przystały do siebie.

Jeżeli mamy $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, *to musi być* $a = a'$,
„ „ $\sphericalangle A > \sphericalangle A'$, „ „ „ $a > a'$,
„ „ $\sphericalangle A < \sphericalangle A'$, „ „ „ $a < a'$.

Mamy tu znów przykład t. zw. układu zamkniętego twierdzeń (str. 50). Istotnie, porównywując z sobą kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle A'$, możemy uczynić o nich tylko trzy przypuszczenia: albo $A > A'$, albo $A < A'$, albo $A = A'$. Wszystkie te trzy przypuszczenia nawzajem wyłączają się, a płynące z nich wnioski również wyłączają się wzajemnie. Wobec tego, na mocy zasady II o odwracaniu twierdzeń (str. 49—50), mamy prawo wypowiedzieć następujące

Twierdzenie odwrotne (względem § 103). *Jeżeli dwa boki jednego trójkąta równają się dwom bokom drugiego, lecz trzecie ich boki nie są sobie równe, wówczas kąt przeciwległy większemu bokowi jest większy.*

Ćwiczenia XIV. 1. Powtórzyć dowód twierdzenia § 103-go w przypadku, gdy suma kątów $\sphericalangle ABC + \sphericalangle C'B'A'$ jest większa od kąta półpełnego.

2. Dowieść, że w równoległoboku przekątna, łącząca wierzchołki kątów ostrych, jest większa od przekątnej, łączącej wierzchołki kątów rozwartych.

3. W czworoboku $ABCD$ mamy $AB = CD$, ale przekątna BD jest większa od przekątnej AC; dowieść, że $\sphericalangle DCB > \sphericalangle CBA$.

4. W czworoboku $ABCD$ mamy $AB = CD$, ale zarazem $\sphericalangle BAD > \sphericalangle ADC$; dowieść, że wówczas musi być kąt $\sphericalangle BCD > \sphericalangle CBA$.

5. W trójkącie $\triangle ABC$, w którym $AB < AC$, poprowadzono środkową AD; dowieść, że kąt $\sphericalangle ADB$ jest ostry.

6. W poprzedniem zadaniu obieramy na środkowej AD dowolny punkt E i łączymy go z wierzchołkami B, C; który z dwóch odcinków: BE czy CE jest większy?

ROZDZIAŁ IX.

O kole.

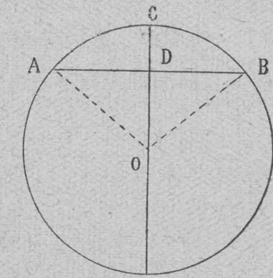
A. O różnych położeniach prostej względem koła.

§ 105. Twierdzenie. *Średnica, prostopadła do cięciwy, dzieli ją na połowy.*

Niech będzie dana cięciwa AB i średnica OC do niej prostopadła w punkcie D; powiadam, że $AD = DB$.

Istotnie, trójkąt $\triangle AOB$ jest równoramienny, przyczem $OA = OB$, a więc wysokość, poprowadzona z wierzchołka O, musi być zarazem środkową.

§ 106. Powyższe twierdzenie posiada dwa założenia, można mu mianowicie nadać postać następującą:



Rys. 74.

założenie I: jeżeli prosta przechodzi przez środek koła,

założenie II: jeżeli prosta ta jest prostopadła do cięciwy,

wniosek: wówczas prosta dzieli cięciwę na połowy.

Muszą wobec tego istnieć dwa twierdzenia odwrotne:

Twierdzenie odwrotne (względem § 105) I. *Prostopadła, wystawiona w środku cięciwy, przechodzi przez środek koła.*

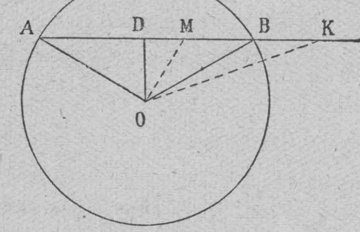
II. *Średnica, dzieląca cięciwę na połowy, jest do tej cięciwy prostopadła.*

Prawdziwość obu twierdzeń odwrotnych wynika z faktu, że $\triangle AOB$ (rys. 74) jest równoramienny. [Porówn. § 58, str. 42.]

Wniosek. *Każda średnica jest osią symetrji okręgu.*

§ 107. Twierdzenie. *Wszystkie punkty cięciwy, z wyjątkiem jej końców, leżą wewnątrz koła, wszystkie zaś punkty, leżące na przedłużeniu cięciwy, znajdują się zewnątrz koła.*

Istotnie, jeżeli D jest środkiem cięciwy AB i jeżeli M jest dowolnym punktem cięciwy, byle różnym od jej końców, wówczas mamy



Rys. 75.

$$MD < DB.$$

a więc $OM < OB$ (na mocy § 70).

Wobec tego punkt M leży wewnątrz koła.

Jeżeli natomiast punkt K leży na przedłużeniu cięciwy, wówczas $DK > DB$ (dlaczego?), a więc i $OK > OB$, czyli odległość punktu K od środka koła jest większa od promienia, wobec czego K leży zewnątrz koła.

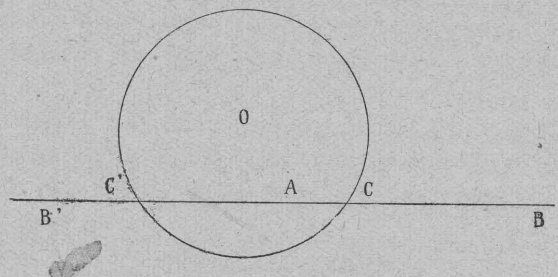
§ 108. Twierdzenie. *Średnica jest większa od każdej innej cięciwy.*

Istotnie, w $\triangle ABO$ (rys. 75) mamy

$$AO + OB > AB,$$

ale suma $AO + OB$ równa się średnicy koła.

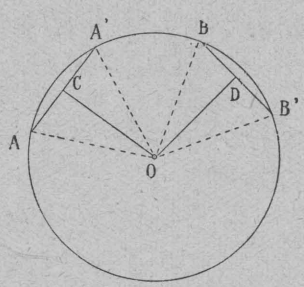
§ 109. Twierdzenie. *Prosta, przechodząca przez dowolny punkt wewnętrzny koła, przecina jego okrąg w dwóch punktach.*



Rys. 76.

Niech będzie dane koło, punkt wewnętrzny A i dowolna prosta m, przechodząca przez ten punkt.

Po obu stronach punktu A odkładamy odcinki AB, AB', równe średnicy koła. Punkty B, B' leżą niewątpliwie zewnątrz koła, gdyż średnica jest większa od każdej cięciwy, przechodzącej przez punkt A. Mamy tedy na prostej m dwa odcinki AB, AB', które łączą punkt A, leżący wewnątrz koła, z punktami zewnętrznemi B, B', a więc na mocy pewnika VIc każdy z tych odcinków musi przeciąć okrąg w jednym punkcie.



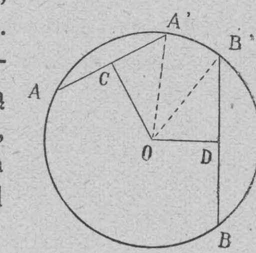
Rys. 77.

§ 110. Twierdzenie. *W tem samem kole (lub w równych kołach) cięciwy, jednakowo odległe od środka, są sobie równe.*

Jeżeli poprowadzimy ze środka koła prostopadłe OD, OC do dwóch danych cięciw i jeżeli $OD = OC$, wówczas $\triangle AOC \equiv \triangle OBD$ (dlaczego?), zatem $BD = AC$. Ale BD i AC są to połówki cięciw BB' i AA'; skoro więc połówki równają się sobie, to i cięciwy BB' i AA' muszą być sobie równe.

§ 111. Twierdzenie. *Z dwóch cięciw tego samego koła (lub równych kół) większa jest ta, której odległość od środka jest mniejsza.*

Jeżeli do danych cięciw AA', BB' poprowadziliśmy ze środka koła prostopadłe OC, OD i jeżeli $OC > OD$, wówczas powiadam, że musi być $AA' < BB'$.



Rys. 78.

Jakoż porównajmy z sobą dwa trójkąty prostokątne: $\triangle OCA'$, $\triangle ODB'$. Mają one równe przeciwprostokątne ($OA' = OB'$), ale $OC > OD$, zatem na mocy ćwiczenia VIII, 11, str. 52, musi być $CA' < DB'$. Stąd wynika, że $AA' < BB'$.

§ 112. W dwóch poprzednich twierdzeniach mamy znów przykład układu zamkniętego. Istotnie, oznaczając przez a i a' cięciwy, przez h i h' ich odległości od środka koła, mamy:

$$\begin{array}{llll} \text{jeżeli} & h = h', & \text{wówczas} & a = a', \\ \text{„} & h > h', & \text{„} & a < a', \\ \text{„} & h < h', & \text{„} & a > a'. \end{array}$$

O odległościach h, h' można uczynić tylko trzy wymienione przypuszczenia, które się wzajemnie wyłączają; tak samo wyłączają się nawzajem wnioski z nich płynące, a więc na mocy zasady II o odwracaniu twierdzeń (str. 49—50) muszą być prawdziwe następujące twierdzenia odwrotne.

Twierdzenia odwrotne (względem §§ 110, 111). I. *W tem samem kole (lub w równych kołach) równe cięciwy są jednakowo odległe od środka koła.*

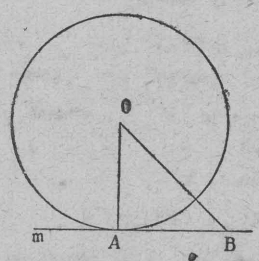
II. *W tem samem kole (lub w równych kołach) większa cięciwa leży bliżej środka.*

§ 113. Określenie. *Prosta, mająca z okręgiem koła tylko jeden punkt spólny, nazywa się styczną do koła (lub do okręgu).*

Musimy, oczywiście, wykazać możliwość istnienia takiej prostej; w tym celu najlepiej postąpimy, jeżeli podamy sposób budowania prostej, mającej z okręgiem tylko jeden punkt spólny. Taki właśnie jest sens następującego twierdzenia.

§ 114. Twierdzenie. *Prostopadła do promienia, poprowadzona przez jego koniec, jest styczną do koła.*

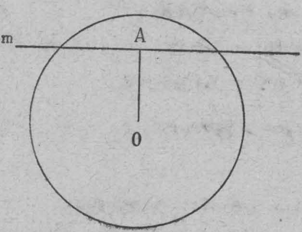
Niech będzie dany promień OA i prosta m, prostopadła do niego w jego końcu A. Punkt A niewątpliwie leży na okręgu koła, natomiast każdy inny punkt tej prostopadłej, np. B, musi leżeć poza kołem, gdyż OB jest pochyłą, OA zaś prostopadłą do m, a więc musi być $OB > OA$.



Rys. 79.

§ 115. Twierdzenie. *Prosta, której odległość od środka jest mniejsza od promienia, przecina okrąg w dwóch punktach.*

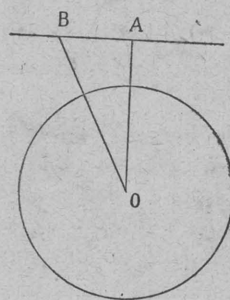
Jeżeli mamy daną taką prostą m, że prostopadła OA, poprowadzona do niej ze środka koła, jest mniejsza od promienia, wówczas punkt A leży wewnątrz koła, a wiemy już (§ 109), że każda prosta, przechodząca przez punkt wewnętrzny koła, przecina jego okrąg w dwóch punktach.



Rys. 80.

§ 116. Twierdzenie. *Jeżeli odległość prostej od środka koła jest większa od promienia, wówczas prosta nie ma z okręgiem ani jednego punktu spólnego.*

Jeżeli prostopadła OA, poprowadzona ze środka koła do prostej m, jest większa od promienia, wówczas punkt A leży zewnątrz koła. Każdy inny punkt tej prostej, np. punkt B, tem bardziej leży zewnątrz koła, gdyż $OB > OA$ (d l a c z e g o?).



Rys. 81.

Określenie. *Prosta, przecinająca okrąg w dwóch punktach, nazywa się sieczną.*

§ 117. Powyższe trzy twierdzenia tworzą znów układ zamknięty. Oznaczmy przez $(O)r$ okrąg danego koła, przez m daną prostą, przez h odległość jej od środka koła. Trzy twierdzenia, o których mowa, możemy tak sformułować:

jeżeli $h=r$, *wówczas* $(O)r$ i m *mają punkt spólny,*
„ $h>r$, „ $(O)r$ i m *nie mają wcale punktów spólnych,*
„ $h<r$, „ $(O)r$ i m *mają dwa punkty spólne.*

Rzecz prosta, że $h=r$, $h>r$, $h<r$ są to jedyne trzy przypuszczenia, jakie można uczynić o odległości prostej od środka koła; wszystkie te trzy przypuszczenia wyłączają się nawzajem, jak również trzy płynące z nich wnioski, a więc n a m o c y z a s a d y II o o d w r a c a n i u t w i e r d z e ń (str. 49—50) mamy prawo wypowiedzieć następujące trzy twierdzenia odwrotne:

Twierdzenia odwrotne. I. *Styczna odległa jest o promień od środka koła.* Albo innemi słowami: *Styczna jest prostopadła do promienia, poprowadzonego do punktu styczności.*

II. *Jeżeli prosta nie ma punktów spólnych z kołem, wówczas odległość jej od środka koła jest większa od promienia.*

III. *Jeżeli prosta ma dwa punkty spólne z okręgiem, wówczas odległość jej od środka koła jest mniejsza od promienia.*

§ 118. Zadania. *Z punktu zewnętrznego poprowadzić styczną do danego koła.*

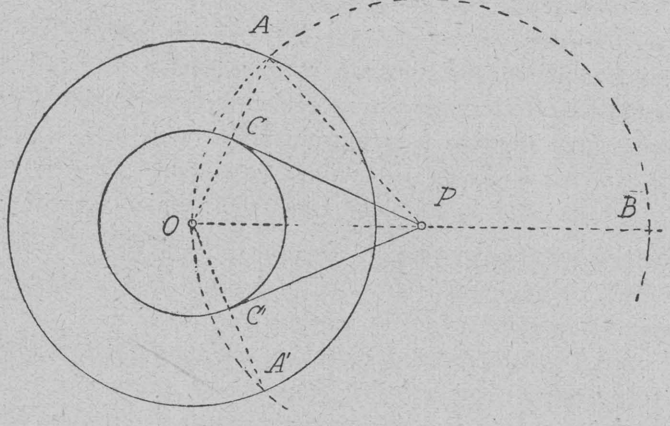
Można z łatwością przewidzieć, że o ile zadanie posiada rozwiązania, musi ich mieć dwa. Istotnie, prosta OP (rys. 82) jest osią symetrji figury danej, jeśli więc istnieje styczna po jednej stronie osi, to musi istnieć symetryczna styczna po drugiej stronie osi. Tak więc z punktu P można poprowadzić parzystą liczbę stycznych. Ale dostrzegamy odrazu, po jednej stronie osi może istnieć tylko jedna styczna.

Istotnie, niech prócz stycznej PC istnieje druga styczna PX. Przypuśćmy, że X leży na mniejszym z dwóch łuków, wyznaczonych przez OC i OP, t. j. leży wewnątrz zarówno kąta $\sphericalangle COP$, jak i kąta $\sphericalangle CPO$. W takim razie $\sphericalangle XOP < \sphericalangle COP$, $XPO < \sphericalangle CPO$, zatem $\sphericalangle XOP + \sphericalangle XPO < \sphericalangle OCP + \sphericalangle CPO$

Czy wobec tego kąty $\sphericalangle OCP$ i $\sphericalangle OXP$ mogą być oba proste?

Niech będzie dany okrąg $(O)r$ i punkt zewnętrzny P (rys. 82). Zadanie byłoby rozwiązane, gdybyśmy potrafili znaleźć punkt styczności C. Aby to uczynić, zauważmy, że trójkąt $\triangle OCP$ jest prostokątny, jeśli więc utworzymy równy mu trójkąt $\triangle CPA$, otrzymamy trójkąt równoramienny $\triangle OPA$, którego podstawa OA przecina okrąg dany w poszukiwanym punkcie C.

Rozwiążemy tedy zadanie, jeżeli potrafimy zbudować trójkąt równoramienny $\triangle OPA$. Otóż dwa jego wierzchołki O i P są nam dane, trzeci zaś wierzchołek A leży: 1) na okręgu $(P)O$, 2) na okręgu, zakreślonym z O promieniem dwa razy większym od promienia koła danego (d l a c z e g o ?). Zadanie nasze ma tyle rozwiązań, ile punktów wspólnych posiadają dwa okręgi $(P)O$ i $(O)\ 2r$. Łatwo dostrzec, że tych punktów wspólnych mają one zawsze dwa.

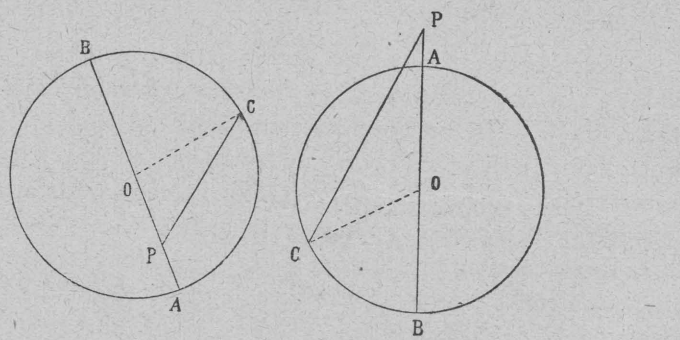


Rys. 82.

Istotnie, jeżeli przedłużenie promienia OP przecina w punkcie B okrąg $(P)O$, wówczas mamy $BO > 2r$, skoro tylko $OP > r$. Tak więc punkt B leży zewnątrz koła $(O)\ 2r$, natomiast punkt O leży wewnątrz tegoż koła, a wobec tego okrąg $(P)O$, łączący punkt O z punktem B, przecina w dwóch punktach okrąg $(O)\ 2r$ (§ 35, str. 11). Nazwijmy te punkty przecięcia A i A'. Łącząc je z O, otrzymamy dwa punkty styczności C i C'.

Uczeń sam sformułuje sposób budowania stycznej z punktu zewnętrznego.

§ 119. Określenia. *Normalną do koła (lub do okręgu) nazywamy*



Rys. 83.

każdy odcinek, prostopadły do stycznej w jej punkcie styczności.

Wobec tego każdy promień koła jest normalną, poprowadzoną ze środka koła. Z każdego innego punktu, nie leżącego na okręgu, można poprowadzić dwie normalne; są to mianowicie dwa odcinki, leżące na średnicy, przechodzącej przez ten punkt. Np. z punktu P (rys. 83) możemy przeprowadzić normalne PA, PB. Z nich jedna, PB przechodzi przez środek koła; przedłużenie drugiej normalnej PA również przechodzi przez środek koła.

§ 120. Twierdzenie. *Z pośród wszystkich odcinków, jakie można poprowadzić z danego punktu do okręgu koła, największym odcinkiem jest normalna, przechodząca przez środek koła, najmniejszym zaś normalna, której przedłużenie przechodzi przez środek koła.*

Niech będzie dane koło O i punkt P (zewnętrzny lub wewnętrzny). Niech PA, PB będą dwie normalne, PC zaś dowolna sieczna.

Z trójkąta $\triangle POC$ mamy $OP + OC > PC$,
że zaś $OC = OB$, zatem $PB > PC$.

Z tego samego trójkąta mamy

$OC - OP < PC$, jeżeli punkt P leży wewnątrz koła,

$OP - OC < PC$, jeżeli punkt P leży zewnątrz koła.

Ponieważ zaś $OC = OA$, zatem w obu przypadkach mamy

$$PA < PC.$$

Ćwiczenia XV. 1. Prosta nie może mieć z okręgiem więcej niż dwa punkty spólne.

2. Na rysunku mamy dane koło, lecz nie znamy jego środka; znaleźć ten środek.

3. Z dowolnego punktu P (leżącego wewnątrz lub zewnątrz koła) poprowadzono dwa równe odcinki PA, PB, których końce A, B leżą na okręgu danego koła; dowieść, że dwusieczna kąta $\sphericalangle APB$ przechodzi przez środek koła.

3*a*. Opierając się nu poprzedniem zadaniu, znaleźć środek danego koła.

4. Jeżeli dwie równe cięciwy przecinają się, wówczas odcinki na jednej z nich równają się odcinkom na drugiej.

5. Jeżeli dwie równe cięciwy przecinają się, wówczas są symetryczne względem średnicy, przechodzącej przez ich punkt przecięcia.

6. W kole mamy dane dwie równoległe cięciwy AA' BB'; dowieść, że jeśli proste AB, $A'B'$ przecinają się w punkcie P, proste zaś AB', $A'B$ w punkcie Q, wówczas prosta PQ przechodzi przez środek koła.

Oprzeć na tem sposób wyznaczania środka koła zapomocą linjału i ekierki.

7. Dane jest koło O, średnica MON, cięciwa AB oraz punkt A', symetryczny z A względem tej średnicy. Posługując się tylko linjałem, poprowadzić przez A' cięciwę równą AB.

8. Jeżeli dwa koła są spółśrodkowe (t. j. zostały wykreślone z tego samego środka), wówczas na każdej siecznej, przecinającej oba koła, otrzymujemy dwie pary równych odcinków.

8. Dane jest koło O, odcinek a i prosta m; poprowadzić cięciwę, równoległą do m i równą odcinkowi a.

10. W poprzedniem zadaniu poprowadzić cięciwę, prostopadłą do m i równą a.

11. W poprzedniem zadaniu poprowadzić cięciwę, nachyloną do m pod danym kątem $\sphericalangle \alpha$ i równą danemu odcinkowi a.

12. Przez dany punkt wewnętrzny koła poprowadzić najkrótszą cięciwę.

13. Dane jest koło O, średnica AOB oraz dwa punkty C, D na okręgu; poprowadzić przez te punkty cięciwy, jednakowo nachylone do średnicy AOB. Rozróżniać dwa przypadki: 1-o gdy C i D są z sobą symetryczne względem danej średnicy; 2-o gdy nie są symetryczne.

14. Do danego koła O poprowadzić styczną

a) jeżeli jest dany punkt styczności S,

b) jeżeli styczna ma być równoległa do danej prostej m,

c) jeżeli styczna ma być prostopadła do danej prostej m,

d) jeżeli styczna ma być nachylona do danej prostej m pod danym kątem $\sphericalangle \alpha$.

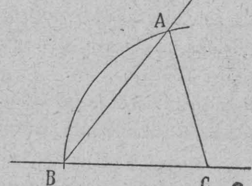
Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane: *)

15. a, r_a, h_a.	16. a, h_c, A.	17. h_a, s_a, B.
18. a, r_a, r_b.	19. a, c, r_a.	20. a, c, r_b.
21. a, r_a, $\sphericalangle (a, s_a)$.	22. a, c, $\sphericalangle (s_c, c)$	23. a, r_a, s_a.

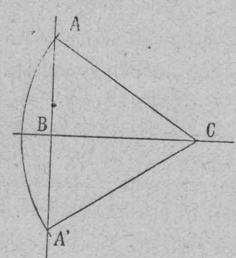
---

24. Zbudować trójkąt, mając dane a, b, B.

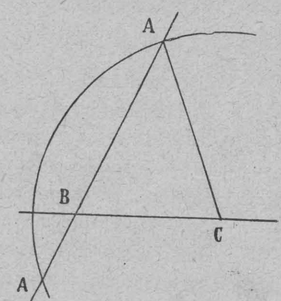
Na dowolnej prostej odkładamy odcinek $BC = a$; znamy już dwa wierzchołki B, C trójkąta; zadanie będzie rozwiązane, jeżeli znajdziemy trzeci wierzchołek A.



Rys. 84.

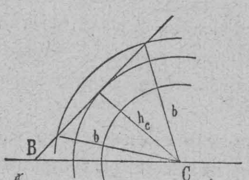


Rys. 85.



Rys. 86.

Otóż ten trzeci wierzchołek leży na ramieniu kąta, zbudowanego przy punkcie B i równego danemu kątowi, a zarazem leży w odległości od wierzchołka C, równającej się odcinkowi b. Stąd wynika następujące rozwiązanie: przy punkcie B budujemy kąt równy danemu, a z punktu C, jako ze środka, kreślimy koło promieniem $= b$; wierzchołek A musi być punktem przecięcia się tego okręgu z ramieniem kąta $\sphericalangle B$.



Rys. 87.

B a d a n i e, 1-o. Jeżeli $b > a$, okrąg nasz przecina ramię kąta (lub jego przedłużenie) w dwóch punktach A, A'; otrzymujemy tedy dwa trójkąty

*) W każdem z tych zadań trzeba starannie zbadać, ile mamy rozwiązań.

$\triangle CBA$ $\triangle CBA'$. ale tylko pierwszy z nich odpowiada warunkom zadania, gdyż $\sphericalangle CBA'$ nie równa się kątowi danemu — chyba, że kąty $\sphericalangle CBA$, $\sphericalangle CBA'$ są proste (rys. 85 i 86).

2-o Jeżeli $b = a$ (rys. 84), wówczas kąt dany $\sphericalangle B$ musi być ostry (d l a c z e g o ?) i mamy jedno rozwiązanie.

3-o Jeżeli $b < a$ (rys. 87), wówczas kąt dany $\sphericalangle B$ musi być ostry (d l a c z e g o ?). Mamy w tym wypadku jedno lub dwa rozwiązania, lub wreszcie nie mamy wcale rozwiązań, zależnie od tego, czy $b = h_c$, czy też $b > h_c$, lub $b < h_c$.

Streszczając tedy wyniki powyższego badania i oznaczając kąt prosty literą δ, mamy:

1-o jeżeli	$b > a$	oraz $\sphericalangle B \neq \delta$.	wówczas	istnieje 1 rozwiązanie,
„	$b > a$	„ $\sphericalangle B = \delta$,	„	„ 2 rozwiązania,
2-o jeżeli	$b = a$	„ $\sphericalangle B < \delta$,	„	„ 1 rozwiązanie,
„	$b = a$	„ $\sphericalangle B \geqq \delta$,	„	niema rozwiązań,
3-o jeżeli	$b < a$	„ $\sphericalangle B \geqq \delta$,	„	„ „
„	$b < a$	„ $\sphericalangle B < \delta$,	„	istnieje 1 rozw. przy $b = h_c$,
				„ 2 rozw. przy $b > h_c$,
				niema rozwiązań przy $b < h_c$.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

25. a, C, s_b.	26. b, s_b, $\sphericalangle (a, s_b)$.	27. a. b, $\sphericalangle (b, s_b)$.
28. a. u_a, C.	29. C, d_C, u_a.	30. a, B, d_C.

---

31. Dane jest koło O i punkt A; poprowadzić w danem kole średnicę, której odległość od punktu A równałaby się danemu odcinkowi b.

32. Z każdego punktu wewnętrznego można poprowadzić do okręgu dwa równe sobie odcinki; jeżeli jednak z jakiegoś punktu można poprowadzić więcej niż dwa równe odcinki, wówczas punkt ten jest środkiem koła. [W s k a z ó w k a: sprowadzenie do sprzeczności.]

33. Jeżeli dwie cięciwy, przecinając się, dzielą się na połowy, wówczas są one obie średnicami.

34. Na mocy poprzedniego twierdzenia dowieść, że jeśli równoległobok ma nierówne przekątne, wówczas wierzchołki jego nie mogą leżeć na okręgu koła.

35. Jeżeli dwie przecinające się cięciwy nie są symetryczne względem średnicy, poprowadzonej do ich punktu przecięcia, wówczas cięciwy nie są sobie równe, a mianowicie większą jest ta, która tworzy mniejszy kąt ze średnicą.

MIEJSCA GEOMETRYCZNE.

36. Znaleźć i wykreślić miejsce geometryczne punktów, odległych o dany odcinek a od danego okręgu. [O d p o w.: składa się z dwóch okręgów spółśrodkowych z danym. Czy zawsze?]

37. Jakie jest miejsce geometryczne środków kół, przechodzących przez dwa dane punkty?

37 *a*. Wszystkie okręgi, których środki leżą na danej prostej *m* i które przechodzą przez dany punkt *A*, przechodzą jeszcze przez drugi stały punkt.

38. Znaleźć miejsce geometr. środków kół, stycznych do danej prostej w danym jej punkcie.

39. Znaleźć miejsce środków równoległych cięciw w danem kole.

40. Znaleźć w danem kole miejsce geom. środków równych cięciw.

41. Znaleźć miejsce geom. środków kół, stycznych do dwu danych prostych.

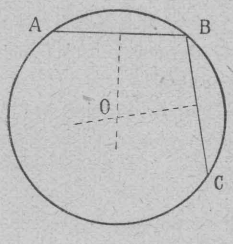
42. Dane są dwie proste przecinające się i odcinek *r*; promieniem równym *r* wykreślić koło styczne do obu danych prostych.

43. Mamy dane koło, a w niem stałą średnicę *AB* oraz równoległą do niej cięciwę *CD*. Niech *M*, *N* będą odpowiednio punktami przecięcia się prostych *CB*, *AD*, oraz prostych *AC*, *BD*. Jakie jest miejsce geometryczne punktów *M*, *N*, jeżeli cięciwa *CD* przesuwa się, pozostając równoległa do *AB*?

B. O kołach, przechodzących przez trzy punkty lub stycznych do trzech prostych.

§ 121. Twierdzenie. *Trzy punkty, nie leżące na jednej prostej, wyznaczają okrąg koła.*

Innemi słowy: przez trzy punkty, nie leżące na prostej, przechodzi zawsze okrąg koła i zawsze tylko jeden okrąg.



Rys. 88.

Istotnie, jeżeli dane punkty *A*, *B*, *C* nie leżą na jednej prostej, wówczas osie symetrji odcinków *AB*, *BC* muszą się przeciąć (gdyż w przeciwnym razie linja *ABC* nie byłaby łamana); niech *O* będzie tym punktem przecięcia. Punkt *O* jest równo odległy od wszystkich trzech punktów *A*, *B*, *C*, ponieważ pierwsza oś symetrji jest miejscem geometrycznem punktów równo odległych od *A* i *B*, druga zaś oś jest miejscem punktów równo odległych od *B* i *C*.

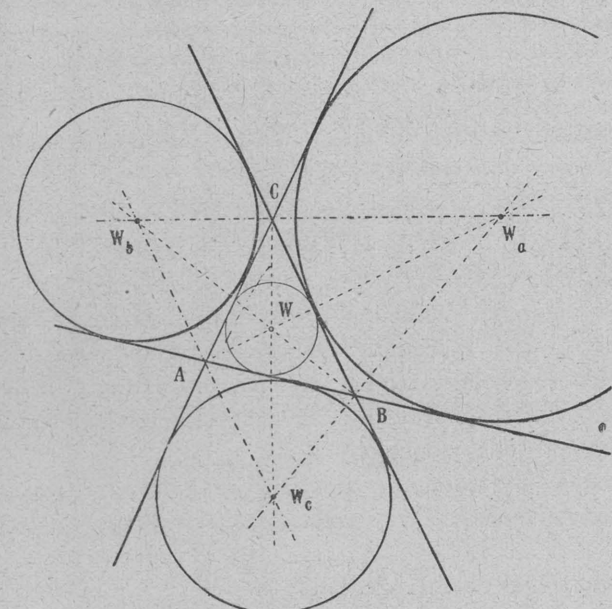
Wniosek. *Dwa okręgi nie mogą mieć więcej niż dwa punkty spólne.*

§ 122. Określenie. *Opisanym na wielokącie nazywamy okrąg koła, przechodzący przez wszystkie wierzchołki wielokąta. Wpisanym w wielokąt nazywamy okrąg koła, styczny do wszystkich boków wielokąta.* Wobec tego powyższe twierdzenie da się jeszcze wysłowić w następujący sposób: *na każdym trójkącie można opisać koło, ale tylko jedno.*

§ 123. Twierdzenie. *Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem koła, wpisanego w trójkąt.*

Niech będzie dany $\triangle ABC$. Poprowadźmy dwusieczne kątów $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BAC$. Przedewszystkiem powiadam, że dwusieczne te przecinają się, gdyż suma kątów jednostronnych wewnętrznych $\sphericalangle WBA + \sphericalangle BAW$ jest mniejsza od dwóch kątów prostych (dlaczego?).

Dalej dwusieczna *BW* jest miejscem geometrycznem punktów równo odległych od boków *a* i *c* trójkąta; tak samo dwusieczna *AW* jest miejscem punktów równo odległych od boków *c* i *b*, a więc punkt *W*, w którym przecinają się dwusieczne, musi być równo odległy od wszystkich trzech boków trójkąta.



Rys. 89.

Wynika stąd: 1-o że dwusieczna trzeciego kąta musi przejść przez punkt *W*, gdyż na niej leżą wszystkie punkty równo odległe od boków *a* i *b*;

2-o że jeśli z punktu *W* poprowadzimy prostopadłą do któregokolwiek boku i odcinkiem, równym tej prostopadłej, zakreślimy koło, wówczas koło to musi być styczne do wszystkich trzech boków trójkąta.

§ 124. Twierdzenie. *Dwusieczne kątów zewnętrznych przy którychkolwiek dwóch wierzchołkach trójkąta i dwusieczna kąta wewnętrznego przy trzecim wierzchołku przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem koła stycznego do boku trójkąta i do przedłużenia dwu drugich boków.*

Np. dwusieczne BW_a, CW_a oraz AW_a spotykają się w jednym punkcie. Dowód przeprowadzi czytelnik sam, wzorując się na dowodzie poprzedniego twierdzenia.

Uwaga. Powyższe dwa twierdzenia można ująć w jedno następujące.

Twierdzenie. *Miejsce geometryczne punktów płaszczyzny, równo odległych od trzech prostych, które przecinają się parami w trzech punktach nie leżących na jednej prostej, składa się z czterech punktów.*

Są to na rys. 89 punkty W, W_a, W_b, W_c.

Określenie. Trzy koła, o których mowa w twierdzeniu niniejszego paragrafu, nazywamy *zawpisanemi* w trójkąt $\triangle ABC$.

§ 125. Przyglądając się rysunkowi 89, dostrzegamy ciekawy fakt. W trójkącie $\triangle W_a W_b W_c$ odcinki AW_a, BW_b, CW_c są wysokościami (d l a c z e g o?); przed chwilą widzieliśmy, że przecinają się one w jednym punkcie W, gdyż są zarazem dwusiecznemi w trójkącie $\triangle ABC$. Jeżeli na tym samym rysunku weźmiemy pod uwagę jakikolwiek inny trójkąt, np. rozwartokątny $\triangle W_a W_b W$, dostrzeżemy również, że trzy jego wysokości przecinają się w jednym punkcie, mianowicie w punkcie W_c*).

Powstaje pytanie, czy dostrzeżona własność jest ogólna? czy w każdym trójkącie trzy wysokości przecinają się w jednym punkcie?

Dowiedziemy zaraz, że odpowiedź na to pytanie wypada twierdząco.

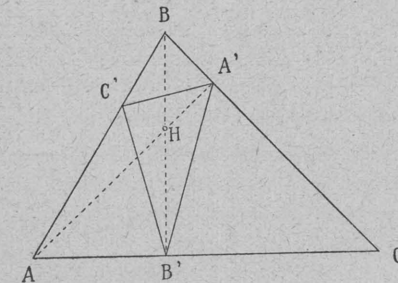
§ 126. Twierdzenie. *Trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie* (który nazywa się o r t o c e n t r e m t r ó j k ą t a).

W trójkącie danym $\triangle ABC$ prowadzimy dwie wysokości AA' i BB', łączymy punkty A' i B' i budujemy kąty $\sphericalangle BB'C'$ i $\sphericalangle AA'C'$, odpowiednio równe kątom $\sphericalangle BB'A'$ i $\sphericalangle AA'B'$. W ten sposób otrzymujemy trójkąt $\triangle A'B'C'$.

Przedewszystkiem dowiedziemy, że wierzchołek C' tego trój-

*) Należy zbadać inne trójkąty na tym samym rysunku.

kąta leży na prostej AB. Istotnie, w trójkącie $\triangle A'B'C'$ prosta AA' jest dwusieczną wewnętrzną, prosta zaś AC, jako prostopadła do dwusiecznej wewnętrznej BB', musi być dwusieczną zewnętrzną. Na mocy twierdzenia § 124 przez punkt A musi przejść dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku C'.



Rys. 90.

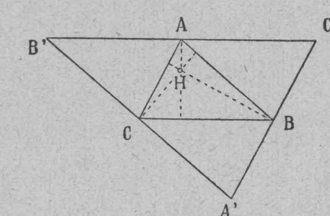
Tak samo BB' jest dwusieczną wewnętrzną, a BC dwusieczną zewnętrzną, a więc przez B musi przejść dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku C'. Jak widzimy, dwusieczna tego kąta zewnętrznego przechodzi jednocześnie przez A i przez B, a więc zlewa się z prostą AB i wierzchołek C' musi leżeć na jej prostej.

Jeżeli teraz poprowadzimy dwusieczną kąta wewnętrznego $\sphericalangle A'C'B'$, musi ona przejść zarówno przez H (§ 123), jak przez C (§ 124), a prócz tego musi być prostopadła do AB, zatem jest ona zarazem trzecią wysokością w $\triangle ABC$.

Tak więc wszystkie trzy wysokości przecinają się w jednym punkcie H.

Przytaczamy tu inny jeszcze dowód, podany przez matematyka niemieckiego G a u s s a.

Przez wierzchołki trójkąta $\triangle ABC$ poprowadźmy równoległe do przeciwległych boków. Tworzą one nowy trójkąt $\triangle A'B'C'$, przyczem punkty A, B, C są środkami boków nowego trójkąta.



Rys. 91.

Istotnie, figura $ABCB'$ jest równoległobokiem, a więc $B'C = AB$. Ale figura $ABA'C$ jest też równoległobokiem, zatem $AB = CA'$, skąd $B'C = CA'$. W taki sam sposób dowiedziemy, że B i A są środkami boków $A'C'$ oraz $C'B'$.

Jeżeli teraz w punktach A, B, C wystawimy prostopadłe do boków trójkąta $\triangle A'B'C'$, muszą one przeciąć się w jednym punkcie, a to na mocy twierdzenia § 121. Ale te same prostopadłe są zarazem wysokościami w trójkącie $\triangle ABC$ (d l a c z e g o?), zatem wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

§ 127. W ten sposób poznaliśmy już cztery rodzaje p u n k t ó w o s o b l i w y c h t r ó j k ą t a:

środek ciężkości G, t. j. punkt przecięcia się trzech środkowych (§ 81);

ortocentr H, t. j. punkt przecięcia się trzech wysokości (§ 126);
środek koła opisanego O, t. j. punkt przecięcia osi symetrji boków (§ 121);
środek koła wpisanego W, t. j. punkt przecięcia dwusiecznych wewnętrznych (§ 123);

3 *środki kół zawpisanych* W_a, W_b, W_c, z których każdy jest punktem przecięcia dwóch dwusiecznych zewnętrznych i jednej wewnętrznej (§ 124).

W celu łatwiejszego porozumienia się będziemy je stale oznaczali temi samemi literami.

Ćwiczenia XVI. 1. Zbudować trójkąt, mając dane na rysunku spodki trzech jego wysokości.

2. Zbudować trójkąt, mając dane na rysunku środki trzech jego boków.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

3. A, b, ρ. 4. A, B, ρ. 5. A, h_b, ρ.

6. Suma odległości trzech wierzchołków trójkąta od dowolnej prostej, nie przecinającej konturu trójkąta, jest trzy razy większa niż odległość środka ciężkości trójkąta od tej samej prostej.

Jak należy zmienić wysłowienie twierdzenia, aby pozostało ono prawdziwe i wówczas, gdy prosta przecina kontur trójkąta.

7. Jeżeli w $\triangle ABC$ ze środka każdego boku poprowadziliśmy prostopadłe do dwu boków, wówczas 1-o prostopadłe te przecinają się parami na wysokościach trójkąta $\triangle ABC$; 2-o prostopadłe, poprowadzone do tego samego boku, są sobie równe i każda z nich równa się połowie odpowiedniej wysokości trójkąta $\triangle ABC$; 2-o punkty przecięcia się prostopadłych są p u n k t a m i E u l e r a*) w trójkącie $\triangle ABC$.

C. O położeniu dwóch kół względem siebie.

§ 128. Określenie. *Linją środków* dwóch kół będziemy nazywali prostą, łączącą ich środki.

Odległością środków dwóch kół będziemy nazywali odcinek, łączący ich środki.

§ 129. Ponieważ każda średnica jest osią symetrji koła, zatem linja środków dwu kół jest osią symetrji obu tych kół. Stąd wynika bezpośrednio prawdziwość następującego twierdzenia.

Twierdzenie. *Jeżeli dwa okręgi mają spólny punkt, leżący po jednej stronie linji środków, wówczas mają drugi jeszcze punkt spólny, symetryczny z pierwszym względem linji środków.*

---

*) Punktem Eulera nazywamy punkt, który dzieli na połowę część wysokości, zawartą między ortocentrem a wierzchołkiem.

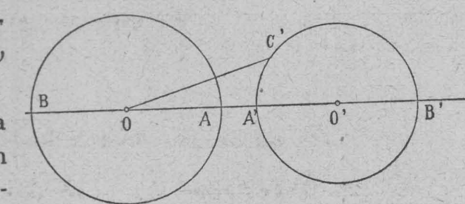
§ 130. Twierdzenie. *Jeżeli dwa okręgi mają punkt spólny leżący na linji środków, wówczas nie mają żadnych innych punktów spólnych.*

Istotnie, gdyby okręgi dane O, O' miały punkt spólny A, leżący na linji środków, a prócz tego inny jeszcze punkt B, nie leżący na tej linji, wówczas (na mocy poprzedniego twierdzenia) miałyby jeszcze trzeci punkt spólny B, symetryczny z punktem B, a więc nie mogłyby być dwoma różnemi okręgami, lecz musiałyby zlewać się (n a m o c y j a k i e g o t w i e r d z e n i a?).

Jeżeli natomiast przypuścimy, że koła O, O' mają dwa punkty spólne A, B, leżące oba na linji środków, wówczas mają spólną średnicę AB, a więc zlewają się.

Określenie. Jeżeli dwa okręgi mają tylko jeden punkt spólny, powiadamy, że s ą o n e d o s i e b i e s t y c z n e, przyczem rozróżniamy d w a r o d z a j e s t y c z n o ś c i: w e w n ę t r z n ą i z e w n ę t r z n ą stosownie do tego, czy jeden z tych okręgów leży wewnątrz drugiego, czy też każdy z nich leży zewnątrz drugiego (rys. 93 i 95).

§ 131. Twierdzenie. *Jeżeli odległość środków dwóch okręgów jest większa od sumy ich promieni, wówczas okręgi nie mają wcale punktów spólnych.*



Rys. 92.

Niech będą dane dwa koła O, O'. Oznaczmy ich promienie przez r, r', odległość zaś środków przez s. Przypuśćmy również, że linja środków przecina nasze koła odpowiednio w punktach A, B oraz A', B'.

Zgodnie z założeniem mamy:

$$s > r + r',$$

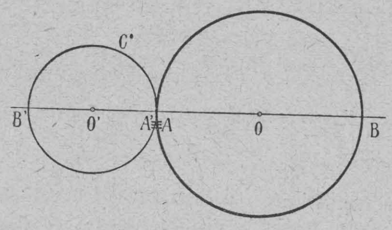
a więc: $$OA' = s - r' > r.$$

Widzimy tedy, że punkt A' leży zewnątrz koła O, a ponieważ OA' jest normalną, poprowadzoną z O do okręgu O', zatem każdy inny punkt C' tego okręgu leży tem bardziej zewnątrz koła O, gdyż: $$OA' < OC'.$$

§ 132. Twierdzenie. *Jeżeli odległość środków dwóch okręgów równa się sumie promieni, wówczas okręgi są do siebie zewnętrznie styczne.*

Jeżeli $s = r + r'$,
wówczas okręgi mają spólny punkt A na linji środków, a więc są do siebie styczne.

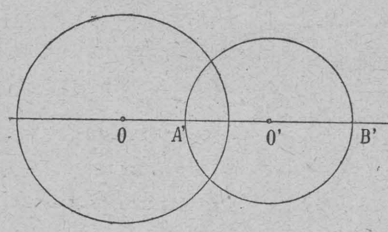
Jeżeli na okręgu O' obierzemy dowolny punkt C', będziemy mieli nierówność $OA < OC'$ (dlaczego?), okręgi są tedy istotnie zewnętrznie styczne.



Rys. 93.

§ 133. Twierdzenie. *Jeżeli odległość środków jest mniejsza od sumy, lecz większa od różnicy promieni, wówczas okręgi mają dwa punkty spólne* (czyli przecinają się).

Załóżmy, że $r > r'$ i że $r - r' < s < r + r'$.

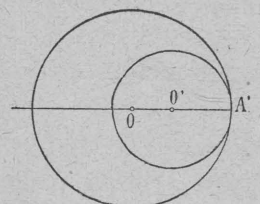


Rys. 94.

Z pierwszej nierówności wynika, że $s + r' > r$
czyli $OO' + O'B' = OB' > r$,
zatem punkt B' okręgu O' leży zewnątrz koła O.

Z drugiej nierówności mamy $s - r' < r$
czyli $OO' - O'A' = OA' < r$,
zatem punkt A' okręgu O' znajduje się wewnątrz koła O.

Ponieważ okrąg O' łączy dwa punkty A', B', z których jeden leży wewnątrz, drugi zewnątrz okręgu O, zatem okręgi te mają dwa punkty spólne (§ 35, str. 21).



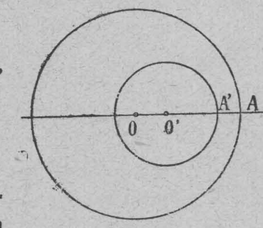
Rys. 95.

§ 134. Twierdzenie. *Jeżeli odległość środków równa się różnicy promieni, wówczas okręgi są wewnętrznie do siebie styczne.*

Jeżeli $s = r - r'$,
czyli $r = s + r' = OO' + O'A'$, wówczas punkt A', w którym linja środków przecina okrąg O', musi leżeć na okręgu kola O.

Wszystkie inne punkty okręgu O' muszą leżeć wewnątrz koła O, gdyż odległość ich od punktu O jest mniejsza od normalnej OA'.

§ 135. Twierdzenie. *Jeżeli odległość środków jest mniejsza od różnicy promieni, wówczas okręgi nie mają punktów spólnych i jeden okrąg zawiera się całkowicie wewnątrz drugiego.*



Rys. 96.

Jeżeli $s < r - r'$ czyli $OO' < OA - O'A$,
wówczas mamy
$$OO' + O'A' < r,$$
a więc punkt A' leży wewnątrz koła O. Ponieważ OA' jest normalną, przechodzącą przez środek koła O', zatem z pośród wszystkich punktów okręgu O' punkt A' jest najbardziej odległy od punktu O. Stąd wynika, że wszystkie inne punkty okręgu O' tem bardziej muszą leżeć wewnątrz koła O.

§. 136. Porównywując odległość środków dwóch kół z ich promieniami, dowiedliśmy pięciu następujących twierdzeń:

jeżeli $s > r + r'$, *każdy okrąg leży zewnątrz drugiego;*
„ $s = r' + r$ *okręgi są zewnętrznie styczne do siebie;*
„ $r + r' > s > r - r'$, *okręgi przecinają się w dwóch punktach;*
„ $s = r - r'$, *okręgi są wewnętrznie do siebie styczne;*
„ $s < r - r'$, *jeden okrąg leży całkowicie wewnątrz drugiego.*

Jak widzimy, wyczerpaliśmy tu wszelkie możliwości: innych przypuszczeń co do odległości środków dwu kół uczynić nie można. Ponieważ zarówno wszystkie założenia naszych twierdzeń, jak i płynące z nich wnioski wyłączają się nawzajem, zatem wszystkie pięć twierdzeń mamy prawo odwrócić.

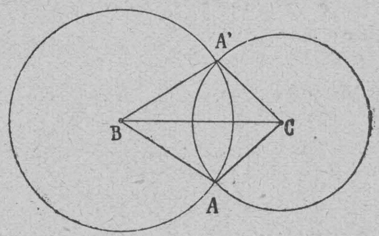
Czytelnik sam sformułuje te twierdzenia odwrotne.

§ 137. Możemy teraz rozwiązać zasadnicze zadanie konstrukcyjne, dotyczące budowania trójkątow.

Zadanie. *Zbudować trójkąt tak, by boki jego równały się trzem danym odcinkom a, b, c.*

Ustaliliśmy poprzednio (§ 68), że każdy bok trójkąta jest mniejszy od sumy dwu drugich jego boków, lecz większy od ich różnicy. Zadanie byłoby niemożliwe do rozwiązania, gdyby dane odcinki a, b, c nie spełniały tego warunku; przypuśćmy tedy, że warunek ów jest spełniony.

Na dowolnej prostej odkładamy odcinek a. W ten sposób mamy już wierzchołki B, C trójkąta. Z wierzchołków tych, jako ze środków, kreślimy koła $(B)c$ oraz $(C)b$. Na mocy § 133 okręgi tych kół przecinają się w dwóch punktach, leżących symetrycznie względem linji środków BC. Mamy tedy trójkąty $\triangle BA'C$ oraz $\triangle BAC$, leżące po dwóch stronach linji środków i równe sobie; każdy z nich odpowiada warunkom zadania.



Rys. 97.

Uwaga. W § 68 dowiedliśmy, że w trójkącie każdy bok musi być większy od różnicy, lecz mniejszy od sumy dwu drugich boków. Poznaliśmy wówczas w a r u n e k k o n i e c z n y i s t n i e n i a t r ó j k ą t a: o ile trzy jakieś odcinki nie spełniają tego warunku, nie można z nich zbudować trójkąta.

Pozostało jednak do rozstrzygnięcia pytanie: czy z każdych trzech odcinków, spełniających powyższy warunek, można zbudować trójkąt? Innemi słowy: czy jest to zarazem w a r u n e k w y s t a r c z a j ą c y do istnienia trójkąta, czy też są jeszcze jakieś inne warunki, którym muszą czynić zadość boki trójkąta?

Konstrukcja niniejszego zadania wykazała, że żadnych dodatkowych warunków niema, że więc nierówności

$$b - c < a < b + c$$

są w a r u n k i e m k o n i e c z n y m i w y s t a r c z a j ą c y m do istnienia trójkąta.

Ćwiczenia XVII. 1. Przez punkt dany na okręgu poprowadzić cięciwę, równą danemu odcinkowi.

2. Z danego punktu zewnętrznego poprowadzić sieczną, na której koło O wyznaczyłoby cięciwę, równą danemu odcinkowi a.

3. Jakie jest miejsce geometryczne środków kół o promieniu r, stycznych do danej prostej AB?

4. Jakie jest miejsce geometryczne środków kół, zakreślonych promieniem r i stycznych do danego koła O?

5. Dane są dwa okręgi O, O'; wykreślić trzeci okrąg, styczny do dwu danych i mający promień równy danemu odcinkowi r.

6. Dany jest okrąg O i prosta m; promieniem, równym danemu odcinkowi r, wykreślić okrąg, styczny do danego okręgu i do danej prostej. Zbadać szczegółowo zadanie w zależności od położenia prostej m i od wielkości promienia r.

7. Dana jest prosta m i punkt A, nie leżący na niej. Wykreślić okrąg, przechodzący przez A i styczny do prostej m. Ile takich okręgów wykreślić można? Gdzie leżą ich środki? Dodaj jeszcze jeden warunek tak, by zadanie stało się oznaczone.

8. Wykreślić okrąg, przechodzący przez dany punkt A i styczny do danego okręgu O. Spróbuj uczynić to zadanie oznaczonem.

9. Jakie jest miejsce geometryczne środków kół, stycznych do danego okręgu w danym jego punkcie?

10. Dany jest okrąg O, na nim punkt A oraz drugi punkt B, nie leżący na okręgu. Wykreślić taki okrąg, który przechodziłby przez punkt B i był w punkcie A styczny do okręgu O [W s k a z ó w k a: jakie jest miejsce środków kół, przechodzących przez A i B?].

11. Dwa koła, styczne do siebie wewnętrznie lub zewnętrznie w punkcie A, mają w tym punkcie wspólną prostą styczną.

12. Dany jest kąt $\sphericalangle \alpha$ i koło O, wpisane w ten kąt; wpisać w ten sam kąt drugie koło, które byłoby zarazem styczne do koła O.

13. W dany odcinek kołowy wpisać koło tak, by dotykało ono cięciwy w jej środku. (Określenie odcinka kołowego w § 138.).

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

14. a, c, s_c. 15. a, u_a, d_C. 16. a, s_b, s_c. 17. b, s_b, s_c.

Zbudować równoległobok $ABCD$, mając dane:

18. a, b, e. 18a. a, e, f.

---

19. Jakie jest miejsce geometryczne punktów takich, że styczne, poprowadzone z nich do danego okręgu, równają się danemu odcinkowi a?

20. Zbudować miejsce geometryczne, o którem mowa w poprzedniem zadaniu, mając dane: promień r koła i długość stycznej m.

21. Dane jest koło O i w niem cięciwa AB; na przedłużeniu tej cięciwy znaleźć taki punkt M, żeby styczne, poprowadzone z tego punktu, równały się danemu odcinkowi d.

D. O kątach w kole i o łukach.

§ 138. Określenia. *Kątem środkowym nazywamy kąt* (wklęsły lub wypukły), *utworzony przez dwa promienie tego samego koła. Wycinkiem kołowym nazywamy figurę, ograniczoną przez dwa promienie koła i przez łuk, zawarty między temi pro-*

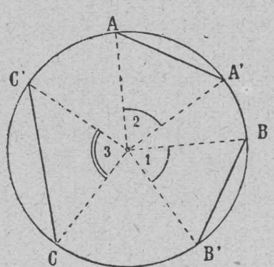
mieniami. Odcinkiem kołowym nazywamy figurę, ograniczoną przez łuk koła i przez cięciwę, podpierającą ten łuk).*

§ 139. **Określenia.** *Równemi łukami tego samego okręgu (lub równemi wycinkami tego samego koła) będziemy nazywali każde dwa jego łuki (lub wycinki), które zawierają się między ramionami równych kątów środkowych.*

Jeżeli w tem samem kole mamy dane nierówne kąty środkowe, wówczas łuk, zawarty między ramionami większego kąta, nazywać będziemy większym.

Z określenia naszego wynika bezpośrednio, że średnica dzieli okrąg na dwa równe łuki (t. zw. półokręgi), koło zaś na dwa równe wycinki (t. zw. półkola).

§ 140. **Twierdzenie.** *W tem samem kole:* 1) *równym kątom środkowym wypukłym (a więc i równym łukom) odpowiadają równe cięciwy;* 2) *większemu kątowi środkowemu wypukłemu (a więc i większemu łukowi) odpowiada większa cięciwa.*



Rys. 98.

Jeżeli mamy (rys. 98)

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2,$$

wówczas $\triangle OAA' \equiv \triangle OBB'$ (d l a c z e g o ?); jeżeli natomiast mamy

$$\sphericalangle 3 > \sphericalangle 2,$$

wówczas zważywszy, że boki OA, OA' trójkąta $\triangle AOA'$ równają się bokom OC' OC' trójkąta $\triangle OCC'$, ale kąty między temi bokami nie są równe sobie, musi być (na mocy § 103)

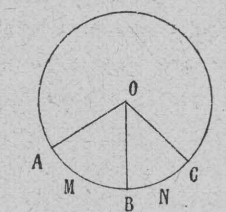
$$CC' > AA'.$$

§ 141. Twierdzenia, zawarte w poprzednim paragrafie, tworzą układ zamknięty (co czytelnik szczegółowo wykaże), a więc twierdzenia odwrotne są prawdziwe.

Twierdzenia odwrotne. *W tem samem kole równym cięciwom odpowiadają równe kąty środkowe wypukłe (i równe łuki), większej zaś cięciwie odpowiada większy kąt środkowy wypukły (i większy łuk).*

*) O cięciwie, łączącej końce łuku, powiadamy, że p o d p i e r a ten łuk. O kącie środkowym, zawierającym między ramionami dany łuk, mówimy niekiedy, że w s p i e r a s i ę na tym łuku.

§ 142. **Określenia.** Jeśli dwa łuki $\breve{AMB}$ i $\breve{BNC}$ tego samego koła nie mają punktów spólnych, oprócz końca B, wówczas łuk $\breve{ABC}$ nazywamy s u m ą t a m t y c h d w u ł u k ó w.



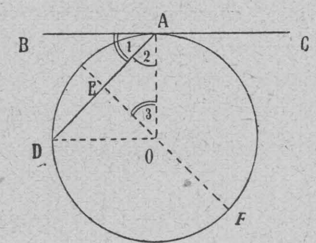
Rys. 99.

Analogicznie, r ó ż n i c ą d w u ł u k ó w $\breve{ABC} - \breve{BNC}$ nazywamy taki łuk $\breve{AMB}$, który po dodaniu do odjemnika $\breve{BNC}$ daje odjemną $\breve{ABC}$.

§ 143. **Twierdzenie.** *Kąt między styczną i cięciwą, przechodzącą przez punkt styczności, równa się połowie kąta środkowego, opierającego się na łuku, zawartym między ramionami pierwszego kąta.*

Niech będzie dane koło O, w niem cięciwa DA i styczna BAC. Powiadam przedewszystkiem, że

$$\sphericalangle DAB = \tfrac{1}{2} \sphericalangle AOD.$$



Rys. 100.

Jakoż poprowadźmy $OE \perp DA$. W trójkącie prostokątnym $\triangle AEO$ kąty $\sphericalangle 2$ i $\sphericalangle 3$ dopełniają się do kąta prostego, ale tak samo $\sphericalangle 1$ i $\sphericalangle 2$ dopełniają się (d l a c z e g o ?), a więc

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3\text{*}).$$

Powiadam dalej, że $\sphericalangle CAD$ równa się połowie kąta wklęsłego $\sphericalangle AOD$.

Istotnie, promień OF, będący przedłużeniem dwusiecznej OE, jest dwusieczną kąta wklęsłego $\sphericalangle AOD$. Wystarczy tedy dowieść, że $\sphericalangle CAD = \sphericalangle AOF$*).

Otóż równość ta jest oczywista, gdyż

$$\sphericalangle CAD + \sphericalangle 1 = \sphericalangle FOA + \sphericalangle 3 = \text{kątowi półpełnemu},$$

a poprzednio dowiedliśmy, że $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$.

§ 144. **Określenie.** *Kątem wpisanym nazywamy kąt wypukły, utworzony przez dwie cięciwy, których punkt przecięcia leży na okręgu.*

Twierdzenie. *Kąt wpisany równa się połowie kąta środkowego, opierającego się na tym samym łuku.*

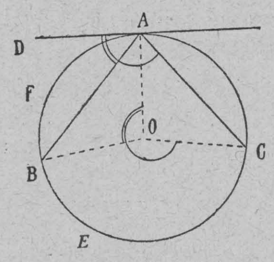
Niech będzie dany kąt wpisany $\sphericalangle BAC$. Powiadam, że

$$\sphericalangle BAC = \tfrac{1}{2} \sphericalangle BOC.$$

*) Oczywiście, równość ta wynika również ze spostrzeżenia, że kąty $\sphericalangle 1$ i $\sphericalangle 3$ mają ten sam zwrot, a ramiona ich są odpowiednio do siebie prostopadłe (§ 77). To samo dotyczy kątów $\sphericalangle CAD$ i $\sphericalangle AOF$.

Aby tego dowieść, wystarczy przez punkt A poprowadzić styczną DA i zauważyć, że mamy

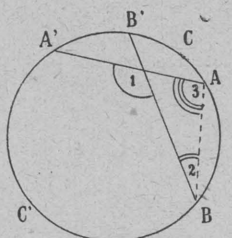
$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC - \sphericalangle DAB.$$



Rys. 101.

Na mocy poprzedniego twierdzenia kąty $\sphericalangle DAC$ i $\sphericalangle DAB$ są dwa razy mniejsze od kątów środkowych, opierających się odpowiednio na łukach $A\breve{B}C$ i AFB, a więc różnica ich jest dwa razy mniejsza od kąta środkowego, opierającego się na różnicy łuków $ABC-AFB$ czyli na łuku $B\breve{E}C$. Tak więc istotnie $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\sphericalangle BOC$.

§ 145. Twierdzenie. *Kąt między dwiema siecznemi, przecinającemi się wewnątrz koła, równa się sumie dwu kątów wpisanych, wspierających się na łukach, które są zawarte między ramionami pierwszego kąta i przedłużeniami tych ramion.*



Rys. 102.

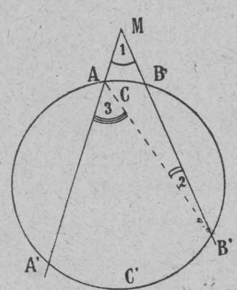
Niech będą dane dwie sieczne AA', BB', przecinające się wewnątrz koła w punkcie M.

W trójkącie $\triangle AMB$ kąt $\sphericalangle 1$ jest zewnętrzny,

a więc $\quad \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3,$

te zaś dwa kąty są oba wpisane i opierają się: jeden na łuku $A\breve{C}B'$, drugi na łuku $B\breve{C}'A'$.

§ 146. Twierdzenie. *Kąt między dwiema siecznemi, które przecinają się w punkcie zewnętrznym, równa się różnicy dwóch kątów wpisanych, opierających się na łukach, zawartych między ramionami pierwszego kąta.*



Rys. 103.

Jeżeli mamy dwie sieczne MAA', MBB' i jeżeli połączymy punkty A i B', wówczas w trójkącie $\triangle AMB'$ kąt $\sphericalangle 3$ jest zewnętrzny, mamy więc

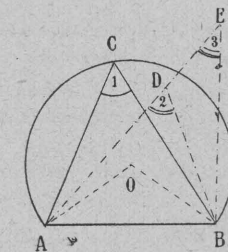
$$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 1,$$

zatem $\quad \sphericalangle 1 = \sphericalangle 3 - \sphericalangle 2,$

kąty zaś $\sphericalangle 2$ i $\sphericalangle 3$ są oba wpisane i opierają się: jeden na łuku ACB, drugi na $A'\breve{C}'B'$.

§ 147. Wyniki, osiągnięte w trzech ostatnich paragrafach (§ 144, 145, 146) dadzą się streścić w następujący sposób:

Jeżeli na odcinku AB, jako na cięciwie, wykreślimy łuk, wówczas jakikolwiek obralibyśmy punkt C na tym łuku, zawsze kąt wpisany $\sphericalangle 1$ musi być stały, gdyż równa się on połowie stałego kąta środkowego $\sphericalangle AOB$*). Jeżeli natomiast obierzemy dowolny punkt D wewnątrz koła lub dowolny punkt E zewnątrz koła, otrzymamy kąty $\sphericalangle 1$ i $\sphericalangle 3$, z których pierwszy jest większy od kąta wpisanego $\sphericalangle ACB$, drugi zaś jest mniejszy od tego samego kąta wpisanego.

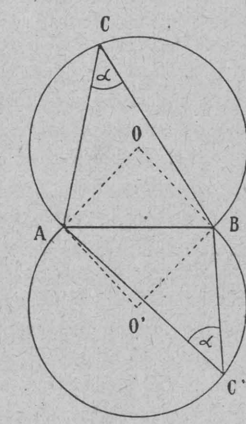


Rys. 104.

Mamy tedy znów układ twierdzeń zamknięty. Twierdzenia odwrotne muszą być prawdziwe, wobec czego mamy prawo wypowiedzieć następujące

Twierdzenie. *Miejsce geometryczne punktów płaszczyzny, z których dany odcinek widać pod danym kątem, składa się z dwóch równych łuków kół, położonych symetrycznie względem danego odcinka i obejmujących dany kąt***).

Np. na rys. 105 miejsce geom. punktów, z których widać odcinek AB pod kątem $\sphericalangle a$, składa się z dwóch łuków $A\breve{C}B$ i $A\breve{C}'B$.



Rys. 105.

W szczególności mamy następujący wniosek, który często bywa potrzebny w rozmaitych zagadnieniach:

Wniosek. *Miejscem geometrycznem punktów, z których dany odcinek widać pod kątem prostym, jest okrąg koła, wykreślony na tym odcinku, jako na średnicy.*

§ 148. Zadanie. *Na danym odcinku AB wykreślić łuk, obejmujący dany kąt $\sphericalangle C$.*

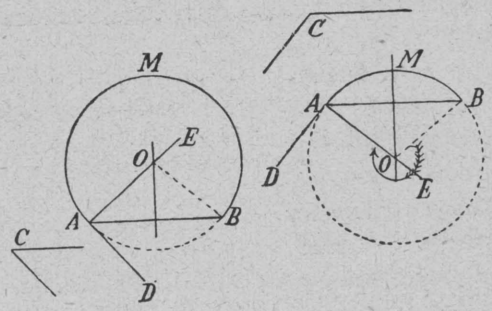
Przy końcu A danego odcinka budujemy $\sphericalangle BAD = \sphericalangle C$,

---

*) O łuku ACB powiadamy, że obejmuje on kąt stały $\sphericalangle ABC$.

**) Jeżeli punkt C nie leży na prostej AB, wówczas powiadamy, że z punktu C widać odcinek AB pod kątem $\sphericalangle ACB$.

wystawiamy prostopadłą $AE \perp AD$ i prowadzimy oś odcinka AB. Punkt O, w którym ta oś przecina prostą AE, jest środkiem szukanego koła. Pozostaje już tylko wykreślić koło $(O)\ A$ i obrać na niem łuk po odpowiedniej stronie cięciwy AB.



Rys. 106.

Łatwo przekonać się, że wykreślony łuk istotnie obejmuje kąt dany $\sphericalangle C$. Ponieważ mamy $AD \perp AO$, zatem AD jest styczną do koła, a więc kąt między AD i cięciwą AB (czyli kąt $\sphericalangle BAD = \sphericalangle C$) równa się połowie kąta środkowego $\sphericalangle AOB$; ale połowie tego samego kąta środkowego równa się każdy kąt, wpisany w łuk $A\overset{\frown}{M}B$.

Ćwiczenia XVIII. 1. Łuki, zawarte między dwiema równoległemi cięciwami, są sobie równe.

2. Dany łuk podzielić na połowy.

3. Jeżeli dwa okręgi są do siebie wewnętrznie lub zewnętrznie styczne w punkcie A, wówczas każda sieczna, przechodząca przez punkt A, wyznacza na tych okręgach **łuki podobne** (t. zn. łuki, obejmujące taki sam kąt).

4. Koła O, O' są do siebie wewnętrznie styczne w punkcie M, przyczem koło O' ma za średnicę promień OM pierwszego koła. Dowieść, że mniejsze koło dzieli na połowy każdą cięciwę większego koła, przechodzącą przez punkt M.

4a. Wypowiedzieć i udowodnić twierdzenie odwrotne.

4b. Powyższe dwa twierdzenia 4 i 4a (proste i odwrotne) ująć razem, posługując się pojęciem miejsca geometrycznego.

5. Czy twierdzenie 4 pozostaje prawdziwe, jeżeli koło O' przechodzi wprawdzie przez środek O pierwszego koła, nie jest jednak styczne do niego i jeżeli punkt M, z którego prowadzimy sieczne, leży na okręgu koła O' i jest w niem końcem linji środków OO'?

6. Dwa okręgi O, O' przecinają się w punktach K, L; jeżeli poprowadzimy średnice LOM, $LO'N$, wówczas punkty M, K, N leżeć muszą na jednej prostej.

7. Przez stały punkt A, leżący wewnątrz danego koła, prowadzimy ruchomą cięciwę; co kreśli jej środek, gdy cięciwa obraca się dokoła punktu A?

8. Dany jest pęk prostych z wierzchołkiem w punkcie A oraz punkt B; jakie jest miejsce geometryczne spodków wszystkich prostopadłych, poprowadzonych z B do prostych pęku?

8a. Co stanie się, jeżeli zamiast prostopadłych prowadzić będziemy pochyłe, tworzące z prostemi pęku kąt $\sphericalangle a$?

8b. W trójkącie $\triangle LMN$ bok MN jest stały, natomiast wszystkie inne jego elementy są zmienne; co kreślą spodki trzech wysokości trójkąta?

9. W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$ przeciwprostokątna AB jest stała, dwa drugie boki są zmienne; co kreślą środki przyprostokątnych?

[Wykonać rysunek, biorąc $AB = 8$ cm.; obrać kilka różnych położeń wierzchołka C kąta prostego, wykreślić trójkąt $\triangle ABC$, odpowiadający każdemu z tych położeń, a w każdym z tych trójkątów wyznaczyć położenie środka M przyprostokątnej AC.]

10. Prowadząc w danem kole dwie równoległe cięciwy, AB, CD, otrzymujemy trapez równoramienny $ABCD$, wpisany w koło. Co kreślą środki jego boków i środki przekątnych, jeżeli wierzchołki A, B trapezu pozostają nieruchome, wierzchołki zaś C, D poruszają się po okręgu (tak jednak, że figura pozostaje trapezem równoramiennym)?

11. Na trójkącie $\triangle ABC$ opisujemy koło i prowadzimy dwusieczną kąta $\sphericalangle BAC$; dowieść, że gdy wierzchołek A porusza się po okręgu, dwusieczna przecina okrąg w stałym punkcie.

11a: W trójkącie $\triangle ABC$ oś symetrji boku BC przecina dwusieczną kąta $\sphericalangle BAC$ w punkcie D, leżącym na okręgu koła, opisanego na $\triangle ABC$.

11b. Jeżeli w $\triangle ABC$ bok BC oraz kąt $\sphericalangle A$ są stałe, inne zaś elementy trójkąta są zmienne, wówczas punkt D, w którym dwusieczna d_A przecina oś symetrji boku BC, jest stały.

12. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ środkowa s_c równa się połowie boku c, wówczas trójkąt jest prostokątny, a mianowicie kąt $\sphericalangle C$ jest prosty.

12a. W $\triangle ABC$, w którym kąt $\sphericalangle A$ jest prosty, kreślimy koło styczne do boków a, b i mające środek na boku c; koło to przecina bok c w punkcie M i jest styczne do przeciwprostokątnej w punkcie D. Jeżeli na przedłużeniu boku b odłożymy $CE = AC$, wówczas punkty M, E, D muszą leżeć na jednej rostej.

13. Po dwóch stronach spólnej cięciwy AB leżą dwa łuki (należące do dwu różnych kół). Na jednym z nich obieramy dowolny punkt C i prowadzimy z niego proste CA, CB, które przecinają drugi łuk w punktach D, E. Dowieść że łuk DE pozostaje stały, gdy punkt C porusza się po pierwszym łuku.

14. Z punktu zewnętrznego A prowadzimy do danego koła styczne AB, AC; punkt D jest dowolnym punktem okręgu. Dowieść, że suma kątów $\sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD$ jest stała, dopóki D, poruszając się na okręgu, znajduje się zewnątrz trójkąta $\triangle ABC$. Co zajdzie, gdy punkt D znajdzie się w wierzchołku trójkąta? wewnątrz trójkąta?

15. Dane są trzy punkty A, B, C, nie leżące na jednej prostej; nie znajdując środka koła ABC, wyznaczyć dowolną ilość punktów leżących na okręgu tego koła.

16. Dwa koła są wewnętrznie styczne w punkcie A. Niech cięciwa NM większego koła będzie styczna do mniejszego koła w punkcie S; dowieść, że $\sphericalangle MAS = \sphericalangle NAS$.

17. Jeżeli w trójkącie równobocznym $\triangle ABC$ dwusieczne kątów $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ przecinają okrąg koła opisanego w punktach A', B', wówczas boki CA, CB dzielą na trzy równe części cięciwę $A'B'$.

18. Jeżeli dwa równe koła O, O' przecinają się według cięciwy AB, wówczas okrąg, wykreślony na AB, jako na średnicy, jest miejscem geome-

trycznem środków wszystkich odcinków, wyznaczonych przez koła O, O' na prostych pęku, mającego wierzchołek w A (lub (B).

19. Uzasadnić następujący (najprostszy ze znanych) sposób kreślenia stycznej w danym punkcie na okręgu:

mając dany okrąg O i na nim punkt P, obieramy dowolny punkt A na okręgu i kreślimy koło $(A)\,P$, które przecina koło O w punktach P, R. Następnie kreślimy koło $(P)\,R$, które przecina koło $(A)\,P$ w punkcie S; prosta PS jest żądaną styczną.

Zbudować trójkąt ABC, mając dane:

20. a, A, h_a. 21. a, A, s_a. 22. $a, h_a, \sphericalangle(b, s_a)$.
23. r_a, r_b, C. 24. a, A, h_c. 25. $a, \sphericalangle(b, s_a), \sphericalangle(c, s_a)$.
26. $c, C, \sphericalangle(c, s_c)$. 27. $a, c, \sphericalangle(b, s_c)$. 28. $b, h_c, \sphericalangle(c, s_b)$.
29. u_a, u_b, C (porówn. zadanie 11). 30. $\sphericalangle(a, s_c), s_c, \sphericalangle(b, s_c)$. [Jeżeli środkową CC' przedłużymy i na przedłużeniu odłożymy $C'C''=CC'$, otrzymamy równoległobok $ABCB''$.]
31. $a, h_a, \sphericalangle(a\ s_c)$. 32. a, A, s_b.

33. W trójkącie $\triangle ABC$ przedłużamy bok AC i odkładamy $CD = CB$. Jeżeli bok AB jest nieruchomy, wierzchołek zaś C porusza się po płaszczyźnie tak, że kąt $\sphericalangle ACB$ pozostaje stały, co wówczas kreśli punkt D?

34. Zbudować trójkąt, mając dane $c, a+b, C$.

Zbudować równoległobok $ABCD$, mając dane:

35. e, f, A. 36. $f, A, \sphericalangle(e, f)$. 37. $a, \sphericalangle(b, e), \sphericalangle(a, f)$. [W s k a z ó w k a: porównaj zadanie 35 na str. 62.]

38. Przez dany punkt A poprowadzić sieczną tak, by odciąć na danym okręgu łuk, równający się $1/4$ części tego okręgu. Ogólniej: łuk, obejmujący dany kąt $\sphericalangle\alpha$.

39. Dane jest koło; znaleźć taki punkt zewnętrzny M, by z dwóch łuków, zawartych między stycznemi MA, MB, ten łuk, którego strona wklęsła zwrócona jest ku M, był dwa razy większy od drugiego łuku.

40. Przez punkt A przecięcia się dwóch kół poprowadzić sieczną BAC tak, by było $BA=AC$.

41. Znaleźć na płaszczyźnie punkt, z którego wszystkie trzy boki trójkąta byłoby widać pod równemi kątami.

42. Zbudować trapez równoramienny, mając dane dwie jego podstawy i kąt między przekątnemi.

43. Dowolny łuk AB został podzielony na ilekolwiek, np. na 10 równych części w punktach $C_1, C_2, \ldots C_9$, Drugi punkt podziału C_2 łączymy z ostatnim C_9 i przedłużamy cięciwę C_2C_9 aż do przecięcia się w punkcie J z prostą AB. Dowieść, że mamy $C_9J=AC_9$.

44. Uogólnić poprzednie zadanie. Jak należy łączyć punkty w trójkącie $\triangle AJC_k$, żeby przy J otrzymać kąt, 2, 3, 4... razy większy niż przy A.

45. Z punktu zewnętrznego M prowadzimy do danego koła styczną MP

i sieczną MAB. Punkt C niech będzie punktem przecięcia się dwusiecznej kąta $\sphericalangle APB$ z sieczną MAB. Dowieść, że $MP=MC$.

46. Dwusieczna każdego kąta trójkąta jest zarazem dwusieczną kąta między średnicą koła opisanego i wysokością, poprowadzonemi z tego samego wierzchołka.

47. Dany jest okrąg i na nim punkty D, S, W; wpisać trójkąt tak, by dwusieczna, średnica koła i wysokość, poprowadzone z jednego wierzchołka, przechodziły odpowiednio przez punkty D, S, W.

E. O czworobokach wpisanych i opisanych.

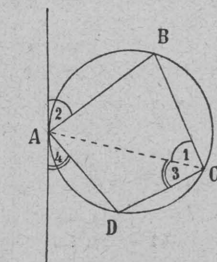
§ 149. **Twierdzenie.** *W czworoboku wpisanym w koło suma dwu przeciwległych kątów równa się kątowi półpełnemu.*

Aby się o tym przekonać, wystarczy z wierzchołka A czworoboku poprowadzić styczną do koła i zauważyć, że na mocy § 143 i 144, str. 99,

$$\sphericalangle 1=\sphericalangle 2,\quad \sphericalangle 3=\sphericalangle 4,$$

a więc

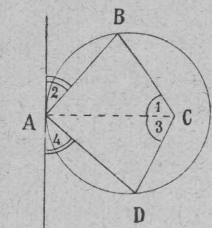
$\sphericalangle BCD+\sphericalangle BAD=\sphericalangle 2+\sphericalangle 4+\sphericalangle BAD=$ kątowi półpełnemu.



Rys. 107.

§ 150. **Twierdzenie przeciwne.** *Jeżeli czworobok nie daje się wpisać w koło, wówczas suma dwu przeciwległych kątów nie równa się kątowi półpełnemu.*

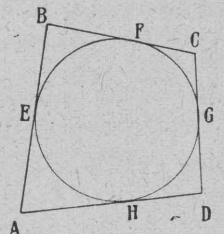
Przez wierzchołki A, B, D prowadzimy okrąg koła; wierzchołek musi się znaleźć albo wewnątrz, albo zewnątrz tego koła. Połączmy, jak poprzednio, A z C i poprowadźmy styczną w punkcie A. Jeżeli punkt C leży wewnątrz koła (jak na rys. 108), mamy $\sphericalangle 1 > \sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3 > \sphericalangle 4$ (d l a c z e g o?), a więc $\sphericalangle BCD+\sphericalangle BAD > 2\delta$, gdzie δ oznacza kąt prosty. Czytelnik przeprowadzi sam odpowiedni dowód w przypadku, gdy wierzchołek C leży zewnątrz koła ABD.



Rys. 108.

§ 151. **Twierdzenie.** *W czworoboku opisanym suma jednej pary boków przeciwległych równa się sumie drugiej pary.*

Jeżeli E, F, G, H są punktami styczności boków czworoboku $ABCD$ z okręgiem wpisanym, mamy wówczas



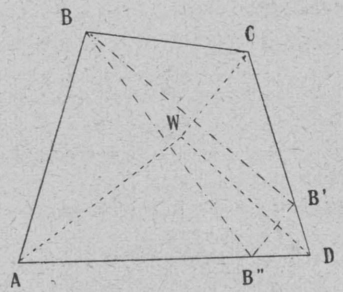
Rys. 109.

$$BE = BF$$
$$EA = AH$$
$$CG = CF$$
$$GD = DH.$$

Dodając do siebie te cztery równości, mamy

$$BA + CD = BC + AD.$$

§ 152. Twierdzenie odwrotne (w z g l ę d e m § 151). *Jeżeli suma jednej pary przeciwległych boków równa się sumie drugiej pary, wówczas w czworobok można wpisać koło.*



Rys. 110.

Niech będzie dany czworobok $ABCD$, w którym

$$AB + CD = BC + AD.$$

Załóżmy, że $CD > BC$. Mamy

$$CD - BC = AD - AB.$$

Odłóżmy na bokach c, d odcinki $CB' = CB$ oraz $AB'' = AB$. Otrzymamy trójkąty $\triangle BAB''$, $\triangle B''DB'$, $\triangle BCB'$, które są wszystkie trzy równoramienne (d l a c z e g o?). Wobec tego, jeżeli poprowadzimy dwusieczne kątów $\sphericalangle A$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$ w czworoboku, muszą one być osiami symetrji odcinków BB'', BB', $B'B''$, a ponieważ trzy te odcinki tworzą trójkąt $\triangle BB'B''$, zatem trzy osi symetrji muszą przecinać się w jednym punkcie W.

Ten punkt W jest równo odległy od boków czworoboku, a więc jest środkiem wpisanego w czworobok koła. Istotnie, dwusieczna AW jest miejscem punktów równo odległych od boków a, d; dwusieczna CW jest miejscem punktów równo odległych od boków b, c; dwusieczna DW jest miejscem punktów równo odległych od boków c, d.

Ćwiczenia XIX. 1. W czworoboku wpisanym prowadzimy obie przekątne i w ten sposób otrzymujemy osiem kątów, zawartych między bokami i przekątnemi; dowieść, że wśród tych ośmiu kątów mamy cztery pary kątów równych.

2. Sformułować i uzasadnić twierdzenie odwrotne do poprzedniego.

3. Obliczyć kąty czworoboku wpisanego $ABCD$, jeżeli mamy

α) $B = 2A$, $C = 3A$, β) $B = \frac{3}{2}A$, $A = 2C$. γ) $A : B : C = 1 : 2 : 3$.

4. Na jakich równoległobokach można opisać koła? Na jakich trapezach?

5. Jaką własność posiada czworobok wpisany, jeżeli α) dwa przeciwległe jego boki są do siebie równoległe; β) dwa sąsiednie boki są sobie równe; γ) dwa przeciwległe boki są sobie równe?

6. Jeżeli w dowolnym czworoboku poprowadzimy dwusieczne kątów wewnętrznych, wyznaczą one, przecinając się, czworobok wpisany.

Czy można uogólnić to twierdzenie na dwusieczne kątów zewnętrznych?

7. Jeżeli w danem kole punkt A jest środkiem łuku, podpartego przez cięciwę BC, i jeżeli dwie dowolne sieczne AD, AE przecinają tę cięciwę w punktach B' C', wówczas na czworoboku $B'C'ED$ można opisać koło.

8. W czworoboku wpisanym prowadzimy dwusieczne dwóch przeciwległych kątów, przecinające okrąg koła w punktach E, F. Dowieść, że odcinek EF jest średnicą tego koła.

9. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ oznaczymy przez A_1, B_1, C_1 spodki jego wysokości, wówczas $\triangle A_1B_1C_1$ nazywa się o r t o c e n t r y c z n y m względem trójkąta danego $\triangle ABC$.

Dowieść, że wysokości trójkąta danego ostrokątnego $\triangle ABC$ są dwusiecznemi wewnętrznemi w trójkącie ortocentrycznym.

9*a*. Jak należy zmienić wysłowienie poprzedniego twierdzenia, jeżeli trójkąt $\triangle ABC$ jest rozwartokątny?

10. Jeżeli w trójkącie ostrokątnym $\triangle ABC$ poprowadzimy trzy wysokości, przecinające koło opisane w punktach A', B', C', wówczas:

1-o wysokości trójkąta $\triangle ABC$ są dwusiecznemi wewnętrznemi w trójkącie $\triangle A'B'C'$;

2-o boki trójkąta $\triangle A'B'C'$ są równoległe do boków trójkąta ortocentrycznego $\triangle A'_1B'_1C'_1$ i są dwa razy od nich większe.

11. Jeżeli na bokach a, b, c trójkąta obierzemy dowolne punkty A', B', C', wówczas koła, opisane na trójkątach $\triangle A'B'C$, $\triangle B'C'A$, $\triangle A'C'B$, muszą przeciąć się w jednym punkcie (zwanym p u n k t e m S t e i n e r a). [W s k a z ó w k a: Jeżeli koła, opisane na pierwszych dwu trójkątach, przecinają się w punkcie M, wówczas badamy czworoboki $A'MB'C$, $AB'MC'$.]

12. Z punktu zewnętrznego P prowadzimy dwie dowolne sieczne, przecinające okrąg w punktach A, B oraz A' B'. Jeżeli przez M, M' N, N', oznaczymy odpowiednio środki odcinków PA, PA', PB, PB', wówczas na czworoboku $MNN'M'$ można opisać koło.

13. Jeżeli w czworoboku wpisanym przedłużymy dwa przeciwległe jego boki aż do spotkania, wówczas dwusieczna kąta między niemi musi być równoległa do dwusiecznej kąta między przekątnemi czworoboku.

14. Jeżeli przekątne czworoboku wpisanego $ABCD$ są do siebie prostopadłe i przecinają się w punkcie E, wówczas

1-o prosta, łącząca E ze środkiem boku czworoboku, jest prostopadła do przeciwległego boku, i odwrotnie;

2-o cztery proste, o których mowa, przecinają boki czworoboku w ośmiu punktach, które wszystkie leżą na jednym okręgu;

3-o rzuty punktu E na boki czworoboku $ABCD$ wyznaczają nowy czworobok, posiadający podwójną własność: daje się on zarówno wpisać w koło, jak i opisać na kole.

Zbudować czworobok wpisany, mając dane:

15. $a, b, A, R,$ 16. $c, R, A, B.$ 17. $a, b, A, B.$
18. $e, B, a, c.$ 19. $a, b, R, \sphericalangle(e, f).$ 20. $a, b, f, \sphericalangle(e, b).$

---

21. Jeżeli na kole opisaliśmy wielokąt o parzystej liczbie boków i ponumerowaliśmy kolejno jego boki, wówczas suma boków o numerach parzystych równa się sumie boków o numerach nieparzystych.

22. W wielokącie wpisanym, mającym parzystą liczbę wierzchołków, suma kątów o numerach parzystych równa się sumie kątów o numerach nieparzystych.

Zbudować czworobok opisany, mając dane:

23. $a, b, A, B.$ 24. $b, c, d, e.$ 25. $a, d, e. \sphericalangle(b, e).$
26. $\rho, A, B, C.$ 27. $a, f, \rho, A.$ 28. $a, \rho, A. C.$

---

29. Na stole ułożono cztery monety tak, że każda dotyka dwóch sąsiednich. Dowieść, że punkty styczności są wierzchołkami czworoboku wpisanego środki zaś monet — wierzchołkami czworoboku opisanego.

30. Jeżeli, mając czworobok wpisany, wykreślimy na każdym jego boku jako na cięciwie łuk koła, wówczas łuki te przetną się parami w czterech punktach, które są wierzchołkami nowego czworoboku wpisanego.

31. W trojkącie prostokątnym ABC łączymy wierzchołek kąta prostego C ze środkiem M kwadratu, wykreślonego na przeciwprostokątnej; dowieść, że CM jest dwusieczną kąta prostego ACB.

W trójkącie $\triangle ABC$ oznaczamy środki boków odpowiednio przez A', B', C', przez O i H środek koła wpisanego i ortocentr. przez M_1, M_2, M_3 środki odcinków AH, BH, CH.

32. Dowieść, że czworobok $M_1M_2A'B'$ jest prostokątem.

33. Na zasadzie poprzedniego twierdzenia dowieść, że środki boków A', B', C', spodki wysokości A_1, B_1, C_1, oraz punkty M_1, M_2, M_3 leżą na jednym okręgu koła (tak zwane koło dziewięciu punktów albo też koło Feuerbacha).

34. Środek N koła dziewięciu punktów jest środkiem odcinka OH (zwanego odcinkiem Eulera). [Wskazówka: środek N musi leżeć na osiach symetrji odcinków $A'A_1$, $B'B_1$.]

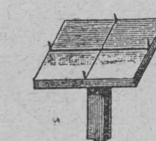
35. Promień koła dziewięciu punktów równa się połowie promienia koła opisanego.

36. Jeżeli z punktu K, dowolnie obranego na okręgu koła opisanego, poprowadzimy prostopadłe do trzech boków trójkąta $\triangle ABC$ (lub do ich przedłużeń), wówczas spodki tych prostopadłych leżeć muszą na jednej prostej (t. zw. prosta Simsona).

37. Przez wierzchołki trójkąta $\triangle ABC$ prowadzimy równoległe do jego boków, które wyznaczają t. zw. trójkąt dopełniający $\triangle A'B'C'$ (przyczem A' leży naprzeciwko A). Dowieść, że koło dziewięciu punktów trójkąta $\triangle ABC$ jest styczne do kół dziewięciu punktów trójkątów $\triangle A'BC$, $\triangle B'CA$ $\triangle C'AB$, przyczem punkty styczności są środkami boków BC, CA, AB. [Wskazówka: niech H i H' będą ortocentrami trójkątów $\triangle ABC$, $AB'C$; D niech będzie środkiem łuku AC. Oznaczmy przez Q i Q' środki odcinków BH, $B'H'$. Dowieść, uwzględniając symetrję figury, że DQ, DQ' są środkami kół dziewięciu punktów i że D, Q, Q' leżą na jednej prostej.]

Ćwiczenia z geometrji praktycznej.

Wiele ciekawych zagadnień geometrji praktycznej rozwiązać można nawet przy tym skromnym zasobie wiadomości, który dotąd zdobyliśmy. Przyrządy, potrzebne do tego celu, są jak najskromniejsze: *sznur* do mierzenia odległości, pewna ilość *drążków*, które nam służyć będą do wytykania. linij prostych, oraz *węgielnica*.



Rys. 111.

Węgielnica, w najprostszej swej postaci, jest to prostokątna lub kwadratowa deseczka, umocowana na dowolnej podstawie (czyli na „pachołku“, jak mówili nasi geometrowie XVII w.). Na deseczce tej zaznaczone zostały w ten lub w inny sposób (np. wykreślone lub nacięte) dwie przecinające się proste. Proste te mogą przecinać się pod dowolnym kątem, dogodniej jest jednak wykreślić dwie prostopadłe do siebie proste. Aby ułatwić wyznaczenie prostych zapomocą tego przyrządu, dodajemy jeszcze t. zw. *celownicę*, którą jak na rysunku 111, zastąpić można przez stalowe igły, niegiętkie i dobrze umocowane. Przy wszystkich pomiarach umieszczamy deskę węgielnicy poziomo.

Posługując się sznurem, drążkami i (w razie potrzeby) węgielnicą, rozwiązać następujące zadania:*)

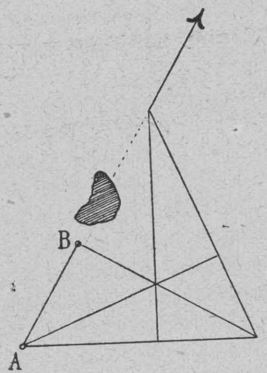
1. Dana jest prosta m (t. zn. wytknięta zapomocą drążków); w oznaczonym jej punkcie A wystawić do niej prostopadłą (t. j. wytknąć zapomocą drążków i węgielnicy lub drążków i sznura).

---

*) Rzecz jasna, że o kreśleniu kół nie może być mowy w tych konstrukcjach, mamy natomiast prawo prowadzenia prostych w dowolnych kierunkach, prowadzenia prostopadłych i odkładania na danej prostej odcinków dowolnej długości.

2. Przez punkt A poprowadzić równoległą do danej prostej b, posługując się tylko: 1-o sznurem i drążkami, 2-o węgielnicą.

2 *a*. Dostępne są tylko końce A, B pewnego odcinka; przez punkt O poprowadzić równoległą do prostej AB, posługując się tylko sznurem i drążkami. [Wskazówka: własności równoległoboku.]



Rys. 112.

3. Rozwiązać zadanie 1, jeżeli punkt A nie leży na prostej m.

4. Dane są dwie proste; podwoić kąt, między niemi zawarty.

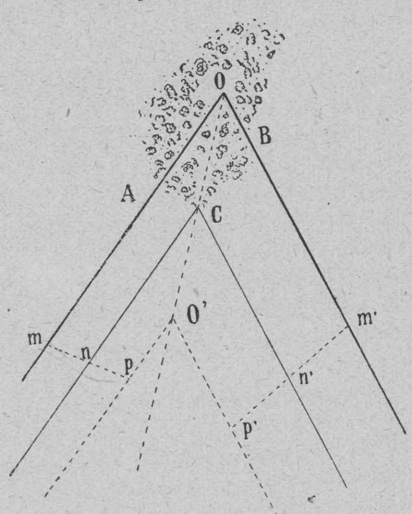
5. Dany kąt podzielić na połowy.

6. Dany odcinek podzielić na połowy.

7. Chcemy wytknąć prostą AB, przyczem na przedłużeniu odcinka AB znajduje się przeszkoda (np. las, dom lub t. p.); w jaki sposób ominąć tę przeszkodę? [Wskazówka: oprzeć się na własnościach równoległoboku lub, w szczególności, prostokąta.]

8. Rozwiązać poprzednie zadanie, opierając się na własnościach wysokości trójkąta (rys. 112).

9. Przez punkty A i B, między któremi znajduje się przeszkoda, poprowadzić prostą.



Rys. 113.

10. Dane są dwie proste, których punkt przecięcia się jest niedostępny; poprowadzić dwusieczną kąta, zawartego między temi prostemi.

11. Dane są dwie proste m, n, których punkt przecięcia się X jest niedostępny i niewidoczny. Przez dany punkt C poprowadzić prostą CX. Podać kilka rozwiązań.

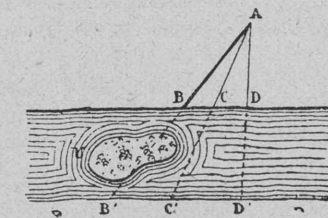
12. W pewnej książce francuskiej*) znajdujemy następujące rozwiązanie poprzedniego zadania: wyobraźmy sobie, powiada autor, że dwie drogi AO, BO krzyżują się w lesie (rys. 113); punkt C, leżący na skraju lasu, chcemy połączyć prostą drogą z punktem O. W tym celu wytykamy proste $CD // AO$, $CE // BO$, prowadzimy dowolne poprzeczne mn, $m'n'$, na ich przedłużeniach odkładamy $np = mn$, $n'p' = m'n'$; proste $pO' // CD$, $p'O' // CE$ przecinają się w takim punkcie O', że $O'CO$ jest linją prostą, a prócz tego $O'C = OC$.

*) G. Longchamps: *Géométrie de la règle et de l'équerre.* Paris 1890.

Uzasadnić powyższe rozwiązanie.

13. Zmierzyć szerokość rzeki, której jeden brzeg jest dostępny.

14. Wyjaśnić i uzasadnić przedstawiony na rys. 114 sposób znalezienia po drugiej stronie rzeki punktu B', leżącego na przedłużeniu prostej AB. Zakładamy przytem: 1-o że wyspa zasłania nam widok, 2-o że brzegi rzeki są do siebie równoległe, a przynajmniej, że możemy wytknąć dwie równoległe po obu brzegach rzeki.



Rys. 114.

Dodatek do księgi I.

I. Przykłady poszukiwania miejsc geometrycznych.

§ 153. Mieliśmy już do czynienia z zadaniami, w których chodziło o znalezienie miejsca geometrycznego (innemi słowy: o znalezienie linji, którą zakreśla punkt, poruszający się po płaszczyźnie według pewnego prawa). Ze względu na wielką doniosłość teoretyczną i praktyczną tego rodzaju zagadnień, podajemy tu do rozwiązania pewną ich ilość.

Zapomocą elementarnych wiadomości, które dotąd zdobyliśmy, potrafimy rozpoznać tylko takie miejsca geometryczne, które są albo linjami prostemi, albo okręgami kół.

Wobec tego *pierwsze pytanie*, które musimy sobie postawić przy rozwiązywaniu poniższych zadań, powinno brzmieć: czy punkt ruchomy, o którym mowa w zadaniu, kreśli prostą czy okrąg koła?

Jeśli odpowiedź na to pytanie nie nasuwa się nam odrazu, jako prosty wniosek ze znanych twierdzeń, wówczas dobrze jest wykreślić przynajmniej trzy różne położenia ruchomego punktu; z rysunku możemy zazwyczaj domyślić się, czy szukanem miejscem geometrycznem jest prosta, czy okrąg koła*). Należy tylko pamiętać, iż miejsce geometryczne może składać się z kilku prostych lub odcinków, jak również z kilku okręgów lub łuków kół.

Rzecz jasna, że nie poprzestajemy na takim domyśle, lecz zadajemy sobie *drugie pytanie:* w jaki sposób można dowieść, że jakaś linja jest prostą lub okręgiem koła?

Na zasadzie dotychczasowych naszych wiadomości możemy w trzech wypadkach rozpoznać, czy jakaś linja jest prosta. A mianowicie linja jest prosta, 1) jeżeli odcinek, łączący dowolne dwa punkty tej linji, lub przedłużenie tego odcinka tworzy stały kąt z jakąś prostą daną; 2) jeżeli odcinki, łączące dowolne

*) Jeżeli figura zmieniać się może tylko w pewnych granicach, wówczas wykreślenie *skrajnych położeń* ruchomego punktu daje nieraz cenną wskazówkę co do rodzaju szukanego miejsca. Prócz tego należy zastanowić się, czy owo miejsce geometryczne jest, czy nie jest symetryczne, co zawsze daje się zgóry przewidzieć.

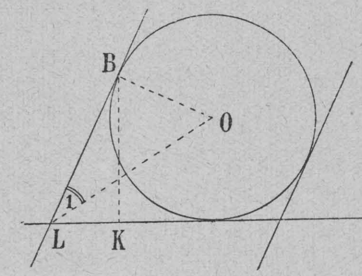
punkty tej linji, są zawsze równoległe do jakiejś danej prostej; 3) jeżeli linja ta jest miejscem punktów równo odległych od ramion danego kąta. Natomiast linja płaska jest okręgiem lub częścią okręgu, jeśli 1) albo wszystkie jej punkty leżą w tej samej odległości od pewnego stałego punktu, 2) albo ze wszystkich jej punktów widać pod tym samym kątem pewien stały odcinek. Później spotkamy inne sposoby poznawania prostych i okręgów kół.

Zadanie 1. *Stałym promieniem* r *kreślimy koła, styczne do danej prostej* m, *a do każdego z tych kół prowadzimy styczne, tworzące z prostą* m *kąt dany. Jakie jest miejsce geometryczne punktów styczności tych stycznych**).

Wykreślamy trzy lub cztery takie koła i widzimy, że miejsce geom. składa się prawdopodobnie z dwóch prostych równoległych do m, odpowiednio do dwu stycznych, które możemy poprowadzić do każdego koła.

Z łatwością możemy dowieść słuszności tego przypuszczenia. W tym celu dowiedziemy najpierw, że odcinek KB, prostopadły do m, ma stałą długość.

Jakoż w trójkącie $\triangle BOL$ bok BO i kąt $\sphericalangle 1$ są zawsze tej samej wielkości (dlaczego?), a więc i wielkość boku BL musi być stała. W trójkącie $\triangle BLK$ bok BL i kąt $\sphericalangle BLK$ są stałe, a więc i bok BK musi być stałej długości.



Rys. 115.

Tak więc punkty B, B_1, B_2... leżą niewątpliwie na prostej równoległej do m; aby jednak stwierdzić, że prosta ta jest miejscem geometrycznem punktu B, musimy jeszcze dowieść twierdzenia odwrotnego (że każdy punkt tej prostej jest punktem styczności prostej ruchomej BL i koła ruchomego O) albo też twierdzenia przeciwnego. Dowód pozostawiamy czytelnikowi.

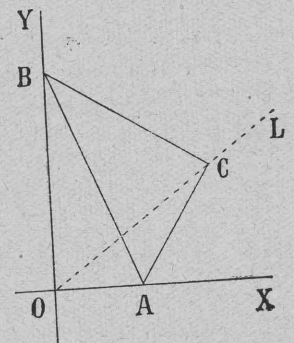
Zadanie 2. *Po płaszczyźnie porusza się, nie zmieniając kształtu ani wielkości, trójkąt prostokątny* $\triangle ABC$, *przyczem wierzchołki* A, B *kątów ostrych ślizgają się po dwóch nieruchomych i prostopadłych do siebie prostych* OX, OY. *Co kreśli wierzchołek* C *kąta prostego? Co kreśli środek przeciwprostokątnej* AB?

*) To samo zadanie można tak wyrazić: *wzdłuż prostej nieruchomej* m *przesuwa się druga prosta, nachylona do* m *pod stałym kątem. Ta druga prosta toczy przed sobą po prostej* m *koło o stałym promieniu; co kreśli punkt styczności koła i ruchomej prostej?*

Uczeń powinien w podobny sposób każde zagadnienie, dotyczące miejsc geometrycznych, wyrażać zapomocą pojęcia ruchu. Pouczającą rzeczą bywa również budowanie odpowiednich mechanizmów, zwłaszcza przegubowych, w celu zilustrowania ruchu, o którym mowa w zadaniu; w wielu razach mechanizm taki daje się z łatwością zbudować.

Wykreślenie trzech położeń punktu C wskazuje, że punkt ten prawdopodobnie porusza się po prostej. Że tak jest istotnie, dowodzimy w sposób następujący:

Czworobok $OBCA$ jest wpisany (*dlaczego?*), zatem $\sphericalangle\, COA = \sphericalangle\, ABC$. Ale kąt $\sphericalangle\, ABC$ jest stały, jako należący do trójkąta, który nie zmienia kształtu, zatem i kąt $\sphericalangle\, COA$ jest stały.

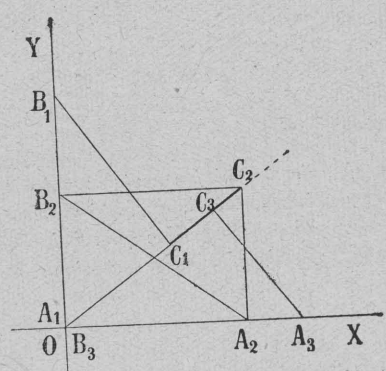


Rys. 116.

Punkt C, jak widzimy, porusza się tak, że prosta, łącząca go z nieruchomym punktem O, tworzy z nieruchomą półprostą OX stały kąt. Wobec tego torem punktu C musi być prosta (lub część prostej), przechodząca przez O i nachylona do OX pod kątem, równym kątowi $\sphericalangle\, B$ trójkąta danego.

Zkolei należałoby rozstrzygnąć pytanie, czy C porusza się po odcinku prostej OL, czy też po całej prostej? Wykreślenie skrajnych położeń trójkąta ruchomego może nam nasunąć odpowiedź na to pytanie.

Przedewszystkim zauważmy, że (rys. 116) zarówno kąt $\sphericalangle\, BOA$, jak $\sphericalangle\, BCA$ są proste, zatem przy każdem położeniu ruchomego trójkąta stały odcinek BA jest średnicą koła, opisanego na czworoboku $OBCA$, wobec czego odległość wierzchołka C od O może co najwyżej równać się średnicy czyli odcinkowi AB. Przypadek ten zachodzi tylko wówczas, gdy czworobok $OBCA$ jest prostokątem czyli, gdy przyprostokątna BC jest równoległa do OX (położenie $A_2B_2C_2$ na rys. 117). Przy każdem innem położeniu trójkąta mamy $OC < AB$.



Rys. 117.

Dwa skrajne położenia trójkąta zostały oznaczone na rys. 117 literami $A_1B_1C_1$ oraz $A_2B_2C_2$. Jeżeli trójkąt, znajdujący się w położeniu $A_1B_1C_1$, poruszać będziemy tak, by wierzchołek B zbliżał się do O, wówczas kąt $\sphericalangle\, CBO$, który początkowo równał się kątowi $\sphericalangle\, B$ trójkąta (a więc był ostry), rosnąć będzie wciąż. Przy położeniu $A_2B_2C_2$ kąt ten staje się prostym, następnie zaś rozwartym coraz większym, aż wreszcie staje się równy kątowi rozwartemu $\sphericalangle\, COY'$.

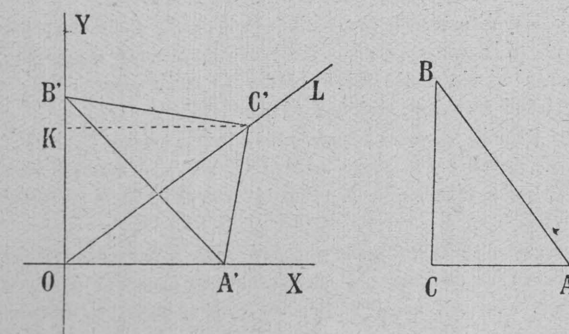
Aby zorjentować się, w jaki sposób porusza się punkt C, przypomnijmy sobie, że koło, opisane na czworoboku $OBCA$, porusza się wprawdzie wraz z trójkątem $\triangle\, ABC$, ale wielkości swej nie zmienia. W kole tem kąt wpisany $\sphericalangle\, CBO$ wspiera się na cięciwie OC, jeśli więc kąt $\sphericalangle\, CBO$ rośnie i z ostrego

staje się stopniowo prostym, potem zaś rozwartym, to cięciwa OC z początku rośnie, aż stanie się równą średnicy (położenie $A_2B_2C_2$ trójkąta), potem zaś maleje.

Jak widzimy, punkt C porusza się po prostej OL od punktu C_1 do C_2 i z powrotem do C_3. Najmniejsza odległość od C do O równa się mniejszej przyprostokątnej, największa równa się przeciwprostokątnej trójkąta danego*).

Chcąc jednak twierdzić, że miejscem geometrycznem punktu C jest odcinek C_1C_2, musimy dowieść, że każdy punkt tego odcinka możemy uważać jako pewne położenie ruchomego punktu C, innemi słowy: że punkt C, poruszając się po C_1C_2, nie przeskakuje żadnego punktu tego odcinka**).

W tym celu wykażemy, że jeśli dowolny punkt odcinka C_1C_2 uważać będziemy jako wierzchołek kąta prostego, wówczas będziemy mogli w taki sposób zbudować trójkąt prostokątny, równy danemu, że wierzchołki kątów ostrych znajdą się na półprostych OX, OY.



Rys. 118.

Istotnie, z dowolnego punktu C' odcinka C_1C_2 kreślimy okrąg promieniem a. Niech B' będzie punktem jego przecięcia się z półprostą OY. W punkcie C' wystawiamy prostopadłą do $C'B'$; prostopadła ta nie może być równoległą do OX (*dlaczego?*), przetnie więc tę półprostą w jakimś punkcie A'. Powiadam, że $\triangle\, A'B'C'$ równa się danemu trójkątowi $\triangle\, ABC$.

*) Ustaliliśmy fakt, że punkt C *nie* może poruszać się po całej prostej OL, lecz jedynie po odcinku C_1C_2. Dowód przeprowadziliśmy bezpośrednio, by pokazać, jak pożyteczną rzeczą bywa wykreślanie skrajnych położeń figury. Mogliśmy jednak dowód ten pominąć, gdyż przy badaniu twierdzenia odwrotnego (t. j. przy badaniu, czy każdy punkt prostej OL należy do poszukiwanego miejsca geometrycznego) wyszłoby samo przez się najaw, że C porusza się tylko po odcinku C_1C_2.

**) Takie przeskakiwanie jest nieprawdopodobne, lecz nie jest, teoretycznie rzecz biorąc, niemożliwe. Gdyby takie przeskakiwanie punktów zachodziło, nie moglibyśmy zbudować żadnego mechanizmu, wyobrażającego ruch punktu C.

Jakoż czworobok $OB'C'A'$ jest wpisany (dlaczego?), a więc

$$\sphericalangle C'B'A' = \sphericalangle C'OA' = \sphericalangle B,$$
$$B'C' = a = BC,$$

zatem

$$\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC.$$

Jak widzimy, istnienie trójkąta $\triangle A'B'C'$ zależy od tego, czy okrąg $(C')a$ ma punkty spólne z półprostą OY. Oznaczając przez $C'K$ prostopadłą, poprowadzoną do OY (rys. 118,) mamy:

jeżeli $a < C'K$, wówczas okrąg $(C')a$ i prosta OY nie mają punktów spólnych i trójkąt $\triangle A'B'C'$ nie istnieje;

jeżeli $a = C'K$, wówczas okrąg $(C')a$ i OY mają jeden punkt wspólny, istnieje więc jeden tylko trójkąt $\triangle A'B'C'$;

jeżeli $C'K < a < C'O$, wówczas okrąg $(C')a$ i półprosta OY mają dwa punkty spólne, istnieją więc dwa trójkąty $\triangle A'B'C'$:

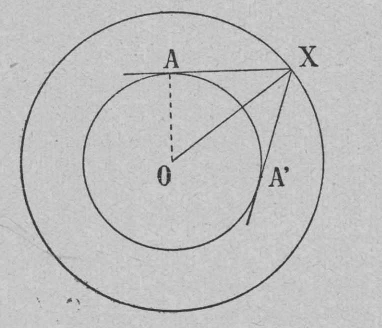
jeżeli $C'K < a$ oraz $C'O < a$, wówczas okrąg $(C')a$ i półprosta OY mają jeden punkt spólny, istnieje więc jeden trójkąt $\triangle A'B'C'$.

Pierwszy z tych czterech przypadków nie może zachodzić, jeżeli C' leży na odcinku C_1C_2 (dlaczego?); co się tyczy ostatniego przypadku, to łatwo dostrzec, że punkt C' nie może leżeć między O i C_1, gdyż wtedy wierzchołek A' nie mógłby leżeć na półprostej OX (dlaczego?).

Tak więc istnieje zawsze przynajmniej jeden trójkąt $\triangle A'B'C'$ — o ile C' leży między C_1C_2, jeżeli zaś C' leży między C_3 i C_2, to mamy dwa równe sobie trójkąty $A'B'C'$, co zgadza się w zupełności z wynikami, do których doszliśmy poprzednio.

Co się tyczy miejsca geometrycznego środka Z przeciwprostokątnej AB, to wystarczy zauważyć, że odcinek OZ (na rysunku nie oznaczony) równa się $\frac{1}{2}$ AB, a więc jest stały. Punkt Z kreśli wobec tego okrąg $(O)r$, w którym $r = \frac{1}{2}$ AB.

Zadanie 3. *Znaleźć miejsce geometryczne punktów, z których dane koło $(O)r$ widać pod danym kątem $\sphericalangle \alpha$*).*



Rys. 119.

Jeżeli X jest punktem, należącym do szukanego miejsca geometrycznego, wówczas kąt $\sphericalangle AXA'$ pomiędzy stycznemi równa się danemu kątowi $\sphericalangle \alpha$.

Połowa tego kąta musi być również stała, czyli kąt $\sphericalangle OXA$ musi być stały, że zaś w trójkącie prostokątnym $\triangle OXA$ przyprostokątna $OA = r$ jest stała, zatem i przeciwprostokątna OX musi być stała.

Punkt O jest nieruchomy, punkt X, znajduje się od niego w stałej odległości, a więc X leży na okręgu koła, którego środkiem jest punkt O.

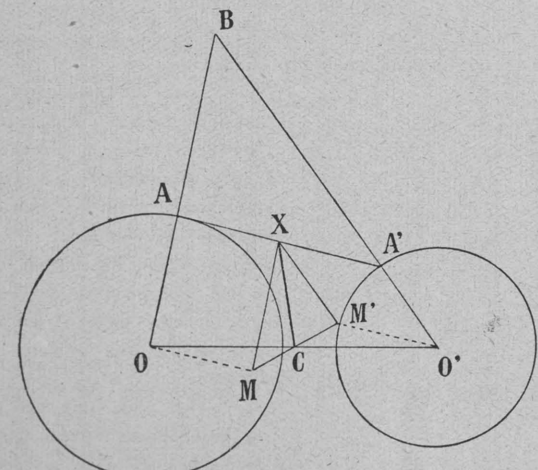
Aby mieć prawo twierdzić, że okrąg ten jest miejscem punktu X, czytelnik dowiedzie albo twierdzenia odwrotnego (każdy punkt rzeczonego okręgu

*) Jeżeli z punktu zewnętrznego P poprowadziliśmy styczne PA, PA' do koła, wówczas powiadamy, że z punktu P widzimy koło pod kątem $\sphericalangle APA'$.

może być uważany jako punkt X; innemi słowy: z każdego punktu tego okręgu widać koło $(O)r$ pod danym kątem), albo też twierdzenia przeciwnego (z żadnego innego punktu płaszczyzny nie widać koła $(O)r$ pod kątem danym).

Zadanie 4. *Dane są dwa koła $(O)r$ i $(O')r'$. Prowadzimy w nich promienie OA, $O'A'$, przecinające się w punkcie B pod stałym kątem. Jakie jest miejsce geometryczne środka X odcinka AA'?*

Widać odrazu, że tem miejscem geometrycznem musi być linja, której osią symetrji jest prosta OO', gdyż punkt X przybierać może po dwu stronach tej prostej położenia symetryczne. Wykreślenie kilku położeń punktu X wskazuje,



Rys. 120.

że mamy do czynienia z linją krzywą, a więc miejsce składa się prawdopodobnie z łuków kół, symetrycznych względem OO', albo też jest okręgiem koła, którego środek znajduje się na prostej OO'.

Przekonamy się, że to drugie przypuszczenie jest prawdziwe. Zbudujmy równoległoboki $OAXM$, $O'A'X'M'$. Mamy wówczas

$$OM = O'M',$$

a ponieważ odcinki te są do siebie równoległe, więc również

$$\sphericalangle COM = \sphericalangle CO'M', \quad \sphericalangle CMO = \sphericalangle CM'O',$$

czyli

$$\triangle OMC \equiv \triangle O'M'C$$

i co za tem idzie

$$OC = O'C, \quad CM = CM'.$$

Punkt więc C jest środkiem stałego odcinka OO', a odcinek XC jest środkową w trójkącie $\triangle MXM'$.

Zauważmy teraz, że $\sphericalangle MXM'$ jest stały, gdyż równa się stałemu kątowi $\sphericalangle OBO'$, a oprócz tego mamy

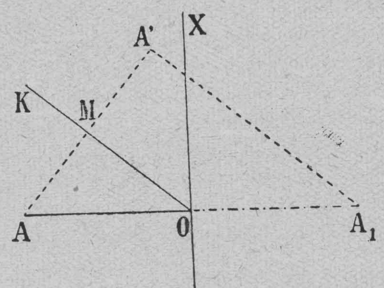
$$MX = OA = r, \qquad M'X = O'A' = r',$$

zatem trójkąt $\triangle MXM'$ zmienia swe położenie (mianowicie obraca się dokoła punktu C), lecz nie zmienia ani kształtu, ani wielkości (II cecha równości trójkątów).

Widzimy więc, że punkt X leży zawsze na okręgu koła, którego środkiem jest punkt C, promień zaś równa się środkowej takiego trójkąta, w którym dwa boki równają się promieniom kół danych, kąt zaś między temi bokami równa się kątowi stałemu $\sphericalangle OBO'$.

Dowód twierdzenia odwrotnego nie przedstawia trudności. Budujemy mianowicie trójkąt $\triangle MXM'$ tak, by punkt C był środkiem boku MM' i żeby było $MX = r$, $M'X = r'$, a zarazem, żeby kąt $\sphericalangle MXM'$ równał się danemu kątowi; wierzchołek X znajduje się wówczas na kole, będącem domniemanem miejscem geometrycznem. Pozostaje poprowadzić promienie OA, $O'A'$ równoległe do MX, $M'X$ i dowieść, że $AX = A'X$.

Zadanie 5. *Dane są dwa punkty nieruchome A, O; przez O prowadzimy wszelkie możliwe proste i względem każdej z nich znajdujemy punkt A' symetryczny z A. Jakie jest miejsce geometryczne punktu A'?*



Rys. 121.

Prosta OA musi być osią symetrji szukanego miejsca geometrycznego (dlaczego?). Jeżeli poprowadzimy prostą OX prostopadłą do AO, wówczas obraz symetryczny punktu A względem osi OX znajdzie się w punkcie A_1. Jeżeli prosta OX, obracając się dokoła O, zbliża się do AO, obraz punktu A zbliża się do tego punktu, gdy wreszcie OX zlewa się z AO, obraz punktu A zlewa się z samym punktem A.

Tak więc miejsce geometryczne jest linją, przechodzącą przez A i A_1, i symetryczną względem prostej OA; stąd wnosimy, że wedle wszelkiego prawdopodobieństwa miejscem geometrycznem punktu A' jest okrąg koła, którego średnicą jest AA_1.

Przypuszczenie to łatwo sprawdzić. Niech OK (rys. 121) będzie dowolną prostą, przechodzącą przez O i niech M będzie rzutem punktu A na oś OK, punkt zaś A' niech będzie obrazem symetrycznym punktu A względem tej samej osi. Łączymy A' z A_1.

Ponieważ $AM = MA'$, $AO = OA_1$,

zatem $OM \parallel A'A_1$,

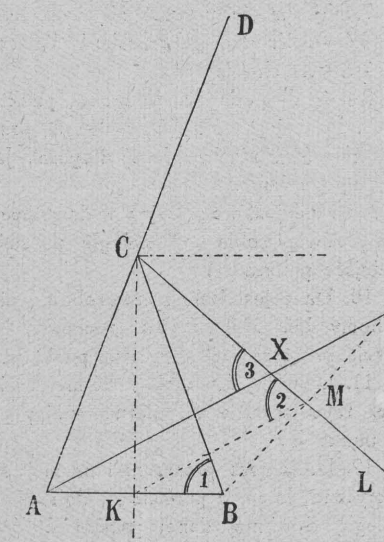
czyli kąt $\sphericalangle AA'A_1$ jest prosty.

Miejscem więc punktu A' jest istotnie okrąg $(O)A$*).

Zadanie 6. *W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$ ($CA = CB$) prowadzimy dowolną prostą CL, znajdujemy obraz symetryczny B' punktu B względem osi CL i łączymy B' z A. Niech proste AB', CL przecinają się w punkcie X. Znaleźć miejsce geometryczne punktu X.*

*) W tym wypadku niema potrzeby dowodzić twierdzenia odwrotnego, gdyż wiemy, że miejscem wierzchołka kąta prostego, którego ramiona przechodzą przez dwa stałe punkty A, A_1, jest okrąg, zakreślony na średnicy AA_1.

Jeżeli prosta CL zlewa się z bokiem CB, wówczas B' (a więc i X) zlewa się z B. Jeżeli CL przybiera położenie $CK \perp AB$, wówczas B' zlewa się z A, a więc i X zlewa się z A. Wreszcie, jeżeli CL staje się dwusieczną kąta zewnętrznego $\sphericalangle DCB$, wówczas B' zlewa się z D (o ile, jak na rysunku, $DC = CB$), a X zlewa się z C.



Rys. 122.

Tak więc miejscem geometrycznem jest prawdopodobnie okrąg, opisany na trójkącie $\triangle ABC$. Jeżeli przypuszczenie nasze jest prawdziwe, to czworobok $ACXB$ musi być wpisany bez względu na położenie punktu X. Tak jest istotnie. Jakoż wiemy, że czworobok $KCMB$ jest wpisany (dlaczego?), zatem

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2.$$

Ale w trójkącie $\triangle AB'B$ punkty K, M są środkami dwóch boków, zatem $KM \parallel AB'$, czyli

$$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3,$$

a więc $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$

i czworobok $ACXB$ jest wpisany.

Ze względu na twierdzenie § 147 dowód twierdzenia odwrotnego jest zbyteczny.

Ćwiczenia XX. 1. Dany jest okrąg $(O)r$ i stały punkt A; znaleźć miejsce środków odcinków, poprowadzonych z A do punktów okręgu.

2. W trójkącie $\triangle ABC$ podstawa c jest nieruchoma, a różnica dwu drugich boków jest stała ($= m$). Znaleźć miejsce spodków prostopadłych, poprowadzonych z wierzchołków A i B do dwusiecznej kąta zmiennego $\sphericalangle C$ [Wskazówka: wykreślić koła $(A)m$ i $(B)m$.]

3. W czworoboku $ABCD$ boki a, b, d i przekątna e są stałej długości. Znaleźć miejsce geometryczne:

1-o środka X przekątnej f;

2-o środka Z odcinka XY, gdzie X i Y są środkami przekątnych f, e.

4. Do danego koła O prowadzimy dwie styczne PS, PS' tak, że $\sphericalangle SPS' = \frac{2}{3}d$. Znaleźć i wykreślić miejsce geometryczne:

1-o środka koła wpisanego w trójkąt $\triangle PSS'$.

2-o środka koła opisanego na trójkącie $\triangle PSS'$.

5. W trójkącie $\triangle ABC$ bok AB jest nieruchomy, kąt zaś $\sphericalangle C$ zachowuje stałą wielkość. Jakie jest miejsce geometryczne:

1-o środka W koła wpisanego?

2-o środków W_a, W_b, W_c kół zapisanych?

3-o ortocentru H?

6. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest nieruchoma; długości dwóch przyprostokątnych są zmienne. Co kreśli jego środek ciężkości?

7. Kąt prosty porusza się tak, że ramiona jego pozostają styczne do dwóch kół spółśrodkowych; znaleźć miejsce

1-o wierzchołka kąta,

2-o środka odcinka, łączącego punkty styczności.

8. Dane jest koło $(O)r$; danym promieniem r' kreślimy koło, wyznaczające w kole $(O)r$ cięciwę danej długości. Jakie jest miejsce geometryczne środka tego drugiego koła?

9. Dane jest koło $(O)r$; z dowolnych punktów A_1, A_2, A_3... okręgu prowadzimy równe sobie i równoległe do siebie odcinki A_1B_1, A_2B_2 A_3B_3...; jakie jest miejsce punktu B?

10. Dane jest koło i czworobok wpisany $ABCD$, w którym bok AB jest nieruchomy, bok zaś CD jest ruchomy, lecz stałej długości. Co kreślą punkt przecięcia prostych BC, DA oraz punkt przecięcia się prostych AC, BD?

11. Dane są dwa koła zmiennej wielkości, styczne do siebie w punkcie X, a prócz tego styczne do nieruchomej prostej m w stałych punktach A, B. Co kreśli punkt X?

12. Dana jest prosta m i na niej stały punkt A. Prowadzimy wszystkie koła, styczne do m w punkcie A, do każdego zaś z tych kół prowadzimy styczną, równoległą do innej danej prostej l. Znaleźć miejsce geometryczne punktu styczności X tych stycznych i wykreślonych przez nas kół.

13. Dany jest kwadrat $ABCD$. Z punktu A promieniem AB kreślimy koło, a do łuku, zawartego wewnątrz kwadratu, prowadzimy dowolną styczną, która przecina boki BC, CD odpowiednio w punktach K, L. Znaleźć miejsce geom. środka koła, opisanego na trójkącie $\triangle AKL$.

14. Dane jest koło O, a w niem dwie prostopadłe do siebie i nieruchome średnice AOA', BOB'. Prowadzimy dwa prostopadłe do siebie, lecz ruchome, promienie OX, OY, a przez ich końce kreślimy proste, równoległe do promieni OA, OB. Jakie jest miejsce geometryczne punktu Z, w którym przecinają się te dwie proste?

15. Dane są dwa koła O', O'', styczne do siebie w punkcie A; niech m będzie spólną ich styczną w tym punkcie, m' zaś i m'' niech będą dwie styczne, równoległe do m. Po m porusza się punkt M, z którego prowadzimy styczne do obu kół, przecinające proste m', m'' w punktach M', M''. Znaleźć miejsce punktu X, w którym przecinają się proste $M'O'$, $M''O''$.

16. Na płaszczyźnie dane są dwie przecinające się proste a, b i punkt P, leżący na a. Z punktu zmiennego X prowadzimy równoległą do b, która przecina prostą a w punkcie Y. Jakie jest miejsce punktu X, jeżeli mamy stale $XY = YP$?

17. Co kreśli wierzchołek C trójkąta $\triangle ABC$, w którym bok AB jest nieruchomy, środkowa zaś s_a ma stałą długość?

18. Dwa koła zmienne są styczne w stałych punktach P, P' do dwóch nieruchomych i przecinających się prostych, a oprócz tego są styczne do siebie w punkcie X. Znaleźć miejsce geometryczne punktu X.

19. W trójkącie ABC kąty są stałe, wierzchołek A jest nieruchomy, wierzchołek B porusza się po prostej danej m. Co kreśli trzeci wierzchołek?

[Wskazówka: wykreślając różne położenia punktu C, uwzględnić to położenie, przy którem bok a leży na prostej m.].

20. W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$, którego przeciwprostokątna AB jest nieruchoma, na przedłużeniu boku a odkładamy $CD = a$ i punkt D łączymy ze środkiem O koła opisanego. Znaleźć i wykreślić miejsce geometryczne

1-o punktu D;

2-o punktu E, w którym prosta DO przecina bok b.

21. Dany jest stały kąt $\sphericalangle ABC$, wewnątrz niego stały punkt M, wreszcie kąt $\sphericalangle \alpha$, którego wierzchołek leży w punkcie M. Kąt $\sphericalangle \alpha$ obraca się dokoła M, pozostając zawsze równy sobie. Niech ramiona obu kątów przecinają się w punktach K, L; z punktu M prowadzimy odcinek $MS \perp KL$. Znaleźć miejsce punktu S. [Wskazówka: poprowadzić $MD_1 \perp AB$ oraz $MD_2 \perp CB$ i połączyć D_1 i D_2 z punktem E.]

22. Przez punkt C przecięcia się dwóch kół prowadzimy sieczną nieruchomą ACA' i sieczną ruchomą BCB'. Niech P będzie punktem przecięcia się prostych AB, $A'B'$. Znaleźć i zbudować miejsce geometryczne punktu P.

23. Na odcinku AB, jako na średnicy, kreślimy półokrąg; dowolny punkt C tej krzywej łączymy z A i z B, na przedłużeniu odcinka AC odkładamy $AX = CB$. Znaleźć miejsce punktu X. [Wskazówka: w punkcie A wystawiamy prostopadłą do średnicy i odkładamy na niej $AD = AB$.]

24. W kole O mamy dane dwie nieruchome i prostopadłe do siebie średnice AOA', BOB'. Na ćwiartce AB okręgu obieramy dowolny punkt M, przez który prowadzimy styczną, przecinającą w punkcie K przedłużenie średnicy AOA'. Niech W będzie środkiem koła wpisanego w $\triangle OMK$. Dowieść, że gdy M przesuwamy po okręgu, punkt W przesuwa się po bokach kwadratu, wpisanego w koło O.

Zbadać szczegółowo ruch punktu W w zależności od ruchu punktu M. Czy W może znaleźć się w wierzchołku kwadratu? w środku boku kwadratu? Jak należy zmienić warunki zadania, żeby punkt ruchomy wykreślił cały kontur kwadratu? [Wskazówka: $\triangle OWA \equiv OWM$.]

25. Przy tych samych założeniach, co w poprzedniem zadaniu, zbadać ruch środków W_1, W_2, W_3 kół zawpisanych, stycznych odpowiednio do boków OM, MK, OK.

26. Dane jest koło O i w niem promień nieruchomy OA. Kreślimy promień zmienny OB i prowadzimy $BC \perp OA$. Znaleźć miejsce geometryczne środka W koła wpisanego w trójkąt $\triangle OBC$.

[Odpow.: cztery łuki, obejmujące każdy po $\frac{3}{8}$ δ.]

27. Po przedłużeniu średnicy koła O porusza się punkt A; z punktu tego prowadzimy styczną i na niej odkładamy $AB = AO$. Co kreśli punkt B, gdy A porusza się po OA?

28. Dokoła wierzchołka A trójkąta stałego $\triangle ABC$ obraca się prosta, która przecina w punkcie A koło opisane na tym trójkącie, a w punkcie E przecina prostą BC. Niech koło CDE przecina prostą AC w punkcie F, a prostą BF w punkcie G. 1-o dowieść, że prosta GE obraca się dokoła stałego punktu; 2-o znaleźć miejsce punktu G.

29. Znaleźć miejsce geometryczne środków wszystkich równoległoboków,

wpisanych w dany czworobok $ABCD$ i mających boki równoległe do przekątnych, AC, BD.

30. Z punktu stałego P prowadzimy do danego koła sieczną PAB, w punktach zaś A, B prowadzimy styczne AC, BC. Jakie jest miejsce geometryczne ortocentru H trójkąta $\triangle ABC$, jeżeli sieczna obraca się dokoła punktu P?

[Wskazówka: punkt symetryczny z ortocentrem H względem boku AB leży na okręgu koła, opisanego na $\triangle ABC$.]

II. O rozwiązywaniu zadań konstrukcyjnych.

A. Przykłady analizy geometrycznej.

§ 154. Zadania, z któremi dotąd mieliśmy do czynienia, były tak zgrupowane, że rozwiązania ich wynikały nieraz bezpośrednio z twierdzeń podanych i dowiedzionych w tekście, lub z innych zadań, uprzednio rozwiązanych. W praktyce jednak związek między danem zagadnieniem a znanemi twierdzeniami geometrji bywa zwykle dość odległy. Aby ten związek odnaleźć, postępujemy w sposób następujący.

Zakładamy najpierw, że zadanie zostało już rozwiązane, innemi słowami: kreślimy figurę mniej więcej zbliżoną do poszukiwanej i zakładamy, że spełnia ona wszystkie warunki zadania. Następnie, kreśląc w razie potrzeby linje pomocnicze, staramy się wykazać, że nasze zadanie byłoby rozwiązane, gdyby się udało rozwiązać pewne inne zadanie. Dalej wykazujemy, że to drugie zadanie byłoby rozwiązane, gdybyśmy umieli rozwiązać trzecie jakieś zadanie i t. d. Postępując w ten sposób, dochodzimy wreszcie do zadania, którego rozwiązanie jest nam znane.

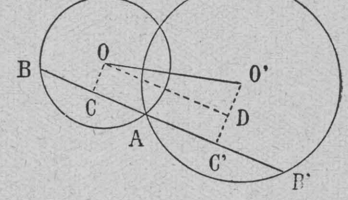
Postępowanie to nosi nazwę *analizy geometrycznej*. Na czem ono polega, zrozumiemy najlepiej na przykładach.

§ 155. Zadanie I. *Dane są dwa koła $(O)r$, $(O)r'$, przecinające się w punkcie A; poprowadzić przez ten punkt sieczną w taki sposób, żeby suma cięciw, wyznaczonych na niej przez oba koła, równała się danemu odcinkowi* m.

Przypuśćmy, że $r' > r$ i że koła oraz odcinek BB', przedstawione na rys. 123, odpowiadają warunkom zadania. Jeśli poprowadzimy ze środków O, O' prostopadłe do cięciw, otrzymamy odcinek CC', który równa się $\frac{1}{2} m$, jest więc znany. Odcinek ten

jest zarazem odległością między dwiema równoległemi do siebie prostemi OC, $O'C'$. Tak więc zadanie nasze byłoby rozwiązane, gdyby się udało rozwiązać następujące

Zadanie pomocnicze I. *Przez dwa dane punkty O, O' poprowadzić dwie równoległe tak, żeby odległość między niemi równała się danemu odcinkowi $\frac{1}{2} m$,*



Rys. 123.

Jeżeli teraz poprowadzimy ze środka mniejszego koła równoległą po prostej CC', wówczas otrzymamy trójkąt prostokątny $\triangle OO'D$, w którym przyprostokątna OD równa się $\frac{1}{2} m$. Zadanie tedy pomocnicze byłoby rozwiązane, gdybyśmy potrafili zbudować trójkąt $\triangle OO'D$, czyli, gdybyśmy rozwiązali następujące

Zadanie pomocnicze II. *Zbudować trójkąt prostokątny $\triangle OO'D$, mając daną przeciwprostokątną OO' i przyprostokątną $OD = \frac{1}{2} m$.*

To drugie zadanie rozwiązać możemy, o ile tylko $OO' > \frac{1}{2}$ m. Istotnie, na OO', jako na średnicy, kreślimy półkole, z punktu zaś O kreślimy koło promieniem równym $\frac{1}{2} m$; punkt przecięcia się tych kół jest wierzchołkiem D trójkąta.

Chcąc teraz otrzymać rozwiązanie zadania I, przedłużamy bok $O'D$ trójkąta i z punktu A prowadzimy prostopadłą do prostej $O'D$; prostopadła ta jest żądaną sieczną.

Istotnie $OD = CC' = \frac{1}{2} m$, że zaś $BC = CA$, $C'B' = C'A$, zatem $BB' = m$.

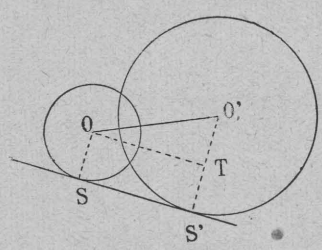
Jak widzimy, żądaną sieczną potrafimy zbudować wtedy i tylko wtedy, gdy $OO' > \frac{1}{2} m$ — czyli, gdy zadana suma cięciw jest mniejsza od podwojonej odległości środków obu kół.

§ 155. Zadanie II. *Poprowadzić spólne styczne do dwóch danych nierównych kół $(O)r$ i $(O)r'$.*

I. Przypuśćmy znów, że $r' > r$ i że koła wraz ze styczną SS' na rysunku 124 odpowiadają warunkom zadania. Promienie OS, $O'S'$ są prostopadłe do stycznej SS', a jeżeli przez O poprowadzimy równoległą do stycznej, przecinającą w punkcie T promień większego koła, otrzymamy trójkąt prostokątny $\triangle OO'T$, w którym $O'T = r' - r$ (dlaczego?).

Zadanie nasze rozwiążemy, o ile potrafimy rozwiązać następujące

Zadanie pomocnicze. *Zbudować trójkąt prostokątny, w którym mamy daną przeciwprostokątną, oraz przyprostokątną, równającą się różnicy promicni $r' - r$.*



Rys. 124.

Trójkąt taki zbudować umiemy. Po zbudowaniu go wystarczy przedłużyć bok $O'T$ aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie S', przez O poprowadzić promień OS równoległy do $O'S'$ i połączyć punkty S, S'.

Rzecz prosta, że możemy zbudować dwa trójkąty takie, jak $\triangle OO'T$, położone symetrycznie względem linji środków OO'; powinniśmy tedy otrzymać dwie styczne, takie jak SS'. Styczne te nazywamy *zewnętrznemi.*

Wynik ten był łatwy do przewidzenia, gdyż linja środków OO' jest osią symetrji figury, złożonej z dwóch kół $(O)r$ i $(O')r'$.

Rozwiązanie nasze wymaga, żeby było

$$OO' > O'T \text{ czyli } OO' > r' - r \text{ (dlaczego?)}.$$

Innemi słowy: żeby zadanie było możliwe do rozwiązania, koła dane albo nie powinny mieć wcale punktów spólnych, albo powinny być zewnętrznie do siebie styczne, albo wreszcie powinny się przecinać.

We wszystkich tych trzech przypadkach koła mają dwie spólne styczne zewnętrzne.

W przypadku granicznym, gdy mamy

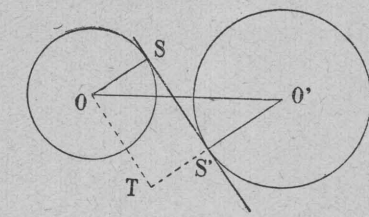
$$OO' = r - r',$$

czyli, gdy koła są wewnętrznie do siebie styczne, trójkąt $\triangle OO'T$ nie istnieje, lecz wtedy prosta, prostopadła do OO' w punkcie styczności kół, jest spólną styczną zewnętrzną danych kół *).

---

*) Uczeń wykreśli wspólne styczne zewnętrzne dla kilku par kół o tych samych promieniach r, r' i przekona się, że gdy odległość środków stopniowo maleje, tak, iż koło $(O)r$ stopniowo przechodzi w koło styczne wewnętrznie do koła $(O)r'$, obie styczne spólne coraz bardziej zbliżają się do siebie. Co dzieje się z temi stycznemi w chwili, gdy mniejsze koło staje się wewnętrznie styczne do większego?

II. Możemy wyobrazić sobie jeszcze inną figurę, odpowiadającą warunkom zadania, mianowicie taką, jak na rysunku 125.



Rys. 125.

Kreślimy znów promienie OS, OS', prostopadłe do spólnej stycznej SS', przedłużamy promień $O'S'$, z punktu zaś O prowadzimy równoległą do stycznej, a więc prostopadłą do prostej $O'S'$.

W ten sposób otrzymujemy trójkąt prostokątny $\triangle OO'T$, w którym $O'T = r + r'$ (dlaczego?). Stwierdzamy znów, że zadanie nasze byłoby rozwiązane, gdybyśmy potrafili rozwiązać następujące

Zadanie pomocnicze. *Zbudować trójkąt prostokątny $\triangle OO'T$, mając daną przeciwprostokątną OO' i przyprostokątną $O'T = r + r'$.*

Zadanie to rozwiązać umiemy. Po rozwiązaniu go wypadnie tylko poprowadzić $OS // OT$ i połączyć S z S'.

W ten sposób otrzymujemy *spólną styczną wewnętrzną dwóch kół.*

Oczywista rzecz, że musi istnieć druga jeszcze styczna wewnętrzna, symetryczna z prostą SS' względem osi OO'.

Rozwiązanie nasze wymaga, żeby było

$$OO' > O'T \text{ czyli } OO' > r + r'.$$

Innemi słowy: koła dane nie powinny mieć wcale punktów spólnych; otrzymujemy wówczas dwie styczne wewnętrzne.

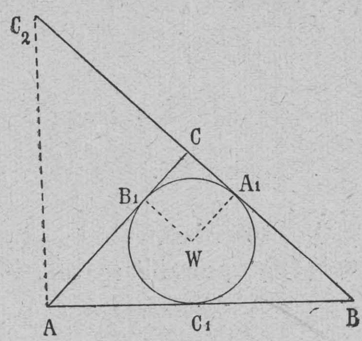
W przypadku granicznym, gdy $OO' = r + r'$, trójkąt $\triangle OO'T$ przestaje istnieć; koła są wówczas zewnętrznie do siebie styczne, a prosta, prostopadła do osi OO', jest jedyną ich spólną styczną wewnętrzną *).

§ 157. Zadanie III. *Zbudować trójkąt prostokątny, mając daną przeciwprostokątną c i promień ϱ koła wpisanego.*

---

*) Uczeń znów przekona się, że gdy koła $(O)r$, $(O')r'$ zbliżają się do siebie, styczne wewnętrzne coraz mniej różnią się od siebie. Co dzieje się w chwili, gdy koła stają się zewnętrznie do siebie styczne?

Analiza. Przypuśćmy, że zadanie jest rozwiązane i że $\triangle ABC$ na rysunku 126 przedstawia żądaną figurę. Niech W będzie środkiem koła wpisanego, A_1, B_1, C_1 niech będą punktami styczności tego koła z bokami, a, b, c trójkąta.



Rys 126.

Jeżeli poprowadzimy promienie WA_1, WB_1, zauważymy odrazu, że

$CA_1 = CB_1 = \varrho$ (dlaczego?).

Zważywszy, iż

$$AB_1 = AC_1,\ BA_1 = BC_1,$$

mamy $a = BC_1 + \varrho$,

$b = AC_1 + \varrho$,

zatem $a + b = c + 2\varrho$,

czyli mamy daną sumę dwóch przyprostokątnych.

Jak widzimy, zadanie nasze dałoby się rozwiązać, gdybyśmy umieli rozwiązać następujące

Zadanie pomocnicze I: *Zbudować trójkąt prostokątny, mając daną przeciwprostokątną i sumę dwóch przyprostokątnych* a + b.

Jeżeli przedłużymy bok a, na przedłużeniu jego odłożymy $CC_2 = b$ i połączymy A z C_2, otrzymamy trójkąt $\triangle AC_2B$, w którym znamy boki BC_2, AB oraz kąt $\sphericalangle BC_2A = {}^1/_2\,\delta$ (dlaczego?). Po zbudowaniu takiego trójkąta znajdziemy odrazu punkt C. Istotnie, punkt ten, jako wierzchołek kąta prostego, powinien leżeć na okręgu, którego średnicą jest bok AB.

Tak więc zadanie nasze potrafimy rozwiązać, gdyż umiemy rozwiązać następujące

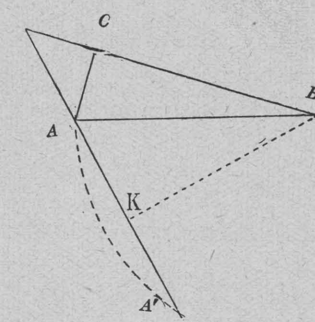
Zadanie pomocnicze II: *Zbudować trójkąt, mając dane dwa boki i kąt przeciwległy jednemu z nich* (ćwiczenie XV, 23, str. 85—87).

Konstrukcja. Budujemy kąt, równy ${}^1/_2\,\delta$; na jednem jego ramieniu odkładamy odcinek $C_2B = a + b = c + 2\varrho$ i z punktu B kreślimy koło promieniem, równym odcinkowi c. Punkt A, w którym to koło przecina drugie ramię kąta, łączymy z punktem B, poczem na AB, jako na średnicy, kreślimy koło, przecinające prostą BC_2 w punkcie C. Trójkąt $\triangle ABC$ jest żądany.

Badanie. Zadanie nasze ma co najwyżej tyle rozwiązań, ile ich posiada zadanie pomocnicze II, gdyż koło, zbudowane na średnicy AB, przeciąć może tylko w jednym punkcie prostą BC_2.

W zadaniu pomocniczem mamy $AB < BC_2$, kąt zaś $\sphericalangle AC_2B$ jest mniejszy od prostego, zachodzi tu więc przypadek, o którym była mowa pod numerem 3-o na str. 86 przy rozwiązywaniu ćwiczenia 24. Jeżeli poprowadzimy $BK \perp C_2A$, przekonamy się, że zadanie pomocnicze ma

jedno rozwiązanie, gdy $c = BK$,
dwa rozwiązania „ $c > BK$,
nie ma rozwiązań, „ $c < BK$.



Rys. 127.

Powiedzieliśmy wyżej, że nasze zadanie może mieć *co najwyżej* tyle rozwiązań, ile ich ma zadanie pomocnicze. Istotnie, gdyby koło, zakreślone na średnicy AB, nie przecięło wcale odcinka BC_2, zadanie nasze nie dałoby się rozwiązać. Otóż przypadek ten mógłby zajść wówczas, gdyby kąt $\sphericalangle C_2BA$ był prosty lub rozwarty, ale to jest niemożliwe.

Istotnie, gdyby kąt $\sphericalangle C_2BA$ był prosty, wówczas trójkąt $\triangle C_2AB$ byłby równoramienny *(dlaczego?)* i mielibyśmy

$$AB = BC_2,$$

czyli $$c = c + 2\varrho,$$

co jest niedorzeczne. Gdyby kąt $\sphericalangle C_2BA$ był rozwarty, wówczas mielibyśmy

$$\sphericalangle BAC_2 < \sphericalangle AC_2B \quad \textit{(dlaczego?)}$$

i, co za tem idzie $$AC_2 < AB,$$

czyli $$c + 2\varrho < c,$$

co znów jest niedorzeczne.

Tak więc zadanie nasze ma dokładnie tyle rozwiązań, co i zadanie pomocnicze.

§ 158. Zadanie IV. *Zbudować trójkąt, mając dane trzy jego środkowe.*

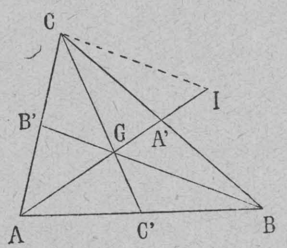
Niech trójkąt $\triangle ABC$ będzie trójkątem żądanym; AA', BB', CC' niech będą jego środkowe, przecinające się w punkcie G.

Oczywista rzecz, że znamy odcinki, wyznaczone na środkowych przez środek ciężkości G (§ 81, str. 57). Wobec tego, jeśli przedłużymy środkową AA' i na przedłużeniu odłożymy $A'I = A'G$, to otrzymamy trójkąt $\triangle GCI$, w którym

$$CI = GB = \tfrac{2}{3} s_b,\quad CG = \tfrac{2}{3} s_c,\quad GI = \tfrac{2}{3} s_a.$$

Umiemy zbudować ten trójkąt, gdyż mamy dane wszystkie trzy jego boki.

Po zbudowaniu tego trójkąta, możemy z łatwością kilkoma sposobami otrzymać trójkąt żądany $\triangle ABC$. Uczeń znajdzie sam konstrukcję.



Rys. 128.

Jak widzimy, zapomocą analizy sprowadziliśmy nasze zadanie do rozwiązania następującego

Zadania pomocniczego. *Mając dane odcinki s_a, s_b, s_c, zbudować trójkąt o bokach $\tfrac{2}{3} s_a$, $\tfrac{2}{3} s_b$, $\tfrac{2}{3} s_c$.*

Łatwo przekonać się, że z każdego trójkąta $\triangle CGI$ możemy otrzymać jeden tylko trójkąt $\triangle ABC$, zatem zadanie nasze ma tyleż rozwiązań co i zadanie pomocnicze, t. j. dwa, które zresztą różnią się tylko położeniem, są mianowicie symetryczne względem prostej AI (porówn. § 137, str. 95).

Z powyższych przykładów widzimy, że analiza geometryczna o tyle prowadzi do celu, o ile zadanie dane potrafimy zastąpić przez zadanie łatwiejsze lub poprzednio już rozwiązane. Zależy tu wiele od umiejętnego wyboru linij pomocniczych, które mamy wykreślić. Nie możemy w tym względzie podać żadnych reguł ogólnych: trafność wyboru zależy od wprawy i od znajomości różnych związków geometrycznych.

Ćwiczenie XXI. Jeżeli w zadaniu chodzi o zbudowanie trójkąta i jeżeli mamy daną sumę lub różnicę dwu jego boków, wówczas należy tę sumę lub różnicę wprowadzić do rysunku, kierując się np. wskazówkami zawartemi w ćwiczeniach IX, 50—57, na str. 62. To samo dotyczy przypadku, gdy mamy dany obwód trójkąta lub sumę (czy też różnicę) innych jakichkolwiek odcinków.

1. Zbudować $\triangle ABC$, mając dane $a+b+c$ oraz A, B.

[W s k a z ó w k a d o a n a l i z y: na prostej AB odkładamy nazewnątrz trójkąta $\triangle ABC$ odcinki $AK = AC$, $BL = BC$ i tworzymy trójkąt $\triangle KCL$. Zbadać jego kąty i sformułować zadanie pomocnicze, do którego sprowadzamy rozwiązanie zadania danego.]

2. Zbudować $\triangle ABC$, mając dane b, $r_b - r_a$, B, przyczem $\sphericalangle A < \delta$.
3. " " " a, $r_a - r_b$, $A - B$.

[W s k a z ó w k a d o a n a l i z y: jeżeli CD jest wysokością oraz $BE = r_a - r_b$, wówczas badamy kąty w trójkącie $\triangle CBE$*).]

4. Zbudować $\triangle ABC$, mając dane: a, b, $r_a - r_b$, przyczem $\sphericalangle A \not< \delta$.
5. " " " " a, B, $r_a - r_b$, " "
6. " " " " a, A, $r_a - r_b$, " "
7. " " " " C, $r_a - r_b$, $A - B$ " "

[W s k a z ó w k a d o a n a l i z y: jeżeli CD jest wysokością, $DE = DA = r_b$, wówczas badany trójkąt $\triangle CBE$.]

8. Zbudować $\triangle ABC$, mając dane: a, b, s_c.
9. " " " " a, h_a, $\sphericalangle(a, s_c)$.
10. " " " " A, $b + c$, s_a. [W s k a z ó w k a d o a n a l i z y: uzupełniamy trójkąt $\triangle ABC$ tak, by otrzymać równoległobok, w którym s_a byłoby połową przekątnej.]
11. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane: A, $b - c$, s_a.

Oznaczmy przez D_a, D_b, D_c punkty, w których koło wpisane $(W)\rho$ dotyka boków a, b c trójkąta. Tak samo punkty, w których koło zawpisane $(W_a)\rho_a$, leżące w kącie $\sphericalangle A$, dotyka boków trójkąta lub ich przedłużeń, oznaczymy symbolami A_a, A_b, A_c. Z łatwością dowiedzie czytelnik następujących związków, w których symbol $2p$ oznacza obwód trójkąta $\triangle ABC$:

I. $AD_b = AD_c = p - a$,
$BD_a = BD_c = p - b$,
$CD_a = CD_b = p - c$,

II. $AA_b = AA_c = p$,
$BB_a = BB_c = p$,
$CC_a = CC_b = p$.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając danc:

12. $2p$, a, ρ_c.
13. $2p$, C, ρ.
14. $2p$. ρ_a, d_A.
15. $2p$, ρ_c, h_a.
16. $2p$, C, h_c.
17. p, $A+B$ i odcinek WA.
18. $p - c$, a, ρ.
19. $p - c$, ρ, ρ_a.
20. $p - c$, A, h_a.
21. $p - c$, C, $\rho_c - \rho$.
22. $p - c$, c, ρ.
23. $p - c$, A, ρ_a.

W następującej grupie zadań mamy dane bądź poszczególne boki trójkąta, bądź sumę lub różnicę dwóch boków. Uczeń oprze analizę tych zadań na figurze podobnej do tej, która dała nam rozwiązanie zadań grupy poprzedniej, a mianowicie na figurze, złożonej z trójkąta $\triangle ABC$, z kół $(W)\rho$, $(W_a)\rho_a$, $(W_b)\rho_b$, $(W_c)\rho_c$ oraz (w razie potrzeby) z koła opisanego (O) R.

*) Zarówno w tem, jak i we wszystkich innych zadaniach należy starać się przedewszystkiem o jasne sformułowanie zadań pomocniczych, do których sprowadzamy rozwiązanie zadania danego.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mające dane:

24. c, C, ρ.
25. c, C, ρ_c.
26. c, R, ρ.
27. c, A, ρ_a.
28. $a+b, \rho_a, \rho_b$.
29. $a+b, C, \rho_c$.
30. $a+b, \rho, \rho_c$.
31. $a+b, \rho_c-\rho\ C$.
32. $a+b, C, \rho_a-\rho_b$.
33. $a-b, \rho, \rho_c$.
34. $a-b, B, \rho$.
35. $a-b, h_a, \rho$.

---

36. Mając dany trójkąt $\triangle ABC$, wykreślić z jego wierzchołków, jako ze środków, trzy koła, z których każde byłoby styczne do dwu drugich.

37. Dane jest koło $(O)A$, na przedłużeniu zaś średnicy OA dany jest punkt B; znaleźć na prostej AB taki punkt X, żeby styczna XC równała się odcinkowi XB.

[Wskazówka: przedłużamy BC aż do przecięcia się z kołem w punkcie D i badamy kąty trójkąty $\triangle DOB$.]

38. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$ i wewnątrz niego punkt K; wpisać w trójkąt równoległobok tak, by punkt K był środkiem równoległoboku. [Wskazówka: jeżeli poprowadzimy $KL // AB$ oraz $KM // BC$, wówczas, znając punkty L, M na boku b, będziemy mogli z łatwością wyznaczyć wierzchołki D, E równoległoboku, leżące na tym samym boku b.]

39. Zbudować czworobok $ABCD$, mając dane w płaszczyźnie rysunku środki M, N dwóch przeciwległych boków oraz cztery odcinki, równające się odpowiednio bokom a, b, c, d. [Wskazówka: jeżeli K, L są środkami przekątnych, to $KLMN$ jest równologłobokiem, w którym znamy długości boków (dlaczego?); jeżeli P, S są środkami dwu innych boków czworoboku, wówczas $PLSK$ jest też równoległobokiem o znanych bokach, a prócz tego równoległoboki $KLMN$, $PLSK$ mają wspólny środek.]

40. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty; wykreślić okrąg równo odległy od wszystkich czterech punktów.

41. Dany jest okrąg koła i na nim dwa punkty A, B; wpisać w to koło trójkąt $\triangle ABC$ tak, żeby było $\sphericalangle A - \sphericalangle B = \delta$.

42. Dany jest kąt $\sphericalangle AOB$, którego wierzchołek O leży poza granicami rysunku. Mając dany punkt C na ramieniu AO, znaleźć na drugiem ramieniu taki punkt B, żeby było $OA = OB$.

43. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane $a+b$, ρ_a, ρ_b. [Wskazówka: na dowolnej prostej m odkładamy odcinek $a+b$ i w jego końcach kreślimy promieniami danemi koła, styczne do prostej m.]

B. Metoda miejsc geometrycznych.

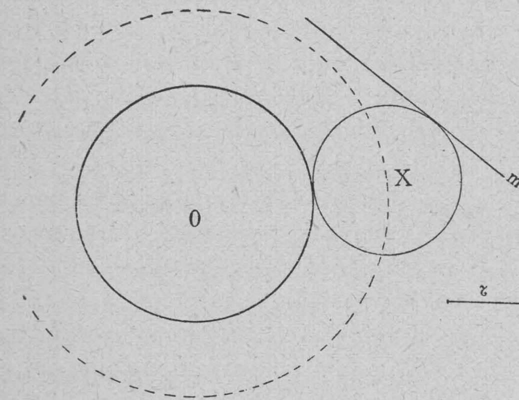
§ 159. Zapomocą analizy geometrycznej możemy każde zadanie konstrukcyjne sprowadzić do typu następującego:

„Znaleźć punkt X, który jest wyznaczony przez dwa znane nam warunki“.

Niech będzie dane np. do rozwiązania

Zadanie I. *Danym promieniem* r *zakreślić koło styczne do prostej danej* m, *które byłoby zarazem zewnętrznie styczne do danego koła* (O)r'.

Rzecz oczywista, że zadanie będzie rozwiązane, skoro tylko znajdziemy środek żądanego koła. Tak więc niewiadomym (poszukiwanym) punktem X jest w naszem zadaniu środek koła, które mamy wykreślić.



Rys. 129.

Załóżmy, że rys. 129 przedstawia żądaną figurę. Skoro koło $(O)r'$ ma być zewnętrznie styczne do koła szukanego $(X)r$, odległość ich środków powinna równać się sumie promieni, czyli musi być

$$OX = r + r'.$$

Ponieważ dalej koło$(X)r$ ma być styczne do prostej m, zatem odległość punktu X od prostej m winna równać się promieniowi koła.

W ten sposób zadanie nasze sprowadziliśmy do następującego zadania pomocniczego:

Zadanie pomocnicze. *Znaleźć punkt X, spełniający jednocześnie dwa warunki: 1) odległość OX równa się sumie promieni* r + r'; *2) odległość punktu X od prostej* m *równa się* r.

Aby rozwiązać to zadanie pomocnicze, bierzemy najpierw pod uwagę pierwszy warunek:

1) Ponieważ punkt O jest dany, a miejscem geometrycznem punktów, odległych od punktu O o odcinek $r + r'$, jest okrąg

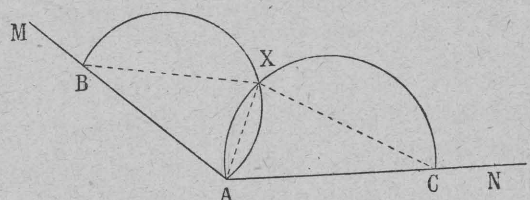
zakreślony z O promieniem $r+r'$, zatem punkt X musi leżeć na tym okręgu.

2) Przechodzimy teraz do warunku drugiego. Miejscem geometrycznem punktów, odległych od prostej m o dany odcinek r, jest układ dwóch prostych, równoległych do m i leżących symetrycznie względem niej w odległości r od tej prostej. Wobec tego należy punktu X szukać na tych równoległych, a ponieważ leży on jednocześnie na kole, zakreślonem z punktu O promieniem $r+r'$, zatem może leżeć tylko w punkcie przecięcia się tego koła w jedną lub drugą z powyższych równoległych.

Ilość rozwiązań zależy od ilości punktów przecięcia się obu miejsc geometrycznych. Uczeń zbada szczegółowa wszystkie możliwe przypadki.

Jak widzimy, postępowanie nasze polega na tem, że uwzględniamy najpierw tylko pierwszy warunek, któremu winien czynić zadość punt X, i w ten sposób wyznaczamy jedno miejsce geometryczne tego punktu; następnie, uwzględniając tylko drugi warunek, znajdujemy drugie miejsce geometryczne tego samego punktu X. Wobec tego punkt szukany X znajdujemy, wykreśliwszy oba jego miejsca geometryczne.

§ 260. Zadanie II. *Wewnątrz danego kąta $\sphericalangle MAN$ znaleźć taki punkt X, żeby dane odcinki AB, AC, leżące na ramionach kąta, widać było z punktu X pod danemi kątami $\sphericalangle\alpha$, $\sphericalangle\beta$.*



Rys. 130.

Jeżeli rys. 130 przedstawia figurę żądaną, czyli jeżeli punkt X na tym rysunku spełnia dwa następujące warunki:

$$\sphericalangle BXA=\alpha,\quad \sphericalangle AXC=\beta,$$

wówczas punkt X leży 1) na łuku, wykreślonym na cięciwie AB i obejmującym kąt $\sphericalangle\alpha$: 2) na łuku, wykreślonym na cięciwie AC i obejmującym kąt $\sphericalangle\beta$.

Zadanie posiada jedno i tylko jedno rozwiązanie, jeżeli łuki te mają prócz punktu A drugi jeszcze punkt spólny, czyli jeżeli figura $ABXC$ jest czworobokiem. Innemi słowami, aby zadanie posiadało rozwiązanie, trzeba i wystarcza, żeby zachodziła nierówność

$$\sphericalangle BAC+\sphericalangle BXC<4\,\delta,$$

czyli

$$\sphericalangle BAC+\sphericalangle\alpha+\sphericalangle\beta<4\,\delta,$$

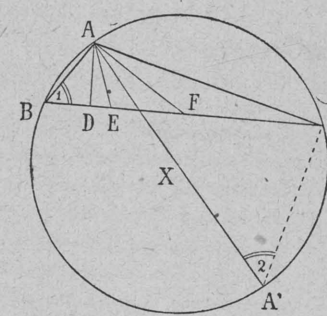
---

§ 161. Czasem dopiero dłuższa analiza może wskazać nam ów punkt X, do znalezienia którego sprowadza się rozwiązanie zadania. Jako przykład podajemy następujące

Zadanie III. *Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane h_a, s_a, d_A.*

Niech trójkąt $\triangle ABC$ na rys. 131 będzie żądany i niech AD, AE, AF będą odpowiednio wysokością, dwusieczną i środkową.

Przedewszystkiem zauważmy, że trójkąt prostokątny $\triangle ADE$ daje się z łatwością zbudować, gdyż znamy jego przyprostokątną AD i przeciwprostokątną AE. To samo powiedzieć można o trójkącie $\triangle ADF$. Po zbudowaniu tych dwóch trójkątów znalibyśmy wierzchołek A żądanego trójkąta, prostą, na której leży obok a, oraz środek F tego boku. Pozostałe dwa wierzchołki B, C trójkąta dałyby się łatwo znaleźć, gdybyśmy umieli wykreślić koło,



Rys. 131.

opisane na trójkącie szukanym $\triangle ABC$. Otóż koło to potrafimy wykreślić, jeżeli znajdziemy jego środek X, gdyż musi ono przechodzić przez znany nam punkt A.

Tak więc zagadnienie nasze sprowadziliśmy do następującego

Zadania pomocniczego. *Znaleźć środek koła, opisanego na niewiadomym trójkącie $\triangle ABC$, mając dane na rysunku trójkąty $\triangle ADE$, $\triangle ADF$, które wysokość, dwusieczna i środkowa tego niewiadomego trójkąta tworzą z bokiem jego* a.

Aby rozwiązać to zadanie pomocnicze, musimy znaleźć dwa miejsca geometryczne dla punktu X.

Jedno z tych miejsc znamy oddawna: jest to oś symetrji boku a, którą możemy wykreślić, gdyż znamy środek F tego boku i prostą DF, na której leży bok a.

Co się tyczy drugiego miejsca geometrycznego, to znajdziemy je zapomocą dalszej analizy.

Niech AXA' będzie średnicą szukanego koła. Na rysunku 131 musi być $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ *(dlaczego?)*, a ponieważ trójkąty $\triangle ABD$, $\triangle AA'C$ są oba prostokątne, zatem pozostałe ich kąty ostre muszą równać się sobie, czyli musi być

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle A'AC \qquad (1)$$

Założyliśmy, że AE jest dwusieczną kąta $\sphericalangle BAC$ czyli, że mamy

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle DAE = \sphericalangle EAA' + \sphericalangle A'AC \qquad (2)$$

Z równości (1) i (2) wynika, że

$$\sphericalangle DAE = \sphericalangle EAA'.$$

Tak więc, mając dany trójkąt $\triangle ADE$, podwoimy jego kąt $\sphericalangle DAE$ i otrzymamy prostą AA', na której musi leżeć środek X szukanego koła.

Wykonanie konstrukcji pozostawiamy uczniowi.

Ćwiczenia XXII. 1. Mając dane promienie r, r', zakreślić niemi dwa koła, styczne do siebie i do danej prostej m. [Uwzględnić różne rodzaje styczności!]

2. Dane są na płaszczyźnie punkty A, A', B, B'; wykreślić dwa koła spółśrodkowe tak, by jedno przechodziło przez A i A', i drugie przez B i B'.

3. Dane są dwa koła spółśrodkowe $(O)r$, $(O)r'$ oraz punkt A; zbudować trzecie koło, przechodzące przez A i styczne do obu danych.

4. Zbudować dwa koła, styczne do siebie i do danej prostej m, przyczem środek jednego koła winien leżeć w danym punkcie O, promień zaś drugiego powinien równać się danemu odcinkowi r.

5. Dane są na płaszczyźnie trzy równe sobie koła; wykreślić czwarte koło, styczne do wszystkich trzech.

6. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$; znaleźć punkt, z którego wszystkie trzy boki trójkąta widać pod tym samym kątem.

7. Zbudować czworobok $ABCD$, mając dane: a, A, e, f oraz warunek, żeby na tym czworoboku można było opisać koło.

8. Na danym trójkącie równobocznym $\triangle AMN$ opisać kwadrat tak, by jeden jego wierzchołek leżał w punkcie A, boki zaś b i c przechodziły przez punkty M i N. [Wskazówka do analizy: poprowadzić przekątną AC]

9. W dane koło wpisać trójkąt prostokątny $\triangle ABC$ tak, by przyprostokątna a równała się danemu odcinkowi i żeby przedłużenie drugiej przyprostokątnej b przechodziło przez dany punkt M, leżący zewnątrz koła. [Wskazówka do analizy: czy wielkość przyprostokątnej b jest wyznaczona, jeżeli znamy a i promień koła opisanego?]

10. W dane koło wpisać trójkąt prostokątny tak, by dwa ramiona kąta prostego przechodziły odpowiednio przez punkty M, N. Zbadać przypaki: 1) gdy oba punkty leżą wewnątrz koła; 2) gdy jeden leży wewnątrz, drugi zewnątrz koła; 3) gdy oba leżą zewnątrz koła.

11. Danym promieniem r wykreślić koło, któreby na dwu danych prostych wyznaczało cięciwy, równające się danym odcinkom a, b.

12. Dane są koło O i prosta m; wykreślić sieczną tak, by jeden jej koniec leżał na prostej m, zewnętrzna jej część równała się danemu odcinkowi a. i żeby cięciwa, wyznaczona przez tę sieczną, równała się danemu odcinkowi b. [Wskazówka do analizy: jakie jest miejsce środka cięciwy, wyznaczonej przez tę sieczną? Jak sieczna nasza leży względem tego miejsca geometrycznego?]

13. Przez punkt przecięcia się dwóch kół poprowadzić w jednem z nich cięciwę tak, by drugie koło podzieliło ją na połowy.

14. Przez dany punkt A poprowadzić do danego koła sieczną tak, by cięciwa, wyznaczona na tej siecznej, została podzielona na połowy przez daną prostą m. [Wskazówka do analizy: poprowadzić promień, prostopadły do siecznej.]

15. Dany jest trójkąt prostokątny $\triangle ABC$; między ramionami kąta prostego umieścić dany odcinek p tak, żeby końce jego leżały na ramionach tego kąta, środek zaś na przeciwprostokątnej. [Wskazówka do analizy: jeżeli odcinek DF odpowiada warunkom zadania, punkt zaś E jest jego środkiem wówczas łączymy E z wierzchołkiem C kąta prostego. Czy odcinek CE jest nam znany?]

16. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$ i punt M na boku a; wykreślić koło styczne do boku a w punkcie M i wyznaczające równe cięciwy na bokach b, c

17. Wykreślić koło, przechodzące przez dany punt A i wyznaczające na dwu danych równoległych cięciwy, równające się danemu odcinkowi m.

18. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane A, B, ρ.
19. „ „ „ „ „ A, a, ρ.
20. „ „ „ „ „ ρ, $A+B$, ρ_c.
21. „ „ „ „ „ A, d_A, ρ.

22. W płaszczyźnie danego koła znaleźć taki punkt X, by suma stycznych $XA+XA'$ równała się siecznej, poprowadzonej z punktu X przez środek koła.

23. W dane koło wpisać trójkąt $\triangle ABC$, mając dany bok a, oraz długość odcinka AA', gdzie przez A' oznaczyliśmy punkt przecięcia się koła opisanego z przedłużeniem dwusiecznej d_A.

24. Na danym czworoboku $ABCD$ opisać kwadrat. [Wskazówka do analizy: uwzględnić miejsce geom. § 147 oraz fakt, że przekątna kwadratu jest dwusieczną jego kąta.]

25. Zbudować trójkąt prostokątny tak, by przyprostokątne a, b (lub ich przedłużenia) przechodziły odpowiednio przez dane punkty L, M, dwusieczna zaś kąta prostego (lub jej przedłużenie) przechodziła przez punkt dany K i żeby przyprostokątna CA równała się danemu odcinkowi b.

26. Dane są cztery punkty A, B, C, D; wykreślić kwadrat, którego boki przechodziłyby odpowiednio przez te punkty.

27. Z danych dwóch punktów O_1, O_2, jako ze środków, wykreślić dwa równe koła tak, by spólna styczna tych kół przechodziła przez dany punkt M.

28 Dane jest koło $(O)r$, punkty A, B, nie leżące na niem i prosta m. Przez A i B poprowadzić okrąg koła tak, by spólna cięciwa tych dwu kół była prostopadła do prostej m.

29. Znaleźć taki punkt X, by styczne, poprowadzone z niego do dwu danych kół, równały się danym odcinkom m, m'.

30. W danem kole $(O)r$ poprowadzić cięciwę, nachyloną pod kątem $\sphericalangle \alpha$ do danej prostej m i równającą się danemu odcinkowi a.

31. Z danego punktu A zakreślić koło tak, by styczna, poprowadzona z innego danego punktu B, równała się danemu odcinkowi a.

32. Z danego punktu O zakreślić koło tak, by z innego danego puntu A widać je było pod kątem $\sphericalangle \alpha$. [Porówn. uwagę na str. 115.]

33. Dane są dwa koła $(O)r$, $(O')r'$; wykreślić prostą tak, by przecięła ona oba koła i wyznaczyła w nich cięciwy, równające się odpowiednio odcinkom danym a, a'.

34. W danem kole poprowadzić średnicę tak, by z danego punktu A widać ją było pod danym kątem $\sphericalangle \alpha$.

35. Dane są dwie równoległe m, m', punkt A na prostej m i punkt K, nie leżący na żadnej z tych prostych. Przez K poprowadzić poprzeczną, przecinającą proste m, m' w takich dwu punktach B, B', że $AB = AB'$.

36. W dane koło wpisać kwadrat tak, by przez dany punkt M przechodził bok tego kwadratu (lub przedłużenie boku). [W s k a z ó w k a d o a n a l i z y: czy można wyznaczyć koło, wpisane w szukany kwadrat?]

37. Dane są dwa koła $(O)r$, $(O')r'$, wewnętrznie do siebie styczne w punkcie A; w większem z tych kół poprowadzić cięciwę prostopadłą do OA tak, żeby część cięciwy, zawarta między prostą OA i okręgiem większego koła, została podzielona na połowy przez mniejszy okrąg.

38. Dane są trzy punkty A, B, C; danym promieniem r nakreślić koło tak, by styczne, poprowadzone do niego z tych trzech punktów, równały się sobie.

39. W dane koło wpisać trójkąt tak, by przez dany punkt K przechodził bok a trójkąta (lub jego przedłużenie) i żeby kąty $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ równały się danym kątom.

40. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane boki a, b oaz warunek, że musi być $\sphericalangle A = 2 \sphericalangle B$.

41. Zbudować prostokąt $ABCD$, mając daną sumę $a+b$ oraz kąt $\sphericalangle \omega$ [W s k a z ó w k a d o a n a l i z y: na dwusiecznej kąta $\sphericalangle \omega$ odkładamy $EF = \frac{1}{2}(a+b)$].

42. Dane są trzy proste, równoległe do siebie; zbudować trójkąt równoboczny tak, by wierzchołki jego leżały na tych trzech prostych. [W s k a z ó w k a d o a n a l i z y: na trójkącie opisać koło.]

43. Na danym trójkącie ABC opisać trójkąt $\triangle A'B'C'$, mając dane kąty $\sphericalangle A'$, $\sphericalangle B'$ i bok c'.

44. Dane są dwa koła $(O)r$, $(O')r'$; wykreślić odcinek AA', równoległy do danej prostej BC, równy danemu odcinkowi m i położony tak, że punkt A znajduje się na jednym okręgu, punkt zaś A' na drugim.

45. Zbudować czworobok $ABCD$, mając dane A, C, e, f, ω.

46. W dany kwadrat wpisać drugi dany kwadrat.

47. Dane jest koło i w niem cięciwa AB; wykreślić drugą cięciwę CD tak, by środek jej E leżał na AB i żeby równała się ona danemu odcinkowi m.

48. Z danego punktu O wykreślić koło, przecinające ramiona danego kąta w takich punktach A i B, że prosta AB jest równoległa do danej prostej m.

49. W dane koło wpisać czworobok $ABCD$, mając dane a, b, $c+d$. [W s k a z ó w k a d o a n a l i z y: czy kąt $\sphericalangle D$ jest wyznaczony?]

50. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane A, s_a, h_a. [W s k a z ó w k a: jeżeli AA' jest środkową, wówczas na jej przedłużeniu odkładamy $A'A'' = s_a$; czy potrafimy zbudować $\triangle ABC$, jeżeli uda się zbudować $\triangle ABA''$?]

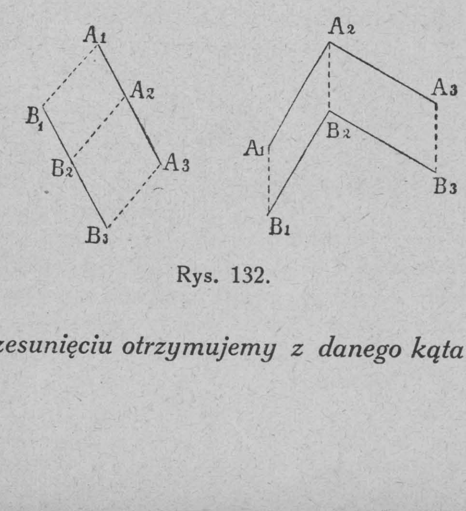
51. Dane są dwa koła spółśrodkowe i w nich dwa promienie; wykreślić styczną do mniejszego koła tak, by większe koło podzieliło na połowy odcinek tej stycznej, zawarty między dwoma danemi promieniami.

C. Metody przekształceń.

§ 162. Zapomocą analizy sprowadzamy rozwiązanie danego zadania do rozwiązania zadania pomocniczego, czyli konstrukcję figury szukanej sprowadzamy do konstrukcji figury pomocniczej. Otóż zdarza się nieraz, że figura pomocnicza znajduje się w bardzo prostym związku z figurą szukaną, że daje się ona otrzymać z niej zapomocą łatwego przekształcenia. Do najprostszych przekształceń należą: *przesunięcie* (całej figury lub pewnych jej elementów), *obrót i symetrja względem osi.*

I. Przekształcenie przez przesunięcie.

§ 163. Określenie. Jeżeli przez wszystkie punkty A_1, A_2, A_3, A_n... danej figury poprowadzimy równoległe i na nich odłożymy równe sobie odcinki $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = A_nB_n = \ldots$, wówczas końce tych odcinków B_1, B_2, B_2... utworzą nową figurę o której powiadamy, że została otrzymana z danej zapomocą *przesunięcia.*



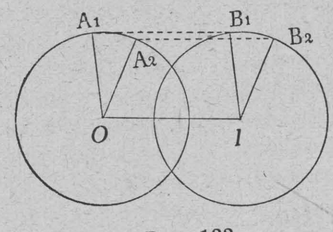
Rys. 132.

Twierdzenie I. *Po przesunięciu otrzymujemy z danego odcinka nowy odcinek, równy mu i do niego równoległy.*

Twierdzenie II. *Po przesunięciu otrzymujemy z danego kąta* *nowy kąt, mający ramiona odpowiednio równoległe do ramion danego kąta.*

Uczeń dowiedzie sam tych dwu twierdzeń, kierując się np. załączonemi rysunkami. Z twierdzeń tych wypływa

Wniosek. *Po przesunięciu trójkąta otrzymujemy trójkąt równy danemu i mający boki odpowiednio równoległe do boków danego trójkąta.*



Rys. 133.

Twierdzenie III. *Po przesunięciu koła $(O)A_1$ otrzymujemy równe mu koło $(I)\ B_1$.*

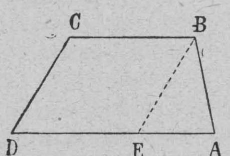
Jakoż z promieni OA_1, OA_2... otrzymujemy po przesunięciu równe im, a więc równe sobie odcinki IB_1, IB_2...

Równie łatwo dowieść można twierdzeń odwrotnych do poprzednich. Teraz możemy pojęcie przesunięcia zastosować do zadań konstrukcyjnych.

§ 164. Zadanie I. *Zbudować trapez, mając dane cztery jego boki a, b, c, d.*

Jeżeli z punktu B poprowadzimy $BE \| CD$ (czyli jeżeli *„przesuniemy"* bok CD do wierzchołka B), otrzymamy, jako figurę pomocniczą, trójkąt $\triangle ABE$, w którym znamy wszytkie trzy boki, gdyż

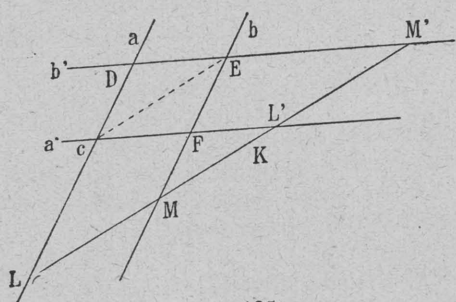
$$AB = a,\ BE = c,\ AE = d - b.$$



Rys. 134.

Po zbudowaniu trójkąta $\triangle ABE$ czytelnik sam zbuduje żądany trapez.

§ 165. Zadanie II. *Równoległe* a, b *zostały przecięte dwiema drugiemi równoległemi* a', b'. *Przez dany punkt K poprowadzić poprzeczną tak, by odcinek LM, wyznaczony na niej przez pierwszą parę równoległych, równał się odcinkowi L'M', wyznaczonemu przez drugą parę.*



Rys. 135.

Niech figura na rys. 135 odpowiada warunkom zadania.

Dwie dane pary równoległych tworzą równoległobok $CDEF$. Jeżeli odcinek LM *„przesuniemy"* do punktu C, drugi jego koniec znajdzie się na prostej b. Tak samo, jeżeli $L'M'$ przesuniemy do punktu C, drugi koniec tego odcinka znajdzie się na prostej b'. Ale oba odcinki, otrzymane skutkiem przesunięcia odcinków LM, $L'M'$, muszą zlewać się w jeden odcinek, gdyż są sobie równe (ponieważ $LM = L'M'$ według założenia) i oba są równoległe do tej samej prostej LKL'. Ponieważ, dalej, koniec tego odcinka leży, jak widzieliśmy, na prostych b i b', zatem odcinkiem, otrzymanym z przesunięcia odcinków LM i $L'M'$ jest przekątna CE równoległoboku.

Rozwiązanie jest teraz oczywiste: przez punkt K prowadzimy równoległą do jednej lub drugiej przekątnej równoległoboku $CDEF$.

Ćwiczenia XXIII. 1. Zbudować trapez $ABCD$, mając dane podstawy b, d i przekątne e, f. [Wskazówka: przesunąć przekątną.]

2. Zbudować czworobok, mając dane a, b, c, d i kąt $\sphericalangle(b, d)$ między przedłużeniami dwóch boków przeciwległych. [Wskazówka: przesunąć bok c lub a.]

3. Zbudować równoległobok, mając dane a, b, ω. [Wskazówka: przesuwamy jedną z przekątnych.]

4. Zbudować trapez, mając dane a, ω i przekątne e, f.

5. Zbudować czworobok $ABCD$, mając dane A, B, C, a, c.

6. Zbudować $\triangle ABC$, mając dane s_a, s_b, h_c. [Wskazówka: przesuwamy h_c.]

7. Zbudować równoległobok, mając dane a, h_a, h_b.

8. Dane są dwa koła $(O)r$, $(O')r'$ i punkt C, leżący zewnątrz obu kół. Przez C poprowadzić sieczną tak, by koła wyznaczyły na niej dwie równe cięciwy. [Wskazówka do analizy: przesuwamy koło $(O')r'$ równolegle do szukanej prostej tak, by równe cięciwy przystały do siebie; jeżeli O_1 jest nowem położeniem środka O', wówczas $\triangle OO_1O'$ daje się łatwo zbudować.]

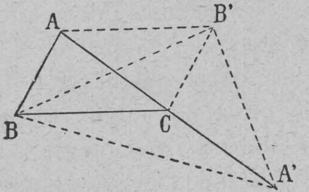
9. Zbudować czworobok, mając dane a, b, c, d oraz odcinek m, łączący środki dwóch przeciwległych boków a, c. [Wskazówka do analizy: przesuwamy boki b, d do środka boku c; końce tych dwu przesuniętych odcinków leżą na jednej prostej ze środkiem boku a.]

Jeżeli chodzi o zbudowanie trójkąta $\triangle ABC$, wówczas następujące przekształcenie bywa pomocne przy analizie zadania:

Przesuwamy bok c do wierzchołka C, bok a do wierzchołka A, przez co otrzymujemy równoległobok $ABCB'$; jeżeli teraz przesuniemy bok b do punktu C tak, że zajmie on położenie CA', wówczas powstanie trójkąt $\triangle BB'A'$. Trójkąt ten ma, między innemi, następujące własności, których czytelnik dowiedzie sam:

1) boki nowego trójkąta są dwa razy większe od środkowych trójkąta $\triangle ABC$,

2) punkt C jest środkiem ciężkości trójkąta $\triangle BB'A'$; 3) kąty przy punkcie C równają się kątom trójkąta $\triangle ABC$ albo też spełniają się z niemi; 4) kąty między bokami a środkowemi równają się sobie w obu trójkątach i t. d.



Rys. 136.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

10. s_a, s_b, h_a, 11. s_a, s_b, $\sphericalangle (a, s_a)$.
12. A, s_a, h_a. 13. A, h_a, s_b.
14. a, $\sphericalangle (a, s_c)$, $\sphericalangle (b, s_c)$.
15. a, h_a, $\sphericalangle (a, s_c)$.
16. dane jest koło, w niem średnica AB i dwa punkty C, D na jednym półokręgu; znaleźć na drugim półokręgu taki punkt E, by proste CE, DE wyznaczyły na średnicy AB odcinek danej długości $FG = m$. [Wskazówka: przesuwamy FG do punktu C.]

2. Obrót.

§ 166. Określenie. Mając daną jakąkolwiek figurę F, połączmy wszystkie jej punkty A_1, A_2, A_3... ze stałym punktem O, a następnie poprowadźmy z punktu O odcinki

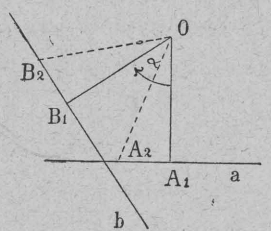
$$OB_1 = OA_1,\ OB_2 = OA_2,\ OB_3 = OA_3 ...$$

przyczem niech wszystkie odcinki drugiej grupy będą jednakowo nachylone do odpowiednich odcinków pierwszej grupy, t. j. niech będzie

$$\sphericalangle A_1OB_1 = \sphericalangle A_2OB_2 = \sphericalangle A_3OB_3 ... = \sphericalangle \alpha.$$

Końce B_1, B_2, B_3... drugiej grupy odcinków tworzą nową figurę F'; powiadamy, że *powstała ona przez obrót figury F dokoła środka obrotu O.*

§ 167. Twierdzenie. *Wskutek obrotu linji prostej powstaje prosta.*



Rys. 137.

Niech będzie dana prosta a. Ze środka obrotu O prowadzimy do niej prostopadłą OA_1 i obracamy tę prostopadłą o kąt $\sphericalangle \alpha$ czyli budujemy $\sphericalangle A_1OB_1 = \sphericalangle \alpha$ i odkładamy na jego ramieniu odcinek $OB_1 = OA_1$. Jeżeli teraz przez punkt B_1 poprowadzimy prostą b prostopadle do OB_1, wówczas łatwo będzie przekonać się, że jest on wynikiem obrotu prostej a o kąt $\sphericalangle \alpha$ dokoła środka obrotu O.

W tym celu musimy dowieść dwóch prawd: 1) że każdy

punkt na prostej b powstał skutkiem obrotu odpowiedniego punktu prostej a o kąt $\sphericalangle \alpha$; 2) że obracając o kąt $\sphericalangle \alpha$ dowolny punkt prostej a, otrzymamy punkt na prostej b.

1) Odłóżmy na a odcinek dowolny A_1A_2, na b zaś równy mu odcinek B_1B_2. Trójkąty $\triangle OA_1A_2$, $\triangle OB_1B_2$ równają się sobie (dlaczego?), zatem

$$OA_2 = OB_2,$$

oraz

$$\sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle B_1OB_2$$

i co zatem idzie, $\sphericalangle A_2OB_2 = \sphericalangle A_1OB_1 = \sphericalangle \alpha$.

2) Jeżeli z punktu O poprowadzimy dowolny odcinek OA_2 i wykreślimy

$$\sphericalangle B_2OA_2 = \sphericalangle \alpha,$$

wówczas musi być również

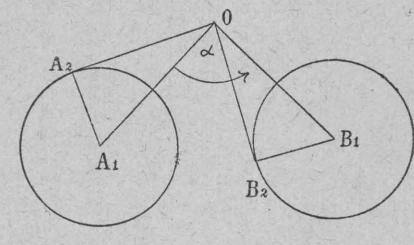
$$\sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle B_1OB_2,$$

że zaś mamy

$$OA_1 = OB_1,$$

zatem musi być

$$OA_2 = OB_2,$$



Rys. 138.

czyli punkt B_2, leżący na prostej b, jest wynikiem obrotu punktu A_2 o kąt $\sphericalangle \alpha$ dokoła środka O.

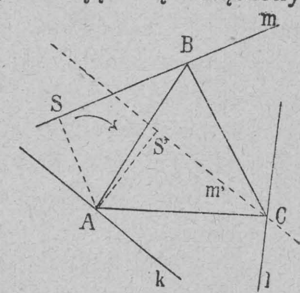
Wniosek. *Wskutek obrotu odcinka powstaje równy mu odcinek.*

§ 168. Twierdzenie. *Wskutek obrotu koła powstaje równe mu koło.*

Uczeń dowiedzie twierdzenia sam, kierując się załączonym rysunkiem 138-ym.

Twierdzenie. *Wskutek obrotu kąta powstaje równy mu kąt.*

§ 169. Zadanie I. *Dane są trzy proste k, l, m i punkt A na jednej z nich; wykreślić trójkąt równoboczny $\triangle ABC$ tak, by wierzchołki jego leżały na tych prostych.*



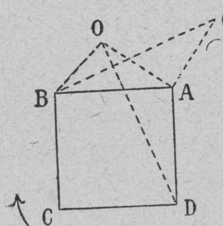
Rys. 139.

Rzecz prosta, że wystarczy znaleźć drugi jeszcze wierzchołek trójkąta, np. C, ponieważ zaś wiemy, iż C leży na prostej l, zatem wystarczy znaleźć jakiekolwiek inne miejsce geometryczne tego wierzchołka. W tym celu zauważymy, że jeśli bok AB wraz z prostą

m obrócimy dokoła A o kąt $\sphericalangle A = \frac{2}{3}\delta$, wówczas bok ten upadnie na bok AC, punkt B upadnie na punkt C, z prostej zaś m otrzymamy prostą m', przechodzącą przez szukany punkt C.

Tak więc, chcąc wykreślić żądany trójkąt $\triangle ABC$, kreślimy najpierw $AS \perp m$ i obracamy tę prostopadłą dokoła A o kąt równający się $\frac{2}{3}\delta$. W ten sposób otrzymujemy odcinek AS'. Kreślimy teraz $m' \perp AS$; punkt przecięcia się prostej m' z prostą l jest drugim wierzchołkiem trójkąta. Aby otrzymać trzeci wierzchołek B, wystarczy wykreślić koło $(A)\,C$.

§170. Zadanie II. *Zbudować kwadrat $ABCD$, mając dane w płaszczyźnie rysunku punkty O i A oraz znając odległości punktu O od wierzchołków B* i *D kwadratu* (np. $OB = n$, $OD = r$).



Rys. 140.

Rzecz jasna, że kwadrat zbudujemy odrazu, jeżeli potrafimy znaleźć drugi jego wierzchołek, oprócz punktu A, np., jeżeli znajdziemy wierzchołek B. Ponieważ znamy odległość $OB=n$, zatem punkt B leży na okręgu $(O)n$. Zadanie sprowadza się tedy do znalezienia jeszcze drugiego miejsca geometrycznego punktu B.

W tym celu zauważamy, że jeśli trójkąt $\triangle OAD$ obrócimy o kąt prosty dokoła punktu A, otrzymamy trójkąt $\triangle O'AB$ taki, iż

$$O'A = OA, \quad O'B = OD = r.$$

Punkt O' możemy z łatwością wyznaczyć: wystarczy w punkcie A wystawić prostopadłą do OA i odłożyć na niej $O'A = OA$. Mając punkt O', kreślimy okrąg $(O')r$; który jest drugiem miejscem geometrycznem punktu B; punkt ten zostaje wyznaczony przez przecięcie się okręgów $(O)n$ i $(O)r$.

Rozwiązań otrzymamy tyle, ile te dwa okręgi mają punktów spólnych. Tak więc przy założeniu, że $r > n$, zadanie ma rozwiązań

dwa, jeżeli $r - n < OO' < r + n$;
jedno, „ $OO' = r + n$;
lub jeżeli $OO' = r - n$
niema rozwiązań $OO' < r - n$.

Zauważymy, że jeśli na danym odcinku OA zbudujemy kwadrat, wówczas OO' musi być przekątną tego kwadratu, tak, iż mając dane odcinki n, r i punkty O, A, możemy zgóry przewidzieć, czy zadanie da się rozwiązać i ile posiada rozwiązań.

Ćwiczenie XXIV. 1. W dany kwadrat wpisać trójkąt równoboczny $\triangle A'B'C'$ tak, by jeden jego wierzchołek leżał w danym punkcie A' na boku kwadratu,

2. W dany równoległobok wpisać kwadrat. [Wskazówka do analizy: gdzie leży środek kwadratu? ile wierzchołków trzeba znać, by móc wykreślić kwadrat?]

3. W dany trójkąt $\triangle LMN$ wpisać trójkąt równoramienny $\triangle ABC$, jeżeli mamy dane: wierzchołek C na boku LM oraz kąt $\sphericalangle C$.

4. Dane są dwie proste m, n i punkt O, nie leżący na nich. Z punktu O zakreślić koło tak, aby suma cięciw, wyznaczonych na tych dwu prostych, równała się danemu odcinkowi a. [Wskazówka do analizy: obrócić prostą m dokoła O tak, by uczynić ją równoległą do n.]

5. Dane są dwa koła $(O)r$ i $(O')r'$ oraz punkt A; przez A poprowadzić odcinek tak, by końce jego leżały na danych okręgach, punkt zaś A żeby był jego środkiem. [Wskazówka: obracamy jedno koło o kąt półpełny.]

6. Przez punkt przecięcia się dwóch danych kół poprowadzić sieczną tak, by różnica cięciw, wyznaczonych na niej, równała się danemu odcinkowi a.

7. W dany odcinek kołowy wpisać trójkąt równoramienny $\triangle ABC$, mając dany punkt C na łuku oraz kąt $\sphericalangle C$.

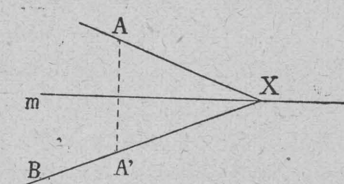
8. Wykreślić trójkąt równoboczny tak, by wierzchołki jego leżały na trzech danych okręgach spółśrodkowych, przyczem położenie jednego wierzchołka jest dane.

9. Dane są dwie równoległe a, b oraz punkt C, nie leżący na nich. Znaleźć na równoległych takie dwa punkty X, Y, żeby było $CX = CY$ i żeby kąt $\sphericalangle XCY$ był prosty. [Wskazówka: kąt $\sphericalangle XCY$ obracamy dokoła wierzchołka C.]

3. Przekształcenie symetryczne.

§ 171. Poznaliśmy już poprzednio (ćwiczenia XII, str. 72) szereg zadań konstrukcyjnych, dających się rozwiązać zapomocą przekształcenia symetrycznego, ze względu jednak na doniosłość tej metody podajemy jeszcze kilka przykładów jej zastosowania.

Zadanie I. *Dane są dwa punkty A, B, leżące po dwóch stronach prostej* m; *znaleźć na prostej* m *taki punkt X, by prosta ta była dwusieczną kąta $\sphericalangle AXB$.*

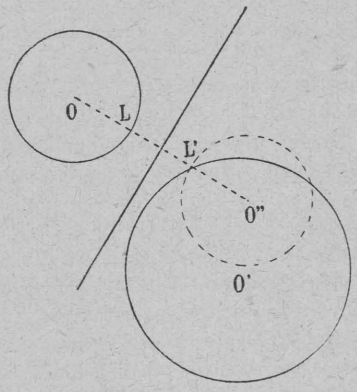


Rys. 141.

Ponieważ dwusieczna m jest osią symetrji kąta, wystarczy przekształcić jeden z danych punktów, np. A symetrycznie względem tej osi; otrzymamy w ten sposób punkt A' wyznacza prostą BA', która przecina prostą m w żądanym punkcie X.

Dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Zadanie II. *Dane są dwa koła* $(O)r$, $(O')r'$ *i prosta* m, *leżąca między niemi; wykreślić odcinek prostopadły do* m, *jeżeli wiadomo, iż końce jego muszą leżeć na okręgach kół danych, środek zaś ma znajdować się na prostej* m.



Rys. 142.

Załóżmy, iż LL' jest żądanym odcinkiem (rys. 142). Prosta m jest, oczywiście, osią symetrji tego odcinka, jeśli więc koło $(O)r$ przekształcimy symetrycznie względem tej osi, wówczas otrzymamy koło $(O'')r$, które powinno przechodzić przez punkt L'. Punkt więc L' jest wyznaczony, jako punkt spólny okręgów $(O')r'$ i $(O'')r$.

Liczba rozwiązań jest taka sama, jak liczba punktów spólnych tych dwu okręgów.

Ćwiczenia XXV. 1. Dane są trzy proste m, n, p, przecinające się w punkcie W, oraz punkt K, nie leżący na żadnej z tych prostych. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$ tak, żeby trzy dane proste były dwusiecznemi jego kątów wewnętrznych, punkt zaś K żeby leżał na boku a.

2. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane na płaszczyźnie dwa jego wierzchołki A, B, punkt P, leżący na dwusiecznej zewnętrznej kąta $\sphericalangle C$, oraz sumę dwóch boków $a+b$.

3. Dana jest prosta CD i dwa punkty A, B, leżące po jednej stronie tej prostej; znaleźć na CD taki punkt X, żeby różnica kątów $\sphericalangle CXA$ i $\sphericalangle DXB$ równała się danemu kątowi $\sphericalangle \alpha$. [W s k a z ó w k a d o a n a l i z y: jeżeli A' jest punktem symetrycznym z A względem prostej danej, wówczas należy zbadać kąty trójkąta $\triangle A'XB$.]

4. Zbudować kwadrat $ABCD$ tak, by wierzchołek A leżał na danej prostej m, wierzchołek C na danej prostej p, wierzchołki B, D na trzeciej danej prostej q.

4. Na danej prostej m znaleźć taki punkt X, żeby styczne, poprowadzone z tego punktu do dwu danych kół $(O)r$, $(O')r'$, leżących po jednej stronie prostej m, były jednakowo nachylone do prostej m.

6. Dana jest prosta AB i punkty C, D, nie leżące na niej; znaleźć na prostej AB taki punkt X, żeby jeden z kątów $\sphericalangle CXA$, $\sphericalangle DXB$ był dwa razy większy od drugiego. [W s k a z ó w k a d o a n a l i z y: jeżeli kąt $\sphericalangle CXA$ jest większy, wówczas przedłużamy CX, budujemy D', symetryczny z punktem D względem osi AB, wreszcie badamy, jak leży prosta XD' względem prostych AB, CX.]

7. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane: c, r_a, $B-A$.

8. Na obwodzie danego czworoboku $ABCD$ znaleźć taki punkt X, żeby dwa przeciwległe boki a, c widziane były z tego punktu pod równemi kątami. Ile można znaleźć takich punktów? [W s k a z ó w k a: punkt B przekształcamy symetrycznie względem prostej AD.]

9. Przez dwa dane punkty A, B poprowadzić koło styczne do danej prostej m. [W s k a z ó w k a d o a n a l i z y: jeżeli S jest punktem styczności, przekształcamy B symetrycznie względem prostej m, otrzymujemy punkt B' i porównywamy kąt $\sphericalangle ASB'$ z kątem między prostą m a prostą AB.]

10. Przez dany punkt A poprowadzić koło, styczne do dwóch danych prostych m, p. [W s k a z ó w k a: sprowadzić do zadania poprzedniego.]

11. Dane są dwie równoległe a, b, poprzeczna k i punkt M, nie leżący na żadnej z tych trzech prostych. Znaleźć na równoległych takie dwa punkty X, Y, żeby prosta XY była równoległa do k i żeby było $XM=YM$.

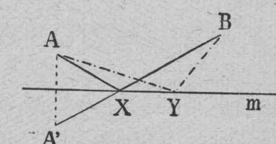
12. Zbudować czworobok $ABCD$, mając dane a, d, A, D, oraz warunek, że czworobok ma być opisany na kole.

[W s k a z ó w k a: jeżeli punkty B', C' są symetryczne z B, C względem dwusiecznej $\sphericalangle A$, wówczas $B'C'$ jest styczną do koła.]

§ 172. Przekształcenie symetryczne bywa szczególnie pomocne przy rozwiązywaniu zadań, w których chodzi o znalezienie najmniejszych lub największych odcinków, czyniących zadość pewnym warunkom*). Na przykładach najlepiej zrozumiemy, o co w takich zadaniach chodzi.

Zadanie III. *Dana jest prosta* m *i po jednej jej stronie dwa punkty* A, B. *Znaleźć na prostej* m *taki punkt* X, *żeby łamana* AXB *była możliwie najmniejsza.*

Jeżeli założymy, że punkt X na rys. 143 czyni zadość warunkom zadania, wówczas łamana AXB powinna być mniejsza od każdej innej łamanej AYB, której wierzchołek Y leży na prostej m.



Rys. 143.

Gdyby punkty A, B leżały po różnych stronach prostej m, znalezienie najkrótszej drogi od jednego punktu do drugiego nie przedstawiałoby trudności: byłby nią odcinek, łączący te punkty. To nasuwa nam pomysł przekształcenia symetrycznego. Przekształcamy tedy punkt A w punkt A' i łączymy A' z B; punkt X leży na przecięciu się prostych $A'B$ i m.

*) Mówiąc ogólniej: najmniejszych i nawiększych wartości śród wielkości geometrycznych pewnego jakiegoś rodzaju, spełniających pewne zgóry zadane warunki.

Istotnie jeżeli jakikolwiek inny punkt Y prostej m połączymy z A, A', B, wówczas musi być

$$AY = A'Y,$$

zatem $$AY + YB = A'Y + YB.$$

Tak samo mamy $$AX + XB = A'X + XB.$$

Ale punkty A', X, B leżą na jednej prostej,

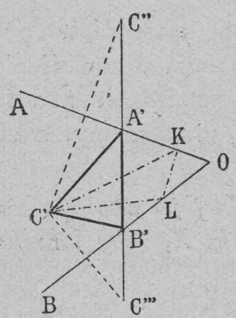
zatem $$A'X + XB = A'B,$$

punkty A', Y, B są wierzchołkami trójkąta i mamy

$$A'B < A'Y + YB,$$

czyli $$AX + XB < AY + YB.$$

Zadanie IV. *W dany kąt $\sphericalangle AOB$ wpisać trójkąt $\triangle A'B'C'$ tak, żeby jego obwód był możliwie najmniejszy i żeby wierzchołek C' leżał w danym punkcie wewnątrz kąta $\sphericalangle AOB$, wierzchołki zaś A', B' żeby leżały na ramionach tego kąta.*



Rys. 144.

Jeżeli C'', C''' są obrazami symetrycznemi punktu C' względem ramion kąta danego, wówczas prosta $C''C'''$ przecina ramiona kąta w żądanych punktach A', B'.

Istotnie,

$$A'C' = A'C'', \quad B'C' = B'C''',$$

zatem obwód trójkąta $\triangle A'B'C'$ równa się odcinkowi $C''C'''$. Jeżeli wpiszemy w ten kąt inny jakikolwiek trójkąt $\triangle C'KL$, wówczas musi być

$$KC' = KC'', \quad LC' = LC'',$$

zatem obwód tego nowego trójkąta równa się łamanej $C''KLC'''$ i wskutek tego jest większy od odcinka $C''C'''$.

Zadanie możliwe jest tylko wówczas, gdy prosta $C''C'''$ przecina ramiona kąta, nie zaś ich przedłużenia, t. j. gdy prosta $C''C'''$ leży między punktami O i C'. Aby tak było, trzeba i wystarcza żeby kąt $\sphericalangle C''OC'''$ był mniejszy od $2\,\delta$.

Otóż $$\sphericalangle C''OA' = \sphericalangle A'OC', \quad \sphericalangle C'''OB' = \sphericalangle B'OC',$$

zatem $$\sphericalangle C'OC''' = 2\sphericalangle AOB.$$

Wobec tego warunkiem koniecznym i dostatecznym możliwości zadania jest nierówność

$$\sphericalangle AOB < \delta.$$

Ćwiczenia XXVI. 1. Dany kąt $\sphericalangle AOB$ przeciąć prostą EF tak, żeby w trójkącie $\triangle EOF$ suma boków $EO + OF$ równała się danemu odcinkowi m i żeby

bok EF był możliwie najmniejszy [Wskazówka: przecinamy ramiona kąta prostą KL tak, żeby trójkąt $\triangle KOL$ był równoramienny i żeby było $KO = OL = \frac{m}{2}$, poczem budujemy obraz punktu E względem prostej KL.]

2. W dany kwadrat wpisać kwadrat o możliwie najmniejszym obwodzie. [Wskazówka: Wykazać, że jeżeli $ABCD$ jest danym kwadratem, $A'B'C'D'$ szukanym, wówczas $AA' + AD'$ jest wielkością stałą, w jakikolwiek sposób został wpisany kwadrat. Po tem spostrzeżeniu sprowadzić zadanie do poprzedniego.]

3. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$; przez wierzchołek A prowadzimy prostą m, równoległą do BC; znaleźć na tej prostej taki punkt A', żeby suma $A'B + A'C$ była jak najmniejsza. [Wskazówka: przekształcamy B symetrycznie względem prostej m i łączymy B' z A.]

4. Wewnątrz kąta $\sphericalangle AOB$ dane są punkty P i Q; znaleźć na ramionach kąta takie dwa punkty A', B', żeby linja łamana $PA'B'Q$ była możliwie najkrótsza.

5. W dany czworobok $ABCD$ wpisać drugi czworobok o możliwie najmniejszym obwodzie tak, żeby jeden jego wierzchołek leżał w danym punkcie P na boku AB.

6. Dany jest kąt $\sphericalangle AOB$ i wewnątrz niego punkt C; na ramieniu OA znaleźć punkt M, który byłby jednakowo odległy od drugiego ramienia i od punktu C. [Wskazówka do analizy: przekształcamy ramię OB wraz z prostopadłym do niego odcinkiem MN symetrycznie względem ramienia OA.]*)

*) Uczniom, pragnącym zapoznać się gruntowniej z metodami rozwiązywania zadań konstrukcyjnych i przerobić większą ich ilość, polecamy klasyczne dziełko:

J. Petersen: *Metody i teorje rozwiązywania zadań geometrycznych konstrukcyjnych.* Przetłum. K. Hertz, Warszawa, 1881.

Liczne zagadnienia teoretyczne, związane z teorją konstrukcyj geometrycznych, zostały gruntownie opracowane w książce:

F. Enriques. *Zagadnienia dotyczące geometrji elementarnej.* Tom II. Warszawa 1917.

Niektóre rozdziały tej książki dostępne są dla osób, nie znających matematyki wyższej.

KSIĘGA II.

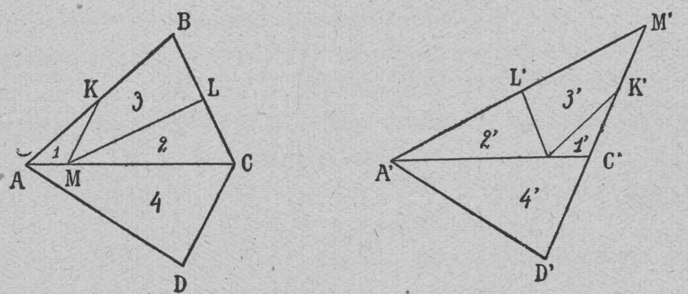
O równoważności wielokątów.

ROZDZIAŁ I.

Podstawowe twierdzenia i zadania o wielokątach równoważnych.

§ 173. Określenie. *Dwa wielokąty nazywamy równoważnemi, jeżeli możemy je podzielić na jednakową ilość wielokątów odpowiednio równych sobie.*

Wprowadzając to nowe pojęcie, musimy pokazać, że nie zawiera ono sprzeczności, czyli, że naprawdę istnieją wielokąty,



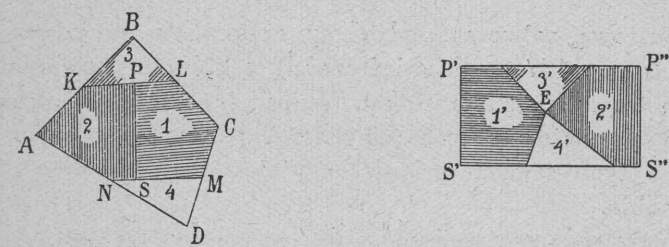
Rys. 145.

które, mając różne kształty (a więc nie będąc równemi), dają się jednak podzielić na jednakową ilość części odpowiednio równych. W tym celu wystarczy przytoczyć następujące przykłady.

1-o. Niech będzie dany czworobok $ABCD$ (rys. 145), w którym K, L są środkami boków AB, BC. Przez jeden z tych punktów, np. przez punkt K prowadzimy równoległą do przeciwległego boku (a więc do CD), która przecina w punkcie M przekątną AC. Jeżeli teraz połączymy M z L, to podzielimy czworobok na cztery części, z których można ułożyć trójkąt $\triangle A'D'M'$ w sposób wskazany na rysunku. Tak więc czworobok $ABCD$ jest równoważny trójkątowi $\triangle A'D'M'$.

Uczeń wykona figurę z tektury; zbada ruch, który muszą wykonać poszczególne części czworoboku, gdy układamy z nich trójkąt; wreszcie wykaże, że przy układaniu tych części według załączonego rysunku kontury poszczególnych części dokładnie do siebie przystają, wypełniając cały obszar trójkąta. To samo dotyczy następnego przykładu.

2-o. Niech K, L, M, N będą środkami boków czworoboku $ABCD$ (rys. 136). Łączymy K z L, M z N i w dowolnym punkcie P prowadzimy spólną prostopadłą PS do obu tych odcinków.



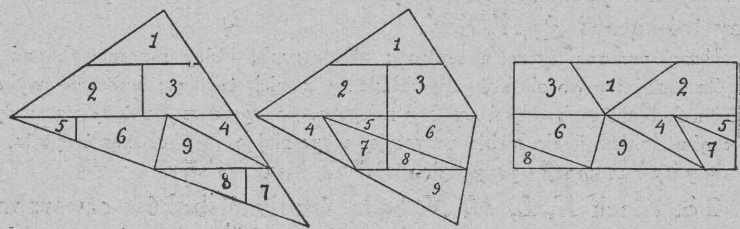
Rys. 146.

W ten sposób czworobok dany został podzielony na cztery części, z których ułożyć można prostokąt $P'P''S''S'$, zatem czworobok $ABCD$ jest równoważny prostokątowi $P'P''S''S'$.

§ 174. *Siecią* będziemy nazywali układ odcinków, dzielących dany wielokąt na części, z których ułożyć można drugi wielokąt, równoważny pierwszemu. Np. na rys. 146 odcinki PS, KL, NM, tworzą w czworoboku sieć prostokątową, cztery zaś odcinki, schodzące się wewnątrz prostokąta w punkcie E (tenże rysunek), tworzą w prostokącie sieć czworobokową. Tak samo na rys. 145 czworobok został pokryty siecią trójkątową, złożoną z odcinków AC, MK, ML.

§ 175. Dany czworobok możemy przekształcić bądź w równoważny trójkąt, bądź w prostokąt—czyli możemy utworzyć dwie figury (trójkąt i prostokąt), równoważne tej samej trzeciej figurze (czworobokowi). Powstaje pytanie: czy te dwie figury możemy uważać za równoważne sobie?

Odpowiedź, rzecz prosta, wypadnie twierdząca. Istotnie, jeżeli czworobok pokryjemy odrazu dwiema sieciami: trójkątową



Rys. 147.

i prostokątową, wówczas podzielimy czworobok na pewną ilość części (na rys. 147 na dziewięć części), z których możemy ułożyć zarówno trójkąt, jak i prostokąt. Wobec tego trójkąt i prostokąt składają się każdy z tych samych wielokątów (w naszym przykładzie z tych samych dziewięciu wielokątów), są więc równoważne sobie.

Mamy tedy następujące

Twierdzenie. *Dwa wielokąty, równoważne trzeciemu, są sobie równoważne.*

Oczywista rzecz, że prostokąt nasz możemy bezpośrednio przekształcić w trójkąt (lub odwrotnie); w tym celu wystarczy np. pokryć prostokąt dwiema sieciami: czworobokową i trójkątową.

§ 176. Określenie. Jeżeli dwa wielokąty leżą w tej samej płaszczyźnie, tak, że mają część konturu spólną, lecz żadnych więcej punktów wspólnych nie mają, wówczas wszystkie punkty obu wielokątów tworzą nowy wielokąt, który nazywamy *sumą* tamtych dwu. Oczywiście możemy rozszerzyć pojęcie sumy na większą liczbę wielokątów.

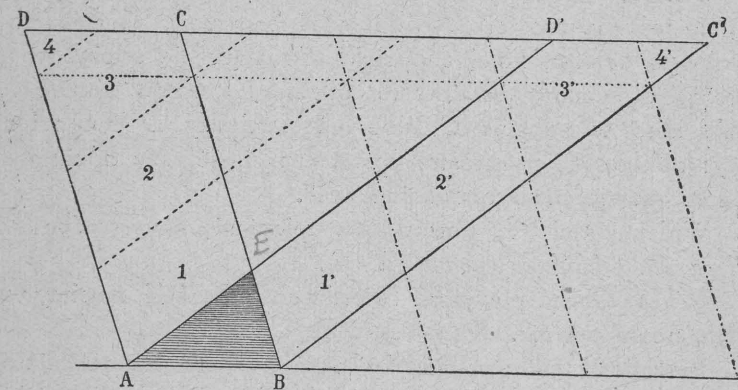
Np. na rys. 146 czworobok *ABCD* uważamy za sumę trójkątów 3 i 4 oraz pięciokątów 1 i 2.

Z określenia równoważności wielokątów i z określenia ich sumy wynika bezpośrednio

Twierdzenie. *Sumy równoważnych wielokątów są sobie równoważne.*

§ 177. Twierdzenie. *Równoległoboki o równych podstawach i wysokościach są sobie równoważne*).*

Jeżeli dwa równoległoboki mają spólną podstawę *AB* i równe wysokości i jeżeli oba leżą po jednej stronie tej podstawy, wówczas boki *CD*, *C'D'*, przeciwległe podstawie, znajdują się na jednej prostej, równoległej do *AB* (rys. 148). Wyobraźmy sobie, że pas



Rys. 148.

płaszczyzny, zawarty między prostemi równoległemi *AB*, *CD*, pokryliśmy dwiema sieciami, przyczem jedna z nich (linje przerywane) składa się z odcinków równoległych do *AD* i odległych od siebie tak, jak *AD* od *BC*, druga zaś sieć (linje kropkowane) składa się z odcinków równoległych do *AD'* i odległych od siebie tak, jak *AD'* od *BC'*.

Równoległoboki dane składają się teraz z trójkąta zakreskowanego $\triangle$ *ABE* oraz z szeregu równoległoboków (na rys. 1, 2, 1', 2'), które wszystkie są sobie równe, gdyż mają boki i kąty odpowiednio równe. Równoległoboków cząstkowych powstało w *ABCD* tyle, ile razy wysokość trójkąta zakreskowanego $\triangle$ *AEB* mieści się w wysokości równoległoboku *ABCD*. Oczywiście mamy tyleż równoległoboków cząstkowych w równoległoboku *ABC'D'*,

*) Przypominamy (porówn. uwagę na str. 67), że każdy bok równoległoboku możemy nazwać podstawą, a wówczas *wysokością* nazywamy odległość tego boku od boku przeciwległego.

Prócz tego tworzą się (w przypadku ogólnym) pięciokąty (na rys. 3 i 3′) i trójkąty (4 i 4′), które są sobie równe, gdyż mają boki i kąty odpowiednio równe*).

Tak więc równoległoboki $ABCD$, $ABC'D'$ zostały podzielone na jednakową liczbę części parami równych sobie, a więc są równoważne.

W szczególności *każdy równoległobok jest równoważny prostokątowi o tej samej podstawie i wysokości.*

Uwaga. W dowodzie naszego twierdzenia oparliśmy się na tem, że jeśli na prostej DC odkładać będziemy, poczynając od dowolnego punktu, kolejno odcinki równające się odcinkowi DC, wówczas otrzymamy ostatecznie odcinek, którego koniec leżeć będzie albo w punkcie C' albo też pomiędzy D' i C'; innemi słowy: odkładając na prostej dostateczną ilość razy odcinek DC, możemy zawsze przekroczyć punkt D'.

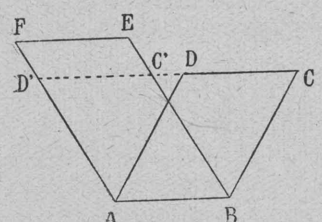
Widzimy tedy, że dowód nasz opiera się na *pewniku Archimedesa dla odcinków* (*pewnik VI a*).

§ 178. Chcąc powyższe twierdzenie odwrócić, musimy wprowadzić nowy pewnik.

Pewnik V. *Żaden wielokąt nie jest równoważny swej części.*

Innemi słowy: jeżeli dany wielokąt W podzielimy w jakikolwiek sposób na części i jedną z nich usuniemy, wówczas z pozostałych części nie uda nam się nigdy ułożyć wielokąta równoważnego wielokątowi W.

§ 179. Twierdzenie przeciwne (względem § 177). *Dwa równoległoboki, mające równe podstawy, lecz nierówne wysokości, nie są równoważne sobie.*



Rys. 149.

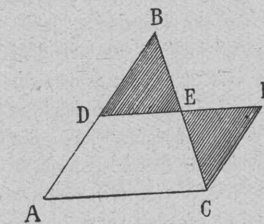
Niech będą dane dwa równoległoboki $ABCD$, $ABEF$, o spólnej podstawie AB, lecz nierównych wysokościach i niech mianowicie wysokość drugiego równoległoboku będzie większa.

W takim razie prosta DC musi przecinać boki AF, BE odpowiednio w punktach D', C', przyczem (na zasadzie poprzedniego twierdzenia) równoległobok $ABCD$ jest równoważny równoległobo-

*) Uczeń dowiedzie szczegółowo równości tych figur.

kowi $ABC'D'$, który stanowi część równoległoboku $ABEF$. Na mocy *pewnika V* równoległobok $ABEF$ nie jest równoważny $ABC'D'$, a więc nie może być równoważny równoległobokowi $ABCD$ (gdyż przeczyłoby to twierdzeniu § 175).

§ 180. Twierdzenie. *Trójkąt jest równoważny równoległobokowi, mającemu tę samą podstawę, lecz dwa razy mniejszą wysokość.*



Rys. 150.

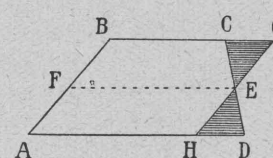
Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ połączymy środki D, E boków AB, BC, a przez C poprowadzimy równoległą do AB, otrzymamy równoległobok $ADFC$, którego wysokość jest dwa razy mniejsza od wysokości trójkąta $\triangle ABC$.

Równoległobok ten jest równoważny trójkątowi danemu,

ponieważ $\triangle EBD \equiv \triangle ECF$.

Istotnie $EB = EC$, $BD = CF$, $\sphericalangle EBD = \sphericalangle ECF$.

§ 181. Twierdzenie. *Trapez jest równoważny równoległobokowi, mającemu tę samą wysokość, podstawę zaś równą średniej arytmetycznej podstaw trapezu* (albo inaczej: *podstawę równą linji środkowej trapezu*).



Rys. 151.

W trapezie $ABCD$ przez środek E boku CD prowadzimy równoległą do boku AB i przedłużamy podstawę BC. Otrzymujemy równoległobok $ABGH$, którego wysokość równa się wysokości trapezu, podstawa zaś AH jest o tyle mniejsza od AD, o ile jest większą od BC, zatem jest ich średnią arytmetyczną.

Równoległobok ten jest równoważny naszemu trapezowi, gdyż $\triangle CEG \equiv \triangle EHD$ (dlaczego?).

Ćwiczenia XXVII. 1. Dowolny trójkąt $\triangle ABC$ podzielić na trzy części tak, by można z nich było utworzyć prostokąt.

1*a*. Rozwiązać to samo zadanie, dzieląc trójkąt na cztery części.

1*b*. Dany prostokąt przekształcić w równoważny trójkąt $\triangle ABC$ tak, żeby wysokość h_a trójkąta równała się wysokości prostokąta i żeby bok b trójkąta równał się danemu odcinkowi.

2. Podzielić trapez na dwie części, z których możnaby utworzyć równoważny trójkąt.

2*a*. Zadanie odwrotne: dany trójkąt przekształcić w równoważny trapez.

2*b*. Podzielić trapez na trzy części, z których możnaby ułożyć trójkąt.

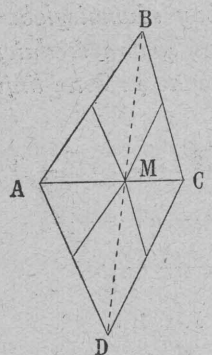
3. W trójkącie $\triangle ABC$ przez środki D, E boków AB, AC prowadzimy dwie dowolne równoległe, które przecinają trzeci bok w punktach F, G. Dowieść zapomocą podziału na części równe: 1-o, że równoległobok $DEFG$ jest równoważny połowie trójkąta $\triangle ABC$; 2-o, że trójkąt $\triangle ADE$ jest równoważny połowie równoległoboku $DEFG$.

4. W kwadracie $ABCD$ środek M boku AB łączymy z dowolnym punktem N na boku AD, przyczem kreślimy odcinek $M'N'$, symetryczny z MN względem środka kwadratu. Jeśli teraz na MN obierzemy dowolny punkt S, połączymy go z M' i N', a na przedłużeniu tych dwu prostych odłożymy $M'P = M'S$ oraz $N'R = N'S$, wówczas otrzymamy trójkąt $\triangle SPR$, równoważny kwadratowi $ABCD$.

5. Dany równoległobok $ABCD$ rozciąć na dwie części tak, by przekształcić go w równoważny równoległobok, mający tę samą podstawę AB i kąt przy wierzchołku B dany (mniejszy od kąta $\sphericalangle CBA$).

6. W równoległoboku $ABCD$ prowadzimy z wierzchołków A, B dwie dowolne proste, przecinające się wewnątrz równoległoboku. Dowieść, że dzielą go one na trzy części, z których daje się ułożyć nowy równoległobok, równoważny danemu i nie mający z nim ani jednego wspólnego boku.

7. Zapomocą konstrukcji poprzedniego zadania możemy otrzymać dowolną ilość równoległoboków, równoważnych danemu. Jakie warunki dodatkowe (prócz równoważności) możemy obrać tak, by nowy równoległobok był w zupełności wyznaczony?



Rys. 152.

8. Dwa trójkąty są równoważne, jeżeli mają po dwa boki odpowiednio równe, kąty zaś, zawarte między temi bokami, spełniają się. Dowieść tego w dwojaki sposób: 1-o umieszczając oba trójkąty na spólnej podstawie; 2-o umieszczając je tak, by podstawa jednego była przedłużeniem podstawy drugiego.

9. Jeżeli dwa trójkąty o spólnej podstawie i równych wysokościach położone są tak, jak na rys. 152, wówczas można je podzielić na części równe, prowadząc w każdym trójkącie z punkta M równoległe do boków drugiego trójkąta.

10. Jeżeli, poczynając od dwóch przeciwległych wierzchołków A, C równoległoboku, odłożymy na czterech jego bokach odcinki m, n tak, by równe odcinki leżały na przeciwległych bokach, wówczas końce ich wyznaczą nowy równoległobok. Jeżeli te same odcinki w taki sam sposób odłożymy od wierzchołków B, D, otrzymamy trzeci równoległobok, równoważny drugiemu.

11. Jeżeli na bokach dowolnego trójkąta $\triangle ABC$ zbudujemy nazewnątrz kwadraty $AA'B'B$, $BB''C''C$, $CC'''A'''A$ i połączymy A' z A''', B' z B'', C'' z C''', otrzymamy trzy trójkąty, z których każdy jest równoważny trójkątowi $\triangle ABC$.

12. Na bokach dowolnego czworoboku wypukłego budujemy nazewnątrz po kwadracie i łączymy sąsiednie wierzchołki kolejnych kwadratów, jak w poprzedniem zadaniu. Otrzymujemy w ten sposób cztery trójkąty; zbadać, jaka zachodzi między niemi zależność.

Czy znalezione twierdzenie można uważać za u o g ó l n i e n i e twierdzenia poprzedniego, t. j. czy poprzednle twierdzenie z niego wynika?

13. Jeżeli połączymy środki dwóch podstaw trapezu, otrzymamy dwa równoważne czworoboki.

14. Równoległobok, zbudowany z dwóch boków trójkąta i z kąta między niemi zawartego, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z trzeciego boku i z wysokości, poprowadzonej do tego trzeciego boku.

15. R ó w n o l e g ł o b o k i, z b u d o w a n e z d w u k t ó r y c h k o l w i e k b o k ó w t r ó j k ą t a d a n e g o i z k ą t a m i ę d z y n i e m i z a w a r t e g o, są s o b i e r ó w n o w a ż n e.

J a k i e s t ą d w y n i k a t w i e r d z e n i e, d o t y c z ą c e p r o s t o k ą t ó w, o k t ó r y c h m o w a w p o p r z e d n i e m z a d a n i u?

16. Jeżeli w równoległobok $ABCD$ wpiszemy trójkąt $\triangle AMN$ tak, by miał on z równoległobokiem spólny wierzchołek A, wierzchołki zaś M, N żeby leżały na bokach BC, CD, wówczas $\triangle AMN$ jest mniejszy od połowy równoległoboku $ABCD$. [W s k a z ó w k a: prowadzimy z M równoległą do AB i kreślimy wysokość CX w trójkącie $\triangle ABC$.]

17. W kwadracie $ABCD$ łączymy wierzchołek A ze środkiem boku BC, wierzchołek B ze środkiem boku CD, wierzchołek C ze środkiem boku DA, wreszcie D ze środkiem boku AB. Dowieść, że te cztery proste, przecinając się, wyznaczają nowy kwadrat. Znaleźć, ile razy kwadrat ten jest mniejszy od kwadratu $ABCD$.

18. Dowolny punkt P płaszczyzny łączymy z wierzchołkami trójkąta $\triangle ABC$; niech K, L, M będą środkami odcinków PA, PB, PC: dowieść, że $\triangle KML = {}^1/_4 \triangle ABC$.

19. Jeżeli na prostej mamy dane punkty A, B, C, D, następujące po sobie w porządku wskazanym, wówczas prostokąt, zbudowany z odcinków AC i BD, jest równoważny sumie dwu prostokątów, z których jeden zbudowany jest z odcinków AC, BC, drugi zaś z odcinków AB, CD.

20. Przekątne równoległoboku dzielą go na cztery równoważne trójkąty. Sformułować i zbadać wszystkie twierdzenia odwrotne do powyższego.

21. Mamy dany równoległobok $ABCD$; jeżeli M jest jakimkolwiek punktem wewnętrznym trójkąta $\triangle ABC$, wówczas musi być $\triangle MAB + \triangle MAC = \triangle MAD$.

§ 182. Poznamy też twierdzenie, które bywa często pomocne przy przekształcaniu figur w inne, równoważne figury.

Twierdzenie. *Jeżeli w równoległoboku $ABCD$ na przekątnej AC obierzemy dowolny punkt M i poprowadzimy proste FMG, HMI* (rys. 153), *równoległe do boków AD, AB, wówczas otrzymamy dwa równoległoboki $MFBI$, $MHDG$, równoważne sobie.*

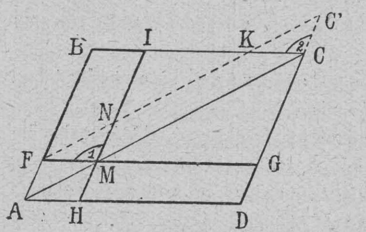
Przez punkt F poprowadźmy równoległą do przekątnej AC i niech ta równoległa przecina proste HI, BC i przedłużenie boku DC odpowiednio w punktach N, K, C'.

Równoległoboki *BIMF* i *KCMF* są sobie równoważne, jako mające spólną podstawę *FM* i równe wysokości.

Dalej mamy $MF=KC,\ MN=CC',\ \sphericalangle 1=\sphericalangle 2,$

a więc $\triangle FMN \equiv KCC'.$

Stąd wynika, że równoległobok *BIMF* jest równoważny równoległobokowi *MNC'C*, ale ten jest równoważny równoległobokowi *MHDG*, o czem łatwo przekonać się.



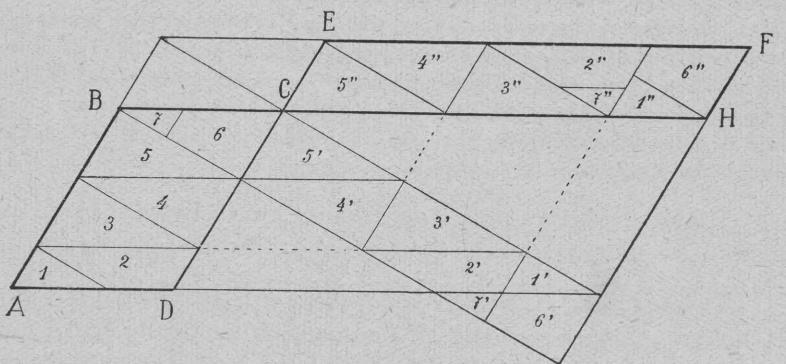
Rys. 153.

Istotnie, $MN=AF=HM$, mają więc one równe podstawy i rowne wysokości (*dlaczego?*)

Tak więc równoległobok *BIMF* jest równoważny równoległobokowi *MHDG*.

Uwaga. Rzecz prosta, że równoległoboki *ABIH, AFGD* są też równoważne sobie.

Rozumowanie powyższe nasuwa również pomysł sieci, zapomocą której możnaby wykazać bezpośrednio równoważność równoległoboków takich, jak *ABCD* i *AEFH.* Budowę sieci widać na rys. 154. Czytelnik sam dowiedzie równoważności tych dwu równoległoboków.

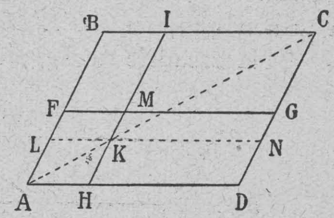


Rys. 154.

Jak widać z rysunku 154, każdą część składową równoległoboku *ABCD* możemy dwukrotnie przesunąć, jeżeli chcemy otrzymać odpowiednią część równoległoboku równoważnego *CEFH* (np. części 1, 1′ i 1″).

Określenie. Dwa równoległoboki *BIMF* i *HMGD*, o których mowa w powyższem twierdzeniu, nazywać będziemy *dopełniającemi.**)

§. 183. Twierdzenie przeciwne (w z g l ę d e m § 182), *Jeżeli w równoległoboku ABCD* (rys. 155) *obierzemy dowolny punkt wewnętrzny M, byle nie leżący na przekątnej, i przez ten punkt poprowadzimy równoległe do boków, wówczas otrzymamy dwa nowe równoległoboki BIMF oraz HMGD, które nie mogą być równoważne sobie.*

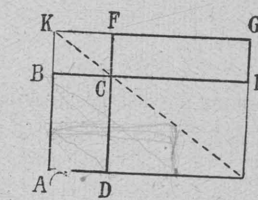


Rys. 155.

Czytelnik dowiedzie tego sam, kierując się załączonym rysunkiem.

§ 184. Zadanie I. *Dany prostokąt przekształcić w prostokąt równoważny, którego jeden bok równałby się danemu odcinkowi* m.

Rozwiązanie można oprzeć na twierdzeniu o równoległobokach dopełniających (§ 182). Uczeń sam znajdzie i uzasadni rozwiązanie, kierując się rysunkiem 156, na którym *ABCD* jest prostokątem danym, *CFGH* — szukanym, odcinek zaś $BK=m$.



Rys. 156.

Rzecz jasna, że można również oprzeć rozwiązanie na uwadze, podanej w § 182, czyli na gnomonie.

Uwaga. Zadanie nasze posiada jedno tylko rozwiązanie, czyli *istnieje jeden tylko prostokąt, równoważny danemu prostokątowi i mający daną podstawę* (lub *daną wysokość.*)

§ 185. Uczeń rozwiąże sam następujące zadanie ogólniejsze.

Zadanie II. *Dany równoległobok przekształcić w równoważny równoległobok, mający te same kąty, lecz podstawę równą danemu odcinkowi* m.

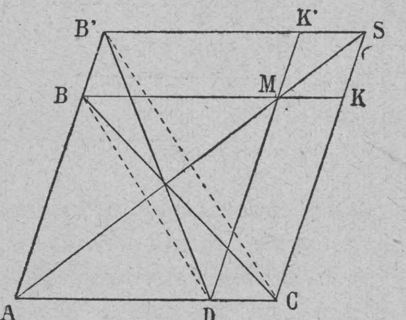
§ 186. Zadanie III. *Dany trójkąt* $\triangle ABC$ *przekształcić w trójkąt równoważny, mający daną podstawę* $(=m)$ *i kąt przy podstawie, równy kątowi trójkąta* $\triangle ABC$.

R o z w i ą z a n i e 1-sze. Uzupełniamy trójkąt dany $\triangle ABC$ do

*) Sześciokąt wklęsły *BADGMI*, zapomocą którego z równoległoboku *IMGC* otrzymujemy drugi równoległobok *BADC* o tych samych kątach, odgrywał wielką rolę w badaniach geometrów greckich i zwał się u nich *gnomonem.*

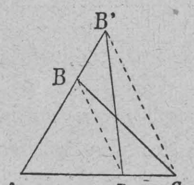
równoległoboku $(ABKC)$, odkładamy $AD=m$, przez punkt D prowadzimy równoległą do boku AB, wskutek czego otrzymujemy równoległobok $ABMD$. Jeżeli przekątną AM tego drugiego równoległoboku przedłużymy aż do spotkania w punkcie S z przedłużeniem boku CK, otrzymamy nowy równoległobok $AB'SC$, a w nim gnomon $AB'K'MKC$.

Na zasadzie uwagi do § 182 równoległoboki $AB'K'D$ oraz $ABKC$ są sobie równoważne, a więc trójkąty $\triangle ABC$ oraz $\triangle AB'D$, jako połowy tych równoległoboków, muszą też być równoważne sobie.



Rys. 157.

R o z w i ą z a n i e 2-gie. Jeżeli, jak na rys. 158, podstawa $AD=m$ trójkąta szukanego jest mniejsza od podstawy AC trójkąta danego, wówczas trójkąt szukany musi mieć większą wysokość *(dlaczego?)*. Wobec tego cały obszar $\triangle ABD$ powinien należeć do trójkąta szukanego, którego trzeci wierzchołek B' powinien leżeć na przedłużeniu boku AB.



Rys. 158.

Pozostaje tedy od trójkąta danego odjąć trójkąt $\triangle BDC$ i na jego miejsce przystawić równoważny mu trójkąt $\triangle BB'D$, tak, by razem z $\triangle ABD$ utworzył on jeden trójkąt $\triangle AB'D$, który w ten sposób uczyni zadość warunkom zadania.

Aby znaleźć trójkąt $\triangle BB'D$, zauważmy, że ma on podstawę BD spólną z trójkątem $\triangle DBC$, a ponieważ dwa te trójkąty powinny być równoważne sobie, zatem wierzchołki ich B' i C powinny leżeć na równoległej do podstawy.

Mamy więc rozwiązanie następujące: łączymy B z D i przez C prowadzimy równoległą do BD. Punkt B', w którym ta równoległa przecina prostą AB, jest trzecim wierzchołkiem żądanego trójkąta $\triangle AB'D$.

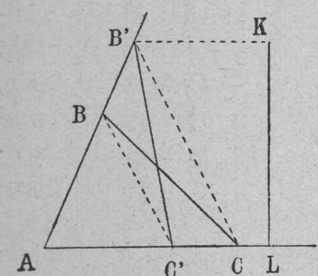
Uwagi. 1. Porównanie rysunków 157 i 158 wskazuje, że dwa te rozwiązania nie są zasadniczo różne: drugie sprowadza się pod względem konstrukcyjnym do pierwszego, jakkolwiek zostało otrzymane zapomocą zgoła odmiennego rozumowania.

2. Z porównania tych samych figur oraz obu rozwiązań wynika również, że jeśli od równoległoboku $AB'SC$ (rys. 157) odejmiemy gnomon $BB'SCDM$, otrzymamy równoległobok $ABDM$, którego przekątna BD musi być równoległa do przekątnej $B'C$ równoległoboku danego.

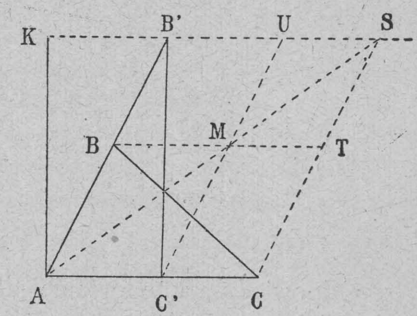
Zadanie IV. *Dany trójkąt $\triangle ABC$ przekształcić w trójkąt równoważny o danej wysokości* h, *przyczem jeden z kątów przy podstawie nowego trójkąta powinien równać się kątowi $\triangle BAC$.*

Uczeń uzasadni sam następujące rozwiązania:

R o z w i ą z a n i e 1-e (rys. 159): wystawiamy prostopadłą do AC, na niej odkładamy $LK=h$, prowadzimy $KB' \parallel AC$, łączymy B' z C i kreślimy $BC' \parallel B'C$. Trójkąt $\triangle AB'C'$ jest żądany.



Rys. 159.



Rys. 160.

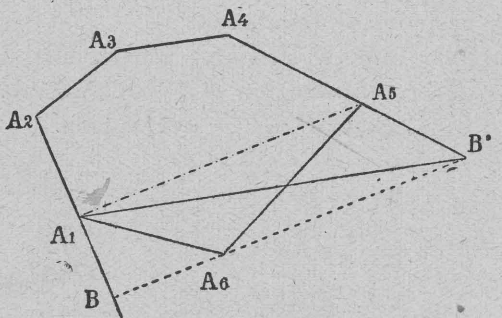
R o z w i ą z a n i e 2-e (rys. 160). Punkt B' znajdujemy tak samo, jak w rozwiązaniu 1-szem, poczem trójkąt dany $\triangle ABC$ uzupełniamy do równoległoboku $ABTC$, budujemy równoległobok $AB'SC$, prowadzimy w nim przekątną AS, wreszcie, mając punkt M na tej przekątnej, kreślimy gnomon $AB'UMTC$. Trójkąt $\triangle AB'C'$ jest trójkątem żądanym.

§ 187. Zadanie V. *Dany wielokąt o n bokach przekształcić w wielokąt równoważny, mający n—1 boków.*

N i e c h b ę d z i e dany np. sześciokąt $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Poprowadźmy p r z e k ą t n ą A_1A_5. Cały o b s z a r pięciokąta $A_1A_2A_3A_4A_5$ powinien wejść w skład n o w e g o wielokąta, chodzi więc o to, by trójkąt $\triangle A_1A_5A_6$ zastąpić przez trójkąt równoważny, przyczem wierzchołek tego nowego trójkąta powinien leżeć albo na przedłużeniu boku A_1A_2, albo na przedłużeniu boku A_4A_5.

Prowadzimy tedy przez A_6 równoległą do przekątnej A_1A_5; punkt B', w którym równoległa przecina prostą A_4A_5, łączymy z A_1 (albo też punkt B, w którym równoległa przecina prostą A_2A_1, łączymy z A_6).

§ 185. O każdych dwóch odcinkach a, b możemy powiedzieć, że na pewno mamy albo $a = b$, albo $a < b$, albo $a > b$. To samo da się powiedzieć o każdych dwu kątach. Wobec tego powiadamy, że *odcinki stanowią klasę wielkości* (geometrycznych). Kąty również stanowią klasę wielkości geometrycznych. Powstaje pytanie, *czy obszary wielokątowe możemy też uważać za wielkości geometryczne?*



Rys. 161.

Odpowiedź na to pytanie dają nam zadania I i V. Istotnie każdy wielokąt o n bokach możemy przekształcić w równoważny wielokąt o $n - 1$ bokach, ten znów w wielokąt o $n - 2$ bokach i t. d., aż otrzymamy czworobok (zadanie V). Czworobok możemy przekształcić w prostokąt (§ 173), ten zaś w inny prostokąt o danej podstawie (zadanie I).

W ten sposób każde dwa wielokąty W_1, W_2 możemy przekształcić w prostokąty o równych podstawach; *na mocy zaś pewnika V* o tych dwu prostokątach P_1, P_2 zawsze możemy orzec, czy

$$P_1 = P_2, \text{ czy też } P_1 > P_2, \text{ lub } P_1 < P_2$$

(zależy to od wysokości prostokątów P_1, P_2), a więc o każdych dwu wielokątach W_1, W_2 możemy orzec, czy są one równoważne sobie, czy też jeden z nich jest większy i który mianowicie.

Widzimy więc, że *obszary wielokątowe mamy prawo uważać za nową klasę wielkości geometrycznych.*

Odtąd równoważność dwóch wielokątów oznaczać będziemy znakiem $=$. Będziemy więc pisali

$$W_1 = W_2 \text{ albo } W_1 > W_2, \text{ lub } W_1 < W_2,$$

przyczem W_1, W_2 mogą być wielokątami dowolnego kształtu.

Uwaga. Nasunąć się tu może pytanie, czy symbole $=$, $>$, $<$, zastosowane do porównywania wielokątów, mają te same własności, co przy zastosowaniu do liczb bezwzględnych, t. j. czy możemy niemi w taki sam sposób operować? Innemi słowami chodzi o to, czy jeśli W_1, W_2, W_3, i W_4 oznaczają pewne wielokąty — mamy prawo twierdzić, że

1) $W_1 = W_1$ *(zwrotność)*

2) jeżeli $W_1 = W_2$, to $W_2 = W_1$ *(symetryczność)*

3) jeżeli $W_1 = W_2$ oraz $W_2 = W_3$, to $W_1 = W_3$ *(przechodniość)*

4) jeżeli $W_1 = W_2$, to $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$

5) jeżeli $W_1 = W_2$ oraz $W_3 > W_4$, to $W_1 + W_3 > W_2 + W_4$ *(monotonja)*

6) jeżeli $W_1 > W_2$ oraz $W_2 > W_3$, to $W_1 > W_3$ *(przechodniość).*

Uczeń sprawdzi sam prawdziwość powyższych twierdzeń.

§ 189. Określenie. Jeżeli A, B, C *są trzema wielokątami, przyczem* $A = B + C$, *wówczas* C *nazywamy* *r ó ż n i c ą w i e l o k ą t ó w* A *i* B. *Tak samo* B *nazywamy różnicą wielokątów* A *i* C.

Piszemy tedy $A - B = C$ oraz $A - C = B$.

Twierdzenie. *Różnice wielokątów równoważnych są sobie równoważne.*

Niech będą dane cztery wielokąty A, B, A', B', przyczem $A = A'$, $B = B'$ (1)

Oznaczamy ich różnice przez C i C' tak, iż

$$A - B = C, \; A' - B' = C'.$$

Mamy dowieść, że $C = C'$.

W tym celu napiszmy (na mocy określenia różnicy wielokątów):

$$B + C = A, \; B' + C' = A' \tag{2}$$

Na mocy związku (1) i (2) mamy

$$B + C = B' + C', \tag{3}$$

Gdyby wielokąty C i C' nie były równoważne sobie, gdyby np. było $C > C'$, wówczas musiałoby być

$$C = C' + C'' \tag{4}$$

Ale w takim razie, uwzględniając nasze założenie, że $B = B'$, oraz opierając się na twierdzeniu, że sumy wielokątów równoważnych są sobie równoważne, mielibyśmy

$$B + C = B' + C' + C'' \tag{5}$$

a ze związków (5) i (3) wynikałoby, że musi być

$$B' + C' = B' + C' + C'',$$

co jest sprzeczne z pewnikiem V.

Twierdzenie (przeciwne). *Jeżeli od wielokątów nierównoważnych A, B, odejmiemy równoważne sobie wielokąty A', B', wówczas otrzymane różnice nie mogą być równoważne.*

Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności.

§ 190. Posiadamy teraz trzy sposoby poznawania równoważności dwóch wielokątów W_1, W_2, a mianowicie:

1-o możemy rozłożyć je na na jednakową ilość części, parami równych sobie (§ 173);

2-o możemy wykazać, że wielokąt W_1 nie jest ani większy ani mniejszy od W_2 (§ 185);

3 o możemy odjąć od obu wielokątów inne jakieś wielokąty, równoważne sobie, w_1, w_2; jeżeli przytem okaże się, że

$$W_1 - w_1 = W_2 - w_2,$$

wówczas niewątpliwie musi być

$$W_1 = W_2.$$

Ćwiczenia XXVIII. Własności trójkątów i równoległoboków, stanowiące treść zadań 1—6, pozostają w ścisłym związku z własnościami równoległoboków dopełniających i gnomonu (porówn. uwagę do § 182, str. 156—7). Zostały one jednak ułożone w takim porządku, że czytelnik dowieść ich może zupełnie niezależnie od teorji gnomonu.

1. Jeżeli poprowadzimy dowolną prostą, równoległą do boku *BC* trójkąta $\triangle ABC$ i przecinającą boki *AB*, *AC* (lub ich przedłużenia) odpowiednio w punktach *K*, *L*, wówczas środkowa *AD* trójkąta danego podzieli w punkcie *O* na połowy odcinek *KL*. [Wskazówka: Z tego, że $\triangle BDK = \triangle DLC$, wynika iż $\triangle AKD = \triangle ALD$, a więc wysokości tych dwu trójkątów równają się sobie; stąd wynika równoważność trójkątów $\triangle AKO$, $\triangle ALO$, że zaś mają one wspólną wysokość, poprowadzoną z wierzchołka *A*, zatem podstawy ich *KO*, *LO* muszą równać się sobie.]

2. Na poprzedniem zadaniu oprzeć sposób dzielenia odcinka na dowolną liczbę części równych.

3. Opierając się na tem samem zadaniu i posługując się wyłącznie linjałem, rozwiązać zadanie następujące: dany odcinek *AB* podzielić na połowy, jeżeli mamy daną prostą *m*, równoległą do *AB*.

4. Na mocy tego samego zadania 1-go dowieść, że jeśli prosta *m*, równoległa do przekątnej *BD* równoległoboku *ABCD*, przecina boki *a*, *d* równoległoboku w punktach *K*, *L*, wówczas czwarty wierzchołek *X* równoległoboku *AKXL* leży na prostej *AC*.

5. Jeżeli w równoległoboku *ABCD* obierzemy na przekątnej *AC* dowolny punkt *X* i zbudujemy równoległobok *AKXL*, którego wierzchołki *K*, *L* leżą odpowiednio na *AB* i na *AD*, wówczas przekątna *KL* jednego równoległoboku musi być równoległa do przekątnej *BD* drugiego równoległoboku. [Wskazówka: załóżmy, że tak nie jest, że więc inny odcinek *KL'* jest równoległy do *BD*; w takim razie, na mocy poprzedniego zadania, *AKXL'* musi być równoległobokiem etc.]

6. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ środkowe *BD*, *CE* przecinają się w punkcie *M*, wówczas trójkąt $\triangle BMC$ musi być równoważny czworobokowi *ADME*.

7. Jeżeli w trójkątach $\triangle ABC$, $\triangle AB'C'$ kąty $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle B'AC'$ są wierzchołkowe i jeżeli proste *BB'*, *CC'*, są do siebie równoległe, wówczas trójkąty te są równoważne.

Dwa trójkąty, w ten sposób położone, będziemy nazywali wierzchołkowemi.

7 a. Czy twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeżeli trójkąty zamiast kątów wierzchołkowych mają przy *A* kąt spólny?

8. W trójkącie $\triangle ABC$ punkty *C'*, *B'* są środkami boków *c*, *b*. Dowieść zapomocą równoważności trójkątów, że $C'B' \parallel CB$.

9. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ na środkowej *AA'* obierzemy dowolny punkt *P*, wówczas musi być $\triangle ABP = \triangle ACP$.

10. Wewnątrz trójkąta $\triangle ABC$ znaleźć taki punkt *X*, żeby było

$$\triangle ABX = \triangle ACX = \triangle BCX.$$

11. Punkt *P* jest dowolnym punktem wewnętrznym lub zewnętrznym równoległoboku *ABCD*; dowieść, że suma lub różnica trójkątów $\triangle PAB$, $\triangle PCD$ jest równoważna połowie równoległoboku.

12. Jeżeli środek jednego z nierównoległych boków trapezu połączymy z końcami boku przeciwległego, otrzymamy trójkąt, równoważny połowie trapezu.

12 a. Łącząc środki *M*, *N* boków *AB*, *CD* czworoboku z wierzchołkami, otrzymujemy trójkąty $\triangle MCD$, $\triangle NAB$, których suma jest równoważna czworobokowi *ABCD*.

13. Trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ są równoważne, jeżeli $a = a'$, $b = b'$, $c = 2s_c$.

14. Dwusieczne kątów wewnętrznych prostokąta wyznaczają kwadrat, równoważny połowie kwadratu, zbudowanego na różnicy boków danego prostokąta.

14 a. Znaleźć twierdzenie analogiczne dla kwadratu, utworzonego przez dwusieczne zewnętrzne prostokąta.

15. Środki boków czworoboku wypukłego wyznaczają równoległobok, równoważny połowie czworoboku.

15 a. Środki boków czworoboku związanego wyznaczają równoległobok równoważny różnicy dwóch trójkątów, z których składa się obszar, ograniczony przez boki czworoboku.

16. Opierając się na konstrukcji, podanej na rys. 145 (str. 148), rozwiązać zadanie następujące: dany prostokąt przekształcić w równoważny czworobok, w którym mamy dane: bok *a* i kąty *A*, *B*, przekątna zaś *e* równa się jednemu z boków prostokąta.

17. Trójkąt dany $\triangle ABC$ przekształcić w równoważny trójkąt $\triangle ABC'$, mając dany kąt ostry $\sphericalangle C'$, mniejszy od $\sphericalangle C$.

17 a. Trójkąt $\triangle ABC$ przekształcić w równoważny trójkąt prostokątny, w którym bok *c* byłby przeciwprostokątną. Kiedy zadanie jest niemożliwe?

18. Trójkąt dany przekształcić: 1-o w trójkąt równoramienny o tej samej

podstawie; 2-o w trójkąt równoramienny o tej samej wysokości; 3-o w trójkąt prostokątny o tej samej podstawie.

18 a. Dany równoległobok przekształcić w równoważny równoległobok tak, by zachować przytem jego większą przekątną i by w nowym równoległoboku jeden bok równał się danemu odcinkowi m.

18 b. Równoległobok $ABCD$ przekształcić w romb tak: 1-o, by bok a był przekątną rombu, 2-o, by przekątna e była przekątną rombu.

18 c. W dane koło wpisać prostokąt, równoważny danemu prostokątowi.

Trójkąt $\triangle MNP$ przekształcić w równoważny trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

19. a, b. 20. a, h_c. 21. A, h_c.
22. h_a, h_c. 23. h_c, s_c. 24. h_c, R.

Równoległobok $MNPQ$ przekształcić w równoważny równoległobok $ABCD$ mając dane:

25. e, f. 26. f, $\sphericalangle (a, e)$. 27. a, ω.

28. Czworobok $ABCD$ przekształcić w taki czworobok, by przekątna dzieliła go na połowy. Przy tem przekształceniu winny być zachowane e, f, ω. [W s k a z ó w k a: przez środek przekątnej f równoległą od e, przez końce przekątnej e równoległe do f.]

29. Czworobok $ABCD$ przekształcić w równoległobok, zachowując e, f, ω.

30. Pięciokąt wypukły przekształcić bezpośrednio w trójkąt.

31. Dany jest kąt $\sphericalangle BAC$ i punkt O na ramieniu AB. Z punktu O wykreślić koło, przecinające drugie ramię kąta w punktach M, N tak, by trójkąt $\triangle OMN$ był równoważny danemu trójkątowi $\triangle DEF$.

32. Dany jest kąt $\sphericalangle MNP$ i punkt O na jego drugiej dwusiecznej. Z punktu O kreślimy koło, przecinające ramiona kąta w punktach A, A', B, B'. W jaki sposób należy zbudować to koło, jeżeli trapez $AA'BB'$ ma być równoważny danemu trójkątowi $\triangle EDF$? [W s k a z ó w k a: 1) porówn. ćwiczenie 22. 2) można też wyznaczyć inię środkową trapezu, prowadząc z punktu O prostopadłe do ramion kąta.]

---

33. Zapomocą prostej, przechodzącej przez wierzchołek, podzielić trójkąt na dwie części równoważne sobie.

34. To samo zadanie, jeżeli zamiast trójkąta dany jest czworokąt.

35. Dany trójkąt podzielić na dwie równoważne części zapomocą prostej poprowadzonej przez punkt dany na boku trójkąta.

36. Dany trójkąt podzielić na dwie części, równoważne sobie, zapomocą prostej: 1-o równoległej do jednego z boków; 2-o prostopadłej do jednego z boków.

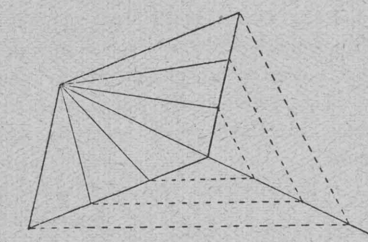
37. Dany równoległobok podzielić na dwie części równoważne zapomocą prostej: 1-o przechodzącej przez dany punkt; 2-o prostopadłej do danej prostej.

38. Uzasadnić następujący podział trójkąta na 5 równoważnych części zapomocą prostych, wychodzących z jednego punktu na boku trójkąta: niech będzie dany punkt D na boku BC trójkąta $\triangle ABC$; dzielimy BC na 5 równych części w punktach E_1, E_2, E_3, E_4, prowadzimy odcinki $E_1 F_1 \parallel E_2 F_2 \parallel E_3 F_3 \parallel E_4 F_4 \parallel DA$, wreszcie łączymy D z punktami F_1 F_2 F_3 F_4.

39. Dany trójkąt podzielić na trzy równoważne części zapomocą poprzecznych, poprowadzonych z jednego wierzchołka.

40. Równoległobok podzielić na n części równoważnych zapomocą poprzecznych, poprowadzonych z jednego wierzchołka. Sporządzić dwa rysunki, odpowiadające dwom przypadkom: 1-o gdy n jest liczbą parzystą, 2-go gdy n jest liczbą nieparzystą. [W s k a z ó w k a: w przypadku pierwszym porówn. rys. 162.]

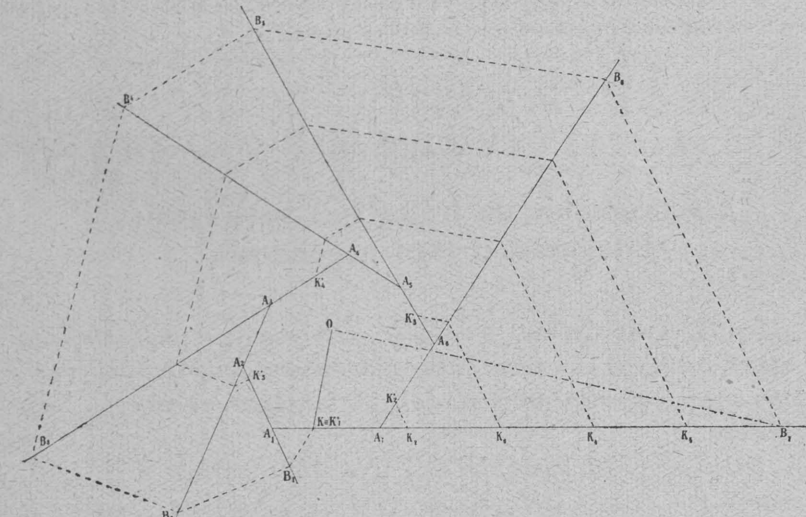
41. Zapomocą konstrukcji analogicznej do poprzedniej podzielić dany trapez na 3 równoważne sobie trapezy tak, by ich podstawy leżały na podstawach trapezu danego.



Rys. 162.

42. Dane są dwa równoległoboki o równych kątach; zbudować trzeci równoległobok, mający te same kąty i równoważny różnicy danych równoległoboków.

43. Uzasadnić następujący podział wielokąta na n części równoważnych, zapomocą prostych, wychodzących z danego punktu wewnętrznego. Niech będzie dany (rys. 163) wielokąt $A_1 A_2 \ldots A_7$ i punkt wewnętrzny O. Przypuśćmy, że mamy podzielić wielokąt na 5 części równoważnych. Łączymy najpierw O z do-



Rys. 163.

wolnym punktem K na konturze wielokąta, następnie kreślimy $KB_1 \parallel OA_1$, potem $B_1B_2 \parallel OA_2$, $B_2B_3 \parallel OA_3$ i t. d. aż otrzymamy punkt B_7 na przedłużeniu ostatniego boku $A_1 A_7$. Trójkąt $\triangle OKB_7$ jest równoważny danemu wielokątowi (d l a c z e g o?). Bok KB_7 trójkąta dzielimy na 5 części równych i przez punkty podziału prowadzimy linje łamane (na rysunku oznaczone kropkami) równoległe do łamanej $B_1B_2B_3 \ldots B_7$. W ten sposób na konturze wielokąta otrzymamy 5 punktów $K \equiv K_1'$, K_2', K'_3, K'_4, K'_5. Łącząc je wszystkie z punktem O, podzielimy dany wielokąt na 5 części równoważnych sobie.

44. Jeżeli mamy dane dwa wielokąty wypukłe o jednakowej parzystej liczbie boków i jeżeli środki boków jednego z nich są zarazem środkami boków drugiego, wówczas wielokąty są sobie równoważne. [W s k a z ó w k a: łączymy odpowiednie wierzchołki wielokątów prostemi, które wszystkie są do siebie równoległe, i prowadzimy prostą m, do nich prostopadłą.]

45. Jeżeli każdy wierzchołek równoległoboku połączymy z środkami dwóch boków, otrzymamy ośm prostych, które wewnątrz równoległoboku wyznaczają ośmiokąt, równoważny $^1/_6$ części równoległoboku.

46. Dowieść: 1-o, że z trzech środkowych trójkąta $\triangle ABC$ można zawsze zbudować trójkąt;

2-o, że środkowe nowego trójkąta równają się $^3/_4$ boków trójkąta $\triangle ABC$;

3-o, że nowy trójkąt jest równoważny $^3/_4$ częściom trójkąta $\triangle ABC$.

47. Jeżeli przeciwległe boki AB, DC czworoboku przecinają się w punkcie M, punkty zaś P, Q są środkami przekątnych AC, BD, wówczas trójkąt $\triangle MPQ$ jest równoważny czwartej części czworoboku $ABCD$.

48. Na zasadzie poprzedniego twierdzenia dowieść, że środki trzech przekątnych czworoboku zupełnego leżą na jednej prostej*).

ROZDZIAŁ II.

Zastosowanie do trójkątów: twierdzenie Pitagorasa i jego uogólnienie.

§ 191. Twierdzenie. *Prostokąt, zbudowany z boku trójkąta i z rzutu na niego drugiego boku, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z tego drugiego boku i z rzutu na niego boku pierwszego.*

Jeżeli w prostokącie $DEFC$ (rys. 164) mamy $DE = AC$, w prostokącie zaś $CGHI$ mamy $CI = BC$, wówczas wystarczy poprowadzić odcinki

$$LF \parallel BC \text{ oraz } IK \parallel AC.$$

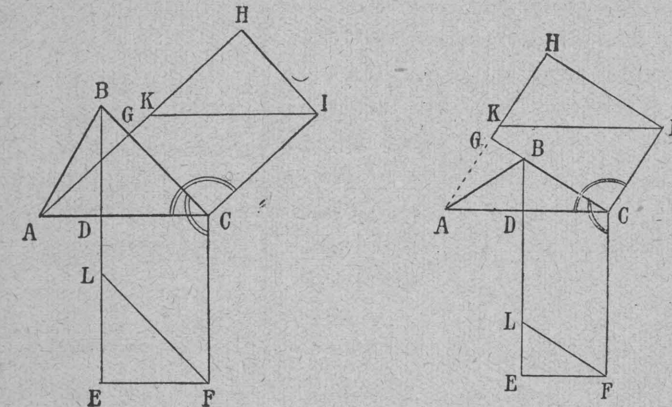
*) Jeżeli w czworoboku $ABCD$ przedłużymy boki AB, DC aż do przecięcia w M, boki zaś BC, AD aż do przecięcia się w L, powiadamy, że otrzymaliśmy c z w o r o b o k z u p e ł n y $ABCDML$. Ma on sześć wierzchołków i trzy przekątne AC, BD, ML; każdy jego bok przechodzi przez trzy wierzchołki.

Równoległobok $LFCB$ jest równoważny prostokątowi $DEFC$ (d l a c z e g o ?), a równoległobok $ACIK$ jest równoważny prostokątowi $CGHI$ (d l a c z e g o ?).

Ale dwa te równoległoboki są sobie równe, gdyż

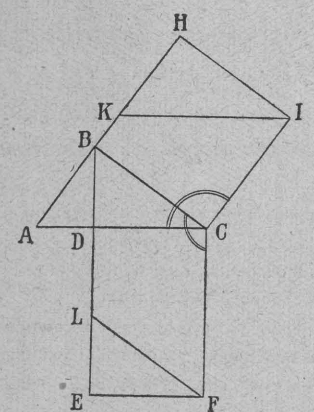
$$CI = LF,\ AC = CF,\ \sphericalangle ICA = \sphericalangle BCF.$$

Wobec tego istotnie prostokąt $CDEF$ jest równoważny prostokątowi $CGHI$.

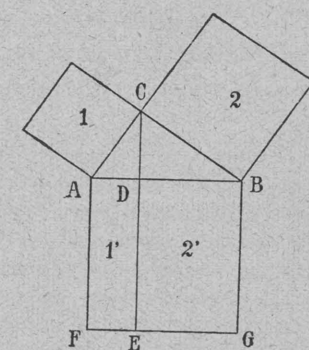


Rys. 164.

§ 192. W przydadku szczególnym, gdy trójkąt $\triangle ACB$



Rys. 165.



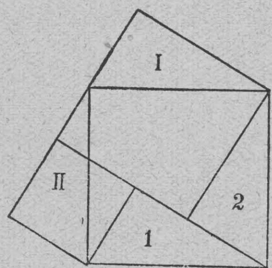
Rys. 166.

jest prostokątny, przyprostokątna BC (rys. 165) jest zarazem rzutem przeciwprostokątnej na prostą BC, wobec czego zamiast prostokąta $CGHI$ mamy kwadrat $CBHI$. W tym szczególnym przypadku twierdzenie nasze przybiera postać następującą:

Twierdzenie. *Kwadrat zbudowany na przyprostokątnej jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z przeciwprostokątnej i z rzutu tej samej przyprostokątnej na przeciwprostokątną.*

§ 193. Twierdzenie Pitagorasa. *Kwadrat, zbudowany na przeciwprostokątnej, jest równoważny sumie kwadratów, zbudowanych na dwu przyprostokątnych*).*

Istotnie, jeżeli poprowadzimy $DE \perp AB$, wówczas kwadrat $ABGF$ podzielimy na dwa prostokąty, oznaczone na rysunku 166 numerami $1'$ i $2'$.



Rys. 167.

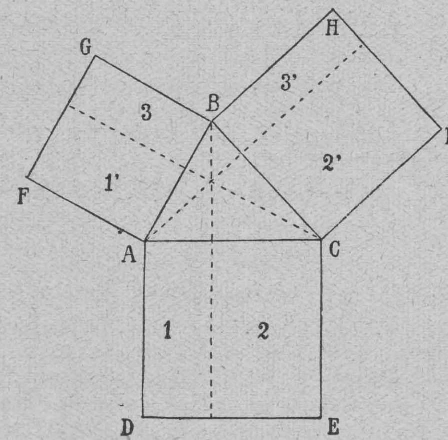
Na mocy § 192, prostokąt $1'$ jest równoważny kwadratowi 1, prostokąt zaś $2'$ jest równoważny kwadratowi 2.

Równie prosty dowód można otrzymać, dzieląc te trzy kwadraty bezpośrednio na figury parami równe sobie. Dowód ten wynika z rys. 167. Czytelnik przeprowadzi go szczegółowo.

§ 194. Jak twierdzenie Pitagorasa wynika z § 192, tak z ogólniejszej własności, dowiedzionej w § 191, wynikają dwa ogólniejsze twierdzenia, dotyczące trójkątów dowolnych.

Twierdzenie. *Kwadrat na boku przeciwległym kątowi ostremu jest mniejszy od sumy kwadratów, zbudowanych na dwu drugich bokach, o podwojony prostokąt, zbudowany z jednego z tych boków i z rzutu na niego drugiego boku.*

Niech $ACED$, $AFGB$, $BHIC$ będą kwadratami zbudowanemi na bokach trójkąta $\triangle ABC$, w którym kąt $\sphericalangle ABC$ jest ostry. Jeżeli wykreślimy trzy wysokości tego trójkąta i przedłużymy je, wówczas każdy z trzech powyższych kwadratów zostanie podzielony na dwa prostokąty, przyczem (§ 191) prostokąty 1 i $1'$ są sobie równoważne, jak również 2 i $2'$ oraz 3 i $3'$.



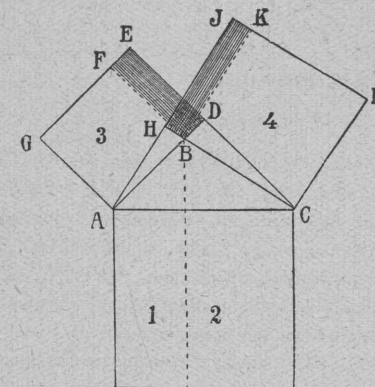
Rys. 168.

Wobec tego suma prostokątów 1 i 2, czyli kwadrat na boku AC, mniejszy jest od sumy dwu drugich kwadratów o podwojony prostokąt 3 (lub też $3'$).

§ 195. Twierdzenie. *Kwadrat boku przeciwległego kątowi rozwartemu jest większy od sumy kwadratów dwu drugich boków o podwojony prostokąt, zbudowany z jednego z tych boków i z rzutu na niego drugiego boku.*

Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ kąt $\sphericalangle B$ jest rozwarty, wówczas, prowadząc wysokości i podłużając je, mamy:

prostokąt 1 jest równoważny prostokątowi $ADEG$, który składa się z kwadratu 3 i z prostokąta $BDEF$;



Rys. 169.

prostokąt 2 jest równoważny prostokątowi $HILC$, który składa się z kwadratu 4 i z prostokąta $HIKB$,

a ponieważ (§ 191) prostokąty $HIKB$, $BDEF$ są sobie równoważne, zatem kwadrat na boku AC większy jest od sumy

*) Według tradycji greckiej twierdzenie to znalazł i udowodnił filozof Pitagoras z Samosu (VI w. przed Chr.), który żył i nauczał w Krotonie, w południowej Italji, mniej więcej w okresie wypędzenia Tarkwinjuszów z Rzymu. Pitagoras sam nic nie pisał; z dzieł jego uczniów dochowały się tak drobne urywki, że nic pewnego nie możemy powiedzieć o badaniach naukowych tego filozofa. Z różnych powodów wydaje się rzeczą prawdopodobną, że Pitagoras spędził czas jakiś w Egipcie, gdzie poznał szczególne przypadki powyższego twierdzenie (np. trójkąt o bokach, równających się 3, 4 i 5 jednostkom miary), sam zaś uogólnił twierdzenie na wszelkie trójkąty prostokątne i pierwszy dowiódł go. Dziś zresztą niepodobna zgadnąć, na czem mógł polegać jego dowód.

Przekonamy się w dalszym ciągu, że tw. Pitagorasa należy do najważniejszych twierdzeń geometrji.

kwadratów 3 i 4 o podwojony prostokąt *BDEF* (lub o podwojony prostokąt *HBKJ*).

§ 196. Twierdzenie Pitagorasa wraz z twierdzeniami §§ 194, 195 tworzą układ zamknięty (porówn. str. 48), co łatwo uwidocznić, streszczając je w następujący sposób:

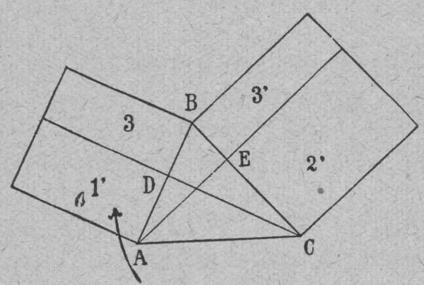
jeżeli $\sphericalangle C = \delta$, to $\boxed{c} = \boxed{a} + \boxed{b}$;

jeżeli $\sphericalangle C < \delta$, to $\boxed{c} < \boxed{a} + \boxed{b}$;

jeżeli $\sphericalangle C > \delta$, to $\boxed{c} > \boxed{a} + \boxed{b}$.

Wobec tego mamy prawo odwrócić wszystkie trzy twierdzenia. Uczeń sformułuje sam twierdzenia odwrotne.

Uwagi. 1. Jak widzimy, twierdzenie Pitagorasa wyraża cechę charakterystyczną trójkąta prostokątnego: mając dane trzy boki trójkąta i opierając się na §§ 193—196, możemy zawsze orzec, czy dany bok leży naprzeciwko kąta prostego, ostrego czy rozwartego.



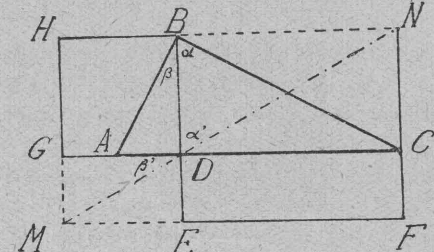
Rys. 170.

2. Twierdzenie Pitagorasa można uważać za przypadek szczególny zarówno twierdzenia § 195 o boku, leżącym naprzeciw kąta rozwartego, jak twierdzenia § 194 o boku przeciwległym kątowi ostremu. Istotnie, jeżeli wyobrazimy sobie trójkąt zmienny *ABC* (rys. 170), w którym bok *BC* jest nieruchomy, bok zaś *AB* obraca się dokoła *B* w zwrocie oznaczonym strzałką, zachowując stałą długość, wówczas kąt ostry $\sphericalangle ABC$ musi rosnąć. Wobec tego rośnie przeciwległy bok *AC* (§ 103), a więc i kwadrat, na tym boku zbudowany; natomiast rzut *BD* boku *BC* maleje, jak również rzut *BE* boku *AB*. Innemi słowami: maleją prostokąty 3 i 3', o które kwadrat boku *AC* różni się od sumy kwadratów, zbudowanych na bokach *AB* i *BC*. W chwili, gdy kąt $\sphericalangle ABC$ staje się prosty, znikają (stają się równe zeru) zarówno rzuty *BD* i *BE*, jak i prostokąty 3 i 3', a wówczas kwadrat na boku *AC* jest równoważny sumie kwadratów na bokach *AB* i *BC* i mamy twierdzenie Pitagorasa.

Uczeń zbada w podobny sposób zmiany, które zachodzą, gdy kąt rozwarty trójkąta stopniowo maleje, aż staje się równy prostemu.

§ 197. Twierdzenie. *W trójkącie prostokątnym kwadrat wysokości, poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z dwóch odcinków, na które ta wysokość dzieli przeciwprostokątną.*

Niech będzie dany trójkąt $\triangle ABC$, w którym $\sphericalangle B = \delta$ i niech będzie $BD \perp AC$. Jeżeli *BHGD* jest kwadratem, zbudowanym na wysokości, a prostokąt *CDEF* został zbudowany z odcinków przeciwprostokątnej, wówczas wystarczyłoby dowieść, że kwadrat ten i prostokąt są t. zw. równoległobokami dopełniającemi w prostokącie *MHNF* czyli, że linja *MDN* jest przekątną.



Rys. 171.

W tym celu wystarczy wykazać, że *MDN* jest linją prostą.

Jakoż widzimy, (dlaczego?) że $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\alpha'$, $\sphericalangle\beta = \sphericalangle\beta'$, zatem istotnie $\sphericalangle MDN = 2\delta$.

Ćwiczenia XXIX. 1. Zbudować kwadrat, równoważny danemu prostokątowi, opierając się na twierdzeniu § 192.

1a. Rozwiązać to samo zadanie, opierając się na § 197.

2. Jeżeli w prostokącie *ABCD* mamy $\frac{a}{2} < b < a$, wówczas zapomocą następującej konstrukcji możemy podzielić prostokąt na trzy części, z których daje się ułożyć równoważny kwadrat:

na boku *AB*, jako na średnicy, kreślimy koło; na tym samym boku odkładamy odcinek $AD' = AD$; w punkcie D' wystawiamy prostopadłą, która przecina koło w punkcie *E*; wreszcie kreślimy prostą *BE*. W ten sposób prostokąt dany został podzielony na 2 trójkąty prostokątne i na wielobok; dowieść, że z tych trzech figur można ułożyć kwadrat.

3. Zbudować kwadrat, który byłby równoważny:

1) sumie dwu danych kwadratów $\boxed{a} + \boxed{b}$;

2) różnicy dwu danych kwadratów $\boxed{a} - \boxed{b}$;

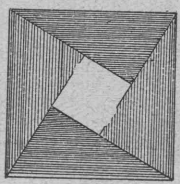
3) połowie danego kwadratu $\boxed{a}$.

4. Jeżeli przekątne czworoboku są do siebie prostopadłe, wówczas suma kwadratów, zbudowanych na dwóch bokach przeciwległych, jest równoważna sumie kwadratów, zbudowanych na dwu drugich bokach.

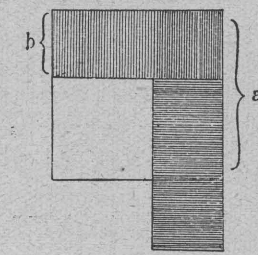
5. Budujemy pięciokąt *ABCDE*, w którym kąt $\sphericalangle B$ jest prosty, bok zaś *CD* jest prostopadły do przekątnej *AC*. Jak należy wykreślić bok *DE*, żeby kwadrat, zbudowany na boku *AE*, był równoważny sumie kwadratów, zbudowanych na czterech innych bokach pięciokąta

6. Matematyk hinduski Bhaskara (XIII w. po Chr.) podaje w swym

traktacie matematyki twierdzenie Pitagorasa bez dowodu, zaopatrując je tylko rysunkiem 172 i wykrzyknikiem: „patrz!“



Rys. 172.



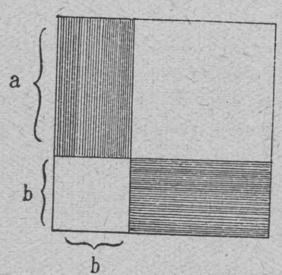
Rys. 172a.

Dowieść tego twierdzenia, ustaliwszy najpierw zapomocą rysunku 172a prawdziwość związku

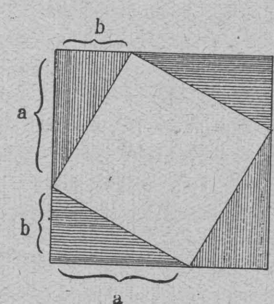
$$\boxed{\mathbf{a-b}} = \boxed{\mathbf{a}} + \boxed{\mathbf{b}} - 2\,\boxed{\mathbf{a, b}}$$

(Porównaj z analogicznym wzorem w algebrze!)

7. Zapomocą rysunku 173 dowieść prawdziwości związku $\boxed{\mathbf{a+b}} = \boxed{\mathbf{a}} + \boxed{\mathbf{b}} + 2\,\boxed{\mathbf{a, b}}$, następnie dowieść twierdzenia Pitagorasa zapomocą rysunku 173a*).



Rys. 173.



Rys. 173a.

8. Dowieść, że $\boxed{\mathbf{a-b, a+b}} = \boxed{\mathbf{a}} - \boxed{\mathbf{b}}$. Jaki jest analogiczny wzór w algebrze?

9. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$, w którym $CB = CA$, poprowadzimy do boku AB dowolny odcinek CD, wówczas musi być

$$\boxed{AD,\ DB} = \boxed{AC + CD,\ AC - CD}$$

*) Niektórzy historycy matematyki przypuszczają, że takim mógł być oryginalny dowód Pitagorasa.

10. Jeżeli cięciwa AB przecina w punkcie C średnicę, tworząc z nią kąt $= \frac{1}{2}\delta$, wówczas suma kwadratów $\boxed{AC} + \boxed{CB}$ jest równoważna podwojonemu kwadratowi promienia.

11. Kwadrat, zbudowany na wysokości trójkąta równobocznego, jest trzy razy większy od kwadratu, zbudowanego na połowie boku.

12. Kwadrat, zbudowany na boku trójkąta równobocznego, jest trzy razy większy od kwadratu, zbudowanego na promieniu koła opisanego.

13. Na bokach trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$ budujemy nazewnątrz kwadraty i łączymy ich wierzchołki tak, że powstaje sześciokąt wypukły. Dowieść, iż suma kwadratów, zbudowanych na bokach tego sześciokąta, jest 8 razy większa od kwadratu, zbudowanego na przeciwprostokątnej AB.

14. W równoległoboku $ABCD$ mamy zawsze

$$\boxed{\mathbf{e}} + \boxed{\mathbf{f}} = \boxed{\mathbf{a}} + \boxed{\mathbf{b}} + \boxed{\mathbf{c}} + \boxed{\mathbf{d}}.$$

15. Jeżeli w równoległoboku $ABCD$ przekątna e równa się bokom a i c, wówczas druga przekątna f spełnia warunek $\boxed{\mathbf{f}} = \boxed{\mathbf{e}} + \boxed{\mathbf{b}} + \boxed{\mathbf{d}}$.

16. Jeżeli przez m_c oznaczymy środkową, poprowadzoną do boku c w trójkącie $\triangle ABC$, wówczas musi zachodzić zależność następująca:

$$4\,\boxed{\mathbf{m_c}} + \boxed{\mathbf{c}} = 2\,\boxed{\mathbf{a}} + 2\,\boxed{\mathbf{b}}.$$

17. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ przedłużymy w tym samym zwrocie*) boki a, b, c o odcinki $CE = \frac{a}{2}$, $AF = \frac{b}{2}$, $BD = \frac{c}{2}$ i jeżeli poprowadzimy w tym trójkącie środkowe AA', BB', CC', wówczas suma kwadratów, zbudowanych na odcinkach AE, BF, CD, musi być większa od sumy kwadratów, zbudowanych na środkowych, o sumę kwadratów boków, t. j. o $\boxed{\mathbf{a}} + \boxed{\mathbf{b}} + \boxed{\mathbf{c}}$.
[Wskazówka: bok a jest środkową w trójkącie $\triangle CC'D$, w którym $C'D = c$ i t. d.]

18. Jeżeli na średnicy koła obierzemy punkty A, B w jednakowej odległości od środka koła O i jeżeli M jest dowolnym punktem okręgu, wówczas suma kwadratów $\boxed{AM} + \boxed{BM}$ jest wielkością stałą, a mianowicie jest dwa razy większa od sumy kwadratow $\boxed{MO} + \boxed{AO}$.

19. Jeżeli suma kwadratów odległości punktu M od dwóch punktów nieruchomych A, B jest wielkością stałą, wówczas miejscem geometrycznem punktu M jest okrąg koła, którego środkiem jest środek odcinka AB.

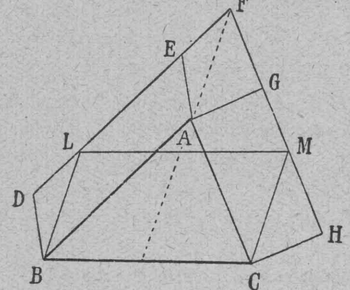
Wskazać sposób zbudowania tego okręgu.

20. Jeżeli różnica kwadratów odległości punktu M od dwóch punktów nieruchomych A i B jest wielkością stałą, wówczas miejscem geometrycznem punktu M jest prosta, prostopadła do AB.

*) Patrz odsyłacz na str. 35.

21. W trapezie suma kwadratów przekątnych jest równoważna sumie kwadratów dwóch boków nierównoległych, więcej podwojony prostokąt, zbudowany z obu podstaw trapezu.

22. Na bokach b, c trójkąta $\triangle ABC$ budujemy dowolne równoległoboki, boki ich DE, GH przedłużamy aż do przecięcia się w punkcie F, wreszcie na boku a budujemy równoległobok $BLMC$, którego boki LB, CM są równoległe do FA, wierzchołki zaś L, M leżą na bokach DE, GH poprzednich równoległoboków. Dowieść, iż ten trzeci równoległobok jest równoważny sumie dwu pierwszych. (Twierdzenie Pappusa z Aleksandrji, słynnego matematyka greckiego w III w. po Chr.)



Rys. 174.

23. Wykazać, iż twierdzenie Pitagorasa wynika z tw. Pappusa jako szczególny jego przypadek.

24. Dane są dwa koła zewnętrznie do siebie styczne; dowieść, iż kwadrat ich spólnej stycznej zewnętrznej jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu ze średnic obu kół.

25. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ kwadrat, zbudowany na wysokości h_c, jest mniejszy od prostokąta, zbudowanego z rzutów r_a, r_b, wówczas kąt $\sphericalangle C > d$ w przeciwnym zaś razie mamy $\sphericalangle C < d$.

26. Dany odcinek AB podzielić na takie dwie części AC, CB, żeby zachodził związek $\boxed{AB, AC} = m\,\boxed{CB}$, w którym m oznacza liczbę daną [Wskazówka: budujemy prostokąt $\boxed{AB, AX}$, gdzie $AX = \frac{1}{m} AB$.]

27. Jeżeli z wierzchołków kwadratu $ABCD$ poprowadzimy prostopadłe a', b', c', d' do dowolnej prostej, wówczas suma kwadratów dwóch prostopadłych, poprowadzonych z dwóch przeciwległych wierzchołków, jest równoważna podwojonemu prostokątowi z dwu drugich prostopadłych więcej dany kwadrat, czyli

$$\boxed{a'} + \boxed{c'} = 2.\ \boxed{b', d'} + \boxed{AB}.$$

28. Suma kwadratów, zbudowanych na bokach dowolnego czworoboku, jest równoważna sumie kwadratów, zbudowanych na przekątnych, więcej cztery razy wzięty kwadrat odcinka, łączącego środki przekątnych.

Co staje się z tem twierdzeniem, jeżeli odcinek, łączący środki przekątnych, malejąc coraz bardziej, staje się równy zeru?

29. Suma kwadratów, zbudowanych na bokach pięciokąta, jest równoważna sumie kwadratów wszystkich przekątnych, więcej cztery razy wzięta suma kwadratów odcinków, łączących środki tych przekątnych.

30. Jeżeli mamy dane stałe koło i trójkąt $\triangle ABC$, wpisany w to koło, jeżeli wierzchołek A trójkąta pozostaje stały, wierzchołki zaś B i C poruszają

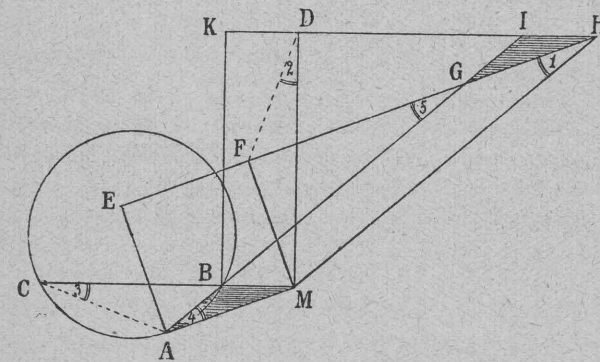
się po kole tak, iż suma kwadratów $\boxed{AB} + \boxed{AC}$ pozostaje stała, wówczas środek X boku BC kreśli prostą, prostopadłą do średnicy, przechodzącej przez A [Wskazówka: ćwiczenia 20 i 16.]

ROZDZIAŁ III.

Prostokąty, zbudowane z cięciw.

§ 198. Twierdzenie. *Jeżeli z tego samego punktu poprowadziliśmy do koła styczną i sieczną, wówczas kwadrat stycznej jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z całej siecznej i z zewnętrznego jej odcinka.*

Niech będzie dany punkt M, leżący zewnątrz koła; niech MA będzie styczną do danego koła, MBC zaś sieczną. Zbudujmy na stycznej kwadrat, na odcinku zaś MB prostokąt, którego drugi bok MD niech się równa siecznej MC. Powiadam, iż kwadrat $AEFM$ i prostokąt $MBKD$ są sobie równoważne.



Rys. 175.

Przedłużmy bok EF kwadratu aż do przecięcia się w punkcie H z prostą KD, połączmy M z H oraz A z B i niech I będzie punktem przecięcia się prostych AB, KD. Twierdzę najpierw, że prosta AB jest równoległa do MH.

Ponieważ $\sphericalangle HDM = \sphericalangle MFH = d$,

zatem czworobok $MFDH$ jest wpisany, musi tedy zachodzić równość $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$. Trójkąty $\triangle MFD$ i $\triangle MAC$ równają się sobie (dlaczego?);

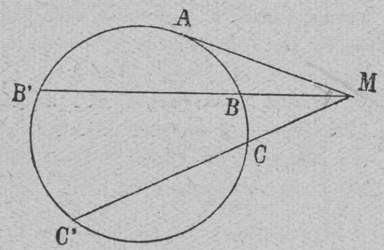
zatem $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$,
ale wiemy, iż $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$ (§ 143 i 144),
wobec zaś równoległości prostych EH, AM musi być
$$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 5.$$

Tak więc $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 5$ i proste AI, MH są istotnie równoległe do siebie.

Jeżeli jeszcze zauważymy, iż $\triangle GIH \equiv \triangle ABM$ (dlaczego?), to dowód twierdzenia stanie się oczywisty.

Jakoż kwadrat $AEFM = AGHM = BIHM = MBKD$.

§ 199. Twierdzenie. *Jeżeli dwie sieczne wychodzą z jednego punktu, leżącego zewnątrz koła, wówczas prostokąt, zbudowany z jednej siecznej i z jej odcinka zewnętrznego, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z drugiej siecznej i z jej odcinka zewnętrznego.*

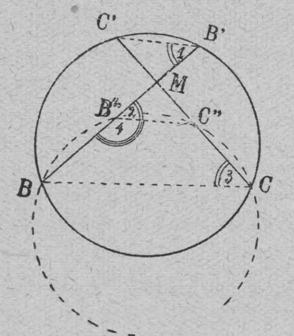


Rys. 176.

Niech będzie dane koło i punkt zewnętrzny M. Jeżeli z M poprowadzimy dwie sieczne, z których pierwsza przecina okrąg w punktach B, B', druga w punktach C, C', wówczas powiadam, iż musi być
$$\boxed{MB,\ MB'} = \boxed{MC,\ MC'}.$$

Jakoż wystarczy zauważyć, że oba te prostokąty są równoważne kwadratowi, zbudowanemu na stycznej MA.

§ 200. Twierdzenie. *Dwie sieczne, przecinające się wewnątrz koła, dzielą się każda w punkcie przecięcia na takie dwa odcinki, iż prostokąt, zbudowany z odcinków jednej siecznej, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z odcinków drugiej siecznej.*



Rys. 177.

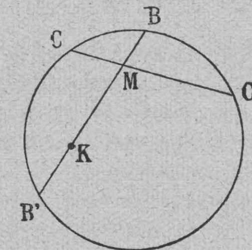
Twierdzenie to da się z łatwością sprowadzić do poprzedniego. Niech CC', BB' będą dwiema cięciwami, przecinającemi się wewnątrz koła w punkcie M. Powiadam, iż mamy
$$\boxed{MB,\ MB'} = \boxed{MC,\ MC'}.$$

Aby tego dowieść, odłóżmy na cięciwach odcinki
$$MB'' = MB' \text{ i } MC'' = MC'.$$

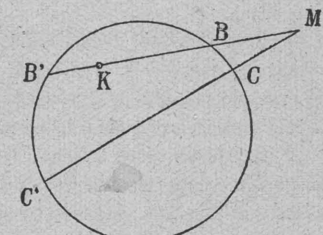
Proste $B'C'$ i $B''C''$ są do siebie równoległe (dlaczego?), zatem $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, ale ponieważ kąty wpisane $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 3$ wspierają się na tym samym łuku, zatem
$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3 = \sphericalangle 2$$
i co za tem idzie, kąt $\sphericalangle 3$ spełnia się z kątem $\sphericalangle 4$.

Stąd wynika, że na czworoboku $BB''C''C$ można opisać koło. Punkt M musi leżeć zewnątrz tego koła: mamy tedy koło (na rysunku kropkowane), punkt zewnętrzny M i dwie sieczne $MB''B$, $MC''C$, na mocy więc poprzedniego twierdzenia musi być:
$$\boxed{MB,\ MB''} = \boxed{MC,\ MC''}$$
że zaś $MB'' = MB'$, $MC'' = MC'$,
zatem $\boxed{MB,\ MB'} = \boxed{MC,\ MC'}$

§ 201. Jeżeli mamy dane koło i dwie sieczne, wychodzące z punktu (wewnętrznego lub zewnętrznego) M i przecinające okrąg: jedna w punktach B, B', druga w punktach C, C'; i jeżeli na jednej z nich, np. na pierwszej, obierzemy dowolny punkt K, nie leżący na okręgu, wówczas prostokąt
$$\boxed{MC,\ MC'} \text{ nie jest równoważny prostokątowi } \boxed{MB,\ MK'},$$
gdyż prostokąt $\boxed{MB,\ MK}$ nie może być równoważny prostokątowi $\boxed{MB,\ MB'}$



Rys. 178.



Rys. 179.

Widzimy tedy, iż twierdzenia przeciwne (a więc i twierdzenia odwrotne) względem twierdzeń §§ 199, 200 muszą być prawdziwe. Innemi słowy mamy następujące

Twierdzenie odwrotne. I. *Jeżeli na dwóch prostych, wychodzących z punktu M, mamy po dwa odcinki o jednakowych zwrotach MB, MB' oraz MC, MC' takie, iż*
$$\boxed{MB,\ MB'} = \boxed{MC,\ MC'},$$
wówczas cztery punkty B, B' C, C' leżą na jednym okręgu (rys. 179).

II. *Jeżeli na dwóch prostych, wychodzących z punktu M, mamy po dwa odcinki o zwrotach przeciwnych MB, MB', oraz MC, MC', przyczem*
$$\boxed{MB,\ MB'} = \boxed{MC,\ MC'},$$
wówczas cztery punkty B, B' C, C' leżą na jednym okręgu (rys. 178).

Mamy tedy nowy sposób poznawania, czy cztery punkty leżą czy nie leżą na tym samym okręgu.

Ćwiczenia XXX. Twierdzeń rozdziału III dowiedliśmy, nie uciekając się nigdzie do tych prawd geometrycznych, o których była mowa w rozdziale II, a więc do tw. Pitagorasa i do pokrewnych mu twierdzeń o trójkątach. Można z łatwością wykazać, że wszystkie własności trójkątów, zawarte w twierdzeniu

Pitagorasa i w innych twierdzeniach rozdziału II, są poprostu wnioskami z prawd, które wyłożyliśmy w rozdziale niniejszym. Taki jest właśnie sens zadań 1—3.

1. Niech będzie dany trójkąt ostrokątny $\triangle ABC$. Na AB, jako na średnicy, kreślimy okrąg, który przechodzi przez spodki obu wysokości h_a, h_b (dlaczego?); zapomocą tej figury i twierdzenia § 199 dowieść, że prostokąt z boku trójkąta i rzutu na niego drugiego boku jest równoważny prostokątowi z tego drugiego boku i z rzutu na niego boku pierwszego (§ 191).

1 a. Dowieść tego samego twierdzenia w przypadku, gdy w trójkącie $\triangle ABC$ kąt $\sphericalangle C$ jest rozwarty.

1 b. Niech będzie dany trójkąt $\triangle ABC$, w którym kąt $\sphericalangle C = \delta$. Prowadzimy w nim wysokość CD i na AC, jako na średnicy, kreślimy koło. Zapomocą tej figury i twierdzenia § 198 dowieść, że kwadrat przyprostokątnej jest równoważny prostokątowi z całej przeciwprostokątnej i z rzutu tej przyprostokątnej (§ 192).

2. Na przyprostokątnych CA, CB, jako na średnicach, wykreślić dwa koła i, stosując do każdego z nich twierdzenie § 198, dowieść twierdzenia Pitagorasa.

2 a. Dowieść twierdzenia Pitagorasa w następujący sposób: mając dany trójkąt $\triangle ABC$, w którym $\sphericalangle C = \delta$, kreślimy koło $(B)C$, które przecina przeciwprostokątną AB w punkcie D, przedłużenie zaś jej w punkcie E; stosujemy do tej figury twierdzenie § 198, uwzględniając, że $AD = AB - BC$, $AE = AB + BC$.

3. Mając dany trójkąt $\triangle ABC$, w którym $\sphericalangle C = \delta$, kreślimy koło $(B)C$ i z punktu A prowadzimy do niego drugą styczną AC'. Łącząc C z C' i stosując twierdzenie § 200, dowieść, że kwadrat wysokości w trójkącie prostokątnym jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z odcinków, wyznaczonych na przeciwprostokątnej.

---

4. W trójkącie ostrokątnym ortocentr dzieli każdą wysokość na takie dwa odcinki, że zbudowane z nich prostokąty są sobie równoważne.

5. Czy twierdzenie to pozostaje prawdziwe dla trójkątów rozwartokątnych? Jeżeli nie, to jak należy je w tym wypadku zmodyfikować?

6. Jeżeli dwa koła przecinają się, wówczas przedłużenie ich spólnej cięciwy dzieli na połowy spólną ich styczną zewnętrzną.

7. Jeżeli AB jest spólną cięciwą dwóch przecinających się kół i jeżeli przez dowolny punkt C tej cięciwy poprowadzimy dwie nowe cięciwy: jedną DCD' w pierwszem kole, drugą ECE' w drugiem kole, wówczas punkty D, D', E, E' muszą leżeć na jednym okręgu koła.

8. Jeżeli trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ mają kąty odpowiednio równe, wówczas prostokąt $\boxed{a, b'}$ jest równoważny prostokątowi $\boxed{a', b}$. [Wskazówka: budujemy kąt wierzchołkowy względem kąta $\sphericalangle C$ i na jego ramionach odkładamy odcinki, równające się bokom a', b' trójkąta $\triangle A'B'C'$.]

9. Prostokąt, zbudowany z dwóch boków trójkąta, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z średnicy koła opisanego i z wysokości, poprowadzonej

do boku trzeciego. [Wskazówka: chcąc dowieść, że $\boxed{a, b} = \boxed{h_c, 2R}$ prowadzimy wysokość CD, średnicę CE, łączymy A z E i stosujemy poprzednie ćwiczenie.]

10. Jeżeli AB jest średnicą koła, punkt C leży na okręgu, O jest środkiem koła i jeżeli cięciwa CD jest prostopadła do średnicy AB, wówczas musi być $\boxed{AC, CB} = \boxed{CO, CD}$ [Wskazówka: połączyć D z B i oprzeć się na ćwiczeniu 8-em.]

11. Jeżeli w trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$ obierzemy dowolny punkt D na przeciwprostokątnej AB i w punkcie tym wystawimy prostopadłą, przecinającą przyprostokątne (lub ich przedłużenia) w punktach E, F, okrąg zaś koła opisanego w punkcie G, wówczas musi być $\boxed{DG} = \boxed{DE, DF}$. [Wskazówka: oprzeć się na zadaniu 8-em.]

12. Jeżeli AB jest średnicą koła, CD zaś dowolną cięciwą, prostopadłą do średnicy w punkcie M i jeżeli prosta AX, łącząca A z dowolnym punktem X cięciwy CD, przecina okrąg koła w punkcie Y, wówczas prostokąt $\boxed{AX, AY}$ ma stałą wielkość. [Wskazówka: czworobok $MXYB$.]

13. Na prostej mamy trzy stałe punkty A, B, C. Z punktu A prowadzimy styczne do wszystkich kół, przechodzących przez punkty B i C; znaleźć miejsce geometryczne punktów styczności tych stycznych.

14. Kreślimy układ kół, złożony z wszelkich możliwych kół, leżących po jednej stronie danej prostej m i stycznych do niej w danym jej punkcie A. Do kół tych prowadzimy styczne, równoległe do innej prostej danej p. 1) Znaleźć miejsce geometryczne punktów styczności. 2) Wykazać, że jeśli jedna z tych stycznych przecina prostą m w punkcie T, sama zaś jest przecięta przez inne koło tego samego układu w punktach B, C, wówczas prostakąt $\boxed{TB, TC}$ ma stałą wielkość.

15. Jeżeli mamy dane dwa koła O, O' i ze środka każdego z nich poprowadziliśmy styczną do drugiego koła, wówczas dwie styczne OT' $O'T$, leżące po jednej stronie linji środków, przecinają się w takim punkcie K, że

$$\boxed{KO, KT'} = \boxed{KT, KO'}$$

16. Jeżeli dwa koła przecinają się w punktach A, A', wówczas styczne, poprowadzone do tych kół z dowolnego punktu prostej AA', równają się sobie.

Jaką postać przybiera twierdzenie, jeżeli koła są zewnętrznie styczne?

17. Dwa koła są zewnętrznie styczne do siebie w punkcie A. W punkcie tym prowadzimy do nich spólną styczną, na niej obieramy dowolny punkt X i łączymy X ze środkami kół. Niech B, B', oraz C, C' będą punktami przecięcia tych prostych z kołami; dowieść, że na czworoboku $BB'C'C$ można opisać koło.

18. Jeżeli CA, CB są dwiema stycznemi do koła i jeżeli z dowolnego punktu D na łuku AB poprowadzimy równoległe do stycznych, mianowicie

$DE \parallel CA$, $DF \parallel CB$, przecinające cięciwę AB w punktach E, F, wówczas $\boxed{DE} = \boxed{DF} = \boxed{AE, FB}$. [Wskazówka: ćwiczenie 8-e.]

19. Jeżeli na średnicy AB obierzemy punkty D, F tak, żeby było $\boxed{AE} = \boxed{AD, AB}$, i jeżeli na AD i na AE, jako na średnicach, wykreślimy półkola, a w punkcie D wystawimy prostopadłą do średnicy, przecinającą koło dane w F, koło zaś wykreślone na AE w punkcie G, wówczas musi być $\boxed{AG} = \boxed{AF, AD}$.

20. Dane jest koło o średnicy AB; w punkcie B prowadzimy do niego styczną, na niej obieramy dowolny punkt C, kreślimy koło $(C)B$, wreszcie kreślimy prostą AC, która przecina to drugie koło w punktach D, E. Jeżeli koło $(A)E$ przecina styczną CB w punkcie F, wówczas koło, zakreślone na średnicy AB, dzieli na połowy odcinek AF.

---

21. Opierając się na § 198, podać nowy sposób zbudowania kwadratu, równoważnego danemu prostokątowi. (Porówn. ćwiczenia XXIX, str. 171.)

22. Dany kwadrat przekształcić w równoważny prostokąt o danym boku. Rozwiązać to zadanie: 1) zapomocą równoległoboków dopełniających; 2) opierając się na § 191; 3) opierając się na § 197; 4) opierając się na § 198.

23. W dane koło wpisać prostokąt, równoważny danemu kwadratowi.

24. Dany kwadrat przekształcić w prostokąt, w którym suma dwu boków sąsiednich $a+b$ jest dana.

25. Kwadrat przekształcić w równoważny prostokąt, w którym dana jest różnica dwu boków sąsiednich $a-b$.

26. Dane jest koło i punkt zewnętrzny A; poprowadzić z punktu A sieczną tak, by okrąg koła podzielił ją na połowy.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, równoważny danemu kwadratowi, mając dane:

27. A, $c+h_c$. 28. A, $c-h_c$. 29. $c-h_c$, r_a.
30. s_c, $c+h_c$. 31. $c-h_c$, C. 32. $c+h_c$, h_a.

33. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dany prostokąt, równoważny prostokątowi $\boxed{a, b}$ oraz podstawę c i wysokość h_c. [Wskazówka: porówn. ćwiczenie 9-te.]

34. Wykreślić koło, przechodzące przez punkty A, B i styczne do danej prostej m.

35. Zbudować koło, styczne do dwóch danych prostych m, n i przechodzące przez dany punkt A. [Wskazówka: budujemy punkt A', symetryczny z A względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle(m, n)$ i przedłużamy AA' aż do przecięcia się z c. Jak postąpić, jeżeli $m \parallel n$?]

36. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane punkty A', B', w których koło wpisane dotyka boków a, b, oraz prostą, na której leży bok c.

37. Wykreślić koło, przechodzące przez dwa dane punkty A, B' i styczne do danego koła $(O)r$.

38. Dane są trzy punkty A, B, C; wykreślić koło, przechodzące przez A i B, przytem takie, żeby styczna, poprowadzona z punktu C, równała się danemu odcinkowi m.

39. Przez dane dwa punkty A, B poprowadzić koło, przecinające dane koło $(O)r$ według średnicy (t. j. tak, że odcinek, łączący punkty przecięcia, jest średnicą koła danego). [Wskazówka do analizy; punkt A łączymy z O i przedłużamy aż do przecięcia z kołem, które mamy zbudować.]

40. Dany jest kąt $\sphericalangle BAC$ i punkt D, nie leżący na jego ramionach. Przez D poprowadzić prostą, przecinającą ramiona kąta w takich punktach E, F żeby prostokąt $\boxed{DE, DF}$ był równoważny danemu prostokątowi. [Wskazówka do analizy: jeżeli na prostej AD obierzemy taki punkt G, żeby było $\boxed{DA, DG} = \boxed{DE, DF}$, wówczas musi być $\sphericalangle DEG = \sphericalangle CAD$.]

41. Zbudować trójkąt prostokątny $\triangle ABC$, mając daną prostokątną a oraz rzut r_b. [Wskazówka do analizy: na r_b, jako na średnicy, kreślimy koło i z wierzchołka B prowadzimy styczną.]

KSIĘGA III.

O położeniu wzajemnem prostych i płaszczyzn.

ROZDZIAŁ I.

O prostych i płaszczyznach równoległych.

§ 202. Przedewszystkiem musimy przypomnieć następujące pewniki, na których opierać się będziemy w dalszym wykładzie.

Pewnik Ib. *Prosta i punkt, nie leżący na niej, wyznaczają płaszczyznę.*

Wykazaliśmy już (str. 9), że pewnik ten możemy zastąpić jednym z dwóch następujących pewników:

(1) *trzy punkty, nie leżące na jednej prostej, wyznaczają płaszczyznę;*

(2) *dwie pızecinające się proste wyznaczają płaszczyznę.*

Teraz możemy wypowiedzieć trzeci pewnik, równoważny każdemu z poprzednich:

(3) *dwie proste równoległe wyznaczają płaszczyznę.*

Istotnie, równoległe określiliśmy (§ 72) jako pewne proste, leżące w j e d n e j p ł a s z c z y ź n i e; jeśli więc mamy dane dwie proste równoległe a, b, to przez to samo dana jest płaszczyzna, w której one leżą. Z drugiej strony, niema żadnej innej płaszczyzny, w której mogłyby leżeć proste a, b, gdyż jedna z tych prostych; np. a i którykolwiek punkt M na drugiej prostej, wyznaczają płaszczyznę.

Pewnik Ic. *Prosta, łącząca dwa dowolne punkty płaszczyzny, leży na tej płaszczyźnie* czyli ma z nią wszystkie punkty spólne.

Pewnik Id. *Dwie płaszczyzny, mające punkt spólny, przecinają się według linji prostej,* zwanej *krawędzią* tych płaszczyzn.

§ 203. Na tych pewnikach możemy oprzeć następujące symbole, któremi wypadnie posługiwać się:

$[a, M]$ oznaczać będzie płaszczyznę, wyznaczoną przez prostą a i punkt M;

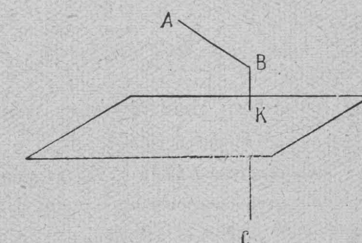
$[A, B, C]$ oznaczać będzie płaszczyznę, wyznaczoną przez punkty A, B i C;

$[a, b]$ oznaczać będzie płaszczyznę, wyznaczoną przez proste a i b;

$[\alpha, \beta]$ oznaczać będzie krawędź dwóch płaszczyzn α i β.

§ 204. Pewnik IIc. *Płaszczyzna dzieli przestrzeń na dwie części* (na dwa obszary), *z których każda zawiera dowolną ilość punktów.*

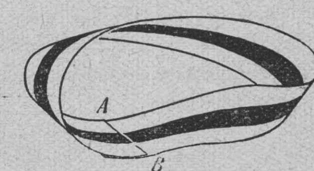
Znaczy to, że jeśli punkty A, B należą oba do tego samego obszaru, wówczas odcinek AB nie ma punktów spólnych z płaszczyzną α, jeżeli natomiast punkty B i C leżą w dwu różnych obszarach, to odcinek BC *przebija płaszczyznę* α w jakimś punkcie K*).



Rys. 180.

*) Popularnie możnaby tę samą prawdę tak wyrazić; płaszczyzna ma w naszem pojęciu dwie strony; z jednej strony na drugą nie można dostać się inaczej, jak tylko przebijając płaszczyznę.

Zdawałoby się, że ta zdolność posiadania dwóch stron przysługiwać powinna każdej powierzchni; łatwo jednak zbudować model t. zw. powierzchni jednostronnej. W tym celu pasek papieru skręcamy raz jeden (lub wogóle nieparzystą liczbę razy), poczem sklejamy jego końce (rys. 181). Uczeń przekona się, że cały pasek można teraz jednem pociągnięciem pendzla pomalować z obu stron, czyli można go obejść z obu stron, nie przebijając go nigdzie.



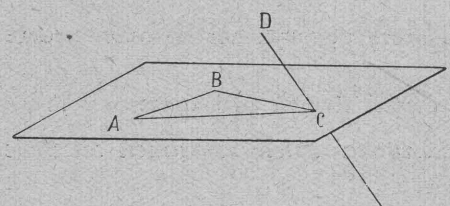
Rys. 181.

Powtórzyć to samo doświadczenie skręcając pasek parzystą liczbę razy. Czy teraz otrzymujemy znów powierzchnię jednostronną?

Punkt K nazywamy *punktem przebicia* płaszczyzny α przez prostą BC. Niekiedy mówimy o *przecinaniu się płaszczyzny z prostą*, zamiast o przebijaniu.

§ 205. Dwie proste mogą leżeć w przestrzeni względem siebie w trojaki sposób: albo przecinają się, albo są do siebie równoległe, albo wreszcie nie mają żadnej spólnej płaszczyzny. W tym trzecim przypadku powiedzielibyśmy popularnie, że dwie takie proste rozmijają się w przestrzeni (lub krzyżują).

Określenie. *Prostemi skośnemi nazywamy dwie proste, które nie mogą leżeć we wspólnej płaszczyźnie.*



Rys. 182.

Aby wykazać istnienie takich prostych, wystarczy obrać dowolną płaszczyznę $[ABC]$ oraz punkt D, *nie leżący w tej płaszczyźnie.* Powiadam, że proste DC i AB są skośne.

Istotnie, gdyby leżały one w jednej płaszczyźnie, wówczas w tej płaszczyźnie musiałyby leżeć cztery punkty A, B, C, D, co przeczy naszemu założeniu.

Ćwiczenie XXXI. 1. Na ścianach pokoju, na meblach i t. d. wskazać pary prostych równoległych, przecinających się lub skośnych. Wskazać płaszczyzny, wyznaczone przez te proste,

2. Wskazać w pokoju prostą, przebijającą płaszczyznę.

Znaleźć również przykłady, ilustrujące pewnik IIc.

3. Wskazać w pokoju dwie przecinające się płaszczyzny, krawędź ich oraz wszystkie obszary, na które podzieliły one przestrzeń.

4. Mamy dane cztery punkty A, B, C, D, nie leżące w jednej płaszczyźnie. Jak nazywa się krawędź płaszczyzn $[ABC]$, $[ABD]$? krawędź płaszczyzn $[BCD]$ $[DAB]$? Wyliczyć wszystkie płaszczyzny, wyznaczone przez te cztery punkty.

5. Dane są dwie proste a, b, przecinające się w punkcie K, i punkt M, nie leżący w płaszczyźnie $[ab]$. Nazwać wszystkie płaszczyzny, wyznaczone na naszej figurze. Nazwać krawędzie każdej pary płaszczyzn na naszej figurze.

Zrobić model tekturowy, na którym byłyby uwidocznione wszystkie płaszczyzny tej figury.

6. Wykazać, że jeżeli mamy dane takie cztery punkty, jak na rys. 182, wówczas możemy znaleźć nie jedną, lecz trzy pary prostych skośnych.

7. Obieramy cztery punkty A, B, C, D w jednej płaszczyźnie i punkt E poza tą płaszczyzną. Ile mamy na naszej figurze prostych, skośnych względem AE?

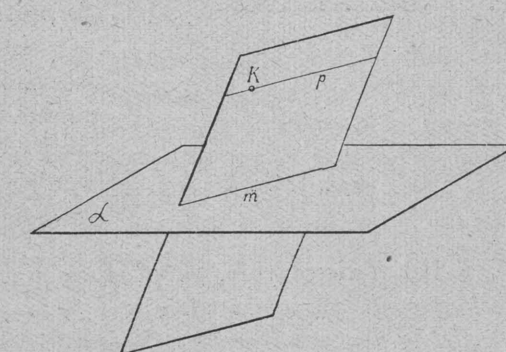
8. Ile wogóle par prostych skośnych możnaby odszukać na tej figurze?

9. Jeżeli trzy proste przecinają się parami w trzech punktach, wówczas muszą wszystkie trzy leżeć w jednej płaszczyźnie. Czy można to samo powiedzieć o trzech prostych do siebie równoległych?

10. Czy poprzednie twierdzenie da się zastosować do czterech prostych, przecinających się parami? Ile punktów przecięcia mielibyśmy wtedy?

§ 206. Mówiąc o teorji prostych i płaszczyzn równoległych, musimy przedewszystkiem zaznaczyć, że pewnik IV i wszystkie wnioski z niego płynące pozostają prawdziwe i w stereometrji. W szczególności pozostaje prawdą, że przez dany punkt A możemy do danej prostej m poprowadzić tylko jedną równoległą (§ 75, str. 55), gdyż punkt ten i prosta wyznaczają płaszczyznę $[mA]$, w której, jak wiemy, istnieje tylko jedna równoległa do prostej m, przechodząca przez punkt A.

§ 207. Określenie. *O prostej i płaszczyźnie powiadamy, że są do siebie równoległe, jeżeli nie mają ani jednego punktu spólnego.*



Rys. 183.

Jak zwykle przy wprowadzaniu nowego pojęcia, musimy wykazać, że istnieją naprawdę proste i płaszczyzny równoległe do siebie. W tym celu pokażemy sposób budowania takich figur.

Niech będzie dana płaszczyzna α, a na niej prosta m. Przez dowolny punkt K, nie należący do płaszczyzny α, prowadzimy płaszczyznę $[Km]$, a w niej kreślimy przez punkt K prostą p, równoległą do m. Twierdzę, że prosta p odpowiada naszemu określeniu i jest równoległa do płaszczyzny α.

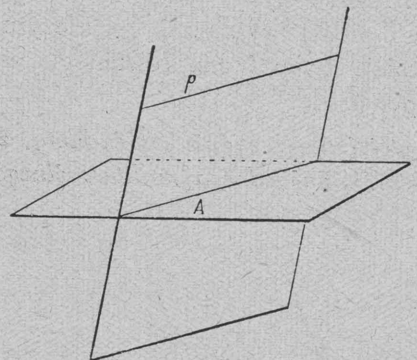
Istotnie, gdyby p i α miały punkt spólny, punkt ten musiałby leżeć na prostej m (dlaczego?), czyli m i p przecinałyby się, co jest niedorzeczne.

§ 208. Twierdzenie. *Jeżeli proste* m, p *są do siebie równoległe, wówczas prosta* p *jest równoległa do każdej płaszczyzny, przesuniętej przez* m (o ile pominiemy płaszczyznę $[mp]$, w której leżą obie te równoległe). *)

*) Możemy zresztą wyjątku tego nie robić i uważać, że prosta a, leżąca na płaszczyźnie α, jest do tej płaszczyzny równoległa.

Istotnie, gdyby prosta p przebijała w jakimś punkcie X płaszczyznę α, przesuniętą przez prostą m, w takim razie ten punkt przebicia X musiałby leżeć na prostej m, gdyż prosta p leży w całości na płaszczyźnie $[mp]$, a krawędzią płaszczyzn α i $[mp]$ jest właśnie prosta m.

Założyliśmy, że proste m, p są do siebie równoległe, zatem wniosek nasz jest niedorzeczny.



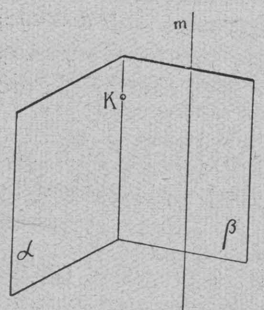
Rys. 184.

§ 209. Twierdzenie. *Jeżeli prosta* p *jest równoległa do płaszczyzny α, wówczas w każdym punkcie tej płaszczyzny możemy wykreślić równoległą do prostej* p.

Istotnie, jeżeli na płaszczyźnie α obraliśmy dowolny punkt A, wówczas płaszczyzna $[Ap]$ przecina płaszczyznę α według krawędzi, która jest równoległa do p (d l a c z e g o?).

§ 210. Twierdzenie. *Jeżeli prosta* m *jest równoległa do dwóch przecinających się płaszczyzn α i β, to jest równoległa do ich krawędzi $[\alpha\, \beta]$.*

Istotnie, jeżeli K jest dowolnym punktem na krawędzi, wówczas przez K możemy poprowadzić prostą, leżącą w płaszczyźnie α i równoległą do m, oraz prostą, leżącą w płaszczyźnie β i równologłą do m. Ale przez K przechodzi tylko jedna równoległa do m, zatem obie te równoległe zlewają się w jedną prostą i jest nią krawędź $[\alpha\, \beta]$, gdyż prosta ta leży jednocześnie w obu płaszczyznach α i β.



Rys. 185.

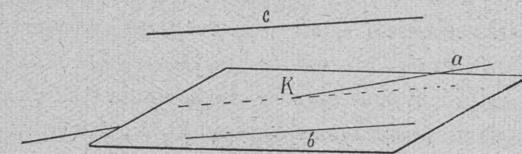
§ 211. Twierdzenie odwrotne w z g l ę d e m § 210. *Jeżeli prosta* m *jest równoległa do krawędzi $[\alpha\, \beta]$ dwóch płaszczyzn, to jest równoległa do każdej z tych dwu płaszczyzn α i β.*

Wynika to bezpośrednio z § 209.

§ 212. Twierdzenie. *Dwie proste, równoległe do trzeciej prostej, są do siebie równoległe.*

Niech będą dane proste a, b, c takie, że $a /\!/ c$, $b /\!/ c$; mamy dowieść, że $a /\!/ b$.

Zauważmy, że a i b nie mogą przecinać się, gdyż wtedy przez ich punkt przecięcia się przechodziłyby dwie proste, równoległe do tej samej prostej c.



Rys. 186.

Ale a i b nie mogą być równie skośne, jeśli bowiem na a obierzemy dowolny punkt K, wówczas płaszczyzna $[Kb]$ musi być równoległa do prostej c [d l a c z e g o?]. Gdyby więc prosta a nie leżała w płaszczyźnie $[Kb]$, to przez punkt K moglibyśmy poprowadzić dwie równoległe do prostej c (k t ó r e m i a n o w i c i e?).

Ćwiczenia XXXII. 1. Dana jest płaszczyzna α i prosta m, do niej równoległa. Przez m prowadzimy dowolną płaszczyznę β; w jaki sposób krawędź $[\alpha\, \beta]$ leży względem m? Co się dzieje z tą krawędzią, gdy β obracamy dokoła m?

2. Czy dwie płaszczyzny α, β, równoległe do tej samej prostej m, mogą nie być do siebie równoległe? Zilustrować na ścianach pokoju.

3. Dana jest płaszczyzna α i punkt K, nie leżący na niej; przez K poprowadzić prostą, równoległą do α.*) Ile rozwiązań?

4. Czy dwie proste a, b, równoległe do tej samej płaszczyzny γ, mogą się przecinać? Czy mogą być skośne? Wskazać odpowiednie przykłady w pokoju, obierając sufit jako płaszczyznę γ.

5. Jeżeli proste a i b są do siebie równoległe, a oprócz tego b jest równoległa do płaszczyzny γ, to a jest równoległa do γ.

6. Sformułować i zbadać twierdzenie odwrotne do poprzedniego.

7. Jeżeli $a /\!/ b$ i jedna z tych prostych przebija płaszczyznę α, to i druga przebija tę płaszczyznę. [W s k a z ó w k a: uwzględnić płaszczyznę $[ab]$ i jej krawędź z płaszczyzną α].

8. Jeżeli punkty A, B, C, D nie leżą w jednej płaszczyźnie, wówczas tworzą t. zw. czworobok skośny. Dowieść, że środki boków tego czworoboku są wierzchołkami równoległoboku.

*) W konstrukcjach stereometrycznych poszukujemy najpierw elementów, któreby wyznaczyły nam odpowiednią płaszczyznę, a w niej dokonywamy konstrukcji planimetrycznej. Np. w § 207 wyznaczyliśmy najpierw płaszczyznę $[Km]$, a w niej poprowadziliśmy równoległą do prostej m.

Sporządzić model figury z pręcików i drutów.

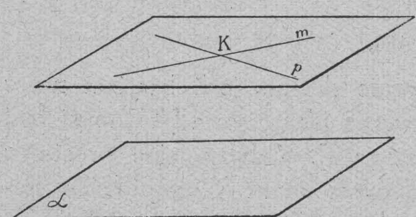
9. Odcinki BD, AC możemy nazwać przekątnemi czworoboku skośnego $ABCD$. Dowieść, iż odcinek, łączący środki tych przekątnych, przechodzi przez punkt przecięcia się odcinków, łączących środki przeciwległych boków czworoboku, i że jest w tym punkcie podzielony na połowy.

10. Przez punkt K poprowadzić płaszczyznę, równoległą do prostej α. Ile rozwiązań?

11. Przez prostą m poprowadzić płaszczyznę, równoległą do prostej a. Ile mamy rozwiązań przy rozmaitych wzajemnych położeniach prostych a i m?

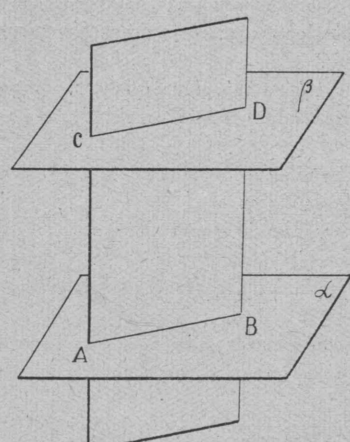
§ 213. Określenie. *Dwie płaszczyzny nazywamy równoległemi, jeżeli nie mają one wcale punktów spólnych.*

Łatwo znaleźć można sposób budowania takich płaszczyzn. Niech będzie dana płaszczyzna α i punkt K, zewnątrz niej leżący. Poprowadźmy przez K dwie proste m, p, równoległe do płaszczyzny α (patrz zadanie 3, str. 187); powiadam, że płaszczyzna $[mp]$ jest równoległa do płaszczyzny α.



Rys. 187.

Istotnie, gdyby te dwie płaszczyzny przecinały się według jakiejś prostej s, wówczas prosta s albo byłaby równoległa do obu prostych m, p, — co jest niedorzeczne (dlaczego?) albo przecinałaby przynajmniej jedną z nich, np. prostą m. Ale i to przypuszczenie jest niedorzeczne, gdyż w takim razie prosta m przebijałaby płaszczyznę α.



Rys. 188.

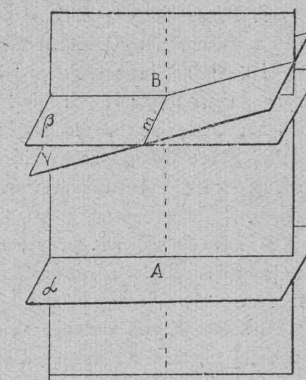
§ 214. Twierdzenie. *Jeżeli dwie równoległe płaszczyzny przetniemy trzecią, otrzymamy dwie równoległe do siebie krawędzie.*

Np. na rys. 188 krawędzie AB i CD są do siebie równoległe; gdyby bowiem przecinały się, to płaszczyzny α i β musiałyby również przeciąć się, co jest niedorzeczne.

(Dlaczego proste AB i CD nie mogą być skośne?)

§ 215. Twierdzenie. *Przez daną prostą* m, *równoległą do płaszczyzny* α, *można poprowadzić tylko jedną płaszczyznę, równoległą do* α.

Istotnie, gdyby przez prostą m przechodziły dwie płaszczyzny β, γ, obie rownoległe do α, wówczas wystarczyłoby obrać dowolny punkt B na krawędzi m oraz dowolny punkt A na płaszczyźnie α i przez prostą AB przesunąć jakąkolwiek czwartą płaszczyznę, która musiałaby, rzecz prosta, przeciąć wszystkie trzy płaszczyzny α, β, γ. W ten sposób otrzymalibyśmy dwie proste b, c, równoległe do prostej a i przechodzące przez punkt B, co jest niedorzeczne.



Rys. 189.

Wniosek 1. *Przez dany punkt A możemy poprowadzić tylko jedną płaszczyznę, równoległą do płaszczyzny* α, gdyż najpierw prowadzimy przez A prostą m, równoległą do α, przez co sprowadziliśmy zagadnienie do formy znanej.

2. *Wszystkie proste, równoległe do danej płaszczyzny* α *i przechodzące przez jeden punkt A, tworzą płaszczyznę, równoległą do* α.

Ćwiczenia XXXIII. 1. Płaszczyzna, która przecina jedną z dwu równoległych płaszczyzn, przecina i drugą. [Wskazówka: sprowadzić do niedorzeczności; § 215.]

2. Prosta, która przebija jedną z dwu równoległych płaszczyzn, przebija i drugą. [Ten sam § 215 oraz wniosek 2.].

3. Dwie płaszczyzny, równoległe do trzeciej, są równoległe do siebie. [Ten sam § 215.]

4. Dane są trzy płaszczyzny α, β, γ, przecinające się parami, przyczem Płaszczyzna γ jest równoległa do prostej $[\alpha\beta]$. Jak leżą proste $[\alpha\gamma]$ i $[\beta\gamma]$?

5. Dane są dwie przecinające się płaszczyzny α, β oraz punkt P, leżący w płaszczyźnie α. Czy można przez P poprowadzić prostą, równoległą do β? prostą, przecinającą β? Ile prostych jednego i drugiego rodzaju poprowadzić możemy przez punkt P?

6. Dane są dwie płaszczyzny α, β oraz prosta m, nie leżąca na żadnej z nich. Przez m poprowadzić trzecią płaszczyznę γ tak, żeby prosta $[\alpha\gamma]$ była równoległa do płaszczyzny β. Ile rozwiązań ma zadanie?

7. Dane są płaszczyzny α, β oraz punkt M i prosta p, leżące w płaszczyźnie α. Przez M poprowadzić prostą, równoległą do β i przecinającą prostą p, (czy zadanie jest zawsze możliwe?); równoległą zarówno do β, jak do p.

8. Dane są prosta a, płaszczyzna β i punkt M. Przez M poprowadzić prostą, równoległą do β i przecinającą prostą a.

9. Przez dany punkt M poprowadzić płaszczyznę, która nie przecięłaby żadnej z dwóch danych prostych a, b.

10. Mając dane dwie proste skośne, przesunąć przez jedną z nich płaszczyznę, równoległą do drugiej.

11. Dane są proste skośne a, b oraz punkt M, nie leżący na żadnej z nich. Przez M poprowadzić prostą, któraby przecięła zarówno a, jak b. [W s k a z ó w k a: prowadzimy płaszczyznę $[M\,a]$, którą w punkcie K przebija prosta b.]

12. Dane są dwie proste skośne a, b; poprowadzić prostą, któraby przecięła je obie i była równoległa do danej prostej m. [W s k a z ó w k a: przez a płaszczyznę równoległą do m.]

13. Rozwiązać zadanie 12 w założeniu, że sieczna ma być równoległa nie do prostej m, lecz do danej płaszczyzny γ.

14. Mamy daną prostą nieruchomą a i prostą ruchomą g. Obie te proste stale przecinają się. Jak należy poruszać prostą g, by zakreśliła ona płaszczyznę?

ROZDZIAŁ II.

O prostych i płaszczyznach prostopadłych.

§ 216. Jeżeli mamy dany odcinek AA', wówczas oś symetrji odcinka jest, jak wiadomo, miejscem punktów na płaszczyźnie, równo odległych od końców A, A' odcinka. Nasuwa się pytanie, jakie jest analogiczne miejsce geometryczne punktów w przestrzeni?

Obracajmy dokoła AA' figurę, utworzoną przez ten odcinek i przez jego oś symetrji OB. Mamy wrażenie, że oś OB kreśli płaszczyznę; innemi słowami: że wszystkie proste, prostopadłe do AA' w punkcie O, tworzą jedną płaszczyznę.

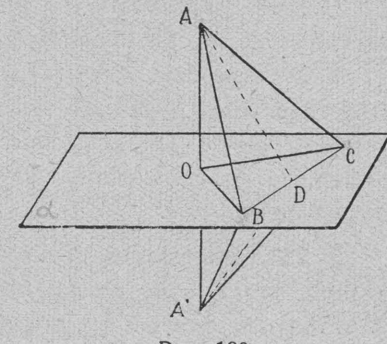
To nasuwa nam myśl o możliwości następującego określenia i twierdzenia.

§ 217. Określenie. *Prostą a nazywamy prostopadłą do płaszczyzny α, jeżeli jest prostopadła do każdej prostej, leżącej w płaszczyźnie α i przechodzącej przez jej punkt przebicia.*

§ 218. Twierdzenie. *W przestrzeni miejscem geometrycznem punktów, jednakowo odległych od końców odcinka, jest płaszczyzna, prostopadła do odcinka w jego środku i zwana płaszczyzną symetrji odcinka.*

Jak zwykle, gdzie chodzi o miejsce geometryczne, musimy dowieść dwóch twierdzeń: prostego i przeciwnego.

1-o. Wyobraźmy sobie, iż przez AA' poprowadziliśmy dwie płaszczyzny $[A\,B\,A']$ i $[A\,C\,A']$ i że OB, OC są osiami symetrji odcinka AA', wykreślonemi w tych dwóch płaszczyznach.



Rys. 190.

Osie OB, OC wyznaczają płaszczyznę α. Dowiedziemy najpierw, że każdy punkt tej płaszczyzny jest jednakowo odległy od A i A' i że każda prosta OD, leżąca w płaszczyźnie α, jest prostopadła do AA'.

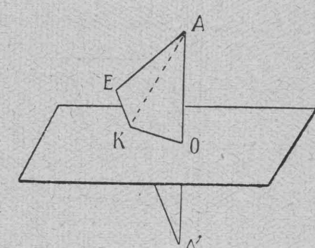
W tym celu obieramy na płaszczyźnie α dowolny punkt D i prowadzimy przez niego prostą, przecinającą osie symetrji w punktach B i C. Mamy wtedy

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'BC \qquad \text{(dlaczego?)},$$
$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'BC.$$

Dalej mamy
$$\triangle ABD \equiv \triangle A'BD \qquad \text{(dlaczego?)},$$
zatem
$$AD = A'D.$$

Ponieważ trójkąt $\triangle AA'D$, w którym $AO = OA'$, jest równoramienny, zatem $OD \perp AA'$.

2-o. Niech będzie dany punt E, nie leżący w płaszczyźnie α, a mianowicie położony z tej samej strony płaszczyzny, co i punkt A. Dowiedziemy, iż odległość jego od A jest mniejsza, niż od A'.



Rys. 191.

Jakoż połączmy E z A i z A' i niech prosta EA' przebije płaszczyznę α w punkcie K.

W płaszczyźnie $[AEA']$ mamy dany odcinek AA', jego oś symetrji OK i punkt E, leżący po tej samej stronie osi symetrji, po której znajduje się koniec A odcinka. Wobec tego (§ 101, str. 75) musi być

$$AE < EA'.$$

§ 219. Wnioski. 1. *Wszystkie proste, prostopadłe do prostej AA' w punkcie O, leżą w jednej płaszczyźnie α, która jest prostopadła do AA'*, a zatem:

2. *Przez punkt dany na prostej możemy poprowadzić tylko jedną płaszczyznę, prostopadłą do tej prostej.*

3. W dowodzie powyższego twierdzenia płaszczyzna α była wyznaczona przez dwie osie symetrji OB, OC odcinka AA', zatem *jeżeli prosta jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych, to jest prostopadła do całej płaszczyzny, wyznaczonej przez te dwie proste.*

§ 220. Określenie. *Wszystkie płaszczyzny, jakie dają się przesunąć przez jedną prostą, tworzą pęk płaszczyzn.*

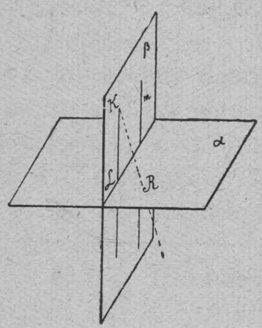
Prosta ta nazywa się krawędzią pęku.

§ 220 a. Określenie. *Jeżeli przez prostą, prostopadłą do płaszczyzny α, przesuniemy płaszczyznę β, wówczas powiadamy, że płaszczyzna β jest prostopadła do α.*

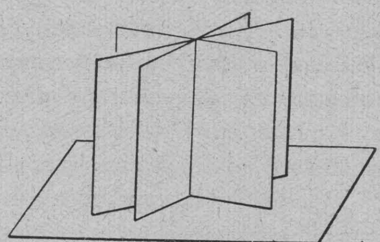
Zauważmy, że stosunek prostopadłości płaszczyzn jast w z a j e m n y, t. j. że jeśli β jest prostopadła do α, to i odwrotnie: α jest prostopadła do β.

Istotnie, jeżeli w płaszczyźnie β leży prosta BC i jeżeli $BC \perp \alpha$, to kreśląc w płaszczyźnie α prostą CD, prostopadłą do krawędzi $[\alpha\beta]$, mamy:

$$CD \perp [\alpha\beta],\ CD \perp BC, \text{ zatem } CD \perp \beta, \text{ a więc i } \alpha \perp \beta.$$



Rys. 192.



Rys. 193.

Wnioski 1. *Jeżeli krawędź pęku jest prostopadła do płaszczyzny α, wówczas wszystkie płaszczyzny pęku są prostopadłe do α, i odwrotnie* (rys. 193).

2. *Jeżeli dwie płaszczyzny α, β są do siebie prostopadłe, wówczas każda prosta, poprowadzona w jednej z nich prostopadle do ich krawędzi, jest prostopadła do drugiej płaszczyzny.*

Jeżeli mamy $\alpha \perp \beta$ (rys. 192), wówczas β musi zawierać jakąś prostą m, prostopadłą do α, a więc i do krawędzi $[\alpha\beta]$ obu płaszczyzn. Obierzmy na β dowolny punkt K i poprowadźmy prostą KL prostopadle do krawędzi $[\alpha\beta]$. Musi być $KL \parallel m$ (d l a c z e g o?)

Gdyby prosta KL nie była prostopadła do α, mielibyśmy jakąś inną prostopadłą, np. KR. Na mocy ćwiczenia XXXIV, 8 (patrz niżej) zachodziłby wtedy związek $KR \parallel m$. Ale w takim razie z punktu K wychodziłyby dwie proste, KL i KR, obie równoległe do m — co jest niedorzeczne.

Ćwiczenia XXXIV. 1. Przez punkt A, nie leżący na prostej m, można poprowadzić tylko jedną płaszczyznę prostopadłą do m. [W s k a z ó w k a: gdyby płaszczyzn prostopadłych miało być dwie α i β, wówczas przecinamy je płaszczyzną $[Am]$ i badamy figurę płaską, utworzoną przez ten przekrój.]

2. Przez punkt A, leżący w płaszczyźnie α, można poprowadzić do α tylko jedną prostą prostopadłą. [W s k a z ó w k a: gdybyśmy mieli dwie prostopadłe AB i AC, wówczas badamy przekrój, wyznaczony przez płaszczyznę $[ABC]$.]

3. Przez punkt A, nie leżący na płaszczyźnie α, możemy poprowadzić tylko jedną prostą, prostopadłą do α. [W s k a z ó w k a: ta sama metoda, co w zadaniu 1 i 2.]

4. Przez punkt A, leżący na prostej m, poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do prostej m.

5. Przez punkt A, nie leżący na m, poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do prostej m.

6. Przez punkt A, należący do płaszczyzny α, poprowadzić płaszczyznę, prostopadłą do α.

7. Przez punkt A, nie leżący w płaszczyźnie α, poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do α.

8. Co można powiedzieć o wzajemnem położeniu prostych a, b, jeżeli proste te są

(1) prostopadłe do tej samej prostej c;
(2) „ „ „ „ płaszczyzny α?

9. Co można powiedzieć o wzajemnem położeniu dwóch płaszczyzn α, β, jeżeli płaszczyzny te są

(1) prostopadłe do tej samej płaszczyzny γ;
(2) „ „ „ „ prostej m?

10. Co można powiedzieć o wzajemnem położeniu prostej m i płaszczyzny α, jeżeli oba te utwory są

(1) równoległe do tej samej prostej a;
(2) prostopadłe „ „ „ „ a;
(3) równoległe „ „ „ płaszczyzny β;
(4) prostopadłe „ „ „ „ β;

11. Prosta m jest prostopadła do płaszczyzny α; druga prosta p przecina prostą m i jest równoległa do α. Co kreśli prosta p, jeżeli poruszamy ją tak, iż pozostaje ona równoległa do α i stale przecina prostą m?

12. Poprowadzić prostą, prostopadłą do płaszczyzny α i przecinającą dwie dane proste m i p. Rozważyć różne przypadki, zależne od położenia prostych m, p względem siebie i względem płaszczyzny α.

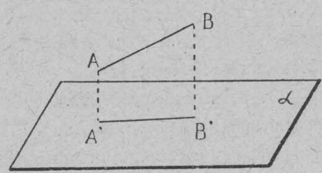
13. Jaki warunek musi być spełniony, żeby wszystkie prostopadłe, poprowadzone z różnych punktów prostej a do prostej b, leżały w jednej płaszczyźnie?

14. Mamy dwie płaszczyzny α, β i proste a, b, przyczem a leży na α, zaś b na β. Jeżeli $a \perp b$ oraz $\alpha \perp \beta$, wówczas prosta $[\alpha\beta]$ jest prostopadła albo do a albo do b, a oprócz tego płaszczyzna $[ab]$ jest prostopadła bądź do α, bądź do β.

15. Jeżeli trzy płaszczyzny są parami do siebie prostopadłe, wówczas ich krawędzie są również parami do siebie prostopadłe.

16. Przez punkt A poprowadzić płaszczyznę, prostopadłą do dwóch danych płaszczyzn α, β.

17. Przez punkt A poprowadzić płaszczyznę, prostopadłą do płaszczyzny α i równoległą do prostej b.



Rys. 194.

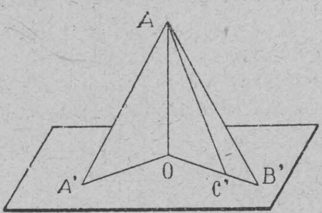
Określenie. Jeżeli z końców odcinka AB poprowadzimy prostopadłe AA', BB' do płaszczyzny α, otrzymamy odcinek $A'B'$, który nazywa się *rzutem prostokątnym odcinka AB na płaszczyznę* α.

Płaszczyzna α nazywa się *płaszczyzną rzutów*.

---

18. Jeżeli z punktu zewnętrznego A poprowadzimy do płaszczyzny α kilka odcinków, wówczas długości ich naogół nie będą równe. Zbadać: 1) który z odcinków jest najkrótszy? 2) czy istnieje odcinek najdłuższy? 3) czy i kiedy istnieją odcinki równe? 4) który z dwóch pochyłych odcinków jest dłuższy?

Sformułować odpowiednie twierdzenia, zbadać, czy są odwracalne i porównać z § 70 (str. 51).



Rys. 195.

19. Rzuty prostokątne dwóch równoległych prostych na tę samą płaszczyznę są do siebie równoległe. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

20. Dane są dwie przecinające się płaszczyzny α, β oraz prosta m, leżące na płaszczyźnie α. Jak leży rzut tej prostej na płaszczyznę β? Czy twierdzenia odwrotne jest prawdziwe?

21. Dane są dwie proste d i f oraz dwie prostopadłe do siebie płaszczyzny α i β. Niech d' i d'' będą rzutami prostokątnemi pierwszej prostej na te płaszczyzny, f' i f'' — rzutami drugiej prostej. Jeżeli $d' // f'$ oraz $d'' // f''$, co można powiedzieć o prostych d i f?

22. Jeżeli proste AP' i BQ' są prostopadłe do płaszczyzny α, proste zaś AP'', BQ'' są prostopadłe do płaszczyzny β i jeżeli α i β nie są do siebie równoległe, wówczas płaszczyzny $[P'AP'']$, $[Q'AQ'']$ są równoległe do siebie.

23. W płaszczyźnie α poprowadzić przez punkt A prostą tak, żeby prostopadłe, poprowadzone do niej z punktów B, C (nie leżących na α), przecinały ją w jednym punkcie.

24. Dowieść, że dwie równoległe płaszczyzny są równo odległe.

25. Jakie jest miejsce punktów przestrzeni, równo odległych od trzech punktów A, B, C?

26. Dane są dwie płaszczyzny i na jednej z nich punkty A, B, C; znaleźć na drugiej płaszczyźnie punkt, równo odległy od A, B i C.

27. Dane są dwie proste skośne a, b; znaleźć na prostej b punkt, jednakowo odległy od punktów A_1, A_2 prostej a.

28. Dane jest koło $(O)r$ i punkt A, nie leżący na płaszczyźnie koła. Znaleźć najkrótszą i najdłuższą odległość A od okręgu koła.

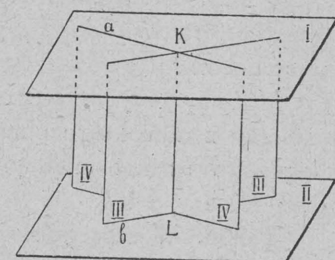
29. Mamy dany pęk płaszczyzn o krawędzi a oraz punkt O, nie leżący na tej krawędzi. Z O prowadzimy do wszystkich płaszczyzn pęku proste prostopadłe; jakie jest miejsce geometryczne spodków prostopadłych?

30. Dane są dwie proste przecinające się a, b; jakie jest miejsce geometryczne punktów przestrzeni, jednakowo odległych od obu prostych?

31. To samo zagadnienie, jeżeli $a // b$.

32. Dane są dwie proste skośne a, b; wykreślić prostą która byłaby prostopadła do obu tych prostych.

[Analiza: prowadzimy przez a płaszczyznę I równoległą do b, przez b zaś płaszczyznę II równoległą do a; wszystkie proste, prostopadłe do płaszczyzny I i przecinające prostą b, leżą w płaszczyźnie III, przesuniętej przez b prostopadle do płaszczyzny I. Tak samo w płaszczyźnie IV leżą wszystkie proste, prostopadłe do płaszczyzny II i przecinające prostą a. Wobec tego żądana prostopadła musi być krawędzią płaszczyzn III i IV.]



Rys. 196.

33. Wykazać, że prostopadła, zbudowana w poprzedniem zadaniu, jest zarazem najkrótszą odległością między dwiema prostemi skośnemi.

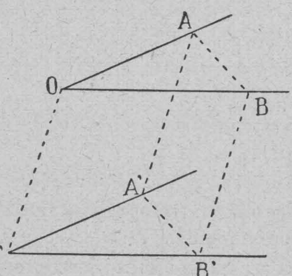
34. Uprościć konstrukcję z zadania 32-go, odrzucając zupełnie płaszczyznę I i III.

ROZDZIAŁ III.

O kątach między prostemi i płaszczyznami.

§ **222. Twierdzenie.** *Dwa kąty płaskie o ramionach odpowiednio równoległych albo równają się sobie, albo spełniają się — zależnie od tego, czy kąty mają ten sam zwrot, czy zwroty przeciwne.*

Wystarczy dowieść twierdzenia dla przypadku, gdy ramiona obu kątów mają zwroty zgodne, a więc i kąty mają ten sam zwrot.



Rys. 197.

W tym celu na ramionach kątów odłóżmy równe sobie odcinki

$$OA = OB = O'A' = O'B'.$$

Czworobok $OO'A'A$ jest równoległobokiem (dlaczego?), tak, iż $OO' = AA'$.

Tak samo $OO' = BB'$.

stąd wynika, że czworobok $AA'B'B$ jest równoległobokiem (dlaczego?), a więc $AB = A'B'$

i $\triangle OAB \equiv \triangle O'A'B'$.

Stąd wynika, że $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'O'B'$.

§ **223. Określenie.** *Kątem między dwiema prostemi nazywamy kąt, zawarty między dwiema równoległemi do tych prostych, poprowadzonemi z jednego punktu.*

Możemy tedy mówić o kącie między dwiema skośnemi a, b; wystarczy z dowolnego punktu M na prostej a poprowadzić równoległą do b: kąt między tą równoległą a prostą a nazywamy kątem między a i b.

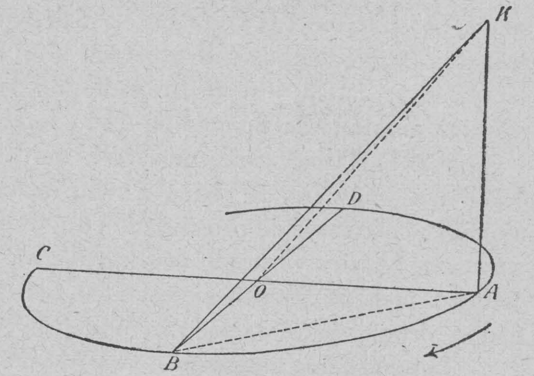
§ **224.** W szczególności będziemy nieraz mówili, że dwie proste są względem siebie *prostokątne,* jeżeli kąt między niemi określony jak powyżej, jest prosty. Termin *prostopadłe* zachowamy dla takich prostych, które nietylko są prostokątne, ale prócz tego przecinają się.

Uczeń sam wykaże, że wniosek 3, § 219 da się ująć w sposób następujący:

Prosta jest prostopadła do płaszczyzny, jeżeli jest prostokątna względem dwóch przecinających się prostych na tej płaszczyźnie.

§ **225.** Przypuśćmy, że z punktu zewnętrznego K poprowadzono do płaszczyzny α pochyłą KO i wykreślono rzut jej OA na tę samą płaszczyznę.

Z punktu O zakreślmy koło $(O)A$ i wyobraźmy sobie, że punkt ruchomy B przebiega, poczynając od punktu A, półokrąg ABC w zwrocie, zaznaczonym strzałką. Cięciwa AB rośnie, a więc rośnie i pochyła KB (dlaczego?). W trójkącie $\triangle KOB$ dwa boki są stałe (które?), trzeci zaś rośnie, zatem przeciwległy mu kąt $\sphericalangle KOB$ wciąż rośnie.



Rys. 198.

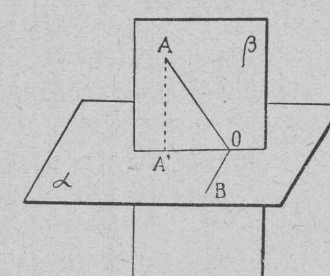
Jak widzimy, wśród kątów, które prosta KO tworzy z prostemi płaszczyzny α, najmniejszy jest kąt $\sphericalangle KOA$, między prostą KO i jej rzutem.

To nasuwa nam pomysł następującego określenia.

Określenie. *Kątem nachylenia prostej do płaszczyzny* (albo krócej: *kątem między prostą i płaszczyzną) nazywamy kąt między tą prostą a rzutem jej na płaszczyznę.*

Jest to najmniejszy z kątów, jakie prosta nasza tworzy z prostemi, leżącemi w płaszczyźnie rzutów.

§ **226. Twierdzenie.** *Kąt prosty rzutuje się na płaszczyznę jako kąt prosty, jeżeli jedno jego ramię jest do tej płaszczyzny równoległe i jeżeli kąt ten nie leży w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny rzutów.*



Rys. 199.

Ze względu na równość kątów o ramionach równoległych wystarczy zbadać przypadek, gdy jedno ramię kąta prostego nietylko jest równoległe do płaszczyzny rzutów, ale poprostu leży na niej.

Niech będzie dany kąt prosty $\sphericalangle AOB$, którego ramię OB

leży na płaszczyźnie α; mamy dowieść, że rzut tego kąta czyli kąt $\sphericalangle A'OB$ jest również prosty.

W tym celu zauważmy, że proste AA' i OB są względem siebie prostokątne (d l a c z e g o ?). Tak więc prosta OB jest prostokątna względem dwóch prostych AA' i AO, leżących w płaszczyźnie β, zatem jest prostopadła do tej płaszczyzny czyli jest również prostopadła do prostej OA', leżącej w płaszczyźnie β.

§ 227. Twierdzenie powyższe ma trzy założenia (j a k i e ?). Jeżeli umówimy się, że jedno z nich, mianowicie: „kąt rzutowany nie leży w płaszczyźnie prostopadłej do α" pozostawimy bez zmiany, wówczas będziemy mogli utworzyć dwa twierdzenia odwrotne. Jedno z nich pozostawiamy czytelnikowi do sformułowania i zbadania; drugie, jako ważniejsze, podajemy poniżej:

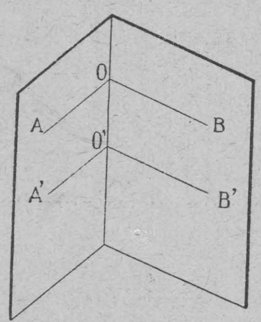
Twierdzenie odwrotne. (w z g l ę d e m tw. § 226). *Jeżeli rzutujemy na płaszczyznę kąt, którego jedno ramię jest do tej płaszczyzny równoległe i jeżeli w rzucie otrzymaliśmy kąt prosty, dowód to, że rzutowany kąt był prosty.*

Znów, jak w § 226, wystarczy zbadać przypadek, gdy jedno ramię kąta leży na płaszczyźnie rzutów α (rys. 199). Mamy tedy dane, że $\sphericalangle A'OB = \delta$ i że prosta AA' jest prostopadła do α; trzeba dowieść, że $\sphericalangle AOB = \delta$.

Tak jest istotnie, gdyż prosta OB jest prostokątna względem dwóch prostych OA' i AA' (d l a c z e g o ?), leżących w płaszczyźnie β, jest więc prostopadła do prostej OA, leżącej w tej samej płaszczyźnie.

§ 228. Określenie. *Dwuścianem albo klinem nazywamy figurę, utworzoną przez dwie półpłaszczyzny o spólnej krawędzi.*

§ 229. Jeżeli na ścianach dwuścianu wykreślimy prostopadłe do jego krawędzi (np. proste OA, OB na rys. 200), otrzymamy kąt płaski ($\sphericalangle AOB$), zwany *kątem linjowym dwuścianu.*



Rys. 200.

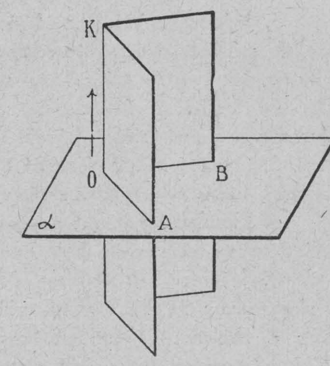
Gdybyśmy tę samą konstrukcję przeprowadzili w innem miejscu krawędzi, np. przy punkcie O', otrzymalibyśmy kąt $\sphericalangle A'OB'$, równający się kątowi $\sphericalangle AOB$ (d l a c z e g o ?).

Tak więc (1) *każdemu dwuścianowi odpowiada kąt linjowy, w zupełności wyznaczony.*

Odwrotnie: jeżeli obierzemy dowolny kąt płaski $\sphericalangle AOB$ (rys. 201) z wierzchołka jego O wystawimy prostopadłą OK do płaszczyzny kąta i przesuniemy dwie półpłaszczyzny: jedną przez półproste OK i OA, drugą przez OK i OB, otrzymamy dwuścian w zupełności wyznaczony.

Tak więc (2) *każdemu kątowi linjowemu odpowiada dwuścian, w zupełności wyznaczony.*

Jak widzimy, między dwuścianami (klinami) z jednej strony, a kątami linjowemi z drugiej zachodzi doskonała odpowiedność: *każdemu dwuścianowi odpowiada jeden i tylko jeden kąt linjowy, i odwrotnie: każdemu kątowi linjowemu odpowiada jeden i tylko jeden dwuścian.*



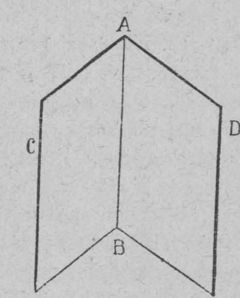
Rys. 201.

Wobec tego porównywanie dwuścianów (klinów) możemy zastąpić porównywaniem ich kątów linjowych. W szczególności możemy ustalić następujące określenia:

Określenia. 1. *Dwa dwuściany (kliny) nazywamy równemi, jeżeli równają się sobie ich kąty linjowe.*

2. *Z dwóch dwuścianów uważamy za większy ten, którego kąt linjowy jest większy.*

§ 230. W § 19, str. 14 mówiliśmy, że kątom płaskim możemy przypisać dwa zwroty, wprost sobie przeciwne. Możemy to samo powiedzieć o dwuścianach. Wyobraźmy sobie mianowicie obserwatora, który stoi na płaszczyźnie α (rys. 201) i ma głowę zwróconą w kierunku strzałki; jeżeli dla takiego obserwatora kąt linjowy $\sphericalangle AOB$ (a wraz z nim i dwuścian) powstaje przez obrót półprostej OA (półpłaszczyzny OAK) w zwrocie, przeciwnym ruchowi strzałek zegaru, a więc od prawej ręki ku lewej, wówczas kąt $\sphericalangle AOB$ i dwuścian nazywamy *dodatniemi.*



Rys. 202.

W przeciwnym razie uważamy kąt linjowy i dwuścian za *ujemne.*

§ 231. Dwuścian oznaczać będziemy w dwojaki sposób:

symbol $\sphericalangle(\alpha\beta)$ oznaczać będzie klin między płaszczyznami α i β; symbol $\sphericalangle AB(CD)$ oznaczać będzie klin, którego krawędzią jest prosta AB, ścianami zaś są płaszczyzny $[ABC]$ i $[ABD]$ (rys. 202).

Ćwiczenia XXXV. 1. Kąt ostry (lub rozwarty) rzutuje się na płaszczyznę w postaci kąta ostrego (lub rozwartego), jeżeli jedno jego ramię jest równoległe do płaszczyzny rzutów.

2. Zbadać kliny odpowiadające sobie, jednostronne etc., które otrzymamy, jeżeli dwie równoległe płaszczyzny przetniemy dowolną trzecią płaszczyzną.

3. Jeżeli na jednej z dwóch przecinających się płaszczyzn wykreślimy wszelkie możliwe proste, wówczas okaże się, że ta z nich, która jest prostopadła do krawędzi, tworzy największy kąt z drugą płaszczyzną.

4. Zbudować płaszczyznę, dzielącą dany klin na połowy (t. j. zbudować *płaszczyznę dwusieczną*). Jakiem miejscem geometrycznem jest ta płaszczyzna?

5. Dana jest płaszczyzna α i na niej prosta m. Przez m przesunąć płaszczyznę, która tworzyłaby z płaszczyzną α klin o danym kącie linjowym.

6. Przez dany punkt poprowadzić prostą, któraby do dwóch danych przecinających się płaszczyzn była nachylona pod danemi kątami.

7. Jeżeli w ortocentrze H trójkąta $\triangle ABC$ wystawimy prostopadłą HM do płaszczyzny trójkąta i jeżeli wykreślimy $AK//BC$, wówczas musi być $AM \perp AK$.

8. Prosta AO jest jednakowo nachylona do prostych OB, OC, jeżeli rzut jej na płaszczyznę BOC jest dwusieczną kąta $\sphericalangle BOC$.

9. Mając dany klin, wystawiamy w punktach A i B dwie proste, prostopadłe do jednej jego ściany. Odległości punktów A, B od krawędzi klina równają się odpowiednio m cm i $5m$ cm; obliczyć odpowiedni odcinek drugiej prostopadłej.

10. Z punktu A na ścianie klina, którego kąt linjowy $= 60^0$, prowadzimy dwie prostopadłe: jedną AB do drugiej ściany, drugą AC do krawędzi klina. Jak wielki jest odcinek BC, jeżeli $AC = 16$ cm?

11. Przecinamy klin płaszczyznami, przechodzącemi przez ten sam punkt A na jego krawędzi. W każdym z otrzymanych przekrojów kreślimy dwusieczną. Jak leżą te wszystkie dwusieczne?

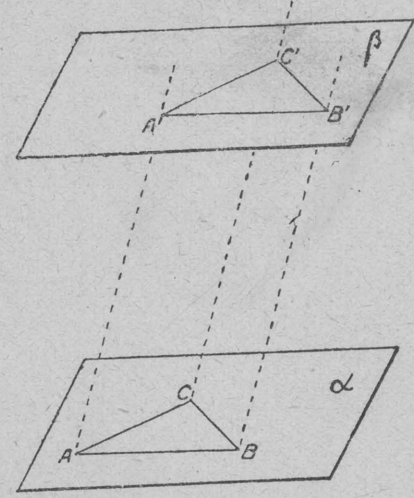
12. Na danej prostej znaleźć punkt, jednakowo odległy od dwóch danych płaszczyzn.

13. Dane są dwie przecinające się płaszczyzny α, β Z dowolnego punktu A pierwszej płaszczyny wystawiamy do niej prostopadłą, która w punkcie B przebija płaszczyznę β. Prócz tego z A prowadzimy prostopadłą do płaszczyzny β, przebijającą tę płaszczyznę w punkcie C. Jak leży prosta BC względem prostej $[\alpha\beta]$?

14. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $AC = BC = 6$ cm. W wierzchołku B wystawiamy prostopadłą do płaszczyzny trójkąta, na niej odkładamy odcinek $BD = 4$ cm. i łączymy D z punktami A i C. Obliczyć długości odcinków DC, DA z dokładnością do 1 mm.

§ 232. Poznane dotąd własności prostych i płaszczyzn dają możność dowiedzenia twierdzenia, dotyczącego figur płaskich, którego dowód planimetryczny (t. j. oparty li tylko na własnościach figur płaskich) jest bardzo trudny.

Wyobraźmy sobie, że w dwóch różnych płaszczyznach α i β mamy dane dwa trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ o bokach odpowiednio równoległych. Przedewszystkiem jest rzeczą oczywistą, że w takim razie $\alpha//\beta$ (d l a c z e g o ?). Jeżeli trójkąty te równają się sobie, wówczas proste AA', BB', CC', łączące odpowiednie ich wierzchołki, są do siebie równoległe (d l a c z e g o ?), jak na rys. 203.



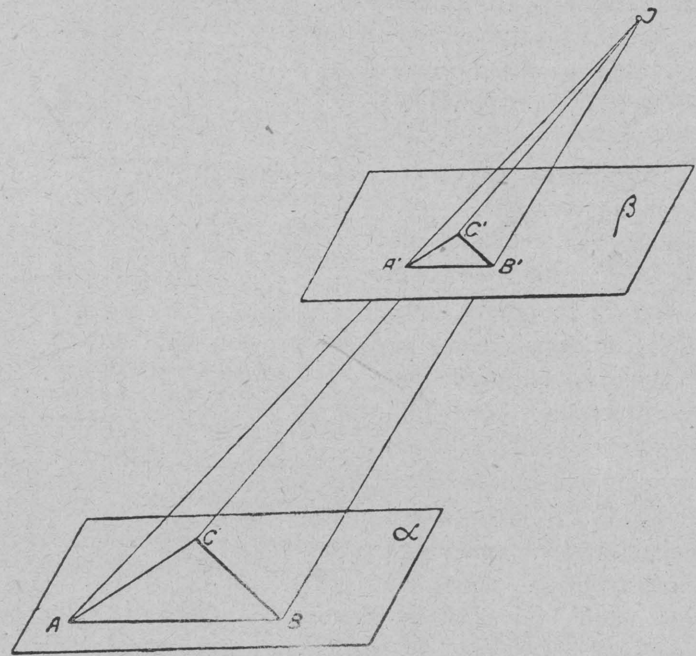
Rys. 203.

Jeżeli zaś trójkąty nie równają się sobie, wówczas łatwo okazać, że proste AA', BB', CC', przecinają się w jednym punkcie. Istotnie, wystarczy przesunąć trzy płaszczyzny przez każdą z trzech par równoległych boków. Proste AA', CC', jako leżące w jednej płaszczyźnie, nie mogą być skośne, ale nie mogą też być równoległe, gdyż wtedy czworobok $ACC'A'$ byłby równoległobokiem i mielibyśmy $AC = A'C'$, co przeczy założeniu. Niech J będzie punktem przecięcia się prostych AA', CC'; powiadam, że przez ten sam punkt musi przejść prosta BB', a to dlatego, że prosta ta jest krawędzią dwóch płaszczyzn (j a k i c h m i a n o w i c i e ?), z których jedna zawiera prostą CC' (a więc i punkt J), druga zaś zawiera prostą AA' (a więc i punkt J).

Trójkąty, o których mówiliśmy, nazywają się *jednokładnemi;* punkt J nazywa się środkiem *jednokładności trójkątów.*

A teraz wyobraźmy sobie, że płaszczyzna β zbliża się wciąż do płaszczyzny α, pozostając równoległą do niej. Dostrzeżona własność trójkątów $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ pozostaje prawdziwa, jakkolwiek blisko znajdują się od siebie dwie nasze płaszczyzny; wobec tego wydaje się rzeczą wielce prawdopodobną, że własność trójkątów nie ulegnie zmianie i wówczas, gdy płaszczyzna β upadnie na α, czyli prawdopodobnie zachodzi następujące

Twierdzenie. *Jeżeli w tej samej płaszczyźnie mamy dane dwa trójkąty o bokach odpowiednio równoległych, wówczas proste,* *łączące odpowiednie wierzchołki trójkątów, przecinają się w jednym punkcie, o ile trójkąty nie są sobie równe, jeżeli zaś trójkąty równają się sobie, to proste te są do siebie równoległe.*



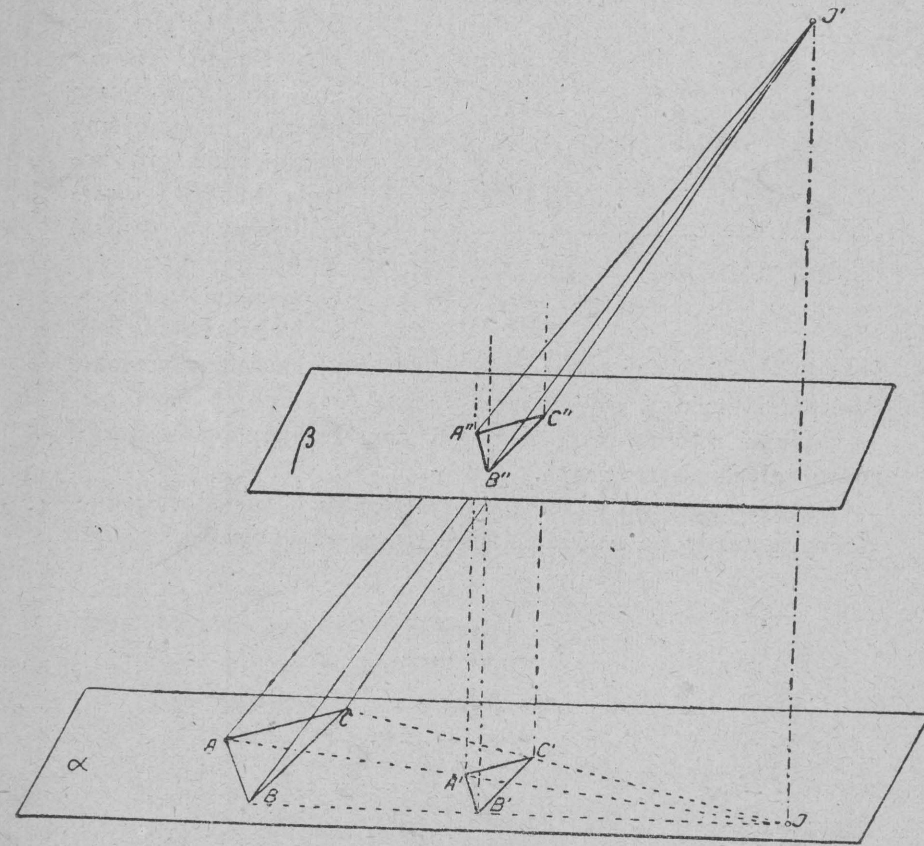
Rys. 204.

Niech będzie dana płaszczyzna α i w niej trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ o bokach odpowiednio równoległych i niech trójkąty te nie będą równe sobie (rys. 205). Poprowadźmy dowolną płaszczyznę β, byle równoległą do α i niech $\triangle A''B''C''$ będzie rzutem prostokątnym trójkąta $\triangle A'B'C'$ na płaszczyznę β. Rzecz oczywista, że trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A''B''C''$ nie równają się sobie, leżą w różnych płaszczyznach i mają boki odpowiednio równoległe (d l a c z e g o?), zatem są to trójkąty jednokładne. Niech J' będzie ich środkiem jednokładności. Powiadam, że punkt J, będący rzutem punktu J' na płaszczyznę α, jest środkiem jednokładności dwóch danych trójkątów $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$.

Istotnie, płaszczyzny $[AA'A'']$, $[BB'B'']$, $[CC'C'']$ są wszystkie trzy prostopadłe do płaszczyzny α (d l a c z e g o?), a ponieważ mają spólny punkt J', zatem muszą mieć spólną krawędź $J'J$.

Wobec tego ślady tych trzech płaszczyzn czyli proste AA', BB', CC' muszą przechodzić przez punkt J.

Uczeń dowiedzie sam drugiej części twierdzenia, t. j. rozważy przypadek, gdy dwa dane trójkąty są sobie równe.



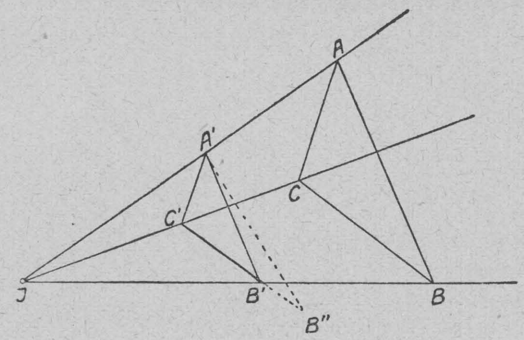
Rys. 205.

§ 233. Twierdzenie poprzedniego paragrafu ma trzy założenia (jeżeli $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ oraz $CA \parallel C'A'$), zatem powinno mieć trzy twierdzenia odwrotne, które zresztą zasadniczo od siebie nie różnią się. Pozostaje tedy do zbadania, czy jest prawdziwe następujące

Twierdzenie odwrotne. (względem § 232). *Jeżeli proste, łączące odpowiednie wierzchołki dwóch trójkątów nierównych, przecinają się w jednym punkcie i jeżeli dwa boki jednego trój-*

kąta są równoległe do dwóch boków drugiego, wówczas trzecie ich boki są też równoległe do siebie.

Rozważymy przypadek, gdy dane trójkąty ABC, $A'B'C'$ leżą w jednej płaszczyźnie. Niech będzie $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$, Gdyby bok $A'B'$ nie był równoległy do AB, wówczas przez A' moglibyśmy poprowadzić równoległą do AB i otrzymalibyśmy trójkąt $\triangle A'C'B''$ o bokach odpowiednio równoległych do boków trójkąta $\triangle ABC$. Ale w takim razie prosta BB'' musiałaby przechodzić przez punkt J, co jest niedorzeczne (dlaczego?).



Rys. 206.

Uczeń rozważy przypadek, gdy dane trójkąty leżą w dwóch równoległych płaszczyznach.

Przekonamy się wkrótce, że twierdzenie o trójkątach jednokładnych należy do najważniejszych twierdzeń geometrji.

KSIĘGA IV.

O figurach jednokładnych i podobnych.

ROZDZIAŁ I.

O proporcjach między odcinkami.

§ 234. Niech będą dane dwie *wielkości zmienne* A i B. Przypuśćmy, że gdy pierwsza przybiera wartości liczebne

$$a_1,\ a_2 \ldots,\ a_n, \ldots,$$

druga przybiera odpowiednio wartości

$$b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n, \ldots.$$

Jeżeli zachodzą przytem równości

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \ldots,$$

wówczas A i B nazywamy wielkościami *wprost proporcjonalnemi*, jeżeli zaś mamy

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = \ldots a_n b_n = \ldots,$$

wówczas A i B nazywamy wielkościami *odwrotnie proporcjonalnemi*.

W pierwszym przypadku możemy napisać

$$\frac{a_n}{b_n} = k,$$

gdzie k jest liczbą stałą i nazywa się *spółczynnikiem prostej proporcjonalności.*

W drugim zaś przypadku mamy analogicznie

$$a_n\ b_n = m,$$

przyczem liczba stała m nazywa się *spółczynnikiem proporcjonalności odwrotnej.*

Rzecz oczywista, że zarówno w pierwszym, jak i w drugim przypadku, *każde dwie pary odpowiadających sobie wartości tworzą proporcję.* Mamy więc np.

w przypadku proporcjonalności prostej

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_n}{b_n} \text{ czyli } \frac{a_1}{a_n} = \frac{b_1}{b_n}$$

w przypadku zaś proporcjonalności odwrotnej

$$\frac{a_1}{a_n} = \frac{b_n}{b_1},$$

§ 235. Wszystko to są rzeczy dobrze znane z arytmetyki elementarnej, jeżeli jednak zechcemy zastosować powyższe pojęcia do wielkości geometrycznych (a więc do odcinków, kątów i obszarów wielokątowych) *), natrafimy na poważną trudność. W zagadnieniach, z któremi mieliśmy do czynienia w arytmetyce, zakładaliśmy zawsze, że liczby

$$a_1,\ a_2 \ldots.,\ a_n, \ldots.$$
$$b_1,\ b_2 \ldots.,\ b_n, \ldots.$$

są liczbami całkowitemi lub ułamkowemi. Innemi słowami, zakładaliśmy, że wielkości A i B zmieniają się zawsze w taki sposób, iż dwa stany tej samej wielkości, np. stany A_k oraz A_n *mają zawsze spólną miarę.*

Jeżeli np. kupujemy wstążkę jedwabną, płacąc po zł. $6^1/_2$ za 1 metr, wówczas każde dwa kawałki wstążki (t. j. każde dwa stany wielkości A) mają spólną miarę, którą jest metr lub centymetr, każde zaś dwie ceny (t. j. dwa odpowiednie stany wielkości B) mają spólną miarę, którą jest złoty.

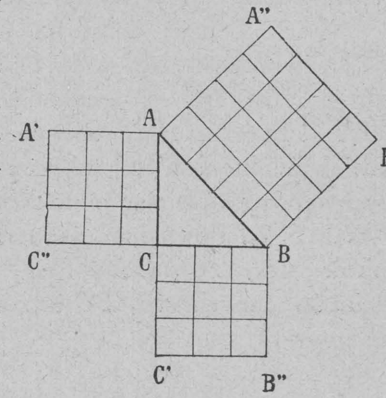
Otóż przekonamy się zaraz, że istnieją wielkości geometryczne, nie mające żadnej spólnej miary; nazywamy je *wielkościami niespółmiernemi.*

§ 236. Twierdzenie. *W trójkącie prostokątnym równoramiennym przyprostokątna jest niespółmierna z przeciwprostokątną.*

*) I wogóle do wielkości ciągłych.

Zastosujmy metodę sprowadzenia do sprzeczności, t. j. przypuśćmy, iż boki tego trójkąta mają spólną miarę, że mianowicie istnieje odcinek, który mieści się n razy w przyprostokątnej i p razy w przeciwprostokątnej.

Zbudujmy na bokach trójkąta kwadraty, następnie odłóżmy na bokach tych kwadratów ich spólną miarę i połączmy przeciwległe punkty podziału.



Rys. 207.

Kwadraty $ACC''A'$ oraz $CC'B''B$ zostały podzielone każdy na n^2 równych sobie kwadracików; w kwadracie $AA''B'B$ zawiera się p^2 takich samych kwadracików. (Na rys. 170 mamy $n = 3$, $p = 4$.)

Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, iż

$$\boxed{AC} + \boxed{CB} = \boxed{AB},$$

zastępując zaś te kwadraty przez małe kwadraciki, otrzymujemy równość arytmetyczną

$$2n^2 = p^2,$$

w której n i p są liczbami całkowitemi.

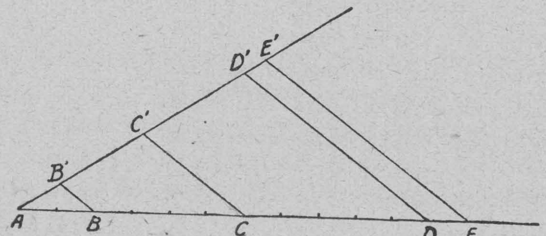
Otóż równość ta jest niedorzeczna. Istotnie, jeżeli n jest liczbą parzystą, to n^2 zawiera czynnik 2 parzystą liczbę razy; jeżeli zaś n jest nieparzyste, to n^2 nie zawiera wcale czynnika 2. To samo powtórzyć można o liczbach p i p^2. Wobec tego lewa część powyższej równości czyli $2n^2$ zawiera czynnik 2 nieparzystą liczbę razy, natomiast p^2 albo wcale nie zawiera czynnika 2, albo zawiera go parzystą liczbę razy.

Tak więc przypuszczenie nasze, że boki AC i AB mają spólną miarę, było mylne *).

*) Według tradycji, Pitagoras pierwszy dowiódł istnienia odcinków niespółmiernych. W każdym razie możemy z całą pewnością twierdzić, że fakt ten znany był uczniom i następcom Pitagorasa. Podany przez nas dowód jest właśnie oryginalnym dowodem pitagorejczyków; przytacza go w jednem z swych dzieł Arystoteles.

§ 237. Chcąc ustalić określenie odcinków proporcjonalnych, musimy poszukać takiej ich własności, która byłaby zupełnie niezależna od tego, czy dane odcinki są czy nie są współmierne.

Niech będzie dany na prostej dowolny ciąg odcinków spółmiernych AB, BC, CD, DE, ... i niech będzie np. $AB = 2$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 5$ cm $DE = 1$ cm, ... Przez punkt A poprowadźmy dowolną półprostą, połączmy B z jakimkolwiek punktem B' tej półprostej, przez punkty zaś C, D, E, ..., poprowadźmy równoległe do BB' (rys. 208, który został zrobiony w skali 1 : 2). Powiadam, że otrzymaliśmy w ten sposób ciąg odcinków AB', $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, ... wprost proporcjonalnych do odcinków danych AB, BC i t. d. Istotnie, jeżeli odcinek AB' ma



Rys. 208.

2 jakieś jednostki miary (oczywiście różne od centymetra), to na zasadzie § 79 (str. 58) odcinki $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, ... mają odpowiednio 4, 5, 1, ... takich samych jednostek.

To spostrzeżenie nasuwa nam pomysł następującego określenia odcinków proporcjonalnych:

Określenie I. *Jeżeli na jednem ramieniu kąta odłożymy ciąg dowolnych odcinków* a, b, c, d, ... *i przez końce ich poprowadzimy równoległe, wówczas na drugiem ramieniu otrzymamy ciąg odcinków* a', b', c', d', ... *które nazywać będziemy proporcjonalnemi względem odcinków pierwszego ciągu i będziemy pisali*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \dots$$

W szczególności, jeżeli na pierwszem ramieniu odłożyliśmy tylko dwa odcinki a, b, *wówczas powiadamy, że otrzymane na*

drugiem ramieniu odcinki a', b' *tworzą z poprzedniemi proporcję i piszemy*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \textit{albo też} \quad a : a' = b : b'.$$

Określenie nasze obejmuje zarówno przypadek, gdy dane odcinki a, b, c, ... są spółmierne, jak i ten, gdy są one niespółmierne.

W przypadku odcinków spółmiernych określenie nasze jest zupełnie zgodne ze znanem z arytmetyki pojęciem proporcjonalności.

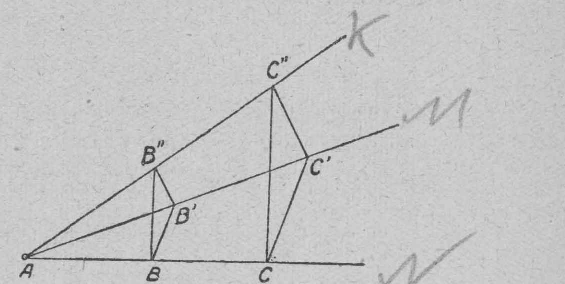
§ 238. Nasuwają się tu odrazu dwa pytania:

1) czy proporcjonalność odcinków, określona w sposób powyższy, zależy czy nie zależy od wielkości kąta, na którego ramionach dokonaliśmy konstrukcji?

2) czy proporcja między odcinkami ma te same własności, co znana z arytmetyki proporcja między liczbami wymiernemi?

Zbadamy te pytania kolejno.

Niech będzie dany jakikolwiek kąt $\sphericalangle MAN$. Przypuśćmy, że na jednem jego ramieniu odłożyliśmy jakiekolwiek odcinki AB, BC i, prowadząc przez B i C dowolne równoległe, otrzymaliśmy na drugiem ramieniu odcinki AB', $B'C'$, o których na mocy powyższego określenia powiadamy, że tworzą proporcję z odcinkami AB, BC. Poprowadźmy przez A dowolną półprostą AK i odłóżmy na niej odcinek $AB'' = AB'$ (rys. 209). Połączmy B z B'' i przez C poprowadźmy do BB'' równoległą, która przecina półprostą AK w punkcie C''.



Rys. 209.

W ten sposób otrzymaliśmy dwa nowe odcinki AB'', $B''C''$, które tworzą proporcję z odcinkami AB, BC. Otóż zachodzi pytanie, czy odcinek $B''C''$ równa się czy nie równa się odcinkowi $B'C'$?

Z łatwością okażemy, że $B''C'' = B'C'$. Istotnie, trójkąty $\triangle BB'B''$ i $\triangle CC'C''$ spełniają wszystkie warunki twierdzenia § 233: proste, łączące odpowiednie ich wierzchołki, przechodzą przez jeden punkt A; dwa boki BB', BB'' jednego trójkąta są równoległe do odpowiednich boków CC', CC'' drugiego, a więc trzecie ich boki $B'B''$ i $C'C''$ muszą też być równoległe, tak, że trójkąt $\triangle A'C'C''$ jest równoramienny, wobec czego $B''C'' = BC'$.

§ 239. Powyższe rozumowanie prowadzi do następującego określenia i twierdzenia:

Określenie. *Odcinek* ***d*** *nazywamy czwartym proporcjonalnym do trzech danych odcinków* ***a, b, c,*** *jeżeli tworzą one proporcję*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

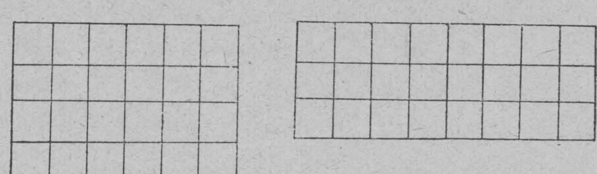
Twierdzenie. *Istnieje jeden tylko odcinek czwarty proporcjonalny do trzech danych.*

§ 240. Wśród rozmaitych własności proporcyj między liczbami (wymiernemi) zasadniczą jest ta, którą wyrażamy słowami: iloczyn wyrazów skrajnych równa się iloczynowi wyrazów środkowych. Zastanówmy się przedewszystkiem, jaki sens geometryczny mogłaby mieć ta własność w przypadku proporcji między odcinkami spółmiernemi.

Niech będą dane cztery odcinki spółmierne, których miary tworzą proporcję, np. odcinki o długości 4 cm, 8 cm, 3 cm i 6 cm. Mamy proporcję

$$4 : 8 = 3 : 6.$$

Zbudujmy dwa prostokąty: bokami jednego niech będą odcinki o długości 4 cm i 6 cm (t. j. odpowiadające wyrazom skrajnym powyższej proporcji), bokami drugiego odcinki o długości 3 cm i 8 cm (t. j. odpowiadające wyrazom środkowym proporcji).



Rys. 210.

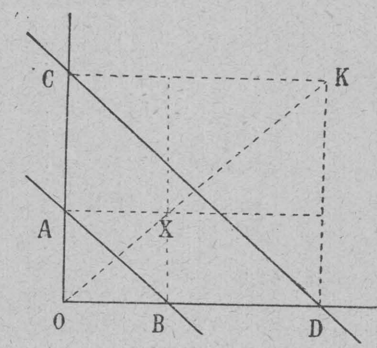
Jeżeli na każdym boku odłożymy spólną ich jednostkę miary, mianowicie 1 cm i przeciwległe punkty połączymy prostemi, wówczas oba prostokąty zostaną podzielone na jednakową liczbę (na 24) równych kwadratów, a więc są one równoważne sobie.

A teraz przypuśćmy, że zachodzi proporcja

$$a : c = b : d$$

między czterema odcinkami niespółmiernemi. Powstaje pytanie: czy dostrzeżona własność zostaje zachowana i w tym przypadku, t. j. czy prostokąt, zbudowany z a i z d, jest równoważny prostokątowi zbudowanemu z b i z c?

Aby na to pytanie odpowiedzieć, obierzmy kąt prosty i odłóżmy na jego ramionach odcinki $OA=a$, $OC=c$, $OB=b$, $OD=d$ (rys. 211). Na mocy określenia odcinków proporcjonalnych proste AB, CD muszą być do siebie równoległe. Zbudujmy prostokąt $OCKD$, w którym CD jest przekątną. Opierając się na ćwiczeniu XXVII, 4, str. 162, albo też na uwadze 2 na str. 159, możemy twierdzić, że punkt X, będący wierzchołkiem prostokąta $OAXB$, leży na przekątnej OK, zatem istotnie



Rys. 211.

$$\boxed{a, d} = \boxed{b, c}$$

§ 241. Uczeń dowiedzie na tym samym rysunku **twierdzenia odwrotnego:** *jeżeli mamy dane dwa równoważne prostokąty*

$$\boxed{a, d} = \boxed{b, c},$$

wówczas zachodzi proporcja między odcinkami

$$a : c = b : d.$$

§ 242. Z prawdziwości dwóch powyższych twierdzeń (prostego i odwrotnego) wynika, że określenie I, podane w § 237, możemy zastąpić przez następujące równoważne mu

Określenie. II. *Cztery odcinki tworzą proporcję, jeżeli prostokąt, zbudowany z pierwszego i czwartego, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z drugiego i trzeciego.*

§ 243. Twierdzenie. *W każdej proporcji, zachodzącej między odcinkami, mamy prawo:*

1-o *przestawić wyrazy środkowe;*
2-o *przestawić wyrazy skrajne;*
3-o *środkowe uczynić skrajnemi — i odwrotnie.*

Innemi słowy, jeżeli mamy proporcję

$$\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{c} : \mathbf{d},$$

wówczas muszą również zachodzić następujące proporcje:

1-o	$\mathbf{a} : \mathbf{c} = \mathbf{b} : \mathbf{d}$
2-o	$\mathbf{d} : \mathbf{b} = \mathbf{c} : \mathbf{a}$
	$\mathbf{d} : \mathbf{c} = \mathbf{b} : \mathbf{a}$
3-o	$\mathbf{b} : \mathbf{a} = \mathbf{d} : \mathbf{c}$
	$\mathbf{b} : \mathbf{d} = \mathbf{a} : \mathbf{c}$
	$\mathbf{c} : \mathbf{a} = \mathbf{d} : \mathbf{b}$
	$\mathbf{c} : \mathbf{d} = \mathbf{a} : \mathbf{b}$

Twierdzenie to wynika bezpośrednio z określenia § 242; istotnie, każda z tych proporcyj powiada to samo, co i proporcja dana, mianowicie, iż

$$\boxed{\mathbf{a}, \mathbf{d}} = \boxed{\mathbf{b}, \mathbf{c}}.$$

§ 244. Twierdzenie. *Jeżeli cztery odcinki* **a, b, c, d** *tworzą proporcję*

$$\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{c} : \mathbf{d},$$

wówczas prawdziwe są również proporcje

(1) $n\mathbf{a} : \mathbf{b} = n\mathbf{c} : \mathbf{d}$

(2) $\mathbf{a} : n\mathbf{b} = \mathbf{c} : n\mathbf{d},$

w których n *oznacza liczbę całkowitą lub ułamkową.*

Istotnie, jeżeli mamy dane dwa prostokąty równoważne

$$\boxed{\mathbf{a}, \mathbf{d}} = \boxed{\mathbf{b}, \mathbf{c}},$$

wówczas muszą być równoważne prostokąty n razy większe lub mniejsze*) czyli musi być

zarówno $$\boxed{n\mathbf{a}, \mathbf{d}} = \boxed{n\mathbf{b}, \mathbf{c}},$$

jak $$\boxed{\mathbf{a}, n\mathbf{d}} = \boxed{\mathbf{b}, n\mathbf{c}}.$$

*) Uczeń powinien zilustrować to zapomocą rysunku, kładąc np. $n = 3$.

§ 245. Twierdzenie. *Jeżeli cztery odcinki* **a, b, c, d** *tworzą proporcję*

$$\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{c} : \mathbf{d},$$

wówczas prawdziwe są również proporcje

(1) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) : \mathbf{b} = (\mathbf{c} + \mathbf{d}) : \mathbf{d},$

(2) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) : \mathbf{b} = (\mathbf{c} - \mathbf{d}) : \mathbf{d}.$

Istotnie, jeżeli na rys. 212 mamy

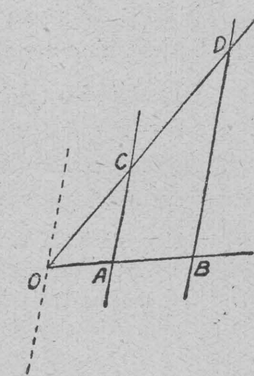
$$OA = a, \; AB = b$$
$$OC = c, \; CD = d,$$

wówczas wystarczy wyobrazić sobie, że przez punkt O poprowadziliśmy równoległą do AC i BD, aby odrazu stało się oczywistem, że mamy nietylko

$$a : b = c : d,$$

ale również

$$(a + b) : b = (c + d) : d.$$



Rys. 212.

Kładąc znów

$$OB = a, \; AB = b$$
$$OD = c, \; CD = d,$$

mamy z tego samego rysunku

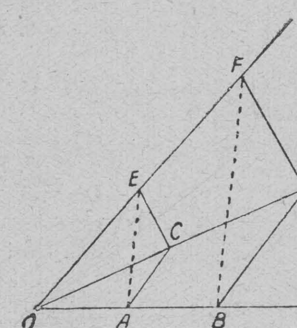
$$(a - b) : b = (c - d) : d.$$

§ 246. Twierdzenie. *Z prawdziwości dwóch proporcyj*

$$\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{c} : \mathbf{d}$$
$$\mathbf{e} : \mathbf{f} = \mathbf{c} : \mathbf{d}$$

wynika prawdziwość proporcji

$$\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{e} : \mathbf{f}.$$



Rys. 213.

Niech będzie na rys. 213

$$OA = \mathbf{a}, \; OB = \mathbf{b}.$$

Jeżeli $AC // BD$ i jeżeli oznaczymy

OC przez **c**, OD przez **d**,

wówczas zachodzi proporcja

$$\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{c} : \mathbf{d}.$$

Jeżeli poprowadzimy $CE \| DF$ i jeżeli oznaczymy OE przez **e**, OF przez **f**, wówczas

$$\mathbf{c} : \mathbf{d} = \mathbf{e} : \mathbf{f}.$$

Ale z twierdzenia § 233 wynika, że musi być $AE \| BF$, zatem musi również zachodzić trzecia proporcja

$$\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{e} : \mathbf{f}.$$

§ 247. Wprowadzimy jeszcze następujące określenie, które nam będzie nieraz potrzebne przy badaniu rozmaitych figur.

Określenie. *Jeżeli mamy dane takie trzy odcinki* **a, b, c,** *iż* **a : b = b : c** *(czyli, że kwadrat odcinka* **b** *jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z* **a** *i z* **c***), wówczas odcinek* **b** *nazywamy średnim proporcjonalnym między odcinkami* **a** *i* **c.**

Ćwiczenia XXXVI. 1. Opierając się na określeniu II (str. 210), zbudować odcinek czwarty proporcjonalny do trzech danych **a, b, c.**

Czy można dowieść na mocy określenia II, że istnieje jeden tylko odcinek czwarty proporcjonalny do trzech danych?

2. Trzema sposobami zbudować odcinek **x** średni proporcjonalny między dwoma danemi odcinkami **a, b.**

3. Dany odcinek AB podzielić na trzy części, proporcjonalne do danych odcinków **m, p, r.**

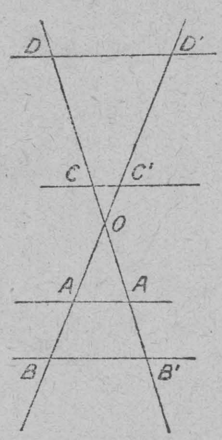
4. Rozwiązać graficznie następujące zadanie: trzej bracia, z których jeden ma 16, drugi 20, trzeci 28 lat, mają podzielić się sumą 128 zł. proporcjonalnie do swego wieku. Ile dostanie każdy?

5. Z proporcji **a : b = c : d** wynika proporcja

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) : (\mathbf{a}-\mathbf{b}) = (\mathbf{c}+\mathbf{d}) : (\mathbf{c}-\mathbf{d}).$$

6. Dowieść twierdzenia § 245, opierając się na określeniu II proporcji między odcinkami.

7. Rozważamy dwa kąty wierzchołkowe (rys. 214). Dowieść, że jeśli przetniemy ich ramiona prostemi równoległemi $AA' \| BB' \| CC' \| DD' \| \ldots$, otrzymamy dwa ciągi odcinków proporcjonalnych.



Rys. 214.

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{OD}{OD'} = \ldots\ldots$$

§ 248. Twierdzenie. *Jeżeli ramiona kąta* $\sphericalangle O$ *zostały przecięte równoległemi* AA', BB', *wówczas zachodzi proporcja.*

$$AO : AA' = OB : BB'.$$

Poprowadźmy odcinek $A'A''$, równoległy do AB oraz odcinek $A''C$, równoległy do OA'.

Ponieważ $OC = A'A'' = AB$,

zatem

$$BC = AO,$$

a że mamy

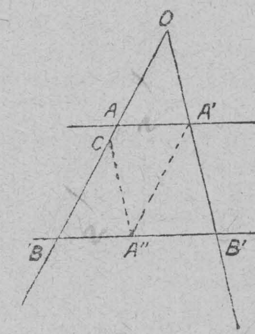
$$BA'' = AA',$$

tedy stosując określenie I odcinków proporcjonalnych do kąta $\sphericalangle B$, którego ramiona przecięliśmy równoległemi $OB' \| CA''$, otrzymujemy proporcję

$$OB : BC = BB' : BA''$$

czyli

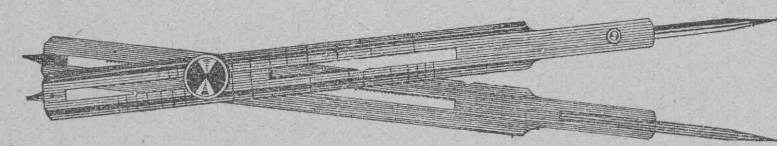
$$OB : BB' = OA : AA'.$$



Rys. 215.

Ćwiczenia XXXVII. 1. Rysunek 216 przedstawia rodzaj cyrkla, służącego do zmniejszania lub zwiększania odcinków w dowolnym stosunku.

Objaśnić jego działanie.



Ryc. 216.

2. Opierając się na tej samej zasadzie, obmyślić przyrząd do mierzenia grubości cienkich płytek.

Mając dane odcinki m, k, zbudować prostokąt $ABCD$, jeżeli prócz tego mamy dane:

3. bok a oraz warunek, że $a : b = m : k$;
4. „ a „ „ „ $a : e = m : k$;
5. „ a „ „ „ $b : c = m : k$;
6. przekątną e „ „ „ $a : b = m : k$;
7. sumę $a+b$ „ „ „ $a : b = m : k$;
8. „ $a+e$ „ „ „ $a : e = m : k$.
9. Zbudować romb $ABCD$, mając daną przekątną e i wiedząc, że musi być $e : f = m : k$, gdzie m i k są dwoma danemi odcinkami.

10. Zbudować romb $ABCD$, mając dany bok a oraz warunek, że $a : h = m : k$, gdzie m i k oznaczają dwa dane odcinki.

11. Zbudować romb $ABCD$, mając daną sumę $e + f$ (lub różnicę $e - f$) oraz warunek, że $e : f = m : k$, gdzie m i k są dwoma danemi odcinkami.

12. Zbudować trójkąt równoramienny, mając dany bok a oraz warunek, że $c : h_c = m : k$, gdzie m i k sa to dwa dane odcinki,

---

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, jeżeli mamy dany warunek.

$$r_a : r_b = m : k,$$

gdzie m i k są odcinkami danemi i jeżeli prócz tego mamy dane:

13. a, B. 14. c, C. 15. a, h_c.
16. $c, \measuredangle (s_c, h_c)$. 17. c, s_c. 18. $c, \measuredangle (d_A\ h_c)$.

19. Zbudować trójkąt, mając daną sumę dwu jego boków $a + b$, oraz dwa następujące warunki:

$$a : b = p : r \qquad (a + b) : h_a = m : k,$$

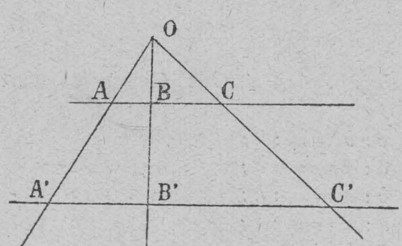
gdzie p, r, m, k są to cztery dane odcinki.

20. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dany jego obwód, oraz warunki, że $a : b = m : k$, $b : c = k : p$.

21. Wewnątrz koła $(O)\ r$ dany jest punkt A; poprowadzić przez A taką cięciwę XY, żeby zachodziła proporcja $AX : AY = m : n$, gdzie m i n są to dwa dane odcinki. [W s k a z ó w k a d o a n a l i z y: przez X prowadzimy równoległą do promienia YO, która przecina prostą OA w punkcie Z.]

22. Na okręgu koła (O) r dany jest punkt C; wykreślić cięciwę CD, która przecinałaby daną cięciwę AB tegoż koła w takim punkcie X, żeby zachodziła proporcja $CX : XD = m : n$, gdzie m, n są odcinkami danemi. [W s k a z ó w k a d o a n a l i z y: kreślimy $DY // AB$.]

23. Na okręgu koła dane są dwa punkty C, C'; wykreślić cięciwę, równającą się danemu odcinkowi a i położoną w taki sposób, że jeśli z C i C' poprowadzimy do niej prostopadłe $CX, C'X'$, wówczas zachodzić będzie proporcja $CX : C'X' = m : n$, gdzie m, n są odcinkami danemi. [W s k a z ó w k a d o a n a l i z y: proste CC', XX' w razie potrzeby przedłużamy aż do przecięcia się w punkcie Z; czy położenie punktu Z daje się wyznaczyć?]



Rys. 217.

24. Opierając się na § 248, dowieść, że jeśli pęk prostych przetniemy dwiema równoległemi, otrzymamy na tych równoległych odcinki proporcjonalne.

25. Dowieść następującego twierdzenia: jeśli trzy proste AA' BB', CC' wyznaczają na dwóch równoległych odcinki proporcjonalne (przyczem wszystkie odcinki na jednej równoległej mają ten sam zwrot co odpowiednie odcinki na drugiej, lub też odcinki na jednej równoległej mają zwroty przeciwne zwrotom odcinków na drugiej), wówczas proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie.

26. Na twierdzeniach, podanych w poprzednich ćwiczeniach, oprzeć nowy sposób podziału danego odcinka AB na części, proporcjonalne do danych odcinków k, m, p, r.....

27. Dane są dwie proste m, n, których punkt przecięcia się O jest niedostępny; połączyć dany punkt A z O.

28. Dane jest koło $(O)\ A$ i w niem cięciwa AB; wykreślić cięciwę XY tak, by promienie OA, OB podzieliły ją na trzy równe części.

29. Dane jest koło $(O)\ A$ i w niem cięciwa AB; wykreślić odcinek XY tak, by końce jego leżały na przedłużeniu promieni OA, OB i żeby okrąg koła $(O)\ A$ dzielił ten odcinek na trzy części równe.

30. Rozwiązać zadania 28 i 29 w założeniu, że odcinek XY ma być podzielony nie na trzy równe części, lecz na trzy części, proporcjonalne do trzech danych odcinków k, m, p.

Rozwiązać geometrycznie (rozmaitemi sposobami) następujące równania i sprawdzić odpowiedź zapomocą rachunku, kładąc na a, b, c dowolne liczby wymierne:

31. $3 : 5 = 4 : x$. 32. $a : b = c : x$. 33. $a : (a+b) = c : x$.
34. $a : (a - b) = c : x$. 35. $ax = bc$. 36. $ax = b^2$.

---

37. W trójkącie $\triangle ABC$ obieramy dowolny punkt D na boku BC i prowadzimy odcinki $DE // AC$, $DF // AB$. Dowieść równoważności dwóch prostokątów:

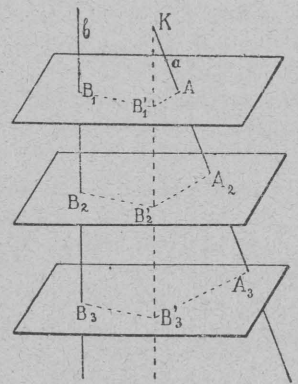
$$\overline{|DE, DF|} = \overline{|BE, CF|}$$

38. W trójkącie równobocznym $\triangle ABC$ obieramy na boku BC taki punkt D, żeby było $BD = 1/_4\ BC$, poczem z punktu D kreślimy odcinak $DE \perp AB$ Obliczyć, w jakim stosunku punkt E podzielił bok AB.

39. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy $a = 45$ cm, $b = 90$ cm. Z punktu D, w którym dwusieczna CD przecina bok trójkąta, kreślimy równoległe do boków AC i BC. Jakiego rodzaju czworobok powstaje przytem? Obliczyć jego boki.

40. Obwód trójkąta $\triangle ABC$ równa się 32 cm. Przez środek wysokości h_a poprowadzono równoległą do boku a. Obliczyć obwody trapezu i trójkąta, na które równoległa podzieliła trójkąt $\triangle ABC$.

41. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy dane następujące odcinki: $a = 18$ cm, $r_a = 6$ cm, $r_b = 4$ cm. Na jakie odcinki został podzielony bok a przez oś symetrji boku c?



Rys. 218.

42, Jeżeli proste a, b, równoległe do siebie, przetniemy szeregiem płaszczyzn równoległych, otrzymamy dwa ciągi odcinków proporcjonalnych.

43. Czy twierdzenie 42 pozostaje prawdziwe, jeżeli proste a, b przecinają się?

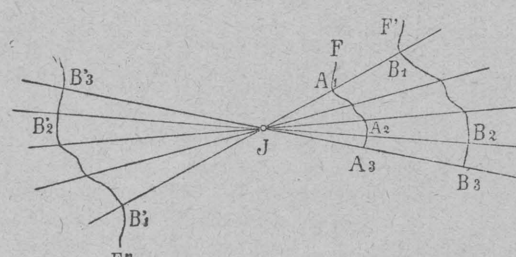
44. Czy twierdzenie to pozostaje prawdziwe, jeżeli a i b są względem sobie skośne? [Wskazówka: przez dowolny punkt K na prostej a prowadzimy równoległą do b rys. 218.]

45. Jeżeli czworobok skośny $ABCD$ przetniemy płaszczyzną, równoległą do obu jego przekątnych, wówczas płaszczyzna podzieli jego boki na odcinki proporcjonalne.

ROZDZIAŁ II.

O przekształceniu jednokładnem.

§ 249. Niech będą dane na płaszczyźnie figura F i punkt J. Wyobraźmy sobie, że wszystkie punkty A_1, A_2, A_3, A_4, ... tej figury zostały połączone z punktem J i że na tych prostych odło-



Rys. 219.

żyliśmy odcinki JB_1, JB_2, JB_3, ..., odpowiednio proporcjonalne do odcinków JA_1, JA_2, JA_3 ....., tak, iż mamy

$$\frac{JA_1}{JB_1} = \frac{JA_2}{JB_2} = \frac{JA_3}{JB_3} = \ldots\ldots = \frac{m}{k},$$

gdzie m i k są to dwa dane odcinki, zresztą dowolnej wielkości.

Punkty B_1, B_2, B_3 ..... tworzą nową figurę F' (rys. 219), którą nazywamy *jednokładną* z figurą pierwotną F względem *środka jednokładności* J.

Rzecz jasna, że odcinki proporcjonalne do JA_1, JA_2, JA_3 ...., moglibyśmy odłożyć w zwrocie przeciwnym, t. zn. tak, by środek jednokładności J leżał pomiędzy figurą pierwotną F a figurą przekształconą F''. W celu odróżnienia tych dwu przypadków powiadamy, że figury F i F' są *jednokładne wprost*, figury zaś F i F' są *odwrotnie jednokładne*.

§ 250. Jeżeli mamy dany środek jednokładności J i dwa jakiekolwiek odcinki m, k, wówczas dla każdego punktu A figury F możemy znaleźć na prostej JA po jednej stronie punktu J jeden i tylko jeden punkt B taki, że zachodzi proporcja

$$\frac{JA}{JB} = \frac{m}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1).$$

Istotnie, odcinki JA, m, k są dane, zatem JB jest względem nich odcinkiem czwartym proporcjonalnym, a taki odcinek, jak wiemy, istnieje zawsze tylko jeden.

Rzecz jasna, że na tej samej prostej istnieje po drugiej stronie punktu J taki punkt B', symetryczny z punktem B, że mamy proporcję

$$\frac{JA}{JB'} = \frac{m}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2).$$

W ten sposób każdemu punktowi figury F odpowiada jeden i tylko jeden punkt figury F' (lub figury F''), jednokładnej z nim względem środka J.

Jeżeli postąpimy odwrotnie, t. j. na figurze F' obierzemy dowolny punkt B (lub na figurze F'' dowolny punkt B'), wówczas w proporcji (1) odcinek JA będzie czwartym proporcjonalnym do trzech danych odcinków JB, m, k (lub w proporcji (2) do trzech danych odcinków JB', m, k), punkt więc A figury F jest w zupełności wyznaczony, skoro tylko mamy dane: środek jednokładności J, punkt B na figurze przekształconej F' (lub punkt B' na figurze F'') i dwa odcinki m, k, do których mają być proporcjonalne odcinki JA, JB (lub JA, JB).

Mamy tedy następujące

§ 251. Określenie. *Dwie figury F, F' nazywamy jednokładnemi, jeżeli spełnione są trzy następujące warunki:*

1) każdemu punktowi A jednej figury odpowiada punkt B drugiej figury,

2) prosta AB przechodzi przez stały punkt J, zwany środkiem jednokładności:

3) odcinki JA, JB czynią zadość proporcji

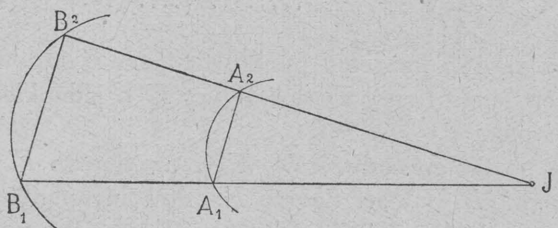
$$\frac{JA}{JB} = \frac{m}{k},$$

gdzie m i k są dwoma danemi odcinkami.

Jeżeli odcinki JA, JB mają ten sam zwrot, a więc figury F i F' leżą po tej samej stronie środka jednokładności J, wówczas mówimy o ***przekształceniu jednokładnem prostem.*** *Jeżeli zaś odcinki JA, JB mają zwroty przeciwne, t. j. figury F, F' leżą po dwóch stronach środka jednokładności, wówczas przekształcenie jednokładne nazywamy* ***odwrotnem.***

Uwaga. Symetrja względem punktu jest przypadkiem szczególnym jednokładności odwrotnej, gdy mianowicie $m = k$.

§ 252. Twierdzenie. *Odcinek, łączący dwa dowolne punkty jednej figury, jest równoległy do odcinka, łączącego dwa odpowiadające im punkty drugiej figury, jednokładnej z pierwszą.*



Rys. 220.

Jeżeli mamy dane dwie figury, jednokładne z sobą względem środka J i jeżeli punktom A_1, A_2 pierwszej figury odpowiadają punkty B_1, B_2 drugiej figury, wówczas powiadam, iż odcinek A_1A_2 jest równoległy do odcinka B_1B_2.

Istotnie na mocy określenia jednokładności, punkty A_1, B_1 leżą na prostej, przechodzącej przez środek jednokładności J,

punkty zaś A_2, B_2 leżą na drugiej prostej, przechodzącej przez ten sam punkt J. Z określenia jednokładności wynika również, iż

$$\frac{JA_1}{JB_1} = \frac{JA_2}{JB_2},$$

a wiemy, iż w takim razie odcinki A_1A_2, oraz B_1B_2 są do siebie równoległe.

Uwaga. Z twierdzenia § 248 (str. 213) wynika, iż

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{JA_1}{JB_1} = \frac{m}{k}.$$

§ 253. Z tego podstawowego twierdzenia wynikają ważne wnioski.

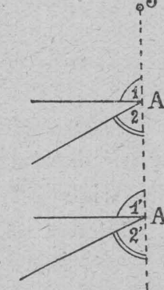
Wnioski. 1. *Przekształcając jednokładnie odcinek, otrzymujemy drugi, równoległy do niego odcinek.*

2. *Przekształcając jednokładnie prostą, otrzymujemy drugą prostą, równoległą do danej.*

3. *Przekształcając jednokładnie kąt, otrzymujemy równy mu kąt.*

Dowód uczeń przeprowadzi sam, kierując się rysunkiem 221.

4. *Przekształcając jednokładnie trójkąt, otrzymujemy znów trójkąt, mający te same kąty. Boki obu trójkątów są do siebie proporcjonalne.*



Rys. 221.

Pierwsza część tego wniosku wynika z wniosków 1 i 3. Co się tyczy proporcjonalności boków, to mamy (rys. 222).

$$\frac{JA}{JA'} = \frac{AC}{A'C'}, \text{ oraz } \frac{JA}{JA'} = \frac{AB}{A'B'},$$

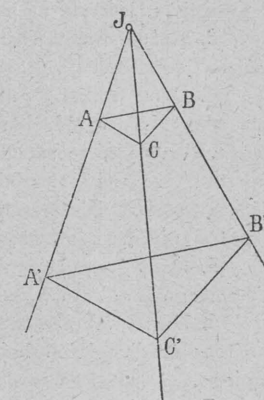
zatem

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'},$$

Stosując analogiczne rozumowanie do boków CB, $C'B'$, uczeń sam otrzyma związek

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CB}{C'B'}.$$

5. *Przekształcając jednokładnie okrąg koła, otrzymujemy drugi okrąg.*

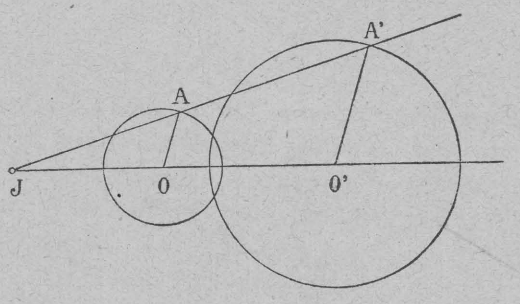


Rys. 222.

Przekształćmy koło (O) A jednokładnie względem środka jednokładności J i niech punkt O przekształci się przytem w punkt O'.

Wszystkie promienie koła $(O)A$ muszą się przekształcić w odcinki równoległe, przechodzące przez punkt O'. Wszystkie te przekształcone odcinki są sobie równe, gdyż

$$JO : JO' = OA : O'A',$$



Rys. 223.

że zaś trzy pierwsze odcinki JO, JO', OA są w zupełności wyznaczone i stałe, zatem $O'A'$, jako odcinek czwarty proporcjonalny, jest też wyznaczony i ma stałą wielkość.

Widzimy tedy, iż wszystkie punkty figury przekształconej są równo odległe od punktu stałego O', figura więc jest okręgiem.

Ćwiczenia XXXVIII. 1. Odcinek AB przekształcić jednokładnie, mając dany środek jednokładności J i wiedząc, że dany punkt M' powinien leżeć na odcinku przekształconym.

2. Na prostej m dany jest odcinek AB; przekształcić go jednokładnie względem danego punktu J tak, żeby otrzymany odcinek był 3 razy większy od AB. Rozważyć trzy przypadki: 1) gdy J leży poza prostą m, 2) gdy J leży na prostej m, lecz nie na odcinku AB; 3) gdy J leży na odcinku AB.

3. Każde dwa równoległe do siebie odcinki są z sobą jednokładne — i to zarówno jednokładne wprost, jak i odwrotnie.

4. Dany trójkąt $\triangle ABC$ przekształcić jednokładnie w trójkąt $\triangle A'B'C'$, mając dany środek jednokładności J i punkt M' na boku a' trójkąta przekształconego. Rozwiązać to zadanie przy czterech założeniach: 1) że J leży wewnątrz trójkąta $\triangle ABC$ i jest środkiem jednokładności prostej, 2) że J leży wewnątrz trójkąta $\triangle ABC$ i jest środkiem jednokładności odwrotnej: 3) i 4) że J leży zewnątrz trójkąta i jest środkiem jednokładności prostej lub odwrotnej.

5. Dany kwadrat przekształcić jednokładnie względem środka J tak, by bok nowego kwadratu przechodził przez dany punkt.

6. Dwa kwadraty, mające spólny środek symetrji, są jednokładne względem tego środka, jeżeli bok a jednego kwadratu jest równoległy do boku a' drugiego.

Czy można to samo powiedzieć o dwóch prostokątach, czy też powinny one spełniać jakiś dodatkowy warunek i jaki mianowicie?

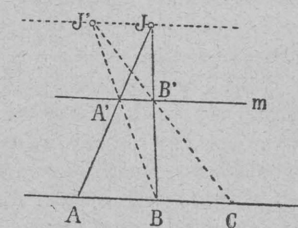
7. Dowieść, że w każdym trapezie środki podstaw, punkt przecięcia się przekątnych, oraz punkt, w którym przecinają się dwa nierównoległe boki, leżą na jednej prostej.

8. Na zasadzie poprzedniego zadania rozwiązać zadanie następujące: mamy dane dwa równoległe do siebie odcinki AB, CD; podzielić je na połowy, posługując się tylko linjałem.

9. Dany jest odcinek AB i środek jego M; przez punkt C poprowadzić równoległą do AB, posługując się tylko linjałem.

10. Dane są dwie równoległe do siebie proste i punkt A, nie leżący na nich; przez A poprowadzić trzecią prostą, równoległą do obu danych, posługując się tylko linjałem.

11. Dane są dwie równoległe m, p i na jednej z nich odcinek AB; zbudować na tej samej prostej odcinek AC dwa razy większy od AB, posługując się tylko linjałem (rys. 224) *).



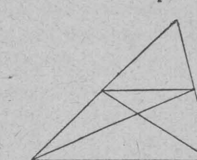
Rys. 224.

12. Dany czworobok $ABCD$ przekształcić jednokładnie tak, by bok a' nowego czworoboku równał się danemu odcinkowi.

13. Opierając się na pojęciu jednokładności i posługując się rysunkiem 225, dowieść własności środkowych trójkąta (§ 81, str. 59).

14. Jeżeli dwa trójkąty są z sobą jednokładne, wówczas odpowiadają sobie ich środki ciężkości, jak również środki kół wpisanych, zawpisanych i opisanych. To samo dotyczy ortocentrów.

15. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ poprowadzimy wysokość AA', z punktu zaś A' poprowadzimy prostopadłe $A'B''$, $A'C''$ do boków c i b, wówczas prosta $B''C''$ musi być równoległa do rostej $B'C'$, łączącej spodki wysokości h_b, h_c.


Rys. 225.

16. W czworoboku $ABCD$ z punktu E, w którym przecinają się przekątne, kreślimy proste EK, EL, równoległe do boków a, d. Niech punkty K, L leżą odpowiednio na bokach b, c. Co można powiedzieć o położeniu prostej KL?

17. Przez dany punkt A poprowadzić prostą, któraby przeszła przez niedostępny punkt przecięcia się X dwóch danych prostych m, p.

---

*) Czytelnika, pragnącego poznać bliżej sprawę rozwiązywania zadań konstrukcyjnych bez użycia cyrkla, odsyłamy do klasycznego dziełka: Jakób Steiner: *Konstrukcje geometryczne, wykonane zapomocą linji prostej i stałego koła.* Przełożył Stefan Kwietniewski, Warszawa 1915.

Rozprawa ta, napisana przez jednego z największych matematyków XIX w., Szwajcara J. Steinera (1796—1863 r.), należy do arcydzieł literatury matematycznej ze względu na prostotę, przejrzystość i piękno wykładu. Jest ona zupełnie przystępna dla ucznia szkoły średniej. Z rozdziału II tego dziełka zapożyczyliśmy metodę rozwiązywania zadań 7—10.

18. Dane są dwie proste m, p, przecinające się w punkcie niedostępnym X, oraz jakakolwiek trzecia prosta s, nie przechodząca przez X. Wykreślić prostą, równoległą do s i przechodzącą przez punkt X. [W s k a z ó w k a: uważajmy punkt X za wierzchołek jednego z dwóch trójkątów jednokładnych; środek jednokładności obierzmy dowolnie na prostej m i zbudujmy jeden trójkąt tak, by bok jego leżał na s lub był równoległy do s.]

19. W czworoboku $ABCD$ tylko dwa przeciwległe wierzchołki A, C są dostępne. Wykreślić prostą BD. [W s k a z ó w k a d o a n a l i z y: zbudować czworobok jednokładny z danym względem punktu A, jako środka jednokładności.]

20. W trójkącie $\triangle ABC$ kreślimy wysokość AA', z punktu A' kreślimy $A'B'' \perp b$ oraz $A'C'' \perp c$, a następnie prowadzimy z tego samego punktu dwie prostopadłe $A'B'''$ oraz $A'C'''$ do wysokości BB' i CC' trójkąta danego $\triangle ABC$. Dowieść, że cztery punkty B'', B''', C'', C''' leżą na jednej prostej. [W s k a z ó w k a: trójkąty $\triangle BB'C'$, $\triangle A'B''C'''$ są jednokładne — porównaj powyżej zadanie 15-te.]

21. D w a k o ł a, l e ż ą c e w j e d n e j p ł a s z c z y ź n i e, s ą z a w s z e j e d n o k ł a d n e z s o b ą, p r z y t e m d w o m a s p o s o b a m i, t a k, i ż m o ż e m y j e u w a ż a ć z a r ó w n o z a j e d n o k ł a d n e w p r o s t, j a k i o d w r o t n i e. Środek jednokładności prostej dwóch kół nazywamy również ich *środkiem jednokładności zewnętrznym*, środek zaś jednokładności odwrotnej nazywamy *środkiem jednokładności wewnętrznym*. [W s k a z ó w k a: w kole O kreślimy dowolny promień OA, w kole O' równolegle do niego dwa promienie $O'A'$, $O'A''$ poczem A łączymy z A' i z A''.]

22. Jeżeli dwa koła uważamy za jednokładne, wówczas każdemu punktowi jednego koła odpowiadają w drugiem kole dwa punkty, symetrycznie położone względem środka tego koła. Tak samo każdej cięciwie pierwszego koła odpowiadają w drugiem kole dwie równoległe do niej cięciwy, symetrycznie położone względem środka koła.

23. Każdej stycznej jednego koła odpowiadają w kole jednokładnem dwie równoległe do niej styczne.

24. S p ó l n e s t y c z n e w e w n ę t r z n e d w ó c h k ó ł p r z e c h o d z ą p r z e z ś r o d e k j e d n o k ł a d n o ś c i w e w n ę t r z n y, s p ó l n e z a ś s t y c z n e z e w n ę t r z n e — p r z e z ś r o d e k j e d n o k ł a d n o ś c i z e w n ę t r z n y.

Spólne styczne, jak wiadomo, niezawsze istnieją; czy mogą istnieć środki jednokładności takich kół, które nie mają spólnych stycznych?

25. Na mocy poprzedniego zadania znaleźć nowy sposób budowania spólnych stycznych.

26. Dane jest koło $(O)A$ i punkt J; wykreślić drugie koło tak, by było ono jednokładne z danem względem środka jednokładności J i spełniało prócz tego jeden z następujących warunków:

1) przechodziło przez punkt dany A' na prostej AJ;
2) miało promień równy danemu odcinkowi;
3) miało środek na danej prostej.

Niech będzie dany trójkąt $\triangle ABC$ i w nim wysokości AA', BB', CC'. Oznaczmy przez A_1, B_1, C_1, środki boków a, b. c, przez H ortocentr, przez O środek koła, opisanego na trójkącie $\triangle ABC$.

27. Trójkąty $\triangle ABC$, $A_1B_1C_1$ są z sobą jednokładne. Stąd wynika, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie (nazwijmy go G), przyczem mamy $AG = 2\,GA_1$, $BG = 2\,GB_1$, $CG = 2\,GC_1$.

28. Trójkąty $\triangle OB_1C_1$, $\triangle CBH$ są odwrotnie jednokładne względem punktu G (środka ciężkości trójkąta $\triangle ABC$). Boki ich mają się do siebie tak, jak 1 do 2, zatem $GH = 2\,GO$. (Odcinek OH nazywa się odcinkiem E u l e r a — porówn. ćwiczenie XIX, 34.)

29. Ponieważ trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ są z sobą jednokładne, zatem kołu $(O)A$, opisanemu na pierwszym trójkącie, odpowiada koło, opisane na drugim trójkącie. Środek tego nowego koła oznaczamy przez N. Dowieść następujących własności koła $(N)A_1$, zwanego k o ł e m d z i e w i ę c i u p u n k t ó w lub k o ł e m F e u e r b a c h a:

1) Promień koła dziewięciu punktów jest dwa razy mniejszy od promienia koła $(O)A$.

2) Koło $(N)A_1$ przechodzi przez spodki A', B', C' wysokości trójkąta i przez środki odcinków HA, HB, HC (porówn. ćwiczenie XIX, 33);

3) Ortocentr H jest środkiem jednokładności zewnętrznym kół $(O)A$, $(N)A_1$, środek zaś ciężkości G jest dla tych samych kół środkiem jednokładności wewnętrznym;

4) Mamy $GO = 2\,NG$ i, co za tem idzie, $HO = 2\,HN$, wreszcie $NO = NH$.

Pojęcie jednokładności oddaje często poważne usługi przy rozwiązywaniu zadań konstrukcyjnych. Jeżeli mamy zamiar zbudować figurę F, lecz analiza wykazuje, że łatwiejszą rzeczą jest zbudowanie figury F' jednokładnej z szukaną względem jakiegoś znanego środka, wówczas wskazane jest użycie *metody jednokładności*. Jak należy stosować tę motodę, poznamy najlepiej na przykładach.

30. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane pod względem wielkości i położenia bok a, prócz tego zaś kąt $\sphericalangle B$ oraz warunek, że $a : c = m : k$, gdzie m i k są odcinkami danemi. [W s k a z ó w k a: ponieważ mamy dany bok BC, budujemy przy jednym jego końcu kąt $\sphericalangle B$ i na jego ramionach odkładamy odcinki m, k.]

31. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dany bok a oraz warunek, że boki a. b, c mają być proporcjonalne do trzech danych odcinków m, k, p. [W s k a z ó w k a: budujemy trójkąt $\triangle KPM$, poczem przekształcamy go jednokładnie.]

32. Zbudować trójkąt prostokątny $\triangle ABC$, mając dany kąt ostry $\sphericalangle A$ środkową s_a. [W s k a z ó w k a d o a n a l i z y: trójkąt $\triangle CA'B'$ jest jednokładny z szukanym, jeżeli $\sphericalangle A' = \sphericalangle A$.]

Zbudować trójkąt prostokątny $\triangle ABC$, mając dane:

33. A, ρ. 34. A, $h_c + c$. 35. A, $c - h_c$.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane:

36. A, B, $s_c + h_c$. 37. A, B, $a + h_a$. 38. A, B, $R + \rho$.

39. c oraz warunki $h_c : a = m : k$, $h_c : b = p : n$, gdzie m, k, n, p są to cztery dane odcinki. [Wskazówka do analizy: pierwszy warunek wyznacza kształt trójkąta $\triangle BC'C$, gdzie CC' jest wysokością trójkąta szukanego.]

40. A, $c + h_c$ i warunek, że $h_c : a = m : k$, gdzie m, k, są odcinki dane.

41. Zbudować czworobok, mając dane: przekątną e, oraz cztery kąty $\sphericalangle (fa)$, $\sphericalangle (fb)$, $\sphericalangle (fc)$, $\sphericalangle (fd)$.

42. W dany trójkąt $\triangle ABC$ wpisać kwadrat tak, by dwa jego wierzchołki leżały na boku a, drugie zaś dwa na bokach b i c. [Wskazówka: wykreślamy dowolnej wielkości kwadrat, mający dwa wierzchołki na boku a, jeden zaś na boku b, i przekształcamy go jednokładnie względem wierzchołka C.]

43. W dany trójkąt wpisać prostokąt, którego boki tworzyłyby proporcję z danemi odcinkami m, k.

44. W dany trójkąt wpisać trójkąt o bokach równoległych do trzech danych prostych x, y, z.

45. W trójkąt dany $\triangle ABC$ wpisać romb tak, by jeden jego bok leżał na prostej c i jedna przekątna była równoległa do b.

46. W półkole, zamknięte średnicą AB, wpisać kwadrat tak, by dwa jego wierzchołki leżały ną AB.

47. W kwadrat wpisać trójkąt o danych kątach tak, by jeden wierzchołek trójkąta leżał w wierzchołku kwadratu.

48. Wykreślić okrąg, przechodzący przez dany punkt A i styczny do ramion kąta $\sphericalangle MON$. [Wskazówka: kreślimy najpierw dowolny okrąg, styczny do ramion kąta $\sphericalangle MNO$.]

49. Dane są dwie przecinające się proste m, p i koło O; wykreślić nowe koło, styczne jednocześnie do danego koła i do obu prostych m, p. [Wskazówka do analizy: punkt styczności S obu kół musi być ich środkiem jednokładności (wewnętrznym — przy styczności zewnętrznej i zewnętrznym — przy styczności wewnętrznej); jako taki, musi punkt S leżeć na prostej, łączącej dwa jakiekolwiek odpowiadające sobie punkty. Jeden taki punkt otrzymamy, prowadząc styczne do koła O, równoległe do prostych m, p; drugim jest punkt przecięcia się prostych m, p.]

50. Dane są trzy proste k, m, p, przecinające się w punkcie J; wykreślić okrąg, styczny do k, mający środek na prostej m i wyznaczający na p cięciwę danej długości.

51. Dane są dwa koła; wykreślić trzecie koło, styczne do nich w takich dwu punktach X, Y, żeby prosta XY przechodziła przez dany punkt M.

52. W danem kole wykreślić pięć równych kwadratów tak, by każdy bok wewnętrznego kwadratu był zarazem bokiem jednego z zewnętrznych, te zaś żeby miały po dwa wierzchołki na okręgu koła.

53. Na danem kole opisać romb, mając dany warunek, że $a : e = m : k$, gdzie m, k są to dwa dane odcinki. [Wskazówka: można wykreślić romb, w którym bok $= m$, przekątna $= k$ i wpisać koło w taki romb, poczem figurę przekształcić.]

54. W dany trójkąt wpisać romb, mając dany warunek, że $e : f = m : k$.

MIEJSCA GEOMETRYCZNE.

55. Z punktu A na okręgu $(O)A$ prowadzimy wszelkie możliwe cięciwy i na ich przedłużeniu odkładamy odcinki 3 razy większe od tych cięciw. Jakie jest miejsce geometryczne końców tych odcinków?

55 *a*. Z punktu M, nie leżącego na okręgu $(O)A$, prowadzimy do tego okręgu wszelkie możliwe odcinki MA_1, MA_2.... i na każdym z nich (lub na przedłużeniu każdego z nich) odkładamy odcinki $MB_1 = nMA_1$, $MB_2 = nMA_2$.... gdzie n jest pewną stałą liczbą. Jakie jest miejsce geometryczne punktów B?

56. W trójkącie $\triangle ABC$ bok a jest nieruchomy, wierzchołek zaś A posuwa się tak, że kąt $\sphericalangle A$ pozostaje stałej wielkości; co kreśli środek ciężkości trójkąta?

57. W trójkącie $\triangle ABC$ bok a jest nieruchomy, środkowa zaś s_b obraca się dokoła B, zachowując stałą wielkość. Co kreśli wierzchołek A? Co kreśli środek ciężkości trójkąta?

58. W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$, w którym kąt $\sphericalangle C = \delta$, na przedłużeniu przyprostokątnej a odkładamy $CD = a$ i punkt D łączymy ze środkiem O koła, opisanego na trójkącie $\triangle ABC$. Niech proste AC, DO przecinają się w punkcie K. Co kreśli punkt K, gdy wierzchołek C kąta prostego posuwa się po okręgu koła opisanego, przeciwprostokątna zaś pozostaje nieruchoma? [Wskazówka: połączyć A z D; czem jest punkt K w trójkącie $\triangle ABD$?]

59. W trójkącie $\triangle ABC$ bok AB jest nieruchomy, jak również spodek C' wysokości, poprowadzonej do tego boku. Jakie jest miejsce geometryczne wierzchołka C? Jakie jest miejsce środka ciężkości trójkąta?

60. Dane jest koło i w niem nieruchoma cięciwa AB. Przez A prowadzimy cięciwę ruchomą AC i budujemy równoległobok $ABXC$. Jakie jest miejsce geometryczne środka E tego równoległoboku? Jakie miejsce geometryczne wierzchołka X?

61. Dany jest odcinek AB, którego końce leżą na ramionach kąta $\sphericalangle MON$. Na odcinku tym obieramy punkt C taki, że $AC : CB = m : k$, gdzie m, k są to dwa dane stałe odcinki. Co kreśli punkt C, gdy prostą AB przesuwamy równolegle?

62. Jakie jest miejsce środków wszystkich prostokątów, wpisanych w dany trójkąt $\triangle ABC$ tak, że dwa wierzchołki każdego z nich leżą na boku a? [Wskazówka: jeżeli A' jest środkiem boku a, A_1 zaś spodkiem wysokości, wówczas stosujemy poprzednie zadanie do kąta $\sphericalangle AA'A_1$.]

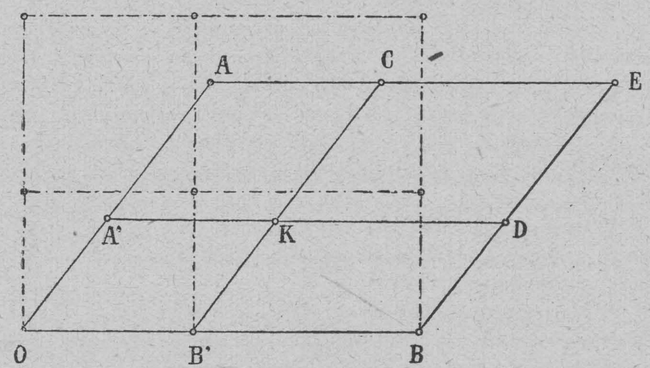
63. Jakie jest miejsce geometryczne punktów, których odległości od ramion danego kąta są proporcjonalne do danych odcinków m, k?

64. Na odcinku AB, jako na średnicy, kreślimy koło, punkt M okręgu łączymy z punktem A, ze środka koła prowadzimy prostopadłą OK do cięciwy AM, wreszcie łączymy M ze środkiem O' promienia OA. Niech proste OK, $O'M$ przecinają się w punkcie X. Co kreśli punkt X, gdy punkt M porusza się po okręgu?

65. Na prostej mamy dane trzy punkty A, B, C. Przez A i B prowadzimy koła, z punktu zaś C kreślimy styczne. Jakie jest miejsce geometryczne punktu styczności?

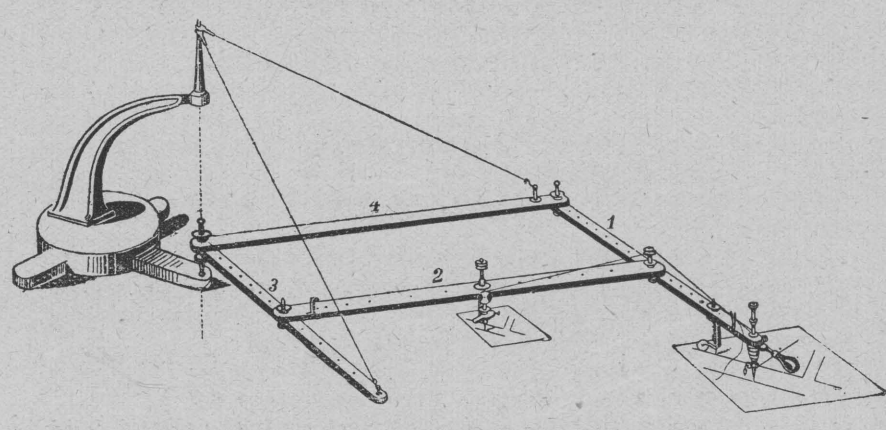
ZASTOSOWANIA PRAKTYCZNE.

66. Zbudować równoległobok przegubowy $OAEB$; umocować w nim dwa pręty $A'D$ i $B'C$ tak, by końce ich były przytwierdzone na zawiasach do boków równoległoboku i żeby punkt K, w którym te pręty dotykają się (ślizgając się



Rys. 226.

po sobie). przypadł na przekątnej OE równoległoboku. Unieruchomiwszy bok OB, poruszajmy równoległobok w jednej płaszczyźnie. Zaobserwować, czy położenie punktów O, K, E, względem siebie zmienia się. Uzasadnić rozumowo dokonane



Rys. 227.

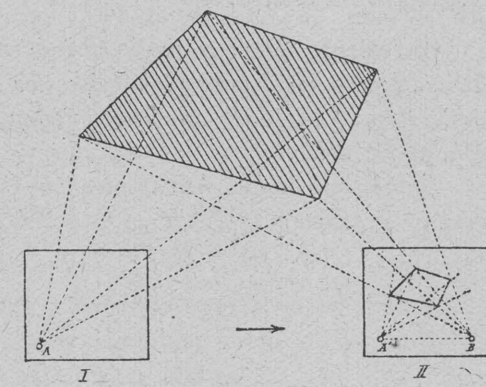
spostrzeżenie. Czy można zastosować ten przyrząd (i w jaki sposób) do kopjowania figur w skali zwiększonej lub zmniejszonej?

67. Rysunek 227 wyobraża przyrząd zwany p a n t o g r a f e m. Przyrząd ten był dawniej powszechnie używany do zwiększania lub zmniejszania rysunków,

a i dziś jeszcze znajduje zastosowanie. Czy zasada tego przyrządu ma coś wspólnego z poprzedniem zadaniem? Objaśnić działanie przyrządu.

68. Dwa równoległoboki o równych kątach są sobie równoważne; czy pozostają one równoważnemi, jeżeli zmieniamy ich kształt, tak jednak, żeby boki ich były stałe, a kąty pozostawały równe sobie? Czy ma to jakiś związek z zadaniem 66?

69. Chcąc zdjąć plan zapomocą stolika, postępujemy w następujący sposób: ustawiamy stolik poziomo; z punktu A na stoliku kreślimy proste do wierzchołków figury, której plan chcemy otrzymać; przenosimy stolik do stanowiska II i ustawiamy poziomo tak, by A, A', B leżały na jednej prostej. Niech A' będzie nowem położeniem punktu A. Z B kreślimy proste, prowadzące do wierzchołków figury, której plan zdejmujemy. Punkty przecięcia się odpowiednich prostych obu pęków wyznaczają nam żądany plan figury.



Rys. 228.

1) Uzasadnić to postępowanie. 2) W jakiej skali wykreślimy plan? 4) Czy można obrać punkty A i B nie zewnątrz danej figury (jak na rys. 228), lecz wewnątrz niej?

ROZDZIAŁ III.

O podobieństwie.

§ 254. Wyobraźmy sobie, iż mając dane na płaszczyźnie dwie figury jednokładne F i F', jedną z nich przesunęliśmy lub obróciliśmy. Figury przestały być jednokładnemi, mianowicie nie mają już jednej z charakterystycznych cech jednokładności: nie posiadają punktu, w którym schodziłyby się proste, łączące odpowiednie punkty tych figur. Natomiast inne własności, związane z wielkością i kształtem figur, nie zaś z ich położeniem, nie mogły ulec zmianie.

Wiemy np., iż dwa trójkąty jednokładne mają boki odpowiednio równoległe, kąty odpowiednio równe, a prócz tego boki ich są do siebie proporcjonalne. Po przemieszczeniu jednego trójkąta muszą one utracić pierwszą własność, lecz zachować drugą i trzecią. Dwa takie trójkąty nazywamy *podobnemi*. Mamy tedy następujące określenie.

Określenie. *Dwa trójkąty (lub wielokąty) są podobne, jeżeli odpowiadające sobie boki tych trójkątów (lub wielokątów) są proporcjonalne, kąty zaś, zawarte między odpowiedniemi bokami, równają się sobie.*

Symbolem podobieństwa niech będzie znak $\sim$. Chcąc tedy wyrazić, iż trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ są do siebie podobne, piszemy: $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

§ 255. W myśl tego określenia, jeżeli dwa trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ są do siebie podobne, wówczas mamy jednocześnie

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A', \ \sphericalangle B = \sphericalangle B', \ \sphericalangle C = \sphericalangle C',$$

oraz

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Nie wszystkie te warunki są od siebie niezależne. Innemi słowami: jeżeli niektóre z tych warunków są spełnione, wówczas pociągają one za sobą istnienie pozostałych warunków, a więc i podobieństwo trójkątów*). To prowadzi do ustalenia t. zw. cech podobieństwa trójkątów.

§ 256. Twierdzenia (trzy cechy podobieństwa trójkątów). *Dwa trójkąty są do siebie podobne, jeżeli*

1-o *albo mają po dwa kąty odpowiednio równe,*

2-o *albo mają po jednym równym kącie, boki zaś, zawierające ten kąt, tworzą proporcję,*

3-o *albo mają wszystkie boki proporcjonalne.*

W celu dowiedzenia tych trzech twierdzeń możemy zastosować pewną jednostajną metodę. Jeżeli mianowicie chcemy wykazać, że trójkąty T_1, T_2 są do siebie podobne, wówczas wystarczy zbudować trójkąt $T_3 \equiv T_2$ tak, by nowy trójkąt T_3 był jednokładny z trójkątem T_1.

---

*) Mamy tu zjawisko zupełnie analogiczne do tego, które dostrzegliśmy przy równości trójkątów: z sześciu warunków, *określających* równość trójkątów, trzy, odpowiednio dobrane, wystarczają do *wyznaczenia* tej równości (porówn. str. 27, § 40).

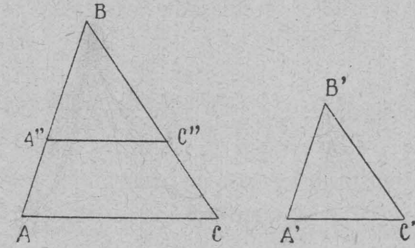
I. Niech będą dane dwa trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ (rys. 229), w których

$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$.

Odkładamy na boku c odcinek

$$BA'' = B'A'$$

i przez punkt A'' kreślimy równoległą do AC.



Rys. 229.

W ten sposób otrzymujemy trójkąt $\triangle A''BC''$ jednokładny z trójkątem $\triangle ABC$ (dlaczego?). Otóż powiadam, że

$$\triangle BA''C'' \equiv \triangle B'A'C'.$$

Jakoż mamy $BA'' = B'A'$, $\sphericalangle B = B'$, $\sphericalangle A'' = \sphericalangle A$.

Z równości tych trójkątów wynika, że

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

II. Mając dane dwa trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, w których

$$\sphericalangle B = \sphericalangle B' \text{ oraz } \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$$

powtarzamy tę samą konstrukcję, co w przypadku pierwszym i otrzymujemy znów dwa trójkąty jednokładne $\triangle ABC$, $\triangle A''BC''$. Pozostaje do dowiedzenia, że

$$\triangle A''BC'' \equiv \triangle A'B'C'.$$

Przedewszystkiem wiemy, że $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $BA'' = B'A' = c'$.

Dalej, z jednokładności trójkątów wynika proporcja

$$\frac{c}{BA''} = \frac{a}{BC''},$$

czyli

$$\frac{c}{c'} = \frac{a}{BC''},$$

Ponieważ może istnieć tylko jeden odcinek czwarty proporcjonalny do trzech danych odcinków i, według warunków twierdzenia, tym czwartym proporcjonalnym jest bok a' trójkąta $\triangle A'B'C'$, zatem musi być

$$a' = BC'',$$

czyli

$$\triangle A''BC'' \equiv \triangle A'B'C'.$$

Stąd wynika, że $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

III. Załóżmy teraz, że mamy dane dwa trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, spełniające warunek, że

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Powiadam, że i w tym wypadku trójkąty są do siebie podobne.

Powtarzam tę samą konstrukcję, co w dwóch przypadkach poprzednich; znów otrzymuję dwa trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A''BC''$ i znów postaram się dowieść, że

$$A''BC'' \equiv \triangle A'B'C'.$$

Otóż z konstrukcji mamy również

$$BA'' = B'A' = c'.$$

Z jednokładności trójkątów wynika proporcja

$$\frac{c}{BA''} = \frac{b}{A''C''},$$

czyli
$$\frac{c}{c'} = \frac{b}{A''C''}.$$

Ponieważ istnieje tylko jeden odcinek czwarty proporcjonalny do trzech danych c, c', b — i tym odcinkiem jest, według warunków twierdzenia, bok b' trójkąta danego $\triangle A'B'C'$, zatem musi być

$$A''C'' = A'C' = b'.$$

W taki sam sposób uczeń dowiedzie, iż

$$BC'' = B'C' = a'.$$

Trójkąty $\triangle A''BC''$, $\triangle A'B'C'$ równają się sobie, gdyż trzy boki jednego równają się trzem bokom drugiego. Stąd i z jednokładności trójkątów $\triangle ABC$, $\triangle A''BC''$ wynika, że istotnie

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Ćwiczenia XXXIX. 1. Ile warunków wystarcza do wyznaczenia dwóch trójkątów podobnych?

2. Trójkąty prostokątne są podobne: 1) jeżeli mają po równym kącie ostrym; 2) jeżeli przyprostokątne ich tworzą proporcję; 3) jeżeli przeciwprostokątne wraz z jedną parą przyprostokątnych tworzą proporcję.

3. Trójkąty równoramienne są podobne, jeżeli ich kąty, przeciwległe podstawom, są sobie równe.

4. W trójkącie $\triangle ABC$ wykreślić wysokości, znaleźć podobne trójkąty prostokątne i wykazać, że boki trójkąta są odwrotnie proporcjonalne do odpowiednich wysokości.

5. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane trzy jego wysokości.

6. W podobnych trójkątach boki są proporcjonalne do wysokości, które zostały poprowadzone do tych boków.

7. Dwa trójkąty są popobne, jeżeli mają po równym kącie, wysokości zaś, poprowadzone do boków, między któremi zawierają się te równe kąty, tworzą proporcję.

8. Trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ są do siebie podobne, jeżeli mamy

$$\sphericalangle B = \sphericalangle B' \text{ oraz } R : R' = a : a',$$

gdzie R i R' oznaczają promienie kół, opisanych na trójkątach.

9. Trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ są do siebie podobne. jeżeli mamy

$$\frac{a}{a'} = \frac{h_a}{h_{a'}} = \frac{s_a}{s_{a'}}.$$

10. Jeżeli na trójkącie $\triangle ABC$ opisaliśmy koło, przez C poprowadziliśmy styczną, przez B zaś równoległą do tej stycznej i jeżeli ta równoległa przecina w punkcie X prostą AC, wówczas musi być

$$\frac{BX}{AB} = \frac{BC}{AC}.$$

11. Mamy dane dwie równoległe p_1 i p_2 oraz punkt A, nie leżący na żadnej z nich. Przez A prowadzimy prostą, która przecina równoległe odpowiednio w punktach B i C. W B wystawiamy prostopadłą do p_1, która przecina p_2 w pnnkcie D. W C wystawiamy prostopadłą do p_2. Oznaczamy przez X punkt przecięcia się tej drugiej prostopadłej z prostą AD. Jakie jest miejsce punktu X, gdy prosta AB obraca się dokoła A?

12. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy $c = 56\,cm$. Na bokach b, a obieramy punkty D, E tak, żeby było $AD = \frac{3}{4}DC$, $BE = \frac{3}{4}EC$. Obliczyć długość odcinka DE.

13. Trójkąt $\triangle ABC$ przecięto prostą $DE // AB$, tak iż powstał trapez $ADEB$, w którym $AD = 3\,cm$, $DE = 8\,cm$, $EB = 5\,cm$, $BA = 12\,cm$. Obliczyć boki trójkąta $\triangle ABC$.

14. Podstawy trapezu mają: jedna $6\,cm$, druga $11\,cm$, przekątne zaś mają $5\,cm$ i $14\,cm$ długości. Obliczyć odcinki, na które punkt przecięcia się przekątnych dzieli każdą z nich.

15. Podstawy trapezn mają 9 i $27\,cm$; w jakim stosunku dzielą się przekątne trapezu?

16. Podstawy BC i AD trapezu równają się odpowiednio $15\,cm$ i $30\,cm$; przez punkt E przecięcia się przekątnych prowadzimy odcinek FG, równoległy do podstaw. Obliczyć długość odcinka FG i zbadać, w jaki sposób punkt E dzieli ten odcinek.

17. Promieniami, równającemi się $4\,cm$ i $6\,cm$, zakreślono dwa koła zewnętrznie do siebie styczne, poczem przeprowadzono dwie ich spólne styczne, które przecinają się w punkcie I. Obliczyć odległość punktu I od środków obu kół.

18. Jeżeli dwa trójkąty o równych wysokościach zostały zbudowane na wspólnej podstawie po jednej stronie tej podstawy i jeżeli przecięliśmy je dowolną prostą, równoległą do podstawy, wówczas odcinki tej równoległej, zawarte wewnątrz każdego trójkąta, są sobie równe.

19. Podstawy trapezu mają $40\,cm$ i $10\,cm$, jedna zaś z przekątnych dzieli trapez na dwa podobne do siebie trójkąty. Obliczyć długość tej przekątnej.

20. Podstawy BC i DA trapezu mają 5 cm i 11 cm długości; bok AB został podzielony na trzy równe części i przez punkty podziału poprowadzono równoległe do podstaw aż do przecięcia się z bokiem CD. Obliczyć długość tych równoległych.

21. W trapezie odcinek, łączący środki dwóch nierównoległych boków $=$ 18 cm; przekątne jego dzielą się w stosunku 4 : 5; obliczyć długość obu podstaw trapezu.

22. Promienie dwóch kół równają się odpowiednio 6 cm i 10 cm; odległość ich środków równa się 72 cm. Na jakie części dzieli tę odległość środek jednokładności wewnętrzny tych kół?

23. Promienie dwóch kół równają się odpowiednio 6 cm i 10 cm; odległość ich środków równa się 20 cm. Obliczyć odległość między środkiem jednokładności wewnętrznym i środkiem jednokładności zewnętrznym.

24. Dane są dwa koła zewnętrznie do siebie styczne. Odległość ich środków $=$ 48 cm; sieczna, poprowadzona przez ich punkt styczności, wyznacza w tych kołach cięciwy długości 10 cm i 14 cm. Obliczyć promienie obu kół.

25. Boki równoległoboku równają się 25 cm i 40 cm; odległość pomiędzy bokami mniejszemi $=$ 16 cm; obliczyć odległość między bokami większemi.

26. W trójkącie $\triangle ABC$ kreślimy $DE \parallel AB$. Obliczyć długość odcinka DE, jeżeli wiemy, iż $c = 15\ cm$, $h_c = 10\ cm$ i że odległość między prostemi DE i AB wynosi 3 cm.

27. Jak należałoby wykreślić odcinek DE w zadaniu poprzedniem, gdyby długość jego miała być dwa razy większa od długości boku AB?

28. W trójkącie $\triangle ABC$ odkładamy na boku b odcinek $AD = m$, poczem łączymy D z takim punktem K na boku AB, iż $\sphericalangle ADK = \sphericalangle ABC$. Obliczyć odcinki AK i KD, kładąc $a = 16\ cm$, $b = 19\ cm$, $c = 30\ cm$.

29. Czy w zadaniu poprzedniem może się zdarzyć, żeby punkt K upadł na B? Czy może zdarzyć się, żeby K upadł na przedłużenie boku AB? [Wskazówka: przy badaniu zakładamy, iż bok b jest niezmienny, natomiast odcinek m, jak również kąt $\sphericalangle B$, mogą zmieniać się. Zbadać zadanie przy trzech założeniach: 1) że kąt $\sphericalangle B$ jest prosty, 2) że jest ostry, 3) że jest rozwarty.]

30. W trójkąt $\triangle ABC$, w którym $a = 40\ cm$, $h_a = 28\ cm$, wpisano kwadrat, którego jeden bok leży na BC. Obliczyć bok kwadratu.

31. W poprzedniem zadaniu zamiast kwadratu wzięto prostokąt o bokach x, y takich, iż $x : y = 1 : 4$; obliczyć długość odcinków x, y.

32. W trójkąt równoramienny $\triangle ABC$, w którym $a = b$, wpisujemy koło. Dotyka ono boków a, b odpowiednio w punktach A_1, B_1. 1) Obliczyć długość odcinka A_1B_1, kładąc $c = 10\ cm$, $a = 16\ cm$. 2) Czy da się pomyśleć taki trójkąt równoramienny, żeby było $A_1B_1 = {}^1/_2 AB$?

33. W zadaniu poprzedniem kładziemy $c = 18\ cm$; jak wielkie muszą być boki a, b, żeby było $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{3}{4}$?

34. W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$, w którym $a = b$, mamy daną wysokość $h_c = 16\ cm$ oraz wiemy, że zachodzi proporcja $a : c = 5 : 4$. Obliczyć promień koła wpisanego.

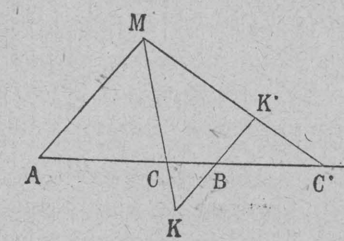
ROZDZIAŁ IV.

O podziale harmonicznym odcinka.

§ 257. Zadanie. *Dany odcinek AB podzielić proporcjonalnie do dwu danych odcinków m, k.*

Przez punkty A, B prowadzimy dwie dowolne równoległe, na jednej z nich odkładamy odcinek $AM = m$, na drugiej odcinek $BK = k$, poczem łączymy M z K. Prosta MK przecina odcinek AB w żądanym punkcie C, gdyż mamy

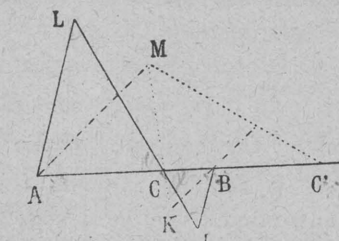
$$AC : CB = m : k \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$



Rys. 230.

Zwróćmy jednak uwagę na to, że na drugiej równoległej mogliśmy równie dobrze odłożyć odcinek $BK' = k$, łącząc zaś M i K', otrzymalibyśmy na przedłużeniu odcinka AB punkt C', czyniący zadość warunkom zadania, gdyż mamy

$$AC' : BC' = m : k \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$



Rys. 231.

Zadanie tedy posiada niewątpliwie dwa rozwiązania. Dowiedziemy teraz, iż nie może ono mieć większej liczby rozwiązań. W tym celu wystarczy wykazać, że położenie punktu C nie zależy od kierunku, w którym prowadziliśmy równoległe z punktów A i B.

Jakoż wykreślmy w dowolnym kierunku odcinek $AL = m$, połączmy L z C i wyznaczmy punkt I, w którym prosta LC przecina równoległą do AL, poprowadzoną z punktu B.

Na mocy § 248 mamy

$$AC : CB = m : BI,$$

punkt zaś C, znaleziony w poprzedniej konstrukcji, czyni zadość proporcji (1), zatem musi być

$$BI = k.$$

§ 258. O punktach C i C' powiadamy, iż *oba one dzielą odcinek AB proporcjonalnie do odcinków m, k, przyczem punkt C*

dzieli odcinek AB wewnętrznie, punkt C' zaś dzieli ten sam odcinek zewnętrznie.

Mówimy również, że *punkty C i C' dzielą odcinek AB harmonicznie.* Dwie pary punktów *A, B oraz C, C' nazywamy harmonicznie z sobą sprzężonemi.*

Mamy tedy następujące

§ **259. Określenie.** *Dwie pary punktów A, B oraz C, C', nazywamy harmonicznie z sobą sprzężonemi, jeżeli punkty C, C' dzielą odcinek AB (wewnętrznie i zewnętrznie) proporcjonalnie do dwu danych, zresztą dowolnych odcinków.*

Z proporcji (1) i (2) w § 257 wynika, iż związek harmoniczny między czterema punktami wyraża się proporcją

$$AC : CB = AC' : BC' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Uwaga. W celu zaznaczenia, iż dwie pary punktów *A, B* oraz *C, C'* są harmonicznie z sobą sprzężone, będziemy nieraz posługiwali się symbolem (AB, CC'). Symbol ten jest więc równoznaczny z proporcją (3).

§ **260. Wniosek.** *Jeżeli punkty C, C' dzielą harmonicznie odcinek AB, wówczas i nawzajem: punkty AB dzielą harmonicznie odcinek CC'.*

Istotnie, przestawiając wyrazy w proporcji (3), mamy

$$CB : BC' = AC : AC';$$

innemi słowami, ze związku (AB, CC') wynika związek (CC', AB).

§ **261.** W zadaniu, rozwiązanem w § 257, zakładaliśmy, iż dane odcinki *m, k* są stałe. Przypuśćmy teraz, że odcinki te są zmienne, i zbadajmy, w jaki sposób zmienia się przytem położenie punktów *C, C'* na prostej.

1-o Załóżmy najpierw, że $m > k$ i przypuśćmy, iż odcinek *k* maleje, odcinek zaś *m* nie zmienia się, albo też wzrasta. Z konstrukcji, zarówno jak z rozważania proporcji (1) wynika, że wówczas punkty *C* i *C'* zbliżają się jednocześnie i nieograniczenie do punktu *B**). Nie mogą one zlać się z tym punktem, dopóki odcinek *k* nie zniknie, — czyli, jak mówią, nie stanie się równy zeru.

2-o Jeżeli przeciwnie, odcinek *k* rośnie lub *m* maleje, tak, iż różnica między niemi staje się coraz mniejsza, wówczas punkt *C* zbliża się do środka odcinka *AB*, punkt zaś *C'* oddala się coraz bardziej w prawo od *B*.

*) Uczeń wykona sam szereg rysunków, wykazujących zmienność położenia punktów C i C'.

3-o W chwili, gdy $m = k$, punkt *C* staje się środkiem odcinka, punkt *C'* zaś przestaje istnieć, gdyż prosta *MK'* (rys. 230) staje się równoległa do *AB*.

4-o Jeżeli przy dalszem wzrastaniu odcinka *k* lub zmniejszaniu się odcinka *m* mamy $m < k$, wówczas punkt *C* stopniowo zbliża się do *A*, punkt *C'* zaś ukazuje się po lewej stronie punktu *A* i również zbliża się stopniowo do tego punktu.

Jak i w przypadku pierwszym, punkty *C, C'* nie mogą zlać się z punktem *A*, chyba że odcinek *m* stanie się równy zeru.

§ **262.** Z powyższego badania widzimy, że jakiekolwiek byłyby dwa dane odcinki *m, k*, istnieją zawsze na prostej *AB* dwa i tylko dwa różne punkty *C, C'*, dzielące odcinek *AB* proporcjonalnie do danych dwu odcinków *m, k*. Innemi słowami, jeżeli mamy dany odcinek *AB*, wówczas każdym dwu danym odcinkom *m, k* odpowiada para punktów, harmonicznie sprzężona z punktami *A, B*.

Wyjątek stanowi ten przypadek, gdy $m = k$ (przypadek 3-o w powyższem badaniu): mamy wówczas tylko jeden punkt *C*, który jest środkiem odcinka *AB*.

Umowa. Ponieważ matematyka unika wyjątków i dąży do takiego formułowania praw, by zaznaczanie wyjątków nie było potrzebne, powiadamy więc, że i w tym przypadku istnieje punkt *C'* i nazywamy go **punktem niewłaściwym** prostej *AB*.

Czytelnikowi umowa ta wyda się niewątpliwie dziwaczną, zobaczymy jednak wkrótce, iż jest ona niezmiernie cenna*).

§ **263.** Jeżeli chcemy, żeby punkt niewłaściwy spełniał te same pewniki, co i punkt właściwy, a w szczególności pewnik *Ia*, wówczas musimy założyć, że na prostej istnieje jeden tylko punkt niewłaściwy; punkt ten musimy konsekwentnie uważać za spólny wszystkim prostym, równoległym do danej.

*) Gdy badamy liczby bezwzględne, symbol $a - b$ ma dla nas sens tylko wówczas, gdy $a \geq b$; jeśli chcemy uniknąć wyjątków przy odejmowaniu, musimy wprowadzić umowę, na mocy której nawet przy $a < b$ symbolowi powyższemu nadajemy pewien sens. W ten sposób wprowadzamy do nauki liczby ujemne. Umowa ta jest równie dziwaczna, jak wprowadzenie punktu niewłaściwego; dopiero późniejsze doświadczenie wykazuje, że pojęcie liczby ujemnej jest istotnie praktyczne i płodne.

W ten sposób będziemy mogli powiedzieć, że każde dwie proste, leżące w jednej płaszczyźnie, mają spólny punkt: ten punkt jest właściwy, jeżeli proste przecinają się, lub niewłaściwy, jeżeli proste są do siebie równoległe.

Chcąc pozostać w zgodzie z pewnikiem Ia, musimy założyć, iż dwie proste przecinające się nie mogą mieć spólnego punktu niewłaściwego, gdyż musiałyby mieć dwa punkty spólne: jeden właściwy (punkt przecięcia się), drugi niewłaściwy.

Jeśli chcemy zaznaczyć, że X jest punktem niewłaściwym, piszemy X_∞.

Ponieważ każda prosta posiada, zgodnie z naszą umową, jeden i tylko jeden punkt niewłaściwy, zatem prosta, łącząca dwa punkty niewłaściwe, nie może przechodzić przez żaden punkt właściwy. Składa się ona wyłącznie z punktów niewłaściwych i nazywa się prostą niewłaściwą.

Jeżeli chcemy zachować bez zmiany prawdę, że dwie proste mogą przecinać się tylko w jednym punkcie, wówczas musimy założyć, że na płaszczyźnie istnieje tylko jedna prosta niewłaściwa.

Jak widzimy, przy wprowadzeniu t. zw. elementów niewłaściwych, czyli punktów i prostych niewłaściwych, pewniki grupy I i II pozostają bez zmiany; pewnik IV należałoby wysłowić tak: dwie proste, które tworzą z poprzeczną kąty naprzemianległe wewnętrzne nierówne, przecinają się w punkcie właściwym. Określenie równoległych (§ 72) brzmiałoby: dwie proste, leżące w płaszczyźnie i nie przecinające się w punkcie właściwym, nazywamy równoległemi. Dwie równoległe przecinają się w punkcie niewłaściwym. — Reszta teorji, a w szczególności dowody twierdzeń §§ 73—83, nie wymagałaby żadnych zmian, prócz dodania przymiotnika: „właściwy", tam, gdzie mowa o punktach.

§ 264. Określenie. *Jeżeli dowolny punkt O płaszczyzny, nie leżący na prostej* m, *połączymy z czwórką harmoniczną punktów (AB, CD), leżących na tej prostej, otrzymamy cztery proste, o których powiadamy, że tworzą pęk harmoniczny.*

Proste OA, OB nazywamy harmonicznie sprzężonemi z prostemi OC, OD.

Pęk taki oznaczamy symbolem $O\ (AB,\ CD)$.

W szczególności, gdyby punkt C był środkiem odcinka AB, wówczas sprzężony z nim punkt byłby punktem niewłaściwym D_∞,

prosta zaś OD_∞ byłaby równoległa do prostej AB. Pęk ten wypadłoby oznaczyć symbolem $O\ (AB,\ CD_\infty)$.

Rzecz jasna, że jeżeli mamy pęk $O(AB,\ CD)$, wówczas jedna z półprostych OC, OD leży wewnątrz kąta $\sphericalangle AOB$, druga zaś zewnątrz.

Uwaga. Ponieważ prostym równoległym przypisujemy spólny punkt niewłaściwy, możemy tedy uważać, że wszystkie proste do siebie równoległe tworzą pęk, którego wierzchołkiem jest ów spólny punkt niewłaściwy.

W szczególności, jeżeli przez cztery punkty harmoniczne $(AB,\ CD)$ poprowadzimy cztery dowolne równoległe, otrzymamy pęk harmoniczny $X_\infty(AB,\ CD)$, gdzie X_∞ jest symbolem punktu niewłaściwego, spólnego czterem wykreślonym przez nas równoległym.

Ćwiczenia XL. 1. Wykazać, iż twierdzenie § 248 oraz określenie I w § 237 dadzą się ująć w postać jednego twierdzenia, jeżeli wprowadzimy pojęcie punktu niewłaściwego i równoległe uważać będziemy jako proste jednego pęku.

2. Dany jest odcinek AB i na nim punkt C; zbudować punkt czwarty harmoniczny, opierając się na § 257.

2a. To samo zadanie, jeżeli punkt C jest dany na przedłużeniu odcinka AB.

3. Na mocy tego samego § 257 zbudować pęk harmoniczny, mając dany wierzchołek pęku O i trzy półproste OA, OB, OC, należące do tego pęku.

4. Wykazać, że dwa boki a, b trójkąta, środkowa s_c i prosta, poprowadzona przez wierzchołek C równolegle do boku e, tworzą pęk harmoniczny.

5. Znaleźć prostą czwartą harmoniczną do dwóch boków a, d równoległoboku i do przekątnej e.

6. Rozwiązać zadanie 3-cie, opierając się na zadaniu 5-tem.

7. Zbudować pęk harmoniczny $O\ (AB,\ CD)$ tak, żeby było:

1) $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD = \delta$;

2) $\sphericalangle AOB = \delta$, $\sphericalangle COD = \alpha$, gdzie α jest danym kątem, zresztą dowolnym.

8. Wykazać, że środki jednokładności J, J' dwu danych kół $(O)r$, $(O')r'$ dzielą harmonicznie odcinek OO'.

8a. Opierając się na zadaniu 8-em, 1) podzielić dany odcinek AB proporcjonalnie do dwu danych odcinków m, k; 2) zbudować punkt czwarty harmoniczny do trzech danych.

8b. Odcinek WW_a, łączący środek koła, wpisanego w trójkąt $\triangle ABC$, ze środkiem koła zawpisanego, leżącego w kącie $\sphericalangle A$, jest podzielony harmonicznie przez wierzchołek A i przez punkt przecięcia się prostej WW_a z bokiem a.

8c. W tym samym trójkącie rozważamy dwa koła zawpisane, leżące w kątach $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$; znaleźć punkt czwarty harmoniczny względem punktów W_a, W_b, C.

9. Jeżeli mamy czwórkę harmoniczną punktów (AB, CD), przyczem O jest środkiem odcinka AB, wówczas $\boxed{AO} = \boxed{OC;\ OD}$.

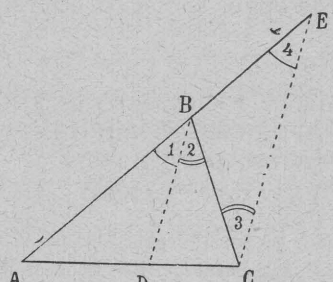
[W s k a z ó w k a: z proporcji, cechującej podział harmoniczny, otrzymać proporcję $(AO + OC) : (AO - OC) = (AO + OD) : (OD - AO)$.]

10. Opierając się na zadaniu 9-em, podać nowe rozwiązanie zadania 2-go.

11. Jeżeli mamy czwórkę punktów harmoniczną (AB, CD), wówczas koło, mające za średnicę odcinek AB, przecina pod kątem prostym każde koło, przechodzące przez punkty C i D*).

12. Jeżeli dwa koła przecinają się pod kątem prostym, to ich średnice, położone na linji środków, dzielą jedna drugą harmonicznie.

§. 265. Twierdzenie. *Dwusieczna wewnętrzna i zewnętrzna, poprowadzone z jednego wierzchołka trójkąta, dzielą przeciwległy jego bok harmonicznie, a mianowicie dzielą go wewnętrznie i zewnętrznie na odcinki, proporcjonalne do dwu drugich boków trójkąta.*



Rys. 232.

I. Niech będzie dany trójkąt $\triangle ABC$ i w nim dwusieczna wewnętrzna BD. Mamy dowieść, iż

$$AD : DC = AB : BC \quad \ldots\ldots (1).$$

W tym celu z C prowadzimy prostą CE, równoległą do dwusiecznej, tak, iż mamy

$$AD : DC = AB : BE \quad \ldots\ldots (2),$$

Aby z proporcji (2) otrzymać proporcję (1), musimy wykazać, iż $BE = BC$ czyli, że trójkąt $\triangle BEC$ jest równoramienny.

Tak jest istotnie, gdyż

$$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 \text{ (d l a c z e g o?).}$$

II. Jeżeli w tym samym trójkącie BD' jest dwusieczną zewnętrzną (rys. 233), wówczas powiadam, że musi być

$$AD' : CD' = AB : BC \quad \ldots\ldots\ldots (1').$$

Kreślimy, jak poprzednio, z wierzchołka C równoległą do dwusiecznej i otrzymujemy proporcję

$$AD' : CD' = AB : EB \quad \ldots\ldots\ldots (2').$$

Pozostaje do wykazania, iż $EB = BC$ czyli, że trójkąt $\triangle EBC$ jest równoramienny.

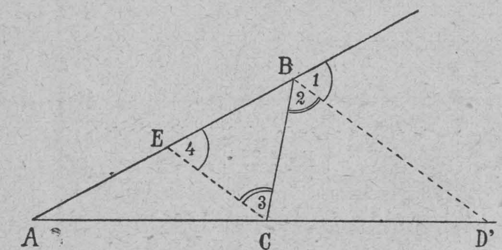
*) O dwóch kołach powiadamy, że przecinają się pod kątem prostym w punkcie X, jeżeli styczne, poprowadzone w tym punkcie do obu kół, są do siebie prostopadłe.

Tak jest istotnie, gdyż

$$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3.$$

Z proporcji (1) i (1') wynika, iż

$$AD : DC = AD' : CD'.$$



Rys. 233.

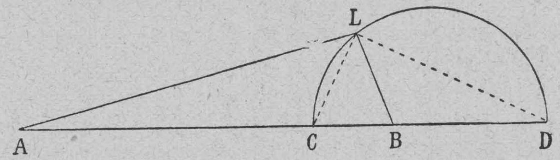
§ 266. Twierdzenie odwrotne (w z g l ę d e m § 265). *Jeżeli prosta, poprowadzona z wierzchołka trójkąta, dzieli przeciwległy bok proporcjonalnie do dwóch boków przyległych, wówczas prosta ta jest dwusieczną wewnętrzną lub zewnętrzną trójkąta.*

Istotnie na odcinku AC (rys. 232 i 233) istnieje tylko jeden punkt wewnętrzny D, dzielący ten odcinek proporcjonalnie do boków c, a, na przedłużeniu zaś odcinka AC istnieje jeden tylko punkt zewnętrzny D', dzielący go w taki sam sposób. Punkty D i D' są spodkami dwusiecznych; jeśli więc prosta przechodzi przez wierzchołek B i dzieli bok b proporcjonalnie do boków a, c, to musi przechodzić przez jeden z tych dwu punktów, czyli jest dwusieczną wewnętrzną BD lub zewnętrzną BD'.

§ 267. Twierdzenie. *Jeżeli mamy dany odcinek AB i punkty C, D, dzielące go wewnętrznie i zewnętrznie proporcjonalnie do odcinków m, k, wówczas okrąg koła, zakreślonego na średnicy CD, jest miejscem geometrycznem punktów, których odległości od A i B są proporcjonalne do odcinków m i k.* (Koło to nazywa się k o ł e m A p o l o n j u s z a.*)

*) Od imienia słynnego uczonego z III wieku przed Chr., który przemieszkiwał w Aleksandrji, a następnie w Pergamie. Apolonjusz był obok Euklidesa i Archimedesa największym matematykiem starożytności. Prace jego dotyczyły głównie teorji t. zw. przecięć stożkowych, t. j. krzywych, które tworzą się na powierzchni stożka, przeciętego płaszczyzną. Krzywe te są to elipsa, parabola i hiperbola.

I. Najpierw ustalimy, że wszystkie punkty, których odległości od A i B są proporcjonalne do m i k, leżą na kole Apolonjusza.

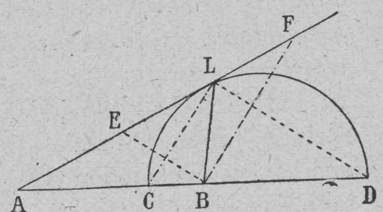


Rys. 234.

Istotnie, jeżeli punkt L czyni zadość powyższemu warunkowi t. j. jeżeli mamy proporcję

$$AL : LB = m : k,$$

wówczas dwusieczne: wewnętrzna i zawnętrzna kąta $\sphericalangle L$ muszą przechodzić przez punkty C, D, dzielące wewnętrznie i zewnętrznie odcinek AB proporcjonalnie do m i k. Ale dwusieczne te są zawsze do siebie prostopadłe (dlaczego?), a więc $\sphericalangle CLD$ jest prosty i punkt L leży istotnie na kole, którego średnicą jest odcinek CD.



Rys. 235.

II. Odwrotnie: jeżeli L jest dowolnym punktem na kole Apolonjusza, wówczas musi być

$$AL : BL = m : k.$$

Jakoż z punktu B poprowadźmy dwa odcinki: odcinek BE, równoległy do LD i odcinek BF, równoległy do LC.

Mamy wówczas dwie proporcje:

$$\left.\begin{aligned} AL : EL &= AD : BD \\ \text{oraz} \quad AL : LF &= AC : CB \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Ponieważ jednak mamy

$$\text{zarówno} \quad AD : BD = m : k,$$
$$\text{jak} \quad AC : CB = m : k,$$

zatem proporcje (1) przybierają postać następującą:

$$\left.\begin{aligned} AL : EL &= m : k \\ AL : LF &= m : k \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Z tych proporcyj (2) widzimy, że musi być

$$EL = LF \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

gdyż istnieje tylko jeden odcinek, czwarty proporcjonalny do trzech odcinków AL, m, k.

Zwróćmy teraz uwagę na to, że

$$\sphericalangle EBF = \delta,$$

a to z powodu, iż $EB \| LD$, $FB \| LC$ i że $\sphericalangle CLD = \delta$.

Tak więc trójkąt $\triangle BEF$ jest prostokątny. Punkt L jest w nim środkiem przeciwprostokątnej [na mocy równości (3)] czyli środkiem koła opisanego. Stąd wynika, że LB jest promieniem koła opisanego i że mamy

$$LB = EL = LF.$$

Jeżeli w proporcjach (2) zastąpimy odcinki EL, LF przez LB otrzymamy

$$AL : LB = m : k.$$

Ćwiczenia XLI. 1. Odcinek AB podzielić proporcjonalnie do dwu danych odcinków m, k, opierając się na twierdzeniu § 267.

2. Czy twierdzenie § 265 pozostaje prawdziwe, jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ (rys. 232) mamy $BA = BC$?

3. Dany jest kąt prosty; zbudować pęk harmoniczny tak, by w skład jego wchodziły oba ramiona kąta prostego.

4. Jeżeli w trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$ podzielimy podstawę c na trzy równe części i punkty podziału połączymy z przeciwległym wierzchołkiem C, wówczas w ten sposób nie podzielimy kąta $\sphericalangle C$ na trzy równe części.

5. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy daną sumę boków $a + b = 8$ *cm* oraz odcinki, wyznaczone na boku c przez dwusieczną wewnętrzną kąta $\sphericalangle C$, mianowicie $u_a = 2^1/_4$ *cm*, $u_b = 3^3/_4$ *cm*. Znaleźć boki a, b trójkąta 1) zapomocą rachunku; 2) zapomocą konstrukcji.

6. W trójkącie $\triangle ABC$ bok $a = 8$ *cm*, $b = 5$ *cm*; obliczyć długość boku c, jeżeli wiemy, że różnica odcinków, na które dwusieczna wewnętrzna d_C dzieli ten bok, równa się $1^1/_2$ *cm*.

7. Obliczyć odcinki, na które bok c trójkąta $\triangle ABC$ został podzielony przez obie dwusieczne, poprowadzone z wierzchołka C. Mamy dane $a = 6$ *cm*, $b = 9$ *cm*, $c = 12$ cm.

8. Obliczyć promień koła Apolonjusza, które w trójkącie $\triangle ABC$ przechodzi przez wierzchołek A, jeżeli wiemy, że $a = 14$ *cm*, $b = 7$ *cm*, $c = 18$ *cm*.

9. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy dane boki $a = 8$ *cm*, $c = 10$ *cm*, oraz warunek, że $\sphericalangle C = 2 \sphericalangle A$. Dowieść, że odcinek a jest średni proporcjonalny

między bokiem c i odcinkiem u_a, które dwusieczna d_C wyznacza na tym boku. Obliczyć długość tej dwusiecznej oraz długość boku b.

10. W trójkącie $\triangle ABC$ prowadzimy dwusieczną wewnętrzną AA', poczem kreślimy $A'D \parallel AC$. W jakim wypadku odcinki AD, DB mogą równać się sobie? Kiedy mamy $AD \lessgtr BD$? Kiedy mamy $\frac{AD}{DB} = {}^3/_4$?

10*a*. W poprzedniem zadaniu kładziemy $a = 14\ cm$, $b = 18\ cm$, $c = 10\ cm$. Obliczyć długość odcinków $A'D$, AD, BD.

11. Jeżeli dwie dwusieczne wewnętrzne równają się sobie, to trójkąt jest równoramienny.

Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane dwa odcinki m, k, oraz

12. c, h_c i warunek, że $a : b = m : k$.
13. c, s_c „ „ $a : b = m : k$.
14. c, C „ „ $a : b = m : k$.
15. c, h_a „ „ $a : b = m : k$.
16. c, R „ „ $a : b = m : k$.
17. c, d_C „ „ $a : b = m : k$.
18. C, s_a „ „ $a : b = m : k$. [Wskazówka: zastosować metodę przekształcenia jednokładnego. Patrz ćwiczenia XXXVIII, str. 224.]
19. c, h_c i warunek, że $a : s_a = m : k$.
20. c, h_c „ „ $a : s_c = m : k$.
21. Zbudować trójkąt prostokątny $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = \mathfrak{d}$), mając dane odcinki u_a, u_b.
22. Na prostej dane są trzy punkty A, B, C; jakie jest miejsce geometryczne punktów X takich, iż $\sphericalangle AXB = \sphericalangle BXC$.
23. Na prostej dane są w porządku wskazanym cztery punkty A, B, C, D; znaleźć punkt, z którego odcinki AB, BC, CD widać pod równemi kątami.
24. Jakie jest miejsce geometryczne punktów, z których dwa dane koła $(O)r$, $(O')r'$ widać pod równemi kątami? [Wskazówka: czy na linji środków OO' są punkty, odpowiadające warunkom zadania?]
25. Na danej prostej g znaleźć punkt, z którego dwa dane koła widać pod równemi kątami.
26. Znaleźć punkt, z którego trzy dane koła widać pod równemi kątami.
27. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane u_a, u_b, s_a.

W następnem zadaniu należy uwzględnić własność, dowiedzioną w ćwiczeniu XL, 9, str. 239.

28. Na prostej dane są trzy punkty A, B, C. Wyznaczyć na tej prostej takie dwa punkty X_1, X_2, żeby C był środkiem odcinka X_1X_2 i żeby się utworzyła czwórka harmoniczna (AB, X_1X_2).

29. Dane są dwa odcinki a, b; umieścić pierwszy z nich na drugim w taki sposób, by końce tych odcinków utworzyły czwórkę punktów harmoniczną.

30. Danym promieniem r zakreślić koło tak, by przeszło ono przez dany punkt A i podzieliło harmonicznie dany odcinek BC.

---

31. Dana jest czwórka punktów harmoniczna (AB, CD); zbudować kwadrat o danym boku a tak, żeby dwie jego przekątne (lub ich przedłużenia) przechodziły przez A i B, proste zaś, łączące środki przeciwległych boków kwadratu, przechodziły przez C i D.

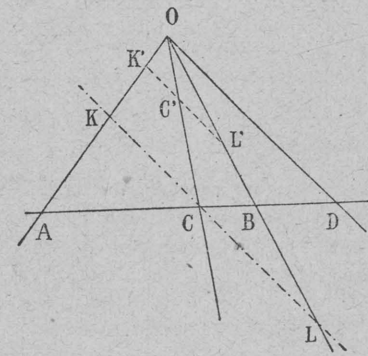
32. Dana jest czwórka harmoniczna (AB, CD); zbudować taki romb, by bok jego równał się danemu odcinkowi m, kąt równał się danemu kątowi $\sphericalangle L$ i żeby przekątne przechodziły przez punkty A i B, proste zaś łączące środki boków przeciwległych, przechodziły przez C i D.

§ 268. Twierdzenie. *Jeżeli, mając pęk prostych harmoniczny $O(AB, OD)$, poprowadzimy równoległą do prostej OD, wówczas sprzężona z nią prosta OC podzieli na połowy odcinek tej równoległej, zawarty między prostemi OA, OB.*

Wystarczy dowieść twierdzenia w przypadku, gdy równoległa przechodzi przez punkt C, jeśli bowiem $K'L' \parallel KL$ (rys. 236) oraz $CK = CL$ wówczas (zadanie 25, str. 215) musi być $C'K' = C'L'$. Prowadzimy tedy przez punkt C prostą równoległą do OD, na niej odkładamy

$$CK = CL$$

i dowiedziemy, że K leży na prostej OA.



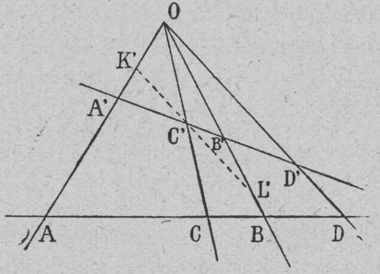
Rys. 236.

Na mocy konstrukcji, podanej w § 257, prosta OK powinna wyznaczyć punkt czwarty harmoniczny względem trzech danych punktów C, D, B. Ale z § 252 wiemy, że istnieje tylko jeden punkt, dzielący wraz z punktem B odcinek CD harmonicznie, z warunków zaś twierdzenia wiemy, że tym punktem jest A. Wobec tego prosta OK musi przechodzić przez A.

§ 269. Twierdzenie. *Przecinając pęk harmoniczny dowolną prostą, otrzymujemy czwórkę harmoniczną punktów.*

Niech będzie (AB, CD) czwórka harmoniczna punktów. Łącząc punkty te z dowolnym punktem O, otrzymujemy pęk harmoniczny $O(AB, CD)$. Jeśli teraz przetniemy nasz pęk dowolną prostą m, powiadam, że otrzymamy znów czwórkę harmoniczną punktów $(A'B', C'D')$,

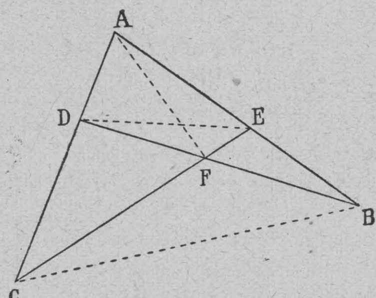
Jakoż przez C' poprowadźmy prostą $K'L'//OD$. Na mocy poprzedniego twierdzenia musi być $C'K' = C'L'$, ale z konstrukcji, podanej w § 257, wynika, że punkty A', B' dzielą harmonicznie odcinek $C'D'$, mamy więc istotnie czwórkę harmoniczną punktów $(A'B', C'D')$.



Rys. 237.

Wniosek. *Jeżeli trzy proste wychodzą z jednego punktu, wówczas istnieje jedna i tylko jedna prosta, wychodząca z tego samego punktu i tworząca z tamtemi trzema pęk harmoniczny.*

§ 270. Określenie. *Czworobokiem zupełnym nazywamy figurę, utworzoną przez cztery proste, przecinające się tak, że żadne trzy z pośród nich nie przechodzą przez jeden punkt.*



Rys. 238.

Np. na rysunku 238 proste AB, AC, DB, EC tworzą czworobok zupełny.

Czworobok zupełny posiada sześć wierzchołków (A, B, C, D, E, F) *i trzy przekątne* (AF, DE, CB).

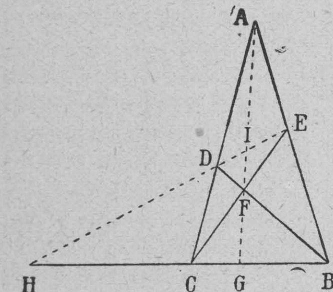
Punkty przecięcia się dwóch przekątnych nazywamy *punktami przekątnemi* czworoboku.

§ 271. Twierdzenie. *Każde dwie przekątne czworoboku zupełnego dzielą harmonicznie trzecią przekątną.*

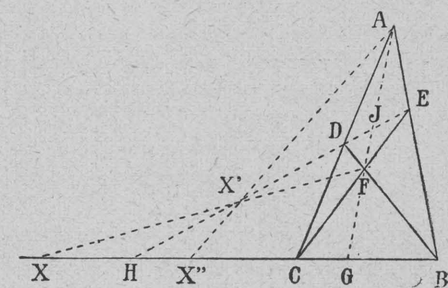
Chcemy np. dowieść, że na przekątnej CB (rys. 239) tworzy się czwórka harmoniczna (BC, GH). Na przedłużeniu odcinka BC musi istnieć jeden i tylko jeden punkt X, dzielący wraz z punktem G odcinek ten harmonicznie, czyli musi istnieć na prostej BC czwórka harmoniczna punktów (BC, GX).

Wyobraźmy sobie, że punkty tej czwórki połączyliśmy

z wierzchołkiem F czworoboku; otrzymujemy pęk harmoniczny $F(BC, GX)$. Z twierdzenia § 269 wiemy, że wystarczy przeciąć ten pęk dowolną prostą, aby otrzymać nową czwórkę harmoniczną. Przetnijmy go tedy zapomocą przekątnej DE. Gdyby punkt X nie leżał na przekątnej DE, a więc nie zlewał się z punktem H (jak na rysunku 240), wówczas musielibyśmy otrzymać czwórkę



Rys. 239.



Rys. 240.

harmoniczną (DE, JX'). Łącząc punkty tej czwórki z wierzchołkiem A czworoboku, otrzymalibyśmy pęk harmoniczny $A(DE, JX')$, a przecinając ten nowy pęk zapomocą przekątnej BC, otrzymalibyśmy na tej prostej czwórkę harmoniczną (BC, GX'').

W ten sposób istniałyby na prostej BC dwa punkty X, X'', dzielące wraz z punktem G odcinek BC harmonicznie, co jest niedorzeczne, gdyż przeczy badaniu, przeprowadzonemu w § 261—262.

Ćwiczenia XLII. 1. Jeżeli przez środek równoległoboku wykreślimy równoległe do jego boków, otrzymamy pęk harmoniczny.

2. Jeżeli w pęku harmonicznym dwie sprzężone z sobą proste są do siebie prostopadłe, wówczas są one dwusiecznemi kątów, utworzonych przez dwie drugie proste pęku.

3. Jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ poprowadzimy wysokości AA', BB', CC' i wykreślimy t. zw. trójkąt spodkowy $\triangle A'B'C'$, otrzymamy w każdym wierzchołku nowego trójkąta pęk harmoniczny.

3*a*. Na rysunku, odpowiadającym poprzedniemu zadaniu, dowieść, że wierzchołki trójkąta B, C, spodek wysokości A' i punkt X, w którym prosta $B'C'$ przecina bok BC, tworzą czwórkę punktów harmoniczną.

3*b*. Na zasadzie poprzedniego zadania dowieść, że trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

4. Wykazać, że trzy wierzchołki czworoboku zupełnego, leżące na jednym jego boku, oraz punkt przecięcia się tego boku z prostą, łączącą którykolwiek czwarty wierzchołek z punktem przekątnym, tworzą czwórkę punktów harmoniczną.

5. Wykreślić czworobok zupełny, mając dane trzy jego punkty przekątne i jeden wierzchołek.

6. Na prostej m mamy dane trzy punkty A, B, C; posługując się wyłącznie linjałem i opierając się na § 271, zbudować punkt czwarty harmoniczny.

7. Na odcinku AB mamy dany punkt C; zbudować punkt czwarty harmoniczny, nie kreśląc przedłużenia odcinka AB.

8. Wykazać, że twierdzenie § 271 jest uogólnieniem twierdzenia, iż przekątne równoległoboku dzielą się na połowy.

9. Dane są trzy proste a, b, c, przecinające się w punkcie niedostępnym; wykreślić czwartą prostą, tworzącą z niemi pęk harmoniczny.

10. Mamy dane dwie czwórki harmoniczne (AB, CD), $(AB', D'C')$, leżące na dwóch różnych prostych, lecz mające punkt spólny A; gdzie znajduje się punkt przecięcia prostych CD' i $C'D$? prostych CC', DD'?

11. Dwa pęki harmoniczne $O\ (ab, cd)$, $O'\ (ab', c'd')$ mają spólną prostą a. Jak leżą względem siebie punkty przecięcia się prostych: b z b', c z c', d z d', c z d', d z c'?

12. Zbudować pęk harmoniczny, mając daną jedną prostą pęku oraz warunek, by trzy pozostałe proste tego pęku przechodziły przez trzy dane punkty K, L M, nie leżące na jednej prostej.

13. Dane są punkty A, B, C, D, nie leżące na jednej prostej; wykreślić pęk harmoniczny tak, by proste pęku przechodziły odpowiednio przez A. B, C i D.

14. Dane są cztery proste a, b, c, d, nie przechodzące przez jeden punkt; przeciąć je piątą prostą tak, by otrzymać czwórkę punktów harmoniczną.

15. Jeżeli proste m, n, wychodzące z punktu A, przetniemy pękiem dowolnych prostych, wychodzących z punktu B, otrzymamy szereg czworoboków (zwyczajnych), których przekątne przecinają się wszystkie na jednej prostej. Prosta ta tworzy pęk harmoniczny z prostemi m, n i z prostą AB.

16. Proste dane a, b przecinają się w niedostępnym punkcie M; przez dany punkt C poprowadzić prostą CM, posługując się tylko linjałem.

17. Proste a, b są równoległe; przez dany punkt C poprowadzić trzecią równoległą, posługując się tylko linjałem. Czy zachodzi jaki związek między tem zadaniem a poprzedniem?

18. Dane są dwa punkty A, B, których nie chcemy lub nie możemy połączyć zapomocą prostej (np. dlatego, że pomiędzy punktami znajduje się przeszkoda); znaleźć punkt przecięcia się prostej AB z daną prostą m.

19. Koło, przechodzące przez punkty przekątne czworoboku zupełnego, przecina pod kątem prostym wszystkie trzy koła, wykreślone na przekątnych tego czworoboku jako na średnicach*).

---

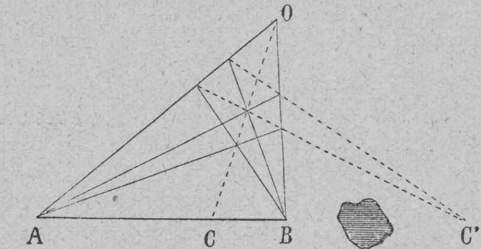
*) Czytelnikom, którzyby chcieli zapoznać się bliżej z licznemi i pięknemi zastosowaniami podziału harmonicznego i teorji biegunowych (omawianej w rozdziale następnym) polecamy dwie prace w języku polskim:

Jakób Steiner. *Konstrukcje geometryczne, wykonane zapomocą linji prostej i stałego koła.* Przełożył St. Kwietniewski. Warszawa, 1915.

M. A. Baraniecki. *Początkowy wykład syntetyczny własności przecięć stożkowych na podstawie ich pokrewieństwa harmonicznego z kołem.* Warszawa 1885.

ĆWICZENIA Z GEOMETRJI PRAKTYCZNEJ.

Opierając się na teorji jednokładności, a zwłaszcza na własnościach czworoboku zupełnego i posługując się tylko najprostszemi przyrządami, o których była mowa na str. 111, można podać nowe rozwiązania zadań, omówionych na str. 111—112, jak również rozwiązać niektóre nowe zadania.

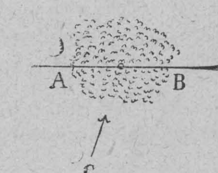


Rys. 241.

1. Posługując się tylko wytykaniem linij prostych (a więc nie posługując się węgielnicą), przedłużyć prostą AB poza przeszkodę. [Wskazówka: zadanie sprowadza się do wyznaczenia po drugiej stronie przeszkody dwóch punktów, leżących na prostej AB. Rysunek 241 podaje sposób wyznaczenia jednego z tych punktów.]

2. To samo zadanie rozwiązać zapomocą trójkątów jednokładnych (a więc posługując się węgielnicą).

3. Droga AB przechodzi przez las; z punktu C wytknąć drogę, przecinającą AB w jej punkcie środkowym, posługując się przytem własnościami trójkątów jednokładnych (rys. 242).



Rys. 242.

4. Mamy dane punkty A, A' oraz B, B' niedostępne, lecz widzialne zdaleka. Przez dany punkt K (dostępny) wytknąć prostą, któraby przechodziła również przez punkt przecięcia się prostych AA', BB'.

5. Mamy dane dwa punkty niedostępne A, B, widzialne zdaleka, lecz położone tak, że prosta AB jest w całości swej niedostępna. Przez dany punkt (dostępny) K poprowadzić równoległą do prostej AB, opierając się na przekształceniu jednokładnem.

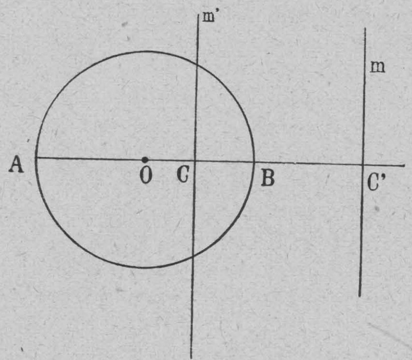
6. Rozwiązać to samo zadanie, opierając się na własnościach ortocentru lub czworoboku zupełnego.

ROZDZIAŁ VI.

O biegunach i biegunowych względem koła.

§ 272. Określenie. Niech będzie dane koło $(O)r$ i w niem średnica AB. Jeżeli punkty C, C' dzielą tę średnicę harmonicznie i jeżeli w punktach tych wystawiliśmy prostopadłe m, m' do średnicy, wówczas punkt C nazywa się *biegunem* prostej m względem danego koła, prosta zaś m nazywa się *biegunową* punktu C. Tak samo, oczywiście, punkt C' jest biegunem prostej m', ta zaś jest biegunową punktu C' względem danego koła $(O)r$.

Jeżeli punkt C zbliża się do B, wówczas harmonicznie sprzężony z nim punkt C' oraz biegunowa m zbliżają się z drugiej strony do tegoż punktu B (§ 261); jeżeli C zlewa się z B, wówczas i C' zlewa się z tym samym punktem B, biegunowa zaś m staje się styczną do koła. Jeżeli, przeciwnie, C zbliża się do środka koła O, wówczas C', a wraz z nim biegunowa m oddalają się nieograniczenie. Gdy C zlewa się ze środkiem O, punkt C' staje się punktem niewłaściwym, biegunowa zaś m staje się prostą niewłaściwą.



Rys. 243.

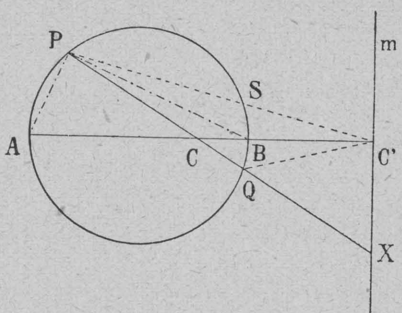
§ 273. Twierdzenie. *Jeżeli z punktu danego C poprowadziliśmy do koła dowolną sieczną, na której koło wyznacza cięciwę PQ, wówczas punkt X, stanowiący wraz z punktami P, Q, C czwórkę harmoniczną (PQ, CX), leży na biegunowej punktu C.*

Jeżeli mamy czwórkę harmoniczną punktów (AB, CC') wówczas pęk prostych P (AB, CC') musi być pękiem harmonicznym. W pęku tym dwie proste, mianowicie AP i PB, są do siebie prostopadłe (d l a c z e g o?), muszą więc one być dwusiecznemi (wewnętrzną i zewnętrzną) kąta $\sphericalangle CPC'$, czyli, że mamy

$$\sphericalangle QPB = \sphericalangle BPS,$$

a ponieważ oba te kąty są wpisane, zatem muszą równać się sobie dwa łuki:

$$\overset{\frown}{QB} = \overset{\frown}{SB}.$$



Rys. 244.

Wynika stąd, że punkty S, Q są z sobą symetryczne względem średnicy AB, albo innemi słowami: że prosta AC' jest dwusieczną kąta $\sphericalangle SC'Q$.

Jeżeli teraz zwrócimy uwagę na to, że biegunowa m jest prostopadła do tej samej prostej AC', wówczas dojdziemy do wniosku, iż proste $C'P$, $C'Q$ tworzą pęk harmoniczny z prostemi m oraz $C'A$. Otóż przecinając ten pęk zapomocą prostej PC, otrzymamy na niej czwórkę punktów harmoniczną (PQ, CX).

§ 274. Twierdzenie odwrotne (względem § 273). *Jeżeli mamy dany punkt C i jego biegunową m względem koła $(O)r$ i jeżeli dowolny punkt X biegunowej połączyliśmy z punktem C, przyczem prosta CX przecina koło w punktach P, Q, wówczas otrzymaliśmy czwórkę harmoniczną punktów (PQ, CX).*

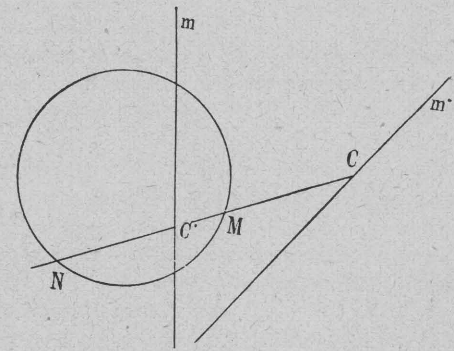
Dowód przez sprowadzenie do niedorzeczności.

§ 275. Posługując się pojęciem miejsca geometrycznego, można dwa powyższe twierdzenia ująć w jedno:

Biegunowa punktu C względem danego koła jest miejscem geometrycznem punktów X, które wraz z punktem C dzielą harmonicznie cięciwy, wyznaczone przez to koło na wszystkich siecznych, wychodzących z punktu C.

§ 276. Twierdzenie. *Jeżeli mamy dane dwa punkty C, C', przyczem punkt C leży na biegunowej punktu C', wówczas i odwrotnie: punkt C' musi leżeć na biegunowej punktu C.*

Niech prosta m' będzie biegunową punktu C' względem danego koła. Połączmy C z C' i niech prosta CC' przecina koło w punktach M, N.



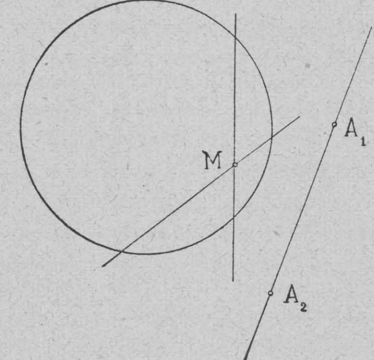
Rys. 245.

Ponieważ C leży na biegunowej punktu C', zatem, na mocy poprzedniego twierdzenia, $(NM, C'C)$ musi być czwórką punktów harmoniczną. Ale na mocy tego samego twierdzenia biegunowa m punktu C jest miejscem geometrycznem punktów, dzielących wraz z punktem C harmonicznie wszystkie cięciwy takie, jak MN: wobec tego punkt C' musi leżeć na m, czyli na biegunowej punktu C.

§ 277. Wniosek 1. *Jeżeli punkty A_1, A_2.... A_n, . . leżą na jednej prostej m, wówczas biegunowe ich przechodzą przez jeden punkt, mianowicie przez biegun prostej m*).*

Istotnie, niech biegunowe dwóch punktów A_1, A_2 przecinają się w jakimś punkcie M. Na mocy poprzedniego twierdzenia biegunowa punktu M musi przechodzić zarówno przez punkt A_1, jak i przez A_2, a więc musi nią być prosta A_1A_2 czyli prosta m.

2. *Jeżeli punkt A leży na kole, wówczas jego biegunową jest styczna, przechodząca przez A.*



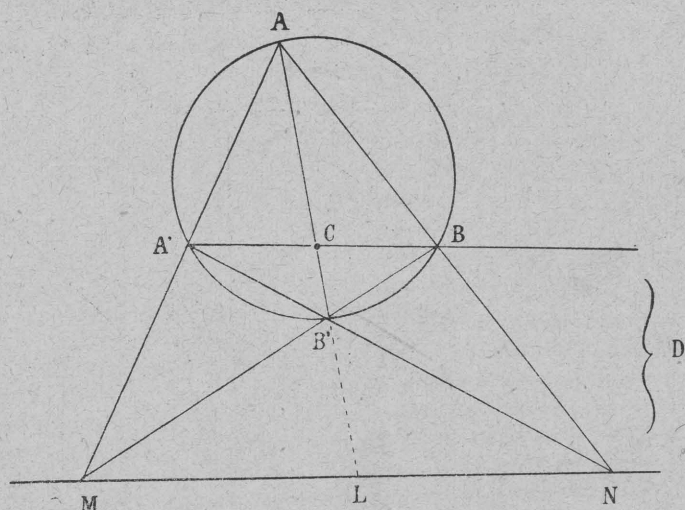
Rys. 246.

§ 278. Zadanie. *Posługując się wyłącznie linjałem, zbudować biegunową danego punktu C względem danego koła.*

*) Tę samą prawdę wyrażają niekiedy słowami: *jeżeli punkt A porusza się po prostej m, wówczas jego biegunowa obraca się dokoła stałego punktu, a mianowicie dokoła bieguna prostej m.*

Możemy oprzeć się na własnościach czworoboku zupełnego.

Wpisujemy w koło czworobok zwyczajny $AA'BB'$ tak, by C był jego punktem przekątnym, poczem przedłużamy jego boki tak, by utworzyć czworo-



Rys. 247.

bok zupełny. W takim razie dwa pozostałe wierzchołki M, N tego czworoboku zupełnego wyznaczają biegunową punktu C.

Istotnie, jeżeli proste MN oraz AB' przecinają się w punkcie L, wówczas mamy czwórkę punktów harmoniczną (AB', CL), zatem L leży na biegunowej punktu C.

Dalej, jeżeli $A'B$ i MN przecinają się w punkcie D' wówczas $(A'B, CD')$ tworzą czwórkę harmoniczną i punkt D' musi leżeć na biegunowej punktu C.

Wobec tego biegunową punktu C musi być prosta, łącząca punkty L i D', czyli prosta MN.

Ćwiczenia XLIII. 1. Z punktu zewnętrznego M poprowadziliśmy do koła styczne MS, MS'; dowieść, że biegunową punktu M jest prosta SS'.

2. Posługując się tylko linjałem, poprowadzić z danego punktu styczną do koła.

3. Posługując się tylko linjałem, zbudować biegun danej prostej. [W s k a z ó w k a: § 277, wniosek 1 oraz § 278.]

4. Jeżeli, mając dany punkt P i jego biegunową p obierzemy na prostej p dowolny punkt M i poprowadzimy z niego dwie styczne MS, MS' do koła, wówczas styczne te utworzą z prostemi p oraz PM pęk harmoniczny. [W s k a z ó w k a: na prostej SS', która musi przejść przez punkt P (d l a c z e g o?), otrzymujemy czwórkę harmoniczną.]

5. Jeżeli z dwóch punktów A, B poprowadziliśmy styczne do koła, wów-

czas punkty styczności wyznaczają czworobok zwyczajny, którego przekątne przecinają się w biegunie prostej AB.

6. Dana jest na rysunku część okręgu, który powinien przejść przez niedostępny punkt L. Prócz tego dane są proste l_1, l_2, które również powinny przejść przez ten sam punkt L. Wykreślić styczną do koła w punkcie L. [W s k a z ó w k a: szukamy biegunów prostych l_1. l_2.]

7. Jeżeli mamy czwórkę punktów harmoniczną (AB, CC'), wówczas ich biegunowe (ab, cc') tworzą pęk harmoniczny. [W s k a z ó w k a: $a \perp AO$, $b \perp BO$ i t. d., zatem $\sphericalangle (ab) = \sphericalangle AOB$ i t. d.]

8. Jeżeli na kole opiszemy kwadrat, a następnie poprowadzimy do tegoż koła dowolną piątą styczną, wówczas boki kwadratu (lub ich przedłużenia) wyznaczą na tej stycznej czwórkę punktów harmoniczną. [W s k a z ó w k a: oprzeć się na zadaniu 7-em].

9. W danem kole kreślimy cięciwę AB i przez jej końce prowadzimy styczne AX, BX. Jeżeli prosta AB obraca się dokoła stałego punktu M, wówczas miejscem geometrycznem punktu X jest biegunowa punktu M.

10. Jeżeli $ABCD$ jest czworobokiem wpisanym, wówczas biegunową punktu F, w którym przecinają się proste BC, AD, jest prosta, łącząca punkt przecięcia przekątnych BD, AC z punktem przecięcia prostych AB, CD.

11. W czworoboku wpisanym punkt przecięcia się przekątnych jest biegunem prostej, łączącej punkty przecięcia się boków przeciwległych.

12. Jeżeli w czworoboku wpisanym przedłużyliśmy boki tak, iż powstał czworobok zupełny, wówczas:

a) średnica, przechodząca przez punkt przekątny, jest prostopadła do prostej. łączącej dwa pozostałe punkty przekątne;

b) każda przekątna przecina koło w punktach styczności stycznych, poprowadzonych z trzeciego punktu przekątnego.

13. Mamy dane: prostą m i punkt M, nie leżący na niej. Zbudować koło tak, by prosta m była biegunową punktu M względem tego koła i żeby:

a) środek koła leżał na danej prostej k. [W s k a z ó w k a: środek koła wyznaczamy jako punkt przecięcia się dwóch prostych, poczem promień znajdujemy, jako odcinek średni proporcjonalny.]

b) okrąg przechodził przez dany punkt A;

c) promień równał się danemu odcinkowi;

d) koło było styczne do danej prostej a. [W s k a z ó w k a: najpierw budujemy prostą, tworzącą z trzema danemi pęk harmoniczny.]

14. Dane jest koło oraz punkt A, wewnątrz niego i prosta m, nie przecinająca koła. Wyznaczyć:

a) taki punkt na prostej m, by jego biegunowa przeszła przez A;

b) taką prostą, przechodzącą przez A, by jej biegun leżał na prostej m.

15. Dane jest koło, punkt M i prosta a; połączyć M z takim punktem X na prostej a, żeby odcinek MX został podzielony harmonicznie przez dane koło.

16. Dane są dwa koła $(O)r$ i $(O')r'$ i punkt A na pierwszem z nich. Poprowadzić w kole $(O)r$ cięciwę tak, by przeszła ona przez A i została podzielona harmonicznie przez koło $(O')r'$.

17. Dane są dwa punkty A, A' i koło $(O)r$. Przez A poprowadzić sieczną koła, przecinającą okrąg w takich punktach X, Y, że $PX : PY = P'X : P'Y$.

[Wskazówka do analizy: jeżeli z A wystawimy prostopadłą do prostej AA', wówczas punkt jej przecięcia się z prostą XY leży na biegunowej punktu A'.]

18. Dany jest czworobok $ABCD$ oraz punkt E. Wykreślić takie koło przechodzące przez E, żeby biegunowe punktów A, B, C, D względem tego koła tworzyły równoległobok. [Wskazówka do analizy: biegunowe punktów A, C mają być do siebie równoległe, a więc prostopadłe do tej samej średnicy, która winna leżeć na prostej AC.]

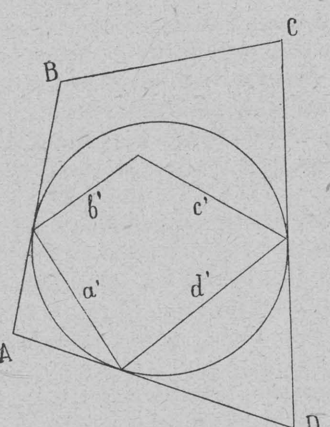
---

§ 279. Jeżeli między dwiema figurami zachodzi taki związek, jak między czworobokiem $ABCD$ i równoległobokiem w zadaniu poprzedniem, wówczas dwie te figury nazywamy *biegunowo wzajemnemi* względem danego koła. Mamy tedy następujące:

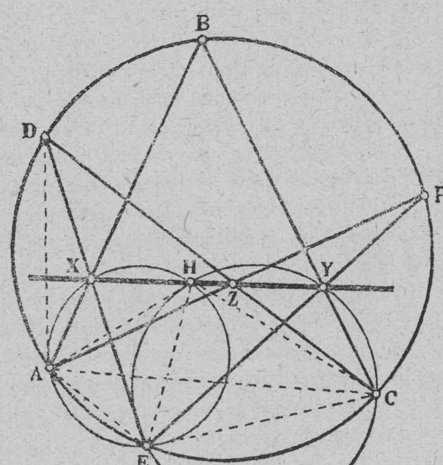
Określenie. *Dwa wielokąty nazywamy biegunowo wzajemnemi względem danego koła, jeżeli wierzchołki pierwszego wielokąta są biegunami boków drugiego i nawzajem — wierzchołki drugiego są biegunami boków pierwszego.*

Koło dane nazywają często *kołem kierowniczem figur biegunowo wzajemnych.*

Twierdzenie. *Mając dany dowolny wielokąt W i koło O, możemy zawsze*



Rys. 248.



Rys. 249.

zbudować wielokąt W', biegunowo z nim wzajemny względem tego koła i mający taką samą liczbę boków, jak wielokąt W.

Istotnie, niech $ABCD$ będzie danym wielokątem W. Biegunowe wierzchołków A, B, C, D oznaczmy przez a', b', c', d'. Punkt (a', b'), w którym przeci-

nają się proste a'; b', musi być biegunem prostej AB (dlaczego?). Tak samo punkt (b', c') musi być biegunem prostej BC i t. d.

§ 280. Pojęcie figur biegunowo wzajemnych oddać nam może duże usługi, gdyż z twierdzeń, w których mowa o pewnych własnościach punktów, można wysnuć bezpośrednio twierdzenia, dotyczące odpowiednich własności linij prostych. Zrozumiemy to najlepiej na przykładzie dwóch następujących twierdzeń.

Twierdzenie Pascala. *W każdym sześciokącie wpisanym (wklęsłym, czy wypukłym) trzy punkty przecięcia się trzech par przeciwległych boków leżą na jednej prostej.*

Niech będzie dany sześciokąt wpisany $ABCDEF$ (na rys. 249 mamy sześciokąt wklęsły). Mamy dowieść, że punkty X, Y, Z leżą na jednej linji prostej. W tym celu opiszmy koła na trójkątach $\triangle AXE$, $\triangle EYC$ i oznaczmy literą H ich punkt przecięcia się.

Ponieważ

$$\smile AE + \smile EC = \smile AC$$
$$\smile DB + \smile BF = \smile DF,$$

zatem

$$\sphericalangle AZC = \sphericalangle AXE + \sphericalangle EYC,$$

ze względu zaś na to, że

$$\sphericalangle AXE = \sphericalangle AHE, \quad \sphericalangle EYC = \sphericalangle EHC,$$

musi być

$$\sphericalangle AZC = \sphericalangle AHC,$$

czyli czworobok $ABZC$ musi być wpisany w koło.

Mamy tedy trzy czworoboki wpisane: $AHZC$, $AHXE$, $EHYC$, z których wynika, że

$\sphericalangle XHE$ spełnia się z kątem $\sphericalangle XAEE$,
$\sphericalangle EHY$ „ „ „ „ $\sphericalangle ECYY$,
$\sphericalangle XAE$ „ „ „ „ $\sphericalangle ECYY$,

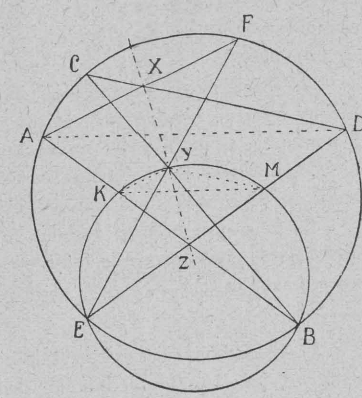
a więc $\sphericalangle XHE$ „ „ „ „ $\sphericalangle EHYY$,

co za tem idzie, punkty X, Y, H leżą na jednej prostej.

W taki sam sposób uczeń dowiedzie, że H, Z, Y leżą na jednej prostej a więc punuty X, Y, Z leżą na jednej prostej*).

---

*) Jeszcze prostszy dowód twierdzenia Pascala oprzeć można na własności trójkątów jednokładnych. Niech będzie (rys. 250) $ABCDEF$ sześciokąt wpisany. Na trójkącie BEY opisujemy koło. Trójkąty $\triangle AXD$ oraz $\triangle KYM$ mają boki odpowiednio równoległe (dlaczego?), a ponieważ proste AK, DM przecinają się w punkcie Z, zatem prosta XY musi przejść przez ten sam punkt, który jest środkiem jednokładności obu trójkątów.



Rys. 250.

§ 281. Poprowadźmy teraz styczne a, b, c, d, e, f, przez wierzchołki sześciokąta wpisanego. Otrzymamy sześciokąt opisany, biegunowo wzajemny z wpisanym. Wierzchołki przeciwległe nowego sześciokąta, np. (a, b), (d, e) są biegunami boków przeciwległych (AB, ED) sześciokąta wpisanego, wobec czego przekątne, łączące te wierzchołki, muszą być odpowiednio biegunowemi punktów X, Y, Z poprzedniego twierdzenia. Ponieważ według twierdzenia Pascala punty X, Y, Z leżą na jednej prostej, zatem biegunowe tych punktów (czyli przekątne sześciokąta opisanego) przecinają się w jednym punkcie, który jest biegunem prostej XYZ. Mamy tedy następujące

Twierdzenie Brianchona. *Przekątne każdego sześciokąta, opisanego na kole, przecinają się w jednym punkcie.*

Ćwiczenia XLIV. 1. Z twierdzeń Pascala i Brianchona otrzymujemy szereg twierdzeń o pięciokątach, czworobokach i trójkątach, zakładając, że dwa, trzy lub cztery wierzchołki sześciokąta zlewają się z sobą. Jeżeli np. w sześciokącie wpisanym $ABCDEF$ wierzchołek B zlał się z wierzchołkiem A, wówczas zamiast sześciokąta mamy pięciokąt, przyczem możemy uważać, że styczna w punkcie A zastąpiła bok AB, wobec czego otrzymujemy twierdzenie:

w pięciokącie opisanym $ACDEF$ punkty przecięcia się dwóch par boków AF, CD oraz AC, EF leżą na jednej prostej z punktem, w którym piąty bok DE przecina styczną, poprowadzoną przez przeciwległy wierzchołek A*).

2. W pięciokącie opisanym przekątne, łączące dwie którekolwiek pary wierzchołków niesąsiednich, przecinają się w jednym punkcie z prostą, która łączy piąty wierzchołek z punktem styczności boku przeciwległego.

3. W czworoboku wpisanym punkty przecięcia się przeciwległych boków leżą na jednej prostej z punktami przecięcia się stycznych, poprowadzonych przez przeciwległe wierzchołki.

4. W czworoboku opisanym proste, które łączą punkty styczności boków przeciwległych, przecinają się w tym samym punkcie, co i przekątne.

5. W trójkącie wpisanym punkty przecięcia się boków ze stycznemi, popoprowadzonemi przez wierzchołki przeciwległe, leżą na jednej prostej.

6. W trójkącie opisanym na kole, proste, łączące wierzchołki z punktami styczności boków przeciwległych, przecinają się w jednym punkcie (t. zw. *punkt Gergonne'a*)*).

7. Jeżeli przez wierzchołki czworoboku wpisanego (zwyczajnego) poprowadzimy styczne, utworzymy w ten sposób czworobok opisany (zwyczajny). Jeżeli następnie przedłużymy przeciwległe boki tych czworoboków tak, by powstały z nich dwa czworoboki zupełne, wówczas na każdej przekątnej pierwszego czworoboku leżeć muszą dwa punkty przekątne drugiego czworoboku (opisanego).

8. Z poprzedniego zadania wysnuć wniosek, że przekątne czworoboku (zupełnego) opisanego przecinają się po dwie w punktach przekątnych czworoboku wpisanego.

---

*) W zadaniach 1—4 czytelnik zastanowi się, czy twierdzenia pozostają prawdziwe, jeżeli mamy jedną lub dwie pary boków równoległych.

9. Z własności ortocentru wysnuć następujące twierdzenie, opierając się na teorji biegunowych: jeżeli w trójkącie $\triangle ABC$ z punktu H poprowadzimy proste HA, HB, HC oraz prostopadłe do nich proste, wówczas punkty M, N, P, w których te prostopadłe przecinają boki trójkąta, muszą leżeć na jednej prostej.

10. W trójkącie rozwartokątnym ortocentr jest środkiem koła, względem którego trójkąt jest sam z sobą biegunowo sprzężony (t. j. wierzchołki są biegunami przeciwległych boków).

KSIĘGA V.

O mierzeniu figur płaskich.

ROZDZIAŁ I.

O mierzeniu odcinków, kątów i wielokątów.

§ **282.** Niech będą dane dwa odcinki **spółmierne a** i **b** i niech będzie $\mathbf{a}<\mathbf{b}$. Jeżeli odcinek **a** spróbujemy odkładać na odcinku **b**, wówczas może się zdarzyć, że **a** zawierać się będzie w odcinku **b** dokładnie m razy, gdzie m jest liczbą naturalną.

Mamy wówczas

$$m\mathbf{a}=\mathbf{b};$$

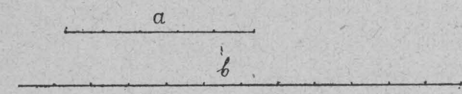
jeżeli zaś **a** przyjmiemy *za jednostkę miary*, wówczas możemy napisać

$$\mathbf{a}=1 \text{ oraz } \mathbf{b}=m.$$

Liczbę m nazywamy *miarą długości* albo poprostu *długością* odcinka **b**.

Może się jednak zdarzyć, iż odcinek **a** nie mieści się — jak to mówią — w odcinku **b** czyli, że ilekolwiek razy odłożymy na prostej odcinek **a**, nigdy nie otrzymamy odcinka, równającego się **b**: wynik będzie zawsze albo za mały, albo duży. Ponieważ jednak odcinki **a**, **b** są według naszego założenia spółmierne, t. j. posiadaję spólną miarę, istnieje więc taka liczba k, że jeśli podzielimy **a** na k części równych, wówczas taka cząstka dokładnie „mieścić

się" będzie w odcinku **b**. Innemi słowami: odkładając na prostej dostateczną ilość razy $\frac{1}{k}$-tą część odcinka **a**, otrzymamy odcinek, równający się **b**.



Rys. 251.

Przypuśćmy, że chcąc otrzymać odcinek, równający się **b**, musieliśmy s razy odłożyć $\frac{1}{k}$-tą część odcinka **a**. W takim razie piszemy

$$\frac{s}{k}\mathbf{a}=\mathbf{b};$$

jeżeli zaś **a** obierzemy jako *jednostkę miary*, wówczas możemy napisać

$$\mathbf{a} = 1 \text{ oraz } \mathbf{b} = \frac{s}{k}$$

Liczbę $\frac{s}{k}$ nazywamy miarą długości odcinka **b**. Na rys. 251 liczba $\frac{s}{k}$ równa się $\frac{12}{5}$.

§ **283.** Jak widzimy, jeżeli odcinek **b** jest spółmierny z obraną jednostką miary, wówczas istnieje zawsze liczba (całkowita lub ułamkowa), będąca miarą długości odcinka **b**.

I o d w r o t n i e: jeżeli mamy daną jednostkę miary **a** i liczbę $\frac{s}{k}$, wówczas istnieje odcinek **b**, którego miarą długości — przy danej jednostce — jest liczba $\frac{s}{k}$.

Istotnie, aby znaleźć odcinek **b**, wystarczy podzielić jednostkę miary **a** na k części równych i odłożyć na prostej s takich części.

§ **284.** Nieco inaczej przedstawia się sprawa, jeżeli odcinek **b** jest niespółmierny z odcinkiem **a**, który obraliśmy jako jednostkę miary.

Na ilekolwiek równych części podzielimy teraz jednotkę **a**, nigdy przez odkładanie tych części nie otrzymamy odcinka **b**.

Innemi słowy: niepodobna znaleźć liczby całkowitej ani ułamkowej $\frac{s}{k}$, która byłaby miarą odcinka **b**, jeżeli za jednostkę miary obraliśmy *niespółmierny* z nim odcinek **a**.

Z drugiej strony intuicja powiada nam, iż każdy odcinek powinien mieć oznaczoną długość, oznaczoną miarę. Aby wybrnąć z tej trudności, możemy postąpić w sposób następujący.

Każdy odcinek **m**, *spółmierny z jednostką*, musi być albo mniejszy albo większy od **b**. Możemy tedy wszystkie odcinki wymierne (t. j. takie, których miary są liczbami wymiernemi) podzielić na dwie klasy: do „niższej" klasy zaliczyć możemy wszystkie odcinki mniejsze od **b**, do „wyższej" zaś wszystkie od **b** większe.

Podział ten posiada następujące własności:

(1) *Każdy odcinek wymierny należy bądź do jednej, bądź do drugiej klasy;*

(2) *Każdy odcinek klasy niższej jest mniejszy od jakiegokolwiek odcinka klasy wyższej;*

(3) *W klasie niższej niema odcinka największego, w klasie wyższej zaś niema najmniejszego.*

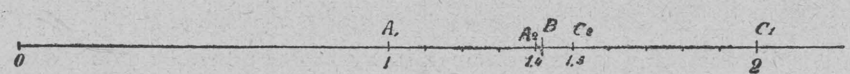
Pierwsze dwie własności są oczywiste, co zaś do trzeciej, to najlepiej wyjaśnimy ją na przykładzie.

Niech będą dane dwa odcinki niespółmierne **a**, **b**, przyczem odcinek **a** obieramy jako jednostkę miary.

Wyobraźmy sobie, iż odcinek **a** odkładamy na odcinku **b** i że „mieści się" on tylko raz jeden, przyczem pozostaje pewna reszta. Mamy tedy

$$1.\ \mathbf{a} < \mathbf{b} < 2.\ \mathbf{a}.$$

Jeżeli mamy, jak na rys. 252, $\mathbf{a} = OA_1$, $2\mathbf{a} = OC_1$, $\mathbf{b} = OB$, wówczas punkt B leżeć musi pomiędzy punktami A_1 i C_1. Podzielmy A_1C_1 na dowolną ilość równych części, np. na 10 części.



Rys. 252.

Rzecz jasna, że punkt B musi leżeć na jednym z tych odcinków cząstkowych. Jeżeli np. B leży na piątym odcinku, rachując od A_1 (jak na rysunku), wówczas mamy

$$1{,}4.\ \mathbf{a} < \mathbf{b} < 1{,}5.\ \mathbf{a}.$$

Niech A_2 i C_2 będą końcami przedziału, na którym leży punkt B. Podzielmy odcinek A_2C_2 na 10 części równych. Na jednej z nich musi znajdować się punkt B; przypuśćmy, że leży on na drugiej, rachując od punktu A_2. Jeżeli końce tego drugiego przedziału oznaczymy przez A_3 i C_3 tak, iż punkt B leży na odcinku A_3C_3, w takim razie mamy

$$OA_3 = 1{,}41.\ \mathbf{a};\ OC_3 = 1{,}42.\ \mathbf{a},$$

zatem $1{,}41.\ \mathbf{a} < \mathbf{b} < 1{,}42.\ \mathbf{a}$.

Zkolei dzielimy A_3C_3 na 10 części równych. Jeżeli punkt B leży w piątym przedziale, rachując od punktu A_3, i jeżeli końce tego piątego przedziału oznaczymy przez A_4 i C_4, w takim razie musi być

$$OA_4 = 1{,}414.\ \mathbf{a},\ OC_4 = 1{,}415.\ \mathbf{a},$$

oraz $1{,}414.\ \mathbf{a} < \mathbf{b} < 1{,}415.\ \mathbf{a}$.

Dzieląc odcinek A_4C_4 na 10 części równych, otrzymamy jeszcze mniejsze przedziały. Niech B leży na trzecim z nich, rachując od punktu A_4, i niech końcami tego przedziału będą punkty A_5, C_5. W takim razie

$$OA_5 = 1{,}4142.\ \mathbf{a},\ OC_5 = 1{,}4143.\ \mathbf{a},$$

oraz $1,\ 4142.\ \mathbf{a} < \mathbf{b} < 1{,}4143.\ \mathbf{a}$.

I t. d.

Rzecz jasna, że t a k i e p o s t ę p o w a n i e m o ż e m y c i ą g n ą ć d o n i e s k o ń c z o n o ś c i: ż a d e n p u n k t p o d z i a ł u n i e m o ż e u p a ś ć n a p u n k t B, g d y ż o d c i n e k OB j e s t n i e s p ó ł m i e r n y z o b r a n ą p r z e z n a s j e d n o s t k ą m i a r y.

Mamy tedy dwa nieskończone ciągi odcinków: jeden składa się z odcinków

$$1.\ \mathbf{a};\ 1{,}4.\ \mathbf{a};\ 1{,}41,\ \mathbf{a};\ 1{,}414,\ \mathbf{a};\ 1{,}4142.\ \mathbf{a};\ldots.$$

drugi z odcinków

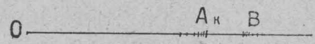
$$2.\ \mathbf{a};\ 1{,}5.\ \mathbf{a};\ 1{,}42.\ \mathbf{a};\ 1{,}415.\ \mathbf{a};\ 1{,}4143.\ \mathbf{a};\ldots.$$

Odcinki pierwszego ciągu rosną, pozostają jednak mniejsze od odcinka **b**; odcinki drugiego ciągu maleją, pozostają jednak większe od **b**. Tak więc pierwszy ciąg należy do klasy „niższej", drugi zaś do klasy „wyższej". Prócz tego jest rzeczą oczywistą, że postępując dalej w sposób powyżej wskazany, możemy znaleźć taki odcinek pierwszego ciągu OA_n i taki odcinek drugiego ciągu OC_n, że różnica między niemi (t. j. odległość punktu A_n od punktu C_n) będzie tak mała, jak się nam podoba.

Teraz łatwo już okazać, że

w klasie niższej niema odcinka największego, w klasie zaś wyższej niema najmniejszego.

Jakoż, gdyby np. istniał w klasie niższej odcinek największy OA_k, to nigdy różnica między odcinkami dwóch naszych ciągów nie mogłaby stać się mniejsza od odcinka A_kB, co jest sprzeczne z poprzedniemi rozważaniami*).



Rys. 253.

§ 285. Jeżeli w powyższych wywodach uwzględnimy, że odcinek **a** jest jednostką miary, wówczas w całem naszem rozumowaniu będziemy mogli wyrazy: „odcinek spółmierny z odcinkiem **a**" zastąpić przez wyrazy: „liczba wymierna".

W szczególności będziemy mogli powiedzieć, że wszystkie liczby wymierne podzieliliśmy na dwie klasy: na takie, które są miarami odcinków mniejszych od **b** *(klasa niższa)*, i na takie, które są miarami odcinków większych od **b** (*klasa wyższa*). Taki podział liczb wymiernych na dwie klasy nazywają zwykle **przekrojem** *w dziedzinie liczb wymiernych.*

Przekrój posiada następujące własności:

(1) *każda liczba wymierna należy bądź do niższej klasy, bądź do wyższej;*

(2) *każda klasa zawiera nieskończenie wiele liczb;*

(3) *każda liczba klasy niższej jest mniejsza od jakiejkolwiek liczby klasy wyższej;*

(4) *w klasie niższej niema liczby największej, w klasie zaś wyższej niema liczby najmniejszej.*

O takim przekroju powiadamy, że wyznacza on nową liczbę, zwaną **liczbą niewymierną,** *i tę liczbę niewymierną uważamy za miarę odcinka* **b**, *niespółmiernego z jednostką miary.*

§ 286. Każdej liczbie wymiernej odpowiada również przekrój (czyli podział liczb na dwie klasy), bardzo podobny do poprzedniego. Istotnie, mając np. daną liczbę 7, możemy wszystkie po-

*) Wyobraźmy sobie, że końce odcinków niższej klasy (czyli punkty A_1, A_2...) zaznaczyliśmy barwą czerwoną, które zaś odcinków klasy wyższej (czyli punkty C_1, C_2, C_3...) zaznaczyliśmy barwą niebieską; gdyby istniał w klasie niższej odcinek największy OA_k, wówczas istniałby odcinek A_kB, na którym nie byłoby ani czerwonych, ani niebieskich punktów. Wobec tego odległość między punktami czerwonemi i niebieskiemi nie mogłaby stać się mniejsza od odcinka A_kB.

zostałe liczby wymierne podzielić na dwie klasy: na liczby mniejsze od 7 i na liczby większe od 7.

Podział ten, jak łatwo przekonać się można, posiada własności (2), (3) i (4) przekroju poprzedniego, natomiast co do własności (1), to podlega ona pewnemu ograniczeniu, mianowicie: każda liczba wymierna, *z wyjątkiem liczby 7*, należy bądź do klasy niższej, bądź do wyższej.

§ 287. Uwaga. Rzecz jasna, że prócz powyższych czterech własności przekrój (czyli pewien podział na dwie klasy) liczb wymiernych posiada inne jeszcze własności, wynikające z powyższych.

Np. z rozważań § 284 widzimy, że w klasie niższej można znaleźć taką liczbę a_n, w wyższej zaś taką liczbę c_n, iż różnica $c_n - a_n$ będzie dowolnie mała. Na tem spostrzeżeniu polega t. zw. „przybliżone" obliczanie długości odcinka niewymiernego. Chodzi w takich razach o to, że mając dany odcinek niespółmierny z jednostką miary, zastępujemy go odcinkiem wymiernym, przyczem możemy zawsze znaleźć odcinek wymierny, którego długość tak mało różni się od odcinka niewymiernego, jak tego wymaga dane zagadnienie praktyczne.

§ 288. W § 283 mówiliśmy, że zachodzą dwa twierdzenia:

(1) każdy odcinek, spółmierny z jednostką, posiada miarę, która jest liczbą wymierną;

(2) każdą liczbę wymierną możemy uważać za miarę jakiegoś odcinka, spółmiernego z daną jednostką.

Co się tyczy odcinków niespółmiernych z jednostką, to w § 285 ustaliliśmy już coś analogicznego do twierdzenia (1), mianowicie ustaliliśmy pojęcie miary takiego odcinka. Powstaje teraz pytanie, czy znajdziemy również coś analogicznego do twierdzenia (2), czyli zachodzi pytanie:

czy każdą liczbę niewymierną możemy uważać za miarę jakiegoś odcinka?

Chcąc na to odpowiedzieć, weźmy przykład konkretny. Niech będzie dana liczba niewymierna $\sqrt{7}$. Jest ona wyznaczona przez pewien przekrój w dziedzinie liczb wymiernych czyli przez pewien sposob uklasyfikowania tych liczb. Możemy mianowicie zaliczyć do klasy niższej te liczby wymierne, których kwadraty są od 7 mniejsze, do wyższej zaś te, których kwadraty są większe od 7.

Stosując do liczby $\sqrt{7}$ znany sposób wyciągania pierwiastka kwadratowego, możemy z klasy niższej wybrać liczby, które tworzą ciąg rosnący, mianowicie:

$$2;\ 2{,}6;\ 2{,}64;\ 2{,}645;\ 2{,}6457;\ldots$$

Tak samo z klasy wyższej możemy wybrać ciąg malejący:

3; 2,7; 2,65; 2,646; 2,6458;....

Różnica między wyrazami tych dwu ciągów maleje nieograniczenie.

Obierzmy teraz dowolną prostą, na niej punkt O i po ustaleniu jednostki miary a odłóżmy na naszej prostej ciąg nieskończony odcinków:

$$OA_1 = 2: OA_2 = 2{,}6;\ OA_3 = 2{,}64;\ OA_4 = 2{,}645;....$$

oraz drugi nieskończony ciąg

$$OC_1 = 3;\ OC_2 = 2{,}7;\ OC_3 = 2{,}65;\ OC_4 = 2{,}646;....$$

Otrzymamy w ten sposób dwa ciągi punktów, które posiadają następujące własności:

1) punkty A_1, A_2, A_3.... leżą coraz dalej w prawo, punkty zaś C_1, C_2, C_3,.... leżą coraz dalej w lewo, niemniej jednak wszystkie punkty A leżą w lewo od punktów C;

2) punkty A zbliżają się nieograniczenie do punktów C, tak, iż jeśli nam kto zada dowolnie mały odcinek ε, potrafimy znaleźć taki punkt A_n i taki punkt C_n, że odcinek A_nC_n będzie mniejszy od ε.

Zachodzi pytanie, czy na prostej istnieje punkt B, oddzielający punkty A od punktów C? (Innemi słowy: czy istnieje odcinek OB, większy od wszystkich odcinków OA, lecz mniejszy od wszystkich odcinków OC?)*).

Odpowiedź na to pytanie brzmieć musi twierdząco — o tem nikt chyba nie wątpi, kto dokładnie zrozumiał zagadnienie, niemniej jednak dowieść tej prawdy nie umiemy. Zmuszeni więc jesteśmy do założenia nowego pewnika.

Pewnik VIe. *Niech będą dane na prostej dwa nieskończone zbiory punktów* A *i* C, *które spełniają dwa następujące warunki:*

*) Kto miałby trudność w zrozumieniu zagadnienia, może uciec się do następującego obrazu. Niech będą dane na prostej dwa rodzaje punktów: czerwone (A) i niebieskie (C); punkty czerwone niech się posuwają coraz dalej w prawo, niebieskie zaś w lewo, z tem jednak zastrzeżeniem, że nigdy żaden punkt czerwony nie może zamieszać się między niebieskie, ani też odwrotnie. [Własność (1).] Prócz tego zakładamy, że odległość między punktami czerwonemi i niebieskiemi maleje nieograniczenie [własność (2)]. Powstaje pytanie, czy istnieje na prostej taki punkt, który, nie należąc sam ani do grupy punktów czerwonych, ani do grupy niebieskich, oddziela od siebie obie grupy punktów?

(1) *Punkty* A *leżą coraz dalej w prawo, punkty* C *coraz dalej w lewo, przyczem jednak wszystkie punkty* A *znajdują się w lewo od punktów* C;

(2) *jakkolwiek mały byłby odcinek* ε, *możemy zawsze znaleźć taki punkt* A_n *i taki punkt* C_n, *że odcinek* $A_n C_n$ *jest mniejszy od* ε.

Jeżeli oba te warunki są spełnione, wówczas istnieje jeden i tylko jeden punkt B, *który oddziela wszystkie punkty* A *od punktów* C.

Na mocy tego pewnika możemy twierdzić, iż liczbie niewymiernej $\sqrt{7}$ (i każdej wogóle liczbie niewymiernej) odpowiada, przy danej jednostce długości, jeden i tylko jeden odcinek*).

§ 289. Analogicznie do mierzenia odcinków możemy rozwiązać zagadnienie mierzenia kątów.

Jako jednostkę obieramy kąt prosty, który dzielimy na 90 części równych, zwanych *stopniami;* stopień dzieli się na 60 *minut*, minutę na 60 *sekund.* Chcę zaznaczyć, iż kąt $\sphericalangle\alpha$ ma 10 stopni, 6 minut, 17 sekund, piszemy:

$$\sphericalangle\alpha = 10^0 6' 17''.$$

Gdyby $\sphericalangle\alpha$ był niespółmierny z obraną jednostką, wówczas pojęcie miary tego kąta ustalilibyśmy zapomocą takiego samego rozumowania, jak przy odcinkach.

Niech będzie dany np. kąt $\sphericalangle\alpha$, mający więcej niż $300''$, lecz mniej, niż $301''$ i niespółmierny z kątem, który nazwaliśmy sekundą.

Możemy podzielić sekundę na 10, 100, 1000... części równych i przekonać się, ile razy trzeba odłożyć kąt, równający się $\left(\frac{1}{10}\right)''$, $\left(\frac{1}{100}\right)''$, $\left(\frac{1}{1000}\right)''$ ..., aby otrzymać kąt cokolwiek mniejszy lub cokolwiek większy od kąta $\sphericalangle\alpha$.

Przypuśćmy, iż otrzymaliśmy następujące ciągi kątów:

$$300'' < \sphericalangle\alpha < 301''$$
$$300'',4 < \sphericalangle\alpha < 300,''5$$
$$300,''46 < \sphericalangle\alpha < 300,''47$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

*) Innemi słowy: ustaliliśmy twierdzenie proste: „każdemu odcinkowi odpowiada przekrój w dziedzinie liczb wymiernych“; aby ustalić twierdzenie odwrotne: „każdemu przekrojowi odpowiada odcinek“, musieliśmy wprowadzić nowy pewnik.

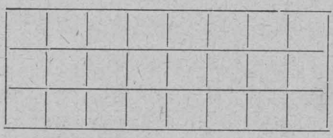
Rzecz prosta, iż powyższe postępowanie możemy ciągnąć do nieskończoności.

Ciąg rosnący liczb 300; 300,4; 300,46;....
i ciąg malejącycy 301; 300,5; 300,47;....
wyznaczają **przekrój** w dziedzinie liczb wymiernych czyli *wyznaczają pewną liczbę niewymierną, którą uważamy za miarę kąta* $\sphericalangle \alpha$.

W praktyce poprzestajemy na przybliżonem wyznaczeniu miary kąta; zatrzymujemy się mianowicie na którejkolwiek liczbie powyższych ciągów i uważamy ją za przybliżoną miarę kąta $\sphericalangle \alpha$.

§ 290. Jak z każdym odcinkiem związana jest pewna liczba, wyrażająca jego długość, tak samo z każdym wielokątem związana jest liczba, zwana *polem*. Wystarczy ustalić tę prawdę dla prostokątów.

P o l e p r o s t o k ą t a znamy z kursu gimnazjum niższego; wiemy, że gdy boki prostokąta są spółmierne z jednostką długości, wówczas pole prostokąta równa się iloczynowi długości podstawy przez długość wysokości. Liczba ta wyraża, ile w prostokącie mieści się kwadratów jednostkowych, t. j. kwadratów, których każdy bok ma jednostkę długości.



Rys. 254.

Za *jednostkę pola* uważamy właśnie pole takiego kwadratu..

Powstaje teraz pytanie: *czy pojęcie pola da się rozszerzyć na prostokąty o bokach niespółmiernych z jednostką długości?*

Przedewszystkiem przypomnijmy sobie z kursu algebry, co nazywamy iloczynem dwóch liczb niewymiernych, np. iloczynem liczb $\sqrt{2}\times\sqrt{7}$.

Pierwsza z nich, t. j. $\sqrt{2}$, jest wyznaczona przez dwie klasy liczb wymiernych:

do klasy niższej należą wszystkie liczby, których kwadraty są mniejsze od 2 (nazwijmy je liczbami a);

do klasy wyższej należą wszystkie liczby, których kwadraty są od 2 większe (nazwijmy je liczbami a').

Tak samo liczba $\sqrt{7}$ wyznaczona jest przez dwie następujące klasy liczb:

do niższej klasy zaliczamy wszystkie liczby, których kwadraty są mniejsze od 7 (nazwijmy je liczbami b);

do klasy wyższej należą liczby, których kwadraty są od 7 większe (nazwijmy je liczbami b').

Otóż iloczyn $\sqrt{2}\times\sqrt{7}$ *określamy* w algebrze jako taki przekrój, że do jego klasy niższej należą wszystkie możliwe iloczyny $a\times b$, do klasy zaś wyższej należą wszystkie iloczyny $a'\times b'$.

Ponieważ do klasy liczb a należą, między innemi, liczby

1,4; 1,41; 1,414; 14142; . . . .

liczby zaś

2; 2,6; 2'645; 2,6457; . . . .

należą do klasy b zatem do niższej klasy przekroju, wyznaczającego iloczyn $\sqrt{2}\times\sqrt{7}$, należą, między innemi, wszystkie iloczyny w rodzaju następujących:

$2\times1,4$; $2\times1,41$; 2×414; $2\times1,4142$; . . . .
$2,6\times1,4$; $2,6\times1,41$; $2,6\times1,414$, $2,6\times1,4142$, ...
i t. d.

Uczeń sam wskaże kilka liczb, należących do klasy wyższej tego samego przekroju $\sqrt{2}\times\sqrt{7}$.

§ 291. Teraz będziemy mogli z łatwością ustalić pojęcie pola w zastosowaniu do prostokąta o bokach, niespółmiernych z jednostką.

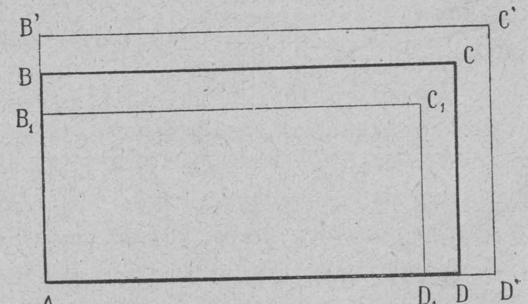
Niech będzie dany prostokąt $ABCD$, w którym długości boków wyrażają się liczbami niewymiernemi α, β. Prócz tego umówmy się, że symbolem a oznaczać będziemy każdą liczbę w y m i e r n ą, należącą do niższej klasy przekroju α, symbolem zaś a' oznaczać będziemy liczby wyższej klasy tegoż przekroju, tak, iż

$$a < \alpha < a'.$$

Tak samo niech będzie

$$b < \beta < b'.$$

Zbudujmy prostokąt $AB_1C_1D_1$, mniejszy od danego i mający boki wymierne, o r a z p r o s t o k ą t $AB'C'D'$, większy od danego i mający boki wymierne.



Rys. 255.

Długości boków AB_1, AD_1 powinniśmy oznaczyć symbolami a, b, natomiast długości boków AB', AD' musimy oznaczyć przez a', b' (d l a c z e g o?).

Pola prostokątów $AB_1C_1D_1$ $AB'\,C'\,D'$ wyrażają się odpowiednio iloczynami

$$a\times b \text{ oraz } a'\times b'.$$

Jeżeli teraz wyobrazimy sobie, że zostały pobudowane wszystkie możliwe prostokąty o bokach wymiernych, mniejsze od $ABCD$, oraz wszystkie prostokąty o bokach wymiernych większe od $ABCD$, wówczas pola tych prostokątów utworzą dwa nieskończone zbiory (dwie klasy) liczb wymiernych:

klasę niższą $a \times b$

i klasę wyższą $a' \times b'$,

które wyznaczają (zgodnie z określeniem iloczynu) liczbę

$$\alpha \times \beta.$$

Liczba ta może być sama wymierna lub niewymierna. Tę liczbę nazwiemy polem prostokąta $ABCD$.

W ten sposób zostanie zachowana znana nam z kursu propedeutyki geometrycznej

Reguła. *Aby obliczyć pole prostokąta, mnożymy przez siebie liczby, wyrażające długość podstawy i długość wysokości tego prostokąta.*

Z reguły tej wynika, że pole prostokąta jest liczbą w zupełności wyznaczoną; każdy prostokąt posiada pole i każdy ma tylko jedno pole.

§ 292. Jeżeli teraz założymy, że wielokąty równoważne mają to samo pole, otrzymamy reguły na obliczanie pól rozmaitych wielokątów.

Wiemy np. (§ 177, str. 151), że równoległobok jest równoważny prostokątowi, mającemu tę samą podstawę i wysokość. Stąd wynika

Reguła. *Aby obliczyć pole równoległoboku, mnożymy długość jego podstawy przez długość wysokości.*

§ 293. W taki sam sposób z § 180 (str. 153) wynika

Reguła. *Pole trójkąta otrzymujemy, mnożąc długość jego podstawy przez połowę długości wysokości.*

§ 294. Z § 181 (str. 163) wynika

Reguła. *Pole trapezu znajdujemy, mnożąc długość jego wysokości przez połowę sumy długości jego podstaw.*

Ćwiczenie XLV. Małemi literami oznaczaliśmy dotąd odcinki; teraz, w zadaniach rachunkowych, często posługiwać się będziemy małemi literami w celu oznaczenia długości odcinków. Gdy mowa np. o trójkącie $\triangle ABC$, litery a, b, c mogą oznaczać nietylko boki trójkąta (jak w zadaniach konstrukcyjnych), lecz również pewne liczby, będące miarami tych boków.

Każde z poniższych zadań należy rozwiązać najpierw w postaci ogólnej; potem dopiero można, w razie potrzeby, wstawić odpowiednie wartości.

1. Oznaczając przez a podstawę trójkąta, przez h jego wysokość, poprowadzoną do podstawy, napisać wzór na pole trójkąta.

1a. Napisać wzór na pole trapezu.

1b. Każdy bok trójkąta możemy uważać jako podstawę; wobec tego możemy dła każdego trójkąta utworzyć trzy iloczyny, z których każdy jest jego polem; powstaje pytanie, czy te trzy liczby są różne, czy też trójkąt ma tylko jedno pole? (porówn. zadania 14 i 15 na str. 155).

2. Podstawa trójkąta jest stała, zmieniamy natomiast jego wysokość; jak zmienia się pole?

3. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy dane: $a = 6$ cm, $b = 14$ cm, $h_a = 4$ cm; obliczyć h_b.

4. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy dane, że $h_a = 8$ cm i że zachodzi proporcja $a : b = 3 : 4$; obliczyć h_b.

5. W trójkącie $\triangle ABC$ bok a i wysokość h_a są stałe, natomiast bok b zmienia się; w jaki sposób zmienia się wysokość h_b?

6. W trójkącie $\triangle ABC$ boki a i b zmieniają się tak, że stosunek ich pozostaje stały i równa się liczbie m; czy stosunek wysokości $h_a : h_b$ zmienia się i w jaki sposób?

7. Boki prostokąta danego oznaczamy przez a i b; obliczyć podstawę x równoważnego mu trójkąta, jeżeli wysokość trójkąta oznaczyliśmy przez h.

Zastosowania:

(1) $a = 11{,}2$ cm, $b = 8{,}4$, $h = 4{,}6$ cm, x z dokładn. do 0,1 cm.

(2) $a = 13{,}4$, $b = 5{,}4$ cm, $h = 3\,x$.

(3) $a = 10$ cm, $b = 16{,}8$ cm, $h = 3\,x$; obliczyć z dokładn. do 0,1 cm.

8. Pole rombu $= S$, jedna jego przekątna $= e$, obliczyć długość f drugiej przekątnej.

Zastosowanie:

$S = 40{,}38$ cm^2, $e = 16{,}2$ cm, f z dokładnością do 1 cm.

9. Wyrazić pole trójkąta jako funkcję jego obwodu $2\,p$ i promienia koła, wpisanego ρ.

Zastosowanie $2\,p = 72{,}16$ cm, $\rho = 4{,}8$ cm; obliczyć pole z dokładnością do 1 cm^2.

10. Bok rombu $= a$, pole jego $= s$. Obliczyć promień ρ koła wpisanego.

Zastosowanie: $a = 24{,}08$ cm, $s = 164$ cm^2; obliczyć ρ z dokładnością do 0,1 cm.

11. Pole trapezu $= s$, wysokość $= h$, różnica obu podstaw $= k$; obliczyć długości obu podstaw.

Zastosowanie: $s = 45$ cm^2, $h = 4{,}5$ cm, $k = 3{,}6$ cm.

12. W prostokącie $ABDC$ prowadzimy z wierzchołka A do boku BC odcinek AK, który dzieli pole prostokąta w stosunku $m : n$. Obliczyć długość odcinka BK.

13. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy daną podstawę c, wysokość h_c oraz warunek, iż $a : b = k : m$, gdzie k i m są to dwie liczby dane. Obliczyć pola obu trójkątów, na które trójkąt dany został podzielony przez dwusieczną kąta $\sphericalangle C$.

14. Trójkąt $\triangle ABC$ przecięto prostą KL, równoległą do AB; znaleźć

wzory na pola obu figur, na które został podzielony trójkąt $\triangle ABC$, jeżeli wiadomo, iż wysokość jego h została podzielona w stosunku 1 : 4.

15. Trapez, którego podstawy równają się odpowiednio a cm i b cm, wysokość zaś ma h cm, przecięto prostą, równoległą do podstawy tak, iż wysokość została podzielona w stosunku 1 : 2. Obliczyć pola obu części, na które podzieliliśmy trapez.

§ 295. Z pojęć długości odcinka i pola wielokąta wynikają inne sformułowania wielu prawd geometrycznych, poznanych w rozdziałach poprzednich.

Np. w § 242 (str. 210) podaliśmy następujące określenie odcinków proporcjonalnych:

cztery odcinki a, b, c, d tworzą proporcję, jeżeli prostokąt, zbudowany z a i z d, jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z b i z c.

Zważywszy, że prostokąty równoważne mają równe pola, a pole prostokąta równa się iloczynowi długości dwóch jego boków, możemy to samo określenie sformułować tak:

o czterech odcinkach a, b, c, d *powiadamy, że tworzą proporcję i piszemy:*

$$a : b = c : d,$$

jeżeli zachodzi równość dwóch iloczynów:

$$a\,d = b\,c$$*).

Rzecz prosta, że w tem nowem określeniu mowa właściwie o *długości odcinków.*

W szczególności jeżeli a jest odcinkiem średnim proporcjonalnym między b i c, wówczas mamy

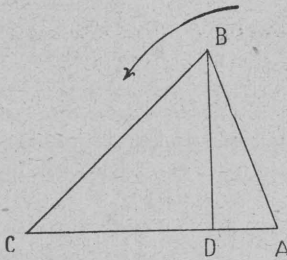
$$a^2 = b\,c.$$

§ 296. Twierdzenie Pitagorasa i jego uogólnienia przybierają następujące formy, dogodne do wielu obliczeń:

$a^2 + b^2 = c^2$	(tw. Pitagorasa)
$a^2 + b^2 - 2b.\ CD = c^2$	(kwadrat boku przeciwległego kątowi ostremu)
$a^2 + b^2 + 2b.\ CD = c^2$	(kwadrat boku przeciwległego kątowi rozwartemu).

*) Jest to, jak widzimy, równoznaczne z określeniem równości dwóch ułamków: „ułamki $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ są sobie równe, jeżeli $ad = bc$".

Uwaga. Jeżeli prócz długości odcinków uwzględniać będziemy ich zwroty, wówczas każdemu odcinkowi odpowiadać będzie liczba względna. Jeżeli np. powiemy, że odcinek $MN = 5$ cm, to odcinek $NM = -5$ cm. Uwzględniając tę umowę, możemy (jak w § 196, uwaga 2) przekonać się, że mamy tu właściwie do czynienia z jednem tylko twierdzeniem nie zaś z trzema różnemi twierdzeniami.



Rys. 256.

Istotnie, jeżeli wyobrazimy sobie, że bok BC trójkąta obraca się dokoła punktu C w zwrocie, zaznaczonym strzałką na rys. 256, wówczas rzut CD maleje, wskutek czego we wzorze

$$a^2 + b^2 - 2b.\ CD = c^2$$

wyraz $-2b.\ CD$ maleje co do wartości bezwzględnej. Gdy kąt $\sphericalangle C$ jest prosty, mamy $CD = 0$ i wzór przybiera postać

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

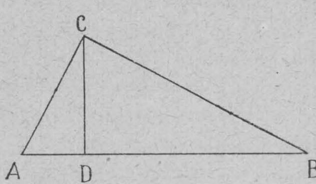
Jeżeli wreszcie kąt $\sphericalangle C$ staje się rozwarty, rzut CD ma zwrot przeciwny temu, który miał poprzednio, a więc i znak jego musiał się zmienić na przeciwny; jeżeli długość odcinka CD wyrażaliśmy liczbą dodatnią, teraz wyrażamy ją liczbą ujemną, i odwrotnie.

Uwzględniając to, otrzymujemy w tym wypadku wzór

$$a^2 + b^2 + 2b.\ CD = c^2.$$

§ 297. Jeżeli w trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$, w którym kąt $\sphericalangle C$ jest prosty, oznaczymy wysokość CD przez h, rzuty zaś przyprostokątnych na przeciwprostokątną przez r_a, r_b, wówczas z twierdzeń § 191 i 197 otrzymamy następujące bardzo ważne wzory:

$$h^2 = r_a \,.\, r_b \quad \ldots \quad (1)$$
$$a^2 = c \,.\, r_a \quad \ldots \quad (2)$$
$$b^2 = c \,.\, r_b \quad \ldots \quad (3).$$



Rys. 257.

co wyrażamy słowami:

W trójkącie prostokątnym wysokość, poprowadzona z wierzchołka kąta prostego, jest średnią proporcjonalną między odcin-

kami, na które dzieli przeciwprostokątną, każda zaś przyprostokątna jest średnią proporcjonalną między całą przeciwprostokątną a swoim rzutem na nią.

Ćwiczenia XLVI. 1. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy dane boki $a=6$ cm. $b=14$ cm, $c=9$ cm. Jakiego rodzaju jest ten trójkąt i jak wielki jest rzut boku c na bok a?

2. Mamy dane dwa odcinki $a=16$ cm, $b=20$ cm, z których chcemy zbudować trójkąt rozwartokątny i w tym celu dobieramy odpowiedniej długości trzeci odcinek c. Jak wielki powinien być ten odcinek c, jeżeli chcemy, żeby kąt $\sphericalangle C$ był rozwarty?

2a. To samo pytanie w założeniu, iż kąt $\sphericalangle B$ ma być rozwarty.

3. W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$, w którym kąt $\sphericalangle C$ jest prosty, mamy dane: $r_a=2$ cm, $r_b=30$ cm. Obliczyć boki i wysokość trójkąta.

4. Dowieść, iż w trójkącie prostokątnym, w którym c jest przeciwprostokątną, mamy zawsze

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}.$$

5. W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$ (gdzie $\sphericalangle C=\delta$) mamy dane $r_a:r_b=1{,}25$ oraz $h=16$; obliczyć boki trójkąta.

6. W poprzedniem zadaniu niech będą dane.

$$r_a:r_b=3:4;\ a^2-b^2=12.$$

7. Przekątne rombu równają się odpowiednio 8 cm i 9 cm; obliczyć jego bok z dokładnością do 1 mm.

8. Znaleźć wzór na wysokość i na pole trójkąta foremnego, którego bok $=a$.

9. Mamy dane 3 odcinki o długości 1 m, 2 m i 3 m; czy możemy powiększyć je wszystkie o ten sam odcinek x tak, żeby z odcinków powiększonych można było zbudować trójkąt prostokątny?

10. Dane jest koło $(O)r$ i punkt zewnętrzny A. Prosta OA przecina koło w punktach B i B'; obliczyć długość stycznej, poprowadzonej z punktu A, jeżeli mamy dane, że $AB=k$.

Zastosowanie: $r=6$ cm, $k=14$ cm; obliczyć długość stycznej z dokładnością do 0,1 cm.

11, Dane są dwa koła $(O)r$ i $(O')r'$; obliczyć długości ich spólnych stycznych wewnętrznych i zewnętrznych.

Zastosowanie: $OO'=8$ cm, $r=2$ cm, $r'=4$ cm.

12. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy dane: $a=13$ cm, $\sphericalangle A=120^0$, $b+c=15$ cm Obliczyć boki b i c.

13. W koło $(O)r$ wpisać prostokąt, mając daną różnicę dwóch jego boków $=k$ To samo zadanie rozwiązać zapomocą rachunku, t. j. obliczyć boki a, b mając dane, że $a-b=k$.

14. Obliczyć promień koła, opisanego na trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$, mając dane, że $a=b=10$ cm; $h_c=6$ cm.

[W s k a z ó w k a: Wysokość CD przedłużamy aż do przecięcia się w punkcie E z kołem opisanem, poczem badamy trójkąt $\triangle EAC$.]

15. W poprzedniem zadaniu obliczyć:

1) promień koła wpisanego;

2) odległość środka O koła opisanego od boku c;

3) odległość OW, gdzie W jest środkiem koła wpisanego

16. Promienie dwóch przecinających się kół równają się 30 cm i 26 cm, wspólna ich cięciwa $=48$ cm; obliczyć odległość ich środków.

17. Do koła o promieniu r poprowadzono styczne $AB=AC=a$; obliczyć odległość między punktami styczności.

18. W trapezie równoramiennym $ABCD$ mamy dane wszystkie boki; obliczyć jego wysokość i pole.

Zastosowanie: $a=8$ cm, $b=4$ cm, $d=10$ cm; obliczyć h z dokładnością do 1 mm. Z jaką dokładnością obliczyć możemy pole, posługując się znalezioną wartością na h?

19. W kole dana jest średnica AB i równoległa do niej cięciwa CD. Uważając jako znane odcinki $AC=k$, $AD=m$, obliczyć:

1) podstawy trapezu $ABCD$;

2) jego pole.

20. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy dane: $a=21$ cm, $b:c=3:8$; $\sphericalangle A=\frac{3}{2}\delta$ obliczyć bok c.

21. W trójkącie $\triangle ABC$ mamy dane: $\sphericalangle A=\frac{4}{3}\delta$; $b=12$ cm, $a=28$ cm; obliczyć bok c.

22. Obliczyć z dokładnością do 1 cm^2 pole rombu, którego większa przekątna $f=108$ cm, mniejsza zaś e równa się bokowi a rombu.

23. Niech będzie dany trapez równoramienny $ABCD$, w którym $a=c$. Oznaczmy połowę sumy podstaw przez m, połowę ich różnicy przez k, pole trapezu przez S, wysokość przez h, przekątną przez f. Dowieść następujących wzorów:

1) $h=\sqrt{a^2-k^2}$; $f=\sqrt{a^2+bd}=\sqrt{h^2+m^2}$

2) $h=\dfrac{\sqrt{(a+b+f)\ (a+b-f)\ (b+f-a)\ (a+f-b)}}{2a}$

24. W trapezie równoramiennym mamy dane: większą podstawę d, boki $a=c$ oraz warunek, że $\sphericalangle A=\sphericalangle D=\frac{1}{2}\delta$. Obliczyć pole trapezu oraz pole trójkąta, który powstaje wskutek przedłużenia boków AB, CD.

Zastosowanie: $a=14$ cm, $d=36$ cm.

25. Opierając się na uogólnionem tw. Pitagorasa, dowieść, że w każdym równoległoboku suma kwadratów przekątnych równa się sumie kwadratów czterech jego boków.

26. Na mocy poprzedniego zadania otrzymać wzór na środkową trójkąta, jeżeli mamy dane trzy jego boki.

27. Sprawdzić następujący wzór na długość dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie:

$$d^2_A=\frac{bc[b+c]^2-a^2]}{(b+c)^2}.$$

28. Znaleść analogiczny wzór dla dwusiecznej kąta zewnętrznego.

29. Jeżeli w czworoboku opisanym na kole przekątne są do siebie prostopadłe, wówczas iloczyny przeciwległych boków równają się sobie. Wyobraźmy sobie, że w czworoboku opisanym $ABCD$ kąt $\sphericalangle A$ rośnie, dążąc do kąta półpełnego, przekątne jednak pozostają zawsze do siebie prostopadłe. W co zamienia się figura? W co zamienia się twierdzenie powyższe?

30. Jeżeli dwie cięciwy, przecinające się wewnątrz koła, są do siebie

prostopadłe, wówczas suma kwadratów czterech ich odcinków równa się kwadratowi średnicy.

31. W trapezie suma kwadratów przekątnych równa się sumie kwadratów boków więcej podwojony iloczyn obu podstaw.

32. Pole trójkąta prostokątnego równa się iloczynowi dwóch odcinków, na które punkt styczności koła wpisanego dzieli przeciwprostokątną.

33. Punkt styczności koła wpisanego dzieli przeciwprostokątną c w stosunku $m : n$; obliczyć długość promienia koła wpisanego i pole trójkąta.

34. W trójkącie ostrokątnym $\triangle ABC$ zachodzą następujące związki:

$$h_b = h_a\,,\ BH = \frac{1}{4} h_b\,,\ AH = h_a\,,$$

gdzie H oznacza ortocentr trójkąta. Obliczyć: 1) boki trójkąta; 2) wysokość jego; 3) pole. [W s k a z ó w k a: uwzględnić podobieństwo trójkątów.]

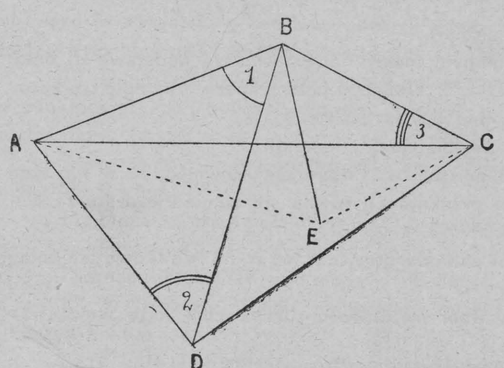
35. W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$, w którym $h_c > \frac{c}{2}$ oraz $a=b$, wyrazić następujące wielkości jako funkcje zmiennych h_c i c:

1) długości odcinków, na które ortocentr dzieli wysokość h_c;

2) pole trójkąta $\triangle AB'C$, gdzie B' jest spodkiem wysokości, poprowadzonej z wierzchołka B.

36. J e ż e l i m a m y d a n e d w a p u n k t y n i e r u c h o m e A, A' o r a z p u n k t C, k t ó r y p o r u s z a s i ę p o p ł a s z c z y ź n i e w t a k i s p o s ó b, i ż r ó ż n i c a k w a d r a t ó w j e g o o d l e g ł o ś c i o d p u n k t ó w A i A' j e s t s t a ł a, w ó w c z a s C k r e ś l i p r o s t o p a d ł ą d o p r o s t e j AA'. [W s k a z ó w k a: wykreślić prostopadłą CC' i zastosować dwukrotnie tw. Pitagorasa.]

37. **Twierdzenie Ptolemeusza***). *W czworoboku wpisanym w koło iloczyn przekątnych równa się sumie iloczynów boków przeciwległych.*



Rys. 258.

Twierdzenie przeciwne. *Jeżeli czworobok nie daje się wpisać w koło, wówczas iloczyn przekątnych nie równa się sumie iloczynów boków przeciwległych, a mianowicie jest mniejszy od tej sumy.*

Zacznijmy od twierdzenia przeciwnego. Jeżeli na czworoboku $ABCD$ nie można opisać koła, wówczas powiadam, że

$$AC \,.\, BD < AB \,.\, CD + AD \,.\, BC.$$

*) Klaudjusz Ptolemeusz, największy astronom czasów starożytnych, nauczał w Aleksandrji w II w. po Chr. Ptolemeusz był autorem słynnej hipotezy, objaśniającej ruchy układu planetarnego w założeniu, że słońce i planety krążą dokoła ziemi. Dopiero Kopernikowi udało się obalić tę hipotezę.

Ponieważ $\sphericalangle$ 3 nie równa się kątowi $\sphericalangle$ 2, możemy przypuścić, że $\sphericalangle$ 2 jest od $\sphericalangle$ 3 większy. Uczyńmy $\sphericalangle BCE = \sphericalangle 2$ oraz $\sphericalangle EBC = \sphericalangle 1$.

Ponieważ $\triangle BCE \sim \triangle ABD$, zatem

$$AD \,.\, BC = BD \,.\, CE \quad . \ . \ . \ . \quad (1)$$

$$AB \,.\, BC = BD \,.\, BE \quad . \ . \ . \ . \quad (2)$$

Z równości (2) i z tego, że $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CBD$, wynika, iż $\triangle ABE \sim \triangle BCD$, zatem

$$AB \,.\, CD = BD \,.\, AE \quad . \ . \ . \ . \quad (3)$$

Z równości (1) i (3) mamy

$$AB \,.\, CD + AD \,.\, BC = BD\,(AE + CE), \quad . \ . \ . \quad (4),$$

a ponieważ

$$AE + CE > AC,$$

zatem twierdzenie jest dowiedzione.

Z wzoru (4) uczeń sam otrzyma dowód twierdzenia Ptolemeusza.

Twierdzenie Ptolemeusza wraz z twierdzeniem przeciwnem dają nam nowy sposób poznania, czy cztery punkty leżą czy nie leżą na jednym okręgu.

Jakie inne twierdzenia służą do tego samego celu?

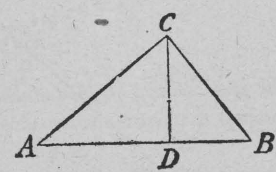
§ 298. Wzór Herona. Zwykła reguła na obliczanie pola trójkąta nie jest dogodna przy pomiarach w naturze, gdyż prowadzenie wysokości w trójkącie byłoby czynnością kłopotliwą i trudną do dokładnego wykonania. Natomiast, mając dany jakiś kawał ziemi lub inny przedmiot w kształcie trójkąta, możemy z wystarczającą w praktyce dokładnością zmierzyć jego boki, które, jak wiemy, wyznaczają trójkąt.

To spostrzeżenie nasuwa nam następujące zagadnienie: o b l i c z y ć p o l e t r ó j k ą t a, m a j ą c d a n e t r z y j e g o b o k i.

Oznaczając pole trójkąta $\triangle ABC$ przez S, wysokość CD przez h, mamy wzór

$$S = \frac{ch}{2},$$

z którego należy wyrugować wysokość h.



Rys. 259.

Z trójkąta $\triangle ACD$ otrzymujemy

$$h^2 = b^2 - AD^2.$$

Z $\triangle ABC$ zaś mamy

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,AD \,.\, c\,,$$

zatem

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2$$

$$= \frac{4c^2b^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} = \frac{(2cb + b^2 + c^2 - a^2)\,(2cb - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2}$$

$$= \frac{[(b+c)^2 - a^2]\,[a^2 - (b-c)^2]}{4c^2}$$

$$= \frac{(b+c+a)\,(b+c-a)\,(a+b-c)\,(a-b+c)}{4c^2}$$

Jeżeli teraz oznaczymy obwód trójkąta $\triangle ABC$ przez $2p$, wówczas będziemy mieli

$$a+b+c=2p$$
$$a+b-c=2(p-c)$$
$$a-b+c=2(p-b)$$
$$b+c-a=2(p-a).$$

Wobec tego

$$h^2=\frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4c^2}.$$

Tak więc $S=\frac{ch}{2}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

§ 299. Badając pola wielokątów podobnych, natrafiamy na następujące twierdzenie, mające liczne zastosowania, zwłaszcza przy obliczaniu powierzchni i objętości brył.

Twierdzenie. *Pola podobnych wielokątów mają się do siebie tak, jak kwadraty boków odpowiednich.*

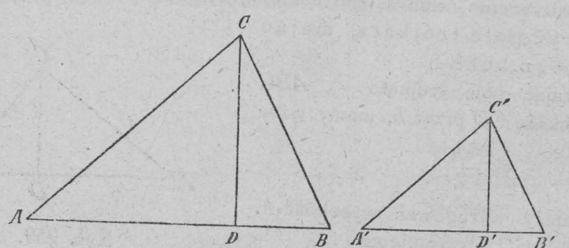
I. Twierdzenia dowiedziemy najpierw dla trójkątów.

Jeżeli mamy dane dwa trójkąty podobne

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

i jeżeli wykreślimy w nich wysokości CD, $C'D'$, wówczas musi być również

$$\triangle ACD \sim \triangle A'C'D' \qquad \text{(dlaczego?)}$$



Rys. 260.

Oznaczając pola trójkątów danych odpowiednio przez S i S', wysokości zaś CD i $C'D'$ przez h i h', mamy (§ 293), str. 268):

$$\frac{S}{S'}=\frac{ch}{c'h'},$$

Z trójkątów $\triangle ACD$, $\triangle A'C'D'$ mamy

$$\frac{h}{h'}=\frac{b}{b'}, \text{ a więc również } \frac{h}{h'}=\frac{c}{c'} \qquad \text{(dlaczego?)}$$

czyli $\frac{S}{S'}=\frac{c^2}{c'^2}$.

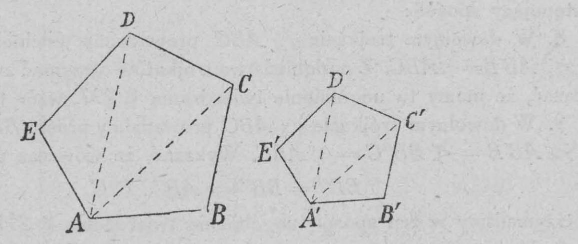
do proporcji Jeżeli jest kilka ułamków równych, to suma ... do sumy ... jak jeden ... do swego ... ~~do~~ ~~...~~

II. Niech będą dane np. dwa podobne pięciokąty.

Oznaczmy boki ich odpowiednio przez $a_1, a_2, \ldots, a_5$ oraz $a'_1; a'_2, \ldots a'_5$.

Mamy $\frac{a_1}{a'_1}=\frac{a_2}{a'_2}= \ldots =\frac{a_5}{a'_5}.$

Jeżeli podzielimy nasze wielokąty w jednakowy sposób na trójkąty (np. zapomocą przekątnych, jak na rysunku 261), wówczas otrzymamy szereg podobnych trójkątów. Oznaczając ich pola przez $S_1, S_2, \ldots$, mamy



Rys. 261.

$$\frac{S_1}{S'_1}=\frac{S_2}{S'_2}=\frac{S_3}{S'_3}=\frac{a_1^2}{a'^2_1};$$

zatem

$$\frac{S_1+S_2+S_3}{S'_1+S'_2+S'_3}=\frac{a'^2_1}{a'^2_1}.$$

Cwiczenia XLVII. 1. Wykazać, że pola podobnych trójkątów mają się do siebie tak, jak kwadraty ich wysokości, środkowych, dwusiecznych, promieni kół wpisanych lub opisanych.

2. W trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$, w którym $\sphericalangle C = \delta$, obliczyć wysokość CC' jako funkcję przeciwprostokątnej, jeżeli wiemy, że $S_{\triangle ACC'} : S_{\triangle BCC'} = m^2 : n^2$ i że $r_a : c = k : l$, gdzie k, l, m, n, są to liczby dane.

3. Pole trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$ równa się k^2; obliczyć pole trójkąta $\triangle ACC'$, jeżeli wiadomo, że $a : r_a = m$ i że CC' jest wysokością.

4. W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$

bok $c = 40$ cm, a $S_{\triangle CC'A} : S_{AA'C} = 3:4$;

obliczyć długość odcinka BA', jeżeli A', C' są spodkami wysokości.

5. W trójkąt równoramienny $\triangle ABC$ wpisano koło, dotykające równych boków a i b odpowiednio w punktach A_1, B_1. Obliczyć promień koła wpisanego, jeżeli wiemy, że $c = 60$ cm i że pole czworoboku A_1CB_1W jest 3 razy mniejsze od pola trójkąta $\triangle ABC$.

6. Trójkąt $\triangle ABC$ przeciąć prostą równoległą do boku a tak, by podzielić jego pole w stosunku $9 : 16$.

Twierdzenie § 299 opiera się jedynie na pojęciach pola i podobieństwa, natomiast nigdzie w dowodzie nie opieraliśmy się na tw. Pitagorasa. Jest więc ono niezależne od tw. Pitagorasa i może stanowić podstawę dowodu tego twierdzenia.

7. Dowieść twierdzenia Pitagorasa, opierając się na tem, że wysokość dzieli trójkąt prostokątny na trójkąty podobne.

Twierdzenie Pitagorasa i tw. §§ 296, 297 dadzą się z łatwością uogólnić w następujący sposób:

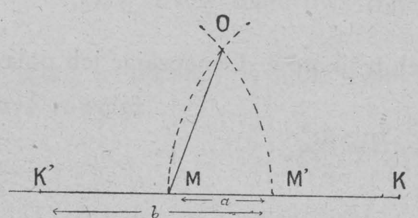
8. W dowolnym trójkącie $\triangle ABC$ prowadzimy odcinek BB' tak, żeby było: $\measuredangle AB'B = \measuredangle ABC$. Z podobieństwa trójkątów otrzymać związek $c^2 = b . AB'$ i wykazać, że mamy tu uogólnienie twierdzenia § 297, wzór (2).

9. W dowolnym trójkącie $\triangle ABC$ prowadzimy proste BB', BB'' tak, żeby było: $\measuredangle AB'B = \measuredangle BB''C = \measuredangle ABC$. Wykazać, że wówczas mamy:

$$BB'^2 = BB''^2 = AB' \,.\, B''C$$

i że otrzymaliśmy w ten sposób uogólnienie twierdzenia § 297, wzór (1).

10. Z zadania 8-go wysnuć uogólnienie tw. Pitagorasa.



Rys. 262.

11. Uzasadnić następującą konstrukcję odcinka średniego proporcjonalnego. Niech będą dane odcinki a i b. Na dowolnej prostej odkładamy odcinek $MM' = a$ oraz odcinki $MK = M'K' = b$, poczem kreślimy koła $(K)b$ i $(K')b$, przecinające się w punkcie O. Mamy $MO^2 = ab$.

12. Na zadaniu 9-em można oprzeć nową konstrukcję odcinka średniego proporcjonalnego.

ROZDZIAŁ II.

O potędze punktu względem koła, o osiach pierwiastnych i o pękach kół.

---

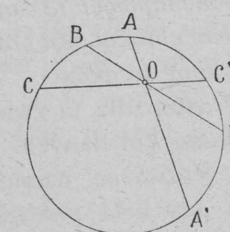
§ 300. W §§ 198—201 (str. 175) poznaliśmy szereg twierdzeń o linjach stycznych i siecznych do koła. Wszystkie te twierdzenia dadzą się wysłowić inaczej i ująć w jedno następujące

Twierdzenie. *Jeżeli koło przecina proste, należące do jednego pęku, wówczas wyznacza na każdej z nich po dwa odcinki, mie-*

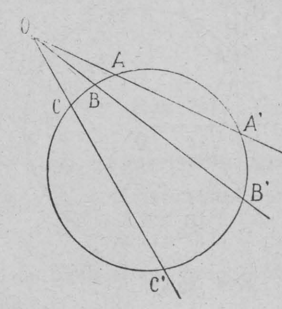
rzone od wierzchołka pęku; iloczyn tych odcinków jest wielkością stałą dla danego wierzchołka i danego koła.

W szczególności iloczyn ten równa się kwadratowi stycznej poprowadzonej z wierzchołka pęku, jeżeli wierzchołek ten leży zewnątrz koła.

Gdyby uczeń nie znał własności, o których mowa w §§ 198—201, może dowieść twierdzenia niniejszego bezpośrednio. Wystarczy np.



Rys. 263.



Rys. 264.

na rys. 263 połączyć B z C i B' z C', aby otrzymać dwa trójkąty podobne $\triangle OBC \sim \triangle OB'C'$ (dlaczego?), z których wynika odrazu, że

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OC'}{OB'},$$

czyli

$$OB \,.\, OB' = OC \,.\, OC'.$$

Uczeń sam zbuduje dowody dla przypadku, gdy wierzchołek pęku leży poza kołem i gdy rozważymy 1) odcinki, wyznaczone na dwóch dowolnych siecznych; 2) odcinki, wyznaczone na siecznej i stycznej.

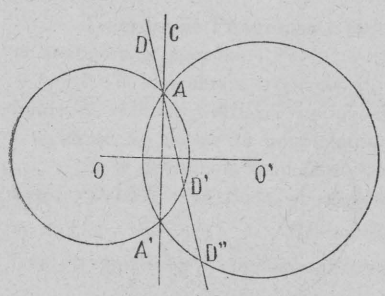
Stały iloczyn, o którym mowa w twierdzeniu, nazywa się *potęgą punktu* (mianowicie wierzchołka pęku) *względem koła.*

Zwróćmy uwagę, że jeśli wierzchołek O leży wewnątrz koła, wówczas odcinki, wyznaczone na każdej siecznej, mają zwroty przeciwne (jak np. OA, OA' na rys. 263), a więc długości ich wyrażają się liczbami o znakach przeciwnych (jeśli więc długość OA uważamy za liczbę dodatnią, to długość OA' musi być liczbą ujemną, i odwrotnie).

Jeżeli natomiast wierzchołek O leży zewnątrz koła, wówczas odcinki OA, OA' i t. d. mają wszystkie ten sam zwrot, a więc długości ich są liczbami o tym samym znaku.

Wynika stąd, że potęga punktu, leżącego wewnątrz koła, jest liczbą ujemną, potęga zaś punktu zewnętrznego jest liczbą dodatnią.

Jaką liczbą wyraża się potęga punktu, leżącego na okręgu koła?



Rys. 265.

§ 301. Twierdzenie. *Jeżeli mamy dane dwa koła* $(O)r$, $(O')r'$. *wówczas miejscem geometrycznem punktów, mających tę samą potęgę względem obu kół, jest prostopadła do ich linji środków.*

Prostopadła ta zwie się *osią pierwiastną* kół danych.

I. Rozważmy najpierw przypadek, gdy koła przecinają się. Każdy punkt C, leżący na przedłużeniu spólnej cięciwy, AA', ma jednakową potęgę względem obu kół, mianowicie równającą się iloczynowi $CA \,.\, CA'$.

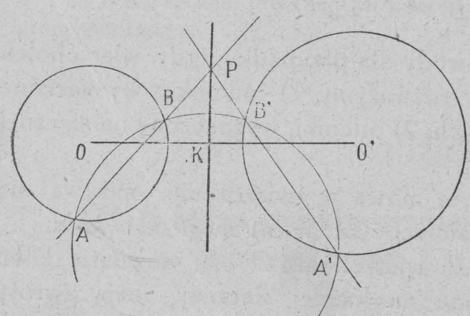
Po wtóre, żaden inny punkt D płaszczyzny nie posiada tej własności, gdyż w takim razie mielibyśmy (rys. 265).

$$DA \,.\, DD' = DA \,.\, DD''$$

czyli

$$DD' = DD'',$$

co jest niedorzeczne.



Rys. 266.

II. Jeżeli dane koła nie przecinają się, wówczas przecinamy je oba dowolnem trzeciem kołem (rys. 266); wspólne cięciwy AB, $A'B'$ niech się przecinają w punkcie P. Punkt ten ma jednakową potęgę względem obu danych kół $(O)r$ i $(O')r'$ (dlaczego?). Powiadam, że prosta PK, prostopadła do linji środków OO', jest żądanem miejscem geometrycznem.

Istotnie, jeżeli wprowadzimy następujące oznaczenia (rys. 267):

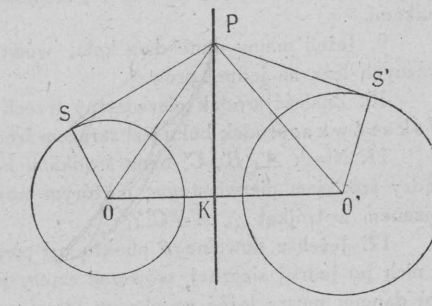
$$PS = PS' = t, PO = a,$$

$$PO' = b,$$

wówczas musi być

$$t^2 = a^2 - r^2 = b^2 - r'^2,$$

zatem $a^2 - b^2 = r^2 - r'^2$.



Rys. 267.

Ponieważ $r^2 - r'^2$ jest wielkością stałą (dlaczego?) zatem punkt P posiada tę własność, że różnica kwadratów jego odległości od dwóch stałych punktów O, O' jest stałą. Wynika stąd, że miejscem geometrycznem punktu P jest prostopadła PK. (Ćwiczenia XLVI, 36, str. 274).

Ćwiczenia XLVIII*). 1. Zbudować oś pierwiastną dwóch kół, nie posługując się zwykłą konstrukcją prostopadłej.

2. Zbadać, jak zmienia się położenie osi pierwiastnej dwóch kół $(O)r$, $(O')r'$, jeżeli koło $(O)r$ jest nieruchome, drugie zaś koło $(O')r'$ przesuwamy po płaszczyźnie. W szczególności zastanowić się nad położeniem osi pierwiastnej, jeżeli

1) koła są do siebie styczne wewnętrznie lub zewnętrznie,

2) jedno leży wewnątrz drugiego,

3) koła są spółśrodkowe.

3 Niech będą dane na płaszczyźnie trzy koła $(O)r$, $(O')r'$, $(O'')r''$, których środki O, O', O'' nie leżą na jednej prostej. Dowieść, że trzy osie pierwiastne tych kół przecinają się w jednym punkcie.

Pnnkt ten nazywa się *środkiem pierwiastnym trzech kół.*

4. Odszukać środek pierwiastny trzech kół, których środki leżą na jednej prostej.

4a. Czy zawsze istnieje środek pierwiastny czterech kół?

5. Czy można odnaleźć środek pierwiastny trzech kół, stycznych do siebie w tym samym punkcie A?

6. Jeżeli ze środka pierwiastnego poprowadzimy styczne do wszystkich trzech kół, wówczas ich punkty styczności znajdą się na okręgu czwartego koła, przecinającego trzy koła dane pod kątem prostym**).

7. Ortocentr trójkąta jest środkiem pierwiastnym kół, wykreślonych na bokach trójkąta jako na średnicach.

---

*) Uczeń może, prócz wymienionych poniżej zadań, rozwiązać ćwiczenia XXX, na str. 177, stosując poznane pojęcia miary odcinka i tw. § 300 zamiast pojęcia równoważności prostokątów.

**) Kątem między dwiema linjami krzywemi nazywamy kąt między stycznemi, poprowadzonemi do tych krzywych w ich punkcie przecięcia się.

8. Ortocentr trójkąta jest środkiem pierwiastnym trzech kół, których średnicami są odcinki wysokości trójkąta, zawarte między ortocentrem a wierzchołkami.

9. Jeżeli mamy dane dwa koła, wówczas środki wszystkich ich spólnych stycznych leżą na jednej prostej.

10. Znaleźć środek pierwiastny trzech kół zawpisanych trójkąta $\triangle ABC$. [Wskazówka: środek boku jest zarazem środkiem spólnej stycznej do dwóch kół.]

11. Niech A', B', C' będą środkami boków a, b, c. Jaki związek zachodzi między środkiem pierwiastnym, o którym mowa w zadaniu poprzedniem, a kołem wpisanem w trójkąt $\triangle A'B'C'$?

12. Jeżeli z dowolnego punktu osi pierwiastnej dwóch kół poprowadzimy do nich po jednej siecznej, wówczas cztery punkty przecięcia się siecznych z kołami danemi muszą leżeć na okręgu trzeciego koła.

13. Dana jest prosta m i punkt A, nie leżący na niej. Łączymy A z dowolnym punktem P prostej m i na prostej AP obieramy taki punkt Q, że $AP \cdot AQ$ jest wielkością stałą. Co kreśli punkt Q, gdy punkt P przesuwa się po prostej m?

14. Dane są dwa koła $(O)r$ i $(O')r'$ oraz dwie liczby k^2 i m^2. Znaleźć na płaszczyźnie taki punt P, żeby jego potęga względem pierwszego koła równała się k^2; względem drugiego równała się m^2.

15. Każdy punkt możemy uważać jako koło o promieniu równającym się zeru. Czem wobec tego jest potęga jednego punktu względem drugiego?

15 a. Zbudować oś pierwiastną danego koła $(O)r$ i danego punktu M.

16. Danym promieniem r zakreślić koło, przecinające dwa dane koła pod kątem prostym.

17. Danym promieniem r zakreślić koło, przechodzące przez dany punkt A i przecinające pod kątem prostym inne dane koło.

18. Wykreślić koło, przecinające pod kątem prostym trzy dane koła.

19. Dane są dwa koła. Wykreślić trzecie koło, przecinające dwa pierwsze pod kątem prostym tak, żeby styczna do tego trzeciego koła, poprowadzona z danego punktu A, równała się danemu odcinkowi m.

20. Miejscem geometrycznem środków kół, przecinających dwa dane koła $(O)r$, $(O')r'$ według średnic, jest prosta, symetryczna z osią pierwiastną tych dwu kół względem środka odcinka OO'.

21. Wykreślić koło, przecinające dwa dane koła według średnic, trzecie zaś dane koło pod kątem prostym.

---

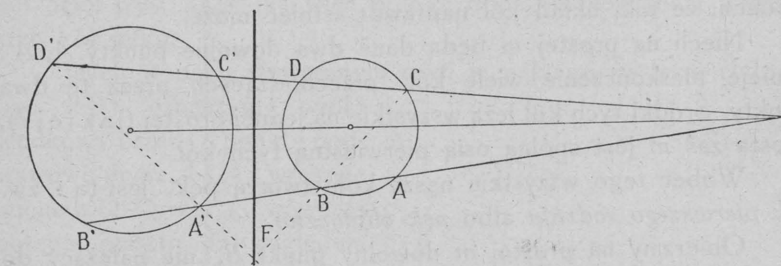
22. Jeżeli ze środka jednokładności J (lub J') dwóch kół poprowadzimy sieczną, przecinającą koła w punktach P, Q, P', Q' tak, iż P i P' odpowiadają sobie, wówczas musi być

$$JP \cdot JQ' = JQ \cdot JP'.$$

23. Co dzieje się z iloczynami, o których mowa w zadaniu poprzedniem, jeżeli sieczną obracamy dokoła środka jednokładności?

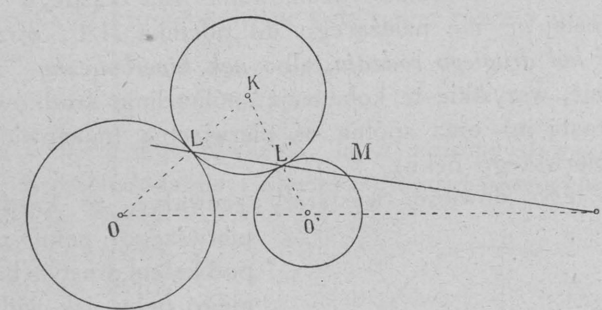
24. Ze środka jednokładności J prowadzimy dwie sieczne, przecinające jedno dane koło w punktach A, B, C, D, drugie zaś w punktach A', B', C', D'.

Dowieść, że wszystkie nieodpowiadające sobie cięciwy (np. $A'D'$ oraz BC) przecinają się na osi pierwiastnej kół [Wskazówka: B, C, A', D', leżą na jednym okręgu. Dlaczego?]



Rys. 268.

25. Jeżeli wykreślimy dowolne koło, styczne do dwu danych kół $(O)r$, $(O')r'$, wówczas prosta, łącząca punkty styczności, musi przejść przez środek jednokładności kół danych. [Wskazówka: dowieść, iż $O'M // OL$.]



Rys. 269.

26. Kiedy w poprzedniem zadaniu prosta LL' przechodzi przez środek jednokładności zewnętrzny, kiedy zaś przez wewnętrzny?

27. Jeżeli wykreślimy dwa koła styczne do dwu danych kół, wówczas oś pierwiastna którejkolwiek pary kół przechodzi przez środek jednokładności drugiej pary. Jakie ograniczenie należy wprowadzić, dotyczące rodzaju styczności?

---

28. Dane są punkty A, B i koło $(O)r$. Znaleźć taki punkt X, żeby było $AX=XB$, oraz żeby odcinek AX równał się stycznej, poprowadzonej z punktu X do koła danego.

29. Wykreślić dwa koła, mając dane ich środki, oś pierwiastną i środek jednokładności zewnętrzny.

§ **302. Określenie.** *Pękiem kół nazywamy wszystkie koła, mające spólną linię środków i spólną oś pierwiastną.*

Wprowadzając pojęcie pęku kół, musimy wykazać na przykładach, że taki układ kół naprawdę istnieć może.

Niech na prostej m będą dane dwa dowolne punkty A, A'. Istnieje nieskończenie wiele kół, przechodzących przez te dwa punkty. Środki tych kół leżą wszystkie na jednej prostej (j a k i e j ?), prosta zaś m jest spólną osią pierwiastną tych kół.

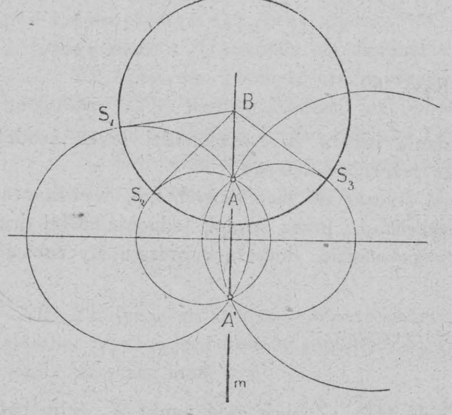
Wobec tego wszystkie nasze koła tworzą pęk. Jest to t. zw. *pęk pierwszego rodzaju* albo *pęk eliptyczny.*

Obierzmy na prostej m dowolny punkt B, nie należący do odcinka AA'. Z punktu B możemy poprowadzić styczne BS_1, BS_2,... do wszystkich kół pęku; styczne te równają się sobie, zatem punkty S_1, S_2, S_3, ... leżą wszystkie na jednym okręgu, którego środkiem jest punkt B.

Powtarzając to samo rozumowanie dla każdego innego punktu prostej m, nie należącego do odcinka AA', otrzymamy t. zw. *pęk kół drugiego rodzaju,* albo *pęk hiperboliczny.*

Istotnie, wszystkie te koła mają spólną linję środków (mianowicie prostą m) oraz spólną oś pierwiastną (mianowicie linję środków pierwszego pęku).

Aby tego dowieść, wystarczy zauważyć, że każde koło pierwszego pęku przecina pod kątem prostym koła drugiego pęku, jak widać z rysunku (d l a c z e g o ?).



Rys. 270.

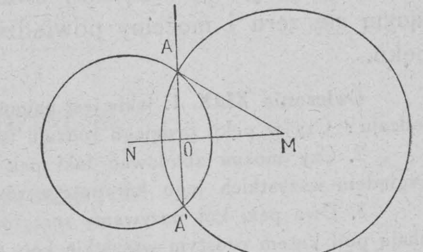
Punkt przecięcia się linji środków wszystkich kół pęku z osią pierwiastną tych kół nazywa się *punktem środkowym pęku.*

§ 303. Cechą charakterystyczną pęku kół pierwszego rodzaju jest to, że wszystkie koła pęku przechodzą przez dwa stałe punkty, zwane *punktami podstawowemi pęku.* Wobec tego punkt środkowy pęku leży wewnątrz każdego

z kół pęku, potęga więc jego względem kół pęku wyraża się zawsze liczbą ujemną (rys. 271).

W pęku kół drugiego rodzaju punkt środkowy leży zewnątrz kół pęku (rys. 272), ma więc potęgę dodatnią względem wszystkich kół pęku.

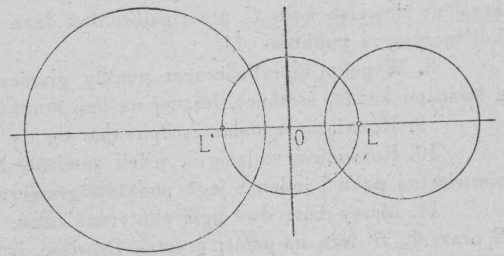
Jeżeli w pęku eliptycznym czyli w pęku pierwszego rodzaju (rys. 271) oznaczymy punkt środkowy przez O, punkty podstawowe przez A i A', wreszcie odcinek OA przez k, wówczas potęga punktu O względem każdego koła pęku wyrazi się iloczynem długości odcinków OA i OA' czyli równać się będzie liczbie ujemnej $-k^2$. Oznaczając przez d odległość od O do środka M któregokolwiek koła pęku, przez r promień tego koła mamy:



Rys. 271.

$$r^2 = d^2 + k^2 \ldots (2)$$

Jak widać z tego równania, na d możemy dawać wszelkie możliwe wartości dodatnie i ujemne: długość promienia r będzie zawsze liczbą rzeczywistą (d l a c z e g o ?). Znaczy to, że każdy punkt na linji środków MN może być środkiem koła, należącego do pęku.



Rys. 272.

Jeżeli natomiast mamy do czynienia z pękiem drugiego rodzaju (rys. 272), wówczas, oznaczając przez k^2 potęgę punktu O względem kół pęku, mamy

$$r^2 = d^2 - k^2 \ldots (2),$$

skąd wynika, że musi być

albo $d < -k$, albo $d > k$ (d l a c z e g o ?).

Dowodzi to, że jeśli po obu stronach punktu O odłożymy odcinki $OL = k$, $OL' = -k$, wówczas na odcinku LL' nie może znajdować się środek żadnego z kół pęku.

Punkty L, L' nazywamy *punktami granicznemi pęku drugiego rodzaju*, a to dlatego, że przy $d = \pm k$ mamy z równania (2)

$$r = 0$$

tak, że punkty L, L' możemy uważać za koła o promieniu równającym się zeru i możemy powiedzieć, że te dwa koła należą do pęku.

Ćwiczenia XLIX. 1. Jakie jest najmniejsze koło w danym pęku pierwszego rodzaju? Czy w pęku drugiego rodzaju istnieje koło najmniejsze?

2. Czy można zbudować taki pęk kół, by punkt środkowy pęku miał względem wszystkich jego kół potęgę równającą się zeru *(pęk paraboliczny)?*.

3. Dwa pęki kół nazywamy *sprzężonemi*, jeżeli koła jednego pęku przecinają pod kątem prostym wszystkie koła drugiego pęku i odwrotnie.

Wykazać, że pęk hiperboliczny jest sprzężony z eliptycznym, jeżeli linja środków pierwszego jest osią pierwiastną drugiego.

4. Jeżeli mamy dane dwa pęki sprzężone, wówczas punkty graniczne jednego są punktami podstawowemi drugiego pęku.

5. Dane są dwa punkty graniczne pęku hiperbolicznego; zbudować taki pęk.

6. Dane jest jedno koło pęku hiperbolicznego i jeden punkt graniczny; zbudować pęk.

7. Mamy dane dwa koła pęku hiperbolicznego; zbudować to koło pęku, które przechodzi przez dany punkt A. [W s k a z ó w k a: przez dany punkt A kreślimy dowolne koło C, przecinające dwa dane koła, środek pierwiastny trzech kół łączymy z punktem A.]

8. W pęku hiperbolicznym punkty graniczne są harmonicznie sprzężone z końcami każdej średnicy, leżącej na linji środków.

9. Rozwiązać zadanie 7, opierając się na zadaniu 8-em.

10. Rozwiązać zadanie 7, jeżeli zamiast dwóch kół pęku mamy daną oś pierwiastną pęku i jeden z jego punktów granicznych.

11. Mamy dane dwa pęki eliptyczne takie, że ich punkty podstawowe A, B oraz A', B' leżą na jednej prostej. Dowieść, iż spólne cięciwy kół obu pęków przecinają się wszystkie w jednym punkcie, leżącym na prostej AA'.

12. Koła pęku eliptycznego dzielą na odcinki proporcjonalne każdą sieczną, poprowadzoną przez jeden z punktów podstawowych pęku.

13. Dane są punkty podstawowe pęku eliptycznego oraz koło $(O)r$, nie należące do pęku; zbudować to koło pęku, które przecina pod kątem prostym koło $(O)r$.

14. Zbudować koło, należące do danego pęku i styczne do danego koła $(O)r$,

15. Jeżeli prosta przecina dwa koła pęku w punktach A, B oraz A', B'. oś zaś pierwiastną w punkcie C, wówczas odcinki AA', BB' widać pod kątem prostym ze wszystkich punktów okręgu, którego środkiem jest O i które przecina pod kątem prostym oba koła dane.

16. Niech będzie dany pęk hiperboliczny i dowolny stały punkt A; dowieść, że biegunowe puktu A względem wszystkich kół pęku przechodzą przez stały punkt A'. Punkt ten jest średnicowo przeciwległy punktowi A w kole ALL', gdzie L i L' są punktami granicznemi pęku. [W s k a z ó w k a: jeżeli dwa koła przecinają się pod kątem prostym, wówczas każde z nich dzieli harmonicznie średnice drugiego koła.]

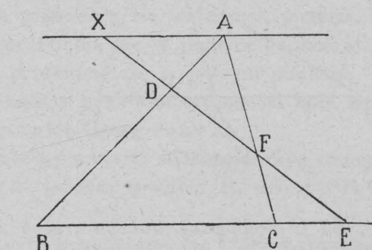
17. Biegunowa punktu granicznego względem dowolnego koła pęku przechodzi przez drugi punkt graniczny.

ROZDZIAŁ III.

O poprzecznych.

§ 304. Twierdzenie Menelaosa*). *Jeżeli przetniemy trójkąt ABC dowolną prostą DEF, wówczas otrzymamy na jego bokach lub na ich przedłużeniach sześć odcinków, rachując od wierzchołków trójkąta, przyczem iloczyn trzech odcinków, nie mających spólnych końców, równa się iloczynowi trzech drugich odcinków czyli*

$$AD \,.\, BE \,.\, CF = AF \,.\, CE \,.\, BD.$$



Rys. 273.

Przez A poprowadźmy równoległą do boku BC. Niech poprzeczna spotyka tę równoległą w punkcie X. Z trójkątów podobnych (j a k i c h?) mamy:

$$\frac{CF}{CE} = \frac{AF}{AX}$$

$$\frac{BE}{BD} = \frac{AX}{AD}$$

Skąd przez pomnożenie mamy

$$\frac{CF \,.\, BE}{CE \,.\, BD} = \frac{AF}{AD}$$

czyli

$$AD \,.\, BE \,.\, CF = AF \,.\, CE \,.\, BD.$$

§ 305. Twierdzenie przeciwne (w z g l ę d e m § 304). *Jeżeli na bokach trójkąta $\triangle ABC$ lub na ich przedłużeniach mamy dane trzy punkty D, E, F, nie leżące na jednej prostej, wówczas iloczyn odcinków AD . BE . CF nie może równać się iloczynowi trzech pozostałych odcinków AF . CE . BD.*

Istotnie, jeżeli prosta DE (rys. 274) przecina bok AC (lub jego przedłużenie) w punkcie F', wówczas mamy

$$AD \,.\, BE \,.\, CF' = AF' \,.\, CE \,.\, BD,$$

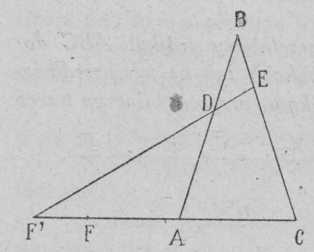
---

*) Matematyk aleksandryjski; żył i działał za panowania Trajana i Domicjana (koniec I wieku po Chr.).

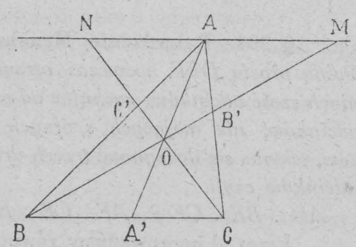
czyli $$\frac{AD \cdot BE}{CE \cdot BD} = \frac{AF'}{CF'} \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Gdybyśmy mieli, wbrew naszemu twierdzeniu,
$$AD \cdot BE \cdot CF = AF \cdot CE \cdot BD,$$
wówczas byłoby $$\frac{AD \cdot BE}{CE \cdot BD} = \frac{AF}{CF} \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$
Z równości (1) i (2) wynikałoby, że
$$\frac{AF'}{CF'} = \frac{AF}{CF}$$
czyli na odcinku AC istniały dwa punkty F, F', dzielące go oba wewnętrznie (lub oba zewnętrznie) w tym samym stosunku, co jest rzeczą niemożliwą.

§ 306. Twierdzenie Cevy*). *Jeżeli proste, łączące wierzchołki trójkąta* $\triangle$ *ABC z dowolnym punktem O, przecinają przeciwległe boki trójkąta w punktach*



Rys. 274.



Rys. 275.

A', B', C', wówczas iloczyn trzech odcinków, nie mających spólnych końców $AC' \cdot BA'$, CB' równa się iloczynowi trzech pozostałych odcinków $A'C$ $B'A$. $C'B$.

Przez wierzchołek A poprowadźmy równoległą do boku BC. Niech N, M będą punktami przecięcia się tej równoległej z prostemi BB', CC'. Z podobieństwa trójkątów (j a k i c h?) mamy
$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{AM}{NA}$$
$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{BC}{AM}$$
$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{NA}{BC},$$
skąd przez pomnożenie wynika, że
$$AC' \cdot BA' \cdot CB' = A'C \cdot B'A \cdot C'B.$$

---

*) J a n C e v a, wybitny matematyk włoski, dowiódł tego twierdzenia wraz z wieloma innemi zapomocą rozważań, opartych na mechanice, w dziele *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio*, w 1678 r.

§ 307. Twierdzenie odwrotne (w z g l ę d e m § 306). *Jeżeli na bokach trójkąta mamy dane takie trzy punkty A', B', C', iż*
$$AC' \cdot BA' \cdot CB' = A'C \cdot B'A \cdot C'B,$$
wówczas proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie.

Jakoż niech proste AA', BB' przecinają się punkcie O i niech prosta CO przecina bok przeciwległy w punkcie X'. Na zasadzie tw. Cevy powinno być
$$AX' \cdot BA' \cdot CB' = A'C \cdot B'A \cdot X'B$$
zatem musi być również
$$\frac{AX'}{X'B} = \frac{AC'}{C'B}$$
czyli na boku AB istnieją dwa punkty C' i X', dzielące ten bok wewnętrznie w tym samym stosunku, co jest niedorzeczne.

Ćwiczenia L. Twierdzenia Menelaosa i Cevy wraz z twierdzeniami odwrotnemi (lub przeciwnemi) dają nam nowy sposób rozpoznawania, czy trzy dane punkty leżą czy nie leżą na jednej prostej, oraz czy trzy dane proste przecinają się w jednym punkcie.

1. Dowieść, że dwusieczne trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
2. Dowieść, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
3. Dowieść, że wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
4. Proste, łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności koła wpisanego przecinają się w jednym punkcie (p u n k t G e r g o n n e'a).
5. Proste, łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności tego samego koła zawpisanego, przecinają się po trzy w jednym punkcie (t. zw. p u n k t y d o ł ą c z o n e G e r g o n n e'a).
6. Proste, łączące wierzchołki trójkąta z punktami, w których przeciwległe im boki dotykają kół zawpisanych, przecinają się w jednym punkcie (t. zw. p u n k t N a g e l a).
7. Spodki trzech dwusiecznych zewnętrznych trójkąta leżą na jednej prostej.
8. Spodki dwóch dwusiecznych wewnętrznych i trzeciej zewnętrznej leżą na jednej prostej.
9. Dowieść istnienia prostej Simsona (ćwiczenia XIX, 36, str. 110) zapomocą tw. odwrotnego do Menelaosa.
10. **Tw. Ponceleta.** Jeżeli wierzchołki wielokąta o nieparzystej liczbie boków połączymy z dowolnym punktem, otrzymamy na przeciwległych jego bokach takie odcinki, iż iloczyn wszystkich odcinków, nie mających spólnych końców, równa się iloczynowi pozostałych odcinków.
11. Środki przekątnych czworoboku zupełnego leżą na jednej prostej.
12. Jeżeli mamy dane trzy koła, wówczas każda para posiada po dwa środki jednokładności. Te środki jednokładności leżą po trzy na czterech prostych, zwanych osiami jednokładności trzech kół danych, a mianowicie: trzy środki jednokładności zewnętrzne leżą na jednej osi, a prócz tego każdy środek zewnętrzny leży na jednej osi z dwoma środkami wewnętrznemi, nie sprzężonemi z nim.

W ten sposób osie jednokładności są bokami czworoboku zupełnego, którego przekątnemi są linje środków kół danych.

13. **Twierdzenie Pascala.** (Porównaj str. 254, § 280.) Jeżeli mamy dany sześciokąt wpisany w koło, wówczas punkty przecięcia się trzech par przeciwległych boków leżą na jednej prostej. [Wskazówka: do trójkąta utworzonego przez punkty przecięcia się trzech par boków (a, c), (c, e), (e, a), stosujemy trzykrotnie tw. Menelaosa, uważając trzy pozostałe boki za poprzeczne.]

14. Z wierzchołków trójkąta $\triangle ABC$ prowadzimy trzy proste AA', BB', CC', przecinające się w jednym punkcie. Jeżeli punkty A'', B'', C'' są symetryczne z punktami A', B', C' względem środków boków a, b, c, wówczas proste AA'', BB'', CC'' przecinają się też w jednym punkcie.

---

15. W trójkącie foremnym $\triangle ABC$ odkładamy na bokach c, b odcinki $AC' = CB' = k$; prosta BC' przecina w punkcie A' prostą BC. Obliczyć długość odcinka BA'.

16. W trójkącie $\triangle ABC$ dzielimy boki a, b, c odpowiednio w punktach A', B', C' w stosunku $m : n$. Jeżeli proste CC', AA' przecinają się w punkcie K, wówczas mamy

$$AK : AA' = mn : (m^2 - mn + n^2).$$

ROZDZIAŁ IV.

O zastosowaniu algebry do rozwiązywania zadań konstrukcyjnych.

§ 308. Zadanie konstrukcyjne da się zawsze sprowadzić do wyznaczenia jednego lub kilku punktów. Punkt możemy znaleźć, jeżeli znamy jego odległości od dwóch stałych punktów. Często się zdarza, że z warunków zadania możemy łatwo obliczyć te odległości, a wówczas rozwiązanie zadania konstrukcyjnego sprowadza się do następującego zadania:

zbudować odcinek, mając dany wzór, który wyraża zależność między odcinkiem szukanym a innemi, danemi odcinkami.

Przekonamy się zaraz, że zadanie to potrafimy rozwiązać zapomocą cyrkla i linjału, o ile związek między odcinkiem szukanym a odcinkami danemi wyraża się równaniem 1-go lub 2-go stopnia (innemi słowami: o ile odcinek szukany jest funkcją stopnia 1-go lub 2-go odcinków danych).

§ 309. Istotnie, jeżeli między odcinkiem x a odcinkami da-

nemi zachodzi związek 1-go stopnia, wówczas możemy zawsze sprowadzić go do postaci

$$ax = b$$

czyli $$x = \frac{b}{a}$$

albo inaczej: $$\frac{x}{1} = \frac{b}{a}.$$

Jak widzimy, odcinek szukany x jest odcinkiem czwartym proporcjonalnym względem odcinków $a, b, 1$, odcinek zaś czwarty proporcjonalny budować umiemy.

§ 310. Jeżeli związek między odcinkiem x a odcinkami danemi wyraża się równaniem 2-go stopnia, wówczas możemy mu nadać jedną z czterech następujących postaci:

$$x^2 - px + q^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$
$$x^2 + px + q^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$
$$x^2 - px - q^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$
$$x^2 + px - q^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (4).$$

gdzie p i q^2 są to liczby znane, przyczem p uważamy zawsze za liczbę dodatnią.

Formy (1) i (2) odpowiadają przypadkowi, gdy pierwiastki równania x_1, x_2 mają znaki zgodne: w równaniu (1) oba są dodatnie, w równaniu (2) oba ujemne. Jak w jednym tak i w drugim wypadku mamy

$$p = x_1 + x_2, \; q^2 = x_1 \,.\, x_2,$$

zatem wyznaczenie odcinka x sprowadza się do zadania:

(I) *znaleźć dwa odcinki (x_1 i x_2), mając daną ich sumę i iloczyn.*

W równaniach (3) i (4) pierwiastki mają znaki przeciwne, a mianowicie w równaniu (3) większym co do wartości bezwzględnej jest pierwiastek dodatni, w równaniu zaś (4) większym jest piewiastek ujemny. W każdym razie, w jednym czy w drugim przypadku, mamy zawsze

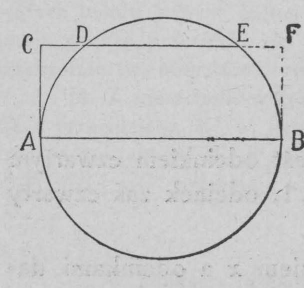
$$p = |\,x_1\,| - |\,x_2\,|, \; q^2 = |\,x_1\,x_2\,|\text{*)}.$$

Możemy tedy powiedzieć, że w przypadku równań (3) i (4) wyznaczenie bezwzględnych wartości odcinków x_1 i x_2, będących pierwiastkami tych równań, sprowadza się do zadania:

---

*) Symbol $|\,a\,|$ czytamy: „wartość bezwzględna liczby a“.

(II) *zbudować dwa odcinki, mając daną ich różnicę i iloczyn.* Rzecz oczywista, że po znalezieniu bezwzględnej wartości tych odcinków wypadnie uwzględnić fakt, iż powinny one mieć zwroty przeciwne.



Rys. 276.

Rozwiążemy teraz kolejno oba te podstawowe zadania.

§ 311. Zadanie I. *Zbudować dwa odcinki, których suma p i iloczyn q^2 są dane.*

Mamy do wyboru kilka rozwiązań. Możemy np. postąpić w sposób następujący:

Na średnicy $AB = p$ kreślimy koło, przez A prowadzimy styczną i na niej odkładamy $AC = q$. Jeżeli poprowadzimy prostą CE równoległą od AB, otrzymamy żądane rozwiązanie, gdyż

$$CD + CE = AB = p$$

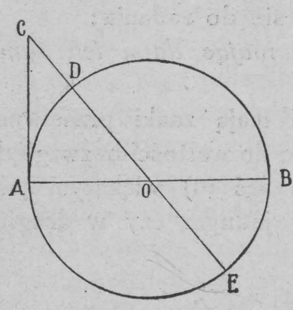
(jak łatwo widzieć, jeżeli poprowadzimy styczną BF),

a zarazem $\qquad CD \,.\, CE = AC^2 = q^2$.

Czy zadanie jest zawsze możliwe?

§ 312. Zadanie II. *Zbudować dwa odcinki, których różnica v i iloczyn q^2 są nam dane.*

Niech będzie dane koło o średnicy $AB = p$. W punkcie A kreślimy styczną i na niej odkładamy $AC = q$, poczem punkt C łączymy ze środkiem O koła. Odcinki CD, CE, otrzymane na tej siecznej, czynią zadość warunkom zadania gdyż



Rys. 277.

$$DE = AB = p,$$
$$CD \,.\, CE = AC^2 = q^2.$$

§ 313. Zadanie III. *Dany odcinek a podzielić na dwie części tak, by większa z nich była średnią proporcjonalną między całym odcinkiem a mniejszą częścią.*

Taki podział zwie się *podziałem złotym* albo *podziałem w stosunku skrajnym i średnim.*

Większą z dwóch części odcinka a nazywają też niekiedy *częścią złotą* tego odcinka.

Oznaczmy część złotą przez x. Mamy wówczas

$$x^2 = a\,(a - x)$$

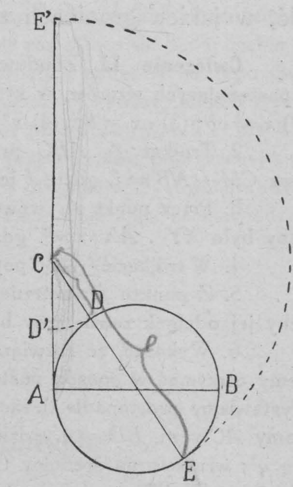
czyli
$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Sprowadziliśmy więc nasze zadanie do typu zadania II*).

Ma ono dwa rozwiązania, których sens z łatwością uprzytomnimy sobie po wykonaniu konstrukcji.

Budujemy tedy koło o średnicy $AB = a$, kreślimy styczną $AC = a$ (rys. 278) i mamy

$$|\,x_1\,| = CD, |\,x_2\,| = CE.$$

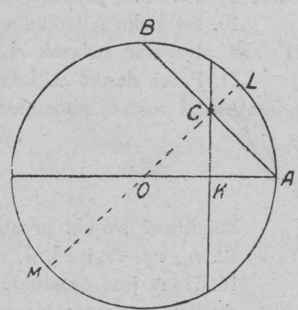


Rys. 278.

Pozostaje odłożyć te odcinki na prostej AC w przeciwnych zwrotach, poczynając od punktu C. Otrzymujemy punkty E' i D', które oba dzielą odcinek dany CA w stosunku złotym: jeden dzieli go wewnętrznie, drugi zewnętrznie.

Zadanie IV. *Dane jest koło $(O)A$ i cięciwa KN, prostopadła do promienia OA w jego środku. Przez punkt A należy poprowadzić sieczną AB tak, żeby odcinek jej BC równał się danemu odcinkowi a* (rys. 279).

Zakładamy, że figura na rys. 279 czyni zadość warunkom zadania.



Rys. 279.

Niech będzie $AC = x$.

Jeżeli przez C poprowadzimy średnicę ML, wówczas

$$CA \,.\, CB = CL \,.\, CM \;.\;.\;.\;.\; (1),$$

a ponieważ $\triangle\ OCA$ jest równoramienny (dlaczego?), zatem z (1) otrzymujemy

*) Rzecz prosta, że po otrzymania równania powinniśmy się najpierw przekonać, czy ma ono pierwiastki rzeczywiste. W danym wypadku jest to oczywiste (dlaczego?).

$$ax = (x + r)\ (r - x)\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

czyli $$x^2 + ax - r^2 = 0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

tak, iż zadanie sprowadziliśmy do typu zadania II.

Uczeń sam przeprowadzi konstrukcję i zbada, czy oba pierwiastki równania czynią zadość warunkom zadania. (Uwzględnić, w jakich granicach zmieniać się mogą x i a.)

5/II

Ćwiczenie LI. Zbudować odcinek x, odpowiadający któremukolwiek z następujących wzorów, w których a, b, c są odcinkami danemi: (1) $x^2 = ab$; (2) $x = ab$; (3) $ax = bc$; (4) $x^2 = a^2 + b^2$; (5) $x^2 = a^2 - b^2$; (6) $x^2 = a^2 + b^2 - c^2$.

2. Trójkąt $\triangle ABC$ przeciąć poprzeczną MN tak, żeby było $MN//AB$ oraz $CM - NB = f$, gdzie f jest odcinkiem danym.

3. Przez punkt A, wewnątrz koła leżący, poprowadzić cięciwę XY tak, żeby było $XY\ .\ AX = m^2$, gdzie m jest liczbą daną.

4. W trójkącie $\triangle ABC$ poprowadzić $MN//AB$ tak, żeby było $AM^2 + BN^2 = m^2$

5. Z punktu zewnętrznego A poprowadzić do danego koła sieczną tak, żeby jej odcinek zewnętrzny był trzy razy mniejszy od wewnętrznego.

6. Wykazać, że rozwiązanie równań typu (1) i (II) w § 310 (str. 292) możemy otrzymać w sposób następujący: niech będzie $AB = p$, w punktach A i B wystawiamy prostopadłe, leżące po tej samej stronie prostej AB, na nich odkładamy $AC = m$, $BD = n$, gdzie m, n są to dwie liczby, których iloczyn równa się q^2; wreszcie na średnicy CD kreślimy półkole, przecinające AB w punkcie E. Odcinki AE, EB są pierwiastkami równania (1) lub (2).

7. Znaleźć konstrukcję, analogiczną do poprzedniej i dającą pierwiastki równań (3) i (4) w § 310.

8. Zbudować taki odcinek x, żeby dany odcinek a był jego częścią złotą.

9. Dane są odcinki a i b; podzielić a na takie dwie części, by jedna z nich była średnią proporcjonalną między drugą częścią a odcinkiem b.

10. Na boku b trójkąta $\triangle ABC$ znaleźć taki punkt X, żeby, prowadząc $XY//AB$, otrzymać związek $AX^2 = XY\ .\ AB$.

11. Przez punkt A, leżący wewnątrz koła, poprowadzić cięciwę tak, by w punkcie A została podzielona w stosunku skrajnym i średnim.

Zbudować trójkąt prostokątny, mając dane:

12. h_c, $r_a - r_b$; 13. b, r_a; 14. $c + b$, r_b; 16. $a + r_a$, c.

16. Dany jest prostokąt $ABCD$; równolegle do jego boków poprowadzić proste, któreby wyznaczyły prostokąt o polu 2 razy mniejszem (lub większem) od danego.

17. Dany trójkąt przeciąć poprzeczną tak, by podzielić na połowy zarówno jego obwód, jak pole.

18. Dane jest koło $(O)r$. Znaleźć taki punkt X, żeby suma stycznych $XA + XB$ równała się siecznej XOY.

19. Na średnicy AOB odkładamy $OC = OD = a$; znaleźć na okręgu taki punkt M, żeby było $OM^2 = MC\ .\ MD$.

20. Dane są na płaszczyźnie dwie proste KL, MN; zbudować trójkąt tak, by podstawa jego leżała na prostej KL i równała się danemu odcinkowi c, przeciwległy wierzchołek C żeby leżał na prostej MN i żeby podstawa była średnią arytmetyczną dwu drugich boków trójkąta.

21. Newton, który napisał pierwszy podręcznik, traktujący w sposób systematyczny o zastosowaniu algebry do zadań geometrycznych, podaje następujące ćwiczenie: basen czworokątny $ABCD$ otoczyć ze wszystkich stron ścieżką, któraby miała wszędzie jednakową szerokość i pole równające się danej liczbie a^2.

22. Zadanie Pappusa. Dany jest kąt prosty i punkt A na jego dwusiecznej; przez A poprowadzić prostą tak, by odcinek jej, zawarty między ramionami kąta prostego, równał się danemu odcinkowi m. [Wskazówka: niech O będzie wierzchołkiem kąta prostego, B punktem przecięcia się poprzecznej z ramieniem kąta, za niewiadomą obieramy $OB = x$ i otrzymujemy równanie dwukwadratowe. Newton rozwiązuje to samo zadanie, obierając za niewiadomą odległość punktu O od środka poprzecznej.]

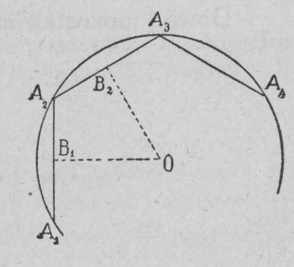
ROZDZIAŁ V.

O wielokątach foremnych.

§ 314. Określenie. *Foremnym nazywamy wielokąt, którego wszystkie boki i kąty równają się sobie.*

Foremną nazywamy też każdą *linję łamaną*, której boki i kąty równają się sobie.

§ 315. Twierdzenie. *Na każdym wielokącie foremnym* (lub ogólniej: *na każdej łamanej foremnej) można opisać koło i w każdy wielokąt foremny* (lub ogólniej: *w każdą łamaną foremną) można wpisać koło.*



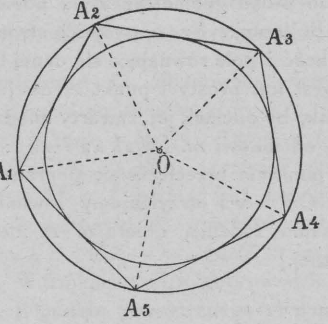
Rys. 280.

1-o. Trzy kolejne wierzchołki wielokąta $A_1\ A_2\ A_3$ wyznaczają koło. Łatwo dostrzec, że na okręgu tego koła leży również następny wierzchołek A_4.

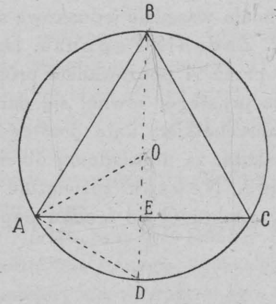
Istotnie, środek O koła leży na osi symetrji OB_2 boku $A_2\ A_3$, ale ta sama prosta OB_2 jest osią symetrji dwóch boków: $A_1\ A_2$ i $A_3\ A_4$, zatem A_4 leży na okręgu koła, przechodzącego przez A_1, A_2, A_3. W taki sam sposób dowodzimy, że następny wierzchołek A_5 leży na tym samym okręgu i t. d.

2-o. Ponieważ boki A_1, A_2, A_3 A_4 . . . są równemi cięciwami tego samego koła, zatem muszą być jednakowo odległe od jego środka O, czyli musi być:

$$OB_1 = OB_2 = OB_3 = \ldots$$



Rys. 281.



Rys. 282.

Tak więc punkt O jest zarazem środkiem koła wpisanego w wielokąt.

§ 316. Określenie. Promień koła wpisanego nazywają również *apotemą* wielokąta foremnego.

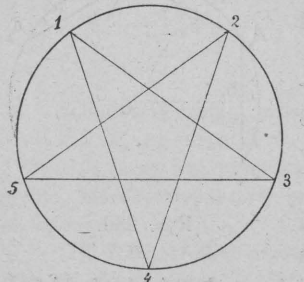
§ 317. Twierdzenie. *Jeżeli przez r oznaczamy długość promienia koła, opisanego na wielokącie, wówczas*

1-o długość boku sześciokąta foremnego $= r$,

2-o długość boku kwadratu $= r\sqrt{2}$,

3-o długość boku trójkąta foremnego $= r\sqrt{3}$.

Dowód pozostawiamy czytelnikowi, nadmieniając, że długość boku trójkąta foremnego można obliczyć z rysunku 282 na mocy twierdzenia § 300, str. 279.



Rys. 283.

§ 318. Oprócz wielokątów foremnych wypukłych, o których dotąd mówiliśmy, istnieją również *wielokąty foremne gwiaździste* (a więc wklęsłe). Jeżeli np., jak na rys. 283, podzielimy okrąg na 5 części równych i punkty podziału połączymy co drugi t. j. punkt 1 z punktem 3, dalej z punktem 5 i t. d.), otrzymamy pięciokąt gwiaździsty.

Twierdzenie. *Jeżeli podzieliliśmy okrąg koła na* n *części rownych i połączyliśmy punkty podziału co* p, *gdzie* p *jest liczbą pierwszą względem* n, *wówczas powstał wielokąt foremny o* n *bokach.*

Dwa kolejne punkty podziału A_1, A_2 wyznaczają łuk, stanowiący $\frac{1}{n}$-tą część okręgu, jeżeli więc łączymy punkty podziałę co p (t. j. punkt A_1 z $A_p + 1$) wówczas bok łamanej musi być cięciwą łuku, stanowiącego $\frac{p}{n}$ część okręgu (np. bok A_1A_3 pięciokąta wspiera łuk, równający się $^2/_5$ częściom okręgu).

Jeżeli na tej drodze mamy otrzymać wielokąt, wówczas łamana musi zamknąć się czyli po wykreśleniu, powiedzmy, k boków powinniśmy powrócić do punktu A_1, z którego wyszliśmny.

Innemi słowami: wykreślając wszystkie k boków wielokąta, obchodzimy okrąg dokoła całkowitą ilość razy.

Tak więc liczba

$$\frac{kp}{n}$$

musi być liczbą całkowitą. Ponieważ liczby p i n są względem siebie pierwsze, zatem najmniejsza wartość na k, przy której $\frac{kp}{n}$ przybiera wartość całkowitą, jest $k = n$.

W ten sposób dowiedliśmy że wielokąt nasz ma istotnie n boków.

Uwaga. Gdyby liczby p i n nie były względem siebie pierwsze, gdyby np. było $p = da$, $n = db$, wówczas mielibyśmy

$$\frac{kp}{n} = \frac{kda}{db} = \frac{ka}{b}$$

gdzie a i b są już względem siebie pierwsze. Jeśliby tedy liczba $\frac{ka}{b}$ miała być całkowitą, to najmniejszą wartością na k byłoby $k = b$. Tak więc wielokąt miałby nie n, lecz tylko b boków.

§ 316. Twierdzenie. *Jeżeli mamy daną liczbę całkowitą* n, *wówczas wielokątów foremnych o* n *bokach istnieje dwa razy mniej, niż liczb pierwszych względem* n *i od mniejszych* n.

Dowód twierdzenia zrozumiemy najlepiej na przykładzie. Niech będzie dana liczba całkowita $n = 15$. Wypiszmy wszystkie liczby pierwsze względem 15 i mniejsze od 15:

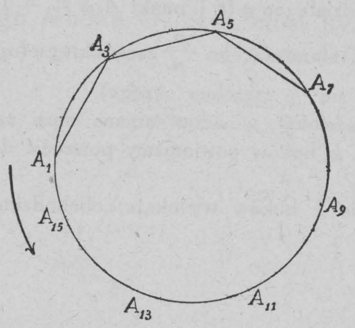
$$1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8,\ 11,\ 13,\ 14.$$

Wyobraźmy sobie, że okrąg koła podzieliliśmy na 15 równych części. Na mocy § 315, wszystkie możliwe wielokąty foremne o 15 bokach otrzymamy, łącząc punkty podziału co

$$1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8,\ 11,\ 13.\ 14.$$

Mielibyśmy tedy ośm piętnastokątów foremnych. Łatwo jednak przekonać się, iż każdy wielokąt został policzony dwa razy, czyli że naprawdę istnieją tylko 4 różne piętnastokąty foremne.

Istotnie, jeżeli wykreślimy cięciwy A_1A_3, A_3A_5 i t. d., wówczas możemy powiedzieć, że połączyliśmy punkty podziału co 2, gdyż A_3 jest drugim punktem, rachując od A_1. Ale równie dobrze mógłby ktoś powiedzieć, że połączyliśmy punkty co 13, gdyż jeśli, poczynając od A_1, będziemy rachowali punkty w zwrocie zaznaczonym strzałką na rys. 284, wówczas okaże się, że A_3 jest istotnie trzynastym punktem.



Rys. 284.

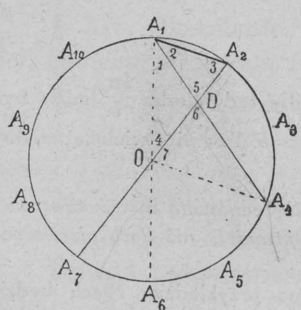
Tak samo, jeżeli wykreślimy cięciwy A_1A_5, A_5A_9 i t. d., wówczas możemy uważać, że połączyliśmy punkty co czwarty, ale równie dobrze możemy twierdzić że połączyliśmy je co jedenasty.

Ogólnie: jeżeli, mając n punktów podziału, łączymy je co p, to jednocześnie następuje połączenie punktów co $n - p$.

§ 320. Z powyższego widzimy, że istnieją ogółem cztery piętnastokąty foremne: jeden wypukły i trzy gwiaździste. Uczeń przekona się sam, że dziesięciokątów mamy tylko dwa: jeden wypukły, drugi gwiaździsty. Tak samo pięciokąty istnieją tylko dwa, natomiast sześciokątów i czworoboków gwiaździstych niema wcale.

Pokażemy jeszcze sposób zbudowania dziesięciokąta i, co za tem idzie, pięciokąta i piętnastokąta foremnego.

§ 321. Twierdzenie. *Bok dziesięciokąta foremnego otrzymujemy, dzieląc promień w stosunku złotym.*



Rys. 284.

Niech $A_1, A_2, A_3 \ldots A_{10}$ będzie dziesięciokątem foremnym wypukłym, wpisanym w koło o promieniu r. Oznaczmy jego bok symbolem a_{10}. Bok dziesięciokąta gwiaździstego otrzymamy, łącząc punkty podziału co trzeci. Oznaczmy bok ten przez a'_{10}. Mamy tedy

$$A_1A_2 = a_{10}, \quad A_1A_4 = a'_{10}.$$

Z § 84, str. 59 wynika, że suma kątów wewnętrznych dziesięciokąta wypukłego równa się

$$2\delta \cdot 10 - 4\delta = 16\delta = 16 \cdot 90^0,$$

każdy kąt równa się $\dfrac{16 \cdot 90^0}{10} = 144^0$,

wobec czego $\sphericalangle OA_1A_2 = \sphericalangle OA_2A_1 = 72^0$,

oraz $\sphericalangle A_1OA_2 = 36^0$.

Łatwo dostrzec, że prosta A_1A_4 jest dwusieczną kąta $\sphericalangle OA_1A_2$ mamy więc $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 4$, czyli $AD = OD$.

Dalej mamy $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 5 = \sphericalangle 6 = \sphericalangle 7$ (dlaczego?),

czyli $A_1A_2 = A_1D = a_{10}$

oraz $DA_4 = OA_4 = r$.

Ponieważ

$$A_1A_4 - A_1D = DA_4,$$

zatem
$$a'_{10} - a_{10} = r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Z podobieństwa trójkątów równoramiennych

$$\triangle A_1DO \sim \triangle A_1OA_4 \quad \text{(dlaczego?)}$$

mamy

$$\frac{A_1A_4}{OA_4} = \frac{OA_1}{OD}$$

czyli
$$\frac{a'_{10}}{r} = \frac{r}{a_{10}},$$

albo innemi słowami:

$$a_{10} \cdot a'_{10} = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Równości (1) i (2) wskazują, że odcinki a_{10}, a'_{10} znajdziemy, dzieląc promień r w stosunku złotym, przyczem bok a_{10} odpowiada podziałowi wewnętrznemu, bok zaś a'_{10} odpowiada podziałowi zewnętrznemu (§ 313, str. 291).

§ 322. Zbudowanie obu pięciokątów foremnych nie przedstawia już żadnych trudności, co się zaś tyczy piętnastokąta, to wystarczy uwzględnić tożsamość arytmetyczną

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$$

przeczytać

§ 323. Każdemu, kto znalazł sposób zbudowania a_3, a_4, a_5, a_6, a_{10}, a_{15}, nasuwa się pytanie, czy w podobny sposób, t. j. zapomocą cyrkla i linjału dadzą się zbudować wszystkie wielokąty foremne?

Odpowiedź na to pytanie daje arytmetyka teoretyczna. Powiada ona, że liczba boków n powinna być kształtu

$$n = 2^k \cdot (2^p + 1)\,(2^r + 1)\,(2^s + 1) \ldots,$$

gdzie $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

liczby zaś $2^p + 1$, $2^r + 1$, $2^s + 1$, ...

są wszystkie bezwzględnie pierwsze i wszystkie różne od siebie. Jeżeli n spełnia powyższe warunki, wielokąt da się wykreślić zapomocą cyrkla i linjału — i odwrotnie.

Wobec tego można wpisać w koło siedemnastokąt, gdyż $17 = 2^4 + 1$, natomiast nie można wpisać dziewięciokąta, gdyż $9 = (2 + 1)\ (2 + 1)$ *).

Ćwiczenia LII. Wprowadzimy następujące symbole:

a_n oznacza bok wielokąta foremnego wypukłego wpisanego o n bokach,
$a'_n, a''_n\ldots$ „ „ „ „ gwiaździst. „ „ „ „
b_n „ „ „ „ wypukłego opisanego „ „ „
$2p_n$ „ obwód „ „ „ wpisanego „ „ „
$2P_n$ „ „ „ „ „ opisanego „ „ „
S_n „ pole „ „ „ wpisanego „ „ „
S_n „ „ „ „ „ opisanego „ „ „

1. Mamy dane $a_4 = 16$ cm; obliczyć a_3, a_6.
2. $2p_3 = 12$ cm; obliczyć $2p_4$ i $2p_6$.
3. Mając dane a_4, obliczyć a_8.
4. Mając dane a_6, obliczyć a_{12}.
5. Obliczyć apotemy wielokątów foremnych wypukłych o 3, 4, 6, 8, 12 bokach.
6. Obliczyć pola tych samych wielokątów.
7. Mając dane a_3, obliczyć b_3.
8. Trójkąt i sześciokąt foremny mają ten sam obwód; w jakim stosunku pozostają do siebie ich boki? jaki jest stosunek promieni kół opisanych na obu wielokątach?
9. Trójkąt i sześciokąt foremny są sobie równoważne; jaki jest stosunek ich boków?
10. Wielokąty foremne o n bokach są do siebie podobne.
11. Obwody wielokątów foremnych o n bokach są proporcjonalne:

(1) do promieni kół opisanych:
(2) do apotem.

12. Pola wielokątów foremnych o n bokach są proporcjonalne:

(1) do kwadratów promieni:
(2) do kwadratów apotem.

13. Porównać z sobą pola wpisanych i opisanych trójkątów i sześciokątów oraz wpisanych i opisanych kwadratów i ośmiokątów i spróbować utworzyć wzory, któreby dawały

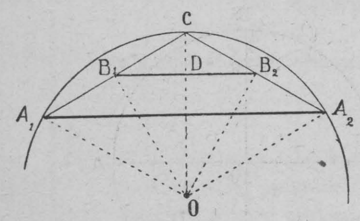
(1) S_6 w zależności od S_3 i S'_3,
(2) S_8 „ „ S_4 i S'_4,
(3) S'_6 „ „ S_3, S'_3 i S_6,
(4) S'_8 „ „ S_4, S'_4 i S_8.

14. Spostrzeżenia, uczynione w zadaniu poprzedniem, uogólnić na dowolne wielokąty foremne, t. j. znaleźć wzory, wyrażające

*) Dowód tego ważnego twierdzenia podał słynny uczony niemiecki, Fryderyk Gauss (1777—1855 r). Rozmaite zagadnienia, związane z budową wielokątów foremnych, znaleźć można w tomie II dzieła: F. Enriques. *Zagadnienia dotyczące geometrji elementarnej.* Warszawa, 1917.

(1) S_{2n} w zależności od S_n i S'_n;
(2) S'_{2n} „ „ „ S_n, S'_n, S_{2n}.

15. Niech będzie $A_1A_2 = a_n$ bokiem wielokąta foremnego danego o n bokach Kreślimy $A_1C = CA_2$, $OB_1 \perp A_1C$, $OB_2 \perp CA_2$; dowieść, iż OB_1 jest promieniem, OD zaś apotemą wielokąta foremnego, który ma $2n$ boków, lecz obwód ma taki sam, jak wielokąt dany.



Rys. 286.

Dwa wielokąty o równych obwodach nazywamy *równoobwodowemi* albo też z grecka: *izoperymetrycznemi* (od wyrazów: isos = równy, perimetron = obwód).

16. Jeżeli przez r_n i t_n oznaczymy odpowiednio promień i apotemę wielokąta foremnego o n bokach, wówczas między wielokątami izoperymetrycznemi zachodzą związki:

$$t_{2n} = \frac{t_n + r_n}{2}, \quad r_{2n} = \sqrt{r_n\ t_{2n}}.$$

17. Dowieść, iż

$$r_{2n} - t_{2n} < \frac{1}{4}(r_n - t_n).$$

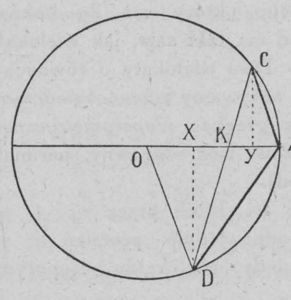
[W s k a z ó w k a: kreślimy koło $(O)B_1$, aby otrzymać różnicę $r_{2n} - t_{2n}$ i prowadzimy dwusieczną kąta $\sphericalangle CB_1B_2$.]

18. Mając dany promień r koła opisanego, obliczyć a_5 i a'_5.
19. Mając dany promień r, obliczyć a_{15}, a'_{15}, a''_{15}, a'''_{15}.
20 W pięciokącie foremnym wypukłym każde dwie przekątne dzielą się w stosunku złotym, przyczem większy z dwóch odcinków przekątnej równa się bokowi pięciokąta.
21. W pięciokącie foremnym wypukłym przekątne przecinają się w taki sposób, że wyznaczają drugi pięciokąt foremny.
22. Uzasadnić następującą konstrukcję boku a_{10}: w kole $(O)A$ prowadzimy dwie prostopadłe do siebie średnice AOA', BOB'; niech O' będzie środkiem promienia OB i niech D będzie punktem przecięcia się koła $(O)'O$ z odcinkiem AO'. Powiadam, że $A'D = a_{10}$.
23. Słynny matematyk Ptolemeusz*) podaje w swem wielkiem dziele „Almageście" następującą konstrukcję pięciokąta: w kole $(O)A$ kreślimy dwie prostopadłe do siebie średnice AOA', BOB'; niech będzie C środek promienia OA; kreślimy koło $(C)B$, które przecina promień OA' w punkcie D; odcinek $BD = a_5$. Zbadać prawdziwość konstrukcji.
24. Wykazać, że konstrukcja Ptolemeusza daje zarazem bok dziesięciokąta wypukłego foremnego oraz bok pięciokąta gwiaździstego.
25. Dowieść, że $(a_5)^2 = (a_{10})^2 + (a_6)^2$. Dowód przeprowadzić trzema spo-

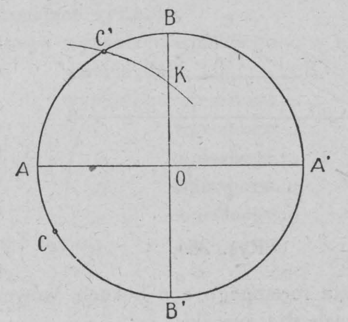
*) Porówn. o nim uwagę na st. 274.

sobami: (1) zapomocą rachunku, (2) zapomocą konstrukcji Ptolemeusza, (3) zapomocą rys. 287, w którym $AC = a_{10}$, $AD = a_5$.

26. Najprostsza ze znanych konstrukcyj pięciokąta i dziesięciokąta jest następująca: niech AOA', BOB' (rys. 288) będą dwie prostopadłe do siebie średnice:



Rys. 287.



Rys. 288.

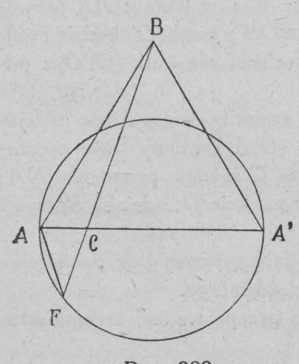
odkładamy $B'C = AC' = r$, poczem kreślimy koło $(C)C'$, które przecina w punkcie K promień OB. Mamy: $OK = a_{10}$, $AK = a_5$.

27. Jeżeli w koło wpiszemy trapez równoramienny, w którym jedną podstawą jest średnica, drugą zaś a_{10}, wówczas oba równe boki równać się muszą a_5, przekątne zaś równają się $a_{10} + r$.

28. Zastosować tw. Ptolemeusza (str. 274) do trapezu, o którym mowa w zadaniu poprzednim. Do jakiego wniosku dochodzimy?

29. W kole prowadzimy dwie prostopadłe do siebie średnice AOA', BOB'. Na przedłużeniu BA odkładamy $AC = AB$ i prowadzimy średnicę CO, przecinającą łuk BA' w D i łuk AB' w E. Dowieść, że $\frac{1}{2}$ $CE =$ bokowi dziesięciokąta foremnego wypukłego, a $\frac{1}{2}$ $CD =$ bokowi dziesięciokąta gwiaździstego.

W praktyce wystarcza zazwyczaj konstrukcja przybliżona wielokąta, to też zdawiendawna rzemieślnicy, architekci, inżynierowie etc. starali się wynaleźć odpowiednie sposoby budowania rozmaitych wielokątów. Oto parę takich sposobów:



Rys. 289.

30. Na średnicy AA' budujemy trójkąt równoboczny $\triangle ABA'$ dzielimy AA' na n części równych, drugi punkt podziału C łączymy z B; cięciwa AF albo dokładnie albo w przybliżeniu równa się a_n.

Jakoż uczeń sprawdzi, że kładąc $r = 1$, mamy

$$AF^2 = 2 - \frac{n-4}{2} \cdot \frac{3n + \sqrt{n^2 + 16n - 32}}{(n-1)^2 + 3},$$

wstawiając zaś kolejno $n = 3, 4, 5, 6, 8\ldots$,

otrzymamy długości odcinków, które łatwo porównać ze znanemi wartościami na a_3, a_4, a_5, a_6, a_8, ...

31 Konstrukcja, przedstawiona na rys. 288, daje dokładne wartości a_5 i a_{10}, a prócz tego mamy:

KL równa się w przybliżeniu a_8,
$A'K$ „ „ „ „ a_{16},

gdzie L jest punktem przecięcia się łuku $C'K$ z promieniem OA'.

---

32. Jeżeli wewnątrz wielokąta foremnego wypukłego obierzemy dowolny punkt K, wówczas suma wszystkich prostopadłych, prowadzonych z K do boków wielokąta, jest n razy większa od apotemy wielokąta. Jakiej zmianie ulegnie twierdzenie, jeżeli punkt K obierzemy zewnątrz wielokąta?

33. Dowolny punkt L na okręgu koła opisanego łączymy ze wszystkiemi wierzchołkami wielokąta; dowieść, że suma kwadratów tych odcinków równa się $2nr^2$, gdzie r oznacza promień koła. [Wskazówka: w punkcie L prowadzimy styczną i na nią rzutujemy wszystkie wierzchołki wielokąta.]

34. W dane koło wpisać sześć równych pięciokątów foremnych tak, żeby jeden z nich był spółśrodkowy z kołem, a każdy z pozostałych miał po jednym wierzchołku na okręgu koła danego i jeden bok wspólny z pięciokątem środkowym.

ROZDZIAŁ VI.

O pomiarze koła.

---

§ 324. Codzienne doświadczenie nasuwa nam mnóstwo zagadnień, w których musimy wyznaczać pole koła lub długość okręgu. Z łatwością wymyśleć można rozmaite sposoby dokonywania odpowiednich pomiarów na kole materjalnem: mając np. dane w koło z blachy jednolitej, możemy zmierzyć nitką długość jego okręgu, możemy zważyć koło i przez porównanie z ciężarem kwadratu, zrobionego z tego samego materjału, możemy obliczyć pole koła i t. d.

Oczywista rzecz, że wszystkie otrzymane w ten sposób liczby dają nam tylko przybliżone wartości długości okręgu lub pola koła, ale przybliżenia te mogą zupełnie wystarczyć do niektórych celów praktycznych.

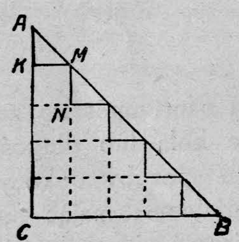
Jeżeli jednak od figur materjalnych zechcemy przejść do figur geometrycznych, natrafimy odrazu na ogromne trudności. Długość odcinka jest to liczba, którą otrzymujemy przez porównanie tego odcinka z innym, zwanym jednostką miary. W jaki sposób moglibyśmy porównać okrąg koła z odcinkiem, obranym za jednostkę miary? Odkładanie jednostki nie da się tu przecie zastosować. Dopóki więc nie znajdziemy jakiegoś sposobu porównywania okręgu z odcinkiem prostej, nie będziemy mogli mówić o długości okręgu. To samo powiedzieć możemy o polu koła: odkładanie kwadratu jednostkowego na kole nie da się zastosować.

Sposób porównywania, o który chodzi, nasuwa się nam przy rozważaniu wielokątów wpisanych i opisanych na kole. Wyobraźmy sobie, że mamy dane koło i dwa wielokąty foremne: jeden wpisany w koło, drugi opisany na niem; jeżeli zwiększać będziemy liczbę boków tych wielokątów, wówczas wydaje się niemal oczywistem, że kontury ich zbliżają się do okręgu, obszary zaś wielokątowe zbliżają się do obszaru koła. Powstaje tedy myśl traktowania koła jako granicy, do której dążą nasze wielokąty przy nieograniczonem zwiększaniu liczby boków.

Niestety, intuicja może nas łatwo wprowadzić w błąd. Aby przekonać się o tem, wystarczy rozważyć jeden prosty przykład. Niech będzie dany trójkąt prostokątny $\triangle ABC$. Podzielmy obie jego przyprostokątne na jednakową ilość części równych i przez punkty podziału poprowadźmy równoległe do AC i BC. Równoległe te wyznaczą nam pewną linję łamaną $AKMN \ldots B$. Wyobraźmy sobie, że zamiast na 5 części równych (jak na rys. 190) podzieliliśmy przyprostokątne na

$$10,\ 20,\ 40,\ 80,\ \ldots\ldots$$

części równych. Rzecz jasna, że łamana zbliża się tem więcej do odcinka prostej AB, im większa jest liczba części, na które dzielimy przyprostokątne. Zwiększając coraz bardziej liczbę podziałek, możemy z łatwością osiągnąć to, że najpotężniejsze przyrządy optyczne nie zdołają wykryć żadnej różnicy między łamaną a przeciwprostokątną.



Rys. 290.

Powstaje pytanie: czy możemy twierdzić, że długość przeciwprostokątnej jest granicą, do której dąży długość łamanej, jeżeli zwiększamy nieograniczenie liczbę podziałek? Łatwo jest

przekonać się, że tak nie jest, że intuicja wprowadziła nas w błąd. Istotnie, uczeń dowiedzie, że długość łamanej jest stała.

Wobec tego, jeśli chcemy zastosować nasz pomysł traktowania koła jako granicy pewnych wielokątów, musimy najpierw przekonać się, c z y g r a n i c e, o k t ó r y c h m o w a, n a p r a w d ę i s t n i e j ą, a w tym celu musimy mieć dwa nieskończone ciągi odcinków (pól), czyniących zadość wymaganiom p e w n i k a VI-e, mianowicie:

(1) wyrazy jednego ciągu muszą rosnąć, drugiego zaś maleć;

(2) wyrazy pierwszego ciągu muszą być zawsze mniejsze od wyrazów drugiego ciągu;

(3) różnica między wyrazami obu ciągów musi maleć nieograniczenie.

Innemi słowami, będziemy musieli ustalić trzy twierdzenia

(1) obwody (pola) wielokątów foremnych wpisanych rosną, opisanych zaś maleją;

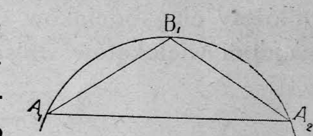
(2) obwody (pola) wielokątów foremnych wpisanych pozostają mniejsze od obwodów (pól) wielokątów opisanych;

(3) różnica między obwodami (polami) wielokątów wpisanych i opisanych może być uczyniona dowolnie małą.

Jeżeli uda się nam dowieść tych trzech prawd, wówczas na m o c y p e w n i k a VI e będziemy mogli twierdzić, że istnieje odcinek większy od obwodów wszystkich wielokątów foremnych wpisanych, a mniejszy od obwodów wszystkich wielokątów foremnych opisanych. Wtedy dopiero będziemy mogli długość tego odcinka n a z w a ć długością okręgu. To samo powiedzieć można o polu koła.

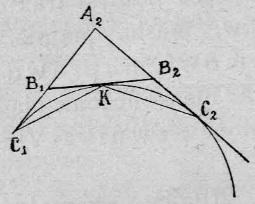
§ 325. Twierdzenie. *Przy podwajaniu liczby boków wielokątów foremnych obwód wielokąta wpisanego rośnie, opisanego zaś maleje.*

Chcąc podwoić liczbę boków wielokąta foremnego wpisanego, dzielimy na połowy wszystkie łuki, podparte przez jego boki. W ten sposób bok $A_1\,A_2$ zastępujemy przez łamaną $A_1\,B_1\,A_2$ i przez to samo zwiększamy obwód wielokąta. To samo da się powiedzieć o każdym innym boku.



Rys. 291.

Chcąc podwoić liczbę boków wielokąta foremnego opisanego, dzielimy na połowy łuki, zawarte między punktami stycz-ności boków i w punktach podziału (np. K) prowadzimy styczne.



Rys. 292.

W pierwotnym wielokącie obwód składał się z łamanych w rodzaju $C_1A_2C_2$; teraz łamana ta została zastąpiona przez łamaną $C_1B_1B_2C_2$. Otóż pierwsza łamana jest sumą odcinków

$$C_1B_1 + B_1A_2 + A_2B_2 + B_2C_2,$$

druga zaś jest sumą odcinków

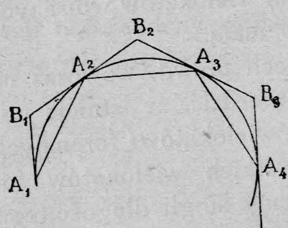
$$C_1B_1 + B_1B_2 + B_2C_2,$$

a więc druga łamana jest krótsza (dlaczego?).

§ 326. Twierdzenie. *Obwód wielokąta foremnego wpisanego jest mniejszy od obwodu jakiegokolwiek wielokąta foremnego opisanego na tem samem kole.*

Wystarczy dowieść twierdzenia dla wielokątów o jednakowej liczbie boków.

Niech będzie dany wielokąt foremny wpisany $A_1A_2A_3 \ldots A_n$.



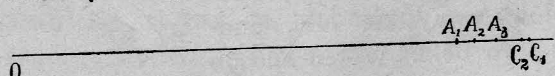
Rys. 293.

Odpowiedni wielokąt opisany otrzymamy, prowadząc styczne w wierzchołkach pierwszego wielokąta. Otrzymujemy w ten sposób szereg trójkątów $\triangle A_1B_1A_2$, $\triangle A_2B_2A_3, \ldots$, z których wynika, że

$$A_1B_1 + B_1A_2 > A_1A_2,$$
$$A_2B_2 + B_2A_3 > A_2A_3, \text{ i t. d.}$$

a więc obwód wielokąta $B_1B_2B_3 \ldots B_n$ jest większy od obwodu wielokąta $A_1A_2A_3 \ldots A_n$.

Obierzmy sobie teraz dowolną prostą, na niej punkt O i odłóżmy ciąg odcinków OA_1, OA_2, $OA_3, \ldots$, równających się obwodom wielokątów wpisanych, mających n, $2n$, $4n, \ldots$ boków,



Rys. 294.

oraz ciąg odcinków OC_1, OC_2, $OC_3 \ldots$. równających się obwodom odpowiednich wielokątów opisanych.

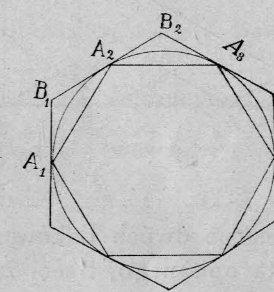
Na mocy § 325 możemy twierdzić, że punkty A_1, A_2, $A_3, \ldots$

posuwają się coraz dalej w prawo, punkty zaś C_1, $C_2, \ldots$ posuwają się coraz dalej w lewo. Ponieważ dowiedliśmy (w § 326), że $OA_k < OC_k$, zatem każdy punkt A_k leży w lewo od C_k, a więc wszystkie punkty A leżą w lewo od punktów C*).

Pozostaje do rozstrzygnięcia jedno tylko pytanie: czy odległość między punktami A i C może być uczyniona dowolnie małą? Odpowiedź na to pytanie dają dwa następujące twierdzenia:

§ 327. Twierdzenie. *Różnica między obwodami wielokątów foremnych o* n *bokach, z których jeden jest wpisany w koło, drugi opisany na niem, jest mniejsza od podwójnej wysokości trójkąta równoramiennego, którego podstawą jest obwód kwadratu opisanego, kąt zaś przy podstawie równa się* $\frac{180^\circ}{n}$.

Konstrukcję, na której oprzemy dowód, można najprościej i najjaśniej opisać w sposób następujący: wyobraźmy sobie, że oba wielokąty — wpisany i opisany zrobione są z drutu; przecinamy drut w wierzchołku A_1 wielokąta wpisanego i całą figurę rozginamy tak, by wyprostować kontur wielokąta wpisanego. Otrzymamy wtedy figurę, złożoną z n małych trójkątów równoramiennych $\triangle A_1B_1A_2$, $\triangle A_2B_2A_3 \ldots$, $\triangle A_nB_nA_1'$, których podstawy tworzą jeden odcinek A_1A_1', równający się obwodowi wielokąta wpisanego (rys. 296) **).



Rys. 295.

Łatwo przekonać się, że kąty przy podstawie każdego z tych trójkącików mają po $\frac{180^\circ}{n}$. Istotnie (rys. 295) mamy

$$\sphericalangle B_1A_2A_1 + \sphericalangle A_1A_2A_3 + \sphericalangle B_2A_2A_3 = 180^\circ,$$

ale

$$\sphericalangle A_1A_2A_3 = \frac{180^\circ\, n - 360^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n},$$

*) Istotnie, gdyby punkt A_n wcisnął się między punkty C, mógłby następować tylko po takim punkcie C_m, gdzie $m > n$. Ale to jest niedorzeczne, gdyż punkt A_m, leżący w prawo od A_n (§ 325), musi leżeć w lewo od C_m (§ 326).

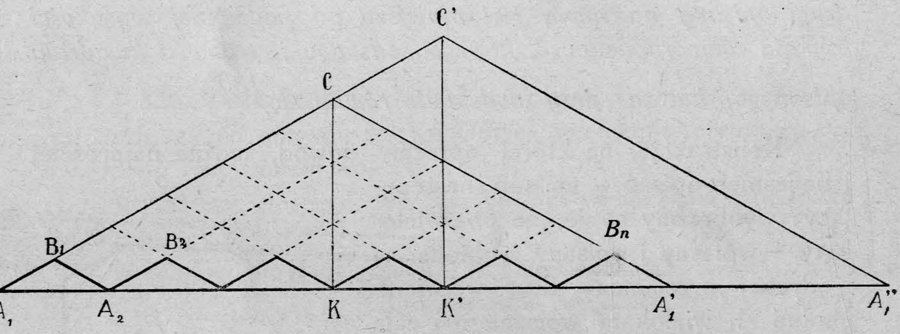
**) Całą tę konstrukcję uczeń opisze w zwykłym języku geometrji.

zatem $\sphericalangle B_1A_2A_1 + \sphericalangle B_2A_2A_3 = \frac{360^\circ}{n}$,

skąd $\sphericalangle B_1A_2A_1 = \frac{180^\circ}{n}$ (dlaczego?).

Jeżeli na rys. 296 przedłużymy boki A_1B_1 i B_nA_1' pierwszego i ostatniego trójkąty, otrzymamy trójkąt równoramienny $\triangle A_1CA_1'$, w którym kąty przy podstawie równają się $\frac{180^\circ}{n}$.

Zbadajmy boki tego trójkąta. Z rys. 296 uczeń łatwo dostrzeże,



Rys. 296.

że suma dwóch boków $A_1C + CA_1'$ równa się obwodowi wielokąta opisanego, trzeci zaś bok A_1A' równa się obwodowi wielokąta wpisanego. Otóż mamy (dlaczego?)

$$A_1C - A_1K < CK,$$
$$CA_1' - KA_1' < CK,$$

gdzie CK jest wysokością trójkąta. Po dodaniu tych dwu nierówności, otrzymujemy

$$(A_1C + CA_1') - A_1A_1' < 2\,CK$$

czyli $$2\,P_n - 2\,p_n < 2\,CK \ldots \qquad (1)$$

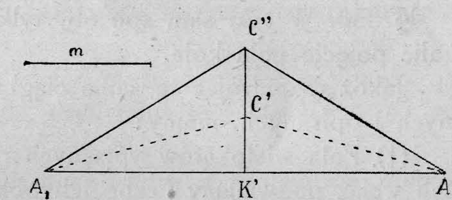
Jeżeli na tej samej prostej odłożymy odcinek A_1A_1'', równający się ośmiu promieniom koła O_1A_1 czyli równający się obwodowi kwadratu opisanego, wówczas odcinek ten okaże się dłuższym od A_1A_1' (dlaczego?). Zbudujmy na odcinku A_1A_1'' trójkąt $\triangle A_1C'A_1''$, podobny do trójkąta $\triangle A_1CA_1'$ (rys. 296). Wysokość jego $C'K'$ musi być większa od CK, zatem musi być

$$2\,P_n - 2\,p_n < 2\,C'K' \ldots\ldots \qquad (2)$$

§ 328. Pozostaje już tylko jeden krok: musimy dowieść następującego twierdzenia:

Twierdzenie. *Mając dany odcinek $A_1\,A_2$ (równający się 8 promieniom koła) możemy na nim zbudować trójkąt równoramienny, którego kąt przy podstawie równa się $\frac{180^\circ}{n}$, wysokość zaś jest dowolnie mała.*

Istotnie, niech będzie dany dowolnie mały odcinek m. Zbudujmy najpierw trójkąt równoramienny $\triangle A_1C''A_2$, którego wysokość $C''K'$ równa się odcinkowi m. Na zasadzie pewnika VI b (pewnika Archimedesa dla kątów) możemy znaleźć tak wielką liczbę n, że $^1/n$ część kąta półpełnego $\left\{\text{czyli } \frac{180^\circ}{n}\right\}$ okaże się mniejsza od kąta $\sphericalangle C''A_1A_2$, jakkolwiek mały byłby ten kąt.



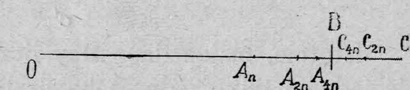
Rys. 297.

Jeśli więc po obraniu tej liczby n zbudujemy kąt $\sphericalangle C'A_1A_2 = \frac{180^\circ}{n}$, ramię jego A_1C' padnie wewnątrz kąta $\sphericalangle C''A_1A_2$. Możemy więc istotnie zbudować trójkąt $\triangle C'A_1A_2$, którego wysokość $C'K'$ okaże się mniejszą od $C''K'$, a więc i od danego odcinka m.

§ 329. Streśćmy teraz całe to długie rozumowanie. Na dowolnej prostej odłóżmy odcinki

$$OA_n = 2\,p_n, \quad OC_n = 2\,P_n,$$
$$OA_{2n} = 2\,p_{2n}, \quad OC_{2n} = 2\,P_{2n},$$
$$OA_{4n} = 2\,p_{4n}, \quad OC_{4n} = 2\,P_{4n}.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(1) Na zasadzie § 325 możemy twierdzić, że punkty A posuwają się coraz dalej w prawo, punkty zaś C coraz dalej w lewo;



Rys. 298.

(2) Na zasadzie § 326 wiemy, że punkty A leżą zawsze w lewo od punktów C;

(3) Z §§ 327—328 wynika, że różnica między obwodami wielokątów wpisanych i opisanych maleje nieograniczenie czyli, że

Granicę tę naz. obwodem koła

jakkolwiek mały byłby odcinek ε, możemy znaleźć taki punkt A_k i taki punkt C_k, iż odcinek $A_k\ C_k$ będzie mniejszy od ε.

Teraz możemy (na mocy pewnika VI-e) twierdzić, że na prostej istnieje jeden i tylko jeden odcinek OB, większy od wszystkich obwodów wielokątów foremnych wpisanych i mniejszy od obwódów wielokątów foremnych opisanych.

Określenie. *Długością okręgu nazywamy długość odcinka OB.*

§ 330. W taki sam sposób, tylko o wiele łatwiej, możemy ustalić pojęcie pola koła.

Jakoż rozpatrując te same ciągi wielokątów foremnych wpisanych i opisanych, mamy:

(1) Pola wielokątów wpisanych rosną, opisanych zaś maleją, jeżeli wciąż podwajamy liczbę ich boków (dlaczego?).

(2) Pola wielokątów wpisanych pozostają mniejsze od pól wielokątów opisanych (dlaczego?).

(3) Różnica między polami wielokątów wpisanych i opisanych jest mniejsza od pola trojkąta $\triangle A_1C'A_1''$ (rys. 296), pole zaś tego trójkąta może być uczynione dowolnie małem, gdyż równa się ono iloczynowi $4\ r.\ C'K'$, w którym czynnik $4\ r$ jest stały, drugi zaś czynnik $C'K'$ może być uczyniony dowolnie małym (§§ 327—328).

To nas upoważnia do twierdzenia, że *istnieje jedna i tylko jedna liczba, większa od pól wielokątów foremnych wpisanych, mniejsza zaś od pól wielokątów foremnych opisanych.*

Tę liczbę **określamy** *jako pole koła.*

§ 331. Twierdzenie. *Długości okręgów mają się do siebie tak, jak promienie tych okręgów.*

Niech będą dane dwa koła $(O)\ r$ i $(O')\ r'$. Oznaczmy długości ich okręgów odpowiednio przez c i c'. Powiadam, że mamy

$$\frac{c}{c'} = \frac{r}{r'},$$

Istotnie, mając dane trzy liczby r, r' c, możemy zawsze znaleźć jedną i tylko jedną taką liczbę d, że zachodzi proporcja:

$$r : r' = c : d$$

Wpiszmy w oba koła wielokąty foremne o jednakowej liczbie boków. Wielokąty te są do siebie podobne (ćwiczenie 10, str. 299). Jeśli więc obwody ich oznaczymy przez $2\ p$, $2\ p'$, wówczas musi być (ćwiczenie 11, str. 299):

$$2\ p : 2\ p' = r : r'$$

2P : 2P' = r : r'

2P : 2P' = c : d
2P : c = 2P : d

czyli $\qquad 2\ p : 2\ p' = c : d.$

skąd wynika, że $\qquad 2\ p : c = 2\ p' : d.$

Ponieważ w tej proporcji liczba c jest większa od $2\ p$ (dlaczego?), zatem liczba d musi być większa od $2\ p'$.

Dowiedliśmy więc, że liczba d jest większa od obwodu każdego wielokąta foremnego, wpisanego w koło $(O')\ r'$.

W taki sam sposób uczeń dowiedzie, że liczba d musi być mniejsza od obwodu każdego wielokąta foremnego, opisanego na kole $(O')\ r'$.

A skoro tak, to liczba d nie może być niczem innem, jak długością c' okręgu tego koła, czyli musi być istotnie

$$c : c' = r : r'.$$

§ 332. Twierdzenie. *Stosunek długości okręgu do długości średnicy jest liczbą stałą.*

Jakoż dowiedliśmy, że

$$c : c' = r : r',$$

zatem $\qquad c : c' = 2\ r : 2\ r',$

albo $\qquad c : 2\ r = c' : 2\ r'.$

Ten stały stosunek $c : 2\ r$ oznaczmy literą grecką π.

Mamy więc $\qquad c : 2\ r = \pi$

czyli $\qquad c = 2\ \pi\ r,$

co daje następującą

Regułę. *Aby obliczyć długość okręgu, mnożymy długość jego średnicy przez stałą liczbę π.*

§ 333. Z kolei przechodzimy do sposobu obliczania pola. Jakikolwiek wielokąt foremny opiszemy na kole, pole jego równać się będzie połowie iloczynu obwodu przez długość apotemy czyli przez promień koła

$$K = \frac{1}{2}\ (2\ p)\ .\ r.$$

W tym iloczynie czynnik r jest stały, natomiast czynnik $2\ p$ dąży do długości okręgu c w miarę, jak podwajamy liczbę boków wielokąta, jest więc rzeczą wielce prawdopodobną, że zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Pole koła równa się połowie iloczynu długości okręgu przez długość promienia, czyli:*

$$K = \frac{1}{2}\ c\ .\ r = \pi\ r^2,$$

jeżeli przez K oznaczyliśmy pole koła.

Wykazaliśmy powyżej, że pola wielokątów foremnych wpisanych w koło i opisanych na niem tworzą dwa ciągi nieskończone, dążące do wspólnej granicy. Tę wspólną ich granicę n a z w a l i ś m y polem koła. Gdyby więc udało się dowieść, że liczba πr^2 jest granicą któregokolwiek z tych dwóch ciągów, wówczas ustalibyśmy tem samem, że jest ona istotnie polem koła o promieniu $= r$.

Otóż wiadomo, że liczba jakaś K jest granicą ciągu nieskończonego

$$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n, A_{n+1} \ldots\ldots$$

o ile spełnia trzy następujące warunki:

1) K musi być liczbą stałą;

2) różnica między liczbą K a wyrazami ciągu musi maleć nieograniczenie (co do wartości bezwzględnej), albo dokładniej mówiąc: jakkolwiek małą zadanoby nam liczbę dodatnie ε, powinien istnieć taki wyraz naszego ciągu (powiedzmy, wyraz A_n), żeby zachodziła nierówność

$$| K - A_n | < \varepsilon;$$

3) różnica ta powinna już zawsze pozostawać mniejszą od ε (co do wartości bezwzględnej); to znaczy: każda z nieskończenie wielu różnic

$$| K - A_{n+1} |, \ | K - A_{n+2} |, \ K - A_{n+3} | \text{ i t. d.}$$

powinna być mniejsza od ε.

Widać odrazu, że liczba πr^2 spełnia warunek (1). Zbudujmy tedy ciąg pól wielokątów opisanych

$$P_1 r, P_2 r, P_3 r, \ldots\ldots P_n r, \ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

weźmy pod uwagę różnicę

$$P_n r - \pi r^2 = r\,(P_n - \pi r)$$

i zastanówmy się, czy może ona być uczynioną mniejszą od dowolnej liczby dowatniej ε, choćby nie wiedzieć jak małej.

Przedewszystkiem zauważmy, że różnica

$$P_n - \pi r$$

jest liczbą dodatnią. Następnie, wiemy już, że jakkolwiek mała byłaby liczba dodatnia η, możemy zawsze znaleźć taki wielokąt opisany (o obwodzie $= 2 P_n$) że zachodzić będzie nierówność

$$2 P_n - 2 \pi r < \eta,$$

a więc tembardziej zachodzić będzie nierówność

$$P_n - \pi r < \eta \qquad \text{(dlaczego?)}.$$

½ obwodu wiel. op. – ½ obwodu koła

pole wiel. op. – pole koła

Jeśli tedy chcemy, żeby było

$$P_n r - \pi r^2 < \varepsilon,$$

trzeba tylko obrać taki wielokąt, aby zachodziła nierówność

$$P_n - \pi r\cancel{^2} < \frac{\varepsilon}{r}.$$

Tak więc liczba πr^2 spełnia również warunek (2). Co się tyczy warunku (3), to rzecz jasna, że jest on zawsze spełniony. Istotnie wyrazy ciągu (I) stale rosną, a więc różnice:

$$P_{n+1}\, r - \pi r^2, \ P_{n+2}\, r - \pi r^2, \ P_{n+3}\, r - \pi r^2 \ \ldots\ldots$$

stale maleją.

Wobec tego liczba πr^2 jest granicą ciągu (I) czyli jest tem, co nazwaliśmy polem koła.

§ 334. Pozostaje do rozstrzygnięcia pytanie: w j a k i s p o s ó b m o ż n a o b l i c z y ć l i c z b ę π?

Otóż przedewszystkiem musimy zaznaczyć, że liczba π jest niewymierna*), zatem nie da się nigdy wyrazić w postaci ułamka skończonego. Co się tyczy sposobów obliczania wartości przybliżonych na π, to niektóre tylko z nich należą do dziedziny matematyki elementarnej.

Najprostszy pod względem pomysłu jest sposób A r c h i m e d e s a**). Wpiszmy w koło dowolny wielokąt foremny o n bokach i opiszmy na niem drugi wielokąt, również o n bokach. Kładąc $r=1$, obliczmy obwody obu wielokątów; następnie podwójmy liczbę ich boków, obliczmy obwody nowych wielokątów i t. d. Otrzymamy dwa ciągi liczb, między któremi zawarta jest długość okręgu czyli liczba 2π, gdyż założyliśmy $r = 1$.

nie podstawić wzorów wyprowadzonych

Mamy w ten sposób:

$$\begin{aligned}
2 p_6 &= 6 &< 2\pi < 6{\cdot}928 &= 2 P_6 \\
2 p_{12} &= 6{\cdot}212 &< 2\pi < 6{\cdot}430 &= 2 P_{12} \\
2 p_{24} &= 6{\cdot}266 &< 2\pi < 6{\cdot}320 &= 2 P_{24} \\
2 p_{48} &= 6{\cdot}278 &< 2\pi < 6{\cdot}292 &= 2 P_{48} \\
2 p_{96} &= 6{\cdot}282 &< 2\pi < 6{\cdot}286 &= 2 P_{96}
\end{aligned}$$

i t. d.

*) Fakt ten został ustalony dopiero w XVIII w. przez Szwajcara L a m b e r t a i Francuza L e g e n d r e'a. Dowodu nie możemy tu przytoczyć; ciekawych odsyłamy do książki: *Rudio* Vier Abhandlungen über die Kreismessung, Leipzig, 1892.

**) Archimedes z Syrakuz (287—211 r. przed Chr.) pierwszy podał metodę obliczania przybliżonych wartości na π. Rozprawka Archimedesa *O pomiarze koła* była drukowana w przekładzie polskim w czasopiśmie matematycznem „Wektor", rocznik II, 1912 r.

Niemożliwość obliczenia długości któregoś

Poprzestając na wielokątach o 96 bokach, mamy:

$$3{\cdot}141 < \pi < 3{\cdot}143.$$

Archimedes znalazł następujące granice dla π:

$$3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}.$$

W praktyce wystarczają zazwyczaj wartości przybliżone 3·14 lub $3\frac{1}{7}$.

Dla ciekawych podajemy wartość na π z dziesięcioma znakami dziesiętnemi:

$$\pi = 3{\cdot}1415926535\ \ldots\ldots$$

§ 335. Bardzo ładny sposób elementarny obliczania π możemy oprzeć na ćwiczeniu 15, str. 301. Jest to t. zw. *metoda figur równoobwodowych.*

Jeżeli apotemę wielokąta foremnego o n bokach oznaczymy przez a, promień koła, na nim opisanego, przez r, apotemę zaś i promień wielokąta foremnego, mającego ten sam obwód, lecz dwa razy więcej boków, oznaczymy odpowiednio przez a' i r', wówczas będziemy mieli wzory

$$a' = \frac{r+a}{2},$$

$$r' = \sqrt{ra'}.$$

Stały obwód, o którym mowa w zagadnieniu, niech się równa liczbie 2. Wyobraźmy sobie, że szukamy promienia x koła którego obwód równa się 2. Będziemy mieli $x = \frac{1}{\pi}$. Zauważmy dalej, że obwód c tego koła jest większy od obwodu koła, wpisanego w wielokąt foremny, mający obwód $= 2$, mniejszy zaś od obwodu koła, opisanego na tym samym wielokącie; zatem promień x musi się zawierać między apotemą a i promieniem r tego wielokąta, przyczem, podwajając wciąż liczbę boków wielokąta (a pozostawiając bez zmiany jego obwód), zamykamy x w coraz ciaśniejsze granice.

W ten sposób tworzymy dwa nieskończone ciągi liczb, między któremi zawiera się liczba $\frac{1}{\pi}$.

n	apotema	promień
4	0·25	0·353....
8	0·301...	0·326....
16	0·3142....	0·3203....
32	0·3172....	0·3188....
64	0·31805	0·31843....
128	0·318245....	0·31834....

§ 336. Chcąc ustalić pojęcie długości łuku i pola wycinka kołowego, możemy z temi figurami postąpić tak, jak z kołem. Możemy mianowicie o k r e ś l i ć długość łuku jako spólną granicę, do której dążą długości łamanych, wpisanych w ten łuk i opisanych na nim. Tak samo określamy pole wycinka kołowego jako spólną granicę pól wielokątów, wpisanych w wycinek i opisanych na nim, przytem mających wierzchołek w środku koła i dwa promienie koła jaki boki.

Ćwiczenia LIII. 1. Obliczyć promień koła, jeżeli wiadomo, że kątowi środkowemu, mającemu $25^0\ 10'$, odpowiada łuk, mający 4 m długości.

2. Mamy dane dwa koła, których promienie mają się do siebie, jak 1 : 100. Promień każdego koła zwiększamy o 1 cm; w którem kole obwód bardziej się zwiększył? w którem pole bardziej się zwiększyło?

3. Pola dwóch kół mają się do siebie tak, jak 1 : 8; jaki jest stosunek ich promieni?

4. Kąty trójkąta mają się tak do siebie, jak 1 : 2 : 3; promień koła opisanego równa się 12 cm; obliczyć długości łuków, podpartych przez boki trójkąta.

5. W koło o promieniu 6 cm wpisano czworobok, którego kąty kolejne mają się do siebie, jak 1 : 2 : 3 : 9. Obliczyć długości czterech łuków, na które został podzielony okrąg.

6. W wycinek kołowy wpisać koło; obliczyć jego pole, jeżeli kąt wycinka równa się (1) 60^0, (2) 90^0.

7. Pole każdego trójkąta ma się tak do jego obwodu, jak pole koła wpisanego ma się do długości okręgu tego koła.

8. Na bokach kwadratu, jako na średnicach, kreślimy półkola do wnętrza: przecięcie ich wyznacza figurę, złożoną z czterech soczewek. Obliczyć pole tej figury, jeżeli bok kwadratu $= a$.

9. Z wierzchołków trójkąta foremnego $\triangle ABC$ kreślimy trzy koła promieniem a; obliczyć pole trójkąta krzywolinjowego ABC.

10. Mając dane półkole, obieramy dowolny punkt C na jego średnicy AB i kreślimy dwa nowe półkola, leżące wewnątrz pierwszego i mające za średnice odcinki AC, CB. Obliczyć pole t. zw. sierpa Archimedesa, t. j. trójkąta krzywolinjowego, zawartego między temi trzema półkolami. Zbudować koło, którego pole równałoby się polu sierpa.

11. Na średnicy AB danego półkola obieramy punkty C, D tak, żeby było $AC = BD$, poczem na AC i BD, jako na średnicach, kreślimy półkola, leżące wewnątrz danego, na średnicy zaś CD kreślimy półkole, leżące po przeciwnej stronie prostej AB; w ten sposób otrzymujemy t. zw. tarczę Archimedesa. Obliczyć jej pole i zbudować koło, mające to samo pole.

12. Mamy dany ćwiercian (t. j. wycinek, stanowiący czwartą część koła) AOB. Na promieniach jego AO, OB, jako na średnicach, kreślimy półkola, przecinające się w punkcie M. Dowieść, że M leży na prostej AB i obliczyć pola czterech części, na które podzieliliśmy ćwiercian.

13. Z każdego wierzchołka sześciokąta foremnego kreślimy koło, przechodzące przez środki dwóch sąsiednich boków. Znaleźć pole sześciokąta krzywolinjowego, który powstał wewnątrz danego sześciokąta.

14. Niech będą OA, OB dwa prostopadłe do siebie promienie koła. Na łuku AB obieramy punkty C, D tak, żeby łuki AC, BD równały się sobie.

Z punktów C i D prowadzimy prostopadłe CE, DF do OA. Nie posługując się rachunkiem, dowieść, że trapez krzywolinjowy $EFDC$ i wycinek kołowy OCD mają pola równe.

15. Dane jest koło i punkt M na okręgu. Wykreślić takie trzy koła, styczne wewnętrznie w punkcie M do danego koła, by podzieliły one pole koła danego na cztery części równe.

16. Znaleźć wzór na pole wycinka kołowego, którego kąt ma α stopni.

17. Dowieść, że zarówno pola wycinków podobnych, jak i pola podobnych odcinków kołowych mają się do siebie tak, jak kwadraty promieni*).

18. Pola podobnych odcinków kołowych mają się do siebie tak, jak kwadraty cięciw.

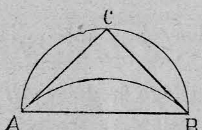
19. W kole $(O)A$ na promieniu AO, jako na średnicy, kreślimy drugie koło. Jeżeli poprowadzimy dowolną prostą AB, wówczas dwa odcinki kołowe, wyznaczone przez tę prostą w dwóch naszych kołach, będą się miały do siebie, jak $4:1$.

20. Mając dany odcinek kołowy, zbudować dwa podobne do niego odcinki, z których jeden byłby n^2 razy mniejszy od niego, drugi zaś n^2 razy większy.

21. Pole koła, którego średnicą jest przeciwprostokątna, równa się sumie pól dwóch kół, których średnicami są dwie przyprostokątne.

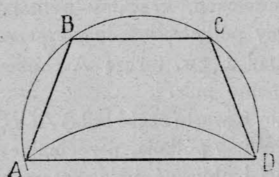
22. Uogólnić poprzednie twierdzenie, posługując się odcinkami kołowemi.

Nad zagadnieniem pomiaru koła pracowano w starożytnej Grecji na wiele lat przed Archimedesem. Wszystkie próby rozwiązania tego zagadnienia były bezowocne, natrafiono jednak przy tej sposobności na rozmaite ciekawe własności figur geometrycznych. Do naszych czasów dochowało się sprawozdanie z odkryć, które uczynił Hipokrates z Chiosu (około 440 r. przed Chr.) przy poszukiwaniu wielokąta równoważnego kołu. Nie udało mu się wprawdzie zmierzyć pola koła, ale zdołał dowieść, że istnieją figury, ograniczone łukami kół, których pola równają się polom pewnych wielokątów. Figurami temi są t. zw. księżyce Hipokratesa, o których mowa w zadaniach 23—25.



Rys. 299.

23. Mając dany trójkąt prostokątny równoramienny (rys. 299), opisujemy na nim koło, poczem na przeciwprostokątnej kreślimy odcinek kołowy, podobny do tych odcinków, które powstały na przyprostokątnych**). Otrzymujemy w ten sposób księżyc, którego pole równa się polu trójkąta $\triangle ABC$.



Rys. 300.

24. Mając dany odcinek a, budujemy trapez równoramienny tak, by dwa jego boki i mniejsza podstawa równały się a, większa zaś podstawa żeby

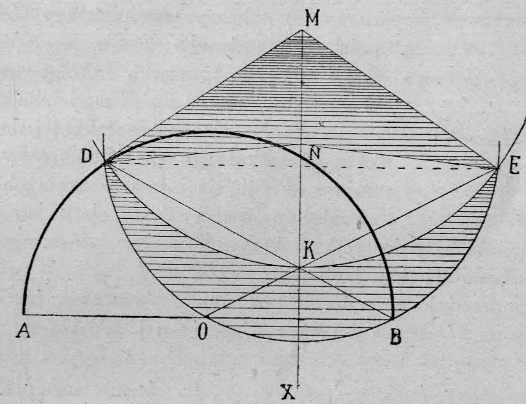
---

*) Podobnemi wycinkami lub odcinkami nazywamy te, którym odpowiadają równe kąty środkowe.

**) W jaki sposób można zbudować odcinek kołowy, podobny do innego danego odcinka?

była równa $a\sqrt{3}$. Na trapezie opisujemy koło, poczem na większej podstawie wykreślamy odcinek kołowy, podobny do tych odcinków, które powstały na pozostałych bokach trapezu. Pole księżyca $ABCD$ równa się polu trapezu.

25. Niech będzie dane półkole $(O)A$. W środku promienia OB wystawiamy prostopadłą KX i przez punkt B prowadzimy sieczną tak, by odcinek jej DK



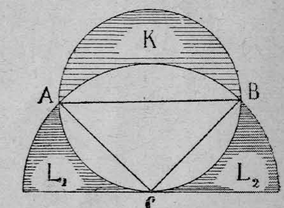
Rys. 301.

zawarty między ową prostopadłą a okręgiem, równał się $r\sqrt{\frac{3}{2}}$*). Jeżeli teraz z D wykreślimy równoległą do OB, która przecina prostą OK w punkcie E, wówczas punkty D, O, B, E leżeć będą na jednym łuku koła, punkty zaś D, K, E na drugim łuku. Jeżeli M, N są środkami kół, odpowiadających tym dwu łukom, wówczas pole księżyca, zawartego między temi dwoma łukami, równa się polu czworoboku $DMEN$.

Prócz księżyców Hipokratesa możemy utworzyć inne jeszcze figury, ograniczone łukami kół i równoważne pewnym trójkątom lub wielokątom.

26. Na dowolnym trójkącie prostokątnym $\triangle ABC$ opisujemy koło, poczem nazewnątrz trójkąta kreślimy dwa półkola, mające jego przyprostokątne za średnice. Otrzymujemy dwa księżyce; suma ich pól równa się polu trójkąta $\triangle ABC$.

27. W półkole wpisujemy trójkąt prostokątny równoramienny $\triangle ABC$ tak, by przeciwprostokątna była równoległa do średnicy, poczem na tym samym trójkącie opisujemy koło. Otrzymamy w ten sposób księżyc K, którego pole równa się polu trójkąta, oraz dwa trójkąty krzywolinijowe L_1 i L_2, z których każdy ma pole dwa razy mniejsze od pola trójkąta $\triangle ACB$.



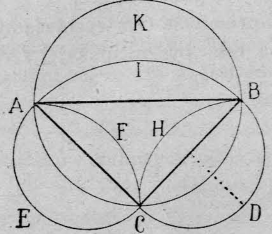
Rys. 302.

28. W koło dane wpisujemy trójkąt prostokątny równoramienny $\triangle ABC$, na każdym jego

---

*) Konstrukcję takiej prostej rozważaliśmy w zadaniu IV, str. 294.

boku kreślimy po ćwierci okręgu, a oprócz tego na przyprostokątnych AC, CB kreślimy po półkolu, jak wskazuje rysunek 303. Dowieść, że



Rys. 303.

(1) zarówno trójkąt krzywolinjowy $AFCHBI$ jak księżyc K mają pola równe polu trójkąta $\triangle ABC$;

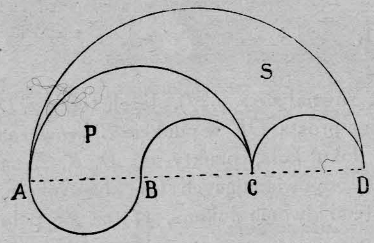
(2) pole figury krzywolinjowej $AECDBI$ równa się polu koła danego;

(3) pole wycinka kołowego $CAIB$ równa się polu półkola danego;

(4) pole soczewki, która powstała na przyprostokątnej, równa się polu odcinka kołowego ABI.

29. Na przeciwprostokątnej dowolnego trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$ kreślimy nazewnątrz ćwierć okręgu, na przyprostokątnych zaś kreślimy również po ćwierci okręgu, ale po stronie wewnętrznej trójkąta. Dowieść, iż pole trójkąta krzywolinjowego, zawartego między temi trzema łukami, równa się polu trójkąta $\triangle ABC$.

30. Czy poprzednie twierdzenie pozostanie prawdziwe, jeżeli na każdym boku wykreślimy po $1/n$-tej części okręgu, gdzie $n \neq 4$?

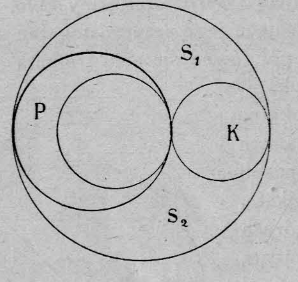


Rys. 304.

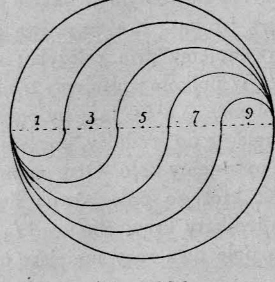
31. Jeżeli na rys. 304 mamy $AB = CD$, wówczas pola figur P i S są sobie równe.

32. Suma figur S_1, S_2 na rys. 305 różni się od księżyca P o pole koła K.

33. Na sześciokącie foremnym opisujemy koło, a oprócz tego na każdym boku sześciokąta kreślimy nazewnątrz po półkolu, tak, że otrzymujemy sześć księżyców. Wykreślić drugie koło, spółśrodkowe z pierwszem, tak, żeby pole figury, zawartej między niem a sześciokątem, równało się sumie półksiężyców.



Rys. 305.



Rys. 306.

34. Opisać i uzasadnić wskazany na rys. 306 podział koła na n części, mających równe pola.

Do najsłynniejszych zagadnień matematycznych należą t. zw. zagadnienia kwadratury koła i wyprostowania (rektyfikacji) okręgu. Sformułować je możemy w sposób następujący: *posługując się wyłącznie cyrklem i linjałem, zbudować kwadrat, którego pole równałoby się polu danego koła, lub też odcinek, którego długość równałaby się długości danego okręgu.*

Zagadnienia te niepokoiły umysły ludzkie od chwili, gdy geometrja zaczęła stawać się nauką. Dziś wiemy, że oba te zagadnienia są niemożliwe do rozwiązania; dałyby się wprawdzie wymyśleć specjalne przyrządy do kwadratury i rektyfikacji, ale niepodobna zbudować odpowiedniego kwadratu czy odcinka, jeżeli mamy posługiwać się tylko cyrklem i linjałem.

To samo jednak zagadnienie możemy z łatwością rozwiązać w sposób przybliżony, co stanowi treść następujących zadań.

35. Najstarsze znane nam dzieło matematyczne (podręcznik, ułożony pomiędzy 2000 i 1700 r. przed Chr. przez kapłana egipskiego Ahmesa) zawiera następujący przepis na obliczanie pola koła o średnicy $= 9$:

„odejmij $^1/_9$ część czyli 1; pozostaje 8; pomnóż tę liczbę przez 8; otrzymasz 64, pole równa się 64".

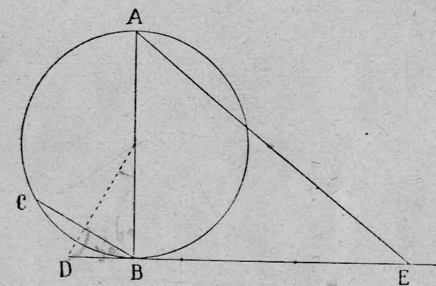
Jakiej wartości na π odpowiada ten przepis?

36. Jaką wartość przypiszemy liczbie π, jeżeli za długość okręgu uważać będziemy sumę $a_3 + a_4$?

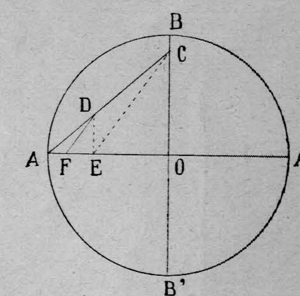
37. Hindusi posiadali następujący przepis budowania koła o polu, równającem się w przybliżeniu polu danego kwadratu: „od połowy przekątnej kwadratu odejmij połowę boku, różnicę podziel na trzy części równe i ze środka kwadratu zakreśl koło, przechodzące przez pierwszy punkt podziału". Jakiej wartości na π odpowiada ten przepis?

38. Na ile części równych wypadłoby dzielić różnicę między przekątną a bokiem kwadratu w zadaniu poprzedniem, jeżeli chcemy, by konstrukcja odpowiadała wartości π, obliczonej z dokładnością do 0·0001?

39. Ciekawą konstrukcję okręgu wyprostowanego podał w 1685 r. jezuita Adam Kochański, sekretarz króla Jana III. Odznacza się ona znacznym stopniem przybliżenia i daje się wykonać jednem rozwarciem cyrkla.



Rys. 307.



Rys. 308.

Kreślimy średnicę AB, przez B prowadzimy styczną, kreślimy cięciwę $BC = r$, prowadzimy OD prostopadle do tej cięciwy, od D odkładamy odcinek $DE = 3r$;

odcinek AE jest niewiele mniejszy od połowy okręgu. Znaleźć stopień przybliżenia tej konstrukcji.

40. Kreślimy dwie prostopadłe do siebie średnice AA', BB' i kładąc $OB=1$, kreślimy $OC=\frac{7}{8}$, $AD=\frac{1}{2}$, $DE // OB$; $DF // EC$; jeżeli teraz odłożymy na prostej odcinek równy trzem promieniom i dodamy do niego odcinek AF, otrzymamy nowy odcinek, mało różniący się od długości połowy okręgu. Obliczyć w postaci ułamka zwyczajnego wartość na π, odpowiadającą powyższej konstrukcji. Wartość tę znalazł w XVI w. Adriaen Antonisz*); zresztą już około 430 r. po Chr. znał ją astronom chiński Tsu-ching-czi.

*) Zazwyczaj przypisują to odkrycie jego synowi, zwanemu Metiusem, ten jednak powiada wyraźnie, że ogłasza jedynie odkrycie swego ojca.

KSIĘGA VI.

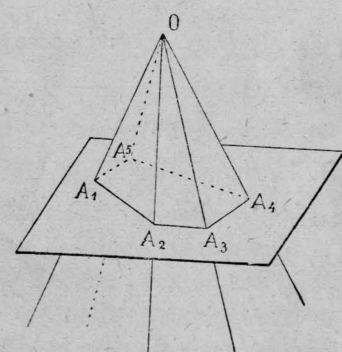
O kątach bryłowych i o wielościanach.

ROZDZIAŁ I.

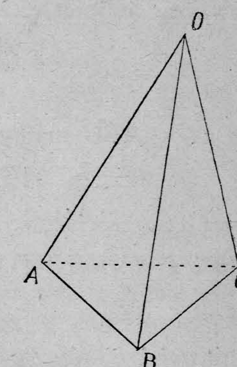
O kątach bryłowych (narożach).

§ 337. Niech będzie dany dowolny wielokąt (wypukły) $A_1A_2, \ldots A_n \ldots$ Jeżeli wierzchołki jego połączymy półprostemi z punktem O, nie leżącym w płaszczyźnie wielokąta, otrzymamy figurę, zwaną *kątem bryłowym albo narożem.*

Naroże ograniczone jest przez n kątów płaskich $\sphericalangle A_1OA_2$, $\sphericalangle A_2OA_3 \ldots$, $\sphericalangle A_nOA_1$, które nazywamy *ścianami naroża.* Półproste OA_1, $OA_2, \ldots$, OA_n nazywamy krawędziami, punkt O zaś wierzchołkiem naroża.



Rys. 309.



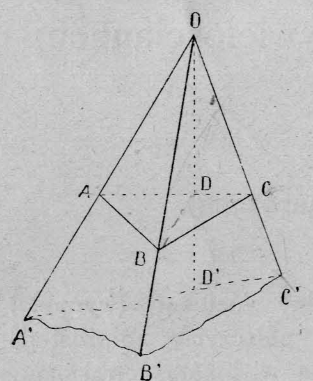
Rys. 310.

Naroże, mające tylko trzy ściany i trzy krawędzie, zwie się *trójścianem*.

Trójścian ma 3 kliny (jakie?) Naroże o n ścianach ma n klinów.

Trójścian, odpowiadający rysunkowi 310 oznaczamy symbolem $O(ABC)$; analogicznie naroże wielościenne na rys. 209 oznaczylibyśmy symbolem $O(A_1A_2A_3A_4A_5)$.

§ 338. Twierdzenie. *Suma dwóch ścian trójścianu jest zawsze większa od trzeciej ściany.*



Rys. 311.

Wystarczy dowieść tego twierdzenia dla największej ściany.

Niech będzie dany trójścian $O(A'B'C')$ jak na rys. 311, i niech największą jego ścianę stanowi kąt $\sphericalangle A'OC'$. Mamy dowieść, że

$$\sphericalangle A'OC' < \sphericalangle A'OB' + \sphericalangle B'OC'.$$

W tym celu na największej ścianie odkładamy kąt

$$\sphericalangle A'OD' = \sphericalangle A'OB',$$

oraz odkładamy

$$OD = OB,$$

poczem obieramy na krawędzi OC' taki punkt C, żeby płaszczyzna $[BDC]$ nie była równoległa do krawędzi OA'. Płaszczyzna ta przecina wszystkie trzy krawędzie trójścianu, przyczem w przekroju otrzymujemy trójkąt $\triangle ABC$.

Zauważmy najpierw, że

$$\triangle AOB \equiv \triangle AOD \quad \text{(dlaczego?)},$$

zatem

$$AB = AD \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Ale z $\triangle ABC$ mamy nierówność

$$AC < AB + BC$$

czyli

$$AD + DC < AB + BC.$$

Stąd i z równości (1) wynika, że

$$DC < BC \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

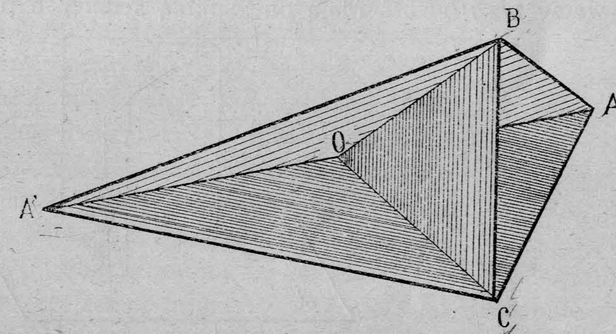
Ponieważ trójkąty $\triangle DOC$, $\triangle BOC$ mają po dwa boki równe (które?), lecz trzecie ich boki nie są sobie równe, zatem naprzeciw większego boku leży większy kąt. W ten sposób z nierówności (2) wynika, że

$$\sphericalangle DOC < \sphericalangle BOC,$$

a więc również

$$\sphericalangle AOC < \sphericalangle BOC + AOB.$$

§ 339. Twierdzenie. *Suma ścian trójścianu jest mniejsza od czterech kątów prostych.*



Rys. 312.

Niech będzie dany trójścian $O(ABC)$. Przedłużmy jego krawędź OA poza wierzchołek. Powstanie w ten sposób nowy trójścian $O(A'BC)$, który ma z danym spólną ścianę $\sphericalangle BOC$, dwie zaś drugie ściany $\sphericalangle BOA'$, $\sphericalangle COA'$ są kątami przyległemi do ścian $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle COA$ pierwszego naroża.

Mamy tedy

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle A'OB + \sphericalangle AOC + A'OC = 360^0 \ldots \quad (1)$$

Ale zważmy, że w trójścianie $O(A'BC)$ mamy

$$\sphericalangle A'OB + \sphericalangle A'OC > \sphericalangle BOC;$$

stąd i z równości (1) wynika, że

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle AOC + \sphericalangle BOC < 360^0.$$

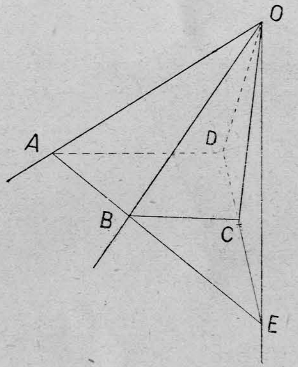
Uwaga. Twierdzenie to daje się rozszerzyć na dowolne kąty bryłowe wypukłe. Niech będzie dane np. naroże czworościenne $O(ABCD)$. Płaszczyzny AOB i DOC nie są do siebie równoległe. Niech OE będzie krawędzią tych płaszczyzn. (Na rysunku 313 przecięliśmy naroże płaszczyzną $ABCD$, aby uwidocznić, iż OE jest istotnie krawędzią płaszczyzn OAB i ODC.) Naroże czworościenne dane zastąpiliśmy trójścianem $O(ADE)$, przez co powiększyliśmy sumę ścian naroża, gdyż

$$\sphericalangle BOC < \sphericalangle BOE + \sphericalangle COE$$

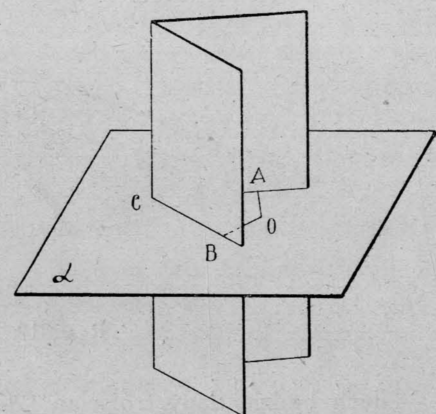
(dlaczego?).

Suma ścian trójścianu jest mniejsza od kąta pełnego, zatem suma ścian w narożu czworościennem była tem bardziej mniejsza od 360^0.

§ 340. Dwa trójściany takie, jak $O(ABC)$ i $O(A'BC)$ na rys. 312, nazywamy *przyległemi*. Mają one spólną ścianę, a pozostałe



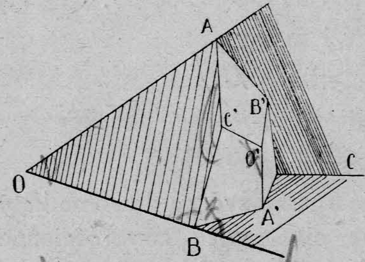
Rys. 313.



Rys. 314.

dwie ściany jednego są kątami przyległemi do odpowiednich dwu ścian drugiego.

§ 341. Niech będzie dany jakikolwiek dwuścian. Z dowolnego punktu O, leżącego wewnątrz dwuścianu, prowadzimy prostopadłe OA, OB do jego ścian. Wyznaczają one płaszczyznę α, prostopadłą do krawędzi dwuścianu. W płaszczyźnie tej mamy czworobok $AOBC$, w którym przeciwległe kąty $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle ACB$ spełniają się (dlaczego?).

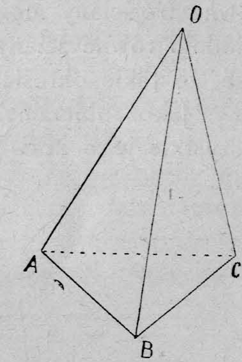


Rys. 315.

OBC'=d
ABL=d i td

Opierając się na tem spostrzeżeniu, możemy wprowadzić pojęcie *trójścianów biegunowych albo spełniających się.*

Niech będzie dany trójścian $O(ABC)$ jak na rys. 315. Wewnątrz niego obieramy dowolny punkt O' i prowadzimy do ścian trzy prostopadłe $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$. W ten sposób powstaje nowy trójścian $O'(A'B'C')$, który nazywamy biegunowym albo spełniającym się z danym.



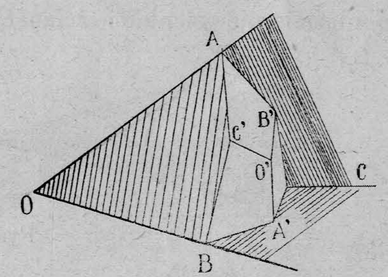
Rys. 316.

Łatwo dostrzec, że *ściany jednego trójścianu spełniają się z kątami linjowemi drugiego* (dlaczego?).

§ 342. Dla trójścianów możemy wprowadzić symbole analogiczne do tych, któremi posługujemy się przy badaniu trójkątów. Każdy mianowicie klin możemy oznaczyć jedną dużą literą z dodaniem znaku kąta, gdyż z § 229, str. 198 wynika, że mierzenie klinów zastąpić można przez mierzenie ich kątów linjowych. Np. na rys. 316 klin o krawędzi OA oznaczylibyśmy symbolem $\sphericalangle A$; analogicznie mielibyśmy na tej samej figurze $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$ jako symbole dwóch pozostałych klinów.

Ściany możemy oznaczyć literami małemi. Wobec tego ścianę $\sphericalangle AOB$ oznaczylibyśmy przez $\sphericalangle c$, jako przeciwległą klinowi $\sphericalangle C$, ścianę $\sphericalangle AOC$ oznaczylibyśmy przez $\sphericalangle b$, jako przeciwległą klinowi $\sphericalangle B$, ścianę $\sphericalangle BOC$ oznaczylibyśmy przez $\sphericalangle a$, jako przeciwległą klinowi $\sphericalangle A$.

Tak samo na rys. 317 w trójścianie o wierzchołku O' mielibyśmy kliny $\sphericalangle A'$, $\sphericalangle B'$, $\sphericalangle C'$ i ściany $\sphericalangle a'$ $\sphericalangle b'$, $\sphericalangle c'$.



Rys. 317.

§ 343. Twierdzenie. *Suma klinów trójścianu zawiera się pomiędzy* $2\,\delta$ *i* $6\,\delta$.

Aby tego dowieść, wystarczy zbudować dwa dowolne trójściany spełniające się, jak na rys. 317. Jakoż mamy:

$$\sphericalangle a + \sphericalangle A' = 2\,\delta;\ \sphericalangle b + \sphericalangle B' = 2\,\delta;\ \sphericalangle c + \sphericalangle C' = 2\,\delta,$$

a więc $(\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c) + (\sphericalangle A' + \sphericalangle B' + \sphericalangle C') = 6\,\delta$;

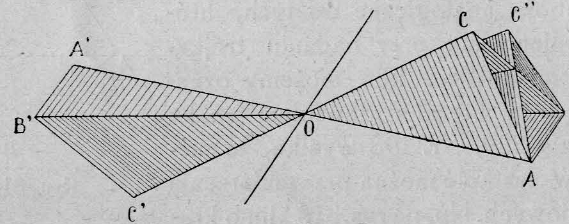
ponieważ zaś $\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c < 4\,\delta$,

zatem $2\,\delta < \sphericalangle A' + \sphericalangle B' + \sphericalangle C' < 6\,\delta$.

6/III 30r

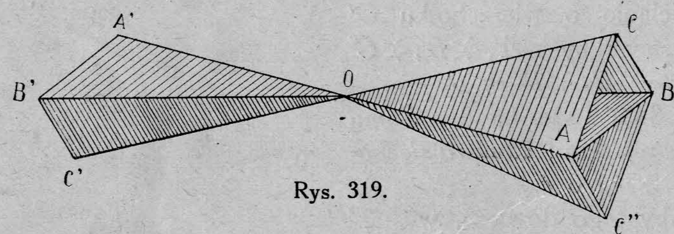
§ 344. Poznaliśmy zasadnicze własności klinów i ścian trójścianu. Zkolei wypadałoby zastanowić się nad pojęciem równości naroży wogóle i trójścianów w szczególności. Zdawałoby się, że równe trójściany można określić jako takie, które mają odpowiednio równe ściany i kliny. Łatwo jednak możemy się przekonać, że takie określenie jest niedostateczne.

Jakoż obierzmy dowolny trójścian $O(ABC)$ i przedłużmy wszystkie jego krawędzie poza wierzchołek (rys. 318). Otrzymamy



Rys. 318.

w ten sposób t. zw. *trójścian wierzchołkowy* $O(A'B'C')$. Rzecz jasna, że wszystkie ściany i kliny jednego trójścianu równają się odpowiednim elementom drugiego, a jednak twierdzę, że trójścianów tych nie możemy uważać za równe sobie w tym sensie, w jakim zwykle mówimy o równości dwóch figur materjalnych. Istotnie gdybyśmy mieli dwa równe sobie materjalne trójściany o niezmiernie cienkich ścianach, wówczas można byłoby jeden



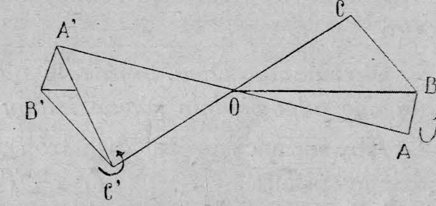
Rys. 319.

z nich dokładnie nałożyć na drugi, tymczasem z trójścianami wierzchołkowemi uczynić tego nie można. Gdybyśmy chcieli materjalny trójścian $O(A'B'C')$ nałożyć na $O(ABC)$, wówczas moglibyśmy albo obrócić go o 180^0 dokoła punktu O tak, by $\sphericalangle A'OB'$ upadł na $\sphericalangle AOB$, przyczem ściany $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle A'OB'$ pozostawałyby podczas tego ruchu zawsze w jednej płaszczyźnie (rys. 319),

albo też możnaby $O(A'B'C')$ obrócić również o 180^0 dokoła dwusiecznej kąta $\sphericalangle A'OB$ (rys. 318). Rzecz prosta, że podczas tego ruchu ściany $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle A'OB'$ nie mogłyby leżeć w jednej płaszczyźnie.

W pierwszym przypadku krawędź OC' znalazłaby się pod płaszczyzną AOB (rys. 319), w drugim przypadku krawędź OA' upadłaby na OB, krawędź zaś OB' upadłaby na OA, wobec czego krawędź OC' przybrałaby położenie OC'' na rys. 318.

Widzimy tedy, że gdy mowa o równych trójścianach, musimy uwzględniać nietylko wielkości klinów i ścian, lecz i porządek, w jakim są one rozmieszczone. Istotnie, wyobraźmy sobie, że ktoś, znajdując się w wierzchołku O trójścianu $O(ABC)$, zwrócony jest twarzą ku otworowi tego trójścianu. Takiemu obserwatorowi wydawać się będzie, iż krawędzie OA, OB, OC następują po sobie w zwrocie, przeciwnym ruchowi wskazówek zegara (rys. 320). Jeżeli jednak ten sam obserwator zwróci się

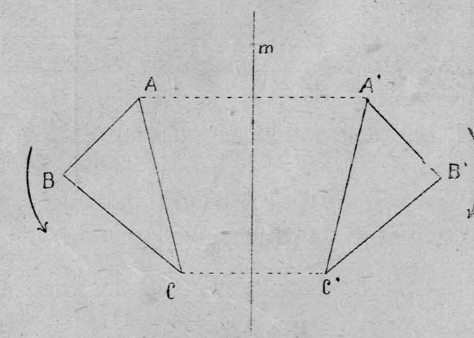


Rys. 320.

twarzą ku otworowi trójścianu wierzchołkowego $O(A'B'C')$, wówczas krawędzie OA', OB', OC' będą z jego punktu widzenia następowały po sobie w zwrocie, zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

W ten sposób obserwacja skłania nas do przypisywania trójścianom zwrotów. Zwrot trójścianu $O(ABC)$ w powyższym przykładzie nazywamy dodatnim, zwrot zaś trójścianu $O(A'B'C')$ nazywamy ujemnym.

Łatwo dostrzec, iż *trójściany wierzchołkowe są symetryczne względem środka O*, jeżeli dla figur przestrzennych zachowamy to samo określenie symetrji względem środka, które podaliśmy w § 95 (str. 71) dla figur płaskich.



Rys. 321.

Niemożność nałożenia na siebie trójścianów symetrycznych jest zupełnie analogiczna do pewnego zjawiska planimetrycznego.

Niech będzie dany trójkąt $\triangle$ ABC, nie posiadający kątów równych. Jeżeli trójkąt ten przekształcimy symetrycznie względem dowolnej osi m, otrzymamy trójkąt $\triangle$ $A'B'C'$, mający te same kąty i boki, co i trójkąt dany. Gdybyśmy jednak chcieli trójkąt materjalny $\triangle$ $A'B'C'$ doprowadzić do przystania z trójkątem $\triangle$ ABC, nie opuszczając płaszczyzny, w których oba one leżą, okazałoby się to rzeczą niemożliwą: trzeba koniecznie jeden z nich wyjąć z płaszczyzny rysunku, obrócić na drugą stronę i wówczas dopiero nałożyć na drugi trójkąt.

To samo zjawisko mamy przy trójścianach wierzchołkowych: nie możemy ich doprowadzić do przystania, gdyż nie możemy jednego z nich wyjąć z przestrzeni trójwymiarowej, w której się oba znajdują.

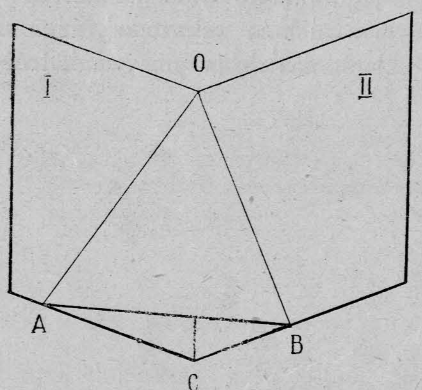
Zauważmy, że kontury trójkątów ABC, $A'B'C'$ mają zwroty przeciwne.

§ 345. Wszystkie te rozważania prowadzą nas do następującego

Określenia. *Dwa trójściany nazywamy równemi sobie, jeżeli mają one odpowiednio równe ściany i kliny i jednakowe zwroty.*

Aby zaznaczyć, że dwa trójściany T_1 i T_2 są sobie równe, będziemy pisali: $T_1 \equiv T_2$.

§ 346. Jak przy badaniu trójkątów, nasuwa się pytanie, czy przy rozpoznawaniu równości trójścianów musimy uwzględniać wszystkie sześć równości między klinami i ścianami, czy też wystarczy zbadanie niektórych z nich.



Rys. 322.

Odpowiedź na to znajdziemy w następujących zadaniach i twierdzeniach.

§ 347. Zadanie I. *Zbudować trójścian, mając dany jeden jego klin i dwie ściany przyległe do tego klinu.*

Niech będzie dany klin o krawędzi OC, zawarty między płaszczyznami I i II (rys. 322) oraz dwa kąty płaskie $\sphericalangle \alpha$ i $\sphericalangle \beta$. Zbudujemy na płaszczyźnie I kąt $\sphericalangle AOC = \sphericalangle \alpha$, na płaszczyźnie zaś II kąt $\sphericalangle BOC = \sphericalangle \beta$. Przez proste OA, OB przesunąć możemy tylko

jedną płaszczyznę, trójścian więc $O(ABC)$ jest w zupełności wyznaczony.

Tak więc, mając dany klin i dwie przyległe do niego ściany, możemy zbudować jeden i tylko jeden trójścian $O(ABC)$, mający dany zwrot.

Powiadam: „mający dany zwrot“, gdyż moglibyśmy równie dobrze odłożyć $\sphericalangle \beta$ na płaszczyźnie I, kąt $\sphericalangle \alpha$ zaś na płaszczyźnie II, ale otrzymany trójścian miałby zwrot przeciwny.

Wynika stąd następujące

§ 348. Twierdzenie. *Dwa trójściany są albo równe, albo symetryczne, jeżeli mają po równym klinie, zawartym między dwiema odpowiednio równemi ścianami.*

§ 349. Twierdzenie. *Dwa trójściany równają się sobie, albo są symetryczne, jeżeli mają po równej ścianie, zawartej między dwoma odpowiednio równemi klinami.*

Istotnie, jeżeli w trójścianach T_1 i T_2 mamy

$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2, \ \sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2, \ \sphericalangle c_1 = c_2,$$

wówczas w trójścianach T'_1 i T'_2, spełniających się z danemi, musi być

$$\sphericalangle a'_1 = \sphericalangle a'_2, \ \sphericalangle b'_1 = b'_2, \ \sphericalangle C'_1 = \sphericalangle C'_2,$$

wobec tego, na mocy § 347' musi być

$$T'_1 \equiv T'_2,$$

a stąd wynika (§ 347, 341), że i

$$T_1 \equiv T_2.$$

§ 350. Zadanie II. *Zbudować trójścian, mając dane trzy jego ściany* $\sphericalangle a$, $\sphericalangle b$, $\sphericalangle c$.

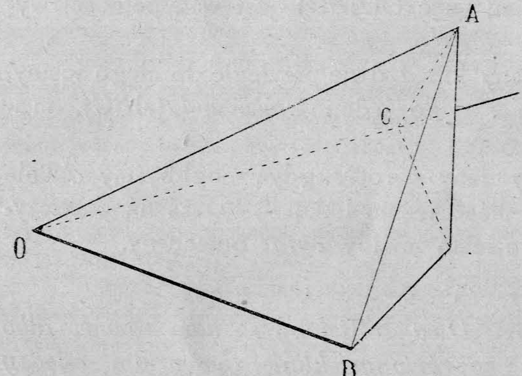
Rzecz prosta, iż te trzy kąty powinny spełniać warunki, zawarte w twierdzeniach §§ 338, 339.

Przeprowadźmy analizę zadania. Niech $O(ABC)$ będzie żądanym trójścianem. Jeżeli z dowolnego punktu A na krawędzi OA poprowadzimy

$$AB \perp OB, \ AC \perp OC$$

i jeżeli A' jest rzutem punktu A na ścianę COB, wówczas musi być również

$$A'C \perp OC, \ A'B \perp OB \qquad \text{(dlaczego?).}$$



Rys. 323.

Tak więc kąty $\sphericalangle A'CA$, $\sphericalangle A'BA$ są kątami linjowemi dwuścianów $\sphericalangle C$ i $\sphericalangle B$.

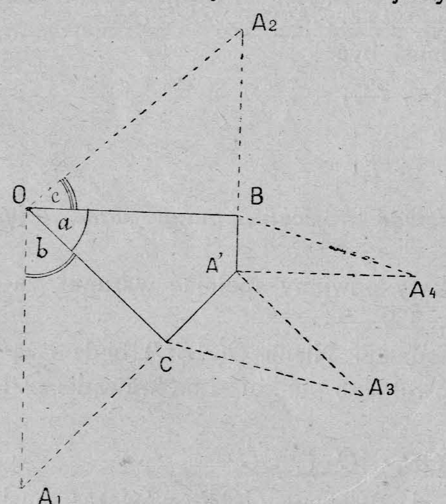
Figura nasza składa się z czworoboku $OBA'C$ o dwóch kątach prostych i z czterech trójkątów prostokątnych. Wykonajmy teraz kład tej figury na płaszczyznę OBC a mianowicie narysujmy t. zw. *siatkę* figury. Otrzymamy figurę taką jak na rys. 324, przyczem odcinki BA', BA_2 leżą na jednej prostej, odcinki zaś $A'C$, CA_1 leżą na drugiej prostej, a prócz tego mamy

$$BA_2 = BA_4\,;\ A'A_3 = A'A_4\,;\ CA_1 = CA_3.$$

Teraz już z łatwością przeprowadzić możemy konstrukcję trójścianu. W tym celu budujemy na płaszczyźnie trzy kolejne kąty $\sphericalangle c, \sphericalangle a, \sphericalangle b$ o wspólnym wierzchołku O, na dwóch skrajnych półprostych odkładamy dowolne, lecz równe sobie odcinki

$$OA_1 = OA_2$$

poczem kreślimy z punktów A_1, A_2 prostopadłe do ramion kąta $\sphericalangle a$, które przecinają te ramiona w punktach B, C, same zaś przecinają się w punkcie A'. W punkcie A' wystawiamy prostopadłe do prostych $A'A_1$, $A'A_2$, z B i z C kreślimy koła promieniami BA_2, CA_1, tak, iż otrzymujemy



Rys. 324.

$$BA_4 = BA_2,\ CA_3 = CA_1.$$

Teraz pozostaje już tylko złożyć zpowrotem tę siatkę, czyli w punkcie A' wystawić prostopadłą do płaszczyzny BOC i na prostopadłej odłożyć odcinek

$$A'A = A'A_3 = A'A_4$$

oraz połączyć punkt A z punktem O.

Ponieważ siatkę możnaby złożyć po jednej lub po drugiej stronie płaszczyzny (czyli na prostopadłej, wystawionej w A' możnaby odcinek $A'A = A'A_3$ odłożyć po obu stronach płaszczyzny), zatem możnaby zbudować dwa trójściany, które jednak miałyby różne zwroty. Jeśli więc zwrot trójścianu został zgóry wyznaczony, wówczas zadanie nasze ma tylko jedno rozwiązanie *).

§ 351. Z jednoznaczności powyższej konstrukcji wynika

Twierdzenie. *Dwa trójściany równają się sobie (albo też są z sobą symetryczne), jeżeli trzy ściany jednego równają się odpowiednio trzem ścianom drugiego.*

§ 352. Przez zastosowanie takiej samej metody, jak § 349, otrzymujemy stąd

Twierdzenie. *Dwa trójściany równają się sobie (albo są symetryczne), jeżeli trzy kliny jednego równają się odpowiednio trzem klinom drugiego.*

Istotnie jeżeli mamy dane trójściany T_1, T_2, takie, iż

$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2,\ \sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2,\ \sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_2,$$

wówczas budujemy trójściany T'_1 T'_2, spełniające się z niemi, zatem musi być (d l a c z e g o?)

$$\sphericalangle a'_1 = \sphericalangle a'_2,\ \sphericalangle b'_1 = \sphericalangle b'_2,\ \sphericalangle c'_1 = \sphericalangle c'_2.$$

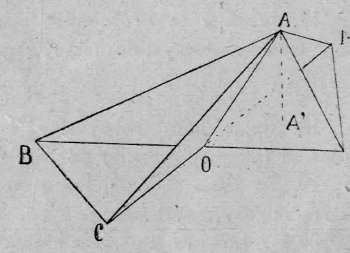
Wynika stąd iż mamy

$$T'_1 \equiv T'_2,$$

a wobec tego musi być również

$$T_1 \equiv T_2.$$

*) Możnaby zarzucić analizie naszej i konstrukcji, że nie uwzględniliśmy przypadku, gdy punkt A' nie upadnie wewnątrz kąta $\sphericalangle AOC$, jak np. na rys. 325. Mamy wtedy jednak wyjście bardzo proste: zamiast trójścianu $O(ABC)$, budujemy najpierw trójścian przyległy $O(MAN)$.



Rys. 325.

Ćwiczenie LIV. 1. Jeżeli w trójścianie $O(ABC)$ mamy $\sphericalangle a = \sphericalangle b$, wówczas musi być również $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

2. Zbadać twierdzenie odwrotne do poprzedniego.

Dowody obu tych twierdzeń porównać z dowodami twierdzeń w §§ 49 i 61 (str. 35 i 43).

3. Czy poprzedniego twierdzenia odwrotnego nie dałoby się dowieść metodą analogiczną do metody zadania 7 na str. 43?

4. Jeżeli w trójścianie $O(ABC)$ mamy $\sphericalangle a = \sphericalangle b$, wówczas płaszczyzna dwusieczna klina $\sphericalangle C$ jest prostopadła do ściany $\sphericalangle c$ i dzieli ją na połowy.

5. Sformułować i zbadać własności trójścianu, analogiczne do tych własności trójkąta równoramiennego, które stanowią treść zadań 3 i 4 na str. 37.

6. To samo pytanie w stosunku do zadania 5 na str. 37.

7. Na rys. 325 odszukać kąty linjowe dwuścianów $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$. Wskazać sposób zbudowania kąta linjowego dla trzeciego dwuścianu.

8. Zbudować trójścian, mając dane trzy jego kliny.

9. Dwa trójściany o ścianach odpowiednio do siebie równoległych albo równają się sobie, albo są względem siebie symetryczne.

10. Mamy dane trzy trójściany, przyczem pierwszy jest symetryczny z drugim, drugi zaś z trzecim. Wykazać, iż pierwszy i trzeci równają się sobie.

11. Jeżeli dwa naroża trójścienne $O(ABC)$ i $O(ABC')$ mają spólną ścianę $\sphericalangle AOB$ i jeżeli krawędź OC' drugiego naroża leży wewnątrz pierwszego, wówczas suma dwu pozostałych ścian drugiego naroża jest mniejsza od sumy odpowiednich dwóch ścian pierwszego.

Jakie jest analogiczne twierdzenie w planimetrji?

12. Na ścianie trójścianu $O(ABC)$ kreślimy dowolną prostą OD. Dowieść, że suma trzech kątów, zawartych między tą prostą a krawędziami trójścianu, jest mniejsza od sumy trzech ścian trójścianu.

13. Zbadać to samo zagadnienie w przypadku, gdy prosta OD leży wewnątrz trójścianu.

14. Jeżeli wykreślimy dwusieczne (wewnętrzne) ścian trójścianu, wówczas suma kątów, zawartych między każdą dwusieczną i przeciwległą krawędzią, jest mniejszą od sumy ścian trójścianu.

15. Jeżeli w trójścianie dwie ściany są kątami prostemi, wówczas przeciwległe im kliny są też proste i odwrotnie.

16. Jeżeli w trójścianie jedna ze ścian równa się kątowi linijnemu przeciwległego klinu, wówczas dwie pozostałe ściany albo równają się kątom linijnym przeciwległych klinów, albo spełniają się z temi kątami.

17. Jeżeli w czworościanie każda krawędź równa się przeciwległej krawędzi, wówczas wszystkie ściany jego są trójkątami ostrokątnemi.

---

18. Mając dane dwie ściany i kąt linjowy zawartego między niemi klina, zbudować (planimetrycznie) pozostałe elementy trójścianu.

19. To samo zadanie, jeżeli mamy dane kąty linjowe dwóch klinów oraz zawartą między niemi ścianę.

20. To samo zadanie, jeżeli mamy dane kąty linjowe wszystkich trzech klinów.

21. Dany jest trójścian, którego wszystkie ściany są kątami prostemi. Przeciąć go płaszczyzną tak, by w przekroju otrzymać trójkąt, równający się danemu trójkątowi. Konstrukcja planimetryczna.

22. Na danej płaszczyźnie α znaleźć punkt, jednakowo odległy od wszystkich ścian danego trójścianu. (Konstrukcja w przestrzeni.)

23. Znaleźć punkt, którego odległości od trzech ścian trójścianu równałyby się danym trzem odcinkom. (Konstrukcja przestrzenna.)

ROZDZIAŁ II.

O wielościanach.

A. O graniastosłupach.

§ 349. W i e l o ś c i a n e m nazywamy bryłę, ograniczoną przez wielokąty w taki sposób, że każdy bok jest spólny dla dwóch wielokątów.

Wielokąty te nazywamy ś c i a n a m i wielościanu; wierzchołki ich i boki nazywamy w i e r z c h o ł k a m i i k r a w ę d z i a m i wielościanu.

W każdym wierzchołku schodzą się co najmniej trzy ściany, tworząc n a r o ż e.

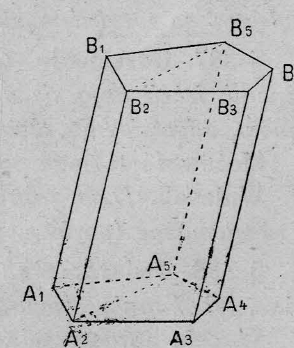
Przekątną wielościanu nazywamy odcinek, łączący którekolwiek dwa jego wierzchołki, nie leżące na jednej ścianie.

Płaszczyzną przekątną nazywamy płaszczyznę, przesuniętą przez którekolwiek trzy wierzchołki, nie leżące na jednej ścianie. Np. na rys. 326 $B_2A_2A_5$ jest płaszczyzną przekątną.

Przekrojem przekątnym nazywamy wielokąt, który stanowi część tej płaszczyzny i jest śladem przecięcia wielościanu przez tę płaszczyznę. Np. czworobok $A_2B_2B_5A_5$ można nazwać przekrojem przekątnym.

Wielościan nazywamy w y p u k ł y m, o ile leży w całości po jednej stronie płaszczyzny każdej ściany. W książce niniejszej mowić będziemy wyłącznie o wielościanach wypukłych.

§ 354. Szczególnym rodzajem wielościanów są g r a n i a s t o s ł u p y. Jeżeli przez wszystkie wierzchołki wielokąta $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ poprowadzimy równoległe, przebijające płaszczyznę wielokąta i jeżeli wszystkie te równoległe przetniemy płaszczyzną, równo-



Rys. 326.

ległą do płaszczyzny wielokąta $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, otrzymamy wielościan, zwany g r a n i a s t o s ł u p e m.

Graniastosłup jest ograniczony przez dwa wielokąty $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, $B_1B_2B_3 \ldots B_n$, które równają się sobie (d l a c z e g o?), oraz przez *n ścian bocznych*, mających kształt równoległoboków. Wielokąty te nazywamy *podstawami graniostosłupa.*

Odcinki A_1B_1, $A_2B_2, \ldots$ nazywamy *krawędziami bocznemi.*

Jeżeli krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, graniastosłup nazywa się *prostym*; w przeciwnym razie nazywamy go *pochyłym.*

Odcinek, prostopadły do obu podstaw, zawarty pomiędzy niemi, nazywa się *wysokością graniastosłupa.*

Graniastosłup nazywamy *równoległościanem*, jeżeli podstawy jego są równoległobokami.

Jeżeli w równoległościanie p r o s t y m podstawy mają kształt prostokątów, wówczas bryła ta zwie się *prostopadłościanem.*

Prostopadłościan, w którym wszystkie ściany równają się sobie, nazywa się sześcianem.

Trzy krawędzie prostopadłościanu, schodzące się w jednym wierzchołku, nazywamy jego *wymiarami.*

§ 355. *Polem powierzchni bocznej* graniastosłupa nazywamy sumę pól wszystkich jego ścian bocznych.

Polem powierzchni zupełnej nazywamy sumę pól ścian bocznych i obu podstaw graniastosłupa.

§ 356. Określenie. *Dwa wielościany równają się sobie, jeżeli ściany i naroża jednego z nich równają się ścianom i narożom drugiego i są względem siebie jednakowo położone.*

§ 357. Określenie. *Dwa graniastosłupy nazywamy równoważnemi, jeżeli dają się one podzielić na jednakową ilość wielościanów, odpowiednio równających się sobie*).*

Możliwość takiego pojęcia wynika odrazu z twierdzenia § 358.

Wniosek. *Dwa graniastosłupy, równoważne trzeciemu, są sobie równoważne* (porówn. str. 150).

§ 358. Twierdzenie. *Dwa równoległościany są sobie równoważne, jeżeli mają równe podstawy i wysokości.*

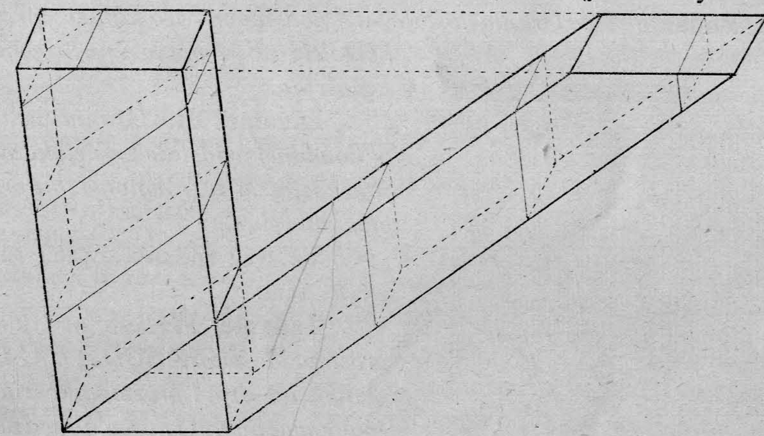
W celu uproszczenia rozumowania załóżmy, że równoległo-

*) Jak widzimy, pojęcie równoważności określiliśmy tylko dla graniastosłupów, nie zaś dla wszystkich wielościanów.

ściany mają spólną podstawę dolną i że leżą oba po tej samej stronie spólnej podstawy.

Mogą tu zachodzić dwa przypadki:

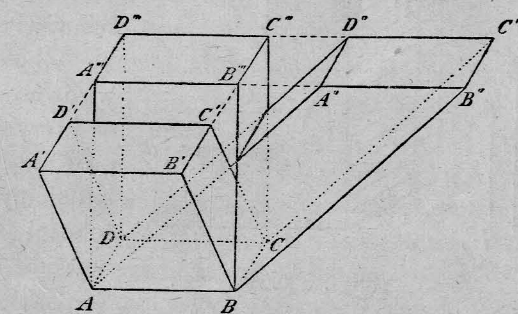
1) Górne podstawy równoległościanów zawierają się między temi samemi dwiema prostemi równoległemi (jak na rys. 327).



Rys. 327.

W takim razie stosujemy dokładnie tę samą metodę postępowania, co w § 177, str. 151. Uczeń przeprowadzi dowód szczegółowo, kierując się rysunkiem 327.

2) Górne podstawy nie zawierają się między temi samemi równoległemi, jak np. na rys. 328 równoległoboki $A'\,B'\,C'\,D'$ i $A''\,B''\,C''\,D''$. W takim razie przedłużamy boki obu równoległoboków; przecięcie się tych czterech prostych wyznaczy nam nowy r ó w n o l e g ł o b o k $A'''B'''C'''D'''$, równający się obu poprzednim. Ten nowy równoległobok przyjmujemy za górną podstawę trzeciego równoległościanu, mającego podstawę dolną spólną z dwoma danemi równoległościanami.

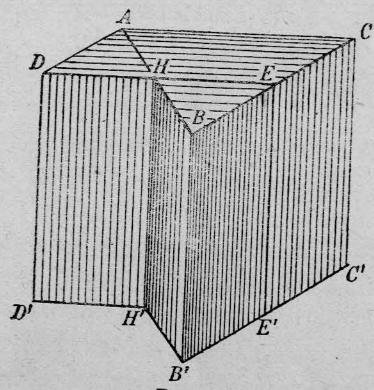


Rys. 328.

Na mocy poprzedniego przypadku zarówno pierwszy jak drugi równoległościan są równoważne trzeciemu, a więc są sobie równoważne.

§ **359. Zadanie I.** *Równoległościan przekształcić w równoważny prostopadłościan.*

Zadanie II. *Graniastosłup o podstawie trójkątnej przekształcić w równoważny równoległościan.*



Rys. 329.

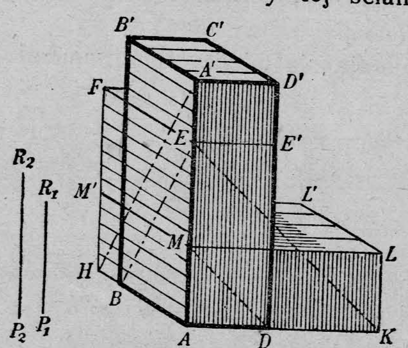
Zadanie III. *Graniastosłup o dowolnej podstawie wielokątnej przekształcić w równoważny prostopadłościan.*

Te trzy zadania uczeń rozwiąże sam.

Zadanie IV. *Mając dany prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$, zbudować drugi prostopadłościan, równoważny mu i mający dwa wymiary odpowiednio równe dwom danym odcinkom P_1R_1 i P_2R_2.*

Najpierw w płaszczyźnie ściany $AA'B'B$ budujemy prostokąt $AHFE$, równoważny tej ścianie i mający bok $AH = P_1R_1$. Na podstawie $AHFE$ budujemy prostopadłościan o wysokości AD. Jest on równoważny prostopadłościanowi danemu (d l a c z e g o?)

Zkolei przekształcamy $AEE'D$ w równoważny prostokąt $AMLK$, w którym $AK = P_2R_2$. Na tym prostokącie, jako na podstawie, budujemy prostapadłościan o wysokości AH: odpowiada on warunkom zadania (d l a c z e g o?).



Rys. 330.

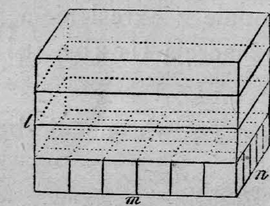
Zadanie V. *Dany graniastosłup przekształcić w równoważny prostopadłościan o zadanej zgóry podstawie.*

teorji równoważności
granic

Czy na podstawie powyższych zadań oraz § 358 można twierdzić, iż graniastosłupy tworzą klasę wielkości geometrycznych? (Porównaj rozumowanie na str. 160).

§ **360.** Zkolei możemy przejść do obliczania objętości graniastosłupów, przyczem z a ł o ż y m y, — jak to uczyniliśmy dla wielokątów — że równoważne graniastosłupy mają równe objętości.

Pojęcie objętości, jako liczby, związanej z prostopadłościanem, jest nam dobrze znane z kursu klas niższych.



Rys. 331.

Jeżeli mamy dany prostopadłościan, którego wymiary są spółmierne z obraną jednostką długości i wyrażają się np. liczbami (wymiernemi) m, n, l, wówczas możemy na jego dnie umieścić warstwę sześcianów jednostkowych (t. j. takich, których każda krawędź równa się jednostce długości), przyczem warstwa ta zawierać musi mn sześcianów. Warstw takich możemy ułożyć l, zatem prostopadłościan zawiera mnl sześcianów jednostkowych. L i c z b a mnl n a z y w a s i ę o b j ę t o ś c i ą p r o s t o p a d ł o ś c i a n u.

O wiele trudniej przedstawia się sprawa, jeżeli wymiary prostopadłościanu są niespółmierne z jednostką długości.

Rozważmy odrazu przypadek najogólniejszy, gdy długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu wyrażają się liczbami **niewymiernemi** m, n, l.

Każdej z tych liczb (lub innemi słowami: każdemu z tych trzech przekrojów) odpowiadają dwie klasy liczb wymiernych. Oznaczmy liczby, należące do „niższych" klas, przez m', n', l', te zaś, które należą do „wyższych" klas, oznaczmy przez m'', n'', l''.

Wyobraźmy sobie, iż zbudowaliśmy wszelkie możliwe prostopadłościany, których krawędzie wyrażają się liczbami w y m i e r n e m i, należącemi do klas „niższych", a więc liczbami m', n', l', oraz wszystkie prostopadłościany o krawędziach wymiernych, których długości wyrażają się liczbami m'', n'', l''.

Rzecz prosta, iż pierwsze zawierać się będą wewnątrz danego prostopadłościanu; drugie zaś, przeciwnie, będą go w sobie zawierały (jak na rys. 332).

Objętości mniejszych prostopadłościanów (wewnętrznych) wyrażają się iloczynem $m'n'l'$, objętości zaś prostopadłościanów większych (zewnętrznych) wyrażają się iloczynem $m''n''l''$.

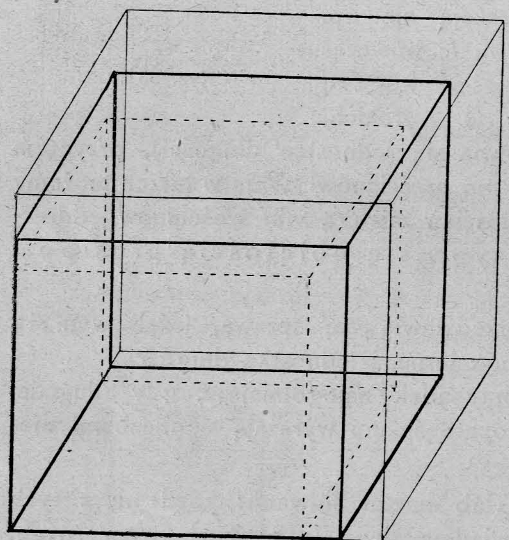
W ten sposób powstają dwa nieskończone zbiory (dwie nieskończone klasy) liczb wymiernych:

klasa „niższa" liczb $m'n'l'$,
i „ „wyższa" „ $m''n''l''$;

zgodnie z określeniem iloczynu liczb niewymiernych, te dwie klasy wyznaczają liczbę (niewymierną lub wymierną)

$$mnl.$$

Tę właśnie liczbę nazwiemy objętością prostopadłościanu. W ten sposób znana nam z kursu elementarnego reguła obliczania objętości prostopadłościanu, (która tam stosowała się tylko do figur o krawędziach wymiernych) pozostaje bez zmiany.



Rys. 332.

§ 361. To samo określenie objętości prostopadłościanu możemy sformułować tak: *Objętość prostopadłościanu jest to liczba, równająca się iloczynowi z pola podstawy przez długość wysokości prostopadłościanu.*

Istotnie, w powyższym przykładzie pole podstawy równa się mn, długość zaś wysokości równa się l.

§ 362. Możemy teraz każdemu graniastosłupowi przypisać objętość w zupełności wyznaczoną.

Istotnie, każdy graniastosłup G możemy przekształcić w równoważny mu prostopadłościan P o tej samej wysokości, przyczem podstawy obu brył muszą być wielokątami równoważnemi sobie. Zakładając, że graniastosłupy równoważne mają równe objętości, możemy objętość prostopadłościanu P uważać za równą objętości graniastosłupa G. W ten sposób otrzymujemy następującą regułę:

Reguła. *Aby obliczyć objętość graniastosłupa, mnożymy pole jego podstawy przez długość wysokości.* 13/III 30r

Ćwiczenia LV. 1. W równoległościanie przekątne dzielą się na połowy.

2. W równoległościanie dzielą się na połowy odcinki, łączące środki przeciwległych krawędzi, jak również odcinki, łączące środki przeciwległych ścian.

3. Zarówno przekątne, jak i przekroje przekątne prostopadłościanu równają się sobie.

4. W prostopadłościanie kwadrat przekątnej równa się sumie kwadratów trzech jego wymiarów.

5. W prostopadłościanie suma kwadratów pól przekrojów przekątnych jest dwa razy większa od sumy kwadratów pól sześciu jego ścian.

6. Na dwóch przeciwległych ścianach równoległościanu kreślimy przekątne i przez nie prowadzimy przekroje przekątne; dowieść, że te dwa przekroje przekątne dzielą się na połowy.

7. Sformułować i zbadać twierdzenie odwrotne do poprzedniego.

8. Równoległościan jest prosty, jeżeli dwie jego płaszczyzny przekątne są prostopadłe do podstaw.

9. Graniastosłup o podstawie czworokątnej jest równoległościanem, jeżeli jego płaszczyzny przekątne przecinają się w jednym punkcie.

10. Przez końce trzech krawędzi równoległościanu, schodzących się w jednym wierzchołku, przesuwamy płaszczyznę; dowieść, iż dzieli ona w stosunku 1 : 2 przekątną równoległościanu, wychodzącą z tego samego wierzchołka.

11. W graniastosłupie o podstawie trójkątnej łączymy wierzchołki jednej podstawy ze środkami przeciwległych krawędzi drugiej podstawy. Dowieść, że trzy te odcinki przecinają się w jednym punkcie, który leży na prostej, łączącej środki ciężkości podstaw i że dzielą się one w tym punkcie w stosunku 1 : 2.

12. Niech trzy odcinki, o których mowa w zadaniu 11, przecinają się w punkcie K. Poprowadźmy w taki sam sposób trzy odcinki z wierzchołków drugiej podstawy graniastosłupa i niech te trzy nowe odcinki przecinają się w punkcie L. W jaki sposób punkty K, L dzielą odcinek, łączący środki ciężkości obu podstaw?

13. W graniastosłupie trójkątnym łączymy każdy wierzchołek jednej podstawy ze środkiem przeciwległej temu wierzchołkowi ściany bocznej. Wykazać, że te trzy odcinki przecinają się w jednym punkcie i dzielą się w stosunku 2 : 1.

14. Niech odcinki, o których mowa w zadaniu 13, przecinają się w punkcie M. Poprowadźmy w taki sam sposób trzy odcinki z wierzchołków drugiej podstawy i oznaczmy przez N punkt przecięcia się tej drugiej trójki odcinków. Dowieść: 1) że M i N leżą na odcinku, łączącym środki ciężkości obu podstaw graniastosłupa; 2) że M i N dzielą ten odcinek na trzy równe części.

15. W graniastosłupie trójkątnym przesuwamy płaszczyzny przez wierzchołki jednej podstawy i przeciwległe krawędzie drugiej podstawy; dowieść, że

te trzy płaszczyzny przecinają się w jednym punkcie, leżącym na prostej, która łączy środki ciężkości podstaw.

16. Zbadać rozmaite możliwe przekroje sześcianu. W szczególności przeciąć sześcian płaszczyzną tak, by otrzymać sześciokąt foremny. Ile takich sześciokątów można utworzyć w danym sześcianie?

17. Odwrotnie: mając dany sześciokąt foremny, zbudować sześcian, którego przekrojem płaskim byłby ten sześciokąt.

---

18. Dane są trzy wymiary prostopadłościanu; zapomocą konstrukcji planimetrycznej zbudować figurę, którą otrzymamy, jeżeli prostopadłościan przetniemy płaszczyzną, przechodzącą przez krawędź podstawy i środki dwóch przeciwległych krawędzi bocznych.

19. Graniastosłup prosty o podstawie trójkątnej foremnej przecinamy płaszczyzną, przechodzącą przez krawędź podstawy i nachyloną do tej podstawy pod kątem 30^0. Zbudować (zapomocą konstrukcji planimetrycznej) otrzymany w ten sposób przekrój, jeżeli mamy daną krawędź podstawy graniastosłupa i krawędź boczną. Jakie przypadki mogą tu zachodzić?

20. Zbudować krawędź sześcianu, mając dany obwód jego przekroju przekątnego.

21. Mając daną krawędź sześcianu, zbudować (zapomocą konstrukcji planimetrycznej) przekrój tego sześcianu, poprowadzony przez środek jego przekątnej prostopadle do tej przekątnej.

22. Zbudować siatkę*) sześcianu, mając daną przekątną jego ściany.

23. Zbudować siatkę sześcianu, mając daną jego przekątną.

24. Zbudować siatkę graniastosłupa pochyłego o podstawie kwadratowej, mając daną krawędź jego podstawy, krawędź boczną oraz kąty między tą krawędzią boczną, a dwiema sąsiedniemi krawędziami podstawy.

25. W tym samym graniastosłupie, o którym mowa w zadaniu poprzedniem, zbudować przekrój przekątny.

---

26. W zadaniach 18—21 wyznaczyliśmy pewne figury zapomocą konstrukcji; uczeń spróbuje wyznaczyć te same figury zapomocą rachunku.

27. Mamy dany sześcian o krawędzi $= a$; ile razy należy zwiększyć jego krawędź, jeżeli chcemy, by objętość wzrosła w dwójnasób?

Uwaga. Zadanie 27 można z łatwością rozwiązać na drodze rachunkowej, natomiast odpowiednie zadanie konstrukcyjne (zbudować sześcian, którego objętość byłaby dwa razy większa od objętości sześcianu danego) nie daje się rozwiązać w sposób elementarny, t. j. zapomocą cyrkla i linjału.

28. Powiększając długość krawędzi pewnego sześcianu a m, zwiększamy jego objętość o b m^3. Obliczyć długość krawędzi.

29. Krawędzie prostopadłościanu mają odpowiednio a m, b m i c m

*) Siatką bryły nazywamy rozwinięcie jej powierzchni na płaszczyźnie.

długości; obliczyć długość krawędzi takiego sześcianu, żeby stosunek objętości obu brył równał się stosunkowi pól ich przekrojów przekątnych.

30. Rozwiązać to same zadanie w założeniu, że stosunek objętości ma się równać stosunkowi pól powierzchni zupełnych obu brył.

31. Obliczyć objętość prostopadłościanu, w którym pole przekroju przekątnego $= a^2$, krawędzie zaś podstawy mają się do siebie tak, jak $b : c$.

32. Obliczyć wymiary prostopadłościanu, mając dane: objętość jego V, pole powierzchni zupełnej $2S$ i obwód podstawy $2p$.

33. Podstawę równoległościanu prostego stanowi romb o boku a i kącie $\sphericalangle A = 60^0$. Większa przekątna równoległościanu nachylona jest do płaszczyzny podstawy pod kątem 30^0. Obliczyć objętość równoległościanu i pole jego przekroju przekątnego.

34. Obliczyć objętość i pole powierzchni bocznej prostopadłościanu, mając daną długość jego przekątnej ($= a$) i wiedząc, że dwie przekątne przecinają się pod kątem prostym, podstawa zaś ma kształt kwadratu.

35. Obliczyć objętość graniastosłupa prostego, którego podstawą jest trójkąt foremny, a pole ściany bocznej równa się polu podstawy.

36. W graniastosłupie o podstawie sześciokątnej foremnej bok podstawy równa się a cm, a mniejszy przekrój przekątny jest równoważny podstawie. Obliczyć objętość graniastosłupa i pole powierzchni bocznej.

37. Rów ma a m długości, głęboki jest na b m, szerokość jego wynosi u góry c m, u dołu zaś d m. Rów ten został do połowy głębokości wypełniony wodą. Obliczyć ilość metrów sześciennych wody.

---

38. Czy równoległościany posiadają własność, odpowiadającą własności równoległoboków dopełniających?

39. Graniastosłup pochyły przekształcić w równoważny mu graniastosłup prosty, przecinając go jedną tylko płaszczyzną.

Określenie. *Przekrojem normalnym* graniastosłupa pochyłego nazywamy figurę płaską, którą otrzymamy, przecinając graniastosłup płaszczyzną, prostopadłą do krawędzi bocznych.

40. Pole powierzchni bocznej graniastosłupa równa się iloczynowi długości krawędzi bocznej przez obwód przekroju normalnego.

41. Objętość graniastosłupa o podstawie trójkątnej równa się połowie iloczynu pola ściany bocznej przez odległość tej ściany od przeciwległej krawędzi.

Jakie jest twierdzenie analogiczne w planimetrji?

42. Na trzech równoległych do siebie prostych obieramy trzy równające się sobie odcinki $AA' = BB' = CC'$, które wyznaczają graniastosłup. Wykazać, że objętość tego graniastosłupa nie zmieni się, jeżeli jego krawędzie boczne przesuniemy w dowolny sposób po owych trzech równoległych.

43. W wierzchołkach prostokąta $ABCD$ wystawiamy prostopadłe do jego płaszczyzny, które przecinają w punktach A' B', C', D' jakąkolwiek inną płaszczyznę, nierównoległą do pierwszej.

1-o Dowieść, że $A'B'C'D'$ jest równoległobokiem;

2-o „ „ $AA' + DD' = BB' + CC'$.

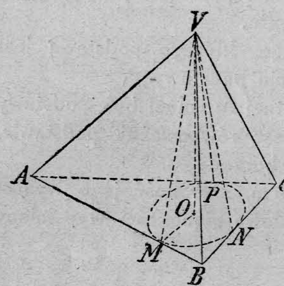
3-o Obliczyć objętość otrzymanej bryły.

44. W sześcianie o krawędzi $= a$ przesunięto płaszczyznę przez przekątną podstawy i przez środek jednej z krawędzi, równoległych do tej podstawy. Znaleźć kształt i pole przekroju.

45. Dany jest graniastosłup prosty o podstawie trójkątnej, którego wszystkie krawędzie równają się sobie. Przez środek krawędzi bocznej i przez środki dwóch krawędzi podstaw, schodzących się z tą krawędzią boczną, lecz nie równoległych do siebie, przesuwamy płaszczyznę. Znaleźć kształt i pole przekroju.

B. O ostrosłupach.

§ 363. *Ostrosłupem* albo *piramidą* nazywamy wielościan, którego jedna ściana — zwana *podstawą* — jest wielokątem, pozostałe zaś ściany są trójkątami o spólnym wierzchołku.



Rys 333.

Przez wierzchołek ostrosłupa, jeżeli nie zaznaczymy wyraźnie, o jakim wierzchołku mowa, rozumieć będziemy wierzchołek, nie leżący na podstawie.

Krawędzie, schodzące się w wierzchołku ostrosłupa, nazywamy *bocznemi*.

Odcinek, poprowadzony z wierzchołka ostrosłupa prostopadle do podstawy, nazywa się *wysokością*.

Ostrosłup o podstawie trójkątnej nazywamy *czworościanem*. Czworościan nazywamy *foremnym*, jeżeli wszystkie jego ściany są trójkątami foremnemi.

Rozróżniamy ostrosłupy proste i pochyłe. *Ostrosłupem prostym* nazywamy taki, który spełnia dwa warunki: 1) w podstawę jego można wpisać koło, 2) środek koła jest zarazem spodkiem wysokości.

Jeżeli ostrosłup jest prosty (rys. 333), wówczas wysokości ścian bocznych równają się sobie (d l a c z e g o?). I odwrotnie: jeżeli wysokości ścian bocznych równają się sobie, wówczas ostrosłup jest prosty.

Wysokość ściany bocznej ostrosłupa p r o s t e g o nazywamy *apotemą ostrosłupa*.

Polem powierzchni bocznej ostrosłupa nazywamy sumę pól jego ścian bocznych.

Polem powierzchni zupełnej nazywamy sumę pól wszystkich ścian bocznych ostrosłupa i jego podstawy.

Ost. foremny to taki ost. prosty który

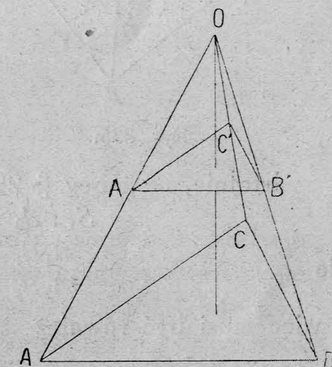
§ 364. Z powyższych określeń wynika następująca reguła, którą uczeń uzasadni sam.

pobocznicy

Reguła. *Aby obliczyć pole powierzchni bocznej ostrosłupa prostego, mnożymy obwód jego podstawy przez połowę długości apotemy ostrosłupa.*

§ 365. Wyobraźmy sobie, iż przecięliśmy ostrosłup płaszczyzną, równoległą do podstawy. Podzieliliśmy go w ten sposób na dwie części, z których jedna (na rys. 334 górna część) jest ostrosłupem, druga zaś nosi nazwę *ostrosłupa ściętego* lub *pnia ostrosłupowego*.

Pień ostrosłupowy ma dwie podstawy (na rys. 334 górną $A'B'C'$ i dolną ABC), które są wielokątami podobnemi. Ściany boczne pnia mają kształt trapezów. Odległość między dwiema podstawami pnia nazywamy jego *wysokością*.



Ryc. 334.

Pień ostrosłupowy nazywamy *prostym* jeżeli powstał z ostrosłupa prostego w sposób powyżej opisany. Np. na rys. 335 pień $ABCA'B'C'$ jest prosty. Odcinki MM', NN', PP', będące wysokościami ścian bocznych w pniu prostym, nazywamy *apotemami pnia*.

Uczeń dowiedzie sam, iż apotemy pnia ostrosłupowego równają się sobie.

§ 366. Z wzoru na pole trapezu wynika następująca

Reguła. *Aby obliczyć pole powierzchni bocznej pnia ostrosłupa prostego, mnożymy długość jego apotemy przez połowę sumy obwodów obu jego podstaw.*

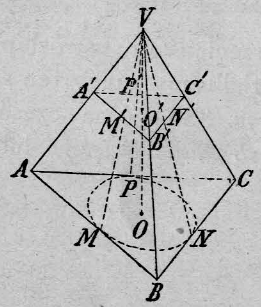
§ 367. Twierdzenie. *Jeżeli ostrosłup przecięliśmy płaszczyzną równoległą do podstawy, wówczas pole przekroju i pole podstawy są proporcjonalne do kwadratów odległości ich płaszczyzn od wierzchołka ostrosłupa.*

Niech będzie dany (rys. 336) ostrosłup $OA_1B_1C_1D_1$ i niech płaszczyzna $A_2B_2C_2D_2$, przecinająca ostrosłup, będzie równoległa do płaszczyzny podstawy. Oznaczając pola czworoboków $A_1B_1C_1D_1$

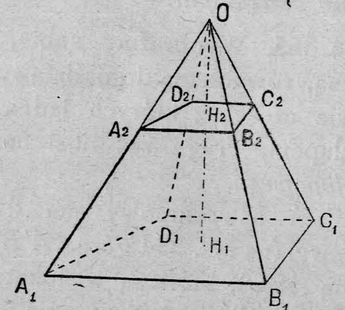
Pobocznica ostrosłupa foremnego to jest powierzchnia boczna oraz $A_2B_2C_2D_2$ odpowiednio symbolami S_1 i S_2, mamy dowieść, iż zachodzi proporcja

$$S_1 : S_2 = OH_1^2 : OH_2^2,$$

gdzie OH_1 jest wysokością ostrosłupa.



Rys. 335.



Rys. 336.

Istotnie, na mocy § 299, str. 276 mamy:

$$S_1 : S_2 = A_1B_1^2 : A_2B_2^2,$$

ale

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OH_1}{OH_2} \qquad \text{(dlaczego?)}$$

a więc musi być również

$$\frac{A_1B_1^2}{A_2B_2^2} = \frac{OH_1^2}{OH_2^2}$$

i twierdzenie zostało dowiedzione.

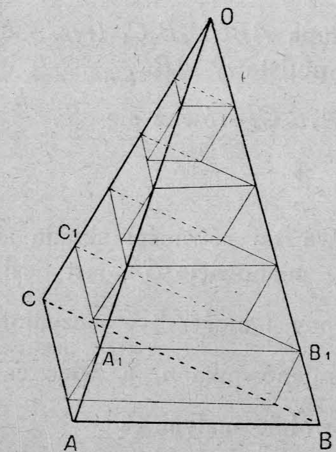
§ 368. Jak wiadomo, każdemu graniastosłupowi odpowiada pewna, w zupełności wyznaczona liczba, zwana jego objętością. Powstaje pytanie, czy można to samo powiedzieć o ostrosłupach i w jaki sposób, mając dany ostrosłup, możnaby obliczyć jego objętość?

Odpowiedź na pierwsze pytanie znajdziemy na drodze, podobnej do tej, która doprowadziła nas do pojęcia pola koła.

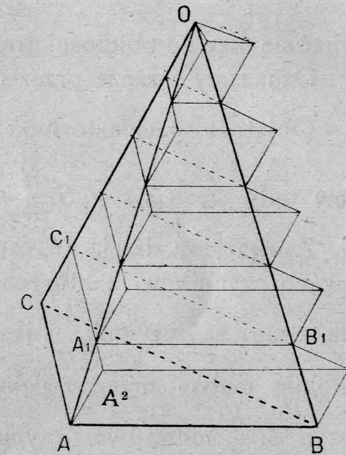
Niech będzie dany dowolny ostrosłup. Na rys. 337 mamy wprawdzie ostrosłup o podstawie trójkątnej, ale przekonamy się zaraz, że kształt podstawy nie gra żadnej roli w naszem rozumowaniu, tak, iż otrzymany wynik stosuje się równie dobrze do ostrosłupów o podstawach dowolnych.

Wysokość ostrosłupa oznaczmy przez h, podzielmy ją na n części równych (na rys. 337 na pięć części) i przez punkty podziału przesuńmy płaszczyzny, równoległe do podstawy, otrzymując

w ten sposób n wielokątów podobnych, do których stosuje się twierdzenie § 367.



Rys. 337.



Rys. 338.

Na każdym z tych wielokątów, jako na podstawie, zbudujmy po dwa równe sobie graniastosłupy: jeden leżący nad wielokątem i wystający nazewnątrz piramidy (jak na rys. 338), drugi położony pod tym samym wielokątem i zawierający się wewnątrz piramidy*). Wyjątek stanowi tu sama podstawa ABC piramidy, na której budujemy jeden tylko graniastosłup, mianowicie wystający. Niech przytem wysokość każdego graniastosłupa równa się $\frac{h}{n}$.

Graniastosłupy pierwszego rodzaju możemy nazwać krótko z e w n ę t r z n e m i, graniastosłupy drugiego rodzaju — w e w n ę t r z n e m i.

Zauważmy przedewszystkiem, że dla każdego graniastosłupa zewnętrznego istnieje równy mu wewnętrzny. Wyjątek stanowi tylko pierwszy od dołu graniastosłup zewnętrzny $ABCA_2B_2C_1$: pomiędzy wewnętrznemi niema równego mu graniastosłupa.

Jeżeli teraz obliczymy objętości wszystkich graniastosłupów zewnętrznych i sumę ich oznaczymy przez Σ_z, sumę zaś objętości

*) Właściwie, oba rodzaje graniastosłupów należało zaznaczyć na tym samym rysunku; chcąc jednak uniknąć gmatwaniny linij, narysowaliśmy obok siebie dwie równe piramidy i na jednej z nich zaznaczyliśmy tylko graniastosłupy wystające, na drugiej zaś tylko te, które zawierają się wewnątrz piramidy.

wszystkich graniastosłupów wewnętrznych oznaczymy przez Σ_w, wówczas różnica

$$\Sigma_z - \Sigma_w$$

równać się będzie objętości graniastosłupa $ABCA_2B_2C_1$ (rys. 338).

Oznaczmy jeszcze przez S pole podstawy ABC.

Objętość graniastosłupa $ABCA_2B_2C_1$ równa się $S \cdot \frac{h}{n}$, mamy tedy $\Sigma_z -_w \Sigma = S.\frac{h}{n} = (Sh) \cdot \frac{1}{n}$.

Zauważymy dalej, że część prawa tej równości składa się z dwóch czynników, z których jeden, mianowicie Sh, jest liczbą stałą, drugi zaś czynnik, $\frac{1}{n}$, jest zmienny i może być uczyniony dowolnie małym przez zwiększenie mianownika n, a więc cały iloczyn $S.\frac{h}{n}$ może być uczyniony dowolnie małym.

Widzimy tedy, że jeśli będziemy nieograniczenie zwiększali liczbę części, na które dzielimy wysokość piramidy, wówczas sumy Σ_z i Σ_w dążyć będą do wspólnej granicy.

Tę ich wspólną granicę nazywamy objętością piramidy. Mamy tedy następujące

Określenie. *Objętością piramidy nazywamy liczbę, będącą wspólną granicą dwóch ciągów zmiennych liczb: sumy objętości graniastosłupów zewnętrznych i sumy objętości graniastosłupów wewnętrznych.*

d.t.p.

§ 369. Twierdzenie *Objętość ostrosłupa równa się trzeciej części iloczynu z pola podstawy przez długość wysokości ostrosłupa.*

Do dowodu posłuży nam ta sama konstrukcja, która doprowadziła nas do określenia objętości ostrosłupa.

Obliczmy mianowicie sumę Σ_z i znajdźmy granicę tej sumy, gdy n rośnie nieograniczenie.

Podstawy kolejnych graniastosłupów, poczynając od góry, oznaczmy przez $S_1, S_2, \ldots S_n$, objętości ich przez $v_1, v_2, \ldots$,

Mamy $$S_1 : S = \left(\frac{h}{n}\right)^2 : h^2$$

czyli $$S_1 = \frac{S}{n^2}.$$

kwadrat

Dalej $$S_2 : S = \left(\frac{2h}{n}\right)^2 : h^2$$

czyli $$S_2 = \frac{2^2 S}{n^2}.$$

W taki sam sposób znajdujemy, że

$$S_3 = \frac{3^2 . S}{n^2},$$

$$S_4 = \frac{4^2 . S}{n^2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$S_n = S = \frac{n^2 . S}{n^2}$$

$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + \ldots + h_n = h$

$v_1 = S_1 \cdot \frac{h}{n}, \; v_2 = S_2 \cdot$

Wobec tego
$$\Sigma_z = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$
$$= \frac{S \cdot h}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2)$$
$$= \frac{Sh}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ *)}$$

a dzieląc licznik i mianownik przez n^3, mamy

$$\Sigma_z = \frac{Sh \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6}$$

$\lim Sh\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{S}{6}$ przy $n \to \infty$

---

*) Wzór $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ można z łatwością otrzymać rozmaitemi sposobami. Najprostszy może jest sposób następujący:

w tożsamości $(1 + x)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

podstawiamy kolejno na x wartości 1, 2, 3, 4, ... $(n - 1)$, n. Otrzymujemy ciąg tożsamości

$$2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$
$$3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$
$$4^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$n^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$
$$(n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1.$$

Sumując te tożsamości kolumnami, redukując i oznaczając przez S_1 sumę liczb ciągu naturalnego, przez S_2 sumę kwadratów liczb ciągu naturalnego, mamy

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + n$$

skąd $$3S_2 = n^3 + 3n^2 + 2n - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2}$$

wreszcie $$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Aby wykazać, iż Σ_z dąży do granicy $\frac{Sh}{3}$, wystarczy zauważyć, że Σ_z stale maleje, gdy n rośnie (dlaczego?), i dowieść, że różnica

$$\Sigma_z - \frac{Sh}{3}$$

może być uczyniona dowolnie małą.

Jakoż mamy

$$\Sigma_z - \frac{Sh}{3} = \frac{Sh\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} - \frac{Sh}{3} = \frac{Sh}{6}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) - 2\right]$$

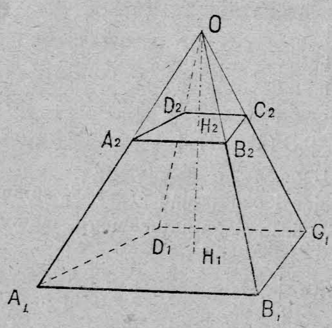
$$= \frac{Sh}{6}\left[2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-2\right] = \frac{Sh}{6}\cdot\left[\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right].$$

Otrzymaliśmy iloczyn, którego pierwszy czynnik $\frac{Sh}{6}$ jest stały, drugi zaś $\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}$ może być uczyniony dowolnie małym przez odpowiednie zwiększenie liczby n, a więc cały nasz iloczyn maleje nieograniczenie, gdy zwiększamy nieograniczenie liczbę n.

Dowodzi to, że istotnie stała liczba $\frac{Sh}{3}$ jest granicą zmiennej sumy Σ_z, a poprzednio już nazwaliśmy tę granicę objętością piramidy.

d.!

§ 370. Twierdzenie. *Objętość pnia ostrosłupowego wyraża się wzorem:*



Rys. 339.

$$V = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}),$$

gdzie przez S_1 i S_2 oznaczyliśmy pola podstaw pnia.

Objętość pnia możemy uważać jako różnicę objętości dwóch ostrosłupów

$$OA_1B_1C_1D_1 \text{ i } OA_2B_2C_2D_2.$$

Oznaczając objętość tych ostrosłupów odpowiednio przez V_1 i V_2, pola ich podstaw przez S_1 i S_2, wysokości przez h_1 i h_2, wreszcie objętość i wysokość pnia przez V i h, mamy

$$V = V_1 - V_2 = \frac{S_1 h_1}{3} - \frac{S_2 h_2}{3}$$

$$= \frac{1}{3}[S_1 h_1 - S_2(h_1 - h)]$$

$$= \frac{1}{3}[h_1(S_1 - S_2) + hS_2]$$

$$= \frac{1}{3}[h_1(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}) + hS_2] \ldots (1)$$

Zauważmy dalej, że na mocy § 367 musi być

$$S_1 : S_2 = h_1^2 : (h_1 - h)^2$$

czyli

$$\sqrt{S_1} : \sqrt{S_2} = h_1 : (h_1 - h),$$

$$h_1 = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$\frac{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_2}} = \frac{h_1 - h_1 + h}{h_1 - h}$

$h_1 =$

Podstawiając do wzoru (1) wartość na h_1 ze wzoru (2), mamy

$$V = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

$V = \frac{S_1 h}{3} + \frac{S_2 h}{3} + \frac{h\sqrt{S}}{3}$

Ćwiczenia LVI. 1. Jeżeli w dowolnej piramidzie przesuniemy przez każdą krawędź boczną płaszczyznę, prostopadłą do podstawy, wówczas wszystkie te płaszczyzny przetną się według jednej prostej.

2. Na jednej ze ścian czworościanu kreślimy trzy środkowe i przez każdą z nich oraz przez krawędź, przeciwległą tej środkowej, przesuwamy płaszczyzny. Dowieść, że trzy te płaszczyzny przecinają się według jednej prostej.

3. Łącząc środek ciężkości każdej ściany czworościanu z przeciwległym wierzchołkiem, otrzymujemy cztery odcinki, które przecinają się w jednym punkcie (zwanym **środkiem ciężkości czworościanu**) i dzielą się w tym punkcie tak, że część każdego odcinka, przyległa do wierzchołka, jest trzy razy większa od części pozostałej.

4. Wewnątrz czworościanu $ABCD$ znaleźć taki punkt, że jeśli go połączymy ze wszystkiemi wierzchołkami, otrzymamy cztery czworościany, których podstawami są ściany czworościanu $ABCD$ i których objętości równają się sobie. [Wskazówka: Sformułować i rozwiązać analogiczne zadanie dla trójkąta.]

5. Odcinki, łączące środki przeciwległych krawędzi czworościanu, przecinają się w środku ciężkości czworościanu.

6. Środki krawędzi czworościanu połączyć w taki sposób, by otrzymać czworokąt płaski. Zbadać rodzaj tego czworokąta oraz długości jego boków.

7. Znaleźć punkt równoodległy od ścian czworościanu. [Wskazówka: jak rozwiązujemy analogiczne zagadnienie dla trójkąta?]

8. Znaleźć punkt równoodległy od wszystkich wierzchołków czworościanu.

9. Jeżeli w dowolnej piramidzie punkt O jest jednakowo odległy od wszystkich krawędzi, wówczas spodki prostopadłych, poprowadzonych z O do ścian piramidy, są środkami kół, wpisanych w te ściany.

10. W każdym ostrosłupie suma pól ścian bocznych jest większa od pola podstawy.

11. Jeżeli w czworościanie $ABCD$ wszystkie kliny, należące do naroża A, są proste, wówczas kwadrat pola ściany BCD równa się sumie kwadratów pól trzech pozostałych ścian.

[Porównaj twierdzenie Pitagorasa!]

12. W czworościanie $ABCD$ dwie przeciwległe krawędzie AC, BD równają się sobie; to samo wiemy o dwóch innych przeciwległych krawędziach BC, AD. Czy czworościan posiada równe ściany i równe kliny i które mianowicie?

12a. Co można powiedzieć o czworościanie, w którym każde dwie przeciwległe krawędzie równają się sobie?

---

13. Zbudować czworościan, mając dane wszystkie jego krawędzie.

14. Zbudować ostrosłup o podstawie kwadratowej, mając daną krawędź podstawy i wysokość.

15. To samo pytanie, jeżeli mamy daną krawędź boczną i wysokość.

16. Zbudować siatkę czworościanu, mając daną jego podstawę oraz kliny między podstawą i ścianami bocznemi.

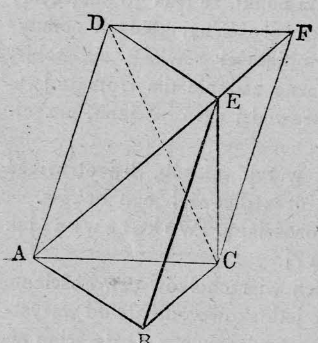
17. Zbudować siatkę ostrosłupa prostego, mając daną jego podstawę i wysokość.

18. Czworościan foremny o krawędzi $= 5\,cm$ przecinamy płaszczyzną, równoległą do podstawy i poprowadzoną w takiej odległości od tej podstawy, że pole przekroju jest 9 razy mniejsze od pola podstawy. Zbudować siatkę pnia ostrosłupowego, który w ten sposób otrzymaliśmy.

19. Prostopadłościan o wymiarach danych (a, b, c) wydrążono tak, że zagłębienie, które powstało, ma kształt ostrosłupa prostego. Ostrosłup ten ma wspólną podstawę z prostopadłościanem, wysokość zaś dwa razy mniejszą od wysokości prostopadłościanu. Zbudować siatkę otrzymanej w ten sposób bryły.

---

20. Na rys. 340 wykazać, że graniastosłup o podstawie trójkątnej da się podzielić na trzy piramidy, mające równe objętości.



Rys. 340.

21. Analogicznie do określenia § 251, str. 218, utworzyć określenie **figur jednokładnych w przestrzeni.**

22. Mając dany ostrosłup, zbudować ostrosłup jednokładny z nim względem jednego z jego wierzchołków.

23. Zbadać związki między elementami obu ostrosłupów (czy mają one równe kąty lub kliny? co można powiedzieć o wielkości ich krawędzi i ścian, jak również o kształcie ścian?)

24. Utworzyć określenie ostrosłupów (graniastosłupów) podobnych.

---

25. Obliczyć pole powierzchni bocznej i objętość czworościanu foremnego mając daną krawędź jego $= a$.

26. To samo pytanie dla piramidy prostej o podstawie sześciokątnej foremnej. Krawędź podstawy $= a$, krawędź boczna $= b$.

27. W wierzchołku A kwadratu $ABCD$ wystawiamy prostopadłą do jego płaszczyzny i na prostopadłej odkładamy $AM = b$. Obliczyć pole powierzchni bocznej ostrosłupa $MABCD$, jeżeli $AB = a$.

28. W sześcian wpisujemy ostrosłup, łącząc środek podstawy górnej sześcianu ze środkami krawędzi podstawy dolnej. Obliczyć pole powierzchni bocznej i objętość ostrosłupa, jeżeli krawędź sześcianu $= a$.

29. Podstawą ostrosłupa jest romb, którego kąt ostry ma 60^0. Obliczyć krawędź podstawy i krawędzie boczne, jeżeli wiemy, że objętość ostrosłupa $= v$, a wysokość $= h$.

30. Obliczyć pole powierzchni i objętość ostrosłupa, którego podstawę stanowi trójkąt foremny, a jedna ze ścian bocznych równa się podstawie i jest do niej prostopadła. Krawędź podstawy $= a$.

31. W ostrosłupie prostym o podstawie sześciokątnej foremnej krawędź boczna jest dwa razy większa od krawędzi podstawy. Objętość ostrosłupa $= v$. Obliczyć krawędź podstawy i wielkość kąta, pod którym krawędź boczna jest nachylona do podstawy.

32. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny o bokach a, b, a; ściany boczne są nachylone do podstawy pod kątem 45^0. Obliczyć objętość ostrosłupa.

33. Pień ostrosłupowy przecinamy płaszczyzną równoległą do podstaw. Znaleźć odległość tej płaszczyzny od mniejszej podstawy, jeżeli pole przekroju jest średnią arytmetyczną pól obu podstaw.

34. W czworościanie $OABC$ mamy

$$AB = BC = AC = a; \sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC = \sphericalangle BOC = 90^0.$$

1) Co można powiedzieć o długości krawędzi OA, OB, OC?

2) Obliczyć pole powierzchni zupełnej czworościanu.

3) Wykazać, że pole ściany $\triangle OAB$ jest średnią proporcjonalną między polami trójkątów $\triangle ABC$ i $\triangle ABH$, gdzie H jest spodkiem wysokości czworościanu, poprowadzonej z punktu O.

35. To samo pytanie, jak w zadaniu 33, jeżeli pole przekroju jest średnią geometryczną pól obu podstaw.

36. Ostrosłup o wysosości h przecięto płaszczyzną, równoległą do podstawy. Pole przekroju równa się iloczynowi obu odcinków, na które podzieliliśmy wysokość, pole zaś podstawy równa się iloczynowi z długości górnego odcinka przez długość całej wysokości. Obliczyć pola podstawy i przekroju.

37. Na trójkącie foremnym, jako na podstawie, budujemy ostrosłup prosty i graniastosłup o równych wysokościach. Jaki jest stosunek między wysokością tych brył a krawędzią ich wspólnej podstawy, jeżeli pola powierzchni bocznych obu brył mają się do siebie, jak $1 : n$?

38. W jakich granicach może się zmieniać liczbę n w poprzedniem zadaniu? Jaką wartość na n otrzymamy, jeżeli ostrosłup jest czworościanem foremnym?

39. Rozwiązać zadanie 37 w założeniu, iż wspólną podstawą brył jest jakikolwiek wielokąt foremny i że znamy apotemę wielokąta $= a$.

40. Jeżeli w czworościanie $ABCD$ przez krawędź AB przesuniemy płaszczyznę dwusieczną klina $CABD$, podzieli on przeciwległą krawędź CD na dwa odcinki, proporcjonalne do pól ścian CAB oraz DAB. Jakie jest analogiczne twierdzenie w planimetrji?

41. Obliczyć pole powierzchni bocznej pnia ostrosłupowego o podstawie 1) trójkątnej foremnej, 2) kwadratowej, 3) ośmiokątnej foremnej, jeżeli wiadomo, że pień jest prosty, i jeżeli mamy daną wysokość jego h i krawędzie podstaw a i b.

42. W pniu ostrosłupowym prostym o podstawie kwadratowej krawędź podstawy górnej $= a$, pole powierzchni zupełnej $= S$, ściany zaś boczne są nachylone do podstawy pod kątem 30^0. Obliczyć: 1) krawędź podstawy dolnej; 2) wysokość pnia; 3) wysokość piramidy, z której otrzymano ten pień.

43. W pniu prostym o podstawie trójkątnej foremnej krawędź boczna nachylona jest do podstawy pod kątem 45^0. Obliczyć pole powierzchni i objętość pnia, jeżeli pola podstaw równają się odpowiednio a^2 i b^2.

44. Objętość pnia $= v$, wysokość $= h$, krawędzie podstaw mają się do siebie, jak $m : n$. Obliczyć pola podstaw.

45. Obliczyć objętość pnia prostego o podstawie kwadratowej, jeżeli jego przekątna $= a$, krawędzie zaś podstaw równają się b i c.

46. W pniu ostrosłupowym prostym o podstawie trójkątnej foremnej wydrążono otwór w kształcie ostrosłupa, którego podstawą jest podstawa górna pnia, wierzchołek zaś leży w środku podstawy dolnej pnia. Obliczyć objętość pozostałej części pnia, jeżeli pola jego podstaw równają się a^2 i b^2, wysokość równa się h.

47. W pniu prostym o podstawie kwadratowej pola podstaw równają się a^2 i b^2; pole powierzchni bocznej równa się połowie pola powierzchni zupełnej. Obliczyć wysokość pnia.

48. Wysokość pnia prostego podzielono na trzy części równe i przez punkty podziału poprowadzono płaszczyzny, równoległe do podstaw. Obliczyć pola otrzymanych przekrojów, jeżeli pola podstaw równają się S i S'.

---

49. Pole podstawy ostrosłupa $= 100\ cm^2$, wysokość jego $= 6\ cm$. Na ile części należy podzielić jego wysokość, jeżeli chcemy, żeby objętość wszystkich graniastosłupów wewnętrznych (zbudowanych tak, jak to uczyniliśmy w § 368) różniła się od objętości wszystkich graniastosłupów zewnętrznych mniej niż $1\ cm^3$? mniej niż o $0{\cdot}1\ cm^3$? mniej niż o $0{\cdot}01\ cm^3$?

50. To samo pytanie, jeżeli chodzi o różnicę między sumą objętości graniastosłupów zewnętrznych a liczbą stałą $\frac{Sh}{3}$, którą nazwaliśmy objętością piramidy.

51. W ostrosłupie $S = 550\ cm^2$, $h = 10\ cm$. Jak należy dobrać liczbę n graniastosłupów zewnętrznych, żeby było

$$\Sigma_z - \frac{Sh}{3} < \varepsilon,$$

gdzie ε jest jakąkolwiek liczbą dodatnią?

C. O wielościanach foremnych.

§ 371. Określenie. *Wielościan nazywamy foremnym, jeżeli wszystkie jego ściany są wielokątami foremnemi równemi i jeżeli wszystkie naroża równają się sobie.*

Poznaliśmy już dwa wielościany foremne: sześcian i czworościan foremny. Powstaje pytanie: czy istnieją jeszcze inne wielościany foremne i ile ich jest?

Wiemy z planimetrji, że wielokąt foremny może mieć dowolnie wielką liczbę boków, tak, iż możemy utworzyć nieograniczenie wiele rodzajów wielokątów foremnych. Zdawałoby się, że to samo da się powiedzieć o wielościanach. Przekonamy się jednak zaraz, że wielościanów foremnych istnieć może tylko pięć.

Jakoż z twierdzenia § 339 (str. 325) wiemy, że suma ścian naroża musi być mniejsza od 360^0; jeśli więc wielościan ma być ograniczony przez trójkąty foremne, których każdy kąt ma 60^0, to w każdym wierzchołku może schodzić się tylko 3, 4 albo 5 ścian, gdyż

$$3 \cdot 60^0 < 360^0;\ 4 \cdot 60^0 = 240^0 < 360^0;\ 5 \cdot 60^0 = 300^0 < 360^0,$$

natomiast $6 \cdot 60^0 = 360^0$.

W taki sam sposób przekona się czytelnik, że jeśli wielościan ma być ograniczony przez kwadraty lub przez pięciokąty foremne, wówczas naroże nie może mieć więcej nad 3 ściany; może więc istnieć tylko jeden rodzaj wielościanów foremnych o ścianach kwadratowych i jeden rodzaj o ścianach pięciokątnych foremnych.

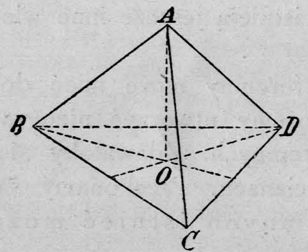
Kąt wewnętrzny sześciokąta foremnego ma 120^0, ponieważ zaś $3 \cdot 120^0 = 360^0$, a naroże musi mieć conajmniej trzy ściany, zatem niepodobna utworzyć wielościanu foremnego, ograniczonego przez sześciokąty foremne.

§ 372. Ustaliliśmy, że nie może istnieć więcej niż pięć rodzajów wielościanów foremnych. Teraz przekonamy się, że wszystkie one naprawdę istnieją, a mianowicie pokażemy, w jaki sposób można je zbudować.

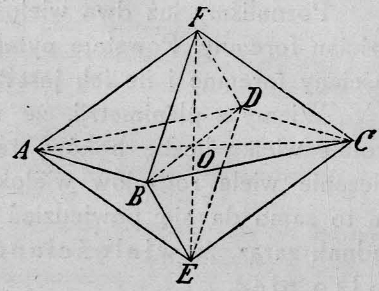
1. Aby zbudować czworościan foremny, wykreślamy najpierw trójkąt foremny $\triangle BCD$, w jego środku O wystawiamy prostopadłą OA do płaszczyzny trójkąta, wreszcie z punktu B

w płaszczyźnie AOB kreślimy koło promieniem, równającym się BC.

Ponieważ $OB < BC$, zatem koło przetnie prostopadłą w jakimś punkcie A. Figura $ABCD$ jest żądaną (d l a c z e g o?).

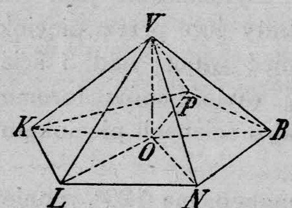


Rys. 341.

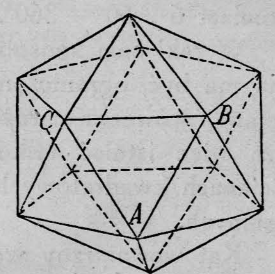


Rys. 442.

2. W środku O kwadratu $ABCD$ wystawiamy prostopadłą do jego płaszczyzny i na niej po obu stronach płaszczyzny odkładamy odcinki $OE = OF = OA$. Bryła, wyznaczona przez punkty A, B, C, D, E, F, jest żądanym o ś m i o ś c i a n e m f o r e m n y m.



Rys 343.



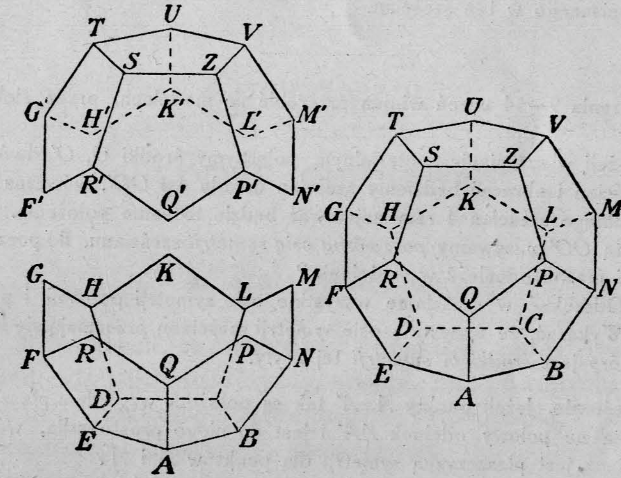
ys. 344.

3. Kreślimy najpierw pięciokąt foremny $KLNRP$, w środku O wielokąta wystawiamy prostopadłą do jego płaszczyzny i w płaszczyźnie KOV kreślimy z punktu K koło promieniem, równającym się bokowi pięciokąta. W ten sposób budujemy kąt bryłowy $V(KLNRP)$, w którym każda ściana ma 60^0.

Jeśli teraz w powyższy sposób przy każdym wierzchołku trójkąta foremnego $\triangle ABC$ zbudujemy naroże o pięciu ścianach, mających po 60^0, przyczem każda krawędź równać się będzie AB,

otrzymamy powierzchnię wypukłą, złożoną z 10 równych trójkątów foremnych i z jednej strony otwartą. Budując drugą taką samą powierzchnię i zestawiając je wolnemi brzegami, otrzymamy d w u d z i e s t o ś c i a n f o r e m n y.

4. S z e ś c i a n uczeń zbuduje sam.



Rys. 345.

5. Do pięciokąta foremnego $ABCDE$ przystawiamy pięć równych mu pięciokątów tak, by przy każdym wierzchołku utworzyło się naroże o trzech ścianach. Otrzymujemy powierzchnię wypukłą, złożoną z sześciu foremnych i równych pięciokątów i z jednej strony otwartą. Budując drugą taką samą powierzchnię i zestawiając je wolnemi brzegami, otrzymamy d w u n a s t o ś c i a n f o r e m n y*).

Ćwiczenia LVII. 1. Jeżeli środki wszystkich ścian sześcianu połączymy prostemi, otrzymamy ośmiościan foremny, wpisany w sześcian.

2. Jeżeli środki ścian ośmiościanu foremnego połączymy prostemi, otrzymamy sześcian, wpisany w ośmiościan.

3. Jeżeli na każdej parze przeciwległych ścian sześcianu wykreślimy po jednej przekątnej tak, by były one względem siebie skośne, otrzymamy czworościan foremny, wpisany w sześcian.

*) Należałoby dowieść, że te brzegi istotnie przystaną do siebie; dowód jako zbyt długi, opuściliśmy.

4. Jeżeli w ośmiościanie foremnym przedłużymy cztery ściany, z których żadne dwie nie mają spólnej krawędzi, otrzymamy czworościan foremny, opisany na ośmiościanie.

5. Zbudować siatkę ośmiościanu foremnego.

6. To samo dla dwudziestościanu.

7. To samo dla dwunastościanu.

8. Mając daną krawędź sześcianu, zbudować krawędź ośmiościanu foremnego, wpisanego w ten sześcian.

Ćwiczenia 9—14 uczeń winien przerobić na modelach, przez siebie zbudowanych.

9. Jeżeli w sześcianie materjalnym połączymy środki O, O' dwóch przeciwległych ścian i obracać będziemy sześcian dokoła osi OO', wówczas w ciągu obrotu zupełnego sześcian 4 razy zajmować będzie to samo położenie.

Prostą OO' nazywamy *poczwórną osią symetrji* sześcianu. Ile poczwórnych osi symetrji można odnaleźć w sześcianie?

10. Odszukać w sześcianie wszystkie osie symetrji potrójne i podwójne.

11. Wykazać, że wszystkie osie symetrji sześcianu przecinają się w jednym punkcie, który jest *środkiem symetrji* tej bryły.

Określenie. Jeżeli punkty A, A' tak są położone względem płaszczyzny α, iż dzieli ona na połowy odcinek AA' i jest do niego prostopadła, wóczas powiadamy, że α jest płaszczyzną symetrji dla punktów A i A'.

Jeżeli figurę F możemy jakąś płaszczyzną α podzielić na połowy w ten sposób, że każdemu punktowi jednej połowy odpowiada symetryczny (względem płaszczyzny α) punkt drugiej połowy, wówczas powiadamy, że α jest *płaszczyzną symetrji danej figury F.*

12. Odnaleźć w sześcianie wszystkie płaszczyzny symetrji. Porównać przecięcia się tych płaszczyzn z osiami sześcianu.

13. Wykazać, że wszystkie osie symetrji sześcianu są osiami takiego samego rzędu w ośmiościanie foremnym wpisanym.

14. Odnaleźć osie symetrji czworościanu foremnego i porównać je z osiami symetrji sześcianu, opisanego na czworościanie.

KSIĘGA VII.

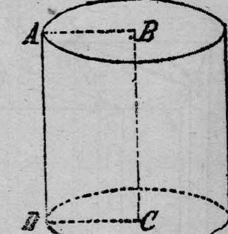
Bryły obrotowe.

A. Walec obrotowy.

§ 273. Jeżeli ze wszystkich punktów okręgu wystawimy prostopadłe do jego płaszczyzny, utworzą one powierzchnię, zwaną *powierzchnię walcową (obrotową).* Prostopadła, wystawiona w środku okręgu, nazywa się *osią walca.*

Powierzchnia walcowa jest miejscem geometrycznem punktów (w przestrzeni) równoodległych od osi.

W geometrji szkolnej poprzestajemy zwykle na rozważaniu pewnej części tej powierzchni. Jeżeli mianowicie przetniemy powierzchnię walcową dwiema płaszczyznami, prostopadłemi do osi, otrzymamy bryłę, zwaną *walcem* prostym (ograniczonym).



Rys. 346.

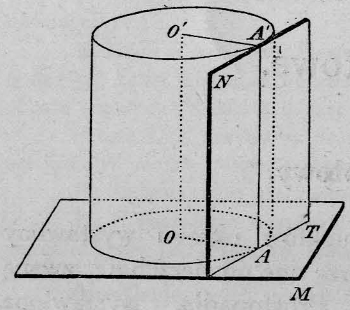
Jeżeli prostokąt materjalny $ABCD$ obracać będziemy dokoła boku BC, wówczas bok przeciwległy AD zakreśli powierzchnię walca (ograniczonego), a cały prostokąt zakreśli walec. Z tego powodu walec nazywamy b r y ł ą o b r o t o w ą.

Odcinek AD i wszystkie równoległe do niego odcinki, leżące na powierzchni walca, nazywamy *tworzącemi walca.*

Odcinek AB i wszystkie równe mu odcinki, poprowadzone z dowolnego punktu powierzchni walca prostopadle do osi, nazywamy *promieniami walca.*

Punkt X nazywamy punktem wewnętrznym walca, jeżeli odległość jego od osi jest mniejsza od promienia walca; jeżeli zaś odległość ta jest większa od promienia, punkt X zwie się zewnętrznym.

§ **374. Twierdzenie.** *Płaszczyzna, równoległa do osi walca, ma z jego powierzchnią albo dwie tworzące spólne, albo jedną, albo wreszcie nie ma z nią wcale punktów wspólnych — zależnie od tego, czy odległość tej płaszczyzny od osi jest mniejsza od promienia walca, równa promieniowi, czy też większa od promienia.*

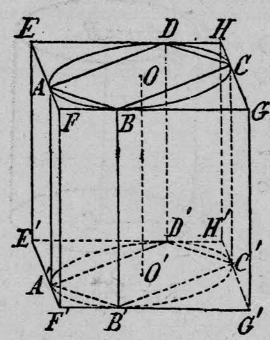


Rys. 347.

W pierwszym przpadku, gdy odległość płaszczyzny α od osi jest mniejsza od promienia, przetnijmy całą figurę nową płaszczyzną β, prostopadłą do osi. W przekroju otrzymamy koło (którego środek leży na osi) przecięte prostą $[\alpha\beta]$, stanowiącą krawędź tych dwu płaszczyzn. Jeżeli w punktach przecięcia okręgu z prostą $[\alpha\beta]$ wystawimy prostopadłe do płaszczyzny β, dwie te proste, będące tworzącemi walca, muszą leżeć zarazem na płaszczyźnie α (dlaczego)?.

Uczeń dowiedzie sam twierdzenia dla dwu drugich przypadków, posługując się rys. 347.

§ **375.** W jedną z podstaw walca wpiszmy dowolny wielokąt (np. czworobok $ABCD$ na rys. 348) i przez wierzchołki jego poprowadźmy tworzące. Utworzy się wówczas na drugiej podstawie równy mu wielokąt ($A'B'C'D'$ na rys. 348), wpisany w tę podstawę. Otrzymamy zarazem graniastosłup, zwany w p i s a n y m w w a l e c.



Rys. 348.

Analogicznie, zbudujmy wielokąt, opisany na podstawie walca i przez jego boki przesuńmy płaszczyzny, styczne do powierzchni walca. Na płaszczyźnie drugiej podstawy walca otrzymamy wielokąt, równający się pierwszemu (d l a c z e g o?) i opisany na tej drugiej

podstawie, a zarazem otrzymamy graniastosłup, który nazywać będziemy o p i s a n y m n a w a l c u.

§ **376.** Pojęcie pola powierzchni walca i objętości walca utworzymy w sposób analogiczny do pojęcia pola koła.

Wyobraźmy sobie mianowicie, iż opisaliśmy na walcu i wpisaliśmy w niego dwa graniastosłupy o podstawach foremnych. Niech podstawy ich mają po n boków. Oznaczamy pola tych podstaw przez S_n i s_n, obwody ich przez P_n i p_n, wysokość zaś graniastosłupów (i walca) przez h.

Podwajajmy stopniowo liczbę ścian tych graniastosłupów.

Pola powierzchni bocznych graniastosłupów opisanych tworzą ciąg liczb nieskończony malejący

$$P_nh,\ P_{2n}h,\ P_{4n}h,\ \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

pola zaś powierzchni bocznych graniastosłupów wpisanych tworzą ciąg liczb nieskończony rosnący

$$p_nh,\ p_{2n}h,\ p_{4n}h,\ \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

przyczem jednak wszystkie wyrazy pierwszego ciągu pozostają większe od wyrazów drugiego ciągu (d l a c z e g o?).

Zauważmy jeszcze, iż różnica między odpowiedniemi wyrazami obu ciągów nieograniczenie maleje, gdyż

$$P_kh - p_kh = h(P_k - p_k),$$

przyczem h jest liczbą stałą, różnica zaś $P_k - p_k$ maleje nieograniczenie (§ 329, (3), str. 310).

Wobec tego istnieje jedna i tylko jedna liczba, większa od wszystkich wyrazów drugiego ciągu, lecz mniejsza od wszystkich wyrazów pierwszego ciągu.

Liczbę tę nazywamy p o l e m p o w i e r z c h n i b o c z n e j w a l c a.

Jest to **określenie** tego pola.

Tak samo objętości graniastosłupów opisanych i wpisanych tworzą dwa ciągi nieskończone

$$S_nh,\ S_{2n}h,\ S_{4n}h,\ \dots\dots\dots\dots \quad (1')$$
$$s_nh,\ s_{2n}h,\ s_{4n}h,\ \dots\dots\dots\dots \quad (2')$$

co do których uczeń dowiedzie, że 1) pierwszy stale maleje, drugi rośnie; 2) wyrazy pierwszego pozostają większe od wyrazów drugiego; 3) różnica między odpowiedniemi wyrazami obu ciągów maleje nieograniczenie.

Istnieje więc znów jedna i tylko jedna liczba, mniejsza od wyrazów pierwszego ciągu, lecz większa od wyrazów drugiego. Liczbę tę nazywamy **objętością walca**.

§ 377. Twierdzenie. *Pole powierzchni bocznej walca równa się iloczynowi z obwodu jego podstawy przez długość wysokości*

Istotnie, jeżeli promień walca oznaczymy przez r, wówczas liczba

$$2\pi rh$$

jest większa od wszystkich liczb $p_k h$ ciągu (2), lecz mniejsza od wszystkich liczb $P_k h$ ciągu (1), a więc — zgodnie z naszem określeniem — jest polem powierzchni bocznej walca.

§ 378. W podobny sposób uczeń dowiedzie sam następującego twierdzenia.

Twierdzenie. *Objętość walca równa się iloczynowi z pola jego podstawy przez długość wysokości* czyli równa się $\pi r^2 h$, gdzie r oznacza promień walca.

Ćwiczenia LVIII. 1. Płaszczyzna porusza się tak, że pozostaje wciąż równoległą do danej prostej i ma od niej zawsze stałą odległość. Znaleźć figurę, do której ta płaszczyzna pozostaje przy swym ruchu styczną.

2. Przekroje walca, równoległe do osi, mają równe pola, jeżeli są równo odległe od osi — i odwrotnie.

3. Każde dwie płaszczyzny styczne do walca albo są do siebie równoległe, albo też przecinają się według krawędzi, równoległej do osi walca.

4. Poprowadzić płaszczyznę, styczną do danego walca według danej tworzącej.

5. Poprowadzić do walca płaszczyznę styczną, która byłaby równoległa (lub prostopadła) do danej płaszczyzny.

Warunki możliwości zadania.

6. Czy na każdym graniastosłupie o podstawie czworokątnej można opisać walec i czy w każdy taki graniastosłup można wpisać walec?

7. W prostopadłościan o podstawie kwadratowej wpisano walec, który przecięto następnie płaszczyzną, równoległą do osi i odległą od niej o połowę promienia. Zbudować (planimetrycznie) ten przekrój, mając dane wymiary prostopadłościanu.

8. W dany klin wpisać powierzchnię walcową nieograniczoną tak, by przechodziła ona przez punkt A, dany wewnątrz klina.

9. Do dwóch walców, których podstawy dolne leżą na jednej płaszczyźnie, poprowadzić spólną płaszczyznę styczną.

10. Zbudować walec jednokładny z danym względem punktu J, leżącego na osi. Promienie walców mają być proporcjonalne do dwóch danych odcinków m i k.

11. To samo zadanie, jeśli punkt J leży na powierzchni walca.

12. Przez dany punkt A wewnątrz walca poprowadzić płaszczyznę, któraby przecięła walec według dwóch tworzących, możliwie bliskich do siebie.

---

13. Obliczyć pole powierzchni i objętość walca, opisanego na sześcianie o krawędzi $= a$.

14. Jaki musi być stosunek wysokości walca do promienia, żeby pole jego przekroju osiowego (t. j. wyznaczonego przez płaszczyznę, na której leży oś walca) równało się polu podstawy?

15. Walec przecięto płaszczyzną równoległą do osi. Przekątna przekroju $= a$ pole przekroju $= m^2$, odległość przekroju od osi $= k$. Obliczyć promień i wysokość walca.

16. Objętości brył, utworzonych przez obrót prostokąta dokoła dwóch sąsiednich boków, równają się v i v'. Obliczyć przekątną prostokąta.

17. Walec opisano na sześcianie tak, iż osią jego jest przekątna sześcianu. Obliczyć pole powierzchni bocznej walca, mając dane pole przekroju przekątnego m^2.

18. W ostrosłup prosty o podstawie kwadratowej wpisano walec tak, że, dolna jego podstawa leży na podstawie ostrosłupa, górna zaś dotyka jego ścian bocznych. Obliczyć wysokość walca, jeżeli każda krawędź ostrosłupa $= a$, objętość zaś walca jest m razy mniejsza od objętości ostrosłupa.

18. Mając dane objętości v, v' dwóch walców o równych wysokościach, znaleźć objętość walca, mającego tę samą wysokość i pole powierzchni bocznej, równające się sumie pól powierzchni bocznych danych walców.

B. Stożek obrotowy.

§ 379. Jeżeli wszystkie punkty okręgu połączymy linjami prostemi z dowolnym punktem O, nie leżącym w płaszczyźnie tego okręgu, otrzymamy powierzchnię, zwaną *powierzchnią stożkową kołową* (nieograniczoną). Proste, o których mowa, nazywamy *tworzącemi stożka*; punkt O nazywa się *wierzchołkiem stożka.*

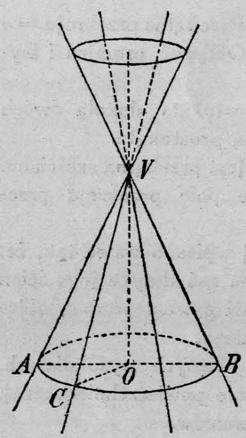
Jeżeli prostopadła, poprowadzona z wierzchołka do płaszczyzny okręgu, przechodzi przez środek tego okręgu, wówczas stożek nazywamy *prostym* albo *obrotowym.* Prostopadła nazywa się wówczas *osią stożka.*

Wierzchołek dzieli na dwie części każdą tworzącą powierzchni stożkowej, a więc dzieli również całą powierzchnię na dwie części zwane *powłokami* stożka (rys. 349).

W zagadnieniach elementarnych poprzestajemy zwykle na rozważaniu pewnej części powierzchni stożkowej. Jeżeli mianowicie wszystkie punkty okręgu koła połączymy odcinkami z punktem, nie leżącym w płaszczyźnie okręgu, otrzymamy część jednej powłoki powierzchni stożkowej. Tę właśnie część mamy zwykle na myśli, gdy w geometrji elementarnej mówimy o powierzchni stożka.

Jeżeli trójkąt prostokątny materjalny obracać będziemy dokoła jednej z przyprostokątnych, wówczas przeciwprostokątna zakreśli powierzchnię stożka prostego kołowego (ograniczonego). Z tego właśnie powodu stożek taki nazywają również *obrotowym*.

Płaszczyzna, przesunięta przez oś stożka prostego, przechodzi przez dwie jego tworzące, albo inaczej: przecina powierzchnię stożka według dwóch tworzących (dlaczego?); kąt między temi tworzącemi nazywamy *kątem rozwarcia stożka* (np.: $\sphericalangle AVB$ na rys. 349).



Rys. 349.

§ 380. Twierdzenie. *Jeżeli stożek obrotowy przetniemy dowolną płaszczyzną, prostopadłą do osi, otrzymamy w przekroju koło, którego środek leży na osi stożka.*

Przedewszystkiem zauważmy, że płaszczyzna ta przecina wszystkie tworzące stożka, gdyż kąt rozwarcia stożka musi być mniejszy od 180°.

Niech na rys. 349 punkt V będzie wierzchołkiem stożka. Trójkąty prostokątne $\triangle AOV$, $\triangle COV$, $\triangle BOV$ równają się sobie (dlaczego?), zatem $OA = OB = OC$.

§ 381. Twierdzenie. *Płaszczyzna, przechodząca przez wierzchołek stożka, albo przecina go według dwóch tworzących, albo ma z nim jedną tworzącą spólną (i wtedy nazywa się płaszczyzną styczną) albo wreszcie nie ma z powierzchnią stożka żadnych innych punktów spólnych, zależnie od tego, czy kąt między płaszczyzną a osią stożka jest mniejszy, równy, czy większy od połowy kąta rozwarcia stożka.*

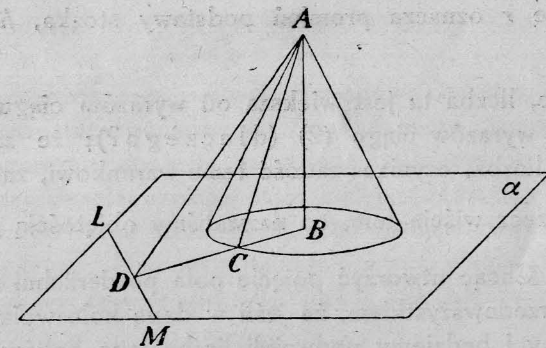
Dowód przeprowadzi uczeń sam, kierując się rysunkiem 350.

§ 382. Pojęcia pola powierzchni i objętości stożka, ustalimy w taki sam sposób, jak to uczyniliśmy dla walca.

Jeżeli w koło, stanowiące podstawę stożka, wpiszemy dowolny wielokąt i wierzchołki jego połączymy z wierzchołkiem stożka, otrzymamy ostrosłup, wpisany w stożek. Tak samo, jeżeli na podstawie stożka opiszemy dowolny wielokąt

i wierzchołki jego połączymy z wierzchołkiem stożka, otrzymamy ostrosłup, opisany na stożku.

Wyobraźmy sobie, że wpisaliśmy w stożek i opisaliśmy na



Rys. 350.

nim ostrosłupy, mające za podstawy wielokąty foremne o n bokach, i że stopniowo podwajamy liczbę ścian ostrosłupów.

Utwórzmy dwa ciągi nieskończone liczb, będących objętościami tych ostrosłupów

$$\frac{1}{3}s_n h,\ \frac{1}{3}s_{2n} h,\ \frac{1}{3}s_{4n} h,\quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{1}{3}S_n h,\ \frac{1}{3}S_{2n} h,\ \frac{1}{3}S_{4n} h,\quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Wyrazy pierwszego ciągu rosną, drugiego — maleją, przyczem jednak wyrazy pierwszego ciągu pozostają zawsze mniejsze od wyrazów drugiego ciągu (dlaczego?). Zauważmy jeszcze, że różnicę między wyrazami obu ciągów możemy uczynić dowolnie małą, gdyż równa się ona

$$\frac{1}{3}S_k\, h - \frac{1}{3}s_k\, h = \frac{1}{3}h(S_k - s_k).$$

a więc składa się z dwóch czynnników, z których pierwszy $\frac{1}{3}h$ jest liczbą stałą, drugi zaś $S_k - s_k$ może być uczyniony dowolnie małym przez dobranie w odpowiedni sposób liczby k (dlaczego?).

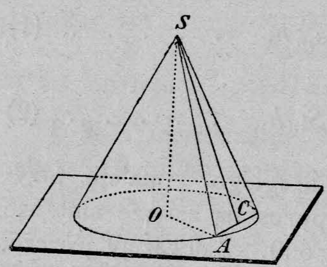
Wynika stąd, że istnieje jedna i tylko jedna liczba, większa od wszystkich wyrazów ciągu (1), a zarazem mniejsza od wszystkich wyrazów ciągu (2). Liczbę tę nazywamy *objętością stożka.*

Łatwo przekonać się możemy, że *objętość stożka równa się* $\frac{\pi r^2 h}{3}$, gdzie r oznacza promień podstawy stożka, h zaś jego wysokość.

Istotnie, liczba ta jest większa od wyrazów ciągu (1), lecz mniejsza od wyrazów ciągu (2) (dlaczego?); że zaś istnieje tylko jedna liczba, czyniąca zadość temu warunkowi, zatem liczba $\frac{\pi r^2 h}{3}$ jest rzeczywiście tem, co nazwaliśmy objętością stożka.

§ 383. Chcąc utworzyć pojęcie pola powierzchni stożkowej, zauważmy przedewszystkiem, że jeśli w dane koło wpiszemy wielokąt foremny i będziemy podwajali liczbę jego boków, wówczas długość każdego boku wielokąta maleć będzie nieograniczenie.

Istotnie, gdyby tak nie było, gdyby np. bok wielokąta wpisanego nie mógł nigdy stać się mniejszy od jakiegoś stałego odcinka ε, wówczas przy nieograniczonem zwiększaniu liczby boków obwód wielokąta byłby zawsze większy od $n\varepsilon$, a więc przy ustawicznem zwiększaniu liczby n musiałby rosnąć bez granic, wiemy zaś, że tak nie jest, że obwód ten pozostaje zawsze mniejszy od obwodu jakiegokolwiek wielokąta opisanego.



Rys. 325.

Dalej zauważmy, że jeśli w stożek wpisaliśmy ostrosłup o podstawie foremnej, wówczas różnica między jego krawędzią boczną (która jest zarazem tworzącą stożka) a apotemą jest mniejsza od połowy boku podstawy, t. j. (rys. 351)

$$SA - SC < AC.$$

Możemy tedy przez podwajanie liczby ścian takiego ostrosłupa osiągnąć to, iż apotema jego dowolnie mało różnić się będzie od tworzącej stożka.

§ 384. Teraz postąpmy, jak poprzednio, t. j. wpiszmy w stożek ostrołup o podstawie foremnej i opiszmy na nim drugi ostrosłup o podstawie podobnej, następnie zaś podwajajmy wciąż liczbę

ścian bocznych obu ostrosłupów. Otrzymamy w ten sposób dwa nieskończone ciągi liczb, będących polami powierzchni bocznych tych brył:

$$p_n a_n, p_{2n} a_{2n}, p_{4n} a_{4n}, \ldots\ldots \quad (1)$$
$$P_n l, P_{2n} l, P_{4n} l, \ldots\ldots \quad (2),$$

gdzie p_n, P_n oznaczają połowy obwodów podstaw, a_n oznacza apotemę ostrosłupa wpisanego, l zaś oznacza tworzącą stożka, która jest zarazem apotemą ostrosłupa opisanego.

Wyrazy drugiego ciągu stale maleją (dlaczego?), wyrazy zaś pierwszego ciągu stale rosną, gdyż rośnie zarówno czynnik p_n, jak i czynnik a_n. Niemniej jednak wyrazy ciągu (1) pozostają mniejsze od wyrazow ciągu (2), różnica zaś między niemi

$$P_k l - p_k a_k$$

może być uczyniona dowolnie małą przez powiększenie liczby k*).

Mamy tedy prawo twierdzić, że istnieje jedna i tylko jedna liczba, większa od wszystkich wyrazów ciągu (1), lecz mniejsza od wyrazów ciągu (2).

Liczbę tę nazywamy *polem powierzchni stożka*. Równa się ona

$$\pi rl,$$

gdyż liczba πrl jest większa od wyrazów ciągu (1), a zarazem mniejsza od wyrazów ciągu (2) (dlaczego?).

§ 385. Uczeń dowiedzie sam następujących trzech twierdzeń:

Twierdzenie. *Jeżeli stożek przetniemy płaszczyznami prostopadłemi do osi, wówczas pola przekrojów będą się miały do siebie tak, jak kwadraty ich odległości od wierzchołka.*

§ 386. *Stożkiem ściętym* albo *pniem stożkowym* nazywamy część stożka, zawartą między jego podstawą a jakimkolwiek przekrojem, równoległym do podstawy. Odległość między dwiema podstawami pnia nazywamy jego wysokością.

---

*) Istotnie niech będzie $l - a_k = u_k$ czyli $a_k = l - u_k$. Wobec tego mamy
$$P_k l - p_k a_k = P_k l - p_k (l - u_k) = (P_k - p_k) l + p_k u_k.$$
Otóż prawa część tej równości maleje nieograniczenie, gdyż pierwszy składnik $(P_k - p_k)\, l$ maleje nieograniczenie (dlaczego?); co się zaś tyczy drugiego składnika $p_k u_k$, to jakkolwiek czynnik p_k rośnie, pozostaje on jednak mniejszy od stałej liczby P_3, drugi zaś czynnik u_k maleje nieograniczenie, gdyż wyraża różnicę między tworzącą l i apotemą a_k.

Twierdzenie. *Objętość pnia stożkowego wyraża się wzorem*

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr).$$

w którym przez h oznaczyliśmy wysokość pnia, przez R i r promienie obu jego podstaw.

§ 387. Twierdzenie. *Pole powierzchni bocznej pnia stożkowego wyraża się wzorem*

$$\pi l (R + r),$$

w którym przez l oznaczyliśmy tworzącą pnia.

Ćwiczenie LIX. 1. Jeżeli mamy dane dwa nierówne koła, leżące na dwóch równoległych płaszczyznach, wówczas proste, łączące końce promieni, równoległych do siebie i mających jednakowe zwroty, przecinają się w jednym punkcie.

Czy zajdzie jaka zmiana w twierdzeniu, jeżeli równoległe promienie będą miały zwroty przeciwne?

2. Płaszczyzna α, przechodząca przez wierzchołek stożka, przecina go według trójkąta $\triangle AOB$. Przesunąć przez wierzchołek drugą płaszczyznę tak, by otrzymać w przekroju trójkąt, równający się trójkątowi $\triangle AOB$.

3. Czy w każdy ostrosłup prosty można wpisać stożek i czy na każdym ostrosłupie prostym można opisać stożek?

4. Jeżeli płaszczyzna α jest styczna do stożka, wówczas przecinając figurę dowolną płaszczyzną β, prostopadłą do osi, otrzymamy koło, do którego prosta $[\alpha\beta]$ jest styczna.

5. Osie dwóch stożków nieskończonych leżą na jednej prostej, wierzchołki ich zaś nie zlewają się. Czy stożki przecinają się? Jeżeli tak, to jaki kształt ma linja przecięcia?

6. Stożek i walec mają wspólną oś; jaki kształt ma linja przecięcia się obu figur?

---

7. Przez dany punkt poprowadzić płaszczyznę styczną do danego stożka. Ile rozwiązań?

8. Poprowadzić płaszczyznę, styczną do danego stożka i prostopadłą (lub równoległą) do drugiej danej płaszczyzny.

9. Przez dany punkt poprowadzić płaszczyznę, przecinającą dany stożek według dwóch tworzących tak, że kąt między temi tworzącemi równa się danemu kątowi $\sphericalangle \alpha$.

10. Dane są dwa stożki, których podstawy leżą na jednej płaszczyźnie. Czy zawsze można poprowadzić płaszczyznę, styczną do obu stożków i w jaki sposób uczynić to?

11. Zbudować stożek (ograniczony), mając dany jego wierzchołek O, punkt A, o którym wiadomo, że leży na okręgu podstawy, oraz punkty B, C, o których wiadomo, że mają leżeć na powierzchni stożka, jeżeli przytem żadne dwa z pośród punktów A, B, C, nie leżą na jednej prostej z punktem O.

12. Zbudować stożek nieograniczony, mając dany jego wierzchołek O, oś oraz punkt A na powierzchni stożkowej.

13. Dane są dwa koła spółśrodkowe, zakreślone promieniami r i $2r$. Po jednej stronie ich płaszczyzny zbudowano na nich dwa stożki, przyczem stożek na mniejszem kole ma wysokość $= 2h$, stożek zaś, na większem kole zbudowany, ma wysokość $= h$. Zbudować linję, według której przecinają się stożki.

14. Dwa stożki, mające wspólną wysokość, tak są położone, że wierzchołek jednego leży w środku podstawy drugiego. Mając daną wysokość h i promienie r i r' podstaw obu stożków, wykreślić linję, według której przecinają się stożki, oraz zbudować figurę, której obrót dokoła osi stożków mógłby zakreślić część spólną obu tych brył.

15. Mając dany stożek o promieniu podstawy $= r$ i wysokości $= h$, zbudować stożek jednokładny z nim i mający wysokość $= 2h$, jeżeli środek jednokładności J leży:

a) w wierzchołku danego stożka;

b) na jego powierzchni bocznej;

c) w dowolnym punkcie wewnętrznym lub zewnętrznym.

---

16. Gdzie należy poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do osi stożka, żeby podzielić na połowy: 1) jego objętość; 2) jego powierzchnię boczną?

17. Obliczyć boki trójkąta prostokątnego równoramiennego, który przy obrocie dokoła przyprostokątnej zakreśla stożek o objętości danej v.

18. To samo pytanie dla trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$ o kącie $\sphericalangle A = 30^0$, jeżeli przyprostokątna AC jest osią obrotu.

19. Obliczyć pole powierzchni i objętość bryły, którą zakreśla trójkąt równoramienny $\triangle ABC$, obracając się dokoła jednego z równych boków. Dane są: $a = b = 12{\cdot}5$ cm, $\sphericalangle A = 30^0$, obliczenie przeprowadzić z dokładnością do 1.

20. Boki trójkąta równają się a, b, c. Obracamy trójkąt dokoła największego boku a. Obliczyć pole powierzchni i objętość bryły zakreślonej przez obrót trójkąta.

21. Znaleźć pole powierzchni i objętość stożka, wpisanego w czworościan o krawędzi $= a$.

22. Obliczyć w zadaniu 20 objętości trzech brył, utworzonych przez obrót trójkąta kolejno dokoła boków a, b, c. Jaki związek zachodzi między temi objętościami?

23. Na kole $(O)r$ zbudowano walec o wysokości h i wydrążono w nim zagłębienie w kształcie stożka, którego wysokość $= {}^1/_2 h$ i którego oś leży na osi walca. Przecinamy tę bryłę płaszczyzną, równoległą do podstawy i dzielącą wysokość stożka w stosunku $1:3$. Obliczyć pole przekroju.

24. Jaka zależność zachodzi między tworzącą stożka i promieniem jego podstawy, jeżeli pole powierzchni bocznej jest średnią geometryczną między polem podstawy a polem powierzchni zupełnej.

25. Obliczyć promień górnej podstawy pnia stożkowego, jeżeli objętość jego $= v$, wysokość $= h$, promień podstawy dolnej $= r$.

26. W pniu stożkowym wydrążono zagłębienie w kształcie stożka, któ-

rego podstawą jest górna podstawa pnia, wierzchołek zaś leży w środku podstawy dolnej. Wskutek tego objętość pnia zmniejszyła się m razy. Znaleźć zależność między promieniami podstaw pnia.

27. Obliczyć pole powierzchni bocznej pnia stożkowego, jeżeli tworząca jego jest nachylona do podstawy pod kątem 60^0, a pola obu podstaw równają się S i s.

28. Obliczyć pole powierzchni bocznej pnia stożkowego, jeżeli wiadomo, że pole jego przekroju osiowego $= S$, a tworząca nachylona jest do podstawy pod kątem 45^0.

29. Wysokość pnia podzielono na n równych części i przez punkty podziału przesunięto płaszczyzny równoległe do podstaw. Wykazać, iż zarówno promienie przekrojów, jak pola warstw, na które podzieliliśmy powierzchnię boczną pnia, tworzą postęp arytmetyczny.

30. Jeżeli tworząca pnia stożkowego równa się sumie promieni podstaw wówczas wysokość pnia jest dwa razy większa od średniej geometrycznej tych promieni, objętość zaś pnia równa się polu powierzchni zupełnej, pomnożonemu przez szóstą część wysokości.

31. Objętości dwu brył, które zakreśla równoległobok, gdy obracamy go kolejno dokoła dwóch boków, są odwrotnie proporcjonalne do tych boków.

---

32. Stożek przecięto zapomocą n płaszczyzn, równoległych do podstawy i dzielących wysokość stożka na n równych części. Na tych przekrojach zbudowano walce tak, jak w § 368 budowaliśmy graniastosłupy. Wzorując się na rozumowaniu § 368, 399, utworzyć nowe określenie objętości stożka, otrzymać wzór na tę objętość i wykazać, że to nowe określenie jest zgodne z określeniem, podanem w tekście (§ 382, str. 363—4).

12/IV

C. O kuli.

§ 388. Określenie. *Miejsce geometryczne punktów przestrzeni, jednakowo odległych od stałego punktu O, nazywamy powierzchnią kulistą.*

Punkt O nazywa się *środkiem kuli.*

Odcinek, łączący środek z dowolnym punktem powierzchni kulistej, nazywa się *promieniem kuli.*

Punkt nazywamy *wewnętrznym* lub *zewnętrznym* — zależnie od tego, czy odległość jego od środka jest mniejsza, czy większa od promienia kuli.

Kulą nazywamy zbiór wszystkich punktów, położonych bądźto na powierzchni kulistej, bądź wewnątrz kuli.

Często zamiast „powierzchnia kulista“ mówimy „kula“, jeżeli to nie może wywołać nieporozumienia.

§ 389. Twierdzenie. *Jeżeli odległość między płaszczyzną a środkiem kuli jest mniejsza od promienia, wówczas płaszczyzna przecina powierzchnię kulistą według okręgu koła.*

Rozróżniamy dwa przypadki: 1) gdy płaszczyzna przechodzi przez środek kuli, 2) gdy płaszczyzna nie przechodzi przez środek kuli.

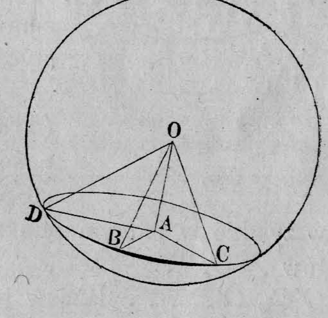
I. W pierwszym przypadku dowód jest niemal oczywisty. Zgodnie z określeniem powierzchni kulistej, wszystkie punkty tej powierzchni, jakie tylko znajdują się na płaszczyźnie α, tworzą okrąg koła, gdyż ten jest miejscem punktów na płaszczyźnie równo odległych od stałego punktu O.

Tym stałym punktem jest w danym razie środek kuli. Tak więc śladem przecięcia się płaszczyzny α z powierzchnią kulistą jest okrąg koła, którego promień równa się promieniowi kuli.

Okrąg taki nazywamy *kołem wielkiem na kuli.*

II. W przypadku drugim prowadzimy promień kuli prostopadły do płaszczyzny α, który przebija tę płaszczyznę, powiedzmy, w punkcie A (rys. 252).

Przesuńmy trzy jakiekolwiek płaszczyzny przez ten promień. Przecinają one płaszczyznę α według trzech prostych AB, AD, AC, powierzchnię zaś kulistą według trzech okręgów.



Rys. 352.

Proste te muszą, oczywiście, przeciąć się z okręgami (dlaczego?). Niech D, B, C będą trzema z pośród tych punktów przecięcia (rys. 352). Odcinki AD, AB, AC równają się sobie (dlaczego?), zatem twierdzenie zostało dowiedzione.

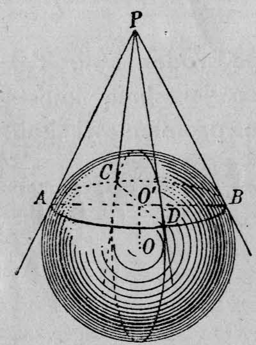
Okrąg taki, jak DBC na rys. 252, nazywa się *kołem małem na kuli.*

§ 390. Uczeń sam dowiedzie, że płaszczyzna i powierzchnia kulista mają jeden punkt spólny (*są do siebie styczne*), lub nie mają wcale punktów wspólnych — zależnie od tego, czy odległość płaszczyzny od środka kuli równa się promieniowi, czy też jest od promienia większa.

§ 391. Uczeń zbada i sformułuje warunki, którym czyni zadość prosta, jeżeli: 1) nie ma punktów spólnych z powierzchnią kulistą, 2) ma z nią jeden punkt spólny; 3) przebija tę powierzchnię w dwóch punktach.

[W s k a z ó w k a: przez prostą i środek kuli przesuwamy płaszczyznę, poczem sprowadzamy zagadnienie do położenia prostej względem koła.]

§ 392. Twierdzenie. *Z punktu zewnętrznego można poprowadzić dowolną ilość prostych, stycznych do powierzchni kulistej. Proste te tworzą stożek, styczny do kuli według koła małego.*



Rys. 353.

Niech będzie dany punkt zewnętrzny P (rys. 353). Każda płaszczyzna, przesunięta przez prostą OP, przecina kulę według koła wielkiego, do każdego zaś z tych kół możemy z punktu P poprowadzić po dwie styczne.

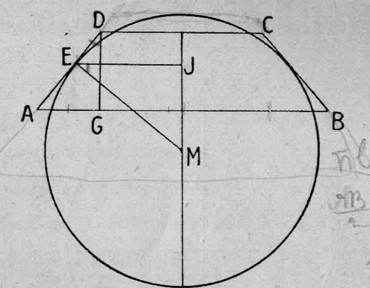
Wszystkie te styczne równają się sobie (d l a c z e g o?). Jeśli teraz z punktów styczności A, B, C, D i t. d. poprowadzimy prostopadłe do prostej OP, przetną się one wszystkie w jednym punkcie O', a to z powodu równości trójkątów $\triangle OPB$, $\triangle OPC$, $\triangle OPD$ i t. d. Wobec tego odcinki $O'B$, $O'C$, $O'D$ . . . leżą w jednej płaszczyźnie prostopadłej do prostej OP, a że równają się one sobie (d l a c z e g o?), zatem linja BCD . . . jest okręgiem koła małego na kuli.

§ 393. Zauważmy jeszcze, że jeśli płaszczyzna α jest styczna do kuli w punkcie M, wówczas każda prosta tej płaszczyzny, przechodząca przez punkt M, jest również styczna do kuli (d l a c z e g o?).

§ 394. Jeżeli półkole obracać będziemy dokoła średnicy, zakreśli ono kulę. To spostrzeżenie ułatwi nam ustalenie pojęć pola powierzchni kulistej oraz objętości kuli. Najpierw jednak dowiedziemy następującego twierdzenia pomocniczego.

Twierdzenie pomocnicze. *Pole powierzchni bocznej pnia stożkowego równa się iloczynowi z wysokości pnia przez obwód koła wielkiego kuli, która dotyka powierzchni pnia według koła równoodległego od obu podstaw.*

Na rys. 354 mamy przekrój pnia i kuli, o której mowa w twierdzeniu. Kładąc $DG = h$, $EM = R$, mamy dowieść, że pole powierzchni pnia wyraża się iloczynem $2\pi Rh$.



Rys. 354.

Oznaczając EJ przez r, tworzącą AD przez l, mamy najpierw

$$4r = AB + DC,$$

zatem pole powierzchni pnia wyraża się wzorem

$$S = 2\pi rl \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Z podobieństwa trójkątów $\triangle ADG \backsim \triangle MEJ$ wynika, iż

$$AD : DG = EM : EJ$$

czyli $\quad l : h = R : r,$

skąd $\quad lr = Rh \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$

z równań zaś (1) i (2) wynika, że istotnie

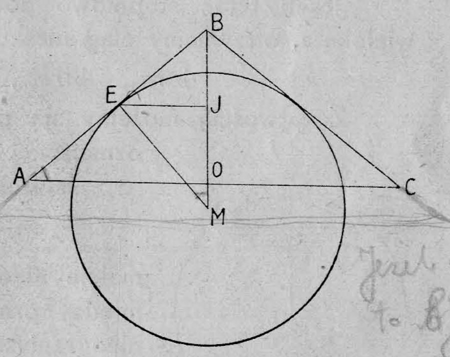
$$S = 2\pi Rh.$$

Uwaga. Łatwo przekonać się, że wzór ten nie ulegnie żadnej zmianie, jeżeli przez powiększanie się stopniowe podstawy górnej pień stożkowy przekształci się w walec.

Tak samo, jeżeli podstawę górną pnia będziemy zmniejszali, pień przekształci się stopniowo w stożek, wzór jednak pozostanie prawdziwy. Istotnie, pole S powierzchni bocznej stożka wyraża się wzorem

$$S = \pi rl,$$

gdzie $r = AO$, $l = AB$.



Rys. 355.

Zauważmy, że $EJ = \frac{1}{2} r$ i że z podobieństwa trójkątów $\triangle ABO \backsim \triangle EJM$ mamy

$$AB : BO = EM : EJ$$

czyli $\quad l : h = R : \frac{1}{2} r$

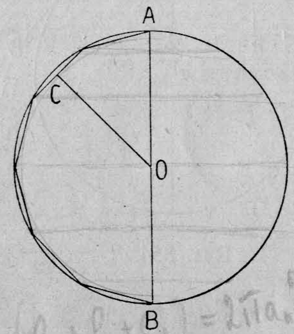
albo $\quad \frac{1}{2} rl = Rh,$

zatem $\quad S = 2\pi Rh.$

§ 395. Wyobraźmy sobie teraz, iż mając dany okrąg koła $(O)r$, wpisaliśmy w niego wielokąt foremny o n bokach.

Oznaczmy apotemę wielokąta przez a_n.

Jeżeli figurę naszą obracać będziemy dokoła średnicy AB (rys. 356), okrąg zakreśli powierzchnię kulistą, wielokąt zaś zakreśli bryłę, złożoną ze stożków, pni stożkowych i walców, a więc z brył, do których stosuje się twierdzenie pomocnicze, dowiedzione w § 394.



Rys. 356.

$2\pi a_n(l_1+l_2+l_3) = 2\pi a_n 2r = 4\pi r a_n$

Kula, zakreślona ze środka O promieniem, równającym się apotemie OC będzie styczną do powierzchni każdej z tych brył, a koło styczności przechodzić będzie przez środki tworzących. Będzie to więc właśnie ta kula, o której mowa w twierdzeniu pomocniczem.

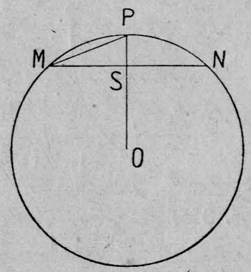
Wysokości wszystkich poszczególnych brył dadzą po zsumowaniu średnicę AB, zatem pole powierzchni, otrzymanej przez obrót wielokąta, musi się równać

$$2\pi a_n \cdot 2r = 4\pi r a_n.$$

Jeżeli teraz stopniowo podwajać będziemy liczbę boków wielokąta, otrzymamy ciąg nieskończony rosnący

$$4\pi r a_n, \quad 4\pi r a_{2n}, \quad 4\pi r a_{4n}, \ \ldots$$

Z łatwością możemy się przekonać, iż ten ciąg dąży do oznaczonej granicy, którą jest liczba $4\pi r^2$.



Rys. 357.

Istotnie, różnica

$$4\pi r^2 - 4\pi r a_k = 4\pi r(r - a_k)$$

maleje nieograniczenie, jeżeli tylko różnica między promieniem r i apotemą a_k maleje nieograniczenie.

Że tak jest, możemy przekonać się w sposób następujący.

Jeżeli MN jest bokiem wielokąta foremnego o n bokach, OS jego apotemą, wówczas odcinek SP jest różnicą między promieniem i apotemą. Otóż mamy

$$SP < MP,$$

że zaś odcinek MP, jako bok wielokąta foremnego wpisanego, mającego $2n$ boków, maleje nieograniczenie przy podwajaniu liczby boków (§ 383, str. 363), zatem odcinek SP musi tem bardziej maleć nieograniczenie.

Widzimy tedy, że powierzchnia naszej bryły obrotowej dąży do granicy $4\pi r^2$. *Granicę tę* ***nazywam*** *polem powierzchni kulistej.* I/V

§ 396. Jeżeli zamiast okręgu obracać będziemy łuk koła dokoła średnicy, przechodzącej przez środek lub początek łuku, wówczas otrzymamy część kuli, zwaną *odcinkiem kulistym.*

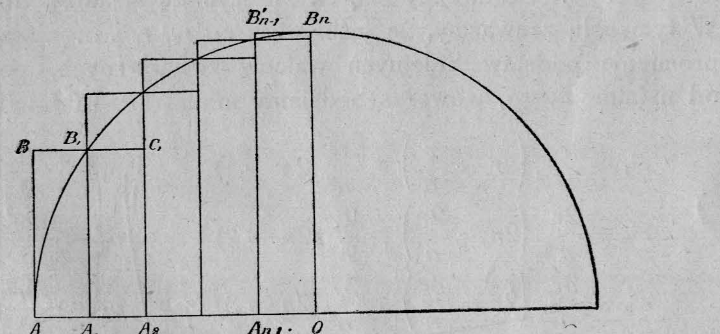
Wpisując w ten łuk łamaną foremną i powtarzając to samo rozumowanie, które stosowaliśmy do kuli, otrzymamy *wzór na pole powierzchni bocznej odcinka kulistego* (czaszy)

$$2\pi rh,$$

w którym h oznacza wysokość odcinka, r zaś promień kuli.

Uczeń przeprowadzi całe rozumowanie szczegółowo.

§ 397. Chcąc ustalić pojęcie objętości kuli, możemy postąpić w sposób następujący.



Rys. 147.

Promień OA półkola podzielmy na n równych części i w punktach podziału wystawmy prostopadłe do jego średnicy, następnie zaś zbudujmy dwa ciągi prostokątów (jak na rys. 358), z których jedne mieszczą się całkowicie w półkolu, inne zaś częściowo wystają poza półkole.

Jeżeli całą figurę obracać będziemy dokoła średnicy, otrzymamy dwa ciągi walców, z których jedne leżą wewnątrz kuli (możemy je nazwać wewnętrznemi), inne zaś wystają poza kulę (nazwijmy je zewnętrznemi).

Zauważmy, że każdemu walcowi zewnętrznemu odpowiada równy mu walec wewnętrzny — z wyjątkiem tylko największego walca zewnętrznego, t. j. zakreślonego przez obrót prostokąta $A_{n-1}B_{n-1}B_nO$: śród walców wewnętrznych niema równego mu. Jeśli więc zsumujemy objętości wszystkich walców wewnętrznych, osobno zaś dodamy do siebie objętości wszystkich walców zewnętrznych, to jedna suma różnić się będzie od drugiej o największy walec zewnętrzny. Objętość tego walca równa się

$$\pi r^2 \cdot \frac{r}{n} = \frac{\pi r^3}{n},$$

możemy ją więc uczynić dowolnie małą przez zwiekszenie liczby n, t. j. liczby podziałek.

Jak widzimy, przy nieograniczonem zwiększaniu liczby podziałek obie sumy dążą do wspólnej granicy. *Tę właśnie granicę **nazywamy** objętością półkuli, zakreślonej przez obrót łuku AB_1B_n dokoła średnicy AO.*

§ 398. Postarajmy się wyznaczyć tę granicę dokładniej. W tym celu zauważmy, że jeśli przez $r_1, r_2, r_3 \ldots r_n$ oznaczymy promienie podstaw kolejnych walców zewnętrznych, poczynając od najmniejszego, wówczas będziemy mieli

$$r^2_1 = \frac{r}{n}\cdot\left(2r - \frac{r}{n}\right) = \frac{r^2}{n^2}(2n-1) \qquad v_1 = \frac{\pi r^3}{n^3}(2n-1)$$

$$r^2_2 = \frac{2r}{n}\cdot\left(2r - \frac{2r}{n}\right) = \frac{2r^2}{n^2}(2n-2) \qquad v_2 = \frac{\pi 2r^3}{n^3}(2n-2)$$

$$r^2_3 = \frac{3r}{n}\cdot\left(2r - \frac{3r}{n}\right) = \frac{3r^2}{n^2}(2n-3) \qquad v_3 = \frac{\pi 3r^3}{n^3}(2n-3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$r^2_n = \frac{nr}{n}\cdot\left(2r - \frac{nr}{n}\right) = \frac{nr^2}{n^2}(2n-n) \qquad v_n = \frac{\pi n r^3}{n^3}(2n-n)$$

Sumując objętości wszystkich walców i oznaczając tę sumę przez Σ, mamy

$$\Sigma = \frac{\pi r^3}{n^3}[2n + 2\,.\,2n + 3\,.\,2n + \ldots + n2n - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)]$$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$$= \frac{\pi r^3}{n^3}[2n(1+2+3+\ldots+n) - (1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)]$$

$$= \frac{\pi r^3}{n^3}\left[n^2(n+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \pi r^3\left[1 + \frac{1}{n} - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}\right].$$

$\pi r^3\left[1+\frac{1}{n} - \frac{2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}\right] =$

Teraz już z łatwością wykazać możemy, że przy nieograniczonem zwiększaniu liczby n, suma Σ dąży do granicy, która równa się $\frac{2}{3}\pi r^3$.

Istotnie

$$\Sigma - \frac{2}{3}\pi r^3 = \pi r^3\left[1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right] - \frac{2}{3}\pi r^3 =$$

$$= \pi r^3\left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right].$$

$= \pi r^3\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right)$

Prawa część tej równości składa się z dwóch czynników, z których pierwszy πr^3 jest liczbą stałą, drugi zaś $\frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}$ maleje nieograniczenie, gdy n rośnie nieograniczenie, a więc różnica między Σ i stałą liczbą $\frac{2}{3}\pi r^3$ istotnie maleje nieograniczenie.

Dowodzi to, że sume Σ dąży do granicy $\frac{2}{3}\pi r^3$. Granica ta, zgodnie z naszem określeniem, jest objętością półkuli, *objętość zatem całej kuli wyraża się wzorem*

$$v = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

§ 399. Twierdzenie. *Objętość odcinka kulistego wyraża się wzorem*

$$v = \pi h^2 r - \tfrac{1}{3}\pi h^3,$$

w którem h oznacza wysokość odcinka.

Uczeń dowiedzie tego wzoru, stosując tę samą metodę, którą zastosowaliśmy do całej kuli.

Ćwiczenia LX. 1. Jakie jest miejsce geometryczne środków kul, przechodzących przez dwa dane punkty? przez jeden punkt dany?

2. Przez punkt dany wewnątrz kuli poprowadzić płaszczyznę tak, by otrzymać koło o możliwie najmniejszem polu. — Jakie jest analogiczne zadanie planimetryczne?

3. Przez punkt A poprowadzić płaszczyznę, styczną do danej kuli i równoległą do danej płaszczyzny α. Jaki jest warunek możliwości zadania?

4. Przez punkt A poprowadzić płaszczyznę, styczną do danej kuli i równoległą do danej prostej m.

5. Przez punkt A poprowadzić prostą styczną, równoległą do danej płaszczyzny α. Czy zadanie jest zawsze możliwe?

6. Jakie jest miejsce geometryczne punktów w przestrzeni, z których dany odcinek AB widać pod kątem prostym?

7. Dowieść, że dwie kule przecinają się zawsze według okręgu koła. Jak leży to koło względem linji środków obu kul? Jaką figurę płaską otrzymamy, przecinając naszą figurę płaszczyzną, przechodzącą przez środki obu kul?

8. Jeżeli z punktu M poprowadzimy wszystkie styczne do kuli, otrzymamy, jak wiadomo, stożek, który dotyka kuli według okręgu pewnego koła małego. Dowieść, że punkt M wraz ze środkiem tego koła dzielą harmonicznie średnicę kuli.

9. Wyznaczyć środek jednokładności dwóch danych kul.

10. Jakie jest miejsce geometryczne środków kul, stycznych do płaszczyzny α w danym jej punkcie M?

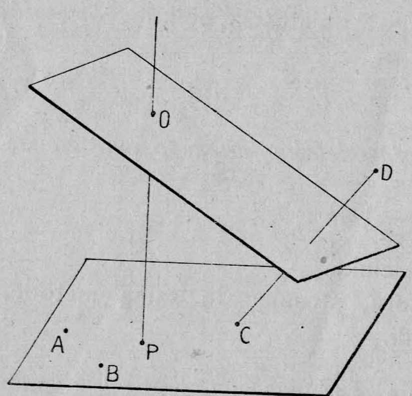
11. Jakie jest miejsce środków kul stycznych do danej prostej a w danym jej punkcie M? stycznych do dwóch prostych równoległych? stycznych do dwóch przecinających się płaszczyzn?

12. Dane są dwie przecinające się proste m, n. Zbudować kulę, która byłaby styczną do obu prostych i przechodziła przez punkt A, leżący w płaszczyźnie $[mn]$. Ile rozwiązań posiada nasze zadanie?

13. To samo zadanie, jeżeli proste m, n są do siebie równoległe.

14. Dane są dwie płaszczyzny α, β i punkt M, leżący wewnątrz klina $[\alpha\beta]$. Zbudować kulę, styczną do obu płaszczyzn i przechodzącą przez punkt M.

15. Jeżeli można zbudować kulę, styczną do wszystkich sześciu krawędzi czworościanu, wówczas suma dowolnej pary przeciwległych krawędzi czworościanu równa się sumie każdej innej pary jego krawędzi przeciwległych.



Rys. 359.

16. Dane są cztery punkty A, B, C, D, nie leżące w jednej płaszczyźnie, przyczem żadne trzy z pośród nich nie leżą na jednej prostej. Wykazać, że istnieje w przestrzeni jeden i tylko jeden punkt równo odległy od punktów A, B, C, D.

[Niech P będzie środkiem koła ABC. Prosta PO, prostopadła do płaszczyzny tego koła, jest miejscem punktów przestrzeni równo odległych do punktów A, B i C. Jeżeli teraz połączymy C z D i poprowadzimy płaszczyznę, dzielącą odcinek CD na połowy i prostopadłą do tego odcinka, będzie ona miejscem punktów równo odległych od

końców odcinka CD. Płaszczyzna ta nie może być równoległa do prostej PO, w przeciwnym bowiem razie punkt D leżałby w płaszczyźnie ABC, co przeczy założeniu. Tak więc płaszczyzna ta przecina prostą w jakimś punkcie O, który jest jednakowo odległy od A, B, C i D.]

17. Z poprzedniego zadania wywnioskować, ile potrzeba punktów do wyznaczenia kuli.

Czy można opisać kulę na czworościanie i ile takich kul opisać można?

18. W dany czworościan wpisać kulę.

19. Jeżeli mamy dany czworościan foremny, możemy zbudować kulę, styczną do wszystkich jego krawędzi.

20. Z punktu A, jako ze środka, zakreślić kulę, styczną do innej danej kuli.

21. Z punktu A, jako ze środka, zakreślić kulę tak, by dana płaszczyzna α przecięła ją według koła o danym promieniu r.

22. Zbudować kulę, która z daną płaszczyzną α przecinałaby się według koła o promieniu $= a$. Ile rozwiązań? Dodaj warunek nowy tak, by zadanie uczynić oznaczonem.

23. Zbudować kulę, styczną do płaszczyzny α w punkcie M i przechodzącą przez dany punkt L. Ile rozwiązań?

24. To samo zadanie, jeżeli zamiast M mamy dany promień r kuli.

25. Zbudować kulę, przechodzącą przez trzy dane punkty A, B, C i styczną do danej płaszczyzny α.

---

26. Łączymy punkt A, leżący zewnątrz kuli, z okręgiem koła wielkiego tak, iż powstaje stożek prosty. Stożek ten przecina kulę. Zapomocą konstrukcji planimetrycznej znaleźć promień tego przekroju, jeżeli mamy dane: długość stycznej do kuli, poprowadzonej z punktu A, oraz sumę promienia kuli i wysokości stożka.

27. Zbudować (planimetrycznie) przekrój osiowy pnia stożkowego, opisanego na danej kuli, mając dany promień kuli i tworzącą pnia.

28. Znaleźć promień kuli wpisanej w pień stożkowy, mając daną tworzącą pnia i różnicę promieni jego podstaw.

Uczeń znajdzie następujące miejsca geometryczne, dla każdego z nich poszuka analogicznego miejsca punktów na płaszczyźnie i przekona się, w jaki sposób otrzymać można miejsce punktów na płaszczyźnie, jeżeli znamy odpowiednie miejsce punktów w przestrzeni.

29. Jakie jest miejsce geometryczne rzutów punktu stałego A na wszystkie płaszczyzny, przechodące przez stały punkt B?

30. Jakie jest miejsce środków kół, wyznaczonych na kuli przez pęk płaszczyzn siecznych (t. j. przez płaszczyzny o wspólnej krawędzi)?

31. Rozważmy wszystkie kule o promieniu r, styczne do danej płaszczyzny α. Jakie jest miejsce geometryczne punktów styczności tych kul z płaszczyznami β, które wszystkie są do siebie równoległe i tworzą stały kąt z płaszczyzną α?

32. Jakie jest miejsce punktów, z których możemy poprowadzić do danej kuli trzy styczne tak, iż w utworzonym przez nie trójścianie wszystkie ściany są kątami prostemi?

33. Jakie jest miejsce punktów, z których można prowadzić równe styczne do dwóch kul danych?

34. To samo pytanie, jeżeli mamy dane trzy kule.

34. Jakie jest miejsce geometryczne punktów, których odległości od dwóch stałych punktów są do siebie w stałym stosunku?

---

36. Kulę przecięto płaszczyzną w odległości $= m$ od środka. Jaki jest stosunek pola przekroju do pola koła wielkiego?

37. Kulę przecięto dwiema płaszczyznami. Stosunek odległości tych płaszczyzn od środka kuli $= m$; pola przekrojów równają się odpowiednio a^2 i b^2. Obliczyć promień kuli.

38. W półkulę wpisano stożek, mający z nią wspólną podstawę. Dwie te bryły przecinamy płaszczyzną w połowie wysokości stożka. Obliczyć pole pierścienia kołowego, który utworzył się na płaszczyźnie siecznej, jeżeli wiadomo, że promień półkuli $= r$ i że płaszczyzna sieczna jest równoległa do podstawy półkuli.

39. Dana jest kula o promieniu r. Z dowolnego punktu na jej powierzchni zakreślamy drugą kulę tym samym promieniem. Obliczyć długość linji przecięcia się tych dwu powierzchni.

40. Na wspólnej podstawie po jednej jej stronie zbudowano półkulę i stożek. Wysokość stożka jest m razy większa od promienia półkuli. Obliczyć pole koła, według którego przecinają się te dwie powierzchnie, oraz odległość tego koła od podstawy stożka.

41. Na wspólnej podstawie po jednej jej stronie zbudowano półkulę i stożek, którego wysokość jest m razy większa od promienia półkuli. Na jakiej wysokości nad podstawą należy poprowadzić równoległą do niej płaszczyznę sieczną, żeby pole przekroju półkuli było k razy większe od pola przekroju stożka?

42. Na płaszczyźnie położono cztery równe kule tak, iż środki ich tworzą kwadrat. Mając dany promień r tych kul, obliczyć: 1) promień najmniejszej kuli, stycznej zewnętrznie do wszystkich czterech kul; 2) promień najmniejszej kuli, do której cztery dane kule są wewnętrznie styczne.

43. Na dnie sześcianu umieszczono cztery równe sobie kule, z których każda dotyka dwóch sąsiednich kul i jest styczna do trzech ścian sześcianu. Obliczyć: 1) promień piątej kuli, która leżąc również na dnie sześcianu, byłaby styczna do czterech danych kul; 2) promień szóstej kuli, która leżąc na czterech danych, dotykałaby zarazem górnej podstawy sześcianu.

44. Mając daną krawędź a sześcianu, obliczyć: 1) objętość kuli wpisanej, 2) objętość kuli opisanej, 3) objętość kuli stycznej do wszystkich krawędzi sześcianu.

45. Mając daną krawędź a czworościanu foremnego, obliczyć: 1) pole powierzchni kuli wpisanej, 2) pole powierzchni kuli opisanej, 3) pole powierzchni kuli stycznej do wszystkich krawędzi czworościanu.

Jaka zależność zachodzi między temi trzema liczbami?

46. Objętość walca równobocznego (t. j. takiego, iż przekrój jego osiowy jest kwadratem) jest średnią geometryczną między objętością kuli opisanej na walcu a objętością stożka równobocznego*), wpisanego w tę kulę.

47. Na spólnej podstawie zbudowano półkulę, walec opisany na niej i stożek wpisany w nią. Jaki stosunek zachodzi między objętościami tych brył? między polami ich powierzchni bocznych?

48. Jeżeli wysokość pnia stożkowego jest średnią geometryczną między średnicami obu jego podstaw, wówczas w pień ten można wpisać kulę.

49. Mając dany odcinek $AB = a$, zakreślono koło $(O)B$ tak, że gdy poprowadzono do niego styczną AC, okazało się, iż przy obrocie figury dokoła AB powstają stożek i kula, których pola powierzchni równają się sobie. Obliczyć promień r.

50. W koło o promieniu r wpisano kwadrat, poczem całą figurę zaczęto obracać dokoła przekątnej kwadratu. Obliczyć objętość wszystkich brył, jakie przytem powstały.

51. To samo zadanie, jeżeli osią obrotu jest średnica koła, równoległa do dwóch boków tego kwadratu.

52. Jaki jest stosunek między objętościami (lub między polami powierzchni) stożka równobocznego*), kuli wpisanej w niego i kuli na nim opisanej?

53. To samo pytanie dla ośmiościanu foremnego i dwóch kól: wpisanej w niego i opisanej na nim.

54. Z punktu A, leżącego na powierzchni kuli o promieniu r, zakreślono drugą kulę tym samym promieniem. Jak wielkie jest pole powierzchni i jak wielka objętość bryły, wspólnej obu kulom?

55. Kulę przecięto płaszczyzną w odległości a od środka, poczem w oba odcinki kuliste wpisano możliwie największe kule, styczne od kuli danej i do płaszczyzny siecznej. Obliczyć stosunek objętości obu wpisanych kul do kuli danej.

56. Na trójkącie foremnym o boku $= a$ zbudowano graniastosłup prosty, w którym pole powierzchni bocznej równa się połowie pola powierzchni zupełnej. Obliczyć: 1) objętość tej bryły; 2) pole powierzchni i objętości kuli, opisanej na graniastosłupie.

57. W kulę o promieniu r wpisano pień ostrosłupowy o podstawie kwadratowej. Podstawa dolna pnia wpisana jest w koło wielkie, ściany zaś boczne są nachylone do podstawy pod kątem 60^0. Obliczyć objętość i pole powierzchni bocznej pnia.

58. Na sześcianie opisano kulę. Obliczyć objętości odcinków kulistych, które otrzymamy, przedłużając ściany sześcianu. Krawędź sześcianu $= a$.

59. To samo pytanie dla ośmiościanu foremnego.

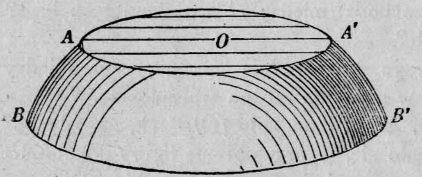
60. Daną kulę przeciąć płaszczyzną tak, by pole przekroju równało się różnicy pól powierzchni obu odcinków kulistych.

61. W stożek równoboczny wpisano kulę; nad nią umieszczono drugą kulę, która dotyka zarówno pierwszej kuli jak powierzchni stożka; nad tą drugą kulą umieszczono w taki sam sposób trzecią kulę i t. d. Obliczyć granicę, do której dąży suma objętości tych kul, gdy liczbę ich zwiększamy nieograniczenie.

---

*) Równobocznym nazywamy taki stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem foremnym.

62. Cztery równe sobie kule leżą tak, że każda z nich jest styczna do trzech pozostałych. Na kulach opisano stożek, którego powierzchnia boczna i podstawa dotykają kul. Wykazać, że stosunek między promieniem podstawy stożka, jego wysokością i tworzącą równa się stosunkowi $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.



Rys. 360.

63. Znaleźć wzór na objętość warstwy kulistej (rys. 360), którą otrzymamy, przecinając kulę dwiema płaszczyznami, do siebie równoległemi.

Dodatek do stereometrji.

O rysowaniu brył w rzucie ukośnym równoległym.

Każdą figurę płaską możemy przedstawić zapomocą rysunku tak wiernie i z taką dokładnością, na jaką tylko pozwalają nasze przybory rysunkowe. Inaczej rzecz ma się, jeśli chodzi o bryły; możemy co najwyżej wykonać rysunek figury płaskiej, która z bryłą pozostawać będzie w pewnym związku geometrycznym, tak, iż z własności tej figury płaskiej będziemy mogli wnosić o własnościach bryły.

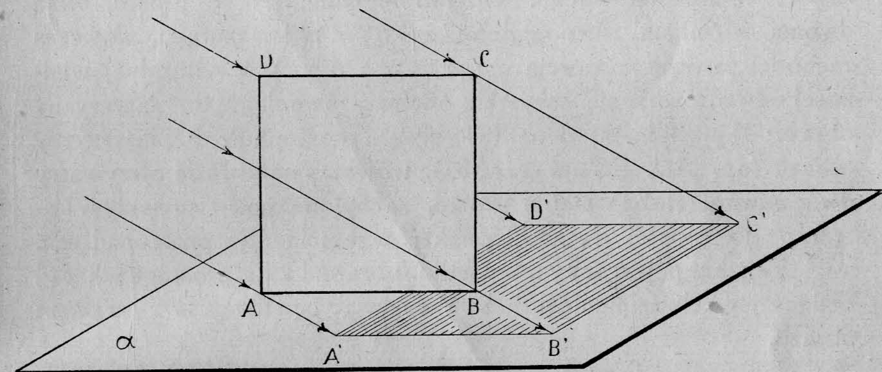
Istnieją rozmaite metody wykonywania (budowania) figur płaskich, związanych w ten sposób z bryłami. Do naszych celów najodpowiedniejszą jest t. zw. metoda rzutów ukośnych równoległych, gdyż obrazy dają się według niej wykonać z łatwością i mogą wywoływać w nas złudzenie, iż istotnie widzimy przed sobą bryłę.

Wyobraźmy sobie, że na kwadrat $ABCD$, zrobiony z tektury lub innego materjału nieprzeźroczystego, pada wiązka promieni równoległych i że tę wiązkę przecięliśmy płaszczyznę α, równoległą do kwadratu i położoną za nim. Kwadrat nasz rzuci wówczas na płaszczyznę α cień, który będzie miał również kształt kwadratu $A'B'C'D'$ *).

*) Uczeń przerobi zarówno niniejsze doświadczenie, jak i wszystkie dalsze.

Cień ten nazywamy *rzutem równoległym* kwadratu $ABCD$, płaszczyznę zaś α nazywamy *płaszczyzną rzutów* albo *płaszczyzną obrazu.*

Promienie mogą być prostopadłe do płaszczyzny obrazu — wówczas obraz nazywamy *rzutem prostokątnym;* mogą one być jednak nachylone pod innym jakimś kątem do płaszczyzny obrazu, a wówczas rzut zwie się *ukośnym równoległym.* — W dalszym ciągu będzie mowa tylko o rzucie ukośnym.



Rys. 361.

Przypuśćmy teraz, że kwadrat $ABCD$ nachyliliśmy do płaszczyzny obrazu, tak jednak, iż dwa jego boki AB, CD są do tej płaszczyzny równoległe. Jeżeli promienie, przechodzące przez boki AD, CB, leżą w płaszczyznach prostopadłych do krawędzi przecięcia się płaszczyzny kwadratu $ABCD$ z płaszczyzną rzutów, wówczas obrazem naszego kwadratu musi być prostokąt $A'B'C'D'$, przyczem dwa jego boki $A'B'$, $C'D'$, równają się bokom AB, CD kwadratu (dlaczego?), pozostałe zaś boki $A'D'$, $C'B'$ są albo oba krótsze, albo oba dłuższe od odpowiednich boków kwadratu.

Uczeń sam ustali, kiedy mianowicie dwa te boki prostokąta są krótsze, kiedy zaś dłuższe od boków kwadratu.

Przypuśćmy wreszcie, że kwadrat znajduje się w takiem samem położeniu, jak poprzednio (t. j. boki jego AB, CD są równoległe do płaszczyzny obrazu), ale promienie, przechodzące przez boki AD, CB, leżą w płaszczyznach, które nie są prostopadłe do krawędzi, według której płaszczyzna kwadratu $ABCD$ przecina się z płaszczyzną obrazu (rys. 361). Obrazem kwadratu musi być czworobok $A'B'C'D'$, w którym boki $A'B'$, $C'D'$ są równoległe do AB, CD i równają się im (dlaczego?) boki zaś $A'D'$, $C'B'$ są do siebie równoległe, równają się sobie i są oba albo krótsze, albo dłuższe od odpowiednich boków kwadratu (dlaczego?), wreszcie kąty na obrazie są jedne ostre, inne rozwarte. Tak więc obrazem kwadratu jest w tym wypadku równoległobok.

Uczeń dowiedzie sam: 1) że odcinki równoległe rzutują się zawsze w postaci odcinków równoległych; 2) że jeśli a, b są dwoma odcinkami równoległemi, zaś a', b' są ich rzutami, wówczas zachodzi zawsze proporcja $a : b = a' : b'$; 3) w naturalnej wielkości odwzorowują się wszystkie odcinki, równoległe do płaszczyzny obrazu; 4) jeżeli mamy dane dwie proste prostopadłe do płaszczyzny obrazu (np. AD, BC na rys. 361), wówczas na obrazie otrzymamy dwie równoległe do siebie proste, nachylone pod tym samym kątem β do prostej, łączącej punkty przebicia obu prostopadłych.

Ten kąt β jest w tym wypadku obrazem kąta prostego; kąt α, będący jego dopełnieniem do 90^0, nazywać będziemy *skrzywieniem* obrazu.

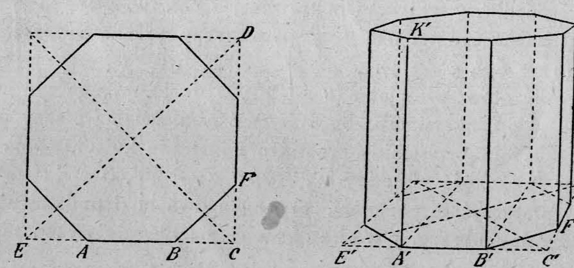
Jak widzimy, przy rzucie ukośnym każda figura, z wyjątkiem figur równoległych do płaszczyzny obrazu, ulega zniekształceniu, które polegać może: 1) na *skrzywieniu* (oznaczać je będziemy symbolem α) i 2) na *skróceniu* (oznaczać będziemy symbolem v). Rzecz prosta, że to, co nazwaliśmy skróceniem, może być w rzeczywistości wydłużeniem pewnych odcinków.

Zniekształcenie obrazu zależy od dwóch przyczyn: 1) od położenia figury względem płaszczyzny obrazu; 2) od kierunku promieni rzutujących. Zmieniając kierunek promieni i położenie figury, możemy osiągnąć dowolnej wielkości skrócenie i skrzywienie. Wobec tego przy rysowaniu figur w rzucie ukośnym możemy α i v obierać dowolnie, kierując się tylko tem, by obraz robił wrażenie naturalne i uwidaczniał to wszystko, co chcemy na nim ujrzeć. Większość figur stereometrycznych w książce niniejszej została wykreślona przy założeniu, że $\alpha = 30^0$, $v = {}^1/_3$ lub ${}^1/_2$.

Jako przykład rozwiążemy następujące

Zadanie. *Wykreślić obraz danego graniastosłupa o podstawie ośmiokątnej foremnej w założeniu, że płaszczyzna obrazu jest pionowa, podstawa zaś graniastosłupa leży na płaszczyźnie poziomej, przyczem* $\alpha = 30^0$, $v = {}^1/_2$.

Przedewszystkiem ustawiamy graniastosłup w położeniu najdogodniejszem, mianowicie tak, by dwie krawędzie podstawy były równoległe do płaszczyzny rzutów, przez co na obrazie otrzymamy je w wielkości naturalnej. Następnie na rysunku pomocniczym kreślimy tę podstawę w wielkości naturalnej i przedłużamy boki ośmiokąta tak, by utworzyć kwadrat opisany na ośmiokącie.



Rys. 362.

Zkolei rysujemy rzut ukośny tego kwadratu. W tym celu kreślimy $E'C' = EC$, gdyż bok EC, jako równoległy do płaszczyzny rzutów, musi odwzorowywać się w wielkości naturalnej; na $E'C'$ budujemy równoległobok o kącie ostrym $= 90^0 - \alpha = 60^0$ i o boku $C'D' = {}^1/_2\, CD$. Dalej odkładamy $E'A' = EA$, $A'B' = AB$. Ponieważ $BF \parallel ED$, zatem obrazy tych odcinków muszą być również do siebie równoległe. Kreślimy tedy $B'F' \parallel E'D'$ i mamy już obrazy trzech wierzchołków podstawy. Pozostałe obrazy wierzchołków uczeń znajdzie sam, kierując się tem spostrzeżeniem, że cztery krawędzie podstawy są równoległe do przekątnych kwadratu (a więc obrazy ich są równoległe do przekątnych równoległoboku), a cztery przekątne tej podstawy są równoległe do boków kwadratu. Teraz pozostaje już tylko wystawić w punkcie A' prostopadłą do $A'B'$, odłożyć na niej w naturalnej wielkości (dlaczego?) krawędź $A'K'$, a przez wszystkie inne wierzchołki ośmiokąta poprowadzić odcinki, równające się $A'K'$ i równoległe od tej prostej.

Ćwiczenia LXI.*) 1. Na płaszczyźnie obrazu mamy dane dwa punkty A, B, w których wystawiono do tej płaszczyzny prostopadłe długości 6 *cm*. Wykreślić obrazy tych prostopadłych, zakładając, że

*) We wszystkich tych zadaniach należy wyobrażać sobie płaszczyznę obrazu jako płaszczyznę pionową.

(I) promienie padają zgóry z lewej strony i $\alpha = 30^0$, $v = \frac{1}{2}$;
(II) „ „ „ z prawej „ i $\alpha = 60^0$, $v = \frac{1}{3}$;
(III) „ „ zdołu „ „ i „ „

2. Sześcian o krawędzi 6 *cm* dotyka płaszczyzny obrazu jedną swą ścianą tak, że cztery jego krawędzie są do tej płaszczyzny prostopadłe. Wykreślić obraz sześcianu, zakładając, że

(I) promienie padają zgóry z lewej strony i $\alpha = 45^0$, $v = \frac{1}{2}$;
(II) „ „ zdołu „ „ i $\alpha = 30^0$, $v = \frac{1}{3}$,

3. Wykreślić obraz sześcianu o krawędzi 7 *cm*, widzianego z góry i ze strony prawej i zaznaczyć na nim trzy płaszczyzny przekątne oraz krawędzie ich przecięcia ($\alpha = 60^0$, $v = \frac{1}{2}$).

4. Wykreślić obraz sześcianu ($\alpha = 30^0$, $v = \frac{1}{2}$), wyznaczyć środki jego ścian i połączyć je odcinkami tak, by otrzymać ośmiościan wpisany w sześcian.

5. Wykreślić obraz piramidy prostej o podstawie kwadratowej. Bok podstawy $= 5$ *cm*; wysokość piramidy $= 4$ *cm*; $\alpha = 60^0$, $v = \frac{1}{2}$; podstawa piramidy leży w płaszczyźnie poziomej, przyczem dwa boki podstawy są prostopadłe do płaszczyzny obrazu. [Wskazówka: na obrazie wyznaczamy środek podstawy.]

6. To samo zadanie przy założeniu, że przekątna podstawy piramidy jest prostopadła do płaszczyzny obrazu.

7. Narysować trójkąt foremny $\triangle ABC$ o boku $= 5$ *cm* i obok niego wykreślić obraz tego trójkąta w założeniu, że promienie padają z góry ze strony lewej, $\alpha = 30^0$, $v = \frac{1}{3}$ i że bok AB trójkąta jest równoległy do płaszczyzny obrazu, cały zaś trójkąt leży na płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny obrazu. [Wskazówka: w trójkącie kreślimy najpierw wysokość CC'.]

8. Wykreślić obraz piramidy prostej, mającej za podstawę trójkąt foremny o boku 6 *cm* i wysokość równającą się 4 *cm*. [Wskazówka: spodek wysokości leży w środku koła wpisanego w podstawę, w naszym zaś przykładzie środek ten jest zarazem środkiem ciężkości podstawy].

9. Wykreślić obraz czworościanu foremnego o krawędzi $= 7$ *cm* w założeniu, że

(I) promienie padają zgóry ze strony lewej i $\alpha = 60^0$, $v = \frac{1}{2}$;
(II) „ „ „ „ prawej i $\alpha = 30^0$, $v = \frac{1}{3}$.

[Wskazówka: na rysunku pomocniczym (planimetrycznym) znajdujemy najpierw wysokość piramidy.]

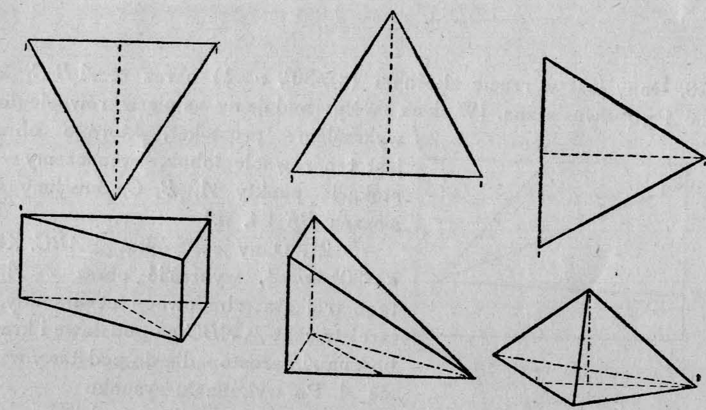
10. Wykreślić graniastosłup o podstawie trójkątnej foremnej (rys. 362). Bok podstawy $= a$; wysokość bryły $= b$; $\alpha = 30^0$, $v = \frac{1}{2}$.

11. Wykreślić piramidę o podstawie kwadratowej, której jedna ściana boczna, prostopadła do podstawy, jest trójkątem foremnym. Płaszczyzna podstawy ma być pozioma.

12. To samo zadanie w założeniu, że poziomą jest ściana, mająca kształt trójkąta foremnego.

13. Wykreślić sześcian, na dwóch jego równoległych ścianach poprowadzić po jednej przekątnej tak, by proste te były do siebie skośne, na czterech zaś innych ścianach wykreślić po przekątnej tak, by otrzymać czworościan foremny, wpisany w sześcian.

14. W sześcian wpisać dwa czworościany foremne, przenikające się wzajemnie.



Rys. 363.

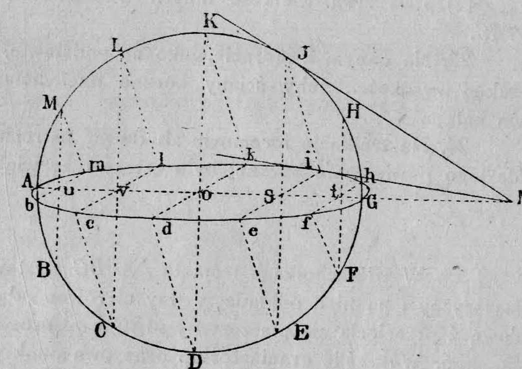
15. Wykreślić sześcian tak, by jedna jego przekątna była prostopadła do płaszczyzny obrazu.

16. Wykreślić ośmiościan foremny tak, by jedna jego ściana leżała na płaszczyźnie obrazu ($\alpha = 30^0$, $v = \frac{1}{3}$).

17. Chcąc otrzymać rzut ukośny koła, postępujemy w następujący sposób: średnicę AG dzielimy na dowolną ilość części, wystawiamy cięciwy MB, LC,... prostopadłe do tej średnicy, przez środek koła prowadzimy prostą, nachyloną do średnicy pod kątem α, na niej odkładamy

$$Ok = Od = v \cdot KD,$$

kreślimy $bm // cl // dk // \ldots$, wreszcie prowadzimy szereg równoległych $Mm // Ll // Kk // \ldots$ Mamy wówczas $um = v \cdot uM$, $si = v \cdot Js$..., Wobec tego krzywa, wyznaczona przez punkty A, m, l, k, ... jest obrazem koła danego. Krzywa ta nazywa się *elipsą*.



Rys. 364.

Zauważmy, iż prosta JN, styczna do koła, rzutuje się w postaci stycznej do elipsy.

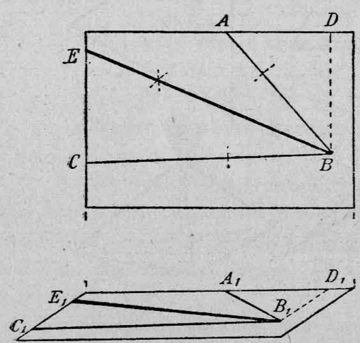
Jeżeli połączymy cięciwami punkty A, m, l, ... otrzymamy na rys. 364 dwunastokąt wpisany w elipsę, który jest obrazem dwunastokąta wpisanego w dane koło.

18. Wykreślić rzut ukośny walca.

19. Wykreślić rzut ukośny sześciokąta foremnego wpisanego w koło.

---

20. Dany jest w rzucie ukośnym ($\alpha=30^0$, $v=\frac{1}{2}$) obraz $\sphericalangle$ $A_1B_1C_1$ kąta; wykreślić jego dwusieczną. [Wskazówka: budujemy najpierw równoległobok, wykreślamy prostokąt, którego obrazem jest ten równoległobok, wyznaczamy w prostokącie punkty A, B, C, kreślimy dwusieczną BE i t. d.]



$\alpha=30^0$, $v=1:2$.
Rys. 365.

21. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$. Kładąc $\alpha=30^0$, $v=\frac{1}{2}$, wykreślić obraz $\triangle A_1B_1C_1$ tego trójkąta; zbudować rzut piramidy, mającej trójkąt $\triangle ABC$ za podstawę i krawędź boczną AS prostopadłą do podstawy w punkcie A. Po wykonaniu rysunku

(1) wyznaczyć prawdziwą wielkość SB, SC;

(2) wykreślić siatkę piramidy.

22. W piramidzie, o której mowa w poprzedniem zadaniu, znaleźć:

(1) prawdziwą wielkość kąta między ścianą SBC i płaszczyzną podstawy;

(2) prawdziwą wielkość innych dwuścianów, np. między ścianami SBC i SAC.

23. Na danym kwadracie, jako na podstawie, zbudować piramidę prostą o takiej wysokości, żeby ściany boczne nachylone były do podstawy pod danym kątem.

24. Na trójkącie foremnym zbudować ostrosłup o takiej wysokości, żeby pole jego powierzchni bocznej było cztery razy większe od pola podstawy.

---

25. W wierzchołkach trójkąta $\triangle ABC$ wystawiamy prostopadłe do niego płaszczyzny i na nich odkładamy trzy nierówne odcinki AA_1, BB_1, CC_1; znaleźć krawędź przecięcia się płaszczyzny ABC z płaszczyzną $A_1B_1C_1$.

26. Wykreślić graniastosłup oraz dwa punkty A, B na jego powierzchni bocznej; znaleźć punkty, w których prosta AB przebija obie podstawy graniastosłupa.

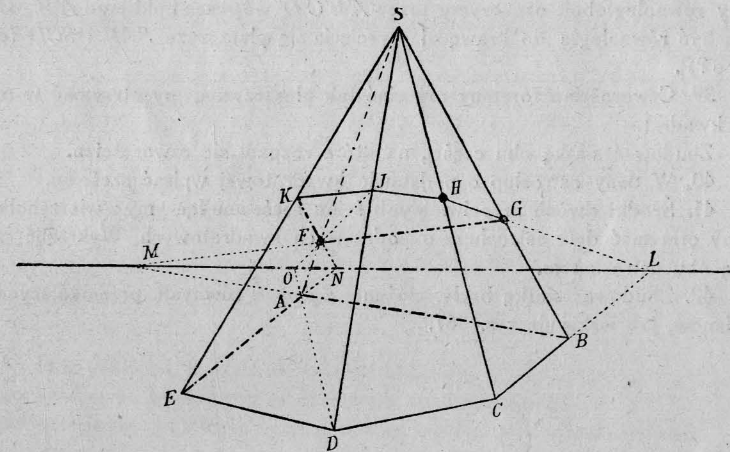
Po czem poznać można na rysunku, czy prosta AB jest, czy nie jest równoległa do podstaw?

27. Dany jest prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$. Przez przekątną prostopadłościanu $B'D$ przesunąć płaszczyznę, równoległą do przekątnej AC podstawy i wykreślić figurę, według której przecina ona prostopadłościan.

28. Wykreślić w prawdziwej wielkości figurę przekroju, o którym mowa w zadaniu poprzedniem.

29. Dany jest trójścian oraz trzy punktu A, B, C na jego ścianach; wykreślić trójkąt, według którego płaszczyzna ABC przecina trójścian. [Wskazówka: jak znaleźć punkt, w którym prosta AB przebija trzecią ścianę trójścianu?]

30. W prostopadłościanie $ABCDA'B'C'D'$ znaleźć punkt, w którym przekątna AC' przebija płaszczyznę przekątną $A'B'CD$.



Rys. 366.

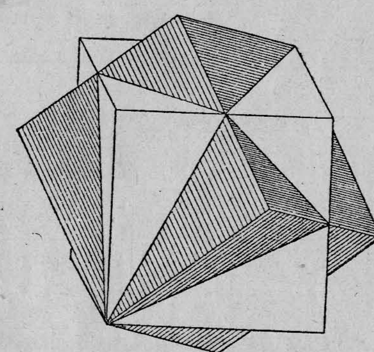
31. To samo zagadnienie, jeżeli zamiast prostopadłościanu mamy równoległościan pochyły.

32. Na trzech krawędziach bocznych prostopadłościanu obieramy trzy dowolne punkty A, B, C. Wyznaczyć:

(1) punkt przebicia czwartej krawędzi bocznej z płaszczyzną ABC;

(2) krawędź przecięcia się płaszczyzny ABC z płaszczyzną podstawy prostopadłościanu.

33. Dana jest w rzucie ukośnym piramida $SABCDE$ (rys. 366) oraz trzy punkty na jej krawędziach, mianowicie F na SA, G na SB, H na SC. Wykreślić (1) w rzucie ukośnym; (2) w wielkości naturalnej — wielokąt, według którego płaszczyzna FGH przecina piramidę.



Rys. 367.

34. To samo zadanie, jeżeli F, G, H dane są na trzech niekolejnych krawędziach bocznych.

35. To samo zadanie, jeżeli F, G, H są trzema punktami, leżącemi na ścianach piramidy, lecz nie na krawędziach.

36. Na krawędziach sześcianu dane są trzy punkty A, B, C. Wykreślić przekrój sześcianu, wyznaczony przez płaszczyznę ABC.

37. Przeciąć sześcian dowolną płaszczyzną, prostopadłą do jego przekątnej.

38. Dana jest piramida $SABC$ o dowolnej czworokątnej podstawie; przeciąć ją płaszczyzną tak, by otrzymać w przekroju równoległobok, którego jeden wierzchołek winien leżeć w punkcie A' na krawędzi SA. [Wskazówka: jeżeli żądany równoległobok oznaczymy przez $A'B'C'D'$ wówczas boki jego $A'B'$, $C'D'$, muszą być równoległe do krawędzi przecięcia się płaszczyzn SAB i SCD (dlaczego?)].

39. Czworościan foremny przeciąć tak płaszczyzną, by otrzymać w przekroju kwadrat.

Zbudować siatkę obu części, na które rozpadł się czworościan.

40. W dany ostrosłup o podstawie kwadratowej wpisać sześcian.

41. Środki dwóch przeciwległych ścian sześcianu łączymy z wierzchołkami tak, by otrzymać dwa ostrosłupy o podstawach kwadratowych. Wykreślić część spólną obu ostrosłupom.

42. Zbudować siatkę bryły, złożonej z dwóch równych, przenikających się sześcianów, jak wskazuje rys. 367.

SPIS RZECZY.

Dodatek do księgi I.

KSIĘGA II.

O równoważności wielokątów.

KSIĘGA III.

O położeniu wzajemnem prostych i płaszczyzn.

KSIĘGA IV.

O figurach jednokładnych i podobnych.

KSIĘGA V.

O mierzeniu figur płaskich.

KSIĘGA VI.

O kątach bryłowych i o wielościanach.

KSIĘGA VII.

Bryły obrotowe.

Dodatek do stereometrji.
