

A. E. H. LOVE

ZASADY RACHUNKU
RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO

ZASADY RACHUNKU
RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO

R 69.1325 R. 32-5
Dublet z 7839

A. E. H. LOVE

Profesor uniwersytetu oxfordzkiego

ZASADY RACHUNKU
RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO

Z upoważnienia autora przetłumaczyli

ST. KALINOWSKI i WŁ. WOJTOWICZ

517

F.V. 4807

Nakład Henryka Lindenfelda. Warszawa 1912
Skład główny w księgarni G. Centnerszvera i S-ki

Bibl. Publ. m. st. W-wy
Rab
CZYTELNIA
OGÓLNA



Bibl. Publ. m.st. W-wy
Wymiana



354395



Czcionkami Drukarni Naukowej. Warszawa, Mazowiecka 8.

2/11/2013

12.009

OD TŁUMACZÓW.

W literaturze naszej daje się oddawna odczuwać brak podręcznika, któryby zawierał jasny, przystępny, a zarazem dość ścisły wykład początków rachunku różniczkowego i całkowego. Ponieważ na podręcznik oryginalny wypadłoby zapewne długo jeszcze czekać, postanowiliśmy przetłumaczyć odpowiednie dziełko.

Wśród powodzi książek tego rodzaju, które ukazały się w ostatnich latach, zwłaszcza w języku niemieckim i angielskim, książka prof. Love'a zajmuje, naszym zdaniem, pierwsze miejsce zarówno pod względem bogactwa treści, jak prostoty i ścisłości wykładu; przytym książka ta dość dokładnie odpowiada potrzebom szkół naszych, a jednocześnie stanowi dla przyrodników i wogóle dla każdego wykształconego czytelnika wyborny wstęp do rachunku nieskończonościowego.

Wobec tego zwróciliśmy się do Sz. Autora z prośbą o pozwolenie wydania jego dziełka w języku polskim. Prof. Love bardzo chętnie przychylił się do naszej prośby, za co składamy Mu serdeczne podziękowanie.

W przekładzie staraliśmy się zachować wszystkie właściwości oryginału, uważaliśmy jednak za niezbędne posługiwanie się wyłącznie układem C. G. S.

Pozatym pozwoliliśmy sobie na kilka drobnych zmian w §§ 149 i 170.

PRZEDMOWA.

O d sześciu lat wykładam początki rachunku różniczkowego i całkowego słuchaczom chemji i inżynierji. Krótki ten kurs składa się z dwudziestu wykładów. Przygotowując je, wygłaszając i poprawiając z roku na rok, nauczyłem się wielu rzeczy, uświadomiłem sobie, co sprawia szczególną trudność słuchaczom. Nieraz musiałem odstępować od tradycyjnego układu i szukać prostszych dowodów dla wielu twierdzeń. Przekonałem się, że zakres wiedzy matematycznej, niezbędnej do rozpoczęcia studjów nad rachunkiem nieskończonościowym, jest o wiele mniejszy, niż powszechnie się przypuszcza. Okazało się np., że można obejść się bez dwumianu Newtona i bez wzorów trygonometrycznych Simpsona. Napisałem tę książkę w celu ułatwienia i uprzystępnienia nauki rachunku nieskończonościowego szerszemu gronu czytelników. Sądzę, że zasady tego rachunku powinny stanowić niezbędną część składową wykształcenia każdego mężczyzny i każdej kobiety XX w., tak samo zupełnie, jak znajomość układu Kopernika lub teorii Darwina. Do rozpoczęcia studjów

nad rachunkiem różniczkowym i całkowym wystarczy znajomość elementarnej geometrii i zasad algebry oraz pojęcie o funkcjach trygonometrycznych. Kto chce gruntownie poznać rachunek nieskończonościowy, musi poznać dokładnie inne gałęzie matematyki. W książce tej chcę pomóc czytelnikowi, stawiającemu pierwsze kroki na tym polu. Gdy zachodziła potrzeba, przypominałem i powtarzałem rzeczy, które mogą być czytelnikowi mniej lub więcej znane. Ścisłe dowody niektórych twierdzeń opuściłem w tekście, podałem je natomiast w dodatkach na końcu książki. Tam również znajdzie czytelnik pewne rozważania dość oderwane.

Dwie sprawy nastroczają i, o ile mi się zdaje, będą zawsze nastroczały pewne trudności. Są to: całkowanie poszczególnych funkcji i teoria funkcji wykładniczej. Wprawda w całkowanie nie jest potrzebna czytelnikowi, któremu chodzi tylko o ogólną kulturę umysłu, jest natomiast niezbędna tym, którzy chcą stosować rachunek nieskończonościowy. Mamy tu do czynienia z trudnością czysto techniczną. Chcąc ułatwić jej pokonanie, nie miałem innej drogi, prócz stopniowego zapoznawania ucznia z odpowiednimi metodami, które ilustrowałem wielu prostymi przykładami. Uczeń nie powinien zrażać się, jeśli go w tym lub owym przypadku spotka niepowodzenie. Co się tyczy teorii funkcji wykładniczej, to jest ona z istoty swej dość trudna, a historia matematyki świadczy, jak dalece teoria ta była kamieniem obrazy od czasów wynalezienia

logarytmów przez Johna Napiera aż do chwili, gdy August Ludwik Cauchy poddał rewizji pojęcia zasadnicze analizy matematycznej. Całość teorii nie jest niezbędną przy początkowych studiach nad rachunkiem, trzeba jednak albo dowieść, albo założyć co najmniej jedno twierdzenie, którego dowód ścisły jest zawili. Zdecydowałem się na założenie istnienia $\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Potrzeba rozważania tej granicy nasuwa się przy różniczkowaniu logarytmu, logarytmy zaś wynikają w sposób naturalny, jakkolwiek niezgodny z rozwojem historycznym, z rozważania wykładników potęgowych. Uważałem jednak, że popelnię rzecz niewłaściwą, jeśli założę istnienie tej granicy bez wszelkich wyjaśnień; wobec tego podałem pewne rozumowanie arytmetyczne, które czyni to istnienie prawdziwym. Takie rozumowania bywają nieraz dla uczniów bardziej przekonywające od ścisłych dowodów. Oczywiście, że nie wolno tego rozumowania uważać za dowód; że zaś odsyłanie czytelnika do jakiegoś dzieła obszerniejszego byłoby niewłaściwe, podałem na końcu książki (str. 207 i d.) dowód ścisły istnienia granicy, przyczem chodziło mi o dowód, oparty na możliwie najbardziej elementarnych wiadomościach matematycznych, nie zaś o taki, który byłby najłatwiejszy do zapamiętania i do powtórzenia na egzaminie.

Kto chce opanować materiał, zawarty w tej książeczce, musi przerobić ćwiczenia i przykłady. Do niektórych

potrzebne są tablice pewnych funkcji matematycznych, a w szczególności trzeba umieć logarytmować. Znaczną część książki można jednak przestudjować, nie posiadając nawet tych wiadomości...

A. E. H. LOVE.

OXFORD, w lipcu 1909 r.

TREŚĆ

ROZDZIAŁ I

WSTĘP

	Str.
1. Przykłady zależności, zachodzących między zmiennymi	1
2—5. Przedstawienie wykresne takich związków	2
6. O ruchu jednostajnym	7
7, 8. O wzniesieniu wykresu prostoliniowego	8
Przykłady	10
9. Przedstawienie wykresne ruchu spadającego ciała	10
Przykłady	11
10. Prędkość spadającego ciała	12
11. Wzniesienie paraboli	13
12. Uogólnienia	14
Przykłady	15
Przykłady dodatkowe	16

ROZDZIAŁ II

O RÓŻNICZKOWANIU

13. Znaczenie wyrazu „funkeja”	19
14—17. O istocie różniczkowania	20
18. O zastosowaniach różniczkowania	22
Przykłady	25
19, 20. Znaczenie wyrazu „granica”	25
21. Reguły różniczkowania	27
22, 23. Różniczkowanie funkcji całkowitych wymiernych	29
Przykłady	31

24. O wykładnikach ułamkowych i ujemnych	Str. 32
25, 26. Inne reguły różniczkowania	33
27. Różniczkowanie wyrazów z wykładnikami ułamkowymi i ujemnymi	34
28, 29. Różniczkowanie ilorazów i funkcji wymiernych w ogólności	36
30. Przykłady	37
Przykłady	38
31. Druga pochodna	38
32, 33. Przykłady z dziedziny geometrii i mechaniki	40
Przykłady	42

ROZDZIAŁ III

NIEKTÓRE ZASTOSOWANIA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO

34. O równaniu krzywej	43
35. O paraboli przechodzącej przez trzy dane punkty i mającej dany kierunek osi	45
36. Zastosowanie równania krzywej	46
37. O równaniu prostej	46
38, 39. O warunku prostokątności dwóch prostych	46
40, 41. O stycznych i o normalnych do krzywych	47
Przykłady	49
42—47. O przybliżeniach	50
Przykłady	53
48, 49. Przykłady na maximum i minimum	54
50—52. Teoria maximum i minimum	56
53. Normalna do krzywej jako linia najkrótsza lub najdłuższa	58
Przykłady	59
54—57. Twierdzenie o wartości pośredniej	60
Przykłady	62

ROZDZIAŁ IV

O CAŁKOWANIU

58. O mierzeniu trójkąta i koła	63
59, 60. Przykłady nieznanych funkcji, których pochodna jest dana	65

61, 62. Znaczenie wyrazu „całkowanie”	Str. 71
63. Zastosowanie reguł różniczkowania	71
64. Całkowanie funkcji całkowitej	72
Przykłady	73
65—68. Całkowanie przez zamianę zmiennych	73
Przykłady	75

ROZDZIAŁ V

NIEKTÓRE ZASTOSOWANIA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO

69—71. Pole wyznaczone przez krzywą	76
72. O całkach określonych	78
Przykłady	79
73, 74. O paraboli, przechodzącej przez trzy dane punkty	79
75. O polu figury płaskiej	81
Przykłady	83
76—80. Objętości brył	84
Przykłady	88
81—83. Ruch jednostajnie przyspieszony	89
Przykłady	93

ROZDZIAŁ VI

LOGARYTMY I FUNKCJA WYKŁADNICZA

84. Logarytm jako funkcja	94
85. Wzory z teorii logarytmów	96
86, 87. Różniczkowanie logarytmów	96
88. Całkowanie przy pomocy logarytmów	99
89—91. Funkcja wykładnicza	99
92. Wyznaczenie pewnej granicy	101
Przykłady	102
93—96. Zastosowania funkcji wykładniczej do chemii, do teorii elektryczności i do mechaniki	103
Przykłady	109

ROZDZIAŁ VII

O FUNKCJACH TRYGONOMETRYCZNYCH

97—108. Określenia i niektóre proste własności tych funkcji	110
Przykłady	120
109—115. O różniczkowaniu i całkowaniu funkcji trygonometrycznych	120
Przykłady	125
116—118. Zastosowania do ruchu wahadłowego	127
119. O ruchu harmonicznym przy znacznym oporze	132
120. O prądach zmiennych	133
Przykłady	134

ROZDZIAŁ VIII

O METODACH CAŁKOWANIA

121—124. Metoda rozkładania na ułamki proste	138
Przykłady	142
125—127. Wzór logarytmiczny	142
Przykłady	144
128—130. Całkowanie przez części	144
Przykłady	147
131—133. Funkcje odwrotne funkcji trygonometrycznych	148
Przykłady	151
134, 135. Zamiana zmiennych za pomocą funkcji trygonometrycznych	152
Przykłady	155
Przykłady dodatkowe	155

ROZDZIAŁ IX

KILKA ZASTOSOWAŃ DO KRZYWYCH PŁASKICH I DO POWIERZCHNI

136—139. Wzór na długość łuku	158
140—146. O krzywiźnie	161
147—149. O polu powierzchni obrotowej	164
Przykłady	168

ROZDZIAŁ X

CAŁKA OKREŚLONA JAKO GRANICA SUMY

150, 151. Obliczanie przybliżone całek	170
152, 153. Obliczanie wartości przybliżonych na π i na e	173
154, 155. O znaczeniu całki określonej	174
156. Zastosowanie całek do mierzenia	176

ROZDZIAŁ XI

KILKA ZASTOSOWAŃ CAŁEK OKREŚLONYCH DO MECHANIKI

157—163. O środku ciężkości	179
Przykłady	184
164, 165. O ciśnieniu całkowitym i o środku ciśnień	185
Przykłady	188
166—170. O momencie bezwładności i o ramieniu bezwładności	189
TABLICA CAŁEK ZASADNICZYCH	192

DODATKI

I. Wykres funkcji wymiernej całkowitej stopnia pierwszego	193
II. O granicach	195
III. O wykładnikach i logarytmach	203
IV. O liczbie e	207
V. O mierzeniu koła i o radjanach	214
VI. O granicy wyrażenia $\frac{\alpha}{\sin \alpha}$	219
SPIS RZECZY ABECADŁOWY	223

CORRIGENDA.

Str.	wiersz	zamiast	winno być
57	9 od góry	$f'(x)$	$f'(x)=0$
73	10 „	funkcji	funkcji złożonej
121	na rys. 50, w kącie POA	θ	θ

ROZDZIAŁ I.

WSTĘP.

1. Pomiedzy wielkościami, które umiemy mierzyć, wiele jest zmiennych, jak np. temperatura powietrza albo prędkość pociągu. Wielkość, mogąca ulegać zmianom, jest zazwyczaj zależna od innych wielkości, które też mogą się zmieniać. Rozpatrzmy parę przykładów zależności pomiędzy wielkościami zmiennymi.

(a) Wazenie na wadze sprężynowej. Przed zawieszeniem ciała ważonego sprężyna posiada określoną długość, np. b cm. — zatem b jest określoną liczbą, niekoniecznie całkowitą, o to bowiem wcale nie chodzi. Po zawieszeniu ciała sprężyna się wydłuży. Niech, dajmy na to, po zawieszeniu 1 Kg. wydłużenie sprężyny wynosi m cm., zatem jej długość będzie $(b+m)$ cm. Liczba m w ogólności nie będzie liczbą całkowitą. Niech dalej po zawieszeniu x Kg. długość sprężyny wynosi y cm. Jeżeli ciężary użyte nie są zbyt wielkie*, wydłużenia sprężyny są proporcjonalne do zawieszonych ciężarów, czyli

$$(y-b):m=x:1,$$

albo

$$y=mx+b.$$

* Jeżeli przytym nie zostaje przekroczona t. zw. granica sprężystości. (przyp. tł.)

Liczby x i y nie mają być konieczniami całkowitemi. Przy tym liczby m i b nie zależą ani od x , ani od y , lecz y zależy od x .

(b) Porównywanie skal termometrycznych. Niech C stopni na termometrze Celsjusza i F stopni na termometrze Fahrenheita oznaczają jedną i tę samą temperaturę. Z rys. 1-go oczywiste jest równanie

$$\frac{F - 32}{180} = \frac{C}{100}$$

albo
$$F = \frac{9}{5}C + 32.$$

Jeżeli zamiast C , F , $\frac{9}{5}$, 32 napiszemy x , y , m , b ,

otrzymamy równanie

$$y = mx + b.$$

Zarówno x , jak y , mogą być liczbami ujemnymi.

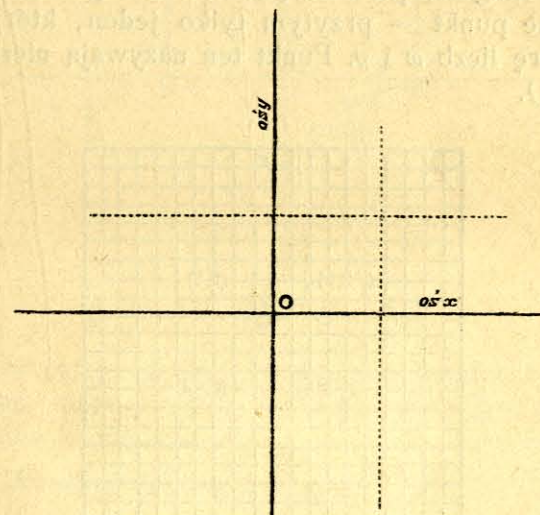
W obu przykładach użyliśmy tych samych liter x , y , m , b , żeby uwidocznili podobieństwo formy zależności, zachodzących pomiędzy liczbami zmiennymi. Za pomocą liter oznaczamy liczby, lecz wielkości zmierzone i wyrażone za pomocą tych liczb są różne w różnych przykładach.

2. Wartości dwóch zmiennych liczb, takich jak x i y w powyższych przykładach, dadzą się przedstawić graficznie. Rysujemy na papierze dwie proste, przecinające się pod kątem prostym, t. zw. osie współrzędnych; jedną z nich prowadzimy od lewej ręki ku prawej i nazywamy osią x , drugą, do pierwszej prostopadłą, zo-



Rys. 1.

wiemy osią y . Punkt, w którym przecinają się osie współrzędnych, nazywa się początkiem współrzędnych. Obieramy dalej pewną jednostkę długości, np. centymetr, albo, o ile rysujemy na papierze kratkowanym, odległość między jego liniami. Jeżeli x jest liczbą dodatnią, możemy znaleźć cały szereg punktów na płaszczyźnie papieru, leżących na prawo od osi y w odległości x jednostek długości. Wszystkie te punkty leżą na prostej, równoległej do osi y (jedną z takich prostych zaznaczona jest kropkami na rys. 2). W podobny sposób, jeżeli y jest liczbą dodatnią, możemy znaleźć szereg punktów na płaszczyźnie papieru, które leżą nad osią x w odległości y jednostek długości; wszystkie te punkty leżą na prostej, równoleg-

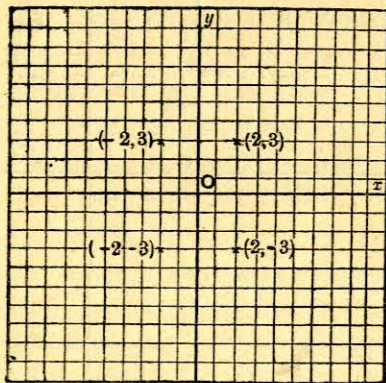


Rys. 2.

łej do osi x (druga linia kropkowana na rys. 2). Te

dwie proste, równoległe odpowiednio do osi x i do osi y , przecinają się w punkcie, który leży w odległości x jednostek długości na prawo od osi y i w odległości y jednostek długości nad osią x . Liczby x i y nazywają się spółrzednymi tego punktu. Jeżeli współrzędne x i y są dane, położenie punktu jest zupełnie wyznaczone. Możemy tedy powiedzieć, że punkt przedstawia parę liczb x i y .

Jeżeli jedna z liczb x i y , lub obie, są ujemne, możemy również tę parę liczb przedstawić za pomocą punktu. Jeżeli x jest liczbą ujemną, to $-x$ jest liczbą dodatnią, a dla przedstawienia pary liczb x i y bierzemy punkt w odległości $-x$ jednostek długości na lewo od osi y . Jeżeli y jest liczbą ujemną, obieramy ten punkt w odległości $-y$ jednostek długości pod osią x . W ten sposób znajdujemy zawsze punkt — przytym tylko jeden, który przedstawia parę liczb x i y . Punkt ten nazywają nieraz punktem (x, y) .

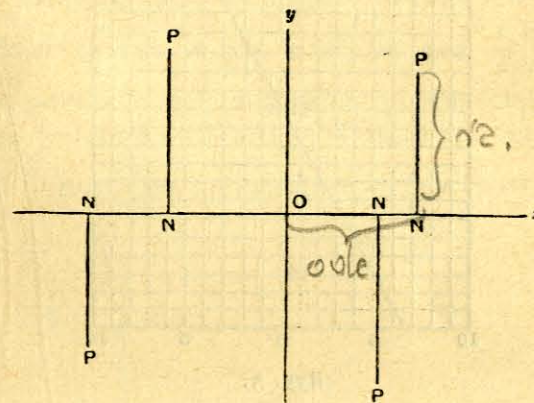


Rys. 3.

3. Dla przykładu na rys. 3. cztery punkty $(2, 3)$, $(-2, 3)$,

$(-2, 3)$, $(2, -3)$ zaznaczone są krzyżykami; za jednostkę długości obrana jest w danym razie odległość między równoległymi, tworzącymi na rysunku kratkę.

4. Osie współrzędnych dzielą płaszczyznę papieru na cztery części, albo t. zw. kwadranty. Jeżeli z jakiegokolwiek punktu P poprowadzimy prostopadłą PN do osi x , odcinek PN nazywa się rzędna punktu P , odcinek zaś ON nosi nazwę odciętej punktu P (rys. 4). Spółrzędne x, y , o ile nie zwracamy uwagi na ich znaki, dają nam



Rys. 4.

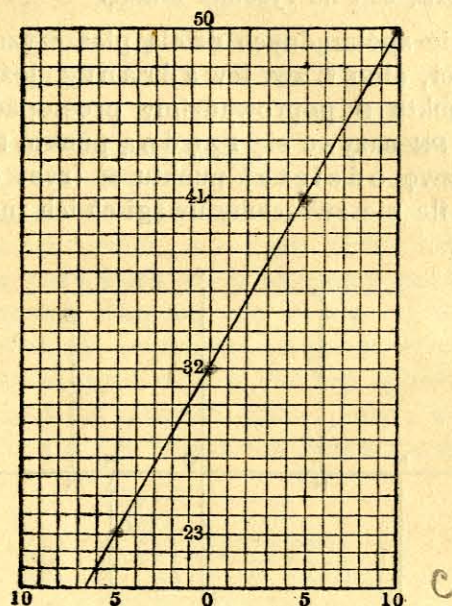
długości odciętej i rzędnej; te same współrzędne z właściwymi znakami mówią nam prócz tego, w którym z czterech kwadrantów leży punkt P .

5. Wróćmy do równania

$$y = \frac{9}{5}x + 32,$$

w którym x i y są liczbami, oznaczającymi tę samą tem-

peraturę na skalach Celsjusza i Fahrenheita. Zaznaczamy na kratkowanym papierze kilka punktów, których współ-



Rys. 5.

rzędne czynią zadość danemu równaniu. Następująca tabela daje szereg odpowiadających sobie wartości x i y

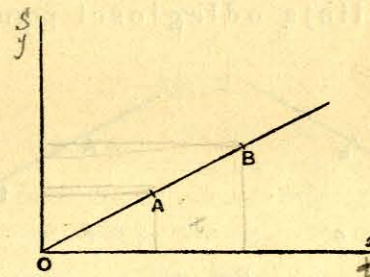
x	-10	-5	0	5	10	15
y	14	23	32	41	50	59

Możemy przekonać się, że wszystkie punkty, mające powyższe współrzędne, leżą na jednej prostej. Część tej prostej wykreślona jest na rys. 5-ym. Można się łatwo przekonać, że każda para wartości x i y , która czyni za-

dość danemu równaniu, wyobraża punkt, leżący na tej prostej; i odwrotnie: każdy punkt na tej prostej jest obrazem dwóch liczb x i y , które czynią zadość powyższemu równaniu. Nie będziemy na razie tego dowodzić. Ta linia prosta nazywa się wykresem równania $y = \frac{9}{5}x + 32$.

Łatwo możemy się przekonać, że, jeżeli m i b są niezależne od x , wykres równania $y = mx + b$ jest linią prostą*.

6. Jeżeli jakieś ciało, np. kamień, porusza się, przebywając drogę s cm. w ciągu t sekund, wówczas jego prędkość średnia w tym czasie wynosi $\frac{s \text{ cm.}}{t \text{ sek.}}$. Ciało może się poruszać stale z tą samą prędkością — wówczas ruch jego jest jednostajny. Oznaczając przez v stały stosunek $\frac{s}{t}$, powiemy, że prędkość ciała wynosi $v \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$. Pi-



Rys. 6.

sząc y zamiast s , oraz x zamiast t , będziemy mieli $y = vx$. Wykres tego równania jest t. zw. linią odległości (rys. 6).

Obierzmy na tym wykresie dwa punkty A i B; niech

* Dowód znajdzie czytelnik w dodatku I-ym.

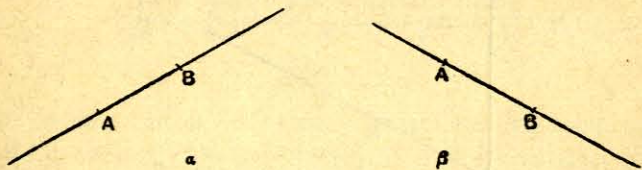
x_A, y_A będą spólrzędnymi punktu A, zaś x_B, y_B spólrzędnymi punktu B. W danym razie $x_B > x_A$. Liczba $x_B - x_A$ wyobraża czas, zmierzony w sekundach, a $y_B - y_A$ daje drogę, przebytą w tym czasie, zmierzoną w centymetrach.

Stosunek

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

daje nam średnią prędkość w tym czasie, zmierzoną w centymetrach na sekundę ($\frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$). Jeżeli, jak w danym razie, $y = vx$, gdzie v jest wielkością, niezależną od x , to $y_B = vx_B$ oraz $y_A = vx_A$, wobec czego powyższy ułamek równa się v , zatem posiada tę samą wartość dla każdego czasu.

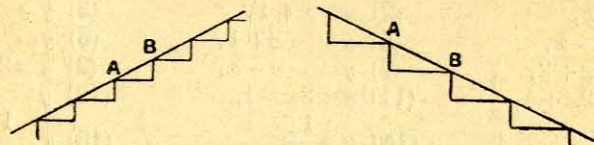
7. Na danym wykresie prostoliniowym możemy obrać dwa punkty A i B i utworzyć ułamek $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, który posiada prostą interpretację graficzną, bez względu na to, czy dana prosta jest linią odległości poruszającego się ciała, czy nie.



Rys. 7.

Punkt B obieramy na prawo od A, tak że $x_B > x_A$. Jeżeli B leży wyżej niż A, wówczas $y_B > y_A$ (rys. 7.a); jeżeli A leży wyżej niż B, wtedy $y_B < y_A$ (rys. 7.b). W pierwszym przypadku wykres jest pochylony na prawo ku górze i ułamek $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ posiada wartość dodatnią; w dru-

gim—ku dołowi, a ułamek ten ma wartość ujemną. O ile nie zwracamy uwagi na znak, ułamek ten daje nam miarę spadzistości danego wykresu. Rzecz się ma tak, jak gdyby prosta przechodziła przez krawędzie szeregu stopni, przyczym punkty A i B oznaczałyby krawędzie dwóch sąsiednich stopni (rys. 8). Wówczas $x_B - x_A$ oznaczałoby szerokość stopnia, wartość zaś bezwzględna $y_B - y_A$ — jego wysokość. Wartość bezwzględna ułamku $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ daje nam spadzistość tej prostej, znak zaś ułamku mówi, czy prosta skierowana jest na prawo ku górze, czy ku dołowi. Ułamek ten wraz z jego właściwym znakiem nazywać będziemy wzniesieniem danej linii.



Rys. 8.

Ponieważ oczywiście $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, przeto otrzymamy to samo wzniesienie, niezależnie od tego, czy obrzemy punkt B na prawo, czy na lewo od punktu A.

8. Niech nasza prosta będzie wykresem równania $y = mx + b$. Mamy wtedy

$$y_B = mx_B + b, \quad y_A = mx_A + b,$$

a zatem

$$y_B - y_A = m(x_B - x_A),$$

oraz

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m.$$

A więc liczba m w równaniu $y = mx + b$ jest zawsze wzniesie-

sieniem wykresu tego równania. Wykres wznosi się lub opada ku prawej stronie, zależnie od tego, czy m jest dodatnie, czy ujemne.

Jeżeli prosta jest linią odległości pewnego ciała, poruszającego się ruchem jednostajnym, wzniesienie wyraża — w odpowiednich jednostkach — prędkość ciała.

Jeżeli prosta przebiega równolegle do osi x , to y ma dla wszystkich punktów tej prostej wartość stałą. Wówczas $y_B - y_A = 0$, oraz wzniesienie $= 0$.

PRZYKŁADY.

Podać wykresy oraz oznaczyć ich wzniesienia dla następujących równań (1–17):

- | | | |
|----------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| (1) $y = x$, | (2) $y = x + 1$, | (3) $y = x - 1$, |
| (4) $y = -x$, | (5) $y = -x + 1$, | (6) $y = -x - 1$, |
| (7) $y = x + 2$, | (8) $y = -x - 3$, | (9) $y = 2x$, |
| (10) $y = 2x + 4$, | (11) $y = 2x - 1$, | (12) $y = -2x$, |
| (13) $y = -2x - 3$, | (14) $y = \frac{1}{2}x$, | (15) $y = \frac{1}{2}x - 1$, |
| (16) $y = -\frac{1}{2}x$, | (17) $y = -\frac{1}{2}x + 2$. | |

9. Kamień, spadając swobodnie, porusza się coraz prędzej. Pomiędzy drogą a czasem niema tu już takiej prostej zależności, jak w ruchu jednostajnym. Oznaczmy przez s cm. drogę, przebytą w ciągu t sek. Ani s , ani t nie mają być konieczniami liczbami całkowitemi. Znalezione, że, o ile nie uwzględniamy poprawki, uwarunkowanej oporem powietrza, mamy następującą zależność:

$$s = (490 \cdot 5) t^2.$$

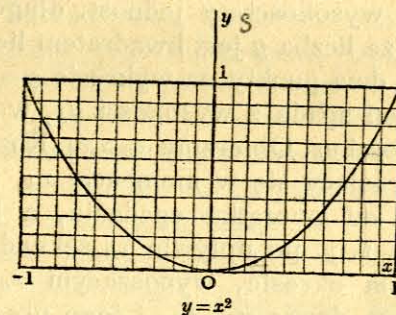
Napiszmy y zamiast $\frac{s}{490 \cdot 5}$ oraz x zamiast t ; otrzymamy wtedy:

$$y = x^2.$$

Równanie to różni się całkiem od tych, któreśmy mieli poprzednio. Narysujmy wykres tego równania. Podobnie jak przedtym układamy tabelkę:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1

Dla dogodności obieramy odległość pomiędzy liniami na kratkowanym papierze za 0.1 jednostki długości. Zaznaczamy na tym papierze punkty o współrzędnych, podanych w tabelce, następnie zaś prowadzimy przez te punkty krzy-



Rys. 9.

wą ciągłą. Krzywa ta jest częścią wykresu równania $y = x^2$. Dla uzupełnienia krzywej powinniśmy obliczyć wartości y , odpowiadające ujemnym x oraz wartościom x , większym od 1. Rys. 9-ty przedstawia ten wykres dla wszystkich wartości x , zawartych między -1 a 1 . W danym przykładzie wykresem jest krzywa, zwana parabolą.

PRZYKŁADY.

1. Podać wykres równania $y = x^2$ pomiędzy $x = -1$ a $x = 2$.
2. Podać wykres równania $y = -x^2$ pomiędzy $x = -1$ a $x = 1$.

3. Ułożyć tabelkę wartości wyrażenia $\frac{1}{10}x^3$, kiedy x przybiera kolejno wartości $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Zaznaczyć na papierze kratkowanym odpowiednie punkty wykresu równania $y = \frac{1}{10}x^3$ i narysować sam wykres.

10. W przypadku kamienia spadającego mieliśmy

$$s = (490.5) t^2, \quad y = \frac{s}{490.5}, \quad x = t, \quad y = x^2.$$

Obierając 490.5 cm. za jednostkę długości, powiemy, że kamień spada z wysokości y jednost. długości w czasie x sekund, oraz że liczba y jest kwadratem liczby x . Niech **A** i **B** oznaczają dwa punkty na wykresie $y = x^2$. W czasie x_A sekund kamień spada z wysokości y_A , w czasie x_B sekund — z wysokości y_B . Obierzmy $x_B > x_A$. Rozważmy okres czasu, rozpoczynający się w momencie x_A , t. j. po upływie x_A sekund od początku spadania, a kończący się w momencie x_B , t. j. po upływie x_B sekund od początku spadania. W tym okresie, wynoszącym $x_B - x_A$ sekund, kamień przebywa drogę $y_B - y_A$, i jego prędkość średnia w ciągu tego okresu wynosi $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \frac{\text{jedn. dług.}}{\text{sek.}}$.

Dla krótkości oznaczmy różnicę $x_B - x_A$ przez h ; w takim razie $x_B = x_A + h$. Będziemy więc mieli

$$y_A = x_A^2 \text{ oraz } y_B = x_B^2 = (x_A + h)^2 = x_A^2 + 2hx_A + h^2,$$

$$\text{wreszcie } \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{x_A^2 + 2hx_A + h^2 - x_A^2}{h} = \frac{2hx_A + h^2}{h} = 2x_A + h.$$

Zatym w ciągu okresu, wynoszącego h sekund i rozpoczynającego się w momencie x_A , prędkość średnia kamienia jest $(2x_A + h) \frac{\text{jedn. dług.}}{\text{sek.}}$. Wartość tej średniej prędk.

kości zależy nie tylko od wartości x_A , ale także od wartości h .

Biorąc na x_A wciąż tę samą wartość, na h zaś kolejno wartości coraz mniejsze, możemy oczywiście zbliżyć dowolnie wartość $2x_A + h$ do $2x_A$. Wyrazić to możemy przez twierdzenie, że gdy h dąży do zera, $2x_A + h$ dąży do granicy $2x_A$.

Obieranie na x_A wciąż tej samej wartości oznacza obieranie wciąż tego samego momentu początkowego dla pewnego okresu czasu. Zmniejszanie h oznacza zmniejszanie tego okresu czasu. Dowiedzieliśmy się, że, gdy okres czasu maleje, jego zaś moment początkowy pozostaje bez zmiany, wtedy prędkość średnia w tym okresie dąży do pewnej granicznej wartości. Mówiąc o prędkości kamienia w danym momencie (który w powyższym rozumowaniu uważaliśmy za początkowy), mamy właśnie na myśli ową wartość graniczną.

Poznaliśmy dalej, że prędkość kamienia w momencie x_A wynosi $2x_A \frac{\text{jedn. dług.}}{\text{sek.}}$. Posługiwaliśmy się jednostką długości = 490.5 cm., a zatym prędkość ta wynosi $981x_A \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$. Innymi słowy, prędkość kamienia po upły-

wie t sekund od początku spadania jest $981t \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$.

11. Weźmy rzecz ogólniej, rozważając wykres równania $y = x^2$ nie koniecznie jako linję odległości. Niech będą, jak poprzednio, x_A i $x_A + h$ spółrzedne punktów **A** i **B**. W powyższym rozumowaniu obraliśmy **B** na prawo od **A**, tak że h było dodatnie, i znaleźliśmy, że wzniesienie prostej **AB** było $= 2x_A + h$. Rezultat ten pozostanie bez zmia-

ny, jeżeli weźmiemy B na lewo od A , czyniąc przez to $h < 0$, gdyż proces algebriczny, za którego pomocą dochodzimy do rezultatu, pozostaje przytym bez zmiany.

Znaleźliśmy, że, o ile $h > 0$, $2x_A + h$ dąży do wartości granicznej $2x_A$, w miarę jak h dąży do zera. Kiedy $h < 0$, $2x_A + h$ jest mniejsze od $2x_A$. Biorąc na h wartości wciąż ujemne, lecz coraz bardziej zbliżone do zera, możemy, oczywiście, $2x_A + h$ dowolnie zbliżyć do wartości $2x_A$. Zatem $2x_A + h$ dąży do tej samej wartości granicznej $2x_A$ bez względu na to, czy h jest dodatnie, czy ujemne.

Zbliżanie h do zera oznacza zbliżanie punktu B do punktu A . Wzniesienie siecznej AB jest $2x_A + h$. Może ono być większe lub mniejsze od $2x_A$, lecz nie może być równe $2x_A$ dla żadnej siecznej, przechodzącej przez A . W miarę jak punkt B zbliża się do A , czy to z lewej, czy z prawej strony, wzniesienie dąży do wartości granicznej $2x_A$. Linja prosta, poprowadzona przez punkt A i mająca wzniesienie $= 2x_A$, nie będzie sieczną — stanie się nią jednak, jeżeli wzniesienie bodaj odrobinę zwiększy się lub zmniejszy. Powiemy w danym razie, że prosta jest styczną do krzywej w punkcie A (rys. 10).



Rys. 10.

Liczba $2x_A$ jest więc wzniesieniem stycznej do krzywej w punkcie A . Będziemy ją nazywali wzniesieniem krzywej w punkcie A . Z poprzedniego widzimy, że wzniesienie paraboli, danej przez równanie $y = x^2$, w punkcie, którego współrzędne są x i x^2 , wynosi $2x$.

12. Proces tu opisany posiada bardzo szerokie za-

stosowanie. Można go ująć w następującą regułę: obierzmy 2 punkty A i B na krzywej. Znajdźmy wzniesienie prostej AB . Wartość graniczna, do której dąży to wzniesienie, gdy punkt B zbliża się do A , daje nam wzniesienie krzywej w punkcie A .

Zadaniem rachunku różniczkowego jest oznaczanie w każdym poszczególnym przypadku wartości granicznej, do której dąży wzniesienie siecznej. Oznaczając taką granicę, różniczkujemy. W przypadku paraboli różniczkowaliśmy x^2 i otrzymaliśmy $2x$.

Mając do czynienia z prostą, nie potrzebujemy zbliżać stopniowo punktu B do punktu A w celu oznaczenia wzniesienia. Wzniesienie $= 0$ dla wykresu $y = a$, wzniesienie $= m$ dla wykresu $y = mx + b$. Możemy powiedzieć, że, różniczkując a , otrzymujemy zero, różniczkując $mx + b$, otrzymujemy m , gdy a , b , m są niezależne od x .

PRZYKŁADY.

1. Poruszające się ciało przebywa s cm. w ciągu t sekund, przytym s i t są związane równaniem $s = t^2$. Jaka jest prędkość ciała w końcu piątej sekundy od początku ruchu? Jaka jest prędkość średnia ciała w ciągu tej piątej sekundy? (Odp. $10 \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$; $9 \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$).

2. Jak w zadaniu 1-ym, ciało porusza się zgodnie ze wzorem $s = t^2$. Znaleźć prędkość średnią ciała w ciągu 0.1 sek., 0.01 sek., 0.001 sek., obierając za początek tego okresu koniec piątej sekundy.

3. Punkt $(1, 1)$ na paraboli, danej przez równanie $y = x^2$, łączymy prostą z punktem $\{1 + h, (1 + h)^2\}$. Znaleźć wzniesienie siecznej, gdy h przybiera kolejno wartości: 0.1; 0.01; 0.001 oraz -0.1; -0.01; -0.001.

ĆWICZENIA DODATKOWE.

Umieszczamy tu kilka przykładów dodatkowych na wykresy i na wyliczanie. Przerobienie ich wszystkich przed zabraniem się do czytania dalszego ciągu książki nie jest konieczne. Czytelnik uczyni lepiej, przerabiając codziennie po parę tych ćwiczeń.

1. Wykreślić równanie $y = \log_{10} x$ w granicach od $x=0.1$ do $x=10$, biorąc na x wartości 0.1, 0.2, ... 1 oraz 1, 2, ... 10.

2. Wykreślić równanie $y = 10^x$ w granicach od $x = -1$ do $x=1$, biorąc na x wartości -1, -0.9, -0.8 ... -0.1, 0, 0.1, 0.2, ... 0.9, 1.

3. Ułożyć tabelkę wartości funkcji $x \log_{10} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$, biorąc na x wartości 1, 2, 3, ... 9. Ułożyć podobnie tabelkę wartości funkcji $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ dla tych samych wartości x i wykreślić równanie $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ w granicach od $x=1$ do $x=9$.

4. Uczynić to samo, co w przykładzie 3-im, biorąc na x wartości 10, 20, 30, ... 100.

5. Wykreślić równanie $y = \frac{1}{x}$, biorąc na x wartości 0.1, 0.2, ... 0.9, 1, 2, oraz odpowiednie wartości ujemne (-0.1, ...).

6. Wykreślić na papierze kratkowanym równania $y = \frac{1}{10} x^3$ i $y = \frac{1}{10} (7x+2)$. Znaleźć odcięte punktów, w których te wykresy się przecinają. [Odp.: 2.8, -0.4, -2.4 w przybliżeniu.]
Zauważmy, że metoda ta daje przybliżone rozwiązanie równania 3-ego stopnia

$$x^3 - 7x - 2 = 0$$

7. Podać rozwiązania przybliżone równań sześciennych:
 $x^3 - 9x + 7 = 0$ oraz $3x^3 - 5x + 1 = 0$.

8. Wykreślić równanie $y = x + \frac{1}{x}$ w granicach od $x=0.5$ do $x=1.5$, biorąc na x wartości 0.5, 0.6, 0.7 ... 1.5.

9. Wykreślić równanie $y = x(1-2x)^2$ w granicach od $x=0$ do $x=1$, biorąc na x wartości $\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, 1$.

10. Wykreślić równanie $y = x(13-2x)(15-2x)$ w granicach od $x=0$ do $x=10$, dając na x wartości 0.5, 1, 1.5, 2, ... 9.5, 10.

11. Wykreślić równanie $y = x(13-2x)(15-2x)$ w granicach od $x=6.5$ do $x=7.5$ bardziej szczegółowo, niż w ćwiczeniu 10-ym, biorąc na x wartości 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, ... 7.4, 7.5.

12. Dany $\log_{10} e = 0.4343$; ułożyć tabelkę wartości funkcji e^x dla $x=0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots 0.9, 1$.

13. Uczynić to samo, co w przykładzie 12-ym, dla e^{-x} .

14. Wykreślić równanie $y = e^x$ w granicach od $x = -1$ do $x=1$.

15. Wykreślić równanie $y = 1 - e^{-x}$, zakładając $x=0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5$.

16. Dane $y = \sqrt{1-x^2}$; obliczyć z dokładnością do szóstego znaku dziesiętnego wartości y , odpowiadające następującym wartościom x : -0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5. Oznaczając obliczone wartości przez $y_1, y_2, \dots, y_{11}$, znaleźć z dokładnością do piątego znaku dziesiętnego wartość wyrażenia

$$\frac{1}{3} (0.1) \{y_1 + y_{11} + 2(y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 4(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10})\}.$$

[Odp.: 0.95661.]

17. Dane $y = \frac{1}{x}$; obliczyć z dokładnością do sześciu zna-

Love, Rach. różn.



ków dziesiętnych wartości y , odpowiadające następującym wartościom x : 1, 1.1, 1.2, ... 1.9, 2. Uczynić dalej to samo, co w przykładzie 16-ym. (Odp.: 0.69315).

Rezultaty, otrzymane z ćwiczeń 16-go i 17-go, zużytkujemy w rozdziale X-ym.

ROZDZIAŁ II.

O RÓŻNICZKOWANIU.

13. Rozpatrzyliśmy powyżej kilka przykładów, w których zmienna y była związana równaniem z inną zmienną x . Zmienne te możemy—ale nie musimy—uważać za miary pewnych wielkości zmiennych, wyznaczone w odpowiednich jednostkach. Wyrażenia, za których pomocą możemy obliczyć wartości y , o ile x jest dane, mogą być znacznie więcej skomplikowane od tych, któreśmy rozpatrywali. Lecz bez względu na to, czy wyrażenie to jest proste, czy złożone, rozważamy je jako równe pewnej liczbie y , która zmienia się, gdy x ulega zmianie. O ile wyrażenie, zawierające x , traktujemy jako wielkość zmienną, przybierającą różne wartości, zależnie od wartości x , nazywamy je funkcją x . Np. x^2 , $\log_{10} x$, $\sin x$ są funkcjami x . W celu oznaczenia funkcji x posługujemy się znakiem: $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ i t. d. Nie można w żadnym razie traktować litery f w symbolu $f(x)$ jako wielkości; należy uważać to wyrażenie „ $f(x)$ ” za skrót „funkcja x ”. Wykreślając jakiekolwiek równanie $y=f(x)$, rysujemy wykres funkcji. Wszystkie funkcje, które dalej rozważać będziemy, posiadają wykresy*.

* Co do ograniczenia tego twierdzenia patrz dod. II.

14. Okazuje się, że jesteśmy w możności znaleźć wzniesienie wykresu w każdym jego punkcie za pomocą pewnego postępowania, o ile tylko potrafimy to postępowanie zastosować. Jest ono następujące. Niech x_A będzie odcięta punktu. W wyrażeniu $f(x)$, któremu równa się y , dajmy naprzód na x wartość x_A , następnie wartość $x_A + h$. Weźmy dalej różnicę $f(x_A + h) - f(x_A)$ i podzielmy ją przez h . Znajdźmy wreszcie granicę, ku której dąży iloraz

$$\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h},$$

gdy h , o ile jest dodatnie, zmniejsza się stopniowo do zera, lub też, o ile jest ujemne, stopniowo do zera wzrasta. W otrzymanym rezultacie opuśćmy znaczek A . Będziemy mieli wtedy wzniesienie wykresu w dowolnym jego punkcie (x, y) .

W całym tym rachunku możemy opuścić znak A ; czyniąc tak, winniśmy jednak pamiętać, że x pozostaje w nim wielkością stałą, zmienną zaś jest jedynie h .

15. Napiszmy teraz Δx zamiast h . Symbol Δ (delta) nie może być uważany za czynnik, przez który się mnoży x , lecz całe to wyrażenie Δx ma oznaczać pewną wielkość, a mianowicie przyrost zmiennej x . Owa wielkość Δx może być zarówno dodatnia, jak ujemna. Jeżeli w $f(x)$ zastąpimy x przez $x + h$ lub przez $x + \Delta x$, otrzymując w ten sposób $f(x + \Delta x)$, możemy różnicę $f(x + \Delta x) - f(x)$ oznaczyć przez Δy , skąd

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x),$$

gdyż $y = f(x)$; Δy jest zatem przyrostem liczby y , uwarunkowanym przez Δx , t.j. przez przyrost liczby x .

Iloraz
$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

równa się, oczywiście, ilorazowi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x};$$

mamy więc znaleźć granicę, do której dąży ten iloraz, gdy Δx dąży do zera.

Oznaczmy tę granicę przez

$$\frac{dy}{dx}.$$

Symbol ten nie jest ani ułamkiem, ani ilorazem—jest granicą, do której dąży iloraz $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, kiedy Δx dąży do zera. Nie usiłujmy tedy nadawać znaczenia częściom symbolu dy i dx .

Granica, wyrażona przez symbol $\frac{dy}{dx}$, nazywa się pochodną y względem x .

16. Wartość pochodnej zależy, oczywiście, od wartości x . Po znalezieniu pochodnej znowu traktujemy x jako zmienną. Np., jeżeli $y = x^2$, pochodna $\frac{dy}{dx} = 2x$, zaś $2x$ jest funkcją x . W celu zaznaczenia właśnie tego, że pochodna $f(x)$ jest również funkcją zmiennej x , oznaczamy ją przez $f'(x)$.

17. Posługując się umówionym teraz znakowaniem, możemy napisać wyniki, otrzymane w poprzednim rozdziale, w następujący sposób:

(I) Jeżeli a jest niezależne od x , $\frac{da}{dx} = 0$.

(II) Jeżeli m i b nie zależą od x , $\frac{d(mx + b)}{dx} = m$.

(III) $\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$.

Ze wzoru (II) mamy jako przypadek szczególny $\frac{dx}{dx}=1$, co otrzymamy, zakładając $m=1$, $b=0$. Wynik ten sprawdziliśmy już przy oznaczaniu wzniesienia w wykresie równania $y=x$. W żadnym jednak razie nie można, opierając się na kształcie symbolu $\frac{dx}{dx}$, traktować go jako ułamku, posiadającego licznik, równy mianownikowi; jak już zaznaczyliśmy wyżej, symbol ten ułamkiem nie jest.

18. Poznaliśmy już jedno zastosowanie pochodnych przy znajdowaniu wzniesienia wykresu. Rozpatrzmy teraz kilka innych zastosowań.

(a) Spadanie ciał. Przypuśćmy, że mamy do czynienia z kamieniem spadającym. Wiadomo, że z pominięciem poprawki na opór powietrza oraz przy założeniu, że przyspieszenie $= 981 \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}^2}$, możemy w następujący sposób podać wartość drogi s , przebytej przez kamień w czasie t sekund:

$$s = (490 \cdot 5) t^2.$$

Droga, przebyta przez kamień w czasie $t + \Delta t$, będzie $s + \Delta s$. Łatwo też znajdziemy

$$\Delta s = (490 \cdot 5) (2t + \Delta t) \Delta t.$$

W ciągu czasu Δt kamień przebywa drogę Δs , a jego prędkość średnia w tym czasie wynosi $\frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$. Kiedy Δt dąży do zera, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ dąży do wartości granicznej $\frac{ds}{dt}$. Oczywiście

$$\frac{ds}{dt} = 981t.$$

Zatym prędkość kamienia w momencie t , t. j. po upływie t sek. od początku ruchu, wynosi $981t \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$.

(b) Prędkość poruszającego się ciała. Weźmy rzecz ogólniej. Poruszające się ciało przebywa drogę s cm. w ciągu t sek., drogę zaś $s + \Delta s$ cm. w czasie $t + \Delta t$ sekund. $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ wyraża w $\frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$ prędkość średnią ciała w ciągu czasu Δt sekund, wartość zaś graniczna $\frac{ds}{dt}$, do której dąży $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, gdy Δt dąży do zera, wyraża w $\frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$ prędkość jego w momencie t .

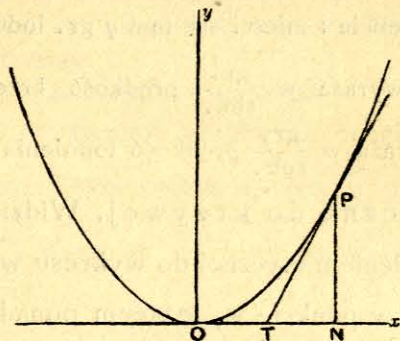
(c) Prędkość zmiany wogóle. Weźmy rzecz jeszcze ogólniej. Niech q wyraża w odpowiednich jednostkach jakąkolwiek wielkość zmienną w momencie t , t. j. po upływie t sekund od momentu początkowego; q jest zatem funkcją t , pochodna zaś $\frac{dq}{dt}$ daje nam prędkość zmian wielkości q .

Np. niech będzie zawarta w naczyniu woda z lodem, i niech w momencie t mieści się tam q gr. lodu. Jeżeli $\frac{dq}{dt} > 0$, pochodna ta wyraża w $\frac{\text{gr.}}{\text{sek.}}$ prędkość krzepnięcia. Jeżeli $\frac{dq}{dt} < 0$, $-\frac{dq}{dt}$ wyraża w $\frac{\text{gr.}}{\text{sek.}}$ prędkość topnienia.

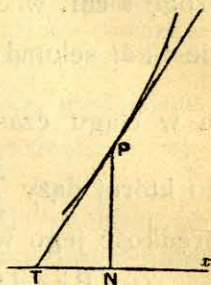
(d) Styczna do krzywej. Widzieliśmy już, że $\frac{dy}{dx}$ jest wzniesieniem stycznej do wykresu w punkcie (x, y) . Niech styczna w punkcie P , leżącym ponad osią x , przecina oś w punkcie T ; niech PN będzie rzędną punktu P ; założmy wreszcie, że krzywa wznosi się ku prawej stronie (rys. 11). Ułamek

liczba jednostek długości, mieszczących się w odcinku NP
 liczba jednostek długości, mieszczących się w odcinku TN
 daje nam wzniesienie stycznej w punkcie P . Twierdzenie to jest słuszne w każdym przypadku, jeżeli tylko uławkowi damy odpowiedni znak (patrz rozdział IX). Jest rzeczą oczywistą, że, mając dane wzniesienie, możemy narysować styczną.

Niech np. dana będzie parabola przez równanie $y=x^2$. Mamy $\frac{dy}{dx}=2x$. Odcinek PN zawiera x^2 jednostek długości, gdy odcinek ON zawiera ich x . Niech odcinek TN wynosi z jednostek długości. Wówczas $\frac{x^2}{z}=2x$, czyli $z=\frac{1}{2}x$; innymi słowy, odcinek TN stanowi połowę odcinka ON . W celu więc wykreślenia stycznej w punkcie P prowadzimy rzędną PN , dzielimy na pół odcinek ON w punkcie T i łączymy punkty T i P . Prosta TP jest styczną do paraboli w punkcie P (rys. 12).



Rys. 12.



Rys. 11.

PRZYKŁADY.

1. Ciało porusza się w ten sposób, że droga s cm., przebyta przez nie w ciągu t sekund, liczonych od chwili wyjścia, jest proporcjonalna do kwadratu prędkości w momencie t . Wyrazić to za pomocą równania, wiążącego ze sobą $\frac{ds}{dt}$ i s . $s = m(\frac{ds}{dt})^2$

2. Ciało porusza się w ten sposób, że prędkość jego, wynosząca $v \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$ w momencie t , wzrasta jednostajnie. Wyrazić to za pomocą równania, zawierającego $\frac{dv}{dt}$. $\frac{dv}{dt} = w$

3. Ciało porusza się w ten sposób, że prędkość jego, wynosząca $v \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$ w momencie t , zmniejsza się proporcjonalnie do wartości v . Wyrazić to za pomocą równania. $\frac{dv}{dt} = -kv$

4. Zbiornik z wodą opróżniamy w ten sposób, że prędkość, z którą woda wypływa, jest proporcjonalna w każdym poszczególnym momencie do ilości wody, pozostającej w zbiorniku. Wyrazić to za pomocą równania. $\frac{dV}{dt} = -kV$

5. Pewna substancja przekształca się w inną w ten sposób, że prędkość tego przekształcenia (za jednostkę czasu bierzemy sekundę) jest proporcjonalna w każdym poszczególnym momencie do ilości substancji, nie podległej jeszcze przekształceniu. Wyrazić to za pomocą równania. $\frac{dS}{dt} = -kS$

19. Będziemy mogli posuwać się prędzej naprzód i nabierzemy więcej zaufania do dokładności naszej roboty, jeżeli zastanowimy się gruntownie nad tym, co właściwie znaczy powiedzenie: funkcja h dąży do pewnej granicy, gdy h dąży do zera. Jeżeli np. w § 11 powiedziano, że wraz ze zmniejszaniem się h (uważanego za dodatnie) do zera $2x_A + h$ dąży do granicy $= 2x_A$, ma się na myśli, że, nie zakładając w rzeczywistości $h=0$, możemy uczynić

$2x_A + h$ dowolnie blizkim wartości $2x_A$. Jeżeli, dajmy na to, pragniemy, aby $2x_A + h$ różniło się od $2x_A$ mniej niż o $\frac{1}{1000000}$, należy jedynie h uczynić mniejszym od $\frac{1}{1000000}$. W pojęciu granicy niema nic nieokreślonego. Granicą w danym razie jest $2x_A$, nie zaś $2x_A +$ bardzo mały ułamek, albo $2x_A -$ bardzo mały ułamek. Gdyby kto sądził, że jest nią właśnie $2x_A +$ bardzo mały ułamek f , wystarczyłoby nam obrać h mniejsze od f dla wykazania, że $2x_A + h$ będzie bliższe $2x_A$, niż $2x_A + f$. Nie przyrównywując h do zera, możemy dowolnie zbliżyć $2x_A + h$ do $2x_A$, lecz nie możemy uczynić $2x_A + h$ równym $2x_A$.

W przypadku, podobnym do powyższego, granica jest dokładnie znana, nie przedstawia jednak wartości funkcji, odpowiadającej pewnej wartości zmiennej. W rzeczywistości $2x_A + h$ jest funkcją h , zaś h może posiadać wszelkie wartości z wyjątkiem 0; zera nie może się ono równać, gdyż przez h dzielimy. W ten sposób $2x_A + h$ nie może posiadać wartości $2x_A$, lecz, jak powiedzieliśmy, może się różnić od tej wartości o wielkość, mniejszą od dowolnie małej wielkości.

Z drugiej strony bywają przypadki, kiedy granica należy do wartości, które funkcja może przybierać.

W przykładzie, przed chwilą rozpatrzonym, funkcją jest $2x_A + h$, granicą zaś $2x_A$. Różnica

(funkcja) – (granica)

może być dodatnia lub ujemna. Własność, która wyróżnia granicę z pośród wszystkich innych liczb, jest następująca: wartość bezwzględna powyższej różnicy może być uczyniona dowolnie małą przez dostateczne zbliżenie zmiennej h do zera.

20. Jako drugi przykład rozpatrzmy różniczkowanie funk-

$$\begin{aligned} \text{cji } x^3. \text{ Mamy} \quad & (x+h)^3 = x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3, \\ \text{a więc} \quad & (x+h)^3 - x^3 = 3hx^2 + 3h^2x + h^3, \\ \text{i} \quad & \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2. \end{aligned}$$

Możemy dowieść, że granicą w danym razie jest $3x^2$. Użyjemy tutaj innej metody i założymy, że zarówno x , jak h są dodatnie. Mamy wykazać, że biorąc na h wartość dostatecznie małą, możemy uczynić $3hx + h^2$ tak małym, jak się nam podoba. Zaczniemy od tego, że $h < x$. Wtedy $h^2 < hx$ i $3hx + h^2 < 4hx$. Niech ε będzie dowolnie małą liczbą dodatnią. Mamy wykazać, że, biorąc dostatecznie małe h , możemy uczynić $3hx + h^2 < \varepsilon$.

Oczywiście, wystarczy wziąć $h < \frac{\varepsilon}{4x}$, jeżeli to czyni również $h < x$. Będziemy mieli $h < x$, jeżeli $\varepsilon < 4x^2$. Ponieważ chcemy dowieść, że $3hx + h^2$ można uczynić mniejszym od dowolnie małej liczby ε , możemy założyć, że $\varepsilon < 4x^2$. Bierzemy tedy $\varepsilon < 4x^2$ i $h < \frac{\varepsilon}{4x}$, a zatem $3hx + h^2 < \varepsilon$.

REGUŁY RÓŻNICZKOWANIA.

21. Przy różniczkowaniu nie potrzebujemy w każdym poszczególnym przypadku oznaczać odpowiedniej granicy, gdyż całe postępowanie daje się sprowadzić do kilku prostych reguł.

(I) Jeżeli $y = az$, gdzie a nie zależy od x , z zaś jest funkcją x , wówczas

$$\frac{dy}{dx} = a \frac{dz}{dx}.$$

Dla przekonania się o tym zauważmy, że, gdy x zastąpimy przez $x + \Delta x$, z zamieni się na $z + \Delta z$, a y na $y + \Delta y$, gdzie $\Delta y = a\Delta z$. Zatem $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \frac{\Delta z}{\Delta x}$. Załóżmy, że, jeżeli Δx dąży do zera, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ dąży do granicy $\frac{dz}{dx}$. Wówczas $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dąży do

$$(y + \Delta y) = a(z + \Delta z)$$

$$y + \Delta y - y = a(z + \Delta z) - az$$

$$\Delta y = a\Delta z$$

granicy $a \frac{dz}{dx}$. Lecz gdy $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dąży do pewnej granicy, granicą tą jest pochodna $\frac{dy}{dx}$.

Np., jeżeli $s=t^2$, wtedy $\frac{ds}{dt}=2t$; jeżeli zaś $s=(490 \cdot 5) t^2$, to $\frac{ds}{dt}=981 t$.

(II) Jeżeli $y=u+v$, gdzie u i v są funkcjami x , mamy następującą regułę:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Dla przekonania się o tym zauważmy, że, gdy x zastąpimy przez $x+\Delta x$, u zamieni się na $u+\Delta u$, v zaś na $v+\Delta v$, a y na $y+\Delta y$, gdzie $\Delta y = \Delta u + \Delta v$. Zatem $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$.

Zalóżmy, że, jeżeli Δx dąży do zera, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ dąży do wartości granicznej $\frac{du}{dx}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ zaś dąży do granicy $\frac{dv}{dx}$. A więc granicą, do której dąży $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, jest $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$.

Weźmy dla przykładu $y=x^2+x$; $\frac{dy}{dx}=2x+1$.

Regułę powyższą możemy uogólnić, stosując ją do sumy, złożonej z n składników, gdzie n jest liczbą całkowitą; otrzymamy następującą regułę: pochodna sumy równa się sumie pochodnych składników.

(III) Jeżeli $y=uv$, gdzie u i v są funkcjami zmiennej x , mamy następującą regułę:

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Dla przekonania się o tym zauważmy, że

$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v$,
co pociąga za sobą

$$\Delta y = u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v.$$

$$\text{Zatem } \frac{\Delta y}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \Delta v.$$

Wiemy przypuszczalnie, że, gdy Δx dąży do zera, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ dąży do granicy $\frac{dv}{dx}$, a $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ dąży do granicy $\frac{du}{dx}$, Δv zaś dąży do zera. Trzy więc wyrazy z prawej strony ostatniego wzoru dążą odpowiednio do $u \frac{dv}{dx}$, $v \frac{du}{dx}$, 0, a zatem granicą, do której dąży $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, jest $u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$.

Ostatnia reguła znana jest jako reguła różniczkowania iloczynu.

Dodatkowe reguły różniczkowania będą podane niżej, w §§ 25 i 28. Bliższe omówienie dowodzenia tych reguł czytelnik znajdzie w dodatku II.

22. Zastosujmy regułę różniczkowania iloczynu do otrzymania pochodnej funkcji x^n , gdzie n jest liczbą całkowitą i dodatnią.

Wiemy, że $\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$ oraz $\frac{dx}{dx} = 1$.

Teraz

$$x^3 = x \cdot x^2.$$

Zalóżmy

$$x = u, \quad x^2 = v,$$

wtedy

$$x^3 = uv,$$

oraz

$$\frac{d(x^3)}{dx} = x \frac{d(x^2)}{dx} + x^2 \frac{dx}{dx} = x \cdot 2x + x^2 = 3x^2.$$

Dalej znowu $x^4 = x \cdot x^3$.

Zalóżmy $x = u$, $x^3 = v$,

wtedy $x^4 = uv$,

oraz $\frac{d(x^4)}{dx} = x \frac{d(x^3)}{dx} + x^3 \frac{dx}{dx} = x \cdot 3x^2 + x^3 = 4x^3$.

Rezultaty powyższe poddają nam następujący wzór:

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}.$$

Sprawdziliśmy, że wzór ten jest słuszny dla $n=2, 3, 4$, i w podobny sposób możemy sprawdzić słuszność jego dla $n=5, 6, \dots$. Przypuśćmy, żeśmy sprawdzili ten wzór dla wszystkich liczb całkowitych $2, 3, 4, \dots$ aż do liczby k włącznie. Mamy tedy

$$\frac{d(x^k)}{dx} = kx^{k-1}.$$

Zalóżmy $x = u$, $x^k = v$;

wtedy $x^{k+1} = uv$,

oraz $\frac{d(x^{k+1})}{dx} = x \frac{d(x^k)}{dx} + x^k \frac{dx}{dx} = xkx^{k-1} + x^k = (k+1)x^k$.

Jeżeli więc wzór ten jest słuszny dla k , pozostaje również słusznym dla $k+1$. Sprawdziliśmy go jednak dla $2, 3, 4$. Zatem jest słuszny dla każdej wartości n całkowitej, dodatniej i większej od 1.

Przypadek $n=1$ możemy włączyć do powyższego, zważywszy, że $x^0=1$, a zatem zamiast $\frac{dx}{dx}=1$ moglibyśmy napisać $\frac{dx}{dx}=1x^0$.

Rezultat, powyżej otrzymany, możemy również napisać w postaci $\frac{dy}{dx} = n \frac{y}{x}$, jeżeli $y = x^n$.

23. Wzór na różniczkowanie funkcji x^n (gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią) w połączeniu z regułami (I) i (II) § 21-ego daje nam możliwość różniczkowania obszernej klasy funkcji. Funkcja, należąca do tej klasy, przedstawia się jako suma wyrazów, z których każdy jest iloczynem pewnej stałej liczby przez potęgę całkowitą i dodatnią zmiennej x . Formą ogólną takiej funkcji jest:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + px + q,$$

gdzie $a, b, c, \dots, p, q$, są niezależne od x , n zaś jest liczbą całkowitą dodatnią. Taka funkcja nazywa się funkcją wymierną całkowitą n -tego stopnia. Funkcja $mx+b$, którą rozważaliśmy w poprzednim rozdziale, jest funkcją całkowitą wymierną pierwszego stopnia; nazywamy ją często funkcją liniową, gdyż wykres jej jest linią prostą.

Jeżeli przed którymkolwiek wyrazem funkcji całkowitej wymiernej stoi znak $-$, znak ten pozostanie i w funkcji pochodnej przed tym wyrazem. Np., gdyby w powyższym wyrażeniu zamiast ax^n stało $-x^n$, pochodną tego wyrazu byłoby $-nx^{n-1}$; współczynnik a w tym razie $= -1$.

PRZYKŁADY.

1. Znaleźć pochodne następujących (1)–(14) funkcji:

- (1) $-x^2$, (2) $\frac{1}{2}x^2$, (3) x^2+2x , (4) x^2-2x , (5) $\frac{1}{2}x^2+3x$,
- (6) $-\frac{1}{2}x^2+3x$, (7) $x(1-x)$, (8) $x^2(1+2x)$, (9) x^3-3x ,
- (10) $\frac{1}{3}x^3$, (11) $-x^3$, (12) $2x^3-3x^2$, (13) x^3-4x^2+10x ,
- (14) $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x+\frac{1}{4}$.

2. Styczna w punkcie P do krzywej, danej przez równanie $ky = x^2$, gdzie k jest niezależne od x , przecina oś x -ów w punkcie T , rzędna zaś punktu P przecina oś x -ów w punkcie N . Dowieść, że $OT = \frac{1}{2} ON$.

3. Krzywa dana jest przez równanie $ky = x^3$; reszta danych jest oznaczona tak samo, jak w przykładzie 2-im. Dowieść, że $OT = \frac{2}{3} ON$.

24. Wykażmy teraz, że wzór $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$ pozostaje słuszny, gdy n jest ułamkiem oraz gdy $n < 0$. Przypomnijmy znaczenie wykładników ułamkowych oraz ujemnych. Wiemy, że znaczenie wykładnika wogóle ustalone jest przez równanie

$$x^m x^n = x^{m+n},$$

wyrażające t. zw. prawo wykładników. Wiemy dalej, że, kiedy n jest liczbą całkowitą dodatnią, x^n zgodnie z tym prawem oznacza iloczyn n czynników, z których każdy $= x$. Wiemy również, że, gdy n jest ułamkiem dodatnim o kształcie $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitemi i dodat-

niemi, prawo to wyraża, że x^n , albo $x^{\frac{p}{q}}$, jest p -tą potęgą pierwiastku q -tej potęgi z x , oraz że jest to również pierwiastek q -tej potęgi z x^p . Jeżeli p i q posiadają inny wspólny dzielnik prócz 1, można przezeń skrócić; zakładamy więc, że $\frac{p}{q}$ jest ułamkiem nieskracalnym, i że x jest > 0 , je-

żeli q jest parzyste. Jeżeli p jest parzyste, $x^{\frac{p}{q}}$ jest zawsze > 0 . Jeżeli p i q są nieparzyste, $x^{\frac{p}{q}}$ posiada ten sam znak,

co x . Wreszcie prawo to wskazuje, że, jeżeli n jest < 0 , to przy $n = -m$, czyli $m > 0$, x^n albo x^{-m} oznacza $\frac{1}{x^m}$.

25. Wprowadzimy teraz dwie dodatkowe reguły różniczkowania, doliczając je do szeregu podanych w § 21.

(IV) Jeżeli dane jest y jako funkcja zmiennej z , z zaś jako funkcja zmiennej x , możemy uważać y za funkcję zmiennej x . Mamy wtedy następującą regułę:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx}$$

Należy podkreślić z naciskiem, że wzoru tego nie możemy uzasadnić za pomocą skrócenia przez dz , jakbyśmy to mogli uczynić z ułamkami. Dla udowodnienia tej reguły musimy sobie przypomnieć znaczenia różnych wyrażań.

Kiedy x przechodzi w $x + \Delta x$, z przechodzi w $z + \Delta z$, a zatem y przechodzi w $y + \Delta y$. Zakładamy, że $\frac{\Delta y}{\Delta z}$ oraz $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ dążą do pewnej granicy, gdy Δx dąży do zera. Temi

wartościami granicznymi są $\frac{dy}{dz}$ i $\frac{dz}{dx}$. Zatem iloczyn $\frac{\Delta y}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta x}$ dąży do wartości granicznej $\frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx}$. Lecz iloczyn $\frac{\Delta y}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta x}$ możemy skrócić przez Δz , gdyż czynnikami są tu ilorazy, otrzymamy więc $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Wnioskujemy stąd, że $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dąży do wartości granicznej oraz że tą granicą jest $\frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx}$.

Podana tu reguła znana jest pod nazwą reguły różniczkowania funkcji złożonej.

(V) Jeżeli y jest funkcją x , x jest również funkcją y . Czasem łatwo znaleźć $\frac{dx}{dy}$. Wówczas możemy zaraz napisać wartość $\frac{dy}{dx}$, posługując się regułą $\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dy} = 1$.

Podkreślamy znowu z naciskiem, że słuszności tego wzoru bynajmniej nie można oprzeć na skróceniu przez dx i dy .

Kiedy x przechodzi w $x + \Delta x$, y przechodzi w $y + \Delta y$. Zatem nie tylko y otrzymuje przyrost Δy , gdy x otrzymuje przyrost Δx , ale również x otrzymuje przyrost Δx , gdy y otrzymuje przyrost Δy . Na podstawie tego do iloczynu $\frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta y}$ możemy zastosować skracanie przez Δx i Δy , skąd wypływa, że iloczyn ten $= 1$. Z drugiej strony zakładamy, że, w miarę jak Δy dąży do zera, $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ dąży do granicznej wartości $\frac{dx}{dy}$. Wypływa stąd, że granicą, do której dąży $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jest $\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

26. Zmienna, względem której różniczkujemy, nazywa się zazwyczaj zmienną niezależną, zmienna zaś, rozpatrywana jako funkcja zmiennej niezależnej, nazywa się zazwyczaj zmienną zależną. Reguła (IV) służy do zmiany zmiennej niezależnej. Reguła (V) służy do odwrócenia roli zmiennej zależnej i niezależnej.

27. Możemy obecnie sprawdzić słuszność ogólnego wzoru

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}.$$

Założmy naprzód, że $n = \frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi i dodatnimi.

Niech dalej $y = x^n = x^{\frac{p}{q}}$,
skąd $x^p = y^q$;
możemy więc założyć $z = x^p, z = y^q$,
skąd znowu $\frac{dz}{dx} = px^{p-1}, \frac{dz}{dy} = qy^{q-1}$.

$$\begin{aligned} \text{Ale} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\frac{dz}{dy}} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^p}{y^q} \cdot \frac{y}{x} = \\ &= \frac{p}{q} \frac{y}{x} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

W ten sposób stwierdzamy słuszność wzoru dla wszystkich wykładników dodatnich zarówno całkowitych, jak ułamkowych.

Założmy teraz $n = -m$, gdzie m jest liczbą dodatnią, całkowitą lub ułamkową.

$$\text{Niech} \quad y = x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}.$$

$$\text{Wtedy} \quad x^m y = 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}.$$

Zastosujemy teraz regułę różniczkowania iloczynu; otrzymamy:

$$\frac{d(x^m y)}{dx} = mx^{m-1} y + x^m \frac{dy}{dx}.$$

$$\begin{aligned} \text{Lecz wobec tego, że} \quad x^m y &= 1, \\ \text{wypada, że} \quad \frac{d(x^m y)}{dx} &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{czyli} \quad mx^{m-1} y + x^m \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\text{skąd} \quad \frac{dy}{dx} = -m \frac{y}{x} = -mx^{m-1} = nx^{n-1}.$$

W ten sposób stwierdzamy słuszność wzoru dla wszyst-

kich wartości n całkowitych i ułamkowych, dodatnich i ujemnych.

Przy stosowaniu tego wzoru oraz reguły (I) z § 21 do różniczkowania funkcji ax^n należy zwracać uwagę na znak. Np., różniczkując $-x^{-\frac{1}{2}}$, otrzymamy $\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

Bardzo ważny jest przypadek szczególny, gdy $n = -1$.

Mamy wtedy

$$\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2}.$$

28. Rozpatrzmy jeszcze kilka wzorów dodatkowych ogólnego charakteru, które nie dają się właściwie tak wyodrębnić od poprzednich, aby je można było uważać za coś nowego.

(I) Niech y dane będzie w formie $\frac{1}{u}$, gdzie u jest taką funkcją x , którą umiemy różniczkować. Mamy wtedy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \quad \text{oraz} \quad \frac{dy}{du} = -\frac{1}{u^2};$$

stąd

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx}.$$

(II) Jeżeli y dane jest w formie $\frac{v}{u}$, gdzie v i u są funkcjami x , możemy rozpatrywać y jako iloczyn v przez $\frac{1}{u}$ i zastosować regułę różniczkowania iloczynu. Mamy

$$\text{wtedy} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \frac{dv}{dx} + v \frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dx} = \frac{1}{u} \frac{dv}{dx} - v \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} = \frac{u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx}}{u^2}.$$

Wzór ten nazywają regułą różniczkowania ilorazu.

29. Pomiedzy funkcjami, które mogą być przedstawione w postaci $\frac{v}{u}$, są takie, w których zarówno v , jak u , są funkcjami całkowitemi i wymiernymi zmiennej x . Takie funkcje nazywają się wymiernymi ułamkowymi funkcjami zmiennej x . Funkcje wymierne ułamkowe wraz z funkcjami wymiernymi całkowitemi tworzą klasę funkcji wymiernych wogóle. Umiemy więc różniczkować wszystkie funkcje wymierne. Umiemy również różniczkować niektóre inne funkcje, zawierające potęgi ułamkowe. Takie funkcje nie są już wymiernymi. Jest rzeczą konieczną ćwiczyć się w różniczkowaniu, nie myśląc na razie o zastosowaniach, aby się nauczyć dokonywania tej czynności bez błędów.

30. Przeróbmy kilka przykładów.

(I)

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Niech $u = 1 - x^2$ oraz $y = u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}.$

Wówczas $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \left(-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}\right)(-2x) = xu^{-\frac{3}{2}} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$

(II)

Niech $u = x^2 - 1$ oraz $y = x + \sqrt{u^{\frac{1}{2}}}.$

Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1 + \frac{d(u^{\frac{1}{2}})}{dx} = 1 + \frac{d(u^{\frac{1}{2}})}{du} \frac{du}{dx} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)(2x) = 1 + xu^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}. \end{aligned}$$

Można to napisać jeszcze w następujący sposób:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + \sqrt{(x^2-1)}}{\sqrt{(x^2-1)}} = \frac{y}{\sqrt{(x^2-1)}}.$$

(III)

Niech $y = x(1-2x)^2$. Zastosujmy regułę różniczkowania iloczynu

nu. Otrzymamy $\frac{dy}{dx} = (1-2x)^2 + x \frac{d\{(1-2x)^2\}}{dx}$.

Założmy $1-2x=u$;
wtedy $\frac{d\{(1-2x)^2\}}{dx} = \frac{d(u^2)}{dx} = \frac{d(u^2)}{du} \frac{du}{dx} = 2u(-2) = -4(1-2x)$.

Stąd $\frac{dy}{dx} = (1-2x)^2 - 4x(1-2x) = (1-2x)(1-6x)$.

$$(IV) \quad \frac{x}{x^2+1}$$

Niech $v=x$, $u=x^2+1$, $y=\frac{v}{u}$.

Wtedy $\frac{dv}{dx}=1$, $\frac{du}{dx}=2x$,

a zatem $\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)-x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

PRZYKŁADY.

Znaleźć pochodne następujących funkcji (1)–(16), gdzie a , b , p , q są niezależne od x .

- (1) $\frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$, (2) $\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$, (3) $\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}$, (4) $x + \sqrt{x^2+2}$,
 (5) $\sqrt{x^2+2} - x$, (6) $x(13-2x)(15-2x)$, (7) $x(a-2x)(b-2x)$,
 (8) $\frac{1}{1+x}$, (9) $\frac{1}{1-x}$, (10) $\frac{1}{x-1}$, (11) $\frac{1-x}{1+x}$, (12) $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$,
 (13) $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x-2}}$, (14) $\frac{x+p}{(x+a)(x+b)}$, (15) $\frac{x+p}{\sqrt{x^2+2px+q}}$,
 (16) $\frac{x-p}{\sqrt{q+2px-x^2}}$.

DRUGA POCHODNA.

31. Pochodna względem x pewnej funkcji $y=f(x)$,

oznaczana przez $\frac{dy}{dx}$, albo $f'(x)$, sama jest funkcją x ; możemy tę funkcję znowu różniczkować. Pochodną jej oznaczamy przez $\frac{d^2y}{dx^2}$, albo $f''(x)$, i nazywamy drugą pochodną y , albo $f(x)$, względem x . Pochodną $\frac{dy}{dx}$, albo $f'(x)$, często nazywają pierwszą pochodną.

Należy uważać symbol $\frac{d^2y}{dx^2}$ za równoznaczny z sym-

bolem $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$, oraz uprzytomnić sobie, co to znaczy. Określiśmy pochodną $\frac{dy}{dx}$ jako granicę, do której dąży iloraz $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ w miarę tego, jak Δx dąży do zera. Ta wartość graniczna wynosi tyle a tyle, powiedzmy z , kiedy x posiada daną wartość, i to z jest funkcją x . Kiedy x otrzymuje przyrost Δx , z otrzymuje przyrost Δz , i możemy utworzyć iloraz $\frac{\Delta z}{\Delta x}$. Iloraz ten znowu dąży do pewnej wartości granicznej w miarę tego, jak Δx dąży do zera, i tą właśnie

wartością graniczną jest $\frac{dz}{dx}$, albo $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$, albo wreszcie $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Gdy mamy do obliczenia $\frac{d^2y}{dx^2}$, musimy naprzód znaleźć $\frac{dy}{dx}$ podług wyżej podanych reguł, potem zaś ponow-

nie zastosować owe reguły do zróżniczkowania tej nowej funkcji $\frac{dy}{dx}$.

Np. w przypadku kamienia spadającego (§ 9) mamy

$$s = (490.5)t^2 \text{ oraz } \frac{ds}{dt} = 981t.$$

Teraz różniczkujemy tę drugą funkcję i otrzymujemy

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 981.$$

Rezultat ten wyrażamy zazwyczaj, mówiąc, że kamień spada ze stałym przyspieszeniem, wynoszącym $981 \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}^2}$.

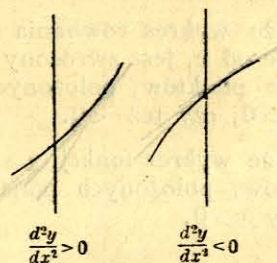
32. Wogóle, jeżeli poruszające się po linii prostej ciało przebywa drogę s cm. w ciągu t sekund, prędkość jego w $\frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$ wynosi $\frac{ds}{dt}$. Jeżeli napiszemy $v = \frac{ds}{dt}$, v też będzie funkcją t , i $\frac{dv}{dt}$, o ile jest dodatnie, daje nam prędkość, z jaką wzrasta prędkość ciała, mierzona w $\frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$. Jeżeli $\frac{dv}{dt} < 0$, mówi ono to samo, ale nie o wzroście, lecz o zmniejszaniu się prędkości. W każdym razie $\frac{dv}{dt}$, albo $\frac{d^2s}{dt^2}$, jest miarą, wyrażoną w jednostkach, pochodnych od cm. i sek. ($\frac{\text{cm.}}{\text{sek.}^2}$), pewnej wielkości, zwanej przyspieszeniem — w kierunku wzrastania s , bez względu na to, czy prędkość w rzeczywistości wzrasta, czy się zmniejsza.

Wartość bezwzględna drugiej pochodnej $\frac{d^2s}{dt^2}$ mówi nam, w jakim tempie prędkość się zmienia, znak jej zaś poucza, czy prędkość wzrasta, czy też zmniejsza się.

Jeżeli wykreślimy linię prędkości, biorąc t i v za współrzędne punktu, przyczym v będzie oznaczało $\frac{ds}{dt}$, wzniesienie tego wykresu da nam wartość przyspieszenia.

33. Co do znaku drugiej pochodnej $\frac{d^2y}{dx^2}$, możliwą jest prosta interpretacja graficzna. Jeżeli, w miarę wzrastania x , $\frac{dy}{dx}$ również wzrasta, $\frac{d^2y}{dx^2}$ jest dodatnie. Jeżeli zaś $\frac{dy}{dx}$ zmniejsza się wraz ze wzrostem x , $\frac{d^2y}{dx^2}$ jest ujemne.

W pierwszym przypadku wzniesienie wykresu y , jako funkcji x , wzrasta, w drugim przypadku zmniejsza się. Gdy



Rys. 13.

obierzemy dwa punkty na prostej, równoległej do osi y , z tych jeden na wykresie, a drugi ponad nim, część krzywej w pobliżu niższego punktu zwrócona jest wklęs-

łością ku wyższemu punktowi, kiedy $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, wypukłością zaś, gdy $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ (rys. 13).

PRZYKŁADY.

1. Znaleźć drugie pochodne funkcji, podanych w przykładach na str. 31 (przykł. 1) i 38.

2. Ciało porusza się w ten sposób, że jego przyspieszenie w każdym momencie jest proporcjonalne do drogi, przebytej do tego momentu. Wyrazić to przez równanie.

3. Ciało porusza się w ten sposób, że jego przyspieszenie w każdym momencie jest proporcjonalne do drogi, która pozostaje do przebycia, by osiągnąć punkt, położony w odległości a cm. od punktu wyjścia. Wyrazić to przez równanie.

4. Ciało porusza się w ten sposób, że przyspieszenie w każdym momencie jest proporcjonalne do jego prędkości w tym momencie. Wyrazić to przez równanie.

5. Dowieść, że wykres równania $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, gdzie α, β, γ są niezależne od x , jest zwrócony wklęsłością, względnie wypukłością, do punktów, położonych ponad nim, zależnie od tego, czy $\alpha > 0$, czy też < 0 .

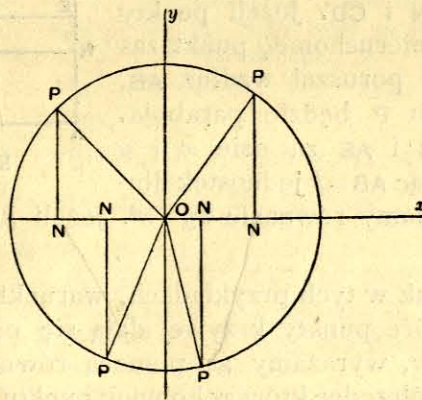
6. Dowieść, że wykres funkcji $y = x^3$ jest zwrócony wypukłością do punktów, położonych ponad nim, kiedy $x < 0$, wklęsłością zaś, gdy $x > 0$.

ROZDZIAŁ III.

NIEKTÓRE ZASTOSOWANIA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO.

34. Zanim przejdziemy do dalszego ciągu teorii, rozpatrzmy niektóre zastosowania otrzymanych rezultatów.

Wiemy już, co się rozumie przez pojęcie funkcji oraz jak funkcja może być przedstawiona za pomocą wykresu. Zamiast rozważać funkcję (jak np. x^2) albo równanie (jak np. $y = x^2$) oraz odpowiedni wykres, możemy badać pewną krzywą, jak np. koło lub parabolę. Krzywa jest torem punktu, poruszającego się podług określo-



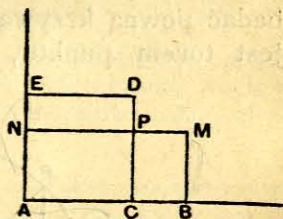
Rys. 14.

nego prawa. Np. koło jest torem punktu, poruszającego się w ten sposób, że odległość jego od pewnego nieruchomego punktu pozostaje stałą. W celu wyrażenia tego prawa obieramy punkt nieruchomy za początek współrzędnych, dwie jakiegokolwiek proste, prostopadłe do siebie i przecinające się w nieruchomym punkcie, za osie x i y i prowadzimy rzędną PN któregośkolwiek punktu koła, zakładając w dodatku odległość punktu nieruchomego od poszczególnych punktów koła $= r$ jednostek długości. Ponieważ kąt przy N jest zawsze prosty (rys. 14), mamy dla dowolnego położenia P , czyli punktu (x, y) ,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Parabola powstaje z następującego zagadnienia: mając dany jeden bok prostokąta, znaleźć drugi tak, by pole prostokąta równało się polu pewnego kwadratu. Niech na rys. 15 AB oznacza dany bok prostokąta, $ACDE$ kwadrat, $ABMN$ szukany prostokąt, P zaś punkt przecięcia MN i CD . Jeżeli punkty A i B będą nieruchome, punkt zaś C będzie się poruszał wzdłuż AB , torem punktu P będzie parabola. Obierając AB i AE za osie x i y oraz zakładając $AB = k$ jednostek długości, otrzymamy równanie $ky = x^2$. Jeżeli $k = 1$, $y = x^2$, jak w § 9.

Jeżeli, jak w tych przykładach, warunki geometryczne, przez które punkty krzywej dają się odróżnić od innych punktów, wyrażamy za pomocą równania, wiążącego ze sobą współrzędne któregośkolwiek punktu krzywej, równanie to nazywa się **równaniem krzywej**.



Rys. 15.

35. Kiedy równanie paraboli dane jest w formie

$$ky = x^2,$$

oś y jest osią parabol, początek współrzędnych wierzchołkiem, zaś oś x styczną w wierzchołku. Krzywa leży ponad styczną w wierzchołku, lub pod nią, zależnie od tego, czy k jest > 0 , czy też < 0 . Równanie

$$k(y - y_0) = (x - x_0)^2$$

jest równaniem paraboli, której osią jest prosta o równaniu $x = x_0$, wierzchołek zaś leży w punkcie (x_0, y_0) . Pisząc to równanie w formie

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{2x_0}{1}x + \frac{x_0^2}{1} + y_0,$$

$$y = \frac{1}{k}x^2 - \frac{2x_0}{k}x + \frac{x_0^2}{k} + y_0,$$

widzimy, że ono się sprowadza do kształtu ogólnego

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \dots\dots\dots (1),$$

gdzie α, β, γ są niezależne od x . Odwrotnie, równanie (1) daje się przekształcić w następujące

$$\frac{1}{\alpha} \left\{ y - \left(\gamma - \frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\alpha} \right) \right\} = \left(x + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha} \right)^2,$$

a zatem każde równanie kształtu (1) wyobraża parabolę, której oś jest równoległa do osi y .

W ogólności możemy zawsze znaleźć parabolę, mającą oś równoległą do osi y i przechodzącą przez trzy dane punkty. Niech (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) będą temi punktami. Należy znaleźć trzy liczby α , β , γ w ten sposób, by

$$\alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = y_1, \quad \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = y_2, \quad \alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma = y_3, \dots (2).$$

Z równań tych otrzymujemy

$$y_2 - y_1 = \alpha (x_2^2 - x_1^2) + \beta (x_2 - x_1), \quad y_3 - y_2 = \alpha (x_3^2 - x_2^2) + \beta (x_3 - x_2),$$

a zatem $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \alpha(x_2 + x_1) + \beta$, $\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \alpha(x_3 + x_2) + \beta \dots (3)$,

skąd
$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \alpha(x_3 - x_1) \dots\dots\dots (4).$$

Równanie (4) daje nam α . Po znalezieniu α otrzymamy z któregośkolwiek z równań (3) β . Gdy α i β będą już wiadome, którekolwiek z równań (2) da nam γ .

Zakładamy w powyższym, że pomiędzy odciętymi danych trzech punktów niema sobie równych.

36. Równanie krzywej wyraża własność geometryczną, wspólną wszystkim punktom krzywej. Za pomocą tego równania oraz pewnych procesów analitycznych, np. różniczkowania, możemy wykryć inne własności krzywej. Np. w przypadku paraboli, której równanie jest $y=x^2$, znaleźliśmy, że styczna przecina na pół odcięte (§ 18).

37. Równanie linii prostej wyraża tę jej własność, że prosta posiada we wszystkich swych punktach to samo wzniesienie.

Równanie prostej, przechodzącej przez punkt $(0, b)$ i posiadającej wzniesienie m , jest

$$y = mx + b.$$

Równanie prostej, która przechodzi przez punkt (x_1, y_1) i posiada wzniesienie m , jest

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Równanie prostej, przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2)

jest
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

gdyż ułamek $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ daje nam właśnie wzniesienie prostej (§ 7).

38. Przez początek współrzędnych prowadzimy dwie proste do siebie prostopadłe; trzeba znaleźć równanie, wyrażające zależność między wzniesieniami tych prostych.

Oś ox leży w jednym z czterech kątów, utworzonych przez same proste; jedna więc z nich wznosi się względem ox ku górze, druga opada ku dołowi. Jeżeli przez m oznaczmy wzniesienie pierwszej, przez m' drugiej, będziemy mieli $m > 0$ i $m' < 0$.

Niech P będzie jakimkolwiek punkt na pierwszej pro-

stej, leżącej ponad osią x , PNQ — prostopadła do osi x ; niech wreszcie odcięte punktów P i Q będą uważane za dodatnie (rys. 16). Kąty OPN i NOP w sumie równają się kątom prostemu; podobnież kąty NOP i QON . Stąd kąt $OPN =$ kątowi QON . Wypływa więc, że trójkąty prostokątne OPN i QON są podobne, a zatem

$$QN : ON = ON : PN.$$

Lecz rzędna punktu Q jest ujemna; niech $-y_q$ wyraża jej wartość w pewnych jednostkach długości. Mamy więc $\frac{-y_q}{x_q} = \frac{x_p}{y_p}$, albo $-m' = \frac{1}{m}$.

Poszukiwanym równaniem będzie zatem

$$mm' = -1.$$

39. Równanie, wiążące ze sobą wzniesienia, pozostaje bez zmiany dla dowolnej pary prostych, do siebie prostopadłych, bez względu na to, czy ich punkt przecięcia przypada w początku współrzędnych, czy nie. Jeżeli

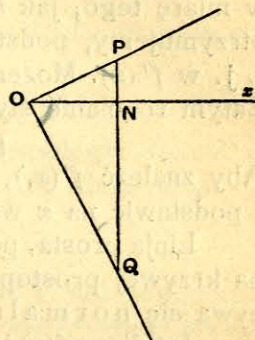
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

jest równaniem prostej, przechodzącej przez punkt (x_1, y_1) , wówczas

$$(y - y_1)m + x - x_1 = 0$$

jest równaniem prostej, przechodzącej przez ten sam punkt i prostopadłej do pierwszej.

40. Możemy utworzyć równanie stycznej do krzywej w jakimkolwiek punkcie. Niech $y=f(x)$ będzie równaniem krzywej, x_1 i $f(x_1)$ współrzędnymi jednego z jej punktów. Wzniesieniem stycznej jest wartość graniczna, do której dąży iloraz



Rys. 16.

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

w miarę tego, jak h dąży do zera. Tę wartość graniczną otrzymujemy, podstawiając x_1 na x w pochodnej funkcji, t. j. w $f'(x)$. Możemy oznaczyć tę wartość przez $f'(x_1)$. Zatem równanie stycznej będzie

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).$$

Aby znaleźć $f'(x_1)$, należy wziąć pochodną funkcji $f(x)$ i podstawić na x wartość x_1 .

Linia prosta, poprowadzona przez którykolwiek punkt na krzywej prostopadle do stycznej w tym punkcie, nazywa się *normalną* w danym punkcie.

Jeżeli $y = f(x)$ jest równaniem krzywej, wówczas wzniesienie normalnej jest $-\frac{1}{f'(x_1)}$, gdzie $f'(x_1)$ jest wzniesieniem stycznej, jak przed chwilą zostało wyjaśnione. Równanie więc normalnej będzie

$$(y - y_1)f'(x_1) + (x - x_1) = 0.$$

41. Jeżeli dla jakiegokolwiek punktu krzywej $\frac{dy}{dx} = 0$, to, jak wiemy już, styczna w tym punkcie do krzywej jest równoległa do osi x . Jeżeli punkt ten leży na osi x , styczną jest sama oś x . Np. styczną do paraboli, danej przez równanie $y = x^2$, w początku współrzędnych jest oś x .

Jeżeli $y = \sqrt{x}$, wówczas mamy wogóle $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; wzór ten jednak nie daje nam wartości $\frac{dy}{dx}$ dla początku współrzędnych, gdyż każe nam dokonać dzielenia przez 0, czego nie możemy skutecznie. Trudność tę pokonywamy, zważywszy, że $\frac{dx}{dy} = 2\sqrt{x}$ oraz że dla $x=0$ również $\frac{dx}{dy} = 0$.

Styczną więc do krzywej $y = \sqrt{x}$ w początku współrzędnych jest oś y .

Jeżeli więc obliczenie $\frac{dy}{dx}$ wymaga dzielenia przez zero, t. j. jeżeli $\frac{dx}{dy} = 0$ dla pewnego punktu krzywej, styczna do krzywej w tym punkcie jest równoległa do osi y . O ile punkt ten leży na osi y , styczną jest sama oś y .

PRZYKŁADY.

1. Dowieść, że, jeżeli $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ jest równaniem paraboli, przechodzącej przez punkty $(a-h, y_1)$, (a, y_2) , $(a+h, y_3)$, wówczas

$$2\alpha h^2 = y_1 + y_3 - 2y_2.$$

2. Dla tegoż przypadku dowieść, że

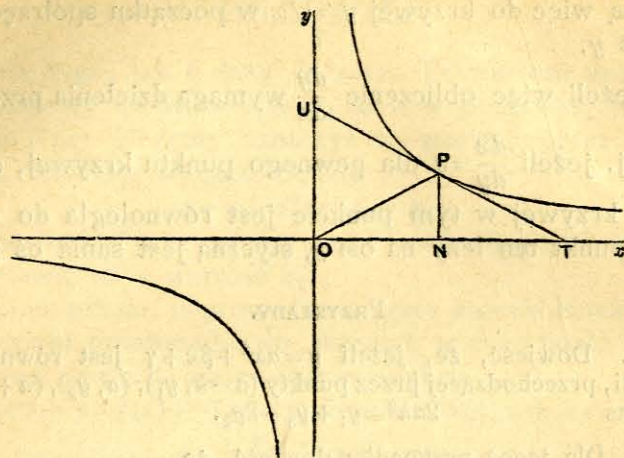
$$2\beta h^2 = 4y_2a - y_1(2a+h) - y_3(2a-h),$$

$$2\gamma h^2 = y_1a(a+h) + y_3a(a-h) - 2y_2(a^2 - h^2).$$

3. Znaleźć równanie stycznej i normalnej w punkcie (x_1, y_1) do paraboli, której równanie jest: $ky = x^2$.

4. Znaleźć równanie stycznej w punkcie (x_1, y_1) do hiperboli, której równanie jest $y = \frac{1}{x}$. Dowieść, że, jeżeli styczna w punkcie P przecina oś x w punkcie T , oś zaś y w punkcie U , oraz jeżeli PN jest rzędną punktu P , to punkt N jest środkiem odcinka OT , P zaś jest środkiem koła, przechodzącego przez T , O , U (rys. 17).

5. Dowieść, że, jeżeli $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ lub $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, gdzie r nie zależy od x , $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$; sprawdzić w ten sposób, że normalna do koła w jakimkolwiek jego punkcie przechodzi przez środek koła.



Rys. 17.

O PRZYBLIŻENIACH.

42. Zastanawiając się nad tym, co oznacza rezultat w rodzaju $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$, przypominamy sobie tkwiące w nim twierdzenie następujące:

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \text{ prawie równa się } nx^{n-1},$$

kiedy h jest bardzo małe. Dogodne jest posiadanie określonego symbolu dla wyrażenia prawie równa się; obierzmy w tym celu symbol „ $\doteq$ ”. W ten sposób napiszemy

$$(x+h)^n - x^n \doteq nx^{n-1}h,$$

albo

$$(x+h)^n \doteq x^n + nx^{n-1}h.$$

Zakładając w tym wyrażeniu $x=1$, otrzymamy

$$(1+h)^n \doteq 1 + nh \dots \dots \dots (1)$$

Przybliżone to równanie często się nam przydaje. Daje ono przybliżoną wartość n -ej potęgi liczby, różnią-

cej się mało od 1. Aby przybliżenie było dostatecznie dobre, konieczne jest, by n nie było zbyt wielkie.

43. Rezultat (1) z § 42 może być często stosowany do przybliżonego wyciągania pierwiastku drugiej, trzeciej oraz innych potęg. Dla przykładu znajdziemy $\sqrt[5]{31}$.

$$\begin{aligned} \text{Mamy} \quad (31)^{\frac{1}{5}} &= (32-1)^{\frac{1}{5}} = \left\{ 32 \left(1 - \frac{1}{32} \right) \right\}^{\frac{1}{5}} = \\ &= (32)^{\frac{1}{5}} \left(1 - \frac{1}{32} \right)^{\frac{1}{5}} = 2 \left(1 - \frac{1}{32} \right)^{\frac{1}{5}} \doteq 2 \left(1 - \frac{1}{160} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Stąd} \quad (31)^{\frac{1}{5}} \doteq \frac{159}{80} \doteq 1.9875.$$

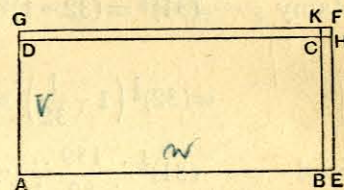
Rzeczywista wartość tego pierwiastku z dokładnością do piątego znaku dziesiętnego jest 1.98734.

44. W celu innego zużytkowania równania przybliżonego (1) z § 42 założymy, że miarą pewnej wielkości zmiennej jest x jakichś jednostek, zaś x^n tychże jednostek wynosi inna wielkość, pozostająca w zależności od pierwszej. Jeżeli pierwsza wielkość może być zmierzona z dokładnością do α jednostek, gdzie α jest małym ułamkiem, rzeczywista wartość pierwszej wielkości zawarta jest pomiędzy $x+\alpha$ jednostek oraz $x-\alpha$ jednostek. Wartość rzeczywista drugiej wielkości zależnej zawiera się tedy pomiędzy $(x+\alpha)^n$ jednostek a $(x-\alpha)^n$ jednostek, albo pomiędzy $x^n \left(1 + \frac{\alpha}{x} \right)^n$ jednostek a $x^n \left(1 - \frac{\alpha}{x} \right)^n$ jednostek. W ten sposób możliwy błąd pomiaru tej wielkości zależnej wynosi w przybliżeniu nx^{n-1} użytych jednostek.

45. Również różniczkowanie iloczynu daje nam równanie przybliżone

$$\Delta(uv) \doteq v\Delta u + u\Delta v.$$

Rezultat ten może być zilustrowany wykreślnie. Pole prostokąta, którego boki są odpowiednio u cm. oraz v cm., wynosi uv cm.². Jeżeli boki prostokąta otrzymają małe przyrosty Δu cm. i Δv cm., pole prostokąta wzrośnie w przybliżeniu o $(v\Delta u + u\Delta v)$ cm.². Niech AB i AD na rys. 18 równają się odpowiednio u cm. i v cm., długości zaś BE i DG niech wynoszą Δu cm. oraz Δv cm. Pole prostokąta $DGKC$ wynosi $u\Delta v$ cm.², pole zaś prostokąta $BEHC$ wynosi $v\Delta u$ cm.². Rzeczywisty przyrost pola różni się od wartości, otrzymanej z rachunku przybliżonego, o wartość pola prostokąta $KFHC$, który jest znacznie mniejszy zarówno od $DGKC$, jak od $BEHC$.



Rys. 18.

46. Weźmy rzecz ogólniej. Wobec tego, że granicą, do której dąży $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ w miarę zbliżania się h do zera, jest $f'(x)$, otrzymujemy równanie przybliżone

$$f(x+h) \doteq f(x) + hf'(x).$$

47. Dla zilustrowania tego równania przybliżonego, rozpatrzmy współczynniki rozszerzalności linowej i rozszerzalności objętościowej jakiejkolwiek substancji, np. miedzi. Sztaba z tego materiału wydłuża się przy ogrzewaniu. Niech jej długość początkowa wynosi l cm., początkowa zaś temperatura t° C.

Gdy t otrzymuje przyrost Δt , l otrzymuje przyrost Δl , i w miarę tego, jak Δt dąży do zera, $\frac{\Delta l}{\Delta t}$ dąży do wartości gra-

nicznej $\frac{dl}{dt}$. Przypuśćmy, że $\frac{dl}{dt} = \alpha l$. Wtedy α nazywamy współczynnikiem rozszerzalności linowej i otrzymujemy równanie przybliżone

$$l + \Delta l \doteq l(1 + \alpha \Delta t).$$

Widzimy, że, kiedy $\Delta t = 1$, t. j. gdy temperatura wzrasta o 1° C., α prawie równa się stosunkowi przyrostu długości do początkowej długości.

Jeżeli bryła z tejże substancji o objętości v cm.³ jest ogrzewana i temperatura jej wzrasta od t° C. do $(t + \Delta t)^\circ$ C., objętość v zmienia się na $v + \Delta v$, i w miarę dążenia Δt do zera $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ dąży do wartości granicznej $\frac{dv}{dt}$. Załóżmy $\frac{dv}{dt} = \beta v$. Nazywamy wtedy β współczynnikiem rozszerzalności objętościowej i otrzymujemy równanie przybliżone

$$v + \Delta v \doteq v(1 + \beta \Delta t).$$

Podobnie jak wyżej, jeżeli temperatura wzrasta o 1° C., β prawie równa się stosunkowi przyrostu objętości do objętości początkowej.

Jeżeli rozważana bryła jest sześcianem o krawędzi l cm., wówczas $v = l^3$ oraz $\frac{dv}{dt} = 3l^2 \frac{dl}{dt}$,

czyli $\beta l^3 = 3\alpha l^3$, skąd $\beta = 3\alpha$. Dochodzimy więc do wniosku, że współczynnik rozszerzalności objętościowej równa się potrójnemu współczynnikowi rozszerzalności linowej. *

PRZYKŁADY.

1. Znaleźć metodą podaną w § 43 wartości przybliżone liczb $(28)^{\frac{1}{3}}$ i $(80)^{\frac{1}{4}}$.

2. Krawędź sześcianu może być zmierzona z dokładnością do 0.01 cm. i pomiar tej krawędzi daje wartość 10 cm. Znaleźć w przybliżeniu możliwy błąd w pomiarze objętości.

* Autor ma tu na myśli wyłącznie ciała równokierunkowe (przyp. tł.).

3. Boki prostokąta mogą być zmierzone z dokładnością do 0.01 cm. i pomiar obwodu daje wartość 125 cm. Znaleźć przybliżoną wartość możliwego błędu przy obliczeniu powierzchni prostokąta.

4. Spółczynnik rozszerzalności linowej miedzi jest 0.0000167. Jakie będzie wydłużenie sztaby miedzianej, mającej długość 1 dm. przy 0° C., jeżeli temperatura jej wzrośnie do 10° C? Jeżeli przy 0° przekrój sztaby wynosi 1 cm.², jaki będzie ten przekrój przy 10°?

MAXIMA I MINIMA.

48. Jako przykład innego zastosowania rachunku różniczkowego rozpatrzmy zagadnienie o najmniejszej wartości obwodu prostokąta, mającego pole dane.

Niech pole to wynosi a cm.², obwód niech będzie y cm., długość jednego boku x cm. Oczywiście długość boku przeciwległego również jest x cm., dwa zaś pozostałe boki mają po $(0.5y - x)$ cm. Mamy więc

$$x(0.5y - x) = a,$$

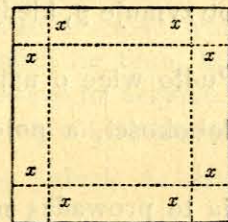
czyli
$$y = 2 \left(x + \frac{a}{x} \right).$$

Zatym
$$\frac{dy}{dx} = 2 \left(1 - \frac{a}{x^2} \right).$$

Wynika stąd, że, jeżeli $x^2 < a$, to $\frac{dy}{dx} < 0$ i wykres y , jako funkcji x , opada ku prawej ręce. Jeżeli $x^2 > a$, to $\frac{dy}{dx} > 0$ i wykres danej funkcji wznosi się ku prawej ręce. Gdy zaczniemy od małej wartości x i będziemy stopniowo przechodzili do wartości większych, y będzie się z początku zmniejszało aż do chwili, kiedy $x^2 = a$, albo $x = \sqrt{a}$; po-

tym y zacznie wzrastać i będzie wzrastało nieograniczenie w miarę wzrastania x . Wypływa stąd, że y posiada wartość najmniejszą, kiedy $x = \sqrt{a}$. Tę wartość najmniejszą znajdziemy, podstawiając na x wartość $\sqrt{a}$ w wyrażeniu $2 \left(x + \frac{a}{x} \right)$; otrzymamy $4\sqrt{a}$. Widzimy, że prostokątem o danej wartości pola i najmniejszym przytym obwodzie jest kwadrat, mający to samo pole.

49. Rozpatrzmy drugie zagadnienie tegoż rodzaju. Przypuśćmy, że mamy kawał tektury w postaci kwadratu, którego bok = 1 dm., i że chcemy zrobić z niej pudło bez pokrywy przez zagięcie brzegów ze wszystkich stron. Chodzi o zrobienie pudła o możliwie największej objętości. Linje ciągłe na rys. 19 wskazują krawędzie kwadra-



Rys. 19.

tu, kropki zaś — linje, wzdłuż których ma być tektura zagięta. Niech wysokość pudła wynosi x dm. ($x < 1$). Będziemy więc mieli pudło o podstawie kwadratowej, której bok będzie $(1 - 2x)$ dm., i o wysokości x dm. Oznaczając przez y dm.³ objętość pudła, będziemy mogli napisać

$$y = (1 - 2x)^2 x.$$

Biorąc x bardzo małe, otrzymamy nader płytkie pudło,

o bardzo małej objętości; biorąc x prawie $=0.5$ dm., otrzymamy głębokie wąskie naczynie, i znowu objętość jego będzie bardzo mała. Lecz (przykł. III z § 30)

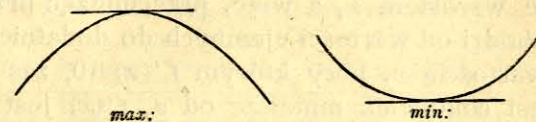
$$\frac{dy}{dx} = (1-2x)(1-6x) = 12\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{6}-x\right).$$

Kiedy x jest bardzo małe, oba czynniki z prawej strony są dodatnie, $\frac{dy}{dx}$ jest dodatnie, i gdy x wzrasta do $\frac{1}{6}$, y także wzrasta. Kiedy wartość x zawarta jest pomiędzy $\frac{1}{6}$ a $\frac{1}{2}$, pierwszy czynnik jest dodatni, drugi ujemny, $\frac{dy}{dx}$ jest ujemne, a więc, gdy x wzrasta od $\frac{1}{6}$ do $\frac{1}{2}$, y zmniejsza się.

Największą wartość otrzymuje y , kiedy $x = \frac{1}{6}$; tą największą wartością y jest $\frac{2}{27}$. Pudło więc o największej pojemności posiada 1.6) cm. głębokości, a pojemność jego wynosi 74.074) cm.³.

50. Zagadnienia te prowadzą nas do ogólnych rozważań, dotyczących zastosowania rachunku różniczkowego do pytania o największości i najmniejszości. Jeżeli $y=f(x)$, wtedy, dopóki $f'(x)$ pozostaje >0 , wzrostowi x towarzyszy wzrost y , gdy $f'(x)$ jest <0 , wzrostowi x towarzyszy zmniejszanie się y . Dla tego punktu wykresu, w którym y przestaje się zwiększać, a zaczyna się zmniejszać lub odwrotnie, $f'(x)$ staje się równe zero. W takim punkcie wzniesienie wykresu $=$ zero, i styczna do wykresu jest równoległa do osi x . W momencie, kiedy y przestaje wzrastać, a zaczyna się zmniejszać, posiada ono war-

tość największą. W momencie, kiedy przestaje się zmniejszać, a zaczyna wzrastać — posiada wartość najmniejszą. Możemy znaleźć wartości na x , które odpo-



Rys. 20.

wiadają największości i najmniejszości y , o ile potrafimy rozwiązać równanie $f'(x)=0$, oraz możemy znaleźć wartości największe i najmniejsze y przez podstawienie do $f(x)$ liczb, czyniących zadość temu równaniu.

51. Może się zdarzyć, jak w zadaniu o pudle, że równaniu $f'(x)$ czyni zadość więcej, niż jedna wartość x , i wtedy musimy wybrać wartość właściwą. W prostych zagadnieniach, podobnych do tych, które dotychczas spotykaliśmy, możemy zawsze to uczynić. Np. w zagadnieniu o pudle widzimy, że równaniu czynią zadość zarówno $x=0.5$, jak $x=\frac{1}{6}$. Widzieliśmy jednak, że właściwą wartością by-

ła $\frac{1}{6}$, gdyż, o ile $x < \frac{1}{6}$, y wzrasta, a kiedy $x > \frac{1}{6}$, y zmniejsza się. Moglibyśmy jeszcze to ustalić przez spostrzeżenie, że wartości $x=0.5$ odpowiada $y=0$, objętość zaś, równa zero, nie może stanowić największości w takim zadaniu.

52. Punkt właściwy może być często wyróżniony przez użycie drugiej pochodnej (§ 31).

Wiemy, że, gdy $f'(x) > 0$, wzrostowi x towarzyszy wzrost $f(x)$, gdy zaś $f'(x) < 0$, wzrostowi x towarzyszy zmniejszanie się $f(x)$. Wiemy również, że, gdy $f(x)$ staje

się największością lub najmniejszością, $f'(x)$ staje się równe zero.

Jeżeli $f''(x) > 0$, kiedy $f'(x) = 0$, wówczas $f'(x)$ wzrasta wraz ze wzrostem x , a więc, przechodząc przez zero, $f'(x)$ przechodzi od wartości ujemnych do dodatnich. Niech a będzie wartością x , przy którym $f'(x) = 0$, zaś $f''(x) > 0$. Kiedy x jest cokolwiek mniejsze od a , $f'(x)$ jest < 0 , $f(x)$ zaś zmniejsza się, gdy x wzrasta, dążąc do wartości a . Jeżeli x jest cokolwiek większe od a , $f'(x)$ jest > 0 i $f(x)$ wzrasta, gdy x otrzymuje wartości coraz większe od a . Wynika stąd, że, gdy x wzrasta, przechodząc przez wartość a , $f(x)$ przestaje się zmniejszać, a zaczyna wzrastać. Zatem a jest wartością x , przy której $f(x)$ staje się najmniejszością.

W podobny sposób, jeżeli b jest wartością x , przy której $f'(x) = 0$, zaś $f''(x) < 0$, wartość ta czyni $f(x)$ największością.

Np. w zadaniu z § 49

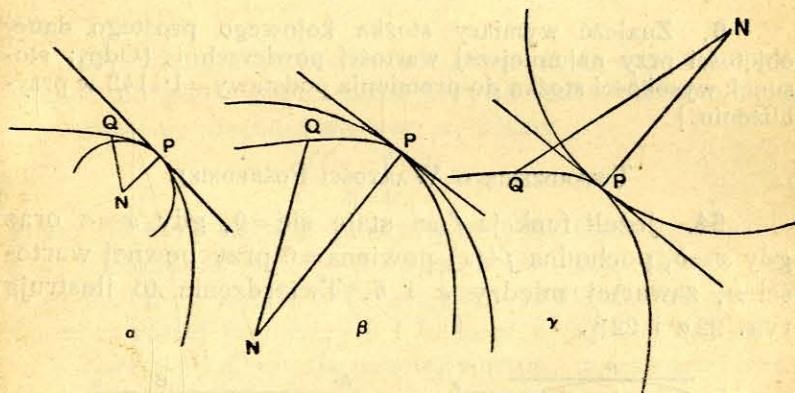
$$f'(x) = x(1 - 2x)^2, \quad f''(x) = 1 - 8x + 12x^2,$$

$$f''(x) = -8(1 - 3x).$$

W tym przypadku $f'(x) = 0$, kiedy $x = \frac{1}{2}$ albo $x = \frac{1}{6}$. Kiedy $x = \frac{1}{6}$, $f''(x) < 0$, kiedy zaś $x = \frac{1}{2}$, $f''(x) > 0$. A więc $x = \frac{1}{6}$ czyni $f(x)$ największością, zaś $x = 0.5$ czyni $f(x)$ najmniejszością.

53. Długość normalnej, poprowadzonej z dowolnego punktu do krzywej, dostarcza dobrego przykładu na maxima i minima. Niech P będzie punktem na krzywej, N punktem na normalnej, poprowadzonej przez P . Z punktu N , jako ze środka, kreślimy koło promieniem NP . Łączymy N z punktem Q , leżącym na krzywej w pobliżu P . Jeżeli część krzywej, leżąca w pobliżu P , zwrócona jest wklęsłością ku N , lecz przypada po za ko-

lem, NQ jest większe niż NP ; wówczas NP jest najmniejszym z odcinków, które możemy poprowadzić z N ku poszczególnym punktom krzywej w okolicy P (rys. 21 α). Jeżeli część krzywej, leżąca w pobliżu P , zwrócona jest wklęsłością ku N , lecz przypada wewnątrz koła, NQ jest mniejsze niż PN — wówczas PN jest największym z odcinków, które dają się poprowadzić z N do punktów krzywej w okolicy P (rys. 21 β). Jeżeli wreszcie omawiana część krzywej zwrócona jest wypukłością ku N , NP jest znowu odcinkiem o wartości najmniejszej (rys. 21 γ).



Rys. 21.

PRZYKŁADY.

1. Dany jest obwód prostokąta. Znaleźć jego boki, odpowiadające największej wartości pola.
2. Dana jest długość przekątnej prostokąta. Znaleźć jego boki, odpowiadające największej wartości (I) obwodu oraz (II) pola.
3. Rozwiązać zadanie o pudle z § 49, zakładając, że kawał tektury ma kształt prostokąta o bokach, wynoszących 13 cm. i 15 cm. (Odp.: głębokość = 2.3155 cm. w przybliżeniu).

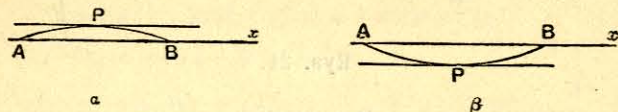
4. Rozwiązać to samo zadanie o pudełku, zakładając, że boki prostokąta wynoszą a cm. i b cm.

5. Największe paczki, które jeszcze wolno przesyłać w Anglii pocztą, powinny mieć takie wymiary, by suma długości paczki i obwodu jej poprzecznego przekroju nie przekraczała 6 stóp. Znaleźć wymiary największej paczki, mającej kształt (I) graniastosłupa o podstawie kwadratowej, (II) walca kołowego. (Odp.: w obu przypadkach długość = 2 st.). Znaleźć objętości paczek obu tych kształtów.

6. Znaleźć wymiary stożka kołowego prostego danej objętości przy najmniejszej wartości powierzchni. [Odp.: stosunek wysokości stożka do promienia podstawy = 1.4142 w przybliżeniu.]

TWIERDZENIE O WARTOŚCI POŚREDNIEJ.

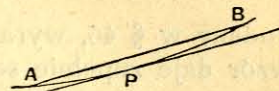
54. Jeżeli funkcja $f(x)$ staje się 0, gdy $x=a$ oraz gdy $x=b$, pochodna $f'(x)$ powinna = 0 przy pewnej wartości x , zawartej między a i b . Twierdzenie to ilustrują rys. 22 α i 22 β .



Rys. 22.

Na rys. 22 α wykres funkcji $f(x)$ leży nad osią x -ów pomiędzy punktami A i B , i $f'(x)$ przybiera wartość największą w pewnym pośrednim punkcie P . Na rys. 22 β wykres funkcji leży pod osią x -ów między A i B , i $f'(x)$ ma wartość najmniejszą przy pośrednim punkcie P . Funkcja $f(x)$ może posiadać, oczywiście, więcej, niż jedno maksimum i minimum pomiędzy $x=a$ i $x=b$. Jest rzeczą oczywistą, że posiada co najmniej jedno.

55. Twierdzenie to posiada wielką doniosłość w dalszych częściach rachunku różniczkowego. Możemy sformułować je co najmniej ogólniej, a mianowicie: jeżeli A i B są punktami na wykresie funkcji, wówczas między A i B znajduje się na wykresie zawsze taki punkt P , w którym styczna jest równoległa do odcinka AB (rys. 23).



Rys. 23

56. Drugie sformułowanie twierdzenia daje się sprowadzić do pierwszego. Jeżeli krzywa jest wykresem $f(x)$, a wzniesienie siecznej AB jest m , mamy

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=m,$$

gdzie a i b są odcięte punktów A i B . Oznaczmy przez $F(x)$ funkcję $f(b)-f(x)-(b-x)m$. $F(x)$ staje się 0, gdy $x=a$ lub $x=b$. Zatem $F'(x)$ staje się 0 dla pewnej wartości x , zawartej pomiędzy a i b . Lecz $F'(x) = -f'(x) + m$.

Zatem $f'(x) = m$ dla pewnej wartości x , zawartej między a i b .

Otrzymujemy zatem *

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x)$$

dla pewnej wartości x , zawartej między a i b .

57. Twierdzenie to daje się przedstawić również w następującej postaci

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x'),$$

gdzie x' jest liczbą, zawartą między x i $x+h$. Wzór

* O koniecznym ograniczeniu tego twierdzenia patrz dod. II.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \doteq f'(x),$$

podany w § 46, wyraża w przybliżeniu to, co powyższy wzór daje zupełnie ściśle.

PRZYKŁADY.

1. Znaleźć wartość x , czyniącą zadość równaniu

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(x),$$

(I) kiedy $f(x) = x^2$, (II) kiedy $f(x) = x^3$.

2. Podać interpretację równania

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(x),$$

wykazując, że średnia prędkość poruszającego się ciała w ciągu pewnego okresu czasu równa się prędkości tego ciała w pewnym momencie, zawartym w danym odstępzie czasu.

Jeżeli ciało przebywa drogę s cm. w ciągu t sek. i $s = at^2$, gdzie $a = \text{const.}$, moment ten dzieli dany odstęp czasu na równe części. Jeżeli $s = \beta t^3$ oraz $\beta = \text{const.}$, moment ten przypada zawsze później od momentu, przypadającego w środku danego odstępu czasu. Dowieść tego.

3. Twierdzenie, że, jeżeli $f'(x)$ staje się $=0$ przy $x=a$ i $x=b$, to $f'(x)$ staje się $=0$ przy pewnej pośredniej wartości x , może znaleźć czasem zastosowanie przy wyznaczaniu liczby i miejsca pierwiastków rzeczywistych równań. Np. równanie $2x^3 + 3x^2 + 6x - 10 = 0$ posiada jeden tylko pierwiastek rzeczywisty. Dowieść tego.

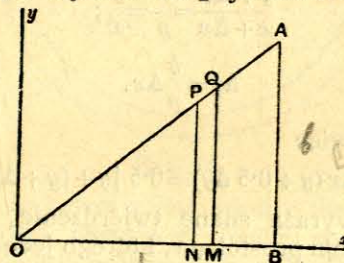
4. Dowieść, że równanie $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, w którym p, q, r nie zależą od x , nie może posiadać więcej od jednego pierwiastku rzeczywistego, jeżeli $p^2 < 3q$.

ROZDZIAŁ IV.

O CAŁKOWANIU.

58. Rozpatrzmy kilka znanych twierdzeń, dotyczących mierzenia figur.

(a) Jeżeli jeden bok trójkąta posiada b jednostek długości, prostopadła zaś, poprowadzona do tego boku z przeciwległego wierzchołka, p jednostek długości, wówczas pole trójkąta wynosi $0.5bp$ jednostek powierzchni.



Rys. 24.

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny OAB (rys. 24). Niech OB i AB posiadają b , względnie p jednostek długości. Obierzmy O za początek współrzędnych, a OB za oś x -ów. Niech x, y będą współrzędnymi jakiegokolwiek punktu P, leżącego na OA, PN — rzędną punktu P; niech wreszcie pole trójkąta OPN wynosi z jednostek powierzchni. Wówczas $z = 0.5xy$.

Ponieważ trójkąty OAB i OPN są podobne, mamy

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{p},$$

a zatem
$$z = 0.5 \frac{b}{p} x^2.$$

Równanie to wyraża z jako funkcję x . Ponieważ b i p nie zależą od x , przeto

$$\frac{dz}{dx} = \frac{b}{p} x = y.$$

Gdy P przesunie się wzdłuż OA do Q , tak że x otrzyma przyrost Δx , y zmieni się na $y + \Delta y$ oraz z na $z + \Delta z$. Pole trapezu $PNMQ$ wynosi Δz jednostek powierzchni. Mamy więc

$$\Delta z = 0.5 \frac{b}{p} (x + \Delta x)^2 - 0.5 \frac{b}{p} x^2 = \frac{b}{p} \Delta x (x + 0.5 \Delta x).$$

Lecz
$$\frac{y + \Delta y}{x + \Delta x} = \frac{b}{p} = \frac{y}{x};$$

zatem
$$\Delta y = \frac{b}{p} \Delta x.$$

Otrzymamy więc

$$\Delta z = \Delta x (y + 0.5 \Delta y) = 0.5 \{y + (y + \Delta y)\} \Delta x.$$

Wzór ten wyraża znane twierdzenie, że pole trapezu $PNMQ$ równa się połui prostokąta, którego jeden bok $= MN$, drugi zaś $=$ połowie sumy PN i QM .

Zauważmy, że wartość Δz zawarta jest pomiędzy $y \Delta x$ oraz $(y + \Delta y) \Delta x$.

(b) Niech promień koła ma r jednostek długości. Wówczas obwód koła wynosi $2\pi r$ jednostek długości, gdzie π oznacza pewną liczbę, w przybliżeniu $= 3.1416$. Pole koła wynosi πr^2 jednostek powierzchni. *

* Pomiar koła omawiamy w dodatku V.

Niech

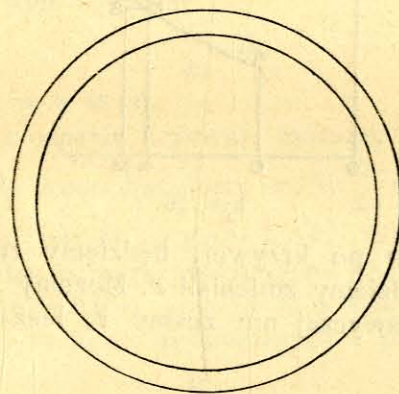
$$z = \pi r^2;$$

zatem

$$\frac{dz}{dr} = 2\pi r.$$

Jeżeli promienie dwóch kół współśrodkowych (rys. 25) wynoszą odpowiednio r i $r + \Delta r$ jednostek długości, to pole, zawarte między temi kołami, wynosi $\pi \{(r + \Delta r)^2 - r^2\}$ jednostek powierzchni. Zmianie r na $r + \Delta r$ odpowiada zmiana z na $z + \Delta z$, i oczywiście

$$\Delta z = 2\pi (r + 0.5 \Delta r) \Delta r,$$

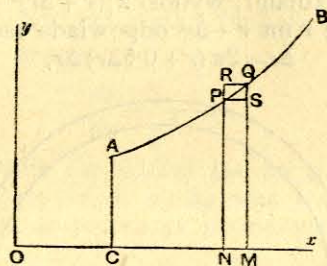


Rys. 25.

czyli że wartość Δz zawarta jest między $2\pi r \Delta r$ i $2\pi (r + \Delta r) \Delta r$. Zatem wartość pola omawianej figury zawarta jest między wartościami pół dwuch prostokątów, z których jeden ma boki równe odpowiednio różnicy promieni oraz obwodowi jednego koła, drugi zaś — różnicy promieni oraz obwodowi drugiego koła.

59. Dotychczas chodziło o różniczkowanie danych funkcji; w wielu jednak zastosowaniach rachunku nieskończonościowego znamy pochodną wpierw niż funkcję. Weźmy kilka przykładów.

(a) Pole, ograniczone krzywą. Rozpatrzmy krzywą w rodzaju AB na rys. 26. Niech x i y będą współrzędnymi punktu P na krzywej. Poprowadźmy rzędną PN . Pole figury $ACNP$, ograniczonej przez AC , oś x , PN oraz łuk AP , niech wynosi z jednostek powierzchni. Przesu-



Rys. 26.

wając punkt P po krzywej, będziemy zmieniali x i y , a zarazem będziemy zmieniali z . Możemy uważać z jako funkcję x . Zazwyczaj nie znamy z , lecz możemy znaleźć $\frac{dz}{dx}$.

Jeżeli P przesuniemy do Q , N przesunie się do M . Długość odcinka NM możemy oznaczyć przez Δx ; podobnie długość rzędnej QM przez $y + \Delta y$. Pole $ACNP$ otrzyma przyrost $PNMQ$; oznaczmy ten przyrost przez Δz . Na danym rysunku* wartość tego przyrostu jest mniejsza od pola prostokąta $QMN R$, ale większa od pola prostokąta $PNMS$; pola zaś tych prostokątów są odpowiednio $(y + \Delta y)\Delta x$ i $y\Delta x$.

Zatym wartość Δz zawarta jest między $y\Delta x$ i $(y + \Delta y)\Delta x$,

* Na rys. rzędna punktu Q jest największa, punktu zaś P najmniejsza ze wszystkich rzędnych punktów łuku PQ . Bardziej ogólny przypadek rozważamy w rozdziale V, § 75.

zaś $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ między y i $y + \Delta y$. Kiedy Δx dąży do zera, Δy dąży również do zera, i stosunek $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ dąży do wartości granicznej y . Lecz, jeżeli $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ dąży do pewnej granicy, kiedy Δx dąży do zera, granicą tą jest pochodna $\frac{dz}{dx}$.

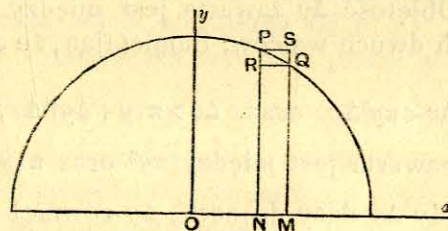
Mamy więc równanie

$$\frac{dz}{dx} = y,$$

zupełnie jak w § 58 (a).

Znając równanie krzywej, możemy wyrazić y przez x , a przez to samo będziemy mieli $\frac{dz}{dx}$ wyrażone przez x .

(b) Objętość części kuli. Weźmy część kuli, zawartą między dwiema równoległymi płaszczyznami, z których jedna przechodzi przez środek kuli. Obieramy środek kuli za początek współrzędnych i prowadzimy oś x



Rys. 27.

prostopadle do wymienionych płaszczyzn. Powierzchnię kuli otrzymamy przez obrót półkola dookoła średnicy. Niech P będzie jednym z punktów półkola (rys. 27), wziętym na prawo od Oy ; niech PN będzie rzędną punktu P .

W przecięciu kuli z płaszczyzną, przechodzącą przez Oy prostopadle do Ox , otrzymujemy koło; podobnie otrzymujemy koło w przecięciu kuli z płaszczyzną, przechodzącą przez PN prostopadle do Ox . Niech x i y będą współrzędnymi punktu P , i niech część kuli, zawarta między obu wymienionymi płaszczyznami, posiada objętość v . Wówczas v jest funkcją x . Nie znamy v , lecz możemy znaleźć $\frac{dv}{dx}$.

Gdy P zostanie przesunięte do Q wzdłuż półkola, x zmieni się na $x + \Delta x$, y na $y + \Delta y$, zaś v na $v + \Delta v$. Zauważmy, że dodatniemu Δx odpowiada ujemne Δy . Część kuli, zawarta między dwiema płaszczyznami, które przechodzą przez PN i QM prostopadle do Ox , stanowi właśnie przyrost objętości Δv .

Wykreślmy prostokąty $PNMS$ i $QMNR$. Przy obrocie figury każdy z nich wykreśli walec. Walec, wykreślony przez $PNMS$ posiada podstawę πy^2 i wysokość Δx ; walec, wykreślony przez $QMNR$, posiada podstawę $\pi (y + \Delta y)^2$ i wysokość Δx . Objętość Δv zawarta jest między wartościami objętości tych dwóch walców. Pamiętając, że Δy jest ujemne, mamy

$$\Delta v < \pi y^2 \Delta x \quad \text{oraz} \quad \Delta v > \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x,$$

a zatem $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ zawarte jest między πy^2 oraz $\pi (y + \Delta y)^2$.

Lecz, gdy Δx dąży do zera, Δy również dąży do zera, zaś $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ dąży do granicy $\frac{dv}{dx}$.

$$\text{Stąd} \quad \frac{dv}{dx} = \pi y^2.$$

Jeżeli promień kuli posiada a jednostek długości, wówczas $x^2 + y^2 = a^2$.

$$\text{Zatym} \quad \frac{dv}{dx} = \pi (a^2 - x^2),$$

czyli otrzymujemy $\frac{dv}{dx}$ jako funkcję x .

60. Przykładów tych wystarczy do wykazania doniosłości następującego zadania: znając pochodną, znaleźć samą funkcję.

Najpierw założmy, że pochodna szukanej funkcji x równa się zeru przy wszystkich wartościach x . Oznaczmy szukaną funkcję przez y .

$$\text{Mamy więc} \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

dla wszystkich wartości x . Wzniesienie wykresu tej funkcji powinno zatem wszędzie równać się zeru. Lecz, gdyby y wzrastało przy pewnym punkcie, wznesienie wykresu funkcji w tym punkcie byłoby dodatnie; gdyby natomiast y się zmniejszało, wznesienie wykresu funkcji w tym punkcie byłoby ujemne. Z założenia wynika, że y ani się zwiększa, ani zmniejsza. Jednym słowem, y posiada wartość stałą — jest niezależne od x .

Możemy wniosek ten wyrazić, pisząc $y = C$, gdzie C oznacza wielkość, niezależną od x . Równaniu $\frac{dy}{dx} = 0$ uczynimy zadość, zakładając $y = C$, jakkolwiek wartość (niezależną od x) będzie posiadało C ; i tylko w ten sposób możemy uczynić mu zadość.

Ponieważ na C możemy założyć jakkolwiek wartość stałą, nazywamy je często stałą dowolną.

Założmy teraz, że pochodna $= 1$, i oznaczmy samą funkcję, jak wyżej, przez y . Mamy więc

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

dla wszystkich wartości x . Jednym ze sposobów zadośćuczynienia temu równaniu jest założenie $y=x$; lecz nie można powiedzieć, że jest to sposób jedyny. Jeżeli to możliwe, niech inna funkcja y , odmienna od x , czyni zadość równaniu. Możemy oznaczyć przez z różnicę $y-x$. Będziemy tedy mieli

$$y=x+z, \text{ i } \frac{dy}{dx}=1.$$

Lecz

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{dz}{dx};$$

a więc

$$\frac{dz}{dx}=0.$$

Wynika stąd, że z musi być wielkością stałą. Jak poprzednio, jest to stała dowolna; oznaczając ją przez C , otrzymamy

$$y=x+C.$$

Jako trzeci przykład, obierzmy pochodną $=2x$. Zatem

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

dla wszystkich wartości x . Równaniu temu uczynimy zadość, zakładając

$$y=x^2,$$

podobnie zaś jak w poprzednim przykładzie, rozwiązanie ogólne będzie wyrażone w formie

$$y=x^2+C,$$

gdzie C jest stałą dowolną.

W drugim i trzecim przykładzie poznajemy w danej wartości $\frac{dy}{dx}$ otrzymane przez nas poprzednio pochodne pewnych funkcji. Rozwiązanie więc zagadnienia dokonywamy w dwóch kolejnych czynnościach: (1) rozpoznajemy funkcję, której pochodną jest dana pochodna i (2) dodajemy stałą dowolną do tej funkcji.

61. Gdy w funkcji $f(x)$ poznajemy pochodną pewnej funkcji $\psi(x)$, powiadamy, że całkujemy funkcję $f(x)$, a $\psi(x)$ nazywamy całką $f(x)$. Dla oznaczenia całki $f(x)$ piszemy

$$\int f(x) dx.$$

Całka $f(x)$ oznacza zatem funkcję, której pochodną jest $f(x)$. Całokształt metod znajdowania całek tworzy rachunek całkowy.

62. Jeżeli funkcję $F(x)$ poznajemy jako taką, której pochodna jest $f(x)$, piszemy

$$\int f(x) dx = F(x)$$

bez dodawania stałej. Lecz, gdy chcemy wiedzieć, jakie funkcje wogóle mają tę samą pochodną $f(x)$, a to w celu wybrania właściwej z pośród nich przy rozwiązywaniu pewnego zagadnienia, piszemy całkę w formie $F(x)+C$. W następnym rozdziale zobaczymy, jak się wyznacza C w poszczególnych przypadkach.

63. Podejmujemy zagadnienie całkowania danej funkcji, nie myśląc na razie o żadnych zastosowaniach.

Różniczkowanie jakiejkolwiek funkcji jest równocześnie całkowaniem innej. Np. wyrażenia

$$\frac{d(x^2)}{dx}=2x \text{ i } \int 2x dx = x^2$$

oznaczają w odmienny sposób jedno i to samo.

Byłoby jednak bezcelowe różniczkowanie wszelkich możliwych do pomyślenia funkcji i spisywanie rezultatów dla otrzymania kompletnej tablicy całek. Uczynimy to jedynie dla pewnych przypadków typowych, zużytkowując przytym reguły rachunku różniczkowego. Patrz §§ 21 i 25 w rozdziale II.

(I) Z pierwszej reguły otrzymujemy

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx.$$

(II) Druga reguła daje nam

$$\int \{f(x) + F(x)\} dx = \int f(x) dx + \int F(x) dx;$$

ogólniej możemy powiedzieć, że całka sumy kilku funkcji równa się sumie całek tych funkcji.

64. Rozpatrzmy najpierw, do czego prowadzi nas wzór

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}.$$

Oczywiście, daje on nam

$$\int nx^{n-1} dx = x^n,$$

albo z uwzględnieniem reguły (I)

$$\int x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n}.$$

Zastępując w tym wzorze n przez $n+1$, otrzymamy

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}. \quad (\text{A})$$

Wzór ten jest słuszny dla wszystkich wartości n dodatnich i ujemnych, całkowitych i ułamkowych, z wyjątkiem $n = -1$. Wzór ten jest pierwszy w szeregu wzorów zasadniczych, gdyż z jego pomocą można znaleźć wiele innych całek.

Kombinując wzór (A) z ustalonymi już regułami, widzimy, że możemy dokonać całkowania każdej funkcji, która daje się przedstawić w postaci sumy wyrazów o kształcie ax^n , gdzie a jest wielkością stałą, n zaś dowolną liczbą dodatnią lub ujemną, całkowitą lub ułamkową z wyjątkiem -1 .

Całkę $\int x^{-1} dx$ znajdziemy w rozdziale VI.

PRZYKŁADY.

Scałkować następujące funkcje (1)–(7):

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2 + 3x - 1, & (2) \quad & 1 + 3x - x^2, & (3) \quad & \frac{1}{\sqrt{x}}, & (4) \quad & \frac{1}{x^2}, \\ (5) \quad & -\frac{1}{x^2} + 2\sqrt{x}, & (6) \quad & \frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}, & (7) \quad & \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Rezultat, otrzymany w każdym z tych przykładów, może być sprawdzony przez różniczkowanie.

65. Sprowadzenia całek do form zasadniczych dokonuje się w wielu przypadkach przez zmianę zmiennej niezależnej i zastosowanie reguły różniczkowania funkcji (§ 25).

Weźmy przykład

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx.$$

Mamy znaleźć funkcję y , czyniącą zadość równaniu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Zakładając $z = (x+1)$, znajdziemy funkcję z , której pochodną względem z jest $\frac{1}{z^2}$, czyli $\frac{1}{(x+1)^2}$. Funkcją taką jest $-\frac{1}{z}$. Postaramy się znaleźć y jako funkcję z .

$$\text{Mamy} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{z^2}, \quad \frac{dz}{dx} = 1;$$

$$\text{zatem} \quad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{z^2},$$

$$\text{i} \quad y = \int \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{z} = -\frac{1}{x+1},$$

czyli

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1}.$$

66. Jako przykład ogólniejszy obierzemy

$$\int (ax+b)^n dx,$$

gdzie a i b nie zależą od x .

Niech $y = \int (ax+b)^n dx, \quad z = ax+b;$

mamy $\frac{dy}{dx} = (ax+b)^n = z^n, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = a.$

Stąd $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{a} z^n,$

oraz $y = \int \frac{1}{a} z^n dz = \frac{z^{n+1}}{a(n+1)},$

albo $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)},$

przy założeniu, że n nie równa się -1 .

67. Drugi pouczający przykład:

$$\int x \sqrt{x^2+1} dx.$$

Niech $y = \int x \sqrt{x^2+1} dx, \quad z = x^2+1;$

mamy $\frac{dy}{dx} = x \sqrt{x^2+1} = x z^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = 2x.$

Stąd $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2x} x z^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}},$

oraz $y = \frac{1}{2} \int z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{3},$

2

albo

$$\int x \sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}}.$$

68. W ogólności niech

$$y = \int f(x) dx,$$

i niech z będzie funkcją x . Mamy

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx}.$$

Stąd $\frac{dy}{dz} = \frac{f(x)}{\frac{dz}{dx}} = f(x) \frac{dx}{dz}.$

Jeżeli $f(x) \frac{dx}{dz}$ umiemy wyrazić jako funkcję z , dajmy na to $F(z)$, otrzymamy

$$y = \int F(z) dz.$$

PRZYKŁADY.

Scalkować względem x następujące funkcje (1)—(8):

(1) $\frac{1}{(1-x)^2},$ (2) $\frac{1}{(1-2x)^3},$ (3) $\sqrt{2+3x},$ (4) $\sqrt{2-3x},$
 (5) $\frac{1}{\sqrt{2-3x}},$ (6) $x \sqrt{1-x^2},$ (7) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$ (8) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

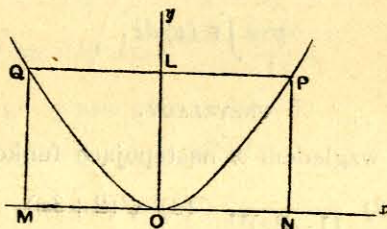
Przykłady (1)—(5) lepiej rozwiązywać przez odpowiednie podstawienie, jak to zostało objaśnione w § 66. Ważna jest metoda, a nie wzór. Ten, kto raz pojął metodę, nie potrzebuje wzorów. Otrzymane rezultaty można we wszystkich przypadkach sprawdzić przez różniczkowanie; dlatego przytaczanie rozwiązań jest zbyteczne.

ROZDZIAŁ V.

NIKTÓRE ZASTOSOWANIA RACHUNKU
CAŁKOWEGO.

69. Rozpatrzmy przykład wyznaczenia pola, ograniczonego linią krzywą (§ 59a).

Niech krzywa będzie wykresem funkcji $y = x^2$ i niech ją przecina prosta PQ , równoległa do osi x (rys. 28).



Rys. 28.

Niech (x, y) będą spólrzędnymi punktu P . Możemy znaleźć pole figury, ograniczonej przez łuk OP , oś x i rzędną PN . Jeżeli pole to wynosi z jednostek powierzchni, to,

jak wiemy, $\frac{dz}{dx} = y = x^2$.

Stąd

$$z = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

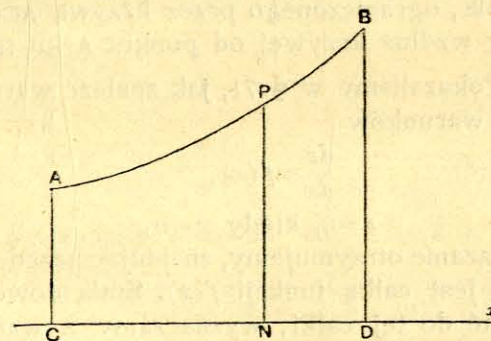
gdzie C nie zależy od x . Wzór ten jest słuszny dla wszelkich wartości x . Przez przeniesienie wzdłuż krzywej punk-

tu P do O , zmniejszymy x , zarówno jak z , do zera. Stąd wypada, że C musi być zerem. Mamy więc

$$z = \frac{1}{3}x^3.$$

70. Ponieważ długość PN wynosi x^2 jednostek długości, gdy ON wynosi x jednostek długości, wypada, że pole, ograniczone przez łuk OP , prostą ON i prostą PN , stanowi $\frac{1}{3}$ pola prostokąta $ONPL$. Zatem pole, ograniczone przez łuk OP , prostą PL i prostą OL , stanowi $\frac{2}{3}$ pola tegoż prostokąta. Ostatecznie więc pole, ograniczone przez łuk QOP i prostą PQ , wynosi $\frac{2}{3}$ pola prostokąta $PQMN$.

71. Weźmy rzecz ogólniej: niech AC i BD będą dwie rzędne punktów krzywej (rys. 29), PN — rzędna, zawarta pomiędzy tamtymi, a — odcięta punktu A , b — odcięta punktu B , wreszcie x, y spólrzędne punktu P . Niech po-



Rys. 29.

le, ograniczone przez krzywą, rzędne AC i BD i oś x , wynosi S jednostek powierzchni, i niech pole, ograniczone

przez krzywą, rzędne AC i PN i oś x , wynosi z jednostek powierzchni. Podobnie, jak w § 59(a), mamy

$$\frac{dz}{dx} = y.$$

Niech $y = f(x)$ będzie równaniem krzywej. Mamy wtedy

$$z = \int f(x) dx + C,$$

gdzie C nie zależy od x . Niech $\int f(x) dx = F(x)$, czyli $F(x)$ niech będzie całką $f(x)$. Wtedy $z = F(x) + C$. Lecz, jeżeli P porusza się wzdłuż krzywej ku A , z dąży do zera, czyli musimy mieć

$$F(a) + C = 0 \quad \text{albo} \quad C = -F(a).$$

$$\text{Zatym} \quad z = F(x) - F(a).$$

Kiedy $x = b$, z przybiera wartość S , a zatym

$$S = F(b) - F(a).$$

Zauważmy, że obliczamy tutaj pole, ograniczone przez krzywą ACDB, rozpatrując je jako przypadek szczególny wartości pola, ograniczonego przez krzywą ACNP, gdy P porusza się wzdłuż krzywej od punktu A ku B .

72. Pokazaliśmy w § 71, jak znaleźć wartość z , kiedy $x = b$, z warunków

$$(I) \quad \frac{dz}{dx} = f(x),$$

$$(II) \quad z = 0, \text{ kiedy } x = a.$$

Rozwiązanie otrzymujemy, znajdując przedewszystkim $F(x)$, która jest całką funkcji $f(x)$. Stałą dowolną, którą należy dodać do tej całki, wyznaczamy z warunku (II). Z danych tych znajdujemy z jako równe $F(x) - F(a)$. Nie ma nic dowolnego w wyrażeniu na z . Ostatecznie wartość szukaną znajdujemy, podstawiając b na miejsce x . Związek owej poszukiwanej wartości z z całką nieokreśloną oraz

poszczególnymi wartościami a i b zmiennej x wyrażamy, pisząc tę wartość w formie $\int_a^b f(x) dx$. Wyrażenie to nosisi nazwę całki określonej funkcji $f(x)$ względem x pomiędzy niższą granicą a i wyższą granicą b . Oznacza ono wartość, odpowiadającą $x = b$, takiej funkcji, która staje się równa zero przy $x = a$ i której pochodna względem x równa się $f(x)$ dla wszystkich wartości x , zawartych między a i b (włącznie).

Dla odróżnienia całkę $\int f(x) dx$ nazywamy często całką nieokreśloną funkcji $f(x)$.

PRZYKŁADY.

Znaleźć wartości następujących całek określonych (1)—(8):

$$(1) \int_0^1 x dx, \quad (2) \int_0^1 x^2 dx, \quad (3) \int_0^2 (x^2 + x) dx, \quad (4) \int_{-1}^1 x dx, \\ (5) \int_{-1}^1 x^2 dx, \quad (6) \int_0^1 (x^2 - x) dx, \quad (7) \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx, \quad (8) \int_{0.001}^1 \frac{1}{x^2} dx.$$

Rozwiązania:

$$(1) \frac{1}{2}, \quad (2) \frac{1}{3}, \quad (3) \frac{14}{3}, \quad (4) 0, \\ (5) \frac{2}{3}, \quad (6) -\frac{1}{6}, \quad (7) \frac{1}{2}, \quad (8) 99.$$

73. Następujący przykład ma związek z przybliżonym obliczaniem całek *.

Niech P , R będą dwa punkty paraboli, której oś jest równoległa do osi y ; PL , RN ich rzędne; M środek odcinka LN ; MQ rzędna punktu Q paraboli (rys. 30). Możemy w następujący sposób oznaczyć spólrzędne punktów P , Q i R : (P) $a - h$, y_1 ; (Q) a , y_2 ; (R) $a + h$, y_3 .

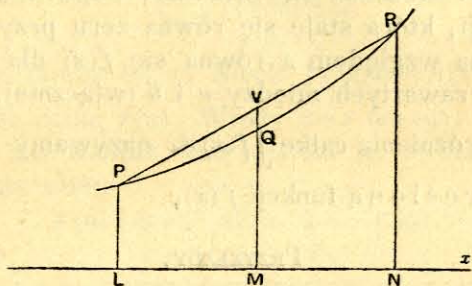
* Patrz niżej rozdział X.

Jeżeli równanie paraboli jest

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

i jeżeli pole, ograniczone przez łuk PR , rzędne PL i RN oraz oś x , wynosi S jednostek powierzchni, wówczas

$$S = \int_{a-h}^{a+h} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) dx.$$



Rys. 30.

Stąd

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3} \alpha \{ (a+h)^3 - (a-h)^3 \} + 0.5 \beta \{ (a+h)^2 - (a-h)^2 \} + \gamma \{ (a+h) - (a-h) \} \\ &= \frac{1}{3} \alpha (6a^2h + 2h^3) + 0.5 \beta 4ah + \gamma 2h = 2h (\alpha a^2 + \beta a + \gamma) + \frac{2}{3} \alpha h^3. \end{aligned}$$

Lecz

$$\alpha a^2 + \beta a + \gamma = y_2, \text{ oraz}$$

$$y_1 + y_3 - 2y_2 = \alpha \{ (a-h)^2 + (a+h)^2 - 2a^2 \} + \beta (a-h + a+h - 2a) = 2\alpha h^2$$

(por. przykł. 1 na str. 49).

$$\text{Zatym } S = 2hy_2 + \frac{1}{3} h(y_1 + y_3 - 2y_2) = \frac{1}{3} h(y_1 + y_3 + 4y_2).$$

74. Oznaczmy pole trapezu $PLNR$ przez T . Będziemy mieli

$$T = 0.5 \cdot 2h (y_1 + y_3) = h(y_1 + y_3),$$

oraz
$$T - S = \frac{2}{3} h(y_1 + y_3 - 2y_2) = \frac{2}{3} 2h \left\{ \frac{y_1 + y_3}{2} - y_2 \right\}.$$

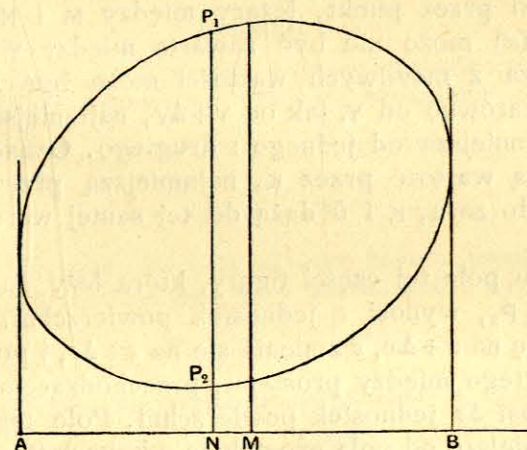
Spółrzędne punktu V — środka odcinka PR — są a , $0.5(y_1 + y_3)$, długość zaś VQ wynosi $0.5(y_1 + y_3) - y_2$. Pole odcinka paraboli, ograniczonego łukiem PQR i cięciwą PR , wynosi $T - S$ jednostek powierzchni. Zatym pole tego odcinka

stanowi $\frac{2}{3}$ pola prostokąta, którego boki równają się odpowiednio LN i VQ .

Rezultat ten co do pola odcinka parabolicznego otrzymaliśmy przy $\alpha > 0$, innymi słowy, gdy parabola zwrócona była wklęsłością ku górze. Pozostaje on jednak słuszny i dla przypadku, kiedy parabola zwrócona jest wklęsłością ku dołowi; wtedy bowiem

$$S - T = \frac{2}{3} h(2y_2 - y_1 - y_3).$$

75. Wogóle, gdy chcemy znaleźć pole figury, winniśmy czynić, jak następuje: niech prosta, równoległa do osi y , przecina obwód figury w dwóch punktach P_1 i P_2 .



Rys. 31.

Niech y_1 i y_2 będą rzędnymi tych punktów, i niech znaczek 1 zawsze stosuje się do punktu, położonego wyżej, znaczek zaś 2 — do punktu, położonego niżej. Wtedy $y_1 > y_2$. Napiszmy $Y = y_1 - y_2$. Niech prosta P_1P_2 przecina

w punkcie N jakąkolwiek prostą, równoległą do osi x . Wówczas przy przesuwaniu prostej P_1P_2 i zachowaniu jej niezmiennego kierunku otrzymamy dwa położenia graniczne punktu N , mianowicie w punktach A i B (rys. 31). Cała figura będzie tedy leżała między dwiema prostymi, poprowadzonymi przez A i B równoległe do osi y . Niech a, x, b będą odciętami punktów A, N, B . Wyobraźmy sobie, że N porusza się wzdłuż prostej AB od A do B . Powiemy, że Y jest funkcją x , dajmy na to $f(x)$.

Gdy N przesunie się do M , x zmieni się na $x+\Delta x$, Y zaś na $Y+\Delta Y$, przyczym ΔY może być albo dodatnie albo ujemne. Gdy ruchoma prosta, równoległa do osi y , przechodzi przez punkt, leżący między M i N , wartość funkcji $f(x)$ może nie być zawarta między Y a $Y+\Delta Y$. Największa z możliwych wartości może być cokolwiek większa zarówno od Y , jak od $Y+\Delta Y$, najmniejsza zaś cokolwiek mniejsza od jednego i drugiego. Oznaczmy ową największą wartość przez K , najmniejszą przez k . Gdy Δx dąży do zera, K i k dążą do tej samej wartości granicznej Y .

Niech pole tej części figury, która leży na lewo od prostej P_1P_2 , wynosi z jednostek powierzchni. Kiedy x zmienia się na $x+\Delta x$, z zmienia się na $z+\Delta z$, i pole skrawka, zawartego między prostymi, przechodzącymi przez N i M , wynosi Δz jednostek powierzchni. Pole tego skrawka jest mniejsze od pola prostokąta o bokach K i Δx , większe zaś od pola prostokąta o bokach k i Δx . Zatem Δz zawarte jest między $K\Delta x$ oraz $k\Delta x$, zaś $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ — między K i k .

Jeżeli Δx dąży do zera, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ dąży do wartości granicznej Y ; mamy więc

$$\frac{dz}{dx} = Y = y_1 - y_2.$$

Niech pole całej figury wynosi S . Wówczas S jest wartością z , gdy $x=b$; kiedy zaś $x=a$, z równa się zeru.

Stąd
$$S = \int_a^b (y_1 - y_2) dx.$$

Zauważmy, że rozumowanie powyższe stosuje się do pól ograniczonych przez krzywą i oś x (§59 (a)). W tym przypadku $y_2=0$; zamiast y_1 możemy wprost napisać y .

PRZYKŁADY.

1. Zastosujmy metodę § 75 do znalezienia pola trójkąta. W każdej z figur (rys. 32, 33) oznaczamy długości AB , OD , ON , P_1P_2 przez b, p, x, Y i mamy $\frac{Y}{x} = \frac{b}{p}$. Zatem

$$S = \int_0^p \frac{b}{p} x dx = \frac{1}{2} bp.$$

2. Dowieść, że pole odcinka koła o promieniu r , gdy cięciwa leży w odległości a od środka koła, wynosi

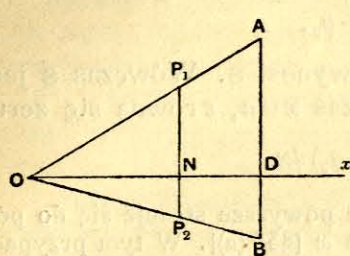
$$S = \int_a^r 2\sqrt{(r^2 - x^2)} dx.$$

[Tę całkę nieokreśloną znajdziemy w rozdziale VIII.]

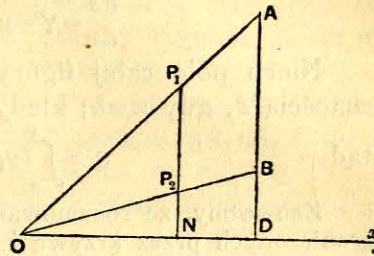
3. Narysować wykres funkcji $y=x(1-x)$ i znaleźć pole, ograniczone krzywą i osią x . [Rozw.: $\frac{1}{6}$ jedn. powierzchni].

4. Uczynić to samo dla funkcji $y=x(1-2x)^2$. [Rozw.: $\frac{1}{48}$ jedn. powierzchni].

5. Narysować wykres funkcji $x(1-x)(2-x)$ i znaleźć pole dwóch części figury, zawartych każda między krzywą i osią x . [Rozw.: w obu razach 0,25 jedn. powierzchni.]



Rys. 32.



Rys. 33.

OBJĘTOŚCI BRYŁ.

76. Znaleźliśmy w § 59(b), że, gdy odległość między dwiema równoległymi płaszczyznami, z których jedna przechodzi przez środek kuli, wynosi x jednostek długości, a objętość części kuli, zawartej między temi płaszczyznami, wynosi v jednostek objętości, wówczas

$$\frac{dv}{dx} = \pi(a^2 - x^2),$$

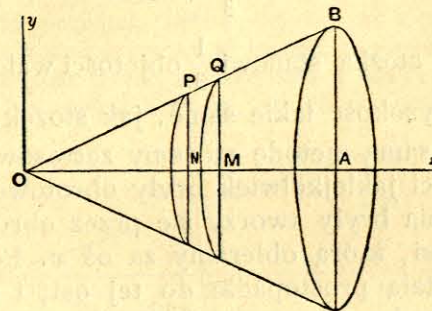
gdzie przez a oznaczamy promień kuli. Pozatym $v=0$, kiedy $x=0$.

Stąd
$$v = \pi \left(a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right).$$

Zakładając $x=a$, otrzymamy objętość połowy kuli, a mianowicie $\frac{2}{3}\pi a^3$ jednostek objętości. Objętość całej kuli wyniesie $\frac{4}{3}\pi a^3$ jednostek objętości.

77. To samo rozumowanie pozwoli nam znaleźć obję-

tość stożka. Niech O będzie wierzchołek stożka, a jego wysokość i b promień podstawy. Obierzmy oś stożka za oś x . Poprowadźmy przez jakikolwiek punkt N na tej osi płaszczyznę, prostopadłą do osi. W przecięciu otrzymamy koło. Niech PN będzie jego promień, zaś x, y współ-



Rys. 24.

rzędne punktu P . Pole tego koła wynosi πy^2 jednostek powierzchni. Niech objętość części stożka, zawartej między wierzchołkiem a tym przecięciem, wynosi v jednostek objętości. Gdy x się zmienia na $x+\Delta x$, v zmienia się na $v+\Delta v$, i zupełnie podobnie, jak w § 59(b), znajdujemy, że Δv zawarte jest pomiędzy

$$\pi y^2 \Delta x \text{ a } \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x.$$

Stąd
$$\frac{dv}{dx} = \pi y^2.$$

Lecz
$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a},$$

a zatem
$$\frac{dv}{dx} = \pi \frac{b^2}{a^2} x^2;$$

również
$$v=0, \text{ kiedy } x=0. \text{ Zatem}$$

$$v = \frac{1}{3} \pi \frac{b^2}{a^2} x^3.$$

Jeżeli objętość stożka wynosi v jednostek objętości, v jest wartością v , odpowiadającą $x=a$, czyli

$$v = \frac{1}{3} \pi b^2 a.$$

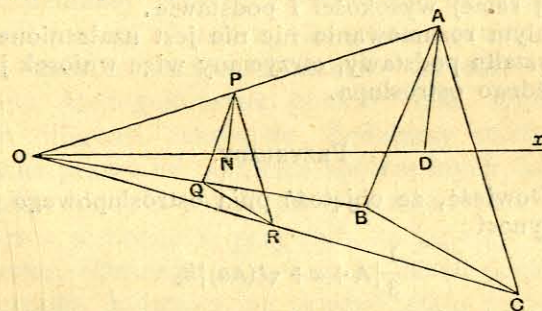
Objętość stożka stanowi $\frac{1}{3}$ objętości walca, mającego podstawę i wysokość takie same, jak stożek.

78. Tę samą metodę możemy zastosować do znalezienia objętości jakiejkolwiek bryły obrotowej. Załóżmy, że powierzchnia bryły tworzy się przez obrót linii krzywej dokoła osi, którą obieramy za oś x . Poprowadźmy płaszczyznę stałą prostopadle do tej osi, i niech płaszczyzna, przechodząca przez punkt (x, y) na krzywej, przechodzi również prostopadle do osi x . Niech objętość części bryły, zawartej między dwiema temi płaszczyznami, wynosi v jednostek objętości. Wtedy v jest funkcją x , i $\frac{dv}{dx} = \pi y^2$.

79. Metodę powyższą można uogólnić i stosować do jakiejkolwiek bryły. Niech jedna płaszczyzna stała i druga ruchoma przechodzą prostopadle do osi x , i niech x będzie odcinkiem punktu, w którym płaszczyzna ruchoma przecina tę oś. Niech pole przekroju bryły przez płaszczyznę ruchomą wynosi Z jednostek powierzchni, objętość zaś części bryły, zawartej między wymienionymi dwiema płaszczyznami, wynosi v jednostek objętości. Wtedy Z i v są funkcjami x , i mamy $\frac{dv}{dx} = Z$. Jeżeli umiemy wyrazić Z

jako funkcję x oraz scałkować tę funkcję, możemy znaleźć v .

80. Dla przykładu rozpatrzmy objętość ostrosłupa o trójkątnej podstawie. Niech pole podstawy wynosi B jednostek powierzchni, długość zaś prostopadłej OD , poprowadzonej z wierzchołka O do podstawy, wynosi p jednostek długości. Obierzmy O za początek współrzędnych, zaś OD za oś x (rys. 35). Przez jakikolwiek punkt N na osi x poprowadźmy płaszczyznę, prostopadłą do osi i przecinającą krawędzie ostrosłupa OA , OB , OC w punktach P , Q , R . Niech pole trójkąta PQR



Rys. 35.

posiada wartość, oznaczoną wyżej przez Z , co odpowiada $ON=x$. Objętość ostrosłupa o wierzchołku O i podstawie PQR będzie wtedy tym, cośmy oznaczyli przez v . Otrzymamy więc równanie

$$\frac{dv}{dx} = Z.$$

Trójkąty PQR i ABC są podobne, pola zaś figur podobnych są proporcjonalne do pól kwadratów, zbudowanych na odpowiednich bokach. Stosunek dwóch boków odpowiednich jest ten sam, co stosunek jakichkolwiek odpowiednich linii na obu figurach, np. linii PN , AD albo ON , OD .

Zatym

$$\frac{Z}{B} = \frac{x^2}{p^2},$$

oraz

$$\frac{dv}{dx} = \frac{B}{p^2} x^2;$$

ponieważ $v=0$, gdy $x=0$, więc

$$v = \frac{1}{3} \frac{B}{p^2} x^3.$$

Jeżeli objętość ostrosłupa wynosi V jednostek objętości, znajdujemy, zakładając $x=p$, że

$$V = \frac{1}{3} Bp,$$

czyli, że objętość ostrosłupa równa się $\frac{1}{3}$ objętości graniastoslupa o tej samej wysokości i podstawie.

W całym rozumowaniu nic nie jest uzależnione od trójkątnego kształtu podstawy, otrzymany więc wniosek jest słuszny dla każdego ostrosłupa.

PRZYKŁADY.

1. Dowieść, że objętość pnia ostrosłupowego lub stożkowego wynosi

$$\frac{1}{3} \{A + a + \sqrt{(Aa)}\} h$$

jednostek objętości, jeżeli A i a oznaczają pola dwóch podstaw, zaś h odległość między niemi.

2. Łuk paraboli $y = \sqrt{x}$, zawarty między początkiem współrzędnych a danym punktem na paraboli, obracamy dookoła osi x . Dowieść, że objętość bryły, ograniczonej powierzchnią krzywą, wykreśloną przez obrót łuku, a płaszczyzną, przechodzącą przez dany punkt na paraboli prostopadłe do osi x , równa się połowie objętości walca, mającego takie same podstawę i wysokość, jak rozważana bryła.

3. Łuk paraboli $y = x^2$, zawarty między początkiem współrzędnych a danym punktem na paraboli, obracamy dookoła osi x . Dowieść, że objętość bryły, ograniczonej tak, jak w przykładzie 2-im, równa się 0.2 objętości walca, mającego takie same podstawę i wysokość, jak rozważana bryła.

RUCH JEDNOSTAJNIE PRZYŚPIESZONY

81. Gdy ciało jakieś, np. kamień spadający, porusza się t. zw. ruchem postępowym, t. j. nie podlega ani obrotowi ani odkształceniu, wszystkie punkty jego poruszają się zupełnie jednakowo. Spółrzędne któregośkolwiek punktu ciała mogą zatem cechować położenie ciała w danym momencie.

Kiedy każdy punkt ciała porusza się równolegle do danej nieruchomej prostej, powiadamy, że ciało porusza się po linii prostej. Jeżeli tą nieruchomą prostą jest oś x , położenie ciała w danym momencie określa w zupełności odcięta któregośkolwiek punktu ciała. Obierając za jednostkę długości centymetr, będziemy mieli omawiany punkt na prawo od początku współrzędnych, kiedy $x > 0$, na lewo zaś, kiedy $x < 0$. Niech położenie ciała dane będzie przez x w czasie t , przyczym rachujemy od pewnego momentu, obranego za początek. Jeżeli punkt porusza się w kierunku dodatnim (na prawo), ciało posiada prędkość $\frac{dx}{dt} \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$ w tym kierunku. Jeżeli punkt porusza się w kierunku wręcz przeciwnym, prędkość ciała wynosi $-\frac{dx}{dt} \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$. W obu razach $\frac{dx}{dt}$ wyraża zmierzoną w jednostkach $\frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$ wielkość, zwaną prędkością w kierunku wzrastających x . Jeżeli prędkość jest zmienna, druga pochodna $\frac{d^2x}{dt^2}$, o ile jest dodatnia, wyraża zmierzone w jednostkach $\frac{\text{cm.}}{\text{sek.}^2}$ przyśpieszenie, wskazujące tempo,

w którym prędkość $\frac{dx}{dt}$ się zwiększa. Jeżeli $\frac{d^2x}{dt^2}$ jest ujemne, wówczas $-\frac{d^2x}{dt^2}$ wyraża w tychże jednostkach tempo, w którym prędkość $\frac{dx}{dt}$ się zmniejsza. W obu razach $\frac{d^2x}{dt^2}$ wyraża zmierzoną w jednostkach $\frac{\text{cm.}}{\text{sek.}^2}$ wielkość, zwaną przyspieszeniem w kierunku wzrastających x (por. § 32).

Jeżeli linja, wskazującą kierunek ruchu, jest oś y , w powyższym znakowaniu należy tylko x zastąpić przez y .

82. Ciało, niczym niepodparte i znajdujące się w pobliżu powierzchni ziemi, spadałoby ze stałym przyspieszeniem, o ileby powietrze nie stawiało oporu.* Owo przyspieszenie grawitacyjne oznaczamy zazwyczaj przez g , rozumiejąc przez to, że wynosi ono g jednostek przyspieszenia ($g=981 \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}^2}$).

Bierzemy układ współrzędnych z pionową osią y , skierowaną ku górze. Niech położenie ciała w czasie t , liczonym od jakiegoś momentu początkowego, dane jest przez współrzędne x , y któregośkolwiek jego punktu. Jeżeli ciało spada swobodnie, opór zaś powietrza będziemy ignorowali, napiszemy

$$-\frac{d^2y}{dt^2}=g.$$

Jeżeli ciało zaczyna spadać w momencie, który obieramy za początek rachuby czasu, i jeżeli w tym momen-

* Nie brana jest pod uwagę bardzo mała zmiana, uwarunkowana zbliżaniem się ciała ku ziemi. (Przyp. tłum.).

cie wartość rzędnej rozważanego punktu wynosi y_0 , będziemy mieli $y=y_0$ i $\frac{dy}{dt}=0$, gdy $t=0$.

Oznaczmy $\frac{dy}{dt}$ przez v . Wówczas

$$-\frac{dv}{dt}=g$$

oraz $v=0$, gdy $t=0$.

$$\text{Zatym} \quad v=-gt,$$

$$\text{czyli} \quad \frac{dy}{dt}=-gt,$$

$$\text{skąd} \quad y=-0.5gt^2+C.$$

Aby $y=y_0$, kiedy $t=0$, musimy mieć

$$C=y_0.$$

$$\text{Ostatecznie} \quad y=y_0-0.5gt^2.$$

Każdy punkt ciała jest w czasie t o $0.5gt^2$ cm. niżej do swego położenia początkowego. Prędkość punktu wynosi w tym momencie $gt \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$ i jest skierowana pionowo ku dołowi.

83. Jeżeli ciało nie spada swobodnie, lecz zostało rzucone w jakimkolwiek kierunku, obieramy oś x w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez kierunek prędkości początkowej któregośkolwiek punktu ciała. Wtedy wszystkie punkty ciała będą się poruszały w płaszczyznach, równoległych względem tamtej płaszczyzny. Jeżeli, jak wyżej, nie będziemy brali pod uwagę oporu powietrza, każdy punkt ciała będzie posiadał przyspieszenie g w kierunku pionowym na dół, zaś przyspiesze-

nie = 0 w kierunku poziomym. Będziemy więc mieli równania:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

W momencie początkowym ciało posiada pewną składową prędkość w kierunku poziomym i pionowym. Założmy, że

$$\frac{dx}{dt} = u \quad \text{i} \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \text{gdy } t = 0;$$

u i v są niezależne od czasu; w momencie więc początkowym składowa pozioma prędkości wynosi $u \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$, składowa pionowa, skierowana ku górze, $v \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$.

Obierzmy za początek współrzędnych punkt, z którego rozpoczyna się ruch rozważanego punktu; zatem

$$x = 0 \quad \text{i} \quad y = 0, \quad \text{kiedy } t = 0.$$

Równanie $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ wskazuje, że $\frac{dx}{dt}$ jest wielkością stałą, warunek zaś $\frac{dx}{dt} = u$ przy $t = 0$ wskazuje, że przez cały czas ruchu $\frac{dx}{dt} = u$. Z równania $\frac{dx}{dt} = u$ otrzymujemy $x = ut + C$, gdzie C jest stałą, którą określa warunek $x = 0$ przy $t = 0$; oczywiście $C = 0$ i

$$x = ut.$$

Z równania $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$ otrzymujemy $\frac{dy}{dt} = -gt + A$; stałą A otrzymamy z warunku $\frac{dy}{dt} = v$ przy $t = 0$; oczywiście $A = v$, zatem $\frac{dy}{dt} = v - gt$. Z tego znowuż równania otrzymujemy $y = vt - \frac{gt^2}{2} + B$, gdzie B jest stałą; warunek zaś $y = 0$ przy $t = 0$ daje nam $B = 0$, czyli

$$y = vt - 0.5gt^2.$$

Rugując t z równań $x = ut$ i $y = vt - 0.5gt^2$, otrzymamy

$$y = -0.5 \frac{g}{u^2} x^2 + \frac{v}{u} x.$$

Z równania poznajemy (§ 35), że torem poruszającego się punktu jest parabola o osi pionowej, leżąca pod styczną, poprowadzoną w wierzchołku (rys. 36).

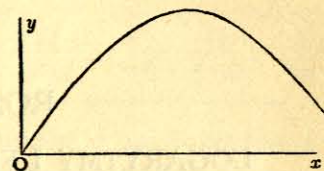


Fig. 36.

PRZYKŁADY.

1. Ciało porusza się po linii prostej ze stałym przyspieszeniem $f \frac{\text{cm.}}{\text{sek}^2}$. Dowieść, że, jeżeli jego prędkość w momencie początkowym wynosi $u \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$ w kierunku wzrastającego s , po upływie zaś t sek. od momentu początkowego $v \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$, to $v = u + ft$. Dowieść, że, jeżeli ciało przebywa s cm. w ciągu t sekund, to $s = ut + 0.5ft^2$.

2. Podług warunków przykładu 1-go $\frac{dv}{dt} = f$ i $v = \frac{ds}{dt}$, a zatem $v \frac{dv}{dt} = f \frac{ds}{dt}$. Dowieść, że $v^2 - u^2 = 2fs$.

3. Zakładając taki ruch ciała, który czyni zadość równaniu $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - 2fs = \text{const.}$, gdzie f oznacza wielkość stałą, dowieść, że ciało porusza się ze stałym przyspieszeniem.

ROZDZIAŁ VI.

LOGARYTMY I FUNKCJA WYKŁADNICZA.

84. Określamy * logarytmy przy zasadzie 10 (zwykle logarytmy), mówiąc, że, jeżeli

$$x = 10^y,$$

to

$$y = \log_{10} x.$$

Określenie to pozwala nam ułożyć tablicę logarytmów. Zaczniemy od znalezienia zwykłą metodą $\sqrt{10}$ z dokładnością do któregośkolwiek znaku dziesiętnego. Jeżeli zatrzymamy się na 16 znakach dziesiętnych, będziemy mieli

$$10^{\frac{1}{2}} = 3.1622776601683793.$$

Stąd możemy obliczyć $10^{\frac{1}{4}}$ z ośmiu znakami dziesiętnymi (1.77827941), dalej $10^{\frac{1}{8}}$ dokładnie do czwartego znaku dziesiętnego (1.3335), wreszcie $10^{\frac{1}{16}}$ dokładnie do drugiego znaku dziesiętnego (1.15). Idąc tą samą arytmetyczną drogą, możemy znaleźć wartości $10^{\frac{3}{16}}$, $10^{\frac{5}{16}}$, $10^{\frac{7}{16}}$, $10^{\frac{9}{16}}$, $10^{\frac{11}{16}}$, $10^{\frac{13}{16}}$, $10^{\frac{15}{16}}$. Jeżeli zatem założymy $x = 10^y$, otrzymamy szereg wartości na x , odpowiadających szeregowi wartości y .

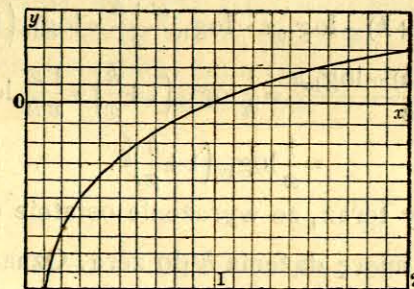
Możemy więc ułożyć następującą tablicę:

* Określenie to omawiamy bliżej w dodatku III.

TABLICA I.

y	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$
x	1	1.15	1.33	1.54	1.78	2.05	2.37	2.74	3.16
y		$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	1
x		3.65	4.22	4.87	5.62	6.49	7.50	8.66	10

W tablicy tej wszystkie wartości x są dokładne do drugiego znaku dziesiętnego. Podług tej tablicy możemy wyrysować wykres funkcji $y = \log_{10} x$ w granicach między $x = 1$ i $x = 10$, a następnie przy pomocy tego wykresu znaleźć logarytm jakiegokolwiek liczby, zawartej między 1 a 10. Jeżeli wykonamy rysunek dokładnie, szukana wartość logarytmu z pewnością będzie dokładna do pierwszego znaku dziesiętnego, a często do drugiego. Opierając się na prawie wykładników, możemy rozszerzyć tablicę, a także wykres, na wartości x , które nie zawierają się między 0 a 1.



$y = \log_{10} x$

Rys. 37.

Wykres $\log_{10} x$ w granicach między $x = 0.1$ i $x = 2$ podany jest na rys. 37.

Widzimy więc, że każdy, kto dołoży dosyć starań

i nie popełni błędu, może przez proste obliczanie pierwiastków kwadratowych ułożyć sobie tablicę logarytmów, tak dokładną, jak sam zechce. Podobnie handlowiec mógłby sam ułożyć tablice rachunkowe, zaoszczędzi jednak sobie czasu, jeżeli kupi gotowe. Nie dla innych powodów kupujemy tablice logarytmiczne*.

85. Przy logarytmowaniu posługujemy się następującymi zasadniczymi wzorami:

$$\log(ab) = \log a + \log b,$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b,$$

$$\log(a^n) = n \log a.$$

Wzory te są słuszne dla wszelkich zasad. Jeżeli chodzi o zmianę zasady, posługujemy się wzorami

$$\log_a x = (\log_b x)(\log_a b),$$

$$(\log_a b)(\log_b a) = 1.$$

86. Rozważajmy $\log_{10} x$ jako funkcję x , i spróbujmy ją różniczkować. Mamy

$$\log_{10}(x+h) - \log_{10} x = \log_{10} \frac{x+h}{x} = \log_{10} \left(1 + \frac{h}{x}\right),$$

$$\text{oraz } \frac{\log_{10}(x+h) - \log_{10} x}{h} = \frac{1}{h} \log_{10} \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{h} \log_{10} \left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ = \frac{1}{x} \log_{10} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}.$$

Wykażmy teraz, że wyrażenie ostatnie dąży do pewnej granicy w miarę dążenia h do zera. Oznaczmy $\frac{x}{h}$ przez n ; będziemy mieli

* Tablice logarytmiczne układają się w rzeczywistości nie w ten sposób, przez wyciąganie pierwiastków kwadratowych, jak to zostało podane, lecz na całkiem innej drodze—przez posługiwanie się szeregami nieskończonymi.

$$\frac{\log_{10}(x+h) - \log_{10} x}{h} = \frac{1}{x} \log_{10} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Lecz nie trudno się przekonać, że $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dąży do pewnej granicy, w miarę wzrastania n do nieskończoności. Rozpatrujemy $\log_{10} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, albo $n \log_{10} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. W tablicy II. mamy wartości tego wyrażenia, odpowiadające wartościom n , zawartym między 1 i 9. Widzimy, że każda z tych wartości jest cokolwiek większa od poprzedniej, lecz że różnice pomiędzy kolejnymi wartościami wciąż maleją.

TABLICA II.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n \log_{10} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$	0.3010	0.3522	0.3748	0.3876	0.3959	0.4017	0.4059	0.4092	0.4118

Idźmy trochę prędzej naprzód i ułóżmy tablicę III., któraby zawierała wartości tego wyrażenia, odpowiadające kolejno wartościom $n=10, 20, \dots 90$. Widzimy, że logarytmy wciąż wzrastają, lecz różnice między kolejnymi wartościami stają się coraz mniejsze.

TABLICA III.

n	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$n \log_{10} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$	0.4139	0.4238	0.4272	0.4290	0.4300	0.4307	0.4312	0.4316	0.4319

Posuwajmy się jeszcze prędzej naprzód i ułóżmy tablicę IV., zawierającą wartości danego wyrażenia dla $n=100, 200, \dots 900$. Widzimy, że dany logarytm dąży do pewnej stałej wartości.

TABLICA IV.

n	100	200	300	400	500	600	700	800	900
$n \log_{10} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$	0.4321	0.4332	0.4336	0.4338	0.4339	0.4339	0.4340	0.4340	0.4341

Jeżeli posuniemy się jeszcze dalej i weźmiemy na n wartości 1000, 2000, ... znajdziemy, że wszystkie logarytmy w tych granicach będą aż do trzeciego znaku dziesiętnego równe, a mianowicie $= 0.434$. Posługując się tablicami siedmiocyfrowymi, nie możemy być pewni więcej, niż trzech znaków dziesiętnych. Wnosimy stąd, że, w miarę wzrastania n , $\log_{10} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dąży prawdopodobnie do pewnej granicy, która w przybliżeniu $= 0.434$, zaś $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dąży prawdopodobnie do pewnej granicy, która w przybliżeniu $= 2.72$.

Można udowodnić całkiem ściśle, że $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dąży do pewnej granicy w miarę wzrastania n^* . Granicą tą jest ściśle określona liczba, którą oznaczamy przez e . Wartość e , dokładna do czwartego znaku dziesiętnego, wynosi 2.7183, wartość zaś $\log_{10} e$, dokładna do czwartego znaku dziesiętnego, wynosi 0.4343. Oznaczmy $\log_{10} e$ przez M . Wówczas będziemy mieli

$$\frac{d \log_{10} x}{dx} = \frac{M}{x}.$$

87. Zamiast brać logarytmy przy zasadzie 10, możemy je brać przy jakiegokolwiek zasadzie a . Jako określenie

* Patrz dodatek IV.

musimy przyjąć, że, jeżeli $x = a^y$, wówczas $y = \log_a x$. Spособem, przyjętym w § 86, znajdziemy

$$\frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}},$$

a zatem $\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log_e a}$.

W szczególności możemy obrać e za zasadę; znajdziemy wtedy $\frac{d \log_e x}{dx} = \frac{1}{x}$.

88. Rezultat ten daje nowy wzór zasadniczy dla całkowania $\int \frac{1}{x} dx = \log_e x$. (B)

Można to napisać jeszcze inaczej

$$\int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{M} \log_{10} x,$$

gdzie $\frac{1}{M} = \log_e 10 \doteq 2.3026$.

Opierając się na §§ 66, 68, możemy napisać wzory ogólniejsze: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \log_e(ax+b)$,

$$\int \frac{1}{z} \frac{dz}{dx} dx = \log_e z.$$

FUNKCJA WYKŁADNICZA.

89. Jeżeli $y = \log_e x$, to $x = e^y$; wiemy, że w tym razie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Stąd

$$\frac{dx}{dy} = x,$$

albo

$$\frac{d(e^y)}{dy} = e^y.$$

Rozpatrujemy tu e^x jako funkcję y . Jest ona znana pod nazwą funkcji wykładniczej. Pisząc x zamiast y , otrzymujemy wykładniczą funkcję x ; będziemy więc

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x.$$

W podanej tu tablicy mamy wartości funkcji e^x , dokładne do czwartego znaku dziesiętnego, dla szeregu wartości na x , zawartych między -1 i 1 . Wartości na e^x , odpowiadające wartościom x , które leżą w innych granicach, mogą być wyprowadzone za pomocą reguły wykładników.

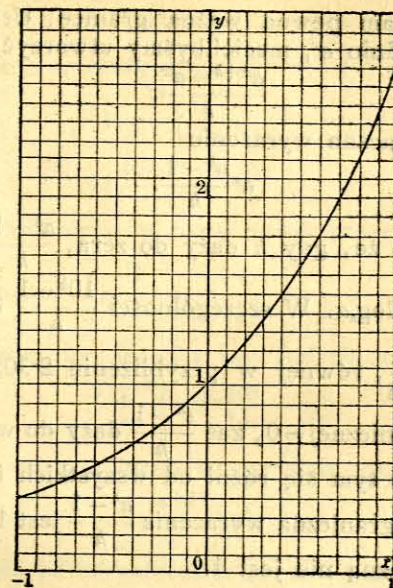
x	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0
e^x	0.3679	0.4066	0.4493	0.4966	0.5488	0.6065	0.6703	0.7408	0.8187	0.9048	1

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
e^x	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487	1.8221	2.0138	2.2255	2.4596	2.7183

Wykres funkcji e^x w granicach między $x = -1$ i $x = 1$ daje rys. 38.

90. Jeżeli x jest ujemne i liczebnie wielkie, e^x jest dodatnie i liczebnie małe, a w dodatku prędko się zmniejsza, w miarę jak ujemna wartość x liczebnie wzrasta. Innymi słowy, w miarę wzrastania dodatniej liczby x , e^{-x} stopniowo się zmniejsza i prędko osiąga bardzo małych wartości. Z drugiej znowu strony, jeżeli wykładnik x jest dodatni, e^x wzrasta razem z x i prędko osiąga bardzo dużych wartości.

91. Stosując regułę różniczkowania funkcji złożonej (§ 25), otrzymujemy



$$y = e^x$$

Rys. 38.

$$\frac{d(e^{ax})}{dx} = ae^{ax},$$

gdzie a jest wielkością stałą. Dostajemy stąd niezmiernie ważną całkę

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}. \quad (C)$$

We wzorze tym a może być jakąkolwiek liczbą, dodatnią albo ujemną.

92. Funkcja a^x często też się zowie funkcją wykładniczą.

Ponieważ

$$a = e^{\log_e a},$$

więc

$$a^x = e^{x \log_e a},$$

oraz

$$\frac{d(a^x)}{dx} = \log_e a \cdot e^{x \log_e a} = \log_e a \cdot a^x.$$

To daje nam pewną ważną granicę. Usiłując zróżniczkować bezpośrednio a^x , musielibyśmy utworzyć iloraz

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h},$$

co jest równoznaczne wyrażeniu

$$a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

Wynika z tego, że, gdy h dąży do zera, $\frac{a^h - 1}{h}$ dąży do wartości granicznej $\log_e a$. W szczególności $\frac{10^h - 1}{h}$ dąży do wartości granicznej $\frac{1}{M}$, równej w przybliżeniu 2.3026; $\frac{1^h - 1}{h}$ dąży do wartości granicznej $= 0$, zaś $\frac{e^h - 1}{h}$ dąży do wartości granicznej $= 1$. Liczba e tym się różni od wszystkich innych, że, gdy $a = e$, wartością graniczną wyrażenia $\frac{a^h - 1}{h}$ jest 1; gdy zaś $a \neq e$, wartością graniczną nie jest 1.

PRZYKŁADY.

1. Zróżniczkować następujące funkcje (1)–(12):

- | | | |
|--------------------------------|----------------------|--------------------------------|
| (1) $\log_e(2+x)$, | (2) $\log_e(1-2x)$, | (3) $\log_e \frac{1+x}{1-x}$, |
| (4) $\log_e \frac{x+1}{x-1}$, | (5) $x \log_e x$, | (6) $\{\log_e(x)\}^2$, |
| (7) xe^x , | (8) $x^2 e^x$, | (9) e^{-x} , |
| (10) e^{-x^2} , | (11) $(1-x)e^x$, | (12) $(1-x)^2 e^x$. |

2. Dowieść, że $\frac{d[\log_e\{x + \sqrt{(x^2 + C)}\}]}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + C)}}$,
gdzie C jest niezależne od x .

3. Dowieść, że, gdy h jest bardzo małe, $\log_e(1+h) \doteq h$,
oraz $\log_e(x+h) - \log_e x \doteq \frac{h}{x}$.

4. Dowieść, że, gdy h jest bardzo małe, $e^h \doteq 1+h$.

5. Scałkować następujące funkcje (1)–(6):

- | | | | |
|-----------------------|----------------------------|-----------------------|----------------|
| (1) $\frac{1}{1+x}$, | (2) $\frac{1}{1-x}$, | (3) $\frac{1}{x-1}$, | (4) e^{-x} , |
| (5) xe^{-x^2} , | (6) $\frac{\log_e x}{x}$. | | |

Sprawdzić otrzymane rozwiązania przez różniczkowanie.

6. Scałkować $\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)}}$ i $\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$.

7. Dowieść, że, jeżeli y jest funkcją x , to

$$\frac{d(ye^{ax})}{dx} = e^{ax} \left(\frac{dy}{dx} + ay \right).$$

8. Dowieść, że, jeżeli m jest stałe, równaniu

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = m^2 y$$

staje się zadość przez założenie $y = Ae^{mt} + Be^{-mt}$, gdzie A i B są dowolne stałe.

9. Dowieść, że

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} = e^{-\frac{1}{2}ax} \left\{ \frac{d^2 (e^{\frac{1}{2}ax} y)}{dx^2} - \frac{1}{4} a^2 e^{\frac{1}{2}ax} y \right\},$$

gdzie a jest stałe, y zaś jest funkcją x . Dowieść dalej, że, jeżeli x czyni zadość równaniu $\frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + n^2 x = 0$, to $xe^{\frac{1}{2}kt}$ czyni zadość równaniu $\frac{d^2 (xe^{\frac{1}{2}kt})}{dt^2} + \left(n^2 - \frac{1}{4} k^2 \right) (xe^{\frac{1}{2}kt}) = 0$, gdzie k i n są stałe, x zaś jest funkcją t .

ZASTOSOWANIA FUNKCJI WYKŁADNICZEJ.

93. Rozpatrzmy kilka zagadnień, które mogą być rozwiązane za pomocą funkcji wykładniczej.

W chemii fizycznej* spotykamy się często z zagadnieniami, w których liczba x , dająca miarę stężenia roztworu, ma być wyrażona jako funkcja liczby t , miary czasu, który upływa od pewnego określonego momentu, przy czym zależność ta ma być wyrażona równaniem $\frac{dx}{dt} = f(x)$, gdzie $f(x)$ jest daną funkcją. Np.: prędkość inwersji cukru trzcinowego jest zawsze proporcjonalna względem ilości cukru, która jeszcze w danym momencie nie uległa inwersji. Ilość zaś ta dana jest przez stopień stężenia. Jeżeli a jest miarą stężenia początkowego, x zaś miarą stężenia cukru, uległego inwersji w ciągu t minut, mamy równanie

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x),$$

gdzie k jest wielkością stałą, równą w przybliżeniu 0.0015. Należy rozwiązać to równanie, czyniąc zadość warunkowi, że $x=0$, gdy $t=0$.

Mamy
$$\frac{dx}{dx} = \frac{1}{k(a-x)},$$

czyli
$$\frac{d(kt)}{dx} = \frac{1}{a-x};$$

zatem
$$kt = \int \frac{1}{a-x} dx + C = -\log_e(a-x) + C.$$

Aby $x=0$, kiedy $t=0$, musi być
$$C = \log_e a,$$

a więc
$$kt = \log_e a - \log_e(a-x) = \log_e \frac{a}{a-x},$$

czyli
$$\frac{a}{a-x} = e^{kt},$$

* Patrz J. W. Mellor, Chemical Statics and Dynamics. London, 1904.

albo jeszcze
$$\frac{a-x}{a} = e^{-kt},$$

skąd ostatecznie
$$\frac{x}{a} = 1 - e^{-kt}.$$

Wzór ten daje rozwiązanie zagadnienia.

94. Weźmy inny przykład. Niech dana będzie prędkość reakcji chemicznej przez równanie

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x),$$

gdzie k, a, b są stałe; przytym $x=0$, kiedy $t=0$. Mamy znaleźć x jako funkcję t . Załóżmy, że $b > a$.

Mamy
$$k \frac{dt}{dx} = \frac{1}{(a-x)(b-x)};$$

zauważmy, że umiemy całkować sumę $\frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x}$, zarówno jak różnicę $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x}$; zauważmy dalej, że

$$\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x} = \frac{b-a}{(a-x)(b-x)}.$$

Mnożąc obie strony naszego równania przez $(b-a)$, otrzymujemy
$$k(b-a) \frac{dt}{dx} = \frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x}.$$

Stąd
$$k(b-a)t = \int \left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x} \right) dx + C$$

$$= -\log_e(a-x) + \log_e(b-x) + C = \log_e \frac{b-x}{a-x} + C.$$

Aby $x=0$, kiedy $t=0$, musi być

$$C = -\log_e \frac{b}{a} = \log_e \frac{a}{b},$$

a zatem
$$k(b-a)t = \log_e \left(\frac{b-x}{a-x} \cdot \frac{a}{b} \right),$$

czyli
$$\frac{a(b-x)}{b(a-x)} = e^{k(b-a)t}.$$

Ostatecznie
$$x(b e^{k(b-a)t} - a) = ab(e^{k(b-a)t} - 1),$$

i rozwiązanie zagadnienia daje równanie

$$x = ab \frac{e^{k(b-a)t} - 1}{b e^{k(b-a)t} - a}.$$

95. W teorii prądu elektrycznego* spotykamy często zagadnienia, w których i , natężenie prądu, ma być wyrażone jako funkcja t , czasu, który upłynął od pewnego momentu początkowego, w formie

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E,$$

gdzie L i R są stałe i oznaczają współczynnik samoindukcji, względnie opór obwodu, E zaś jest wielkością stałą, albo funkcją czasu, wyrażającą różnicę potencjału użytego źródła energii elektrycznej. Należy znaleźć i , czyniące zadość równaniu z warunkiem, że $i=0$, kiedy $t=0$.

Weźmy przypadek, kiedy $E = \text{const.}$, i założmy

$$b = \frac{R}{L}.$$

Wtedy
$$\frac{di}{dt} + bi = \frac{E}{L}.$$

Lecz (przykł. 7, str. 103)

$$\frac{d(i e^{bt})}{dt} = e^{bt} \left(\frac{di}{dt} + bi \right),$$

a zatem

$$\frac{d(i e^{bt})}{dt} = \frac{E}{L} e^{bt},$$

skąd

$$i e^{bt} = \frac{E}{Lb} e^{bt} + C = \frac{E}{R} e^{bt} + C.$$

Aby $i=0$, gdy $t=0$, musi być

$$C = -\frac{E}{R},$$

* Patrz J. J. Thomson, Elements of the Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Rozdz. XI. Cambridge, 1895.

a więc

$$i e^{bt} = \frac{E}{R} (e^{bt} - 1),$$

czyli

$$i = \frac{E}{R} (1 - e^{-bt}).$$

Rozwiązanie zagadnienia dane jest przez równanie

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right).$$

Wzór ten daje natężenie prądu, otrzymanego w obwodzie ze źródła o stałym napięciu i zamkniętego w momencie $t=0$.

96. Spróbujmy zdać sobie sprawę z oporu, który stawia powietrze ciału spadającemu, zakładając, że opór ten jest proporcjonalny względem prędkości ciała. Założenie to dość dokładnie określa wpływ powietrza na ruch małego ciała, poruszającego się bardzo prędko.

Niech ciało spada z wysokości s cm. w ciągu t sek. Prędkość jego w momencie t wynosi $\frac{ds}{dt}$ cm./sek., przyspieszenie zaś w tym momencie $= \frac{d^2s}{dt^2}$ cm./sek.². Przyspieszenie grawitacyjne jest $g = 981$ cm./sek.². Opór powietrza warunkuje przyspieszenie $k \frac{ds}{dt}$ cm./sek.², skierowane wręcz przeciwnie względem przyspieszenia grawitacyjnego; k jest tu pewnym stałym współczynnikiem. Mamy więc równanie

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g - k \frac{ds}{dt},$$

z warunkiem, że $s=0$, oraz $\frac{ds}{dt}=0$, kiedy $t=0$. Równanie można napisać inaczej

$$\frac{d^2s}{dt^2} + k \frac{ds}{dt} = g.$$

Podobnie, jak w § 95, możemy nadać mu kształt

$$\frac{d\left(e^{kt} \frac{ds}{dt}\right)}{dt} = ge^{kt},$$

skąd
$$e^{kt} \frac{ds}{dt} = \int ge^{kt} dt + C = \frac{g}{k} e^{kt} + C.$$

Aby $\frac{ds}{dt} = 0$, kiedy $t=0$, musi być

$$C = -\frac{g}{k},$$

a więc

$$\frac{ds}{dt} = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}).$$

Widzimy, że, w miarę wzrastania t , wzrasta $\frac{ds}{dt}$, nie przekraczając nigdy wartości $\frac{g}{k}$. Prędkość dąży więc do wartości granicznej $\frac{g}{k} \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$. Prędkość ta nazywa się prędkością ostateczną.

Do znalezienia s jako funkcji t posługujemy się równaniem

$$\frac{ds}{dt} = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}),$$

z warunkiem, że $s=0$, kiedy $t=0$. Równanie daje nam

$$s = \frac{g}{k} t + \frac{g}{k^2} e^{-kt} + C',$$

gdzie $C' = \text{const.}$ Aby $s=0$, gdy $t=0$, musi być

$$C' = -\frac{g}{k^2}.$$

Stąd

$$s = \frac{g}{k} t - \frac{g}{k^2} (1 - e^{-kt}).$$

Widzimy, że, jeżeli ciało spada w ciągu długiego czasu (a więc t jest wielkie), droga, przez nie przebyta, jest prawie taka sama, jaka zostałaby przebyta, gdyby ciało poruszało się ruchem jednostajnym z prędkością $\frac{g}{k} \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$ w ciągu $t - \frac{1}{k}$ sekund.

PRZYKŁADY.

1. W zagadnieniu z § 93, zakładając $a=10.023$ oraz $x=0$ przy $t=0$ i $x=1.946$ przy $t=60$, znaleźć k i ułożyć tablicę wartości, które otrzymuje x , kiedy $t=30, 90, 120, 150, 180$.

2. W zagadnieniu z § 94, zakładając $a=10.023$, $b=89.977$ oraz $x=0$ przy $t=0$ i $x=1.946$ przy $t=60$, znaleźć k i ułożyć tablicę wartości, które otrzymuje x , kiedy $t=30, 90, 120, 150, 180$.

3. W zagadnieniu z § 95, zakładając $E=20$, $R=2$, $L=4$, znaleźć wartość, którą otrzymuje i , kiedy $t=1, 10, 60$. Znaleźć to samo, zakładając $E=20$, $R=4$, $L=2$.

4. Zbiornik opróżnia się w ten sposób, że prędkość wypływu wody w pewnym momencie jest proporcjonalna do ilości wody, pozostającej wówczas w zbiorniku. Jeżeli połowa zawartości zbiornika wypływa w ciągu 5 minut, ile wypłynie w 10, 15, 20 minut?

5. Krople deszczu posiadają prędkość $1828 \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$. Zakładając, że prędkość ta różni się bardzo mało od prędkości ostatecznej (§ 96) i że opór jest proporcjonalny do prędkości, znaleźć w przybliżeniu opóźnienie kropeł, uwarunkowane przez opór, i dowieść, że czas, w którym prędkość osiąga wartości $1645 \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$, wynosi mniej więcej 4.29 sek., a także, że droga, którą kropla przebywa w pierwszej sekundzie, wynosi mniej więcej 427 cm.

ROZDZIAŁ VII.

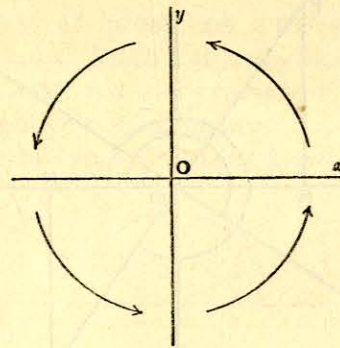
O FUNKCJACH TRYGONOMETRYCZNYCH.

97. Jeżeli promień koła ma r jednostek długości, łuk zaś ma takich jednostek s , to liczbę $\frac{s}{r}$ możemy uważać za miarę kąta środkowego, zawierającego między ramionami dany łuk. Oznaczając liczbę $\frac{s}{r}$ przez θ , powiadaemy, że kąt nasz ma θ radjanów.* Kąt prosty ma 0.5π radjanów (czyli w przybliżeniu 1.5708 radjanów), radjan zaś ma $\frac{2}{\pi}$ kątów prostych (t. j. około 0.6366 kąta prostego). Jeżeli kąt ma θ radjanów, promień zaś r jednostek długości, odpowiedni wycinek kołowy ma $0.5r^2\theta$ jednostek powierzchni.

98. Nieraz bywa dogodnie przypisywanie kątom wszelkich możliwych wartości, zarówno mniejszych, jak większych od dwóch prostych. W tym celu wyobrażamy sobie, że kąt zostaje wykreślony przez obrót promienia około wierzchołka, a mianowicie wyobrażamy sobie, że promień ruchomy wychodzi z położenia, zajmowanego przez jedno ramię kąta i obraca się około wierzchołka tak długo, aż osiąga położenia, zajmowanego przez drugie ramię. Wierzchołek kąta możemy obrać za początek ukła-

* O radjanach pomówimy szczegółowo w dodatku V.

du współrzędnych, pierwotne zaś położenie promienia ruchomego za oś x -ów tego układu, przyczym za dodatni będziemy uważali kierunek tej osi na prawo od początku. Uważajmy dalej θ za liczbę dodatnią, jeżeli kąt, mający θ radjanów, został wykreślony przez obrót promienia w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówek zegara, który umieściliśmy na papierze tarczą do góry (rys. 39). Z umowy naszej wynika, że ramiona kąta, mającego $2n\pi + \theta$ radjanów (gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią), zajmują na płaszczyźnie to samo położenie, co ramiona kąta, mającego θ radjanów.

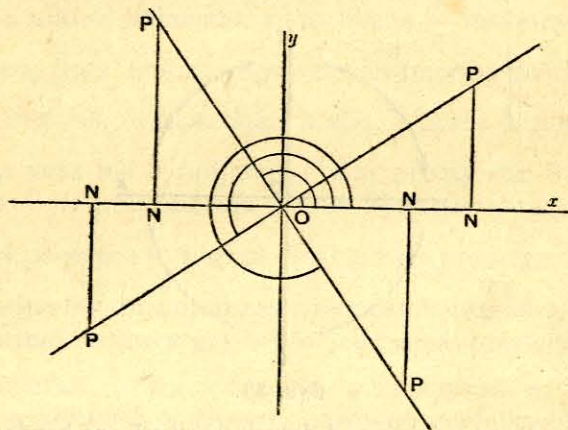


Rys. 39.

99. Kąty, większe od dwóch prostych, są bardzo użyteczne przy badaniu ruchu obrotowego ciał. Wyobraźmy sobie np. obrót koła rozpędowego w maszynie i ruch jakiegokolwiek wykreślonej na nim prostej. Przy każdym obrocie zupełnym koła prosta obraca się o 2π radjanów. W ciągu t sekund prosta obraca się o pewien kąt, powiedzmy o θ radjanów, przyczym θ może być większe lub mniejsze od π . Gdy koło obraca się, θ wciąż rośnie i jest pewną funkcją czasu t ; jeżeli koło obraca się jednostajnie, θ jest wielokrotnością t , stosunek zaś $\frac{\theta}{t}$

jest miarą t. zw. prędkości kątowej koła, wyrażoną w radjanach na sekundę. Jakkolwiek zresztą obraca się koło—jednostajnie czy niejednostajnie—pochodna $\frac{d\theta}{dt}$ jest miarą prędkości kątowej, wyrażoną w radjanach na sekundę.

100. Na płaszczyźnie, wyznaczonej przez osie współrzędnych, bierzemy dowolny punkt P. Promień OP niech będzie ramieniem kąta, którego drugie ramię stanowi oś Ox. Przypuśćmy, że kąt, utworzony przez obrót promienia, który wyszedł z położenia początkowego Ox i doszedł do położenia OP, ma θ radjanów i że odcinek OP ma



Rys. 40.

r jednostek długości. Współrzędne punktu P niech będą x, y . W takim razie liczby $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}$ zależą li tylko od liczby θ . Są to funkcje θ , zwane dostawą i wstawą (cosinus i sinus). Piszemy

$$\frac{y}{r} = \sin \theta, \quad \frac{x}{r} = \cos \theta.$$

101. Ponieważ $x^2 + y^2 = r^2$, mamy więc $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, przyczym $\sin^2 \theta$ znaczy tyleż, co $(\sin \theta)^2$, a $\cos^2 \theta$ tyleż, co $(\cos \theta)^2$.

102. Na rys. 40 dwie proste, oznaczone literami POP, są do siebie prostopadłe, wszystkie zaś trójkąty oznaczone literami PON są równe. Stąd, biorąc pod uwagę znaki współrzędnych x, y , mamy wzory

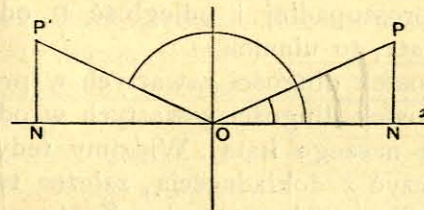
$$\cos \theta = \sin (0.5\pi + \theta), \quad \sin \theta = -\cos (0.5\pi + \theta) \dots\dots\dots(1),$$

$$\sin \theta = -\sin (\pi + \theta), \quad \cos \theta = -\cos (\pi + \theta) \dots\dots\dots(2),$$

$$\sin \theta = \sin (2\pi + \theta), \quad \cos \theta = \cos (2\pi + \theta) \dots\dots\dots(3),$$

103. Na rys. 41 proste OP i OP' są jednakowo nachylone do osi x-ów. Jeżeli kąt ostry xOP ma θ radjanów, to kąt rozwarty xOP' ma $\pi - \theta$ radjanów. Biorąc pod uwagę znaki współrzędnych x, y , mamy

$$\sin (\pi - \theta) = \sin \theta; \quad \cos (\pi - \theta) = -\cos \theta \dots\dots\dots(4)$$



Rys. 41.

Za pomocą tych czterech wzorów możemy napisać wartość $\sin \theta$ lub $\cos \theta$, odpowiadającą jakiejkolwiek wartości dodatniej θ , jeżeli tylko znamy wartości, które przybiera $\sin \theta$, gdy θ zmienia się od 0 do $\frac{\pi}{2}$.

104. W wielu przypadkach może okazać się pożyteczną następująca uwaga. Niech będą dane dwie jakiejkolwiek liczby a i b ; powiadam, że można zawsze znaleźć jedną, i tylko jed-

na liczbę dodatnią r , jak również jedną, i tylko jedną liczbę θ , zawartą między 0 i 2π , taką, że

$$a = r \cos \theta; \quad b = r \sin \theta.$$

Bez względu na to, czy liczby a i b są dodatnie, czy ujemne, możemy je uważać za współrzędne zupełnie określonego punktu, np. punktu P . Odległość tego punktu od początku współrzędnych jest zupełnie wyznaczona; wartość liczebną tej odległości daje nam właśnie liczbę r . Równie dokładnie wyznaczony jest kąt, o który musi obrócić się w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówek zegara prosta, żeby, wychodząc z położenia Ox i nie wykonywując całkowitego obrotu, zająć położenie OP . Wartość liczebną miary tego kąta, wyrażonej w radjanach, daje nam liczbę θ .

105. Moglibyśmy sami ułożyć tablice wstaw, jak moglibyśmy ułożyć własne tablice logarytmów. Gdybyśmy np. możliwie dokładnie wykreślili kąt $= 0.25d$, na jednym jego ramieniu obrali punkt P , z tego punktu poprowadzili prostopadłą do drugiego ramienia i zmierzylili dokładnie długość prostopadłej i odległość P od O , t. j. od wierzchołka kąta, to ułamek

liczba jednostek długości zawartych w prostopadłej

liczba jednostek długości zawartych w odcinku OP

byłby wstawą naszego kąta. Widzimy tedy, że wstawę można wyznaczyć z dokładnością, zależną tylko od stopnia dokładności naszych pomiarów. Zarówno jednak tablic logarytmów, jak tablic wstaw, nie układamy sami, lecz kupujemy gotowe.*

Zwykłe tablice wstaw podają kąty w stopniach i minutach, możemy jednak z łatwością wyrazić kąt w radjanach, pamiętając, że $180^\circ = \pi$ radjanów. Możliwy więc na

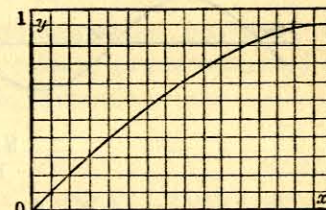
* Tablice wstaw, zawarte w zbiorach tablic matematycznych, zostały obliczone za pomocą innej metody, opartej na teorii szeregów nieskończonych.

podstawie zwykłych tablic zbudować nowe, w których kąty byłyby wyrażone w radjanach, a wstawy podane z kilkoma dokładnymi znakami dziesiętnymi. Następująca tabliczka zawiera wartości kilku wstaw z dokładnością do 0.001.

θ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\sin \theta$	0	0.100	0.199	0.296	0.389	0.479	0.565	0.644	0.717

θ	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
$\sin \theta$	0.783	0.841	0.891	0.932	0.964	0.985	0.997	1

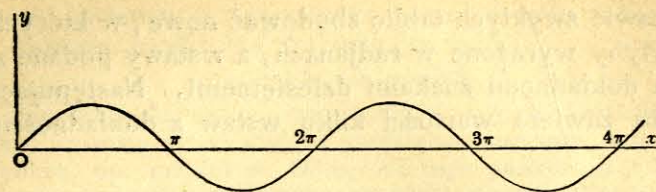
106. Uważaliśmy dotąd θ za liczbę zmienną, $\sin \theta$ za funkcję tej zmiennej. Mówiąc θ , mieliśmy zawsze na myśli liczbę, wyrażającą miarę kąta w radjanach. Taki jednak sposób pojmowania rzeczy nie jest konieczny. Liczby θ i $\sin \theta$ możemy równie dobrze uważać za wartości, które przybierają jednocześnie dwie jakieś zmienne x i y , i możemy powiedzieć, że y jest pewną funkcją x , zwaną wstawą x . Za pomocą tabliczki, podanej w poprzednim ustępie, można wykreślić funkcję $y = \sin x$, gdy x zawiera się między 0 a 0.5π (t. j. 1.5708). Wykres funkcji mamy na rys. 42.



$y = \sin x$

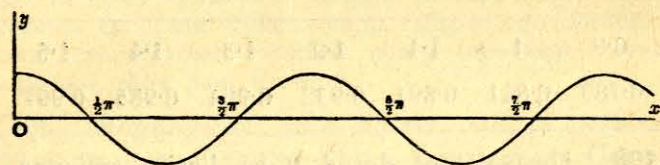
Rys. 42.

Za pomocą wzorów podanych w §§ 102 i 103 można przedłużyć nasz rysunek poza wartość $x = 0.5\pi$; otrzymamy szereg równych i podobnych łuków, położonych kolejno pod i nad osią x -ów (rys. 43).



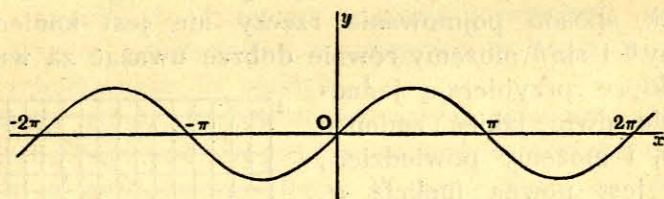
$$y = \sin x.$$

Rys. 43.



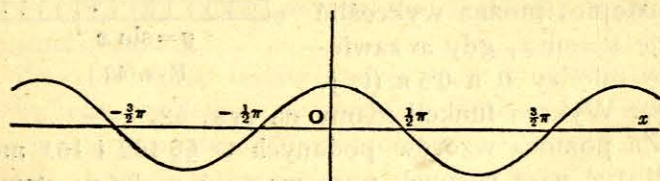
$$y = \cos x.$$

Rys. 44.



$$y = \sin x.$$

Rys. 45.



$$y = \cos x.$$

Rys. 46.

Na podstawie wzoru $\cos x = \sin(0.5\pi + x)$ można wykresić funkcję $y = \cos x$ dla wartości dodatnich x . Podałszy ją na rys. 44, otrzymanym z rys. 43 przez przesunięcie krzywej na lewo o 0.5π jednostek długości.

107. Żeby określić $\sin x$ i $\cos x$ dla ujemnych wartości x , zakładamy, że wykres funkcji składa się z nieskończenie wielu takich łuków, położonych kolejno pod i nad osią x -ów (rys. 45 i 46). Jeżeli x jest dodatnie, $-x$ jest ujemne. Oznaczmy $-x$ przez x' . Gdy x od zera maleje, x' od zera wzrasta; otóż rysunek wskazuje, że wartości $\sin x$ i $\sin x'$ są zawsze równe co do wielkości, lecz różne co do znaku, a zatem określenie nasze prowadzi do wzorów

$$\sin x' = -\sin x, \text{ albo } \sin(-x) = -\sin x.$$

Na obrazie funkcji $y = \cos x$ lub $y = \cos x'$ widać, że wartości na $\cos x$ i $\cos x'$ są zawsze równe i jednakowych znaków, a zatem mamy

$$\cos x' = \cos x, \text{ czyli } \cos(-x) = \cos x.$$

108. Inne funkcje trygonometryczne (styczną, d styczną, sieczną i dosieczną) określamy przez wstawę i dostawę za pomocą następujących równań:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \quad (1).$$

Żeby wykresić funkcję $y = \operatorname{tg} x$, zauważmy, że $\sin 0.5\pi = 1$, $\sin 1.5\pi = -1$, i w ogólności $\sin x = \pm 1$, gdy x jest nieparzystą wielokrotnością 0.5π . Są to największe i najmniejsze wartości, które przybierać może $\sin x$. Tak samo $\cos x = 1$, gdy $x = 0$ lub gdy x jest parzystą wielokrotnością π ; również $\cos x = -1$, gdy x jest nieparzystą wielokrotnością π . Są to największe i najmniejsze wartości funkcji $\cos x$. Gdy $\sin x = \pm 1$, mamy $\cos x = 0$, wsku-

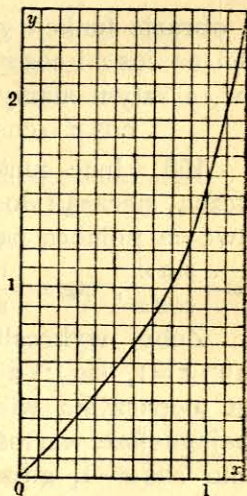
tek czego równanie nasze nie wyznacza wcale $\operatorname{tg} x$, gdy x jest nieparzystą wielokrotnością liczby 0.5π , gdyż ani 1, ani -1 nie możemy podzielić przez 0. Jeżeli x jest prawie równe 0.5π , to $\sin x$ jest prawie równe 1, a $\cos x$ jest bardzo małą liczbą dodatnią, gdy x jest nie o wiele mniejsze od 0.5π , lub bardzo małą liczbą ujemną, gdy x jest niewiele większe od 0.5π . A zatem $\operatorname{tg} x$ jest bardzo wielką liczbą dodatnią, jeżeli x jest trochę mniejsze od 0.5π , $-\operatorname{tg} x$ zaś jest bardzo wielką liczbą dodatnią, jeżeli x jest trochę większe od 0.5π .

Na podstawie wzorów §§ 102 i 107 możemy napisać

$$\operatorname{tg}(0.5\pi + x) = -\frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \dots\dots (2),$$

znamy więc wartości na $\operatorname{tg} x$, odpowiadające wszelkim wartościom x (z wyjątkiem $x = \text{nieparzystej wielokrotności liczby } 0.5\pi$), jeżeli tylko poznaliśmy wartości $\operatorname{tg} x$, odpowiadające wartościom x , zawartym między 0 i 0.5π (włączając w to 0, lecz wyłączając 0.5π). W sposób podobny, jak w § 105, możemy utworzyć tablicę wartości funkcji $\operatorname{tg} x$, odpowiadających wartościom x , zawartym między 0 a 0.5π . W końcu tego ustępu przytaczam tabliczkę takich wartości z dokładnością do 0.001.

Wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$, gdy x zawiera się między 0 i 0.5π , mamy na rys. 47. Stosując wzór $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, możemy otrzymać wykres funkcji dla wartości x , zawartych między 0 a -0.5π .

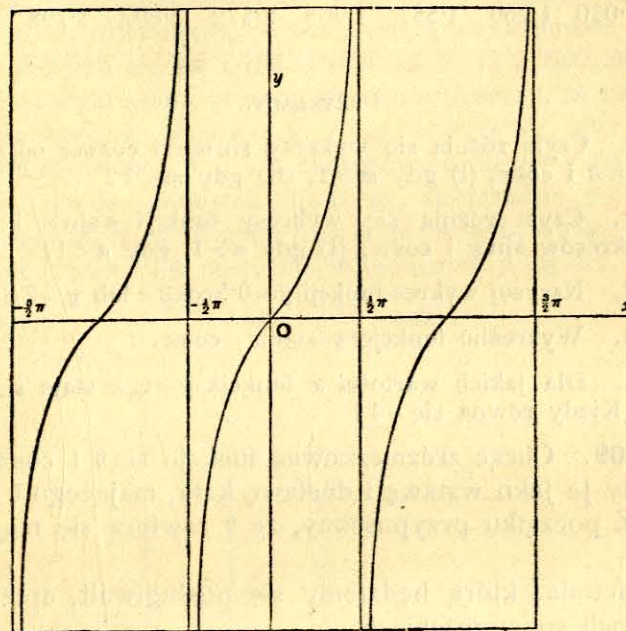


$y = \operatorname{tg} x$.

Rys. 47.

Pełniejszy obraz (rys. 48) otrzymujemy, powtarzając krzywą w pasach płaszczyzny, ograniczonych przez proste, dane równaniem kształtu

$x = \text{nieparzystej wielokrotności liczby } 0.5\pi$.



$y = \operatorname{tg} x$.

Rys. 48.

W podobny sposób otrzymaliśmy też wykres całkowitej funkcji $y = \sin x$, powtarzając krzywą w pasach płaszczyzny ograniczonych prostymi, wzdłuż których x jest wielokrotnością 2π .

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$\operatorname{tg} x$	0	0.100	0.203	0.309	0.423	0.546	0.684	0.842

x	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$\operatorname{tg} x$	1.030	1.260	1.557	1.965	2.572	3.602	5.798	14.101

PRZYKŁADY.

1. Czym różnią się wykresy $\sin mx$ i $\cos mx$ od wykresów $\sin x$ i $\cos x$, (I) gdy $m > 1$, (II) gdy $m < 1$?

2. Czym różnią się wykresy funkcji $a \sin x$ i $a \cos x$ od wykresów $\sin x$ i $\cos x$, (I) gdy $a > 1$, gdy $a < 1$?

3. Narysuj wykres funkcji $y = 0.5 \cos 2x$ lub $y = 2 \sin 0.5x$.

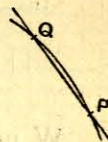
4. Wykreślić funkcję $y = \sin x - \cos x$.

5. Dla jakich wartości x funkcja $y = \operatorname{tg} x$ staje się równą 1? Kiedy równa się -1?

109. Chcąc zróżniczkować funkcje $\sin \theta$ i $\cos \theta$, pomysły je jako wstawę i dostawę kąta, mającego θ radjanów. Z początku przypuścimy, że θ zawiera się między 0 i 0.5π .

Metoda, którą będziemy się posługiwali, opiera się na dwóch spostrzeżeniach.

(1) Weźmy na okręgu koła dwa bardzo bliskie punkty P i Q (rys. 49). Cięciwa PQ niech ma m jednostek długości, łuk zaś l takich jednostek. Liczby m i l mało się różnią, i, gdy



Rys. 49.

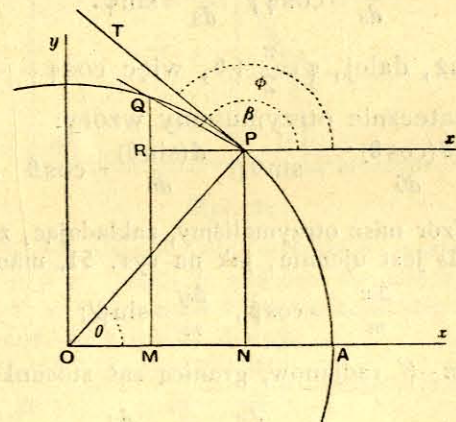
Q zbliża się do punktu P, stosunek $\frac{l}{m}$ dąży do granicy 1.

Dowód tego twierdzenia znajdzie czytelnik w dodat-

ku VI; na nim opiera się mierzenie kątów za pomocą radjanów.

(2) Weźmy dwa punkty P i Q na okręgu koła, którego środek leży w punkcie O (rys. 50). Przez O poprowadźmy osie współrzędnych, wykreślmy rzędne PN, QM i prostą PR, równoległą do osi x-ów; R niech będzie punktem przecięcia się PR z QM. Przedłużmy tę prostą na prawo od P, wykreślmy styczną PT i przypuścimy, że oś x-ów przecina koło w punkcie A. Kąty xOP , $x'PQ$, $x'PT$ niech mają odpowiednio θ , β i φ radjanów. Łuki AP i AQ niech mają s i $s + \Delta s$ jednostek długości, współrzędne punktu P niech będą x , y , współrzędne zaś Q niech będą $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, wreszcie cięciwa PQ niech ma m jednostek długości. W takim razie

$$\frac{\Delta x}{m} = \cos \beta, \quad \frac{\Delta y}{m} = \sin \beta.$$



Rys. 50.

110. Możemy teraz przystąpić do różniczkowania funkcji $\sin \theta$ i $\cos \theta$.

Mamy $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $s = r \theta$,

przyczem r jest niezależne od θ . Stąd wypada, że

$$\frac{dx}{ds} = \frac{d(\cos \theta)}{d\theta}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{d(\sin \theta)}{d\theta}.$$

Zauważmy, że $\frac{dx}{ds}$ i $\frac{dy}{ds}$ są to granice, do których dążą stosunki $\frac{\Delta x}{\Delta s}$ oraz $\frac{\Delta y}{\Delta s}$, gdy Δs dąży do zera. Otóż możemy napisać

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{\Delta x}{m} \cdot \frac{m}{\Delta s} = \cos \beta \frac{m}{\Delta s}; \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{\Delta y}{m} \cdot \frac{m}{\Delta s} = \sin \beta \frac{m}{\Delta s}.$$

Czynniki, z których składają się prawe strony równań, dążą wszystkie do znanych granic, a mianowicie β dąży do φ , granicą zaś stosunku $\frac{m}{\Delta s}$ jest 1. Mamy więc

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi; \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi.$$

Ponieważ, dalej, $\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta$, więc $\cos \varphi = -\sin \theta$, $\sin \varphi = \cos \theta$, i ostatecznie otrzymujemy wzory:

$$\frac{d(\cos \theta)}{d\theta} = -\sin \theta; \quad \frac{d(\sin \theta)}{d\theta} = \cos \theta \quad \dots\dots\dots (\alpha).$$

111. Wzór nasz otrzymaliśmy, zakładając, że Δs jest dodatnie. Gdy Δs jest ujemne, jak na rys. 51, mamy

$$\frac{\Delta x}{m} = -\cos \beta', \quad \frac{\Delta y}{m} = \sin \beta';$$

kąt $x'PQ$ ma $\pi - \beta'$ radjanów, granicą zaś stosunku $\frac{m}{\Delta s}$ jest -1 .

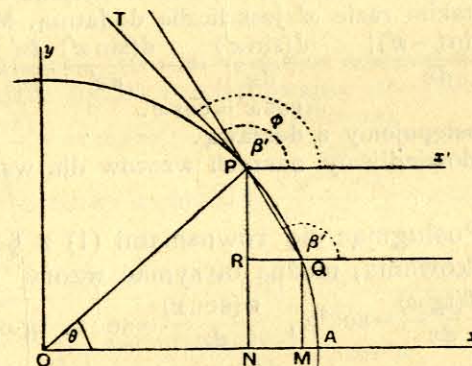
Mamy, jak poprzednio, $\frac{dx}{ds} = \cos \varphi$, $\frac{dy}{ds} = \sin \varphi$, zatem wzory nasze nie ulegają w tym przypadku żadnej zmianie.

112. Posługując się znanymi własnościami funkcji trygonometrycznych, możemy wzory § 110 rozciągnąć na in-

ne wartości liczby θ . Przypuśćmy, że θ zawiera się między $\frac{\pi}{2}$ a π ; jeżeli napiszemy, że $\theta = \frac{\pi}{2} + \theta'$, to θ' musi się zawierać między 0 i $\frac{\pi}{2}$. Stosując wzór (1) z § 102, mamy

$$\frac{d(\sin \theta)}{d\theta} = \frac{d(\cos \theta')}{d\theta'} \cdot \frac{d\theta'}{d\theta} = -\sin \theta' = \cos \theta;$$

$$\frac{d(\cos \theta)}{d\theta} = -\frac{d(\sin \theta')}{d\theta'} \cdot \frac{d\theta'}{d\theta} = \cos \theta' = -\sin \theta.$$



Rys. 51.

Dowiedliśmy wzorów dla wszelkich wartości θ , zawartych między 0 a π . Jeżeli θ zawiera się między π a 2π , piszemy $\theta = \pi + \theta'$; w takim razie θ' zawiera się między 0 a π ; stosując więc wzór (2) z § 102, mamy

$$\frac{d(\sin \theta)}{d\theta} = -\frac{d(\sin \theta')}{d\theta'} \cdot \frac{d\theta'}{d\theta} = -\cos \theta' = \cos \theta;$$

$$\frac{d(\cos \theta)}{d\theta} = -\frac{d(\cos \theta')}{d\theta'} \cdot \frac{d\theta'}{d\theta} = \sin \theta' = -\sin \theta.$$

113. Żeby uogólnić jeszcze bardziej nasz wzór, będziemy uważali zmienną niezależną wprost tylko za jakąś liczbę,

nie zaś, jak dotąd, za wartość liczebną miary kąta, wyrażoną w radjanach. Wiemy, że, gdy x zawiera się między 0 i 2π ,

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x, \quad \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x \quad \dots\dots\dots(\alpha).$$

Możemy wzory rozciągnąć od razu na wszelkie wartości dodatnie x . Jeżeli $x > 2\pi$, to, kładąc $x = 2\pi n + x'$ (gdzie x' zawiera się między 0 a 2π , liczba zaś n jest całkowitą), mamy

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \frac{d(\sin x')}{dx} = \frac{d(\sin x')}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dx} = \frac{d(\sin x')}{dx'} = \cos x' = \cos x.$$

To samo powtórzyć można dla pochodnej dostawy.

Żeby otrzymać wzór na wartości ujemne x , kładziemy $x = -x'$. W takim razie x' jest liczbą dodatnią. Mamy więc

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \frac{d\{\sin(-x')\}}{dx} = -\frac{d(\sin x')}{dx} = -\frac{d(\sin x')}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dx} = -\frac{d(\sin x')}{dx'} = -\cos x' = \cos x.$$

Tak samo postępujemy z dostawą.

Teraz dowiedliśmy naszych wzorów dla wszelkich wartości x .*

114. Posługując się równaniami (1) z § 108 i regułami różniczkowania, można otrzymać wzory

$$\frac{d(\operatorname{tg} x)}{dx} = \sec^2 x, \quad \frac{d(\sec x)}{dx} = \sec x \cdot \operatorname{tg} x,$$

$$\frac{d(\operatorname{ctg} x)}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x, \quad \frac{d(\operatorname{cosec} x)}{dx} = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x.$$

Zastosujmy np. regułę różniczkowania ilorazu (§ 28) do znalezienia wzoru na $\frac{d(\operatorname{tg} x)}{dx}$. Wiemy, że $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$,

$$\begin{aligned} \text{zatem} \quad \frac{d(\operatorname{tg} x)}{dx} &= \frac{\cos x \frac{d(\sin x)}{dx} - \sin x \frac{d(\cos x)}{dx}}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

* Inny sposób dowodzenia znajdzie czytelnik w dodatku VI.

115. Wszystkim wzorom powyższym na różniczkowanie odpowiadają wzory na całkowanie. Najważniejsze

$$\text{z nich:} \quad \int \sin x dx = -\cos x \quad (D)$$

$$\int \cos x dx = \sin x \quad (E)$$

$$\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x. \quad (F)$$

Są to wzory zasadnicze.

PRZYKŁADY.

1. Zakładając, że a, b, n, α, β są liczbami stałymi, sprawdzić następujące wyniki różniczkowania (1)—(10):

$$(1) \frac{d(a \sin nx)}{dx} = an \cos nx; \quad (2) \frac{d(a \cos nx)}{dx} = -an \sin nx;$$

$$(3) \frac{d(x \sin x)}{dx} = \sin x + x \cos x; \quad (4) \frac{d(x^2 \cos x)}{dx} = x(2 \cos x - x \sin x);$$

$$(5) \frac{d\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{dx} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}; \quad (6) \frac{d(\operatorname{tg}^2 x)}{dx} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x};$$

$$(7) \frac{d(x + \sin x \cos x)}{dx} = 2 \cos^2 x;$$

$$(8) \frac{d(x - \sin x \cos x)}{dx} = 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x;$$

$$(9) \frac{d\{\lg(\sin x)\}}{dx} = \operatorname{ctg} x; \quad (10) \frac{d\{\lg(\cos x)\}}{dx} = -\operatorname{tg} x.$$

2. Dowieść, że dla bardzo małego h mamy przybliżone równości

$$(1) \sin(x+h) \doteq \sin x + h \cos x; \quad (2) \cos(x+h) \doteq \cos x - h \sin x;$$

$$(3) \operatorname{tg}(x+h) \doteq \operatorname{tg} x + h \sec^2 x.$$

Jak zmieniają się te wzory, gdy $x=0$?

3. W kole o promieniu r cięciwa podpira kąt środkowy, mający 2α radjanów; dowieść, że ma ona $2r \sin \alpha$ jed-

nostek długości, a stąd, opierając się na twierdzeniu § 109 (1), dowieść, że, gdy α dąży do zera, stosunek $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ dąży do 1.

Wyprowadzić stąd wniosek, że $\sin \alpha$ niewiele różni się od α , gdy α jest bardzo małe [zwracamy uwagę na zgodność wyniku z tabliczką § 105, z której widać, jak mało $\sin \alpha$ różni się od α , gdy $\alpha < 0.3$].

4. Obserwator, znajdujący się o 100 metrów od podnóża pionowej skały, widzi jej szczyt pod kątem 40° . Jeżeli przy pomiarze kąta obserwator omylił się o $\frac{1}{2}^\circ$, jak wielki błąd wyniknie stąd przy obliczeniu wysokości skały? (Rozw.: około 1.5 m.).

5. Dowieść, że największą wartością funkcji $y = a \cos nx + b \sin nx$ jest $\sqrt{a^2 + b^2}$, najmniejszą zaś $-\sqrt{a^2 + b^2}$.

6. Sprawdzić następujące całki (1)–(7):

$$(1) \int \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx + C, \quad (2) \int \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx + C,$$

$$(3) \int \cos^2 x dx = 0.5 (x + \sin x \cos x) + C,$$

$$(4) \int \sin^2 x dx = 0.5 (x - \sin x \cos x) + C,$$

$$(5) \int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x + C, \quad (6) \int \operatorname{tg} x dx = -\lg(\cos x) + C,$$

$$(7) \int \operatorname{ctg} x dx = \lg(\sin x) + C.$$

7. Dowieść, że, gdy $x = a \cos(nt - \beta)$, to $\frac{d^2 x}{dt^2} = -n^2 x$.

8. Dowieść, że $\frac{d(e^{ax} \cos nx)}{dx} = e^{ax} (a \cos nx - n \sin nx)$

$$\text{ i } \frac{d(e^{ax} \sin nx)}{dx} = e^{ax} (a \sin nx + n \cos nx);$$

opierając się na tym, otrzymać całki

$$\int e^{ax} \cos nx dx = e^{ax} \frac{a \cos nx + n \sin nx}{a^2 + n^2},$$

$$\int e^{ax} \sin nx dx = e^{ax} \frac{a \sin nx - n \cos nx}{a^2 + n^2}.$$

9. Dowieść, że pole, zawarte między jedną gałęzią krzywej $y = a \sin nx$ a osią x -ów, równa się $\frac{a}{n}$.

10. Dowieść, że dla funkcji $y = e^{-x} \cos(x - 0.25\pi)$ zachodzi maximum, kiedy $x=0$ lub kiedy x jest wielokrotnością 2π , minimum zaś, gdy x jest nieparzystą wielokrotnością π .

ZASTOSOWANIA DO RUCHU WAHADŁOWEGO.

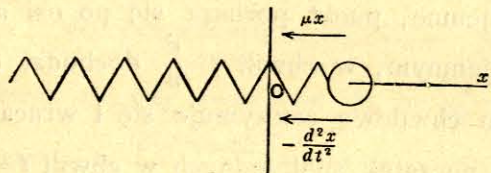
116. Do najważniejszych zastosowań funkcji trygonometrycznych należy badanie ruchu wahadłowego. Przy najprostszym ruchu wahadłowym punkt ciała porusza się tam i z powrotem po prostej (którą możemy obrać za oś x) według prawa, wyrażonego równaniem $x = a \cos nt$, w którym a i n są stałymi. Z początku odcięta punktu jest $x=a$; uważamy ją za dodatnią. Ruch polega na tym, że x maleje i w chwili $t = \frac{\pi}{2n}$ staje się zerem; punkt przechodzi wówczas przez początek współrzędnych. Potym x staje się ujemne, punkt porusza się po osi x -ów w jej kierunku ujemnym, w chwili $t = \frac{\pi}{n}$ dochodzi do punktu $x = -a$, tam chwilowo zatrzymuje się i wraca, przechodząc przez początek współrzędnych w chwili $t = \frac{3\pi}{2n}$; w momencie zaś $t = \frac{2\pi}{n}$ dochodzi znów do punktu $x=a$, zatrzymuje się chwilowo, poczyni cały ruch powtarza się. Jeżeli za jednostkę czasu obraliśmy sekundę, ruch od jedne-

go położenia krańcowego do drugiego i z powrotem trwa $\frac{2\pi}{n}$ sekund.

Ruch tego rodzaju nazywa się ruchem harmonicznym (drgającym) prostym, czas zaś $\frac{2\pi}{n}$ sekund nazywamy okresem całkowitym.

Gdyby wzór nasz brzmiał $x = a \cos(nt - \beta)$ zamiast $x = a \cos nt$, to i wówczas mielibyśmy ruch harmoniczny prosty. Okres takiego ruchu wynosi $\frac{2\pi}{n}$ sekund, położenia krańcowe dane są przez równania $x = a$, $x = -a$, lecz ciało dochodzi do nich w chwilach $t = \frac{\beta}{n}$ oraz $t = \frac{\beta + N\pi}{n}$ (N oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatnią). Ciało dochodzi do punktu $x = a$, gdy N jest liczbą parzystą, do punktu zaś $x = -a$, kiedy N jest nieparzyste.

117. Zbadajmy ruch ciała przyczepionego do sprężyny. Przypuśćmy, że sprężyna leży poziomo, ciało zaś umieściliśmy tak, że może się poruszać po linii poziomej. Na razie pomijamy wszelki opór. Linją, po której odby-



Rys. 52.

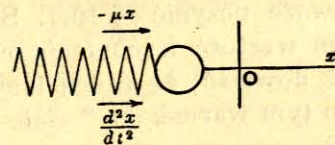
wa się ruch, niech będzie oś x , początkiem współrzędnych niech będzie punkt, w którym znajduje się środek ciężkości ciała, kiedy sprężyna ma długość normalną. Jeżeli

ciało w tym położeniu nie posiada prędkości, to znajduje się w spoczynku. Za kierunek dodatni osi x przyjmujemy ten, w którym sprężyna się wyciąga. Na rysunku jest to kierunek na prawo od początku.

Gdy rozciągamy sprężynę tak, że ciało przesuwamy na prawo o x cm., sprężyna ciągnie ciało na lewo z siłą proporcjonalną względem x , powiedzmy z siłą μx dyn, przyczem μ jest wielkością stałą dla danej sprężyny. Siła ta powoduje przyspieszenie skierowane na lewo. Wiadzieliśmy (§ 81), że wielkość takiego przyspieszenia równa się $-\frac{d^2x}{dt^2}$ jednostkom (rys. 52). Przypuśćmy teraz, że masa ciała jest m gr.; gdyby ciało było swobodne, siła W dyn ($=mg$) nadałaby mu przyspieszenie wynoszące $981 \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}^2}$, czyli równe g jednostkom. Wiemy, że przyspieszenie, nadane ciału przez siłę, jest proporcjonalne do siły, zatem możemy napisać

$$-\frac{d^2x}{dt^2} : g = \mu x : W, \quad \text{czyli}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g\mu x}{W}.$$



Rys. 53.

Kiedy sprężynę ściskamy, x staje się ujemne, i sprężyna wywiera na ciało ciśnienie $\mu(-x)$ dyn. Ciśnienie to powoduje przyspieszenie skierowane na prawo, równe $\frac{d^2x}{dt^2}$

jednostkom (rys. 53). Na podstawie takiego samego rozumowania, jak poprzednio, otrzymujemy równanie

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g\mu x}{W}.$$

Oznaczając $\frac{g\mu}{W}$ przez n^2 , mamy $\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0$.

Równanie odpowiada wszelkim wartościom, jakie tylko przybrać może x w danym przypadku.

Wiemy (przykład 7, str. 126), że równaniu temu czyni zadość $x = a \cos(nt - \beta)$. (1)

Zaraz przekonamy się, że jest to odpowiedź o tyle ogólna, iż rachubę czasu możemy rozpocząć od dowolnej chwili, kiedy wychylenie i prędkość ciała są jakiegokolwiek.

Przypuśćmy, np., że dla chwili $t=0$ mamy $x=a$, $\frac{dx}{dt}=u$; jeżeli mamy w ogólności $x=a \cos(nt - \beta)$, to dla $t=0$ powinniśmy mieć

$$x = a \cos \beta, \quad \frac{dx}{dt} = -na \sin \beta,$$

a zatem trzeba a i β wyznaczyć tak, by

$$a \cos \beta = a, \quad a \sin \beta = \frac{u}{n},$$

to zaś można zawsze uczynić (§ 104). Stąd wniosek, że wzór (1) daje nam wartość wychylenia x w jakiegokolwiek chwili. Można też dowieść, że żaden inny wzór nie czyni zadość wszystkim tym warunkom,* ciało wykonywa więc ruch harmoniczny prosty, którego okres równa się $\frac{2\pi}{n}$.

118. Załóżmy teraz, że ciało napotyka w swym ruchu opór proporcjonalny do prędkości. Niech opór wy-

* Patrz niżej przykład 5 na str. 135.

nosi λv dyn, kiedy prędkość równa się $v \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$. Jeżeli $\frac{dx}{dt}$ jest dodatnie, ciało porusza się na prawo, i opór powoduje przyspieszenie skierowane na lewo, wynoszące $\frac{\lambda g}{W} \frac{dx}{dt}$ jednostek. Przyspieszenie to dodaje się do przyspieszenia, spowodowanego działaniem sprężyny. Całkowite przyspieszenie $\frac{d^2x}{dt^2}$ składa się z $-\frac{\lambda g}{W} \frac{dx}{dt}$ oraz z $-\frac{\mu g}{W} x$, mamy tedy równanie $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\lambda g}{W} \frac{dx}{dt} - \frac{\mu g}{W} x$.

Gdyby ciało poruszało się na lewo, $\frac{dx}{dt}$ byłoby ujemne, opór powodowałby przyspieszenie skierowane na prawo, wynoszące $\frac{\lambda g}{W} \left(-\frac{dx}{dt}\right)$ jednostek, otrzymalibyśmy zatem takie samo równanie, jak poprzednio. Kładąc w równaniu $\frac{\lambda g}{W} = k$, $\frac{\mu g}{W} = n^2$, mamy równanie kształtu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + n^2x = 0.$$

Otóż wiemy (przykład 9, str. 103), że takie równanie można napisać w postaci

$$\frac{d^2(xe^{\frac{k}{2n}t})}{dt^2} + \left(n^2 - \frac{k^2}{4}\right)xe^{\frac{k}{2n}t} = 0.$$

Rozwiązanie równania przybiera rozmaite kształty, zależnie od tego, czy $n^2 - \frac{k^2}{4} < 0$, czy też > 0 .

Jeżeli mamy do czynienia z oporem niewielkim, tak iż $\frac{k^2}{4} < n^2$, tedy, kładąc $n^2 - \frac{k^2}{4} = m^2$, mamy

$$\frac{d^2(xe^{\frac{1}{2}kt})}{dt^2} + m^2(xe^{\frac{1}{2}kt}) = 0.$$

Wiemy, że $xe^{\frac{1}{2}kt} = \alpha \cos(mt - \beta)$, gdzie α i β są stałymi, zależnymi od wychylenia początkowego i prędkości początkowej, a zatem x jako funkcja t wyraża się równaniem

$$x = \alpha e^{-\frac{1}{2}kt} \cos(mt - \beta).$$

Jest to równanie ruchu wahadłowego. Ciało porusza się kolejno z lewej strony na prawo i z prawej na lewo; okres wahanja wynosi $\frac{2\pi}{m}$ sekund, ale wartości krańcowe wychyleń ciągle zmniejszają się, na co wskazuje obecność czynnika $e^{-\frac{1}{2}kt}$. Ciało jak gdyby dąży do położenia równowagi, wykonywując około niego wahanja o coraz mniejszej obszerności.

Większość wahań zachodzących w przyrodzie odbywa się w taki właśnie sposób; ruch ten możemy nazwać drganiem zanikającym.

119. Przy znacznym oporze ruch jest zgoła odmienny. Jeżeli $\frac{k^2}{4} > n^2$, to, kładąc $\frac{k^2}{4} - n^2 = m^2$, mamy

$$\frac{d^2(xe^{\frac{1}{2}kt})}{dt^2} - m^2(xe^{\frac{1}{2}kt}) = 0.$$

Wiemy (przykład 8, str. 103), że równaniu temu czyniemy zadość, kładąc

$$xe^{\frac{1}{2}kt} = Ae^{mt} + Be^{-mt},$$

gdzie A i B są stałymi. Można też dowieść (§ 127), że niepodobna w żaden inny sposób uczynić zadość równaniu.

Przypuśćmy, żeśmy przesunęli ciało na prawo o a cm., zatrzymali je w tym położeniu i następnie puścili. Mamy więc

$$\text{dla } t=0 \quad x=a, \quad \frac{dx}{dt}=0.$$

Jeżeli $x = e^{-\frac{1}{2}kt}(Ae^{mt} + Be^{-mt})$, to $a = A + B$

$$\text{i} \quad A(m - 0.5k) + B(-m - 0.5k) = 0,$$

$$\text{zatem} \quad A = \frac{a}{2} \left(\frac{k}{2m} + 1 \right); \quad B = -\frac{a}{2} \left(\frac{k}{2m} - 1 \right);$$

$$x = \frac{a}{2} e^{-\frac{1}{2}kt} \left\{ \left(\frac{k}{2m} + 1 \right) e^{mt} - \left(\frac{k}{2m} - 1 \right) e^{-mt} \right\}.$$

Ponieważ $n^2 < 0.25k^2$ i $m^2 = 0.25k^2 - n^2$, więc $0.25k^2 - m^2 = n^2$ i $0.5k > m$, czyli $\frac{k}{2m} > 1$. Skoro więc a jest dodatnie, x musi być też dodatnie. Na prędkość znajdujemy wzór

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{am}{2} \left(\frac{k}{2m} + 1 \right) \left(\frac{k}{2m} - 1 \right) e^{-\frac{1}{2}kt} (e^{mt} - e^{-mt}),$$

prędkość zatem jest zawsze ujemna. To dowodzi, że ciało porusza się w kierunku położenia równowagi z prędkością ciągle malejącą; można powiedzieć, że ciało wlecze się do tego punktu, ale nigdy go nie dosięga.

120. W § 95 była mowa o prądach elektrycznych; szczególny przypadek tego zagadnienia zachodzi wówczas, kiedy napięcie źródła zmienia się okresowo. Zachowując znakovanie § 95, przypuśćmy, że $E = A \cos pt$ (liczby A i p są stałe) i że $i=0$, gdy $t=0$. W takim razie otrzymujemy równanie $L \frac{di}{dt} + Ri = E$, czyli $\frac{di}{dt} + bi = \frac{A}{L} \cos pt$. Równanie to jest jednoznaczne z następującym:

$$\frac{d(i e^{bt})}{dt} = \frac{A}{L} e^{bt} \cos pt,$$

skąd mamy (przykł. 8, str. 126)

$$i e^{bt} = \frac{A}{L} e^{bt} \frac{p \sin pt + b \cos pt}{p^2 + b^2} + C.$$

Żeby $i=0$, kiedy $t=0$, powinniśmy mieć

$$\frac{Ab}{L(p^2 + b^2)} + C = 0,$$

zatem
$$ie^{bt} = \frac{A}{L} \left(\frac{e^{bt} p \sin pt + b \cos pt}{p^2 + b^2} - \frac{b}{p^2 + b^2} \right),$$

czyli
$$i = \frac{A}{L(p^2 + b^2)} (p \sin pt + b \cos pt - be^{-bt}).$$

Wstawiając $\frac{R}{L}$ zamiast b , mamy

$$i = \frac{A}{R^2 + p^2 L^2} (pL \sin pt + R \cos pt - Re^{-\frac{Rt}{L}}).$$

Wzór ten daje natężenie prądu zmiennego, wywołanego w obwodzie przez napięcie okresowe, jeżeli obwód został zamknięty w chwili $t=0$, kiedy napięcie było największe.

PRZYKŁADY.

1. Punkt P porusza się po okręgu koła (którego środek leży w O) w taki sposób, że promień OP obraca się z prędkością kątową stałą. Niech będzie N rzut prostokątny punktu P na stałą średnicę; dowieść, że N wykonywa ruch harmoniczny prosty.

2. Zrobić wykres prędkości jako funkcji czasu w ruchu harmonicznym prostym. Takież wykres dla drogi jako funkcji czasu.

3. Jeżeli $\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0$, możemy powiedzieć, że $\frac{dx}{dt} = v$ i $\frac{dv}{dt} = -n^2x$. Dowieść, że $v \frac{dv}{dt} + n^2x \frac{dx}{dt} = 0$ i że zatem $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + n^2x^2 = \text{stałe}$.

Dowieść też, że ciało, poruszające się tak, iż

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + n^2x^2 = \text{stałe},$$

wykonywa ruch harmoniczny prosty.

4. Ciało wykonywa ruch harmoniczny prosty dany równaniem $\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0$.

(a) W czasie $t=0$ wychylenie wynosi $x_0=a$, prędkość $v_0=0$. Wyrazić x jako funkcję t .

(b) W czasie $t=0$ wychylenie $x_0=0$, prędkość $v_0=u$. Wyrazić x jako funkcję t .

[Wskazówka: postępując jak w poprzednim zadaniu, otrzymamy $v^2 + n^2x^2 = C$; stałą C musimy dobrać tak, by w przypadku (a) dla $x=a$ mieć $v=0$, w przypadku zaś (b) dla $x=0$ mieć $v=u$. Po wyznaczeniu stałej C piszemy w otrzymanym przez nas równaniu $\frac{dx}{dt}$ zamiast v i wyciągamy pierwiastek z obu stron równania; dalsze całkowanie według §132. W całości musimy dobrać stałą tak, by dla $t=0$ mieć w pierwszym przypadku $x=a$, w drugim zaś $x=0$. Otrzymane odpowiedzi sprawdzić przez dwukrotne różniczkowanie względem zmiennej niezależnej t . Przyp. tłum.].

5. Dowieść, że, kiedy dwie funkcje czynią zadość równaniu $\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0$ i obie dają na x i na $\frac{dx}{dt}$ te same wartości przy $t=0$, to różnica obu funkcji z czyni zadość równaniu $\frac{d^2z}{dt^2} + n^2z = 0$ i przy $t=0$ daje $z=0$, $\frac{dz}{dt}=0$.

Dowieść następnie, że $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + n^2z^2 = 0$ i że $z=0$ przy wszelkich wartościach dodatnich na t . Stąd wysnuć wniosek, że istnieje jedna tylko funkcja, czyniąca zadość przepisanyemu warunkom na x .

6. Ciało wykonywa drganie zanikające według równania $x = ae^{-\frac{kt}{2}} \cos(mt - \beta)$. Dowieść, że $\alpha = a\sqrt{1 + \frac{k^2}{4m^2}}$ i $\tan \beta = \frac{k}{2m}$, jeżeli dla $t=0$ mamy $x=a$ oraz $\frac{dx}{dt}=0$. Dowieść, że największe wychylenia zachodzą w chwili, kiedy $t=0$ lub kie-

dy t jest wielokrotnością liczby $\frac{\pi}{m}$, i że każde następne największe wychylenie (jeśli pominiemy sprawę znaków) jest mniejsze od poprzedniego w stosunku $e^{-\frac{\pi k}{2m}}$: 1. Dowieść również, że ciało przechodzi przez położenie równowagi co $\frac{\pi}{m}$ sekund (jeżeli sekundę obierzemy za jednostkę czasu), i wyznaczyć chwilę pierwszego przejścia przez położenie równowagi. Jeżeli ciało przechodzi przez położenie równowagi w chwili, kiedy $t = T$, tedy prędkość jego w tym momencie $= mae^{-\frac{1}{2}kT}$ centymetrów na sekundę.

7. Wykreśl krzywą odległości dla ruchu ciała w zadaniu poprzednim. Wykreśl również miejsce geometryczne największości $x = ae^{-\frac{1}{2}kt}$ oraz $x = -ae^{-\frac{1}{2}kt}$.

8. Brama obraca się na zawiasach w ten sposób, że początkowe jej położenie tworzy kąt 45° z położeniem równowagi, przy następnym zaś wychyleniu największym z przeciwnej strony kąt 40° z położeniem równowagi; między temi dwoma największemi wychyleniami upłynęła 1 sekunda. Przypuszczamy, że ruch odbywa się zgodnie z równaniem $\theta = ae^{-\frac{1}{2}kt} \cos(mt - \beta)$; wyznaczyć stałe: a , β , $0.5k$, m . [Odpowiedź: $0.5k \doteq 0.1178$; $m = \pi$; $\beta \doteq 0.0375$; $a = 0.7909$].

Wyznaczyć prędkość kątową, którą posiada brama, przechodząc po raz pierwszy przez położenie równowagi, oraz stosunek, w jakim zmniejsza się ta prędkość przy każdym następnym przejściu przez położenie równowagi. [Odpowiedź: prędkość kątowa $\doteq 2.34$ radjanów na sekundę; stosunek $= \frac{8}{9}$].

9. Punkt wykonywa drganie zanikające w ten sposób, że trzy jego kolejne wychylenia największe wynoszą: 10 cm. na prawo od punktu A na torze, 9 cm. na lewo od A i 8 cm. na prawo od A. Wyznaczyć jego położenie równowagi. [Odpowiedź: $\frac{1}{36}$ cm. na lewo od A].

10. We wzorze na i , podanym w § 120, wyraz $Re \frac{Rt}{L}$ po pewnym czasie staje się tak mały, że można go opuścić. Jeżeli to uczynimy, otrzymamy $\frac{A}{\sqrt{(R^2 + p^2 L^2)}}$ jako największą wartość i . Dowieść, że maxima natężenia prądu występują w s sekund po maximach napięcia, jeżeli s jest najmniejszą liczbą dodatnią, czyniącą zadość równaniu $ps = \frac{pL}{R}$.

ROZDZIAŁ VIII.

O METODACH CAŁKOWANIA

Umiejętność całkowania prostych funkcji jest bardzo ważna; dlatego podajemy przykłady pewnych metod, które dają się stosować do całkowania różnych rodzajów funkcji.

METODA ROZKŁADANIA NA UŁAMKI PROSTE.

121. Zaczniemy od trzech przykładów.

(1) Niech będzie $\int \frac{1}{1-x^2} dx$.

Wiemy, że $1-x^2 = (1+x)(1-x)$; umiemy też całkować sumę $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$. Otóż $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2}$, a zatem

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \frac{1}{2} \{ \log_e(1+x) - \log_e(1-x) \} = \frac{1}{2} \log_e \frac{1+x}{1-x}.$$

(2) Weźmy teraz całkę

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx.$$

Zauważmy, że $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$, a zatem

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \log_e \frac{x-2}{x-1}.$$

(3) Pamiętając, że $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$, możemy napisać

$$\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} dx = \log_e \{ (x-1)(x-2) \}.$$

Zestawiając przykłady 3-ci i 2-gi, widzimy, że

$$\int \frac{2x}{(x-1)(x-2)} dx = \log_e \{ (x-1)(x-2) \} + 3 \log_e \frac{x-2}{x-1} = 4 \log_e(x-2) - 2 \log_e(x-1),$$

albo $\int \frac{x dx}{(x-1)(x-2)} = 2 \log_e(x-2) - \log_e(x-1) = \log_e \frac{(x-2)^2}{x-1}.$

122. Z poprzednich przykładów można wysnuć sposób całkowania funkcji kształtu $\frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)}$. Trzeba mianowicie utworzyć sumę

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{2x-(a+b)}{(x-a)(x-b)} \text{ i różnicę } \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \frac{a-b}{(x-a)(x-b)},$$

oraz zauważyć, że

$$Ax+B = \frac{A}{2} \{ 2x-(a+b) \} + \left\{ B + \frac{A(a+b)}{2} \right\},$$

że zatem

$$\begin{aligned} \frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)} &= \frac{A}{2} \left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} \right) + \frac{B + \frac{A}{2}(a+b)}{a-b} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right) = \\ &= \frac{Aa+B}{a-b} \cdot \frac{1}{x-a} - \frac{Ab+B}{a-b} \cdot \frac{1}{x-b}. \end{aligned}$$

W ten sposób funkcję naszą rozłożyliśmy, jak powiadamy, na ułamki proste; wyraziliśmy ją mianowicie jako sumę pewnej stałej, mnożonej przez ułamek $\frac{1}{x-a}$, i drugiej stałej, mnożonej przez $\frac{1}{x-b}$. Teraz możemy napisać

$$\int \frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)} dx = \frac{Aa+B}{a-b} \log_e(x-a) + \frac{Ab+B}{b-a} \log_e(x-b).$$

123. Rozciągając naszą metodę na ułamki, mające w mianowniku większą liczbę czynników, zbadajmy całkę

$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)} dx.$$

Mamy tożsamość

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)} - \frac{M}{x-c} = \frac{1-M(x-a)(x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

Dobierzmy M tak, by licznik otrzymanego ułamku był podzielny przez $x-c$. W tym celu wystarczy założyć, że

$$M(c-a)(c-b)=1, \text{ czyli } M = \frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

Mamy więc:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{1}{(c-a)(c-b)(x-c)} - \frac{1}{(c-a)(c-b)} \cdot \frac{(x-a)(x-b)-(c-a)(c-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

Ponieważ

$$(x-a)(x-b)-(c-a)(c-b) = x^2 - c^2 - (a+b)(x-c),$$

$$\text{zatem } \frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{1}{(c-a)(c-b)(x-c)} - \frac{x+c-(a+b)}{(c-a)(c-b)(x-a)(x-b)}.$$

Na podstawie wyników, otrzymanych w § 122, mamy

$$\begin{aligned} \frac{x+c-(a+b)}{(x-a)(x-b)} &= \frac{a+c-(a+b)}{a-b} \cdot \frac{1}{x-a} + \frac{b+c-(a+b)}{b-a} \cdot \frac{1}{x-b} = \\ &= \frac{c-b}{a-b} \cdot \frac{1}{x-a} + \frac{c-a}{b-a} \cdot \frac{1}{x-b}, \end{aligned}$$

zatem

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{\log(x-c)}{(c-a)(c-b)} + \frac{\log(x-a)}{(a-c)(a-b)} + \frac{\log(x-b)}{(b-a)(b-c)}.$$

Tę samą metodę można stosować do wszelkich funkcji wymiernych, których mianowniki są iloczynami lub da ją się przedstawić w postaci iloczynu.

124. Weźmy całkę

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + px + q} dx.$$

Jeżeli potrafimy rozłożyć mianownik na dwa czynniki kształtu $x+a$ lub $x+b$, funkcja da się scałkować przez rozłożenie na ułamki proste. W tym celu możemy postąpić, jak przy rozwiązywaniu równania kwadratowego $x^2+px+q=0$, mianowicie, możemy dodać do mianownika i odjąć od niego $0.25p^2$.

W ten sposób otrzymamy

$$x^2 + px + q = x^2 + px + 0.25p^2 - (0.25p^2 - q).$$

Jeżeli $p^2 > 4q$, to, kładąc $\sqrt{0.25p^2 - q} = \gamma$, mamy

$$x^2 + px + q = (x + 0.5p + \gamma)(x + 0.5p - \gamma).$$

Jeżeli teraz założymy, że $0.5p + \gamma = a$, $0.5p - \gamma = b$,

to

$$x^2 + px + q = (x+a)(x+b).$$

Możemy iść drogą cokolwiek odmienną od wskazanej w § 122, kładąc $x + 0.5p = z$.

W takim razie

$$\begin{aligned} \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + px + q} &= \frac{\alpha z + \beta - 0.5\alpha p}{z^2 - \gamma^2}, \\ \int \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + px + q} dx &= \alpha \int \frac{z dz}{z^2 - \gamma^2} + (\beta - 0.5\alpha p) \int \frac{dz}{z^2 - \gamma^2} = \\ &= 0.5\alpha \log_e(x^2 + px + q) + \frac{\beta - 0.5\alpha p}{a-b} \log_e \frac{x+b}{x+a}. \end{aligned}$$

Przypadek, kiedy $p^2 < 4q$, rozważymy w § 133.

PRZYKŁADY.

Scałkować następujące funkcje:

$$\begin{aligned} (1) \frac{1}{x^2+4}; & \quad (2) \frac{1}{x^2-5}; & (3) \frac{1}{4x^2-1}; & \quad (4) \frac{1}{5x^2-1}; \\ (5) \frac{2x+3}{(x+1)(x-2)}; & \quad (6) \frac{x-3}{(1-x)(2x-1)}; & \quad (7) \frac{1}{x(x-1)}; \\ (8) \frac{1}{x(x-1)(x-2)}; & \quad (9) \frac{3x+4}{x^2+3x+2}; & \quad (10) \frac{3x+4}{x^2+3x+1}. \end{aligned}$$

WZÓR LOGARYTMICZNY.

125. Z przykładu 2 na str. 102 możemy otrzymać bardzo ważną całkę:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+C}} = \log_e \{x + \sqrt{x^2+C}\} \quad (G).$$

Wzór ten, jeden z zasadniczych w rachunku całkowym, nie zależy od tego, czy liczba C jest dodatnia, czy ujemna.

126. Z poprzedniego łatwo otrzymać wartość całki

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}.$$

Mianowicie z tożsamości

$$x^2+px+q = (x+0.5p)^2 + (q-0.25p^2),$$

kładając

$$x+0.5p=z,$$

$$\text{otrzymamy } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+(q-0.25p^2)}} = \log_e \{z + \sqrt{z^2+(q-0.25p^2)}\};$$

że zaś

$$z^2+q-0.25p^2 = x^2+px+q, \text{ więc ostatecznie}$$

$$\text{wypadnie } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \log_e \{x+0.5p + \sqrt{x^2+px+q}\}.$$

127. Za pomocą wzoru (G) można przedstawić y jako

funkcję t , jeżeli y czyni zadość równaniu $\frac{d^2y}{dt^2} = m^2y$, w którym m jest stałą.

Niech będzie $v = \frac{dy}{dt}$, zatem $\frac{dv}{dt} = m^2y$,

skąd $v \frac{dv}{dt} = m^2y \frac{dy}{dt}$, albo $v \frac{dv}{dt} - m^2y \frac{dy}{dt} = 0$.

Ostatnie równanie można napisać w takiej postaci:

$$\frac{d(0.5v^2 - 0.5m^2y^2)}{dt} = 0.$$

Wypada więc, że $v^2 - m^2y^2$ jest wielkością stałą, tak iż mamy prawo napisać

$$v^2 - m^2y^2 = m^2C,$$

skąd, pamiętając, że $v = \frac{dy}{dt}$, mamy

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = m^2(y^2 + C),$$

czyli

$$m \frac{dt}{dy} = + \frac{1}{\sqrt{y^2 + C}}.$$

Weźmy naprzód pierwiastek ze znakiem +; wypadnie

$$mt = \log_e \{y + \sqrt{y^2 + C}\} + \alpha \quad (\alpha \text{ jest stałą}),$$

czyli

$$y + \sqrt{y^2 + C} = e^{mt-\alpha};$$

zatem

$$\frac{1}{y + \sqrt{y^2 + C}} = e^{\alpha-mt}.$$

Dla znalezienia wartości y , mnożymy w ostatnim równaniu licznik i mianownik przez $\sqrt{y^2 + C} - y$. Ponieważ

$$\{\sqrt{y^2 + C} + y\} \{\sqrt{y^2 + C} - y\} = C,$$

więc

$$\frac{\sqrt{y^2 + C} - y}{C} = e^{\alpha-mt},$$

czyli

$$\sqrt{y^2 + C} - y = Ce^{\alpha-mt}.$$

Ponieważ

$$\sqrt{y^2 + C} + y = e^{mt-\alpha},$$

zatem

$$2y = e^{mt-\alpha} - Ce^{\alpha-mt},$$

albo też, kładąc

$$\frac{e^{-\alpha}}{2} = A, \quad -\frac{Ce^{\alpha}}{2} = B,$$

mamy ostatecznie $y = Ae^{mt} + Be^{-mt}$.

Gdybyśmy byli wzięli pierwiastek ujemny $m \frac{dt}{dy} = \frac{1}{\sqrt{(y^2 + C)}}$, w rachunku trzeba by było wstawić $-t$ zamiast t . Wynik byłby ten sam. Widzimy, że każde rozwiązanie równania $\frac{d^2y}{dt^2} = m^2y$ ma kształt $y = Ae^{mt} + Be^{-mt}$, przyczem A i B są stałe.

PRZYKŁADY.

Scałkować funkcje (1) — (4):

$$(1) \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 2x)}}; (2) \frac{1}{\sqrt{(x^2 + x)}}; (3) \frac{1}{\sqrt{(2x^2 + 3)}}; (4) \frac{1}{\sqrt{(3x^2 + 1)}}.$$

CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI.

128. Bardzo ważna metoda całkowania opiera się na regule różniczkowania iloczynu. Wiemy, że

$$\frac{d(uv)}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx},$$

zatem $uv = \int v \frac{du}{dx} dx + \int u \frac{dv}{dx} dx,$

skąd wypływa następujący wzór, zwany regułą całkowania przez części:

$$\int v \frac{du}{dx} dx = uv - \int u \frac{dv}{dx} dx.$$

129. Jako przykład weźmy całkę

$$(I) \int \log_e x dx.$$

Niech będzie $u = x$, $v = \log_e x$; w takim razie

$$\int \log_e x dx = x \log_e x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log_e x - x.$$

$$(II) \int x^n \log_e x dx.$$

Najdogodniej założyć, że $v = \log_e x$, ponieważ $\frac{dv}{dx}$ jest w takim razie funkcją wymierną. Właściwy kształt funkcji u znajdziemy, zważywszy, że x^n powinno równać się $\frac{du}{dx}$. Wynika stąd, że powinniśmy wziąć $u = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

$$\begin{aligned} \text{Zatem} \quad \int x^n \log_e x dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \log_e x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \log_e x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Wzór ten pozostaje słuszny dla wszelkich wartości wykładnika n z wyjątkiem $n = -1$. Co się tyczy tego przypadku, patrz przykład 5 (6) na str. 103.

Powyższe przykłady dają pojęcie o tym, jak należy wybierać funkcje u , v w całce, do której chcemy stosować metodę całkowania przez części.

Niech będzie dana całka $\int \varphi(x) \psi(x) dx$; jeżeli $\varphi(x)$ wybraliśmy jako v , to $\psi(x) = \frac{du}{dx}$, czyli powinniśmy wziąć $u = \int \psi(x) dx$. Jeżeli całkujemy $\int f(x) dx$, i jeżeli $f(x)$ daje się rozłożyć różnymi sposobami na dwa czynniki $\varphi(x)$ i $\psi(x)$, powinniśmy rozłożyć ją w taki sposób, by jeden z czynników, np. $\varphi(x)$, dał się łatwo scałkować. Zwykle staramy się przytym otrzymać taki drugi czynnik $\psi(x)$, któryby przy różniczkowaniu przybrał prostszą formę.

Jako przykład weźmy (III) $\int x e^x dx$. Kładąc $u = e^x$, $v = x$,

$$\text{mamy} \quad \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = e^x (x - 1).$$

Albo np. niech będzie dana całka (IV) $\int x^n e^x dx$ (gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią). Kładąc $u = e^x$, $v = x^n$, mamy

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \dots \dots \dots (\alpha)$$

W taki sam sposób znajdujemy dalej

$$\int x^{n-1} e^x dx = x^{n-1} e^x - (n-1) \int x^{n-2} e^x dx \text{ i t. d.}$$

Ten sam rachunek powtarzamy, dopóki nie znajdziemy żądanej całki, co zawsze powinno nastąpić, ponieważ n jest całkowite i dodatnie. Wzorem redukcyjnym będziemy nazywali taki wzór, jak (α) ; za pomocą wzoru redukcyjnego wyrażamy całkę daną przez inną, prostszą, podobnego kształtu, tak iż wartość całki danej możemy wyznaczyć, powtarzając ten sam rachunek pewną ilość razy.

Weźmy jeszcze następujący przykład:

$$(V) \int \sqrt{1+x^2} dx.$$

Kładąc $u = x$, $v = \sqrt{1+x^2}$, mamy

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = x \sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$\text{Ponieważ } \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{(1+x^2)-1}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\text{więc } \int \sqrt{1+x^2} dx = x \sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\text{skąd wypada } 2 \int \sqrt{1+x^2} dx = x \sqrt{1+x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\text{czyli } \int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \log_e \{x + \sqrt{1+x^2}\}.$$

130. Weźmy jeszcze kilka przykładów całek, zawierających funkcje trygonometryczne.

$$(I) \int x \cos x dx.$$

Całkujemy przez części, kładąc $u = x$, $v = \sin x$. Mamy

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x.$$

$$(II) \int x^n \cos x dx.$$

Kładąc $u = x^n$, $v = \sin x$, mamy

$$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - \int n x^{n-1} \sin x dx;$$

jeżeli w nowej całce założymy $u = x^{n-1}$, $v = \cos x$, otrzymamy

$$\int x^{n-1} \cos x dx = x^{n-1} \sin x + n x^{n-2} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x dx.$$

Jest to wzór redukcyjny. [Por. § 129 (IV)].

$$(III) \int e^{ax} \cos bx dx.$$

Założymy $u = \cos bx$, $v = e^{ax}$; mamy

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx;$$

w nowej całce założymy $v = e^{ax}$, $u = \sin bx$; otrzymamy

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx dx,$$

$$\text{czyli } \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx,$$

$$\text{zatem } \int e^{ax} \cos bx dx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}.$$

PRZYKŁADY.

1. Scałkować następujące funkcje:

- | | | | |
|---------------------|-------------------------|---------------------------------|--------------------|
| (1) $\log_{10} x$; | (2) $x^2 \log_{10} x$; | (3) $\frac{\log_{10} x}{x^2}$; | (4) $x^3 e^x$; |
| (5) $x^4 e^x$; | (6) $x e^{-x}$; | (7) $x \sin x$; | (8) $x^2 \cos x$; |
| (9) $x^2 \sin x$; | (10) $x^3 \cos x$; | (11) $x^3 \sin x$. | |

2. Dowieść, że

$$\int \sqrt{x^2 + A} dx = \frac{1}{2} [x \sqrt{x^2 + A} + A \log_e \{x + \sqrt{x^2 + A}\}].$$

3. Znaleźć całkę $\int \sqrt{x^2 + px + q} dx$.
4. Znaleźć wzór redukcyjny na całkę $\int e^{-ax} x^n dx$.
5. Znaleźć wartość $\int e^{ax} \sin bxdx$, stosując metodę § 130(III).

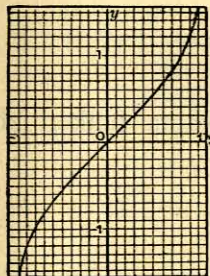
FUNKCJE ODWROTNE FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH.

131. Pewnym wynikiem otrzymanym w rozdz. VII możemy nadać inną postać. Zamiast wstawiać y na $\sin \theta$ i x na θ w tabliczce § 105, moglibyśmy zamiast $\sin \theta$ napisać x , zamiast θ napisać y ; mielibyśmy $x = \sin y$. Za pomocą wspomnianej tabliczki dałoby się wykreślić y jako funkcję zmiennej x (dla x zawartego między 0 a 1); opierając się na związku $\sin(-y) = -\sin y$, możnaby nawet przedłużyć wykres na lewo od osi y -ów; w ten sposób mielibyśmy y przedstawione wykreślnie jako funkcję x dla wartości x , zawartych między -1 a $+1$. Ponieważ wstawa każdej liczby zawiera się między -1 a $+1$, zatym niema wartości na y jako funkcji x , jeżeli x nie leży między $+1$ a -1 . Krańcowe wartości na y są to 0.5π i -0.5π . Równanie $x = \sin y$, wyznaczające taką funkcję, piszemy też $y = \arcsin x$. Na rys. 54 mamy wykres funkcji $y = \arcsin x$.

W taki sam sposób, opierając się na równaniu $x = \operatorname{tg} y$, możemy określić nową funkcję zmiennej x ; piszemy ją $y = \operatorname{arctg} x$. Wykres jej mamy na rys. 55 (dla wartości zmiennej niezależnej $-2.5 < x < 2.5$). Każdej wartości x odpowiada zupełnie określona wartość y , i wszystkie one leżą między -0.5π a $+0.5\pi$.

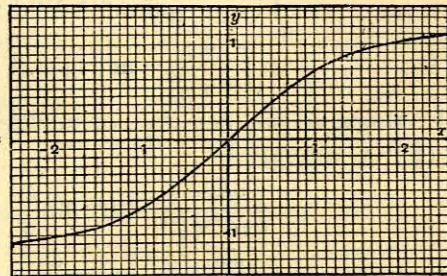
Funkcje $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ nazywamy odwrotnościami funkcji trygonometrycznych (niekiedy zowiemy

je też cyklometrycznymi). W podobny sposób dałoby się zdefiniować funkcje $\arccos x$, $\operatorname{arcsec} x$ i t. d.



$y = \arcsin x$

Rys. 54.



$y = \operatorname{arctg} x$

Rys. 55.

132. Nowe nasze funkcje możemy odrazu zróżniczkować.

(I) Ponieważ $x = \sin y$, $y = \arcsin x$,

więc $\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$,

czyli $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Zmienna y zawiera się między -0.5π a $+0.5\pi$, zatym $\cos y$ musi być liczbą dodatnią, i pierwiastek powinniśmy brać ze znakiem $+$.

(II) Jeżeli $x = \operatorname{tg} y$, $y = \operatorname{arctg} x$,

to $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$,

czyli $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$.

Stąd otrzymujemy dwa nowe wzory na całkowanie, mianowicie:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x.$$

Posługując się regułą różniczkowania funkcji złożonych (§ 25), mamy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} \quad (\text{H}),$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \quad (\text{I}).$$

Wzory te należą do zasadniczych.

133. Wprowadzenie funkcji $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ i t. p. do elementarnego wykładu rachunku całkowego ma na celu głównie całkowanie wyrażeń kształtu $(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ i $(a^2+x^2)^{-1}$ lub innych, dających się do nich sprowadzić.

(I) Niech będzie np. $\int \frac{dx}{\sqrt{(q+px-x^2)}}$.

Możemy utworzyć tożsamość

$$q+px-x^2 = (q+0.25p^2) - (x-0.5p)^2.$$

Gdyby $q+0.25p^2 < 0$, cały trójmian pod znakiem pierwiastku byłby ujemny, i nie mielibyśmy pierwiastku rzeczywistego. Wobec tego zakładamy, że $q+0.25p^2 > 0$, a mianowicie $q+0.25p^2 = \gamma^2$, czyli $\gamma = \sqrt{(q+0.25p^2)}$. Kładąc jeszcze $x-0.5p = z$, mamy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(q+px-x^2)}} = \int \frac{dz}{\sqrt{(\gamma^2-z^2)}} = \arcsin \frac{z}{\gamma} = \arcsin \frac{x-0.5p}{\sqrt{(q+0.25p^2)}}.$$

(II) Niech będzie dana cała $\int \frac{ax+\beta}{x^2+px+q} dx$.

W § 124 nauczyliśmy się całkować taką funkcję w za-

łożeniu, że $p^2 > 4q$. Teraz zbadajmy przypadek, kiedy $p^2 < 4q$. Mamy przedewszystkiem tożsamość

$$x^2+px+q = (x+0.5p)^2 + (q-0.25p^2).$$

Ponieważ $q-0.25p^2 > 0$, więc mamy prawo założyć, że $\gamma = \sqrt{(q-0.25p^2)}$; oznaczając też $x+0.5p$ przez z , otrzymujemy:

$$\int \frac{(ax+\beta) dx}{x^2+px+q} = \int \frac{\alpha z + (\beta-0.5ap)}{z^2+\gamma^2} dz =$$

$$= \alpha \int \frac{z}{z^2+\gamma^2} dz + (\beta-0.5ap) \int \frac{dz}{z^2+\gamma^2} =$$

$$= 0.5\alpha \log_e(z^2+\gamma^2) + \frac{\beta-0.5ap}{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{z}{\gamma} =$$

$$= 0.5\alpha \log_e(x^2+px+q) + \frac{\beta-0.5ap}{\sqrt{(q-0.25p^2)}} \operatorname{arctg} \frac{x+0.5p}{\sqrt{(q-0.25p^2)}}.$$

PRZYKŁADY.

1. Dowieść, że, gdy h jest bardzo małe, zachodzą równości przybliżone: $\arcsin(x+h) \doteq \arcsin x + \frac{h}{\sqrt{(1-x^2)}}$,

$$\operatorname{arctg}(x+h) \doteq \operatorname{arctg} x + \frac{h}{1+x^2}.$$

2. Na wstawę pewnego kąta znaleziono wartość 0.4. W przypuszczeniu, że błąd nie przekracza 0.001, znaleźć w przybliżeniu błąd, który możnaby popełnić przy obliczaniu wielkości kąta z danej wstawy. [Odpowiedź: 3'45"].

3. Na styczną kąta znaleziono wartość 1.5; błąd nie przekracza 0.001; znaleźć w przybliżeniu błąd popełniony przy obliczaniu wielkości kąta odpowiadającego danej stycznej. [Odpowiedź: 1'3'5].

4. Zróżniczkować funkcje: $x \arcsin x$; $\frac{1}{x} \operatorname{arctg} x$.

5. Scałkować funkcje (1)–(7):

$$(1) \frac{1}{\sqrt{(1-3x^2)}}; \quad (2) \frac{1}{\sqrt{(5-2x^2)}}; \quad (3) \frac{1}{\sqrt{(1+x-x^2)}};$$

$$(4) \frac{1}{\sqrt{(3+2x-x^2)}}; \quad (5) \frac{1}{\sqrt{(3+x-2x^2)}}; \quad (6) \frac{x+1}{x^2+x+1};$$

$$(7) \frac{2x+3}{x^2+2x+3}.$$

134. W wielu przypadkach podstawienie bywa dogodniejsze, niż wprowadzanie funkcji odwrotnych.

Jako prosty przykład weźmy $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Przy całkowaniu chodzi o znalezienie pewnej funkcji y takiej, żeby

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

Jeżeli zamiast x napiszemy $a \sin \theta$, to $\sqrt{(a^2-x^2)} = a \cos \theta$,
zatem $\frac{dx}{d\theta} = a \cos \theta$.

Ostatecznie więc mamy:

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\theta} = 1,$$

czyli $y = \theta$ czyni zadość równaniu. Jeżeli więc założymy, że $x = a \sin \theta$, to wszystkie wartości całki $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ będą dane wzorem $\theta + C$, w którym C jest stałą dowolną.

Moglibyśmy założyć, że $x = a \cos \varphi$; w takim razie $\frac{dy}{d\varphi} = -1$, czyli $y = C' - \varphi$.

Obie odpowiedzi dają się doskonale pogodzić, jeżeli zwrócimy uwagę na to, że $\cos \varphi = \sin \theta$, gdy $\theta = 0.5\pi - \varphi$.

135. Podajemy kilka przykładów takich podstawień.

$$(I) \int \sqrt{(a^2-x^2)} dx = a^2 \int \cos^2 \theta d\theta, \text{ jeżeli } x = a \sin \theta.$$

Nową całkę znajdujemy bądź na podstawie przykładu 1 (7) na str. 125, bądź za pomocą całkowania przez części. Mamy kolejno:

$$\int \cos^2 \theta d\theta = \sin \theta \cos \theta + \int \sin^2 \theta d\theta = \sin \theta \cos \theta + \int (1 - \cos^2 \theta) d\theta =$$

$$= \sin \theta \cos \theta + \theta - \int \cos^2 \theta d\theta,$$

$$\text{zatem } 2 \int \cos^2 \theta d\theta = \sin \theta \cos \theta + \theta,$$

$$\text{czyli } \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} (\theta + \sin \theta \cos \theta).$$

W taki sam sposób można przekonać się, że

$$\int \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} (\theta - \sin \theta \cos \theta).$$

Stąd łatwo otrzymać ważne całki określone

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Możemy również znaleźć całkę określoną $\int_0^a \sqrt{(a^2-x^2)} dx$.

Całka nieokreślona równa się $0.5 \left(a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x \sqrt{(a^2-x^2)} \right)$.

Ponieważ całe to wyrażenie równa się zero, gdy $x=0$, więc nie ma potrzeby dodawać stałej. Jeżeli x wzrasta od 0 do a , $\arcsin \frac{x}{a}$ wzrasta od 0 do $\frac{\pi}{2}$. Zatem

$$\int_0^a \sqrt{(a^2-x^2)} dx = \frac{\pi a^2}{4}.$$

$$(II) \int x^2 \sqrt{(a^2-x^2)} dx.$$

Przy takim samym podstawieniu, jak poprzednio,

$$\int x^2 \sqrt{(a^2-x^2)} dx = a^4 \int \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = a^4 \int (\cos^2 \theta - \cos^4 \theta) d\theta.$$

W celu znalezienia całki $\int \cos^4 \theta d\theta$ stosujemy regułę całkowania przez części, kładąc $u = \cos^3 \theta$, $v = \sin \theta$; mamy:

$$\begin{aligned}\int \cos^4 \theta d\theta &= \sin \theta \cos^3 \theta + 3 \int \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \\ &= \sin \theta \cos^3 \theta + 3 \int (\cos^2 \theta - \cos^4 \theta) d\theta = \\ &= \sin \theta \cos^3 \theta + \frac{3}{2}(\theta + \sin \theta \cos \theta) - 3 \int \cos^4 \theta d\theta.\end{aligned}$$

$$\text{Zatym } \int \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{4} \sin \theta \cos^3 \theta + \frac{3}{8}(\theta + \sin \theta \cos \theta).$$

Za pomocą łatwego rachunku znajdujemy, że

$$\int x^2 \sqrt{(a^2 - x^2)} dx = a^4 \left(\frac{\theta}{8} + \frac{1}{8} \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{4} \sin \theta \cos^3 \theta \right).$$

Stąd można również otrzymać ważną całkę określoną:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{16}.$$

Możemy też znaleźć wartość całki $\int_{-a}^{+a} x^2 \sqrt{(a^2 - x^2)} dx$.

Całka nieokreślona równa się

$$\frac{1}{8} a^4 \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{8} a^2 x \sqrt{(a^2 - x^2)} - \frac{1}{4} x (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Dodajmy stałą C , dobraną w taki sposób, by całka równała się zeru, gdy $x = -a$. Ponieważ dla $x = -a$, mamy $\arcsin \frac{x}{a} = -\frac{\pi}{2}$,

więc $C = \frac{\pi a^4}{16}$. Jeżeli x wzrasta od $-a$ do $+a$, $\arcsin x$ wzrasta od -0.5π do $+0.5\pi$; kiedy $x = a$, wartość całki nieokreślonej $= \frac{\pi a^4}{16}$. Stąd wynika, że

$$\int_{-a}^{+a} x^2 \sqrt{(a^2 - x^2)} dx = \frac{\pi a^4}{16} + C = \frac{\pi a^4}{8}.$$

(III) Weźmy jeszcze pod uwagę całkę $\int \frac{d\theta}{\cos \theta}$. Wiemy,

że $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = \log_e \{x + \sqrt{(1+x^2)}\}$. Załóżmy, że $x = \operatorname{tg} \theta$. W ta-

kim razie $\sqrt{(1+x^2)} = \sec \theta$, $\frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta$;

$$\begin{aligned}\text{zatem } \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} &= \int \sec \theta d\theta = \int \frac{d\theta}{\cos \theta} = \\ &= \log_e (\operatorname{tg} \theta + \sec \theta) = \log_e \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}.\end{aligned}$$

PRZYKŁADY.

1. Scałkować funkcje (1)—(5):

- (1) $\sin^2 x \cos x$; (2) $\cos^2 x \sin x$; (3) $\sin^3 x$;
(4) $\cos^3 x$; (5) $\sin^4 x$.

2. Dowieść, że $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3\pi}{16}$.

3. Dowieść, że $\int \frac{dx}{\sin x} = \log_e \frac{1 - \cos x}{\sin x}$.

PRZYKŁADY DODATKOWE.

[Czytelnik może nie przerabiać wszystkich przykładów przed rozpoczęciem następnego rozdziału. Natomiast jest rzeczą wielce pożyteczną przerabianie codziennie dla wprawy po kilka przykładów].

1. Scałkuj następujące wyrażenia (1)—(50):

- (1) $\frac{1}{6-x^2}$, (2) $\frac{x}{6-2x^2}$, (3) $\frac{3x+1}{6-3x^2}$, (4) $\frac{1}{5+x^2}$,
(5) $\frac{x}{5+2x^2}$, (6) $\frac{3x+3}{5+3x^2}$, (7) $\frac{1}{x^2+4x+1}$, (8) $\frac{x}{x^2+4x+2}$,
(9) $\frac{2x-1}{x^2+4x+3}$, (10) $\frac{1}{x^2+4x+5}$, (11) $\frac{x}{x^2+4x+6}$,
(12) $\frac{2x+1}{x^2+4x+7}$, (13) $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$,
(14) $\frac{x}{(x-1)(x-2)(3-x)}$, (15) $\frac{1}{(x-1)(2-x)(3-x)}$,
(16) $\frac{1}{\sqrt{(2x^2-5)}}$, (17) $\frac{x}{\sqrt{(2x^2-6)}}$, (18) $\frac{1}{\sqrt{(6-2x^2)}}$,

- (19) $\frac{x}{\sqrt{(5-2x^2)}}$, (20) $\sqrt{(2x^2-3)}$, (21) $x\sqrt{(2x^2+3)}$,
 (22) $\sqrt{(2-3x^2)}$, (23) $x\sqrt{(1-3x^2)}$, (24) $x^2\sqrt{(2x^2+5)}$,
 (25) $x^2\sqrt{(3-2x^2)}$, (26) $(x^2+2x+3)\sqrt{(1+x)}$,
 (27) $(x^2-3x+2)\sqrt{(1-x)}$, (28) $x\sqrt{(2x+x^2)}$,
 (29) $(x-1)\sqrt{(2x-x^2)}$, (30) $\frac{1}{\sqrt{(2x^2+2x-1)}}$,
 (31) $\frac{x}{\sqrt{(2x^2-2x-1)}}$, (32) $\frac{1}{\sqrt{(2+2x-x^2)}}$,
 (33) $\frac{x}{\sqrt{(1+x-2x^2)}}$, (34) $\sqrt{(x^2+x-1)}$, (35) $x\sqrt{(x^2+x+1)}$,
 (36) $\sqrt{(1+x-x^2)}$, (37) $x\sqrt{(1-x-x^2)}$, (38) $\arcsin x$,
 (39) $x \arcsin x$, (40) $x^2 \arcsin x$, (41) $x^3 \arcsin x$, (42) $\arctg x$,
 (43) $x \arctg x$, (44) $x^2 \arctg x$, (45) $x^3 \arctg x$, (46) $e^x \cos^2 x$,
 (47) $e^x \sin^2 x$, (48) $e^{-x} \cos^2 x$, (49) $e^{-x} \sin^2 x$,
 (50) $(e^x + e^{-x}) \sin x \cos x$.

2. Oblicz wartości przybliżone następujących dziesięciu całek:

- (1) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - \frac{1}{4}}$, (2) $\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)(4-x)}$, (3) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)}}$,
 (4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(3x^2+2)}}$, (5) $\int_1^2 \sqrt{(x^2-1)} dx$, (6) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(2-x^2)}}$,
 (7) $\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{(25-x^2)}}$, (8) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)}}$, (9) $\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{(36-x^2)}}$,
 (10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$.

[Odpowiedzi: (1) 0.128; (2) 0.462; (3) 1.317; (4) 0.569;
 (5) 1.074; (6) 0.785; (7) 0.284; (8) 0.646; (9) 13.803; (10) 0.881.
 W przykładach (7), (8) i (9) mamy do czynienia z funkcjami
 $\arcsin \frac{x}{5}$, $\arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}$, $\arcsin \frac{x}{6}$ i musimy znaleźć ich wartości
 przybliżone przy pewnych wartościach zmiennej x . Żeby obliczyć

wartość wyrażenia $\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$, musimy przedewszystkiem za-
 uważyć, że $\frac{2}{\sqrt{5}} \doteq 0.8944272$; następnie z tablic trygonometrycz-
 nych możemy przekonać się, że jest to wartość trochę więk-
 sza od wartości $\sin 63^\circ 26'$. Ponieważ $63^\circ 26' = 1.1071 \dots$ radja-
 nów, kąt zaś $63^\circ 27' = 1.1074 \dots$ radjanów, więc $\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} \doteq$
 $\doteq 1.107$].

ROZDZIAŁ IX.

KILKA ZASTOSOWAŃ DO KRZYWYCH PŁASKICH
I DO POWIERZCHNI.

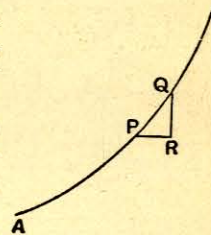
136. Chcąc otrzymać wzór na długość łuku jakiegokolwiek krzywej płaskiej, zastosujemy to samo postępowanie, którym posługiwaliśmy się w § 109, kiedy mowa była o łuku koła. Mianowicie, wyjdźmy z następującego założenia.

Jeżeli łuk PQ ma l jednostek długości, cięciwa zaś PQ ma k takich jednostek, to stosunek $\frac{l}{k}$ dąży do granicy 1, jeżeli punkt Q zbliża się nieograniczenie do P .

Jeżeli łuk AP ma s jednostek długości, łuk AQ ma $s + \Delta s$ jednostek, cięciwa zaś PQ ma k jednostek, to stosunek $\frac{\Delta s}{k}$ dąży do 1, gdy Δs dąży do zera, o ile, naturalnie, punkty A , P , Q tak są położone, że Δs jest dodatnie. Gdyby Δs było ujemne, granicą byłoby -1 (rys. 56).

Jeżeli punkt P ma współrzędne x , y , punkt Q współrzędne $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, to musi zachodzić związek:

$$k^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2,$$



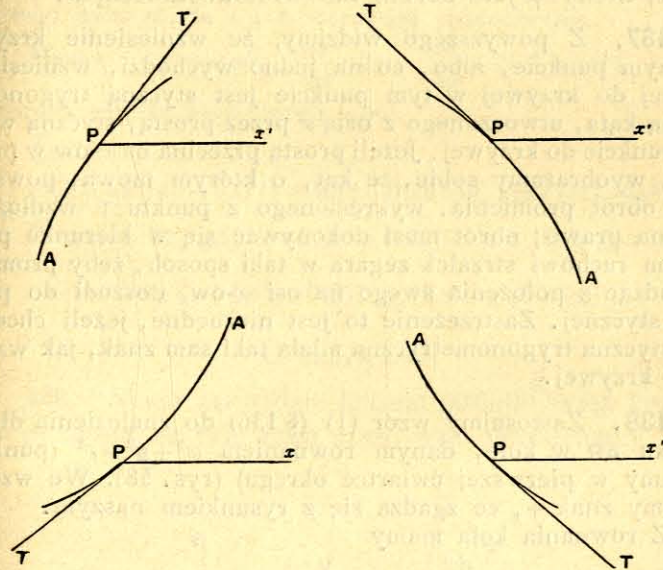
Rys. 56.

skąd wynikają wzory:

$$\frac{ds}{dx} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}; \quad \frac{ds}{dy} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \dots \dots \dots (1)$$

Znak $+$ albo $-$ powinniśmy wybrać zależnie od tego, czy x i y wzrastają, czy też maleją, kiedy s wzrasta.

Z punktu P na krzywej (rys. 57) poprowadźmy na prawo promień Px' , równoległy do osi x , oraz styczną PT w kierunku, w którym łuk s wzrasta. Niech kąt $x'PT$ (wy-



Rys. 57.

kreślony przez promień, który, obracając się w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówek zegara, z położenia $x'P$ doszedł do położenia PT) ma φ radjanów.

Ze wszystkich krzywych na rys. 57 wynika, że

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi; \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi.$$

Można też wogóle powiedzieć, że

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi; \quad \frac{dx}{dy} = \operatorname{ctg} \varphi.$$

Co do dwóch ostatnich wzorów, musimy zastrzec się, że dla pierwszego z nich wykluczamy przypadek, kiedy φ jest nieparzystą wielokrotnością 0.5π , dla drugiego zaś przypadek, kiedy φ jest zerem lub wielokrotnością π .

137. Z powyższego widzimy, że wzniesienie krzywej w danym punkcie, albo, co na jedno wychodzi, wzniesienie stycznej do krzywej w tym punkcie jest styczną trygonometryczną kąta, utworzonego z osią x przez prostą, styczną w danym punkcie do krzywej. Jeżeli prosta przecina oś x -ów w punkcie T , wyobrażamy sobie, że kąt, o którym mowa, powstaje przez obrót promienia, wykreślonego z punktu T wzdłuż osi x -ów na prawo; obrót musi dokonywać się w kierunku przeciwnym ruchowi strzałek zegara w taki sposób, żeby promień, wychodząc z położenia swego na osi x -ów, doszedł do położenia stycznej. Zastrzeżenie to jest niezbędne, jeżeli chcemy, żeby styczna trygonometryczna miała taki sam znak, jak wzniesienie krzywej.

138. Zastosujmy wzór (1) (§ 136) do znalezienia długości łuku AP w kole, danym równaniem $x^2 + y^2 = r^2$ (punkt P obieramy w pierwszej ćwiartce okręgu) (rys. 58). We wzorze bierzemy znak $+$, co zgadza się z rysunkiem naszym.

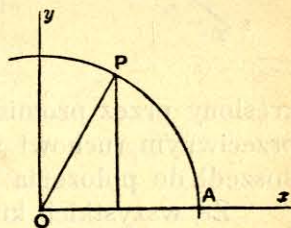
Z równania koła mamy

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}, \text{ zatem } \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}},$$

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{r^2}{r^2 - y^2}, \text{ i } \frac{ds}{dy} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}}.$$

Stąd wynika, że

$$s = r \int \frac{dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = r \arcsin \frac{y}{r} + C.$$



Rys. 58.

Ponieważ przy $y = 0$ musimy mieć $s = 0$, więc stała $C = 0$, i

$$s = r \arcsin \frac{y}{r}.$$

Jeżeli kąt AOP ma θ radjanów, to $y = r \sin \theta$, i otrzymana przez nas długość łuku jest tożsama ze znanym wzorem

$$s = r \theta.$$

139. Znajdźmy jeszcze długość łuku paraboli. Krzywa niech będzie dana równaniem $y = x^2$; szukajmy długości łuku między początkiem współrzędnych a punktem (x, y) na krzywej. Możemy założyć, że s i x wzrastają jednocześnie.

$$\text{Mamy } y = x^2; \quad \frac{dy}{dx} = 2x; \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + 4x^2},$$

z warunkiem, że $s = 0$, jeżeli $x = 0$.

Zatym

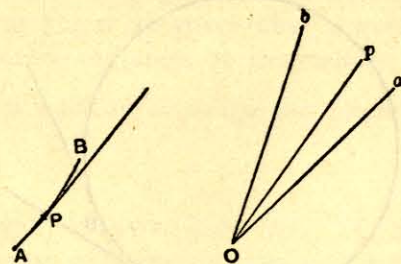
$$s = \int \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1 + 4x^2} + 0.25 \log_e \{2x + \sqrt{1 + 4x^2}\} + C.$$

Zważmy, że, gdy $x = 0$, to $s = 0$, a więc stała $C = 0$. Ostatecznie mamy:

$$s = 0.5x \sqrt{1 + 4x^2} + 0.25 \log_e \{2x + \sqrt{1 + 4x^2}\}.$$

O KRZYWIŹNIE.

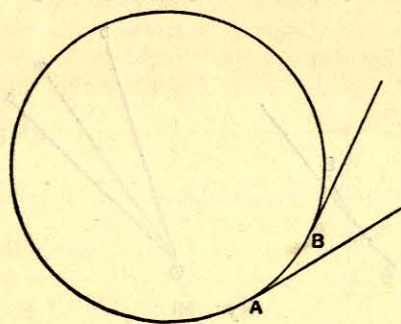
140. Niech AB będzie łukiem jakiegokolwiek krzywej, P — punktem na tym łuku (rys. 59). Wyobraźmy sobie,



Rys. 59.

że P porusza się po krzywej od A do B , i z dowolnego punktu O wykreśliśmy promień Op , równoległy do stycznej w punkcie P , poprowadzonej w kierunku, w którym punkt ruchomy wykreśla krzywą. Możemy wziąć tak mały łuk AB , żeby (I) promień Op obracał się dokoła O zawsze w tym samym kierunku i (II) żeby kąt pomiędzy skrajnymi jego położeniami, Oa i Ob , był ostry (rys. 59). Przypuśćmy, że łuk AB ma l jednostek długości, a kąt aOb ma γ radjanów. Jest to kąt, o który obróciła się styczna, kiedy punkt P wykreślił łuk AB , możemy go więc nazwać krzywizną zupełną łuku AB . Za pomocą stosunku $\frac{\gamma}{l}$ możemy mierzyć w radjanach na jednostkę długości, pewną wielkość, którą nazwiemy krzywizną średnią łuku AB . Granicę k , do której stosunek ten dąży, kiedy B bierzemy na krzywej coraz bliżej punktu A , określimy jako miarę krzywizny krzywej w punkcie A , wyrażoną w radjanach na jednostkę długości, t. j. $\frac{1}{\text{cm}}$.

141. Jeżeli krzywa dana jest kołem (rys. 60) i kąt środkowy, odpowiadający łukowi AB , ma γ radjanów; jeże-



Rys. 60.

li przytym r jest promieniem koła, to $l = \gamma r$, zatem $k = \frac{1}{r}$. Stąd wynika, że krzywizna koła jest we wszystkich punktach jednakowa i wynosi $\frac{1}{r}$ radjanów na jednostkę długości $\left(\frac{1}{r} \frac{1}{\text{cm}}\right)$.

142. Dla każdej krzywej długość równą $\frac{1}{k}$ jednostkom będziemy nazywali promieniem krzywizny krzywej w punkcie A i będziemy ją oznaczali literą ρ .

W punkcie A na krzywej poprowadźmy do niej normalną i na normalnej weźmy punkt C taki, żeby (I) $AC = \rho$ i (II) żeby krzywa w pobliżu punktu A zwrócona była swą stroną wklęsłą do C . Z punktu C , jako ze środka, promieniem ρ wykreśliśmy koło. Punkt C nazywa się środkiem krzywizny krzywej w punkcie A , koło zaś przez nas wykreślone — kołem krzywizny w punkcie A .

143. Niech s i φ będą określone, jak w § 136. Rzecz jasna, że φ może wzrastać, kiedy s wzrasta, lub też może maleć. Gdy s przybiera wartość $s + \Delta s$, φ zaś wartość $\varphi + \Delta\varphi$, wartość bezwzględna Δs jest liczbą jednostek długości, zawartych w długości łuku, a wartość bezwzględna $\Delta\varphi$ jest liczbą radjanów w krzywiznie zupełnej tegoż łuku. A zatem wartość bezwzględna pochodnej $\frac{d\varphi}{ds}$ jest to k , czyli $\frac{1}{\rho}$.

144. Jeżeli krzywa jest dana równaniem kształtu $y = f(x)$, możemy z łatwością znaleźć wzór na ρ . Jakoż mamy:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{dx}{ds} = \cos \varphi;$$

a więc
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi} \frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx} \cos\varphi,$$

skąd
$$\frac{d\varphi}{ds} = \cos^3\varphi \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Wartość bezwzględna $\cos\varphi$ równa się $\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$;

mamy tedy:
$$\frac{1}{\rho} = \pm \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{2}} \frac{d^2y}{dx^2}.$$

We wzorze tym należy brać znak +, gdy $\frac{d^2y}{dx^2}$ jest dodatnie, znak - w przeciwnym razie.

145. Dla przykładu weźmy parabolę $y = x^2$. Mamy

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2;$$

zatem
$$\rho = 0.5 (1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

146. Jeżeli krzywa bardzo mało różni się od prostej, prostą można wziąć za oś x . W takim razie w każdym punkcie krzywej zarówno y , jak pierwsza pochodna $\frac{dy}{dx}$, muszą być bardzo małe, można więc napisać równość przybliżoną:

$$\frac{1}{\rho} \doteq \pm \frac{d^2y}{dx^2},$$

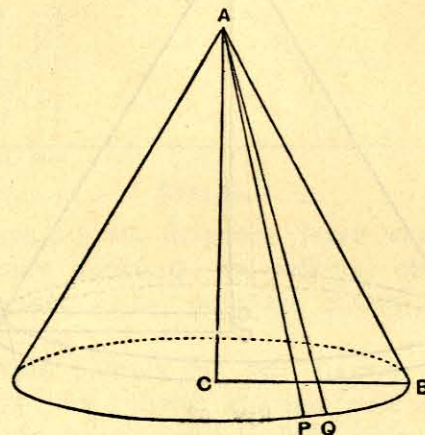
w której znak + lub - obieramy w zależności od tego, czy $\frac{d^2y}{dx^2}$ jest dodatnie, czy ujemne.

Jeżeli np. w równaniu krzywej $y = a \sin(nx)$ współczynnik a jest bardzo małą liczbą, to $\frac{1}{\rho}$ w przybliżeniu równa się wartości bezwzględnej wyrażenia $an^2 \sin(nx)$, czyli wyrażenia n^2y .

O POLU POWIERZCHNI OBROTOWEJ.

147. Szukajmy pola powierzchni stożka obrotowego.

Przypuśćmy, że stożek został utworzony przez obrót trójkąta prostokątnego ABC dookoła boku AC (rys. 61). Bok AB niech ma l jednostek długości, bok BC niech ma r takich jednostek, pole zaś powierzchni krzywej S jednostek powierzchni.

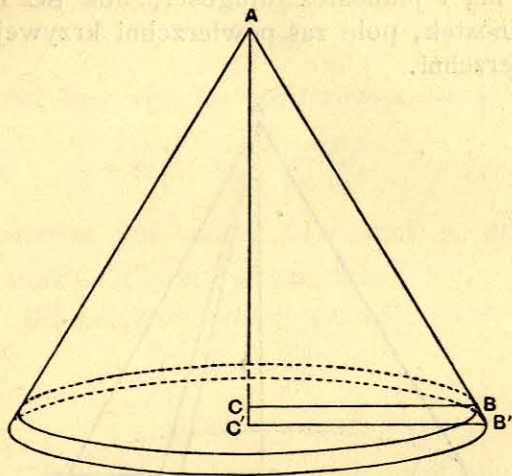


Rys. 61.

Podstawą stożka jest koło ze środkiem w punkcie C; promień jego ma r jednostek długości. Przypuśćmy, że w koło to wpisaliśmy wielokąt o wielkiej liczbie boków i wierzchołki jego P, Q połączyliśmy z A. W ten sposób powstał ostrosłup o podstawie wielokątnej. Prostopadła z wierzchołka A na bok PQ niech ma p jednostek długości, bok PQ niech ma s takich jednostek; pole trójkąta $APQ = 0.5 ps$ jednostek powierzchni.

Zwiększajmy teraz nieograniczenie liczbę boków wielokąta, zmniejszając jednocześnie długość każdego z nich; ostrosłup dąży do zlania się ze stożkiem. Obwód wielokąta PQ... dąży do granicy $2\pi r$, liczba p dąży do grani-

cy l , a więc suma pól ścian bocznych ostrosłupa dąży do granicy $\pi r l$, czyli $S = \pi r l$.



Rys. 62.

Jeżeli wielkość kąta BAC , wyrażoną w radianach, oznaczmy przez α , to $\frac{r}{l} = \sin \alpha$, zatem $S = \pi l^2 \sin \alpha$.

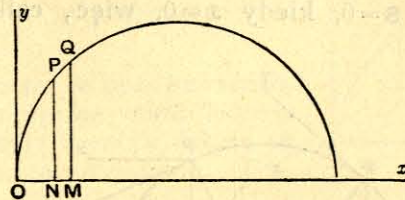
Przypuścmy, że punkt B przesunął się po tworzącej stożka do położenia B' (rys. 62) tak, iż l przybrało wartość $l + \Delta l$, r zaś wartość $r + \Delta r$, S wartość $S + \Delta S$. Ponieważ liczba α zmianie nie uległa, więc mamy

$$\Delta S = 2\pi(l + 0.5\Delta l) \sin \alpha \cdot \Delta l = 2\pi(r + 0.5\Delta r) \Delta l.$$

148. Przejdźmy teraz do pasa kulistego, wyznaczonego przez dwie płaszczyzny równoległe. Możemy sobie wyobrazić, że kula powstaje przez obrót półkola dokoła średnicy. Oś obrotu przyjmujemy za oś x (rys. 63).

Na półkolu bierzemy dowolny punkt P i prowadzimy jego rzędną PN ; spólrzędne punktu P niech będą x, y .

Przy obrocie półkola punkt P zakreśla okrąg koła, którego środek leży w N , a promień ma y jedn. długości. Pole czasy kulistej, zawierającej punkt O i mającej za podstawę koło, wykreślone przez P , niech ma S jedn. pow.,



Rys. 63.

łuk OP niech ma s jedn. długości. Jeżeli zamiast punktu P weźmiemy inny punkt, Q , na półkolu, długość łuku s przybierze wartość $s + \Delta s$, pole zaś czasy S — wartość $S + \Delta S$.

Przy obrocie półkola łuk PQ , mający Δs jedn. długości, wykreśla pas kulisty, którego pole ma ΔS jedn. pow. Cięciwa PQ kreśli powierzchnię pnia stożkowego. Przypuścmy, że cięciwa PQ ma k jedn. długości, a pole powierzchni pnia ma σ jedn. pow. Wiemy, że, gdy Δs dąży do zera, stosunek $\frac{\sigma}{k}$ dąży do granicy $2\pi y$. Jeżeli zwa-

zymy, że zarówno $\frac{\Delta s}{k}$, jak $\frac{\Delta S}{\sigma}$, dążą do granicy 1, kiedy Δs dąży do zera, okaże się, że $\frac{\Delta S}{\Delta s}$ dąży do granicy $2\pi y$, czy-

li że

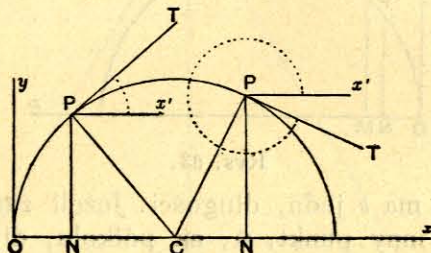
$$\frac{dS}{ds} = 2\pi y.$$

Przypuścmy, że promień koła ma r jedn. długości; w takim razie, jak widać z rys. 64, przy każdym położeniu punktu P mamy

$$\frac{dx}{ds} = \cos x' PT = \sin PCN = \frac{y}{r},$$

a więc
$$\frac{dS}{dx} = 2\pi r.$$

Ponieważ $S=0$, kiedy $x=0$, więc, całkując, mamy wzór $S=2\pi r x$.



Rys. 64.

Stąd wynika, że pole pasa kulistego, którego podstawy są odległe od siebie o d jedn. długości, ma $2\pi r d$ jedn. pow., pole zaś całej powierzchni kulistej ma takich jednostek $4\pi r^2$.

149. Rozumowanie, które nas doprowadziło do równania

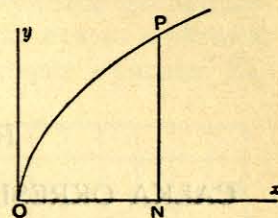
$$\frac{dS}{ds} = 2\pi y,$$

nie zależy wcale od tego, jaką krzywą przyjmiemy za tworzącą powierzchni obrotowej. Możemy więc wzór powyższy stosować do obliczania pola powierzchni, utworzonej przez obrót jakiejkolwiek krzywej płaskiej dokoła osi x .

PRZYKŁADY.

1. Wycinek kołowy, będący rozwinięciem stożka na płaszczyznę, jest 0.25 koła; znaleźć kąt przy wierzchołku stożka. [Odp.: w przybliżeniu $=28^{\circ}57'$].

2. Parabola $y^2=x$ obraca się dokoła osi x ; dowieść, że $\frac{dS}{dx} = \pi\sqrt{1+4x}$. Dowieść również, że, gdy odcięta punktu P (rys. 65) ma dwie jedn. długości, pole powierzchni obrotowej, wykreślonej przez łuk OP, ma w przybliżeniu 13.6136 jedn. pow.



Rys. 65.

3. Dowieść, że pole powierzchni, wykreślonej przez obrót jednego grzbietu sinusoidy $y = \sin x$ dokoła osi x , ma 4π jedn. powierzchni.

4. Dowieść, że promień krzywizny w każdym punkcie paraboli $y^2=2px$ jest dwa razy większy od odcinka normalnej, zawartego między tym punktem a prostą $x+0.5p=0$.

ROZDZIAŁ X.

CAŁKA OKREŚLONA JAKO GRANICA SUMY.

150. Przy badaniu pól, jak to, któreśmy przeprowadzili w § 71, nietylko chodzi o mierzenie pól figur płaskich, ile o przedstawienie wykresów całek. Jeżeli mamy pole, ograniczone od góry przez wykres funkcji $y=f(x)$, od dołu — przez oś x , ze strony prawej — przez ruchomą rzędną, z lewej zaś przez nieruchomą, tedy liczba zawartych w nim jedn. pow. z jest funkcją zmiennej x i wyraża się przez sumę całki $\int f(x)dx$ i stałej C ; stała ta jest

wyznaczona przez warunek, że, jeżeli $x=a$, to $z=0$. Gdy $x=b$, wartość z wyraża się całką określoną $\int_a^b f(x)dx$.

Całkę nieokreśloną można pojmować jako całkę określoną ze zmienną granicą górną i można ją przedstawiać wykresnie jako pewne pole.

Naogół, jedynym sposobem obliczenia bądź to całki określonej, bądź pola jest znalezienie całki nieokreślonej za pomocą metod, wskazanych przez rachunek całkowy. Gdybyśmy jednak potrafili znaleźć pole innym jakimś sposobem, mielibyśmy całkę określoną, nie obliczając wcale całki nieokreślonej. Jeżeli mamy do czynienia z całką nieokreśloną, której znaleźć nie umiemy, możemy obliczyć

w przybliżeniu odpowiednie pole i w ten sposób otrzymać przybliżoną wartość całki.

151. Najprostszym sposobem przybliżonego obliczenia pola byłby taki: na papierze kratkowanym wykreślić funkcje i zliczyć kratki, zawarte wewnątrz wykresu. Żądane pole byłoby cokolwiek większe od sumy pól kwadratów. Za pomocą zupełnie prostych środków możemy tę metodę znacznie ulepszyć i otrzymać wartość całki z większym przybliżeniem.

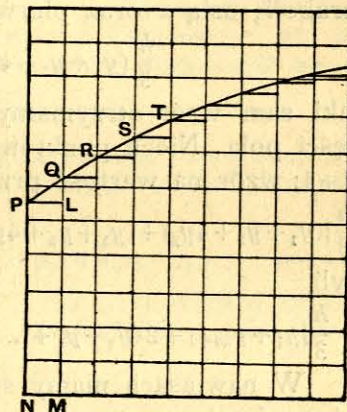
(I) Zamiast rachować kwadraty, weźmy pod uwagę prostokąty takie, jak $PNML$ (rys. 66). Suma pól tych prostokątów daje nam żadaną wartość pola z przybliżeniem większym, niż poprzednio suma kwadratów. Przypuśćmy, że szerokość każdej kratki $=h$ jedn. Niech $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ będą rzędnymi pierwszych n punktów, wyznaczonych przez przecięcie się krzywej z prostokątami, suma pól ma $h(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$ jedn. pow.

(II) Zamiast prostokątów, takich, jak $PLMN$, weźmy trapezy, takie, jak $PQMN$. Pole trapezu, wyznaczonego przez r -tą i $(r+1)$ -szą rzędną, ma

$$0.5h(y_r + y_{r+1}) \text{ jedn. pow.}$$

Suma pól trapezów daje dobrą wartość przybliżoną na pole żądane. Wartość ta wynosi

$$0.5h\{(y_1 + y_2) + (y_2 + y_3) + \dots + (y_{n-1} + y_n)\} \text{ jedn. pow.,}$$



Rys. 66.

albo $0.5h\{y_1 + 2(y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + y_n\}$.

(III) Zamiast łączyć punkty P i Q prostą, bierzmy po trzy punkty, np. P, Q, R; R, S, T i t. d., i przypuśćmy, że każda taka trójka leży na paraboli, której oś jest równoległa do osi y (§ 35). To da nam jeszcze większe przybliżenie. Wiemy (§ 73), że pole, zawarte między łukiem paraboli, osią x oraz pierwszą i trzecią rzędną, ma

$$\frac{h}{3}(y_1 + y_3 + 4y_2) \text{ jedn. pow.}$$

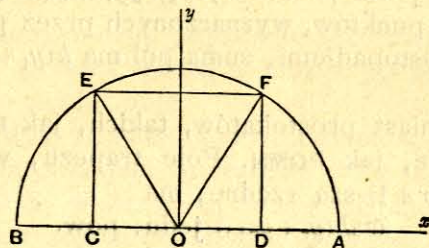
Taki sam wzór otrzymamy dla wszystkich odpowiednich części pola. Niech punktów takich, jak P, Q, R..., będzie $2n+1$; wzór na wartość przybliżoną pola będzie:

$$\frac{h}{3}\{y_1 + y_3 + 4y_2 + (y_3 + y_5 + 4y_4) + \dots + (y_{2n-1} + y_{2n+1} + 4y_{2n})\},$$

czyli

$$\frac{h}{3}\{y_1 + y_{2n+1} + 2(y_3 + y_5 + \dots + y_{2n-1}) + 4(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n})\}.$$

W nawiasach mamy sumę pierwszej i ostatniej rzędnej, podwojoną sumę innych rzędnych o wskaźnikach nieparzystych oraz sumę rzędnych o wskaźnikach parzystych, pomnożoną przez cztery.



Rys. 67.

Wzór ten nosi nazwę wzoru Simpsona.

152. Wzór Simpsona można zastosować do przybliżonego obliczenia π . Weźmy koło o promieniu 1, wykreślmy osie współrzędnych, jak na rys. 67; zaznaczmy punkty C i D o współrzędnych $(-0.5, 0)$ i $(0.5, 0)$, wykreślmy wreszcie rzędne CE, DF. Ponieważ $EF = CD = OA$, więc trójkąt EOF jest równoboczny, a kąt EOF ma $\frac{\pi}{3}$ radjanów. Odcinki EC i DF mają $\sqrt{1 - 0.5^2}$, czyli $0.5\sqrt{3}$ jedn. długości. Pole figury krzywoliniowej, wyznaczonej przez łuk EF, oś x i rzędne EC, FD, jest sumą pól wycinka OEF i trójkątów EOC i FOD, czyli ma

$$\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \text{ jedn. pow.}$$

Żeby to samo pole obliczyć za pomocą wzoru Simpsona, podzielmy CD na 10 równych części. Mamy $y = \sqrt{1 - x^2}$; $x_1 = -0.5$; $x_2 = -0.4$; ... $x_{11} = 0.5$.

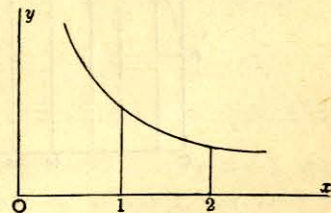
Na pole $\frac{h}{3}\{y_1 + y_{11} + 2(y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 4(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10})\}$ znajdujemy (przykład 16, rozdz. I, str. 17) wartość 0.95661 (z dokładnością do 0.00001); $0.25\sqrt{3} = 0.43301$ (z dokładnością do 0.00001), a więc $\frac{\pi}{6} = 0.52360$

$\pi = 3.1416$ (z dokładnością do 0.0001).

153. W taki sam sposób można znaleźć wartość przybliżoną $\log_{10} e$. Znajdźmy wartość liczebną pola, zawartego między łukiem hiperboli $y = \frac{1}{x}$ (rys. 68), osią x oraz prostymi

$x=1$, $x=2$. Wiemy, że wartość ta = $\log_2$. Część osi x , zawartą między dwiema naszymi prostymi, podzielmy na 10 równych odcinków; będziemy mieli $h=0.1$, oraz $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{1.1}$, ... $y_{11} = \frac{1}{2}$.

Musimy znaleźć wartość liczebną wyrażenia:

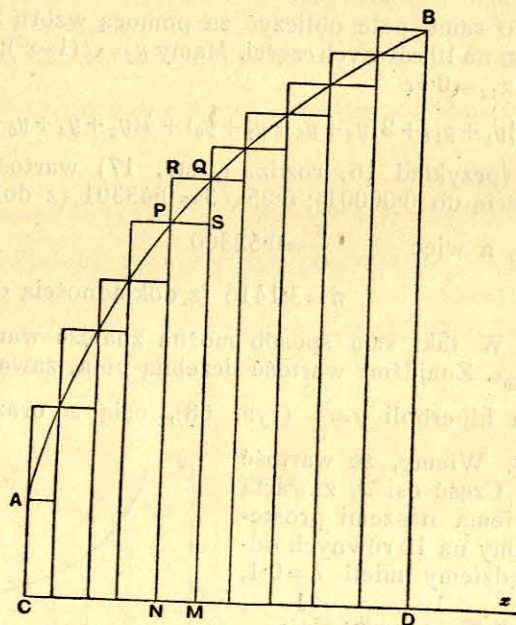


Rys. 68.

$$\frac{h}{3} \{y_1 + y_{11} + 2(y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 4(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10})\}.$$

Znajdujemy (przykł. 17, str. 17) wartość 0.69315. Ponieważ $\log_2 2 = 0.30103$, więc $\log_{10} e = \frac{30103}{69315} = 0.43429$ (z dokładnością do 0.00001). Stąd mamy $e = 2.7183$ (z dokładnością do 0.0001).

154. Powróćmy do sposobu przybliżonego obliczania pól za pomocą sumowania pól prostokątów. Zauważmy, że można w ten sposób osiągnąć niemal dowolne



Rys. 69.

przybliżenie, biorąc coraz bliższe rzędne. To nas prowadzi do ważnego wniosku.

Przypuśćmy, że $f(x)$ przybiera wartości dodatnie i wzrasta, kiedy x rośnie. Niech będą A i B dwa punkty wykresu funkcji $y=f(x)$, w których y ma odpowiednio wartości a i b ; AC, BD niech będą rzędnymi tych punktów (rys. 69). Między C i D weźmy kilka punktów, np. M, N..., wykreślmy odpowiednie rzędne NP, MQ i zbudujmy na nich prostokąty PNMS i QMNR. Pole zawarte między łukiem PQ, rzędnymi PN, QM i osią x ma wartość pośrednią między wartościami pól obu prostokątów. Suma pól wszystkich prostokątów zewnętrznych, jak QMNR, jest większa od sumy pól prostokątów wewnętrznych, jak PNMS, o pole prostokąta, mającego za wysokość różnicę skrajnych rzędnych BD, AC, za podstawę zaś odcinek mniejszy od największego z odcinków takich, jak MN.

Zwiększając liczbę punktów pośrednich (takich jak N) i zmniejszając jednocześnie długość każdego odcinka, zmniejszamy zarazem różnicę sumy pól prostokątów zewnętrznych i sumy pól prostokątów wewnętrznych i możemy ją uczynić dowolnie małą. Spólną granicą obu sum jest pole figury krzywolinowej ACDB.

Znaczy to, że, gdy napiszemy x_0 zamiast a , oraz x_n zamiast b , i weźmiemy $n-1$ wartości pośrednich $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, to zarówno suma

$$(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}),$$

jak i suma

$$(x_1 - x_0)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(x_n),$$

dadzą wartości przybliżone całki określonej $\int_a^b f(x) dx$. Gdy-

byśmy znaleźli taki sposób zwiększania liczby $n-1$ wartości pośrednich odciętych, żeby x_0 zawsze równało się a , x_n zawsze miało wartość b , wszystkie zaś różnice odciętych kolejnych $x_k - x_{k-1}$ dążyły do zera, to obie nasze

sumy dążyłyby do wspólnej granicy, którą byłaby całka $\int_a^b f(x)dx$. Jeżeli przez x'_r oznaczmy jakąkolwiek wartość odciętej, zawartą między x_{r-1} a x_r , to do tej samej granicy dążyłaby też suma

$$(x_1 - x_0)f(x'_1) + (x_2 - x_1)f(x'_2) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(x'_n).$$

Suma ta daje się napisać pod postacią symbolu

$$\sum_a^b f(x) \Delta x,$$

w którym Σ (sigma) oznacza sumę wszystkich wyrazów takich, jak..., litery a , b oznaczają pierwszą i ostatnią wartość x , znak Δx wyraża różnicę dwóch jakichkolwiek kolejnych wartości na x w szeregu wartości, zawartych między a i b .

155. Wynik, do którego doszliśmy, nie zmieniłby się, gdyby, przy wzrastaniu zmiennej x , funkcja $f(x)$ malała, lub też, gdyby w pewnych częściach obszaru, wyznaczonego przez a i b , funkcja ta malała, w innych wzrastała. Nie jest również niezbędnym założenie, że $f(x)$ jest zawsze dodatnia, gdyż można oddzielnie obliczyć sumę dla obszaru, w którym $f(x)$ jest dodatnia, oddzielnie zaś dla tego, w którym przybiera wartości ujemne.

Granice sum spotykamy nietylko w zagadnieniach dotyczących pól, lecz i w takich, które z polami nic nie mają wspólnego. Przyszliśmy do wniosku, że temi granicami są całki określone; potrafimy więc znaleźć je, jeżeli będziemy umieli znajdować odpowiednie całki nieokreślone.

156. Mając do zbadania pole figury płaskiej, możemy ją przeciąć prostymi, równoległymi do osi y . Jeżeli figura wyznacza na którejkolwiek prostej odcinek, mający Y jedn. długości, jeżeli x jest odcięta każdego punktu na tej prostej, a Δx — szerokością pasa między nią a sąsiednią prostą, to pole te-

go pasa da się zastąpić przez pole prostokąta, mające w przybliżeniu $Y \Delta x$ jedn. pow. (Właściwie mówiąc, dokładną wartość można wyrazić przez $Y' \Delta x$, przyczem Y' musi dążyć do Y , gdy Δx dąży do zera). Granicą sumy $\Sigma Y \Delta x$, jeżeli sumowanie rozciągamy na wszystkie pasy, jest liczba jedn. pow., wyrażająca pole naszej figury. Jest to wynik równoznaczny z tym, któryśmy otrzymali w § 75.

Chcąc znaleźć objętość bryły, możemy ją płaszczyznami równoległymi podzielić w myśli na znaczną liczbę warstw. Jeżeli pole jednego z przekrojów ma Z jedn. pow., odległość zaś płaszczyzny przekroju od następnej wynosi Δx jedn. długości, to objętość warstwy w przybliżeniu $= Z \Delta x$ jedn. objętości. (Dokładna liczba jedn. objętości da się napisać jako $Z' \Delta x$, przyczem Z' musi dążyć do Z , gdy Δx dąży do zera). Granicą sumy $\Sigma Z \Delta x$, jeżeli sumowanie rozciągamy na wszystkie warstwy, jest liczba jedn. objętości, wyrażająca objętość bryły. Jest to wynik równoznaczny ze znalezionym w § 79.

Szukając długości łuku AB , możemy obrać na krzywej $n-1$ punktów, $P_1, P_2 \dots P_{n-1}$, leżących między punktami A i B . Długość k_r cięciwy $P_{r-1} P_r$ dana jest równaniem

$$k_r^2 = (x_r - x_{r-1})^2 + (y_r - y_{r-1})^2,$$

w którym x_r, y_r są współrzędnymi punktu P_r . Wzór ten jest równoznaczny ze wzorem

$$k^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2,$$

otrzymanym w § 136. Liczba jednostek długości, zawartych w łuku AB , jest granicą, do której dąży Σk , jeżeli liczbę n zwiększamy nieograniczenie, a jednocześnie zmniejszamy nieograniczenie długość każdej cięciwy. Jeżeli odcięta wzrasta, kiedy punkt porusza się od A do B , mamy

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx;$$

we wzorze tym s oznacza liczbę jedn. długości łuku AB , a i b zaś są odciędami punktów A i B . Wynik naszego rozumowania da się tak wysłowić: długość łuku krzywej jest granicą, do której dąży długość łamanej wpisanej, jeżeli długość każdego odcinka łamanej dąży do zera.

Niech siła $\mathbf{W}$ dyn działa z góry na dół, w kierunku pionowej $\mathbf{NM}$, i niech będzie dana pozioma $\mathbf{AB}$, skośna względem $\mathbf{NM}$. (Na rys. 70 prostą $\mathbf{AB}$ należy sobie wyobrażać jako prostopadłą do płaszczyzny rysunku). Niech, dalej, płaszczyzna pozioma, przesunięta przez $\mathbf{AB}$, przecina prostą $\mathbf{MN}$ w punkcie $\mathbf{N}$, prostopadła zaś, poprowadzo-

na z N do AB, niech przecina tę prostą w punkcie A. Jeżeli długość odcinka AN wynosi x cm., tedy iloczyn xW daje nam wartość momentu siły względem osi AB. Moglibyśmy też przesunąć przez AB i MN dwie płaszczyzny pionowe i równoległe do siebie; w takim razie liczba x w iloczynie xW wyrażałaby odległość między temi płaszczyznami.

Moment opatrujemy znakiem + lub -, żeby wskazać kierunek, w którym siła obraca ciało dokoła osi AB. Na płaszczyźnie pionowej, przesuniętej przez AB, możnaby obrać punkt O jako początek układu współrzędnych i oś x poprowadzić prostopadłe do tej płaszczyzny; wartość momentu (z uwzględnieniem znaku) byłaby znów xW , przy czym x oznaczałoby odciętą punktu L, w którym oś x przecinałaby płaszczyznę pionową, przesuniętą przez NM równoległe do AB.

158. Siła ciężkości działa na wszystkie części ciała; jeżeli jednak mamy do czynienia z ciałem sztywnym, to, nie zmieniając ani kształtu jego, ani wielkości, możemy zrównoważyć jego ciężar jedną siłą skierowaną pionowo do góry, o ile potrafimy znaleźć odpowiednią linię działania tej siły. Dla każdego ciała istnieje stały punkt, przez który linia ta musi przechodzić, niezależnie od położenia ciała; punktem tym jest środek ciężkości ciała. W wielu zagadnieniach można uważać ciężar ciała za jedną siłę, działającą pionowo na dół po linii, przechodzącej przez środek ciężkości ciała; mówiąc o „ciężarze ciała”, tę właśnie siłę mamy często na myśli.

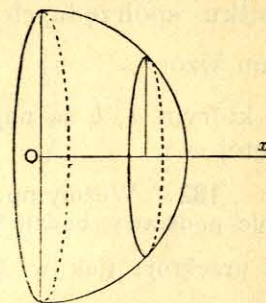
159. Ciało możemy pomyśleć jako złożone z części, z których każda posiada określony ciężar i środek ciężkości. Reguła na wyznaczenie środka ciężkości ciała brzmi:

względem osi poziomej moment ciężaru ciała, działającego na jego środek ciężkości, równa się sumie momentów (względem tejże osi) ciężarów poszczególnych części ciała, działających na środki ciężkości tych części.

Niech będą $x'_1, x'_2, \dots$ odcięte środków ciężkości tych części, $m_1, m_2, \dots$ ich masy (w gramach), ciężary zaś ich niech będą odpowiednio $W_1, W_2, \dots$ dyn, zatym $W_1 = m_1 g$ i t. d. Niech będzie x_G odcięta środka ciężkości całego ciała. Mamy równanie: $x_G(W_1 + W_2 + \dots) = x'_1 W_1 + x'_2 W_2 + \dots$, co możemy napisać w taki sposób: $= x_G \Sigma W = \Sigma x' W$, albo $x_G g \Sigma m = g \Sigma x' m$, albo wreszcie $x_G \Sigma m = \Sigma x' m$.

Stosując powyższy wzór przy poszukiwaniu środka ciężkości danego jakiegoś ciała, wyobrażamy je sobie jako jednorodne, rozumiejąc przez to, że dla wszystkich jego części ciężar jest proporcjonalny względem objętości. Wartość sumy $\Sigma x' m$ znajdujemy, zmniejszając nieograniczenie objętości wszystkich cząstek i przechodząc do granicy. Granica takiej sumy wyraża się przez całkę określoną.

160. Dla przykładu znajdziemy środek ciężkości półkuli. Wyobraźmy sobie półkulę o promieniu r cm., umieszczoną tak, jak na rys. 71. Przecinając ją płaszczyzną równoległą do podstawy i odległą od niej o x cm., otrzymamy koło o polu $= \pi(r^2 - x^2)$ cm. kwadratowych. Objętość odcinka kulistego odwupodstawach, odległych od podstawy półkuli odpowiednio o x i $x + \Delta x$ cm., zawiera się między $\pi(r^2 - x^2) \Delta x$ cm.³ a $\pi[r^2 - (x + \Delta x)^2] \Delta x$ cm.³



Rys. 71.

Odległość x' środka ciężkości tego odcinka od podstawy półkuli zawiera się między x a $x + \Delta x$ cm. Niech masa 1 cm.³ substancji, z której zrobiono półkulę, wynosi σ gr. Gdy wszystkie liczby Δx dążą do zera, suma $\Sigma x' m$ dąży do granicy, którą jest całka

$$\int_0^r \sigma \pi (r^2 - x^2) x dx,$$

że zaś $\Sigma m = \frac{2}{3} \pi r^3 \sigma$, więc

$$x_G \frac{2}{3} \pi r^3 \sigma = \sigma \pi \left(r^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) = \frac{1}{4} \sigma \pi r^4,$$

skąd
$$x_G = \frac{3}{8} r.$$

Zatym odległość środka ciężkości od podstawy półkuli $= \frac{3}{8}$ promienia; środek ten leży oczywiście na promieniu prostopadłym do podstawy półkuli.

161. W przypadku ogólniejszym, kiedy mamy do czynienia z jakąkolwiek bryłą, której objętość $= V$ cm.³, pole zaś przekroju płaskiego odległego o x cm. od początku współrzędnych $= Z$ cm.², to samo rozumowanie da nam wzór

$$x_G V = \int_a^b Z x dx,$$

w którym a , b są najmniejszą i największą wartością odciętej x .

162. Weźmy np. ostrosłup o podstawie trójkątnej. Niech pole podstawy będzie B cm.², wysokość ostrosłupa p cm. Pole przekroju (jak w § 80) $= B \frac{x^2}{p^2}$ cm.²; objętość ostrosłupa $= \frac{1}{3} B p$ cm.³, zatym $x_G \frac{1}{3} B p = \int_0^p B \frac{x^2}{p^2} x dx = \frac{1}{4} B p^2$,

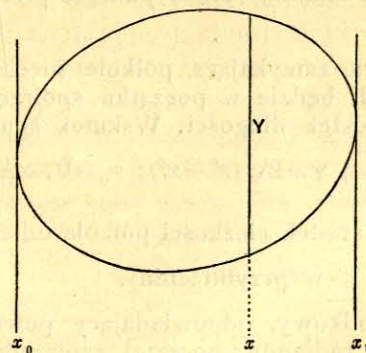
czyli

$$x_G = \frac{3}{4} p.$$

Tak więc odległość środka ciężkości od podstawy $= \frac{1}{4}$ odległości przeciwległego wierzchołka od tejże podstawy, bez względu na to, którą ścianę ostrosłupa przyjmiemy za podstawę. Znaczy to, że środek ciężkości ostrosłupa leży w tym samym punkcie, co środek ciężkości czterech równych ciężarów, umieszczonych w wierzchołkach ostrosłupa.

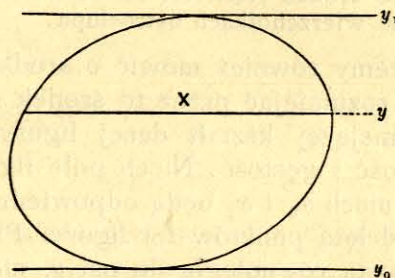
163. Możemy również mówić o środku ciężkości figury płaskiej, rozumiejąc przez to środek ciężkości cienkiej blaszki, mającej kształt danej figury i jednakową wszędzie grubość i gęstość. Niech pole figury ma S jednostek pow. i niech x_0 i x_1 będą odpowiednio najmniejszą i największą odcięta punktów tej figury. Przetnijmy figurę dowolną prostą równoległą do osi y ; niech otrzymana w ten sposób cięciwa ma Y jedn. długości; Y jest, oczywiście, pewną funkcją zmiennej x (rys. 72). W takim razie odcięta środka ciężkości wyznaczmy z równania:

$$x_G S = \int_{x_0}^{x_1} x Y dx.$$



Rys. 72.

Jeżeli y_0 i y_1 są odpowiednio najmniejszą i największą rzędną figury danej, cięciwa zaś otrzymana przez przecięcie figury prostą równoległą do osi odciętych ma x jedn. długości (rys. 73), to rzędną środka ciężkości obliczymy z równania

$$y_G S = \int_{y_0}^{y_1} yX dy.$$


Rys. 73.

PRZYKŁADY.

1. Dowieść za pomocą rachunku całkowego, że środek ciężkości trójkąta znajduje się w punkcie przecięcia jego środkowych.

2. Średnica zamykająca półkoło niech leży na osi y , środek koła niech będzie w początku współrzędnych, promień niech ma r jednostek długości. Wskutek symetrii figury mamy $y_G = 0$; $S = \frac{\pi r^2}{2}$; $Y = 2\sqrt{(r^2 - x^2)}$; $x_0 = 0$, $x_1 = r$. Dowieść, że $x_G = \frac{4r}{3\pi}$, czyli że środek ciężkości półkoła odległy jest od środka koła o $0.4244r$ (w przybliżeniu).

3. Kąt środkowy, odpowiadający pewnemu odcinkowi kołowemu, ma 2α radjanów; początek współrzędnych znajduje się

w środku koła, oś odciętych jest prostopadła do cięciwy. Dowieść, że $S = r^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$; $y_G = 0$; $x_G = \frac{2r \sin^3 \alpha}{3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}$.

4. Jeżeli w poprzednim zadaniu zastąpimy odcinek przez wycinek kołowy, to $y_G = 0$, $x_G = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$.

5. Środek ciężkości (x_G , y_G) łuku możemy określić wzorami:

$$lx_G = \int_{s_0}^{s_1} x ds; \quad ly_G = \int_{s_0}^{s_1} y ds,$$

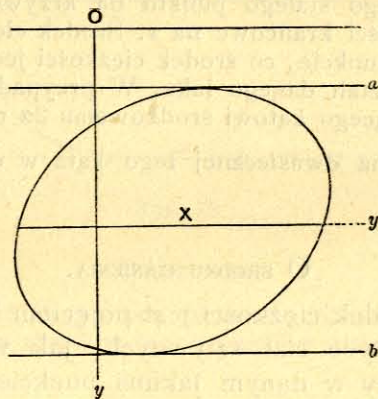
w których l oznacza długość łuku; x , y są współrzędnymi punktu wziętego na łuku w odległości s jedn. (mierzonych wzdłuż łuku) od pewnego stałego punktu na krzywej, liczby zaś s_0 i s_1 są to wartości krańcowe na s . Środek ciężkości łuku leży w tym samym punkcie, co środek ciężkości jednorodnego drutu, mającego kształt danego łuku. W przypadku łuku kołowego, odpowiadającego kątowi środkowemu 2α radjanów, środek ciężkości leży na dwusiecznej tego kąta w odległości $\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ od środka koła.

O ŚRODKU CIŚNIENIA.

164. Środek ciężkości jest pojęciem bardzo ważnym zarówno w statyce ciał sztywnych, jak w hydrostatyce. Ciśnienie cieczy w danym jakimś punkcie możemy mierzyć w dynach na centymetr kwadratowy. Ciśnienie wody, znajdującej się w stanie spoczynku, w punkcie położonym o y centym. pod poziomem wody = wy dyn na centymetr kwadratowy, jeżeli przez w oznaczymy ciężar centymetra sześciennego wody. Za jednostkę ciśnienia przyjmujemy ciśnienie = $\frac{\text{dyna}}{\text{cm.}^2} = \frac{\text{gr.}}{\text{cm. sek.}^2}$.

Zbadajmy ciśnienie wody na zanurzoną w niej część płaszczyzny pionowej, czyli t. zw. ciśnienie całkowite wody na daną część płaszczyzny. Część płaszczyzny,

o której mowa, będziemy nazywali wprost figurą. Przy-
puśćmy, że pole figury = S jedn. powierzchni. Płaszczyz-
na przecina powierzchnię wody według prostej poziomej,
na której obieramy początek współrzędnych O , i prowa-
dzimy oś y pionowo na dół. Figura zawiera się cała mię-
dzy dwiema prostymi poziomymi, leżącymi na głębokości
jedna a , druga b centym. pod poziomem wody (rys. 74).
Każda prosta, leżąca między temi dwiema poziomymi,
przecina obwód figury, który wyznacza na niej odcinek
długości x centym. W każdym punkcie, którego głębo-



Rys. 74.

kość pod poziomem zawiera się między y a $y + \Delta y$ cm.,
ciśnienie jest zawarte między $wy \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$ a $w(y + \Delta y) \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$.

Możemy uważać, że ciśnienie to $= wy' \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$, przyczem y'
oznacza jakąś liczbę, zawartą między y a $y + \Delta y$. Pole pasa,
zawartego między poziomymi, leżącymi na głębokości y
a $y + \Delta y$ cm., wynosi $x' \Delta y$ cm², jeżeli przez x' oznaczmy

pewną wartość odciętej, pośrednią pomiędzy największą
a najmniejszą wartością odciętej, jaką mogą mieć punk-
ty, leżące na tym pasie. Wskutek tego ciśnienie całko-
wite na tę część figury $= wy'x' \Delta y$ dyn, ciśnienie zaś na ca-
łą figurę wynosi

$$w \sum_a^b y' x' \Delta y.$$

Gdy Δy dąży do zera, wzór na ciśnienie całkowite
przechodzi w całkę $w \int_a^b y x dy$.
Jeżeli przez y_G oznaczmy rzędną środka ciężkości figury,
będziemy mieli (§ 163):

$$y_G S = \int_a^b y x dy,$$

wskutek czego ciśnienie całkowite $= wy_G S$ dyn. Ponieważ
ciśnienie w środku ciężkości $= wy_G \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$, więc ciśnienie cał-
kowite ma taką wartość, jak gdyby ciśnienie w każdym
punkcie figury było jednakowe i równe ciśnieniu w środ-
ku ciężkości.

165. Ciśnienie wody na figurę da się zrównoważyć
jedną siłą, której wartość przed chwilą wyznaczaliśmy. Kie-
runek tej siły przecina płaszczyznę figury w punkcie zwa-
nym środkiem ciśnienia. Możemy wyznaczyć, jak
głęboko pod powierzchnią wody leży środek ciśnienia,
a to za pomocą następującej reguły: uważajmy figurę za
złożoną z części; moment (względem linii poziomu wody)
całkowitego ciśnienia na figurę, działającego w środku
ciśnienia figury, równa się sumie momentów (względem
linii poziomu wody) ciśnień całkowitych, wywieranych
na poszczególne części i działających w środkach ciś-
nień tych części.

Weźmy pod uwagę część figury, mianowicie pas zawarty między linjami poziomymi, leżącymi na głębokości y i $y + \Delta y$ cm. pod powierzchnią wody. Wiadomo, że pole tej części figury $= X' \Delta y$ cm², całkowite zaś ciśnienie $= wy_G' X' \Delta y$ dyn, jeżeli środek ciężkości tej części leży na głębokości y_G' cm. Przypuśćmy, że środki ciśnień całej figury i rozważanej jej części leżą odpowiednio na głębokości y_P i y_P' cm.; w takim razie otrzymujemy równanie:

$$y_P w y_G S = w \Sigma y_P' y_G' X' \Delta y.$$

Ponieważ dla naszego pasa środkiem ciśnienia musi być punkt jakiś, leżący na pasie, zatem, gdy Δy dąży do zera, y_P' musi dążyć do y . Wskutek tego równanie nasze przybiera kształt:

$$y_P y_G S = \int_a^b y^2 X dy.$$

PRZYKŁADY.

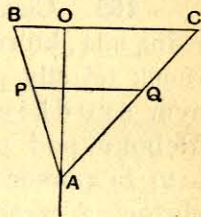
1. Niech będzie trójkąt ABC (rys. 75), którego bok BC, mający a cm., leży na poziomie wody; odległość od A do BC niech będzie p cm. Wskutek podobieństwa trójkątów APQ i ABC mamy:

$$\frac{X}{a} = \frac{p-y}{p};$$

ponieważ $y_G = \frac{p}{3}$, $S = \frac{ap}{2}$,

więc $y_P \frac{ap^2}{6} = \int_0^p y^2 \frac{a(p-y)}{p} dy = \frac{ap^3}{12}$,

skąd $y_P = 0.5 p$.



Rys. 75.

2. Jeżeli prostokąt umieścimy tak, by jeden jego bok leżał na poziomie wody, środek ciśnienia będzie się znajdował na głębokości $= \frac{2}{3}$ drugiego boku.

3. Jeżeli środek koła znajduje się na powierzchni wody, środek ciśnienia półkola zanurzonego leży na głębokości $\frac{3\pi R}{16}$. [Co się tyczy całkowania—patrz § 135 (II)].

O MOMENCIE BEZWŁADNOŚCI.

166. O ruchu bardzo małego ciała możemy nabrać pojęcia przez badanie ruchu jednego jego punktu. Jeżeli ciało takie o masie $= m$ gr. posiada prędkość $v \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$, jego energia kinetyczna $= 0.5 mv^2$ ergów. Jeżeli ciało porusza się po okręgu koła w ten sposób, że promień, łączący ciało ze środkiem koła, obraca się z prędkością kątową $= \omega$ radjanów na sekundę (t. j. $\omega \frac{1}{\text{sek.}}$), promień zaś ma r cm. długości, to $v = r\omega$, energia zaś kinetyczna $= 0.5 mr^2 \omega^2$ ergów.

Możemy wyobrazić sobie, że poruszające się ciało składa się z drobnutkich części (ruch każdej takiej części można opisać, podając ruch jednego jej punktu); energia kinetyczna całego ciała jest sumą energii kinetycznych wszystkich tych części.

Jeżeli ciało obraca się dokoła osi, możemy uważać, że wszystkie punkty, których ruch ma nam posłużyć do opisanego ruchu cząstek ciała, zakreślają dokoła tej osi koła i posiadają jednakowe prędkości kątowe $= \omega$ radjanów na sekundę ($\omega \frac{1}{\text{sek.}}$). Niech masy cząstek będą $m_1, m_2, \dots$ gr., promienie kół niech będą $r_1, r_2, \dots$ cm.; energia kinetyczna ciała $= 0.5 \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots)$ ergów. Suma zawarta w nawiasie — możemy ją też napisać w postaci Σmr^2 — jest miarą pewnej wielkości, zwanej momentem bezwładności ciała względem osi.

Założmy, że ciało jest jednorodne. Przy obliczaniu momentu bezwładności możemy przypuścić, że ciało zostało podzielone na cienkie warstwy za pomocą walców, których spólną osią jest oś obrotu ciała. Częstki ciała, zawarte między dwoma walcami o promieniach r cm. i $r + \Delta r$ cm., posiadają prędkości pośrednie pomiędzy $r\omega$ a $(r + \Delta r)\omega$ cm. sek.

Dobierając odpowiednio liczbę r' , zawartą między liczbami r a $r + \Delta r$, oraz oznaczając przez m' masę wszystkich tych cząstek, znajdziemy na ich moment bezwładności wartość $m'r'^2$.

Jeżeli masa jednego centym. sześciennego ciała $= \sigma$ gr., to $m'r'^2 = \sigma r'^2 \Delta v$, gdzie Δv cm.³ oznacza objętość warstwy, zawartej między dwoma naszymi walcami. W takim razie moment bezwładności całego ciała da się wyrazić w kształcie $\sigma \sum r'^2 \Delta v$.

167. Niech będzie dany krążek kołowy o jednostajnej grubości $= h$ cm. i promieniu $= a$ cm.; przypuścmy, że krążek ten wiruje dookoła osi, prostopadłej do jego podstawy i przechodzącej przez środek tej podstawy. W takim razie $\Delta v = 2h\pi(r + 0.5\Delta r)\Delta r$ (patrz § 58, b). Jeżeli Δr dąży do zera, to $\sum r'^2 \Delta v$ dąży do pewnej granicy, a mianowicie do

$$\int_0^a 2\pi h r \cdot r^2 \cdot dr, \text{ czyli do } 0.5 \pi h a^4.$$

Moment bezwładności krążka $= 0.5 \pi \sigma h a^4$ gr. cm.²; jeżeli masę ciała (która wynosi $\sigma \pi a^2 h$ gr.) oznaczmy przez M , moment bezwładności $= 0.5 M a^2$.

168. Moment bezwładności ciała względem osi daje się wogóle wyrazić w postaci iloczynu $M k^2$, przyczem M oznacza masę ciała, k zaś jest liczbą, zależną od kształtu i wielkości ciała. Długość $= k$ cm. nazywamy ramieniem bezwładności. Energja kinetyczna ciała jest ta-

ka, jak gdyby cała jego masa była rozmieszczona jednostajnie na okręgu koła o promieniu $= k$ cm., mającego środek na osi obrotu i leżącego prostopadle do tej osi. Jeżeli objętość ciała $= V$ cm.³, objętość zaś warstwy, zawartej między walcami o promieniach r i $r + \Delta r$ cm. (por. § 166), $= \Delta v$ cm.³, to $V k^2$ jest granicą, do której dąży suma $\sum r^2 \Delta v$, gdy Δv dąży do zera.

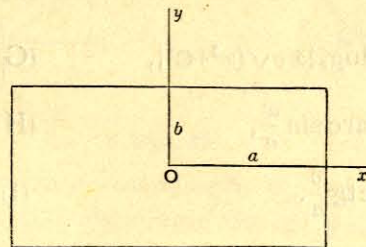
Dla krążka, o którym mówiliśmy w § 167, ramię bezwładności $= 0.5 a \sqrt{2}$ cm.

169. W taki sam sposób możemy określić ramię bezwładności dla każdej figury płaskiej, obracającej się dookoła osi, leżącej w płaszczyźnie figury. Stosując oznaczenia § 163, znajdziemy ramię bezwładności względem osi y -ów z równania

$$k^2 S = \int_{x_0}^{x_1} x^2 Y dx.$$

170. Weźmy np. prostokąt, którego boki mają $2a$ i $2b$ jedn. długości (rys. 76), i przypuścmy, że oś y -ów przechodzi przez środek ciężkości prostokąta, równoległe do boku, równego $2b$. Mamy $S = 4ab$, $Y = 2b$, $x_0 = -a$, $x_1 = a$, zatem

$$4k^2 ab = \int_{-a}^a 2bx^2 dx = \frac{4}{3} ba^3, \text{ skąd } k^2 = \frac{1}{3} a^2.$$



Rys. 76.

Jako drugi przykład weźmy koło o promieniu $= a$ jedn. długości; niech oś y -ów przechodzi przez środek. Mamy

$$S = \pi a^2; \quad Y = 2\sqrt{(a^2 - x^2)}; \quad x_0 = -a; \quad x_1 = a,$$

zatem $\pi a^2 k^2 = \int_{-a}^a 2x^2 \sqrt{(a^2 - x^2)} dx = \frac{1}{4} \pi a^4$ [por. § 135 (II)],

czyli $k^2 = \frac{1}{4} a^2$.

TABLICA CAŁEK ZASADNICZYCH.

		str.
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},$	(A)	72
$\int \frac{dx}{x} = \log_e x,$	(B)	99
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax},$	(C)	101
$\int \sin x dx = -\cos x,$	(D)	125
$\int \cos x dx = \sin x,$	(E)	125
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x,$	(F)	125
$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + C)}} = \log_e \{x + \sqrt{(x^2 + C)}\},$	(G)	142
$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \arcsin \frac{x}{a},$	(H)	150
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a}.$	(I)	150

DODATKI.

I. WYKRES FUNKCJI WYMIERNEJ CAŁKOWITEJ STOPNIA PIERWSZEGO.

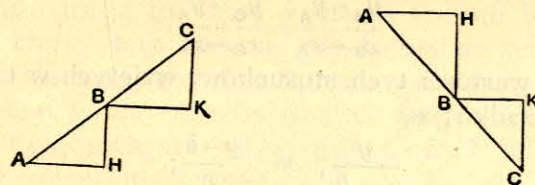
Mamy dowieść, że wszystkie punkty, których współrzędne czynią zadość równaniu $y = mx + b$, leżą na prostej.

Niech będą A, B, C trzema punktami takimi, że $x_C > x_B > x_A$. Ponieważ $y = mx + b$, więc

$$\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = m,$$

i wskutek tego, jeżeli $y_C > y_B$, to $y_B > y_A$, jeśli zaś $y_C < y_B$, to $y_B < y_A$.

Rysunek 77 ilustruje oba przypadki. Na AB i BC zbudujmy trójkąty prostokątne AHB, BKC tak, żeby przypro-



Rys. 77.

stokątne AH i BK były równoległe do osi x -ów, boki zaś HB i KC żeby były równoległe do osi y -ów. Z równania

$$\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

wynika, że $CK: BK = BH: AH$, zatem trójkąty prostokątne CKB i BHA są podobne i kąt $CBK =$ kątowi BAH . A więc A , B i C leżą na jednej prostej.

Twierdzenie odwrotne: spółrzedne wszystkich punktów na prostej nierównoległej do osi czynią zadość równaniu $y = mx + b$.

Niech prosta przecina oś y -ów w punkcie P , którego spółrzedne są $0, b$; w ten sposób spółczynnik b jest zupełnie wyznaczony. Przypuśćmy dalej, że prosta przecina oś x -ów w punkcie Q , którego spółrzedne są $-\frac{b}{m}, 0$; w ten sposób wyznaczaliśmy spółczynnik m . Niech punkt $R(x, y)$ będzie dowolnym punktem na naszej prostej. Punkty P, Q, R , rozmieszczone w takim czy innym porządku na prostej, odpowiadają punktom A, B, C na rys. 77. Ponieważ punkty te leżą na prostej, więc mamy:

$$CK: BK = BH: AH,$$

skąd wynika równanie:

$$\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

oraz

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}.$$

Otóż wartości tych stosunków, wziętych w takim czy innym porządku, są

$$\frac{y}{x + \frac{b}{m}}, \quad m, \quad \frac{y-b}{x};$$

jeżeli zaś dwie którekolwiek z tych wartości są sobie równe, to powinniśmy mieć $y = mx + b$.

II. O GRANICACH.

Chcąc dowieść, że liczba L jest granicą funkcji $F(h)$, gdy h dąży do zera, możemy tak postąpić: bierzemy dowolnie małą liczbę dodatnią ε i staramy się dowieść, że wartość bezwzględna różnicy $F(h) - L$ stanie się mniejszą od ε , jeżeli h dostatecznie zbliżymy do zera. Jeżeli uda się to zrobić dla każdego ε , jakkolwiek małego, powiadamy, że L jest granicą funkcji.

W przykładzie, któryśmy rozpatrywali w § 20, wypadło wziąć na h wartość mniejszą od $\frac{\varepsilon}{4x}$; wykazaliśmy, że, gdy $0 < h < \frac{\varepsilon}{4x}$, różnica jest mniejsza od ε . W ogólności, uczynić h dostatecznie małym znaczy tyleż, co dać na h jakąkolwiek wartość, leżącą między 0 a liczbą dodatnią k , jeżeli h jest dodatnie, lub też między 0 a $-k$, jeżeli h jest ujemne. W naszym przykładzie $k = \frac{\varepsilon}{4x}$.

Ogólne określenie granicy możemy tak wyśłowić: niech h będzie zmienną dążącą do zera, $F(h)$ niech będzie jakąś funkcją zmiennej h , liczba L niech będzie granicą, do której dąży funkcja, gdy h dąży do zera. Bierzemy dowolnie małą liczbę dodatnią ε i szukamy innej liczby dodatniej k , takiej, żeby wartość bezwzględna różnicy $F(h) - L$ była mniejsza od ε , gdy $0 < h < k$ lub też gdy $0 > h > -k$. Jeżeli dla każdego ε można znaleźć odpowiednią liczbę k , powiadamy, że L jest granicą funkcji, i wyróżniamy ją w ten sposób z pośród wszystkich innych liczb.

Łatwo okazać, że powyższe określenie granicy zawiera

jako przypadek szczególny wniosek § 17, iż $\frac{dy}{dx}=0$, gdy $y=a$,
i $\frac{dy}{dx}=1$, kiedy $y=x$.

Przypuśćmy, że $y=a$, przyczym a nie zależy od x . Jeżeli x zamieni się na $x+h$, y zmianie nie ulegnie. Pisząc $f(x)$ zamiast y , mamy $f(x)=a$; $f(x+h)=a$, zatem

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

przy wszelkich wartościach na h różnych od zera. W danym przypadku $L=0$. Jakoż na k możemy wziąć dowolną wartość dodatnią i zawsze będziemy mieli:

$$0 - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < \varepsilon,$$

jeżeli tylko $0 < h < k$ lub też $0 > h > -k$, gdyż różnica

$$0 - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0.$$

Przypuśćmy teraz, że $y=x$. Jeżeli x zmieni się na $x+h$, to y zmieni się na $y+h$; pisząc $f(x)$ zamiast y , mamy

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=1$$

przy wszelkich wartościach h różnych od zera. W tym przypadku $L=1$. Na k możemy wziąć dowolną wartość dodatnią, zawsze

$$1 - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < \varepsilon,$$

jeżeli tylko $0 < h < k$ albo też $0 > h > -k$.

W taki sam sposób możemy określić granicę, do której dąży funkcja $F(x)$, gdy x dąży do pewnej wartości a . A mianowicie, możemy powiedzieć tak: niech będzie dana dowolnie mała liczba ε ; jeżeli można znaleźć liczbę dodatnią k taką, iż dla wszystkich wartości x zawartych bądź to między a i $a+k$, bądź też między a i $a-k$, wartość bezwzględna różnicy $F(x)-L$ jest mniejsza od ε , to funkcja $F(x)$ dąży do granicy L , gdy x dąży do a .

W § 13 mówiliśmy, że każda funkcja posiada wykres. Twierdzenie to musi ulec pewnemu ograniczeniu. Jeżeli powiadam, że $y=f(x)$ posiada wykres, tym samym twierdząc, że, gdy x zastąpię przez $x+\Delta x$, y zaś przez $y+\Delta y$, to Δy będzie dążyło do zera, jeżeli Δx dąży do zera. Albo innymi słowami: kiedy x dąży do jakiegokolwiek wartości a , $f(x)$ dąży do granicy $=f(a)$. Funkcja odpowiadająca tym warunkom nazywa się ciągłą. W elementarnych zagadnieniach możemy natrafić tylko na jeden rodzaj nieciągłości lub braku ciągłości, a mianowicie, kiedy istnieje taka wartość na x , dla której nie możemy obliczyć wartości $f(x)$, gdyż wypadłoby dzielić przez zero.

Np. funkcja $y=\frac{1}{x}$ jest nieciągłą, gdy $x=0$.

Możliwość takich przypadków wymaga ograniczenia pewnych twierdzeń. Można np. dowieść, że twierdzenie § 56 jest słuszne dla każdej funkcji $f(x)$, której pochodna jest ciągła przy wszelkich wartościach zmiennej x , od a do b włącznie. Można dowieść, że twierdzenie (§ 154), iż całka określona $\int_a^b F'(x)dx$, uważana za granicę sumy $\sum_a^b F'(x)\Delta x$, równa się $F(b)-F(a)$, jest słuszne dla każdej funkcji $F(x)$, której pochodna jest ciągła przy wszelkich wartościach x , zawartych między a i b .

Dowiedziemy tu czterech twierdzeń o granicach. Są one niemal oczywiste, dla ścisłości jednak dobrze jest ich dowieść, opierając się na określeniu granicy.

(1) Jeżeli $F(h)$ dąży do granicy L , gdy h dąży do zera, to $aF(h)$ dąży w tych samych warunkach do aL (przyczym a jest stałą).

Weźmy dowolnie małą liczbę η ; możemy znaleźć liczbę dodatnią k taką, iż przy $0 < h < k$ lub też przy $-k < h < 0$, wartość bezwzględna różnicy $F(h) - L$ będzie mniejsza od η . Niech będzie $\varepsilon = a\eta$, lub $\varepsilon = -b\eta$, zależnie od tego, czy a jest liczbą dodatnią czy ujemną. W takim razie ε może być dowolnie małą liczbą dodatnią; wartość bezwzględna różnicy $aF(h) - aL$ jest mniejsza od ε , a więc aL jest granicą funkcji $aF(h)$.

Przy dowodzeniu pierwszej reguły różniczkowania (§ 21) posługiwaliśmy się szczególnym przypadkiem tego twierdzenia.

(2) Jeżeli $F_1(h)$ dąży do L_1 , $F_2(h)$ zaś do L_2 , gdy h dąży do zera, to $F_1(h) + F_2(h)$ dąży do $L_1 + L_2$.

Weźmy, jak poprzednio, dowolnie małą liczbę η . Można znaleźć liczbę dodatnią k_1 taką, iż przy $0 < h < k_1$ lub $-k_1 < h < 0$ wartość bezwzględna $F_1(h) - L_1$ jest mniejsza od η . Tak samo znaleźć można liczbę dodatnią k_2 taką, iż przy $0 < h < k_2$ lub $-k_2 < h < 0$ wartość bezwzględna różnicy $F_2(h) - L_2$ jest mniejsza od η . Weźmy liczbę k mniejszą zarówno od k_1 , jak od k_2 , i niech $2\eta = \varepsilon$. W takim razie ε jest dowolnie małą liczbą, a wartość bezwzględna wyrażenia: $F_1(h) - L_1 + F_2(h) - L_2$, czyli wyrażenia

$$\{F_1(h) + F_2(h)\} - (L_1 + L_2)$$

jest mniejsza od ε , gdy $0 < h < k$ lub $-k < h < 0$. Zatem suma $F_1(h) + F_2(h)$ dąży do granicy $L_1 + L_2$.

W § 21, przy dowodzeniu drugiej reguły różniczkowania, posługiwaliśmy się szczególnym przypadkiem tego twierdzenia.

Gdyby były trzy funkcje $F_1(h)$; $F_2(h)$; $F_3(h)$, które dążyłyby do granic L_1 , L_2 , L_3 , mielibyśmy:

$$\text{granica sumy } \{F_1(h) + F_2(h)\} = L_1 + L_2;$$

że zaś $F_1(h) + F_2(h) + F_3(h) = \{F_1(h) + F_2(h)\} + F_3(h)$, więc granica sumy $\{F_1(h) + F_2(h) + F_3(h)\} = L_1 + L_2 + L_3$.

W taki sposób można uogólnić twierdzenie na dowolną liczbę funkcji.

(3) Jeżeli $F_1(h)$ dąży do L_1 i $F_2(h)$ dąży do L_2 , gdy h dąży do zera, to $F_1(h) \cdot F_2(h)$ dąży do $L_1 L_2$.

Niech będzie $F_1(h) = L_1 + X$; $F_2(h) = L_2 + Y$.

Wiemy, że X i Y dążą do zera; otóż

$$F_1(h) \cdot F_2(h) = (L_1 + X)(L_2 + Y) = L_1 L_2 + L_1 Y + L_2 X + XY.$$

Jeżeli k dobierzemy tak, jak w twierdzeniu (2), to wartość bezwzględna iloczynu XY będzie mniejsza od η^2 , czyli mniejsza od η , gdy η jest mniejsze od 1. A więc XY dąży do zera. Na zasadzie twierdzenia (1) iloczyny $L_1 Y$ i $L_2 X$ też dążą do zera; zatem na mocy twierdzenia (2), $L_1 Y + L_2 X + X_1 Y$ dąży do zera. Stąd wynika, że granica iloczynu $F_1(h) \cdot F_2(h) = L_1 L_2$.

W dowodzeniu reguły różniczkowania iloczynu posługiwaliśmy się szczególnym przypadkiem tego twierdzenia.

Twierdzenie to można uogólnić na dowolną liczbę czynników.

(4) Jeżeli $F(h)$ dąży do L , gdy h dąży do zera, przyczym L nie równa się zeru, to

$$\frac{1}{F(h)} \text{ dąży do } \frac{1}{L}.$$

Niech będzie dowolnie mała liczba η . Można znaleźć takie k , że przy $0 < h < k$ lub $-k < h < 0$ wartość bezwzględna różnicy $F(h) - L$ jest mniejsza od η .

$$\frac{1}{L} - \frac{1}{F(h)} = \frac{F(h) - L}{L F(h)}.$$

Założmy dla prostoty, że $L > 0$; niech będzie $F(h) = L + X$. Jeżeli h dobierzemy tak, jak w poprzednich twier-

dzeniach, to $X < \eta$, wartość zaś bezwzględna $F(h) > L - \eta$;

stąd wartość bezwzględna $\left\{ \frac{1}{L} - \frac{1}{F(h)} \right\} < \frac{\eta}{L(L - \eta)}$.

Jeżeli przez ϵ zastąpimy ułamek po prawej stronie nierówności, ϵ będzie dowolnie małą liczbą dodatnią. Dowiedliśmy więc, że dla każdego ϵ można tak dobrać k , że, gdy $0 < h < k$ lub $-k < h < 0$, wartość bezwzględna

$$\left\{ \frac{1}{F(h)} - \frac{1}{L} \right\} < \epsilon.$$

W § 25 posługiwaliśmy się szczególnym przypadkiem tego twierdzenia przy dowodzeniu wzoru $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$.

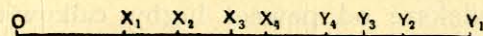
Przy badaniu granic wielce dogodnym bywa rozpatrywanie zbiorów liczb $u_1, u_2, u_3 \dots u_n \dots$, następujących po sobie według pewnego prawa, tak iż n -tą liczbę, czyli n -ty wyraz ($= u_n$) możemy znaleźć na zasadzie tego prawa. Zbiór taki nazywamy ciągiem. Ciąg może posiadać jakąś granicę L . Weźmy dowolnie małą liczbę dodatnią ϵ i przypuśćmy, że znamy taką liczbę N , że, gdy n jest jakąkolwiek liczbą całkowitą większą od N , wartość bezwzględna różnicy $u_n - L$ jest mniejsza od ϵ . Powiadamy w tym przypadku, że L jest granicą ciągu. Dowiedziemy np. w dodatku IV, że dla $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ granicą jest liczba e .

Niech ϵ będzie dowolnie małą liczbą, i przypuśćmy, żeśmy znaleźli liczbę całkowitą N taką, iż przy m i n całkowitych i większych od N , wartość bezwzględna różnicy $u_m - u_n$ jest mniejsza od ϵ . Powiadamy, że ciąg ma granicę.

Wielu twierdzeń o granicach dowodzimy, posługując się dwoma ciągami $x_1, x_2, \dots x_n \dots$ i $y_1, y_2, \dots y_n \dots$. Jeżeli można dowieść: (I) że przy zwiększaniu się n wyraz x_n

rośnie, y_n maleje, (II) że każda liczba ciągu y jest większa od jakiejkolwiek liczby ciągu x , (III) że różnica $y_n - x_n$ może stać się dowolnie małą, bylebyśmy wzięli n dostatecznie wielkie — jeżeli trzy te warunki są zachowane, powiadamy, że oba ciągi mają wspólną granicę. Zastrzegam się, że, mówiąc: x_n rośnie wraz ze wzrostem n , nie twierdząc wcale, że $x_2 > x_1, x_3 > x_2$ i t. d. Chcę tylko powiedzieć: jeżeli przy zwiększaniu się n zachodzi wogóle jakaś zmiana w liczbach ciągu, może nią być tylko wzrastanie. Niech ϵ będzie dowolnie małą liczbą, k niech będzie liczbą całkowitą taką, iż $y_k - x_k < \epsilon$; niech m i n będą jakimikolwiek liczbami całkowitemi większemi od k , i przypuśćmy, że $m > n$. W takim razie $y_m < y_n < y_k$ oraz $x_m > x_n > x_k$, skąd wynika, że $x_m - x_n < \epsilon$ i $y_n - y_m < \epsilon$. W ten sposób dowiedliśmy naszego twierdzenia.

Możemy zilustrować geometrycznie naszą metodę. Przypuśćmy, że liczby $x_1, x_2 \dots$ oraz $y_1, y_2 \dots$ wyrażają odległości różnych punktów prostej od pewnego jej stałego punktu O . Gdy wskaźnik rośnie, punkt X posuwa się wciąż na prawo, punkt zaś Y na lewo (rys. 78). Przy dostatecznie wielkim n



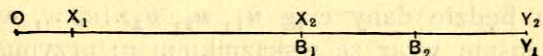
Rys. 78.

odległość między punktami X i Y jest bardzo mała. Wszystkie dalsze punkty, należące do obu zbiorów, są zebrane na tym malutkim odcinku, a jednak każdy punkt Y leży na prawo od wszystkich punktów X .

Zastosujmy naszą metodę do następującego zagadnienia. Niech będzie dany ciąg $u_1, u_2, u_3 \dots u_n \dots$, w którym wyraz u_n rośnie wraz ze wskaźnikiem n ; przypuśćmy, że każdy wyraz ciągu jest mniejszy od liczby A ; powiadam, że ciąg posiada granicę i że jest nią liczba A lub też liczba od A mniejsza.

Tworzymy dwa nowe ciągi $x_1, x_2 \dots x_n \dots$ oraz $y_1, y_2 \dots y_n \dots$. Niech $x_1 = u_1$, $y_1 = A$. Weźmy pod uwagę liczbę znajdującą się dokładnie pośrodku między x_1 a y_1 , czyli liczbę $u_1 + \frac{1}{2}(A - u_1)$; oznaczmy ją przez B_1 . Możliwe są dwa przypadki: albo któraś liczba ciągu u jest większa od B_1 , albo też niema w ciągu tym liczby większej od B_1 . W pierwszym przypadku uczynimy $x_2 = B_1$ i $y_2 = y_1$; w drugim — niech będzie $x_2 = x_1$ i $y_2 = B_1$. Weźmy znów liczbę B_2 , leżącą dokładnie pośrodku między x_2 i y_2 , i w taki sam sposób, jak poprzednio, utwórzmy liczby x_3, y_3 . Postępując dalej w ten sposób, będziemy wciąż dzielili na połowy różnicę między wartością na y a odpowiednią wartością na x i wreszcie, po uskuteczeniu $n-1$ takich podziałów, otrzymamy $y_n - x_n = \frac{y_1 - x_1}{2^{n-1}}$, co może być uczynione dowolnie małym, bylebyśmy obrali dość wielkie n . Otóż po tych $n-1$ podziałach okazuje się, że ciąg u zawiera liczby większe od x_n , lecz nie zawiera ani jednej liczby większej od y_n . Liczby ciągu zawarte między x_n a y_n mają wskaźniki większe od pewnej liczby całkowitej N ; jeśli zatem N będzie dostatecznie wielkie i jeśli weźmiemy liczby całkowite l i m większe od N , to wartość bezwzględna różnicy $u_l - u_m$ będziemy mogli uczynić dowolnie małą. Stąd wynika, że ciąg posiada granicę.

Możemy całe postępowanie zobrazować geometrycznie. Znaleźć B znaczy to podzielić na połowy odcinek X_1Y_1 ; zna-



Rys. 79.

leż B_2 znaczy podzielić na połowy bądź to odcinek B_1Y_1 , bądź B_1X_1 , zależnie od tego, czy na prawo od B_1 istnieją czy

też nie istnieją punkty należące do ciągu. Przypuśćmy, że podzieliłiśmy na połowy odcinek B_1Y_1 . Następną zaraz czynnością będzie podział odcinka B_2Y_1 lub B_1B_2 zależnie od tego, czy na prawo od B_2 istnieją, czy nie istnieją punkty ciągu. W krótkim bardzo czasie dostrzeżemy, że wszystkie wartości na u_n , odpowiadające dużym wartościom na n , zawierają się między dwoma bardzo bliskimi punktami, przyczym punkty te możemy dowolnie zbliżyć, gromadząc w ten sposób wszystkie wartości u_n , odpowiadające dużym wartościom na n , w pobliżu jednego punktu. Punkt ten jest granicą ciągu; na lewo od niego leżą wszystkie punkty ciągu.

Jeżeli u_n wciąż maleje (gdy n rośnie), lecz pozostaje większe od pewnej stałej liczby A , ciąg ma granicę, którą jest albo A albo też liczba od A mniejsza.

III. O WYKŁADNIKACH I LOGARYTMACH.

Określenie $\log_{10} x$ za pomocą równań $10^y = x$ lub $y = \log_{10} x$ nie jest zupełne. Można bowiem zadać pytanie: skąd wiemy, że każdej liczbie x odpowiada liczba y taka, że $10^y = x$? Znamy wprawdzie wartości na y , odpowiadające wartościom na x równym 1, 10, 100, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ i wszelkim wogóle całkowitym dodatnim lub ujemnym potęgom liczby 10. Potrafimy znaleźć y , gdy x jest pierwiastkiem jakiegokolwiek stopnia liczby 10, ale istnieją przecież liczby, które nie są ani potęgami, ani pierwiastkami, ani potęgami pierwiastków liczby 10. Jeżeli np. $x=2$, to niema takiego ułamka $\frac{p}{q}$, któryby się równał liczbie y . Gdy-

by $10^{\frac{p}{q}} = 2$, mielibyśmy: $10^p = 2^q$, skąd $5^p = 2^{q-p}$, czyli liczba parzysta musiałaby się równać nieparzystej.

Możnaby na to odpowiedzieć, że $\sqrt{10}$ i t. p. liczby nie są ułamekami typu $\frac{p}{q}$ i że, pisząc $10^y = 2$, uważamy wi-

docznie y za taką szczególną liczbę. Ale wtedy powstaje nowe pytanie: co może oznaczać 10^y , jeżeli y nie jest ani liczbą całkowitą, ani ułamkową? Przecież 10^y zostało określone jedynie tylko dla wykładników całkowitych lub ułamkowych.

Odpowiedź na pytanie wymaga zastanowienia się nad właściwym znaczeniem liczb niewymiernych. Wszystkie liczby całkowite i wszystkie ułamkowe, których liczniki i mianowniki są liczbami całkowitemi, tworzą razem klasę liczb t. zw. wymiernych. Gdy znanym z arytmetyki sposobem szukamy wartości przybliżonej jakiegoś pierwiastka, np. $\sqrt{10}$, właściwie wykazujemy tylko, że kwadraty liczb: 4, 3·2, 3·17, 3·163, 3·1623 i t. d. są wszystkie większe od 10, że natomiast kwadraty liczb 3, 3·1, 3·16, 3·162, 3·1622 i t. d. są wszystkie od 10 mniejsze, czyli że dzielimy wszystkie liczby wymierne na dwie klasy: do jednej zaliczamy każdą liczbę, której kwadrat jest mniejszy od 10, do drugiej te wszystkie, których kwadraty są od 10 większe; $\sqrt{10}$ oznacza teraz dla nas liczbę, większą od jakiejkolwiek liczby pierwszej klasy i mniejszą od jakiejkolwiek liczby, należącej do klasy drugiej. Możemy powiedzieć, że „znamy” jakąś liczbę niewymierną, np. $\sqrt{10}$, jeżeli o każdej liczbie wymiernej da się powiedzieć, czy jest większa, czy mniejsza od danej niewymiernej.

Jeżeli y jest liczbą wymierną kształtu $\frac{2m+1}{2^n}$ (przez m i n oznaczamy tu liczby całkowite), to 10^y jest „znaną” liczbą niewymierną.

Załóżmy, że y jest dodatnie; jeżeli przypuścimy, że y jest albo „znaną” liczbą niewymierną, albo też ułam-

kiem wymiernym kształtu innego, niż $\frac{2m+1}{2^n}$, i jeżeli przytym

a i b są takimi liczbami wymiernymi kształtu $\frac{2m+1}{2^n}$, że $a > y$, $b < y$, to 10^y możemy określić jako liczbę większą od 10^b , lecz mniejszą od 10^a . Mając daną jakąkolwiek liczbę wymierną γ , możemy teraz powiedzieć, czy 10^y jest większe, czy mniejsze od γ . Weźmy dowolną liczbę a_1 , należącą do klasy liczb a , oraz dowolne b_1 z klasy liczb b . Jeżeli $\gamma > 10^{a_1}$, to $10^y < \gamma$; jeżeli zaś $\gamma < 10^{b_1}$, to $10^y > \gamma$. Gdyby się okazało, że $10^{a_1} > \gamma > 10^{b_1}$, musielibyśmy z pierwszej klasy wybrać inną liczbę $a_2 < a_1$, z drugiej zaś liczbę $b_2 > b_1$ i t. d.

Może się zdarzyć, że każda liczba z klasy liczb 10^a jest większa od γ , każda zaś liczba $10^b < \gamma$; w takim razie powiemy, że $10^y = \gamma$. Jeżeli jednak taki przypadek nie zachodzi, to znaleźć się musi albo takie a_n , że $\gamma > 10^{a_n}$, albo takie b_n , że $\gamma < 10^{b_n}$. Widzimy tedy, że wszystkie liczby wymierne, takie, jak γ , dadzą się podzielić na dwa rodzaje: na większe od 10^y i na mniejsze od 10^y . Nie może być dwóch liczb wymiernych γ_1 i γ_2 nie należących do żadnej klasy, gdyż na a_n i na b_n można wziąć wartości tak mało różniące się, że $10^{a_n} - 10^{b_n}$ stanie się mniejsze od wartości bezwzględnej różnicy $\gamma_1 - \gamma_2$. Jeżeli istnieje jedna liczba wymierna γ nie należąca do żadnej klasy, to 10^y jest wymierne i równa się γ . Jeżeli wszystkie liczby wymierne należą bądź do jednej, bądź do drugiej klasy, to posiadamy sposób, za którego pomocą możemy dowiedzieć się o każdej liczbie wymiernej, czy jest mniejsza, czy większa od 10^y , a w takim razie 10^y jest znaną liczbą niewymierną.

Pokazaliśmy, jak można określić 10^y dla każdej wartości dodatniej wykładnika y ; z łatwością można wykazać na zasadzie naszego określenia, że przy wszelkich rachunkach 10^y podlega prawu wykładników dla wartości dodatnich y . Liczbę 10^{-y} określamy jako równą $\frac{1}{10^y}$.

Teorię, którąśmy tu wyłożyli, można porównać z tym, co w rozdz. VI mówiliśmy o układaniu tablicy logarytmów przez wyciąganie z dowolną dokładnością pierwiastków drugiego, czwartego i t. d. stopnia z 10 i potęg całkowitych liczby 10.

Widzieliśmy, jak można określić 10^y , biorąc jakiś znany wykładnik y dodatni (wymierny lub niewymierny); umiemy też określać 10^y przy y ujemnym. Zobaczmy teraz, w jaki sposób, mając daną liczbę dodatnią x , można określić y tak, by $10^y = x$. Przedewszystkiem możemy założyć, że $x > 1$, gdyż w przeciwnym razie musiałoby być $\frac{1}{x} > 1$, i, znalazszy liczbę y' taką, że $10^{y'} = \frac{1}{x}$, mielibyśmy odrazu $y = -y'$. Przyjawszy takie założenie, weźmy dowolną liczbę wymierną C . Wiemy już, co oznacza 10^C ; jeżeli 10^C nie równa się x , musi być ono albo większe, albo mniejsze od x . Możemy wszystkie liczby wymierne C podzielić na dwie klasy: na takie, które czynią 10^C większym od x , i na takie, dla których $10^C < x$. Może istnieć jedna (ale tylko jedna) liczba wymierna C nie należąca do żadnej klasy. Jeżeli istnieje takie C , równa się ono szukanej liczbie y , która zatem jest wymierna. Jeżeli zaś takiego C nie ma, to y jest liczbą niewymierną taką, że: (I) dla wszelkiej liczby wymiernej a , większej od y , musi być $10^a > x$ i (II) dla każdej liczby wymiernej b , mniejszej od y , musi

być $10^b < x$. W takim razie, na mocy określenia liczby 10^y , mamy $10^y = x$.

IV. O LICZBIE e .

Mamy dowieść, że $\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$ dąży do pewnej granicy, gdy h dąży do zera. Przypuśćmy z początku, że h przyjmuje tylko takie wartości, przy których $\frac{x}{h}$ jest zawsze liczbą całkowitą, którą oznaczmy przez n , i spróbujmy dowieść, że, kiedy n rośnie, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ też rośnie, lecz pozostaje mniejsze od 4.

Otóż
$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$
 jeżeli
$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} > 1 + \frac{1}{n},$$
 co istotnie zachodzi, jeżeli
$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} - 1 > \frac{1}{n},$$

czyli (pomnożone przez n)

$$n \left\{ \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} - 1 \right\} > 1.$$

Oznaczmy $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$ przez a ; wskutek tego

$$a^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right), \text{ czyli } (a^n - 1)(n+1) = 1.$$

Mamy zatem dowieść, że

$$n(a^{n+1} - 1) > (n+1)(a^n - 1).$$

Otóż taka nierówność zachodzi istotnie przy wszelkich wartościach $a > 1$, gdyż, jak wiadomo,

$a^{n+1} - 1 = (a-1)(a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$
 i $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$,
 wobec czego nierówność nasza przybiera kształt
 $n(a-1)a^n + n(a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) >$
 $> (n+1)(a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$,
 czyli $n(a-1)a^n > (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$.

Po stronie prawej mamy n wyrazów, z których każdy jest mniejszy, niż $(a-1)a^n$ (przy $a > 1$), a więc dowiedliśmy nierówności.

Dowiedźmy teraz, że, gdy n wzrasta, $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$ maleje.

Otóż
$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} > \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)},$$

czyli
$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} > \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}},$$

jeżeli
$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

czyli, gdy
$$1 - \frac{1}{n} < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}},$$

co znów istotnie zachodzi, jeżeli

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} < \frac{1}{n},$$

czyli
$$n \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right\} < 1.$$

Oznaczmy $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$ przez b ; w takim razie $b^n =$
 $= 1 - \frac{1}{n+1}$, a więc $(1 - b^n)(n+1) = 1$. Mamy zatem dowieść,
 że
$$n(1 - b^{n+1}) < (n+1)(1 - b^n).$$

Otóż nierówność taka jest słuszna przy $b < 1$. Jakoż mamy $1 - b^{n+1} = (1-b)(1+b+b^2+\dots+b^{n-1}+b^n)$

i $1 - b^n = (1-b)(1+b+b^2+\dots+b^{n-2}+b^{n-1})$,
 tak iż nierówność przybiera kształt

$$n(1-b)(1+b+b^2+\dots+b^{n-2}+b^{n-1}) + n(1-b)b^n <$$

$$< (n+1)(1-b)(1+b+b^2+\dots+b^{n-2}+b^{n-1}),$$

czyli $n(1-b)b^n < (1-b)(1+b+b^2+\dots+b^{n-2}+b^{n-1})$.

Na stronie prawej mamy n wyrazów, z których każdy jest większy niż $(1-b)b^n$, jeżeli $b < 1$, a więc dowiedliśmy nierówności.

Zwróćmy teraz uwagę, że przy $n=2$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

i że
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n,$$

co jest mniejsze od 1, jeżeli $n > 1$, że zatem

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Stąd wynika, że, gdy zmienna n rośnie, wzrasta też $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, lecz pozostaje mniejsze od 4, a więc dąży do pewnej granicy (patrz str. 201, 202). Granicę tę nazywamy liczbą e .

Weźmy teraz przypadek ogólniejszy, kiedy h dąży do zera w taki sposób, że $\frac{h}{x}$ pozostaje dodatnie, ale nie jest konieczne liczbą całkowitą. Jeżeli x jest dodatnie, w takim razie h musi też być dodatnie i, dążąc do zera, może przybierać wszelkie wartości dodatnie — wymierne lub niewymierne — mniejsze od pewnej liczby. Podobne rozumowanie można zastosować w przypadku, kiedy x

jest ujemne. Oznaczmy $\frac{x}{h}$ przez z . Jakiegokolwiek wartości ułamek dodatnie przybiera z , istnieją zawsze dwie liczby całkowite kolejne takie, że $n < z < n+1$, przyczym n rośnie nieograniczenie, gdy h dąży do zera. Mamy więc nierówności

$$\left(1 + \frac{1}{z}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z < \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{n+1}$$

oraz

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{z} < 1 + \frac{1}{n},$$

skąd wypływa, że $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$,

czyli

$$\frac{n+1}{n+2} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z < \frac{n+1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Jeżeli liczba całkowita n rośnie do nieskończoności, oba wyrażenia, między którymi zawiera się $\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$ dążą do tej samej granicy e , a więc granicą $\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$ jest też liczba e .

Przypuśćmy wreszcie, że $\frac{h}{x} = z$ jest ujemne. Jeżeli $z = -z'$, to z' jest dodatnie i rośnie nieograniczenie, gdy h dąży do zera. Otóż

$$\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = \left(1 - \frac{1}{z'}\right)^{-z'} = \left(\frac{z'}{z'-1}\right)^{z'} = \frac{z'}{z'-1} \left(1 + \frac{1}{z'-1}\right)^{z'-1};$$

ostatnie wyrażenie dąży do granicy e , gdy z' rośnie nieograniczenie.

Liczba e jest również granicą, do której dąży wyrażenie

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{k!},$$

gdy liczba całkowita k rośnie nieograniczenie, przyczym symbol $k!$ oznacza iloczyn $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (k-1) \cdot k$. Jakkolwiek powyż-

sze wyrażenie może służyć do przybliżonego obliczenia liczby e , nie odegrało ono jednak żadnej zgoła roli w naszym rozumowaniu, i znajomość jego nie jest wcale potrzebna przy dowodzeniu, że $\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$ dąży do pewnej granicy.

Coś podobnego można też spostrzec na liczbie π . Możemy np. dowieść, że pole wielokąta foremnego o 2^n bokach, wpisanego w koło, dąży do pewnej granicy, gdy liczba całkowita n rośnie nieograniczenie, gdyż pole to wciąż rośnie, pozostając jednak mniejszym od pola kwadratu opisanego. Wartość liczebną granicy możemy oznaczyć przez πr^2 (przyczym r oznacza promień koła), co da nam określenie liczby π . W naszym rozumowaniu nie odgrywa najmniejszej roli fakt, że liczba π jest również granicą, do której dąży wyrażenie

$$4 \left\{ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + (-1)^k \frac{1}{2k+1} \right\},$$

gdy k rośnie nieograniczenie, a jednak wyrażenie to może służyć do obliczenia liczby π .

W celu obliczenia e można skorzystać z twierdzenia § 54, mianowicie, że $f'(x)$ równa się zeru dla jakiejś wartości x , zawartej między a i b , jeżeli $f(x) = 0$, gdy $x = a$ i gdy $x = b$. Potrzebny nam też będzie wzór $\frac{de^x}{dx} = e^x$.

Wiemy, że $e > 1$. Oznaczmy $e-1$ przez R_1 . Weźmy funkcję $f_1(x) = e - e^x - (1-x)R_1$, która równa się zeru, gdy $x=0$ lub gdy $x=1$. Wskutek tego $f_1'(x)$ musi równać się zeru przy jakiejś wartości x pośredniej między 0 a 1. Ale $f_1'(x) = -e^x + R_1$, zatem R_1 równa się wartości wyrażenia e^x dla jakiejś wartości zmiennej x , zawartej między 0 a 1. Widzimy, że $R_1 > 1$, a więc $e > 2$.

Niech będzie $R_2 = R_1 - 1 = e - 2$, oraz

$$f_2(x) = e - e^x - (1-x)e^x - (1-x)^2 R_2.$$

Ponieważ $f_2(x) = 0$, gdy $x=0$ lub gdy $x=1$, więc $f_2'(x)$

musi równać się zeru dla jakiejś wartości x zawartej między 0 a 1. Ale

$$f_2'(x) = -e^x + e^x - (1-x)e^x + 2(1-x)R_2 = 2(1-x)(R_2 - 0.5e^x).$$

A więc R_2 równa się $0.5e^x$ dla jakiejś wartości x , zawartej między 0 a 1.

Rzecz oczywista, że nie jest to ta sama wartość zmiennej x dla której mieliśmy $R_1 = e^x$. Widzimy, że $R_2 > 0.5$, ponieważ zaś $e = 2 + R_2$, więc $e > 2.5$. Widzimy również, że $R_2 < 0.5e$, a więc $e < 2 + 0.5e$, czyli $e < 4$.

Niech będzie teraz

$$R_3 = R_2 - 0.5 = e - 2 - 0.5,$$

$$\text{oraz } f_3(x) = e - e^x - (1-x)e^x - 0.5(1-x)^2e^x - (1-x)^3R_3.$$

Oczywista rzecz, że $f_3(x) = 0$, gdy $x = 0$ lub też gdy $x = 1$, a więc $f_3'(x) = 0$ dla jakiejś wartości zmiennej x , zawartej między 0 a 1. Otóż

$$f_3'(x) = -e^x + e^x - (1-x)e^x + (1-x)e^x - 0.5(1-x)^2e^x + 3(1-x)^2R_3 = \\ = 3(1-x)^2\left(R_3 - \frac{e^x}{2 \times 3}\right).$$

Stąd wynika, że $R_3 = \frac{e^x}{6}$ dla jakiejś wartości x , zawartej między 0 a 1.

Widzimy tedy, że $\frac{1}{6} < R_3 < \frac{e}{6}$, zatem $e > 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, czyli $e > \frac{8}{3}$, ale zarazem $e < 2 + \frac{1}{2} + \frac{e}{6}$, czyli $\frac{5}{6}e < \frac{5}{2}$, skąd $e < 3$.

Wiemy tedy, że $\frac{8}{3} < e < 3$.

$$\text{Kładąc dalej } R_4 = R_3 - \frac{1}{6} = e - 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \quad \text{i}$$

$$f_4(x) = e - e^x - (1-x)e^x - 0.5(1-x)^2e^x - \frac{1}{6}(1-x)^3e^x - (1-x)^4R_4,$$

widzimy, że $f_4(x) = 0$, gdy $x = 0$ lub gdy $x = 1$, a więc $f_4'(x) = 0$ przy jakiejś wartości zmiennej x , zawartej między 0 a 1.

$$\text{Otóż } f_4'(x) = -\frac{1}{6}(1-x)^3e^x + 4(1-x)^3R_4 = \\ = 4(1-x)^3\left(R_4 - \frac{e^x}{2 \times 3 \times 4}\right),$$

zatem $R_4 = \frac{e^x}{2 \times 3 \times 4}$ dla jakiejś wartości x , leżącej między

0 a 1. Stąd wynika, że $\frac{1}{24} < R_4 < \frac{e}{24}$, czyli

$$e > 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4},$$

ale zarazem $e < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{e}{2 \times 3 \times 4}$, czyli $\frac{23}{24}e < \frac{8}{3}$,

$$\text{a zatem } \frac{65}{24} < e < \frac{64}{23}.$$

W ten sposób możemy postępować dalej, otrzymując coraz bardziej przybliżone wartości na e . Możemy założyć w ogólności, że

$$R_k = e - 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{2 \times 3 \times 4} - \dots - \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \dots (k-2)(k-1)},$$

$$\text{i że } f_k(x) = e - e^x - (1-x)e^x - \frac{(1-x)^2}{2}e^x - \frac{(1-x)^3}{2 \times 3}e^x - \dots \\ - \frac{(1-x)^{k-1}}{2 \times 3 \times 4 \dots (k-1)}e^x - (1-x)^kR_k.$$

Ponieważ $f_k(x) = 0$, gdy $x = 0$ lub gdy $x = 1$, więc $f_k'(x) = 0$ przy jakiejś wartości na x , zawartej między 0 a 1. Otóż znajdujemy, że

$$f'_k(x) = -\frac{(1-x)^{k-1}}{2 \times 3 \times 4 \dots (k-1)} e^x + k(1-x)^{k-1} R_k = \\ = k(1-x)^{k-1} \left\{ R_k - \frac{e^x}{2 \times 3 \times 4 \dots (k-1) \cdot k} \right\},$$

a więc $R_k = \frac{e^x}{2 \times 3 \times 4 \dots k}$ przy jakiejś wartości x , zawartej między 0 a 1. Stąd wynika, że

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \dots (k-1)} + \frac{e^x}{2 \times 3 \times 4 \dots k}$$

przy jakiejś wartości x , zawartej między 0 a 1. W ten sposób dochodzimy do wniosku, że e zawiera się między

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \dots (k-1)} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \dots k},$$

$$\text{a } 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \dots (k-1)} + \frac{3}{2 \times 3 \times 4 \dots k},$$

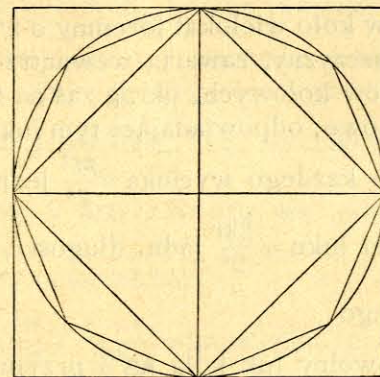
ponieważ $e^x < 3$, gdy $x < 1$.

Widzimy, więc, że e można obliczyć z dowolnym przybliżeniem.

V. O MIERZENIU KOŁA I O RADJANACH.

Przypomnijmy w kilku słowach, jak mierzy się pole koła i długość okręgu. Niech będzie koło o promieniu, mającym r jedn. długości. Opiszmy na kole kwadrat i wpismy w nie kwadrat, jak na rys. 80. Promienie, dzielące na połowy boki kwadratu wpisanego, wyznaczają na okręgu koła 4 punkty, które wraz z 4 wierzchołkami kwadratu dadzą nam wierzchołki foremnego ośmiokąta wpisanego. Pole ośmiokąta jest większe od pola kwadratu wpisanego. Dzieląc na połowy boki ośmiokąta, otrzymamy w taki sam sposób szesnastokąt foremny wpisany, któ-

rego pole jest większe od pola ośmiokąta. Wpisując dalej wielokąty foremne, mające 2^n boków, dostrzegamy, że pola wielokątów wciąż rosną, wraz ze wzrostem n . Ponieważ jednak żaden punkt wielokąta wpisanego nie może leżeć poza kołem, pola więc wielokątów pozostają mniejsze od pola kwadratu opisanego, czyli mniejsze od $4r^2$, zatym dążą do jakiejś granicy (por. str. 201, 202). Powiadamy: polem koła będziemy nazywali pole, mające tyle jednostek powierzchni, ile ich ma powyższa granica. Jest to określenie pola koła.



Rys. 80.

Przypuśćmy, że w dwa koła o promieniach, mających r_1 i r_2 jedn. długości, wpisujemy wielokąty foremne o 2^n bokach. Oba wielokąty są podobne; pola ich są proporcjonalne do kwadratów odpowiednich odcinków, poprowadzonych w obu figurach, a więc proporcjonalne do r_1^2 i r_2^2 . Wobec tego pola wielokątów można wyrazić wzorami $f_n r_1^2$ i $f_n r_2^2$, w których f_n jest liczbą zależną od n , lecz niezależną od r_1 ani od r_2 . Gdy n rośnie nieograni-

czenie, f_n dąży do pewnej granicy, którą nazywamy liczbą π . Pole koła o promieniu $=r$ jedn. długości ma πr^2 jednostek powierzchni.

Niech obwód wielokąta wpisanego, mającego 2^n boków, ma p jedn. długości; długość apotemy niech będzie q jedn.; pole wielokąta $=0.5 pq$ jedn. powierzchni. Można dowieść, że, gdy n rośnie nieograniczenie, q dąży do granicy r , wskutek czego p dąży do granicy $=2\pi r$. Długość okręgu koła określamy jako granicę, do której dąży obwód naszego wielokąta, a więc długość okręgu koła $=2\pi r$.

Wpisując w koło wielokąt foremny o 2^n bokach, dzielimy część płaszczyzny, zawartą wewnątrz okręgu, na 2^n równych wycinków kołowych, okrąg zaś na 2^n równych łuków; kąty środkowe, odpowiadające tym łukom, są wszystkie równe. Pole każdego wycinka $=\frac{\pi r^2}{2^n}$ jedn. powierzchni, długość każdego łuku $=\frac{2\pi r}{2^n}$ jedn. długości, każdy zaś kąt $=\frac{4}{2^n}$ kąta prostego.

Weźmy dowolny łuk koła AB i przypuśćmy, że w A znajduje się wierzchołek wielokąta foremnego wpisanego o 2^n bokach. Jeżeli, przy pewnej wartości wykładnika n , w B znajduje się inny wierzchołek wielokąta, na łuku AB mogą leżeć inne jeszcze wierzchołki, ale może też nie leżeć żaden. Oba przypadki możemy ująć w jeden, mówiąc: na łuku AB leży $m-1$ wierzchołków, przyczem liczba m albo równa się 1 albo jest od 1 większa. W takim razie powiemy, że łuk AB ma $\frac{m}{2^n} 2\pi r$ jedn. długości, kąt środko-

wy odpowiadający mu $=4\frac{m}{2^n}$ kąta prostego, wreszcie pole wycinka kołowego $=\frac{m}{2^n} \pi r^2$ jedn. powierzchni.

Jeżeli niema takiej wartości n , przy której w B leżałby jeden z wierzchołków wielokąta, możemy przypuścić, że m wierzchołków (jeżeli nie rachować wierzchołka A) leży na łuku AB pomiędzy punktami A i B . Kąt środkowy odpowiadający łukowi AB zawiera się między $4\frac{m}{2^n}$ a $4\frac{m+1}{2^n}$ kątów prostych, koniec zaś łuku B leży między dwoma punktami P i Q , t. j. pomiędzy końcami dwóch łuków AP i AQ , których długości wynoszą odpowiednio $\frac{m}{2^n} 2\pi r$ i $\frac{m+1}{2^n} 2\pi r$ jednostek. Pola wycinków, odpowiadających łukom AP i AQ , równają się odpowiednio $\frac{m}{2^n} \pi r^2$ i $\frac{m+1}{2^n} \pi r^2$ jedn. powierzchni.

Oznaczmy $\frac{m}{2^n}$ i $\frac{m+1}{2^n}$ odpowiednio przez x_n , y_n i zastanówmy się, jak zmieniają się liczby x_n , y_n , gdy wskaźnik n wzrasta. Kiedy n zmienia się na $n+1$, liczba boków wielokąta podwaja się i powstają nowe wierzchołki, leżące na dwusiecznych kątów środkowych, utworzonych przez promienie, łączące środek koła z wierzchołkami wielokąta o 2^n bokach. Oznaczmy te kąty numerami 1, 2, 3 it. d., poczynając od tego, którego jedno ramię przechodzi przez A . Jeżeli dwusieczna $(m+1)$ -ego kąta nie przecina łuku AB , w takim razie m zamienia się na $2m$, jeżeli zaś przecina, to m zamienia się na $2m+1$. Jeżeli n zamienia się na $n+1$

(t.j. liczba boków wielokąta zostaje podwojona), a razem m na $2m$, to $x_{n+1} = x_n$, lecz

$$y_{n+1} = \frac{2m+1}{2^{n+1}} < \frac{m+1}{2^n}, \text{ czyli } y_{n+1} < y_n.$$

Jeżeli, przeciwnie, m zamienia się na $2m+1$ przy podwojeniu liczby boków, to

$$x_{n+1} = \frac{2m+1}{2^{n+1}} > \frac{m}{2^n}, \text{ czyli } x_{n+1} > x_n,$$

lecz
$$y_{n+1} = \frac{2m+2}{2^{n+1}} = \frac{m+1}{2^n}, \text{ czyli } y_{n+1} = y_n.$$

Przy każdym dalszym podwojeniu liczby boków wielokąta jedna z liczb x_n, y_n pozostaje bez zmiany, druga zaś zmienia się; przyczym x_n rośnie, przeciwnie zaś y_n maleje. Ponieważ jednak kąt środkowy odpowiadający łukowi AB zawiera się zawsze pomiędzy $4x_n$ a $4y_n$ kątów prostych, więc wszystkie liczby x_n są mniejsze od każdej liczby y_n . Ponieważ, dalej, różnica $y_n - x_n = \frac{1}{2^n}$ może być uczyniona dowolnie małą, więc x_n i y_n dążą do wspólnej granicy (por. str. 201).

Oznaczmy tę granicę przez $\frac{\alpha}{2\pi}$. Kąt środkowy, odpowiadający łukowi AB , ma $\frac{2\alpha}{\pi}$ kątów prostych; długości łuków AP i AQ dążą do tej samej granicy $= \alpha r$ jedn. długości; pola wycinków, odpowiadających łukom AP i AQ , dążą też do wspólnej granicy $= \frac{\alpha r^2}{2}$ jedn. powierzchni. Długość łuku AB i pole odpowiadającego mu wycinka określamy właśnie jako granice, o których dopiero co wspomnieliśmy.

Stąd wynika, że bez względu na to, czy B jest, czy nie jest wierzchołkiem wielokąta, istnieje zawsze taka licz-

ba α , że (I) kąt środkowy, odpowiadający łukowi AB , ma $\frac{2\alpha}{\pi}$ kątów prostych; (II) łuk AB ma αr jedn. długości;

(III) pole odpowiedniego wycinka $= \frac{\alpha r^2}{2}$ jedn. powierzchni.

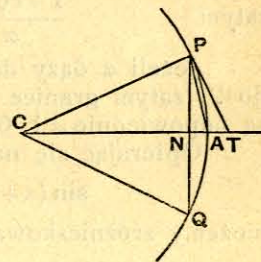
Liczba α wyraża wartość kąta, zmierzonego pewną nową jednostką miary. Tę nową jednostkę nazywamy radjanem. Jest to kąt $= \frac{2}{\pi}$ kątów prostych.

VI. O GRANICY WYRAŻENIA $\frac{\alpha}{\sin \alpha}$.

Jeżeli łuk koła i cięciwa mają odpowiednio l i χ jedn. długości, w takim razie $\frac{l}{\chi}$ dąży do 1, gdy końce cięciwy zbliżają się do siebie nieograniczenie.

Niech N będzie środkiem cięciwy PQ (rys. 81), niech promień przechodzący przez N przecina koło w A , styczna zaś PT niech przecina promień CA w punkcie T . Przypuśćmy, że kąt ACP ma α radjanów, promień zaś koła r jednostek długości. W takim razie cięciwa PQ ma $2r \sin \alpha$ jednostek długości, łuk zaś PQ ma $2r\alpha$ tychże jednostek. Musimy zatem dowieść, że $\frac{\alpha}{\sin \alpha}$ dąży do 1, gdy α dąży do zera.

Odcinek PN ma $r \sin \alpha$ jedn. długości, łuk PA ma $r\alpha$, odcinek PT ma $r \operatorname{tg} \alpha$ tychże jednostek, wskutek tego pole



Rys. 81.

trójkąta PCA ma $0.5 r^2 \sin \alpha$ jedn. powierzchni, pole wycinka kołowego PCA ma $0.5 r^2 \alpha$ jedn., wreszcie pole trójkąta PCT $0.5 r^2 \operatorname{tg} \alpha$ jedn. pow. Mamy więc

$$0.5 r^2 \sin \alpha < 0.5 r^2 \alpha < 0.5 r^2 \operatorname{tg} \alpha,$$

czyli $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$,

skąd $1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}$.

Gdy α dąży do zera, $\frac{1}{\cos \alpha}$ dąży do 1, a więc $\frac{\alpha}{\sin \alpha}$,

które wciąż leży między 1 a $\frac{1}{\cos \alpha}$, musi też dążyć do 1.

Z łatwością możemy stąd wywnioskować, że $\frac{1 - \cos \alpha}{\alpha}$ dąży do zera, gdy α dąży do zera. Jakoż

$$\sin^2 \alpha = (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha),$$

zatem $\frac{1 - \cos \alpha}{\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{1}{1 + \cos \alpha} \sin \alpha$.

Jeżeli α dąży do zera, $\cos \alpha$ dąży do 1 i $1 + \cos \alpha$ dąży do 2, zatem granice czynników po prawej stronie tożsamości są odpowiednio $= 1$, 0.5 i 0 , a więc granica całego iloczynu $= 0$.

Opierając się na tych dwóch granicach oraz na wzorze

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

możemy zróżniczkować $\sin x$. Jakoż mamy

$$\sin(x + h) = \sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h,$$

skąd
$$\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \frac{\sin h \cos x - (1 - \cos h) \sin x}{h} =$$

$$= \cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \frac{1 - \cos h}{h}.$$

Gdy h dąży do zera, prawa strona równości dąży do granicy $= \cos x$.

Tak samo, wychodząc ze wzoru

$$\cos(x + h) = \cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h,$$

$$\begin{aligned} \text{mamy } \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} &= - \frac{\sin x \sin h + \cos x (1 - \cos h)}{h} = \\ &= - \sin x \frac{\sin h}{h} - \cos x \frac{1 - \cos h}{h}. \end{aligned}$$

Jeżeli h dąży do zera, prawa strona równości dąży do granicy $= -\sin x$.

Powyższe rozumowanie wydaje się krótszym od użytego w rozdziale VII, ale wymaga ustalenia wzorów na $\sin(\alpha + \beta)$ oraz $\cos(\alpha + \beta)$ dla wszelkich wartości α i β — dodatnich i ujemnych — jak to czynią podręczniki trygonometrii. Metoda, użyta w rozdz. VII, dowodzi, że można zróżniczkować $\sin x$ i $\cos x$, nie posługując się temi wzorami.



7.7834

SPIS RZECZY ABECADŁOWY.

(Liczby wskazują stronicę)

Bezwładności ramię 190 i n.
Błąd, patrz Przybliżenia.

Całka 71, nieokreślona 79, określona 79, 170 i d.

Całkowanie 63 i d.; metody całkowania 71 i n., 138—155. C. przez części 144 i d. C. przybliżone 171 i d.

Chemja, zastosowania do ch. 104 i n.
Ciąg 200.

Ciężar ciała 180.

Ciężkości siła, przyspieszenie grawitacyjne 90. Ruch ciała rzuconego, pod działaniem siły ciężkości 91. Środek ciężkości 180.

Cisnienia środek 187.

Cisnienie całkowite 185.

Cosinus 112.

Cukier trzcinowy, prędkość inwersji 104.

Delta 20.

Dostawa 112.

Dowolna stała 69.

Organie zanikające 132.
Druga pochodna 38 i n.

Elektryczność, zastosowania do el. 106 i d., 133 i n.

Funkcja 19, linjowa 31, wykładnicza 99—102, wymierna 31, 37.

Funkcje trygonometryczne 112—125, ich funkcje odwrotne 148—150.

Funkcji różniczkowanie 33 i n.

Funkcji wykładniczej granica 98, 207 i d.

Funkcji wymiernej całkowanie 31.

Granica 13, 25, 195—203.

Granice funkcji trygonometrycznych 219 i n.

Hiperbola 49.

Iloczynu różniczkowanie 29, 52 (ilustracja wykreslna). Granica iloczynu 199.

Jednorodność 181.

Kołałuk 120, 216, mierzenie 214 i n.,
pole 65, 214 i n., równanie 44.

Koło krzywizny 163.

Krzywizna 161 i d., jej promień 163.

Kuli objętość 84, powierzchnia 166
i n.

Kwadranty 5.

Liczby niewymierne i wymierne
204.

Linja odległości 8.

Linja prędkości wykres 41.

Logarytmy 94—99, 203 i d.

Łuk krzywej 120 i n., 158, 177.

Maxima i Minima 54—60, przykła-
dy 59 i n., 126.

Mellor J. W. 104.

Mierzenie 63, 67, 81, 84, 165, 214 i d.

Moment bezwładności 189 i d., siły
180.

Normalna do krzywej 48.

Objętości brył 84 i d., 177.

Obliczenie π 173; obl. e 173 i n.,
211 i d.

Obrót 110 i n., 189.

Odcięta 5.

Opór względem ruchu 106, 130 i n.

Osie współrzędnych 2.

Ostrosłupa objętość 87, środek
ciężkości 183.

Parabola 11, 45, jako tor porusza-

jącego się punktu 93, przecho-
dząca przez trzy punkty 45, 49,
79, 172. Pole ograniczone para-
bolą 76, 80.

Paraboli krzywizna 164, długość
łuku 161.

Pochodna 21, druga poch. 38 i d.

Początek współrzędnych 3.

Pole figury płaskiej 81, 176 i n.;

powierzchni obrotowej 164 i d.,

178; powierzchni ograniczonej

krzywą 65, 77, 170.

Półkola środek ciężkości 184, śro-
dek ciśnienia 189.

Półkuli środek ciężkości 181 i n.

Prędkość katowa 112, 189.

Prędkość poruszającego się ciała
23; pr. zmiany 23.

Prędkość średnia 7, 8, 13, 22 i n.

Promień krzywizny 163.

Prostej równanie 45 i n., 194.

Prostokąta ramię bezwładności 191,
środek ciśnienia 188.

Prostopadłości warunki 46 i n.

Przybliżenia 50—54, 102 i n., 125 i n.,
151, 171.

Przyspieszenie 40, 90.

Radjan 110, 219.

Ramię bezwładności 190 i n.

Rozszerzalności współczynnik 53.

Równania, liczba pierwiastków 62.

Równania trzeciego stopnia przy-
bliżone rozwiązanie 16.

Równanie krzywej 44 i n., prostej
45 i n., 194.

Różniczkowania reguły 27 i d.,
33 i d.

Różniczkowanie 15. R. iloczynu 29,
ilorazu 36, sumy 28.

Ruch ciała przyczepionego do sprę-
żyny 128—133.

Ruch harmoniczny (drgający) pro-
sty 128. Drganie zanikające 132.

Ruch jednostajny 7.

Ruch wahadłowy 127—134.

Rzędna 5.

Sieczna geometryczna 14, sieczna
trygonometryczna 117.

Sigma 176.

Sinus 112.

Spadające ciało 10, 90, 107.

Współrzędne 4.

Stożka objętość 85, powierzchnia
165.

Styczna geometryczna 14, 23, 47 i n.
(równanie i wzniesienie), 160;
styczna trygonometryczna 117,
160. Funkcja odwrotna 149.

Sumy całkowanie 72, granica 198
i n., różniczkowanie 28. Całka
określona jako granica sumy
173—176.

Tablica potęg liczby dziesięć 95.

Tablice funkcji wykładniczej 100.

T. ilustrujące granicę funkcji
wykładn. 97 i n. T. stycznych 120,
wstaw 115.

Thomson J. J. 106.

Trapezu pole 64.

Trójkąta pole 63, 83, środek cięż-
kości 184, środek ciśnienia 188.

Ujemne liczby, ich wykres 4.

Ułamki proste 139.

Wartość pośrednia, twierdzenie 60
i d.

Wklęsłość, wypukłość 42.

Wstawa 112, funkcja odwrotna 148.

Wykładniki 32, 203 i n.

Wykres 7. Ćwiczenia na wykresy
16 i d.

Wykresy poszczególnych funkcji 6,
11, 95, 100, 115 i n., 118 i n.,
148 i n.

Wzniesienie 9, 14, 22, 160; jego
znak 9, 54, 56, 69.

Wzór redukcyjny 146.

Wzór Simpsona 172 i n.

Zasadnicze wzory całek 72, 192.

Zmiennych zmiany 34, 73—75.

351395

DARWINIZM

A WIEDZA WSPÓŁCZESNA

R. 1.80, w oprawie R. 2.55

TREŚĆ:

- L. Krzywicki. Słowo wstępne o wpływie darwinizmu na nasz światopogląd i o nastroju umysłowym, jaki darwinizm wytworzył.
- H. Höffding. Wpływ pojęcia ewolucji na filozofię współczesną.
- W. C. D. Whetnam. Ewolucja materii.
- George Darwin. Geneza gwiazd podwójnych.
- C. Bouglé. Darwinizm a socjologia.
- J. B. Bury. Darwinizm a historia.
- P. Giles. Ewolucja a językoznawstwo.
- J. F. Harrison. Wpływ darwinizmu na badania w zakresie religii.

Józef Nusbaum. Rozwój Świata Zwierzęcego.

T. I. Embryologia Ogólna. Zarys dziejowy. Płodność. Dziedziczność. R. 4.—
w opr. płóc. R. 4.80, w półsk. R. 5.20

— **Idea ewolucji w biologii.** Przeszłość, stan obecny i wpływ na rozwój wiedzy ludzkiej R. 5.50
w oprawie R. 6.50

W. Bölsche. O pochodzeniu człowieka. Wydanie trzecie, poprawione i znacznie powiększone. Przekład Dr. Z. Szymanowskiego R.—.50

— **Miłość w przyrodzie.** Ser. II. Przekł. Dr. Z. Szymanowskiego R. 2.50

Harald Höffding. Psychologia w zarysie na podstawie doświadczenia. Przekład Adama Małkowskiego z czwartego wydania niemieckiego według wielostronnie zmienionego piątego wydania duńskiego oryginału R. 3.20

opr. w półskórek R. 4.20

A. Zieleńczyk. Drogi i bezdroża filozofji R. 1.80

W DRUKU I NA UKOŃCZENIU:

Dr. Józef Nusbaum. Rozwój świata zwierzęcego.

Tom II. Embryologia ogólna. Rozwój osobnikowy. Mechanika rozwojowa. Rozmnażanie bezpłciowe.

— Tom III. Rozwój rodowy świata zwierzęcego.

R. Eucken. Poglądy życiowe wielkich myślicieli. Przekład Dr. Adama Zieleńczyka z dziewiątego wydania oryginału.

S. NEWCOMB

ASTRONOMIA DLA WSZYSTKICH

Przełożył z angielskiego R. MERECKI

R. 2.50, w kartonie R. 2.65, w ozdobnej oprawie płóc. R. 3.20

„Książka ta... jest istotnie „dla wszystkich”. Czytać ją może z najwyższym zainteresowaniem i z prawdziwym pożytkiem (o ile wolno mi sądzić po sobie) zarówno człowiek dorosły, który miał nawet sposobność częstego spotykania się z tym lub owym działem astronomii, jak młodzież... Książka bowiem... odznacza się zarówno niezwykle jasnością wykładu, jak gorącą miłością każdego działu rozległej tej dziedziny zagadnień...”

Ludwik Silberstein (Przegląd Techniczny, 15. II. 1912 i Nowe Tory, kwiecień 1912).

„...Autor, nie tylko wybitny teoretyk, ale wytworny stylista i wytrawny pedagog, umiał ująć w formę bardzo popularną, a zarazem ściśle naukową zarys społecznej nauki o niebie, nie odrzucając nawet jej najnowszych zdobyczy. W naszej ubogiej literaturze naukowo-pedagogicznej książka S. Newcomba niewątpliwie wypełnia lukę, która się oddawna dawała odczuwać, zwłaszcza nauczycielom kosmografii, którzy nie mieli do swego rozporządzenia dzieł, dających im materiał wykładowy w formie opisowej, a zarazem ściślej...”

Jan Krassowski (Wektor, kwiecień 1912).

TH. H. HUXLEY

ZASADY FIZJOLOGJI

W OPRACOWANIU DR. I. ROZENTHALA

Przekład Dr. Adama Landego. 105 rycin w tekście

R. 3.20, w oprawie płóciennnej R. 3.80, w półskórce R. 4.20

„T. H. Huxley... oprócz prac ściśle naukowych, pisał dzieła przeznaczone dla szerszych mas myślącego ogółu, a pisał je po mistrzowsku. Mistrzostwo to polegało na umiejętności opowiadania o rzeczach najbardziej złożonych i trudnych w sposób jasny, przejrzysty, stylem prostym, ale jedynym, na umiejętności odróżnienia tego, co istotnie jest wielkości wagi, od tego, co ma mniejsze lub zgoła drugorzędne znaczenie dla ogarnięcia całości danej nauki... Te wszystkie wielkie zalety mają słynne „Zasady fizjologii...” Przekład polski jest bardzo poprawny, a wydanie wprost wykwintne: „doskonały dobór licznych rysunków... Dzieło Huxleya polecam najgoręcej naszej studiującej młodzieży, przyrodnikom i lekarzom...”

Prof. Dr. Józef Nusbaum (Kosmos, Zesz. I—III 1912).

„Jest to książka popularna w najlepszym znaczeniu wyrazu i w tym zakresie najlepsza może w literaturze europejskiej. Autor nie przypuszcza u czytelnika żadnego przygotowania specjalnego, z wyjątkiem najelementarniejszych zasad fizyki i chemii, wszystkie zaś wiadomości przygotowawcze podaje w swoim wykładzie... książka zaleca się przedewszystkim układem wysokiej wartości pedagogicznej...”

W. Jezierski (Nowe Tory, marzec 1912).