

D. 26850

P. 34.555

BIBLIOTECZKA MATEMATYCZNA

POD REDAKCJĄ TADEUSZA SIERZPUTOWSKIEGO i EDWARDA SZPILRAJNA

9

ANTONI ŁOMNICKI

PROF. POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

WIELOŚCIANY UMIAROWE



KSIĄŻNICA - ATLAS

S. A. ZJEDNOCZ. ZAKŁADY KARTOGR. I WYDAWN. T. N. S. W.

LWÓW — WARSZAWA

5 III-62
4K
P.34.555

BIBLIOTECZKA MATEMATYCZNA

POD REDAKCJĄ TADEUSZA SIERZPUTOWSKIEGO I EDWARDA SZPILRAJNA

9

ANTONI ŁOMNICKI
PROF. POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

WIELOŚCIANY UMIAROWE



KSIĄŻNICA - ATLAS

S. A. ZJEDNOCH. ZAKŁADY KARTOGR. I WYDAWN. T. N. S. W.

LWÓW — WARSZAWA

314 979



BIBLIOTEKA UNIwersYTECKA
im. Jerzego Giedroycia w Białymstoku



FUW0293146

2760

ZAKŁADY GRAFICZNE SKI AKC. KSIĄŻNICA-ATLAS WE LWOWIE
COPYRIGHT, 1939, BY S. A. KSIĄŻNICA-ATLAS, LWÓW-WARSZAWA
PRINTED IN POLAND

B IX

2-45

WSTĘP

Badanie wielościannów umiarowych, jako utworów przestrzennych, wyróżniających się najdoskonalszą symetrią i harmonią budowy, pociągało umysły wielu wybitnych matematyków, astronomów i filozofów już od zamierzchłej przeszłości. Z historią tych badań wiązą się nie tylko rozmaite ważne działy matematyki, lecz także pewne fantastyczne, niczym nie uzasadnione pomysły, rzucające ciekawe światło na historię kultury rozmaitych epok.

Ponieważ nauka o wielościannach umiarowych nie mieści się w dzisiejszych programach naszych szkół średnich, przeto uważamy za rzecz pożyteczną uzupełnienie tej luki za pomocą niniejszego tomiku Biblioteczki Matematycznej.

Do zrozumienia definicji i własności wielościannów umiarowych niezbędną jest znajomość definicji i własności wieloboków umiarowych i kątów bryłowych umiarowych, toteż zajmujemy się najpierw omówieniem tych prostszych utworów geometrycznych.

CZĘŚĆ I

OGÓLNE WIADOMOŚCI O WIELOBOKACH i WIELOŚCIANACH

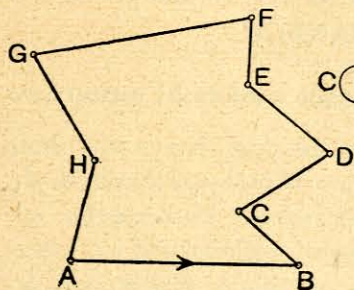
§ 1. Wieloboki a w szczególności wieloboki umiarowe

Wielobokiem lub wielokątem płaskim nazywamy linię łamaną zamkniętą, łączącą kolejno n różnych punktów $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ leżących na płaszczyźnie.¹ Poszczególne odcinki tej łamanej nazywamy bokami wieloboku, a ich końce jego wierzchołkami. Wielobok nazywamy *zwyczajnym*, jeżeli boki nie należące do tego samego wierzchołka, czyli boki nie sąsiadujące z sobą, nie mają żadnego punktu wspólnego, jak na rys. 1. Wielobok, w którym przynajmniej dwa boki nie należące do tego samego wierzchołka mają punkt wspólny, nazywamy wielobokiem *związanym* lub *gwiazdzistym*; tak np. linię łamaną $ABCDEFA$ na rys. 2 uważamy za jeden wielobok gwiazdzisty. Punktów, w których się przecinają nie sąsiadujące boki, nie zaliczamy do wierzchołków, lecz nazywamy je *punktami wielokrotnymi*; na rys. 2 występują np. punkty podwójne (nie oznaczone literami na tym rysunku). Wielobok zwyczajny dzieli płaszczyznę na dwie części: jedną skończoną, zwaną *wnę-*

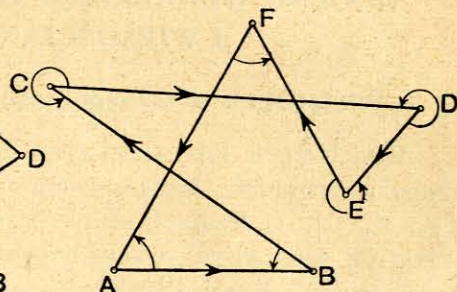
¹ Omówienie rozmaitych własności wieloboków znajdzie czytelnik w 2 tomiku Biblioteczki Matematycznej pt. *O wielobokach* (S. Strasze-wicz).

trzem wieloboku, drugą zaś nieskończoną, *zewnątrzną*. Wielobok związany nie daje takiego podziału.

Każda para sąsiednich boków wieloboku tworzy dwa kąty: jeden wypukły, tj. mniejszy od kąta półpełnego, drugi zaś wklęsły, tj. większy od kąta półpełnego. Jasne jest, które z tych kątów należy uważać za kąty wewnętrzne wieloboku, jeżeli mamy do czynienia z wielobokiem zwykłym: są to mianowicie kąty, których części pół le-



Rys. 1.



Rys. 2.

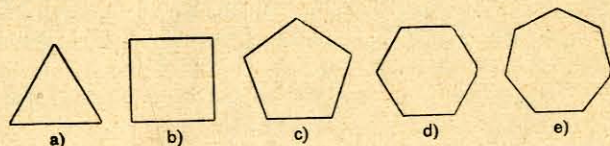
żące w otoczeniu wierzchołka należą do wnętrza wieloboku. Określenie kątów wieloboku związanego zależy od tego, który kierunek obrotu na płaszczyźnie uważamy za dodatni, i w jakim porządku przebiegamy wierzchołki wieloboku. Jeżeli np. ustalimy, że obrót dodatni jest przeciwny do ruchu wskazówki zegarowej, to za kąt wieloboku przy danym wierzchołku uważamy ten kąt, o który musi się obrócić w kierunku dodatnim następny bok, aby padł na promień należący do poprzedniego boku; na rys. 2 (boki następują po sobie w porządku AB, BC, CD, DE, EF, FA) zakreślono te kąty strzałkami. Gdybyśmy zaś przyjęli za dodatni obrót zgodny z ruchem wskazówki zegara, to za kąty tego samego wieloboku należałoby uwa-

żać kąty uzupełniające wszystkie kąty poprzednio obrane do kątów pełnych.

Dawniej uważano za wieloboki tylko wieloboki zwykłe, a wielobok gwiaździsty uważano za zespół wieloboków zwykłych. Tak np. utwór przedstawiony na rys. 2 uważano za zespół czterech trójkątów. Łączyło się to z tym, że za wielobok uważano nie linię łamaną, lecz część płaszczyzny zamkniętą tą linią.

Wieloboki dzielimy według liczby boków na trójkąty, czworoboki, pięcioboki, 6-boki, ogólnie n -boki.

Wielobok zwykły lub gwiaździsty, którego wszystkie boki i kąty są sobie równe, nazywamy wielobokiem umiartym. Istnieje nieskończenie wiele gatunków wielo-

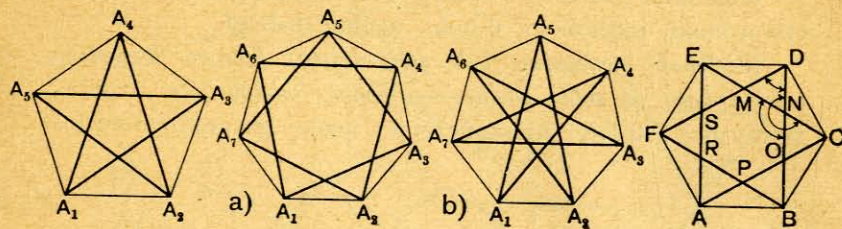


Rys. 3.

boków umiartych i to zarówno zwykłych jak i gwiaździstych. I tak istnieje n -bok zwykły umiarty, dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od 3, a więc istnieje trójkąt umiarty zwany równobocznym, 4-bok umiarty zwany kwadratem, 5-bok, 6-bok, 7-bok itd. umiarty zwykły (rys. 3).

Istnieją wieloboki umiarowe gwiaździste dla $n = 5, 7, 8$ i dla wszystkich większych n , natomiast nie ma gwiaździstych umiartych wieloboków dla $n = 3, 4, 6$. Wieloboki umiarowe gwiaździste otrzymujemy z wieloboków umiartych zwykłych łącząc z sobą nie sąsiadujące wierzchołki za pomocą linii łamanej, złożonej z odpowiednich przekątnych. Można je także otrzymać przez przedłuża-

nie nie sąsiednich boków aż do przecięcia się. Tak np. z pięcioboku umiarowego zwyczajnego (rys. 4) $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ otrzymujemy pięciobok umiarowy gwiaździsty łącząc za pomocą przekątnych co drugi wierzchołek, tj. pierwszy A_1 z trzecim A_3 , trzeci A_3 z piątym A_5 , piąty A_5 z drugim A_2 itd. Mamy więc dwa rodzaje 5-boków umiarowych: zwyczajny, czyli rodzaju 1 i gwiaździsty, rodzaju 2. Z 7-boku umiarowego zwyczajnego (rys. 5) otrzymujemy



Rys. 4.

Rys. 5.

Rys. 6.

dwa różne 7-boki umiarowe gwiaździste: jeden łącząc przekątnymi co drugi wierzchołek (rys. 5 a), drugi zaś łącząc co trzeci wierzchołek (rys. 5 b). Mamy więc 3 rodzaje 7-boków umiarowych. Figura otrzymana w podobny sposób z 6-boku umiarowego zwyczajnego (rys. 6) nie jest wielobokiem według podanej powyżej definicji. Możemy ją uważać albo za zespół dwóch trójkątów równobocznych ACE i BDF , albo też za jedną linię łamaną zamkniętą, lecz nieumiarową, np. $MESFRAPBOCNDMSRPONM$, w której wszystkie boki są równe, lecz nie wszystkie kąty (np. $\sphericalangle NDM = 60^\circ$, $\sphericalangle CND = 240^\circ$, $\sphericalangle ONM = 120^\circ$).

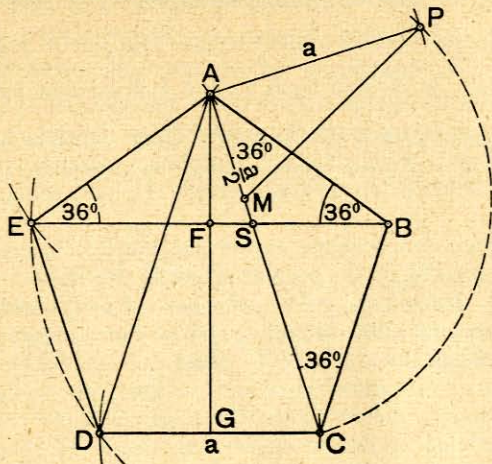
Uwaga. Udowodniono, że dla każdego n istnieje tyle różnych rodzajów n -boków umiarowych gwiaździstych, ile jest liczb pierwszych względem n w zbiorze liczb naturalnych, nie przekraczających $\frac{n-1}{2}$. Tak np. dla $n = 7$ jest $\frac{7-1}{2} = \frac{7-1}{2} = 3$;

w zbiorze liczb naturalnych 1, 2, 3 są dwie liczby pierwsze względem 7 a mianowicie liczby 2 i 3, wobec czego istnieją tylko dwa rodzaje 7-boków umiarowych gwiaździstych, a zatem ogółem mamy 3 rodzaje 7-boków umiarowych. Dla $n = 8$ jest $\frac{n-1}{2} = \frac{8-1}{2} = 3\frac{1}{2}$; w zbiorze liczb 1, 2, 3 tylko jedna jest pierwsza względem 8, a mianowicie 3, wobec czego istnieje tylko jeden 8-bok umiarowy gwiaździsty. Podobnie okazuje się, że istnieją dwa 9-boki, jeden 10-bok, cztery 11-boki umiarowe gwiaździste itd.

Dowód tego twierdzenia zawierającego tak interesujące zastosowanie teorii liczb do geometrii podał Poincaré w r. 1810, w pracy pt. *Mémoire sur les polygones et les polyèdres*. Pracę tę wraz z pracami kilku innych autorów dotyczącymi wielościannów umiarowych gwiaździstych przełożył na język niemiecki R. Haussner i ogłosił drukiem w znanym wydawnictwie: Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften (nr 151). Dowód ten można znaleźć także w obszernym dziele M. Brücknera pt. *Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte*. (Lipsk, 1900 r.). Tam też znajdzie czytelnik dokładną definicję pojęcia: *rodzaj wieloboku* (str. 4 i nast.).

W dalszych naszych rozważaniach będziemy mieli do czynienia tylko z czterema spośród wieloboków umiarowych, a mianowicie z trójkątem równobocznym, z kwadratem, z 5-bokiem umiarowym zwyczajnym i gwiaździstym. Zajmiemy się tu tylko konstrukcją i własnościami 5-boków, ponieważ własności trójkąta równobocznego i kwadratu są dobrze znane z elementarnej nauki geometrii. Łatwo jest zbudować 5-bok umiarowy wykreślając przy pomocy kątomierza kąt 108° . Można jednak wykonać tę konstrukcję także bez kątomierza, przy pomocy tylko linealu i cyrkla, tj. stosując *konstrukcję platońską*. Oprzemy się w tym celu na stosunku, który zachodzi między przekątną 5-boku umiarowego a jego bokiem. Zbadajmy najpierw stosunek podziału jednej przekątnej 5-boku umia-

rowego przez drugą, np. przekątną AC przez przekątną BE (rys. 7). Trójkąty ABC i BSA są do siebie podobne,



Rys. 7.

bowiem $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABS = 36^\circ$ i $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BAS = 36^\circ$. Stąd wynika proporcja:

$$AC : BA = BC : SA.$$

Ponieważ $\sphericalangle CSB = \sphericalangle CBS = 72^\circ$, przeto $BC = SC$, a zatem także $BA = SC$ a więc:

$$AC : SC = SC : SA.$$

Odcinek AC jest więc tak podzielony punktem S , że cały odcinek AC ma się tak do większej swej części, jak ta większa część do mniejszej. Taki podział nazywamy *podziałem złotym*. Ponieważ $SC = AB$, przeto $AC : SC = AC : AB$, a więc stosunek $AC : AB$ jest także stosunkiem złotego podziału.

Dowiedliśmy zatem, że *między przekątną 5-boku umiarowego a jego bokiem zachodzi stosunek podziału złotego*.

Wniosek. Wykreślmy oś symetrii AG pięcioboku umiarowego. Ponieważ $EB \parallel DC$, więc $FG : AF = SC : AS$, a zatem przekątna EB dzieli odcinek AG osi symetrii także według złotego podziału.

Uwaga. Stosunkiem złotego podziału zajmowano się bardzo wiele i to nie tylko w geometrii. Okazało się, że taki właśnie stosunek podziału odpowiada najbardziej upodobaniom człowieka. Tak np. stwierdzono, że w klasycznej architekturze greckiej, pomiędzy wymiarami długości i szerokości rozmaitych budynków zachodzi z wielkim przybliżeniem stosunek złotego podziału.

Opierając się na udowodnionym twierdzeniu, można zarówno *obliczyć* długość przekątną 5-boku umiarowego, znając długość boku, jak też *zbudować* przekątną przy pomocy konstrukcji platońskiej znając bok. I tak oznaczając długość przekątną literą x , a długość boku literą a , mamy proporcję:

$$x : a = a : (x - a)$$

a stąd:

$$x^2 - ax = a^2 \quad (r)$$

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}.$$

Ujemna wartość pierwiastka nie odpowiada warunkom zadania, albowiem także x ma wtedy wartość ujemną. Na podstawie tego wzoru otrzymamy konstrukcyjnie x budując trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i $\frac{a}{2}$ (rys. 7). Przeciwnprostokątna PM ma długość $\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + a^2}$; odcinamy $MC = MP$ na przedłużeniu odcinka $AM = \frac{1}{2}a$, to $AC = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + a^2} = x$. Stąd wynika następująca konstrukcja 5-boku umiarowego o danym boku: na znalezionej przekątnej AC , jako na podstawie, budujemy trójkąt równoramienny o ramionach $AB = CB = a$; z pun-

ktu B jako ze środka zakreślamy łuk koła o promieniu AC , a z punktów A i C , jako ze środków, łuki kół promieniem równym a ; otrzymamy w ten sposób dwa pozostałe wierzchołki E i D zwyczajnego umiarowego 5-boku.

Chcąc zbudować 5-bok umiarowy gwiazdzisty o danym boku x , (który jest przekątną zwyczajnego 5-boku), uważamy w danym równaniu (r) za niewiadomą a , a za daną wielkość x . Obliczamy a i znajdujemy konstrukcyjnie to a przy pomocy odpowiedniego trójkąta prostokątnego. Budujemy trójkąt równoramienny ADC z elementów a , x , x , a pozostałe wierzchołki B i E znajdujemy wykreślając na podstawach AC i AD trójkąty równoramienne o ramionach równych DC .

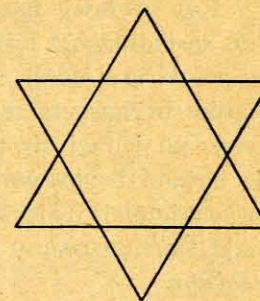
Uwaga. Z tą przedziwną harmonią budowy 5-boku umiarowego gwiazdzistego wiąże się niewątpliwie używanie pięciokątnej gwiazdy jako mistycznego symbolu w rozmaitych epokach. Tak np. pitagorejczycy uważali tę figurę za symbol zdrowia, wypisywali na jej wierzchołkach litery greckiego słowa: *ὕγιεια* (higiea, tj. zdrowie) i posługiwali się nią, jako umówionym znakiem porozumiewawczym.

Nauka o wielobokach umiarowych pozostaje w najściślejszym związku z algebrą wyższą, a mianowicie z nauką o zupełnym rozwiązaniu równań postaci: $x^n = c$.

§ 2. Kąty bryłowe a w szczególności kąty bryłowe umiarowe

Weźmy pod uwagę punkt S , nie leżący na płaszczyźnie danego wieloboku zwyczajnego lub gwiazdzistego; wykreślmy z punktu S promienie, przechodzące przez wierzchołki tego wieloboku a następnie przez każdą parę promieni sąsiednich, tj. łączących S z sąsiednimi wierzchołkami wieloboku, przesunmy część płaszczyzny, zawartą

między tymi promieniami. Utwór geometryczny złożony z tych części płaszczyzn nazywamy *kątem bryłowym*. Punkt S nazywamy jego *narożem* lub *wierzchołkiem*, promienie, łączące S z wierzchołkami wieloboku, nazywamy jego *krawędziami* a części płaszczyzn, zawarte między sąsiednimi krawędziami, nazywamy *ścianami* kąta bryłowego. (Niektórzy używają nazwy „naroże” zamiast „kąta bryłowy”). Od każdej ściany kąta bryłowego można przejść do każdej innej, posuwając się po jego ścianach i przechodząc od jednej ściany do następnej tylko przez krawędź w dowolnym jej punkcie różnym od naroża. Wobec tego, np. zespołu dwóch kątów bryłowych, które nie mają żadnego punktu wspólnego prócz naroża, nie uważamy za jeden kąt bryłowy. Także utwór geometryczny otrzymany przez połączenie wszystkich punktów figury złożonej z dwóch krzyżujących się trójkątów (jak na rys. 8), z jednym punktem



Rys. 8.

S , leżącym poza płaszczyzną tej figury, nie jest kątem bryłowym, lecz zespołem dwóch przenikających się kątów bryłowych. Według liczby krawędzi rozróżniamy kąty bryłowe 3-ścienne, 4-ścienne, 5-ścienne itd. ogólnie n -ścienne. W kącie bryłowym występują dwa rodzaje kątów: *kąty płaskie* kąta bryłowego, zawarte między sąsiednimi krawędziami i *kąty dwuścienne* kąta bryłowego, zawarte między sąsiednimi ścianami, tj. ścianami o wspólnej krawędzi. Dwa kąty bryłowe, których wszystkie kąty płaskie i dwuścienne można tak uporządkować, że są równe parami i następują po sobie kolejno w tym samym zwrocie, nazywamy przystającymi. Badanie przystawania dowolnych kątów bryłowych sprowadza się do badania przystawania

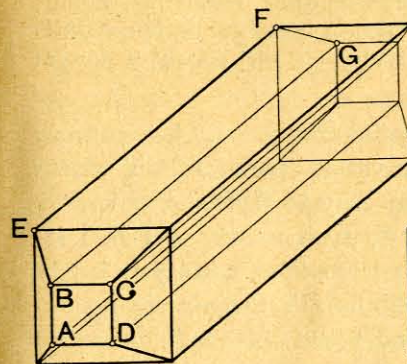
łowego. Jeżeli obrócimy kąt bryłowy koło tej osi o kąt $\angle AOB = \alpha$, to wszystkie kąty płaskie i dwuścienne kąta bryłowego w nowym położeniu nakryją się z kątami płaskimi i dwuściennymi pierwotnego. Tak samo ma się rzecz przy obrocie o kąt $2 \cdot \angle AOB$, $3 \cdot \angle AOB$ itd. Można wykonać tyle takich różnych od siebie obrotów (o kąty 0 , α , 2α , ... mniejsze od 360°) sprowadzających kąt bryłowy do nakrycia się z pierwotnym położeniem, ile ścian ma kąt bryłowy.

§ 3. Wielościany

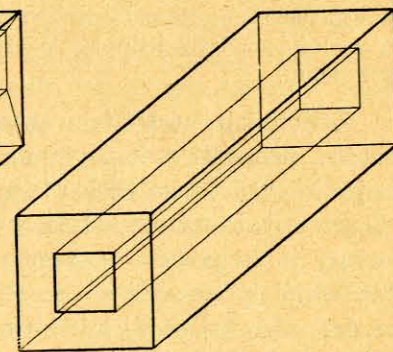
Dawniej pojmowano wielościan jako *bryłę* ograniczoną skończoną liczbą płaskich ścian. W nowszych czasach uważa się za wielościan figurę utworzoną w pewien sposób z wieloboków, nie troszcząc się o to, czy powierzchnia złożona z powierzchni tych wieloboków ogranicza jakąś część przestrzeni, czy też nie. W naszych rozważaniach przyjmujemy następującą definicję wielościanu: *wielościanem nazywamy zbiór skończonej liczby wieloboków tak ułożonych w przestrzeni, że każdy bok każdego wieloboku jest wspólny dwom i tylko dwom wielobokom, każdą zaś parę wieloboków tego zbioru można z sobą połączyć za pomocą szeregu takich wieloboków należących do tego zbioru, że każdy z nich ma wspólny bok z poprzednim i następnym.*

Wieloboki tworzące wielościan nazywamy jego *ścianami*, ich boki *krawędziami*, a wierzchołki *narożnikami* wielościanu. Dwie ściany o wspólnej krawędzi nazywamy sąsiednimi. Tak np. wieloboki, których powierzchnie tworzą powierzchnie graniastosłupów, ostrosłupów, ostrosłupów ściętych, są wielościanami. Także utwór geometryczny przedstawiony na rysunku 10, którego powierzchnia ogranicza rurę

prostokątną zaciętą ukośnie na obu końcach, jest wielościanem. W dalszych ustępach poznamy wiele innych, bardziej skomplikowanych wielościanów. Natomiast nie jest wielościanem utwór geometryczny przedstawiony na rys. 11, bowiem przednia (i tylna) ściana nie jest wielo-



Rys. 10.



Rys. 11.

bokiem, lecz składa się z dwóch oddzielnych wieloboków. Podobnie nie podpada pod naszą definicję wielościanu utwór otrzymany z kostki przez usunięcie z jej wnętrza drugiej, mniejszej kostki (np. skrzynia zamknięta); utwór ten składa się z dwóch oddzielnych wielościanów a nie zawiera takiego szeregu wieloboków, który by łączył jakąkolwiek ścianę zewnętrznej kostki z jakąś ścianą wewnętrzną.

Uwaga. Definicja, którąśmy tu przyjęli, nie jest jedyną możliwą. Można by np. przyjąć taką definicję, w myśl której także utwór przedstawiony na rys. 11 byłby wielościanem. Najpoważniejsze współczesne dzieło o wielościanach, E. Steinitz'a i H. Rademachera pt. *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, rozpoczyna się od następującej uwagi o definicji wielo-

ścianu. „Nie ma jednolitej, ogólnie przyjętej definicji wielościanu, a nawet nie jest wskazane ustalenie takiej definicji, do teorii wielościanów należą bowiem badania rozmaitego rodzaju i zależnie od rodzaju tych badań może się okazać celowe używanie raz jednej, drugi raz innej definicji“. W rozmaitych badaniach definiuje się więc wielościany rozmaicie, w każdym jednak przypadku trzeba się trzymać konsekwentnie obranej definicji; nie można zaś automatycznie przenosić tego, co się udowodniło o wielościanach w jednym znaczeniu, na wielościany w innym znaczeniu.

Z definicji wielościanu wynika, że każde jego naroże można połączyć z każdym innym za pomocą linii, złożonej z krawędzi tego wielościanu. Aby to wykazać, obieramy dowolne dwie ściany należące do tych naroży A i B , i łączymy je za pomocą szeregu wieloboków, z których każdy ma wspólną krawędź z poprzednim. Posuwamy się po obwodzie wybranego wieloboku od naroża A aż do początku tej krawędzi, która jest wspólna z następnym wielobokiem; stąd posuwamy się podobnie po obwodzie drugiego wieloboku i tak postępujemy dalej. W ten sposób dojdziemy w końcu do punktu B , należącego do wierzchołków ostatniego wieloboku z wybranego ich szeregu.

Wielościany dzielimy podobnie jak wieloboki na *zwyczajne* i *gwiazdziste*, czyli *związane*. Wielościan nazywamy zwyczajnym, jeżeli spełnia następujące warunki:

- 1^o ściany są zwyczajnymi wielobokami;
- 2^o nie należące do tego samego naroża ściany nie mają żadnego punktu wspólnego;
- 3^o nie sąsiadujące ze sobą ściany tego samego naroża nie mają prócz tego naroża żadnego punktu wspólnego (wielościan taki nie posiada zatem kątów bryłowych gwiazdzystych);
- 4^o każde naroże jest wierzchołkiem jednego tylko kąta bryłowego (a więc np. wielościan w postaci rogalka, któ-

rego końce schodzą się z sobą, nie jest wielościanem zwyczajnym).

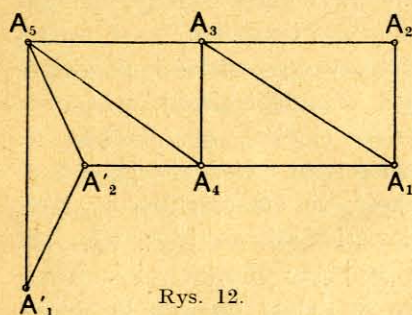
Wielościan, który nie jest zwyczajnym, nazywamy *związanym* lub *gwiazdzistym*.

Należy sobie dokładnie zdawać sprawę z tego, że do krawędzi wielościanu związanego nie zaliczamy odcinków tych prostych, wzdłuż których przecinają się nie sąsiadujące z sobą ściany (nazywamy je prostymi wielokrotnymi wielościanu) ani też do naroży nie zaliczamy tych punktów, w których się przecinają krawędzie nie należące do tego samego naroża (nazywamy je punktami wielokrotnymi wielościanu). Tak np. ścianami wielościanu gwiazdzistego, przedstawionego w rzutach prostokątnych na rys. 30, str. 66), są pełne, zwyczajne pięcioboki umiarowe, z których tylko części są widoczne od zewnątrz; otóż nie zaliczamy do krawędzi tego wielościanu linii cieńszych na rysunku, wzdłuż których przecinają się pięciokątne ściany, nie należące do tej samej krawędzi (np. ściana $ABC...$ ze ścianą $ADCEF$); nie zaliczamy do naroży tego wielościanu gwiazdzistego tych punktów (leżących w zagłębieniach), w których się przecinają linie narysowane cienko, np. punktu H . Gdybyśmy usunęli z tego wielościanu gwiazdzistego z każdego 5-boku zakrytą jego część, to otrzymalibyśmy inny wielościan, a mianowicie wielościan zwyczajny; ścianami tego nowego wielościanu są trójkąty równoramienne widoczne na rysunku, linie cienkie należą do jego krawędzi, a ich punkty przecięcia do jego naroży.

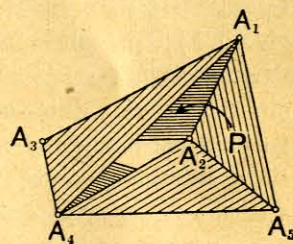
Wielościany, z którymi mamy do czynienia w elementarnej geometrii, są wielościanami zwyczajnymi. Zwyczajny jest także wielościan, przedstawiony na rys. 10. Udowodniono, że powierzchnia każdego wielościanu zwyczajnego dzieli przestrzeń na dwie części: część skończoną, zwaną wnętrzem wielościanu i część nieskończoną zewnętrzną.

Każdy wielościan zwyczajny można rozwinąć na płaszczyznę w następujący sposób. Rozcinamy wielościan wzdłuż pewnych krawędzi tak, aby się nie rozpadł na oddzielne części; następnie obracamy jego ściany koło pozostałych krawędzi tak, by wszystkie padły na jedną płaszczyznę. Jeżeli wielościan ma S ścian a K krawędzi, to trzeba go rozciąć wzdłuż $K - (S - 1)$ krawędzi, a $S - 1$ krawędzi trzeba pozostawić nierozciętych, by utrzymać łączność S ścian. Figurę otrzymaną w ten sposób na płaszczyźnie nazywamy *siatką* wielościanu. Mając narysowaną siatkę wielościanu sporządzamy jego model przestrzenny przez wycięcie tej siatki, np. z kartonu i sklejenie lub zszywanie ze sobą odpowiednich krawędzi.

Wśród wielościanów związanych spotykamy utwory o własnościach niezmiernie interesujących a zgoła nieoczekiwanych. I tak np. powierzchnia każdego wielościanu zwyczajnego ma dwie



Rys. 12.

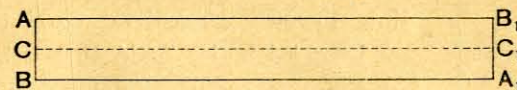


Rys. 13.

strony: zewnętrzną i wewnętrzną; strony te możemy odróżnić od siebie, np. malując je odmiennymi barwami na modelu. Wykazuje, że istnieją takie wielościany związane, których powierzchnia ma tylko jedną stronę, czyli jest *powierzchnią jednostronną*. Zbudujemy taki wielościan z dwóch części. Siatkę jednej części przedstawia rys. 12; składa się on z 5 trójkątów, przy czym $A_1 A_2 = A'_1 A'_2$. Obracamy trójkąt $A_1 A_2 A_3$ około krawędzi $A_1 A_3$ pod płaszczyznę rysunku i podobnie następne trójkąty

w tę samą stronę, a w końcu łączymy punkt A'_2 z punktem A_2 a A'_1 z A_1 . Polecamy czytelnikowi sporządzenie takiego modelu z kartonu. Otrzymamy powierzchnię nie zamkniętą przedstawioną na rys. 13. Linia przestrzenna łamana $A_1 A_4 A_2 A_3 A_5 A_1$, składająca się z takich krawędzi, przez które przechodzi tylko jeden trójkąt, tworzy brzeg tej powierzchni otwartej. Otóż ta powierzchnia ma tylko jedną stronę, o czym się można przekonać w następujący sposób. Jeżeli się po niej posuwamy od jakiegoś jej punktu nie leżącego na brzegu, np. od punktu P na *przedniej* stronie trójkąta $A_1 A_2 A_5$, nie przekraczając brzegu, lecz tylko krawędzie wspólne dwom ścianom, to przechodzimy kolejno przednią stronę trójkąta $A_1 A_2 A_3$, tylną stronę trójkąta $A_1 A_3 A_4$, górną stronę trójkąta $A_3 A_4 A_5$, tylną stronę trójkąta $A_2 A_4 A_5$ i dostajemy się na *tylną* stronę trójkąta wyjściowego $A_1 A_2 A_5$, a dopiero wykonując drugi taki obieg wrócimy do przedniej strony tego trójkąta. Gdybyśmy pociągali tę powierzchnię jakąś farbą zaczynając od przedniej strony trójkąta $A_1 A_2 A_5$ i przedłużali to malowanie poprzez krawędzie wspólne dwom ścianom, to doszlibyśmy do zamalowania tą samą farbą także drugiej strony trójkąta $A_1 A_2 A_5$, a następnie także wszystkich innych trójkątów. Dowodzi to, że ta powierzchnia jest jednostronna.

Łatwiej można sporządzić model *krzywej* powierzchni jednostronnej wycinając dość długi pasek z papieru (rys. 14), przekręcając go tak, by punkt A padł poniżej punktu B i sklejając



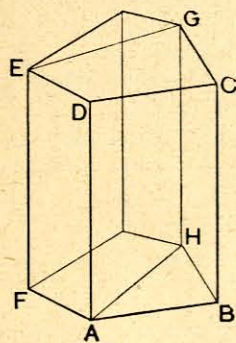
Rys. 14.

z sobą krawędzie AB i $A_1 B_1$ tak, aby punkt A padł na A_1 a B na B_1 . Powierzchnię tę nazywamy *wstęgą Möbiusa*. (Powierzchnie jednostronne wykrył w r. 1858 matematyk niemiecki Möbius).

Powierzchnia przedstawiona na rys. 13 nie tworzy wielościanu, ponieważ nie każda jej krawędź jest wspólna dwom ścianom. Można ją jednak z łatwością uzupełnić do wielościanu przez połączenie dowolnego punktu M spoza tej powierzchni z wszystkimi punktami brzegu za pomocą trójkątów $M A_1 A_4$, $M A_4 A_2$,

MA_2A_3 , MA_3A_5 , MA_5A_1 (na rys. 13 nie narysowano tych trójkątów, by nie gmatwać linii). Otrzymuje się w ten sposób rodzaj ostrosłupa o wierzchołku w M , a podstawie złożonej z pięciu trójkątów ułożonych tak, jak na rys. 13. Sporządzenie modelu tego wielościanu jest trudne, ponieważ jest on związany, albowiem jego ściany nie sąsiadujące przenikają się (np. ściana MA_3A_5 przenika ściany $A_1A_3A_4$ i $A_2A_4A_5$). Powierzchnia tego wielościanu jest *jednostronna*, tak samo jak powierzchnia tej jego części składowej, która jest przedstawiona na rys. 13. Wielościan ten nie ma żadnego brzegu, jest więc powierzchnią zamkniętą. Mimo to nie zamyka on żadnej części trójwymiarowej przestrzeni, nie można więc mówić o jego objętości w zwykłym znaczeniu. Natomiast uogólniając odpowiednio pojęcie objętości, można mu przypisać objętość zero.

Wśród wielościanów zwyczajnych spotykamy szereg zasadniczo odmiennych typów. Te istotne różnice występują przy badaniu zamkniętych przekrojów na powierzchni



Rys. 15.

wielościanu. Obierzmy na powierzchni wielościanu dowolną linię zamkniętą ciągłą (nieprzerwaną), która nie przecina się sama z sobą, np. na wielościanie przedstawionym na rys. 15, linię łamaną $ABCD A$ lub $AFEGHA$ albo dowolną linię krzywą zamkniętą, bądź to leżącą na jednej ścianie, bądź to przebiegającą po kilku ścianach. Widzimy, że powierzchnia tego wielościanu rozpada się, przez poprowadzenie takiej linii, na dwie odrębne części. Gdybyśmy np. rozcięli model (powierzchniowy) tego wielościanu wzdłuż takiej linii zamkniętej l , to otrzymalibyśmy dwie odrębne części, linia zaś l byłaby brzegiem każdej z nich. Dwa dowolne punkty jednej części nie leżące na brzegu można połączyć z sobą za pomocą linii, leżącej całkowicie w tej samej części i nie mającej żadnego punktu wspólnego

z brzegiem. Natomiast każda linia, leżąca na powierzchni tego wielościanu i łącząca dowolny punkt jednej części z dowolnym punktem drugiej, musi przecinać ich brzeg.

Linie łączące punkty dwóch ścian wielościanu związanego uważamy tylko wtedy za ciągłą, jeżeli przechodzi z jednej ściany do drugiej tylko przez punkty krawędzi, a nie przez punkty prostych (podwójnych) wzdłuż których się przecinają nie sąsiadujące z sobą ściany.

Powierzchnię o tej własności, że każda leżąca na niej linia zamknięta (ciągła) nie przecinająca się z sobą dzieli ją na dwie odrębne części, nazywamy powierzchnią jednospójną lub jednokrotnie spójną. Taką jest np. powierzchnia kuli, powierzchnia graniastosłupa, ostrosłupa i wiele innych, najczęściej spotykanych powierzchni.

Istnieją jednak wielościany, których powierzchnie nie są jednospójne. Takim jest np. wielościan przedstawiony na rys. 10. Na powierzchni tego wielościanu istnieją bowiem linie zamknięte, nie rozcinające go na dwie odrębne części; np. rozcięcie powierzchni tego wielościanu wzdłuż linii zamkniętej $ABCD A$ nie wywołuje rozpadnięcia się tej powierzchni na dwie części. Co więcej, można po wykonaniu cięcia $ABCD A$ wykonać jeszcze drugie cięcie zamknięte wzdłuż $BEFGB$, a powierzchnia będzie tworzyła w dalszym ciągu jedną całość. Dopiero każde dowolne trzecie cięcie zamknięte, dołączone do tamtych dwóch, rozdziela tę powierzchnię na dwie części. Taką powierzchnię nazywamy *trójspójną* lub *trzykrotnie spójną*. Tę samą własność ma krzywa powierzchnia obręczy zamkniętej o przekroju kołowym. Wstęga Möbiusa, rozcięta wzdłuż linii zamkniętej, otrzymanej z linii CC_1 na rys. 14, nie rozpada się na dwie części; natomiast każda następna linia zamknięta rozdziela już tę powierzchnię na dwie odrębne części. Fakty te można łatwo stwierdzić na modelu. Podobną własność ma po-

wierzchnia zbudowana z pięciu trójkątów w sposób uwi-
doczniony na rys. 13. Tak np. linia zamknięta łącząca środki
krawędzi A_2A_1 , A_1A_3 , A_3A_4 , A_4A_5 , A_5A_2 nie rozdziela tej
powierzchni na dwie części, natomiast każda następna
linia zamknięta dokonuje już takiego podziału. Powierz-
chnię tę nazywamy wobec tego *dwuspójną* lub *dwukrotnie*
spójną.

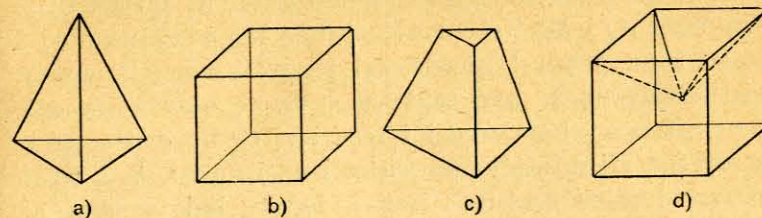
W podobny sposób określa się spójność dowolnie wyso-
kiego stopnia r .

Najprostszymi wśród wielościanów jednospójnych są
wielościany *wypukłe*, tj. wielościany leżące całkowicie po
jednej stronie każdej ze swych ścian. Taki wielościan można
postawić każdą ścianą na płaszczyznę tak, że ściana ta
przylega do płaszczyzny wszystkimi swymi punktami.
Wykazano, że *każdy wielościan wypukły jest jednospójny*.
Istnieją jednak także wielościany jednospójne niewypukłe,
jak np. wielościan, przedstawiony na rys. 16 d. Wielościany
jednospójne tworzą więc szerszą klasę aniżeli wypukłe.

§ 4. Twierdzenie Eulera o wielościanach

W każdym wieloboku liczba wierzchołków jest równa
liczbie boków. Dla wielościanów nie zachodzi tak prosty
związek ani między liczbą naroży i ścian, ani między liczbą
naroży i krawędzi, ani też między liczbą krawędzi i ścian.
Zachodzi natomiast bardzo prosty związek między trzema
liczbami, a mianowicie między liczbą naroży, ścian i krawędzi.
Niechaj N oznacza liczbę naroży wielościanu, S liczbę jego
ścian, a K liczbę krawędzi. Zbadajmy te liczby dla rozma-
itych wielościanów jednospójnych (wypukłych i niewypu-
kłych), przedstawionych na rys. 16. I tak dla rys. 16 a $S =$
 $= 4$, $N = 4$, $K = 6$; dla rys. 16 b $S = 6$, $N = 8$, $K = 12$;

dla rys. 16 c $S = 5$, $N = 6$, $K = 9$; dla rys. 16 d $S = 9$,
 $N = 9$, $K = 16$. Zestawiając ze sobą te liczby spostrze-



Rys. 16.

gamy, że dla tych wielościanów liczba ścian powiększona
o liczbę naroży jest o dwa większa od liczby krawędzi, tj.:

$$S + N - K = 2 \quad (I)$$

Niechaj czytelnik stwierdzi, że to równanie sprawdza
się dla rozmaitych innych wielościanów znanych z geo-
metrii, z krystalografii i z życia codziennego.

Udowodnimy, że *twierdzenie to, zwane twierdzeniem*
Eulera, odnosi się do wszystkich wielościanów jednospój-
nych, zarówno wypukłych jak i niewypukłych.

Dowód. Obierzmy na powierzchni dowolnego wielo-
ścianu jednospójnego dowolną linię zamkniętą l_1 , nie prze-
cinającą się z sobą, złożoną z jego krawędzi (l_1 może być
np. obwodem jednej ściany wielościanu). Niechaj k_1 oznacza
liczbę krawędzi wchodzących w skład tej linii, n_1 liczbę
naroży wielościanu przez które przechodzi l_1 , a s_1 liczbę
części, na które się rozpadł wielościan. W tym wypadku
jest $n_1 = k_1$, a $s_1 = 2$, bowiem wielościan jest jednospójny,
a więc rozpadł się na dwie części C_1 i C_2 . Utwórzmy z liczb
 n_1 , k_1 , s_1 wyrażenie odpowiadające lewej stronie równa-
nia (I), a otrzymamy $s_1 + n_1 - k_1 = 2 + n_1 - n_1 = 2$.
Obierzmy teraz w którejkolwiek z tych części, np. w C_1 ,

nową linię l_2 łączącą dwa naroża A_1, B_1 , które leżą na linii l_1 , przy czym linia l_2 nie przecina się sama z sobą, leży całkowicie wewnątrz części C_1 (nie dotyka jej brzegu poza punktami A_1 i B_1) i składa się z jednej lub więcej krawędzi wielościanu. Jeżeli l_2 przechodzi przez m nowych naroży wielościanu (może być także $m = 0$), to składa się ona z $m + 1$ nowych krawędzi i rozdziela C_1 na dwie części, co wynika z jednospójności wielościanu i z tego, że l_2 wraz z odpowiednimi częściami linii l_1 tworzy linię zamkniętą. Pierwotny wielościan rozpadł się zatem na $s_2 = 3$ części. Liczbą naroży, przez które przechodzą linie l_1 i l_2 , jest $n_2 = n_1 + m$, a liczbą krawędzi $k_2 = n_1 + m + 1$. Wobec tego:

$$s_2 + n_2 - k_2 = 3 + n_1 + m - n_1 - m - 1 = 2$$

a więc: $s_2 + n_2 - k_2 = s_1 + n_1 - k_1$.

Jeżeli zatem dobieramy w podobny sposób coraz nowe linie łamane $l_1, l_2 \dots l_r$ w różnych częściach, na które się kolejno rozpada wielościan (przy czym każda z tych linii łączy jakieś dwa naroża leżące na poprzednio obranych liniach l), to zawsze utrzymuje się związek:

$$s_1 + n_1 - k_1 = s_2 + n_2 - k_2 = s_3 + n_3 - k_3 = \dots \dots \dots \\ \dots \dots = s_r + n_r - k_r = 2 \quad (II)$$

Posuwamy ten rozkład tak daleko, aż wyczerpiemy wszystkie krawędzie. Jeżeli się to stanie po wykreśleniu r linii $l_1, l_2, l_3, \dots l_r$, to ostatnia liczba k_r ma wartość $k_r = K$. Wtedy jednak wyczerpiemy też wszystkie naroża, zatem $n_r = N$, a wielościan rozpadnie się na poszczególne swe ściany, a więc liczbą części jest $s_r = S$. Z ostatniego równania (II) wynika zatem:

$$S + N - K = 2 \quad \text{c. b. d. o.}$$

Twierdzenie Eulera ma podstawowe znaczenie w teorii wielościanów. Znajac liczbę ścian i naroży możemy

obliczyć liczbę krawędzi, jeżeli tylko wielościan jest jednospójny, bowiem $K = S + N - 2$. Do wyznaczenia natomiast liczby krawędzi nie wystarcza ani sama liczba ścian, ani też sama liczba naroży. Tak np. biorąc pod uwagę 3 wielościany o 6 ścianach: kostkę, ostrosłup 5-boczny i powierzchnię złożoną z dwóch pobocznic ostrosłupów trójbocznych (nie przenikających się) o wspólnej podstawie widzimy, że pierwszy wielościan ma 12 krawędzi, drugi 10, a trzeci 9. Wobec tego ciekawy jest fakt, że do wyznaczenia sumy wszystkich kątów płaskich wielościanu jednospójnego wystarcza znajomość liczby naroży, podobnie jak dla wieloboku płaskiego. Wiadomo, że suma kątów wewnętrznych zwyczajnego wieloboku o n wierzchołkach (narożach) ma wartość:

$$s = (n - 2) \cdot 2D$$

gdzie D oznacza kąt prosty. Jeżeli wielościan składa się z S ścian, które mają kolejno $n_1, n_2, n_3, \dots n_s$ krawędzi, to sumę A wszystkich kątów płaskich można wyrazić za pomocą wzoru:

$$A = (n_1 - 2) 2D + (n_2 - 2) 2D + \dots + (n_s - 2) 2D = \\ = (n_1 + n_2 + \dots n_s) \cdot 2D - 2S \cdot 2D.$$

Suma $n_1 + n_2 + \dots + n_s$ jest równa podwójnej liczbie krawędzi, każda bowiem krawędź jest wspólna dwu ścianom. Zatem:

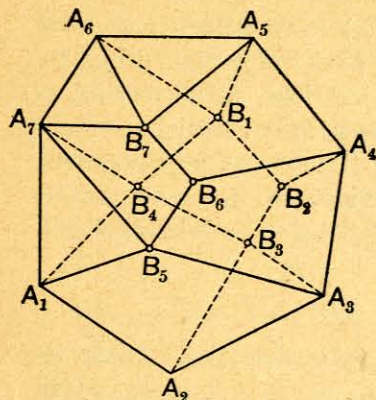
$$A = 2K \cdot 2D - 2S \cdot 2D = (K - S) \cdot 4D. \quad (III)$$

Według twierdzenia Eulera jest $K - S = N - 2$, wobec czego otrzymujemy ostatecznie następujący wzór na sumę kątów płaskich wielościanu jednospójnego o N narożach:

$$A = (N - 2) 4D. \quad (IV)$$

Ten wzór jest uogólnieniem wzoru na sumę kątów wewnętrznych zwyczajnego wieloboku płaskiego.

Uwaga 1. Twierdzenia I dowiódł i po raz pierwszy ogłosił je drukiem Euler w r. 1758. Z zapisków Leibniza (z lat 1672–1676) wynika, że już Descartes (w XVII wieku) znał to twierdzenie. Przy dowodzie oparł się on na wzorze IV, następnie dowiódł wzoru III, a stąd już łatwo otrzymał wzór I. Dowód wzoru III nie sprawia żadnej trudności, jak to widzie-



Rys. 17.

liśmy poprzednio. Natomiast bezpośredni dowód twierdzenia IV dla ogólnych wielościanów jednospójnych nie jest prosty. Specjalnie dla wielościanów *wypukłych* można dowieść tego twierdzenia w następujący sposób. Utwórzmy taki rzut wielościanu wypukłego na płaszczyznę, aby rzut żadnego naroża nie padał ani na rzut innego naroża, ani na rzut krawędzi nie należącej do tego naroża (rys. 17). Przy takim rzucie nie zmienia się liczba wierzchołków w żadnym wieloboku, a więc i suma kątów wszystkich wieloboków pozostaje niezmienną. Sumę zaś kątów w tym rzucie płaskim obliczamy z łatwością biorąc pod uwagę osobno te rzuty naroży, które leżą wewnątrz konturu $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7$ (tj. punkty $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7$), a osobno te, które leżą na samym konturze, tj. punkty $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$. Jeżeli do pierwszej grupy należy m naroży, to do drugiej należy ich $m' = N - m$, przy czym N oznacza całkowitą liczbę naroży wielościanu. Suma kątów leżących przy punktach pierwszego rodzaju wynosi m razy po 4 kąty proste, suma zaś kątów, które leżą przy punktach drugiego rodzaju, jest równa podwójnej sumie kątów wewnętrznych wieloboku ograniczającego cały rzut (bowiem rzut wielościanu pokrywa podwójnie tę część płaszczyzny), a więc jest równa

$$2 \cdot (m' - 2) \cdot 2D = (N - m - 2) \cdot 4D.$$

Suma zatem wszystkich kątów wynosi:

$$A = m \cdot 4D + (N - m - 2) \cdot 4D = (N - 2) \cdot 4D \quad \text{c. b. d. o.}$$

Uwaga 2. Jeżeli wielościan nie jest jednospójny, to pomiędzy liczbami S, N, K zachodzi inny związek. Tak np. dla wielościanu przedstawionego na fig. 10 jest $S = 16, N = 16$ a $K = 32$, a więc $S + N - K = 0$. Uogólniając odpowiednio podany wyżej dowód twierdzenia Eulera można wykazać, że dla wielościanu r -krotnie spójnego zachodzi związek:

$$S + N - K = 3 - r. \quad (V)$$

Uwaga 3. Twierdzenie Eulera uogólniono też na *przestrzenie wielowymiarowe*. Jeżeli a_k oznacza liczbę elementów o wymiarze zero, tj. liczbę naroży wielościanu n -wymiarowego jednospójnego, a_1 liczbę elementów o wymiarze 1, tj. liczbę krawędzi, a_2 liczbę elementów 2-wymiarowych, które wchodzi w skład wielościanu, tj. liczbę ścian, a_k zaś ogólnie liczbę elementów o wymiarze k , to między tymi liczbami zachodzi następujący związek:

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n = 1 \quad (VI)$$

czyli:
$$\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = 1 \quad (VI a)$$

Tak np. dla zwykłego wielościanu 3-wymiarowego jest $n = 3$, $a_0 = N$, $a_1 = K$, $a_2 = S$, a $a_3 = 1$, rozważamy bowiem wielościan zamykający *jedną* część przestrzeni 3-wymiarowej. Z wzoru VI otrzymujemy zatem $N - K + S - 1 = 1$, czyli $S + N - K = 2$, a więc twierdzenie Eulera. Dla wieloboku o m bokach, tj. dla „wielościanu“ 2-wymiarowego, $n = 2$, $a_0 = m$, $a_1 = m$, $a_2 = 1$. Wzór VI przyjmuje w tym wypadku postać: $m - m + 1 = 1$, a więc sprawdza się i w tym przypadku.

Uwaga 4. Interesujące zastosowanie twierdzenia Eulera znajdzie czytelnik w poleceniu godnej książki H. Rademachera i O. Toeplitza, pt. *Von Zahlen und Figuren* w § 12 a: *Das Vierfarbenproblem* i w § 12 b: *Die regulären Polyeder*. (Berlin, Springer, r. 1930).

Wnioski z twierdzenia Eulera.

Niechaj s_3 oznacza liczbę trójkątnych ścian wielościanu jednospójnego, s_4 czworokątnych itd., n_3 liczbę trójsien-

ných naroży, n_4 czworościennych itd. Całkowitą liczbę ścian S i całkowitą liczbę naroży N można zatem wyrazić w postaci:

$$S = s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + \dots$$

$$N = n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + \dots$$

Podwójną liczbę krawędzi można wyrazić dwojako:

$$2K = 3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + 6s_6 + \dots$$

$$2K = 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + 6n_6 + \dots$$

Zamiast $2K$ możemy podstawić po lewej stronie w obu równaniach $2S + 2N - 4$, czyli $2(s_3 + s_4 + s_5 + \dots) + 2(n_3 + n_4 + n_5 + \dots) - 4$ i otrzymamy:

$$2s_3 + 2s_4 + 2s_5 + \dots + 2n_3 + 2n_4 + 2n_5 + \dots - 4 = 3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + \dots$$

$$2s_3 + 2s_4 + 2s_5 + \dots + 2n_3 + 2n_4 + 2n_5 + \dots - 4 = 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \dots$$

czyli:

$$2n_3 + 2n_4 + 2n_5 + \dots = 4 + s_3 + 2s_4 + 3s_5 + \dots$$

$$2s_3 + 2s_4 + 2s_5 + \dots = 4 + n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \dots$$

Mnożymy obie strony drugiego równania przez 2 i dodajemy do pierwszego, to po uporządkowaniu otrzymamy:

$$3s_3 + 2s_4 + s_5 = 12 + 2n_4 + 4n_5 + \dots + s_7 + 2s_8 + \dots$$

Podobnie, zamieniając te równania z sobą, otrzymujemy:

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 = 12 + 2s_4 + 4s_5 + \dots + n_7 + 2n_8 \dots$$

Stąd wynikają nierówności:

$$3s_3 + 2s_4 + s_5 \geq 12$$

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq 12$$

a więc $s_3 + s_4 + s_5 > 0$ i $n_3 + n_4 + n_5 > 0$. Dowodzi to, że w każdym wielościanie jednospójnym muszą się znajdować ściany trójkątne lub czworoboczne lub pięcioboczne i podobnie ma się rzecz z narożami. Wobec tego nie istnieje taki wielościan jednospójny, którego wszystkie ściany miałyby więcej niż po 5 boków, ani taki wielościan jednospójny, którego wszystkie naroża mają więcej niż po 5 krawędzi.

CZĘŚĆ II

WIEŁOŚCIANY UMIAROWE

§ 5. Definicja i najprostsze własności wielościanów umiarowych

Wielościan, którego ściany są umiarowymi wielobokami a kąty bryłowe umiarowymi kątami bryłowymi, nazywamy wielościanem umiarowym lub foremnym.

Z tej definicji wynika, że wszystkie ściany umiarowego wielościanu są do siebie przystające.

Dowód. Weźmy pod uwagę dwa dowolne wieloboki P i Q wielościanu umiarowego. Z definicji wielościanu wynika, że istnieje taki skończony szereg ścian tego wielościanu: $P, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, Q$, że każdy ma z poprzednim wspólną krawędź. Niechaj AB będzie wspólną krawędzią ścian P i P_1 . Ponieważ kąt bryłowy o narożu A jest umiarowy, przeto jego kąty płaskie są równe, a zatem kąt wieloboku P , który ma wierzchołek w A a ramię AB , jest równy kątowi wieloboku P_1 o tym samym wierzchołku i ramieniu. Ponieważ zaś wieloboki P i P_1 są umiarowe, przeto wszystkie ich kąty są parami równe. Wieloboki te mają krawędź AB wspólną, a więc także wszystkie inne ich boki są równe. Stąd wynika, że $P \cong P_1$. Następny wielobok P_2 ma z P_1 znowu krawędź wspólną, a więc jest przystający do P_1 . Tak samo $P_2 \cong P_3, P_3 \cong P_4, \dots, P_{n-1} \cong P_n, P_n \cong Q$. Z tego

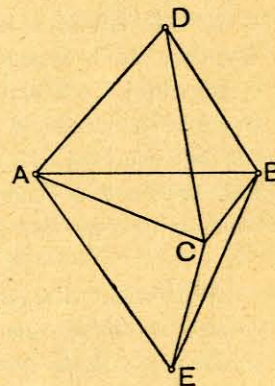
łańcucha przystawań wynika, że $P \cong Q$, co było do wykazania.

Wnioski. Wszystkie kąty płaskie wielościanu umiarowego i wszystkie krawędzie są sobie równe. Każda ściana wielościanu umiarowego ma tyle samo boków.

Uwaga. Wielościan, którego ściany są przystającymi wielobokami umiarowymi, nie musi być umiarowy. Tak np. wielościan przedstawiony na fig. 18, którego ściany są trójkątami równobocznymi przystającymi, nie jest umiarowy, bowiem kąt bryłowy czworosścienny o narożu A nie jest umiarowy. Wynika to stąd, że kąt dwusieczny, który należy do krawędzi AB , jest dwa razy większy od kąta dwusiecznego należącego do krawędzi AD . Definicja zatem:

„wielościan nazywamy umiarowym, jeżeli jego ściany są umiarowymi wielobokami przystającymi“ jest niezupełna; mimo to spotykamy ją w niektórych podręcznikach.¹ Niekiedy znowu spotykamy zbyt obszerne definicje. Tak np. M. Brückner (l. c. str. 121) określa wielościan umiarowy jako wielościan, którego ściany i kąty bryłowe są umiarowe i przystające. Otóż przystawanie jest tu niepotrzebnie włączone do definicji, wynika ono bowiem z umiarowości ścian i kątów bryłowych. Poprawną definicję i dyskusję rozmaitych definicji znajdujemy w nadzwyczaj cennym dla matematyki elementarnej dziele Killinga i Hovestadta pt. *Handbuch des mathematischen Unterrichts* (Tom II, str. 285 i nast. 1913 r.; w książce tej poświęcono wiele miejsca wielościanom umiarowym wypukłym).

Z definicji wielościanu umiarowego wynika także, że wszystkie jego kąty bryłowe są przystające.



Rys. 18.

¹ np. M. Łazarski. *Zasady geometrii wykreślnej*, str. 69 (Lwów 1019, wyd. 2); L. Brusotti. *Poligoni e poliedri*, str. 303 (w dziele pt. *Enciclopedia delle matematiche elementari*, 1937 r.).

Dowód. Weźmy pod uwagę dwa dowolne naroża L i M wielościanu umiarowego. Istnieje linia łącząca punkt L z M złożona z krawędzi wielościanu (por. str. 18), np. z krawędzi $L L_1, L_1 L_2, \dots, L_n M$. Na obu końcach L i L_1 krawędzi $L L_1$ leżą kąty bryłowe, których kąty płaskie są równe parami w myśl wniosku z poprzedniego twierdzenia. W celu stwierdzenia przystawania tych kątów bryłowych należy jeszcze zbadać ich kąty dwuściennne. Otóż kąt dwuścienny należący do krawędzi $L L_1$ jest wspólny obu tym kątom bryłowym, ponieważ zaś są one umiarowe, przeto także wszystkie ich inne kąty dwuściennne są równe parami. Stąd wynika, że w wielościanie umiarowym dwa kąty bryłowe, o wspólnej krawędzi są do siebie przystające. Zatem kąty bryłowe o narożach L i L_1, L_1 i $L_2, \dots, L_n$ i M są do siebie przystające. Z tego łańcucha przystawań wynika, że kąt bryłowy o narożu L jest przystający do kąta bryłowego o narożu M , c. b. d. o.

Wnioski. *Wszystkie kąty dwuściennne wielościanu umiarowego są sobie równe. Wszystkie kąty bryłowe wielościanu umiarowego mają tyle samo ścian.*

W każdym wielościanie umiarowym istnieje punkt równo oddalony od wszystkich jego ścian, naroży i krawędzi; jest on środkiem trzech kul, a mianowicie kuli opisanej na wielościanie, kuli wpisanej (tj. stycznej do płaszczyzn, na których leżą ściany) i kuli stycznej do wszystkich krawędzi. Twierdzenie to odnosi się zarówno do wielościanów umiarowych zwyczajnych, jak i do gwiaździstych.

Dowód. Weźmy pod uwagę płaszczyznę prostopadłą do dowolnej krawędzi AB i przechodzącą przez jej środek M_1 . Płaszczyzna ta jest prostopadła do obu ścian schodzących się w tej krawędzi. Na tej płaszczyźnie leżą proste

prostopadłe do obu tych ścian wykreślone przez ich środki S_1 i S_2 . Te proste przecinają się w jakimś punkcie O . Z przystawania trójkątów $O S_1 M_1$ i $O S_2 M_1$ wynika, że $O S_1 = O S_2$. Z przystawania $O M_1 A \cong O M_1 B$ ($\sphericalangle O M_1 A = \sphericalangle O M_1 B$ jako kąty proste, $M_1 A = M_1 B$, $O M_1 = O M_1$) wynika, że $O A = O B$. Punkt O jest więc równo oddalony od obu ścian i od obu naroży. Jeżeli obrócimy wielościan około prostej $O S_1$ tak, aby się krawędź AB nakryła z następną krawędzią BC (tj. o kąt $\frac{1}{n} 360^\circ$, jeżeli ściana jest n -bokiem umiarowym), to także kąt dwuścienny należący do krawędzi AB nakryje się z kątem dwuściennym należącym do krawędzi BC , a zatem i odcinek $O S_2$ nakryje odpowiedni odcinek $O S_3$, odcinek $O B$ odpowiedni odcinek $O C$, a odcinek $O M_1$ odpowiedni odcinek $O M_2$. Wykonując dalsze obroty około $O S_1$ a następnie takie same obroty około $O S_2, O S_3$ i kolejno dokoła coraz dalszych osi prostopadłych do dalszych ścian w ich środkach wykazujemy, że punkt O jest równo oddalony od wszystkich ścian, od wszystkich naroży i od wszystkich krawędzi. Punkt ten jest zatem środkiem kuli opisanej, wpisanej i kuli stycznej do wszystkich krawędzi w ich środkach.

Uwaga. Prócz wielościanów umiarowych zajmowano się także wiele wielościanami *półumiarowymi*. Rozróżniamy dwa typy takich wielościanów: 1) wielościany, których ściany są wielobokami umiarowymi a kąty bryłowe są nieumiarowe, lecz przystające; 2) wielościany „wzajemne” do nich, tzn. takie, których kąty bryłowe są umiarowe a ściany nieumiarowe, lecz przystające. Okazano, że istnieje tylko 15 rodzajów wielościanów wypukłych w każdym z tych typów. Wielościany wypukłe pierwszego typu nazywamy *wielościanami archimedesowymi*, znane one bowiem były już Archimedesowi. Dokładne omówienie tych wielościanów i szczegółowe uwagi historyczne o tym przedmiocie zawiera cytowane już wyżej dzieło Brücknera (str. 132 i nast., 156 i nast., 166).

§ 6. Wielościany umiarowe jednospójne

Zwróćmy najpierw uwagę na wielościany umiarowe *wypukłe*. Każdy kąt bryłowy takiego wielościanu jest także wypukły. W elementarnej geometrii dowodzi się, że suma kątów płaskich kąta bryłowego wypukłego jest mniejsza od kąta pełnego.

Jeżeli ściany wielościanu umiarowego są trójkątami równobocznymi, to kąty płaskie każdego naroża wynoszą po 60° . Z takich kątów płaskich można zbudować tylko trzy gatunki kątów bryłowych wypukłych, a mianowicie kąt bryłowy trójsięenny, czworościenny lub pięćościenny; nie można zaś zbudować naroża wypukłego z 6, 7 ani z większej liczby kątów płaskich po 60° . Jeżeli ściany wielościanu umiarowego są kwadratami, to kąty płaskie każdego naroża wynoszą po 90° ; z takich kątów płaskich można zbudować tylko naroże trójsięenne (wypukłe), gdyż suma 4 lub więcej kątów po 90° nie jest mniejsza od kąta pełnego. Jeżeli ściany są 5-bokami umiarowymi, to kąty płaskie każdego naroża wynoszą po 108° , a z takich kątów płaskich można zbudować tylko naroże trójsięenne (wypukłe), podobnie jak z kwadratów. Z kątów 6-boku umiarowego nie można zbudować kąta bryłowego wypukłego, ponieważ te kąty wynoszą po 120° , a więc nawet trzy takie kąty nie mogą występować w kącie bryłowym wypukłym. Tak samo ma się rzecz z wszystkimi wielobokami umiarowymi o liczbie boków większej od 6. Wynika to zresztą także z twierdzenia (udowodnionego w § 4), że nie istnieje taki wielościan jednospójny, którego wszystkie ściany miałyby więcej niż po 5 boków.

Widzimy stąd, że w wielościanach umiarowych wypukłych może występować *tylko 5 gatunków kątów bryłowych*. Wykażemy, że każdemu z tych gatunków kątów bryłowych

odpowiada tylko jeden gatunek wielościanów umiarowych wypukłych, przy czym do tego samego gatunku zaliczamy tylko wielościany podobne do siebie.

Zajmiemy się odrazu zagadnieniem ogólniejszym, a mianowicie wyznaczymy wszystkie możliwe wielościany umiarowe *jednospójne* (niekoniecznie wypukłe). W tym celu oprzemy się na twierdzeniu Eulera. Niechaj n oznacza liczbę boków każdej ściany wielościanu umiarowego jednospójnego, a m liczbę krawędzi każdego kąta bryłowego. Liczbę wszystkich krawędzi tego wielościanu można wyrazić dwojako. I tak jeśli S oznacza liczbę ścian, to $n \cdot S$ jest podwójną liczbą krawędzi, każda bowiem krawędź jest wspólna dwom ścianom. Zatem:

$$K = \frac{1}{2} n S. \quad (\text{VII})$$

Podobnie jeżeli N oznacza liczbę naroży, to $m \cdot N$ jest podwójną liczbą krawędzi, każda bowiem krawędź jest wspólna dwom kątom bryłowym. Zatem:

$$K = \frac{1}{2} m N. \quad (\text{VIII})$$

Dla wielościanów jednospójnych spełnia się twierdzenie Eulera:

$$S + N - K = 2. \quad (\text{I})$$

Podstawiamy tu zamiast S i N wyrażenia otrzymane z poprzednich wzorów i otrzymujemy:

$$\frac{2}{n} K + \frac{2}{m} K - K = 2$$

$$\text{czyli: } K = \frac{2mn}{2m + 2n - mn}. \quad (\text{IX})$$

To równanie o 3 niewiadomych K , m , n posiada oczywiście nieskończenie wiele rozwiązań, jednakże spośród tych rozwiązań tylko te mają znaczenie dla wielościanów, które

są liczbami całkowitymi, dodatnimi, przy czym m i n są nie mniejsze od 3. Rozważmy po kolei wszystkie możliwości.

a) Dla $n = 3$ otrzymujemy z równania (IX):

$$K = \frac{6m}{6-m}.$$

K ma wartości całkowite dodatnie tylko dla $m = 3$, $m = 4$, $m = 5$, a mianowicie w pierwszym przypadku jest $K = 6$, w drugim $K = 12$, a w trzecim $K = 30$. Dla $m = 6$ nie ma K oznaczonej wartości; można co najwyżej zauważyć, że dla m dążącego do 6 dąży K do nieskończoności, co ma też pewną geometryczną interpretację. Dla $m \geq 7$ jest K ujemne, a więc nieprzydatne.

b) Dla $n = 4$ ma równanie (IX) postać:

$$K = \frac{4m}{4-m}.$$

Tylko dla $m = 3$ otrzymamy stąd całkowitą dodatnią wartość: $K = 12$. Dla m dążącego do 4 dąży K do nieskończoności. Dla $m \geq 5$ jest K ujemne.

c) Dla $n = 5$ równanie (IX) przyjmuje postać:

$$K = \frac{10m}{10-3m}.$$

Tylko dla $m = 3$ otrzymujemy całkowitą dodatnią wartość: $K = 30$. Dla $m > 3$ otrzymujemy ujemne wartości K .

d) Dla $n = 6$ jest:

$$K = \frac{3}{3-m}.$$

a więc dla żadnej wartości $m \geq 3$ nie otrzymamy całkowitej dodatniej wartości K . Gdy m dąży do 3, K dąży do nieskończoności.

Dla $n \geq 7$ jest K liczbą ujemną przy wszystkich $m \geq 3$. Pisząc bowiem mianownik wzoru IX w postaci:

$$M = 2m + 2n - mn = 2m - n(m - 2)$$

widzimy, że dla $n \geq 7$ i dla $m \geq 3$ jest:

$$M \leq 2m - 7(m - 2) = 14 - 5m \leq 14 - 5 \cdot 3 = -1.$$

Tak np. już dla $n = 7$ i $m = 3$, otrzymujemy $K = -42$.

Z dyskusji tej widzimy, że dla wielościanów umiaryowych jednospójnych układ liczb m , n , K może mieć *tylko pięć różnych wartości*. Wartości te oraz odpowiadające im wartości liczb S i N , obliczone z wzorów VII i VIII, są zestawione w następującej tabelce:

	n	m	K	S	N
1.	3	3	6	4	4
3.	4	3	12	6	8
3.	3	4	12	8	6
4.	3	5	30	20	12
5.	5	3	30	12	20

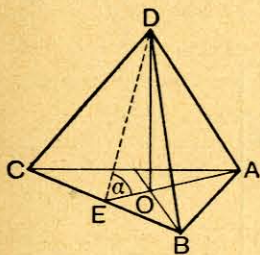
Wykażemy, że istnieją wielościany umiarowe, odpowiadające tym pięciu jedynie możliwym kombinacjom liczb n , m , K , S , N , a mianowicie 5 wielościanów wypukłych i dwa związane.

Uwaga. Przypadki, w których K dąży do nieskończoności, mają także bardzo interesujące znaczenie geometryczne. Można by powiedzieć, że wielościan degeneruje się wtedy do jednej płaszczyzny i posiada nieskończenie wiele krawędzi, a więc i nieskończenie wiele ścian, które są wielobokami umiaryowymi. Otóż łatwo stwierdzić, że tym trzem przypadkom $n = 3$, $m = 6$; $n = 4$, $m = 4$; $n = 6$, $m = 3$ odpowiadają *trzy jedynie możliwe*

pokrycia bez luk całej płaszczyzny za pomocą przystających wieloboków umiarowych, a mianowicie po 6 trójkątów równobocznych w każdym punkcie węzłowym, po 4 kwadraty lub po 3 sześcioboki umiarowe.

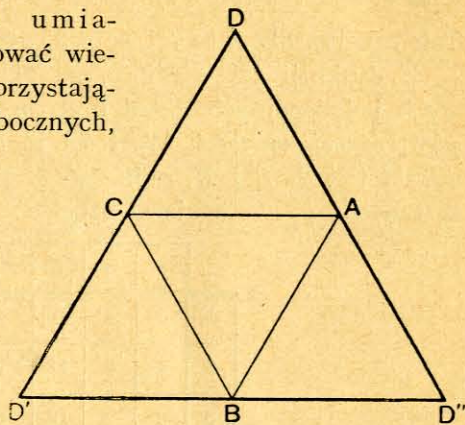
Przystępujemy do dowodu istnienia pięciu wielościanów umiarowych wypukłych.

1. Czworoscian umiarowy. Chcemy zbudować wielościan, złożony z 4 przystających trójkątów równobocznych,



Rys. 19.

o kątach bryłowych umiarowych, trójsięciennych. W tym celu wykreślamy przez środek koła opisanego na trójkącie równobocznym prostą padłą do jego płaszczyzny (rys. 19) i wyznaczamy na niej punkt D , którego odległość od wierzchołków trójkąta jest równa jego bokowi. Ten punkt otrzymuje się przez odcięcie na tej prostopadłej przyprostokątnej trójkąta prostokątnego, który ma drugą przyprostokątną równą $\frac{2}{3}$ wysokości trójkąta równobocznego, a przeciwprostokątną równą jego bokowi. Punkty A, B, C, D są narożami szukanego wielościanu. Siatkę jego przedstawia rys. 19 a. Z konstrukcji wynika, że ściany są wielobokami umiarowymi. Chodzi jeszcze o kąty bryłowe. Otóż



Rys. 19 a.

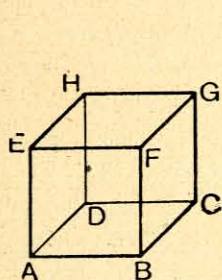
wszystkie kąty płaskie każdego kąta bryłowego są tutaj równe, wynoszą bowiem po 60° ; w kącie bryłowym trójsięciennym naprzeciw równych kątów płaskich leżą równe kąty dwuścienne, a więc także wszystkie kąty dwuścienne każdego kąta bryłowego są sobie równe (miarą takiego kąta dwuściennego jest $\angle DEO = \alpha$; $\cos \alpha = \frac{1}{3}$). Zatem kąty bryłowe tego wielościanu są też umiarowe, a to dowodzi jego umiarowości. Nazywamy go **czworoscianem umiarowym**.

Wszystkie wielościany wypukłe, zbudowane z czterech trójkątów równobocznych o takim samym boku są do siebie przystające. Wynika to z ogólnego twierdzenia o przystawianiu wielościanów (udowodnionego przez Cauchy'ego w r. 1812) orzekającego, że wielościany wypukłe, których płaskie siatki są przystające, przystają do siebie. (Wielościany niewypukłe mogą mieć siatki przystające, mimo że same nie przystają do siebie; tak np. prostopałdoscian zakończony dwoma ostrosłupami czworobocznymi, z których jeden jest zwrócony do wnętrza a drugi na zewnątrz, nie przystaje do wielościanu o tych samych ścianach, w których oba ostrosłupy są zwrócone do wnętrza). Dwa czworosciany umiarowe o różnych krawędziach są do siebie podobne. Zaliczając wszystkie wielościany podobne do tego samego gatunku, powiemy, że *istnieje tylko jeden gatunek wielościanów umiarowych wypukłych, czyniących zadość warunkom zawartym w pierwszym wierszu naszej tabelki*.

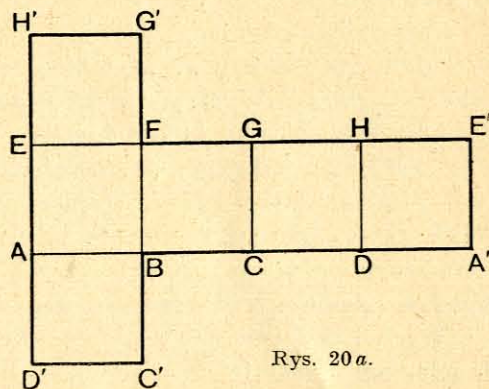
Ponieważ istnieje tylko jeden rodzaj trójkątów umiarowych i jeden rodzaj naroży trójsięciennych (chodzi tu o „rodzaj“ w znaczeniu, omówionym na str. 8 dla wieloboków, a na str. 15 dla kątów bryłowych), przeto nie istnieją inne wielościany umiarowe jednospójne, a mianowicie niewypukłe, które by spełniały warunki zawarte w pierwszym wierszu tabelki.

Łatwo można wykazać, że środki ścian czworościanu umiarowego, tj. środki kół opisanych na tych ścianach, są wierzchołkami drugiego, mniejszego czworościanu umiarowego.

2. Sześcián czyli kostka. Wielościanem umiarywym wypukłym, odpowiadającym warunkom zawartym w drugim wierszu naszej tabelki, jest **sześcián, czyli kostka** znana dobrze z elementarnej geometrii. Rys. 20 i 20a przed-



Rys. 20.

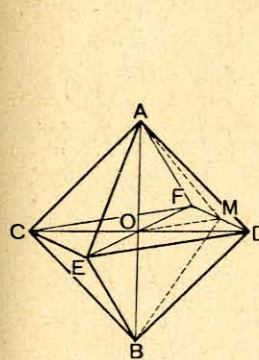


Rys. 20a.

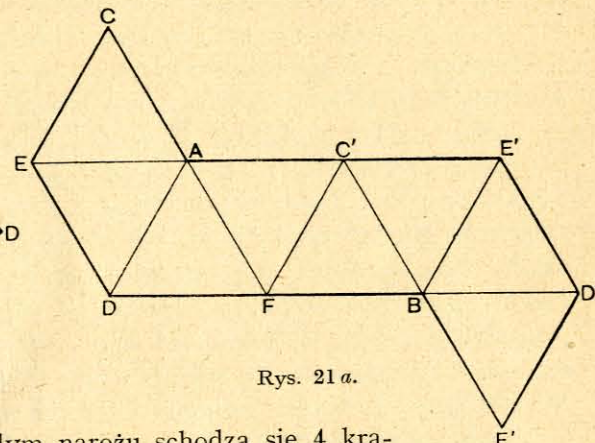
stawiają rzut ukośny i siatkę kostki. Wszystkie wielościany wypukłe składające się z 6 kwadratów są podobne, istnieje więc *tylko jeden gatunek wielościanów umiarowych wypukłych, czyniących zadość warunkom, zawartym w drugim wierszu tabelki*. Ponieważ istnieje tylko jeden rodzaj czworoboków umiarowych i jeden rodzaj kątów bryłowych trójściennych, przeto nie istnieją inne wielościany umiarowe jednopójne, a mianowicie niewypukłe, które by spełniały warunki zawarte w drugim wierszu tabelki.

3. Ośmiościan umiarowy. Zbudujmy teraz wielościan odpowiadający warunkom zawartym w trzecim wierszu tabelki. Obieramy w tym celu układ trzech prostopa-

dłych do siebie prostych (rys. 21) przecinających się w punkcie O . Odetnijmy na każdej z nich równy odcinek, w obie strony od O , taki sam na wszystkich trzech prostych. Łącząc punkty A i B z punktami C, D, E, F otrzymujemy 6 naroży wielościanu złożonego z 8 trójkątów równobocznych (równość wszystkich boków wynika z przystawiania $AOC \cong COE \cong AOE$ itd.). Ściany są trójkątami, a zatem



Rys. 21.



Rys. 21a.

$n = 3$; w każdym narożu schodzą się 4 krawędzie, zatem $m = 4$; liczba ścian $S = 8$, liczba naroży $N = 6$, a liczba krawędzi $K = 12$. Wielościan ten odpowiada zatem warunkom zawartym w trzecim wierszu tabelki. Rys. 21a przedstawia jego siatkę. Aby wykazać, że ten wielościan jest umiarowy, trzeba jeszcze dowieść, że jego kąty bryłowe są umiarowe. Otóż wiemy już, że kąty płaskie każdego kąta bryłowego są równe, wynoszą mianowicie po 60° . Kąty dwuścienne są też równe, bo każdy z nich jest równy kątowi u wierzchołka trójkąta równoramiennego, którego podstawa jest równa AB , a wysokość połowie krawędzi ($\sphericalangle AMB$ na rys. 21). Wielościan ten nazywamy **ośmiościanem umiarowym**.

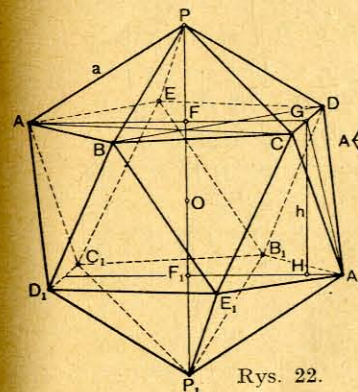
Wszystkie wielościany wypukłe, złożone z 8 trójkątów równobocznych o danej krawędzi, są do siebie przystające; zmieniając wielkość krawędzi, otrzymujemy wielościany podobne. *Istnieje więc tylko jeden gatunek wielościanów umiarowych wypukłych, które czynią zadość warunkom zawartym w trzecim wierszu tabelki.*

Ponieważ istnieje tylko jeden rodzaj trójkątów umiarowych i jeden rodzaj kątów bryłowych czworosiecznych umiarowych, przeto nie istnieją inne wielościany umiarowe jednospójne, a mianowicie niewypukłe, które by spełniały warunki zawarte w trzecim wierszu tabelki.

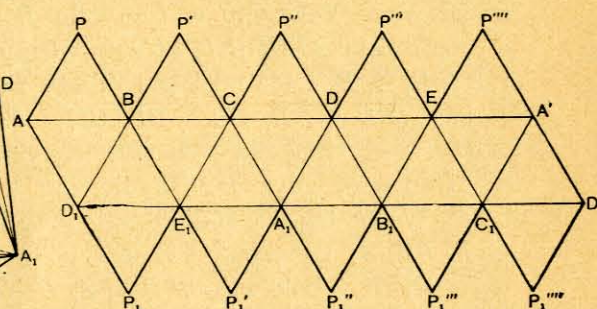
Łatwo można wykazać, że środki ścian sześciianu są narożami ośmiościanu; stąd wynika prosta konstrukcja ośmiościanu. Naodwrot środki ścian 8-ścianu są narożami sześciianu. Między tymi dwoma wielościanami można zatem ustalić taką wzajemną odpowiedniość, że *punktom, prostym i płaszczyznom jednej figury odpowiadają płaszczyzny, proste i punkty drugiej. Odpowiedniość taką nazywamy wzajemnością figur.* Wzajemność tę spostrzegamy także, porównując ze sobą liczby zawarte w drugim i trzecim wierszu tabelki. Z tej wzajemności wynika, że każdemu twierdzeniu o narożach sześciianu odpowiada analogiczne twierdzenie o ścianach ośmiościanu i naodwrot.

4. Dwudziestościan umiarowy. Chcemy zdudować wielościan umiarowy wypukły, o narożach 5-ściennych, złożony z 20 trójkątów równobocznych. Obieramy jakiś odcinek a za krawędź tego wielościanu i budujemy najpierw jedno naroże 5-ścienne umiarowe, mające kąty płaskie po 60° . W tym celu budujemy ostrosłup prosty pięcioboczny, którego podstawą jest 5-bok umiarowy o danym boku a , a którego krawędź boczna jest równa krawędzi podstawy, mianowicie ostrosłup $PABCDE$ na rys. 22. Wysokością tego ostrosłupa jest przyprostokątna PF trój-

kąta prostokątnego, którego drugą przyprostokątną AF jest promień koła opisanego na 5-boku, a przeciwprostokątną AP bok 5-boku, tj. obrana krawędź a . Dwa takie przystające do siebie ostrosłupy $PABCDE$ i $P_1 A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ ustawiamy tak, aby płaszczyzny ich den były do siebie równoległe, a wierzchołki leżały po przeciwnych stronach tych den na prostej prostopadłej do tych den. Skracamy następnie jeden



Rys. 22.



Rys. 22 a.

z nich względem drugiego o 36° około osi PP_1 i zbliżamy tak, aby było $BE_1 = BC$. Osiągniemy to wtedy, gdy odległość h obu den będzie równa przyprostokątnej trójkąta, którego przeciwprostokątną jest wysokość trójkąta równobocznego o boku a , a druga przyprostokątną jest równa różnicy między promieniem koła opisanego na 5-boku umiarowym o boku a a promieniem koła wpisanego w ten 5-bok. Każdy wierzchołek 5-boku $ABCDE$ łączymy z dwoma najbliższymi wierzchołkami 5-boku $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$. Dwa ostrosłupów opuszczamy. Otrzymujemy w ten sposób wielościan, złożony z 20 trójkątów równobocznych, którego kąty bryłowe są 5-ścienne. Aby wykazać, że ten 20-ścian jest umiarowy, trzeba jeszcze tylko stwierdzić, czy jego kąty bryłowe są

umiarowe. Otóż wszystkie kąty płaskie każdego kąta bryłowego są równe, wynoszą bowiem po 60° ; kąty dwuścienne są także sobie równe, a mianowicie każdy z nich jest równy kątowi u wierzchołka trójkąta równoramiennego, którego podstawą jest przekątna 5-boku umiarowego o boku a , a ramieniem wysokość trójkąta równobocznego o boku a (np. kąt $\angle PGA_1$ na rys. 22). Dla zupełności dowodu trzeba jeszcze tylko wykazać, że figura PBE_1A_1D jest 5-bokiem umiarowym. Połączmy w tym celu B z D i porównajmy z sobą 5-boki $ABCDE$ (o którym wiemy, że jest umiarowy) i PBE_1A_1D . Otóż odcięte trójkąty BCD i BPD są przystające ($BD = BD$, $BC = BP$, $CD = PD$); pozostała część $ABDE$ jest trapezem równoramiennym, a E_1BDA_1 jest też trapezem, gdyż $BD \parallel E_1A_1$, jak to wynika z obrotu o 36° . Wobec tego do stwierdzenia przystawiania $ABDE \cong E_1BDA_1$ wystarczy równość boków, która tu istotnie ma miejsce. 5-bok więc PBE_1A_1D jest umiarowy, c. b. d. o. Dowiedliśmy w ten sposób, że zbudowany przez nas wielościan jest umiarowy.

Nazywamy go **20-ścianem umiarowym**. Rys. 22 a przedstawia jego siatkę.

Konstrukcję można wykonać o wiele prościej przy pomocy kuli opisanej (tylko dowód jest wtedy trudniejszy). W tym celu budujemy najpierw pobocznice ostrosłupa 5-bocznego $PABCDE$ tak jak poprzednio. Następnie wykreślamy $AP_1 \perp AP$ na płaszczyźnie wyznaczonej przez PF i PA ($\angle PAP_1$ musi być prosty jako kąt w półkolu). Jej punkt przecięcia P_1 z prostą PF jest przeciwległym narożem szukanego wielościanu. Środek O odcinka PP_1 jest środkiem kuli opisanej. Tworzymy obraz środkowo symetryczny ostrosłupa $PABCDE$ względem środka O . Otrzymane punkty A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 są pozostałymi narożami szukanego wielościanu.

Uwaga. Z powyższych rozważań wynika bardzo prosty sposób konstrukcji i obliczenia średnicy kuli opisanej na dwudziestosciennie umiarowym o danej krawędzi, a mianowicie ta średnica jest przeciwprostokątną trójkąta, którego jedną przyprostokątną jest krawędź 20-ścianu, a drugą przekątna 5-boku umiarowego ($ABE_1P_1C_1$) o boku równym krawędzi.

Liczba ścian tego wielościanu $S = 20$, liczba naroży $N = 12$, liczba krawędzi $K = 30$, liczba boków każdej ściany $n = 3$, a liczba krawędzi każdego kąta bryłowego $m = 5$. Spełnia on zatem warunki zawarte w 4. wierszu naszej tabelki. Wszystkie wielościany wypukłe, złożone z 20 trójkątów równobocznych o tej samej krawędzi, są do siebie przystające, a jeżeli zmienimy wielkość krawędzi, to otrzymamy wielościany podobne. *Istnieje więc tylko jeden gatunek wielościanów umiarowych wypukłych, które czynią zadość warunkom zawartym w 4. wierszu tabelki.*

Okazuje się, że istnieje ponadto jeden gatunek wielościanów umiarowych jednospójnych *niewypukłych*, spełniających te same warunki. I tak oparliśmy konstrukcję 20-ścianu na budowaniu kąta bryłowego 5-ściennego umiarowego o kątach płaskich po 60° , przy czym uwzględniliśmy tylko zwyczajny, wypukły kąt bryłowy. Istnieje jednak także gwiaździsty kąt bryłowy umiarowy 5-ścienny, o takich samych kątach płaskich; otrzymujemy go tak samo, jak zwyczajny kąt bryłowy biorąc jednak za podstawę ostrosłupa 5-bok umiarowy gwiaździsty. Przy pomocy kuli opisanej można następnie zbudować wielościan umiarowy gwiaździsty, który ma 20 ścian, 12 naroży o kątach bryłowych 5-ściennych (gwiaździstych) i 30 krawędzi, którego ściany są trójkątami równobocznymi. Wielościan ten przedstawia rys. 33 (str. 69) w rzutach prostokątnych, a rys. 34 w perspektywie. W następnym paragrafie poznamy rozmaite własności tego wielościanu i podamy prostszą konstrukcję.

Nazywamy go *20-ścianem umiarem o narożach gwiaździstych*.

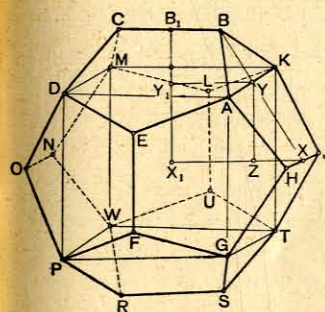
5. Dwunastościan umiary (wypukły). Nowy wielościan umiary wypukły otrzymuje się łącząc w 20-ścianie umiary wypukłym środki każdej pary ścian sąsiednich (tj. ścian o wspólnej krawędzi). Zwróćmy uwagę na pięć ścian 20-ścianu należących do jednego naroża, np. do naroża P na rys. 22. Łatwo wykazać za pomocą przystawiania odpowiednio dobranych trójkątów i kątów bryłowych trójsiennych, że odcinki łączące środki tych ścian tworzą 5-bok umiary. Ponieważ 20-ścian ma 12 takich naroży, przeto otrzymamy 12 5-boków umiarych, tworzących nowy wielościan. Narożami jego są środki ścian 20-ścianu, posiada on zatem $N = 20$ naroży. W każdym narożu schodzą się po 3 krawędzie, bowiem z każdym trójkątem 20-ścianu sąsiadują 3 ściany. Kąty płaskie każdego kąta bryłowego w nowym wielościanie wynoszą po 108° , są zatem sobie równe, a stąd wynika, że i kąty dwuścienne są sobie równe, a więc wszystkie kąty bryłowe są umiarowe. Wielościan ten jest więc umiary. Posiada on $S = 12$ ścian, $N = 20$ naroży i $K = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$ krawędzi; liczbą

boków każdej ściany jest $n = 5$, a liczbą krawędzi każdego kąta bryłowego $m = 3$. Wielościan ten spełnia zatem warunki zawarte w piątym wierszu tabelki. Nazywamy go **12-ścianem umiarym** (wypukłym). Rys. 23 przedstawia ten wielościan w rzucie ukośnym, wraz z wpisanim sześciannem, figura zaś 23 a przedstawia jego siatkę.

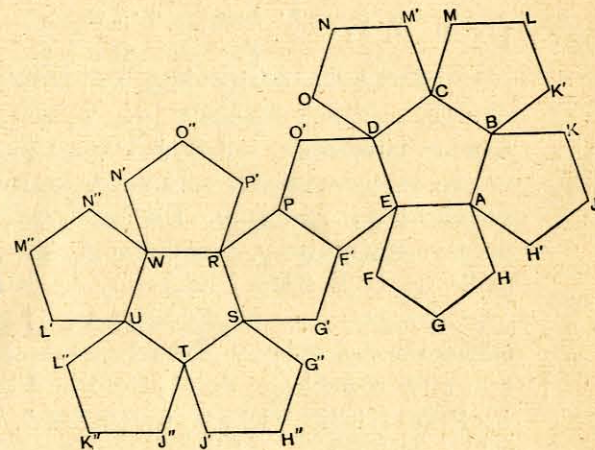
Z konstrukcji opisanej powyżej wynika, że 20-ścian umiary i 12-ścian umiary odpowiadają sobie wzajemnie, tak jak 8-ścian i sześciann, co się także uwydatnia w tabelce.

Bardzo prostą konstrukcję 12-ścianu umiary otrzymujemy,

mamy, opierając się na własnościach sześciannu wpisanego w 12-ścian umiary. Aby otrzymać taki sześciann, wykreśliśmy z dowolnego naroża, np. z A na rys. 23, trzy przekątne ścian 12-ścianu, tak aby trapez odcięty przez przekątną jednej ściany miał wspólny bok z trójkątem odcętym przez przekątną ściany sąsiedniej. Takimi przekątnymi są np. AD , AK i AG . Taką samą konstrukcję wykonujemy



Rys. 23.



Rys. 23 a.

przy narożach D , K , G i przy narożu W , przeciwnym względem A . Dowiedzimy, że te przekątne są krawędziami sześciannu wpisanego w dany 12-ścian. I tak 4-bok $AKMD$ jest równoległobokiem równobocznym, gdyż wszystkie jego boki są równe, jako przekątne przystających 5-boków; sąsiednie zaś kąty $\sphericalangle KAD$ i $\sphericalangle MDA$ są równe, jak to wynika z przystawiania kąta bryłowego 3-ściennego o narożu A , a krawędziach AK , AB , AD do kąta bryłowego o narożu D , o krawędziach DM , DC , DA . Równoległobok

$AKMD$ jest zatem kwadratem, a więc wpisany wielościan jest sześcianiem.

Krawędź BC 12-ścianu jest równoległa do przekątnej AD , a zatem jest równoległa do płaszczyzny $ADMK$. Odległość $B_1 Y_1$ tej krawędzi od tej płaszczyzny jest równa połowie krawędzi. Wynika to stąd, że $B_1 Y_1 : Y_1 X_1 = BY : YX = a : p$ (por. str. 11), przy czym a oznacza bok 5-boku, a p jego przekątną; ponieważ $Y_1 X_1 = \frac{1}{2}p$, przeto $B_1 Y_1 = \frac{a \cdot Y_1 X_1}{p} = \frac{a \cdot \frac{1}{2}p}{p} = \frac{1}{2}a$.

Stąd wynika następująca konstrukcja 12-ścianu umiarowego o danej krawędzi a : wyznaczamy przekątną p 5-boku umiarowego o danym boku a (np. w sposób podany na str. 11) i budujemy sześciannik o krawędzi p : jego naroża są narożami 12-ścianu. Dla znalezienia pozostałych 12 naroży, wykreślamy przez środki ścian sześciannika prostopadłe do tych ścian i odcinamy na każdej z nich $\frac{1}{2}a$ na zewnątrz sześciannika od środków ścian; przez końce tych 6 odcinków wykreślamy równoległe do krawędzi sześciannika, tak aby równoległe do sąsiednich ścian sześciannika były względem siebie wchrowate ($BC \parallel AD$, $HJ \parallel AK$, $EF \parallel AG$ itd.) i odcinamy na nich w obie strony od końców odcinków po $\frac{1}{2}a$. Drugie końce tych odcinków są narożami 12-ścianu. Sposób ten nadaje się szczególnie dobrze do konstrukcji rzutu ukośnego lub rzutów prostokątnych.

Wszystkie wielościany wypukłe złożone z 12 pięcioboków umiarowych są podobne do siebie, a więc *istnieje tylko jeden gatunek wielościanów umiarowych wypukłych, które czynią zadość warunkom zawartym w piątym wierszu tabelki.*

W następnym paragrafie wykazemy, że istnieje ponadto jeden gatunek wielościanów umiarowych jednospójnych niewypukłych, czyniących zadość tym samym warunkom, jednakże ściany tych wielościanów są 5-bokami umiaro-

wymi gwiaździstymi. Wielościan taki nazywamy *12-ścianem gwiaździstym o 20 narożach* (dodatek o liczbie naroży jest potrzebny, istnieje bowiem także 12-ścian umiarowy gwiaździsty o 12 narożach). Wielościan ten jest przedstawiony w rzutach prostokątnych na rys. 24, na str. 61, a w perspektywie na rys. 25. Jest on utworem geometrycznym wzajemnym względem 20-ścianu o narożach gwiaździstych.

Wynik całej dyskusji streszcza się zatem w tym, że *istnieje tylko 7 gatunków wielościanów umiarowych jednospójnych, a mianowicie 5 wypukłych i dwa niewypukłe, gwiaździste.* Dowiedzimy w dalszym ciągu, że wśród wielościanów wielospójnych istnieją jeszcze tylko dwa gatunki wielościanów umiarowych (oczywiście niewypukłych); są one gwiaździste i 9-krotnie spójne. Łącznie zatem mamy tylko 5 gatunków wielościanów umiarowych wypukłych i 4 gatunki niewypukłych, a mianowicie gwiaździstych.

Uwagi. Wielościany umiarowe wypukłe znano już w starożytności. W Elementach Euklidesa jest o nich mowa w XIII, XIV i XV księdze. W światopoglądzie pitagorejczyków odgrywały te wielościany ważną rolę. Mniemali oni, że cztery żywioły tworzące świat składają się właśnie z wielościanów umiarowych, a mianowicie: ogień z 4-ścianów, powietrze z 8-ścianów, woda z 20-ścianów, a ziemia z sześcianników, dwunastościan zaś miał przedstawiać zarys wszechświata. Pogląd ten podzielał i rozpowszechniał również Platon i z tego powodu nazywają wielościany umiarowe wypukłe wielościanami *platońskimi*. W późniejszych czasach sądzono, że piątemu wielościanowi umiarowemu odpowiada jakiś tajemniczy, subtelny piąty żywioł (quinta essentia, stąd — kwintesencja), coś analogicznego do eteru kosmicznego. W XVI wieku astronom Kepler oparł na wielościanach umiarowych swe fantastyczne, młodzieńcze pomysły astronomiczne. W dziele pod tytułem *Mysterium cosmographicum* (w r. 1596) twierdził on, że kołowe drogi planet w obiegu koło słońca pozostają w ścisłym związku z kulami opisanymi na wielościanach umiarowych. Wyobraźmy sobie kulę, której

kołem wielkim jest droga Merkurego; na tej kuli niech będzie opisany 8-ścian, na nim kula; na tej 20-ścian, na nim kula, na niej 12-ścian, na nim kula, na niej 4-ścian, na nim kula, na niej sześćcian a wreszcie na nim kula. Promienie tych kolejnych kul miały przedstawiać według Keplera kolejno promienie dróg wszystkich znanych wówczas planet, tj. Merkurego, Wenerę, Ziemi, Marsa, Jowisza i Saturna. W późniejszych swych badaniach przekonał się Kepler, że pomysł ten nie zgadza się z rzeczywistością.

W innym dziele Keplera znajdujemy opis i rysunki dwóch wielościanów umiarowych gwiazdzistych. Dokładne zrozumienie ich budowy i odkrycie dwóch pozostałych wielościanów umiarowych gwiazdzistych jest jednak zdobyczą dopiero wieku XIX. Pierwszy Poincaré zbadał (w r. 1810) wszystkie wielościany umiarowe niewypukłe, a Cauchy dowiódł (w r. 1811), że istnieją tylko 4 gatunki takich wielościanów.

§ 7. Wielościany umiarowe niewypukłe (gwiazdziste)

Wszystkie naroża wielościanu umiarowego leżą na powierzchni kuli (opisanej) bez względu na to, czy ten wielościan jest wypukły, czy też nie, czy jest jednospójny, czy też wielospójny. Dowiedliśmy bowiem (w § 5), że na każdym umiarowym wielościanie można opisać kulę.

Dalsze rozważania oprzemy na następującym, dość oczywistym twierdzeniu: *jeżeli wszystkie naroża wielościanu niewypukłego leżą na kuli, to istnieje jeden i tylko jeden wielościan wypukły o tych samych narożach.*

Konstrukcję tego wielościanu wypukłego można wykonać w następujący sposób. Łączymy każde naroże z wszystkimi innymi narożami za pomocą odcinków linii prostych. Przez każde naroże wykreślamy płaszczyznę styczną do kuli, np. przez naroże A płaszczyznę P . Przez to naroże lub przez te naroża (o ile ich jest więcej), które leżą najbliżej punktu A , wykreślamy płaszczyznę P_1 równo-

ległą do P . Otrzymamy na niej skończony zbiór Z punktów, w których przecinają ją te odcinki. Skończony zbiór Z punktów płaszczyzny można zamknąć (o ile nie leży na jednej linii prostej) w jeden ściśle oznaczony wielobok *wypukły* W , którego wierzchołki należą do punktów tego zbioru, inne zaś punkty leżą wewnątrz tego wieloboku lub na jego bokach. Łącząc naroże A z wszystkimi punktami obwodu tego wieloboku wypukłego otrzymamy przy narożu A kąt bryłowy wypukły. Postępując tak samo z każdym narożem otrzymamy żądany wielościan wypukły. Nazwijmy ten wielościan wypukły *opisanym* na danym wielościanie niewypukłym.

Wykażemy, że *wielościan wypukły opisany na wielościanie umiarowym niewypukłym jest także umiarowy.*

Dowód. Weźmy pod uwagę figurę F , złożoną z wielościanu umiarowego niewypukłego U i z opisanego na nim wielościanu wypukłego W . Zbudujmy drugą taką figurę F_1 , przystającą do F , a więc złożoną z wielościanu umiarowego niewypukłego U_1 przystającego do U i z opisanego na nim wielościanu wypukłego W_1 , który przystaje do W . Połóżmy dowolne naroże M_1 figury F_1 na jakieś obrane naroże A figury F tak, aby się nakryły kąty bryłowe wielościanów umiarowych niewypukłych U i U_1 należące do tych naroży. Ponieważ te kąty bryłowe są przystające, umiarowe i składają się co najmniej z 3 ścian, przeto możemy je sprowadzić do nakrycia co najmniej w trzy różne sposoby. Wtedy także całe figury F i F_1 nakryją się, a zatem także kąty bryłowe wielościanów wypukłych W i W_1 , leżące przy narożach M_1 i A , są przystające i można je sprowadzić do nakrycia z sobą co najmniej w trzy różne sposoby. Naroże M_1 obraliśmy dowolnie, a więc każdy dowolny kąt bryłowy wielościanu wypukłego W_1 przystaje do kąta bryłowego, należącego w W do naroża A ; to zna-

czy, że wszystkie kąty bryłowe wielościanu W_1 a zatem i wielościanu W są do siebie przystające, a więc każdy z nich ma tyle samo ścian. Wiemy (na podstawie wniosku z twierdzenia Eulera), że nie istnieje taki wielościan wypukły, w którym każdy kąt bryłowy miałby więcej aniżeli 5 ścian. Stąd wynika, że kąty bryłowe wielościanu wypukłego W mogą być tylko 3-ścienne, 4-ścienne lub 5-ścienne. Takie zaś kąty bryłowe dają się sprowadzić do nakrycia co najmniej w trojaki sposób tylko wtedy, gdy są umiarowe. (Dla kątów bryłowych o 6 lub więcej ścianach warunek powyższy nie wystarcza do zapewnienia umiarowości, to znaczy, że istnieją kąty bryłowe 6-ścienne nieumiarowe, które można sprowadzić do nakrycia z przystającymi kątami bryłowymi w 3 różne sposoby).

Dowiedliśmy zatem, że kąty bryłowe wielościanu wypukłego, opisanego na wielościanie umiarowym niewypukłym, są umiarowe. Sprowadzając do nakrycia dwie ściany przystających wielościanów umiarowych niewypukłych w figurach F i F_1 , dowodzi się zupełnie podobnie, jak dla kątów bryłowych, że ściany wielościanu wypukłego opisanego na niewypukłym wielościanie umiarowym, są wielobokami umiarowymi. Wielościan W jest zatem umiarowy, c. b. d. o.

Udowodnione twierdzenie można wypowiedzieć także w następującej postaci: *każdy umiarowy wielościan niewypukły ma te same naroża co jakiś umiarowy wielościan wypukły.*

O ile więc istnieją jakieś wielościany umiarowe niewypukłe, to musimy je otrzymać z pięciu wielościanów platońskich łącząc w każdym z nich naroża we wszelkie możliwe sposoby. Przejdźmy je po kolei.

W 4-ścianie umiarowym nie ma prócz krawędzi żadnych odcinków, łączących z sobą jego naroża, a z tych krawędzi nie można utworzyć innego wielościanu prócz danego 4-ścianu.

W sześciannie trzy odcinki łączące naroże z trzema najbliższymi narożami są krawędziami sześciannu, a z tych krawędzi nie można utworzyć żadnego nowego wielościanu. Trzy odcinki łączące naroże z trzema dalszymi narożami (tj. przekątne ścian sześciannu), tworzą kąt bryłowy trójsięenny; łącząc końce tych odcinków otrzymamy 4-ścian umiarowy wypukły. Wykonując te samą konstrukcję od sąsiedniego naroża otrzymujemy drugi taki 4-ścian.

Niektórzy autorowie uważają zespół tych dwóch 4-ścianów za jeden wielościan gwiazdzisty umiarowy i nazywają go *ośmiokątną gwiazdą*. Utwór ten nie jest jednak wielościanem według przyjętej przez nas definicji, bowiem nie ma takiego szeregu ścian tej figury (za ściany uważamy tylko całe trójkąty równoboczne, złożone z przekątnych sześciannu), który by łączył ścianę jednego czworościanu ze ścianą drugiego. Prócz tych 2 rodzajów odcinków łączących naroża, istnieje jeszcze trzeci, a mianowicie odcinki łączące najdalsze, tj. przeciwległe naroża; układ tych 4 odcinków przecinających się w jednym punkcie nie tworzy jednak ani wielościanu, ani nawet wieloboku.

Z każdego naroża *8-ścianu umiarowego* wychodzą 4 równe odcinki, które łączą to naroże z najbliższymi narożami. Przesuwając płaszczyzny przez każdą parę sąsiednich odcinków otrzymujemy dany 8-ścian. Przesuwając zaś płaszczyzny przez każdą parę niesąsiednich odcinków przy każdym narożu, otrzymujemy ogółem 3 kwadraty nie tworzące wielościanu. Trzy odcinki, które łączą z sobą najdalsze naroża, przecinają się w jednym punkcie a zatem nie tworzą wielościanu.

Dwunastościan umiarowy wypukły posiada naroża parami przeciwległe. Obierzmy dwa takie naroża; pozostałe leżą po 3 i po 6 na czterech płaszczyznach prostopadłych do

prostej łączącej te dwa naroża. Mamy tu więc 5 odmian odcinków łączących ze sobą naroża (por. rys. 23).

a) Trzy najkrótsze odcinki łączące naroże z najbliższymi narożami są krawędziami danego 12-ścianu; przesuwając płaszczyznę przez każdą parę takich odcinków należących do jednego naroża, otrzymamy dany 12-ścian.

b) Następnymi pod względem długości odcinkami są przekątne ścian 12-ścianu. Przez każde naroże przechodzi 6 takich odcinków. Dwie sąsiednie przekątne leżące na jednej ścianie (np. AD i AC na rys. 23) tworzą wraz z przekątnymi należącymi do innych naroży tej ściany 5-bok umiarowy gwiaździsty. W każdym narożu schodzą się wprawdzie 3 takie 5-boki, lecz nie tworzą kąta bryłowego, ponieważ nie mają wspólnych krawędzi. Dwie sąsiednie przekątne, które leżą na dwóch sąsiednich ścianach, tworzą wraz z przekątną łączącą ich końce trójkąt równoboczny (np. AJG na rys. 23); w każdym narożu schodzą się 3 takie trójkąty, nie tworzą one jednak kąta bryłowego, ponieważ nie mają boków wspólnych (np. trójkąty AJG , AKC , ADF na rys. 23). Dwie przekątne przegrodzone jedną przekątną są krawędziami sześcianu wpisanego w 12-ścian (np. przekątne AD i AK na rys. 23). Z każdego naroża wychodzą dwa takie sześciany, a w całym 12-ścianie jest ich 5 (aby otrzymać tę liczbę, trzeba pomnożyć liczbę naroży, tj. 20, przez 2, a wynik podzielić przez 8, gdyż każdy sześcián jest wspólny 8 narożom). Dwie przekątne przegrodzone dwiema przekątnymi (np. AD i AJ na rys. 23) są bokami 5-boku umiarowego (np. $DAJUN$ na rys. 23). W każdym narożu schodzą się wprawdzie 3 takie 5-boki, lecz nie tworzą kąta bryłowego, ponieważ nie mają boków wspólnych. Widzimy stąd, że ten drugi rodzaj odcinków nie prowadzi do żadnego nowego wielościanu.

c) Następnymi pod względem długości są odcinki, z któ-

rych każdy łączy naroże z końcem linii łamanej, złożonej z trzech krawędzi 12-ścianu nie leżących na tej samej ścianie (np. AM , AL , AT , AS , AP , AO na rys. 23). Są one przekątnymi ścian sześcianów wpisanych w 12-ścian. Z każdego naroża wychodzi 6 takich odcinków. Dwa sąsiednie odcinki tego rodzaju nie tworzą wieloboku umiarowego z innymi odcinkami tej samej długości, należącymi do innych naroży (powstają natomiast w ten sposób wichrowate 10-boki, np. $AOBKNWJRHP$ na rys. 23). Dwa nie-sąsiednie odcinki przegrodzone jednym odcinkiem (np. AP i AT na rys. 23) są bokami trójkątów równobocznych. Biorąc pod uwagę trzeci taki odcinek, który wychodzi z tego samego naroża, otrzymamy 4-ścian umiarowy (np. $APTM$ na rys. 23). Z każdego naroża wychodzą 2 takie czworościany (wpisane w 2 sześciany należące do tego naroża), a zatem istnieje $20 \cdot 2 : 4$ czyli 10 takich 4-ścianów. Dwa odcinki przegrodzone obustronnie dwoma odcinkami nie prowadzą do umiarowych wieloboków (lecz do 10-boków wichrowatych, jak np. $ASNPGWCHRM$ na rys. 23). Ogółem więc odcinki trzeciego gatunku nie prowadzą do nowych wielościanów.

d) Następnymi pod względem długości są odcinki łączące naroże z tymi trzema narożami, które sąsiadują z przeciwnym narożem (np. BP , BW , BS na rys. 23), bowiem narożem przeciwnym do B jest R , a naroża P , W i S są najbliższe naroża R). Te odcinki tworzą 5-boki umiarowe gwiaździste (np. 5-bok gwiaździsty $BPJDS$ wpisany w zwyczajny 5-bok umiarowy $BDPSJ$). Po 3 takie 5-boki gwiaździste schodzą się w każdym narożu i to tak, że każdy z nich ma wspólny bok z sąsiednim. W ten sposób powstaje wielościan umiarowy niewypukły o narożach 3-ściennych, którego ściany są 5-bokami umiarowymi, *gwiaździstymi*. Wielościan ten nazywamy **dwunastościanem**

umiarowym gwiaździstym o 20 narożach. Wspomnieliśmy już o nim w poprzednim paragrafie jako o wielościanie jednospójnym czyniącym zadość twierdzeniu Eulera (por. rys. 24, 25).

e) Najdłuższe odcinki, tj. łączące przeciwległe naroża, nie tworzą wielościanu, lecz układ 10 przecinających się w jednym punkcie odcinków.

Z 12-ścianu umiarowego wypukłego otrzymaliśmy zatem jeden nowy wielościan umiarowy (niewypukły).

Dwudziestościan umiarowy wypukły (rys. 22) ma naroża parami przeciwległe. Jeżeli obierzemy dwa takie naroża, to pozostałe leżą po 5 w dwóch płaszczyznach prostopadłych do prostej łączącej te naroża. Wobec tego istnieją tu 3 rodzaje odległości naroży.

a) Najkrótszymi odcinkami łączącymi z sobą naroża 20-ścianu są jego krawędzie. Z każdego naroża wychodzi 5 takich odcinków. Przesuwając płaszczyzny przez pary sąsiednich odcinków w każdym narożu otrzymujemy dany wypukły 20-ścian. Przesuwając zaś płaszczyzny przez pary odcinków niesąsiednich w każdym narożu, otrzymujemy zwyczajne 5-boki umiarowe i to po dwa przy każdej krawędzi (np. na rys. 22 przy krawędzi PB 5-boki PBE_1A_1D i PBD_1C_1E). Otrzymujemy w ten sposób kąty bryłowe gwiaździste, z których każdy jest zbudowany z pięciu zwyczajnych 5-boków. W ten sposób powstaje nowy wielościan umiarowy niewypukły; nazywamy go **dwunastościanem umiarowym o narożach gwiaździstych**. Rys. 31 (str. 66) przedstawia perspektywiczny obraz tego wielościanu.

b) Następnymi pod względem długości są odcinki, łączące naroże z tymi narożami, które sąsiadują z narożem przeciwległym (np. odcinki łączące P z A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 na rys. 22). Z każdego naroża wychodzi 5 takich odcinków.

Biorąc pod uwagę w każdym narożu sąsiednie odcinki

tego rodzaju (np. PD_1 i PE_1 na rys. 22), otrzymujemy 5-boki umiarowe gwiaździste wpisane w zwyczajne 5-boki, o których była mowa w poprzednim przypadku (np. 5-bok łączący kolejno punkty P, D_1, C, A, E_1, P na rys. 22). Każdy bok takiego 5-boku gwiaździstego jest wspólny dwom i tylko dwom takim 5-bokom (np. bok PE_1 na rys. 22 jest wspólny 5-bokom gwiaździstym PE_1DBA_1P i PE_1ACD_1P). W każdym narożu schodzi się 5 takich 5-boków gwiaździstych. Tworzą one nowy wielościan umiarowy niewypukły o 12 ścianach gwiaździstych i o 12 narożach. Nazywamy go **12-ścianem umiarowym gwiaździstym o 12 narożach**. Rys. 28 (str. 63) przedstawia obraz perspektywiczny tego wielościanu.

Przesuwając płaszczyzny przez każdą parę niesąsiednich odcinków tego rodzaju (np. przez PD_1 i PA_1 na rys. 22), otrzymujemy przy każdym narożu 5 trójkątów równobocznych (np. $PD_1A_1, PA_1C_1, PC_1E_1, PE_1B_1, PB_1D_1$ na rys. 22), tworzących *kąt bryłowy gwiaździsty*. Takich trójkątów jest ogółem $12 \cdot 5 : 3 = 20$. Nowy wielościan umiarowy niewypukły otrzymany w ten sposób nazywamy **dwudziestościanem umiarowym o narożach gwiaździstych**. Rys. 34 (str. 69) przedstawia obraz perspektywiczny tego wielościanu. O wielościanie tym wspomnieliśmy już w poprzednim paragrafie, jako o wielościanie jednospójnym czyniącym zadość twierdzeniu Eulera.

e) Najdłuższe odcinki, tj. odcinki łączące przeciwległe naroża nie tworzą wielościanu, lecz układ 6 odcinków przecinających się w jednym punkcie.

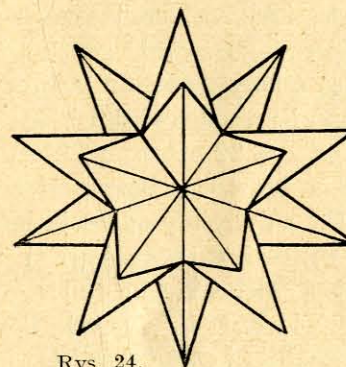
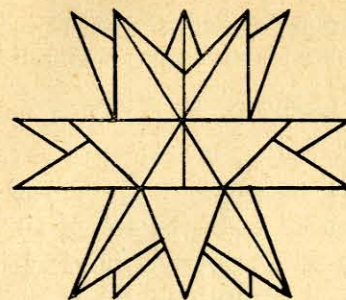
Z całej tej dyskusji wynika, że *istnieją tylko cztery* zasadniczo od siebie różne *wielościany umiarowe niewypukłe* (w tym znaczeniu, że wszystkie inne są do nich podobne), a mianowicie: 3 dwunastościany (12-ścian umiarowy gwiaździsty o 20 narożach, 12-ścian umiarowy gwiaździsty o 12 na-

rożach, 12-ścian umiarowy o narożach gwiaździstych) i jeden dwudziestościan umiarowy o narożach gwiaździstych.

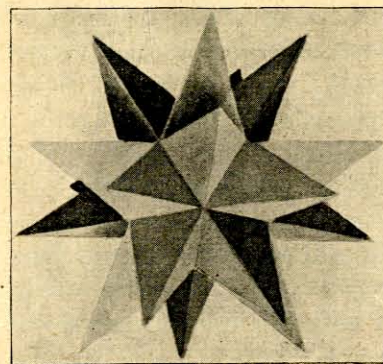
Uwaga. Sposób dowodzenia, któregośmy tu użyli, podał Bertrand (w r. 1858). Dowód Cauchy'ego (z r. 1811, o którym wspominaliśmy w poprzednim paragrafie) polega na rozumowaniach „wzajemnych” względem użytych tu rozważań, to znaczy, że jeden dowód otrzymuje się z drugiego przez zastąpienie we wszystkich rozumowaniach punktów płaszczyznami i odwrotnie. Tak więc punktem wyjścia w rozumowaniu Cauchy'ego jest twierdzenie, że *każdy wielościan umiarowy niewypukły jest ograniczony tymi samymi płaszczyznami, co umiarowy wielościan wypukły*. Wszystkie więc wielościany umiarowe niewypukłe można otrzymać przez przedłużanie ścian wielościanów platońskich (zamiast więc badać linie proste wspólne dwóm narożom, jak to czyniliśmy w naszym dowodzie, można badać proste wspólne płaszczyznom dwóch ścian wielościanu wypukłego umiarowego). Metoda Cauchy'ego jest uogólnieniem metody otrzymywania wszystkich wieloboków umiarowych gwiaździstych przez przedłużenie boków wieloboków umiarowych zwyczajnych. Prace Bertranda i Cauchy'ego o wielościanach gwiaździstych znajdują się w wydanej przez Haussnera zbiorze przekładów prac o tych wielościanach (cytowaliśmy te przekłady na str. 9).

Zajmiemy się jeszcze nieco bliżej opisem budowy tych skomplikowanych wielościanów gwiaździstych.

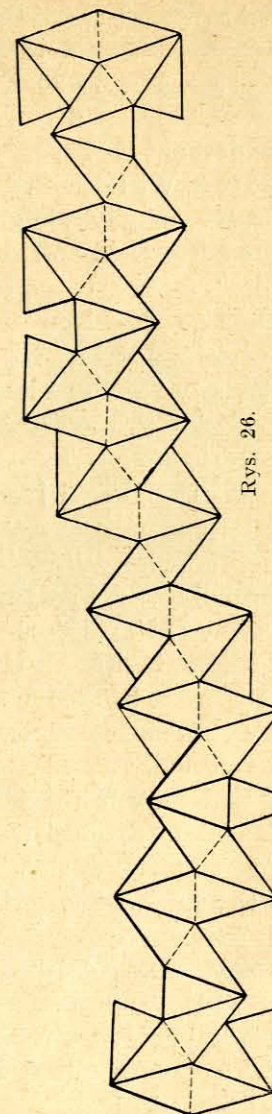
1. *Dwunastościan umiarowy gwiaździsty o 20 narożach* otrzymaliśmy z 12-ścianu umiarowego wypukłego, łącząc każde jego naroże z trzema narożami sąsiadującymi z przeciwnym narożem. Opierając się na tym można otrzymać z łatwością rzuty prostokątne tego wielościanu (rys. 24) przy podanych rzutach prostokątnych 12-ścianu umiarowego wypukłego. Rys. 25 przedstawia perspektywiczny obraz tego wielościanu. Ściany są 5-bokami umiarowymi gwiaździstymi i schodzą się po 3 w każdym narożu. Liczba ścian $S = 12$; ponieważ naroża są wspólne z 12-ścianem umiarowym wypukłym, ten zaś posiada 20 naroży, przeto liczba



Rys. 24.



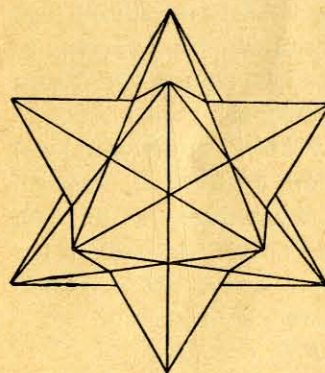
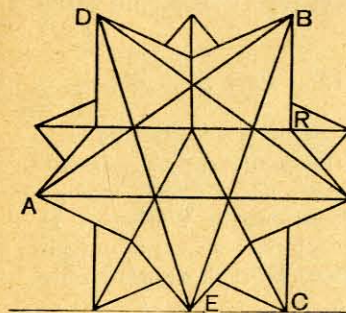
Rys. 25.



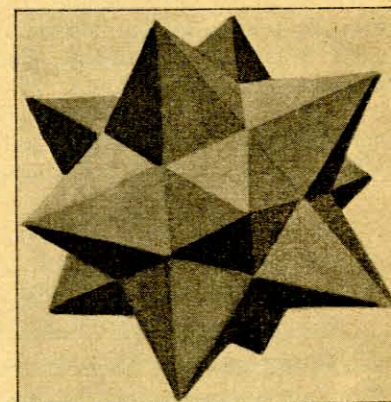
Rys. 26.

naroży $N = 20$; z każdego naroża wychodzą po 3 krawędzie, każda zaś krawędź jest wspólna 2 narożom, zatem liczba krawędzi $K = \frac{3 \cdot 20}{2} = 30$. Liczby S , N , K czynią zadość twierdzeniu Eulera, bowiem $S + N - K = 12 + 20 - 30 = 2$. Wielościan ten jest jednospójny. Z rysunku 25 jest widoczne, że gdybyśmy odcieśli od tego wielościanu 20 wystających ostrosłupów 3-bocznych, to otrzymalibyśmy jego „jądro” (nazwa ta pochodzi od Cauchy’ego) w postaci wypukłego 20-ścianu umiarowego. Naodwrot można by sporządzić model naszego wielościanu, nakładając na każdą ścianę zwykłego 20-ścianu umiarowego wypukłego 20 ostrosłupów, których podstawami są ściany 20-ścianu, a których krawędzie boczne są przedłużeniami odpowiednich krawędzi 20-ścianu. Taki jest np. na rys. 22 ostrosłup, który za podstawę ma ścianę BCE_1 , a za krawędzie boczne przedłużenia krawędzi AB , DC , P_1E_1 . Gdybyśmy odrzucili jądro, otrzymalibyśmy niewypukły wielościan zwyczajny, tj. nie związany, który jednak nie jest wielościanem umiarowym lecz częścią takiego wielościanu widoczną z zewnątrz. Łatwo można sporządzić siatkę tej zewnętrznej części przedstawioną na rys. 26; składa się ona z 60 trójkątów równoramiennych o kątach 36° , 72° , 72° , są to bowiem wystające części 5-boków umiarowych gwiaździstych, tworzących ściany naszego wielościanu. Sporządziwszy taką siatkę na tekturze rozcinamy tekturę wzdłuż odpowiednich linii, nacinamy ją z wierzchu wzdłuż pełnych linii, a od spodu wzdłuż linii przerywanych na rysunku i sklejamy model przestrzenny. Dokładniej można śledzić szczegóły budowy tego wielościanu na modelu nitkowym, który się buduje sporządzając z drutu sztywny model 12-ścianu umiarowego wypukłego i łącząc nitkami naroża odpowiednio od siebie oddalone.

2. Dwunastościan umiarowy gwiaździsty o 12 narożach otrzymuje się z 20-ścianu umiarowego wypukłego przez połączenie każdego jego naroża z 5 narożami sąsiadującymi z narożem przeciwnym. Opierając się na tym wykreśla się z łatwością rzuty prostokątne tego wielościanu (rys. 27) przy podanych prostokątnych rzutach 20-ścianu umiarowego



Rys. 27.



Rys. 28.

wypukłego. Rys. 28 przedstawia ten wielościan w rysunku perspektywicznym. Ściany są 5-bokami umiarowymi gwiaździstymi i schodzą się po 5 w każdym narożu. Liczba ścian $S = 12$; naroża są wspólne z wypukłym 20-ścianem umiarowym, jest ich zatem $N = 12$. Z każdego naroża wychodzi po 5 krawędzi, każda zaś jest wspólna dwom narożom, zatem liczba krawędzi $K = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$. Liczby S , N , K nie

czynią tu zadość twierdzeniu Eulera, bowiem $S + N - K = 12 + 12 - 30 = -6$.

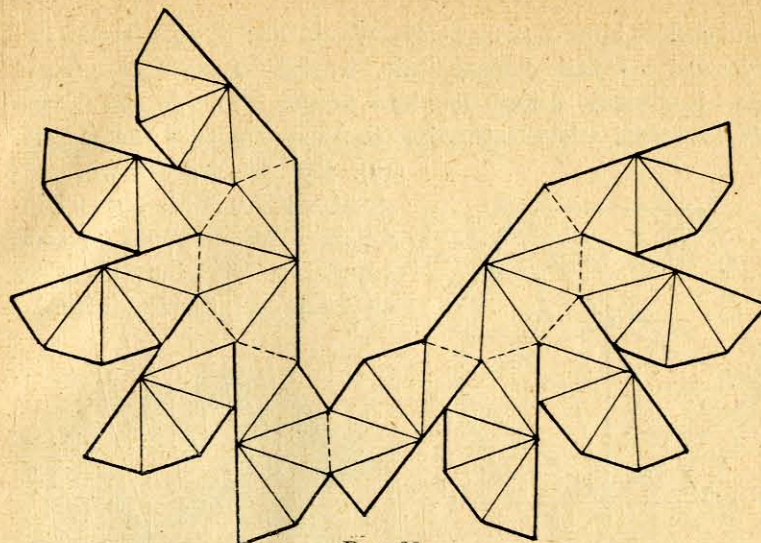
Uwaga. Jeżeli zastosujemy do tego wielościanu uogólnienie twierdzenia Eulera, wyrażone za pomocą wzoru (V) na str. 29 w uwadze 2, to jako stopień r spójności tego wielościanu otrzymamy liczbę:

$$r = 3 - S - N + K = 3 - 12 - 12 + 30 = 9$$

Dowodzono bezpośrednio, tj. bez pomocy twierdzenia Eulera, że ten wielościan jest istotnie 9-krotnie spójny. Dowód podał Möbius w pracy pt. *Zur Theorie der Polyeder und der Elementarverwandschaft* w r. 1863. (Gesammelte Werke, t. II, str. 555 i nast.). Byłoby rzeczą interesującą wskazanie na powierzchni tego wielościanu 8 takich cięć, których zespolenie dałoby tę powierzchnię na jednospójną.

Z rysunku 28 widać dobrze, że gdybyśmy odcięli od tego wielościanu 12 wystających ostrosłupów 5-bocznych, to otrzymalibyśmy jego jądro w postaci wypukłego 12-ścianu umiarowego. Naodwrot można sporządzić model naszego 12-ścianu przez nałożenie na ściany zwykłego (wypukłego) 12-ścianu umiarowego 12 ostrosłupów 5-bocznych, których podstawami są ściany 12-ścianu wypukłego, a których ściany boczne są przedłużeniami przylegających ścian 12-ścianu wypukłego. Taki jest np. na rys. 23 ostrosłup mający podstawę $A E F G H$, a krawędzie otrzymane przez przedłużenie krawędzi $A B, E D, F P, G S, H J$.

Gdybyśmy odrzucili jądro, otrzymalibyśmy wielościan zwyczajny, niewypukły, który jednak nie jest wielościanem umiarowym, lecz tylko zewnętrzną częścią takiego wielościanu. Siatka tej części widocznej od zewnątrz, przedstawiona na rys. 29, składa się z 60 takich samych trójkątów, jak siatka 12-ścianu gwiaździstego o 20 narożach, a tylko rozmieszczenie tych trójkątów jest teraz odmienne.



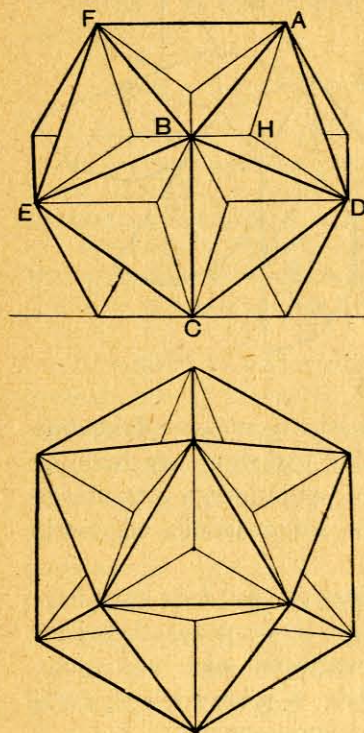
Rys. 29.

Szczegóły budowy tego wielościanu można dokładnie śledzić na modelu nitkowym, który otrzymujemy budując z drutu sztywny model 20-ścianu umiarowego wypukłego i łącząc za pomocą nitek naroża odpowiednio od siebie oddalone.

Opisane dwa wielościany gwiaździste posiadają kąty bryłowe wypukłe a ściany gwiaździste. Dwa pozostałe wielościany umiarowe gwiaździste są względem nich wzajemne, mają więc kąty bryłowe gwiaździste, a ściany ich są zwyczajnymi, wypukłymi wielobokami umiarowymi.

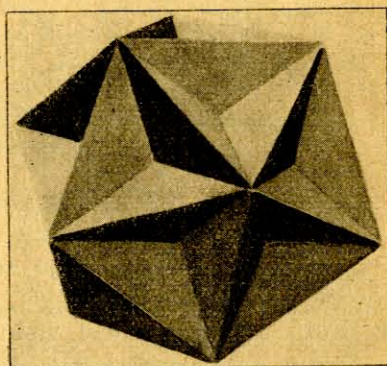
3. *Dwunastościan umiarowy o narożach gwiaździstych* otrzymuje się z 20-ścianu umiarowego wypukłego przez przesunięcie płaszczyzny przez każdą parę krawędzi wychodzących z jednego naroża, lecz nie sąsiadujących z sobą (przegrodzonych jedną krawędzią). Prostokątne rzuty tego wielościanu otrzymuje się łatwo (rys. 30) mając narysowane

rzuty 20-ścianu umiarowego wypukłego: trzeba tylko dorysować uważnie cieńsze linie, wzdłuż których przenikają się niesąsiednie ściany każdego naroża (linie te nie należą do krawędzi wielościanu, jak to zaznaczyliśmy już na str.



Rys. 30.

19). Rys. 31 przedstawia perspektywiczny obraz tego wielościanu. W każdym narożu schodzi się 5 ścian, które są zwyczajnymi 5-bokami umia-

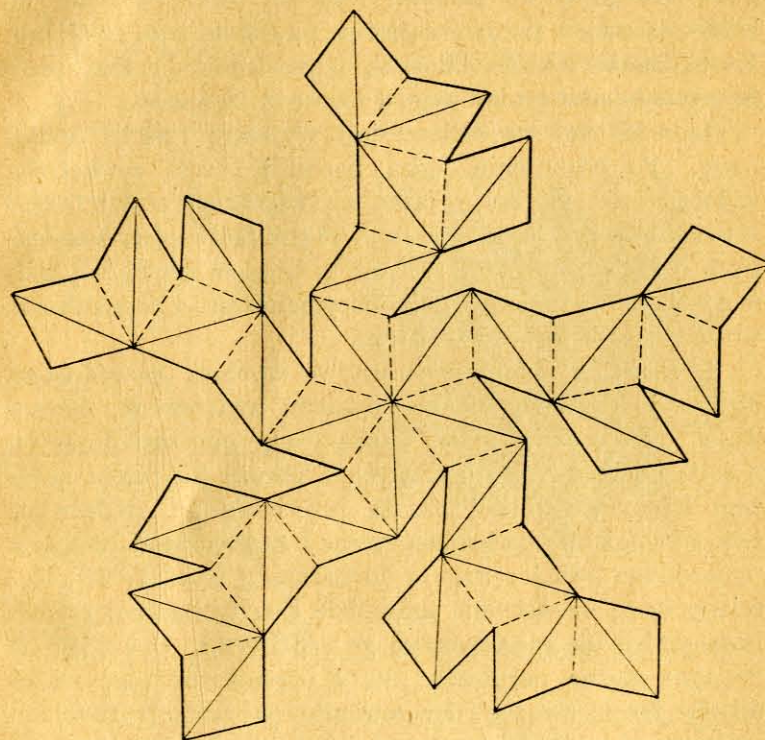


Rys. 31.

rowymi. Kąty bryłowe są umiarowe, gwiazdziste. Naroża ich są wspólne z wypukłym 20-ścianem umirowym, jest ich zatem $N = 12$. Krawędzie są także wspólne z tym 20-ścianem,

zatem jest ich $K = 30$. W każdym narożu schodzi się 5 ścian, a każda jest wspólna pięciu narożom, zatem liczba ścian jest $S = 12$. Otrzymaliśmy tu te same liczby S, N, K , co dla 12-ścianu gwiazdzistego o 12 narożach, a więc twier-

dzenie Eulera nie spełnia się także dla tego wielościanu. Jest on 9-krotnie spójny (por. uwagę do opisu poprzedniego wielościanu) i „wzajemny” względem 12-ścianu umiarowego gwiazdzistego o 12 narożach.



Rys. 32.

Model 12-ścianu umiarowego o gwiazdzistych narożach można otrzymać z modelu 20-ścianu umiarowego wypukłego, zastępując każdą ścianę poboczną ostrosłupa trójbocznego zwróconego wierzchołkiem *do wnętrza* 20-ścianu;

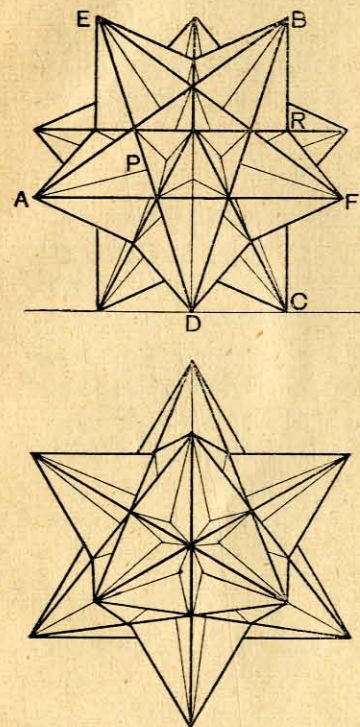
krawędzie boczne tego ostrosłupa są odcinkami przekątnych 5-boku umiarowego o boku równym krawędzi 20-ścianu, otrzymanymi przez przecięcie się tych przekątnych. Model ten też można otrzymać z gotowego modelu 12-ścianu gwiazdzistego o 20 narożach (rys. 25) przez nałożenie 30 klinów łączących po dwie sąsiednie piramidki tego 12-ścianu. Krawędziami takiego klina są odpowiednie odcinki przekątnych 5-boku umiarowego i krawędź 20-ścianu.

Jądrem tego wielościanu jest wypukły 12-ścian umiarowy. Po odrzuceniu jądra pozostaje część zewnętrzna widoczna na rysunku. Siatka tej widocznej części przedstawiona na rys. 32 składa się z 60 trójkątów równoramiennych o kątach 36° , 36° , 108° , są to bowiem części zwyczajnego 5-boku umiarowego, otrzymane przez opuszczenie wpisanego 5-boku gwiazdzistego.

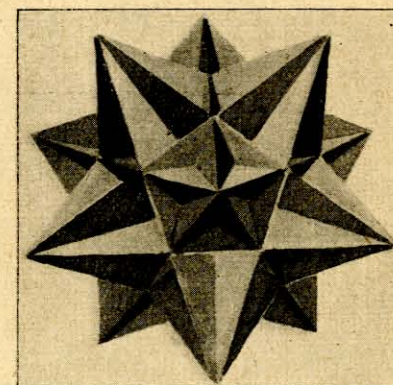
4. *Dwudziestościan umiarowy o narożach gwiazdzistych* otrzymuje się z wypukłego 20-ścianu umiarowego, przesuwając płaszczyzny przez każdą parę nie sąsiadujących z sobą odcinków, wychodzących z naroża ku pięciu narożom leżącym najbliżej naroża przeciwnego. Krawędzie tego wielościanu są więc identyczne z krawędziami 12-ścianu umiarowego gwiazdzistego o 12 narożach (rys. 27, 28), lecz ściany łączą niesąsiednie krawędzie i są trójkątami równobocznymi a nie pięciobokami gwiazdzistymi. Opierając się na tym można narysować rzuty prostokątne tego wielościanu przez uważne dorysowanie (w rzutach 12-ścianu umiarowego gwiazdzistego o 12 narożach) cieńszymi liniami, widocznych części tych prostych, wzdłuż których przenikają się niesąsiednie ściany (tak np. trzeba narysować tylko tę część odcinka AR z rysunku 23, która sięga od A do prostej DE). Na rys. 33 przedstawiono rzuty prostokątne tego wielościanu. Rys. 34 przedstawia jego obraz perspektywiczny.

Wielościan ten ma najbardziej skomplikowaną budowę ze wszystkich wielościanów umiarowych. Na rys. 35 przedstawiono sposób powstawania jednej ściany PD_1A_1 tego wielościanu i uwidoczniono 15 linii prostych, wzdłuż których

przecina tę ścianę 15 ścian nie mających z nią wspólnej krawędzi. Zacięniowane części tej ściany tworzą zewnętrzną widoczną na modelu część



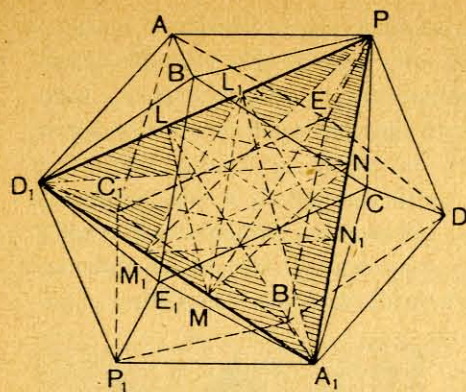
Rys. 33.



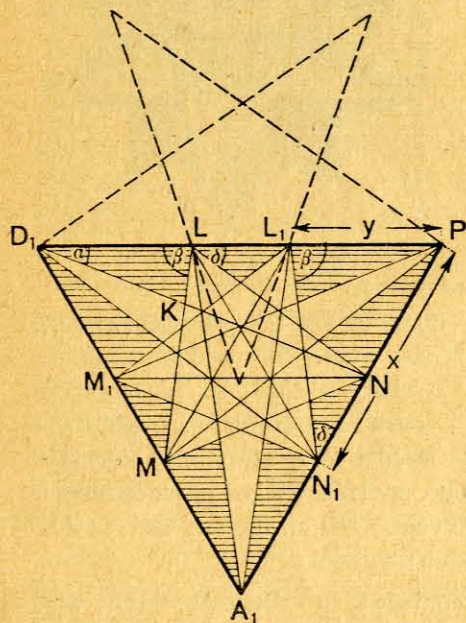
Rys. 34.

powierzchni tego wielościanu. Na rys. 36 widzimy kład ściany PD_1A_1 na płaszczyznę rysunku; środkową część krawędzi PD_1 otrzymuje się przy pomocy 5-boku umiarowego gwiazdzistego, zbudowanego na boku tego trójkąta równobocznego, dalsze zaś szczegóły konstrukcji są widoczne z rysunku.

Uwaga. Kąty, które występują w tych trójkątach, można wyznaczyć trygonometrycznie opierając się na tym, że stosunek



Rys. 35.



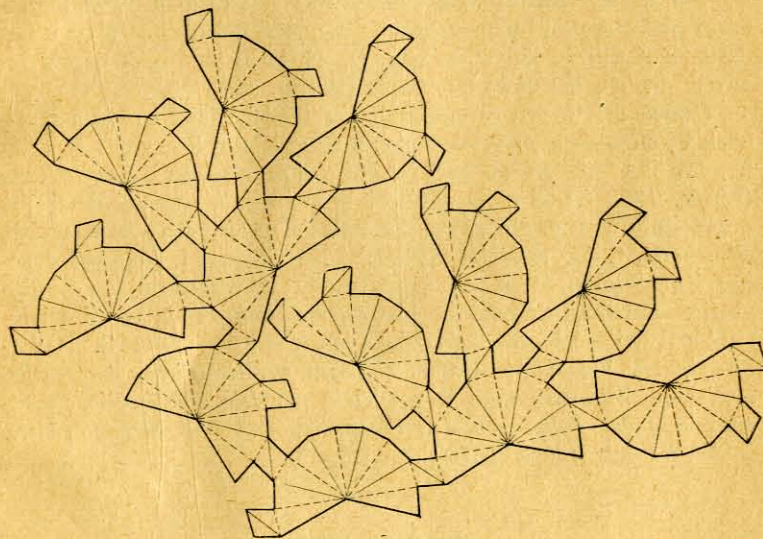
Rys. 36.

$y : x$ jest stosunkiem złotego podziału. Wobec tego

$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\beta - \delta) = \frac{y - x}{y + x} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\beta + \delta) = (\sqrt{5} - 2) \operatorname{tg} 60^\circ$. Stąd oraz z warunku $\frac{1}{2}(\beta + \delta) = 60^\circ$ otrzymuje się $\beta = 82^\circ 14' 20''$, $\delta = 37^\circ 45' 40''$ a kąt α otrzymuje się z warunku $\alpha + \delta = 60^\circ$.

Ściany są trójkątami równobocznymi, a kąty bryłowe są 5-ścienne umiarowe, gwiaździste. Ponieważ naroża są wspólne z 20-ścianem umiarywym wypukłym, przeto $N = 12$. W każdym narożu schodzi się 5 ścian, lecz każda ściana jest wspólna 3 narożom, zatem liczba ścian $S = \frac{5 \cdot 12}{3} = 20$. Każda ściana ma 3 krawędzie, a każda krawędź jest wspólna 2 ścianom, wobec tego liczba krawędzi jest $K = \frac{20 \cdot 3}{2} = 30$. Liczby S , N , K spełniają twierdzenie Eulera, bowiem $S + N - K = 20 + 12 - 30 = 2$. Wielościan ten jest jednospójny.

Model tego wielościanu można zbudować przy pomocy 12-ścianu umiarowego wypukłego o krawędzi równej środkowej części krawędzi $P D_1$ na rys. 36. Zastępujemy każdą jego ścianę ostrosłupem zwróconym do wnętrza, o krawędziach bocznych równych krawędziom tego 12-ścianu. W każde takie wydrążenie wkładamy kąt bryłowy gwiaździsty 5-ścienny, którego zewnętrzna powierzchnia składa się z 10 trójkątów różnobocznych $D_1 L K$ wziętych z rys. 36.



Rys. 37.

Do sporządzenia siatki trzeba użyć tylko tych części każdej ściany, które są widoczne od zewnątrz. Trójkąty te są zacieniowane na rys. 36. Rys. 37 przedstawia siatkę tej zewnętrznej części 20-ścianu o narożach gwiaździstych. Przy sporządzaniu modelu z siatki praktycznie jest włożyć do każdej piramidki kawałek kartonu w postaci 5-boku gwiaździstego celem usztywnienia modelu.

Uwaga 1. Opisy i siatki umiarowych wielościanów gwiazdzystych znajdują się w pracy Ch. Wienera pt. *Über Vielecke und Vielfläche* (Lipsk, 1864 r.). Także w podręczniku pt. *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (tom I, str. 126 i nast.; Lipsk, 1884 r.) omawia Wiener obszernie wszystkie wielościany umiarowe.

Uwaga 2. Pojęcie wielościanów umiarowych rozszerzono na przestrzenie wielowymiarowe. Wykazano, że w przestrzeni 4-wymiarowej istnieje tylko 6 utworów geometrycznych odpowiadających wielościanom umiarowym, a w przestrzeniach o większej liczbie wymiarów tylko trzy w każdym wymiarze. Te wielowymiarowe utwory umiarowe nazwano hiperwielościanami umiarowymi lub *politopami*. Krótkie informacje o tych badaniach znajdują się w książce D. Hilberta i Cohn-Vossena pt. *Anschauliche Geometrie* (Berlin, 1932 r.).

Uwaga 3. Prócz wspomnianych w tekście dzieł i prac z teorii wielościanów godne są polecenia: z dawniejszej literatury książka E. Hessa pt. *Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung* (Lipsk, 1883 r.), a z najnowszej literatury, z wspomnianej już poprzednio pracy zbiorowej pt. *Enciclopedia delle matematiche elementari*, t. II, rozdział XXVI. L. Brusotti, *Poligoni e poliedri* (Mediolan, 1937 r.) zaopatrzony w wyczerpującą bibliografię. Bardzo interesujące historyczne omówienie teorii wielokątów i wielościanów gwiazdzystych zawiera praca S. Günthera pt. *Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften* w rozdziale pt. *Die geschichtliche Entwicklung der Lehre von den Sternpolygonen und Sternpolyedern in der Neuzeit* (Lipsk, 1876 r. str. 1—92).

SPIS TREŚCI

Wstęp	3
Część I. Ogólne wiadomości o wielobokach i wielościanach	
§ 1. Wieloboki a w szczególności wieloboki umiarowe . .	5
§ 2. Kąty bryłowe a w szczególności kąty bryłowe umiarowe	12
§ 3. Wielościany	16
§ 4. Twierdzenie Eulera o wielościanach	24
Część II. Wielościany umiarowe	
§ 5. Definicja i najprostsze własności wielościanów umiarowych	32
§ 6. Wielościany umiarowe jednospójne	36
§ 7. Wielościany umiarowe niewypukłe (gwiazdziste) . . .	52



314979

K S I A Ź
Lwów, ul. Czarnieckie

314 979

poleca

WYDAWNICTWA Z ZAKRESU MATEMATYKI

S. Banach: Rachunek różniczkowy i całkowy. Tom I i II	16,—
K. Bartel: Geometria wykreślna	5,20
K. Bartel: Rzuty cechowane. Wyd. II	9,—
A. Łomnicki: Tablice matematyczno-fizyczne cztero-cyfrowe	1,80
O. Nikodym: Dydaktyka matematyki. Cz. I. Liczby naturalne	9,60
A. Plamitzer: Aksonometria prostokątna	8,—
W. Pogorzelski: Zarys teorii wektorów	3,—
J. Rudnicki: Geometria nieeuklidesowa hiperboliczna	1,50
W. Rybczyński: Repetitorium matematyki w zadaniach	2,80
W. Sierpiński: Wstęp do teorii funkcji zmiennej rzeczywistej	4,80
W. Sierpiński: Wstęp do teorii liczb	4,—
S. Steckel: Pojęcie granicy i jego zastosowanie	3,60
A. Steinhaus: Kalejdoskop matematyczny	13,60
F. Straszewski: Trójmian kwadratowy	3,60
K. Weigel: Rachunek wyrównawczy wedle metody najmniejszych kwadratów	6,—

BIBLIOTECZKA MATEMATYCZNA POD REDAKCJĄ T. SIERZPUTOWSKIEGO I E. SZPILRAJNA

Wydawnictwo to dostarcza czytelnikom lektury matematycznej, wykraczającej poza program szkolny, a jednak nie wymagającej przygotowania specjalnego.

Tomik 1. W. Sierpiński: Przekroje. Wstęp do teorii liczb niewymiernych	1,—
„ 2. S. Straszewicz: O wielobokach	1,40
„ 3-5. A. Tarski: O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej	4,40
„ 6. E. Stamm: Rachunek kalendarzowy	—,—
„ 7. M. Kerner: Maksima i minima w dziedzinie geometrii	1,40
„ 8. W. Sierpiński: Wstęp do ogólnej teorii działań	—,—
„ 10. S. Steckel: Wstęp do teorii mnogości	—,—

PROSIMY ŻAŁAĆ W KAŻDEJ KSIĘGARNI!