

№ 123.

ZASADY GEOMETRYI WYKREŚLNEJ

NAPISAŁ

Dr. MIECZYŚŁAW ŁAZARSKI

PROFESOR SZKOŁY POLITECHNICZNEJ.

TOM I.

(tekst z 18. tablicami rysunkowymi).

TOM II.

(tekst z 35. tablicami rysunkowymi).

LWÓW

NAKŁADEM WYDAWNICTWA BIBLIOTEKI POLITECHNICZNEJ.

I. Związkowa drukarnia we Lwowie, ul. Lindego 1. 4.

1906.

ZASADY PRZEDMOWA GEOMETRYI WYKREŚLNEJ

NAPISAŁ

Dr. MIECZYŚŁAW ŁAZARSKI

PROFESOR SZKOŁY POLITECHNICZNEJ.

— EX LIBRIS —

Biblioteki Kuratorium O.S.B.
w Białymstoku

1037 - 955

TOM I. II.

(tekst z 18. tablicami rysunkowemi).

(" " 35. " ").

Mieczysław Łazariski

LWÓW

NAKŁADEM WYDAWNICTWA BIBLIOTEKI POLITECHNICZNEJ.

I. Związkowa drukarnia we Lwowie, ul. Lindego 1. 4.

1903.

Atoli już z początkiem XIX stulecia Carnot — Hachette — Brianchon — Poncelet i t. d. a później około roku 1830 Chasles — Steiner — Gergonne — Bellavitis — zbudowali umiejętność geometrii „wyższej“ — „nowszej“ — „syntetycznej“ — „rzutowej“, która pod względem własności niemiarowych przestrzeni prześcignęła szybko analizę.

To też analiza szukać musiała nowych środków w skróconem znakovaniu, w wynajdywaniu nowych układów współrzędnych, w badaniu niezmienników, spółzmienników i t. d. form algebraicznych, aby przynajmniej w części stanąć na tej wysokości, którą geometria w krótkim stosunkowo czasie osiągnęła.

Geometrię rzutową rozwijali w dalszym ciągu Staudt, Cremona, Schröter, Veronese, Sturm, Weyr, Pelz, tudzież w ostatnich czasach polscy autorowie: G. Kramer; Rzecz o dwu na płaszczeni leżących krzywych rzędu drugiego, Kraków 1879. — M. A. Baraniecki: Początkowy wykład syntetyczny własności przecięć stożkowych, Warszawa 1885. — M. Rembacz: O biegunowem przekształceniu krzywych rzędu drugiego na koła, Stanisławów 1884. — Przyczynek do Apolloniusowych zagadnień styczności, Stanisławów 1887. — M. Łazarski: Rozprawy umieszczone w rocznikach krakowskiej Akademii umiejętności i sprawozdaniach szkół średnich. — A. Lewenberg: Geometria rzutowa tworów pierwiastkowych. Warszawa 1902.

Wyniki niektórych prac autorów polskich oceniał p. D. w „Jahrbuch über Fortschritte der Mathematik“ i twierdził, że to są rzeczy znane, pomimo, że były zupełnie nowe, to też autorowie niemieccy nie omieszkali z wyników prac tych w dziełach swoich korzystać i oczywiście, nie wskazywali źródła, z których czerpali.

Geometria rzutowa rozwiązuje związki zachodzące między zasadniczymi utworami przestrzeni i wynikami z tychże, a będąc w ścisłym związku z geometrią wykreślną, ruguje z tej umiejętności analizę.

Pierwszem dziełem, które łączy ściśle geometrię rzutową z geometrią wykreślną, jest Schlesingera: Die darstellende Geometrie im Sinne der neuen Geometrie, Wien 1870, a drugim dzieło W. Fiedlera: Die darstellende Geometrie, Leipzig 1871—1883.

W naszej literaturze naukowej nie mamy dotąd podręcznika, któryby łączył ściśle obie umiejętności. Ostatnie bowiem obszerne dzieło E. Sągajły: Wykład geometrii wykreślnej, Paryż 1882 wyklada rzecz częścią kinetycznie sposobem Manheima, częścią analitycznie sposobem Monge'a i jego następców.

W książce, której pierwszy tom przedkładał młodzieży akademickiej, a do napisania której powołuje mnie 17-letni wykład tego przedmiotu w szkole politechnicznej, przedstawiam w sposób zwięzły: I. Zasady geometrii rzutowej, II. Metody geometrii wykreślnej (Rzuty środkowe, rzuty prostokątne, rzuty aksonometryczne, kolineację utworów przestrzeni) i III. Wielościany.

Korrekta książki zajmowali się pp. Stefan Górka i Władysław Rembacz, asystenci przy katedrze geometrii wykreślnej w Szkole politechnicznej lwowskiej, za co im serdeczne składam podziękowanie.

We Lwowie, w maju 1903 r.

Autor.

SPIS RZECZY.

CZĘŚĆ I.

Zasady geometrii rzutowej.

	Strona
O utworach zasadniczych geometrii	1
O stosunku pojedynczego podziału	2
O stosunku podwójnego podziału	3
O perspektywiczności utworów rzędu pierwszego	4
O utworach rzędu pierwszego jednokreślnych	6
O sprowadzaniu utworów jednokreślnych do położenia perspektywicznego	7
O uzupełnianiu utworów rzędu pierwszego jednokreślnych	8
O utworach harmonicznych	10
O pękach spółśrodkowych i szeregach, leżących na wspólnej podstawie	12
O szeregach i pękach inwolucyjnych	15
O kolineacji dwu układów płaskich	19
O utworach pęków i szeregów jednokreślnych	24
O biegunach i biegunowych przekrojach stożkowych	30
O prawie biegunowej dwoistości	35
O szeregach punktów i pękach stycznych przekroju stożkowego	36
O kolineacji przekrojów stożkowych z kołem	39
O dwu przekrojach stożkowych	43
O kolineacji dwu przekrojów stożkowych	47
O pękach i szeregach przekrojów stożkowych	50
O przekrojach stożkowych spółogniskowych	53
O przekrojach stożkowych stykających się w stopniu drugim i trzecim	54
Zagadnienia o przekrojach stożkowych	55

CZĘŚĆ II.

Metody geometrii wykreślnej.

A. Rzuty środkowe

(Perspektywa linijna).

O prostych, przechodzących przez środek rzutów	58
O płaszczyznach przesuniętych przez środek rzutów	59
O prostych dowolnych	61
O dwu prostych	63
O płaszczyznach dowolnych	64
O prostych i płaszczyznach	66
O kładach płaszczyzn	69

	Strona
O punktach dzielenia	71
Zagadnienia o punktach prostych i płaszczyznach	72
O zmianie rzutów środkowych	76
Zmiana środka rzutów	77
O zmianie położenia utworów przestrzeni	80
O zmianie tła	81

B. Rzuty prostokątne.

O rzutach punktów i prostych, o śladach płaszczyzn, jakoteż o związkach zachodzących między punktami prostymi i płaszczyznami	83
O obrotach punktów i płaszczyzn	93
O zmianie płaszczyzn rzutowych	100

C. Aksonometria prostokątna.

O trójkacie i osiach aksonometrycznych, o skróceniach odcinków, równoległych do osi układu prostokątnego, o związkach między temi skróceniami	102
O konstrukcjach bezpośrednich w aksonometrii	108
O wyznaczaniu prawdziwych wielkości odcinków	111
O kładach płaszczyzn	113
D. Kolinaeaya utworów przestrzeni	114—119

CZĘŚĆ III.

O wielościanach.

Kąty bryłowe trójsienne	120
O rzutach wielościanów	125
O rzutach wielościanów foremnych	128
O przekrojach wielościanów płaszczyznami	132
O wyznaczaniu punktów przecięcia się prostej z wielościanami	135
O przenikaniu się wielościanów	137
O cieniach własnych i cieniach rzuconych wielościanów	140

Ważniejsze omyłki druku.

Str.	wiersz	zamiast:	ma być:
2	14 od dołu	odcinek $\frac{AX}{BX}$	stosunek $\frac{AX}{BX}$
5	8 " "	odcinek AB	odcinek AB_1
5	1 " "	$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{3}{2}$	$\frac{AC_1}{B_1C_1} = \frac{3}{2}$
8	8 " "	promień AX	promień A_1X
8	6 " "	pęku $A(A_1B_1\dots)$	pęku $A_1(A, B, \dots)$
13	21 od góry	$ER^2 = ER \cdot E_1Z_1 =$	$ER \cdot E_1Z_1 =$
13	23 " "	$RZ_1 = \frac{RZ_1}{2} \pm$	$EZ_1 = \frac{RZ_1}{2} \pm$
17	5 " "	$C(N_1P_1, \dots)$	$B(N_1P_1, \dots)$
17	7 " "	CA	BN_1
17	9 " "	CD	AB
17	10 " "	$C(N, P_1)$	$B(N_1P_1)$
17	10 " "	P i P_1	M i M_1
17	11 " "	AC i BD	AB i CD
17	17 " "	prosto	proste
20	8 " "	π^2	π^1
20	15 i 18 " "	wsi	osi
20	15 " "	odległość	odległości
22	1 " "	prostej NT	prostej NP
22	3 " "	przecięcia T_1 promienia OT	przecięcia P_1 promienia OP
22	4 " "	punktowi T	punktowi P
24	4 od dołu	a_1b	a_1b_1
25	16 od góry	T	P
26	16 " "	W_11' i W_11	W_11 i W_21'
26	23 " "	P_1	T_1
28	11 od dołu	WQ_1	W_1Q_1
30	2 " "	T	P
37	21 od góry	$(A, B, C\dots)$ i $(A_1, B_1, C_1\dots)$	$(A'B'C'\dots)$ i $(A'_1B'_1C'_1\dots)$
39	21 " "	sprzężonych a'	sprzężonych a_1
39	6 od dołu	która	które
42	13 " "	wyraz: (rys. 62.) przesunąć o 2 wiersze niżej.	
51	24 od góry	SB	SR
70	1 od dołu	przez M	przez M_1
74	12 od góry	kąta a	kąta a
80	19 " "	po wyrazie „prostej“ dołączyć (rys. 118.).	
103	8 " "	rutę	rzuty
109	17 od dołu	dołączyć „(rys. 192.)“	
131	8 od góry	D_1E_2	D_1D_2
137	17 od dołu	$MaNaPaQa$	$MaNaPaQa$

Zasady geometryi rzutowej.

1. Punkt, prosta i płaszczyzna są elementami przestrzeni.

Takimi utworami są:

Punkta $A, B, \dots$ są elementami szeregu; prostą l nazywamy podstawą szeregu.

b) Pęk promieni, który tworzą promienie $a, b, \dots$, leżące na płaszczyźnie i przechodzące przez jeden punkt W . Promienie $a, b, \dots$ są elementami pęku; punkt W nazywamy wierzchołkiem albo środkiem pęku, (rys. 2.).

Jeżeli wierzchołek leży w nieskończoności, natenczas elementa pęku są równoległe.

c) Pęk płaszczyzn, przez który rozumiemy wszystkie płaszczyzny $\pi^1, \pi^2, \dots$, przechodzące przez prostą l . Płaszczyzny $\pi^1, \pi^2, \dots$ są elementami pęku; prostą l nazywamy osią pęku, (rys. 3.).

Jeżeli oś pęku leży w nieskończoności, natenczas elementa tegoż są równoległe.

II. d) Wiązka, przez którą rozumiemy wszystkie proste i płaszczyzny, przesunięte przez jeden punkt, zwany środkiem, albo wierzchołkiem wiązki. Proste i płaszczyzny, przechodzące przez wierzchołek są elementami wiązki.

e) Układ płaski, który tworzą punkta i proste, leżące na jednej płaszczyźnie.

Szereg punktów, pęk promieni i pęk płaszczyzn nazywamy utworami zasadniczymi rzędu pierwszego; wiązkę i układ płaski nazywamy utworami zasadniczymi rzędu drugiego. Przestrzeń tedy, jako ogół punktów, prostych i płaszczyzn, jest utworem rzędu trzeciego.

2. Zapomocą przekrojów i rzutów można połączyć utwory tego samego rzędu.

Jakoż przecinając n. p. pęk płaszczyzn prostą i płaszczyzną otrzymamy szereg punktów i pęk promieni; a przesuując przez punkt i przez prostą promienie względnie płaszczyzny, przechodzące przez elementa szeregu, otrzymamy pęk promieni i pęk płaszczyzn i t. d.

Przekrój wiązki płaszczyzną, która nie przechodzi przez wierzchołek, jest układem płaskim, a proste i płaszczyzny, przesunięte przez dowolny punkt i przez elementa układu płaskiego tworzą wiązkę.

O stosunku pojedynczego podziału.

3. Dwa punkta A i B , leżące na linii prostej l , (rys. 1.) wyznaczają odcinek, który powstaje, jeżeli punkt posuwa się na prostej l od A do B , albo od B do A .

„ AB ” oznacza nie tylko długość odcinka, zawartego między punktami A i B , ale nadto kierunek od A ku B . — „ BA ” tedy oznacza tęsamą bezwzględną długość co „ AB ”, jednakże o kierunku wprost przeciwnym.

A zatem: $AB = -BA$; $AB + BA = 0$.

Trzy punkta A , B i C , leżące na linii prostej wyznaczają trzy odcinki AB , AC i BC , między którymi zachodzi związek: 1.) $AB + BC = AC$ bez względu na wzajemne położenie punktów A , B i C .

Równanie 1. można przedstawić w postaci:

2.) $AB + BC + CA = 0$, albowiem $AC = -CA$.

4. Dwa elementa stałe A i B szeregu, którego podstawą jest prosta l , (rys. 1.), wyznaczają z elementem ruchomym X dwa odcinki AX i BX , których stosunek $\frac{AX}{BX}$ nazywamy stosunkiem podziału odcinka AB punktem X .

Jeżeli X schodzi się z punktem A , natenczas stosunek $\frac{AX}{BX}$ równy jest zeru. $\frac{AA}{BA} = \frac{0}{-BA}$

Dla punktów X , leżących poza obrębem odcinka AB , jest odcinek $\frac{AX}{BX}$ większy lub mniejszy od jedności dodatniej; stósownie do tego, czy punkt X leży po stronie punktu B , czy po stronie punktu A .

Jeżeli punkt X leży w nieskończoności, natenczas $\frac{AX}{BX}$ równy jest jedności dodatniej.

Dla punktów, leżących w obrębie odcinka AB , jest stosunek $\frac{AX}{BX}$ ilością ujemną.

Jeżeli punkt X schodzi się z punktem B , natenczas wartość stosunku

$$\frac{AB}{BB} = \frac{AX}{BX} \text{ równa jest ilości nieskończenie wielkiej, dodatniej lub ujemnej.}$$

5. Każdej wartości „ k ” stosunku $\frac{AX}{BX}$ odpowiada pewien element szeregu A , B , C , ..., którego położenie z równań:

$$\frac{AX}{BX} = k \text{ i } AX + XB = AB$$

można wyznaczyć. Kładąc bowiem w równaniu pierwszym za AX i BX odpowiednio $AB + BX$ i $AX - AB$ otrzymamy:

$$AX = \frac{k}{k-1} \cdot AB,$$

$$BX = \frac{1}{k-1} \cdot AB.$$

Jeżeli tedy „ k ” zmienia swe wartości od $-\infty$ do $+\infty$, natenczas punkt X posuwa się na podstawie l szeregu od B ku A i dąży przez punkt, leżący w nieskończoności napowrót do punktu B .

6. Dwa promienie a i b , przechodzące przez punkt W , wyznaczają kąt, który powstaje, jeżeli prosta obraca się około punktu W w kierunku od a do b albo od b do a , (rys. 2.).

„ ab ” oznacza nie tylko kąt, zawarty między promieniami a i b , ale nadto kierunek obrotu od „ a ” ku „ b ”; „ ba ” oznacza tedy tęsamą bezwzględną wielkość kąta co „ ab ”, atoli w kierunku obrotu wprost przeciwnym.

A zatem: $ab = -ba$, $ab + ba = 0$.

Trzy promienie a , b i c (rys. 2.), przechodzące przez punkt W i leżące na jednej płaszczyźnie, wyznaczają trzy kąty ab , ac i bc , między którymi zachodzą związki:

$$ab + bc = ac, \quad ab + bc + ca = 0,$$

bez względu na wzajemne położenie prostych a , b i c .

7. Dwa promienie stałe a i b wyznaczają z promieniem x pęku: $W(a, b, \dots x, \dots)$ dwa kąty ax i bx ; stosunek wstaw $\frac{\sin ax}{\sin bx}$ tych kątów nazywamy stosunkiem podziału kąta ab promieniem x .

Każdemu promieniowi „ x ” pęku $W(a, b, \dots x, \dots)$ odpowiada jedna wartość stosunku $\frac{\sin ax}{\sin bx}$; i wzajemnie każdej wartości stosunku $\frac{\sin ax}{\sin bx}$ odpowiada jeden promień pęku $W(a, b, \dots)$, z równań bowiem

$$\frac{\sin ax}{\sin bx} = k \text{ i } ax + bx = ab,$$

można z łatwością wyznaczyć kąty ax i bx .

Jeżeli tedy stosunek $\frac{\sin ax}{\sin bx}$ zmienia swe wartości od $-\infty$ do $+\infty$, natenczas promień x obraca się około wierzchołka W dążąc od b przez a napowrót do promienia b .

O stosunku podwójnego podziału.

8. Mając dane cztery punkta A , B , X i Y szeregu, jeżeli podzielimy stosunek $\frac{AX}{BX}$ przez stosunek $\frac{AY}{BY}$ natenczas otrzymamy stosunek podwójnego podziału $\frac{AX}{BX} : \frac{AY}{BY}$ czterech punktów. $k : k_1 = \frac{k}{k_1}$.

Stosunek podwójnego podziału, który także stosunkiem anharmonicznym nazywamy, oznaczać będziemy symbolicznie $(ABXY)$.

Symbol ten wyraża, że należy podzielić stosunek odcinków, zawartych między punktami pierwszym i trzecim tudzież drugim i trzecim, przez stosunek odcinków, zawartych między punktami pierwszym i czwartym tudzież drugim i czwartym.

Mając dane cztery promienie a, b, x i y pęku $W(a, b, \dots x, \dots)$, jeżeli podzielimy stosunek $\frac{\sin ax}{\sin bx}$ przez stosunek $\frac{\sin ay}{\sin by}$, natenczas otrzymamy stosunek podwójnego podziału $\frac{\sin ax}{\sin bx} : \frac{\sin ay}{\sin by}$, albo stosunek anharmoniczny promieni a, b, x, y , który symbolicznie „ $(abxy)$ ” oznaczamy.

10. Jeżeli trzy elementa A, B i C utworu rzędu pierwszego są dane, natenczas dalszy element tworzy z danymi grupę, której odpowiada pewna wartość stosunku podwójnego podziału; i wzajemnie: każdej wartości stosunku podwójnego podziału czterech elementów z których trzy są dane odpowiada element czwarty.

Jakoż przyjmując, że $(ABCX) = k^0$, otrzymamy:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AX}{BX} = k^0, \quad \frac{AX}{BX} = \frac{1}{k} : \frac{AC}{BC} = k_1,$$

a zatem: $AX = \frac{k_1}{k_1 - 1} \cdot AB, \quad BX = \frac{1}{k_1 - 1} \cdot AB, \quad (\text{art. 5.})$

Jeżeli wartość stosunku podwójnego podziału czterech elementów $(ABCX)$ jest równa zeru, jedności dodatniej albo ilości nieskończenie wielkiej, natenczas element X schodzi się odpowiednio z elementami B, C albo A .

O perspektywiczności utworów rzędu pierwszego.

11. Dwa szeregi $A, B, C, \dots$ i $A_1, B_1, C_1, \dots$, otrzymane z przecięcia pęku promieni $W(a, b, c, \dots)$ prostymi l i l_1 , nieprzechodzącymi przez wierzchołek W , nazywamy szeregami perspektywnymi, (rys. 4.).

Punkt przecięcia się podstaw l i l_1 jest elementem odpowiednio wspólnym obu szeregów.

Dwa pęki promieni $W(a, b, c, \dots)$ i $W_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$, otrzymane z przecięcia pęku płaszczyzn $l(\pi^1, \pi^2, \pi^3, \dots)$ płaszczyznami σ i σ_1 , nieprzechodzącymi przez oś l , nazywamy pękami perspektywnymi. Promienie odpowiednie tych pęków a i a_1, b i $b_1, \dots$ przecinają się w punktach, leżących na prostej m , podług której płaszczyzny σ i σ_1 przecinają się, (rys. 3.).

Jeżeli pęki $W(a, b, c, \dots)$ i $W_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$ sprowadzimy na jedną płaszczyznę zapomocą obrotu płaszczyzn σ i σ_1 około prostej m , natenczas promień WW_1 , łączący wierzchołki obu pęków będzie elementem odpowiednio wspólnym tych utworów (rys. 5.).

Dwa pęki płaszczyzn $l(\pi^1, \pi^2, \dots)$ i $l_1(\pi_1^1, \pi_1^2, \dots)$, których odpowiednie elementa π^1 i π_1^1, π^2 i $\pi_1^2, \dots$ przechodzą przez promień $a, b, \dots$ pęku $W(a, b, \dots)$ nazywamy pękami perspektywnymi.

Płaszczyzna przesunięta przez osi l i l_1 jest elementem odpowiednio wspólnym tych pęków.

12. Dwa utwory rzędu pierwszego różnorodne są perspektywiczne, jeżeli elementa jednego utworu przechodzą przez elementa odpowiedniego utworu drugiego. N. p. Pęk promieni $W(a, b, \dots)$ i szereg punktów $A, B, C, \dots$, powstały z przecięcia tego pęku prostą l ; pęk płaszczyzn $l(\pi^1, \pi^2, \dots)$ i pęk promieni $W(a, b, \dots)$, otrzymany z przecięcia pęku $l(\pi^1, \pi^2, \dots)$ płaszczyzną σ i t. d. są utworami perspektywnymi.

Perspektywiczność dwu utworów rzędu pierwszego oznaczamy znakiem $(\wedge)$, umieszczonym między symbolami tychże. I tak n. p. $(A, B, C, \dots)(\wedge)$, $W(a, b, c, \dots)$. —

13. **Twierdzenie Pappusa.** Jeżeli dwa utwory rzędu pierwszego są perspektywiczne, natenczas stosunek podwójnego podziału czterech elementów jednego utworu jest równy stosunkowi podwójnego podziału czterech elementów odpowiednich w utworze drugim.

Jakoż niech będzie dany pęk promieni $W(a, b, c, \dots)$ i szereg punktów $(A, B, C, \dots)$, otrzymany z przecięcia tego pęku prostą l , (rys. 4.).

Podwójne powierzchnie trójkątów WAC, WBC, WAD i WBD można wyrazić zapomocą wzorów $h \cdot AC, h \cdot BC, h \cdot AD, h \cdot BD$, gdzie h oznacza odległość wierzchołka pęku od podstawy szeregu, albo zapomocą wzorów:

$$AW \cdot CW \cdot \sin ac, \quad BW \cdot CW \cdot \sin bc, \quad AW \cdot DW \cdot \sin ad \quad \text{i} \quad BW \cdot DW \cdot \sin bd.$$

A zatem:

$$\frac{AC \cdot h}{BC \cdot h} : \frac{AD \cdot h}{BD \cdot h} = \frac{AW \cdot CW \cdot \sin ac}{BW \cdot CW \cdot \sin bc} : \frac{AW \cdot DW \cdot \sin ad}{BW \cdot DW \cdot \sin bd},$$

czyli: $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin ac}{\sin bc} = \frac{\sin ad}{\sin bd},$

albo symbolicznie $(ABCD) = (abcd)$.

Przetnijmy następnie pęk płaszczyzn $l(\pi^1, \pi^2, \pi^3, \dots)$ płaszczyzną dowolną σ i płaszczyzną σ_1 , prostopadłą do osi l , to natenczas otrzymamy dwa pęki promieni $W(a, b, c, \dots)$ i $W_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$ perspektywiczne z pękiem płaszczyzn (rys. 3.). Kąty, zawarte między promieniami a_1 i b_1, b_1 i $c_1, \dots$ pęku $W_1(\dots)$ równe są kątom dwuściennym $\pi^1 \pi^2, \pi^2 \pi^3, \dots$. Stosunek tedy podwójnego podziału czterech płaszczyzn pęku $l(\dots)$ równy jest stosunkowi podwójnego podziału czterech odpowiednich promieni pęku $W_1(\dots)$. Atoli pęki $W(\dots)$ i $W_1(\dots)$ są perspektywiczne z szeregiem $(A, B, C, \dots)$ punktów, otrzymanym z przecięcia pęku płaszczyzn $l(\dots)$ prostą, podług której płaszczyzny σ i σ_1 przecinają się; stosunki tedy podwójnego podziału:

$$(ABCD), (abcd), (a_1 b_1 c_1 d_1) \quad \text{i} \quad (\pi^1, \pi^2, \pi^3, \pi^4),$$

są równe.

Zagadnienie: Mając dane trzy punkta A, B i C , leżące na linii prostej, wyznaczyć taki czwarty punkt X , aby stosunek podwójnego podziału $(ABCX)$ równy był $\frac{3}{2}$, (rys. 6.).

Rozwiązanie: Obierzmy na prostej m , poprowadzonej przez punkt A , dowolny punkt B_1 i wyznaczmy punkt C_1 , dzielący odcinek AB_1 w stosunku $\frac{3}{2}$, połączmy następnie punkta B i B_1 tudzież C i C_1 i wyznaczmy punkt O , w którym proste BB_1 i CC_1 przecinają się, poprowadźmy nareszcie przez O prostą n , równoległą do m , to takowa przetnie podstawę l szeregu ABC w punkcie X , który czyni zadość warunkom zagadnienia, albowiem stosunek podwójnego podziału $(ABCX)$ jest równy stosunkowi podwójnego podziału punktów A_1, B_1, C_1 i punktu, leżącego w nieskończoności na prostej m , wartość zaś tego stosunku równa jest: $\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{3}{2}.$

O utworach rzędu pierwszego jednokreślnych.

14. Jeżeli dwa utwory perspektywiczne rozdzielimy a następnie obrócimy o dowolne kąty, nie zmieniając atoli wzajemnego położenia elementów, natenczas zniszczymy perspektywność tychże, jednakże równość stosunków podwójnego podziału czterech elementów odpowiednich w obu utworach pozostaje niezmienną.

Utwory rzędu pierwszego, posiadające tę własność, że stosunki podwójnego podziału czterech elementów jednego utworu są równe stosunkom podwójnego podziału czterech odpowiednich elementów w utworze drugim, nazywamy utworami jednokreślnymi. Jednokreślność oznaczamy umieszczając między symbolami utworów znak „ $\overline{\wedge}$ ”.

15. Trzy pary elementów odpowiednich wyznaczają jednokreślność dwu utworów rzędu pierwszego.

Jakoż niech będą dane trzy pary A i A_1 , B i B_1 , C i C_1 elementów odpowiednich w dwu utworach jednokreślnych ($A, B, C, \dots$) i ($A_1, B_1, C_1, \dots$); elementowi X utworu ($A, B, \dots$) odpowiada w utworze ($A_1, B_1, \dots$) element X_1 którego położenie równaniem $(ABCX) = A_1B_1C_1X_1$ jest wyznaczone; skoro bowiem utwory dane są jednokreślne, natenczas stosunki podwójnego podziału czterech elementów jednego utworu są równe stosunkom podwójnego podziału czterech odpowiednich elementów utworu drugiego, (art. 10.).

Z twierdzenia tego wynika bezpośrednio:

a) Jeżeli trzy pary elementów odpowiednich w dwu utworach jednokreślnych nakrywają się, natenczas schodzą się wszystkie pary elementów odpowiednich.

b) Dwa utwory rzędu pierwszego, jednokreślne z trzecim są jednokreślne.

16. Jeżeli dwa utwory rzędu pierwszego są w ten sposób z sobą złączone, że każdemu elementowi jednego utworu odpowiada tylko jeden element w utworze drugim, natenczas te utwory są jednokreślne.

Jakoż niech będą dane n . p. dwa szeregi: $S \equiv A, B, C, \dots$ i $S_1 \equiv A_1, B_1, C_1, \dots$, posiadające tę własność, że elementowi A odpowiada tylko element A_1 , elementowi B odpowiada tylko element B_1 , i t. d., a nadto, że elementowi A_1 odpowiada tylko A i t. d., to natenczas między dwiema dowolnymi parami punktów odpowiednich A i A_1 tudzież C i C_1 zachodzi związek:

1.) $AC \cdot A_1C_1 + mAC + nA_1C_1 = 0$, gdzie m i n są dowolnymi ilościami stałymi.

Wprowadzając trzecią parę B i B_1 punktów odpowiednich, możemy w równaniu 1.) podstawić

$$AC = AB + BC, \quad A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$$

i otrzymamy po uproszczeniu

$$2.) \quad BC \cdot B_1C_1 + (m + A_1B_1)BC + (n + AB)B_1C_1 = 0.$$

Z równania 1.) wynika:

$$AC = \frac{n \cdot A_1C_1}{m + A_1C_1}$$

a z równania 2.) otrzymamy:

$$BC = -\frac{(n + AB)B_1C_1}{m + A_1C_1},$$

a zatem:

$$3.) \quad \frac{AC}{BC} = \frac{n \cdot A_1C_1}{(n + AB)B_1C_1}.$$

Podstawiając w równaniu 3) zamiast C i C_1 parę elementów odpowiednich D i D_1 , otrzymamy:

$$4.) \quad \frac{AD}{BD} = \frac{n \cdot A_1D_1}{(n + AB)B_1D_1}.$$

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{AD}{BD} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} \cdot \frac{A_1D_1}{B_1D_1},$$

stosunek podwójnego podziału czterech elementów utworu S jest równy stosunkowi podwójnego podziału czterech elementów odpowiednich utworu S_1 .

17. Dwa utwory jednokreślne tego samego rodzaju, których dwa odpowiednie elementa nakrywają się są perspektywiczne.

a) Jakoż niech będą dane dwa szeregi jednokreślne ($A, B, \dots$) i ($A_1, B_1, \dots$), których elementa M i M_1 nakrywają się (rys. 4.); wyznaczmy punkt przecięcia się W prostych AA_1 i BB_1 i połączmy dowolny punkt C szeregu ($A, B, \dots, M$) z punktem W , to promień WC przecina podstawę l_1 szeregu ($A_1, B_1, \dots, M_1$) w punkcie C_1 , odpowiadającym punktowi C ; według założenia bowiem stosunki podwójnego podziału ($ABCM$) i ($A_1B_1C_1M_1$) są równe.

Szeregi tedy ($A, B, C, \dots$) i ($A_1, B_1, C_1, \dots$) są przekrojami pęku promieni $W(A, B, C, \dots)$ prostymi l i l_1 . Te utwory zatem są perspektywiczne (art. 11.).

b) Niech będą dane dwa pęki jednokreślne $W(a, b, \dots)$ i $W_1(a_1, b_1, \dots)$; promień WW_1 , łączący wierzchołki niech będzie elementem odpowiednio wspólnym m i m_1 obu utworów (rys. 5.). Połączmy punkta A i B , w których promienie a i a_1 tudzież b i b_1 przecinają się, i wyznaczmy punkta przecięcia się prostej AB z promieniami pęków danych, to natenczas otrzymamy dwa szeregi jednokreślne ($A, B, C, \dots$) i ($A_1, B_1, C_1, \dots$), których trzy elementa odpowiednie A i A_1 , B i B_1 , M i M_1 nakrywają się, wszystkie tedy pary elementów odpowiednich schodzą się, a zatem promienie odpowiednie pęków danych przecinają się w punktach, leżących na prostej AB .

O sprowadzeniu utworów jednokreślnych do położenia perspektywicznego.

18. Utwory jednokreślne można zawsze sprowadzić do położenia perspektywicznego.

Zagadnienie 1.: Sprowadzić dwa pęki jednokreślne do położenia perspektywicznego.

Rozwiązanie: Niech będą dane trzy pary promieni odpowiednich a i a_1 , b i b_1 , c i c_1 dwu pęków jednokreślnych (rys. 7.). Obróćmy pęk $W_1(a_1, b_1, \dots)$ około wierzchołka W_1 tak, aby promienie a i a_1 były równoległe, przesunemy następnie ten pęk tak, aby promienie a i a_1 zeszły się na jednej prostej, to natenczas otrzymamy pęk $W_2(a'_2, b'_2, c'_2, \dots)$, przystający do $W(a_1, b_1, c_1, \dots)$ i perspektywiczny z pękiem $W(a, b, c, \dots)$; promienie tedy b i b'_2 , c i $c'_2, \dots$ przecinają się w punktach, leżących na linii prostej l .

Zakreślmy na cięciwie W_1W_2 koło k , którego środek leży na prostej l i połączmy wierzchołki W_1 i W_2 z punktami Q i R , w których prosta l przecina się z kołem k , to natenczas otrzymamy dwie pary promieni odpowiednio prostopadłych q i q_1 tudzież r i r_1 . A zatem:

W dwu pękach jednokreślnych znajdują się zawsze dwie pary elementów odpowiednio prostopadłych.

Zagadnienie 2.: Dany jest szereg punktów $(A, B, C, \dots)$, jednokreślny z pękiem promieni $W(a, b, c, \dots)$, sprowadzić te utwory do położenia perspektywicznego.

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że punkt B leży w obrębie odcinka AC (rys. 8.). Zakreślmy na cięciwie AB koło k , którego kąty obwodowe, opierające się swymi ramionami o punkta A i B są równe kątowi ab ; zakreślmy następnie na cięciwie BC koło k_1 , którego kąty obwodowe, opierające się swymi ramionami o punkta B i C , równe są kątowi bc , natenczas koła k i k_1 przecinają się w punkcie W_1 , który jest wierzchołkiem pęku $W_1(A, B, C, \dots)$, przystającego do pęku $W(a, b, c, \dots)$ i perspektywicznego z szeregiem $A, B, C, \dots$

Zagadnienie: Mając dany pęk płaszczyzn $l(\pi^1, \pi^2, \dots)$ i pęk promieni $W(a, b, c, \dots)$; sprowadzić te utwory do położenia perspektywicznego.

Rozwiązanie: Przetnijmy pęk $l(\pi^1, \pi^2, \dots)$ płaszczyzną, prostopadłą do osi l podług pęku $W_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$ i wyznaczmy promienie q i q_1 tudzież r i r_1 utworów $W(\dots)$ i $W_1(\dots)$, odpowiednio prostopadłe, sprowadźmy następnie te utwory do takiego położenia, aby wierzchołki W i W_1 zeszły się w jednym punkcie, a promienie q i q_1 na jednej prostej. Jeżeli pęk $W(a, b, c, \dots)$ obrócimy około prostej q , natenczas promień r opisze płaszczyznę a promień „ a “ opisze stożek obrotowy, który przecina się z elementem π^1 pęku $l(\pi^1, \pi^2, \dots)$ podług dwu tworzących a_2 i a_3 ; płaszczyzny, przesunięte przez promienie a_1 i a_2 tudzież a_1 i a_3 przecinają pęk płaszczyzn $l(\pi^1, \pi^2, \dots)$ podług dwu pęków, przystających do pęku $W(a, b, c, \dots)$ i perspektywicznych z pękiem płaszczyzn $l(\pi^1, \pi^2, \dots)$.

O uzupełnianiu utworów rzędu pierwszego jednokreślnych.

19. Zagadnienie. Mając dane trzy pary punktów odpowiednich dwu szeregów jednokreślnych $(A, B, C, \dots)$ i $(A_1, B_1, C_1, \dots)$ wyznaczyć elementa odpowiednie tych utworów, (rys. 9.).

Rozwiązanie: Połączmy punkt A z elementem szeregu $(A_1, B_1, \dots)$ a punkt A_1 z elementami szeregu $(A, B, C, \dots)$, natenczas otrzymamy dwa pęki $A(A_1, B_1, C_1, \dots)$ i $A_1(A, B, C, \dots)$, jednokreślne i perspektywiczne; albowiem promień AA_1 jest elementem odpowiednio spólnym obu utworów; promienie tedy AB_1 i A_1B , AC_1 i A_1C , ... przecinają się w punktach, leżących na prostej p , którą nazywamy osią kierowniczą szeregów jednokreślnych.

Oś p posłuży nam do uzupełnienia danych szeregów.

Połączmy w tym celu dowolny element X szeregu $(A, B, C, \dots)$ z punktem A_1 i wyznaczmy punkt M , w którym promień AX przecina się z prostą p , połączmy następnie A z M , to promień AM jest elementem pęku $A(A_1, B_1, \dots)$, odpowiadającym promieniowi A_1X pęku $A_1(A, B, \dots)$, prosta AM przecina się tedy z podstawą l_1 w punkcie X_1 , odpowiadającym punktowi X szeregu $(A, B, C, \dots)$.

Aby otrzymać punkt Z_1 szeregu $(A_1, B_1, C_1, \dots)$, który odpowiada punktowi, leżącemu w nieskończoności na podstawie l , poprowadźmy promień A_1N , równoległy do podstawy l i połączmy A z N , to prosta AN przecina

się z prostą l_1 w punkcie Z_1 . W podobny sposób wyznaczmy punkt R szeregu $(A, B, C, \dots)$, odpowiadający elementowi R_1^∞ szeregu $(A_1, B_1, C_1, \dots)$, leżącemu w nieskończoności.

R i Z_1 nazywamy elementami wzajemnymi szeregów jednokreślnych.

Punkt przecięcia się podstaw l i l_1 jest zarówno elementem P szeregu $(A, B, C, \dots)$ jakoteż elementem Q_1 szeregu $(A_1, B_1, \dots)$. Z konstrukcyi elementów odpowiednich dwu szeregów jednokreślnych wynika bezpośrednio, że punktem P i Q_1 odpowiadają punkta P_1 i Q , w których oś kierownicza p przecina podstawy l i l_1 .

20. Wiadomo, że stosunki podwójnego podziału czterech elementów odpowiednich w dwu szeregach jednokreślnych są równe, że zatem:

$$(ABRZ^\infty) = (A_1B_1R_1^\infty Z_1),$$

rozwijając te stosunki otrzymamy;

$$\frac{AR}{BR} \cdot \frac{AZ^\infty}{BZ^\infty} = \frac{A_1R_1^\infty}{B_1R_1^\infty} \cdot \frac{A_1Z_1}{B_1Z_1},$$

czyli:
$$\frac{AR}{BR} = 1 : \frac{A_1Z_1}{B_1Z_1},$$

a zatem:

$$AR \cdot A_1Z_1 = BR \cdot B_1Z_1 = \text{const.}$$

Iloczyn odcinków, zawartych między punktami wzajemnymi i punktami odpowiednimi dwu szeregów jednokreślnych jest ilością stałą.

21. Jeżeli punkta wzajemne dwu szeregów jednokreślnych leżą w nieskończoności, albo innemi słowy, jeżeli punkta leżące w nieskończoności na podstawach szeregów jednokreślnych są elementami odpowiednimi, natenczas odcinki, zawarte między punktami odpowiednimi, są proporcjonalne.

Jakoż z równania $(ABXR^\infty) = (A_1B_1X_1R_1^\infty)$ wynika

$$\frac{AX}{BX} = \frac{A_1X_1}{B_1X_1}.$$

Takie szeregi nazywamy szeregami podobnymi.

22. Zagadnienie: Dane są trzy pary promieni odpowiednich a i a_1 , b i b_1 , c i c_1 dwu pęków jednokreślnych $W(a, b, c, \dots)$ i $W_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$, wyznaczyć dalsze elementa odpowiednie tych utworów, (rys. 10.).

Rozwiązanie: Przetnijmy pęk $W(a, b, c, \dots)$ prostą a_1 , a pęk $W_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$ prostą a , to natenczas otrzymamy dwa szeregi $(A, B, C, \dots)$ i $(A_1, B_1, C_1, \dots)$ jednokreślne i perspektywiczne; albowiem elementa A i A_1 schodzą się w jednym punkcie; proste zatem BB_1 i CC_1 ... przecinają się w punkcie O , który nazywamy środkiem kierowniczym pęków jednokreślnych.

Środek O posłuży nam do uzupełnienia danych pęków.

Poprowadźmy w tym celu dowolny promień x pęku $W(a, b, \dots)$ i wyznaczmy punkt przecięcia się X prostych a_1 i x , połączmy następnie punkt X ze środkiem kierowniczym O i wyznaczmy punkt X_1 , w którym promień a przecina się z prostą OX , to prosta W_1X_1 , łącząca wierzchołek W_1 z punktem X_1 jest promieniem pęku $W_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$, odpowiadającym promieniowi x pęku $W(a, b, c, \dots)$.

Prosta WW_1 , łącząca wierzchołki, jest zarówno elementem p pęku $W(a, b, c, \dots)$, jakoteż elementem q_1 pęku $W_1(a_1, b_1, \dots)$.

Z konstrukcyi promieni odpowiednich dwu pęków jednokreślnych wynika bezpośrednio, że promieniom p i q_1 odpowiadają promienie W_1O i WO , przechodzące przez środek kierowniczy.

23. Wiadomo, że stosunki podwójnego podziału czterech elementów odpowiednich $(abqr)$ i $(a_1b_1q_1r_1)$ dwu pęków jednokreślnych są równe.

$$1.) \frac{\sin aq}{\sin bq} : \frac{\sin ar}{\sin br} = \frac{\sin a_1q_1}{\sin b_1q_1} : \frac{\sin a_1r_1}{\sin b_1r_1}.$$

Jeżeli q i r tudzież q_1 i r_1 są promieniami odpowiednio prostopadłymi pęków, natenczas

$$\sin ar = \cos aq, \sin a_1q_1 = \cos a_1r_1, \sin br = \cos bq.$$

Podstawiając te wartości w równanie 1. otrzymamy:

$$\frac{tg aq}{tg bh} = \frac{tg b_1r_1}{tg a_1r_1},$$

albo

$$tgaq \cdot tga_1r_1 = tgbq \cdot tgb_1r_1.$$

Iloczyn stycznych trygonometrycznych kątów, zawartych między promieniami odpowiednimi i promieniami prostopadłymi nieodpowiednimi dwu pęków jednokreślnych jest ilością stałą.

O utworach harmonicznym.

24. Jeżeli wartość stosunku podwójnego podziału czterech elementów utworu rzędu pierwszego jest równa jedności odjemnej, powiadamy, że owe elementy tworzą grupę harmoniczną.

Jeżeli n. p. $(ABCD) = -1$, natenczas punkta A, B, C i D tworzą grupę harmoniczną.

Z określenia tego wynika, że bezwzględne wartości stosunków $\frac{AC}{BC}$ i $\frac{AD}{BD}$ są równe, atoli jedna z tych wartości jest dodatna a druga odjemna.

Jeżeli w grupie harmoniczej $(ABCD) = -1$ element C schodzi się z punktem O , dzielącym odcinek AB na dwie równe części, natenczas punkt D leży w nieskończoności, albowiem stosunek $\frac{AO}{BO}$ równy jest jedności odjemnej, stosunek zaś $\frac{AD^\infty}{BD^\infty}$ równy jest jedności dodatniej (art. 4.).

Jeżeli punkt C leży na odcinku AO albo BO , natenczas punkt D leży poza obrębem odcinka AB po stronie punktu A albo B , w pierwszym przypadku bowiem bezwzględne wartości stosunków $\frac{AC}{BC}$ i $\frac{AD}{BD}$ są mniejsze od jedności, w drugim przypadku zaś wartości te są większe od jedności. — Z tego wynika, że, jeżeli punkt C schodzi się z A lub B , natenczas punkt D schodzi się równocześnie z tymisamymi punktami.

25. Z równania $(ABCD) = 1$ wynika

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = (CDAB) = -1, \quad \text{to znaczy}$$

Jeżeli C i D dzielą harmonicznie odcinek AB , natenczas punkta A i B dzielą również harmonicznie odcinek CD . Z tego powodu nazywamy punkta A i B tudzież C i D punktami harmonicznie sprzężonymi w grupie $(ABCD) = -1$.

26. Cztery punkta A, B, C, D , z których trzy nie leżą na jednej prostej wyznaczają czworokąt zupełny.

Punkta A, B, C, D nazywamy wierzchołkami a proste, łączące te punkta, nazywamy bokami czworokąta zupełnego.

Boki AB i CD , AC i DB , AD i BC , nieprzechodzące przez ten sam wierzchołek, nazywamy bokami przeciwnymi, a punkta przecięcia się tychże P, Q i R nazywamy punktami przekątnymi (rys. 11.).

W czworokącie zupełnym tedy mamy sześć boków, cztery wierzchołki i trzy punkta przekątne.

Trójkąt PQR nazywamy trójkątem przekątnym albo biegunowym.

27. Wyznamy w czworokącie zupełnym $ABCD$ punkta przecięcia się E i F , G i H , J i K boków przeciwnych z bokami trójkąta biegunowego, to spostrzeżemy, że:

a) Na każdym boku czworokąta leżą cztery punkta, a mianowicie dwa wierzchołki, jeden punkt przekątny i punkt przecięcia się tego boku z prostą łączącą dwa dalsze punkta przekątne.

b) Na każdym boku trójkąta biegunowego leżą cztery punkta a mianowicie dwa punkta przecięcia się tego boku z bokami przeciwnymi czworokąta i dwa punkta przekątne.

c) Przez każdy punkt przekątny przechodzą cztery proste, mianowicie dwa boki przeciwnie czworokąta i dwa boki trójkąta biegunowego.

Powiadam, że elementa wymienione pod a) b) i c) tworzą grupy harmoniczne.

Jakoż zwróćmy n. p. uwagę na grupy punktów A, B, E, P i D, C, F, P to takowe można uważać za przekroje pęków $Q(A, B, E, P)$ i $R(A, B, E, P)$ prostami AB i CD ; stosunki tedy podwójnego podziału

$$(ABEP) \text{ i } (DCFP) \text{ tudzież } (ABEP) \text{ i } (CDEP) \text{ są równe,}$$

a zatem:

$$(DCFS) = (CDEP) \text{ czyli } \frac{DF}{CF} : \frac{DP}{CP} = \frac{CF}{DF} : \frac{CP}{DP},$$

wartość tedy stosunku podwójnego podziału $(DCEF)$ równa jest swej odwrotności, co tylko wówczas jest możebne, jeżeli takowa równa jest jedności odjemnej, a więc, jeżeli punkta $D, C, F, P, -A, B, E, P$ — a nadto promienie $QA, QB, QE, QP - RA, RB, RE, RP$ tworzą grupy harmoniczne.

Zagadnienie: Dane są trzy punkta A, B, C , leżące na linii prostej, wyznaczyć punkt D , tworzący z danymi grupę harmoniczną $(ABCD) = -1$.

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez punkt A dwie proste a_1 i a_2 , a przez punkt C prostą c i połączmy punkt B z punktami G i H , w których proste a_1 i c tudzież a_2 i c przecinają się, wyznaczmy następnie punkta przecięcia się J i K prostych a_2 i BG tudzież a_1 i BH , to prosta JK przecina się z prostą AB w punkcie D , tworzącym z danymi punktami grupę harmoniczną $(ABCD) = -1$; albowiem A i B są punktami przekątnymi czworokąta zupełnego $GHJK$, a punkta C i D leżą na bokach przeciwnych tego wielokąta.

28. Cztery proste a, b, c, d , z których trzy nie przechodzą przez jeden punkt wyznaczają czworobok zupełny, (rys. 12.).

Proste a, b, c, d nazywamy bokami a punkta przecięcia się tychże nazywamy wierzchołkami czworoboku zupełnego.

Wierzchołki (a, b) i (c, d) , (a, c) i (d, b) , (a, d) i (b, c) , które nie leżą na jednym boku, nazywamy wierzchołkami przeciwnymi, a proste, łączące te wierzchołki, nazywamy przekątnymi czworoboku zupełnego.

W czworoboku zupełnym odroźniamy tedy sześć wierzchołków, cztery boki i trzy przekątne.

Przekątne p, q i r wyznaczają trójbok, który nazywamy trójbokiem biegunowym czworoboku zupełnego.

29. Połączmy wierzchołki P, Q i R trójboku biegunowego z wierzchołkami przeciwnymi czworoboku $abcd$ zapomocą prostych e, f, g, h i k , to spostrzeżemy, że:

a) przez każdy wierzchołek czworoboku przechodzą cztery proste, mianowicie, dwa boki czworoboku, jedna przekątna i prosta, łączące ten wierzchołek z wierzchołkiem trójboku biegunowego.

b) przez każdy wierzchołek trójboku biegunowego przechodzą cztery proste, dwie przekątne i dwie proste poprowadzone przez wierzchołki przeciwnie czworoboku.

c) na każdej przekątnej leżą cztery punkta, dwa wierzchołki czworoboku i dwa wierzchołki trójboku biegunowego.

Powiadam, że elementa wymienione pod a) b) i c) tworzą grupy harmoniczne.

Jakoż stosunki podwójnego podziału $(adkr)$ i $(bcir)$ są równe, albowiem proste a i b, c i d, k i r przecinają się w punktach, leżących na przekątnej p ; nadto stosunki podwójnego podziału $(adkr)$ i $(bcir)$ są równe albowiem promienie a i c, b i d, i i k przecinają się w punktach, leżących na przekątnej q ; stosunki zatem $(bcir)$ i $(cbir)$ są równe, co tylko wówczas jest możebne, jeżeli wartość tych stosunków równa jest jedności odjemnej.

W taki sam sposób można udowodnić, że promienie $a, b, p, c - b, d, p, q - q, r, e, f - \dots$ tworzą grupy harmoniczne.

Zagadnienie: Dane są trzy proste a, b i c , przechodzące przez punkt W , wyznaczyć czwartą prostą d , która tworzy z danymi grupę harmoniczną $(abcd) = -1$.

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez dowolny punkt C , leżący na prostej c , dwie proste m i n , to takowe wyznaczają z prostymi a i b czworobok zupełny $abmn$, którego jedną przekątną jest prosta c ; przekątne tedy q i r tego czworoboku przecinają się w punkcie P , przez który prosta d przechodzi.

Zagadnienie: Udowodnić, że promienie m i n , dzielące na dwie równe części kąty, zawarte między promieniami a i b , tworzą z prostymi a i b grupę harmoniczną $(abmn) = -1$.

O pękach spółśrodkowych i szeregach, leżących na wspólnej podstawie.

30. Jeżeli przetniemy dwa pęki jednokreślne $W(a, b, c, \dots)$ i $W_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$ prostą l , natenczas otrzymamy dwa szeregi jednokreślne $(A, B, C, \dots)$ i $(A_1, B_1, C_1, \dots)$ o wspólnej podstawie. Każdy punkt, leżący na prostej l można uważać za element X szeregu $(A, B, C, \dots)$ i za element Y_1 szeregu $(A_1, B_1, C_1, \dots)$, którym odpowiadają elementa X_1 i Y , nieschodzące się w ogólności w jednym punkcie.

Punkt E , w którym schodzą się elementa odpowiednie E i E_1 szeregów nazywamy punktem podwójnym.

Jeżeli dowolny punkt W połączmy z elementami dwu szeregów jednokreślnych, natenczas otrzymamy dwa pęki jednokreślne spółśrodkowe. Prostą e , na której schodzą się dwa promienie odpowiednie e i e_1 , nazywamy promieniem podwójnym pęków jednokreślnych spółśrodkowych.

Dwa pęki jednokreślne spółśrodkowe i dwa szeregi jednokreślne o wspólnej podstawie mogą mieć tylko dwa elementa podwójne, albowiem jednokreślność dwu utworów rzędu pierwszego jest wyznaczona trzema parami elementów odpowiednich; jeżeliby tedy dwa utwory jednokreślne posiadały trzy punkta podwójne, natenczas wszystkie pary elementów odpowiednich schodziłyby się w tych samych punktach.

31. Celem zbadania warunków, pod którymi dwa szeregi jednokreślne, leżące na wspólnej podstawie, mają punkta podwójne, przyjmijmy, że jednokreślność owych szeregów jest wyznaczona dwoma elementami odpowiednimi A i A_1 i punktami wzajemnymi R i Z_1 .

Wiadomo, że iloczyn odcinków, zawartych między punktami wzajemnymi i elementami odpowiednimi dwu szeregów jednokreślnych jest ilością stałą (art. 19.). Jeżeli tedy dwa elementa szeregów danych E i E_1 schodzą się w jednym punkcie, natenczas

$$1.) ER^2 = ER \cdot E_1 Z_1 = AR \cdot A_1 Z_1 = v^2, \text{ atoli}$$

$$2.) ER = EZ_1 - RZ_1 \text{ a zatem}$$

$$3.) RZ_1 = \frac{RZ_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{RZ_1}{2}\right)^2 + AR \cdot A_1 Z_1}.$$

Podstawiając w równanie 1) za EZ_1 $ER + RZ_1$, otrzymamy

$$4.) ER = -\frac{RZ_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{RZ_1}{2}\right)^2 + AR \cdot A_1 Z_1}.$$

Z równań 3.) i 4.) czytamy:

a) Dwa szeregi jednokreślne o wspólnej podstawie mają dwa elementa podwójne rzeczywiste, urojone lub schodzące się w jednym punkcie, stosownie do tego, czy ilość $\left(\frac{RZ_1}{2}\right)^2 + AR \cdot A_1 Z_1$ jest dodatnia, odjemna albo równa zeru.

b) Punkt, który dzieli na dwie równe części odcinek, zawarty między punktami wzajemnymi, dzieli również na dwie części odcinek zawarty między punktami podwójnymi.

Zagadnienie 1. Wyznaczyć promienie podwójne dwu pęków jednokreślnych, spółśrodkowych, których elementa odpowiednie a i a_1, b i b_1, c i c_1 są dane (rys. 13.).

Rozwiązanie: Zakreślmy przez środek W pęków danych koło k i wyznaczmy punkta przecięcia się $A', B', C', \dots$ i $A'_1, B'_1, C'_1, \dots$ tego koła z promieniami $a, b, c, \dots$ i $a_1, b_1, c_1, \dots$, połączmy następnie punkt A' z A'_1 , z promieniami $a, b, c, \dots$ i $a_1, b_1, c_1, \dots$, to natenczas otrzymamy dwa pęki $A'_1(A', B', C', \dots)$ i $A'(A'_1, B'_1, C'_1, \dots)$, odpowiednio przystające do pęków $W(a, b, c, \dots)$ i $W(a_1, b_1, c_1, \dots)$; albowiem kąty ab i $A'A_1B'$, ac i $A'A_1C'$, $\dots$ tudzież a_1b_1 i $A'_1A'B'_1$, a_1c_1 i $A'_1A'C'_1, \dots$ są równe. Atoli promień $A'A_1$ jest

elementem odpowiednio spólnym pęków $A'(\dots)$ i $A'(\dots)$, elementa tedy $A'B'$ i $A'B'_1$, $A'C'$ i $A'C'_1$, ... przecinają się w punktach, leżących na prostej p .

Zapomocą prostej p można uzupełnić pęki $W(a, b, c, \dots)$ i $W(a_1, b_1, c_1, \dots)$. Połączmy w tym celu dowolny punkt M prostej p z wierzchołkami A' i A'_1 i wyznaczmy punkta przecięcia się M' i M'_1 koła k promieniami $A'M$ i A'_1M połączmy następnie wierzchołek W z punktami M' i M'_1 to proste WM' i WM'_1 są elementami odpowiednimi pęków danych.

Z konstrukcji tej wynika bezpośrednio, że proste e i f , łączące wierzchołek W z punktem E' i F' , w których prosta p przecina się z kołem k , są promieniami podwójnymi pęków spółśrodkowych $W(a, b, c, \dots)$ i $W(a_1, b_1, c_1, \dots)$.

Promienie podwójne e i f są rzeczywiste, urojone albo schodzą się na jednej prostej, stosownie do tego, czy prosta p przecina koło k w punktach rzeczywistych, urojonych albo czy owa prosta z kołem k się styka.

U w a g a. Jeżeli kąty ab i a_1b , ac i a_1c , ..., zawarte między promieniami pęków spółśrodkowych są równe, a nadto kierunki obrotu promieni zgodne (rys. 14.), natenczas proste $A'B'_1$ i A'_1B' , $A'C'_1$ i A'_1C' ... są równoległe, prosta p leży tedy w nieskończoności. A zatem promienie podwójne takich pęków są urojone i przechodzą przez punkta przecięcia się koła z prostą, leżącą w nieskończoności.

Jeżeli zaś owe kąty są równe a kierunki obrotu promieni odpowiednich są niezgodne, natenczas prosta p przechodzi przez środek koła k (rys. 15.); promienie podwójne tedy takich pęków spółśrodkowych są prostopadłe.

Zagadnienie 2. Dane są dwie pary promieni odpowiednich a i a_1 tudzież b i b_1 a nadto promień podwójny e dwu pęków jednokreślnych $W(a, b, \dots)$ i $W(a_1, b_1, \dots)$ spółśrodkowych wyznaczyć w sposób liniowy drugi promień podwójny.

Rozwiązanie: Przetnijmy pęki $W(a, b, \dots)$ i $W(a_1, b_1, \dots)$ prostymi l i l_1 , przechodzącymi przez dowolny punkt, który leży na promieniu podwójnym e , to natenczas otrzymamy dwa szeregi jednokreślne perspektywiczne $(A, B, \dots)$ i $(A_1, B_1, \dots)$; prosta f tedy łącząca wierzchołek W z punktem O , w którym proste AA_1 i BB_1 przecinają się, jest drugim promieniem podwójnym pęków danych.

Zagadnienie: Dane są dwa promienie odpowiednie a i a_1 , a nadto promień m na którym schodzą się elementa podwójne pęków spółśrodkowych $W(a, \dots)$ i $W(a_1, \dots)$ uzupełnić te pęki.

Zagadnienie: Wyznaczyć punkta podwójne dwu szeregów jednokreślnych, leżących na spólnej podstawie.

33. Stosunek podwójnego podziału elementów podwójnych i dwu elementów odpowiednich w dwu utworach rzędu pierwszego, które mają spólną podstawę, spólny wierzchołek lub spólną oś jest ilością stałą.

Jakoż, jeżeli E i F są elementami podwójnymi a X i X_1 , Y i Y_1 , ... elementami odpowiednimi dwu utworów jednokreślnych, natenczas stosunki podwójnego podziału $(EFXY)$ i EFX_1Y_1 są równe.

A zatem $\frac{EX}{FX} : \frac{EX}{FY} = \frac{EX_1}{FX_1} : \frac{EX_1}{FY_1}$; mnożąc obie strony tego równania

przez $\frac{EY}{FY}$, a dzieląc je przez $\frac{EX_1}{FX_1}$ otrzymamy $\frac{EX}{FX} : \frac{EX_1}{FX_1} = \frac{EY}{FY} : \frac{EY_1}{FY_1}$, czyli $(EFXX_1) = (EFYY_1) = \text{const.}$

O szeregach i pękach inwolucyjnych.

34. Dwa szeregi jednokreślne na spólnej podstawie, których punkta wzajemnie schodzą się tworzą szereg inwolucyjny.

Punkt O , w którym schodzą się punkta wzajemnie nazywamy środkiem szeregu inwolucyjnego.

Jeżeli A i A_1 , B i B_1 , ... są elementami odpowiednimi szeregów jednokreślnych, tworzących szereg inwolucyjny, natenczas iloczyny odcinków OA i OA_1 , OB i OB_1 , ..., zawartych między środkiem inwolucyi i dwoma punktami odpowiednimi jest ilością stałą (art. 32.). Tę ilość nazywamy cechą albo charakterystyką szeregu inwolucyjnego.

35. Środek O i dwa elementa odpowiednie A i A_1 wyznaczają szereg inwolucyjny; dowolnemu bowiem punktowi X tego szeregu odpowiada punkt X_1 , wyznaczony równaniem $OX_1 = \frac{OA \cdot OA_1}{OX}$.

Z równania tego wynika, że elementa odpowiednie szeregu inwolucyjnego są zamienne; t. z. punktowi X , uważanemu za element szeregu $(A, B, \dots)$ odpowiada w szeregu $(A_1, B_1, \dots)$ punkt X_1 , a punktowi X_1 , uważanemu za element szeregu $(A, B, \dots)$, odpowiada w szeregu $(A_1, B_1, \dots)$ element, który się schodzi z punktem X . I wzajemnie: Jeżeli w dwu szeregach jednokreślnych $(A, B, \dots)$ i $(A_1, B_1, \dots)$, leżących na spólnej podstawie, dwa elementa odpowiednie są zamienne, natenczas wszystkie elementa odpowiednie tych szeregów są zamienne, tworzą tedy szereg inwolucyjny.

Jakoż, dajmy na to, że w szeregach jednokreślnych $(A, B, C, \dots)$ i $(A_1, B_1, C_1, \dots)$, leżących na podstawie l elementa A i A_1 są zamienne, natenczas stosunek podwójnego podziału (AA_1BB_1) elementów szeregu $(A, B, C, \dots)$ jest równy stosunkowi podwójnego podziału $(A_1AB_1X_1)$ elementów odpowiednich szeregu $(A_1, B_1, C_1, \dots)$, gdzie X_1 oznacza punkt utworu $(A_1, B_1, \dots)$, odpowiadający punktowi B , utworu $(A, B, \dots)$.

Rozwińmy stosunek $(A_1AB_1X_1)$ i przekształćmy takowy:

$$(A_1AB_1X_1) = \frac{A_1B_1}{AB_1} : \frac{A_1X_1}{AX_1} = \frac{AX_1}{A_1X_1} : \frac{AB_1}{A_1B_1} = (AA_1X_1B_1).$$

Atoli według założenia $(AA_1BB_1) = (A_1AB_1X_1)$ a zatem:

$$(AA_1X_1B_1) = (AA_1BB_1);$$

punkt X_1 schodzi się tedy z punktem B ; elementa tedy B i B_1 szeregów danych są zamienne.

36. Punkta szeregu inwolucyjnego, z którymi schodzą się dwa elementa odpowiednie, nazywamy punktami podwójnymi.

Jeżeli E jest punktem podwójnym szeregu inwolucyjnego $A, A_1, B, B_1, \dots$, którego środkiem jest punkt O , natenczas $\overline{OE}^2 = OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = \dots$, a zatem:

Szereg inwolucyjny posiada dwa punkta podwójne, symetryczne względem środka, które są rzeczywiste, urojone,

albo schodzą się ze środkiem, stósownie do tego, czy cecha inwolucyi jest dodatna, ujemna albo równa zeru.

Jeżeli elementa odpowiednie A i A_1 , B i B_1 , ..., szeregu inwolucyjnego leżą po tej samej stronie środka O , natenczas cecha inwolucyi jest dodatna, punkta podwójne zatem są rzeczywiste.

Taki utwór nazywamy szeregiem inwolucyjnym hiperbolicznym.

Jeżeli elementa odpowiednie szeregu inwolucyjnego leżą po przeciwnych stronach środka O , natenczas cecha inwolucyi jest ujemna, punkta podwójne zatem są urojone.

Taki utwór nazywamy szeregiem inwolucyjnym eliptycznym.

Szereg inwolucyjny, którego cecha jest równa zeru, nazywamy szeregiem parabolicznym.

37. Punkta podwójne E i F szeregu inwolucyjnego tworzą z elementami odpowiednimi tego szeregu grupy harmoniczne.

Jakoż w szeregach jednokreślnych $A, B, C, \dots$ i $A_1, B_1, \dots$ tworzących szereg inwolucyjny $A, A_1, B, B_1, \dots$ elementa odpowiednie A i $A_1, \dots$, są zamienne; stosunki zatem podwójnego podziału

$$(EFAA_1) \text{ i } (EFA_1A)$$

są równe, co tylko wówczas jest możebne, jeżeli wartość tych stosunków równa jest jedności ujemnej, (art. 26.).

38. Dwie pary elementów odpowiednich A i A_1 tudzież B i B_1 wyznaczają szereg inwolucyjny; albowiem dowolnemu punktowi X tego szeregu odpowiada punkt X_1 , wyznaczony równaniem

$$(AA_1BX) = (A_1AB_1X_1).$$

39. Proste, przechodzące przez środek kierowniczy (art. 21.) dwu pęków jednokreślnych przecinają się z promieniami odpowiednimi tych utworów w punktach odpowiednich szeregu inwolucyjnego.

Jakoż niech będą dane dwa pęki jednokreślne (rys. 16.) $W(a, b, c, \dots)$ i $W_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$, których środek kierowniczy znajduje się w punkcie S_1 . Poprowadzimy przez punkt S_1 prostą l i wyznaczmy szeregi $(A', B', \dots)$ i $(A'_1, B'_1, \dots)$, w których prosta l przecina pęki dane, to elementa odpowiednie tych szeregów są zamienne. Jeżeli bowiem punkt S_1 w którym prosta l przecina się z promieniem WW_1 uważać będziemy za element P szeregu $(A', B', \dots)$, natenczas element odpowiedni P_1 szeregu $(A'_1, B'_1, \dots)$, zejdzie się ze środkiem kierowniczym S_1 ; jeżeli zaś punkt S_1 uważać będziemy za element Q_1 szeregu $(A'_1, B'_1, \dots)$, natenczas element odpowiedni Q szeregu $(A', B', \dots)$ zejdzie się również z punktem S_1 ; środek kierowniczy S_1 i punkt przecięcia się promienia WW_1 z prostą l są tedy elementami zmiennymi szeregów $(A, B, \dots)$ i $(A_1, B_1, \dots)$, te szeregi zatem tworzą szereg inwolucyjny.

40. **Twierdzenie Desargues'a:** Prosta dowolna przecina boki przeciwległe czworokąta zupełnego w trzech parach punktów odpowiednich szeregu inwolucyjnego.

Jakoż niech będzie dany czworokąt zupełny $ABCD$ i prosta l (rys. 17.), która przecina boki przeciwległe tego wielokąta w punktach M i M_1 , N i N_1 , P i P_1 .

Uważajmy punkta P i P_1 , tudzież N i N_1 za elementa szeregu inwolucyjnego i połączmy wierzchołek A z punktami P i N a wierzchołek B z punktami odpowiednimi P_1 i $N_1, \dots$, szeregów jednokreślnych, które utworzyły szereg inwolucyjny $N, N_1, P, P_1, \dots$, to natenczas otrzymamy dwa pęki jednokreślne $A(N, P, \dots)$ i $B(N_1, P_1, \dots)$, których środek kierowniczy leży na prostej l (art. 39.) i na prostej CD , łączącej punkta przecięcia się C i D promieni nieodpowiednich AP i B_1P_1 tudzież AN i BP_1 . W szeregu inwolucyjnym N, N_1, P, P_1 , odpowiada tedy punktowi M_1 punkt M w którym prosta l przecina się z promieniem CD łączącym wierzchołki pęków $A(N, P)$ i $B(N_1, P_1)$, albo innemi słowy punkta przecięcia się P i P_1 boków przeciwnych AB i CD z prostą l są elementami odpowiednimi szeregu inwolucyjnego $M, M_1, N, N_1, \dots$

41. **Zagadnienie:** Mając dane dwie pary punktów szeregu inwolucyjnego A, A_1, B, B_1 , wyznaczyć w sposób linijny dalsze elementa odpowiednie tego szeregu.

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez punkta A, B i przez dowolny punkt C proste m, n i p i wyznaczmy punkta przecięcia się M, N i Q prostych m i n, m i p, n i p , połączmy następnie A_1 z Q i B_1 z N , to proste A_1Q i B_1N przecinają się w punkcie P , który z punktami M, N i Q wyznacza czworokąt zupełny; bok tedy MP przecina się z podstawą l danego szeregu w punkcie C_1 , który odpowiada punktowi C w szeregu inwolucyjnym.

Zagadnienie: Wyznaczyć w sposób linijny środek szeregu inwolucyjnego $A, A_1, B, B_1, \dots$

42. **Zagadnienie:** Wyznaczyć punkta podwójne szeregu inwolucyjnego, którego dwie pary elementów odpowiednich A i A_1 , tudzież B i B_1 są dane.

Rozwiązanie: Zakreślmy na cięciwach AA_1 i BB_1 koła k_1 i k_2 (rys. 18a i b) i połączmy punkta przecięcia się M i N tychże, to punkt przecięcia się O podstawy l szeregu jest środkiem inwolucyi; albowiem;

$$OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1.$$

Jeżeli tedy poprowadzimy z punktu O styczną do koła k_1 lub k_2 i długością tejże OQ zakreślmy ze środka O koło k_3 , natenczas punkta przecięcia się E i F tego koła z podstawą l są punktami podwójnymi danego szeregu inwolucyjnego, albowiem:

$$OE^2 = OF^2 = OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1.$$

Jeżeli odcinek, zawarty między jedną parą elementów odpowiednich szeregu inwolucyjnego, leży w obrębie lub poza obrębem odcinka, zawartego między drugą parą elementów odpowiednich, natenczas szereg jest hiperboliczny (rys. 18a.); albowiem środek inwolucyi O leży w tym przypadku poza obrębem kół k_1 i k_2 , styczne tedy, poprowadzone do tychże z punktu O , są rzeczywiste, a więc i punkta podwójne są rzeczywiste. Jeżeli zaś odcinki, zawarte między elementami odpowiednimi częściowo nakrywają się, natenczas szereg inwolucyjny jest eliptyczny; środek inwolucyi leży w obrębie kół k_1 i k_2 (rys. 18b.), styczne tedy poprowadzone ze środka O do tychże kół są urojone, a więc i punkta podwójne szeregu są urojone.

43. Dwa pęki jednokreślne i spółśrodkowe $W(a, b, \dots)$ i $W(a_1, b_1, \dots)$, których promienie prostopadłe nieodpowiednie q i r_1 tudzież r i q_1 nakrywają się tworzą pęk inwolucyjny.

Wiadomo, że iloczyn stycznych trygonometrycznych kątów, zawartych między dwoma promieniami odpowiednimi i promieniami normalnymi nieodpowiednimi w dwu pękach jednokreślnych jest ilością stałą. W pęku inwolucyjnym tedy $W(a, a_1, b, b_1, \dots, r, r_1)$ iloczyny

$$\operatorname{tg} ar \cdot \operatorname{tg} a_1 r_1, \operatorname{tg} br \cdot \operatorname{tg} b_1 r_1, \dots$$

$$\operatorname{tg} ar_1 \cdot \operatorname{tg} a_1 r, \operatorname{tg} br_1 \cdot \operatorname{tg} b_1 r, \dots$$

są ilościami stałymi. Atoli $ar = 90 - a_1 r_1$, $a_1 r = 90 - a r_1$, a zatem:

$$\operatorname{tg} ar \cdot \operatorname{tg} a_1 r = \frac{1}{\operatorname{tg} ar_1 \cdot \operatorname{tg} a_1 r_1} = k.$$

Iloczyn stycznych trygonometrycznych kątów, zawartych między promieniami normalnymi i promieniami odpowiednimi pęku inwolucyjnego jest ilością stałą.

44. Jeżeli w dwu pękach jednokreślnych i spółśrodkowych $W(a, b, \dots)$ i $W(a_1, b_1, \dots)$ dwa elementa a i a_1 są zamienne, natenczas wszystkie elementa odpowiednie są zamienne, te pęki tworzą zatem pęk inwolucyjny.

Jakoż stosunki podwójnego podziału (aa_1bb_1) i $(a_1ab_1x_1)$ są równe, jeżeli x_1 oznacza promień pęku $W(a_1, b_1, \dots)$, odpowiadający promieniowi b_1 pęku $W(a, b, \dots)$. Rozwińmy i przekształćmy stosunek:

$$(a_1ab_1x_1) = \frac{\sin a_1 b_1}{\sin ab_1} : \frac{\sin a_1 x_1}{\sin ax_1}, \frac{\sin ab_1}{\sin a_1 b_1} : \frac{\sin ax_1}{\sin a_1 x_1}, \frac{\sin ax_1}{\sin a_1 x_1} : \frac{\sin ab_1}{\sin a_1 b} = (aa_1x_1b_1);$$

atoli podług założenia $(aa_1bb_1) = (a_1ab_1x_1)$, a zatem $(aa_1x_1b_1) = (aa_1bb_1)$ promień x_1 schodzi się z promieniem b , czyli innemi słowy promienie b i b_1 są zamienne.

45. Jeżeli promień e jest elementem podwójnym pęku inwolucyjnego, w którym r i r_1 są promieniami normalnymi, natenczas $\operatorname{tg}^2 er = k$ (art. 43.).

Pęk inwolucyjny posiada tedy dwa promienie podwójne, które są rzeczywiste, urojone albo schodzą się na jednej prostej, stósownie do tego, czy ilość „ k ” jest dodatna, ujemna albo równa zeru. Położenie promieni podwójnych e i f wyznaczają równania $\operatorname{tger} = +\sqrt{k}$, $\operatorname{tgrf} = -\sqrt{k}$, z których wynika, że promienie normalne dzielą na dwie równe części kąty, zawarte między promieniami podwójnymi.

46. Proste, łączące elementa dwu szeregów jednokreślnych $(A, B, \dots)$ i $(A_1, B_1, \dots)$ z dowolnym punktem osi kierowniczej tychże, tworzą pęk inwolucyjny.

Jakoż pęki $W(A, B, \dots, P)$ i $W(A_1, B_1, \dots, P_1)$ są utworami jednokreślnymi, których promienie odpowiednie WP i WP_1 są zamienne, punktom bowiem P_1 i Q szeregów danych, leżącym na osi kierowniczej, odpowiadają punkta P i Q_1 , które się schodzą z punktem przecięcia się podstaw szeregów $A, B, \dots$ i $A_1, B_1, \dots$

47. Proste, łączące dowolny punkt z wierzchołkami przeciwnymi czworoboku zupełnego, są elementami odpowiednimi pęku inwolucyjnego.

Uważajmy promienie WP i WN tudzież WP_1 , WN_1 , (rys. 19.), łączące dowolny punkt W z dwiema parami wierzchołków przeciwnych czworoboku $abcd$, za elementa odpowiednie pęku inwolucyjnego, który powstał z pęków jednokreślnych $W(P, N, \dots)$ i $W(P_1, N_1, \dots)$, przetnijmy następnie te pęki prostymi a i b , to natenczas otrzymamy dwa szeregi jednokreślne

(N, P) i (N_1, P_1) których oś kierownicza s_1 łączy punkt W z punktem przecięcia się M_1 prostych N_1P i NP_1 promieniowi zatem WM_1 pęku inwolucyjnego $W(N, N_1, \dots)$, przechodzącemu przez wierzchołek M_1 czworoboku $abcd$, odpowiada promień WM , który przechodzi przez wierzchołek przeciwny M .

Zagadnienie 1.: Mając dane dwie pary promieni odpowiednich pęku inwolucyjnego uzupełnić ten pęk w sposób liniowy.

Zagadnienie 2.: Wyznaczyć promienie podwójne i promienie normalne pęku inwolucyjnego hiperbolicznego.

Rozwiązanie: Uważajmy dany pęk inwolucyjny za utwór dwu pęków spółśrodkowych jednokreślnych $W(a, b, x)$ i $W(a_1, b_1, x_1)$, których promienie x i x_1 schodzą się odpowiednio z promieniami b_1 i b (rys. 20.), wyznaczmy następnie elementa podwójne e i f tych pęków (art. 31. zag. 1.), to takowe są promieniami podwójnymi pęku inwolucyjnego $W(a, a_1, b, b_1, \dots)$.

Proste r i r_1 , dzielące na dwie równe części kąty zawarte między promieniami e i f są promieniami normalnymi tego pęku.

Zagadnienie 3.: Wyznaczyć promienie normalne pęku inwolucyjnego eliptycznego, (rys. 21.).

Rozwiązanie. Przetnijmy dany pęk inwolucyjny $W(a, a_1, b, b_1, \dots)$ prostą l i zakresłmy na średnicach AA_1 i BB_1 koła k_1 i k_2 , to takowe przetną się w punktach M i N , prostokątnie symetrycznych względem prostej l . Zakreślmy następnie przez punkta W , M i N koło k_3 i połączmy wierzchołek W z punktami R i Q , w których prosta l przecina koło k_3 , to proste WQ i WR są promieniami normalnymi danego pęku.

Z konstrukcyi tej wynika bezpośrednio, że jeżeli dwie pary promieni odpowiednich są prostopadłe, natenczas wszystkie elementa odpowiednie pęku inwolucyjnego są prostopadłe; w tym przypadku bowiem wierzchołek W schodzi się z punktem M lub N . Taki pęk nazywamy pękiem inwolucyjnym prostokątnym.

0 kolineacyi dwu układów płaskich.

48. Dwa układy płaskie, powstałe z przecięcia wiązki (art. 1. d i e) dwiema płaszczyznami π i π^1 , nazywamy układami środkowo kolineacyjnymi albo perspektywicznymi (rys. 22.). Wierzchołek wiązki O nazywamy środkiem, a prostą t , podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się, nazywamy osią kolineacyi.

Punkta A i $A_1, \dots$ jakoteż proste l i $l_1, \dots$ układów π i π^1 , leżące na tych samych promieniach względnie płaszczyznach wiązki, są elementami odpowiednimi owych układów.

Pomiędzy dwoma układami środkowo kolineacyjnymi zachodzą tedy następujące związki:

a) Jednemu punktowi układu π odpowiada tylko jeden punkt w układzie π^1 , i wzajemnie.

b) Dwa odpowiednie punkta leżą na prostej przechodzącej przez środek kolineacyi.

c) Dwie odpowiednie proste leżą na płaszczyźnie przechodzącej przez środek kolineacyi, i przecinają się w punkcie, leżącym na osi kolineacyi.

d) Punktem $A, B, \dots$ układu π , leżącym na prostej l , odpowiadają w układzie π^1 punkta $A_1, B_1, \dots$, leżące na prostej odpowiedniej l_1 .

Z powyższych określeń wnosimy, że szeregom i pękom jednego układu odpowiadają w układzie drugim szeregi i pęki perspektywiczne z owymi utworami.

49. Niech będzie dana wiązka i dwie płaszczyzny π i π^1 , przecinające się podług prostej t , (rys. 22.).

Przesuńmy przez środek wiązki O płaszczyzny (O, z_1) i (O, r) , odpowiednio równoległe do płaszczyzn π i π^1 , i wyznaczmy proste r i z_1 podług których płaszczyzny π i (O, r) , tudzież π^1 i (O, z_1) przecinają się, to tym prostym odpowiadają w układach płaskich π^1 i π proste leżące w nieskończoności.

Proste r i z_1 nazywamy osiami wzajemnymi układów środkowo kolineacyjnych π i π^1 .

Osi wzajemne są równoległe do osi kolineacyjnej t .

Odległość prostych t i r równa jest odległości środka kolineacji O od wsi z_1 a odległości prostych t i z_1 równa jest odległości środka O od osi r .

50. Niech będą dane dwa układy płaskie środkowo kolineacyjne a nadto dwie proste odpowiednie l i l_1 , (rys. 22.). Punkтови, leżącemu w nieskończoności na prostej l , odpowiada punkt Z_1 , który leży na wsi z_1 , a punktowi leżącemu w nieskończoności na prostej l_1 odpowiada punkt R , który leży na osi r .

Jeżeli obrócimy płaszczyznę π około osi t w ten sposób, aby się zeszyła z płaszczyzną π^2 , jeżeli nadto obrócimy punkt O około osi z_1 w tym samym kierunku o kąt OP_2 , równy kątowi $\pi\pi^2$, natenczas układy płaskie π^1 i π^2 są środkowo kolineacyjne. Środek tej kolineacji znajduje się w punkcie O_2 .

Jakoż punkt przecięcia się T prostych l i l_1 nie zmienia swego położenia podczas obrotu płaszczyzny π , punkt Z_1 nie zmienia również swego położenia podczas obrotu płaszczyzny (O, z_1) , albowiem proste l i OZ_1 są zawsze równoległe; proste l_1 i l_2 są tedy elementami odpowiednimi układów π^1 i π^2 . Z trójkątów podobnych ORA i OZ_1A_1 wynika nadto, że:

$$A_1Z_1 = \frac{OR \cdot OZ_1}{AR},$$

że zatem położenie punktu A_1 w układzie π^1 , odpowiadającego punktowi A układu π , zależy od ilości, które przy powyżej określonych obrotach płaszczyzn π i (O, z_1) nie zmieniają się; punkt A_1 odpowiada tedy punktowi A_2 układu π^2 .

Jeżeli tedy wykonamy układy płaszczyzn π i (O, z_1) na płaszczyznę π^1 , natenczas otrzymamy dwa układy płaskie środkowo kolineacyjne i złączone na jednej płaszczyźnie. Środek tej kolineacji schodzi się z kładami $[O]$ punktu O , a oś wzajemna układu π , odpowiadająca prostej układu π^1 , leżące w nieskończoności schodzi się z kładem (r) prostej r .

51. Kolineację środkową dwu układów złączonych na jednej płaszczyźnie wyznaczają:

a) Środek $[O]$, oś t i dwa punkta odpowiednie A i A_1 (rys. 23.). Łącząc bowiem dowolny punkt B z punktem A , otrzymamy prostą l , której odpowiada w układzie π^2 prosta l_1 , przechodząca przez punkt A_1 i przez punkt przecięcia się T prostych l i t .

Promień $[O]B$ przecina tedy prostą l_1 w punkcie B_1 układu π^1 , odpowiadającym punktowi B układu π .

b) Dwa trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ (rys. 24.), posiadające tę własność, że proste AA_1 , BB_1 i CC_1 , łączące wierzchołki odpowiednie, przecinają się w jednym punkcie $[O]$.

Boki odpowiednie tych trójkątów AB i A_1B_1 , BC i B_1C_1 , CA i CA_1 przecinają się w punktach, leżących na linii prostej t , która jest osią kolineacji. Jakoż proste $[O]A$, $[O]B$ i $[O]C$ można uważać za rzuty krawędzi bocznych ostrosłupa trójsiennego, a trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ za rzuty dwu trójkątów podług których dwie płaszczyzny π^m i π^n ów ostrosłup przecinają, proste tedy AB i A_1B_1 , BC i B_1C_1 , CA i CA_1 przecinają się w punktach, leżących na rzucie prostej, podług której płaszczyzny π^m i π^n przecinają się.

c) Dwa trójboki abc i $a_1b_1c_1$, których boki odpowiednie a i a_1 , b i b_1 , c i c_1 przecinają się w punktach, leżących na prostej t (rys. 24.). Proste, łączące wierzchołki odpowiednie tych trójboków przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem kolineacji.

Jakoż trójboki dane można uważać za rzuty dwu trójboków $a_mb_mc_m$ i $a_nb_nc_n$ leżących na płaszczyznach π^m i π^n i posiadających tę własność, że proste a_m i a_n , b_m i b_n , c_m i c_n przecinają się w punktach leżących na prostej t . Płaszczyzny, przesunięte przez proste a_m i a_n , b_m i b_n , c_m i c_n ograniczają kąt bryłowy trójsienny, którego krawędzie przechodzą przez wierzchołki trójboków abc i $a_1b_1c_1$, rzuty przeto tych krawędzi przecinają się w rzucie $[O]$ wierzchołka owego kąta bryłowego i przechodzą przez wierzchołki trójboków abc i $a_1b_1c_1$.

Zagadnienie 1: Wyznaczyć osi wzajemne dwu układów środkowo kolineacyjnych, złączonych na płaszczyźnie, jeżeli środek $[O]$, oś kolineacji t i punkta odpowiednie A i A_1 są dane, (rys. 23.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez punkt A prostą l i wyznaczmy prostą odpowiednią l_1 , poprowadźmy następnie przez środek kolineacji promienia $[O]Z_1$ i $[O]R$ odpowiednio równoległe do l i l_1 , to proste l_1 i $[O]Z_1$ tudzież l i $[O]R$ przecinają się w punktach Z_1 i R , które odpowiadają punktom leżącym w nieskończoności na prostych l i l_1 . Jeżeli tedy poprowadzimy przez R i Z_1 proste r i z_1 równoległe do osi kolineacji t , natenczas otrzymamy osi wzajemne.

Z równoległoboku OZ_1TR wynika, że odległość środka kolineacji od osi z_1 równa jest odległości prostych r i t , a nadto, że oś r znajduje się w takim samym położeniu względem osi t jak środek kolineacji względem osi z_1 .

Zagadnienie 2: Dany jest środek kolineacji O a nadto osi wzajemne r i z_1 dwu układów płaskich π i π^1 , złączonych na płaszczyźnie; wyznaczyć wielokąt $M_1N_1P_1$ układu π^1 , odpowiadający wielokątowi MNP układu π , (rys. 25.).

Rozwiązanie: Wyznaczmy punkta przecięcia się T i R prostej MN z osiami t i r , to punkt T jest elementem odpowiednio wspólnym obu układów punktowi zaś R odpowiada w układzie π^1 punkt, leżący w nieskończoności na promieniu OR . Jeżeli tedy poprowadzimy przez T , równoległą do OR natenczas otrzymamy prostą układu π^1 , odpowiadającą prostej MN . Punkta przecięcia się M_1 i N_1 promieni OM i ON z prostą TZ_1 są punktami układu π^1 , odpowiadającymi punktom M i N .

Wyznamy następnie punkt przecięcia się T_1 prostej NP z osią kolineacji i połączmy takowy z punktem N_1 , to prosta N_1P_1 odpowiada w układzie π^1 prostej NP , a punkt przecięcia T_1 promienia OP z prostą N_1P_1 jest elementem układu π^1 , odpowiadającym punktowi P układu π .

Uwaga: Jeżeli oś wzajemna r przecina wielokąt MNP ... układu π w „ n ” punktach, natenczas wielokąt odpowiedni $M_1N_1P_1$... układu π^1 rozciąga się w „ n ” kierunkach do nieskończoności.

Jeżeli zaś oś wzajemna z_1 przecina wielokąt $M_1N_1P_1$... w „ n ” punktach, natenczas wielokąt MNP rozciąga się w „ n ” kierunkach do nieskończoności.

52. Poprowadźmy przez środek kolineacji O dwu układów płaskich π i π^1 , złączonych na jednej płaszczyźnie, promień p (rys. 26.) i wyznaczmy punkta odpowiednie A i A_1 , B i B_1 , ..., leżące na tym promieniu, to natenczas otrzymamy dwa szeregi jednokreślne $(A, B, \dots)$ i $(A_1, B_1, \dots)$ (art. 48.), których punkta podwójne schodzą się ze środkiem kolineacji i z punktem przecięcia się T prostych p i t .

Wiadomo, że stosunek podwójnego podziału punktów podwójnych i punktów odpowiednich w dwu szeregach jednokreślnych, złączonych na wspólnej podstawie, jest ilością stałą.

A zatem: $(OTAA_1) = (OTBB_1) = \dots = \Delta$.

Poprowadźmy następnie przez środek O drugi promień q i wyznaczmy punkta odpowiednie M i M_1 , N i N_1 , leżące na tym promieniu, to stosunki podwójnego podziału (OT_1MM_1) i $OTAA_1$, OT_1NN_1 i $OTBB_1$, ... są równe; albowiem punkta O , T_1 , N , N_1 i O , T , B , B_1 można uważać za przekroje pęków $S(O, T, A, A_1)$ i $S(O, T, B, B_1)$ prostymi p i q .

A zatem: Stosunek podwójnego podziału, $OTXX_1$, w jakim punkta odpowiednie X i X_1 dwu układów środkowo kolineacyjnych, złączonych na jednej płaszczyźnie, dzieli odcinek OT prostej XX_1 , zawarty między środkiem i osią kolineacji, jest ilością stałą. Wartość tego stosunku nazywamy cechą albo charakterystyką kolineacji.

53. Jeżeli do stosunku podwójnego podziału, wyrażającego cechę kolineacji wprowadzimy punkta wzajemne i odpowiadające tymże punkta, leżące w nieskończoności, natenczas wyrazimy cechę zapomocą stosunku pojedynczego podziału.

$$\text{Jakoż 1.) } \Delta = (OFZ^\infty Z_1) = \frac{OZ^\infty}{TZ^\infty} : \frac{OZ_1}{TZ_1} = 1 : \frac{OZ_1}{TZ_1} = \frac{TZ_1}{OZ_1}.$$

$$2.) \Delta = (OTRR_1^\infty) = \frac{OR}{TR} : \frac{OR_1^\infty}{TR_1^\infty} = \frac{OR}{TR}.$$

Zagadnienie: Wyznaczyć osi wzajemne dwu układów środkowo kolineacyjnych, jeżeli oś, środek i cecha kolineacji są dane.

54. a) Jeżeli cecha kolineacji równa jest jedności odjemnej, natenczas osi wzajemne r i z_1 schodzą się na jednej prostej, której odległości od środka i od osi kolineacyjnej są równe.

Szeregi jednokreślne punktów odpowiednich, które leżą na promieniach, przechodzących przez środek kolineacji, tworzą szereg involucyjny hiperboliczny, albowiem punkta wzajemne tych szeregów R i Z_1 schodzą się a punkta podwójne są rzeczywiste.

Taką kolineację dwu układów płaskich, złączonych na jednej płaszczyźnie, nazywamy kolineacją involucyjną.

b) Jeżeli środek kolineacji leży w nieskończoności, natenczas oś kolineacji dzieli odcinki, zawarte między punktami odpowiednimi w stosunku stałym; w tym przypadku bowiem cecha:

$$\Delta = (O^\infty TAA_1) = \frac{O^\infty A}{TA} : \frac{O^\infty A_1}{TA_1} = \frac{TA_1}{TA}.$$

Taką kolineację nazywamy powinowactwem układów płaskich.

Osi wzajemne układów powinowatych schodzą się na prostej w nieskończoności, prostym tedy równoległym jednego układu odpowiadają proste równoległe w układzie drugim.

Powinowactwo, którego cecha równa jest jedności odjemnej, nazywamy symetrią osiową; punkta odpowiednie bowiem układów leżą w tym przypadku po przeciwnych stronach osi w równej od niej odległościach.

c) Jeżeli oś kolineacji leży w nieskończoności, natenczas środek kolineacji dzieli odcinki, zawarte między punktami odpowiednimi, w stosunku stałym, albowiem cecha kolineacji:

$$\Delta = OT^\infty AA_1 = \frac{OA}{T^\infty A} : \frac{OA_1}{T^\infty A_1} = \frac{OA}{OA_1}.$$

Taką kolineację nazywamy podobieństwem układów. Osi wzajemne układów podobnych schodzą się z prostą, leżącą w nieskończoności; prostym tedy równoległym jednego układu odpowiadają proste równoległe w układzie drugim.

Podobieństwo, którego cecha jest równa jedności odjemnej, nazywamy symetrią środkową; punkta odpowiednie bowiem układów leżą w tym przypadku po przeciwnych stronach środka w równych od niego odległościach.

Jeżeli cecha podobieństwa równa jest jedności dodatniej, natenczas punkta odpowiednie układów schodzą się, z podobieństwa tedy powstaje przystawanie układów.

55. Jeżeli dwa układy π i π^1 , środkowo kolineacyjne, w ten sposób przesuniemy, że punkta odpowiednie nie będą leżały na prostych, przechodzących przez środek kolineacji, a proste odpowiednie nie będą się przecinały na osi kolineacji, nie zmieniając atoli przy tem przesunięciu wzajemnego położenia elementów, natenczas otrzymamy układy kolineacyjne w położeniu ogólnem.

Kolineację dwu układów płaskich π i π^1 w położeniu ogólnem wyznaczają cztery pary punktów odpowiednich, z których trzy nie leżą na linii prostej, albo cztery pary prostych odpowiednich, z których trzy nie przechodzą przez jeden punkt.

Jakoż niech będą dane cztery punkta A, B, C i D układu π i cztery odpowiednie punkta A_1, B_1, C_1 i D_1 układu π^1 a nadto punkt X układu π , założmy sobie wyznaczyć punkt odpowiedni X_1 układu π^1 .

Połączmy w tym celu A z B, C, D i X i B z A, C, D, X , połączmy również A_1 z B_1, C_1, D_1 i B_1 z A_1, C_1, D_1 , to natenczas otrzymamy pęki jednokreślne $A(B, C, D, X, \dots)$ i $A_1(B_1, C_1, D_1, \dots)$, tudzież $B(A, C, D, X, \dots)$ i $B_1(A_1, C_1, D_1, \dots)$.

Jeżeli tedy wyznaczmy promienie pęków $A_1(\dots)$ i $B_1(\dots)$, odpowiadające promieniom AX i BX pęków $A(\dots)$ i $B(\dots)$, to punkt przecięcia się tychże będzie elementem układu π^1 , odpowiadającym punktowi X układu π .

W podobny sposób można wykazać, że mając dane cztery pary prostych odpowiednich a, b, c, d i a_1, b_1, c_1, d_1 dwu układów kolineacyjnych π i π^1 , dowolnej prostej jednego układu odpowiada ściśle wyznaczona prosta w układzie drugim.

Zagadnienie: Dane są cztery pary prostych odpowiednich a i a_1 , b i b_1 , c i c_1 , d i d_1 dwu układów kolineacyjnych w położeniu ogólnym, sprowadzić te układy do położenia środkowego.

Rozwiązanie: Wyznamy punkta przecięcia się B, C, D i B, E, F prostych a i b z prostymi b, c, d i a, c, d a nadto punkta przecięcia się B_1, C_1, D_1 i B_1, E_1, F_1 prostych a_1 i b_1 z prostymi b_1, c_1, d_1 i a_1, c_1, d_1 natenczas otrzymamy szeregi jednokreślne:

$(B, C, D \dots)$ i $(B_1, C_1, D_1 \dots)$ tudzież $(B, E, F, \dots)$ i $(B_1, E_1, F_1 \dots)$.

Wyznamy następnie punkta wzajemne R^a i Z^a_1 tudzież R^b i Z^b_1 tych szeregów, to proste $R^a R^b$ i $Z^a_1 Z^b_1$ są osiami wzajemnymi r i z_1 układów kolineacyjnych π i π^1 .

Wiadomo, że proste, łączące środek kolineacji z punktami Z^a_1 i Z^b_1 , w których oś wzajemna z_1 przecina się z prostymi c_1 i d_1 , są odpowiednio równoległe do prostych c i d .

Jeżeli tedy zakreslimy na odcinku $Z^a_1 Z^b_1$ koło k_1 , którego kąty obwodowe, opierające się swemi ramionami o punkta Z^a_1 i Z^b_1 , są równe kątowi ab , jeżeli nadto zakreslimy na cięciwie $Z^c_1 Z^d_1$ koło k_2 , którego kąty obwodowe, opierające się swemi ramionami o punkta Z^c_1 i Z^d_1 , są równe kątowi cd , to owe koła przetną się w punktach O_1 i O_2 , z którymi środek kolineacji układów danych się schodzi.

Wiadomo również, że proste, łączące środek kolineacji z punktami R^a i R^b , są równoległe do prostych a_1 i b_1 a proste, łączące środek kolineacji z punktami R^c i R^d , w których proste c i d przecinają się z osią r , są równoległe do prostych c_1 i d_1 . Jeżeli tedy zakreslimy na odcinku $R^a R^b$ koło k_3 , którego kąty obwodowe, opierające się swemi ramionami o punkta R^a i R^b , są równe kątowi $a_1 b_1$, jeżeli nadto zakreslimy na cięciwie $R^c R^d$ koło k_4 , którego kąty obwodowe opierające się swemi ramionami o punkta R^c i R^d , są równe kątowi $c_1 d_1$, to koła k_3 i k_4 przetną się w punktach O_3 i O_4 , z którymi środek kolineacji się schodzi.

Przesuńmy tedy układ π^1 w ten sposób, aby punkt O_1 lub O_2 zeszedł się z punktami O_3 lub O_4 , obróćmy nadto tenże układ tak, aby osi wzajemne r i z_1 były równoległe, to natenczas sprowadzimy układy dane π i π^1 do położenia środkowego.

0 utworach pęków i szeregów jednokreślnych.

56. Jeżeli dwa punkta W i W_1 okręgu koła k połączymy z punktami $A, B, C, \dots$ tegoż okręgu (rys. 27.) natenczas otrzymamy dwa pęki jednokreślne $W(a, b, c, \dots)$ i $W_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$ przystające, o kierunkach obrotu promieni zgodnych; albowiem kąty ab i $a_1 b_1$, ac i $a_1 c_1, \dots$ zawarte między promieniami odpowiednimi tych pęków są równe.

W miarę, jak promienie pęków $W(a, b, \dots)$ i $W_1(a_1, b_1, \dots)$ zbliżają się do prostej WW_1 , łączącej wierzchołki, zbliżają się promienie odpowiednie

pęków $W_1(a_1, b_1, \dots)$ i $W(a, b, \dots)$ do stycznych q_1 i p , poprowadzonych do koła k w punktach W_1 i W .

A zatem: Punkta okręgu koła są wierzchołkami pęków przystających, których promienie odpowiednie przecinają się w punktach, leżących na tymże okręgu. Promieniowi, łączącemu wierzchołki pęków, odpowiadają styczne, poprowadzone do koła w tych wierzchołkach.

57. Wyznamy punkta przecięcia się $A, B, \dots$ i $A_1, B_1, \dots$ stycznych w i w_1 , poprowadzonych do koła k , ze stycznymi $a, b, \dots$ i połączmy środek O z tymi punktami, to natenczas otrzymamy dwa pęki jednokreślne $O(A, B, \dots)$ i $O(A_1, B_1, \dots)$ (rys. 28.), kąty bowiem AOA_1 ; $BOB_1, \dots$ są równe połowie kąta, zawartego między promieniami styczności OP i OQ_1 stycznych w i w_1 , szeregi zatem $(A, B, \dots)$ i $(A_1, B_1, \dots)$ są jednokreślne.

W miarę, jak elementa szeregów $(A, B, \dots)$ i $(A_1, B_1, \dots)$ zbliżają się do punktu przecięcia się podstaw w i w_1 zbliżają się elementa odpowiednie szeregów $(A_1, B_1, \dots)$ i (A, B) do punktów styczności Q_1 i T .

A zatem: Dwie styczne koła są podstawami szeregów jednokreślnych, których dwa odpowiednie elementa są punktami przecięcia się dowolnej stycznej tego koła z owymi stycznymi. Punktom styczności podstaw odpowiadają elementa, schodzące się z punktem, w którym podstawy przecinają się.

58. Przesuńmy przez koło k , leżące na płaszczyźnie π stożek (O, k) i przetnijmy takowy płaszczyzną π^1 , to otrzymany przekrój c^2 będzie elipsą, parabolą lub hiperbolą, stósownie do tego, czy płaszczyzna π^1 przecina wszystkie tworzące stożka (O, k) , czy jest równoległą do jednej albo do dwu tworzących tegoż.

Krzywe k i c^2 są środkowo kolineacyjne. Wierzchołek O jest środkiem a prosta t , podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się, jest osią kolineacji. Punkta odpowiednie koła k i krzywej c^2 leżą na tworzących stożka, a styczne, poprowadzone w punktach odpowiednich do krzywych k i c^2 leżą na płaszczyznach stycznych stożka (O, k) , poprowadzonych wzdłuż tworzącej, łączącej owe punkta.

Wiadomo, że w układach kolineacyjnych utworom jednokreślnym jednego układu odpowiadają utwory jednokreślne w układzie drugim.

Wszelkie tedy twierdzenie o kole, opierające się na jednokreślności szeregów i pęków, są w równej mierze ważne dla elipsy, paraboli i hiperboli.

A zatem: a) Dwa punkta elipsy, paraboli lub hiperboli są wierzchołkami dwu pęków jednokreślnych, których promienie odpowiednie przecinają się w punktach, leżących na tychże krzywych. Stycznym, poprowadzonym w wierzchołkach pęków, odpowiadają promienie, schodzące się na prostej, łączącej wierzchołki.

b) Dwie styczne elipsy, paraboli lub hiperboli są podstawami dwu szeregów jednokreślnych, których dwa odpowiednie leżą na dowolnej stycznej owych krzywych. Punktom styczności podstaw odpowiadają elementa, schodzące się z punktem, w którym podstawy przecinają się.

59. Z łatwością atoli można udowodnić, że miejsce geometryczne punktów przecięcia się promieni odpowiednich dwu pęków jednokreślnych jest krzywą kolineacyjną z kołem, a więc elipsą, parabolą lub hiperbolą, a nadto, że proste łączące punkta odpowiednie dwu szeregów jednokreślnych są stycznymi krzywej kolineacyjnej z kołem.

a) Jakoż, niech będą dane dwa pęki jednokreślne $W(a, b, c, \dots)$ i $W_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$ (rys. 29). Przyjmijmy, że promień a_1 schodzi się z prostą, łączącą wierzchołki WW_1 , i zakreślmy koło k , stykające się z promieniem a , w punkcie W , wyznaczmy następnie punkta przecięcia się $W_2, 1', 2'$ koła k z promieniami a_1, b, c a nadto punkta przecięcia się 1 i 2 promieni b i b_1 tudzież c i c_1 ; połączmy nareszcie punkt W_2 z punktami $1', 2', \dots$ okręgu koła, to natenczas otrzymamy pęk $W_2(1', 2', \dots)$ jednokreślny z pękiem $W(a, b, c, \dots)$, a jednokreślny i perspektywiczny z pękiem $W_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$; w miarę bowiem, jak punkt $1'$ zbliża się do punktu W zbliża się promień b_1 do prostej WW_1 . Promienie tedy $W_1 1'$ i $W_1 1, W_2 2'$ i $W_2 2, \dots$ przecinają się w punktach $T_1, T_2, \dots$ leżących na prostej t , a punkta $1'$ i $1, 2'$ i 2 koła k i miejsca geometrycznego c^2 punktów przecięcia się promieni odpowiednich b i b_1, c i $c_1, \dots$ pęków danych leżą na prostych, przechodzących przez punkt W . Krzywe tedy k i c^2 są środkowo kolineacyjne; punkt W jest środkiem a prosta $T_1 T_2$ jest osią kolineacji.

b) Niech będą dane dwa szeregi jednokreślne $(A, B, T, \dots)$ i $(A_1, B_1, T_1, \dots)$ (rys. 30). Przyjmijmy, że punkt P_1 schodzi się z punktem przecięcia się podstaw w i w_1 szeregów danych i zakreślmy koło k , stykające się z prostą „ w ” w punkcie T , poprowadźmy następnie z punktów $A, B, \dots$ styczne do koła k i połączmy punkta A i A_1 tudzież B i B_1 ; wyznaczmy nareszcie punkta przecięcia prostych $AA_1, BB_1, \dots$ ze styczną w_2 , poprowadzoną z punktu T_1 do koła k , to natenczas otrzymamy szereg $(A_2, B_2, \dots)$ jednokreślny z szeregiem $(A, B, \dots)$, a jednokreślny i perspektywiczny z szeregiem $(A_1, B_1, \dots)$; w miarę bowiem jak styczna AA_2 zbliża się do prostej w_2 zbliża się punkt A_1 do punktu T_1 . Proste tedy $A_1 A_2, B_1 B_2, \dots$ przecinają się w punkcie O , a styczne AA_1 i AA_2, BB_1 i $BB_2, \dots$ przecinają się w punktach, leżących na prostej w . Koło k tedy i krzywa obwiednia prostych, łączących odpowiednie punkta pęków jednokreślnych $(A, B, \dots)$ i $(A_1, B_1, \dots)$, są środkowo kolineacyjne.

60. Pięć punktów 1, 2, 3, 4, 5 wyznacza przekrój stożkowy; łącząc bowiem 1 i 2 z punktami 3, 4, 5 otrzymamy trzy pary promieni 13 i 23, 14 i 24, 15 i 25 dwu pęków jednokreślnych, których odpowiednie elementa przecinają się w punktach przekroju stożkowego.

Jeżeli punkta 3, 4 i 5 leżą na linii prostej l , natenczas pęki 1(3, 4, 5, ...) i 2(3, 4, 5, ...) są perspektywiczne, przekrój stożkowy przedstawia się wówczas w postaci dwu prostych l i 12.

Zagadnienie: Wyznaczyć punkta przecięcia się prostej l z przekrojem stożkowym c^2 , którego pięć punktów 1, 2, 3, 4, 5 jest danych.

Rozwiązanie: Punkta przecięcia się prostej l z promieniami pęków 1(3, 4, 5, ...) i 2(3, 4, 5, ...) wyznaczają dwa szeregi jednokreślne, których punkta podwójne E i F są punktami przecięcia się prostej l z krzywą c^2 ,

w tych punktach bowiem przecinają się promienie odpowiednie 1*E* i 2*E*, tudzież 1*F* i 2*F* pęków 1(3, 4, 5, ...) i 2(3, 4, 5, ...).

Uwaga: Krzywą płaską, którą dowolna prosta przecina w „ n ” punktach nazywamy krzywą rzędu n -tego; przekrój stożkowy jest tedy krzywą rzędu drugiego.

61. Pięć stycznych 1, 2, 3, 4, 5 wyznacza przekrój stożkowy c^2 , punkta przecięcia się bowiem prostych 1 i 2 ze stycznymi 3, 4 i 5 wyznaczają dwa szeregi $(A, B, C, \dots)$ i $(A_1, B_1, C_1, \dots)$, łącząc tedy elementa odpowiednie X i $X_1, \dots$ tychże otrzymamy dowolną ilość stycznych krzywej c^2 .

Jeżeli styczne 3, 4 i 5 przechodzą przez jeden punkt O , natenczas szeregi $(A, B, C, \dots)$ i $(A_1, B_1, C_1, \dots)$ są perspektywiczne, a przekrój stożkowy przedstawia się w postaci dwu punktów; mianowicie punktu O i punktu przecięcia się prostych 1 i 2.

Zagadnienie: Mając danych pięć stycznych przekroju stożkowego c^2 : 1, 2, 3, 4 i 5, poprowadzić z dowolnego punktu W styczne do tej krzywej.

Rozwiązanie: Połączmy punkt W z punktami A, B, C i A_1, B_1, C_1 , w których styczne 1 i 2 przecinają się ze stycznymi 3, 4 i 5, to natenczas otrzymamy dwa pęki jednokreślne spółśrodkowe, których promienie podwójne e i f są stycznymi krzywej c^2 .

Uwaga: Krzywą płaską, do której z dowolnego punktu można poprowadzić „ n ” stycznych, nazywamy krzywą klasy n -tej; przekrój stożkowy jest tedy krzywą klasy drugiej.

62. Twierdzenie Pascala. Sześć punktów przekroju stożkowego wyznacza sześciokąt wpisany w tę krzywą, którego boki przeciwległe przecinają się w punktach, leżących na linii prostej.

Jakoż niech będzie danych sześć punktów 1, 2, 3, 4, 5 i 6 przekroju stożkowego c^2 (rys. 31). Połączmy 1 i 5 z punktami 2, 3, 4 i 6, to natenczas otrzymamy dwa pęki jednokreślne 1(2, 3, 4, 6) i 5(2, 3, 4, 6); przekroje tych pęków A, B, C, D i A_1, B_1, C_1, D_1 prostymi 34 i 23 są szeregami perspektywicznymi, albowiem dwa elementa odpowiednie tychże B i B_1 schodzą się w punkcie 3, proste zatem AA_1, CC_1 i DD_1 przecinają się w punkcie O . Atoli proste AA_1 i CC_1 schodzą się z bokami przeciwległymi 12 i 45, a w punktach D i D_1 przecinają się boki przeciwległe 23 i 56 tudzież 34 i 61. Punkta przecięcia się tedy D, O, D_1 boków przeciwległych sześciokąta 123456 wpisanego w przekrój stożkowy leżą na linii prostej.

Zagadnienie 1.: Mając danych pięć punktów 1, 2, 3, 4, 5 przekroju stożkowego c^2 (rys. 32.), wyznaczyć w sposób liniowy punkt przecięcia się tej krzywej z prostą l , przechodzącą przez punkt 5.

Rozwiązanie: Wyznaczymy punkta przecięcia się A i B prostych 12 i 45 tudzież 23 i l a nadto punkt C , w którym prosta 34 przecina się z prostą AB , to prosta 1*C* przecina się z prostą l w punkcie „6” przekroju stożkowego c^2 .

Zagadnienie 2.: Dane są punkta 1, 2, 3, 4, 5 przekroju stożkowego c^2 , wyznaczyć styczną, poprowadzoną do tej krzywej w punkcie 5. (rys. 33.).

Rozwiązanie: Styczną poprowadzoną do krzywej c^2 w punkcie 5 należy uważać za prostą, łączącą punkta 5 i 6 tej krzywej, następujące po sobie bezpośrednio.

Wyznaczmy tedy punkta przecięcia się A i C prostych 12 i 45 tudzież 34 i 61, a nadto punkt B , w którym proste AC i 23 przecinają się, to prosta, łącząca punkt 5 z punktem B jest styczną krzywej c^2 w punkcie 5.

Zagadnienie 3.: Dane są cztery punkta 1, 2, 3, 4 i styczna s , poprowadzona do przekroju stożkowego c^2 w punkcie 4, wyznaczyć punkt w którym prosta l , przechodząca przez punkt 1, przecina tę krzywą, (rys. 34.).

Rozwiązanie: Styczną, poprowadzoną do krzywej c^2 w punkcie 4, należy uważać za prostą, która łączy dwa bezpośrednio po sobie następujące punkta 4 i 5 tej krzywej.

Wyznaczmy tedy punkta przecięcia się A i C prostych 12 i s tudzież 34 i l , a nadto punkt B , w którym prosta 23 przecina się z prostą AC , to proste l i 5*B* przecinają się w punkcie 6, leżącym na krzywej c^2 .

Zagadnienie: Mając dane dwa punkta 1, 2, styczne s_1 i s_2 , poprowadzone w tych punktach do przekroju stożkowego i trzeci punkt tej krzywej, wyznaczyć zapomocą twierdzenia Pascala dalsze punkta i styczne tej krzywej.

Zagadnienie: Dana jest asymptota i trzy punkta hiperboli wyznaczyć drugą asymptotę.

Zagadnienie: Mając dane dwie asymptoty i jeden punkt hiperboli wyznaczyć dalsze punkta i styczne tej krzywej.

Zagadnienie: Danych jest pięć punktów hiperboli wyznaczyć asymptoty tej krzywej. (Przy rozwiązaniu tego zagadnienia musi być użyte do pomocy koło).

63. Twierdzenie Brianchon'a: Sześć stycznych przekroju stożkowego wyznacza sześciobok, opisany na tej krzywej, którego przekątne, łączące wierzchołki przeciwległe, przecinają się w jednym punkcie.

Jakoż niech będzie danych sześć stycznych 1, 2, 3, 4, 5, 6 przekroju stożkowego c^2 (rys. 35.). Wyznaczmy punkta przecięcia się M, N, P, Q i M_1, N_1, P_1, Q_1 stycznych 1 i 5 ze stycznymi 2, 3, 4 i 6 i połączmy punkt W , w którym proste 3 i 4 przecinają się, z punktami M, N, P, Q , a punkt W_1 , w którym proste 2 i 3 przecinają się, z punktami M_1, N_1, P_1, Q_1 , to natenczas otrzymamy dwa pęki perspektywiczne; promienie odpowiednie tedy WM i W_1M_1 , WP i WP_1 , WQ i W_1Q_1 przecinają się w punktach M, P_1 i B , leżących na linii prostej. Atoli punkta M i P_1 są wierzchołkami przeciwległymi sześcioboku 123456, a w punkcie B przecinają się przekątne WQ i WQ_1 tegoż wieloboku, łączące wierzchołki przeciwległe 23 i 56, tudzież 34 i 61.

Przekątne zatem sześcioboku, opisanego na przekroju stożkowym c^2 , łączące wierzchołki przeciwległe tegoż, przecinają się w punkcie B .

Zagadnienie 1.: Mając danych pięć stycznych 1, 2, 3, 4 i 5 krzywej rzędu drugiego c^2 , wyznaczyć styczną tej krzywej, która przechodzi przez punkt A , leżący na prostej 5.

Rozwiązanie: Poprowadźmy proste a i b , łączące punkta 12 i 45, tudzież A i 23, połączmy następnie punkt przecięcia się B prostych a i b z punktem 34, to prosta łącząca BC przecina się ze styczną 1 w punkcie P , przez który styczna AP krzywej c^2 przechodzi (rys. 36.).

Zagadnienie 2.: Mając danych pięć stycznych 1, 2, 3, 4, 5 przekroju stożkowego c^2 wyznaczyć punkt styczności stycznej 5.

Rozwiązanie: Punkt styczności stycznej 5 należy uważać za punkt przecięcia się dwu bezpośrednio po sobie następujących stycznych 5 i 6 krzywej c^2 . Połączmy tedy punkta 12 i 45 tudzież 34 i 51 prostymi a i b (rys. 37.) i poprowadźmy przez punkt przecięcia B i przez punkt 23 prostą c , to takowa przecina się ze styczną 5 w punkcie styczności tejże S .

Zagadnienie: Dane są cztery styczne przekroju stożkowego c^2 a nadto punkt styczności jednej z tychże, wyznaczyć punkt styczności drugiej.

Zagadnienie: Dane są trzy styczne 1, 2 i 3 przekroju stożkowego c^2 a nadto punkta styczności stycznych 1 i 2, wyznaczyć dalsze punkta i styczne tej krzywej.

Zagadnienie: Wyznaczyć kierunek osi paraboli, której cztery styczne 1, 2, 3, 4 są dane (piąta styczna leży w nieskończoności).

Rozwiązanie: Punkt styczności stycznej, leżącej w nieskończoności, z parabolą wyznacza kierunek osi tej krzywej.

Poprowadźmy tedy przez punkt przecięcia się stycznych 1 i 2 prostą, równoległą do stycznej 4, a przez punkt przecięcia się stycznych 3 i 4 prostą, równoległą do stycznej 1, i wyznaczmy punkt przecięcia się tych prostych, połączmy następnie punkt B z punktem przecięcia się stycznych 2 i 3, prostą a , to takowa jest równoległą do osi paraboli danej, (rys. 38.).

Zagadnienie: Udowodnić, że proste, łączące wierzchołki trójkąta, opisanego na przekroju stożkowym, z punktami styczności boków przeciwległych przecinają się w jednym punkcie.

64. Dajmy na to, że wierzchołki 1 i 2 tudzież 4 i 5 sześciokąta 123456, wpisanego w krzywą rzędu drugiego c^2 , (rys. 39.) schodzą się w punktach A i B , to natenczas styczne a i b , poprowadzone w punktach A i B są bokami 12 i 45 owego sześciokąta. Styczne a i b przecinają się przeto w punkcie M , który leży na prostej r , łączącej punkta przecięcia się P i Q boków 23 i 56 tudzież 34 i 61.

W taki sam sposób można wykazać, że styczne c i d , poprowadzone w wierzchołkach 3 i 6 do krzywej c^2 , przecinają się w punkcie N , leżącym na prostej r i t. d.

Punkta M i N są wierzchołkami przeciwległymi czworoboku $abcd$, opisanego na krzywej c^2 , a prosta MN jest przekątną tego czworoboku. A zatem:

Punkta przekątne czworokąta, wpisanego w krzywą rzędu drugiego c^2 , leżą na przekątnych czworoboku, którego boki są stycznymi, poprowadzonymi do krzywej c^2 w wierzchołkach owego czworokąta.

65. Wiadomo, że miejsce geometryczne punktów przecięcia się promieni odpowiednich w dwu pękach jednokreślnych jest przekrojem stożkowym. Zbadać jednak należy, kiedy dwa pęki tworzą elipsę, kiedy parabolę a kiedy hiperbolę.

Jeżeli w dwu pękach jednokreślnych znajdują się dwie pary promieni odpowiednich, które są równoległe, natenczas utwór tych pęków posiada dwa punkta rzeczywiste w nieskończoności, jest przeto hiperbolą.

Miejsce geometryczne punktów przecięcia się promieni odpowiednich w dwu pękach jednokreślnych, których jedna para elementów jest równo-

legła posiada jeden punkt rzeczywisty w nieskończoności, jest przeto parabolą.

Jeżeli nareszcie w dwu pękach jednokreślnych niema promieni odpowiednio równoległych, natenczas wszystkie punkta utworu tych pęków leżą w skończoności, utwór ten jest przeto elipsą lub kołem.

Celem zbadania, czy w danych pękach jednokreślnych $W(a, b, \dots)$ $W_1(a_1, b_1, \dots)$ znajdują się promienie odpowiednie, które są równoległe, prześnujemy pęk $W_1(\dots)$ równoległe do położenia pierwotnego, tak, aby wierzchołki W i W_1 nakryły się, to natenczas otrzymamy dwa pęki jednokreślne spółśrodkowe, które posiadają dwa promienie podwójne rzeczywiste, urojone lub schodzące się na jednej prostej.

W pierwszym przypadku znajdują się w pękach danych dwie pary promieni odpowiednich, które są równoległe; w drugim przypadku w pękach $W(\dots)$ i $W_1(\dots)$ niema promieni odpowiednich równoległych; w trzecim przypadku nareszcie znajduje się w pękach danych jedna para promieni odpowiednich, które są równoległe.

66. Wiadomo, że proste, łączące punkta odpowiednie dwu szeregów jednokreślnych, są stycznymi przekroju stożkowego. Zbadać jednak należy kiedy owe proste powlócą elipsę, kiedy parabolę, a kiedy hiperbolę.

Jeżeli szeregi jednokreślne $(A, B, \dots)$ i $(A_1, B_1, \dots)$ są podobne, natenczas prosta, leżąca w nieskończoności, jest styczną krzywej, powlóczonej prostemi $AA_1, BB_1, \dots$, ta krzywa jest tedy parabolą.

Celem zbadania, czy dwa szeregi jednokreślne niepodobne $(A, B, \dots)$ i $(A_1, B_1, \dots)$ wyznaczają elipsę czy hiperbolę, wyznaczmy punkta wzajemne R i Z_1 a nadto punkt Q_1 szeregu $(A_1, B_1, \dots)$, odpowiadający punktowi przecięcia się Q podstaw l i l_1 szeregów danych.

Jeżeli punkt Q_1 , który jak wiadomo jest punktem styczności przekroju stożkowego z podstawą szeregu $(A_1, B_1, \dots)$, leży na odcinku QZ_1 , natenczas ten przekrój jest elipsą; jeżeli zaś punkt Q_1 leży poza obrębem odcinka QZ_1 , natenczas ów przekrój jest hiperbolą.

W pierwszym przypadku bowiem proste $m, \dots$, poprowadzone między prostemi $Z^\infty Z_1$ i l równoległe do podstawy l , przecinają przekrój stożkowy w punktach rzeczywistych, proste zaś $p, \dots$, równoległe do podstawy l , które leżą poza obrębem części płaszczyzny, ograniczonej prostemi $Z^\infty Z_1$ i l , przecinają ową krzywą w punktach urojonych.

W drugim przypadku przecinają proste $p, \dots$ przekrój stożkowy w punktach rzeczywistych, a proste $m, \dots$ przecinają tę krzywą w punktach urojonych.

O biegunach i biegunowych przekrojów stożkowych.

67. Niech będzie dany przekrój stożkowy c^2 (rys. 40.) i punkt P , leżący w obrębie lub poza obrębem tej krzywej.

Poprowadźmy przez punkt P dwie proste, przecinające się z krzywą c^2 w punktach A, C, B, D i wykreślmy w tych punktach styczne a, b, c i d do krzywej c^2 , to natenczas otrzymamy czworokąt $ABCD$, wpisany w krzywą c^2 i czworobok $abcd$, opisany na tej krzywej.

Wiadomo, że punkta przekątne T, Q i R czworokąta $ABCD$ leżą na przekątnych p, q i r czworoboku $abcd$. Bok p trójboku biegunowego, leżący

naprzeciw wierzchołka P trójkąta biegunowego, nazywamy biegunową punktu P ze względu na przekrój stożkowy c^2 .

Biegunowa p przecina się z prostemi AC i BD w punktach U i V , tworzących z punktami P, A, C i P, B, D grupy harmoniczne $(PUAC) = -1$ $(PVBD) = -1$.

Punkt U i punkt przecięcia się M stycznych a i c wyznaczają biegunową p . Jeżeli tedy poprowadzimy przez biegun P dowolną prostą m , która przecina krzywą c^2 w punktach X i Y , natenczas punkt przecięcia się V_1 prostych p i m tworzy z punktami P, X, Y grupę harmoniczną $(PV_1XY) = -1$, a punkt przecięcia się N_1 stycznych x i y , poprowadzonych do krzywej c^2 w punktach X i Y , leży na prostej p .

Proste PE i PF , łączące biegun F z punktami, w których biegunowa p przecina się z krzywą c^2 , są stycznymi tej krzywej, jeżeli bowiem dwa punkta grupy harmoniczej schodzą się w jednym punkcie, natenczas i trzeci punkt tejże grupy schodzi się z tym samym punktem.

Biegunową tedy punktu P ze względu na przekrój stożkowy c^2 można określić jako:

a) Miejsce geometryczne punktów $Q, R, \dots$, w których przecinają się proste, łączące punkta przecięcia się krzywej c^2 z prostemi, przechodzącymi przez biegun P .

b) Miejsce geometryczne punktów przecięcia się $M, N, \dots$ stycznych a i c, b i $d, \dots$, poprowadzonych do krzywej c^2 w punktach A i C, B i $D, \dots$, w których proste, przechodzące przez biegun P krzywą c^2 przecinają.

c) Miejsce geometryczne punktów $U, V, \dots$, harmonicznie sprzężonych z biegunem P w grupach $(FUAC) = -1, (PVBD) = -1, \dots$

d) Jako cięciwę styczności stycznych krzywej c^2 , przechodzących przez biegun P .

68. Obierzmy na biegunowej p punktu ze względu na krzywą c^2 szereg punktów $V, V_1, \dots$ (rys. 41.) i połączmy elementa tegoż z punktem P , to proste $PV, PV_1, \dots$ przecinają się z krzywą c^2 w punktach C i D, X i $Y, \dots$, tworzących odpowiednio grupy harmoniczne $(PVCD) = -1$ i $(PV_1XY) = -1, \dots$, biegunowe tedy v, v_1 punktów $V, V_1, \dots$ przechodzą przez punkt P (art. 67.c).

Poprowadźmy następnie przez punkt P proste $s, s_1, \dots$ i wyznaczmy punkta przecięcia się tychże A i B, C i $D, \dots$ z krzywą c^2 wyznaczmy następnie punkta przecięcia się $M, N, \dots$ stycznych a i b, c i $d, \dots$, poprowadzonych do krzywej c^2 w punktach A i B, C i D , to takowe są biegunami prostych $s, s_1, \dots$ i leżą na prostej p . A zatem:

Biegunowe punktów, leżących na linii prostej, ze względu na przekrój stożkowy przechodzą przez biegun tej prostej, a bieguny prostych przechodzących przez jeden punkt leżą na biegunowej tego punktu.

Jeżeli biegun U zbliża się do punktu E , w którym biegunowa p przecina się z krzywą c^2 , natenczas punkt przecięcia się M biegunowych p i u zbliża się również do punktu E . Skoro tedy biegun U zejdzie się z punktem E , zejdzie się również i punkt M z punktem E . A zatem:

Biegunowa punktu, leżącego na przekroju stożkowym jest styczną, poprowadzoną do krzywej w tym punkcie.

69. Dwa punkta, posiadające tę własność, że biegunowa jednego punktu ze względu na przekrój stożkowy c^2 przechodzi przez punkt drugi nazywamy biegunami harmonicznie sprzężonymi.

Jeżeli P i Q są biegunami harmonicznie sprzężonymi ze względu na przekrój stożkowy c^2 , natenczas prosta PQ przecina się z krzywą c^2 w punktach, tworzących z biegunami grupę harmoniczną.

Dwie proste, posiadające tę własność, że biegun jednej prostej leży na prostej drugiej, nazywamy biegunowymi harmonicznie sprzężonymi. Jeżeli p i q są biegunowymi, harmonicznie sprzężonymi ze względu na krzywą c^2 , natenczas styczne, poprowadzone do tej krzywej z punktu przecięcia się R prostych p i q tworzą z temiż prostymi grupę harmoniczną.

70. Jeżeli punkta P i Q są harmonicznie sprzężone ze względu na przekrój stożkowy c^2 , natenczas biegun R prostej PQ jest harmonicznie sprzężony z punktami PQ . Punkta P , Q i R wyznaczają tedy trójkąt, którego boki są biegunowymi wierzchołków przeciwległych. Taki trójkąt nazywamy trójkątem biegunowo sprzężonym ze względu na przekrój stożkowy (rys. 40).

Z określenia biegunów i biegunowych wynika bezpośrednio, że punkta przekątne czworokąta wpisanego w krzywą rzędu drugiego c^2 są wierzchołkami, a przekątne czworoboku opisanego na tej krzywej są bokami trójkąta biegunowo sprzężonego. Jeden wierzchołek tego trójkąta leży w obrębie przekroju stożkowego c^2 , a dwa wierzchołki tegoż leżą poza obrębem krzywej c^2 .

71. Bieguny sprzężone ze względu na krzywą rzędu drugiego c^2 , leżące na linii prostej, tworzą szereg inwolucyjny.

Jakoż niech będą dane czworokąty $ABCD$, $ABXY$, ... wpisane w krzywą rzędu drugiego c^2 (rys. 41.), których boki przeciwległe AB , CD , XY , ... przecinają się w punkcie P , połączmy wierzchołki A i B z punktami C , X , ... i przetnijmy pęki $A(C, X, \dots)$ i $B(C, X, \dots)$ biegunową p , to natenczas otrzymamy dwa szeregi jednokreślne $(R, R_1, \dots)$ i $(Q, Q_1, \dots)$.

Elementa Q i R , Q_1 i R_1 , ... są biegunami sprzężonymi ze względu na krzywą c^2 a przeto elementami zamiennymi szeregów $(R, R_1, \dots)$ i $(Q, Q_1, \dots)$, te szeregi tworzą tedy szereg inwolucyjny $(Q, R, Q_1, R_1, \dots)$.

Punkta podwójne szeregu $(Q, R, Q_1, R_1, \dots)$ schodzą się z punktami E i F , w których biegunowa p przecina krzywą c^2 . Pojęcie tedy punktów przecięcia się prostej z przekrojem stożkowym c^2 , można rozszerzyć, określając takowe jako punkta podwójne szeregu inwolucyjnego biegunów sprzężonych ze względu na krzywą c^2 , które na tej prostej leżą.

Punkta przecięcia się tedy prostej z krzywą rzędu drugiego są rzeczywiste lub urojone, stosownie do tego, czy ów szereg jest hiperboliczny czy eliptyczny.

72. Biegunowe sprzężone ze względu na przekrój stożkowy c^2 , przechodzące przez jeden punkt, tworzą pęk inwolucyjny.

Jakoż niech będą dane czworoboki $abcd$, $abex$, ... (rys. 41.), opisane na przekroju stożkowym c^2 , których wierzchołki przeciwległe ab , cd , xy , ... leżą na prostej p ; wyznaczmy punkta przecięcia się stycznych a i b ze stycznymi c , x , ... i połączmy biegun P z temi punktami, to natenczas otrzymamy dwa pęki jednokreślne, których promienie odpowiednie, jako biegunowe har-

monicznie sprzężone ze względu na krzywą c^2 są zamienne, te pęki zatem tworzą pęk inwolucyjny.

Promienie podwójne tego pęku schodzą się ze stycznymi e i f , poprowadzonymi z punktu P do krzywej c^2 .

Pojęcia tedy stycznych, poprowadzonych do krzywej rzędu drugiego z danego punktu można rozszerzyć, określając takowe jako promienie podwójne pęku inwolucyjnego biegunowych sprzężonych ze względu na krzywą c^2 , przechodzących przez dany punkt. Styczne tedy, poprowadzone z pewnego punktu do krzywej c^2 , są rzeczywiste lub urojone, stosownie do tego, czy ów pęk jest hiperboliczny czy eliptyczny.

73. Niech będzie dany trójkąt biegunowo sprzężony PQR ze względu na krzywą rzędu drugiego c^2 (rys. 42.); połączmy dowolny punkt A krzywej c^2 z biegunami sprzężonymi Q i R i wyznaczmy punkta przecięcia się B i C prostych AQ i AR z przekrojem stożkowym c^2 , a nadto punkta M i N w których proste AB i AC przecinają się z biegunowymi punktów Q i R , to spostrzeżemy, że prosta BC przechodzi przez biegun P prostej QR ; stosunki bowiem podwójnego podziału $(ABMQ)$ i $(ACRN)$ są równe jedności odjemnej.

74. Mając dany trójbok pqr , biegunowo sprzężony ze względu na przekrój stożkowy c^2 , (rys. 42.), jeżeli wyznaczmy punkta przecięcia się dowolnej stycznej a z biegunowymi q i r i poprowadzimy przez te punkta styczne b i c do krzywej c^2 , natenczas przetną się takowe w punkcie, leżącym na biegunowej p . Jakoż połączmy prostą m punkt przecięcia się stycznych a i b z punktem, w którym biegunowe p i r przecinają się, a prostą n punkt przecięcia się stycznych a i c z punktem w którym biegunowe p i q przecinają się, to spostrzeżemy, że stosunki podwójnego podziału $(a b m q)$ i $(a c n r)$ są równe jedności odjemnej, promienie tedy b i c , m i r , q i n przecinają się w punktach, leżących na prostej p .

75. Biegunowa n punktu N^∞ , leżącego w nieskończoności na prostej l , ze względu na przekrój stożkowy c^2 dzieli na dwie równe części cięciwy AB , CD , ..., równoległe do prostej l (rys. 43.); albowiem punkta przecięcia się O_1 , ... prostych AB , ... z biegunową n są harmonicznie sprzężone z punktem N^∞ w grupach $(N^\infty O_1, A, B)$... Proste AC i BD tudzież BC i AD , a nadto styczne a i b tudzież c i d , poprowadzone do krzywej c^2 w punktach A i B , C i D , przecinają się w punktach, leżących na prostej n .

Prostą n nazywamy średnicą przekroju stożkowego c^2 .

Biegun M prostej, leżącej w nieskończoności, ze względu na krzywą c^2 dzieli na dwie równe części cięciwy EF ... przezeń przechodzące; punkt M bowiem jest harmonicznie sprzężony z punktami, leżącymi w nieskończoności w grupach (M, ∞, E, F) , ... (rys. 43.). Punkt M nazywamy środkiem przekroju stożkowego. Przez środek przechodzą średnice przekroju stożkowego, albowiem biegunowe punktów, leżących w nieskończoności, przechodzą przez biegun prostej, leżącej w nieskończoności.

76. Prosta, leżąca w nieskończoności, przecina się z krzywą rzędu drugiego c^2 w punktach U^∞ i V^∞ , które są punktami styczności stycznych u i v , poprowadzonych ze środka M do tej krzywej. Styczne u i v nazywamy asymptotami przekroju stożkowego c^2 .

Jeżeli punkta U^∞ i V^∞ są urojone, t. z. jeżeli krzywa c^2 jest elipsą, natenczas asymptoty są urojone, przecinają się jednak w punkcie rzeczy-

wistym M , który leży w obrębie krzywej. Średnice elipsy tedy przecinają tę krzywą w punktach rzeczywistych.

Jeżeli prosta, leżąca w nieskończoności, przecina krzywą c^2 w punktach rzeczywistych, t. z. jeżeli ta krzywa jest hiperbolą, natenczas asymptoty są rzeczywiste; środek przekroju stożkowego c^2 leży poza obrębem tej krzywej, a średnice przecinają się z krzywą c^2 częścią w punktach rzeczywistych, częścią w punktach urojonych.

Jeżeli nareszcie prosta, leżąca w nieskończoności, jest styczną przekroju stożkowego c^2 , albo innemi słowy, jeżeli ta krzywa jest parabolą, natenczas asymptoty schodzą się z prostą w nieskończoności; punkt styczności tejże jest niejako środkiem paraboli, średnice tedy są równoległe.

77. Średnicami sprzężonymi przekroju stożkowego nazywamy dwie średnice, z których jedna przechodzi przez biegun drugiej. Jeżeli tedy n i n_1 są średnicami sprzężonymi krzywej c^2 (rys. 43.), natenczas średnica n_1 dzieli na dwie równe części cięciwy, równoległe do n , a średnica n dzieli na dwie równe części cięciwy, równoległe do n_1 .

a) Średnice, równoległe do boków równoległoboku $ABCD$, wpisanego w przekrój stożkowy c^2 , są średnicami sprzężonymi tej krzywej, dwa punkta przekątne bowiem czworokąta $ABCD$ leżą w nieskończoności, a trzeci schodzi się ze środkiem M krzywej c^2 (rys. 44.).

Z tego wynika bezpośrednio: Cięciwy krzywej rzędu drugiego c^2 , łączące dowolny punkt X tej krzywej z punktami, w których dowolna średnica AC przecina się z tą krzywą, są równoległe do średnic sprzężonych.

b) Przekątne równoległoboku $abcd$, opisanego na przekroju stożkowym c^2 , są średnicami sprzężonymi tej krzywej; te przekątne bowiem i prosta, leżąca w nieskończoności, są bokami trójboku biegunowego ze względu na krzywą c^2 , (rys. 44.). Z tego wynika bezpośrednio: Proste, łączące środek przekroju stożkowego z punktami, w których dwie styczne równoległe a i c przecinają się z dowolną styczną x , są średnicami sprzężonymi tej krzywej.

c) Proste, łączące punkta $X, Y, \dots$ przekroju stożkowego c^2 z punktami A i C , w których średnica n przecina krzywą c^2 , wyznaczają na średnicy n_1 , sprzężonej z n szereg inwolucyjny, którego środek schodzi się ze środkiem M krzywej c^2 (rys. 44.). Jakoż szeregi $(U, V, \dots)$ i $(U_1, V_1, \dots)$, powstałe z przecięcia się pęków $A(X, Y, \dots)$ i $C(X, Y, \dots)$ prostą n_1 są jednokreślne, a elementa odpowiednie tychże są zamienne. Punktowi, leżącemu w nieskończoności na średnicy n_1 , odpowiada punkt M .

78. Średnice sprzężone przekroju stożkowego tworzą pęk inwolucyjny; albowiem są biegunowymi sprzężonymi ze względu na przekrój stożkowy i przechodzą przez jeden punkt — przez środek tej krzywej.

Promienie podwójne pędu inwolucyjnego średnic sprzężonych są asymptotami przekroju stożkowego, a promienie normalne są osiami tegoż.

Asymptoty dzielą tedy harmonicznie kąty, zawarte między średnicami sprzężonymi, a osi dzielą na dwie równe części kąty, zawarte między asymptotami.

Zagadnienie: Udowodnić, że wszystkie koła, leżące na płaszczyźnie, przechodzą przez te same dwa punkta urojone w nieskończoności.

Rozwiązanie: Niech będą dane koła $k_1, k_2, \dots$, a nadto pęki średnic sprzężonych tychże $(a_1, a'_1, b_1, b'_1, \dots, (a_2, a'_2, b_2, b'_2, \dots)$ i t. d., których promienie a_1 i a_2, b_1 i $b_2, \dots$ tudzież a'_1 i a'_2, b'_1 i $b'_2, \dots$ są równoległe, to takowe przecinają się z prostą w nieskończoności w punktach, tworzących szereg eliptyczny biegunów sprzężonych ze względu na wszystkie koła $k_1, k_2, \dots$. Punkta podwójne urojone tego szeregu J_1 i J_2 są tedy punktami przecięcia się wszystkich kół k_1, k_2 z prostą w nieskończoności.

Punkta J_1 i J_2 nazywamy punktami kołowymi.

Zagadnienie: Udowodnić, że odcinki prostej, zawarte między hiperbolą i asymptotami tejże, są równe.

O prawie biegunowej dwoistości.

79. Mając dany układ płaski i przekrój stożkowy c^2 , leżący na podstawie π tego układu, jeżeli wyznaczymy biegunowe $a, b, \dots$ punktów $A, B, \dots$ i bieguny $M, N, \dots$ prostych $m, n, \dots$ ze względu na krzywą c^2 , natenczas otrzymamy układ π^1 , biegunowo sprzężony z układem π .

Krzywą c^2 , która jest niejako łącznikiem układów π i π^1 , nazywamy kierownicą biegunowej dwoistości. Punktom i stycznym kierownicy c^2 odpowiadają styczne poprowadzone w tych punktach do krzywej c^2 względnie punkta styczności owych stycznych.

Pękom promieni i szeregom punktów jednego układu odpowiadają szeregi punktów i pęki promieni jednokreślne układu drugiego.

Jeżeli tedy przyjmiemy w układzie π dwa pęki jednokreślne $W(a, b, c, \dots)$ i $W_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$, tworzące krzywą rzędu drugiego c^2 , natenczas szeregi odpowiednie $(A', B', C', \dots)$ i $(A'_1, B'_1, C'_1, \dots)$, układu π^1 wyznaczają krzywą klasy drugiej c^2_1 , biegunowo sprzężoną z krzywą c^2 . Punktem przecięcia się promieni a i a_1, b i $b_1, \dots$ odpowiadają proste, łączące punkta A' i A'_1, B' i $B'_1, \dots$ a stycznymi krzywej c^2 , które, jak wiadomo, łączą dwa bezpośrednio po sobie następujące punkta tejże, odpowiadają punkta przecięcia się dwu bezpośrednio po sobie następujących stycznych krzywej c^2_1 , które, jak wiadomo, są stycznymi tej krzywej.

Trójkątowi PQR układu π , biegunowo sprzężonemu ze względu na krzywą c^2 , odpowiada w układzie π^1 trójbok $p'q'r'$, biegunowo sprzężony ze względu na krzywą c^2_1 ; własnościom bowiem trójkąta PQR , wypływającym z jednokreślności szeregów i pęków, odpowiadają dwoiste własności trójboku, wypływające z własności pęków i szeregów.

Jeżeli tedy w twierdzeniach, wyrażających pewne związki rzutowe między elementami utworu u , należącego do układu π zamienimy wyrazy „punkta“ i „proste“, natenczas otrzymamy twierdzenia, wyrażające związki między elementami utworu u^1 , biegunowo sprzężonego z utworem u .

Twierdzenie o czworokącie i czworoboku zupełnym, twierdzenia o sześciokącie wpisanym i sześcioboku opisanym na przekroju stożkowym, konstrukcje, których celem uzupełnienia szeregów i pęków jednokreślnych i t. d. są twierdzeniami względnie konstrukcjami biegunowo dwoistymi.

Zagadnienie. Mając dane koła k i k_1 , (rys. 45.), z których k jest kierownicą biegunowej dwoistości układów π^1 i π^2 , wyznaczyć krzywą c^2 , odpowiadającą w układzie π^2 kołu k_1 , jeżeli środek O kierownicy k leży poza obrębem koła k_1 .

Rozwiązanie: Punktem O układu π^1 , do którego koło k_1 należy, odpowiada w układzie π^2 prosta, leżąca w nieskończoności. Stycznym a_1 i b_1 , poprowadzonym z punktu O do koła k_1 odpowiadają punkta, w których prosta, leżąca w nieskończoności przecina krzywą c^2 , a punktem styczności A_1 i B_1 stycznych a_1 i b_1 odpowiadają asymptoty hiperboli c^2 . Biegunowe tedy a_2 i b_2 punktów A_1 i B_1 ze względu na kierownicę są asymptotami krzywej c^2 .

Z konstrukcyi widoczna, że proste a_2 i b_2 przecinają się w punkcie M_2 , leżącym na prostej O_1O , która łączy środki kół k_1 i k , a nadto, że ta prosta dzieli na dwie równe części kąt, zawarty między asymptotami a_2 i b_2 . Jeżeli tedy wyznaczymy biegunowe n_2 i p_2 ze względu na kierownicę k punktów N_1 i P_1 w których prosta OO_1 przecina koło k_1 , natenczas owe biegunowe będą stycznymi hiperboli poprowadzonymi w wierzchołkach.

Uwaga: Jeżeli koło k_1 układu π^1 przechodzi przez środek O , kierownicy k natenczas krzywa c^2 odpowiadająca biegunowo kołu k_1 jest parabolą; punktowi bowiem O układu π^1 odpowiada styczna krzywej c^2 , leżąca w nieskończoności, a stycznej, poprowadzonej w punkcie O , do koła k_1 odpowiada punkt styczności owej stycznej, który leży w nieskończoności.

Jeżeli środek O kierownicy k leży w obrębie koła k_1 , natenczas krzywa c^2 jest elipsą.

O szeregach punktów i pękach stycznych przekroju stożkowego.

80. Jeżeli dwa pęki jednokreślne $W(a, b, c, \dots)$ i $W_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$, (rys. 46.) przetniemy krzywą rzędu drugiego c^2 , przechodzącą przez wierzchołki W i W_1 , natenczas otrzymamy dwa szeregi jednokreślne $(A, B, C, \dots)$ i $(A_1, B_1, C_1, \dots)$; jeżeli bowiem połączymy dowolny punkt krzywej c^2 z elementami tych szeregów, natenczas otrzymamy dwa pęki jednokreślne.

Jeżeli z punktów odpowiednich dwu szeregów jednokreślnych $(A, B, C, \dots)$ i $(A_1, B_1, C_1, \dots)$, (rys. 47.) których podstawami są proste l i l_1 , poprowadzimy styczne $(a, b, c, \dots)$ i $(a_1, b_1, c_1, \dots)$ do krzywej rzędu drugiego c^2 , natenczas otrzymamy dwa pęki jednokreślne stycznych; dowolna styczna bowiem przekroju stożkowego c^2 przecina się z prostymi $a, b, c, \dots$ i $a_1, b_1, c_1, \dots$ w punktach dwu szeregów jednokreślnych.

81. Niech będą dane styczne $w, a, b, c, \dots$, poprowadzone do koła k (rys. 48.) i punkta styczności tychże $W, A, B, C, \dots$. Połączmy W z $A, B, C, \dots$ a środek O koła k z punktami $A_1, B_1, C_1, \dots$, w których styczną w przecina się ze stycznymi $a, b, c, \dots$, to natenczas otrzymamy dwa pęki jednokreślne $W(A, B, C, \dots)$ i $O(A_1, B_1, C_1, \dots)$, albowiem kąty A_1OB_1 i AWB , A_1OC_1 i $AWC, \dots$ są równe.

Jakoż $A_1OB_1 = WOB - \frac{1}{2}(WOA + WOB) = \frac{1}{2}(WOB - WOA) = \frac{1}{2}AOB = AWB$ i t. d.

Szereg tedy punktów przecięcia się stycznych $a, b, c, \dots$ z dowolną styczną w koła k jest jednokreślny z szeregiem odpowiednich punktów styczności.

To twierdzenie jest ważne dla wszystkich przekrojów stożkowych, odnosi się bowiem do związków jednokreślności, które w układach kolineacyjnych nie zmieniają się. A zatem:

Pęk stycznych przekroju stożkowego jest jednokreślny z szeregiem odpowiednich punktów styczności.

82. Mając dane dwa szeregi jednokreślne $A, B, C, \dots$ i $A_1, B_1, C_1, \dots$ (rys. 46.), których podstawą jest przekrój stożkowy c^2 , połączmy punkt A z $A_1, B_1, C_1, \dots$, a punkt A_1 z $A, B, C, \dots$, to natenczas otrzymamy dwa pęki jednokreślne i perspektywiczne, albowiem promień AA_1 jest elementem odpowiednio spólnym obu utworów; promienie tedy AB_1 i A_1B , AC_1 i $A_1C, \dots$ przecinają się w punktach, leżących na prostej p , która przecina się z podstawą c^2 w punktach podwójnych E i F szeregów danych.

Jeżeli zamiast A i A_1 przyjmujemy punkta B i B_1, C i $C_1, \dots$ za wierzchołki pęków perspektywicznych $B(A_1, B_1, C_1, \dots)$ i $B_1(A, B, C, \dots)$, $C(A_1, B_1, C_1, \dots)$ i $C_1(A, B, C, \dots)$ natenczas promienie BA_1 i B_1A , BC_1 i B_1C , CA_1 i C_1A , CB_1 i $C_1B, \dots$ przetną się w punktach, leżących na prostej p , ta prosta bowiem wyznaczona jest punktami podwójnymi E i F .

A zatem: Proste, łączące elementa parami nieodpowiednie dwu szeregów jednokreślnych, których podstawą jest krzywa rzędu drugiego, przecinają się w punktach, leżących na linii prostej.

83. Niech będą dane dwa pęki jednokreślne stycznych $(a, b, c, \dots)$ i $(a_1, b_1, c_1, \dots)$ przekroju stożkowego c^2 (rys. 47.).

Przetnijmy pęk $(a, b, c, \dots)$ prostą a_1 , a pęk $(a_1, b_1, c_1, \dots)$ prostą a , to natenczas otrzymamy dwa szeregi perspektywiczne $(A, B, C, \dots)$ i $(A_1, B_1, C_1, \dots)$, proste tedy $BB_1, CC_1, \dots$ przecinają się w jednym punkcie P . Styczne e i f krzywej c^2 , przechodząca przez punkt P , są promieniami podwójnymi pęków danych.

Przyjmując styczne b i b_1, c i $c_1, \dots$ za podstawy szeregów, w których proste a i a_1, c i $c_1, \dots$ względnie a i a_1, b i $b_1, \dots$ owe styczne przecinają, wykażemy, że proste, łączące punkta przecięcia się stycznych nieodpowiednich b i a_1 tudzież b_1 i a, b i c_1 , tudzież b_1 i $c, \dots$ przechodzą przez jeden punkt, ten punkt bowiem jest wyznaczony promieniami podwójnymi e i f pęków $(a, b, c, \dots)$ i $(a_1, b_1, c_1, \dots)$.

84. Jeżeli przetniemy pęk inwolucyjny $W(a, a_1, b, b_1, \dots)$ krzywą rzędu drugiego, przechodzącą przez wierzchołek W tego pęku, natenczas otrzymamy szereg inwolucyjny $A, A_1, B, B_1, \dots$, a prowadząc z punktów szeregu inwolucyjnego styczne do przekroju stożkowego, który się styka z podstawą tego szeregu otrzymamy pęk inwolucyjny stycznych.

Punkta styczności elementów pęku inwolucyjnego tworzą szereg inwolucyjny, a styczne, poprowadzone w punktach szeregu inwolucyjnego tworzą pęk inwolucyjny stycznych (art. 81.).

85. Szereg inwolucyjny $(A, A_1, B, B_1, \dots)$, (rys. 49.) można uważać za utwór dwu szeregów jednokreślnych $(A, B, X, Y, \dots)$ i $(A_1, B_1, X_1, Y_1, \dots)$, których elementa odpowiednio X i X_1 tudzież Y i Y_1 schodzą się odpowiednio z punktami A_1 i A tudzież B_1 i B . Proste tedy AB_1 i A_1B , AY_1 i A_1Y , a nadto proste AX_1 i A_1X , BY_1 i B_1Y czyli styczne, poprowadzone w punktach A i A_1 tudzież B i B_1 do krzywej c^2 przecinają się w punktach, leżących na linii prostej p (art. 82.).

Prosta p przecina się z krzywą c^2 w punktach podwójnych E i F szeregu inwolucyjnego $(A, A_1, B, B_1, \dots)$.

Z czworokąta AA_1BB_1 , wpisanego w krzywą c^2 , jakoteż z czworoboku $abcd$, opisanego na tej krzywej, wynika, że prosta p jest biegunową punktu P , w którym proste, łączące odpowiednie punkta szeregu involucyjnego przecinają się.

Jeżeli tedy przez dowolny punkt poprowadzimy proste i wyznaczmy punkta przecięcia się tychże z krzywą rzędu drugiego, natenczas otrzymamy szereg involucyjny eliptyczny lub hiperboliczny, stosownie do tego, czy ów punkt leży w obrębie, czy też poza obrębem krzywej.

Stosując prawo biegunowej dwoistości do twierdzeń o szeregach involucyjnych, otrzymamy twierdzenie ważne dla pęków involucyjnych stycznych przekroju stożkowego.

A zatem: Jeżeli z punktów, leżących na prostej p , poprowadzimy styczne do przekroju stożkowego c^2 , natenczas otrzymamy pęk involucyjny stycznych. Styczne krzywej c^2 , przechodzące przez biegun prostej p są promieniami podwójnymi owego pęku.

Zagadnienie 1.: Wyznaczyć promienie normalne i promienie podwójne pęku involucyjnego $W(a, a_1, b, b_1, \dots)$, (rys. 50.).

Rozwiązanie: Zakreślmy koło k , przechodzące przez wierzchołek W , i wyznaczmy punkta, w których to koło przecina się z elementami danego pęku, to natenczas otrzymamy szereg involucyjny $(A, A_1, B, B_1, \dots)$. Poprowadźmy przez środek O koła k i przez punkt przecięcia się P prostych AA_1 i BB_1 prostą PO i wyznaczmy punkta przecięcia się R i R_1 tejże z kołem k , to R i R_1 są elementami odpowiednimi szeregu $(A, A_1, B, B_1, \dots)$; proste tedy WR i WR_1 są promieniami normalnymi pęku danego.

Biegunowa p punktu P przecina się z kołem k w punktach podwójnych E i F szeregu $(A, A_1, B, B_1, \dots)$, proste zatem WE i WF są promieniami podwójnymi pęku $W(a, a_1, b, b_1, \dots)$.

U w a g a: Jeżeli punkt P schodzi się ze środkiem O koła k , natenczas wszystkie elementa odpowiednie pęku involucyjnego są prostopadłe.

Zagadnienie 2.: Dane są dwa pęki involucyjne spółśrodkowe $W(a, a_1, b, b_1, \dots)$ i $W(m, m_1, n, n_1, \dots)$, wyznaczyć elementa sprzężone, odpowiednio wspólne obu pęków, (rys. 51.).

Rozwiązanie: Wyznaczymy szeregi $(A, A_1, B, B_1, \dots)$ i $(M, M_1, N, N_1, \dots)$, w których koło k zakreślone przez wierzchołek W dane pęki przecina a nadto punkta przecięcia się P i P_1 prostych AA_1 i BB_1 tudzież MM_1 i NN_1 , połączmy następnie P i P_1 , to prosta łącząca przecina się z kołem k w punktach U i U_1 które są elementami odpowiednimi szeregów $(A, A_1, \dots)$ i $(M, M_1, \dots)$, proste tedy WU i WU_1 są promieniami odpowiednimi obu danych pęków.

Promienie WU i WU_1 mogą tylko wówczas być urojone, jeżeli pęki $W(a, a_1, \dots)$ i $W(m, m_1, \dots)$ są hiperboliczne, w tym przypadku bowiem punkta P i P_1 leżą poza obrębem krzywej k , prosta PP_1 może się przecinać z krzywą k w punktach urojonych.

Zagadnienie 3.: Wyznaczyć punkta dzielące harmonicznie odcinki AA_1 i BB_1 prostej l .

Rozwiązanie: Punkta podwójne E i F szeregu involucyjnego $(A, A_1, B, B_1, \dots)$ dzielą harmonicznie odcinki AA_1 i BB_1 , zawarte między elementami odpowiednimi.

O kolineacyi przekrojów stożkowych z kołem.

86. Niech będą dane środek O i oś t a nadto osie wzajemne r i r_1 dwu układów środkowo kolineacyjnych π i π^1 , złączonych na jednej płaszczyźnie (rys. 52., 53., 54.), założmy sobie wyznaczyć średnice sprzężone, osi i asymptoty przekroju stożkowego c^2_1 układu π^1 , który odpowiada kołu k w układzie π .

Osi wzajemnej r układu π odpowiada w układzie π^1 prosta, leżąca w nieskończoności; punktom tedy M i N , w których prosta r przecina się z kołem k , odpowiadają punkta krzywej c^2_1 , leżące w nieskończoności, a stycznymi m i n , poprowadzonym do koła w punktach M i N odpowiadają asymptoty krzywej c^2_1 . Stosownie więc do tego, czy oś wzajemna r przecina się z kołem k w punktach rzeczywistych, czy urojonych (rys. 53. i 52.) jest krzywa c^2_1 hiperbolą lub elipsą.

Jeżeli zaś prosta r jest styczną koła k , natenczas krzywa c^2_1 jest parabolą (rys. 54.).

Biegunowi k osi wzajemnej r ze względu na koło k odpowiada w układzie π^1 biegun R_1 prostej, leżącej w nieskończoności a ze względu na krzywą c^2_1 a więc środek tej krzywej; a biegunowym sprzężonym a i a' , b i b' koła k , przechodzącym przez punkt R , odpowiadają średnice sprzężone a_1 i a'_1 , b_1 i b'_1 krzywej c^2_1 , (rys. 52.).

Promienie OA i OA' ..., łączące środek kolineacyi z biegunami prostych a' i a , ... są równoległe do średnic sprzężonych a' i a'_1 , ... i wyznaczają pęk involucyjny $O(A, A', B, B', \dots)$; promienie normalne tedy OQ i OQ' tego pęku są równoległe do osi krzywej c^2_1 .

Jeżeli tedy wyznaczmy biegunowe q i q' punktów Q i Q' ze względu na koło k , a następnie proste q_1 i q'_1 , odpowiadające kolineacyjnie prostym q i q' , natenczas otrzymamy osi przekroju stożkowego c^2_1 .

Punktom przecięcia się 1, 2, 3, 4 biegunowych sprzężonych q i q' z kołem k odpowiadają kolineacyjnie wierzchołki 1₁, 2₁, 3₁, 4₁ krzywej c^2_1 .

87. Jeżeli krzywa c^2_1 , odpowiadająca kolineacyjnie kołu jest hiperbolą, natenczas osi tej krzywej można wyznaczyć w sposób nader prosty, (rys. 53.).

Wyznaczymy w tym celu asymptoty m_1 i n_1 , które, jak wiadomo, są prostymi, odpowiadającymi stycznymi m i n koła, poprowadzonym w punktach przecięcia się tegoż z osią wzajemną r , i podzielmy kąty, zawarte między asymptotami na dwie równe części, to proste, dzielące a_1 i b_1 są osiami hiperboli.

Prostej a_1 odpowiada w układzie π koła k prosta a , przecinająca to koło w punktach U i V , punkta odpowiednie tedy U_1 i V_1 są wierzchołkami hiperboli.

Prostej b_1 odpowiada w układzie π prosta, przecinająca się z kołem k w punktach urojonych; prosta b_1 jest tedy osią urojoną hiperboli.

88. Aby wyznaczyć oś paraboli odpowiadającej kolineacyjnie kołu k , która się styka z prostą r w punkcie R (rys. 54.), połączmy środek kolineacyi O z punktem R i poprowadźmy promień OR_1 , prostopadły do OR , poprowadźmy następnie przez punkt przecięcia się R_1 prostych r i OR_1 styczną R_1A do koła k i połączmy punkt styczności A z punktem R , to prostej AR odpowiada w układzie π^1 oś paraboli a punktowi A odpowiada wierzchołek A_1 tej krzywej.

89. Mając dany przekrój stożkowy c^2 i prostą z_1 , która przecina tę krzywą w punktach urojonych, jeżeli wyznaczmy bieguny sprzężone A_1 i A'_1 , B_1 i B'_1 ze względu na krzywą c^2 , leżące na prostej z_1 , i zakreślimy na średnicach $A_1A'_1$ i $B_1B'_1$ koła k_1 i k_2 , jeżeli następnie jeden z punktów przecięcia się O tych kół uważać będziemy za środek kolineacji dwu układów π i π^1 a prostą z_1 za oś wzajemną układu π^1 , do którego przekrój stożkowy c^2 należy, natenczas w układzie π , środkowo kolineacyjnym z π^1 odpowiadać będzie krzywej c^2 koło, (rys. 55.).

Jakoż osi wzajemnej z_1 układu π^1 odpowiada w układzie π prosta, leżąca w nieskończoności, a biegunowym sprzężonym Z_1A_1 i $Z_1A'_1$, Z_1B_1 i $Z_1B'_1$ przekroju stożkowego c^2 , które przechodzą przez biegun Z_1 prostej z_1 , odpowiadają w układzie π średnice sprzężone krzywej c^2 , równoległe do promieni OA_1 i OA'_1 , OB i OB'_1 , a więc prostopadłe; krzywa c^2 jest tedy kołem.

Przy pomocy tego twierdzenia można zamieniać przekroje stożkowe na koła a temsamem rozwiązywać zagadnienia rzutowe o krzywych rzędu drugiego w sposób nader prosty.

Zagadnienie: Dane są cztery punkta urojone i jeden punkt rzeczywisty M przekroju stożkowego c^2 wykreślić tę krzywą.

Rozwiązanie: Punkta urojone danego przekroju stożkowego niech będą wyznaczone zapomocą szeregów involucyjnych eliptycznych ($A, A_1, B, B_1, \dots$) i ($P, P_1, Q, Q_1, \dots$), których podstawami są proste l i m , (rys. 56.).

Zakreślimy na średnicach AA_1 i BB_1 koła i uważajmy jeden z punktów przecięcia się O tychże za środek kolineacji, podstawę l za oś wzajemną układu π krzywej c^2 , a prostą t , równoległą do l za oś kolineacji, to krzywa k' , odpowiadająca danemu przekrojowi stożkowemu jest kołem.

Celem wykreślenia tego koła, wyznaczmy punkt M' , odpowiadający kolineacyjnie punktowi M krzywej c^2 , a nadto punkta P', P'_1, Q', Q'_1 , odpowiadające elementom P, P_1, Q, Q_1 danego szeregu involucyjnego; wyznaczmy następnie środek U' szeregu eliptycznego ($P'P'_1, Q', Q'_1, \dots$) i wyprowadźmy zeń prostą n' prostopadłą do podstawy m' , to takowa przechodzi przez środek R' koła k' , kolineacyjnego z krzywą c^2 .

Prosta $U'M'$ przecina się z kołem k' w punkcie X' , który zapomocą cechy involucyi $U'P'. U'P'_1$ z łatwością wyznaczyć można, albowiem

$$U'P'. U'P'_1 = -U'M'. U'X'.$$

Jeżeli tedy wyprowadzimy z punktu Y' , dzielącego na dwie równe części odcinek $M'X'$, prostą p' , prostopadłą do $M'X'$, natenczas w punkcie przecięcia się R' prostych p' i n' otrzymamy środek koła k' . Poszczególne tedy punkta i styczne, osi i asymptoty przekroju stożkowego c^2 można wyznaczyć w sposób wyłożony w art. 86., 87. i 88.

90. Zagadnienie: Dane są asymptoty m i n a nadto wierzchołek A hiperboli, wyznaczyć punkta przecięcia się tej krzywej z prostą l , (rys. 57.).

Rozwiązanie: Zakreślimy koło k_1 , stykające się z asymptotami w punktach M i N a z hiperbolą c^2 w wierzchołku A , które jednak ponadto niema z krzywą c^2 żadnych punktów rzeczywistych wspólnych, naten-

czas krzywe c^2 i k_1 są środkowo kolineacyjne. Środek kolineacji schodzi się ze środkiem O hiperboli c^2 , prosta MN jest osią wzajemną układu koła k_1 , a styczna t poprowadzona do hiperboli w punkcie A jest osią kolineacji.

Jeżeli tedy wyznaczmy prostą l_1 układu koła k_1 , która odpowiada prostej l układu hiperboli c^2 , to takowa przetnie się z kołem k_1 w punktach P_1 i Q_1 , którym odpowiadają kolineacyjnie punkta przecięcia się P i Q prostej l z hiperbolą c^2 .

91. Zagadnienie: Wyznaczyć punkta przecięcia się prostej l z parabolą c^2 , której oś p , wierzchołek A i styczna m są dane, (rys. 58.).

Rozwiązanie: Zakreślimy koło k_1 , stykające się z prostą m w punkcie M_1 a z parabolą c^2 w wierzchołku A , które jednak ponadto niema z krzywą c^2 żadnych punktów rzeczywistych wspólnych, natenczas krzywe c^2 i k_1 są środkowo kolineacyjne. Punkt przecięcia się O osi p ze styczną m jest środkiem, styczna t , poprowadzona do paraboli w wierzchołku A jest osią kolineacji, a styczna z_1 , poprowadzona do koła w punkcie Z_1 , jest osią wzajemną układu koła k_1 .

Jeżeli tedy wyznaczmy prostą l_1 układu koła k_1 , odpowiadającą prostej l w układzie paraboli c^2 , to ta prosta przetnie się z kołem k_1 w punktach P_1 i Q_1 , którym odpowiadają kolineacyjnie punkta przecięcia się prostej l z krzywą c^2 .

92. Zagadnienie: Dane są średnice sprzężone AB i CD elipsy c^2 , wyznaczyć styczne, poprowadzone do krzywej c^2 z punktu M , (rys. 59.).

Rozwiązanie: Zakreślimy na średnicy AB koło k_1 i wyznaczmy punkta przecięcia się tego koła z prostą C_1D_1 , poprowadzoną przez środek O krzywej c^2 prostopadłe do prostej AB , to krzywa k_1 i c^2 są powinowate. Środek powinowactwa leży w nieskończoności na prostej, łączącej punkta odpowiednie C i C_1 , a oś powinowactwa schodzi się ze średnicą AB .

Połączmy punkt C_1 z punktem T , w którym oś powinowactwa przecina się z prostą CM i poprowadźmy przez punkt M prostą MM_1 , równoległą do CC_1 , to proste C_1T i MM_1 przecinają się w punkcie M_1 układu koła k_1 , odpowiadającym punktowi M układu elipsy c^2 . Stycznym tedy m_1 i n_1 , poprowadzonym do koła k_1 z punktu M , odpowiadają styczne m i n , poprowadzone do elipsy c^2 z punktu M .

Zagadnienie: Wyznaczyć osi elipsy, której średnice sprzężone AB i CD są dane, (rys. 61.).

Wiadomo, że przekątne p i q równoległoboku $abcd$, opisanego na krzywej c^2 są średnicami sprzężonymi tej krzywej.

Wiadomo również, że promienie normalne pęku involucyjnego średnic sprzężonych są osiami przekroju stożkowego.

Aby tedy wyznaczyć osi elipsy danej, poprowadźmy przez punkt A proste AC' , p' , q' , odpowiednio równoległe do średnic CD , p , q i wyznaczmy promienie normalne r' i r'_1 pęku involucyjnego, wyznaczonego promieniami AB , AC' , p' , q' , to proste r'_2 i r'_3 poprowadzone przez środek O równoległe do promieni r' i r'_1 są osiami elipsy c^2 .

93. Wiadomo, że na promieniach przechodzących przez środek kolineacji dwu układów płaskich π i π^1 , złączonych na wspólnej podstawie, schodzą się proste, odpowiednie obu układów.

Jeżeli tedy przyjmiemy w układzie π koło k , którego środek O schodzi się ze środkiem kolineacji, natenczas średnice sprzężone tego koła są bie-

gunowymi sprzężonymi przekroju stożkowego c^2_1 , który odpowiada w układzie π^1 kołu k .

Punkt, będący wierzchołkiem pęku inwolucyjnego prostokątnego biegunowych sprzężonych ze względu na przekrój stożkowy, nazywamy ogniskiem, a biegunową ogniska nazywamy kierownicą przekroju stożkowego, (rys. 59a, 59b, 60).

Środek kolineacji O jest tedy w danym przypadku ogniskiem a oś wzajemna z_1 , odpowiadająca w układzie π^1 biegunowej punktu O ze względu na koło k , jest kierownicą krzywej c^2_1 .

Wyznamy punkta przecięcia się R i Z_1 osi wzajemnych r i z z prostą l , przechodzącą przez środek kolineacji, a nadto punkt przecięcia się P tej prostej z kołem k i punkt odpowiedni P_1 układu π^1 , natenczas stosunki podwójnego podziału

$$(OZ^\infty PR) \text{ i } (OZ_1 P_1 R_1^\infty) \text{ są równe.}$$

$$\text{A zatem: } \frac{OP}{OR} = \frac{OP_1}{Z_1 P_1}, \text{ albo } \frac{Z_1 P_1}{OR} = \frac{OP_1}{OP}.$$

Z trójkątów podobnych wynika

$$\frac{Z_1 P_1}{OR} = \frac{Z_1 P_1}{OR'},$$

$$\text{a więc } \frac{Z_1 P_1}{OR'} = \frac{OP_1}{OP} \text{ albo } \frac{OP}{OR'} = \frac{OP_1}{Z_1 P_1} = k.$$

Stosunek $\frac{OP}{OR'}$ jest ilością stałą, albowiem OP jest promieniem koła k , a odcinek OR' równy jest odległości środka kolineacji od osi wzajemnej r .

Stosunek tedy odległości punktów przekroju stożkowego od ogniska i od kierownicy jest ilością stałą.

Stosunek $\frac{OP}{OR'}$ jest większy, mniejszy, albo równy jedności, stosownie do tego, czy oś wzajemna r przecina się z kołem k w punktach rzeczywistych, urojonych albo czy ta oś z kołem k się styka.

Prosta OR' , prostopadła do osi kolineacyjnej jest osią większą elipsy względnie osią rzeczywistą hiperboli. Ognisko tedy leży na osi większej elipsy a na osi rzeczywistej hiperboli.

Z symetrii elipsy i hiperboli względem środków tych krzywych wynika, że elipsa i hiperbola posiadają po dwa ogniska rzeczywiste, (rys. 62.).

94. Niech będzie dana krzywa rzędu drugiego c^2 , środkowo kolineacyjna z kołem k , które się styka z krzywą c^2 w punkcie O .

Wobec tego założenia jest punkt styczności O środkiem, a prosta, łącząca punkta przecięcia się P i Q krzywych c^2 i k jest osią kolineacji.

Poprowadźmy przez środek O promienie OA i OB , OC i OD , ..., parami prostopadłe i wyznaczmy punkta przecięcia się tychże A i A_1 , B i B_1 , C i C_1 , D i D_1 , ... z kołem k i z krzywą c^2 , to średnice AB , CD , ... koła k przecinają się w środku M , a cięciwy odpowiednie $A_1 B_1$, $C_1 D_1$, ... krzywej c^2 przecinają się w punkcie M_1 , odpowiadającym kolineacyjnie punktowi M .

Biegunowa środka M ze względu na koło k leży w nieskończoności, biegunowa tedy m_1 punktu M_1 ze względu na krzywą c^2 jest osią wzajemną układu tej krzywej.

Z tego wnosimy, że wszystkie koła, stykające się z krzywą c^2 w punkcie O , przecinają się z tą krzywą w punktach leżących na prostych równoległych. I wzajemnie: Proste, równoległe do pewnego kierunku, przecinają się z krzywą c^2 w punktach, przez które przechodzą koła, stykające się z krzywą c^2 w punkcie O .

Jeżeli tedy poprowadzimy przez środek kolineacji O prostą th równoległą do osi kolineacyjnej t i do osi wzajemnej m_1 , natenczas takowa przetnie krzywą c^2 w punkcie K , przez który przechodzi koło k_3 , posiadające z krzywą c^2 w punkcie O trzy bezpośrednio po sobie następujące punkta wspólne.

Koło k_3 nazywamy kołem krzywiznowym przekroju stożkowego c^2 w punkcie O .

Aby tedy wykreślić koło krzywiznowe przekroju stożkowego c^2 w punkcie O , poprowadźmy przez ten punkt promienie pęku inwolucyjnego prostokątnego i wyznaczmy biegun M_1 szeregu, w którym krzywa c^2 ów pęk przecina, a nadto biegunową m_1 punktu M_1 ; poprowadźmy następnie przez punkt O prostą równoległą do m_1 i zakreślmy przez punkt przecięcia się tej prostej z krzywą c^2 koło, stykające się z przekrojem stożkowym w punkcie O , to takowe jest kołem krzywiznowym.

Zagadnienie: Wykreślić krzywą rzędu drugiego, która przechodzi przez dwa punkta A i B i przez trzy punkta koła schodzące się w jednym punkcie.

Zagadnienie: Wykazać, że koło krzywiznowe w wierzchołkach przekroju stożkowego posiada z tą krzywą cztery bezpośrednio po sobie następujące punkta wspólne.

O dwóch przekrojach stożkowych.

95. Wiadomo, że pięć punktów albo pięć stycznych wyznacza przekrój stożkowy. Dwa przekroje stożkowe nie mogą tedy posiadać więcej niż cztery punkta i cztery styczne wspólne.

Dwie krzywe rzędu drugiego c^2 i c^2_1 , przecinające się w jednym punkcie A , przecinają się jeszcze w drugim punkcie B ; jeżeli bowiem punkt, poruszający się na krzywej c^2_1 wchodzi przez punkt A w obręb krzywej c^2 , natenczas przez punkt drugi owej krzywej z wychodzi z obrębu krzywej c^2 .

Z łatwością jednak można udowodnić, że jeżeli dwa przesiekroje stożkowe c^2 i c^2_1 posiadają dwa punkta A i B wspólne, natenczas posiadają jeszcze dwa dalsze punkta, rzeczywiste lub urojone, wspólne, (rys. 63.).

Jakoż połączmy punkta A i B z punktami 1, 2, 3, ... krzywej c^2 i przetnijmy pęki jednokreślne $A(1, 2, 3, \dots)$ i $B(1, 2, 3, \dots)$ krzywą c^2_1 , natenczas otrzymamy dwa szeregi jednokreślne $(M, N, P, \dots)$ i $(M_1, N_1, P_1, \dots)$, których punkta podwójne E i F są punktami przecięcia się krzywych c^2 i c^2_1 .

Zagadnienie: Mając dane trzy punkta przecięcia się A, B, C dwu przekrojów stożkowych c^2 i c^2_1 a nadto punkta D i E krzywej c^2 tudzież punkta G i H krzywej c_1 wyznaczyć w sposób liniowy czwarty punkt przecięcia się tych krzywych.

Rozwiązanie: Wyznamy punkta M, N, M_1, N_1 w których proste AE, AD, BE, BD przecinają się z krzywą c^2_1 , natenczas otrzymamy dwa szeregi, których jednokreślność wyznaczona jest punktem podwójnym C

i elementami odpowiednimi M, M_1 i N, N_1 . Drugi punkt podwójny tych szeregów, który jest zarazem punktem przecięcia się krzywych c^2 i c_1^2 leży na prostej, łączącej punkt C z punktem przecięcia się P prostych MN_1, M_1N . Jeżeli tedy wyznaczymy sposobem Pascala punkt K , w którym prosta CP przecina krzywą c^2 lub c_1^2 , natenczas otrzymamy czwarty punkt przecięcia się tych krzywych.

96. Punktem przecięcia się dwu krzywych rzędu drugiego odpowiadają biegunowo wspólne styczne krzywych klasy drugiej.

Jeżeli tedy dwa przekroje stożkowe mają jedną styczną wspólną, natenczas posiadają drugą a nadto dwie dalsze styczne wspólne.

97. Prosta, na której szeregi inwolucyjne biegunów sprzężonych ze względu na dwa przekroje stożkowe c^2 i c_1^2 nakrywają się, jest cięciwą wspólną tych krzywych.

Jeżeli owe szeregi są hiperboliczne, natenczas cięciwa wspólna łączy punkta przecięcia się rzeczywiste krzywych c^2 i c_1^2 .

Jeżeli zaś szereg biegunów sprzężonych, których podstawą jest cięciwa wspólna l , jest eliptyczny, natenczas ta cięciwa łączy punkta przecięcia się urojone krzywych c^2 i c_1^2 . Taką prostą nazywamy cięciwą wspólną idealną dwu krzywych rzędu drugiego.

Punkt przecięcia się wspólnych stycznych dwu krzywych rzędu drugiego można określić jako wierzchołek dwu pęków biegunowych, sprzężonych ze względu na te krzywe, które to pęki nakrywają się.

Styczne wspólne są tedy rzeczywiste lub urojone, stosownie do tego, czy owe pęki są hiperboliczne czy eliptyczne.

98. Punkt, którego biegunowe ze względu na dwa przekroje stożkowe c^2 i c_1^2 schodzą się na jednej prostej, nazywamy wspólnym biegunem tych krzywych.

Punkt przecięcia się P dwu cięciw wspólnych AB i CD , rzeczywistych lub idealnych, krzywych rzędu drugiego c^2 i c_1^2 jest wspólnym biegunem tych krzywych; albowiem prosta P_1P_2 , łącząca punkta P_1 i P_2 , sprzężone z punktem P w grupach harmoniczych (PP_1AB) i (PP_2CD) , jest biegunową punktu P ze względu na krzywe c^2 i c_1^2 .

W podobny sposób można wykazać, że proste, łączące punkta przecięcia się wspólnych stycznych dwu przekrojów stożkowych jest wspólną biegunową tych krzywych.

98. Dwa przekroje stożkowe c^2 i c_1^2 mają trzy wspólne bieguny z których dwa mogą być urojone.

Jakoż poprowadźmy dowolną prostą l i wyznaczmy pęki $L(a, b, \dots)$ i $L_1(a_1, b_1, \dots)$ biegunowych ze względu na krzywe c^2 i c_1^2 , odpowiadające szeregowi punktów $(A, B, \dots)$, którego podstawą jest prosta l , to miejsce geometryczne punktów przecięcia się promieni odpowiednich a i a_1, b i $b_1, \dots$ tych pęków jest krzywą rzędu drugiego c_2^2 .

Punkt przecięcia się A_1 promieni a i a_1 jest harmonicznie sprzężony z elementem A szeregu $(A, B, \dots)$ ze względu na obie krzywe c^2 i c_1^2 i t. d.; na krzywej c_2^2 leżą tedy wspólne bieguny krzywych c^2 i c_1^2 .

Poprowadźmy następnie prostą m i wyznaczmy pęki $M(n, p, \dots)$ i $M_1(n_1, p_1, \dots)$ biegunowych ze względu na krzywe c^2 i c_1^2 , odpowiadające szeregowi punktów $(M, N, \dots)$, którego podstawą jest prosta m , to miejsce

geometryczne punktów przecięcia się promieni odpowiednich n i n_1, p i $p_1, \dots$ jest krzywą rzędu drugiego c_2^2 .

Punkt przecięcia się N_1 promieni n i n_1 jest harmonicznie sprzężony z punktem N ze względu na obie krzywe c^2 i c_1^2 i t. d.; na przekroju stożkowym c_2^2 leżą tedy wspólne bieguny krzywych c^2 i c_1^2 .

Punktowi przecięcia się prostych l i m odpowiada punkt leżący na krzywych c^2 i c_1^2 , te krzywe przecinają się tedy jeszcze w jednym punkcie P , który jest wspólnym biegunem danych przekrojów stożkowych c^2 i c_1^2 , biegunowa bowiem p tego punktu ze względu na krzywą c^2 jakoteż c_1^2 łączy punkta P_l i P_m , leżące odpowiednio na prostych l i m a sprzężone harmonicznie z punktem P ze względu na obie krzywe c^2 i c_1^2 .

Punkta Q i R odpowiednie i wspólne szeregów inwolucyjnych, jakie wyznaczają bieguny sprzężone ze względu na krzywe c^2 i c_1^2 , leżące na wspólnej biegunowej p są również wspólnymi biegunami przekrojów stożkowych c^2 i c_1^2 . Te punkta są jedynie wówczas urojone, jeżeli odcinki, zawarte między rzeczywistymi punktami przecięcia się prostej p z krzywymi c^2 i c_1^2 , częściowo nakrywają się.

100. Dwa przekroje stożkowe c^2 i c_1^2 , przecinające się w czterech punktach rzeczywistych A, B, C i D , posiadają trzy wspólne bieguny rzeczywiste, które są punktami przekątnymi czworokąta $ABCD$.

Dwa przekroje stożkowe, przecinające się w dwu punktach rzeczywistych A i B i w dwu punktach urojonych, leżących na cięciwie idealnej n , posiadają jeden wspólny biegun rzeczywisty P , który jest punktem przecięcia się prostych AB i n . — Ten punkt teży tedy poza obrębem krzywych c^2 i c_1^2 , a wspólna biegunowa tychże p przecina się z tymi krzywymi w punktach, ograniczających odcinki, które częściowo nakrywają się; wspólne bieguny tedy, leżące na prostej p są urojone.

Dwa przekroje stożkowe, przecinające się w czterech punktach urojonych, posiadają trzy wspólne bieguny rzeczywiste.

Jakoż wspólny biegun P krzywych c^2 i c_1^2 , który zawsze jest rzeczywisty, leży w obrębie albo poza obrębem obu krzywych, albo leży nareszcie w obrębie jednej a poza obrębem drugiej krzywej; inwolucye tedy biegunów sprzężonych ze względu na krzywe c^2 i c_1^2 , których podstawą jest wspólna biegunowa p , są odpowiednio eliptyczne albo hiperboliczne, albo nareszcie jedna jest eliptyczna a druga hiperboliczna. We wszystkich tych przypadkach wspólne punkta odpowiednie tych inwolucyj są rzeczywiste; w przypadku drugim bowiem odcinki, zawarte między punktami przecięcia się prostej p z krzywymi c^2 i c_1^2 nie mają z sobą nic wspólnego, albo jeden odcinek leży w obrębie odcinka drugiego.

Opierając się na zasadzie biegunowej dwoistości wnosimy z powyższych twierdzeń, że:

Jeżeli dwa przekroje stożkowe posiadają cztery styczne wspólne, rzeczywiste lub urojone, natenczas posiadają trzy wspólne biegunowe rzeczywiste.

Dwa przekroje stożkowe, mające dwie wspólne styczne rzeczywiste a dwie urojone, posiadają jedną wspólną biegunową rzeczywistą.

101. Jeżeli dwa punkta przecięcia się A i B krzywych rzędu drugiego c^2 i c_1^2 , leżące na cięciwie rzeczywistej lub idealnej, schodzą się w jednym punkcie M , natenczas krzywe c^2 i c_1^2 stykają się w tym punkcie; styczna

tedy m , poprowadzona do tych krzywych w punkcie M jest spólną cięciwą i spólną biegunową a punkt styczności M jest spólnym biegunem krzywych c^2 i c_1^2 .

W tym przypadku posiadają przekroje stożkowe c^2 i c_1^2 jeszcze jedną spólną biegunową rzeczywistą. Celem wyznaczenia tejże, uważajmy prostą m za podstawę szeregu $(N, P, \dots)$ i wyznaczmy pęki $M(n, p, \dots)$ i $M(n_1, p_1, \dots)$, odpowiadające biegunowo temu szeregowi ze względu na krzywe c^2 i c_1^2 , to takowe są jednokreślne, posiadają tedy dwa promienie podwójne z których jeden schodzi się ze styczną m ; drugi promień podwójny q , który jest spólną biegunową krzywych c^2 i c_1^2 , jest zatem rzeczywisty.

Punkt Q szeregu $(N, P, \dots)$, odpowiadający promieniowi q jest spólnym biegunem krzywych c^2 i c_1^2 .

102. Niech będą dane dwa przekroje stożkowe c^2 i c_1^2 , które się przecinają w czterech punktach A, B, C, D , rzeczywistych lub urojonych, leżących na spólnych cięciwach AB i CD , rzeczywistych, względnie idealnych. Jeżeli punkta A i B tudzież C i D schodzą się z sobą, natenczas krzywe c^2 i c_1^2 stykają się z sobą w punktach rzeczywistych. Jeżeli zaś punkta urojone A i C tudzież B i D , leżące na różnych cięciwach idealnych schodzą się, natenczas krzywe c^2 i c_1^2 stykają się z sobą w punktach urojonych.

Dwa przekroje stożkowe nie mogą się stykać w jednym punkcie urojonym; jeżeli bowiem dwa punkta przecięcia się urojone A i C , leżące na różnych cięciwach idealnych AB i CD , schodzą się w punkcie styczności urojonym krzywych c^2 i c_1^2 , natenczas cięciwy AB i CD schodzą się na jednej prostej m ; punkt M bowiem, w którym schodzą się punkta urojone A i C niezespolone byłby w przeciwnym razie punktem rzeczywistym. Atoli prosta rzeczywista m nie może łączyć dwu punktów urojonych niezespolonych B i D , te punkta tedy schodzą w punkcie N , który jest drugim punktem urojonym styczności krzywych c^2 i c_1^2 .

103. Jeżeli dwie krzywe rzędu drugiego c^2 i c_1^2 stykają się w dwu punktach A i B , natenczas cięciwa styczności AB jest spólną biegunową, a punkt przecięcia się P stycznych a i b jest spólnym biegunem tych krzywych, (rys. 64.).

Biegunowe m i m_1 dowolnego punktu M ze względu na krzywe c^2 i c_1^2 przecinają się w punkcie, leżącym na cięciwie styczności AB , a bieguny N i N_1 dowolnej prostej n ze względu na te krzywe, leżą na prostej, przechodzącej przez punkt P . Jakoż bieguny prostej MP ze względu na przekroje stożkowe c^2 i c_1^2 schodzą się w jednym punkcie Q , leżącym na spólnej biegunowej AB , przez ten punkt zatem przechodzą biegunowe m i m_1 punktu M ; punktowi zaś N_1 , w którym proste n i AB przecinają się, odpowiadają ze względu na krzywe c^2 i c_1^2 biegunowe schodzące się na prostej n_1 , która przechodzi przez punkt P , na tej prostej leżą tedy bieguny N i N_1 .

104. Wszystkie punkta cięciwy styczności AB dwu przekrojów stożkowych c^2 i c_1^2 są spólnymi biegunami, a wszystkie proste, przechodzące przez punkt P są spólnymi biegunami tych krzywych, albowiem biegunowa dowolnego punktu Q , leżącego na prostej AB przecina się z tą prostą w punkcie, tworzącym grupę harmoniczną z punktami Q , A , B i przechodzi przez punkt P .

105. Proste łączące elementa odpowiednie dwu szeregów jednokreślnych, których podstawą jest przekrój stożkowy c^2 , powłóczą krzywą rzędu drugiego c_1^2 , która się styka z krzywą c^2 w punktach podwójnych owych szeregów.

Jakoż niech będą dane dwa szeregi jednokreślne $(A, B, C, \dots)$, których podstawą jest przekrój stożkowy c^2 (rys. 65.); połączmy dowolny punkt S z elementami szeregu $(A, B, \dots)$ i wyznaczmy punkta przecięcia się $A', B', \dots$ prostych $SA, SB, \dots$ z krzywą c^2 , to natenczas otrzymamy szereg inwolucyjny $(A, A', B, B', \dots)$, szeregi tedy $(A_1, B_1, C_1, \dots)$ i $(A', B', C', \dots)$ są jednokreślne; punktom podwójnym U_1 i V_1 tychże odpowiadają w szeregu $(A, B, \dots)$ punkta U i V , leżące odpowiednio do prostych SU_1 i SV_1 , proste zatem UU_1 i VV_1 są jedynymi stycznymi utworu szeregów $(A, B, C, \dots)$ i $(A_1, B_1, C_1, \dots)$ poprowadzonymi przez punkt S , ten utwór więc jest krzywą rzędu drugiego c_1^2 . Styczne e i f krzywej c^2 , poprowadzone w punktach podwójnych E i F szeregów $(A, B, \dots)$ i $(A_1, B_1, \dots)$ są również stycznymi krzywej c_1^2 w tychże punktach.

W podobny sposób można wykazać, że miejsce geometryczne punktów przecięcia elementów odpowiednich w dwu pękach jednokreślnych stycznych przekroju stożkowego c^2 jest krzywą rzędu drugiego, która się styka w dwu punktach z krzywą c^2 .

106. Szereg inwolucyjny $(A, A_1, B, B_1, \dots)$, którego podstawą jest przekrój stożkowy c^2 , można uważać za utwór dwu szeregów jednokreślnych $(A, B, \dots)$ i $(A_1, B_1, \dots)$, punkt P tedy, w którym proste, łączące odpowiednie elementa A i A_1, B i $B_1, \dots$, przecinają się uważać należy za krzywą rzędu drugiego, nieskończenie małą, która się styka z przekrojem stożkowym c^2 w punktach podwójnych E i F szeregu $(A, A_1, B, B_1, \dots)$.

W tym sensie można określić ogniska krzywej rzędu drugiego jako koła o nieskończenie małych promieniach, które się stykają z tą krzywą w dwu punktach urojonych, leżących na odpowiednich kierownicach.

Zagadnienie: Udowodnić, że koła spółśrodkowe, stykają się z sobą w punktach kołowych urojonych w nieskończoności.

O kolineacyi dwu przekrojów stożkowych.

107. Wiadomo, że kolineacya dwu układów płaskich π i π^1 w położeniu ogólnem jest wyznaczona czterema parami punktów odpowiednich, z których trzy nie leżą na linii prostej, albo czterema parami prostych odpowiednich, z których trzy nie przechodzą przez jeden punkt.

Obierzmy tedy na przekrojach stożkowych c^2 i c_1^2 po trzy punkta A, B, C i A_1, B_1, C_1 , (rys. 66.) i wyznaczmy punkt przecięcia się D stycznych, poprowadzonych do krzywej c^2 w punktach A i B , a nadto punkt przecięcia się D_1 stycznych, poprowadzonych do krzywej c^2 w punktach A_1 i B_1 , to przyjąwszy, że A i A_1, B i B_1, C i C_1, D i D_1 są elementami odpowiednimi układów π i π^1 , odpowiada krzywej c^2 układu π krzywa c_1^2 układu π^1 . Jakoż krzywej c^2 układu π odpowiada w układzie π^1 przekrój stożkowy, który przechodzi przez punkta A_1, B_1, C_1 i który się styka z prostymi D_1A_1 i D_1B_1 w punktach A_1 i B_1 , ten przekrój stożkowy jest tedy identyczny z krzywą c_1^2 . A zatem:

Dwa przekroje stożkowe można złączyć kolineacyjnie w nieskończenie wiele sposobów.

Punktom i prostym układu π , harmonicznie sprzężonym ze względu na krzywą c^2 , odpowiadają w układzie π^1 punkta i proste harmonicznie sprzężone ze względu na krzywą c_1^1 , w układach bowiem kolineacyjnych utworom jednokreślnym jednego układu odpowiadają utwory jednokreślne w układzie drugim.

108. Jeżeli dwa przekroje stożkowe c^2 i c_1^2 są krzywami odpowiadającymi sobie w dwu układach powinowatych albo podobnych, natenczas średnicom sprzężonym jednej krzywej odpowiadają średnice sprzężone drugiej krzywej, osi wzajemne bowiem układów powinowatych albo podobnych schodzą się z prostą, leżącą w nieskończoności, biegunowym tedy sprzężonym krzywej c^2 , leżącym w nieskończoności, odpowiadają bieguny sprzężone krzywej c_1^2 , które również w nieskończoności leżą.

109. Jeżeli dwa przekroje stożkowe c^2 i c_1^2 są środkowo kolineacyjne, natenczas 1. proste, przechodzące przez środek kolineacji, przecinają obie krzywe równocześnie w punktach rzeczywistych albo w punktach urojonych 2. Styczne poprowadzone ze środka kolineacji do jednej krzywej są stycznymi krzywej drugiej. 3. Pęki inwolucyjne biegunowych sprzężonych ze względu na obie krzywe, których wierzchołkiem jest środek kolineacji, nakrywają się. 4. Szeregi inwolucyjne biegunów sprzężonych ze względu na krzywe c^2 i c_1^2 , których podstawą jest oś kolineacji nakrywają się.

Jeżeli tedy dwa przekroje stożkowe są środkowo kolineacyjne, natenczas środkiem kolineacji jest punkt przecięcia się wspólnych stycznych, a osią kolineacji jest wspólna cięciwa tych krzywych, rzeczywista lub idealna.

Zbadać atoli należy, czy dwa przekroje stożkowe c^2 i c_1^2 , leżące na jednej płaszczyźnie, są krzywami środkowo kolineacyjnymi, jeżeli wspólną cięciwą tychże przyjmiemy za oś a punkt przecięcia się wspólnych stycznych przyjmiemy za środek kolineacji (rys. 67.).

Niech będą dane dwie krzywe rzędu drugiego c^2 i c_1^2 , których wspólną cięciwą jest prosta t , przechodząca przez wspólny biegun P .

Na biegunowej p punktu P leżą punkta przecięcia się O i O_1 wspólnych stycznych przekrojów stożkowych c^2 i c_1^2 .

Przyjmijmy, że punkta, leżące na cięciwie t znajdują się równocześnie w obrębie albo poza obrębem obu krzywych c^2 i c_1^2 , a nadto, że proste, przechodzące przez punkt O , przecinają równocześnie obie krzywe w punktach rzeczywistych albo urojonych.

Biegunowe o i o_1 punktu O ze względu na krzywe c^2 i c_1^2 przechodzą przez wspólny biegun P , punkt O bowiem leży na biegunowej punktu P .

Poprowadźmy przez punkt O prostą m i wyznaczmy punkta przecięcia się tejże A i B tudzież A_1 i B_1 z krzywami c^2 i c_1^2 , poprowadźmy nadto styczne a i b tudzież a_1 i b_1 w tych punktach, to punkt przecięcia się D stycznych a i b leży na prostej o , a punkt przecięcia się D_1 stycznych a_1 i b_1 leży na prostej o_1 .

Prosta OD i OD_1 są biegunowo sprzężone z promieniem m ze względu na krzywe c^2 i c_1^2 tworzą tedy ze wspólnymi stycznymi u i v grupy harmoniczne (u, v, m, OD) i (u, v, m, OD_1) , punkta tedy D i D_1 leżą na promieniu, przechodzącym przez punkt O .

Poprowadźmy następnie przez punkt O prostą n i wyznaczmy punkta przecięcia się tejże E i E_1 z biegunowymi o i o_1 , natenczas otrzymamy dwa trójkąty ADE i $A_1D_1E_1$, wyznaczające kolineację środkową układów π i π^1 . Punkt O jest środkiem a prosta, łącząca punkta przecięcia się boków odpowiednich AD i A_1D_1 , AE i A_1E_1 , DE i D_1E_1 jest osią tej kolineacji.

Przyjmijmy, że przekrój stożkowy c^2 jest krzywą układu π i założmy sobie wyznaczyć krzywą odpowiednią c_x^2 w układzie π^1 .

Punktowi B układu π odpowiada punkt B_1 w układzie π^1 , albowiem punkta F i F_1 , w których prosta m przecina biegunowe o i o_1 są elementami odpowiednimi układów π i π^1 i tworzą odpowiednio z punktami O, A, B i O_1, A_1, B_1 grupy harmoniczne.

Prosta OH , biegunowo sprzężona z prostą n ze względu na krzywe c^2 i c_1^2 , przecina się z biegunowymi o i o_1 w punktach H i H_1 , które są elementami odpowiednimi układów π i π^1 a zarazem punktami przekątnymi czworokątów $ABKL$ i $A_1B_1K_1L_1$, wpisanych w krzywe c^2 i c_1^2 . Boki przeciwległe AK i BL tudzież A_1K_1 i B_1L_1 przecinają się w punktach E i E_1 , albowiem H jest biegunem sprzężonym z E ze względu na krzywą c^2 , a H_1 jest biegunem sprzężonym z E_1 ze względu na krzywą c_1^2 .

Proste EA i HB przecinają się w punkcie K krzywej c^2 , któremu odpowiada w układzie π^1 punkt przecięcia się K_1 prostych odpowiednich E_1A_1 i H_1B_1 . Punktowi zaś L krzywej c^2 , w którym proste EB i HA przecinają się, odpowiada w układzie π^1 punkt przecięcia się L_1 prostych E_1B_1 i H_1A_1 .

Krzywa tedy c_x^2 środkowo kolineacyjna z przekrojem stożkowym c^2 jest wyznaczona czterema punktami A_1, B_1, K_1, L_1 i styczną a_1 w punkcie A_1 ; krzywa c_x^2 jest tedy identyczna z krzywą c_1^2 .

Oś kolineacyjna układów π i π^1 schodzi się ze wspólną cięciwą t krzywych c^2 i c_1^2 , albowiem na osi kolineacyjnej, jakoteż na wspólnej cięciwie dwu przekrojów stożkowych inwolucje biegunów sprzężonych ze względu na te krzywe nakrywają się. A zatem:

Dwa przekroje stożkowe, leżące na jednej płaszczyźnie są środkowo kolineacyjne. Oś tej kolineacji jest wspólną cięciwą krzywych, której punkta leżą równocześnie w obrębie albo poza obrębem obu krzywych. Środek kolineacji schodzi się z punktem przecięcia się dwu wspólnych stycznych, który jest biegunowo sprzężony ze względu na obie krzywe z tym wspólnym biegunem, który leży na osi kolineacji.

110. Jeżeli cięciwa wspólna rzeczywista lub idealna dwu przekrojów stożkowych c^2 i c_1^2 schodzi się z prostą w nieskończoności t^∞ , natenczas wspólna biegunowa p , odpowiadająca punktowi, przez który prosta t^∞ przechodzi, łączy środki krzywych c^2 i c_1^2 i przechodzi przez punkta przecięcia się O i O_1 wspólnych stycznych tychże. Uważając tedy punkt O lub O_1 za środek a prostą t^∞ za oś kolineacji, odpowiadają średnicom sprzężonym krzywej c^2 średnice sprzężone krzywej c_1^2 , do owych średnic odpowiednio równoległe. A zatem:

Przekroje stożkowe, których wspólna cięciwa rzeczywista lub idealna schodzi się z prostą w nieskończoności są krzywami podobnymi w podobnym położeniu. Takie krzywe noszą także nazwę krzywych homotetycznych.

Dwa koła są homotetyczne, przechodzą bowiem przez te same dwa punkta w nieskończoności.

Dwie hiperbole, których asymptoty są równoległe, dwie parabole których osi są równoległe, są krzywymi homotetycznymi, prosta w nieskończoności bowiem jest cięciwą wspólną tych krzywych.

Dwa przekroje stożkowe, stykające się w dwu punktach w nieskończoności są homotetyczne i współśrodkowe, albowiem biegun cięciwy styczności jest środkiem obu krzywych.

I wzajemnie: Dwa przekroje stożkowe homotetyczne i współśrodkowe stykają się w dwu punktach, leżących w nieskończoności.

O pękach i szeregach przekrojów stożkowych.

111. Przekroje stożkowe $c^2_1, c^2_2, \dots$, opisane na czworokącie $ABCD$, tworzą pęk przekrojów stożkowych. Krzywe $c^2_1, c^2_2, \dots$ nazywamy elementami a czworokąt $ABCD$ nazywamy podstawą pęku.

Przez każdy punkt X płaszczyzny, na której podstawa $ABCD$ leży, przechodzi jeden element pęku, wyznaczony punktami A, B, C, D i X . Boki przeciwległe czworokąta podstawowego są elementami pęku, punkt bowiem Y , leżący n. p. na boku AB , wyznacza z wierzchołkami czworokąta podstawowego krzywą rzędu drugiego, która się przedstawia w postaci dwu prostych AB i CD .

Punkta przekątne P, Q i R czworokąta $ABCD$ są wspólnymi biegunami wszystkich elementów pęku. Jeżeli wierzchołki czworokąta podstawowego są wszystkie rzeczywiste albo wszystkie urojone, natenczas wszystkie trzy wspólne bieguny są rzeczywiste.

Jeżeli zaś dwa wierzchołki czworokąta podstawowego są rzeczywiste, a dwa urojone, natenczas jeden wspólny biegun elementów pęku jest rzeczywisty a dwa są urojone.

112. Niech będzie dany pęk przekrojów ($c^2, \dots$), którego podstawą jest czworokąt $ABCD$ i prosta l , przecinająca się z krzywą c^2 w punktach M i M' , a z bokami przeciwległymi podstawy w punktach G i G', H i H', K i K' .

Połączmy wierzchołki B i C z punktami M, M', A i D to otrzymamy dwa pęki jednokreślne $B(M, M', A, D)$ i $C(M, M', A, D)$, stosunki tedy podwójnego podziału ($MM'GH$) i ($MM'H'G'$) punktów, w których prosta l owe pęki przecina są równe. Atoli wartość stosunku podwójnego podziału ($MM'H'G'$) nie zmieni się, jeżeli zamienimy odpowiednio elementa skrajne M i G' z elementami średnimi M' i H' ; a zatem

$$(MM'GH) = (M'MG'H).$$

Punktom tedy M, M', G, H odpowiadają jednokreślne punkta M', M, G', H' . Wiadomo jednak, że G i G', H i H', K i K' są elementami odpowiednimi szeregu inwolucyjnego, punkta tedy M i M' są również elementami odpowiednimi tego szeregu.

A zatem: Prosta dowolna l przecina się z elementami pęku przekrojów stożkowych w punktach odpowiednich szeregu inwolucyjnego. Punkta podwójne tego szeregu są punktami styczności podstawy l z dwoma elementami pęku.

Z tego wynika, że przez cztery punkta przechodzą dwa przekroje stożkowe, które się stykają z dowolną prostą, że zatem pomiędzy elementami pęku przekrojów stożkowych znajdują się dwie parabole.

Zagadnienie: Wykazać, że w pęku przekrojów stożkowych znajduje się jedna albo nieskończenie wiele hiperbol równobocznych, t. j. takich hiperbol, których asymptoty są prostopadłe.

Zagadnienie: Udowodnić, że wierzchołki trójkąta i punkt przecięcia się prostych, poprowadzonych z wierzchołków do przeciwległych boków, wyznaczają pęk hiperboli równobocznych.

113. Jeżeli wierzchołki A i B tudzież C i D czworokąta podstawowego schodzą się odpowiednio w punktach M i N , natenczas powstaje pęk przekrojów stożkowych, stykających się w dwu punktach.

Dowolna prosta l przecina się z elementami tego pęku w punktach odpowiednich szeregu inwolucyjnego, którego dwa elementa odpowiednie leżą na stycznych, poprowadzonych w punktach M i N do krzywych pęku, a którego jeden punkt podwójny leży na cięciwie styczności MN ; na tej prostej bowiem schodzą się dwa boki przeciwległe AC i BD czworokąta podstawowego.

114. Niech będzie dany pęk przekrojów stożkowych ($c^2_1, c^2_2, \dots$), którego podstawą jest czworokąt $ABCD$, a nadto krzywa rzędu drugiego c^2 , która przechodzi przez wierzchołki A, B i przecina się z elementami pęku c^2_1 , w punktach R i S , (rys. 68.).

Wyznamy punkta przecięcia się H i H_1 tudzież K i K_1 prostej CD z bokami przeciwległymi AB i SB tudzież z krzywą c^2 , to natenczas otrzymamy trzy pary elementów odpowiednich C i D, H i H_1, K i K_1 szeregu inwolucyjnego, który, jak wiadomo dwiema parami C, D i K, K_1 jest wyznaczony. Jeżeli tedy połączymy punkta R_1 i S_1, R_2 i S_2 w których elementa $c^2_3, c^2_4, \dots$ pęku przekrojów stożkowych krzywą c^2 przecinają, natenczas proste R_1S_1, R_2S_2 przechodzić będą przez punkt H_1 , sprzężony w szeregu inwolucyjnym z punktem przekątnym H czworokąta podstawowego. — A zatem:

Jeżeli przez dwa wierzchołki pęku przekrojów stożkowych przesuniemy krzywą rzędu drugiego, natenczas ta krzywa przecina każdy element pęku jeszcze w dwu punktach, które leżą na prostych, przechodzących przez jeden punkt.

115. Biegunowe punktu ze względu na elementa pęku przekrojów stożkowych przecinają się w jednym punkcie.

Jakoż wyznaczmy biegunowe a_1 i a_2 punktu A ze względu na elementa c^2_1 i c^2_2 pęku przekrojów stożkowych ($c^2_1, c^2_2, c^2_3, \dots$) i połączmy punkt A z punktem A_1 , w którym proste a_1 i a_2 przecinają się, wyznaczmy następnie punkta M i M_1, N i $N_1, \dots$, w których prosta AA_1 przecina się z krzywami $c^2_1, c^2_2, \dots$, to punkta A i A_1 dzielą harmonicznie odcinki MM_1 i NN_1 , te punkta są zatem elementami podwójnymi szeregu inwolucyjnego (M, M_1, N, N_1); punkt A_1 jest tedy harmonicznie sprzężony z punktem A ze względu na wszystkie elementa pęku przekrojów stożkowych, biegunowe tedy punktu A ze względu na owe elementa przechodzą przez punkt A_1 .

Z twierdzenia tego wnosimy: Średnice elementów pęku przekrojów stożkowych, sprzężone z pewnym kierunkiem przecinają się w jednym punkcie.

116. Miejsce geometryczne punktów, harmonicznie sprzężonych z punktami, leżącymi na linii prostej, ze względu na elementa pęku przekrojów stożkowych, jest krzywą rzędu drugiego, która przechodzi przez wspólne bieguny tego pęku.

Jakoż szeregowi $(G, H, J, \dots)$, którego podstawą jest prosta l , odpowiadają ze względu na elementa c^2_1, c^2_2 pęku przekrojów stożkowych dwa pęki promieni $L_1(g_1, h_1, i_1, \dots)$ i $L_2(g_2, h_2, \dots)$, tworzące krzywą rzędu drugiego c^2 . Punkta przecięcia się promieni odpowiednich g_1 i g_2, h_1 i h_2 , są harmonicznie sprzężone z punktami $G, H, \dots$ ze względu na wszystkie elementa pęku przekrojów stożkowych (art. 115.).

Krzywa c^2 przechodzi przez wspólne bieguny P_1, Q_1 i R_1 pęku $(c^2_1, c^2_2, c^2_3, \dots)$; punktom bowiem P, Q i R , w których podstawa l przecina się ze wspólnymi biegunowami $Q_1 R_1, R_1 P_1$ i $P_1 Q_1$ odpowiadają w pękach $L_1(g_1, h_1, i_1, \dots)$ i $L_2(g_2, h_2, i_2, \dots)$ promienie p_1 i p_2, q_1 i q_2, r_1 i r_2 , przecinające się w punktach P_1, Q_1 i R_1 krzywej c^2 .

Z twierdzenia tego wynika: Środki elementów pęku przekrojów stożkowych leżą na krzywej rzędu drugiego.

Jeżeli prosta l przechodzi przez wspólny biegun P pęku $(c^2_1, c^2_2, \dots)$, natenczas przekrój stożkowy c^2 przedstawia się w postaci dwu prostych, przecinających się, z których jedna schodzi się ze wspólną biegunową $Q_1 R_1$, a druga przechodzi przez punkt P .

Jeżeli tedy dwa wierzchołki A i B czworokąta podstawowego $ABCD$ pęku przekrojów stożkowych leżą w nieskończoności, albo innemi słowy, jeżeli elementa tego pęku są homotetyczne, natenczas jeden wspólny biegun leży w nieskończoności, środki tedy elementów tego pęku leżą na linii prostej.

117. Przekroje stożkowe $c^2_1, c^2_2, c^2_3, \dots$, wpisane w czworobok $abcd$, tworzą szereg przekrojów stożkowych. Krzywe $c^2_1, c^2_2, \dots$, są elementami a czworobok $abcd$ jest podstawą tego szeregu.

Każda prosta x , leżąca na płaszczyźnie czworoboku $abcd$, wyznacza jeden element szeregu; proste bowiem a, b, c, d i x wyznaczają przekrój stożkowy. Wierzchołki przeciwległe czworoboku podstawowego $abcd$ są elementami szeregu; prosta y bowiem, przechodząca n. p. przez punkt przecięcia się boków a i b powłóczy z bokami czworoboku podstawowego krzywą klasy drugiej, która się rozpada na punkta przecięcia się prostych a i b , tudzież c i d .

Przekątne p, q i r czworoboku $abcd$ są wspólnymi biegunowami wszystkich elementów szeregu przekrojów stożkowych.

118. Na zasadzie prawa biegunowej dwoistości wnosimy z twierdzeń uzasadnionych w artykułach 112, 113, 115 i 116 że,

1. Styczne, poprowadzone z dowolnego punktu L do elementów szeregu przekrojów stożkowych tworzą pęk inwolucyjny. Elementa podwójne tego pęku są stycznymi dwu krzywych rzędu drugiego, wpisanych w podstawę szeregu i przechodzących przez punkt L .

2. Styczne, wyprowadzone z dowolnego punktu do przekrojów stożkowych, stykających się w dwu punktach M i N , tworzą pęk inwolucyjny, którego dwa promienie odpowiednie przechodzą przez punkta styczności M i N , a którego jeden promień podwójny przechodzi przez punkt przecięcia się wspólnych stycznych tych krzywych.

3. Bieguny prostej ze względu na elementa szeregu przekrojów stożkowych leżą na linii prostej; środki tedy tych krzywych jako bieguny prostej, leżące w nieskończoności, leżą również na linii prostej.

4. Proste biegunowo sprzężone z elementami pęku promieni ze względu na elementa szeregu przekrojów stożkowych powłóczą krzywą rzędu drugiego, która się styka z przekątnymi czworoboku podstawowego.

O przekrojach stożkowych spółogniskowych.

119. Przekroje stożkowe $c^2_1, c^2_2, \dots$, mające ogniska F_1 i F_2 wspólne, tworzą szereg przekrojów stożkowych, którego podstawą jest czworobok urojony.

Jakoż pęki inwolucyjne biegunowych sprzężonych ze względu na krzywe $c^2_1, c^2_2, \dots$, których wierzchołki schodzą się z ogniskami F_1 i F_2 są prostokątne, promienie podwójne przeto tych pęków czyli styczne wyprowadzone z ognisk do elementów $c^2_1, c^2_2, \dots$ przechodzą przez punkta kołowe urojone I_1 i I_2 , leżące w nieskończoności. Czworobok tedy, opisany na przekrojach stożkowych spółogniskowych, posiada dwa wierzchołki rzeczywiste, którymi są ogniska i cztery wierzchołki urojone z których dwa schodzą się z punktami kołowymi w nieskończoności.

120. Połączmy dowolny punkt P z wierzchołkami przeciwległymi czworoboku urojonego, opisanego na przekrojach stożkowych spółogniskowych, to natenczas otrzymamy pęk inwolucyjny $P(F_1, F_2, I_1, I_2, \dots)$, którego promienie podwójne s_1 i s_2 są stycznymi dwu krzywych, przechodzących przez punkt P .

Te styczne są prostopadłe, tworzą bowiem z promieniami PI_1 i PI_2 , przechodzącymi przez punkta kołowe, grupą harmoniczną. Proste s_1 i s_2 tworzą również grupę harmoniczną z promieniami PF_1 i PF_2 , przechodzącymi przez ogniska; jedna z tych prostych jest tedy styczną elipsy a druga jest styczną hiperboli.

Wiadomo, że jeżeli promienie podwójne pęku inwolucyjnego hiperbolicznego są prostopadłe, natenczas dzielą takowe kąty, zawarte między promieniami odpowiednimi na dwie równe części. A zatem:

Styczne poprowadzone do elipsy i hiperboli dzielą na dwie równe części kąty, zawarte między promieniami łączącymi punkt styczności z ogniskami.

Jeżeli tedy ogniska krzywych rzędu drugiego, spółogniskowych, leżą w skończoności, natenczas przez każdy punkt przechodzą dwie krzywe, przecinające się pod kątem prostym, jedna z tych krzywych jest elipsą a druga hiperbolą.

Jeżeli zaś jedno ognisko szeregu przekrojów stożkowych, spółogniskowych, leży w nieskończoności, natenczas wszystkie elementa tego szeregu są parabolami.

121. Ogniska krzywej rzędu drugiego, leżące w skończoności, są równoważne z czterema stycznymi urojonymi tejże; ogniska tedy i jedna styczna wyznaczają elipsę albo hiperbolę.

122. Z twierdzeń podanych w art. 118_{3 i 4} wnosimy, że:

1. Bieguny prostej ze względu na krzywe spółogniskowe leżą na linii prostej.

2. Proste, harmonicznie sprzężone z elementami pęku promieni ze względu na przekroje stożkowe spółogniskowe, powlócą parabolę, która się styka z osiami tych krzywych; osi bowiem i prosta, leżąca w nieskończoności, są spólnymi biegunowemi krzywych spółogniskowych.

0 przekrojach stożkowych, stykających się w stopniu drugim i trzecim.

123. Powiadamy, że dwie krzywe stykają się w stopniu n -tym, jeżeli posiadają $(n+1)$ bezpośrednio po sobie następujących punktów spólnych. Dwa przekroje stożkowe stykają się tedy w stopniu pierwszym, drugim lub trzecim, stosownie do tego czy posiadają dwa, trzy lub cztery bezpośrednio po sobie następujące punkta spólne. Krzywe rzędu drugiego, stykające się w stopniu czwartym nakrywają się, albowiem krzywa rzędu drugiego jest wyznaczona pięcioma punktami.

124. Mając dany punkt P , leżący na przekroju stożkowym c^2 (rys. 69.), założmy sobie wyznaczyć krzywe rzędu drugiego, któreby się stykały w punkcie P z krzywą c^2 w stopniu drugim względnie trzecim.

Poprowadźmy w tym celu przez dowolne punkta C i D krzywe rzędu drugiego $c_1^2, c_2^2, \dots$, stykające się w punkcie P z krzywą c^2 w stopniu pierwszym, to natenczas otrzymamy pęk przekrojów stożkowych, którego elementa są środkowo kolineacyjne z krzywą c^2 . Punkt P jest środkiem, a spólne cięciwy $R_1S_1, R_2S_2, \dots$ krzywych c^2 i c_1^2, c^2 i $c_2^2, \dots$ są osiami tych kolineacji.

Proste $R_1S_1, R_2S_2, \dots$ przecinają się w punkcie H , leżącym na prostej CD (art. 114.). Przyjmując tedy prostą PH za oś kolineacji otrzymamy element pęku ($c_1^2, c_2^2, \dots$), który posiada z krzywą c^2 trzy bezpośrednio po sobie następujące punkta spólne; albowiem jeden punkt cięciwy R_1S_1 schodzi się z punktem P .

Jeżeli punkt H leży na stycznej p , poprowadzonej w punkcie P do krzywej c^2 , natenczas przyjmując tę styczną za oś kolineacji, a punkt styczności P za środek kolineacji, odpowiada krzywej c^2 przekrój stożkowy, posiadający z tą krzywą w punkcie P cztery bezpośrednio po sobie następujące punkta spólne.

Aby zatem wykreślić przekrój stożkowy, który się styka w punkcie P z krzywą rzędu drugiego c^2 w stopniu drugim (rys. 70.) i przechodzi przez punkta C_1 i D_1 , wyznaczmy punkta przecięcia się C i D prostych C_1P i D_1P z krzywą c^2 , a nadto punkt H , w którym proste CD i C_1D_1 przecinają się, wyznaczmy następnie przekrój stożkowy c_1^2 , środkowo kolineacyjny z krzywą c^2 , przyjmując P za środek, prostą PH za oś a punkta C i C_1 tudzież D i D_1 za elementa odpowiednie, to natenczas ów przekrój stożkowy stykać się będzie z krzywą c^2 w stopniu drugim.

Celem wyznaczenia przekroju stożkowego, któryby się stykał z krzywą rzędu drugiego c^2 w punkcie P w stopniu trzecim i przechodził przez punkt D_1 (rys. 71.), wyznaczmy punkt przecięcia się D prostej PD_1 z krzywą c^2 , a następnie przekrój stożkowy, środkowo kolineacyjny z krzywą c^2 , przyjmując punkt P za środek, styczną p , poprowadzoną w punkcie P do krzywej c^2 , za oś a punkta D i D_1 za elementa odpowiednie kolineacji, to natenczas ów przekrój stożkowy posiadać będzie z krzywą c^2 w punkcie P cztery bezpośrednio po sobie następujące punkta spólne.

Zagadnienia o przekrojach stożkowych.

Zagadnienie 1.: Podzielić łuk AB koła k na trzy równe części.

Rozwiązanie: Odmierzmy od punktu A na okręgu k dowolne łuki $AP, AQ, AS, \dots$, a od punktu B w kierunku przeciwnym łuki $BP_1, BQ_1, BS_1, \dots$, dwa razy większe od łuków $AP, AQ, AS, \dots$, poprowadźmy następnie styczną BM do koła k w punkcie B i połączmy środek O koła k z punktami $P, Q, S, \dots$ a punkt B z punktami $P_1, Q_1, S_1, \dots$, to natenczas otrzymamy dwa pęki jednokreślne przystające o kierunku obrotu przeciwnym. Miejsce geometryczne tedy punktów przecięcia się promieni odpowiednich OP i BP_1, OQ i $BQ_1, \dots$ owych pęków jest hiperbolą równoboczną, która przecina się z kołem k w czterech punktach.

Punkt U , leżący na łuku AB dzieli ten łuk w stosunku jak jeden do dwu albowiem kąt AOU równy jest połowie kąta UOB .

Zagadnienie 2.: Udowodnić, że boki dwu trójkątów, wpisanych w krzywą rzędu drugiego, są stycznymi przekroju stożkowego (rys. 72.).

Rozwiązanie: Wierzchołki dwu trójkątów ABC i DEF , wpisanych w krzywą rzędu drugiego c^2 , wyznaczają sześciokąt, którego boki przeciwnie AB i DE, BC i EF, CD i FA przecinają się w punktach M, N i O , leżących na linii prostej p . Wierzchołki tedy A i F, D i C, M i N trójkątów ADM i FCN leżą na prostych, przechodzących przez punkt O , a więc boki odpowiednie tychże przecinają się w punktach P, Q i R , leżących na prostej t .

Atoli punkta A i D, C i F, Q i R są wierzchołkami przeciwległymi sześcioboku $ABCDEF$ a proste AD, CF i t , łączące owe wierzchołki przecinają się w punkcie P , ten sześciobok jest tedy opisany na krzywej rzędu drugiego.

Zagadnienie 3.: Dane są dwa układy π i π_1 środkowo kolineacyjne i złączone na jednej płaszczyźnie; do układu π należą dwa przekroje stożkowe, przecinające się w dwu punktach rzeczywistych i w dwu punktach urojonych wyznaczyć a) koła b) hiperbole równoboczne odpowiadające danym przekrojom stożkowym w układzie π^1 .

Zagadnienie 4.: Wykreślić przekrój stożkowy, który przechodzi przez punkta A, B, C, D i styka się z prostą dowolną l .

Rozwiązanie: Krzywe rzędu drugiego, opisane na czworokącie $ABCD$, przecinają się z prostą l w punktach odpowiednich szeregu inwolucyjnego, którego punkta podwójne są punktami styczności prostej l z krzywami czyniącymi zadość warunkom zagadnienia. Atoli punkta M i M_1, N i N_1 , w których prosta l przecina się z bokami przeciwległymi czworokąta $ABCD$ są elementami odpowiednimi tego szeregu; wyznaczając tedy punkta podwójne E i F szeregu ($M, M_1, N, N_1, \dots$), otrzymamy punkta, w których krzywe, przechodzące przez wierzchołki czworokąta $ABCD$ z prostą l się stykają.

Zagadnienie 5.: Wykreślić krzywą rzędu drugiego, która przechodzi przez trzy punkta A, B, C i styka się z dwiema prostymi l i m .

Dajmy na to, że krzywa c^2 przechodzi przez punkta A, B, C i styka się z prostymi l i m w punktach L i M , natenczas można uważać cięciwę styczności LM za czworokąt nieskończenie płaski, wpisany w krzywą c^2 ,

punkta przecięcia się A i B tudzież P i Q prostej AB z krzywą c^2 i ze stycznymi l i m wyznaczają szereg inwolucyjny, którego jeden punkt podwójny E leży na cięciwie LM . I wzajemnie:

Jeżeli wyznaczymy punkta podwójne E i F szeregu inwolucyjnego $A, B, P, Q, \dots$, natenczas cięciwy styczności krzywych, czyniących zadość warunkom zagadnienia, przechodzą przez każdy z tych punktów. Atoli owe cięciwy przechodzą również przez punkta podwójne E_1 i F_1 szeregu inwolucyjnego $(A, C, P_1, Q_1, \dots)$, którego podstawą jest bok AC . Proste zatem EE_1, EF_1, E_1F i FF_1 przecinają się ze stycznymi l i m w czterech parach punktów, które z punktami A, B i C wyznaczają cztery przekroje stożkowe stykające się z prostymi l i m .

Zagadnienie 6.: Dany jest spólny biegun P dwu przekrojów stożkowych c^2_1 i c^2_2 ; wyznaczyć spólne cięciwy tych krzywych, przechodzące przez punkt P .

Rozwiązanie: Wyznaczymy biegunowe a_1 i a_2 tudzież b_1 i b_2 dwu dowolnych punktów A i B ze względu na krzywe c^2_1 i c^2_2 a nadto punkta A_1 i B_1 , w których proste a_1 i a_2 tudzież b_1 i b_2 przecinają się, to proste PA i PA_1 jakoteż PB i PB_1 są biegunowo sprzężone ze względu na wszystkie elementa pęku przekrojów stożkowych, wyznaczonego krzywymi c^2_1 i c^2_2 .

Jednym elementem tego pęku są spólne cięciwy krzywych c^2_1 i c^2_2 , przechodzące przez punkt P , te proste zatem dzielą harmonicznie kąty APA_1 i BPA_1 .

Zagadnienie 7.: Wyznaczyć kierunki osi przekroju stożkowego c^2 , którego pięć punktów A, B, C, D i E jest danych.

Rozwiązanie: Zakreślmy koło k , przechodzące przez punkta A, B , i C i wyznaczmy punkt D_1 , w którym krzywe c^2 i k przecinają się, to natenczas otrzymamy czworokąt $ABCD_1$ wpisany w koło k i w przekrój stożkowy c^2 .

Punkta przecięcia się prostej, leżącej w nieskończoności z bokami przeciwległymi czworokąta $ABCD_1$ i z krzywymi c^2 , K tworzą szereg inwolucyjny, którego punkta podwójne są kierunkami osi danego przekroju stożkowego, tworzą bowiem grupy harmoniczne z punktami kołowymi urojonymi w nieskończoności i z kierunkami asymptot krzywej c^2 , które, jak wiadomo, są punktami przecięcia się prostej, leżącej w nieskończoności z krzywą c^2 .

Atoli kierunki osi tworzą również grupy harmoniczne z kierunkami boków przeciwległych czworokąta $ABCD_1$, proste zatem, dzielące kąty, zawarte między bokami AB i CD_1 , AC i BD_1 , AD_1 i BC są równoległe do osi przekroju stożkowego c^2 .

Zagadnienie 8.: Wyznaczyć ogniska krzywej rzędu drugiego, której osi m i n , styczna a i punkt styczności A są dane, (rys. 73.).

Rozwiązanie: Ognisko krzywej rzędu drugiego c^2 określiliśmy jako wierzchołek pęku inwolucyjnego prostokątnego biegunowych sprzężonych ze względu na tę krzywą.

Z określenia tego wyniku bezpośrednio, że ogniska znajdują się w obrębie krzywej i leżą na osiach tejże; albowiem bieguny sprzężone, przechodzące przez jakikolwiek inny punkt nie są wogóle prostopadłe, gdy tymczasem biegunowa, sprzężona z osią, przechodząca przez dowolny punkt tejże, jest do niej prostopadła.

Jeżeli tedy wyznajdziemy na osiach m i n takie punkta, przez które oprócz osi i prostej z nią sprzężonej przechodzą jeszcze dwie biegunowe sprzężone prostopadłe, natenczas wszystkie biegunowe sprzężone, przechodzące przez te punkta, są prostopadłe; te punkta więc są ogniskami.

Wyznaczymy w tym celu pęk $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ biegunowych odpowiadających elementom szeregu $(A_1, A_2, A_3, \dots)$, którego podstawą jest średnica MA krzywej c^2 , i poprowadźmy przez punkta $A_1, A_2, A_3, \dots$ proste $p_1, p_2, p_3, \dots$, prostopadłe do stycznej a , która do biegunowych $a_1, a_2, \dots$ jest równoległa, to natenczas otrzymamy pęk $(p_1, p_2, \dots)$, jednokreślny z pękiem $(a_1, a_2, \dots)$; szeregi zatem $(B_1, B_2, \dots)$ i $(P_1, P_2, \dots)$ tudzież $(C_1, C_2, \dots)$ i $(Q_1, Q_2, \dots)$, w których osi m i n owe pęki przecinają się jednokreślne.

Atoli punktowi M szeregu $(A_1, A_2, \dots)$ odpowiada biegunowa a^∞ , leżąca w nieskończoności, a punktowi tego szeregu, leżącemu w nieskończoności, odpowiada średnica a_m , równoległa do stycznej a , punkta tedy M i B^∞ szeregów $(B, B_1, \dots)$ i $(P, P_1, \dots)$, jakoteż punkta M i C^∞ szeregów $(C, C_1, \dots)$ i $(Q, Q_1, \dots)$ są zamienne, tworzą zatem szeregi inwolucyjne $(B, P, B_1, P_1, \dots)$ i $(C, Q, C_1, Q_1, \dots)$.

Punkta podwójne tych szeregów są ogniskami krzywej rzędu drugiego c^2 .

Ogniska, leżące na osi n są urojone albowiem szereg inwolucyjny $(C, Q, C_1, Q_1, \dots)$ jest eliptyczny; ogniska zaś, leżące na osi m są rzeczywiste, szereg inwolucyjny bowiem $(B, P, B_1, P_1, \dots)$ jest hiperboliczny.

Jeżeli tedy zakreslimy na cięciwie B_2P_2 koło k_1 , a ze środka M przekroju stożkowego c^2 zakreslimy koło k promieniem równym długości stycznej, poprowadzonej z M do k_1 , to natenczas koło k przecina się z osią m w punktach F_1 i F_2 , które są ogniskami krzywej c^2 .

CZĘŚĆ II.

Metody geometryi wykreślnej.

A. Rzuty środkowe.

(Perspektywa linijna).

1. Niech będzie dany punkt O , płaszczyzna π i utwór przestrzeni $ABC, \dots$ (rys. 74.). Poprowadźmy promienie $OA, OB, OC, \dots$ i wyznaczmy ślady $A', B', C', \dots$ tychże na płaszczyźnie π , połączmy następnie punkta $A', B', C', \dots$ w takim porządku, w jakim punkta $A, B, \dots$, po sobie następują, natenczas otrzymamy rysunek, który nazywamy rzutem środkowym albo perspektywą linijną utworu $ABC, \dots$

Wyobraźmy sobie, że w punkcie O znajduje się środek optyczny oka, natenczas promienie widzenia punktów $A, B, C, \dots$ schodzą się z prostymi $OA', OB', OC', \dots$; jeżeli tedy nieuwzględniamy ani barwy ani mocy oświetlenia poszczególnych punktów przedmiotu $ABC, \dots$, natenczas rysunek $A'B'C', \dots$, wywołała w oku O takiesame wrażenie jak przedmiot; wiadomo bowiem, że punkta, leżące na tychsamyh promieniach widzenia wywołują w oku tezsame wrażenia, a pozorne wielkości przedmiotów zależą od kątów, zawartych między promieniami widzenia.

2. Płaszczyznę π , na której rysujemy rzuty środkowe (perspektywy) przedmiotów, nazywamy tłem, punkt O nazywamy środkiem rzutów, prostą, łączącą dowolny punkt A przestrzeni ze środkiem rzutów, nazywamy promieniem rzucającym punktu A , a ślad A' promienia OA na tle nazywamy rzutem środkowym albo perspektywą punktu A .

Położenie środka rzutów względem tła wyznaczamy, prowadząc z punktu O prostą OO_1 , prostopadłą do tła i kreśląc ze spodka O_1 tej prostopadłej koło k promieniem równym odcinkowi OO_1 .

Punkt O_1 nazywamy punktem głównym a koło k nazywamy kołem oddalenia.

O prostych, przechodzących przez środek rzutów.

3. Prosta l , przechodząca przez środek rzutów O , przebija tło w punkcie Z' , w którym schodzą się rzuty wszystkich punktów $A, B, \dots$, leżących na tej prostej. Każdemu punktowi przestrzeni odpowiada jeden rzut środkowy,

atoli punktowi leżącemu na tle odpowiada nieskończenie wiele punktów, które leżą na prostej, łączącej środek rzutów z tym punktem.

Punkt Z' wyznacza tedy prostą $OZ' \equiv l$ (rys. 75.). Kąt $OZ'O_1 = \alpha$ jest kątem nachylenia prostej l do tła. Celem wyznaczenia prawdziwej wielkości tego kąta, należy trójkąt $OZ'O_1$, prostokątny przy wierzchołku O_1 , na tle narysować. Poprowadźmy w tym celu promień $(O)O_1$ koła oddalenia k , prostopadły do O_1Z' i połączmy punkta (O) i Z' , to trójkąt $(O)Z'O_1$ jest przystający do trójkąta OO_1Z' ; kąt zatem $(O)Z'O_1$ równy jest kątowi α .

Ślady $Z', Z'_1, \dots$ prostych $l_1, l_2, \dots$, nachylonych do tła pod kątem α , leżą na okręgu koła k_1 , zakreślonego z punktu O_1 promieniem O_1Z' , albowiem trójkąty $(O)O_1Z', (O)O_1Z'_1, (O)O_1Z'_2, \dots$ są przystające, przyprostokątne tedy $O_1Z', O_1Z'_1, O_1Z'_2, \dots$ są równe.

Koło k_1 , nazywamy kołem nachylenia.

Ślady prostych, przechodzących przez środek rzutów i nachylonych do tła pod kątem 45° , leżą na kole oddalenia.

Ślady prostych, przechodzących przez środek rzutów a nachylonych do tła pod kątem wiekszym niż 45° leżą w obrębie koła oddalenia mniejszym poza obrębem.

Zagadnienie: Wyznaczyć miejsce geometryczne śladów prostych, przechodzących przez środek rzutów i nachylonych do tła pod kątem α , (rys. 75.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez dowolny punkt (O) koła oddalenia k prostą $(O)Z'$, nachyloną do promienia $(O)O_1$ pod kątem $(90 - \alpha)$, poprowadźmy następnie prostą O_1Z' prostopadłą do $(O)O_1$ i wyznaczmy punkt Z' , w którym proste $(O)Z'$ i O_1Z' przecinają się, to punkt Z' jest śladem prostej, nachylonej do tła pod kątem α . Koło k_1 tedy, zakreślone z punktu O_1 promieniem O_1Z' jest miejscem geometrycznym śladów prostych, przesuniętych przez środek rzutów i nachylonych do tła pod kątem α .

O płaszczyznach, przesuniętych przez środek rzutów.

4. Płaszczyzna π^1 , przesunięta przez środek rzutów O , przecina się z tłem π podług prostej z'_1 , na której schodzą się rzuty wszystkich prostych leżących na płaszczyźnie π^1 (rys. 76.). Każdej prostej w przestrzeni odpowiada jeden rzut środkowy, atoli prostej, leżącej na tle, odpowiada nieskończenie wiele prostych, które leżą na płaszczyźnie, przesuniętej przez środek rzutów.

Prosta z'_1 wyznacza płaszczyznę π^1 .

Wyprowadźmy z punktu głównego O_1 prostą O_1A_1 , prostopadłą do śladu z'_1 i połączmy spodek A_1 tej prostopadłej ze środkiem rzutów O , to prosta OA_1 jest prostopadłą do śladu z'_1 , kąt zatem $OA_1O_1 = \beta$ jest kątem nachylenia płaszczyzny π^1 do tła.

Aby tedy wyznaczyć rzeczywistą wielkość tego kąta, należy trójkąt OA_1O_1 , prostokątny przy wierzchołku O_1 , którego nadto obie przyprostokątne są dane, na tle narysować, (rys. 76.).

Ślady $z'_1, \dots$ płaszczyzn, przesuniętych przez środek rzutów i nachylonych do tła pod kątem β , są stycznymi koła, zakreślonego z punktu głównego promieniem O_1A_1 ; albowiem trójkąty $(O)A_1O_1, (O)A_2O_1, (O)A_3O_1, \dots$ są przystające, boki zatem $O_1A_1, O_1A_2, O_1A_3, \dots$ są równe a ślady $z'_1, z'_2, z'_3, \dots$

są prostopadłe do prostych $O_1A_1, O_1A_2, O_1A_3, \dots$. Ślady płaszczyzn, nachylonych do tła pod kątem 45° , są stycznymi koła oddalenia.

Ślady płaszczyzn, nachylonych do tła pod kątem większym niż 45° przecinają koło oddalenia w punktach rzeczywistych urojonych.

Zagadnienie: Wyznaczyć ślady płaszczyzn, przechodzących przez środek rzutów i nachylonych do tła pod kątem α .

Rozwiązanie: Styczne koła nachylenia (3. zag.) są śladami płaszczyzn nachylonych do tła pod kątem α .

5. Jeżeli płaszczyznę, przechodzącą przez środek rzutów O obrócimy około śladu z'_1 tak, aby się zeszła z tłem, albo innemi słowy, jeżeli wykonamy kład płaszczyzny π^1 na tło, natenczas środek rzutów zejdzie się z punktem $[O]$, leżącym na śladzie O_1A_1 płaszczyzny, przesuniętej przez punkt O prostopadłe do śladu z'_1 . — Odcinek $[O]A_1$ równy jest przeciwprostokątnej trójkąta, którego jedna przyprostokątna jest równa promieniowi koła oddalenia, a którego druga przyprostokątna jest równa odległości punktu głównego od śladu z'_1 (rys. 76.).

Proste OZ'_1, OZ'_2 , leżące na płaszczyźnie π^1 i przechodzące przez środek rzutów, schodzą się po kładzie z prostymi $[O]Z'_1, [O]Z'_2$, a kąty, zawarte między owymi prostymi równe są kątom nachylenia kładów $[O]Z'_1$ i $[O]Z'_2$.

Zagadnienie 1.: Mając dany ślad z'_1 płaszczyzny π^1 , przesuniętej przez środek rzutów, wyznaczyć ślady prostych, leżących na płaszczyźnie i przechodzących przez środek rzutów, któreby były nachylone do tła pod kątem α .

Rozwiązanie: Koło nachylenia k_1 przecina się z prostą z'_1 w punktach Z'_1, Z'_2 , które są śladami prostych, czyniących zadość warunkom zagadnienia.

Zagadnienie 2.: Wyznaczyć ślady prostych, dzielących na dwie równe części kąty, zawarte między prostymi OZ'_1 i OZ'_2 , przechodzącymi przez środek rzutów.

Rozwiązanie: Wykonajmy kład płaszczyzny $OZ'_1Z'_2$ na tło i podzielmy kąty, zawarte między tymi kładami $[O]Z'_1$ i $[O]Z'_2$ na dwie równe części, to proste dzielące $[O]Z'_3$ i $[O]Z'_4$ przecinają się z prostą $Z'_1Z'_2$ w punktach Z'_3 i Z'_4 , które są śladami prostych, dzielących na dwie równe części kąty zawarte między OZ'_1 i OZ'_2 .

Zagadnienie 3.: Dane są ślady z'_1, z'_2, z'_3 trzech płaszczyzn π^1, π^2, π^3 , przechodzących przez środek rzutów, a nachylonych odpowiednio do tła pod kątami β_1, β_2 i β_3 ; wyznaczyć punkt główny i koło oddalenia (rys. 77.).

Rozwiązanie: Jeżeli przez dowolny punkt O' przesuniemy płaszczyzny π^1, π^2, π^3 , nachylone do tła odpowiednio pod kątami β_1, β_2 i β_3 , których ślady zbiegu z''_1, z''_2 i z''_3 są odpowiednio równoległe do z'_1, z'_2 i z'_3 , natenczas otrzymamy trójbok z''_1, z''_2, z''_3 homotetyczny z trójbkiem z'_1, z'_2, z'_3 . Środek podobieństwa tych trójbków schodzi się z punktem O_p , w którym prosta OO' przebija tło.

Aby tedy rozwiązać dane zagadnienie, obierzmy dowolny punkt O'_1 a dowolne koło k' , zakreślone ze środka O'_1 za koło oddalenia i wyznaczmy koła nachylenia k'_1, k'_2 i k'_3 , odpowiadające kątom β_1, β_2 i β_3 , poprowadźmy następnie styczne z''_1, z''_2 i z''_3 do tych kół, odpowiednio równoległe do śladów z'_1, z'_2 i z'_3 , to natenczas otrzymamy trójbok z''_1, z''_2 i z''_3 , homote-

tetyczny z trójbkiem z'_1, z'_2, z'_3 . Środek podobieństwa O_p tych trójbków znajduje się w punkcie przecięcia się prostych m, n i p , łączących wierzchołki odpowiednie owych utworów.

Jeżeli tedy wyznaczmy punkt O_1 układu z'_1, z'_2, z'_3 , odpowiadający punktowi O'_1 układu z''_1, z''_2, z''_3 , natenczas otrzymamy punkt główny.

Aby wyznaczyć promień koła oddalenia, wykonajmy kład trójkąta $O'O_1O_p$ na tło i wyprowadźmy z punktu głównego O_1 prostą $O_1(O)$, prostopadłą do O'_1O_p , to takowa przetnie się z kładem $(O')O_p$ przeciwprostokątnej trójkąta $O'O_1O_p$ w punkcie (O) , który jest kładem środka rzutów O . Odcinek tedy $(O)O_1$ jest równy promieniowi koła oddalenia k .

0 prostych dowolnych.

6. Płaszczyzna (O, l) , przesunięta przez środek rzutów i przez dowolną prostą l , przecina się z tłem podług prostej l' , która jest miejscem geometrycznym rzutów środkowych $A', B', \dots$ punktów $A, B, \dots$, leżących na prostej l (rys. 78. a i b). Płaszczyznę (O, l) nazywamy płaszczyzną rzucającą a prostą l' nazywamy rzutem środkowym albo perspektywą prostej.

Rzut l' nie wyznacza położenia prostej l w przestrzeni, albowiem rzuty wszystkich prostych, leżących na płaszczyźnie (O, l) schodzą się na prostej l' . Jeżeli jednak wyznaczmy punkt T , w którym prosta l przebija tło, a nadto rzut środkowy Z' punktu Z'' , leżącego w nieskończoności na prostej l , natenczas położenie tej prostej będzie wyznaczone. Mając bowiem dane punkta T i Z' , jeżeli połączymy środek rzutów z punktem Z' i poprowadzimy przez punkt T prostą, równoległą do promienia OZ' , natenczas otrzymamy prostą l' .

Punkt T nazywamy śladem tłowym, punkt Z' nazywamy śladem zbiegu a prostą OZ' nazywamy promieniem zbiegu prostej l .

7. Proste l i OZ' są równoległe, kąty nachylenia przeto tych prostych do tła są równe. A zatem:

Ślady zbiegu prostych, prostopadłych do tła schodzą się z punktem głównym.

Ślady zbiegu prostych, nachylonych do tła pod kątem 45° , leżą na okręgu koła oddalenia.

Ślady zbiegu prostych, nachylonych do tła pod kątem większym niż 45° znajdują się w obrębie poza obrębem koła oddalenia.

Ślad tłowy i ślad zbiegu prostej m , równoległej do tła leżą w nieskończoności. Rzut m' nie wyznacza tedy położenia prostej m , albowiem rzuty wszystkich prostych, równoległych do tła, które leżą na płaszczyźnie (O, m) , schodzą się na prostej m' , a ślady tych prostych schodzą się z tymi samymi punktami w nieskończoności.

Aby tedy wyznaczyć położenie prostej m , równoległej do tła, należy oprócz rzutu m' tejsze, wyznaczyć dowolny punkt na niej leżący.

8. Rzut M' punktu M a nadto ślad tłowy T i ślad zbiegu Z' prostej l , która przechodzi przez punkt M , wyznaczają położenie tego punktu w przestrzeni; ślady bowiem T i Z' wyznaczają prostą l , którą promień rzucający OM' przecina w punkcie M .

Położenie tedy punktu wyznaczamy zapomocą rzutu tegoż punktu i prostej, przechodzącej przez ów punkt, której ślady leżą w skończoności.

9. Płaszczyznę ρ , przesuniętą przez środek rzutów, równoległą do tła, nazywamy płaszczyzną zniknięcia.

Poprowadźmy dowolną prostą l i wyznaczmy ślad tłowy T , śladu zbiegu Z' i punkt R , w którym prosta l przecina się z płaszczyzną ρ .

Rzut środkowy R' punktu R , zwany śladem zniknięcia prostej l , leży w nieskończoności, albowiem promień rzucający OR jest równoległy do tła. Odcinki OR i TZ' są równe, proste bowiem OR i TZ' tudzież TR i OZ' są równoległe.

Jeżeli tedy odcinki rzutów środkowych $l', l'_1, \dots$ prostych $l, l_1, \dots$, zawarte między śladami tłowymi i śladami zbiegu są równe, natenczas ślady zniknięcia prostych $l, l_1, \dots$, leżą na obwodzie koła, zakreślonego ze środka rzutów promieniem TZ' . Jeżeli w szczególności rzuty środkowe l'_2 i l'_3 dwu prostych l_2 i l_3 są równoległe a odcinki tychże $T_2Z'_2$ i $T_3Z'_3$ są równe, natenczas proste l_2 i l_3 przecinają się w punkcie, leżącym na płaszczyźnie zniknięcia, którego odległość od środka rzutów jest równa odcinkom $T_2Z'_2$ i $T_3Z'_3$, albo przechodzą przez dwa punkta, leżące na płaszczyźnie zniknięcia symetrycznie względem środka rzutów, stosownie do tego, czy kierunki $T_2Z'_2$ i $T_3Z'_3$ są zgodne czy przeciwne.

Rzut środkowy S' punktu S , leżącego na prostej l za tłem w odległości, równej promieniowi koła oddalenia, dzieli na dwie równe części odcinek zawarty między śladem tłowym i śladem zbiegu prostej l , trójkąty bowiem $O'ZS'$ i $S'TS$ są przystające. Punkta tedy $S', S'_1, \dots$, dzielące odcinki $TZ', T_1Z'_1, \dots$ rzutów $l' l'_1, \dots$ na dwie równe części, są rzutami punktów, leżących na płaszczyźnie σ , poprowadzonej równoległą do tła w odległości od tegoż, równej promieniowi koła oddalenia.

Z rysunku 78. czytamy w końcu:

a) Rzuty punktów, leżących na prostej l za tłem, leżą pomiędzy śladami T i Z' .

b) Rzuty punktów, leżących na prostej l pomiędzy tłem i płaszczyzną zniknięcia, znajdują na prostej TZ' po stronie śladu tłowego T .

c) Rzuty punktów, leżących na prostej l za płaszczyzną zniknięcia, znajdują się na prostej TZ' po stronie śladu zbiegu Z' .

10. Prawdziwą wielkość odcinka MN prostej l , której ślady T i Z' są dane, (rys. 79.) można wyznaczyć zapomocą układu płaszczyzny rzucającej (O, l) na tło.

Po układzie tej płaszczyzny znajduje się środek rzutów O na prostej O_1A , wyprowadzonej z punktu głównego prostopadle do rzutu TZ' prostej l , w odległości od tegoż rzutu, równej przeciwprostokątnej trójkąta, którego jedna przyprostokątna równa jest promieniowi koła oddalenia, a którego druga przyprostokątna jest równa odległości punktu głównego O_1 od rzutu TZ' .

Łącząc układ środka rzutów $[O]$ ze śladem zbiegu Z' otrzymamy układ promienia zbiegu OZ' , a prowadząc przez ślad tłowy T prostą, równoległą do promienia $[O]Z'$, otrzymamy układ (l) prostej l .

Jeżeli tedy poprowadzimy proste $[O]M'$ i $[O]N'$, które są kładami promieni rzucających punktów M i N , natenczas w punktach przecięcia się tychże z prostą (l) otrzymamy klady (M) i (N) punktów M i N ; odcinek $(M)(N)$ równy jest odcinkowi MN .

Zagadnienie 1.: Wyznaczyć rzuty środkowe punktów, dzielących na trzy równe części odcinek MN prostej, prostopadłej do tła.

Rozwiązanie: Ślad zbiegu prostej, prostopadłej do tła, schodzi się z punktem głównym O_1 ; kład tedy środka rzutów wykonany około rzutu TO_1 prostej MN , leży na kole oddalenia.

Wyznaczymy klady (M) i (N) punktów M i N i podzielmy odcinek $(M)(N)$ na trzy równe części, połączmy następnie punkta dzielące (1) i (2) z kładem środka rzutów, to proste $[O](1)$ i $[O](2)$ przetną się z rzutem TO_1 w punktach $1'$ i $2'$, które są rzutami środkowymi punktów, dzielących odcinek MN na trzy równe części.

Zagadnienie 2.: Wyznaczyć na prostej $l(TZ')$ takie odcinki, których rzuty są równe prawdziwym wielkościom tychże (rys. 80.).

Rozwiązanie: Punkta, leżące na prostej l i odpowiednie rzuty tychże tworzą dwa szeregi perspektywiczne. Ślad zbiegu Z' i ślad zniknięcia R prostej l są punktami wzajemnymi tych szeregów.

Wiadomo, że iloczyn odcinków, zawartych między punktami wzajemnymi i punktami odpowiednimi dwu szeregów jednokreślnych jest ilością stałą. A zatem:

$$MR \cdot M'Z' = NR \cdot N'Z'$$

czyli

$$MR : N'Z' = NR : M'Z'$$

a stąd:

$$MR - NR : N'Z' - M'Z' = MR : N'Z' = NR : M'Z'$$

wykonując wskazane odejmowanie otrzymamy:

$$MN : N'M' = MR : N'Z' = NR : M'Z',$$

czyli:

$$\frac{MN}{M'N'} = \frac{MR}{Z'N'} = \frac{NR}{Z'M'}.$$

Jeżeli tedy odcinki MR i $Z'N'$ albo NR i $Z'M'$ są równe, natenczas odcinek MN prostej l równy jest odcinkowi $M'N'$ rzutu l' .

Aby tedy wyznaczyć odcinki prostej $l(TZ')$, których rzuty są równe prawdziwym wielkościom tychże, wykonajmy kład płaszczyzny rzucającej (O, l) i odmierzymy od śladu zbiegu Z' na rzucie l' odcinki $Z'A'$ i $Z'A'_1$, $Z'C'$ i $Z'C'_1, \dots$ odpowiednio równe odcinkom $(B)(R)$, $(C)(R)$ układu (l) prostej l , wyznaczmy następnie rzuty $B', C' \dots$ i klady (A) , (A_1) , (C) , $(C_1), \dots$, natenczas odcinki $A'B'$ i $(A)(B)$, A'_1B' i $(A_1)(B)$, $\dots$ są równe.

0 dwu prostych.

11. Niech będą dane proste l i m , przecinające się w punkcie P (rys. 81.), poprowadźmy przez środek rzutów promienie zbiegu OZ'_1 i OZ'_2 tychże, to takowe wyznaczają płaszczyznę π' , równoległą do płaszczyzny π^1 , przesuniętej przez proste l i m . Ślady tłowe T_1 i T_2 prostych l i m leżą na prostej t_1 , podług której płaszczyzna π^1 przecina się z tłem, ślady zbiegu zaś Z'_1 i Z'_2 leżą na prostej z'_1 , podług której płaszczyzna π' przecina się z tłem.

Proste t_1 i z'_1 , jako przekroje dwu płaszczyzn równoległych tłem, są równoległe.

A zatem: Proste, łączące ślady tłowe i ślady zbiegu dwu prostych przecinających się są równoległe.

Proste, równoległe mają spólny ślad zbiegu; albowiem promienie zbiegu tychże schodzą się na jednej prostej.

Jeżeli dwie proste l_3 i l_4 są wichrowate, natenczas proste, T_3T_4 łączące ślady tłowe i ślady zbiegu Z_3Z_4 tychże przecinają się.

O płaszczyznach dowolnych.

12. Wyznamy proste t_1, z'_1 (rys. 82a i b), podług których tło przecina się z płaszczyzną dowolną π^1 i z płaszczyzną (O, z'_1) , przesuniętą przez środek rzutów równoległe do płaszczyzny π^1 , to proste t_1 i z'_1 wyznaczają płaszczyznę π^1 .

Mając bowiem te proste, jeżeli przez środek rzutów przesuniemy płaszczyznę (O, z'_1) , a przez t_1 płaszczyznę równoległą do (O, z'_1) , natenczas otrzymamy płaszczyznę π^1 .

Prostą t_1 nazywamy śladem tłowym, prostą z'_1 nazywamy śladem zbiegu, a płaszczyznę (O, z'_1) nazywamy płaszczyzną zbiegu.

Proste t_1 i z'_1 , jako przekroje płaszczyzn równoległych π^1 i (O, z'_1) tłem są równoległe.

13. Kąty nachylenia płaszczyzny π^1 i płaszczyzny zbiegu (O, z'_1) do tła są równe. — A zatem:

Ślady zbiegu płaszczyzn, prostopadłych do tła przechodzą przez punkt główny.

Ślady zbiegu płaszczyzn, nachylonych do tła pod kątem 45° , są stycznymi koła oddalenia.

Ślady zbiegu płaszczyzn, nachylonych do tła pod kątem ^{większym} niż 45° przecinają się z kołem oddalenia w punktach ^{rzeczywistych} ^{urojonych}.

Ślady płaszczyzn, równoległych do tła, leżą w nieskończoności. Położenie płaszczyzny równoległej do tła wyznaczamy zapomocą punktu, leżącego na tej płaszczyźnie i na prostej, której ślady leżą w skończoności.

14. Płaszczyzna zniknięcia ρ przecina się z płaszczyzną π^1 (rys. 82a), podług prostej r_1 , którą nazywamy śladem zniknięcia. Odległość środka rzutów O od śladu r_1 jest równa odległości śladów t_1 i z'_1 .

Jeżeli tedy odległości śladów t_1 i z'_1, t_2 i $z'_2, \dots$ płaszczyzn $\pi^1, \pi^2, \dots$ są równe, natenczas ślady zniknięcia tychże są stycznymi koła, zakreślonego ze środka rzutów promieniem, równym odległości śladów t_1 i z'_1 .

Jeżeli odległości śladów t_1 i z'_1 tudzież t_2 i z'_2 dwu płaszczyzn π^1 i π^2 są równe, a nadto ślady tych płaszczyzn są równoległe, natenczas płaszczyzny π^1 i π^2 mają spólny ślad zniknięcia, albo ślady zniknięcia tychże są symetryczne względem środka rzutów, stosownie do tego, czy następstwa śladów t_1 i z'_1 tudzież t_2 i z'_2 są zgodne czy przeciwne.

Odległość śladu zniknięcia r_1 płaszczyzny π^1 od śladu tłowego t_1 jest równa odległości środka rzutów od śladu zbiegu z'_1 .

15. Prosta l , poprowadzona na płaszczyźnie π^1 , przebija tło w punkcie T_1 , który leży na śladzie tłowym t_1 płaszczyzny, ślad zbiegu Z_1 prostej l leży na śladzie zbiegu z'_1 ; albowiem promień zbiegu OZ_1 leży na płaszczyźnie zbiegu (O, z'_1) , przesuniętej przez środek rzutów równoległe do płaszczyzny π^1 . A zatem:

Jeżeli prosta leży na płaszczyźnie, natenczas ślady tej prostej leżą na odpowiednich śladach płaszczyzny.

Pomiędzy prostymi, leżącymi na płaszczyźnie, zasługują na uwagę proste, prostopadłe do śladu tłowego, które nazywamy prostymi największego spadu. Ślad zbiegu tych prostych schodzi się ze spodkiem A_1 prostopadłej, wyprowadzonej z punktu głównego do śladu zbiegu z'_1 płaszczyzny.

Zagadnienie 1.: Wyznamy ślady płaszczyzn, przesuniętych przez prostą $l(T_1Z_1)$.

Rozwiązanie: Proste równoległe t_1 i z'_1, t_2 i $z'_2, \dots$, poprowadzone odpowiednio przez punkta T_1 i Z_1 , są śladami płaszczyzn $\pi^1, \pi^2, \dots$, przechodzących przez prostą l .

Zagadnienie 2.: Wyznamy ślady płaszczyzny, przesuniętej przez dwie proste równoległe $l(T_1Z_1)$ i $m(T_2Z_2)$.

Rozwiązanie: Prosta t_1 , łącząca punkta T_1 i T_2 jest śladem tłowym, a prosta z'_1 , poprowadzona przez spólny ślad zbiegu Z_1 danych prostych, jest śladem zbiegu płaszczyzny, przesuniętej przez proste l i m .

Zagadnienie 3.: Dany jest rzut M' punktu M , leżącego na prostej $l(T_1, Z_1)$, wyznaczmy rzut prostokątny tego punktu na tło.

Rozwiązanie: Prosta $M'O_1$, łącząca punkt główny z rzutem punktu M , jest rzutem prostej p , przechodzącej przez ten punkt i prostopadłej do tła. Celem wyznaczenia śladu tłowego tejże, przesuniemy przez proste l i p płaszczyznę. Ślad zbiegu z'_1 tej płaszczyzny łączy punkta OZ_1 , a ślad tłowy t_1 przechodzi przez punkt T_1 równoległe do z'_1 . Punkt przecięcia się tedy M_1 prostych t_1 i O_1M' jest śladem tłowym prostej p a więc rzutem prostokątnym punktu M na tło.

Zagadnienie 4.: Wyznamy ślady płaszczyzn, przesuniętych przez prostą $l(T_1, Z_1)$ i nachylonych do tła pod kątem α .

Rozwiązanie: Wykreślmy koło nachylenia k_1 , odpowiadające kątowi α , i poprowadźmy doń z punktu Z_1 styczne z'_1 i z'_2 , poprowadźmy następnie przez punkt T_1 proste t_1 i t_2 , odpowiednio równoległe do prostych z'_1 i z'_2 , to proste t_1 i z'_1 tudzież t_2 i z'_2 , są śladami płaszczyzn, czyniących zadość warunkom zagadnienia.

Zagadnienie 5.: Dany jest rzut M' punktu, leżącego na prostej $l(T_1, Z_1)$, wyznaczmy ślady prostej, która przechodzi przez punkt M i jest równoległa do prostej $m(T_2Z_2)$.

Rozwiązanie: Prosta $M'Z_2$ jest rzutem środkowym prostej, przechodzącej przez punkt M i równoległej do prostej m . Celem wyznaczenia śladu tłowego tej prostej przesuniemy przez proste T_1Z_1 i $M'Z_2$ płaszczyznę; ślad zbiegu z'_1 tejże łączy punkta Z_1 i Z_2 , a ślad tłowy t_1 przechodzi przez punkt T_1 i jest równoległy do z'_1 . Punkt przecięcia się tedy T_3 prostych t_1 i $M'Z_2$ jest śladem tłowym prostej $M'Z_2$.

Zagadnienie 6.: Wyznamy ślady płaszczyzny, przesuniętej przez prostą $l(T_1, Z_1)$ i przez punkt M , leżący na prostej $m(T_2, Z_2)$, (rys. 83.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez punkt M prostą n , równoległą do prostej l , i wyznaczmy ślad tłowy tejże T_3 (zag. 5.), połączmy następnie punkta T_1 i T_3 i poprowadźmy przez punkt Z_1 prostą z'_1 , równoległą do T_1T_3 , to proste T_1T_3 i z'_1 są śladami płaszczyzny, na której punkt M i prosta l leżą.

Zagadnienie 7.: Dane są punkta M_1 i M_2 , leżące odpowiednio na prostych $l(T_1, Z_1)$ i $m(T_2, Z_2)$; wyznaczyć ślady prostej M_1M_2 (rys. 84.).

Rozwiązanie: Wyznaczymy ślady t_1 i z'_1 płaszczyzny, przesuniętej przez punkt M_2 i przez prostą l (zag. 6.) a nadto punkta przecięcia się T_3 i Z'_3 rzutu $M'_1M'_2$ z prostymi t_1 i z'_1 , to takowe są śladami prostej M_1M_2 .

Zagadnienie: Wyznaczyć ślady płaszczyzny, przesuniętej przez trzy punkta, leżące odpowiednio na prostych l , m i n , których ślady są dane.

16. Dwie płaszczyzny $\pi^1(t_1, z'_1)$ i $\pi^2(t_2, z'_2)$ przecinają się podług prostej d , której ślad tłowy T_1 schodzi się z punktem przecięcia się śladów t_1 i t_2 , a ślad zbiegu Z'_1 leży w punkcie przecięcia się śladów zbiegu z'_1 i z'_2 .

Zagadnienie 1.: Wyznaczyć rzut środkowy prostej; podług której płaszczyzny $\pi^1(t_1, z'_1)$ i $\pi^2(t_2, z'_2)$ przecinają się, jeżeli punkt przecięcia się śladów zbiegu z'_1 i z'_2 nie leży w obrębie rysunku (rys. 85.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy płaszczyznę $\pi^3(t_3, z'_3)$, której ślady przecinają się z odpowiednimi śladami płaszczyzn danych w obrębie rysunku, i wyznaczmy proste $T_1Z'_1$ i $T_2Z'_2$, podług których płaszczyzny π^3 i π^1 tudzież π^3 i π^2 przecinają się, a nadto punkt przecięcia się M' owych prostych; połączmy następnie punkt M' z punktem T_3 , w którym ślady tłowe t_1 i t_2 przecinają się, to prosta $M'T_3$ jest rzutem środkowym przekroju płaszczyzn π^1 i π^2 .

Zagadnienie: Wyznaczyć rzut środkowy prostej, podług której dwie płaszczyzny przecinają się, jeżeli ani ślady tłowe ani ślady zbiegu nie przecinają się w obrębie rysunku.

Zagadnienie 2.: Wyznaczyć punkt przecięcia się dwu prostych $l(T_1, Z'_1)$ i $m(T_2, Z'_2)$, leżących na tej samej płaszczyźnie rzucającej (rys. 86.).

Rozwiązanie: Przesuńmy przez prostą l płaszczyznę $\pi^1(t_1, z'_1)$, a przez prostą m płaszczyznę $\pi^2(t_2, z'_2)$ i wyznaczmy prostą $d(T_3, Z'_3)$, podług której te płaszczyzny przecinają się, to punkt przecięcia się M' prostej (T_3, Z'_3) ze śladem z' płaszczyzny, rzucającej proste l i m , jest rzutem środkowym punktu przecięcia się tych prostych.

Zagadnienie 3.: Przez punkt M , leżący na prostej $l(T_1, Z'_1)$, poprowadzić prostą, która się przecina z prostymi $m(T_2, Z'_2)$ i $n(T_3, Z'_3)$.

Rozwiązanie: Przesuńmy przez punkt M i przez proste m i n płaszczyzny $\pi^1(t_1, z'_1)$ i $\pi^2(t_2, z'_2)$, (art. 15. zag. 6.), wyznaczmy następnie prostą d , podług której płaszczyzny π^1 i π^2 przecinają się, to takowa przechodzi przez punkt M i przecina się z prostymi m i n .

0 prostych i płaszczyznach.

17. Jeżeli prosta l jest równoległa do płaszczyzny $\pi^1(t_1, z'_1)$, natenczas ślad zbiegu Z'_1 tej prostej leży na śladzie zbiegu z'_1 płaszczyzny π^1 , albowiem promień zbiegu OZ'_1 prostej l leży na płaszczyźnie zbiegu (O, z'_1) .

Zagadnienie 1.: Wyznaczyć ślady płaszczyzny, która przechodzi przez prostą $l_1(T_1, Z'_1)$ i jest równoległa do prostej $l_2(T_2, Z'_2)$.

Rozwiązanie: Połączmy ślady zbiegu Z'_1 i Z'_2 prostych l_1 i l_2 , poprowadźmy następnie przez ślad tłowy T_1 prostą t_1 , równoległą do prostej $Z'_1Z'_2$ to t_1 i $Z'_1Z'_2$ są śladami płaszczyzny, przesuniętej przez prostą l_1 równoległe do prostej l_2 .

Zagadnienie 2.: Wyznaczyć ślady płaszczyzny, która przechodzi przez punkt M , leżący na prostej $l(T_1, Z'_1)$ i która jest równoległa do płaszczyzny $\pi^1(t_1, z'_1)$, (rys. 87.).

Rozwiązanie: Wiadomo, że ślady zbiegu płaszczyzn równoległych schodzą się na jednej prostej. — Połączmy tedy dowolny punkt Z'_2 śladu zbiegu z'_1 płaszczyzny π^1 z punktem M' , to prosta $M'Z'_2$ jest rzutem prostej m , przesuniętej przez punkt M równoległe do płaszczyzny π^1 ; wyznaczmy następnie ślad tłowy T_2 prostej m (art. 15. zag. 5.) i poprowadźmy przez punkt T_2 prostą t_2 równoległą do z'_1 , to takowa jest śladem tłowym płaszczyzny π^2 , przesuniętej przez punkt M równoległe do płaszczyzny π^1 .

18. Niech będzie dana płaszczyzna $\pi^1(t_1, z'_1)$ i prosta dowolna $l(T_1, Z'_1)$, założmy sobie wyznaczyć punkt, w którym prosta l przebija płaszczyznę π^1 . Przesuńmy w tym celu przez prostą l płaszczyznę $\pi^2(t_2, z'_2)$ i wyznaczmy prostą d , podług której płaszczyzny π^1 i π^2 przecinają się, to punkt przecięcia się D prostych l i d jest punktem, w którym prosta l przebija płaszczyznę π^1 .

Zagadnienie 1.: Wyznaczyć punkt przecięcia się prostej l_1 , równoległej do tła z płaszczyzną dowolną $\pi^1(t_1, z'_1)$.

Rozwiązanie: Prosta l_1 niech będzie wyznaczona zapomocą rzutu l'_1 i punktu M , leżącego na prostej $m(T_1, Z'_1)$ (rys. 88.). Przesuńmy przez proste l_1 i m płaszczyznę $\pi^2(t_2, z'_2)$; ślady tej płaszczyzny przechodzą przez punkta T_1 i Z'_1 i są równoległe do rzutu l'_1 . Wyznaczmy następnie prostą d , podług której płaszczyzny π^1 i π^2 przecinają się, to punkt D' , w którym proste l'_1 i d' przecinają się, jest rzutem środkowym punktu przecięcia się płaszczyzny π^1 z prostą l_1 .

Zagadnienie 2.: Wyznaczyć prostą, podług której płaszczyzna dowolna $\pi^1(t_1, z'_1)$ przecina się z płaszczyzną π^2 , równoległą do tła.

Rozwiązanie: Płaszczyzna π^2 niech będzie wyznaczona zapomocą punktu M , leżącego na prostej $l(T_1, Z'_1)$.

Płaszczyzny π^1 i π^2 przecinają się podług prostej, równoległej do śladów t_1 i z'_1 płaszczyzny π^1 . Poprowadźmy tedy przez punkt M na płaszczyźnie π^2 prostą m i wyznaczmy punkt przecięcia się tejże D z płaszczyzną π^1 (zag. 1.), poprowadźmy następnie przez punkt D prostą, równoległą do śladu t_1 , to takowa jest prostą, podług której płaszczyzny π^1 i π^2 przecinają się.

Zagadnienie 3.: Wyznaczyć punkt przecięcia się prostej $l(T_1, Z'_1)$ z płaszczyzną π^2 równoległą do tła, która przechodzi przez punkt M , leżący na prostej $m(T_2, Z'_2)$.

Rozwiązanie: Przesuńmy przez prostą l płaszczyznę $\pi^1(t_1, z'_1)$ i wyznaczmy prostą d , podług której płaszczyzny π^1 i π^2 przecinają się (zag. 2.), to punkt przecięcia się D prostych l i d jest punktem, w którym prosta l przebija płaszczyznę π^2 .

Zagadnienie 4.: Wyznaczyć prostą, podług której płaszczyzna (O, z') , przesunięta przez środek rzutów, przecina się z płaszczyzną π^1 , która przechodzi przez punkt M , leżący na prostej $m(T_1, Z'_1)$ i jest równoległa do tła.

Rozwiązanie: Prosta d , podług której płaszczyzny (O, z') i π^1 przecinają się jest równoległa do tła, a rzut d tejże schodzi się ze śladem z' . Dowolny punkt tedy owej prostej wyznacza położenie tejże w przestrzeni.

Aby punkt ten wyznaczyć, przesunimy przez prostą m płaszczyznę $\pi^2(t_2, z'_2)$ i poprowadzimy na tej płaszczyźnie przez punkt M prostą l równoległą do tła i do śladów t_1 i z'_1 , to takowa leży na płaszczyźnie π^1 i przecina się z płaszczyzną (O, z') w punkcie D , leżącym na prostej przekroju płaszczyzn π^1 i (O, z') , której położenie w przestrzeni jest wyznaczone punktem D .

19. Niech będzie dana prosta l , prostopadła do płaszczyzny $\pi^2(t_1, z'_1)$ (rys. 89a i b). Poprowadzimy przez środek rzutów O prostą OZ^{90} , prostopadłą do płaszczyzny zbiegu (O, z'_1) , to takowa przecina się z tłem w śladzie zbiegu prostej l i wszystkich prostych prostopadłych do płaszczyzny π^1 .

Płaszczyzna OO_1Z^{90} , przesunięta przez promień główny OO_1 i przez promień zbiegu OZ^{90} prostej l , przecina się z tłem i z płaszczyzną (O, z'_1) podług prostych A_1Z^{90} i A_1O , prostopadłych do śladu zbiegu z'_1 płaszczyzny π^1 ; prosta OA_1 jest przyprostokątną, a prosta A_1Z^{90} jest przeciwprostokątną trójkąta $OZ^{90}A_1$.

Aby tedy wyznaczyć ślad zbiegu prostych, prostopadłych do płaszczyzny $\pi^1(t_1, z'_1)$ (rys. 89b), poprowadzimy promień $(O)O_1$ koła oddalenia, równoległy do śladów t_1 i z'_1 i połączmy punkt (O) ze śladem zbiegu A_1 prostych największego spadu płaszczyzny π^1 , wyprowadzmy następnie z punktu (O) prostą $(O)Z^{90}$, prostopadłą do prostej $(O)A_1$, i wyznaczmy punkt przecięcia się Z^{90} tejże z prostą O_1A_1 , to takowy jest śladem zbiegu prostych, prostopadłych do płaszczyzny π^1 .

Ślad zbiegu płaszczyzn, prostopadłych do prostej $l(T_1, Z'_1)$, wyznaczamy w podobny sposób. W tym celu łączymy ślad zbiegu Z'_1 prostej l z punktem głównym O_1 i prowadzimy promień $(O)O_1$ koła oddalenia prostopadły do $O_1Z'_1$, wyprowadzamy następnie z punktu (O) prostą, prostopadłą do $(O)Z'_1$ i prowadzimy przez punkt przecięcia się A_1 tej prostopadłej z prostą $O_1Z'_1$, prostą Z^{90} , równoległą do promienia $O_1(O)$, to takowa jest śladem zbiegu płaszczyzn prostopadłych do prostej l .

Zagadnienie 1.: Przez punkt M , leżący na prostej $l(T_1, Z'_1)$, przesunąć prostą, prostopadłą do płaszczyzny $\pi(t_1, z'_1)$, i wyznaczyć ślady tej prostopadłej, (rys. 90.).

Rozwiązanie: Wyznaczymy ślad zbiegu Z^{90} prostych, prostopadłych do płaszczyzny π^1 i połączmy punkta Z^{90} i M' , to prosta $M'Z^{90}$ jest rzutem środkowym prostej, przechodzącej przez punkt M i prostopadłej do płaszczyzny π^1 ; ślad tłowy T^{90} tejże leży na prostej t_2 , poprowadzonej przez punkt T_1 równoległe do prostej Z'_1Z^{90} .

Zagadnienie 2.: Przez prostą $l(T_1, Z'_1)$ przesunąć płaszczyznę, prostopadłą do płaszczyzny $\pi^1(t_1, z'_1)$ i wyznaczyć ślady tejże, (rys. 91.).

Rozwiązanie: Wyznaczymy ślad zbiegu Z^{90} prostych, prostopadłych do płaszczyzny π^1 i połączmy punkta Z'_1 i Z^{90} , poprowadzimy następnie przez punkt T_1 prostą t_2 , równoległą do Z'_1Z^{90} , to proste t_2 i Z'_1Z^{90} są śladami płaszczyzny, przechodzącej przez prostą l i prostopadłej do płaszczyzny π^1 .

Zagadnienie 3.: Dana jest prosta $m(T_2, Z'_2)$ i punkt M , leżący na prostej $l(T_1, Z'_1)$; wyznaczyć ślady płaszczyzny, przesuniętej przez punkt M prostopadłe do prostej m , (rys. 92.).

Rozwiązanie: Wyznaczymy ślad zbiegu z^{90} płaszczyzn, prostopadłych do prostej m , i połączmy dowolny punkt Z'_3 tego śladu z punktem M' , to

prosta $M'Z_3$ jest rzutem środkowym prostej, która leży na płaszczyźnie, przesuniętej przez punkt M prostopadłe do prostej m .

Jeżeli tedy wyznaczmy ślad tłowy T_3 prostej $M'Z_3$ i poprowadzimy przez punkt T_3 równoległą do z^{90} , natenczas otrzymamy ślad tłowy t^{90} płaszczyzny, przesuniętej przez punkt M i prostopadłej do prostej m .

O kładach płaszczyzn.

20. Jeżeli płaszczyznę $\pi^1(t_1, z'_1)$ i płaszczyznę zbiegu (Oz'_1) (rys. 93a), obrócimy około śladów t_1 i z'_1 w tym samym kierunku i o ten sam kąt, natenczas proste $l...$, leżące na płaszczyźnie π^1 i odpowiednie promienie zbiegu, jakoteż proste $OR...$, łączące środek rzutów ze śladami zniknięcia prostych $l...$, i rzuty tychże prostych nie zmieniają swych wzajemnych położań.

Po wykonaniu tedy kładu płaszczyzn (Oz'_1) i π^1 na tło (rys. 93a) będą kłady $(l)...$ prostych $l...$ równoległe do kładów $[O]Z'_1...$ swych promieni zbiegu, a kłady prostych OR_1 łączących środek rzutów O ze śladami zniknięcia R_1 prostych $l...$ będą równoległe do rzutów l' ,... tych prostych.

Kład $[O]$ (rys. 93b) środka rzutów znajduje się na prostej O_1A_1 wyprowadzonej z punktu głównego prostopadłe do śladu zbiegu z'_1 płaszczyzny π^1 , w odległości od tegoż śladu równej przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna równa jest promieniowi koła oddalenia, a którego druga przyprostokątna jest równa odległości punktu głównego od śladu zbiegu z'_1 . Kład (r_1) śladu zniknięcia jest równoległy do śladów t_1 i z'_1 a odległość tego kładu od śladu tłowego t_1 jest równa odległości środka rzutów od śladu zbiegu z'_1 .

Uwaga. Układ punktów i prostych leżących na płaszczyźnie π^1 jest środkowo kolineacyjny z układem odpowiednich rzutów na tle; po kładzie płaszczyzn π^1 i (Oz'_1) otrzymujemy zatem dwa układy, środkowo kolineacyjne złączone na tle. — Kład środka rzutów, $[O]$ jest środkiem kolineacji, ślad tłowy t_1 płaszczyzny π^1 jest osią kolineacji a ślad zbiegu z'_1 i kład śladu zniknięcia (r_1) są osiami wzajemnymi.

21. Kład (l) prostej $l(T_1, Z'_1)$ leżącej na płaszczyźnie można wyznaczyć w dwojaki sposób: albo 1. prowadząc przez ślad tłowy T_1 tejże prostą równoległą do kładu $[O]Z'_1$ promienia zbiegu OZ'_1 ; albo 2. prowadząc przez kład środka rzutów $[O]$ prostą $[O](R_1)$ równoległą do rzutu $T_1Z'_1$, i łącząc ślad tłowy T_1 z punktem (R_1) w którym prosta $[O](R_1)$ przecina się z kładem śladu zniknięcia (r_1) .

Z konstrukcyi pierwszej wynika, że kład (m) prostej m , której rzut przechodzi przez kład środka rzutów $[O]$, schodzi się z rzutem m' , że zatem rzut i kład punktu leżą na prostej przechodzącej przez kład środka rzutów.

Z kładu (l) prostej l leżącej na płaszczyźnie $\pi^1(t_1, z'_1)$, można w dwojaki sposób wyznaczyć rzut l tej prostej: albo 1. prowadząc przez kład środka rzutów $[O]$ prostą $[O]Z'_1$, równoległą do kładu (l) i łącząc punkt przecięcia się Z'_1 prostych $[O]Z'_1$ i z'_1 z punktem przecięcia się T_1 prostych t_1 i (l) ; albo 2. wyznaczając punkt przecięcia się (R_1) prostej (l) z kładem śladu zniknięcia (r_1) i prowadząc przez punkt przecięcia się T_1 prostych t_1 i (l) prostą równoległą do $[O](R_1)$.

22. Kład (M) punktu M , leżącego na płaszczyźnie π^1 otrzymamy, wyznaczając punkt przecięcia się kładów dwu prostych l i m , przechodzących przez ten punkt na płaszczyźnie.

Zagadnienie 1.: Dany jest rzut środkowy trójkąta $A'B'C'$, leżącego na płaszczyźnie π^1 (t_1, z'_1), wyznaczyć kład na tło, (rys. 94.).

Rozwiązanie: Wykonajmy kład płaszczyzny π^1 na tło i wyznaczmy ślad tłowy T i ślad zbiegu Z' prostej AB , połączmy następnie punkt Z' z kładem środka rzutów $[O]$ i poprowadźmy przez ślad T prostą (l) równoległą do promienia $[O]Z'$, to ta prosta jest kładem prostej AB . Łącząc tedy rzuty A' i B' z punktem $[O]$, otrzymamy w punktach przecięcia się (A) i (B) prostej (l) z promieniami $[O]A'$ i $[O]B'$ klady punktów A i B .

Aby otrzymać kład punktu C , wyznaczmy punkt przecięcia się T_1 prostej $B'C'$ ze śladem tłowym t_1 i połączmy punkta (B) i T_1 to prosta (B) T_1 jest kładem prostej BC ; punkt przecięcia się tedy prostej (B) T_1 , z promieniem $[O]C'$ jest kładem (C) punktu C .

Uwaga. Jeżeli rzut $A'B'C'$... wielokąta leżącego na płaszczyźnie π^1 przecina się ze śladem zbiegu z'_1 w „ n ” punktach, natenczas kład wielokąta (A)(B)(C)... rozciąga się w „ n ” kierunkach do nieskończoności.

Zagadnienie 2.: Dany jest kład trójkąta (A)(B)(C) leżącego na płaszczyźnie $\pi^1(t_1, z'_1)$ wyznaczyć jego rzut, (rys. 95).

Rozwiązanie: Wyznaczmy punkt przecięcia się (R) prostej (A)(B) z kładem śladu zniknięcia (r_1) i poprowadźmy przez punkt T , w którym proste t_1 i (A)(B) przecinają prostą l' równoległą do promienia $[O](R)$, to takowa jest rzutem prostej AB ; punkta przecięcia się zatem A' i B' prostej l' z promieniami $[O]A$ i $[O]B$ są rzutami punktów A i B .

Celem wyznaczenia rzutu C' , połączmy punkt B' z punktem T_1 , w którym proste t_1 i (B)(C) przecinają się, to prosta T_1B' jest rzutem prostej BC ; punkt przecięcia się tedy C' prostej T_1B' z promieniem $[O]C$ jest rzutem punktu C .

Uwaga: Jeżeli kład wielokąta (A)(B)(C) leżącego na płaszczyźnie π^1 przecina się z kładem śladu zniknięcia (r_1) w „ n ” punktach, natenczas rzut tegoż rozciąga się w „ n ” kierunkach do nieskończoności.

Zagadnienie 3.: Dany jest rzut środkowy $A'B'C'D'$ kwadratu, którego bok równy jest odcinkowi MN ; wyznaczyć kład środka rzutów a nadto ślad tłowy i ślad zbiegu płaszczyzny, na której ten kwadrat leży, (rys. 96.).

Rozwiązanie: Boki przeciwległe AB i CD , tudzież BC i AD kwadratu $ABCD$ są równoległe, rzuty środkowe zatem $A'B'$ i $C'D'$, tudzież $B'C'$ i $D'A'$ przecinają się w punktach Z'_1 i Z'_2 leżących na śladzie zbiegu z'_1 płaszczyzny $ABCD$, prosta tedy $Z'_1Z'_2$ jest śladem zbiegu tej płaszczyzny.

Boki AB i BC jakoteż przekątne AC i BD kwadratu są prostopadłe, promienie zbiegu zatem tych prostych OZ'_1 i OZ'_2 , jakoteż OZ'_3 i OZ'_4 tworzą kąty proste. Jeżeli tedy na średnicach $Z'_1Z'_2$ i $Z'_3Z'_4$ zakreślimy koła, natenczas jeden z punktów przecięcia się tychże jest kładem środka rzutów $[O]$.

Wiadomo, że kład (B)(C) boku BC jest równoległy do kładu promienia zbiegu $[O]Z'_2$ prostej BC . Poprowadźmy tedy przez punkt B' prostą $B'M_1$ równoległą do promienia $[O]Z'_2$ i odmierzymy na tej prostej odcinek $B'M_1$ równy odcinkowi MN , poprowadźmy następnie przez M prostą, równoległą

do promienia $[O]B'$ i wyznaczmy punkt przecięcia się (C) tejże z promieniem $[O]C'$, to ten punkt jest kładem wierzchołka C kwadratu $ABCD$. Prosta zatem (B)(C) poprowadzona przez punkt (C) równoległe do promienia $[O]Z'_1$ jest kładem prostej BC . Przez punkt przecięcia się T prostych $B'C'$ i (B)(C) przechodzi tedy ślad tłowy t_1 płaszczyzny $ABCD$.

Zagadnienie 4.: Dany jest rzut środkowy $A'B'C'$ trójkąta leżącego na płaszczyźnie równoległej do tła, której położenie wyznaczone jest punktem M , leżącym na prostej $l(T_1Z'_1)$; wyznaczyć rzeczywistą wielkość tego trójkąta (rys. 97.).

Rozwiązanie: Jeżeli dany trójkąt przesuniemy w kierunku dowolnym na tło, natenczas otrzymamy rzeczywistą wielkość tegoż.

Połączmy w tym celu punkta $A'B'C'$ ze śladem zbiegu Z'_1 prostej l i z punktem M , wyznaczmy następnie ślady tłowe T_2, T_3, T_4 prostych $A'Z'_1, B'Z'_1$ i $C'Z'_1$ to trójkąt $T_2T_3T_4$ przystaje do trójkąta ABC . — Punkta T_2, T_3, T_4 otrzymamy prowadząc przez ślad tłowy T_1 prostej l , proste T_1T_2, T_1T_3 i T_1T_4 odpowiednio równoległe do prostych MA', MB' i MC' i wyznaczając punkta przecięcia się tychże z prostymi $A'Z'_1, B'Z'_1$ i $C'Z'_1$.

Trójkąty $A'B'C'$ i $T_2T_3T_4$ są homotetyczne. Punkt Z'_1 jest środkiem podobieństwa.

O punktach dzielenia.

23. Niech będzie daną płaszczyzna $\pi^1(t_1, z'_1)$ i prosta $l(T_1Z'_1)$ leżąca na tej płaszczyźnie (rys. 98.).

Wykonajmy kład płaszczyzny zbiegu (Oz'_1) na tło i połączmy kład środka rzutów $[O]$ z punktem Z'_1 , poprowadźmy następnie przez punkt $[O]$ prostą (m) równoległą do śladów płaszczyzny π^1 , to kąty α i $(180-\alpha)$ zawarte między prostymi $[O]Z'_1$ i (m) równe są kątowi zawartemu między śladem t_1 i prostą l , proste bowiem $[O]Z'_1$ i l jakoteż (m) i t_1 są równoległe.

Podzielmy kąt α i $(180-\alpha)$ na dwie równe części i wyznaczmy punkta przecięcia się D_1 i D_2 prostych dzielących ze śladem z'_1 , to te punkty są śladami zbiegu prostych u i v , dzielących na dwie równe części kąty, zawarte między śladem tłowym i prostą l . Proste tedy $u_1, u_2, \dots$ i $v_1, v_2, \dots$, poprowadzone na płaszczyźnie π^1 równoległe do prostych u i v wyznaczają na prostych l' i t_1 odcinki rzutowo równe. Odcinki tedy $T_1T_2, T_1T_3, \dots$ śladu tłowego t_1 zawarte między prostymi $u', u'_1, u'_2, \dots$ równe są prawdziwym wielkościom odcinków $T_1A', T_1B', \dots$ prostej l .

Punkta D_1 i D_2 nazywamy punktami dzielenia, zapomocą tych punktów bowiem można wyznaczać rzeczywiste wielkości odcinków, których rzuty środkowe są dane, a nadto dzielić takowe w dowolnych stosunkach.

Trójkąty $[O]Z'_1D_1$ i $[O]Z'_1D_2$ są równoramienne albowiem kąty leżące przy bokach $[O]D_1$ i $[O]D_2$ są równe boki zatem Z'_1D_1, Z'_1D_2 i $Z'_1[O]$ są równe. A zatem:

Punkta dzielenia prostej $l(T_1Z'_1)$ leżącej na płaszczyźnie $\pi^1(t_1, z'_1)$ znajdują się w punktach, w których ślad zbiegu z'_1 przecina się z kołem zakreślonym z punktu Z'_1 promieniem równym odległości środka rzutów od śladu zbiegu prostej l .

Zagadnienie 1. Dany jest rzut środkowy $A'B'$ odcinka prostej $l(T_1Z'_1)$, wyznaczyć rzut punktu dzielącego odcinek AB na dwie równe części (rys. 99.).

Rozwiązanie. Przesuńmy przez prostą l płaszczyznę $\pi^1(t_1 z'_1)$ i wyznaczmy odległość $(O)Z'_1$ środka rzutów O od śladu zbiegu Z'_1 , zakresłmy następnie z punktu Z'_1 promieniem $Z'_1(O)$ koło i wyznaczmy punkta przecięcia się D_1 i D_2 tego koła ze śladem zbiegu z'_1 płaszczyzny π^1 , to punkty te są punktami dzielenia prostej l . Promienie tedy $D_1 A'$ i $D_1 B'$ wyznaczają na śladzie tłowym t_1 odcinek $T_2 T_3$ równy odcinkowi AB . Jeżeli tedy podzielimy $T_2 T_3$ na dwie równe części i połączymy punkt dzielący T z punktem D_1 , natenczas promień $D_1 T$ przetnie prostą l' w punkcie $1'$, który jest rzutem środkowym punktu 1 dzielącego na dwie równe części odcinek AB .

24. Zagadnienia o punktach prostych i płaszczyznach.

Zagadnienie 1.: Podzielić na trzy równe części odcinek AB prostej l , leżącej na płaszczyźnie $\pi^1(t_1 z'_1)$ jeżeli ślady tej prostej znajdują się poza obrębem rysunku, (rys. 100).

Rozwiązanie: Połączmy dowolny punkt Z'_1 śladu zbiegu z'_1 z punktami A' i B' i wyznaczmy punkty T_2 i T_3 w których proste $Z'A'$ i $Z'B'$ przecinają się śladem tłowym t_1 płaszczyzny π^1 , podzielimy następnie odcinek $T_2 T_3$ na trzy równe części i połączmy punkta dzielące 1 i 2 z punktem Z' , to proste $Z'1$ i $Z'2$ przetną się z prostą l' w rzutach środkowych $1'$ i $2'$ punktów dzielących odcinek AB na trzy równe części.

Zagadnienie 2.: Podzielić na dwie równe części odcinek AB zawarty między punktami leżącymi na prostych $l_1(T_1 Z'_1)$ i $l_2(T_2 Z'_2)$.

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez punkt B' prostą $Z'_1 B'$, równoległą do l_1 , i wyznaczmy ślad tłowu T_3 tejże, podzielimy następnie odcinek $T_1 T_3$ na dwie równe części i połączmy punkt dzielący T z punktem Z'_1 , to prosta TZ'_1 przecina się z prostą $A'B'$ w rzucie środkowym punktu dzielącego odcinek AB na dwie równe części.

Zagadnienie 3.: Dany jest punkt M leżący na prostej $l(T_1 Z'_1)$ dana jest nadto płaszczyzna $\pi^1(t_1 z'_1)$; wyznaczyć odległość punktu M od płaszczyzny π^1 (rys. 101.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez punkt M prostą p prostopadłą do płaszczyzny π^1 i wyznaczmy punkt przebicia się tejże, D , z płaszczyzną π^1 , wyznaczmy następnie rzeczywistą wielkość $M_1 D_1$ odcinka MD' to takowa jest równą odległości punktu M od płaszczyzny π^1 .

Zagadnienie 4.: Wyznaczyć odległość dwu płaszczyzn równoległych $\pi^1(t_1 z'_1)$ i $\pi^2(t_2 z'_2)$, (rys. 102.).

Rozwiązanie: Przesuńmy przez środek rzutów O płaszczyznę (OZ') , prostopadłą do tła i do płaszczyzn danych i wyznaczmy przekroje tychże $l(T_1 Z'_1)$ i $m(T_2 Z'_2)$ z płaszczyzną (Oz') , wykonajmy następnie kład płaszczyzny (OZ') , to odległość kładów (l) i (m) prostych l i m równa jest odległości płaszczyzn π^1 i π^2 .

Zagadnienie 5.: Wyznaczyć odległość punktu M leżącego na prostej $l(T_1 Z'_1)$ od prostej $m(T_2 Z'_2)$ (rys. 103.).

Rozwiązanie: Przesuńmy przez punkt M płaszczyznę $\pi^1(t_1 z'_1)$, prostopadłą do prostej m i wyznaczmy punkt przecięcia się D tej płaszczyzny z prostą m , to odcinek MD równy jest odległości punktu M od prostej m .

Rzeczywistą wielkość tego odcinka można wyznaczyć za pomocą punktów dzielenia albo za pomocą kładu płaszczyzny rzucającej prostą MD .

Zagadnienie 6.: Dane są dwie płaszczyzny $\pi^1(t_1 z'_1)$ i $\pi^2(t_2 z'_2)$ wzajemnie prostopadłe i prostopadłe do tła; wyznaczyć takie punkta, których odległości od płaszczyzn π^1 , π^2 i od tła równe są odpowiednio odcinkom a , b , i c (rys. 104.).

Rozwiązanie: Odmierzmy od punktu przecięcia się T_1 śladów t_1 i t_2 na śladzie t_2 odcinki $T_1 A_1$ i $T_1 A_2$ równe odcinkowi a , a na śladzie t_1 odcinki $T_1 B_1$ i $T_1 B_2$ równe odcinkowi b , i przesuńmy przez punkta A_1 i A_2 płaszczyzny $\pi^1(t'_1 z'_1)$ i $\pi^2(t'_2 z'_2)$ równoległe do płaszczyzny π^1 , a przez punkta B_1 i B_2 płaszczyzny $\pi^2(t''_2 z''_2)$ i $\pi^1(t''_1 z''_1)$ równoległe do płaszczyzny π^2 , wyznaczmy następnie proste l_1 , l_2 , l_3 , l_4 podług których płaszczyzny π^1 i π^2 , π^1 i π^2 , π^1 i π^2 , π^2 i π^1 przecinają się, to odległości poszczególnych punktów tych prostych od płaszczyzn π^1 i π^2 równe są odpowiednio odcinkom a i b . Jeżeli tedy odmierzmy za pomocą punktów dzielenia D_1 i D_2 na prostych l_1 , l_2 , ... od punktu T_1 , odcinki $T_1 C_1$, $T_1 C_2$, ... równe odcinkowi c , natenczas otrzymamy ośm punktów, które czynią zadość warunkom zagadnienia.

Zagadnienie 7.: Wyznaczyć najkrótszą odległość dwu prostych wchrowatych $l(TZ'_1)$ i $m(T_2 Z'_2)$ (rys. 105).

Rozwiązanie: Wyznaczmy ślady zbiegu z_1^{90} i z_2^{90} płaszczyzn prostopadłych do prostych l i m , to punkt przecięcia się Z' tychże jest śladem zbiegu prostych prostopadłych do prostych l i m . Jeżeli tedy przesuniemy przez proste l i m płaszczyzny $\pi^1(t_1 z'_1)$ i $\pi^2(t_2 z'_2)$ równoległe do promienia OZ' , natenczas prosta d , podług której te płaszczyzny przecinają się jest prostopadłą do prostych l i m i przecina takowe. Odległość zatem punktów M i N , w których prosta d przecina się z prostymi l i m , jest najkrótszą odległością tychże.

Zagadnienie 8. Wyznaczyć kąty zawarte między prostymi $l(T_1 Z'_1)$ i $m(T_2 Z'_2)$.

Rozwiązanie: Ponieważ promienie zbiegu OZ'_1 i OZ'_2 są równoległe do prostych l i m , przeto kąty zawarte między tymi promieniami są równe kątom nachylenia prostych l i m ; rzeczywiste wielkości tedy tych kątów otrzymamy w kładzie płaszczyzny $OZ'_1 Z'_2$ na tło.

Zagadnienie 9.: Wyznaczyć kąty nachylenia dwu płaszczyzn $\pi^1(t_1 z'_1)$ i $\pi^2(t_2 z'_2)$.

Rozwiązanie: Kąty nachylenia płaszczyzn π^1 i π^2 są równe kątom zawartym między promieniami poprowadzonymi ze środka rzutów prostopadłe do płaszczyzn π^1 i π^2 .

Jeżeli tedy wyznaczmy ślady zbiegu Z_1^{90} i Z_2^{90} prostych prostopadłych do płaszczyzn π^1 i π^2 i wykonamy kład płaszczyzny $OZ_1^{90} Z_2^{90}$, natenczas kąty zawarte między kładami $[O]Z_1^{90}$ i $[O]Z_2^{90}$ są równe kątom nachylenia płaszczyzn danych.

Zagadnienie 10.: Wyznaczyć kąt nachylenia prostej $l(T_1 Z'_1)$ do płaszczyzny $\pi^1(t_1 z'_1)$.

Rozwiązanie: Kąt nachylenia prostej l do płaszczyzny π^1 dopełnia do 90° kąt zawarty między prostą l i prostą prostopadłą do płaszczyzny π^1 . Wyznaczmy tedy ślad zbiegu Z^{90} prostych prostopadłych do płaszczyzny π^1

a następnie kład płaszczyzny $OZ_1'Z''$, to kąt ostry zawarty między kładami $[O]Z_1'$ i $[O]Z''$ promieni OZ_1' i OZ'' jest równy dopełnieniu do 90° kąta nachylenia prostej l do płaszczyzny π^1 .

Zagadnienie 10.: Przez punkt M leżący na prostej $l(T_1Z_1')$ poprowadzić proste nachylone do płaszczyzny $\pi^1(t_1z_1')$ pod kątem α (rys. 106.).

Rozwiązanie: Proste przechodzące przez punkt M i nachylone do płaszczyzny π^1 pod kątem α są tworzącymi stożka obrotowego, którego kierownica na płaszczyźnie π^1 jest kołem, zakreślonym ze spodka prostej wyprowadzonej z punktu M prostopadłe do płaszczyzny π^1 , promieniem równym przyprostokątnej trójkąta, którego jedna przyprostokątna jest równa odległości punktu M od płaszczyzny π^1 , a którego kąt ostry, przyległy do tej przyprostokątnej równy jest dopełnieniu kąta α do 90° .

Poprowadźmy tedy przez punkt M prostą p , prostopadłą do płaszczyzny π^1 i wyznaczmy punkt przebicia D tejże z płaszczyzną π^1 , wykonajmy następnie kład płaszczyzny π^1 na tło i zakreślmy z kładu (D) koło (k) promieniem (D)(A), równym przyprostokątnej QR trójkąta PQR , którego przyprostokątnia PQ jest równą odcinkowi MD prostej p , a którego kąt RPQ równy jest $(90-\alpha)$, — to punkta leżące na obwodzie koła (k) są kładami punktów, które wyznaczają proste $m, m_1, \dots$ przechodzące przez punkt M i nachylone do płaszczyzny π^1 pod kątem α .

Zagadnienie 11.: Przez prostą $l(T_1Z_1')$ przesunąć płaszczyznę nachylone do płaszczyzny $\pi^1(t_1z_1')$ pod kątem α .

Zagadnienie 12.: Dane są dwie proste wchrowate $l(T_1Z_1')$, $m(T_2Z_2')$ i płaszczyzna $\pi^1(t_1z_1')$; wyznaczyć prostą równoległą do tła a nachyloną do płaszczyzny π^1 pod kątem α , która przecina nadto proste l i m , (rys. 107.).

Rozwiązanie: Wyznaczymy punkt D , w którym promień zbiegu OZ'' prostych prostopadłych do płaszczyzny π^1 , tę płaszczyznę przebija, i wykonajmy kład płaszczyzny π^1 na tło, zakreślmy następnie z kładu (D) punktu przebicia koło (k) promieniem, równym przyprostokątnej DN trójkąta, którego jedna przyprostokątnia OD , równa jest odległości środka rzutów od płaszczyzny π^1 , a którego kąt, do tej przyprostokątnej przyległy, równy jest dopełnieniu kąta α do 90° , i wyznaczmy punkta przecięcia się (P) i (Q) koła (k) z kładem (r_1) śladu zniknięcia płaszczyzny π^1 , to rzuty P i Q są śladami zbiegu prostych równoległych do tła a nachylonych do płaszczyzny π^1 pod kątem α .

Jeżeli tedy przesuniemy przez proste l i m płaszczyznę $\pi^2(t_2z_2')$ i $\pi^3(t_3z_3')$ tudzież $\pi^4(t_4z_4')$ i $\pi^5(t_5z_5')$, równoległe do promieni OP i OQ i wyznaczmy proste p i q , podług których płaszczyzny π^2 i π^4 , tudzież π^3 i π^5 przecinają się, to takowe czynią zadość warunkom danego zagadnienia.

Zagadnienie 13.: Pomiędzy prostymi wchrowatymi $l(T_1Z_1')$ i $m(T_2Z_2')$ umieścić odcinek AB tak, aby punkt A leżał na prostej l a punkt B na prostej m i aby nadto prosta AB była równoległą do płaszczyzny $\pi^1(t_1z_1')$, (rys. 108.).

Rozwiązanie: Wyznaczymy punkt przebicia D prostej l z płaszczyzną π^1 i prostą d , podług której płaszczyzna π^1 przecina się z płaszczyzną $\pi^2(t_2z_2')$ suniętą przez prostą m równoległą do prostej l ; zakreślmy następnie w kładzie płaszczyzny π^1 z punktu (D) koło (k) promieniem równym odcinkowi AB , i wyznaczmy rzuty P i Q punktów (P) i (Q), w których koło (k) przecina

się z prostą (d). Poprowadźmy nareszcie proste PZ_1' i QZ_1' równoległe do l , a przez punkta przecięcia się B_1 i B_2 tychże z prostą m' , proste równoległe do promieni $D'P$ i $D'Q$ koła (k), to takowe przecinają się z prostą l' w punktach A_1 i A_2 , wyznaczających z punktami B_1 i B_2 odcinki A_1B_1 i A_2B_2 rzutowo równe odcinkowi AB .

Zagadnienie 14.: Wyznaczyć ślad zbiegu prostych nachylonych do płaszczyzny $\pi^1(t_1z_1')$ pod kątem α , a do płaszczyzny $\pi^2(t_2z_2')$ pod kątem β (rys. 109.).

Rozwiązanie: Wyprowadźmy ze środka rzutów O prostą OZ_1'' prostopadłą do płaszczyzny π^1 i prostą OZ_2'' prostopadłą do płaszczyzny π^2 , odmierzymy na prostej OZ_1'' odcinek OM_1 równy $m \cdot \sin \alpha$, a na prostej OZ_2'' odcinek OM_2 równy $m \cdot \sin \beta$, gdzie m oznacza dowolny odcinek. Przesuniemy następnie przez punkt M_1 płaszczyznę $\pi_1^1(t_1z_1')$ równoległą do płaszczyzny π^1 , a przez punkt M_2 płaszczyznę $\pi_2^1(t_2z_2')$ równoległą do płaszczyzny π^2 i zakreślmy z punktu M_1 na płaszczyźnie π_1^1 koło k_1 promieniem: $m \cdot \cos \alpha$, a z punktu M_2 na płaszczyźnie π_2^1 koło k_2 promieniem $m \cdot \cos \beta$, to te koła przecinają się w punktach P i Q , leżą bowiem na kuli, której środek znajduje się w punkcie O , a której promień równy jest odcinkowi m .

Proste OP i OQ , jako wspólne tworzące stożków (O, k_1) i (O, k_2) są promieniami zbiegu, a rzuty P' i Q' punktów P i Q są śladami zbiegu prostych nachylonych do płaszczyzny π^1 pod kątem α , a do płaszczyzny π^2 pod kątem β .

Celem wyznaczenia tych punktów wykonajmy kład płaszczyzny $\pi_1^1(t_1z_1')$ i zakreślmy z kładu (M_1) koło (k_1) promieniem $m \cdot \cos \alpha$, wyznaczmy następnie punkta przecięcia się (P) i (Q) koła (k_1) z kładem (d) prostej, podług której płaszczyzny π_1^1 i π_2^1 przecinają się, to takowe są kładami punktów P i Q , przez które przechodzą promienie OP i OQ , nachylone odpowiednio do płaszczyzn π^1 i π^2 pod kątami α i β . Rzuty tedy P' i Q' które są razem śladami zbiegu owych prostych można z łatwością wyznaczyć.

Zagadnienie 15.: Wyznaczyć ślad zbiegu płaszczyzn nachylonych do trzech prostych l_1, l_2 i l_3 pod tym samym kątem.

Rozwiązanie: Odmierzymy na promieniach zbiegu OZ_1', OZ_2' i OZ_3' danych prostych, od punktu O , odcinki OM_1, OM_2 i OM_3 , równe dowolnemu odcinkowi i wyznaczmy ślady zbiegu Z''_1, Z''_2 i Z''_3 prostych M_1M_2, M_2M_3 , i M_3M_1 , to takowe leżą na prostej z'' , która jest śladem zbiegu płaszczyzny $M_1M_2M_3$ nachylonej do prostych l_1, l_2 i l_3 pod tym samym kątem.

Zagadnienie 16. Obrócić punkt M , leżący na prostej $l(T_1Z_1')$ około osi $m(T_2Z_2')$ tak, aby po obrocie leżał na płaszczyźnie $\pi^1(t_1z_1')$ (rys. 110.).

Rozwiązanie: Przesuniemy przez punkt M płaszczyznę $\pi^2(t_2z_2')$, prostopadłą do prostej m i wyznaczmy punkt przecięcia się D tejże z tą prostą, a nadto rzeczywistą wielkość odcinka DM , zakreślmy następnie w kładzie płaszczyzny π^2 z punktu (D) koło (k) promieniem równym odcinkowi DM i wyznaczmy punkta przecięcia się (M_1) i (M_2) koła (k) z kładem (d) prostej, podług której płaszczyzny π^1 i π^2 się przecinają, to te punkty są kładami punktów M_1 i M_2 , leżących na płaszczyźnie π^1 , z którymi punkt M po obrocie się schodzi.

Zagadnienie 17.: Obrócić wierzchołek C trójkąta ABC , około boku AB w ten sposób, aby po obrocie rzut $A'B'C'$ trójkąta ABC , był trójkątem równoramiennym.

Rozwiązanie: Rzut C_1 punktu C po obrocie, leżeć będzie na prostej z' wyprowadzonej z punktu M' dzielącego na dwie równe części odcinek $A'B'$ prostopadłe do prostej $A'B'$. Punkt C_1 zatem, z którym punkt C po obrocie się schodzi, leży na płaszczyźnie rzucającej (OZ').

Aby tedy punkt C_1 wyznaczyć, przesuniemy przez punkt C płaszczyznę $\pi^2(t_2, z'_2)$ prostopadłą do prostej $AB(T_1, Z'_1)$ i wyznaczmy punkt przecięcia się D płaszczyzny π^2 z prostą AB a nadto prawdziwą wielkość odcinka CD ; zakresłmy następnie w kładzie płaszczyzny π^2 z punktu (D) koło (k) promieniem równym odcinkowi CD i wyznaczmy punkta przecięcia się (C_1) i (C_2) koła (k) z kładem (d) prostej, podług której płaszczyzny (Oz') i π^2 przecinają się, to takowe są kładami punktów C_1 i C_2 , z którymi schodzi się punkt C po obrocie. Rzuty tedy $A'B'C_1$ i $A'B'C_2$ są trójkątami równoramiennymi.

Zagadnienie 18.: Obrócić płaszczyznę $\pi^1(t_1, z'_1)$ około osi $l(T_1, Z'_1)$ tak aby była równoległą do prostej $m(T_2, Z'_2)$.

Rozwiązanie: Punkt W , w którym prosta l przebija płaszczyznę π^1 , nie zmienia swego położenia podczas obrotu. — Jeżeli płaszczyzna π^1 ma być po obrocie równoległą do prostej m , natenczas przechodzić będzie przez prostą $n(T_3, Z'_2)$ poprowadzoną przez punkt W równoległe do prostej m .

Aby tedy wyznaczyć położenie płaszczyzny π^1 po obrocie około osi l , poprowadźmy płaszczyznę $\pi^2(t_2, z'_2)$ prostopadłą do tej osi, i wyznaczmy punkta przecięcia D i E prostych l i n z płaszczyzną π^2 a nadto prostą d , podług której płaszczyzny π^1 i π^2 przecinają się; zakresłmy następnie w kładzie płaszczyzny π^2 z punktu (D) koło (k) promieniem równym odległości punktu (D) od kładu (d) prostej d i poprowadźmy przez punkt (E) styczne (p) i (q) do tego koła, to proste p i q wyznaczają z punktem W dwie płaszczyzny, z którymi płaszczyzna π^1 po obrocie się schodzi.

O zmianie rzutów środkowych.

25. W geometrii wykreślnej zdarza się częstokroć, że rozwiązanie pewnego zagadnienia nie następuje w zasadzie żadnych trudności, że jednak przy graficznym rozwiązaniu tegoż natrafiamy na wielkie przeszkody. Przyczyna tego leży wyłącznie w położeniu utworów, które mamy przedstawić względem tła i środka rzutów. W przypadkach, kiedy owe położenia są nieodpowiednie, wyłania się podczas konstruowania mnóstwo wykreśleń pośrednich, które zaciemniają właściwy tok rzeczy i powodują niedokładność wyników; nadto, ze względu na tę okoliczność, że płaszczyzna rysunkowa jest ograniczoną, leżą niektóre elementa poza obrębem tejże, co szczególnie wówczas jest nadzwyczaj niedogodne, jeżeli te elementa pozostają w związkach miarowych z utworami.

Aby tym niedogodnościom rysunkowym zapobiedz, zmieniamy środek rzutów, albo położenie utworu w przestrzeni, albo wreszcie tło.

Częstokroć zdarza się jednak, że zmiana samego środka rzutów, albo samego tła, albo zmiana w położeniu samego utworu, nie prowadzi do zamierzonego celu. W tych przypadkach należy wykonać kolejno zmianę środka rzutów i położenia przedmiotu.

Zmiana środka rzutów.

26. Jeżeli na prostej OS , która przebija tło w punkcie S , przesuniemy środek rzutów O do punktu 1O , natenczas zmieni się punkt główny i promień koła oddalenia (rys. 111.). Rzut prostokątny 1O_1 punktu 1O t. z. zmieniony punkt główny, leży na prostej, łączącej pierwotny punkt główny z punktem S . Z podobieństwa trójkątów OO_1S i $^1O^1O_1S$ wynika proporcja:

$$OS: ^1OS = O_1S: ^1O_1S = OO_1: ^1O^1O_1,$$

z której czytamy:

Zmieniony środek rzutów dzieli odcinek zawarty między pierwotnym środkiem rzutów i śladem S na tle prostej, łączącej oba środki rzutów w takim stosunku, w jakim zmieniony punkt główny dzieli odcinek zawarty między pierwotnym punktem głównym i śladem S .

Na zasadzie powyższej proporcji można również wyznaczyć oddalenie od tła zmienionego środka rzutów jeżeli zmieniony punkt główny O_1 i ślad S są dane.

27. Wskutek zmiany środka rzutów zmieniają się rzuty punktów, a nadto ślady zbiegu prostych i płaszczyzn; ślady tłowe nie zmieniają swego położenia.

Niech będzie dana prosta $l(T, Z')$ (rys. 112.). Jeżeli środek rzutów O przesuwamy na prostej OS , natenczas promień zbiegu OZ' prostej l posuwa się na płaszczyźnie OSZ' równoległe do swego pierwotnego położenia; zmieniony tedy ślad zbiegu $^1Z'$ prostej l , leży na śladzie płaszczyzny OSZ' , a więc na prostej $Z'S$, łączącej pierwotny ślad zbiegu Z' z punktem S , w którym prosta łącząca oba środki rzutów przebija tło.

Z trójkątów podobnych OSZ' i $^1OS^1Z'$ czytamy:

$$OS: ^1OS = SZ': S^1Z',$$

t. z.: zmieniony ślad zbiegu prostej dzieli odcinek zawarty między pierwotnym śladem zbiegu i punktem S w takim stosunku, w jakim zmieniony środek rzutów dzieli odcinek zawarty między pierwotnym środkiem rzutów i punktem S .

Płaszczyzny OO_1Z' i $^1O^1O_1Z'$ są równoległe, albowiem proste OO_1 i $^1O^1O_1$, jakoteż OZ' i $^1O^1Z'$ są równoległe, proste zatem O_1Z' i $^1O_1^1Z'$ łączące pierwotny i zmieniony ślad zbiegu z odpowiednimi punktami głównymi, jako przekroje dwu płaszczyzn równoległych tłem, są równoległe.

28. Obierzmy na prostej l dowolny punkt A i poprowadźmy przezeń promienie rzucające OA i 1OA (rys. 111.), wyznaczmy następnie punkta przecięcia się tychże A' i $^1A'$ z tłem i poprowadźmy płaszczyznę O^1OA , to ślad tej płaszczyzny przechodzi przez ślad S prostej O^1O i przez rzuty A' i $^1A'$ punktu A . A zatem:

Zmieniony rzut punktu leży na prostej, łączącej pierwotny rzut ze śladem prostej przechodzącej przez oba środki rzutów.

29. Niech będzie daną płaszczyzna $\pi^1(t_1, z'_1)$ zmieniony punkt główny 1O_1 i ślad S prostej łączącej pierwotny środek O ze zmienionym środkiem rzutów 1O , załóżmy sobie wyznaczyć zmieniony ślad zbiegu płaszczyzny π^1 (rys. 112.).

Poprowadźmy w tym celu na płaszczyźnie π^1 dowolną prostą $l(TZ')$ i połączmy punkt Z' ze śladem S , poprowadźmy następnie prostą $^{10}O^{10}Z'$ równoległą do prostej O_1Z' i wyznaczmy punkt przecięcia się tejże $^{10}Z'$ z prostą $Z'S$, to punkt $^{10}Z'$ jest zmienionym śladem zbiegu prostej l ; prosta tedy $^{10}z'$ poprowadzona równolegle do śladu tłowego t , który wskutek zmiany środka rzutów położenia swego nie zmienia, jest zmienionym śladem zbiegu płaszczyzny π^1 .

Zmienione rzuty $^{10}A', \dots$ punktów $A, \dots$, leżących na płaszczyźnie π^1 , leżą z rzutami pierwotnymi na prostych przechodzących przez punkt S , a zmienione rzuty $^{10}l', \dots$ prostych $l, \dots$ leżących na płaszczyźnie π^1 , przecinają się z rzutami pierwotnymi $l', \dots$ w punktach leżących na śladzie tłowym t_1 .

Rzuty zatem układu płaskiego π^1 ze środków O i ^{10}O na tło są środkowo kolineacyjne; ślad prostej $O^{10}O$ łączącej środki rzutów jest środkiem kolineacji, a ślad tłowy płaszczyzny układu jest osią kolineacji.

30. Jeżeli zmieniony środek rzutów ^{10}O znajduje się na promieniu głównym OO_1 (rys. 113.) natenczas ślad S prostej łączącej środki rzutów i zmieniony punkt główny schodzą się z pierwotnym punktem głównym O_1 . Zmienione tedy rzuty $^{10}A', \dots$ punktów $A, \dots$ i zmienione ślady $^{10}Z', \dots$ prostych $l, \dots$ leżą na prostych, łączących punkt główny O_1 z pierwotnymi rzutami $A', \dots$, względnie śladami $Z', \dots$. Zmieniony ślad zbiegu Z' prostej dzieli odcinek zawarty między pierwotnym śladem Z' i punktem głównym O_1 w takim stosunku, w jakim zmieniony środek rzutów ^{10}O dzieli odcinek zawarty między pierwotnym środkiem i punktem głównym.

Rzuty układu płaskiego $\pi^1(t_1z'_1)$ z punktów O i ^{10}O na tło, są środkowo kolineacyjne; punkt główny jest środkiem a ślad tłowy t_1 jest osią kolineacji.

31. Jeżeli zmieniony środek rzutów ^{10}O leży na płaszczyźnie zniknięcia ρ (rys. 114.), natenczas ślad S prostej, łączącej środki rzutów znajduje się w nieskończoności na prostej $O_1^{10}O_1$, która łączy pierwotny i zmieniony punkt główny. Zmienione tedy rzuty $^{10}A', \dots$ punktów $A, \dots$ i zmienione ślady zbiegu $^{10}Z', \dots$ prostych $l, \dots$ leżą na prostych, poprowadzonych przez pierwotne rzuty $A', \dots$ względnie ślady $Z', \dots$ równoległe do prostej $O_1^{10}O_1$.

Z równoległoboków $O^{10}O^{10}O_1$ i $O^{10}OZ'^{10}Z'$ wynika, że odcinek zawarty między pierwotnym i zmienionym śladem zbiegu prostej l , równy jest odcinkowi $O_1^{10}O_1$, zawartemu między punktami głównymi, a z trójkątów $TA'^{10}A'$ i $TZ'^{10}Z'$ czytamy, że zmieniony rzut punktu, $^{10}A'$, leżącego na prostej l , dzieli odcinek, zawarty między śladem tłowym a zmienionym śladem zbiegu $^{10}Z'$ w takim stosunku, w jakim pierwotny rzut punktu, A' , dzieli odcinek zawarty między śladem tłowym i pierwotnym śladem zbiegu.

Rzuty układu płaskiego z dwu punktów, leżących na płaszczyźnie zniknięcia są powinowate, środek powinowactwa leży w nieskończoności na prostej, łączącej środki rzutów, a ślad tłowy płaszczyzny układu jest osią powinowactwa.

Zagadnienie 1.: Na płaszczyźnie $\pi^1(t_1z'_1)$ dana jest prosta $l(T, Z')$, której ślad zbiegu Z' leży poza obrębem rysunku; odmierzyć na tej prostej od danego punktu M odcinki równe, (rys. 115.).

Rozwiązanie: Przesunąć środek rzutów O na linii największego spadku OA_1 płaszczyzny zbiegu (Oz') w ten sposób, aby jego odległość od

tła równą była n -tej części pierwotnej odległości, to natenczas zmieniony punkt główny $^{10}O_1$ schodzi się z punktem dzielącym odcinek OA_1 w stosunku jak „1“ do „ n “. Zmienione rzuty punktów i zmienione ślady zbiegu prostych, leżą na promieniach wychodzących z punktu A_1 . Ślad zbiegu z' płaszczyzny π nie zmienia swego położenia przy tej transformacji środka rzutów.

Celem wyznaczenia zmienionego śladu zbiegu prostej $l(TZ')$ połączmy dowolny punkt M' prostej l' z punktem A_1 i odmierzymy na prostej A_1M' od punktu A_1 n -tą część A_1X odcinka A_1M' , poprowadźmy następnie przez punkt X prostą „ m “ równoległą do l' to takowa przetnie się z prostą z'_1 w punkcie $^{10}Z'$, który jest zmienionym śladem zbiegu prostej l ; wiadomo bowiem, że zmieniony ślad zbiegu prostej dzieli odcinek, zawarty między pierwotnym śladem zbiegu i śladem A_1 prostej, łączącej środki rzutów O i ^{10}O , w takim samym stosunku, w jakim zmieniony punkt główny $^{10}O_1$ dzieli odcinek zawarty między śladem A_1 i pierwotnym punktem głównym.

Prosta $T^{10}Z'$ jest tedy zmienionym rzutem prostej l a punkt przecięcia się $^{10}M'$ prostych A_1M' i $T^{10}Z'$ jest zmienionym rzutem punktu M .

Wyznaczymy odległość zmienionego środka rzutów ^{10}O od śladu zbiegu $^{10}Z'$ i zakresłmy tą odległością z punktu $^{10}Z'$ koło k_1 , to takowe przetnie się z prostą z'_1 w punkcie dzielenia $^{10}D_1$ prostej $T^{10}Z_1$. Jeżeli zatem połączymy $^{10}D_1$ z punktem $^{10}M'$ i wyznaczmy punkt przecięcia się M_1 śladu tłowego t_1 z prostą $^{10}D_1M'$, jeżeli następnie odmierzymy na śladzie t_1 od punktu M_1 odcinki równe $M_1B, M_1C, \dots$, natenczas promienie $^{10}D_1B^1, D_1C, \dots$ przetną prostą $T^{10}Z$ w punktach $^{10}B', ^{10}C', \dots$ wyznaczających z punktem $^{10}M'$ odcinki prostej l , rzutowo równe, atoli przy zmienionym środku rzutów. Promienie tedy $A_1^{10}B'$ i $A_1^{10}C', \dots$ wyznaczają na prostej l' odcinki $M'B', M'C', \dots$ rzutowo równe przy pierwotnym środku rzutów.

Zagadnienie 2.: Przez punkt M leżący na płaszczyźnie $\pi^1(t_1z'_1)$, poprowadzić proste nachylone do śladu tłowego pod danym kątem, jeżeli kład środka rzutów, wykonany około prostej z'_1 , leży poza obrębem rysunku (rys. 116.).

Rozwiązanie: Jeżeli środek rzutów przesuniemy na promieniu OO_1 w ten sposób, że zmienione oddalenie środka rzutów od tła będzie równe połowie oddalenia pierwotnego, natenczas ślad zbiegu z'_1 płaszczyzny π^1 zbliży się do punktu głównego o połowę odcinka O_1A_1 a rzut M' punktu M przesunie się na prostą O_1M' .

Wykonajmy kład zmienionej płaszczyzny zbiegu ($^{10}Oz'_1$) na tło i poprowadźmy przez kład środka rzutów [^{10}O] proste m i n nachylone do śladu $^{10}z'_1$ pod kątem α , połączmy następnie punkt $^{10}M'$ z punktami $^{10}Z'_2$ i $^{10}Z'_3$, w których te proste przecinają się ze śladem $^{10}z'_1$, to proste $^{10}M'^{10}Z'_2$ i $^{10}M'^{10}Z'_3$ są rzutami prostych p i q przechodzących przez punkt M i nachylonych do śladu tłowego płaszczyzny π^1 pod kątem α , atoli ze zmienionego środka rzutów. Ślady tłowe T_2 i T_3 prostych p i q nie zmieniają swego położenia przy zmianie środka rzutów; jeżeli tedy połączymy punkt M' z punktami T_2 i T_3 natenczas otrzymamy rzuty prostych p i q z pierwotnego środka rzutów.

Zagadnienie 3.: Mając dane dwie proste wchrowate $l(T_1Z'_1)$ i $m(T_2Z'_2)$, zmienić na płaszczyźnie zniknięcia położenie środka rzutów w ten sposób, aby rzuty prostych l i m były równoległe i aby nadto odcinki tych rzutów

zawarte między odpowiednimi śladami tłowymi i śladami zbiegu były równe (rys. 117.).

Rozwiązanie: Jeżeli ślady zniknięcia R_1 i R_2 dwu prostych l i m są symetryczne względem środka rzutów, natenczas rzuty tych prostych są równoległe, a odcinki zawarte między śladami tłowymi i odpowiednimi śladami zbiegu są równe.

Wyznamy tedy rzuty prostokątne R'_1 i R'_2 punktów, w których proste l i m przebijają płaszczyznę zniknięcia i przesunemy punkt główny O_1 tak, aby się zeszedł z punktem 1O_1 dzielącym na dwie równe części odcinek $R'_1R'_2$; to natenczas ślady zbiegu Z'_1 i Z'_2 prostych l i m przesuną się w kierunku $O_1^1O_1$ o takisam odcinek, jak punkt główny, a rzuty $T_1^1Z'_1$ i $T_2^1Z'_2$ prostych l i m , czynić będą zadość warunkom zagadnienia.

O zmianie położenia utworów przestrzeni.

32. Przesuwając dany przedmiot w pewnym kierunku zmieniamy położenie wszystkich jego punktów na prostych równoległych do tegoż kierunku, a wskutek tego zmieniają się tylko ślady tłowe wszystkich prostych i płaszczyzn, zaś ślady zbiegu tychże pozostaną te same.

Niech będzie dana prosta $l(TZ')$ i rzut środkowy A' punktu A , leżącego na tej prostej.

Jeżeli kierunek przesunięcia oznaczymy śladem zbiegu Z'_1 i połączymy punkty Z' i Z'_1 prostą z' a przez punkt T poprowadzimy prostą t równoległą do z' , natenczas t i z' przedstawiają płaszczyznę, którą tworzy dana prosta podczas swego ruchu. Zmieniony ślad tłowy prostej leży tedy na prostej t a zmienione rzuty środkowe poszczególnych punktów na prostych, łączących pierwotne rzuty z punktem Z'_1 .

Zagadnienie 1.: Na płaszczyźnie $\pi^1(t, z')$ dana jest prosta $l(T, Z'_1)$ której ślad tłowy leży poza obrębem rysunku; wyznaczyć na prostej l punkt którego odległość od śladu T_1 równą jest danemu odcinkowi (rys. 119.).

Rozwiązanie: Przesunemy prostą l równoległe do śladów płaszczyzny π^1 tak, aby ślad tłowy tejże zeszedł się z punktem 1T_1 to prosta $^1T_1Z'_1$ jest zmienionym rzutem prostej l . Wyznamy następnie za pomocą punktów dzielenia D_1 i D_2 odcinek $^1T_1A'$ prostej $l(^1T_1Z'_1)$ rzutowo równy danemu odcinkowi i poprowadzimy przez punkt A' prostą m' równoległą do śladów płaszczyzny π^1 to takowa przecina się z rzutem l' w rzucie A' punktu A czyniącego zadość warunkom zagadnienia.

Zagadnienie 2.: Na płaszczyźnie $\pi^1(t, z')$ dany jest trójkąt $1'2'3'$, którego wierzchołek $3'$ leży poza obrębem rysunku; przesunąć płaszczyznę π^1 w kierunku prostopadłym do tła tak, aby rzut punktu 3 znajdował się w obrębie rysunku, (rys. 120.).

Rozwiązanie: Ślady tłowe T_1 i T_2 prostych 13 i 23 zmieniają swe położenia na prostych O_1T_1 i O_1T_2 , ślady zbiegu zaś Z'_1 i Z'_2 jak wiadomo nie zmieniają się. — Przyjmijmy, że ślad tłowy T_1 schodzi się po przesunięciu płaszczyzny π^1 z punktem 1T_1 to prosta 1t_1 poprowadzona przez punkt 1T_1 równoległe do z'_1 jest zmienionym śladem tłowym płaszczyzny π^1 , a punkt przecięcia się 1T_2 śladu 1t_1 z prostą O_1T_2 jest zmienionym śladem tłowym prostej 23. Jeżeli tedy wyznaczmy punkt przecięcia się prostych $^1T_1Z'_1$

i $^1T_2Z'_2$ natenczas otrzymamy zmieniony rzut $^13'$ punktu 3. Zmienione rzuty $^11'$ i $^12'$ punktów 1 i 2 znajdują się w przecięciach prostych O_11' i $^1T_1Z'_1$ tudzież O_12' i $^1T_2Z'_2$.

O zmianie tła.

Jeżeli tło π przesuniemy równoległe do pierwotnego położenia tegoż, natenczas zmieni się oddalenie środka rzutów od tła a pierwotne ślady tłowe i ślady zbiegu prostych przesuną się na prostych prostopadłych do tła (rys. 121.). Wskutek zmiany tła zmieniają się ślady tłowe i ślady zbiegu prostych a nadto rzuty środkowe punktów.

Zalóżmy sobie tedy zbadać, jaki zachodzi związek między pierwotnymi a zmienionymi śladami prostych, jakoteż między pierwotnymi a zmienionymi rzutami punktów.

Przesunemy w tym celu przez promień główny OO_1 i przez promień zbiegu OZ'_1 prostej $l(T_1Z'_1)$ płaszczyznę, to takowa przecina się ze zmienionem tłem $^1\pi$ podług prostej $^1O_1^1Z'_1$, na której zmieniony ślad zbiegu $^1Z'_1$ prostej l leży.

Zmieniony ślad zbiegu prostej leży tedy na prostej łączącej pierwotny ślad zbiegu z punktem głównym.

Z trójkątów podobnych OZ'_1O_1 i $O^1O_1^1Z'_1$ czytamy:

$$1) O_1Z'_1 : ^1O_1^1Z'_1 = OO_1 : O^1O_1,$$

t. z.: Zmieniony ślad zbiegu dzieli odcinek zawarty między punktem głównym i pierwotnym śladem w takim samym stosunku, w jakim zmienione tło dzieli odległość środka rzutów od tła pierwotnego.

Przesunemy przez prostą OO_1 i przez promień rzucający punktu A , leżącego na prostej l , płaszczyznę, to takowa przecina się ze zmienionem tłem podług prostej $^1O_1^1A'$ na której zmieniony rzut $^1A'$ punktu A leży. Z trójkątów podobnych $OA'O_1$ i $O^1A'^1O_1$ czytamy:

$$2) O_1A'_1 : ^1O_1^1A' = OO_1 : O^1O_1,$$

t. z.: Zmieniony rzut punktu dzieli odcinek zawarty między punktem głównym i pierwotnym rzutem w takim samym stosunku, w jakim zmienione tło dzieli odległość środka rzutów od tła pierwotnego.

Z równań 1) i 2) czytamy, że rzut pierwotny i rzut zmieniony prostej są prostami równoległymi.

Przesunemy nareszcie przez prostą l i przez promień zbiegu tejże OZ'_1 płaszczyznę prostopadłą do tła i odpowiednio równoległą, to proste podług których zmienione tło $^1\pi$ przecina się z tymi płaszczyznami są równoległe, proste zatem $T_1^1T_1$ i $Z'_1^1Z'_1$, łączące pierwotne ślady z odpowiednimi śladami zmienionymi są równoległe a odcinki $T_1Z'_1$ i $^1T_1^1Z'_1$ zawarte między pierwotnymi i zmienionymi śladami są równe.

Zagadnienie: Wyznaczyć rzeczywistą wielkość odcinka AB prostej $l(T_1Z'_1)$, która leży na płaszczyźnie $\pi^1(t, z')$, jeżeli ślad zbiegu Z'_1 znajduje się poza obrębem rysunku, (rys. 122.).

Rozwiązanie: Jeżeli przesuniemy tło ku środkowi rzutów o połowę pierwotnego oddalenia, natenczas promień zmienionego koła oddalenia 1k równy jest połowie promienia pierwotnego koła oddalenia k .

Odległości zmienionego śladu zbiegu $^1z'_1$ płaszczyzny π^1 i zmienionych rzutów $^1A'$ i $^1B'$ od punktu głównego O_1 , równe są połowie odległości tego punktu od pierwotnego śladu z'_1 , względnie od pierwotnych rzutów A' i B' , a odległość zmienionego śladu tłowego 1t_1 płaszczyzny π^1 od prostej $^1z'_1$ jest równą odległości pierwotnych śladów t_1 i z'_1 . Prosta, łącząca punkty $^1A'$ i $^1B'$ jest zmienionym rzutem prostej l , a punkta 1T_1 i $^1Z'_1$, w których ślady 1t_1 i $^1z'_1$ przecinają się z rzutem $^1A'B'$ są zmienionymi śladami prostej l ; rzeczywistą wielkość tedy odcinka AB można za pomocą punktów dzielenia z łatwością wyznaczyć, albowiem ślady 1T_1 i $^1Z'_1$ prostej AB leżą w obrębie rysunku.

34. Jeżeli pojedyncze zmiany, o których mówiliśmy, nie prowadzą do celu, natenczas należy zmienić środek rzutów i położenie przedmiotu w przestrzeni.

Zagadnienie: Wyznaczyć rzeczywistą wielkość odcinka AB prostej $l(T_1Z'_1)$, jeżeli ślad tłowy i ślad zbiegu leżą poza obrębem rysunku, (rys. 123.).

Rozwiązanie: Przesuńmy prostą l równoległe do tła w kierunku śladów płaszczyzny π^1 od strony lewej ku prawej tak, aby zmieniony ślad tłowy zeszedł się z punktem 1T_1 , natenczas punkt M' dzielący na dwie równe części odcinek $T_1Z'_1$ przesunie się w kierunku śladów t_1 i z'_1 od strony lewej ku prawej o połowę odcinka 1T_1T_1 . Przesuńmy następnie środek rzutów na płaszczyźnie zniknięcia w kierunku śladów płaszczyzny π^1 od strony prawej ku lewej tak, aby wielkość tego przesunięcia równała się odcinkowi 1T_1T_1 , natenczas punkt M' wróci do swego dawnego położenia; prosta tedy $^1T_1M'$ jest podwójnie zmienionym rzutem prostej l , a punkta przecięcia się $^1A'$ i $^1B'$ tego rzutu z prostymi poprowadzonymi przez A' i B' równoległe do śladów t_1 i z'_1 są zmienionymi rzutami punktów A i B .

Aby wyznaczyć rzeczywistą wielkość odcinka AB , należy przede wszystkim wyznaczyć zmieniony punkt główny. Podzielmy w tym celu odcinek $^1T_1M'$ na dwie równe części i poprowadźmy przez punkt dzielący P' prostą n' równoległą do śladu t_1 , to natenczas odcinek $P'Q'$ zawarty między punktem P' i punktem przecięcia się Q' prostych n' i $A'B'$, równy jest połowie wielkości przesunięcia prostej l , środka rzutów O i punktu głównego O_1 . Jeżeli tedy poprowadzimy przez punkt główny O_1 prostą p' równoległą do śladów płaszczyzny π^1 i odmierzymy na tej prostej od strony prawej ku lewej odcinek O_1O_1' równy podwójnemu odcinkowi $P'Q'$, to punkt O_1' jest zmienionym punktem głównym.

Mając tedy punkt główny O_1' koło oddalenia a nadto ślady $^1T_1Z'_1$ prostej l , można z łatwością wyznaczyć rzeczywistą wielkość odcinka tej prostej.

B. Rzuty prostokątne.

1. Położenie punktów i prostych w przestrzeni można wyznaczyć, odnosząc takowe zapomocą rzutów z dwu punktów O_1 i O_2 na dwie płaszczyzny π^1 i π^2 , które nazywamy płaszczyznami rzutów. Promienie O_1A i O_2A , rzucające punkt A na płaszczyzny π^1 i π^2 (rys. 124.), wyznaczają płaszczyznę, na której leży prosta, łącząca środki rzutów O_1 i O_2 ; ślady zatem s_1 i s_2 tej płaszczyzny na płaszczyznach rzutów przechodzą odpowiednio przez punkta przebiecia P_1 i P_2 prostej O_1O_2 z płaszczyznami π^1 i π^2 i przez rzuty A' i A'' punktu A , a nadto przecinają się w punkcie, leżącym na prostej x , podług której płaszczyzny rzutów się przecinają. Dwa dowolne punkta X i Y , tedy, z których jeden leży na płaszczyźnie π^1 a drugi na płaszczyźnie π^2 nie są w ogóle rzutami punktu, proste bowiem O_1X i O_2Y są wogóle wchrowate. Jeżeli jednak proste P_1X i P_2Y przecinają się w punkcie, leżącym na prostej x , natenczas promienie O_1X i O_2Y leżą na jednej płaszczyźnie i przecinają się w punkcie, którego rzuty schodzą się z punktami X i Y . — Jeżeli środki rzutów O_1 i O_2 leżą w nieskończoności, natenczas punkta przebiecia P_1 i P_2 prostej O_1O_2 z płaszczyznami rzutów leżą również w nieskończoności; ślady tedy $s_1...$ i $s_2...$ płaszczyzn, wyznaczonych promieniami rzucającymi na płaszczyznach rzutów, są odpowiednio równoległe.

Konstrukcja na dwu płaszczyznach nachylonych do siebie pod pewnym kątem, jest nader niewygodną, a częstokroć wprost niemożliwą, dlatego sprowadzamy obie płaszczyzny rzutów do jednej płaszczyzny, obracając takowe około prostej x tak długo, dopóki się nie zejdą na jednej płaszczyźnie.

Najwięcej rozpowszechnioną metodą rzutów na dwie płaszczyzny, która technice największe oddaje usługi, jest metoda rzutów prostokątnych.

2. Rzutem prostokątnym A' punktu A na płaszczyznę π^1 (rys. 125.) nazywamy spodek prostopadłej AA' wyprowadzonej z punktu A do płaszczyzny π^1 . Prosta AA' nazywamy prostą rzucającą punkt A , a płaszczyznę π^1 nazywamy płaszczyzną rzutów.

Rzut A' nie wyznacza punktu A , albowiem rzuty prostokątne na płaszczyznę π^1 wszystkich punktów leżących na prostej AA' schodzą się w punkcie A' . Jeżeli jednak wyznaczymy rzuty prostokątne A' i A'' punktu A na dwie płaszczyzny π^1 i π^2 przecinające się, natenczas punkta A' i A'' wyznaczają położenie punktu A w przestrzeni; proste bowiem AA' i AA'' wyprowadzone z rzutów A' i A'' prostopadle do płaszczyzn π^1 i π^2 , przecinają się w punkcie A .

3. Przyjmujemy zwykle, że płaszczyzna π^1 jest pozioma, a płaszczyzna π^2 pionowa, że zatem płaszczyzny rzutów są prostopadłe. Prostą x , podług której płaszczyzny π^1 i π^2 przecinają się, nazywamy osią rzutów, a punkta A' i A'' , nazywamy odpowiednio rzutem poziomym i pionowym punktu A . Oś x , dzieli płaszczyznę π^1 na dwie części: część przednią $(+\pi^1)$ i część tylną $(-\pi^1)$.

Oś rzutów dzieli również płaszczyznę π^2 na dwie części: część górną $(+\pi^2)$ i część dolną $(-\pi^2)$. Płaszczyzny rzutów zaś π^1 i π^2 dzielą całą przestrzeń na cztery części, zawarte odpowiednio między $(+\pi^1)$ i $(+\pi^2)$, $(-\pi^1)$ i $(+\pi^2)$, $(-\pi^1)$ i $(-\pi^2)$, $(+\pi^1)$ i $(-\pi^2)$, które odpowiednio pierwszą, drugą, trzecią i czwartą ćwiartką przestrzeni nazywać będziemy.

4. Płaszczyzna $A'AA''$, przesunięta przez proste, rzucające punkt A na płaszczyzny π^1 i π^2 jest prostopadłą do osi x ; proste tedy $A'A_x$ i $A''A_x$, podług których płaszczyzna $A'AA''$ przecina się z płaszczyznami rzutów, tworzą z prostymi rzucającymi prostokąt $AA'A_xA''$. A zatem:

a) Proste wyprowadzone z rzutów punktu, prostopadłe do osi x , przecinają się w punkcie, leżącym na tejże osi.

b) Odległość punktu od płaszczyzny poziomej rzutów, równa jest odległości rzutu pionowego tego punktu od osi rzutów.

c) Odległość punktu od płaszczyzny pionowej rzutów, równa jest odległości rzutu poziomego tego punktu od osi rzutów.

5. Wykreślenia na dwu płaszczyznach są nader uciążliwe, a częstokroć niewykonalne, z tego powodu sprowadzamy płaszczyzny rzutów do jednej płaszczyzny rysunku, obracając takowe około osi x tak długo, dopóki część przednia płaszczyzny poziomej rzutów nie zejdzie się z częścią dolną płaszczyzny pionowej π^2 .

Po sprowadzeniu płaszczyzn rzutów do jednej płaszczyzny, leżą rzuty $A'A''$ punktu A na prostej $A'A''$, prostopadłej do osi x (rys. 125b), albowiem proste $A'A_x$ i $A''A_x$, prostopadłe do osi rzutów, nie zmieniają podczas obrotu płaszczyzn π^1 i π^2 swego położenia względem tejże osi. — A zatem:

Po sprowadzeniu płaszczyzn rzutów do jednej płaszczyzny rysunku, leżą rzuty punktów na prostych, prostopadłych do osi x . I wzajemnie:

Dwa punkta znajdujące się na prostej, prostopadłej do osi x , można uważać za rzuty punktu.

6. Rzuty punktu zajmują względem osi rzutów różne położenia, zależnie od tego, w której ćwiartce ów punkt się znajduje. Jeżeli punkt A znajduje się w ćwiartce pierwszej, natenczas rzut poziomy A' leży pod osią, a rzut pionowy A'' leży nad osią.

Rzuty B' i B'' punktu B , leżącego w ćwiartce drugiej, znajdują się nad osią.

Jeżeli punkt C leży w ćwiartce trzeciej, natenczas rzut poziomy C' znajduje się nad osią, a rzut pionowy C'' pod osią.

Rzuty D' i D'' punktu D , leżącego w ćwiartce czwartej, znajdują się pod osią.

Jeżeli punkt H leży na płaszczyźnie poziomej rzutów π^1 , natenczas rzut poziomy H' schodzi się z punktem H , a rzut pionowy H'' znajduje się na osi x .

Rzut pionowy V'' punktu V , leżącego na płaszczyźnie pionowej rzutów, schodzi się z punktem V , a rzut poziomy V' znajduje się na osi.

7. Płaszczyzny π^1_x i π^2_x , przechodzące przez oś x i dzielące na dwie równe części kąty, zawarte między płaszczyznami rzutów, są miejscem geometrycznym punktów, których odległości od płaszczyzn π^1 i π^2 są równe.

Rzuty zatem M' i M'' punktu, leżącego na płaszczyźnie π^1_x , która przechodzi przez ćwiartkę pierwszą i trzecią, są symetryczne względem osi x , rzuty zaś N' i N'' punktu N , leżącego na płaszczyźnie π^2_x , która przechodzi przez ćwiartkę drugą i czwartą, schodzą się w jednym punkcie.

8. Częstokroć nie wystarczają rzuty na dwie płaszczyzny do wyznaczenia utworu przestrzeni. W tym wypadku przyjmujemy płaszczyznę π^3 , prostopadłą do osi x za trzecią płaszczyznę rzutów (rys. 126a). Płaszczyznę π^3 nazywamy płaszczyzną boczną rzutów, a rzuty na płaszczyźnie π^3 nazywamy rzutami bocznymi.

Płaszczyzny π^1 , π^2 i π^3 , wzajemnie prostopadłe, tworzą układ płaszczyzn współrzędnych i przecinają się podług trzech prostych, prostopadłych Ox , Oy , Oz , które nazywamy osiami układu.

Punkt przecięcia się O osi, zwany początkiem układu, dzieli każdą oś na dwie części. Przyjmujemy, że części osi Ox , Oy i Oz , leżące odpowiednio po stronie prawej płaszczyzny π^3 , przed płaszczyzną π^2 i powyżej płaszczyzny π^1 , są częściami dodatnimi, części zaś osi leżące odpowiednio po stronie lewej płaszczyzny π^3 , za płaszczyzną π^2 i poniżej płaszczyzny π^1 są częściami ujemnymi.

9. Wyznamy rzuty A' , A'' , A''' punktu A na płaszczyzny π^1 , π^2 i π^3 (rys. 126a) i przesunmy przez proste rzucające AA' i AA'' , AA' i AA''' , AA'' i AA''' płaszczyzny, to takowe wyznaczają z płaszczyznami układu równoległością prostokątny, w którym trzy razy po cztery krawędzie są równoległe i równe.

Krawędzie OA_x , OA_y i OA_z tego równoległościanu, które leżą na osiach Ox , Oy i Oz układu, nazywamy współrzędnymi punktu A i oznaczamy takowe odpowiednio literami x , y i z . Każdemu punktowi tedy odpowiadają trzy współrzędne dodatne lub ujemne, stosownie do tego, czy takowe leżą na częściach dodatnich czy ujemnych osi układu. Jeżeli zestawimy po trzy współrzędne ze znakiem „+” i „—” natenczas otrzymamy ośm trójek, którym odpowiadają punkta leżące w ośmiu częściach przestrzeni, wyznaczonych trzema płaszczyznami rzutów π^1 , π^2 i π^3 :

x	+	—	+	—	+	—	+	—
y	+	+	—	—	—	—	+	+
z	+	+	+	+	—	—	—	—

10. Aby płaszczyzny rzutów π^1 , π^2 i π^3 sprowadzić do jednej płaszczyzny rysunku, obracamy płaszczyznę π^1 około osi Ox (rys. 126b) tak długo, dopóki część przednia tejże nie zejdzie się z częścią dolną płaszczyzny π^2 , następnie obracamy płaszczyznę π^3 około osi Oz tak, aby część przednia tejże zeszyła się z częścią płaszczyzny π^2 , rozciągającą się po lewej stronie osi Oz .

Po pierwszym obrocie schodzą się osi $+Oy$ i $-Oz$, tudzież $-Oy$ i $+Oz$ po drugim obrocie zaś schodzą się osi $+Oy$ i $-Ox$ tudzież $-Oy$ i $+Ox$.

Po sprowadzeniu płaszczyzn rzutów π^1 , π^2 i π^3 do jednej płaszczyzny rysunku, rzuty A' i A'' leżą na prostej prostopadłej do osi Ox ; rzuty A'' i A''' na prostej, prostopadłej do osi Oz , a odległość rzutu poziomego A' od osi Ox równa jest odległości rzutu bocznego A''' od osi Oz , co zresztą z równoległością OA , $A'A_2A'''$... bezpośrednio wynika.

Zagadnienie: Wyznaczyć rzuty punktu, którego współrzędne $x=+1$, $y=-2$, $z=-3$ są dane (rys. 127.).

Rozwiązanie: Odmierzmy na osiach Ox , Oy i Oz odcinki OB_x , OB_y i OB_z równe odpowiednio współrzędnym x , y , z , i wyprowadźmy, z punktów B_x , B_y i B_z proste, prostopadłe do osi Ox , Oy i Oz , to proste B_xB' i B_yB' , B_xB'' i B_zB'' , B_yB''' i B_zB''' przecinają się w rzutach B' , B'' , B''' punktu B , którego współrzędne x , y i z są dane.

11. Niech będą dane płaszczyzny rzutów π^1 i π^2 i prosta l ; przesunijmy przez tę prostą płaszczyzny π^1 i π^2 , odpowiednio prostopadłe do płaszczyzny poziomej i pionowej rzutów, to płaszczyzny π^1 i π^2 przecinają się podług prostej l' , która jest rzutem poziomym, a płaszczyzny π^1 i π^2 przecinają się podług prostej l'' , która jest rzutem pionowym prostej l . Rzuty l' i l'' są miejscem geometrycznym rzutów A' , B' ,... i A'' , B'' ,... punktów A , B ,... leżących na prostej l . A zatem:

Rzuty punktów leżących na prostej, znajdują się na odpowiednich rzutach tejże prostej i wzajemnie: jeżeli rzuty punktów leżą na odpowiednich rzutach prostej, natenczas punkta leżą na prostej.

Rzut pionowy i rzut poziomy wyznaczają wogóle prostą, jeżeli bowiem przez rzut poziomy przesuniemy płaszczyznę prostopadłą do π^1 , a przez rzut pionowy płaszczyznę prostopadłą do π^2 , to takowe przecinają się podług owej prostej. Wyjątek stanowi prosta m , prostopadła do osi rzutów x , której płaszczyzny rzucające schodzą się na jednej płaszczyźnie, a rzuty, poziomy i pionowy, m' i m'' , schodzą się na prostej prostopadłej do osi x .

Położenie takiej prostej jest wyznaczone, jeżeli dane są rzuty poziome i pionowe dwu punktów tejże, albo jeżeli dane są rzuty, poziomy, pionowy i boczny prostej.

Zagadnienie: Dane są rzuty, poziomy l' i pionowy l'' prostej l , wyznaczyć rzut boczny tejże (rys. 128.).

Rozwiązanie: Wyznamy rzuty A' i A'' tudzież B' i B'' dwu punktów A i B , leżących na prostej l i poprowadźmy przez A' i B' proste $A'A_2$ i $B'B_2$, prostopadłe do osi Oz , odmierzmy następnie na tych prostopadłych od punktów A_2 i B_2 odcinki A_2A''' i B_2B''' równe odpowiednio odległości rzutów poziomych A' i B' od osi x , to punkta A''' i B''' są rzutami bocznymi punktów A i B , a prosta $A'''B'''$ jest rzutem bocznym prostej l .

12. Jeżeli prosta l przecina się z osią x , natenczas rzuty tej prostej przecinają się w punkcie, leżącym na tejże osi (rys. 129.).

Rzut pionowy m'' prostej m , równoległej do płaszczyzny poziomej rzutów jest równoległy do osi x , albowiem płaszczyzna π^2_m , rzucająca pionowo prostą m , jest równoległa do płaszczyzny π^1 (rys. 130.).

Rzut poziomy n' prostej n , równoległej do płaszczyzny pionowej rzutów jest równoległy do osi x , (rys. 131.).

Rzuty p' i p'' prostej p , równoległej do osi rzutów są do tej osi równoległe, (rys. 132.).

Jeżeli prosta q jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów, natenczas rzut poziomy q' jest punktem, a rzut pionowy q'' jest prostą prostopadłą do osi x , (rys. 133.), płaszczyzna bowiem π^2_q , rzucająca pionowo prostą q , jest prostopadła do płaszczyzny poziomej π^1 i do płaszczyzny pionowej π^2 , jest tedy prostopadła do prostej x , podług której te płaszczyzny przecinają się.

Rzut pionowy s'' prostej s , prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów, jest punktem, a rzut poziomy s' jest prostą prostopadłą do osi (rys. 134.).

Dwie proste l i m , leżące na płaszczyźnie rysunku, do której sprowadzono płaszczyzny rzutów π^1 i π^2 , można uważać za rzuty prostej, z wyjątkiem, jeżeli te proste są prostopadłe do osi x i nie schodzą się na jednej prostej; w tym przypadku bowiem płaszczyzny, przesunięte przez proste l i m , prostopadłe do odpowiednich płaszczyzn rzutów, są równoległe.

13. Punkt, w którym prosta przebija płaszczyznę rzutów, nazywamy śladem prostej.

Punkta przebiecia prostych z płaszczyznami, poziomą, pionową i boczną rzutów, nazywamy odpowiednio śladami poziomymi, pionowymi i bocznymi prostych.

Zagadnienie 1.: Dane są rzuty l' , l'' i l''' prostej l , wyznaczyć ślady, poziomy, pionowy i boczny tej prostej.

Rozwiązanie: Rzut pionowy H'' śladu poziomego H , znajduje się w punkcie przecięcia się rzutu pionowego l'' z osią; punkt H bowiem leży na prostej l i na płaszczyźnie poziomej rzutów.

Jeżeli tedy wyprowadzimy z punktu H'' prostą, prostopadłą do osi x , natenczas w punkcie przecięcia się tejże z rzutem poziomym l' otrzymamy ślad poziomy H .

Punkt przecięcia się V' rzutu poziomego l' z osią x jest rzutem poziomym śladu pionowego V ; prowadząc tedy z punktu V' prostą, prostopadłą do osi x , otrzymamy w punkcie, w którym ta prostopadła przecina rzut l'' , ślad pionowy V prostej l .

Rzut pionowy K'' śladu bocznego prostej l , znajduje się w punkcie przecięcia się rzutu l'' z osią Oz , albowiem ślad K leży na prostej l i na płaszczyźnie bocznej π^3 ; w punkcie przecięcia się tedy rzutu l''' z prostą, wyprowadzoną z K'' prostopadłą do osi Oz , otrzymamy ślad boczny K .

Zagadnienie: Dane są ślady, poziomy i pionowy prostej l , wykreślić rzut poziomy i pionowy tejże a nadto wyznaczyć ślad boczny prostej l , nie kreśląc rzutu bocznego l''' .

Zagadnienie 2.: Wyznaczyć punkta przebiecia prostej $l(l', l'')$ z płaszczyznami π^1_x i π^2_x .

Rozwiązanie: Rzuty M'' i M' punktu, w którym prosta l przebija płaszczyznę π^1_x , są symetryczne względem osi x .

Jeżeli tedy poprowadzimy przez punkt przecięcia się P , rzutu l'' z osią x , prostą m , nachyloną do osi pod kątem, równym kątowi nachylenia pro-

stych l'' i x , natenczas punkt M' , w którym proste l' i m przecinają się, jest rzutem poziomym punktu przebicia prostej l z płaszczyzną π^1_x .

Rzuty zaś N' i N'' punktu, w którym prosta l przebija płaszczyznę π^2_x , schodzą się z punktem przecięcia się rzutów l' i l'' .

Zagadnienie: Wyznaczyć rzuty i ślady prostej przechodzącej przez punkta A_1 i A_2 , których współrzędne x_1, y_1, z_1 i x_2, y_2, z_2 są dane.

14. Jeżeli dwie proste l i m , przecinają się w punkcie A , natenczas rzuty poziome l' i m' oraz rzuty pionowe l'' i m'' przecinają się w punktach A' i A'' , leżących na prostej prostopadłej do osi x , (rys. 135.).

Rzuty poziome m' i n' , pionowe m'' i n'' i boczne m''' i n''' dwu prostych równoległych są równoległe, albowiem płaszczyzny rzucające te proste na płaszczyzny rzutów, poziomą, pionową i boczną są równoległe (rys. 136.).

Jeżeli dwie proste n i p są wchrowate, natenczas rzuty poziome n' i p' , tudzież rzuty pionowe n'' i p'' przecinają się w punktach M i N , które nie leżą na prostej prostopadłej do osi x (rys. 137.).

Zagadnienie: Wyznaczyć cień rzucony punktu $A(A', A'')$ na płaszczyzny rzutów, jeżeli źródło światła znajduje się w nieskończoności (rys. 138.).

Rozwiązanie: Kierunek promieni światła niech będzie wyznaczony prostą $s(s' \text{ i } s'')$. Przyjmujemy zwykle, że rzuty s' i s'' , są nachylone do osi x pod kątem 45° .

Poprowadźmy przez punkt A prostą l , równoległą do kierunku światła i wyznaczmy ślady, poziomy H i pionowy V prostej l , to te punkta są cieniami rzuconymi punktu A na płaszczyzny rzutów.

Cień H jest w danym przypadku cieniem rzeczywistym, leży bowiem na przedniej, a więc na widzialnej części płaszczyzny poziomej rzutów. Cień V zaś jest idealny, leży bowiem na dolnej, a więc na niewidzialnej części płaszczyzny pionowej rzutów.

15. Położenie płaszczyzny π względem płaszczyzn rzutów π^1, π^2, π^3 wyznaczamy zapomocą rzutów trzech punktów tejże, albo zapomocą rzutów dwu prostych, które leżą na płaszczyźnie π .

Najczęściej wyznaczamy płaszczyznę zapomocą śladów t. j. prostych, podług których płaszczyzna dana przecina się z płaszczyznami rzutów.

Proste π_h, π_v i π_k , podług których płaszczyzna π przecina się z płaszczyznami rzutów π^1, π^2 i π^3 , nazywamy odpowiednio śladem poziomym, pionowym i bocznym, (rys. 139a).

Ślady π_h i π_v, π_h i π_k, π_v i π_k przecinają się odpowiednio w punktach leżących na osiach Ox, Oy, Oz .

16. Stosownie do położenia płaszczyzny względem płaszczyzn rzutów, zajmują ślady tejże różne położenia względem osi.

Ślady π_h i π_v płaszczyzny π , nachylonej do płaszczyzn rzutów π^1 i π^2 są nachylone do osi x (rys. 139b).

Jeżeli płaszczyzna π^3 jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów π^1 , natenczas ślad pionowy π^3_v jest prostopadły do osi x , albowiem prosta π^3_v , podług której płaszczyzny π^3 i π^2 prostopadłe do płaszczyzny π^1 , przecinają się, jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów a więc i do osi x , (rys. 140.).

Ślad poziomy π^4_h płaszczyzny π^4 , prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów jest prostopadły do osi x , (rys. 141.).

Jeżeli płaszczyzna π^5 jest równoległa do płaszczyzny poziomej rzutów, natenczas ślad pionowy π^5_v jest równoległy do osi x , albowiem płaszczyzna π^2 przecina się z płaszczyznami równoległymi π^5 i π^1 podług prostych równoległych π^5_v i x (rys. 142.).

Ślad poziomy π^6_h płaszczyzny π , równoległej do płaszczyzny pionowej rzutów, jest równoległy do osi rzutów x , (rys. 143.).

Ślady, poziomy π^7_h i pionowy π^7_v płaszczyzny π^7 , równoległej do osi rzutów, są do tejże osi równoległe, albowiem płaszczyzna π^7 przecina się z osią w punkcie, leżącym w nieskończoności, przez który ślady π_h i π_v przechodzą (rys. 144.).

Jeżeli płaszczyzna π^8 przechodzi przez oś rzutów, natenczas ślady, poziomy i pionowy schodzą się z tą osią; położenie takiej płaszczyzny wyznaczamy zapomocą śladu bocznego π^8_k , który oczywiście przez początek układu O , płaszczyzn π^1, π^2 i π^3 przechodzi (rys. 145.).

Zagadnienie: Mając dany ślad poziomy π_h i ślad pionowy π_v płaszczyzny, wyznaczyć ślad boczny π_k tejże (rys. 139b).

Rozwiązanie: Wyznaczymy punkt przecięcia się P_2 śladu π_h z osią Oy i punkt przecięcia się P_3 śladu π_v z osią Oz , zakresłmy następnie z początku układu O , jako środka koło promieniem OP_2 i połączmy punkt P_3 z punktem P_4 , w którym to koło przecina oś Oy , to prosta P_3P_4 jest śladem bocznym π_k płaszczyzny π .

17. Jeżeli prosta l leży na płaszczyźnie π , natenczas ślad poziomy tejże H , leży na śladzie poziomym π_h , a ślad pionowy V leży na śladzie pionowym π_v płaszczyzny.

Aby tedy wyznaczyć rzuty prostej, leżącej na płaszczyźnie $\pi(\pi_h, \pi_v)$, obierzmy na śladzie poziomym π_h dowolny punkt H , (rys. 146.), a na śladzie pionowym dowolny punkt V i wyznaczmy rzuty H' i H'' tudzież V' i V'' , to proste l' i l'' , łączące punkta H' i V' tudzież H'' i V'' są rzutami prostej l , która leży na płaszczyźnie π .

Proste leżące na płaszczyźnie π , które są równoległe do śladu poziomego π_h , nazywamy tworzącymi poziomymi płaszczyzny π .

Rzut poziomy p' tworzącej poziomej p jest równoległy do śladu poziomego π_h płaszczyzny, a rzut pionowy p'' jest równoległy do osi x , albowiem prosta p jest równoległa do śladu π_h , a temsamem równoległa do płaszczyzny poziomej rzutów.

Proste, leżące na płaszczyźnie π , które są równoległe do śladu pionowego π_v , nazywamy tworzącymi pionowymi płaszczyzny π .

Rzut pionowy q'' tworzącej pionowej q , jest równoległy do śladu pionowego, a rzut poziomy q' jest równoległy do osi x .

Zagadnienie 1.: Wyznaczyć rzut pionowy A'' punktu A , leżącego na płaszczyźnie $\pi(\pi_h, \pi_v)$, jeżeli rzut poziomy tego punktu jest dany (rys. 146.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez A' dowolną prostą l' i uważajmy takową za rzut poziomy prostej l , leżącej na płaszczyźnie π , to punkt przecięcia się H prostej l' ze śladem poziomym π_h płaszczyzny π jest śladem poziomym prostej l , a punkt przecięcia się V' prostej l' z osią x jest rzutem poziomym śladu pionowego tej prostej. Jeżeli tedy wyznaczmy rzut pionowy l' prostej l i wyprowadzimy z punktu A' prostą, prostopadłą do osi x ,

natenczas w punkcie przecięcia się tej prostopadłej z rzutem l'' otrzymamy rzut pionowy A'' punktu A .

Zagadnienie 2.: Wyznaczyć rzuty trójkąta leżącego na płaszczyźnie $\pi(\pi_h, \pi_v)$, (rys. 147.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że dowolny trójkąt $A'B'C'$ jest rzutem poziomym trójkąta, leżącego na płaszczyźnie π , i wyznaczmy rzuty pionowe $A''B''C''$, w sposób wyłożony w poprzednim zagadnieniu, to trójkąt $A''B''C''$ jest rzutem pionowym trójkąta ABC , który leży na płaszczyźnie π .

Uwaga: Rzut poziomy i rzut pionowy wielokąta, leżącego na płaszczyźnie π , są wielokątami powinowatymi, kierunek powinowactwa jest prostopadły do osi rzutów x , a oś powinowactwa t jest prostą, na której schodzą się rzuty d' i d'' przekroju d płaszczyzn π i π^2_x .

18. Zagadnienie 1.: Wyznaczyć ślady płaszczyzn przesuniętych przez prostą $l(l', l'')$.

Rozwiązanie: Wyznamy ślad poziomy H i ślad pionowy V prostej l i poprowadzimy przez punkta H i V proste π^1_h i π^1_v , π^2_h i π^2_v ... to takowe są śladami płaszczyzn, przesuniętych przez prostą l .

Ślad poziomy płaszczyzny, przesuniętej przez prostą l , prostopadły do płaszczyzny poziomej rzutów, schodzi się z rzutem l' , a ślad pionowy jest prostopadły do osi rzutów x .

Zagadnienie 2.: Wyznaczyć ślady płaszczyzny przesuniętej przez dwie proste przecinające się $l(l', l'')$ i $m(m', m'')$, (rys. 148.).

Rozwiązanie: Wyznamy ślady poziome H_l i H_m , tudzież ślady pionowe V_l i V_m , to natenczas otrzymamy ślady π_h i π_v płaszczyzny przesuniętej przez proste l i m .

Zagadnienie 3.: Wyznaczyć ślady płaszczyzny przesuniętej przez punkt $A(A', A'')$ i przez prostą $l(l', l'')$.

Rozwiązanie: Poprowadzimy przez A' prostą m' , równoległą do l' , a przez A'' prostą m'' , równoległą do l'' , to m' i m'' są rzutami prostej, przesuniętej przez punkt A , równoległe do prostej l . Wyznamy następnie ślady H_l i V_l , tudzież H_m i V_m prostej l i m i połączmy H_l z H_m i V_l z V_m , to natenczas otrzymamy ślady płaszczyzny przesuniętej przez punkt A i przez prostą l .

19. Jeżeli dwie płaszczyzny π^1 i π^2 są równoległe, natenczas ślady poziome π^1_h i π^2_h , ślady pionowe π^1_v i π^2_v i ślady boczne π^1_k i π^2_k są równoległe.

Dwie płaszczyzny nierównoległe π^1 i π^2 przecinają się podług prostej d , której ślad poziomy H_d znajduje się w punkcie przecięcia się śladów poziomych π^1_h i π^2_h , a ślad pionowy V_d , w punkcie przecięcia się śladów pionowych π^1_v i π^2_v .

Zagadnienie 1.: Wyznaczyć prostą d , podług której płaszczyzna dowolna π , przecina się z płaszczyzną π^1 , równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów, (rys. 149.).

Rozwiązanie: Punkt przecięcia się V_d śladów π_v i π^1_v jest śladem pionowym prostej d , ślad poziomy tej prostej leży w nieskończoności na prostej π_h , albowiem ślad poziomy płaszczyzny π^1 schodzi się z prostą, leżącą w nieskończoności na płaszczyźnie poziomej rzutów.

Rzut poziomy tedy d' , przechodzi przez V'_d , równoległe do śladu π_h , a rzut pionowy d'' schodzi się ze śladem π^1_v .

Zagadnienie 2.: Wyznaczyć prostą d , podług której płaszczyzna π dowolna, przecina się z płaszczyzną π^1 , prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów.

Rozwiązanie: Rzut poziomy d' schodzi się ze śladem poziomym płaszczyzny π^1 , a rzut pionowy d'' łączy punkt przecięcia się V_d śladów π_v i π^1_v z rzutem pionowym H''_d punktu, w którym ślady poziome przecinają się.

Zagadnienie 3.: Wyznaczyć prostą d , podług której płaszczyzny π i π^1 , równoległe do osi rzutów x przecinają się (rys. 150.).

Rozwiązanie: Wyznamy ślady boczne π_k i π^1_k płaszczyzn danych, to punkt przecięcia się K_d tychże jest śladem bocznym prostej d . Rzut pionowy K''_d leży na osi Oz , a rzut poziomy K'_d leży na osi Oy . Jeżeli tedy poprowadzimy przez punkta K'_d i K''_d proste d' i d'' , równoległe do osi Ox , natenczas otrzymamy rzuty prostej, podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się.

Zagadnienie 4.: Wyznaczyć proste, podług których płaszczyzny π^1_x i π^2_x przecinają się z płaszczyzną dowolną π .

Rozwiązanie: Poprowadzimy na płaszczyźnie π dowolną prostą $m(m', m'')$ i wyznaczmy w sposób wyłożony w (art. 13. zag. 2.) punkta $M(M', M'')$ i $N(N', N'')$, w których ta prosta przecina się z płaszczyznami π^1_x i π^2_x , to proste łączące punkta M i N z punktem przecięcia się P śladów π_h i π_v są prostymi, podług których płaszczyzny π^1_x i π^2_x przecinają się z płaszczyzną π .

Zagadnienie 5.: Dane są dwie płaszczyzny π i π^1 , których ślady pionowe nie przecinają się w obrębie rysunku, wyznaczyć prostą d , podług której te płaszczyzny przecinają się, (rys. 151.).

Rozwiązanie 1.: Poprowadzimy płaszczyznę π^2 , równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów i wyznaczmy proste d_1 i d_2 , podług których płaszczyzna π^2 przecina się z płaszczyznami π i π^1 , a nadto punkt przecięcia się D prostych d_1 i d_2 , to prosta DH , łącząca punkt D z punktem przecięcia się H śladów poziomych π_h i π^1_h , jest przekrojem płaszczyzn π i π^1 .

Rozwiązanie 2.: (rys. 152.). Poprowadzimy płaszczyznę π^3 , równoległą do płaszczyzny π^1 , której ślady przecinają się ze śladami odpowiednimi płaszczyzny π w obrębie rysunku. Wyznamy następnie prostą d_1 podług której płaszczyzny π i π^3 przecinają się, to prosta d , poprowadzona przez punkt przecięcia się H śladów π_h i π^1_h , równoległe do prostej d_1 jest przekrojem płaszczyzn π i π^1 .

Zagadnienie: Wyznaczyć prostą, podług której dwie płaszczyzny przecinają się, jeżeli ani ślady poziome, ani ślady pionowe nie przecinają się w obrębie rysunku.

Zagadnienie: Dane są dwie płaszczyzny, których ślady przecinają się w tym samym punkcie na osi rzutów, wyznaczyć prostą, podług której te płaszczyzny przecinają się.

Zagadnienie: Wyznaczyć punkt przecięcia się trzech płaszczyzn, których ślady są dane.

20. Prosta l , równoległa do płaszczyzny π , jest równoległa do nieskończenie wielu prostych, leżących na tej płaszczyźnie.

Aby tedy przez punkt $A(A', A'')$ przesunąć prostą, równoległą do płaszczyzny $\pi(\pi_h, \pi_v)$, poprowadźmy na płaszczyźnie π dowolną prostą $m(m', m'')$, a przez punkt A prostą $l(l', l'')$, równoległą do m , to prosta l , jest równoległą do płaszczyzny π .

Zagadnienie 1.: Przez punkt $A(A', A'')$ przesunąć płaszczyznę, równoległą do płaszczyzny $\pi(\pi_h, \pi_v)$ (rys. 153).

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez punkt A prostą, równoległą do płaszczyzny π n. p. prostą $l(l', l'')$, równoległą do śladu poziomego π_h i wyznaczmy ślad pionowy V_l tejże, poprowadźmy następnie przez punkt V_l prostą π'_v , równoległą do π_v , to ta prosta jest śladem pionowym płaszczyzny π' , przesuniętej przez punkt A , równoległe do płaszczyzny π ; ślad poziomy π'_h przechodzi przez punkt przecięcia się P prostych π'_v i x równoległe do śladu poziomego π_h .

Zagadnienie 2.: Wyznaczyć cień rzucony na płaszczyznę rzutów odcinka AB , jeżeli źródłem światła jest punkt leżący w nieskończoności na prostej s (rys. 154).

Rozwiązanie: Cień rzucony prostej na płaszczyznę rzutów schodzi się ze śladami płaszczyzny, przesuniętej przez tę prostą, równoległe do kierunku światła.

Poprowadźmy tedy przez punkta A i B proste s_1 i s_2 , równoległe do prostej s i wyznaczmy ślady π_h i π_v płaszczyzny, przesuniętej przez te proste, to takowe są cieniami rzuconymi prostej AB na płaszczyznę rzutów. Cień odcinka AB ograniczony jest cieniami A_1 i B_2 punktów A i B . Cień A_1 punktu A na płaszczyźnie poziomej rzutów jest na rysunku rzeczywisty, cień zaś B_1 jest idealny; odcinek tedy AB rzuca cień częścią na płaszczyznę poziomą, częścią na płaszczyznę pionową rzutów. Jeżeli tedy wyznaczmy cień rzeczywisty B_2 punktu B na płaszczyźnie pionowej rzutów i połączymy takowy z punktem $C_{1,2}$, w którym prosta A_1B_1 przecina się z osią x , to natenczas linia $A_1C_{1,2}B_2$ jest cieniem odcinka AB na obie płaszczyzny rzutów.

Punkt $C_{1,2}$ jest cieniem punktu C , odcinka AB na oś rzutów, który to punkt otrzymamy z przecięcia się prostej AB z prostą poprowadzoną przez punkt $C_{1,2}$ równoległe do kierunku światła.

Zagadnienie: Wyznaczyć cień rzucony wielokąta na płaszczyznę rzutów.

Zagadnienie 3.: Dane są dwie proste wchrowate l i m , wyznaczyć cień rzucony jednej prostej na drugą (rys. 155).

Rozwiązanie: Wyznaczmy cienie rzucone l i m prostych l i m na płaszczyznę poziomą rzutów, a nadto punkt przecięcia się K prostych l i m ; wyprowadźmy następnie z punktu K prostą n , równoległą do kierunku światła, to takowa przetnie się z prostymi l i m w punktach M i N . Punkt M jest cieniem rzuconym punktu N , leżącego na prostej m , na prostą l .

21. Jeżeli prosta l jest prostopadła do płaszczyzny π , natenczas rzuty tej prostej są prostopadłe do odpowiednich śladów płaszczyzny π . Jakoż płaszczyzna π'_1 , przesunięta przez prostą l , prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów, jest prostopadła do śladu poziomego π_h , prosta tedy l' , podług której płaszczyzna π'_1 , przecina się z płaszczyzną poziomą rzutów, jest prostopadła do śladu poziomego π_h płaszczyzny π i t. d.

Rzuty dwu prostych prostopadłych nie są wogóle prostopadłe, jeżeli jednak jedna z tych prostych jest równoległa do płaszczyzny rzutów, natenczas rzuty prostych na tę płaszczyznę są prostopadłe.

Zagadnienie 1.: Przez prostą $l(l', l'')$ przesunąć płaszczyznę, prostopadłą do płaszczyzny $\pi(\pi_h, \pi_v)$ (rys. 156).

Rozwiązanie: Obierzmy na prostej l dowolny punkt $A(A', A'')$ i poprowadźmy przez rzuty A' i A'' proste p' i p'' odpowiednio prostopadłe do śladów π_h i π_v to p' i p'' są rzutami prostej p , prostopadłej do płaszczyzny π .

Jeżeli tedy przesuniemy przez proste l i p płaszczyznę π' , to takowa będzie prostopadłą do płaszczyzny π .

Zagadnienie 2.: Wyznaczyć ślady płaszczyzny przesuniętej przez punkt $A(A', A'')$ prostopadłe do prostej $l(l', l'')$ (rys. 157).

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez rzut A' prostą m' , prostopadłą do l' , a przez rzut pionowy A'' prostą m'' , równoległą do osi x , to m' i m'' są rzutami tworzącej poziomej, płaszczyzny π , przesuniętej przez punkt A prostopadłe do prostej l . Jeżeli tedy wyznaczmy ślad pionowy V_m prostej m i poprowadzimy przez ten prostą, prostopadłą do rzutu l'' natenczas otrzymamy ślad pionowy π_v płaszczyzny π ; ślad poziomy π_h jest prostopadły do rzutu poziomego l' .

Zagadnienie: Przez dany punkt poprowadzić prostą, prostopadłą do płaszczyzny, wyznaczonej zapomocą dwu prostych, przecinających się, nie wyznaczając poprzednio śladów tej płaszczyzny.

22. Prosta l , prostopadła lub nachylona do płaszczyzny π , przebija takową w punkcie, który otrzymamy, przesuwając przez prostą l płaszczyznę dowolną π^1 i wyznaczając punkt przecięcia się prostej l z prostą d , podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się.

Zagadnienie 1.: Wyznaczyć punkt przebiecia prostej $l(l', l'')$ z płaszczyzną $\pi(\pi_h, \pi_v)$ (rys. 158).

Rozwiązanie: Przesuńmy przez prostą l , płaszczyznę π^1 , prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów i wyznaczmy prostą $d(d', d'')$, podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się, to punkt przecięcia się $D(D', D'')$ jest punktem przebiecia prostej l z płaszczyzną π .

Zagadnienie 2.: Wyznaczyć punkt przebiecia prostej l , z płaszczyzną, przesuniętą przez proste, równoległe m i n nie kreśląc śladów tej płaszczyzny (rys. 159.).

Rozwiązanie: Przesuńmy przez prostą l płaszczyznę π , prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów i wyznaczmy punkta $M(M', M'')$ i $N(N', N'')$, w których proste $m(m', m'')$ i $n(n', n'')$ przebijają płaszczyznę π , to prosta MN przecina się z prostą l w punkcie przebiecia D prostej l z płaszczyzną, przesuniętą przez proste m i n .

Zagadnienie: Wyznaczyć prostą, podług której płaszczyzny, przesunięte przez proste, równoległe l i m , tudzież n i p , przecinają się, nie wyznaczając poprzednio śladów tych płaszczyzn.

0 obrotach punktów i płaszczyzn.

23. Jeżeli punkt A obraca się około prostej l natenczas opisuje koło k , leżące na płaszczyźnie π prostopadłej do prostej l . Środek tego koła znajduje się w punkcie przebiecia prostej l z płaszczyzną π .

Prostą l nazywamy osią, punkt O środkiem a odcinek OA nazywamy promieniem obrotu punktu A .

Jeżeli oś obrotu l jest prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, natenczas rzut poziomy k' koła k , które opisuje punkt obracający się około prostej l , jest kołem przystającym do k , a rzut pionowy k'' jest odcinkiem prostej równoległej do osi rzutów x , — jeżeli zaś oś obrotu l jest prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów, natenczas rzut pionowy k'' koła k , jest kołem przystającym do k a rzut poziomy k' jest odcinkiem prostej równoległej do osi x .

Zagadnienie: Wyznaczyć prawdziwą wielkość odcinka, którego rzuty $A'B'$ i $A''B''$ są dane (rys. 160.).

Rozwiązanie: Obróćmy odcinek AB około prostej l przesuniętej przez punkt A prostopadłe do płaszczyzny poziomej rzutów tak, aby prosta AB była równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów, to rzut pionowy $A''B''$ będzie równy odcinkowi AB .

Podczas tego obrotu opisuje rzut pionowy B'' punktu B prostą k'' równoległą do osi x , a rzut poziomy tego punktu opisuje koło k' zakreślone z punktu A' promieniem $A'B'$.

Zagadnienie: Wyznaczyć prawdziwą wielkość wielokąta leżącego na płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów.

24. Jeżeli oś obrotu l punktu A jest równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów, natenczas ślad poziomy π_h płaszczyzny koła k , opisanego punktem A obracającym się około prostej l , jest prostopadłym do rzutu poziomego l' osi obrotu a ślad pionowy π_v jest prostopadłym do osi x . Promień obrotu równym jest przeciwprostokątnej trójkąta, którego jedna przyprostokątna równą jest odległości rzutu poziomego A' od prostej l' , a którego druga przyprostokątna równą jest odległości rzutu pionowego A'' od prostej l'' .

Zagadnienie 1.: Dana jest prosta l na płaszczyźnie poziomej rzutów i punkt dowolny $A(A'A'')$, obrócić ten punkt około prostej l w ten sposób, aby po obrocie leżał na płaszczyźnie poziomej rzutów (rys. 161.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez punkt A płaszczyznę $\pi(\pi_h, \pi_v)$ prostopadłą do osi obrotu l i zakreślmy z punktu O w którym ślad π_h przecina się z prostą l koło (k) promieniem równym przeciwprostokątnej trójkąta, którego jedna przyprostokątna równą jest odcinkowi OA' a którego druga przyprostokątna równą jest odległości rzutu pionowego A'' od osi x , to natenczas punkt A zejdzie się po obrocie z jednym z punktów (A_1) lub (A_2) w których ślad poziomy π_h koła (k) przecina, stosownie do tego czy punkt A około osi l w jedną lub w drugą stronę obracamy.

Zagadnienie 2.: Obrócić punkt $A(A', A'')$ około prostej $l(l', l'')$ równoległej do płaszczyzny poziomej rzutów tak, aby po obrocie leżał na płaszczyźnie przesuniętej przez prostą l równoległe do płaszczyzny poziomej rzutów (rys. 162.).

Rozwiązanie: Przesuńmy przez punkt A płaszczyznę $\pi(\pi_h, \pi_v)$ prostopadłą do prostej l , i wyznaczmy punkt $O(O', O'')$ w którym ta prosta przebija płaszczyznę π , zakreślmy następnie z punktu O' łuk koła promieniem równym przeciwprostokątnej trójkąta, którego jedna przyprostokątna równą jest odcinkowi $O'A'$, a którego druga przyprostokątna równą jest odległości rzutu pionowego A'' od prostej l'' , to punkta przecięcia się A'_1 i A'_2

owego łuku ze śladem poziomym płaszczyzny π , są rzutami poziomymi punktów, z którymi punkt A po obrocie się schodzi; rzuty pionowe A''_1 i A''_2 leżą na prostej l'' .

Zagadnienie 3.: Na płaszczyźnie poziomej rzutów dana jest prosta l , obrócić punkt (A_1) leżący na tej samej płaszczyźnie o kąt α (rys. 161.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez punkt (A_1) płaszczyznę π , prostopadłą do osi obrotu l , i zakreślmy z punktu O , w którym prosta l przecina się ze śladem poziomym π_h koła (k) promieniem, równym odcinkowi $O(A_1)$, poprowadźmy następnie przez punkt O prostą $O(A)$, nachyloną do śladu π_h pod kątem α , a przez punkt (A) prostą prostopadłą do tegoż śladu, to ta prostopadła przecina się ze śladem π_h w rzucie poziomym A' punktu A , z którym punkt (A_1) po obrocie się schodzi; rzut pionowy A'' leży na prostopadłej, wyprowadzonej z punktu A' do osi x , w odległości od tej osi, równej odcinkowi $(A)A'$.

Zagadnienie: Obrócić punkt około prostej równoległej do płaszczyzny pionowej rzutów w ten sposób, aby po obrocie leżał na płaszczyźnie danej.

25. Obrót płaszczyzny $\pi(\pi_h, \pi_v)$ około śladu poziomego π_h , wykonany w ten sposób, że po obrocie płaszczyzna π schodzi się z płaszczyzną poziomą rzutów, nazywamy kładem płaszczyzny π na płaszczyznę poziomą rzutów. — Przez kład płaszczyzny na płaszczyznę pionową rzutów rozumiemy podobny obrót tej płaszczyzny około śladu pionowego.

Zagadnienie 1.: Wyznaczyć prawdziwą wielkość trójkąta ABC , leżącego na płaszczyźnie $\pi(\pi_h, \pi_v)$ (rys. 163.).

Rozwiązanie: Celem wyznaczenia prawdziwej wielkości utworu leżącego na płaszczyźnie, należy wykonać kład tej płaszczyzny na jedną z płaszczyzn rzutów.

Obróćmy tedy punkt A około śladu π_h w ten sposób, aby po obrocie leżał na płaszczyźnie poziomej rzutów i połączmy punkt (A) ze śladem poziomym H prostej AB , to prosta (A) H jest kładem prostej AB na płaszczyznę poziomą rzutów, punkt H bowiem jako leżący na śladzie poziomym płaszczyzny π podczas obrotu położenia swego nie zmienia. Kład (B) zatem punktu B znajduje się w punkcie przecięcia się prostej (A) H z prostą wyprowadzoną z rzutu poziomego B' prostopadłe do śladu π_h .

Połączmy następnie punkt (B) ze śladem poziomym H_1 prostej BC to prosta (B) H_1 jest kładem prostej BC ; jeżeli tedy wyznaczmy punkt (C) w którym prosta (B) H_1 przecina się z prostą wyprowadzoną z punktu C' prostopadłe do śladu poziomego π_h , natenczas otrzymamy kład punktu C . Trójkąt (A)(B)(C) jest przystający do trójkąta ABC .

U w a g a. Rzut poziomy $A'B'C'$... i kład na płaszczyznę poziomą rzutów (A), (B), (C)... układu płaskiego A, B, C ... są układami środkowo powinowatymi; ślad poziomy płaszczyzny układu ABC ... jest osią powinowactwa; środek powinowactwa leży w nieskończoności w kierunku prostopadłym do śladu poziomego płaszczyzny A, B, C ..., proste bowiem $A(A)$, $B(B)$... są prostopadłe do śladu poziomego, a proste AB i (A)(B), AC i (A)(C)... przecinają się w punktach leżących na tym śladzie.

Zagadnienie 2.: Dany jest kład (A)(B)(C) trójkąta ABC leżącego na płaszczyźnie $\pi(\pi_h, \pi_v)$, wyznaczyć rzut poziomy i rzut pionowy tegoż (rys. 164.).

Rozwiązanie 1.: Wyznamy kład (X) dowolnego punktu $X(X'X'')$, leżącego na płaszczyźnie π , i połączmy punkt (X) z punktami (A) , (B) , (C) , to proste $(X)(A)$, $(X)(B)$ i $(X)(C)$ przecinają się ze śladem poziomym π_h w punktach H_1 , H_2 i H_3 które są śladami poziomymi prostych XA , XB i XC , leżących na płaszczyźnie, rzuty poziome zatem tych prostych łączą odpowiednio punkta H_1 , H_2 i H_3 z punktem X' a rzuty pionowe tychże łączą punkt X'' z rzutami pionowymi H''_1 , H''_2 i H''_3 , leżącymi na osi x . Jeżeli tedy wyprowadzimy z kładów (A) , (B) i (C) proste prostopadłe do śladu π_h , natenczas w punktach przecięcia się A' , B' , C' tychże z prostymi H_1X' , H_2X' i H_3X' otrzymamy rzuty poziome punktów A , B i C . Rzuty pionowe tych punktów leżą odpowiednio na prostych H''_1X'' , H''_2X'' i H''_3X'' .

Rozwiązanie 2.: (rys. 165.). Wyznamy kład (V) dowolnego punktu V , leżącego na śladzie pionowym π_v płaszczyzny i połączmy takowy z punktem przecięcia się P śladów π_h i π_v to prosta $P(V)$ jest kładem śladu pionowego. Wyznamy następnie punkta H_1 i (V_1) , H_2 i (V_2) w których proste $(A)(B)$ i $(A)(C)$ przecinają się z prostymi π_h i (π_v) , to punkta H_1 i H_2 są śladami poziomymi a punkta (V_1) i (V_2) są kładami śladów pionowych prostych AB i AC .

Rzuty poziome V'_1 i V'_2 znajdują się w punktach przecięcia się osi x z prostymi wyprowadzonymi z kładów (V_1) i (V_2) prostopadłe do śladu poziomego płaszczyzny π , proste tedy $H_1V'_1$ i $H_2V'_2$ są rzutami poziomymi prostych AB i AC , a punkt przecięcia się tychże jest rzutem poziomym punktu A . Jeżeli tedy wyprowadzimy z kładów (B) i (C) proste prostopadłe do śladu π_h , natenczas w punktach przecięcia się tychże z prostymi H_1V_1 i H_2V_2 otrzymamy rzuty poziome B' i C' punktów B i C .

Zagadnienie 3.: Wyznamy prawdziwą wielkość odcinka, którego rzuty $A'B'$ i $A''B''$ są dane (rys. 166.).

Rozwiązanie: Wykonajmy kład trapezu $ABB'A'$ około rzutu $A'B'$ na płaszczyznę poziomą rzutów. Boki AA' i BB' są prostopadłe do prostej $A'B'$ i odpowiednio równe odległościom rzutów pionowych A'' i B'' od osi x . Jeżeli tedy wyprowadzimy w punktach A' i B' prostopadłe do prostej $A'B'$ i odmierzmy na tych prostopadłych odcinki $A'(A)$ i $B'(B)$ odpowiednio równe odległościom rzutów A'' i B'' od osi x , natenczas odcinek, zawarty między punktami (A) i (B) równy jest odcinkowi AB .

Zagadnienie 4.: Wyznamy odległość punktu $A(A', A'')$ od płaszczyzny $\pi(\pi_h, \pi_v)$.

Rozwiązanie 1.: (rys. 167.). Przesuńmy przez punkt A , prostą $p(p', p'')$, prostopadłą do płaszczyzny π , i wyznacmy punkt $D(D', D'')$, w którym ta prostopadła przebija płaszczyznę π , to odcinek AD równy jest odległości punktu A od płaszczyzny π .

Rozwiązanie 2.: (rys. 168.). Poprowadźmy przez punkt A płaszczyznę $\pi^1(\pi^1_h, \pi^1_v)$, prostopadłą do śladu poziomego π_h płaszczyzny π i wyznacmy prostą $d(d', d'')$, podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się, wykonajmy następnie kład płaszczyzny π^1 na płaszczyznę poziomą rzutów i wyprowadźmy z kładu (A) punktu A prostą prostopadłą do kładu (d) prostej d , to odcinek tej prostopadłej, zawarty między punktem (A) i prostą (d) , równy jest odległości punktu A od płaszczyzny π .

Zagadnienie 5.: Wyznamy odległość dwu płaszczyzn równoległych π i π^1 .

Rozwiązanie: Poprowadźmy płaszczyznę π^2 prostopadłą do śladów poziomych π_h i π^1_h i wyznacmy proste $d(d', d'')$ i $d_1(d'_1, d''_1)$, podług których płaszczyzna π^2 przecina się z płaszczyznami π i π^1 , wykonajmy następnie kład płaszczyzny π^2 na płaszczyznę poziomą rzutów, to odległość kładów (d) i (d_1) prostych d i d_1 równa jest odległości płaszczyzn danych.

Zagadnienie: Wyznamy ślady płaszczyzn, których odległość od płaszczyzny $\pi(\pi_h, \pi_v)$ równa jest danemu odcinkowi.

Zagadnienie 6.: Wyznamy odległość punktu $A(A', A'')$ od prostej $l(l', l'')$ (rys. 169.).

Rozwiązanie: Przesuńmy przez punkt A płaszczyznę $\pi(\pi_h, \pi_v)$, prostopadłą do prostej l i wyznacmy punkt $D(D', D'')$, w którym prosta l przebija płaszczyznę π , to odcinek, zawarty między punktami A i D , równy jest odległości punktu A od prostej l .

Zagadnienie: Wyznamy odległość punktu $A(A', A'')$ od osi rzutów x .

Zagadnienie 7.: Wyznamy najkrótszą odległość dwu prostych wchrowatych $l(l', l'')$ i $m(m', m'')$ (rys. 170.).

Rozwiązanie: Przesuńmy przez prostą l płaszczyznę π^1 , równoległą do prostej m , a przez prostą m płaszczyznę π^2 , prostopadłą do płaszczyzny π^1 , i wyznacmy punkt L , w którym prosta l przebija płaszczyznę π^2 ; wyprowadźmy następnie z punktu L prostą p , prostopadłą do płaszczyzny π^1 , to takowa przecina się z prostą m w punkcie M ; odcinek LM jest najkrótszą odległością prostych l i m .

Zagadnienie: Wyznamy najkrótszą odległość prostej $l(l', l'')$ od osi rzutów x .

Zagadnienie 8.: Dane są dwie proste wchrowate l i m a nadto płaszczyzna $\pi(\pi_h, \pi_v)$ i odcinek AB , umieścić między prostymi l i m odcinek AB tak, aby prosta AB była równoległa do płaszczyzny π .

Rozwiązanie: Przesuńmy przez prostą l płaszczyznę, równoległą do prostej m , i wyznacmy prostą $d(d', d'')$, podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się, wyznacmy następnie punkt M , w którym prosta m przebija płaszczyznę π , i zakresłmy z tego punktu na płaszczyźnie π koło k promieniem, równym odcinkowi AB , to prosta d przecina się z kołem k w punktach P i Q . Poprowadźmy dalej przez punkta P i Q proste m_1 i m_2 , równoległe do prostej m , a przez punkta przecięcia się tychże R i S z prostą l , proste RU i SV , równoległe do promieni MP i MQ koła k , to takowe przecinają się z prostą m w punktach U i V ; odcinki tedy RU i SV są równe odcinkowi AB , a proste RU i SV są równoległe do płaszczyzny π .

26. Zagadnienie: Wyznamy kąty, zawarte między prostymi $l(l', l'')$ i $m(m', m'')$, które się przecinają w punkcie $A(A', A'')$ (rys. 171.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy płaszczyznę π , równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów i wyznacmy punkta $L(L', L'')$ i $M(M', M'')$, w których proste l i m przebijają płaszczyznę π , obróćmy następnie punkt A około prostej LM tak, aby się zeszedł z punktem $A_1(A'_1, A''_1)$, leżącym na płaszczyźnie π , i połączmy rzut poziomy A'_1 z rzutami L' i M' , to kąty, zawarte między prostymi A'_1L' i A'_1M' równe są kątom, zawartym między prostymi l i m .

Zagadnienie: Wyznamy kąty, zawarte między prostą $l(l', l'')$ i osią rzutów x .

Zagadnienie: Wyznaczyć rzuty prostych, dzielących na dwie równe części kąty, zawarte między dwiema prostymi.

Zagadnienie: Dana jest prosta $l(l', l'')$ a nadto rzut poziomy m' prostej, która przecina się z prostą l w punkcie A i tworzy z nią kąt α ; wyznaczyć rzut pionowy m'' (rys. 172.).

Rozwiązanie: Proste nachylone do prostej l pod kątem α tworzą stożek obrotowy σ , którego osią jest prosta l .

Poprowadźmy tedy płaszczyznę π , prostopadłą do prostej l i wyznaczmy punkt L , w którym ta prosta przebija płaszczyznę π ; wyznaczmy następnie prawdziwą wielkość A_1L_1 odcinka AL i wykreślmy trójkąt prostokątny, którego jedna przyprostokątna równa jest odcinkowi A_1L_1 , a którego jeden kąt ostry równy jest α , to druga przyprostokątna L_1M_1 równa jest promieniowi kierownicy k stożka σ , leżącej na płaszczyźnie π .

Jeżeli tedy wyznaczmy punkta przecięcia się P i Q koła k z prostą d , podług której płaszczyzna π przecina się z płaszczyzną przesuniętą przez m' , prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, i połączymy te punkta z punktem A , natenczas otrzymamy proste AP i AQ , które czynią zadość warunkom zagadnienia.

Zagadnienie 3.: Wyznaczyć kąt nachylenia prostej $l(l', l'')$ do płaszczyzny $\pi(\pi_h, \pi_v)$ (rys. 173.).

Rozwiązanie: Kąt nachylenia prostej l do płaszczyzny π jest dopełnieniem do 90° kąta, zawartego między prostą l i prostą prostopadłą do płaszczyzny π .

Poprowadźmy tedy przez dowolny punkt A , leżący na prostej l , prostą $p(p', p'')$, prostopadłą do płaszczyzny π ; wyznaczmy następnie kąt α , zawarty między prostymi l i p , to kąt $(90-\alpha)$ równy jest kątowi nachylenia prostej l do płaszczyzny π .

Zagadnienie 4.: Przez punkt $A(A', A'')$ przesunąć proste, nachylone do płaszczyzny $\pi(\pi_h, \pi_v)$ pod kątem α (rys. 174.).

Rozwiązanie: Proste, nachylone do płaszczyzny π pod kątem α , są tworzącymi stożka obrotowego σ , którego osią jest prostopadła do płaszczyzny π .

Wyprowadźmy tedy z punktu A prostą $p(p', p'')$ prostopadłą do płaszczyzny π i wyznaczmy punkt $D(D', D'')$, w którym ta prostopadła przebija płaszczyznę π , a nadto prawdziwą wielkość A_1D_1 odcinka AD ; wykonajmy następnie kład płaszczyzny π na płaszczyznę poziomą rzutów i zakreślmy z kładu (D) punktu D koło (k) promieniem równym przyprostokątnej D_1B_1 trójkąta, którego jedna przyprostokątna równa jest odcinkowi A_1D_1 , a którego kąt ostry przyległy do boku D_1B_1 równy jest kątowi α , to koło (k) jest kładem kierownicy stożka σ , leżącej na płaszczyźnie π . Jeżeli tedy sprowadzimy płaszczyznę π do położenia pierwotnego i połączymy punkt $A(A', A'')$ z punktami $X(X', X'')$, $Y(Y', Y'')$... koła k natenczas otrzymamy proste, nachylone do płaszczyzny π pod kątem α .

Zagadnienie 5.: Przez punkt $A(A', A'')$ przesunąć prostą, nachyloną do płaszczyzny poziomej rzutów pod kątem α , a do płaszczyzny pionowej rzutów pod kątem β .

Rozwiązanie: Suma kątów nachylenia prostej do dwu płaszczyzn prostopadłych jest jak wiadomo równa lub mniejsza niż 90° .

Poprowadźmy płaszczyznę π^1 , równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów, w odległości od punktu A , równej odcinkowi $m \cdot \cos \alpha$; poprowadźmy również płaszczyznę π^2 , równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów, w odległości od punktu A , równej odcinkowi $m \cdot \cos \beta$, gdzie „ m ” oznacza dowolny odcinek, i wyznaczmy spodki D_1 i D_2 prostopadłych, wyprowadzonych z punktu A do płaszczyzn π^1 i π^2 a nadto prostą d , podług której te płaszczyzny przecinają się; zakreślmy następnie z punktu D_1 koło k'_1 promieniem $m \cdot \sin \alpha$, a z punktu D_2 koło k'_2 promieniem $m \cdot \sin \beta$, to te koła przecinają się w punktach M i N , leżących na prostej d , albowiem leżą na kuli, zakreślonej ze środka A promieniem m . Proste A, M i A, N są nachylone do płaszczyzny poziomej rzutów pod kątem α , a do płaszczyzny pionowej rzutów pod kątem β .

Zagadnienie: Dane są dwie płaszczyzny dowolne i punkt, wyznaczyć proste, nachylone do jednej płaszczyzny pod kątem α , a do drugiej pod kątem β .

Zagadnienie: Przez prostą l przesunąć płaszczyznę nachyloną do prostej m pod kątem α .

Zagadnienie 6.: Wyznaczyć kąty nachylenia dwu płaszczyzn $\pi(\pi_h, \pi_v)$ i $\pi^1(\pi^1_h, \pi^1_v)$ (rys. 175.).

Rozwiązanie 1.: Wyznaczmy prostą $d(d', d'')$, podług której dane płaszczyzny przecinają się i poprowadźmy płaszczyznę $\pi^2(\pi^2_h, \pi^2_v)$, prostopadłą do prostej d , wyznaczmy następnie proste m i n , podług których płaszczyzna π^2 przecina się z płaszczyznami π i π^1 , to kąty zawarte między temi prostymi są równe kątowi nachylenia płaszczyzn π i π^1 . — Proste m i n otrzymamy w sposób najprostszy w razie, jeżeli nie wszystkie odpowiednie ślady płaszczyzn π, π^1 i π^2 przecinają się w obrębie rysunku, wyznaczając punkt D w którym prosta d przecina się z płaszczyzną π^2 i łącząc takowy z punktami przecięcia się śladów płaszczyzny π^2 i π^1 , które leżą w obrębie rysunku. Prawdziwą wielkość tych kątów otrzymamy, wykonując kład płaszczyzny π^2 na płaszczyznę poziomą lub pionową rzutów.

Rozwiązanie 2.: Wyprowadźmy z dowolnego punktu $A(A', A'')$ proste $p(p', p'')$ i $p_1(p'_1, p''_1)$, odpowiednio prostopadłe do płaszczyzn π i π^1 , i wyznaczmy kąty, zawarte między temi prostymi, to takowe są równe kątowi nachylenia płaszczyzn π i π^1 .

Zagadnienie 7.: Przez punkt $A(A', A'')$ przesunąć płaszczyznę nachyloną do płaszczyzny poziomej rzutów pod kątem α , a do płaszczyzny pionowej rzutów pod kątem β .

Rozwiązanie: Suma kątów nachylenia płaszczyzny dowolnej do dwu płaszczyzn prostopadłych, jest równa lub większa niż 90° .

Wyznaczmy tedy proste l i m , nachylone do płaszczyzny poziomej rzutów pod kątem $(90-\alpha)$, a do płaszczyzny pionowej rzutów pod kątem $(90-\beta)$ i przesunijmy przez punkt A , płaszczyzny π^1 i π^2 , prostopadłe do prostych l i m , to takowe są nachylone do płaszczyzny poziomej rzutów pod kątem α , a do płaszczyzny pionowej pod kątem β .

Zagadnienie: Przesunąć przez prostą l płaszczyznę nachyloną do dwu płaszczyzn danych pod równymi kątami.

O zmianie płaszczyzn rzutowych.

27. Częstość zdarza się, że rozwiązanie pewnego zagadnienia nie nastręcza w zasadzie żadnych trudności, natomiast przeprowadzenie odnośnych konstrukcji połączone jest z przeszkodami rysunkowymi, które powodują niedokładności wyników. Przyczyna tego leży wyłącznie w nieodpowiednich położeniach punktów, prostych i płaszczyzn względem płaszczyzn rzutów. Aby tedy owe niedogodności konstrukcyjne usunąć, należy zmienić jedną albo dwie płaszczyzny rzutów.

Jeżeli zmienimy płaszczyznę poziomą rzutów w ten sposób, że nowa oś rzutów schodzi się z prostą x_1 (rys. 176.), natenczas zmienione rzuty poziome $A'_1 \dots$ punktów $A_1 \dots$ leżąc będą na prostych, wyprowadzonych z rzutów pionowych $A'' \dots$ prostopadłe do osi x_1 , w odległościach od tejże osi równych odległościom pierwotnych rzutów poziomych $A' \dots$ od pierwotnej osi rzutów x .

Przy zmianie płaszczyzny pionowej rzutów, zmieniają się rzuty pionowe punktów, leżąc one mianowicie na prostych, wyprowadzonych z rzutów poziomych $B' \dots$ (rys. 177.) prostopadłe do zmienionej osi rzutów x_2 , w odległościach od tejże osi równych odległościom pierwotnych rzutów pionowych od pierwotnej osi rzutów.

Zagadnienie 1.: Wyznaczyć prawdziwą wielkość odcinka AB , którego rzuty poziomy $A'B'$ i pionowy $A''B''$ są dane.

Rozwiązanie: Zmienmy płaszczyznę pionową rzutów w ten sposób, aby się zeszła z płaszczyzną przesuniętą przez prostą AB , a była prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, to zmieniona oś rzutów x_1 schodzi się z rzutem $A'B'$. Jeżeli tedy wyznaczmy zmienione rzuty pionowe A'_1 i B'_1 punktów A i B , natenczas odcinek $A'_1B'_1$ jest równy odcinkowi AB .

Zagadnienie 2.: Wyznaczyć odległość punktu $A(A', A'')$ od płaszczyzny $\pi(\pi_h, \pi_v)$ (rys. 178.).

Rozwiązanie: Zmienmy płaszczyznę poziomą rzutów w ten sposób, aby się zeszła z płaszczyzną $\pi'(\pi'_h, \pi'_v)$, przesuniętą przez punkt A , prostopadłe do śladu pionowego płaszczyzny π , to ślad pionowy π'_v jest zmienioną osią rzutów x_1 ; wyznaczmy następnie zmieniony rzut poziomy A'_1 punktu A i zmieniony ślad poziomy π'_h płaszczyzny π , który niczem innym nie jest, jak tylko kładem prostej, podług której płaszczyzny π i π' przecinają się, natenczas odległość punktu A'_1 od prostej π'_h równa jest odległości punktu A od płaszczyzny π .

28. Zmieniając kolejno płaszczyznę poziomą i pionową rzutów, można z dowolnej płaszczyzny utworzyć płaszczyznę rzutów.

Jakoż, aby z płaszczyzny $\pi(\pi_h, \pi_v)$ utworzyć płaszczyznę poziomą rzutów, poprowadźmy płaszczyznę $\pi'(\pi'_h, \pi'_v)$, prostopadłą do śladu π_h i uważajmy takową za nową płaszczyznę pionową rzutów, ślad poziomy tedy π'_h płaszczyzny π' jest nową osią rzutów x_1 ; obróćmy następnie płaszczyzny π i π' stale ze sobą połączone tak, aby nowa płaszczyzna pionowa zeszła się z płaszczyzną poziomą rzutów, to płaszczyznę π można uważać za nową płaszczyznę poziomą rzutów; kład $H(V)$ prostej, podług której płaszczyzny π i π' przecinają się jest drugą zmienioną osią rzutów x_2 .

Zagadnienie: Wyznaczyć najkrótszą odległość dwu prostych wchrowatych $l(l', l'')$ i $m(m', m'')$ (rys. 179.).

Rozwiązanie: Przesuńmy przez dowolny punkt A płaszczyznę π , równoległą do prostych l i m ; poprowadźmy następnie płaszczyznę π' , prostopadłą do śladu π_h i uważajmy takową za nową płaszczyznę pionową rzutów, to zmienione rzuty pionowe l''_2 i m''_2 są równoległe do prostej, podług której płaszczyzny π i π' przecinają się. Odległość zmienionych rzutów pionowych równa jest najkrótszej odległości prostych l i m . Aby jednak wyznaczyć tę prostą, która jest prostopadłą do prostych l i m i takowe przecina, uważajmy płaszczyznę π za nową płaszczyznę poziomą rzutów, a kład x_2 prostej, podług której płaszczyzny π i π' przecinają się, za zmienioną oś rzutów, to zmienione rzuty poziome l'_3 i m'_3 przecinają się w punkcie P'_1 który jest zmienionym rzutem poziomym prostej p , prostopadłej do prostych l i m i przecinającej takowe w punktach R i S , których zmienione rzuty pionowe R''_2 i S''_2 leżą na prostej wyprowadzonej z punktu P'_1 prostopadłe do osi x_2 .

C. Aksonometria prostokątna.

1. Niech będzie dany układ trzech płaszczyzn OXY , OXZ i OYZ , wzajemnie prostopadłych i punkt M , wyznaczmy rzuty prostokątne M' , M'' i M''' punktu M na płaszczyzny układu a nadto rzut M_a punktu M i rzuty M'_a , M''_a , M'''_a punktów M' , M'' i M''' na dowolną płaszczyznę π^a , to między punktami M_a , M'_a , M''_a , M'''_a zachodzą pewne związki. Zbadanie tych związków, a nadto podanie sposobów wyznaczenia punktu M_a z rzutów M' , M'' i M''' jest zadaniem aksonometrii prostokątnej.

Płaszczyznę π^a nazywamy płaszczyzną aksonometrii, punkt M_a nazywamy rzutem aksonometrycznym punktu M , a punkta M'_a , M''_a i M'''_a nazywamy odpowiednio rzutem aksonometrycznym poziomym, pionowym i bocznym punktu M .

2. Płaszczyzna aksonometrii π^a (rys. 180.) przecina się z płaszczyznami układu $O(X, Y, Z)$ podług trzech prostych X_aY_a , X_aZ_a , Y_aZ_a , które wyznaczają tak zwany trójkąt śladów aksonometrycznych. Wyznaczymy rzut prostokątny O_a początku układu O na płaszczyznę π^a i połączmy punkta X_a , Y_a i Z_a z punktem O_a , to proste O_aX_a , O_aY_a i O_aZ_a są rzutami prostokątnymi osi OX , OY i OZ na płaszczyznę aksonometrii. Te proste nazywamy osiami aksonometrycznymi.

Płaszczyzny OO_aX_a , OO_aY_a , OO_aZ_a są odpowiednio prostopadłe do prostych Y_aZ_a , X_aZ_a , X_aY_a , osi aksonometryczne przeto O_aX_a , O_aY_a , O_aZ_a są odpowiednio prostopadłe do boków Y_aZ_a , X_aZ_a , X_aY_a trójkąta śladów i przechodzą przez wierzchołki tegoż.

3. Niech będą dane osi aksonometryczne O_aX_a , O_aY_a , O_aZ_a ; założmy sobie wyznaczyć kąty, jakie płaszczyzny i osi układu $O(X, Y, Z)$ trzech płaszczyzn wzajemnie prostopadłych tworzą z płaszczyzną aksonometrii (rys. 181.).

Poprowadźmy w tym celu proste X_aY_a , X_aZ_a , Y_aZ_a , odpowiednio prostopadłe do osi O_aZ , O_aY , O_aX , i uważajmy trójkąt $X_aY_aZ_a$ za trójkąt śladów płaszczyzny aksonometrii π^a , przesunmy następnie przez osi O_aX , O_aY i O_aZ płaszczyzny π^1 , π^2 i π^3 prostopadłe do płaszczyzny π^a , to te płaszczyzny przechodzą przez początek układu O .

Płaszczyzny π^1 i OYZ , π^2 i OXZ , π^3 i OXY przecinają się podług prostych OP , ON , OM , odpowiednio prostopadłych do osi OX , OY , OZ . Jeżeli tedy wykonamy kłady płaszczyzn π^1 , π^2 i π^3 , na płaszczyznę aksonometrii, natenczas kłady (O_1) , (O_2) i (O_3) początku O zejda się z punktami, w któ-

rych koła, zakreślone na średnicach X_aP , Y_aN i Z_aM , przecinają się z prostymi, wyprowadzonymi z punktu O_a prostopadłe do prostych O_aP , O_aN i O_aM . Kąty $(O_1)X_aO_a=\alpha$, $(O_2)Y_aO_a=\beta$, $(O_3)Z_aO_a=\gamma$, są odpowiednio równe kątom nachylenia osi OX , OY , OZ do płaszczyzny aksonometrii a kąty $(O_3)MO_a=(90-\gamma)$, $(O_2)NO_a=(90-\beta)$ i $(O_1)PO_a=(90-\alpha)$ równe są kątom nachylenia płaszczyzn OXY , OXZ i OYZ do płaszczyzny aksonometrii.

4. Odmierzmy na kładach $(O_1)X_a$, $(O_2)Y_a$ i $(O_3)Z_a$ odcinki $(O_1)(A)$, $(O_2)(B)$, i $(O_3)(C)$ równe odcinkowi „ d ” i wyznaczmy rzuty aksonometryczne tychże $O_aA_a=m_1$, $O_aB_a=n_1$, $O_aC_a=p_1$, to natenczas $m_1=d \cdot \cos \alpha$, $n_1=d \cdot \cos \beta$, $p_1=d \cdot \cos \gamma$.

Wiadomo, że rzuty równoległe odcinków równych i równoległych na płaszczyznę są równe. Rzuty aksonometryczne tedy odcinków równoległych do osi OX , OY , OZ układu $O(X, Y, Z)$ mają się do prawdziwych wielkości tychże, jak dostawy kątów nachylenia α , β , γ . Te dostawy nazywamy stosunkami skróceń aksonometrycznych.

5. Kąty α , β i γ dopełniają do 90° kąty zawarte między osiami OX , OY , OZ i prostą OO_a , wyprowadzoną z początku układu prostopadłe do płaszczyzny aksonometrii. Uważajmy odcinek OO_a za przekątną równoległościanu prostokątnego, którego trzy ściany schodzą się z płaszczyznami układu $O(X, Y, Z)$, a którego trzy dalsze ściany są odpowiednio równoległe do płaszczyzn OXY , OXZ , OYZ i przechodzą przez punkt O_a , natenczas krawędzie tego równoległościanu, przechodzące przez punkt O są odpowiednio równe

$$OO_a \sin \alpha, OO_a \sin \beta, OO_a \sin \gamma; \text{ a ponieważ}$$

$$OO_a^2 = OO_a^2 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma)$$

przeto

$$1) \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1 \text{ albo}$$

$$2) \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2.$$

A zatem: Suma kwadratów skróceń aksonometrycznych jest równa dwu jednostkom.

Z tego wynika, że suma kwadratów dwu skróceń aksonometrycznych jest równa jedności albo większa niż jedność, albowiem kwadrat trzeciego skrócenia może, co najwięcej, równy być jedności.

Liczby: $m=q \cdot \cos \alpha$, $n=q \cdot \cos \beta$ i $p=q \cdot \cos \gamma$, otrzymane z pomnożenia skróceń aksonometrycznych dowolną ilością, nazywamy liczbami skróceń aksonometrycznych.

$$3) m^2 + n^2 + p^2 = q^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 2q^2$$

6. Zagadnienie: Dane są dwa stosunki skróceń aksonometrycznych $\cos \alpha$ i $\cos \beta$, wyznaczyć rzuty aksonometryczne osi układu trzech płaszczyzn wzajemnie prostopadłych (rys. 182.).

Rozwiązanie: Uważajmy płaszczyznę rysunku za płaszczyznę aksonometrii, a dowolny odcinek AB za bok trójkąta śladów, leżący na płaszczyźnie OXY , natenczas początek układu O znajduje się 1^o: na kuli K , której średnicą jest prosta AB , albowiem kąt AOB jest prosty; 2^o: na stożku obrotowym Σ_1 ; którego wierzchołek schodzi się z punktem A , a którego tworzące są nachylone do płaszczyzny aksonometrii pod kątem α ; 3^o: na stożku obrotowym Σ_2 , którego wierzchołek schodzi się z punktem B , a którego tworzące są nachylone do płaszczyzny aksonometrii pod kątem β .

Celem wyznaczenia punktów przecięcia się trzech wymienionych powierzchni, przetnijmy takowe płaszczyzną, przesuniętą przez prostą AB ,

prostopadle do płaszczyzny rysunku i wyznaczmy kłady przekrojów na płaszczyznę aksonometrii, natenczas otrzymamy koło k , zakreślone na średnicy AB ; dwie proste AC i AC_1 , przechodzące przez punkt A i nachylone do prostej AB pod kątem α ; a nadto dwie proste BD i BD_1 , przechodzące przez punkt B i nachylone do prostej AB pod kątem β .

Wyznamy rzuty C' i D' na prostą AB punktów C i D , w których proste AC i BD przecinają się z kołem k , i zakreślmy na średnicach AC' i BD' koła k'_1 i k'_2 , to koło k'_1 jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę rysunku krzywej, podług której kula K przenika się z powierzchnią stożkową Σ_1 , a koło k'_2 jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę rysunku krzywej, podług której powierzchnie K i Σ_2 przenikają się.

Jakoż poprowadźmy przez punkt A płaszczyznę π' , prostopadłą do płaszczyzny rysunku, której śladem jest prosta AE , to takowa przecina kulę K podług koła k_3 , zakreślonego na średnicy AE , a stożek Σ_1 podług dwu prostych: AF_1 i AF_2 nachylonych do śladu AE pod kątem α ; te przekroje zaś przecinają się w punktach F_1 i F_2 krzywej, podług której powierzchnie K i Σ_1 przenikają się. Rzuty prostokątne punktów F_1 i F_2 na płaszczyznę rysunku schodzą się z punktem F' leżącym na prostej AE . Z trójkątów prostokątnych AF_1E i AF_2F' wynika: $AF' = AE \cdot \cos^2 \alpha$; to znaczy: stosunek odcinków zawartych między punktem A i punktami E i F' , w których prosta AE przecina się z kołem k i k_1 jest ilością stałą. Krzywe k i k_1 są tedy homotetyczne, a więc krzywa k_1 jest kołem.

W podobny sposób można uzasadnić, że rzut prostokątny na płaszczyznę rysunku krzywej, podług której powierzchnia Σ_2 przenika się z kulą K , jest kołem k_2 , zakreślonym na średnicy BD' .

Jeżeli tedy wyznaczmy jeden z punktów przecięcia się kół k_1 i k_2 , natenczas otrzymamy rzut aksonometryczny O_a początku układu $O(X, Y, Z)$ trzech płaszczyzn wzajemnie prostopadłych. Proste O_aA i O_aB są rzutami aksonometrycznymi osi OX i OY , a prosta O_aG , poprowadzona przez punkt O_a prostopadle do prostej AB , jest rzutem aksonometrycznym osi OZ .

Prosta AB i proste AG , BG , wyprowadzone z punktów A i B prostopadle do osi aksonometrycznych O_aB i O_aA są bokami trójkąta śladów płaszczyzny aksonometrii.

Dajmy na to, że średnica AC' równa jest $2m_1$ jednostkom, a średnica BD' równa jest $2n_1$ jednostkom, to natenczas

$$1) 2m_1 = AB \cdot \cos^2 \alpha$$

$$2) 2n_1 = AB \cdot \cos^2 \beta$$

Przyjmijmy następnie że:

3) $2p_1 = AB \cdot \cos^2 \gamma$, gdzie γ oznacza kąt nachylenia osi OZ do płaszczyzny aksonometrii i dodajmy stronami równania 1), 2) i 3), natenczas otrzymamy:

$$2(m_1 + n_1 + p_1) = AB(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

a ponieważ $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$

przeto $m_1 + n_1 + p_1 = AB$

a zatem $p_1 = AB - \frac{AC' + BD'}{2}$

Aby tedy wyznaczyć kąt γ odmierzmy na prostej AB od punktu B odcinek BH' , równy $2(AB - \frac{BD' + AC'}{2}) = 2M_1M_2$ i wyprowadźmy z punktu H'

prostą, prostopadłą do AB , wyznaczmy następnie punkt H , w którym ta prostopadła przecina się z kołem k i połączmy takowy z punktem B , to kąt HBA równy jest kątowi γ .

Połączmy rzut aksonometryczny O_a początku układu $O(X, Y, Z)$ ze środkami M_1 i M_2 kół k_1 i k_2 , natenczas otrzymamy trójkąt $O_aM_1M_2$, którego boki O_aM_1 , O_aM_2 i M_1M_2 mają się do siebie, jak kwadraty skróceń aksonometrycznych $\cos^2 \alpha$, $\cos^2 \beta$ i $\cos^2 \gamma$. Z tego powodu nazywamy trójkąt $O_aM_1M_2$ trójkątem skróceń aksonometrycznych.

Łatwo udowodnić, że trójkąt $A_1B_1C_1$, którego wierzchołki leżą w spodkach wysokości trójkąta śladów, jest podobny do trójkąta $O_aM_1M_2$.

A zatem:

Boki trójkąta, którego wierzchołki schodzą się ze spodkami wysokości trójkąta śladów płaszczyzny aksonometrii, mają się do siebie, jak kwadraty skróceń aksonometrycznych.

7. Niech będzie dany trójkąt śladów $X_aY_aZ_a$ i osi aksonometryczne O_aX_a , O_aY_a i O_aZ_a ; wyznaczmy punkta A_1 , B_1 i C_1 (rys. 183.) w których osi aksonometryczne przecinają się z bokami trójkąta śladów, to osi O_aX_a , O_aY_a , O_aZ_a dzielą odpowiednio kąty A_1 , B_1 , C_1 trójkąta skróceń $A_1B_1C_1$ na dwie równe części; kąt zatem $Y_aO_aZ_a = B_1O_aC_1 = \xi$ równy jest $180^\circ - \frac{B_1 + C}{2} =$

$$= 90^\circ + \frac{A_1}{2}; \text{ albowiem } \frac{A_1 + B_1 + C_1}{2} = 90^\circ \text{ a zatem } \operatorname{tg} \xi = -\operatorname{ctg} \frac{A_1}{2}.$$

W podobny sposób można wykazać, że kąty $Z_aO_aX_a$ i $X_aO_aY_a$, które greckimi literami η i ζ oznaczają będziemy, równe są odpowiednio $90^\circ + \frac{B_1}{2}$, i $90^\circ + \frac{C_1}{2}$, że zatem $\operatorname{tg} \eta = -\operatorname{ctg} \frac{B_1}{2}$, $\operatorname{tg} \zeta = -\operatorname{ctg} \frac{C_1}{2}$

Wiadomo że:

$$-\operatorname{ctg} \frac{A_1}{2} = -\sqrt{\frac{(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1)(-A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1)}{(A_1B_1 - B_1C_1 + C_1A_1)(A_1B_1 + B_1C_1 - C_1A_1)}}$$

atoli

$$A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1 = \cos^2 \alpha : \cos^2 \beta : \cos^2 \gamma = m^2 : n^2 : p^2$$

(art. 5.), podstawiając tedy w powyższe równanie $A_1B_1 = cm^2$, $B_1C_1 = cn^2$, $A_1C_1 = cp^2$, gdzie c oznacza ilość stałą, otrzymamy:

$$1) -\operatorname{ctg} \frac{A_1}{2} = \operatorname{tg} \xi = -\sqrt{\frac{(m^2 + n^2 + p^2)(-m^2 + n^2 + p^2)}{(m^2 - n^2 + p^2)(m^2 + n^2 - p^2)}}$$

Podobnie otrzymamy:

$$2) -\operatorname{ctg} \frac{B_1}{2} = \operatorname{tg} \eta = -\sqrt{\frac{(m^2 + n^2 + p^2)(m^2 - n^2 + p^2)}{(-m^2 + n^2 + p^2)(m^2 + n^2 + p^2)}}$$

$$3) -\operatorname{ctg} \frac{C_1}{2} + \operatorname{tg} \zeta = -\sqrt{\frac{(m^2 + n^2 + p^2)(m^2 + n^2 - p^2)}{(-m^2 + n^2 + p^2)(m^2 - n^2 + p^2)}}$$

Zapomocą wzorów 1, 2 i 3 można wyznaczyć kąty, zawarte między osiami aksonometrycznymi, jeżeli liczby stosunkowe skróceń aksonometrycznych są dane.

W tabliczce poniżej umieszczonej, podane są kąty, zawarte między osiami aksonometrycznymi, dla sześciu grup liczb skróceń aksonometrycznych:

Aksonom.	Liczby stosunkowe			Stosunki skróceń			Kąty osiowe		
	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>p</i>	$\cos \alpha$	$\cos \beta$	$\cos \gamma$	ξ	η	ζ
Izometr.	1	1	1	0.816	0.816	0.816	120°	120°	120°
Dimetr.	2	1	2	943	471	943	131°24'½"	97°11'	131°24'½"
	3	1	3	973	324	973	133°24'½"	93°11'	133°24'½"
Anizom.	9	5	10	887	493	985	107°49'	95°11'	157°
	5	4	6	806	645	967	108°13'	101°10'	150°37'
	7	6	8	811	695	927	114°46'	106°59'½"	138°14'½"

Aksonometrię, której wszystkie trzy stosunki skróceń są równe, nazywamy aksonometrią izometryczną.

Jeżeli dwa stosunki skróceń są równe, a trzeci jest większy lub mniejszy, natenczas otrzymujemy aksonometrię dimetryczną.

Aksonometrię, której wszystkie stosunki skróceń są różne, nazywamy aksonometrią anizometryczną.

8. O podziałkach aksonometrycznych. Niech będą dane osi aksonometryczne O_aX_a , O_aY_a , O_aZ_a i trójkąt śladów $X_aY_aZ_a$ (rys. 181.), wyznaczmy w sposób wyłożony w art. 3. kłady płaszczyzn OO_aX_a , OO_aY_a , OO_aZ_a i odmierzymy na kładach $(O_1)X_a$, $(O_2)Y_a$ i $(O_3)Z_a$ osi OX , OY i OZ układu prostokątnego trzech płaszczyzn odcinki $(O_1)(A)$, $(O_2)(B)$ i $(O_3)(C)$ równe jedności ($d=1$), wyznaczmy następnie rzuty aksonometryczne O_aA_a , O_aB_a i O_aC_a tych odcinków, natenczas stosunki:

$$\frac{O_aA_a}{(O_1)(A)}, \frac{O_aB_a}{(O_2)(B)} \text{ i } \frac{O_aC_a}{(O_3)(C)}$$

są stosunkami skróceń aksonometrycznych.

Jeżeli tedy podzielimy odcinki O_aA_a , O_aB_a i O_aC_a na równe części, natenczas otrzymamy podziałki aksonometryczne odcinków równych jedności i równoległych odpowiednio do osi OX , OY i OZ .

Podziałkę, której przy konstrukcyach aksonometrycznych często używamy, otrzymujemy w sposób następujący:

Odmierzmy na prostej dowolnej l (rys. 184.) od punktu M odcinki MN , MX , MY , MZ , odpowiednio równe odcinkom $(O_1)(A)$, O_aA_a , O_aB_a , O_aZ_a i połączmy punkta M i N z dowolnym punktem W , poprowadźmy następnie przez X , Y i Z proste XX_1 , YY_1 i ZZ_1 , równoległe do prostej WM , a przez punkta przecięcia się tychże X_1 , Y_1 i Z_1 z prostą WN proste równoległe do l , to odcinki X_1X_2 , Y_1Y_2 i Z_1Z_2 tych prostych, zawarte między promieniami WM i WN , są oczywiście równe odcinkom MX , MY i MZ .

Jeżeli tedy podzielimy odcinek MN na części równe i połączmy punkta podziału z punktem W , natenczas proste łączące wyznaczają na prostych X_1X_2 , Y_1Y_2 i Z_1Z_2 podziałki aksonometryczne, odpowiadające kierunkom osi OX , OY i OZ układu trzech płaszczyzn wzajemnie prostopadłych.

Tak zwaną podziałkę aksonometryczną kątową otrzymamy, odmierzając na dowolnej prostej l (rys. 185.) odcinki WD , WX_1 , WY_1 , WZ_1 odpowiednio równe wielokrotnościom odcinków $(O_1)(A)$, O_aA_a , O_aB_a , O_aC_a . Zakreślmy na-

stępnie ze środka W promieniem WD łuk koła k , wyprowadźmy z punktów X_1 , Y_1 i Z_1 proste prostopadłe do l i połączmy punkt W z punktami X , Y i Z , w których te prostopadłe przecinają łuk k , to kąty XWX_1 , YWY_1 , ZWZ_1 są odpowiednio równe kątom nachylenia osi OX , OY i OZ do płaszczyzny rzutów aksonometrycznych. Jeżeli tedy odmierzymy na prostych WX , WY i WZ odcinki WM , WN i WP równe danemu odcinkowi a i wyznaczmy rzuty prostokątne tychże: WM_1 , WN_1 i WP_1 na prostą l , natenczas odcinki te są równe rzutom aksonometrycznym odcinka a , leżącego odpowiednio na prostych, równoległych do osi układu OX , OY OZ trzech płaszczyzn wzajemnie prostopadłych.

9. Zagadnienie: Wykreślić rzut aksonometryczny przedmiotu, którego rzuty prostokątne są dane (rys. 186. *a*, *b*, *c*).

Rozwiązanie: Niech będą dane rzuty prostokątne graniastosłupa czworosiecznego i takiegoż ostrosłupa, dla którego poprzedni tworzy podstawę, założmy sobie wykreślić rzut aksonometryczny, anizometryczny tych wielościannów, jeżeli liczby stosunkowe skróceń m , n i p równe są odpowiednio 9, 5 i 10 (art. 7.).

Z tabliczki obliczonej w art. 7. czytamy:

$\angle \xi = \angle Z_a O_a Y_a = 107^\circ 49'$; $\angle \eta = \angle Z_a O_a X_a = 95^\circ 11'$; $\angle \zeta = \angle X_a O_a Y_a = 157^\circ$; osi tedy aksonometryczne są wyznaczone.

Odnieśmy dany przedmiot do układu prostokątnego trzech płaszczyzn $O(XYZ)$, którego płaszczyzny OXY i OXZ schodzą się z płaszczyznami poziomą i pionową rzutów. Punkt O niech będzie początkiem układu.

Wyznaczmy następnie podziałki aksonometryczne. Obliczmy w tym celu przedewszystkiem (art. 5.)

$$q = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 + p^2}{2}} = \sqrt{\frac{9^2 + 5^2 + 10^2}{2}} = 10.14$$

i zakreslmy z dowolnego punktu W promieniem równym 10.14 jednostek łuk koła k , odmierzymy dalej na dowolnym promieniu WD odcinki WX_1 , WY_1 i WZ_1 równe 9^{ci} , 5^{ci} i 10^{ci} jednostkom i wyprowadźmy z punktów X_1 , Y_1 i Z_1 proste X_1X , Y_1Y i Z_1Z , prostopadłe do promienia WD , to kąty XWX_1 , YWY_1 i ZWZ_1 są odpowiednio równe kątom nachylenia osi układu OX , OY i OZ do płaszczyzny aksonometrii.

Aby wyznaczyć rzut aksonometryczny punktu A' , leżącego na płaszczyźnie OXY , odmierzymy na prostej WX (rys. 186*b*) odcinek WA_1 , równy odcinkowi OA'' a na prostej WY odcinek WA_2 , równy $A'A''$, i wyznaczmy rzuty tych odcinków WA_1 i WA_2 na prostą WD , odmierzymy następnie na osi aksonometrycznej O_aX_a odcinek O_aM_a , równy odcinkowi WA_1 , a na prostej, poprowadzonej przez punkt M_a równoległe do osi O_aY_a odcinek $M_aA'_a$, równy odcinkowi WA_2 , to punkt A'_a jest rzutem aksonometrycznym punktu A' .

W podobny sposób wyznaczmy rzuty aksonometryczne rzutów poziomych B' , C' ... wszystkich punktów danego przedmiotu; konstrukcyje odnośne upraszczają się jednak z uwagi, że rzuty aksonometryczne prostych równoległych są równoległe.

Aby wyznaczyć rzuty aksonometryczne E_a , F_a ... S_a punktów, E , F ... S , odmierzymy na prostej WZ odcinki równe odległościom tych punktów od płaszczyzny OXY , i wyznaczmy rzuty owych odcinków na prostą WD , po-

prowadźmy następnie przez punkta $E'_a, F'_a \dots S'_a$ proste równoległe do osi O_aZ_a i odmierzymy na tychże od punktów $E'_a, F'_a \dots S'_a$ odcinki, równe rzutom odcinków prostej WZ , to otrzymane punkta są rzutami aksonometrycznymi $E_a, F_a \dots S_a$.

0 konstrukcjach bezpośrednich w aksonometrii.

Sposobami, które dotąd poznaliśmy, można jedynie przedstawić aksonometrycznie wyniki konstrukcji otrzymanych metodą rzutów prostokątnych. Wykażemy jednak, że podobnie, jak rzuty środkowe i rzuty prostokątne jest aksonometria samodzielną metodą konstrukcyjną i rozwiążemy zapomocą tejże zasadnicze zagadnienia o punktach, prostych i płaszczyznach.

11. Położenie punktu A w przestrzeni (rys. 187.) jest wyznaczone zapomocą rzutu aksonometrycznego A_a i rzutu aksonometrycznego poziomego A'_a , pionowego A''_a , albo bocznego A'''_a . Jakoż punkt A'_a n. p. wyznacza położenie rzutu A' na płaszczyźnie OXY ; jeżeli tedy wyprowadzimy z punktu A' prostą, prostopadłą do płaszczyzny OXY a z punktu A_a prostą, prostopadłą do płaszczyzny aksonometrii (płaszczyzny rysunku), to te prostopadłe przetną się w punkcie A .

Proste $A_aA'_a, A_aA''_a, A_aA'''_a$ są odpowiednio równoległe do osi aksonometrycznych O_aZ_a, O_aY_a, O_aX_a , albowiem proste, rzucające punkt A na płaszczyzny poziomą, pionową i boczną rzutów, są odpowiednio równoległe do osi OZ, OY i OX .

Rzut aksonometryczny pionowy P''_a punktu P , leżącego na płaszczyźnie OXY znajduje się na osi O_aX_a a rzut aksonometryczny boczny znajduje się na osi O_aY_a .

Rzut aksonometryczny poziomy Q'_a punktu Q , leżącego na płaszczyźnie OXZ , znajduje się na osi O_aX_a , a rzut aksonometryczny boczny leży na osi O_aZ_a .

Rzut aksonometryczny poziomy R'_a punktu R , leżącego na płaszczyźnie OYZ , znajduje się na osi O_aY_a , a rzut aksonometryczny pionowy R''_a leży na osi O_aZ_a .

12. Prosta l wyznacza rzut aksonometryczny l_a i rzut aksonometryczny poziomy l'_a , pionowy l''_a , lub boczny l'''_a .

a) Jeżeli proste l, m i n są odpowiednio równoległe do płaszczyzn OXY, OXZ i OYZ , natenczas rzuty l_a i l'_a, m_a i m'_a, n_a i n'_a są równoległe (rys. 188.).

b) Jeżeli proste l, m i n są odpowiednio prostopadłe do płaszczyzn OXY, OXZ i OYZ , natenczas rzuty l'_a, m'_a i n'_a są punktami a rzuty l_a, m_a i n_a są odpowiednio równoległe do osi O_aZ_a, O_aY_a i O_aX_a (rys. 189.).

13. Rzuty aksonometryczne H_a, V_a i K_a śladów H, V i K prostej l na płaszczyznach współrzędnych układu $O(XYZ)$ znajdują się w punktach przecięcia się rzutów l_a i l'_a, l_a i l''_a, l_a i l'''_a .

Zagadnienie: Wyznaczyć rzuty aksonometryczne śladów prostej l , której rzut aksonometryczny l_a i rzut aksonometryczny poziomy l'_a są dane (rys. 190.).

Rozwiązanie: Punkt przecięcia się H_a rzutów l_a i l'_a jest rzutem aksonometrycznym śladu poziomego H prostej l . Celem wyznaczenia rzutów

aksonometrycznych V_a i K_a śladu pionowego V i śladu bocznego K , wyznaczmy punkt przecięcia się A_x i A_y prostej l'_a z osiami O_aX_a i O_aY_a , poprowadźmy następnie przez punkt A_x i A_y proste, równoległe do osi O_aZ_a , to takowe przecinają się z rzutem l_a w punktach V_a i K_a .

14. Rzuty aksonometryczne l_a i m_a , jakoteż rzuty aksonometryczne poziome l'_a i m'_a , pionowe l''_a i m''_a , boczne l'''_a i m'''_a dwu prostych równoległych są odpowiednio równoległe.

Jeżeli dwie proste l i m przecinają się, natenczas prosta $A_aA'_a$, łącząca punkta przecięcia się rzutów l_a i m_a tudzież l'_a i m'_a jest równoległa do osi O_aZ_a , albowiem prosta AA' , rzucająca punkt przecięcia się A prostych l i m na płaszczyznę OXY jest równoległa do osi OZ .

Jeżeli dwie proste l i m są wchrowate, natenczas prosta, łącząca punkt przecięcia się rzutów aksonometrycznych l_a i m_a z punktem przecięcia się rzutów aksonometrycznych poziomych l'_a i m'_a jest nachylona do osi O_aZ_a .

15. Płaszczyzna dowolna π (rys. 191.) przecina się z płaszczyznami układu $O(XYZ)$ podług trzech prostych UV, UW i VW , których rzuty aksonometryczne U_aV_a, U_aW_a i V_aW_a wyznaczają płaszczyznę π . Proste U_aV_a, U_aW_a i V_aW_a nazywamy śladami aksonometrycznymi płaszczyzny π .

a) Jeżeli płaszczyzna jest równoległa do płaszczyzny poziomej rzutów OXY , natenczas ślad aksonometryczny pionowy jest równoległy do osi O_aX_a , a ślad aksonometryczny boczny jest równoległy do osi O_aY_a i t. d.

b) Jeżeli płaszczyzna jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów, natenczas ślady aksonometryczne pionowy i boczny są równoległe do osi O_aZ_a i t. d.

16. Jeżeli prosta l leży na płaszczyźnie π , natenczas ślady aksonometryczne tejże przechodzą przez odpowiednie ślady prostej l .

Dwie płaszczyzny $\pi^1(U^1_a, V^1_a$ i $W^1_a)$ i $\pi^2(U^2_a, V^2_a$ i $W^2_a)$ (rys. 192.) przecinają się podług prostej l , której rzut aksonometryczny l_a łączy punkta przecięcia H_a, V_a, K_a śladów aksonometrycznych poziomych $U^1_aV_a$ i $U^2_aV_a$, pionowych $U^1_aW_a$ i $U^2_aW_a$, bocznych $V^1_aW_a$ i $V^2_aW_a$.

Zagadnienie: Wyznaczyć prostą, podług której płaszczyzna aksonometrii $\pi^a(X_aY_aZ_a)$ przecina się z płaszczyzną dowolną $\pi(U_aV_aW_a)$.

Rozwiązanie: Prosta H_aV_a , łącząca punkta przecięcia się śladów X_aY_a i U_aV_a tudzież X_aZ_a i U_aW_a , jest rzutem aksonometrycznym d_a prostej d , podług której płaszczyzny π i π^a przecinają się. Rzut aksonometryczny poziomy d'_a otrzymamy, łącząc punkt H_a z punktem przecięcia się V_a osi O_aX_a z prostą, poprowadzoną przez punkt V_a równoległe do osi O_aZ_a .

Zagadnienie: Wyznaczyć rzut aksonometryczny prostej, podług której dwie płaszczyzny przecinają się, jeżeli punkta przecięcia się odpowiednich śladów aksonometrycznych leżą poza obrębem rysunku.

17. Prosta $l(l_a, l'_a)$ przebiega płaszczyzną $\pi(U_aV_aW_a)$ w punkcie D , którego rzuty D_a i D'_a otrzymamy w sposób następujący: (rys. 193.) Przesuwamy przez prostą l płaszczyznę π^1 prostopadłą do płaszczyzny OXY ; ślad aksonometryczny poziomy $U^1_aV^1_a$ tej płaszczyzny schodzi się z rzutem l'_a , a ślad aksonometryczny pionowy $U^1_aW^1_a$ jest równoległy do osi O_aZ_a ; wyznaczamy następnie prostą $d(d_a, d'_a)$ podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się, to punkt przecięcia się D_a prostych l_a i d_a jest rzutem aksonometrycznym punktu, w którym prosta l przebiega płaszczyznę π ; rzut akso-

nometryczny poziomy D'_a znajduje się w punkcie przecięcia się prostej l'_a z prostą, poprowadzoną przez D_a równoległą do osi O_aZ_a .

Zagadnienie: Wyznaczyć punkt przebiecia prostej $l(l_a, l'_a)$ z płaszczyzną przesuniętą przez proste równoległe $m(m_a, m'_a)$ i $n(n_a, n'_a)$ nie kreśląc śladów tej płaszczyzny.

Zagadnienie: Wyznaczyć prostą, podług której dwie płaszczyzny wyznaczone dwiema parami prostych równoległych przecinają się, nie kreśląc śladów tychże płaszczyzn.

18. O prostych i płaszczyznach wzajemnie prostopadłych.

Wiadomo, że rzuty: poziomy l' i pionowy l'' prostej l , prostopadłej do płaszczyzny π , są odpowiednio prostopadłe do śladów poziomego π_h i pionowego π_v . Aby tedy wyznaczyć aksonometrycznie prostą l , prostopadłą do płaszczyzny π , należy wyznaczyć rzuty l'_a i l''_a albo rzut aksonometryczny l_a i rzut aksonometryczny poziomy l'_a .

Rzut l_a jest prostopadły do śladu płaszczyzny π na płaszczyźnie aksonometrii, wiadomo bowiem, że rzut prostokątny kąta prostego na płaszczyznę równoległą do jednego ramienia tegoż kąta, jest kątem prostym; rozwiązanie tedy zagadnień o prostych i płaszczyznach wzajemnie prostopadłych, sprowadza się w pierwszym rzędzie do zagadnienia:

„Mając daną prostą m , która leży na jednej z płaszczyzn współrzędnych układu prostokątnego $O(XYZ)$, wyznaczyć kierunek rzutu aksonometrycznego prostej p , prostopadłej do m “.

19. Dajmy na to, że prosta $m(m_a, m'_a)$ leży na płaszczyźnie OXY i przechodzi przez początek układu O . Załóżmy sobie wyznaczyć rzut aksonometryczny prostej p , poprowadzonej przez punkt O prostopadłej do prostej m (rys. 194.).

Przesuńmy w tym celu przez prostą m i przez osi OZ płaszczyznę i wyznaczmy prostą ZA , podług której ta płaszczyzna przecina się z płaszczyzną aksonometrii, poprowadźmy następnie przez punkt O na płaszczyźnie OXY prostą p , prostopadłą do płaszczyzny OAZ , to ta prosta jest prostopadła do prostej m .

Prosta p jest prostopadła do prostej ZA , podług której płaszczyzna aksonometrii przecina się z płaszczyzną OZA , rzut aksonometryczny zatem p_a jest prostopadły do rzutu Z_aA_a prostej ZA .

Rzuty m_a i p_a dwu prostych wzajemnie prostopadłych, które leżą na płaszczyźnie OXY i przechodzą przez początek układu, mają zatem tę własność, że jeden z nich jest prostopadły do prostej, łączącej wierzchołek Z_a trójkąta śladów z punktem, w którym drugi rzut przecina bok X_aY_a tegoż trójkąta.

W podobny sposób można wyznaczyć rzut aksonometryczny prostej p , prostopadłej do dowolnej prostej m , jeżeli proste p i m leżą na płaszczyźnie OXY i jeżeli nadto prosta p ma przechodzić przez początek układu O (rys. 195.).

Jakoż poprowadźmy przez wierzchołek Z_a trójkąta śladów $X_aY_aZ_a$ prostą Z_aB_a prostopadłą do rzutu m_a i połączmy punkt O_a z punktem B_a ,

w którym proste X_aY_a i Z_aB_a przecinają się, to prosta łącząca jest rzutem aksonometrycznym p_a prostej p .

20. Zagadnienie: Wyznaczyć prostą przechodzącą przez początek układu $O(XYZ)$ a prostopadłą do płaszczyzny $\pi(U_aV_aW_a)$ (rys. 196.).

Rozwiązanie: Wyznamy rzut R_aS_a prostej, podług której płaszczyzna π przecina się z płaszczyzną aksonometrii i poprowadźmy przez punkt O_a prostą p_a , prostopadłą do R_aS_a , to takowa jest rzutem aksonometrycznym prostej, przechodzącej przez początek układu i prostopadłej do płaszczyzny π . Celem wyznaczenia rzutu aksonometrycznego poziomego p'_a , poprowadźmy przez wierzchołek Z_a trójkąta śladów prostą Z_aB_a , prostopadłą do śladu U_aV_a i połączmy punkt O_a z punktem przecięcia się B_a prostych X_aY_a i Z_aB_a , to prosta O_aB_a jest rzutem aksonometrycznym poziomym p'_a prostej p . Możemy tedy powiedzieć:

Rzut aksonometryczny p_a prostej p prostopadłej do płaszczyzny π jest prostopadły do śladu tej płaszczyzny na płaszczyźnie aksonometrii, rzut zaś aksonometryczny poziomy p'_a jest aksonometrycznie prostopadły do rzutu aksonometrycznego śladu poziomego płaszczyzny π .

Zagadnienie: Wyznaczyć rzuty aksonometryczne śladów płaszczyzny, przesuniętej przez punkt $A(A_aA'_a)$ prostopadłej do prostej $m(m_a, m'_a)$ (rys. 197.).

Rozwiązanie: Wyznamy przedewszystkiem płaszczyznę aksonometrii π_a , przesuniętą przez punkt A .

Poprowadźmy w tym celu przez rzut A_a prostą l_a prostopadłą do osi O_aY_a , przez rzut poziomy A'_a prostą równoległą do osi O_aX_a , to l_a jest rzutem aksonometrycznym a l'_a jest rzutem aksonometrycznym poziomym prostej l , leżącej na płaszczyźnie π_a . Wyznamy tedy ślady aksonometryczne H_a i K_a prostej l i poprowadźmy przez punkt H_a prostą X_aY_a , prostopadłą do osi O_aZ_a a przez punkt K_a prostą Y_aZ_a prostopadłą do osi O_aX_a , to prosta X_aY_a jest śladem poziomym a prosta Y_aZ_a jest śladem bocznym płaszczyzny aksonometrii przesuniętej przez punkt A .

Poprowadźmy następnie przez A prostą p_a , prostopadłą do rzutu m_a prostej m , a przez punkt przecięcia się M_a prostych p_a i X_aY_a prostą M_aV_a , aksonometrycznie prostopadłą do rzutu m'_a to p_a jest śladem na płaszczyźnie aksonometrii a M_aV_a jest rzutem aksonometrycznym śladu poziomego płaszczyzny π , przesuniętej przez punkt A prostopadłej do prostej m .

Rzut aksonometryczny śladu pionowego płaszczyzny π otrzymamy, łącząc punkt przecięcia się U_a prostych M_aV_a i O_aX_a z punktem R_a w którym proste p_a i X_aZ_a przecinają się.

22. O wyznaczaniu prawdziwych wielkości odcinków.

Zagadnienie 1.: Wyznaczyć odległość punktu $A(A_a, A'_a)$ od płaszczyzny aksonometrii $\pi_a(X_aY_aZ_a)$ (rys. 198.).

Rozwiązanie: Przesuńmy przez punkt A płaszczyznę $\pi(U_aV_aW_a)$, prostopadłą do boku X_aY_a trójkąta śladów i wyznaczmy prostą M_aN_a , podług której ta płaszczyzna przecina się z płaszczyzną aksonometrii, wykonajmy następnie kład płaszczyzny π na płaszczyznę π_a , obracając takową około prostej M_aN_a , to kład (U) punktu U , leżącego na osi OX , znajdować

się będzie w punkcie przecięcia się koła, zakreślonego na średnicy $M_a N_a$, z prostą $U_a(U)$, wyprowadzoną z punktu U_a prostopadłe do prostej $M_a N_a$.

Kład (A') rzutu poziomego A' punktu A znajduje się w punkcie przecięcia się prostej $M_a(U)$ z prostą wyprowadzoną z punktu A'_a prostopadłe do prostej $M_a N_a$, a kład $(A')(A)$ prostej $A'A$, rzucającej poziomo punkt A , schodzi się z prostą, wyprowadzoną z (A') prostopadłe do $M_a(U)$. Jeżeli tedy poprowadzimy przez punkt A_a prostą, prostopadłą do śladu $M_a N_a$, natenczas w punkcie przecięcia się tejże z prostą $(A'_a)(A)$ otrzymamy kład punktu A a zarazem odcinek $A_a(A)$, równy odległości punktu A od płaszczyzny aksonometrii.

Zagadnienie 2.: Wyznaczyć prawdziwą wielkość odcinka AB prostej l , leżącej na płaszczyźnie $O(X, Y)$ (rys. 199.).

Rozwiązanie: Wykonajmy kład płaszczyzny OXY na płaszczyznę aksonometrii, obracając takową około osi $X_a Y_a$. Kład (O) punktu znajduje się w punkcie przecięcia się osi $O_a Z_a$ z kołem zakreślonym na średnicy $X_a Y_a$, a klady osi OX i OY schodzą się z prostymi $(O)X_a$ i $(O)Y_a$.

Jeżeli tedy poprowadzimy przez punkta przecięcia się M_a i N_a rzutu l_a z osiami $O_a X_a$ i $O_a Y_a$ proste, prostopadłe do boku $X_a Y_a$ trójkąta śladów płaszczyzny aksonometrii, i wyznaczmy punkta (M) i (N) przecięcia się tych prostopadłych z prostymi $(O)X_a$ i $(O)Y_a$, jeżeli następnie połączymy punkta (M) i (N) , natenczas otrzymamy kład prostej l , leżącej na płaszczyźnie OXY .

Odcinek $(A)(B)$ prostej $(M)(N)$, zawarty między prostymi, poprowadzonymi przez punkta A_a i B_a prostopadłe do $X_a Y_a$, jest równy prawdziwej wielkości odcinka AB .

Zagadnienie 3.: Wyznaczyć prawdziwą wielkość odcinka AB prostej dowolnej $l(l_a, l'_a)$ (rys. 200.).

Rozwiązanie: Przesuńmy przez prostą l płaszczyznę $\pi(U_a, V_a, W_a^\infty)$, prostopadłą do płaszczyzny OXY i wyznaczmy prostą $M_a N_a$, podług której ta płaszczyzna przecina się z płaszczyzną aksonometrii, wykonajmy następnie kład płaszczyzny π na płaszczyznę aksonometrii, obracając takową około prostej $M_a N_a$, to kład (U) punktu U , leżącego na osi OX znajdować się będzie w punkcie przecięcia się koła zakreślonego na średnicy $M_a N_a$ z prostą, wyprowadzoną z punktu U_a prostopadłe do śladu $M_a N_a$, albowiem kąt MUN jest kątem prostym.

Prosta łącząca punkta M_a i (U) jest kładem (l') rzutu poziomego prostej l a punkt przecięcia się prostej (l') z prostą wyprowadzoną ze śladu aksonometrycznego poziomego H_a prostej l prostopadłe do $M_a N_a$, jest kładem H śladu poziomego tejże prostej.

Jeżeli tedy wyznaczmy punkt D_a w którym prosta l przebija płaszczyznę aksonometrii i połączymy takowy z punktem (H) , natenczas otrzymamy kład (t) prostej l na płaszczyznę aksonometrii.

Odcinek $(A)(B)$ prostej (t) zawarty między prostymi, wyprowadzonymi z rzutów A_a i B_a prostopadłe do prostej $M_a N_a$ jest równy prawdziwej wielkości odcinka AB .

Zagadnienie: Wyznaczyć odległość punktu $A(A_a, A'_a)$ od płaszczyzny $\pi(U_a, V_a, W_a)$.

Zagadnienie: Wyznaczyć odległość punktu $A(A_a, A'_a)$ od prostej $l(l_a, l'_a)$.

Zagadnienie: Wyznaczyć odległość dwu płaszczyzn równoległych $\pi(U_a, V_a, W_a)$ i $\pi^1(U^1_a, V^1_a, W^1_a)$.

Zagadnienie: Wyznaczyć najkrótszą odległość dwu prostych wchrowatych $l(l_a, l'_a)$ i $m(m_a, m'_a)$.

23. O kładach płaszczyzn.

Niech będzie dana płaszczyzna $\pi(U_a, V_a, W_a)$, przecinająca się z płaszczyzną aksonometrii $\pi^a(X_a, Y_a, Z_a)$ podług prostej $M_a N_a$ (rys. 201.).

Aby wykonać kład płaszczyzny π na płaszczyznę aksonometrii, należy obrócić dowolny punkt, leżący na płaszczyźnie π , n. p. punkt U około śladu $M_a N_a$ w ten sposób, aby padł na płaszczyznę π^a .

Wyznamy w tym celu odległość $U_a(U)$ punktu U od płaszczyzny aksonometrii (22. zagad. 1.) a nadto przeciwprostokątną trójkąta $U_a(U)A$, którego jedna przyprostokątna równa jest odcinkowi $U_a(U)$, a którego druga przyprostokątna $U_a A$ równa jest odległości rzutu U_a od śladu $M_a N_a$; zakreślmy następnie z punktu A promieniem $A(U)$ koło, to punkt przecięcia się (U_a) tego koła z prostą, poprowadzoną przez punkt U_a prostopadłe do $M_a N_a$, jest kładem punktu U na płaszczyznę aksonometrii.

Proste $(U_a)M_a$ i $(U_a)N_a$ są kładami śladów UV i UW płaszczyzny π .

Aby wyznaczyć kład dowolnego punktu $P(P_a, P'_a)$, leżącego na płaszczyźnie π , połączmy rzuty aksonometryczne U_a i P_a i wyznaczmy punkt T , w którym proste $U_a P_a$ i $M_a N_a$ przecinają się, połączmy następnie punkt T z kładem (U_a) i poprowadźmy przez rzut P_a prostą, prostopadłą do $M_a N_a$, to takowa przecina się z prostą $T(U_a)$ w kładzie (P_a) punktu P .

Zagadnienie: Wyznaczyć kład wielokąta leżącego na płaszczyźnie $\pi(U_a, V_a, W_a)$.

Zagadnienie: Wyznaczyć kąt nachylenia dwu płaszczyzn $\pi(U_a, V_a, W_a)$ i $\pi^1(U^1_a, V^1_a, W^1_a)$.

D. Kolineacja utworów przestrzeni.

1. Dwa układy o trzech wymiarach Σ i Σ' nazywamy kolineacyjnymi, jeżeli punktowi jednego układu odpowiada tylko jeden punkt w układzie drugim, a prostej jednego układu przechodzącej przez pewien punkt, odpowiada w układzie drugim prosta, przechodząca przez punkt odpowiedni.

Z określenia tego wynika, że w układach kolineacyjnych płaszczyźnie jednego układu odpowiada płaszczyzna w układzie drugim.

Jakoż poprowadźmy na płaszczyźnie π układu Σ proste l, m i n , które nie przechodzą przez jeden punkt, a nadto proste $p, p_1, \dots$, które przecinają się z prostymi l, m i n w punktach L, M i N, L_1, M_1 i $N_1, \dots$ wyznaczmy następnie elementa l', m', n', p', p_1 układu Σ' , odpowiadające elementom l, m, n, p, p_1 układu Σ , to proste $p', p_1, \dots$ przecinają się odpowiednio z prostymi l', m' i n' w punktach L', M' i N', L'_1, M'_1 i $N'_1, \dots$, odpowiadających punktom L, M i N, L_1, M_1 i N_1 , proste zatem $l', m', n', p', p_1, \dots$ leżą na płaszczyźnie π' układu Σ' , która odpowiada płaszczyźnie π .

2. Jeżeli w szczególności proste, łączące odpowiednie punkta układów, i płaszczyzny, przesunięte przez proste odpowiednie tychże układów, przechodzą przez jeden punkt O , natenczas te układy są środkowo kolineacyjnymi. Punkt O nazywamy środkiem kolineacji.

Dwie proste odpowiednie l i l' układów środkowo kolineacyjnych Σ i Σ' , przecinają się w punkcie T , który jest elementem odpowiednio wspólnym obu układów.

Przesunijmy przez punkta przecięcia się T, T_1 i T_2 trzech par prostych odpowiednich l i l', m i m', n i n' płaszczyznę κ i poprowadźmy na tej płaszczyźnie dowolną prostą t , to takowa odpowiada sama sobie w układach środkowo kolineacyjnych Σ i Σ' , punkta bowiem przecięcia się prostej t z prostymi TT_1, T_1T_2 i T_2T są elementami odpowiednio wspólnymi obu układów. A zatem: Punkta i proste, odpowiednio wspólne dwu układów środkowo kolineacyjnych leżą na płaszczyźnie. Tę płaszczyznę nazywamy płaszczyzną kolineacji. Proste tedy i płaszczyzny odpowiednie dwu układów środkowo kolineacyjnych przecinają się w punktach względnie podług prostych, leżących na płaszczyźnie kolineacji.

Płaszczyźnie w nieskończoności, uważanej raz za element ζ układu Σ drugi raz za element ϱ' układu Σ' odpowiadają w układach Σ' i Σ płaszczyzny ζ' i ϱ równoległe do płaszczyzny kolineacji; płaszczyzna kolineacji

bowiem przecina się z płaszczyzną w nieskończoności podług prostej, która leży w nieskończoności. Płaszczyzny ϱ i ζ' nazywamy płaszczyznami wzajemnymi układów Σ i Σ' .

Prostym, równoległym układem Σ , odpowiadają w układzie Σ' proste przechodzące przez jeden punkt, który leży na płaszczyźnie ζ' . Prostym zaś, równoległym układem Σ' , odpowiadają w układzie Σ proste, przechodzące przez jeden punkt, który leży na płaszczyźnie ϱ .

3. Szeregi punktów, pęki promieni i pęki płaszczyzn, odpowiadające sobie w dwu układach środkowo kolineacyjnych, są perspektywiczne; albowiem dwa szeregi odpowiednie są przekrojami pęku promieni, którego wierzchołek znajduje się w środku kolineacji, dwa odpowiednie pęki promieni są przekrojami pęku płaszczyzn, którego oś przechodzi przez środek kolineacji, a dwa odpowiednie pęki płaszczyzn przecinają się z płaszczyzną kolineacji podług tego samego pęku promieni, którego wierzchołek schodzi z punktem przecięcia się osi, a którego promienie schodzą się z prostymi przekroju elementów odpowiednich.

Stosunek tedy podwójnego podziału czterech elementów utworu rzędu pierwszego, należącego do układu Σ , jest równy stosunkowi podwójnego podziału czterech elementów odpowiednich układu Σ' .

Każda prosta, poprowadzona przez środek kolineacji O układów Σ i Σ' jest podstawą dwu szeregów jednokreślnych, których punkta podwójne schodzą się ze środkiem O i z punktem przecięcia się płaszczyzny kolineacyjnej z ową prostą.

Każda prosta, leżąca na płaszczyźnie kolineacji, jest osią dwu pęków płaszczyzn jednokreślnych, których elementa podwójne schodzą się z płaszczyzną przechodzącą przez środek O i z płaszczyzną kolineacji.

Poprowadźmy przez środek kolineacji O proste $l, m, n, \dots$ i wyznaczmy punkta przecięcia się tychże $T, T_1, T_2, \dots$ z płaszczyzną kolineacji κ , a nadto pary punktów odpowiednich L i L', M i M', N i $N', \dots$ leżących na owych prostych, przesunijmy następnie przez punkta L, M, N i L', M', N' płaszczyzny π i π' , to takowe są elementami odpowiednimi układów Σ i Σ' , przecinają się zatem podług prostej t , leżącej na płaszczyźnie kolineacji κ .

Płaszczyzny π, π', κ i płaszczyzna (O, t) przesunięta przez prostą t i przez środek O , tworzą pęk czterech płaszczyzn, który przecina się z prostymi l, m i n w punktach $L, L', T, O, -M, M', T_1, O-N, N', T_2, O$, stosunki tedy podwójnego podziału $(OTLL')$, (OT_1MM') , (OT_2NN') są równe. Atoli pary punktów odpowiednich $L, L', \dots$ na prostych, poprowadzonych przez środek kolineacji obrano dowolnie, stosunek tedy podwójnego podziału środka kolineacji, punktu, w którym dowolna prosta, poprowadzona przez tenże środek przecina płaszczyznę kolineacji i dwu punktów odpowiednich, leżących na owej prostej, jest stały.

Wartość Δ tego stosunku nazywamy cechą albo charakterystyką kolineacji.

Cechę kolineacji można przedstawić w postaci stosunku pojedynczego podziału przyjmując na prostej, poprowadzonej przez środek O , zamiast dwu dowolnych punktów odpowiednich L i $L', \dots$ punkta przecięcia się Z' i R tej prostej z płaszczyznami wzajemnymi ζ' i ϱ i odpowiednie punkta Z_∞ i R'_∞ , otrzymamy bowiem:

$$\Delta = (OTLL') = (OTZ_{\infty} Z') = (OTR'_{\infty}) = \frac{TZ'}{OZ'} = \frac{OR}{TR}$$

Płaszczyzna π przesunięta przez środek kolineacji przecina układy o trzech wymiarach, Σ i Σ' podług dwu układów płaskich σ i σ' środkowo kolineacyjnych. Środek kolineacji układów σ i σ' schodzi się ze środkiem kolineacji układów Σ i Σ' , oś kolineacji t jest prostą, podług której płaszczyzna π przecina się z płaszczyzną kolineacji a osi wzajemne z' i r schodzą się z prostymi, podług których płaszczyzny wzajemne przecinają się z płaszczyzną π .

4. Kolineacja środkowa dwu układów Σ i Σ' jest wyznaczona, jeżeli dany jest środek, płaszczyzna kolineacji i dwa odpowiednie punkta albo cecha kolineacji.

Zagadnienie: Mając dany środek O , płaszczyznę kolineacji π i dwa odpowiednie punkta A i A' układów Σ i Σ' , wyznaczyć punkt X' układu Σ' odpowiadający punktowi X układu Σ a nadto płaszczyzny wzajemne ζ' i ϱ (rys. 202.).

Rozwiązanie: Wyznamy punkt T , w którym prosta XA przecina się z płaszczyzną kolineacji π i połączmy takowy z punktem A' , to prosta TA' jest elementem układu Σ' , odpowiadającym prostej XA układu Σ , punktowi tedy X odpowiada punkt przecięcia się X' prostej TA' z promieniem OX .

Promień OZ' poprowadzony przez środek kolineacji równolegle do prostej XA przecina się z prostą $X'A'$ w punkcie Z'_1 przez który płaszczyzna wzajemna ζ' przechodzi, promień zaś OR równoległy do prostej $X'A'$ przecina się z prostą XA w punkcie R , przez który płaszczyzna wzajemna ϱ przechodzi; albowiem punktowi R odpowiada punkt leżący w nieskończoności na prostej $X'A'$, punktowi zaś Z' odpowiada punkt leżący w nieskończoności na prostej XA .

Boki OZ' i RT równoległoboku $OZ'RT$ są równe, odległość tedy środka kolineacji od płaszczyzny ζ' jest równa odległości płaszczyzny wzajemnej ϱ od płaszczyzny kolineacji.

5. Jeżeli środek kolineacji układów Σ i Σ' znajduje się w nieskończoności, natenczas płaszczyzny wzajemne ζ' i ϱ schodzą się z płaszczyzną w nieskończoności, prostym tedy i płaszczyznom równoległym jednego układu, odpowiadają w układzie drugim proste i płaszczyzny równoległe.

Płaszczyzna kolineacji π dzieli w tym przypadku odcinki zawarte między punktami odpowiednimi układów w stosunku stałym; albowiem cecha kolineacji

$$\Delta = (O_{\infty} TAA') = \frac{TA'}{TA}$$

Taką kolineację nazywamy powinowactwem układów.

Powinowactwo, którego cecha jest równa jedności ujemnej, nazywamy symetrią ze względu na płaszczyznę, odpowiednie bowiem punkta układów kolineacyjnych leżą w tym razie po przeciwnych stronach płaszczyzny kolineacji (symetrii) w równych od niej odległościach.

6. Jeżeli płaszczyzna kolineacji układów Σ i Σ' leży w nieskończoności, a środek znajduje się w skończoności, natenczas płaszczyzny wzajemne schodzą się na płaszczyźnie w nieskończoności, elementom tedy równoległym jednego układu odpowiadają elementa równoległe w układzie drugim.

Środek kolineacji dzieli w tym przypadku odcinki, zawarte między punktami odpowiednimi układów Σ i Σ' w stosunku stałym; albowiem cecha

$$\Delta = (OT_{\infty} AA') = \frac{OA}{OA'}$$

Taką kolineację nazywamy podobieństwem układów.

Podobieństwo, którego cecha jest równa jedności ujemnej, nazywamy symetrią środkową, odpowiednie punkta bowiem układów kolineacyjnych leżą w tym razie po przeciwnych stronach środka w równych od tegoż odległościach.

7. Jeżeli środek i płaszczyzna kolineacji leżą w nieskończoności, natenczas cecha

$$\Delta = (O_{\infty} T_{\infty} AA') = 1,$$

co tylko wówczas może nastąpić, jeżeli wszystkie elementa odpowiednie układów kolineacyjnych schodzą się, albo innymi słowy, jeżeli te układy są przystające.

8. Kolineację układów, której środek O i płaszczyzna kolineacji leżą w skończoności a której cecha równa jest jedności ujemnej, nazywamy inwolucją układów, punkta bowiem odpowiednie tychże, które leżą na promieniach przechodzących przez środek, tworzą szeregi inwolucyjne, a płaszczyzny odpowiednie, które przechodzą przez prostą, leżącą na płaszczyźnie kolineacji, wyznaczają pęk inwolucyjny.

Płaszczyzny wzajemne ζ' i ϱ układów inwolucyjnych schodzą się z płaszczyzną, która leży między środkiem kolineacji O i płaszczyzną kolineacji π w połowie odległości punktu O od płaszczyzny π ; albowiem cecha

$$\Delta = \frac{OR}{TR} = \frac{TZ'}{OZ'} = -1,$$

co tylko wówczas jest możebne, jeżeli punkta wzajemne R i Z' nakrywają się.

9. Przyjmijmy, że płaszczyzny wzajemne ζ' i ϱ układów Σ i Σ' , środkowo kolineacyjnych, leżą po przeciwnych stronach środka O i płaszczyzny kolineacji π , a nadto, że płaszczyzna ζ' znajduje się bliżej płaszczyzny kolineacji niż płaszczyzna wzajemna ϱ , natenczas utworowi przestrzeni U , należącemu do układu Σ , odpowiada w układzie Σ' utwór U' , leżący między płaszczyznami π i ζ' . Punktem A i B utworu U , z których pierwszy leży bliżej płaszczyzny kolineacji niż drugi, odpowiadają punkta A' i B' , z których A' leży bliżej płaszczyzny π niż B' .

Utwór tedy U' zdolny jest wywołać w oku, umieszczonym w środku kolineacji, takie same wrażenie, jakie wywołuje utwór U , oczywiście, jeżeli wszelkim dalszym warunkom, od których zależą wrażenia wywołane w oku, zadość uczynimy. Mianowicie, jeżeli U' leżeć będzie w obrębie stożka obrotowego, którego oś jest prostopadła do płaszczyzny kolineacji, a którego tworzące są nachylone do osi pod kątem, równym mniej więcej 30° , jeżeli nadto utwór U' oświetlony będzie punktem, leżącym na płaszczyźnie ζ' , który odpowiada kierunkowi promieni oświetlających przedmiot U . Z równą tedy słusnością, jak rzuty środkowe przedmiotów nazywamy perspektywą, można nazwać utwory kolineacyjne przedmiotów perspektywami przestrzennymi albo modelami tychże.

Zagadnienie: Mając dany środek O , płaszczyznę kolineacji π i płaszczyznę wzajemną ζ' , wyznaczyć model przedmiotu $ABC...N$, znajdującego się za płaszczyzną kolineacji (rys. 203.).

Rozwiązanie: Wyznamy punkt przecięcia się Z' płaszczyzny ζ' z prostą, poprowadzoną przez środek O równoległą do prostych AB i CD i połączmy punkt Z' z punktami T_1 i T_2 , w których płaszczyzna kolineacji przecina się z prostymi AB i CD , poprowadźmy następnie promienie OA , OB , OC i OD , to takowe przecinają się z prostymi T_1Z' i T_2Z' w punktach A' , B' , C' , D' , odpowiadających kolineacyjnie wierzchołkom czworokąta $ABCD$. W podobny sposób otrzymamy figury $E'F'G'H'$,... odpowiadające czworokątom $EFGH$... danego przedmiotu.

Celem wyznaczenia punktu W' , odpowiadającego wierzchołkowi W , poprowadźmy promień OW , a przez punkt przecięcia się M' przekątnych czworoboku $E'F'G'H'$ prostą równoległą do prostej WM , to punkt przecięcia się owej prostej z promieniem OW jest punktem W' .

10. Niech będzie dany środek O , płaszczyzna kolineacji κ i płaszczyzny wzajemne ζ i ϱ (rys. 204.), a nadto proste odpowiednie l i l' układów środkowo kolineacyjnych. Wyznamy rzut prostokątny O_1 środka O na płaszczyznę ϱ i rzut prostokątny Z_1 punktu Z na płaszczyznę kolineacji, to prosta TZ_1 jest rzutem prostokątnym l' , prostej l' na płaszczyznę κ . Odcinki OO_1 i ZZ_1 są równoległe i równe; promień O_1Z_1 jest tedy równoległy do promienia OZ a temsamem równoległy do prostej l , a zatem prosta TZ_1 jest rzutem środkowym prostej l z punktu O_1 na płaszczyznę kolineacji.

Rzut prostokątny przeto układu Σ' na płaszczyznę kolineacji jest zarazem rzutem środkowym układu Σ z punktu O_1 , w którym prosta wyprowadzona ze środka kolineacji przebija płaszczyznę wzajemną ϱ .

11. Jeżeli trzy układy: Σ , Σ' i Σ'' są parami środkowo kolineacyjne, natenczas środki tych kolineacji leżą na linii prostej.

Płaszczyzny kolineacji κ , κ_1 , κ_2 układów Σ'' i Σ' , Σ'' i Σ , Σ' i Σ przecinają się w punkcie P , który jest elementem odpowiednio wspólnym wszystkich trzech układów. Obierzmy na prostej l układu Σ , która przechodzi przez punkt P , dwa punkta A , B i wyznaczmy punkta odpowiednie A' , B' i A'' , B'' układów Σ' i Σ'' , to proste AA' i BB' , AA'' i BB'' , $A'A''$ i $B'B''$ przecinają się odpowiednio w środkach kolineacji układów Σ i Σ' , Σ' i Σ'' , Σ i Σ'' ; atoli wierzchołki trójkątów $AA'A''$ i $BB'B''$ leżą parami na prostych, przechodzących przez punkt P , boki tedy odpowiednio tychże przecinają się w punktach, leżących na linii prostej.

12. Kolineację dwu układów Σ i Σ' w położeniu ogólnem (nieśrodkowem) wyznacza pięć par punktów, z których cztery tego samego układu nie leżą na jednej płaszczyźnie.

Jakoż niech będą dane punkta odpowiednie A , A' — B , B' — C , C' — D , D' — E , E' a nadto punkt X układu Σ , założmy sobie wyznaczyć odpowiedni punkt X' układu Σ' . Przesuńmy w tym celu przez prostą AB i przez punkta C , D , E , X , przez prostą BC i przez punkta A , D , E , X , przez prostą CD i przez punkta A , B , E , X płaszczyzny, natenczas otrzymamy trzy pęki i przez punkta A , B , E , X czterech płaszczyzn układu Σ , którym odpowiadają w układzie Σ' pęki jednokreślne $A'B'(C'D'E'X')$,...

Położenie płaszczyzn $A'B'X'$, $B'C'X'$ i $C'D'X'$ jest wyznaczone, stosunki bowiem podwójnego podziału $AB(C, D, E, X)$ i $A'B'(C', D', E', X')$ następnie

$BC(A, D, E, X)$ i $B'C'(A', D', E', X')$... są równe; punkt przecięcia się tedy owych płaszczyzn jest elementem układu Σ' , odpowiadającym punktowi X układu Σ .

13. Zapomocą kolineacji środkowej dwu układów przestrzeni można z łatwością udowodnić, że, jeżeli pomiędzy elementami przestrzeni nie zachodzą związki miarowe, natenczas rzut środkowy układu można uważać za rzut równoległy układu kolineacyjnego i wzajemnie.

Jakoż niech będzie dany układ punktów i płaszczyzn Σ . Wyznamy rzut Σ_1 układu Σ z punktu O na płaszczyznę κ , a nadto układ Σ' , środkowo kolineacyjny z Σ , przyjmując dowolny punkt S za środek, κ za płaszczyznę kolineacji, a płaszczyznę ϱ przesuniętą przez punkt O równoległą do płaszczyzny kolineacji za płaszczyznę wzajemną układu Σ , to natenczas punktowi O odpowiada w układzie Σ' punkt O'_∞ , leżący w nieskończoności na promieniu SO . Promieniom OA , OB ,... i płaszczyznom (O, l) , (O, m) ... rzucającym punkta A , B ,... i proste l , m ,... układu Σ na płaszczyznę κ odpowiadają w układzie Σ' proste $O'_\infty A'$, $O'_\infty B'$... i płaszczyzny (O'_∞, l) , (O'_∞, m) ... przechodzące przez punkt O'_∞ .

Promienie odpowiednie tedy OA i $O'_\infty A'$... tudzież płaszczyzny odpowiednie (O, l) i $(O'_\infty l')$... przecinają się w punktach A_1 ... względnie prostych l_1 ..., leżących na płaszczyźnie kolineacji, układ płaski zatem $A_1...l_1$... jest rzutem środkowym układu Σ a zarazem rzutem równoległym układu Σ' , kolineacyjnego z owym układem.

CZĘŚĆ III.

O wielościanach.

Kąty bryłowe trójścienne.

1. Wyprowadźmy z dowolnego punktu W trzy promienie a, b i c (rys. 205.) i przesunijmy przez a i b, b i c, c i a płaszczyzny, to takowe ograniczają część przestrzeni, którą nazywamy kątem bryłowym trójściennym.

Punkt W nazywamy wierzchołkiem, promienie a, b i c nazywamy krawędziami a płaszczyzny $(a, b), (b, c)$ i (c, a) nazywamy ścianami kąta bryłowego $W(a, b, c)$.

Kąty nachylenia ścian (a, b) i $(a, c), (b, a)$ i $(b, c), (c, a)$ i (c, b) nazywamy kątami dwuściennymi i oznaczamy takowe odpowiednio literami A, B, C , a kąty zawarte między krawędziami b i c, c i a, a i b , leżące na przeciw kątów dwuściennych A, B, C nazywamy kątami krawędziowymi i oznaczamy takowe odpowiednio literami greckiego alfabetu: α, β, γ .

2. Jeżeli przedłużymy krawędzie a, b i c kąta bryłowego $W(a, b, c)$ poza wierzchołek, natenczas otrzymamy kąt bryłowy $W(a', b', c')$, którego kąty krawędziowe i dwuścienne są równe kątom krawędziowym względnie dwuściennym kąta bryłowego $W(a, b, c)$; atoli porządku, w jakich owe kąty utworów $W(a, b, c)$ i $W(a', b', c')$ po sobie następują, są przeciwne, kąty bryłowe zatem $W(a, b, c)$ i $W(a', b', c')$ są symetryczne względem punktu W .

3. Poprowadźmy przez dowolny punkt W_1 , leżący w obrębie kąta bryłowego trójściennego $W(a, b, c)$ proste a_1, b_1 i c_1 , odpowiednio prostopadłe do ścian $(b, c), (a, c)$ i (a, b) , to takowe wyznaczają tak zwany kąt bryłowy biegunowy $W_1(a_1, b_1, c_1)$ kąta bryłowego $W(a, b, c)$.

Kąt α_1 zawarty między krawędziami b_1 i c_1 dopełnia do 180° kąt dwuścienny A albowiem prosta b_1 jest prostopadłą do płaszczyzny (a, c) a prosta c_1 jest prostopadłą do płaszczyzny (a, b) . W podobny sposób można wykazać, że kąty krawędziowe β_1 i γ_1 dopełniają do 180° kąty dwuścienne B i C . Atoli kąt bryłowy $W(a, b, c)$ jest kątem bryłowym biegunowym kąta bryłowego $W_1(a_1, b_1, c_1)$ a zatem:

$$180^\circ = \alpha + A_1 = \beta + B_1 = \gamma + C_1,$$

jeżeli A_1, B_1 i C_1 oznaczają kąty dwuścienne, kąta bryłowego $W_1(a_1, b_1, c_1)$.

4. Jeżeli kąt bryłowy trójścienny $W(a, b, c)$ przetniemy kulą, której środek schodzi się z wierzchołkiem, natenczas otrzymamy trójkąt sferyczny.

Boki tego trójkąta równe są kątom krawędziowym α, β, γ , a kąty tegoż równe są kątom dwuściennym A, B i C .

Trygonometria rozwiązuje zapomocą rachunku trójkąty sferyczne, jeżeli dane są trójki boków i kątów w dowolnem zestawieniu.

Zadaniem geometrii wykreślnej jest rozwiązanie kąta bryłowego trójściennego $W(a, b, c)$ w sposób konstrukcyjny jeżeli dane są:

1) α, β, γ , 2) α, β, C , 3) α, β, B , 4) A, B, C , 5) A, B, γ , 6) A, B, β .

5. Zagadnienie: Dane są kąty krawędziowe α, β i γ kąta bryłowego trójściennego $W(a, b, c)$ wyznaczyć kąty dwuścienne A, B i C (rys. 206.).

Rozwiązanie: Kąty zawarte między promieniami b i c, c i a, b i a pęku $W(a, b, c, a)$ niech będą odpowiednio równe kątom krawędziowym α, β, γ . Jeżeli obrócimy promień a_1 około prostej b , a promień a_2 około prostej c , natenczas otrzymamy dwa stożki obrotowe Σ_1 i Σ_2 przecinające się podług dwu tworzących, symetrycznych względem płaszczyzny rysunku, z którymi schodzi się krawędź a , danego kąta bryłowego.

Jeżeli kąt γ jest większy niż suma kątów α i β , albo jeżeli kąt α jest większy niż suma kątów β i γ , natenczas stożki Σ_1 i Σ_2 przecinają się podług tworzących urojonych. Ztąd wnosimy, że suma dwu kątów krawędziowych kąta bryłowego, trójściennego jest większa niż kąt trzeci. — Wracając do konstrukcyi, odmierzymy na promieniach a_1 i a_2 odcinki równe WA_1 i WA_2 , obrócimy następnie punkt A_1 około osi b , a punkt A_2 około osi c , to takowe opiszą koła k_1 i k_2 , które przecinają się w punkcie A , leżącym na krawędzi a , kąta bryłowego $W(a, b, c)$. Rzuty kół k'_1 i k'_2 na płaszczyznę rysunku schodzą się z prostymi A_1B_1 i A_2C_1 wyprowadzonymi z punktów A_1 i A_2 , prostopadłe do krawędzi b i c ; rzut tedy punktu A schodzi się z punktem A' w którym proste A_1, B_1 , i A_2, C_1 przecinają się, a prosta WA' łącząca wierzchołek W z punktem A' jest rzutem krawędzi a .

Kąty AB_1A' i AC_1A' są odpowiednio równe kątom dwuściennym B i C , albowiem proste $A'B_1$ i AB_1 są prostopadłe do krawędzi b , proste zaś $A'C_1$ i AC_1 są prostopadłe do krawędzi c . Prawdziwe wielkości tych kątów otrzymamy, kreśląc kłady $(A_1)A'B_1$ i $(A_2)A'C_1$ trójkątów AB_1A' i AC_1A' .

Aby wyznaczyć kąt dwuścienny A , leżący naprzeciw kąta krawędziowego α , poprowadźmy płaszczyznę π , prostopadłą do krawędzi a ; ślad π_h tej płaszczyzny na płaszczyźnie rysunku jest prostopadły do rzutu a' .

Wyprowadźmy następnie z punktów M i N , w których ślad π_h przecina się z krawędziami b i c proste MP_1 i NP_2 odpowiednio prostopadłe do promieni a_1 i a_2 i wykreślmy trójkąt $MN(P)$, którego boki równe są odcinkom MN, MP_1 i NP_2 , to kąt leżący naprzeciw boku MN jest równy kątowi dwuściennemu A .

U w a g a. Wyznaczenie kątów krawędziowych α, β, γ kąta bryłowego trójściennego $W(a, b, c)$, którego kąty dwuścienne A, B i C są dane, można sprowadzić do powyższego zagadnienia.

Jakoż, kąty krawędziowe α_1, β_1 i γ_1 kąta bryłowego biegunowego $W_1(a_1, b_1, c_1)$ są odpowiednio równe $(180^\circ - A), (180^\circ - B), (180^\circ - C)$ (art. 3.), jeżeli tedy wyznaczymy kąty dwuścienne A_1, B_1, C_1 utworu $W_1(a_1, b_1, c_1)$, natenczas $(180^\circ - A_1), (180^\circ - B_1), (180^\circ - C_1)$ będą odpowiednio równe kątom krawędziowym α, β, γ .

6. Zagadnienie: Dane są dwa kąty krawędziowe α i β a nadto kąt dwuścienny C kąta bryłowego $W(a, b, c)$ wyznaczyć kąt krawędziowy γ i kąty dwuścienne A i B (rys. 207.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że kąt krawędziowy α leży na płaszczyźnie rysunku i poprowadźmy przez wierzchołek W promień (a_2) nachylony do krawędzi c pod kątem β , to takowy jest kładem krawędzi a na płaszczyznę rysunku, wykonanym około osi c .

Obierzmy następnie na prostej (a_2) dowolny punkt A_2 i obróćmy go około krawędzi c w ten sposób, aby się zeszedł po obrocie z punktem A leżącym na płaszczyźnie przesuniętej przez prostą c i nachylonej do płaszczyzny rysunku pod kątem C , natenczas prosta łącząca wierzchołek W z punktem A jest krawędzią a danego kąta bryłowego.

Rzut A' punktu A leży na prostej A_2C_1 wyprowadzonej z punktu A_2 prostopadłe do krawędzi c , w odległości od tejże krawędzi równej przyprostokątnej C_1A' trójkąta $(A_2)A'C_1$, którego kąt przyległy do tej przyprostokątnej, równy jest kątowi dwuściennemu C , a którego przeciwprostokątna równa jest odcinkowi C_1A_2 .

Jeżeli wykonamy kład płaszczyzny przesuniętej przez krawędzie a i b , na płaszczyznę rysunku, natenczas kład A_1 punktu A , leżąc będzie na prostej, wyprowadzonej z rzutu A' prostopadłe do krawędzi b , w odległości od wierzchołka W równej odcinkowi WA_2 . Promień WA_1 jest kładem krawędzi; kąt zatem zawarty między prostymi b i WA_1 jest równy kątowi krawędziowemu γ .

Kąty dwuścienne A i B wyznaczamy w sposób wyłożony w art. 5.

Uwaga: Wyznaczenie kąta dwuściennego C i kątów krawędziowych α i β kąta bryłowego $W(a, b, c)$ którego kąt krawędziowy γ i kąty dwuścienne A i B są dane, można sprowadzić na zasadzie własności kąta bryłowego biegunowego do powyższego zagadnienia.

7. Zagadnienie: Dane są kąty krawędziowe α i β a nadto kąt dwuścienny B kąta bryłowego $W(a, b, c)$ wyznaczyć kąt krawędziowy γ i kąty dwuścienne A i C (rys. 208.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że kąt krawędziowy α , leży na płaszczyźnie rysunku i poprowadźmy przez wierzchołek W prostą (a_2) nachyloną do krawędzi c pod kątem β , to takowa jest kładem krawędzi a , wykonanym około osi c . Przesuńmy przez prostą b płaszczyznę π , nachyloną do płaszczyzny rysunku pod kątem B i wyznaczmy proste a_1 i a_2 , podług których ta płaszczyzna przecina stożek Σ powstały przez obrót prostej (a_2) około krawędzi c , to natenczas otrzymamy krawędzie dwóch kątów bryłowych trójsięciennych $W(a_1, b, c)$ i $W(a_2, b, c)$ czyniącym zadość warunkom zagadnienia.

Celem wyznaczenia owych krawędzi, poprowadźmy płaszczyznę π^1 , prostopadłą do prostej c , i wyznaczmy koło k , podług którego płaszczyzna ta przecina stożek Σ a nadto prostą d , podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się; wyznaczmy następnie punkta A_1 i A_2 w których koło k przecina się z prostą d , to proste WA_1 i WA_2 schodzą się z krawędziami a_1 i a_2 .

Koło (k) zakreślone ze środka C_1 promieniem C_1P jest kładem koła k , na płaszczyznę rysunku.

Aby wyznaczyć prostą d podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się, poprowadźmy płaszczyznę π^2 prostopadłą do krawędzi b i wyznaczmy

proste B_2D i DD' , podług których płaszczyzna π^2 przecina się z płaszczyznami π i π^1 to punkt przecięcia się D tych prostych leży na prostej d .

Kłady $B_2(D)$ i $D'(D)$ prostych B_2D i $D'D$, wykonane około śladu π^2 , otrzymamy, prowadząc z punktu przecięcia się B_2 prostych π^2 i b , prostą nachyloną do śladu π^2 pod kątem B , a z punktu przecięcia się D' śladów π^1 i π^2 prostą, prostopadłą do śladu π^2 .

Odcinek $(D)D'$ jest równy odległości punktu D od płaszczyzny rysunku. Jeżeli tedy odmierzymy na prostej wyprowadzonej z punktu D' prostopadłe do śladu π^1 odcinek $D'(D_1)$ równy odcinkowi $(D)(D')$ i połączmy punkt (D_1) z punktem B_1 , w którym ślad π^1 przecina się z krawędzią b , natenczas otrzymamy kład (d) prostej d , wykonany około osi π^1 . Łącząc tedy wierzchołek W z rzutami A'_1 i A'_2 punktów (A_1) i (A_2) , w których prosta (d) przecina się z kołem (k) otrzymamy rzuty krawędzi a_1 i a_2 .

Kąty krawędziowe γ_1 i γ_2 , jakoteż kąty dwuścienne A_1 i A_2 tudzież C_1 i C_2 wyznaczamy w sposób wyłożony w art. 5. i 6.

Uwaga. Wyznaczenie kąta dwuściennego B i kątów krawędziowych α i β kąta bryłowego trójsięciennego $W(a, b, c)$, którego kąt krawędziowy β i kąty dwuścienne A i B są dane, można sprowadzić na zasadzie własności kąta bryłowego biegunowego do powyższego zagadnienia.

8. Zagadnienie: Dane są kąty dwuścienne B i C a nadto kąt krawędziowy α kąta bryłowego trójsięciennego $W(a, b, c)$, wyznaczyć kąt dwuścienny A i kąty krawędziowe β i γ (rys. 209.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy podobnie jak przy rozwiązaniu zagadnień poprzednich, że kąt krawędziowy α leży na płaszczyźnie rysunku i przesunijmy przez krawędzie b i c płaszczyzny (b, a) i (c, a) , nachylone odpowiednio do płaszczyzny rysunku pod kątami B i C , to takowe przecinają się podług krawędzi a danego kąta bryłowego. Aby tę krawędź wyznaczyć, poprowadźmy płaszczyzny π^1 i π^2 , odpowiednio prostopadłe do krawędzi b i c i wykreślmy w kładach tych płaszczyzn kąty $(M)B_1M'=B$ i $(N)C_1N'=C$; wyznaczmy następnie na ramionach $B_1(M)$ i $C_1(N)$ punkta (M) i (N) , których odległości od śladów π^1 i π^2 są równe dowolnemu odcinkowi i sprowadźmy płaszczyzny π^1 i π^2 do pierwotnego położenia, to rzuty M' i N' punktów M i N leżą odpowiednio na śladach π^1 i π^2 . Jeżeli tedy przesuniemy przez punkta M i N płaszczyznę, równoległą do płaszczyzny rysunku, natenczas ta płaszczyzna przecina się z płaszczyznami (b, a) i (c, a) podług prostych m i n odpowiednio równoległych do krawędzi b i c ; rzuty zatem m' i n' przechodzą odpowiednio przez M' i N' i są równoległe do prostych b i c .

Łącząc tedy wierzchołek W z punktem przecięcia się P' prostych m' i n' otrzymamy rzut a' krawędzi a .

Celem wyznaczenia kąta krawędziowego β , poprowadźmy przez dowolny punkt A' rzutu a' prostą $A'C_2$ prostopadłą do krawędzi c i wykreślmy trójkąt prostokątny $A'C_2(A_1)$, którego kąt przyległy do prostokątnej $A'C_2$ równy jest kątowi dwuściennemu C , odmierzymy następnie na prostej $A'C_2$ odcinek C_2A_1 , równy przeciwprostokątnej $C_2(A_1)$ i połączmy wierzchołek W z punktem A_1 , to kąt zawarty między krawędzią c i prostą WA_1 jest równy kątowi krawędziowemu β .

Podobnie wyznaczamy kąt γ a kąt dwuścienny A otrzymamy w sposób wyłożony w art. 5.

9. Zagadnienie: Dane są kąty dwuścienne A i B a nadto kąt krawędziowy α kąta bryłowego $W(a, b, c)$ wyznaczyć kąt dwuścienny C i kąty krawędziowe β i γ (rys. 210.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy płaszczyznę kąta krawędziowego γ , wprowadź na razie nieznanego za płaszczyznę rysunku, a dowolną prostą WB_1 za krawędź b kąta bryłowego i poprowadźmy przez wierzchołek W prostą (c) nachyloną do b pod kątem α , to takowa jest kładem krawędzi c , wykonanym około osi b .

Przesuńmy następnie przez krawędź b płaszczyznę (b, c) nachyloną do płaszczyzny rysunku pod kątem B , a przez krawędź c płaszczyznę (c, a) nachyloną do tejże płaszczyzny pod kątem A , to takowe tworzą z płaszczyzną rysunku dany kąt bryłowy trójsienny.

Celem wyznaczenia krawędzi a , obierzmy na krawędzi c dowolny punkt P i poprowadźmy przezeń proste, nachylone do płaszczyzny rysunku pod kątem A , to takowe są tworzącymi stożka obrotowego Σ , którego przekrój płaszczyzną rysunku jest kołem. Środek tego koła schodzi się z rzutem P' punktu P , a promień jest równy przyprostokątnej trójkąta, którego jedna przyprostokątna równa jest odległości punktu P od płaszczyzny rysunku, a którego kąt do tej przyprostokątnej przyległy równy jest $(90^\circ - A)$.

Jeżeli tedy poprowadzimy przez punkt W styczne a_1 i a_2 do koła k , natenczas otrzymamy krawędzie kątów bryłowych, trójsiennych $W(a_1, b, c)$ i $W(a_2, b, c)$ czyniących zadość warunkom zagadnienia.

10. Zagadnienie: Mając dane trzy kąty dwuścienne A, B i C kąta bryłowego trójsiennego, wyznaczyć kąty krawędziowe.

Rozwiązanie: Uważajmy płaszczyznę kąta krawędziowego γ za płaszczyznę rysunku a dowolną prostą leżącą na tej płaszczyźnie za krawędź a , kąta bryłowego i przesunijmy przez prostą a płaszczyznę π^1 , nachyloną do płaszczyzny rysunku pod kątem A , a przez dowolny punkt płaszczyzny π^2 , nachyloną odpowiednio do płaszczyzn γ i π^1 pod kątami B i C , to płaszczyzny γ, π^1 i π^2 , wyznaczają kąt bryłowy, którego kąty dwuścienne równe są kątom A, B i C .

Położenie płaszczyzny π^1 jest wyznaczone, chodzi tedy o wyznaczenie płaszczyzny π^2 . Obierzmy w tym celu dowolny punkt P , którego położenie wyznaczają rzut P' i odległość $P(P)$ od płaszczyzny rysunku i przesunijmy przezeń proste nachylone do płaszczyzn γ i π^1 pod kątami $(90^\circ - B)$ i $(90^\circ - C)$ natenczas otrzymamy dwa stożki obrotowe Σ_1 i Σ_2 , przecinające się podług tworzących m i n , nachylonych odpowiednio do płaszczyzn γ i π^1 pod kątami $(90^\circ - B)$ i $(90^\circ - C)$. Płaszczyzny tedy prostopadłe do prostej m lub n są nachylone do płaszczyzny γ pod kątem B , a do płaszczyzny π^1 pod kątem C . Aby otrzymać tworzące m i n , zakresłmy z punktu P promieniem równym odcinkowi $(P)D_1 = (P)P' \cos B$ kulę K , to koło k zakresłone z rzutu P' promieniem $PD_1 = (P)D_1 \sin B$ jest krzywą, podług której te powierzchnie Σ_1 i K przenikają się.

Wyprowadźmy następnie z punktu P , prostą prostopadłą do płaszczyzny π^1 i odmierzymy na niej odcinek $PD_2 = PD_1 \cos C$; przesunijmy następnie przez punkt D_2 płaszczyznę π^3 , równoległą do π^1 i zakresłmy z punktu D_2 promieniem równym odcinkowi $(P)D_1 \sin C$ koło k_1 , to takowe jest krzywą, podług której kula K przecina się ze stożkiem Σ_2 .

Koła k i k_1 przecinają się w punktach M i N , leżących na prostej π^3 , podług której płaszczyzny γ i π^3 przecinają się. Łącząc tedy punkt P' z punktami M i N otrzymamy rzuty m' i n' prostych m i n na płaszczyznę rysunku. Każda płaszczyzna tedy prostopadła do prostej m lub n , wyznacza z płaszczyznami γ i π^1 kąt bryłowy, czyniący zadość warunkom danego zagadnienia. — Przesuńmy n. p. przez rzut P' płaszczyznę π^2 , prostopadłą do prostej m ; ślad tej płaszczyzny na płaszczyźnie γ przechodzi przez punkt P' , jest prostopadły do rzutu m' i schodzi się z krawędzią b kąta bryłowego a punkt przecięcia się W prostych a i b jest wierzchołkiem tegoż kąta. Aby otrzymać krawędź c t. j. prostą, podług której płaszczyzny π^1 i π^2 przecinają się, poprowadźmy płaszczyznę π^4 , równoległą do płaszczyzny γ i wyznaczmy rzuty p' i q' prostych, podług których płaszczyzny π^1 i π^4 tudzież π^2 i π^4 przecinają się, to prosta łącząca punkt przecięcia się Q' prostych p' i q' jest rzutem krawędzi c .

11. Z rysunku 206. przedstawiającego rozwiązanie kąta bryłowego trójsiennego, którego kąty krawędziowe α, β i γ są dane, można w sposób nader prosty wyprowadzić zasadnicze wzory trygometrii sferycznej.

Jakoż przyjmijmy że:

$$WA_1 = WA_2 = 1 \text{ natenczas otrzymamy:}$$

$$C_1 A_2 = C_1(A_2) = \sin \beta, B_1 A_1 = B(A_1) = \sin \gamma,$$

$$A'(A_2) = C_1(A_2) \cdot \sin C = \sin \beta \cdot \sin C$$

$$A'(A_2) = B_1(A_1) \sin B = \sin \gamma \sin B$$

$$\text{a ponieważ } A'(A_2) = A'(A_1) \text{ przeto}$$

$$1) \sin \beta \sin C = \sin \gamma \sin B \text{ albo}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

Wyprowadźmy z punktu C_1 prostą $C_1 D$, prostopadłą do krawędzi b , a z punktu A' prostą $A' E$, równoległą do tej krawędzi, natenczas $WB_1 = WD + EA'$; atoli $WB_1 = \cos \gamma$, $WD = WC_1 \cos \alpha = \cos \beta \cos \alpha$, $EA' = C_1 A' \sin \alpha = C_1(A_2) \cos C \sin \alpha = \sin \alpha \sin \beta \cos C$, zatem:

$$2) \cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos C.$$

Ponieważ $DC_1 = DE + EC_1$ a $DC_1 = WC_1 \sin \alpha = \cos \beta \sin \alpha$, $DE = B_1 A' = B_1(A_1) \cos B = \sin \gamma \cos B$, $EC_1 = A' C_1 \cos \alpha = (A_2) C_1 \cos C \cos \alpha = \cos \beta \cos \alpha \cos C$ przeto:

$$3) \cos \beta \sin \alpha = \sin \beta \cos \alpha \cos C + \sin \gamma \cos B.$$

Jeżeli obie strony tego równania podzielimy przez $\sin \beta$ i za $\frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$ podstawimy $\frac{\sin C}{\sin B}$, natenczas otrzymamy:

$$4) \cot \beta \sin \alpha = \cos \alpha \cos C + \cot \gamma \sin C.$$

O rzutach wielościanów.

12. Część przestrzeni ograniczoną ze wszystkich stron wielokątami nazywamy wielościanem. Wielokąty owe nazywamy ścianami, boki tychże nazywamy krawędziami, a punkta, w których przynajmniej trzy krawędzie i trzy ściany wielościanu się schodzą, nazywamy wierzchołkami wielościanu.

Wielościan ograniczony wielokątem i trójkątami, których wierzchołki schodzą się w jednym punkcie nazywamy ostrosłupem. Ów wielokąt nazywamy podstawą a trójkąty ograniczające ostrosłup nazywamy ścianami bocznymi.

Jeżeli podstawa jest wielokątem foremnym, a prosta łącząca środek tegoż z przeciwległym wierzchołkiem ostrosłupa, jest prostopadła do płaszczyzny podstawy, natenczas powiadamy, że ostrosłup jest prosty.

Wielością ograniczony dwoma wielokątami przystającymi, których płaszczyzny są równoległe i równoległobokami, nazywamy graniastosłupem.

Owe wielokąty nazywamy podstawami, a równoległoboki nazywamy ścianami bocznymi. Graniastosłup, którego podstawy są równoległobokami, nazywamy równoległością, a w szczególności równoległością, prostokątnym, jeżeli wszystkie ściany tegoż są prostokątami.

13. Zagadnienie: Wykreślić rzut środkowy ostrosłupa, którego podstawa $ABCD$ leży na płaszczyźnie $\pi^1(t_1, z_1)$ a którego wierzchołek W leży na prostej $l(T, Z')$ (rys. 211.).

Rozwiązanie: Połączmy punkt W z A', B', C' i D' to proste łączące są rzutami krawędzi bocznych danego ostrosłupa. Odcinki $A'B', B'C', W'C'$ i $W'A'$ ograniczają rzut ostrosłupa, płaszczyzny tedy rzucające krawędzie podstawowe AB i BC , jakoteż płaszczyzny rzucające krawędzie boczne WA i WC stykają się niejako z ostrosłupem $W(A, B, C, D)$ owe krawędzie są zatem widzialne dla oka umieszczonego w środku rzutów.

Z położenia punktów B' i D' względem śladu tłowego t_1 płaszczyzny podstawowej π^1 widoczna, że punkt D leży bliżej oka niż B , że zatem ściany WAD i WDC zasłaniają widok krawędzi WB .

Uwaga: Rzuty krawędzi widzialnych, przedstawiamy zapomocą linii pełnych, rzuty zaś krawędzi niewidzialnych przedstawiamy zapomocą linii punktowanych.

14. Zagadnienie: Wykreślić rzuty prostokątne ostrosłupa pięciokątnego prostego o danej wysokości „ h “, którego podstawa leży na płaszczyźnie $\pi(\pi_h, \pi_e)$ a którego jedna krawędź boczna jest równoległa do płaszczyzny pionowej rzutów.

Rozwiązanie: Poprowadźmy prostą $l(l', l'')$ równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów i wyznaczmy rzut prostokątny $l_1(l', l'')$ prostej l na płaszczyznę π , a nadto punkt $A(A', A'')$, w którym proste l i l_1 przecinają się; wyznaczmy następnie kąt α , zawarty między prostymi l i l_1 i odmierzymy na prostej l od punktu A odcinek $WA = h \sin \alpha$ to punkt $W(W', W'')$ jest wierzchołkiem ostrosłupa, rzut prostokątny $W_1(W', W'')$ tegoż na płaszczyznę π jest środkiem pięciokąta podstawowego, a odcinek zawarty między punktami W_1 i A_1 jest promieniem koła, opisanego na podstawie.

Jeżeli tedy wyznaczmy w układzie płaszczyzny π na płaszczyznę poziomą rzutów prawdziwą wielkość $(A)(B)(C)(D)(E)$ wielokąta podstawowego a następnie rzuty $A'B'C'D'E'$ i $A''B''C''D''E''$, i połączmy W' z $A'B'C'D'E'$ a W'' z $A''B''C''D''E''$ natenczas otrzymamy rzuty żądanego ostrosłupa.

15. Zagadnienie: Wyznaczyć środek i promień kuli opisanej na ostrosłupie trójsściennym $W(ABC)$, którego podstawa ABC leży na płaszczyźnie poziomej rzutów (rys. 212).

Rozwiązanie: Środek M kuli opisanej na ostrosłupie trójsściennym $W(ABC)$ jest punktem, którego odległości od wierzchołków A, B i C są równe. Przez środek M przechodzi tedy sześć płaszczyzn, które dzielą na dwie równe części krawędzie ostrosłupa i są do tychże prostopadłe.

Przesuńmy przez punkta NP i Q dzielące na dwie równe części krawędzie podstawowe BC, CA i AB , płaszczyzny π^1, π^2 i π^3 odpowiednio prostopadłe do prostych BC, CA i AB , to takowe przecinają się podług prostej l na której środek M leży.

Punkt przecięcia się l śladów poziomych π^1, π^2 i π^3 jest środkiem koła k opisanego na trójkącie ABC , które leży na kuli opisanej K , a proste łączące punkt W z punktami koła k , są cięciwami tejże kuli.

Poprowadźmy tedy przez wierzchołek W cięciwę WD , równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów i podzielmy rzut $W'D''$ na dwie równe części; poprowadźmy następnie przez punkt dzielący E'' prostą π^4 , prostopadłą do $W'D''$, to takowa jest śladem pionowym płaszczyzny, przesuniętej przez punkt E , prostopadła do cięciwy WD kuli K ; punkt przecięcia się zatem M'' prostych l'' i π^4 jest rzutem pionowym środka kuli opisanej na ostrosłupie $W(ABC)$.

Prawdziwą wielkość $M''A''$, promienia tej kuli otrzymamy obracając n. p. prostą MA , w ten sposób, aby była równoległa do płaszczyzny pionowej rzutów.

16. Zagadnienie: W dany ostrosłup trójsścienny $W(ABC)$, którego podstawa leży na płaszczyźnie poziomej rzutów, wpisać kulę (rys. 213.).

Rozwiązanie: Środek kuli K wpisanej w ostrosłup trójsścienny jest punktem, znajdującym się w równych odległościach od czterech ścian tegoż.

Miejsce geometryczne punktów, równo oddalonych od dwu ścian, składa się z dwu płaszczyzn, prostopadłych, które przechodzą przez wspólną krawędź tychże i dzielą dwie równe części kąty, między nimi zawarte. Środek tedy kuli, wpisanej w ostrosłup $W(ABC)$ jest w punkcie przecięcia się sześciu płaszczyzn, przesuniętych przez krawędzie WA, WB, WC, AB, BC, CA i dzielących kąty dwuściennego tego ostrosłupa na dwie równe części. Atoli trzy z tych płaszczyzn, które nie przechodzą przez tensam wierzchołek wystarczają do wyznaczenia środka M .

Przesuńmy tedy przez wierzchołek W płaszczyznę π^1 , prostopadłą do krawędzi podstawowej AB , i wyznaczmy proste WE i $W'E$, podług których ta płaszczyzna przecina się ze ścianami WAB i ABC . Obróćmy następnie płaszczyznę π^1 i prostą WE około prostej WW' , w ten sposób, aby były równoległe do płaszczyzny pionowej rzutów, to natenczas rzut $W'E''$, tworzy z osią x kąty równe kątom nachylenia płaszczyzn WAB i ABC .

Podzielmy kąty zawarte między prostymi x i $W'E''$, na dwie równe części i wyznaczmy punkta F_1 i G_1 , w których proste dzielące przebiegają płaszczyznę π , poprowadzoną równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów, sprowadźmy następnie płaszczyznę π^1 oraz punkta F_1 i G_1 do położenia pierwotnego WEW' i poprowadźmy przez takowe proste c_1 i c_2 równoległe do krawędzi AB , to płaszczyzny, przesunięte przez krawędź AB i przez proste c_1 i c_2 dzielą na dwie równe części kąty nachylenia ścian WAB i ABC .

W podobny sposób otrzymamy proste b_1 i b_2 , które wyznaczają z krawędzią AC , płaszczyzny, dzielące na dwie równe części kąty nachylenia ścian WAC i ABC , jakoteż proste a_1 i a_2 , które wyznaczają z krawędzią BC płaszczyzny dzielące na dwie równe części kąty nachylenia ścian WBC i ABC .

Płaszczyzny 1. $(BC, a_1), (AC, b_1)$ i (AB, c_1)
2. $(BC, a_1), (AC, b_1)$ i (AB, c_2)

3. $(BC, a_1), (AC, b_2)$ i (AB, c_1)
4. $(BC, a_1), (AC, b_2)$ i (AB, c_2)
5. $(BC, a_2), (AC, b_2)$ i (AB, c_2)
6. $(BC, a_2), (AC, b_2)$ i (AB, c_1)
7. $(BC, a_2), (AC, b_1)$ i (AB, c_2)
8. $(BC, a_2), (AC, b_1)$ i (AB, c_1)

przecinają się w ośmiu punktach, których odległości od ścian ostrosłupa $W(ABC)$ są równe; te punkta zatem są środkami kul, stykających się ze ścianami tegoż ostrosłupa.

17. Zagadnienie: Wykreślić rzut środkowy graniastosłupa prostego, którego podstawy są kwadratami leżącymi na płaszczyznach równoległych $\pi(t, z')$ i $\pi'(t_1, z'_1)$ (rys. 214.).

Rozwiązanie: Wyznamy ślad zbiegu Z^{90} prostych prostopadłych do płaszczyzny π , i wykreślimy w kładzie płaszczyzny π na tło kwadrat (1), (2), (3), (4) następnie rzut środkowy $1'2'3'4'$ tego kwadratu to proste $1'Z^{90}$, $2'Z^{90}$, ... są rzutami krawędzi bocznych graniastosłupa.

Rzuty $1', 2'$ i $5', 6'$, — $2', 3'$ i $6', 7'$ — ... krawędzi podstawowych, które leżą na tych samych ścianach bocznych graniastosłupa, przecinają się w punktach leżących na śladzie zbiegu z' .

18. Zagadnienie: Wykreślić rzuty prostokątne równoległościanu prostokątnego, którego podstawa $ABCD$ leży na płaszczyźnie $\pi(\pi_h, \pi_v)$, jeżeli krawędzie AB, AC i AE przechodzące przez punkt A są odpowiednio równe odcinkom a, b i c , a bok AB podstawy nachylony jest do śladu π_h pod kątem α (rys. 215.).

Rozwiązanie: Wyznamy kład (A) punktu A na płaszczyznę poziomą rzutów i poprowadzimy przezeń prostą $(A)H_1$, nachyloną do śladu π_h pod kątem α , a nadto prostą $(A)D$, prostopadłą do prostej $(A)H_1$; odmierzymy następnie na prostych $(A)H_1$ i $(A)D$ od punktu (A) odcinki $(A)(B)$ i $(A)(D)$ odpowiednio równe odcinkom a i b i sprowadzimy płaszczyznę π do położenia pierwotnego, to natenczas otrzymamy rzuty trzech wierzchołków A, B, D podstawy $ABCD$ równoległościanu; rzuty zatem punktu C z łatwością można wyznaczyć.

Jeżeli tedy wyprowadzimy z punktów A, B, C i D proste, prostopadłe do płaszczyzny π , i odmierzymy na tychże odcinki AE, BF, CG, DH , równe odcinkowi C , natenczas otrzymamy wierzchołki E, F, G, H , drugiej podstawy równoległościanu.

W danym przypadku są rzuty poziome krawędzi $AD, DC, CG, DH, AE, EF, FG, GH, HE$ i rzuty pionowe krawędzi $AD, AB, BF, AE, DH, EF, FG, GH, HE$ widzialne, rzuty poziome zaś krawędzi AB, BC, BF i rzuty pionowe krawędzi BC, CD, CG są niewidzialne.

Zagadnienie: Wykreślić rzuty aksonometryczne dimetryczne graniastosłupa, którego podstawy są kwadratami, leżącymi na płaszczyznach równoległych do płaszczyzny OZY , a którego krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny OXY pod kątem α a do płaszczyzny OZY pod kątem β .

O rzutach wielościanów foremnych.

Zagadnienie 19.: Wykreślić rzuty izometryczne czworościanu, którego jedna ściana leży na płaszczyźnie OXY , a którego jedna krawędź AB jest równoległa do osi OY (rys. 216.).

Rozwiązanie: Odmierzmy na prostej poprowadzonej równolegle do osi O_aY , odcinek A_aB_a , aksonometrycznie równy krawędzi AB i poprowadzmy przez punkt M_a , który dzieli ów odcinek na dwie równe części prostą M_aC_a równoległą do osi O_aX ; odmierzymy następnie na tej prostej od punktu M_a odcinek M_aC_a równy aksonometrycznie przyprostokątnej trójkąta, którego jedna przyprostokątna równa jest odcinkowi AM , a którego przeciwprostokątna jest równa odcinkowi AB , to punkt C_a jest rzutem izometrycznym wierzchołka C ściany ABC .

Punkt przecięcia się D'_a prostej M_aC_a z prostą N_aB_a łączącą rzut B_a z punktem N_a , który dzieli na dwie równe części odcinek A_aC_a , jest rzutem izometrycznym D'_a środka D' ściany ABC . Jeżeli tedy wyprowadzimy z punktu D'_a prostą D'_aD_a równoległą do osi O_aZ i odmierzymy na tejże od punktu D'_a odcinek D'_aD_a aksonometrycznie równy przyprostokątnej trójkąta, którego jedna przyprostokątna równa jest odcinkowi MD' a którego przeciwprostokątna równa jest odcinkowi MC , natenczas otrzymamy rzut D_a czwartego wierzchołka czworościanu.

20. Zagadnienie: Wykreślić rzut środkowy sześciianu, którego jedna ściana leży na płaszczyźnie $\pi(t, z')$, prostopadłej do tła (rys. 217.).

Rozwiązanie: Wyznamy kład (1)(2)(3)(4) a następnie rzut $1'2'3'4'$ kwadratu leżącego na płaszczyźnie π i poprowadzmy przez rzuty $1', 2', 3', 4'$, jakoteż przez ślad tłowy T_1 prostej 23 proste $1'5', 2'6', 3'7', 4'8'$ i T_1A_1 prostopadłe do śladów t i z' ; odmierzymy następnie na prostej T_1A_1 odcinek równy krawędzi sześciianu i połączmy punkt A_1 ze śladem zbiegu Z'_1 prostej 23 , to prosta $A_1Z'_1$ przecina się z prostymi, wyprowadzonymi z punktów $2'$ i $3'$ w rzutach $6'$ i $7'$ wierzchołków 6 i 7 sześciianu. Rzuty $8'$ i $5'$ wierzchołków 8 i 5 otrzymamy z uwagi, że punkta $5, 6, 7$ i 8 leżą na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny $\pi(t, z')$.

21. Zagadnienie: Wyznaczyć rzuty prostokątne ośmiościanu, którego jedna ściana $A_1A_2A_3$ leży na płaszczyźnie poziomej rzutów (rys. 218.).

Rozwiązanie: Przez krawędzie A_1A_2, A_2A_3 i A_3A_1 przechodzą trójkąty równoboczne $A_1A_2B_3, A_2A_3B_1$ i $A_3A_1B_2$ nachylone do płaszczyzny poziomej rzutów pod kątami równymi. Punkta B_1, B_2 i B_3 są wierzchołkami ściany ośmiościanu, która leży na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny poziomej rzutów, odległości bowiem punktów B_1, B_2 i B_3 od tej płaszczyzny są równe.

Rzuty poziome B'_1, B'_2 i B'_3 leżą na prostych, odpowiednio prostopadłych do krawędzi A_2A_3, A_3A_1 i A_1A_2 , które nadto dzielą te krawędzie na dwie równe części; punkta tedy $A_1, B'_3, A_2, B'_1, A_3$ i B'_2 są wierzchołkami sześcioboku foremnego, który ogranicza rzut poziomy ośmiościanu danego.

Odległość ścian A_1, A_2, A_3 i B_1, B_2, B_3 równa jest przyprostokątnej trójkąta, którego jedna przyprostokątna jest równa rzutom $A_1B'_3, A_2B'_1, A_3B'_2$ krawędzi A_1B_3, A_2B_1, A_3B_2 a którego przeciwprostokątna równa jest prawdziwej wielkości krawędzi ośmiościanu.

Prosta tedy π_v , poprowadzona równolegle do osi x w odległości od tejże osi, równej odcinkowi B'_1W jest śladem pionowym płaszczyzny, na której ściana B_1, B_2, B_3 leży. Jeżeli zatem wyznaczymy rzuty pionowe B''_1, B''_2, B''_3 i połączymy B''_1 z A''_2 i A''_3, B''_2 z A''_3 i A''_1, B''_3 z A''_1 i A''_2 natenczas otrzymamy rzuty pionowe sześciu krawędzi ośmiościanu.

22. **Zagadnienie:** Wykreślić rzut aksonometryczny izometryczny, ośmiościanu, którego jedna oś jest równoległą do osi OZ układu trzech płaszczyzn prostopadłych (rys. 219.).

Rozwiązanie: Wykreślimy w układzie płaszczyzny OXY na płaszczyźnie aksonometrii kwadrat (1)(2)(3)(4) a nadto rzut aksonometryczny $1_a, 2_a, 3_a, 4_a$ i przesunemy tenże w kierunku osi O_aZ w ten sposób, aby się zeszedł z równoległobokiem $A_aB_aC_aD_a$, poprowadźmy następnie przez punkt przecięcia się M_a przekątnych A_aC_a i B_aD_a , prostą, równoległą do osi O_aZ i odmierzymy na niej odcinki M_aE_a i M_aF_a aksonometrycznie równe przyprostokątnej trójkąta, którego jedna przyprostokątna jest równa połowie przekątnej kwadratu (1)(2)(3)(4), a którego przeciwprostokątna równa jest krawędzi ośmiościanu, to punkta E_a i F_a są rzutami izometrycznymi dwu wierzchołków ośmiościanu. Łącząc tedy punkta E_a i F_a z punktami A_a, B_a, C_a i D_a otrzymamy rzut aksonometryczny izometryczny ośmiościanu. Rzuty aksonometryczne poziome krawędzi $AB, BC, \dots AF, AE, \dots$ schodzą się z bokami i z przekątnymi kwadratu $1_a2_a3_a4_a$.

23. **Zagadnienie:** Wykreślić rzuty prostokątne dwunastościanu, którego jedna ściana $A_1A_2A_3A_4A_5$ leży na płaszczyźnie poziomej rzutów (rys. 220.).

Rozwiązanie: Przesunemy przez boki $A_1A_2, A_2A_3, \dots$ pięciokąta danego, pięciokąty $A_1B_1C_1B_2A_2, A_2B_2C_2B_3A_3, \dots$ i to w ten sposób, aby przy wierzchołkach $A_1, A_2, \dots$ powstały kąty bryłowe trójsienne, to natenczas wierzchołki $B_1B_1B_3, \dots$ znajdujące się na przekątnych $B_1B_2, B_2B_3, \dots$, odpowiednio równoległych do boków $A_1A_2, A_2A_3, \dots$, leżą na płaszczyźnie, równoległej do płaszczyzny poziomej rzutów i wyznaczają pięciokąt homotetyczny z wielokątem $A_1A_2A_3A_4A_5$. Łącząc tedy środek O' rzutu $A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5$ z wierzchołkami $A'_1A'_2, \dots$, otrzymamy proste, na których rzuty poziome B'_1, B'_2, B'_3, B'_4 i B'_5 leżą. Długość boków pięciokąta $B_1B_2B_3B_4B_5$ równa jest przekątnej pięciokąta $A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5$ równoległej do jednego z boków, a więc n. p. przekątnej $A'_3A'_5$.

Jeżeli tedy poprowadzimy przez punkta A'_3 i A'_5 proste A_3P_2 i A_5P_1 , prostopadłe do boku $A'_1A'_2$, natenczas punkta przecięcia się prostych $O'A'_1$ i A'_5P_1 tudzież $O'A'_2$ i A'_3P_2 są rzutami poziomymi B'_1 i B'_2 wierzchołków B_1 i B_2 pięciokąta $B_1B_2B_3, \dots$ Wierzchołki C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 wyznaczają również pięciokąt foremny, leżący na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny poziomej rzutów, którego boki są równe bokom pięciokąta $B_1, B_2, \dots$, rzuty poziome przeto $B'_1, C'_1, B'_2C'_2, \dots$ są wierzchołkami dziesięciokąta foremnego, który ogranicza rzut poziomy dwunastościanu.

Ściana górna $D_1D_2D_3D_4D_5$ dwunastościanu, leży na płaszczyźnie, równoległej do płaszczyzny poziomej rzutów a rzuty poziome $D'_1, D'_2, D'_3, \dots$ wierzchołków $D_1D_2D_3, \dots$ dzielą odpowiednio na dwie równe części łuki $\widehat{A'_1A'_2}, \widehat{A'_2A'_3}, \widehat{A'_3A'_4}, \dots$ koła opisanego na pięciokącie $A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5$. Odległość płaszczyzny π^1 , na której wielokąt $B_1B_2, \dots$ leży od płaszczyzny poziomej rzutów, jest równa przyprostokątnej a trójkąta, którego jedna przyprostokątna równa jest rzutowi $A'_1B'_1$, krawędzi A_1B_1 , a którego przeciwprostokątna równa jest prawdziwej wielkości tej krawędzi. Odległość zaś płaszczyzny π^1 od płaszczyzny π^2 na której wielokąt $C_1C_2, \dots$ leży, równa jest przyprostokątnej b trójkąta, którego jedna przyprostokątna równa jest rzutowi $B'_3C'_3$, krawędzi

B_3C_3 , a którego przeciwprostokątna równa jest prawdziwej wielkości krawędzi dwunastościanu.

Odległość ściany górnej $D_1D_2, \dots$ od płaszczyzny π^2 jest równa odcinkowi a .

Jeżeli tedy poprowadzimy proste π^1, π^2 i π^3 , równoległe do osi rzutów w odległościach od tejże osi, równych odpowiednio odcinkom $a, a+b$ i $2a+b$, natenczas otrzymamy ślady pionowe płaszczyzn π^1, π^2 i π^3 , z którymi rzuty pionowe wielokątów $B_1B_2, \dots C_1C_2, \dots$ i $D_1D_2, \dots$ się schodzą.

24. **Zagadnienie:** Wykreślić rzuty prostokątne dwudziestościanu, którego jedna ściana $A_1A_2A_3$ leży na płaszczyźnie poziomej rzutów (rys. 221.).

Rozwiązanie: Wiadomo, że w każdym wierzchołku dwudziestościanu schodzi się pięć wierzchołków trójkątów równobocznych, które to trójkąty są ścianami bocznymi ostrosłupa pięciosiennego o podstawie foremnej.

Niech będą dane trzy takie ostrosłupy $B_1(A_2C_2D_1C_3C_3), B_2(A_3C_3D_2C_1A_1)$, i $B_3(A_1C_1D_3A_2C_2)$.

Zestawmy te ostrosłupy tak, aby jedna krawędź każdego z nich schodziła się z boki ściany $A_1A_2A_3$, i aby nadto po dwa boki podstaw owych ostrosłupów nakrywały się, to natenczas wierzchołki D_1D_2 i D_3 leżące na przeciw boków trójkąta $A_1A_2A_3$, wyznaczają trójkąt równoboczny, leżący na płaszczyźnie, równoległej do płaszczyzny poziomej rzutów a rzuty poziome $D'_1D'_2$ i D'_3 dzielą odpowiednio na dwie równe części łuki $\widehat{A'_3A'_2}, \widehat{A'_3A'_1}, \widehat{A'_2A'_1}$ koła, opisanego na trójkącie $A'_1A'_2A'_3$.

Rzuty $C'_1C'_2$ i C'_3 jakoteż B'_1, B'_2 i B'_3 wyznaczają trójkąty odpowiednio homotetyczne z trójkątami $A'_1A'_2A'_3$ i $D'_1D'_2D'_3$, a boki owych trójkątów są równe przekątnym podstaw ostrosłupów danych, równoległym do boków ściany $A'_1A'_2A'_3$.

Rzuty zatem $B'_1, C'_2, B'_3, C'_1, B'_2$ i C'_3 są wierzchołkami sześcioboku foremnego, który ogranicza rzut poziomy dwudziestościanu.

Odległości a, b i c płaszczyzny poziomej rzutów od płaszczyzny π^1 , na której punkta B_1, B_2 i B_3 leżą, płaszczyzny π^1 od płaszczyzny π^2 , na której wierzchołki C_1C_2 i C_3 leżą i płaszczyzny π^2 od płaszczyzny π^3 , na której leży ściana $D_1D_2D_3$, są odpowiednio równe przyprostokątnym trójkątów, których przeciwprostokątne są równe krawędziom dwudziestościanu, a których przyprostokątne są odpowiednio równe rzutom poziomym krawędzi A_2B_1, B_1C_2 i C_2D_1 .

Rzuty pionowe tedy $B''_1B''_2$ i $B''_3, C''_1C''_2$ i C''_3 i $D''_1D''_2$ i D''_3 leżą na prostych, równoległych do osi x , których odległości od tejże osi są odpowiednio równe odcinkom $a, a+b$, i $a+b+c$.

25. **Zagadnienie:** Wykreślić rzuty izometryczne dwudziestościanu, którego jedna oś jest równoległa do osi OZ .

Rozwiązanie: Krańce M i N osi dwudziestościanu są wierzchołkami dwu ostrosłupów pięciosiennych o podstawach foremnych $ABCDE$ i $FGHIK$, których płaszczyzny są prostopadłe do osi MN , a których odległości od punktów M i N równe są przyprostokątnej PT trójkąta APT , którego jedna przyprostokątna AT jest równa promieniowi koła, opisanego na pięciokącie $ABCDE$, a którego przeciwprostokątna AP równa jest krawędzi dwudziestościanu.

Długość osi MN jest równa przeciwprostokątnej PQ trójkąta, którego jedna przyprostokątna AP równa jest krawędzi dwudziestościanu, a którego kąt przyległy do tej przyprostokątnej jest równy kątowi trójkąta ATP , przyległemu do przyprostokątnej PT .

Wykreślmy tedy w kładzie płaszczyzny OXY na płaszczyznę aksonometrii dwa pięciokąty foremne, spółśrodkowe, w ten sposób ułożone, że wierzchołki jednego dzielą na dwie równe części łuki koła opisanego na tych wielokątach i odpowiadające bokom wielokąta drugiego, wyznaczmy następnie rzuty aksonometryczne $A'_a B'_a C'_a D'_a E'_a$ i $F'_a G'_a H'_a I'_a K'_a$ tych wielokątów, to punkta $A'_a, F'_a, B'_a, G'_a, C'_a, H'_a, D'_a, I'_a, E'_a, K'_a$ są wierzchołkami dziesięciokąta ograniczającego rzut aksonometryczny poziomy dwudziestościanu.

Wyprowadźmy z rzutu T_a środka T wielokątów $A, B, \dots FG \dots$ prostą $M_a N_a$ równoległą do osi $O_a Z$ i odmierzymy na niej odcinek $M_a N_a$ aksonometrycznie równy przeciwprostokątnej PQ trójkąta APQ a od punktów M_a i N_a odcinki $M_a S_a$ i $N_a V_a$, aksonometrycznie równe przyprostokątnej PT trójkąta ATP i poprowadźmy przez punkta S i V płaszczyzny, równoległe do płaszczyzny OXY , to na tych płaszczyznach leżą odpowiednio podstawy $ABCDE$ i $FGHIK$ ostrosłupów, stanowiących część dwudziestościanu, których wierzchołki schodzą się z końcami M i N osi.

Jeżeli tedy wyznaczmy rzuty aksonometryczne $A_a, B_a, C_a, \dots F_a G_a, \dots$ i połączymy punkt M_a z A_a, B_a, C_a, D_a, E_a , punkt N_a z F_a, G_a, H_a, I_a, K_a , punkt A_a z F_a i K_a , punkt B_a z F_a i $G_a \dots$ i t. d. natenczas otrzymamy rzut aksonometryczny dwudziestościanu.

O przekrojach wielościanów płaszczyznami.

26. Przekrój wielościanu płaszczyzną π jest wielokątem którego wierzchołki schodzą się z punktami przebicia krawędzi z płaszczyzną π , a którego boki są prostymi, podług których ta płaszczyzna przecina się ze ścianami wielościanu.

Aby tedy wykreślić przekrój wielościanu płaszczyzną π , należy, albo wyznaczyć punkta, w których krawędzie wielościanu ową płaszczyznę przebijają i połączyć te z nich, które leżą na tychsamych ścianach wielościanu, albo wyznaczyć proste, podług których płaszczyzna π przecina się ze ścianami wielościanu, uwzględniając jedynie odcinki tych prostych, zawarte między krawędziami wielościanu.

Przy rozwiązaniu zagadnień dotyczących przekrojów płaskich, łączymy najczęściej obie metody; taki sposób postępowania bowiem prowadzi najprędzej do celu.

27. Dwa przekroje ABC i $A_1 B_1 C_1$ ostrosłupa $W(ABC)$ płaszczyznami π i π^1 są wielokątami środkowo-kolineacyjnymi. Środek kolineacji schodzi się z wierzchołkiem W , a prosta t , podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się, jest osią kolineacji. Osi wzajemne schodzą się z prostymi, podług których płaszczyzny przesunięte przez wierzchołek W , równoległe do płaszczyzn π i π^1 przecinają się z płaszczyznami π^1 i π .

Dwa przekroje ABC i $A_1 B_1 C_1$ graniastoslupa płaszczyznami π i π^1 są wielokątami powinowatymi; kierunek powinowactwa schodzi się z kierun-

kiem krawędzi bocznych graniastoslupa, a prosta t , podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się, jest osią powinowactwa.

28. Rzuty $A'B'C'$ i $A_1 B_1 C_1$ przekroju ostrosłupa płaszczyznami π i π^1 z dowolnego punktu na dowolną płaszczyznę są środkowo kolineacyjne; rzut W' wierzchołka jest środkiem kolineacji, a rzut d' prostej d , podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się, jest osią kolineacji.

Rzuty równoległe osi wzajemnych dwu przekrojów płaskich ostrosłupa są osiami wzajemnymi rzutów tych przekrojów.

Rzutem środkowym zaś osi wzajemnych przekrojów ostrosłupa odpowiadają ślady zbiegu płaszczyzn przecinających, albowiem takowe są rzutami prostych, leżących w nieskończoności na płaszczyznach przecinających.

Rzuty równoległe dwu przekrojów $A'B'C'$ i $A_1 B_1 C_1$ graniastoslupa są powinowate, kierunek powinowactwa schodzi się z rzutem kierunku krawędzi bocznych a rzut d' prostej, podług której płaszczyzny ABC i $A_1 B_1 C_1$ przecinają się, jest osią powinowactwa. Rzuty środkowe dwu przekrojów graniastoslupa są środkowo kolineacyjne; środek kolineacji schodzi się ze śladem zbiegu krawędzi bocznych.

29. Zagadnienie: Dany jest rzut środkowy ostrosłupa $W(ABCD)$, którego podstawa leży na płaszczyźnie $\pi(tz')$, dana jest nadto płaszczyzna $\pi^1(t_1 z'_1)$; wykreślić rzut przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną π^1 (rys. 222.).

Rozwiązanie: Wyznaczymy prostą $d(T_1 Z'_1)$, podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się, a nadto rzut A'_1 punktu, w którym krawędź WA płaszczyznę π^1 przebiega, natenczas związek kolineacyjny zachodzący między rzutami przekrojów ostrosłupa danego płaszczyznami π i π^1 , jest wyznaczony; prosta $T_1 Z'_1$ jest osią, punkt W' jest środkiem, a rzuty A' i A'_1 są elementami odpowiednimi kolineacji.

Wierzchołki B'_1, D'_1 rzutu środkowego wielokąta przekroju $A_1 B_1 C_1 D_1$ otrzymamy, łącząc punkt A'_1 z punktami M' i N' , w których proste $A'B'$ i $A'D'$ przecinają się z osią kolineacji $T_1 Z'_1$ i wyznaczając punkta przecięcia się prostych $A'_1 M'$ i $W'B'$ tudzież $A'_1 N'$ i $W'D'$.

Rozwiązanie 2.: Wyznaczenie punktu przecięcia się krawędzi WA z płaszczyzną π^1 jest częstokroć połączone z trudnościami, zwłaszcza jeżeli ślady prostej WA leżą poza obrębem rysunku. W tym przypadku można wyznaczyć kolineację, zachodzącą między rzutami środkowymi przekrojów ostrosłupa $W(ABCD)$ płaszczyznami π i π^1 w sposób następujący.

Przesuniemy przez wierzchołek W płaszczyznę $\pi^2(t_2 z'_2)$, równoległą do płaszczyzny π , i wyznaczmy prostą $l(T_2, Z'_2)$, podług której płaszczyzny π^1 i π^2 przecinają się, to rzut środkowy T_2 i Z'_2 i ślad zbiegu z' płaszczyzny π są elementami odpowiednimi układów środkowo-kolineacyjnych, których podstawami są płaszczyzny π i π^1 .

Związek tedy zachodzący między rzutami $A'B'C'D'$ i $A_1 B_1 C_1 D_1$ przekrojów ostrosłupa $W(ABCD)$ płaszczyznami π i π^1 jest wyznaczony.

30. Dany jest ostrosłup $W(ABCD)$ którego podstawa leży na płaszczyźnie poziomej rzutów; wyznaczyć prawdziwą wielkość przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną $\pi(\pi_h \pi_v)$ nie kreśląc rzutów przekroju (rys. 224.).

Rozwiązanie: Podstawa $ABCD$ i przekrój $A_1 B_1 C_1 D_1$ ostrosłupa $W(ABCD)$ płaszczyzną π są wielokątami środkowo kolineacyjnymi. Ślad poziomy π_h płaszczyzny przecinającej jest osią kolineacji a oś wzajemna, od-

powiadająca prostej układu $A_1B_1C_1D_1$, leżącej w nieskończoności, schodzi się ze śladem poziomym π'_h płaszczyzny π' , przesuniętej przez wierzchołek W , równoległe do płaszczyzny π . Wykonajmy tedy kłady płaszczyzn π i π' na płaszczyznę poziomą rzutów, to kład $(A_1)(B_1)(C_1)(D_1)$ wielokąta przekroju $A_1B_1C_1D_1$ jest środkowo kolineacyjny z podstawą $ABCD$ ostrosłupa; środek kolineacji schodzi się z kładem (W) wierzchołka W , ślad π_h jest osią kolineacji a ślad π'_h jest osią wzajemną, która odpowiada prostej układu $(A_1)(B_1)(C_1)(D_1)$ leżącej w nieskończoności.

Punktowi przecięcia się R prostej AD ze śladem π'_h odpowiada w układzie $(A_1)(B_1)(C_1)(D_1)$ punkt R_1^∞ leżący w nieskończoności na prostej $(W)R$. Prostej AC odpowiada tedy prosta, poprowadzona przez punkt przecięcia się H_1 prostych AC i π_h równoległe do promienia $(W)R$.

Jeżeli zatem poprowadzimy promienie $(W)A$ i $(W)D$ natenczas punkta przecięcia się tychże z prostą $H_1R_1^\infty$ są kładami (A_1) i (D_1) wierzchołków A_1 i D_1 wielokąta przekroju. Kłady (B_1) i (C_1) wierzchołków B_1 i C_1 otrzymamy w podobny sposób.

31. Zagadnienie: Dany jest ostrosłup $W(ABC)$ w rzutach środkowych, którego podstawa leży na tle, dana jest nadto płaszczyzna $\pi^1(t_1z'_1)$, wyznaczyć przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną π^1 zapomocą zmiany środka rzutów (rys. 225.).

Rozwiązanie: Przesuńmy środek rzutów na prostej prostopadłej do śladu zniknięcia płaszczyzny π^1 w ten sposób, aby po przesunięciu środek rzutów leżał na płaszczyźnie π^1 , natenczas ślad zbiegu Z' prostej $l(TZ')$ na której wierzchołek W leży, przesunie się na prostej prostopadłej do śladów t_1 i z'_1 płaszczyzny π_1 i zbliży się do śladu tłowego t_1 o odcinek równy odległości prostych t_1 i z'_1 ; — zmieniony tedy rzut $^1W'$ wierzchołka W znajdować się będzie w punkcie przecięcia się prostej $^1Z'T$ z prostą W'^1W' , poprowadzoną przez pierwotny rzut wierzchołka, prostopadłe do śladu tłowego t_1 .

Po tej zmianie środka rzutów jest płaszczyzna π^1 płaszczyzną rzucającą, albowiem zmieniony ślad zbiegu tej płaszczyzny schodzi się ze śladem tłowym. Jeżeli tedy przez punkta przecięcia się $^11'$, $^12'$ śladu tłowego t_1 ze zmienionymi rzutami $^1W'A'$, $^1W'B'$ poprowadzimy proste, prostopadłe do śladu t_1 , to takowe przecinają się z pierwotnymi rzutami $W'A'$ i $W'B'$ krawędzi ostrosłupa danego w pierwotnych rzutach $1'$, $2'$ wierzchołków przekroju.

32. Zagadnienie: Dane są rzuty aksonometryczne ostrosłupa $W(ABC)$, którego podstawa leży na płaszczyźnie OXY dany jest nadto trójkąt śladów $S_aU_aV_a$ płaszczyzny π , wyznaczyć przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną π (rys. 226.).

Rozwiązanie: Wyznaczymy punkt $1(1_a, 1'_a)$ w którym krawędź WA przebija płaszczyznę π i połączmy rzut aksonometryczny 1_a z punktami przecięcia się H^1_a i H^2_a prostych S_aU_a i A_aB_a tudzież S_aU_a i A_aC_a to proste $H^1_a1_a$ i W_aB_a przecinają się w rzucie aksonometrycznym 2_a punktu 2, w którym krawędź WB przebija płaszczyznę π , a proste $H^2_a1_a$ i W_aC_a przecinają się w rzucie aksonometrycznym 3_a , punktu 3, w którym płaszczyzna π przecina się z krawędzią WC . — Wielokąt $1_a2_a3_a$ jest tedy rzutem aksonometrycznym przekroju ostrosłupa danego płaszczyzną π .

33. Zagadnienie: Dany jest graniastosłup w rzutach prostokątnych, którego podstawa $ABCD$ leży na płaszczyźnie poziomej rzutów; dana jest

nadto płaszczyzna $\pi(h, \pi_v)$, wyznaczyć prawdziwą wielkość przekroju tego graniastosłupa płaszczyzną π , nie kreśląc rzutów przekroju (rys. 227.).

Rozwiązanie: Wiadomo, że przekrój 1, 2, 3, 4 graniastosłupa i podstawa tegoż $ABCD$ są wielokątami powinowatymi a nadto, że kład (1)(2)(3)(4) wielokąta przekroju i wielokąt podstawowy są utworami powinowatymi. Wyznaczymy tedy rzuty $1'$ i $1''$ punktu w którym krawędź boczna graniastosłupa, przechodząca przez punkt A , przebija płaszczyznę π a następnie kład (1) punktu 1 na płaszczyznę poziomą rzutów, natenczas powinowactwo zachodzące między podstawą $ABCD$ i kładem wielokąta przekroju jest wyznaczone; ślad poziomy bowiem π_h płaszczyzny przecinającej π jest osią a prosta $A(1)$ łącząca dwa odpowiednie punkta wskazuje kierunek powinowactwa. Celem wyznaczenia kładów (2), (3) i (4) wyznaczmy punkta przecięcia się H_1 , H_2 i H_3 osi π_h z prostymi AB , AD i CD i połączmy H_1 i H_2 z kładem (1); poprowadźmy następnie przez punkta B i D proste, równoległe do $A(1)$, to takowe przecinają się z prostymi (1) H_1 i (1) H_2 w kładach (2) i (4) wierzchołków wielokąta przekroju; — połączmy wreszcie punkt H_3 z punktem (4) i poprowadźmy przez punkt C równoległą do $A(1)$ to w przecięciu się tych dwu prostych otrzymamy kład (3) wierzchołka 3, wielokąta przekroju.

34. Zagadnienie: Dany jest dwunastościan foremny w rzutach prostokątnych, dana jest nadto płaszczyzna $\pi^1(\pi^1_h, \pi^1_v)$; wyznaczyć przekrój tego wielościanu płaszczyzną π^1 .

Rozwiązanie: Poprowadźmy płaszczyznę $\pi^2(\pi^2_h, \pi^2_v)$, prostopadłą do śladu poziomego płaszczyzny π^1 i uważajmy takową za drugą płaszczyznę pionową rzutów, wyznaczmy następnie ślad $^1\pi^1_v$ płaszczyzny π^1 na drugiej płaszczyźnie pionowej rzutów, a nadto rzut danego wielościanu na tę płaszczyznę to punkta przecięcia się $^11''$, $^12''$, $^13''$, $^14''$, $^15''$ i $^16''$ śladu $^1\pi^1_v$ z rzutem dwunastościanu na płaszczyznę π^2 są drugimi rzutami pionowymi punktów przecięcia się danego wielościanu z płaszczyzną π^1 , ta płaszczyzna bowiem jest prostopadła do płaszczyzny rzutów π^2 . — Jeżeli tedy wyznaczmy rzuty poziome $1'$, $2'$... leżące z punktami $^11'$, $^12'$... na prostych, prostopadłych do śladu π^2_h i rzuty pionowe $1''$, $2''$... leżące z punktami $1'$, $2'$... na prostych, prostopadłych do osi x , a następnie te punkta odpowiednio połączmy, natenczas otrzymamy rzuty przekroju danego dwunastościanu.

W podobny sposób można wyznaczyć przekroje jakichkolwiek wielościanów płaszczyznami.

Zagadnienie: Dany jest dwunastościan w rzutach środkowych, wyznaczyć przekrój tego wielościanu, płaszczyzną, zapomocą zmiany środka rzutów.

0 wyznaczeniu punktów przecięcia się prostej z wielościanami.

35. Aby wyznaczyć punkta, w których prosta l przebija wielościan, przesuwamy przez prostą l płaszczyznę i wyznaczamy wielokąt, podług którego ta płaszczyzna przecina ów wielościan a nadto punkta przecięcia się prostej l z wielokątem przekroju, to takowe są punktami przecięcia się prostej l z wielościanem.

36. Zagadnienie: Dany jest ostrosłup w rzutach środkowych, którego podstawa $ABCD$ leży na płaszczyźnie $\pi(t, z')$, dana jest nadto prosta $l(T, Z')$ wyznaczyć punkta przecięcia się prostej l , z danym wielościanem (rys. 228.).

Rozwiązanie: Płaszczyzna przesunięta przez prostą l i przez wierzchołek ostrosłupa $W(ABCD)$ przecina takowy podług trójkąta, którego jeden wierzchołek schodzi z punktem W ; punkta przecięcia się zatem prostej l z owym trójkątem są punktami, w których prosta l przebija dany ostrosłup.

Przesuńmy tedy przez wierzchołek W i przez prostą l płaszczyznę $\pi'(t_1, z'_1)$ i wyznaczmy prostą $m, (T_3, Z'_3)$, podług której płaszczyzny π i π' przecinają się a nadto punkta przecięcia $1'$ i $2'$ prostej m' z wielokątem $A'B'C'D'$, połączmy następnie rzut wierzchołka W z punktami $1'$ i $2'$, to proste $W1'$ i $W2'$ przecinają się z prostą l' w rzutach I' i II' punktów przecięcia się I i II prostej l z danym ostrosłupem.

Zagadnienie: Wyznaczyć punkta przecięcia się prostej z ostrosłupem w rzutach a) prostokątnych, b) aksonometrycznych.

37. Zagadnienie: Dany jest graniastosłup w rzutach aksonometrycznych, którego podstawa $ABCD$ leży na płaszczyźnie YOZ dana jest nadto prosta $l(l_a, l'_a)$, wyznaczyć punkta przecięcia się prostej l z tym graniastosłupem (rys. 229.).

Rozwiązanie: Płaszczyzna przesunięta przez prostą l , równoległa do krawędzi bocznych graniastosłupa przecina ten wielościan podług czworokąta, którego dwa boki są równoległe do krawędzi bocznych, punkta przecięcia się zatem prostej l z owym czworokątem przekroju, są punktami w których prosta l przebija dany graniastosłup.

Przesuńmy tedy przez prostą l płaszczyznę π , równoległą do krawędzi bocznych $AE, \dots$ graniastosłupa i wyznaczmy rzut aksonometryczny π'_k śladu bocznego π_k tejże, a nadto punkta przecięcia się 1_a i 2_a prostej π'_k z rzutem podstawy $ABCD$, poprowadźmy następnie przez punkta 1_a i 2_a proste m_a i n_a równoległe do A_aE_a , to takowe przecinają się z prostą l_a w rzutach aksonometrycznych I_a i II_a punktów I i II , w których prosta l przebija dany graniastosłup.

Zagadnienie: Wyznaczyć punkta przecięcia się prostej z graniastosłupem w rzutach a) środkowych b) prostokątnych.

38. Zagadnienie: Dany jest jakikolwiek wielościan w rzutach prostokątnych, dana jest nadto prosta $l(l', l'')$ wyznaczyć punkta przecięcia prostej l z tym wielościanem (rys. 230.).

Rozwiązanie: Załóżmy sobie wyznaczyć punkta w których prosta l przebija ośmiościan $ABCDEF$.

Przesuńmy w tym celu przez prostą l płaszczyznę π , prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów i wyznaczmy wielokąt 1, 2, 3, 4, 5, 6, podług którego ta płaszczyzna przecina dany ośmiościan.

Rzut poziomy $1', 2', 3', 4', 5', 6'$ leży na śladzie poziomym π_k płaszczyzny π , który się schodzi z rzutem poziomym l' prostej l . Jeżeli tedy wyznaczmy rzut pionowy $1''2''3''4''5''6''$ a nadto punkta przecięcia się I'' i II'' tego wielokąta z rzutem l'' , natenczas otrzymamy rzuty pionowe punktów I i II w których prosta przebija dany wielościan.

0 przenikaniu się wielościanów.

39. Figura przenikania się dwu wielościanów jest wielokątem w ogólności wchrowatym, którego wierzchołki są punktami przecięcia się krawędzi jednego wielościanu ze ścianami wielościanu drugiego, a którego boki schodzą się z prostymi, podług których ściany wielościanów przecinają się. Z tego określenia wynikają bezpośrednio sposoby wykreślenia wielokąta przenikania, należy bowiem w tym celu wyznaczyć punkta przecięcia się krawędzi jednego wielościanu, ze ścianami wielościanu drugiego i połączyć te punkta przecięcia się, które leżą równocześnie na ścianach jednego i drugiego wielościanu, albo wyznaczyć proste, podług których ściany wielościanów przecinają się, uwzględniając jedynie odcinki tychże, ograniczone krawędziami.

Figura przenikania się dwu wielościanów jest jednolita, albo składa się z dwu części; w pierwszym przypadku przenikają się wielościany częściowo t. z. jeden wielościan odrywa niejako część wielościanu drugiego; w drugim przypadku przenikanie wielościanów jest zupełne t. z. część jednego wielościanu jest objęta wielościanem drugim.

40. Zagadnienie: Dane są dwa ostrosłupy w rzutach aksonometrycznych $W(ABCD)$ i $W'(MNPQ)$ których podstawy leżą odpowiednio na płaszczyznach OXY i OYZ ; wyznaczyć wielokąt przenikania się tych wielościanów (rys. 231.).

Rozwiązanie: Wierzchołki figury przenikania się ostrosłupów otrzymamy w sposób najprostszy, przesuwając płaszczyzny pomocnicze przez poszczególne krawędzie boczne i przez wierzchołki tych wielościanów.

Wyznaczymy tedy ślad aksonometryczny poziomy H_a i ślad aksonometryczny boczny K_a , prostej WW' , łączącej wierzchołki ostrosłupów danych i przesunijmy przez prostą WW' i przez krawędzie WA, WB, WC i WD płaszczyzny $WW'A, WW'B, \dots$ to ślady aksonometryczne poziome tychże przechodzą przez ślad H_a i przez punkta $A_a, B_a, \dots$ a ślady aksonometryczne boczne łączą ślad boczny K_a z punktami $Y_1, Y_2, \dots$ w których oś O_aY przecina się z prostymi $H_aA_a, H_aB_a, \dots$

Ślady boczne $K_aY_1, K_aY_2, \dots$ przecinają się z wielokątem $N_aN_aP_aQ_a$ w punktach 1_a i $2_a, 3_a$ i $4_a, \dots$ trójkąty tedy $W'_a1_a2_a, W'_a3_a4_a, \dots$ są rzutami aksonometrycznymi przekrojów ostrosłupa $W'(MNPQ)$ płaszczyznami $WW'A, WW'B, \dots$ a punkta przecięcia się I_a i II_a, III_a i $IV_a, \dots$ prostych W'_a1_a i W'_a2_a z prostą W_aA_a , prostych W'_a3_a i W'_a4_a z prostą $W_aB_a, \dots$ są rzutami aksonometrycznymi wierzchołków I, II, III, IV, V, VI , figury przenikania się danych ostrosłupów.

Ślad aksonometryczny boczny płaszczyzny $WW'C$ nie przecina się z wielokątem $M_aN_aP_aQ_a$, krawędź tedy WC nie przecina się z żadną ścianą ostrosłupa $W'(MNPQ)$.

Przesuńmy następnie przez prostą WW' i przez krawędzie W'_aN, W'_aP i W'_aQ , płaszczyzny, to ślady boczne tych płaszczyzn przechodzą przez ślad K_a i przez punkta N_a, P_a i Q_a , a ślady aksonometryczne poziome łączą punkt H_a z punktami $Y_4, Y_5, \dots$ w których ślady boczne $K_aN_a, K_aP_a, \dots$ przecinają się z osią Y_a . Ślady aksonometryczne poziome owych płaszczyzn przecinają się z wielokątem $A_aB_aC_aD_a$ w punktach 7_a i $8_a, 9_a$ i $10_a, \dots$ trójkąty przeto $W_a7_a8_a, W_a9_a10_a, \dots$ są odpowiednio rzutami aksonometrycznymi

przekrojów ostrosłupa $W(A, BCD)$ płaszczyznami WW^1N , WW^1P ,... a punkta przecięcia się VII_a i $VIII_a$, IX_a i X_a , XI_a i XII_a , krawędzi W_aN_a z prostymi W_a7_a i W_a8_a , krawędzi W_aP_a z prostymi W_a9_a i W_a10_a ,... są rzutami wierzchołków figury przenikania się ostrosłupów danych.

Ślad aksonometryczny poziomy płaszczyzny WW_1M nie przecina się z wielokątem $A_aB_aC_aD_a$, krawędź W^1M nie przecina się tedy z żadną ścianą ostrosłupa $W(ABCD)$.

Proste leżące na tych samych ścianach obu ostrosłupów i łączące wierzchołki wielokąta przenikania się są bokami tego wielokąta.

Wyznaczenie atoli tych wierzchołków, które leżą na tych samych ścianach jednego i drugiego wielościanu jest połączone z trudnościami rosnącymi z ilością owych wierzchołków. Należy tedy celem uniknięcia możliwych błędów, przy łączeniu wierzchołków uprzytomnić sobie na których ścianach jednego i drugiego wielościanu owe wierzchołki leżą.

I tak n. p. punkt I jako punkt przecięcia się krawędzi WA ze ścianą W^1MQ leży na ścianach: WAB i WAD ostrosłupa $W(ABCD)$ i na ścianie $W^1(MQ)$ ostrosłupa $W^1(MNPQ)$; otrzymamy następujące zestawienie:

punkt	I	leży na ścianach	WAB , WAD i W^1MQ
"	II	"	" " " " i W^1NP
"	III	"	" " " " WAB , WBC i W^1PQ
"	IV	"	" " " " " " i W^1NP
"	V	"	" " " " WAD , WDC i W^1MQ
"	VI	"	" " " " " " i W^1MN
"	VII	"	" " " " W^1MN , W^1NF i WAD
"	$VIII$	"	" " " " " " i WCD
"	IX	"	" " " " W^1NP , W^1PQ i WBC
"	X	"	" " " " " " i WCD
"	XI	"	" " " " W^1MQ , W^1PQ i WAB
"	XII	"	" " " " " " i WCD

Punkty: I i V leżą na ścianach WAD i W^1MQ ostrosłupów W i W^1 ; punkt I należy również połączyć z punktem XI oba bowiem te punkty leżą na ścianach W^1MQ i WAB ostrosłupów W i W^1 .

W podobny sposób możemy wykazać, że łączyć należy:

punkt	II	z punktami	IV i VII
"	III	"	" IX i XI
"	IV	"	" II i IX
"	V	"	" I i XII
"	VI	"	" VII i $VIII$
"	$VIII$	"	" X i VI
"	X	"	" $VIII$ i XII

Każdy wierzchołek wielokąta przenikania się dwu wielościanów łączy się z dwoma wierzchołkami tychże wielościanów. Jeżeli jednak dwie krawędzie wielościanów przecinają się, punkt przecięcia się leży na czterech ścianach obu wielościanów, przez ten punkt przechodzą tedy cztery krawędzie figury przenikania się.

41. Zagadnienie: Dane są dwa graniastosłupy w rzutach prostokątnych, których podstawy leżą na płaszczyźnie poziomej rzutów, wyznaczyć figurę przenikania się tych wielościanów (rys. 232.).

Rozwiązanie: Płaszczyzny równoległe do krawędzi bocznych graniastosłupów przecinają się ze ścianami bocznymi tychże wielościanów podług prostych równoległych.

Przesuńmy tedy przez dowolny punkt S płaszczyznę π , równoległą do krawędzi bocznych obu graniastosłupów danych i wyznaczmy ślad poziomy π_h tej płaszczyzny; przesuńmy następnie przez krawędzie a , b , c , d , pierwszego graniastosłupa płaszczyznę równoległą do płaszczyzny π , to ślady poziome tych płaszczyzn przechodzą przez wierzchołki A , B ,... podstawy $ABCD$ i są równoległe do śladu π_h .

Jeżeli tedy poprowadzimy przez punkta przecięcia się 1 i 2 , 3 i 4 ,... owych śladów z podstawą $MNPQ$ drugiego graniastosłupa, prostą równoległą do krawędzi m , n ,... i wyznaczmy odpowiednio punkta przecięcia się tychże z krawędziami a , b i c natenczas otrzymamy wierzchołki I , II ,... figury przenikania.

Ślad poziomy płaszczyzny równoległej do π , a przesuniętej przez krawędź d , nie przecina się z podstawą $MNPQ$, krawędź d nie przecina się tedy z żadną ścianą graniastosłupa (m , n , p , q). Przesuńmy następnie przez krawędzie m , n , p , q płaszczyznę równoległą do płaszczyzny π i poprowadźmy przez punkta przecięcia się 7 i 8 ,... śladów tych płaszczyzn z podstawą graniastosłupa ($abcd$) proste równoległe do krawędzi a , b ,... to punkta przecięcia się tychże VII i $VIII$ z krawędziami m , n ,... są również wierzchołkami figury przenikania się.

Ślad poziomy płaszczyzny przesuniętej przez krawędź „ n ” równoległe do płaszczyzny π , nie przecina się z wielokątem A , B , C , D ; krawędź „ n ” nie przecina się tedy z żadną ścianą graniastosłupa (a , b , c , d); boki wielokąta przenikania wyznaczmy podobnie jak w zagadnieniu poprzednim a to za pomocą protokołu, wskazującego, na jakich płaszczyznach wielościanów poszczególne wierzchołki wielokąta przenikania leżą.

42. Zagadnienie: Dany jest ostrosłup $W(ABCD)$ i graniastosłup (m , n , p , q) w rzutach środkowych. Krawędzie boczne graniastosłupa są równoległe do tła, a podstawy $ABCD$ i $MNPQ$ obu wielościanów leżą na płaszczyźnie $\pi(t, z')$; wyznaczyć figurę przenikania się tych wielościanów (rys. 233.).

Rozwiązanie: Płaszczyzny przesunięte przez wierzchołek ostrosłupa równoległe do krawędzi bocznych graniastosłupa przecinają ostrosłup podług trójkątów, a ściany boczne graniastosłupa podług prostych równoległych, za pomocą tych płaszczyzn można zatem najłatwiej wyznaczyć punkta, w których krawędzie jednego wielościanu przecinają się ze ścianami wielościanu drugiego.

Poprowadźmy tedy przez wierzchołek W prostą l równoległą do krawędzi m , n ,... graniastosłupa i wyznaczmy punkt D w którym ta prosta przebija płaszczyznę π , to proste łączące punkt D z wierzchołkami A , B ,... i M , P ,... są śladami na płaszczyźnie π , płaszczyzn przesuniętych przez prostą l i przez krawędzie WA , WB ,... i m , p ,...

Jeżeli tedy poprowadzimy przez punkta przecięcia się 1 i 2 , 3 i 4 ,... prostych DA , DB ,... z podstawą $MNPQ$, proste równoległe do krawędzi bocznych m , n ,... i wyznaczmy punkta przecięcia się tychże I i II , III i IV ,... z krawędziami WA , WB , jeżeli nadto połączymy wierzchołek W z punktami 9 i 10 , 11 i 12 , w których proste DM , DN ,... przecinają się z wielokątem

$ABCD$ i wyznaczmy punkta przecięcia się IX i X , XI i XII prostych $W9$ i $W10$, $W11$ i $W12$, z krawędziami m , n ,... natenczas otrzymamy wierzchołki figury przenikania się. Boki tej figury wyznaczmy w sposób wyłożony w zagadnieniach poprzednich.

43. Zagadnienie: Dane są dwa wielościany: graniastosłup $ABCDEF$ i czworościan $MNPQ$ w rzutach prostokątnych; wyznaczyć wielokąt, podług którego te wielościany przenikają się (rys. 234.).

Rozwiązanie: Przesuńmy przez krawędzie AD , BE ,... graniastosłupa płaszczyznę, prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, i wyznaczmy wielokąty 123 ,..., podług których te płaszczyzny przecinają się z czworościanem $MNPQ$, a nadto punkta przecięcia się I i II , III i IV , V i VI krawędzi AD , BE i CF z owymi wielokątami, to natenczas otrzymamy sześć wierzchołków wielokąta przenikania się.

Przesuńmy następnie przez krawędzie czworościanu płaszczyznę, prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów i wyznaczmy wielokąty, podług których te płaszczyzny przecinają się z graniastosłupem, to punkta przecięcia się VII i $VIII$ tych wielokątów z krawędziami czworościanu są również wierzchołkami przenikania się. Krawędzie MQ , MP , MN , PQ i PN nie przecinają się z danym graniastosłupem.

Jeżeli tedy w sposób poprzednio wyłożony, uwidoczniemy te płaszczyzny obu wielościanów, na których poszczególne punkta I ... $VIII$ leżą, natenczas z otrzymanego protokołu wyczytamy, że w danym przypadku rozpada się wielokąt przenikania się na część płaską $I V III$ i na wielokąt wchrowaty $II VII IV VI VIII$.

O cieniach własnych i cieniach rzuconych wielościanów.

44. Niech będzie dany wielościan $ABCDEFGH$ (rys. 235.) i kierunek s promieni światła, poprowadźmy przez wierzchołki A , B , C ,... proste Aa , Bb , Cc ,..., równoległe do s , to proste Aa , Bb , Ff , Gg , Hh i Dd , nie posiadające z wielościanem nic więcej wspólnego prócz wierzchołków, można uważać za krawędzie boczne graniastosłupa I , w którego obrębie leżą promienie, oświetlające wielościan dany.

Graniastosłup I styka się niejako z wielościanem $ABC...H$ wzdłuż krawędzi AB , BF , FG , GH , HD i DA , które odgraniczają część, zwróconą ku źródłu światła, a więc ściany oświetlone $ABEF$, $AEHD$, $EFGH$, od ścian $ABCD$, $BCFG$, $DCGH$, do których promienie światła bezpośrednio nie dochodzą, które zatem znajdują się w cieniu własnym.

Wielokąt $ABFGHDA$ nazywamy linią odgraniczającą cień od światła na danym wielościanie.

Przekrój $\alpha\beta\phi\omega\chi\delta\alpha$ graniastosłupa I dowolną płaszczyzną π ogranicza cień rzucony wielościanu $AB...H$ na tę płaszczyznę, promienie bowiem, odbite od ścian oświetlonych, nie dochodzą do płaszczyzny π ; wszystkie punkta tedy, leżące w obrębie wielokąta $\alpha\beta... \delta\alpha$, są w cieniu, wszystkie zaś punkta płaszczyzny π , leżące poza obrębem owego wielokąta są oświetlone.

Linie, odgraniczającą cień od światła na jakimkolwiek wielościanie, można wyznaczyć pośrednio zapomocą cieni rzuconych wszystkich krawędzi

tegoż na dowolną płaszczyznę; krawędzie bowiem, których cienie ograniczają cień rzucony wielościanu tworzą wielokąt, odgraniczający cień od światła.

45. Zagadnienie: Dany jest ostrosłup $W(ABCD)$ w rzutach aksonometrycznych, którego podstawa leży na płaszczyźnie $\pi(\pi^k_a, \pi^r_a)$, równoległej do płaszczyzny Oxy , dany jest nadto kierunek promieni światła $s(s_a, s'_a)$; wyznaczyć cień własny i cień rzucony tego wielościanu na płaszczyznę Oxy i Oxz (rys. 236.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez rzut aksonometryczny W_a i przez rzut aksonometryczny na płaszczyznę π wierzchołka W proste s_a i s'_a , równoległe do rzutu aksonometrycznego i rzutu aksonometrycznego poziomego promienia „ s “, i wyznaczmy ślad 1W_a tej prostej na płaszczyźnie π , poprowadźmy następnie przez 1W_a proste 1W_aB_a i 1W_aD_a niejako styczne do rzutu aksonometrycznego podstawy ostrosłupa, to spostrzeżemy, że krawędzie WB , WD , AB i AD tworzą wielokąt, odgraniczający część oświetloną $WBAD$ od części, znajdującej się w cieniu własnym $WDCBA$.

Jeżeli tedy połączymy cień rzucony W_a wierzchołka W na płaszczyznę Oxy z cieniami B_a i D_a punktów B i D , a nadto połączymy cień A_a punktu A z punktami B_a i D_a natenczas wielokąt $W_aB_aA_aD_a$ ogranicza cień rzucony danego ostrosłupa na płaszczyznę Oxy .

Część rzeczywista cienia na płaszczyznę Oxy rozciąga się do osi O_aX_a , dalsza część tegoż cienia na tę płaszczyznę jest idealna, albowiem płaszczyzna Oxz nie jest przeźroczysta pochwytywa tedy w danym przypadku część cienia rzuconego danego wielościanu.

Jeżeli tedy wyznaczmy cień rzucony W_a wierzchołka W na płaszczyznę Oxz i połączymy go z punktami w których oś O_aX_a przecina się z prostymi W_aB_a i W_aD_a , natenczas otrzymamy trójkąt ograniczający część cienia rzuconego danego ostrosłupa na płaszczyznę Oxz .

46. Zagadnienie: Dany jest graniastosłup $Z(A'B'C'D')$ w rzutach środkowych, którego podstawa $ABCD$ leży na płaszczyźnie $\pi(t, z')$, a którego druga podstawa $EFGH$ leży na płaszczyźnie, równoległej do π , dany jest nadto ślad zbiegu Z' promieni światła; wyznaczyć cień rzucony tego wielościanu na płaszczyznę π (rys. 237.).

Rozwiązanie: Ślad zbiegu $Z'Z'_s$ płaszczyzn, równoległych do krawędzi bocznych AE ,... graniastosłupa i do promieni światła łączy ślady zbiegu Z' i Z'_s .

Wyznaczmy tedy punkt przecięcia się Z'_2 śladów z' i $Z'Z'_s$ i poprowadźmy przezeń proste Z'_2B' i Z'_2D' , które z rzutem $A'B'C'D'$ nie mają nic wspólnego prócz wierzchołków B' i D' , to te proste są śladami na płaszczyźnie π płaszczyzn, równoległych do promieni światła, i stykających się niejako z danym graniastosłupem wzdłuż krawędzi bocznych BF i DH .

Z położenia promieni światła względem podstaw graniastosłupa widoczna, że podstawa górna $EFGH$ jest oświetlona, podstawa dolna zaś znajduje się w cieniu własnym; wielokąt wchrowaty przeto $ADHGFB$ jest linią odgraniczającą cień od światła na danym graniastosłupie.

Cienie rzucone krawędzi podstawowych AB i BD na płaszczyznę π schodzą się z temi krawędziami a cienie rzucone H'_1 , G'_1 i F'_1 wierzchołków H , G i F schodzą się odpowiednio z punktami przecięcia się prostych Z'_2D' i Z'_2H' , Z'_2C' i Z'_2G' , Z'_2B' i Z'_2F' ; proste bowiem Z'_2D' , Z'_2C' i Z'_2B' są

cieniami rzuconymi krawędzi $Z'D'$, $Z'C'$ i $Z'B'$, a proste Z_sH' , Z_sG' i Z_sF' są rzutami środkowymi promieni światła przechodzących przez punkta H , G i F .

47. Zagadnienie: Dany jest dwunastościan $A_1A_2...B_1B_2...C_1C_2...D_1D_2...$ w rzutach prostokątnych, wyznaczyć cień rzucony tego wielościanu na płaszczyzny rzutów, przyjmując, że promienie światła są nachylone do płaszczyzny poziomej i do płaszczyzny pionowej rzutów pod kątem, którego styczna trygonometryczna jest równa $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (rys. 238.).

Rozwiązanie: Rzuty poziome i rzuty pionowe prostych, równoległych do promieni światła, tworzą z osią x kąty równe 45° .

Przedłużmy krawędzie A_1B_1 , A_2B_2 ,... i C_1D_1 , C_2D_2 ,... do punktów przecięcia się W_1 i W_2 z osią dwunastościanu, prostopadłą do płaszczyzny $A_1A_2A_3...$, to te punkta są wierzchołkami ostrosłupów pięciościennych $W_1(A_1, A_2, ...)$ i $W_2(D_1, D_2, ...)$, których części zawarte między płaszczyznami $A_1A_2A_3...$ i $B_1B_2B_3...$ tudzież $D_1D_2D_3...$ i $C_1C_2C_3...$ są częściami dwunastościanu.

Wyznamy tedy w sposób wyłożony pod l. 46. krawędzie boczne owych ostrosłupów W_1A_1 i W_1A_4 tudzież W_2D_1 i W_2D_3 , które odgraniczają ściany oświetlone od ścian znajdujących się w cieniu, to krawędzie A_1B_1 i A_4B_4 tudzież D_1C_1 i D_3C_3 są bokami wielokąta, odgraniczającego cień od światła na dwunastościanie. Oczywiście, że krawędzie B_1C_1 i B_4C_4 są również bokami wielokąta odgraniczającego.

Widzimy dalej, że ściana $D_1D_2...$ jest oświetlona ścianą zaś $A_1A_2...$ znajduje się w cieniu własnym; wielokąt wchrowaty tedy $A_1B_1C_1D_1D_2D_3C_3B_4A_4A_5A_1$ jest linią odgraniczającą cień od światła na danym dwunastościanie.

Rzut tego wielokąta w kierunku równoległym do promieni światła na płaszczyzny rzutów ogranicza cień rzucony dwunastościanu.

48. Zagadnienie: Wyznaczyć cień rzucony prostej „ l ” na ostrosłup ścięty $ABCDEFGH$, którego podstawa leży na płaszczyźnie P , jeżeli kierunek promieni światła wyznaczony jest prostą s (rys. 239.).

Rozwiązanie: Wyznamy cień rzucony $DH_1G_1F_1B$ danego ostrosłupa ściętego na płaszczyznę P , a nadto cienie rzucone AE_1 , DH_1 , E_1H_1 i F_1G_1 krawędzi oświetlonych AE , DH , EH i FG , i cień rzucony l_1 prostej l ; wyznaczmy następnie punkta III , I i II , w których prosta l_1 przecina się z cieniami DH_1 , E_1H_1 i F_1G_1 , i poprowadźmy przez te punkta proste $III III^1$, $I I^1$, $II II^1$, równoległe do kierunku promieni światła, to punkta przecięcia się III^1 , I^1 , II^1 z krawędziami DH , EH i FG są cieniami rzuconymi punktów leżących na prostej l na krawędzie wielościanu.

Prosta l rzuca tedy cień $III^1I^1II^1$ na ściany $AEHB$ i $EFGH$ danego ostrosłupa ściętego.

49. Zagadnienie: Dane są dwa graniastosłupy T_1 i T_2 w rzutach prostokątnych; wyznaczyć cienie rzucone tych wielościanów na płaszczyzny rzutów, a nadto cień rzucony graniastosłupa T_1 na graniastosłup T_2 (rys. 240.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że podstawa $ABCD$ graniastosłupa T_1 i ściana boczna $KLMN$ graniastosłupa T_2 leżą na płaszczyźnie poziomej rzutów.

Poprowadźmy przez dwa dowolne punkta A i B proste s_1 i s_2 , równoległe do kierunku promieni światła, a nadto przez A prostą l_1 , równoległą do krawędzi bocznych wielościanu T_1 , a przez punkt B prostą l_2 , równo-

ległą do krawędzi bocznych graniastosłupa T_2 , i przesunijmy przez proste s_1 i l_1 tudzież s_2 i l_2 płaszczyzny π^1 i π^2 .

Przesunijmy następnie płaszczyzny π^1 i π^2 tak, aby ślad poziomy π^1_h był niejako styczną, poprowadzoną do śladu poziomego $A'B'C'D'$ graniastosłupa T_1 , a ślad pionowy π^2_v był niejako styczną, poprowadzoną do rzutu pionowego $M''N''R''S''$ podstawy graniastosłupa T_2 , leżącej na płaszczyźnie, równoległej do płaszczyzny pionowej rzutów, to spostrzeżemy, że krawędzie BF , FG , GI i ID tworzą linię odgraniczającą cień od światła na graniastosłupie T_1 , a ściany $MRPL$, $MNKL$, $KLPO$ graniastosłupa T_2 znajdują się w cieniu własnym.

Cienie rzucone tedy wielokątów $BFGID$ i $RMLKOPR$ na płaszczyzny rzutów ograniczają cienie rzucone graniastosłupów na te płaszczyzny.

Graniastosłup T_1 rzuca jedynie cień na płaszczyzny oświetlone $NSOK$ i $SRPO$ graniastosłupa T_2 .

Aby ten cień otrzymać, wyznaczmy cienie rzucone krawędzi NR , SO i RP wielościanu T_2 na płaszczyznę poziomą rzutów i wyznaczmy punkta przecięcia się tychże z cieniami rzuconymi krawędzi BS i DI graniastosłupa T_1 ; poprowadźmy następnie przez punkta przecięcia się $I...$ tych cieni proste, równoległe do rzutu poziomego prostej, wskazującej kierunek promieni światła, to punkta przecięcia się tychże z prostymi $R'P'$, $S'O'$ i $K'N'$ są rzutami poziomymi wierzchołków wielokąta odgraniczającego cień rzucony wielościanu T_1 na wielościan T_2 .

50. Zagadnienie: W rzutach aksonometrycznych dane są cztery belki o przekrojach prostokątnych, z których dwie są odpowiednio równoległe do osi OX i OZ a dwie są równoległe do płaszczyzny Oxz ; wyznaczyć cień rzucony tych belek na płaszczyznę OXY (rys. 241.), a nadto cienie jakie te belki na siebie rzucają.

51. Zagadnienie: Dany jest ostrosłup wydrążony, którego wierzchołek W leży na płaszczyźnie poziomej rzutów, a którego podstawa $ABCDEF$ leży na płaszczyźnie π , równoległej do płaszczyzny poziomej rzutów; wyznaczyć cień własny, cień rzucony na płaszczyzny rzutów i cień jaki ten ostrosłup do swego wnętrza rzuca (rys. 242.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez wierzchołek W prostą s , równoległą do kierunku światła i wyznaczmy punkt przecięcia się tejże $W_2(W_2W''_2)$ z płaszczyzną π , poprowadźmy następnie z punktu W_2 niejako styczne W_2A' i W_2E' do rzutu poziomego $A'B'...F'$ podstawy, to spostrzeżemy, że krawędzie WA , AB , CD , DE i EW tworzą linię odgraniczającą cień od światła na danym ostrosłupie.

Jeżeli jednak przyjmijmy, że ostrosłup dany jest wydrążony, natenczas wewnętrzne strony tych ścian, których zewnętrzne są w cieniu, będą oświetlone, wewnętrzne zaś strony ścian oświetlonych znajdować będą w cieniu własnym, a nadto krawędzie AF i FE rzucać będą cień do wnętrza ostrosłupa.

Cienie rzucone krawędzi podstawowych AF i FG na płaszczyznę π schodzą się z temi krawędziami, a rzuty tych cieniów na płaszczyznę poziomą rzutów są prostymi $A'F'$ i $F'E'$; cienie krawędzi WB , WC i WD na płaszczyznę π schodzą się z prostymi W_2B , W_2C i W_2D , a rzuty poziome tychże są prostymi W_2B' , W_2C' i W_2D' . Jeżeli tedy wyznaczmy punkta

przecięcia się I , II i III prostych $A'E$ i FE z prostymi W_2B' , W_2C' i W_2D' , i poprowadzimy przez te punkta proste II^1 , III^1 , III^1 , równoległe do rzutu poziomego kierunku promieni światła, to w punktach przecięcia się I^1 , II^1 , III^1 tych prostych z rzutami W_2B' , W_2C' i W_2D' otrzymamy wierzchołki wielokąta $A'I^1II^1III^1E'$, ograniczającego rzut poziomy cienia, jaki dany ostrosłup do swego wnętrza rzuca.

— EX LIBRIS —
Biblioteki Kuratorium O.S.B.
w Białymstoku

Tom II.

SPIS RZECZY.

O krzywych płaskich	1
O krzywych algebraicznych — rząd i klasa — związki między rzędem i klasą	3
O rzutach krzywej płaskiej	5
O krzywiznie krzywych płaskich	5
O cyklodach	7
O wyznaczaniu stycznych, punktów styczności i normalnych krzywej narysowanej lecz nie określonej	10
O krzywych wchrowatych	11
O rzędzie, stopniu i klasie krzywych wchrowatych algebraicznych	12
O rzucie krzywej wchrowatej	13
O przekrojach płaskich powierzchni rozwijalnej opisanej na krzywej wchrowatej	15
O powierzchniach stożkowych i walcowych	17
O rzutach powierzchni stożkowych i walcowych	17
O konstrukcyi płaszczyzn stycznych, poprowadzonych przez dany punkt do powierzchni stożkowej i walcowej	19
O konstrukcyi punktów przecięcia się powierzchni stożkowych i walcowych liniami prostymi i krzywymi	21
O przekrojach powierzchni stożkowych i walcowych płaszczyznami	22
O powierzchniach stożkowych rzędu drugiego	25
O przekrojach powierzchni stożkowej rzędu drugiego płaszczyznami	28
O powierzchniach stożkowych obrotowych	30
O krzywych przenikania się dwu powierzchni stożkowych rzędu drugiego	33
O rozwijaniu powierzchni stożkowych i walcowych	42
O powierzchniach w ogóle i o powierzchniach rzędu drugiego	46
O powierzchniach rzędu drugiego	49
O biegunowej dwoistości	54
O powierzchniach wchrowatych rzędu drugiego	58
O krzywych zwiężenia (strykcyjnych) na powierzchniach wchrowatych rzędu drugiego	77
O powierzchniach rzędu drugiego krzywokreślnych	78
O dwu powierzchniach rzędu drugiego	100
O przekrojach kołowych i pępkach powierzchni krzywokreślnych rzędu drugiego	105
O powierzchniach obrotowych	107
O powierzchniach wchrowatych	115
O sklepieniu wchrowatem	118
O konoidach rzędu czwartego i trzeciego	121
O liniach i powierzchniach śrubowych	124
O powierzchniach śrubowych rozwijalnych	131
O liniach równego oświetlenia na powierzchniach	135



Ważniejsze omyłki druku.

Powierzchnie oznaczamy wogóle znakiem „ Π ” — płaszczyzny znakiem „ π ”.

Str.	wiersz	zamiast	ma być
7	od dołu 18	AI, I, II, ...	AI, I II, ...
7	" " 8	c ,	c_2
7	" " 3	skoro pół	skoro się pół
9	od góry 15	A1, A2...	A1 i A2...
11	od dołu 14	płaszczyznami	prostemi
13	od góry 15	drutu	rzutu
17	" " 11	równoległe,	równoległe.
23	" " 11	równoległe	równoległe
28	" " 11	które	która
31	od dołu 3	1 Q 1 P	1 Q - 1 P
39	od góry 16	jednym punkcie	dwu punktach
39	" " 20	się w	się z krzywą c_3 w
39	" " 28	zwrotu	zwrotu
39	" " 31	c^2	c^3
50	od dołu 7	podług	podług której
50	" " 4	Π	Π^2
52	od góry 21	Π^3	Π^2
52	" " 23	Π^3	Π^2
53	" " 16	P_∞ ,	P_1^∞
54	" " 12	Σ ,	Σ_1
58	" " 10	A, (c_2 i A_3)	(A_1, c_2) i (A_1, c_3)
58	od dołu 17	nieskończoności	skończoności
59	od góry 11	stycznej	stycznej g_1)
71	" " 28	to	ta
76	od dołu 7	remi	cemi
77	od góry 20	paraboli	hyperboli
79	" " 12	N^∞	N_3^∞
81	" " 16	σ	ϱ
81	" " 22	kuli nachylonej wej π^2 środką z elipsa w k_1 , a zakreślone	kuli, nachyloną wej Π_2^2 środką elipsa o k_1 , zakreślone
86	" " 24		
88	" " 23		
89	" " 21		
90	" " 19	elipsa w	elipsa o
92	" " 15	k_1 , a zakreślone	k_1 , zakreślone
92	od dołu 10	równoległa	równoległe
96	od góry 20	biegunowej	pionowej
98	od dołu 12	c_s^1	c_s
100	" " 18	częściową	częściowo
102	od góry 5	powierzchni	powierzchnie
102	od dołu 13	Π_2^2	Π_2^2
106	" " 4	Π^2	π^1
110	" " 4	kinająca	cinająca

O krzywych płaskich.

1. Krzywą płaską określamy jako miejsce geometryczne punktu poruszającego się na płaszczyźnie, albo jako obwiednię prostej, poruszającej się na płaszczyźnie według pewnego prawa.

Nieskończenie małą część krzywej, zawartą między dwoma, bezpośrednio po sobie następującymi punktami, nazywamy elementem, a kąt zawarty między dwiema bezpośrednio po sobie następującymi położeniami prostej powłóczącej krzywą obwiednię, nazywamy kątem styczności. Prosta, która przecina krzywą w dwu, trzech... punktach, nazywamy sieczną, a odcinek, zawarty między dwoma punktami przecięcia się, nazywamy cięciwą krzywej.

2. Styczne, punkta styczności i normalne krzywej pł. Jeżeli punkt B (rys. 1.) porusza się w sposób ciągły na krzywej „ c ”, zbliżając się bez końca do punktu A , natenczas sieczna obraca się około punktu A i dąży do granicy „ s ”, którą nazywamy styczną, poprowadzoną w punkcie A do krzywej „ c ”.

Styczna łączy tedy dwa, bezpośrednio po sobie następujące punkta na krzywej, jest przeto przedłużeniem elementu tejże.

Obojętną jest wogóle rzeczą, z której strony punkt B zbliża się do punktu A , jeżeli granice, do których dążą sieczne AB i AB_1 , schodzą się z tą samą prostą „ s ”. W tym przypadku powiadamy, że krzywa „ c ” jest w punkcie A ciągłą ze względu na styczne. Jeżeli jednak sieczne AB i AB_1 dążą do dwu różnych granic „ s_1 ” i „ s_2 ”, natenczas powiadamy, że krzywa „ c ” nie jest ciągłą w punkcie A ze względu na styczne, albo że krzywa „ c ” jest w punkcie A złamana (rys. 2.).

Uważając krzywą „ c ” za obwiednię prostej „ l ”, poruszającej się na płaszczyźnie w sposób ciągły (rys. 3.), określamy punkt styczności A prostej „ l ” jako granicę, do której dąży punkt przecięcia się A_1 prostych l i l_1 , jeżeli prosta l_1 bez końca do prostej l się zbliża.

Punkt styczności jest tedy punktem przecięcia się dwu bezpośrednio po sobie następujących stycznych.

Prostą n , poprowadzoną przez punkt styczności prostopadle do stycznej, nazywamy normalną krzywej.

3. O szczególnościach zwyczajnych krzywych płaskich.

a) Jeżeli punkt, opisujący krzywą „ c ”, przechodzi dwa, trzy „ n ” razy przez ten sam punkt D , natenczas powstaje tak zwany punkt podwójny, trzy-

krotny... n krotny. Punkt, opisujący krzywą, przekracza w ogólności punkt n krotny, przychodząc w ogólności każdym razem z innego położenia; w punkcie D można tedy w ogóle „ n ” stycznych do krzywej „ c ” poprowadzić.

I tak n. p. Punkt, poruszający się na płaszczyźnie, przechodzi przez punkt D dwukrotnie, a to raz poruszając się od A przez B do D , drugi raz od E przez F do D (rys. 4); D jest tedy punktem podwójnym, w którym dwie styczne s_1 i s_2 do krzywej poprowadzić można.

b) Jeżeli prosta l powłócząca krzywą „ c ” schodzi się dwa, trzy... n razy z tą samą prostą „ d ”, natenczas „ d ” jest styczną dwu, trzy, ... n krotną krzywej. Prosta „ l ” schodzi się z prostą „ d ”, wychodząc w ogóle każdym razem z innego położenia na płaszczyźnie; styczna n krotna „ d ” posiada tedy w ogóle „ n ” punktów styczności.

I tak n. p. Prosta l powłócząca krzywą „ c ” schodzi się dwukrotnie z prostą „ d ” przechodząc raz od l_1 przez l_2 do „ d ” drugi raz od l_3 przez l_4 do „ d ”, prosta „ d ” jest tedy styczną, poprowadzoną do krzywej w dwóch różnych punktach A i B (rys. 5).

c) Jeżeli punkt opisujący krzywą „ c ”, przekracza dwukrotnie punkt „ Z ”, wychodząc każdym razem z tego samego położenia na płaszczyźnie, natenczas styczne, poprowadzone w punkcie podwójnym Z do krzywej, schodzą się na jednej prostej „ z ” (rys. 6). Taki punkt nazywamy punktem zwrotu.

d) Jeżeli prosta l , powłócząca krzywą „ c ” przekracza styczną podwójną „ p ”, wychodząc każdym razem z tego samego położenia, natenczas punkta styczności A i B (rys. 5.) schodzą się w jednym punkcie, a styczna „ p ” (rys. 7.) przecina krzywą „ c ” w trzech, bezpośrednio po sobie następujących punktach. Taką styczną nazywamy styczną przegięcia, a punkt styczności tejże, w którym złączone są trzy bezpośrednio po sobie następujące punkta, nazywamy punktem przegięcia.

Sposób, w jaki punkta zwrotu i styczne przegięcia powstają, można jaśniej przedstawić, uważając krzywą „ c ” za miejsce geometryczne punktu poruszającego się na płaszczyźnie, a zarazem za obwiednię stycznych, które — jak wiadomo — łączą po dwa bezpośrednio po sobie następujące punkta krzywej.

Pomiędzy ruchem punktu i ruchem stycznej zachodzi pewien związek, punkt bowiem opisujący krzywą porusza się na stycznej, gdy tymczasem styczna obraca się około swego chwilowego punktu styczności.

Jeżeli tedy niejednostajna prędkość punktu, opisującego krzywą, w pewnym miejscu Z staje się równą zeru, poczem A w kierunku przeciwnym się porusza, gdy tymczasem styczna jednostajnie się obraca, natenczas w miejscu Z powstaje punkt zwrotu.

Jeżeli zaś niejednostajna prędkość obrotowa stycznej, powłóczącej krzywą „ c ”, w pewnym miejscu „ p ” staje się równą zeru, poczem ta styczna w kierunku przeciwnym się obraca, gdy tymczasem punkt styczności jednostajnie postępuje, natenczas w miejscu „ p ” powstaje styczna przegięcia.

Wspomnieć również należy o punktach i stycznych odosobnionych. — Przez punkt odosobniony rozumiemy punkt podwójny, którego styczne są urojone, a przez styczną odosobnioną rozumiemy styczną, której punkta styczności są urojone. Te szczególności nie mają pozornie z krzywą nic wspólnego, atoli czynią zadość tym samym warunkom, jakim punkta względnie styczne podwójne podlegają.

Punkt podwójny i styczna podwójna, punkt zwrotu i styczna przegięcia odpowiadają sobie biegunowo dwoiście.

Z połączenia szczególności zwyczajnych powstają szczególności złożone. I tak n. p. z połączenia punktu przegięcia P z punktem zwrotu Z powstaje dziób. (rys. 8.).

0 krzywych algebraicznych — rząd i klasa — związki między rzędem i klasą.

4. Jeżeli za pomocą równania algebraicznego między spółrzednymi punktu, opisującego krzywą, albo między spółrzednymi, prostej powłóczącej krzywą, można wyrazić prawo punktu względnie prostej, natenczas powiadamy, że krzywa jest algebraiczna *).

Ilość punktów, w których dowolna prosta przecina krzywą płaską nazywamy jej rzędem, a ilość stycznych, dających się poprowadzić z dowolnego punktu do krzywej, nazywamy klasą tej krzywej.

Punkta przecięcia się prostej z krzywą jakoteż styczne, poprowadzone z punktu do krzywej, mogą być parami urojone.

Punkt jest krzywą rzędu zerowego a klasy pierwszej.

Prosta jest krzywą rzędu pierwszego a klasy zerowej.

Przekrój stożkowy jest, jak wiadomo, rzędu drugiego i klasy drugiej, jeżeli się nie składa z dwu prostych albo dwu punktów.

Krzywe algebraiczne są jednolite albo złożone z dwu lub więcej gałęzi. I tak n. p. przekrój stożkowy i prosta razem uważane, trzy proste razem wzięte są odmianami złożonymi krzywych rzędu trzeciego. Dwa przekroje stożkowe, nierozdzielnie z sobą połączone są odmianą krzywej rzędu czwartego i t. d.

Prosta w nieskończoności przecina się z krzywą „ c^m ” rzędu m -tego w „ m ” punktach, które parami mogą być urojone. Krzywa tedy rzędu nieparzystego rozciąga się przynajmniej w jednym kierunku do nieskończoności.

Styczną, poprowadzoną do krzywej w punkcie, leżącym w nieskończoności, albo innemi słowy, granicę, do której dąży styczna, jeżeli punkt styczności dąży do nieskończoności, nazywamy asymptotą. Jeżeli dwa punkta krzywej, leżące w nieskończoności, schodzą się w jednym punkcie, natenczas prosta w nieskończoności jest styczną krzywej.

Gałąź krzywej, której jedna styczna leży w nieskończoności, nazywamy gałęzią paraboliczną.

5. Rząd „ m ” krzywej „ c ” określiliśmy jako ilość punktów przecięcia się dowolnej prostej z tą krzywą; klasę „ n ” tejże krzywej określono jako ilość stycznych, poprowadzonych z dowolnego punktu do krzywej „ c ”. Pytanie — czy między rzędem i klasą zachodzą jakieś związki.

Celem zbadania tej sprawy, przyjmijmy krzywą „ c^m ” rzędu m -tego i punkt „ U^∞ ”, leżący w nieskończoności na płaszczyźnie tej krzywej, to z punktu „ U^∞ ” można do „ c^m ” „ n ” stycznych poprowadzić. Przesuńmy krzywą daną w kierunku „ U^∞ ” o ilość nieskończenie małą, tak aby zajęła położenie „ c_1^m ” to natenczas

*) Jeżeli element (punkt lub prosta), tworzący krzywą, wychodząc z pewnego położenia odbywa ruch, prawem tworzenia się krzywej wskazany, i każdym razem do pierwotnego położenia wraca, natenczas opisana względnie obwiednia krzywa jest algebraiczna.

krzywe c^m i c_1^m , które oczywiście przystają do siebie, przecinają się w m^2 punktach*), z których „ m ” leży na prostej w nieskończoności.

Z każdym punktem przecięcia się krzywych c^m i c_1^m złączona jest styczna, poprowadzona z punktu U^∞ do tychże krzywych. Ilość tedy tych stycznych jest równa $m^2 - m$ a zatem

klasa $n = m(m-1)$.

Stosując do tego wzoru prawo biegunowej dwoistości otrzymamy: rząd $m = n(n-1)$.

Z powyższych wzorów wynikałoby, że $m = m(m-1)[m(m-1)-1]$, co jednak jest niemożliwe.

Pozorną sprzeczność powyższych twierdzeń, znaną pod nazwą „paradoks Ponceleta”, uchylił Plücker wykazując, że krzywa rzędu wyższego niż drugi posiada punkta szczególne, które obniżają klasę, a krzywa klasy wyższej niż drugiej; posiada styczne szczególne, które obniżają rząd krzywej.

A mianowicie: Punkt podwójny obniża klasę o dwie, a punkt zwrotu o trzy jednostki.

Styczna podwójna obniża rząd krzywej o dwie, a styczna zwrotu o trzy jednostki.

Jeżeli tedy m oznacza rząd

n	„	klasę
δ	„	ilość punktów podwójnych
κ	„	„ „ „ zwrotu
ϑ	„	stycznych podwójnych
i	„	przebiegów,

natenczas otrzymamy wzory Plückera:

- 1.) $n = m(m-1) - 2\delta - 3\kappa$
- 2.) $m = n(n-1) - 2\vartheta - 3i$
- 3.) $(i-k) = 3(n-m)^{**}$.

*) Twierdzenie, że dwie krzywe płaskie rzędu m -tego i m_1 -tego przecinają się w $m \cdot m_1$ punktach, jakoteż bardzo wiele innych twierdzeń geometrycznych można z łatwością wysnuć z prawa zachowania ilości, które opiewa: Ilość wyników z działań utworami geometrycznymi nie zmienia się, albo jest nieskończenie wielka, jeżeli zasadnicze określenia owych utworów nie zmieniają się.

I tak n. p. a) Zamiast krzywych rzędu m -tego i rzędu m_1 -go możemy podstawić „ m ” względnie „ m_1 ” prostych razem wziętych, zasadnicze określenia bowiem krzywej „ c^m ” i „ m ” prostych nie zmieniają się, gdyż dowolna prosta obie postaci krzywych rzędu m -go w „ m ” punktach przecina; a ponieważ aż „ m ” prostych przecina się z „ m_1 ” w $m \cdot m_1$ punktach, przeto i krzywe c^m i c^{m_1} w $m \cdot m_1$ przecinają się będą.

b) Z dowolnego punktu można do krzywej klasy n -tej c_n „ n ” stycznych poprowadzić. Jeżeli jednak na płaszczyźnie tej krzywej znajduje się taki punkt X , z którego można do owej krzywej ($n+1$) stycznych poprowadzić, natenczas można przez „ X ” poprowadzić nieskończenie wiele stycznych, albo innymi słowy krzywa „ c_n ” składa się z punktu X i z krzywej klasy $(n-1)$ -ej ... i t. d.

Zasada zachowania ilości wynika z najogólniejszej zasady geometrycznej z prawa ciągłości.

**) Pierwsze dwa wzory Plückera można sposobem obrazowym wyprowadzić. — Niech będzie dana krzywa rzędu m -go c , złożona z dwu gałęzi (c_1 i c_2)= c , które nie mają żadnych punktów szczególnych (rys. 9.). Jeżeli gałęzie c_1 i c_2 zbliżają się do siebie, to po ich zetknięciu się powstaje punkt podwójny D ; styczne s_1 i s_2 , poprowadzone z punktu A do c_1 i c_2 , schodzą się z prostą AD , która nie jest styczną krzywej c^m ; ilość tedy stycznych poprowadzonych z punktu A do krzywej c^m zmniejszy się wskutek pojawienia się punktu podwójnego na tejże krzywej, o dwie jednostki.

I tak n. p. Krzywa rzędu trzeciego; nie mająca żadnych punktów szczególnych, jest klasy szóstej, a krzywa klasy szóstej jest rzędu trzydziestego. Zdawałoby się tedy mogło, że według paradoksu Ponceleta ta sama krzywa jest raz rzędu trzeciego, drugi raz rzędu trzydziestego. Jeżeli jednak krzywa klasy szóstej nie posiada żadnych punktów szczególnych, natenczas posiada dziewięć stycznych przebiegów, które obniżają rząd o dwadzieścia siedem jednostek.

Krzywa rzędu trzeciego z punktem podwójnym jest klasy czwartej i posiada trzy styczne przebiegi.

Krzywa rzędu trzeciego z punktem zwrotu jest krzywą klasy trzeciej z jedną styczną przebiegiem.

0 rzutach krzywej płaskiej.

6. Rzut c' krzywej rzędu m -tego a klasy n -tej z dowolnego punktu O na dowolną płaszczyznę π jest krzywą rzędu m -tego i klasy n -tej. Jeżeli bowiem prosta l przecina się z krzywą „ c ” w „ m ” punktach $A, B, \dots$ a z punktu L można do „ c ” „ n ” stycznych $a, b, \dots$ poprowadzić, to ślad l' płaszczyzny (O, l) na płaszczyźnie π przecina się z rzutem c' w punktach $A', B', \dots$ które są rzutami punktów $A, B, \dots$ a ślady $a', b', \dots$ płaszczyzn $(O, a), (O, b), \dots$ na płaszczyźnie π są stycznymi krzywej c' i przechodzą przez rzut L' punktu L .

Rzuty punktów i stycznych szczególnych krzywej „ c ” są takimi samymi szczególnościami rzutu tejże krzywej; a więc rzut punktu podwójnego krzywej c jest punktem podwójnym rzutu tejże krzywej i t. d.

W rzutach równoległych są również rzuty asymptot krzywej c asymptotami rzutu tej krzywej; w rzutach środkowych jednak jest rzut asymptoty styczną do rzutu krzywej w śladzie zbiegu tejże asymptoty, który to ślad w ogóle w skończoności leży.

Zagadnienie: Wyznaczyć rzuty punktu przebiegu i punktu zwrotu, jeżeli te punkta leżą na płaszczyźnie zniknięcia.

0 krzywiznie krzywych płaskich.

7. Powiadamy, że krzywa posiada w pewnym punkcie tem większą krzywiznę im szybciej oddala się od stycznej, poprowadzonej w tym punkcie.

Krzywizna koła, przez którą rozumiemy odwrotną wartość promienia, jest we wszystkich punktach jednakowa, wszystkie bowiem punkta koła zachowują się jednakowo względem stycznych tegoż.

Jeżeli „ r ” oznacza promień, „ σ ” dowolny łuk koła a „ φ ” kąt środkowy, odpowiadający łukowi σ , natenczas krzywiznę koła wyrażamy: $\frac{1}{r} = \frac{\varphi}{\sigma}$.

Krywiznę tedy jakiejkolwiek krzywej w punkcie A mierzymy krzywizną koła k , które przechodzi przez punkt A i przez dwa nieskończenie blisko A leżące punkty.

Jeżeli węzeł ZBZ krzywej c^m (rys. 10.), zawarty między stycznymi s_1 i s_2 krzywej w punkcie podwójnym Z , zmniejsza się, a styczne s_1 i s_2 zbliżają się do siebie, natenczas w granicy powstaje punkt zwrotu. Prosta AZ traci charakter stycznej s_3 ; skutkiem zmiany tedy punktu podwójnego na punkt zwrotu obniża się klasa krzywej o jedną. A zatem punkt zwrotu obniża klasę krzywej o trzy jednostki. — (Przykład zmiany krzywej rzędu czwartego złożonej z dwu gałęzi, na krzywą jednolitą z punktem podwójnym lub z punktem zwrotu znajdziemy przy przekrojach płaskich pierścienia kołowego).

8. Niech będą dane dwa punkta A i B na krzywej „ c ” i styczna „ a ” poprowadzona do „ c ” w punkcie A . (rys. 11.). Zakreślmy na cięciwie AB koło, stykające się z krzywą „ c ” w punkcie A , to środek O tego koła znajduje się na normalnej „ n ”. — Jeżeli punkt B zbliża się do punktu A , natenczas środek O zmienia swe położenie na prostej „ n ”, dążąc do punktu przecięcia się K normalnej n z normalną „ n_1 ”, następującą bezpośrednio po „ n ”.

Koło k , zakreślone z punktu K promieniem KA posiada z krzywą „ c ” trzy bezpośrednio po sobie następujące punkta wspólne, krzywizna tedy krzywej c w punkcie A jest równa krzywiznie koła k .

Koło k nazywamy kołem krzywiznowym, a punkt K środkiem krzywizny „ c ” w punkcie A .

Koło krzywiznowe przecina krzywą c , częśćka tej krzywej sąsiadująca z punktem A z jednej strony znajduje się w obrębie, częśćka zaś tej krzywej rozciągająca się po drugiej stronie punktu A leży poza obrębem koła k .

Zdarza się częstokroć, że koło krzywiznowe k krzywej c w pewnym punkcie W posiada z nią cztery bezpośrednio po sobie następujące punkta wspólne; w tym przypadku leży częśćka krzywej rozciągająca się po obu stronach punktu W w obrębie lub poza obrębem koła k . Taki punkt W nazywamy wierzchołkiem krzywej c .

9. Poprowadźmy w punktach $A_1, A_2, A_3...$ krzywej c (rys. 12.) normalne $n_1, n_2, n_3, ...$ to takowe są stycznymi miejsca geometrycznego c_1 środków krzywizny $K_1, K_2, K_3, ...$. Krzywą c_1 nazywamy odwijającą (ewolutą), a krzywą c odwiniętą (ewolwentą).

Nazwy odwinięta i odwijająca są oparte na następującem wyobrażeniu: Jeżeli nitkę, nawiniętą na odwijającej c_1 wypreżymy tak, by była styczną do tej krzywej, a następnie odwijać będziemy, natenczas każdy punkt tejże nitki opisze odwiniętą.

Wierzchołkom odpowiadają punkta zwrotu odwijającej. Wiadomo bowiem, że w wierzchołku W krzywej odwiniętej „ c ” schodzą się cztery 1, 2, 3 i 4 bezpośrednio po sobie następujące punkta, które leżą na jednym kole krzywiznowym, że zatem w środku K_w koła 1234 schodzą się dwa punkta odwijającej „ c_1 ”. Jeżeli tedy punkt A porusza się na odwiniętej w sposób ciągły, zajmując kolejno położenia $A_2, A_3, ...$, natenczas normalne $n, n_1, n_2, ...$ powlócą krzywą c_1 , której punkta $K, K_1, ...$ są środkami krzywizny krzywej „ c ” w punktach $A, A_1, ...$.

Niejednostajna prędkość punktu $K...$ na normalnych $n, ...$ staje się w punkcie K_w równą zeru, gdy tymczasem normalna (styczna do c_1) dalej się obraca; punkt K_w jest tedy punktem zwrotu (art. 3. d).

Punktowi przecięcia I odwiniętej c odpowiada punkt odwijającej, leżący w nieskończoności; styczna poprowadzona w tym punkcie do krzywej c_1 (asymptota) przechodzi przez punkt I prostopadle do stycznej przecięcia.

Odwijająca c_1 krzywej „ c ”, posiadającej punkt zwrotu Z , przechodzi przez ten punkt; promień krzywizny bowiem w punkcie zwrotu jest równy zero; styczna odwijającej w punkcie Z jest prostopadła do stycznej, poprowadzonej w tymże punkcie do odwiniętej c .

0 cykloidach.

10. Niech będą dane dwa wielokąty $ABC...$ i $A_1B_1C_1...$ (rys. 13.) o bokach równych, których wierzchołki A i A_1 schodzą się w jednym punkcie, niech nadto dany będzie punkt P , połączony stale z wielokątem $A_1B_1C_1...$. Przyjmijmy, że wielokąt $ABC...$ jest stały, a wielokąt $A_1B_1C_1...$ porusza się w ten sposób, że boki tegoż $A_1B_1, B_1C_1...$ schodzą się kolejno z bokami AB, BC wielokąta stałego, to natenczas punkt P opisuje kolejno łuki kół $PP_1, P_1P_2...$ zakreślonych ze środków $A, B, ...$ promieniami $AP, BP_1, ...$; kąty środkowe $PAP_1, P_1BP_2, ...$ są odpowiednio równe kątom $B_1AB, C_1BC...$

Jeżeli przyjmijmy, że boki $AB, ...$ i $A_1B_1, ...$ są nieskończenie małe, natenczas wielokąty $ABC...$ i $A_1B_1C_1...$ zmieniają się na krzywe c i c_1 , stykające się w punkcie A , z których jedna c_1 toczy się po drugiej c , t. z. punkta styczności krzywych zmieniają się w sposób ciągły, a łuki AB krzywej nieruchomej, zawarte między dwoma punktami styczności A i B , są równe łukom $A_1, B_1...$ krzywej ruchomej c_1 , zawartym między punktami $A_1B_1...$

Gdyby owe łuki nie były równe, natenczas krzywa c_1 nie tylko toczyła, aleby się ślizgała po krzywej c .

Punkt P stale połączony z krzywą c_1 opisuje krzywą c_2 , którą uważać można za złożoną z nieskończenie małych łuków kół, których środki leżą w punktach styczności krzywych c i c_1 kolejno po sobie następujących; proste tedy, łączące każdorazowe położenie punktu P z owymi punktami styczności, są normalnymi krzywej c_2 .

11. Jeżeli koło „ k ” toczy się po linii prostej, natenczas dowolny punkt, stale połączony z kołem k opisuje krzywą, którą nazywamy cykloidą z wy-
czajną.

Zakładamy sobie wykreślić krzywą „ c_2 ”, którą opisuje punkt styczności A koła k z prostą l , jeżeli to koło toczy się po l (rys. 14.).

Środek O koła ruchomego opisuje prostą „ m ” równoległą do l . Odmierzmy od punktu A na prostej l długość obwodu koła k i podzielmy otrzymany w ten sposób odcinek AA_1 na równe części $A I. I. II, ...$ podzielmy również na taką samą ilość równych części obwód koła k ($A1, 12, 23, ...$) i zakreślmy z punktów $O_1, O_2, ...$ koła promieniem OA , poprowadźmy następnie przez 1, 2, ... proste $m_1, m_2, ...$ równoległe do l , i wyznaczmy punkta przecięcia się $A', A'', ...$ kół k_1, k_2 z prostymi $m_1, m_2, ...$ to te punkta leżą na cykloidzie c_2 . — Proste $A1$ i $A'I, A2$ i $A''II, ...$ są równoległe; punkta tedy $A', A'', ...$ można wyznaczyć bez pomocy kół. Jeżeli bowiem połączymy punkt A z 1, 2, 3 .. i poprowadzimy przez I, II, III, odpowiednio równoległe do $A1, A2, A3, ...$ to punkta przecięcia się owych prostych z prostymi m_1, m_2, m_3 są punktami $A', A'', A'''...$ cykloidy.

Styczne $s_1, s_2, ...$ poprowadzone w punktach $A', A'', ...$ do krzywej c , są odpowiednio prostopadle do prostych $I A', II A'', ...$. Wszystkie punkta $A_1, A_2, ...$ z którymi punkt początkowy A podczas toczenia się koła k na prostej l się schodzi, są punktami zwrotu cykloidy. Odcinki tedy, zawarte między dwiema po sobie następującymi punktami zwrotu, są równe długości koła k .

Punkt A^6 , z którym schodzi się A , skoro pół obwodu koła k odwinie na prostej l jest najwyższym punktem gałęzi cykloidy, zawartej między punktami zwrotu A i A_1 , a zarazem wierzchołkiem tej krzywej.

12. Punkt P , leżący poza obrębem koła k i stale z niem złączony, opisuje podczas toczenia się tegoż koła po prostej cykloidę skróconą c_2 (rys. 15.). Przyjmijmy, że punkt P leży na prostej OA , wyprowadzonej z punktu O prostopadłe do prostej l , i założmy sobie wyznaczyć poszczególne punkta i styczne krzywej c_2 .

Podzielmy w tym celu obwód koła k punktami 1, 2, 3,... na równe części i odmierzmy te części na prostej l , począwszy od A tak aby $A1=AI$, $12=III$,... to natenczas odcinek AA_1 będzie równy długości obwodu koła k .

Jeżeli koło k potoczy się na prostej l w ten sposób, że stykać się będzie z l w punkcie III., natenczas punkt P , opisujący krzywą c_2 , obróci się około środka O o kąt $AO3$ i przesunie się równocześnie na prostej m_3 , równoległej do l o odcinek P_1P^3 równy odcinkowi $AIII$. Aby tedy wyznaczyć położenie punktu P^3 , poprowadźmy przez P^3 prostą m_3 , równoległą do l , a przez III. prostą $III P^3$, równoległą do $A3'$, to punkt przecięcia się prostych $III P^3$ i m_3 jest punktem krzywej c_2 .

Styczna s_3 , poprowadzona w tym punkcie do cykloidy skróconej, jest prostopadła do prostej $III P^3$ i t. d.

Punkt początkowy P jakoteż punkta P^n ..., z którymi schodzi się P po jedno, dwu, ... n -krotnem odwinięciu się koła k na prostej l , a nadto punkta, z którymi schodzi się P , skoro pół, $\frac{3}{2} \dots \frac{2n-1}{2}$ obwodu koła k na prostej l się odwinie, są wierzchołkami cykloidy skróconej c_2 . Na prostych, wyprowadzonych z punktu początkowego P i z punktów P^n ... leżą punkta podwójne krzywej c_2 .

13. Punkt P , leżący w obrębie koła k i stale z niem połączony, opisuje podczas toczenia się tegoż koła po prostej l cykloidę wydłużoną c_2 (rys. 16.). Jeżeli przyjmijmy, że punkt początkowy P leży na promieniu OA koła k , prostopadłym do prostej l , natenczas poszczególne punkta i styczne wyznaczamy podobnie jak dla cykloidy skróconej.

Na każdej gałęzi cykloidy wydłużonej znajdują się trzy wierzchołki i dwa punkta przegięcia.

14. Jeżeli prosta l toczy się po kole k (rys. 17.) natenczas dowolny punkt tejże opisuje krzywą, którą nazywamy odwiniętą koła.

Aby wyznaczyć poszczególne punkta i styczne krzywej, którą opisuje punkt styczności A prostej l z kołem k , podczas toczenia się prostej, podzielmy to koło na drobne części $A1, 12, 23$,... i poprowadźmy styczne w punktach 1, 2, 3..., odmierzmy następnie na tych stycznych od punktów styczności odcinki $1A_1, 2A_2, 3A_3$,... odpowiednio równe łukom $\widehat{A1}, \widehat{A2}, \widehat{A3}$, to miejsce geometryczne punktów A_1, A_2, A_3 jest odwiniętą koła k . Proste $1A_1, 2A_2$,... są normalnymi odwiniętej w punktach A_1, A_2 ... Odwinięta koła składa się z dwu gałęzi prostokątnie symetrycznych względem prostej OA ,

15. Niech będą dane dwa koła k i k_1 , stykające się z sobą w punkcie A . Przyjmijmy najpierw, że koło ruchome k_1 leży poza obrębem koła stałego k , to punkt, połączony stale z k_1 , opisuje podczas toczenia się koła k_1 po k krzywą, którą nazywamy epicykloidą.

Punkt, leżący na obwodzie k_1 opisuje epicykloidę zwyczajną, punkt, leżący poza obrębem koła k_1 opisuje epicykloidę skróconą, a punkt leżący w obrębie koła k_1 , opisuje epicykloidę wydłużoną.

Założmy sobie wykreślić epicykloidę c_2 , którą opisuje punkt styczności A kół k_1 i k , jeżeli k_1 toczy się po k . Środek O_1 koła k_1 opisuje koło k_2 , zakreślone ze środka O promieniem OO_1 (rys. 18.).

Jeżeli k_1 potoczy się po k w ten sposób, że nowy punkt styczności kół k i k_1 zejdzie się z punktem M , natenczas łuk koła k_1 o długości $\widehat{AM}$ odwinie się na kole nieruchomem k . Jeżeli tedy z punktu przecięcia się O_m koła k_2 z prostą OM zakreślimy koło k_m promieniem O_1A i odmierzmy na obwodzie tegoż łuk MA_m , równy długości łuku $\widehat{AM}$, natenczas otrzymamy punkt A_m epicykloidy c_2 . Styczna poprowadzona w punkcie A_m do krzywej c_2 , jest prostopadła do prostej MA_m .

Poszczególne punkta epicykloidy danej można z łatwością wyznaczyć postępując w sposób następujący: Dzielmy obwód koła k_1 na drobne części $A1=12=23=...$ i przenosimy takowe na obwód koła k ; $AB=...$ $A1, BC=23...$ kreślimy następnie z punktów $O_1, O_2, ...$ promieniem O_1A_1 koła a z punktów $B, C, ...$ łuki promieniami $A1, A2...$ to punkta przecięcia się $A1, A2...$ są punktami epicykloidy. — Z tej konstrukcyi wynika bezpośrednio, że krzywa c_2 jest obwiednią kół, zakreślonych z punktów $B, C...$ promieniami $A1, A2...$

Punkt styczności A jakoteż wszystkie punkta, leżące na obwodzie koła k , które z punktem A wyznaczają wielokrotności całkowite obwodu koła k_1 są punktami zwrotu epicykloidy c_2 . Jeżeli tedy stosunek promieni kół k i k_1 jest wymierny, natenczas ilość punktów zwrotu krzywej c_2 jest skończona, w przeciwnym razie jest ta ilość nieskończenie wielka.

16. Przyjmijmy, że punkt P , opisujący epicykloidę leży poza obrębem koła k_1 na prostej OO_1 , łączącej środki kół k i k_1 (rys. 19.).

Celem wyznaczenia poszczególnych punktów tej krzywej zakreślamy z punktu O_1 promieniem O_1P koło k' i dzielimy k_1 i k' punktami 1, 2... względnie $1', 2', ...$ na drobne części, odmierzamy następnie od A na obwodzie k części $AB, BC, ...$ odpowiednio równe łukom $\widehat{A1}, \widehat{A2}, ...$ i kreślimy z punktów I, II, ... łuki promieniami $P1', P2'$, a z punktów przecięcia się $O_2, O_3, O_4...$ prostych OB, OC z kołem k_2 łuki promieniem O_1P , to punkta przecięcia się $P_1, P_2...$ łuków zakreślonych z punktów I i O_2, II i O_3 leżą na epicykloidzie skróconej.

Proste $BP_1, CP_2, ...$ są normalnymi epicykloidy w punktach $P_1, P_2...$ — Epicykloida skrócona posiada nieskończenie wielką ilość punktów podwójnych, jeżeli stosunek promieni kół k i k_1 jest niewymierny. Na każdej gałęzi epicykloidy skróconej znajdują się dwa punkta przegięcia i trzy wierzchołki.

Punkta i styczne epicykloidy wydłużonej, którą opisuje punkt P , leżący w obrębie koła ruchomego k_1 , wyznaczamy podobnie jak punkta epicykloidy skróconej. Zauważyć należy, że na każdej gałęzi tej krzywej leżą dwa punkta przegięcia i trzy wierzchołki (rys. 20.).

17. Jeżeli koło k_1 leży w obrębie koła stałego k i styka się z niem w punkcie A , natenczas dowolny punkt P stale z k_1 połączony opisuje podczas toczenia się koła k_1 po kole k krzywą, którą nazywamy hipocykloidą. Założmy sobie wykreślić najpierw hipocykloidę, którą opisuje punkt styczności A kół k i k_1 .

Środek O_1 koła k_1 opisuje koło k_2 , zakreślone ze środka O promieniem OO_1 . Jeżeli koło k_1 potoczy się tak, że nowy punkt styczności kół k i k_1 zejdzie się z punktem M , natenczas łuk koła k_1 równy długości łuku $\widehat{AM}$ odwi-

nie się na kole k . Kreśląc tedy z punktu O_m , w którym prosta OM przecina się z kołem k_2 , koło k_m i odmierzając na obwodzie tegoż łuk $\widehat{MA_m}$ równy $\widehat{AM}$, otrzymamy punkt A_m , z którym punkt A się schodzi. Styczna poprowadzona do hipocykloidy w punkcie A_m jest prostopadła do prostej MA_m .

Poszczególne punkta hipocykloidy można wyznaczyć sposobem następującym: Dzielimy obwód koła ruchomego k_1 na części $A1, 12$, i przenosimy takowe na koło nieruchome k , wskutek czego otrzymujemy łuki $AB=BC=\dots A1$ kreślimy następnie z punktów $O_1, O_2, \dots$ koła $k_2, k_3, \dots$ promieniem OA a z punktu O koła $k'_1, k'_2, \dots$ promieniami $O1, O2, \dots$ to odpowiednie punkta przecięcia się tychże $A_1, A_2, \dots$ są punktami hipocykloidy. Punkt styczności A kół k i k_1 jakoteż wszystkie punkta koła k , z którymi A podczas toczenia się k_1 , się schodzi, są punktami zwrotu hipocykloidy (rys. 21 a).

18. Jeżeli promień O_1A koła ruchomego k_1 jest równy połowie promienia OA koła stałego k , natenczas hipocykloida schodzi się ze średnicą AP (rys. 21.).

Jeżeli bowiem koło k_1 potoczy się tak, że punkt styczności kół k i k_1 zejdzie się z M , to punkt A zejdzie się z punktem A_m , leżącym na średnicy AOP , kąt bowiem $A_m O_m M$ jest dwa razy większy niż kąt AOM , łuki tedy $A_m M$ i AM są równe.

19. Przyjmijmy, że promień r_1 koła ruchomego jest większy niż pół promienia r koła stałego a mniejszy niż r i założmy sobie zbadać własności hipocykloidy opisanej punktem początkowym A (rys. 22.).

Jeżeli k_1 potoczy się po k i zajmie położenie k_m , natenczas A zejdzie się z punktem A_m , który otrzymamy odmierzając na kole k_1 od punktu M długość łuku $A_m M$, równą długości łuku AM koła k . Połączmy punkt A_m ze środkiem O_m i poprowadźmy przez O prostą OB równoległą do $O_m A_m$, a przez A_m prostą $A_m O_1$ równoległą do OM , to spostrzeżemy, że odcinek $BO'_m = O'_m A'_m$ jest równy różnicy $r - r_1$ promieni kół k i k_1 , a nadto że łukom BM , $A_m M$ i BA_m odpowiadają kąty środkowe równe $BOM = A_m O_m M = BO'_m A'_m = \alpha$ a zatem $BM = r \cdot \alpha$, $A_m M = r_1 \cdot \alpha$, $BA_m = (r - r_1) \alpha$ a ponieważ $\widehat{A_m M} = \widehat{AM}$, przeto

$$\widehat{BA_m} = \widehat{BA}.$$

Z tego wynika: Hipocykloida opisana punktem koła k_1 o promieniu r_1 , większym niż połowa promienia r koła ruchomego schodzi się z hipocykloidą, opisaną punktem koła k' o promieniu $r' = r - r_1$, jeżeli kierunek obrotów k_1 i k' jest przeciwny.

20. Przyjmijmy w końcu, że promień r_1 koła ruchomego k_1 jest większy niż promień „ r ” koła stałego, to natenczas można w sposób wskazany w poprzednim artykule udowodnić, że hipocykloida opisana punktem styczności A kół k i k_1 schodzi się z epicykloidą, opisaną tymże punktem, jeżeli koło k' o promieniu $r' = r_1 - r$ po stronie wypukłej koła k się toczy. (rys. 23.)

0 wyznaczaniu stycznych, punktów styczności i normalnych krzywej narysowanej lecz nie określonej.

21. Jeżeli znany jest związek między elementami tworzącymi krzywą — albo innymi słowy, jeżeli znane jest prawo tworzenia się krzywej, natenczas można wszelkie konstrukcje na tejże krzywej geometrycznie wykonać. Jeżeli jednak mamy krzywą narysowaną, której prawa tworzenia się nie znamy,

natenczas nie można wprawdzie z całą ścisłością rozwiązać zagadnień rysunkowych, odnoszących się do tej krzywej, atoli cel ten można osiągnąć w wielkiem przybliżeniu za pomocą tak zwanych krzywych błędu. I tak n. p.

Zagadnienie 1: Wyznaczyć punkt styczności stycznej „ s ”, poprowadzonej do krzywej c , narysowanej lecz nieokreślonej (rys. 24.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez dowolny punkt P , leżący na stycznej s , w pobliżu tejże, sieczne $PA, PB, \dots$ i podzielmy cięciwy $AA_1, BB_1, \dots$, na dwie równe części $A1 = 1A_1, B2 = 2B_1, \dots$ to miejsce geometryczne punktów $1, 2, \dots$ jest krzywą c_1 , która przecina styczną s w jej punkcie styczności z krzywą c ; punkt styczności bowiem można uważać za punkt dzielący nieskończenie małą cięciwę, leżącą na stycznej, na dwie równe części.

Zagadnienie 2: Wyznaczyć styczną poprowadzoną do krzywej c w punkcie A (rys. 25.).

Rozwiązanie: Zakreślmy z punktu A koło k i poprowadźmy sieczne $AB_1, AB_2, \dots$ które przecinają koło „ k ” w punktach $C_1, C_2, \dots$ odmierzymy następnie od punktów $C_1, C_2, \dots$ w kierunkach $AC_1, AC_2, \dots$ odcinki $C_1 D_1, C_2 D_2, \dots$ odpowiednio równe cięciwom $AB_1, AB_2, \dots$ i połączmy punkta $D_1, D_2, \dots$ krzywą c_1 , to koło k przetnie się z krzywą c_1 w punkcie C , przez które styczna, poprowadzona do c w punkcie A przechodzi.

Zagadnienie 3: Przez dany punkt A poprowadzić normalną do krzywej narysowanej c (rys. 26.).

Rozwiązanie: Zakreślmy z punktu A koła $k_1, k_2, \dots$ które przecinają się z krzywą c w punktach B i B_1, C i $C_1, \dots$ podzielmy następnie cięciwy $BB_1, CC_1, \dots$ na dwie równe części $B1 = 1B_1, C2 = 2C_1, \dots$ to miejsce geometryczne c punktów $1, 2, \dots$ przecina się z krzywą c w punkcie T , który wyznacza jedną normalną krzywej c , poprowadzoną przez punkt A ; proste bowiem, wyprowadzone z punktów $1, 2, \dots$ prostopadłe do cięciw $BB_1, CC_1, \dots$ przechodzą przez wspólny środek A kół $k_1, k_2, \dots$ prosta tedy wyprowadzona z punktu T do nieskończenie małej cięciwy przechodzi również przez punkt A .

0 krzywych wichrowatych.

22. Miejsce geometryczne punktu poruszającego się w przestrzeni w sposób ciągły jest krzywą wichrowatą, jeżeli cztery bezpośrednio po sobie następujące punkta nie leżą w ogólności na płaszczyźnie.

Proste, łączące po dwa bezpośrednio po sobie następujące punkta nazywamy płaszczyznami stycznymi krzywej wichrowatej.

Płaszczyzny, przesunięte przez trzy bezpośrednio po sobie następujące styczne 12, 23 — 23, 34 — ... nazywamy płaszczyznami ściśle stycznymi krzywej wichrowatej.

Proste, poprowadzone przez punkt styczności prostopadłe do stycznej nazywamy normalnymi. Wszystkie normalne krzywej, poprowadzone w jednym punkcie, leżą na płaszczyźnie, którą nazywamy płaszczyzną normalną. Normalną, która leży na płaszczyźnie ściśle stycznej nazywamy normalną główną; normalną, prostopadłą do płaszczyzny ściśle stycznej nazywamy binormalną.

23. Z określeń podanych na czele poprzedniego artykułu można sobie wyobrazić, że krzywa wichrowata powstaje w sposób następujący:

Punkt porusza się w przestrzeni na stycznej, równocześnie styczna obraca się około punktu styczności na płaszczyźnie ściśle stycznej, a płaszczyzna ściśle styczna obraca się około stycznej.

Jeżeli prędkość punktu niejednostajnie opóźniona jest w pewnym miejscu Z równa zeru, poczem punkt rozpoczyna ruch wsteczny niejednostajnie przyspieszony, gdy tymczasem styczna około punktu styczności i płaszczyzna ściśle styczna około stycznej niejednostajnie się obracają, natenczas w Z schodzą się dwa punkta, a przez Z przechodzą trzy styczne i cztery płaszczyzny ściśle styczne.

Taki punkt nazywamy punktem zwrotu.

Jeżeli prędkość obrotowa stycznej w pewnym miejscu „ z ” jest równa zeru, gdy tymczasem punkt po stycznej jednostajnie postępuje a płaszczyzna ściśle styczna jednostajnie około stycznej się obraca, natenczas schodzą się na stycznej „ z ” trzy bezpośrednio po sobie następujące punkta, a nadto przez „ z ” przechodzą trzy bezpośrednio po sobie następujące płaszczyzny ściśle styczne.

Taką styczną nazywamy styczną zwrotu.

Jeżeli w końcu punkt jednostajnie na stycznej postępuje a zarazem styczna jednostajnie około punktu styczności się obraca, gdy tymczasem prędkość obrotowa niejednostajna płaszczyzny ściśle stycznej w pewnym miejscu π , jest równa zeru, poczem ta płaszczyzna ruch obrotowy w kierunku przeciwnym rozpoczyna, natenczas, cztery bezpośrednio po sobie następujące punkta i trzy bezpośrednio po sobie następujące styczne krzywej leżą na płaszczyźnie π .

Taką płaszczyznę nazywamy płaszczyzną zwrotu.

Dwie bezpośrednio po sobie następujące płaszczyzny ściśle styczne krzywej wchrowatej c_w przecinają się podług stycznej tej krzywej, a dwie bezpośrednio po sobie następujące styczne, albo trzy bezpośrednio po sobie następujące płaszczyzny ściśle styczne przecinają się w punkcie owej krzywej.

Krzywą wchrowatą można tedy uważać za obwiednię płaszczyzny poruszającej się w przestrzeni w sposób ciągły według pewnego prawa. Dwie bezpośrednio po sobie następujące płaszczyzny wyznaczają styczną krzywej, a trzy bezpośrednio po sobie następujące płaszczyzny wyznaczają punkt krzywej.

Pojęcia krzywej raz jako miejsca geometrycznego punktów, drugi raz jako obwiedniej płaszczyzny są dwoiste. Punktowi krzywej c_w odpowiada płaszczyzna ściśle styczna krzywej dwoistej c_w^1 , stycznej poprowadzonej do c_w odpowiada styczna krzywej c_w^1 , a płaszczyźnie ściśle stycznej krzywej c_w odpowiada punkt leżący na c_w^1 , i wzajemnie.

0 rzędzie, stopniu i klasie krzywych wchrowatych algebraicznych.

24. Krzywe wchrowate dzielimy podobnie jak krzywe płaskie na krzywe algebraiczne i przestępne.

Krzywe wchrowate algebraiczne, które na razie będą przedmiotem naszych badań, dzielimy podług rzędów, stopni i klas.

Przez rząd rozumiemy ilość punktów przecięcia się dowolnej płaszczyzny z krzywą.

Stopniem nazywamy ilość płaszczyzn stycznych, krzywej wchrowatej, dających się przesunąć przez jedną prostą.

Przez klasę rozumiemy ilość płaszczyzn ściśle stycznych, przechodzących przez jeden punkt.

W dalszym ciągu oznaczać będziemy literami „ m ”, „ r ” i „ n ” odpowiednio rząd, stopień i klasę krzywej wchrowatej.

Celem zbadania jakie związki między rzędem, stopniem i klasą zachodzą, należy przedewszystkiem poznać własności rzutów krzywej wchrowatej, a nadto własności przekrojów płaskich powierzchni rozwijalnej, opisanej na tej krzywej.

O rzucie krzywej wchrowatej.

25. Rzut c'_w krzywej wchrowatej c_w z dowolnego punktu O na dowolną płaszczyznę π jest miejscem geometrycznym rzutów wszystkich punktów tej krzywej. Rzut s'_1 stycznej s_1 poprowadzonej w punkcie „1” do krzywej c_w , jest styczną krzywej c'_w w rzucie 1' punktu „1”; styczna s_1 bowiem łączy dwa bezpośrednio po sobie następujące punkta krzywej c_w , prosta s'_1 łączy tedy rzuty tychże punktów, które oczywiście bezpośrednio na krzywej c'_w po sobie następują.

Płaszczyzna π , przesunięta przez środek rzutów O przecina krzywą wchrowatą c_w rzędu m -tego w „ m ” punktach $A, B, C, \dots$ ślad tedy l płaszczyzny π na płaszczyźnie rzutów przecina się z rzutem c'_w w „ m ” punktach $A', B', C', \dots$, które są rzutami punktów A, B, C . A zatem: Rząd drutu krzywej wchrowatej jest równy rzędowi tej krzywej.

Twierdzenie o równości rzędów krzywej i jej rzutu jest tylko wówczas ważne, jeżeli środek rzutów O nie ma z krzywą nic wspólnego.

Jeżeli środek rzutów leży na krzywej wchrowatej c_w rzędu m -tego, natenczas rząd rzutu tej krzywej jest równy $(m-1)$; płaszczyzna bowiem przesunięta przez środek O przecina się z płaszczyzną rzutów podług prostej l , na której leży $(m-1)$ punktów rzutu c'_w krzywej c_w .

Łatwo zrozumieć, że jeżeli środek rzutów O jest punktem „ k ”-krotnym krzywej c_w natenczas rząd rzutu c'_w jest równy $(m-k)$.

Klasa rzutu krzywej wchrowatej c_w jest równa stopniowi tejże.

Jakoż z określenia stopnia krzywej wchrowatej c_w wynika, że przez dowolną prostą p , która przechodzi przez środek rzutów, można poprowadzić „ r ” płaszczyzn stycznych do tej krzywej, ślady zaś tych płaszczyzn są stycznymi, poprowadzonymi przez ślad P prostej p do krzywej c'_w . Jeżeli środek rzutów O leży na stycznej s , poprowadzonej do krzywej c_w , natenczas klasa rzutu c'_w jest równa $(r-1)$; albo rzut stycznej s jest punktem.

W dowolnym punkcie krzywej przecinają się — jak wiadomo — dwie styczne. Jeżeli tedy obierzemy dowolny punkt krzywej wchrowatej c_w za środek rzutów, natenczas klasa rzutu c'_w , będzie równa $(r-2)$; albowiem rzuty dwu stycznych przecinających się w punkcie O schodzą się w jednym punkcie*).

Jeżeli rzut c'_w krzywej c_w posiada „ i ” stycznych przegięcia t. j. takich prostych, które posiadają po trzy bezpośrednio po sobie następujące punkta

*) Twierdzenia, które o warunkowym obniżeniu rzędów względnie klas rzutów krzywych wchrowatych uzasadniliśmy, sprzeciwiają się pozornie „zasadzie zachowania ilości”. Sprzeczność ta okaże się jednak pozorną, jeżeli zauważymy a) że rzut punktu „ k ”-krotnego krzywej c_w schodzącego się ze środkiem rzutów O jest nieoznaczonym punktem „ k ”-krotnym rzutu krzywej c'_w , b) że rzut stycznej „ k ”-krotnej s z punktu leżącego na prostej s jest krzywą klasy k -tej, która się przedstawi w postaci „ k ” punktów, schodzących się w śladzie S stycznej s na płaszczyźnie rzutów.

spólne, to te styczne są częścią śladami płaszczyzn ściśle stycznych, przechodzących przez środek rzutów, częścią rzutami stycznych zwrotu krzywej c_m . Oznaczając tedy ilość płaszczyzn ściśle stycznych, dających się poprowadzić przez jeden punkt do krzywej c_w literą „ n ” (klasa krz. c_w), a ilość stycznych zwrotu tejże krzywej literą ϑ otrzymamy $i = n + \vartheta$.

Rzut D' punktu poprzedniego D krzywej wichrowatej c_w jest punktem podwójnym rzutu c'_w tej krzywej, a rzuty s'_1 i s'_2 stycznych s_1, s_2 , poprowadzonych w punkcie D do krzywej c_w są stycznymi, poprowadzonymi w punkcie D' do c'_w .

Jeżeli jednak przez dowolny punkt, a więc i przez środek rzutów można poprowadzić takie proste $p_1, p_2, \dots$ które przecinają krzywą c_w w parach punktów A_1 i A_2, B_1 i $B_2, \dots$ natenczas ślady prostych $OA_1A_2, OB_1B_2, \dots$ są punktami podwójnymi krzywej c'_w .

Oznaczając tedy literą D ilość punktów podwójnych krzywej wichrowatej, a literą „ h ” ilość dwusiecznych tej krzywej, dających się poprowadzić przez jeden punkt, wyznacza suma $(D+h)$ ilość punktów podwójnych rzutu owej krzywej.

Z określenia punktów zwrotu krzywej wichrowatej c_w wynika bezpośrednio, że rzuty tychże są punktami zwrotu krzywej c'_w . Jeżeli jednak ze środka rzutów można poprowadzić styczne do krzywej c_w , to natenczas ślady tych stycznych na płaszczyźnie rzutów są również punktami zwrotu rzutu c'_w ; styczne bowiem krzywej łączą po dwa bezpośrednio po sobie następujące punkta są tedy rodzajem dwusiecznych krzywej c_w , ślady przeto stycznych, poprowadzonych przez środek O , na płaszczyźnie rzutów są punktami podwójnymi, których styczne parami nakrywają się. A zatem: Ilość punktów zwrotu rzutu krzywej wichrowatej c_w jest równa ilości „ β ” punktów zwrotu tejże powiększonej ilością „ n ” stycznych, dających się z dowolnego punktu do krzywej c_w poprowadzić.

Rzuty stycznych podwójnych krzywej c_w są stycznymi podwójnymi rzutu c'_w tejże krzywej.

Jeżeli z dowolnego punktu, a więc i ze środka rzutów, można poprowadzić do krzywej c_w takie płaszczyzny styczne, które się stykają z tą krzywą w parach punktów A_1 i A_2, B_1 i $B_2, \dots$ to natenczas ślady tych płaszczyzn na płaszczyźnie rzutów są stycznymi podwójnymi krzywej c'_w .

Oznaczając tedy literą „ y ” ilość płaszczyzn, przesuniętych przez środek rzutów, z których każda styka się z krzywą c_w w dwóch punktach, literą „ d ” zaś ilość stycznych podwójnych tejże krzywej, otrzymamy sumę $(y+d)$ jako ilość stycznych podwójnych rzutu c'_w .

Pomiędzy rzędem, klasą oraz ilościami punktów i stycznych szczególnych rzutu krzywej wichrowatej zachodzą tedy następujące związki:

- 1.) $r = m(m-1) - 2(D+d) - 3(\beta + \vartheta)$
- 2.) $m = r(r-1) - 2(y+d) - 3(n+\vartheta)$
- 3.) $(r+\vartheta) - (\beta + \vartheta) = 3(r-n)$.

Jeżeli krzywa wichrowata nie posiada żadnych szczególności nadzwyczajnych ($D=0, \vartheta=0, d=0, \vartheta=0$) natenczas powyższe wzory upraszczają się w następujący sposób:

- 1*) $r = m(m-1) - 2h - 3\beta$
- 2*) $m = r(r-1) - 2y - 3n$
- 3*) $(n-\beta) = 3(r-m)$.

0 przekrojach płaskich powierzchni rozwijalnej opisanej na krzywej wichrowatej.

26. Jeżeli krzywą wichrowatą c_w uważamy za miejsce geometryczne punktu poruszającego się w przestrzeni według pewnego prawa, natenczas proste 12, 23, ... łączące po dwa bezpośrednio po sobie następujące punkta tej krzywej, są stycznymi, a płaszczyzny, przesunięte przez dwie bezpośrednio po sobie następujące styczne są płaszczyznami ściśle stycznymi tej krzywej. Niezakończenie wąskie paski płaszczyzn ściśle stycznych, zawarte między 12 i 23, 23 i 34, ... tworzą powierzchnię Π_r , którą bez złamania i bez pomarszczenia można rozwinąć na płaszczyźnie. Jakoż sprowadzając płaszczyznę 123 przez obrót około stycznej 23 do płaszczyzny 234, płaszczyznę 234 przez obrót około stycznej 34 do płaszczyzny 345 i t. d. sprowadzimy w końcu wszystkie płaszczyzny ściśle styczne, a więc i wszystkie elementa powierzchni do jednej płaszczyzny.

Z przytoczonych powodów nazywamy powierzchnię Π_r powierzchnią rozwijalną opisaną na krzywej c_w . Tworzące tej powierzchni są stycznymi krzywej c_w , a płaszczyzny styczne tejże są płaszczyznami ściśle stycznymi krzywej c_w , na tych płaszczyznach bowiem leżą elementa powierzchni, zawarte między dwiema bezpośrednio po sobie następującymi tworzącymi.

Przekrój c_p powierzchni rozwijalnej Π_r , opisanej na krzywej wichrowatej c_w , płaszczyzną π jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się płaszczyzny π ze stycznymi, poprowadzonymi do krzywej c_w , albo obwiednią prostych, podług których płaszczyzny ściśle styczne krzywej c_w przecinają się z płaszczyzną π .

Rzęd tedy krzywej przekroju c_p jest równy ilości stycznych krzywej c_w , przecinających prostą, która leży na płaszczyźnie π . A zatem: Rzęd krzywej c_p jest równy stopniowi „ r ” krzywej c_w .

Jeżeli przez dowolny punkt, leżący na płaszczyźnie π poprowadzimy styczną do krzywej c_p , to przez tę styczną przechodzi płaszczyzna styczna powierzchni Π_r , czyli płaszczyzna ściśle styczna krzywej c_w . A zatem:

Klasa krzywej przekroju powierzchni Π_r płaszczyzną jest równa klasie krzywej wichrowatej.

Jeżeli krzywa przekroju c_p posiada punkt podwójny, to punkt ten jest albo śladem na płaszczyźnie π stycznej podwójnej t krzywej c_w , albo punktem w którym dwie styczne t_1 i t_2 krzywej c_w przecinają się.

W pierwszym przypadku płaszczyzny styczne powierzchni Π_r , poprowadzone wzdłuż stycznej podwójnej przecinają się z płaszczyzną π podług stycznych poprowadzonych w punkcie podwójnym do krzywej c_p , w drugim zaś przypadku płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni Π_r wzdłuż tworzących t_1 i t_2 , przecinają się z płaszczyzną π podług stycznych krzywej c_p w punkcie podwójnym.

Jeżeli tedy „ d ” oznacza ilość stycznych podwójnych krzywej c_w , a „ x ” oznacza ilość punktów, leżących na płaszczyźnie Π_r , w których po dwie styczne krzywej c_w przecinają się, natenczas ilość punktów podwójnych przekroju płaskiego powierzchni Π_r jest równa $(d+x)^*$.

*) UWAGA. Skoro na płaszczyźnie π leży „ x ” takich punktów, w których dwie tworzące powierzchni Π_r przecinają się, przeto na zasadzie prawa o zachowaniu ilości, leży na każdej płaszczyźnie „ x ” takich punktów; miejsce geometryczne tychże jest zatem krzywą rzędu „ x ” własnego przenikania się powierzchni Π_r , opisanej na krzywej wichrowatej c_w .

Punkta przecięcia się Z płaszczyzny π z krzywą wichrowatą c_w , na której powierzchnia rozwijalna jest opisana, są punktami podwójnymi krzywej c_p , albowiem przez punkt Z przechodzą dwie tworzące powierzchni Π_r , które bezpośrednio po sobie następują. Atoli styczne, poprowadzone do krzywej c_p , schodzą się ze śladem płaszczyzny ściśle stycznej, poprowadzonej do krzywej c_w w punkcie Z . Punkt Z jest tedy punktem zwrotu krzywej c_p . Z tego powodu nazywamy krzywą c_w krzywą zwrotu powierzchni Π_r .

Ślad stycznej zwrotu krzywej c_w na płaszczyźnie π jest również punktem zwrotu krzywej c_p , na stycznej zwrotu schodzą się bowiem dwie bezpośrednio po sobie następujące styczne krzywej c_w .

A zatem: Ilość punktów zwrotu krzywej przekroju płaskiego powierzchni rozwijalnej, opisanej na krzywej wichrowatej jest równa $(m + \vartheta)$.

Prosta, podług której płaszczyzna ściśle styczna podwójna krzywej c_w przecina się z płaszczyzną π jest styczną podwójną krzywej c_p ; prosta, leżąca na płaszczyźnie π , przez którą przechodzą dwie płaszczyzny ściśle styczne krzywej c_w jest również styczną podwójną krzywej c_p .

Oznaczając literą „ Δ ” ilość płaszczyzn ściśle stycznych podwójnych, a literą „ g ” ilość prostych, leżących na płaszczyźnie π , przez które przechodzą po dwie płaszczyzny ściśle styczne krzywej c_w , wyraża suma $(g + \Delta)$ ilość stycznych podwójnych krzywej c_p .

Wiadomo, że na płaszczyźnie zwrotu krzywej wichrowatej leżą po trzy bezpośrednio po sobie następujące styczne, na prostej tedy, podług której płaszczyzna π przecina się z płaszczyzną zwrotu, leżą trzy bezpośrednio po sobie następujące punkta krzywej c_p ; ślady przeto płaszczyzn zwrotu krzywej wichrowatej są stycznymi przecięcia c_p .

Ilość płaszczyzn zwrotu krzywej wichrowatej oznaczać będziemy literą „ α ”.

Stosując tedy do przekroju płaskiego powierzchni rozwijalnej, opisanej na krzywej wichrowatej wzory Plückera, otrzymamy:

- 1.) $n = r(r-1) - 2(d+x) - 3(m+\vartheta)$
- 2.) $r = n(n-1) - 2(g+\Delta) - 3\alpha$
- 3.) $\alpha - (m+\vartheta) = 3(n-r)$.

Jeżeli krzywa wichrowata nie posiada żadnych szczególności nadzwyczajnych ($d=0$, $\vartheta=0$, $\Delta=0$), natenczas wzory powyższe upraszczają się w sposób następujący:

- 1*) $n = r(r-1) - 2x - 3m$
- 2*) $r = n(n-1) - 2g - 3\alpha$
- 3*) $\alpha - m = 3(n-r)$.

Powyższe równania w połączeniu z równaniami, wyprowadzonymi w art. 25. dają nam sześć związków między dziewięcioma ilościami g , h , m , n , r , x , y , α i β .

- I.) $r = m(m-1) - 2h - 3\beta$
- II.) $m = r(r-1) - 2y - 3n$
- III.) $(n-\beta) = 3(r-m)$
- IV.) $n = r(r-1) - 2x - 3m$
- V.) $r = n(n-1) - 2g - 3\alpha$
- VI.) $\alpha - m = 3(n-r)$, za pomocą których z trzech danych

można dalszych sześć obliczyć.

Atoli z równań III. i IV. wynika, że między ilościami r , x i β zachodzi związek $r(r-4) = 2x + \beta$; a z równań II. i VI. otrzymamy z łatwością związek $r(r-4) = \alpha + 2y$; grupy tedy r , x i β tudzież r , α i y ... są niedopuszczalne, jeżeli równanie o sześciu niewiadomych (I–VI.) ma być oznaczone.

0 powierzchniach stożkowych i walcowych.

1. Najprostszą powierzchnię rozwijalną tworzy prosta l , przechodząca przez stały punkt W i ślizgająca się po linii krzywej „ c ”. Taką powierzchnię nazywamy powierzchnią stożkową. Punkt W nazywamy wierzchołkiem albo środkiem, a krzywą „ c ” nazywamy kierownicą powierzchni stożkowej.

Jeżeli wierzchołek W leży w nieskończoności, natenczas powstaje powierzchnia walcowa; tworzące walca są tedy równoległe,

Rzędem powierzchni nazywamy ilość punktów, w których dowolna prosta przecina powierzchnię. Jeżeli tedy prosta „ p ” przecina się z powierzchnią stożkową w „ m ” punktach, natenczas dowolna płaszczyzna, przesunięta przez „ p ” przecina się z tą powierzchnią podług krzywej rzędu m -tego, płaszczyzna zaś (W, p) , przesunięta przez wierzchołek i przez prostą „ p ” przecina powierzchnię stożkową (W, c) podług „ m ” prostych, przecinających się w wierzchołku; punkt „ W ” jest tedy punktem „ m ”-krotnym powierzchni (W, c) .

2. Płaszczyznę, przesuniętą przez dwie bezpośrednio po sobie następujące, tworzące WA i WA' , albo granicę (W, s) do której dąży płaszczyzna WAB , jeżeli tworząca WB bez końca do tworzącej WA się zbliża, nazywamy płaszczyzną styczną, poprowadzoną do powierzchni stożkowej (W, c) wzdłuż tworzącej WA (rys. 27.)

Krzywa c_1 , poprowadzona na powierzchni stożkowej (W, c) przecina tworzące WA i WA' w dwóch bezpośrednio po sobie następujących punktach A_1 i A'_1 , które wyznaczają styczną s_1 , poprowadzoną w punkcie A_1 do krzywej c_1 ; styczna s_1 leży tedy na płaszczyźnie (W, s) .

A zatem: Styczna, poprowadzona do krzywej, leżącej na powierzchni stożkowej i tworząca, poprowadzona przez punkt styczności owej stycznej, wyznaczają płaszczyznę styczną powierzchni stożkowej.

Ilość płaszczyzn stycznych dających się poprowadzić z jednego punktu do powierzchni stożkowej, nazywamy klasą tejże powierzchni.

Klasa powierzchni stożkowej jest równa stopniowi kierownicy. Jakoż połączmy dowolny punkt X z wierzchołkiem W powierzchni (W, c) i poprowadźmy przez punkt przecięcia się D prostej WX z płaszczyzną, na której leży kierownica „ c ”, styczne s_2 , s_3 ... do tej krzywej, to płaszczyzny W, s_2 , W, s_3 ... są płaszczyznami stycznymi powierzchni (W, c) wzdłuż tworzących WC , WE ... poprowadzonych przez punkta styczności C i E kierownicy „ c ” ze stycznymi s_2 , s_3 ...

0 rzutach powierzchni stożkowych i walcowych.

3. Wierzchołek i kierownica wyznaczają powierzchnię stożkową. W dalszym ciągu nie uchybiając ogólności rozumowań i konstrukcyj, przyjmować będziemy, że kierownica jest krzywą płaską. Jeżeli tedy dana jest płaszczyzna, na której kierownica leży, a nadto dane są rzuty kierownicy i wierzchołka, natenczas powierzchnia stożkowa jest wyznaczona.

Zagadnienie 1. Wykreślić rzut środkowy powierzchni stożkowej, jeżeli dany jest rzut c' kierownicy, leżącej na płaszczyźnie π (t, z') i rzut W' wierzchołka, leżącego na prostej l (T, Z') (rys. 28.).

Rozwiązanie: Proste $W'1', W'2', \dots$ łączące rzut W' wierzchołka z punktami $1', 2', \dots$ krzywej c' są rzutami tworzących $W1, W2, \dots$. Ślady T_1 i Z_1' , T_2 i $Z_2', \dots$ tworzących $W1, W2, \dots$ leżą na śladach płaszczyzn, przesuniętych przez proste l i $W1, l$ i $W2, \dots$

Miejsce geometryczne c_1 punktów $T_1, T_2, \dots$ jest śladem tłowym, a miejsce geometryczne c_2' jest śladem zbiegu powierzchni stożkowej. Krzywe c_1 i c_2' są homotetyczne (podobne w podobnym położeniu); albowiem ślady T_1T_2 i $Z_1'Z_2'$, T_1T_3 i $Z_1'Z_3', \dots$ płaszczyzn, przesuniętych przez tworzące $W1$ i $W2, W1$ i $W3, \dots$ są równoległe, a proste $T_1Z_1', T_2Z_2', \dots$ przechodzą przez punkt W' , który jest środkiem podobieństwa.

Ślad zbiegu powierzchni walcowej jest punktem Z' (rys. 29.).

Pomiędzy rzutami tworzących powierzchni stożkowej i walcowej zasługują na uwagę styczne $W'A', W'B'$ względnie $Z'A'$ i $Z'B'$, poprowadzone z punktu W' względnie Z' do rzutu c' ; na tych stycznych bowiem schodzą się rzuty dwu bezpośrednio po sobie następujących tworzących, są one przeto śladami płaszczyzn stycznych, poprowadzonych ze środka rzutów do powierzchni.

Zagadnienie 2. Wykreślić rzuty prostokątne powierzchni stożkowej, jeżeli dane są rzuty W' i W'' wierzchołka, rzut poziomy c' kierownicy c , a nadto ślady π_a i π_b płaszczyzny, na której kierownica leży (rys. 30.).

Rozwiązanie: Proste $W'1'$ i $W'2'', W'2'$ i $W'2'', \dots$ łączące rzuty wierzchołka z odpowiednimi rzutami punktów $1, 2, \dots$ kierownicy c , są rzutami tworzących $W1, W2$.

Styczne $W'A'$ i $W'B'$, poprowadzone do rzutu c' są śladami poziomymi płaszczyzn stycznych powierzchni (W, c) prostopadłych do płaszczyzny poziomej rzutów, a styczne $W''C''$ i $W''D''$ poprowadzone przez W'' do rzutu c'' są śladami pionowymi płaszczyzn stycznych powierzchni (W, c), prostopadłych do płaszczyzny pionowej rzutów; albowiem na prostych $W'A'$ i $W'B'$ schodzą się po dwa rzuty poziome dwu bezpośrednio po sobie następujących tworzących, na prostych zaś $W''C''$ i $W''D''$ schodzą się po dwa rzuty pionowe dwu bezpośrednio po sobie następujących tworzących powierzchni stożkowej.

Jeżeli rzut pionowy c'' kierownicy c nie jest narysowany natenczas można proste $W''C''$ i $W''D''$ sposobem następującym wyznaczyć: Prowadzimy przez wierzchołek W prostą „ p'' “, prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów i wyznaczamy punkt przecięcia się $P(P'P'')$ tej prostej z płaszczyzną kierownicy, kreślimy następnie z rzutu P' styczne $P'D'$ i $P'C'$ do krzywej c' , to te styczne są rzutami poziomymi prostych WD i WC .

Punkt M' , leżący w obrębie kąta, który ogranicza rzut poziomy powierzchni (W, c), można uważać za rzut poziomy kilku punktów, leżących na powierzchni stożkowej; prosta bowiem, wyprowadzona z punktu M' prostopadle do płaszczyzny poziomej rzutów przecina powierzchnię stożkową w punktach, których ilość jest równa rzędowi tejże.

Celem wyznaczenia rzutów pionowych tych punktów, wyznaczamy punkta przecięcia się $X', Y', \dots$ prostej $W'M'$ z rzutem c' , a nadto rzuty pionowe $X'', Y'', \dots$ to proste $W''X'', W''Y'', \dots$ są rzutami pionowymi tworzących, których rzuty poziome schodzą się na prostej $W'M'$, prowadząc tedy przez M' prostopadłą do osi x otrzymamy punkta $M_1'', M_2'', \dots$

Zagadnienie: Wykreślić rzuty aksonometryczne a) powierzchni stożkowej, b) powierzchni walcowej, których kierownice leżą na płaszczyźnie dowolnej.

0 konstruocyi płaszczyzn stycznych, poprowadzonych przez dany punkt do powierzchni stożkowej i walcowej.

4. Wiadomo, że płaszczyzna, przesunięta przez styczną s , poprowadzoną do kierownicy powierzchni stożkowej (W, c) i przez tworzącą WS , która przez punkt styczności owej stycznej przechodzi, jest płaszczyzną styczną powierzchni (W, c) we wszystkich punktach prostej WS .

Płaszczyzny styczne tedy powierzchni stożkowej, przesunięte przez punkt P , przechodzą przez prostą WP , która łączy ów punkt z wierzchołkiem powierzchni, a nadto przez styczne, wyprowadzone do kierownicy „ c'' “ z punktu, w którym prosta WP płaszczyznę kierownicy przecina.

Zagadnienie 1. Wyznaczyć płaszczyzny styczne powierzchni stożkowej; przesunięte przez punkt P ; konstruocyja ma być wykonana w rzutach środkowych (rys. 31.).

Rozwiązanie: Połączmy punkt P , leżący na prostej m ($T_1 Z_1'$) z wierzchołkiem W powierzchni i wyznaczmy ślady T_2 i Z_2' prostej WP , przesunimy następnie przez tę prostą płaszczyznę π^1 (t_1, z_1') i wyznaczmy prostą d , podług której ta płaszczyzna przecina się z płaszczyzną kierownicy π (t, z'), to punkt przecięcia się D prostych WP i d jest punktem, w którym prosta WP przecina płaszczyznę kierownicy danej powierzchni.

Jeżeli tedy wyprowadzimy z rzutu D' styczne s_1' i $s_2', \dots$ do krzywej c' i wyznaczmy punkta T_3 i Z_3' tudzież T_4 i Z_4' , w których owe styczne z prostymi t i z' przecinają się, to te punkta są śladami stycznych s_1 i s_2 , poprowadzonych przez punkt D do kierownicy „ c'' “; proste zatem T_2T_3 i $Z_2'Z_3'$ tudzież T_2T_4 i $Z_2'Z_4'$ są śladami płaszczyzn stycznych, poprowadzonych do powierzchni (W, c) przez punkt P .

Zagadnienia: Rozwiązać powyższe zagadnienia a) w rzutach prostokątnych b) w rzutach aksonometrycznych.

Zagadnienie 2: Przez punkt P poprowadzić płaszczyzny styczne do powierzchni walcowej; konstruocyja ma być wykonana w rzutach aksonometrycznych (rys. 32.).

Rozwiązanie: Kierownica „ c'' “ powierzchni walcowej niech będzie wyznaczona za pomocą rzutu aksonometrycznego c_a i śladów $U_a V_a, U_a W_a$ płaszczyzny na której ta kierownica leży; kierunek tworzących powierzchni jakoteż punkt P niech będą odpowiednio wyznaczone za pomocą rzutów aksonometrycznych l_a i P_a tudzież rzutów aksonometrycznych poziomych l_a' i P_a' .

Poprowadźmy przez P_a prostą m_a , równoległą do l_a , a przez P_a' prostą m_a' równoległą do l_a' , to m_a i m_a' są odpowiednio rzutem aksonometrycznym i rzutem aksonometrycznym poziomym prostej „ m'' “, poprowadzonej przez punkt P równoległe do prostej l . Wyznaczmy następnie rzut aksonometryczny D_a punktu D , w którym prosta „ m'' “ przecina płaszczyznę kierownicy c , i poprowadzimy przezeń styczne s_1^a i s_2^a do krzywej c_a , to ślady poziome tychże $H_a^{s_1}$ i $H_a^{s_2}$ leżą na prostej $U_a V_a$ a ślady pionowe $V_a^{s_1}$ i $V_a^{s_2}$ leżą na śladzie pionowym $U_a W_a$. Łącząc tedy ślad poziomych H_a^m prostej m z punktami

$H_a^{s_1}$ i $H_a^{s_2}$ otrzymamy ślady poziome, a łącząc ślad V_a^m z punktami $V_a^{s_1}$ i $V_a^{s_2}$ otrzymamy ślady aksonometryczne pionowe płaszczyzn stycznych, poprowadzonych przez punkt P do powierzchni walcowej.

Zagadnienia: Rozwiązać powyższe zagadnienia a) w rzutach prostokątnych b) w rzutach środkowych.

Zagadnienie 3: Wyznaczyć płaszczyzny styczne powierzchni stożkowej, równoległe do prostej l ; konstrukcja ma być wykonana w rzutach prostokątnych (rys. 33.).

Rozwiązanie: Niech będą dane ślady π_h i π_v płaszczyzny, na której kierownica „ c ” powierzchni leży, a nadto rzut poziomy c' tejże. Poprowadźmy przez rzuty W' i W'' wierzchołka W proste m' i m'' odpowiednio równoległe do l' i l'' , to m' i m'' są rzutami prostej „ m ”, przesuniętej przez punkt W równoległe do prostej l' . Wyznaczymy następnie rzut poziomy D' punktu D w którym prosta m przecina płaszczyznę kierownicy i poprowadźmy przezeń styczne s_1' i s_2' do krzywej c' ; rzuty pionowe s_1'' i s_2'' otrzymamy z łatwością, proste bowiem s_1 i s_2 leżą na płaszczyźnie π (π_h , π_v). Jeżeli tedy przez proste s_1 i m tudzież s_2 i m przesuniemy płaszczyzny, to one są płaszczyznami stycznymi, poprowadzonymi do powierzchni walcowej i równoległymi do prostej l .

Zagadnienia: Rozwiązać powyższe zagadnienie a) w rzutach środkowych b) w rzutach aksonometrycznych.

Zagadnienie 4: Wyznaczyć płaszczyzny styczne powierzchni walcowej, równoległe do prostej l ; konstrukcja ma być przeprowadzona a) w rzutach środkowych b) w rzutach aksonometrycznych (rys. 34. a i b).

Rozwiązanie: a) kierownica „ c ” niech będzie wyznaczona zapomocą rzutu c' i śladów t i z' płaszczyzny na której leży. Ślady zbiegu Z' i Z_1' wyznaczają odpowiednio kierunek tworzących powierzchni i kierunek prostej l .

Jeżeli połączymy punkta Z' i Z_1' natenczas otrzymamy ślad zbiegu z_1' płaszczyzn równoległych do prostej l i do tworzących powierzchni walcowej; prosta ZZ_1' jest tedy śladem zbiegu płaszczyzn stycznych powierzchni, czyniących zadość warunkom zagadnienia.

Poprowadźmy przez punkt przecięcia się Z_2 prostych z' i $Z'Z_1'$ styczne s_1' s_2' do rzutu c' kierownicy i wyznaczmy ślady tłowe T_1 i T_2 , to proste t_1 i t_2 , poprowadzone przez T_1 i T_2 równoległe do $Z'Z_1'$ są śladami tłowymi płaszczyzn stycznych powierzchni walcowej, równoległych do prostej, której śladem zbiegu jest punkt Z_1' .

b) Niech będzie dany rzut aksonometryczny c_a kierownicy „ c ” i ślady $U_a V_a$, $U_a W_a$ płaszczyzny, na której ta krzywa leży; niech nadto dane będą rzuty t_a , t_a' tworzącej powierzchni, przechodzącej przez punkt „1” kierownicy „ c ” i rzuty l_a , l_a' dowolnej prostej.

Poprowadźmy przez punkt $A(A_a, A_a')$, leżący na tworzącej t , prostą m (m_a, m_a'), równoległą do „ l ” i wyznaczmy rzut aksonometryczny D_a punktu w którym prosta m przecina płaszczyznę kierownicy, połączmy następnie punkta l_a i D_a i poprowadźmy styczne s_a i s_a' do rzutu c_a równoległe do prostej $l_a D_a$, to te styczne są śladami na płaszczyźnie kierownicy płaszczyzn stycznych powierzchni walcowej równoległych do prostej l i t. d.

Zagadnienie: Rozwiązać powyższe zagadnienie w rzutach prostokątnych.

0 konstrukcji punktów przecięcia się powierzchni stożkowych i walcowych z liniami prostymi i krzywymi.

5. Celem wyznaczenia punktów przecięcia się prostej l z dowolną powierzchnią Π przesuwamy przez „ l ” płaszczyznę π i kreślimy krzywą „ c ”, podług której π i Π przecinają się; punkta przecięcia się prostej l z krzywą „ c ” są punktami, w których prosta „ l ” przecina powierzchnię Π .

Zagadnienie 1: Wyznaczyć punkta przecięcia się prostej l z powierzchnią stożkową (W, c), której kierownica leży na płaszczyźnie OXY ; konstrukcja ma być wykonana w rzutach aksonometrycznych (rys. 35.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez rzuty W_a i W_a' wierzchołka W proste m_a i m_a' odpowiednio równoległe do l_a i l_a' i wyznaczmy ślady aksonometryczne poziome H_a' i H_a^m prostych l i m , to $H_a' H_a^m$ jest śladem aksonometrycznym poziomym płaszczyzny (W, l) przesuniętej przez wierzchołek stożka i przez prostą l . Łącząc tedy punkt W_a z punktami przecięcia się l_a 2_a krzywej c_a z prostą $H_a' H_a^m$ otrzymamy proste, które przecinają się z prostą l_a w punktach I_a i II_a . Punkta I_a i II_a są rzutami aksonometrycznymi punktów przecięcia się prostej l z powierzchnią stożkową.

Zagadnienia: Rozwiązać powyższe zagadnienia w rzutach a) środkowych b) prostokątnych.

Zagadnienie 2: Wyznaczyć punkta przecięcia się prostej l z powierzchnią walcową; konstrukcja ma być wykonana w rzutach środkowych (rys. 36.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że kierownica c leży na płaszczyźnie π (t, z'); kierunek tworzących powierzchni niech będzie wyznaczony śladem zbiegu Z' , a prosta l śladami T_1 i Z_1' . Przesuńmy przez prostą l płaszczyznę π' (t_1, z_1'), równoległą do tworzących powierzchni walcowej, i wyznaczmy prostą d , podług której płaszczyzny π i π' przecinają się, połączmy następnie ślad Z' z punktami A' i B' , w których prosta d' przecina się z krzywą c' , to proste $Z'A'$ i $Z'B'$ przecinają prostą l' w punktach $1'$ i $2'$, które są rzutami punktów przecięcia się prostej l z powierzchnią walcową.

Zagadnienia: Rozwiązać powyższe zagadnienie w rzutach a) prostokątnych b) aksonometrycznych.

Zagadnienie 3: Wyznaczyć punkta przecięcia się płaszczyzny (π_h, π_v) z krzywą wchrowatą c_w (c_w' , c_w'').

Rozwiązanie: Uważajmy rzut poziomy c_w' krzywej c_w za rzut poziomy c' krzywej c , leżącej na płaszczyźnie π , i wyznaczmy rzut pionowy c'' tejże, to krzywe c'' i c_w'' przetną się w punktach, które są rzutami pionowymi punktów przecięcia się płaszczyzny π z krzywą c_w .

Zagadnienie 4: Wyznaczyć punkta przecięcia się krzywej wchrowatej c_w (c_w' , c_w'') z powierzchnią stożkową (W, c), której kierownica leży na płaszczyźnie poziomej rzutów.

Rozwiązanie: Przesuńmy przez wierzchołek W i przez krzywą c_w powierzchnię stożkową (W, c_w) i wyznaczmy ślad poziomy tejże c_1 , to krzywe c i c_1 przecinają się w punktach $A, B, \dots$ przez które przechodzą tworzące wspólne powierzchni (W, c) i (W, c_w). Tworzące tedy $WA, WB, \dots$ przecinają krzywą c_w w punktach, które leżą na powierzchni stożkowej (W, c).

O przekrojach powierzchni stożkowych i walcowych płaszczyznami.

6. Dwa przekroje c i c_1 powierzchni stożkowej (W, c) płaszczyznami π i π^1 są krzywymi środkowo kolineacyjnymi. Wierzchołek stożka jest środkiem. a prosta „ t “, podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się, jest osią kolineacji. Punkta odpowiednie A i A_1 , B i B_1 ... krzywych c i c_1 leżą na tworzących powierzchni, a odpowiednie cięciwy AB i A_1B_1 ... jakoteż styczne, poprowadzone do krzywych c i c_1 w punktach odpowiednich, przecinają się na osi kolineacji t .

Punktem podwójnym i punktem zwrotu krzywej c odpowiadają punkta podwójne i punkta zwrotu krzywej c_1 , a stycznymi podwójnymi i stycznymi zwrotu krzywej c odpowiadają styczne podwójne i styczne zwrotu krzywej c_1 .

Osi wzajemne r i z_1 układów π i π^1 , środkowo kolineacyjnych, otrzymamy, prowadząc przez środek W płaszczyzn π' i π_1' odpowiednio równoległe do π i π^1 i wyznaczając proste, podług których płaszczyzny π i π' tudzież π^1 i π_1' przecinają się.

Jeżeli oś r , podług której płaszczyzny π i π' przecinają się, posiada z krzywą „ c “, „ n “ rzeczywistych punktów wspólnych, natenczas krzywa „ c_1 “ rozciąga się w „ n “ kierunkach do nieskończoności; jeżeli zaś oś z_1 , podług której płaszczyzny π^1 i π' przecinają się, posiada z krzywą „ c_1 “ „ n “ punktów rzeczywistych, natenczas krzywa „ c “ rozciąga się w „ n “ kierunkach do nieskończoności.

Przekroje powierzchni stożkowej płaszczyznami równoległymi są podobne w podobnym położeniu (homotetyczne), oś kolineacji bowiem leży w nieskończoności a środek w skończoności.

Przekroje powierzchni walcowej płaszczyznami są krzywymi powinowatymi, albowiem środek kolineacji leży w nieskończoności a oś w skończoności. Wiadomo, że osi wzajemne układów powinowatych leżą w nieskończoności. Jeżeli tedy krzywa, podług której dowolna płaszczyzna przecina powierzchnię walcową, rozciąga się w „ n “ kierunkach do nieskończoności, natenczas wszystkie krzywe płaskie, leżące na tej powierzchni rozciągają się również w „ n “ kierunkach do nieskończoności.

Płaszczyzny równoległe przecinają powierzchnię walcową podług krzywych przystających, albowiem środek i oś kolineacji tych krzywych leżą w nieskończoności.

7. Rzuty układów środkowo kolineacyjnych z dowolnego punktu na dowolną płaszczyznę są również środkowo kolineacyjne; jeżeli tedy wyznaczymy rzut środkowy lub równoległy powierzchni stożkowej (W, c) , a nadto rzuty c' i c_1' przekrojów płaskich tych powierzchni, natenczas krzywe c' i c_1' będą środkowo kolineacyjne; rzut W' wierzchołka powierzchni jest środkiem, a rzut t' prostej, podług której płaszczyzny krzywych c i c_1 przecinają się, jest osią kolineacji.

Rzuty równoległe przekrojów płaskich powierzchni walcowej są powinowate, rzuty zaś środkowe tych przekrojów są w ogólności środkowo kolineacyjne, albowiem rzuty tworzących powierzchni walcowej przecinają się w jednym punkcie.

Jeżeli jedna z płaszczyzn, przecinających powierzchnię stożkową (W, c) n. p. π^1 jest płaszczyzną poziomą rzutów, natenczas ślad π_h płaszczyzny π

jest osią kolineacji a ślad poziomy z_1 płaszczyzny, przesuniętej przez wierzchołek W równoległe do płaszczyzny π , jest osią wzajemną układu π^1 której odpowiada w układzie π prosta, leżąca w nieskończoności.

Zagadnienie 1: Dana jest powierzchnia stożkowa (W, c_1) której kierownica „ c_1 “ leży na płaszczyźnie poziomej rzutów, dana jest nadto płaszczyzna π (π_h, π_v); wyznaczyć przekrój powierzchni danej płaszczyzną π (rys. 37).

Rozwiązanie: Rzut poziomy c' krzywej c , podług której płaszczyzna π przecina powierzchnię (W, c_1) jest środkowo kolineacyjny z kierownicą c_1 ; ślad poziomy π_h jest osią a rzut W' jest środkiem kolineacji; oś wzajemna z_1 , odpowiadająca prostej układu π , leżącej w nieskończoności, jest śladem poziomym płaszczyzny, przesuniętej przez wierzchołek W równoległe do płaszczyzny π .

Pękowi promieni Z_1' ($a_1, b_1, \dots$) układu π_1 , którego wierzchołek Z_1' leży na osi z_1' odpowiada w układzie π pęk promieni $a, b, \dots$ równoległych do WZ_1 rzuty poziome przeto $a', b', \dots$ elementów tego pęku są równoległe do promienia $W'Z_1'$.

Wyznamy tedy punkta przecięcia się 1_1 i $2_1, 3_1$ i $4_1 \dots$ promieni $a_1, b_1, \dots$ z krzywą c_1 a nadto punkta przecięcia się tychże $T_1, T_2, \dots$ z osią kolineacji π_h , poprowadźmy następnie przez punkta $T_1, T_2, \dots$ promienie $a', b', \dots$ równoległe do $W'Z_1'$ i połączmy W' z punktami $1_1, 2_1, \dots$ to punkta przecięcia się $1'$ i $2'$ promieni $a'b' \dots$ z promieniami $W'1_1$ i $W'2_1$ i t. d. są punktami rzutu c' krzywej przekroju c . Styczna s_1 poprowadzona w punkcie 1_1 do kierownicy c_1 przecina się z osią π_h w punkcie T , prosta tedy $T1'$ jest styczną rzutu c'' w punkcie $1'$ i t. d.

Rzuty poziomy c_1' i pionowy c_1'' krzywej przekroju c_1 są powinowate. Kierunek tego powinowactwa jest prostopadły do osi x , a oś powinowactwa jest prostą, na której schodzą się rzuty t' i t'' prostej t , podług której płaszczyzna π przecina się z płaszczyzną, dzielącą kąt, zawarty między płaszczyznami rzutów, na dwie równe części. Jeżeli tedy sposobem ogólnym wyznaczymy rzut pionowy $1_1''$ punktu „ 1_1 “, leżącego na krzywej c_1 , natenczas za pomocą powinowactwa między c_1' i c_1'' można z łatwością rzuty pionowe dalszych punktów krzywej c_1 jakoteż styczne krzywej c_1'' wyznaczyć.

Zagadnienie 2: Mając dany ślad poziomy c_h i rzuty W', W'' wierzchołka powierzchni stożkowej, wyznaczyć ślad pionowy tej powierzchni (rys. 38.).

Rozwiązanie: Ślady poziomy c_h i pionowy c_v powierzchni stożkowej są krzywymi środkowo kolineacyjnymi; oś „ x “ jest osią kolineacji, a wierzchołek W powierzchni jest środkiem kolineacji; proste r i z_1 poprowadzone przez rzuty W' i W'' równoległe do „ x “ są osiami wzajemnymi.

Jeżeli płaszczyznę poziomą rzutów obrócimy około osi x , a płaszczyznę (W, z_1) około osi z_1 , tak, aby obydwie zeszły się z płaszczyzną pionową rzutów, natenczas związek środkowo kolineacyjny między krzywymi c_h i c_v nie będzie zniszczony. Środek kolineacji po kładzie owych płaszczyzn na płaszczyznę pionową rzutów schodzi się z kładem (W) wierzchołka.

Poprowadźmy tedy przez punkt Z_1' , leżący na osi z_1 , promienie $a_1, b_1, \dots$ a przez punkta przecięcia się tychże $T_1, T_2, \dots$ z osią x proste $a, b, \dots$ równoległe do promienia $(W)Z_1'$, to proste a_1 i a, b_1 i $b, \dots$ są elementami odpowiednimi układów płaskich c_h i c_v ; promienie tedy $(W)1_1, (W)2_1, \dots$ poprowa-

dzone przez punkta przecięcia się $l_1, 2_1 \dots$ promieni $a_1, b_1 \dots$ z krzywą c_h przecinają proste $a, b, \dots$ w punktach leżących na śladzie pionowym c_v powierzchni stożkowej.

Zagadnienia: Wyznaczyć ślad poziomy powierzchni stożkowej, której kierownica leży na dowolnej płaszczyźnie.

Zagadnienie: Wyznaczyć przekrój powierzchni stożkowej płaszczyzną równoległą do osi x , jeżeli kierownica powierzchni leży na płaszczyźnie, która przechodzi przez ćwiartkę drugą i czwartą i dzieli na dwie równe części kąt zawarty między płaszczyznami rzutów.

Zagadnienie 3: Wyznaczyć prawdziwą wielkość krzywej c_1 , podług której płaszczyzna π^1 przecina powierzchnię stożkową, nie kreśląc rzutów tej krzywej (rys. 39.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że kierownica „ c ” leży na płaszczyźnie poziomej rzutów.

Przesuniemy przez wierzchołek W płaszczyznę π^2 , równoległą do płaszczyzny π^1 , i wykonajmy kład płaszczyzny π^1 około śladu π^1_h , a równocześnie i na tę samą stronę kład płaszczyzny π^2 około śladu π^2_h na płaszczyznę poziomą rzutów, to między kierownicą „ c ” powierzchni stożkowej (W, c) i kładem (c_1) krzywej „ c_1 ”, podług której płaszczyzna π^1 przecina powierzchnię (W, c), zachodzi związek środkowo kolineacyjny.

Kład (W) wierzchołka W jest środkiem, ślad π^1_h jest osią kolineacji, a ślad π^2_h jest prostą układu krzywej „ c ”, której w układzie „ c_1 ” odpowiada prosta, leżąca w nieskończoności.

Jeżeli tedy poprowadzimy w układzie „ c ” pęk prostych $a, b, c, \dots$ którego wierzchołek Z leży na prostej π^2_h , to elementom tego pęku odpowiadają w układzie „ c_1 ” proste $a_1, b_1, c_1, \dots$, równoległe do promienia (W) Z , które nadto przez punkta przecięcia się $T, T_1, \dots$ osi kolineacyjnej π^1_h z promieniami $a, b, c, \dots$ przechodzą.

Punktom przecięcia $1, 2, \dots$ promieni $a, b, \dots$ z krzywą „ c ” odpowiadają punkta przecięcia się (1), (2) prostych $a_1, b_1, \dots$ z promieniami (W) 1, (W) 2, ... a stycznymi, poprowadzonym do krzywej „ c ” odpowiadają styczne, poprowadzone do kładu (c_1) krzywej przekroju powierzchni stożkowej płaszczyzną π .

Zagadnienie: Wyznaczyć w rzutach aksonometrycznych prawdziwą wielkość przekroju płaskiego powierzchni stożkowej, nie kreśląc rzutów tego przekroju.

Zagadnienie 4: Wyznaczyć prawdziwą wielkość przekroju powierzchni walcowej płaszczyzną π^1 (π^1_h, π^1_v), jeżeli kierownica „ c ” tej powierzchni leży na płaszczyźnie poziomej rzutów.

Rozwiązanie: Kierownica „ c ” i krzywa „ c_1 ”, podług której płaszczyzna π^1 przecina się z powierzchnią walcową są powinowate. Kład (c_1) na płaszczyznę poziomą rzutów krzywej przekroju i kierownica „ c ” są również powinowate. Ośią tego powinowactwa jest ślad poziomy π^1_h płaszczyzny π^1 . Aby otrzymać dwa odpowiednie punkta obu układów, a tem samem kierunek powinowactwa, wyznaczmy rzuty l_1' i l_1'' punktu l_1 , w którym tworząca powierzchni, przechodząca przez punkt „1” powierzchni, płaszczyznę π^1 przecina, to kład (1) punktu „1” i punkt „1” są punktami odpowiednimi, a prosta 1 (1) wskazuje kierunek powinowactwa. Związek tedy między kierownicą „ c ” i kładem (c_1) krzywej przekroju c_1 jest wyznaczony.

Zagadnienie: Rozwiązać zagadnienie 4. w rzutach aksonometrycznych.

0 powierzchniach stożkowych rzędu drugiego.

1. Powierzchnię stożkową, której kierownicą jest krzywa rzędu drugiego c^2 , nazywamy stożkiem rzędu drugiego.

Dowolna prosta przecina tę powierzchnię w dwu punktach, a dowolna płaszczyzna przecina ją podług krzywej rzędu drugiego.

Pięć tworzących $W1, W2, W3, W4$ i $W5$ wyznacza tedy powierzchnię stożkową (W, c^2); jeżeli bowiem przez tworzące $W1$ i $W5$ tudzież przez punkta 2, 3 i 4 przesuniemy płaszczyzny, natenczas otrzymamy trzy pary elementów odpowiednich dwu pęków jednokreślnych $W1(2, 3, 4, \dots)$ i $W5(2, 3, 4, \dots)$, których elementa odpowiednie przecinają się podług tworzących powierzchni stożkowej A zatem:

Elementa odpowiednie dwu jednokreślnych pęków płaszczyzn, których osi przechodzą przez jeden punkt, przecinają się podług tworzących powierzchni stożkowej rzędu drugiego.

2. Pięć płaszczyzn stycznych $WI, WII, WIII, WIV, WV$ poprowadzonych do powierzchni (W, c^2) wyznacza również tę powierzchnię. Jeżeli bowiem wyznaczmy proste $W2, W3$ i $W4$, tudzież $W2_1, W3_1$ i $W4_1$, podług których płaszczyzny WI i WV przecinają się z płaszczyznami $WII, WIII$ i WIV , natenczas otrzymamy dwa pęki jednokreślne $W(2, 3, 4, \dots)$ i $W(2_1, 3_1, 4_1, \dots)$ o spólnym wierzchołku, płaszczyzny tedy przesunięte przez odpowiednie elementa tych pęków, są płaszczyznami stycznymi, poprowadzonymi do powierzchni (W, c^2).

A zatem: Płaszczyzny, przesunięte przez promienie odpowiednie dwu pęków jednokreślnych, o spólnym wierzchołku, są płaszczyznami stycznymi powierzchni stożkowej rzędu drugiego.

3. Sześć tworzących powierzchni stożkowej (W, c^2) wyznaczają ostrosłup wpisany w powierzchnię, którego ściany przeciwległe przecinają się podług trzech prostych, leżących na płaszczyźnie.

Za pomocą tego twierdzenia można rozwiązać następujące zagadnienia: Wyznaczyć tworzące powierzchni (W, c^2), jeżeli a) pięć tworzących, b) cztery tworzące i płaszczyzna styczna poprowadzona wzdłuż jednej z tych tworzących c) trzy tworzące i płaszczyzny styczne, poprowadzone wzdłuż dwu tworzących, jest danych.

Sześć płaszczyzn stycznych, poprowadzonych do powierzchni (W, c^2) wyznacza ostrosłup, opisany na tej powierzchni; płaszczyzny, przesunięte przez krawędzie przeciwległe tego ostrosłupa, przecinają się podług jednej prostej.

Na zasadzie tego twierdzenia można rozwiązać zagadnienia: Wyznaczyć płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni (W, c^2), jeżeli a) pięć płaszczyzn stycznych b) cztery płaszczyzny styczne i tworząca styczności jednej z tych płaszczyzn, c) trzy płaszczyzny styczne i tworzące styczności dwu z tych płaszczyzn, jest danych.

4. Proste, poprowadzone przez wierzchołek powierzchni stożkowej nazywamy średnicami, a płaszczyzny przesunięte przez wierzchołek, nazywamy płaszczyznami diametralnymi powierzchni stożkowej.

Poprowadźmy średnicę WP powierzchni (W, c^2) , która płaszczyznę krzywej c^2 w punkcie P przecina i wyznaczmy biegunową „ p ” tego punktu ze względu na krzywą c^2 , to płaszczyznę π , przesuniętą przez wierzchołek W i przez prostą „ p ”, nazywamy płaszczyzną diametralną biegunową średnicy WP ze względu na powierzchnię stożkową (rys. 40.).

Jeżeli średnica WP leży poza obrębem powierzchni (W, c^2) , natenczas płaszczyzna biegunowa π przecina się z powierzchnią stożkową podług dwu tworzących rzeczywistych, jeżeli zaś średnica WP leży w obrębie powierzchni (W, c^2) natenczas płaszczyzna biegunowa tej średnicy przecina się z powierzchnią podług dwu tworzących urojonych. Płaszczyzna biegunowa tworzącej schodzi się z płaszczyzną styczną, poprowadzoną do powierzchni wzdłuż tej tworzącej.

Dowolna płaszczyzna przesunięta przez średnicę WP , przecina się z płaszczyzną biegunową π podług prostej WQ a z powierzchnią stożkową podług tworzących WA i WB .

Proste WP , WQ , WA i WB tworzą czwórkę harmoniczną, przechodzą bowiem przez punkta P , Q , A i B , których stosunek podwójnego podziału $(PQAB) = -1$.

Jeżeli tedy przez dowolny punkt P_1 , leżący na średnicy WP , poprowadzimy na płaszczyźnie WPQ prostą „ l_1 ” i wyznaczmy punkta przecięcia się tejże Q_1 , A_1 i B_1 z płaszczyzną biegunową π i z powierzchnią stożkową, natenczas otrzymamy czwórkę harmoniczną $(P_1 Q_1 A_1 B_1)$.

Z tego wynika bezpośrednio, że dowolna płaszczyzna π^p , nie przechodząca przez wierzchołek W , przecina się z płaszczyzną biegunową π średnicy WP podług prostej p_p , która jest biegunową punktu przecięcia się P_p średnicy WP z płaszczyzną π^1 ze względu na krzywą c_p^2 , podług której π_p przecina się z powierzchnią stożkową.

Płaszczyzny tedy π_m , π_n ,... równoległe do płaszczyzny biegunowej π średnicy WP , przecinają się z tą średnicą w punktach P_m , P_n ,... które są środkami krzywych przekroju c_m^2 , c_n^2 ,... tych płaszczyzn z powierzchnią (W, c^2) .

Płaszczyzny π_p , π_q ,... równoległe do średnicy WP przecinają się z płaszczyzną biegunową π podług średnic krzywych przekroju c_p^2 , c_q^2 ,... tych płaszczyzn z powierzchnią (W, c^2) . A zatem:

Płaszczyzny równoległe przecinają się z powierzchnią stożkową rzędu drugiego podług krzywych, których środki leżą na średnicy, biegunowo sprzężonej z płaszczyzną diametralną, równoległą do tych płaszczyzn.

Płaszczyzny, równoległe do średnicy powierzchni stożkowej rzędu drugiego, przecinają się z tą powierzchnią podług krzywych, których średnice leżą na płaszczyźnie diametralnej biegunowo z ową średnicą sprzężonej.

5. Średnice WQ , WQ_1 ,... leżące na płaszczyźnie biegunowej π średnicy WP , nazywamy średnicami biegunowo albo harmonicznymi sprzężonymi ze średnicą WP .

Płaszczyzna biegunowa π^1 średnicy WQ przechodzi przez średnicę WP , albowiem biegunowa „ q ” punktu Q przechodzi przez punkt P . A zatem:

Płaszczyzny biegunowe średnic powierzchni stożkowej, leżących na jednej płaszczyźnie diametralnej π , przechodzą przez średnicę WP , biegunowo sprzężoną z tą płaszczyzną; i wzajemnie: średnice, biegunowo sprzężone z płaszczyznami przechodzącymi przez jedną średnicę powierzchni stożkowej, leżą na płaszczyźnie biegunowej tejże średnicy.

Płaszczyzna biegunowa π^1 średnicy WQ przecina się z płaszczyzną π podług prostej WR , która jest biegunowo sprzężoną ze średnicami WQ i WP ; płaszczyzna biegunowa tedy średnicy WR przechodzi przez średnice WP i WQ .

Średnice WP , WQ i WR , posiadające tę własność, że płaszczyzna biegunowa jednej z nich przechodzi przez dwie dalsze średnice, tworzą trójkę średnic biegunowo sprzężonych ze względu na powierzchnię stożkową. Jedno ramię trójki średnic sprzężonych leży w obrębie, a dwa ramiona tej trójki leżą poza obrębem powierzchni stożkowej.

6. Biegunki sprzężone Q , R , Q_1 , R_1 ,... leżące na prostej „ p ” tworzą szereg inwolucyjny. Średnice tedy WQ , WR , WQ_1 , WR_1 biegunowo sprzężone ze względu na powierzchnię (W, c^2) tworzą pęk inwolucyjny hiperboliczny, paraboliczny lub eliptyczny stosownie do tego, czy płaszczyzna diametralna π , na której owe średnice leżą, przecina się z powierzchnią stożkową (W, c^2) podług dwu tworzących rzeczywistych, jest płaszczyzną styczną powierzchni, czy też przecina się z tą powierzchnią podług dwu tworzących urojonych.

Przetnijmy trójkę średnic sprzężonych WP , WQ i WR a nadto powierzchnię (W, c^2) dowolną płaszczyznę π^x to trójkąt przekroju P_x , Q_x , R_x ostrosłupa $W(P, Q, R)$ jest trójkątem biegunowo sprzężonym ze względu na krzywą c_x^2 , podług której płaszczyzna π^x przecina się z powierzchnią (W, c^2) (art. 4.).

Jeżeli płaszczyzna π^y przecinająca powierzchnię (W, c^2) jest równoległa do płaszczyzny $\pi \equiv WQR$, natenczas punkta Q_y^∞ i R_y^∞ leżą w nieskończoności, a punkt P_y jest środkiem krzywej przekroju c_y^2 .

Punkta Q_y^∞ i R_y^∞ są biegunami sprzężonymi ze względu na c_y^2 ; średnice sprzężone tedy tej krzywej są równoległe do średnic WR , WQ , WR_1 , WQ_1 powierzchni stożkowej, a osi tej krzywej są równoległe do promieni normalnych pęku inwolucyjnego $W(QRQ_1R_1)$.

7. Na każdej płaszczyźnie diametralnej powierzchni stożkowej leży pęk inwolucyjny średnic sprzężonych z jedną parą odpowiednich promieni normalnych. Średnice, biegunowo sprzężone z owymi płaszczyznami diametralnymi, są do tych płaszczyzn pod różnymi kątami nachylone.

Zapytać tedy należy, czy pomiędzy nieskończenie wielką ilością trójek średnic sprzężonych nie ma takiej trójki, która posiada tę własność, że płaszczyzny, przesunięte przez dwie z tych średnic, są prostopadłe do średnicy trzeciej.

Poprowadźmy w tym celu przez wierzchołek W powierzchni (W, c^2) średnice WA , WB ,... i wyznaczmy płaszczyzny diametralne (W, a) , (W, b) ,... biegunowo z owymi średnicami sprzężone; poprowadźmy następnie przez punkt W proste WA' , WB' ,..., prostopadłe do płaszczyzn (W, a) , (W, b) ,... i wyznaczmy punkta A , B ,... i A' , B' ,... w których średnice WA , WB ,... i WA' , WB' ,...

płaszczyznę kierownicy przecinają, to natenczas otrzymamy dwa układy kolineacyjne punktów w położeniu ogólnym*).

Takie dwa układy posiadają trzy punkta podwójne. Jakoż przyjmijmy dowolny punkt P w układzie $A, B, \dots$ i poprowadźmy przezeń pęk promieni $P(m, n, \dots)$ wyznaczmy następnie w układzie $A'B' \dots$ odpowiedni pęk $P'(m' n' \dots)$, to miejsce geometryczne punktów przecięcia się promieni odpowiednich m i m' , n i n' jest krzywą rzędu drugiego c^2 .

Obierzmy następnie na promieniu m dowolny punkt P_1 i wyznaczmy odpowiedni punkt P'_1 w układzie $A', B' \dots$ który oczywiście na promieniu m' leży, to pęki jednokreślne promieni odpowiednich, przechodzących przez wierzchołki P_1 i P'_1 wyznaczają krzywą rzędu drugiego c^2 , które przechodzi przez punkt przecięcia się M promieni m i m' . Punkt M leży tedy na krzywych c^2 , i c^2 , te krzywe przecinają się zatem jeszcze w jednym punkcie rzeczywistym X , który jest punktem podwójnym układów $A, B, \dots$ i $A', B' \dots$ przez ten punkt przechodzą bowiem promienie x i x' pęków P i P' jakoteż promienie x_1 i x'_1 pęków P_1 i P'_1 .

Średnicy $WX \equiv p$ odpowiada płaszczyzna biegunowa π , prostopadła do tej średnicy, a średnice biegunowo sprzężone i normalne q i r , leżące na płaszczyźnie π , tworzą ze średnicą p trójkę średnic sprzężonych prostopadłych.

Proste p, q i r nazywamy osiami powierzchni stożkowej rzędu drugiego. Jedna oś leży w obrębie a dwie osi leżą poza obrębem powierzchni.

Płaszczyzny, prostopadłe do osi, leżące w obrębie powierzchni przecinają się z tą powierzchnią podług elipsy, płaszczyzny zaś prostopadłe do osi leżących poza obrębem powierzchni przecinają się z tą powierzchnią podług hiperbol.

0 przekrojach powierzchni stożkowej rzędu drugiego płaszczyznami.

8. Przekrój powierzchni stożkowej rzędu drugiego płaszczyzną jest hiperbolą, parabolą lub elipsą, stosownie do tego, czy płaszczyzna, przesunięta przez wierzchołek równoległe do płaszczyzny przecinającej, przecina się z powierzchnią podług dwu tworzących rzeczywistych, jest płaszczyzną styczną, czy też przecina się z powierzchnią podług dwu prostych urojonych.

Zagadnienie 1. Wyznaczyć osi elipsy, podług której płaszczyzna π przecina się z powierzchnią stożkową (rys. 41.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że kierownica c^2 leży na płaszczyźnie poziomej rzutów, a wierzchołek W wyznaczony jest rzutami W' i W'' .

*) Dwa układy kolineacyjne w położeniu ogólnem są wyznaczone czterema parami odpowiednich punktów, z których trzy nie leżą na jednej prostej, albo czterema parami odpowiednich prostych, z których trzy nie przechodzą przez jeden punkt.

Jeżeli bowiem dane są cztery pary A i A', B i B', C i C', D i D' odpowiednich punktów w dwu układach $A, B, \dots$ i $A', B' \dots$ kolineacyjnych, natenczas dowolnemu punktowi X układu $A, B, \dots$ odpowiada tylko jeden punkt X' układu $A' B' \dots$, który wyznaczamy postępując w sposób następujący:

Połączmy punkt A z punktami B, C, D i X a nadto punkt B z punktami A, C, D i X połączmy następnie punkt A' z punktami B', C' i D' i wyznaczmy taki promień x' , aby stosunki podwójnego podziału $A(B, C, D, X)$ i $A'(B', C', D', x')$ były równe, wyznaczmy następnie taki promień x' , pęku B' ($A', C', D' \dots$) aby stosunki podwójnego podziału $B(A, C, D, X)$ i $B'(A', C', D', x'_1)$ były równe, to punkt przecięcia się promieni X' i X'_1 jest punktem układu $A'B'_1$ odpowiadającym punktowi X układu $A, B, \dots$

Przesuńmy przez wierzchołek W płaszczyznę π^1 (π^1_h, π^2_e), której ślad poziomy π^1_h nie przecina się z kierownicą c^2 , to płaszczyzna π (π_h, π_e), równoległa do π^1 przecina się z powierzchnią (W, c^2) podług elipsy.

Jeżeli wyznaczmy biegunowe a i b dwu punktów A i B , leżących na śladzie π^1_h , ze względu na krzywą c^2 , to punkt przecięcia się P tych biegunowych jest biegunem prostej π^1_h ze względu na tę krzywą; prosta WP jest średnicą, biegunowo sprzężoną, z płaszczyzną diametralną π^1 a proste WA_1, WB_1 , łączące wierzchołek W z punktami A_1 i B_1 , w których biegunowe a i b przecinają się ze śladem π^1_h , są średnicami powierzchni, biegunowo sprzężonymi z WA i z WB .

Punkt M , w którym prosta WP przecina się z płaszczyzną π , jest środkiem elipsy przekroju, a proste WA i WA_1, WB i WB_1 są równoległe do dwu par średnic sprzężonych tej krzywej.

Aby tedy wyznaczyć osi krzywej przekroju, wykonajmy kład płaszczyzny π^1 na płaszczyznę poziomą rzutów i wyznaczmy promienie normalne (q) i (r) pęku inwolucyjnego (W) ($A, A_1, B, B_1 \dots$), połączmy następnie wierzchołek W z punktami H_q i H_r , w których ślad π^1_h przecina się z prostymi (q) i (r), to proste m i m_1 , poprowadzone przez środek M równoległe do prostych WH_q i WH_r , są osiami elipsy.

Wierzchołki krzywej przekroju otrzymamy, wyznaczając punkta przecięcia się 1 i 2 tudzież 3 i 4 osi m i m_1 z tworzącymi $W1$ i $W2$ tudzież $W3$ i $W4$, podług których płaszczyzny (W, m) i (W, m_1) powierzchnię (W, c^2) przecinają.

Zagadnienie 2: Wyznaczyć asymptoty i osi hiperboli, podług której płaszczyzna π przecina się z powierzchnią stożkową rzędu drugiego (rys. 42.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że kierownica c^2 leży na płaszczyźnie poziomej rzutów, i że płaszczyzna przecinająca π jest równoległa do płaszczyzny π^1 , która przechodzi przez wierzchołek powierzchni i przecina ją podług tworzących WA_1 i WA_2 .

Punkt przecięcia się P stycznych, poprowadzonych do kierownicy c^2 w punktach A_1 i A_2 jest biegunem śladu π^1_h ze względu na krzywą c^2 , a średnica WP jest biegunową płaszczyzny diametralnej π^1 .

Punkt M , w którym średnica WP przecina się z płaszczyzną π jest środkiem hiperboli przekroju, a proste a_1 i a_2 , poprowadzone przez punkt M równoległe do tworzących WA_1 i WA_2 , albo innymi słowy proste a_1 i a_2 , podług których płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni stożkowej wzdłuż tworzących WA_1 i WA_2 przecinają się z płaszczyzną π , są asymptotami hiperboli przekroju.

Celem wyznaczenia osi tej krzywej, wykonajmy kład płaszczyzny π na płaszczyznę poziomą rzutów i podzielmy kąty zawarte między kładami (a_1) i (a_2) asymptot na dwie równe części, to proste dzielące (m) i (m_1) są kładami osi hiperboli, a proste m i m_1 , łączące środek M hiperboli z punktami H_m i H_{m_1} , w których ślad π_h przecina się z prostymi (m) i (m_1) są osiami tej krzywej. Wierzchołki 1 i 2 hiperboli otrzymamy, wyznaczając punkta przecięcia się osi rzeczywistej „ m ” z tworzącymi $W1$ i $W2$, podług których płaszczyzna (W, m) powierzchnię (Wc^2) przecina.

Zagadnienie 3: Wyznaczyć oś i wierzchołek paraboli, podług której płaszczyzna π przecina się powierzchnią stożkową (W, c^2) (rys. 43.).

Rozwiązanie: Płaszczyzna π (π_h, π_v), równoległa do płaszczyzny stycznej π^1 powierzchni, przecina się z tą powierzchnią podług paraboli.

Wykonajmy kład płaszczyzny π^1 na płaszczyznę poziomą rzutów i poprowadźmy przez (W) prostą $(W) A_1$, prostopadłą do kładu $(W) A$ tworzącej, wzdłuż której płaszczyzna π^1 styka się z powierzchnią (Wc^2) , to proste WA i WA_1 są promieniami normalnymi pęku inwolucyjnego parabolicznego średnic sprzężonych, leżących na płaszczyźnie diametralnej π^1 .

Płaszczyzna biegunowa tedy WAB średnicy WA_1 przecina się z płaszczyzną π podług osi „ m ” a punkt przecięcia się M tejże i tworząca WB jest wierzchołkiem paraboli przekroju.

Zagadnienie 4 Wyznaczyć średnice sprzężone przekroju powierzchni walcowej rzędu drugiego płaszczyzną π .

Rozwiązanie: Przesuńmy przez dwie średnice sprzężone AB i CD kierownicy c^2 płaszczyzny równoległe do tworzących walca, to proste m i m_1 , podług których te płaszczyzny przecinają się z płaszczyzną π , są średnicami sprzężonymi krzywej przekroju. Punkta przecięcia się średnic m i m_1 z tworzącymi walca, które przechodzą przez A i B tudzież C i D są punktami krzywej przekroju.

O powierzchniach stożkowych obrotowych.

1. Powierzchnię stożkową, której kierownica k jest kołem, a której wierzchołek W leży na prostej, wyprowadzonej ze środka O kierownicy prostopadłe do płaszczyzny tej krzywej, nazywamy stożkiem obrotowym.

Średnica powierzchni (W, k) , biegunowo sprzężona z płaszczyzną diametralną, równoległą do płaszczyzny kierownicy k schodzi się z prostą WO , ta prosta jest tedy osią powierzchni stożkowej obrotowej.

Wszystkie pary średnic powierzchni (W, k) , leżące na płaszczyźnie, równoległej do płaszczyzny kierownicy są prostopadłe, każda para tedy tych średnic tworzy z osią WO trójkę średnic sprzężonych prostopadłych.

Tworzące i płaszczyzny styczne powierzchni stożkowej obrotowej są nachylone do płaszczyzny kierownicy, pod tym samym kątem. Odcinki tworzących jakoteż pasy płaszczyzn, zawarte między dwiema płaszczyznami, równoległymi do płaszczyzny kierownicy są równe.

Płaszczyzny styczne powierzchni stożkowej obrotowej są prostopadłe do płaszczyzn, przesuniętych przez oś WO i przez odpowiednie tworzące stycznosci; przechodzą bowiem przez styczne kierownicy, które do owych tworzących stycznosci, jakoteż do osi powierzchni są prostopadłe.

Jeżeli z punktów, leżących na kierownicy „ k ” wyprowadzimy proste, prostopadłe do płaszczyzn stycznych powierzchni (W, k) natenczas te prostopadłe przecinają się w jednym punkcie W_1 , leżącym na osi WO , tworzą tedy powierzchnię stożkową obrotową (W_1, k) spółosiową z (W, k) .

2. Zapomocą stożków obrotowych można rozwiązać różne zagadnienia o powierzchniach stożkowych dowolnych. A mianowicie: a) wyznaczyć tworzące powierzchni stożkowej (W, c) , nachylone do płaszczyzny kierownicy „ c ” pod kątem „ α ”.

Koło „ k ” zakreślone ze spodka O prostej poprowadzonej przez punkt W prostopadłe do płaszczyzny kierownicy c , promieniem, równym przyprosto-

katnej trójkąta, którego jedna przyprostokątna jest równa odcinkowi WO , a którego kąt przeciwległy tej przyprostokątnej jest równy kątowi „ α ”, przecina się z kierownicą „ c ” w punktach, przez które przechodzą tworzące, nachylone do płaszczyzny π pod kątem α . Koło „ k ” bowiem jest kierownicą stożka obrotowego (W, k) , którego wszystkie tworzące są nachylone do płaszczyzny, na której krzywa „ c ” leży, pod kątem α .

b) Wyznaczyć tworzące powierzchni (W, c) , których odcinki, zawarte między wierzchołkiem i kierownicą są równe danemu odcinkowi „ m ”.

Koło zakreślone ze spodka O prostej, poprowadzonej przez punkt W prostopadłe do płaszczyzny π , na której kierownica „ c ” leży, promieniem równym przyprostokątnej trójkąta, którego jedna przyprostokątna jest równa odcinkowi WO , a którego przeciwprostokątna jest równa odcinkowi „ m ”, przecina się z kierownicą „ c ” w punktach, przez które tworzące żądane przechodzą.

c) Wyznaczyć płaszczyzny styczne powierzchni stożkowej (W, c) nachylone do płaszczyzny kierownicy pod kątem „ α ”.

Spólne płaszczyzny styczne powierzchni (W, c) i powierzchni stożkowej obrotowej, wyznaczonej w sposób, wyłożony pod a) rozwiązują zagadnienie.

3. Krzywa c^2 , podług której dowolna płaszczyzna π przecina się z powierzchnią stożkową obrotową, jest krzywą rzędu drugiego, której ogniska schodzą się z punktami stycznosci płaszczyzny przecinającej z kulami, wpisanymi w powierzchnię stożkową.

a) Jakoż przetnijmy powierzchnię stożkową obrotową, której oś jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów, płaszczyzną π (π_h, π_v), prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów podług elipsy c^2 (rys. 44).

Wykreślmy rzuty pionowe k_1 i k_2 kul, które się stykają z powierzchnią stożkową wzdłuż kół, leżących na płaszczyznach π^1 i π^2 a z płaszczyzną π w punktach F_1 i F_2 ; wyznaczmy nadto punkt 1 ($1', 1''$) elipsy przekroju, leżący na tworzącej WA . Proste $1F_1$ i $1W$ są stycznymi poprowadzonymi do kuli k_1 , odcinki tedy, zawarte między punktem „1” i punktami stycznosci F_1 i P są równe. Proste $1F_2$ i $1W$ są stycznymi, poprowadzonymi do kuli k_2 , odcinki zatem, zawarte między punktem „1” i punktami stycznosci F_2 i Q tych prostych są równe. Suma tedy $1F_1 + 1F_2$ jest równa sumie $1P + 1Q$ a więc równa odcinkowi tworzącej powierzchni stożkowej obrotowej, zawartemu między płaszczyznami π^1 i π^2 . Punkt „1” leży tedy na elipsie, której ogniskami są punkta F_1 i F_2 .

b) Poprowadźmy płaszczyznę π , prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów, która przecina powierzchnię stożkową obrotową podług hiperboli (rys. 45.). Wpiszmy w daną powierzchnię takie kule k_1 i k_2 , które się stykają z płaszczyzną π w punktach F_1 i F_2 a z powierzchnią podług kół, leżących na płaszczyznach π^1 i π^2 , wyznaczmy, nadto punkt 1 ($1', 1''$) hiperboli przekroju, leżący na tworzącej WA .

Styczne $1F_1$ i $1P$, poprowadzone z punktu „1” do kuli k_1 są równe; styczne $1F_2$ i $1Q$, poprowadzone z punktu „1” do kuli k_2 , są równe; różnica tedy $1F_2 - 1F_1$ jest równa różnicy $1Q - 1P$ a więc równa odcinkowi tworzącej powierzchni, zawartemu między płaszczyznami π^1 i π^2 . Punkta F_1 i F_2 są tedy ogniskami hiperboli przekroju.

c) Poprowadźmy płaszczyznę π (π_h, π_v), równoległą do płaszczyzny stycznej π^1 poprowadzonej do powierzchni stożkowej obrotowej wzdłuż tworzącej WB , to ta płaszczyzna przecina się z powierzchnią podług paraboli c^2 (rys. 46).

Wpiszmy w powierzchnię stożkową kulę k , która się styka z płaszczyzną π w punkcie F , a z powierzchnią stożkową wzdłuż koła, leżącego na płaszczyźnie π^1 , i wyznaczmy punkt „1“ paraboli przekroju, leżący na tworzącej WA , to styczne $1F$ i $1P$, poprowadzone z punktu „1“ do kuli k są równe.

Atoli odcinek $1P$ jest równy odcinkowi $1L$, który mierzy odległość punktu „1“ od prostej „1“, podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się; punkt F jest przeto ogniskiem, a prosta „1“ jest kierownicą paraboli przekroju.

4. Niech będzie dana powierzchnia stożkowa obrotowa (W, k) i kule k_1 i k_2 , wpisane w tę powierzchnię. Płaszczyzna π , styczna do k_1 i k_2 w punktach F_1 i F_2 , przecina się z powierzchnią stożkową podług krzywej rzędu drugiego, której ogniskami są punkta F_1 i F_2 .

Poprowadźmy promienie styczności O_1F_1 i O_2F_2 kul k_1 i k_2 , a nadto średnicę UV kuli k_3 , wpisanej w stożek (W, k), równoległą do owych promieni, a więc prostopadłą do płaszczyzny π , to proste UF_1 i VF_2 przechodzą przez wierzchołek W powierzchni stożkowej; kule bowiem k_1, k_2 i k_3 są homotetyczne.

Twierdzenie tedy, uzasadnione w poprzednim art. można wypowiedzieć w sposób następujący:

Mając daną powierzchnię stożkową obrotową i kulę w nią wpisaną, jeżeli przetniemy tę powierzchnię dowolną płaszczyzną π , natenczas otrzymamy krzywą rzędu drugiego, której ogniska leżą na prostych, łączących wierzchołek W z punktami kuli, leżącymi na średnicy, prostopadłej do płaszczyzny π .

5. Niech będą dane wierzchołki A i B a nadto ogniska F_1 i F_2 elipsy c^2 . Zatoczmy kulę k , stykającą się z płaszczyzną rysunku w punkcie F_1 i poprowadźmy z punktów A i B styczne $A(W)$ i $B(W)$ do kładu koła, podług którego płaszczyzna przesunięta przez oś AB prostopadłe do płaszczyzny elipsy c^2 , kulę k przecina, to punkt (W) jest kładem wierzchołka powierzchni stożkowej obrotowej, przesuniętej przez elipsę c^2 .

Z rys. 47. widoczna, że

$$AF_1 = F_2B = A(M) [(M) \text{ punkt styczności stycznej } AW]$$

$$BF_1 = AF_2 = B(N) [(N) \text{ „ „ „ } BW]$$

$$(M)W = W(N) \text{ a przeto}$$

$$B(W) - A(W) = B(N) + (N)(W) - A(M) - (M)(W) = B(N) - A(M) = \\ = BF_2 - AF_1 = F_1F_2. \text{ A zatem:}$$

Miejsce geometryczne wierzchołków stożków obrotowych, przesuniętych przez elipsę jest hiperbolą, która leży na płaszczyźnie, przesuniętej przez oś większą elipsy prostopadłe do płaszczyzny tej krzywej; wierzchołki tej hiperboli schodzą się z ogniskami, a ogniska z wierzchołkami elipsy.

W podobny sposób można udowodnić, że miejsce geometryczne wierzchołków powierzchni stożkowych obrotowych, przesuniętych przez hiperbolę, jest elipsą, której wierzchołki są ogniskami a ogniska wierzchołkami hiperboli; a nadto, że miejsce geometryczne wierzchołków powierzchni stożkowych obrotowych, przesuniętych przez parabolę jest parabolą.

0 krzywych przenikania się dwu powierzchni stożkowych rzędu drugiego.

1. Krzywa przenikania się c^m dwu powierzchni jest wogóle wichrowata. Poszczególne punkta tejże leżą równocześnie na jednej i na drugiej powierzchni, a styczne poprowadzone do krzywej c^m w poszczególnych punktach są prostymi, podług których płaszczyzny styczne, poprowadzone w tych punktach do obu powierzchni, przecinają się.

2. Dwie powierzchnie stożkowe rzędu drugiego (W_1, c_1^2) i (W_2, c_2^2) przenikają się podług krzywej rzędu czwartego c^4 t. j. takiej krzywej, którą dowolna płaszczyzna przecina w czterech punktach. Jakoż płaszczyzna π przecina się z powierzchniami (W_1, c_1^2), i (W_2, c_2^2) podług dwu krzywych rzędu drugiego, które się przecinają w czterech punktach, leżących na krzywej przenikania się c^4 tych powierzchni.

Na zasadzie prawa o zachowaniu ilości, każda płaszczyzna, a więc i płaszczyzna w nieskończoności przecina krzywą c^4 w czterech punktach, które mogą być wszystkie rzeczywiste albo dwa rzeczywiste a dwa urojone, albo wszystkie mogą być urojone.

W pierwszym przypadku rozciąga się krzywa c^4 w czterech kierunkach do nieskończoności i posiada cztery asymptoty, w drugim przypadku rozciąga się krzywa w dwu kierunkach do nieskończoności i posiada dwie asymptoty, w trzecim przypadku jest krzywa c^4 zamknięta.

Jeżeli krzywa przenikania się posiada cztery punkta rzeczywiste w nieskończoności, natenczas dwa, trzy albo cztery z nich mogą się zejść w jednym punkcie; w pierwszym przypadku jedna gałąź krzywej c^4 jest paraboliczna, w drugim przypadku krzywa przenikania się posiada jedną gałąź, której jedna płaszczyzna ściśle styczna leży w nieskończoności, w trzecim przypadku jest płaszczyzna w nieskończoności płaszczyzną zwrotu krzywej c^4 .

Styczne, poprowadzone do krzywej c^4 są tworzącymi powierzchni rozwijalnej, opisanej na tej krzywej, a płaszczyzny ściśle styczne krzywej c^4 są płaszczyznami stycznymi tej powierzchni.

3. Niech będą dane dwie powierzchnie stożkowe rzędu drugiego (W, c^2) i (W_1, c_1^2), których kierownice leżą na płaszczyźnie π (rys. 48.). Poprowadźmy przez punkt D , w którym prosta WW_1 przecina płaszczyznę π , prostą t , to tę prostą można uważać za ślad na płaszczyźnie π , płaszczyzny, przesuniętej przez wierzchołki W i W_1 ; tworzące tedy WA i WB powierzchni (W, c^2), które przechodzą przez punkta przecięcia się śladu „ t “ z kierownicą c^2 , przecinają się z tworzącymi W_1A_1 i W_1B_1 , przechodzącymi przez punkta przecięcia się śladu t z kierownicą c_1^2 w czterech punktach 1, 2, 3 i 4 krzywej c^4 .

Styczne s_1, s_2, s_3 i s_4 , poprowadzone do krzywych c^2 i c_1^2 w punktach A, B, A_1 i B_1 są śladami płaszczyzn stycznych powierzchni (W, c^2) i (W_1, c_1^2), poprowadzonych wzdłuż tworzących WA, WB, W_1A_1 i W_1B_1 , proste zatem $H_1, H_2, \dots$ łączące punkta 1, 2, ... z punktami przecięcia się śladów s_1 i s_3, s_2 i $s_4, \dots$ są stycznymi, poprowadzonymi do krzywej c^4 w punktach 1, 2, ...

Miejsce geometryczne punktów $H_1, H_2, \dots$ jest śladem na płaszczyźnie π powierzchni rozwijalnej, opisanej na krzywej c^4 .

4. Ślady $t, t_1, t_2, \dots$ płaszczyzn, przesuniętych przez wierzchołki W i W_1 na płaszczyźnie π kierownic c^2 i c_1^2 , tworzą pęk promieni $D(t, t_1, t_2, \dots)$ którego elementa, pożyteczne do wyznaczania punktów krzywej przenikania

się, pokrywają tylko wówczas całą płaszczyznę π , jeżeli ślad D , prostej WW_1 na płaszczyźnie π leży w obrębie krzywych c^2 i c_1^2 (rys. 49.). W tym przypadku wszystkie płaszczyzny, przesunięte przez wierzchołki W i W_1 , przecinają obie powierzchnie stożkowe podług tworzących rzeczywistych; wszystkie tedy tworzące jednej powierzchni przecinają się z powierzchnią drugą.

Jeżeli styczne, poprowadzone przez punkt D do krzywej c^2 , przecinają krzywą c_1^2 w punktach rzeczywistych, natenczas wszystkie tworzące powierzchni (W, c^2) przecinają się z powierzchnią (W_1, c_1^2) ; krzywa przenikania się c^4 składa się z dwu gałęzi (rys. 50 a i b).

Jeżeli styczne t i t_1 , poprowadzone z punktu D do krzywej c^2 są od siebie oddzielone stycznymi t^1 i t_1^1 poprowadzonymi do krzywej c_1^2 , natenczas przenikają się części powierzchni stożkowych zawarte między płaszczyznami (W, t) i (W, t_1^1) (rys. 51.). Krzywa c^4 jest w tym przypadku zamknięta.

Przejsie od przenikania się powierzchni stożkowych zupełnego do przenikania się częściowego następuje skoro powierzchnie (W, c^2) i (W_1, c_1^2) mają jedną płaszczyznę styczną WW_1t wspólną (rys. 52.). Punkt przecięcia się P tworzących styczności WA i W_1A_1 jest punktem podwójnym krzywej c^4 , proste bowiem, poprowadzone przez punkt P na płaszczyźnie WW_1t , przecinają się z krzywą c^4 w dwu punktach.

Jeżeli powierzchnie stożkowe (W, c^2) i (W_1, c_1^2) mają dwie płaszczyzny styczne wspólne WW_1t i WW_1t_1 (rys. 53.), natenczas tworzące styczności WA i W_1A_1 tudzież WB i W_1B_1 przecinają się w dwu punktach podwójnych P i Q krzywej przenikania się. Atoli krzywa rzędu czwartego, mająca dwa punkta podwójne, składa się z dwu krzywych rzędu drugiego.

Jakoż płaszczyzna PQX , przesunięta przez punkta podwójne i przez dowolny punkt X krzywej c^4 przecina się z tą krzywą w pięciu punktach, albowiem każdy z punktów podwójnych uważać należy za dwa, w jednym punkcie złączone, punkta.

Na zasadzie tedy prawa o zachowaniu ilości płaszczyzna PQX przecina krzywą c^4 w nieskończenie wielu punktach, albo innemi słowy: część krzywej c^4 leży na płaszczyźnie PQX , która to część jest oczywiście rzędu drugiego, druga część tedy krzywej przenikania się jest również krzywą rzędu drugiego.

Powierzchnia rozwijalna, opisana na krzywej przenikania się złożonej z dwu krzywych płaskich, składa się z dwu płaszczyzn, na których te krzywe leżą; a proste podług których te płaszczyzny przecinają się z płaszczyznami stycznymi WW_1t i WW_1t_1 są stycznymi, poprowadzonymi do krzywej $c^4=c^2+c_1^2$ w punktach podwójnych P i Q .

Przyjmijmy, że wierzchołek W powierzchni stożkowej W, c^2 leży na tworzącej W_1A_1 powierzchni (W_1, c_1^2) , (rys. 54.). Poprowadźmy wzdłuż tworzącej W_1A_1 płaszczyznę styczną W_1t_1 do powierzchni (W_1, c_1^2) , to ta płaszczyzna przecina się ze stożkiem (W, c^2) podług tworzących WB i WC , które są stycznymi, poprowadzonymi do krzywej przenikania się c^4 ; punkt W jest tedy punktem podwójnym krzywej c^4 .

Jeżeli płaszczyzna styczna, poprowadzona do powierzchni $W_1c_1^2$ wzdłuż tworzącej W_1A_1 , na której wierzchołek W powierzchni (W, c^2) leży, jest również płaszczyzną styczną powierzchni (W, c^2) wzdłuż tworzącej WB , natenczas styczne, poprowadzone do krzywej przenikania się c^4 w punkcie podwójnym W , schodzą się na tworzącej WB , punkt W jest tedy punktem zwrotu krzywej przenikania się (rys. 55.).

Jeżeli nareszcie płaszczyzna styczna WW_1t_1 nie przecina się z powierzchnią stożkową (W, c^2) podług tworzących rzeczywistych, natenczas styczne, poprowadzone do krzywej c^4 w punkcie W są urojone (rys. 56.). Taki punkt nazywamy punktem odosobnionym.

5. Wiadomo, że krzywa przenikania się c^4 dwu powierzchni stożkowych rzędu drugiego (W, c^2) i (W_1, c_1^2) posiada cztery punkta, leżące w nieskończoności, z których dwa albo wszystkie cztery mogą być urojone.

Aby wyznaczyć punkta krzywej c^4 , leżące w nieskończoności, poprowadźmy przez wierzchołek W proste równoległe do tworzących powierzchni (W_1, c_1^2) , to te proste są tworzącymi stożka (W, c_2^2) , przystającego do (W_1, c_1^2) .

Ślad c_2^2 powierzchni (W, c_2^2) na płaszczyźnie kierownic c^2 i c_1^2 jest homotetyczny z krzywą c_1^2 , albowiem tworzące równoległe powierzchni (W_1, c_1^2) i W, c_2^2 leżą na płaszczyznach, przechodzących przez prostą WW_1 odpowiednie tedy punkta krzywych c_1^2 i c_2^2 leżą na prostych przechodzących przez ślad D prostej WW_1 , a styczne, poprowadzone do krzywych c_1^2 i c_2^2 w odpowiednich punktach są równoległe, płaszczyzny styczne bowiem, poprowadzone do powierzchni stożkowych (W_1, c_1^2) i (W, c_2^2) wzdłuż tworzących równoległych, są równoległe.

Jeżeli powierzchnie stożkowe (W, c^2) i (W, c_2^2) przecinają się podług czterech tworzących rzeczywistych WA, WB, WC i WE , natenczas tworzące odpowiednie W_1A_1, W_1B_1, W_1C_1 i W_1E_1 powierzchni (W_1, c_1^2) są do owych tworzących równoległe; krzywa przenikania się c^4 posiada tedy cztery rzeczywiste punkta w nieskończoności. Płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni (W, c^2) i (W_1, c_1^2) wzdłuż tworzących WA i W_1A_1, WB i $W_1B_1...$ przecinają się podług asymptot krzywej c^4 , odpowiednio równoległych do tworzących $WA, WB...$

Jeżeli powierzchnie stożkowe (W, c^2) i (W, c_2^2) przecinają się podług dwu tworzących rzeczywistych, natenczas krzywa c^4 posiada dwa punkta leżące w nieskończoności i dwie asymptoty.

Jeżeli zaś powierzchnie (W, c_2^2) i (W, c_2^2) nie mają żadnej tworzącej rzeczywistej wspólnej, natenczas krzywa c^4 jest zamknięta.

6. Powierzchnie stożkowe (W, c^2) i (W_1, c_1^2) , które mają tworzącą WW_1 wspólną, przenikają się podług krzywej rzędu czwartego która się składa z prostej WW_1 i z krzywej rzędu trzeciego c^3 .

Krzywa c^3 przechodzi przez wierzchołki W i W_3 ; płaszczyzny styczne bowiem WW_1t i WW_1t_1 , poprowadzone do powierzchni (W, c^2) i (W_1, c_1^2) wzdłuż tworzącej WW_1 przecinają się z temi powierzchniami podług tworzących W_1A_1 i WB , te zaś przecinają się ze wspólną tworzącą WW_1 w punktach W i W_1 krzywej c^3 .

Płaszczyzna w nieskończoności przecina się z krzywą rzędu trzeciego, c^3 w trzech punktach, z których dwa mogą być urojone.

Celem wyznaczenia punktów krzywej rzędu trzeciego, leżących w nieskończoności, przesunijmy przez wierzchołek W proste, równoległe do tworzących powierzchni (W, c_1^2) , to te proste są tworzącymi powierzchni stożkowej (W, c_2^2) , której przekrój c_2^2 płaszczyzną kierownic c^2 i c_1^2 , jest krzywą homotetyczną c_2^2 z krzywą c_1^2 . Punkta odpowiednie krzywych c_1^2 i c_2^2 leżą na prostych poprowadzonych przez ślad D wspólnej tworzącej WW_1 . Powierzchnie (W, c^2) i (W, c_2^2) mają jedną tworzącą WD wspólną, przecinają się tedy jeszcze

podług jednej tworzącej rzeczywistej WA a nadto podług dwu tworzących WB i WC rzeczywistych lub urojonych.

Tworzące WA , WB i WC wskazują kierunki w których krzywa c^3 rozciąga się do nieskończoności.

Krzywą rzędu trzeciego wchrowatą, która posiada w nieskończoności tylko jeden punkt rzeczywisty nazywamy elipsą kubiczną.

Krzywą rzędu trzeciego wchrowatą, która posiada w nieskończoności trzy punkta rzeczywiste, nazywamy hiperbolą kubiczną.

Jeżeli dwa punkta krzywej c^3 , leżące w nieskończoności, następują po sobie bezpośrednio, natenczas jedna gałąź krzywej c^3 posiada jedną styczną w nieskończoności; taką krzywą nazywamy parabolą hiperboliczną.

Jeżeli wszystkie trzy punkta, leżące w nieskończoności, następują po sobie bezpośrednio, natenczas płaszczyzna w nieskończoności jest płaszczyzną ściśle styczną krzywej c^3 .

Taką krzywą nazywamy parabolą kubiczną.

7. a) Powierzchnia stożkowa, której kierownicą jest krzywa rzędu trzeciego wchrowata, a której wierzchołek leży na tej krzywej jest powierzchnią rzędu drugiego.

b) Przez elipsę kubiczną, która posiada jeden punkt w nieskończoności T^∞ i jedną asymptotę a , można przesunąć tylko jeden walec eliptyczny. Tworzące tego walca są równoległe do asymptoty.

c) Przez hiperbolę kubiczną, która posiada trzy punkta w nieskończoności T^∞ , U^∞ , V^∞ i trzy asymptoty a , a_1 i a_2 , można przesunąć trzy powierzchnie walcowe hiperboliczne. Tworzące tych powierzchni są równoległe do asymptot a , a_1 , a_2 a tworzące $T^\infty U^\infty$ i $T^\infty V^\infty$, $U^\infty T^\infty$ i $U^\infty V^\infty$, $V^\infty T^\infty$ i $V^\infty U^\infty$ są tworzącymi tych walców, które leżą w nieskończoności.

d) Wiadomo, że parabola hiperboliczna posiada jeden punkt T^∞ i jedną styczną U^∞ w nieskończoności.

Powierzchnia walcowa, przesunięta przez parabolę hiperboliczną, której tworzące przechodzą przez punkt T_∞ , jest paraboliczna, albowiem płaszczyzna w nieskończoności (T_∞^∞) jest płaszczyzną styczną tej powierzchni.

Walec zaś, przesunięty przez parabolę hiperboliczną, którego tworzące przechodzą przez punkt styczności U^∞ stycznej U_∞ jest hiperboliczny, posiada bowiem dwie tworzące U^∞ , T^∞ i U^∞ leżące w nieskończoności.

e) Przez parabolę kubiczną można tylko jedną powierzchnię walcową przesunąć, która jest paraboliczna.

8. Przy badaniu własności krzywych wyprowadziliśmy związki, zachodzące między znamionami krzywych wchrowatych i rzutów tychże krzywych na płaszczyznę, a nadto związki, zachodzące między znamionami krzywych wchrowatych i przekrojów płaskich powierzchni rozwijalnych opisanych na tych krzywych.

Wyniki tych badań zastosujemy do krzywych wchrowatych rzędu trzeciego i czwartego.

Rzut c^4 krzywej przenikania się z dowolnego punktu na dowolną płaszczyznę jest również krzywą rzędu czwartego.

Wiadomo, że krzywa rzędu czwartego, nieposiadająca ani punktów podwójnych ani punktów zwrotu, jest krzywą klasy dwunastej. Z łatwością atoli wykażemy, że rzut c^4 posiada dwa punkta podwójne, że ten rzut jest przeto wogóle klasy ósmej.

Jakoż połączmy środek rzutów O z wierzchołkami W i W_1 powierzchni stożkowych (W, c^2) i (W_1, c_1^2) i wyznaczmy płaszczyzny diametralne biegunowe π i π^1 średnic WO i W_1O ze względu na powierzchnie (W, c^2) i (W_1, c_1^2) a nadto prostą „ p “, podług której te płaszczyzny przecinają się, to wszystkie punkta prostej „ p “ są harmonicznie sprzężone ze środkiem O ze względu na obie powierzchnie stożkowe.

Płaszczyzna tedy (O, p) , przesunięta przez środek rzutów i przez prostą „ p “ przecina się z powierzchniami (W, c^2) i (W_1, c_1^2) podług dwu krzywych rzędu drugiego c_2^2 i c_3^2 , których wspólnym biegunem jest punkt O , a prosta „ p “ odpowiednią wspólną biegunową.

Wiadomo, że wspólny biegun dwu krzywych rzędu drugiego jest punktem przecięcia się dwu cięciw wspólnych tych krzywych, przez punkt O przechodzący tedy takie dwie proste, które przecinają się z krzywą przenikania się c^4 w dwu punktach, ślady więc owych prostych na płaszczyźnie rzutów są punktami podwójnymi rzutu c^4 .

Jeżeli krzywa przenikania się c^4 posiada punkt podwójny natenczas rzut c^4 jest klasy szóstej. Rzut krzywej c^4 posiadającej punkt zwrotu jest klasy piątej.

Jeżeli krzywa c^4 posiada dwa punkta podwójne, natenczas rzut c^4 jest klasy czwartej, krzywa przenikania przeto składa się z dwu krzywych rzędu drugiego albo krzywej wchrowatej rzędu trzeciego c^3 i z prostą l .

Rzut l' prostej l jest klasy zerowej; rzut tedy c^3 krzywej rzędu trzeciego wchrowatej jest klasy czwartej posiada więc jeden punkt podwójny. Z dowolnego punktu można przeto poprowadzić jedną prostą, która przecina się z krzywą c^3 w dwu punktach.

Znamię tedy „ h “ krzywej c^3 jest równe jedności, a znamię „ h “ krzywej c^4 jest równe dwu jednostkom.

9. Jeżeli punkt O , z którego, jako ze środka, rzucamy krzywą przenikania się powierzchni stożkowych, schodzi się z wierzchołkiem W albo W_1 , natenczas każdy promień rzucający przecina się z krzywą c^4 w dwu punktach, wszystkie rzuty tedy punktów, leżących na krzywej c^4 , są punktami podwójnymi rzutu c^4 , który w tym przypadku przedstawia się w postaci dwu krzywych rzędu drugiego, nakrywających się.

Z łatwością atoli można wykazać, że oprócz wierzchołków W i W_1 istnieją jeszcze dwa punkta W_2 i W_3 , które są wierzchołkami powierzchni stożkowych rzędu drugiego, dających się przesunąć przez krzywą c^4 .

Jakoż wyznaczmy płaszczyzny biegunowe π i π^1 średnic WW_1 i W_1W ze względu na powierzchnie (W, c^2) i (W_1, c_1^2) , a nadto prostą l , podług której te płaszczyzny przecinają się; wyznaczmy na prostej „ l “ bieguny sprzężone M i M' , N i N' ... ze względu na powierzchnię (W, c^2) i bieguny sprzężone M_1 i M'_1 , N_1 i N'_1 ... ze względu na powierzchnię (W_1, c_1^2) , to MM' , NN' ... i $M_1M'_1$, $N_1N'_1$ wyznaczają szeregi inwolucyjne; elementa sprzężone wspólne W_2 i W_3 tych szeregów są wierzchołkami powierzchni stożkowych rzędu drugiego, które przez krzywą przenikania się c^4 przesunąć można. Punkta W_2 i W_3 są bowiem biegunowo sprzężone z prostą WW_1 , płaszczyzna biegunowa tedy średnicy W_2W ze względu na powierzchnie (W, c^2) i (W_1, c_1^2) schodzi się z płaszczyzną WW_1W_3 , jeżeli więc przez dowolną prostą p i przez punkt

W_2 przesuniemy płaszczyznę, to ta płaszczyzna przecina się z powierzchniami stożkowymi o wierzchołkach W i W_1 , podług dwu krzywych rzędu drugiego, których punkt W_2 jest wspólnym biegunem, a prosta p wspólną biegunową; przez punkt W_2 przechodzą tedy wspólne cięciwy owych krzywych przekroju albo innymi słowy, punkt W_2 jest wierzchołkiem stożka rzędu drugiego, który przez krzywą c^4 przechodzi.

W taki sam sposób można uzasadnić, że punkt W^3 jest również wierzchołkiem powierzchni stożkowej rzędu drugiego, którą przez c^4 przesunąć można. Punkta W , W_1 , W_2 i W_3 , posiadające tę własność, że płaszczyzna biegunowa ze względu na powierzchnie stożkowe rzędu drugiego, przesunięte przez krzywą rzędu czwartego c^4 , przechodzi przez trzy dalsze punkta, nazywamy czwórką biegunów sprzężonych ze względu na te powierzchnie stożkowe i na krzywą c^4 .

10. Przesunmy przez wierzchołki W_1 , W_2 i W_3 płaszczyznę π a przez wierzchołek W i przez krzywą c^4 powierzchnię stożkową (W, c^2) , to natenczas punkta przecięcia się M i M_1 , N i $N_1, \dots$ tworzących tego stożka z krzywą c_4 tworzą grupy harmoniczne z wierzchołkiem W i z punktami przecięcia się tworzących z płaszczyzną π . Krzywa c^4 jest tedy sama z sobą w czterokrotnym związku involucyjnym.

Jeżeli przeto poprowadzimy w punktach odpowiednich M i M_1 , N i $N_1, \dots$ styczne do krzywej c^4 , natenczas te styczne przecinają się w punktach, leżących na płaszczyznach WW_1W_2 , $W_1W_2W_3$, W_2W_3W i WW_1W_3 . A zatem: krzywa własnego przenikania się powierzchni rozwijalnej opisanej na krzywej c^4 składa się z czterech krzywych płaskich.

11. Jeżeli krzywa przenikania się dwu powierzchni stożkowych rzędu drugiego nie posiada punktu szczególnego, natenczas przez dowolny punkt można poprowadzić dwie sieczne, które ją przecinają w dwu punktach ($h=2$); a powierzchnia rozwijalna, podwójnie opisana na tej krzywej, składa się z czterech powierzchni stożkowych rzędu drugiego ($y=8$).

Podstawiając tedy wartości $m=4$, $h=2$, $y=8$ w równania wyprowadzone na str. 16. otrzymamy:

$$n=12, r=8, a=16, g=38, x=16 \text{ t. z.}$$

Z dowolnego punktu można do krzywej c^4 dwanaście płaszczyzn ściśle stycznych poprowadzić, dowolną prostą przecina ośm stycznych krzywej c^4 , ta krzywa posiada szesnaście płaszczyzn zwrotu; przekrój powierzchni rozwijalnej opisanej na krzywej c^4 posiada 38 stycznych podwójnych, a krzywa własnego przenikania się tej powierzchni jest rzędu szesnastego, a ponieważ jak to pod 10. uzasadniliśmy, ta krzywa rozpada się na cztery krzywe płaskie, przeto krzywa własnego przenikania się powierzchni rozwijalnej, opisanej na krzywej c^4 , rozpada się na cztery krzywe płaskie rzędu czwartego.

12. Jeżeli krzywa rzędu czwartego c^4 posiada jeden punkt podwójny, natenczas $m=4$, $h=3$, $\beta=0$.

Podstawiając te wartości w równania str. 16. otrzymamy

$$n=6, r=6, a=4, g=6, x=6, y=4 \text{ t. z.}$$

Krzywa c^4 jest w tym przypadku klasy szóstej i stopnia szóstego, posiada cztery płaszczyzny zwrotu; przekrój powierzchni rozwijalnej, opisanej na krzywej c^4 , posiada sześć stycznych podwójnych i krzywą własnego przenikania się klasy szóstej, która się rozpada na dwie krzywe płaskie rzędu trzeciego, leżące na płaszczyznach biegunowych prostej WW_1 ze względu na powierzchnie

(W, c^2) i (W_1, c_1^2) ; powierzchnia rozwijalna podwójnie opisana na krzywej c^4 składa się z dwu powierzchni stożkowych przenikających się.

13. Jeżeli krzywa przenikania się c^4 posiada punkt zwrotu, natenczas $m=4$, $h=2$, $\beta=1$.

Podstawiając te wartości w równania str. 16. otrzymamy:

$$n=4, r=5, a=1, g=2, x=2 \text{ i } y=2 \text{ t. z.}$$

Krzywa przenikania się dwu powierzchni stożkowych (W, c^2) i (W, c_1^2) , która w punkcie W_1 posiada punkt zwrotu jest klasy czwartej i stopnia piątego, posiada jedną płaszczyznę zwrotu; krzywa własnego przenikania się powierzchni rozwijalnej opisanej na tej krzywej leży na płaszczyźnie biegunowej prostej W_1W ze względu na powierzchnię (W_1, c_1^2) , a powierzchnia rozwijalna, podwójnie opisana, na krzywej c^4 schodzi się z powierzchnią stożkową (W, c^2) .

14. Krzywa rzędu trzeciego c^3 wichrowata posiada tę własność, że przez dowolny punkt w przestrzeni można poprowadzić jedną prostą, która ją przecina w jednym punkcie ($h=1$). Krzywa c^3 nie ma płaszczyzny zwrotu $a=0$, nie posiada również płaszczyzny stycznej podwójnej $y=0$; tworzące powierzchni rozwijalnej, opisanej na krzywej wichrowatej rzędu trzeciego nie przecinają się, gdyby dwie tworzące t i t_1 przecinały się z sobą, natenczas płaszczyzna, przesunięta przez te proste przecinałaby się w czterech punktach $x=0$.

Podstawiając tedy w równanie, o których poprzednio wspominaliśmy, $m=3$, $h=1$, $a=0$, $\beta=0$, $x=0$, $y=0$ otrzymamy $n=3$, $r=4$, $g=1$ t. z.:

Rzut krzywej c^3 na dowolną płaszczyznę jest rzędu trzeciego a klasy czwartej, posiada jeden punkt podwójny i trzy styczne przegięcia. Ślad powierzchni rozwijalnej, opisanej na krzywej c^3 , na dowolnej płaszczyźnie jest krzywą rzędu czwartego a klasy trzeciej, posiada jedną styczną podwójną i trzy punkta zwrotu.

Rzęd i klasa, ilość punktów podwójnych i stycznych podwójnych, ilości stycznych przegięcia i punktów zwrotu krzywej c^3 i przekroju powierzchni rozwijalnej, opisanej na c^2 są równe.

Przekrój powierzchni rozwijalnej, opisanej na krzywej rzędu trzeciego wichrowatej, płaszczyzną ściśle styczną tej krzywej jest krzywą rzędu drugiego.

Sześć punktów 1, 2, 3, 4, 5, 6, z których cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie, wyznaczają krzywą c^3 łącząc bowiem punkt 1 z 2, 3, 4, 5, 6 i punkt 2 z 1, 3, 4, 5, 6 otrzymamy po pięć tworzących dwu powierzchni stożkowych, które mają tworzącą 1, 2 wspólną, które zatem przenikają się podług krzywej wichrowatej rzędu trzeciego.

15. Poznawszy własności zasadnicze krzywych wichrowatych rzędu czwartego i rzędu trzeciego, możemy przystąpić do rysowania tych krzywych.

Zagadnienie 1: Wykreślić krzywą przenikania się dwu powierzchni stożkowych rzędu drugiego, zamkniętą.

Rozwiązanie: Wiadomo, że dwie powierzchnie stożkowe (W_1, c_1^2) (W_2, c_2^2) przenikają się wówczas podług krzywej rzędu czwartego zamkniętej, jeżeli stożek (W_1, c_1^2) , przesunięty przez wierzchołek W_1 , równolegle do stożka (W_2, c_2^2) , nie ma ze stożkiem (W_1, c_1^2) żadnej rzeczywistej tworzącej wspólnej.

Na rys. 57. przyjęto, że kierownica c_1^2 stożka (W_1, c_1^2) leży na płaszczyźnie poziomej, a kierownica c_2^2 powierzchni stożkowej (W_2, c_2^2) leży na płaszczyźnie pionowej rzutów.

Na pierwszy rzut oka widoczna, że stożek, przesunięty przez punkt W_1 , równolegle do stożka (W_2, c_2^2) , nie posiada ze stożkiem (W_1, c_1^2) żadnych tworzących rzeczywistych wspólnych, że przeto dane powierzchnie przenikają się podług krzywej rzędu czwartego c^4 wchrowatej, zamkniętej.

Celem wyznaczania poszczególnych punktów i stycznych tej krzywej, wyznaczmy ślad poziomy H' i ślad pionowy V'' prostej W_1, W_2 łączącej wierzchołki stożków i poprowadźmy przez tę prostą płaszczyznę styczną π^1 i π^2 do powierzchni (W_2, c_2^2) i (W_1, c_1^2) ; to spostrzeżemy, że w danym przypadku jedynie tworzące powierzchni, leżące między owymi płaszczyznami stycznymi przecinają się, że przeto krzywa przenikania się nie występuje poza obręb tych płaszczyzn.

Płaszczyzna π^1 styka się z powierzchnią (W_2, c_2^2) wzdłuż tworzącej $W_2, 1$ a przecina powierzchnię W_1, c_1^2 podług tworzących $W_1, 2$ i $W_1, 3$ punkta przecięcia tedy I. i II. tych tworzących są punktami krzywej c^4 ; styczne poprowadzone w tych punktach do krzywej przenikania schodzą się z tworzącymi $W_1, 2$ i $W_1, 3$ płaszczyzna styczna bowiem π^1 , poprowadzona do powierzchni W_2, c_2^2 wzdłuż tworzącej $W_2, 1$ przecina się z płaszczyznami stycznymi powierzchni W_1, c_1^2 , poprowadzonymi wzdłuż tworzących $W_1, 2$ i $W_1, 3$, podług tychże tworzących.

Płaszczyzna π^2 styka się ze stożkiem W_1, c_1^2 wzdłuż tworzącej $W_1, 4$ i przecina się z powierzchnią (W_2, c_2^2) podług tworzących $W_2, 5$ i $W_2, 6$; punkta przecięcia się III. i IV. tych tworzących leżą na krzywej c^4 , a tworzące $W_2, 5$ i $W_2, 6$ są stycznymi krzywej c^4 w tych punktach.

Płaszczyzna π^3 przesunięta przez prostą W_1, W_2 przecina się z powierzchnią (W_1, c_1^2) podług tworzących $W_1, 7$ i $W_1, 8$, a z powierzchnią (W_2, c_2^2) podług tworzących $W_2, 9$ i $W_2, 10$, punkta przecięcia się tedy V., VI., VII. i VIII. tych tworzących leżą na krzywej przenikania się c^4 .

Płaszczyzna π^3 przechodzi przez tworzącą $W_2, 9$, której rzut pionowy $W_2, 9''$ ogranicza z jednej strony rzut pionowy powierzchni (W_2, c_2^2) ; rzuty tedy VII. i VIII. są punktami styczności rzutu pionowego krzywej przenikania z rzutem $W_2, 9''$, płaszczyzna styczna bowiem poprowadzona do powierzchni (W_2, c_2^2) wzdłuż tworzącej $W_2, 9$ jest prostopadła do płaszczyzny pionowej rzutów.

Styczne, poprowadzone do krzywej c^4 w punktach V. i VI., otrzymamy, wyznaczając proste, podług których płaszczyzna styczna, poprowadzona do powierzchni (W_2, c_2^2) wzdłuż tworzącej $W_2, 10$, przecina się z płaszczyznami stycznymi, poprowadzonymi do powierzchni (W_1, c_1^2) wzdłuż tworzących $W_1, 7$ i $W_1, 8$. Łącząc tedy punkta I'... i I''... i uwzględniając otrzymane styczne, otrzymamy rzuty krzywej przenikania się danych powierzchni stożkowych. Część krzywej leżąca na częściach widzialnych obu powierzchni jest widzialna, część zaś leżąca na częściach niewidzialnych albo leżąca na części widzialnej jednej powierzchni a na części niewidzialnej drugiej powierzchni jest niewidzialna.

Zagadnienie: Wykreślić krzywe przenikania się wchrowate rzędu czwartego, które posiadają a) dwie asymptoty, b) cztery asymptoty, c) jedną asymptotę i płaszczyznę ściśle styczną w nieskończoności d) płaszczyznę zwrotu w nieskończoności.

Rozwiązanie: Niech będzie dany stożek rzędu drugiego (W_1, c_1^2) , którego kierownica c_1^2 leży na płaszczyźnie poziomej rzutów, zakresłmy na tej płaszczyźnie krzywą rzędu drugiego c_3^2 , któraby a) przecinała się z kierownicą c_1^2 w dwu punktach rzeczywistych b) krzywą c_4^2 , któraby się przecinała z c_1^2 w czterech punktach rzeczywistych c) krzywą c_5^2 , któraby przecinała c_1^2 w jednym punkcie i stykała się z tą krzywą w trzech bezpośrednio po sobie następujących punktach d) krzywą c_6^2 , któraby posiadała z kierownicą c_1^2 cztery bezpośrednio po sobie następujące punkta wspólne, i przesunmy stożki (W_1, c_3^2) , (W_1, c_4^2) , (W_1, c_5^2) i (W_1, c_6^2) równolegle do nich, tak aby zajęły położenia (W_2, c_3^2) , (W_3, c_4^2) ... to natenczas powierzchnie (W_1, c_1^2) i (W_2, c_3^2) , (W_1, c_1^2) i (W_2, c_4^2) ... przenikać się będą podług krzywych wchrowatych rzędu czwartego, wymienionych pod a, b, c i d.

Płaszczyzny styczne, poprowadzone do stożków (W_1, c_1^2) i (W_2, c_3^2) ... wzdłuż tworzących równoległych przecinają się podług prostych, które są asymptotami krzywej przenikania się tych powierzchni.

Zagadnienie 2. Wykreślić elipsę kubiczną (rys. 58.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że kierownica c_1^2 stożka (W_1, c_1^2) leży na płaszczyźnie poziomej rzutów i zakresłmy takie koło c_3^2 , które się przecina z krzywą c_1^2 w dwu punktach rzeczywistych B_1 i H ; poprowadźmy następnie tworzącą W_1, H i przesunmy przez W_1 i c_3^2 stożek. Jeżeli powierzchnię stożkową (W_1, c_3^2) przesuniemy w ten sposób, że zmieniony wierzchołek W_2 leżeć będzie na tworzącej W_1, H , natenczas otrzymamy stożek W_2, c_2^2 , który przenika się ze stożkiem (W_1, c_1^2) podług elipsy kubicznej; te stożki bowiem mają jedną tworzącą wspólną, a nadto tworzące W_1, B_1 i W_2, B_2 są równoległe.

Koła c_3^2 i c_2^2 są podobne i leżą w położeniu podobnym; punkt H jest środkiem tego podobieństwa. Środek O_2 koła c_2^2 otrzymamy tedy wyznaczając punkt przecięcia się prostej HO_1 z prostą W_2, O_2 , poprowadzoną przez punkt W_2 równoległe do HO_1 .

Wierzchołki W_1 i W_2 są punktami krzywej przenikania się c^3 , płaszczyzny styczne bowiem π^1 i π^2 , poprowadzone do powierzchni stożkowych (W_1, c_1^2) i (W_2, c_2^2) wzdłuż tworzącej W_1, W_2 przecinają z temi powierzchniami podług tworzących $W_2, 1$ i $W_1, 2$, a te przecinają się z tworzącą W_1, W_2 w punktach W_2 i W_1 ...

Tworzące $W_2, 1$ i $W_1, 2$ są stycznymi poprowadzonymi do krzywej przenikania się c^3 .

Płaszczyzny styczne poprowadzone do powierzchni (W_1, c_1^2) i (W_2, c_2^2) wzdłuż tworzących równoległych W_1, B_1 i W_2, B_2 przecinają się podług asymptoty a . Ślad poziomy H_1 tej asymptoty jest punktem przecięcia się stycznych H_1, B_1 i H_1, B_2 , poprowadzonych do krzywych c_1 i c_2 w punktach B_1 i B_2 .

Celem wyznaczenia dalszych punktów i stycznych krzywej c^3 przesunmy przez wspólną tworzącą W_1, W_2 płaszczyznę π^3 , π^4 ,... i wyznaczmy tworzące $W_1, 5$ i $W_2, 6$, $W_1, 7$ i $W_2, 8$,... podług których te płaszczyzny przecinają się z powierzchniami stożkowymi, to punkta przecięcia się tych tworzących I., II.,... leżą na krzywej przenikania się c^3 , a płaszczyzny styczne poprowadzone do powierzchni wzdłuż tworzących $W_1, 5$ i $W_2, 6$,... przecinają się podług stycznych poprowadzonych do krzywej c^3 w punktach I....

Zagadnienie 3. Wykreślić hiperbolę kubiczną (rys. 59.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że elipsa c_1^2 , leżąca na płaszczyźnie poziomej rzutów jest kierownicą stożka (W_1, c_1^2) . Zakreślmy takie koło c_3^2 , które przecina się z krzywą c_1^2 w czterech punktach rzeczywistych A_1, B_1, C_1 i H i przesunijmy przez wierzchołek W_1 i przez koło c_3^2 stożek (W_1, c_3^2) przesunijmy następnie ten stożek tak, aby przesunięty wierzchołek W_2 leżał na tworzącej W_1H , to natenczas powierzchnie (W_1, c_1^2) i (W_1, c_3^2) przenikają się podług hiperboli kubicznej; te powierzchnie bowiem mają jedną tworzącą wspólną a nadto trzy pary tworzących W_1A_1 i W_2A_2 , W_1B_1 i W_2B_2 , W_1C_1 i W_2C_2 równoległych.

Płaszczyzny styczne π^1 i π^2 poprowadzone do powierzchni (W_1, c_1^2) i (W_2, c_2^2) wzdłuż tworzącej W_1W_2 przecinają się z temi powierzchniami podług tworzących W_2A_1 i W_1A_2 ; punkta przecięcia się zatem W_1 i W_2 prostej W_1W_2 z owemi tworzącymi są punktami hiperboli kubicznej c^3 . Tworzące W_2A_1 i W_1A_2 są stycznymi, poprowadzonymi do krzywej c^3 .

Płaszczyzny styczne poprowadzone do powierzchni (W_1, c_1^2) i (W_2, c_2^2) wzdłuż tworzących W_1A_1 i W_2A_2 , W_1B_1 i W_2B_2 , W_1C_1 i W_2C_2 przecinają się podług asymptot a_1, a_2 i a_3 krzywej przenikania się. Ślady poziome H_1, H_2 i H_3 tych asymptot są punktami przecięcia się stycznych A_1H_1 i A_2H_1 , B_1H_2 i B_2H_2 , C_1H_3 i C_2H_3 , poprowadzonych do kierownic w punktach A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 .

Celem wyznaczenia dalszych punktów i stycznych krzywej przenikania się postępujemy tak samo jak w zagadnieniu poprzednim.

Zagadnienie 4: Wykreślić parabolę hiperboliczną (rys. 60.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że elipsa c_1^2 , leżąca na płaszczyźnie poziomej rzutów jest kierownicą stożka W_1, c_1^2 . Zakreślmy takie koło c_3^2 , któreby się stykało z krzywą c_1^2 w punkcie B i przecinało to koło w punktach A i H i przesunijmy przez wierzchołek W_1 i przez koło c_3^2 stożek, przesunijmy następnie stożek (W_1, c_3^2) równolegle do pierwotnego położenia, tak aby przesunięty wierzchołek leżał na tworzącej W_1H , to natenczas powierzchnie (W_1, c_1^2) i (W_2, c_2^2) przenikają się podług paraboli hiperbolicznej, płaszczyzny styczne bowiem, poprowadzone do tych powierzchni wzdłuż tworzących W_1B_1 i W_2B_2 są równoległe a tworzące W_1A_1 i W_2A_2 są także równoległe. Krzywa przenikania się rozpada się na część paraboliczną, która posiada jedną styczną w nieskończoności i na część hiperboliczną, która posiada jedną asymptotę.

W taki sam sposób jak w zagadnieniu drugim można wykazać, że parabola hiperboliczna przechodzi przez wierzchołki W_1 i W_2 stożków przenikających. Punkta styczne i asymptotę wyznaczamy tak samo jak w zagadnieniach poprzednich.

0 rozwijaniu powierzchni stożkowych i walcowych.

1. Powierzchnię prostokreślną Π_r , której dwie bezpośrednio po sobie następujące tworzące t_1 i t_2 , t_2 i t_3 , t_3 i t_4 ... przecinają się w punktach A, B, C ... można bez złamania i bez zgięcia rozwinać na płaszczyźnie. Taką powierzchnię nazywamy powierzchnią rozwijalną.

Miejsce geometryczne punktów A, B, C ... nazywamy krzywą zwrotu powierzchni rozwijalnej Π_r .

Na płaszczyznach, przesuniętych przez dwie bezpośrednio po sobie następujące tworzące t_1 i t_2 , t_2 i t_3 ... leżą nieskończenie małe części powierzchni, płaszczyzny tedy (t_1, t_2) , (t_2, t_3) ... są płaszczyznami stycznymi powierzchni Π_r .

2. Celem rozwinięcia powierzchni Π_r na płaszczyźnie, obróćmy element tejże (t_1, t_2) około tworzącej t_2 tak, aby się znalazł na płaszczyźnie elementu (t_2, t_3) ; złączone na tej płaszczyźnie elementy (t_1, t_2) i (t_2, t_3) obróćmy około tworzącej t_3 tak, aby padły na płaszczyznę (t_3, t_4) i t. d. postępując w ten sposób dalej sprowadzimy całą powierzchnię na płaszczyznę.

Jeżeli na powierzchni Π_r leży krzywa $MNPQ$... natenczas po rozwinięciu powierzchni zamieni się na krzywą $M_1N_1P_1Q_1$... którą nazywamy przekształconą krzywą pierwotnej.

Długości krzywych MN ... i M_1N_1 ... są równe, albowiem długości elementów MN i M_1N_1 ... są równe; kąty zawarte między elementami MN, NP ... i tworzącymi t_2, t_3 ... nie zmieniają się podczas rozwijania powierzchni Π_r , styczne tedy poprowadzone do przekształconej M_1N_1 ... są nachylone do tworzących po rozwinięciu powierzchni pod takimi samymi kątami, pod jakimi są do odpowiednich tworzących nachylone styczne, poprowadzone do krzywej pierwotnej.

Natomiast kąty styczności t. z. kąty zawarte między dwiema bezpośrednio po sobie następującymi stycznymi MN i NP tudzież M_1N_1 i N_1P_1 poprowadzonymi do krzywej MN ... i do jej przekształconej M_1N_1 ... nie są równe; kąt styczności MNP w punkcie N jest równy $(\pi - MNP)$, kąt styczności zaś $M_1N_1P_1$ jest równy $\pi - \angle(MN, t_2) - \angle(NP, t_3)$. Promienie krzywizny tedy krzywych MN ... i M_1N_1 ... w punktach odpowiednich są różne.

Wyjątek pod tym względem stanowi krzywa zwrotu ABC ... i jej przekształcona $A_1B_1C_1$... kąty styczności tych bowiem krzywych w punktach A i A_1 , B i B_1 ... odpowiednich są równe.

3. Dajmy na to, że elementy MN i NP krzywej MN ... są nachylone do tworzącej t_2 pod kątami równymi, to po rozwinięciu powierzchni Π_r zejda się styczne MN i NP na jednej prostej, która jest styczną przegięcia przekształconej M_1N_1 ... w punkcie N_1 .

Jeżeli elementy MN i NP są nachylone do tworzącej t_2 pod kątami równymi, natenczas leżą na powierzchni stożka obrotowego Σ , którego wierzchołek schodzi się z punktem N , a którego osią jest prosta t_2 . Płaszczyzna MNP jest płaszczyzną ściśle styczną krzywej MN ..., zawiera bowiem trzy bezpośrednio po sobie następujące punkta tej krzywej, a nadto jest płaszczyzną styczną stożka Σ , zawiera bowiem dwie bezpośrednio po sobie następujące tworzące MN i NP tej powierzchni.

Wiadomo, że płaszczyzna styczna MNP jest prostopadła do płaszczyzny przesuniętej przez oś t_2 i przez tworzącą styczności $AM \equiv t_1$. Płaszczyzna (t_1, t_2) jest płaszczyzną ściśle styczną powierzchni rozwijalnej. A zatem:

Jeżeli płaszczyzna ściśle styczna krzywej, leżącej na powierzchni rozwijalnej Π_r w pewnym punkcie N jest prostopadła do płaszczyzny stycznej powierzchni w tym punkcie, natenczas punktowi N odpowiada na przekształconej tej krzywej punkt przegięcia N_1 .

Krzywą, której wszystkie punkta tę własność posiadają, nazywamy krzywą geodezyjną. Przekształcona tedy krzywej geodezyjnej jest linią prostą, droga

zatem na powierzchni między dwoma punktami tej powierzchni, wytyczona linią geodezyjną jest najkrótsza.

4. Linią geodezyjną jakiegokolwiek powierzchni posiada tę samą własność, co linia geodezyjna powierzchni rozwijalnej.

Jakoż przyjmijmy, że krzywa $M...P$ jest najkrótszą, jakie na powierzchni dowolnej Π między punktami M i P wykreślić można. Poprowadźmy płaszczyzny styczne do powierzchni Π w punktach leżących na krzywej $M...P$ i nie-kończenie blisko siebie leżących, to te płaszczyzny powłóczą powierzchnię rozwijalną Π_r , która się styka z powierzchnią Π wzdłuż krzywej $M...P$; linia geodezyjna tedy $M...P$ powierzchni Π jest również linią geodezyjną powierzchni Π_r ; płaszczyzny ściśle styczne krzywej $M...P$ w poszczególnych punktach są prostopadłe do płaszczyzn stycznych powierzchni Π w tychże punktach.

Zagadnienie 1: Rozwinąć stożek obrotowy (W, k) na płaszczyźnie i wykreślić przekształconą krzywej, podług której płaszczyzna π ów stożek przecina (rys. 61.).

Rozwiązanie: Odcinki $WA, WB...$ tworzących powierzchni (W, k), zawarte między wierzchołkiem W i kierownicą k są równe, przekształcona tedy koła k jest łukiem $\widehat{A_1A_2}$ koła k_1 , o promieniu równym odcinkom $WA,...$ Długość łuku $\widehat{A_1A_2}$ jest równa długości obwodu kierownicy k .

Kąt środkowy A_1WA_2 odpowiadający łukowi $\widehat{A_1A_2}$ koła k_1 jest równy $2\pi \frac{r}{R}$, gdzie r i R oznaczają promienie kół k i k_1 .

Podzielmy obwód koła k na równe i tak małe części $AB=BC=CD=...$, aby długości łuków $\widehat{AB...}$ różniły się bardzo mało od długości cięciw $AB,...$; podzielmy również łuk A_1A_2 na tyleż równych części $A_1B_1=B_1C_1=...$, to proste $W_1A_1, W_1B_1, W_1C_1,...$ są tworzącymi powierzchni stożkowej po rozwinięciu tejże na płaszczyźnie.

Aby wyznaczyć przekształconą c_1 ($1, 2,...$) krzywej 123..., podług której płaszczyzna π przecina się ze stożkiem (W, k), wyznaczmy prawdziwe wielkości odcinków $W_1, W_2,...$ za pomocą obrotu tychże około osi powierzchni WO na płaszczyznę WOA , równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów, i odmierzymy te odcinki od punktu W_1 na prostych $W_1A_1, W_1B_1,...$, to miejsce geometryczne punktów $1, 2,...$ jest przekształconą krzywej 123...

Wiadomo, że kąty, zawarte między tworzącymi $W_1B_1...$ powierzchni po rozwinięciu, i stycznymi $s_1^2...$, poprowadzonymi do przekształconej $1, 2, 3,...$ w punktach $2,...$ są równe kątom, zawartym między tworzącymi $WB...$ i stycznymi poprowadzonymi w punktach $2,...$ do krzywej 123...

Wyznamy tedy ślady $H_2, H_3...$ stycznych $s_2^2, s_3^3...$, poprowadzonych w punktach $2, 3,...$ do krzywej przekroju, i odmierzymy na stycznych, poprowadzonych do koła k_1 w punktach $B_1, C_1...$ odcinki $B_1H_2^1, C_1H_3^1...$, odpowiednio równe odcinkom $BH_2, CH_3...$, to proste $H_2^1A_1, H_3^1A_1...$ są stycznymi $s_1^2, s_3^3...$ poprowadzonymi do przekształconej.

Płaszczyzna π jest płaszczyzną ściśle styczną krzywej przekroju 123... we wszystkich jej punktach.

Poprowadźmy tedy przez wierzchołek W prostą p (p', p''), prostopadłą do płaszczyzny π i wyznaczmy płaszczyzny styczne, π^1 i π^k przesunięte przez tę prostą, to na tworzących styczności WI i WK owych płaszczyzn leżą pun-

ktą M i N krzywej przekroju, którym odpowiadają punkta przecięcia M_1 i N_1 przekształconej $1, 2, 3,...$

Zagadnienie 2: Rozwinąć powierzchnię walcową na płaszczyźnie i wykreślić przekształconą kierownicy tej powierzchni (rys. 62).

Rozwiązanie: Przekroje powierzchni walcowej płaszczyznami, prostopadłymi do tworzących są liniami geodezyjnymi, elementa bowiem krzywej przekroju są prostopadłe do tworzących.

Poprowadźmy tedy płaszczyznę π , prostopadłą do tworzących walca i wyznaczmy krzywą c ($1, 2,...$) podług której ta płaszczyzna przecina się z powierzchnią, a nadto kład tej krzywej (c) na płaszczyznę poziomą rzutów; poprowadźmy następnie prostą dowolną l i odmierzymy na niej odcinki $1, 2, 2, 3,...$ równe łukom (1) (2), (2 , 3)... krzywej (c), to odcinek $1, 1, 2$, równy sumie odcinków $1, 2, 2, 3,...$ jest przekształconą przekroju c .

Proste $m_1, m_2,...$ poprowadzone przez punkta $1, 2,...$ prostopadłe do prostej l są tworzącymi powierzchni walcowej po rozwinięciu tejże na płaszczyźnie.

Aby wykreślić przekształconą c_1 kierownicy c , wyznaczmy prawdziwe wielkości odcinków $1A, 2B,...$ tworzących, zawartych między płaszczyzną π i płaszczyzną poziomą rzutów i odmierzymy te odcinki od punktów $1, 2,...$ na prostych $m_1, m_2,...$ to natenczas miejsce geometryczne punktów $A_1, B_1,...$ jest przekształconą kierownicy c .

Wyznamy ślady $H_1, H_2,...$ stycznych, poprowadzonych w punktach $1, 2,...$ do krzywej przekroju i odmierzymy na prostej l od punktów $1, 2,...$ odcinki $1, H_1^1, 2, H_2^1$, równe prawdziwej wielkości odcinków $1H_1, 2H_2,...$ to proste $H_1^1A_1, H_2^1B_1,...$ są stycznymi poprowadzonymi do przekształconej c_1 w punktach $A_1, B_1,...$

Punkta przecięcia I_1 i K_1 przekształconej leżą na prostych, odpowiadających po rozwinięciu tworzącym, których rzuty poziome ograniczają rzut poziomy walca, płaszczyzny styczne bowiem, poprowadzone do powierzchni walcowej wzdłuż tych tworzących są prostopadłe do płaszczyzny poziomej rzutów, która jest płaszczyzną ściśle styczną we wszystkich punktach tej kierownicy.

Zagadnienie 3: Rozwinąć dowolny stożek na płaszczyźnie i wyznaczyć przekształconą kierownicy tej powierzchni (rys. 63.).

Rozwiązanie: Opiszmy z punktu W jako środka dowolnym promieniem „ r “ kulę K i wyznaczmy krzywą c_1 , podług której powierzchnie (W, c) i K przenikają się, to przekształconą krzywej c_1 jest łukiem $\widehat{1, 1, 2}$ koła k_2 zakreślonego promieniem „ r “. Długość łuku tego $\widehat{1, 1, 2}$ jest równa długości krzywej c_1 .

Celem wyznaczenia punktów i stycznych krzywej c_1 poprowadźmy przez wierzchołek W prostą WW' , prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów i przesunijmy przez nią płaszczyznę π , równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów i płaszczyzny $\pi^1, \pi^2,...$

Te płaszczyzny przecinają się ze stożkiem podług tworzących WA i WB, WC i WD, WE i $WF,...$ a z kulą K podług kół wielkich. Punkta przecięcia się $1'', 2''$ rzutów $W''A''$ i $W''B''$ z kołem K'' , ograniczającym rzut pionowy kuli K , są rzutami pionowymi punktów 1 i 2 , leżących na krzywej c_1 .

Punkta przecięcia się 3 i $4, 5$ i $6,...$ tworzących WC i WD, WE i WF z kulą K otrzymamy, obracając płaszczyzny π^1 i $\pi^2,...$ wraz z tworzącymi stożka około osi WW' tak, aby się zeszły z płaszczyzną π ; jeżeli następnie

wyznaczymy punkta przecięcia się koła K'' ze zmienionemi rzutami pionowymi tworzących WC i WD , WE i WF ... i wrócimy obrotem wstecznym do pierwotnego położenia płaszczyzn π^1, π^2 ... natenczas otrzymamy rzuty pionowe $3''$ i $4''$, $5''$ i $6''$ punktów krzywej c_1 podług której powierzchnie K i (W, c) przenikają się.

Styczne, poprowadzone w punktach 1, 2, 3... do krzywej c_1 , leżą na płaszczyznach stycznych poprowadzonych do powierzchni stożkowej (W, c) wzdłuż tworzących WA, WB, WC ,... i są odpowiednio prostopadłe do promieni $W1, W2, W3$...

Aby n. p. wyznaczyć styczną, poprowadzoną w punkcie 3 do krzywej c_1 , poprowadźmy wzdłuż tworzącej WC płaszczyznę styczną do powierzchni (W, c) a przez punkt 3 przesunmy płaszczyznę prostopadłą do promienia $W3$, to te płaszczyzny przetną się podług stycznej, poprowadzonej w punkcie 3 do krzywej, podług której powierzchnia K i (W, c) przecinają się.

Rozwińmy dalej walec rzucający poziomo krzywą c_1 na płaszczyźnie; przekształcona podstawy tego walca jest linią prostą $1'_1, 2'_1, 3'_1$... $1'_2$, a przekształconą krzywej c_1 otrzymamy odmierając na prostopadłych, wyprowadzonych z punktów $1'_1, 2'_1$... odcinki $1'_11_1, 2'_12_1$... równe odległościom rzutów pionowych $1'', 2''$... od osi rzutów x .

Długość krzywej $1_12_13_1$... równa jest długości krzywej c_1 . Jeżeli tedy z dowolnego punktu W_2 zakreślimy koło k_2 promieniem równym promieniowi kuli K i od dowolnego punktu 1_2 odmierzymy odcinki $1_22_2, 2_23_2, 3_24_2$... odpowiednio równe łukom $1_12_1, 2_13_1, 3_14_1$... to natenczas proste W_21_2, W_22_2, W_23_2 ... są tworzącymi powierzchni stożkowej po jej rozwinięciu na płaszczyźnie.

Odmierzmy następnie na prostych W_21_2, W_22_2 ... odcinki równe prawdziwej wielkości tworzących WA, WB ... to otrzymamy punkta A_2, B_2 ... których miejsce geometryczne jest przekształconą kierownicą c powierzchni stożkowej.

Punkta przecięcia M_2 i N_2 przekształconej A_2B_2 ... odpowiadają tym punktom M i N krzywej c , w których ślady poziome płaszczyzn stycznych, prostopadłych do płaszczyzny poziomej rzutów, z tą krzywą się stykają.

O powierzchniach w ogóle i o powierzchniach rzędu drugiego.

1. Miejsce geometryczne prostej lub krzywej, poruszających się w przestrzeni podług pewnego prawa nazywamy powierzchnią. Linie, opisujące powierzchnię, nazywamy tworzącymi tejże. Krzywa, opisująca powierzchnię, zmienia swą postać albo jej nie zmienia.

Powierzchnię Π^n , którą dowolna prosta przecina w „ n ” punktach, nazywamy powierzchnią rzędu n -tego. Jeżeli „ n ” jest ilością skończoną, natenczas Π^n nazywamy powierzchnią algebraiczną; jeżeli zaś „ n ” jest ilością nieskończenie wielką, natenczas powiadamy, że powierzchnia jest przestępna.

Dowolna płaszczyzna przecina tedy powierzchnię Π^n podług krzywej rzędu n -tego; albowiem proste leżące na tej płaszczyźnie przecinają się z powierzchnią Π^n a więc i z krzywą przekroju w „ n ” punktach.

Zdarzyć się może, że prosta „ l ” posiada z powierzchnią rzędu n -tego ($n+1$) punktów wspólnych; w tym przypadku posiada ta prosta z powierzchnią nieskończenie wiele punktów wspólnych, leży tedy w całej rozciągłości na powierzchni.

2. Prosta „ d ”, łącząca dwa punkta A i B powierzchni, nazywa się sieczną, a granicę s , do której sieczna „ d ” dąży, jeżeli punkt B zbliża się do A , nazywamy styczną, poprowadzoną do powierzchni w punkcie A . Styczną tedy można określić jako prostą, łączącą dwa bezpośrednio po sobie następujące punkta powierzchni.

Przez punkt A można poprowadzić na powierzchni nieskończenie wiele krzywych płaskich lub wchrowatych, których styczne są stycznymi powierzchni.

Jeżeli punkt A nie jest punktem szczególnym powierzchni, natenczas wszystkie styczne powierzchni, przechodzące przez punkt A , leżą na płaszczyźnie, którą nazywamy płaszczyzną styczną powierzchni w punkcie A (rys. 64. Tab. IX.).

Jakoż uważamy powierzchnię Π za miejsce geometryczne krzywej „ c ”, która porusza się w przestrzeni przecinając dwie krzywe c_1 i c_2 , przechodzące przez punkt A , w punktach M ... i N ...

Jeżeli krzywa „ c ” zbliża się do punktu A , natenczas sieczne MA, NA i MN dążą do stycznych krzywych c_1, c_2 i c , a płaszczyzna MAN zbliża się do płaszczyzny, przesuniętej przez styczne s_1 i s_2 , poprowadzone do krzywych c_1 i c_2 w punkcie A . W granicy tedy, kiedy krzywa „ c ” przez punkt A przechodzi, styczna „ s ”, poprowadzona w punkcie A do tej krzywej, leży na płaszczyźnie (s_1, s_2); styczne zatem, poprowadzone w punkcie A do krzywych, przechodzących przez ten punkt na powierzchni, leżą na płaszczyźnie, przesuniętej przez dwie styczne powierzchni, poprowadzone w owym punkcie.

Płaszczyzna styczna π , poprowadzona do powierzchni Π^n , rzędu n -tego w punkcie P przecina się z tą powierzchnią podług krzywej rzędu n -tego „ c^n ”, która posiada w punkcie P punkt podwójny; wszystkie proste bowiem, poprowadzone przez punkt P na płaszczyźnie π są stycznymi powierzchni Π^n , przecinają tedy krzywą „ c^n ” w „ n ” punktach, z których po dwa złączone są w punkcie P .

Pomiędzy prostymi, leżącymi na płaszczyźnie stycznej π , zasługują na uwagę styczne, poprowadzone do krzywej „ c^n ” w punkcie podwójnym P .

Obie te styczne s^1_p i s^2_p posiadają z powierzchnią Π^n po trzy bezpośrednio po sobie następujące punkta wspólne. Jeżeli tedy przesuniemy przez proste s^1_p i s^2_p płaszczyzny π^1 ... i π^2 ... i wyznaczymy krzywe przekroju tychże c^1_p ... i c^2_p ... z powierzchnią Π^n , natenczas owe proste są stycznymi przecięcia krzywych przekroju w punkcie P .

Proste s^1_p i s^2_p nazywamy stycznymi głównymi powierzchni Π^n w punkcie P .

Styczne główne są albo rzeczywiste i różne, albo schodzą się na jednej prostej, albo są urojone.

W pierwszym przypadku nazywamy „ P ” punktem hiperbolicznym, w drugim przypadku punktem parabolicznym a w trzecim przypadku punktem eliptycznym powierzchni.

Płaszczyzna styczna, poprowadzona do kuli w dowolnym punkcie P , przecina tę powierzchnię podług koła o nieskończenie małym promieniu; styczne, poprowadzone przez środek P do tego koła, przechodzą przez punkta kołowe urojone w nieskończoności; a zatem punkta, leżące na kuli są eliptyczne.

Punkta, leżące na powierzchni rozwijalnej są paraboliczne, płaszczyzna styczna bowiem, poprowadzona do tej powierzchni, przecina ją w dwu bezpośrednio po sobie następujących tworzących, które tworzą styczną zwrotu w punktach styczności owej płaszczyzny z powierzchnią.

Jeżeli na powierzchni nierozwijalnej leży prosta l , natenczas wszystkie punkta, leżące na tej prostej, są hiperboliczne; prosta l bowiem jest styczną główną powierzchni we wszystkich punktach, na niej leżących, drugie tedy styczne główne są rzeczywiste.

Punkta paraboliczne stanowią granicę między punktami eliptycznymi i hiperbolicznymi.

Jeżeli na powierzchni znajdują się punkta eliptyczne i hiperboliczne natenczas granicę między nimi stanowią punkta paraboliczne.

4. Jeżeli prosta p , która nie jest styczną powierzchni, przecina tę powierzchnię Π w dwu punktach złączonych w P , natenczas dowolna prosta p_1 , poprowadzona przez P , przecina się również z powierzchnią w dwu punktach złączonych w P . Jakoż przesuniemy przez proste p i p_1 płaszczyznę π^1 , to ta płaszczyzna przecina się z powierzchnią podług krzywej c_1 , którą prosta p przecina w dwu punktach, złączonych w P ; punkt P jest tedy punktem podwójnym krzywej c_1 , wszystkie więc proste, które leżą na płaszczyźnie π^1 i przechodzą przez punkt P przecinają się z krzywą c_1 a zatem i z powierzchnią Π w dwu punktach złączonych w P .

Przesuniemy przez prostą p płaszczyzny $\pi^1, \pi^2, \dots$ i wyznaczmy krzywe $c_1, c_2, \dots$ podług których powierzchnia Π przecina się z temi płaszczyznami, poprowadźmy następnie w punkcie podwójnym P styczne s_1 i s_1', s_2 i $s_2', \dots$ do krzywych $c_1, c_2, \dots$, to każda z tych stycznych przecina się z powierzchnią Π w trzech bezpośrednio po sobie następujących punktach, proste zatem s_1 i $s_1', \dots$ są stycznymi głównymi powierzchni.

Przez punkt P przechodzi tedy nieskończenie wiele stycznych głównych powierzchni, które leżą parami na płaszczyznach $\pi^1, \pi^2, \dots$ owe styczne są tedy tworzącami powierzchni stożkowej rzędu drugiego.

Punkt P nazywamy punktem podwójnym powierzchni.

Płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni stożkowej, której tworzącami są styczne główne powierzchni Π , przecinają się z tą powierzchnią podług krzywych, których punkt P jest punktem zwrotu.

Stożek stycznych podwójnych powierzchni Π w punkcie P może się składać z dwu płaszczyzn różnych, albo z dwu płaszczyzn, złączonych na jednej płaszczyźnie; w pierwszym przypadku nazywamy P punktem biplanarnym w przypadku drugim punktem uniplanarnym.

Jeżeli prosta p przecina powierzchnię Π^n w „ k ” punktach złączonych w P , natenczas P nazywamy punktem „ k ”-krotnym powierzchni.

Płaszczyzna przesunięta przez punkt P przecina się z powierzchnią Π^n podług krzywej „ c^n ” rzędu n -tego, która posiada w P punkt „ k ”-krotny. Przez punkt P przechodzi tedy „ k ” stycznych krzywej c^n , z których każda posiada $(k+1)$ punktów wspólnych złączonych w P .

Styczne zatem poprowadzone do powierzchni Π^n w punkcie P leżą na powierzchni stożkowej rzędu K -go.

Rozumując podobnie jak poprzednio dojdziemy do pojęcia punktów [uni — $(k-1)$] planarnych ... [q — $(k-q)$] planarnych.

5. Krzywą „ c ” przez którą powierzchnia Π^n przechodzi „ r ” razy, nazywamy krzywą „ r ”-krotną powierzchni. Punkta, leżące na krzywej „ c ”, są punktami r -krotnymi powierzchni.

Jeżeli tedy przez dowolny punkt P tej krzywej poprowadzimy płaszczyzny $\pi^1, \pi^2, \dots$ i wyznaczmy krzywe $c^1, c^2, \dots$ podług których te płaszczyzny przecinają się z powierzchnią Π^n natenczas styczne, poprowadzone do krzywych $c^1, c^2, \dots$ w punkcie „ r ”-krotnym P , leżą na płaszczyznach stycznych, poprowadzonych do powierzchni Π^n w punkcie P ; punkta tedy, leżące na krzywej r -krotnej, są punktami „ r ” planarnymi powierzchni Π^n .

Punkta krzywej, leżące na krzywej podwójnej, są punktami biplanarnymi; punkta zaś leżące na krzywej zwrotu są punktami uniplanarnymi powierzchni.

0 powierzchniach rzędu drugiego.

6. Powierzchnię rzędu drugiego przecina dowolna prosta w dwu punktach rzeczywistych, urojonych albo w dwu punktach schodzących się w jednym punkcie rzeczywistym.

Poprowadźmy w punkcie A , leżącym na powierzchni rzędu drugiego Π^2 styczne s_a^1 i s_a^2 do tej powierzchni i przesuniemy przez te proste płaszczyznę π , to ona jest płaszczyzną styczną powierzchni Π^2 w punkcie A , i przecina się z nią podług krzywej rzędu drugiego c_2 , która w punkcie A posiada punkt podwójny.

Styczne s_p^1 i s_p^2 , poprowadzone w punkcie A do krzywej c^2 są stycznymi głównymi powierzchni, mają tedy z powierzchnią po trzy bezpośrednio po sobie następujące punkta wspólne, przeto na zasadzie prawa o zachowaniu ilości proste s_p^1 i s_p^2 leżą w całej rozciągłości na powierzchni Π^2 .

Stosownie do tego czy styczne główne s_p^1 i s_p^2 są rzeczywiste i różne, czy schodzą się na jednej prostej, czy też są urojone, jest punkt A punktem hiperbolicznym, parabolicznym albo eliptycznym powierzchni Π^2 .

7. Przyjmijmy najpierw, że styczne główne s_p^1 i s_p^2 powierzchni Π^2 w punkcie A są rzeczywiste i przesuniemy przez nie płaszczyzny dowolne π^1 i π^2 , to przekroje płaskie powierzchni temi płaszczyznami składają się z dwu par prostych s_p^1 i g , s_p^2 i l . Punkta przecięcia się P i Q prostych s_p^1 i g tudzież s_p^2 i l leżą na powierzchni Π^2 , a styczne główne w owych punktach schodzą się z prostymi s_p^1 i g tudzież s_p^2 i l . A zatem:

Jeżeli jeden punkt powierzchni rzędu drugiego jest hiperboliczny, natenczas wszystkie punkta tejże są hiperboliczne.

Przyjmijmy dalej: że styczne główne powierzchni Π^2 w punkcie A są urojone, to z łatwością wykażemy, że wszystkie punkta tej powierzchni są eliptyczne; gdyby bowiem na powierzchni Π^2 leżała prosta l , natenczas płaszczyzna (A, l) przecinałaby powierzchnię Π^2 podług dwu prostych l i g a prosta g przechodziłaby przez punkt A , punkt A tedy nie byłby punktem eliptycznym.

Przejdźmy od powierzchni z punktami hiperbolicznymi do powierzchni rzędu drugiego z punktami eliptycznymi stanowią powierzchnie stożkowe tegosamego rzędu, których punkta są wyłącznie paraboliczne.

8. Niech będzie dana jakakolwiek powierzchnia rzędu drugiego Π^2 i punkt P , nie leżący na tej powierzchni. Poprowadźmy przez P proste $l, l_1, l_2, \dots$ i wyznaczmy punkta prze-

cięcia się tychże A i A' , A_1 i A_1' , A_2 i A_2' ,... z powierzchnią Π^2 a nadto punkta Q , Q_1 , Q_2 ... harmonicznie sprzężone z punktem P w grupach $(PQAA')=-1$, $(PQ_1A_1A_1')=-1$, $(PQ_2A_2A_2')=-1$,... to punkta Q , Q_1 , Q_2 ... leżą na płaszczyźnie π , którą nazywamy płaszczyzną biegunową punktu P ze względu na powierzchnię Π^2 , a punkt P nazywamy biegunem płaszczyzny π ze względu na powierzchnię rzędu drugiego.

Jakoż przesunemy przez proste l i l_1 tudzież l' i l_2 płaszczyzny i wyznaczmy krzywe c_1^2 i c_2^2 , podług których te płaszczyzny przecinają się z Π , a nadto biegunowe p_1 i p_2 punktu P ze względu na te krzywe, to prosta p_1 przechodzi przez punkta Q i Q_1 , prosta zaś p_2 przechodzi przez Q_1 i Q_2 . Przesunemy następnie przez punkt P dowolną płaszczyznę π' i wyznaczmy krzywą c_x^2 , podług której ta płaszczyzna przecina się z powierzchnią Π^2 , a nadto prostą p_x , podług której płaszczyzny π^x i QQ_1Q_2 przecinają się, to biegunowa punktu P ze względu na krzywą c_x^2 schodzi się z prostą p_x ; jeżeli bowiem połączymy punkt P z punktami przecięcia się prostych p_x i p_1 tudzież p_x i p_2 , a nadto wyznaczmy punkta przecięcia się prostych PQ_x i PQ_1 z powierzchnią Π^2 , natenczas otrzymamy grupy harmoniczne (PQ_xXX')

$$\text{ i } (PQ_1YY') = -1.$$

Z tego wynika, że proste p , p_1 ,... leżące na płaszczyźnie $\pi=QQ_1Q_2$ są biegunowymi punktu P ze względu na krzywe podług których płaszczyzny (P, p) , (P, p_1) ... powierzchnię P przecinają.

Punkt P i punkta leżące na płaszczyźnie biegunowej π nazywamy punktami biegunowo albo harmonicznie sprzężonymi; łącząc bowiem dowolny punkt Q , leżący na płaszczyźnie π z punktem P i wyznaczając punkta przecięcia się Z i Z' prostej PQ z powierzchnią Π^2 otrzymamy grupę harmoniczną $(PQZZ')=-1$.

9. Niech będą dane punkt P i płaszczyzna biegunowa π tego punktu ze względu na powierzchnię rzędu drugiego Π^2 . Przesunemy przez P płaszczyznę π^1 i wyznaczmy prostą p_1 , podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się a nadto krzywą c_1^2 , podług której płaszczyzna π^1 przecina powierzchnię π^2 , to p_1 jest biegunową punktu P ze względu na krzywą c_1^2 . Proste tedy PA_1 , PB_1 , łączące biegun P z punktami A_1 i B_1 , w których biegunowa p_1 przecina się z krzywą c_1^2 są stycznymi tej krzywej w punktach A_1 i B_1 , a zarazem stycznymi powierzchni Π^2 w tychże punktach. A zatem:

Miejsce geometryczne punktów styczności stycznych, poprowadzonych z dowolnego punktu P do powierzchni rzędu drugiego, jest krzywą rzędu drugiego podług której płaszczyzna biegunowa π punktu P tę powierzchnię przecina. Albo innymi słowy:

Stożek opisany na powierzchni rzędu drugiego Π^2 z punktu P jest rzędu drugiego i styka się z powierzchnią wzdłuż krzywej, podług której płaszczyzna biegunowa π punktu P powierzchnię Π^2 przecina.

Stosownie do tego czy styczne, poprowadzone z punktu P do powierzchni Π , są rzeczywiste czy urojone, powiadamy, że punkt leży w obrębie albo poza obrębem powierzchni Π^2 .

Płaszczyzny biegunowe tedy punktów, leżących poza obrębem powierzchni przecinają tę powierzchnię podług krzywych rzeczywistych; płaszczyzny

biegunowe zaś punktów, leżących w obrębie powierzchni Π^2 , przecinają tę powierzchnię podług krzywych rzędu drugiego urojonych.

10. Niech będzie dany biegun P i płaszczyzna π , odpowiadająca biegunowo temu punktowi ze względu na powierzchnię Π^2 . Obierzmy na płaszczyźnie π dowolny punkt Q i wyznaczmy płaszczyznę biegunową tegoż ze względu na Π^2 , to ta płaszczyzna przechodzi przez punkt P ; albowiem punkta P i Q dzielą harmonicznie odcinek AA' prostej PQ , zawarty między punktami przecięcia A i A' tejże z powierzchnią Π^2 . A zatem:

Płaszczyzny biegunowe punktów, leżących na płaszczyźnie π , przechodzą przez biegun tej płaszczyzny i wzajemnie: bieguny płaszczyzn przechodzących przez punkt P leżą na płaszczyźnie biegunowej tego punktu.

Z tego wynika bezpośrednio, że płaszczyzna biegunowa punktu P , w którym trzy płaszczyzny π^1 , π^2 i π^3 przecinają się, przechodzi przez bieguny P_1 , P_2 i P_3 tych płaszczyzn i nawzajem.

11. Niech będą dane dwa bieguny P i P_1 a nadto płaszczyzny biegunowe tychże π i π^1 ze względu na powierzchnię Π^2 . Wyznaczmy płaszczyzny biegunowe punktów leżących na prostej l_1 , podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się to te płaszczyzny przechodzą przez bieguny P i P_1 , tworzą tedy pęk płaszczyzn, którego osią jest prosta $m_1 \equiv PP_1$; i wzajemnie.

Proste l_1 i m_1 nazywamy prostymi harmonicznymi albo biegunowo sprzężonymi ze względu na powierzchnię Π^2 .

Jeżeli przesuniemy przez jedną z prostych biegunowo sprzężonych n. p. przez „ m_1 ” płaszczyznę π^x i wyznaczmy punkt przecięcia się M_1 tejże z prostą l_1 , a nadto krzywą c_x^2 , podług której płaszczyzna π^x powierzchnię Π^2 przecina, natenczas punkt M_1 jest biegunem prostej m_1 ze względu na krzywą c_x^2 . Styczne poprowadzone z punktu M_1 do krzywej c_x^2 , przechodzą przez punkta R i S , w których prosta l_1 powierzchnię Π^2 przecina; punkta styczności stycznych M_1R i M_1S schodzą się z punktami R i S . Z tego wynika bezpośrednio, że płaszczyzny styczne powierzchni rzędu drugiego, przesunięte przez dowolną prostą, stykają się z nią w punktach, leżących na prostej, biegunowo z ową prostą sprzężonej.

12. Obierzmy na płaszczyźnie biegunowej π punktu P ze względu na powierzchnię Π^2 punkt P_1 i wyznaczmy płaszczyznę biegunową π^1 tego punktu, to ta płaszczyzna przechodzi przez punkt P . Wyznaczmy następnie płaszczyznę biegunową π^2 punktu P_2 , leżącego na prostej p_1 , podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się, to płaszczyzna π^2 przechodzi przez punkta P i P_1 , a prosta p_2 , podług której płaszczyzny π i π^2 przecinają się przechodzi przez punkt P_1 i przecina prostą p_2 w punkcie P_3 , który jest harmonicznie sprzężony z punktami P , P_1 i P_2 ze względu na powierzchnię Π^2 ; płaszczyzna biegunowa π^3 punktu P_3 przechodzi zatem przez punkta P , P_1 i P_2 .

Płaszczyzny biegunowe tedy punktów P , P_1 , P_2 i P_3 przechodzą odpowiednio przez punkta P_1 , P_2 i P_3 , P , P_2 i P_3 , PP_1P_3 , PP_1P_2 .

Cztery punkta, posiadające tę własność, że każdy z nich jest biegunem ze względu na powierzchnię rzędu drugiego płaszczyzny, przesuniętej przez trzy inne punkta nazywamy czwórką biegunów sprzężonych, a płaszczyzny przesunięte przez te cztery punkta, nazywamy czworoscianem płaszczyzn biegunowo sprzężonych ze względu na powierzchnię rzędu drugiego.

Krawędzie przeciwległe PP_1 i P_2P_3 czworoscianu, biegunowo sprzężonego ze względu na powierzchnię Π^2 , są prostymi biegunowo sprzężonymi; albowiem bieguny płaszczyzn, przesuniętych przez jedną z tych prostych, np. przez PP_1 leżą na prostej P_2P_3 .

Z określenia czworoscianu biegunowo sprzężonego ze względu na powierzchnię Π^2 wynika bezpośrednio, że jeden wierzchołek tegoż leży w obrębie, a trzy wierzchołki tego czworoscianu, leżą poza obrębem powierzchni Π^2 .

13. Przesuńmy przez krawędź PP_1 czworoscianu $PP_1P_2P_3$, biegunowo sprzężonego ze względu na Π^2 , płaszczyznę π i wyznaczmy punkt przecięcia się tejże X z prostą P_2P_3 , a nadto krzywą c^2 , podług której płaszczyzna π przecina powierzchnię Π^2 , to trójkąt PP_1X jest biegunowo sprzężony ze względu na krzywą c^2 . Jakoż punkt X leży na płaszczyznach biegunowych punktów P i P_1 , a płaszczyzna biegunowa punktu X przechodzi przez P i P_1 .

Opiszmy z wierzchołka P czworoscianu biegunowo sprzężonego powierzchnię stożkową na powierzchni Π^2 ; to krzywa styczności c^2 tej powierzchni leży na płaszczyźnie $P_1P_2P_3$, a punkta P_1 , P_2 i P_3 są biegunami sprzężonymi ze względu na krzywą c^2 . Krawędzie tedy PP_1 , PP_2 i PP_3 są średnicami powierzchni stożkowej (P , c^2).

14. Niech będą dane proste g i l biegunowo sprzężone ze względu na powierzchnię Π^3 ; wyznaczmy na prostej l punkta A i A_1 , B i B_1 ,... biegunowo sprzężone ze względu na krzywą c^2 , podług której dowolna płaszczyzna, przesunięta przez l przecina się z powierzchnią Π^3 , to szereg AA_1BB_1 ... jest involucyjny.

Płaszczyzny biegunowe punktów A , B ,... ze względu na Π^2 przechodzą przez A_1 , B_1 ,... i przez prostą g , a płaszczyzny biegunowe punktów A_1 , B_1 ,... przechodzą przez A , B ,... i przez prostą g ; pęk płaszczyzn tedy (g, A) (g, A_1) (g, B) (g, B_1) ... jest involucyjny. A zatem:

Pęk płaszczyzn biegunowo sprzężonych ze względu na powierzchnię rzędu drugiego jest pękiem involucyjnym; płaszczyzny podwójne tego pęku są płaszczyznami stycznymi tej powierzchni.

15. Poprowadźmy przez punkt P^∞ , leżący w nieskończoności, proste l , m ,... i wyznaczmy punkta przecięcia się tychże A i A' , B i B' ... z powierzchnią Π^2 , podzielmy następnie każdą z cięciw AA' , BB' ... na dwie równe części; to punkta dzielące Q , Q_1 ... są harmonicznie sprzężone z punktem P^∞ w grupach $(P^\infty QAA') = -1$ $(P^\infty QBB') = -1$,... leżą tedy na płaszczyźnie biegunowej π punktu P^∞ , którą nazywamy płaszczyzną biegunową diametralną powierzchni Π^2 sprzężoną z kierunkiem P^∞ .

Płaszczyzny diametralne π i π^1 , sprzężone z kierunkami P^∞ i P_1^∞ , przecinają się podług prostej d , którą nazywamy średnicą powierzchni Π^2 .

Płaszczyzny diametralne π , π^1 i π_2 sprzężone z kierunkami P^∞ , P_1^∞ i P_2^∞ przecinają się w punkcie M , który jest biegunem płaszczyzny, leżącej w nieskończoności ze względu na powierzchnię rzędu drugiego.

Punkt M nazywamy środkiem powierzchni; wszystkie proste bowiem, przechodzące przez M , przecinają się z powierzchnią Π^2 w punktach ułożonych symetrycznie względem M .

16. Przesuńmy przez prostą l^∞ , leżącą w nieskończoności pęk płaszczyzn $(\pi, \pi^1, \dots)$ i wyznaczmy krzywe c^2 , $c_1^2, \dots$ podług których elementa tego pęku przecinają się z powierzchnią Π^2 , a nadto punkta przecięcia się S , $S_1, \dots$ płaszczyzn π , $\pi^1, \dots$ ze średnicą „ d “ powierzchni, sprzężoną z l^∞ , to punkta S , $S_1, \dots$ są biegunami prostej l^∞ ze względu na krzywe c^2 , $c_1^2, \dots$ a zatem środkami tych krzywych. Średnice sprzężone krzywych $c^2c_1^2, \dots$ przechodzą parami przez punkta harmonicznie sprzężone powierzchni Π_2 , leżące na prostej l^∞ .

A zatem: Krzywe, podług których pęk płaszczyzn równoległych przecina się z powierzchnią rzędu drugiego, są podobne i podobnie położone (homotetyczne); środki tych krzywych leżą na średnicy, sprzężonej z osią pęku.

17. Wyznaczmy płaszczyznę biegunową π punktu P^∞ , leżącego w nieskończoności, ze względu na powierzchnię rzędu drugiego, a nadto prostą p^∞ , podług której ta płaszczyzna, przecina się z płaszczyzną w nieskończoności; obierzmy następnie na prostej p^∞ punkt P_1^∞ i wyznaczmy płaszczyznę diametralną π^1 , sprzężoną z tem punktem, oraz prostą p_1^∞ , podług której płaszczyzna π^1 przecina się z płaszczyzną w nieskończoności, to ta prosta przechodzi przez punkt P^∞ i przecina się z prostą p^∞ w punkcie P_2^∞ , biegunowo sprzężonym z punktami P^∞ i P_1^∞ ; płaszczyzna tedy biegunowa π^2 punktu P_2^∞ ze względu na powierzchnię Π^2 przechodzi przez punkta P^∞ i P_1^∞ .

Płaszczyzny π , π^1 , π^2 i płaszczyzna leżąca w nieskończoności, wyznaczają czworoscian, biegunowo sprzężony, ze względu na powierzchnię Π^2 ; a punkta P^∞ , P_1^∞ , P_2^∞ i środek M powierzchni wyznaczają czwórkę biegunów sprzężonych ze względu na powierzchnię rzędu drugiego.

Średnica $P^\infty M \equiv d$ leży na płaszczyznach diametralnych π^1 i π^2 , średnica $P_1^\infty M \equiv d_1$ leży na płaszczyznach π^2 i π a średnica $P_2^\infty M \equiv d_2$ leży na płaszczyznach π i π^1 .

Proste d , d_1 i d_2 nazywamy trójką, średnic sprzężonych powierzchni rzędu drugiego. Średnice d , d_1 , d_2 są odpowiednio sprzężone z płaszczyznami diametralnymi π , π^1 i π^2 .

18. Przesuńmy przez środek M powierzchni dowolną płaszczyznę π i wyznaczmy prostą p^∞ podług której ta płaszczyzna przecina się z płaszczyzną w nieskończoności, wyznaczmy następnie na prostej p^∞ szereg punktów $P_1P_2Q_1Q_2$... biegunowo sprzężonych ze względu na powierzchnię Π^2 , to proste MP_1 i MP_2 , MQ_1 i MQ_2 ... tworzą ze średnicą „ d “ sprzężoną z płaszczyzną π trójkę d , MP_1 i MP_2 ... średnic sprzężonych powierzchni.

Pomiędzy średnicami MP_1 i MP_2 ... które tworzą pęk involucyjny, znajduje się jedna para średnic sprzężonych prostopadłych; gdyby średnica d była prostopadła do swej odpowiedniej płaszczyzny diametralnej π , natenczas mielibyśmy trójkę średnic sprzężonych wzajemnie prostopadłych.

Należy tedy zbadać czy powierzchnie rzędu drugiego posiadają trójkę średnic sprzężonych wzajemnie prostopadłych.

Aby na to pytanie odpowiedzieć, poprowadźmy na płaszczyźnie diametralnej π pęk średnic $(a, b, c, \dots)$ przesuńmy następnie przez środek M powierzchni płaszczyzny diametralne α , β , $\gamma, \dots$, sprzężone z prostymi a , b , c , i płaszczyzny α' , β' , $\gamma'...$ odpowiednio prostopadłe do tych średnic. Płaszczyzny α , $\beta...$ tworzą pęk, którego osią jest średnica sprzężona z płaszczyzną π ; płaszczyzny zaś α' , $\beta'...$ tworzą pęk, którego osią jest prosta, która przechodzi przez środek M i jest prostopadła do płaszczyzny π .

Pęki $(\alpha, \beta, \dots)$ i $(\alpha', \beta', \dots)$ jako jednokreślne z pękiem średnic $(a, b, \dots)$ wyznaczają stożek rzędu drugiego Σ , posiadający tę własność, że każdej średnicy powierzchni Π^2 , leżącej na płaszczyźnie diametralnej π odpowiada jedna tworząca powierzchni Σ , sprzężona z tą średnicą i do niej prostopadła.

Poprowadźmy następnie drugą płaszczyznę diametralną π_1 , a na niej pęk średnic $a_1, b_1, \dots$, to płaszczyzny diametralne $\alpha_1, \beta_1, \dots$ biegunowo sprzężone ze średnicami $a_1, b_1, \dots$ tworzą pęk, którego osią jest średnica sprzężona z płaszczyzną π^1 ; płaszczyzny zaś $\alpha'_1, \beta'_1, \dots$ przechodzące przez środek M i prostopadłe do prostych $a_1, b_1, \dots$ tworzą pęk którego oś jest prostopadła do płaszczyzny π .

Pęki $(\alpha_1, \beta_1, \dots)$ i $(\alpha'_1, \beta'_1, \dots)$, jednokreślne z pękiem $(a_1, b_1, \dots)$, wyznaczają powierzchnię stożkową Σ_1 , posiadającą tę własność, że każdej średnicy, leżącej na płaszczyźnie π^1 odpowiada jedna tworząca powierzchni Σ_1 , sprzężona z tą średnicą i do niej prostopadła.

Średnicy d podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się odpowiada tworząca spólna obu powierzchni stożkowych Σ i Σ_1 ; te powierzchnie przecinają się tedy przynajmniej jeszcze podług jednej „ m ” albo podług trzech tworzących rzeczywistych.

Prostej „ m ” odpowiada na płaszczyźnie π pewna średnica „ n ”, a na płaszczyźnie π^1 pewna średnica „ p ”, które z prostą m są biegunowo sprzężone, a nadto do niej prostopadłe. Jeżeli tedy na płaszczyźnie diametralnej (n, p) sprzężonej z „ m ” i prostopadłej do tej prostej wyznaczymy średnice prostopadłe q i r , natenczas trzymamy trójkę m, q i r średnic sprzężonych wzajemnie prostopadłych*).

Płaszczyzny (m, q) , (q, r) i (r, m) nazywamy płaszczyznami głównymi powierzchni rzędu drugiego, te płaszczyzny są płaszczyznami symetrii prostokątnej powierzchni.

O biegunowej dwoistości.

19. Niech będzie dany układ Σ punktów, prostych i płaszczyzn, wyznaczmy elementa, które są biegunowo sprzężone ze względu na dowolną powierzchnię rzędu drugiego Π^2 z elementami układu Σ , to natenczas otrzymamy układ Σ' płaszczyzn, prostych i punktów. Punkтови A układu Σ odpowiada biegunowo płaszczyzna α' , prostym i płaszczyznom, przechodzącym przez A odpowiadają biegunowo proste i punkta układu Σ' .

Prostej łączącej dwa punkta jednego układu odpowiada w układzie drugim prosta, podług której płaszczyzny biegunowe dwu punktów owej prostej przecinają się.

Płaszczyźnie jednego układu, wyznaczonej za pomocą trzech punktów, odpowiada punkt, w którym płaszczyzny biegunowe owych trzech punktów przecinają się.

*) Za pomocą koła urojonego w nieskończoności można z łatwością udowodnić, że tylko kula i powierzchnie rzędu drugiego obrotowe posiadają nieskończenie wiele trójek osi, wszystkie zaś inne powierzchnie rzędu drugiego trójosiowe posiadają po jednej trójce osi.

20. Krzywej c układu Σ , leżącej na płaszczyźnie α , odpowiada w układzie Σ' powierzchnia stożkowa σ' , której wierzchołek jest biegunem płaszczyzny α ze względu na powierzchnię Π^2 . Płaszczyzny biegunowe punktów, leżących na krzywej c , są płaszczyznami stycznymi powierzchni σ' , a proste biegunowo sprzężone ze stycznymi, poprowadzonymi do krzywej c , są tworzącymi tej powierzchni.

Jeżeli krzywa c jest rzędu m -tego a klasy n -tej, natenczas powierzchnia stożkowa σ' jest rzędu n -tego a klasy m -tej; punktom przecięcia się bowiem prostej, leżącej na płaszczyźnie α , z krzywą c odpowiadają płaszczyzny styczne powierzchni σ' przesunięte przez prostą, która przechodzi przez wierzchołek powierzchni, a stycznymi, poprowadzonym do krzywej c z dowolnego punktu, odpowiadają tworzące powierzchni σ' , leżące na jednej płaszczyźnie.

21. Jeżeli punkt porusza się w układzie Σ , opisując krzywą wchrowatą c , natenczas płaszczyzny biegunowe punktów bezpośrednio po sobie na krzywej następujących, powłóczą w układzie Σ' powierzchnię rozwijalną Π_r .

Dwa bezpośrednio po sobie następujące punkta krzywej c wyznaczają styczną tej krzywej, a odpowiednie płaszczyzny styczne powierzchni Π_r wyznaczają tworzącą tej powierzchni Π_r . Trzy bezpośrednio po sobie następujące punkta krzywej c wyznaczają płaszczyznę ściśle styczną, a trzy bezpośrednio po sobie następujące płaszczyzny styczne powierzchni Π_r wyznaczają punkt krzywej zwrotu c' tej powierzchni.

Jeżeli krzywa c jest rzędu m -tego klasy n -tej i stopnia r -tego, natenczas przez dowolny punkt można poprowadzić do powierzchni Π_r „ m ” płaszczyzn stycznych, a więc do krzywej c' „ m ” płaszczyzn ściśle stycznych, dowolna płaszczyzna przecina się z krzywą c' w „ n ” punktach, a dowolna prosta przecina „ r ” tworzących powierzchni Π_r , czyli „ r ” stycznych krzywej „ c' ”. Krzywa c' jest tedy stopnia r -tego.

22. Niech będzie dana powierzchnia Π układu Σ , którą tworzy krzywa „ c ” poruszająca się według pewnego prawa; przyjmijmy na krzywej „ c ” punkta 1, 2, 3, ... i pomyślmy, że krzywa c wykonała ruch nieskończenie mały i zajęła położenie c_1 poczem punkta 1, 2, 3, ... zajęły położenie I., II., III... to proste 1I, 2II, 3III, ... są stycznymi, a płaszczyzny przesunięte przez te proste i przez styczne $s_1, s_2, \dots$ poprowadzone do krzywej „ c ” punktach 1, 2, ... są płaszczyznami stycznymi powierzchni Π .

Krzywej „ c ” odpowiada biegunowo w układzie Σ' powierzchnia rozwijalna Π_r ; punktom 1, 2, ... odpowiadają płaszczyzny styczne $\pi^1, \pi^2, \dots$ a stycznymi $s_1, s_2, \dots$ odpowiadają tworzące tej powierzchni, płaszczyznom zaś stycznymi, przesuniętym przez $s_1, s_2, \dots$ odpowiadają punkta krzywej przenikania się powierzchni Π_r z powierzchnią rozwijalną Π_{r1} , odpowiadającą biegunowo krzywej „ c_1 ”.

23. Na dowolnej powierzchni Π niech będą dane dwie krzywe c i c_1 , przecinające się w punkcie A ; styczne, poprowadzone do tych krzywych w punkcie A , leżą na płaszczyźnie stycznej powierzchni.

Jeżeli powierzchnię Π uważamy za utwór układu Σ , natenczas krzywymi c i c_1 odpowiadają w układzie Σ' dwie powierzchnie rozwijalne Π_r i Π_{r1} mające jedną płaszczyznę styczną α' spólną. Płaszczyzna α' odpowiada biegunowo punktowi A .

Stycznym, poprowadzonym do krzywych c i c_1 w punkcie A , odpowiadają tworzące powierzchni Π_r i Π_{r_1} , które się przecinają w punkcie A' powierzchni Π' , odpowiadającym biegunowo płaszczyźnie stycznej α powierzchni Π poprowadzonej w punkcie A .

Krzywej $c_2 \dots$ leżącej na powierzchni i przecinającej krzywe c i c_1 w punktach B i $C, \dots$ odpowiada w układzie Σ' powierzchnia rozwijalna $\Pi_{r_2} \dots$ posiadająca z powierzchniami Π_r i Π_{r_1} płaszczyzny styczne β' względnie γ' wspólne. Powierzchnia Π' jest tedy obwiednią powierzchni $\Pi_{r_2} \dots$.

Jeżeli prosta l przecina się z powierzchnią Π w „ m ” punktach, natenczas przez prostą l' biegunowo sprzężoną z l , przechodzi „ m ” płaszczyzn stycznych powierzchni Π' . A zatem:

Rząd powierzchni Π jest równy klasie powierzchni Π' biegunowo z nią związanej.

Jeżeli stożek σ , opisany na powierzchni Π jest klasy n -tej, natenczas ilość punktów przecięcia się dowolnej prostej z powierzchnią Π' jest równa „ n ”. Rząd tedy powierzchni Π' jest równy klasie powierzchni Π .

Powierzchniom tedy rzędu drugiego i klasy drugiej odpowiadają biegunowo powierzchnie klasy drugiej i rzędu drugiego.

24. Niech będzie dana powierzchnia rzędu drugiego Π^2 , punkt P na niej leżący, a nadto płaszczyzna styczna π , poprowadzona w punkcie P do tej powierzchni.

Prosta s , przechodząca przez punkt P na płaszczyźnie π , jest styczną, poprowadzoną do powierzchni Π^2 w punkcie P . Biegunowa s' sprzężona z prostą s jest styczną powierzchni w punkcie P . Styczne tedy s i s' , s_1 i $s_1', \dots$ poprowadzone w punkcie P do Π^2 , tworzą pęk inwolucyjny.

Promienie podwójne d_1 i d_2 pęku inwolucyjnego $s, s', s_1, s_1', \dots$ które nazywamy stycznymi głównymi powierzchni w punkcie P , mają z powierzchnią po trzy bezpośrednio po sobie następujące punkta wspólne.

Jeżeli styczne główne są rzeczywiste i różne, natenczas punkt P jest hiperboliczny, jeżeli prosta d_1 i d_2 schodzą się na jednej prostej d , natenczas punkt P jest paraboliczny, jeżeli wreszcie d_1 i d_2 są urojone, natenczas P jest punktem parabolicznym.

25. Obierzmy na powierzchni dowolnej Π punkt P i punkta Q_1, Q_2 i Q_3 , przesunijmy przez punkt P i przez Q_1 i Q_2, Q_1 i Q_3, Q_2, Q_3 płaszczyzny π^1, π^2 i π^3 ; wyznaczmy następnie krzywe c_1, c_2 i c_3 , podług których te płaszczyzny przecinają się z powierzchnią Π , a nadto przesunijmy przez punkta P, Q_1 i Q_2, P, Q_1 i Q_3, P, Q_2 i Q_3 przekroje stożkowe, ściśle styczne do krzywych c_1, c_2 i c_3 w punkcie P .

Przez krzywe c_1^2, c_2^2 i c_3^2 przechodzi powierzchnia ściśle styczna Π^2 rzędu drugiego z powierzchnią Π w punkcie P .

Powierzchni rzędu drugiego ściśle stycznych z powierzchnią Π jest nieskończenie wiele.

Punkt P jest punktem potrójnym powierzchni Π , płaszczyzny $\Pi^2 \dots$ tedy przesunięte przez punkt Π , przecinają się z powierzchniami Π i $\Pi^2 \dots$ podług krzywych c_n i c_n^2 , ściśle stycznych w punkcie P .

Wiadomo, że przekroje powierzchni rzędu drugiego płaszczyznami równoległymi są podobne i podobnie położone.

Jeżeli tedy przetniemy powierzchnię Π^2 , ściśle styczną z dowolną powierzchnią Π w punkcie P , płaszczyznami π_p i π_i , równoległymi do płaszczyzny stycznej π , poprowadzonej do powierzchni Π i Π^2 , to natenczas otrzymamy dwie krzywe rzędu drugiego c_p^2 i c_i^2 , podobne i podobnie położone.

Płaszczyzna π_i leżąca nieskończenie blisko płaszczyzny π , przecina się z powierzchnią Π i z powierzchnią Π^2 podług krzywej nieskończenie małej c_i^2 , której średnice sprzężone i asymptoty są równoległe do średnic sprzężonych i do asymptot krzywej c_p^2 , względnie do stycznych biegunowo sprzężonych i do stycznych głównych powierzchni Π , leżących na płaszczyźnie stycznej π .

Krzywą c_i^2 nazywamy krzywą wskazującą (indicatrix) powierzchni Π .

Krzywa wskazująca jest hiperbolą, parabolą lub elipsą, stosownie do tego czy punkt P jest hiperboliczny, paraboliczny lub eliptyczny. Środek krzywej c_i^2 leży na prostej, łączącej punkt P ze środkiem krzywej c_p^2 .

27. Płaszczyzny, przesunięte przez styczne główne d_1 i d_2 przecinają się z powierzchnią Π podług krzywych, których punkt P jest punktem przecięcia. Przesunijmy punkt P na prostej d_1 o ilość nieskończenie małą PP' , przesunijmy następnie punkt P' na odpowiedniej stycznej głównej d_1' o ilość nieskończenie małą $P'P''$ i t. d., i t. d., to natenczas otrzymamy krzywą asymptotyczną c_a powierzchni Π — asymptotyczną, albowiem styczne $PP', P'P'', \dots$ poprowadzone do krzywej c_a , są równoległe do asymptot krzywych wskazujących w punktach $P, P', \dots$

Płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni Π w punktach $P, P', \dots$ są płaszczyznami ściśle stycznymi krzywej c_a , każda z tych płaszczyzn bowiem przechodzi przez trzy bezpośrednio po sobie następujące punkta krzywej asymptotycznej.

Na powierzchniach, których punkta są hiperboliczne, leżą dwa układy krzywych asymptotycznych rzeczywistych, na powierzchniach, o punktach parabolicznych, leży jeden układ krzywych asymptotycznych, na powierzchniach zaś, o punktach eliptycznych, krzywe asymptotyczne są urojone.

28. Krzywe geodezyjne t. j. krzywe, które wskazują najkrótszą drogę między dwoma punktami leżącymi na powierzchni, posiadają, jak to przy powierzchniach rozwijalnych wykazaliśmy, tę własność, że płaszczyzny ściśle styczne tych krzywych są prostopadłe do płaszczyzn stycznych powierzchni, poprowadzonych w odpowiednich punktach.

29. Wyznaczmy osi a i b krzywej wskazującej c_i^2 powierzchni Π w punkcie P i przesunijmy ten punkt na osi a o ilość nieskończenie małą PP' , przesunijmy następnie punkt P' na odpowiedniej osi a' o ilość nieskończenie małą $P'P''$ i t. d., i t. d., to miejsce geometryczne punktów $P, P', P'', \dots$ jest krzywą krzywiznową c_k powierzchni Π .

Na powierzchniach, o punktach hiperbolicznych i eliptycznych, znajdują się dwa układy krzywych krzywiznowych.

Normalne powierzchni, poprowadzone w punktach krzywej krzywiznowej, leżą na płaszczyźnie albo tworzą powierzchnię rozwijalną, albowiem normalne powierzchni, poprowadzone w wierzchołkach krzywych wskazujących powierzchni Π przecinają się.

O powierzchniach wichrowatych rzędu drugiego.

1. Powierzchnie prostokreślne, których dwie bezpośrednio po sobie następujące tworzące nie przecinają się, ani nie są równoległe, nazywamy powierzchniami wichrowatymi.

Prawo ruchu tworzącej „ l ” powierzchni wichrowatej określamy za pomocą trzech krzywych c_1 , c_2 i c_3 , po których ta prosta się ślizga. Krzywe c_1 , c_2 i c_3 nazywamy kierownicami, a proste l , l_1 ..., przecinające się z kierownicami, nazywamy tworzącymi powierzchni.

Tworzące powierzchni wichrowatej, określonej kierownicami c_1 , c_2 i c_3 otrzymamy przesuwając przez punkta A_1 , A_2 ..., leżące na krzywej c_1 , stożki A_1 (c_2 i A_3)... przez punkta B_1 , B_2 ..., leżące na c_2 , stożki (B_1 , c_1) i (B_1 , c_3)..., przez punkta C_1 , C_2 ... leżące na krzywej c_3 stożki (C_1 , c_1) i (C_1 , c_2) i wyznaczając tworzące przenikania się tychże.

Z konstrukcji tej widoczna, że przez punkta leżące na krzywej c_1 przechodzi $m_2 \cdot m_3$, przez punkta krzywej c_2 przechodzi $m_1 \cdot m_3$, a przez punkta leżące na krzywej c_3 przechodzi $m_1 \cdot m_2$ tworzących powierzchni wichrowatej, jeżeli m_1 , m_2 i m_3 oznaczają rzędy krzywych c_1 , c_2 i c_3 .

Powierzchnię stożkową (W , c^∞), której wierzchołek jest punktem dowolnym, a której tworzące są równoległe do tworzących powierzchni, nazywamy stożkiem kierowniczym powierzchni. Płaszczyzna w nieskończoności przecina się z powierzchnią wichrowatą i ze stożkiem kierowniczym tejże podług tej samej krzywej.

Dwie krzywe tedy c_1 i c_2 , leżące w nieskończoności i krzywa c^∞ w nieskończoności, wyznaczają powierzchnię wichrowatą.

2. Stosownie do rodzaju kierownic dzielimy powierzchnie wichrowate na powierzchnie wyznaczone a) trzema krzywymi, b) dwiema krzywymi i jedną kierownicą prostą, c) jedną kierownicą krzywą i dwiema prostymi, d) trzema prostymi wichrowatymi.

Powierzchnia, wyznaczona krzywą i dwiema prostymi m i n^∞ , z których jedna leży w nieskończoności, nazywa się konoidą. Jeżeli kierownica „ m ”, leżąca w skończoności jest prostopadła do płaszczyzny, na której n^∞ leży, natenczas powstaje konoida prosta.

Powierzchnię, wyznaczoną trzema kierownicami prostymi wichrowatymi, nazywamy hiperboloidą wichrowatą albo hiperboloidą o jednej powłoce.

Jeżeli prosta ślizga się po trzech prostych wichrowatych, z których jedna leży w nieskończoności, natenczas powstaje tak zwana paraboloida hiperboliczna; ta powierzchnia jest tedy najprostszą konoidą.

Niech będą dane dwie bezpośrednio po sobie następujące tworzące g i g_1 powierzchni wichrowatej Π^w a nadto punkt A , leżący na prostej g ; popro-

wadźmy przez A dowolną płaszczyznę π i wyznaczmy punkt przecięcia się A_1 tejże z prostą g_1 , to prosta „ s ”, łącząca punkta A i A_1 jest styczną poprowadzoną w punkcie A do krzywej c , podług której płaszczyzna π przecina się z powierzchnią Π^w ; a płaszczyzna (g , s) jest płaszczyzną styczną, poprowadzoną do tej powierzchni w punkcie A , prosta g jest bowiem styczną poprowadzoną do samej siebie we wszystkich punktach.

Płaszczyzna (g , s) styka się z powierzchnią Π^w tylko w punkcie A , jeżeliby bowiem ta płaszczyzna była styczną poprowadzoną do powierzchni w drugim punkcie B , leżącym na tworzącej g , natenczas płaszczyzna (g , s) przecinałaby się z dowolną płaszczyzną π^1 , przesuniętą przez punkt B podług stycznej, poprowadzonej do krzywej przekroju c_1 powierzchni Π^w płaszczyzną π^1 ; tworzące tedy g i g_1 leżałyby na jednej płaszczyźnie co sprzeciwia się założeniu.

Dowolna płaszczyzna π , przesunięta przez tworzącą g powierzchni wichrowatej, jest płaszczyzną styczną tejże powierzchni w punkcie Y , w którym prosta g przecina się z krzywą przekroju powierzchni Π^w płaszczyzną π .

A zatem: Płaszczyzny styczne powierzchni wichrowatej przechodzą przez tworzące tejże.

Elementa pęku płaszczyzn, którego osią jest tworząca powierzchni wichrowatej, są płaszczyznami stycznymi tej powierzchni

3. Płaszczyzny styczne, poprowadzone w punktach, leżących w nieskończoności na powierzchni, nazywamy płaszczyznami asymptotycznymi.

Płaszczyzna asymptotyczna powierzchni wichrowatej Π^w , przesunięta przez prostą g , przechodzi przez styczną s^∞ poprowadzoną w punkcie, leżącym w nieskończoności na tworzącej g , do krzywej c^∞ , podług której płaszczyzna w nieskończoności przecina się z powierzchnią Π^w .

Płaszczyzna (g , s^∞) jest równoległa do płaszczyzny stycznej (W , s^∞) stożka kierowniczego (W , c^∞) powierzchni, poprowadzonej wzdłuż tworzącej, równoległej do g , te płaszczyzny przechodzą bowiem przez tę samą styczną s^∞ krzywej c^∞ .

A zatem: Płaszczyzny asymptotyczne powierzchni wichrowatej, przesunięte przez poszczególne tworzące, są równoległe do płaszczyzn stycznych stożka kierowniczego, poprowadzonych wzdłuż tworzących, równoległych do odpowiednich tworzących powierzchni Π^w .

4. Płaszczyzna, przesunięta przez tworzącą g powierzchni wichrowatej Π^w prostopadle do płaszczyzny asymptotycznej, przechodzącej przez ową tworzącą, jest płaszczyzną styczną powierzchni w punkcie, który nazywamy punktem środkowym. Miejsce geometryczne punktów środkowych nazywamy krzywą z wężenia albo krzywą strykcyjną powierzchni wichrowatej.

5. Wiadomo, że trzy proste wichrowate g_1 , g_2 , g_3 , leżące w skończoności wyznaczają hiperboloidę o jednej powłoce.

Jeżeli przez punkta A , B , C ... leżące na prostej g_1 , i przez proste g_2 i g_3 przesuniemy płaszczyzny (g_2A) i (g_3A), (g_2B) i (g_3B)... to krawędzie przecięcia się tych płaszczyzn l_1 , l_2 ... przecinają wszystkie kierownice hiperboloidy, są tedy tworzącymi tej powierzchni. Pęki płaszczyzn g_2 (A , B ,...) i g_3 (A , B ,...)

są jednokreślne, płaszczyzny bowiem odpowiednie tych pęków przechodzą przez elementa $A, B, C, \dots$ szeregu punktów, który leży na prostej g_1 .

Można jednak z łatwością udowodnić, że dwa dowolne pęki płaszczyzn $(\pi_1, \pi_2, \dots)$ i $(\pi'_1, \pi'_2, \dots)$, jednokreślne, o osiach wchrowatych g_2 i g_3 , wyznaczają hiperboloidę wchrowatą.

Jakoż wyznaczmy proste l_1, l_2 i l_3 , podług których przecinają się płaszczyzny π_1 i π'_1, π_2 i π'_2, π_3 i π'_3 , a nadto prostą „ g “, która przecina się z prostymi l_1, l_2 i l_3 w punktach A_1, B_1 i C_1 .

Prosta g przecina się z pękami $(\pi_1, \dots)$ i $(\pi'_1, \dots)$ podług dwu szeregów jednokreślnych, które mają trzy punkta podwójne A_1, B_1, C_1 , te szeregi zatem nakrywają się; płaszczyzny tedy odpowiednie pękom $(\pi_1, \dots)$ i $(\pi'_1, \dots)$ przechodzą przez punkta, leżące na prostej g . Prosta g przecina się przeto ze wszystkimi tworzącymi $l_1, l_2, \dots$ hiperboloidy, leży tedy w całej rozciągłości na tej powierzchni.

Położenie prostej „ g “ ograniczone jest jedynie warunkiem, że ma przecinać trzy proste wchrowate; takich prostych jest jednak nieskończenie wiele; na hiperboloidzie tedy o jednej powłoce leżą tedy dwa układy prostych $g, \dots$ i $l, \dots$, posiadające tę własność, że proste tego samego układu są wchrowate, proste zaś jednego układu przecinają się ze wszystkimi prostymi układu drugiego.

6. Tworzące $l_1, l_2, \dots$ hiperboloidy o jednej powłoce, wyznaczonej za pomocą trzech prostych wchrowatych g_1, g_2 i g_3 , można także wyznaczyć, przesuwając przez prostą g_1 pęk płaszczyzn $(\pi, \pi_1, \dots)$ i łącząc punkta przecięcia się A_2 i A_3, B_2 i $B_3, \dots$ prostych g_2 i g_3 z płaszczyznami tego pęku.

Szeregi $A_2, B_2, \dots$ i $A_3, B_3, \dots$ leżące na prostych g_2 i g_3 są jednokreślne, tworzące tedy $l_1, l_2, \dots$ hiperboloidy łączą punkta odpowiednie dwu szeregów jednokreślnych, które otrzymamy z przekroju dwu prostych wchrowatych dowolnym pękiem płaszczyzn.

Z łatwością jednak można uzasadnić, że proste łączące elementa odpowiednie dwu szeregów jednokreślnych, o podstawach wchrowatych, są tworzącymi hiperboloidy.

Jakoż niech będą dane dwa szeregi jednokreślne $(A_2, B_2, C_2, \dots)$ i $(A_3, B_3, C_3, \dots)$ leżące na prostych wchrowatych g_2 i g_3 , połączmy punkta A_2 i A_3, B_2 i B_3, C_2 i C_3 prostymi i wyznaczmy taką prostą g_1 , któraby te proste przecinała, przesunmy następnie przez g_1 i przez punkta $(A_2, B_2, C_2, \dots)$ a nadto przez g_1 i przez punkta $(A_3, B_3, C_3, \dots)$ płaszczyzny, to natenczas otrzymamy dwa pęki jednokreślne o trzech płaszczyznach podwójnych, te pęki zatem nakrywają się; na każdym elemencie tego pęku płaszczyzn leżą dwa odpowiednie punkta A_2 i A_3, B_2 i $B_3, \dots$, proste zatem $A_2A_3, B_2B_3, \dots$ są tworzącymi hiperboloidy.

Prosta g_1 czyni jedynie zadość warunkowi, że przecina się z prostymi wchrowatymi l_1, l_2 i l_3 , takich prostych jest jednak nieskończenie wiele, a każda z nich jest osią pęku płaszczyzn g ($l_1, l_2, \dots$) przesuniętego przez proste $l_1, l_2, \dots$.

A zatem: Tworzące jednego układu hiperboloidy przecinają się z tworzącymi drugiego układu podług szeregów jednokreślnych.

Sposoby tworzenia hiperboloidy, podane pod 5. i 6. są z sobą biegunowo związane.

7. Przetnijmy pęki płaszczyzn g_2 (...) i g_3 (...), tworzące hiperboloidę dowolną płaszczyzną π , to natenczas otrzymamy dwa pęki promieni W_2 (...) i W_3 (...) jednokreślne, wyznaczające krzywą rzędu drugiego, która jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się tworzących hiperboloidy z płaszczyzną π .

Hiperboloida o jednej powłoce jest tedy powierzchnią rzędu drugiego.

Płaszczyzna π' , przesunięta przez tworzącą g przecina się z hiperboloidą podług krzywej rzędu drugiego, która się składa z dwu tworzących g i l .

8. Przez punkt A , leżący na hiperboloidzie przechodzą dwie tworzące g i l , należące do różnych układów, każda z nich jest styczną, poprowadzoną do hiperboloidy w punkcie A . Wszystkie tedy płaszczyzny, przesunięte przez tworzące hiperboloidy, należące do jednego układu, są płaszczyznami stycznymi tej powierzchni w punktach, w których tworzące drugiego układu owe tworzące przecinają.

Jeżeli przez tworzącą g przesuniemy pęk płaszczyzn $(\pi, \pi^1, \pi^2, \dots)$, natenczas te płaszczyzny przecinają się z hiperboloidą podług tworzących $l, l_1, l_2, \dots$ a punkta przecięcia się $A, A_1, A_2, \dots$ tych prostych z tworzącą g tworzą szereg jednokreślny z pękiem $(\pi, \pi^1, \pi^2, \dots)$ art. 6.

A zatem: Pęk płaszczyzn, przesuniętych przez tworzącą hiperboloidy, jest jednokreślny z szeregiem odpowiednich punktów styczności tych płaszczyzn.

Płaszczyzna asymptotyczna hiperboloidy przechodzi przez dwie tworzące obu układów, które są równoległe.

Aby tedy otrzymać płaszczyznę asymptotyczną hiperboloidy, wyznaczonej za pomocą kierownic g_1, g_2 i g_3 , która przechodzi przez tworzącą g_1 , przesunmy przez g_2 i g_3 płaszczyzny π^1 i π^2 , równoległe do g_1 i wyznaczmy prostą l_1 , podług której te płaszczyzny przecinają się, to płaszczyzna przesunięta przez proste równoległe g_1 i l_1 jest płaszczyzną asymptotyczną.

9. Niech będą dane dwa szeregi jednokreślne $A, B, C, \dots$ i $A_1, B_1, C_1, \dots$ leżące na prostych wchrowatych g i g_1 , to proste $l, l_1, \dots$ łączące odpowiednie punkta tych szeregów są tworzącymi hiperboloidy.

Poprowadźmy przez dowolny punkt W i przez punkta $A, B, \dots$ i $A_1, B_1, \dots$ proste, to natenczas otrzymamy dwa pęki jednokreślne $W(A, B, C, \dots)$ i $W(A_1, B_1, C_1, \dots)$ wyznaczające powierzchnię stożkową rzędu drugiego o płaszczyznach stycznych $(Wg), (Wg_1), WAA_1, WBB_1, \dots$. Wymienione atoli płaszczyzny, są płaszczyznami stycznymi hiperboloidy. A zatem:

Stożek, opisany na hiperboloidzie, jest rzędu drugiego.

Wyznaczmy punkta styczności M, N i P trzech płaszczyzn stycznych hiperboloidy, przechodzących przez punkt W , i przesunmy przez te punkta płaszczyznę π , to ta płaszczyzna przetnie hiperboloidę podług krzywej c_1^2 , a stożek opisany z punktu W na tej powierzchni podług krzywej c_2^2 . Te dwie krzywe mają punkta M, N i P a nadto styczne, poprowadzone w tych punktach wspólne, albowiem proste s_1, s_2 i s_3 , podług których płaszczyzna π przecina się z płaszczyznami stycznymi, poprowadzonymi do hiperboloidy w punktach M, N i P , są stycznymi krzywych c_1^2 i c_2^2 ; te krzywe zatem nakrywają się.

Powierzchnia stożkowa opisana na hiperboloidzie styka się z tą powierzchnią podług krzywej rzędu drugiego.

10. Krzywa rzędu drugiego c^2 i dwie proste wchrowate g_1 i g_2 które się przecinają z tą krzywą w punktach A i B wyznaczają hiperboloidę o jednej powłoce; płaszczyzny bowiem przesunięte przez proste g_1 i g_2 i przez punkta C , D ,... leżące na krzywej c^2 , tworzą dwa pęki jednokreślne g_1 (C , D ,...) i g_2 (C , D ,...), których odpowiednie elementa przecinają się podług tworzących układu „1” hiperboloidy.

Krzywa rzędu drugiego c^2_∞ , leżąca w nieskończoności, którą wyznacza stożek rzędu drugiego (W , c^2), a nadto dwie proste wchrowate g_1 i g_2 równoległe do dwu tworzących powierzchni (W , c^2) wyznaczają hiperboloidę o jednej powłoce; jeżeli bowiem przez proste g_1 i g_2 przesuniemy płaszczyzny π_1 i π_2 , π'_1 i π'_2 , π''_1 i π''_2 ,... równoległe do tworzących WC , WD ,... powierzchni stożkowej, natenczas otrzymamy dwa pęki jednokreślne płaszczyzn (π_1 , π'_1 , π''_1 ,...) i (π_2 , π'_2 , π''_2 ,...) które tworzą hiperboloidę o jednej powłoce.

11. Wyznamy tworzące l_1 , l_2 i l_3 odpowiednio równoległe do kierownic g_1 , g_2 i g_3 hiperboloidy, to płaszczyzny (g_1 , l_1) i (g_2 , l_2) i (g_3 , l_3) są płaszczyznami asymptotycznymi tej powierzchni, a zarazem płaszczyznami przekątnymi równoległościanu, ograniczonego ścianami (g_1 , l_2), (g_1 , l_3), (g_2 , l_1), (g_2 , l_3), (g_3 , l_1), (g_3 , l_2).

Płaszczyzny przekątne tego równoległościanu przecinają się w punkcie M , który nazywamy środkiem (rys. 64.).

Poprowadźmy tworzącą l_4 hiperboloidy, która przecina się z tworzącymi hiperboloidy g_1 , g_2 i g_3 w punktach A_1 , B_1 i C_1 i połączmy te punkta ze środkiem M równoległościanu, to proste MA_1 , MB_1 i MC_1 przecinają się z tworzącymi l_1 , l_2 i l_3 w punktach A_2 , B_2 i C_2 , symetrycznych z punktami A_1 , B_1 i C_1 ze względu na środek M , te punkta leżą tedy na prostej g_4 , która jest tworzącą hiperboloidy. Płaszczyzna (g_4 , l_4) jest płaszczyzną asymptotyczną powierzchni.

Jeżeli tedy połączmy dowolny punkt P_1 , leżący na hiperboloidzie z punktem M , i wyznaczmy punkt P_2 , symetryczny z P_1 , ze względu na środek M , natenczas punkt P_2 leżeć będzie na hiperboloidzie.

Płaszczyzny asymptotyczne (g_1 , l_1), (g_2 , l_2),... przechodzą przez środek M hiperboloidy i powłóczą stożek rzędu drugiego, który przechodzi przez krzywą leżącą na hiperboloidzie w nieskończoności.

Ten stożek nazywamy stożkiem asymptotycznym hiperboloidy o jednej powłoce.

Tworzące stożka asymptotycznego są równoległe do tworzących równoległych hiperboloidy; płaszczyzna asymptotyczna bowiem (g_1 , l_1) hiperboloidy styka się z tą powierzchnią w punkcie przecięcia się prostych równoległych g_1 i l_1 , tworząca styczności tedy tej płaszczyzny ze stożkiem asymptotycznym jest do prostych g_1 i l_1 równoległa.

12. Przetnijmy hiperboloidę o jednej powłoce i stożek asymptotyczny tej powierzchni płaszczyzną π , to natenczas otrzymamy dwie krzywe rzędu drugiego c_h^2 i c_s^2 . Krzywą c_h^2 można uważać za miejsce geometryczne punktów P_1 i Q_1 , P_2 i Q_2 ,... w których tworzące równoległe g_1 i l_1 , g_2 i l_2 ,... płaszczyznę π przecinają; krzywa zaś c_s^2 jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się T_1 , T_2 i płaszczyzny π z tworzącymi l_1 , l_2 ,... stożka równoległymi do tworzących g_1 i l_1 , g_2 i l_2 ,... hiperboloidy.

Ślady $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$,... płaszczyzn asymptotycznych (g_1 , l_1), (g_2 , l_2),... są stycznymi, poprowadzonymi do krzywej c_s^2 , a punkta styczności tychże T_1 , T_2 ,... dzielą na dwie równe części odcinki $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, krzywe tedy c_h^2 i c_s^2 są spółśrodkowe, podobne i podobnie położone. A zatem:

Dowolna płaszczyzna przecina hiperboloidę o jednej powłoce i jej stożek asymptotyczny podług dwu krzywych spółśrodkowych podobnych i podobnie położonych.

Z tego twierdzenia wynika tedy bezpośrednio:

a) Płaszczyzna π przecina się z hiperboloidą o jednej powłoce podług hiperboli, paraboli lub elipsy, stosownie do tego czy płaszczyzna π^1 , poprowadzona przez środek M powierzchni równoległe do płaszczyzny π , przecina się ze stożkiem asymptotycznym podług dwu tworzących rzeczywistych, jest płaszczyzną styczną tego stożka, albo nie posiada ze stożkiem asymptotycznym żadnych tworzących rzeczywistych wspólnych.

b) Płaszczyzny równoległe przecinają się z hiperboloidą podług krzywych podobnych, których środki leżą na średnicy stożka asymptotycznego, sprzężonej z płaszczyzną, poprowadzoną przez środek hiperboloidy, równoległe do płaszczyzn przecinających.

c) Płaszczyzna, przesunięta przez środek hiperboloidy przecina się z tą powierzchnią podług krzywej rzędu drugiego, której środek schodzi się ze środkiem powierzchni.

13. Osi powierzchni stożkowej asymptotycznej a , b i c są osiami hiperboloidy o jednej powłoce.

Płaszczyzny prostopadłe do osi a , która leży w obrębie powierzchni stożkowej asymptotycznej, przecinają się z hiperboloidą podług elips.

Przekrój hiperboloidy płaszczyzną przesuniętą przez osi b i c , nazywamy elipsą szyjną. Przekroje hiperboloidy płaszczyznami przesuniętymi przez oś a są hiperbolami, których wierzchołki leżą na elipsie szyjnej.

Oś a jest urojona nie przecina bowiem powierzchni w punktach rzeczywistych, osi zaś b i c są rzeczywiste, albowiem przecinają się z hiperboloidą w punktach, leżących na elipsie szyjnej.

14. Płaszczyzna biegunowa π punktu W_∞ leżącego w nieskończoności, ze względu na hiperboloidę o jednej powłoce, przecina się z tą powierzchnią podług krzywej, której środek schodzi się ze środkiem powierzchni.

Rzut równoległy tedy hiperboloidy jest krzywą rzędu drugiego, której środek schodzi się z rzutem środka M powierzchni.

Płaszczyzna biegunowa π^1 punktu W_1 , leżącego na prostej MW_∞ , jest równoległa do płaszczyzny π i przecina się z hiperboloidą podług krzywej rzędu drugiego, której środek leży na prostej MW_1 . Przekroje tedy hiperboloidy i stożka opisanego na tej powierzchni płaszczyznami są krzywymi, spółśrodkowymi, podobnymi i podobnie położonymi.

15. a) Czworobok wchrowaty g_1 , g_2 , l_1 , l_2 , którego boki l_1 i l_2 przecinają się z g_1 i g_2 a nadto punkt „1” wyznaczają hiperboloidę o jednej powłoce, albowiem płaszczyzny (g_1 , 1) i (g_2 , 1), (l_1 , 1) i (l_2 , 1) przecinają się podług dwu tworzących l_3 i g_3 tej powierzchni.

b) Dwie proste wchrowate g_1 i g_2 , a nadto trzy punkta 1, 2 i 3 wyznaczają hiperboloidę o jednej powłoce, płaszczyzny bowiem (g_1 , 1) i (g_2 , 1), (g_1 , 2) i (g_2 , 2), (g_1 , 3) i (g_2 , 3) przecinają się podług trzech tworzących l_1 , l_2 i l_3 tej powierzchni.

c) Dwie proste przecinające się g_1 i l_1 , a nadto cztery punkta 1, 2, 3 i 4 wyznaczają hiperboloidę, jeżeli bowiem przez 1, 2 i 3 przesuniemy płaszczyznę, to punkta przecięcia się G_1 i L_1 prostych g_1 i l_1 z tą płaszczyzną i punkta 1, 2, 3 wyznaczają przekrój stożkowy c^2 , a płaszczyzny $(g_1, 4)$ i $(l_1, 4)$ przecinają się z krzywą c^2 w punktach, wyznaczających odpowiednio tworzące l_2 i g_2 hiperboloidy, które przechodzą przez punkt „4” i przecinają się odpowiednio z tworzącą g_1 i l_1 .

Pęki tedy jednokreślne $(g_1, 1)$, $(g_1, 2)$, $(g_1, 3)$ i $(g_2, 1)$, $(g_2, 2)$, $(g_2, 3)$ wyznaczają hiperboloidę.

16. Jeżeli przez dwie proste wchrowate g_1 i g_2 przesuniemy dwa pęki płaszczyzn $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$ i $\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3, \dots$, których elementa odpowiednie π_1 i $\pi'_1, \dots$ są wzajemnie prostopadłe, natenczas miejsce geometryczne prostych $l_1, l_2, \dots$, podług których te elementa przecinają się, jest powierzchnią, którą nazywamy hiperboloidą prostokątną.

Płaszczyzna π , prostopadła do tworzącej g_1 , przecina owe pęki płaszczyzn podług dwu pęków promieni, których wierzchołki schodzą się z punktami przecięcia się prostych g_1 i g_2 z płaszczyzną π , a których promienie są wzajemnie prostopadłe; jeżeli bowiem dwie płaszczyzny prostopadłe π_1 i π'_1 przemienimy płaszczyzną π , prostopadłą do π_1 , natenczas proste (π, π_1) i (π, π'_1) są prostopadłe.

Przekroje tedy hiperboloidy prostokątnej płaszczyznami prostopadłymi do osi pęków tworzących tę powierzchnię są kołami. Albo innemi słowy: Miejsce geometryczne kół leżących na płaszczyznach prostopadłych do prostej g_1 , których średnicami są odcinki, zawarte między punktami przecięcia się prostej g_1 z temi płaszczyznami i punktami przecięcia się tychże z prostą g_2 , wchrowatą z g_1 , jest hiperboloidą prostokątną.

Stożek asymptotyczny Σ hiperboloidy prostokątnej jest również stożkiem prostokątnym; jeżeli bowiem przez dowolny punkt W przesuniemy płaszczyznę, równoległą do płaszczyzn pęków g_1 ($\pi_1, \pi_2, \dots$) i g_2 ($\pi'_1, \pi'_2, \dots$), to odpowiednie elementa tychże przecinają się podług prostych równoległych do tworzących $l_1, l_2, \dots$ hiperboloidy, płaszczyzny tedy prostopadłe do g_1 i g_2 przecinają się z powierzchnią Σ podług kół.

17. Przesunijmy przez oś urojoną „ a ” i przez oś rzeczywistą „ b ” hiperboloidy Π_h płaszczyznę diametralną (a, b) i uważajmy ją za płaszczyznę powinowactwa, którego środek leży w nieskończoności na osi rzeczywistej „ c ”, a której cecha jest równa stosunkowi $b:c$.

Przetnijmy powierzchnię Π_h tudzież stożek asymptotyczny tejże Σ_h płaszczyznami, prostopadłymi do osi „ a ”, to przekrojom eliptycznym tych powierzchni odpowiadają w układzie powinowatym, powyżej określonym, koła.

Przez każdy punkt A hiperboloidy Π_h przechodzą dwie tworzące g i l , którym w układzie powinowatym odpowiadają proste g' i l' , przechodzące przez odpowiedni punkt A' . Tworzącym zaś stożka asymptotycznego Σ_h równoległym do tworzących $g, l, \dots$ odpowiadają powinowate proste, które przechodzą przez środek M hiperboloidy Π_h i są równoległe do prostych g' i l' .

Hiperboloidę tedy o jednej powłoce Π_h zmieniliśmy na powierzchnię Π_k , która posiada tę własność, że przekroje tejże płaszczyznami prostopadłymi do osi „ a ”, są kołami, które przecinają się z dwoma układami „ g'' ” i „ l'' ” prostych. Powierzchnię Π_k można otrzymać, obracając tworzącą „ g'' ” albo tworzącą „ l'' ”

około osi urojonej; tę powierzchnię nazywamy hiperboloidą o jednej powłoce obrotową. Stożek asymptotyczny Σ_k powierzchni Π_k jest stożkiem obrotowym.

Wszelkie zagadnienia konstrukcyjne, które mają być wykonane na hiperboloidzie trójosiowej, można za pomocą powinowactwa zamienić na odpowiednie zagadnienia, które mają być wykonane na hiperboloidzie obrotowej; wyniki tych konstrukcyi przeniesione za pomocą odwrotnego powinowactwa na hiperboloidę trójosiową dają rozwiązanie owych zagadnień.

18. Wiadomo, że płaszczyzny biegunowe punktów, leżących w nieskończoności, na osiach a, b i c schodzą się z płaszczyznami (b, c) , (a, c) i (b, a) . Jeżeli tedy przyjmujemy, że płaszczyzna pozioma rzutów jest prostopadła do osi „ a ”, a płaszczyzna pionowa rzutów jest równoległa do płaszczyzny głównej (a, b) , natenczas krzywa ograniczająca rzut poziomy hiperboloidy jest elipsą e' przystającą do elipsy szyjnej, płaszczyzny styczne bowiem hiperboloidy w punktach leżących na elipsie szyjnej są równoległe do osi urojonej „ a ”; krzywa „ h ” zaś, ograniczająca rzut pionowy hiperboloidy jest hiperbolą przystającą do krzywej „ h ” podług której płaszczyzna (a, b) hiperboloidę przecina; płaszczyzny bowiem poprowadzone do hiperboloidy w punktach, leżących na krzywej „ h ” są równoległe do osi „ c ”.

Elipsa szyjna „ e ”, leżąca na płaszczyźnie π , równoległej do płaszczyzny poziomej rzutów, i punkt A , leżący na hiperboloidzie i na płaszczyźnie poziomej rzutów, wyznaczają tę powierzchnię (rys. 66.); płaszczyzna pozioma rzutów przecina się bowiem z hiperboloidą podług elipsy e_h spółśrodkowej z krzywą e' i do niej podobną, płaszczyzna zaś symetryczna z płaszczyzną poziomą rzutów ze względu na środek M powierzchni, przecina się z hiperboloidą podług krzywej przystającej do e_h .

Styczne AP' i AQ' , poprowadzone do e' są śladami poziomymi płaszczyzn stycznych, poprowadzonych do hiperboloidy w punktach P i Q leżących na elipsie szyjnej. Na każdej z tych stycznych schodzą się rzuty poziome dwu tworzących różnych układów, przecinających się w punktach leżących na elipsie szyjnej.

Ślady poziome tworzących g_1 i g_2 , przechodzących przez punkta P i Q elipsy szyjnej schodzą się z punktami A_1 i A_2 , punkta przecięcia się A i A_1 , prostej AP' z krzywą e_h są śladami poziomymi tworzących l_1 i l_2 , przechodzących przez punkta P i Q .

Tworząca g_1 przecina się z płaszczyzną π^2 , przesuniętą przez osi a i b w punkcie B , przez który przechodzi druga tworząca l_3 ; rzuty pionowe g''_1 i l''_3 schodzą się na jednej prostej, która jest śladem pionowym płaszczyzny stycznej hiperboloidy w punkcie B , prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów. Rzuty pionowe tedy tworzących hiperboloidy są stycznymi krzywej, ograniczającej rzut pionowy tej powierzchni, a punkta styczności tychże schodzą się z rzutami pionowymi punktów, w których owe tworzące przecinają się z płaszczyzną (a, b) .

Zagadnienie 1: Dany jest rzut poziomy P' punktów P_1 i P_2 , leżących na hiperboloidzie o jednej powłoce, trójosiowej, wyznaczyć rzuty pionowe P''_1 i P''_2 tych punktów, a nadto poprowadzić płaszczyznę styczną do powierzchni w punkcie P_1 (rys. 67.).

Rozwiązanie: Niech będzie dana elipsa szyjna leżąca na płaszczyźnie π i wyznaczona osiami AB i CD a nadto punkt E śladu poziomego hiperbo-

loidy. Przesuńmy przez oś urojoną „ a ” płaszczyznę π^1 , równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów, i uważajmy ją za płaszczyznę powinowactwa między hiperboloidą trójosiową Π_h i hiperboloidą obrotową Π_k , to rzuty poziome punktów, leżących na hiperboloidzie zmieniają swoje położenia, rzuty pionowe zaś tych punktów nie zmieniają swego położenia, albowiem kierunek powinowactwa jest prostopadły do płaszczyzny pionowej rzutów.

Pomiędzy rzutami poziomymi punktów, leżących na powierzchni Π_h i rzutami punktów, leżących na powierzchni Π_k zachodzi związek powinowactwa.

Ślad π_h^1 jest osią powinowactwa, rzutowi elipsy szyjnej odpowiada koło zakreślone na średnicy $A'B'$ a elipsie, podług której płaszczyzna pozioma rzutów przecina się z powierzchnią Π_h odpowiada koło k_2 , zakreślone z punktu a' jako środka promieniem $a'E$, które to koło jest śladem poziomym hiperboloidy Π_k .

Prostej $P'C'$, poprowadzonej przez wierzchołek C' rzutu elipsy szyjnej, odpowiada w układzie hiperboloidy obrotowej prosta TC'_1 , która przechodzi przez punkt przecięcia się T prostej $P'C'$ z osią π_h^1 i przez punkt C'_1 koła k_1 , zakreślonego na średnicy $A'B'$. Jeżeli tedy poprowadzimy przez P' prostą PP'_1 , prostopadłą do π_h^1 , natenczas w punkcie przecięcia się tejże z prostą TC'_1 otrzymamy rzut P'_1 punktu, leżącego na hiperboloidzie obrotowej, który odpowiada rzutowi P' punktu leżącego na hiperboloidzie trójosiowej.

Poprowadźmy przez punkt P'_1 styczne $P'_1Q'_1$ i $P'_1R'_1$ do koła k_1 i wyznaczmy punkta przecięcia się T_1 i T_2 z osią π_h^1 połączmy następnie P' z T_1 i T_2 , to proste T_1P' i T_2P' są stycznymi poprowadzonymi do elipsy szyjnej w punktach Q' i R' .

Na prostych T_1P' i T_2P' schodzą się rzuty poziome dwu par tworzących hiperboloidy Π_h , przechodzących przez punkta Q i R elipsy szyjnej. Ślady poziome tych tworzących H_1 i H_2 , H_3 i H_4 odpowiadają powinowato punktom H'_1 , H'_2 , H'_3 i H'_4 , w których styczne $P'_1Q'_1$, $P'_1R'_1$, poprowadzone do koła k_1 , przecinają się ze śladem poziomym k_2 hiperboloidy obrotowej.

Tworzące H_2Q i H_3R tudzież H_1Q i H_4R przecinają się w punktach P_1 i P_2 ; proste tedy H_1H_4 i H_2H_3 są śladami poziomymi płaszczyzn stycznych poprowadzonych do hiperboloidy Π_h w tych punktach.

Zagadnienie 2: Dana jest elipsa szyjna „ e ” i punkt E śladu poziomego c_1 hiperboloidy trójosiowej o jednej powłoce; wyznaczyć średnice sprzężone przekroju tej powierzchni płaszczyzną π (rys. 68.).

Rozwiązanie: Zamieńmy podobnie jak w zagadnieniu 1-szem hiperboloidę trójosiową Π_h na hiperboloidę obrotową Π_k i wyznaczmy ślady płaszczyzny $^1\pi$ w układzie Π_k , odpowiadającej płaszczyźnie π w układzie Π_h . Ślad poziomy $^1\pi_h$ przechodzi przez punkt przecięcia się T prostych π_h i π_h^1 , a nadto przez punkt 1P , odpowiadający powinowato punktowi P , leżącemu na śladzie Π_h ; ślad pionowy $^1\pi_v$ jest równoległy do prostej, podług której płaszczyzny π i π_1 przecinają się, a więc jest równoległy do śladu π_v i leży na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny pionowej rzutów przesuniętej przez prostą 1x , odpowiadającą osi x . Jeżeli jednak nową płaszczyznę pionową rzutów przesuniemy do jej pierwotnego położenia, natenczas rzuty pionowe nie zmieniają się.

Aby się dowiedzieć, podług jakiej krzywej płaszczyzna $^1\pi$ przecina się z hiperboloidą Π_k , wyznaczmy stożek asymptotyczny tej powierzchni. Popro-

wadźmy w tym celu przez środek M hiperboloidy prostą 1t , równoległą do tworzącej g , i wyznaczmy ślad poziomy H tej prostej to koło k_a zakreślone ze środka M' promieniem $M'H$ jest śladem poziomym stożka asymptotycznego.

Płaszczyzna $^2\pi$ poprowadzona przez środek M powierzchni równoległa do płaszczyzny $^1\pi$ nie przecina się ze stożkiem asymptotycznym (M , k_a) podług tworzących rzeczywistych; przekroje tedy płaszczyzny $^1\pi$ z powierzchniami Π_k i (M , k_a) są elipsami homotetycznymi.

Przesuńmy przez oś urojoną „ a ” hiperboloidy płaszczyznę $^3\pi$ prostopadłą do płaszczyzny $^1\pi$, to ta płaszczyzna dzieli hiperboloidę na dwie części prostokątnie symetryczne, prosta tedy „ 1p ”, podług której płaszczyzny $^1\pi$ i $^3\pi$ przecinają się, jest osią krzywej przekroju $^1c^2$ powierzchni Π_k płaszczyzną $^1\pi$.

Celem wyznaczenia wierzchołków krzywej przekroju $^1c^2$, leżących na osi „ 1p ”, obróćmy tę prostą około osi urojonej „ a ” hiperboloidy, to natenczas otrzymamy stożek Wk_a , który się przenika z hiperboloidą π_k podług dwu kół, na których wierzchołki 1l i 2l krzywej $^1c^2$ leżą.

Środki tych kół leżą na osi „ a ”, a dwa punkta obwodów tychże otrzymamy, wyznaczając punkta przecięcia się X i Y dowolnej tworzącej 1g hiperboloidy Π_k z powierzchnią (W , k_a). Podzielmy następnie odcinek $^1l^2l$ na dwie równe części i poprowadźmy przez punkt dzielący 1S płaszczyznę $^4\pi$, równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów, i poprowadźmy na tej płaszczyźnie prostą „ 1q ” prostopadłą do 1p , to „ 1q ” jest drugą osią krzywej $^1c^2$. Wierzchołki tej osi 3l i 4l leżą na kole, podług którego płaszczyzna $^4\pi$ przecina się z hiperboloidą Π_k .

Jeżeli tedy wyznaczmy w układzie hiperboloidy trójosiowej Π_h proste 12 i 34 , odpowiadające powinowato prostym $^1^2$ i $^3^4$ układu hiperboloidy Π_k , natenczas otrzymamy średnice sprzężone elipsy, podług której płaszczyzna π przecina się z powierzchnią Π_h .

Zagadnienie 3: Wyznaczyć asymptoty i osi hiperboli, podług której płaszczyzna π przecina się z hiperboloidą obrotową Π_k , o jednej powłoce (rys. 69.).

Rozwiązanie: Koło szyjne k i ślad poziomy k_h wyznaczają hiperboloidę obrotową Π_k .

Przesuńmy przez wierzchołek M stożka asymptotycznego (M , k_a) taką płaszczyznę π^2 , która przecina się z tą powierzchnią podług dwu tworzących MA_1 i MA_2 , to płaszczyzna π , równoległa do π^2 przecina się z hiperboloidą podług hiperboli.

Płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni stożkowej (M , k_a) wzdłuż tworzących MA_1 i MA_2 przecinają się z płaszczyzną π podług asymptot a_1 i a_2 hiperboli przekroju, a punkt przecięcia się S tychże jest środkiem hiperboli przekroju c^2 .

Jedna oś „ p ” krzywej c^2 schodzi się z prostą, podług której płaszczyzna π przecina się z płaszczyzną π^1 przesuniętą przez oś urojoną „ a ” powierzchni prostopadłe do płaszczyzny π , druga oś q jest prostą, podług której płaszczyzna π przecina się z płaszczyzną π^3 , przesuniętą przez środek S i równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów.

Jeżeli „ p ” jest osią rzeczywistą, natenczas wyznaczamy wierzchołki 1 i 2 hiperboli przekroju za pomocą kół, podług których hiperboloida Π_k przenika się ze stożkiem, jaki prosta p opisuje, obracając się około osi „ a ”.

Jeżeli „ q ” jest osią rzeczywistą, natenczas wierzchołki 1 i 2 leżą na obwodzie koła, podług którego płaszczyzna π^3 przecina się z hiperboloidą.

Oś „ p ” jest rzeczywista, jeżeli płaszczyzna π przecina się z kołem szyjnym „ k ” w punktach urojonych, oś „ q ” zaś jest rzeczywista, jeżeli płaszczyzna π przecina się z kołem szyjnym w punktach rzeczywistych.

Zagadnienie 4.: Wyznaczyć parabolę, podług której płaszczyzna π przecina się z hiperboloidą obrotową o jednej powłoce (rys. 70.).

Rozwiązanie. Niech będzie dane koło szyjne „ k ” i ślad poziomy k_h powierzchni. Wyznamy stożek asymptotyczny (M, k_a) i poprowadźmy doń płaszczyznę styczną π^1 wzdłuż tworzącej WA , to płaszczyzna π równoległa do π^1 , przecina się z hiperboloidą podług paraboli c_p^2 .

Aby wyznaczyć oś tej krzywej, przesunijmy przez „ a ” płaszczyznę π^2 , prostopadłą do płaszczyzny π , i wyznaczymy prostą „ p ”, podług której płaszczyzny π i π^2 przecinają się, to prosta „ p ” jest osią a punkt P , w którym prosta p przecina się z hiperboloidą, jest wierzchołkiem krzywej przekroju c_p^2 .

Punkt P , styczna poprowadzona do paraboli w tym punkcie, która jest równoległa do płaszczyzny poziomej rzutów, i punkta przecięcia się Q i R śladu poziomego π_h ze śladem poziomym k_h hiperboloidy wyznaczają krzywą przekroju c_p^2 .

Zagadnienie 5.: Wyznaczyć walec, opisany na hiperboloidzie obrotowej o jednej powłoce, którego tworzące są równoległe do prostej l (l' , l'') (rys. 71.).

Rozwiązanie: Powierzchnia walcowa, opisana na hiperboloidzie, styka się z tą powierzchnią podług elipsy, paraboli lub hiperboli, stosownie do tego, czy prosta „ m ” poprowadzona przez wierzchołek stożka asymptotycznego powierzchni Π_k równoległe do prostej l , leży w obrębie, jest tworzącą, albo leży poza obrębem tego stożka.

Jeżeli bowiem prosta „ m ” leży poza obrębem stożka asymptotycznego, natenczas płaszczyzny asymptotyczne, poprowadzone do hiperboloidy i równoległe do prostej „ l ”, są rzeczywiste, dwa punkta przeto krzywej styczności c^2 leżą w nieskończoności.

Jeżeli prosta „ m ” jest tworzącą stożka asymptotycznego, natenczas jedna płaszczyzna asymptotyczna hiperboloidy, jest równoległa do prostej l , krzywa styczności c^2 jest przeto parabolą.

Jeżeli zaś prosta „ m ” leży w obrębie stożka asymptotycznego, natenczas płaszczyzny asymptotyczne hiperboloidy, równoległe do prostej l , są urojone; krzywa styczności tedy walca opisanego na hiperboloidzie jest elipsą.

Na rys. 71. wyznaczono wierzchołki 1. i 2. i asymptoty a_1 i a_2 śladu poziomego c_h^2 walca, opisanego na hiperboloidzie, o tworzących równoległych do prostej „ l ”, w przypadku, kiedy krzywa styczności jest hiperbolą.

Wiadomo, że prosta m , przechodząca przez środek M i równoległa do prostej l , jest osią owego walca, ślad poziomy tedy H_m tej prostej jest środkiem śladu poziomego c_h^2 tej powierzchni walcowej, a styczne a_1 i a_2 , poprowadzone z punktu H_m do podstawy k_a stożka asymptotycznego, są asymptotami śladu c_h^2 . Wierzchołki 1 i 2 krzywej c_h^2 leżą na śladach poziomych π_h^1 i π_h^2 płaszczyzn stycznych, poprowadzonych do powierzchni walcowej, opisaney na kole szyjnym k i równoległych do prostej „ l ”.

Zagadnienie 6.: Wyznaczyć punkta przecięcia się prostej „ m ” z hiperboloidą obrotową o jednej powłoce Π_k .

Rozwiązanie: Obróćmy prostą „ m ” około osi urojonej „ a ” hiperboloidy Π_k , to natenczas otrzymamy drugą hiperboloidę Π_k^1 . Powierzchnie Π_k i Π_k^1 przenikają się podług dwu kół k_1 i k_2 , które przecinają się z prostą „ m ” w punktach leżących na hiperboloidzie Π_k .

Płaszczyzna π^1 , przesunięta przez oś „ a ” równoległe do płaszczyzny pionowej rzutów przecina się z hiperboloidami Π_k i Π_k^1 podług hiperbol c_h i c_h^1 ; asymptoty a_1 i a_2 tudzież a_3 i a_4 krzywych przekroju schodzą się z prostymi, podług których płaszczyzna π^1 przecina się ze stożkami asymptotycznymi owych powierzchni; wierzchołki krzywych przekroju leżą na kołach szyjnych hiperboloid Π_k i Π_k^1 .

Punkta przecięcia się A'' , B'' , C'' i D'' tych hiperbol można wyznaczyć za pomocą dowolnego koła k_2^* .

Jeżeli tedy promieniami $a'A'$ i $a'C'$ zakreślmy ze środka a' koła, natenczas punkta przecięcia się P' i Q' tychże z rzutem l' są rzutami poziomymi punktów P i Q , w których prosta „ m ” przecina się z hiperboloidą Π_k .

Zagadnienie 7.: Wyznaczyć płaszczyzny styczne hiperboloidy o jednej powłoce obrotowej Π_k , równoległe do danej płaszczyzny π (rys. 72.).

Rozwiązanie: Przesunijmy przez środek M hiperboloidy płaszczyznę π^1 , równoległą do płaszczyzny π , to ta płaszczyzna przecina się ze stożkiem asymptotycznym podług dwu tworzących MA_1 i MA_2 , albo jest płaszczyzną styczną powierzchni (M, k_a), albo przecina się z tym stożkiem podług tworzących urojonych. W pierwszym przypadku leżą na hiperboloidzie dwie pary tworzących, należących do różnych układów, z których jedna i druga para jest równoległa do tworzących WA_1 i WA_2 stożka asymptotycznego, te pary wyznaczają przeto płaszczyzny styczne Π_k , równoległe do płaszczyzny π . W drugim przypadku jest płaszczyzna styczna stożka asymptotycznego jedyną płaszczyzną styczną, równoległą do płaszczyzny π ; a w przypadku trzecim nie ma hiperboloida płaszczyzn stycznych, równoległych do π .

Aby wyznaczyć płaszczyzny styczne, równoległe do płaszczyzny π , w przypadku, kiedy płaszczyzna π^1 przecina się ze stożkiem asymptotycznym podług dwu tworzących MA_1 i MA_2 , poprowadźmy styczne do rzutu poziomego koła szyjnego, równoległe do $M'A'_1$ i $M'A'_2$, to natenczas na każdej z tych stycznych schodzą się rzuty poziome g'_1 i l'_1 , g'_2 i l'_2 , g'_3 i l'_3 , g'_4 i l'_4 tworzących hiperboloidy, przecinających się w punktach, leżących na kole szyjnym. Tworzące l_1 i g_3 tudzież g_2 i l_4 są odpowiednio równoległe do prostych MA_1 i MA_2 , płaszczyzny tedy (l_1, g_3) i (g_2, l_4) są płaszczyznami stycznymi hiperboloidy, równoległymi do płaszczyzny π .

Zagadnienie 8. Wyznaczyć środek, oś obrotu i stożek asymptotyczny hiperboloidy obrotowej Π_k , jeżeli dane są dwie tworzące g_1 i g_2 należące do tego samego układu, a nadto punkt P leżący na tej powierzchni.

Rozwiązanie: Prosta l_1 , która przechodzi przez punkt P i przecina się z prostymi g_1 i g_2 jest tworzącą powierzchni Π_k .

*) Jeżeli jest znany jeden wspólny biegun dwu krzywych rzędu 2-go, natenczas za pomocą koła można wyznaczyć punkta przecięcia się tych krzywych. W danym wypadku środek hiperboloidy jest spólnym biegunem krzywych c_p i c'_p .

Jeżeli tedy przez dowolny punkt W przesuniemy stożek obrotowy, którego trzy tworzące t_1, t_2 i t_3 są odpowiednio równoległe do g_1, g_2 i l_1 , natenczas otrzymamy stożek kierowniczy hiperboloidy.

Płaszczyzny styczne, poprowadzone do stożka kierowniczego wzdłuż tworzących t_1, t_2 i t_3 , są równoległe do płaszczyzn asymptotycznych π^1, π^2 i π^3 , poprowadzonych do hiperboloidy przez tworzące g_1, g_2 i l_1 .

Jeżeli tedy wyznaczmy punkt M , w którym płaszczyzny π^1, π^2 i π^3 przecinają się, natenczas otrzymamy środek powierzchni Π_k ; prosta „ a “, poprowadzona przez środek M równoległa do osi stożka kierowniczego jest osią obrotu hiperboloidy, a stożek, przesunięty przez wierzchołek M równoległe do stożka kierowniczego jest stożkiem asymptotycznym hiperboloidy Π_k .

Zagadnienie 9.: Wyznaczyć takie hiperboloidy obrotowe Π_k i Π_k^1 , które posiadają tę własność, że podczas obrotu tychże około osi urojonych a i a_1 obie powierzchnie mają tylko jedną tworzącą wspólną (rys. 73.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że oś urojona a powierzchni Π_k leży na płaszczyźnie poziomej rzutów, a oś a_1 powierzchni Π_k^1 leży na płaszczyźnie, równoległej do płaszczyzny poziomej rzutów. Odcinek $M''M'$, prostej, wyprowadzonej z punktu przecięcia się M' rzutów a' i a'_1 , zawarty między rzutami pionowymi a'' i a''_1 , jest najkrótszą odległością prostych a i a_1 .

Podzielmy odcinek $M''M'$ punktem $1''$ w jakimkolwiek stosunku $1:n$ i poprowadźmy płaszczyzny π^1 i π^2 , prostopadłe do płaszczyzny poziomej i równoległe do a i a_1 w odległościach od tych prostych, których stosunek równy jest $1:n$ i wyznaczmy punkt przecięcia się N'_1 śladów π_k^1 i π_k^2 , to prosta $M'N'_1$ jest rzutem poziomym g'_1 tworzącej g_1 powierzchni Π_k i Π_k^1 ; rzut pionowy g''_1 przechodzi przez punkt $1''$ i jest równoległy do osi x .

Hiperboloidy, opisane prostą g_1 , przez obroty około osi a i a_1 stykają się z sobą wzdłuż tej prostej; jedna powierzchnia leży poza obrębem drugiej.

19. Prosta l , ślizgająca się po trzech prostych wchrowatych g_1, g i g_∞ , z których jedna leży w nieskończoności, opisuje paraboloidę hiperboliczną.

Płaszczyzny $\pi^1, \pi^2...$ przesunięte przez prostą g_∞ przecinają się z prostymi g_1, g_2 w punktach A_1 i A_2, B_1 i $B_2...$ które wyznaczają tworzące $A_1A_2 \equiv l_1, B_1B_2 \equiv l_2...$ paraboloidy.

Szeregi $A_1B_1...$ i $A_2B_2...$ jako przekroje pęku g_∞ ($\pi^1, \pi^2...$) prostymi g_1 i g_2 są jednokreślne i podobne; płaszczyzna bowiem w nieskończoności jest elementem pęku g_∞ (...) punkta tedy N^1_∞ i N^2_∞ leżące na prostych g_1 i g_2 są elementami odpowiednimi szeregów $A_1B_1...$ i $A_2B_2...$. Prosta l_∞ , łącząca punkta N^1_∞ i N^2_∞ jest tworzącą paraboloidy. A zatem:

Paraboloida posiada dwie tworzące g_∞ i l_∞ , leżące w nieskończoności; płaszczyzny π_g i π_l , które wskazują położenia tych prostych, nazywamy płaszczyznami kierowniczymi powierzchni.

Tworzące $l_1, l_2...$ paraboloidy przecinają się z kierownicami tejże g_1 i g_2 w dwu szeregach podobnych.

Z łatwością atoli można wykazać, że i wzajemnie dwa szeregi podobne $A_1, B_1...$ $N^1_\infty, A_2, B_2...$ N^2_∞ , leżące na podstawach wchrowatych g_1 i g_2 wyznaczają paraboloidę hiperboliczną.

Jeżeli bowiem przesuniemy przez prostą A_1A_2 płaszczyznę π^1 , równoległą do prostej B_1B_2 , a przez B_1B_2 płaszczyznę π^2 , równoległą do prostej A_1A_2 , natenczas te płaszczyzny przecinają się podług prostej g_∞ , leżącej w nieskończoności.

Pęk płaszczyzn przesuniętych przez g_∞ i przez proste A_1A_2 i $B_1B_2...$ N^1_∞, N^2_∞ przecina się z prostymi g_1 i g_2 w punktach, które parami wyznaczają tworzące paraboloidy hiperbolicznej.

20. Przesuńmy przez prostą g_1 pęk płaszczyzn, którego elementa $\pi^1, \pi^2...$ przechodzą przez punkta $A_2, B_2...$ N^2_∞ , leżące na prostej g_2 , a przez prostą g_2 pęk płaszczyzn $\pi^1_1, \pi^2_1...$, którego elementa przechodzą przez punkta szeregu $A_1, B_1...$ N^1_∞ leżące na prostej g_1 , to natenczas otrzymamy dwa pęki jednokreślne płaszczyzn, których jedna para elementów odpowiednich (g_1, N^2_∞) i (g_2, N^1_∞) jest równoległa. Płaszczyzny tedy odpowiednie dwu pęków jednokreślnych, których jedna para elementów odpowiednich jest równoległa, przecinają się podług tworzących $l_1, l_2...$ paraboloidy hiperbolicznej; w sposób tedy wyłożony w art. 5. można uzasadnić, że paraboloida hiperboliczna posiada dwa układy tworzących „ g “ i „ l “; tworzące jednego i tego samego układu są wchrowate, tworzące zaś jednego układu przecinają się ze wszystkimi tworzącymi układu drugiego. Pomiedzy tworzącymi obu układów znajdują się prosta g_∞ i l_∞ , których położenie wskazują płaszczyzny kierownicze Π_g i Π_l ; wszystkie tworzące tedy układu „ l “ są równoległe do płaszczyzny Π_g , wszystkie tworzące zaś układu „ g “ są równoległe do płaszczyzny Π_l .

21. Paraboloida hiperboliczna jest powierzchnią rzędu drugiego, dowolna prosta „ p “ przecina bowiem pęki jednokreślne ($\pi^1, \pi^2... \pi^n$) i ($\pi^1_1, \pi^2_1... \pi^n_1$), których elementa π^n i π^n_1 są równoległe, w dwu szeregach jednokreślnych, które mają dwa punkta podwójne, leżące na paraboloidzie.

Płaszczyzna π przecina się tedy z paraboloidą hiperboliczną podług hiperboli albo podług paraboli, stosownie do tego, czy płaszczyzna π przecina proste g_∞ i l_∞ w dwu różnych punktach, czy też przechodzi przez punkt przecięcia się A_∞ tych tworzących.

Płaszczyzna π^1 przesunięta przez tworzącą g_1 , przecina się z paraboloidą podług drugiej tworzącej l_1 , to płaszczyzna jest tedy płaszczyzną styczną powierzchnii w punkcie P_1 , w którym tworzące g_1 i l_1 przecinają się. Płaszczyzna w nieskończoności jest więc płaszczyzną styczną paraboloidy hiperbolicznej w punkcie A_∞ , w którym przecinają się tworzące g_∞ i l_∞ .

22. Tworzące $l_1, l_2...$ przecinają się z prostą g_∞ w punktach $B^1_\infty, B^2_\infty...$; płaszczyzny styczne zatem poprowadzone w tych punktach do paraboloidy hiperbolicznej, przechodzą przez tworzące g_∞ i l_1, g_∞ i $l_2...$; płaszczyzny styczne poprowadzone do paraboloidy w punktach leżących w nieskończoności na tworzących $g_1, g_2...$ przechodzą przez tworzące l_∞ i g_1, l_∞ i $g_2...$

A zatem: Płaszczyzny asymptotyczne paraboloidy hiperbolicznej tworzą dwa układy płaszczyzn równoległych do płaszczyzn kierowniczych tej powierzchni.

23. Poprowadźmy płaszczyznę π , prostopadłą do prostej „ s “, podług której płaszczyzny kierownicze π_g i π_l przecinają się, i wyznaczmy proste γ i λ podług których płaszczyzna π przecina się z płaszczyznami π_g i π_l . Przesuńmy następnie przez tworzące l_1 i l_2 płaszczyzny π^1 i π^2 równoległe do γ , a przez tworzące g_1 i g_2 płaszczyzny π^3 i π^4 , równoległe do λ , to π^1 i π^2 tudzież π^3 i π^4 przecinają się podług tworzących g i l paraboloidy równoległych do prostych γ i λ . Płaszczyzna przesunięta przez tworzące g i l jest płaszczyzną styczną paraboloidy w punkcie przecięcia się A tych tworzących i jest pro-

stopadła do prostej „a” poprowadzonej przez punkt A równoległe do prostej „s”. Prosta „a” nazywamy osią paraboloidy.

Płaszczyzny równoległe do osi „a” paraboloidy przecinają się z tą powierzchnią podług parabol, których osi są równoległe do prostej „a”; płaszczyzny, które nie są równoległe do osi „a”, przecinają się z paraboloidą hiperboliczną podług hiperbol.

24. Stożek, opisany na paraboloidzie hiperbolicznej z punktu W , który leży w skończoności, jest stożkiem rzędu drugiego, a krzywa c^2 wzdłuż której ten stożek styka się z powierzchnią, jest hiperbolą; płaszczyzny asymptotyczne bowiem (W, g_∞) i (W, l_∞) przecinają się z płaszczyzną, na której krzywa c^2 leży, podług asymptot tej krzywej.

Jeżeli punkt W leży w nieskończoności, albo innymi słowy, jeżeli na paraboloidzie hiperbolicznej opiszemy walec, natenczas obie płaszczyzny asymptotyczne poprowadzone do tego walca schodzą się z płaszczyzną w nieskończoności, krzywa styczności zatem walca opisanego na paraboloidzie hiperbolicznej jest parabolą.

A zatem: Rzut środkowy paraboloidy hiperbolicznej z punktu leżącego w skończoności, jest hiperbolą, rzut zaś tej powierzchni z punktu, leżącego w nieskończoności jest parabolą. Rzuty tworzących są stycznymi krzywych ograniczających rzuty powierzchni.

25. Niech będzie dana płaszczyzna π , która przecina paraboloidę hiperboliczną podług hiperboli c^2 . Celem wyznaczenia asymptot krzywej przekroju wyznaczmy proste γ_1 i λ_1 , podług której płaszczyzna π^1 , równoległa do płaszczyzny π , przecina się z płaszczyznami kierowniczymi π_i i π_g , a nadto tworzące g i l paraboloidy, równoległe do prostych γ_1 i λ_1^*), to płaszczyzny asymptotyczne (g, l_∞) i (l, g_∞) przecinają się z płaszczyzną π podług asymptot a_1 i a_2 hiperboli przekroju c^2 . Punkt przecięcia się O asymptot a_1 i a_2 jest środkiem krzywej c^2 .

Płaszczyzny $\pi^2, \pi^3, \dots$ równoległe do płaszczyzny π , przecinają się z paraboloidą podług hiperbol $c_2^2, c_3^2, \dots$ których asymptoty leżą na płaszczyznach (g, l_∞) i (l, g_∞), środki tedy tych krzywych leżą na prostej, podług której te płaszczyzny przecinają się, a więc na prostej, równoległej do osi paraboloidy hiperbolicznej. A zatem:

Płaszczyzny równoległe przecinają się z paraboloidą hiperboliczną podług krzywych podobnych i podobnie położonych; środki tych krzywych leżą na prostej, równoległej do osi powierzchni.

26. Poprowadźmy cięciwy równoległe $AB, A_1B_1, \dots$ paraboloidy hiperbolicznej i podzielmy te cięciwy punktami $M, M_1, \dots$ na dwie równe części, poprowadźmy następnie przez $AB, A_1B_1, \dots$ płaszczyzny równoległe $\pi, \pi^1, \dots$ i wyznaczmy środki $O, O_1, \dots$ krzywych $c^2, c_1^2, \dots$ podług których te płaszczyzny przecinają się z paraboloidą, to proste $OM, O_1M_1, \dots$ są średnicami krzywych $c^2, c_1^2, \dots$ podobnych i podobnie położonych; proste $OM, O_1M_1, \dots$ leżą tedy na

*) Płaszczyzny przesunięte przez tworzące l_1 i l_2 równoległe do prostej γ_1 przecinają się podług tworzącej „g”, a płaszczyzny przesunięte przez tworzące g_1 i g_2 równoległe do prostej λ_1 przecinają się podług tworzącej l .

płaszczyźnie, a ponieważ punkta $O, O_1, \dots$ leżą na prostej równoległej do osi paraboloidy, przeto:

Punkta, dzielące na dwie równe części cięciwy równoległe paraboloidy hiperbolicznej, leżą na płaszczyźnie równoległej do osi tej powierzchni.

Uwaga: Z własności biegunów i płaszczyzn biegunowych powierzchni rzędu drugiego można twierdzenia wyprowadzone w art. 25. i 26. wprost wyprowadzić.

Prostej m_∞ , leżącej w nieskończoności, odpowiada biegunowo prosta „n”, przechodząca przez punkt A_∞ , w którym tworzące g_∞ i l_∞ przecinają się; płaszczyzny tedy, przesunięte przez prostą m_∞ , przecinają się z paraboloidą hiperboliczną podług krzywych rzędu drugiego, których środki na prostej „n” leżą.

Płaszczyzna biegunowa π punktu P_∞ , ze względu na paraboloidę hiperboliczną, przechodzi przez punkt A_∞ i dzieli na dwie równe części cięciwy $AB, A_1B_1, \dots$ paraboloidy, które leżą na prostych, poprowadzonych przez punkt P_∞ .

27. a) Trzy proste wchrowate g_1, g_2 i g_3 , równoległe do płaszczyzny π , wyznaczają paraboloidę hiperboliczną; prosta bowiem, leżąca w nieskończoności na płaszczyźnie π , jest tworzącą powierzchni.

b) Jeżeli przez elementa $A, B, C, \dots$ szeregu, leżącego na prostej g_1 , poprowadzimy proste $l_1, l_2, l_3, \dots$ równoległe do promieni $a, b, c, \dots$ pęku leżącego na płaszczyźnie π , jednokreślnego z szeregiem $A, B, \dots$ natenczas te proste są tworzącymi paraboloidy hiperbolicznej.

Jakoż prowadząc przez punkta $A, B, C, \dots$ płaszczyzny $\pi^1, \pi^2, \pi^3, \dots$ równoległe do płaszczyzny π , a przez prostą g_1 płaszczyzny $\pi_1^1, \pi_1^2, \dots$ równoległe do promieni ($a, b, c, \dots$), otrzymamy dwa pęki jednokreślne $g_\infty(\dots)$ i $g_1(\dots)$ które wyznaczają paraboloidę hiperboliczną.

28. Niech będą dane dwie proste wchrowate g_1 i g_2 a nadto płaszczyzna π_g , prostopadła do prostej g_1 , na której kierownica g_∞ leży, to płaszczyzny $\pi^2, \pi^3, \dots$ równoległe do π_g , przecinają się z prostymi g_1, g_2 w punktach L_1 i L_2, L'_1 i $L'_2, \dots$ wyznaczających tworzące $l_1, l_2, \dots$ paraboloidy hiperbolicznej. Druga płaszczyzna kierownicza π_l tej powierzchni jest równoległa do kierownic g_1 i g_2 , a ponieważ g_1 jest prostopadła do płaszczyzny π_g , przeto płaszczyzny kierownicze π_g i π_l są prostopadłe.

Prosta l , która odcina najkrótszą odległość tworzących g_1 i g_2 , jest równoległa do płaszczyzny π_g i prostopadła do płaszczyzny π_l , prosta g , która odcina najkrótszą odległość tworzących l_1 i l_2 jest równoległa do płaszczyzny π_l i prostopadła do płaszczyzny π_g . Atoli wszystkie tworzące $l_1, l_2, \dots$ są równoległe do płaszczyzny π_g , a tworzące $g_1, g_2, \dots$ są równoległe do płaszczyzny π_l , tworząca tedy l przecina się ze wszystkimi tworzącymi $g_1, g_2, \dots$ i jest do nich prostopadła, tworząca g zaś przecina się ze wszystkimi tworzącymi $l_1, l_2, \dots$ i jest do nich prostopadła.

Paraboloidę hiperboliczną, której kierownice są prostopadłe nazywamy paraboloidą prostokątną.

29. a) Mając dane dwie proste wchrowate g_1 i g_2 , jeżeli z punktów $A, B, \dots$ leżących na g_1 , poprowadzimy proste $l_1, l_2, \dots$ prostopadłe do g_2 , to te proste są tworzącymi paraboloidy hiperbolicznej prostokątnej; płaszczyzna kie-

rownicza bowiem π_g jest prostopadła do prostej g , a płaszczyzna kierownicza π_i jest równoległa do prostej g .

b) Dwa pęki jednokreślne płaszczyzn g ($\pi^1, \pi^2, \dots$) i g_∞ ($\pi_1^1, \pi_1^2, \dots$), posiadające tę własność, że elementa pęku $g_\infty(\dots)$ są prostopadłe do osi g , wyznaczają paraboloidę prostokątną; płaszczyzny bowiem odpowiednie π^2 i π_1^1 , π^2 i $\pi_1^2, \dots$ przecinają się podług prostych $l_1, l_2, \dots$ prostopadłych do prostej „ g ”.

c) Proste $l_1, l_2, \dots$ poprowadzone przez punkta $A, B, \dots$ szeregu leżącego na prostej g , równoległe do promieni pęku ($a, b, \dots$), który leży na płaszczyźnie π , prostopadłej do prostej g_1 i jest jednokreślny z szeregiem $A, B, \dots$ są tworzącymi paraboloidy prostokątnej.

d) Dwa pęki jednokreślne płaszczyzn g_1 ($\pi^1, \dots, \pi^n$) i g_2 ($\pi_1^1, \dots, \pi_1^n$) wyznaczają paraboloidę hiperboliczną prostokątną, jeżeli płaszczyzny odpowiednie π^n i π_1^n tych pęków są równoległe, a płaszczyzny π^1 i π_1^1 przechodzą przez prostą l , która wyznacza najkrótszą odległość osi g_1 i g_2 .

Zagadnienie 10. Dane są kierownice g_1, g_2 i g_∞ paraboloidy hiperbolicznej, prosta g_∞ leży na płaszczyźnie poziomej rzutów; wyznaczyć a) tworzące powierzchni, które należą do układu „ l ”, b) poprowadzić w dowolnym punkcie, leżącym na paraboloidzie, płaszczyznę styczną do tej powierzchni, c) wyznaczyć płaszczyznę kierowniczą π_i , d) wyznaczyć krzywą, ograniczającą rzut poziomy powierzchni (rys. 74.).

Rozwiązanie: a) Płaszczyzny $\pi^1, \pi^2, \dots$ równoległe do płaszczyzny poziomej rzutów przecinają się z prostymi g_1 i g_2 w punktach A_1 i A_2, B_1 i $B_2, \dots$ przez które przechodzą tworzące $l_1, l_2, \dots$ paraboloidy. Pomiedzy temi tworzącymi zasługuje na uwagę tworząca l_p , prostopadła do płaszczyzny pionowej rzutów, której rzut pionowy l_p'' leży w punkcie przecięcia się rzutów g_1'' i g_2'' i tworząca l_h , leżąca na płaszczyźnie poziomej rzutów, która łączy ślady H_1 i H_2 kierownic g_1 i g_2 .

b) Przesuńmy przez punkt M , leżący na prostej l_1 i przez tworzącą l_p , płaszczyznę π^3 i wyznaczmy punkt przecięcia się H_m tej płaszczyzny z prostą l_h , to prosta MH_m jest tworzącą g_3 paraboloidy, płaszczyzna tedy, przesunięta przez proste l_1 i g_3 jest płaszczyzną styczną, poprowadzoną do paraboloidy w punkcie M .

c) Jeżeli przez dowolny punkt P przesuniemy proste m_1 i m_2 , równoległe do tworzących g_1 i g_2 , i przesuniemy przez te proste płaszczyznę π_i , to na tej płaszczyźnie leży prosta l_∞ .

d) Rzuty poziome $g'_1, g'_2, l'_1, l'_2, \dots$ tworzących paraboloidy są śladami poziomymi płaszczyzn stycznych, poprowadzonych do tej powierzchni i prostopadłych do płaszczyzny poziomej rzutów, owe rzuty tedy są stycznymi paraboli, która ogranicza rzut poziomy tej powierzchni. Rzut pionowy paraboloidy hiperbolicznej pokrywa w danym przypadku całą płaszczyznę pionową rzutów.

Zagadnienie 11. Wyznaczyć płaszczyznę styczną paraboloidy hiperbolicznej, równoległą do płaszczyzny π (π_h, π_v).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, jak w zagadnieniu poprzednim, że tworząca g_∞ leży na płaszczyźnie poziomej rzutów.

Przesuńmy przez dowolny punkt płaszczyznę kierowniczą π_i , równoległą do prostych g_1 i g_2 i wyznaczmy proste γ i λ , podług których płaszczyzna π przecina się z płaszczyznami kierowniczymi π_g i π_i to prosta „ γ ” schodzi się

ze śladem poziomym π_h płaszczyzny π . Przesuńmy następnie przez proste g_1 i g_2 płaszczyzny π^1 i π^2 , równoległe do γ , a przez tworzące l_p i l_h płaszczyzny π^3 i π^4 , równoległe do „ λ ”, to płaszczyzny π^1 i π^2 przecinają się podług tworzącej l , a płaszczyzny π^3 i π^4 przecinają się podług tworzącej g , które są równoległe do płaszczyzny π . Płaszczyzna (g, l) jest tedy równoległa do płaszczyzny π , a punkt przecięcia się P prostych g i l jest punktem styczności tej płaszczyzny z paraboloidą hiperboliczną.

Zagadnienie 12. Wyznaczyć punkta przecięcia się prostej m (m', m'') z paraboloidą hiperboliczną, a nadto poprowadzić w punktach przecięcia się płaszczyzny styczne do tej powierzchni.

Rozwiązanie: Wyznaczymy ślad poziomy walca, opisanego na paraboloidzie, którego tworzące są równoległe do prostej „ m ”. Prosta l_h , łącząca ślady poziome H_1 i H_2 tworzących g_1 i g_2 , oraz ślady płaszczyzn równoległych do prostej „ m ” i przesuniętych przez tworzące l_p, g_1 i g_2 , na płaszczyźnie poziomej rzutów są stycznymi poprowadzonymi do śladu poziomego c^2 owego walca.

Jeżeli tedy poprowadzimy ze śladu poziomego H_m prostej „ m ” styczne s_1 i s_2 do paraboli c^2 , to na s_1 schodzą się rzuty g_m i l_m , na prostej zaś s_2 schodzą się rzuty g_n i l_n , wykonane na płaszczyznę poziomą rzutów w kierunku prostej „ m ”.

Punkta przecięcia się M i N tworzących g_m i l_m tudzież g_n i l_n są punktami przecięcia się prostej „ m ” z paraboloidą hiperboliczną a płaszczyzny (g_m, l_n) i (g_n, l_m) są płaszczyznami stycznymi tej powierzchni poprowadzonymi przez prostą „ m ”; punkta przecięcia się P i Q tworzących g_m i l_n tudzież g_n i l_m są punktami styczności owych płaszczyzn stycznych.

Zagadnienie 13. Wyznaczyć asymptoty i osi hiperboli, podług której płaszczyzna Π przecina się z paraboloidą hiperboliczną (rys. 75.).

Rozwiązanie: Tworzące wchrowate g_1, g_2 i prosta g_∞ , leżąca w nieskończoności na płaszczyźnie poziomej rzutów wyznaczają paraboloidę hiperboliczną.

Poprowadźmy przez punkt A płaszczyznę kierowniczą π_i , równoległą do tworzących g_1 i g_2 , i wyznaczmy proste γ i λ , podług których płaszczyzna π przecina się z płaszczyzną π_i i z płaszczyzną poziomą rzutów, to te proste wskazują nam kierunki, w których hiperbola przekroju rozciąga się do nieskończoności.

Celem wyznaczenia tworzących g i l paraboloidy, równoległych do γ i λ przesuńmy przez l_p i l_h płaszczyzny π^1 i π^2 równoległe do λ , a przez g_1 i g_2 płaszczyzny π^3 i π^4 równoległe do γ , to π^1 i π^2 przecinają się podług tworzącej „ g ”, a płaszczyzny π^3 i π^4 przecinają się podług tworzącej „ l ”.

Płaszczyzny asymptotyczne π_a i π_b przesunięte przez tworzące g i l , odpowiednio równoległe do płaszczyzny kierowniczej π_i i do płaszczyzny poziomej rzutów przecinają się z płaszczyzną π podług asymptot a i b hiperboli przekroju c^2 . Punkt przecięcia się B prostej l_h ze śladem poziomym π_h płaszczyzny π leży na krzywej c^2 . Wykonajmy kład płaszczyzny π na płaszczyznę poziomą rzutów i podzielmy prostymi (m) i (n) kąty zawarte między (a) i (b) na dwie równe części, to te proste są kładami osi m i n hiperboli c^2 . — Zakreślmy koło k_1 stykające się z kładami asymptot w punktach P i Q i wyznaczmy punkt przecięcia się B_1 koła k_1 z prostą, (O) B łączącą punkt B hiperboli z punktem przecięcia się (O) kładów asymptot (a) i (b), to natenczas

między kładem hiperboli przekroju (c^2) i kołem k_1 zachodzi związek kolineacyjny. Punkt (O) jest środkiem, prosta s'_1 , łącząca punkta P i Q jest osią, której odpowiada w układzie hiperboli prosta leżąca w nieskończoności a punktowi B_1 koła odpowiada punkt (B) kładu (c^2). Jeżeli tedy wyznaczmy punkta (C) i (D), odpowiadające punktom C_1 i D_1 w których oś (m) przecina się z kołem k_1 , natenczas otrzymamy wierzchołki kładu hiperboli, podług której płaszczyzna Π przecina się z paraboloidą hiperboliczną.

Zagadnienie 14. Wyznaczyć parabolę, podług której płaszczyzna równoległa do osi paraboloidy hiperbolicznej, tę powierzchnię przecina (rys. 76.).

Rozwiązanie. Przyjmijmy jak poprzednio, że paraboloidę wyznaczają kierownice g_1 i g_2 , a nadto prosta g_∞ leżąca w nieskończoności na płaszczyźnie poziomej rzutów.

Wyznamy płaszczyznę kierowniczą Π_i powierzchni, to płaszczyzna Π (Π_h , Π_e), równoległa do śladu poziomego Π^h przecina się z paraboloidą hiperboliczną podług paraboli.

Wyznamy punkta B (B' , B'') i C (C' , C''), w których tworzące g_1 i g_2 przecinają się z płaszczyzną Π i poprowadźmy w tych punktach płaszczyzny styczne do paraboloidy; ślady poziome Π_h^1 i Π_h^2 tych płaszczyzn przechodzą odpowiednio przez ślady H_1 i H_2 tworzących g_1 i g_2 i są równoległe do rzutów l'_1 i l'_2 tych tworzących l_1 i l_2 , które przechodzą przez punkta B i C . Jeżeli tedy połączymy punkta B i C z punktami przecięcia się H_3 i H_4 śladów Π_h i Π_h^1 tudzież Π_h i Π_h^2 , natenczas otrzymamy styczne s_1 i s_2 poprowadzone do paraboli przekroju c^2 w punktach B i C .

Oś paraboli przekroju „ a ” jest równoległa do śladu poziomego Π^h płaszczyzny Π_i . Aby wyznaczyć rzut poziomy wierzchołka tej osi, poprowadźmy przez B' prostą $B'B'_1$ prostopadłą do śladu Π_h i podzielmy punktem O'_1 na dwie równe części odcinek, zawarty między spodkiem B'_1 tej prostopadłej i punktem przecięcia się H_3 prostych s'_1 i Π_h , to wierzchołek A' rzutu poziomego paraboli leży na prostej $B'O'_1$; poprowadźmy następnie przez C' prostą $C'C'_1$, prostopadłą do śladu Π_h i podzielmy punktem O'_2 odcinek C'_1H_4 tego śladu na dwie równe części, to punkt przecięcia się A' prostych $B'O'_1$ i $C'O'_2$ jest wierzchołkiem rzutu poziomego paraboli przekroju c^2 .

Zagadnienie 15. Wyznaczyć parabolę, wzdłuż której walec o tworzących, równoległych do prostej „ p ” styka się z paraboloidą hiperboliczną (rys. 77.).

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że trzy kierownice g_1 , g_2 i g_∞ , z których g_∞ leży na płaszczyźnie poziomej rzutów wyznaczają paraboloidę.

Przesuńmy przez tworzące g_1 i g_2 płaszczyzny π^1 i π^2 , równoległe do prostej „ p ” i wyznaczmy punkta przecięcia się B_1 i B_2 prostych g_2 i g_1 z płaszczyznami π^1 i π^2 , poprowadźmy następnie przez punkta B_1 i B_2 proste l_1 i l_2 równoległe do śladów poziomych Π_h^1 i Π_h^2 , to te proste są tworzącymi układu „ l ” paraboloidy, a punkta przecięcia się C i D tworzących g_1 i l_1 tudzież g_2 i l_2 są punktami styczności płaszczyzn π^1 i π^2 z paraboloidą. Jeżeli tedy przez prostą CD przesuniemy płaszczyznę π równoległą do śladu poziomego Π^h płaszczyzny kierowniczej, równoległej do tworzących g_1 i g_2 , albo jeżeli przez prostą CD i przez punkt E dzielący na dwie równe części odcinek B_1B_2 , który leży na prostej równoległej do „ p ”, przesuniemy płaszczyznę π , to ta płaszczyzna przecina się z paraboloidą hiperboliczną podług paraboli,

wzdłuż której walec, o tworzących równoległych do „ p ” z tą powierzchnią się styka.

Zagadnienie 16. Wyznaczyć krzywą rzędu drugiego, wzdłuż której stożek opisany z punktu W na paraboloidzie hiperbolicznej z tą powierzchnią się styka.

Rozwiązanie. Przesuńmy przez punkt W i przez proste g_1 i g_2 płaszczyzny π^1 i π^2 i wyznaczmy prostą d , podług której te płaszczyzny przecinają się, wyznaczmy następnie punkta przecięcia się A i B prostej d z tworzącymi g_1 i g_2 i poprowadźmy przez A prostą l_2 , równoległą do Π_h^2 , a przez B prostą l_1 , równoległą do Π_h^1 , to proste g_1 i l_1 tudzież g_2 i l_2 przecinają się w punktach styczności P i Q płaszczyzn stycznych π^1 i π^2 , poprowadzonych do paraboloidy.

Prosta „ d ” przechodzi przez punkt W i przecina się z paraboloidą hiperboliczną w punktach A i B ; jeżeli tedy wyznaczmy punkt R , który z punktami W , A , B tworzy grupę harmoniczną $(P, R, A, B) = -1$, natenczas płaszczyzna π , przesunięta przez punkta P , Q i R przecina się z paraboloidą podług hiperboli, wzdłuż której stożek, opisany z punktu W z tą powierzchnią się styka.

Zagadnienie 17. Przez prostą p przesunąć taką płaszczyznę, która przecina się z paraboloidą hiperboliczną podług paraboli równobocznej.

Rozwiązanie. Wyznamy punkta przecięcia się M i N prostej p z płaszczyznami kierowniczymi Π_g i Π_i paraboloidy hiperbolicznej, przesuńmy przez prostą „ a ” podług której płaszczyzny Π_g i Π_i przecinają się i przez punkt O , dzielący na dwie równe części odcinek MN , płaszczyznę Π ; zakreślmy następnie na tej płaszczyźnie ze środka O koło „ k ” promieniem OM , to proste MP i NP tudzież MQ i NQ , łączące punkta M i N z punktem P i Q , w których koło k przecina się z prostą „ a ”, są prostopadłe, asymptoty przeto hiperbol, podług których płaszczyzny MPN i MQN przecinają się z paraboloidą hiperboliczną, są prostopadłe.

O krzywych zwężenia (strykeyjnych) na powierzchniach wchrowatych rzędu drugiego.

30. Poprowadźmy przez tworzące $g_1, \dots, l_1, \dots$, płaszczyzny asymptotyczne $\Pi_a^1, \dots, \Pi_a^2, \dots$ i przesuńmy przez te proste płaszczyzny $\Pi_s^1, \dots, \Pi_s^2, \dots$ prostopadłe do $\Pi_a^1, \dots, \Pi_a^2, \dots$, to miejsce geometryczne punktów styczności płaszczyzn Π_s nazywamy krzywą zwężenia.

Aby wyznaczyć punkt S_1 linii zwężenia leżący na tworzącej g_1 hiperboloidy o jednej powłoce trójosiowej, przesuńmy przez g_1 płaszczyznę asymptotyczną Π (Π_h , Π_e) i poprowadźmy przez środek M tej powierzchni prostą p (p' , p''), prostopadłą do π , przesuńmy następnie przez g_1 i p płaszczyznę π_p , to tworząca l_1 hiperboloidy leżąca na tej płaszczyźnie przecina się z tworzącą g_1 w punkcie S_1 , leżącym na krzywej zwężenia.

Płaszczyzny (a , b) i (a , c) przesunięte przez oś urojoną „ a ” i przez osi rzeczywiste są prostopadłe do dwu par płaszczyzn asymptotycznych i stykają się z hiperboloidą w wierzchołkach B i C tudzież D i E elipsy szyjnej; płaszczyzna tedy, na której leży elipsa szyjna, przecina się z krzywą zwężenia

nia hiperboloidy o jednej powłoce trójosiowej w czterech punktach, ta krzywa jest tedy rzędu czwartego.

Płaszczyzny, przesunięte przez tworzące hiperboloidy o jednej powłoce obrotowej i prostopadłe do płaszczyzn asymptotycznych, są płaszczyznami stycznymi tej powierzchni w punktach leżących na kole szyjnym, to koło jest zatem krzywą zwężenia hiperboloidy obrotowej.

Wiadomo, że płaszczyzny asymptotyczne paraboloidy hiperbolicznej są równoległe do płaszczyzn kierowniczych Π_g i Π_l , na których tworzące g_∞ i l_∞ tej powierzchni leżą. Jeżeli tedy przez tworzące $l_1, l_2, \dots$ poprowadzimy płaszczyzny $\Pi_s^1, \dots$ prostopadłe do płaszczyzny π_g , a przez tworzące $g_1, g_2, \dots$ poprowadzimy płaszczyzny $\Pi_s^2, \dots$ prostopadłe do płaszczyzny π_l , to płaszczyzny $\Pi_s^1, \dots$ i $\Pi_s^2, \dots$ powłócą dwie powierzchnie walcowe, których krzywe styczności z paraboloidą hiperboliczną tworzą krzywą zwężenia tej powierzchni.

Jeżeli płaszczyzny kierownicze Π_g i Π_l paraboloidy hiperbolicznej są prostopadłe, natenczas w układzie „ l ” znajduje się jedna tworząca l_1 , prostopadła do wszystkich tworzących $g, \dots$ a w układzie „ g ” znajduje się jedna tworząca g_1 prostopadła do wszystkich tworzących $l, \dots$ płaszczyzny tedy $(l_1, g_2), (l_1, g_3), \dots$ i $(g_1, l_2), (g_1, l_3), \dots$ są prostopadłe do płaszczyzn asymptotycznych, przesuniętych przez tworzące $g_2, g_3, \dots$ względnie $l_2, l_3, \dots$ a punkta styczności tychże leżą na tworzących l_1 i g_1 wzajemnie prostopadłych. Krzywa zwężenia paraboloidy hiperbolicznej prostokątnej składa się tedy z dwu tworzących, leżących na płaszczyźnie stycznej poprowadzonej w wierzchołku do tej powierzchni.

O powierzchniach rzędu drugiego krzywokreślnych.

1. Najprostszą powierzchnią rzędu drugiego krzywokreślną jest kula, miejsce geometryczne punktów, równo oddalonych od punktu O , który nazywamy środkiem tej powierzchni. Odcinek prostej, zawarty między środkiem i punktem, leżącym na kuli, nazywamy promieniem, a odcinek prostej przechodzącej przez środek, zawarty między dwoma punktami kuli nazywamy średnicą.

Płaszczyzna, przesunięta przez środek O przecina się z kulą podług koła, o promieniu równym promieniowi kuli i dzieli tę powierzchnię na dwie prostokątnie symetryczne części. Z tego wynika, że kula posiada, nieskończenie wiele średnic sprzężonych prostopadłych.

Płaszczyzna biegunowa Π punktu, leżącego w nieskończoności na średnicy „ a ” ze względu na kulę przechodzi przez środek O tej powierzchni i jest prostopadła do prostej „ a ”. Płaszczyzny biegunowe $\Pi_a, \Pi_b, \dots$ punktów $A, B, \dots$ leżących na średnicy „ a ”, są równoległe do płaszczyzny Π , przecinają się tedy z kulą podług kół. Płaszczyzna styczna przeto π , poprowadzona do kuli w punkcie przecięcia się S osi „ a ” z tą powierzchnią jest prostopadła do promienia styczności OS .

2. Wyznamy płaszczyznę biegunową Π^m punktu M_∞ , leżącego w nieskończoności na prostej l , ze względu na kulę i płaszczyznę biegunową Π^n punktu N , w którym prosta l przecina się z płaszczyzną Π^m , to płaszczyzna Π^m przechodzi przez środek O kuli i jest prostopadła do prostej l , płaszczyzna zaś Π^n jest prostopadła do prostej ON . Prosta l_1 , podług której płaszczyzny

Π^m i Π^n przecinają się jest biegunowo sprzężoną z prostą l ze względu na kulę, a prosta ON jest prostopadła do prostych l i l_1 . A zatem:

Proste biegunowo sprzężone ze względu na kulę są prostopadłe i wchrowate; najkrótsza odległość tych biegunowych leży na prostej, przechodzącej przez środek kuli.

Czworościan biegunowo sprzężony ze względu na kulę posiada tę własność, że proste, na których wysokości tego wielościanu i najkrótsze odległości krawędzi przeciwległych leżą, przechodzą przez środek kuli.

3. Poprowadźmy przez środek O kuli K trzy proste a, b i c , wzajemnie prostopadłe, i wyznaczmy punkta N_1^∞, N_2^∞ i N_3^∞ , w których te proste przecinają się z płaszczyzną w nieskończoności to punkta $O, N_1^\infty, N_2^\infty$ i N_3^∞ są wierzchołkami czworościanu biegunowego ze względu na kulę.

Punkta N_1^∞, N_2^∞ i N_3^∞ wyznaczają trójkąt biegunowo sprzężony ze względu na koło urojone, podług którego płaszczyzna w nieskończoności przecina się z kulą.

Proste a', b' i c' , poprowadzone przez środek O kuli i wzajemnie prostopadłe, przecinają się z płaszczyzną w nieskończoności w punktach P_1^∞, P_2^∞ i P_3^∞ , które są wierzchołkami trójkąta biegunowo sprzężonego ze względu na koło urojone, podług którego płaszczyzna w nieskończoności przecina się z kulą K .

Jeżeli tedy przez środki $O_1, \dots$ kul $K_1, \dots$ poprowadzimy proste a_1, b_1 i $c_1 - a'_1, b'_1$ i $c'_1, \dots$ równoległe do a, b i c, a', b' i $c', \dots$, to te proste przecinają się z płaszczyzną w nieskończoności w wierzchołkach N_1^∞, N_2^∞ i $N_3^\infty - P_1^\infty, P_2^\infty$ i P_3^∞ trójkątów biegunowo sprzężonych ze względu na koła, podług których płaszczyzna w nieskończoności przecina się z kulami $K_1, \dots$; a ponieważ trójki średnic sprzężonych ze względu na te koła są wspólne, przeto te koła nakrywają się. A zatem:

Wszystkie kule przechodzą przez jedno koło urojone, leżące na płaszczyźnie w nieskończoności.

Płaszczyzna π , prostopadła do prostej l , przecina się z płaszczyzną w nieskończoności podług biegunowej l_∞ punktu L_∞ , leżącego na prostej l ze względu na koło urojone w nieskończoności.

Dwie proste prostopadłe przecinają się z płaszczyzną w nieskończoności w biegunach sprzężonych a dwie płaszczyzny prostopadłe przecinają się z płaszczyzną w nieskończoności podług biegunowych sprzężonych ze względu na koło urojone w nieskończoności.

4. Dwie kule przenikają się podług krzywej rzędu czwartego, która się składa z dwu kół, jedno schodzi się z kołem urojonem w nieskończoności, a drugie leży w skończoności i jest rzeczywiste lub urojone.

Dwie kule stykają się tedy w dwu punktach urojonych, w których koła przenikania przecinają się.

Powierzchnia rozwijalna, opisana na dwu kulach składa się z dwu powierzchni stożkowych obrotowych, których wierzchołki (środki podobieństwa) leżą na prostej łączącej środki tych kul.

5. Niech będą dane dwa układy w przestrzeni Σ i Σ_1 , środkowo kolineacyjne, których związek wyznacza środek O , płaszczyzna kolineacji Π^k

i płaszczyzna ϱ , odpowiadająca płaszczyźnie ϱ_1^∞ układu Σ_1 , leżącej w nieskończoności.

Przetnijmy kulę K układu Σ prostą l w punktach A i B , to kuli K odpowiada w układzie Σ_1 powierzchnia Π^2 , którą prosta l_1 , odpowiadająca prostej l , przecina w dwu punktach A_1 i B_1 ; powierzchnia Π^2 jest tedy rzędu drugiego.

Kołom $k, k', \dots$ leżącym na kuli i na płaszczyznach $\pi, \pi', \dots$ odpowiadają kolineacyjnie krzywe rzędu drugiego, leżące na powierzchniach stożkowych $(O, k), (O, k'), \dots$ i na płaszczyznach odpowiednich $\pi_1, \pi'_1, \dots$ układu Σ_1 . Kołom zaś $k'', \dots$ leżącym na płaszczyznach, równoległych do płaszczyzny kolineacji odpowiadają w układzie Σ_1 koła $k''_1, \dots$

Jeżeli przez koło k'' , przesuniemy dowolną kulę K'' i wyznaczmy krzywą przenikania się powierzchni Π^2 i K'' , natenczas otrzymamy krzywą rzędu czwartego, która się składa z koła k'' i z krzywej rzędu drugiego, leżącej na kuli K'' , a więc z drugiego koła. A zatem:

Na powierzchni odpowiadającej kolineacyjnie kuli znajdują się dwa układy kół; koła jednego i drugiego układu leżą na płaszczyznach równoległych.

Płaszczyzny styczne, równoległe do płaszczyzn, na których leżą koła powierzchni Π^2 , stykają się z tą powierzchnią w czterech punktach, które nazywamy pępkami powierzchni.

6. Kula K może zajmować względem płaszczyzny wzajemnej ϱ różne położenia.

a) Jeżeli płaszczyzna ϱ niema z kulą K żadnego punktu wspólnego, natenczas wszystkim kołom, leżącym na kuli i na płaszczyznach, nachylonych do płaszczyzny kolineacji, odpowiadają elipsy; wszystkim zaś kołom, leżącym na kuli i na płaszczyznach, równoległych do płaszczyzny kolineacji odpowiadają koła.

W tym przypadku odpowiada tedy kuli K układu Σ powierzchnia Π^2 , którą można przeciąć tylko podług elips lub kół. Taką powierzchnię nazywamy elipsoidą.

b) Jeżeli kula K styka się z płaszczyzną ϱ w punkcie R , natenczas punkt odpowiedni R_1^∞ w układzie Σ_1 leży w nieskończoności, kołom tedy, leżącym na kuli K i przechodzącym przez punkt R , odpowiadają w układzie Σ_1 parabole; a wszystkim innym kołom odpowiadają elipsy lub koła, stosownie do tego czy płaszczyzny tych kół są nachylone do płaszczyzny kolineacji, czy też do tej płaszczyzny są równoległe.

Powierzchnię, którą można przeciąć tylko podług parabol, elips lub kół nazywamy paraboloidą eliptyczną.

Poprowadźmy przez środek kolineacji O płaszczyznę (O, r) , prostopadłą do promienia OR i przesunmy przez prostą „ r “, podług której płaszczyzny ϱ i (O, r) przecinają się, płaszczyznę styczną (r, A) do kuli K , to płaszczyźnie (r, A) odpowiada w układzie Σ_1 płaszczyzna π^1 , równoległa do (O, r) , a punktowi styczności A płaszczyzny (O, r) z kulą K odpowiada punkt A_1 , leżący na paraboloidzie, przez który przechodzi prosta $A_1 R_1^\infty$, prostopadła do płaszczyzny stycznej π^1 , poprowadzonej do paraboloidy w punkcie A_1 .

Prostą $A_1 R_1^\infty$ nazywamy osią paraboloidy eliptycznej.

Płaszczyzny, prostopadłe do osi, przecinają się z paraboloidą podług elips podobnych i podobnie położonych, których środki leżą na osi, płaszczyzny tedy przesunięte przez oś A_1, R_1^∞ i przez osi owych krzywych są płaszczyznami głównymi paraboloidy. Trzecia płaszczyzna główna schodzi się z płaszczyzną, leżącą w nieskończoności.

c) Jeżeli płaszczyzna σ przecina się z kulą K podług koła „ k “, natenczas kołom, leżącym na kuli odpowiadają w układzie Σ , hiperbole, parabole, elipsy lub koła, stosownie do tego czy płaszczyzny, na których te koła leżą przecinają się z kołem „ k “ w punktach rzeczywistych, stykają się z tem kołem, nie mają z kołem „ k “ żadnych wspólnych punktów rzeczywistych, albo są równoległe do płaszczyzny kolineacji.

Kołu „ k “ odpowiada na powierzchni Π^2 , kolineacyjnej z kulą K , krzywa leżąca w nieskończoności c^2_∞ .

Powierzchni stożkowej tedy (M, k) , opisanej na kuli K wzdłuż koła k , odpowiada stożek (M_1, c^2_∞) , którego płaszczyzny styczne są płaszczyznami asymptotycznymi powierzchni Π^2 . Płaszczyzna σ dzieli kulę K na dwie części, każdej z tych części odpowiada część powierzchni Π^2 rozciągająca się do nieskończoności.

Powierzchnię, którą płaszczyzny przecinają podług hiperbol, parabol, elips i kół, która się składa z dwu części i posiada stożek asymptotyczny rzędu drugiego, nazywamy hiperboloidą o dwu powłokach.

Punkt M jest biegunem płaszczyzny σ ze względu na kulę K , punkt M_1 , tedy jako biegun płaszczyzny w nieskończoności ze względu na hiperboloidę o dwu powłokach jest środkiem tej powierzchni.

Płaszczyzna Π^1 , przesunięta przez wierzchołek M stożka (M, k) przecina się z kulą K podług koła k^1 a ze stożkiem podług dwu prostych MP i MQ ; w układzie Σ_1 odpowiada kołu k^1 hiperbola, a prostym MP i MQ odpowiadają asymptoty tej krzywej. Płaszczyzny tedy, przesunięte przez środek hiperboloidy, przecinają się z tą powierzchnią podług hiperbol, a ze stożkiem asymptotycznym podług asymptot tych krzywych.

7. Przetnijmy hiperboloidę o dwu powłokach i stożek asymptotyczny tej powierzchni płaszczyzną Π podług krzywych c_h^2 i c_s^2 , poprowadźmy następnie przez środek S krzywej c_h^2 na płaszczyźnie Π dowolną prostą i wyznaczmy punkta przecięcia się A i B tudzież C i D tejże z krzywymi c_h^2 i c_s^2 , to odcinki AC i BD są, jak wiadomo, równe; punkt S jest tedy wspólnym środkiem krzywych homotetycznych c_h^2 i c_s^2 . A zatem:

Płaszczyzny przecinają się z hiperboloidą i ze stożkiem asymptotycznym tej powierzchni podług krzywych spółśrodkowych podobnych i podobnie położonych.

Płaszczyzna π przecina się tedy z hiperboloidą o dwu powłokach podług hiperboli, parabol lub elipsy, stosownie do tego czy płaszczyzna π^1 , przesunięta przez środek M_1 powierzchni, przecina się ze stożkiem asymptotycznym podług dwu tworzących rzeczywistych, czy jest płaszczyzną styczną tego stożka, albo nie posiada ze stożkiem asymptotycznym żadnych tworzących wspólnych.

Osi stożka asymptotycznego hiperboloidy są zarazem osiami tej powierzchni; jedna z osi jest rzeczywista a dwie są urojone.

8. Płaszczyzna styczna π , poprowadzona w punkcie S do hiperboloidy o dwu powłokach, przecina się ze stożkiem asymptotycznym tej powierzchni

podług krzywej rzędu drugiego, której środkiem jest punkt S ; proste bowiem, poprowadzone przez punkt S na płaszczyźnie Π przecinają się ze stożkiem asymptotycznym w punktach, symetrycznych względem S .

9. Opiszmy z punktu W na kuli K , której odpowiada kolineacyjnie powierzchnia Π^2 , stożek i wyznaczmy krzywą c^2 , podług której płaszczyzna kolineacji π_k przecina się z tym stożkiem, to punkta przecięcia się F_1 i F_2 płaszczyzny Π_k z prostymi OP i OP' , łączącymi środek kolineacji O z punktami przecięcia się P i P' kuli z prostą, przechodzącą przez środek tejże i prostopadłą do płaszczyzny kolineacji, są ogniskami krzywej c^2 . Punktem P i P' odpowiadają na powierzchni Π^2 pępki. A zatem:

Jeżeli z dowolnego punktu opiszemy stożek na powierzchni krzywokreślniej rzędu drugiego i przetniemy ten stożek płaszczyzną π , równoległą do płaszczyzn, na których przekroje kołowe tej powierzchni leżą, natenczas punkta przecięcia się płaszczyzny π z prostymi, łączącymi wierzchołek stożka z pępkami, leżącymi na płaszczyznach równoległych do płaszczyzny π są ogniskami krzywej przekroju.

10. Poprowadźmy w punkcie A , leżącym na powierzchni rzędu drugiego, płaszczyznę styczną do tej powierzchni, i wyznaczmy prostą l , podług której ta płaszczyzna przecina się z płaszczyzną główną. Punktem A odpowiada punkt A_1 , symetryczny z A ze względu na płaszczyznę główną; płaszczyzna styczna tedy, poprowadzona do powierzchni w punkcie A_1 przechodzi przez prostą l . Proste l i AA_1 są biegunowo sprzężone ze względu na powierzchnię, punkt A' tedy, w którym prosta AA_1 przecina się z płaszczyzną główną, jest biegunem prostej l ze względu na krzywą, podług której płaszczyzna główna przecina się z powierzchnią.

11. Jeżeli środek S kuli K , której odpowiada kolineacyjnie powierzchnia rzędu drugiego, leży na prostej wyprowadzonej ze środka kolineacji prostopadłe do płaszczyzny kolineacji, natenczas kołom, leżącym na płaszczyznach, przesuniętych przez prostą OS odpowiadają w układzie Σ_1 hiperbole, parabole albo elipsy przystające, stosownie do tego czy płaszczyzna σ przecina się z kulą podług koła rzeczywistego, czy się styka z tą kulą, czy też przecina się z kulą K podług koła urojonego.

Kołom, leżącym na kuli K i na płaszczyznach równoległych do płaszczyzny kolineacji, odpowiadają w układzie Σ_1 koła, których środki leżą na prostej OS .

Takie powierzchnie rzędu drugiego można utworzyć, obracając hiperbole około osi rzeczywistej, parabole około osi, elipsę około osi wielkiej lub małej.

Przez obrót hiperboli około osi rzeczywistej otrzymujemy hiperboloide o dwu powłokach obrotową, przez obrót paraboli około osi otrzymujemy paraboloidę eliptyczną obrotową, przez obrót elipsy około osi wielkiej otrzymujemy elipsoidę obrotową wydłużoną (dwuogniskową), a przez obrót elipsy około osi małej otrzymujemy elipsoidę obrotową spłaszczoną (sferoidę).

12. Z łatwością można wykazać, że wszystkie powierzchnie rzędu drugiego krzywokreślnie i trójosiowe można zamienić za pomocą powinowactwa na powierzchnie obrotowe.

Jakoż przyjmijmy, że a , b i c są osiami powierzchni Π^2 , a nadto, że płaszczyzny, prostopadłe do osi a , przecinają się z tą powierzchnią podług elips.

Płaszczyznę (a , b) uważajmy za płaszczyznę powinowactwa, kierunek powinowactwa niech wskazuje prosta prostopadła do płaszczyzny (a , b), a stosunek $\frac{c}{b}$ niech będzie cechą powinowactwa.

Elipsom, leżącym na powierzchni trójosiowej Π^2 i na płaszczyznach prostopadłych do osi „ a “, odpowiadają koła, zakreślone ze środków tych elips promieniami, równymi osiom równoległym do prostej b . Te koła leżą na powierzchni obrotowej Π_1^2 , powinowatej z powierzchnią trójosiową Π^2 .

Prostym i płaszczyznom równoległym, utworom jednokreślnym, krzywym podobnym i podobnie położonym w układzie Σ_1 odpowiadają w układzie Σ , powinowatym z Σ_1 , proste i płaszczyzny równoległe, utwory jednokreślne, krzywe podobne i podobnie położone; twierdzenia tedy niemiarowe o powierzchniach rzędu drugiego obrotowych można przenieść na powierzchnie trójosiowe, powinowate z owymi powierzchniami obrotowymi; a wyniki zagadnień niemiarowych, otrzymane na powierzchniach rzędu drugiego obrotowych, można przenieść za pomocą powinowactwa na odpowiednią powierzchnię trójosiową.

13. a) Płaszczyzny, prostopadłe do osi obrotu „ a “ powierzchni obrotowych, przecinają się z temi powierzchniami podług kół, których środki leżą na prostej a . Te koła nazywamy równoleżnikami.

b) Płaszczyzny, przesunięte przez oś obrotu „ a “ przecinają się z powierzchnią podług krzywych przystających, które nazywamy południkami.

c) Przez każdy punkt A , leżący na powierzchni obrotowej, przechodzi jeden równoleżnik c_r i jeden południk c_p ; płaszczyzna styczna, poprowadzona do powierzchni w punkcie A , przechodzi przez styczną s_r , poprowadzoną w punkcie A do równoleżnika i przez styczną s_p , poprowadzoną w tymże punkcie do południka.

Styczna s_r jest prostopadła do promienia styczności równoleżnika i do osi obrotu „ a “, leży bowiem na płaszczyźnie prostopadłej do tej osi; płaszczyzna styczna tedy (s_r , s_p), poprowadzona w punkcie A do powierzchni obrotowej, jest prostopadła do płaszczyzny południka, na której punkt A leży.

d) Płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni obrotowej w punktach A , B ,... leżących na południku (a , A), są prostopadłe do płaszczyzny tego południka, powłóczą tedy walec o tworzących prostopadłych do płaszczyzny (a , A).

e) Poprowadźmy w punkcie A styczną s_p i normalną n_p do południka i wyznaczmy punkta przecięcia się W i W_1 tych prostych z osią „ a “, zakreślmy następnie z punktu W_1 jako środka koło k promieniem W_1A i obróćmy południk z prostymi WA , W_1A i z kołem k około osi „ a “, to natenczas styczna s_p opisze stożek, stykający się z powierzchnią obrotową wzdłuż równoleżnika c_r , na którym punkt A leży, normalna n_p opisze stożek prostopadły do powierzchni, a koło k opisze kulę, która się styka z powierzchnią obrotową wzdłuż równoleżnika c_r .

14. a) Elipsoida dwuogniskowa i sferoida są powinowate z kulami zakreślonemi na równikach tych powierzchni. Kierunki powinowactw są prostopadłe do płaszczyzn równików, a cechy powinowactw są równe stosunkom osi elips przez których obrót elipsoidy powstają.

b) Opiszmy na paraboloidzie eliptycznej obrotowej Π^2 stożek (O , c_r), stykający się z tą powierzchnią wzdłuż równoleżnika c_r , i wpiszmy w ten

stożek taką kulę K , któraby się stykała z paraboloidą w wierzchołku A tej powierzchni, to Π^2 i K są powierzchniami środkowo kolineacyjnymi.

Wierzchołek O stożka opisanego jest środkiem, płaszczyzna π^k , przesunięta przez wierzchołek A i prostopadła do osi „ a ” powierzchni jest płaszczyzną kolineacji, a płaszczyzna przesunięta przez punkt Z_1 , w którym prosta OA przecina się z kulą K i równoległa do π^k jest płaszczyzną, której w układzie paraboloidy odpowiada płaszczyzna w nieskończoności.

c) Wpiszmy w stożek asymptotyczny hiperboloidy obrotowej o dwu powłokach Π^2 kulę K , która się styka z powierzchnią Π^2 w wierzchołku A , to powierzchnie Π^2 i K są środkowo kolineacyjne. Środek O hiperboloidy jest środkiem kolineacji, płaszczyzna π^k , przesunięta przez punkt A i prostopadła do osi obrotu „ a ”, jest płaszczyzną kolineacji, a płaszczyzna, na której leży koło styczności stożka asymptotycznego z kulą K jest płaszczyzną wzajemną układów kolineacyjnych.

U waga: Za pomocą podwójnego powinowactwa można zamienić elipsoidę trójosiową na kulę, a zapomocą powinowactwa i kolineacji środkowych można zamienić paraboloidę eliptyczną i hiperboloidę o dwu powłokach na kulę.

15. Wpiszmy w powierzchnię obrotową rzędu drugiego Π^2 kulę K , która się styka z tą powierzchnią wzdłuż koła „ k ”, leżącego na płaszczyźnie π , i przetnijmy obie powierzchnie płaszczyzną π^1 , to koło przekroju k_1 kuli K i krzywa przekroju c_1^2 powierzchni Π^2 stykają się w punktach A i B , leżących na prostej l , podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się, bez względu na to czy te punkta są rzeczywiste czy urojone.

Szeregi inwolucyjne biegunów sprzężonych, leżących na prostej l ze względu na krzywe k i c_1^2 nakrywają się, punkta A i B są bowiem punktami podwójnymi tychże.

Płaszczyzna styczna π^2 , poprowadzona do kuli K , styka się z tą kulą w punkcie F , który uważać należy za koło o nieskończenie małym promieniu, i przecina się z powierzchnią Π^2 podług krzywej rzędu drugiego c_2^2 .

Na prostej „ m ”, podług której płaszczyzny π i π^2 przecinają się, leży spólny szereg inwolucyjny eliptyczny biegunów sprzężonych ze względu na koło „ F ” i na krzywą c_2^2 ; spólny pęk biegunowych sprzężonych, którego wierzchołek leży w punkcie F jest tedy pękiem inwolucyjnym eliptycznym prostokątnym; a zatem punkt F jest ogniskiem krzywej c_2^2 .

Ogniska krzywej przekroju dowolnej powierzchni obrotowej rzędu drugiego schodzą się z punktami styczności płaszczyzny przecinającej z kulami wpisanymi w tę powierzchnię.

16. Zagadnienie 1. Wyznaczyć punkta przecięcia się prostej l (l' , l'') z kulą K (rys. 78).

Rozwiązanie: Walce opisane na kuli i prostopadłe do płaszczyzny poziomej względnie pionowej rzutów przecinają się z temi płaszczyznami podług kół K' i K'' , o promieniach równych promieniowi kuli, te koła ograniczają tedy rzuty poziomy i pionowy kuli.

Przesuńmy przez prostą „ l ” płaszczyznę π , prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, i wyznaczmy punkta przecięcia się A' i B' śladu poziomego π_h z rzutem poziomym K' , to odcinek $A'B'$ jest średnicą koła k_1 , podług któ-

rego płaszczyzna π przecina się z kulą K ; środek M (M' , M''), tego koła leży na prostej, wyprowadzonej ze środka O (O' , O'') kuli prostopadłe do płaszczyzny π .

Jeżeli tedy wykonamy kład płaszczyzny π wraz z kołem k_1 i z prostą „ l ” na płaszczyznę poziomą rzutów i wyznaczmy punkta przecięcia się (D_1) i (D_2) kładów (k_1) i (l), jeżeli następnie sprowadzimy płaszczyznę π do pierwotnego położenia, natenczas otrzymamy punkta przecięcia się D_1 (D_1' , D_1'') i D_2 (D_2' i D_2'') prostej l z kulą K .

Zagadnienie 2. Wykreślić rzut środkowy kuli, której środek M leży na prostej l (T , Z'), a której promień „ r ” jest równy danemu odcinkowi (rys. 79).

Rozwiązanie: Przesuńmy przez środek rzutów O i przez punkt M płaszczyznę, prostopadłą do tła, to ślady tej płaszczyzny schodzą się z prostą, która łączy punkt główny O_1 z rzutem M' środka kuli. Wykonajmy następnie kład płaszczyzny OO_1M na tło, i zakresłmy z kładu (M) promieniem „ r ” koło (k), poprowadźmy następnie z kładu (O) środka rzutów styczne OP' i OQ' do (k), to punkta przecięcia się tych stycznych z prostą O_1M' są wierzchołkami krzywej rzędu drugiego c^2 , która ogranicza rzut środkowy kuli.

Poprowadźmy przez (M) prostą (A) (B), prostopadłą do prostej O_1M' , i wyznaczmy punkta przecięcia się tej prostej z kładem (k), połączmy następnie punkta (A) i (B) z kładem (O) środka rzutów, to proste (O) (A) i (O) (B) przecinają się z prostą O_1M' w ogniskach F' i F_1' krzywej c^2 .

Zagadnienie 3. Wyznaczyć przekrój kuli dowolną płaszczyzną π (π_h , π_v) (rys. 80).

Rozwiązanie. Poprowadźmy przez środek M kuli K płaszczyznę π^1 (π_h^1 , π_v^1), prostopadłą do płaszczyzny π i wyznaczmy prostą l , podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się, to prosta „ l ” jest osią symetrii prostokątnej koła przekroju K , albowiem płaszczyzna π^1 jest płaszczyzną symetrii prostokątnej ze względu na kulę K i na płaszczyznę π .

Aby wyznaczyć punkta przecięcia się prostej l z kulą K , obróćmy tę prostą około osi p , przechodzącej przez środek kuli i prostopadłej do płaszczyzny poziomej rzutów, tak aby po obrocie leżała na płaszczyźnie π^2 równoległej do płaszczyzny poziomej rzutów i wyznaczmy punkta przecięcia się A_1 i B_1 prostej l_1 , z którą l po obrocie się schodzi, i koła, leżącego na płaszczyźnie π^2 ; jeżeli następnie obrotem wstecznym sprowadzimy prostą l_1 do jej pierwotnego położenia, natenczas otrzymamy punkta przecięcia się A i B prostej l z kulą.

Podzielmy odcinek AB punktem S na dwie równe części i przesuńmy przez ten punkt płaszczyznę π^3 , równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów, wyznaczmy następnie koło k_3 i prostą m podług której płaszczyzny π i π^3 przecinają się, to punkta przecięcia się C i D prostej m z kołem k_3 leżą na kole przekroju k .

Odcinki $A'B'$ i $C'D'$ są osiami rzutu poziomego koła k , odcinki zaś $A''B''$ i $C''D''$ są średnicami sprzężonymi rzutu pionowego koła przekroju.

Zagadnienie 4. Przez prostą l (l' , l'') poprowadzić płaszczyzny styczne do kuli K (rys. 81.).

Rozwiązanie: Walec, którego tworzące są równoległe do prostej l , styka się z kulą K podług koła wielkiego k , leżącego na płaszczyźnie prostopadłej do prostej l . Płaszczyzny styczne, poprowadzone do tego walca są płaszczyznami stycznymi kuli.

Poprowadźmy tedy przez środek O kuli K płaszczyznę π , prostopadłą do l , wyznaczmy koło wielkie K , podług którego ta płaszczyzna przecina się z kulą, i poprowadźmy z punktu przecięcia się D prostej l z płaszczyzną π styczne t_1 i t_2 do koła k , to płaszczyzny, przesunięte przez proste l i t_1 tudzież l i t_2 są płaszczyznami stycznymi kuli w punktach A i B , w których styczne t_1 i t_2 z kołem wielkim k się stykają.

Celem wyznaczenia stycznych t_1 i t_2 , należy wykonać kład płaszczyzny π na jedną z płaszczyzn rzutów.

Zagadnienie 5. Wyznaczyć płaszczyznę biegunową punktu P (P' , P'') ze względu na kulę (rys. 82.).

Rozwiązanie: Przesunijmy przez punkt P i przez środek O kuli K płaszczyznę π , prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów i obróćmy tę płaszczyznę około prostej p , poprowadzonej przez środek O i prostopadłej do płaszczyzny poziomej rzutów tak, aby się zeszyła z płaszczyzną π^1 , równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów, wyznaczmy następnie biegunową p_1 punktu P_1 , z którym P po obrocie się schodzi ze względu na koło, leżące na płaszczyźnie π^1 i sprowadźmy punkt P^1 i biegunową p_1 do płaszczyzny π , to płaszczyzna π^2 przesunięta przez prostą „ p ” prostopadłe do prostej PO jest płaszczyzną biegunową punktu P ze względu na kulę K .

Zagadnienie 6. Przez punkt A , leżący poza obrębem kuli K , poprowadzić takie płaszczyzny styczne do tej powierzchni, któreby były nachylone do płaszczyzny poziomej rzutów pod kątem α .

Rozwiązanie: Poprowadźmy styczną π_r do rzutu pionowego K'' danej kuli nachylonej do osi x pod kątem α i uważajmy prostą π_r za ślad pionowy płaszczyzny π , prostopadłej do płaszczyzny pionowej rzutów, a nachylonej pod kątem α do płaszczyzny poziomej rzutów. Obróćmy następnie płaszczyznę π około średnicy „ a ”, prostopadłej do płaszczyzny poziomej rzutów, to natenczas otrzymamy stożek obrotowy, którego wierzchołek W jest punktem przecięcia się prostej a z płaszczyzną π , a którego ślad poziomy k_1 jest kołem zakreślonym ze rzutu O' środka kuli promieniem równym odległości punktu O' od śladu poziomego π_h płaszczyzny π .

Płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni stożkowej (W , k_1) przez punkt A czynią zadość warunkom zagadnienia.

Zagadnienie 7. Wyznaczyć płaszczyzny styczne, poprowadzone do kuli, które są nachylone do płaszczyzny poziomej rzutów pod kątem α , a do płaszczyzny pionowej rzutów pod kątem β (rys. 83.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy styczne π^1 i π^2 do rzutu pionowego K'' kuli K , nachylonej do osi x pod kątem α , i wyznaczmy punkta styczności A'' i B'' tychże; płaszczyzny styczne, poprowadzone do kuli, w punktach leżących na równoleżnikach k_1 i k_2 , które opisują punkta A i B , są nachylone do płaszczyzny poziomej rzutów pod kątem α .

Poprowadźmy następnie do rzutu poziomego K' kuli K styczne π^3 i π^4 , nachylone do osi x pod kątem β , i wyznaczmy punkta styczności C' i D' tychże; płaszczyzny styczne poprowadzone do kuli w punktach, leżących na kołach k_3 i k_4 , które opisują punkta C i D na kuli i na płaszczyznach równoległych do płaszczyzny pionowej rzutów, są nachylone do płaszczyzny pionowej rzutów pod kątem β .

Koła k_1 i k_2 przecinają się z kołami k_3 i k_4 w ośmiu punktach, które parami mogą być urojone. Płaszczyzny styczne, poprowadzone do kuli w tych punktach, są nachylone do płaszczyzny poziomej rzutów pod kątem α , a do płaszczyzny pionowej rzutów pod kątem β .

Zagadnienie 8. Przez punkt A poprowadzić wspólne płaszczyzny styczne do kul K i K_1 (rys. 84.).

Rozwiązanie: Wiadomo, że dwie kule K i K_1 są powierzchniami homotetycznymi; środki podobieństwa tych powierzchni W i W_1 są wierzchołkami stożków, których płaszczyzny styczne stykają się z obiema kulami. Punkta W i W_1 leżą na prostej OO_1 , łączącej środki kul K i K_1 .

Poprowadźmy tedy do rzutów poziomych K' i K_1' wspólne styczne zewnętrzne π^1 i π^2 i wspólne styczne wewnętrzne π^3 i π^4 i uważajmy je za ślady poziome wspólnych płaszczyzn stycznych, poprowadzonych do kul i prostopadłych do płaszczyzny poziomej rzutów, to ślady π^1 i π^2 tudzież π^3 i π^4 przecinają się z prostą $O'O_1$ w punktach W' i W'_1 , które są rzutami poziomymi środków podobieństwa kul K i K_1 .

Rzuty pionowe W'' i W''_1 leżą na prostej $O''O''_1$.

Jeżeli tedy połączymy punkt A z wierzchołkami W i W_1 i wyznaczymy w sposób wyłożony w zagadnieniu 4. Płaszczyzny styczne, poprowadzone do kuli i przechodzące przez AW i AW_1 , natenczas te płaszczyzny są również płaszczyznami stycznymi poprowadzonymi do kuli K_1 . Dwie kule mają tedy cztery płaszczyzny styczne wspólne.

Zagadnienie 9. Wyznaczyć płaszczyzny styczne, poprowadzone do trzech kul K , K_1 i K_2 .

Rozwiązanie. Wyznaczmy środki podobieństwa zewnętrzne A , A_1 i A_2 tudzież środki podobieństwa wewnętrzne B , B_1 i B_2 kul K i K_1 , K i K_2 , K_1 i K_2 i połączmy punkta A i A_1 , A i B , A i B_1 , A i B_2 , to płaszczyzny styczne, poprowadzone do kuli K i przechodzące przez proste AA_1 , AB , AB_1 i AB_2 są płaszczyznami stycznymi, poprowadzonymi do wszystkich trzech kul. Takich płaszczyzn jest tedy ośm.

Zagadnienie 10. Przez prostą l przesunąć taką płaszczyznę, która przecina się z kulą K podług koła o danym promieniu „ r ”.

Rozwiązanie. Przesunijmy przez środek O kuli K płaszczyznę π , prostopadłą do prostej l i wyznaczmy punkt przecięcia się tej prostej z π , a nadto punkt A , w którym prosta OD , łącząca środek kuli O z punktem D przecina się z kulą K , zakreślmy następnie z punktu D jako środka na płaszczyźnie (O , l) koło k promieniem DO a z punktu O jako środka koło k_1 promieniem równym drugiej przyprostokątnej trójkąta, którego jedna przyprostokątna jest równa odcinkowi „ r ” a którego przeciwprostokątna jest równa promieniowi OA kuli K i wyznaczmy punkta przecięcia się B i C kół k i k_1 , to płaszczyzny (l , B) i (l , C) przecinają się z kulą K podług kół, o promieniach równych odcinkowi „ r ”.

Zagadnienie 11. Wyznaczyć środek kuli K , która się styka z kulą K_1 i z płaszczyzną π w punkcie A .

Rozwiązanie. Punkt styczności P dwu kul K i K_1 jest środkiem podobieństwa tych powierzchni.

Wyprowadźmy w punkcie A prostą „ p ”, prostopadłą do płaszczyzny π i przesunijmy przez tę prostą i przez środek O_1 kuli K_1 płaszczyznę π^1 . Środek

O kuli leży na prostej „ p “. Zakreślmy z punktu O , którego dotąd nie znamy koło k promieniem OO_1 , to punkta przecięcia się B i C tego koła z prostą „ p “ leżąc będą powyżej i poniżej punktu A w odległości równej promieniowi O_1P kuli K_1 . Jeżeli tedy odcinki O_1B i O_1C podzielimy na dwie równe części i w punktach dzielących wyprowadzimy na płaszczyźnie π^1 prostopadłe do tych odcinków, to natenczas w punktach przecięcia się tychże z prostą „ p “ otrzymamy środki O i O' kul, które się stykają z kulą K_1 i z płaszczyzną π w punkcie A .

Zagadnienie 12. Wykreślić kulę K , która przechodzi przez punkta A i B i styka się z płaszczyznami π^1 i π^2 .

Rozwiązanie: Przesuńmy przez punkt C , dzielący na dwie równe części odcinek AB płaszczyznę π^3 , prostopadłą do prostej AB i podzielmy płaszczyznę π^4 kąt zawarty między płaszczyznami π^1 i π^2 na dwie równe części, to na prostej l , podług której płaszczyzny π^3 i π^4 przecinają się, leży środek kuli, która czyni zadość warunkom zagadnienia.

Wyznamy punkt przecięcia się D prostej AB z płaszczyzną π^1 , to po tęga tego punktu ze względu na kulę K jest równa iloczynowi $DA \cdot DB$. Jeżeli tedy wyznaczmy rzut prostokątny l' prostej l na płaszczyznę π^1 i zakreślmy z punktu D koło promieniem $\sqrt{DA \cdot DB}$, natenczas punkta przecięcia się P' i Q' tego koła z prostą l' są punktami styczności kul, czyniących zadość warunkom zagadnienia. Środki tych kul schodzą się z punktami przecięcia się prostej l z prostymi, wyprowadzonymi z punktów P' i Q' prostopadłe do płaszczyzny π^1 .

Rozwiązania rzeczywiste tego zagadnienia są tylko wówczas możliwe, jeżeli płaszczyzny π^1 i π^2 nie przecinają się z odcinkiem AB .

Zagadnienie 13. Wyznaczyć punkta przecięcia się elipsoidy obrotowej π^2 dowolną prostą l (rys. 85.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że oś obrotu „ a “ powierzchni π^2 jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów. Zakreślmy na równiku k powierzchni kulę K_1 , spółśrodkową z daną powierzchnią, to K_1 i π^2 są powinowate; środek tego powinowactwa leży w nieskończoności na prostej, prostopadłej do płaszczyzny poziomej rzutów; płaszczyzna powinowactwa schodzi się z płaszczyzną równika, a stosunek osi obrotu „ a “ do promienia równika jest cechą powinowactwa.

Przy tej zamianie powierzchni π^2 na kulę K_1 nie zmieniają się rzuty poziome elementów, należących do układu elipsoidy, zmieniają się jednak rzuty pionowe tych elementów.

Aby otrzymać zmieniony rzut pionowy l'' , prostej l , połączmy dowolny punkt P'' , leżący na prostej l'' , z punktem A'' , w którym rzut a'' przecina się z elipsą, ograniczającą rzut pionowy powierzchni π^2 , poprowadźmy przez P'' prostą $P''P''_1$, prostopadłą do śladu π''^k , wyznaczmy punkt przecięcia się P''_1 tej prostej z prostą $A''_1T''_1$ i połączmy go z punktem T''_1 , w którym prosta l'' przecina się ze śladem π''^k to natenczas otrzymamy zmieniony rzut pionowy l''_1 .

Wyznamy następnie w sposób wyłożony w zagadnieniu 1. punkta przecięcia się M_1 i N_1 prostej l_1 z kulą K_1 i przesunmy te punkta za pomocą prostych, prostopadłych do śladu pionowego płaszczyzny kolineacji, na prostą l , to otrzymane punkta M i N są punktami przecięcia się prostej l z elipsoidą obrotową.

Zagadnienie 14. Wyznaczyć osi przekroju elipsoidy obrotowej Π^2 płaszczyzną (rys. 86.).

Rozwiązanie. Oś obrotu AB elipsoidy obrotowej jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów, równik „ k “ o średnicy CD , leży na płaszczyźnie π_k .

Płaszczyzna π^1 , przesunięta przez oś AB i prostopadła do płaszczyzny π , jest płaszczyzną symetrii prostokątnej ze względu na powierzchnię Π^2 , a prosta „ m “, podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się, jest osią symetrii prostokątnej ze względu na krzywą c , podług której płaszczyzna π przecina się z powierzchnią.

Obróćmy płaszczyznę π^1 oraz prostą m około osi AB tak, aby się zeszyła z płaszczyzną π^2 , równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów, a prosta m z prostą m_1 i wyznaczmy za pomocą powinowactwa między elipsą $A''C''B''D''$ i kołem k_1 zakreślonym na średnicy $C''D''$, punkta przecięcia się M''_1 i N''_1 prostej m_1 z ową elipsą; obróćmy następnie te punkta tak, aby po obrocie leżały na prostej „ m “, to natenczas otrzymamy rzuty pionowe M'' i N'' wierzchołków krzywej przekroju, leżących na osi „ m “; rzuty poziome leżą na śladzie poziomym π''_h płaszczyzny π^1 .

Poprowadźmy następnie przez punkt S dzielący na dwie równe części odcinek MN , płaszczyznę π^3 , równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów, i wyznaczmy za pomocą powinowactwa punkta E'' i G'' , w których ślad pionowy π^3 przecina się z elipsą $A''C''B''D''$, to koło k_2 , zakreślone na płaszczyźnie π^3 z punktu S jako środka z promieniem SG jest przekrojem powierzchni π^2 płaszczyzną π^3 .

Prosta „ n “, podług której płaszczyzny π i π^3 przecinają się, jest drugą osią krzywej „ c “, a punkta przecięcia się Q i R tej prostej z kołem k_1 są wierzchołkami tejże.

Zagadnienia: Rozwiązać za pomocą powinowactwa elipsoidy z kulą następujące zagadnienia:

a) Poprowadzić w punkcie P , który leży na elipsoidzie obrotowej, a którego rzut pionowy P'' jest dany, płaszczyznę styczną do tej powierzchni.

b) Wyznaczyć płaszczyzny styczne elipsoidy obrotowej, równoległe do płaszczyzny π .

c) Poprowadzić płaszczyzny styczne do elipsoidy obrotowej, równoległe do prostej l , i wyznaczyć miejsce geometryczne punktów styczności tych płaszczyzn z powierzchnią.

Zagadnienie 15. Wyznaczyć ślad poziomy stożka, opisanego z punktu P (P' , P'') na elipsoidzie obrotowej Π^2 (rys. 87.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że elipsa, przez obrót której powierzchnia π^2 powstaje, jest wyznaczona osiami AB i CD ; oś obrotu AB jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów, a oś CD jest równoległa do osi x .

Kula K zakreślona na średnicy CD jest powinowata z powierzchnią π^2 ; punktowi P'' układu elipsoidy odpowiada punkt P''_1 w układzie kuli.

Przesuńmy przez punkt P i przez prostą AB płaszczyznę π^1 , obróćmy ją wraz z punktami P i P_1 około osi AB , tak aby się zeszyła z płaszczyzną π^2 , równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów, to natenczas południk elipsoidy, leżącej na płaszczyźnie π^1 zejdzie się z południkiem głównym, leżącym na płaszczyźnie π^2 , punkt P schodzi się z punktem P_2 a punkt P_1 z punktem P_3 .

Opiszmy z punktu P_3 na kuli stożek i przetnijmy go płaszczyzną π^k na której równik powierzchni Π^2 leży, to natenczas otrzymamy krzywą rzędu drugiego „ c_1 ”; styczne s_2 i s_3 , poprowadzone z punktu P_3 do koła K'' , ograniczającego rzut pionowy kuli, przecinają się z płaszczyzną π^k w wierzchołkach M_2 i N_2 krzywej c_1 , a proste, łączące punkt P_3 z punktami A_1 i B_1 kuli, które odpowiadają wierzchołkom A i B elipsoidy, przecinają się z płaszczyzną π^k i w ogniskach F_4 i F_5 krzywej c_1 .

Krzywa c_1 leży na płaszczyźnie powinowactwa, zachodzącego między kulą K i elipsoidą Π^2 . Jeżeli tedy połączymy punkt P_2 z M_2 , N_2 , F_4 i F_5 i wyznaczmy ślady poziome M_1 , N_1 , F_2 i F_3 tych prostych, natenczas otrzymamy wierzchołki i ogniska krzywej, podług której płaszczyzna pozioma rzutów przecina się ze stożkiem, opisanym z punktu P_2 na elipsoidzie.

Jeżeli płaszczyznę π^2 wraz z punktami M_1 , N_1 , F_2 , F_3 przez obrót wsteczny sprowadzimy do płaszczyzny π^1 , natenczas otrzymamy wierzchołki M i N a nadto ogniska F i F_1 krzywej, podług której płaszczyzna pozioma rzutów przecina się z powierzchnią stożkową, opisaną z punktu P na elipsoidzie obrotowej.

Zagadnienie 16. Wyznaczyć rzuty elipsoidy obrotowej, którą opisuje elipsa w osiach AB i CD , jeżeli oś obrotu AB jest nachylona do obu płaszczyzn rzutów.

Rozwiązanie: Przesuńmy przez oś AB płaszczyznę π , prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów i wykonajmy kład tej płaszczyzny około rzutu poziomego $A'B'$, poprowadźmy następnie styczne (s_1) i (s_2) do kładu (c) południka, prostopadłe do prostej $A'B'$, to punkta przecięcia się M' i N' tych stycznych z rzutem $A'B'$ są wierzchołkami krzywej, ograniczającej rzut poziomy elipsoidy.

Opiszmy następnie na danej powierzchni walec wzdłuż równika i poprowadzimy doń płaszczyzny styczne, prostopadłe do płaszczyzny poziomej rzutów, to ślady poziome tych płaszczyzn są oddalone od prostej $A'B'$ o połowę średnicy CD równika; druga oś tedy rzutu poziomego powierzchni jest równa odcinkowi CD .

W podobny sposób można wyznaczyć osi krzywej, która ogranicza rzut pionowy elipsoidy obrotowej.

Zagadnienie 17. Wyznaczyć krzywą, ograniczającą rzut środkowy elipsoidy obrotowej, jeżeli oś obrotu AB tej powierzchni jest nachylona do tła (rys. 88.).

Rozwiązanie: Oś AB elipsoidy Π^2 leży na prostej l , wyznaczonej śladem tłowym T i śladem zbiegu Z' .

Przesuńmy przez środek rzutów O i przez prostą l (TZ') płaszczyznę i wykonajmy kład tejże i kład prostej l na tło, wykreślmy następnie kład (c) południka, leżącego na płaszczyźnie (O , l) i poprowadźmy z kładu $[O]$ środka rzutów O styczne $[O](N)$ i $[O](N)$ do krzywej (c), to punkta przecięcia się tychże M' i N' z rzutem TZ' osi l są punktami krzywej c_1 , ograniczającej rzut środkowy elipsoidy.

Płaszczyzny styczne, poprowadzone do elipsoidy obrotowej w punktach M i N , są prostopadłe do płaszczyzny (O , l), ślady zatem tych płaszczyzn łączą punkta M' i N' ze śladem zbiegu Z_0 prostych, prostopadłych do płaszczyzny (O , l).

Proste $Z_0 M'$ i $Z_0 N'$ są stycznymi poprowadzonymi do krzywej c_1 w punktach M' i N' .

Poprowadźmy przez środek S elipsoidy płaszczyznę π^1 (t_1 , z_1), prostopadłą do osi AB i opiszmy na równiku, leżącym na tej płaszczyźnie powierzchnię walcową.

Ślad zbiegu tworzących tej powierzchni schodzi się z punktem Z' . Ślady płaszczyzn stycznych, poprowadzonych przez punkt O do tego walca są stycznymi krzywej, ograniczającej rzut środkowy elipsoidy.

Poprowadźmy tedy przez punkt O prostą OZ' , równoległą do tworzących walca i wyznaczmy punkt przecięcia się D tej prostej z płaszczyzną π^1 (t_1 , z_1), to rzut środkowy D' schodzi się ze śladem Z' .

Aby wyznaczyć styczne poprowadzone do równika elipsoidy, przechodzące przez punkt D , wykonajmy kład płaszczyzny π^1 wraz z punktem D na tło i poprowadźmy z kładu (D) styczne (s_1) i (s_2) do kładu (r) równika, to rzuty środkowe s'_1 i s'_2 , są stycznymi, poprowadzonymi do rzutu r' , a zarazem do krzywej, ograniczającej rzut elipsoidy. Ta krzywa jest wyznaczona; znamy bowiem dwie styczne $Z_0 M'$, $Z_0 N'$, punkta styczności M' i N' tychże, a nadto styczne s'_1 i s'_2 tej krzywej.

Zagadnienie 19. Wyznaczyć punkta przecięcia się prostej l (l' , l'') z paraboloidą eliptyczną obrotową (rys. 89.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że oś obrotu AD paraboloidy Π^2 jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów. Wierzchołek A i punkt B wyznaczają w tym razie parabolę, przez której obrót powierzchnia Π^2 powstaje.

Poprowadźmy w punkcie B styczną OB do południka głównego paraboloidy i obróćmy ją około osi AD , wpiszmy następnie w tak otrzymany stożek kulę K , to pomiędzy powierzchniami π^2 i K zachodzi związek kolineacji środkowej.

Punkt O , w którym styczna BO przecina się z osią AD jest środkiem, punkt przecięcia się A_2 prostej OA z kulą odpowiada wierzchołkowi paraboloidy, płaszczyzna styczna π^2 , poprowadzona do kuli w drugim punkcie przecięcia się Z prostej OA z kulą K , jest płaszczyzną, której w układzie paraboloidy odpowiada płaszczyzna w nieskończoności.

Przez punkt przecięcia się T prostych odpowiednich AR_z i $A_1 R_1$ przechodzi płaszczyzna kolineacji π^k , równoległa do π^2 .

Wyznaczmy punkt przecięcia się T_1 (T_1' , T_1'') prostej l z płaszczyzną kolineacji π^k , a nadto punkt Z_1 (Z_1' , Z_1''), w którym prosta poprowadzona przez środek O , równoległa do prostej l , przecina się z płaszczyzną wzajemną π^2 , to prosta $T_1 Z_1$ odpowiada w układzie kuli K prostej l paraboloidy.

Jeżeli tedy sposobem, wyłożonym w zagadnieniu 1. wyznaczmy punkta przecięcia się M_1 i N_1 prostej TZ_1 z kulą K i rzucmy te punkta ze środka O na prostą l , natenczas otrzymamy punkta przecięcia się M i N prostej l z paraboloidą eliptyczną obrotową.

Zagadnienie 19. Wyznaczyć osi krzywej „ c ”, podług której płaszczyzna π (π_h , π_e) przecina się z paraboloidą obrotową (rys. 90).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, jak w zagadnieniu poprzednim, że oś AD powierzchni jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów i poprowadźmy w punkcie B'' styczną $B''O''$ do paraboli, która ogranicza rzut pionowy powierzchni.

Przesuńmy przez oś AD płaszczyznę π^2 , prostopadłą do płaszczyzny π , i wyznaczmy prostą „ m “, podług której te płaszczyzny przecinają się, to „ m “ jest osią krzywej przekroju „ c “.

Obróćmy płaszczyznę π^2 wraz z prostą „ m “ około osi AD tak, aby się zeszła z płaszczyzną π^3 , równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów, to rzut pionowy prostej „ m “, po dokonanych obrotach, zejdzie się z prostą „ m “.

Wyznamy następnie punkta przecięcia się „ M “, i „ N “, prostej „ m “, z rzutem pionowym południka głównego, a to zapomocą kolineacji środkowej między tym rzutem i kołem „ K “, i przeniesmy obrotem wstecznym punkta „ M “, i „ N “, na prostą „ m “, natenczas otrzymamy rzuty pionowe „ M “ i „ N “ wierzchołków krzywej przekroju „ c “, leżących na prostej „ m “.

Punkt „ S “ dzielący odcinek „ MN “ na dwie równe części, jest środkiem krzywej „ c “.

Przesuńmy przez ten punkt płaszczyznę π^3 , prostopadłą do osi „ AD “, i wyznaczmy za pomocą kolineacji punkta przecięcia się „ C “ i „ E “ śladu „ π^3 “, z parabola, ograniczającą rzut pionowy powierzchni, to koło „ k “, a zakreślone na średnicy „ CE “ jest przekrojem paraboloidy płaszczyzną „ π^3 “. Punkta przecięcia się „ P “ i „ Q “ tego koła z prostą „ m “, podług której płaszczyzny „ π “ i „ π^3 “ przecinają się, są wierzchołkami drugiej osi krzywej „ c “.

Zagadnienie 20.: Poprowadzić płaszczyznę styczną do paraboloidy obrotowej w punkcie „ P “, którego rzut pionowy „ P “ jest dany (rys. 91.).

Rozwiązanie: Wyznamy za pomocą kolineacji środkowej punkta „ P “, i „ P “, w których ślad pionowy „ π “, płaszczyzny, przesuniętej przez punkt „ P “ równoległe do płaszczyzny poziomej rzutów, przecina się z rzutem pionowym południka głównego, i poprowadźmy w tych punktach styczne „ Q “, „ P “, i „ Q “, „ P “ do paraboli ograniczającej rzut pionowy powierzchni, to prosta „ Q “, „ P “ jest rzutem pionowym stycznej, poprowadzonej w punkcie „ P “ do południka, który przez ten punkt przechodzi.

Koło „ r “, zakreślone z punktu „ A “ promieniem równym połowie odcinka „ P “, „ P “, jest rzutem poziomym równoleżnika paraboloidy, przechodzącego przez punkt „ P “. Na tem kole leży tedy rzut poziomy „ P “ punktu „ P “. Styczna „ s “, poprowadzona do koła „ r “ w punkcie „ P “ jest rzutem poziomym stycznej poprowadzonej w punkcie „ P “ do równoleżnika „ r “, przechodzącego przez ten punkt.

Prosta „ A “, „ P “ jest rzutem poziomym stycznej „ QP “, a rzut pionowy „ s “, schodzi się ze śladem „ π “. Płaszczyzna, przesunięta przez proste „ QP “ i „ s “, jest płaszczyzną styczną paraboloidy w punkcie „ P “.

Zagadnienie: Wyznamy płaszczyznę styczną paraboloidy obrotowej, równoległą do płaszczyzny „ π “.

Rozwiązanie: Przesuńmy przez oś paraboloidy płaszczyznę „ π^1 “, prostopadłą do płaszczyzny „ π “, i wyznaczmy prostą „ m “, podług której płaszczyzny „ π “ i „ π^1 “ przecinają się, przesuńmy następnie prostą „ m “ na płaszczyźnie „ π^1 “, tak, aby była styczną „ m “, poprowadzoną do południka, leżącego na tej płaszczyźnie, to płaszczyzna przesunięta przez „ m “, równoległa do płaszczyzny „ π “ czyni zadość warunkom zagadnienia.

Zagadnienie 21. Wyznamy krzywą „ c “, wzdłuż której walec o tworzących równoległych do prostej „ l “, („ l “, „ l “), styka się z paraboloidą obrotową, a nadto wyznaczyć przekrój „ c “, tego walca płaszczyzną poziomą rzutów (rys. 92.).

Rozwiązanie: Płaszczyzna w nieskończoności jest płaszczyzną styczną paraboloidy, krzywa styczności „ c “ walca, opisanego na tej powierzchni jest przeto parabola, która leży na płaszczyźnie, równoległej do osi obrotu „ a “ powierzchni.

Opiszmy wzdłuż śladu poziomego „ k “, paraboloidy stożek („ W “, „ k “) na tej powierzchni i poprowadźmy doń płaszczyzny styczne „ π^1 “ i „ π^2 “, równoległe do prostej „ l “, podzielmy następnie cięciwę styczności „ E “, „ F “ śladów poziomych „ π^1 “ i „ π^2 “ na dwie równe części, to punkt dzielący „ A “, jest rzutem poziomym wierzchołka „ A “, i osi „ a “ paraboli styczności „ c “.

Rzut pionowy „ A “, wyznaczamy za pomocą twierdzenia Pascala, południk bowiem „ AGK “, na którym leży punkt „ A “, jest wyznaczony.

Poprowadźmy następnie przez punkt „ A “, i przez wierzchołek „ A “ paraboloidy proste, równoległe do „ l “, i wyznaczmy ślady poziome „ A “, i „ F “ tych prostych, to punkt „ A “, jest wierzchołkiem, a punkt „ F “ jest ogniskiem paraboli „ c “, podług której płaszczyzna pozioma rzutów przecina się z walcem, opisanym na paraboloidzie i równoległym do prostej „ l “.

Zagadnienie: Wyznamy krzywe, ograniczające rzut poziomy i rzut pionowy paraboloidy obrotowej, jeżeli oś „ a “ tej powierzchni jest nachylona do obu płaszczyzn rzutów.

Rozwiązanie: Przesuńmy przez prostą „ a “ płaszczyznę, prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, i wykonajmy kład tej płaszczyzny wraz z południkiem „ c “, na niej leżącym, na płaszczyznę poziomą rzutów, poprowadźmy następnie styczną („ s “) do kładu („ c “), prostopadłą do rzutu „ a “, to punkt przecięcia się „ M “ prostych („ s “) i „ a “ jest wierzchołkiem krzywej, ograniczającej rzut poziomy paraboloidy.

Przetnijmy paraboloidę płaszczyzną „ π^1 “, prostopadłą do osi „ a “ podług koła „ k “, i opiszmy na tej powierzchni wzdłuż tego koła stożek („ O “, „ k “), poprowadźmy następnie płaszczyzny styczne „ π^2 “ i „ π^3 “ do tego stożka, prostopadłe do płaszczyzny poziomej rzutów, to ślady „ π^2 “, i „ π^3 “ są stycznymi krzywej ograniczającej rzut poziomy paraboloidy; wierzchołek „ M “, oś „ a “ i styczne „ π^2 “, i „ π^3 “ wyznaczają krzywą ograniczającą rzut poziomy powierzchni.

Zagadnienie 22.: Wyznamy punkta przecięcia się prostej „ l “, („ l “, „ l “) z hiperboloidą o dwu powłokach obrotową „ Π^2 “ (rys. 93.).

Rozwiązanie: Oś rzeczywista „ AB “ hiperboloidy jest prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów. Południk główny jest wyznaczony wierzchołkami „ A “ i „ B “ tudzież asymptotami „ OC “ i „ OD “.

Obróćmy asymptoty około osi „ AB “, i wpiszmy w tak otrzymany stożek kulę „ K “, to powierzchnie „ K “ i „ Π^2 “ są środkowo kolineacyjne. Środek „ O “ powierzchni jest środkiem kolineacji, punkt przecięcia się „ A “, prostej „ AB “ z kulą odpowiada wierzchołkowi „ A “ hiperboloidy, płaszczyzna „ π “, na której leży koło styczności powierzchni „ Π^2 “ i „ K “, jest płaszczyzną wzajemną układu kuli, której odpowiada w układzie hiperboloidy płaszczyzna, leżąca w nieskończoności.

Płaszczyzna kolineacji „ π “ jest równoległa do płaszczyzny „ π “ i przechodzi przez punkt przecięcia się „ T “ dwu prostych odpowiednich „ A “, „ R “ i „ AR “.

Wyznamy punkt przecięcia się „ T “, („ T “, „ T “) prostej „ l “ z płaszczyzną kolineacji „ π “, a nadto punkt „ Z “, („ Z “, „ Z “), w którym prosta, poprowadzona przez środek kolineacji „ O “ równoległe do prostej „ l “, przecina się z płaszczyzną „ π “, to prostej „ T “, „ Z “ układu kuli odpowiada w układzie hiperboloidy prosta „ l “.

Jeżeli tedy wyznaczymy punkta M_1 i N_1 , w których prosta T_1Z_1 przecina się z kulą K i rzucimy te punkta ze środka O na prostą l , natenczas otrzymamy punkta M i N , w których prosta l przecina się z hiperboloidą.

Zagadnienie 23.: Wyznaczyć asymptoty i osi hiperboli, podług której płaszczyzna π (π_h , π_v) przecina się z hiperboloidą obrotową o dwu powłokach Π^2 (rys. 94.).

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że hiperbola, opisująca powierzchnię Π^2 , leży na płaszczyźnie π^1 , równoległej do płaszczyzny pionowej rzutów, oś rzeczywista AB tej powierzchni niech będzie prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów.

Obróćmy asymptoty OC i OD około osi AB , to natenczas otrzymamy stożek asymptotyczny (O, k) powierzchni Π^2 . Przekroje powierzchni Π^2 i (O, k) dowolną płaszczyzną są krzywami spółśrodkowymi i homotetycznymi.

Aby tedy wyznaczyć taką płaszczyznę π , która przecina się z hiperboloidą podług hiperboli, przesunmy przez wierzchołek O stożka asymptotycznego płaszczyznę π^2 , która przecina się z tym stożkiem podług dwu tworzących OG i OK i poprowadźmy płaszczyznę π (π_h , π_v), równoległą do π^2 , to płaszczyzna π przecina się z powierzchnią Π^2 podług hiperboli, której asymptoty są równoległe do prostych OG i OK .

Przesunmy przez oś AB płaszczyznę π^3 , prostopadłą do π i wyznaczmy prostą „ m “, podług której te płaszczyzny przecinają się; prosta m jest osią rzeczywistą hiperboli przekroju.

Obróćmy płaszczyznę π^3 i prostą m około osi AB tak, aby się zesła z płaszczyzną π^1 , to po dokonanych obrotach zejdziesz się rzut pionowy „ m “ z prostą „ m “, a południk leżący na płaszczyźnie π^3 schodzi się z południkiem głównym.

Wyznaczymy za pomocą kolineacji środkowej punkta przecięcia się M''_1 i N''_1 prostej „ m “, z hiperbolą, ograniczającą rzut pionowy powierzchni Π^2 i przenieśmy te punkta obrotem wstecznym na prostą „ m “, to natenczas otrzymamy rzuty pionowe M'' i N'' wierzchołków hiperboli przekroju.

Punkt S , dzielący na dwie równe części odcinek MN jest środkiem a proste a_1 i a_2 , poprowadzone przez ten punkt równoległe do tworzących OG i OK stożka asymptotycznego, są asymptotami krzywej przekroju.

Zagadnienia: Wyznaczyć przekroje płaskie a) eliptyczny, b) paraboliczny hiperboloidy o dwu powłokach obrotowej.

Zagadnienie: Poprowadzić płaszczyznę styczną do hiperboloidy obrotowej o dwu powłokach w punkcie P , którego rzut pionowy P'' jest dany.

Zagadnienie 24. Wyznaczyć krzywą „ l'' “, wzdłuż której walec o tworzących, równoległych do prostej l (l' , l''), styka się z hiperboloidą obrotową o dwu powłokach Π^2 , a nadto wyznaczyć przekrój c' tego walca płaszczyzną poziomą rzutów (rys. 95.).

Rozwiązanie: Płaszczyzna π^1 , przesunięta przez oś obrotu AB hiperboloidy i równoległa do prostej „ l'' “ dzieli powierzchnię na dwie części prostokątnie symetryczne, na tej płaszczyźnie leży tedy oś krzywej styczności „ c “.

Wyznaczymy południk, leżący na płaszczyźnie π^1 , i poprowadźmy doń styczne, równoległe do prostej „ l'' “ to punkta styczności tychże A_1 i B_1 są wierzchołkami krzywej „ c “, wzdłuż której walec, równoległy do „ l'' “ i opisany na powierzchni Π^2 z tą powierzchnią się styka.

Płaszczyzna biegunowa π^2 ze względu na stożek asymptotyczny średnicy „ l_2 “, równoległej do prostej l , przecina się z tym stożkiem podług dwu tworzących rzeczywistych OG i OK lub urojonych, które są asymptotami krzywej „ c “.

Proste A_1A_2 i B_1B_2 tudzież AF i BF_1 , poprowadzone przez punkta A_1 i B_1 tudzież A i B równoległe do prostej „ l'' “, przecinają się z płaszczyzną poziomą rzutów w wierzchołkach A_2 i B_2 względnie w ogniskach F i F_1 przekroju walca płaszczyzną poziomą rzutów.

Zagadnienie 25. Wyznaczyć krzywe, ograniczające rzuty poziome i pionowe hiperboloidy o dwu powłokach obrotowej, jeżeli oś „ a “ tej powierzchni jest nachylona do obu płaszczyzn rzutów (rys. 96.).

Rozwiązanie: Niech będą dane kład (c) południka c , leżącego na płaszczyźnie, prostopadłej do płaszczyzny poziomej rzutów, i kłady (a_1) i (a_2) asymptot tej krzywej, wykonane około rzutu „ a' “; poprowadźmy styczne MM' i NN' , do krzywej (c), prostopadłe do prostej „ a' “, to punkta przecięcia się tychże z prostą „ a' “ są wierzchołkami krzywej „ c' “ ograniczającej rzut poziomy hiperboloidy.

Przesunmy następnie przez ślad poziomy H osi „ a “ płaszczyznę π , prostopadłą do tej prostej i wyznaczmy rzut „ k' “ koła k , podług którego płaszczyzna π^1 przecina się ze stożkiem asymptotycznym hiperboloidy. Odcinek $A'_1A'_2$ zawarty między śladami poziomymi asymptot a_1 i a_2 jest osią wielką, a odcinek $A'_1A'_2 \cdot \cos \alpha$, gdzie α wyraża kąt nachylenia płaszczyzny π^1 do płaszczyzny poziomej rzutów, jest osią małą elipsy „ k' “. Styczne „ π^2_h “ i „ π^3_h “, poprowadzone przez „ O' “ do krzywej „ k' “ są asymptotami hiperboli „ c'_1 “.

W podobny sposób można wyznaczyć oś i asymptoty hiperboli „ c'_2 “, ograniczającej rzut pionowy hiperboloidy o dwu powłokach obrotowej.

Zagadnienie 26. Dany jest rzut poziomy P' punktu P , leżącego na elipsoidzie trójosiowej Π^2 , wyznaczyć rzut pionowy P'' tego punktu i poprowadzić w punkcie P płaszczyznę styczną do powierzchni Π^2 (rys. 97.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że oś wielka AB powierzchni jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów, oś średnia CD jest równoległa, do osi rzutów „ x “ a oś najmniejsza jest prostopadła do płaszczyzny pionowej rzutów.

Obróćmy elipsę $ABCD$ około osi AB , to natenczas otrzymamy elipsoidę obrotową Π_1^2 , powinowatą z elipsoidą Π^2 .

Kierunek powinowactwa jest prostopadły do płaszczyzny pionowej rzutów, płaszczyzna $ABCD$ jest płaszczyzną kolineacji, a stosunek osi EF i CD jest cechą tego powinowactwa.

Punktowi P' układu Π^2 odpowiada punkt P' , w układzie Π_1^2 .

Zakreślmy następnie na średnicy CD kulę K_2 , to pomiędzy powierzchniami K_2 i Π_1^2 zachodzi związek powinowactwa, którego kierunek jest prostopadły do płaszczyzny poziomej rzutów; płaszczyzna powinowactwa schodzi się z płaszczyzną $CDEF$, a stosunek osi CD i AB jest cechą tego powinowactwa.

Wyznaczymy rzut pionowy „ P''_2 “ punktu P_2 , leżącego na kuli, którego rzut poziomy schodzi się z punktem „ P'_1 “, i poprowadzimy w P_2 styczną „ O_2P_2 “ do koła, które leży na kuli K_2 i na płaszczyźnie ABP_2 ; sprowadźmy następnie punkta „ P''_2 “ i „ O''_2 “ do układu elipsoid Π_1^2 i Π^2 i połączmy otrzymane po zmianie punkta „ P'' “ i „ O'' “, to „ P'' “ jest rzutem pionowym jednego punktu P , leżącego na elipsoidzie trójosiowej Π^2 , a prosta „ $O''P''$ “ jest styczną „ s'' “, poprowa-

dzoną do rzutu pionowego elipsy, podług której płaszczyzna ABP przecina się z powierzchnią Π^2 . Rzut poziomy s'_1 schodzi się z prostą $A'P'$.

Celem wyznaczenia stycznej s_2 , poprowadzonej w punkcie P do elipsy, podług której płaszczyzna, przesunięta przez P i prostopadła do osi AB przecina się z elipsoidą Π^2 , zakresłmy z punktu A' jako środka promieniem $A'P'$, koło k'_1 i poprowadźmy w punkcie P'_1 styczną s' do tego koła, połączmy następnie punkt P' z punktem T'_3 , w którym proste s' i $C'D'$ przecinają się, to prosta T'_3P' jest rzutem poziomym s'_2 stycznej s_2 ; rzut pionowy s''_2 schodzi się ze śladem pionowym π'_1 płaszczyzny, przesuniętej przez punkt P i równoległej do płaszczyzny poziomej rzutów.

Płaszczyzna (s_1, s_2) jest płaszczyzną styczną elipsoidy trójosiowej w punkcie P (P', P'').

Zagadnienie 27. Wyznaczyć punkta przecięcia się prostej l (l', l'') z elipsoidą trójosiową Π^2 (rys. 98.).

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że osi powierzchni zajmują względem płaszczyzn rzutów takie same położenia, jakie obrano w zagadnieniu poprzednim.

Jeżeli elipsę $ABCD$ obrócimy około osi AB , natenczas otrzymamy elipsoidę obrotową Π_1^2 , powinowatą z Π^2 .

Środek powinowactwa leży na prostej, prostopadłej do płaszczyzny biegunowej rzutów, płaszczyzna $ABCD$ jest płaszczyzną powinowactwa, a stosunek osi EF i CD jest cechą tego powinowactwa.

Wskutek tej transformacji zmienia się rzut poziomy l' i zejdzie się z prostą l'_1 , rzut pionowy zaś l'' nie zmieni swego położenia, jeżeli płaszczyznę pionową rzutów do jej pierwotnego położenia sprowadzimy.

Opiszmy następnie na średnicy CD kulę K_2 , to powierzchnie Π_1^2 i K_2 są powinowate; środek tego powinowactwa leży na prostej prostopadłej do płaszczyzny poziomej rzutów, płaszczyzna $CDEF$ jest płaszczyzną powinowactwa, rzut pionowy tedy zmienia swe położenie i schodzi się z prostą l''_2 .

Jeżeli tedy wyznaczmy punkta przecięcia się M_2 i N_2 prostej l_2 (l'_2, l''_2) z kulą K_2 , a to za pomocą układu płaszczyzny rzucającej tę prostą na jedną z płaszczyzn rzutów, albo za pomocą obrotu prostej l około osi AB lub EF , i przeniesimy je za pomocą dwu odwrotnych powinowactw na prostą l (l', l'') natenczas otrzymamy punkta M i N w których prosta l przecina się z elipsoidą trójosiową Π^2 .

Zagadnienie 28. Wyznaczyć średnice sprzężone krzywej c^2 , wzdłuż której walec, o tworzących równoległych do prostej l , opisany na elipsoidzie trójosiowej Π^2 , z tą powierzchnią się styka (rys. 99.).

Rozwiązanie: Zamieńmy powierzchnię Π^2 za pomocą powinowactwa, którego płaszczyzną kolineacji jest $ABCD$ na elipsoidę obrotową Π_1^2 , a rzut poziomy l' prostej l na odpowiedni rzut poziomy l'_1 układu π_1^2 ; przesunijmy następnie przez oś AB płaszczyznę π_1^2 , równoległą do prostej l_1 (l'_1, l''_1), i poprowadźmy do południka, leżącego na tej płaszczyźnie styczne s_1 i s_2 , równoległe do prostej l_1 , to punkta styczności tychże P_1 i Q_1 są wierzchołkami krzywej c_2^1 , wzdłuż której walec, o tworzących równoległych do prostej l_1 , z powierzchnią obrotową Π_1^2 się styka.

Wierzchołki U_1 i V_1 drugiej osi krzywej c_2^1 są punktami styczności płaszczyzn stycznych powierzchni π_1^2 , prostopadłych do płaszczyzny poziomej rzutów i równoległych do prostej l_1 .

Jeżeli tedy przeniesimy za pomocą powinowactwa punkta P_1 i Q_1 tudzież U_1 i V_1 do układu elipsoidy trójosiowej Π^2 , natenczas otrzymamy średnice sprzężone PQ i UV krzywej c_2 , wzdłuż której walec o tworzących równoległych do prostej l styka się z powierzchnią Π^2 .

Zagadnienie. Wyznaczyć średnice sprzężone krzywej, podług której dowolna płaszczyzna przecina się z elipsoidą trójosiową.

Zagadnienie. Wyznaczyć osi krzywej przekroju elipsoidy trójosiowej płaszczyzną przesuniętą przez oś rzutów.

Zagadnienie 29. Dany jest rzut poziomy P' punktu, leżącego na paraboloidzie eliptycznej, wyznaczyć rzut pionowy P'' (rys. 100.).

Rozwiązanie: Celem uproszczenia konstrukcyj na paraboloidach eliptycznych, przyjmujemy, że osi AD , tych powierzchni są prostopadłe do płaszczyzny poziomej rzutów, a nadto, że jedna oś śladu poziomego powierzchni jest równoległa, a druga prostopadła do osi rzutów „ x ”.

Wyznamy za pomocą powinowactwa punkta M' i N' , w których prosta $A'P'$ przecina się z elipsą $BCEF$.— A'' , M'' , N'' i punkt U''_∞ , leżący w nieskończoności na prostej $A''D''$ oraz styczne, poprowadzone w punktach A'' i U''_∞ wyznaczają aż nadto rzut pionowy paraboli, podług której płaszczyzna ADP' paraboloidę przecina. Za pomocą twierdzenia Pascala można tedy wyznaczyć punkt przecięcia się P'' paraboli $A''M''N''U''_\infty$ z prostą, poprowadzoną przez punkt U''_∞ prostopadłe do osi rzutów „ x ”.

Zagadnienie 30. Dany jest rzut pionowy P'' punktu, leżącego na paraboloidzie eliptycznej Π^2 ; wyznaczyć rzuty poziome P'_1 i P'_2 tych punktów, których rzuty pionowe schodzą się w punkcie P'' , a nadto poprowadzić płaszczyznę styczną do powierzchni w punkcie (P'', P'_1) (rys. 101.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez P'' ślad pionowy π_1^1 płaszczyzny, równoległej do płaszczyzny poziomej rzutów, i wyznaczmy za pomocą kolineacji środkowej punkta G'' i K'' , w których płaszczyzna π^2 przecina się z parabolą $A''B''C''$.

Przekrój paraboloidy eliptycznej płaszczyzną π^1 jest elipsą c^2 homotetyczną ze śladem poziomym $B'C'E'F'$ powierzchni Π^2 . Odcinek $G'K'$ jest osią rzutu poziomego krzywej c^2 , drugą oś $U'V'$ tego rzutu otrzymamy, wyznaczając punkta przecięcia się prostej $E'F'$ z prostymi $G'U'$ i $K'V'$, poprowadzonymi przez G' i K' równoległe do prostych $B'E'$ i $C'F'$.

Za pomocą powinowactwa między elipsą $G'K'U'V'$ i kołem k'_1 zakresłonym na średnicy $G'K'$ wyznaczamy punkta przecięcia się P'_1 i P'_2 krzywej $G'K'U'V'$ z prostą, poprowadzoną przez P'' prostopadłe do osi „ x ”.

P'_1 i P'_2 są rzutami poziomymi punktów, leżących na paraboloidzie, których rzuty pionowe schodzą się w punkcie P'' .

Celem wyznaczenia płaszczyzny stycznej, poprowadzonej do paraboloidy Π^2 w punkcie (P', P'_1) , poprowadźmy styczną s'_1 do elipsy $G'K'U'V'$ w punkcie P'_1 , a nadto styczną s''_3 do paraboli $A''B''C''$ w punkcie G'' i wyznaczmy punkt przecięcia się O'' tejże z rzutem pionowym AD'' osi powierzchni, to prosta $O''P''_1$ jest rzutem pionowym s''_2 stycznej, poprowadzonej do paraboli, która leży na płaszczyźnie ADP'_1 .

Rzut pionowy s''_1 stycznej s_1 schodzi się ze śladem π_1^1 , a rzut poziomy s'_2 schodzi się z prostą $A''P''_1$.

Styczne s_1 i s_2 wyznaczają płaszczyznę styczną, poprowadzoną do paraboloidy w punkcie (P'', P'_1) .

Zagadnienie. Wyznaczyć średnice sprzężone krzywej c^2 , podług której płaszczyzna π (π_h, π_e) przecina się z paraboloidą eliptyczną Π^2 .

Rozwiązanie: Zamieńmy Π^2 na paraboloidę obrotową Π_1^2 i wyznaczmy płaszczyznę π^1 odpowiadającą w układzie Π_1^2 płaszczyźnie π ; wyznaczmy następnie w sposób wyłożony w zagadnieniu 19. osi M_1N_1 i P_1Q_1 i sprowadźmy je do układu paraboloidy Π^2 , to natenczas otrzymamy średnice sprzężone MN i UV krzywej c^2 .

Zagadnienie 31. Wyznaczyć płaszczyznę biegunową punktu U_∞ , leżącego w nieskończoności na prostej l , ze względu na paraboloidę eliptyczną Π^2 (rys. 102.).

Rozwiązanie: Płaszczyzna biegunowa π punktu, leżącego w nieskończoności, ze względu na paraboloidę eliptyczną jest do osi AD tej powierzchni równoległa.

Aby tedy wyznaczyć dalsze dwa punkta, przez które π przechodzi, opiszmy na powierzchni Π^2 , wzdłuż śladu poziomego $BCEF$ tejże, powierzchnię stożkową i poprowadźmy do niej płaszczyzny styczne π^1 i π^2 , równoległe do prostej l , to tworzące styczneści WP i WQ przecinają się z krzywą $BCEF$ w punktach P i Q , przez które płaszczyzna biegunowa punktu U_∞ przechodzi. Płaszczyzna π przechodzi tedy przez punkta P i Q , a nadto jest równoległa do osi AD paraboloidy.

Krzywa c^2 , wzdłuż której walec, o tworzących równoległych do prostej l , styka się z paraboloidą eliptyczną Π^2 , leży na płaszczyźnie π .

Zagadnienie: Wyznaczyć płaszczyznę biegunową punktu P (P', P'') ze względu na paraboloidę eliptyczną, a to za pomocą powinowactwa i kolineacji środkowej.

Zagadnienie 32. Dany jest rzut poziomy P' punktów P_1 i P_2 , leżących na hiperboloidzie o dwu powłokach trójosiowej Π^2 , wyznaczyć rzuty pionowe tychże, a nadto płaszczyznę styczną poprowadzoną w punkcie (P', P'_1) do powierzchni Π^2 (rys. 103.).

Rozwiązanie: Przy rozwiązywaniu zagadnień o hiperboloidach dwupowłokowych przyjmujemy, że oś rzeczywista AB jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów, jedna oś urojona jest równoległa, a druga prostopadła do osi „ x ”.

Wierzchołki A i B , a nadto ślad poziomy c_s^1 stożka asymptotycznego wyznaczają powierzchnię Π^2 .

Zamieńmy za pomocą powinowactwa stożek asymptotyczny (O, c_s) i hiperboloidę Π^2 na powierzchnie obrotowe (O, c_s^1) i Π_1^2 , wyznaczmy punkt P'_3 , odpowiadający w układzie (O, c_s^1) punktowi P' , i obróćmy płaszczyznę ABP'_3 około osi AB tak, aby się zeszła z płaszczyzną ABP'_4 , równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów; wyznaczmy następnie za pomocą kolineacji środkowej koła k'_1 z rzutem c''_p południka głównego powierzchni π_1^2 punkta przecięcia się P''_7 i P''_8 krzywej c''_p z prostą, wyprowadzoną z P'_4 prostopadłe do osi „ x ” i sprowadźmy te punkta obrotem wstecznym na płaszczyznę ABP'_3 , to natenczas otrzymamy rzuty pionowe P''_1 i P''_2 punktów, leżących na hiperboloidzie Π^2 ; rzuty poziome P'_1 i P'_2 schodzą się z punktem P' .

Wyznamy następnie punkta przecięcia się Q'_1 i Q'_2 prostej $P'P''_1$ z elipsą $C'D'E'F'$ i z kołem k'_2 , zakreślonym na średnicy $C'D'$, poprowadźmy styczną $T'Q'_2$ do koła k'_2 i połączmy punkt przecięcia się T' prostych $C'D'$ i $T'Q'_2$ z Q'_1 , to prosta $T'Q'_1$ jest styczną, poprowadzoną do elipsy c_s w punkcie Q'_1 , a prosta s'_1 , poprowadzona przez P' równoległe do $T'Q'_1$ jest styczną, poprowadzoną w punkcie P' do rzutu poziomego elipsy, podług której płaszczyzna, przesunięta przez punkt (P', P''_1) równoległe do płaszczyzny poziomej rzutów, z powierzchnią Π^2 się przecina.

Poprowadźmy następnie w punkcie P''_5 , który odpowiada kolineacyjnie punktowi P''_7 , leżącemu na krzywej c''_p , styczną s''_3 do koła k''_1 i połączmy P''_7 z punktem przecięcia się T''_1 prostych t'' i s''_3 , a nadto punkt przecięcia się W'' prostych $A''B''$ i $T''_1P''_7$ z P''_1 , to prosta $W''P''_1$ jest rzutem stycznej s_2 , poprowadzonej w punkcie (P', P''_1) do hiperboli, która leży na powierzchni Π^2 i na płaszczyźnie ABP' . Rzut poziomy s'_2 schodzi się z prostą $P'O'$.

Płaszczyzna (s_1, s_2) jest płaszczyzną styczną, poprowadzoną do hiperboloidy o dwu powłokach trójosiowej w punkcie (P', P''_1) .

Zagadnienie: Wyznaczyć punkta przecięcia się prostej l (l', l'') z hiperboloidą o dwu powłokach trójosiową.

Rozwiązanie: Zamieńmy hiperboloidę trójosiową Π^2 na powierzchnię obrotową Π_1^2 i sprowadźmy do tego układu prostą l , wyznaczmy następnie, w sposób wyłożony w zagadnieniu 22. punkta przecięcia się M_1 i N_1 prostej l_1 z powierzchnią Π_1^2 , to tym punktom odpowiadają w układzie Π^2 punkta przecięcia się prostej l z hiperboloidą trójosiową.

Zagadnienie: Wyznaczyć osi elipsy c^2 , podług której płaszczyzna π (π_h, π_e) przecina się z hiperboloidą o dwu powłokach trójosiową.

Rozwiązanie: Przekroje hiperboloidy płaszczyznami $\pi, \dots$ równoległymi do płaszczyzny π^1 , która przechodzi przez wierzchołek O stożka asymptotycznego (O, c_s) i nie przecina tej powierzchni podług tworzących rzeczywistych, są elipsami.

Obierzmy na śladzie π_h^1 dwa dowolne punkta $1'$ i $2'$, wyznaczmy biegunowe tychże a' i b' ze względu na ślad poziomy $C'D'E'F'$ stożka asymptotycznego (O, c_s) , a nadto punkt przecięcia się P' tych biegunowych i punkta $1'_1$ i $2'_1$, w których ślad π_h^1 przecina się z prostymi a' i b' , to proste $O1$ i O_1 tudzież $O2$ i O_2 są równoległe do dwu par średnic sprzężonych krzywej przekroju c^2 , a punkt przecięcia się S prostej OP z płaszczyzną π jest środkiem tej krzywej.

Wykonajmy kład płaszczyzny π^1 na płaszczyznę poziomą rzutów i wyznaczmy promienie normalne $(O)R'$ i $(O)Q'$ pęku inwolucyjnego $(O)(1, 1_1, 2, 2_1, \dots)$, to osi krzywej c^2 są równoległe do prostych OR i OQ ; jeżeli tedy wyznaczmy w sposób wyłożony w zagadnieniu poprzednim punkta przecięcia się prostych m i n , poprowadzonych przez środek S równoległe do promieni OQ i OR , natenczas otrzymamy wierzchołki M i N tudzież U i V osi krzywej przekroju.

Zagadnienie 34. Wyznaczyć płaszczyznę biegunową punktu P (P', P'') ze względu na hiperboloidę o dwu powłokach trójosiową Π^2 .

Rozwiązanie: Połączmy punkt P ze środkiem O powierzchni Π^2 i wyznaczmy biegunową d' śladu poziomego D' prostej PO ze względu na kierownicę $C'D'E'F'$ stożka asymptotycznego (O, c_s) , to płaszczyzna (O, d')

jest płaszczyzną diametralną, biegunowo sprzężoną ze średnicą OP ze względu na hiperboloidę Π^2 i ze względu na stożek asymptotyczny tej powierzchni.

Jeżeli tedy wyznaczmy punkta przecięcia U i V prostej PO z hiperboloidą, a nadto czwarty harmoniczny punkt P_1 w grupie $(PP_1UV) = -1$, natenczas płaszczyzna, przesunięta przez punkt P_1 i równoległa do (O, d') jest płaszczyzną biegunową π punktu P^* .

Zagadnienie: Wyznaczyć biegun płaszczyzny π ze względu na hiperboloidę o dwu powłokach trójosiową.

Zagadnienie: Wykreślić cień rzucony hiperboloidy na płaszczyzny rzutów, jeżeli źródło światła jest punktem, leżącym w nieskończoności.

Zagadnienie 35. Wyznaczyć prostą p_1 , biegunowo sprzężoną z prostą p ze względu na hiperboloidę o dwu powłokach trójosiową Π^2 .

Rozwiązanie: Prosta p przecina się z płaszczyznami głównymi, przechodzącymi przez oś rzeczywistą w punktach M i N ; płaszczyzny biegunowe π_m i π_n tych punktów przechodzą przez biegunowe m i n tychże ze względu na przekroje hiperboloidy płaszczyznami $ABCD$ i $ABEF$ i są do tych płaszczyzn prostopadłe.

Prosta p_1 tedy, podług której płaszczyzny π_m i π_n przecinają się, jest biegunową sprzężoną z prostą p ze względu na powierzchnię Π^2 .

O dwu powierzchniach rzędu drugiego.

1. Dwie powierzchnie rzędu drugiego Π_1^2 i Π_2^2 przenikają się podług krzywej rzędu czwartego c^4 , albowiem dowolna płaszczyzna π przecina te powierzchnie podług dwu krzywych rzędu drugiego, które mają cztery punkta wspólne.

Krzywa c^4 jest jednolita, jeżeli powierzchnie Π_1^2 i Π_2^2 przenikają się częściową, albo składa się z dwu części, jeżeli owe powierzchnie przenikają się zupełnie.

W szczególnych przypadkach składa się krzywa przenikania się c^4 a) z krzywej rzędu trzeciego i z prostej, b) z dwu prostych i z krzywej rzędu drugiego, c) z czterech prostych, d) z dwu krzywych rzędu drugiego.

W przypadkach a, b i c powierzchnie przenikające się, są prostokreślne. Powierzchnia rozwijalna Π_r , opisana na dwu powierzchniach rzędu drugiego jest klasy czwartej, stożki bowiem, opisane na obu powierzchniach z dowolnego punktu mają cztery płaszczyzny styczne wspólne, które jako wspólne płaszczyzny styczne powierzchni Π_1^2 i Π_2^2 , są płaszczyznami stycznymi powierzchni Π_r .

Powierzchnia Π_r jest jednolita albo składa się a) z linii prostej i powierzchni klasy trzeciej, b) z dwu prostych i z powierzchni stożkowej rzędu drugiego, c) z czterech prostych, d) z dwu powierzchni stożkowych rzędu drugiego.

2. Dwie powierzchnie rzędu drugiego, które mają dwie płaszczyzny styczne π_a i π_b a nadto punkta styczności A i B tych płaszczyzn wspólne, przenikają się podług dwu krzywych rzędu drugiego.

*) Celem wyznaczenia punktu „ P_1 “, przez które płaszczyzna biegunowa punktu P przechodzi, można zamiast prostej PO użyć dowolnej prostej, poprowadzonej przez P .

Jakoż niech będą dane dwie powierzchnie rzędu drugiego Π_1^2 i Π_2^2 , które mają płaszczyzny styczne π_a i π_b , a nadto punkta styczności tychże A i B wspólne. Przesuńmy przez prostą AB płaszczyzny $\pi^1, \dots$ i wyznaczmy krzywe c_1 i $c'_1, \dots$ podług których te płaszczyzny przecinają się z powierzchniami, a nadto proste a_1 i $b_1, \dots$ podług których płaszczyzny π_a i π_b przecinają się z płaszczyznami $\pi^1, \dots$ to krzywe c_1 i $c'_1, \dots$ mają punkta A i B , a nadto styczne a_1 i b_1 , poprowadzone w tych punktach wspólne; proste zatem, poprowadzone przez punkt A lub B i leżące na płaszczyźnie π_a lub π_b przecinają się z krzywą przenikania się powierzchni Π_1^2 i Π_2^2 w dwu punktach; punkta tedy A i B są punktami podwójnymi krzywej c^4 . Jeżeli przeto przesuniemy przez punkta A i B i przez dowolny punkt X krzywej c^4 płaszczyznę π^x , to natenczas ta płaszczyzna przecina się z krzywą c^4 w pięciu a więc w nieskończenie wielu punktach; krzywa tedy rzędu drugiego, wyznaczona punktami A , B i X , a nadto stycznymi a_x i b_x , poprowadzonymi w punktach A i B jest jedną częścią krzywej przenikania się c^4 , druga część tedy tej krzywej jest również krzywą rzędu drugiego.

Powierzchnia rozwijalna, opisana na dwu powierzchniach rzędu drugiego, które mają dwie płaszczyzny styczne i punkta styczności A i B tych płaszczyzn wspólne, składa się z dwu powierzchni stożkowych rzędu drugiego, których wierzchołki leżą na biegunowej sprzężonej z prostą AB .

3. Jeżeli dwie powierzchnie rzędu drugiego Π_1^2 i Π_2^2 mają trzy punkta A , B i C a nadto płaszczyzny styczne, poprowadzone w tych punktach wspólne, natenczas stykają się wzdłuż krzywej rzędu drugiego.

Płaszczyzna ABC przecina się z powierzchniami Π_1^2 i Π_2^2 podług dwu krzywych rzędu drugiego, które mają trzy punkta, a nadto styczne, poprowadzone w tych punktach wspólne, te krzywe schodzą się zatem.

Biegun płaszczyzny ABC ze względu na powierzchnie Π_1^2 i Π_2^2 jest wierzchołkiem stożka (W, c^2) , opisanego na powierzchniach wzdłuż krzywej styczności c^2 tych powierzchni. Wierzchołki trójkątów biegunowych krzywej c^2 tworzą z punktem W czwórki biegunów sprzężonych ze względu na powierzchnie Π_1^2 i Π_2^2 .

Jeżeli przetniemy powierzchnie Π_1^2 i Π_2^2 płaszczyznami, równoległymi do płaszczyzny ABC , natenczas otrzymamy krzywe spółśrodkowe, homotetyczne. Środki tych krzywych leżą na prostej, łączącej punkt W ze środkiem krzywej styczności c^2 .

4. Poprowadźmy na powierzchni rzędu drugiego Π_1^2 dwie krzywe płaskie c_1^2 i c_2^2 , wyznaczmy następnie prostą „ l “, podług której płaszczyzny tych krzywych przecinają się, to involucje biegunów sprzężonych, leżących na prostej l , ze względu na krzywe c_1^2 i c_2^2 schodzą się z involucją tych biegunów ze względu na powierzchnię Π_1^2 ; krzywe tedy c_1^2 i c_2^2 są środkowo kolineacyjne. A zatem:

Przez dwie krzywe rzędu drugiego, leżące na powierzchni rzędu drugiego, przechodzą dwie powierzchnie stożkowe rzędu drugiego.

Dwa stożki opisane na powierzchni rzędu drugiego przenikają się podług dwu krzywych rzędu drugiego.

5. Dwie powierzchnie rzędu drugiego Π_1^2 i Π_2^2 , które mają płaszczyzny główne α , β i γ wspólne, przenikają się podług krzywej rzędu czwartego c^4 , której punkta są prostokątnie symetryczne względem płaszczyzn głównych i środkowo symetryczne względem wspólnego środka M powierzchni.

Przez krzywą c^4 przechodzą tedy trzy powierzchnie walcowe rzędu drugiego, których tworzące są prostopadłe do płaszczyzn głównych, a nadto stożek rzędu drugiego, którego wierzchołek leży w środku M .

Kierunki P_1^∞ , P_2^∞ i P_3^∞ , prostopadłe do płaszczyzn głównych α , β i γ jakoteż środek M są wspólnymi biegunami powierzchni Π_1^2 i Π_2^2 , a płaszczyzny α , β , γ i płaszczyzna w nieskończoności są wspólnymi płaszczyznami biegunowymi tych powierzchni.

Jeżeli tedy uważać będziemy powierzchnie Π_1^2 i Π_2^2 za utwór układu Σ , natenczas w układzie Σ' , kolineacyjnym z Σ , odpowiadają punktom P_1^∞ , P_2^∞ i P_3^∞ i M wspólne bieguny powierzchni ${}^1\Pi_1^2$ i ${}^1\Pi_2^2$, kolineacyjnych z Π_1^2 i Π_2^2 , a płaszczyznom α , β , γ i płaszczyźnie w nieskończoności odpowiadają wspólne płaszczyzny biegunowe owych powierzchni.

Walcom i stożkowi, przesuniętym przez krzywą c^4 , odpowiadają w układzie Σ' stożki, przesunięte przez krzywą przenikania się ${}^1c^4$ powierzchni ${}^1\Pi_1^2$ i ${}^1\Pi_2^2$.

A zatem: Dwie powierzchnie rzędu drugiego mają cztery wspólne bieguny i cztery wspólne płaszczyzny biegunowe.

Krzywa przenikania się tych powierzchni jest samą z sobą czterokrotnie inwolucyjnie kolineacyjna. Środki tych kolineacji schodzą się ze wspólnymi biegunami, a płaszczyzny kolineacji schodzą się ze wspólnymi płaszczyznami biegunowymi.

6. Przez krzywą przenikania się c^4 dwu powierzchni rzędu drugiego Π_1^2 i Π_2^2 przechodzi nieskończenie wiele powierzchni tego samego rzędu, które tworzą pęk powierzchni rzędu drugiego. Powierzchnie stożkowe rzędu drugiego, przesunięte przez krzywą c^4 są elementami tego pęku.

Jakoż przesunąć przez dowolny punkt P płaszczyzny π , π^1 , ... i wyznaczmy punkta przecięcia się tychże 1, 2, 3, 4 i 1_1 , 2_1 , 3_1 , 4_1 , ... z krzywą c^4 , to krzywe rzędu drugiego $(P1234) \equiv c^2$, $(P1_12_13_14_1) \equiv c_1^2$, ... leżą na powierzchni rzędu drugiego Π^2 , która przechodzi przez punkt P i przez krzywą c^4 , krzywe bowiem c^2 , c_1^2 , ... przecinają się z powierzchniami Π_1^2 i Π_2^2 w czterech punktach, gdyby bowiem krzywa c^2 , ... przecinała się z powierzchnią Π_2^2 w pięciu punktach, natenczas punkt P leżałby na powierzchni Π_1^2 .

7. Niech będzie dany pęk powierzchni rzędu drugiego (Π_1^2 , ..., Π_n^2), którego podstawą jest krzywa rzędu czwartego c^4 .

Wiadomo, że przez dowolny punkt A można poprowadzić dwie proste l i l_1 , które przecinają się z krzywą c^4 w dwu parach punktów M i N tudzież M_1 i N_1 . Wyznaczmy czwarte punkta B i B_1 , harmonicznie sprzężone z „ A ” w grupach $(ABMN) = -1$ i $(AB_1M_1N_1) = -1$, to przez prostą BB_1 przechodzą płaszczyzny biegunowe punktu A ze względu na elementa pęku (Π_1^2 i Π_n^2).

A zatem: Płaszczyzny biegunowe punktu ze względu na elementa pęku powierzchni rzędu drugiego przechodzą przez jedną prostą.

Proste g_1 , ..., g_n , biegunowo sprzężone z prostą „ m ” ze względu na elementa pęku powierzchni rzędu drugiego są tworzącymi hiperboloidy o jednej powłoce.

Bieguny płaszczyzny ze względu na elementa pęku powierzchni rzędu drugiego leżą na krzywej wierzchołkowej rzędu trzeciego. Środki tedy elementów pęku leżą na krzywej wierzchołkowej rzędu trzeciego, a przeto między elementami pęku powierzchni rzędu drugiego znajdują się trzy paraboloidy, z których dwie mogą być urojone.

8. Powierzchnia rozwijalna klasy czwartej Π_4^r , opisana na dwu powierzchniach klasy drugiej Π_1^2 i Π_2^2 jest styczną do nieskończenie wielu powierzchni tej samej klasy; takie powierzchnie klasy drugiej tworzą gromadę.

Spólne płaszczyzny biegunowe elementów gromady tworzą czworościan, którego wierzchołki O , X , Y i Z są biegunami płaszczyzn przeciwległych α , β , γ i δ tegoż wielościanu ze względu na wszystkie elementa gromady.

Na każdej ścianie wspólnego czworościanu biegunowego leży krzywa rzędu drugiego, która jest zwyrodniałym elementem gromady.

Bieguny płaszczyzny ze względu na elementa gromady leżą na linii prostej.

Płaszczyzny biegunowe punktu ze względu na elementa gromady są płaszczyznami ściśle stycznymi krzywej klasy trzeciej. (Powyższe twierdzenia są przekształceniami biegunowymi twierdzeń wyprowadzonych w bież. ustępie pod 5, 6 i 7).

9. Przyjmijmy, że spólna płaszczyzna biegunowa $\alpha \equiv XYZ$ schodzi się z płaszczyzną w nieskończoności, a nadto, że zwyrodniały element gromady, leżący na tej płaszczyźnie, jest kołem urojonym k_i , to biegun O płaszczyzny „ α ” jest wspólnym środkiem wszystkich elementów gromady, a proste OX i OY i OZ , wzajemnie prostopadłe, są osiami tych elementów; punkta bowiem X^∞ , Y^∞ i Z^∞ są wierzchołkami trójkąta biegunowego ze względu na koło urojone, leżące w nieskończoności. Płaszczyzny tedy β , γ i δ czworościanu biegunowego są płaszczyznami głównymi wszystkich elementów gromady.

10. Bieguny płaszczyzny π ze względu na powierzchnie klasy drugiej, tworzące gromadę, leżą na prostej „ p ”, prostopadłej do tej płaszczyzny, biegun bowiem L^∞ prostej l^∞ , podług której płaszczyzna w nieskończoności przecina się z płaszczyzną π , ze względu na koło urojone w nieskończoności, leży na prostej „ p ”, prostopadłej do płaszczyzny π .

Z tego wynika bezpośrednio, że bieguny M_1 , M_2 , ... prostej „ m ”, leżącej na płaszczyźnie OXY , ... ze względu na wszystkie krzywe ${}^1c_1^2$, ${}^1c_2^2$, ... —, podług których płaszczyzna OXY , ... przecina się z elementami gromady, leżą na prostej „ n ”, prostopadłej do „ m ”.

Wiadomo atoli, że na prostej „ n ” poprowadzonej przez biegun M prostopadłe do biegunowej „ m ” tego punktu ze względu na krzywą rzędu drugiego, leży ognisko tej krzywej *).

*) Ognisko F krzywej rzędu drugiego c^2 jest kołem, o nieskończenie małym promieniu, które się styka z krzywą c^2 w punktach urojonych kołowych I_1 i I_2 , leżących w nieskończoności; punkta tedy A^∞ i A_1^∞ , biegunowo sprzężone ze względu na krzywą c^2 i leżące

Punkt przecięcia się F prostej „ n ” z osią OX lub OY jest wspólnym ogniskiem krzywych $^1c_1^2, ^1c_2^2, \dots$

Płaszczyzny główne OXY, OXZ i OYZ przecinają się tedy z powierzchniami spółosiowymi, tworzącymi grupę, podług krzywych $^1c_1^2, ^1c_2^2, \dots, ^2c_1^2, ^2c_2^2, \dots, ^3c_1^2, ^3c_2^2, \dots$ spółogniskowych. Krzywe rzędu drugiego, leżące na płaszczyznach głównych, zwyrodniałe elementa gromady mają wspólne ogniska z krzywymi $^1c_1^2, \dots, ^2c_1^2, \dots, ^3c_1^2, \dots$

Takie powierzchnie nazywamy powierzchniami spółogniskowymi.

11. Płaszczyzny biegunowe punktu P ze względu na elementa gromady powłóczą krzywą klasy trzeciej c_3 ; płaszczyzny biegunowe tedy π^1, π^2 i π^3 przechodzące przez punkt P , są płaszczyznami stycznymi, poprowadzonymi w punkcie P do trzech elementów Π_1^2, Π_2^2 i Π_3^2 gromady powierzchni spółogniskowych. A zatem:

Przez dowolny punkt przechodzą trzy elementa powierzchni rzędu drugiego spółogniskowych.

Na prostej p_1 , wyprowadzonej z punktu P prostopadłe do płaszczyzny π^1 , leżą bieguny tej płaszczyzny ze względu na wszystkie elementa gromady, a więc i bieguny płaszczyzny π^1 ze względu na powierzchnie Π_2^2 i Π_3^2 . Atoli płaszczyzny π^2 i π^3 są płaszczyznami stycznymi powierzchni Π_2^2 i Π_3^2 w punkcie P , bieguny tedy tych płaszczyzn leżą na prostej, podług której płaszczyzny π^2 i π^3 przecinają się, prosta p_1 schodzi się przeto z prostą podług której płaszczyzny π^2 i π^3 przecinają się i t. d. A zatem: Elementa powierzchni spółogniskowych, przechodzące przez jeden punkt, są w tym punkcie wzajemnie prostopadłe.

12. Przesuńmy przez punkt P płaszczyzny styczne π^1, π^2 i π^3 powierzchni spółogniskowych π_1^2, π_2^2 i π_3^2 , przechodzących przez ten punkt, to prosta $(\pi^2, \pi^3) \equiv p_1$ jest normalną powierzchni π_1^2 , a proste $(\pi^1, \pi^2) \equiv p_3$ i $(\pi^1, \pi^3) \equiv p_2$ są stycznymi, poprowadzonymi do krzywych, podług których powierzchnie Π_1^2 i Π_2^2 tudzież Π_1^2 i Π_3^2 przenikają się.

Styczne p_3 i p_2 są stycznymi sprzężonymi normalnymi powierzchni Π_1^2 w punkcie P .

Obierzmy na krzywej (Π_1^2, Π_2^2) dowolny punkt Q i przesunijmy przezeń powierzchnię $^1\Pi_2^2$, która z Π_1^2 i Π_2^2 tworzy trójkę powierzchni spółogniskowych, to styczne poprowadzone w punkcie Q do krzywych (Π_1^2, Π_2^2) i $(\Pi_1^2, ^1\Pi_2^2)$ są biegunowo sprzężone i wzajemnie prostopadłe; krzywe tedy (Π_1^2, Π_2^2) i $(\Pi_1^2, ^1\Pi_2^2)$ są krzywymi krzywiznowymi poprowadzonymi przez punkt P na powierzchni Π_1^2 .

Normalne powierzchni Π_1^2 poprowadzone w punktach krzywych krzywiznowych, są tworzącymi powierzchni rozwijalnej.

13. Na dwu powierzchniach rzędu drugiego Π_1^2 i Π_2^2 , które mają dwie płaszczyzny styczne π_a i π_b , a nadto punkta styczności A i B tych płaszczyzn wspólne, można opisać dwie powierzchnie stożkowe rzędu drugiego W_1 i W_2 ; wiadomo, że owe powierzchnie przenikają się podług dwu krzywych rzędu drugiego c_1^2 i c_2^2 .

w nieskończoności dzielą odcinek $I_1 I_2$ harmonicznie albo innymi słowy proste m i n poprowadzone przez punkta A^∞ i A_1^∞ są prostopadłe.

Jeżeli tedy poprowadzimy przez punkt M i przez ognisko F krzywej c^2 prostą n i wyznaczmy biegunową m punktu M ze względu na krzywą c^2 , to proste n i m są wzajemnie prostopadłe.

Przesuńmy przez wierzchołek W_1 , który jak wiadomo, leży na prostej, biegunowo sprzężonej z prostą AB ze względu na powierzchnie Π_1^2 i Π_2^2 , dowolną płaszczyznę π_x i wyznaczmy krzywe c_x i c_y , a nadto prostą $M_x N_x$, podług których ta płaszczyzna przecina się z powierzchniami Π_1^2 i Π_2^2 i z płaszczyzną π^1 , na której krzywa c_1^2 leży, (rys. 104.), to tworzące przekroju m i n powierzchni W_1 są wspólnymi stycznymi krzywych c_x i c_y a prosta $M_x N_x$ jest wspólną cięciwą tych krzywych; krzywe c_x i c_y są tedy środkowo kolineacyjne, punkt W_1 jest środkiem, a prosta $M_x N_x$ jest osią kolineacji.

Z tego wynika bezpośrednio, że powierzchnie Π_1^2 i Π_2^2 są dwukrotnie środkowo kolineacyjne; środki tych kolineacji schodzą się z wierzchołkami W_1 i W_2 , a płaszczyzny, na których krzywe c_1^2 i c_2^2 leżą, są odpowiednio płaszczyznami kolineacji.

0 przekrojach kołowych i pępkach powierzchni krzywokreślnych rzędu drugiego.

1. Dwie powierzchnie rzędu drugiego, które mają dwa punkta a zarazem płaszczyzny styczne, poprowadzone w tych punktach wspólne, przenikają się podług krzywej rzędu czwartego, złożonej z dwu krzywych rzędu drugiego.

Jeżeli jedna z owych powierzchni jest kulą, natenczas krzywa przenikania składa się z dwóch kół.

Przetnijmy tedy elipsoidę płaszczyzną, prostopadłą do osi największej, paraboloidę eliptyczną płaszczyzną prostopadłą do osi, a hiperboloidę o dwu powłokach płaszczyzną, prostopadłą do osi rzeczywistej, to przekroje są elipsami; kule których płaszczyzny styczne, poprowadzone w wierzchołkach osi większych tych elips, schodzą się z płaszczyznami stycznymi elipsoidy, paraboloidy lub hiperboloidy, poprowadzonymi w tychże punktach, przecinają się z temi powierzchniami podług kół.

Płaszczyzny, równoległe do płaszczyzn, na których owe koła leżą przecinają się z powierzchniami podług kół, a płaszczyzny styczne, równoległe do płaszczyzn kołowych stykają się z powierzchniami w punktach, które nazywamy pępkami.

Dwa tedy układy płaszczyzn równoległych przecinają się z powierzchniami rzędu drugiego krzywokreślnymi podług kół; elipsoida i hiperboloida o dwu powłokach mają po cztery pępki, paraboloida eliptyczna posiada dwa pępki w skończoności, dwa zaś schodzą się z punktem styczności tej powierzchni, leżącym w nieskończoności*).

Zagadnienie 1. Wyznaczyć przekroje kołowe i pępki elipsoidy trójosiowej (rys. 105.).

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że oś największa AB elipsoidy π^2 jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów, oś średnia CD jest równoległa, a oś najmniejsza EF jest prostopadła do osi rzutów „ x ”.

Opiszmy na średnicy CD kulę K i wyznaczmy rzut boczny c''' elipsy $ABEF$ i rzut boczny k''' koła k , podług którego płaszczyzna ABE przecina

*) Powierzchnię stożkową rzędu drugiego i hiperboloidę o jednej powłoce można przeciąć dwoma układami płaszczyzn podług kół; pępków atoli te powierzchnie nie mają, punkta bowiem, leżące na powierzchniach stożkowych są paraboliczne, punkta zaś leżące na hiperboloidzie są hiperboliczne.

się z kulą K , to proste π_k^1 i π_k^2 , łączące punkta przecięcia się P''' i Q''' tudzież S''' i R''' krzywych c''' i k''' , są śladami bocznymi płaszczyzn, przesuniętych przez oś CD i przecinających się z elipsoidą Π^2 podług kół.

Wyznamy za pomocą powinowactwa styczne s_1''' i s_2''' tudzież s_3''' i s_4''' , poprowadzone do elipsy c''' i równoległe do śladów π_k^1 i π_k^2 , to punkta styczności tychże N_1''' i N_2''' tudzież N_3''' i N_4''' są rzutami bocznymi pępków N_1 i N_2 tudzież N_3 i N_4 elipsoidy trójosiowej Π^2 .

Zagadnienie 2. Wyznaczyć przekroje kołowe i pępki paraboloidy eliptycznej π^2 (rys. 106.).

Rozwiązanie: Oś AD paraboloidy jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów; ślad poziomy tej powierzchni jest elipsą, której oś większa BC jest równoległa do osi „ z ”, a oś mniejsza EF jest prostopadła do tej osi.

Poprowadzmy w punktach B i C normalne BW i CW do paraboli ABC i zakreślmy z punktu przecięcia się W tych prostych jako środka kulę K promieniem WC , to krzywa przenikania się powierzchni K i Π^2 składa się z dwóch kół.

Aby otrzymać płaszczyzny, na których owe koła leżą, wyznaczmy rzut boczny c''' paraboli AEF i rzut boczny k''' koła k , podług którego płaszczyzna AEF przecina się z kulą K , a nadto punkta przecięcia się P''' i Q''' tudzież R''' i S''' krzywych c''' i k''' , to proste $P'''Q'''$ i $R'''S'''$ są śladami bocznymi płaszczyzn przesuniętych przez oś BC i przecinających się z paraboloidą podług kół *).

Punkta styczności N_1''' i N_3''' stycznych s_1''' i s_3''' , poprowadzonych do krzywej c''' i równoległych do prostych $P'''Q'''$ i $R'''S'''$ są rzutami bocznymi pępków paraboloidy Π^2 .

2. Środki kół, podług których płaszczyzny, należące do tego samego układu, przecinają się z powierzchnią rzędu drugiego, a nadto wierzchołki stożków, opisanych na powierzchni wzdłuż tych kół, leżą na średnicy powierzchni, która łączy pępki, należące do tego układu.

Zagadnienie 3. Wyznaczyć płaszczyzny, które przecinają hiperboloidę o dwu powłokach trójosiową Π^2 podług kół, o promieniach „ r ” (rys. 107.).

Rozwiązanie: Przetnijmy powierzchnię π^2 płaszczyzną π^1 , prostopadłą do osi rzeczywistej AB podług elipsy $C_1D_1E_1F_1$, i wyznaczmy kulę K , która się styka z hiperboloidą w wierzchołkach C_1 i D_1 osi większej przekroju, to powierzchnie Π^2 i K przenikają się podług dwu kół k_1 i k_2 .

Wyznamy następnie środek M_1 koła k_1 i połączmy go ze środkiem O powierzchni, to prosta OM_1 jest miejscem geometrycznym środków kół, leżących na powierzchni Π^2 i na płaszczyznach, równoległych do płaszczyzny π^2 , na której koło k_1 leży.

Jeżeli tedy odmierzymy na średnicy GK koła k_1 od punktu M_1 odcinek M_1P_1 równy odcinkowi „ r ” i poprowadzimy przez P_1 prostą m_1 , równoległą do OM_1 , to płaszczyzny, przesunięte przez punkta przecięcia się Q i R tej

*) Punkta przecięcia się dwu krzywych rzędu drugiego c_1 i c_2 , których spólny biegun P i odpowiednia spólna biegunowa „ p ” są dane, można wyznaczyć za pomocą koła.

Jakoż poprowadzmy przez P pęk promieni $(a, b, c...)$ i wyznaczmy odpowiednie promienie, biegunowo sprzężone $(a_1, b_1, c_1...)$ i $(a_2, b_2, c_2...)$ z elementami $a, b, c...$ ze względu na krzywe c_1 i c_2 , to $aa_1bb_1...$ i $aa_2bb_2...$ wyznaczają dwa pęki inwolucyjne spólnikowe; promienie spólne tych pęków są spólnymi cięciwami krzywych c_1 i c_2 .

prostej z hiperbolą ABE_1F_1 przecinają się z powierzchnią Π^2 podług kół, o promieniach równych odcinkowi „ r ”.

Zagadnienie: Wyznaczyć punkta przecięcia się prostej z powierzchnią rzędu drugiego krzywokreślną za pomocą jednokrotnej zmiany kolineacyjnej.

O powierzchniach obrotowych.

1. Jeżeli krzywa „ c ”, płaska lub wchrowata, nie zmieniając ani swej postaci ani swej wielkości, obraca się około prostej „ z ”, natenczas pozostawia w przestrzeni ślad, który nazywamy powierzchnią obrotową.

Prosta „ z ” nazywa się osią obrotu.

Poszczególne punkta, leżące na krzywej „ c ” opisują koła $r_1, r_2, ...$ leżące na płaszczyznach, prostopadłych do osi „ z ”. Te koła nazywamy równoleżnikami powierzchni obrotowej Π_0 . Punkta $A, A_1, ... B, B_1, ...$ leżące na równoleżnikach $r_1, r_2, ...$ opisują takie same równoleżniki jak punkta $A_n, B_n, ...$ leżące na krzywej c i na równoleżnikach $r_1, r_2, ...$ dowolna tedy krzywa, leżąca na powierzchni Π_0 opisuje, przez obrót około osi z , tę samą powierzchnię obrotową.

Płaszczyzny, przesunięte przez oś z , przecinają się z powierzchnią obrotową Π_0 podług krzywych przystających $p^1, p^2, ...$, albowiem odległość punktów $A, B, ... A_1, B_1, ...$ leżących na krzywych $p^1, p^2, ...$ i na równoleżnikach $r_1, r_2, ...$ od osi „ z ” są równe.

Te krzywe nazywamy południkami powierzchni Π_0 .

Przez obrót tedy południka około osi „ z ” otrzymujemy powierzchnię obrotową (rys. 108.).

2. Przez każdy punkt A , leżący na powierzchni obrotowej przechodzi równoleżnik r i południk p^1 .

Przez styczne s_1 i s_2 , poprowadzone do krzywych r_1 i p^1 w punkcie A , przechodzi płaszczyzna styczna, poprowadzona do powierzchni obrotowej w tym punkcie; atoli styczna s_1 jest prostopadła do promienia styczności ZA koła r_1 , a nadto leży na płaszczyźnie, prostopadłej do osi obrotu z , a zatem:

Płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni obrotowej, są prostopadłe do płaszczyzn tych południków, które przechodzą przez punkta styczności.

Płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni obrotowej w punktach $A, B, ...$ leżących na jednym południku są płaszczyznami stycznymi powierzchni walcowej, o tworzących prostopadłych do płaszczyzny owego południka.

3. Jeżeli stycznią s_2 i normalną n_2 , poprowadzone do południka p^1 w punkcie A , obróćmy około osi „ z ”, natenczas otrzymamy dwie powierzchnie stożkowe (W_1, r_1) i (W_2, r_1) obrotowe. Płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni (W_1, r_1) są płaszczyznami stycznymi powierzchni obrotowej; w punktach, w których tworzące styczności przecinają się z równoleżnikiem r_1 , a tworzące powierzchni (W_2, r_1) są normalnymi powierzchni w punktach, leżących na równoleżniku r_1 .

Powierzchnia normalnych powierzchni obrotowej w punktach, leżących na południku p^1 schodzi się z płaszczyzną tego południka; powierzchnia normalnych w punktach, leżących na równoleżniku r_1 , jest powierzchnią stożkową obrotową (W_2, r_1) . A zatem:

Równoleżniki i południki powierzchni obrotowej są krzywami krzywiznowymi tejże.

4. Przy rozwiązywaniu zagadnień o powierzchniach obrotowych w rzutach prostokątnych przyjmujemy zwykle, że oś „ z ” jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów, a nadto, że tak zwany południk główny p_g , który leży na płaszczyźnie, równoległej do płaszczyzny pionowej rzutów wyznaczają powierzchnię.

Jeżeli styczne s_1 i s_2 , poprowadzone do południka głównego p_g (rys. 109.) w punktach B i C , są równoległe do osi z , natenczas równoleżniki r_b i r_c , opisane temi punktami, są kierownicami powierzchni walcowych, opisanych na powierzchni Π_0 , o tworzących prostopadłych do płaszczyzny poziomej rzutów.

Równoleżnik r_h , którego promień jest większy niż promienie równoleżników z nim sąsiadujących, nazywamy równikiem.

Równoleżnik r_z , którego promień jest mniejszy niż promienie równoleżników z nim sąsiadujących, nazywamy kołem szyjnym powierzchni obrotowej.

Zagadnienie 1. Mając dany rzut pionowy A'' punktów, leżących na powierzchni obrotowej, wyznaczyć rzuty poziome tychże (rys. 110.).

Rozwiązanie: Rzuty poziome równoleżników powierzchni są kołami, których środki schodzą się z rzutem poziomym z' osi obrotu. Rzuty pionowe południków są krzywami prostokątnie powinowatymi z rzutem pionowym południka głównego; rzut pionowy z'' jest osią, a dostawa kąta, zawartego między płaszczyzną pionową rzutów i płaszczyzną, na której ów południk leży, jest cechą powinowactwa (rys. 110.).

Poprowadźmy tedy przez A'' ślad π^1 płaszczyzny, prostopadłej do osi z , i wyznaczmy punkta przecięcia się Z'' i Q'' tej prostej z rzutami z'' i p_g'' , zakresłmy następnie z punktu z' jako środka promieniem $Z''Q''$ koło r'_1 , to na nim leżą rzuty poziome A'_1 i A'_2 tych punktów, których rzuty pionowe schodzą się z punktem A'' .

Zagadnienie 2. W punkcie A , leżącym na powierzchni obrotowej Π_0 , którego rzut poziomy A' jest dany, poprowadzić płaszczyznę styczną do tej powierzchni (rys. 110 a).

Rozwiązanie: Zakreślmy z punktu z' jako środka promieniem $z'A'$ koło r' i wyznaczmy punkt przecięcia się B' śladu poziomego π_h płaszczyzny południka głównego p_g z kołem r' , to na prostej π^1 , poprowadzonej przez B'' równoległej do osi x , leży rzut pionowy A'' punktu A .

a) Styczna s'_1 , poprowadzona w punkcie A' do koła r' jest rzutem poziomym stycznej s_1 , poprowadzonej w punkcie A do równoleżnika r , rzut pionowy s''_1 schodzi się ze śladem pionowym π^1 .

Poprowadźmy następnie w punkcie B'' styczne $B''W''_1$ do rzutu pionowego p_g'' południka głównego i połączmy punkta W''_1 i A'' to prosta $W''_1A'' \equiv s''_2$ jest rzutem pionowym stycznej s_2 , poprowadzonej do południka (z, A) w punkcie A ; rzut poziomy s'_2 schodzi się z prostą $z'A'*$.

*) Jeżeli punkt W''_1 leży poza obrębem rysunku, natenczas styczną s'' można wyznaczyć w sposób następujący:

Przesuńmy stożek (W''_1, r) i powierzchnię obrotową Π_0 tak, aby punkt W''_1 zeszedł się z punktem $^1W''$ (rys. 110b.) i poprowadźmy prostą $^2W''^1B''$, równoległą do W''_1B'' , to płaszczyzna równoleżnika r przesunie się o odcinek B''^1B'' , a punkt A'' zejdzie się z punktem $^1A''$. Styczna s'' poprowadzona w punkcie A'' do rzutu południka, leżącego na płaszczyźnie (z, A), jest równoległą do prostej $^1W''^1A''$.

Płaszczyzna przesunięta przez proste s_1 i s_2 jest płaszczyzną styczną, poprowadzoną do powierzchni Π_0 w punkcie A .

b) Wyprowadźmy z punktu B'' prostą $B''W''_2$, prostopadłą do stycznej $B''W''_1$, i wyznaczmy punkt przecięcia się tejże W''_2 z rzutem pionowym z'' osi obrotu z , to prosta W''_2A'' jest rzutem pionowym normalnej, poprowadzonej do powierzchni Π_0 w punkcie A . Płaszczyzna tedy, przesunięta przez punkt A i prostopadła do prostej ($z'A', W''_2A''$) jest płaszczyzną styczną powierzchni obrotowej w punkcie A .

Zagadnienie 3. Wyznaczyć punkta przecięcia się powierzchni obrotowej z prostą l , która się przecina z osią obrotu z (rys. 111.).

Rozwiązanie: Obróćmy południk p_1 , na którym prosta l leży około osi z tak, aby się zeszedł z południkiem głównym p_g , a prosta l z prostą l_1 , i wyznaczmy punkta przecięcia się A''_1 i B''_1 rzutu l''_1 z krzywą p_g'' , sprowadźmy następnie obrotem wstecznym punkta A_1 i B_1 na prostą l , to natenczas otrzymamy punkta A i B , w których prosta l przecina się z powierzchnią obrotową.

Zagadnienie 4. Wyznaczyć krzywą c podług której dowolna płaszczyzna π (π_h, π_v) przecina się z powierzchnią obrotową (rys. 112.).

Rozwiązanie: Przesuńmy przez oś „ z ” płaszczyznę π^1 , prostopadłą do płaszczyzny π , i wyznaczmy prostą m , podług której płaszczyzny π i π^1 przecinają się, to prosta m jest osią symetrii prostokątnej krzywej „ c ”, podług której płaszczyzna π przecina się z powierzchnią obrotową.

Południk p^1 powierzchni, leżący na płaszczyźnie π^1 przecina się z prostą „ m ” w punktach 1. i 2., leżących na krzywej przekroju „ c ”; styczne poprowadzone w punktach 1. i 2. do tej krzywej, są równoległe do płaszczyzny poziomej rzutów, płaszczyzny styczne bowiem, poprowadzone do powierzchni Π_0 w punktach, leżących na południku p_1 , są prostopadłe do płaszczyzny π^1 .

Południk główny p_g przecina się z płaszczyzną π w punktach 3. i 4. krzywej c ; styczne, poprowadzone w rzutach 3” i 4” do krzywej c'' schodzą się ze stycznymi poprowadzonymi w tychże punktach do rzutu pionowego p_g'' południka głównego; płaszczyzny styczne bowiem poprowadzone do powierzchni obrotowej w punktach, leżących na południku głównym są prostopadłe do płaszczyzny pionowej rzutów.

Równik „ r ” powierzchni obrotowej przecina się z płaszczyzną π w punktach 5. i 6.; styczne poprowadzone w rzutach 5’ i 6’ do krzywej c' schodzą się ze stycznymi, poprowadzonymi w tychże punktach do koła r' , płaszczyzny styczne bowiem, poprowadzone do powierzchni w punktach leżących na równiku są równoległe do osi obrotu.

Celem wyznaczenia dalszych punktów krzywej przekroju, poprowadźmy płaszczyzny $\pi^2, \dots$ prostopadłe do osi z , i wyznaczmy proste $l_2, \dots$ i równoleżniki $r_2, \dots$ podług których te płaszczyzny przecinają się z płaszczyzną π i z powierzchnią Π_0 , to punkta przecięcia się 7. i 8.,... prostej l_2 z kołem $r_2, \dots$ są punktami krzywej c .

Płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni obrotowej w punktach 7, 8,... przecinają się z płaszczyzną π podług stycznych, poprowadzonych w tych punktach do krzywej przekroju.

5. Jeżeli krzywa rzędu drugiego c^2 , leżąca na płaszczyźnie π obraca się około prostej z , leżącej na tej samej płaszczyźnie, natenczas opisuje powierzchnię obrotową rzędu czwartego Π_0^4 , którą nazywamy pierścieniem (rys. 113.).

Punkta przecięcia się S_1 i S_2 krzywej c^2 z osią z są punktami stożkowymi powierzchni Π_0^4 , płaszczyzny styczne bowiem, poprowadzone w tych punktach do powierzchni pierścieniowej, są płaszczyznami stycznymi dwu powierzchni stożkowych obrotowych.

Poprowadźmy styczne AA_1 i BB_1 do krzywej c^2 , prostopadłe do osi z , a nadto taką cięciwę DE' , prostopadłą do z , którą odcinek $S_1 S_2$ dzieli na dwie równe części, to punkta powierzchni Π_0^4 , leżące na równoleżnikach, opisanych punktami A i B są paraboliczne, punkta leżące na części powierzchni opisanej łukami AD i EB są eliptyczne, punkta zaś leżące na tej części powierzchni, którą opisują łuki AS_1 i BS_2 są hiperboliczne.

Zagadnienie 5. Wyznaczyć przekrój pierścienia, utworzonego kołem, leżącym na płaszczyźnie południka głównego, płaszczyzną π^1 , równoległą do płaszczyzny pionowej rzutów (rys. 114.).

Rozwiązanie: Rzut poziomy c_1 krzywej przekroju leży na śladzie poziomym π_h^1 płaszczyzny przecinającej.

Prosta y_1 , podług której płaszczyzna π^1 przecina się z płaszczyzną π^2 , przesuniętą przez oś „ z ” prostopadłe do płaszczyzny π^1 jest osią krzywej c_1 .

Prosta x_1 , podług której płaszczyzna π^3 przesunięta przez środek O powierzchni równoległe do płaszczyzny poziomej rzutów, przecina się z płaszczyzną π^1 jest drugą osią krzywej c_1 .

Załóżmy sobie wyprowadzić równanie krzywej przekroju c_1 w rzutach prostokątnych, uważając proste x_1 i y_1 za osi, a punkt przecięcia się tychże M za początek układu.

Nazwijmy w tym celu „ r ” promień koła „ k ”, opisującego pierścień Π_0 , „ a ” odległość środka S koła k od osi obrotu z , „ b ” odległość płaszczyzny π^1 od płaszczyzny południka głównego.

Obierzmy na krzywej przekroju c_1 dowolny punkt A i nazwijmy „ x ” odległość rzutu poziomego A' tego punktu od rzutu poziomego M' początku układu M , „ y ” zaś niech oznacza odległość rzutu pionowego A'' od prostej x_1 , to

$$1. O'A' = \sqrt{x^2 + b^2}.$$

Odcinek y jest średnią geometrycznie proporcjonalną między ilościami $(a+r - O'A')$ i $[O'A' - (a-r)]$ a przeto

$$2. y^2 = (a+r - \sqrt{x^2 + b^2}) [\sqrt{x^2 + b^2} - (a-r)]$$

a po rozwiązaniu i uporządkowaniu otrzymamy równanie krzywej przekroju.

$$3. (y^2 + x^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2x^2 = 4a^2b^2.$$

a) Jeżeli przyjmujemy, że $b=r$, natenczas równanie 3. przedstawi się w postaci

$$4. \sqrt{y^2 + (x+a)^2} \cdot \sqrt{y^2 + (x-a)^2} = 2ar,$$

które powiada, że iloczyn odcinków, zawartych między punktami krzywej przekroju c_1 i dwoma punktami stałymi, leżącymi na osi x_1 , po obu stronach początku układu M , w odległościach od tego punktu, równych promieniowi „ r ” koła k jest ilością stałą. (Krzywa Cassiniego).

b) Przyjmijmy następnie, że $b=r$, $r=\frac{a}{2}$, to natenczas płaszczyzna przecinająca π^1 jest styczną do pierścienia w punkcie, leżącym na kole szyjnym.

Równanie tej krzywej

$$5. \sqrt{y^2 + (x+a)^2} \cdot \sqrt{y^2 + (x-a)^2} = a^2,$$

które powiada to samo, co równanie krzywej Cassiniego, z poprzednich

nadto badań wynika, że ta krzywa posiada punkt podwójny. (Krzywa Bernoulliego).

Zagadnienie 6. Wyznaczyć przekrój „ c ” pierścienia kołowego dowolną płaszczyzną π (rys. 115.).

Rozwiązanie: Płaszczyzna π^2 , przesunięta przez oś obrotu „ z ” i prostopadła do płaszczyzny π , przecina się z tą płaszczyzną podług prostej „ m ”, która jest osią symetrii prostokątnej punktów krzywej przekroju c .

Punkta przecięcia się 1, 2,... prostej „ m ” z południkiem, leżącym na płaszczyźnie π^2 , są wierzchołkami krzywej przekroju; styczne poprowadzone w tych punktach do krzywej c , są równoległe do płaszczyzny poziomej rzutów.

Równik r i koło szyjne r_1 przecinają się z płaszczyzną π w punktach 5, 6,...; styczne, poprowadzone do rzutu poziomego c' krzywej przekroju w punktach 5', 6'... schodzą się ze stycznymi, poprowadzonymi w tychże punktach do rzutów r' i r'_1 .

Południk główny p_0 przecina się z płaszczyzną π w punktach 9, 10,...; styczne poprowadzone do rzutu pionowego c'' w punktach 9'', 10'' schodzą się ze stycznymi, poprowadzonymi w tych punktach do rzutu pionowego południka głównego.

Równoleżniki r_2 i r_3 , na których punkta paraboliczne powierzchni pierścieniowej leżą, przecinają się z płaszczyzną π w punktach 13, 14,... styczne poprowadzone do rzutu pionowego krzywej przekroju w punktach 13'', 14'', schodzą się ze śladami pionowymi płaszczyzn π^2 i π^3 , na których owe równoleżniki leżą, styczne poprowadzone w punktach 13', 14'... do krzywej c' są rzutami poziomymi p' i q' prostych, podług których płaszczyzna π przecina się z płaszczyznami π^2 i π^3 .

Jeżeli punkta 13. i 14., leżące na równoleżniku parabolicznym pierścienia schodzą się z sobą w punkcie U , natenczas styczna, poprowadzona do krzywej przekroju w punkcie U przechodzi przez cztery bezpośrednio sobie następujące punkta tej krzywej; punkt U nazywamy punktem undulacyjnym. A zatem:

Płaszczyzny przesunięte, przez styczną, poprowadzoną do jednego z równoleżników parabolicznych pierścienia, przecinają się z tą powierzchnią podług krzywej, której punkt styczności owej stycznej jest punktem undulacyjnym.

Płaszczyzny styczne, poprowadzone do stożka i walca, przesuniętych przez koła paraboliczne pierścienia przecinają się z tą powierzchnią podług krzywych, z których każda posiada dwa punkta undulacyjne.

6. Poprowadźmy przez środek O powierzchni pierścieniowej styczną „ s ” do południka głównego (rys. 116.) i przesunijmy przez tę styczną płaszczyznę π , prostopadłą do płaszczyzny pionowej rzutów, to punkta styczności D_1 i D_2 prostej „ s ” z południkiem p_0 są punktami podwójnymi krzywej rzędu czwartego c^4 , podług której płaszczyzna π przecina się z pierścieniem kołowym.

Krzywa c^4 składa się tedy z dwu krzywych rzędu drugiego. Dowolna płaszczyzna π^1 przesunięta przez oś obrotu „ z ” przecina się z płaszczyzną π podług prostej „ n ”, na której leżą cztery punkta A i A_1 , tudzież B i B_1 .

Jeżeli płaszczyznę π^1 obrócimy około osi „ z ” tak, aby była równoległa do płaszczyzny pionowej rzutów natenczas punkta A , A_1 , B , B_1 schodzą się odpowiednio z punktami A_2 , A_3 , B_2 , B_3 ; atoli $OA_3 = -OB_2$, $OA_2 = -OB_3$ a za-

tem $OA_2 \cdot OB_2 = OA_3 \cdot OB_3 = OA \cdot OB = OA_1 \cdot OB_1 = OD \cdot OD_1$; punkta przeto D_1, D_2, A i B, D_1, D_2, A_1 i B_1 leżą na obwodach dwóch kół, tworzących krzywą przekroju c^4 .

Plaszczyzny styczne, poprowadzone przez środek pierścienia kołowego do tej powierzchni przecinają się z tą powierzchnią podług krzywej rzędu czwartego, która się składa z dwóch kół.

Zagadnienie 7. Wyznaczyć krzywą c , wzdłuż której walec, o tworzących równoległych do prostej „ l ” styka się z powierzchnią obrotową Π_0 (rys. 117).

Rozwiązanie: Opiszmy wzdłuż równika r i wzdłuż koła szyjnego r_1 powierzchni Π_0 walec, o tworzących prostopadłych do płaszczyzny poziomej rzutów i poprowadźmy styczne l'_1, l'_2, l'_3 i l'_4 do kół r' i r'_1 , równoległe do rzutu l' , to te proste są śladami poziomymi płaszczyzn stycznych równoległych do prostej „ l ”, poprowadzonych do owych walców.

Punkta styczności $1'$ i $2'$ prostych l'_1 i l'_2 z kołem r' tudzież punkta styczności $3'$ i $4'$ prostych l'_3 i l'_4 z kołem r'_1 są rzutami poziomymi punktów leżących na krzywej c ; rzut c' styka się z kołem r' w punktach $1'$ i $2'$ a z kołem r'_1 w punktach $3'$ i $4'$.

Opiszmy następnie na południku głównym p_g walec prostopadły do płaszczyzny pionowej rzutów i poprowadźmy styczne l''_5 i l''_6 do rzutu p_g'' , równoległe do l'' to punkta styczności $5''$ i $6''$ prostych l''_5 i l''_6 z krzywą p_g'' są rzutami pionowymi punktów leżących na krzywej c ; rzut pionowy c'' styka się z krzywą p_g'' w punktach $5''$ i $6''$.

Dalsze punkta krzywej c można wyznaczyć za pomocą stożków opisanych na powierzchni wzdłuż równoleżników, za pomocą walców, opisanych wzdłuż południków i za pomocą kul, które stykają się z powierzchnią Π_0 wzdłuż równoleżników.

Opiszmy wzdłuż równoleżnika r_2 na powierzchni Π_0 stożek (W_2, r_2) i poprowadźmy doń płaszczyzny styczne W_2l_7 i W_2l_8 , równoległe do prostej l , to tworzące styczności W_27 i W_28 przecinają się z równoleżnikiem r_2 w punktach 7 i 8, leżących na krzywej c i t. d.

Opiszmy na południku p_1 , który leży na płaszczyźnie π^1 , równoległej do prostej „ l ” walec i obróćmy go około osi „ z ” tak aby południk p_1 zeszedł się z południkiem głównym, obróćmy równocześnie o taki sam kąt i w tym samym kierunku prostą m , która leży na płaszczyźnie π^1 i jest równoległa do „ l ”, aby po obrocie zeszyła się z m_1 i poprowadźmy styczne m''_2 i m''_3 do rzutu p_g'' równoległe do m''_1 , wyznaczmy następnie punkta styczności tychże $9''_1$ i $10''_1$ i sprowadźmy je obrotem wstecznym na południk p_1 , to natenczas otrzymamy punkta 9 i 10 krzywej c , wzdłuż której walec o tworzących równoległych do „ l ” z powierzchnią Π_0 się styka i t. d.

Poprowadźmy w punkcie A'' styczną s'' i normalną n'' do rzutu pionowego p_g'' południka głównego i zakreślmy z punktu O'' w którym n'' przecina się z „ z ” koło k'' to natenczas otrzymamy rzut pionowy kuli K , która się styka z powierzchnią Π_0 wzdłuż równoleżnika r_3 , opisanego punktem A . Poprowadźmy przez punkt O płaszczyznę π^2 prostopadłą do prostej l i wyznaczmy prostą „ g ”, podług której płaszczyzna równoleżnika r^3 przecina się z płaszczyzną π^2 , to punkta przecięcia się 11 i 12 prostej g z kołem r_3 są punktami krzywej c i t. d.

Zagadnienie: Z punktu W (W', W'') opisać powierzchnię stożkową na powierzchni obrotowej.

Zagadnienie 8. Wyznaczyć płaszczyzny styczne powierzchni obrotowej, równoległe do danej płaszczyzny.

Rozwiązanie: Przesuńmy przez oś obrotu „ z ” płaszczyznę π^1 prostopadłą do płaszczyzny π i wyznaczmy prostą „ n ”, podług której te płaszczyzny przecinają się, poprowadźmy następnie do południka p_1 , leżącego na płaszczyźnie π^1 , styczne $n_1, n_2, \dots$, równoległe do n , to płaszczyzny, przesunięte przez te proste i równoległe do płaszczyzny π , czynią zadość warunkom zagadnienia.

Zagadnienie 9. Wyznaczyć krzywe ograniczające rzuty poziome i pionowe powierzchni obrotowej, której oś „ z ” jest nachylona do obu płaszczyzn rzutów (rys. 118.).

Rozwiązanie: Niech będzie dany kład (p) południka p , leżącego na płaszczyźnie π , prostopadłej do płaszczyzny poziomej rzutów, a nadto kład (z) osi obrotu

Poprowadźmy z dowolnego punktu (M), leżącego na prostej (z) styczną (M) (A) i normalną (A) (O) do krzywej (p), to odcinek tej normalnej, zawarty między punktem (A) i kładem (z) jest promieniem kuli K , stykającej się z powierzchnią obrotową wzdłuż równoleżnika r_1 , który opisuje punkt A .

Jeżeli tedy z rzutów O' i O'' punktu O jako środków zakreślmy promieniem (O) (A) koła K' i K'' natenczas otrzymamy rzuty K' i K'' kuli K .

Styczne $M'1'$ i $M'2'$ poprowadzone z rzutu M' do koła K' są śladami poziomymi płaszczyzn stycznych poprowadzonych do kuli i do powierzchni Π_0 przez punkt A i prostopadłych do płaszczyzny poziomej rzutów, w punktach 1 i 2 leżących na równoleżniku r_1 .

Styczne $M''3''$ i $M''4''$, poprowadzone z M'' do koła K'' są śladami pionowymi płaszczyzn stycznych, poprowadzonych do kuli K i do powierzchni obrotowej Π_0 , przez punkt M i prostopadłych do płaszczyzny pionowej rzutów, w punktach 3 i 4, leżących na równoleżniku r_1 i t. d.

Punkta $1', 2', \dots$ i styczne $M'1', M'2', \dots$ jakoteż punkta $3'', 4'', \dots$ i styczne $M''3'', M''4'', \dots$ wyznaczają krzywe c'_2 i c''_3 , ograniczające rzuty poziome i pionowe powierzchni obrotowej.

Zagadnienie 10. Wyznaczyć krzywą, ograniczającą rzut środkowy powierzchni obrotowej, której oś l (T, Z') jest prostopadła do tła (rys. 119.).

Rozwiązanie: Niech będzie dany kład (p) południka p , leżącego na płaszczyźnie (O, l), przesuniętej przez środek rzutów.

Punkta $A, B, \dots$ leżące na południku p , opisują podczas obrotu krzywej „ p ” koła $r, r_1, \dots$ które leżą na płaszczyznach równoległych do tła. Rzuty środkowe $r', r'_1, \dots$ tych równoleżników są przeto kołami; punkta przecięcia się $A', B', \dots$ prostej TZ' z promieniami $[O] (A), [O] (B), \dots$ leżą na okręgach kół $r', r'_1, \dots$ a punkta przecięcia się $M', M'_1, \dots$ promieni $[O] (M), [O] (M_1), \dots$ z rzutem TZ' są środkami tych kół.

Krzywa powłócząca koła $r', r'_1, \dots$ ogranicza rzut środkowy powierzchni obrotowej.

Zagadnienie 11. Wykreślić krzywą ograniczającą rzut środkowy powierzchni obrotowej, której oś l (TZ') jest nachylona do tła pod dowolnym kątem (rys. 120.).

Rozwiązanie: a) Wykonajmy kład na tło płaszczyzny (O, l) , przesuniętej przez środek rzutów i przez oś obrotu, poprowadźmy do kładu (p) południka p , leżącego na tej płaszczyźnie, z kładu $[O]$ styczne $[O]1'$, $[O]2'$, to punkta przecięcia się $1'$ i $2'$ promieni $[O]1'$ i $[O]2'$ z rzutem TZ' osi l są punktami krzywej ograniczającej c' .

Płaszczyzny styczne π^1 i π^2 , poprowadzone do powierzchni obrotowej w punktach 1 i 2 leżących na południku p , są prostopadłe do płaszczyzny (O, TZ') , ślady zatem owych płaszczyzn przechodzą przez punkta $1'$ i $2'$ i przez ślad zbiegu Z^{90} prostych, prostopadłych do płaszczyzny (O, TZ') ; proste $Z^{90}1'$ i $Z^{90}2'$ są tedy stycznymi krzywej c' w punktach $1'$ i $2'$.

Poprowadźmy styczną (s_1) i normalną (n_1) w punkcie (A) do kładu (p) południka, to odcinek $(A)(N)$ normalnej, zawarty między (A) i kładem (l) osi obrotu jest promieniem kuli K_1 , która się styka z powierzchnią obrotową wzdłuż równoleżnika, opisanego punktem A .

Wyznaczmy rzut N' punktu N i poprowadźmy przez ten punkt prostą m_1 ($O_1 N' P_1$), prostopadłą do tła, wyznaczmy następnie kład $[O_1](m_1)$ płaszczyzny (O, m_1) na tło i zakreślmy z kładu (N_1) punktu N jako środka koło (k_1) promieniem $(A)(N)$, to styczne $[O_1]I'$, $[O_1]II'$, poprowadzone z punktu $[O_1]$ do koła (k_1) przecinają się z rzutem m'_1 w wierzchołkach I' i II' , a proste $[O_1](P_1)$ i $[O_1](Q_1)$, łączące kład $[O_1]$ z punktami (P_1) i (Q_1) , w których prosta (m_1) przecina się z kołem (k_1) , przecinają się prostą m'_1 w ogniskach F'_1 i F'_2 krzywej rzędu drugiego c_1^2 , która ogranicza rzut środkowy kuli K_1 , stykającej z powierzchnią obrotową wzdłuż równoleżnika, opisanego punktem A .

W podobny sposób wyznaczmy krzywe $c_2^2, c_3^2, \dots$ ograniczające rzuty środkowe kul $K_2, K_3, \dots$ wpisanych w powierzchnię obrotową, krzywa tedy „ c'' ” powłócząca krzywe $c_1^2, c_2^2, c_3^2, \dots$ ogranicza rzut środkowy powierzchni obrotowej.

b) Przyjmijmy, że środek rzutów O , powierzchnia obrotowa Π_o i płaszczyzna tłowa są stale z sobą związane, i wyznaczmy kład $[O](l)$ na tło płaszczyzny (O, l) oraz kład (p) południka, leżącego na tej płaszczyźnie, to pierwotne tło obróci się o kąt $(180 - (O)AO_1)$; ślad tłowy t_l tła pierwotnego schodzi się z prostą TZ' a ślad zbiegu z_l jest symetryczny z prostą t_l ze względu na punkt O_1 (rys 120 a).

Jeżeli tedy wyznaczmy na powierzchni Π_o krzywą „ c'' ”, wzdłuż której stożek, opisany z punktu $[O]$ z tą powierzchnią się styka (rzut c' tej krzywej ze środka O na płaszczyznę $(t_l z'_l)$), jeżeli następnie obrotem wstecznym sprowadzimy płaszczyznę $(t_l z'_l)$ na tło, to natenczas otrzymamy krzywą (c') , ograniczającą rzut środkowy powierzchni Π_o .

7 a) Wykreślenie krzywej, podług której dwie powierzchnie obrotowe Π_o^1 i Π_o^2 , o osiach wchrowatych z_1 i z_2 przenikają się, jest połączone z wielkimi trudnościami mechanicznymi; poszczególne punkta bowiem tej krzywej można otrzymać, przecinając obie powierzchnie płaszczyznami $\pi^1, \pi^2, \dots$ prostopadłymi do osi z_1 i wyznaczając punkta przecięcia się równoleżników $r_1, r_2, \dots$ leżących na płaszczyznach $\pi^1, \pi^2, \dots$ i na powierzchni Π_o^1 z krzywymi $c_1, c_2, \dots$ podług których te płaszczyzny przecinają się z powierzchnią Π_o^2 .

b) Jeżeli osi z_1 i z_2 powierzchni Π_o^1 i Π_o^2 są równoległe (rys. 121.), natenczas krzywa przenikania się tychże „ c'' ” jest prostokątnie symetryczna ze względu na płaszczyznę (z_1, z_2) . Płaszczyzny $\pi^1, \pi^2, \dots$ prostopadłe do osi z_1

i z_2 przecinają się z powierzchniami Π_o^1 i Π_o^2 podług równoleżników r_1 i r_2, r_3 i $r_4, \dots$ a punkta przecięcia się tychże 1 i 2, 3 i 4... leżą na krzywej „ c'' ”.

Prosta s_1 , poprowadzona przez punkt „ $1''$ ” i prostopadła do normalnych $N_1 1$ i $N_2 1$ powierzchni jest styczną, poprowadzoną do krzywej c w punkcie „ $1''$ ”.

c) Jeżeli osi z_1 i z_2 przecinają się w punkcie M (rys. 122.), natenczas płaszczyzna (z_1, z_2) jest płaszczyzną symetrii prostokątnej ze względu na krzywą „ c'' ”, podług której powierzchnie Π_o^1 i Π_o^2 przenikają się.

Celem wyznaczenia poszczególnych punktów krzywej „ c'' ”, opiszmy ze środka M kule $K_1, K_2, \dots$ i wyznaczmy koła „ r_1 ” i „ r_2 ”, „ r_3 ” i „ r_4 ”,... podług których kule $K_1, K_2, \dots$ przenikają się z powierzchniami Π_o^1 i Π_o^2 , to punkta przecięcia się 1, 2... kół, leżących na tych samych kulach są punktami krzywej „ c'' ”.

Na rysunku 122. przyjęto, że oś z_1 jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów, a oś z_2 jest równoległa do płaszczyzny pionowej rzutów, rzuty poziome tedy równoleżników „ r_1 ” i „ r_2 ”,... są kołami a rzuty pionowe „ r''_1 ”, „ r''_2 ”,... i „ r''_3 ”, „ r''_4 ”,... są prostymi prostopadłymi do rzutów „ z''_1 ” i „ z''_2 ”.

Proste wyprowadzone z punktów przecięcia się „ V''_1 ”, „ V''_2 ”,... prostych „ r''_1 ” i „ r''_2 ”, „ r''_3 ” i „ r''_4 ” przecinają się z równoleżnikami „ r_1 ”, „ r_2 ”,... w punktach 1, 2... krzywej przenikania się „ c'' ”. Krzywa c jest prostokątnie symetryczna ze względu na płaszczyznę (z_1, z_2) .

O powierzchniach wchrowatych.

1. Wiadomo, że trzy krzywe c_1, c_2 i c_3 wyznaczają powierzchnię wchrowatą Π_w . Tworzące tej powierzchni otrzymamy przesuwając przez punkta $A_1, A_2, \dots$ leżące na krzywej c_1 powierzchnie stożkowe (A_1, c_2) i (A_1, c_3) , (A_2, c_2) i $(A_2, c_3), \dots$ i wyznaczając wspólne tworzące tych stożków i t. d.

Jeżeli tedy krzywe c_1, c_2 i c_3 są odpowiednio rzędu m_1^{90}, m_2^{90} i m_3^{90} , natenczas przez każdy punkt krzywej c_1 przechodzi $m_2 \cdot m_3$, przez każdy punkt krzywej c_2 przechodzi $m_1 \cdot m_3$ a przez każdy punkt krzywej c_3 przechodzi $m_1 \cdot m_2$ tworzących powierzchni.

Krzywe tedy kierownicze c_1, c_2 i c_3 są odpowiednio krzywymi $m_2 \cdot m_3, m_1 \cdot m_3$ i $m_1 \cdot m_2$ krotnymi powierzchni wchrowatej Π_w .

2. Zbadajmy, jakiego rzędu jest powierzchnia, powyżej określona, t. zn. w ilu punktach dowolna prosta g_1 przecina się z powierzchnią wchrowatą Π_w , określoną zapomocą trzech krzywych c_1, c_2 i c_3 rzędu m_1, m_2 i m_3 .

Nazwijmy „ M ” ilość punktów, w których prosta g_1 przecina się z tworzącymi powierzchni Π_w , to M jest równa ilości punktów, w których krzywa c_3 przecina się z powierzchnią wchrowatą $\Pi_w' \equiv (g_1, c_1, c_2)$, a jeżeli rząd powierzchni Π_w' nazwiemy M' natenczas

$$M = M' \cdot m_3.$$

Ilość punktów M' , w których prosta dowolna g_2 przecina się z powierzchnią $\Pi_w' \equiv (g_1, c_1, c_2)$ jest równa ilości punktów, w których krzywa c_2 przecina się z powierzchnią $\Pi_w'' \equiv (g_1, g_2, c_1)$; jeżeli tedy rząd powierzchni Π_w'' nazwiemy M'' natenczas

$$M' = M'' \cdot m_2.$$

Rząd powierzchni Π_w'' t. z. ilość punktów, w których dowolna prosta g_3 przecina się z powierzchnią (g_1, g_2, c_1) , jest równy ilości punktów przecięcia się krzywej c_1 z hiperboloidą o jednej powłoce (g_1, g_2, g_3) ; a zatem

$$M'' = 2m_1, M' = 2m_1 m_2, M = 2m_1 \cdot m_2 \cdot m_3.$$

Rząd powierzchni $\Pi_w \equiv (c_1, c_2, c_3)$ jest tylko wówczas równy ilości $2m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$, jeżeli krzywe kierownicze nie mają żadnego punktu wspólnego.

Jeżeli krzywe c_1 i c_2 przecinają się w punkcie P , natenczas tworzące powierzchni stożkowej (P, c_3) są niewłaściwymi tworzącymi powierzchni Π_w , rząd tedy M tej powierzchni obniża się w tym razie o „ m_3 ” jednostek.

Jeżeli tedy krzywe c_1 i c_2 , c_1 i c_3 , c_2 i c_3 mają odpowiednio p_3, p_2, p_1 punktów wspólnych, natenczas ilość niewłaściwych tworzących powierzchnię wynosi $p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3$, rząd tedy powierzchni Π_w jest równy $2m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 - p_1 m_1 - p_2 m_2 - p_3 m_3$.

3. Niech będą dane dwie powierzchnie wchrowate Π_w^1 i Π_w^2 , które mają trzy płaszczyzny styczne π^1, π^2 i π^3 , poprowadzone w punktach A, B i C , leżących na tworzącej g wspólne.

Przetnijmy obie powierzchnie płaszczyznami π', π'' i π''' , przechodzącymi przez punkta A, B i C , to natenczas otrzymamy trzy pary krzywych c_1 i c'_1 , c_2 i c'_2 , c_3 i c'_3 , których styczne, poprowadzone w punktach A, B i C , schodzą się z prostymi l_1, l_2 i l_3 , podług których płaszczyzny π^1 i π' , π^2 i π'' , π^3 i π''' przecinają się; punkta tedy A', B' i C' , leżące na stycznych l_1, l_2 i l_3 , i nieskończenie bliskie punktów A, B i C , leżą na prostej g_1 , wchrowatej względem g .

Jeżeli tedy przesuniemy przez dowolny punkt X leżący na tworzącej g , płaszczyznę π^x i wyznaczmy punkt przecięcia się X' tej płaszczyzny z prostą g_1 , to XX' jest styczną, poprowadzoną w punkcie X do krzywych c_x i c'_x , podług których płaszczyzna π^x przecina się z powierzchniami Π_w^1 i Π_w^2 ; płaszczyzna tedy (g, XX') jest płaszczyzną styczną, poprowadzoną do obu powierzchni w punkcie X . A zatem:

Jeżeli dwie powierzchnie wchrowate Π_w^1 i Π_w^2 mają jedną tworzącą i trzy płaszczyzny styczne, poprowadzone w punktach, leżących na tej tworzącej, wspólne, natenczas płaszczyzna styczna, poprowadzona w punkcie, leżącym na owej tworzącej, do jednej powierzchni jest płaszczyzną styczną, poprowadzoną w tymże punkcie do powierzchni drugiej.

4. Niech będą dane krzywe $c_1, c_2, c_3, \dots, c_x$, leżące na powierzchni wchrowatej Π_w , i tworząca g , która przecina się z temi krzywymi w punktach $A, B, C, \dots, X$.

Styczne l_1, l_2 i l_3 , poprowadzone do krzywych c_1, c_2 i c_3 w punktach A, B i C , wyznaczają hiperboloidę o jednej powłoce Π^2 , która się styka z powierzchnią Π_w we wszystkich punktach tworzącej g .

Wiadomo atoli, że pęk płaszczyzn stycznych, przesuniętych przez tworzącą hiperboloidy, jest jednokreślny z szeregiem odpowiednich punktów styczności, a ponieważ płaszczyzny styczne hiperboloidy, poprowadzone w punktach $A, B, C, \dots, X$, schodzą się z płaszczyznami stycznymi, poprowadzonymi w tychże punktach do powierzchni Π_w , przeto:

Szereg punktów, leżących na tworzącej powierzchni wchrowatej, jest jednokreślny z pękiem płaszczyzn stycznych poprowadzonych do powierzchni w owych punktach.

Hiperboloidy, wyznaczone kierownicami l_1, l_2 i l_3, l_1, l_2 i l_x, l_2, l_3 i $l_x, \dots$ nie schodzą się z sobą, spełniają one bowiem jedynie warunek, że przechodzą przez dwie, bezpośrednio po sobie następujące tworzące g i g_1 powierzchni

Π_w ; hiperboloida przeto, wyznaczona kierownicami g_1, g_2 i kierownicą g_x , wchrowatą względem g_1 i g_2 , styka się z powierzchnią Π_w wzdłuż tworzącej g .

Jeżeli prosta g_x leży w nieskończoności, natenczas kierownice g, g_1 i g_x^∞ wyznaczają paraboloidę hiperboliczną, która się styka z powierzchnią Π_w wzdłuż tworzącej g .

5. Płaszczyzna π^a , przesunięta przez tworzącą g powierzchni wchrowatej Π_w i równoległa do tworzącej g_1 , nieskończenie zbliżonej do prostej g , jest płaszczyzną asymptotyczną powierzchni, przechodzi bowiem przez punkta U^∞ i U_1^∞ , leżące w nieskończoności na tworzących sąsiednich g i g_1 , a więc przez styczną s_x , poprowadzoną w punkcie U^∞ do krzywej, podług której płaszczyzna w nieskończoności przecina się z powierzchnią Π_w .

Płaszczyzna π^z , przesunięta przez prostą g i prostopadła do płaszczyzny asymptotycznej π^a , styka się z powierzchnią Π_w w punkcie Z , który leży na krzywej zwięźnienia powierzchni.

Punkt Z leży na prostej VZ , wyznaczającej najkrótszą odległość tworzących g i g_1 ; prosta bowiem VZ leży na płaszczyźnie π^z i jest styczną do krzywej, podług której ta płaszczyzna (π^z) przecina się z powierzchnią wchrowatą Π_w .

Poprowadźmy przez punkta $V_1, V_2, \dots$ leżące na tworzącej g_1 (rys. 123.), proste $l_1, l_2, \dots$ prostopadłe do tworzącej g , to te proste są tworzącymi paraboloidy hiperbolicznej, której płaszczyznami kierowniczymi są płaszczyzna asymptotyczna π^a i płaszczyzna prostopadła do tworzącej g .

Tworząca g paraboloidy jest prostopadła do prostej, podług której płaszczyzny kierownicze przecinają się, do tej samej prostej jest prostopadła tworząca VZ paraboloidy, punkt Z jest tedy wierzchołkiem paraboloidy hiperbolicznej ($l_1, l_2, \dots$) stycznej do powierzchni Π_w wzdłuż tworzącej „ g ”, o tworzących „ l ” drugiego układu prostopadłych do tworzącej g .

6. Niech będą dane tworzące g i g_1 (rys. 123.), następujące bezpośrednio po sobie na powierzchni Π_w .

Wyznamy płaszczyznę asymptotyczną π^a , przesuniętą przez tworzącą g , a nadto rzut prostokątny g_1' tworzącej g_1 na tę płaszczyznę; poprowadźmy następnie z punktu V_1 , leżącego na tworzącej g_1 , prostą $V_1 Z_1$, prostopadłą do g , to płaszczyzna $(g, Z_1 V_1)$ jest płaszczyzną styczną, poprowadzoną w punkcie Z_1 do powierzchni Π_w ; prosta $V_1 Z_1$ jest bowiem tworzącą paraboloidy hiperbolicznej prostokątnej, opisaną na powierzchni Π_w wzdłuż tworzącej g .

Nazwijmy „ α ” kąt nachylenia płaszczyzny stycznej $(g, Z_1 V_1)$ do płaszczyzny asymptotycznej π^a to $\text{tanga} = \frac{V_1 V'_1}{Z_1 V'_1} = \frac{VZ}{Z_1 V'_1}$.

Jeżeli tworząca g_1 zbliża się do tworzącej g , natenczas kąt α maleje, a jeżeli dwie bezpośrednio po sobie następujące tworzące g i g_1 przecinają się, natenczas kąt α jest równy zeru.

Tworzącą g , z którą przecina się tworząca g_1 , bezpośrednio po niej następującą, nazywamy krawędzią, a punkt przecięcia się Z tworzących g i g_1 nazywamy ostrzem powierzchni wchrowatej.

Płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni w punktach $Z_1, Z_2, \dots$ leżących na krawędzi g schodzą się z płaszczyzną (g, g_1) , albowiem

$\text{tanga} = \frac{0}{Z_1 V'_1} = 0$; płaszczyzny styczne poprowadzone w ostrzu Z do po-

wierzchni są nieokreślone, albowiem $\tan \alpha = \frac{0}{0}$, wszystkie tedy płaszczyzny, przesunięte przez ostrze Z można uważać za płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni wchrowatej.

7. Poznawszy najważniejsze własności powierzchni wchrowatych, przystąpimy do badania niektórych powierzchni, które do tej rodziny należą.

O sklepieniu wchrowatem.

Dwa koła k_1 i k_2 , które leżą na płaszczyznach równoległych, a których promienie są równe, a nadto prosta l , przechodząca przez punkt O , dzielący na dwie równe części odcinek M_1M_2 zawarty między środkami kół k_1 i k_2 , prostopadła do płaszczyzn na których owe koła leżą, wyznaczają, jako kierownice, powierzchnię stożkową (O, k_1, k_2) , o wierzchołku O i sklepienie wchrowate. W dalszym ciągu nie będziemy zwracać uwagi na stożek (O, k_1, k_2) .

Na rysunku 124. przyjęto, że koło k_2 leży na płaszczyźnie pionowej rzutów, a koło k_1 na płaszczyźnie π^1 , równoległej do tej płaszczyzny, nadto przyjęto, że płaszczyzna, przesunięta przez proste M_1M_2 i l , jest równoległa do płaszczyzny poziomej rzutów.

Celem wyznaczenia tworzących sklepienia wchrowatego, przesunimy przez prostą „ l ” płaszczyzny $\pi^2, \dots$ i wyznaczmy punkta przecięcia się tychże A_1 i A_2 tudzież B_1 i $B_2, \dots$ z kołami k_1 i k_2 , to proste $A_1B_1 = g_1$, $A_2B_2 = g_2, \dots$ są tworzącymi sklepienia. (Proste A_1B_2 i $A_2B_1, \dots$ są tworzącymi stożka (O, k_1, k_2) .)

Tworzące sklepienia g_1 i $g_2, \dots$ leżące na tych samych płaszczyznach, przesuniętych przez prostą l , są równoległe i symetryczne względem punktu O , a to z powodu symetrii kół kierowniczych k_1 i k_2 względem punktu O .

Punkt O jest tedy środkiem sklepienia wchrowatego.

8. Przesunimy przez punkt P , leżący na prostej l , i przez koło k_1 powierzchnię stożkową (P, k_1) i wyznaczmy ślad pionowy k_3 tej powierzchni, przesunimy również przez punkt P i przez koło k_2 stożek (P, k_2) , to powierzchnie (P, k_1) i (P, k_2) przecinają się podług dwu tworzących PC i PD sklepienia wchrowatego, symetrycznych względem płaszczyzny (l, M_1M_2) .

Przez każdy punkt prostej l przechodzą dwie tworzące rzeczywiste lub urojone sklepienia, ta prosta jest więc prostą podwójną powierzchni.

Płaszczyzna π , przesunięta przez prostą l , przecina się ze sklepieniem podług krzywej rzędu czwartego, która się rozpada na cztery proste; dwie z nich schodzą się z prostą podwójną l , a dwie są tworzącymi powierzchni symetrycznymi względem środka O .

Sklepienie wchrowate jest tedy powierzchnią rzędu czwartego.

9. Przesunimy przez prostą „ l ” płaszczyznę π^3 , równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów i wyznaczmy punkta przecięcia się A_3 i A_4 tudzież B_3 i B_4 kół k_1 i k_2 z płaszczyzną π^3 , to proste A_3B_3 i A_4B_4 są tworzącymi sklepienia.

Przez punkta przecięcia się R_1 i R_2 prostej l z tworzącymi A_3B_3 i A_4B_4 przechodzą tworzące, symetryczne względem płaszczyzny (l, M_1M_2) z temiż tworzącymi. Atoli te tworzące symetryczne schodzą się z prostymi A_3B_3 i A_4B_4 (art. 8.) Proste A_3B_3 i A_4B_4 są tedy krawędziami sklepienia wchrowatego. Punkta R_1 i R_2 są ostrzami powierzchni.

Jeżeli przez prostą l można poprowadzić takie płaszczyzny π^4 i π^5 , których ślady pionowe π_e^4 i π_e^5 są stycznymi do rzutów k_1 i k_2 kierownic sklepienia, natenczas leżą na tych płaszczyznach dalsze dwie krawędzie powierzchni.

Jakoż ślad π_e^4 przecina się z kołami k_1 i k_2 w dwu parach punktów A_5 i A_6 tudzież B_5 i B_6 , nieskończenie blisko siebie leżących, tworzące tedy A_5B_5 i A_6B_6 , równoległe, gdyż leżą na płaszczyźnie, przesuniętej przez prostą l , nakrywają się i tworzą krawędź sklepienia. Ostrze tej krawędzi leży w nieskończoności i t. d.

10. Poprowadźmy przez środek O sklepienia wchrowatego (rys. 125.) proste $m_1, \dots$ równoległe do tworzących g_1 i $g_2, \dots$ leżących na płaszczyznach. przesuniętych przez „ l ” i wyznaczmy ślady pionowe $D_1, \dots$ tychże, to punkta $D_1, \dots$ dzielą na dwie równe części odcinki $B_1B_2, \dots$ i leżą na obwodzie koła k_a , zakreślonego na średnicy OM_2 .

Stożek kierowniczy zatem sklepienia wchrowatego, jest stożkiem rzędu drugiego i posiada tę własność, że płaszczyzny, równoległe do płaszczyzn, na których koła kierownicze powierzchni leżą, przecinają się z nim podług kół.

Płaszczyzny asymptotyczne, poprowadzone do sklepienia wchrowatego przez tworzące g_1 i $g_2, \dots$ są równoległe do płaszczyzn stycznych, poprowadzonych do stożka kierowniczego wzdłuż tworzących $m_1, \dots$ równoległych do g_1 i $g_2, \dots$

Zagadnienie 1.: Poprowadzić w punkcie P leżącym na sklepieniu wchrowatem, płaszczyznę styczną do tej powierzchni.

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że punkt P leży na tworzącej $g_1 \equiv A_1B_1$ powierzchni (rys. 125.).

a) Poprowadźmy w punktach A_1 i B_1 styczne s_1 i s_2 do kół k_1 i k_2 , przesunimy przez proste g_1 i s_1 , tudzież g_1 i s_2 płaszczyzny π^3 i π^4 i wyznaczmy nadto płaszczyznę asymptotyczną π^a , przesuniętą przez tworzącą g_1 to stosunek podwójnego podziału punktów styczności A_1, B_1, U_∞, P , leżących na prostej g_1 , jest równy stosunkowi podwójnego podziału płaszczyzn stycznych $\pi^3, \pi^4, \pi^a, \pi^p$, poprowadzonych do powierzchni w owych punktach.

Ślad pionowy π_e^p płaszczyzny stycznej, poprowadzonej do sklepienia w punkcie P wyznaczono na rysunku za pomocą szeregow jednokreślnych $A_1'', B_1'', U_\infty'', P''$ i $A_3'', B_3'', U_3'',$ leżących na podstawach g_1'' i p'' .

b) Styczne s_1 i s_2 , poprowadzone w punktach A_1 i B_1 do kół k_1 i k_2 a nadto prosta l wyznaczają hiperboloidę, która się styka ze sklepieniem wchrowatym wzdłuż tworzącej g_1 . Do układu „ g ” tworzących hiperboloidy, należy prosta g_2 , prostopadła do płaszczyzny pionowej rzutów, przesunięta przez punkt przecięcia się rzutów s_1'' i s_2'' , przecina się bowiem z prostą l w nieskończoności, a nadto prosta g_3 , która łączy punkta przecięcia się S_1 i S_2 prostych s_1 i s_2 z płaszczyzną, przesuniętą przez prostą l i równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów.

Płaszczyzny (P, g_2) i (P, g_3) przecinają się podług tworzącej s_3 hiperboloidy, płaszczyzna tedy (g_1, s_3) jest płaszczyzną styczną, poprowadzoną w punkcie P do sklepienia.

11. Prosta l jest, jak wiadomo, prostą podwójną sklepienia, przez każdy punkt bowiem, leżący na tej prostej, przechodzą dwie tworzące powierzchni, rzeczywiste lub urojone.

Krzywa rzędu drugiego c^2_∞ , podług której płaszczyzna w nieskończoności przecina się ze sklepieniem wchrowatym, jest krzywą podwójną tej powierzchni; przez każdy punkt bowiem tej krzywej przechodzą dwie tworzące, a przez każdą styczną poprowadzoną do krzywej c^2_∞ przechodzą dwie płaszczyzny asymptotyczne powierzchni.

Krzywa podług której płaszczyzna π przecina się ze sklepieniem wchrowatym jest rzędu czwartego c^4 ; poszczególne punkta tej krzywej otrzymamy, wyznaczając punkta przecięcia się tworzących $g_1, \dots$ z płaszczyzną π .

a) Jeżeli płaszczyzna π przecina się z prostą l w punkcie, przez który dwie rzeczywiste tworzące przechodzą, a krzywą c^2_∞ w dwu punktach rzeczywistych, natenczas krzywa c^4 posiada trzy punkta podwójne rzeczywiste.

b) Jeżeli płaszczyzna π przecina się z prostą l w punkcie, przez który dwie urojone tworzące przechodzą a krzywą c^2_∞ w dwu punktach rzeczywistych, natenczas krzywa c^4 posiada punkt odosobniony i dwa punkta podwójne rzeczywiste.

c) Jeżeli płaszczyzna π przecina się z prostą l w punkcie przez który przechodzą dwie tworzące rzeczywiste, a krzywą c^2_∞ w dwu punktach urojonych, natenczas krzywa c^4 posiada jeden punkt podwójny rzeczywisty a dwa urojone.

d) Jeżeli płaszczyzna π przecina się z prostą l w punkcie, przez który przechodzą dwie urojone tworzące, a krzywą c^2_∞ w dwu punktach urojonych, natenczas krzywa c^4 posiada jeden punkt odosobniony i dwa punkta podwójne urojone.

12. Przesuńmy przez wierzchołek O stożka kierowniczego (O, k_a) płaszczyznę π^1 , równoległą do płaszczyzny π , to ta płaszczyzna przecina się ze stożkiem podług tworzących OM i ON ; krzywa c^4 zatem podług której płaszczyzna π przecina się ze sklepieniem wchrowatym, posiada dwa punkta podwójne w nieskończoności D_1^∞ i D_2^∞ (rys. 126.).

Przesuńmy przez koło k_1 walce o tworzących równoległych do prostych OM i ON , i wyznaczmy ślady pionowe k_3 i k_4 tychże, to koła k_2 i k_3 tudzież k_2 i k_4 przecinają się w punktach B_1 i B_2 tudzież B_3 i B_4 , przez które przechodzą tworzące g_1 i g_2 tudzież g_3 i g_4 sklepienia, odpowiednio równoległe do tworzących OM i ON stożka kierowniczego tej powierzchni.

Płaszczyzny asymptotyczne $^1\pi^a$ i $^2\pi^a$, przesunięte przez tworzące g_1 i g_2 przecinają się z płaszczyzną π podług stycznych, poprowadzonych do krzywej c^4 w punkcie podwójnym D_1^∞ ; płaszczyzny asymptotyczne $^3\pi^a$ i $^4\pi^a$, przesunięte przez tworzące g_3 i g_4 , przecinają się z płaszczyzną π podług stycznych, poprowadzonych do c^4 w punkcie podwójnym D_2^∞ .

Punkt D_3 , w którym płaszczyzna π przecina się z prostą l jest trzecim punktem podwójnym krzywej przekroju c^4 . Przez punkt D_3 przechodzą dwie tworzące g_5 i l_5 sklepienia wchrowatego. Jeżeli tedy poprowadzimy w punkcie D_3 płaszczyzny styczne do powierzchni, uważając że ów punkt leży na dwu tworzących, i wyznaczmy proste, podług których te płaszczyzny przecinają się z płaszczyzną π , natenczas otrzymamy styczne, poprowadzone do krzywej przekroju c_4 w punkcie podwójnym D_3 .

13. Płaszczyzna, przesunięta przez kierownicę l sklepienia wchrowatego, przecina się z tą powierzchnią podług dwu tworzących równoległych g_1 i g_2

i jest płaszczyzną styczną poprowadzoną do powierzchni w punktach, w których tworzące g_1 i g_2 przecinają się z prostą l .

Płaszczyzny $\pi, \dots$, przesunięte przez tworzące $g, \dots$ sklepienia i prostopadłe do płaszczyzny symetrii (l, M_1M_2) , są płaszczyznami stycznymi, poprowadzonymi w dwu punktach do powierzchni, i przecinają się z tą powierzchnią podług krzywej rzędu drugiego; na każdej bowiem z tych płaszczyzn leży tworząca l , symetryczna z g ze względu na płaszczyznę (l, M_1M_2) (art. 8.).

Płaszczyzny, poprowadzone przez tworzące sklepienia wchrowatego, są płaszczyznami stycznymi walca hiperbolicznego, albo, rzuty tworzących sklepienia wchrowatego na płaszczyznę, równoległą do płaszczyzny symetrii l, M_1M_2 , powłóczą hiperbolę.

Jakoż przesunijmy przez prostą podwójną l płaszczyznę π^1 i wyznaczmy punkta przecięcia się B_1'' i B_2'' śladu π^1 z kołem k_2'' , a nadto punkt P'' , w którym ślad π^1 przecina się z biegunową p'' punktu O'' ze względu na k_2'' , to O'' , P'' , B_1'' , B_2'' i rzuty tych punktów O_1' , P' , B_1' i B_2' na oś „ x “ tworzą grupy harmoniczne (rys. 127.).

Jeżeli ślad π^1 obraca się około punktu O'' , natenczas punkta O_1' i P' nie zmieniają swego położenia, rzuty zaś B_3' i B_4' ,... dzielą harmonicznie odcinek $O_1'P'$; szeregi tedy B_1' , B_3' ,... i B_2' , B_4' są jednokreślne.

Atoli punkta A_1'' i A_2'' ,... są symetryczne z punktami B_2'' i B_1'' ,... ze względu na O'' ; rzuty tedy B_1' , B_3' ,... i A_1' , A_3' ,... tudzież B_2' , B_4' ,... i A_2' , A_4' ,... a nadto A_1' , A_3' ,... i B_1' , B_2' ,... tworzą szeregi jednokreślne; proste tedy $A_1'B_1' \equiv g_1'$, $A_2'B_2' \equiv g_2'$,... łączące elementa odpowiednie szeregów jednokreślnych, są stycznymi, poprowadzonymi do krzywej klasy drugiej c^2 .

Punkt O' jest środkiem krzywej c^2 , rzuty bowiem poziome tworzących, które leżą na płaszczyznach, przesuniętych przez l , są równoległe i symetryczne względem O' .

Przez środek O' przechodzi prosta l' , rzut tworzącej podwójnej l , i prosta t' , rzut dwu krawędzi t_1 i t_2 sklepienia, które leżą na płaszczyznach stycznych, poprowadzonych przez kierownicę l do kół k_1 i k_2 .

Proste l' i t' są przeto asymptotami krzywej c^2 .

O konoidach rzędu czwartego i trzeciego.

14. Powierzchnię wchrowatą, której kierownicami są krzywe rzędu drugiego c^2 , prosta m i prosta l_∞ , leżąca w nieskończoności, nazywamy konoidą przekroju stożkowego.

Jeżeli prosta m nie przecina się z krzywą c^2 , natenczas konoida jest rzędu 2.2 czwartego, jeżeli zaś prosta m przecina się z kierownicą c^2 w jednym punkcie natenczas konoida jest rzędu 2.2—1 trzeciego (art. 2.).

W dalszym ciągu będziemy mówić przedewszystkiem o konoidach rzędu czwartego.

15. Przyjmijmy, że kierownice c^2 i l_∞ leżą odpowiednio na płaszczyznach pionowej i poziomej rzutów (rys. 128.).

Przesuńmy przez punkta $M_1, \dots$ leżące na kierownicy m , płaszczyzny $\pi^1, \dots$ równoległe do płaszczyzny poziomej rzutów i wyznaczmy punkta przecięcia się A_1 i $B_1, \dots$ tychże z krzywą c^2 , to proste $M_1A_1 \equiv g_1$ i $M_1B_1 \equiv g_2, \dots$ są two-

rzającymi konoidy. Przez punkta tedy, leżące na prostej „ m ” przechodzą po dwie tworzące powierzchni, kierownica tedy „ m ” jest prostą podwójną konoidy.

Przesuńmy przez punkta $L_\infty, \dots$ leżące na prostej l_∞ i przez krzywą c^2 walce $(L_\infty, c^2), \dots$ a przez prostą m i przez punkta $L_\infty, \dots$ płaszczyzny $(L_\infty, m), \dots$ to proste, podług których płaszczyzny $(L_\infty, m), \dots$ przecinają się z walcami $(L_\infty, c^2), \dots$ są tworzącymi konoidy.

Kierownica l_∞ jest tedy prostą podwójną konoidy (art. 1.).

Płaszczyzna π_n , przesunięta przez punkt D , w którym prosta m przecina się z płaszczyzną pionową rzutów, i równoległa do płaszczyzny poziomej rzutów, przecina się z krzywą c^2 w punktach A_n i B_n ; tworzące DA_n i DB_n schodzą się na tworzącej podwójnej „ p ” powierzchni.

Płaszczyzny styczne, poprowadzone przez prostą l_∞ do kierownicy c^2 przecinają się z tą krzywą w dwu parach punktów, bezpośrednio po sobie następujących, które się schodzą z punktami K_1 i K_2 ; tworzące tedy $^1MK_1 \equiv k_1$ i $^2MK_2 \equiv k_2$ są krawędziami konoidy, ostrza tychże schodzą się z punktami K_1 i K_2 .

Poprowadźmy przez punkt D styczne s_1 i s_2 do kierownicy c a przez punkta styczności tychże K_3 i K_4 tworzące k_3 i k_4 powierzchni, to proste k_3 i k_4 są krawędziami konoidy, których ostrza leżą na prostej l_∞ .

Jeżeli kierownica c^2 jest hiperbolą, natenczas prosta $M_\infty U_\infty$ i $M_\infty V_\infty$, łączące punkt M_∞ , leżący na prostej „ m ” z punktami U_∞ i V_∞ , w których hiperbola c^2 przecina się z płaszczyzną w nieskończoności, są tworzącymi konoidy.

Jeżeli kierownica c^2 jest parabolą, natenczas prosta $U_\infty P_\infty$ łącząca punkt U_∞ z punktem, leżącym w nieskończoności na krzywej c^2 jest krawędzią konoidy.

16. Płaszczyzny $^1\pi, ^2\pi, \dots$ przetknięte przez tworzącą podwójną „ p ” przecinają się z konoidą podług krzywych rzędu czwartego, które się składają z prostej p i z krzywych rzędu drugiego $c_1^2, c_2^2, \dots$).

Krzywe $c_1^2, c_2^2, \dots$ są miejscami geometrycznymi punktów $1_1, 2_1, \dots, 1_2, 2_2, \dots$, w których tworzące $g_1, g_2, \dots$ powierzchni przecinają się z płaszczyznami $^1\pi, ^2\pi, \dots$; szeregi tedy $1_1, 1_2, \dots, 2_1, 2_2, \dots$ jako przebiecia pęku płaszczyzn $^1\pi, ^2\pi, \dots$ prostymi $g_1, g_2, \dots$ są jednokreślne.

Atoli przez punkta $1_1, 2_1, \dots, 1_2, 2_2, \dots$ przechodzą krzywe $c_1^2, c_2^2, \dots$ A zatem:

Krzywe rzędu drugiego, leżące na konoidzie, przecinają się z tworzącymi tej powierzchni w elementach odpowiednich szeregów jednokreślnych.

17. Rzuty przekrojów stożkowych konoidy na płaszczyznę kierownicy c^2 z punktu, leżącego na prostej „ m ” są środkowo kolineacyjne z krzywą c^2 .

Ślad Z_1' na płaszczyźnie kierownicy c^2 (rys. 129.) wyznacza prostą „ m ”, p wyznacza tworzącą podwójną, a ślad zbiegu z' , równoległy do p , wyznacza płaszczyznę, na której kierownica l_∞ leży.

Płaszczyzna $OZ_1'Z_2'$, przesunięta przez prostą m , przecina się z konoidą podług dwu tworzących T_1Z_1' i T_2Z_2' , których ślady tłowe T_1 i T_2 leżą na krzywej c^2 , ślady zbiegu zaś schodzą się z punktem Z_2' , leżącym na z' .

*) Z tego powodu można wyznaczyć konoidę za pomocą kierownicy c^2 leżącej na jednej, i za pomocą kierownicy l_∞ , leżącej na drugiej płaszczyźnie rzutów.

Wyznamy za pomocą płaszczyzny $(T_1T_3, Z_2'Z_3')$ punkt przecięcia się D' tworzącej (T_1Z_2') z płaszczyzną (p, z_1') , przesuniętą przez prostą podwójną p , i poprowadźmy przez Z_1' prostą Z_1M' równoległą do T_1T_3 , to z podobieństwa trójkątów

$$\begin{aligned} & Z_1'D'M' \text{ i } D'Z_2'Z_3' \text{ tudzież } Z_1'T_1T_3 \text{ i } Z_1'Z_2'P' \\ & \text{wynika } \frac{Z_1'D'}{D'Z_2'} = \frac{Z_1'M'}{Z_2'Z_3'}, \quad \frac{Z_1'T_1}{T_1Z_2'} = \frac{Z_1'T_3}{T_3P'}, \text{ a przeto} \\ & \frac{Z_1'T_1}{T_1Z_2'} = \frac{Z_1'D'}{D'Z_2'} = \frac{Z_1'T_3}{T_3P'} : \frac{Z_1'M'}{Z_2'Z_3'} \end{aligned}$$

1.

atoli z podobieństwa trójkątów $M'Z_1'T_3$ i $T_3P'Z_3'$ wynika:

$$M'Z_1' : Z_1'T_3 = Z_3'P' : P'T_3, \quad M'Z_1' = \frac{Z_1'T_3 \cdot Z_3'P'}{P'T_3};$$

podstawiając tę wartość w równanie 1. otrzymamy:

$$\frac{Z_1'T_1}{T_1Z_2'} : \frac{Z_1'D'}{D'Z_2'} = \frac{Z_1'T_1}{Z_1'D'} : \frac{Z_2'T_1}{Z_2'D'} = (Z_1'Z_2'T_1D') = \frac{Z_2'Z_3'}{P'Z_3'} = n.$$

Płóść „ n ” jest zależna jedynie od położenia śladu zbiegu z_1' płaszczyzny (p, z_1') , przesuniętej przez prostą podwójną p , rzut tedy c_1' ($D' \dots$) krzywej c_1 , podług której ta płaszczyzna przecina się z konoidą, z punktu O , leżącego na prostej m , na płaszczyznę kierownicy c^2 jest krzywą, środkowo kolineacyjną z c^2 . Punkt Z_1' jest środkiem, prosta z' jest osią, a wartość „ n ” jest cechą tej kolineacji.

18. Płaszczyzny styczne, poprowadzone do konoidy w punktach, leżących na tworzącej tej powierzchni, można z łatwością wyznaczyć, opierając się na twierdzeniu: „pęk płaszczyzn przesuniętych przez tworzącą powierzchni, wchrowatej jest jednokreślny z szeregiem punktów styczności tychże.

Aby tedy wyznaczyć płaszczyznę styczną, poprowadzoną do konoidy w punkcie P , leżącym na tworzącej g_1 (rys. 130.) wyznaczymy ślady pionowe płaszczyzn stycznych $^1\pi, ^2\pi, ^3\pi$, poprowadzonych do tej powierzchni w punktach A_1, M_1 i 3_∞ , leżących na prostej g_1 ; ślad pionowy π_{e^1} jest styczną poprowadzoną w punkcie A_1 do kierownicy c^2 , ślad π_{e^2} łączy punkt A_1 z punktem D w którym prosta „ m ” przecina się z płaszczyzną pionową rzutów, a ślad π^3 jest równoległy do osi x i schodzi się z prostą g_1 .

Ślady $\pi^1, \pi^2, \pi^3, \dots$ przecinają się z osią rzutów x w punktach $1, 2, 3^\infty, \dots$ szeregu jednokreślnego i perspektywicznego z szeregiem punktów styczności $A_1, M_1, 3_\infty, P, \dots$ leżących na tworzącej g_1 . Jeżeli tedy połączymy punkt przecięcia się O promieni A_1^1 i M_1^2 z punktem P i wyznaczmy punkt P_1 w którym prosta OP przecina się z osią X , natenczas prosta A_1P_1 jest śladem pionowym płaszczyzny stycznej, poprowadzonej w punkcie P do konoidy.

Zagadnienie: Poprowadzić do konoidy płaszczyzny styczne, równoległe do płaszczyzny π^1 .

Rozwiązanie: Wyznamy prostą l , podług której płaszczyzna π^1 przecina się z płaszczyzną π , na której kierownica l_∞ leży, przesunemy następnie przez prostą podwójną m płaszczyznę π^2 , równoległą do l i wyznaczmy punkta A_1 i B_1 , w których ta płaszczyzna przecina się z krzywą kierowniczą c^2 , to proste g_1 i g_2 , poprowadzone przez A_1 i B_1 równoległe do l , są tworzącymi konoidy, równoległymi do płaszczyzny π^1 ; płaszczyzny tedy π^2 i π^3 przesunięte przez proste g_1 i g_2 i równoległe do płaszczyzny π^1 , są żądanymi płaszczyznami stycznymi. Punkta styczności tych płaszczyzn wyznaczmy w sposób, wyłożony w ustępie poprzednim.

19. Krzywa, podług której dowolna płaszczyzna π^1 przecina się z konoidą jest rzędu czwartego c^4 . Punkta przecięcia się D_1 i D_∞ prostych podwójnych m i l_∞ z płaszczyzną π^1 , a nadto punkt D_2 w którym płaszczyzna π^1 przecina się z tworzącą podwójną p (rzeczywistą lub urojoną), są punktami podwójnymi krzywej przekroju c^4 .

Przez punkt D_1 przechodzą dwie tworzące g_1 i g_2 konoidy, płaszczyzny tedy (m, g_1) i (m, g_2) , przecinają się z płaszczyzną π^1 podług stycznych, poprowadzonych w punkcie podwójnym D_1 do krzywej c^4 .

Aby wyznaczyć styczne, poprowadzone do krzywej przekroju w punkcie D_∞ , przesuniemy przez prostą podwójną „ m ” płaszczyznę π^2 , równoległą do prostej l , podług której płaszczyzna kierownicza przecina się z płaszczyzną π^1 , poprowadźmy następnie przez punkta przecięcia się A_2 i B_2 płaszczyzny π^2 z krzywą kierowniczą c^2 tworzące g_3 i g_4 , równoległe do l , to płaszczyzny (g_3, l) i (g_4, l) są płaszczyznami asymptotycznymi konoidy, przechodzącymi przez D_∞ , a proste podług których te płaszczyzny przecinają się z płaszczyzną π^1 , są stycznymi, poprowadzonymi w punkcie D_∞ , do krzywej c^4 .

Dowolna płaszczyzna, przesunięta przez tworzącą podwójną p jest płaszczyzną styczną poprowadzoną do konoidy w dowolnym punkcie, leżącym na prostej p , płaszczyzna bowiem, na której kierownica c^2 leży, płaszczyzna (p, m) i płaszczyzna asymptotyczna przesunięta przez p są płaszczyznami stycznymi w punktach A_n i B_n (art. 15. rys. 128) w punkcie D i w punkcie leżącym w nieskończoności na p .

20. Jeżeli kierownice m i c^2 przecinają się w punkcie M (rys. 131.) natenczas konoida jest rzędu trzeciego (art. 14.).

Płaszczyzny π^1 ... przesunięte przez kierownicę l_∞ i przez punkta M_1 ,... leżące na prostej m , przecinają się z krzywą c^2 w punktach A_1 i B_1 ,... proste M_1A_1 i M_1B_1 ,... są tedy tworzącymi konoidy. Kierownica „ m ” jest prostą podwójną (jedyną) konoidy rzędu trzeciego (rys. 131.).

Na płaszczyznach stycznych π^2 i π^3 , poprowadzonych przez kierownicę l_∞ do krzywej c^2 , leżą krawędzie k_1 i k_2 powierzchni. Jeżeli kierownica c^2 jest parabolą, natenczas prosta $M_\infty P_\infty$, łącząca punkta, leżące na prostej i na paraboli w nieskończoności, jest krawędzią konoidy.

Płaszczyzny, przesunięte przez prostą podwójną „ m ”, przecinają się z powierzchnią podług tworzących. Płaszczyzny, przesunięte przez tworzącą, przecinają się z konoidą rzędu trzeciego podług elips, parabol lub hiperbol, stosownie do tego czy kierownica powierzchni jest elipsą, parabolą czy hiperbolą, konoida bowiem eliptyczna nie ma tworzących rzeczywistych w nieskończoności, konoida paraboliczna posiada jedną, a konoida hiperboliczna rzędu trzeciego posiada dwie tworzące w nieskończoności.

O liniach i powierzchniach śrubowych.

1. Krzywą, leżącą na powierzchni walcowej obrotowej, której elementa są nachylone do tworzących pod tym samym kątem, nazywamy linią śrubową.

Podzielmy powierzchnię walcową za pomocą tworzących a, b, c ,... (rys. 132.) na nieskończenie wąskie paski ab, bc ,... i przyjmijmy, że element 01 linii śrubowej jest nachylony do tworzących a i b pod kątem α , to elementa 12, 23, ... leżące na dalszych paskach są nachylone do tworzących b i c , c i d ,... pod tym samym kątem.

Z tego wynika bezpośrednio, że styczne 01, 12, ... poprowadzone w punktach 1, 2, ... do linii śrubowej σ są nachylone do tworzących walca pod kątem α a do płaszczyzny koła kierowniczego k , prostopadłej do tworzących a, b , ... pod kątem $(90 - \alpha) = \beta$.

Obróćmy pasek (a, b) około tworzącej b tak, aby się zeszedł z paskiem (b, c) , to punkt 0, leżący na kole k i na linii śrubowej σ , opisze nieskończenie mały łuk 01, koła zakreślonego z punktu 1' promieniem 1'0, a element 01 zejdzie się z elementem prostej 12, obróćmy następnie złączone na jednej prostej elementa 01 i 12 około tworzącej c tak aby po obrocie leżały na płaszczyźnie (b, c) , to punkt 1, opisze łuk 1, 2, koła zakreślonego z punktu 2' promieniem 2'1, a elementa 01 i 12 zejdą się z elementem prostej 23 .. i t. d.

Po rozwinięciu tedy powierzchni walcowej na płaszczyźnie jest przekształcona linii śrubowej prosta, nachylona do tworzących walca rozwiniętego pod kątem α . A zatem:

Miejsce geometryczne punktów przecięcia się płaszczyzny, prostopadłej do tworzących walca, ze stycznymi poprowadzonymi do linii śrubowej, jest odwiniętą koła (str. 8).

Linie śrubowe są krzywymi geodezyjnymi powierzchni walcowej (str. 43).

2. Jeżeli na rozwiniętej powierzchni walcowej nakreślimy prostą l , a następnie sprowadzimy tę powierzchnię do pierwotnej postaci, natenczas prosta zamieni się na linię śrubową. Punkt tedy, który leży na powierzchni walcowej obrotowej i wykonuje dwa ruchy, o chyżościach proporcjonalnych, mianowicie ruch obrotowy około osi powierzchni i ruch postępowy na tworzących, opisuje linię śrubową.

Część linii śrubowej, zawarta między dwoma punktami, które leżą na jednej tworzącej powierzchni walcowej i następują po sobie bezpośrednio na tej krzywej, nazywamy krokiem, a odległość owych punktów nazywamy wysokością kroku linii śrubowej.

3. Przyjmijmy, że kierownica k powierzchni walcowej leży na płaszczyźnie poziomej rzutów, a nadto, że odcinek MN jest równy wysokości kroku śruby (rys. 133).

Rzut poziomy σ' linii śrubowej, leżącej na owym walcu, schodzi się z kołem k . Aby wyznaczyć rzut pionowy σ'' tej krzywej podzielmy okrąg „ k ” na „ n ” równych części 0'1', 1'2', ... i poprowadźmy przez 0', 1', 2', ... proste prostopadłe do osi rzutów x , podzielmy również odcinek MN na „ n ” równych części 0₁1₁, 1₁2₁, ... i poprowadźmy przez punkta 1₁, 2₁, ... proste równoległe do x , to punkta przecięcia się 1'', 2'', ... prostych 1'1'', 2'2'', ... z prostymi 1₁1'', 2₁2''... leżą na rzucie pionowym σ'' .

Ślady poziome H_1, H_2 , ... stycznych poprowadzonych w punktach 1, 2, 3... do linii śrubowej, leżą na odwiniętej c koła kierowniczego k powierzchni walcowej.

Rzut poziomy s_6' stycznej s_6 , poprowadzonej w punkcie „6” do krzywej σ , schodzi się ze styczną, poprowadzoną w punkcie 6' do koła k' , a rzut pionowy s_6'' łączy 6'' z rzutem pionowym H_6'' punktu, w którym s_6' przecina się z odwiniętą koła.

Przez dwie bezpośrednio po sobie następujące styczne, poprowadzone do krzywej, przechodzi płaszczyzna ściśle styczną.

Ślad poziomy płaszczyzny, przesuniętej przez s_6 i przez styczną sąsiednią schodzi się z prostą π_h^6 , która przechodzi przez punkt H_6 i jest prostopadła do stycznej s_6' , płaszczyzna tedy (s_6, π_h^6) jest płaszczyzną ściśle styczną krzywej śrubowej w punkcie 6.

Płaszczyzna ściśle styczna π^8 , poprowadzona w punkcie „8” do krzywej σ , jest prostopadła do płaszczyzny pionowej rzutów; na śladzie pionowym π_r^8 tej płaszczyzny schodzą się rzuty pionowe dwu bezpośrednio po sobie następujących stycznych, ślad π_r^8 jest tedy styczną przegięcia krzywej σ w punkcie 8”. A zatem:

Rzut prostokątny linii śrubowej σ na płaszczyznę, równoległą do osi śruby, przecina się z rzutem tej osi w punktach przegięcia krzywej σ .

4. Niech „ r ” oznacza promień koła k , S' rzut poziomy, a S'' rzut pionowy punktu S , leżącego na linii śrubowej.

Przyjmijmy, że oś rzutów „ x ” i prosta, poprowadzona przez środek O koła k prostopadłe do x , są osiami układu współrzędnych (rys. 134.).

Rzędna punktu S'' : $y = S_0 S'' = H_s S' \cdot \text{tg } \beta = \overline{O'S'} \cdot \text{tg } \beta$, gdzie „ β ” oznacza kąt nachylenia stycznych, poprowadzonych do linii śrubowej, do płaszczyzny poziomej rzutów.

Odcięta punktu S' : $x = r \cdot \sin \frac{\overline{O'S'}}{r}$, a ponieważ $\overline{O'S'} = \frac{y}{\text{tg } \beta}$ przeto $x = r \cdot \sin \frac{y}{r \cdot \text{tg } \beta}$. Rzut pionowy tedy σ jest sinusoidą.

Podstawiając w równaniu $y = \overline{O'S'} \cdot \text{tg } \beta$ za $\overline{O'S'}$ wartość obwodu koła $2\pi r$, otrzymamy wysokość kroku śruby $w = 2\pi r \cdot \text{tg } \beta$.

5. Rzuty równoległe linii śrubowej σ na płaszczyznę prostopadłą do tworzących walca, na której ta krzywa leży, są cykloidami. Stosownie do tego, czy proste rzucające są nachylone do płaszczyzny rzutów pod kątem β , równym kątowi jaki styczne, poprowadzone do linii śrubowej, tworzą z płaszczyzną rzutów, czy pod kątem większym niż kąt β , czy też pod kątem mniejszym niż β , jest rzut krzywej σ cykloidą zwyczajną (z punktami zwrotu), cykloidą skróconą (z punktami podwójnymi), cykloidą wydłużoną (ze stycznymi przegięcia).

Przyjmijmy, że kierunek rzutu linii śrubowej jest wyznaczony prostą s , która jest równoległa do płaszczyzny pionowej, a nachylona do płaszczyzny poziomej rzutów pod kątem γ większym niż β (rys. 134.).

Poprowadźmy przez punkt S , leżący na krzywej σ płaszczyznę π^1 , prostopadłą do osi y i wyznaczmy rzut k_2 koła k_1 , podług którego ta płaszczyzna przecina się z walcem, a nadto rzut S_1 punktu S . Zakreślmy następnie ze środków O i O_2 koła k_3 i k_4 , których obwody są równe rzutowi $w \cdot \cotg \gamma$ wysokości „ w ” kroku śruby i poprowadźmy styczną $o_3 o_4$ do tych kół, równoległą do osi „ x ”, wyznaczmy również punkta s_3 i s_4 , w których promienie OS' , i $O_2 S_1$ przecinają się z kołami k_3 i k_4 , to spostrzeżemy, że

$$o_3 o_4 = OO_2 = s_3 s_4 = S'S_1 = S'O_2 = S''S_0 \cdot \cotg \gamma = \overline{O_3 s_3}$$

Jeżeli tedy koło k_1 toczy się po prostej $o_3 o_4$ i opisze drogę $o_3 o_4$ równą łukom $o_3 s_3$, natenczas punkt o , leżący na kole k opisuje cykloidę skróconą,

która przechodzi przez punkt S_1 , albo innemi słowy rzut linii śrubowej jest w danym przypadku cykloidą skróconą.

Jeżeli kąt nachylenia promienia „ s ” do płaszczyzny poziomej rzutów jest równy kątowi β , natenczas koła k_3 i k_4 są przystające, jeżeli zaś ów kąt jest mniejszy niż β , natenczas obwód koła k_3 jest większy niż obwód koła k_4 .

W pierwszym tedy przypadku opisują punkta koła k cykloidę zwyczajną, a w drugim cykloidę wydłużoną.

O powierzchniach śrubowych rozwijalnych.

6. Styczne, poprowadzone do linii śrubowej σ , (rys. 135.) są tworzącymi powierzchni śrubowej rozwijalnej Π_r (str. 15. art. 26). Punkta przecięcia się stycznych, poprowadzonych do linii śrubowej, z płaszczyzną prostopadłą do osi śruby, leżą na odwiniętej koła (art. 1.); ślad poziomy tedy powierzchni śrubowej rozwijalnej jest odwiniętą c rzutu poziomego k' krzywej śrubowej σ .

Płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni śrubowej Π_r wzdłuż tworzących $1H_1, 2H_2, \dots$ są płaszczyznami ściśle stycznymi krzywej σ w punktach 1, 2, ... ślady poziome tedy $t_1, t_2, \dots$ tych płaszczyzn są stycznymi, poprowadzonymi do odwiniętej c w punktach $H_1, H_2, \dots$

Tworząca SH_s , jej rzut poziomy $S'H_s$ leżą na płaszczyźnie prostopadłej do śladu t_s , podług którego płaszczyzna styczna, poprowadzona do powierzchni śrubowej wzdłuż tworzącej SH_s , przecina się z płaszczyzną poziomą rzutów; kąt nachylenia tedy płaszczyzny (t_s, SH_s) do płaszczyzny poziomej rzutów jest równy kątowi β .

7. Jeżeli styczna SH_s , poprowadzona w punkcie S do linii śrubowej σ , w ten sposób się porusza, że punkt styczności S zmienia w sposób ciągły swoje położenie na krzywej σ , natenczas dowolny punkt A , leżący na stycznej SH_s , wykonuje ruch obrotowy około osi „ y ” śruby, o tej samej katowej chyżości co punkt S i ruch postępowy na prostych, równoległych do tej osi; punkt A opisuje tedy linię śrubową o wysokości kroku śruby, równej wysokości kroku krzywej σ .

Walec tedy spółosiowy z powierzchnią śrubową rozwijalną przecina się z tą powierzchnią podług linii śrubowej, o kroku równym krokowi krzywej śrubowej, na której owa powierzchnia jest opisana.

8. Ślady poziome stycznych, poprowadzonych do linii śrubowej w punktach, leżących pod płaszczyzną poziomą rzutów leżą na gałęzi „ c_1 ” odwiniętej koła k , symetrycznej z gałęzią „ c ” ze względu na prostą $O'o'$.

Przez punkt D_1 tedy, w którym gałęzi c i c_1 przecinają się, przechodzi styczna s_1 , poprowadzona do linii śrubowej w punkcie S_1 , leżącym na górnej części tej krzywej i styczna s_2 , poprowadzona w punkcie S_2 do dolnej części krzywej śrubowej.

Jeżeli tedy styczne s_1 i s_2 , stale z sobą połączone, wykonują ruch śrubowy około osi y , przyczem punkta styczności tychże S_1 i S_2 poruszają się na krzywej σ , natenczas punkt D_1 opisuje linię śrubową σ_1 , leżącą na walcu, o kierownicy k_1 .

Krzywe przestępne c i c_1 przecinają się w nieskończenie wielu punktach $D_1, D_2, \dots$ z których każdy opisuje linię śrubową $\sigma_1, \sigma_2, \dots$

A zatem: Tworzące powierzchni śrubowej rozwijalnej przecinają się w punktach, leżących na nieskończenie wielu krzywych śrubowych spółosi-

wych z krzywą zwrotu σ ; wysokości kroków tych krzywych są równe wysokości kroku krzywej zwrotu. Krzywe $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ nazywamy krzywymi własnego przenikania się powierzchni śrubowej rozwijalnej.

9. Przesuniemy przez dowolny punkt W proste, równoległe do tworzących powierzchni śrubowej rozwijalnej, to natenczas otrzymamy stożek obrotowy Σ , albowiem tworzące tego stożka są nachylone do prostej y_1 , poprowadzonej przez punkt W i równoległej do osi powierzchni śrubowej, pod kątem $\alpha = (90 - \beta)$.

Płaszczyzna, przesunięta przez dwie bezpośrednio po sobie następujące tworzące powierzchni Σ , jest równoległa do płaszczyzny stycznej powierzchni śrubowej, poprowadzonej przez tworzące, równoległe do owych tworzących stożka. A zatem:

Płaszczyzna styczna, poprowadzona do stożka kierowniczego wzdłuż tworzącej t , jest równoległa do płaszczyzny stycznej powierzchni śrubowej rozwijalnej, poprowadzonej wzdłuż tworzącej s , równoległej do t .

10. Płaszczyzna π przecina się z powierzchnią śrubową rozwijalną Π_r , podług krzywej przestępną „ c ”, która posiada nieskończenie wielką ilość punktów zwrotu i nieskończenie wielką ilość w potęgę drugiej punktów podwójnych.

Punkta przecięcia się $Z_1, \dots$ płaszczyzny π z krzywą zwrotu σ są punktami zwrotu, a punkta przecięcia się $D_1, \dots, D_2, \dots$ tej płaszczyzny z krzywami własnego przenikania się $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ powierzchni Π_r są punktami podwójnymi krzywej przekroju.

Płaszczyzny ściśle styczne, poprowadzone do krzywej σ w punktach $Z_1, \dots$ przecinają się z płaszczyzną π podług stycznych zwrotu, a płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni Π_r wzdłuż tworzących, które przechodzą przez punkta $D_1, \dots, D_2, \dots$ przecinają się z płaszczyzną π podług stycznych, poprowadzonych do krzywej c w punktach podwójnych,

Jeżeli płaszczyzna π^1 , poprowadzona przez wierzchołek W stożka kierowniczego Σ powierzchni Π_r i równoległa do płaszczyzny π przecina się z tą powierzchnią stożkową podług dwu tworzących, natenczas na każdym kroku powierzchni śrubowej leżą dwie tworzące s_1 i $s_2, \dots$ równoległe do płaszczyzny π , krzywa c przecina się zatem z prostą, leżącą w nieskończoności, w dwa razy nieskończenie wielkiej ilości punktów i posiada taką samą ilość asymptot.

Jeżeli płaszczyzna π^1 jest płaszczyzną styczną, poprowadzoną do powierzchni stożkowej Σ , natenczas krzywa przekroju posiada nieskończenie wiele punktów w nieskończoności i nieskończenie wiele asymptot.

Jeżeli zaś płaszczyzna π^1 przecina się ze stożkiem Σ podług tworzących urojonych, natenczas krzywa „ c ” dąży wprawdzie do nieskończoności, nie posiada jednak żadnej asymptoty.

Z określeń linii śrubowej σ , podanych w art. 1. i 2. wynika, że równe części tej krzywej są przystające. Jeżeli tedy przez punkta 1, 2, 3—2, 3, 4..., bezpośrednio po sobie następujące na krzywej σ , przesuniemy płaszczyzny ściśle styczne $\pi^s, \dots$ i koła $123 \equiv k, 234 \equiv k_1, \dots$ to promienie tych kół są równe. Wiadomo, że płaszczyzna ściśle styczna, poprowadzona do linii śrubowej w punkcie S jest prostopadła do płaszczyzny, przesuniętej przez ten punkt

i przez oś krzywej σ ; środki tedy kół krzywiznowych $k, k_1, \dots$ leżą na linii śrubowej σ_1 , spółosiowej z krzywą σ .

12. Obróćmy płaszczyznę ściśle styczną (1, 2, 3) około stycznej 23 tak, aby się zeszła z płaszczyzną (2, 3, 4), złączone na jednej, płaszczyzny (1, 2, 3) i (2, 3, 4) obróćmy około stycznej 34 tak, aby płaszczyzny (1, 2, 3) i (2, 3, 4) zeszły się z płaszczyzną (3, 4, 5)... i t. d., to wskutek tych obrotów kąty nachylenia elementów 12 i 23, 23 i 34... nie zmieniają się, promienie krzywiznowe tedy przekształcone linii śrubowej, po rozwinięciu powierzchni Π_r , opisanej na tej krzywej, są równe. A zatem:

Jeżeli powierzchnię rozwijalną, opisaną na linii śrubowej, rozwiniemy na płaszczyźnie. natenczas przekształcona krzywej zwrotu i przekształcone wszystkich linii śrubowych, leżących na tej powierzchni, są łukami kół.

Nazwijmy „ r ” promień koła kierowniczego k' (rys. 135.) „ β ” kąt nachylenia tworzących powierzchni Π_r do płaszczyzny poziomej rzutów, „ d ” długość jednego kroku 012... n linii śrubowej σ , to $d = \frac{2\pi r}{\cos \beta}$.

Jeżeli koło k' jest kierownicą stożka kierowniczego (W_1, k) powierzchni Π , natenczas odcinki tworzących tej powierzchni zawarte między W_1 i punktami koła k są równe $\frac{r}{\cos \beta}$.

Suma „ ω ” nieskończenie małych kątów, jakie tworzą bezpośrednio po sobie następujące tworzące s_0 i s_1, s_1 i $s_2, \dots, s_{n-1}$ i s_n powierzchni rozwijalnej, jest równa sumie nieskończenie małych kątów, zawartych między tworzącami $W_1 0$ i $W_1 1, W_1 1$ i $W_1 2, \dots, W_1 n-1$ i $W_1 n$, stożka kierowniczego.

Po rozwinięciu tedy powierzchni (W_1, k) (rys. 136.) otrzymamy

$$1. \quad 2\pi r = \frac{r}{\cos \beta} \omega, \quad \omega = 2\pi \cos \beta.$$

Jeżeli rozwiniemy krok powierzchni śrubowej Π_r , zawarty między tworzącami s_0 i s_n natenczas część 01... n krzywej σ zamieni się na łuk $0_1 n_1$ koła k_1 o promieniu ϱ . A zatem:

$$d = \frac{2\pi r}{\cos \beta} = \varrho \cdot \omega, \quad \text{a podstawiając z 1. wartość na „}\omega\text{”, otrzymamy } \frac{2\pi r}{\cos \beta} = \varrho \cdot 2\pi \cdot \cos \beta,$$

$$\text{a zatem } \varrho = \frac{r}{\cos^2 \beta}.$$

Tworzące $s_0, \dots, s_n$, powierzchni Π_r schodzą się po rozwinięciu tejże na płaszczyźnie ze stycznymi, poprowadzonymi w punktach $0_1, \dots, n_1$ do koła k_1 .

Zagadnienie 1. Wyznaczyć rzuty pionowe punktów, leżących na powierzchni śrubowej rozwijalnej, których rzuty poziome schodzą się z punktem A' .

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez punkt A' styczne s_1' i s_2' do rzutu poziomego k' linii śrubowej σ (rys. 137.).

Prosta s_1' jest rzutem poziomym nieskończenie wielu tworzących $s_1, \dots$ powierzchni Π_r , których punkta styczności $S_1, \dots$ z krzywą zwrotu σ leżą częścią powyżej, częścią poniżej płaszczyzny poziomej rzutów.

Ślady $^1H_1, ^1H_2, \dots$ tworzących $s_1, \dots$ których punkta styczności z linią śrubową leżą powyżej płaszczyzny poziomej rzutów, schodzą się z punktami przecięcia się prostej s_1' z odwiniętą c_1 koła k' ; ślady poziome zaś tworzących, których

punkta styczności z krzywą σ leżą poniżej płaszczyzny poziomej rzutów, schodzą się z punktami $^2H_1, \dots$ przecięcia się prostej s_1' z odwiniętą c_2 koła k' .

W podobny sposób wyznaczamy ślady poziome tworzących $s_2, \dots$ powierzchni rozwijalnej Π_r , których rzuty poziome schodzą się z prostą s_2' .

Aby wyznaczyć rzuty pionowe $S_1'', \dots$ i $S_2'', \dots$ punktów $S_1, \dots$ i $S_2, \dots$ przez które przechodzą tworzące $s_1, \dots$ i $s_2, \dots$ powierzchni, podzielimy wysokość MN kroku linii śrubowej σ punktami P i Q w takim stosunku w jakim łuki $o'S_1$ i $o'S_2$ dzielą obwód $o'S_1'S_2'o'$ koła k' i odmierzymy na prostej $S_1'S_1$ wyprowadzonej z S_1' prostopadłe do osi x od punktu S_1' powyżej tejże osi odcinki $MP, MN+MP, 2MN+MP, \dots$ a poniżej tej osi odcinki $NP, MN+NP, 2MN+NP, \dots$ to natenczas otrzymamy rzuty pionowe punktów krzywej zwrotu, przez które przechodzą tworzące $s_1, \dots$

W podobny sposób wyznaczymy rzuty pionowe punktów krzywej śrubowej, przez które przechodzą tworzące $s_2, \dots$

Punkta przecięcia się A'' ... prostej $A' A_0$ z rzutami s_1'' ... i s_2'' są rzutami pionowymi punktów, leżących na powierzchni Π_r , których rzuty poziome schodzą się z punktem A' .

Zagadnienie 2.: Poprowadzić tworzące powierzchni śrubowej rozwijalnej, równoległe do danej płaszczyzny π (rys. 138.).

Rozwiązanie: Przy rozwiązywaniu tego zagadnienia zwrócimy uwagę jedynie na pierwszy krok powierzchni, leżący powyżej płaszczyzny poziomej rzutów.

Przesuńmy przez wierzchołek W stożka kierowniczego (W, k') powierzchni Π_r płaszczyznę π' , równoległą do π , i wyznaczmy tworzące WA i WB podług których ta płaszczyzna przecina się z powierzchnią (W, k') , poprowadźmy następnie styczne s_1' i s_2' tudzież s_3' i s_4' do rzutu k' linii śrubowej, równoległe do $W'A$ i $W'B'$, to z dwiema z tych stycznych schodzą się będą rzuty poziome tworzących powierzchni śrubowej, równoległych do WA i WB , a więc równoległych do płaszczyzny π .

Aby otrzymać rzuty pionowe s_1'', s_2'', s_3'' i s_4'' tworzących s_1, s_2, s_3 i s_4 powierzchni Π_r , wyznaczmy ślady poziome H_1, H_2, H_3 i H_4 tych prostych, i połączmy rzuty pionowe $H_1'', H_2'', \dots$ z rzutami pionowymi punktów 1, 2, 3 i 4, przez które przechodzą owe tworzące, to spostrzeżemy, że rzuty $W'A''$ i s_2'' , tudzież $W'B''$ i s_4'' są równoległe, że przeto tworzące s_2 i s_4 pierwszego kroku powierzchni śrubowej rozwijalnej są równoległe do płaszczyzny π .

Zagadnienie 3.: Wyznaczyć ślady płaszczyzn stycznych, poprowadzonych do powierzchni śrubowej rozwijalnej i przechodzących przez punkt P .

Rozwiązanie: Wiadomo, że płaszczyzna styczna powierzchni śrubowej rozwijalnej poprowadzona wzdłuż tworzącej „ s ” jest równoległa do płaszczyzny stycznej stożka kierowniczego tej powierzchni, poprowadzonej wzdłuż tworzącej „ t ” równoległej do „ s ”.

Przesuńmy tedy przez punkt P stożek kierowniczy (P, k_1) i poprowadźmy wspólne styczne $m_1, m_2, \dots$ do koła k_1 i do odwiniętych c_1 i c_2 rzutu poziomego k' linii śrubowej σ , połączmy następnie punkt P z punktami 1, 2, ... w których proste $m_1, m_2, \dots$ stykają się z kołem k_1 , a przez punkta styczności I, II, ... tych prostych z krzywami c_1 i c_2 poprowadźmy tworzące $s_1, s_2, \dots$ powierzchni Π_r , to jeżeli proste $W_1 1$ i $s_1, W_1 2$ i $s_2, \dots$ są równoległe, płaszczyzny (P, m_1) ,

$(P, m_2), \dots$ są płaszczyznami stycznymi powierzchni śrubowej, przesuniętymi przez punkt P .

Przez punkt P_∞ , leżący w nieskończoności na prostej „ l ” można również z łatwością poprowadzić płaszczyzny styczne do powierzchni Π_r .

Wyznamy w tym celu płaszczyzny styczne π^1 i π^2 poprowadzone do stożka kierowniczego (W_1, k_1) , równoległe do prostej l i tworzące styczności tychże t_1 i t_2 , a nadto tworzące s_1 i s_2 powierzchni śrubowej, równoległe do t_1 i t_2 , to płaszczyzna przesunięta przez s_1 , równoległa do π^1 i płaszczyzna, przesunięta przez s_2 równoległa do π^2 , są płaszczyznami stycznymi, poprowadzonymi do powierzchni Π_r przez punkt P_∞ .

Zagadnienie 4.: Wyznaczyć krzywą c , podług której płaszczyzna π przecina się z powierzchnią śrubową rozwijalną (rys. 139.).

Rozwiązanie: Miejsce geometryczne punktów 1, ... w których tworzące $s_1, \dots$ powierzchni śrubowej rozwijalnej przecinają się z płaszczyzną π , jest krzywą przestępną.

Styczne, poprowadzone do tej krzywej w punktach 1, ... schodzą się z prostymi, podług których płaszczyzna π przecina się z płaszczyznami stycznymi $\pi^1, \dots$ poprowadzonymi do powierzchni Π_r wzdłuż tworzących $s_1, \dots$

Płaszczyzna π , poprowadzona przez wierzchołek W stożka kierowniczego (W, k) , przecina się z tą powierzchnią podług tworzących urojonych, krzywa przekroju „ c ” nie posiada tedy w danym przypadku asymptot.

Punkt przecięcia się Z linii śrubowej σ z płaszczyzną π jest punktem zwrotu, a punkta przecięcia się $P_1, P_2, \dots$ płaszczyzny π z krzywami własnego przenikania się $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ powierzchni Π_r są punktami podwójnymi krzywej c .

Punkta Z i P , leżą na elipsach e i e_1 , podług których płaszczyzna π przecina się z walcami, prostopadłymi do płaszczyzny poziomej rzutów, w kierownicach k i k_1 .

Przez punkt podwójny P_1 przechodzą dwie tworzące p_1 i p_2 powierzchni Π_r , płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni śrubowej wzdłuż tych tworzących, przecinają się z płaszczyzną π podług stycznych, poprowadzonych do krzywej „ c ” w punkcie P_1 .

Płaszczyzna ściśle styczna krzywej zwrotu σ w punkcie Z przecina się z płaszczyzną π podług stycznej zwrotu poprowadzonej do „ c ” w punkcie Z .

O powierzchniach śrubowych wichrowatych.

13. Niech będą dane dwie proste przecinające się y i l , (rys. 140.), z których y jest prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów. Jeżeli prosta „ l ” wykonuje ruch śrubowy około osi y , natenczas punkta $W, A, \dots$ leżące na prostej l , opisują linie śrubowe, o równych krokach. Podstawy powierzchni walcowych, na których owe linie leżą, są kołami zakreślonymi z punktu y' promieniami $y'A', \dots$ równymi odległości punktów $A, \dots$ od osi y .

Prostą y można uważać za granicę, do której dążą linie śrubowe w miarę jak odległość punktów, leżących na tworzącej l od osi y się zmniejsza.

Tworzące $l, l_1, \dots$ powierzchni, opisanej ruchem śrubowym prostej l , są nachylone do osi y pod kątem α , a do płaszczyzny poziomej rzutów pod kątem $(90-\alpha)=\beta$; stożek kierowniczy tedy tej powierzchni jest stożkiem obrotowym. Linia śrubowa σ , oś y i stożek kierowniczy (W, k) wyznaczają tę powierzchnię, którą nazywamy powierzchnią śrubową wichrowatą o ostrym gwincie „ Π_w ”.

Koło k_∞ , leżące w nieskończoności na stożku kierowniczym (W, k), jest krzywą nieskończeniekrotną powierzchni Π_w^s .

14. Jeżeli prosta l przecina się z osią y , jest do niej prostopadła (rys. 141.) i wykonuje ruch śrubowy około tej osi, natenczas opisuje konoidę śrubową prostą „ Π_w^k ”. Stożek kierowniczy tej powierzchni jest płaszczyzną π , prostopadłą do prostej y .

Płaszczyzna π przecina się z płaszczyzną w nieskończoności podług nieskończeniekrotnej prostej powierzchni Π_w^k .

Linia śrubowa σ , oś y tej krzywej i prosta leżąca w nieskończoności na płaszczyźnie, prostopadłej do prostej y , są kierownicami konoidy śrubowej prostej.

Linie śrubowe, leżące na konoidzie, są osiowo kolineacyjne, prosta y jest osią, stosunek promieni podstaw walców, na których te krzywe leżą jest cechą, a płaszczyzna w nieskończoności jest płaszczyzną tej kolineacji.

Zagadnienie: Dana jest linia śrubowa σ i jedna tworząca l powierzchni śrubowej wchrowatej o ostrym gwincie, wyznaczyć rzuty pionowe punktów leżących na tej powierzchni, a których rzuty poziome schodzą się z punktem M' (rys. 140.).

Rozwiązanie: Prosta $y'M'$ jest rzutem poziomym l_m' tworzących powierzchni śrubowej, przechodzących przez punkta $M, \dots$ tej powierzchni, których rzuty poziome schodzą się z M' , a punkt przecięcia się m' prostej $y'M'$ z rzutem poziomym σ' linii śrubowej σ jest rzutem poziomym punktów $m, \dots$ przez które owe tworzące przechodzą.

Jeżeli tedy wyznaczmy stosunek „ a ”, w jakim łuk $A1'm'$ dzieli obwód $A1'A$ koła σ' , jeżeli następnie na prostej $m'm_1$, wyprowadzonej z m' prostopadłe do osi x , odmierzymy od m_1 powyżej osi x odcinki $a.w, w(1+a), \dots$ a poniżej tej osi odcinki $(1-a)w, (2-a)w, \dots$ gdzie $w \equiv A''S''$ wyraża wielkość kroku śruby σ , natenczas otrzymamy rzuty pionowe $m'', \dots$ punktów $m, \dots$ przez które tworzące $l_m, \dots$ przechodzą.

Rzuty pionowe $l''_m, \dots$ tych tworzących są równoległe do rzutu $W''m''_1$ tworzącej Wm stożka kierowniczego (W, k).

Zagadnienie: Rozwiązać poprzednie zagadnienia, jeżeli powierzchnia śrubowa jest konoidą prostą (rys. 141.).

Zagadnienie: Wyznaczyć płaszczyznę styczną, poprowadzoną w punkcie $M(M', M'')$ a) do powierzchni śrubowej o ostrym gwincie, b) do konoidy śrubowej prostej (rys. 140. i 141.).

Rozwiązanie: Zagadnienie a) rozwiążemy w sposób najprostszy, biorąc do pomocy znane twierdzenie o jednokreślności pęku płaszczyzn, przesuniętych przez tworzącą powierzchni wchrowatej, z szeregiem odpowiednich punktów styczności tych płaszczyzn z powierzchnią.

Punkt M leży na tworzącej l_m , która przecina się z osią y powierzchni w punkcie W_m ; płaszczyzna tedy π^1 , przesunięta przez proste y i l_m jest płaszczyzną styczną, poprowadzoną do powierzchni Π_w^s w punkcie W_m . Ślad poziomy Π_h^1 schodzi się z rzutem l_m' .

Płaszczyzna π^2 , przesunięta przez prostą l_m i przez styczną mH_m , poprowadzoną w punkcie „ m ” do linii śrubowej σ , jest płaszczyzną styczną powierzchni Π_w^s w punkcie „ m ”. Ślad poziomy π_h^2 łączy ślady S_m i H_m prostych l_m i mH_m .

Płaszczyzna asymptotyczna π^a powierzchni, przesunięta przez tworzącą l_m , jest równoległa do płaszczyzny stycznej stożka kierowniczego, poprowadzonej wzdłuż tworzącej Wm_1 , równoległej do l_m . Ślad poziomy tedy π_h^a tej płaszczyzny przechodzi przez punkt S_m i jest prostopadły do rzutu l_m' .

Ślady $\pi_h^1, \pi_h^2, \pi_h^a$ płaszczyzn π^1, π^2, π^a i rzuty poziome W_m', m', U_∞' punktów styczności tychże z powierzchnią Π_w^s wyznaczają dwa utwory jednokreślne.

Jeżeli tedy za pomocą szeregów perspektywicznych W_m', m', U_∞', M' i W_m', m_2', U_2' , leżących na prostych $y'm'$ i $y'3'$ wyznaczmy punkt M_2' , odpowiadający punktowi M' , natenczas prosta $S_m M_2'$ jest śladem poziomym płaszczyzny stycznej π^m , poprowadzonej w punkcie M do powierzchni śrubowej wchrowatej.

b) Wyznamy styczną MH_m , poprowadzoną do linii śrubowej σ_1 , która przechodzi na konoidzie przez punkt M , to prosta π_h^m , poprowadzona przez ślad H_m tej prostej i równoległa do rzutu poziomego l_m' tworzącej, na której punkt M leży, jest śladem poziomym π_h^m płaszczyzny stycznej, poprowadzonej do konoidy śrubowej w punkcie M .

15. Przekrój powierzchni śrubowej wchrowatej o ostrym gwincie płaszczyzną prostopadłą do osi tej powierzchni jest spiralną Archimedesza.

Jakoż podzielimy rzut poziomy σ' (rys. 142.) linii śrubowej σ , leżącej na powierzchni Π_w^s i krok w tej krzywej na „ n ” równych części; nazwijmy „ γ ” kąt środkowy odpowiadający n -tej części obwodu σ' .

Jeżeli tworząca WA obróci się około osi „ y ” o kąt $\gamma = \frac{2\pi}{n}$ i wykona ruch postępowy w kierunku tej osi o odcinek $\frac{w}{n}$, natenczas odległość $q = y'H_1$ śladu H_1 tworzącej W_1H_1 od środka y' koła σ' jest równa.

1. $q = W_1''W_o \cdot \cotg \beta = (W''W_o + \frac{w}{n}) \cotg \beta = r + \frac{w}{n} \cdot \cotg \beta$, gdzie r oznacza promień koła σ' , a β kąt nachylenia tworzących powierzchni do płaszczyzny poziomej rzutów.

Podstawiając w równaniu 1.) za „ n ” $\frac{2\pi}{\gamma}$, a za ilość stałą $\frac{w \cdot \cotg \beta}{2\pi}$ „ p ” otrzymamy równania $q = r + p\gamma$ śladu poziomego powierzchni śrubowej wchrowatej.

16. Przesuńmy przez oś „ y ” stożka kierowniczego (W, k) powierzchni śrubowej, o ostrym gwincie Π_w^s płaszczyznę π (rys. 142.) i wyznaczmy tworzące g i l , podług których płaszczyzna π przecina się z powierzchnią (W, k), to na każdym kroku powierzchni śrubowej leżą tworzące $g_1, g_2, \dots$ równoległe do g i tworzące $l_1, l_2, \dots$ równoległe do l .

Ruch śrubowy tworzących g_1 i l_1, g_2 i $l_2, \dots$ około osi y opisuje powierzchnię Π_w^s , a każdy punkt, leżący na tych prostych opisuje linię śrubową.

Atoli proste $g_1, g_2, \dots$ przecinają się z prostymi $l_1, l_2, \dots$ w nieskończenie wielkiej ilości do potęgi drugiej punktów $S_1, S_2, \dots$; te punkta opisują tedy linie śrubowe podwójne, przez każdy punkt bowiem tej krzywej przechodzą po dwie tworzące powierzchni. A zatem:

Powierzchnia śrubowa o ostrym gwincie posiada nieskończenie wielką ilość linii śrubowych podwójnych.

Rozumując podobnie jak poprzednio można wykazać, że konoida śrubowa nie posiada krzywych podwójnych.

17. Przekrój powierzchni śrubowej o ostrym gwincie płaszczyzną π jest krzywą przestępną c , której punkta 1, 2, ... są punktami przecięcia się tworzących $g_1, g_2, \dots$ z płaszczyzną π , a której styczne $s_1, s_2, \dots$ poprowadzone w tych punktach, schodzą się z prostymi, podług których płaszczyzna π przecina się z płaszczyznami stycznymi, poprowadzonymi w punktach 1, 2, ... do powierzchni Π_w^s .

Jeżeli płaszczyzna π^1 , przesunięta przez wierzchołek W stożka kierowniczego i równoległa do płaszczyzny przecinającej π przecina się z tym stożkiem podług dwu tworzących m i n , natenczas krzywa „ c ” posiada nieskończenie wiele asymptot, równoległych do „ m ”, i nieskończenie wiele asymptot, równoległych do „ n ”.

Jeżeli płaszczyzna π^1 jest płaszczyzną styczną stożka kierowniczego (W, k), wzdłuż tworzącej „ m ” natenczas krzywa „ c ” posiada nieskończenie wiele asymptot, równoległych do tej tworzącej.

Jeżeli zaś płaszczyzna π^1 przecina się ze stożkiem kierowniczym podług tworzących urojonych, natenczas krzywa przekroju niema żadnej asymptoty.

Płaszczyzna π przecina się z krzywami własnego przenikania się powierzchni Π_w^s w nieskończenie wielu punktach $u, \dots$ które są punktami podwójnymi krzywej „ c ”. Płaszczyzny styczne powierzchni Π_w^s , przesunięte przez tworzące g_u i $l_u, \dots$ które przez punkta $u, \dots$ przechodzą i przez styczne $s_u, \dots$ poprowadzone do linii śrubowych podwójnych w tychże punktach, przecinają się z płaszczyzną π podług stycznych, poprowadzonych w punktach podwójnych do krzywej przekroju c .

18. Przekrój konoidy śrubowej Π_w^k płaszczyzną π jest krzywą przestępną, która posiada nieskończenie wiele asymptot, równoległych do prostej, podług której płaszczyzna π przecina się z płaszczyzną kierowniczą tej powierzchni. Zagadnienie: Wyznaczyć krzywą, wzdłuż której walec o tworzących równoległych do prostej $m(m', m'')$, styka się z powierzchnią śrubową wchrowatą o ostrym gwincie (rys. 143.).

Rozwiązanie: Wyznamy ślad poziomy $AH_1H_2, \dots$ powierzchni śrubowej Π_w^s (spiralna Archimedesesa) i przesunmy przez tworzące $g_1, g_2, \dots$ płaszczyzny $\pi^1, \pi^2, \dots$ równoległe do prostej m , wyznaczymy następnie punkta styczności I, II, ... tych płaszczyzn z powierzchnią śrubową, to miejsce geometryczne tych punktów jest krzywą, wzdłuż której walec o tworzących równoległych do prostej m z powierzchnią Π_w^s się styka.

Przesunmy n. p. przez tworzącą g_2 płaszczyznę π'' , równoległą do prostej m , i założmy sobie wyznaczyć punkt styczności tejże z powierzchnią śrubową. Ślad poziomy π_h'' płaszczyzny π'' łączy ślad poziomy H_2 tworzącej g_2 ze śladem H_{π} prostej m_2 , równoległej do „ m ” i poprowadzonej przez punkt W_2 , leżący na g_2 .

Ślad poziomy π_h^1 płaszczyzny stycznej π^1 , poprowadzonej do powierzchni w punkcie W_2 , leżącym na osi y i na prostej g_2 , schodzi się z rzutem poziomym g_2' .

Ślad π_h^2 płaszczyzny stycznej powierzchni Π_w^s w punkcie 2, leżącym na linii śrubowej kierowniczey i na tworzącej g_2 , łączy punkt H_2 ze śladem S_2 stycznej poprowadzonej w punkcie 2 do krzywej σ .

Ślad π_h^a płaszczyzny asymptotycznej, przesuniętej przez tworzącą g_2 , przechodzi przez punkt H_2 i jest do rzutu g_2' prostopadły.

Wiadomo, że stosunek podwójnego podziału płaszczyzn stycznych ($\pi^1, \pi^2, \pi^a, \pi''$) powierzchni wchrowatej, przesuniętych przez tworzącą g_2 , jest równy stosunkowi podwójnego podziału ($W_2, 2, U_{\infty}, \Pi$) czterech odpowiednich punktów styczności tychże płaszczyzn. Stosunki tedy podwójnego podziału śladów $\pi_h^1, \pi_h^2, \pi_h^a, \pi_h''$ i rzutów $W_2', 2', U_{\infty}', \Pi'$ są równe.

Celem wyznaczenia punktu Π' , poprowadźmy przez W' dowolną prostą p' i wyznaczmy punkta przecięcia się tejże $W_2', 2', U_{\infty}'$ i Π_1' ze śladami $\pi_h^1, \pi_h^2, \pi_h^a$ i π_h'' , natenczas otrzymamy szereg czterech punktów, perspektywiczny z szeregiem $W_2', 2', U_{\infty}'$ i Π' . Łącząc tedy punkt Π_1' z punktem O , w którym proste $U_1'U_{\infty}'$ i $2'2_1'$ przecinają się, otrzymamy w punkcie przecięcia się prostej $O\Pi_1'$ z rzutem g_2' punkt Π' .

O liniach równego oświetlenia na powierzchniach.

1. Jeżeli na płaszczyznę AB (rys. 144.), prostopadłą do równoległych promieni światła s , pada „ i ” promieni, albo innemi słowy, jeżeli stopień oświetlenia tej płaszczyzny jest równy „ i ”, natenczas stopień oświetlenia płaszczyzny A_1B nachylonej do promieni pod kątem „ α ” jest równy $i_1 = i \cdot \sin \alpha$.

Wiadomo, że na każdej powierzchni Π znajduje się krzywa „ c ”, wzdłuż której walec, o tworzących równoległych do promieni światła, styka się z powierzchnią, która tedy dzieli powierzchnię na część oświetloną, zwróconą ku źródłu światła, i na część która znajduje się w cieniu własnym (rys. 145.).

Przyjmujemy jednak, że promienie, odbite od otoczenia powierzchni oświetlają również część znajdującą się w cieniu własnym, siłą, równą połowie $\frac{1}{2}$ i siły promieni bezpośrednich.

Przy dalszych konstrukcjach przyjmować będziemy, że powierzchnie przedstawione są w rzutach równoległych i że źródło światła jest punktem leżącym w nieskończoności, a to z powodów, które później wyjaśnimy.

2. Miejsce geometryczne punktów, leżących na powierzchni Π , które posiadają tę własność, że płaszczyzny styczne, poprowadzone w tych punktach są nachylone do promieni światła pod kątem α_n , nazywamy linią równego oświetlenia, o stopniu $i_n = i \cdot \sin \alpha_n$.

Owe płaszczyzny styczne wyznaczają powierzchnie rozwijalne, opisane na powierzchni Π , o stożkach kierowniczych obrotowych, których tworzące są nachylone do kierunku światła pod kątem α_n .

Na części oświetlonej powierzchni uwzględniamy tylko linie równego oświetlenia o stopniach $i_n = 1, 0, 0, 9, 0, 8, 0, 7, 0, 6, 0, 5, 0, 4, 0, 3, 0, 2, 0, 1, 0, 0$.

Na części, znajdującej się w cieniu własnym rysujemy tylko te krzywe, które odpowiadają skalom $\frac{i}{2} \cdot \sin \alpha_n = 0, 5, 0, 4, 0, 3, 0, 2, 0, 1$.

Zagadnienie 1.: Wyznaczyć punkta równego oświetlenia na kole (rys. 146.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez środek O koła k o promieniu równym jedności, prostą l , równoległą do kierunku światła „ s ” i wyznaczmy punkta A i B , w których k i l przecinają się. A jest punktem najjaśniejszym

w świetle, a B jest punktem najjaśniejszym w cieniu, styczne bowiem poprowadzone w tych punktach są prostopadłe do promieni, padających i odbitych.

Promień s , który pada na punkt S_1 , jest nachylony do stycznej t , poprowadzonej w tym punkcie do koła k pod kątem α , stopień tedy oświetlenia tego punktu jest równy $i \cdot \sin \alpha = i \cdot \cos (90 - \alpha) = i \cos \beta = 0.8$, gdzie „ i ” oznacza stopień oświetlenia punktu A .

Podzielmy tedy promień OA na dziesięć równych części i wyprowadźmy w punktach dzielących 1, 2, ... 9 cięciwy $1_1 1_2, 2_1 2_2, \dots, 9_1 9_2$, prostopadłe do l , natenczas stopień oświetlenia punktów 9_1 i 9_2 jest równy 0.9 i , stopień oświetlenia punktów $8_1, 8_2$ jest równy 0.8 i , ... a punkta O i O_1 są punktami odgraniczającymi część koła oświetloną od części znajdującej się w cieniu własnym.

Podzielmy również promień OB na pięć równych części i poprowadźmy przez punkta dzielące cięciwy $4_3 4_4, 3_3 3_4, \dots$ prostopadłe do l , to natenczas otrzymamy punkta 4_3 i 4_4 , o stopniu oświetlenia $\frac{i}{2} \cdot \sin \alpha_1 = \frac{i}{2} \cos 4_1 OB$ promieniami odbitymi s_1 ...

Zagadnienie 2.: Wykreślić na kuli K linię równego oświetlenia o stopniu 0.5 (rys. 147.).

Rozwiązanie: Obróćmy około osi l (rys. 146.) koło k i punkta $1_1, 2_1, \dots, 1_3, 2_3, \dots$, to natenczas otrzymamy kulę K i koła $c_1, c_2, \dots, c_1^1, c_2^1, \dots$ posiadające tę własność, że płaszczyzny styczne, poprowadzone do owej kuli w punktach, które leżą na kołach $c_1, c_2, \dots$ są nachylone do promieni światła pod kątami, których dostawy są równe 0.1, 0.2, ... Koła tedy $c_1, c_2, \dots$ są liniami równego oświetlenia na kuli K .

Aby wyznaczyć koło c_5 , którego stopień oświetlenia jest równy 0.5 i poprowadźmy przez środek kuli O prostą (l', l''), równoległą do promieni światła i wyznaczmy punkt A , w którym ta prosta przecina się z częścią powierzchni, oświetloną promieniami bezpośrednimi, podzielmy następnie promień OA na dwie równe części i przesunijmy przez punkt dzielący 5 płaszczyznę π^5 , prostopadłą do prostej l , to na tej płaszczyźnie leży koło c_5 .

Celem wykreślenia osi i średnic sprzężonych rzutów tego koła, poprowadźmy przez l płaszczyznę π^1 , prostopadłą do płaszczyzny poziomej rzutów, i wyznaczmy prostą m , podług której π^1 i π^5 przecinają się, wyznaczmy następnie za pomocą obrotu płaszczyzny π^1 około osi y kuli, prostopadłej do płaszczyzny poziomej rzutów, punkta przecięcia się M i N prostej m z kulą K , to rzuty $M'N'$ i $M''N''$ odcinka MN są średnicami rzutów c_5' i c_5'' .

Jeżeli odcinek MN podzielimy na dwie równe części i przez punkt dzielący S poprowadzimy płaszczyznę π^2 , równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów, jeżeli następnie wyznaczmy punkta przecięcia się P i Q kuli K z prostą „ n ”, podług której płaszczyzny π^2 i π^5 przecinają się, natenczas rzuty $P'Q'$ i $P''Q''$ odcinka PQ są średnicami sprzężonymi z $M'N'$ i $M''N''$. Średnice $M'N'$ i $P'Q'$ są osiami rzutu poziomego koła c_5^*).

*) Wrażenie, jakie punkt A , leżący na powierzchni Π , oświetlony punktem S , leżącym w skończoności, wywiera na oku O , zależy pomijając inne wpływy od bezwzględnej oświetlenia tego punktu, a więc od oddalenia r tego punktu od źródła światła S i od kąta nachylenia α płaszczyzny stycznej, poprowadzonej w tym punkcie do Π , a nadto od odległości „ p ” oka od punktu A .

Zagadnienie 3.: Wykreślić linie równego oświetlenia na powierzchni stożkowej obrotowej (rys. 148).

Rozwiązanie: Płaszczyzny styczne, poprowadzone do powierzchni rozwijalnych, stykają się z temi powierzchniami wzdłuż tworzących, z tego powodu są linie równego oświetlenia na powierzchniach rozwijalnych liniami prostymi.

Wpiszmy w daną powierzchnię (W, k) (rys. 148.) kulę K i wyznaczmy płaszczyzny $\pi^0, \pi^1, \dots$ na których leżą koła równego oświetlenia tej powierzchni.

Płaszczyzny $\pi^0, \pi^1, \dots$ przecinają się z kierownicą k w punktach O_1 i $O_2, 1_1$ i $1_2, \dots$ których stopień oświetlenia jest równy 0, 0.1, ... Jeżeli tedy połączymy te punkta z wierzchołkiem W natenczas otrzymamy tworzące odgraniczające cień od światła WO_1 i WO_2 i tworzące równego oświetlenia $W1_1$ i $W1_2, \dots$

Zagadnienie 4.: Dana jest powierzchnia walcowa o tworzących prostopadłych do płaszczyzny poziomej rzutów, której kierownicą jest elipsa c^2 , wyznaczyć linie równego oświetlenia tej powierzchni (rys. 149 a).

Rozwiązanie: Wpiszmy w powierzchnię walcową obrotową (rys. 149 b) kulę K i wyznaczmy w podobny sposób, jak w zagadnieniu 3. tworzące równego oświetlenia t_0 i t_0', t_1 i $t_1', \dots$ poprowadźmy następnie w punktach 1_1 i $1_1', 2_1$ i $2_1', \dots$ styczne do kierownicy walca obrotowego i przesunijmy je równoległe do ich położenia tak, aby były stycznymi, poprowadzonymi do elipsy i zajmowały położenie podobne do tego, jakie zajmowały względem koła k , to przez punkta styczności I_1 i I_1', II_1 i II_1' tych stycznych przechodzą tworzące równego oświetlenia walca eliptycznego.

Zagadnienie 5.: Wykreślić linie równego oświetlenia na powierzchni śrubowej rozwijalnej.

Rozwiązanie: Wiadomo, że stożek kierowniczy powierzchni śrubowej rozwijalnej jest obrotowy, a nadto, że płaszczyzny styczne, poprowadzone do stożka kierowniczego, są równoległe do płaszczyzn stycznych, poprowadzonych do powierzchni śrubowej wzdłuż tworzących, równoległych do tworzących styczności stożka kierowniczego.

Dajmy na to, że wyznaczyliśmy na powierzchni Π takie krzywe $c_1, c_2, c_3, \dots$ których stopień oświetlenia, zależny od zmiennych r i α , jest odpowiednio równy $i_1, i_2, i_3, \dots$ to punkt M , leżący na krzywej c_2 , którego odległość od oka jest równa p , wywiera na oku wrażenie $\frac{i_2}{p^2}$; takie same wrażenie wywołują w oku tylko te punkta krzywej c_2 , których odległość od oka jest równa p .

Jeżeli na krzywych $c_1, c_3, \dots$ leżą takie punkta $X, Y, \dots$ dla których wartości $\frac{i_1}{px^2} = \frac{i_3}{py^2} = \dots = \frac{i_2}{p^2}$ są równe wrażeniu jakie punkt M wywołał w oku, natenczas miejsce geometryczne $MX, Y, \dots$ owych punktów jest tak zwana isofengą c_f (ισος φανωμα) t. zn. krzywą, której punkta przy wspomnianych powyżej warunkach, wywołują w oku takie same wrażenia.

Krzywa c_f , leżąca na powierzchni Π zależy tedy od trzech zmiennych α, r i p .

Jeżeli punkt świecący leży w nieskończoności, natenczas „ r ” jest ilością stałą, krzywa c_f zależy wówczas od dwu zmiennych α i f .

Konstrukcja isofeng, zależnych od trzech lub od dwóch zmiennych jest nader uciążliwa; dlatego przyjmujemy, że i „ p ” jest ilością stałą i rysujemy krzywe równego oświetlenia (isofoty ισος φωτος) przy oświetleniu punktem leżącym w nieskończoności, krzywe zależne od zmiennej α .

Jeżeli tedy w sposób wyłożony w zagadnieniu 3-cim wyznaczmy tworzące równego oświetlenia stożka kierowniczego i na każdym kroku powierzchni śrubowej poprowadzimy tworzące, równoległe do owych tworzących natenczas otrzymamy linie równego oświetlenia tej powierzchni.

Zagadnienie 6.: Wykreślić tworzące o stopniu oświetlenia 0,4, powierzchni stożkowej (W, c), której kierownicą jest krzywa rzędu drugiego c (rys. 150.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez wierzchołek W prostą y , równoległą do promieni światła i uważajmy ją za oś stożka obrotowego (W, k), o tworzących nachylonych do osi y pod kątem α , którego wstawa jest równa 0,4.

Przetnijmy następnie stożki (W, c) i (W, k) płaszczyzną π^1 prostopadłą do y , to przekrój stożka (W, c) będzie krzywą rzędu drugiego c_1^* , a przekrój stożka (W, k) jest kołem k_1 , zakreślonym z punktu przecięcia się D prostej y z płaszczyzną π^1 promieniem równym $WD \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Wykonajmy kład płaszczyzny π^1 na płaszczyznę poziomą rzutów i poprowadźmy do kładów (c_1) i (k_1) wspólne styczne (t_1) i (t_2), wyznaczmy następnie rzuty $1'$ i $1''$ tudzież $2'$ i $2''$ punktów styczności (1) i (2) owych stycznych to proste $W'1'$ i $W''1''$ tudzież $W'2'$ i $W''2''$ są rzutami tworzących odpowiadających skali oświetlenia 0,4.

Jeżeli z punktu D jako środka zakreślimy koła stykające się z krzywą c , natenczas przez punkta styczności n_1 i n_2 tych krzywych przechodzą tworzące Wn_1 najjaśniejsza w świetle i Wn_2 najjaśniejsza w cieniu własnym.

Zagadnienie 7.: Wyznaczyć na elipsoidzie obrotowej punkta najjaśniejsze w świetle i w cieniu własnym, a nadto linię równego oświetlenia o stopniu 0,5 (rys. 151.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez dowolny punkt, leżący na osi „ y ” prostą U równoległą do promieni światła i obróćmy płaszczyznę (y, l) $\equiv \pi$ około osi tak, aby się zeszła z płaszczyzną południka głównego.

Poprowadźmy następnie styczne do południka głównego, prostopadłe do prostej l_1 , z którą prosta l po obrocie się schodzi i sprowadźmy obrotem wstecznym punkta styczności tychże na płaszczyznę π , to natenczas otrzymamy punkt N najjaśniejszy w świetle i punkt N_1 najjaśniejszy w cieniu własnym elipsoidy.

Przetnijmy daną powierzchnię płaszczyznami $\pi^1, \pi^2, \dots$ podług równoleżników $r_1, r_2, \dots$ i opiszmy wzdłuż nich stożki styczne (W_1, r_1), (W_2, r_2),... do powierzchni, wykreślimy następnie rzuty kuli K , której środek, dla uproszczenia rysunku, przyjmujemy na osi x i wyznaczmy płaszczyznę π^5 , na której leży koło c_5 o stopniu oświetlenia 0,5.

Jeżeli opiszemy na kuli K stożki ($^1W, ^1r$), ($^2W, ^2r$)... przystające do (W_1, r_1), (W_2, r_2) i wyznaczmy na nich za pomocą płaszczyzny π^5 te tworzące 1WA_1 i 1WB_1 , 2WC_1 i 2WD_1 ,... których skala oświetlenia jest równa 0,5, jeżeli następnie poprowadzimy przez punkta $W_1, W_2, \dots$ tworzące W_1A i W_1B , W_2C i W_2D ,... równoległe do prostych 1WA_1 i 1WB_1 , 2WC_1 i 2WD_1 ,... to punkta przecięcia się tych tworzących z równoleżnikami $r_1, r_2, \dots$ są punktami krzywej równego oświetlenia c_v o stopniu 0,5.

*) O bezpośrednim wyznaczeniu kładu przekrojów stożkowych (patrz str. 24.).

Z konstrukcyi widoczne, że płaszczyzna $\pi \equiv (y, l)$ jest płaszczyzną symetrii prostokątnej krzywych równego oświetlenia powierzchni obrotowych, styczne przeto, poprowadzone do tych krzywych w punktach, leżących na płaszczyźnie π , są równoległe do płaszczyzny poziomej rzutów.

Celem wyznaczenia punktów krzywej c_v , leżących na płaszczyźnie π , przesunijmy przez środek O kuli K płaszczyznę $^1\pi$, równoległą do π , i wyznaczmy punkta przecięcia się tejże 1P i 2P z kołem c_5 , opiszmy następnie stożki styczne ($^3W, ^3r$), ($^4W, ^4r$), kuli wzdłuż kół 3r i 4r , które leżą na płaszczyznach równoległych do płaszczyzny poziomej rzutów i przechodzą przez punkta 1P i 2P , to stożki W_3r_3 i W_4r_4 opisane na elipsoidzie i przystające do stożków ($^3W, ^3r$) i ($^4W, ^4r$) stykają się z tą powierzchnią wzdłuż równoleżników r_3 i r_4 , na których leżą punkta najwyższy P_1 i najniższy P_2 linii równego oświetlenia c_v .

3. Poprowadźmy przez środek O powierzchni rzędu drugiego trójosiowej Π^2 prostą l , równoległą do promieni światła, i proste, nachylone do l pod kątem α , natenczas otrzymamy stożek obrotowy (O, k), którego płaszczyzny styczne tworzą z promieniami światła kąt α , stopień tedy oświetlenia tych płaszczyzn jest równy $i \cdot \sin \alpha$.

Płaszczyzny styczne π_1 i π_1^1 powierzchni Π^2 , równoległe do płaszczyzny stycznej π^1 stożka (O, k), stykają się z tą powierzchnią w punktach A_1 i A_1^1 , które leżą na średnicy s_1 , biegunowo sprzężonej z płaszczyzną diametralną π^1 ze względu na powierzchnię Π^2 , a nadto na krzywej równego oświetlenia $c_{i \sin \alpha}$ tej powierzchni.

Średnice $s_1, s_2, \dots$ biegunowo sprzężone z płaszczyznami stycznymi $\pi^1, \pi^2, \dots$ poprowadzonymi do stożka obrotowego (O, k) są tworzącymi powierzchni stożkowej rzędu drugiego, która przenika się z powierzchnią Π^2 podług krzywej $c_{i \sin \alpha}$. A zatem:

Krzywe równego oświetlenia $c_1, c_2, \dots$ na powierzchniach rzędu drugiego leżą na powierzchniach stożkowych rzędu drugiego, biegunowo sprzężonych ze stożkami obrotowymi, których tworzące są nachylone do promieni światła pod kątami, o wstawach 0, 0,1, 0,2, 0,3, ... Wierzchołki tych powierzchni stożkowych schodzą się w środku powierzchni.

Linie równego oświetlenia na paraboloidzie eliptycznej i na paraboloidzie hiperbolicznej leżą na powierzchniach walcowych rzędu drugiego, których tworzące są równoległe do osi powierzchni.

Linie równego oświetlenia na powierzchniach rzędu drugiego są krzywami rzędu czwartego.

Walce, przesunięte przez linie równego oświetlenia powierzchni rzędu drugiego, o tworzących prostopadłych do płaszczyzny symetrii prostokątnej tych krzywych są rzędu drugiego. A zatem:

Rzuty prostokątne krzywych równego oświetlenia powierzchni rzędu drugiego obrotowych na płaszczyznę symetrii prostokątnej tychże są krzywami rzędu drugiego.

Rzuty linii równego oświetlenia paraboloidy eliptycznej i paraboloidy hiperbolicznej na płaszczyznę prostopadłą do osi tych powierzchni są krzywami rzędu drugiego.

Zagadnienie 8.: Wykreślić linie równego oświetlenia na elipsoidzie trójosiowej (rys. 152 a i b).

Rozwiązanie: a) Przyjmijmy, że oś wielka AB , prostopadła do płaszczyzny poziomej rzutów, oś średnia CD , równoległa do osi „ x ” i oś mała EF , prostopadła do płaszczyzny pionowej rzutów, wyznaczają elipsoidę Π^2 (rys. 152 a).

Obróćmy elipsę leżącą na przekroju głównym $ABEF$ około osi AB , to natenczas otrzymamy elipsoidę obrotową Π_1^2 (rys. 152 b), powinowatą z powierzchnią Π^2 .

Jeżeli przy tym samym kierunku oświetlenia „ s ” wyznaczmy na powierzchni obrotowej Π_1^2 n. p. krzywą 1c_5 , odpowiadającą stopniowi oświetlenia 0·5 i, natenczas otrzymamy z łatwością krzywą o tym samym stopniu oświetlenia na powierzchni trójosiowej Π^2 .

Jakoż przetnijmy powierzchnię Π_1^2 płaszczyznami $^1\pi, \dots$ prostopadłymi do osi „ x ”, to natenczas otrzymamy krzywe homotetyczne $^1c_1, \dots$ z przekrojem głównym $ABEF$. Płaszczyzny $\pi, \dots$ prostopadłe do osi „ x ” przecinają się z elipsoidą Π^2 podług krzywych $c_1, \dots$ podobnych i podobnie położonych z elipsą $ABEF$.

Jeżeli tedy opiszemy wzdłuż krzywych $^1c_1, \dots$ na powierzchni Π_1^2 stożki ($^1W, ^1c$),... a na powierzchni Π^2 wzdłuż krzywych $c_1, \dots$ opiszemy stożki (W, c),... natenczas pary tych stożków, o tworzących równoległych są przystające. Wierzchołki owych stożków leżą na osiach $^1C^1D$ względnie CD .

Poprowadźmy w punktach 1M i 1N , w których płaszczyzna $^1\pi$ przecina się z południkiem $^1A^1B^1C^1D$ styczne $^1W^1M$ i $^1W^1N$ do tego południka, to punkt przecięcia się tychże 1W jest wierzchołkiem stożka, opisanego na powierzchni Π_1^2 wzdłuż krzywej 1c_1 . Poprowadźmy następnie styczne WM i WN do przekroju głównego $ABCD$, równoległe do $^1W^1M$ i $^1W^1N$ i przesunijmy przez punkta styczności M i N tychże płaszczyznę π , prostopadłą do osi x , to ta płaszczyzna przecina się z elipsoidą Π^2 podług krzywej c_1 podobnej do 1c_1 . Powierzchnie stożkowe tedy (Wc_1 i $^1W^1c_1$) są przystające, tworzące tedy równego oświetlenia obu tych powierzchni są równoległe.

Płaszczyzna $^1\pi$ przecina się z krzywą 1c_5 w punktach 11 i 12 , tworzące przeto powierzchni (W, c_1), równoległe do tworzących $^1W^11$ i $^1W^12$ stożka, ($^1W^1c_1$) przecinają się z krzywą c_1 w punktach 1 i 2 krzywej równego oświetlenia c_5 elipsoidy trójosiowej Π^2 i t. d.

b) Przesunijmy przez środek O powierzchni Π^2 prostą „ s ”, równoległą do promieni światła, i uważajmy ją za oś powierzchni stożkowej obrotowej Σ , do której tworzące są nachylone pod kątem α .

Przetnijmy stożek Σ płaszczyzną π , prostopadłą do osi „ s ” podług koła k i wykonajmy kład tej płaszczyzny na płaszczyznę poziomą rzutów, przesunijmy następnie przez prostą s płaszczyzny $^1\pi$ i $^2\pi$ prostopadłe do płaszczyzn poziomej i pionowej rzutów i wyznaczmy proste OA_1 i OA_2 tudzież OA_3 i OA_4 , podług których te płaszczyzny przecinają się z powierzchnią Σ , a nadto obierzmy na tej powierzchni piątą tworzącą OA_5 .

Poprowadźmy następnie płaszczyzny styczne $\pi^1, \pi^2, \pi^3, \pi^4$ i π^5 do stożka Σ wzdłuż tworzących $OA_1, OA_2, \dots$ i OA_5 i zamieńmy powierzchnię Π^2 przez obrót elipsy $ABCD$ około osi AB na elipsoidę obrotową Π_1^2 , to płaszczyznom stycznym $\pi^1, \pi^2, \dots$ odpowiadają w układzie powierzchni Π_1^2 płaszczyzny $^1\pi^1, ^1\pi^2, \dots$ które są płaszczyznami stycznymi powierzchni stożkowej rzędu drugiego Σ_1 .

Zamieńmy wreszcie powierzchnię Π_1^2 za pomocą powinowactwa na kulę K_2 , a płaszczyzny $^1\pi^1, ^1\pi^2, \dots$ układu Π_1^2 na płaszczyzny odpowiednie $^2\pi^1, ^2\pi^2, \dots$

$^2\pi^2, \dots$ w układzie K_2 , to te płaszczyzny są płaszczyznami stycznymi stożka rzędu drugiego Σ_2 , którego wierzchołek schodzi się ze środkiem kuli.

Średnice kuli $K_2, ^2d^1, ^2d^2, ^2d^3, \dots$ odpowiednio prostopadłe do płaszczyzn $^2\pi^1, ^2\pi^2, ^2\pi^3, \dots$ są tworzącymi powierzchni stożkowej $^2\Sigma_2$, biegunowo sprzężonej ze stożkiem Σ_2 .

Celem wyznaczenia krzywej przenikania się $^2c^4$ powierzchni $^2\Sigma_2$ z kulą K_2 przetnijmy obie powierzchnie płaszczyznami równoległymi $\pi', \pi'', \dots$ to przekroje tych płaszczyzn ze stożkiem $^2\Sigma_2$ są krzywymi rzędu drugiego $c', c'', \dots$ homotetycznymi, a przekroje tych płaszczyzn z kulą K_2 są kołami $k', k'', \dots$

Punkta przecięcia się tedy krzywych k' i c', k'' i $c'', \dots$ leżą na krzywej przenikania się $^2c^4$. Jeżeli tę krzywą za pomocą powinowactwa sprowadzimy na powierzchnię Π_1^2 , a następnie na elipsoidę trójosiową Π^2 , natenczas otrzymamy linię równego oświetlenia o stopniu $i \sin \alpha$.

Sposobem wyłożonym pod a) można wykreślić linię równego oświetlenia na powierzchniach rzędu drugiego krzywokreślnych i na hiperboloidzie o jednej powłoce; za pomocą metody podanej pod b) można również te same zagadnienia rozwiązać, atoli zauważyć należy, że przy konstrukcyi linii równego oświetlenia na hiperboloidzie o jednej powłoce jedna tylko zmiana kolineacyjna jest możebną, że przeto do zamierzonego celu dochodzimy pośrednio, wyznaczając najpierw krzywą przenikania się 1c_5 hiperboloidy o jednej powłoce obrotowej z powierzchnią $^1\Sigma_1$, biegunowo sprzężoną ze stożkiem Σ_1 i przenosząc tę krzywą następnie za pomocą transformacyi odwrotnej na hiperboloidę o jednej powłoce trójosiową.

4. Niech będą dane tworzące $g_1, g_2, \dots$ powierzchni wichrowatej Π_w , której linię równego oświetlenia mamy wyznaczyć.

Przesunijmy przez proste $g_1, g_2, \dots$ płaszczyzny $\pi_1^1, \pi_2^1, \dots, \pi_1^2, \pi_2^2, \dots, \pi_1^3, \pi_2^3, \pi_3^3, \dots$ tworzące z kierunkiem promieni światła kąty, których wstawy są równe 0·1, 0·2, 0·3... to punkta styczności $A_1^1, A_1^2, \dots$ płaszczyzn $\pi_1^1, \pi_1^2, \dots$ leżą na linii równego oświetlenia c_1 , o stopniu 0·1 i, punkta styczności $A_2^1, A_2^2, \dots$ płaszczyzn stycznych $\pi_2^1, \pi_2^2, \dots$ poprowadzonych do powierzchni Π_w , leżą na linii równego oświetlenia c_2 o stopniu 0·2 i i t. d.

Aby tedy w sposób powyższy wyznaczyć punkta krzywych równego oświetlenia na powierzchniach wichrowatych, należy najpierw rozwiązać:

Zagadnienie 9.: Przez prostą g przesunąć pęk płaszczyzn, tworzących z promieniami światła kąty, których wstawy są równe 0, 0·1, 0·2, ... 1·0 (rys. 153.).

Rozwiązanie: Poprowadźmy przez punkt M , leżący na prostej g prostą „ s ”, równoległą do promieni światła, a przez ślad poziomy H_g owej prostej płaszczyznę π prostopadłą do s .

Wyznaczmy odległość MD punktu M od płaszczyzny π , prostą n , podług której płaszczyzna π^1 , przesunięta przez prostą s i równoległa do śladu π_n przecina się z płaszczyzną π i wykonajmy kład płaszczyzny π z prostą n i z punktem D na płaszczyznę poziomą rzutów.

Zakreślmy z punktu (D) promieniem MD koło (k) i wyznaczmy punkta przecięcia się (A) i (B) tudzież (C) i (D) prostych (n) i s' z tem kołem, wyznaczmy następnie, przyjmując że s' jest kierunkiem promieni światła, na łuku (C) (A) punkta (E), (F), (G), których stopień oświetlenia jest równy 0·2, 0·5, 0·8.

Jeżeli z punktu (C) poprowadzimy proste $(C)(E_1)$, $(C)(F_1)$, $(C)(G_1)$ prostopadłe do promieni $(D)(E)$, $(D)(F)$, $(D)(G)$ i wyznaczmy punkta przecięcia się tychże (E_1) , (F_1) , (G_1) z prostą (n) , to koła (k_2) , (k_5) , (k_8) , określone ze środka (D) promieniami $(D)(E_1)$, $(D)(F_1)$, $(D)(G_1)$, są kładami kierownic stożków obrotowych, o wierzchołku M , posiadających tę własność, że płaszczyzny styczne, poprowadzone do tych powierzchni są nachylone do promienia światła pod kątami, których wstawy są odpowiednio równe 0·2, 0·5, 0·8.

Jakoż kąt, zawarty między promieniem s' i styczną poprowadzoną w punkcie (E) do koła (k) jest równy kątowi $(E_1)(C)(D)$; jeżeli tedy sprowadzimy koło (k_2) obrotem wstecznym na płaszczyznę π , to natenczas tworzące stożka (M, k_2) zawierać będą z osią s kąty, których wstawy są równe 0·2 i t. d.

Poprowadźmy z punktu H_g styczne (p_2) i (q_2) , (p_5) i (q_5) ... do kół (k_2) , (k_5) ... to te styczne są kładami śladów na płaszczyźnie π płaszczyzn przesuniętych przez prostą g i nachylonych do promienia s pod kątami których wstawy są równe 0·2, 0·5.

Prosta $H_g(D) \equiv p_1$ jest kładem śladu tej płaszczyzny przesuniętej przez prostą g , której stopień oświetlenia jest równy zeru.

Z powyższej konstrukcji wynika, że przez prostą g nie można przesunąć płaszczyzn o dowolnym stopniu oświetlenia; jeżeli bowiem odcinek $H_g(D)$ jest mniejszy niż odcinek $(D)(E_x)$, natenczas z punktu H_g nie można poprowadzić stycznych rzeczywistych do koła (k_x) .

Jeżeli jednak prosta g jest prostopadła do kierunku promienia światła, natenczas można przez nią poprowadzić płaszczyznę o dowolnym stopniu oświetlenia, albowiem ślad H_g leży w nieskończoności.

Płaszczyzny, przesunięte przez prostą g i przez proste p_0 , p_2 i q_2 , p_5 i q_5 , p_8 i q_8 rozwiązują dane zagadnienie.

Przez każdą prostą przechodzi jedna płaszczyzna o stopniu oświetlenia równym zeru; jeżeli jednak przez tę prostą przechodzi jedna płaszczyzna o stopniu oświetlenia i_1 , natenczas przechodzi przez nią druga płaszczyzna o tym samym stopniu oświetlenia.

Z tego wynika, że na tworzącej powierzchni wichrowatej leży jeden punkt krzywej odgraniczającej cień od światła, i po dwa punkta krzywych o tem samym stopniu oświetlenia, z których jeden znajduje się na części, bezpośrednio oświetlonej, a drugi na części oświetlonej promieniami odbitymi.

5. Wiadomo, że linie równego oświetlenia na powierzchniach rozwijalnych są tworzącami tej powierzchni. Jeżeli tedy na powierzchni Π można wzdłuż krzywych c' , c'' ... opisać takie powierzchnie rozwijalne Π_r^1 , Π_r^2 , których linie równego oświetlenia l'_1 , l'_2 ,... l''_1 , l''_2 ,... —... można z łatwością wyznaczyć, natenczas punkta przecięcia się tworzących l'_1 , l'_2 ,... z krzywami c' , c'' ,... leżą na linii równego oświetlenia c_1 , punkta przecięcia się tworzących l'_2 , l'_3 ,... z krzywami c' , c'' ,... leżą na linii równego oświetlenia c_2 i t. d.

Zagadnienie 10.: Wykreślić krzywą równego oświetlenia, odpowiadającą skali 0·2 na powierzchni śrubowej wichrowatej o ostrym gwincie Π_w (rys. 154 a i b).

Rozwiązanie: Opiszmy wzdłuż linii śrubowej kierowniczej $\sigma \equiv 0123$... danej powierzchni Π_w powierzchnię śrubową rozwijalną Π_r i wyznaczmy na tej powierzchni tworzące, o stopniu oświetlenia 0·2.

Przyjmijmy w tym celu kulę K , której środek leży na osi x i opiszmy na niej stożek (W, k) , którego tworzące są równoległe do stycznych poprowadzonych do krzywej σ , wyznaczmy następnie tworzące WA i WB , odpowiadające skali oświetlenia 0·2, i poprowadźmy na powierzchni rozwijalnej Π_r opisanej wzdłuż krzywej σ tworzące t_2 i t_{11} , odpowiednio równoległe do WA i WB , to punkta przecięcia się tychże 1 i 2 z krzywą σ są punktami krzywej równego oświetlenia c_2 na powierzchni Π_w .

Przetnijmy daną powierzchnię walcami Π_w ,... spółośniowami z powierzchnią śrubową wichrowatą, to krzywe przenikania się powierzchni Π_w ,... z powierzchnią Π_w są liniami śrubowymi $\sigma_1 \equiv 0, 1, 2, 1, \dots$ o takim samym kroku co krzywa kierownicza.

Opiszmy na krzywej σ_1 powierzchnię rozwijalną Π_r^1 i wyznaczmy na stożku kierowniczym (W_1, k_1) tej powierzchni, opisanym na kuli K , linie równego oświetlenia W_1C i W_1D , poprowadźmy następnie na powierzchni Π_r^1 tworzące t'_2 i t'_{11} , równoległe do W_1C i W_1D , to punkta przecięcia się tych tworzących z krzywą σ_1 są punktami 3 i 4 linii równego oświetlenia c_2 i t. d.

— EX LIBRIS —
Biblioteki Kuratorium O.S.B.
w Białymstoku

