

METODA WYPROWADZANIA CAŁEK
LOGARYTMICZNYCH RÓWNAŃ
RÓŻNICZKOWEGO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + \dots\dots\dots}{a'x + b'y + \dots\dots\dots}$$

napisal

JÓZEF PUZYNA

Briot i Bouquet uwzględnili wypadki, w których równanie

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + \dots}{a'x + b'y + \dots}$$

daje się rozwiązać przez całki y jednoznaczne (holomorficzne), albo algebraicznej lub przestępnej natury w otoczeniu miejsca $(x, y) = (0, 0)$ ¹

Okazało się później², że przez rozważania zaczerpnięte z dziedziny równań różniczkowych cząstkowych i przedstawienie całki parą funkcji $[x = \varphi(t), y = \psi(t)]$ o zmiennym parametrze t można równanie (1) rozwiązać w otoczeniu miejsca $(x, y) = (0, 0)$ całkiem ogólnie — w wypadkach nieobjętych poszukiwaniami Briota i Bouqueta — już to przez całki zbliżające się do miejsca $(x, y) = (0, 0)$ spiralnie, już to przez całki logarytmiczne.

W krótkości metoda całkowania przedstawia się w ten sposób: Równanie (1) zastępuje się równaniem cząstkowym

$$(2) \quad (a'x + b'y + \dots) \frac{\partial \omega}{\partial x} + (ax + by + \dots) \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

w którym $\omega(x, y) = 0$ ma być właśnie całką równania (1) dla otoczenia miejsca $(x, y) = (0, 0)$

Przez liniowe podstawienia sprowadza się (2) do postaci:

$$(3) \quad [y_1 + (y_1 y_2)_1 + \dots] \frac{\partial \omega}{\partial y_1} + [\lambda y_2 + (y_1 y_2)_2 + \dots] \frac{\partial \omega}{\partial y_2} = 0,$$

¹ Przez sprowadzenie równania (1) do postaci $t. \frac{d\eta}{dt} = at + b\eta + \dots$

² Por. E. Picard. «Traité d'Analyse». T. III (wydanie drugie) Ch. I., a także zapiski źródeł w «Encyclopaedie der mathematischen Wissenschaften». T. II. str. 215 i nast.

gdzie y_1, y_2 są nowe niezależne zmienne, $(y_1, y_2)_2, (y_1, y_2)'$ są jednorodnymi funkcjami tych zmiennych stopnia 2-go (po nich następują także funkcje stopni 3, 4, ...), a λ i 1 są pierwiastkami równania stopnia drugiego:

$$(4) \quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha' - \lambda & \alpha \\ b' & b - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Z powodu dowolności jednego ze współczynników a, b, a', b' przyjąć można, że jeden pierwiastek λ jest $= 1$.

W wypadku kiedy drugi pierwiastek λ jest $\neq 1$ i

1) nie jest całkowity dodatni,

2) nie jest $= \frac{1}{\nu}$, $\nu = 2, 3, 4, \dots$

3) nie jest ujemny,

całkujemy równanie (3) w ten sposób:

Położmy dla krótkości

$$y_1 + (y_1 y_2)_2 + \dots = \varphi_1, \quad \lambda y_2 + (y_1 y_2)'_2 + \dots = \varphi_2$$

i zamiast (3) rozważmy dwa równania:

$$(a) \quad \varphi_1 \frac{\partial \omega}{\partial y_1} + \varphi_2 \frac{\partial \omega}{\partial y_2} = \lambda \omega$$

$$(b) \quad \varphi_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1} + \varphi_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial y_2} = \omega_1.$$

O tych równaniach dowodzi się, że posiadają jednoznaczne całki ω, ω_1 w otoczeniu miejsca $(y_1, y_2) = (0, 0)$, (a więc i miejsca $(x, y) = (0, 0)$).

Napiszmy (a), (b) w postaciach:

$$(a') \quad \varphi_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \log \omega^{\frac{1}{\lambda}} + \varphi_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \log \omega^{\frac{1}{\lambda}} = 1$$

$$(b') \quad \varphi_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \log \omega_1 + \varphi_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \log \omega_1 = 1$$

i odejmijmy równanie (b') od (a'), to dostaniemy:

$$\varphi_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \log \frac{\omega^{\frac{1}{\lambda}}}{\omega_1} + \varphi_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \log \frac{\omega^{\frac{1}{\lambda}}}{\omega_1} = 0$$

a to wskazuje, że

$$\frac{\omega^{\frac{1}{\lambda}}}{\omega_1} = \text{const.}$$

jest całką równania (3). Za powrotem do zmiennych (x, y) dostajemy całkę równania (1)¹.

Uwzględnijmy teraz wykluczone wartości 1), 2), 3). W przerozieniu równania (1) na (3) zrobiono użytek z obudwu pierwiastków: λ , 1 równania $\Delta(\lambda) = 0$.

Gdy się przy tem przerabianiu zrobi użytek tylko z jednego pierwiastka $\lambda \neq 1$, naówczas zamiast równania (3) dostaniemy

$$(5) \quad [\lambda y_1 + (y_1 y_2)_2 + \dots] \frac{\partial \omega}{\partial y_1} + [\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots] \frac{\partial \omega}{\partial y_2} = 0,$$

gdzie przytem μ_1, μ_2 są dowolne.

Gdy równanie $\Delta(\lambda) = 0$ ma powtarzający się pierwiastek λ — (obojętnem jest na razie, czy go zakładamy $= 1$, czy też $\neq 1$), to wtedy zamiast (5) mieć będziemy:

$$(6) \quad [\lambda y_1 + (y_1 y_2)_2 + \dots] \frac{\partial \omega}{\partial y_1} + [\mu_1 y_1 + \lambda y_2 + \dots] \frac{\partial \omega}{\partial y_2} = 0.$$

Właśnie ten wypadek powtarzającego się pierwiastka chcę uwzględnić i wyprowadzić całkę logarytmiczną, jaka się tu okazuje, w sposób naturalny², za użyciem metody podobnej n. p. do tej, jakiej się używa w równaniach różniczkowych liniowych ze stałymi współczynnikami w razie powtarzających się pierwiastków równania charakterystycznego.

Naznaczmy pierwiastki równania $\Delta(\lambda) = 0$ przez λ i λ_1 , przyjmując je na razie jako różne od siebie, a współczynniki w równaniu (5) nazwijmy krótko: $X_{\lambda, 0}$, X_{μ_1, μ_2} .

¹ Przez podstawienie

$$\omega_1 = e t, \quad \omega = e' t^{\lambda},$$

gdzie t jest dowolny parametr, dostajemy z tych równań całkę równania (1) w postaci pary funkcji.

² Picard l. c. str. 32, 33, przechodząc do równań cząstkowych, wprowadza aprycznie dwie zmienne $u = -t$, $v = \frac{t^{\lambda} - 1}{\lambda - 1}$. Z drugiej z nich (v) dostajemy, gdy $\lambda = 1$, $v = t \log t$.

Położymy więc

$$(6) \quad X_{\lambda,0} \frac{\partial \omega}{\partial y_1} + X_{\mu_1 \mu_2} \frac{\partial \omega}{\partial y_2} = 0$$

Równanie to posiada jednoznaczną całkę ω dla otoczenia miejsca $(y_1, y_2) = (0, 0)$, a przy rekursywnem obliczaniu współczynników tej całki zbytecznem jest wykluczać wartości 1), 2), 3), albo zakładać, że $\lambda \neq \lambda_1$.

Zamiast równania (6) zauważmy równanie

$$(\alpha) \quad X_{\lambda,0} \frac{\partial \omega}{\partial y_1} + X_{\mu_1 \mu_2} \frac{\partial \omega}{\partial y_2} = \lambda \omega.$$

Lecz analogicznie, gdy się przy przerabianiu równania (1) zrobi użytek tylko z drugiego pierwiastka $\lambda_1 \neq \lambda$, dojdziemy do równania:

$$(7) \quad X_{\lambda_1,0} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1} + X_{\nu_1 \nu_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_2} = 0,$$

a w miejsce jego zauważymy:

$$(\beta) \quad X_{\lambda_1,0} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1} + X_{\nu_1 \nu_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_2} = \lambda_1 \omega_1$$

Podzielmy równanie (α) przez ω , a równanie (β) przez ω_1 i odejmijmy je potem od siebie, to dojdziemy do związku:

$$(8) \quad \frac{X_{\lambda,0} \frac{\partial \omega}{\partial y_1} - X_{\lambda_1,0} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1}}{\lambda - \lambda_1} + \frac{X_{\mu_1 \mu_2} \frac{\partial \omega}{\partial y_2} - X_{\nu_1 \nu_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_2}}{\lambda - \lambda_1} = 1.$$

Przyjmijmy teraz $\lambda = \lambda_1 = 1$, to otrzymamy

$$X_{\lambda,0} = X_{\lambda_1,0} = X_{1,0}, \quad X_{\mu_1 \mu_2} = X_{\nu_1 \nu_2} = X_{\mu_1 \lambda} = X_{\mu_1 1}$$

a więc równanie (8) przejdzie na

$$(\alpha) \quad X_{1,0} \frac{\partial}{\partial y_1} \left[\frac{\log \omega - \log \omega_1}{\lambda - \lambda_1} \right]_{\lambda = \lambda_1 = 1} + \\ + X_{\mu_1 1} \frac{\partial}{\partial y_2} \left[\frac{\log \omega - \log \omega_1}{\lambda - \lambda_1} \right]_{\lambda = \lambda_1 = 1} = 1.$$

Prócz tego mamy równanie (β) , które, gdy $\lambda = \lambda_1 = 1$, ma postać:

$$(\beta') \quad X_{1,0} \frac{\partial}{\partial y_1} \log \omega_1 + X_{\mu,1} \frac{\partial}{\partial y_2} \log \omega_1 = 1$$

Przez odjęcie (β') od (α') dostajemy:

$$\begin{aligned} & X_{1,0} \frac{\partial}{\partial y_1} \left\{ \left[\frac{\log \omega - \log \omega_1}{\lambda - \lambda_1} \right]_{\lambda - \lambda_1 - 1} - \log \omega_1 \right\} + \\ & + X_{\mu,1} \frac{\partial}{\partial y_2} \left\{ \left[\frac{\log \omega - \log \omega_1}{\lambda - \lambda_1} \right]_{\lambda - \lambda_1 - 1} - \log \omega_1 \right\} = 0. \end{aligned}$$

To wskazuje, że przy $\lambda = \lambda_1 = 1$ ma równanie (6) całkę:

$$(9) \quad \Omega = \left[\frac{\log \omega - \log \omega_1}{\lambda - \lambda_1} \right]_{\lambda - \lambda_1 - 1} - \log \omega_1 = \text{const.}$$

Lecz

$$N = \left[\frac{\log \omega - \log \omega_1}{\lambda - \lambda_1} \right]_{\lambda - \lambda_1 - 1} = \frac{0}{0},$$

bo w razie $\lambda = \lambda_1$ jest $\omega \equiv \omega_1$. A więc

$$N = \left. \frac{\frac{\partial \omega}{\partial \lambda}}{\omega} \right|_{\lambda - \lambda_1 - 1}$$

Położmyż

(10) $\omega = ct^{\lambda-1}$, a więc $\omega_1 = ct$, gdzie C jest stała dowolna, a t parametrem zmiennym, to dalej mamy:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \lambda} = c \cdot t^{\lambda} \log t \Big|_{\lambda - 1} = ct \cdot \log t$$

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \right|_{\lambda - 1} = \log t, \quad \log \omega_1 = \log c + \log t$$

i widocznie podstawieniami (10) czynimy zadość równaniu całkowemu (9).

Z równań

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = ct \cdot \log t, \quad \omega ct^2|_{\lambda=1} = ct$$

dostajemy y_1, y_2 , a więc i x, y wyrażone w funkcjach ilości ct , $ct \log t$. Ta para funkcji daje całkę logarytmiczną. Zjawia się ona w wypadku powtarzającego się pierwiastka λ równania $\Delta(\lambda) = 0$, bez różnicy czy λ należy do wartości wykluczonych, czy nie.