„CHARACTERISTICA GEOMETRICA“ LEIBNIZA

I JEJ ZNACZENIE W MATEMATYCE.

NAPISAŁ

EDWARD STAMM.

WARSZAWA
WYDAWNICTWO REDAKCYI
WIADOMOŚCI MATEMATYCZNYCH.

—

1913.

Osobne odbicie z tomu XVII-go

„WIADOMOŚCI MATEMATYCZNYCH“.

Drukarnia Rubieszewskiego i Wrotnowskiego w Warszawie.

EDWARD STAMM.

„Characteristica geometrica“ Leibniza i jej znaczenie w Matematyce.

(Studyum nad podstawami Matematyki).

---

a. Wstęp.

W historyi nauk można niejednokrotnie zauważyć fakt pojawiania się tych samych teoryj w odstępach czasu niekiedy bardzo znacznych. Nie mówię tu o stopniowem udoskonalaniu hypotez; zdarza się bowiem, że myśli porzucone w pewnym czasie pojawiają się napowrót, uzupełnione nowemi zdobyczami naukowemi. Przykładem może być teorya fluidu elektrycznego B. Franklina i teorya elektronów. Mam natomiast na myśli teorye wykształcone zaledwie w swych najpierwszych podstawach, porzucone bez zbadania ich doniosłości. Teorye takie, zjawiając się ponownie, dają tem samem świadectwo swego uprawnienia. Są one w swej dawnej postaci dowodem bystrości ducha ich twórcy, a dla wznowicieli nadzieją. Wielokrotne powstawanie tych samych myśli jest bowiem ważnym probierzem ich stosowności, a więc i wskazówką dla przyszłego rozwoju.

Na polu Logiki i Matematyki okazały się idee Leibniza dla nauki współczesnej szczególnie korzystnemi. Około połowy XIX stulecia wykrył G. Boole po raz drugi zasady Logiki symbolicznej, których podstawy były Leibnizowi znane w zakresie o wiele większym, niż się powszechnie przyjmuje. Wydane niedawno przez L. Couturata fragmenty pomysłów Leibniza, odnoszące się do Logiki symbolicznej, dowodzą tego najjawniej [1]. „Characteristica universalis“ odżyła w wieku XIX i XX w szacie Logiki symbolicznej G. Boole'a, E. Schroedera, W. Wundta, H. Mac Colla, G. Peana, B. Russella, G. Fregego i in. W dalszym ciągu postaramy się wykazać, że pomysły te były w ścisłym związku z ogólnym poglądem Leibniza na metodę nauki, i że szczegółowem rozwinięciem tych idei była jego „Characteristica geometrica“. I Charakterystyka geometryczna pojawiła się w nowszej Geometryi, jako treść w Geometryi rzutowej, deskryptywnej i w Analysis situs, jako metoda—szczególnie w systemach H. Grassmanna i G. Peana.

Celem niniejszej rozprawy jest przedstawienie Charakterystyki geometrycznej w postaci, jaką nadał jej Leibniz, wykazanie związku między nią a innemi teoryami Leibniza, ujęcie tej idei geometrycznej z ogólnego stanowiska, na jakie naprowadza nas współczesna Matematyka, przedstawienie związku z dzisiejszemi teoryami Geometryi i określenie pewnych metod geometrycznych na podstawie rozważań nad metodą innych dyscyplin matematycznych. Na usprawiedliwienie ostatniego ustępu przytaczam słowa H. Grassmanna, najznakomitszego następcy idei Leibniza, posiadające i w dzisiejszych czasach swą pierwotną wartość: „.... einerseits ist das Ideal dieser geometrischen Analyse, wie es Leibnizen als Ziel einer künftigen Entwickelung vorschwebte, keineswegs schon vollkommen erreicht, noch von den Mathematikern hinreichend als solches erkannt, andrerseits ist auch die eigentümliche Gestaltung, welche er dieser Idee durch seine freilich mehr beispielsweise gegebene Bezeichnungsart verliehen hat, keineswegs schon durch einen neueren Mathematiker auf ähnliche Weise ausgebildet worden“. [2]

Nie mam bynajmniej zamiaru zajmować się przy tem drobiazgami historycznemi. Będę się natomiast starał skoncentrować uwagę na istocie Charakterystyki geometrycznej i to w związku z idealnym rozwojem nauki, a szczególnie Geometryi. Nie chcę ukrywać, że mam

[1]) Opuscules et fragments inédits de Leibniz, wyd. L. Couturat, 1903. Por. też dzieła filozoficzne Leibniza w wydaniu Gerhardta, szcz. t. VII.

[2]) H. Grassmann, Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik. Mit e. erläuternden Abhandlung v. A. F. Möbius, 1847, str. 2.

zamiar w ten sposób poprzeć doniosłym faktem historycznym myśli o istocie Matematyki, wypowiedziane w jednej z poprzednich swych prac [1] i zastosować je do metod Geometryi.

b. Charakterystyka geometryczna w postaci pierwotnej.

Leibniz nazywa charakterami przedmioty, zapomocą których możemy badać inne [2]. Słowa mówione albo pisane są charakterami myśli, modele są charakterami przedmiotów, które przedstawiają, rysunki machin charakterami samych machin, równania charakterami krzywych i t. d. Bez charakterów obejść się nie możemy [3]. Należy je więc tak wybrać, aby umożliwiały i ułatwiały poznanie w jak największej mierze. Konstrukcye geometryczne czy to realne, czy to przedstawione na płaszczyźnie, są utworami niekiedy bardzo zawikłanemi. Wobec tego należy je zastąpić charakterami jak najprostszemi [4]. To umożliwi nam poznawanie własności figur geometrycznych bez poglądu, w sposób czysto abstrakcyjny. Metody algebraiczne nie są najprostszemi. Wyrażają one wprawdzie dane geometryczne korzystnie, jednak dzieje się to często w sposób zawikłany. Przytem wprowadzamy do Geometryi czynniki obce. „Algebra jest tylko charakterystyką liczb nieoznaczonych i wielkości, ale nie wyraża bezpośrednio położenia, kątów i ruchu“ [5].

Leibniz rozwinął pomysł Charakterystyki geometrycznej w sierpniu 1679 [6]. Uderzony pięknością myśli, napisał w tej sprawie 8 września 1679 list do Huygensa, przedstawiając w nim zasadnicze idee tej metody [7]. Huygens odpisał jednak, nie bardzo zachęcając do kontynuacyi, i to mogło być, jak mniema Cantor [8] powodem, że Leibniz zaprzestał dalszej pracy w tym kierunku.

[1]) Czem jest i czem będzie Matematyka?, „Wiadomości matematyczne“, t. XIV, 1910, str. 181—196.

[2]) Leibniz, Mathemat. Schriften, wyd. Gerhardt, t. V, str. 141.

[3]) Leibniz, Philos. Schriften, wyd. Gerhardta, t. VII, str. 193; wydania Gerhardta oznaczamy: Math. Gerh.—wydanie pism matematycznych, Phil. Gerh.—wydanie pism filozoficznych.

[4]) Math. Gerh., t. V, str. 141.

[5]) Math. Gerh., t. II, str. 20; Philos. Bibliothek, t. 107 (Dürr) wydanie Cassierera, t. I, str. 77. Znaczymy to wydanie: Phil. Bibl. 107.

[6]) M. Cantor, Vorles. ü. Geschichte d. Mathematik, t. III, 1901, str. 33.

[7]) Math. Gerh., t. II, str. 20—25; Phil. Bibl., 107, str. 77—83.

[8]) Cantor, l. c., str. 36.

Charakterystyka geometryczna jest według Leibniza zupełnie dostosowana do figur geometrycznych i zawiera zarazem także rozwiązanie, konstrukcyę i dowód geometryczny, i to zupełnie określone [1]. Uwaga ta odnosi się do niedogodności, jaką spotykamy w tym kierunku w metodzie algebraicznej. Leibniz wspomina raz, że ta ostatnia metoda nie zawsze prowadzi do dogodnych konstrukcyj, na co musiał się nawet sam Descartes zgodzić przy rozwiązaniu pewnego problematu Pappusa w 3-ej księdze swej Geometryi [2]. To jest także zaletą Charakterystyki geometrycznej, że analizę pojęć sprowadza do ostatecznych krańców. Leibniz spodziewa się, że gdyby ta metoda geometryczna była zupełnie rozwinięta, to możnaby zapomocą prostych bardzo charakterów, liter abecadła, dać opis najbardziej skomplikowanej machiny, a w ten sposób umożliwić jej całkowite zrozumienie nawet w szczegółach, jej zastosowania i ruchy bez żadnych figur i modeli, bez poglądu. Możnaby użyć tej metody do dokładnego opisywania kształtu i budowy utworów natury, np. roślin i zwierząt. Z pomocą Charakterystyki geometrycznej mógłby każdy, komu rysowanie figur sprawia trudność, w zupełności porozumieć się z kimkolwiek, i swoje myśli i doświadczenia przekazać potomności. Dzisiaj jest to bez figur, mówi Leibniz, niemożliwe, ponieważ słowa nie mają zupełnie określonych znaczeń [3].

Zauważyć może należy, że te korzyści Charakterystyki geometrycznej pojmuje Leibniz jednostronnie. Jest rzeczą wielce wątpliwą, czy nawet dla umysłu abstrakcyjnego byłyby komplikacye, powstałe w ten sposób przy opisywaniu kształtu ciał, łatwiejsze do pojęcia, aniżeli bezpośrednie wyobrażenie kształtu. A obok abstrakcyjnych istnieją przecież umysły intuicyjne, dla których abstrakcya jest wprost niemożliwa, jeżeli wychodzi poza pewne granice. Dodać jeszcze trzeba, że formy Leibnizowskiej Charakterystyki geometrycznej są nawet dla prostych utworów geometrycznych wcale zawikłane, jak już zauważył H. Grassmann [4].

Ale jest to nawet według Leibniza korzyść mała. Przy opisach będzie człowiek zawsze chętniej posługiwał się figurami i modelami, je-

[1]) Phil. Bibl., 107, str. 77.

[2]) Phil. Bil., 107, str. 69. Descartes, Geometrya w tłóm. niemieckim Schlesingera, str. 109 n.

[3]) Phil. Bibl., 107, str. 77 n.

[4]) Geom. Analyse, 1847, str. 5

żeli zechce poświęcić na ich sporządzanie czas i koszta. Istotna korzyść tkwi jednak we wnioskach, wynikających z działań charakterami; działania te nie dadzą się wykonać ani z pomocą figur, ani modeli. Musielibyśmy bowiem figury te nieraz pokrywać niezliczonemi liniami i punktami; Charakterystyka geometryczna pozwala natomiast na osiągnięcie celu prawie bez trudu. Możnaby na tej podstawie opracować Mechanikę podobnie jak Geometryę, a nawet dojść w ten sposób do abstrakcyjnych—możnaby powiedzieć—prób materyałów. Kto wie nawet, czy będzie można wogóle rozwinąć w doskonały sposób Fizykę bez poprzedniego rozwinięcia Charakterystyki geometrycznej, która pozwoli nam przecież na uwolnienie wyobraźni od niepotrzebnego balastu. Iluż to wniosków natury geometrycznej potrzeba do objaśnienia już tak prostego fenomenu jak tęcza; jakich więc łańcuchów wniosków trzeba będzie, aby określić skład pewnych mieszanin, o których nawet mikroskop nie daje nam żadnych wyjaśnień. Charakterystyka geometryczna mogłaby jednak dać nam chociaż małą nadzieję do postąpienia naprzód w tym kierunku [1]. Leibniz mniemał, że będzie można zastosować Charakterystykę geometryczną nawet do przedmiotów, nie podlegających zmysłowemu poglądowi [2].

Aby więc potomnych pobudzić do wykonania tego wielkiego przedsięwzięcia, gdyby jemu jakieś nieprzewidziane okoliczności stanęły na przeszkodzie, dołączył Leibniz do wspomnianego powyżej listu do Huygensa zarys zasadniczych idei Charakterystyki geometrycznej [3].

Nie należy jednak sądzić, że Leibniz uważał ten zarys za ostateczny. Ta okoliczność, że prócz pojęć zasadniczych, używanych w tym zarysie, miał on zamiar posługiwać się jeszcze innemi [4], o czem wspomnimy później, dowodzi, że był to raczej szkic, mający dać jakie takie wyobrażenie o oryginale, i że szkic ten należałoby dowolnie zmienić, gdyby się to okazało koniecznem.

Leibniz rozróżnia punkty stałe i bieżące; oba rodzaje oznacza literami, pierwszy początkowemi, drugi końcowemi alfabetu. Zbiór

[1]) Phil. Bibl., 107, str. 78 n.

[2]) l. c. str. 83.

[3]) l. c. str. 79.

[4]) Math. Gerh., V, str. 172.

położeń punktu bieżącego np. X oznacza przez (X)[1]. Spotykamy się też u Leibniza z oznaczaniem punktu zapomocą dwóch liter, głównej i wskaźnika[2].

Znamienną cechą podanego systemu Charakterystyki geometrycznej jest to, że opiera się ona na pojęciu przystawania. „Podczas gdy w Algebrze używa się względności równości czyli równań, posługuję się tu względnością przystawania“[3]. Dwie figury są przystające, jeżeli zajmują dokładnie tę samą przestrzeń, i jeżeli można je nakryć bez żadnej zmiany prócz zmiany miejsca. To samo można powiedzieć o mnogościach punktów. Względność przystawania oznacza Leibniz symbolem 8 (stojącą ósemką, przerwaną na górnym brzegu)[4]. Jest to znak równości Descartes'a, odmiennie ustawiony. Descartes oznaczał równość a z b symbolem $a \propto b$. Leibniz używa znaku $\propto$ w znaczeniu tożsamości[5]. Oznacza on też przystawanie znakiem $\simeq$[6]. Będziemy używali tu znaku 8 z listu Leibniza do Huygensa. Oznaczamy więc, jeżeli F_1 i F_2 są symbolami dwóch aggregatów punktowych, lub wogóle dowolnych figur, ich przystawanie symbolem

$$F_1 \; 8 \; F_2 .$$

Przytem znaczymy grupy punktów, pisząc oznaczające je litery obok siebie. Np.:

$$ABC \; 8 \; DEF.$$

Należy sobie uświadomić, że system Charakterystyki geometrycznej Leibniza opiera się na dwóch pojęciach zasadniczych, na pojęciu punktów i przystawania. Leibniz określa utwory geometryczne za pomocą pojęcia ruchu[7]; ostatecznym rezultatem byłyby więc trzy pojęcia zasadnicze, punktów, kongruencyi i ruchu. Będziemy

---

1) Phil. Bibl., 107, str. 79 n.
2) Por. Cantor, Gesch. d. Mathem, III, 1901, str. 35.
3) Phil. Bibl., 107 str. 79 n.
4) l. c. str. 79.
5) Math. Gerh., V, str. 150.
6) l. c. str. 185.
7) Np. Initia rerum mathematicarum metaphysica, Math. Gerh., VII, str. 17 n; Phil. Bibl., 107, str. 53 n.

jednak widzieli, że ostatnie z nich możemy pominąć, określając utwory geometryczne z pomocą charakterów kształtu

$$F_1 \; 8 \; F_2 .$$

Leibniz wyobrażał sobie jasno możliwość takiego postępowania. Ostatecznie spoczywa więc Charakterystyka geometryczna, prócz punktów, na pojęciu przystawania. H. Grassmann wyraża się o tem w następujący sposób: „Diese einfache Betrachtungs- und Bezeichnungsweise wird ihm nun der Keim zu einer Reihe höchst überraschender Resultate; ja er ist dadurch in den Stand gesetzt, wirklich auch schon an dieser Probe nachzuweisen, wie eine rein geometrische Analyse möglich ist, und zwar eine solche, welcher alle räumlichen Beziehungen unterworfen werden können“[1].

Zobaczymy w następstwie, że fakt ten jest tylko na pierwszy rzut oka tak zadziwiający, i że właściwie w każdej dyscyplinie matematycznej podobnie postępujemy.

Najważniejszem zadaniem Geometryi jest według Leibniza badanie miejsc geometrycznych[2]. Należy więc zacząć od przedstawienia tych miejsc zapomocą wybranych charakterów.

Związek

$$A \; 8 \; X, \tag{1}$$

gdzie A oznacza punkt dany, X punkt szukany, oznacza przestrzeń nieskończoną. Albowiem wszystkie punkty świata są nawzajem przystające, t. zn. każdy punkt może być przeniesiony na miejsce każdego innego. Związek (1) moglibyśmy też napisać w następujący sposób:

$$X \; 8 \; (X),$$

ponieważ przez (X) zgodziliśmy się oznaczać ogół szukanych punktów.

Symbol

$$AX \; 8 \; A(X)$$

przedstawia ogół punktów (X), mających tę własność, że A i każdy

---

1) H. Grassmann, Geom. Anal., 1847, str. 3 n.
2) Przedstawione tutaj i poniżej rezultaty w Math. Gerh., II, str. 23 n., lub Phil. Bibl., 107, str. 80 n.

z nich, uważane za figurę, są przystające do A i do pewnego z nich X. Jest to więc kula o środku A i o promieniu AX. Możnaby symbol ten napisać także w postaci

$$AB \ 8 \ AX, \tag{2}$$

gdzie A i B są punktami dowolnemi.

Związek

$$AX \ 8 \ BX \tag{3}$$

jest charakterem płaszczyzny. Dane są w tym przypadku dwa punkty A, B; szukamy ogółu takich punktów (X), aby każdy z nich z punktem A, jako figura był przystający do figury składającej się z niego i drugiego danego punktu B. Jest to oczywiście płaszczyzna nieskończona. Albowiem dla każdego punktu X tego zbioru mamy $AX \ 8 \ BX$, a żaden punkt, nie należący do tego zbioru, nie jest punktem danej płaszczyzny. Zbiór ten jest agregatem tych punktów, które względem A mają to samo położenie jak względem B. Będzie to oczywiście płaszczyzna, połowiąca odcinek AB i prostopadła do niego[1].

Jeżeli A, B, C oznaczają trzy dowolnie dane punkty, to charakter

$$ABC \ 8 \ ABX \tag{4}$$

oznacza linię kołową. Jest to ogół punktów (X), z których każdy ma względem A i B to samo położenie, jak C względem A i B. „To określenie czyli definicya koła nie opiera się — jak definicya Euklidesa — na pojęciu płaszczyzny, ani nawet na pojęciu prostej". Aby się nie zdawało, że ta definicya koła zależy od pojęcia prostej, a więc w danym przypadku od prostej przechodzącej przez A i C np. daje Leibniz w następstwie takie objaśnienie. Możemy sobie wyobrazić, że punkty A i B są stałe, a punkt trzeci C połączony z A i B zapomocą dowolnych prostych lub krzywych ale sztywnych linij, a więc będący względem A i B w tem samem położeniu, obraca się około A i B, opisując w ten sposób linię kołową. Pojęcie położenia względnego dwóch punktów nie zależy więc od pojęcia prostej, ponieważ możemy sobie wyobrazić, że punkty te są połączone linią dowolną. Jeżeli założymy, że linia ta jest sztywna, będzie i względne położenie obu punktów niezmienne.

[1] Nie jest to oczywiście wniosek z definicyi (3).

Możemy powiedzieć, że dwa punkty mają to samo względne położenie jak dwa inne dane, jeżeli możemy je połączyć linią, przystającą do linii łączącej drugą parę.

Co do wyrażenia koła w formie (4) należy zauważyć, o czem Leibniz nie wspomina, że (4) przechodzi na (2), t. z. koło na kulę, jeżeli A jest identyczne z B.

Związki

$$AX \ 8 \ BX \ 8 \ CX \tag{5}$$

przy danych A, B, C przedstawiają prostą. Na płaszczyźnie wystarczają do wyznaczenia prostej dwa punkty.

I tu należy wspomnieć, że wyrażenie (5) przechodzi na (3), jeżeli którekolwiek dwa punkty są identyczne. Otrzymamy wtedy płaszczyznę. Jeżeli zaś będzie $A \equiv B \equiv C$, to (5) redukuje się do (1), czyli oznacza przestrzeń nieskończoną.

W końcu wyrażają związki

$$AX \ 8 \ BX \ 8 \ CX \ 8 \ DX \tag{6}$$

punkt, mający tę własność, że odcinek

$$AX = BC = CX = DX.$$

Widzimy tu, że w szczególnych przypadkach, które łatwo określić, przechodzi wyrażenie (6) na wyrażenie prostej, płaszczyzny lub przestrzeni.

Z tego stanowiska jest więc przestrzeń niejako szczególnym przypadkiem płaszczyzny, płaszczyzna szczególnym przypadkiem prostej, a ta ostatnia szczególnym przypadkiem punktu. Nie jest to jednak wyłączną własnością systemu Leibniza. W każdej Geometryi, w której np. płaszczyzna jest określona jednoznacznie zapomocą mniejszej liczby punktów niż prosta, musi być pierwsza szczególnym przypadkiem ostatniej. Stosunki te są oczywiście przeciwne stosunkom w Geometryi Euklidesa.

Leibniz poprzestaje na tych miejscach geometrycznych. Wspomina, że dadzą się one wyrazić jeszcze w inny sposób, lecz że ten jest najprostszy. Można te wyrażenia, mówi on, uważać za definicye odpowiednich utworów.

Na podstawie tego stanowiska znika, jak wspomnieliśmy trzecie zasadnicze pojęcie Charakterystyki geometrycznej, ruch; zostają tylko pojęcia punktów i przystawania. Utwory geometryczne można określić z pomocą charakterów (1)—(6). W dalszym rozwoju należałoby jeszcze udowodnić, że utwory (1)—(6) mają własności, jakie spotykamy u odpowiednich utworów natury, aby tem usprawiedliwić ich nazwę.

Aby wykazać, jak łatwo kształtują się dowody w Charakterystyce geometrycznej, podaje Leibniz wyrażenia na przecięcia poszczególnych utworów [1].

Przecięcie powierzchni dwóch kul jest linią kołową. Charakterem koła jest bowiem wyrażenie

$$ABC \; 8 \; ABX,$$

z czego wynika

$$AC \; 8 \; AX \quad \text{i} \quad BC \; 8 \; BX;$$

związki te przedstawiają jednak powierzchnie dwóch kul o środkach w A, B, o promieniach AC i BC.

Przecięcie płaszczyzny i powierzchni kuli jest kołem. Symbolem kuli jest bowiem zwiazek

$$AC \; 8 \; AX,$$

symbolem płaszczyzny związek

$$AX \; 8 \; BX.$$

Z tego wynika

$$AC \; 8 \; BC,$$

ponieważ C jest jednym z punktów X. Ponieważ zaś mamy

$$BC \; 8 \; AC \quad \text{i} \quad AC \; 8 \; AX$$

więc będzie też

$$BC \; 8 \; AX,$$

a na podstawie

$$AX \; 8 \; BX$$

także

$$BC \; 8 \; BX.$$

Składając te przystawania razem, otrzymamy

[1] Phil. Bibl., 107, str. 82 n.

$$ABC \; 8 \; ABX \qquad (\alpha)$$

t. zn.

$$AB \; 8 \; AB, \quad BC \; 8 \; BX, \quad AC \; 8 \; AX.$$

Wyrażenie (α) jest jednak charakterem linii kołowej; twierdzenie jest więc udowodnione. Dowód odbył się, jak widać, zupełnie symbolicznie.

W podobny sposób można wykazać, że przecięcie dwóch płaszczyzn jest prostą. Mamy bowiem jako symbole płaszczyzn wyrażenia

$$AX \; 8 \; BX \quad \text{i} \quad AX \; 8 \; CX,$$

z czego wynika

$$AX \; 8 \; BX \; 8 \; CX,$$

co przedstawia prostą.

W końcu jest przecięcie dwóch prostych punktem. Z charakterów

$$AX \; 8 \; BX \; 8 \; CX \quad \text{i} \quad BX \; 8 \; CX \; 8 \; DX$$

wynika bowiem wprost wyrażenie na punkt:

$$AX \; 8 \; BX \; 8 \; CX \; 8 \; DX.$$ [1]

Zarzucić można tym dowodom, że nie określają nam przypadków, w których przecięcia są różne od koła, prostej względnie punktu. W szczególnych bowiem przypadkach może być przecięcie dwóch kul punktem np. Dotychczasowe przedstawienie nie pozwala określić takich rezultatów. Nie wiemy również, czy istnieje zawsze przecięcie dwóch płaszczyzn. Leibniz przyjmuje dane płaszczyzny w postaci

$$AX \; 8 \; BX, \quad AX \; 8 \; CX.$$

Jest to oczywiście już szczególny przypadek. Najogólniejszym byłaby forma

$$AX \; 8 \; BX, \quad CX \; 8 \; DX;$$

a w tym przypadku nie można z danych podstaw udowodnić, że odpowiednie przecięcie zawsze istnieje. Podobnie należałoby w przypadku prze-

[1] Phil. Bibl., 107, str. 82 n.

cięć prostych napisać najogólniejszą postać danych prostych w następujący sposób

$$AX \, 8 \, BX \, 8 \, CX, \qquad DX \, 8 \, EX \, 8 \, FX,$$

a nie

$$AX \, 8 \, BX \, 8 \, CX, \qquad BX \, 8 \, CX \, 8 \, DX.$$

Z innych źródeł wiemy oczywiście, że w przypadku płaszczyzn otrzymamy zawsze przecięcie właściwe lub niewłaściwe, a w przypadku prostych nie zawsze. Podane dowody nie mówią jednak o tem zupełnie.

Powodu należy szukać w podstawach. Przyjęte powyżej definicye, któremi Leibniz się posługuje, pozwalają jeszcze na geometrye różnych rodzajów. Przestrzeń nie musi być koniecznie zapełniona punktami w sposób ciągły; owszem mogą dane geometrye być geometryami form nieciągłych. Zupełne określenie należałoby do dalszych pewników. Prócz tego, aby udowodnić np., że przecięcie (istniejące) dwóch płaszczyzn jest prostą, należałoby przyjąć pewnik o następującej mniej więcej treści:

Jeżeli

$$AX \, 8 \, BX \quad \text{i} \quad CX \, 8 \, DX$$

jest charakterem płaszczyzny (π), to istnieje zawsze przynajmniej jeden punkt E mający tę własność, że wyrażenie

$$AX \, 8 \, BX, \qquad BX \, 8 \, EX$$

jest symbolem płaszczyzny (π).

W ogóle jest podany przez Leibniza szkic Charakterystyki geometrycznej ze stanowiska dzisiejszej metody Matematyki dogmatycznym; brak systemu pewników, które dzisiaj stawiamy na czele. Wytłómaczyć to można oczywiście tem, że Leibniz podawał w liście do Huygensa tylko szczupły szkic; że jest to pierwszy pomysł, nie obleczony jeszcze w szatę systematyczną. Nie można wątpić, że gdyby Leibniz był w stanie system ten opracować, to postawiłby na jego czele układ pewników, i w ten sposób otrzymałby nie tylko ściśle symboliczny, ale i ściśle dedukcyjny system Geometryi.

Co do wyboru charakterów, to uderza nas przedewszystkiem niemożliwość wyrażenia pewnemi symbolami ogółu punktów. $AB \, 8 \, CX$ przedstawia np. powierzchnię kuli, lecz nie można na powyższych podstawach utworzyć wyrażenia, ktoreby ten ogół przedstawiało.

Innemi słowy związek $AB \, 8 \, CX$ nie da się rozwiązać względem X. Powodem jest brak znaku równości, a więc wybór charakterów.

Zostając przy pojęciu przystawania, można wprowadzić w powyżej podane wyrażenia znak równości. Formą ogólną wyrażeń w znakowaniu Leibniza jest symbol

$$F_1 \, 8 \, F_2, \tag{β}$$

gdzie F_1 i F_2 oznaczają pewne zbiory punktów. Wyraz F składa się jednak z dwóch części, pewnej figury, którą znaczymy przez f_2 i pewnego szukanego punktu lub zbioru takich punktów. Np. w wyrażeniu koła

$$ABC \, 8 \, ABX \tag{γ}$$

jest $f_2 \equiv AB$, X jest zaś szukanym zbiorem. Jest to charakterystyczną cechą wyrażenia (β), że f_2 znajduje się także po lewej stronie, np. AB w charakterze (γ). W przykładach podanych przez Leibniza spotykamy zawsze f_2 i po lewej stronie znaku przystawania; wyjątek stanowią przypadki, w których f_2 składa się z jednego punktu. Jest to oczywiście związane z względnością przystawania. Wobec tego i lewa strona związku (β) musi się składać z dwóch grup. Pierwsza z nich f_1 musi być przystająca do f_2, druga zaś jest punktem stałym lub zmiennym. Zamiast związku (β) możemy więc napisać

$$f_1, P \, 8 \, f_2 X, \tag{δ}$$

albo

$$f_1, X \, 8 \, f_2 X, \tag{δ'}$$

przyczem musi być

$$f_1 \, 8 \, f_2. \tag{ε}$$

Związek (ε) jest zbyteczny, jeżeli będzie

$$f_1 \equiv f_2, \tag{η}$$

który to przypadek zachodzi stale u Leibniza. Jeżeli zaś f_1 redukuje się do pojedyńczego punktu, to f_2 może być dowolnym punktem, gdyż wszystkie punkty przestrzeni są przystające. Spotykamy tutaj pewne ograniczenie, które jest wadą logiczną systemu Leibniza. Uważając formę (δ) lub (δ') za zasadniczą, musimy zrobić zastrzeżenie, że f_1 ma być przystające do f_2, a więc musimy przyjąć związek (ε), jeżeli nie chcemy się ograniczać do związku (η), którego z drugiej strony nie możemy ogólnie przyjąć, gdyż w przypadku, w którym f_1 redukuje się do pojedyńczego punktu, ograniczenie to jest zbyteczne i szkodliwe.

W symbolu (δ) i (δ') chodzi zawsze o oznaczenie punktu X lub zbioru takich punktów. Na tem polega właśnie określanie utworów geometrycznych. Punkt X można więc uważać za wynik połączenia utworów f_1, f_2, P i na podstawie tej uwagi wprowadzić znak równości. Zamiast (δ) i (δ') możemy napisać

$$[f_1, P, f_2] = X, \qquad (\vartheta)$$

lub

$$[f_1, X, f_2] = X. \qquad (\vartheta')$$

Przez to umożliwiamy poczęści napisanie zbiorów punktów X, czyli rozwiązanie związków względem X. (ϑ') nie jest oczywiście zupełnem rozwiązaniem (por. analogiczne wyrażenia w Algebrze Logiki, np. rozwiązania równań logicznych). Określone przez Leibniza utwory geometryczne otrzymują teraz postać:

$$[A, X, B] = X \quad \text{(płaszczyzna)}$$

$$\left.\begin{array}{l}[A, X, B] = X \\ [B, X, C] = X\end{array}\right\} \quad \text{(prosta)}$$

$$[A, P, A] = X \quad \text{(kula)}$$

$$[AB, C, AB] = X \quad \text{(koło).}$$

Na tej podstawie możemy napisać wyrażenie prostej w następujący sposób:

$$[AB, X, AB] = X,$$

t. zn. prosta AB jest ogółem punktów X czyniących zadość powyższemu związkowi. Jasnem jest bowiem, że jeżeli w definicyi koła

$$[AB, C, AB] = X$$

C leży na prostej, przechodzącej przez A i B, wtedy ogół punktów X redukuje się do C. Możnaby więc zapomocą związku

$$[AB, C, AB] = C$$

określić kolinearność punktu C z punktami A i B; wtedy możnaby zdefiniować prostą jako ogół punktów kolinearnych z dwoma danemi. Z definicyi tej można łatwiej wywnioskować zasadnicze własności prostej, aniżeli z definicyi

$$[A, X, B] = X, \qquad [B, X, C] = X.$$

Znikają też z tej definicyi zbyteczne punkty pomocnicze A, B, C.

Znakowanie

$$[f, P, f_2] = X$$

wskazuje nam jeszcze pewien poważny brak metody Leibniza. W dyscyplinach matematycznych, w których używamy symbolów podobnych do powyższego (np. w Arytmetyce $a + b = c$, w teoryi grup $ab = c$, w Algebrze Logiki $ab = c$ i t. d.) symbole te są jednoznaczne. Na tem polega wielka dogodność i prostota w ich użyciu. W naszym przypadku jest jednak symbol

$$[f_1, P, f_2] = X$$

ogólnie wieloznaczny. Dlatego też uważa H. Grassmann[1]) kolineacyę za względność pod tym względem prostszą od przystawania, jakkolwiek jest on funkcyą 6 punktów (w przestrzeni), podczas gdy przystawanie jest funkcyą 2 punktów.

Prócz pojęcia przystawania miał Leibniz zamiar używać w Charakterystyce geometrycznej względności podobieństwa i ruchu.[2])

Być może, że wskutek nieprzychylnej odpowiedzi Huygensa zamiaru tego nie wykonał[3]), nad czem należy oczywiście ubolewać, zwłaszcza, że pojęcie ruchu zaprowadziłoby go prawdopodobnie od rezultatów o wiele piękniejszych[4]).

Względność podobieństwa jest prawdopodobnie jeszcze mniej korzystna do zbudowania systemu Charakterystyki geometrycznej. Kładąc bowiem analogicznie do znakowania powyższego

$$[f_1, P, f_2] = X, \qquad (\varkappa)$$

lub

$$\{f_1, P, f_2\} = X, \qquad (\varkappa')$$

[1]) H. Grassmann, Geom. Analyse, 1847, str. 7. Por. także ustęp e) niniejszej pracy.

[2]) Math. Gerh., V, str. 172.

[3]) Por. M. Cantor, Gesch. d. Math., t. III, 1901, str. 36.

[4]) Por. ustępy e) f) tej pracy.

jeżeli szukamy punktu, albo ogółu punktów X, dla których będzie

$$f_1 P \simeq f_2 P,$$

spotykamy się z tem samem ograniczeniem, jak przedtem: w wyrażeniu ($\varkappa$) względnie ($\varkappa'$) musi być

$$f_1 \simeq f_2.$$

Symbol ($\varkappa$) jest również wieloznaczny, a definicye utworów geometrycznych mniej proste. Wzór

$$AB \simeq CX$$

nie określa już kuli, lecz obejmuje wszystkie punkty przestrzeni, ponieważ wszystkie odcinki są podobne. Również definicye

$$AX \simeq BX,$$

$$AX \simeq BX \simeq CX$$

nie dają żadnych utworów. Charakter

$$ABC \simeq DEX$$

określa zaś, jak poprzednio, koło. Wyrażenie

$$ABCD \simeq ABCX$$

określa położenie punktu.

Niema potrzeby używać więcej punktów niż trzy w częściach f_1, f_2, ponieważ dla czterech punktów $ABCD$ jest wzór

$$ABCDE \simeq ABCDX$$

równoważny z wyrażeniem

$$ABCE \simeq ABCX.$$

To samo odnosi się i do względności przystawania. Widzimy więc, że charaktery najprostsze nie określają żadnych utworów.

c. „Characteristica geometrica" i „Characteristica universalis".

Przedstawiona powyżej metoda geometryczna Leibniza nie jest w jego pomysłach przypadkiem pojedyńczym, różniącym się od innych jego idei; nie jest ona wyskokiem wybujałej fantazyi, nie opartym na faktach pozytywnych, nie uzasadnionym pewnemi rozważaniami nad metodą innych nauk i metodą rozumowania wogóle. Leibniz wspomina wprawdzie o łatwości tworzenia nowych poglądów u siebie [1]; świadczą też o tem jego pomysły we wszystkich prawie dziedzinach myśli ludzkiej; spotykamy nawet niejednokrotnie bądź to w listach, bądź to we fragmentach całkiem nieuzasadnione marzenia, o których można napewno powiedzieć, że są tylko mrzonkami, ale w naszym przypadku mamy przed sobą przekonania, zrośnięte ściśle z najważniejszemi zagadnieniami, z dążeniami, które były treścią całego życia Leibniza.

Przedewszystkiem łączy się z Charakterystyką geometryczną „Analiza położenia". Jest to niejako uogólnienie Charakterystyki geometrycznej, idealny cel Geometryi; Charakterystyka geometryczna jest natomiast pierwszą częściową próbą Analizy położenia. W jednej z prac [2] mówi Leibniz, że znana Analiza matematyczna zajmuje się pojęciem wielkości, a nie pojęciem położenia, i dlatego można ją zastosować do Geometryi tylko pośrednio. Zastosowanie to ma te złe strony, że dowody i konstrukcye stają się uciążliwe i długie, podczas gdy odpowiednie twierdzenia dadzą się wywieść z pojęcia położenia o wiele prościej.

Wiąże się z temi zagadnieniami pojęcie miejsc geometrycznych.

Widzimy z tego, że Leibniz miał na myśli oczyszczenie nauki Geometryi z czynników jej obcych; dążył on do utworzenia metody, opierającej się tylko na pojęciach czysto geometrycznych.

Metoda ta da się według Leibniza wykształcić w szacie symbolicznej; w ten sposób możnaby uzyskać nowy Rachunek, zasadniczo różny od algebraicznego. Uczynimy na tej podstawie dowody nie tylko łatwiejsze, ale być może wynajdziemy zakresy nowych prawd, dla wyobraźni nie dostępnych. Nawet dyscypliny praktyczne potrzebne przy wynalazkach machin odniosłyby stąd wiele korzyści [3].

Leibniz podał próbę tej wiedzy geometrycznej, ale niestety znowu tylko próbę.

Figury geometryczne posiadają prócz wielkości jeszcze jakość kształtu. Z wielkością dane jest pojęcie równości, z kształtem po-

1) Phil. Bibl., 107, str. 31.
2) Math. Gerh., V, str. 178 n.
3) Phil. Bibl., 107, str. 76 n.

jęcie podobieństwa. Prawdziwa Analiza geometryczna musi więc uwzględniać, prócz równości i proporcyi (opierającej się na równości), także podobieństwo i przystawanie (wynikające z połączenia równości i podobieństwa). Aby można mówić o wielkości, należy przedmioty porównywane bezpośrednio zestawić. Kształt natomiast jest niezależny od porównania. Podobnem jest więc to, co, rozpatrywane bez względu na inne przedmioty, nie może być odróżnione[1]. Dwie figury nazwiemy podobnemi, jeżeli nie będziemy w stanie w jednej z nich, rozpatrywanej bez względu na drugą, podać cechy, którejby nie było i w drugiej. Wobec tego musi być stosunek odpowiednich składników identyczny.[2]

Na podstawie tych definicyj udowadnia Leibniz pewne twierdzenia. Jedna ich część da się według Leibniza wypowiedzieć w następujący sposób w formie najogólniejszej: w utworach podobnych mają się homologiczne linie, powierzchnie i ciała przestrzenne tak jak długości, kwadraty i trzecie potęgi homologicznych boków[3].

Że Leibniz uważał swą Charakterystykę geometryczną za częściowe zrealizowanie owej Analizy geometrycznej, przynajmniej co do ogólnego kierunku, dowodzi tego np. zdanie wypowiedziane przez niego po wyliczeniu korzyści Charakterystyki geometrycznej w liście do Huygensa: „Osiągnięcia tego celu możnaby się spodziewać, gdyby ta rzeczywiście Analiza geometryczna (t. zn. Charakterystyka geometryczna) była w swych podstawach określona[4].

Dalsze uogólnienie prowadzi nas do „Charakterystyki ogólnej“. „Characteristica universalis“, owa nauka i metoda, mająca objąć wszystkie poszczególne nauki, była od chłopięcych lat Leibniza ulubionym tematem jego rozmyślań.[5]

Leibniz był głęboko przekonany, że wszystkie pojęcia złożone dadzą się rozłożyć na proste, tak jak każda liczba na liczby pierwsze[6]. Definicye nominalne są zbiorem cech, które pozwalają nam na odróżnienie zdefiniowanych przedmiotów od wszelkich innych. Jeżeli cechy będziemy

---

1) l. c. str. 71 n. Por. też str. 55.
2) l. c. str. 73.
3) l. c. str. 73–6.
4) l. c. str. 79.
5) l. c. str. 31 n.
6) l. c. str. 39 n.; Phil. Gerh., VII, str. 292 n.

ustawicznie rozkładali na składniki prostsze, to w końcu musimy dojść do takich, które są bezwzględnie proste, których określić nie podobna[1]. Tej ogólnej Analizy Leibniz nigdy nie dokonał. Nie wątpił on jednak, że kilka bystrych umysłów w krótkim stosunkowo czasie zadaniu temu podoła. Niestety, do dziś dnia nie posiadamy takiego katalogu zasadniczych pojęć, tego abecadła filozoficznego, mimo ponownych żądań[2]. Nie można z góry powiedzieć, że zadanie to jest nierozwiązalne. Zaznaczyć jednak należy, że rozwiązanie to musi zawsze pozostać względnem, przynajmniej w części. Niema zupełnie objektywnego kryteryum zasadniczych pojęć; wielką rolę będzie zawsze odgrywała umowa. Odbija się to we względności podstaw Geometryi. Ale ta Analiza jest tylko wstępem do Syntezy, która ma z tych zasadniczych pojęć tworzyć pojęcia złożone. Pojęcia te nie mogą być oczywiście sprzeczne[3]. I to prowadzi nas znowu do względności[4]. Synteza ta zezwoli więc na utworzenie wszystkich prawd, zwłaszcza jeżeli będziemy się posługiwali metodą mechaniczną, na jaką wskazuje nam Kombinatoryka. Mniemanie to jest oczywiście możliwe tylko na stanowisku Leibniza, dla którego treść duchowa każdej monady jest niezależna od treści innych, jest w niej potencyalnie w całości zawarta. Wszak każdy postęp wiedzy jest tylko rozwinięciem intelektualnem jaźni[5].

„Characteristica universalis“ Leibniza przedstawia zaczątki kilku nauk, które i dzisiaj nie są jeszcze ostatecznie zróżnicowane. Wiąże się z nią „Ars combinatoria“, którą się Leibniz zajmował jeszcze w latach młodzieńczych, a która jest zarazem podstawą dzisiejszej Kombinatoryki, dyscypliny matematycznej o charakterze jakościowym. Leibniz pojmował ją szerzej, niż się to dzisiaj dzieje; identyfikował ją nawet z „Charakterystyką ogólną“.[6] I w tem znaczeniu była dla niego Algebra zwyczajna zastosowaniem Kombinatoryki do wielkości. Iloczyn

---

1) Phil. Bibl., 107 str. 41.
2) Por. np. W. Ostwald, Vorles. u. Naturphilosophie.
3) Phil. Gerh., VII, str. 261 n.; Phil. Bibl., 107, str. 42.
4) Por. moją pracę „O aprioryczności Matematyki“, Przegl. filoz., 1909, XII, str. 507.
5) Phil. Gerh., VII, str. 61 n.
6) Phil. Bibl., 107, str. 50.

$a+b+c$ i t. d. przez $l+m+n$ i t. d. jest przecież sumą wszystkich par powyższych liter[1].

Lwią część Charakterystyki ogólnej stanowi Logika symboliczna i ta część Ontologii, która wiąże się ściśle z Logiką, a którą uważa się powszechnie za naukę o pojęciach; w Logice symbolicznej nazywa się ją Rachunkiem klas[2]. Jest to zarazem symbolicznie przedstawiona elementarna Teorya mnogości[3]. Leibniz znał już wiele i to zasadniczych twierdzeń tej dyscypliny. „Initia rerum mathematicarum metaphysica“[4] mają także wykazać, że istnieje ta uniwersalna nauka, ogólniejsza od Matematyki[5]. Leibniz podaje tam prócz innych definicye czasu, przestrzeni, punktu, linii, powierzchni, prostej, płaszczyzny, przecięcia czyli iloczynu logicznego, wielkości, jakości, podobieństwa i t. d. Mamy tutaj oczywiście do czynienia z pojęciami ontologicznemi, i stojącemi na granicy Ontologii i dyscyplin matematycznych.

Z twierdzeń Algebry Logiki znanych Leibnizowi wspomnimy tylko o zasadniczych. Znane mu było pojęcie iloczynu, sumy i negacyi[6], prawo symplifikacyi

$$ab < a, \qquad a < ab,\ ^{7)}$$

prawo składania, z $a < b$ i $a < c$ wynika

$$a < bc,$$

z $a < b$, $c < b$ wynika

$$a + c < b,\ ^{8)}$$

prawo przemienności,[9] tautologii

$$aa = a, \qquad a + a = a\ ^{10)},$$

[1]) l. c. str. 62; Math. Gerh., VII, str. 17—29.
[2]) Por. E. Schroeder, Vor. ü. Algebra d. Logik, I, 1890.
[3]) Por. L. Couturat, Les principes des Mathém., 1905, dod. I.
[4]) Math. Gerh., VII, str. 17 n.
[5]) Phil. Bibl., 107, str. 53.
[6]) Phil. Gerh., VII, str. 218, 222, 240.
[7]) l. c. Znak $<$ oznacza stosunek subsumpcyi.
[8]) l. c. str. 222.
[9]) Leibniz, Philos. Schriften, wyd. Erdmann, str. 98.
[10]) Phil. Gerh., VII, 230 n.; G. Peano, Formulaire mathém., IV, 1902—3, Log. math., § 2, *3·1.

prawa kontrapozycyi i podwójnego przeczenia[1], pojęcie zera logicznego[2], a nawet takie prawa, jak następujące: z $a < b$ wynika

$$a = ab \quad \text{i} \quad b = a + b\ ^{3)}.$$

Z przedstawienia tego wynika, że Charakterystyka geometryczna była tylko jednem z ogniw rozmyślań nad Charakterystyką ogólną. Była ona tylko częściowem urzeczywistnieniem tej rachującej, chociaż niekoniecznie wielkościami, metody ogólnej, obejmującej i Algebrę zwyczajną i Geometryę i w ogóle metody poznawania intelektualnego[4]. Cechuje obie te Charakterystyki mechanizowanie akcyi myślenia, a więc udoskonalanie i umożliwianie dowodów. Błędy w rozumowaniu będzie można z ich pomocą tak łatwo wykryć, jak błędy w rachunkach. Znikną więc jałowe spory uczonych, a uwolniona w ten sposób energia posłuży celom wyższym. „Należy się dziwić niedbałości ludzi marnujących czas na drobnostkach; to, coby mogło polepszyć ich zdrowie i byt, leży tymczasem odłogiem. Gdyby ludzie tylko zechcieli na podstawie istniejących, bardzo obfitych obserwacyj naszego stulecia zająć się ową Analizą, to w ich mocy byłoby może zapobiedz wielkiej liczbie nieszczęść. Ludzkie poznanie natury wydaje mi się jednak dzisiaj składem, zaopatrzonym doskonale w towary wszelkiego rodzaju, w którym brak jednak porządku i spisu zawartości“.[5]

W związku z temi dążeniami zostają też machiny do rachowania, również przedmioty ulubionego zajęcia Leibniza; wszak i one doskonalą poznawanie.

Aby zrozumieć dążenia Leibniza jeszcze lepiej, musimy je ocenić ze stanowiska Matematyki i nauki współczesnej.

d. Stanowisko Charakterystyki geometrycznej w Matematyce.

Leibniz przeciwstawia niejako Charakterystykę ogólną Charakterystyce geometrycznej. Charakterystyka ogólna odnosi się do każdej

[1]) Formul. mathém., l. c., § 7, *1.
[2]) Phil. Gerh., VII, str. 212, 230, 234.
[3]) l. c. str. 214.
[4]) Phil. Bibl., 107, str. 50.
[5]) Phil. Bibl., 107, str. 47.

nauki, Charakterystyka geometryczna tylko do Geometryi. Przypatrzmy się najpierw ze stanowiska współczesnego Charakterystyce ogólnej.

Wspomnieliśmy już, że tkwią w niej początki kilku nauk, mianowicie Logiki ogólnej, Ontologii i badań stojących na granicy między Ontologią a dyscyplinami matematycznemi, szczególnie Teoryi względności [1].

Że Leibniz zaliczał i Logikę do Charakterystyki ogólnej, pragnąc w ten sposób udoskonalić ówczesne Metody logiczne, o tem łatwo się przekonać, odczytując fragmenty jego Charakterystyki ogólnej. Zwrócić też należy uwagę na pewne miejsce w „Nouveaux Essais". Czytamy tam o uogólnieniu form sylogistycznych, o zaliczaniu ich do przyszłej wiedzy; będzie to „rodzaj Matematyki uniwersalnej, której doniosłość nie jest dostatecznie oceniona" [2]. Ta Matematyka uniwersalna byłaby oczywiście o wiele obszerniejsza, aniżeli Logika symboliczna Leibniza. Reszta należałaby do Ontologii, ogólnej nauki o przedmiotach, zwanej też Metafizyką, a zarazem do Teoryi względności. Niema ścisłej granicy między Ontologią a dyscyplinami matematycznemi. Ontologia zajmując się najogólniejszemi własnościami przedmiotów, ma do czynienia i z takiemi własnościami, które należą do Teoryi względności i do t. zw. formalnej Teoryi działań. Ostatecznym problematem Ontologii jest problematem najogólniejszej klasyfikacyi przedmiotów, a ta należy, w odniesieniu do stosunków do Teoryi względności. Niektóre z pojęć ogólnej Teoryi względności poznamy w ustępie ostatnim; pozwolą nam one objąć jednem pojęciem metody poszczególnych dyscyplin matematycznych i zastosować je do Charakterystyki geometrycznej. Rozwinięta dzisiaj Teorya względności dwójkowych [3] jest tylko szczególnym przypadkiem Teoryi względności. Jak ściśle wiąże się z dyscyplinami już ta część, wynika z poglądu Russella na istotę czystej Matematyki, [4] według którego czysta Ma-

[1]) Nazywam za poradą p. Dicksteina Teoryą względności to, co zagranicą zowią „Theorie der Relative" (Schroeder), „calcul des relations" (Russell), a właściwie uogólnienie tej dyscypliny. Por. f) tej pracy.

[2]) Nouv. Ess., IV, 17, § 4.

[3]) Literatura podana np. u Schroedera, Vorl. ü. Alg. d. Logik, I—III, 1890 - 1907.

[4]) B. Russell, The principles of mathematics, 1903, str. 1 n.

tematyka jest tylko kontynuacyą Logiki. Cała czysta Matematyka da się zbudować na pojęciach należących tylko do Logiki. Jeżeli jednak rozważymy, co Russell nazywa Logiką, to dojdziemy do przekonania, że czysta Matematyka jest kontynuacyą nie Logiki, lecz przedewszystkiem Ontologii. Rachunek względności i Rachunek klas należą bowiem przedewszystkiem do Ontologii. Zależy to oczywiście od tego, co nazwiemy Logiką. Uważamy zaś za Logikę naukę o ogólnej i szczegółowej metodzie intelektualnego poznawania świata. Taką Logikę uznać zawsze musimy. Prócz niej możemy przyjmować Logikę teoretyczną lub inaczej jeszcze nazwaną, ale ta będzie zawsze od prawdziwej, zwykłej Logiki różną. Dzisiejszy Rachunek klas, związany z jednej strony z Teoryą sądów, a więc Logiką, łączy się z drugiej strony z Ontologią i Teoryą mnogości, a więc i z dyscyplinami matematycznemi. [1] Wogóle należy sobie uświadomić, że w Logice, Ontologii i pewnych dyscyplinach matematycznych istnieją prócz pojęć typowych także pojęcia graniczne, i że wskutek tego niełatwo jest oddzielić Logikę od Ontologii, Ontologię od dyscyplin matematycznych.

Otóż druga część Charakterystyki ogólnej Leibniza jest Ontologią, a zarazem wiąże się z Teoryą względności i dyscyplinami matematycznemi. Należą tutaj „Initia rerum mathematicarum metaphysica" [2], które sam Leibniz zalicza do Charakterystyki ogólnej [3]. Należy też „Ars combinatoria", a po części również Rachunek klas, wynaleziony przez Leibniza i przedstawiony symbolicznie [4].

Zgadzają się z tym poglądem badania tak bystrego krytyka i filozofa jak Husserl. Husserl, rzecznik czystej Logiki [5] nie odrzuca oczywiście Logiki praktycznej, tej, którą my nazywamy Logiką. Sądzi on jednak, że ta praktyczna Logika opiera się teoretycznej nauce, i tę nazywa czystą Logiką. Z naszego stanowiska czysta Logika Husserla — to w części Ontologia, w części najogólniejsze dyscypliny matematycz-

[1]) Por. moją pracę „Czem jest i czem będzie matematyka?" Wiad. mat., 1910, t. XIV.

[2]) Math. Gerh., VII, str. 17 n.; Phil. Bibl., 107, str. 53 n.

[3]) Phil. Bibl., 107, str. 53.

[4]) Np. l. c. str. 62; Math. Gerh., VII, str. 24, 49 n, 61, 250 n, 297 n. Por. też c).

[5]) E. Husserl, Logische Untersuchungen, 1900—1.

ne; a o nazwę przecież nie chodzi. Zgodzimy się na tę identyfikacyę, gdy uprzytomnimy sobie, jakie problematy stawia Husserl na czele czystej Logiki. A więc: ustanowienie kategoryj, praw do nich się odnoszących i teoryę form czyli czystą Teoryę mnogości [1]. Sam Husserl wyraża się o swojem stanowisku w następujący sposób: „Unter den grossen Philosophen, auf welche die hier vertretene Auffassung der Logik zurückweist, nannten wir oben auch Leibniz. Ihm stehen wir relativ am nächsten" [1].

Oprócz różnicy treści między idealną Charakterystyką ogólną Leibniza a ówczesną Logiką, Ontologią i ogólnemi dyscyplinami matematycznemi spotykamy zasadniczą różnicę metody. Charakterystyka ogólna Leibniza ma przynajmniej idealnie szatę symboliczną i dedukcyjną; symboliczną, gdyż jest zbudowana na charakterach możliwie najprostszych, dedukcyjną, gdyż jej wzorem Algebra. Leibniz nie zdołał nadać szaty dedukcyjnej i symbolicznej wszystkim swym pomysłom; było to nawet przed właściwem wykończeniem większych części wprost niemożliwe. Niektóre fragmenty posiadają jednak symbolikę. Przedewszystkiem wymienić należy Rachunek klas [2]. Nie można sobie nawet inaczej tłómaczyć owej nadziei Leibniza udoskonalenia dowodów, zamiany myślenia na rachunek charakterami. „Ut sufficiat duos disputantes omissis verborum concertationibus sibi invicem dicere: calculemus, ita enim perinde, ac si duo arithmetici disputarent de calculi quodam errore".

Badanie rozwiniętych dzisiaj o wiele bardziej teoryi Charakterystyki ogólnej i współczesnego stanu dyscyplin matematycznych, z których wszystkie prawie przedstawione są i dedukcyjnie i symbolicznie w „Formulaire mathématique" G. Peana [3], a zarazem rozważania natury ogólnej doprowadziły mnie do przekonania, że to, co nazywamy Matematyką, nie jest czemś ściśle odgraniczonem od innych nauk, lecz że za Matematykę uważamy te dyscypliny, które osiągnęły stan dedukcyjno-symboliczny. Innemi słowy, że Matematyka

[1]) l. c. I, str. 219, 243 n.

[2]) Por. c).

[3]) Formulaire mathématique, wydawany przez G. Peana od r. 1894. Wspomnieć też należy tutaj o pracach G. Fregego, szczególnie o „Grundgesetze d. Arithmetik" 1893—1903.

nie jest nauką lecz metodą, owym idealnym dedukcyjno-symbolicznym stanem, do którego dążą wszystkie nauki. Nie należy jednak mieszać stanu dedukcyjno-symbolicznego z mierzeniem i liczeniem; stanowisko nasze jest o wiele ogólniejsze. Nie możemy zatrzymywać się na tym punkcie dłużej, odsyłając po szczegóły do innych prac, gdzie przedstawiliśmy problemat ten w związku w ogólnemi zagadnieniami nauki [1].

Na podstawie tego, co powiedzieliśmy o Leibnizu, możemy śmiało twierdzić, że jego Charakterystyka ogólna wraz z Charakterystykami szczegółowemi, których przykładem jest Analiza położenia i Charakterystyka geometryczna jest właśnie owym dedukcyjno-symbolicznym stanem nauk. Wszak i dla Leibniza była Matematyka tylko specyalnym przypadkiem takiego dedukcyjno-symbolicznego opracowania.

Charakterystyka ogólna nie wystarcza jednak do symboliczno-dedukcyjnego przedstawienia poszczególnych nauk. Aby daną naukę przedstawić dedukcyjnie i symbolicznie, należy mieć nie tylko dedukcyjno-symboliczną Logikę, ale też symboliczne przedstawienie tych wszystkich nauk, których pojęcia w danej nauce są używane, a więc przedewszystkiem Ontologii. Wszędzie posługujemy się bowiem terminami, należącemi do tej nauki. I tylko dzięki temu, że potrzebne części Ontologi i Logiki mają szatę dedukcyjną-symboliczną, że następnie dyscypliny matematyczne opierają się tylko na Logice i Ontologii, był G. Peano w stanie nadać tym dyscyplinom postać dedukcyjno-symboliczną, po ustanowieniu charakterów właściwych tym naukom. Trzy czynniki składają się więc na idealny stan nauk: dedukcyjno-symboliczny stan Logiki (czynnik logiczny), nauk pomocniczych (czynnik pomocniczy) i danej nauki (czynnik właściwy). Tylko dlatego, że Leibniz zajmował się Charakterystyką geometryczną i że przytem na pierwszy plan wysuwał własności czysto geometryczne, że następnie jego Charakterystyka ogólna obejmowała po części czynnik w tym przypadku pomocniczy (Ontologię), można usprawiedliwić jego odróżnianie dwóch czynników, Charakterystyki ogólnej i geometrycznej.

[1]) Czem jest i czem będzie Matematyka?, Wiad. matem., 1910, z. 5—6; D. Prinzip der Identität u. der Kausalität, Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos. u Soziol., 1910, t. 34, z. 3.

Leibniz wspomina też, jak widzieliśmy, o symbolicznem opracowaniu Mechaniki, następnie pewnych faktów nauk przyrodniczych, a nawet przedmiotów niedostępnych dla wyobraźni; jeżeli jednak nie chodzi tutaj o fakty „matematyczne“ tych nauk, t. zn. o czynnik pomocniczy, to możemy powiedzieć, że stan dedukcyjno-symboliczny tych dziedzin mógłby być osiągnięty dopiero po dodaniu czynnika właściwego. Na tym punkcie należy zarzucić Leibnizowi jednostronność.

Ostatecznie możemy powiedzieć, że Charakterystyka geometryczna Leibniza jest właściwym czynnikiem jego pomysłów.

Przypatrzmy się teraz, jaki jest jej związek z dzisiejszą Matematyką. Odróżnić przedewszystkiem należy dążenia Leibniza do wydzielenia prawd czysto geometrycznych od usiłowania utworzenia szaty dedukcyjno-symbolicznej. Co do pierwszego, to dzisiejsza Geometrya rzutowa i deskryptywna, pierwsza oparta na pojęciach punktów i prostej nieograniczonej, druga na pojęciach punktów i odcinka, a następnie Analysis situs zawierają największą część twierdzeń czysto geometrycznych. Pod tym względem jest więc ideał Leibniza urzeczywistniony. Brak jednak niektórym częściom tych dyscyplin (Analysis situs) szaty symbolicznej. Następnie tak z Analizą położenia Leibniza, jak i z jego Charakterystyką geometryczną, wiążą się ściśle pewne badania Möbiusa, a szczególnie Nauka rozciągłości H. Grassmanna i systemy Geometryi G. Peana. Prace tych dwóch ostatnich matematyków są najdalej idącem zrealizowaniem myśli Leibniza. Co do rezultatów, to Nauka rozciągłości ziściła w każdym razie przeważną część tych nadziei, jakie żywił Leibniz, o ile odnoszą się one rzeczywiście do Charakterystyki geometrycznej. Należy się też spodziewać, że i w przyszłości będą teorye Grassmanna jednem z najdogodniejszych narzędzi w badaniach geometrycznych i fizycznych. Prace Peana odnoszą się więcej do podstaw logicznych Charakterystyki geometrycznej. Bliższe rozpatrywanie dyscyplin matematycznych wskazałoby nam prawdopodobnie jeszcze wiele fragmentów, które możnaby uważać za urzeczywistnienie planów Leibniza; rozpatrywanie to zaprowadziłoby nas jednak za daleko.

Zbierając krótko otrzymane w dwóch ostatnich ustępach rezultaty, możemy powiedzieć, że Charakterystyka ogólna i geometryczna Leibniza oznacza idealny, dedukcyjno-symboliczny stan, do którego dążą nauki, że jest ona — inaczej mówiąc — Matematyką

w prawdziwem znaczeniu. Charakterystyka ogólna jest zaczątkiem dedukcyjno-symbolicznej Logiki, Ontologii i ogólnych dyscyplin matematycznych; Charakterystyka geometryczna — wskazówką do tworzenia dedukcyjno-symbolicznych systemów Geometryi. Prócz tego żąda Analiza położenia opracowania zjawisk czysto geometrycznych.

W dalszym ciągu zajmiemy się najpierw kontynuacyami Charakterystyki geometrycznej Leibniza. Ponieważ Naukę rozciągłości Grassmanna uważać należy za taką (także według samego autora), więc zaczniemy od krótkiego przedstawienia związku Charakterystyki geometrycznej Leibniza z Nauką rozciągłości, ograniczając się tylko do zasadniczych punktów. Następnie przedstawimy krótko rys badań Peana nad systemami pokrewnemi Charakterystyce geometrycznej.

e. Nauka rozciągłości H. Grassmanna i systemy G. Peana.

W r. 1846 otrzymał H. Grassmann z fundacyi naukowej ks. Jabłonowskich nagrodę za pracę nad dalszem rozwinięciem Charakterystyki geometrycznej Leibniza [1]. System Grassmanna jest tylko dalszym ciągiem Charakterystyki geometrycznej ze względu na metodę, a nie na treść. Prócz szaty dedukcyjno-symbolicznej, obu systemów nie wiąże prawie żadna ściślejsza nić [2]. Sam Grassmann wyraża się w tej kwestyi w następujący sposób: „Odbiegłbym zanadto od celu, gdybym chciał na tem miejscu przedstawić choćby tylko szkielet budowy tej nauki (t. zn. Charakterystyki geometrycznej Leibniza), do czego należą oczywiście koniecznie odpowiednie pewniki i dowód, że są one wystarczające“. [3]

Szukając wyrażenia na prostą, przechodzącą przez dwa dane punkty A, B i na płaszczyznę, przechodzącą przez trzy dane punkty A, B, C, przychodzi Grassmann do wniosku, że wyrażenia te, jakkolwiek odnoszą się do utworów stosunkowo prostych, są skomplikowane.

---

[1] H. Grassmann, Geometrische Analyse, 1847.

[2] Por. zresztą związek między teoryą wektorów a systemem Peana z r. 1902 przedstawiony poniżej.

[3] Geom. Anal., 1847, str. 4.

W pierwszym przypadku mamy bowiem, jeżeli A', B', C' oznaczają trzy punkty pomocnicze:

$$A'X \; 8 \; B'X \; 8 \; C'X\,,$$

$$A'A \; 8 \; B'A \; 8 \; C'A\,,$$

$$A'B \; 8 \; B'B \; 8 \; C'B\,,$$

czyli, zbierając razem dwa ostatnie związki,

$$A'X \; 8 \; B'X \; 8 \; C'X$$

$$ABA' \; 8 \; ABB' \; 8 \; ABC'.$$

Dla płaszczyzny otrzymamy odpowiednio, jeżeli A', B' są dwoma punktami pomocniczemi,

$$A'X \; 8 \; B'X\,,$$

$$A'A \; 8 \; B'A\,,$$

$$A'B \; 8 \; B'B\,,$$

$$A'C \; 8 \; B'C\,;$$

czyli krócej

$$A'X \; 8 \; B'X\,,$$

$$ABCA' \; 8 \; ABCB'.$$

W związkach tych znajdują się punkty nieistotne pomocnicze, które należałoby, według Grassmanna, wyrugować, jeżeli chcemy otrzymać postać jak najprostszą. Znakowanie Leibniza nie pozwala jednak na to. Utwory mniej proste będą więc miały charaktery bardzo skomplikowane, będą zawierały bardzo dużo punktów pomocniczych nieistotnych.

Brak w znakowaniu Leibniza polega, według Grassmanna, na tem, że zamiast względności równości, która nam pozwala na podstawianie form równych, posługujemy się względnością przystawania, będącą wprawdzie przechodnią, ale nie pozwalającą ogólnie na takie podstawianie.[1] Ze związku

[1] l. c. str. 5.

$$AB \; 8 \; CD$$

$$M \; 8 \; N$$

nie wynika bowiem

$$ABM \; 8 \; CDN.$$

Należy więc przedewszystkiem zmienić znakowanie Leibniza i to w ten sposób, aby umożliwić wspomniane podstawienia. Grassmann uskutecznia to jednak w ten sposób, że zmienia równocześnie względność przystawania na inną, a przez to nadaje całemu systemowi inny charakter; zamienia Charakterystykę geometryczną Leibniza na swą Naukę rozciągłości. Bieg jego myśli jest następujący:[1]

Aby wprowadzić względność równości do Charakterystyki geometrycznej, należy tylko to uważać za równe, co da się podstawiać. Jeżeli np. ABC jest przystające do DEF, to oznaczmy to, co jest w tych figurach równego, a więc pewną funkcyę punktów przez fig (ABC) i fig (DEF). Związek

$$ABC \; 8 \; DFE$$

zamieniamy więc na

$$\text{fig}\,(ABC) = \text{fig}\,(DEF).$$

Ponieważ ostatecznie odpowiednie związki dla przystawania figury składającej się z n punktów dadzą się przedstawić w formie systemu

$$\text{fig}\,(AB) = \text{fig}\,(DE)\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

który otrzymamy biorąc każdą parę punktów, więc należy tylko oznaczyć funkcyę

$$\text{fig}\,(AB).$$

Widzimy więc jasno, że wraz ze zmianą względności przystawania zmienia się zupełnie i stanowisko. Po określeniu funkcyi fig będziemy mieli do czynienia z pojęciami różnemi od poprzednich.

Grassmann uogólnia następnie pojęcia Leibniza, zamieniając np. związek

$$ABC \; 8 \; DEF$$

na związek

[1] l. c. str. 6—20.

$$ABC \simeq DEF,$$

a więc względność przystawania na względność podobieństwa, przyczem postępuje nieświadomie w myśl Leibniza[1]. Ogólniejszą jeszcze formą będzie, według Grassmanna

$$\text{colin}\,(AB\ldots F) = \text{colin}\,(A'B'\ldots F'),$$

gdzie colin oznacza kolineacyę (w przestrzeni). Przystawanie jest na pierwszy rzut oka względnością prostszą od kolineacyi, ponieważ oznaczona jest w przestrzeni dwoma punktami, podczas gdy kolineacya jest funkcyą sześciu punktów. Z drugiej strony jednak prowadzi nas związek

$$AB \; 8 \; CX$$

do ogółu punktów (powierzchni kuli), podczas gdy kolineacya przy 5 danych punktach i 5 odpowiednich (z których żadna czwórka nie leży w jednej płaszczyźnie) określa szósty punkt jednoznacznie; a to jest korzyścią zasadniczą[2].

Rozpoczyna więc Grassmann swe badania, wychodząc z kolineacyi (na płaszczyźnie), będącej funkcyą 5 punktów. Otóż w kolineacyi można, jeżeli z punktów A, B, C, D żadna trójka nie leży na prostej, każdy inny punkt płaszczyzny otrzymać zapomocą linearnej konstrukcyi, albo absolutnie dokładnie, albo z dowolnem przybliżeniem. Należy więc zbadać przedewszystkiem prawa konstrukcyj linearnych.

Uważając punkty i proste w przestrzeni za wielkości (obdarzone pewnemi wartościami metrycznemi), dochodzi Grassmann na podstawie analogii z działaniami algebraicznemi, starając się o jak największe podobieństwo do znanych zasadniczych pojęć swej Nauki rozciągłości. Na tej podstawie dopiero określa Grassmann funkcyę

$$\text{fig}\,(AB).$$

Odróżniając pojęcie wielkości liniowej AB, gdzie A i B oznaczają punkty od odcinka $B-A$ (w pierwszym przypadku będzie $AB = CD$, jeżeli AB i CD są równej długości, jednako skierowane i leżą na tej sa-

[1]) Por. 6).
[2]) Por. 6).

mej prostej, w drugim $B - A = D - C$, jeżeli odpowiednie odcinki mają tę samą długość i ten sam kierunek), wykazuje Grassmann, że przystawanie zbliża się najbardziej do równości odcinków $B - A$. Ilekroć więc będzie

$$A - B = C - D,$$

będzie też

$$\text{fig}\,(AB) = \text{fig}\,(CD);$$

fig (AB) możemy więc uważać za pewną funkcyę wyrażenia $A-B$. W ten sposób zamieniamy równanie powyższe na

$$f\,(A-B) = f\,(C-D)$$

(f oznacza wspomnianą funkcyę).

Krok ten jest częścią zapowiedzianej przez Grassmanna powyżej zamiany względności przystawania na względność równości. Opierając się w dalszym ciągu na analogii z działaniami Algebry zwyczajnej, przychodzi Grassmann w końcu do wyniku, że związek

$$\text{fig}\,(AB) = \text{fig}\,(CD),$$

a więc

$$AB \; 8 \; CD,$$

zamienić należy na

$$(A-B \times (A-B) = (C-D) \times (C-D),$$

czyli

$$(A-B)^2 = (C-D)^2,$$

gdzie znak $\times$ oznacza mnożenie wewnętrzne. Na tem kończy się kontynuacya metody Leibniza. W ten sposób przechodzi Charakterystyka geometryczna na Naukę rozciągłości.

System podany przez G. Peana w r. 1902[1]) jest bardziej prawowierny niż Nauka rozciągłości. Jest to system Geometryi metrycznej; Charakterystyka geometryczna Leibniza wykazuje bowiem wiele podobieństwa do Geometryi metrycznej. Z tego stanowiska możnaby dopatrzeć się inkongruencyi między pojęciem Leibniza o Analizie położenia a jego Charakterystyką geometryczną.

[1]) La geom. basata sulle idee di punto e distanza, Atti d. R. Accad. d Scienze di Torino, 1902, 38.

Peano opiera wspomniany system Geometryi metrycznej na pojęciu punktów i równoodległości punktów. Jest to więc najprostszy przypadek przystawania, przystawanie par punktów. Przytem ma jeszcze zasadnicze pojęcie równoodległości specyalny charakter, nie jest równoodległością dwóch par dowolnych punktów A, B, C, D, lecz pary AB i BC, a więc względnością trójkową. Definicye prostej i płaszczyzny są analogiczne do określeń Leibniza. Po zdefiniowaniu prostej nie przedstawia określenie środka dwóch punktów żadnych trudności. Środkiem dwóch punktów A, B jest punkt prostej AB, równooddalony od A i B. Ponieważ dwa równe wektory tworzą z prostemi łączącemi odpowiednio ich punkty początkowe i końcowe równoległobok, którego przekątne się połowią, i ponieważ naodwrót, po odpowiedniem połączeniu końców połowiących się odcinków, powstaje równoległobok, więc zapomocą pojęcia środka dwóch punktów da się określić równość dwóch wektorów. Dwa wektory AB i CD będą wtedy i tylko wtedy równe, jeżeli środek pary AD jest identyczny ze środkiem pary BC. Równość odległości określa się potem zapomocą wektorów.

Badania te wykazują, że korzystniejszą będzie droga odwrotna. Peano przyjmuje w innym swoim systemie [1] za pojęcia pierwotne punkty i wektory, względnie związek między czterema punktami A, B, C, D, który da się np. tak wypowiedzieć słowami A, B, C, D jest równoległobokiem. Peano znaczy wektor punktem początkowym i końcowym. $A-B$ oznacza wektor z początkiem w B, a z końcem w A. Po określeniu zasadniczych własności wektorów i wektora zerowego, sumy punktu i wektora, sumy dwóch wektorów, iloczynu wektora i liczby, iloczynu wewnętrznego i modułu wektora, można określić odległość dwóch punktów A i B jako długość wektora $B-A$, t. zn. moduł tego wektora.

W ten sposób łączy się znowu teorya Leibniza, udoskonalona i wykształcona przez Peana, z teoryą Grassmanna. Z drugiej strony zobaczymy później, że system ten zostaje w pewnym związku z systemem, o jakim myślał już Leibniz, mianowicie opartym na pojęciu ruchu.

---

[1]) Analisi d. teoria dei vettori, Atti d. R. Accad. d. Science di Torino, 1898, 33.

O innych systemach, opartych na pojęciu przystawania mianowicie M. Pascha [1]), G. Veronesego [2]) i D. Hilberta [3]) możemy na tem miejscu tylko wspomnieć.

Szatę zupełnie symboliczną mają tylko systemy Peana. Uwolnienie wyobraźni od pracy przedstawiania figur geometrycznych odbywa się tam kosztem Rachunku logicznego i specyalnego geometrycznego. Pod tym względem przewyższają więc te systemy fragmenty zostawione przez Leibniza, posiadające tylko Symbolikę geometryczną, ale nie logiczną. Jeżeli zważymy jednak, że „Characteristica universalis" Leibniza miała i tę stronę uwzględnić, to zniknie ta różnica między obydwoma systemami.

Rozwinięte badania nad podstawami Geometryi wykazały jednak pewną ważną okoliczność, o której Leibniz nie miał jasnego pojęcia, mianowicie względność systemów geometrycznych. I Leibniz mówi wprawdzie o różnych rachunkach geometrycznych, ale rachunki te albo odnoszą się do różnych dziedzin badania, albo są tylko próbami przygotowania do jednego, który należałoby zaakceptować po przekonaniu się o jego szczególnych własnościach. Dzisiaj wiemy, że możliwe są systemy Geometryi i to w różnych kierunkach. Jedne z nich rozpatrują stosunek prawd geometrycznych do świata, są to Geometrye euklidesowe i nieeuklidesowe; drugie zależą od pewnych przekształceń zostawiających dane własności niezmienne, ogólniej od zasadniczych pojęć użytych do ich zbudowania. Należą tutaj Geometrye rzutowe, deskryptywne, metryczne, inwersyjne i t. d.

W następnym ustępie spróbujemy zająć stanowisko, które zbliży nas do dyscypliny zyskującej coraz większe znaczenie, do Teoryi względności, i pozwoli może na dalsze urzeczywistnienie zamiarów Leibniza.

f. Zasadnicze pojęcia Teoryi względności w związku z Geometryą.

Jeżeli zapytamy, na czem polega wspólna szczegółowa metoda podstaw dyscyplin matematycznych, przynajmniej ich większości,

---

[1]) Vorl. ü. neuere Geometrie, 1882.
[2]) Fondamenti di geom. a più dimensioni, 1891; niem. tłóm. 1894.
[3]) Grundl. d. Geometrie, 1899, trzecie wyd. 1909.

to już pobieżne zbadanie przekona nas, że po pierwsze ta niezmienna metoda istnieje, a po drugie, że nazywa się ją działaniami, kompozycyą operatorów, grup, względnościami dwójkowemi, odpowiedniościami i t. d. Posiadamy nawet daleko rozwinięte ogólne teorye tych pojęć, i tak Teoryę działań formalnych, rozwiniętą przez Hankela, Grassmanna, Schroedera i in., Teoryę grup, Teoryę względności dwójkowych,[1] Rachunek pokrewieństwami[2] i t. d. Na tej podstawie należy utworzyć ogólną „Teoryę względności". W teoryi takiej liczba twierdzeń, odnoszących się do wszystkich względności, będzie oczywiście szczupła. Dopiero klasyfikacya względności rozwinąć może szczegółowe teorye, obfite w twierdzenia. Podane poniżej zasadnicze pojęcia mają na celu umożliwienie ogólnego stanowiska w Geometryi, a nie samą Teoryę względności. Można bowiem przypuścić, że metody Arytmetyki, Teoryi grup, Algebry Logiki i t. d. nie są odosobnionym przypadkiem, lecz że dadzą się zastosować i do innych dyscyplin matematycznych, przedewszystkiem do Geometryi.

Niechaj będą dane dwie mnogości M i N, z których każda może się składać z innych mnogości, a te z elementów. Jeżeli pewnemu agregatowi elementów mnogości M, oznaczonemu przez A_m, odpowiada w jakikolwiek sposób agregat elementów mnogości N, mianowicie A_n, to mówimy, że między A_m i A_n istnieje względność i znaczymy to symbolem

$$A_m = A_n. \tag{1}$$

Termin „odpowiada" oznacza, że jeżeli A_m jest w jakikolwiek sposób zrealizowane, to i A_n będzie zrealizowane. Wyrażenia A_m i A_n muszą być różne, gdyż w przeciwnym przypadku byłoby (1) tożsamością. Dlatego należy odróżniać stronę lewą i prawą wyrażenia (1). Należałoby więc na miejsce znaku równości napisać inny np.

[1]) W formie dawniejszej, E. Schroeder, Vorl. ü. Algebra d. Logik. t. III, Algebra u. Logik d. Relative, 1895. W formie nowszej, G. Peano, Form. mathém., np. III, 1897, Logique mathém., 500-531, także Mathem Annalen, 37, 1890, str. 187-194. B. Russell, Sur la log. des relations, Thèorię génér. des rel., Revue mathém., 7, 1900-1.

[2]) C. Stephanos, Math. Annalen, 1883, t. 22; H. Wiener, Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss., 1890.

$$A_m \longrightarrow A_n. \tag{α}$$

Jeżeli się jednak umówimy, że wyrażenie

$$A_n = A_m$$

nie znaczy nic innego jak (α), to możemy używać znaku równości. Tak np. w wyrażeniu

$$a + b = c$$

odpowiada liczbom a, b i znakowi $+$ liczba c. Liczbie c nie odpowiada jednak (bez bliższego określenia) żaden agregat; piszemy mimo to:

$$c = a + b.$$

Symbol A_m można wstawić na miejsce A_n w dowolnem wyrażeniu, gdyż A_m, jako odróżnione od A_n i wyróżnione jako lewa strona związku (1), nie oznacza nic innego jak A_n, t. zn. nie może być wskutek tego wyróżnienia uważane za zbiór pewnych elementów bez względu na A_n. Tylko w tych przypadkach, w których powyższe warunki są spełnione, możemy używać znaku równości.

Względność (1) nie jest najogólniejszym przypadkiem. Jest ona względnością dwudzielną, ponieważ rozróżnić w niej można dwie części. Nazywamy agregat A_m poprzednikiem, zbiór A_n następnikiem. Możliwe są względności, które nie dadzą się rozłożyć na dwie grupy, np. „trójkąt równoboczny" uważany za zbiór trzech punktów równooddalonych wzajemnie. W dyscyplinach matematycznych odgrywają szczególną rolę względności dwudzielne.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę liczbę elementów poprzednika i następnika, to możemy względności sklasyfikować w następujący sposób:

1) Względności pierwszego rodzaju. Liczba elementów poprzednika stała, równa m; liczba elementów następnika stała, równa n Wyrażamy się dokładniej, że względności te mają znamię m/n.

2) Względności drugiego rodzaju. Liczba elementów poprzednika stała, równa m; liczba elementów następnika zmienna. Względności te mają znamię m/v (przez v oznaczamy liczbą zmienną).

3) Względności trzeciego rodzaju. Liczba elementów poprzednika zmienna, liczba elementów następnika stała, równa n. Znamię v/n.

4) Względności czwartego rodzaju. Liczba elementów poprzednika i następnika zmienna. Znamię v_1/v_2.

Ta klasyfikacya, opierająca się na liczbie elementów poprzednika i następnika, nie jest powierzchowna, jak się może zdawać. Łatwo sprawdzić na poszczególnych przykładach podanych poniżej, że zasadnicze własności względności zależą właśnie od liczby elementów poprzednika i następnika. Inne są własności względności mniejszości, inne dodawania arytmetycznego, lub trójkowych logicznych działań Kempego[1].

Jeżeli danemu poprzednikowi odpowiada p następników, przyczem p jest stałe, to mówimy, że względność jest klasy pierwszej, mianowicie p-znaczna. Piszemy to w następujący sposób: $|p|$. Jeżeli $p = 1$ to mamy względność jednoznaczną. Są one w dyscyplinach matematycznych najważniejszemi. Jeżeli danemu poprzednikowi odpowiada zmienna liczba następników, to nazywamy względność względnością klasy drugiej; oznaczamy to symbolem $|v|$. Nazywamy znamieniem w rozszerzonem znaczeniu symbole x/y i $|z|$.

Jeżeli elementy następnika wszystkie, a elementy poprzednika wszystkie z wyjątkiem jednego są tego samego rodzaju, to nazywamy daną względność jednorodną. Niema względności w tem znaczeniu jednorodnych, aby wszystkie elementy poprzednika i następnika były tego samego rodzaju. Jeden przynajmniej z elementów poprzednika musi być bowiem znakiem określającym charakter odpowiadania następnika, gdyż w przeciwnym razie nie wiedzielibyśmy, w jakiem znaczeniu „odpowiada" następnik poprzednikowi, nie moglibyśmy przy danym poprzedniku wyszukać następników. Tylko wskutek tego, że opuszczamy dla wygody lub innych względów ten element różnorodny, oznaczając go w jakikolwiek inny sposób, np. przez nawiasy, proste ustawienie elementów obok siebie i t. d. może się zdawać, że istnieją względności zupełnie jednorodne. Względności jednorodne są najprostszemi, jednak nie jedynemi w Matematyce.

Przykłady. Dodawanie arytmetyczne dwóch liczb (rzeczywistych) jest względnością jednoznaczną, dwudzielną. Posiada ono znamię $3/1$, $|1|$. Poprzednik składa się bowiem z dwóch liczb i znaku

[1]) A. B. Kempe, On the relation betw. the logical theory of classes and the geom. theory of points, Proc. of the Lond. math. soc., 21.

$+$, następnik z jednej liczby. Jeżeli podzielimy mnogość M na trzy mnogości, to dwie z nich będą się składały z liczb, trzecia z jednego znaku $+$. Dodawanie arytmetyczne jest względnością jednorodną.

To samo możemy powiedzieć o mnożeniu arytmetycznem, przy którem znak $\times$ może być opuszczony, a wyraża się ustawieniem liczb obok siebie; o potęgowaniu, przy którem znak potęgowania wyraża się wyższem położeniem wykładnika potęgowego; o odejmowaniu i dzieleniu. Drugi pierwiastek liczb dodatnich np. jest względnością dwuznaczną o znamieniu $3/1$ $|2|$.

Dodawanie, mnożenie, odejmowanie i dzielenie logiczne są względnościami o znaczeniach $3/1$ $|1|$ (dod., mnoż.) i $3/1$, $|v|$ (odejm., dziel). Negacya logiczna jest względnością o znamieniu $2/1$, $|1|$; poprzednik składa się z przedmiotu logicznego i znaczku negacyjnego.

„Rezultat symetryczny" Kempego $[abc]$[1]) jest względnością dwudzielną o znamieniu $4/1$, $|1|$.

Względność mniejszości między liczbami (rzeczywistemi) jest względnością o znamieniu $2/1$, $|v|$. Albowiem danej liczbie a i znakowi $<$ odpowiada mnogość liczb większych od a.

Względność „mniejsza o a" w zakresie liczb (rzeczywistych) jest względnością o znamieniu $3/1$, $|1|$.

Względność subsumpcyi logicznej jest względnością o znamieniu $2/1$, $|v|$. Dla zakresu logicznego, składającego się np. z dwóch przedmiotów a, b, jeżeli przyjmiemy jeszcze $a < b$ mamy ($<$ oznacza subsumpcyę, a' negacyę przedmiotu a)

$$a < a, \quad a < b, \quad a < a + b', \quad a < 1;$$

natomiast dla b

$$b < b, \quad b < 1.$$

W pierwszym przypadku wynosi liczba następników 4, w drugim 2.

Pseudododawanie Thielego jest względnością o znamieniu $3/1$, $|1|$; podobnie pseudomnożenie[2]).

[1]) l. c. Proc. of the Lond. math. soc., 21.

[2]) N. Thiele, Analytiske Studier, Sidskrift for Mathem., 1880 wedł. S. Dicksteina, Pojęcia i metody Matem., I, str. 92 n.

Dodawanie wektorów jest względnością o znamieniu 3/1, |1|.

Kompozycya operatorów w Teoryi grup względnością o znamieniu 3/1, |1|.

Jeżeli będziemy uważali prostą za rezultat połączenia dwóch różnych punktów, to względność ta będzie dwudzielna, niejednorodna o znamieniu 3/1, |1|. Dwoma elementami poprzednika będą dwa punkty, trzecim znak, który ustanowimy na oznaczenie tej względności. Same dwa punkty mogą bowiem oznaczać i inne utwory, np. kwadrat zbudowany na odcinku utworzonym, trzeci punkt równo oddalony od obu, środek odcinka i t. d.

Odbicie punktów w przestrzeni względem danej płaszczyzny jest względnością o znamieniu 2/1, |1|; podobnie odwzorowanie zapomocą promieni odwrotnych. Jeżeli weźmiemy pod uwagę ogół wszystkich inwersyj na płaszczyźnie np., to względność ta będzie również miała znamię 2/1, |1|. Podczas gdy jednak w poprzednim przypadku występuje zawsze jako jeden element dana inwersya, a więc zawsze jedna i tasama, mamy w ostatnim razie nieskończoną liczbę inwersyj. W obu razach jest względność jednorodna, gdyż jeden element poprzednika i jeden (jedyny istniejący) następnika są punktami (w inwersyi punktowej).

Poprzestaniemy na tych przykładach; można ich liczbę dowolnie zwiększać w razie potrzeby. Opracowanie względności geometrycznych z tego stanowiska byłoby nawet bardzo pomocne w przyszłych badaniach, o czem jeszcze będziemy mieli sposobność się przekonać.

Przedewszystkiem rzuca się nam w oczy ta okoliczność, że używane w dyscyplinach matematycznych względności są przeważnie rodzaju pierwszego o znamieniu $n/1$. Wobec tego powiemy jeszcze parę słów o względnościach tego rodzaju.

Mnogość M niechaj składa się z m mnogości $A_1, B_2, \ldots, M_m$, mnogość N z jednej. Poprzednik tworzymy w ten sposób, że z każdej mnogości $A_1, B_2, \ldots, M_m$ bierzemy po jednym elemencie; następnik będzie pewnym elementem mnogości N. Będzie więc analogicznie do (1)

$$a_a, \quad b_b, \ldots, \quad m_m = n_n. \tag{2}$$

Względność tę nazywamy zasadniczą albo pierwotną. Jeżeli względność dana jest oznaczona, to „równanie względności“

$$a_a, \quad b_b, \ldots, \quad m_m = x$$

nie prowadzi nas do nowych względności; skoro bowiem dany jest poprzednik, to wskutek oznaczoności musi być dany i następnik. Natomiast równania

$$\left.\begin{array}{l} x_a, \quad b_b, \ldots, \quad m_m = n_n, \\ a_a, \quad x_b, \ldots, \quad m_m = n_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_a, \quad b_b, \ldots, \quad x_m = n_n, \end{array}\right\} \tag{3}$$

mogą określać nam nowe względności, które nazywamy odwrotnemi. W tym przypadku pytamy się o elementy x, które, wstawione w odpowiednie względności (3), względnościom tym czynią zadość. Wyznaczenie tych niewiadomych może odbywać się w różny sposób. W dyscyplinach matematycznych oznacza się te elementy zapomocą poprzedników, które zachowują możliwie jak największą liczbę danych elementów.

Mamy np. dla dodawania arytmetycznego

$$a + x = b,$$

czyli

$$b - a = x,$$

t. zn. określamy x zapomocą poprzednika, w którym zostają liczby a i b, a tylko znak $+$ zamienia się na $-$. W tym przypadku utrzymuje się $m - 1$ z m danych elementów.

W ten sposób zmienia się względność zasadnicza (2) na odwrotną; tych będzie ogólnie tyle, ile jest elementów w poprzedniku.

Jeżeli jedna z mnogości poprzednika np. A_1 składa się tylko z jednego elementu (np. znaku $+$), to oczywiście odpowiednia względność odwrotna niema znaczenia, gdyż zawsze będzie x_a identyczne z tym elementem. W niektórych przypadkach są względności odwrotne wszystkie identyczne; również może być względność odwrotna identyczna z zasadniczą.

W przypadku negacyi logicznej mamy:

$$x' = a,$$

czyli

$$a' = x,$$

t. zn. we względności odwrotnej utrzymuje się m danych elementów, przedmiot a i kreska negacyi.

Po wstawieniu poprzednika względności odwrotnej zamiast x w odpowiednie równanie (3) otrzymamy związek charakteryzujący względność zasadniczą do odwrotnej, np.

$$a + (b - a) = b.$$

Względności prowadzą nas jeszcze w inny sposób do nowych względności. Podamy tutaj tylko przykład, który wystarczy do wyjaśnienia sprawy. Weźmy pod uwagę względność kształtu

$$a \circ b = c. \tag{β}$$

Jeżeli odwrotna względność, określona np. równaniem

$$a \circ x = c,$$

istnieje, ale nie zawsze jest możliwa, t. zn. nie dla każdych a i c, to możemy określić nową względność w następujący sposób: Między a i c istnieje wtedy i tylko wtedy względność pewna—oznaczmy ją przez

$$a = Rc, \tag{γ}$$

jeżeli istnieje przynajmniej jeden element x_0 taki, że będzie

$$a \circ x_0 = c.$$

W tym przypadku można z własności względności (β) wnioskować o własności względności (γ). Dodawanie arytmetyczne określa w ten sposób względność mniejszości, mnożenie względność „być dzielnikiem", dodawanie logiczne względność subsumpcyi i t. d. [1]

Jeżeli będziemy mieli względność formy

$$a, \; b, \; c, \; d = e,$$

to możemy powiedzieć analogicznie, jeżeli odpowiednia względność odwrotna nie zawsze jest możliwa, że między a i e istnieje wtedy i tylko

[1]) Por. moją pracę: Zur Theorie d. Beziehungen u. Operationen, Prace mat.-fiz., XXI, 1910, str. 43 n.

wtedy względność pewna, jeżeli istnieje przynajmniej jedna trójka elementów b_0, c_0, d_0 takich, że będzie

$$a, \; b_0, \; c_0, \; d_0 = e.$$

Charakterystyka geometryczna Leibniza, oparta na pojęciu przystawania, przedstawia się z tego stanowiska jako względność niejednorodna o znamieniu $4/1$, $|v|$. Ogólną formą wyrażeń był bowiem symbol

$$f_1 P \mathbin{8} f_2 X$$

czyli

$$[f_1, P, f_2] = X,$$

względnie

$$f_1 P \mathbin{8} f_2 X,$$

czyli

$$[f_1, X, f_2] = X.$$

Znak 8 zastępują tutaj klamry [ ]. Jedna mnogość składa się z figur punktowych (wystarczą, jak wspomnieliśmy, pojedyńcze punkty, dwójki i trójki punktów), podobnie druga; przyczem musi być

$$f_1 \mathbin{8} f_2,$$

względnie

$$f_1 = f_2$$

z pewną modyfikacyą w przypadku gdy f_1 redukuje się do jednego punktu; trzecia mnogość składa się z pojedyńczego punktu (P albo X), czwarta ze znaku przystawania. Mnogość następnika jest zbiorem punktów.

To samo da się powiedzieć o symbolach, odpowiadających podobieństwu [1].

Dlatego też paralela, przeprowadzona przez Leibniza między znakiem równości w Algebrze zwyczajnej a znakiem przystawania w Charakterystyce geometrycznej, jest błędna. [2] Znakowi przystawania w Charakterystyce geometrycznej odpowiada znak dodawania albo mnożenia i t. p. Algebry, a nie znak równości.

[1]) Por. b).
[2]) Phil. Bibl., 107, str. 79 n.

System Grassmanna jest bardziej zawikłany. Pojedyńcze działania na punktach i wektorach łatwo, na podstawie klasyfikacyi względności wyżej podanej, zanalizować. System ten jest zarazem dowodem, że prostota względności nie jest ostatecznem kryteryum jej korzyści. Korzyść względności nie może być przedmiotem ogólnych rozpatrywań, lecz musi być stwierdzona doświadczeniem. Musimy ograniczyć się do prostoty i dopiero ze względności najprostszych wybierać najkorzystniejsze.

Najprostszemi są względności kształtu

$$a, \quad b = c. \tag{δ}$$

Przytem prostota będzie jeszcze od tego zależna, czy względność (δ) będzie jednorodna czy nie, i jaka będzie budowa odpowiednich mnogości. Jednorodność względności zostaje bowiem w prostym stosunku do liczby zasadniczych pojęć podstaw Geometryi; a im tych pojęć będzie mniej, tem dany system będzie prostszy. Należy więc przedewszystkiem przyjąć, że mnogości A i C, do których należą odpowiednio elementy a i c, są tego samego rodzaju, a więc pojęciowo identyczne. Będą się one składały albo z punktów, albo z prostych i t. d., zależnie od tego, jakie elementy uznamy za zasadnicze.

Co do mnogości B, do której należy element b, to w najprostszym przypadku powinna się ona składać z jednego elementu. Przykładem takiego rodzaju względności jest negacya logiczna

$$a' = c.$$

Mnogość B składa się z symbolu negacyi. Należy się jednak spodziewać, że względność tak bardzo prosta nie pozwoli nam zbadać różnorodnych względności geometrycznych. Opierając się na analogii, widzimy, że własności samej negacyi redukują się do bardzo małej liczby twierdzeń.

Musimy więc przyjąć, że mnogość B składa się z większej liczby elementów.

Nadaje się tutaj przedewszystkiem mnogość przekształceń. W ten sposób dochodzimy do klasy możliwie najprostszych względności, od których można się spodziewać rezultatów pomyślnych. Mają one formę

$$Ta = b, \tag{4}$$

gdzie T oznacza przekształcenie geometryczne, należące do klasy pewnych określonych przekształceń (oznaczmy tę klasę przez T), a i b punkty lub ogólnie pewne elementy zasadnicze. Symbol (4) oznacza, że przekształcenie T przekształca punkt (element) a na b.

Widzimy, że metoda ta byłaby szczególnie korzystna do badania związków między pewnemi własnościami geometrycznemi a przekształceniami. Przypomnijmy sobie, że jest to jedno z najważniejszych stanowisk Geometryi współczesnej.

Przedewszystkiem korzystne byłyby przekształcenia jednoznaczne. Wtedy byłaby bowiem względność (4) jednoznaczna. Ograniczmy się do względności tego rodzaju. Są to względności dwudzielne jednorodne o znamieniu 2/1, $|1|$.

Dla działania

$$a + b = c$$

działanie odwrotne, określone równaniem

$$axb = c,$$

nie ma znaczenia, ponieważ dla każdej trójki a, b, c będzie

$$(a, b, c) = +.$$

Inaczej ma się rzecz we względności (4).

Mnogość T zawiera w naszym przypadku nieskończenie wiele przekształceń. Równanie

$$Xa = b$$

ma więc znaczenie. Możemy wtedy napisać

$$b - a = X. \tag{5}$$

Widzimy więc, że stanowisko to zbliża nas do Teoryi przekształceń. Własności względności odwrotnych będą się ściśle wiązały z Rachunkiem pokrewieństw. Rachunek ten zyska nawet na bogactwie twierdzeń, ponieważ zmieniamy proste symbole pokrewieństw na pary punktów. Odnosi się to oczywiście, stosownie do założenia, przedewszystkiem do przekształceń jednoznacznych. X może przedstawiać jedno lub więcej przekształceń, t. zn. względność odwrotna (5) może być jednoznaczna lub nie.

Od poszczególnych przekształceń będzie zależało, czy mamy posługiwać się jedną względnością, czy też większą ich liczbą, analogicznie do działań w Arytmetyce.

Równanie

$$Tx = b$$

prowadzi nas do drugiej odwrotnej względności, którą możemy napisać w formie

$$x = T^{-1} b. \tag{6}$$

Wstawiając wyrażenia (5) i (6) w odpowiednie równania, otrzymamy związki określające związek względności pierwotnej z odwrotną:

$$\left.\begin{aligned}(b - a)\, a &= b\,, \\ T T^{-1} b &= b\,.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Jeżeli względności odwrotne są wieloznaczne, to równania (7) odnoszą się do każdej ich wartości.

Z tego stanowiska możemy łatwo utworzyć system, oparty na pojęciu wektora. Wektor jest symbolem przesunięcia. Jeżeli więc do klas A i B zaliczymy punkty przestrzeni, do klasy T ogół wszystkich przesunięć w przestrzeni, oznaczając je przez V, to otrzymamy względność pierwotną w formie

$$Va = b\,, \tag{8}$$

która oznacza, że punkt a przesuwamy o V; punktem końcowym będzie b. Jest to właśnie suma punktu i wektora Peana[1]. Względność (8) jest jednoznaczna. Działanie odwrotne, określone równaniem

$$Vx = b\,,$$

daje nam

$$x = V^{-1} b\,, \tag{9}$$

t. zn. znowu wektor, odwrotny względem danego. To działanie odwrotne jest więc identyczne z pierwotnem.

Równanie

$$Xa = b$$

[1]) Por. e).

natomiast prowadzi nas do względności

$$X = b - a\,. \tag{10}$$

Widzimy więc, że nawet znakowanie ostatnie zgadza się z wybranem przez Peana[1]).

W ten sposób otrzymamy równania zasadnicze

$$\left.\begin{aligned}V V^{-1} b &= b\,, \\ (b - a)\, a &= b\,.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Względności odwrotne są w tym przypadku obie jednoznaczne.

Już po przyjęciu jednoznaczności wyrażeń (8), (8) i (10), tudzież po przyjęciu tożsamości rodzaju względności V^{-1} ze względnością V i założeniu, że iloczyn względny dwóch wektorów $V_1 V_2$, zwany w tym przypadku ich sumą jest również wektorem, co wynika z jednoznaczności wyrażenia (10), gdyż ze związku

$$a = V_1 b\,, \quad c = V_2 V_1 b\,,$$

wynika

$$V_2 V_1 = c - b\,,$$

możemy łatwo udowodnić kilka twierdzeń. Np.:

Z równania

$$Va = Vb$$

wynika

$$a = b\,.$$

Mamy bowiem

$$Va = Vb = c\,,$$

a więc

$$a = V^{-1} b\,, \quad b = V^{-1} c\,,$$

t. zn.

$$V^{-1} c = a = b\,.$$

Z równania

$$V_1 a = V_2 a$$

wynika

$$V_1 = V_2\,.$$

Mamy bowiem

[1]) Por. e).

$$V_1 a = V_2 a = b,$$

t. zn.

$$b - a = V_1 = V_2.$$

Mamy następnie

$$(b - a) + (c - b) = c - a,$$

jeżeli znak $+$ oznacza sumę (iloczyn względny) wektorów. Położywszy bowiem

$$V_1 a = b, \quad V_2 b = c$$

otrzymamy

$$V_2 b = V_2 V_1 a = c,$$

a więc

$$V_1 = b - a, \quad V_2 = c - b,$$

a zarazem

$$V_2 V_1 = V_3 = c - a;$$

$(b - a) + (c - b)$ jest jednak identyczne z $V_2 V_1$.

Z równania

$$a - c = b - c$$

wynika

$$a = b$$ [1].

Mamy bowiem

$$a - c = b - c = V,$$

t. zn.

$$a = b = Vc.$$

Jeżeli dane są trzy punkty a, b, c to istnieje zawsze punkt x, czyniący zadość równaniu

$$x - a = b - c.$$

Połóżmy bowiem

$$b - c = V,$$

to otrzymamy

$$x - a = V,$$

czyli

$$x = Va.$$

W e k t o r z e r o w y np. da się zdefiniować równaniem

$$a = V_0 a$$

dla dowolnego a.

---

[1]) Por. P e a n o, l. c. Atti d. R. Accad. d. science di Torino, 1898, 33, str. 516, 9.

Jawnem jest, że, po odpowiedniem przyjęciu pewników, moglibyśmy system ten uczynić równoważny z systemem P e a n a [1]). System powyższy zostaje w pewnym związku z pomysłem Charakterystyki geometrycznej L e i b n i z a, opartej na pojęciu r u c h u. I z tego stanowiska można również uważać system P e a n a i G r a s s m a n n a za zrealizowanie niewykonanego pomysłu L e i b n i z a [2]).

Korzystnem wydaje się również o d b i c i e w z g l ę d e m p ł a s z c z y z n y w p r z e s t r z e n i. Jeżeli mamy daną płaszczyznę (S), to każdemu punktowi a odpowiada punkt symetryczny względem (S). Możemy więc uważać p u n k t y i o g ó ł o d b i ć względem płaszczyzny w przestrzeni za pojęcia zasadnicze i napisać

$$Sa = b$$

Mamy tu używać znaków analogicznych do poprzednich:

$$S^{-1} = S,$$

t. zn. z równania

$$Sa = b$$

wynika

$$Sb = a,$$

czyli jest dla każdego a

$$SSa = a.$$

Drugie działanie odwrotne jest „o d b i c i e m“. Jest to względność j e d n o z n a c z n a, gdyż dwa punkty (różne) określają w przestrzeni jednoznacznie płaszczyznę odbicia.

P ł a s z c z y z n ę możemy określić jako ogół punktów x posiadających przy danem S własność

$$Sx = x.$$

Każdemu odbiciu odpowiada jedna płaszczyzna i naodwrót, t. zn. każda płaszczyzna jest określona dwoma różnemi punktami. Pod tym względem jest ta definicya identyczna z określeniem L e i b n i z a w jego Charakterystyce geometrycznej [3]).

---

[1]) l. c. Por. też e).

[2]) Co do innych systemów opartych na pojęciu ruchu p. M. P i e r i, Della geom. elem., Mem. d. R. Accad. d. Scienze di Torino, 1899; G. P e a n o, Sui fondamenti d. Geom., Rev. d. Mathém., IV, 1894.

[3]) Por. b).

Prostą określają równania

$$\left.\begin{aligned} x &= S_1 x \\ x &= S_2 x; \end{aligned}\right\} \qquad (S_1 \neq S_2)$$

jeżeli S_1 jest określone punktami a, b, to S_2 jest określone punktem a np. i $S_2 a$ $(a \neq S_1 a)$. Trzy punkty oznaczają więc prostą. Definicya Leibniza była jak widzieliśmy zupełnie podobna.

Podobnie można użyć zamiast odbić ogółu inwersyj w przestrzeni i t. d.

Nie będę mnożył przykładów. Chciałem tylko dać wyobrażenie o tego rodzaju Charakterystykach geometrycznych i wykazać (po części) ich możliwość. [1]

Wspomnę tutaj jeszcze, że myśl dwujednoznacznego odwzorowania między pewnemi przekształceniami a pewnemi utworami danego systemu Geometryi, zbudowanego na pojęciu tego przekształcenia, jak np. między odbiciami a płaszczyznami, jest analogiczna do myśli, jaką podał Russell w swym systemie Geometryi deskryptywnej [2]. W systemie tym uważa Russell za zasadnicze pojęcia punkty i pewną dwójkową względność między punktami. Względność ta, mająca cechę asymetryczności i przechodniości, nie jest niczem innem jak prostą opatrzoną kierunkiem.

Również Teorya względności dwójkowych, szczególnie w rozwinięciu Peana i Russella wiąże się ze względnościami geometrycznemi formy

$$Ta = b.$$

T nie jest bowiem niczem innem, jak względnością odpowiadającą znakowi R. Russella [3] i znakowi funkcyonalnemu (signe de fonction) Peana [4].

---

[1]) Systematyczne rozwinięcie tych myśli spodziewam się wkrótce ogłosić.

[2]) The Principles of Mathem., I, 1903, § 367.

[3]) Sur la logique des rel, Rev. de Mathém., 7, 1900—1.

[4]) Démonstr. de l'intégrabilité des équ. diff. ord., Math. Annalen, 37, 1890, § c, 1; § c', 3.