

P. 2282

ZOFIA CZARKOWSKA

11/6
11/8

PODREČZNIK
MATEMATYKI

DLA I KLASY GIMNAZJALNEJ

CENA WRAZ ZE ZNACZKIEM NA TOWARZYSTWO POPIERA-
NIA BUDOWY PUBLICZNYCH SZKÓŁ POWSZECHNYCH zł 2,10

Exemplarz nr 1

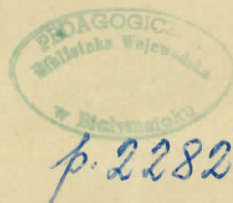


1937

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO
KSIĄŻEK SZKOLNYCH WE LWOWIE

Numerami z gwiazdką są opatrzone zadania przeznaczone do rozwiązywania w pamięci.

Numerami z dwoma gwiazdkami są opatrzone zadania, na które powołano się w następnych zadaniach.



ODBITO W Drukarni
B. POŁONIECKIEGO WE LWOWIE

POWTARZANIE I UZUPEŁNIANIE WIADOMOŚCI O LICZBACH CAŁKOWITYCH I UŁAMKOWYCH

§ 1 ZNACZENIE UŁAMKA

Powtórzenie.

I.

Ćwiczenia pamięciowe.

*1 Odczytaj następujące ułamki, wskaż ich liczniki i mianowniki.

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{11}{13}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{21}{50}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{3}{1000}$, $\frac{3}{10000}$.

*2. Przelicz

A) na gramy $\frac{1}{5}$ kg, $\frac{2}{5}$ kg; $\frac{1}{2}$ kg, $\frac{2}{2}$ kg, $\frac{1}{10}$ kg, $\frac{11}{10}$ kg;

B) na grosze $\frac{1}{10}$ zł, $\frac{3}{10}$ zł; $\frac{1}{50}$ zł, $\frac{100}{50}$ zł; $\frac{1}{2}$ zł, $\frac{3}{2}$ zł;

C) na minuty $\frac{1}{15}$ godz., $\frac{7}{15}$ godz., $\frac{1}{12}$ godz., $\frac{24}{12}$ godz., $\frac{1}{4}$ godz., $\frac{5}{4}$ godz.

*3. Oblicz:

A) ile dkg waży cała paczka cukru, jeżeli $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{7}{20}$ paczki waży 14 dkg;

B) ile km ma cała droga, jeżeli $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$ drogi jest 10 km,

C) ile dcm² ma cała powierzchnia, jeżeli $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{8}$ powierzchni jest 45 dcm²

*4. Wyraż podany iloraz w postaci ułamka

A) złotego 1 zł 3, 2 zł 3, 1 zł 4, 5 zł 4;

B) metra 1 m 7, 2 m 7, 1 m 5, 7 m 5;

C) 1 10; 9 10; 15 12, 3 50.

*5. Oblicz według podanego w A. przykładu

A) $\frac{3}{20}$ m = ? cm,

$\frac{3}{20}$ m = $\frac{1}{20}$ z 3 m = 300 cm 20 = 15 cm, $\frac{3}{20}$ m = 15 cm,

B) $\frac{3}{7}$ tygodnia = ? dni, $\frac{5}{12}$ tuzina = ? sztuk,

$\frac{2}{25}$ m² = ? dcm²

*6. Przedstaw w postaci ilorazu liczb całkowitych ułamki:

- A. $\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{11}, \frac{7}{9}, \frac{13}{15}, \frac{18}{7}$;
 B. $\frac{1}{10}, \frac{7}{100}, \frac{75}{1000}, \frac{12458}{10000}$

*7 Wyraż.

- A. 7, 9, 11, 15 sztuk, jako ułamek tuzina,
 B. 20, 15, 50, 250 dm^2 , jako ułamek m^2 ,
 C. 2, 7, 8, 100 cm^3 , jako ułamek m^3

II.

UŁAMEK Z WIELKOŚCI (np. z pewnej liczby, długości, ciężaru) *w y z n a c z a m y* a) dzieląc daną wielkość przez mianownik i mnożąc następnie otrzymaną z tego podziału wielkość przez licznik ułamka, lub b) mnożąc daną wielkość przez licznik ułamka i dzieląc następnie otrzymaną z mnożenia wielkość przez jego mianownik.

III.

Ćwiczenia pamięciowe.

*8. Przedstaw następujące liczby całkowite w postaci ułamków o mianownikach 2, 3, 4, 5, 1;

- A. 8, 7, 4, B. 5, 3, 2, C. 10, 11, 18.

*9. Zamień na ułamki następujące liczby mieszane.

- A. $2\frac{1}{2}, 3\frac{2}{5}, 8\frac{1}{7}$; B. $4\frac{2}{3}, 5\frac{1}{9}, 10\frac{1}{3}$ C. $5\frac{2}{7}, 8\frac{1}{3}, 7\frac{1}{10}$.

*10. Przedstaw w postaci liczby całkowitej lub mieszanej następujące ułamki niewłaściwe:

- A. $\frac{15}{4}, \frac{12}{5}, \frac{21}{8}$; B. $\frac{4}{2}, \frac{8}{3}, \frac{9}{3}$; C. $\frac{13}{7}, \frac{28}{5}, \frac{36}{4}$.

IV

UŁAMKIEM NIEWŁAŚCIWYM nazywamy każdy ułamek, w którym licznik jest większy od mianownika; ułamek pozornym — każdy ułamek, którego mianownik mieści się bez reszty w liczniku.

V

Ćwiczenia.

*11 Odczytaj następujące ułamki dziesiętne; wymień licznik i mianownik w każdym przykładzie; liczby mieszane przeczytaj także w postaci ułamków niewłaściwych

- A. 0,5, 0,75, 0,382, 0,2356; 0,23585; 0,352684,
 B. 0,02, 0,036; 0,0002; 0,3892; 0,000325,
 C. 0,3891, 0,306; 0,805, 0,102308;
 D. 4,25; 5,375; 6,4258, 8,00038, 1,038256.

12. Zapisz następujące liczby dziesiętne w systemie pozycyjnym

A. siedem dziesiątych, dwanaście tysięcznych, pięć milionowych, czterdzieści pięć setnych,

B. trzy całości dwadzieścia osiem stotysięcznych, jedna całość i sto dwanaście dziesięciotysięcznych,

C. cztery całości i dwadzieścia pięć setnych; pięć całości i czterdzieści osiem milionowych.

VI.

UŁAMKIEM DZIESIĘTNYM nazywamy każdy ułamek, którego mianownik równa się dziesięć, lub jest iloczynem dwóch lub więcej dziesiątek. Takim iloczynem jest np. $100 = 10 \cdot 10$; $1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10$ itp.

Ułamki dziesiętne, a także liczby mieszane będące sumami liczby całkowitej i ułamka dziesiętnego, nazywamy *liczbami dziesiętnymi*. Liczby dziesiętne zapisujemy najczęściej w systemie pozycyjnym.

Zadania.

✓ 1 Narysuj prostokąt o wymiarach a) 10 cm, 15 cm, b) 14 cm, 7 cm i zakreskuj a) $\frac{3}{5}$, b) $\frac{2}{7}$ tego prostokąta. Jakim ułamkiem całego prostokąta jest prostokąt niezakreskowany? Oblicz powierzchnię obydwóch części.

✓ 2. Narysuj koło o promieniu 5 cm. Zakreskuj (używając kątomierza) wycinki stanowiące a) $\frac{7}{9}$, b) $\frac{11}{30}$ tego koła. Jakim ułamkiem pola koła jest pole niezakreskowane? Ile stopni ma kąt wyznaczony przez to pole?

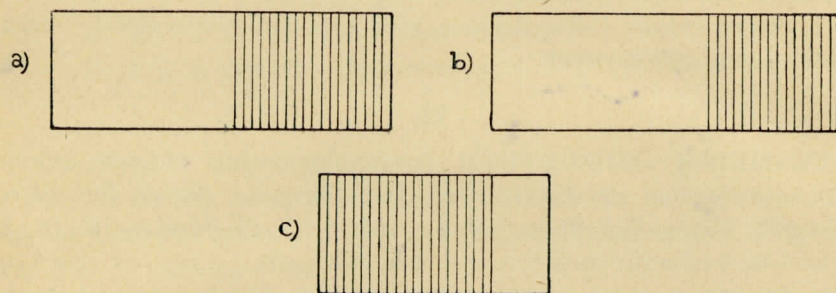
✓ *3. Zabawa szkolna przyniosła 36 zł czystego dochodu. $\frac{5}{9}$ tej sumy otrzymało koło krajoznawcze, resztę samopomoc szkolna. Jaki ułamek dochodu przypadł Samopomocy i ile to było zł?

✓ *4. Oblicz, jakim ułamkiem liczby uczniów całej szkoły jest liczba uczniów twojej klasy; jakim ułamkiem liczby uczniów twej klasy jest liczba uczniów nieobecnych dziś w szkole.

✓ *5. Chłopcy zamierzali zrobić marsz długości 45 km, przebyli już 20 km. Jaki ułamek drogi przebyli, a jaki jeszcze pozostaje?

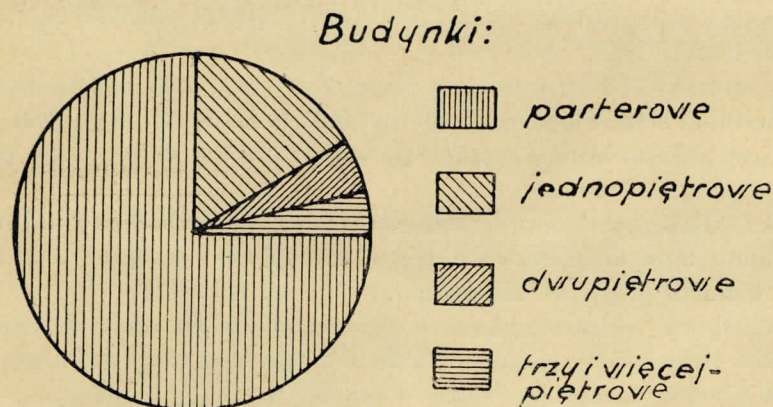
6. Według danych z 1932 r produkowaliśmy do niedawna rocznie przeciętnie 10 000 kg surowca jedwabiu. Jeden kg oprzędu można przerobić na jedwab wartości około 20 zł. Z zagranicy sprowadzaliśmy jedwabiu za 50 000 000 zł rocznie. Jaką część zapotrzebowania jedwabiu w Polsce pokrywaliśmy własną produkcją?

7 Oceń bez mierzenia, jakim ułamkiem prostokąta jest w przybliżeniu jego część zakreskowana. Przerysuj następnie dany prostokąt i sprawdź swoje przypuszczenie, wyznaczając z prostokąta ułamek, który poprzednio podałeś.



Rys. 1

*8. Rysunek 2. (na podstawie Rocznika Statystycznego za 1935 r.) przedstawia nam stan budynków w Polsce według ilości pięter. Oceń bez mierzenia, jakim ułamkiem ogólnej liczby budynków w Polsce jest liczba budynków parterowych, jednopiętrowych, dwupiętrowych i więcej niż dwupiętrowych.



Rys. 2

*9. Oceń bez dokładnego obliczenia w przybliżeniu przy pomocy ułamka o liczniku 1,

A. jaki ułamek rocznej światowej produkcji żyta (przeciętnie za ostatnie lata 470 milionów q) stanowi roczna produkcja żyta w Polsce (przeciętnie 65 milionów q);

B. jaki ułamek światowej rocznej produkcji pszenicy (1280 mil. q) stanowi roczna produkcja pszenicy w Polsce (20 mil. q),

C. jaki ułamek światowej rocznej produkcji ziemniaków (2060 mil. q) stanowi roczna produkcja ziemniaków w Polsce (307 mil. q) (dane z r. 1936)

§ 2. PRZEKSZTAŁCANIE UŁAMKA

Powtórzenie.

I.

Ćwiczenia pamięciowe.

*1. Zastąp znak zapytania liczbą tak, abyś otrzymał równości prawdziwe:

$$A. \frac{1}{2} = \frac{?}{4} = \frac{?}{8}; \quad \frac{1}{2} = \frac{?}{10} = \frac{?}{50}, \quad \frac{2}{3} = \frac{6}{?} = \frac{18}{?}, \quad \frac{1}{2} = \frac{7}{?}, \quad \frac{2}{3} = \frac{50}{?};$$

$$B. \frac{3}{5} = \frac{?}{10} = \frac{?}{20}, \quad \frac{8}{20} = \frac{?}{40} = \frac{?}{10}; \quad \frac{10}{50} = \frac{?}{10} = \frac{5}{?}, \quad \frac{12}{20} = \frac{6}{?} = \frac{?}{10}.$$

*2. Zamień ułamki:

$$A. \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{7}{10}, \frac{11}{20} \text{ na równe im ułamki o mianowniku } 40;$$

$$B. \frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{12}{12} \text{ na równe im ułamki o mianowniku } 60;$$

$$C. 0,1, 0,02, 0,356 \text{ na równe im ułamki o mianowniku } 10\,000.$$

*3. Zamień następujące ułamki na równe im ułamki dziesiętne

$$A. \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{50}, \frac{1}{20}, \frac{1}{25}; \quad B. \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{50}, \frac{9}{25}.$$

II.

Jeżeli licznik i mianownik ułamka pomnożysz lub podzielisz przez liczbę naturalną tj. całkowitą większą niż 0, otrzymasz ułamek równy danemu. Jeżeli zatem pomnożysz (podzielisz) mianownik ułamka przez pewną liczbę naturalną, a nie chcesz zmienić wartości tego ułamka, to musisz jego licznik pomnożyć (podzielić) także przez tę samą liczbę. Np. $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$, $\frac{18}{20} = \frac{9}{10}$.

III.

Ćwiczenia pamięciowe.

*4. Uprość ułamki.

$$A. \frac{2}{4}, \frac{8}{12}, \frac{15}{45}; \quad B. \frac{27}{30}, \frac{24}{40}, \frac{80}{100}; \quad C. 0,30, 1,5100, 2,370.$$

IV.

UPROŚCISZ (SKRÓCISZ) UŁAMEK dzieląc jego licznik i mianownik przez liczbę naturalną, większą niż 1. Upraszczając poprawnie dany ułamek, otrzymujesz ułamek mu równy. Np. upraszczając ułamek $\frac{15}{18}$ przez 3, otrzymasz równy mu ułamek $\frac{5}{6}$.

Zadania.

10. Przepisz i uzupełnij tabelkę zamieniając ułamki podane w pierwszej kolumnie na równe im ułamki o mianownikach wypisanych w górnym wierszu i wpisując otrzymany ułamek w odpowiednią kratkę.

a)	48	72	144
$\frac{1}{2}$			
$\frac{3}{4}$			
$\frac{7}{12}$			
$\frac{5}{8}$			

b)	30	60	120
$\frac{2}{3}$			
$\frac{11}{15}$			
0,3			
$\frac{1}{6}$			

11. Uprość ułamki.

A. $\frac{240}{300}, \frac{180}{360}, \frac{25}{150}, \frac{14}{70}$,

B. $\frac{16}{64}, \frac{81}{800}, \frac{550}{660}, \frac{120}{440}$.

**12. Zamień podane ułamki na ułamki dziesiętne przedstawiające je w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych i wyrażając ten iloraz w postaci ułamka dziesiętnego według podanego w A. przykładu

$$\begin{array}{r} \text{A. } \frac{3}{8} = 3 \quad 8 \quad \underline{0,375} \\ \quad \quad \quad \underline{3} \cdot 8 \\ \quad \quad \quad 30 \\ \frac{3}{8} = 0,375 \quad \underline{60} \\ \quad \quad \quad 40 \\ \quad \quad \quad = \end{array}$$

B. $\frac{5}{16}, \frac{7}{32}, \frac{1}{64}, \frac{11}{125}, \frac{28}{5}, \frac{326}{250}$.

§ 3. PODZIELNOŚĆ LICZB NATURALNYCH

Powtórzenie.

I.

Upraszczając ułamek otrzymujemy równy mu ułamek, którego licznik i mianownik są odpowiednio mniejsze od licznika i mianownika ułamka danego, przez co ułatwiamy sobie dalsze rachunki. Wygodnie więc jest umieć szybko i sprawnie rozpoznawać przez jaką liczbę naturalną można licznik i mianownik ułamka podzielić, do tego zaś trzeba znać cechy podzielności liczb naturalnych.

II.

Ćwiczenia pamięciowe.

*1. Wymień szybko (bez obliczenia), które z podanych niżej liczb są

A. podzielne przez 2, B. niepodzielne przez 2.

Odpowiedź swoją uzasadnij.

256, 301, 1 483, 12, 15, 36, 61 565, 21 428, 2 163 526.

*2. Wymień szybko (bez liczenia), które z podanych niżej liczb są

A. podzielne przez 5, B. niepodzielne przez 5.

Odpowiedź uzasadnij.

25 350, 162 565, 238, 1 623, 125, 3 249.

*3. Wymień szybko, które z podanych niżej liczb są podzielne

A. przez 3 lub 9, B. niepodzielne przez 9, C. niepodzielne przez 3.

Odpowiedź uzasadnij.

253, 126, 255, 177, 324, 458, 1243.

*4. Wymień wszystkie podzielniki liczb 6, 15, 30, 100, 200, 50.

*5. Wymień po jednym, większym niż 1, wspólnym dzielniku liczb

A. 6, 8, B. 6, 12; C. 18, 27, D. 24, 30; E. 50, 60, 100, F. 8, 12, 30; G. 21, 14, 35, H. 22, 44, 66.

III.

PODZIELNIKIEM LICZBY NATURALNEJ nazywamy każdą liczbę naturalną, która w danej liczbie mieści się bez reszty Np. podzielnikami liczby 10 są liczby 2, 5, 10, 1 Mówimy też inaczej, że 10 jest podzielne przez 2, 5, 10 i 1.

IV

Liczba naturalna, w której cyfra jednostek oznacza liczbę podzielną przez 2, jest podzielna przez 2. Żadna inna liczba naturalna tej własności nie posiada. Podobnie każda liczba naturalna, w której cyfra jednostek oznacza liczbę podzielną przez 5, jest także podzielna przez 5. Żadna inna liczba naturalna tej własności nie posiada. Np. liczba 4568 jest podzielna przez 2, a nie jest podzielna przez 5, bo 8 jest podzielne przez 2, a nie jest podzielne przez 5. Liczba 7865 jest podzielna przez 5, ale nie jest podzielna przez 2; liczba 3 820 jest podzielna i przez 2 i przez 5. Dla wyjaśnienia tej własności liczb naturalnych, rozłóżmy wymienione wyżej dla przykładu liczby według rzędów

[illegible]

14. Zabawcie się w następującą grę. Kolejno wymieniacie liczby zaczynając np. od 50, czyli licząc 50, 51, 52, itd. Ten, na kogo wypadnie liczba podzielna przez 2 lub 3, lub 5, powinien przy wymienieniu tej liczby stuknąć ołówkiem w ławkę. W razie pomyłki zapisuje sobie sam punkt karny. Wygrywa ten, kto ma najmniej punktów karnych.

15. Uprość następujące ułamki według podanego w A. przykładu

A. $\frac{2520}{154} = \frac{140}{14}$ (dzielimy licznik i mianownik przez 18, bo tak licznik, jak mianownik są podzielne przez 2 i 9);

$\frac{140}{154} = \frac{70}{77}$ (dzielimy licznik i mianownik przez 2);

$\frac{70}{77} = \frac{10}{11}$ (dzielimy licznik i mianownik przez 7)

B. $\frac{100}{1620}, \frac{625}{375}, \frac{120}{135}, \frac{112}{176}$;

C. $\frac{144}{204}, \frac{810}{405}, \frac{102}{114}, \frac{88}{200}$;

D. $\frac{1260}{2535}, \frac{242}{110}, \frac{225}{1500}$;

E. 0,444, 0,125, 0,0225.

§ 4. PORÓWNYWANIE UŁAMKÓW

Powtórzenie.

I.

Ćwiczenia pamięciowe.

*1 Uporządkuj według wielkości rosnących ułamki:

A. $\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{1}{7}, \frac{4}{7}$;

B. $\frac{8}{15}, \frac{8}{13}, \frac{8}{20}, \frac{8}{35}, \frac{8}{3}, \frac{8}{2}$.

II.

Z dwóch ułamków o równych mianownikach większy jest ten, który ma większy licznik. Z dwóch ułamków o równych licznikach większy jest ten, który ma mniejszy mianownik.

III.

Ćwiczenia pamięciowe.

*2. Przekształć podane 2 ułamki na równe im ułamki o równych mianownikach i porównaj je

A. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$; B. $\frac{3}{5}, \frac{7}{10}$; C. $\frac{2}{3}, \frac{7}{12}$; D. $\frac{5}{6}, \frac{23}{30}$; E. $\frac{3}{7}, \frac{2}{3}$; F. $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}$.

*3. Uporządkuj według wielkości rosnących ułamki

A. 0,25; 0,382, 0,1745, 0,08256,

B. 0,24, 0,272, 0,2316; 0,2,

C. $\frac{1}{2}$, 0,75, 0,6;

D. 0,2, $\frac{3}{4}$, 0,125, 0,25.

IV

Aby sobie ułatwić porównanie dwóch ułamków o nierównych mianownikach i licznikach, przekształcamy je na równe im ułamki o równych mianownikach, czyli sprowadzamy je do wspólnego mianownika. Wspólnym mianownikiem kilku ułamków jest każda liczba naturalna, w której mianowniki wszystkich tych ułamków mieszczą się bez reszty

Ułamki np. $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$ sprowadzamy do wspólnego mianownika w sposób następujący

a) Znajdujemy wspólny mianownik, przy czym dla uproszczenia rachunków wybieramy zwykle za wspólny mianownik najmniejszą taką liczbę, w której mianowniki wszystkich ułamków mieszczą się bez reszty

W naszym przykładzie najmniejszym wspólnym mianownikiem jest liczba 24.

b) Dzielimy wspólny mianownik przez mianownik każdego z danych ułamków, a następnie mnożymy i licznik i mianownik tego ułamka przez otrzymany iloraz. W ten sposób przekształcimy każdy ułamek na równy mu ułamek, mianowniki wszystkich tak przekształconych ułamków będą równe wybranemu wspólnemu mianownikowi.

W naszym przykładzie otrzymujemy ilorazy

$$24 : 4 = 6; \quad 24 : 6 = 4, \quad 24 : 8 = 3.$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{18}{24}, \quad \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24}, \quad \frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{21}{24}.$$

§ 5. LICZBY PIERWSZE I ZŁOŻONE

Powtórzenie.

I.

Cheć porównać dwa ułamki musimy je czasem sprowadzić do wspólnego mianownika. W przykładach podanych w § 4. czynność ta nie wymagała zawiłych rachunków. Gdyby jednak liczniki i mianowniki ułamków były dużymi liczbami, napotkalibyśmy na trudności. Abyś mógł sprawnie posługiwać się uproszczonymi sposobami sprowadzania do wspólnego mianownika i zrozumiał je, musisz sobie przypomnieć pewne wiadomości o liczbach naturalnych.

II.

Ćwiczenia pamięciowe.

*1. Wymień wszystkie dzielniki 28, ile ich jest?

*2. Ile różnych dzielników posiadała liczba

A. 12, 8, 10, 25, 36,

B. 5, 7, 23, 11, 18?

*3. Podaj liczbę naturalną posiadającą dokładnie

A. 4 różne dzielniki, B. 3 różne dzielniki, C. 2 różne dzielniki, D. tylko 1 dzielnik.

III.

Liczbę naturalną posiadającą dokładnie dwa różne dzielniki nazywamy *liczbą pierwszą*, liczba taka jest zatem większą niż 1 i jest podzielna tylko przez 1 i samą siebie bez reszty. Liczbę naturalną, posiadającą więcej niż dwa różne dzielniki, nazywamy *złożoną*.

5 jest liczbą pierwszą, bo ma dwa dzielniki 1 i 5; liczba 9 jest liczbą złożoną, bo ma trzy dzielniki 1, 3, 9; liczba 1 nie jest ani liczbą pierwszą, ani złożoną.

Zadania.

*16. Które z następujących liczb są pierwsze, a które złożone? 8, 7, 15, 17, 24, 31, 42, 125, 99, 97, 11.

*17 A. Wymień trzy liczby nieparzyste złożone.

B. Czy liczba parzysta może być liczbą pierwszą?

18. Dla wyznaczenia liczb pierwszych stosujemy tzw. „sito” Eratostenesa (matematyka greckiego). Wypiszcie mianowicie kolejno liczby naturalne od jednośc do stu. Przekreślajcie następnie co drugą z wypisanych liczb, z wyjątkiem 2, a więc 4, 6, 8, itd. W ten sposób pozbędziecie się liczb większych od 2 i podzielnych przez dwa. Pierwszą po 2 nieprzekreśloną liczbą w pozostałym szeregu liczb jest 3, przekreślajcie teraz co trzecią liczbę z wyjątkiem 3. W ten sposób pozbędziecie się liczb większych niż 3 i podzielnych przez 3. Pierwszą liczbą nieprzekreśloną po 3 jest 5; przekreślajcie co piątą liczbę z wyjątkiem 5, itd. Stosując to postępowanie do końca pozbędziecie się wszystkich liczb złożonych w tym szeregu, nieprzekreślone liczby będą liczbami pierwszymi.

19. A. Aby się przekonać czy dana liczba naturalna jest liczbą pierwszą, próbujemy czy są inne liczby naturalne będące jej dziel-

nikami. Wystarczy sprawdzić to dla kolejnych liczb pierwszych aż do takiej liczby, która pomnożona przez samą siebie da więcej niż dana liczba np. chcemy zbadać, czy 157 jest liczbą pierwszą.

2, 3, 5, nie są dzielnikami 157 (§ 3. IV, V)

7, „ jest dzielnikiem 157 (sprawdź)

11, „ „ „ 157 (sprawdź)

13, „ „ „ 157 (sprawdź)

Na tym próbę kończymy, bo $13 \cdot 13 = 169$, $169 > 157$, 157 jest liczbą pierwszą.

B. W podobny sposób sprawdź, czy liczby 123, 141, 149, 203 są liczbami pierwszymi.

§ 6. ROZKŁADANIE NA CZYNNIKI PIERWSZE

Powtórzenie.

I.

Ćwiczenia pamięciowe.

*1 Przedstaw 8 w postaci iloczynu liczb naturalnych.

*2. Przedstaw 12 w postaci iloczynu trzech liczb pierwszych.

*3. Przedstaw 30 w postaci iloczynu liczb pierwszych.

II.

ROZŁOŻYĆ LICZBĘ NATURALNĄ NA CZYNNIKI PIERWSZE
znaczy przedstawić ją w postaci iloczynu liczb pierwszych. Liczby pierwszej nie możemy oczywiście rozłożyć na czynniki pierwsze.

III.

Przy rozkładaniu dużych liczb na czynniki pierwsze postępujemy w podany niżej sposób. Chcemy np. rozłożyć na czynniki pierwsze liczbę 240.

Szukamy najmniejszej liczby pierwszej będącej dzielnikiem 240. Jest nią 2, bo $240 = 2 \cdot 120$. Szukamy następnie najmniejszej liczby pierwszej będącej dzielnikiem 120, jest nią 2, bo $120 = 2 \cdot 60$. Szukamy dalej najmniejszej liczby pierwszej będącej dzielnikiem 60 itd.

Całe rozumowanie możemy tak zapisać.

$$240 = 2 \cdot 120$$

$$240 = 2 \cdot 2 \cdot 60$$

$$240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 30$$

$$240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15$$

$$240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Czynniki ostatniego iloczynu są liczbami pierwszymi, rozłożyliśmy więc 240 na czynniki pierwsze. Dla oszczędności miejsca zapisujemy powyższe rozumowanie tak

$$\begin{array}{r|l} 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & \\ \hline 240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}$$

Zadania.

20. Rozłóż na czynniki pierwsze.

- A. 140, 234, 150, 135,
B. 294, 280, 385, 330,
C. 625, 1510, 592, 915.

21. Rozwiąż przy pomocy rozkładania na czynniki pierwsze następujące zagadnienia.

A. Powierzchnie kwadratów wynoszą.

- a) 25 cm² b) 324 cm² c) 64 cm²

Ile cm mają ich boki?

B. Objętości sześcianów wynoszą

- a) 27 cm³ b) 125 cm³ c) 1728 cm³

Ile cm mają krawędzie tych sześcianów?

C. Objętość prostopadłościanu wynosi

- a) 240 cm³ b) 105 cm³

Jakie mogą być miary krawędzi prostopadłościanu, będące liczbami całkowitymi? Podaj kilka różnych rozwiązań.

*22. Podaj wszystkie dzielniki liczb 420, 360 (rozłóż te liczby najpierw na czynniki i przypomnij sobie § 3 VI)

23. Uprość ułamek rozkładając licznik i mianownik na czynniki pierwsze według podanego w A. przykładu.

A.

$$\frac{96}{360} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 2}{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 3 \cdot 5} = \frac{4}{15}$$

(dzielimy licznik i mianownik przez $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$)

✓ B. $\frac{90}{225}, \frac{64}{54}, \frac{110}{275},$ C. $\frac{156}{234}, \frac{42}{140}, \frac{76}{114}.$

§ 7 WSPÓLNA WIELOKROTNA

Powtórzenie.

I.

Ćwiczenia pamięciowe.

- *1. Wymień kilka liczb naturalnych, których dzielnikiem jest 12.
*2. Wymień kilka liczb naturalnych podzielnych przez 4 i 6, wymień taką najmniejszą liczbę; czy istnieje taka liczba największa?
*3. Wymień kilka liczb naturalnych podzielnych przez 6 i 10 i 15. Wymień najmniejszą taką liczbę; czy istnieje taka liczba największa?

II.

WIELOKROTNA danej liczby naturalnej nazywamy każdą liczbę, w której dana liczba mieści się bez reszty. Np. wielokrotnymi liczby 5 są liczby 5, 10, 15 itd. Liczba 30 jest *wspólną wielokrotną* liczb 15 i 10. Liczba 12 jest *najmniejszą wspólną wielokrotną* liczb 6 i 4, co zapisujemy w skróceniu:

$$\text{n. w. w } (6, 4) = 12$$

III.

Obliczając najmniejszą wspólną wielokrotną kilku liczb pomagamy sobie czasem rozkładaniem na czynniki pierwsze; np. chcemy obliczyć

$$\text{n. w. w } (45, 60, 27)$$

1^o Rozkładamy dane liczby na czynniki pierwsze:

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & \\ \hline 45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & \\ \hline 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & \\ \hline 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \end{array}$$

2^o Wypisujemy czynniki liczby 45. W otrzymanym iloczynie 3 3 5 mieści się na pewno bez reszty 45.

3^o Iloczyn 3 3 5 mnożymy przez 2 2, tj. przez te czynniki rozkładu liczby 60, które w tym iloczynie nie występowały. W otrzymanym iloczynie 3 3 5 2 2 mieszczą się bez reszty liczby 45 i 60.

4^o Ostatni iloczyn mnożymy przez 3, ponieważ w rozkładzie liczby 27 występowały trzy czynniki równe 3, a w iloczynie 3 3 5 2 2 są tylko dwa takie czynniki. W otrzymanym iloczynie 3 3 5 2 2 3

mieszczą się na pewno wszystkie liczby 45, 60, 27. Ten iloczyn jest najmniejszą wspólną wielokrotną liczb 45, 60, 27

$$n. w. w. (45, 60, 27) = 540$$

IV

Jeżeli jedna z podanych liczb jest pierwsza postępujemy podobnie, jak poprzednio, z tą różnicą, że tej liczby nie rozkładamy na czynniki.

V

Z postępowania wyżej podanego możemy korzystać sprowadzając ułamki do wspólnego mianownika (zobacz § 4, IV) *W s p ó ł n y m m i a n o w n i k i e m b o w i e m k i l k u u ł a m k ó w j e s t w s p ó ł n a w i e l o k r o t n a m i a n o w n i k ó w t y c h u ł a m k ó w.*

Z a d a n i a.

*24. W klasie jest 48 uczniów. Ustawiono jednakowe stoły tak, że wszystkie miejsca są obsadzone i dla żadnego ucznia nie brakuje miejsca. Ilu uczniów siedzi przy jednym stole? Jaką nazwę możesz nadać liczbie 48? Czy zadanie ma tylko jedną odpowiedź?

*25. Jedno naczynie ma trzy l, drugie dwa l pojemności. Ile l pojemności ma beczka, którą można napełnić albo tylko pierwszym, albo tylko drugim naczyniem, napełniając je za każdym razem? Czy jest tylko jedno rozwiązanie?

*26. Oblicz w pamięci najmniejszą wspólną wielokrotną liczb

- A. 3, 2, B. 6, 4, C. 3, 5, 4 D. 15, 5, 4;
E. 14, 10.

27. Oblicz najmniejszą wspólną wielokrotną liczb.

- A. 120, 72, 48, ✓ B. 110, 147, 84; ✓ C. 625, 75, 250,
D. 17, 34, 85; E. 46, 115, 23, F. 8, 25, 9.

✓ 28. 1 cal nowopolski ma 24 mm, 1 cm zaś 10 mm. Oblicz, ile mm długości ma najkrótszy odcinek, którego długość wyraża się całkowitą liczbą cali i całkowitą liczbą cm.

29. Na wycieczkę pojechali uczniowie klasy pierwszej i drugiej. W pociągu zajęli kilka przedziałów ośmioosobowych, przy czym żadne miejsce nie pozostało wolne i każdy uczeń miał swoje miejsce. Po wyjściu z wagonu ustawiono chłopców w równe dwunastoosobowe oddziały

Ilu uczniów pojechało na wycieczkę, jeżeli każda klasa liczy nie mniej niż 35, a nie więcej niż 40 uczniów?

✓ 30. Ułóż zagadnienie, którego rozwiązanie wymaga obliczenia.

- A. n. w. w. (5, 6, 10), ✓ B. n. w. w. (9, 15, 12)

✓ 31. Sprowadź do najmniejszego wspólnego mianownika, a następnie ustaw według wielkości rosnących ułamki

- ✓ A. $\frac{7}{16}$, $\frac{13}{24}$, $\frac{111}{120}$, B. $\frac{25}{36}$, $\frac{123}{225}$, $\frac{81}{175}$,
C. $\frac{17}{364}$, $\frac{12}{350}$, $\frac{1}{3}$; D. $\frac{2}{25}$, $\frac{5}{49}$, $\frac{1}{16}$.

32. W następującym zestawieniu podano, jaki ułamek liczby budynków mieszkalnych w poszczególnych dzielnicach Polski stanowi liczba budynków posiadających kanalizację i elektryczność

- Województwa centralne $\frac{3}{40}$,
„ wschodnie $\frac{1}{40}$;
„ zachodnie $\frac{8}{25}$,
„ południowe $\frac{1}{15}$.

W których województwach ułamek ogólnej ilości budynków, jaki tworzy liczba budynków nowocześnie urządzonych, jest największy, a w których najmniejszy?

§ 8. PRZYBLIŻENIA LICZBOWE

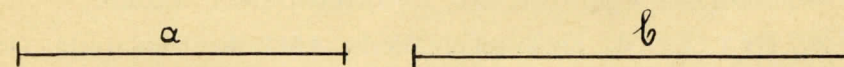
I.

Zagadnienia pomocnicze.

1. Przedstaw następujące ułamki w postaci ilorazu dwóch liczb naturalnych (§ 2. z. 12) i wyraż ten iloraz w przybliżeniu w formie ułamka dziesiętnego przerywając dzielenie po otrzymaniu dwóch miejsc po przecinku $\frac{5}{11}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{3}$.

2. 1 m tasiemki kosztuje 25 gr. Ile gr policzą nam w sklepie za $\frac{1}{2}$ m tasiemki?

3. Zmierz linijką odcinki a, b, (rys. 3) i podaj w przybliżeniu ich miarę w całych cm tak, aby błąd wynosił mniej niż $\frac{1}{2}$ cm.



Rys. 3

4. W książce przyrodniczej czytamy: „skrzydła pszczoły poruszają się nadzwyczaj prędko robiąc około 200 uderzeń w ciągu sek.” Objaśnij wyrażenie „około 200”

II.

W ćwiczeniach powyższych spotkałeś tzw „przybliżenia dziesiętne”. W ćwiczeniu pierwszym szukaliśmy np. ułamka dziesiętne

nego, który by „w przybliżeniu” równał się podanemu ułamkowi zwykłemu.

PRZYBLIŻONE ROZWINIĘCIE DZIESIĘTNEJ UŁAMKA z daną liczbą cyfr po przecinku wyznaczamy dzieląc licznik tego ułamka przez jego mianownik i przerywając dzielenie po otrzymaniu danej ilości cyfr po przecinku. Otrzymany ułamek dziesiętny nie zawsze równa się wprowadzić danemu ułamkowi zwykłemu, ale w praktycznych zastosowaniach może go zastępować, co jest dogodne, a nawet często konieczne.

III.

Mierząc jakieś długości, pola, objętości, ważąc przedmioty, otrzymujemy wartości niedokładne, ponieważ przyrządy, którymi się posługujemy, nie są dokładne. Dokładność otrzymanego przybliżenia zależy od dokładności przyrządu, a ponadto od potrzeby. Np. wagi w sklepie hurtownym, w małym sklepie spożywczym, wreszcie w aptece mierzą ciężar z różną dokładnością, gdyż służą różnym potrzebom.

IV

Czasem możemy podać wartość dokładną, rozmyślnie jednak *zaokrąglamy* ją, ponieważ tak jest nam dogodniej, a podanie dokładnej liczby nie ma większego znaczenia. Tak np. mówimy, że szkoła ma około 450 uczniów, chociaż wiemy, że ich jest 453, że Tatry sięgają prawie do 2700 m, choć możemy powiedzieć dokładniej, że ich najwyższy szczyt ma 2663 m.

V

Zapoznaj się z REGUŁAMI ZAOKRĄGLANIA LICZB.

A. Przykład. Zaokrąglimy liczbę 3,523 do dziesiątych. Odrzucamy rząd setnych i tysięcznych i otrzymujemy przybliżenie 3,5. Błąd wynosi 0,023.

B. Przykład. Zaokrąglimy liczbę 25,638 do setnych. Odrzucamy zatem rząd tysięcznych. Gdybyśmy napisali 25,63, otrzymalibyśmy przybliżenie z błędem 0,008, jeżeli napiszemy 25,64 błąd wyniesie tylko 0,002. Zaokrąglając liczbę 25,638 do setnych, zastąpimy ją więc liczbą 25,64.

C. Przykład. Zaokrąglimy liczbę 32 835 627 do setek tysięcy; w odrzuconych rzędach napiszemy zera i otrzymamy 32 800 000.

D. Przykład. Zaokrąglimy liczbę 3,198 do setnych, otrzymamy 3,20. Zera końcowego nie opuszczamy, aby zaznaczyć, że 3,20 powstało przez zaokrąglenie liczby 3,198 do setnych.

VI.

PRZYBLIŻENIE JAKIEJŚ LICZBY DZIESIĘTNEJ LUB CAŁKOWITEJ z zachowaniem danego rzędu tworzymy odrzucając cyfry niższych rzędów, przy czym:

A. jeżeli cyfra w najwyższym odrzuconym rzędzie jest jedną z cyfr 5, 6, 7, 8, 9, powiększamy liczbę najniższego zachowanego rzędu o 1,

B. cyfry rzędów odrzuconych przed przecinkiem dziesiętnym zaznaczających. Np.

VII.

Zmierzono ciężar jakiegoś przedmiotu na wadze sklepowej i otrzymano 12 dkg; zmierzono go następnie na wadze aptekarskiej i otrzymano 11,98 dkg. Drugie przybliżenie jest dokładniejsze. Dokładność przybliżenia mierzymy ilością cyfr *znaczących*, którymi to przybliżenie zapisano. Pierwsze przybliżenie ma dwie, drugie cztery cyfry znaczące; powiemy, że pierwsze podano w drugim, drugie w czwartym stopniu dokładności.

VIII.

A. CYFRĄ ZNACZĄCĄ liczby przybliżonej nazywamy każdą jej cyfrę z wyjątkiem wszystkich zer początkowych i tych zer końcowych, występujących w zapisie tej liczby, które przy zaokrągleniu zostały napisane w rzędach odrzuconych (według reguły VI B). *S t o p n i e m d o k ł a d n o ś c i* przybliżenia nazywamy liczbę jego cyfr znaczących. Np.:

Liczbę	zaokrąglono do	otrzymano przybliżenie	ilość cyfr znaczących	stopień dokładności
25,682	setnych	25,68	4	IV
137,298	„	137,30	5	V
128,1203	tysięcznych	128,120	6	VI
32786	dziesiątek	32790	4	IV
524975	tysięcy	525000	3	III

B. Zera, które przy wykonywaniu działań lub przy zmianie jednostki dopisujesz do przybliżenia, nie są oczywiście znaczące, np.

przybliżona miara odcinka wyrażona w metrach wynosi 25 (drugi stopień dokładności) Zmieniając na dcm i cm otrzymamy $25 \text{ m} = 250 \text{ dcm} = 2500 \text{ cm}$. Wszystkie te przybliżenia mają drugi stopień dokładności.

C. Rozwiązując zagadnienia mające znaczenie praktyczne, spotkasz się niejednokrotnie z danymi przybliżonymi i potrzebna ci będzie wiadomość, jaki jest ich stopień dokładności. Jeżeli w zapisie liczby przybliżonej nie występują końcowe zera, to oczywiście na podstawie reguły A. oznaczysz jej stopień dokładności bez trudności. Wszystkie bowiem cyfry niezerowe przybliżenia są znaczące. Jeżeli w zapisie przybliżenia występują zera końcowe, to najczęściej stopień dokładności przybliżenia będzie już w temacie zadania wyraźnie zaznaczony Czasem zaś warunki zadania pozwolą ci oznaczyć stopień dokładności przybliżenia, pomimo, że go nie podano. Np. czytając w Roczniku Statystycznym niżej napisane zestawienie, zauważamy, że ostatnie trzy zera nie są znaczące. Zera w rzędzie tysięcy natomiast uznamy za znaczące, ponieważ, jak z niektórych danych (np. dla Afryki) wynika, ten rząd w obliczeniach uwzględniano. Pierwsze cztery przybliżenia mają zatem pięty, ostatnie czwarty stopień dokładności.

Część świata	Powierzchnia w km^2
Europa	11 420 000
Afryka	29 956 000
Azja	41 900 000
Ameryka	40 542 000
Australia	8 550 000

Zadania.

33. Wyszukaj w książkach geograficznej i przyrodniczej kilka danych przybliżonych i określ ich stopień dokładności.

34. Zaokrąglaj i określ stopień dokładności przybliżenia

- A. 2,54, 0,812, 3,976; 4,8234, do dziesiątych
 B. 3,125, 4,2568, 26,32452 do setnych
 C. 0,005628, 45,628914, do stutysięcznych
 D. 1 248, 25694,8; 112 956, do setek
 E. 25 092, 32 688; 13 242 342 do tysięcy

35. Podaj przybliżone rozwinięcie dziesiętne w drugim stopniu dokładności ułamków

- A. $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{17}$, $\frac{5}{8}$, B. $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, C. $\frac{11}{12}$, $\frac{28}{33}$, $\frac{5}{7}$.

36. Wyraż w postaci przybliżenia dziesiętnego w trzecim stopniu dokładności, jakim ułamkiem koła jest wycinek odpowiadający kątowi A. 50° ; B. 80°

37. Wyraż w postaci przybliżenia dziesiętnego w drugim stopniu dokładności.

- A. jakim ułamkiem równika jest odległość 1° na równiku;
 B. jakim ułamkiem morga jest 1 a (mórg = 56 a)

§ 9. DODAWANIE I ODEJMOWANIE UŁAMKÓW I PRZYBLIŻEN DZIESIĘTNYCH

Powtórzenie.

I.

Ćwiczenia pamięciowe.

*1 Oblicz sumy

- A. $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7}$, $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$; $\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$, $\frac{2}{3} + \frac{1}{15}$,
 B. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$, $\frac{3}{20} + \frac{7}{10} + \frac{2}{5}$.

*2. Oblicz różnice

- A. $\frac{8}{11} - \frac{2}{11}$, $\frac{7}{15} - \frac{4}{15}$, $\frac{7}{12} - \frac{1}{6}$, $\frac{11}{20} - \frac{1}{5}$,
 B. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$, $\frac{3}{5} - \frac{1}{4}$, $\frac{6}{7} - \frac{2}{3}$, $\frac{1}{5} - \frac{1}{7}$.

*3. Oblicz

- A. $1 + \frac{1}{2}$, $1 - \frac{1}{2}$, $2 + \frac{1}{3}$; $2 - \frac{1}{3}$,
 B. $2\frac{1}{5} + 3\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{5}$; $3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{4}$;
 C. $3\frac{3}{8} + 4\frac{3}{4}$; $2\frac{3}{5} + 1\frac{1}{2} + 4\frac{2}{3}$;
 D. $1 - \frac{2}{3}$; $1 - \frac{4}{5}$; $2\frac{1}{2} - \frac{5}{6}$; $4\frac{1}{2} - 2\frac{4}{7}$.

*4. Oblicz sumy

- A. $2,7 + 0,1 + 4$, B. $1,5 + 4,2 + 1,1 + 8,1$,
 C. $11,2 + 2,91$, D. $31 + 0,7 + 4,8$;
 E. $2,5 + 3,37 + 0,008$, F. $0,01 + 324,562 + 1,1$

*5. Oblicz różnice

- A. $3,8 - 2,5$, B. $15,48 - 2,05$,
 C. $2,3 - 0,25$; D. $5,37 - 2,365$,
 E. $8 - 2,25$; F. $10 - 0,001$

*6. Oblicz wyrażając wszystkie ułamki

- a) w postaci ułamków dziesiętnych,
 b) zwyczajnych.

- A. $\frac{1}{2} + 0,3 + \frac{3}{5}$; B. $\frac{3}{4} + 2,25 + 0,1$; C. $\frac{1}{2} - 0,3$; D. $\frac{7}{10} + 1,5$;
 E. $\frac{8}{25} - \frac{1}{5} + 0,5$; F. $\frac{21}{50} - 0,25$.

II.

SUMĘ (RÓŻNICĘ) DWÓCH UŁAMKÓW obliczamy w sposób następujący:

A. Sprowadzamy dane ułamki do wspólnego mianownika.

B. Dodajemy (odejmujemy) otrzymane po przekształceniu liczby. Ich suma (różnica) jest licznikiem, a wspólny mianownik mianownikiem szukanej sumy (różnicy).

III.

DODAJĄC (ODEJMUJĄC) PRZYBLIŻENIA DZIESIĘTNE zostawiamy w otrzymanej sumie (różnicy) cyfry tych rzędów, które uwzględniono we wszystkich składnikach (odjemnej i odjemniku).

Jeżeli zatem jakiś rząd nie występuje choćby w jednym ze składników sumy (w odjemnej lub odjemniku), to cyfrę tego rzędu w sumie (różnicy) także odrzucimy.

A. Przykład. Wysłałeś paczkę zawierającą około 2,5 kg owoców, 0,28 kg cukierków i lekarstwo, ważące 0,098 kg. Opakowanie ważyło 0,5 kg. Ile kg waży ta paczka?

Obliczenie

$$\begin{array}{r} 2,5 \text{ kg} \\ + 0,28 \text{ kg} \\ + 0,098 \text{ kg} \\ + 0,5 \text{ kg} \\ \hline 3,378 \text{ kg} \end{array}$$

Zgodnie z podaną wyżej regułą zaokrąglamy tę sumę do dziesiątych odrzucając rząd setnych i tysięcznych, ponieważ w przybliżeniach pierwszym i czwartym tych rzędów nie uwzględniono. Paczka ważyła około 3,4 kg.

Zastanów się nad tym, czy warto było by uwzględniać dalsze miejsca w tej sumie.

B. Przykład. Duże naczynie zawiera około 12 l wody. Z naczynia tego odlano menzurką 3,82 l wody.

Ile litrów wody zostało?

Obliczenie

$$\begin{array}{r} 12 \text{ l} \\ - 3,82 \text{ l} \\ \hline 8,18 \text{ l} \end{array}$$

Różnicę zgodnie z wyżej po-

daną regułą zaokrąglimy do całości, ponieważ odjemna nie zawiera rzędu dziesiątych, ani rzędu setnych. W naczyniu zostało około 8 l wody.

Zastanów się nad tym, czy warto było by uwzględniać dalsze miejsca w tej różnicy

Zadania.

38. Oblicz następujące sumy

A. $3\frac{7}{5} + 1\frac{33}{50} + 15\frac{1}{40} + 5,01$; B. $8\frac{3}{4} + 2\frac{5}{6} + 4\frac{1}{15} + 18\frac{5}{8} + 1\frac{1}{24} + \frac{7}{30}$;
C. $\frac{9}{14} + 5\frac{8}{16} + 6\frac{11}{10} + 2\frac{1}{3}$; D. $1\frac{1}{3} + 2\frac{3}{22} + 5\frac{7}{66} + 0,1$; E. $0,02 + 2,1 + 3,00576 + 5,258$; F. $3,528 + 19,032 + 245,1 + 21,6824$; G. $3\frac{1}{4} + 2,25 + 18\frac{3}{8}$.

39. Oblicz następujące różnice:

A. $2 - 1\frac{3}{13}$; $4 - 2\frac{5}{11}$; $25 - 6\frac{7}{50}$;
B. $3\frac{7}{5} - \frac{4}{55}$; $4\frac{1}{40} - 2\frac{11}{15}$; $7\frac{3}{5} - 2\frac{1}{49}$;
C. $0,5 - 0,234$; $1,562 - 0,6832$; $2,56 - 1,0081$;
D. $\frac{1}{2} - 0,035$; $0,823 - \frac{3}{16}$.

40. Oblicz sumy i różnice przybliżeń dziesiętnych

✓ A. $\begin{array}{r} 2,5 \\ + 1,38 \\ \hline 4,56 \end{array}$ $\begin{array}{r} 32\ 000 \\ + 15\ 200 \\ \hline 20\ 000 \end{array}$ (II stopień dokładności)
B. $\begin{array}{r} 3,7 \\ - 2,35 \\ \hline 1,35 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8,56 \\ - 2,3 \\ \hline 6,26 \end{array}$
C. $8,56 + 2,325 - 1,0008$

*41. Przelot polską linią lotniczą „Lot“ z Warszawy do Wiednia jest podzielony na następujące odcinki: z Warszawy do Krakowa $1\frac{3}{4}$ godz., z Krakowa do Brna $1\frac{1}{2}$ godz., z Brna do Wiednia $\frac{5}{6}$ godz. Oblicz, ile godzin trwa cała podróż bez postojów

42. Uczennice zaproponowały następujący podział ogrodu szkolnego: $\frac{2}{3}$ całego obszaru otrzyma klasa II-a (na prowadzenie hodowli roślin), $\frac{1}{4}$ ma przypaść klasie I, a $\frac{1}{12}$ klasie III. Sprawdź, czy w ten sposób rozdzielono obszar całego ogrodu.

43. A. Arab umierając zapisał najstarszemu synowi $\frac{1}{2}$ stada wielbłądów liczącego 17 sztuk, młodszemu $\frac{1}{3}$, najmłodszemu zaś $\frac{1}{9}$ tego stada. Okazało się, że podział był niemożliwy; przekonaj się o tym.

B. Za radą mądrego kadiego synowie pożyczili jednego wielbłąda

od sąsiada i, dołączywszy go do stada, dokonali podziału. Oblicz, ile wielbłądów otrzymał każdy syn.

C. Po dokonaniu podziału okazało się, że bracia mogą zwrócić wielbłąda właścicielowi. Było to możliwe dlatego, że stary Arab nie umiał dobrze rachować i nie rozdzielił całego stada. Przekonaj się o tym.

44. Ślusarz ma wykonać pięć nierównych prętów metalowych. Największy ma mieć $7\frac{1}{2}$ dm długości, każdy następny zaś ma być o $1\frac{2}{5}$ dm krótszy od poprzedniego. Oblicz długość każdego pręta. Ile dm drutu trzeba na wykonanie wszystkich prętów?

45. Pola orne stanowią 0,49 obszaru całej Polski, lasy wynoszą o 0,27, a łąki i pastwiska o $\frac{8}{25}$ obszaru Polski mniej niż pola orne. Jaka część obszaru Polski tworzą A. lasy, B. łąki i pastwiska, C. inne grunty?

46. Waga jest zaopatrzona w odważniki o ciężarze 1 kg, $\frac{1}{2}$ kg, kg, $\frac{1}{5}$ kg, $\frac{1}{10}$ kg, $\frac{2}{10}$ kg, $\frac{1}{50}$ kg, $\frac{1}{100}$ kg (po jednym odważniku każdego rodzaju)

A. Jakie odważniki ułożysz na szalce lewej wagi, aby zrównoważyć ciężar położonego na szalce prawej przedmiotu, wynoszący $\frac{3}{4}$ kg, $\frac{3}{10}$ kg, $\frac{7}{20}$ kg, $\frac{7}{100}$ kg; 1,02 kg, 1,25 kg; 1,5 kg.

B. Jakie odważniki położysz na szalce lewej, a jakie dołączysz do położonego na szalce prawej przedmiotu o ciężarze 1,19 kg; 1,45 kg, aby waga była w równowadze?

47. Uzupełnij podane kwadraty magiczne tak, aby sumy liczb wypisanych w każdej kolumnie, w każdym wierszu, w każdej przekątnej były równe. A $\frac{1}{2}$; B 1,5.

$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{10}$	
$\frac{7}{30}$		
	$\frac{1}{30}$	

A

	0,7	
0,9		0,1
$\frac{2}{5}$		

B

48. Ktoś pomyślał jakiś ułamek, dodał do niego $\frac{1}{2}$, a następnie odjął $\frac{2}{3}$ i otrzymał $\frac{3}{4}$. Jaki był ten ułamek?

49. W tabelce wypisano przeciętne temperatury miesiąca najzim-

niejszego i najcieplejszego w roku w kilku miejscowościach w Europie. Oblicz wahania roczne temperatury w tych miejscowościach

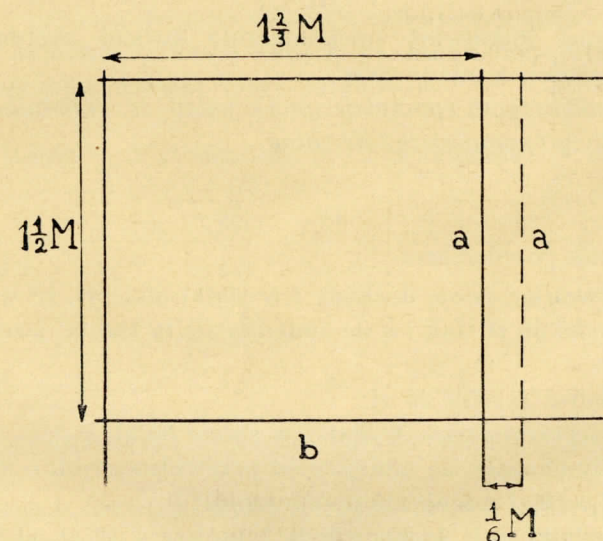
Miejscowość	temp. miesiąca najcieplejszego	temp. miesiąca najzimniejszego
Warszawa	18,4°	— 3,5°
Moskwa	18,9°	—10,4°
Nicea	23,2°	8°

50. Przed katastrofalną powodzią w 1934 r poziom wody w Wiśle A. pod Krakowem wskazywał około 2,85 m poniżej, B. pod Warszawą 1,32 m powyżej zera na wodowskazie. Podczas powodzi poziom wody był A. w Krakowie 3,39 m powyżej zera, B. pod Warszawą 5,49 m powyżej zera. Oblicz, o ile m podniosła się woda w Krakowie i w Warszawie podczas powodzi.

51. Boki trójkąta są $1\frac{1}{2}$ dm, $2\frac{1}{4}$ dm, $2\frac{2}{3}$ dm.

Pierwszy z boków zmniejszono o $\frac{1}{5}$ dm, drugi zmniejszono o 1 dm. O ile trzeba zmniejszyć bok trzeci aby cały obwód zmniejszył się o $2\frac{1}{2}$ dm? Ile dm będą miały boki nowego trójkąta?

52. Prostokątną ruchomą ramę (rys. 4) o wymiarach $1\frac{1}{2}$ m, $1\frac{2}{3}$ m, chcemy rozsunąć w ten sposób, aby obwód jej wynosił $7\frac{1}{3}$ m. Pręt a przesunięto o $\frac{1}{6}$ m. O ile m trzeba jeszcze przesunąć pręt b?



Rys. 4

§ 10. ZMIANY SUMY I RÓŻNICY

I.

Zagadnienia pomocnicze.

Stefan i Janek składają pieniądze na osobne książeczki w Kasie Oszczędności. Za złożoną wspólnie sumę chcą kupić kajak. Mają już 40 zł razem. Jak zmieni się ta suma i ile będą mieli zł razem, jeżeli

A. Stefan wpłaci na swoją książeczkę 10,5 zł;

B. Janek wyjmie 5 zł potrzebne mu na książkę;

C. Stefan wpłaci na swoją książeczkę 8 zł, a jednocześnie Janek odbierze ze swoich oszczędności 6,5 zł;

D. Stefan włoży 20 zł, a jednocześnie Janek włoży 15 zł;

E. tak Stefan jak i Janek wyjmą po 10 zł.

II.

Kwoty składane osobno przez Janka i Stefana są *składnikami sumy* przeznaczonej na kajak.

Pytanie A. możemy zatem ująć w formę matematyczną, jak i o ile zmieni się suma dwóch składników, jeżeli jeden z nich powiększymy o 10,5? Odpowiedz na to pytanie.

Sformułuj podobnie pytania B, C, D, E i odpowiedz na nie.

III.

Każda suma ilukolwiek (niekoniecznie dwóch) składników ma podobne własności, a mianowicie

O ile powiększymy (pomniejszymy) jeden ze składników sumy, o tyle powiększy (pomniejszy) się suma.

IV

Zagadnienia pomocnicze.

Ktoś porównując swoje dochody i wydatki obliczył, że w październiku zaoszczędzi 50 zł. Jak i o ile zmieniła się ta kwota, jeżeli w ciągu października

A. dodatkowo zarobił 25 zł;

B. miał nieprzewidziane wydatki w sumie 30 zł;

C. dochody okazały się mniejsze od przewidywanych o 20 zł;

D. wydał o 10 zł mniej, niż przypuszczał;

E. tak wydatki, jak dochody były mniejsze o 10 zł od wydatków i dochodów przewidywanych.

V

Zaoszczędzona kwota jest *różnicą* dochodów (które stanowią odjemną) i wydatków (stanowiących odjemnik)

Pytanie A. możemy zatem ująć w formę matematyczną jak i o ile zmieni się różnica, jeżeli odjemną powiększymy o 25? Odpowiedz na to pytanie.

Sformułuj podobnie pytania B, C, D, E i odpowiedz na nie.

VI.

Każda różnica dwóch liczb posiada podobne własności, a mianowicie

A. *O ile powiększymy (pomniejszymy) odjemną, o tyle powiększy się (pomniejszy) różnica.*

B. *O ile powiększymy (pomniejszymy) odjemnik, o tyle pomniejszy się (powiększy) różnica.*

Oczywiście do odjemnika możemy dodać tylko taką liczbę, aby po zmianie nie był większy od odjemnej.

W przeciwnym wypadku nie można by różnicy obliczyć.

Z a d a n i a.

53. W następującej tabelce w górnym wierszu ostatniej kolumny wypisano sumę trzech nieznanych nam składników

Znak $+$ oznacza, że dany składnik zwiększono, znak $-$, że zmniejszono ten składnik o liczbę stojącą po znaku. Przepisz i uzupełnij tabelkę obliczając wartość sumy po zmianie.

1-szy składnik	2-gi składnik	3-ci składnik	Suma = $25\frac{1}{4}$
	$+ 2\frac{2}{5}$	$+ \frac{1}{2}$	
$+ 4,2$	$- 1,3$		
	$- 3,02$	$+ 1,1$	
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	$+ \frac{1}{4}$	

54. Sprawdź regułę III rysując sumę dwóch odcinków i zmieniając ich długość.

55. Chłopcy urządzili wyścigi dwóch drużyn. Pierwsza drużyna zużyła na przebyciu pierwszego odcinka drogi o $2\frac{1}{2}$ minuty mniej, na przebyciu drugiego odcinka o $4\frac{1}{4}$ minuty więcej, na przebyciu zaś koń-

cowego odcinka o $1\frac{1}{5}$ minuty mniej niż druga. Która drużyna zwyciężyła i o ile minut?

56. W województwie warszawskim długość linii kolejowych normalno i wąsko-torowych razem wynosi 1612 km. Oblicz długość linii kolejowych w województwie poznańskim, jeżeli wiadomo, że długość linii kolejowych wąskotorowych jest w tym ostatnim wprawdzie o 159 km mniejsza, normalnotorowych jednak o 1853 km większa niż w województwie warszawskim (dane z r. 1935).

57. Jeden bok prostokąta zwiększono o $3\frac{1}{2}$ cm, drugi zaś zmniejszono o $2\frac{2}{5}$ cm. Jak i o ile zmienił się obwód prostokąta?

58. Suma dwóch liczb wynosi $58\frac{5}{12}$. Jak zmienisz składniki tej sumy, aby otrzymać $62\frac{1}{8}$. Podaj kilka różnych projektów

59. Dwa metalowe pręty równej długości zlutowano tworząc jeden długi pręt. Pod wpływem ogrzania jeden pręt wydłużył się o 0,00020, drugi o 0,00018 swej długości pierwotnej. O jaki ułamek swej długości przed ogrzaniem wydłużył się cały pręt?

60. Ułóż zadanie, którego rozwiązanie polegałoby na obliczaniu jak i o ile zmieni się suma, jeżeli

A. oba składniki zmniejszymy o tę samą liczbę;

B. jeden składnik zwiększymy, a drugi zmniejszymy o tę samą liczbę.

61. Przepisz i uzupełnij następującą tabelkę (objaśnienie znaków znajdziesz w zadaniu 53)

odjemna	odjemnik	różnica = 35,68
$+2\frac{1}{2}$		
	0,2	
$-5,03$	$+25$	
$+3\frac{2}{5}$	2,5	
$-4\frac{1}{2}$	$+1\frac{1}{8}$	
$+5$	$+5$	

62. Sprawdź regułę VI rysując różnicę dwóch odcinków i zmieniając ich długość.

63. Obwód kwadratu jest o $3\frac{1}{3}$ m większy od obwodu trójkąta równobocznego. Każdy bok kwadratu powiększono o $2\frac{2}{5}$ m, każdy

bok trójkąta zmniejszono o 0,1 m. Ile wynosi różnica obwodów nowego kwadratu i nowego trójkąta?

64. Dwie szalki wagi obciążono dwoma ciężarkami, przy czym na prawej szalce jest ciężarek o $\frac{1}{2}$ kg cięższy

Jak zmieni się położenie wagi i ile będzie wynosiła różnica obciążenia szalek, jeżeli na lewą szalkę dołożymy ciężarek $1\frac{1}{8}$ kg?

65. Ułóż zagadnienie, w którym chodziłoby o obliczenie, jak i o ile zmieni się różnica dwóch liczb, jeżeli

A. odjemną powiększymy, a odjemnik pomniejszymy o tę samą liczbę,

B. odjemną i odjemnik powiększymy o tę samą liczbę.

66. Różnica dwóch liczb wynosi $8\frac{1}{2}$, jak zmienisz odjemną i odjemnik, aby różnica wynosiła $10\frac{8}{15}$? Podaj kilka projektów

§ 11 MNOŻENIE UŁAMKÓW

Powtórzenie.

I.

UŁAMEK MNOŻYMY PRZEZ LICZBĘ NATURALNĄ *mnożąc jego licznik przez tę liczbę, ułamek dzielimy przez liczbę naturalną mnożąc jego mianownik przez tę liczbę*, np. $3\frac{5}{7} = \frac{15}{7}$; $\frac{5}{7} \cdot 3 = \frac{15}{7}$.

II

Ćwiczenia pamięciowe. Oblicz

*1. A. $5 \cdot \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} \cdot 5$; B. $2 \cdot \frac{7}{9}$; $\frac{7}{9} \cdot 2$; C. $5 \cdot \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4} \cdot 5$.

*2. A. $6 \cdot 1\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2} \cdot 6$; B. $2 \cdot 2\frac{2}{3}$; $2\frac{2}{3} \cdot 2$; C. $5 \cdot 3\frac{3}{4}$; $3\frac{3}{4} \cdot 5$.

III.

POMNOŻYĆ PRZEZ UŁAMEK DANĄ WIELKOŚĆ *znaczy to samo, co wyznaczyć ten ułamek z tej wielkości*.

Np. obliczyć iloczyn $\frac{3}{5} \cdot 2$ kg *znaczy to samo, co wyznaczyć $\frac{3}{5}$ z 2 kg*. Obliczmy $\frac{3}{5} \cdot 2$ kg

$$2 \text{ kg} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \text{ kg}; \quad 3 \cdot \frac{2}{5} \text{ kg} = \frac{6}{5} \text{ kg} = 1\frac{1}{5} \text{ kg}.$$

Otrzymujemy zatem $\frac{3}{5} \cdot 2 \text{ kg} = 1\frac{1}{5} \text{ kg}$.

IV.

Ćwiczenia pamięciowe.

*3. Oblicz według określenia III iloczyny

A. $\frac{3}{4} \cdot 2 \text{ m}$; $\frac{2}{3} \cdot 10 \text{ cm}^2$; $\frac{3}{4} \cdot 3 \text{ zł}$,

B. $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \text{ m}^3$; $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4} \text{ litra}$; $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \text{ godz}$.

V

ILOCZYN UŁAMKA PRZEZ UŁAMEK obliczamy tworząc ułamek, którego licznik jest iloczynem liczników, a mianownik iloczynem mianowników tych ułamków. Np. $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{12}{35}$.

Regułę V można wyjaśnić obliczając iloczyn $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}$ według określenia III. $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}$ znaczy to samo, co $\frac{3}{5}$ z $\frac{4}{7}$. Zaznaczmy działania potrzebne do obliczenia $\frac{3}{5}$ z $\frac{4}{7}$

$$\begin{aligned} \frac{4}{7} \cdot 5 &= \frac{4 \cdot 5}{7} \\ 3 \cdot \frac{4}{7} &= \frac{3 \cdot 4}{7} \\ \text{Zatem } \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} &= \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{12}{35}. \end{aligned}$$

Ten sam wynik otrzymałeś, stosując regułę V.

VI.

Ćwiczenia pamięciowe.

*4. Oblicz iloczyny: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{11}$, $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9}$; $\frac{2}{3} \cdot \frac{15}{7}$.

*5. Oblicz zamieniając przed mnożeniem liczby mieszane na ułamki niewłaściwe

A. $3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{4} \cdot 2\frac{1}{5}$; $2\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2}$,

B. $1\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$; $\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5}$.

*6. Wyznacz stosując regułę V:

A. $\frac{2}{3}$ z $\frac{1}{2}$ kg; $\frac{4}{5}$ z 6 m; $\frac{1}{2}$ z $\frac{5}{8}$ m²,

B. $\frac{5}{12}$ z 2; $\frac{7}{15}$ z $1\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ z $2\frac{1}{5}$.

VII.

Aby pomnożyć liczbę dziesiętną przez 10, 100, 1000 itd. przesuwamy przecinek dziesiętny odpowiednio o jeden, dwa, trzy rzędy w prawo np. $1,258 \cdot 10 = 12,58$, $1,258 \cdot 100 = 125,8$.

Regułę VII można wyjaśnić zapisując daną liczbę dziesiętną w postaci zwyczajnego ułamka niewłaściwego i wykonując przed mnożeniem uproszczenia.

$$\begin{aligned} 1,258 &= \frac{1258}{1000}; \quad \frac{1258}{1000} \cdot 10 = \frac{1258}{100} = 12,58 \\ \frac{1258}{1000} \cdot 100 &= \frac{1258}{10} = 125,8. \end{aligned}$$

VIII.

Ćwiczenia pamięciowe.

*7 Pomnóż przez 10, 100, 1000, 10 000 liczby

A. 0,153, $1,25 \cdot 2,5342$, 28,24,

B. 0,028; 0,00354; 0,2, 0,32456,

C. 8,32, 85,08, 963,3245.

IX.

Aby obliczyć iloczyn dwóch liczb dziesiętnych, mnożymy liczby powstałe z nich przez opuszczenie przecinków dziesiętnych; w otrzymanym iloczynie umieszczamy przecinek dziesiętny tak, aby po nim następowało tyle rzędów dziesiętnych, ile ich jest w obydwóch danych czynnikach razem.

Np. aby obliczyć $2,51 \cdot 8,3$ mnożymy $251 \cdot 83 = 20\,833$.

W iloczynie odcinamy trzy rzędy dziesiętne. Zatem $2,51 \cdot 8,3 = 20,833$.

Regułę IX można wyjaśnić zapisując dane liczby dziesiętne w postaci zwyczajnych ułamków niewłaściwych i stosując regułę V.

$$2,51 \cdot 8,3 = \frac{251}{100} \cdot \frac{83}{10} = \frac{20\,833}{1000} = 20,833.$$

X.

Ćwiczenia pamięciowe.

*8. Oblicz iloczyny

A. $2,3 \cdot 2$, $1,5 \cdot 3$, $20,2 \cdot 5$, $1,2 \cdot 7$,

B. $0,2 \cdot 0,3$, $1,5 \cdot 0,4$, $1,2 \cdot 0,05$; $0,12 \cdot 0,5$;

C. $0,3$ z 2 kg; $0,8$ z 10 m, $0,4$ z 3 km,

D. $0,2$ z 1,2 zł; $0,5$ z 3,2 dkg.

Zadania.

67 Oblicz

A. $3\frac{2}{5} \cdot 4\frac{3}{7}$; $5\frac{1}{2} \cdot 2\frac{4}{11}$; $9\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2}$;

B. $2 \cdot 3\frac{1}{2}$; $4\frac{2}{3} \cdot 5$; $7\frac{2}{5} \cdot 8$;

C. $2 \cdot \frac{3}{11} \cdot 3\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3} \cdot 5\frac{1}{10} \cdot 7$;

D. $\frac{2}{7} \cdot 1\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{18}$; 2 ; $8\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{5}$.

68. Oblicz.

A. $2,5 \cdot 3$, $0,7$; $4,08 \cdot 2,01$; $3,57 \cdot 2,384$; $8,2 \cdot 0,002$,

B. $1,02 \cdot 1,003$; $0,05 \cdot 18,028$; $25,37 \cdot 0,235$.

69. Ciężar opakowania towaru (tara) stanowi $\frac{2}{15}$ ciężaru towaru z opakowaniem (brutto) Oblicz tarę, jeżeli brutto wynosi $3\frac{3}{4}$ kg.

70. Powierzchnia Bałtyku stanowi w przybliżeniu $\frac{1}{250}$ powierzchni Atlantyku, powierzchnia Atlantyku $\frac{1}{3}$ powierzchni wszystkich oceanów Jaką część powierzchni wszystkich oceanów stanowi powierzchnia Bałtyku?

71. Pracując przy budowie domu robotnicy zsypali razem dwa worki piasku po $10\frac{1}{2}$ kg i pewną ilość wapna, ważącego tyle, ile waży $\frac{2}{3}$ worka piasku.

Ile waży razem zsypany materiał?

*72. Wśród bakterij chorobotwórczych spotykamy takie, których średnica wynosi 0,0025 mm. Jaką średnicę będą miały ich obrazy w mikroskopie powiększającym 100 razy?

*73. Odległość dwóch punktów na mapie wynosi 2,7 cm. Ile m wynosi odległość odpowiadających im miejsc na ziemi, jeżeli skala mapy jest

A. 1 : 100; B. 1 : 1000; C. 1 : 10 000.

*74. Przyjmując krok przeciętnie na 0,6 m, oblicz, ile km zrobisz po

A. 10 000; B. 100 000; C. 1 000 000 kroków

75. 1 cm³ glinu waży 2,7 g. Istnieje stop glinu, w którym czysty glin występuje z domieszkami zwiększającymi jego ciężar o 0,02 ciężaru czystego glinu tej samej objętości. Oblicz, ile waży 1 cm³ takiego stopu.

76. Tło pod szkłem dobrych lusterek jest posrebrzane. Na 1 m² powierzchni trzeba 2,5 g srebra. Oblicz, ile g srebra trzeba na posrebrzenie tła lustra o powierzchni 0,055 m²

77. Ułóż i następnie rozwiąż zagadnienia, dla rozwiązania których trzeba wykonać następujące mnożenia.

A. $\frac{3}{5} \cdot 7$; B. $1\frac{2}{3} \cdot 8$; C. $\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{6}$; D. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$.

78. Ułóż i rozwiąż zagadnienia o treści geometrycznej, dla rozwiązania których trzeba wykonać następujące mnożenia.

A. 1,5 2,2; B. 3,6 · 3,14; C. 2,8 3,07 8.

§ 12. DZIELENIE UŁAMKÓW

Powtórzenie.

I.

Dzieląc 8 kg przez 2 znajdujemy taki ciężar, który pomnożony przez 2 da w iloczynie 8 kg. O ten ciężar możemy się więc zapytać w sposób następujący.

$$2 \cdot ? = 8 \text{ kg}$$

Szukany ciężar wynosi 4 kg, bo $2 \cdot 4 \text{ kg} = 8 \text{ kg}$.

Podobnie chcąc podzielić 8 kg przez $\frac{3}{7}$ szukamy takiego ciężaru, który pomnożony przez $\frac{3}{7}$ da w iloczynie 8 kg.

Możemy zatem zapytać się o ten ciężar w sposób następujący:

$$\frac{3}{7} \cdot ? = 8 \text{ kg, albo też}$$

$$\frac{3}{7} \cdot ? = 8 \text{ kg (bo według reguły III § 11 pomnożyć}$$

jakąś wielkość przez $\frac{3}{7}$ znaczy to samo, co wyznaczyć $\frac{3}{7}$ z tej wielkości).

Umiemy już wyznaczyć ciężar, którego $\frac{3}{7}$ równa się 8 kg.

$\frac{1}{7}$ tego ciężaru równa się $\frac{8}{3}$ kg;

cały ciężar równa się $7 \cdot \frac{8}{3} \text{ kg} = \frac{56}{3} \text{ kg} = 18\frac{2}{3} \text{ kg}$.

Dzieląc 8 kg przez $\frac{3}{7}$ otrzymujemy zatem $18\frac{2}{3} \text{ kg}$.

II.

PODZIELIĆ DANĄ WIELKOŚĆ PRZEZ UŁAMEK $\frac{3}{7}$ znaczy to samo, co znaleźć drugą wielkość, z której $\frac{3}{7}$ równa się danej wielkości. Podobnie dzieląc daną wielkość przez jakikolwiek ułamek szukamy drugiej wielkości takiej, aby wielkość dana była tym właśnie ułamkiem wielkości szukanej

III.

Ćwiczenia pamięciowe.

*1. Wyjaśnij, co oznaczają podane ilorazy i oblicz je.

6 m $\frac{2}{3}$; 2 km² $\frac{1}{16}$; 27 litrów $\frac{3}{10}$; 4 m³ $\frac{2}{5}$.

*2. Wymień działanie, przy pomocy którego można obliczyć wielkość, jeżeli wiadomo, że

A. $\frac{2}{7}$ tej wielkości równa się 8 m,

B. $\frac{3}{5}$ „ „ „ $\frac{7}{8}$ kg;

C. 0,7 „ „ „ 5 dcm³

IV.

ILORAZ JAKIEJS LICZBY PRZEZ UŁAMEK możemy obliczyć, mnożąc dzielną przez odwrotność dzielnika np.

$$\frac{2}{3} \frac{5}{11} = \frac{2}{3} \frac{11}{5} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}.$$

Regułę IV można wyjaśnić obliczając podany iloraz według reguły II. Podzielić mianowicie $\frac{2}{3}$ przez $\frac{5}{11}$ znaczy to samo, co znaleźć liczbę, której $\frac{5}{11}$ równa się $\frac{2}{3}$.

Zaznaczmy działania potrzebne do obliczenia tej liczby

$\frac{5}{11}$ tej liczby równa się $\frac{2}{3}$

$\frac{1}{11}$ „ „ „ „ $\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{1} = \frac{10}{3}$

cała liczba „ „ „ 11 $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{5} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$

Ten sam wynik otrzymałeś mnożąc $\frac{2}{3}$ przez odwrotność ułamka $\frac{5}{11}$.

V

Ćwiczenia pamięciowe.

*3. Oblicz ilorazy

A. $\frac{1}{3} \frac{2}{5}$; $\frac{2}{7} \frac{5}{2}$; $\frac{6}{25} \frac{2}{3}$; $\frac{10}{21} \frac{4}{3}$;

B. $5 \cdot \frac{1}{3}$; $6 \frac{2}{9}$; $7 \frac{1}{10}$; $8 \cdot \frac{2}{11}$.

*4. Oblicz, wykonując jedno działanie na ułamkach, wielkość, której

- A. $\frac{3}{4}$ równa się $\frac{1}{4}$ kg,
 B. $\frac{2}{3}$ „ „ 5 dcm,
 C. $\frac{7}{10}$ „ „ $\frac{1}{2}$ m³,
 D. $\frac{3}{4}$ „ „ $\frac{2}{3}$ litra,

VI.

Liczbę dziesiętną dzielimy przez 10, 100, 1000 itp. przesuwając przecinek dziesiętny odpowiednio o jeden, dwa, trzy rzędy w lewo. Np.

$$256,48 : 10 = 25,648$$

$$256,48 : 100 = 2,5648$$

Regułę VI można wyjaśnić zapisując liczby dziesiętne w postaci zwykłych ułamków niewłaściwych.

$$256,48 = \frac{25648}{100}$$

$$256,48 : 10 = \frac{25648}{1000} \quad 10 = \frac{25648}{1000} = 25,648$$

$$256,48 : 100 = \frac{25648}{10000} \quad 100 = \frac{25648}{10000} = 2,5648$$

VII.

Ćwiczenie pamięciowe.

*5. Podziel przez 10, 100, 1000, 10 000 liczby:

$$25,68; \quad 358,2, \quad 0,082, \quad 2468,93, \quad 45,68.$$

VIII.

Znasz z poprzednich lat nauki własność dzielenia. jeżeli dzielną i dzielnik pomnożymy przez jedną i tę samą liczbę różną od zera, to iloraz nie zmieni się.

IX.

Z własności tej korzystamy dzieląc jedną liczbę dziesiętną przez drugą liczbę dziesiętną.

Aby podzielić liczbę dziesiętną przez liczbę dziesiętną, mnożymy dzielną i dzielnik przez mianownik dzielnika (czyli w obu liczbach przesuwamy przecinek dziesiętny o tyle miejsc w prawo, ile rzędów po przecinku występuje w dzielniku). W ten sposób otrzymujemy iloraz równy poprzedniemu, którego dzielnik jest liczbą całkowitą. Np. iloraz $25,38 : 1,8$ obliczamy w sposób następujący:

$$25,38 : 1,8 = 253,8 : 18$$

$$\begin{array}{r} 14,1 \\ \hline 253,8 : 18 \\ 18 \\ \hline = 73 \\ 72 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$25,38 : 1,8 = 14,1$$

X.

W poprzednich latach nauki poznałeś reguły dzielenia ułamka przez liczbę całkowitą, liczby całkowitej przez ułamek. Możesz je zastąpić regułą IV, pamiętając, że każdą liczbę całkowitą można napisać w postaci ułamka o mianowniku 1. Np..

$$5 : \frac{2}{3} = \frac{5}{1} : \frac{2}{3} = \frac{5}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} : \frac{2}{1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

XI.

Zagadnienia pomocnicze.

*6. A. Czy można znaleźć liczbę, która pomnożona przez 0 daje 3, 5, 10 ?

B. Czy można znaleźć liczbę, która pomnożona przez 0 daje 0 ? Czy jest tylko jedna taka liczba ?

XII.

Przez 0 nie dzielimy.

Zadania.

79. Oblicz podane niżej ilorazy. Wynik dzielenia sprawdź.

a) mnożąc iloraz przez dzielnik (powinieneś otrzymać dzielną),

b) dzieląc dzielną przez iloraz (powinieneś otrzymać dzielnik).

A. $2\frac{3}{16} : 5$; $2\frac{3}{5} : \frac{2}{5}$; $9\frac{3}{5} : 2\frac{2}{5}$;

B. $16\frac{1}{8} : 7\frac{1}{2}$; $8\frac{1}{7} : 6$; $3\frac{2}{11} : \frac{2}{3}$;

C. $2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{9}$; $4\frac{2}{3} : 2\frac{1}{10}$; $8 : \frac{1}{2}$;

D. $9 : \frac{3}{5}$; $4 : 1\frac{3}{5}$; $25 : 1\frac{1}{9}$.

80. Oblicz ilorazy; wynik sprawdź (zobacz zadanie 79)

A. $108,675 : 2,25$, $36,495 : 4,5$, $233,8065 : 93,15$,

B. $96,14 : 2,2$, $18,146 : 8,6$; $182,493 : 8,1$.

81. Jeden kokon jedwabnika waży około $1\frac{4}{5}$ g. Ile kokonów trzeba na otrzymanie 1 kg surowca jedwabiu?

✓ 82. Pierwszy piec do wytwarzania żelaza na Śląsku (w roku 1796) dawał dziennie $4\frac{1}{2}$ t żelaza. Oblicz, ile razy zwiększyły wydajność produkcji żelaza wynalazki techniczne, jeżeli obecnie 1 piec daje przeciętnie 400 t żelaza dziennie.

✓ 83. Na ile odcinków długości 2,3 cm można podzielić odcinek długości 34,5 cm?

✓ 84. $3\frac{3}{4}$ kawałka masła waży razem $\frac{1}{16}$ kg. Ile kg waży jeden kawałek?

✓ 85. Odcinek długości 9,625 m podzielono na 3 części, z których dwie pierwsze są równe, a trzecia stanowi 0,75 pierwszej. Jaka jest długość części pierwszej?

*86. Oglądamy przez mikroskop małe zwierzątko zwane pantofelkiem. Wydaje nam się, że ma ono 1,5 cm długości. Ile mm długości ma pantofelek, jeżeli mikroskop powiększa 100 razy?

*87. Odległość dwóch miejsc na ziemi wynosi

A. 2,3 m, B. 82,5 km,

Jaki ułamek A. metra B. kilometra stanowiąć będzie odległość odpowiadających im punktów A. na planie w skali 1 : 100; B. 1 : 10 000?

88. Tara stanowi $\frac{3}{17}$ wagi netto i wynosi $2\frac{1}{2}$ kg. Ile kg wynosi netto?

89. Nalaliśmy wody do wysokości $\frac{2}{3}$ słoja, wlewając doń $3\frac{1}{2}$ l wody. Ile l pojemności ma cały słoje?

90. Spóźniony pociąg zwiększył swoją prędkość o $\frac{1}{10}$ poprzedniej prędkości i jedzie obecnie z szybkością 64 km na godz. Z jaką prędkością pociąg jechał poprzednio?

91. Uczennice klasy pierwszej zakupiły razem zeszyty w sklepie, w którym otrzymały rabat wynoszący 0,15 ceny (według cennika) i zapłaciły 7,65 zł. Ile kosztowałyby zeszyty bez rabatu?

92. Podczas wielkiej wojny wywieziono z Puszczy Białowieskiej 1 800 000 m³ drzewa, co stanowiło $\frac{3}{50}$ całej masy drzewnej. Oblicz, ile m³ drzewa zawierała Puszcza Białowieska przed wojną?

93. Rtęć pod wpływem ogrzania o 100° zwiększa swoją objętość o $\frac{1}{50}$ swej pierwotnej objętości. Ile cm³ rtęci musimy nalać do rury o przekroju 1 cm², aby po ogrzaniu o 100° otrzymać słupek rtęci wysokości 1 dm?

94. A. W sklepie szkolnym sprzedaliśmy $\frac{7}{12}$ zapasu zeszytów; pozostało jeszcze 20 zeszytów. Ile było zeszytów w sklepie przed sprzedaniem?

B. Na wycieczce przebyliśmy jednego dnia $\frac{5}{8}$ przewidzianej w planie drogi i pozostało nam jeszcze 13 km. Ile km wyniesie cała droga?

95. Ułóż i rozwiąż zagadnienia, dla rozwiązania których trzeba wykonać następujące dzielenia

A. $3\frac{1}{5}$; B. $2\frac{1}{2} : \frac{3}{7}$; C. $3\frac{1}{2} 2\frac{1}{2}$; D. 4 0,8; E. $4,2 \cdot 2,1$

§ 13. MNOŻENIE I DZIELENIE PRZYBLIŻEN DZIESIĘTNYCH

I.

Przypomnij sobie treść ustępu VIII § 8.

II.

Przyjmijmy następujące reguły praktyczne:

A. ILOCZYN (ILORAZ) DWÓCH PRZYBLIŻEN DZIESIĘTNYCH podanych w t y m s a m y m s t o p n i u dokładności zaokrąglamy tak, aby ten iloczyn (iloraz) miał ten sam stopień dokładności, co czynniki.

Przykład. Wymiary podłogi pokoju są 5,6 m i 4,2 m. Powierzchnia podłogi w m² wyrazi się iloczynem $5,6 \cdot 4,2$

$$\begin{array}{r} 5,6 \quad 4,2 \\ \hline 112 \\ 224 \\ \hline 23,52 \quad (24 \text{ m}^2) \end{array}$$

Według reguły A. iloczyn mamy podać w drugim stopniu dokładności, gdyż każdy z czynników podano w drugim stopniu dokładności. Powierzchnia wynosi w przybliżeniu 24 m²

B. Iloczyn (iloraz) dwóch przybliżeń dziesiętnych podanych w różnych stopniach dokładności zaokrąglamy tak, aby stopień dokładności otrzymanego iloczynu (ilorazu) równał się mniejszemu ze stopni dokładności czynników.

Przykład. Bryła soli ma objętość 8,2 cm³ 1 cm³ soli waży około 2,14 g. Ciężar bryły w g wyrazi się iloczynem $8,2 \cdot 2,14$.

$$\begin{array}{r} 8,2 \quad 2,14 = 17,548 \\ \hline 328 \\ 82 \\ \hline 164 \\ \hline 17,548 \quad (18 \text{ g}) \end{array}$$

Według reguły B. iloczyn mamy podać w drugim stopniu dokładności, gdyż pierwszy czynnik był podany w drugim, drugi w trzecim stopniu dokładności. Ciężar wynosi 18 g.

C. ILOCZYN (ILORAZ) PRZYBLIŻENIA DZIESIĘTNEGO PRZEZ LICZBĘ DOKŁADNĄ lub naodwrot zaokrąglamy tak, aby

jego stopień dokładności równał się stopniowi dokładności tego przybliżenia.

Przykład. Bok kwadratu równa się 29,3 cm. Obwód w centymetrach wyrazi się iloczynem 29,3 4.

$$29,3 \cdot 4 = 117,2 \quad (117 \text{ cm})$$

według reguły C. iloczyn mamy podać w trzecim stopniu dokładności, bo przybliżoną miarę boku kwadratu podano w trzecim stopniu dokładności. Obwód kwadratu wyniesie 117 cm.

III.

DZIELĄC PRZYBLIŻENIA DZIESIĘTNE, *stosujemy te same reguły, wobec tego dzielenie możemy przerwać po osiągnięciu odpowiedniej ilości cyfr w ilorazie.*

Przykład. Mamy podzielić przybliżenie 19,8 przez przybliżenie 2,6. Iloraz zgodnie z regułą B. powinniśmy podać w drugim stopniu dokładności.

$$\begin{array}{r} 7,6 \\ 198 \overline{) 26} \\ 182 \\ \hline 160 \\ 156 \\ \hline = 4 \end{array}$$

przybliżony iloraz równa się 7,6.

Przykłady na stosowanie reguł podanych wyżej znajdziesz w § 14.

Z a d a n i a.

96. Oblicz iloczyny, (ilorazy) przybliżeń dziesiętnych

A. $2,3 \cdot 3,58$, $4,72 \cdot 0,3$, $3,8 \cdot 7,9$; $2,542 \cdot 0,8$,

B. $8,9 \cdot 0,3$, $12,5 \cdot 2,25$, $3,4 : 2,3$; $458,2 \cdot 0,7$,

C. $25 \cdot 172$; $3564 : 123$, $469 : 1224$.

97. Oblicz

A. Iloczyny przybliżenia 56,82 przez liczby dokładne 2, 5, 12,

B. „ „ 2,8 „ „ „ 13, 8, 102,

C. Ilorazy „ 62,3 „ „ „ 2, 3, 7

§ 14. ROZWIĄZYWANIE ZAGADNIEŃ

Rozwiązując zadanie pamiętaj o następujących zasadach

1. Ułóż dokładnie cały *plan rozwiązania*, a potem dopiero wykonuj działania zaznaczone w planie.

2. Przed wykonaniem działań na ułamkach zastosuj wszystkie możliwe *uproszczenia*.

3. Wykonuj działania na liczbach *niemianowanych* pamiętając w jakich jednostkach podano wielkości występujące w zadaniu. Po wykonaniu każdego punktu napisz odpowiedź przy pomocy liczb mianowanych.

4. Jeżeli w temacie zadania zaznaczono (przy pomocy takich zwrotów, jak „w przybliżeniu“, „około“ itp.), że dane są przybliżone, *stosuj dokładnie reguły działań przybliżeniami*, (§ 8, § 9 III, § 13) (Stopień dokładności zapisywać będziemy w skróceniu. Np. skrót „w III st. dokł.“ oznacza zwrot w trzecim stopniu dokładności)

Z a d a n i a.

I.

98. Głos przebiega około 33 m w ciągu 0,1 sekundy. Oblicz w jakiej odległości uderzył piorun, jeżeli między ujrzeniem błyskawicy, a usłyszeniem grzmotu upłynęło 2,3 sek.

99. Ktoś usłyszał głos syreny fabrycznej oznajmiającej godzinę siódmą rano i natychmiast nastawił zegarek na siódmą. Ile sekund w przybliżeniu będzie się spóźniał zegarek, jeżeli fabryka była oddalona od danego miejsca o 3,5 km? (Zobacz zadanie poprzednie)

100. Przyjmując, że odległość Gdyni od N Yorku wynosi około 6800 km, oblicz, ile węzłów robi przeciętnie nasz statek transatlantycki „Piłsudski“, który przebywa tę odległość w przybliżeniu w ciągu 8 dni. (Węzeł = mila morska w godzinie; 1 mila = 1,852 km, odpowiedź w II st. dokł.)

101. Łódź podwodna przejechała 6,5 km pod wodą z szybkością 10,7 km na godz. W drodze zaś powrotnej przebyła tę ~~same~~ odległość nad wodą z szybkością 15,9 km na godz. Ile minut trwała cała droga?

102. Na przedstawieniu szkolnym sprzedano połowę wszystkich biletów po 0,50 zł, $\frac{2}{3}$ po 0,75, a resztę tj. 21 biletów po 0,80 zł. Oblicz,

A. ile było biletów;

B. ile zł za nie otrzymano.

103. Światowa produkcja lnu wynosiła przeciętnie w ostatnich latach 35,5 milionów q nasienia lnianego i 6,4 milionów q włókna rocznie. Polska produkowała $\frac{1}{60}$ ogólnej produkcji nasienia i $\frac{1}{16}$ ogólnej produkcji włókna, przy czym dla uprawy lnu wykorzystujemy tylko 0,0028 obszaru całej Polski. Oblicz A. roczną produkcję nasienia

i włókna lnianego w Polsce. B. Ile q włókna i ile q nasienia otrzymuje przeciętnie hodowca w Polsce z jednego ha?

✓ 104. Chłopcy chcą przejść zupełnie równym marszem z regularnymi odpoczynkami szosę z Zakopanego do Morskiego Oka (31 km). Jedni chcą robić $5\frac{1}{2}$ km w godzinie i co godzinę odpoczywać kwadrans, drudzy proponują iść z szybkością 6 km na godzinę i odpoczywać co godzinę równo 22 min. Według którego projektu trzeba mniej czasu na przebycie tej drogi?

✓ 105. Do pływalni zgłosiło się 48 uczniów, którzy mieli wspólnie opłacić używanie basenu kąpielowego. Ponieważ lekarz nie pozwolił sześciu chłopcom pływać, każdy z pozostałych musiał zapłacić o $\frac{1}{4}$ zł miesięcznie więcej. Ile kosztowało miesięcznie wynajęcie pływalni?

✓ 106. Uzupełnij następujący kwadrat tak, aby był „magiczny“ tzn. aby iloczyny liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie i w każdej przekątnej były równe $\frac{1}{125}$.

$\frac{1}{40}$	$\frac{4}{5}$	
$\frac{1}{10}$		$1\frac{3}{5}$

✓ 107. Za jeden zeszyt kupiony osobno płacimy 0,25 zł. Oblicz, ile zyskał każdy uczeń klasy liczącej 42 uczniów, którzy zakupili wspólnie za 37,8 zł i równo rozdzielili paczkę, liczącą 210 zeszytów.

108. Oblicz, ile dni trzeba było na wywiercenie olbrzymiego szybu w Vera Cruz w Meksyku głębokości 3228 m, jeżeli wiercono przeciętnie 9,5 m na dobę, a prócz tego przeszło $\frac{3}{5}$ czasu zużytego na wiercenie musiano przeznaczyć na roboty wstępne (zakładanie rur itp.)

109. Sławny diament „Culinar“ ważył $3025\frac{3}{4}$ karatów, oblicz, ile g ważył ten diament i jaką miał objętość, jeżeli karat równa się 0,2 g, a 1 cm^3 diamentu waży $3\frac{1}{2}$ g.

110. Jeden m^2 powierzchni filtru (urządzenia służącego do oczyszczania wody) daje w godzinie $0,15 \text{ m}^3$ czystej wody. Oblicz, jak wielka powinna być łączna powierzchnia filtrów w mieście liczącym 80 000 mieszkańców, jeżeli na każdego mieszkańca wyznaczono 180 litrów wody na dobę.

111. W porcie pracują dwa dźwigi. Jeden mógłby przeładować na okręt przywieziony pociągiem surowiec w ciągu 8 godzin; drugi w ciągu

7 godzin. A. Jaką część całego ładunku przeładują obydwie dźwigi razem w ciągu jednej godziny? B. W jakim czasie przeładują cały surowiec?

112. Do przeładowania transportu zboża użyto dźwigu, przy czym czas przeładunku obliczono na dziesięć godzin. Ponieważ odjazd okrętu przyspieszono, po trzech godzinach użyto jeszcze drugiego dźwigu, który działając sam, mógłby dokonać przeładowania pozostałego zboża w ciągu ośmiu godzin. A. Jaką część ładunku przeładował pierwszy dźwig w ciągu początkowych trzech godzin? B. Jaką część ładunku przeładował w ciągu godziny drugi dźwig? C. W ilu godzinach ukończono ładowanie?

✓ 113. Najszybszy pociąg europejski z 1934 r. kursował między Londynem i Bristollem, przy czym drogę 124,2 km przebywał w przybliżeniu w ciągu 56,75 minuty. A. Ile km na godz. przebywał przeciętnie ten pociąg? B. W jakim czasie można by przejechać z tą samą szybkością odległość z Krakowa do Warszawy (około 340 km, II st. dokł.) C. Ile razy zwiększyła się szybkość pociągów od czasu pierwszej lokomotywy Stephensona jadącej z szybkością 22,5 km na godzinę? D. Wiedząc, że najszybszy pociąg francuski w 1934 roku miał szybkość o 24,9 km na godz. mniejszą od szybkości wymienionego pociągu angielskiego, oblicz, w jakim czasie pociąg przebywał drogę z Paryża do Jeumont, wynoszącą 237,9 km.

✓ 114. W następującej tabeli podano trzy grupy danych dotyczących rekordów szybkości z 1935 r. Oblicz w każdym wypadku szybkość w metrach na sekundę (w II st. dokł.)

- A. Pływanie (rekord amerykański) 100 m w czasie 56,6 sek.
Chód (rekord włoski) 1 km w czasie 3,6 min.
Bieg (rekord amerykański) 100 m w czasie 10,2 sek.
- B. Łyżwiarstwo (rekord norweski) 500 m w w czasie 42,5 sek.
Kolarstwo (rekord francuski) 500 m w czasie 29,8 sek.
- C. Motorówki (rek. amerykański) 1 mila geogr. w czasie 2,21 min.
Motocykle (rekord niemiecki) 1 km w czasie 14,6 sek.
Automobile (rekord angielski) 1 mila ang. w czasie 11,94 sek.
Aeroplany (rekord włoski) 3 km w czasie 15,21 sek.
(1 mila geograficzna = 7420 m; 1 mila ang. = 1609 m)

✓ 115. Statek handlowy posiada ładownie na towar o pojemności 8700 m^3 , a nośność (tj. największą ilość ton, jakie można na niego załadować) 6000 ton. Zapasy węgla, świeżej wody i żywność dla załogi umieszczone poza ładowniami ważą około 2100 ton. Kapitan chce przyjąć ładunek żelaza wynoszący $\frac{3}{4}$ i ładunek korka, wynoszący $\frac{1}{4}$

liczby ton, jakie można jeszcze załadować na statek. Oblicz, czy wystarczy miejsca na ten ładunek, jeżeli na 4 t żelaza trzeba 1 m^3 , a na 1 t korka 8 m^3 miejsca.

II.

Przypomnij sobie własności prostokąta.

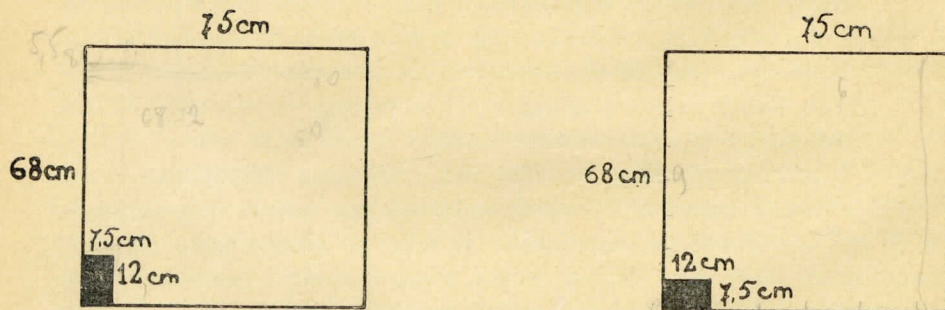
POWIERZCHNIĘ PROSTOKĄTA obliczamy mnożąc miary jego sąsiednich boków przez siebie.

116. Przy budowie szkoły rozszerzono salę gimnastyczną o $\frac{3}{10}$ jej dawnej długości i o $\frac{1}{5}$ jej dawnej szerokości. Oblicz powierzchnię podłogi w nowej sali gimnastycznej, jeżeli jej dawne wymiary były 8 m, 6 m, o ile m^2 powiększono podłogę sali szkolnej?

117. Polska ma prawo organizowania swej obrony na Bałtyku na tzw. „pasie wód przyległych” szerokości 6 mil morskich (1 mila = 1,852 km). Oblicz powierzchnię pasa wód przyległych w km^2 od granicy niemieckiej aż po koniec Helu przedstawiając ten pas jako prostokąt, którego długość równa się długości wybrzeża od granicy niemieckiej aż po Hel. (Zmierz tę odległość na mapie)

118. Każda strona w gazecie jest podzielona na cztery kolumny tzw. łamy. Szerokość łamu wynosi 6,8 cm. Oblicz, ile zł będzie kosztowało ogłoszenie w tej gazecie w kształcie prostokąta zajmującego na szerokość 2 łamy a wysokiego na 4,7 cm, jeżeli za 1 mm^2 płaci się. A. w dzień powszedni 0,02 zł; B. w święto 0,06 zł.

119. Do katalogu kartkowego potrzebne są nam prostokątne kartki sztywnego papieru w formacie tzw. międzynarodowym tj. o wymiarach 12,5 cm i 7,5 cm. Zbadaj, który z dwóch możliwych sposobów wycinania tych kartek z arkusza o wymiarach 75 cm, 68 cm jest oszczędniejszy (rys. 5)



Rys. 5

120. W rogach prostokątnego arkusza blachy o wymiarach $1\frac{1}{2} \text{ m}$, $1\frac{1}{3} \text{ m}$ mamy wyciąć 4 równe prostokąty tak, aby powierzchnia pozostałej figury wynosiła $\frac{3}{5}$ całego arkusza. Jakie wymiary dasz wyciętym prostokątom? Podaj kilka projektów

121. W Gdyni znajduje się urządzenie do przeładowywania węgla z prędkością 650 ton na godzinę. Oblicz:

A. ile ton można przeładować w ciągu minuty;

B. ile minut trwa wyładowanie pociągu złożonego z 9 węglarek, jeżeli długość węglarki jest 4,7 m, szerokość 2,7 m, a na 1 m^2 powierzchni dna przypada 08 tony węgla.

III.

Przypomnij sobie własności trójkąta.

POWIERZCHNIĘ TRÓJKĄTA obliczamy mnożąc miarę podstawy przez połowę miary wysokości wyprowadzonej do tej podstawy

122. Oblicz powierzchnię trójkąta, którego podstawa ma

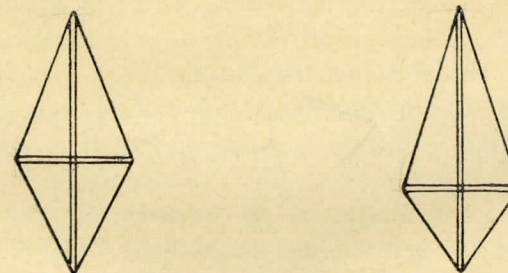
A. $4\frac{1}{3} \text{ cm}$, B. 6,03 m, a wysokość stanowi A. $\frac{2}{3}$; B. 0,5 podstawy

123. Oblicz powierzchnię trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają wymiary A. 2,25 m, $3\frac{2}{3} \text{ m}$, B. 4,5; 0,88 m.

124. W trójkącie prostokątnym o równych przyprostokątniach, przeciwprostokątnia równa się około 1,41 przyprostokątnej. Oblicz w przybliżeniu obwód i powierzchnię takiego trójkąta o przeciwprostokątnej 10 m.

125. Oblicz powierzchnię ekierki, jeżeli przyprostokątne trójkąta zewnętrznego mają wymiary 10 cm, 8 cm, przyprostokątne zaś trójkąta wewnętrznego stanowią $\frac{3}{4}$ odpowiednich przyprostokątnej trójkąta zewnętrznego.

126. Chłopiec zbił prostopadle dwa pręty długości 0,7 m, 0,3 m i zbudował z nich szkielet dla latawca. A. Oblicz powierzchnię latawca. B. Przekonaj się na dwóch przykładach, że ta powierzchnia nie zależy od tego, w którym miejscu chłopiec zbił pręty



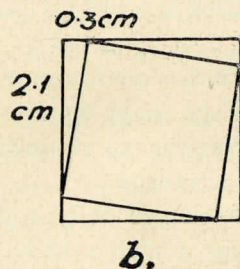
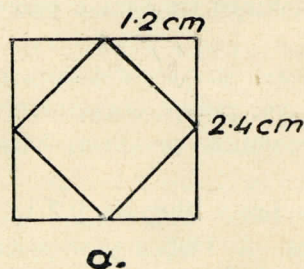
Rys. 6

****127** W trójkącie równobocznym wysokość równa się w przybliżeniu 0,87 podstawy. Oblicz powierzchnię A. trójkąta równobocznego o boku 2,3 cm, B. sześciokąta foremnego o boku 4,5 m, C. rombu, w którym kąt ostry równa się 60° , a bok 6,2 cm.

128. Oblicz powierzchnię trójkąta równobocznego o wysokości 10 cm (patrz z. 127)

129. Na lekcjach przyrody dowiedziałeś się, że pszczoły budują w ulu komórki, których przekrój poprzeczny jest sześciokątem foremnym. Sprawdź, że gdyby pszczoły budowały komórki innego kształtu, o przekroju będącym kwadratem lub trójkątem równobocznym, to zużywając tę samą ilość wosku, otrzymywałyby komórki o mniejszym przekroju i pojemności. W tym celu wykreśl trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny o równych obwodach np. 12 cm, oblicz ich powierzchnie i porównaj je (zobacz zad. 127)

130. W kwadracie o boku 2,4 dcm połączono A. środki sąsiednich boków (rys. 7 a); B. punkt na każdym boku odległy o 2,1 dcm od jednego wierzchołka z punktem na sąsiednim boku odległym od tego wierzchołka o 0,3 dcm (rys. 7 b) Oblicz powierzchnie powstałych w ten sposób wewnętrznych kwadratów. W którym wypadku ta powierzchnia jest większa?



Rys. 7

IV

Przypomnij sobie własności trapezu.

POWIERZCHNIĘ TRAPEZU możemy obliczyć dwoma sposobami:

A. dodajemy miary boków równoległych i sumę mnożymy przez połowę miary wysokości;

B. mnożymy miarę środkowej (tj. odcinka, łączącego środki nierównoległych boków) przez miarę wysokości.

131 Oblicz powierzchnię trapezu, w którym a) boki równoległe

wynoszą $3\frac{1}{2}$ cm, $2\frac{2}{3}$ cm; b) środkowa równa się 5,2 cm, wysokość zaś a) $4\frac{2}{3}$ cm, b) 3,5 cm.

132. Na mapie obszar Polski jest ograniczony figurą utworzoną przez południki $15,78^\circ$; $28,35^\circ$ i przez równoleżniki $55,85^\circ$; $47,73^\circ$. Figurę tę możemy uważać w przybliżeniu za trapez, którego środkową jest odcinek równoleżnika 52° (zobacz jakąkolwiek mapę Polski) Oblicz w przybliżeniu powierzchnię tego trapezu wiedząc, że 1° południka ma przeciętnie 111,3 km, a 1° na równoleżniku 52° około 68,1 km długości. Sprawdź, że powierzchnia Polski stanowi w przybliżeniu połowę powierzchni tego trapezu. (Obliczenie wykonaj w trzecim stopniu dokł.).

V

Przypomnij sobie własności koła.

PRZYBLIŻONY OBWÓD KOŁA obliczamy mnożąc miarę średnicy przez liczbę przybliżoną 3,14. Przybliżone pole koła obliczamy mnożąc miarę promienia przez siebie i przez liczbę przybliżoną 3,14 (III st. dokł.)

133. Oblicz obwód koła o promieniu A) $1\frac{1}{3}$ m; B) 0,81 m.

*134. Jaki musi być promień koła, aby obwód koła równał się A) 3,14 m; B) 31,4 m; C) 314 m?

135. Promień równika ziemi wynosi w przybliżeniu 6377 km. Oblicz, ile km ma mila morska, która równa się długości $\frac{1}{60}$ na równiku.

136. Poniżej zestawiono obwody niektórych starych drzew w Polsce pozostających pod ochroną:

świerki koło Suchej 4 m,
jodły w Nawojowej 7 m,
modrzew na górze Chełmowej 4,71 m,
sosny w województwie białostockim 4,70 m,
dęby w Rogalinie 9,25 m,
buk koło Kolna 6,70 m.

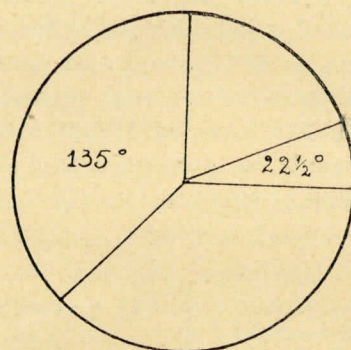
A. Oblicz, ilu uczniów w twoim wieku musiałyby stanąć obok siebie z rozpostartymi rękoma, aby razem objąć każde z tych drzew. (Zmierz rozwartość ramion przeciętnego wzrostem kolegi)

B. Oblicz w przybliżeniu (w trzecim st. dokł.) promień przekroju każdego z tych drzew i narysuj koło przedstawiające ten przekrój w skali 1:100.

C. Narysuj obok w takiej samej skali koło przedstawiające przekrój jednego z baobabów w Afryce o obwodzie 31,4 m.

137. Oblicz powierzchnię koła, którego promień ma około 3,25 m.

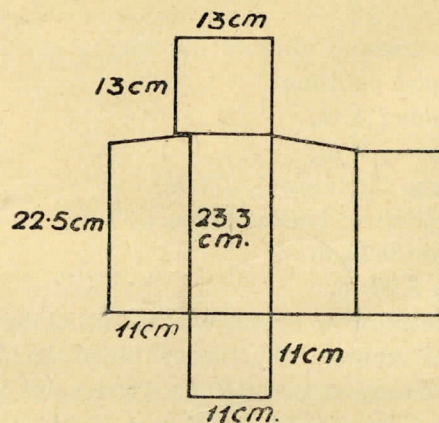
138. Oblicz powierzchnię wycinka koła (rys. 8) o promieniu 2 cm, który ma u wierzchołka kąt $22\frac{1}{2}^\circ$; 135°



Rys. 8

139. Oblicz powierzchnię wycinka koła o promieniu 10 cm, który powstanie, jeżeli z tego koła odetniesz półkole, a następnie wycinek stanowiący $\frac{2}{9}$ reszty

✓ 140. Rysunek 9 przedstawia siatkę drewnianej skrzynki, jakich wiele powinniście rozwieszać na drzewach dla ochrony najmniejszych ptaszków. Wymiary podane na rys. 9 (średnica otworu 3,3 cm). Oblicz



Rys. 9

ciężar takiej skrzynki, jeżeli ściany skrzynki sporządzono z deski, której 1 cm^2 waży 1,2 g.

✓ 141. Oblicz w km^2 powierzchnię oświetloną światłem latarni morskiej w Rozewiu nad Bałtykiem, jeżeli światło to jest widoczne na odległość około 23 mil morskich (patrz zad. 117), zakładamy, że powierzchnia oświetlona jest kołem o promieniu 23 mile.

VI.

Przypomnij sobie własności graniastoslupa.

OBJĘTOŚĆ GRANIASTOSŁUPA obliczamy mnożąc powierzchnię jego podstawy przez miarę wysokości.

POWIERZCHNIĘ GRANIASTOSŁUPA obliczamy dodając powierzchnię jego dwóch podstaw do powierzchni pobocznic.

✓ 142. Oblicz powierzchnię i objętość graniastoslupa, którego podstawa jest kwadratem o boku $3\frac{2}{5} \text{ cm}$, a wysokość wynosi $5\frac{3}{4} \text{ cm}$.

✓ 143. Oblicz powierzchnię i objętość sześcianu o boku

A. 3,5 dcm B. $2\frac{7}{8} \text{ dcm}$.

✓ 144. Chłopak rozwożący lód, przyniósł do sklepu prostopadłościenną bryłę lodu o podstawie kwadratowej, krawędź podstawy była równa w przybliżeniu 1,5 dcm, wysokość zaś bryły 5,0 dcm.

A. Jaki ciężar dźwigał chłopak, jeżeli 1 cm^3 lodu waży w przybliżeniu 0,917 g; B. ile l wody powstanie przez stopienie tego lodu, jeżeli z 1 g lodu powstaje 1 cm^3 wody.

✓ 145. Oblicz objętość graniastoslupa, którego podstawa jest trójkątem równobocznym o boku 5,5 cm, a którego wysokość wynosi 8,1 cm (patrz zad. 127)

VII.

Przypomnij sobie własności walca.

OBJĘTOŚĆ WALCA obliczamy mnożąc powierzchnię jego podstawy przez miarę jego wysokości.

POWIERZCHNIĘ WALCA obliczamy dodając do powierzchni obu jego podstaw powierzchnię pobocznic. *P o b o c z n i c a* po rozwinięciu jest prostokątem, przy czym podstawa tego prostokąta równa się obwodowi podstawy walca, a wysokość jego wysokości.

✓ 146. Oblicz powierzchnię i objętość walca, którego promień podstawy równa się A. 5,2 dcm; B. $3\frac{1}{2} \text{ dcm}$, wysokość zaś A. 10 dcm; B. $8\frac{7}{8} \text{ dcm}$.

✓ 147. W drukarni na walec obrotowy nawinięty jest papier drukarski. Ile m^2 papieru odwinie się po 250 obrotach walca, jeżeli szerokość papieru wynosi 68 cm, a promień walca 0,4 m.

148. Do basenu walcowego o promieniu $3\frac{1}{2}$ m wpływa woda z szybkością 50 l na minutę. Po ilu minutach woda podniesie się o $\frac{3}{5}$ m?

VIII.

POWIERZCHNIĘ KULI obliczamy mnożąc przez 4 powierzchnię koła o promieniu równym promieniowi kuli

149. Balon, w którym uczony belgijski Piccard pierwszy wznosił się na wysokość 16 km miał średnicy 30 m. 1 m^2 materiału, z którego była zrobiona powłoka balonu, wraz z przypadającym na 1 m^2 olinowaniem ważył około 0,064 kg. Gondola miała kształt kuli o promieniu 1,15 m i była wykonana z blachy aluminiowej, której 1 m^2 ważył 8,15 kg. Oblicz

A. powierzchnię i ciężar powłoki balonu (przyjmując, że balon miał kształt kuli),

B. ciężar gondoli pustej,

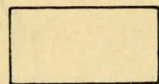
C. ciężar gondoli z instrumentami i pasażerami, jeżeli obciążenie gondoli stanowiło $\frac{17}{9}$ ciężaru gondoli pustej.

§ 15. ZMIANY ILOCZYNU I IŁORAZU

I.

Zagadnienie pomocnicze.

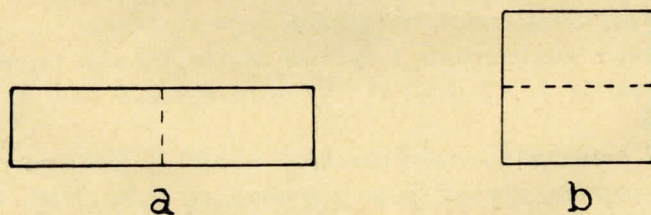
Dany jest prostokąt (rys. 10)



Rys. 10

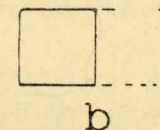
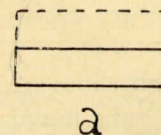
Odpowiedz na następujące pytania posługując się podanymi obok rysunkami

A. Jak zmieni się powierzchnia tego prostokąta, jeżeli jeden z jego boków pomnożymy przez 2, a drugiego nie zmienimy?



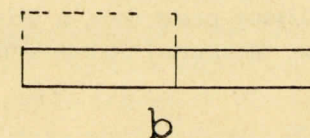
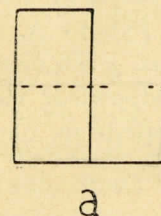
Rys. 11

B. Jak się zmieni powierzchnia tego prostokąta, jeżeli jeden jego bok podzielimy przez 2, a drugiego nie zmienimy?



Rys. 12

C. Jak się zmieni powierzchnia tego prostokąta, jeżeli jeden jego bok pomnożymy przez 2, a drugi podzielimy przez 2?



Rys. 13

Powierzchnia prostokąta jest *iloczynem* miar jego boków

Pytanie A. możemy zatem sformułować matematycznie: jak zmieni się iloczyn, jeżeli jeden z jego czynników pomnożymy przez jakąś liczbę?

Odpowiedz na to pytanie. Sformułuj podobnie pytania B. i C. i odpowiedz na nie.

II.

Podobne własności posiada każdy iloczyn, a mianowicie: jeżeli jeden czynnik iloczynu pomnożymy (podzielimy) przez jakąś liczbę, (w przypadku dzielenia różną od 0) nie zmieniając innych czynników, to tym samym pomnożymy (podzielimy) iloczyn tych czynników przez tę liczbę. Aby więc pomnożyć (podzielić) iloczyn przez liczbę, wystarczy pomnożyć (podzielić) jeden z jego czynników.

III.

Zagadnienie pomocnicze.

Pewną ilość jabłek trzeba rozdzielić równo między pewną liczbę dzieci. Przypuszczano, że każde dziecko otrzyma 12 jabłek. Odpo-

wiedz na następujące pytania jak zmieni się i ile wyniesie liczba jabłek otrzymanych przez każde dziecko, jeżeli okazało się, że:

- A. jabłek jest 2 razy więcej, niż pierwotnie obliczano;
 B. dzieci, którym trzeba rozdać jabłka jest 3 razy więcej niż przypuszczano,
 C. jabłek jest 6 razy mniej niż pierwotnie obliczano,
 D. dzieci, którym trzeba rozdać jabłka jest 4 razy mniej niż przypuszczano,
 E. liczba dzieci jest 2 razy większa, ale i liczbę jabłek zwiększono 2 razy;
 F. liczba dzieci jest 3 razy mniejsza, ale też rozdzielono 3 razy mniej jabłek.

Liczba jabłek, które otrzyma każde dziecko jest *ilorazem* liczby wszystkich jabłek (dzielna) i liczby dzieci (dzielnik). Pytanie A. możemy sformułować matematycznie jak zmieni się iloraz, jeżeli dzielną pomnożymy przez dwa, a dzielnika nie zmienimy? Odpowiedz na to pytanie. Sformułuj podobnie następne pytania i odpowiedz na nie.

IV

Każdy iloraz (liczb całkowitych czy ułamkowych) posiada podobne własności, a mianowicie

A. *Jeżeli dzielną pomnożymy (podzielimy) przez liczbę (różną od zera w wypadku dzielenia), a dzielnika nie zmienimy, to tym samym pomnożymy (podzielimy) iloraz przez tę liczbę.*

B. *Jeżeli dzielnik pomnożymy (podzielimy) przez liczbę różną od zera i nie zmienimy dzielnej, to tym samym podzielimy (pomnożymy) iloraz przez tę liczbę.*

C. *Jeżeli dzielnik i dzielną pomnożymy (podzielimy) przez liczbę różną od zera, to iloraz nie zmieni się.*

D. Aby więc pomnożyć iloraz, wystarczy pomnożyć dzielną lub podzielić dzielnik, aby podzielić iloraz, wystarczy podzielić dzielną lub pomnożyć dzielnik. (Reguła ta wynika z reguł A, B)

Zadania.

150. W tabelce w czwartej kolumnie wypisano iloczyn trzech nieznanymi nam czynników. W kolumnach I, II, III zaznaczono zmiany tych czynników, przy czym kropka (dwukropek) oznacza, że dany czynnik pomnożono (podzielono) przez liczbę po nim stojącą.

Oblicz iloczyn w każdym wypadku.

I-szy czynnik	II-gi czynnik	III-ci czynnik	Iloczyn
·3		·2	$2\frac{1}{2}$
10	2		
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	
$\frac{2}{5}$	·3		
5	20	5	

151. Ułóż zadanie, którego rozwiązanie polegałoby na obliczeniu zmiany iloczynu dwóch czynników, jeżeli A. jeden czynnik pomnożymy przez 2, a drugi przez 6, B. jeden czynnik pomnożymy przez $\frac{1}{2}$, a drugi podzielimy przez 8.

**152. Jak zmieni się powierzchnia kwadratu, jeżeli każdy jego bok pomnożymy przez 4, 3, $2\frac{1}{2}$?

**153. Jak zmieni się objętość sześcianu, jeżeli każdą jego krawędź podzielimy przez 2, 4, 3?

✓ 154. Ciężar przedmiotu w g jest iloczynem objętości w cm^3 przez ciężar 1 cm^3 w g (czyli ciężar właściwy). Kula metalowa waży $1\frac{1}{4}$ kg; ile waży kula, która ma A. 2 razy większą objętość i ten sam ciężar właściwy, B. tę samą objętość, a $1\frac{1}{5}$ razy większy ciężar właściwy?

✓ 155. Sumę zapłaconą za zakupione płótno obliczamy mnożąc ilość metrów płótna przez cenę 1 m płótna. Sztuka płótna kosztuje $30\frac{1}{20}$ zł; ile kosztuje sztuka płótna zawierająca

a) $\frac{1}{3}$ ilości metrów pierwszej sztuki po tej samej cenie,

b) $2\frac{3}{4}$ razy więcej metrów po cenie $2\frac{3}{4}$ razy mniejszej?

156. Jak zmienisz oba czynniki iloczynu, aby ich iloczyn a) pomnożyć przez 12, b) podzielić przez 20?

Podaj kilka rozwiązań. Odpowiedź sprawdź na przykładzie.

✓ 157. Pole prostokąta wynosi $26\frac{1}{8}$ m^2 . Jak zmienisz tzn. przez ile pomnożysz lub podzielisz jego boki, aby otrzymać prostokąt o polu 54 m^2 ?

158. W tabelce w trzeciej kolumnie u góry podano iloraz dwóch nieznanymi nam liczb. Uzupełnij tabelkę.

(Objaśnienie znaków w zadaniu 150)

Dzielna	Dzielnik	iloraz
3,1		25,5
	2,05	
0,5	·0,5	
7,5	·2,5	
3,2	0,02	

159. Ułóż zagadnienie, którego rozwiązanie polegałoby na obliczeniu, jak i o ile zmieni się iloraz, jeżeli dzielną pomnożymy przez 4, a dzielnik podzielimy przez 2.

160. Gęstość zaludnienia, czyli przeciętna liczba mieszkańców na km^2 jest ilorazem liczby ludności danego obszaru (dzielną) przez powierzchnię obszaru w km^2 (dzielnik). Gęstość zaludnienia Polski (dane z 1935 r.) wynosi około 86 mieszkańców na km^2 . Oblicz gęstość zaludnienia państw sąsiednich, Niemiec i Z. S. R. R. wiedząc, że liczba ludności Niemiec jest w przybliżeniu 2 razy większa od liczby ludności w Polsce, obszar zaś prawie $1\frac{1}{5}$ razy większy od obszaru Polski, liczba ludności zaś Z. S. R. R. jest w przybliżeniu 5 razy większa od liczby ludności Polski, obszar zaś 54 razy większy od obszaru Polski. (Wyniki obliczeń podawaj w drugim stopniu dokładności)

161 Jak zmieni się wartość ułamka, jeżeli A. licznik pomnożysz przez 5, a mianownik podzielisz przez 2, B. licznik podzielisz przez 2, a mianownik pomnożysz przez 10 C. licznik pomnożysz przez 5, a mianownik pomnożysz przez 3?

162. Jak zmienisz dzielną i dzielnik, aby:

A. ich iloraz pomnożyć przez 2,3, $3\frac{1}{2}$; 16;

B. ich iloraz podzielić przez 0,1, 2,5, 20.

Podaj kilka rozwiązań.

Odpowiedź swoją sprawdź na przykładzie.

ZNAKOWANIE LITEROWE

§ 16. WYRAŻENIA LITEROWE. OBLICZANIE WARTOŚCI LICZBOWEJ WYRAŻENIA LITEROWEGO

I.

Na lekcji geografii porównywano zaludnienie Polski z zaludnieniem sąsiednich państw. Przeglądając tablice statystyczne, jedna z uczennic zauważyła, że w roku 1930 liczba ludności Niemiec wynosiła tyle, co liczba ludności Polski, Czechosłowacji i Rumunii razem. Nauczyciel zapisał krótko na tablicy:

$$n = p + c + r$$

przy czym umówił się z uczennicami, że litera n oznacza liczbę ludności Niemiec, p — Polski, c — Czechosłowacji, r — Rumunii według

danych statystycznych z r 1930 ($n = 65\,000\,000$, $p = 32\,000\,000$, $r = 18\,000\,000$, $c = 15\,000\,000$)

Liczby możemy zapisywać *cyframi* (arabskimi lub rzymskimi), możemy je też dla wygody lub uproszczenia oznaczać *literami*. Musimy tylko dokładnie umówić się, które liczby oznaczamy danymi literami. W jednym i tym samym zagadnieniu dla uniknięcia nieporozumień nie będziemy nigdy oznaczać dwóch różnych liczb tą samą literą.

II.

Chłopcy bawili się w zgadywanie pomyślanych przez kolegów liczb. Dwaj chłopcy pomyśleli jakieś liczby, porozumieli się i oświadczyli pozostałym, że suma tych liczb wynosi 5, a różnica 1. Aby tej wiadomości nie zapomnieć, oznaczono większą z pomyślanych liczb literą x , mniejszą literą y i zapisano na tablicy

$$x + y = 5 \qquad x - y = 1$$

Po kilku próbach koledzy odgadli te liczby i zapisali je przy pomocy cyfr

$$x = 3 \qquad y = 2$$

Podobnie jak w tym przykładzie zdarza się często, że nie umiemy jakiejs liczby zapisać cyframi, znamy jednak jej niektóre własności. Wygodnie jest wtedy oznaczyć tę liczbę literą i wyrazić potrzebne nam wiadomości o tej liczbie krótko używając znaków matematycznych.

III.

Uczniowie zajmowali się na lekcji matematyki własnościami deltoidu (kształt deltoidu ma np. latawiec), obliczali jego obwód i powierzchnię rozmaitymi sposobami. Polecono im zrobić w domu latawce i obliczyć ich powierzchnię według najprostszego z omawianych na lekcji sposobów. Nauczyciel nie mógł oczywiście przewidzieć, jakie wymiary da każdy z chłopców swojemu deltoidowi, udzielił im tylko następujących wskazówek

„1. Zmierzysz długość jednej przekątnej i otrzymasz a cm, 2. zmierzysz długość drugiej przekątnej i otrzymasz b cm, 3. wykonasz obliczenie $\frac{1}{2} a \cdot b$. Otrzymany iloczyn będzie powierzchnią twojego latawca w cm^2 ”

Aby chłopcy nie zapomnieli tych wskazówek, nauczyciel napisał na tablicy *plan* czyli *wzór obliczenia*

$$p = \frac{1}{2} a \cdot b$$

oznaczając literą p powierzchnię deltoidu.

Każdy z chłopców wykonał w domu model latawca. Janek zmierzył przekątnie swego latawca i przekonał się, że *na jego modelu* $a = 20$, $b = 40$ (w centymetrach), wykonując obliczenie według podanego planu otrzymał

$$p = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 40 = 400 \text{ (w cm}^2\text{)}$$

Władek natomiast przekonał się, że na jego modelu $a = 26$; $b = 37$ (w cm), po obliczeniu stosował reguły działań przybliżeniami) otrzymał $p = 480$ (w cm^2) Modele innych chłopców miały jeszcze inne wymiary, otrzymali też różne wyniki obliczeń. Wyniki pomiarów i obliczeń kilku chłopców zapiszemy w sposób prosty w tabelce:

W z ó r o b l i c z e n i a.

Model	$p = \frac{1}{2} a \cdot b$		
	a (cm)	b (cm)	p (cm^2)
Janka	20	40	400 (przybl.)
Władka	26	37	480 (przybl.)
Stefana	18	23	210 (przybl.)
Józka	36	12	220 (przybl.)

IV

PLAN JAKIEGOŚ OBLICZENIA, w którym niektóre liczby zapisano cyframi, a niektóre literami, albo też wszystkie literami, nazywamy *wzorem lub wyrażeniem literowym*. Jeżeli liczby oznaczone literami zapiszemy przy pomocy cyfr i wykonamy zaznaczone w wyrażeniu działania, to otrzymamy w wyniku liczbę, którą umiemy już zapisać cyframi. Mówimy, że w miejsce liter *podstawiliśmy pewne wartości* i otrzymaliśmy, obliczoną przy tych wartościach liter, *wartość wyrażenia literowego*. Wzór służy do rozwiązywania wielu różnych zagadnień tego samego typu (np. do obliczania powierzchni różnych latawców, ponieważ wszystkie latawce są deltoidami) Nie układamy do każdego z nich osobnego planu z innymi literami, ponieważ 1) wszystkie rozwiązujemy według tego samego planu; 2) w każdym z tych zagadnień *osobno* litera oznacza jedną jedną liczbę, więc nieporozumień być nie może.

Z a d a n i a.

1. Zapisz krótko przy pomocy znaków matematycznych wyrażenia:
A. Suma liczb m, n, s, t, różnica liczb x i y;

B. iloczyn liczb p, r, s, iloraz liczby a przez b.

2. Zapisz przy pomocy znaków matematycznych następujące wiadomości o liczbach oznaczonych literami. Podaj przykłady zapisujące liczby także cyframi

- A. suma liczb a i b równa się różnicy liczb x i a,
- B. liczba a jest o 2 większa od liczby b,
- C. liczba x jest 5 razy większa od liczby y;
- D. liczba d jest o 3 mniejsza od liczby c,
- E. liczba c jest połową liczby y,
- F. liczba x stanowi $\frac{1}{5}$ liczby y

3. W następujących przykładach oznaczono pewne liczby literami. Odgadnij je i zapisz cyframi

- A. $a + 3 = 5$; $c + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$; $b - 2 = 7$; $f - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$;
- B. $9 - d = 3$; $8 - k = 7\frac{1}{4}$; $a : 5 = 10$; $x : 2 = 3$;
- C. $g : 3 = 6$; $m \cdot \frac{1}{2} = 4$; $8 : l = 4$; $l : 8 = \frac{1}{5}$.

W następujących zadaniach znajdziesz gotowe wzory obmyślane przez matematyków. Skorzystaj z tych wzorów podstawiając w miejsce liter podane w zadaniu lub wybrane przez siebie wartości. Sporządź tabelkę (jak w § 16. III), w której zapisz, jakie liczby wstawiłeś w miejsce liter i jaka jest przy tym podstawieniu wartość wyrażenia literowego podanego w zadaniu.

✓ 4. Przybliżoną długość boku a pięciokąta foremnego wpisanego w koło o promieniu r obliczamy według wzoru $a = 1,18 r$; przybliżoną zaś powierzchnię p według wzoru $p = 2,38 \cdot 2r r$ (a, r w tych samych jednostkach, p w odpowiadających jednostkach kwadratowych, 1,18, 2,38 są przybliżeniami)

A. Oblicz długość boków pięciokątów foremnych wpisanych w koła o promieniach 10 cm, 5 dm, 3 m.

B. Oblicz powierzchnię tych pięciokątów

✓ 5. Przybliżoną długość boku b dziesięciokąta foremnego wpisanego w koło o promieniu r obliczamy według wzoru $b = 0,6 r$, powierzchnię zaś p według wzoru $p = 2,9 r r$ (0,6 i 2,9 są przybliżeniami)

Oblicz obwody i powierzchnie dziesięciokątów foremnych wpisanych w koła o promieniach 2,5 cm, 5 cm (b i r w tych samych jednostkach, p w odpowiednich jednostkach kwadratowych)

✓ 6. Przybliżoną powierzchnię p kuli o promieniu r obliczamy według wzoru $p = r \cdot r \cdot 3,14 \cdot 4$ (3,14 jest przybliżeniem).

A. Oblicz w przybliżeniu powierzchnię kuli ziemskiej ($r=6377$ km)

B. Oblicz powierzchnię globusa o promieniu $r=1,5$ dm (p w jednostkach kwadratowych odpowiadających jednostkom, w jakich wyrażono r)

7 Przybliżoną objętość V kuli o promieniu r obliczamy według wzoru $V=r \cdot r \cdot r \cdot 3,14 \cdot \frac{4}{3}$. Oblicz objętość kul o promieniach 2 cm, 0,7 dm.

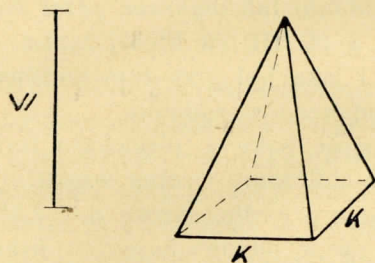
(V w jednostkach sześciennych odpowiadających jednostkom, w których wyrażono r)

8. Objętość V piramidy o podstawie kwadratowej (rys. 14), której krawędź podstawy ma długość k , a wysokość ma miarę w , obliczamy według wzoru $V = \frac{1}{3} k \cdot k \cdot w$. Oblicz objętość takich piramid o wymiarach:

A. $k=2,5$ cm, $w=10$ cm,

B. $k=1\frac{3}{4}$ dm; $w=5$ dm.

(k i w w tych samych jednostkach, V w odpowiednich jednostkach sześciennych)



Rys. 14

9. Drogę s (metrów) przebytą przez puszczoney i swobodnie spadający przedmiot w ciągu t (sekund) obliczamy w przybliżeniu według wzoru $s = 4,9 t^2$ ($4,9$ jest przybliżeniem)

Korzystając z tego wzoru rozwiąż następujące zadania

A. Kamień spadał 1,5 sek., jaką drogę przeleciał?

B. Chcąc zmierzyć głębokość pustej studni, upuściliśmy do niej kamień, po 2,5 sekundach usłyszeliśmy uderzenie kamienia o dno studni. Jaka jest głębokość studni? (czas, w którym głos dochodzi do nas od dna studni jest bardzo krótki i nie uwzględniamy go w tym rachunku).

§ 17 ZASADY KORZYSTANIA Z WZORÓW

Kolejność działań. Ograniczenie znaczenia liter

I.

Sławny matematyk Legendre podał następujący wzór na obliczanie liczb pierwszych

$$y = 29 + 2 \cdot x \cdot x$$

zaznaczając, że po podstawieniu na x liczby całkowitej mniejszej niż 29, liczba y obliczona według tego planu będzie liczbą pierwszą.

Janek chciał skorzystać z tego wzoru, podstawił $x = 4$ i wykonał obliczenie $29 + 2 \cdot 4 \cdot 4$ tak

$$29 + 2 = 31, \quad 31 \cdot 4 = 124, \quad 124 \cdot 4 = 496.$$

Otrzymał $y = 496$, a więc liczbę złożoną, bo parzystą.

Janek przypuszczał wobec tego, że Legendre podał fałszywy wzór na obliczenie liczb pierwszych. Spróbujmy wykorzystać ten wzór wykonując obliczenie w innym porządku, mianowicie tak

$$2 \cdot 4 \cdot 4 = 32; \quad 29 + 32 = 61.$$

Otrzymaliśmy $y = 61$, a więc liczbę pierwszą.

W obu wypadkach rachunki wykonano poprawnie, ale zastosowano inny porządek działań. Legendre podając wzór, myślał o drugim sposobie obliczania. Ażeby przy korzystaniu z wzorów uniknąć takich nieporozumień, ustalono pewne ogólne reguły dotyczące kolejności wykonywania działań. Zapoznaj się z nimi

A. Jeżeli w jakimś planie działań, czyli wyrażeniu nie ma nawiasów, to wartość takiego wyrażenia obliczamy wykonując najpierw wszystkie mnożenia, potem wszystkie dzielenia, a w końcu dodawania i odejmowania kolejno od strony lewej ku prawej.

$$8 + 2 \cdot 6 \cdot 4 - 5 = 8 + 12 \cdot 4 - 5 = 8 + 3 \cdot 5 = 6.$$

B. Jeżeli w wyrażeniu występują nawiasy, to wykonujemy najpierw działanie w nawiasie, który wewnątrz nie zawiera już innych nawiasów.

$$\begin{aligned} \text{Np. } & 2 \cdot 18 - [4 - (1,2 - 0,2)] \cdot 3 = \\ & = 2 \cdot 18 - [4 - 1] \cdot 3 = \\ & = 2 \cdot 18 - 3 \cdot 3 = 36 - 3 \cdot 3 = 36 - 9 = 27. \end{aligned}$$

Cheąc zatem zaznaczyć w planie, że działania mają być wykonane niezgodnie z regułą A. możemy użyć nawiasów

C. KRESKA UŁAMKOWA zastępuje znak dzielenia, przy tym dla wykonania tego dzielenia najpierw obliczamy wartość licznika, potem mianownika, następnie wykonujemy zaznaczone kreską dzielenie, w końcu inne działania według reguł A. i B. Np.

$$10 \quad \left(3 + \frac{2 \cdot 5 - 4}{\frac{1}{2} \cdot 3}\right) \cdot 5 = 10 - \left(3 + \frac{6}{\frac{1}{6}}\right) \cdot 5 =$$

$$= 10 - (3 + 36) \cdot 5 = 10 - 39 \cdot 5 = 10 - 7\frac{4}{5} = 2\frac{1}{5}.$$

II.

Zagadnienie pomocnicze.

Władek chciał skorzystać ze wzoru Legendre na obliczenie liczb pierwszych i wstawił w miejsce litery x liczbę 29, otrzymał po obliczeniu $29 + 2 \cdot 29 = 29 + 1682 = 1711$, ale 1711 jest podzielne przez 29 (spróbuj), a więc nie jest liczbą pierwszą. Jaki błąd popełnił Władek? (przeczytaj dokładnie początek § 17 I)

III.

Zagadnienie pomocnicze.

Ciężar netto obliczamy według wzoru $n = b - t$ (b—brutto; t—tara) Ktoś przyjął $b = 10$, $t = 12$. Czy może wykonać obliczenie według wzoru? Dlaczego?

IV

Zagadnienie pomocnicze.

Jeżeli przez s oznaczymy pewną sumę zł wypłaconą samymi pięciozłotówkami, to ilość p tych pięciozłotówek obliczymy według wzoru $p = s : 5$.

Czy można w miejsce s podstawić 27, 53, 60, 100? Dlaczego?

KORZYSTAJĄC Z DANEGO CI WZORU, pamiętaj o następujących zasadach:

A. stosuj dokładnie reguły kolejności działań, które podano w § 17 I,

B. jeżeli podając wzór, podano także jakieś warunki dodatkowe co do znaczenia liter (jak np. przy wzorze Legendre) podstawiaj w miejsce liter liczby zgodnie z tymi warunkami. Autor wzoru ręczy

za poprawny wynik stosowania tego wzoru tylko wtedy, jeżeli ty uwzględniś jego wskazówki,

C. jeżeli dodatkowych warunków nie ma, podstawiaj tylko takie liczby, na których działania zaznaczone we wzorze możesz wykonać i przy których otrzymana z obliczenia liczba będzie miała, odpowiadając treści zadania, praktyczne znaczenie.

Zadania.

10. Wykonaj obliczenia według planu

A. $\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$; B. $3,5 \quad 2,1 + 1,1 \quad 1,8$.

11. Oblicz wartość wyrażeń literowych dla podanych wartości liter:

✓ A. $a \quad b \quad c + d$, $a = 10\frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = \frac{2}{3}$, $d = 2\frac{4}{5}$,
 ✓ B. $a \quad c \quad b - d$; $a = 8,5$, $b = 2,3$; $c = 1,1$, $d = 0,8$.

12. Wykonaj obliczenia według planów

*A. $3 \cdot 4 - 2$; $13 \quad 4 \cdot 2$, $8 \quad 6 \cdot 2$, $9 + 6 \cdot 2 \cdot 3$,
 ✓ B. $\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{1}{5} \cdot 4$, $8,5 \quad 2 \quad 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 1,2$
 ✓ C. $2 \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{4}{9}$, $8 \quad 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3}$, $19 - 2,5 \cdot 0,2$;
 ✓ D. $2\frac{1}{2} \cdot 0,5 \quad 2,3 \cdot 5$, $8 \quad 3 \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5}$,
 E. $2 \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 3$, $8\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 + 5$, $9,5 \cdot 2 \quad 1,5 \cdot 2 \cdot 4$.

✓ 13. Oblicz wartość wyrażeń literowych dla podanych wartości liter:

A. $a + b \cdot c$, B. $a \cdot b + c$, C. $a \cdot b + c \cdot d$; D. $a \cdot b \cdot d$,
 $a = 2\frac{1}{2}$ (0,3); $b = 3,2$ ($1\frac{1}{3}$), $c = 0,8$ ($\frac{2}{5}$), $d = \frac{3}{4}$ (0,3).

14. Drut (nitka) o przekroju 1 mm^2 , na którym zawieszono ciężar, wydłuża się. Wydłużenie drutu l zależy od długości drutu L przed obciążeniem i od ciężaru P , jaki na nim zawiesimy. Obliczamy je według wzorów

A. $l = L \cdot P \quad 21\,000$ (dla drutu stalowego)

B. $l = L \cdot P \quad 0,80$ (dla nici kauczukowej)

l i L wyrażamy w tych samych jednostkach długości, P w kg

Korzystając z tych wzorów oblicz, o ile cm wydłuży się drut stalowy długości 2,5 m przy obciążeniu 20 kg; o ile cm wydłuży się nieć kauczukowa długości 2 m przy obciążeniu 0,008 kg.

*15. Liczba l wyznaczona z wzoru $l = 1 + 8 \cdot n$, gdzie n oznacza liczbę całkowitą, jest liczbą nieparzystą. Sprawdź to obierając pięć różnych liczb na n .

16. Sprawdź wstawiając za a , b , c liczby całkowite mniejsze niż 10, że liczba x obliczana według wzoru $x = 100\,000 \cdot a + 10\,000 \cdot c + 1000 \cdot b + 100 \cdot b + 10 \cdot c + 1 \cdot a$ jest podzielna przez 11

17. Sprawdź wstawiając we wzorach $y = x \cdot x - 9$ i $z = x - 3$ w miejsce x jakąkolwiek liczbę całkowitą większą niż 3, że liczba y dzieli się przez liczbę z bez reszty

18. Przekonaj się wstawiając za a , b , n wybrane przez siebie liczby, że kwadrat podany niżej jest magiczny tzn. że sumy liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie i po każdej przekątnej są równe. Dobierając na a , b , n różne grupy wartości, możesz zbudować tyle kwadratów magicznych, ile zechcesz.

3	$a + 3$	b	6	b	3	$n - 3$	a
4	n	6	a	$n + 3$	6	$a + 6$	$b - 2$ n
3	$a + 6$	$b - n$	2	n	2	$n + 3$	$b - 3$ a

19. Sprawdź na kilku przykładach, że wartość wyrażenia $x + 1 \cdot x$ dla jakiejś wartości na x równa się wartości tegoż wyrażenia dla odwrotności tej wartości na x .

20. Pręt metalowy lub szklany pod wpływem ogrzania wydłuża się. Długość l pręta po ogrzaniu zależy od długości L pręta przed ogrzaniem i od tego, o ile stopni (t) ogrzaliśmy pręt. Długość pręta po ogrzaniu obliczamy według wzorów

A $l = 0,0000244 \cdot L \cdot t + L$ (dla pręta aluminiowego)

B $l = 0,0000080 \cdot L \cdot t + L$ (dla pręta szklanego)

l L w tych samych jednostkach)

Oblicz, ile cm długości będzie miał pręt aluminiowy długości $1\frac{1}{2}$ m po ogrzaniu o 20° , pręt szklany długości $0,4$ m po ogrzaniu o $35,5^\circ$

21. Wykonaj obliczenia według następujących planów:

- *A. $10 + 4 \cdot 2$, $(10 + 4) \cdot 2$; $25 \cdot 5 \cdot 2$, $(25 \cdot 5) \cdot 2$,
 ✓ B. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}$, $\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}) \cdot \frac{4}{5}$
 ✓ C. $0,8 \cdot 2 \cdot 0,1$, $(0,8 \cdot 2) \cdot 0,1$,
 ✓ D. $4,5 \cdot 0,9 \cdot 5 \cdot 3$; $(4,5 \cdot 0,9) \cdot (5 \cdot 3)$,
 *E $9 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2$; $9 \cdot (2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2)$,
 $9 \cdot (2 \cdot 3 + 4 \cdot 5) - 3 \cdot 2$;
 F. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \{2 \cdot 2 (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4})\} \cdot 5$, $10 - (\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}) \cdot \{4 - 2[(\frac{1}{2} \cdot 2) \cdot \frac{1}{3}]\}$;

✓ G. $\{[4,8 + 2,01) \cdot 11 - 0,1) - 3,1] \cdot 5\} \cdot 2$,

✓ H. $[8,52 + (4,5 + 1\frac{1}{2} \cdot (2,7 - 0,3))] \cdot (3 - 2 \cdot 0,5)$,

✓ *I. $5 + \frac{4 + 2 \cdot 3}{8}$; $3 \cdot \frac{1 + 3}{5}$; $\frac{4 + 1}{6 + 1} \cdot \frac{10}{2 \cdot 5 + 4}$;

✓ *J. $\frac{3 + 5}{7} \cdot \frac{1}{4 + 2}$; $\frac{3 + 2 \cdot 4}{5}$, $\frac{4 \cdot 5 + 2}{5 \cdot 5}$;

✓ K. $\frac{3\frac{1}{3}}{4\frac{3}{5}} - \frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{2}{3}} + 2\frac{2}{3} \cdot 5$; $\frac{8 - 7\frac{2}{3}}{2 - 1\frac{1}{3}} : 3\frac{1}{2}$;

✓ L. $\frac{1}{2} + 3 \cdot (\frac{1}{\frac{1}{2} + 3\frac{1}{5}} : 2)$; $\frac{1}{2} + 3) \cdot (\frac{1}{\frac{2}{3} + 3\frac{4}{7}} : 2)$;

✓ L. $(2 \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}}) \cdot (1 + \frac{2 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}})$; $4 \cdot (3 \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{2})$

22. Oblicz wartości wyrażeń literowych:

*A. $a + 2 \cdot b + 3 \cdot c - (b + c)$, $a = 5$, $b = 3$, $c = 2$,

B. $(a + b) \cdot (a - b)$, $a = a - b$, $b = a - \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$,

C. $\frac{a + 3 \cdot b}{2 \cdot a - c} + 1$; $\frac{a + b}{2} \cdot \frac{5}{a \cdot b}$; $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$; $c = \frac{1}{3}$

D. $\frac{2 \cdot x + 3 \cdot y}{\frac{2}{3} \cdot x - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{2}{3} \cdot x}{2 \cdot x + 3 \cdot y} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot y}{y}$; $x = 3$, $y = \frac{1}{3}$;

✓ E. $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) \cdot \frac{x \cdot y}{x \cdot y}$; $x = 0,9$; $y = 0,8$.

✓ 23. Jeżeli przez n oznaczymy ilość boków w wielokącie, to ilość p przekątnej tego wielokąta możemy obliczyć według wzoru

$$p = \frac{n(n-3)}{2}$$

A. Sprawdź poprawność tego wzoru na rysunku dla czworokąta, pięciokąta i sześciokąta.

B. Oblicz liczbę wszystkich przekątnej, jakie można poprowadzić w dwunastokącie.

✓ 24. Jeżeli przez n oznaczymy liczbę naturalną, to sumę S liczb naturalnych od 1 aż do n włącznie obliczamy według wzoru.

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

A. Sprawdź słuszność tego wzoru dla sumy

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

B. Oblicz sumę stu początkowych liczb naturalnych.

✓ 25. Jeżeli a i b oznaczają dwie liczby, przy czym a jest mniejsze od b , to liczba p obliczona z wzoru:

$$p = \frac{a + b}{2}$$

jest o tyle większa od liczby a , o ile mniejsza od b . Liczbę p nazywamy średnią arytmetyczną liczb a i b . Korzystając z tego wzoru, oblicz średnią arytmetyczną par liczb

A. 8, 12, B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$; C. 2, 3.

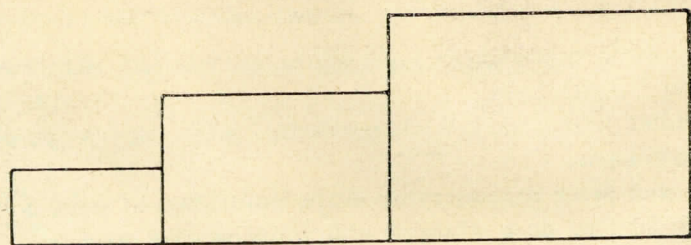
Sprawdź, czy obliczone przez ciebie liczby mają wspomnianą w temacie własność.

26. Rysunek 15 przedstawia „schodki” utworzone z nierównych prostokątów, przy czym pierwszy ma wymiary 1 cm, 2 cm, drugi 2 cm, 3 cm, trzeci 3 cm, 4 cm itd., czyli że boki każdego następnego prostokąta są o 1 cm większe od odpowiednich boków prostokąta poprzedniego. Jeżeli liczbę tych prostokątów oznaczmy literą m , to sumę powierzchni tych prostokątów możemy obliczyć według wzoru

$$p = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}$$

A. Sprawdź poprawność tego wzoru obliczając powierzchnię trzech takich prostokątów według rysunku i według wzoru.

B. Oblicz według wzoru sumę powierzchni dziesięciu takich prostokątów



Rys. 15

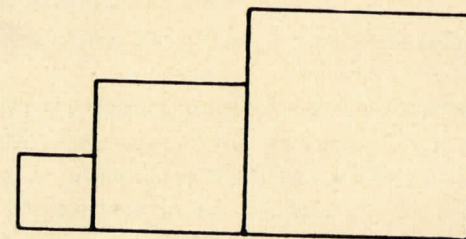
27 Rysunek 16 przedstawia „schodki” utworzone z kwadratów. Bok pierwszego kwadratu wynosi 1 cm, drugiego 2 cm, trzeciego 3 cm itd.

Jeżeli liczbę kwadratów oznaczmy przez n , to sumę ich powierzchni obliczymy według wzoru

$$S = \frac{n(n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

A. Sprawdź poprawność tego wzoru obliczając powierzchnię trzech takich kwadratów według rysunku i według wzoru.

B. Oblicz korzystając ze wzoru powierzchnię schodków utworzonych z 12 takich kwadratów



Rys. 16

28. Sprawdź przez podstawienie za x jakiejś liczby napisanej cyframi, że liczba x większa niż 1 i liczba y obliczona według wzoru

$$y = \frac{x}{x-1}$$

mają tę własność, że suma ich równa się ich iloczynowi. Podaj trzy przykłady

29. Jeżeli przez n oznaczmy ilość osób przebywających w jakimś lokalu, a przez V objętość tego lokalu w m^3 , to najdłuższy okres czasu t , w którym bez szkody dla zdrowia można lokalu nie wietrzyć, obliczamy według wzoru zaczerpniętego z nauki higieny

$$t = \frac{V}{5n} \text{ godzin.}$$

Oceń objętość twojej klasy i oblicz, co jaki okres czasu powinniście wietrzyć klasę.

30. Przybliżoną objętość stożka ściętego (rys. 17) obliczamy według wzoru

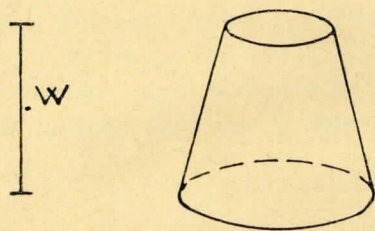
$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + R \cdot r + r^2)$$

gdzie h oznacza wysokość stożka, R promień największego koła, r pro-

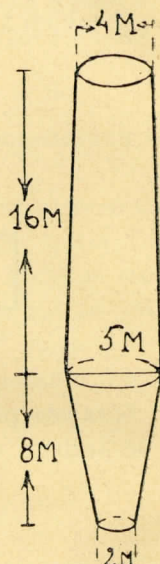
mień najmniejszego koła. (R , r i w w tych samych jednostkach, V w odpowiednich jednostkach sześciennych)

A. Oblicz objętość takiego stożka, jeżeli $R = 3,5$ cm, $r = 2,1$ cm, $w = 5$ cm.

B. Korzystając z podanego wzoru, oblicz objętość pieca hutniczego, którego schemat i wymiary podano na rys. 18.



Rys. 17



Rys. 18

§ 18. UKŁADANIE WZORÓW

Korzystałeś dotąd z wzorów ułożonych przez matematyków i inżynierów. Możesz także sam ułożyć różne pożyteczne dla siebie i innych wzory rozwiązując zagadnienia, w których pewne liczby oznaczysz literami.

P r z y k ł a d

Opierając się np. na zad. 127 § 14 poprzedniego rozdziału możemy ułożyć wzór na przybliżoną powierzchnię trójkąta równobocznego w zależności od boku tego trójkąta tzn. możemy ułożyć wzór, według którego znając miarę boku trójkąta, łatwo można obliczyć jego powierzchnię.

W tym celu oznaczmy miarę boku trójkąta literą a .

Według zadania 127 wysokość tego trójkąta równa się w przybliżeniu $0,87 a$. Ponieważ powierzchnię trójkąta obliczamy mnożąc miarę podstawy przez połowę miary wysokości, więc przybliżona powierzchnia trójkąta równobocznego o boku a będzie.

$$p = a (0,87 a 2)$$

Z a d a n i a.

31 Zapisz następujące wiadomości o liczbach oznaczonych literami i odgadnij te liczby

A. liczbę a pomnożono przez 2, do iloczynu dodano 6 i otrzymano 20,

✓ B. liczbę x pomnożono przez x , do otrzymanego iloczynu dodano 5 i otrzymano 9;

✓ C. od liczby y odjęto 7, a następnie dodano 9 i otrzymano 12.

32. Zapisz następujące plany działań

✓ A. od liczby x odjęto liczbę y ; otrzymaną różnicę pomnożono przez 3, a od ostatniego iloczynu odjęto a ;

✓ B. do liczby w dodano iloczyn liczb z i s , a otrzymaną sumę podzielono przez 2,

✓ C. sumę liczb s i t pomnożono przez różnicę liczb w i k ;

D. od liczby a odjęto różnicę liczb b i c , a otrzymaną różnicę pomnożono przez k .

33. Zapisz znakami matematycznymi następujący plan działań:

A. Pomnóż liczbę a przez 2; do iloczynu dodaj b , do otrzymanej sumy dodaj różnicę liczb a i b .

✓ B. Przekonaj się zapisując liczby oznaczone literami przy pomocy cyfr, że w wyniku otrzymasz liczbę $3 \cdot a$.

Wykonaj kilka obliczeń.

✓ C. Korzystając z tego wniosku, możesz zabawić się w odgadywanie cudzych myśli. Niechaj kolega twój pomyśli dwie liczby a i b , nie mówiąc ci jakie; niech wykona w myśli obliczenia według planu oznaczonego w A. i poda ci tylko ostateczny wynik obliczenia. Trzecia część podanej przez twego kolegę liczby jest pomyślaną przez niego liczbą a .

34. Pola, obwody, objętości.

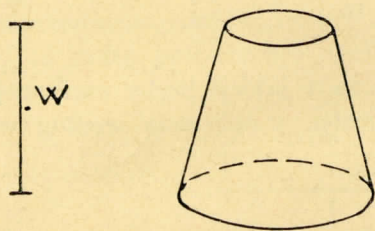
Opierając się na regułach obliczania powierzchni i objętości z § 14 poprzedniego rozdziału ułóż wzór na:

A. obwód i pole prostokąta oznaczając miary jego boków przez a i b ,

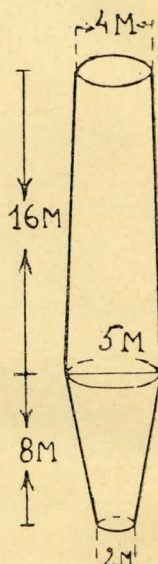
mień najmniejszego koła. (R , r i w w tych samych jednostkach, V w odpowiednich jednostkach sześciennych)

A. Oblicz objętość takiego stożka, jeżeli $R = 3,5$ cm, $r = 2,1$ cm, $w = 5$ cm.

B. Korzystając z podanego wzoru, oblicz objętość pieca hutniczego, którego schemat i wymiary podano na rys. 18.



Rys. 17



Rys. 18

§ 18. UKŁADANIE WZORÓW

Korzystałeś dotąd z wzorów ułożonych przez matematyków i inżynierów. Możesz także sam ułożyć różne pożyteczne dla siebie i innych wzory rozwiązując zagadnienia, w których pewne liczby oznaczysz literami.

P r z y k ł a d.

Opierając się np. na zad. 127 § 14 poprzedniego rozdziału możemy ułożyć wzór na przybliżoną powierzchnię trójkąta równobocznego w zależności od boku tego trójkąta tzn. możemy ułożyć wzór, według którego znając miarę boku trójkąta, łatwo można obliczyć jego powierzchnię.

W tym celu oznaczmy miarę boku trójkąta literą a .

Według zadania 127 wysokość tego trójkąta równa się w przybliżeniu $0,87 \cdot a$. Ponieważ powierzchnię trójkąta obliczamy mnożąc miarę podstawy przez połowę miary wysokości, więc przybliżona powierzchnia trójkąta równobocznego o boku a będzie

$$p = a \cdot (0,87 \cdot a \cdot 2)$$

Z a d a n i a.

31. Zapisz następujące wiadomości o liczbach oznaczonych literami i odgadnij te liczby

A. liczbę a pomnożono przez 2, do iloczynu dodano 6 i otrzymano 20,

✓ B. liczbę x pomnożono przez x , do otrzymanego iloczynu dodano 5 i otrzymano 9;

✓ C. od liczby y odjęto 7, a następnie dodano 9 i otrzymano 12.

32. Zapisz następujące plany działań

✓ A. od liczby x odjęto liczbę y , otrzymaną różnicę pomnożono przez 3, a od ostatniego iloczynu odjęto a ;

✓ B. do liczby w dodano iloczyn liczb z i s , a otrzymaną sumę podzielono przez 2,

✓ C. sumę liczb s i t pomnożono przez różnicę liczb w i k ;

D. od liczby a odjęto różnicę liczb b i c , a otrzymaną różnicę pomnożono przez k .

33. Zapisz znakami matematycznymi następujący plan działań:

A. Pomnóż liczbę a przez 2; do iloczynu dodaj b , do otrzymanej sumy dodaj różnicę liczb a i b .

✓ B. Przekonaj się zapisując liczby oznaczone literami przy pomocy cyfr, że w wyniku otrzymasz liczbę $3 \cdot a$.

Wykonaj kilka obliczeń.

✓ C. Korzystając z tego wniosku, możesz zabawić się w odgadywanie cudzych myśli. Niechaj kolega twój pomyśli dwie liczby a i b , nie mówiąc ci jakie; niech wykona w myśli obliczenia według planu oznaczonego w A. i poda ci tylko ostateczny wynik obliczenia. Trzecia część podanej przez twego kolegę liczby jest pomyślaną przez niego liczbą a .

34. Pola, obwody, objętości.

Opierając się na regułach obliczania powierzchni i objętości z § 14 poprzedniego rozdziału ułóż wzór na

A. obwód i pole prostokąta oznaczając miary jego boków przez a i b ,

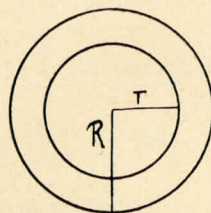
B. pole trójkąta oznaczając miarę jego podstawy przez a , wysokości przez w ;

C. obwód i pole sześciokąta foremnego oznaczając miarę jego boku przez a (zob. § 14 zad. 127 B.),

D. pole trapezu oznaczając miary jego boków równoległych a , b , wysokości w , środkowej s ,

E. obwód i pole koła o promieniu r ;

F. pole pierścienia kołowego o promieniach R , r (rys. 19)



Rys. 19

G. objętość i powierzchnię sześcianu o boku a ,

H. powierzchnię i objętość walca, jeżeli miarę promienia podstawy oznaczymy r , a wysokości w .

35. *Zmiana jednostek miary.*

A. Ile cm, mm, dm, km długości ma odcinek równy a metrów?

B. Ile g, dkg, q, t waży przedmiot, którego ciężar wynosi s kg?

C. Ile cm^2 , mm^2 , dm^2 , km^2 powierzchni ma wielokąt, którego powierzchnia wynosi $x \text{ m}^2$?

D. Ile cm^3 , dm^3 , m^3 objętości ma bryła, której objętość wynosi p litrów?

E. Ile m^2 zawiera b morgów, jaką część morga stanowi $a \text{ m}^2$?

F. Ile km długości ma t mil geograficznych? (Uwaga w zad. 114. § 14)

36. *Wysokość względna i bezwzględna.*

A. Ułóż wzór na obliczenie wysokości bezwzględnej góry w), jeżeli wysokość względna wynosi x metrów, a wzniesienie podnóża góry nad poziom morza r metrów. Korzystając z tego wzoru oblicz wysokość bezwzględną Giewontu, jeżeli wysokość bezwzględna Zakopanego wynosi 837 m, a wzniesienie Giewontu nad Zakopane 1063 m.

B. Przy oznaczeniach przyjętych w A. ułóż wzór na obliczenie względnej wysokości góry w zależności od wysokości bezwzględnej podnóża i wysokości bezwzględnej góry. Skorzystaj z tego wzoru

i oblicz wysokość względną Sowińca, jeżeli jego wysokość bezwzględna jest 358 m, a wysokość bezwzględna podnóża 208 m.

37. *Tara, brutto, netto.*

A. Ciężar netto wynosi n kg, tara t kg, oblicz brutto (b),

B. ciężar brutto wynosi b kg, tara t kg; oblicz netto (n),

C. ciężar brutto wynosi b kg, netto n kg, oblicz tarę (t);

D. towar netto waży n kg, tara wynosi $\frac{1}{10}$ wagi netto; oblicz ciężar brutto,

E. towar waży netto k kg, opakowanie stanowi czwartą część wagi netto, prócz tego dla zabezpieczenia towaru zaszyto całą paczkę w worek wagi $\frac{1}{2}$ kg. Ile waży towar brutto?

F. towar z opakowaniem waży x kg, bez opakowania y kg. Jaką część wagi netto stanowi tara?

38. *Zysk, strata, cena kupna i sprzedaży*

Napisz wzór na obliczenie

A. straty s kupca, który towar kupiony za a złotych sprzedał ze stratą za b złotych,

B. zysku p kupca, który towar kupiony za x złotych sprzedał z zyskiem za y zł;

C. ceny kupna k , jeżeli cena sprzedaży była r zł, a strata m zł;

D. ceny sprzedaży s , jeżeli cena kupna była w zł, a zysk r zł;

E. ceny sprzedaży s , jeżeli cena kupna była r zł, koszty handlowe m zł, a zysk w zł.

39. *Cena, ilość zakupionego towaru, rabat*

A. Zakupiono n kg towaru w cenie L zł za kg. Ile zapłacono?

B. zakupiono r metrów płótna za a zł. Ile kosztował 1 m?

C. ile l wina w cenie b zł za litr można kupić za a zł?

D. zakupiono n kg towaru w cenie p zł za kg. Kupiec udzielił r zł rabatu. Ile zapłacono?

E. zakupiono m metrów płótna w cenie c zł za metr; ponieważ kupiec udzielił rabatu, zapłacono tylko w zł. Ile wynosi rabat?

F. zakupiono r kg towaru w cenie p zł za kg. Kupiec udzielił m zł rabatu. Jaką część ceny kupna stanowi rabat?

40. *Ciężar, objętość, ciężar właściwy*

A. Ile waży przedmiot o objętości $V \text{ cm}^3$, jeżeli ciężar właściwy materiału, z którego jest zrobiony, wynosi $m \text{ g/cm}^3$ (czytaj. gramów na cm^3)

B. Napisz wzór na obliczenie objętości V przedmiotu, który waży K g, jeżeli ciężar właściwy wynosi $d \text{ g/cm}^3$

C. Napisz wzór na obliczenie ciężaru właściwego materiału, z którego zrobiono bryłę o objętości $V \text{ cm}^3$ i ciężarze $P \text{ g}$.

D. Bryła składa się z dwóch części metalowych o objętościach $V \text{ cm}^3$ i $W \text{ cm}^3$ i ciężarach właściwych $d \text{ g/cm}^3$ i $t \text{ g/cm}^3$. Oblicz ciężar bryły

41. *Prędkość, droga, czas.*

A. Pociąg przebył drogę $s \text{ km}$ w czasie $t \text{ godzin}$. Oblicz średnią prędkość pociągu.

B. Samochód pędził z prędkością $V \text{ km}$ na godzinę przez $t \text{ godzin}$. Ile km przejechał?

C. Ile godzin marszu przewiduje turysta, który ma przebyć drogę $d \text{ km}$, a średnio robi $r \text{ km}$ na godz.

D. Chłopiec chce przejść $a \text{ km}$; w ciągu godziny przebywa średnio $v \text{ km}$. Ile km drogi ma przed sobą po $t \text{ godz.}$?

E. Ktoś przejechał $m \text{ km}$ automobilem z prędkością $v \text{ km}$ na godzinę i $r \text{ km}$ pociągiem z prędkością $p \text{ km}$ na godzinę. Ile godzin jechał?

42. *Mieszanki, stopy*

A. Zmieszano razem $x \text{ kg}$ kawy w cenie $y \text{ zł}$ za kg i $z \text{ kg}$ kawy w cenie $r \text{ zł}$ za kg . Oblicz 1^o ciężar mieszanki, 2^o ile kosztowała cała mieszanka, 3^o ile kosztował 1 kg tej mieszanki.

B. Ułóż wzór na 1^o objętość, 2^o ciężar, 3^o ciężar właściwy bryły powstałej przez stopienie trzech kawałków różnych metali, jeżeli wiadomo, że pierwszy miał objętość $v \text{ cm}^3$ i ciężar właściwy $d \text{ g/cm}^3$, drugi objętość $p \text{ cm}^3$ i ciężar właściwy $w \text{ g/cm}^3$, trzeci objętość $t \text{ cm}^3$ i ciężar właściwy $r \text{ g/cm}^3$.

C. Przedmiot zrobiony ze stopu złota i miedzi waży $k \text{ kg}$. Ile kg złota zawiera ten przedmiot, jeżeli ciężar złota stanowi 0,75 ciężaru całego stopu.

43. A. Chłopiec otrzymał $p \text{ zł}$; do tej sumy dodaje co miesiąc $a \text{ zł}$. Ile zł będzie miał po n miesiącach?

B. Do skarbonki Janka matka wrzuca co miesiąc $p \text{ zł}$; Janek z własnych oszczędności po $a \text{ zł}$. Ile zł będzie miał po n miesiącach?

44. Drewniany klocek sześcienny o krawędzi $a \text{ cm}$ przepiłowano równoległe do podstawy w $\frac{3}{4}$ wysokości. Oblicz objętość powstałych dwóch klocek

45. Ułóż zagadnienia, które można rozwiązać wykonując działania według następujących planów.

A.	$(a + b) - c,$	$a - (b + c),$
B.	$(a + b) \cdot c,$	$a \cdot c + b \cdot c,$
C.	$a \cdot b,$	$(a + 2) \cdot (b + 3);$
D.	$a : a,$	$(a - 2) : (a + 2),$
E.	$\frac{1}{2} a \cdot w,$	$a : b \cdot 2,$
F.	$2 a \cdot 3,14,$	$a : a \cdot 3,14,$
G.	$\frac{d}{p};$	$a + d \cdot p, \quad (a + d) \cdot p.$

WIELKOŚCI PROPORCJONALNE

§ 19. STOSUNEK DWÓCH ODCINKÓW

I.

Zagadnienie pomocnicze.

Polska bandera handlowa jest prostokątem, którego kształt określają przepisy morskie.

Zbuduj dwa takie prostokąty różnej wielkości wybierając w każdym wypadku dowolny odcinek a i kreśląc prostokąt długości $8 a$ i szerokości $5 a$

Otrzymasz zgodnie z przepisamiorskimi zbudowane modele bandery handlowej, ich wymiary będą różne, w każdym jednak długość będzie 8 razy, a szerokość 5 razy większa od tego samego odcinka, dowolnie zresztą przez siebie wybranego dla każdego modelu osobno. Mówimy, że długość bandery jest *w takim stosunku do jej szerokości, jak 8 do 5*.

Oznaczając długość bandery literą d , szerokość s , zapiszemy to ostatnie zdanie w skróceniu tak

$$d : s = 8 : 5,$$

co czytamy: d do s jest w takim stosunku, jak 8 do 5.

Zauważamy, że $d = \frac{8}{5} s$ $s = \frac{5}{8} d.$

(Sprawdź te równości posługując się rysunkiem)

II.

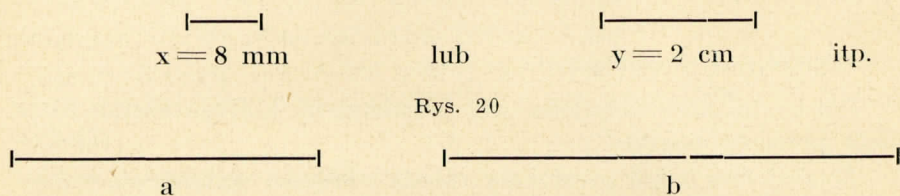
Z podobnym wyrażeniem i takim samym sposobem zapisywania spotkaliście się już na lekcjach geografii. Każda mapa zaopatrzona jest bowiem w podziałkę, która wyraża, w jakim stosunku jest odcinek na mapie do odpowiadającego mu odcinka na ziemi.

III.

Mówiąc, że dwa w oznaczonym porządku wymienione odcinki tworzą taki sam stosunek, jak dwie w oznaczonym porządku wymienione liczby, chcemy powiedzieć, że jest taki odcinek, który w pierwszym z wymienionych odcinków mieści się tyle razy, ile wskazuje pierwsza liczba, a w drugim tyle razy, ile wskazuje druga. Możemy znaleźć bardzo wiele par odcinków tworzących taki sam stosunek, jak dwie dane liczby, obierając różne odcinki pomocnicze (patrz ust. I).

IV

Porównamy dane odcinki a , b (rysunek 20) badając jaki one tworzą stosunek



Obieramy odcinek pomocniczy. Może to być 1 mm, 1 cm, 1 dm, lub jakikolwiek inny odcinek, np. jeden z odcinków x lub y .

Porównamy odcinki a , b przy pomocy 1 cm. Zauważamy, że $a = 4 \cdot 1$ cm, $b = 6 \cdot 1$ cm, zatem $a : b = 4 : 6$. Liczby 4, 6 nazywamy *wyrazami stosunku*, iloraz zaś tych liczb $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ w *wykładniku stosunku* odcinka a do b .

Porównując w ten sposób odcinki a i b przy pomocy 1 mm, 1 dm, odcinków x , y , otrzymamy różne liczby, co zapisujemy w tabelce:

Odcinek pomocniczy	ile razy mieści się ten odcinek w a ?	ile razy mieści się ten odcinek w b ?	jaki jest stosunek odcinka $a : b$?	wykładnik stosunku
1 cm	4	6	4 : 6	$4 : 6 = \frac{2}{3}$
1 mm	40	60	40 : 60	$40 : 60 = \frac{2}{3}$
1 dm	0,4	0,6	0,4 : 0,6	$0,4 : 0,6 = \frac{2}{3}$
x	5	$7\frac{1}{2}$	$5 : 7\frac{1}{2}$	$5 : 7\frac{1}{2} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
y	2	3	2 : 3	$2 : 3 = \frac{2}{3}$

V

Na podstawie tej tabelki i rysunku możemy wyciągnąć następujące ważne wnioski. (Zapamiętaj je)

A. Stosunek dwóch danych odcinków możemy wyrazić na wiele sposobów, przy pomocy rozmaitych liczb, zależnie od wyboru pomocniczego odcinka.

B. Gdy odcinek pomocniczy zwiększamy (zmniejszamy) 2, 3, 4 razy, to wyrazy stosunku zmniejszają się (zwiększają) 2, 3, 4 razy (Porównaj np. wiersz 1-szy i 2-gi tabelki)

Na odwrót, jeżeli dwa odcinki są w takim stosunku jak 4 : 6, to są też one w takim stosunku, jak 40 : 60, 8 : 12 itp.

Wyrazy stosunku możemy pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

C. Zauważamy (zobacz ostatnią kolumnę tabelki), że wykładnik stosunku dwóch odcinków nie zależy od wyboru odcinka pomocniczego.

D. Na rysunku możemy sprawdzić, że $a = \frac{2}{3}b$, czyli *wykładnik stosunku odcinka a do b wskazuje, przez jaką liczbę trzeba pomnożyć odcinek b , aby otrzymać a .*

(Przypomnij sobie, co to znaczy mnożyć wielkość przez ułamek. § 11)

E. Odcinek b jest w takim stosunku do a , jak 6 : 4, 60 : 40 itd. Wykładnik stosunku b a równa się $\frac{3}{2}$, czyli odwrotności wykładnika stosunku $a : b$. Zauważamy, że $b = \frac{3}{2}a$.

Zadania.

1. Przepisane wymiary boiska do gry w piłkę siatkową tworzą taki stosunek jak 2 : 1. Wykreśl plan takiego boiska.

2. Znak statków handlowych przewożących pocztę, ma kształt trójkąta równoramiennego, którego podstawa jest w takim stosunku do wysokości, jak 2 : 3. Narysuj model tego znaku.

3. Narysuj modele kopert w różnych formatach, w których szerokość jest w takim stosunku do długości, jak $3\frac{1}{2} : 5$.

4. Narysuj dwa różne koła, których promienie tworzą taki stosunek, jak $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$.

5. Jaki jest wykładnik stosunku

A. 1 cm do 1 m i na odwrót

- B. 1 km do 1 m i na odwrót,
 C. 1 m do 1 dm i na odwrót,
 D. 1 km do 1 mili geograficznej i na odwrót (§ 14. zad. 114)
 6. Dwa odcinki tworzą taki sam stosunek, jak 8 12.
 Narysuj takie dwa odcinki.

A. Wyraż stosunek tych odcinków przy pomocy wyrazów mniejszych (większych) Wyjaśnij zmianę wyrazów na rysunku.

B. Oblicz wykładnik stosunku tych odcinków

✓**7 Dwa odcinki tworzą stosunek

A. $\frac{1}{2} : 1\frac{2}{3}$, B. $\frac{3}{5} : 2$, C. $\frac{5}{6} : 1\frac{1}{2}$.

Wyraż stosunek tych odcinków przy pomocy liczb całkowitych, a następnie narysuj takie dwa odcinki.

(Wskazówka: pomnóż wyrazy stosunku przez wspólną wielokrotną ich mianowników)

✓ 8. Dwie uczennice mierząc wymiary stołu chciały się dowiedzieć, w jakim stosunku jest jego szerokość do długości. Co możesz z góry powiedzieć o wyrazach stosunku otrzymanych przez jedną i drugą uczennicę, jeżeli pierwsza obrała za odcinek pomocniczy 1 cm, a druga 1 dm?

✓ 9. W jakim stosunku są dwa odcinki długości

A. $2\frac{1}{2}$ m, 3 dm; B. 3,5 km 2,4 m.

✓ 10. Długość naszej granicy morskiej jest w takim stosunku do granicy lądowej, jak 2 78. Jaki jest stosunek długości granicy morskiej (granicy lądowej) do długości całej granicy?

11 W jakim stosunku jest odcinek a do b, jeżeli

A. $a = \frac{4}{5} b$; B. $a = 0,5 b$; C. $b = \frac{1}{3} a$.

12. Wykładnik stosunku dwóch odcinków jest A. 0,8, B. 2. Narysuj takie odcinki.

13. A. Skalę mapy wyrażamy zwykle przy pomocy stosunku dwóch liczb, z których pierwsza równa się 1 (np. 1 25 000)

Jaka jest skala planu (mapy), na którym

Odległość 1 km przedstawia odcinek 2 cm,

„	3	„	„	„	5	„
„	40 m	„	„	„	8	„
„	75 dm	„	„	„	3	„

B. Spadek rzeki mierzymy wykładnikiem stosunku różnicy wysokości źródeł rzeki i jej ujścia do długości rzeki. Oblicz spadki rzek polskich na podstawie zestawienia:

Rzeka	Wysokość źródeł w m	Wysokość ujścia w m	Długość w km
Wisła	900	0	1092
Prypeć	196	95	768
Niemen	175	0	992

§ 20. STOSUNEK WIELKOŚCI

DIAGRAMY PROSTOKĄTNE DLA PORÓWNIANIA WIELKOŚCI

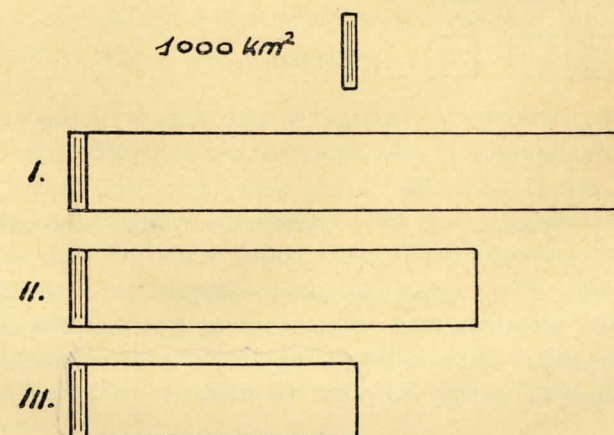
I.

Odczytaj dane zapisane poniżej, dotyczące zaludnienia i obszaru trzech województw Polski (dane z r 1935)

Województwo	Obszar w km ²	Liczba mieszkańców
Poleskie	37 000	1 100 000
Poznańskie	27 000	2 100 000
Łódzkie	19 000	2 600 000

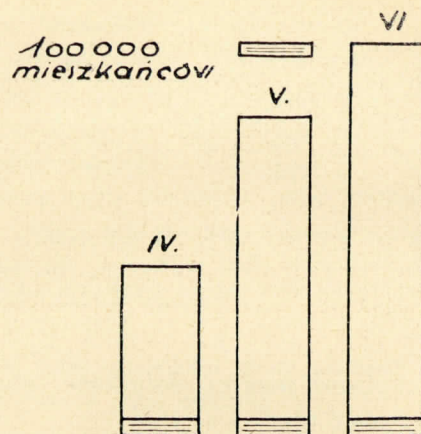
Porównamy z sobą te dane geometrycznie.

W tym celu przyjmiemy, że prostokąt o wymiarach np. 0,2 cm, 1 cm przedstawia nam 1000 km² obszaru i że taki sam prostokąt przedstawia nam 100 000 mieszkańców (moglibyśmy oczywiście wybrać i inne wymiary tych prostokątów pomocniczych) W takim razie obszary wymienionych województw i liczby ich mieszkańców można przedstawić następująco



Obszar

Rys. 21



Ludność

Rys. 22

Prostokąt I zawiera 37, prostokąt II 27, prostokąt III 19 prostokątów pomocniczych, prostokąt IV — 11, V — 21, VI — 26 prostokątów pomocniczych. Wypowiemy to spostrzeżenie krótko: prostokąt I jest w takim stosunku do prostokąta II, do prostokąta III, jak 37 do 27 do 19, co zapiszemy tak

$$\boxed{\text{I}} : \boxed{\text{II}} : \boxed{\text{III}} = 37 \ 27 \ 19$$

podobnie

$$\boxed{\text{IV}} : \boxed{\text{V}} : \boxed{\text{VI}} = 11 \ 21 \ 26.$$

Obszary województw poleskiego, poznańskiego i łódzkiego tworzą w wymienionej kolejności taki stosunek jak 37 . 27 19, liczby ich mieszkańców jak 11 21 26.

Rysunek składający się z kilku prostokątów, a służący, jak rysunki 21 i 22 do obrazowego porównania kilku wielkości tego samego rodzaju nazywamy *diagramem* prostokątnym tych wielkości. Prostokąty tworzące diagram mają zwykle równe wysokości (rys. 21), lub podstawy (rys. 22) Wykreśliśmy diagramy prostokątne obszarów wymienionych województw i liczby ich ludności.

II.

Jeżeli obierzemy dowolną jednostkę wagową (np. kg, g, lub jakikolwiek ułamek kg itp.) i stopimy 95 takich jednostek wagowych

miedzi z czterema takimi jednostkami wagowymi cyny, z jedną taką wagową jednostką cynku, to otrzymamy stop zwany brązem. Z brązu wybijane są np. polskie pięciogroszówki.

Mówimy krótko, że ciężary miedzi, cyny i cynku w brązie tworzą taki stosunek jak 95 4 1

III.

Powietrze składa się z tlenu, azotu, dwutlenku węgla i innych gazów, przy czym objętości tych gazów (w wymienionej kolejności) tworzą taki stosunek, jak

$$20,77 \ 78,26 \ 0,03 \ 0,96.$$

Oznacza to, że mając daną objętość powietrza (np. objętość powietrza w klasie lub objętość powietrza w jakimś naczyniu), możemy dobrać taką jednostkę objętościową (może to być m³, litr, ułamek litra, lub kilka litrów itp.) taką, że w danej objętości znajduje się 20,77 takich jednostek objętościowych tlenu, 78,26 azotu, 0,03 dwutlenku węgla i 0,96 innych gazów

IV

Mówiąc, że *dwie (lub więcej) wielkości tego samego rodzaju* (a więc dwa odcinki, dwa prostokąty, dwa ciężary, dwie kwoty pieniężne itp.) *tworzą taki stosunek, jak dwie (lub odpowiednio więcej) liczby, chcemy powiedzieć, że jest taka wielkość pomocnicza tego samego rodzaju, która w pierwszej wielkości mieści się tyle razy, ile wskazuje pierwsza liczba, w drugiej tyle razy, ile wskazuje druga liczba itd.*

V

Te dwie liczby nazywamy *wyrazami stosunku* dwóch wielkości, *ich ilorz* *wykładnikiem tego stosunku*. Zupełnie tak samo, jak dla odcinków (§ 19. V) możemy się przekonać o tym, że

A. ile razy powiększymy (pomniejszymy) jednostkę pomocniczą, tyle razy pomniejszą się (powiększą) wyrazy stosunku;

B. wykładnik stosunku nie zależy od wyboru jednostki i wskazuje przez jaką liczbę trzeba pomnożyć wielkość drugą, aby otrzymać wielkość pierwszą.

VI.

Możemy wykreślić diagramy prostokątne kilku wielkości tego samego rodzaju nie znając nawet ich wartości, jeżeli tylko podano

nam, w jakim stosunku do siebie są te wielkości. Kreślimy wtedy odpowiednią liczbę prostokątów o równych podstawach lub wysokościach obierając jakikolwiek prostokąt pomocniczy tak, aby te prostokąty tworzyły dany nam stosunek. Otrzymujemy w ten sposób obraz porównawczy wielkości, o które chodziło.

Zadania.

14. Narysuj dwa prostokąty, które są w takim stosunku, jak 4 : 5. Podaj trzy różne przykłady

*15. Wymień dwa ciężary takie, że pierwszy jest w takim stosunku do drugiego, jak 3 : 2. Podaj trzy różne przykłady

*16. Wymień dwie objętości takie, że pierwsza jest w takim stosunku do drugiej, jak 3 : 10. Podaj trzy różne przykłady

*17 W jakim stosunku jest:

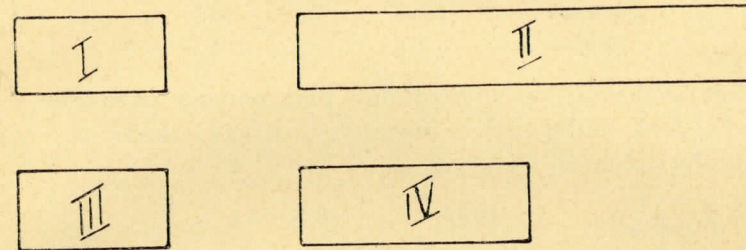
- 1 m² do 1 a i na odwrót,
- 1 a do 1 morga i na odwrót,
- 2 cm³ do 1 litra i na odwrót,
- 1 kg do 10 g i na odwrót,
- 2 t do 5 q i na odwrót?

**18. W jakim stosunku jest kwadrat o boku 2 cm do kwadratu o boku 3 cm? Wykonaj rysunek.

19. Do każdego z wierszy podanej niżej tabelki narysuj diagram prostokątny dla porównania powierzchni obszarów ziemi znanych i nieznanymi Europejczykom. W tabelce podano, jaki był w przybliżeniu stosunek powierzchni obszarów znanych do powierzchni obszarów nieznanymi Europejczykom w różnych epokach. Wykreślisz w ten sposób obraz historii odkryć na ziemi.

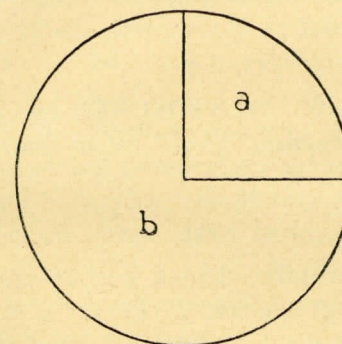
Rok	Stosunek powierzchni terenów znanych do nieznanymi (w przybliżeniu)	
1400	5	46
1500	11	40
1600	31,5	19,5
1700	37,5	13,5
1800	45,5	5,5
1900	48,5	2,5
1935	49,5	1,5

20. Oceń bez mierzenia w przybliżeniu, jaki stosunek tworzą:
A. prostokąty I II; III · IV,



Rys. 23

B. wycinki koła a i b.



Rys. 24

21 Trzy ciężary są w takim stosunku, jak

A. $3\frac{1}{2} : 2\frac{2}{5} : 8$, B. $4\frac{2}{3} : 2\frac{3}{8} : 1\frac{1}{2}$

Przedstaw te stosunki przy pomocy liczb całkowitych (zobacz wskazówkę w zad. 7 — § 19)

22. Obmyśl i wykonaj porównawcze diagramy prostokątne przedstawiające obrazowo niżej podane liczby

A. Obszar Polski i państw sąsiednich

Polska	Niemcy	Z. S. R. R.
390 tys. km ²	470 tys. km ²	4850 tys. km ²

B. Stosunek powierzchni zlewisk Bałtyku i Morza Czarnego na obszarze Polski 75 : 25.

C. Największe i najgłębsze jezioro w Polsce

jezioro	pow w km ²	głębokość w m
Narocz	80,5	34,5
Hańcza	2,9	104,5

Uwaga głębokość jezior przedstaw przy pomocy odcinków.

D. Stosunek liczby dzieci polskich w wieku szkolnym uczących się do liczby dzieci nie uczących się

r 1920	6,5	3,5
r 1927	9	1

§ 21 ZMIANA WIELKOŚCI I PODZIAŁ WIELKOŚCI W DANYM STOSUNKU

I.

ZMIENIĆ WIELKOŚĆ W STOSUNKU np. $\frac{3}{5}$ tzn. znaleźć drugą wielkość tego samego rodzaju, która jest w takim stosunku do wielkości pierwszej, jak 3 : 5.

II.

Przykład Zmienimy odcinek $a = 5\frac{1}{2}$ cm w stosunku 3 : 2 ($\frac{3}{2}$) tzn. znajdziemy taki odcinek x, że $x : a = \frac{3}{2}$, czyli że wykładnik stosunku $x : a = \frac{3}{2}$.

Jeżeli $x : a = \frac{3}{2}$, to jest trzeci (pomocniczy) odcinek c taki, że $x = 3 \cdot c$, $a = 2 \cdot c$. Chcąc obliczyć odcinek x, trzeba zatem najpierw wyznaczyć odcinek pomocniczy c dzieląc a przez 2, a następnie pomnożyć ten odcinek przez 3.

$$a : 2 = 5\frac{1}{2} \text{ cm} : 2 = 2\frac{3}{4} \text{ cm}, \quad 3 \cdot 2\frac{3}{4} \text{ cm} = 8\frac{1}{4} \text{ cm}.$$

Zamiast dzielić a przez 2, a następnie otrzymaną wielkość mnożyć przez 3, można od razu pomnożyć a przez $\frac{3}{2}$, czyli przez wykładnik stosunku $x : a$. $\frac{3}{2} \cdot 5\frac{1}{2} \text{ cm} = 8\frac{1}{4} \text{ cm}$.

Zapamiętaj zatem Zmieniamy jakąś wielkość w danym stosunku mnożąc ją przez wykładnik tego stosunku.

III.

Przykład Znajdziemy taki odcinek x, że stosunek danego odcinka $a = 6$ cm do x jest taki, jak 5 : 8.

Rozwiązanie $a : x = 5 : 8$, w takim razie $x : a = 8 : 5$; a więc według poprzedniego przykładu

$$x = \frac{8}{5} \cdot a = \frac{8}{5} \cdot 6 \text{ cm} = 9\frac{3}{5} \text{ cm}.$$

IV

PODZIELIĆ JAKĄŚ WIELKOŚĆ W STOSUNKU np. 2 : 3 : 7 tzn. rozłożyć ją na trzy składniki, które są w takim stosunku, jak 2 : 3 : 7

Przykład:

Przedstawiono obszar Polski, jako prostokąt o wymiarach 10 cm i 3 cm, mamy podzielić ten prostokąt na cztery prostokąty o tej samej wysokości (3 cm), z których pierwszy (I) ma przedstawiać obszar pól ornych i sadów, drugi (II) łąk i pastwisk, trzeci (III) lasów, czwarty (IV) nieużytków i innych obszarów, wiedząc, że te obszary w wymienionej kolejności tworzą w przybliżeniu taki stosunek jak 49 : 17 : 22 : 12.

22 12. Podzielimy zatem prostokąt o wymiarach 10 cm i 3 cm na części w stosunku 49 : 17 : 22 : 12 i otrzymamy diagram, obrazujący użytkowanie gruntów w Polsce.

Rozwiązanie A. Według danych (I) (II) (III) (IV) = 49 : 17 : 22 : 12; prostokąt pomocniczy mieści się zatem w prostokącie (I) 49 razy w (II) 17 razy, w (III) 22 razy, w (IV) 12 razy W prostokącie przedstawiającym obszar całej Polski, prostokąt pomocniczy zmieścić się musi $49 + 17 + 22 + 12 = 100$ razy

B. Ponieważ prostokąt przedstawiający obszar całej Polski ma wymiary 10 cm, 3 cm, więc ten prostokąt pomocniczy ma wymiary 1 mm, 3 cm.

C. W takim razie (I) ma podstawę równą $49 : 1 \text{ mm} = 49 \text{ mm}$
 (II) $17 : 1 \text{ mm} = 17 \text{ mm}$,
 (III) $22 : 1 \text{ mm} = 22 \text{ mm}$;
 (IV) $12 : 1 \text{ mm} = 12 \text{ mm}$.

Grunty orne	Łąki i pastwiska	Lasy	Nieużytki i inne
-------------	------------------	------	------------------

Rys. 25

V

Przykład. Dwie osoby zakupiły wspólnie bilet na loterię; jedna dała 20 zł, druga 30 zł; wygrana wyniosła 800 zł. Jak się mają podzielić wygraną?

Rozwiązanie Sumę 800 zł trzeba podzielić w stosunku 20 : 30 (czyli 2:3), tzn. musimy sumę 800 zł podzielić na dwa składniki, których stosunek jest taki, jak 2 3.

A. Znajdziemy najpierw kwotę pomocniczą, która w kwocie należnej pierwszej osobie mieści się dwa razy, w kwocie zaś należnej drugiej osobie trzy razy. W całej wygranej ta pomocnicza kwota mieści się $2 + 3 = 5$ razy.

B. Kwota ta wynosi zatem $800 \text{ zł} : 5 = 160 \text{ zł}$.

C. Pierwsza osoba otrzymała $2 \cdot 160 \text{ zł} = 320 \text{ zł}$; druga $3 \cdot 160 \text{ zł} = 480 \text{ zł}$.

Sprawdzenie Wykładnik stosunku 320 zł do 480 zł równa się

$$\frac{320}{480} = \frac{2}{3}.$$

Zadania.

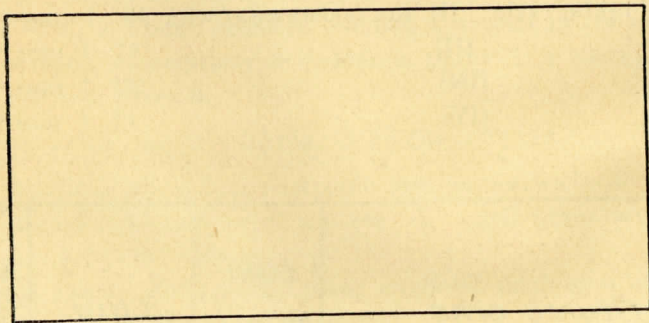
23. Zmień

A. odcinek równy $8\frac{1}{2}$ cm w stosunku 3 5, 1 : 4, 1 : 10,

B. objętość 10 cm^3 w stosunku 1 : 2; 2 : 1, 3 : 5;

C. ciężar 1 kg w stosunku 1 : 5; 10 : 15; 3 : 2.

24. Rys. 26 przedstawia deskę stołu w skali 2 : 25. Wykonaj potrzebne pomiary i oblicz wymiary i powierzchnię tej deski.



Rys. 26

25. A. Stosunek wysokości żyrafy do wysokości słonia, do wysokości strusia, do wysokości chłopca wzrostu 150 cm jest taki, jak 10 : 6 : 5 : 3.

Oblicz wysokości wymienionych zwierząt i przedstaw je przy pomocy odcinków.

*B. Stosunek rozwartości skrzydeł sępa płowego do rozwartości skrzydeł orła, do rozwartości ramion chłopca (150 cm) jest taki jak 5 : 4 : 3. Oblicz rozwartość skrzydeł orła i sępa. Przedstaw wszystkie trzy występujące w zadaniu wielkości przy pomocy odcinków.

27. Liczby dni poświęconych na przebycie Atlantyku przez Kolumba, przez współczesny polski okręt i przez Lindbergha, który zużył w roku 1927 na swój sławny przelot z Ameryki do Europy półtora dnia, tworzą taki stosunek, jak 140 : 16 : 3. Oblicz, w jakim czasie przebył Atlantyk Kolumb, a w jakim przebywają go obecnie polskie okręty.

28. Małutkie zwierzątko „pantofelek“ ma 0,1 mm długości i porusza się w szybkości 1 mm na sekundę.

A. Oblicz wykładnik stosunku twojego wzrostu do długości pantofelka.

B. Oblicz, z jaką szybkością musiałbyś się poruszać, aby wykładnik stosunku twojej prędkości do prędkości pantofelka równał się wykładnikowi stosunku twego wzrostu do wielkości pantofelka.

Ile km przebywałbyś na godzinę?

✓ 29. Według pewnej taryfy kolejowej ceny biletów klasy I, II, III i IV tworzą taki stosunek jak $2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$. Oblicz ceny biletów klas I, II i IV, jeżeli za klasę III płacimy

A. 8,9 zł B. 10,25 zł C. 35,42 zł

✓ 30. Najwydatniejszą rudę żelazną w Polsce znajdujemy w górach Świętokrzyskich. Ciężar żelaza zawartego w tej rudzie jest w takim stosunku do ciężaru pozostałych składników, jak 57 : 43.

Oblicz, ile t żelaza otrzymamy z 45 t rudy.

✓ 31. Przy uprawie buraków wydajność gleby przy użyciu nawozów sztucznych może wzrosnąć w stosunku $\frac{3}{2}$.

O ile q buraków więcej otrzymamy po sztucznym nawożeniu pewnego obszaru, jeżeli bez nawożenia otrzymaliśmy z tego samego obszaru 1562 q buraków?

✓ 32. W zawodach balonów o puchar Gordon-Benneta w roku 1935 dwa pierwsze miejsca zajęły balony polskie „Polonia II“ i „Warszawa II“, trzecie miejsce balon belgijski „Belgica“. Stosunek odległości osiągniętych przez dwa pierwsze balony (w wymienionej kolejności) był taki, jak 55 : 52, stosunek zaś odległości osiągniętych przez balon drugi i trzeci, jak 78 : 73. Oblicz w km te odległości wiedząc, że balon

„Polonia“ przebył przeszło 1650 km. Przedstaw te odległości przy pomocy trzech odcinków o wspólnym początku.

33. Liczba m^3 gazu świetlnego jest w takim stosunku do liczby kg węgla, z którego ten gaz wydobywamy, jak $3 : 10$. Oblicz ciężar zużytego na gaz świetlny węgla w ciągu minuty w Warszawie, jeżeli zużywa się tam $120 m^3$ gazu na minutę.

34. Oblicz boki prostokąta, które tworzą taki stosunek, jak $3 : 5$, jeżeli:

A. bok dłuższy wynosi 12 cm , $8\frac{1}{2} \text{ cm}$,

B. bok krótszy wynosi 6 cm , $1\frac{1}{2} \text{ cm}$

C. obwód wynosi 30 cm , $10\frac{1}{2} \text{ cm}$, 8 cm .

35. Grecy nazywali podziałem złotym podział odcinka na dwa odcinki, których stosunek jest w przybliżeniu taki, jak $61 : 39$.

A. Podziel 1 dm w przybliżeniu w stosunku złotym.

B. Oblicz, poprzestając na drugim stopniu dokładności, wykładnik stosunku całego odcinka do jego części większej i wykładnik stosunku części większej do jego części mniejszej.

Co zauważasz?

36. Uczennice z I kl. chcą przygotować na zabawę 10 litrów lemoniady, przy czym według przepisu powinny mieszać wodę z sokiem cytrynowym i z syropem w stosunku $8 : \frac{1}{2} : 1$. Ile powinny wziąć litrów wody, soku i syropu?

37. Góra lodowa ma 245 m wysokości. Stosunek wysokości części nadwodnej do podwodnej jest taki, jak $1 : 6$. Oblicz, ile m wysokości ma góra od poziomu morza.

38. Przedsiębiorca winien jest jednemu wierzycielowi 3820 zł , drugiemu 5450 zł . Przedsiębiorstwo upadło; w kasie pozostało tylko 3000 zł . Jak podzielić się tą sumą wierzyciele?

(Podzielić tę sumę w stosunku należnych wierzycielom sum).

39. A. Ile kg srebra musimy stopić z $3\frac{1}{4} \text{ kg}$ miedzi, aby otrzymać stop, w którym ciężar srebra jest w takim stosunku do ciężaru miedzi jak $3 : 7$?

B. Ile kg srebra i ile kg miedzi musimy razem stopić, aby otrzymać 15 kg tego stopu?

**40. Wykładnik stosunku ciężaru szlachetnego metalu do ciężaru całego stopu nazywamy *próbą stopu*. Oblicz próbę stopu, w którym znajduje się A. $5\frac{1}{2} \text{ g}$ złota i 4 g miedzi, B. $\frac{3}{4} \text{ kg}$ aluminium i $0,2 \text{ kg}$ innych metali, C. $\frac{3}{4} \text{ kg}$ srebra i $\frac{1}{2} \text{ kg}$ innych metali.

41. Oblicz, ile g złota znajduje się w przedmiocie zrobionym ze stopu złota próby

A. $0,85$, B. $0,75$; C. $0,9$,

jeżeli przedmiot waży.

A. 35 g B. $1\frac{2}{5} \text{ dkg}$, C. $\frac{3}{4} \text{ kg}$.

(Zobacz z. 40)

42. Rozdzielono dochód z zabawy wynoszący $52,13 \text{ zł}$, między koło krajoznawcze, samorząd i drużynę harcerską w stosunku liczby uczennic każdej z tych organizacji biorących udział w zorganizowaniu zabawy, który (w wymienionej kolejności) był taki, jak $2\frac{1}{2} : 1 : 3$. Ile zł otrzymała każda organizacja?

43. Ilość zużywanej w Polsce wełny własnej produkcji jest w takim stosunku do ilości zużytej wełny sprowadzanej, jak $5 : 30$. Narysuj diagram prostokątny przedstawiający podział wełny zużytej na wełnę wytwarzaną w kraju i sprowadzaną.

44. Stosunek importu polskiego do eksportu (wyrażonych w zł) był w roku 1934 taki, jak $4 : 5$. Narysuj diagram przedstawiający handel zagraniczny Polski i jego podział na import i eksport. Narysuj prostokąt przedstawiający saldo tj. różnicę sumy uzyskanej z eksportu i sumy zapłaconej za import.

45. Stosunek ilości zawartego w powietrzu czystym tlenu do ilości bezwodnika węglowego i innych gazów wyraża się liczbami: $20,77 : 0,03 : 79,2$; w powietrzu wydychanym zaś $16,04 : 4,38 : 79,58$. Za każdym oddechem wdychamy $\frac{1}{2}$ litra powietrza. Oblicz, ile litrów tlenu i bezwodnika węglowego wdychamy i wydychamy za jednym razem. Oblicz pojemność przyjętego przez organizm tlenu i wydzielonego bezwodnika po 1 oddechu.

§ 22. WIELKOŚCI WPROST PROPORCJONALNE

I.

Zagadnienie pomocnicze.

A. Narysuj trójkąt równoboczny, obok zaś odcinek równy jego obwodowi.

B. Powieksz (pomniejsz) każdy bok tego trójkąta $2 : 3, 4$ razy, zbuduj trójkąt równoboczny, którego bok równa się otrzymanemu po przekształceniu odcinkowi i narysuj jego obwód.

C. Ile razy powiekszył się (pomniejszył) obwód pierwszego trójkąta?

II.

Zagadnienie pomocnicze.

Mamy klocek drewniany o objętości 24 cm^3 i ciężarze 20 kg . Oblicz wykonując w pamięci tylko jedno działanie arytmetyczne:

A. ciężary klocków z tego samego drzewa o objętościach 2, 3, 4, 5, 6 razy większych (mniejszych),

B. objętości klocków z tego samego drzewa o ciężarach 2, 3, 4, 5, 6 razy większych (mniejszych)

III.

Zagadnienie pomocnicze.

Narysuj dwa odcinki $a = 1 \text{ cm}$, $b = 9 \text{ cm}$. Różnica ich wynosi 8 cm .

A. Pomnóż odcinek a przez 2, 3, 4, 5, ile cm musi mieć odcinek b , aby różnica pozostała równa 8 cm ?

B. Pomnóż odcinek b przez 2, 3, 4, 5, ile cm musi mieć odcinek a , aby różnica pozostała równa 8 cm ?

IV.

W każdym z zagadnień I, II występowały dwie wielkości posiadające tę własność, że mnożąc jedną z nich przez 2, 3, 4, 5, 6 itd. mnożymy tym samym drugą przez 2, 3, 4, 5, 6 itd., dzieląc zaś jedną z nich przez 2, 3, 4, 5, 6 itd., dzielimy tym samym i drugą przez 2, 3, 4, 5, 6. Wielkości posiadające tę własność nazywamy *wielkościami wprost proporcjonalnymi*. Z doświadczenia wiemy np., że obwód trójkąta równobocznego i jego bok są wielkościami wprost proporcjonalnymi. Doświadczenie uczy nas, że ciężar i objętość przedmiotów z tego samego materiału to są także wielkości wprost proporcjonalne.

W zagadnieniu III przekonaliśmy się, że długości dwóch odcinków, których różnica wynosi 8 cm , nie są wprost proporcjonalne.

V.

Przypuśćmy, że jedną z wielkości wprost proporcjonalnych zmienimy w stosunku $\frac{3}{4}$. Możemy to zrobić, mnożąc ją przez $\frac{3}{4}$ (§ 21 II). Mnożąc tę wielkość przez $\frac{3}{4}$, dzielimy ją przez 4, a następnie mnożymy otrzymaną z podziału wielkość przez 3. Tym samym zgodnie z regułą IV podzielimy i drugą z wielkości wprost proporcjonalnych przez 4, a następnie pomnożymy otrzymaną z tego ostatniego podziału wielkość przez 3. Druga z wielkości wprost proporcjonalnych zmieni się zatem też w stosunku $\frac{3}{4}$.

Wielkości wprost proporcjonalne mają więc ważną w zastosowaniach własność *jeżeli jedną z wielkości wprost proporcjonalnych zmienimy w pewnym stosunku, to i druga z wielkości wprost proporcjonalnych zmieni się w tym samym stosunku*.

VI.

Bryła o objętości 2 cm^3 waży $15\frac{3}{5} \text{ g}$; bryła z tego samego materiału o objętości 2 razy większej tj. o objętości 4 cm^3 waży dwa razy więcej tj. $31\frac{1}{5} \text{ g}$, o objętości trzy razy większej czyli 6 cm^3 waży trzy razy więcej tj. $46\frac{4}{5} \text{ g}$.

Zapiszemy te liczby w tabelce:

Objętość w cm^3	2	4	6
ciężar w g	$15\frac{3}{5}$	$31\frac{1}{5}$	$46\frac{4}{5}$

Jeżeli podzielimy ciężar bryły (w g) przez jej objętość w cm^3 , to dowiemy się, ile g waży 1 cm^3 materiału, z którego jest zrobiona bryła. Według danych w tabelce ten iloraz równa się

$$15\frac{3}{5} : 2 = 7\frac{4}{5}, \quad 31\frac{1}{5} : 4 = 7\frac{4}{5}, \quad 46\frac{4}{5} : 6 = 7\frac{4}{5}.$$

Liczbę $7\frac{4}{5}$ wyrażającą, ile g ciężaru przypada na 1 cm^3 objętości bryły nazywamy *spółczynnikiem proporcjonalności ciężaru do objętości*. Aby zaznaczyć, jak tę liczbę obliczyliśmy i w jakich jednostkach podano wielkości, zapisujemy ją tak. $7\frac{4}{5} \text{ g/cm}^3$ (czytaj $7\frac{4}{5}$ gramów na centymetr sześcienny). Jest to *ciężar właściwy* materiału, z którego jest zrobiona bryła.

Jeżeli podzielimy objętość bryły (w cm^3) przez jej ciężar (w g), to dowiemy się, ile cm^3 objętości przypada na 1 g ciężaru. Według danych w tabelce ten iloraz wynosi

$$2 : 15\frac{3}{5} = \frac{10}{78} = \frac{5}{39}, \quad 4 : 31\frac{1}{5} = \frac{5}{39}; \quad 3 : 46\frac{4}{5} = \frac{5}{39}.$$

Liczbę wyrażającą, ile cm^3 objętości przypada na 1 g ciężaru, nazywamy *spółczynnikiem proporcjonalności objętości bryły do ciężaru*. Aby zaznaczyć, jak ją obliczyliśmy i w jakich jednostkach podano wielkości, zapisujemy tak.

$$\frac{5}{39} \text{ cm}^3 / \text{g} \quad (\text{czytaj } \frac{5}{39} \text{ cm}^3 \text{ na g})$$

Spółczynniki proporcjonalności możemy obliczyć biorąc pod uwagę jakiegokolwiek dwie odpowiadające sobie wartości danych wielkości wprost proporcjonalnych.

Iloraz bowiem odpowiadających sobie wartości wielkości wprost proporcjonalnych jest zawsze ten sam.

(Zastanów się dlaczego, § 22. IV — § 15. IV C).

VII.

Często dla uproszczenia rachunków, przy obliczeniach przybliżonych, przyjmujemy, że pewne dwie wielkości są wprost proporcjonalne, choć w rzeczywistości tak nie jest. Np. droga przebyta przez pociąg i ilość godzin jazdy nie są to wielkości wprost proporcjonalne. Pociąg w dwóch godzinach nie zawsze przebywa dwa razy większą drogę, niż w jednej godzinie. Jeżeli jednak założymy, że pociąg porusza się jednostajnie z pewną średnią prędkością, to możemy uważać te wielkości za wprost proporcjonalne, co bardzo upraszcza rachunki i daje w przybliżonych obliczeniach pożyteczne wyniki. Jeżeli zauważysz, że wielkości występujące w zadaniach przy prostych założeniach można uważać za wprost proporcjonalne, a z tematu zadania wynika, że można poprzestać na obliczeniach przybliżonych, uzupełnij temat tego zadania takimi założeniami.

Z a d a n i a .

46. W następujących zadaniach występują wielkości, które przy prostych założeniach można uważać za wprost proporcjonalne. Wymień te założenia, wyznacz oba współczynniki proporcjonalności, zapisz je i objaśnij ich znaczenie. Wyniki obliczeń zapisz w tabelce.

A. 1 kg towaru kosztuje 0,3 zł; ile zł zapłacimy za 2, 3, 4, $5\frac{1}{2}$, $10\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ kg tego towaru?

*B. 1 m materiału kosztuje 8 zł. Ile m kupimy za 16, 24, 32, 4 zł?

C. Pociąg jedzie z średnią szybkością 40 km/godz. Ile km przebędzie w 2, 3, $6\frac{3}{4}$, 9 godzinach?

*D. 1 m sznura waży 10 dkg. Ile waży 2 m, 3 m $10\frac{1}{2}$ m tego sznura?

*E. 20 szyn jednakowej długości wystarczy na ułożenie 360 m toru. Ile m toru można ułożyć mając 10, 40, 60 m szyn takiej samej długości?

*F. Odkładając co pewien — zawsze taki sam — okres czasu 2 zł, odłożymy po jakimś czasie 10 zł. Ile zł odłożymy w tym samym czasie, jeżeli będziemy co taki sam okres czasu odkładać po 4, 6, $1\frac{1}{2}$, 10 zł?

G. 4 litry nafty waży tyle samo, co 4,5 l benzyny. Ile litrów benzyny będzie miało ten sam ciężar, co 8, 12, 16 litrów nafty?

47. Przed rozwiązaniem zadania zastanów się, jakie wielkości w nich występują. Przypomnij sobie ustęp V. § 22.

A. Obwód koła wynosi 10 m. Jaki będzie obwód koła, jeżeli średnicę zmniejszymy w stosunku $\frac{2}{5}$ do poprzedniej średnicy?

B. Z pewnej ilości rudy wytopiono $2\frac{1}{2}$ q żelaza. Ile q żelaza otrzy-

mamy z rudy tego samego gatunku zwiększając ilość zużytej rudy w stosunku $\frac{5}{4}$ do poprzedniej ilości?

C. Na wypłatę zarobków dla pewnej liczby murarzy przedsiębiorca w październiku wydał 1 520 zł. Ile zł musi na ten cel przeznaczyć przedsiębiorca w listopadzie, jeżeli liczbę murarzy zajętych przy budowie zmniejszono w stosunku $\frac{3}{4}$ do liczby murarzy zajętych w październiku?

D. Gospodarz otrzymał z pola 42 hl pszenicy. Na jaki zbiór (w hl) może liczyć w tych samych warunkach, jeżeli zwiększył obszar zasiany pszenicą w stosunku $1\frac{3}{2}$ do poprzedniego obszaru?

E. Przedsiębiorca zapłacił w jednym roku 3 500 zł podatku od dochodu. Ile zł zapłaci w roku następnym, jeżeli jego dochody zmalały w stosunku $\frac{2}{5}$ do dochodów z poprzedniego roku?

F. Hurtownik sprowadził partię ryżu i zapłacił 160 zł cła. Ile zł cła zapłaci zwiększając transport sprowadzonego ryżu w stosunku 1,1 do poprzedniego transportu?

48. W każdym z następujących zadań podano dwie wielkości mające tę własność, że jeżeli jedna wzrasta, to druga także wzrasta. Zbadaj na podstawie danych wartości, czy te wielkości są wprost proporcjonalne. W tym celu sprawdź, czy wykładnik stosunku dwóch wartości jednej równa się wykładnikowi stosunku odpowiednich dwóch wartości drugiej wielkości.

A. Cena biletu wzrasta z odległością

Odległość w km	5	7	10
Cena biletu III kl w zł	0,80	1,20	1,60

(Według taryfy z 1933 r.)

B. Z wzrostem ciężaru przesyłki bagażowej wzrasta opłata (przy tej samej odległości)

Ciężar przesyłki w kg	20	30	40
Opłata w zł	1,06	1,59	2,12

C. Zwierzę rosnąc przybiera na wadze

Długość jesiotra w cm	180	250	275
Waga w kg	73,0	99,0	142,5

(Jesiotry te złowiono w Wiśle w r 1932).

D. Wraz z wzrostem szerokości geograficznej (tj. w miarę, jak posuwamy się ku północy) wzrasta długość nieprzerwanej nocy polarnej.

Szerokość geograficzna	70°	80°	90°
Długość nocy polarnej w dobach	61	128	179

49. Sprawdź kilku doświadczeniami:

A. czy powierzchnia kwadratu jest wprost proporcjonalna do jego boku,

B. czy objętość sześcianu jest wprost proporcjonalna do jego krawędzi.

(Porównaj zadania 152, 153 § 15, zad. 18 § 20)

§ 23. WIELKOŚCI ODWROTNIE PROPORCJONALNE

I.

Zagadnienie pomocnicze.

A. Narysuj na kratkowanym papierze prostokąt.

B. Narysuj prostokąty o tej samej powierzchni zwiększając (zmniejszając) podstawę prostokąta pierwszego 2, 3, 4 razy; jak zmieniła się wysokość prostokąta?

C. Narysuj prostokąty o tej samej powierzchni zwiększając (zmniejszając) wysokość prostokąta 2, 3, 4 razy. Jak zmieniła się podstawa pierwszego prostokąta?

II.

Zagadnienie pomocnicze.

Cukrem zawartym w dużym worku można wypełnić 36 paczek po 2 kg każda.

Odpowiedź na następujące pytania wykonując w pamięci tylko jedno działanie arytmetyczne.

A. Ile paczek mogących pomieścić 2, 3, 4, 6, 9 razy więcej (mniej) cukru, wypełnimy tą samą ilością cukru?

B. Ile kg cukru musi zawierać paczka, jeżeli przesypimy ten cukier do równych paczek w ilości 2, 3, 4, 5 razy większej (mniejszej)

III.

W przykładach I i II występowały dwie wielkości mające tę własność, że mnożąc jedną przez 2, 3, 4 itd., dzielimy tym samym drugą przez 2, 3, 4 itd., dzieląc zaś jedną przez 2, 3, 4 itd., mnożymy drugą przez 2, 3, 4 itd. Dwie wielkości posiadające tę własność nazywamy *wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi*.

IV

Przypuśćmy, że jedną z wielkości odwrotnie proporcjonalnych zmienimy w stosunku $\frac{2}{3}$, co możemy zrobić mnożąc ją przez $\frac{2}{3}$

(§ 21, II) Mnożąc tę wielkość przez $\frac{2}{3}$, dzielimy ją przez 5, a następnie mnożymy otrzymaną z tego podziału wielkość przez 2. Tym samym zgodnie z własnością III pomnożymy drugą z wielkości odwrotnie proporcjonalnych przez 5, a następnie otrzymaną z tego mnożenia wielkość podzielimy przez 2. Druga z wielkości odwrotnie proporcjonalnych zmieni się zatem w stosunku $\frac{2}{5}$. Wielkości odwrotnie proporcjonalne mają zatem ważną w zastosowaniach własność *jeżeli jedną z wielkości odwrotnie proporcjonalnych zmienimy w pewnym stosunku, to druga wielkość zmieni się w stosunku odwrotnym*.

V.

Przypuśćmy, że kupiec rozsypał cukier do 12 paczek po 6 kg każda. Jeżeliby paczek było 24, a więc 2 razy więcej, to w każdej byłoby cukru 2 razy mniej, a więc 3 kg. Gdyby zaś paczek było 3 razy więcej, a więc 36 kg, to w każdej byłoby cukru 3 razy mniej, a więc 2 kg. Zapiszemy te liczby w tabelce.

Liczba paczek	12	24	36
Ciężar cukru zawartego w jednej paczce w kg	6	3	2

Jeżeli pomnożysz liczbę paczek przez ciężar cukru zawartego w jednej paczce, otrzymasz ciężar całego rozdzielonego przez kupca cukru. Według danych w tabelce wynosi on $12 \cdot 6 = 72$; $24 \cdot 3 = 72$, $36 \cdot 2 = 72$.

Mnożąc odpowiednie wartości wielkości odwrotnie proporcjonalnych, otrzymamy zawsze ten sam iloczyn.

(Zastanów się dlaczego; § 23. III; § 15. I. C. Ten iloczyn (w naszym zadaniu liczbę 72) nazywamy *spółczynnikiem proporcjonalności odwrotnej* rozważanych wielkości odwrotnie proporcjonalnych.

VI.

Liczba robotników i liczba godzin przez nich poświęconych na wykonanie pewnej pracy nie są to dokładnie wielkości odwrotnie proporcjonalne; dwóch robotników nie zawsze wykona pewną pracę w czasie dokładnie dwa razy krótszym, niż jeden robotnik. Jeżeli jednak założymy, że robotnicy pracują jednakowo szybko i nie przeszkadzają sobie w pracy, a chodzi nam o obliczenie przybliżone, możemy te wielkości uważać za odwrotnie proporcjonalne, co upraszcza rachunki i daje pożyteczne w praktyce wyniki. Podobnie, jak przy wiel-

kościach wprost proporcjonalnych, możesz, o ile uznasz to za potrzebne, uzupełniać tematy zadań prostymi założeniami tak, aby można było niektóre z występujących w nich wielkości uważać za odwrotnie proporcjonalne.

Zadania.

✓50. W następujących zadaniach występują wielkości, które przy pewnych prostych założeniach można uważać za odwrotnie proporcjonalne. Wymień te założenia. Wyznacz współczynnik proporcjonalności odwrotnej. Wyniki obliczeń zapisz w tabelce.

*A. Za posiadaną przez nas sumę pieniędzy możemy kupić do sklepu szkolnego 36 zeszytów po 15 gr. Ile kupimy za tę sumę pieniędzy zeszytów po 30 gr; 45 gr; 60 gr?

*B. Pociąg osobowy jadący z szybkością 40 km/godz. przebywa pewną drogę w ciągu $3\frac{1}{2}$ godz. W jakim czasie przebędzie tę drogę pociąg towarowy jadący ze średnią szybkością 20 km/godz. i pośpieszny jadący z szybkością 80 km/godz.?

*C. Odkładając co pewien, ten sam okres czasu, 12 zł, otrzymasz po 4 miesiącach jakąś sumę, po ilu miesiącach odłożysz tę sumę, jeżeli co taki sam okres czasu będziesz odkładał 6, 24, 1 zł?

*D. Dzieląc odcinek a na trzy równe części, otrzymasz odcinki długości 24 mm, ile cm długości będzie miała jedna część tego odcinka, jeżeli go podzielisz na 6, 9, 12 równych części?

*E. Na ułożenie toru o pewnej długości trzeba 18 szyn, długości 24 m. Ile szyn długości 12 m, 8 m trzeba na ułożenie toru tej samej długości?

*F. Z pewnego zapasu włóczki robotnica może zrobić 12 szali szerokości 0,60 m. Ile szali tej samej długości można zrobić z tego samego zapasu włóczki, jeżeli szerokość szali jest 0,20; 0,40; 1,20 m?

51. Rozwiązując następujące zadania, zastanów się, jakie wielkości w nich występują, przypomnij sobie § 23. IV

A. Zrobiono szosę pewnej długości w ciągu 4 tygodni. W jakim czasie zrobi się dalszy kawałek szosy tej samej długości i w tych samych warunkach, jeżeli liczbę robotników zmniejszono w stosunku $\frac{3}{4}$ do liczby pracujących poprzednio?

B. Obliczyliśmy przed wycieczką w Czeskosłowackie Tatry, że za posiadaną sumę pieniędzy możemy kupić 380 koron czeskich. Ile koron czeskich zakupimy za tę sumę, jeżeli wartość korony w zł spadła w stosunku $\frac{1}{2}$ do poprzedniej wartości?

C. Mamy do rozdania cukierki między pewną liczbę dzieci. Każde dziecko powinno otrzymać 10 cukierków. Ile cukierków otrzyma każde dziecko, jeżeli liczba dzieci, którym te cukierki dajemy, wzrośnie w stosunku $\frac{1}{9}$ do poprzedniej liczby?

D. Janek rozwiązywał zadanie z geografii. Obliczył, że gęstość zaludnienia Niemiec wynosi 104 mieszkańców na km². Przeglądając zadanie zauważył, że popełnił błąd zwiększając w obliczeniu obszar Niemiec w stosunku $\frac{4}{3}$ do prawdziwego obszaru. Popraw, wykonując jedno tylko działanie, błąd Janka.

§ 24. ROZWIĄZYWANIE ZAGADNIEN

I.

Przykład.

W $1\frac{1}{2}$ l mleka znajduje się $61\frac{1}{2}$ g tłuszczu. Ile gramów tłuszczu znajduje się w $\frac{3}{5}$ l mleka?

Zapisujemy temat zadania w tabelce:

Objętość mleka w litrach	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$
Ciężar tłuszczu w gramach	$61\frac{1}{2}$	

W pierwszej kolumnie zapisaliśmy same dane tematu. Drugą musimy uzupełnić.

Założymy, że we wszystkich wypadkach mleko jest tego samego gatunku. Przy tym założeniu objętość mleka i ciężar zawartego w nim tłuszczu są wprost proporcjonalne.

Wobec tego możemy zastosować poznaną w § 22. V własność wielkości wprost proporcjonalnych i rozwiązać zadanie według następującego planu

1-o. Obliczymy w jakim stosunku zmieniono w temacie jedną wielkość,

2-o zmienimy w tym samym stosunku wielkość drugą.

1-o Objętość mleka zmieniono w temacie zadania z $1\frac{1}{2}$ l na $\frac{3}{5}$ l; wykładnik stosunku $\frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{2}{5}$

2-o zmienimy w tym samym stosunku ciężar tłuszczu i otrzymamy $\frac{2}{5} \cdot 61\frac{1}{2}$ g = $24\frac{3}{5}$ g. Tłuszcz zawarty w $\frac{3}{5}$ l mleka waży $24\frac{3}{5}$ g.

II.

To samo zadanie możemy rozwiązać jeszcze inną metodą, obliczając współczynnik proporcjonalności tej wielkości, której wartość mamy obliczyć, do wielkości drugiej.

Obliczamy współczynnik proporcjonalności ciężaru tłuszczu zawartego w mleku do objętości mleka. Wynosi on

$$(61\frac{1}{2}:1\frac{1}{2}) \text{ g/l} = 41 \text{ g/l.}$$

Na 1 l mleka przypada zatem 41 g tłuszczu.

Wobec tego na $\frac{3}{5}$ l mleka przypadnie $\frac{3}{5} \cdot 41 \text{ g} = 24\frac{3}{5} \text{ g}$ tłuszczu.

Objętość mleka w litrach	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$
Ciężar tłuszczu w gramach	$61\frac{1}{2}$	$24\frac{3}{5}$

III.

Przykład.

12 robotników wykona pewną pracę w ciągu 8 godzin. Ilu robotników wykona tę samą pracę w ciągu 6 godz.?

Zapiszemy temat zadania w tabelce

Liczba robotników	12	
Liczba godz. pracy	8	6

W pierwszej kolumnie zapisaliśmy same dane tematu. Drugą musimy uzupełnić.

Założymy, że wszyscy robotnicy pracują jednakowo szybko tzn. w tym samym czasie wykonują tę samą część pracy i nie przeszkadzają sobie wzajemnie.

Przy tym założeniu liczba robotników i liczba godzin pracy są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.

Wobec tego możemy zastosować poznaną w § 23. IV własność i rozwiązać zadania według następującego planu.

1-o. Obliczymy w jakim stosunku zmieniono w temacie jedną wielkość.

2-o. Zmienimy drugą wielkość w stosunku odwrotnym.

1-o. Liczbę godzin przeznaczonych na wykonanie pewnej pracy zmieniono z 8 godz. na 6 godz. Wykładnik stosunku $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

2-o. Trzeba zatem zmienić w stosunku odwrotnym liczbę robotników: $\frac{4}{3} \cdot 12 = 16$.

W ciągu 6 godzin może tę samą pracę wykonać 16 robotników

IV.

To samo zadanie możemy rozwiązać obliczając współczynnik proporcjonalności odwrotnej, czyli iloczyn liczby robotników przez liczbę godzin pracy. Wynosi on 96 i jest stały (§ 23. V)

Na wykonanie pracy trzeba 96 godzin roboczych.

✓ 64. Obecnie używa się do wyrobu lekkich i mocnych przedmiotów stopu zwanego duralum. Podaj skład procentowy duralu wiedząc, że na wytworzenie pewnej ilości tego stopu można wziąć 8 kg miedzi, 1 kg manganu, $1\frac{1}{5}$ kg krzemu, 189,8 kg aluminium. (Skład procentowy wyznaczamy obliczając, ile % ciężaru całego stopu stanowią ciężary jego składników)

✓ *65. Wyznacz skład procentowy stopu

A. złota próby 0,850;

B. srebra próby 0,6;

C. rudy, o której mowa w zadaniu 30 § 21. (zobacz zadanie 64).

✓ 66. Stopiono bryłkę złota wagi 8 g, próby 0,95 z bryłką złota wagi 6 g, próby 0,9. Oblicz, ile % złota zawiera otrzymany stop?

✓ 67. Oblicz (w II stopniu dokł.), ile % wywozu każdego rodzaju towaru z Polski przypada na kraj, który jest głównym jego odbiorcą (dane z r. 1934)

Wywozimy	za sumę	gł. odbiorca	za sumę
drewno	177 milj. zł	Anglia	77 milj. zł
węgiel	158 „ „	Szwecja	31 „ „
żyto	44 „ „	Kanada	10 „ „
wyroby włókiennicze	29 „ „	Anglia	7 „ „
cynk	27 „ „	Niemcy	17 „ „
jaja	23 „ „	Anglia	11 „ „
żelazo	21 „ „	Z. S. R. R.	11 „ „
trzoda chlewna	18 „ „	Austria	11 „ „

68. Wyraż w procentach (w II st. dokł.) stosunek liczby pracujących w rolnictwie i przemyśle do liczby całej ludności w Polsce i Anglii wiedząc, że w Polsce na 33 000 000 ludności prawie 22 000 000 zajmuje się rolnictwem, a około 4 500 000 górnictwem i przemysłem, w W. Brytanii natomiast na 45 000 000 ludności 3 900 000 pracuje na roli, a 26 000 000 w przemyśle i górnictwie. Porównaj z sobą otrzymane liczby procentów (diagram).

§ 30. OBLICZENIA PROCENTOWE

Przy pomocy liczb możemy opisać w sposób obrazowy różne interesujące sprawy z życia naszego otoczenia, miasta, kraju i świata. Naucz się czytać zestawienia liczbowe, a dowiesz się wielu ciekawych rzeczy.

69. Liczba młodzieży w Polsce (od lat 10 do 19) stanowi około 19,7% liczby całej ludności polskiej. Oblicz, ile jest młodzieży w Polsce? Ile miast takich jak Warszawa możnaby zaludnić samą młodzieżą. (Obmyśl i wykonaj diagram dla zobrazowania stosunku liczby młodzieży do liczby całej ludności w Polsce. Warszawa ma około 1 200 000 mieszkańców II st. dokł.)

70. Następujące dane przedstawiają rozwój harcerstwa w Polsce w latach 1932—1934.

Rok	liczba harcerek	liczba harcerzy	liczba obozów harcerskich
1932	36 000	55 900	975
1933	50 500	85 400	1271
1934	59 000	102 500	1543

A. Oblicz w drugim stopniu dokładności, ile % wynosi przyrost harcerzy, harcerek i obozów od 1932 r do 1933 r i od 1933 r do 1934 r

Co wzrasta szybciej liczba harcerzy, czy harcerek?

B. Oblicz, ile % ogólnej liczby członków harcerstwa stanowią harcerze, a ile harcerki w 1934 r (diagram)

C. Dowiedz się (np. z pisma „Na tropie”) jaka jest liczba harcerzy i harcerek obecnie i oblicz w procentach zmianę tej liczby od 1934 r.

71. Liczba harcerzy polskich wraz z członkami przyjaciół harcerstwa i drużyn polskich za granicą wynosiła w r 1934 270 000; liczba harcerzy na świecie około 4 000 000. Oblicz (w I stopniu dokładności), jaki % wszystkich harcerzy świata stanowili wtedy harcerze polscy? (wykonaj diagram porównawczy)

72. Zapoznaj się z działalnością młodzieży na polu oszczędności obliczając (w drugim stopniu dokładności), ile % liczby uczestników obrotu oszczędnościowego P. K. O. tworzy młodzież oszczędzająca. (Dane z r 1934)

Liczba wszystkich książeczek oszczędnościowych około 1 449 390
książeczek młodzieży szkolnej 325 200

73. W krajach zachodnich np. w Belgii liczba młodzieży oszczędzającej dochodzi do 80% liczby młodzieży. Wyraż liczbę oszczędzających uczniów twojej klasy w % liczby wszystkich uczniów. Czy dorównujecie w oszczędności młodzieży belgijskiej? Jeżeli nie, to ilu uczniów musiałoby jeszcze oszczędzać, aby to osiągnąć.

74. Ogólny obrót towarowy Gdyni osiągnął w r 1934 w przybliżeniu liczbę 7 320 000 ton, z czego 98% przypada na handel zamorski.

A. Oblicz w tonach zamorski obrót towarowy Gdyni,

i B. Oblicz, ile % tego obrotu stanowił handlowy obrót zamorski Gdyni w r 1924, który wyrażał się liczbą około 10 000 ton. (Obliczenie wykonaj w II st. dokł.)

75. W r 1924 zawinęło do portu w Gdyni tylko 29 statków; liczba statków stanowi około 6,3% liczby statków zatrzymujących się w Gdyni w r 1934. Oblicz, ile statków weszło do Gdyni w r. 1934.

76. Handel zagraniczny Polski wyrażał się w 1934 roku liczbą 17 120 000 ton, z czego przez Gdynię przewieziono i wywieziono w przybliżeniu 6 700 ton. Ile % przywiezionego w handlu zagranicznym przypada na drogę morską przez Gdynię? (Odpowiedź w II st. dokł.)

77. Korzystając z danych poprzedniego zadania, oblicz, ile % towarów w handlu zagranicznym Polski przewozi się przez 1 km granicy lądowej, a ile % przez 1 km granicy morskiej.

78. Wisła prawie w całości jest polską rzeką. Długość jej wynosi 1092 km. Z tego tylko 65 km znajduje się poza granicami Polski. Wyraż w procentach, jakim ułamkiem długości całej Wisły jest jej część znajdująca się w granicach Polski.

79. Część dorzecza Wisły położona na obszarze Państwa Polskiego ma powierzchnię równą około 180 000 km². Oblicz, ile % powierzchni Polski należy do dorzecza Wisły (II stopień dokł. diagram)

80. Wyraż w promilach (w II st. dokł.) spadek trzech charakterystycznych odcinków Wisły a, b, c według danych w tabelce: (zobacz zadanie 13 B § 19).

	Odległość od źródeł w km	wysokość w m nad poziomem morza
Źródła	0	900
a Kraków	220	198
b Warszawa	665	79
c Ujście	1092	0

81 Długość wszystkich naturalnych dróg wodnych Polski wynosi w przybliżeniu 14 200 km, z czego na dorzecze Wisły przypada 5 300 km. Wyraż w procentach (w II stopniu dokł.), jaki ułamek długości wszystkich naturalnych dróg wodnych Polski przypada na dorzecze Wisły

WIADOMOŚCI O OBROcie PIENIĘŻNYM OPROCENTOWANIE PIENIĘDZY W CZASIE

§ 31. INSTYTUCJE FINANSOWE

I.

Rozporządzając sumą pieniędzy bez wydania której możemy zaspokoić bezpośrednio potrzeby, możemy ją umieścić w *banku lub kasie oszczędności*. Gdybyśmy za posiadane pieniądze zakupili dom lub majątek ziemski, lub włożyli je jako udział w jakimś dochodowe przedsiębiorstwo, uzyskalibyśmy po pewnym czasie dochód. Jeżeli złożymy je w banku, otrzymujemy także pewne wynagrodzenie zwane *odsetkami* od złożonego *kapitału* czyli *wkładu*. Wynagrodzenie to obliczone za rok jest umówionym procentem całej złożonej sumy. Tę umówioną liczbę procentów nazywamy *stopą procentową*. Tak więc składając w banku sumę 550 zł przy stopie procentowej 4%, otrzymamy po upływie roku 4% z 550 zł = 22 zł odsetek; po upływie $\frac{1}{2}$ roku $\frac{1}{2} \cdot 4\%$ z 550 zł = 11 zł odsetek; po 2 miesiącach $\frac{1}{6} \cdot 4\%$ z 550 = $3\frac{2}{3}$ zł = 3 zł 66 gr (w przybliżeniu)

II.

Każda instytucja finansowa (bank, kasa oszczędności) posiada zwykle duże kapitały, na które składają się fundusze własne właścicieli instytucji czyli tzw. kapitał zakładowy instytucji i wkłady innych ludzi. Instytucja finansowa może więc osobom prywatnym, czy też instytucjom zasługującym na zaufanie i poparcie, udzielać pożyczek. Za pożyczone pieniądze trzeba płacić instytucji finansowej umówione odsetki. Stopa procentowa dla pożyczek jest nieco wyższa od stopy procentowej dla wkładów. Dlatego odsetki, które instytucja finansowa otrzymuje, są większe od tych, które płaci. Różnica pokrywa koszty utrzymania instytucji i zawiera jej zysk.

III.

Instytucje finansowe, jak z powyższego wynika, pośredniczą w sprawach pieniężnych między ludźmi. Dzięki nim pieniądze niepotrzebne w danej chwili ich właścicielom są zużytkowane dla różnych pożytecznych dla jednostek i społeczeństwa celów; pieniądze te są w ciągłym obrocie i przynoszą dochód.

IV

Właścicielem instytucji finansowej może być państwo, gmina miejska czy wiejska, jakieś towarzystwo lub osoba prywatna. W Pol-

sce mamy kilka instytucji finansowych państwowych, a mianowicie: Bank Gospodarstwa Krajowego, Państwowy Bank Rolny i P. K. O.; wiele instytucji komunalnych (Komunalne Kasy Oszczędności w większych miastach) i prywatnych.

§ 32. OBLICZENIE ODSETEK I KAPITAŁU KOŃCOWEGO

I.

Jeżeli odsetki dolicza się do kapitału dopiero przy odbiorze kapitału albo, gdy są one nam wypłacane co umówiony okres czasu, mówimy, że otrzymujemy od kapitału *odsetki proste*. Jeżeli natomiast należnych nam odsetek nie odbieramy i co pewien omówiony okres czasu dolicza się je do złożonego przez nas kapitału, to w następnym okresie czasu dolicza się już odsetki od zwiększonego w ten sposób kapitału. Doliczenie odsetek do kapitału nazywamy kapitalizacją odsetek. Mówimy wtedy, że otrzymujemy od kapitału *odsetki składane*. Suma złożonego kapitału i odsetek prostych lub złożonych za pewien okres czasu nazywa się *kapitałem końcowym* po tym okresie czasu. Zazwyczaj odsetki dolicza się do kapitału raz na rok (np. w P. K. O. w dniu 1 stycznia). Mówimy wtedy, że kapitalizacja jest roczna. Czasem dolicza się odsetki co pół roku. Tak jest np. w niektórych Komunalnych Kasach Oszczędności. W tych instytucjach kapitalizacja jest półroczna. W obliczeniach przyjmujemy zwykle rok równy 360 dni, miesiąc 30 dni.

II.

P r z y k ł a d. Obliczymy odsetki proste od kapitału 2520 zł przy stopie procentowej $4\frac{1}{2}\%$ za A. $2\frac{1}{2}$ roku, B. 5 miesięcy, C. 15 dni.

A. Odsetki za rok. $4\frac{1}{2}\%$ z 2520;

„ „ $2\frac{1}{2}$ roku $2\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2}\%$ z 2520 zł = 283,5 zł;

B. „ „ 5 miesięcy $\frac{5}{12} \cdot 4\frac{1}{2}\%$ z 2520 zł = 47,25,

C. „ „ 15 dni $\frac{15}{360} \cdot 4\frac{1}{2}\%$ z 2520 zł = $\frac{1}{4} \cdot 4\frac{1}{2}\%$ z 2520 zł = 4,72 zł.

III.

P r z y k ł a d. Obliczymy odsetki składane od kapitału 3500 zł za $2\frac{1}{2}$ roku (kapitalizacja roczna, stopa procentowa 4%) Odsetki za pierwszy rok 4% z 3500 zł = 140 zł. Kapitał po pierwszej kapitalizacji 3500 zł + 140 zł = 3640 zł.

Odsetki za drugi rok. 4% z 3640 zł = 145,6 zł.

Kapitał po drugiej kapitalizacji. $3640 \text{ zł} + 145,6 \text{ zł} = 3785,6 \text{ zł}$.

Odsetki za pozostałe pół roku. $\frac{1}{2} \cdot 4\% \text{ z } 3785,6 = 75,71 \text{ zł}$. Suma wszystkich odsetek równa się $140 \text{ zł} + 145,6 \text{ zł} + 75,71 \text{ zł} = 361,31 \text{ zł}$. Kapitał końcowy równa się $3861,31 \text{ zł}$. Ponieważ obliczenie odsetek składanych tym sposobem jest dosyć długie, w bankach używa się do tego celu gotowych tablic pomocniczych.

Z a d a n i a.

1. Sporządź tablicę do wyznaczania odsetek prostych za rok od różnych kapitałów wpisanych w górnym wierszu przy stopach procentowych podanych w pierwszej kolumnie wykonując obliczenia w pamięci i wpisując wynik obliczenia w odpowiednią kratkę.

Stopa procentowa	K a p i t a ł								
	1 zł	2 zł	3 zł	4 zł	5 zł	6 zł	7 zł	8 zł	9 zł
3%									
3,5%									
4%									
4,5%									
5%									
5,5%									
6%									

2. Korzystając z tej tabelki, oblicz w pamięci odsetki od podanych niżej sum np. 3,5% od 1120 licz tak $(3,5\% \text{ z } 1) \cdot 1000 + (3,5\% \text{ z } 1) \cdot 100 + (3,5\% \text{ z } 2) \cdot 10 = 35 + 3,5 + 0,7 = 39,2$.

A. 2100 zł; 121 zł; 115 zł; 235; przy stopie 3,5% za rok.

B. 2620 zł; 480 zł; 540 zł; 625 zł; przy stopie 4% za dwa lata.

C. 4256 zł; 742 zł; 307 zł; 509 zł przy stopie 6% za $\frac{1}{2}$ roku.

3. Oblicz odsetki proste i kapitał końcowy od kapitału

A. 2562 zł za 3 miesiące stopa procentowa 5%.

B. 3896 zł za $\frac{1}{2}$ roku „ „ $4\frac{1}{2}\%$.

C. 10 256 zł za $3\frac{1}{2}$ roku „ „ 6%.

D. 624 zł za 1 miesiąc „ „ 3%.

E. 824 zł za okres od 1. III do 15. VI tego samego roku — $5\frac{1}{2}\%$.

F. 2538 zł za okres od 5. IV 1934 r do 15. I. 1935 r — 4%.

G. 340 zł za 2 lata 3 mies. 10 dni stopa procentowa $6\frac{3}{4}\%$.

4. Oblicz odsetki składane przy kapitalizacji rocznej od kapitałów

A. 3500 zł, 4000 zł, 320 zł, za dwa lata przy stopie $4\frac{1}{2}\%$.

✓ B. 1260 zł, 8420 zł, 80 zł za $3\frac{1}{2}$ roku przy stopie 5%.

✓ C. 25 648 zł, 495 zł, 346 zł, 12 484 za 4 lata 2 miesiące przy stopie procentowej 8%.

✓ 5. Komunalna Kasa Oszczędności stosuje kapitalizację półroczną przy stopie procentowej $4\frac{1}{2}\%$; bank kapitalizację roczną przy stopie procentowej 6%. Gdzie jest korzystniej oddać kapitał 6500 zł na przeciąg 2 lat, jeżeli odsetki odbierzemy dopiero po 2 latach razem z kapitałem?

✓ 6. Co jest większe: odsetki proste od kapitału 7350 zł za 4 lata przy stopie procentowej 8%, czy odsetki składane od tego samego kapitału przy stopie 6% za ten sam okres czasu?

§ 33. OBLICZANIE KAPITAŁU

(O procentowanie proste)

I.

P r z y k ł a d. Suma uzyskanych od pewnego kapitału odsetek prostych przy stopie procentowej 9% wynosiła po 3 latach i 2 miesiącach 266 zł. Ile złotych wynosił złożony kapitał?

Odsetki proste po trzech latach i dwóch miesiącach stanowią $3\frac{2}{12} \cdot 9\%$ złożonego kapitału, czyli $28\frac{1}{2}\%$ tego kapitału. Wobec tego (§ 28. I) 1% tego kapitału równa się $266 : 28\frac{1}{2}$, a kapitał czyli sto procent kapitału równa się $(266 : 28\frac{1}{2}) \cdot 100 = 933$. Kapitał wynosił 933 zł.

II.

P r z y k ł a d. Suma odsetek uzyskanych od pewnego kapitału po 1 latach wynosi D zł; stopa procentowa p%. Ile wynosił kapitał?

Odsetki proste po 1 latach stanowią $1p\%$ złożonego kapitału. 1%

tego kapitału równa się zatem $\frac{D}{l \cdot p}$ a 100% równa się $\frac{D}{l \cdot p} \cdot 100$. Oznaczając kapitał literą K, możemy zatem napisać.

$$K = \frac{D}{l \cdot p} \cdot 100.$$

Na podstawie tego wzoru, możesz obliczyć kapitał K podstawiając w miejsce liter D, l, p, dane w zadaniu wartości.

III.

Przykład. Kapitał końcowy (oprocentowanie proste, stopa procentowa 7%) wyniósł po 9 miesiącach 235,54 zł. Ile zł wynosił kapitał początkowy?

Odsetki po 9 miesiącach stanowią $\frac{9}{12} \cdot 7\% = 5\frac{1}{4}\%$ kapitału. Kapitał końcowy stanowi zatem $105\frac{1}{4}\%$ kapitału. W takim razie 1% szukanego kapitału równa się 235,54 : 105,25, a 100% — równa się (235,54 : 105,25) $\cdot 100 = 223,79$. Kapitał początkowy wynosił 223,79 zł.

Zadania.

7. Przepisz i uzupełnij tabelkę, wykonując obliczenia w pamięci.

stopa procentowa	odsetki w zł	za okres czasu	kapitał w zł
3%	30	5 lat	
4%	42	$\frac{1}{2}$ roku	
10%	360	3 lata	
$3\frac{1}{3}\%$	210	2 lata	
8%	60	3 miesiące	
9%	90	8 miesięcy	

8. Oblicz, jaki kapitał oddany:

A. na 3 lata przy stopie 5% da 240 zł odsetek prostych;

B. na $2\frac{1}{2}$ lat przy stopie 4% do 459 zł odsetek prostych;

C. na 3 lata 4 mies. przy stopie 6% da 640 zł odsetek prostych;

D. na 5 lat i 1 mies. przy stopie 12% da 305 zł odsetek prostych;

E. na 7 miesięcy przy stopie $6\frac{1}{2}\%$ da 1920 zł odsetek prostych.

9. Jaki kapitał trzeba złożyć w kasie w dniu 1 stycznia, aby 15. IV. tego samego roku otrzymać 150 zł odsetek (stopa procentowa $5\frac{1}{2}\%$)

10. Oblicz, jaki kapitał trzeba złożyć

A. na 3% , aby po $4\frac{1}{2}$ miesiącach otrzymać wraz z odsetkami 5258 $\frac{1}{2}$ zł;

B. na $4\frac{1}{2}\%$, aby po 8 miesiącach otrzymać wraz z odsetkami 6695 zł;

C. na $8\frac{3}{4}\%$, aby po 6 miesiącach otrzymać wraz z odsetkami 252,5 zł.

11. Janek złożył w dniu 1 kwietnia w kasie oszczędności sumę 137 zł (stopa procentowa 6%) jaką sumę musi w trzy miesiące później złożyć Kazik, aby dnia pierwszego stycznia następnego roku otrzymać wraz z odsetkami tyle samo złotych, co Janek.

§ 34. OBLICZANIE STOPY PROCENTOWEJ

(Oprocentowanie proste)

I.

Przykład. Od kapitału 3520 zł otrzymaliśmy w ciągu 3 lat 633,6 zł odsetek prostych. Ile wynosiła stopa procentowa? Odsetki za rok wyniosły 633,6 zł : 3 = 211,2 zł. Obliczymy, ile $\%$ z 3520 stanowi liczba 211,2 $\cdot 1\%$ z 3520 = 35,20; 211,2 : 35,2 = 6. Stopa procentowa wynosiła 6% .

II.

Przykład. Od kapitału 1860 zł otrzymaliśmy po 5 miesiącach 62 zł odsetek. Jaka była stopa procentowa?

Odsetki za miesiąc wynosiłyby $\frac{62}{5} \text{ zł}$.

Odsetki za rok wynosiłyby $12 \cdot \frac{62}{5} \text{ zł} = 148\frac{4}{5} \text{ zł}$.

Obliczymy ile $\%$ z 1860 stanowi liczba $148\frac{4}{5} \cdot 1\%$ z 1860 = 18,6, $148\frac{4}{5} : 18,6 = 8$. Stopa procentowa wynosiła 8% .

III.

Przykład. Od kapitału K zł otrzymaliśmy po l latach D zł odsetek. Jaka była stopa procentowa?

Odsetki za rok wynosiły w zł $\frac{D}{l}$

Obliczymy, ile $\%$ liczby K stanowi liczba $\frac{D}{l}$, 1% K = $\frac{K}{100}$; a za-

tem, jeżeli stopę procentową oznaczamy literą p, otrzymamy.

$$p = \frac{D}{l} : \frac{K}{100}$$

Na podstawie tego wzoru możesz obliczyć stopę procentową p podstawiając w miejsce liter D, l, K dane w zadaniu wartości.

Zadania.

*12. Przepisz i uzupełnij tabelkę wykonując obliczenia w pamięci.

Kapitał	Odsetki	Za okres czasu	Stopa procentowa
200 zł	8 zł	1 rok	
300 „	30 „	2 lata	
150 „	27 „	3 lata	
400 „	20 „	$\frac{1}{2}$ roku	
300 „	18 „	9 miesięcy	
600 „	4 „	2 miesiące	

13. Oblicz stopę procentową, jeżeli

A. kapitał 3250 zł daje po 7 mies. 85 zł odsetek;

B. kapitał 4380 zł daje po $1\frac{1}{2}$ roku 459,9 zł odsetek,

C. kapitał 580 zł daje po 2 latach 75,4 zł odsetek,

✓ D. kapitał 6248 zł daje po 2 latach i 1 mies. 781 zł odsetek;

✓ E. kapitał 5640 zł daje po 1 roku 11 mies. 540,5 zł odsetek,

✓ F. kapitał 4800 zł daje po 21 dniach 7 zł odsetek.

✓ 14. Ktoś umieścił jedną część posiadanych kapitałów, a mianowicie 5610 zł w pewnym przedsiębiorstwie i otrzymał po 7 miesiącach 327,25 zł dochodu, drugą zaś część w sumie 9300 zł w banku i otrzymał po $\frac{1}{2}$ roku 302,25 zł. Która lokata pieniędzy dawała większy zysk? (Oblicz stopy procentowe i porównaj je).

✓ 15. Złożono w banku kapitał 4250 zł na $5\frac{1}{2}\%$, po upływie 4 miesięcy stopę procentową wkładów zmieniono. Właściciel kapitału otrzymał po roku wszystkie odsetki w sumie 248,5 zł.

Ile wynosiła nowa stopa procentowa od wkładu?

§ 35. OBLICZENIE CZASU OPROCENTOWANIA

(Oprocentowanie proste).

I.

Przykład. Po jakim czasie odsetki proste od kapitału 5675 zł przy stopie procentowej 4% wyniosą 510,75 zł? Obliczmy odsetki po roku; 4% z 5675 zł = 4 · 56,75 zł = 227 zł. Aby się dowiedzieć, po ilu latach odsetki wyniosą 510,75 zł, trzeba liczbę 510,75 podzielić przez 227, $510,75 : 227 = 2,25$.

Dane odsetki otrzymamy po $2\frac{1}{4}$ roku.

II.

Przykład. Po jakim czasie odsetki proste od kapitału K zł przy stopie $p\%$ wyniosą D zł? Odsetki po roku wynoszą $p\%$ z K zł =

= $p \frac{K}{100}$ zł? Aby się dowiedzieć, po ilu latach odsetki wyniosą D zł, trzeba liczbę D podzielić przez $p \frac{K}{100}$.

Oznaczając przez l liczbę lat, po upływie których kapitał K zł przyniesie D zł odsetek, otrzymamy

$$l = D : \left(p \frac{K}{100} \right).$$

Na podstawie tego wzoru, możesz obliczyć liczbę lat oprocentowania wstawiając w miejsce D, p, K, dane w zadaniu wartości.

Zadania.

*16. Przepisz i uzupełnij tabelkę wykonując obliczenia w pamięci

Kapitał	Odsetki	Stopa procentowa	Okres czasu
600 zł	48 zł	4%	2
1000 zł	150 zł	5%	3
500 zł	15 zł	6%	0,6
1250 zł	37,5 zł	10%	0,3
1200 zł	8 zł	8%	0,0833
3500 zł	14 zł	4%	0,1

17. Oblicz po jakim czasie

A. kapitał 540 zł oddany na $5\frac{1}{2}\%$ przyniesie 118 zł odsetek,

B. kapitał 680 zł oddany na 6% przyniesie 61,2 zł odsetek,

C. kapitał 1250 zł oddany na $4\frac{1}{2}\%$ przyniesie 356,25 zł odsetek,

D. kapitał 940 zł oddany na 8% przyniesie 37,6 zł odsetek,

E. kapitał 8240 zł oddany na $7\frac{1}{2}\%$ przyniesie 103 zł odsetek.

18. Oblicz, po ilu miesiącach.

A. kapitał 240 zł złożony na 10% wzrośnie do sumy 250 zł;

B. kapitał 3660 zł złożony na $8\frac{1}{2}\%$ wzrośnie do sumy 3867,4 zł;

C. kapitał 8100 zł złożony na $3\frac{3}{4}\%$ wzrośnie do sumy 8201,25 zł.

§ 36. OSZCZĘDNOŚCI

(P. K. O.)

I.

Oszczędzając drobne nawet sumy pieniężne i składając je w jakiejś do przyjmowania wkładów oszczędnościowych uprawnionej

instytucji finansowej, możesz zebrać po jakimś czasie większą sumę pieniędzy, którą wykorzystasz lepiej niż drobne kwoty wydane nieraz na zbyteczne rzeczy

Twoje oszczędności mają też znaczenie dla gospodarstwa państwowego. Instytucja, której je powierzasz obraca tymi pieniędzmi w czasie, gdy tobie są one niepotrzebne. Tak np. P. K. O. przyczyniła się finansowo do uruchomienia wielkiej chłodni w Gdyni, wspomagała odbudowę kraju po wielkiej powodzi w 1934 r.

II.

Aby ułatwić uczniom oszczędzanie zakłada się obecnie w szko-
łach Szkolne Kasy Oszczędności (S. K. O.)

W roku 1935 istniały w szkołach polskich Szkolne Kasy Oszczędności oparte o P. K. O. (w liczbie 5202) lub oparte o Komunalne Kasy Oszczędności. W szkole, w której zorganizowano S. K. O. opartą o P. K. O., uczeń może składać bardzo nawet drobne kwoty. Kwoty te wpisuje się w szkolną książeczkę oszczędności. Gdy suma przez ucznia złożona wzrośnie do 5 złotych, przelewa się ją do P. K. O., która wystawia mu imienną książeczkę oszczędnościową, składając dalej nawet groszowe sumy do Kasy S. K. O. może on po jakimś czasie znowu złożyć większą sumę, która umieszczona następnie w P. K. O. powiększy wpisany w jego książeczkę wkład oszczędnościowy.

Drobne oszczędności uczniów jednej szkoły, nie rozdzielone jeszcze na osobne książeczki imienne uczniów, przechowuje się także w P. K. O. i wpisuje się na jedną książeczkę zbiorową. Odsetki płacone przez P. K. O. od tej całej sumy włącza się do funduszu S. K. O., którym rozporządzają członkowie kasy wspólnie.

III.

P. K. O. przyjmuje wkłady już od 1 zł. Odsetki od wkładu złożonego po pierwszym pewnego miesiąca oblicza się poczynawszy od 1 następnego miesiąca. Z końcem każdego roku kalendarzowego oblicza się i dopisuje w książeczce odsetki do złożonego wkładu. Stopa procentowa zmienia się.

W r 1935 wynosiła 4% (dowiedz się, jaka jest obecnie) Kwotę nie przekraczającą 100 zł, można z książeczki podjąć każdego dnia w jakimkolwiek oddziale P. K. O.

Ponieważ taki oddział znajduje się prawie przy każdym urzędzie pocztowym, więc sumę tę możemy podjąć na wycieczce, na wakacjach itd., co oczywiście jest bardzo dogodne i zachęca oszczędzających do powierzenia swych oszczędności tej instytucji.

Z a d a n i a.

19. W szkole Andrzeja istnieje S. K. O. Andrzej zebrał kwotę 5 zł, w dniu 28 września 1934 r. przelano tę kwotę do P. K. O. i Andrzej otrzymał imienną książeczkę oszczędnościową. W przeciągu listopada zaoszczędził 90 gr, w dniu 31 listopada otrzymał od ojca jeszcze 25,10 zł, które natychmiast złożył w P. K. O. Ile zł oddał P. K. O. w dniu 1 stycznia 1935 r? go zapas blachy wy-

20. W ciągu 51 ko25 przelano 3,6 dm. Okazało się jednak, że obręcze będą silniej osadzone, jeżeli ich średnicę zmniejszy się o 2 cm. Ile tak zmniejszonych obręczy będzie można wykonać z tego samego zapasu blachy (kawałeczków potrzebnych do zlutowania nie uwzględnimy w rachunku)

68. Odkryty w r 1934 szyb w Roztokach dawał 35 m³ gazu ziemnego w ciągu 3 sekund.

A. Ile m³ gazu wydobydzie się w ciągu kwadransa?

B. W ciągu ilu sekund wydobędzie się tyle m^3 gazu, ile go zużywa Warszawa w ciągu godziny tj. 120 m^3 ?

69. $4\frac{1}{2}$ q węgla kamiennego daje tyle samo ciepła, co 7 q twardego drzewa. Oblicz, ile q drzewa trzeba spalić, aby zastąpić 1 t węgla.

70. Światło przebiega drogę 300 km w ciągu 0,001 sekundy. Oblicz, w jakim czasie przebędzie światło odległość ziemi od słońca wynoszącą około 150 000 000 km.

75 m i 62 m na prostokątny kawał łąki równej co do powierzchni o długości 80 m. Ile m szerokości miała druga łąka?

72. Kawałek tkaniny długości $3\frac{1}{2}$ m, szerokości $1\frac{3}{4}$ m skurczył się wzdłuż i w szerokość wprost proporcjonalnie do odpowiednich wymiarów. Szerokość tkaniny po wypraniu wynosiła $1\frac{1}{2}$ m. Jaka była długość tkaniny po wypraniu?

o krajoznawcze projektuje obóz wędrowny; obliczono, że czoną na wycieczkę sumę pieniędzy można wysłać najwy-
 ennic na obóz 18-dniowy Ile dni może trwać obóz, jeżeli
 a obóz dodatkowo jeszcze 4 uczennice?

Na ogólne zebranie wysłały różne organizacje szkolne delega-
w liczbie wprost proporcjonalnej do liczby członków organizacji

Winnno wysłać koło sportowe liczące 112 członków i także lu-
ne liczące 32 członków? ...em, że mo-

matyki dla I kl. gimn.

instytucji finansowej, możesz zebrać po jakimś czasie większą sumę pieniędzy, którą wykorzystasz lepiej niż drobne kwoty wydane nieraz na zbyteczne rzeczy

Twoje oszczędności mają też znaczenie dla gospodarstwa państwowego. Instytucja, której je powierzasz obraca tymi pieniędzmi w czasie, gdy tobie są one niepotrzebne. Tak np. P. K. O. przyczyniła się do uruchomienia wielkiej chłodni w Gdyni, wspomagała 77 Mięso, do wielkiej powodzi w 1934, wyniesie w przybliżeniu, przek.

78. Ropę naftową wypełniaj II.
sokości 5 m przeprowadzono do rur
soko podnie się ropa w tej rurze

79. Dłużnik spłacił połowę długu w 8 równych ratach po 56 zł. W ilu równych ratach spłaci pozostałą część długu, jeżeli każdą ratę zwiększy o 8 zł?

80. Na ogrzanie pewnej ilości wody do kąpielii o 18° musimy spalić $1,7 \text{ m}^3$ gazu.

Oblicz.

Oblicz.

A. ile m^3 gazu spalimy, jeżeli temperatura nieogrzonej wody jest 8° , a chcemy ją ogrzać do 39° , jeżeli za 10 m^3 gazu

B. ile kosztuje kąpiel w temperaturze 39° jeżeli za 10 m^3 gazu płacimy $2,7 \text{ zł}$?

81 Na torze kolejowym w zimie w temperaturze 0° ułożono 2 szyny, przy czym zostawiono między nimi szparę szerokości 0,5 cm. Oblicz, jaki będzie odstęp tych szyn w lecie w temperaturze 30° , jeżeli każda z tych szyn po ogrzaniu o 10^0 rozszerzy się w kierunku szpary o 1,1 mm.

82. Duża menzurka jest częściowo wypełniona spirytus^{sem. 10}, część menzurki nad powierzchnią spirytusu ma $12\frac{1}{2}$ cm. Zauważyliśmy, że po ogrzaniu o 3^0 objętość spirytusu wzrośnie o $3\frac{1}{2}$ cm³. O ile jeszcze najwyżej stopni możemy ogrzać spirytus, aby nie wylał się?

83. Pociąg pośpieszny przebywa w $2\frac{1}{2}$ godz. tę samą drogę, co pociąg osobowy przejeżdża w $3\frac{3}{4}$ godz. Ile godz. zużyje pociąg pośpieszny na przebycie drogi, którą pociąg osobowy przejeżdża w 10 godzinach?

Po. 84. 10 jaj zawiera tyle samo białka, co 271 g wołowiny. Co pocztow w przybliżeniu jaj ze względu na zawartość białka może zastępczych itd., wołowiny. Z prostopadłościenną belką drewnianą możemy wyjąć do powierzchni.

Z a d a n i a.

19. W szkole Andrzeja istnieje S. K. O. Andrzej zebrał kwotę 5 zł; w dniu 28 września 1934 r przelano tę kwotę do P. K. O. i Andrzej otrzymał imienną książeczkę oszczędnościową. W przeciągu listopada zaoszczędził 90 gr, w dniu 31 listopada otrzymał od ojca na imieniny 25,10 zł, które natychmiast złożył w P. K. O. Ile zł odsetek dopisze mu P. K. O. w dniu 1 stycznia 1935 r ?

20. W ciągu roku 1935 przelano z S. K. O. na książeczkę Kazika następujące sumy: w dniu 28 stycznia 5 zł, 16 kwietnia 6 zł, 15 maja 5 zł, 18 października 10 zł, 28 listopada 15 zł.

Oblicz, jaka suma będzie wpisana do książeczki Kazika w dniu 1 stycznia 1936 r. (Wkłady wraz z odsetkami)

21 Ojciec Janka złożył na jego książeczkę w P. K. O. w dniu 1 stycznia 1934 r 110 zł; Janek nie zmienił w ciągu roku 1934 stanu swoich oszczędności. Władek wkładał na swoją książeczkę co miesiąc, począwszy od 1 stycznia 1934 r po dziesięć zł przez cały rok; który chłopiec miał z początkiem roku 1935 większą sumę oszczędności? (wraz z odsetkami)

22. Uczennica włożyła w dniu 5 lutego 25 zł do kasy P. K. O. Ile zł musi złożyć w dniu 20 maja tego samego roku, aby z początkiem przyszłego roku mieć wraz z odsetkami 50 zł?

§ 37 RACHUNEK CZEKOWY

I.

Klasa I prenumeruje pismo harcercskie. Pieniądze za prenumeratę wysyła wójt klasy *czekiem nadawczym P K O. na konto administracji pisma*. Administracja pisma przechowuje w kasie P K. O. swoją gotówkę. Sumy przesłane przez czytelników pisma do P K. O. zostaną dopisane do rachunku administracji i pozostają w kasie P K. O. Jedna z części czeku pozostaje u nadawcy, jako dowód wpłaconej sumy, drugą otrzymuje administracja, trzecia zaś pozostaje w P. K. O. (Zł. Sącz wzór A.)

II.

Różne instytucje, przedsiębiorstwa, stowarzyszenia, a także ludzie prywatni, składają w banku gotówkę, z tym zastrzeżeniem, że mogą nią dowolnie w każdej chwili rozporządzać. Mówimy, że bank *otwiera im konto czekowe* opatrzone jakimś numerem. Równocześnie

bank wydaje właścicielowi konta książeczkę czekową składającą się z osobnych kartek (czeków). Jeżeli właściciel konta ma komuś zapłacić pewną kwotę, wypełnia odpowiednio czek i wręcza go tej osobie. Za okazaniem czeku kasa banku wypłaci okazicielowi wypisaną na czeku sumę. Jest to tzw. *czek kasowy*. (Wzór B.)

III.

Może się zdarzyć, że osoba, której właściciel konta ma wypłacić pewną sumę pieniędzy, posiada także konto otwarte w banku. Wtedy może on poprostu wysłać do banku czek, w którym poleca przelać pewną sumę z swego konta na konto tej osoby. Taki czek nazywamy *czekiem przelewowym*. (Wzór C.)

Ponieważ taki sposób załatwiania spraw pieniężnych nie wymaga natychmiastowej wypłaty gotówki, nazywamy obrót czekami przelewowymi *bezugotówkowym obrotem czekowym*.

Zadania.

23. Przemysłowiec otworzył sobie konto czekowe w banku, składając 12 480 zł w dniu 1 maja.

Z sumy tej wypłacono w dniu 15 maja na czek kasowy Nr 38 650 sumę 120 zł, w dniu 20 maja przelano na konto numeru 25 421 — 3000 zł. W dniu 5 czerwca nadesłano na konto przemysłowca sumę 4000 zł. W dniu 30 czerwca przelano na konto Nr 15 182 sumę 1500 zł. Jaką kwotę (saldo) posiada przemysłowiec wraz z odsetkami w dniu 1 lipca, jeżeli stopa procentowa dla rachunków czekowych wynosi 1%?

§ 38. KREDYT

I.

Bardzo duże znaczenie w współczesnym życiu gospodarczym ma *kredyt*. Kredytu udziela instytucja finansowa lub prywatny kapitalista pożyczając pieniądze; kredytu udziela także hurtownik i fabrykant nie żądając od razu od kupca czy rolnika zapłaty za kupiony towar.

Osobę lub instytucję udzielającą kredytu nazywamy wierzycielem, korzystającego z kredytu dłużnikiem.

Dłużnik płaci najczęściej wierzycielowi wynagrodzenie w postaci odsetek od pożyczonej lub należnej za towary sumy według umówionej stopy procentowej. Stopa procentowa nie może jednak przekraczać 12%.

Pobieranie większych odsetek jest przez prawo zakazane, ponieważ jest wyzyskiem (lichwą).

II.

Powszechną formą kredytu jest tzw. *kredyt krótkoterminowy*, którym posługują się kupcy, przemysłowcy, rolnicy itp. Pożyczając pewną sumę pieniędzy na krótki okres czasu (zwykle kilka miesięcy), wierzyciel żąda od dłużnika pisemnego zobowiązania, że pożyczkę w oznaczonym czasie zwróci. Takie zobowiązanie, ujęte w przepisanej prawem formie, napisane na urzędowym blankiecie skarbowym, nazywa się *weksem*. (Wzór D)

Kupiec np. kupując u hurtownika lub fabrykanta większą ilość towaru i wiedząc, że potrzebną na zapłacenie towaru gotówkę zbierze po dłuższym okresie czasu z rozsprzedaży tego towaru, wystawia weksel, którym zobowiązuje się zwrócić wypisaną na wekslu sumę w oznaczonym terminie.

Zdarza się, że wierzycielowi pieniądze potrzebne są przed terminem wykupienia weksła, może zapłacić wtedy np. za potrzebne mu towary weksem będącym w jego posiadaniu, może także odstąpić ten weksel osobie prywatnej lub instytucji finansowej za pieniądze (podpisując się na odwrotnej stronie weksła). Wierzyciel otrzymuje pieniądze, a nabywca zachowuje weksel i może zażądać od dłużnika podpisanego na wekslu zapłacenia długu w odpowiednim terminie. Takie odstąpienie weksła w banku nazywamy *zdyskontowaniem weksła*. Bank nie wypłaca całej sumy wypisanej na wekslu; pobiera pewne wynagrodzenie, a mianowicie odlicza sobie od tej sumy pewien procent, zwany *dyskontem*, za czas od dnia zdyskontowania weksła do dnia, w którym dłużnik zobowiązał się weksel wykupić. Tę liczbę procentów, według której obliczamy dyskonto, nazywamy stopą dyskontową.

III.

P r z y k ł a d. W banku, w którym stopa dyskontowa wynosi 5%, zdyskontowano w dniu 15 maja weksel opiewający na 600 zł, płatny dnia 1 lipca. Bank odliczy odsetki od 600 zł za 45 dni, czyli sumę $\frac{4}{3} \frac{5}{60} \cdot 30 \text{ zł} = 3,75 \text{ zł}$. Wierzyciel otrzyma zatem za weksel 600 zł — 3,75 zł = 596,25 zł.

IV

Podobne obliczenie, jak w przykładzie III, przeprowadza się także, jeżeli dłużnik, który zobowiązał się wypłacić pewną sumę w oznaczonym terminie, zwraca dług wcześniej. Płaci wtedy sumę

mniejszą od wypisanej na wekslu sumy o pewne dyskonto z tej sumy, według umówionej stopy dyskontowej.

Zadania.

24. Kupiec zakupił towar od hurtownika. Cena kupna wynosiła 2580 zł. Trzecią część tej sumy zapłacił gotówką, resztę zobowiązał się zapłacić wraz z odsetkami po upływie 2 miesięcy. Ile zł zapłaci? (Stopa procentowa $5\frac{1}{2}\%$)

25. Dłużnik zobowiązał się zapłacić dług 4800 zł za rok z odsetkami. (Stopa proc. 9%) Ponieważ po roku nie mógł długu zapłacić, wierzyciel przedłużył mu termin jeszcze o $\frac{1}{2}$ roku z tym jednak, że odsetki należące się za pierwszy rok, doliczono na początku tego półroczu do kapitału. Ile zł zapłacił dłużnik po upływie $1\frac{1}{2}$ roku?

26. Ktoś pożyczył na przeciąg roku sumę 3250 zł i płaci co miesiąc 25 zł odsetek. Ile % wynosi stopa procentowa?

27. Oblicz dyskonto od weksli według następujących danych:

Suma wypisana na wekslu	Termin płatności	Termin zdyskontowania	Stopa dyskontowa	Dyskonto
3540	1 V 1936	25. III. 1936	6%	
8244	2. VII. 1936	28. IV. 1936	$5\frac{1}{2}\%$	
240	5. IV 1936	31 I. 1936	$4\frac{1}{2}\%$	

28. Hurtownik posiada 3 weksle na sumę 450 zł płatny w dniu 1 maja, na 1220 zł płatny w dniu 15 kwietnia, na sumę 3680 zł płatny w dniu 1 czerwca.

Ile zł otrzyma dyskontując te weksle w banku dnia 1 marca? (St. dyskontowa $6\frac{1}{2}\%$)

29. Dłużnik jest winien 300 zł; wystawił wierzycielowi weksel płatny za 21 dni na sumę 306 zł. Czy wierzyciel straci, czy zyska dyskontując ten weksel w dniu jego wystawienia w banku, w którym stopa dyskontowa jest 6%?

30. Ktoś kupił pole za 6800 zł z zastrzeżeniem, że sumę tę zapłaci za $1\frac{3}{4}$ roku. Ile zł zapłaci regulując rachunek już po upływie roku, jeżeli odliczono dyskonto $5\frac{1}{2}\%$?

31. Na ile dni przed terminem zapłaty spłacono dług 860 zł sumą 840 zł, jeżeli przyjęto stopę dysk. 5%?

SPIS TREŚCI

Powtarzanie i uzupełnianie wiadomości o liczbach całkowitych i ułamkowych.

§ 1. Znaczenie ułamka	3
§ 2. Przekształcanie ułamka	7
§ 3. Podzielność liczb naturalnych	8
§ 4. Porównywanie ułamków	12
§ 5. Liczby pierwsze i złożone	13
§ 6. Rozkładanie na czynniki pierwsze	15
§ 7. Wspólna wielokrotna	17
§ 8. Przybliżenia liczbowe	19
§ 9. Dodawanie i odejmowanie ułamków i przybliżeń dziesiętnych	23
§ 10. Zmiany sumy i różnicy	28
§ 11. Mnożenie ułamków	31
§ 12. Dzielenie ułamków	34
§ 13. Mnożenie i dzielenie przybliżeń dziesiętnych	39
§ 14. Rozwiązywanie zagadnień	40
§ 15. Zmiany iloczynu i ilorazu	50

Znakowanie literowe.

§ 16. Wyrażenia literowe. Obliczanie wartości liczbowej wyrażenia literowego	54
§ 17. Zasady korzystania z wzorów	59
§ 18. Układanie wzorów	66

Wielkości proporcjonalne.

§ 19. Stosunek dwóch odcinków	71
§ 20. Stosunek wielkości. Diagramy prostokątne dla porównania wielkości	75
§ 21. Zmiana wielkości i podział wielkości w danym stosunku	80
§ 22. Wielkości wprost proporcjonalne	85
§ 23. Wielkości odwrotnie proporcjonalne	90
§ 24. Rozwiązywanie zagadnień	93
§ 25. Rozwiązywanie zadań, w których występują wielkości zależne od kilku wielkości	100

Obliczenia procentowe.

§ 26. Procent i promil	103
§ 27. Wyznaczanie procentu danej wielkości	105
§ 28. Wyznaczanie wielkości z danego jej procentu	108
§ 29. Obliczanie liczby procentów	111
§ 30. Obliczenia procentowe	115

Wiadomości o obrocie pieniężnym. Oprocentowanie pieniędzy w czasie.

§ 31. Instytucje finansowe	118
§ 32. Obliczanie odsetek i kapitału końcowego	120
§ 33. Obliczanie kapitału	122
§ 34. Obliczanie stopy procentowej	124
§ 35. Obliczenie czasu oprocentowania	125
§ 36. Oszczędności (P. K. O.)	127
§ 37. Rachunek czekowy	128
§ 38. Kredyt	129

WAGA. Wpłacający winien przy
i brzmienie konta (nazwisko i imię
właściciela, wzgl. firmę). Za wpłaty uskutecznione
brzmienia konta nadawczych błędnie wypełnionych, w odniesieniu do