

PEDAGOGICZNA BIBLIOTEKA
WOJEWÓDZKA W BIAŁYMSTOKU



p.5357

Stankiewicz

DR. B. KALICUN-CHODOWICKI

CZYTELNIĄ

ZARYS GEOMETRII WYKREŚLNEJ

DLA GIMNAZJÓW (KL. VI WYDZIAŁU
MATEMATYCZNO - PRZYRODNICZEGO
i KL. VII WYDZ. HUMANISTYCZNEGO)
ORAZ DLA SEMINARIÓW NAUCZY-
CIELSKICH I SZKÓŁ ZAWODOWYCH



K S I A Ź N I C A P O L S K A

TOW. NAUCZYCIELI SZKÓŁ WYŻSZYCH

LWÓW—WARSZAWA

1923

WSTĘP

1. Każdą figurę płaską możemy narysować na płaszczyźnie z taką dokładnością i wiernością, na jaką tylko pozwalają nasze przybory rysunkowe.

Inaczej rzecz się ma z bryłą: tej narysować bezpośrednio na płaszczyźnie nie możemy. Możemy ją jednak przedstawić [odwzorować] na płaszczyźnie zapomocą figury, zwanej rzutem, a pozostającej z bryłą w ścisłej geometrycznej łączności.

Tę część Geometrii, która uczy o rzutach utworów przestrzennych, nazywamy Geometrią rzutową, także Geometrią wykreślną.

2. a) Weźmy na uwagę dowolny graniastosłup $ABCDEF$ [rys. 1]. Trzymając go przed nieprzeźroczystą płaszczyzną P , patrzmy na niego jednym okiem [przymknawszy drugie].

Oznaczmy środek optyczny tego oka przez S . Z niezliczonej ilości promieni światła, które odbijają się od wierzchołka bryły A , jeden dostaje się do naszego oka, przechodząc przez środek S . Idąc w przedłużeniu tego promienia, widzimy w jego punkcie przebicia z płaszczyzną P obraz wierzchołka A na tejże płaszczyźnie. Oznaczmy go przez A' .

W ten sam sposób powstają obrazy B' , C' , D' , E' , F' wierzchołków B , C , D , E , F , jako punkty przebicia z płaszczyzną P promieni widzenia tych wierzchołków.

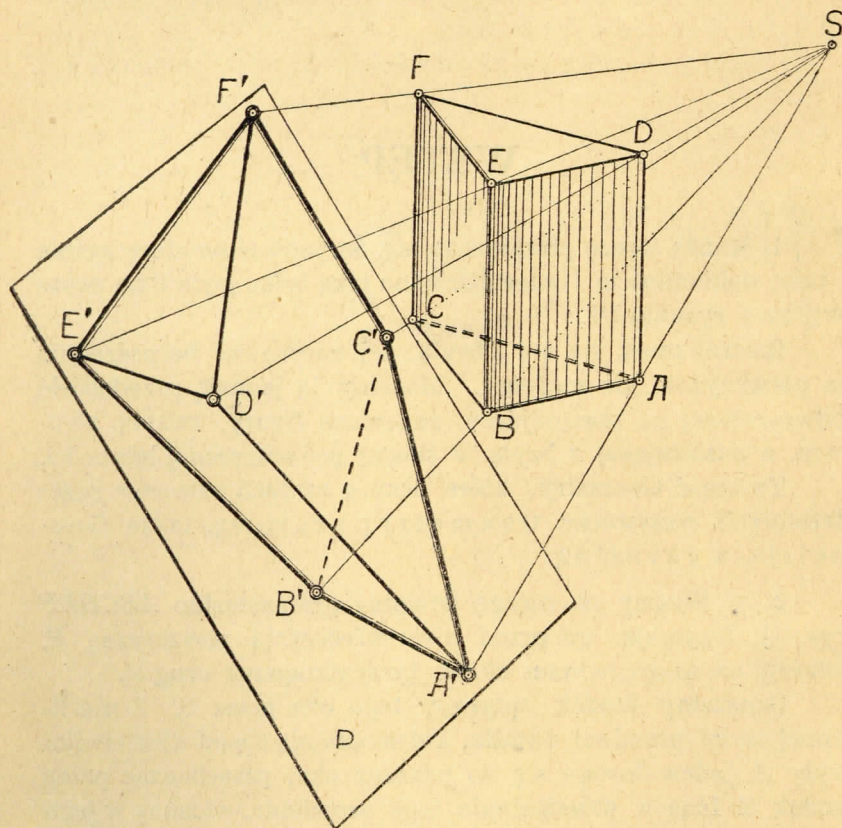
Środek S i krawędź AB wyznaczają płaszczyznę widzenia tej krawędzi. Płaszczyzna ta przecina się po przedłużeniu z płaszczyzną P podług prostej $A'B'$, która jest obrazem krawędzi AB na płaszczyźnie P .

Środek S wyznacza zatem z poszczególnymi krawędziami bryły płaszczyzny widzenia, które przecinają płaszczyznę P

podług prostych, stanowiących obrazy tych krawędzi na płaszczyźnie P .

Obrazy krawędzi ograniczają obrazy poszczególnych ścian.

Wskaż na rysunku obrazy poszczególnych wierzchołków, krawędzi, ścian!



Rys. 1

b) Najdalej wysunięte obrazy krawędzi stanowią kontur (zarys) obrazu bryły. Boki konturu tego są obrazami takich krawędzi bryły, które stanowią jej kontur (zarys) widzialny.

Wskaż na rysunku kontur obrazu i kontur widzialny bryły!

Patrz z pewnej odległości na szafę, piec, stół i wskaż kontury widzialne i kontury obrazów tych brył na przeciwległych ścianach!

c) Zastąpmy w myśli środek optyczny oka przez punkt geometryczny S , promienie widzenia poszczególnych wierzchoł-

ków przez proste geometryczne $SA, SB, SC, \dots$, płaszczyzny widzenia poszczególnych krawędzi bryły przez płaszczyzny geometryczne $S[AB], S[BC], S[CD], S[DE], \dots$, natenczas obraz optyczny $A'B'C'D'E'F'$ danej bryły na płaszczyźnie P nazywać będziemy rzutem tej bryły na płaszczyznę P z punktu S , krótko rzutem środkowym.

Punkt S nazywamy środkiem rzutów, płaszczyznę P płaszczyzną rzutów (płaszczyzną tłową).

Proste $SA, SB, SC, \dots$ nazywamy prostami rzucającymi punkty $A, B, C, D, \dots$, płaszczyzny $S[AB], S[BC], S[CD], \dots$ płaszczyznami rzucającymi krawędzie $AB, BC, CD, \dots$.

d) Kontur widzialny bryły na rys. 1, t. j. linia łamana $ABEFCA$, dzieli powierzchnię bryły na dwie części, na część zwróconą do środka rzutów S , która jest zatem dla oka w punkcie S umieszczonego widzialną, i na część odwróconą od środka rzutów, a zatem dla oka w punkcie S umieszczonego niewidzialną [przyjmując, że bryła jest z materiału nieprzeźroczystego].

Rzuty wierzchołków, krawędzi i ścian widzialnych będą również widzialne.

Rzuty krawędzi widzialnych rysujemy liniami pełnymi.

Rzuty wierzchołków, krawędzi i ścian niewidzialnych są również niewidzialne.

Rzuty krawędzi niewidzialnych rysujemy liniami kreskowanymi.

Kontur rzutu rysujemy linią pełną najgrubszą.

1) Wskaż na omawianej bryle [rys. 1] krawędzie i ściany widzialne, a następnie odszukaj je na rzucie bryły!

Wskaż na bryle i na jej rzucie krawędzie i ściany niewidzialne!

2) Utrwaliwszy w jaki sposób bryłę [rys. 1] w jej pierwotnym położeniu względem płaszczyzny rzutów P , umieść w punkcie S płomień świecy! Zauważysz, że cień rzucony bryły na płaszczyznę P nakryje sobą poprzednio rozważany rzut tej bryły.

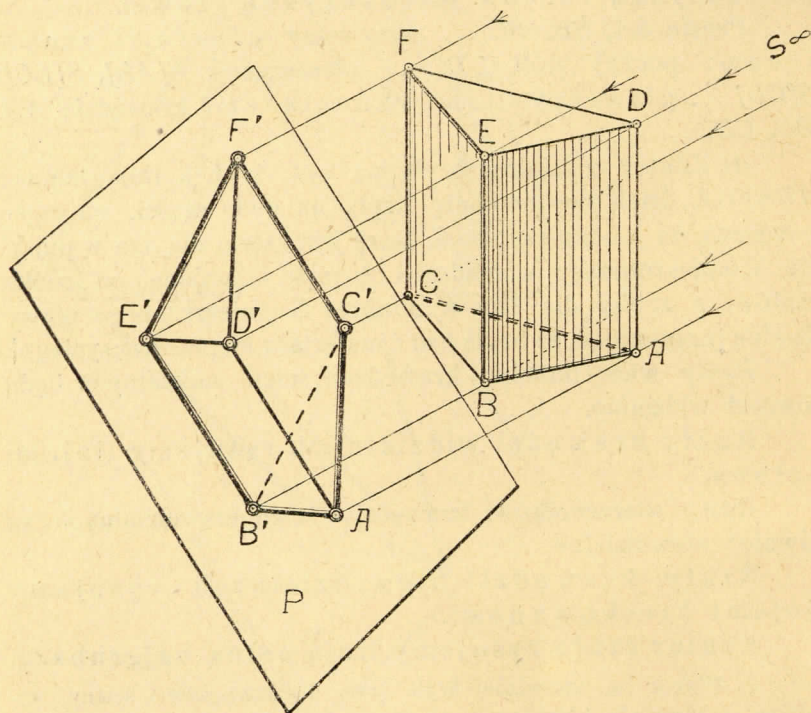
Wskaż przy tem doświadczeniu cienie poszczególnych wierzchołków, krawędzi!

Wskaż krawędzie, które odgraniczają ściany oświetlone od ścian będących w cieniu własnym! [Kontur cienia własnego; schodzi się on z poprzednio rozważanym konturem widzialnym].

3. Trzymając graniastosłup $ABCDEF$ w jego pierwotnym położeniu względem płaszczyzny rzutów P , oddalajmy środek rzutów S na dowolnie obranej prostej s [rys. 2]!

Zauważamy, że proste rzucające $SA, SB, SC, \dots$ zamykają ze sobą i z prostą s coraz mniejsze kąty. Jeżeli wyobrażymy sobie w końcu, że środek rzutów zajmie miejsce nieskończenie dalekie na prostej s , natenczas proste rzucające staną się równoległymi względem prostej s , a zatem i względem siebie.

Rzut $A'B'C'D'E'F'$ danej bryły na płaszczyznę P przy takim założeniu nazywa się rzutem równoległym.



Rys. 2

Prostą s nazywamy kierunkiem rzutu równoległego.

Z takim rzutem nakryje się cień bryły na płaszczyznę P przy oświetleniu słonecznym (równoległym), jeżeli promienie światła będą równoległe do prostej s (oczywiście przy niezmiennym położeniu bryły względem P).

1) Ustaw graniastosłup przed oknem i wskaż cień jego rzucony na ławkę, podłogę! Uważając cień ten za rzut równoległy bryły, wskaż na nim rzuty poszczególnych wierzchołków, krawędzi, ścian!

2) Weź na uwagę krawędzie równoległe rozważanego graniastosłupa i porównaj rzuty ich na rys. 1 i na rys. 2!

Zauważasz zatem, że:

Proste równoległe przedstawiają się w rzutach środkowych w ogólności jako proste przecinające się, w rzutach równoległych jako proste równoległe.

Zbadaj tę właściwość jeszcze na cieniach dwóch prostych równoległych przy oświetleniu 1) środkowym, 2) równoległym!

4. Proste, rzucające bryłę równoległe na płaszczyznę P , mogą mieć względem tej płaszczyzny różne kąty nachylenia.

Jeżeli kąt nachylenia prostych rzucających do płaszczyzny rzutów jest $\neq 90^\circ$, nazywamy rzut równoległy ukośnym, jeżeli zaś kąt ten $= 90^\circ$, natenczas rzut równoległy nazywamy prostopadłym (prostokątnym).

Rzuty prostopadłe mają ze wszystkich rodzajów rzutów największe zastosowanie tak teoretyczne jak praktyczne; zapoznanie uczniów z głównymi zasadami tych rzutów jest celem niniejszej książki.

CZĘŚĆ I

RZUT PROSTOPADŁY NA JEDNĄ PŁASZCZYZNĘ

§ 1. RZUT PROSTOPADŁY PUNKTU

5. a) Przyjmijmy dowolną płaszczyznę P i obok niej dowolny punkt A [rys. 3]. Przez punkt A poprowadźmy prostą, prostopadłą do płaszczyzny P ; nazwijmy ją p .

Punkt przebicia prostej p z płaszczyzną P nazywamy rzutem prostopadłym punktu A na tę płaszczyznę. Oznaczamy go przez A' . [Czytaj: A z kreską].

Płaszczyznę P nazywamy płaszczyzną rzutów, prostą p — prostą rzucającą punkt A .

b) Niech punkt A porusza się po prostej $p \equiv [AA']$ — po jednej stronie płaszczyzny rzutów, po drugiej stronie. Jego rzut pada ciągle w ten sam punkt płaszczyzny rzutów, t. j. w punkt A' .

Poznajemy zatem, że:

Każdy punkt płaszczyzny rzutów jednoczy w sobie rzuty prostopadłe niezliczonej ilości punktów, które znajdują się na prostej, przechodzącej przez ten punkt, prostopadłe do płaszczyzny rzutów.

c) Przyjmijmy na płaszczyźnie P dowolny punkt B i szukajmy jego rzutu na tę płaszczyznę. [Rys. 3].

W tym celu należy poprowadzić przez punkt B prostą, prostopadłą do płaszczyzny P , i wyszukać punkt B' , w którym ona przecina tę płaszczyznę. Punkt B' schodzi się jednak z punktem B . A zatem:

Jeżeli punkt leży na płaszczyźnie, natenczas rzut jego prostopadły na tę płaszczyznę znajduje się w nim samym.

d) Cwiczenia.

1) Przyjmij dowolny punkt A obok ściany i znajdź jego rzut prostopadły na tę ścianę!

2) Wykonaj rzut prostopadły dowolnego punktu na podłogę, na tablicę, na sufit, na ławkę!

3) Niech płaszczyzną rzutów będzie płaszczyzna stołu. Przyjmij różne punkty powyżej stołu, poniżej stołu, na stole i wykonuj ich prostopadłe rzuty!

4) Wyobraź sobie, że przyjąłeś punkt w jednym z naroży klasy; gdzie jest jego rzut prostopadły na podłogę, na sufit, na ścianę?

5) Niech płaszczyzną rzutów będzie płaszczyzna zeszytu. Przyjmij na niej punkt i uważaj go za rzut jakiegoś punktu w przestrzeni.

Gdzie znajdować się będzie ten punkt? Ile jest takich punktów?

6. W poprzednim artykule poznaliśmy, że:

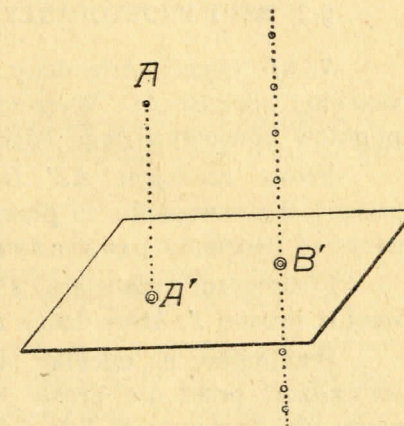
1) Jeżeli jest dana płaszczyzna rzutów, to rzut prostopadły na tę płaszczyznę jakiegokolwiek punktu w przestrzeni da się zawsze wyznaczyć jednoznacznie, to znaczy, że dla jakiegokolwiek punktu znajdziemy tylko jeden jedyny jego rzut prostopadły.

2) Jeżeli jednak przyjmujemy na płaszczyźnie rzutów dowolny punkt za rzut prostopadły jakiegoś punktu w przestrzeni, natenczas istnieje niezliczona ilość punktów, których rzuty prostopadłe schodzą się z rzutem przyjętym.

3) Jeżeli jednak prócz przyjętego rzutu prostopadłego punktu będzie podana odległość tego punktu od płaszczyzny rzutów, natenczas położenie punktu w przestrzeni będzie dokładnie wyznaczone.

Odległość punktu od płaszczyzny rzutów, osobliwie jeżeli ta jest pomyślana jako płaszczyzna pozioma, nazywamy cechą punktu.

Cechę punktu piszemy obok rzutu punktu, ujmując ją w nawias. Np. A' (5) oznacza rzut punktu A , znajdującego się



Rys. 3

w odległości 5 jednostek od płaszczyzny rzutów po tej samej stronie, co nasze oko; B' (—3) oznacza rzut punktu B , znajdującego się w odległości 3 jednostek po przeciwnej stronie płaszczyzny rzutów, co nasze oko.

Rzuty prostopadłe na jedną płaszczyznę, przy których są podane cechy poszczególnych punktów, nazywają się rzutami cechowanymi.

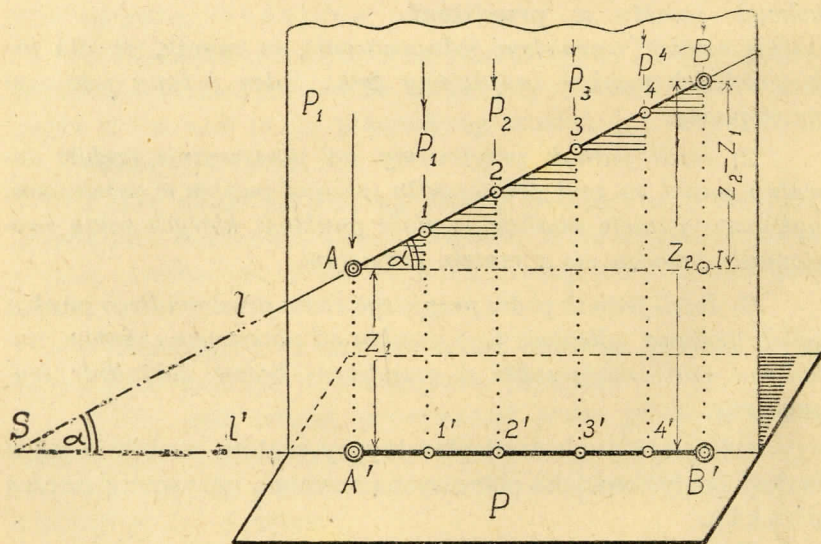
§ 2. RZUT PROSTOPADŁY ODCINKA I LINII PROSTEJ

7. a) Niech będzie dany obok płaszczyzny rzutów P dowolny odcinek AB . Wyznamy rzuty prostopadłe A' i B' punktów końcowych tego odcinka [rys. 4].

Proste rzucające AA' BB' wyznaczają płaszczyznę P_1 , która jest prostopadła do płaszczyzny rzutów. Płaszczyznę tę nazywać będziemy płaszczyzną rzucającą odcinek AB .

Płaszczyzna rzucająca P_1 przecina płaszczyznę rzutów wzdłuż prostej l' , która łączy rzuty A' i B' .

Przyjmijmy na odcinku AB punkty 1, 2, 3, 4, ... i poprowadźmy przez nie proste rzucające $p_1, p_2, p_3, \dots$. Przekonamy się, że proste te leżą na płaszczyźnie rzucającej P_1 ; ich



Rys. 4

punkty przebicia z płaszczyzną rzutów znajdować się muszą na prostej l' między rzutami A' i B' . A zatem:

Odcinek $A'B'$ jest miejscem geometrycznym rzutów prostopadłych wszystkich punktów odcinka AB i nazywa się rzutem prostopadłym tego odcinka.

Rzut prostopadły odcinka łączy rzuty prostopadłe punktów końcowych tego odcinka.

Jeżeli punkt leży na odcinku, to jego rzut prostopadły leży na rzucie prostopadłym tego odcinka.

b) Ćwiczenia.

1) Uzasadnij, że:

Gdy rzut prostopadły punktu leży na rzucie prostopadłym odcinka, to punkt ten w przestrzeni niekoniecznie musi leżeć na tym odcinku!

2) Uzmysłowiwszy sobie odcinek AB prostym drucikiem, wykonuj jego rzut prostopadły na tablicę, podłogę, sufit, ścianę!

3) Przyjmij odcinek AB na płaszczyźnie rzutów i uzasadnij, że rzut jego znajduje się w nim samym. [Por. art. 5 c) rys. 3].

8. Kąt α który tworzy odcinek AB z prostą AI , poprowadzoną przez koniec A (lub B) równoległą do rzutu prostopadłego $A'B'$ tego odcinka na płaszczyznę P , nazywamy „kątem nachylenia“ tego odcinka do płaszczyzny P . [Rys. 4].

a) Stosunek rzutu prostopadłego $A'B'$ do odcinka AB nazywamy „spółczynnikiem skrócenia“ rzutu tego odcinka.

Oznaczając współczynnik skrócenia przez c , otrzymamy:

$$c = \frac{A'B'}{AB} = \frac{AI}{AB} = \cos \alpha.$$

A zatem:

Spółczynnik skrócenia rzutu odcinka równy jest dostawie kąta nachylenia tego odcinka do płaszczyzny rzutów.

b) Stosunek różnicy odległości (cech) punktów końcowych odcinka od płaszczyzny rzutów — do rzutu prostopadłego tego odcinka nazywamy „spadkiem odcinka“ względem tej płaszczyzny.

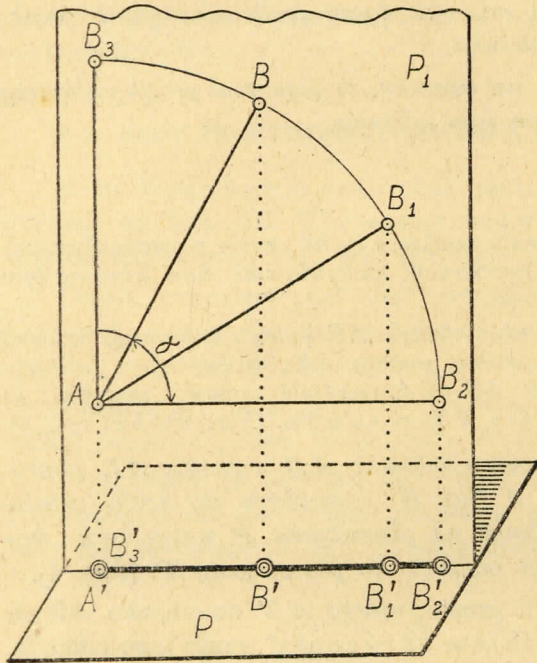
Oznaczmy spadek odcinka AB literą t , odległości (cechy) punktów końcowych A i B od płaszczyzny rzutów przez z_1 i z_2 , otrzymujemy:

$$t = \frac{z_2 - z_1}{A'B'} = \frac{z_2 - z_1}{AI} = \tan \alpha$$

A zatem:

Spadek odcinka równa się stycznej trygonometrycznej kąta nachylenia tego odcinka.

c) Poprowadźmy przez odcinek AB płaszczyznę rzucającą P_1 i obracajmy w niej odcinek AB dokoła punktu A , obserwując zmianę rzutu prostokątnego tego odcinka [rys. 5]:



Rys. 5

1) Jeżeli odcinek AB zajmie położenie AB_2 równoległe względem płaszczyzny rzutów, natenczas jego rzut równać się będzie co do wielkości samemu odcinkowi.

A zatem:

$$A'B'_2 = AB_2.$$

Uzasadnij wtedy, że:

1) Kąt nachylenia takiego odcinka:

$$\alpha = 0.$$

2) Spółczynnik skrócenia rzutu takiego odcinka:

$$c = \frac{A'B'_2}{AB_2} = \cos 0 = 1.$$

3) Spadek takiego odcinka:

$$t = \frac{B_2B'_2 - AA'}{A'B'_2} = \operatorname{tg} 0 = 0.$$

II) Jeżeli kąt nachylenia α rośnie od 0 do 90° , natenczas rzut odcinka maleje.

1) Wykreśl rzut odcinka AB , jeżeli $\alpha = 45^\circ$! Jak wielki jest wtedy współczynnik skrócenia, a jak wielki spadek odcinka?

2) Wykreśl rzut, oblicz współczynnik skrócenia i spadek odcinka AB , dla $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$!

III) Jeżeli odcinek zajmie położenie prostopadłe do płaszczyzny rzutów [na rys. AB_3], natenczas rzut odcinka jest punktem, schodzącym się z punktem przecięcia przedłużenia tego odcinka z płaszczyzną rzutów.

Uzasadnij wtedy, że:

$$c = \cos 90 = 0$$

$$t = \operatorname{tg} 90 = \infty.$$

9. a) Niech będą dane w przestrzeni dwa względem siebie równoległe odcinki a, b i płaszczyzna rzutów P [rys. 6].

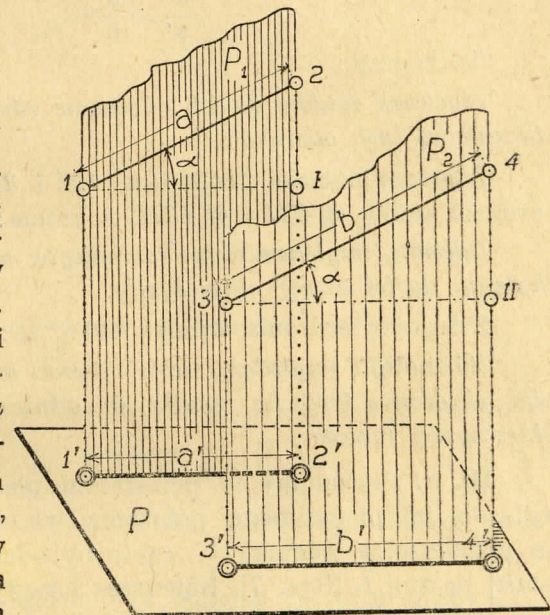
Poprowadźmy przez odcinek a płaszczyznę rzucającą P_1 , przez odcinek b płaszczyznę rzucającą P_2 .

Na płaszczyźnie P_1 leżą proste rzucające $11'$ i $22'$ punktów końcowych odcinka a , na płaszczyźnie zaś P_2 leżą proste rzucające $33'$ i $44'$ punktów końcowych odcinka b .

Z równoległości tych prostych rzucających i odcinków a i b wynika równoległość płaszczyzn P_1 i P_2 . Wiadomo jednak, że dwie płaszczyzny równoległe przecina trzecia płaszczyzna (w tym wypadku płaszczyzna rzutów) podług prostych do siebie równoległych. Rzuty więc a', b' odcinków a, b leżeć muszą na prostych względem siebie równoległych. A zatem:

Rzuty odcinków równoległych są również względem siebie równoległe.

b) Poprowadźmy przez punkt 1 prostą równoległą do rzutu a' ; prosta ta musi leżeć w płaszczyźnie P_1 [dlaczego?], przecina przeto prostą rzucającą $22'$ w punkcie I. — Tak samo



Rys. 6

prosta, poprowadzona przez punkt 3 równolegle do rzutu b' , leży w płaszczyźnie P_2 i przecina prostą rzucającą $44'$ w punkcie Π .

Doszliliśmy w ten sposób do dwóch trójkątów $12I$ i $34II$, leżących w równoległych płaszczyznach P_1 i P_2 i mających boki parami równoległe. Trójkąty te są zatem jednokładne, a z ich jednokładności wynika równość stosunków:

$$\frac{1I}{a} = \frac{3II}{b}, \text{ czyli } \frac{1I}{3II} = \frac{a}{b}.$$

Podstawiając w ostatnim równaniu $1I = a'$, $3II = b'$, otrzymamy:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}.$$

To znaczy:

Stosunek rzutów dwóch odcinków równoległych jest równy stosunkowi tych odcinków.

Z jednokładności trójkątów $12I$ i $34II$ wynika również równość kątów $\sphericalangle 21I$ i $\sphericalangle 43II$. A zatem:

Odcinki, względem siebie równoległe, mają równe kąty nachylenia do tej samej płaszczyzny.

Z tego twierdzenia wynika dalej, że:

Równoległe względem siebie odcinki mają równe współczynniki skrócenia i równe spadki w odniesieniu do tej samej płaszczyzny rzutów.

10. a) Przesuńmy w przestrzeni płaszczyznę P_1 równolegle do jej pierwotnego położenia tak, by odcinek a padł na przedłużenie odcinka b , czyli by odcinki a i b leżały na jednej prostej l . [Rys. 7]. Natenczas i rzuty a' i b' tych odcinków będą leżały na jednej prostej l' , a ich stosunek będzie równy stosunkowi odcinków samych, to jest:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}.$$

A zatem:

Stosunek rzutów dwóch odcinków leżących na jednej prostej równy jest stosunkowi tych odcinków.

Z tego twierdzenia wynika następnie, że:

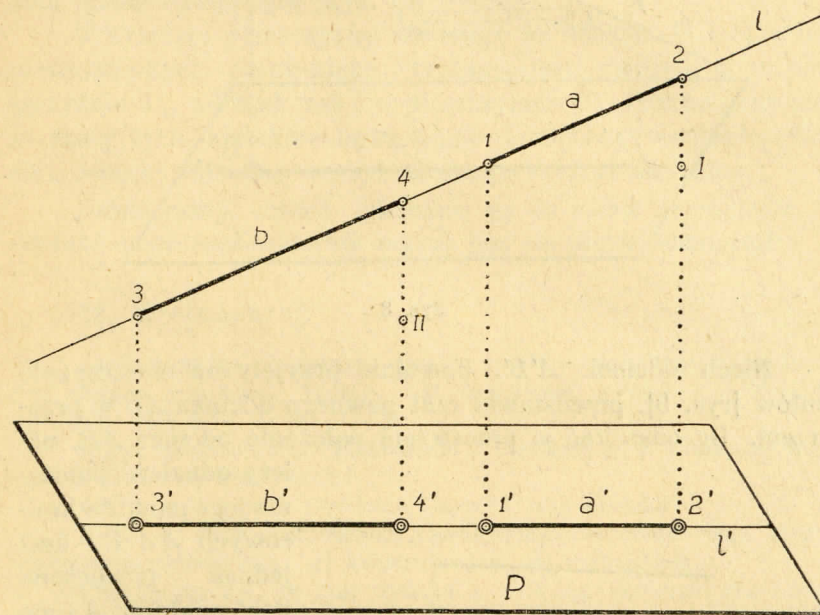
Jeżeli punkt R dzieli odcinek AB [rys. 8] w stosunku $m:n$, to rzut R' punktu R dzieli rzut $A'B'$ odcinka AB w tym samym stosunku $m:n$.

W szczególności:

Jeżeli punkt R połowi odcinek AB , to R' połowi rzut $A'B'$.

Czyli:

Rzut środka odcinka jest środkiem rzutu tego odcinka.



Rys 7

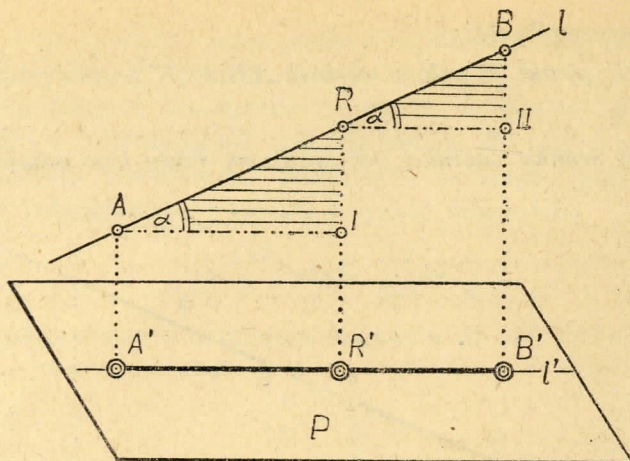
Powyższe trzy twierdzenia uzasadnij wprost przy pomocy rysunków 7 i 8!

b) Uzasadnij w końcu przy pomocy rysunku 4, że:

Jeżeli odcinek podzielimy na n równych części, to rzuty punktów podziału podzielą rzut tego odcinka również na n równych części.

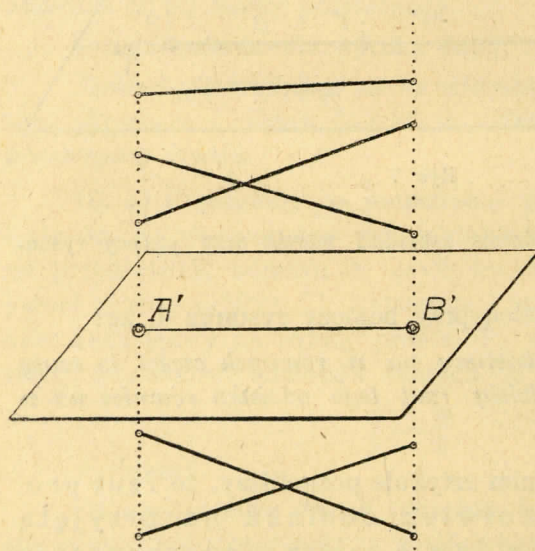
11. a) W poprzednim artykule poznaliśmy, że rzut prostopadły jakiegokolwiek odcinka na przyjętą płaszczyznę rzutów da się zawsze jednoznacznie wyznaczyć.

Zastanówmy się obecnie, czy — naodwrot — prostopadły rzut odcinka określa jednoznacznie położenie i wielkość tego odcinka w przestrzeni?



Rys. 8

Niech odcinek $A'B'$, dowolnie przyjęty na płaszczyźnie rzutów [rys. 9], przedstawia rzut pewnego odcinka AB w przestrzeni. By odszukać w przestrzeni położenie odcinka AB , należy odnaleźć położenie jego punktów końcowych A i B . Jest jednak niezliczona ilość punktów A i nie zliczona ilość punktów B , których rzuty schodzą się z A' względnie B' .



Rys. 9

Przekonujemy się zatem, że:

Sam rzut odcinka nie wyznacza ani położenia ani wielkości tego odcinka w przestrzeni. — Czyli:

Istnieje niezliczona ilość odcinków, których rzuty schodzą

się z przyjętym odcinkiem na płaszczyźnie rzutów.

Odcinek będzie dokładnie wyznaczony dopiero wtedy, jeżeli

oprócz jego rzutu prostopadłego będą podane cechy jego końcowych punktów — czyli jeżeli będzie dany rzut cechowany tego odcinka. [Dlaczego?].

b) W art. 9 a) poznaliśmy, że jeżeli odcinki a i b są względem siebie równoległe, to ich rzuty a' i b' są również względem siebie równoległe [Rys. 6].

Trzymając płaszczyzny rzucające te odcinki P_1 i P_2 w ich niezmiennych położeniach, przesuwamy odcinek a w płaszczyźnie P_1 , odcinek zaś b w płaszczyźnie P_2 . Przekonamy się, że rzuty tych odcinków będą ciągle do siebie równoległe, chociaż odcinki same są względem siebie skośne. A zatem:

Jeżeli rzuty dwóch odcinków są do siebie równoległe, to odcinki same niekoniecznie muszą być do siebie równoległe.

12. Ćwiczenia.

1) Przyjmując płaszczyznę zeszytu za płaszczyznę rzutów, wykreśl rzut odcinka $a = 5 \text{ cm}$, którego kąt nachylenia wynosi $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 80^\circ, 90^\circ$!

Oblicz długość rzutu rachunkiem i porównaj go z wynikiem otrzymanym zapomocą konstrukcji!

Oblicz współczynnik skrócenia i spadek tego odcinka!

2) Mając dany rzut odcinka i współczynnik skrócenia tego rzutu, wyznaczycie odcinek sam: a) konstrukcyjnie, b) rachunkiem.

Przyjmijmy np., że rzut odcinka $a' = 4 \text{ cm}$, skrócenie zaś $c = 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots$

Obliczyć spadek odcinka i jego kąt nachylenia!

Zauważ w tych ćwiczeniach, że rzut odcinka i jego skrócenie (względnie kąt nachylenia) nie wyznaczają jeszcze położenia tego odcinka w przestrzeni. Jest niezliczona ilość takich odcinków, których rzuty schodzą się z rzutem danym.

Wskaż miejsce geometryczne tych odcinków!

3) a) Dany jest rzut cechowany odcinka $A'(3) B'(8) = 5$.

Wyznaczyć konstrukcyjnie i rachunkiem długość odcinka. Obliczyć współczynnik skrócenia i spadek.

b) Przeprowadzić te same ćwiczenia dla $A'(3) B'(-8) = 5$.

Wskazówka. Odcinek AB w przestrzeni, proste rzucające punkty końcowe odcinka i rzut $A'B'$ tworzą trapez prostokątny, którego trzy boki są znane. [Por. rys. 4]. Celem wykreślenia tego trapezu, należy obrócić jego płaszczyznę P_1 dokoła jej krawędzi z płaszczyzną rzutów [t. j. dokoła $A'B'$], by nakryła się z płaszczyzną rzutów. [Mówimy, że wykonujemy kład płaszczyzny P_1 na płaszczyznę rzutów].

Jeżeli cechy obu punktów końcowych mają znaki równe, to oba te punkty znajdować się będą po obrocie po tej samej stronie rzutu $A'B'$, zaś po stronach przeciwnych, jeżeli cechy ich mają znaki przeciwne.

4) Wyznaczyć rzut odcinka $AB = 7$ na płaszczyznę zeszytu, jeżeli cechy punktów końcowych wynoszą:

- a) $z_1 = 3, z_2 = 8$; b) $z_1 = -3, z_2 = -8$;
c) $z_1 = 3, z_2 = -8$; d) $z_1 = 2,5, z_2 = 6\frac{1}{3}$.

Wyznaczyć współczynnik skrócenia, kąt nachylenia α , spadek!

5) Dany jest rzut cechowany odcinka $A'(2)B'(6,5) = 6$, prócz tego rzut cechowany punktu $C'(1)$. Wyznaczyć rzut cechowany odcinka $CD = 8$, przechodzącego przez punkt C , równoległe do odcinka AB .

Wskazówka. Płaszczyzna rzucająca odcinek CD jest równoległa do płaszczyzny rzucającej odcinek AB . [Por. rys. 6].

Jeżeli wykonamy kłady obu tych płaszczyzn na płaszczyznę rzutów dokoła rzutów danych odcinków, natenczas otrzymamy w kładach dwa trapezy $A'B'BA$ i $C'D'DC$, których boki są parami do siebie równoległe.

Cechę punktu D należy wtedy zmierzyć na rysunku i wpisać ją obok rzutu tego punktu.

6) Rzuty cechowane dwóch odcinków są równoległe:

$A'(-2)B'(4) = a'$, $C'(1)D'(6) = b'$. Przekonać się, czy odcinki a i b w przestrzeni są do siebie równoległe?

7) Dany jest rzut cechowany odcinka $A'(2)B'(7)$. Wyznaczyć rzuty punktów, dzielących ten odcinek na 5 równych części.

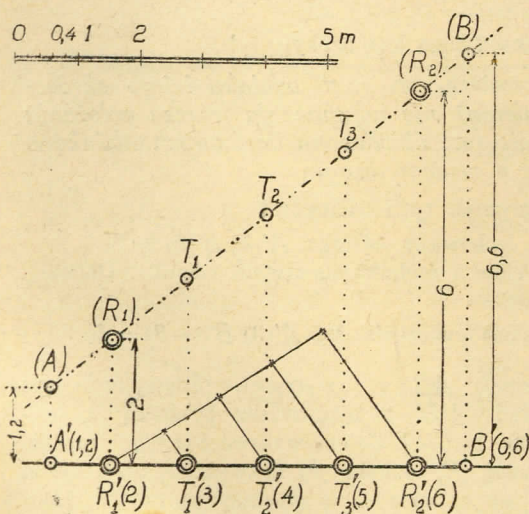
Zmierz cechy tych punktów i przekonaj się, że są one liczbami

całkowitymi, zawartymi w szeregu naturalnym liczb między 2 i 7!

Podział odcinka punktami, których cechy są po sobie następującymi liczbami całkowitymi, zawartymi między cechami punktów końcowych, nazywamy zestopniowaniem danego odcinka.

8) Dany jest rzut cechowany odcinka $A'(2,5)B'(6,3)$. Wyznaczyć rzut cechowany punktu R , leżącego na tym odcinku, a którego cecha wynosi 5.

9) Zestopniować odcinek $A'(1,2)B'(6,6)$. [Rys. 10].



Rys. 10

Wskazówka. Wykonaj kład trapezu $A'ABB'$ na płaszczyznę rzutów i wyznacz rzut punktu R_1 , którego cecha wynosi 2 i rzut punktu R_2 , którego cecha wynosi 6. Odcinek $R'_1(2)R'_2(6)$ podziel na cztery równe części. Punkty podziału będą rzutami takich punktów na odcinku AB , których cechy wynoszą 3, 4, 5.

10) Zestopniować odcinek $A'(2,3)B'(-7,5)$.

11) Uzasadnij, że:

a) Jeżeli dwa odcinki przecinają się, natenczas przecinają się i ich rzuty!

b) Jeżeli rzuty dwóch odcinków przecinają się, to odcinki same niekoniecznie muszą się przecinać!

12) Dane są rzuty dwóch odcinków: $A'(3)B'(8)$ i $C'(-2)D'(6)$. Rzuty te przecinają się w punkcie R' . Zbadaj, czy odcinki same przecinają się w przestrzeni?

Wskazówka. Uważaj R' za rzut punktu R_1 , leżącego na odcinku AB i wyznacz jego cechę. Uważaj następnie R' za rzut punktu R_2 , leżącego na odcinku CD i wyznacz jego cechę. Jeśli cechy punktów R_1 i R_2 są równe, to punkty te schodzą się w przestrzeni w jednym punkcie, a mianowicie w punkcie przecięcia się tych odcinków. Jeśli zaś cechy te są różne, to odcinki nie przecinają się.

13) Dany jest rzut odcinka $A'(3,5)B'(7)$ i rzut punktu $C'(-2)$.

Wyznaczyć długość odcinka: a) łączącego punkt C ze środkiem odcinka AB ; b) łączącego punkt C z punktem R , dzielącym odcinek AB w stosunku $\frac{3}{4}$.

14) Dane są rzuty dwóch odcinków $A'(1)B'(7)$, $C'(-2)D'(4)$, które nie przecinają się. Zbadać, czy ich przedłużenia przecinają się [czyli czy odcinki te leżą na jednej płaszczyźnie]?

13. a) Jeżeli odcinek AB (rys. 4) przedłużymy w tym samym kierunku poza jego punkty końcowe, otrzymamy linię prostą l , na której leży odcinek AB .

Chcąc wyznaczyć rzut prostopadły prostej l na płaszczyznę P , poprowadźmy przez poszczególne jej punkty proste, prostopadłe do płaszczyzny P . Proste te wypełnią płaszczyznę P_1 , prostopadłą do płaszczyzny P , którą nazywamy płaszczyzną rzucającą prostą l .

Krawędź l' płaszczyzny P_1 z płaszczyzną P jest rzutem prostopadłym prostej l na płaszczyznę P .

Poznajemy zatem, że:

Rzut prostopadły prostej l , łączącej punkty A i B , jest prostą l' , łączącą rzuty A' i B' punktów A i B .

b) Uzmysłowiwszy sobie płaszczyznę rzucającą P_1 zapomocą kartki kartonu a prostą l zapomocą drucika, poruszając prostą l na płaszczyźnie P_1 i wyznaczając każdorazowo jej rzut. Rzuty wszystkich tych prostych schodzą się z rzutem l' . A zatem:

Jeżeli przyjmiemy na płaszczyźnie rzutów dowolną prostą l' za rzut prostopadły prostej l w przestrzeni, natenczas istnieje niezliczona ilość prostych, których rzuty schodzą się z l' . Wszystkie te proste leżą na płaszczyźnie P_1 , poprowadzonej przez rzut l' , prostopadle do płaszczyzny rzutów.

Prosta l będzie jednoznacznie wyznaczona wtedy, jeżeli prócz jej prostopadłego rzutu l' będą dane cechy dwóch jej punktów [dlaczego?] — czyli jeżeli będzie dany rzut cechowany tej prostej.

c) Punkt S , w którym prosta l przecina swój rzut prostopadły na płaszczyznę P [Rys. 4], nazywamy śladem prostej l na płaszczyźnie P .

Kąt, zawarty między prostą l a jej rzutem prostopadłym na płaszczyznę P , nazywamy kątem nachylenia prostej l do płaszczyzny P .

Zauważ, że:

1) Kąt nachylenia prostej l do płaszczyzny P równy jest kątowi nachylenia do tej płaszczyzny jakiegokolwiek odcinka AB , leżącego na tej prostej. [Por. rys. 4].

2) Dostawa (cosinus) kąta nachylenia prostej l do płaszczyzny P równa się współczynnikowi skrócenia rzutu prostopadłego jakiegokolwiek odcinka AB tej prostej; styczna (tangens) tego kąta równa się spadkowi jakiegokolwiek odcinka tej prostej i nazywa się **spadkiem tej prostej**.

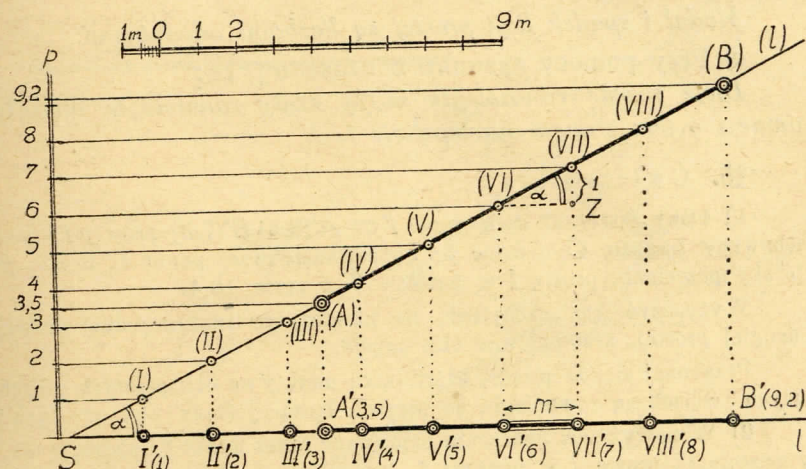
14. a) Niech będzie dany rzut cechowany linii prostej l , wyznaczonej przez dwa punkty A i B , których cechy są 3,5 i 9,2. [Rys. 11]. Chcemy wyznaczyć rzuty takich punktów tej prostej, których cechy są po sobie następującymi liczbami całkowitymi — czyli chcemy zestopniować tę prostą.

Wyobraźmy sobie płaszczyznę rzucającą tę prostą i wykonajmy kład tej płaszczyzny na płaszczyznę rzutów. Natenczas prosta rzucająca AA' zejdzie się z prostą $A'(A)$, wykreśloną prostopadle do l' w rzucie A' . Na tej prostej w odległości

3,5 od A' znajduje się kład (A) punktu A . W ten sam sposób wyszukaj kład (B) punktu B .

Prosta $(A)(B) \equiv (l)$ jest kładem prostej l .

Wykreślmy dowolną prostą p , prostopadłą do l' i nanieśmy na niej odcinki równe 1, 2, 3, 4, ... przyjętym jednostkom długości, a z końców tych odcinków poprowadźmy proste równoległe do l' . Proste te przetną prostą (l) w punktach (I), (II),



Rys. 11

(III), ..., które są kładami takich punktów I, II, III, IV, ... prostej l , których cechy wynoszą 1, 2, 3, 4, ... jednostek długości.

Jak dojdiesz do rzutów tych punktów?

b) Weźmy na uwagę na prostej l odcinek VI VII, którego punkty końcowe mają cechy różniące się o jedną jednostkę długości. [Rys. 11]. Rzut prostopadły VI' VII' takiego odcinka nazywamy **modułem prostej l** ; oznaczać go będziemy przez m . A zatem:

1) **Modułem prostej** nazywamy rzut prostopadły takiego odcinka, leżącego na tej prostej, którego punkty końcowe mają cechy różniące się o jedną jednostkę długości.

2) **Moduł prostej** zależy od jej kąta nachylenia do płaszczyzny rzutów; im większy jest kąt nachylenia, tem mniejszy jest moduł i naodwrot.

Uzasadnij, że:

- 1) Jeżeli kąt nachylenia $\alpha = 90^\circ$, to moduł $m = 0$;
- 2) " " " $\alpha = 0^\circ$, " " $m = \infty$;
- 3) " " " $\alpha = 45^\circ$, " " $m = 1$ jednostce przyjętej długości.

4) Przy pomocy trójkąta (VI) (VII) Z [Rys. 11] udowodnij, że:

$$m = \frac{1}{t}, \text{ to znaczy:}$$

Moduł i spadek linii prostej są liczbami odwrotnymi.

c) Przy pomocy rysunku 6 uzasadnij, że:

Dwie proste równoległe mają rzuty równoległe, moduły równe i o tem samym następstwie cech.

15. Ćwiczenia.

1) Dany jest rzut cechowany $l' \equiv A'(2,5) B'(7,3)$ prostej l i rzut cechowany punktu C o cesze 5. Poprowadzić przez punkt C prostą g , któraby przecinała prostą l w punkcie T o cesze 10,4.

Wyznaczyć kąt nachylenia do płaszczyzny rzutów jednej prostej i drugiej prostej, zestopniować obie proste.

Przekonaj się, że proste, które łączą punkty na obu prostych o tych samych cechach są równoległe do prostej, łączącej ślady obu prostych!

2) W powyższym ćwiczeniu poprowadź przez punkt C prostą g tak, by przecinała prostą l w punkcie I , który jest środkiem odcinka AB !

3) Dany jest rzut cechowany $l' \equiv A'(1) B'(5)$ linii prostej l i rzut cechowany dowolnego punktu C o cesze 7.

Wyznaczyć rzut cechowany prostej g , przechodzącej przez C równoległe do l .

4) Rozwiąż powyższe zadanie dla $l' \equiv A'(2,6) B'(6,3)$, jeżeli cecha punktu C wynosi 7,2!

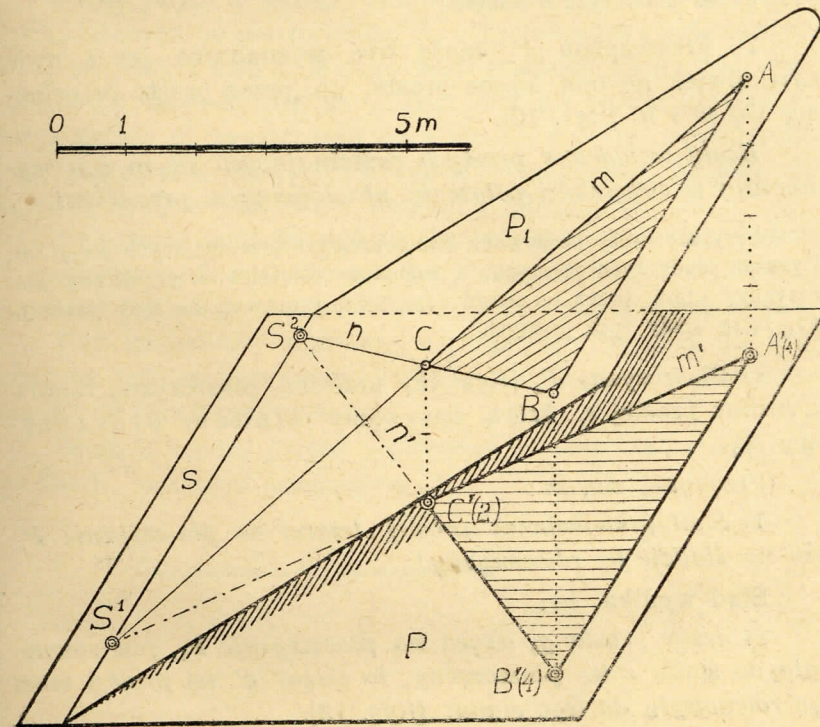
§ 3. RZUT PROSTOPADŁY PŁASZCZYZNY I FIGURY NA NIEJ LEŻĄCEJ.

16. a) Niech będzie dana płaszczyzna rzutów P i płaszczyzna dowolna P_1 . [Rys. 12]. Gdybyśmy wyznaczyli rzuty poszczególnych punktów płaszczyzny P_1 , natenczas rzuty te nakryłyby sobą całą płaszczyznę rzutów P , to znaczy, że: każdy punkt płaszczyzny rzutów można uważać za rzut pewnego punktu płaszczyzny P_1 .

Obieraj dowolne punkty na płaszczyźnie rzutów, uważaj je za rzuty punktów płaszczyzny P_1 i wyznaczaj położenia tych punktów na płaszczyźnie P_1 !

[Płaszczyznę P_1 uzmysłowić zapomocą tekstury, prostą rzucającą drucikiem!].

b) Położenie płaszczyzny P_1 w przestrzeni będzie wyznaczone, jeżeli będą dane rzuty cechowane elementów, które tę płaszczyznę wyznaczają. A zatem:



Rys. 12

1) Przyjmijmy na płaszczyźnie P_1 trzy punkty A, B, C [Rys. 12], wyznaczmy ich rzuty A', B', C' , zmierzmy odległości (cechy) punktów A, B, C od płaszczyzny rzutów i wpiszmy obok ich rzutów.

Otrzymamy rzuty cechowane trzech punktów płaszczyzny P_1 , przez które ta płaszczyzna jest w zupełności w przestrzeni wyznaczona.

Istotnie, rzuty cechowane $A'(4), B'(4), C'(2)$ wyznaczają w przestrzeni trzy punkty A, B, C , przez które można poprowadzić jedną jedyną płaszczyznę P_1 .

Narysuj na płaszczyźnie zeszytu trójkąt równoboczny o boku $a = 5 \text{ cm}$, jego wierzchołki oznacz przez $P'(1)$, $Q'(-3)$, $R'(6)$, uważając je za rzuty cechowane wierzchołków P , Q , R pewnego trójkąta w przestrzeni!

Przedstaw sobie płaszczyznę w przestrzeni, na której trójkąt PQR leży, wyznacz po kolei prawdziwe wielkości boków tego trójkąta i narysuj go na płaszczyźnie zeszytu!

2) Płaszczyzna P_1 może być wyznaczona przez dwie jakiegokolwiek na niej leżące proste, np. przez proste przecinające się m i n . [Rys. 12].

Rzuty cechowane prostych przecinających się m i n wyznaczają w zupełności położenie płaszczyzny w przestrzeni.

Przyjmij rzuty cechowane dwóch prostych przecinających się p i q . Wyznacz ślady tych prostych, a następnie położenie w przestrzeni płaszczyzny, która przez te proste przechodzi i zauważ, że ślad płaszczyzny, łączy ślady tych prostych!

c) Płaszczyzna P_1 [Rys. 12] przecina płaszczyznę rzutów P wzdłuż prostej s , którą nazywamy śladem płaszczyzny P_1 .

Przekonaj się, że:

1) Ślad jakiegokolwiek prostej, leżącej na płaszczyźnie P_1 , leży na śladzie tej płaszczyzny!

Stąd wynika, że:

2) Jeżeli prosta g , leżąca na płaszczyźnie P_1 , jest równoległa do śladu s tej płaszczyzny, to i rzut g' tej prostej musi być równoległy do tego śladu. [Rys. 13].

Albowiem prosta g i jej rzut g' muszą się przecinać na śladzie s płaszczyzny P_1 . Z tego wynika następnie, że prosta g jest równoległa do swego rzutu g' , a zatem i do płaszczyzny rzutów P . Wszystkie punkty prostej g mają te same odległości (cechy) od płaszczyzny rzutów.

Prostą g nazywamy prostą główną, tworzącą lub prostą warstwicową płaszczyzny P_1 .

Prosta główna g_4 łączy na płaszczyźnie P_1 punkty, których cechy wynoszą po 4 jednostek, dlatego rzut tej prostej oznaczono na rysunku przez g'_4 .

Wyznacz rzut g'_3 tworzącej o cesze 3! Którędy na rys. 13 przejdzie rzut g'_2 tworzącej o cesze 2?

17. Najdogodniej jest przedstawiać płaszczyznę na rysunku zapomocą jej śladu i jednego jej punktu.

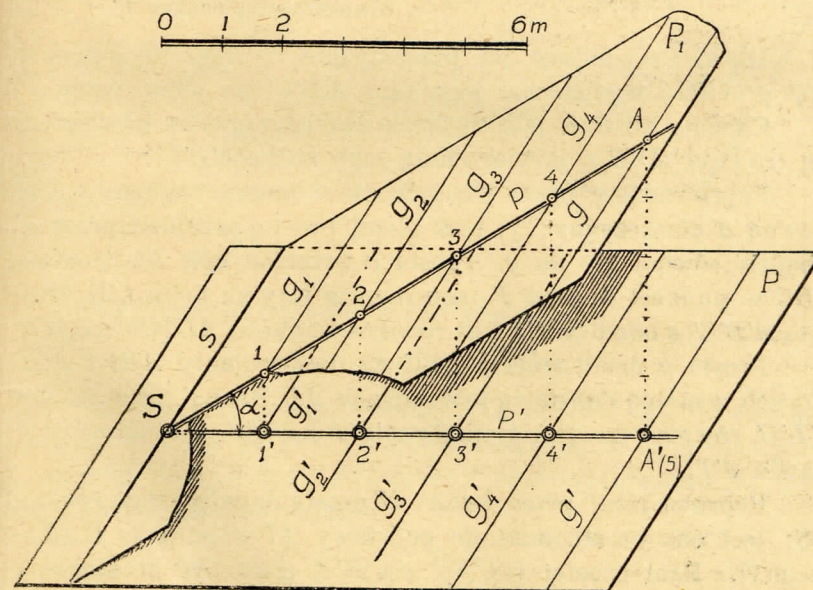
Niech będzie dana płaszczyzna P_1 zapomocą śladu s i rzutu cechowanego jednego jej punktu A , którego cecha wynosi 5. [Rys. 13].

Przez punkt A można poprowadzić niezliczoną ilość prostych, leżących na płaszczyźnie P_1 . [Wykreśl kilka z tych prostych, wskaż ich rzuty i ślady!] Między temi prostymi jedna jest równoległa do śladu s , jest to znana nam już prosta główna g ; druga prosta p , prostopadła do śladu s , a więc prostopadła i do wszystkich prostych głównych płaszczyzny, nazywa się prostą największego spadku płaszczyzny P_1 .

Po prostej największego spadku spływałaby woda z punktu A , gdybyśmy sobie wyobrazili, że płaszczyzna rzutów jest płaszczyzną poziomą, a płaszczyzna P_1 jest płaszczyzną terenu.

Kąt nachylenia α prostej największego spadku do płaszczyzny rzutów nazywamy kątem nachylenia płaszczyzny P_1 do płaszczyzny rzutów.

Spadek, moduł prostej największego spadku p nazywamy spadkiem, modulem płaszczyzny P_1 .

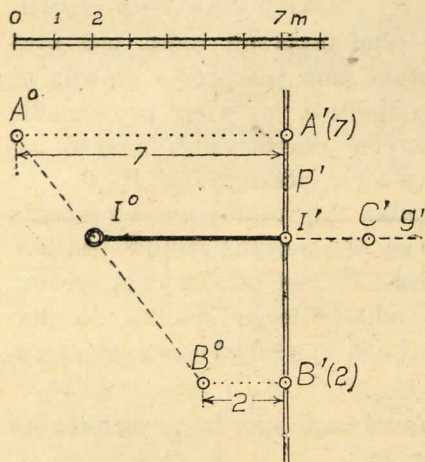


Rys. 13

Rzut prostej największego spadku rysujemy zwykle po-
dwójną linią.

Płaszczyzna jest w przestrzeni w zupełności wyznaczona, jeżeli jest dany rzut cechowany jej prostej największego spadku.

1) Zauważ na rys. 13, że rzut p' prostej największego spadku płaszczyzny P_1 jest prostopadły do śladu s tej płaszczyzny, a zatem do rzutów wszystkich prostych głównych tej płaszczyzny!



Rys. 14

2) Dany jest rzut cechowany prostej największego spadku pewnej płaszczyzny P_1 i rzut C' pewnego punktu C tej płaszczyzny. Mamy wyznaczyć cechę tego punktu [rys. 14].

Wskazówka. Prosta g' , poprowadzona przez rzut C' prostopadłe do rzutu p' prostej największego spadku, jest rzutem prostej głównej g , przechodzącej przez punkt C . Jeżeli wyznaczysz cechę punktu I , w którym prosta g przecina prostą p , to cecha ta będzie również cechą punktu C .

18. a) Przyjmijmy na płaszczyźnie P_1 [rys. 15] dowolny trójkąt ABC i wyznaczmy jego rzut $A'B'C'$ na płaszczyznę P .

Chcemy zbadać, jaki związek zachodzi między powierzchnią trójkąta ABC a powierzchnią jego rzutu $A'B'C'$?

Poprowadzmy przez wierzchołek A danego trójkąta prostą główną g płaszczyzny P_1 ; rzut g' tej prostej przejdzie przez A' i będzie równoległy do g . Prosta g przecina bok BC trójkąta ABC w punkcie I ; rzut I' tego punktu leży na boku $C'B'$ trójkąta $A'B'C'$, a odcinek $A'I'$ jest równy odcinkowi AI . [Dlaczego?].

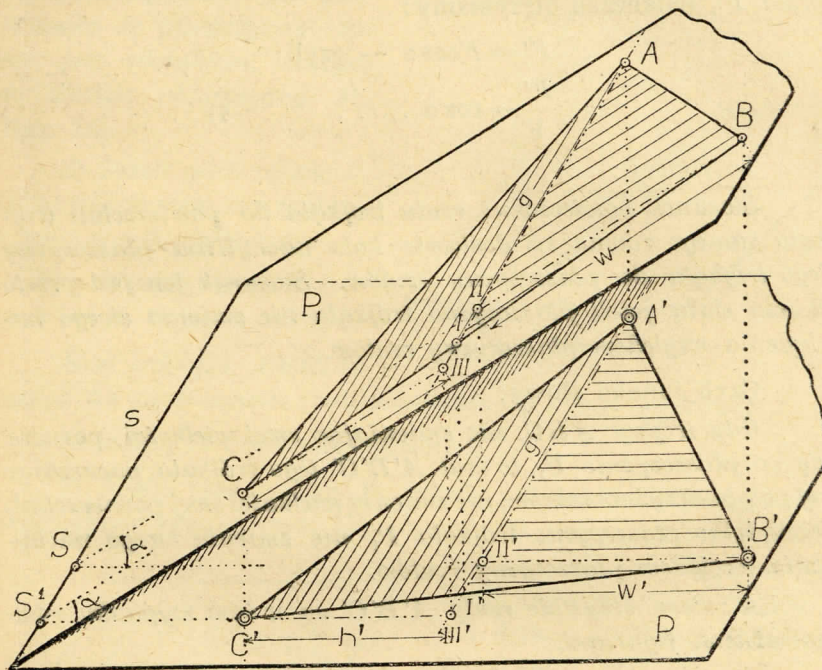
Prosta g dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty ABI i ACI , których wspólną podstawą jest odcinek AI . Rzut g' dzieli trójkąt $A'B'C'$ również na dwa trójkąty $A'B'T'$ i $A'C'T'$ o wspólnej podstawie $A'T'$.

Poprowadźmy przez punkt B prostą największego spadku BS ; jest ona prostopadła do podstawy AI w punkcie II (dlaczego?). Rzut prostej BS , to jest $B'S$, musi być prostopadły do podstawy $A'I'$ [dlaczego?]; przecina on podstawę $A'I'$ w punkcie II' , który jest rzutem punktu II .

Odcinek $B'I'$ jest wysokością trójkąta $A'B'I'$ i jest rzutem odcinka BII , który jest wysokością trójkąta ABI . Stąd wynika:

$$B'II' = BII \cdot \cos \alpha \dots\dots 1)$$

gdzie α oznacza kąt nachylenia prostej największego spadku BS ,
a zatem również kąt nachylenia płaszczyzny P_1 .



Rys. 15

Powierzchnia trójkąta $A'B'I'$ równa się:

$$f' = \frac{1}{2} A'I' . B'II'.$$

Podstawiając w tem równaniu za odcinek $A'I'$ równy mu odcinek AI , zaś za $B'II'$ wartość z równania 1), a następnie oznaczając iloczyn $\frac{1}{2}AI \cdot BII$ przez f jako powierzchnię trójkąta ABI , natenczas otrzymamy:

$$\begin{aligned} f' &= \frac{1}{2} A'I' \cdot B'II' \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{AI \cdot BII}_{f} \cos \alpha \\ f' &= f \cdot \cos \alpha \dots\dots 2) \end{aligned}$$

Uczeń oznaczy powierzchnię trójkąta ACI przez f_1 , zaś powierzchnię rzutu $A'C'I'$ tego trójkąta przez f_1' i wykaże samodzielnie, że:

$$f_1' = f_1 \cos \alpha \dots \dots 3)$$

Dodając równania 2) i 3) stronami i oznaczając powierzchnię trójkąta ABC przez F , zaś powierzchnię jego rzutu $A'B'C'$ przez F' , natenczas otrzymamy:

$$F' = F \cos \alpha \text{ — czyli:}$$

$$\frac{F'}{F} = \cos \alpha \dots \dots 4)$$

To znaczy:

Stosunek powierzchni rzutu trójkąta do powierzchni trójkąta samego równa się dostawie kąta nachylenia płaszczyzny tego trójkąta do płaszczyzny rzutów. Stosunek ten jest przeto ilością stałą, jeżeli płaszczyzna trójkąta nie zmienia swego nachylenia względem płaszczyzny rzutów.

Czyli innemi słowy:

Gdy trójkąt ABC , nie zmieniając swej wielkości, porusza się po płaszczyźnie P_1 , to rzut $A'B'C'$ tego trójkąta, poruszając się po płaszczyźnie rzutów, nie zmienia wielkości swej powierzchni, jeżeli tylko płaszczyzna trójkąta P_1 nie zmienia swego nachylenia względem płaszczyzny rzutów.

A zatem wszystkie rzuty $A'B'C'$ są w tym wypadku równoważnemi figurami.

1) Zauważ tutaj analogję do niezmienności rzutu odcinka, poruszającego się po tej samej linii prostej [por. art. 13 c)!]

2) Jak należy poruszać trójkąt ABC na jego płaszczyźnie P_1 , by rzuty jego na płaszczyznę P były figurami przystającemi?

b) Nie zmieniając wielkości trójkąta ABC , obracajmy jego płaszczyznę P_1 dokoła jej śladu s . Zauważymy, że ze zmianą kąta nachylenia α płaszczyzny P_1 zmienia kształt i wielkość rzut $A'B'C'$ przyjętego trójkąta ABC .

Jakie nachylenie musi mieć płaszczyzna P_1 , by powierzchnia F' rzutu $A'B'C'$ trójkąta ABC o powierzchni F równała się:

$$1) F' = \frac{1}{2} F; \quad 2) F' = \frac{\sqrt{3}}{2} F; \quad 3) F' = \frac{\sqrt{2}}{2} F?$$

1) Jeżeli płaszczyzna P_1 zajmie położenie prostopadłe względem płaszczyzny rzutów, a więc $\alpha = 90^\circ$, natenczas:

$$F' = F \cos 90^\circ, \text{ a zatem:} \\ F' = 0.$$

Rzut trójkąta ABC , którego płaszczyzna P_1 jest prostopadła do płaszczyzny rzutów, jest odcinkiem, leżącym na śladzie płaszczyzny P_1 . [Rys. 16].

2) Jeżeli płaszczyzna P_1 nakrywa płaszczyznę rzutów, a więc $\alpha = 0$, natenczas:

$$F' = F \cos 0, \text{ a zatem:} \\ F' = F.$$

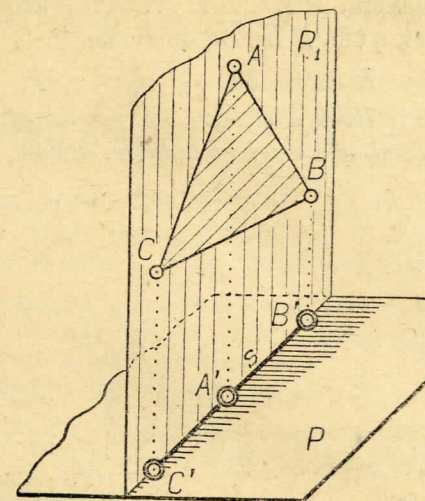
Rzut trójkąta ABC , leżącego na płaszczyźnie rzutów schodzi się z tym trójkątem.

[Uzasadnij to twierdzenie poglądem!]

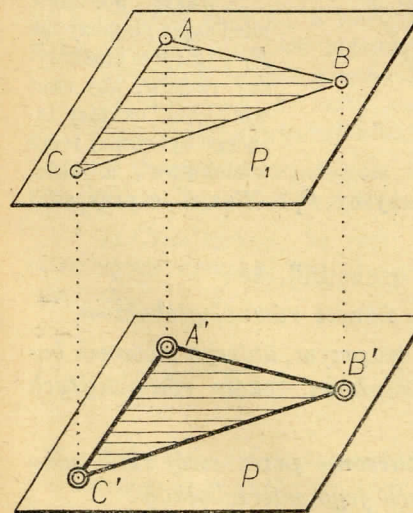
3) Niech płaszczyzna P_1 zajmie położenie równoległe do płaszczyzny rzutów [rys. 17]. Natenczas rzuty boków, kątów trójkąta ABC , będą równoległe i równe bokom względnie kątom trójkąta danego. A zatem:

Jeżeli płaszczyzna trójkąta jest równoległa do płaszczyzny rzutów, to rzut tego trójkąta jest równy temu trójkątowi.

19. Na sztywnej tekturze P_1 narysuj dowolny wielokąt $ABCDE\dots = F$, a trzymając tekturę w pewnym położeniu względem płaszczyzny rzutów P , wyznacz rzuty poszczególnych wierzchołków



Rys. 16

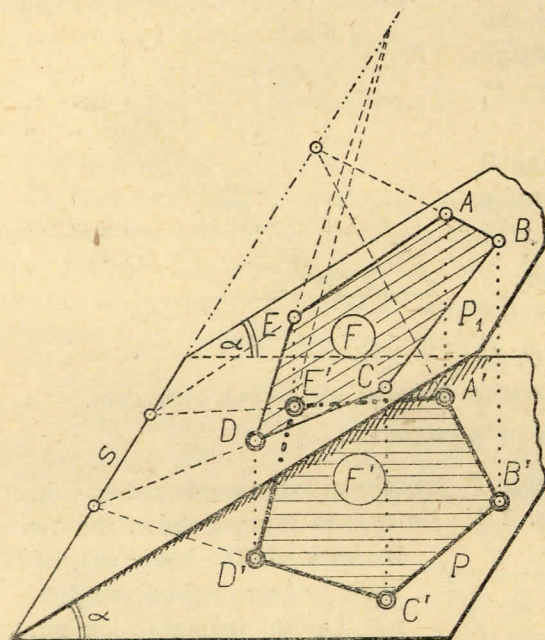


Rys. 17

i boków wielokąta [rys. 18]! Otrzymasz na płaszczyźnie rzutów wielokąt $A'B'C'D'E' \dots = F'$, który nazywamy rzutem wielokąta F na płaszczyznę P .

Zauważ, że:

Rzut wielokąta na pewną płaszczyznę jest wielokątem o tej samej ilości wierzchołków, boków, przekątnych!



Rys. 18

by rzut był odcinkiem na śladzie płaszczyzny P_1 ? Wskaż te przypadki na powyższym modelu! [Rys. 18].

b) Na podstawie artykułu 9 uzasadnij, że:

1) Rzut równoległoboku jest również równoległobokiem.

2) Rzut trapezu jest również trapezem, którego stosunek boków równoległych równy jest stosunkowi boków równoległych trapezu danego.

c) Wielokąt płaski jest wyznaczony przez swój rzut tylko wtedy, jeżeli są podane cechy trzech jego wierzchołków.

Uzasadnij to poglądem!

a) Na podstawie art. 18 uzasadnij, że:

Jeżeli kąt nachylenia płaszczyzny P_1 , na której leży wielokąt, do płaszczyzny rzutów oznaczmy przez α , powierzchnię wielokąta przez F , powierzchnię zaś rzutu tego wielokąta przez F' , natenczas zachodzi związek:

$$F' = F \cos \alpha$$

Jakie położenie musi zająć płaszczyzna P_1 względem płaszczyzny rzutów, aby rzut wielokąta na niej leżącego był równy temu wielokątowi, a jakie,

20. Ćwiczenia.

1) Dane są rzuty cechowane trzech punktów płaszczyzny P_1 : $A'(1)$, $B'(4)$, $C'(8, 3)$.

Mamy wyznaczyć: a) ślad płaszczyzny P_1 ; b) prostą największego spadku; c) moduł i spadek tej płaszczyzny; d) prawdziwą wielkość trójkąta ABC ; e) stosunek powierzchni rzutu tego trójkąta do powierzchni samego trójkąta.

2) Rozwiązać takie same zagadnienia jak w ćw. 1), jeżeli płaszczyzna P_1 jest wyznaczona przez dwie proste przecinające się w punkcie $C(0)$, a mianowicie: $g' \equiv [C'(0) A'(4, 5)]$, $l' \equiv [C'(0) B'(-2, 1)]$.

3) Płaszczyzna P_1 jest wyznaczona przez swój ślad s i jeden jej punkt $A'(6, 7)$. Na tej płaszczyźnie leży trójkąt ABC , którego rzut $A'B'C'$ jest równobocznym trójkątem o boku $a = 4 \text{ cm}$.

Rozwiązać takie same zagadnienia jak w ćwiczeniu 1).

4) Dany jest rzut cechowany równoległoboku, który przedstawia się jako prostokąt $P'(1) Q'(3, 2) R'(9, 1) S'$ o bokach $PQ' = 4 \text{ cm}$, $Q'R' = 6 \text{ cm}$.

Rozwiązać takie same zagadnienia jak w ćwiczeniu 1).

5) Płaszczyzna jest dana przez rzut cechowany swej prostej największego spadku: $p' \equiv [A'(-2, 5) B'(3, 5)]$.

Narysować rzut cechowany kwadratu o boku $a = 6$, leżącego na tej płaszczyźnie, jeżeli: a) jeden jego bok schodzi się ze śladem danej płaszczyzny; b) jeden jego bok jest równoległy do śladu i odległy od niego na 3 jedn.; c) kwadrat dotyka płaszczyzny rzutów jednym wierzchołkiem, zaś jego przekątna, wychodząca z tego wierzchołka, jest prostopadła do śladu płaszczyzny; d) jeden wierzchołek kwadratu schodzi się z punktem $B'(3, 5)$, a przekątna przez ten wierzchołek przechodząca jest prostopadła do śladu płaszczyzny.

Uzasadnij, że rzut kwadratu w położeniu c) i d) musi być rombem!

Przekonaj się, że rzuty kwadratu we wszystkich tych położeniach są równoważnymi równoległobokami! [Dlaczego?]

6) Rozwiązać zagadnienia w ćw. 5), jeżeli płaszczyzna kwadratu jest wyznaczona przez swój ślad s i kąt nachylenia $\alpha = 30^\circ$.

7) Chcielibyśmy, by rzut kwadratu o boku a na płaszczyznę P (płaszczyzna rysunku) był a) prostokątem, b) rombem, o powierzchniach równych:

$$a^2, \frac{\sqrt{3}}{2} a^2, \frac{\sqrt{2}}{2} a^2, \frac{1}{2} a^2, 0.36108 a^2, 0.08716 a^2, \dots, 0. a^2.$$

Podaj wartość kąta nachylenia α płaszczyzny P_1 kwadratu do płaszczyzny P w każdym z tych przypadków, a przyjawszy następnie ślad płaszczyzny P_1 , wykreśl rzuty cechowane kwadratu w każdym z tych położen!

8) Na płaszczyźnie P_1 , danej przez jej ślad s i kąt nachylenia $\alpha = 45^\circ$, leży trapez równoramienny o podstawach $a = 6$, $b = 8$, wysokości $w = 4$. Wykreślić rzuty tego trapezu, jeżeli jego podstawy są równoległe do śladu płaszczyzny P_1 .

9) a) Trapez, o którym była mowa w ćw. 8, opiera się jedną podstawą o płaszczyznę zeszytu. Wykreśl jego rzut na płaszczyznę zeszytu tak, by powierzchnia rzutu była równa połowie powierzchni trapezu danego!

b) Dany jest rzut cechowany trapezu: $A'(2, 3)$ $B'(2)$ $C'(5, 1)$ D' . Wyznaczyć naturalną wielkość tego trapezu oraz kąt nachylenia jego płaszczyzny do płaszczyzny rzutów.

10) Dany jest rzut cechowany równoległoboku $P'(-2)$ $Q'(2, 5)$ $R'(6, 2)$ S' .

Wykreślić naturalną wielkość tego równoległoboku oraz wyznaczyć położenie jego płaszczyzny względem płaszczyzny rzutów przez wyznaczenie kąta nachylenia i śladu tej płaszczyzny.

11) Prostokąt o bokach a i b opiera się jednym bokiem o płaszczyznę rzutów; jak nachyliš jego płaszczyznę do płaszczyzny rzutów, by powierzchnia rzutu prostokąta wynosiła:

$$ab, \frac{\sqrt{3}}{2}ab, \frac{\sqrt{2}}{2}ab, \frac{1}{2}ab, 0.12187ab, \dots$$

12) Wykreśl rzut sześciokąta umiarkowanego o boku a , opierającego się o płaszczyznę rzutów jednym bokiem, jeżeli rzut ten ma mieć powierzchnię równą połowie powierzchni sześciokąta danego!

13) Płaszczyzna P_1 jest wyznaczona przez rzut cechowany $p' \equiv [A'(10) S'(0)]$ swej prostej największego spadku. Przyjąć na tej płaszczyźnie punkt C o cesze 6 i wykreślić rzut cechowany prostej q , prostopadłej do płaszczyzny P_1 w tym punkcie C .

Wskazówka. Punkt C o cesze 6, jeżeli leży na płaszczyźnie P_1 , to leży na prostej głównej tej płaszczyzny g o cesze 6.

Rzut g' prostej g jest prostopadły do rzutu p' prostej największego spadku płaszczyzny P_1 i przecina ten rzut w punkcie $P'(6)$. Chcąc więc mieć rzut g' , należy przedewszystkiem wyznaczyć rzut $P'(6)$ takiego punktu prostej największego spadku p , którego cecha wynosi 6, i t. d. [Rys. 19 b)].

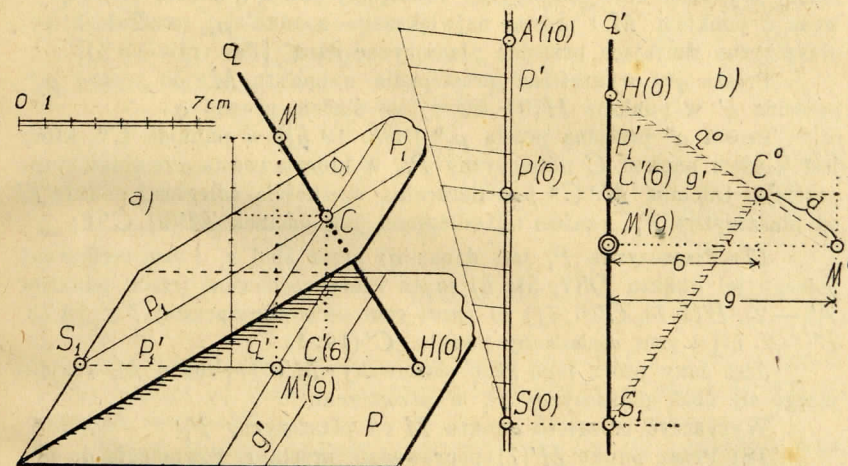
Wyobraźmy sobie w przestrzeni płaszczyznę P_1 a na niej przyjęty punkt C [Rys. 19 a)]. Prosta q , prostopadła do płaszczyzny P_1 w punkcie C , jest prostopadła do prostej głównej g , przez ten punkt przechodzącej [dlaczego?]; przeto rzut q' prostej q musi być prostopadły do g' [dlaczego? Kiedy rzut kąta prostego jest kątem prostym?].

Ponieważ następnie prosta q jest prostopadła do prostej największego spadku p_1 , przechodzącej przez punkt C , i leży z tą prostą w jednej

płaszczyźnie, prostopadłej do płaszczyzny rzutów, przeto rzut q' prostej q schodzi się z rzutem p_1' prostej p_1 . A zatem:

Rzut q' prostej q , prostopadłej do płaszczyzny P_1 w punkcie C , przechodzi przez rzut C' tego punktu, prostopadłe do rzutu g' prostej głównej g , przechodzącej na płaszczyźnie P_1 przez punkt C .

Znamy więc kierunek rzutu q' prostej prostopadłej q do płaszczyzny P_1 i rzut cechowany jednego jej punktu, t. j. $C'(6)$. By prosta q była w przestrzeni dokładnie wyznaczona, musimy znać rzut cechowany jeszcze jednego jej punktu.



Rys. 19

W tym celu wykonajmy kład na płaszczyznę rzutów trójkąta prostokątnego CS, C' dokoła q' [Rys. 19 a) i b)], który się zjeżdża z trójkątem C^0S_1C' , i w punkcie C^0 wykreślimy prostą q_0 , prostopadłą do przeciwprostokątnej S_1C' . Prosta q_0 jest kładem prostej q , przecina się przeto z rzutem q' w śladzie H prostej q . Punkty H i C wyznaczają dokładnie prostą q .

14) Płaszczyzna P_1 jest dana przez rzut cechowany $p' \equiv [A'(0, 5) B'(2, 6)]$ prostej największego spadku, prócz tego dany jest rzut $C'(7, 5)$ punktu C , leżącego na tej płaszczyźnie. Wyznaczyć rzut cechowany prostej q , prostopadłej do płaszczyzny P_1 w punkcie C .

15) Płaszczyzna P_1 jest wyznaczona przez rzuty cechowane trzech jej punktów $A'(2)$, $B'(4)$, $C'(8)$. a) Wyznaczyć rzuty cechowane prostych, prostopadłych do płaszczyzny P_1 , zbudowanych w punktach A, B, C . b) Wyznaczyć rzut cechowany prostej, prostopadłej do płaszczyzny P_1 , zbudowanej w dowolnym punkcie tej płaszczyzny.

16) Dana jest płaszczyzna P_1 przez rzut cechowany prostej największego spadku $p_1' \equiv [S'(0) A'(7)]$, nadto dany jest rzut cechowany

$M'(9)$ dowolnego punktu M , znajdującego się w przestrzeni obok płaszczyzny P_1 .

Wyznaczyć: a) rzut cechowany prostą q , poprowadzonej z punktu M prostopadłe do płaszczyzny P_1 ; b) wyznaczyć odległość punktu M od płaszczyzny P_1 .

Wskazówka. Ze wskazówki do ćwiczenia 13 i rys. 19 a) wynika, że rzut q' prostej q , poprowadzonej w przestrzeni prostopadłe do płaszczyzny P_1 , jest prostopadły do rzutów prostych głównych płaszczyzny P_1 i przechodzi przez rzut M' punktu M .

Aby wyznaczyć rzut cechowany jeszcze jednego punktu prostej q , należy wykonać kład płaszczyzny rzucającej prostą q dokoła rzutu q' — wraz z punktem M i prostą największego spadku p_1 , wzdłuż której płaszczyzna rzucająca przecina płaszczyznę daną. [Por. rys. 19 b)].

Prosta q^0 , wykreślona prostopadłe z punktu M^0 do prostej p_1^0 , przecina q' w punkcie $H(0)$, który jest śladem prostej q .

Prosta q^0 przecina prostą p_1^0 [Rys. 19 b)] w punkcie C^0 , który jest kładem punktu C płaszczyzny P_1 , w którym prosta q tę płaszczyznę przebija. Odcinek $M^0 C^0$ jest naturalną wielkością odległości punktu M od płaszczyzny P_1 ; rzutem tej odległości jest odcinek $M'(9) C'(6)$.

17) Płaszczyzna P_1 jest dana: a) przez ślad s_1 i rzut cechowany jednego jej punktu $D'(7, 5)$; b) przez rzuty cechowane trzech punktów $A'(-2)$, $B'(1, 5)$, $C'(6, 7)$; c) przez rzut cechowany prostą $l' \equiv [A'(3) B'(-2, 5)]$ i rzut cechowany punktu $C'(10, 1)$.

Jest dany prócz tego rzut cechowany $M'(6)$ punktu M , znajdującego się obok płaszczyzny P_1 w przestrzeni.

Wyznaczyć odległość punktu M od płaszczyzny P_1 .

18) Przez punkt $M'(7)$ poprowadzić prostą r , równoległą do płaszczyzny P_1 , danej przez prostą największego spadku $p' \equiv [A'(15) B'(7)]$.

Wskazówka. Ze stereometrii wiadomo nam, że prosta jest równoległa do płaszczyzny, jeżeli jest równoległa do jakiegokolwiek prostej, leżącej na tej płaszczyźnie.

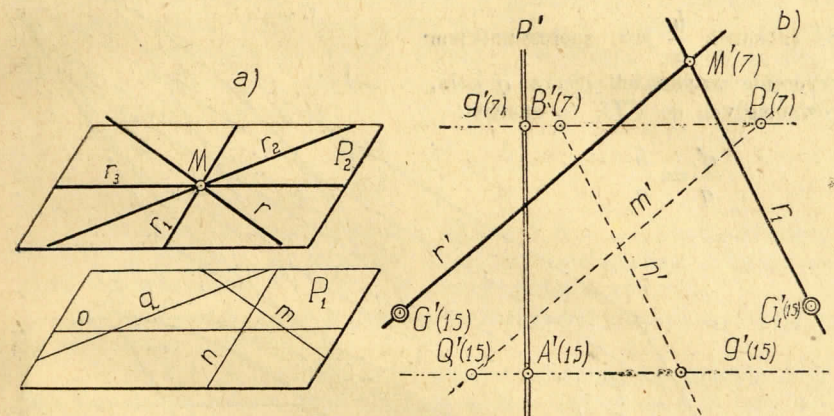
Poprowadźmy zatem na płaszczyźnie P_1 dowolną prostą m , której rzut schodzi się z m' [Rys. 20]. Rzut m' przecina rzuty prostych głównych $g'(7)$ i $g'(15)$ w punktach $P'(7)$ i $Q'(15)$, które są rzutami punktów o cechach 7 i 15. Rzuty $P'(7)$ i $Q'(15)$ wyznaczają w zupełności prostą m .

Jeżeli przez $M'(7)$ poprowadzimy prostą r' , równoległą do m' , natenczas otrzymamy rzut prostej r , przechodzącej przez punkt M , równoległe do płaszczyzny P_1 . Drugi punkt $G'(15)$ tej prostej otrzymamy na podstawie równości modułów prostych równoległych, jeżeli zatem odeiniemy w tym samym kierunku odcinek $M'(7) G'(15) = P'(7) Q'(15)$.

19) Płaszczyzna P_1 jest dana przez trzy punkty $A'(2)$, $B'(3)$, $C'(7)$. Obok płaszczyzny tej znajduje się punkt M , dany przez swój rzut cechowany $M'(10)$. Wyznaczyć rzut cechowany prostą r , poprowadzonej przez punkt M , równoległe do płaszczyzny P_1 .

20) W ćwiczeniu 18 poprowadzić przez punkt $M'(7)$ płaszczyznę, równoległą do płaszczyzny P_1 .

Wskazówka. Przez punkt M można poprowadzić niezliczoną ilość prostych, równoległych do płaszczyzny P_1 [rys. 20 a)]. Proste te wypełniają płaszczyznę P_2 , równoległą do płaszczyzny P_1 . Płaszczyzna P_2 jest wyznaczona przez dwie proste równoległe do P_1 , np. prostą r i r_1 — i t. d.



Rys. 20

21) Płaszczyzna P_1 jest dana przez swój ślad s i rzut cechowany $A'(6)$ jednego jej punktu. Poprowadzić do niej przez punkt $M'(12)$ płaszczyznę równoległą.

22)*) Według podręcz. Geometrii dla kl. III powtórz o rzucie prostopadłym koła!

23)*) Wielka półoś elipsy jest a , mała półoś b . Uważając elipsę tę za rzut koła k o promieniu a , uzasadnij, że dostawa kąta nachylenia α płaszczyzny tego koła do płaszczyzny rzutów jest:

$$\cos \alpha = \frac{b}{a}.$$

Wskazówka. a) Wyobraźmy sobie koło k o promieniu a , o środku S , leżące na płaszczyźnie P_1 , nachylonej do płaszczyzny rzutów P pod kątem α . [Rys. 21]. Narysujmy w kole jedną średnicę $AB = 2a$, równoległą do płaszczyzny rzutów, a zatem równoległą również do śladu s płaszczyzny P_1 . Rzut $A'B'$ tej średnicy jest zatem równy długości średnicy samej, to jest $A'B' = 2a$.

Tak samo w naturalnych wielkościach przedstawiają się rzuty wszystkich cięciw r , równoległych do średnicy AB .

Weźmy następnie na uwagę średnicę CD koła, prostopadłą do średnicy AB . Średnica ta leży na prostej największego spadku płaszczyzny

*) Ćwiczenia z gwiazdką są przeznaczone dla kl. VII gimnazjum humanistycznego.

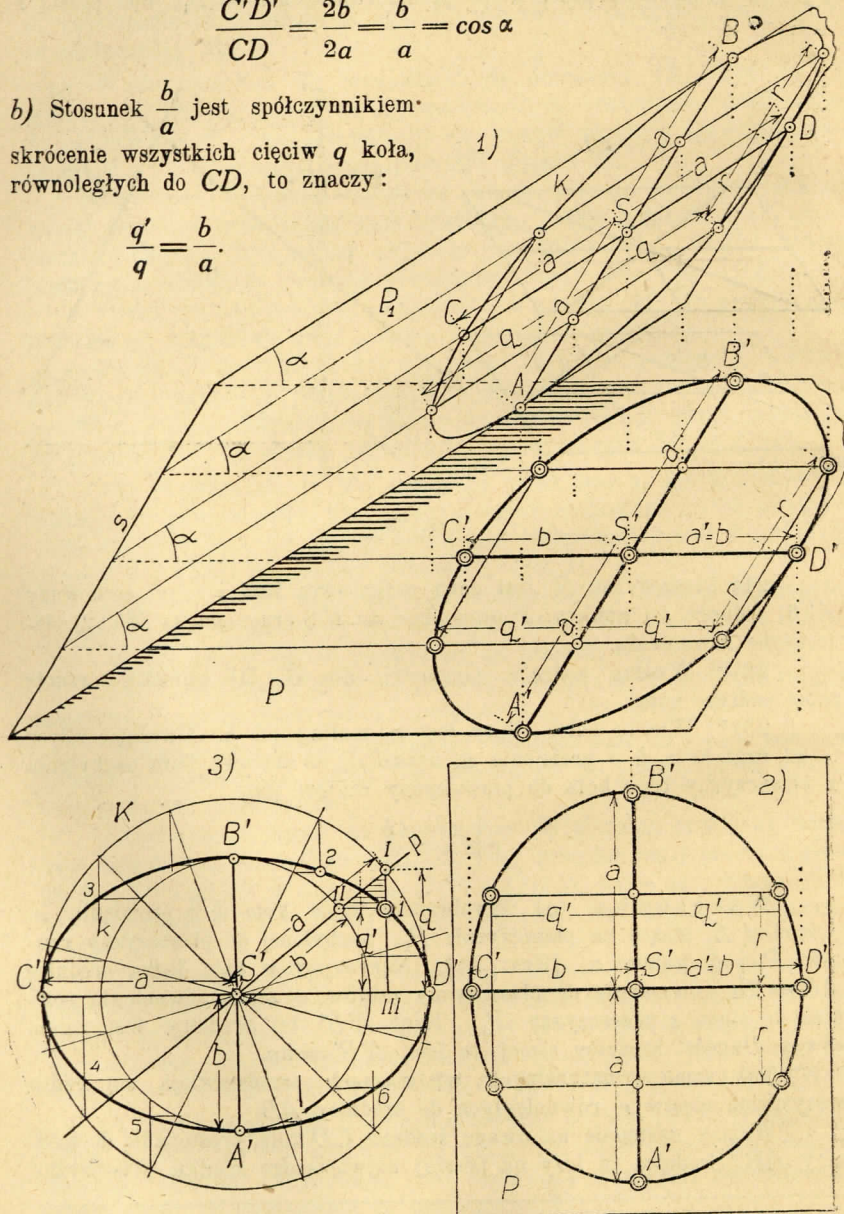
P_1 , poprowadzonej przez punkt S ; kąt nachylenia zatem średnicy CD do płaszczyzny rzutów równy jest kątowi nachylenia płaszczyzny P_1 do tej płaszczyzny rzutów, a zatem:

$$\frac{C'D'}{CD} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a} = \cos \alpha$$

b) Stosunek $\frac{b}{a}$ jest współczynnikiem

skrócenie wszystkich cięciw q koła, równoległych do CD , to znaczy:

$$\frac{q'}{q} = \frac{b}{a}.$$



Rys. 21

Z tej właściwości wynika nadzwyczaj łatwa konstrukcja elipsy, jeżeli są dane jej półosie a i b . [Rys. 21...3]):

Zakreślmy ze środka elipsy S koła k i K promieniami b i a , a następnie poprowadźmy przez środek S dowolną prostą p , która przecnie koło K w punkcie I , koło zaś k w punkcie II . Z punktu I wykreślmy odcinek $I III$, prostopadły do $C'D'$, z punktu zaś II odcinek $II I$, równoległy do $C'D'$. Punkt I , w którym przecinają się te odcinki, jest szukany punktem elipsy. Z podobnych trójkątów $I III S$ i $II I I$ wynika bowiem, że:

$$\frac{III I}{II I} = \frac{q'}{q} = \frac{b}{a}.$$

Udowodnij tak samo, że punkty 2, 3, 4, 5, 6, ... są punktami elipsy!

c) Z artykułu 19 wiadomo, że między powierzchnią F figury płaskiej, a powierzchnią F' rzutu tej figury zachodzi równość:

$F' = F \cos \alpha$, gdzie α jest kątem nachylenia płaszczyzny tej figury do płaszczyzny rzutów.

Jeżeli koło k [rys. 21...1)] uważać będziemy za wielokąt o niezliczonej liczbie boków, rzut zaś jego e , t. j. elipsę, za rzut tego wielokąta, natenczas między powierzchnią koła $a^2 \pi$, a powierzchnią elipsy F' znajdzie związek:

$$F' = a^2 \pi \cos \alpha.$$

Podstawiając za $\cos \alpha = \frac{a}{b}$, otrzymamy:

$$F' = a^2 \pi \cdot \frac{b}{a}$$

$$F' = ab \pi.$$

To znaczy: Powierzchnię elipsy obliczymy, mnożąc iloczyn półosi elipsy przez liczbę π (Ludolfinę).

§ 4. KŁAD PŁASZCZYZNY PODNIESIENIE PŁASZCZYZNY

21. Jeżeli obrócimy płaszczyznę P_1 [Rys. 22 a)] dokoła jej śladu tak, by się nakryła z płaszczyzną rzutów P , mówimy wtedy, że położyliśmy płaszczyznę P_1 na płaszczyznę P , lub, że wykonaliśmy kład płaszczyzny P_1 na płaszczyznę P .

Ze zmianą położenia płaszczyzny P_1 zmienia również położenie każda figura, leżąca na tej płaszczyźnie. Gdy płaszczyzna P_1 nakryje się z płaszczyzną rzutów, to również figura,

leżąca na P_1 , padnie na płaszczyznę rzutów. To nowe położenie figury płaskiej nazywamy jej kładem na płaszczyznę rzutów.

Naodwrot: jeżeli płaszczyzna P_1 nakrywa się z płaszczyzną rzutów, a my ją obrócimy dokoła pewnej prostej s tak, by tworzyła z płaszczyzną rzutów pewien kąt nachylenia α , natenczas mówimy, że podnieśliśmy płaszczyznę P_1 o kąt α . Z płaszczyzną P_1 podniesie się o ten sam kąt każda figura, leżąca na tej płaszczyźnie.

22. a) Trójkąt ABC opiera się bokiem AB o płaszczyznę rzutów P , wierzchołek zaś C jest odległy od tej płaszczyzny o 10 jednostek. [Rys. 22 a), b)]. Mamy wykonać kład tego trójkąta na płaszczyznę rzutów.

Jeżeli trójkąt ABC obraca się dokoła boku AB , natenczas jego wierzchołek C zakreśla w przestrzeni łuk koła k . Płaszczyzna tego koła jest prostopadła do płaszczyzny rzutów (dlaczego?) i do osi obrotu, tj. do boku AB , przecina się przeto z płaszczyzną rzutów podług prostej h , która przechodzi przez rzut C' punktu C i jest prostopadła do osi obrotu AB . Punkt M , w którym prosta h przecina prostą AB , jest środkiem koła k .

Promień r koła k leży na prostej największego spadku, poprowadzonej na płaszczyźnie trójkąta P_1 przez punkt C . Promień ten tworzy zatem ze swoim rzutem, a więc z prostą h , kąt α , równy kątowi nachylenia płaszczyzny trójkąta do płaszczyzny rzutów. A zatem:

Jeżeli płaszczyzna P_1 obraca się dokoła swego śladu, to dowolny jej punkt C zakreśla w przestrzeni koło, którego promień r jest równy przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, w którym jedną przyprostokątną jest wysokość (cecha) punktu C , drugą przyprostokątną jest odległość rzutu C' punktu C od śladu płaszczyzny (w danym przypadku od prostej AB), jedynym kątem ostrym jest kąt nachylenia α płaszczyzny P_1 do płaszczyzny rzutów.

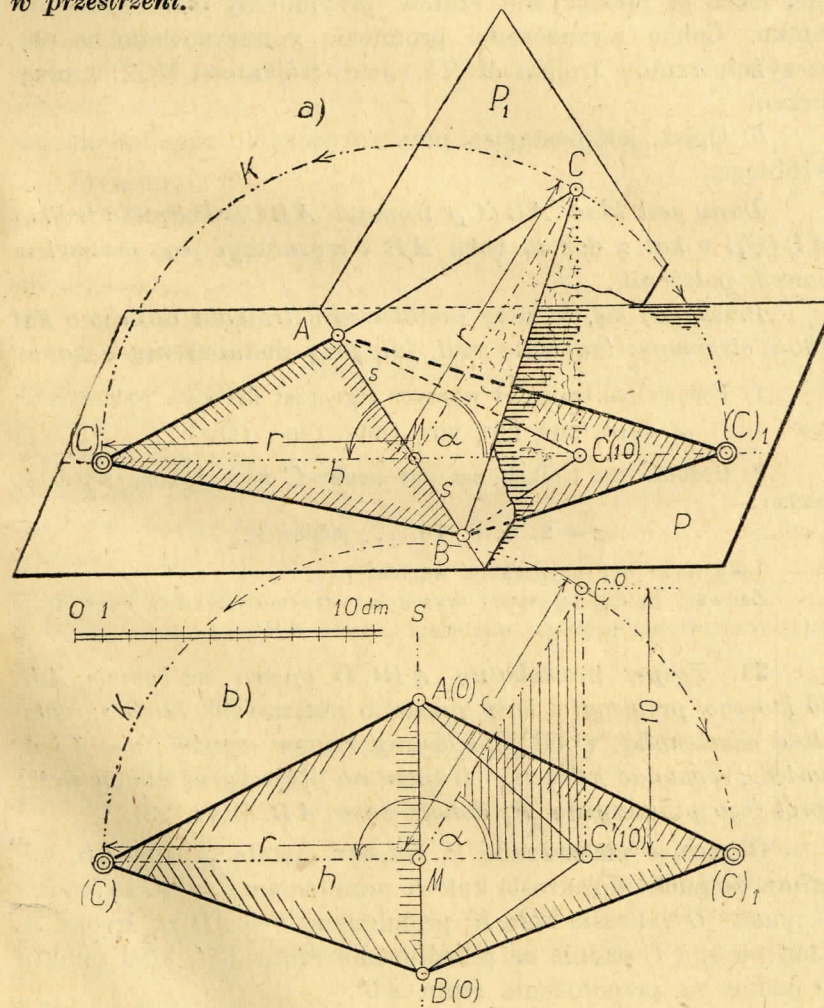
Promień r jest więc wyznaczony, skoro jest podana cecha punktu C albo kąt nachylenia α płaszczyzny P_1 do płaszczyzny rzutów.

Jeżeli płaszczyzna P_1 wykona obrót, równy kątowi α , natenczas punkt C zejdzie się z punktem $(C)_1$ prostej h ; jeżeli

zaś płaszczyzna P_1 wykona obrót równy kątowi $180-\alpha$, natenczas punkt C zejdzie się z punktem (C) prostej h . A zatem:

Jeżeli wykonamy kład płaszczyzny P_1 na płaszczyznę rzutów przez obrót dokoła jej śladu na lewo lub na prawo, natenczas dowolny jej punkt C zejdzie się z punktem (C) lub $(C)_1$ prostej h , wykreślonej przez rzut C' tego punktu, prostopadłe do śladu płaszczyzny P_1 .

Punkty (C) i $(C)_1$ są odległe od śladu s płaszczyzny P_1 o odcinek r , równy promieniowi koła, które punkt C zakreśla w przestrzeni.



Rys. 22

Podczas obrotu trójkąta ABC wierzchołki A i B nie zmieniają swych położenia, czyli ich kłady schodzą się z nimi samymi. Z tego wynika, że kłady boków AC i BC trójkąta ABC otrzymamy, jeżeli kład (C) lub (C_1) połączymy z wierzchołkami A i B .

Trójkąty $(C)AB$ i $(C_1)AB$ są kładami trójkąta ABC . Oba kłady są figurami symetrycznie sobie odpowiadającymi względem prostej AB .

Rys. 22 b) przedstawia rozwiązanie powyższego zagadnienia, jeżeli za płaszczyznę rzutów przyjmiemy płaszczyznę rysunku. Celem wyznaczenia promienia r narysowano na płaszczyźnie rzutów trójkąt $MC'C^0$ równy trójkątowi $MC'C$ w przestrzeni.

b) Opisz, jak postąpisz przy rozwiązaniu zagadnienia odwrotnego:

Dany jest kład $AB(C_1)$ trójkąta ABC . Podnieść trójkąt $AB(C_1)$ o kąt α dokoła boku AB i wyznaczyć jego rzut w tem nowem położeniu.

Przekonaj się, że przy podniesieniu trójkąta danego o kąt $180-\alpha$ otrzymasz taki sam rzut, jak przy podniesieniu o kąt α !

1) Podnieś ten trójkąt i wyznacz jego rzut dla kąta podniesienia:

$$\alpha = 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 100^\circ, 120^\circ, 150^\circ, \dots$$

2) Podnieś ten trójkąt tak, by punkt C miał żadaną wysokość (cechę):

$$z = 2, 6, 8, 10, \dots \text{ jednostek.}$$

Jaka może być największa wartość na z ?

Zauważ, że dla tej samej wysokości otrzymujemy dwa rzuty trójkąta, symetrycznie położone względem prostej AB !

23. Trapez prostokątny $ABCD$ opiera się bokiem AB , do którego przylegają kąty proste, o płaszczyznę rzutów; odległość wierzchołka C od płaszczyzny rzutów wynosi: $z = 9$ jednostek. Wykonać kład tego trapezu na płaszczyznę rzutów przez obrót jego płaszczyzny P_1 dokoła boku AB . [Rys. 23].

Obracając płaszczyznę P_1 trapezu dokoła prostej AB , widzimy, że punkt C zakreśla koło K promieniem $r = BC$ ze środka B , punkt D zakreśla koło K_1 promieniem $r = AD$ ze środka A . Kład punktu C padnie na przedłużenie rzutu BC' , kład punktu D padnie na przedłużenie rzutu AD' .

Kład punktu C oznaczono na rysunku przez (C) , punktu D przez (D) .

Bok DC przecina się ze swoim rzutem $D'C'$ w punkcie S , który leży na śladzie $s \equiv AB$ płaszczyzny P_1 . Podczas obrotu płaszczyzny P_1 punkt S nie zmienia swego położenia, kład zatem boku DC , t. j. prosta $(C)(D)$, przechodzić musi przez punkt S .

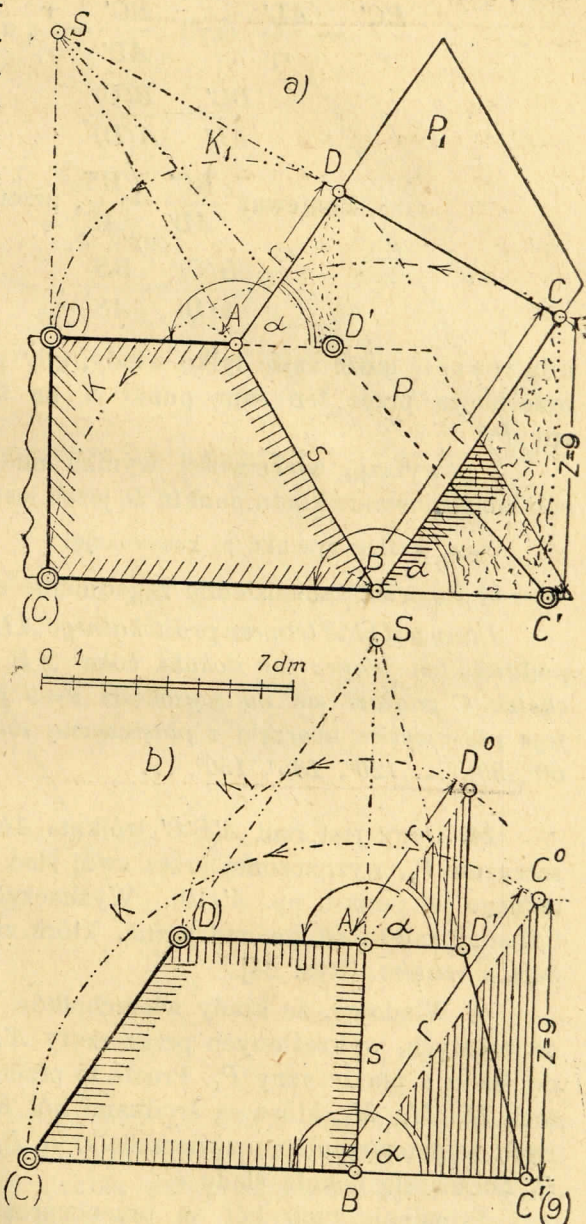
A zatem:

Kład prostej, leżącej na płaszczyźnie P_1 , i rzut tej prostej przecinać się muszą w punkcie S , leżącym na śladzie s płaszczyzny P_1 .

Jeżeli więc rzut prostej jest równoległy do śladu, to również kład tej prostej będzie równoległy do tego śladu.

Powyższą właściwość możemy zresztą uzasadnić następująco:

Weźmy na uwagę trójkąty rzucające BCC' i DAD' . Są one podobne do siebie, gdyż mają po dwa kąty równe, a mianowicie:



Rys. 23

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B, \sphericalangle C' = \sphericalangle D' = 90^\circ \text{ [dlaczego?]}. \quad \text{Stąd wynika, że:}$$

$$\frac{BC'}{r} = \frac{AD'}{r_1} \quad \text{czyli} \quad \frac{BC'}{AD'} = \frac{r}{r_1}, \text{ a więc:}$$

$$\frac{BC'}{AD'} = \frac{B(C)}{A(D)}.$$

$$\text{Ponieważ } \frac{BC'}{AD'} = \frac{BS}{AS}, \text{ przeto:}$$

$$\frac{B(C)}{A(D)} = \frac{BS}{AS},$$

a ta równość może zajść tylko wtedy, gdy proste $C'D'$, $(C)(D)$ przechodzą przez ten sam punkt S na śladzie s płaszczyzny P_1 .

Z powyższej właściwości wynika nadzwyczaj łatwy sposób konstruowania kładu punktu D , jeżeli jest dany kład punktu C .

Opisz według rysunku tę konstrukcję!

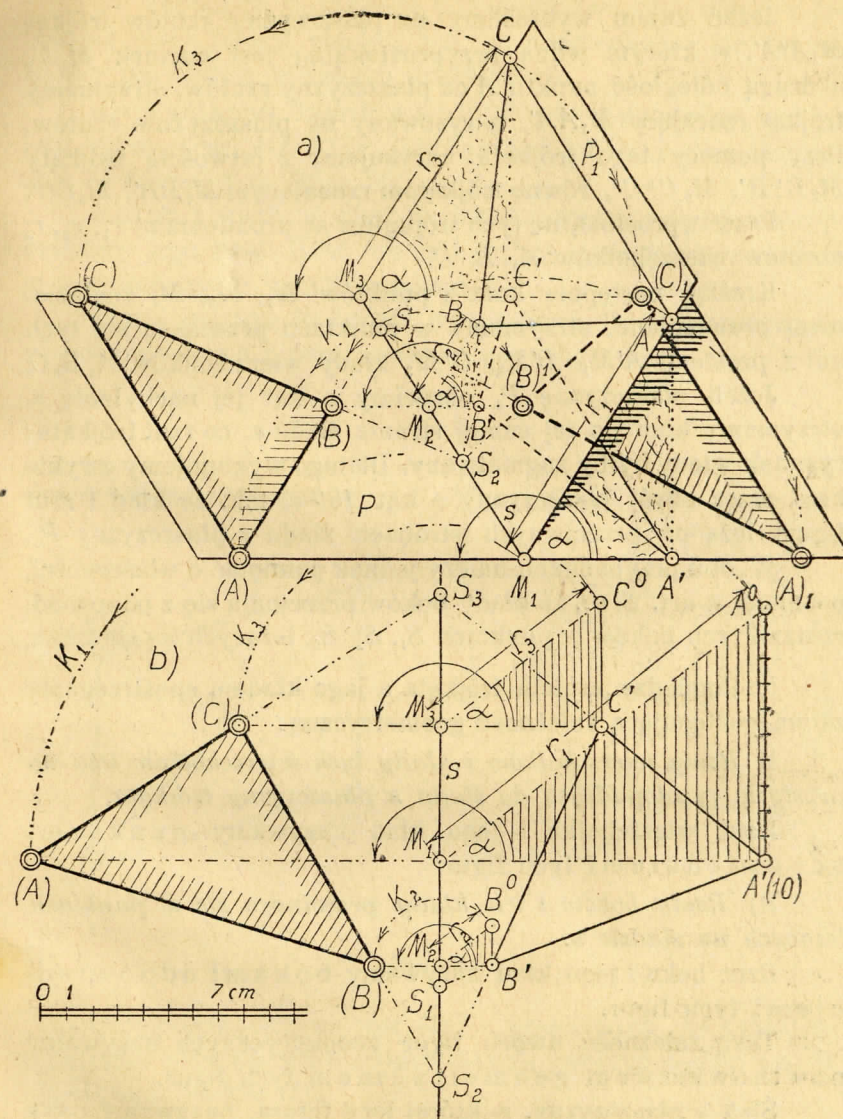
b) Rozwiąż samodzielnie zagadnienie odwrotne:

Dany jest kład trapezu prostokątnego $AB(C)(D)$ [Rys. 23 b)]; podnieść ten trapez tak dokoła boku AB , aby a) jego wierzchołek C znalazł się na wysokości $z=9$ jednostkom; b) aby jego płaszczyzna tworzyła z płaszczyzną rzutów kąt $\alpha=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, \dots, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, \dots$

24. Dany jest rzut $A'B'C'$ trójkąta ABC , leżącego na płaszczyźnie P_1 , wyznaczonej przez swój ślad s i rzut cechowany jednego jej punktu np. $A'(10)$. Wyznaczyć kład tego trójkąta i zbadać zależność geometryczną, która zachodzi między kładem a rzutem. [Rys. 24].

a) Wiadomo, że klady wierzchołków A, B, C będą leżały na prostych, wykreślonych przez rzuty A', B', C' , prostopadłe do śladu s płaszczyzny P_1 . Proste te przecinają ślad s w punktach M_1, M_2, M_3 , które są środkami kół K_1, K_2, K_3 , zakreślonych w przestrzeni przez wierzchołki A, B, C , gdy płaszczyzna P_1 obraca się dokoła śladu s .

Promienie tych kół są przeciwprostokątnymi trójkątów rzucających $AA'M_1, BB'M_2, CC'M_3$, w których kąt nachylenia α



Rys. 24

płaszczyzny P_1 występuje jako kąt ostry. Trójkąty te są zatem w przestrzeni podobne. To podobieństwo nie zmieni się, jeżeli trójkąty te obrócimy dokoła przyprostokątnych M_1A', M_2B', M_3C' w tym samym kierunku, by nakryły się z płaszczyzną rzutów.

Jeżeli zatem wykreślimy na płaszczyźnie rzutów trójkąt M_1A^0A' , w którym jedną przyprostokątną jest odcinek M_1A' , a drugą odległość punktu A od płaszczyzny rzutów, otrzymamy trójkąt rzucający M_1AA' , narysowany na płaszczyźnie rzutów. Przy pomocy tego trójkąta narysujemy z łatwością trójkąty M_2B^0B' , M_3C^0C' , równe trójkątom rzucającym M_2BB' , M_3CC' .

Przeciwprostokątne tych trójkątów są promieniami r_1, r_2, r_3 obrotów wierzchołków A, B, C .

Kreśląc następnie koła z punktów M_1, M_2, M_3 znalezionymi promieniami, otrzymamy w punktach przecięcia się tych kół z prostymi $A'M_1, B'M_2, C'M_3$ klady wierzchołków A, B, C .

Jeżeli płaszczyznę P_1 obrócimy o kąt jej nachylenia α , otrzymamy kład po tej samej stronie śladu s , co rzut trójkąta; rysunek wtedy byłby zagmatwany. Dlatego wykonujemy zwykle kład przez obrót płaszczyzny o kąt $180-\alpha$, tak, że kład i rzut figury leżą po przeciwnych stronach śladu s płaszczyzny P_1 .

W obu przypadkach należy jednak pamiętać o właściwości, poznanej w art. 23 a), że klady boków przecinają się z odpowied. rzutami tych boków w punktach S_1, S_2, S_3 , leżących na śladzie s .

b) Pomiedzy rzutem trójkąta a jego kładem spostrzegamy zatem następującą zależność geometryczną:

I) *Rzuty wierzchołków i klady tych wierzchołków leżą na prostych, prostopadłych do śladu s płaszczyzny trójkąta.*

Rzut wierzchołka i jego kład nazywamy punktami odpowiedniami tych figur.

II) *Rzuty boków i ich klady przecinają się w punktach, leżących na śladzie s .*

Rzut boku i jego kład nazywamy bokami odpowiedniami tych figur.

Taką zależność dwóch figur geometrycznych nazywamy powinowactwem geometrycznym tych figur.

Ślad s płaszczyzny, w której leży figura, nazywamy osią powinowactwa, kierunek prostych równoległych $A'(A), B'(B), C'(C)$ nazywamy kierunkiem powinowactwa.

Powinowactwo między rzutem a kładem ma kierunek prostopadły do osi powinowactwa.

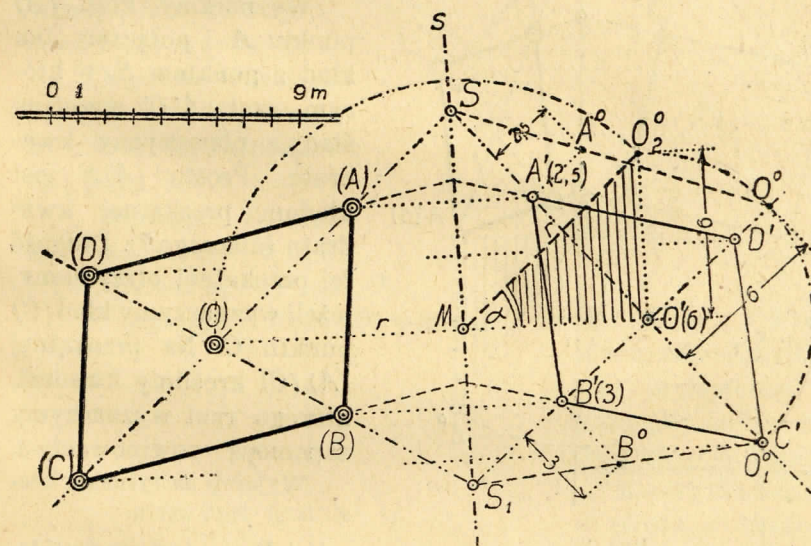
III) *Powinowactwo między rzutem figury płaskiej a jej kładem jest wyznaczone, jeżeli jest dana oś powinowactwa s i jedna para punktów odpowiednich.*

25. Zapomocą poznanego powinowactwa wykreślimy z łatwością kład figury płaskiej lub jej podniesienie, jak to poznamy na poniżej podanych przykładach.

a) Wyznaczyć kształt i wielkość równoległoboku, którego rzut jest rombem $A'B'C'D'$, jeżeli są podane cechy wierzchołków A i B i środka O . [Rys. 25].

Kształt i wielkość równoległoboku otrzymamy, jeżeli wykreślimy jego kład. Kład ten jest figurą, pozostającą z rzutem w geometrycznym powinowactwie.

Powinowactwo to będzie wyznaczone, jeżeli wyznaczymy oś powinowactwa i parę punktów odpowiednich.



Rys. 25

Osią powinowactwa jest ślad s płaszczyzny, na której figura leży, parę punktów odpowiednich tworzyć będzie np. O' i kład tego punktu (O) .

Uczeń objaśni, w jaki sposób wyznaczono na rysunku ślad s płaszczyzny równoległoboku i kład (O) punktu O !

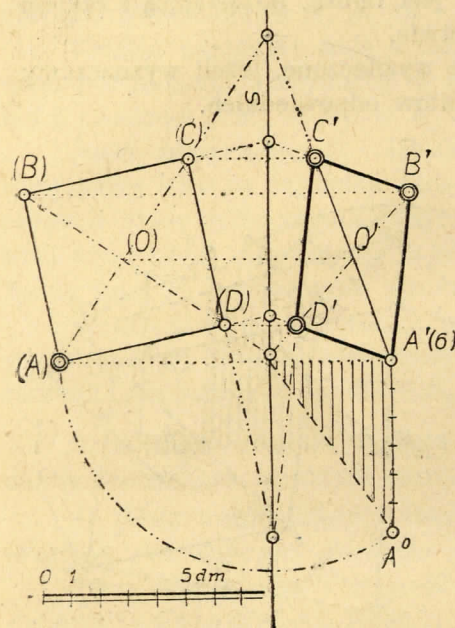
Mając wykreślony kład (O) punktu O , znajdziemy kład (A) punktu A w sposób następujący:

Rzut $O'A'$ przekątnej OA przecina oś powinowactwa s w punkcie S . Przez punkt S przechodzić musi również kład tej przekątnej. Łącząc więc kład (O) z punktem S , otrzymamy

kład przekątnej OA . Na tym kładzie i na prostej, poprowadzonej z rzutu A' prostopadłe do osi powinowactwa s , znajdować się musi kład wierzchołka A .

Uczeń objaśni, w jaki sposób wyznaczono na rysunku klady dalszych wierzchołków, boków i przekątnych danej figury!

b) Dana jest płaszczyzna przez swój ślad s i rzut cechowany $A'(6)$ jednego jej punktu. Wykreślić rzut kwadratu, leżącego na tej płaszczyźnie, jeżeli odcinek $A'(6)C'$ jest rzutem przekątnej tego kwadratu. [Rys. 26].



Rys. 26

Wyznamy kład (A) punktu A i połączmy ten kład z punktem S , w którym rzut $A'C'$ przecina ślad s płaszczyzny kwadratu. Prosta (A) S jest kładem przekątnej kwadratu (dlaczego?). Długość tej przekątnej otrzymamy, jeżeli wyznaczmy kład (C) punktu C . Na przekątnej (A)(C) kreślimy kwadrat, którego rzut wyznaczymy zapomocą powinowactwa.

Wyjaśnij na rysunku konstrukcję tego rzutu.

c) Dany jest ślad s płaszczyzny P_1 i równoległobok $A'B'C'D'$. Jaki kąt nachylenia musi mieć płaszczyzna P_1 , aby równoległobok $A'B'C'D'$ był rzutem prostokąta, leżącego na płaszczyźnie P_1 ? [Rys. 27].

Oznaczmy punkty, w których boki $A'B'$ i $A'D'$ przecinają ślad s przez S_1 i S_2 . Na odcinku S_1S_2 jako na średnicy zakreślimy koło K . Prosta, wykreślona przez A' prostopadłe do śladu s , przecina to koło w punkcie (A), który możemy przyjąć za kład wierzchołka prostokąta.

Odcinek (A) M jest promieniem obrotu punktu A . Jeżeli zatem promieniem tym zakreślimy z punktu M koło K_1 , to przetnie ono prostą, prostopadłą w punkcie A' do prostej $A'(A)$,

w punkcie A^0 . Punkty M, A', A^0 są wierzchołkami trójkąta prostokątnego, w którym kąt ostry przy M jest kątem nachylenia α płaszczyzny prostokąta do płaszczyzny rzutów.

d) *) Na płaszczyźnie P_1 , wyznaczonej przez ślad s i kąt nachylenia α , znajduje się koło o promieniu R , środka O .

Wykreślić rzut tego koła, jeżeli rzut jego środka schodzi się z punktem O' ! [Rys. 28].

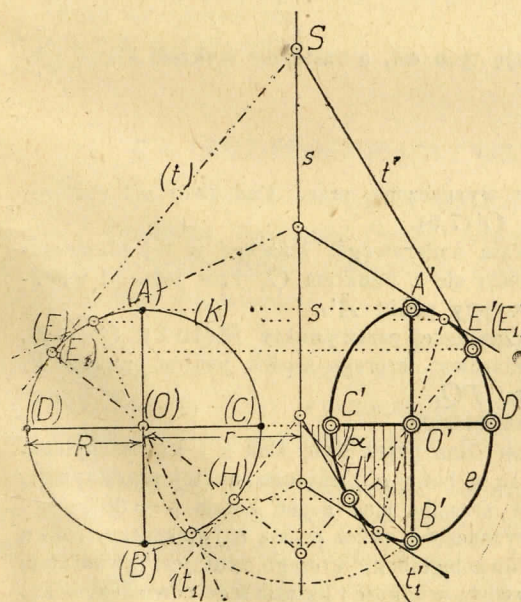
Wiadomo, że rzut koła będzie elipsą e , której środkiem będzie rzut O' .

Wykonajmy kład (O) punktu O dokoła śladu s i z tego

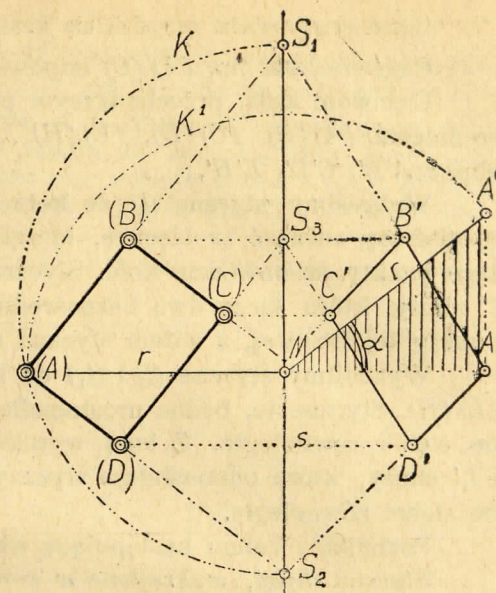
kładu zakreślimy koło (K) promieniem R . Koło (K) będzie kładem danego koła.

Miedzy kładem (K) a elipsą e zachodzi związek powinowactwa, dla którego ślad s jest osią, punkty O' i (O) punktami odpowiednimi. Powinowactwo to jest zatem dokład. wyznaczone.

Punktom (A), (B), (C), (D), (E), (H),... koła (K) odpowiadają w tem powinowactwie punkty $A', B', C', D', E', H', \dots$ elipsy.



Rys. 28



Rys. 27

Uczeń przeprowadzi samodzielnie konstrukcję tych punktów!

Cięciwie koła np. $(A)(C)$ odpowiada cięciwa $A'C'$ elipsy.

Cięciwom koła, przechodzącym przez jego środek, to jest średnicom $(A)(B)$, $(C)(D)$, $(E)(H)$, odpowiadają średnice elipsy $A'B'$, $C'D'$, $E'H'$,

Wykreślmy styczną (t) do koła w punkcie (E) . Styczną tę możemy uważać za cięciwę, łączącą dwa blisko siebie leżące punkty na obwodzie koła. Stycznej tej odpowiada cięciwa t' elipsy, która łączy dwa bezpośrednio po sobie następujące punkty tej krzywej, a zatem styczna do elipsy w punkcie E' !

Wykreślmy styczne (t) i (t_1) do koła w końcach średnicy $(E)(H)$. Styczne te, będąc prostopadłe do średnicy $(E)(H)$, są do siebie równoległe. Z tego wynika, że również styczne t' i t'_1 elipsy, które odpowiadają stycznym (t) i (t_1) , muszą być do siebie równoległe.

Poznajemy zatem następującą właściwość elipsy:

Styczne elipsy, wykreślone w końcach średnicy, są względem siebie równoległe.

Najłatwiej wykreślić elipsę wtedy, gdy są wyznaczone jej osie. Osie te odpowiadają średnicom koła, z których jedna $(A)(B)$ jest równoległą do osi powinowactwa s , druga $(C)(D)$ prostopadłą do tej osi.

Przeprowadź konstrukcję tych osi, a następnie wykreśl elipsę sposobem, podanym na rys. 21.

26. Ćwiczenia.

1) Płaszczyzna P_1 jest wyznaczona przez ślad swój s i rzut cechowany jednego jej punktu $O'(7,5)$.

Wykreślić rzut pięciokąta umiarowego, leżącego w tej płaszczyźnie, jeżeli środek jego schodzi się z punktem O , rzut jednego wierzchołka jego jest dowolnie przyjęty punkt A' .

2) Na płaszczyźnie, wyznaczonej przez punkty $P'(10,3)$, $Q'(-2)$, $R'(5,6)$, leży sześciokąt umiarowy, którego środek jest w punkcie R , a którego bok leży na prostej PQ .

Wykreślić rzut tego sześciokąta.

3) Płaszczyzna P_1 jest dana przez swój ślad s i kąt nachylenia α . Wykreślić rzut kwadratu o boku a , leżącego na tej płaszczyźnie, jeżeli jedna para jego boków przecina ślad s pod kątem $\beta = 30^\circ$.

4) Na płaszczyźnie, wyznaczonej przez prostą największego spadku $p' \equiv [A'(2) B'(8,5)]$ leży równoległobok, którego rzut jest kwadratem o boku a . Wykreślić rzeczywistą wielkość i kształt tego równoległoboku.

5) Dany jest rzut $g' \equiv [A'(2,3) B'(6,5)]$ prostej g . Poprowadzić przez prostą g płaszczyznę tak, by kąt jej nachylenia $\alpha = 60^\circ$.

Wskazówka. Wykreśl trójkąt prostokątny, którego jedna przyprostokątna jest równa cesze punktu B , jeden kąt ostry równy jest $\alpha = 60^\circ$. Drugą przyprostokątną tego trójkąta zakresł z rzutu B' koła k . Styczna, wykreślona ze śladu prostej g do koła k , jest śladem płaszczyzny szukanej.

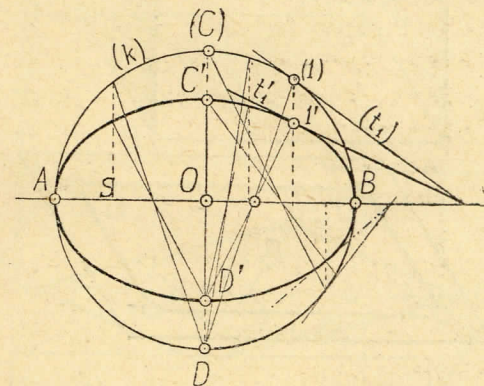
Dowód! Ile jest rozwiązań? Pod jakim warunkiem rozwiązanie jest niemożliwe (urojone)?

6) Na płaszczyźnie P_1 , danej przez ślad s i rzut cechowany $A'(7)$ jednego jej punktu, poprowadzić prostą l , któraby tworzyła ze śladem s kąt $\beta = 30^\circ$.

Ile jest rozwiązań?

7) *) Dane są osie elipsy e , a mianowicie $a = 3 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$. Uważając elipsę tę za rzut koła, którego jedna średnica schodzi się z większą osią elipsy, wykreśl tę elipsę na podstawie powinowactwa, zachodzącego między tą krzywą a kładem koła. [Rys. 29]!

Jaki kąt tworzy płaszczyzna koła z płaszczyzną rzutów?



Rys. 29

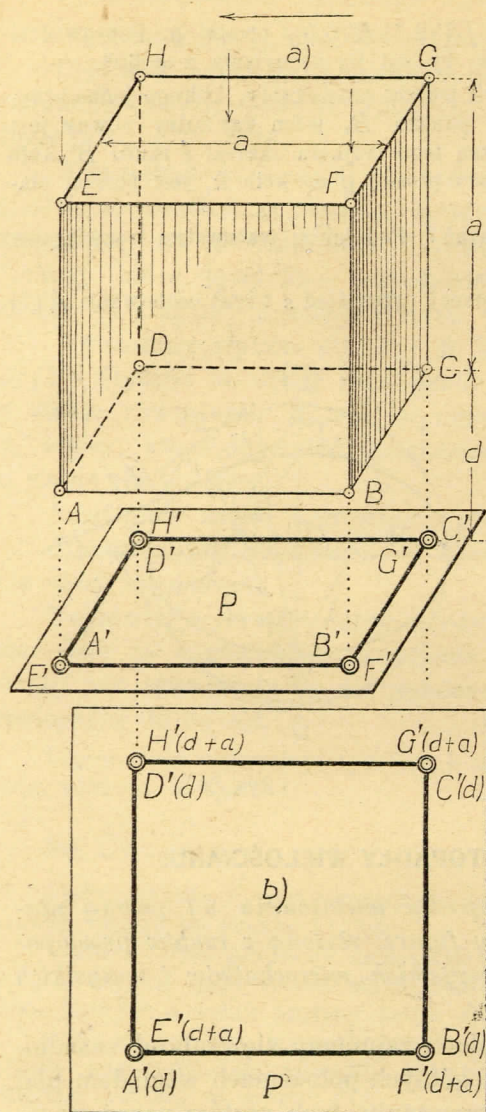
§ 5. RZUT PROSTOPADŁY WIEŁOŚCIANU.

27. Przez rzut prostopadły wielościanu na pewną płaszczyznę rozumiemy *figurę, złożoną z rzutów prostopadłych na tę płaszczyznę wszystkich wierzchołków i wszystkich krawędzi tego wielościanu.*

W najbliższych artykułach zajmiemy się rzutami zasadniczych wielościanów, w szczególnych położeniach względem płaszczyzny rzutów. Przy wyznaczaniu tych rzutów uczeń powinien posługiwać się modelami tych wielościanów.

28. Trzymaj model sześcianu umiarowego obok płaszczyzny rzutów P w ten sposób, by dwie jego ściany były równoległe do tej płaszczyzny [Rys. 30 a)]!

Przedłuż krawędzie boczne EA , FB , GC , HD aż do przecięcia z płaszczyzną rzutów. Otrzymasz cztery wierzchołki kwadratu $A'B'C'D'$, równego ścianie sześcianu.



Rys. 30

Przekonasz się, że obraz tego sześcianu (prawie) schodzi się z poprzednio otrzymanym rzutem.

Wskaż zarys (kontur) sześcianu, widzialny z powyższego położenia twego oka!

f) Przekonaj się również, że z rzutem tym zejdzie się cień rzuty sześcianu, gdy promienie słoneczne będą

Przekonaj się, że:

a) Każdy wierzchołek kwadratu $A'B'C'D'$ łączy w sobie rzuty co dwóch wierzchołków sześcianu, leżących na tej samej krawędzi bocznej!

b) Każdy bok kwadratu tego łączy w sobie rzuty co dwóch krawędzi sześcianu, równoległych do płaszczyzny rzutów!

c) Każdy bok kwadratu można uważać również za rzut ściany bocznej sześcianu!

d) Pole kwadratu łączy w sobie rzuty obu ścian sześcianu, równoległych do płaszczyzny rzutów!

Kwadrat, o którym mowa, nazyw. rzutem sześcianu w przyjętym położeniu. Obwód kwadratu tego stanowi zarys rzutu sześcianu.

e) Nie zmieniając położenia sześcianu względem płaszczyzny rzutów, patrz na niego z dość znacznej odległości w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rzutów!

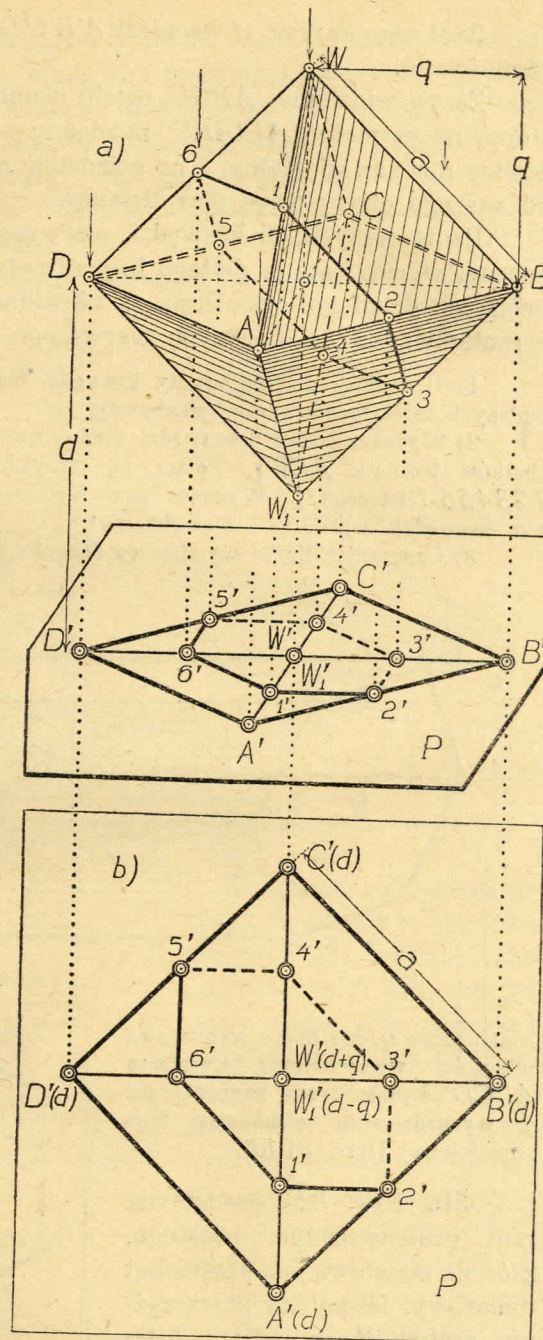
równoległe do krawędzi bocznych (do prostych rzucających)!

g) Przesuwaj sześcian w przestrzeni po przedłużeniach krawędzi bocznych! Przekonasz się, że rzut sześcianu nie zmienia się. Poznajesz z tego, że *sam rzut nie wyznacza położenia sześcianu w przestrzeni*.

Wyznacz rzut cechowany sześcianu w powyższym położeniu, jeżeli liczbę wymiarową jego krawędzi oznaczysz przez a , liczbę zaś odległości podstawy dolnej od płaszczyzny rzutów przez d ! [Rys. 30 b)].

29. Model ośmiościanu umiarowego trzymaj w ten sposób, by jedna jego przekątna WW_1 miała położenie prostopadłe do płaszczyzny rzutów P ! [Rys. 31 a)].

Patrz na model z dość znacznej odległości, w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rzutów! Kwadrat $ABCD$ stanowi zarys ośmiościanu, widzialny z powyższego położenia twego oka.



Rys. 31

Rzut tego zarysu, tj. kwadrat $A'B'C'D'$ stanowi zarys rzutu ośmiościanu.

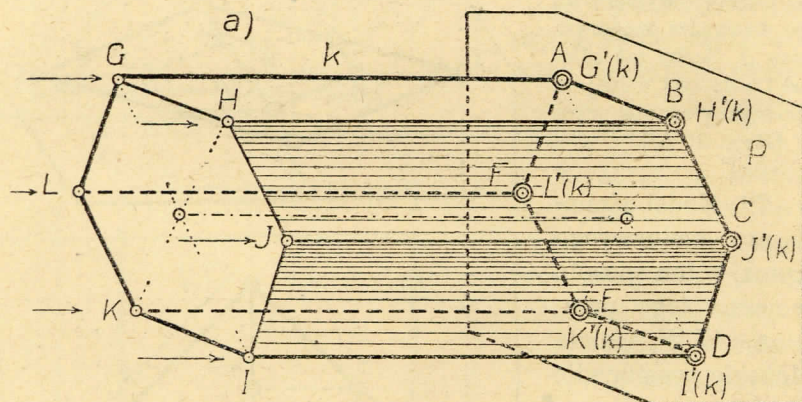
Zarys widzialny $ABCD$ dzieli ośmiościan na dwa ostrosłupy, na ostrosłup $ABCDW$, zwrócony w stronę naszego oka, a więc dla nas widzialny, i na ostrosłup $ABCDW_1$, odwrócony od naszego oka, a więc niewidzialny.

Rzuty wszystkich krawędzi pierwszego ostrosłupa są widoczne, wyciągnięto je dlatego liniami pełnymi, rzuty krawędzi bocznych drugiego ostrosłupa są niewidoczne i nakrywają się z rzutami krawędzi bocznych pierwszego ostrosłupa.

1) Uzasadnij, dlaczego rzuty krawędzi bocznych obu wyżej wspomnianych ostrosłupów parami nakrywają się?

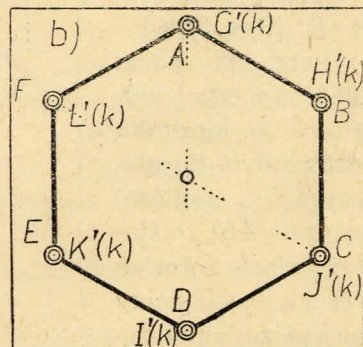
2) Wyznacz środki 6 krawędzi ośmiościanu, wychodzących z wierzchołków trójkąta ADW_1 . Połącz je, otrzymasz sześciokąt umiarowy 123456 [Dlaczego?]. Wyznacz rzut tego sześciokąta, wskazując na nim krawędzie widzialne i niewidzialne!

3) Oznaczając liczbę wymiarową długości połowy przekątnej ośmio-



ścianu przez q , zaś liczbę wymiarową odległości wierzchołków kwadratu $ABCD$ od płaszczyzny rzutów przez d , wyznacz rzut cechowany tego ośmiościanu! [Rys. 31 b)].

30. Rys. 32 przedstawia rzut graniastoslupa prostego, którego podstawą jest sześciokąt umiarowy, leżący na płaszczyźnie rzutów P , mającej położenie pionowe.

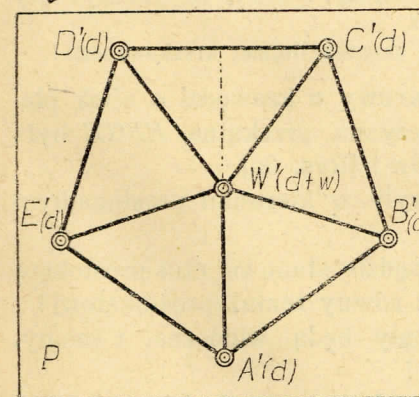
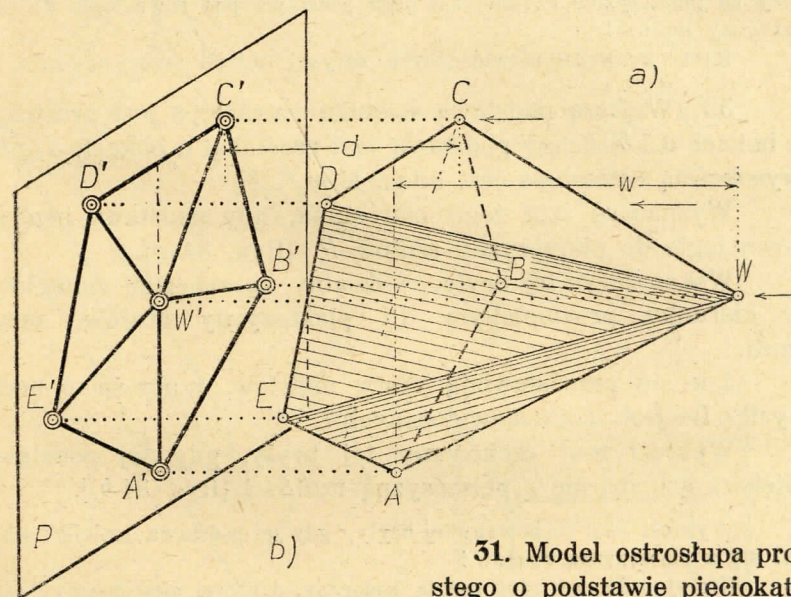


Rys. 32

Zrób odpowiedni model graniastoslupa, przyjmij płaszczyznę tablicy za płaszczyznę rzutów, a trzymając model w powyższym położeniu względem tablicy, narysuj jego rzut na tablicę! Przerysuj następnie ten rzut w stosownej skali w zeszyście!

Wskaż zarys bryły, widzialny w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rzutów, zarys rzutu, rzuty poszczególnych wierzchołków, krawędzi, ścian!

Wpisz przy rzutach wierzchołków odpowiednie ich cechy [Rys. 32 b)]!



Rys. 33

31. Model ostrosłupa prostego o podstawie pięciokąta umiarowego trzymaj przed płaszczyzną P tak, by podstawa jego była równoległa do płaszczyzny rzutów, wierzchołek zaś ostrosłupa był zwrócony w stronę twego oka, umieszczonego na prostej, poprowadzonej przez ten wierzchołek, prostopadle do płaszczyzny rzutów! [Rys. 33].

Zaznacz na bryle zarys widzialny, następnie zarys rzutu!

Zauważ, że rzut wierzchołka ostrosłupa padnie w środek koła, opisanego na pięciokącie umiarowym, który jest rzutem podstawy ostrosłupa!

Wskaż rzuty poszczególnych krawędzi bocznych i zauważ, że są one wszystkie widoczne!

1) Wyznacz rzut cechowany tej bryły, oznaczając jej wysokość przez w , odległość zaś podstawy od płaszczyzny rzutów przez d ! [Rysunek 33 b)].

2) Wyznacz rzut cechowany tego ostrosłupa, gdy wierzchołek jego leży na płaszczyźnie rzutów, zaś jego podstawa jest równoległa do płaszczyzny rzutów!

Rzuty krawędzi niewidocznych narysuj linjami przerywanymi!

32. Większą podstawą ściętego ostrosłupa jest prostokąt o bokach a i b , drugą podstawą jest prostokąt o bokach a_1 i b_1 , wysokością ostrosłupa jest odcinek w .

Wyznaczyć rzut tego ostrosłupa, gdy podstawy jego są równoległe do płaszczyzny rzutów P . [Rys. 34 a)].

Wskaż zarys tej bryły, widzialny ze znacznej odległości w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rzutów, zarys rzutu!

Jak się przedstawiają rzuty podstaw, rzuty ścian bocznych? Ile jest ścian niewidocznych?

Wykreśl rzut cechowany tej bryły, gdy jej podstawa większa schodzi się z płaszczyzną rzutów! [Rys. 34 b)].

Wykreśl rzut cechowany tej bryły, gdy jej podstawa mniejsza schodzi się z płaszczyzną rzutów!

Której podstawy rzut będzie widoczny, a której niewidoczny? Czy rzuty ścian bocznych będą widoczne?

Rzuty krawędzi niewidocznych zaznacz linjami kreskowanymi!

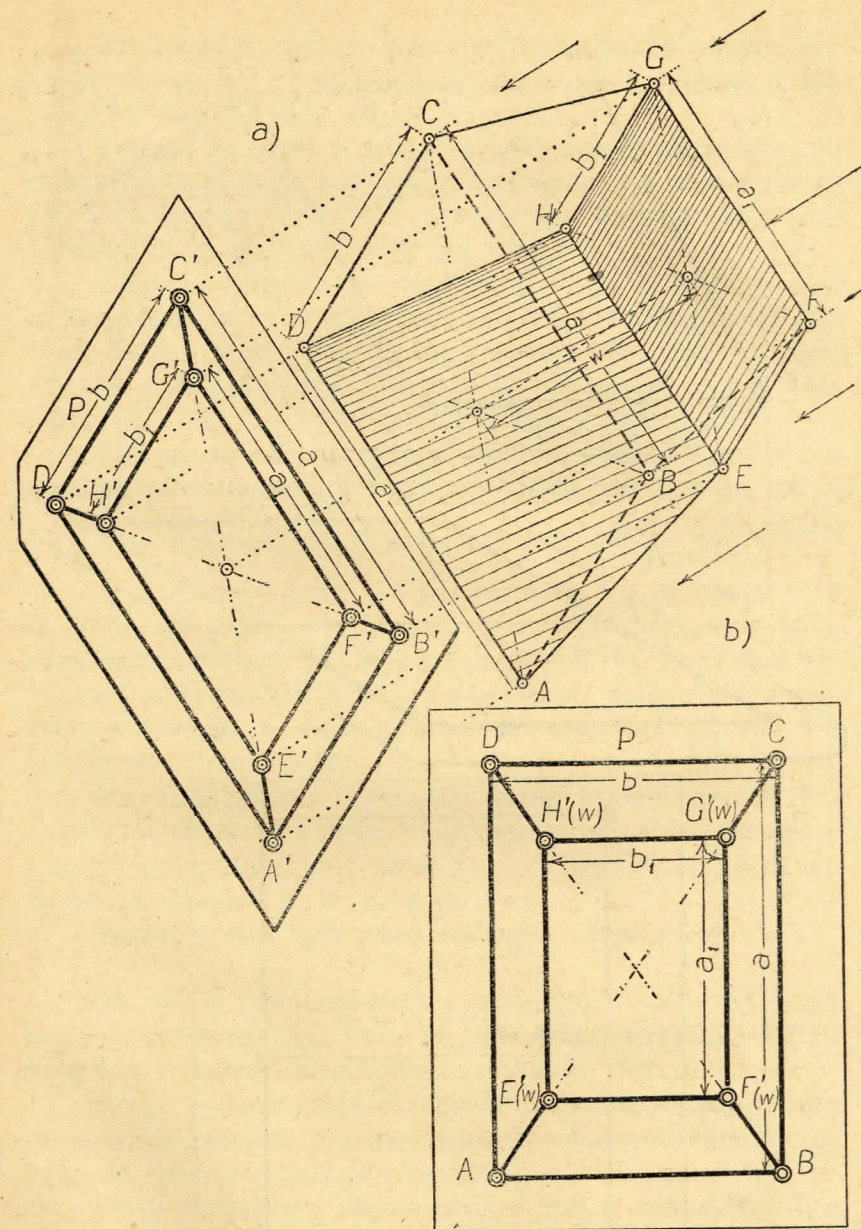
33. Trzymaj sześcienn umiarowy o krawędzi a obok płaszczyzny rzutów tak, by płaszczyzna przekątna $EFGH$ była równoległa do płaszczyzny rzutów! [Rys. 35].

Wskaż zarys widzialny bryły w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rzutów!

Uzasadnij, że zarys rzutu będzie stanowił rzut prostokąta przekątnego $EFGH$, który jest równy temuż prostokątowi!

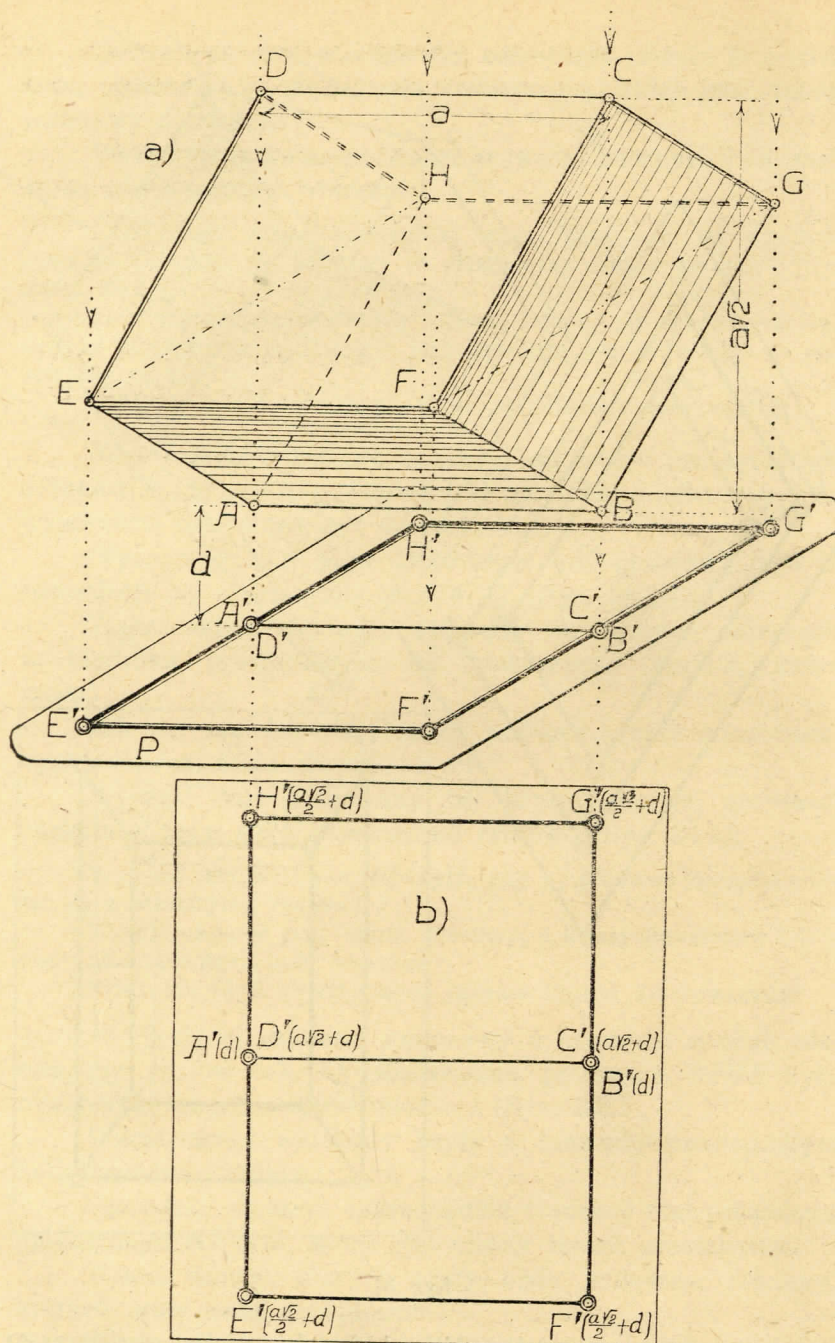
Wskaż ściany, których rzuty będą widoczne, i ściany, których rzuty będą niewidoczne!

Które ściany przedstawiają się w rzutach jako odcinki? Ile jest krawędzi, których rzuty są niewidoczne?



Rys 34

Oznaczysz odległość najbliższej krawędzi sześciennu od płaszczyzny rzutów przez d , wyznacz rzut cechowany tego sześciennu! [Rys. 35 b)].



Rys. 35

34. Model druciany sześcianu umiarowego trzymaj tak, by przekątna AB miała położenie prostopadłe względem płaszczyzny rzutów! [Rys. 36].

Patrzac na bryłę z dość znacznej odległości w kierunku prostych rzucających, zauważ, że zarysem widzialnym tej bryły jest linia łamana $CDEFGH$, utworzona z krawędzi, nie przechodzących przez wierzchołki A i B !

Zauważ następnie, że wierzchołki C, D, E, F, G, H mają równą odległość r od przekątnej AB ! Wobec tego rzuty tych wierzchołków znajdować się będą na obwodzie koła k , zakreślonego promieniem r z punktu $A'B'$, który jest rzutem przekątnej AB .

Przyjawszy odcinek a za krawędź sześcianu, wyznacz długość promienia r przy pomocy prostokąta przekątnego $ACBF$ [Por. rys. 36 c)]! Sprawdź następnie rachunkiem, że $r = \frac{a\sqrt{6}}{3}$!

Wykreśliwszy koło k , wyznacz rzuty wierzchołków C, D, E, F, G, H ! Uzasadnij, że rzuty te tworzyć będą wierzchołki sześciokąta umiarowego, wpisanego w koło k ! Boki tego sześciokąta będą rzutami krawędzi sześcianu, stanowiących jego zarys widzialny, z czego wynika, że sześciokąt $C'D'E'F'G'H'$ jest zarysem rzutu bryły.

Pozostaje jeszcze wyznaczyć rzuty sześciu innych krawędzi sześcianu, z których trzy wychodzą z wierzchołka A i są widoczne, trzy inne wychodzą z wierzchołka B i są niewidoczne. Zaznacz to na rysunku!

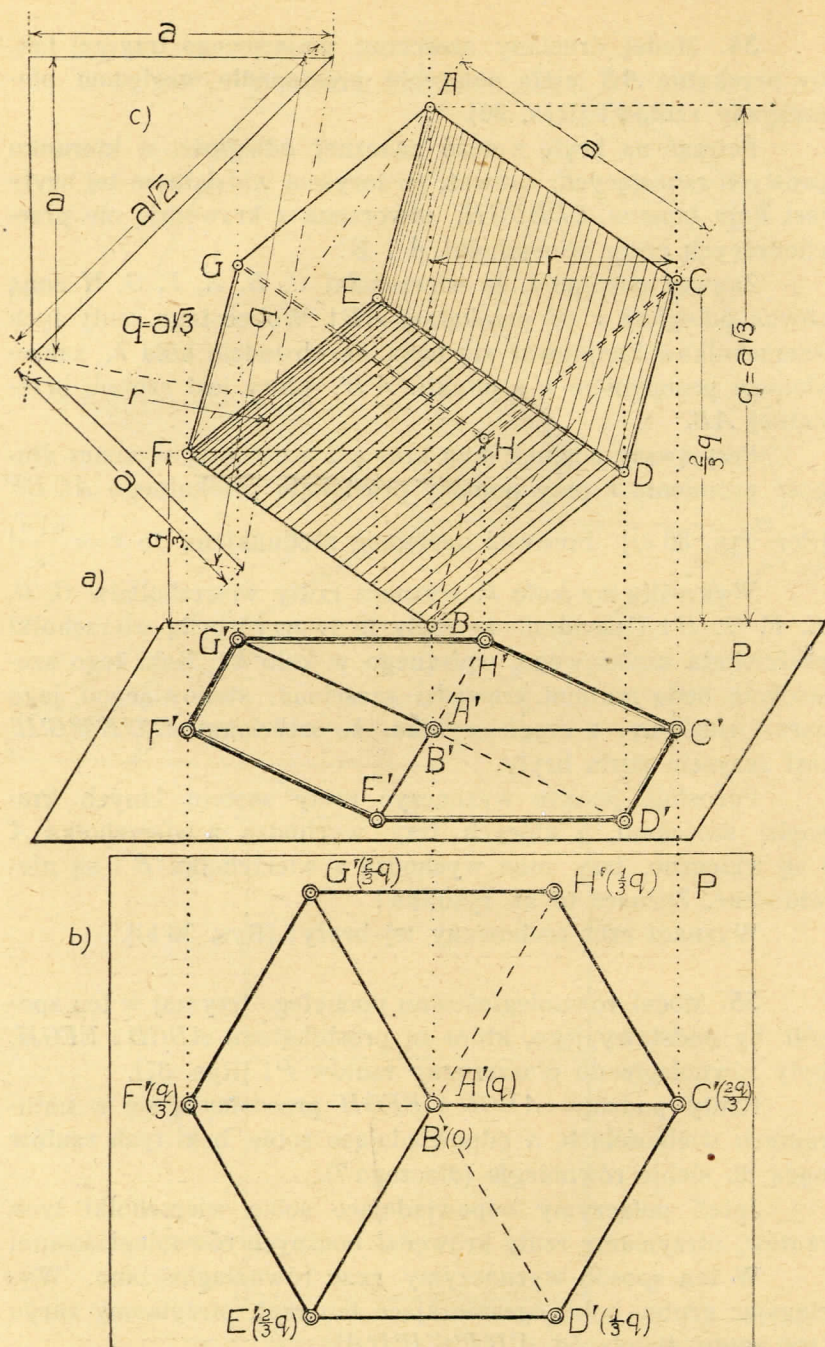
Wyznacz rzut cechowany tej bryły! [Rys. 36 b)].

35. Model równoległościanu pochylego trzymaj w ten sposób, by podstawy jego, które są prostokątami $ABCD$ i $EFGH$, były równoległe do płaszczyzny rzutów P ! [Rys. 37].

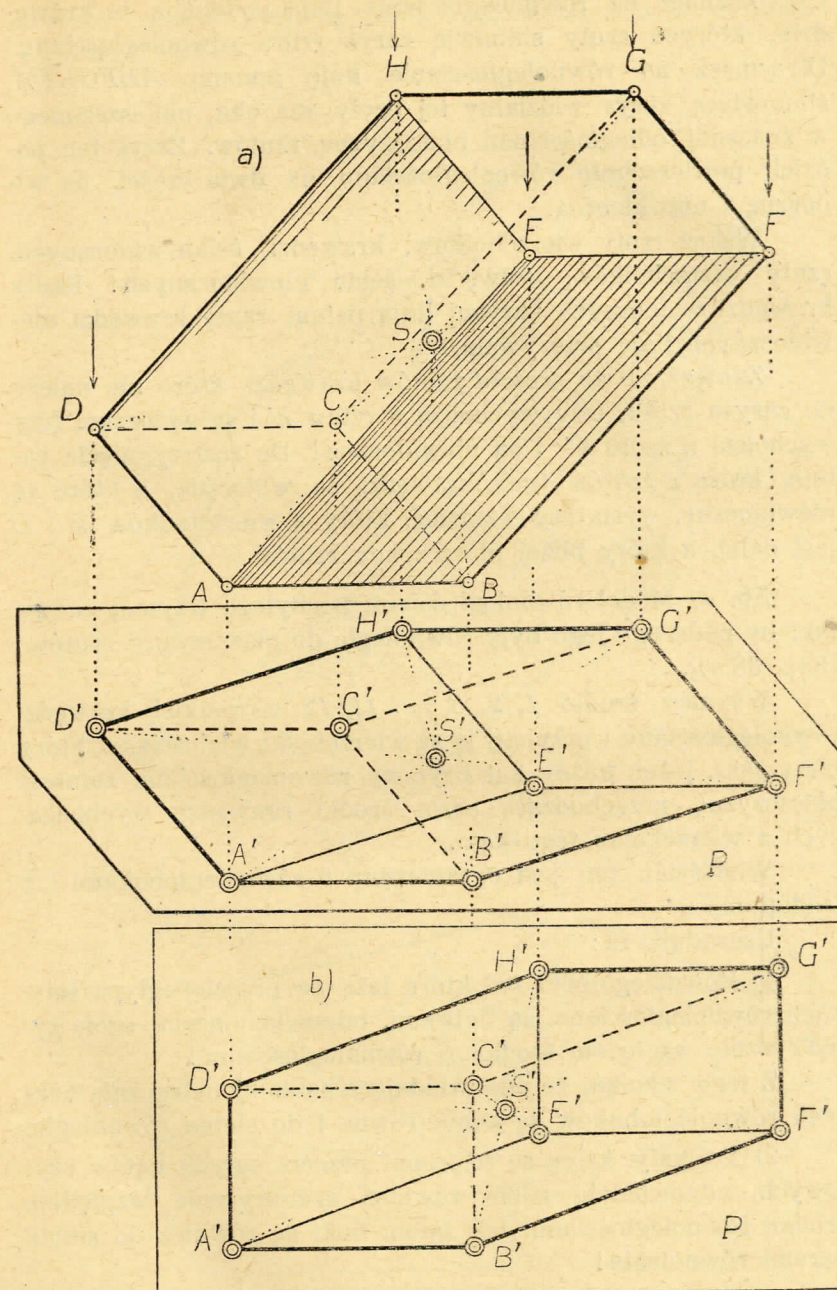
Rzuty podstaw $ABCD$ i $EFGH$ przedstawia się w naturalnych wielkościach, a odpowiadające sobie boki tych rzutów będą do siebie równoległe (dlaczego?).

Jeżeli połączymy odpowiadające sobie wierzchołki tych rzutów, otrzymamy rzuty krawędzi bocznych równoległościanu.

W ten sposób wyznaczmy rzut równoległościanu. Wyciągając grubo boki, ograniczające ten rzut, otrzymamy zarys tego rzutu, tj. obwód $A'B'F'G'H'D'A'$.



Rys. 36



Rys. 37

Zaznacz na równoległościanie linią podwójną te krawędzie, których rzuty stanowią zarys rzutu równoległościanu! Otrzymasz na równoległościanie linię łamaną $ABFGHDA$, stanowiącą zarys widzialny tej bryły dla oka, umieszczonego w znacznej odległości nad płaszczyzną rzutów. Zarys ten podzieli powierzchnię równoległościanu na dwie części, na widoczną i niewidoczną.

Wskaż rzuty wierzchołków, krawędzi, ścian widocznych, rzuty wierzchołków, krawędzi, ścian niewidocznych! Rzuty krawędzi widocznych narysuj linią pełną, rzuty krawędzi niewidocznych linią przerywaną!

Zauważ, że ze sześciu rzutów krawędzi, które nie należą do zarysu rzutu, trzy wychodzą z rzutu E' i są widoczne, trzy wychodzą z rzutu C' i są niewidoczne! Do rozstrzygnięcia zatem, które z rzutów tych krawędzi są widoczne, a które są niewidoczne, wystarczy wiedzieć, który z wierzchołków E i C jest dalej, a który bliżej płaszczyzny rzutów.

36. a) Model równoległościanu pochylego trzymaj znowu tak, by podstawy jego były równoległe do płaszczyzny rzutów! [Rys. 38 a)].

Wyznacz środki 1, 2, 3, ..., 11, 12 wszystkich krawędzi równoległościanu i przyjmij je za wierzchołki wielościanu, który otrzymasz, jeżeli każdy kąt bryłowy równoległościanu zetniesz płaszczyzną, przechodzącą przez środki krawędzi, wychodzących z wierzchołka tego kąta.

Wielościan ten jest ograniczony 6 równoległobokami i 8 trójkątami.

Uzasadnij, że:

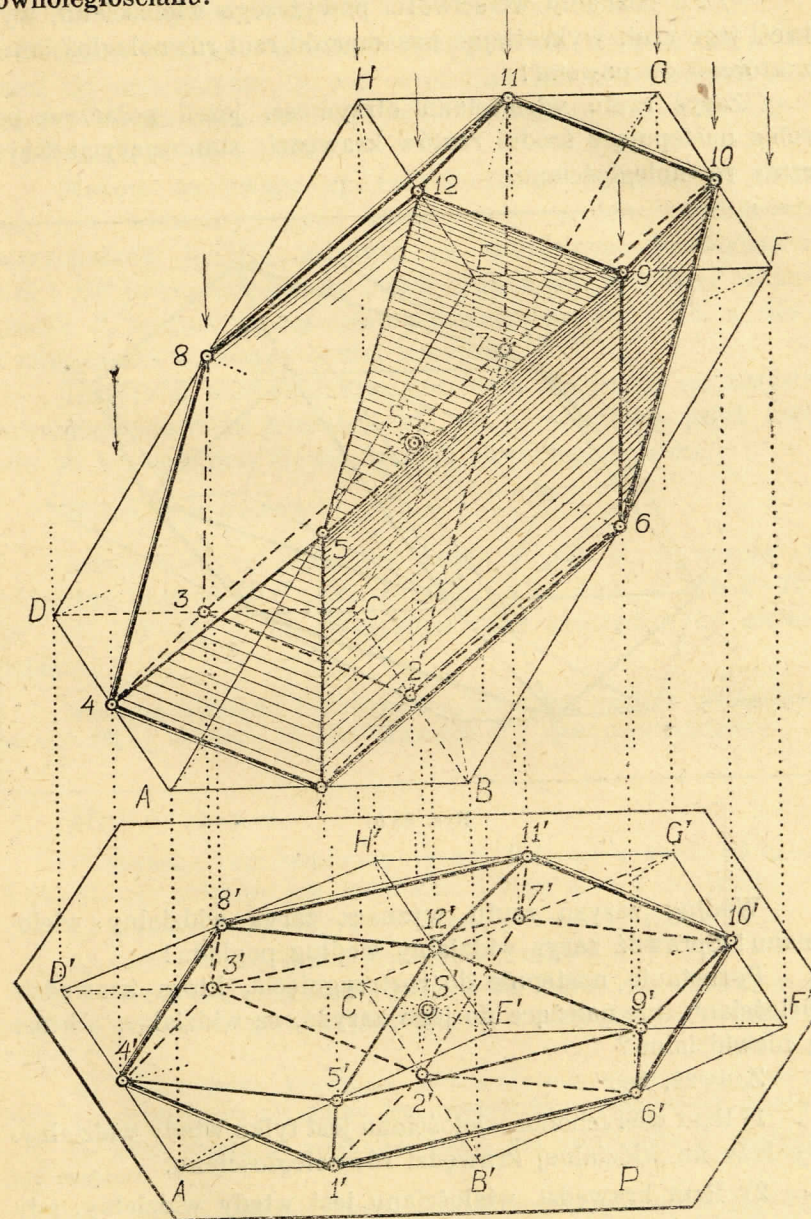
1) Równoległoboki te, które leżą na przeciwległych ścianach równoległościanu, są figurami, odpowiadającymi sobie symetrycznie względem środka S równoległościanu!

Z tego wynika, że odpowiadające sobie symetrycznie boki tych równoległoboków są sobie równe i do siebie równoległe.

2) Trójkąty, które są ścięciami przeciwległych kątów bryłowych, odpowiadają sobie również symetrycznie względem środka równoległościanu. Ich zatem boki są również do siebie parami równoległe!

Wskaż wszystkie pary równoległoboków i trójkątów, odpowiadających sobie symetrycznie względem środka wielościanu!

3) Wielościan, o którym mowa, ma 24 krawędzi. Leżą one po 6 na czterech płaszczyznach, przechodzących przez środek równoległościanu.

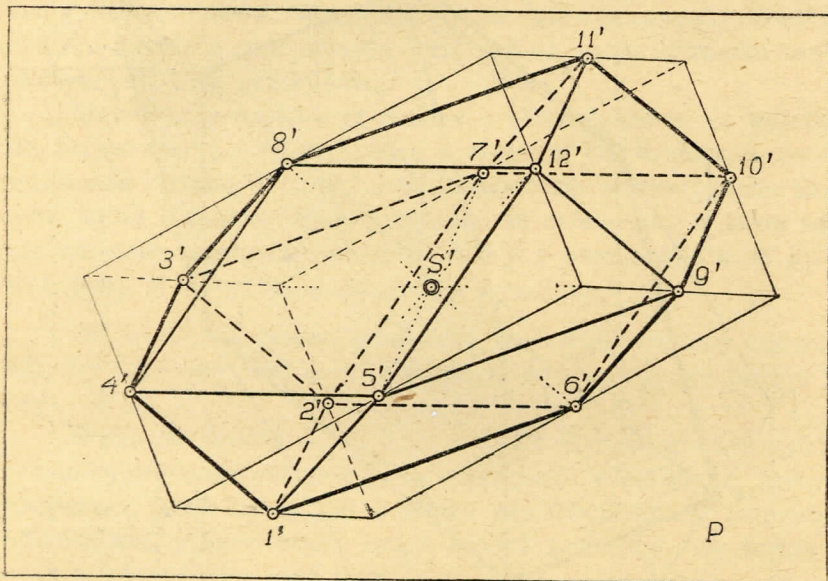


Rys. 38 a)

Wskaż te sześcioboki i zauważ, że boki tego samego sześcioboku są parami do siebie równoległe!

b) Po poznaniu właściwości powyższego wielościanu, wykreśl jego rzut, wykreślając nasamprzód rzut równoległościanu, z którego on powstał!

Zarys rzutu wielościanu otrzymasz, jeżeli połączysz po sobie następujące środki rzutów krawędzi, stanowiących zarys rzutu równoległościanu.



Rys. 38 b)

Według zarysu rzutu wyznacz zarys widzialny wielościanu! Sprawdź zarys widzialny według poglądu!

Pozostanie następnie do roztrzygnięcia, które krawędzie wielościanu, nie należące do jego zarysu, są widzialne, a które są niewidzialne?

Zauważ, że:

1) Rzut wierzchołka wielościanu jest tylko wtedy widzialny, gdy leży na widzialnej krawędzi równoległościanu.

2) Rzut krawędzi wielościanu jest wtedy widzialny, gdy łączy widzialne rzuty dwóch wierzchołków.

3) Rzut krawędzi jest niewidzialny, gdy oba lub jeden z rzutów wierzchołków, które krawędź łączy, są niewidzialne.

Przekonaj się, że:

Skoro wiadomo o jednej krawędzi wielościanu, nie należącej do jego zarysu, że jest widzialna lub niewidzialna, natenczas można rozpoznać wszystkie krawędzie widzialne i niewidzialne tego wielościanu.

Weźmy na uwagę np. rzut $9' - 12'$ krawędzi $12 - 9$. Rzut ten jest widzialny, gdyż łączy rzuty dwóch widzialnych wierzchołków 9 i 12, leżących na widzialnych krawędziach EH i EF równoległościanu. Jeżeli jednak jest widzialny wierzchołek E , to musi być widzialną również krawędź EA , a więc i wierzchołek 5, leżący na tej krawędzi.

Trzy inne wierzchołki wielościanu, nie leżące na zarysie równoległościanu (i wielościanu), są niewidzialne, gdyż leżą one na krawędziach niewidzialnych równoległościanu.

Wylicz te wierzchołki!

Jeżeli więc są widzialne rzuty $9'$, $12'$, $5'$, natenczas są widzialne krawędzie $9' - 12'$, $12' - 5'$, $5' - 9'$, $5' - 1'$, $9' - 6'$, $9' - 10'$, $12' - 11'$, $12' - 8'$, $5' - 4'$. Wszystkie inne krawędzie są niewidzialne!

Rozeznaj widzialne i niewidzialne krawędzie takiego wielościanu na rys. 38 b), wiedząc, że rzut krawędzi $2' 7'$ jest niewidzialny!

37. Cwiczenia.

1) Wyznacz rzut cechowany prostopadłościanu o wysokości $w = 8$ cm, którego podstawa jest kwadratem o boku $a = 5$ cm, jeżeli:

- prostopadłościan dotyka podstawą płaszczyzny rzutów;
- dotyka ścianą boczną płaszczyzny rzutów;
- dotyka jedną krawędzią podstawową płaszczyzny rzutów, przeciwną zaś płaszczyzna przekątna jest równoległa do płaszczyzny rzutów;
- dotyka jedną krawędzią boczną płaszczyzny rzutów, przeciwną zaś płaszczyzna przekątna jest równoległa do płaszczyzny rzutów;
- jedną przekątną prostopadłościanu jest prostopadła do płaszczyzny rzutów!

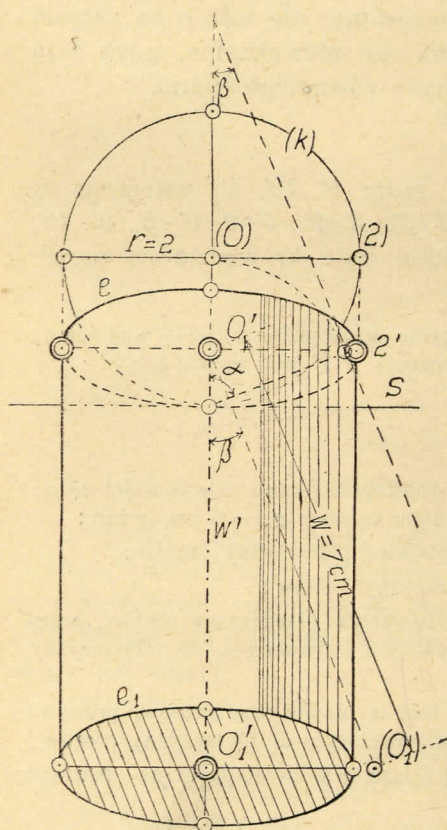
2) Wykreśl rzut powyższego graniastostupa, jeżeli jedna jego krawędź podstawowa leży na płaszczyźnie rzutów, a krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny rzutów pod kątem $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$!

3) Wykreśl rzut tego graniastosłupa, jeżeli jedna krawędź boczna leży na płaszczyźnie rzutów, a krawędzie podstawowe są nachylone do płaszczyzny rzutów pod kątem $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$!

4) Wykreśl rzut graniastosłupa, o którym była mowa w ćwic. 1), jeżeli jego podstawa leży na płaszczyźnie P_1 , wyznaczonej przez ślad s i kąt nachylenia $\alpha = 60^\circ$. [Por. ćwic. 13, art. 20]!

5) Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości $w = 8$ cm jest sześciokąt umirowy o boku $a = 3$ cm, opierający się jednym bokiem o płaszczyznę rzutów. Wyznaczyć rzut tego graniastosłupa, jeżeli krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny rzutów pod kątem $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$!

6*) Podstawą walca prostego o wysokości $w = 7$ cm jest koło k o promieniu $r = 2$ cm. Wykreśl rzut tego walca, jeżeli podstawa jego: a) leży na płaszczyźnie rzutów, b) leży na płaszczyźnie P_1 , która tworzy z płaszczyzną rzutów kąt α .



Rys. 39

Wskazówka do ćw. b): Przyjmijmy dowolną prostą s za ślad płaszczyzny P_1 [Rys. 39] i wyobraźmy sobie, że wykonaliśmy kład płaszczyzny P_1 dokoła śladu s wraz z kołem k . Niech kład tego koła zejdzie się z kołem (k) , zakreślone promieniem r z dowolnego punktu (O) . Przez podniesienie płaszczyzny P_1 wykreśl elipsę e , która jest rzutem koła k ! Ze środka O' tej elipsy poprowadź prostą w' , prostopadłą do śladu s ! Będzie to kierunek rzutu osi walca. Długość rzutu tej osi wyznaczysz jako rzut odcinka $w = 7$ cm, nachylonego do płaszczyzny rzutów pod kątem $\beta = 90 - \alpha$. [Dlaczego?]. Drugi koniec O_1' rzutu osi będzie środkiem elipsy e_1 , która jest tylko równoległym przesunięciem elipsy e [Dlaczego?]. Styczne wspólne do obu elips, a równoległe do rzutu osi, będą prostoliniową częścią zarysu rzutu walca; część krzywoliniową zarysu stanowią będzie połowa obwodu elipsy e i połowa obwodu elipsy e_1 .

7*) Wykreśl rzut walca prostego o wysokości $w = 6$ cm, którego podstawą jest koło o pro-

mieniu $r = 4$ cm, leżące na płaszczyźnie P_1 , danej przez swą linię największego spadku: $p' \equiv [A'(3) B'(6,6)]$!

8) Wykreśl rzut ostrosłupa prostego o wysokości $w = 8$ cm, którego podstawą jest pięciokąt umirowy, wpisany w koło o promieniu $r = 3$ cm, jeżeli: a) ostrosłup dotyka podstawą płaszczyzny rzutów; b) dotyka jedną ścianą boczną płaszczyzny rzutów; c) dotyka płaszczyzny rzutów wierzchołkiem, a płaszczyzna podstawy jest równoległa do płaszczyzny rzutów!

9) Wykreśl rzut ostrosłupa, o którym była mowa w poprzednim ćwiczeniu, jeżeli jego podstawa leży na dowolnej płaszczyźnie P_1 , danej przez rzuty cechowane trzech punktów: $A'(0)$, $B'(5)$, $C'(8)$!

10*) Wykreśl rzut stożka obrotowego o wysokości $w = 5$ cm, o promieniu $r = 2$ cm, jeżeli: a) dotyka podstawą płaszczyzny rzutów; b) dotyka jedną tworzącą płaszczyzny rzutów; c) dotyka wierzchołkiem płaszczyzny rzutów, a płaszczyzna podstawy jest równoległa do płaszczyzny rzutów.

Wskazówka do ćwic. b): Wykreśl rzut koła podstawowego [Rys. 40] i rzut wysokości. Z rzutu wierzchołka wykreśl styczne do rzutu koła; styczne te i część elipsy stanowią będą zarys rzutu stożka.

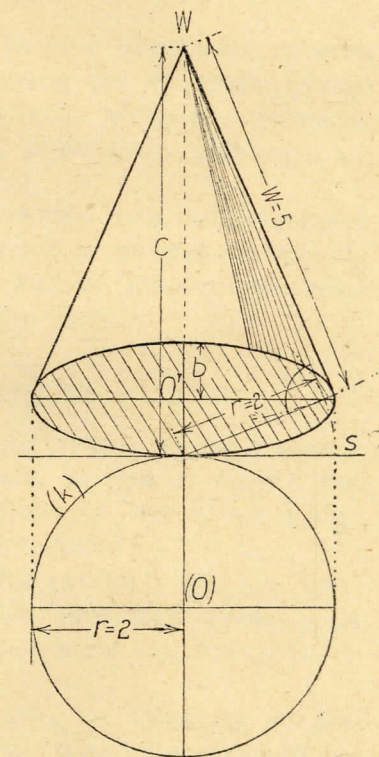
11) Ostrosłup prosty o wysokości $w = 8$ cm ma za podstawę kwadrat o boku $a = 5$ cm. Ostrosłup ten ścinamy płaszczyzną, równoległą do podstawy, przechodzącą przez środek wysokości.

a) Wykreślić rzut cechowany powstałego ostrosłupa ściętego, jeżeli większa jego podstawa schodzi się z płaszczyzną rzutów.

b) Wykreślić rzut tego ostrosłupa ściętego, jeżeli opiera się on jedną ścianą boczną o płaszczyznę rzutów.

12*) Stożek, o którym była mowa w ćw. 10, opiera się jedną tworzącą o płaszczyznę rzutów. Przetnij go płaszczyzną, równoległą do podstawy w odstępie $\frac{1}{3}$ wysokości od wierzchołka, i wykreśl rzut tak powstałego stożka ściętego!

13) Równoległościan pochyły, którego podstawą jest romb o przekątnych e i f , opiera się swą podstawą o płaszczyznę rzutów. Wykre-



Rys. 40

ślić rzut tego równoległościanu, jeżeli krawędzie boczne, o długości k , są nachylone do podstawy pod kątem $\beta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.

14) Wykreślić rzut wielościanu, powstałego przez ścięcie kątów bryłowych równoległościanu, o którym była mowa w ćw. 13, płaszczyznami, przechodzącymi przez środki krawędzi, wychodzących z poszczególnych wierzchołków tego równoległościanu.

CZĘŚĆ II

RZUTY PROSTOPADŁE NA DWIE PŁASZCZYZNY, PROSTOPADŁE WZGLĘDEM SIEBIE.

38. W części I. poznaliśmy, że rzut prostopadły utworu geometrycznego na jedną płaszczyznę nie wyznacza jeszcze tego utworu. Do wyznaczenia kształtu, wielkości i położenia utworu w przestrzeni musiały być, prócz rzutu, podawane cechy poszczególnych punktów utworu.

Dowiemy się obecnie, że podawanie cech poszczególnych punktów utworu może być zastąpione przez rzut prostopadły tego utworu na drugą płaszczyznę rzutów, która ma położenie prostopadłe do pierwszej płaszczyzny rzutów.

§ 1. RZUTY PUNKTU

39. Zrób sobie następujący przyrząd: Wytnij z czarnej tektury, na której można pisać kredą, prostokąt, długi 3 dm, a szeroki 1,5 dm! Połącz środki dłuższych boków prostokąta prostą x i wzdłuż tej prostej natnij tekturę!

Zegnij następnie tekturę wzdłuż prostej x tak, aby kwadraty, na które prosta x podzieliła prostokąt, tworzyły ze sobą kąt prosty, i utrwaj je w tem położeniu za pomocą dwóch drucików!

W tem położeniu będziemy brali te kwadraty za płaszczyzny rzutów. Płaszczyznę jednego kwadratu oznaczać będziemy literą P_1 i nazywać będziemy pierwszą płaszczyzną rzutów; płaszczyznę drugiego kwadratu oznaczać będziemy literą P_2 i nazywać będziemy drugą płaszczyzną rzutów.

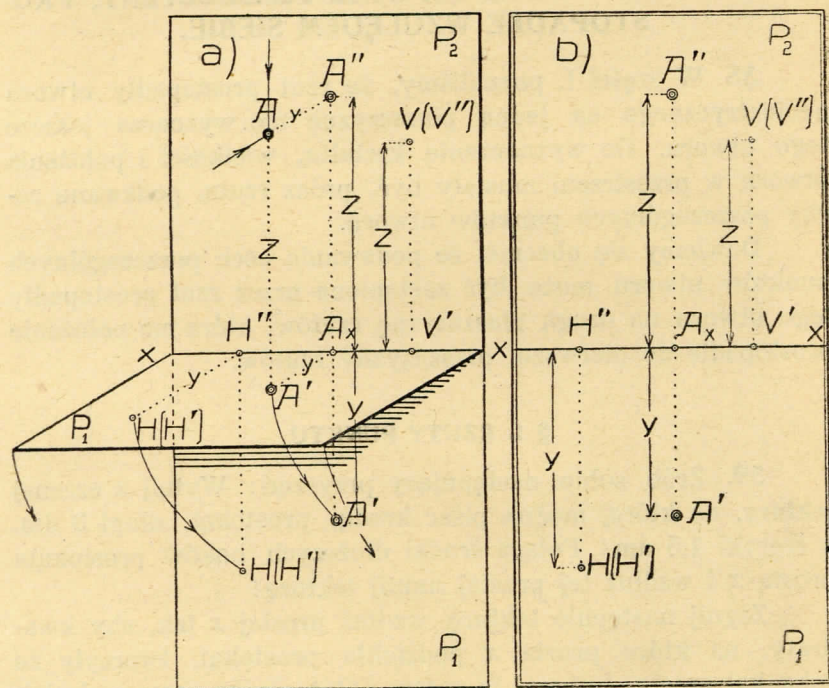
Zwykle płaszczyzny te tak trzymamy, że płaszczyzna P_1 ma położenie poziome, a płaszczyzna P_2 położenie pionowe.

Płaszczyznę P_1 nazywamy wtedy płaszczyzną poziomą rzutów, płaszczyznę P_2 płaszczyzną pionową rzutów.

Krawędź przecięcia się płaszczyzn P_1 i P_2 będziemy nazywali osią x -ów lub osią rzutów.

40. a) Przyjmijmy w przestrzeni dowolny punkt A . [Rysunek 41 a)].

Poprowadźmy przez punkt A prostą, prostopadłą do pierwszej płaszczyzny rzutów P_1 . Punkt, w którym ta prosta przebija płaszczyznę P_1 , oznaczamy A' [czytaj: A z kreską!], a nazywamy pierwszym (poziomym) rzutem punktu A .



Rys. 41

Poprowadźmy następnie przez punkt A drugą prostą, prostopadłą do drugiej płaszczyzny rzutów P_2 . Jej punkt przecięcia z tą płaszczyzną oznaczamy A'' [czytaj: A z dwiema kreskami!], a nazywamy drugim (pionowym) rzutem punktu A .

b) Wykreślmy na płaszczyźnie P_1 przez rzut A' prostą, prostopadłą do osi x -ów. Punkt przecięcia się jej z tą osią

oznaczymy A_x . Jeżeli następnie na płaszczyźnie P_2 przez rzut A'' wykreślimy prostą, prostopadłą do osi x -ów, to prosta ta przecina oś x -ów również w punkcie A_x .

Punkty A A'' A_x A' tworzą w przestrzeni prostokąt, którego bok AA' jest odległością punktu A od pierwszej płaszczyzny rzutów, bok zaś AA'' jest odległością tego punktu od drugiej płaszczyzny rzutów; bok $A''A_x$ jest odległością drugiego rzutu od osi x -ów, bok zaś $A'A_x$ jest odległością pierwszego rzutu od tejże osi. A ponieważ $AA' = A''A_x$, $AA'' = A'A_x$, przeto spostrzegamy następujące właściwości:

Odległość pierwszego (poziomego) rzutu jakiegoś punktu od osi x -ów równa się odległości tego punktu w przestrzeni od drugiej (pionowej) płaszczyzny rzutów.

Odległość drugiego (pionowego) rzutu tego punktu od osi x -ów równa się odległości tego punktu w przestrzeni od pierwszej (poziomej) płaszczyzny rzutów.

41. Uzyskawszy w ten sposób pierwszy rzut A' i drugi rzut A'' punktu A , obracamy pierwszą płaszczyznę rzutów dookoła osi x -ów o 90° , aby utworzyła z drugą płaszczyzną rzutów pierwotny prostokąt [rys. 41]. Powiadamy, że sprowadziliśmy obie płaszczyzny rzutów do jednej płaszczyzny (rysunkowej).

Podczas tego obrotu płaszczyzny P_1 odcinki $A'A_x$ i $A''A_x$ są ciągle prostopadłe do osi x -ów w punkcie A_x . Pozostają one również prostopadłe i wtedy, gdy płaszczyzna P_1 utworzy z płaszczyzną P_2 jedną płaszczyznę. Odcinki te utworzą wtedy jedną prostą $A'A''$, prostopadłą w punkcie A_x do osi x -ów.

Dochodzimy zatem do następującej właściwości dwóch prostopadłych rzutów tego samego punktu w przestrzeni:

Jeżeli sprowadzimy obie płaszczyzny rzutów do jednej płaszczyzny, to pierwszy rzut i drugi rzut tego samego punktu w przestrzeni znajdują się zawsze na jednej prostej, prostopadłej do osi x -ów.

Tę prostą nazywamy odnoszącą tego punktu.

Sprowadzone na jedną płaszczyznę rzuty przenosimy w wymiarach naturalnych lub w skali pomniejszonej na płaszczyznę zeszytu lub na papier rysunkowy. [Rys. 41 b)].

42. Odległość punktu w przestrzeni od pierwszej płaszczyzny rzutów nazywamy „spółrzedną z “, odległość punktu

w przestrzeni od drugiej płaszczyzny rzutów nazywamy „spółrzedną y “.

a) Przyjmij dowolny punkt H na płaszczyźnie P_1 !

Gdzie będzie pierwszy rzut, a gdzie drugi rzut tego punktu?

Ile wynosi współrzędna z ? Zmierz współrzędną y ! Narysuj rzuty tego punktu po sprowadzeniu obu płaszczyzn rzutów do jednej płaszczyzny rysunkowej! [Rys. 41 b)].

Zauważasz zatem :

Jeżeli punkt leży na pierwszej płaszczyźnie rzutów, to jego pierwszy rzut znajduje się w nim samym, a drugi rzut na osi $x-o$.

b) Przyjmij dowolny punkt V na drugiej płaszczyźnie rzutów!

Gdzie znajduje się drugi rzut, a gdzie pierwszy? Ile wynosi spólrzędna y ? Zmierz spólrzędna z !

Zauważasz zatem :

Jeżeli punkt leży na drugiej płaszczyźnie rzutów, to jego drugi rzut znajduje się w nim samym, a pierwszy na osi x -ów.

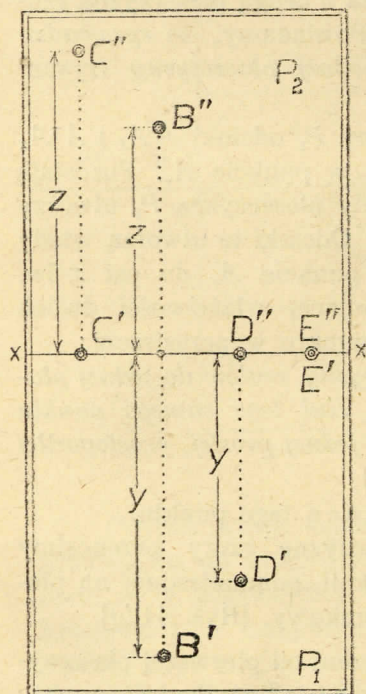
Gdzie będą oba rzuty punktu,
który leży na osi x -ów?

43. Przyjmijmy na prostej, prostopadłej do osi x -ów [Rys. 42], dowolny punkt B' poniżej osi i dowolny punkt B'' powyżej osi i uważajmy te punkty za pierwszy i drugi rzut pewnego punktu B w przestrzeni.

Zachodzi pytanie, czy położenie punktu B w przestrzeni będzie przez te rzuty dokładnie wyznaczone?

Celem wyznaczenia punktu B w przestrzeni musimy postąpić odwrotnie, niż przy wykreślaniu rzutów punktu, którego położenie w przestrzeni jest dane. A mianowicie :

Uważajmy część płaszczyzny
rysunkowej, poniżej osi x -ów, za



Rys. 42

pierwszą płaszczyznę rzutów P_1 , drugą część płaszczyzny rysunkowej, powyżej osi x -ów, za drugą płaszczyznę rzutów P_2 .

Obróćmy płaszczyznę P_1 dookoła osi x ów tak, aby zajęła położenie, prostopadłe do P_2 . W rzucie B' zbudujmy prostopadłą do P_1 , w rzucie B'' prostopadłą do P_2 . Te proste przetną się w jednym punkcie B , który będzie punktem szukany. Rzuty tego punktu na płaszczyzny rzutów P_1 i P_2 schodzą się z B' i B'' .

Zmierz odległość z punktu B od płaszczyzny P_1 i odległość y od płaszczyzny P_2 !

Czy te odległości występują na rysunku? Jeżeli tak, to zmierz je wprost na rysunku!

Na rys. 42 są dane rzuty punktów C, D, E . Oznacz położenie tych punktów w przestrzeni i zmierz ich współrzędne!

A zatem przekonujemy się, że: *Położenie punktu w przestrzeni jest dokładnie wyznaczone, gdy znamy jego prostopadłe rzuty na dwie do siebie prostopadłe płaszczyzny.*

44. Ćwiczenia.

1) Spółrzędne punktu B są: $y = 5$ cm, $z = 7$ cm. Wykreślić rzuty tego punktu!

2) Podobnie jak w poprzednim ćwiczeniu, wykreślić rzuty: a) punktu $C(y=5, z=0)$; b) punktu $D(y=0, z=6)$; c) punktu $E(y=0, z=0)$; d) punktu $F(y=5, z=5)$ [$J=1\text{ cm}$].

3) Płaszczyzna podłogi niech przedstawia płaszczyznę poziomą rzutów, płaszczyzna ściany płaszczyznę pionową rzutów.

Przyjmij punkt M , odległy od płaszczyzny poziomej rzutów $1\frac{1}{2}$ m, od płaszczyzny pionowej rzutów 2 m! Wskaż rzut poziomy M' , rzut pionowy M'' tego punktu! Wykreśl te rzuty w zeszycie w skali 1:100!

4) Odnieś do tych samych płaszczyzn rzutów: naroża klasy (pokoju), ławki, katedry, pieca; zmierz współrzędne z i y tych punktów, oznacz ich rzuty poziome i pionowe, a następnie narysuj te rzuty w zeszycie w stosownej skali!

5) Punkt N zmienia swoje położenie w przestrzeni w ten sposób, że rzut poziomy N' pozostaje ten sam, zmienia się natomiast rzut pionowy.

Jaką linię w przestrzeni musi opisać punkt N , a jaką na płaszczyźnie pionowej rzutów, rzut pionowy N'' ?

6) Punkt M zmienia swoje położenie w przestrzeni w ten sposób, że rzut pionowy M'' pozostaje ten sam, zmienia się tylko rzut poziomy.

7) Wyobraź sobie płaszczyzny, równoległą do płaszczyzny poziomej

7) Wyobraź sobie płaszczyznę, równoległą do płaszczyzny poziomej rzutów (podłoga), w odstępie 2 m. Na tej płaszczyźnie przyjmij różne punkty i oznaczaj ich rzuty poziome i pionowe (pł. ściany)! Jakże będą

spółrzędne z wszystkich tych punktów? Na jakiej linii znajdować się będą ich rzuty pionowe?

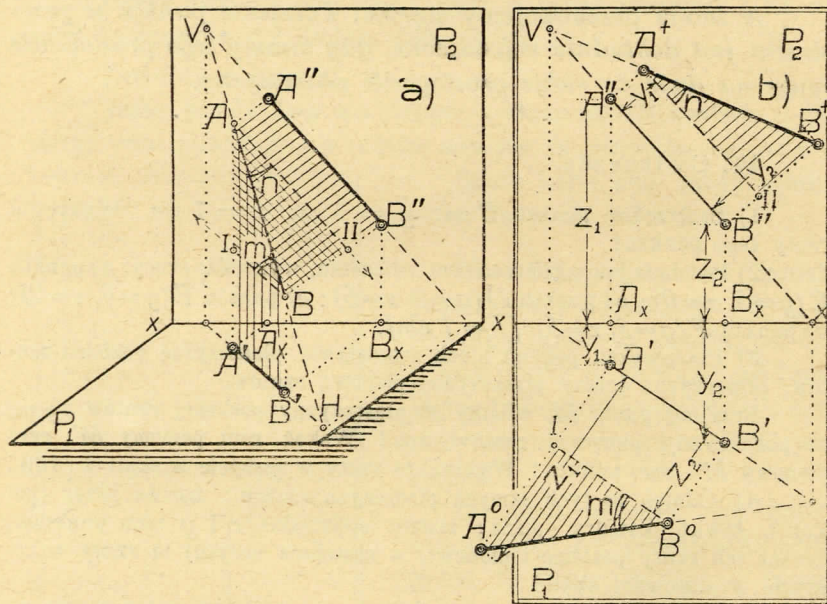
Przedstaw rzuty tych punktów w stosownej skali w zeszycie!

8) Narysować rzuty punktów, leżących na płaszczyźnie, równoległej do płaszczyzny pionowej rzutów, w odstępnie 5 cm!

§ 2. RZUTY ODCINKA I LINII PROSTEJ

45. Trzymaj odcinek AB w dowolnym położeniu względem płaszczyzn rzutowych P_1 i P_2 , które są względem siebie prostopadłe [rys. 43 a)]!

Jeżeli wykreślisz rzuty prostopadłe A' , B' punktów końcowych A , B na płaszczyznę P_1 i połączysz je linią prostą, to otrzymasz pierwszy rzut odcinka AB .



Rys. 43

Wykreśl tak samo rzuty prostopadłe A'' i B'' tych punktów na płaszczyznę P_2 i połącz je linią prostą, a otrzymasz drugi rzut odcinka AB .

Jeżeli płaszczyzna P_1 ma położenie poziome, a płaszczyzna P_2 położenie pionowe, wtedy $A'B'$ nazywamy rzutem poziomym, $A''B''$ rzutem pionowym odcinka AB .

Sprowadź obie płaszczyzny rzutów do jednej płaszczyzny rysunkowej [rys. 43 b)]! Rzut pierwszy $A'B'$ znajdować się będzie pod osią x -ów, rzut drugi $A''B''$ nad osią x -ów.

46. Przyjmijmy teraz, że na rysunku 43 b) są narysowane rzuty $A'B'$ i $A''B''$ jakiegoś odcinka AB .

Zachodzi pytanie, czy przy pomocy tych rzutów odnajdziemy położenie i wielkość tego odcinka w przestrzeni?

a) Odcinek AB jest dokładnie wyznaczony przez swe punkty końcowe A i B . Punkty zaś A i B są dokładnie wyznaczone przez swe rzuty A' i A'' , B' i B'' .

Obróćmy zatem dolną część P_1 płaszczyzny rysunkowej dokoła osi x -ów o 90° ; zbudujemy następnie w A' i B' prostopadłe do P_1 , zaś w A'' i B'' prostopadłe do P_2 . Prostopadłe w A' i A'' przecinają się w szukanym punkcie A , prostopadłe w B' i B'' przecinają się w szukanym punkcie B [rys. 43 a)].

Odcinek AB , łączący punkty A i B w przestrzeni, jest odcinkiem szukanym.

b) Weźmy pod uwagę trapez $AA'B'B$ [rys. 43 a)], który tworzą proste rzucające AA' , BB' , odcinek AB i jego rzut $A'B'$.

Przedewszystkiem widzimy, że kąty $\sphericalangle A'$ i $\sphericalangle B'$, leżące przy boku $A'B'$ tego trapezu, są proste, boki zaś równoległe AA' i BB' są równe odległościom punktów A i B od pierwszej płaszczyzny rzutów P_1 ; te jednak odległości są równe odległościom rzutów pionowych A'' i B'' od osi x -ów. A zatem:

$$\begin{aligned} AA' &= A''A_x = z_1 \\ BB' &= B''B_x = z_2. \end{aligned}$$

Jeżeli oba rzuty odcinka są narysowane na jednej płaszczyźnie rysunkowej, jak to widzimy na rys. 43 b), natenczas trapez ten z łatwością narysujemy na płaszczyźnie P_1 , obróciwszy go dokoła rzutu $A'B'$ o kąt 90° . A mianowicie w rzutach A' i B' wykreślamy prostopadłe do odcinka $A'B'$ i na tych prostopadłych odcinamy spółrzędne z_1 i z_2 punktów A i B , to jest $z_1 = A''A_x$, $z_2 = B''B_x$.

Otrzymujemy wierzchołki A^0 i B^0 narysowanego trapezu, które odpowiadają wierzchołkom A i B trapezu w przestrzeni. Odcinek A^0B^0 równa się odcinkowi AB w przestrzeni.

Poprowadź w przestrzeni przez punkt B odcinek BI , równoległy do rzutu $A'B'$! Kąt m , który odcinek AB zamyka z od-

cięciem BI , jest kątem nachylenia odcinka AB do pierwszej płaszczyzny rzutów P_1 .

Na rys. 43 b) kąt nachylenia m wyznaczamy, rysując przez punkt B^0 odcinek B^0I , równoległy do rzutu $A'B'$.

c) Weź pod uwagę trapez $AA''B''B$, zapomocą którego rzucasz odcinek AB na drugą płaszczyznę rzutów P_2 !

Którym spółrzednym punktów A i B równają się boki równoległe tego trapezu? Jakie położenie względem $A''B''$ mają te boki?

Narysuj ten trapez na płaszczyźnie P_2 , obróciwszy go dokoła rzutu $A''B''$ o kąt 90° ! [Rys. 43 b)].

Wierzchołki A^+ , B^+ narysowanego trapezu odpowiadają wierzchołkom A , B trapezu w przestrzeni. Odcinek A^+B^+ jest zatem równy odcinkowi AB w przestrzeni, kąt zaś n , jaki tworzy A^+B^+ z odcinkiem $A''B''$, równoległym do rzutu $A''B''$, jest równy kątowi nachylenia odcinka AB do płaszczyzny P_2 .

Rozumowania i konstrukcje powyższych ustępów a), b), c) przekonują nas, że:

Położenie w przestrzeni i wielkość odcinka są dokładnie wyznaczone, jeżeli są dane jego prostopadłe rzuty na dwie płaszczyzny, prostopadłe względem siebie.

47. a) Ustaw odcinek AB : 1) prostopadłe do pierwszej płaszczyzny rzutów P_1 , 2) prostopadłe do drugiej płaszczyzny rzutów P_2 !

Wyznacz rzuty tych odcinków nasamprzód, gdy płaszczyzny rzutów są względem siebie prostopadłe, a następnie narysuj te rzuty na płaszczyźnie rysunkowej, sprowadzając do niej obie płaszczyzny rzutów! [Rys. 44].

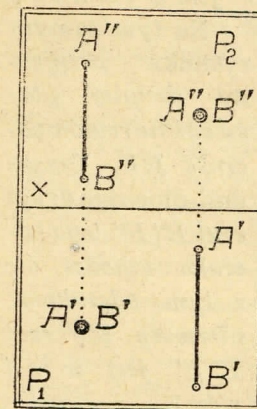
Wskaż w obu przypadkach, który rzut jest równy danemu odcinkowi!

Przekonujesz się naocznie, że:

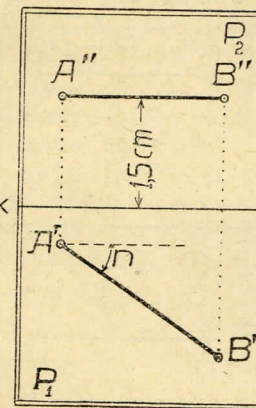
Jeżeli dany odcinek jest prostopadły do płaszczyzny rzutów P_1 , to jego rzut na tę płaszczyznę jest punktem; rzut na drugą płaszczyznę rzutów P_2 jest odcinkiem, prostopadłym do osi x -ów i równym danemu odcinkowi.

Opisz podobnie rzuty odcinka, prostopadłego do płaszczyzny P_2 !

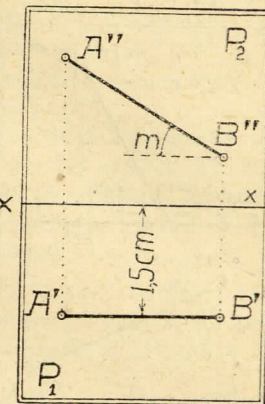
b) Narysuj rzuty odcinka AB , ustawivszy go: 1) równoległe do płaszczyzny rzutów P_1 , 2) równoległe do płaszczyzny rzutów P_2 ! [Rys. 45 i 46].



Rys. 44



Rys. 45



Rys. 46

Uzasadnij poglądowo, że:

1) Jeżeli dany odcinek jest równoległy do pierwszej płaszczyzny rzutów P_1 , to jego rzut drugi jest równoległy do osi x -ów; rzut pierwszy tworzy z osią x -ów kąt n , który jest równy kątowi nachylenia danego odcinka do drugiej płaszczyzny rzutów P_2 .

Rzut pierwszy jest równy danemu odcinkowi w przestrzeni. [Rys. 45].

2) Naodwrot:

Jeżeli dany odcinek jest równoległy do drugiej płaszczyzny rzutów P_2 , to jego rzut pierwszy jest równoległy do osi x -ów; rzut drugi tworzy z osią x -ów kąt m , który jest równy kątowi nachylenia danego odcinka do pierwszej płaszczyzny rzutów.

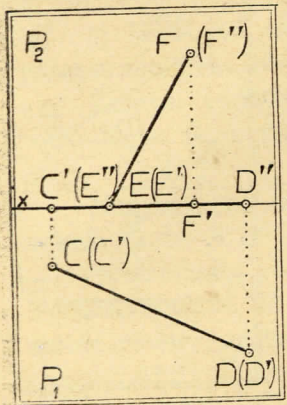
Rzut drugi jest równy danemu odcinkowi w przestrzeni. [Rys. 46].

Jak wielka jest odległość drugiego rzutu odcinka od osi x -ów, jeżeli odcinek ten jest równoległy do płaszczyzny P_1 i odległy od niej na 1,5 cm?

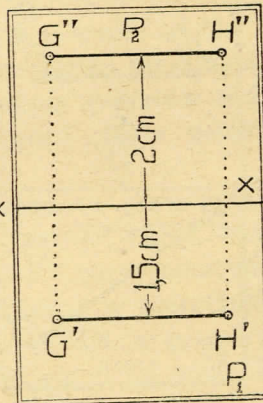
Jak wielka jest odległość pierwszego rzutu od osi x -ów, jeżeli odcinek jest równoległy do płaszczyzny P_2 i odległy od niej na 1,5 cm?

c) Na rys. 47 przyjęto odcinek CD na pierwszej płaszczyźnie rzutów.

Uzasadnij, dlaczego pierwszy rzut $C'D'$ tego odcinka schodzi się z tym odcinkiem, drugi zaś rzut $C''D''$ jest w osi x -ów?



Rys. 47



Rys. 48

Na tym samym rysunku przyjęto na drugiej płaszczyźnie rzutów odcinek EF . Uzasadnij, dlaczego drugi rzut $E''F''$ tego odcinka schodzi się z tym odcinkiem, pierwszy zaś rzut $E'F'$ jest w osi x -ów?

d) Na rys. 48 są narysowane rzuty odcinka GH . Oba rzuty są równoległe do osi x -ów. Rzut $G''H''$ jest odległy na 2 cm od osi x -ów, rzut zaś $G'H'$ na 1,5 cm.

Jakie położenie w przestrzeni ma odcinek GH względem osi x -ów, względem płaszczyzn rzutów?

Ile wynosi odległość jego od pierwszej, a ile od drugiej płaszczyzny rzutów? A zatem:

Jeżeli odcinek jest równoległy do osi x -ów, to oba jego rzuty są również równoległe do osi x -ów. Odległość rzutu drugiego od osi x -ów równa się odległości odcinka od pierwszej płaszczyzny rzutów, odległość zaś pierwszego rzutu od osi x -ów równa się odległości odcinka od drugiej płaszczyzny rzutów.

48. Ćwiczenia.

1) Narysować rzuty odcinka AB , prostokątnego do P_1 , jeżeli współrzędne punktów końcowych są: $A(z_1=0, y_1=3)$, $B(z_2=6, y_2=3)$. $[J=1 \text{ cm}]$.

2) Narysować rzuty odcinka $GH=6 \text{ cm}$, prostokątnego do P_2 , jeżeli odległość drugiego rzutu od osi x -ów wynosi 4 cm.

3) Narysuj rzuty i wyznacz kąty nachylenia do płaszczyzn rzutów odcinka $CD=5 \text{ cm}$, jeżeli współrzędne punktów końcowych są:

a) $C(z_1=4, y_1=6)$, $D(z_2=4, y_2=3)$;

b) $C(z_1=6, y_1=4)$, $D(z_2=3, y_2=4)$;

c) $C(z_1=6, y_1=6)$, $D(z_2=6, y_2=6)$. $[J=1 \text{ cm}]$.

4) Narysuj rzuty odcinka EF , wyznacz jego wielkość i kąty nachylenia do płaszczyzn rzutów, jeżeli:

a) jego rzut pierwszy tworzy z osią x -ów kąt 45° , a współrzędne punktów końcowych są: $E(z_1=5, y_1=3)$, $F(z_2=5, y_2=6)$;

b) jego rzut drugi tworzy z osią x -ów kąt 30° , współrzędne zaś punktów końcowych są: $E(z_1=3, y_1=5)$, $F(z_2=6, y_2=5)$.

5) Przyjmij płaszczyznę podłogi za płaszczyznę poziomą rzutów, płaszczyznę ścian za płaszczyznę pionową rzutów!

Wyznaczaj rzuty poziome i pionowe krawędzi ścian i przedmiotów:

a) pionowych, b) prostokątnych do płaszczyzn pionowej rzutów, c) równoległych do płaszczyzn poziomej rzutów, d) równoległych do płaszczyzn pionowej rzutów, e) równoległych do obu płaszczyzn rzutów!

Narysuj te rzuty w stosownej skali w zeszyście!

6) Rzut poziomy $A'B'$ odcinka AB mierzy 5 cm i tworzy z osią x -ów kąt 30° ; odległości punktów A i B od płaszczyzny poziomej rzutów są: $z_1=3 \text{ cm}$, $z_2=4 \text{ cm}$; odległość zaś rzutu A' od osi x wynosi 3 cm.

Narysować rzut pionowy tego odcinka, a następnie wyznaczyć jego długość i kąty nachylenia do płaszczyzn poziomej i pionowej rzutów!

7) Rzut pionowy odcinka CD leży na prostej l , która tworzy z osią x -ów kąt 45° ; współrzędne punktów końcowych są: $C(z_1=3, y_1=5)$, $D(z_2=6, y_2=2)$ $[J=1 \text{ cm}]$.

Narysuj rzuty tego odcinka, wyznacz jego wielkość i kąty nachylenia do płaszczyzn rzutów!

8) Odnoszące punktów końcowych odcinka EF przecinają oś x -ów w punktach E_x, F_x ; odcinek $E_x F_x = 4 \text{ cm}$.

Wykreśl rzuty odcinka EF , jeżeli współrzędne punktów końcowych są: $E(z_1=0, y_1=5)$, $F(z_2=6, y_2=0)$ $[J=1 \text{ cm}]$.

Znajdź wielkość odcinka EF i jego kąty nachylenia do płaszczyzn rzutów!

9) Rozwiąż ćwiczenie 8, jeżeli oprócz $E_x F_x = 4 \text{ cm}$ są dane:

a) $z_1=0$, $z_2=6$, $y_1=5$ i kąt $n=60^\circ$, który odcinek EF tworzy z drugą płaszczyzną rzutów;

b) $y_1=2$, $y_2=4$, $z_1=2,5$ i kąt $m=30^\circ$ nachylenia odcinka do płaszczyzny P_1 !

10) Rzut poziomy odcinka AB schodzi się z prostą h , która tworzy z osią x -ów kąt 75° . Narysować rzuty odcinka AB , jeżeli są dane:

a) współrzędne punktu $A(z_1=2 \text{ cm}, y_1=3 \text{ cm})$, długość odcinka $AB=5 \text{ cm}$ i kąt $m=45^\circ$ nachylenia odcinka do płaszczyzn poziomej rzutów;

b) współrzędne punktu $A(z_1=2 \text{ cm}, y_1=4 \text{ cm})$, współrzędna punktu $B(y_2=6 \text{ cm})$ i kąt $m=35^\circ$;

c) współrzędne punktu $A(z_1=0, y_1=0)$, współrzędna punktu $B(z_2=3)$ i kąt $m=50^\circ$!

49. a) Przedłużając odcinek AB [rys. 43] poza jego punkty końcowe, otrzymamy linię prostą $l \equiv [AB]$, na której odcinek ten leży.

Rzut pierwszy $l' \equiv [A'B']$ prostej l będzie przedłużeniem pierwszego rzutu odcinka AB , rzut drugi $l'' \equiv [A''B'']$ prostej l będzie przedłużeniem drugiego rzutu tego odcinka. Kąty nachylenia m i n odcinka AB do płaszczyzn rzutów P_1 i P_2 są równocześnie kątami nachylenia prostej l do tych płaszczyzn.

A zatem:

Pierwszy i drugi rzut prostej są wyznaczone, jeżeli są dane pierwsze i drugie rzuty dwóch jej punktów.

I naodwrot:

Jeżeli dane są pierwsze i drugie rzuty dwóch punktów prostej, natenczas położenie jej w przestrzeni jest dokładnie wyznaczone.

b) Prosta $l \equiv [AB]$ [Rys. 43] przebija pierwszą płaszczyznę rzutów w punkcie H , który nazywamy pierwszym śladem tej prostej, drugą płaszczyznę rzutów w punkcie V , który nazywamy drugim śladem tej prostej.

Określ, gdzie znajdują się rzuty śladu H , a gdzie rzuty śladu V ? [Por. rys. 41 b)].

Zauważ na rys. 43, że pierwszy (drugi) ślad prostej l otrzymamy, jeżeli w punkcie przecięcia się drugiego (pierwszego) rzutu tej prostej z osią x -ów wykreślimy do tej osi prostą prostopadłą i wyznaczymy punkt przecięcia się tej prostopadłej z pierwszym (drugim) rzutem tej prostej.

50. Cwiczenia.

1) Dany jest pierwszy i drugi rzut dowolnej prostej l . Wyznaczyć rzuty takiego na niej leżącego punktu, którego a) spółrzędna $z = 0, 2, 3, \dots$; b) spółrzędna $y = 0, 3, 4, 5, \dots$

2) Przyjmij rzuty prostej r , równoległej do pierwszej płaszczyzny rzutów i wyznacz rzuty punktu, leżącego na tej prostej, którego spółrzędna $y = 0, 1, 2, 3, \dots$

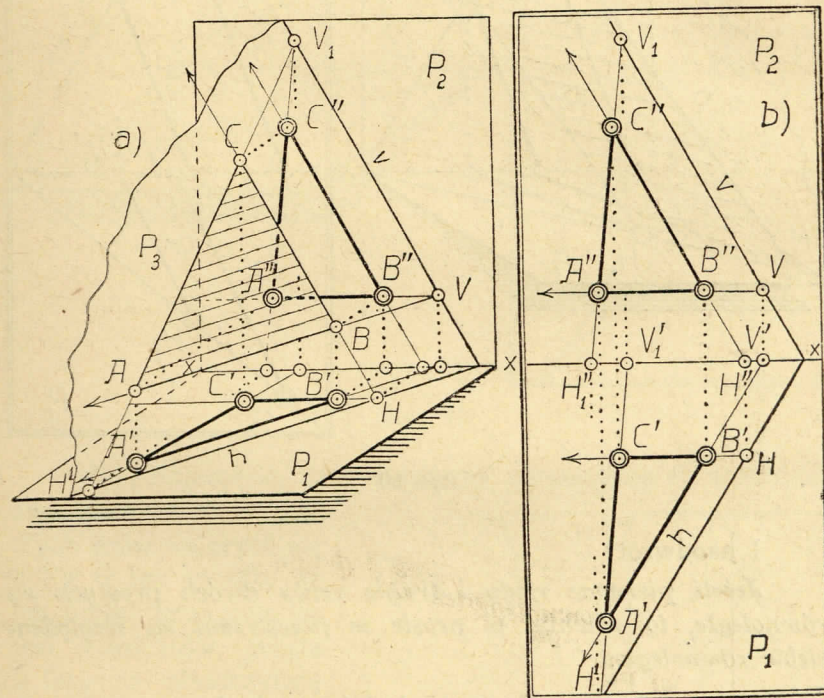
3) Przyjmij rzuty prostej q , równoległej do drugiej płaszczyzny rzutów, a następnie wyznacz rzuty takiego punktu, leżącego na tej prostej, któregooby spółrzędna $z = 0, 2, 3, 5, \dots$

4) Wyznacz kąty nachylenia do pierwszej i drugiej płaszczyzny rzutów prostej: a) dowolnej, b) równoległej do pierwszej płaszczyzny rzutów, c) równoległej do drugiej płaszczyzny rzutów, jeżeli oba rzuty tej prostej są dane!

§ 3. RZUTY PŁASZCZYZNY I FIGUR NA NIEJ LEŻĄCYCH.

51. Przez pierwszy i drugi rzut płaszczyzny P_3 rozumiemy pierwszy i drugi rzut elementów, które tę płaszczyznę wyznaczają. A zatem:

a) Pierwsze i drugie rzuty trzech punktów A, B, C wyznaczają pierwszy i drugi rzut płaszczyzny P_3 , która przechodzi w przestrzeni przez te punkty. [Rys. 49].



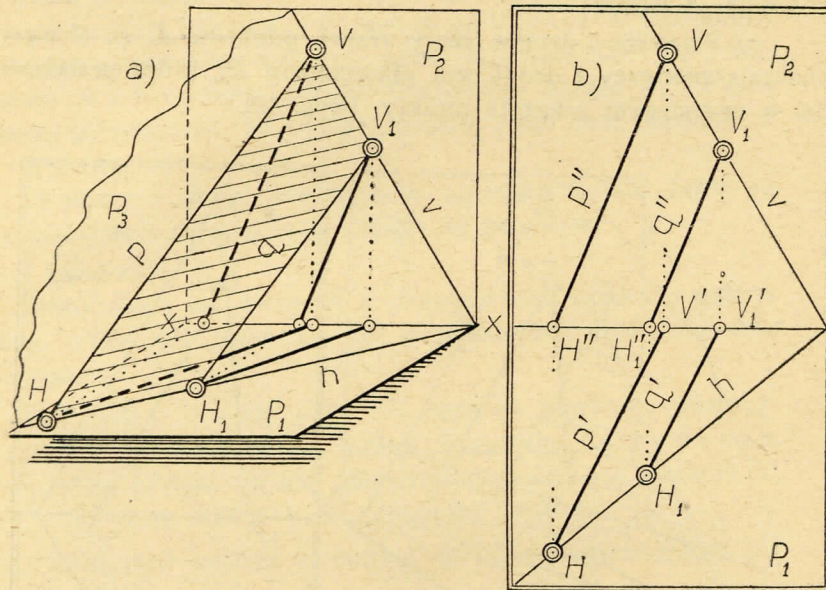
Rys. 49

Punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta ABC , który leży na płaszczyźnie P_3 ; $A'B'C'$ jest pierwszym rzutem tego trójkąta, $A''B''C''$ jest drugim rzutem tego trójkąta.

b) Pierwsze i drugie rzuty dwóch prostych równoległych p, q wyznaczają pierwszy i drugi rzut płaszczyzny F_3 , która przechodzi w przestrzeni przez te proste. [Rys. 50].

Uzasadnij poglądowo, że:

Jeżeli dwie proste p, q są w przestrzeni względem siebie równoległe, to są również równoległe pierwsze rzuty i drugie rzuty tych prostych.



Rys. 50

I naodwrot:

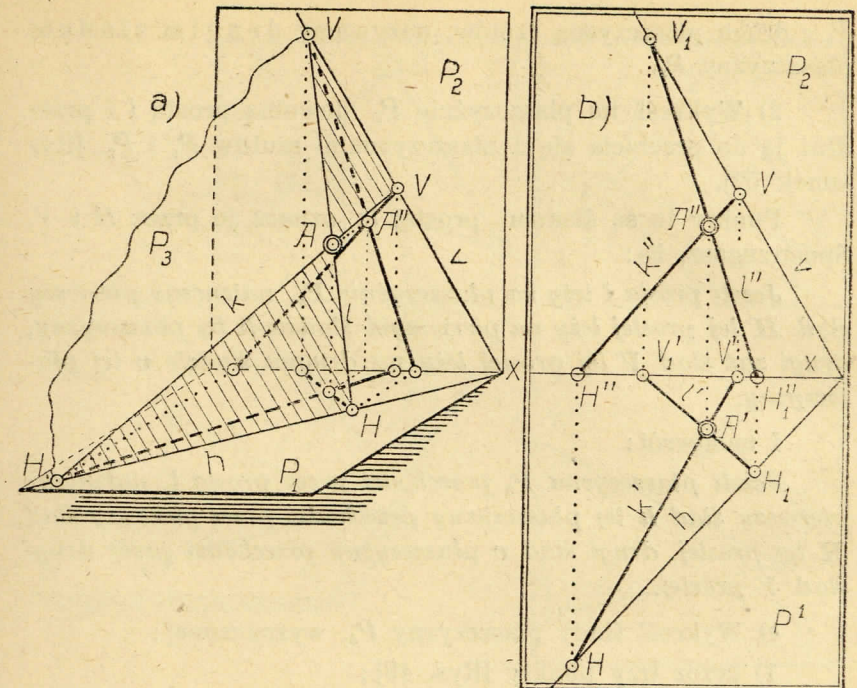
Jeżeli pierwsze rzuty i drugie rzuty dwóch prostych są równoległe, to również te proste w przestrzeni są względem siebie równoległe.

c) Pierwsze i drugie rzuty dwóch prostych przecinających się k, l wyznaczają rzuty płaszczyzny P_3 , która przechodzi w przestrzeni przez te proste. [Rys. 51].

Zauważ poglądowo, że:

Jeżeli dwie proste w przestrzeni przecinają się w punkcie A , to pierwsze rzuty obu prostych przecinają się w pierwszym rzucie A' , drugie rzuty tych prostych przecinają się w drugim rzucie A'' tego punktu A . Stąd wynika:

Prosta, łącząca punkt przecięcia się pierwszych rzutów dwóch prostych przecinających się — z punktem przecięcia się drugich rzutów tych prostych, jest prostopadłą do osi x -ów.

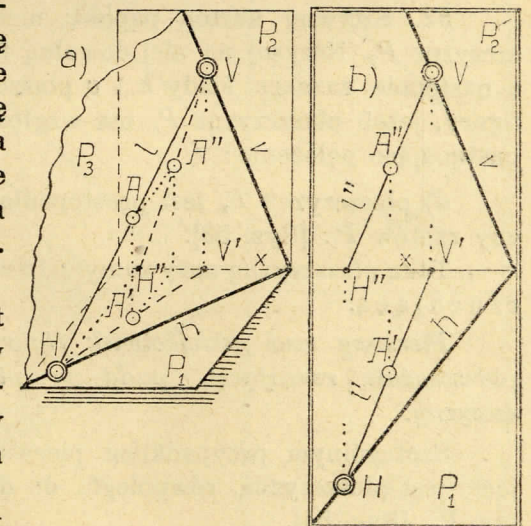


Rys. 51

d) 1) Najczęściej przedstawiamy płaszczyznę P_3 w rzutach zapomocą dwóch jej prostych przecinających się h i v w ten sposób, że ich punkt przecięcia się jest w osi x -ów, prosta h leży na płaszczyźnie rzutów P_1 , prosta v na płaszczyźnie rzutów P_2 . [Rys. 52].

Prostą h , która jest krawędzią płaszczyzny P_3 z pierwszą płaszczyzną rzutów, nazywamy pierwszym śladem płaszczyzny P_3 .

Prostą v , która jest krawędzią płaszczyzny



Rys. 52

P_3 z drugą płaszczyzną rzutów, nazywamy drugim śladem płaszczyzny P_3 .

2) Wykreśl na płaszczyźnie P_3 dowolną prostą l i przedłuż ją do przecięcia się z płaszczyznami rzutów P_1 i P_2 . [Rysunek 52].

Punkty te są śladami prostej l ; oznacz je przez H i V . Spostrzegasz, że:

Jeżeli prosta l leży na płaszczyźnie P_3 , natenczas pierwszy ślad H tej prostej leży na pierwszym śladzie h tej płaszczyzny, drugi zaś ślad V tej prostej leży na drugim śladzie v tej płaszczyzny.

I naodwrot:

Jeżeli płaszczyzna P_3 przechodzi przez prostą l , natenczas pierwszy ślad h tej płaszczyzny przechodzi przez pierwszy ślad H tej prostej, drugi ślad v płaszczyzny przechodzi przez drugi ślad V prostej.

e) Wykreśl ślady płaszczyzny P_3 , wyznaczonej:

- 1) przez trzy punkty [Rys. 49];
- 2) przez dwie proste równoległe [Rys. 50];
- 3) przez dwie proste przecinające się [Rys. 51]!

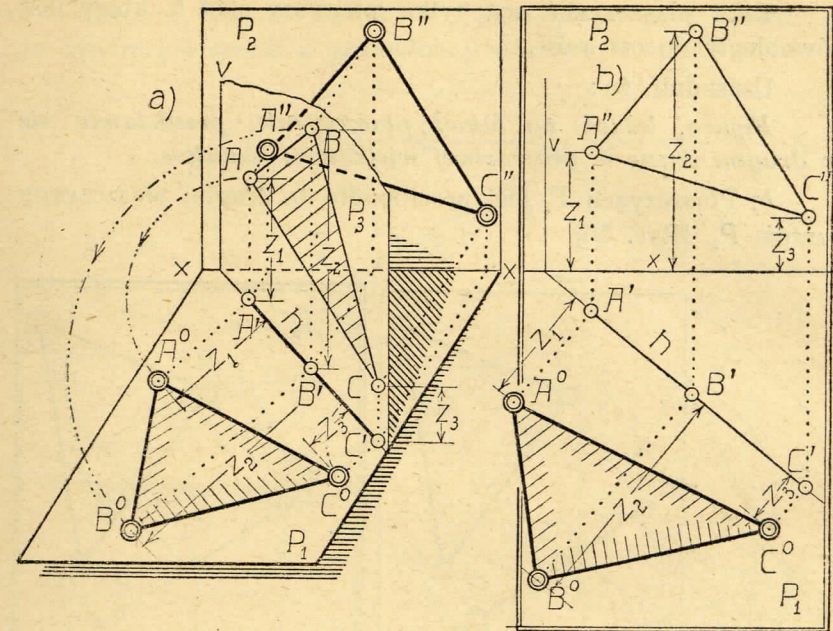
52. Sztywny karton papieru niech ci przedstawia płaszczyznę P_3 . Narysuj na niej dowolną figurę, np. trójkąt ABC , a następnie zaznacz ślady h i v płaszczyzny P_3 i oba rzuty figury, jeżeli płaszczyzna P_3 ma względem płaszczyzn rzutów następujące położenie:

a) płaszczyzna P_3 jest prostopadła do pierwszej płaszczyzny rzutów P_1 . [Rys. 53].

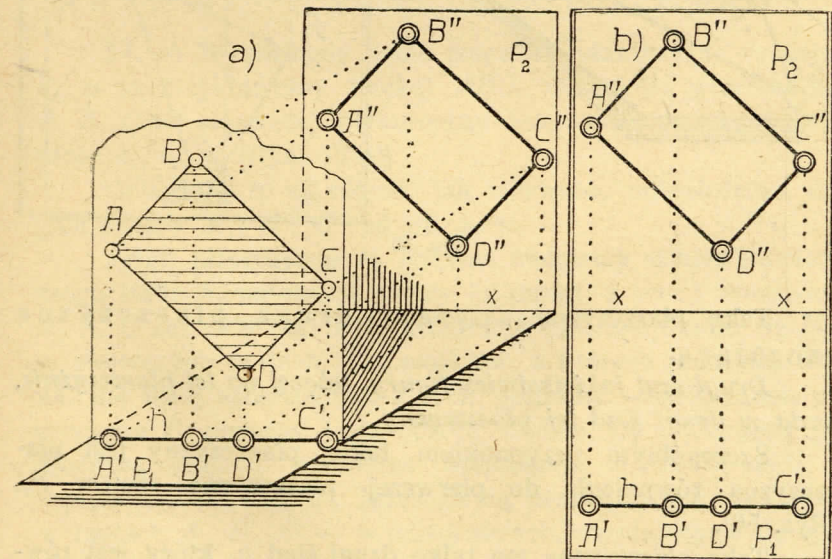
Taką płaszczyznę nazywamy pierwszą płaszczyzną rzucającą.

Pierwszy rzut jakiejkolwiek figury, leżącej na pierwszej płaszczyźnie rzucającej, pada w pierwszy ślad tej płaszczyzny.

Szczególnym przypadkiem pierwszej płaszczyzny rzucającej jest płaszczyzna, równoległa do drugiej płaszczyzny rzutów P_2 . [Rys. 54].



Rys. 53



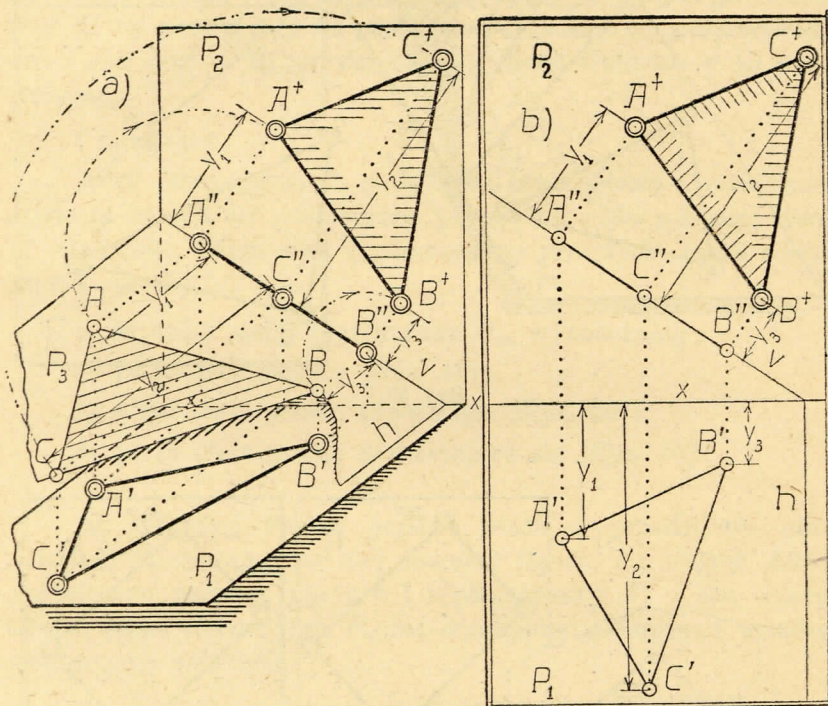
Rys. 54

Taka płaszczyzna ma tylko pierwszy ślad h , który jest równoległy do osi x -ów.

Uzasadnij, że:

Figura, leżąca na takiej płaszczyźnie, przedstawia się w drugim rzucie w prawdziwej wielkości i kształcie.

b) Płaszczyzna P_3 jest prostopadła do drugiej płaszczyzny rzutów P_2 . [Rys. 55].



Rys. 55

Taką płaszczyznę nazywamy drugą płaszczyzną rzucającą.

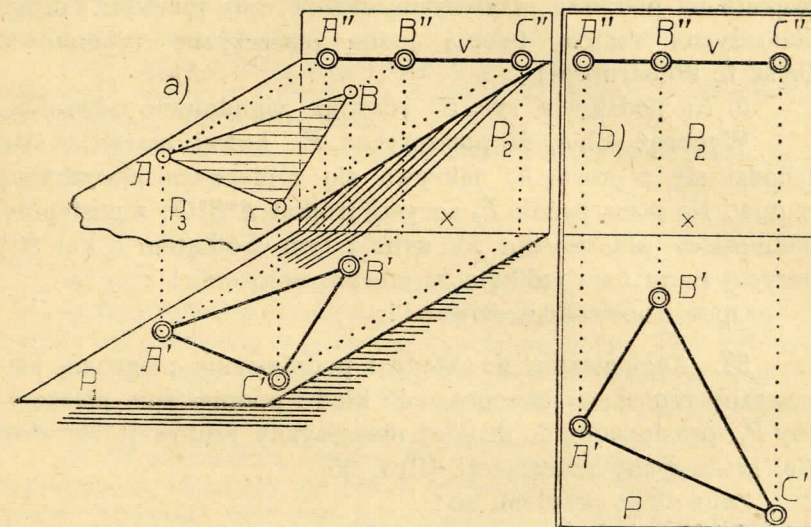
Drugi rzut jakiegokolwiek figury, leżącej na tej płaszczyźnie, pada w drugi ślad tej płaszczyzny.

Szczególnym przypadkiem takiej płaszczyzny jest płaszczyzna równoległa do pierwszej płaszczyzny rzutów P_1 . [Rys. 56].

Taka płaszczyzna ma tylko drugi ślad v , który jest równoległy do osi x -ów.

Uzasadnij, że:

Figura, leżąca na takiej płaszczyźnie, przedstawia się w pierwszym rzucie w prawdziwej wielkości i kształcie!



Rys. 56

§ 4. KŁAD I PODNIESIENIE PŁASZCZYZNY RZUCAJĄCEJ.

53. a) Wyobraźmy sobie pierwszą płaszczyznę rzucającą P_3 , a na niej dowolny trójkąt ABC . Odległości wierzchołków A, B, C od pierwszej płaszczyzny rzutów oznaczmy kolejno przez z_1, z_2, z_3 [Rys. 53 a)].

Odległości te są równe, jak wiadomo, odległościom drugich rzutów A'', B'', C'' od osi x -ów.

Jeżeli płaszczyznę P_3 obracać będziemy dokoła jej pierwszego śladu h , natenczas każdy jej punkt, a więc i wierzchołki A, B, C zakreślą łuki kół, których środki znajdować się będą w pierwszych rzutach tych punktów, a których promienie równać się będą spółrzednym z tych punktów. Jeżeli zatem płaszczyzna P_3 podczas tego obrotu zejdzie się z pierwszą płaszczyzną rzutów, natenczas wierzchołki A, B, C zejdą się z punktami A^0, B^0, C^0 , leżącymi na prostopadłych do śladu h w rzutach A', B', C' — w odległościach, równających się spółrzednym z_1, z_2, z_3 .

Trójkąt $A^0B^0C^0$ jest kładem trójkąta ABC , a więc temu trójkątowi równy.

Na rys. 53 b) przeprowadzona jest konstrukcja kładu tego trójkąta na pierwszej płaszczyźnie rzutów, gdy pierwsza i druga płaszczyzna rzutów tworzą jedną płaszczyznę rysunkową. Opisz tę konstrukcję!

b) Na podstawie rys. 53 rozwiąż zagadnienie odwrotne:

Wyobraź sobie, że płaszczyzna P_3 , której pierwszy ślad schodzi się z prostą h , nakrywa się z pierwszą płaszczyzną rzutów. Na płaszczyźnie P_3 narysuj trójkąt $A^0B^0C^0$, a następnie, podniósłszy płaszczyznę P_3 wraz z tym trójkątem o kąt 90° , narysuj rzuty tego trójkąta w nowym położeniu!

Opisz konstrukcję słowami!

54. Analogicznie do kładu i podniesienia pierwszej płaszczyzny rzucającej przeprowadź kład i podniesienie płaszczyzny P_3 , prostopadłej do drugiej płaszczyzny rzutów [t. zw. drugiej płaszczyzny rzucającej]. [Rys. 55].

Zauważasz przytem, że:

Jeżeli jest dany pierwszy i drugi rzut figury, leżącej na drugiej płaszczyźnie rzucającej, której drugi ślad schodzi się z prostą v , to kład tej figury na drugą płaszczyznę rzutów wykreślamy w sposób następujący:

W drugich rzutach wierzchołków tej figury wykreślamy prostopadłe do drugiego śladu v płaszczyzny, a następnie odcinamy na tych prostopadłych, po tej samej stronie śladu v , odległości y pierwszych rzutów tych wierzchołków od osi x -ów. Otrzymamy w ten sposób punkty A^+ , B^+ , C^+ , które są kładami wierzchołków A , B , C danego trójkąta.

Trójkąt $A^+B^+C^+$ jest równy trójkątowi ABC .

I naodwrot!

Niech prosta v będzie drugim śladem płaszczyzny P_3 , prostopadłej do drugiej płaszczyzny rzutów, zaś trójkąt $A^+B^+C^+$ [Rys. 55 b)] kładem trójkąta ABC , leżącego na płaszczyźnie P_3 .

Rzuty tego trójkąta wykreślimy w sposób następujący:

Z wierzchołków A^+ , B^+ , C^+ wykreślamy prostopadłe do śladu v ; punkty przecięcia się tych prostopadłych ze śladem v są drugimi rzutami wierzchołków trójkąta.

Pierwsze rzuty tych wierzchołków leżą na odnoszących, poniżej osi x -ów, w odległościach y od tejże osi, równających się odległościom wierzchołków A^+ , B^+ , C^+ od śladu v .

55. Ćwiczenia.

1) Trójkąt równoboczny o boku a opiera się jednym bokiem o pierwszą płaszczyznę rzutów. Wykreśl rzuty trójkąta, jeżeli jego płaszczyzna jest prostopadła do pierwszej płaszczyzny rzutów, zaś z drugą płaszczyzną rzutów tworzy kąt $\beta = 0, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

2) Kwadrat o boku a opiera się jednym wierzchołkiem o pierwszą płaszczyznę rzutów, a przekątna q , przechodząca przez ten wierzchołek, jest prostopadła do tej płaszczyzny.

Obróć ten kwadrat dokoła przekątnej q tak, by powierzchnia drugiego jego rzutu była równa:

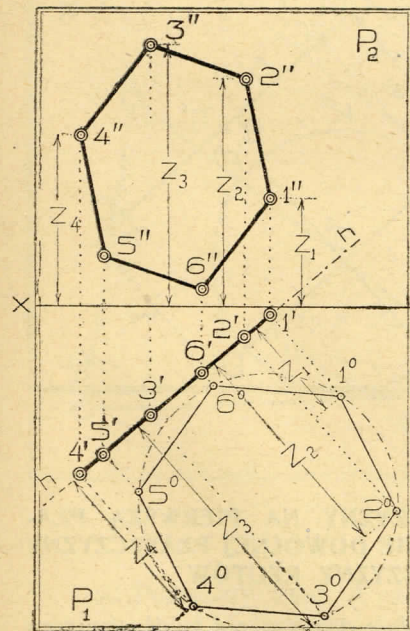
$$a^2, \frac{\sqrt{3}}{2} a^2, \frac{\sqrt{2}}{2} a^2, \frac{1}{2} a^2, 0 \cdot a^2.$$

W każdym z tych położen kwadratu wykreśl jego rzuty!

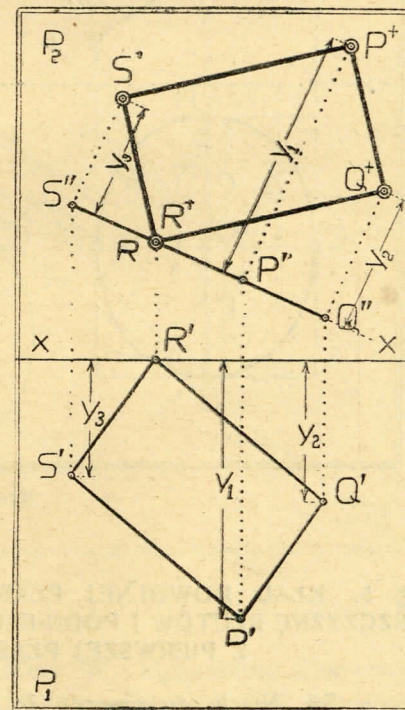
3) Wykreślić rzuty sześciokąta umiarowego o boku a , jeżeli płaszczyzna jego jest prostopadła do pierwszej płaszczyzny rzutów. [Por. rys. 57].

Jaki kąt musi tworzyć z osią x -ów pierwszy ślad h tej płaszczyzny, jeżeli powierzchnia drugiego rzutu ma być równa $\frac{1}{2}$ powierzchni tego sześciokąta?

4) Na płaszczyźnie, prostopadłej do drugiej płaszczyzny rzutów leży prostokąt, opierający się jednym wierzchołkiem o drugą płaszczyznę rzutów. Wykreślić rzuty tego prostokąta. [Rys. 58].



Rys. 57



Rys. 58

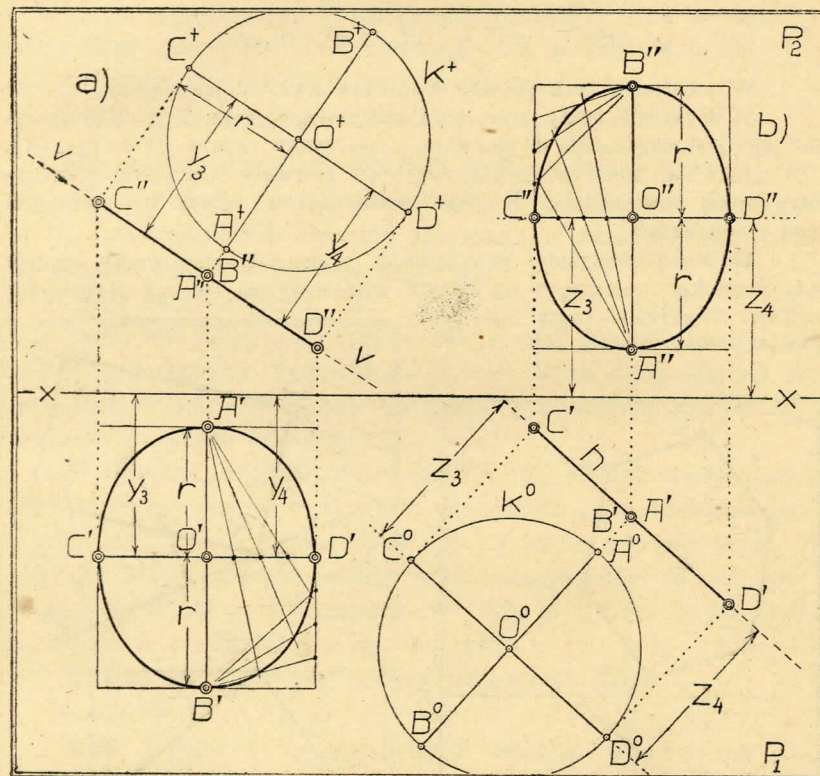
5) Jak należy narysować kład prostokąta, o którym była mowa w ćwic. 4), jeżeli ma on mieć w przestrzeni dwa boki równoległe do drugiej płaszczyzny rzutów?

Wykreśl rzuty takiego prostokąta!

6) Prostokąt o bokach $a < b$ umieść tak w przestrzeni, by jego drugi rzut był odcinkiem, zaś pierwszy rzut kwadratem o boku a !

7)*) Wykreślić rzuty koła, leżącego na pierwszej płaszczyźnie rzucającej [Rys. 59 b)].

8)*) Wykreślić rzuty koła, leżącego na drugiej płaszczyźnie rzucającej [Rys. 59 a)].



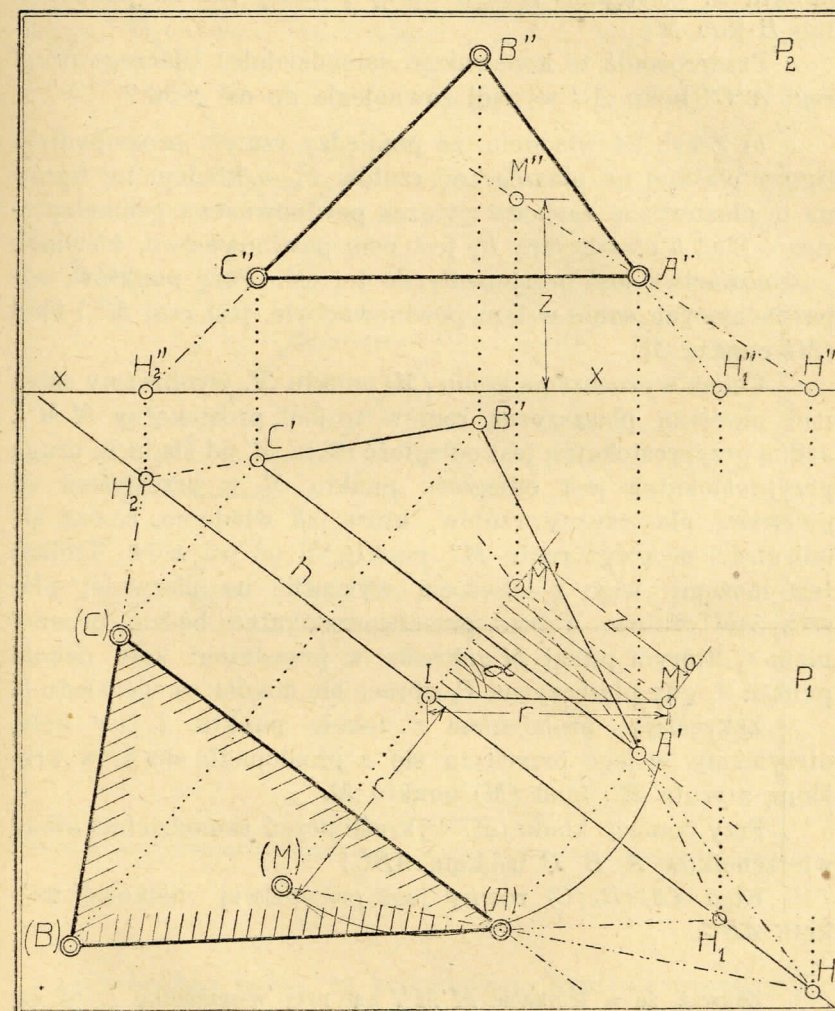
Rys. 59

§ 5. KŁAD DOWOLNEJ PŁASZCZYZNY NA PIERWSZĄ PŁASZCZYZNĘ RZUTÓW I PODNIENIE DOWOLNEJ PŁASZCZYZNY Z PIERWSZEJ PŁASZCZYZNY RZUTÓW

56. Niech płaszczyzna P_3 będzie dana przez swój pierwszy ślad h i przez jeden jej punkt M , którego pierwszym rzutem jest

M' , drugim rzutem M'' [Rys. 60]. Na płaszczyźnie tej leży trójkąt ABC , którego pierwszy rzut $A'B'C'$ jest dany.

Mamy wyznaczyć: a) drugi rzut trójkąta ABC ; b) prawdziwą wielkość tego trójkąta.



Rys. 60

a) Połączmy rzut A' z rzutem M' , otrzymamy pierwszy rzut prostej AM , leżącej na płaszczyźnie P_3 . Rzut $A'M'$ przecina ślad h w punkcie H , który jest śladem prostej AM [dlaczego?].

Drugi rzut H'' śladu leży na osi x -ów. Jeżeli połączymy H'' z M'' , otrzymamy drugi rzut prostej AM . Na rzucie $H''M''$ i na odnoszącej leży drugi rzut A'' punktu A . Drugi rzut B'' punktu B możemy teraz wyznaczyć przy pomocy rzutów punktu A . Następnie rzut C'' przy pomocy rzutów punktu A lub B [lub M].

Przeprowadź te konstrukcje samodzielnie! Dlaczego drugi rzut $A''C''$ boku AC wypadł równoległe do osi x -ów?

b) Z art. 24 wiadomo, że pomiędzy rzutem prostopadłym figury płaskiej na płaszczyznę rzutów P_1 a kładem tej figury na tę płaszczyznę zachodzi związek powinowactwa geometrycznego. Ślad h płaszczyzny P_3 jest osią powinowactwa, kierunek powinowactwa jest prostopadły do tej osi. Parę punktów, odpowiadających sobie w tym powinowactwie, jest rzut M' i kład (M) punktu M .

Celem wyznaczenia kładu (M) punktu M , wyobraźmy sobie nad pierwszą płaszczyznę rzutów trójkąt prostokątny $M'M'I$. Jedną przyprostokątną jest odległość rzutu M' od śladu h , drugą przyprostokątną jest odległość punktu M w przestrzeni od pierwszej płaszczyzny rzutów, która jak wiadomo, równa się odległości drugiego rzutu M'' punktu M od osi x -ów. Trójkąt ten możemy więc z łatwością wykreślić na pierwszej płaszczyźnie rzutów, a jego przeciwprostokątną będzie promieniem r , którym punkt M zakreśla w przestrzeni koło dokoła punktu I , gdy płaszczyzna P_3 obraca się dokoła swego śladu h .

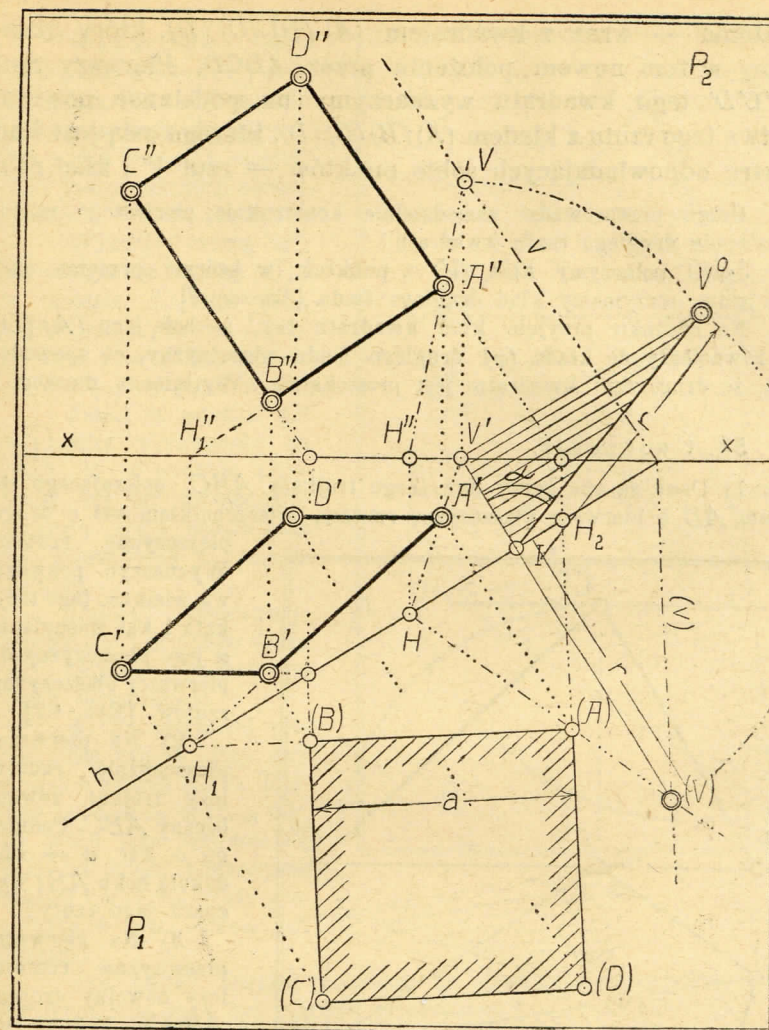
Zakreślając promieniem r dokoła punktu I łuk koła, otrzymamy w jego przecięciu się z prostopadłą do h , wykreśloną z rzutu M' , kład (M) punktu M .

Przy pomocy kładu (M) wykreśli uczeń samodzielnie klady wierzchołków A, B, C trójkąta ABC !

Kład $(A)(B)(C)$ równy jest prawdziwej wielkości trójkąta ABC .

Zauważ, że w trójkącie $M'M'I$ kąt przy wierzchołku I jest kątem nachylenia płaszczyzny danej P_3 do pierwszej płaszczyzny rzutów!

57. Płaszczyzna P_3 jest wyznaczona przez pierwszy ślad h i jeden jej punkt V , leżący na drugiej płaszczyźnie rzutów. Na tej płaszczyźnie mamy przyjąć kwadrat $ABCD$ o boku a i wyznaczyć jego rzuty. [Rys. 61].



Rys. 61

Wyobraźmy sobie, że wykonaliśmy kład płaszczyzny P_3 dokoła śladu h na pierwszą płaszczyznę rzutów. Punkt V zajmie wtedy położenie (V) , które znajdziemy przy pomocy trójkąta prostokątnego $VV'I$ w ten sam sposób, jak w poprzednim artykule kład (M) punktu M .

Narysujmy teraz w kładzie kwadrat $(A)(B)(C)(D)$ o boku a , a następnie podnieśmy płaszczyznę P_3 do jej pierwotnego

położenia — wraz z kwadratem $(A)(B)(C)(D)$, który oznaczmy w tem nowem położeniu przez $ABCD$. Pierwszy rzut $A'B'C'D'$ tego kwadratu wyznaczmy na podstawie powinowactwa tego rzutu z kładem $(A)(B)(C)(D)$, którego osią jest ślad h , parą odpowiadających sobie punktów — rzut V' i kład (V) .

Uczeń przeprowadzi samodzielnie konstrukcję pierwszego rzutu, a następnie drugiego rzutu kwadratu!

Jeżeli połączymy kład (V) z punktem, w którym przecina ślad h oś x -ów, otrzymamy kład drugiego śladu [dlaczego?].

Na rysunku przyjęto kład kwadratu tak, że bok jego $(A)(D)$ jest równoległy do klądu (v) drugiego śladu płaszczyzny, co spowodowało, że drugi rzut kwadratu jest prostokątem. Wytlumacz dlaczego?

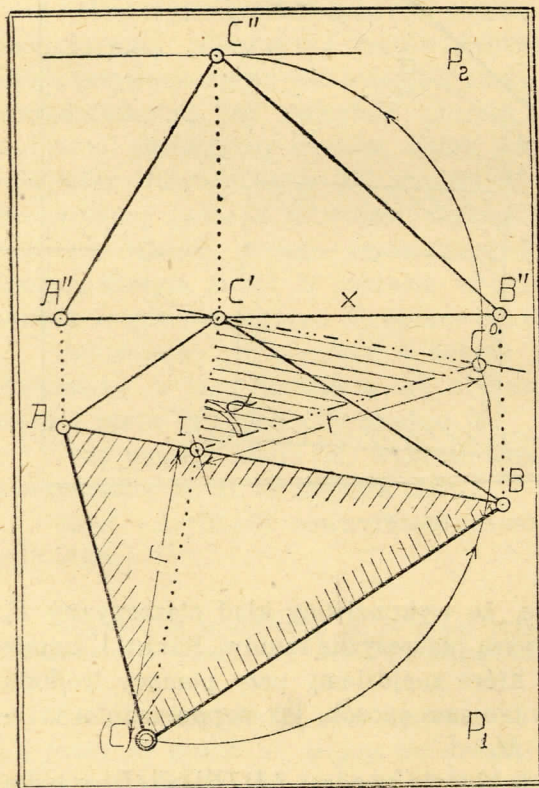
58. Ćwiczenia.

1) Dane są oba rzuty dowolnego trójkąta ABC , opierającego się bokiem AB o pierwszą płaszczyznę rzutów, wierzchołkiem zaś o drugą płaszczyznę rzutów.

Wyznaczyć prawdziwą wielkość tego trójkąta i kąt nachylenia α jego płaszczyzny do pierwszej płaszczyzny rzutów. [Rys. 62].

2) Na pierwszej płaszczyźnie rzutów leży trójkąt równoboczny ABC . Podnieś go o kąt $\alpha = 45^\circ$ dokoła boku AB i wyznacz jego rzuty!

3) Na pierwszej płaszczyźnie rzutów, leży dowolny trójkąt $AB(C)$. Podnieś go dokoła boku AB tak, by wierzchołek C znalazł się na płaszczyźnie, równoległej do pierwszej płaszczyzny rzutów, poprowadzonej w odstępnie d , ($d < w$, jeżeli w jest wysokością trójkąta, wykreśloną z wierzchołka C do boku AB) [Rys. 63].



Rys. 62

Wskazówka. Wykreśl z wierzchołka (C) prostopadłą do boku AB i oznacz punkt przecięcia się tej prostej z AB przez I ; odcinek $(C)I$ jest promieniem obrotu punktu C dokoła punktu I .

Wykreśl prostą q^0 , równoległą do prostej $(C)I$ w odstępnie d . Koło (K) , zakreślone z punktu I promieniem $r = (C)I$, przecina prostą q^0 w punkcie C^0 .

Jeżeli z punktu C^0 wykreślisz prostopadłą do $I(C)$, to w punkcie przecięcia się tej prostopadłej z prostą $I(C)$ będzie rzut C' wierzchołka C danego trójkąta.

Dalszą konstrukcję pierwszego i drugiego rzutu tego trójkąta przeprowadzi uczeń samodzielnie.

4) Na pierwszej płaszczyźnie rzutów leży prostokąt o bokach a i b . Podnieś go dokoła boku a tak, by jeden jego wierzchołek padł na drugą płaszczyznę rzutów i wykreśl rzuty prostokąta w tem nowem położeniu!

Jak należy przyjąć prostokąt na pierwszej płaszczyźnie rzutów, by drugi jego rzut był również prostokątem?

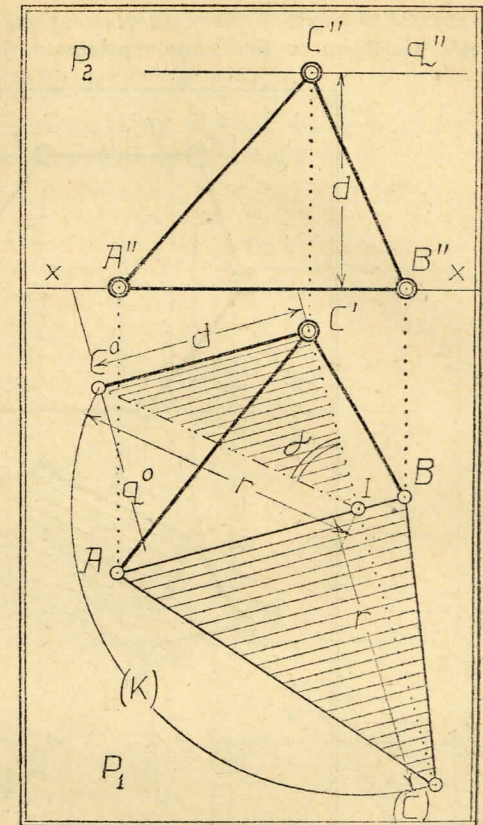
Obróć ten prostokąt dokoła boku a tak, by przeciwległy bok znalazł się na pewnej wysokości $d < b$ i wykreśl wtedy jego rzuty!

5) Na pierwszej płaszczyźnie rzutów leży kwadrat $(A)(B)(C)(D)$; podnieś go dokoła wierzchołka (A) tak, by jego przekątna $(D)(B)$ zajęła położenie równoległe do pierwszej płaszczyzny rzutów, wierzchołek zaś C znalazł się na wysokości $d < (A)(C)$! Wykreśl rzuty kwadratu w tem nowem położeniu!

Uzasadnij, że pierwszy rzut kwadratu musi być rombem!

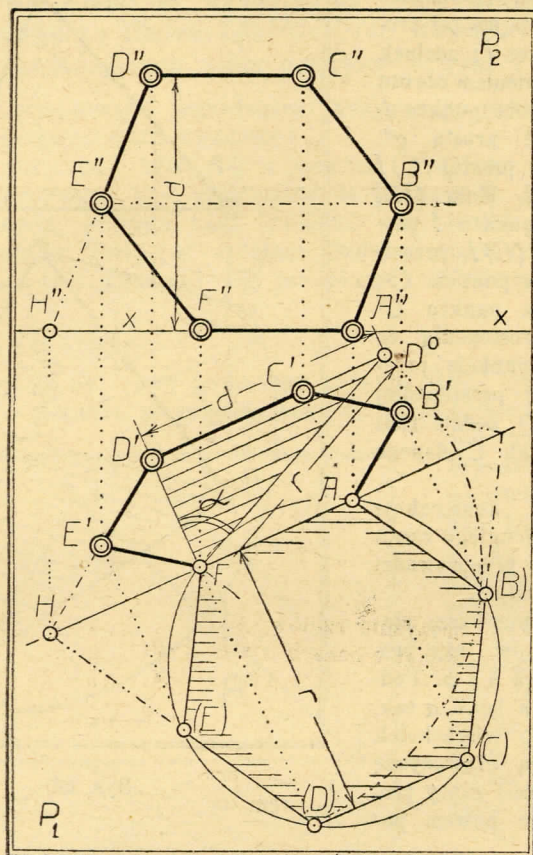
Jak należy umieścić kwadrat $(A)(B)(C)(D)$ względem osi x -ów, by oba jego rzuty były rombami?

6) Sześciokąt umiarywy $ABCDEF$, leżący na pierwszej płaszczyźnie rzutów, podnieś dokoła boku AF [Rys. 64] tak, by jego płaszczyzna



Rys. 63

szczyzna tworzyła z pierwszą płaszczyzną rzutów kąt α i wykreśl rzuty tego wieloboku w tem nowem położeniu, jeżeli $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$!



Rys. 64

§ 6. RZUTY BRYŁY

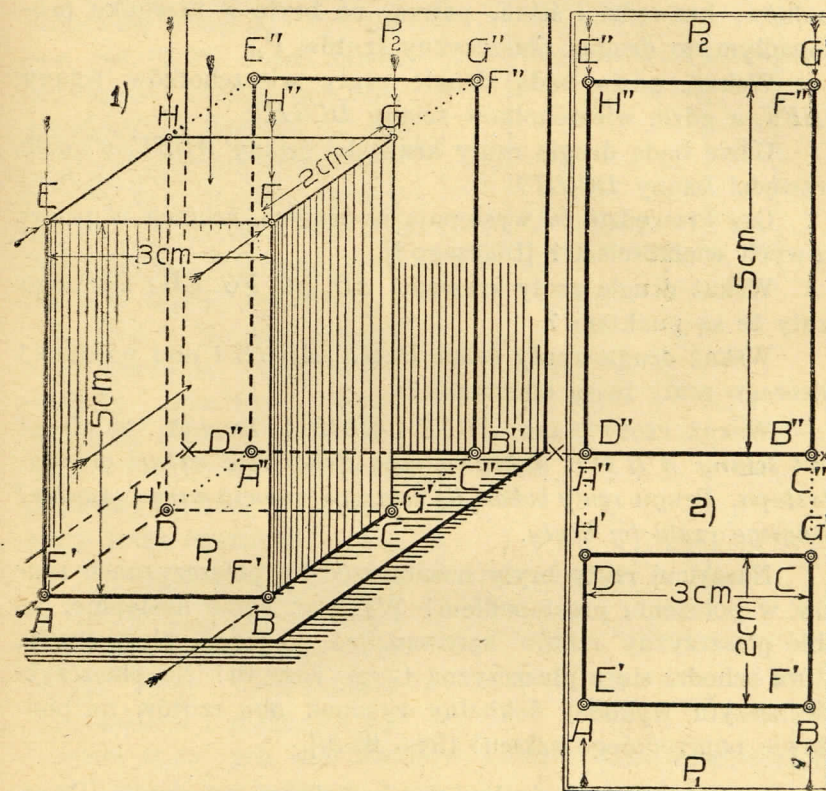
I. Rzuty graniastosłupa (i walca*)

59. Ustaw model prostopadłościanu o podstawie prostokątnej, a o krawędziach 2 cm, 3 cm, 5 cm, tak, aby podstawa jego $ABCD$ leżała na pierwszej płaszczyźnie rzutów P_1 , a dwie ściany boczne $ABEF$ i $CDGH$ były równoległe do drugiej płaszczyzny rzutów P_2 . [Rys. 65 1)].

a) Szukajmy nasamprzód rzutu pierwszego tej bryły!

Musimy wyznaczyć pierwsze rzuty poszczególnych wierzchołków, krawędzi i ścian, patrząc na bryłę z góry w kierunku prostych, prostopadłych do P_1 . A zatem:

Wskaż, gdzie będą pierwsze rzuty wierzchołków podstawy $ABCD$, a gdzie wierzchołków podstawy $EFGH$?



Rys. 65

Gdzie będą pierwsze rzuty krawędzi podstawy dolnej, a gdzie krawędzi podstawy górnej?

Czy krawędzie obu podstaw występują w pierwszych rzutach w prawdziwych wielkościach? [Dlaczego?].

Wskaż pierwsze rzuty poszczególnych krawędzi bocznych! Dlaczego rzuty te są punktami?

Wskaż pierwszy rzut podstawy górnej!

Zauważ, że pierwszy rzut podstawy górnej nakrywa sobą rzut całego graniastoslupa. Rzuty pierwsze boków tej podstawy stanowią zarys [kontur] pierwszego rzutu graniastoslupa.

b) Szukajmy teraz drugiego rzutu bryły.

Musimy wyznaczyć drugie rzuty poszczególnych wierzchołków, krawędzi i ścian, patrząc na bryłę w kierunku prostopadłym do drugiej płaszczyzny rzutów P_2 .

Wskaż, gdzie będą drugie rzuty wierzchołków ściany $ABFE$, a gdzie wierzchołków ściany $DCGH$?

Gdzie będą drugie rzuty krawędzi ściany $ABFE$, a gdzie krawędzi ściany $DCGH$?

Czy krawędzie te występują w drugich rzutach w prawdziwych wielkościach? [Dlaczego?].

Wskaż drugie rzuty krawędzi AD , BC , FG , EH ! Dlaczego rzuty te są punktami?

Wskaż drugie rzuty ścian $BCGF$, $ADHE$ i obu podstaw! Dlaczego rzuty te są odcinkami?

Wskaż rzuty ścian $ABFE$ i $CDHG$! Zauważ, że drugi rzut ściany $ABFE$ nakrywa sobą drugi rzut całego graniastoslupa. Drugie rzuty boków tej ściany stanowią zarys [kontur] drugiego rzutu tej bryły.

Naszkicuj rzuty bryły nasamprzód na płaszczyznach rzutów w położeniu prostopadłym! Wyobraź sobie następnie, że obie płaszczyzny rzutów sprowadziłeś do jednej płaszczyzny, która schodzi się z płaszczyzną twego zeszytu! Na płaszczyźnie zeszytu wykonaj dokładny rysunek obu rzutów na podstawie poprzedniego szkicu! [Rys. 65 2)].

c) Obróć graniastosłup w pierwotnym położeniu [Rysunek 65 1)] o kąt 30° !

Przez ten obrót zmienia się tylko położenie ścian bocznych względem drugiej płaszczyzny rzutów, a mianowicie ściany boczne nie będą już prostopadłe względnie równoległe do tej płaszczyzny.

Czy drugie rzuty ścian bocznych w nowym położeniu mogą być odcinkami?

Jeżeli nie, to powiedz, jakimi figurami?

1) Ponieważ wszystkie elementy graniastoslupa zatrzymują swe dawne położenia [równoległe lub prostopadłe]

względem pierwszej płaszczyzny rzutów, przeto pierwszy rzut graniastoslupa w nowym położeniu będzie równy pierwszemu rzutowi graniastoslupa w dawnym położeniu, tylko obróci się o kąt 30° [rys. 66, por. rys. 65 2)]. Jeżeli zatem narysujesz poniżej osi x -ów prostokąt o bokach 2 cm i 3 cm, którego jedna para boków równoległych tworzy z osią x -ów kąt 30° , to otrzymasz pierwszy rzut graniastoslupa w nowym położeniu.

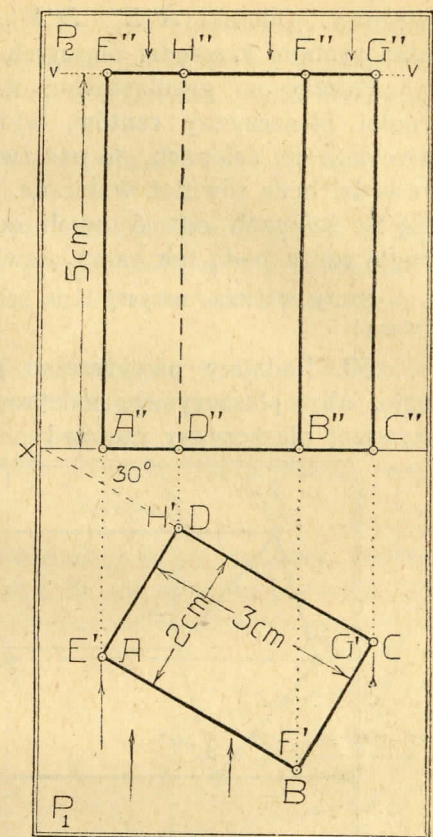
Wskaż na tym prostokącie pierwsze rzuty wierzchołków podstawy dolnej, podstawy górnej, rzuty krawędzi bocznych, krawędzi podstawy dolnej i górnej, rzuty ścian bocznych!

2) Drugi rzut graniastoslupa w nowym położeniu otrzymasz, jeżeli wyznaczysz drugie rzuty wierzchołków obu podstaw i połączysz odcinkami rzuty tych wierzchołków, które w przestrzeni leżą na tych samych krawędziach bocznych.

Drugie rzuty wierzchołków podstawy dolnej znajdować się będą w osi x -ów. Dlaczego?

Drugie rzuty podstawy górnej znajdować się będą na prostej v , równoległej do osi x -ów w odstępie 5 cm. Dlaczego?

Jeżeli zatem z wierzchołków prostokąta $ABCD$, przedstawiającego pierwszy rzut graniastoslupa, wykreślisz prostopadłe do osi x -ów, to przetną one tę oś w punktach A'' , B'' , C'' , D'' , prostą zaś v w punktach E'' , F'' , H'' , G'' . Punkty A'' , B'' , C'' , D'' są drugimi rzutami wierzchołków dolnej podstawy, punkty E'' , F'' , H'' , G'' są drugimi rzutami wierzchołków górnej



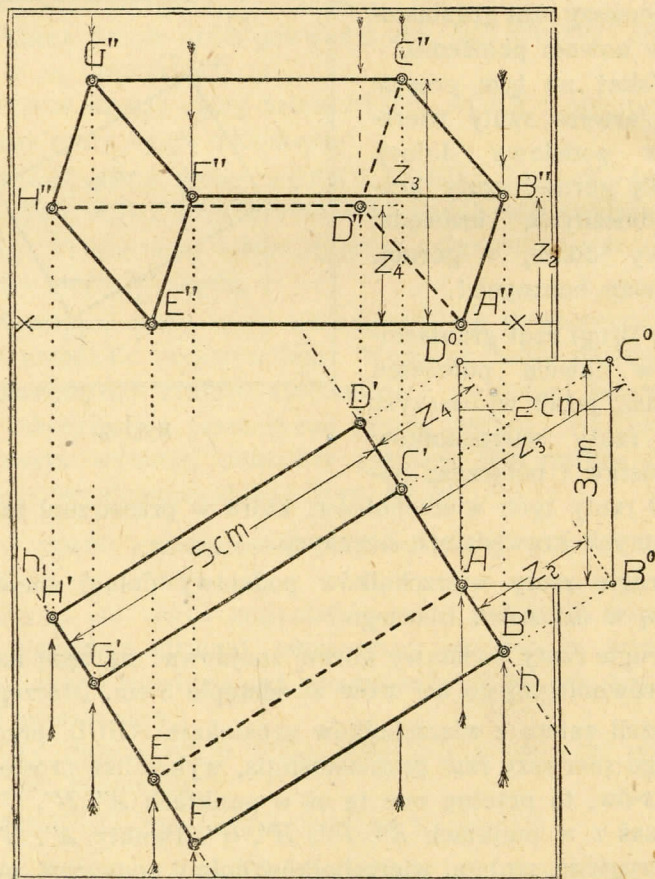
Rys. 66

podstawy. Odcinki $A''E''$, $B''F''$, $C''G''$, $D''H''$ są więc drugimi rzutami krawędzi bocznych graniastosłupa.

Patrzając na graniastosłup w kierunku, prostopadłym do drugiej płaszczyzny rzutów, widzimy te krawędzie boczne, które leżą na ścianach, do nas zwróconych; drugie rzuty tych krawędzi będą również widoczne. Krawędzie zaś boczne, które leżą na ścianach odwróconych od nas, są niewidoczne; ich drugie rzuty będą tak samo niewidoczne.

Rzuty widoczne narysuj linią pełną, rzuty niewidoczne linią przerywaną!

60. Nadajmy powyższemu graniastosłupowi takie położenie, aby płaszczyzny podstaw jego były prostopadłe do pierwszej płaszczyzny rzutów!



Rys. 67

Oznaczmy proste, wzdłuż których płaszczyzny podstaw przecinają pierwszą płaszczyznę rzutów, literami h i h_1 . [Rys. 67].

Jaka musi być odległość tych prostych, jeżeli krawędzie boczne są długie na 5 cm?

Narysuj rzuty tych podstaw sposobem, wskazanym w artykule 53.

Połącz rzuty wierzchołków obu podstaw prostymi liniami tak, jak one są połączone na graniastosłupie w przestrzeni!

Wskaż na graniastosłupie te krawędzie, których pierwsze rzuty są widoczne!

Wskaż te krawędzie, których drugie rzuty są widoczne!

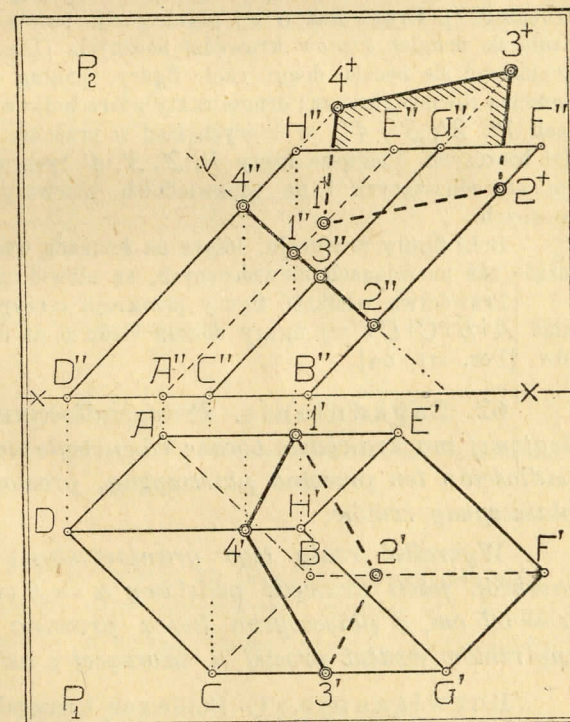
Wskaż krawędzie, których drugie rzuty tworzą zarys (kontur) drugiego rzutu graniastosłupa!

Wskaż krawędzie, których pierwsze rzuty tworzą zarys (kontur) pierwszego rzutu graniastosłupa!

61. Zagadnienie. Równoległoscian pochyły, którego podstawa jest prostokątem $ABCD$, leżącym na pierwszej płaszczyźnie rzutów, ma krawędzie boczne równoległe do drugiej płaszczyzny rzutów. [Rys. 68].

1) Wykreślić rzuty tego równoległoscianu, jeżeli jest dana jego wysokość i kąt nachylenia krawędzi bocznych do pierwszej płaszczyzny rzutów.

2) Wykreślić rzuty i wyznaczyć prawdziwą wielkość przekroju tego równoległoscianu płaszczyzną, prostopadłą do krawędzi bocznych.



Rys. 68

Wskazówka. 1) Poniżej osi x -ów narysuj prostokąt $ABCD$ i wyznacz jego drugi rzut $A''B''C''D''$; pierwszy rzut prostokąta schodzi się z nim samym. Przez rzuty A'' , B'' , C'' , D'' poprowadź proste równoległe, nachylone do osi x -ów pod danym kątem. Na tych prostych znajdować się będą drugie rzuty krawędzi bocznych. [Dlaczego?]. Poprowadź następnie prostą, równoległą do osi x -ów w odstępie, równającym się wysokości danego graniastostupa.

Ta prosta przetnie drugie rzuty krawędzi bocznych w punktach E'' , F'' , G'' , H'' , które są drugimi rzutami wierzchołków górnej podstawy. [Dlaczego?].

Pierwsze rzuty krawędzi bocznych wychodzą z wierzchołków A , B , C , D dolnej podstawy i są równoległe do osi x -ów. [Dlaczego?]. Pierwsze rzuty wierzchołków podstawy górnej znajdują się na odnoszących i na pierwszych rzutach odpowiednich krawędzi bocznych.

Krawędzie widoczne i niewidoczne w pierwszym rzucie równoległościanu oznaczysz, patrząc na niego w kierunku prostopadłym do pierwszej płaszczyzny rzutów. Patrząc na równoległościan w kierunku prostopadłym do drugiej płaszczyzny rzutów, oznaczysz widoczne i niewidoczne krawędzie w drugim rzucie.

2) Płaszczyzna prostopadła do krawędzi bocznych danego równoległościanu jest również prostopadła do drugiej płaszczyzny rzutów. [Dlaczego?]. Drugi ślad v tej płaszczyzny będzie zatem prostą, prostopadłą do drugich rzutów krawędzi bocznych. [Dlaczego?]. Na śladzie v znajdować się będzie drugi rzut figury, podług której ta płaszczyzna przecina równoległościan; drugie rzuty wierzchołków tej figury są w punktach $1''$, $2''$, $3''$, $4''$, w których ślad v przecina drugie rzuty krawędzi bocznych. Pierwsze rzuty $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ tych wierzchołków znajdują się na odnoszących i na odpowiednich pierwszych rzutach krawędzi bocznych.

Boki figury przekroju, leżące na ścianach widocznych, są widoczne, leżące zaś na ścianach niewidocznych, są niewidoczne.

Prawdziwą wielkość figury przekroju otrzymasz, jeżeli wykonasz kład $A+B+C+D+$ tej figury dokoła śladu v na drugą płaszczyznę rzutów. [Por. art. 54].

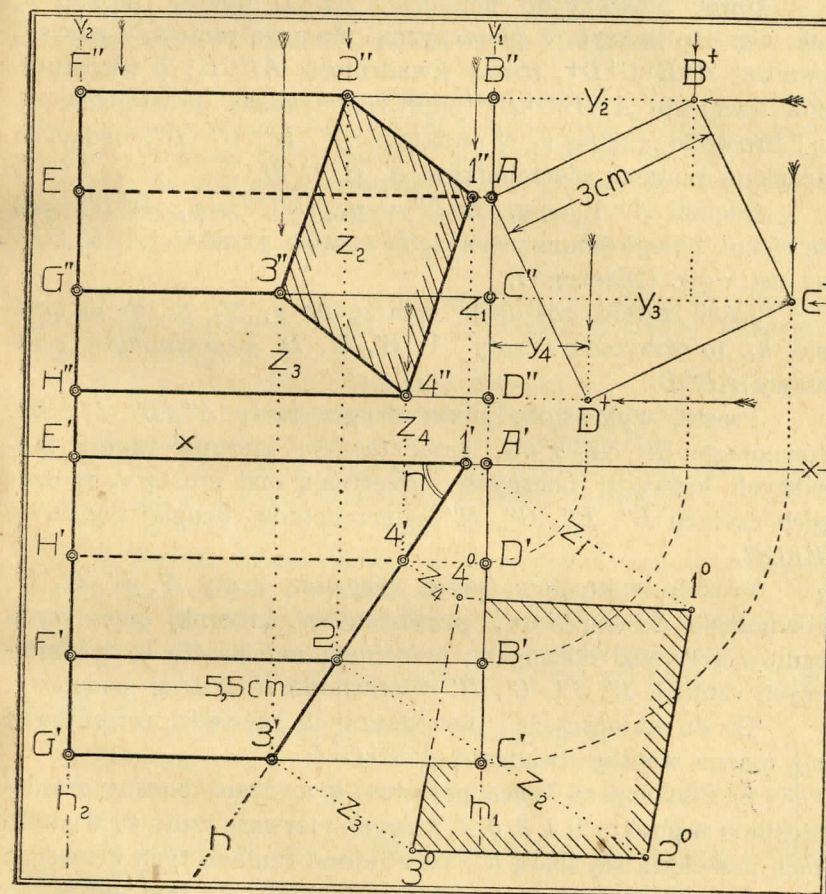
62. Zagadnienie. Prostopadłościan o podstawie kwadratowej ma krawędzie boczne równoległe do osi x -ów. Prostopadłościan ten przecina płaszczyzna, prostopadła do pierwszej płaszczyzny rzutów.

Wykreślić rzuty tego graniastostupa i wyznaczyć jego przekrój, jeżeli krawędź podstawy $a = 3$ cm, krawędź boczna $k = 5,5$ cm, a płaszczyzna tnąca przecina pierwszą płaszczyznę rzutów wzdłuż prostej h , tworzącej z osią x -ów kąt n .

Rozwiązanie. 1) Ponieważ krawędzie boczne graniastostupa są równoległe do osi x -ów, przeto płaszczyzny obu

podstaw są prostopadłe równocześnie do obu płaszczyzn rzutów, a więc i do osi x -ów. [Rys. 69].

Płaszczyzna podstawy $ABCD$ niech przecina drugą płaszczyznę rzutów wzdłuż prostej v_1 , pierwszą płaszczyznę rzutów



Rys. 69

wzdłuż prostej h_1 . Obie te proste są prostopadłe do osi x -ów, przeto po sprowadzeniu obu płaszczyzn rzutów do jednej płaszczyzny rysunkowej utworzą jedną prostą, prostopadłą do osi x -ów.

Płaszczyzna drugiej podstawy $EFGH$ niech przecina drugą płaszczyznę rzutów wzdłuż prostej v_2 , pierwszą wzdłuż prostej h_2 . Proste te również utworzą jedną prostą, prosto-

padłą do osi x -ów, jeżeli płaszczyzny rzutów sprowadzimy do jednej płaszczyzny rysunkowej.

Odległość prostych v_1 i v_2 , h_1 i h_2 równa się długości krawędzi bocznej graniastosłupa, a zatem 5,5 cm. Dlaczego?

Obróć płaszczyznę podstawy $ABCD$ dokoła prostej v_1 tak, aby się nakryła z płaszczyzną pionową rzutów, i narysuj kwadrat $A+B+C+D+$, równy kwadratowi $ABCD$! Z wierzchołków kwadratu $A+B+C+D+$ poprowadź proste, prostopadłe do v_1 ! Proste te przetną v_1 w punktach A'', B'', C'', D'' , będących drugimi rzutami wierzchołków A, B, C, D .

Odcinki $A+A'' = y_1$, $B+B'' = y_2$, $C+C'' = y_3$, $D+D'' = y_4$ są równe odległościom pierwszych rzutów punktów A, B, C, D od osi x -ów. (Dlaczego?).

Jeżeli zatem odetniesz spółrzędne y_1, y_2, y_3, y_4 na prostej h_1 , to otrzymasz rzuty A', B', C', D' wierzchołków podstawy $ABCD$.

Proste, wykreślone przez drugie rzuty A'', B'', C'', D'' , równoległe do osi x -ów, przedstawiają kierunki rzutów pionowych krawędzi bocznych; przecinają one prostą v_2 w drugich rzutach E'', F'', G'', H'' wierzchołków drugiej podstawy $EFGH$.

Proste, wykreślone przez pierwsze rzuty A', B', C', D' , równoległe do osi x -ów, przedstawiają kierunki pierwszych rzutów krawędzi bocznych; przecinają one prostą h_2 w pierwszych rzutach E', F', G', H' wierzchołków drugiej podstawy.

Co do widocznych i niewidocznych krawędzi zorjentować się można według kwadratu $A+B+C+D+$.

2) Płaszczyzna tnąca przecina krawędzie boczne graniastosłupa w punktach 1, 2, 3, 4, których pierwsze rzuty są w punktach przecięcia się śladu h z pierwszymi rzutami tych krawędzi.

Drugie rzuty tych punktów znajdują się tam, gdzie odnoszące, poprowadzone przez 1', 2', 3', 4', przecinają drugie rzuty odpowiednich krawędzi bocznych.

Aby otrzymać rzeczywistą wielkość figury przekroju, należy płaszczyznę tnącą obrócić dokoła prostej h o 90° tak, aby się nakryła z pierwszą płaszczyzną rzutów. Przekrój 1 2 3 4 zejdzie się z czworobokiem $1^0 2^0 3^0 4^0$, który otrzymamy, jeżeli w rzutach 1', 2', 3', 4' wykreślimy prostopadłe do h i na nich odetniemy odległości z_1, z_2, z_3, z_4 rzutów pionowych 1'', 2'', 3'', 4'' od osi x -ów.

63. Ćwiczenia.

1) Model prostopadłościanu o krawędziach 2 cm, 3 cm, 5 cm — trzymaj tak, aby jego podstawa spoczywała na pierwszej płaszczyźnie rzutów.

Wykreśl jego rzuty i rzuty figury przekroju, jeżeli:

a) prostopadłościan ma dwie ściany, równoległe do pierwszej płaszczyzny rzutów; płaszczyzna tnąca łączy środki krawędzi podstawowych. [Por. rys. 65];

b) krótsze krawędzie podstawowe tworzą z osią x ów kąt 45° ; płaszczyzna tnąca łączy środki dwóch przeciwległych krawędzi podstawy górnej ze środkami dwóch krawędzi bocznych. [Por. rys. 66].

2) Ten sam model prostopadłościanu trzymaj tak, aby podstawa jego dotykała jedną krawędzią drugiej płaszczyzny rzutów, druga zaś krawędź tej podstawy była odległa od drugiej płaszczyzny rzutów na 1 cm.

Wykreśl rzuty tego prostopadłościanu, a nadto rzuty jego przekroju, jeżeli płaszczyzna tnąca jest równoległa do drugiej płaszczyzny rzutów w odstępnie 3 cm!

3) Wykreślić rzuty sześcienu o krawędzi $a = 6$ cm, jeżeli:

a) dotyka jedną ścianą pierwszej płaszczyzny rzutów;

b) dotyka jedną ścianą drugiej płaszczyzny rzutów;

c) ma dwie ściany prostopadłe do pierwszej płaszczyzny rzutów;

d) ma dwie ściany prostopadłe do drugiej płaszczyzny rzutów;

e) ma dwie ściany prostopadłe do osi x -ów.

4) Równoległościan prosty ma za podstawę romb o przekątnych $p = 4$ cm, $q = 6$ cm; wysokość prostopadłościanu wynosi 7 cm. Równoległościan przecina płaszczyznę łączącą środki dwóch przeciwległych boków podstawy górnej ze środkami dwóch krawędzi bocznych.

Wykreślić rzuty równoległościanu i figury przekroju, jeżeli równoległościan:

a) dotyka podstawą pierwszej płaszczyzny rzutów;

b) dotyka podstawą drugiej płaszczyzny rzutów;

c) płaszczyzny jego podstaw są prostopadłe do pierwszej płaszczyzny rzutów;

d) płaszczyzny jego podstaw są prostopadłe do drugiej płaszczyzny rzutów;

e) płaszczyzny jego podstaw są prostopadłe do osi x -ów.

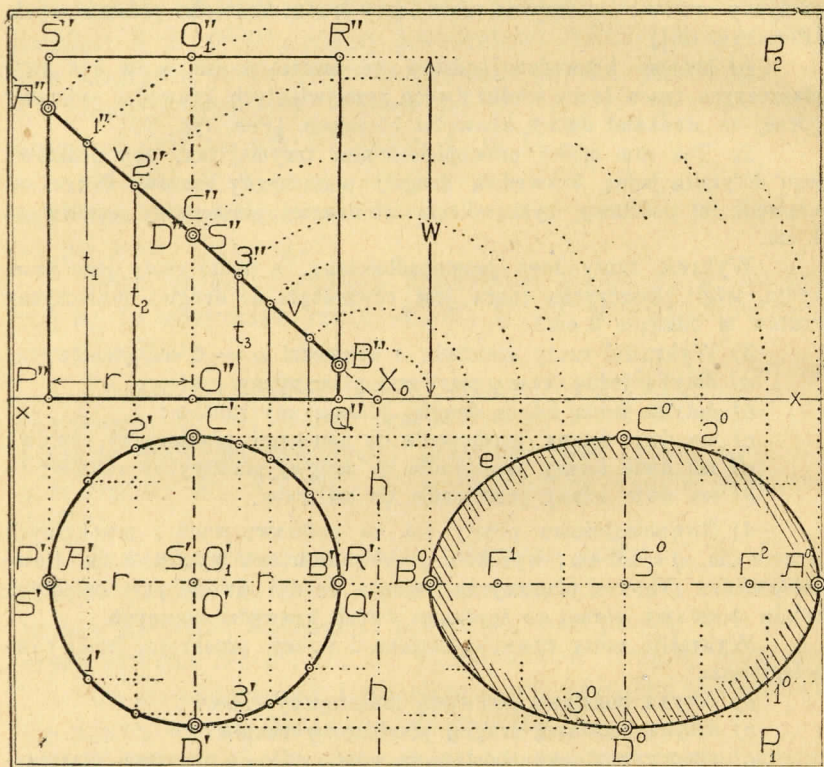
5) Narysuj rzuty równoległościanu pochyłego, który podstawą prostokątną, o bokach 3 cm i 4 cm, dotyka drugiej płaszczyzny rzutów, a którego krawędzie boczne, długie na 8 cm, są równoległe do pierwszej płaszczyzny rzutów; odległość obu podstaw wynosi 6 cm.

6) Zbuduj model dowolnego równoległościanu, ustaw go podstawą na pierwszej płaszczyźnie rzutów i narysuj jego rzuty, a nadto rzuty jego przekroju płaszczyzną, równoległą do drugiej płaszczyzny rzutów!

7)*) Prosty walec kołowy o promieniu $r = 3$ cm, wysokości w , opiera się podstawą o pierwszą płaszczyznę rzutów. Walec ten przecina płaszczyzną, prostopadłą do drugiej płaszczyzny rzutów!

Wykreślić rzuty walca i przekroju, a następnie wykreślić prawdziwą wielkość tego przekroju. [Rys. 70].

Wskazówka. 1) Zarys pierwszego rzutu walca stanowić będzie koło, zakończone promieniem r . Zarys drugiego rzutu stanowić będzie prostokąt o bokach $2r$ i w . Wykreślenie zatem rzutów tego walca nie przedstawia najmniejszych trudności.



Rys. 70

2) Niech h i v będą śladami drugiej płaszczyzny rzucającej, która przecina pobocznice walca podług krzywej e . Krzywą e można uważać:

a) za miejsce geometryczne punktów $1, 2, 3, \dots$ w których płaszczyzna tnąca przecina poszczególne tworzące walca $t_1, t_2, t_3, \dots$;

b) za miejsce geometryczne rzutów ukośnych, w kierunku tworzących, punktów leżących na obwodzie koła podstawy górnej lub dolnej.

Krzywa przekroju e jest zatem elipsą. Rzut pierwszy tej elipsy jest kołem, rzut drugi odcinkiem.

Prawdziwą wielkość tej elipsy otrzymasz, wykonując kład płaszczyzny tnącej na pierwszą płaszczyznę rzutów — sposobem na rys. wskazanym.

II. Rzuty ostrosłupa (i stożka*)

64. Weź na uwagę model ostrosłupa prostego o wysokości w , którego podstawą jest kwadrat $ABCD$ o boku a !

a) Ustaw model podstawą na pierwszej płaszczyźnie rzutów. [Rys. 71].

Gdzie będzie pierwszy rzut podstawy, a gdzie drugi rzut?

Jak się przedstawi pierwszy rzut wysokości ostrosłupa, a jak drugi rzut? W którym z rzutów wystąpi wysokość w rzeczywistej wielkości?

Wskaż pierwsze i drugie rzuty poszczególnych ścian ostrosłupa!

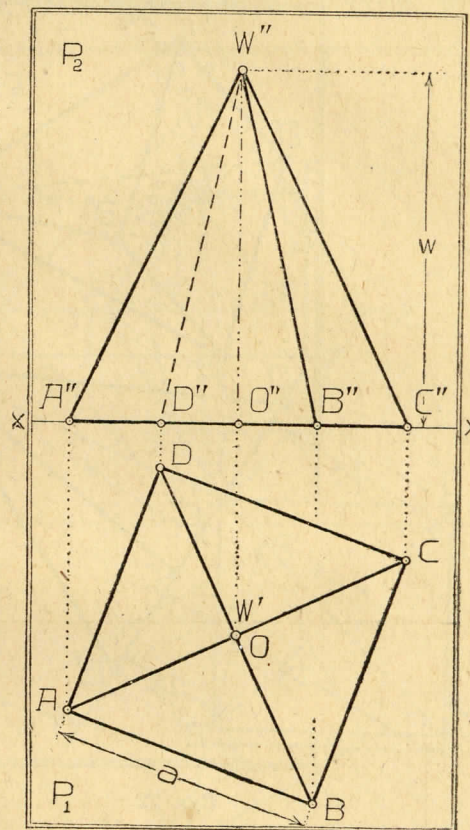
Wskaż te ściany, które w pierwszym rzucie są niewidoczne!

Wskaż te ściany, które w drugim rzucie są niewidoczne!

Jeżeli pierwszy rzut wierzchołka ostrosłupa połączysz liniami prostymi z pierwszymi rzutami wierzchołków podstawy, otrzymasz pierwsze rzuty krawędzi bocznych. Patrząc na ostrosłup z góry, widzisz wszystkie krawędzie boczne; dlatego ich pierwsze rzuty narysujesz liniami pełnymi.

Tak samo, łącząc drugi rzut W'' wierzchołka ostrosłupa z rzutami A'', B'', C'', D'' wierzchołków podstawy, otrzymasz drugie rzuty krawędzi bocznych.

Patrz na ostrosłup z boku w kierunku, prostopadłym do drugiej płaszczyzny rzutów, i wskaż, które krawędzie będą widoczne w drugim rzucie!



Rys. 71

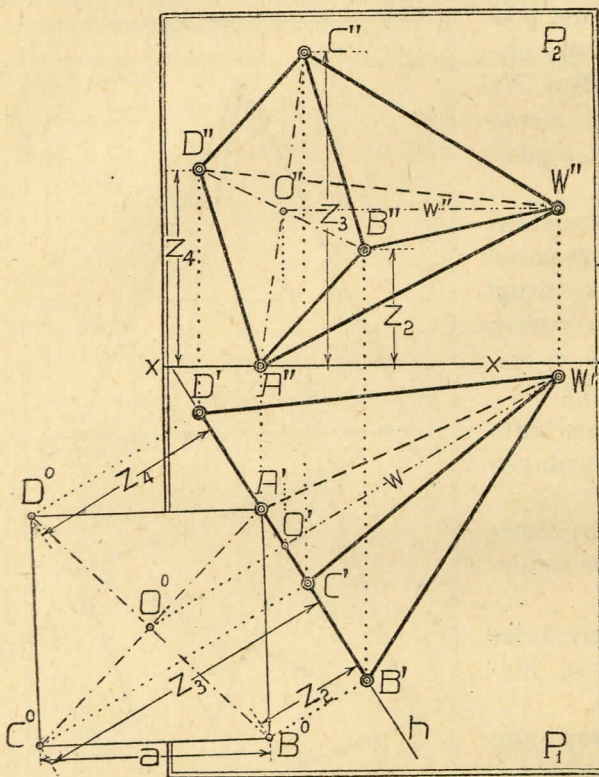
Co stanowi zarys pierwszego rzutu, a co zarys rzutu drugiego ostrosłupa?

b) Trzymaj model ostrosłupa tak, aby płaszczyzna jego podstawy była prostopadła do pierwszej płaszczyzny rzutów, a jeden wierzchołek podstawy dotykał pierwszej płaszczyzny rzutów! [Rysunek 72].

Jakie położenie względem pierwszej płaszczyzny rzutów ma wysokość OW ostrosłupa? Jak się przedstawi pierwszy rzut, a jak drugi rzut tej wysokości?

W którym rzucie wystąpi wysokość w rzeczywistej długości?

Pierwszy i drugi rzut podstawy $ABCD$ wykreślisz sposobem,



Rys. 72

wskazany na rys. 57, obróciwszy płaszczyznę podstawy o 90° dookoła prostej h , wzdłuż której przecina się z pierwszą płaszczyzną rzutów.

Patrząc na ostrosłup w kierunku, prostopadłym do drugiej płaszczyzny rzutów, widzisz całą podstawę; dlatego łączysz drugie rzuty wierzchołków podstawy liniami prostymi.

Wykreśl rzut pierwszy i drugi środka kwadratu O !

Jeżeli z punktu O' wykreślisz prostopadłą do h i na niej odetniesz od O' wysokość w ostrosłupa, to otrzymasz pierwszy rzut wysokości i wierzchołka ostrosłupa. [Dlaczego?].

Drugi rzut wysokości ostrosłupa będzie przechodził przez O'' równolegle do osi x -ów. [Dlaczego?]. Na tej prostej znajdować się będzie drugi rzut wierzchołka W .

Jeżeli W' połączysz z A', B', C', D' , otrzymasz pierwsze rzuty krawędzi bocznych. Tak samo, jeżeli połączysz W'' z A'', B'', C'', D'' , otrzymasz drugie rzuty tych krawędzi.

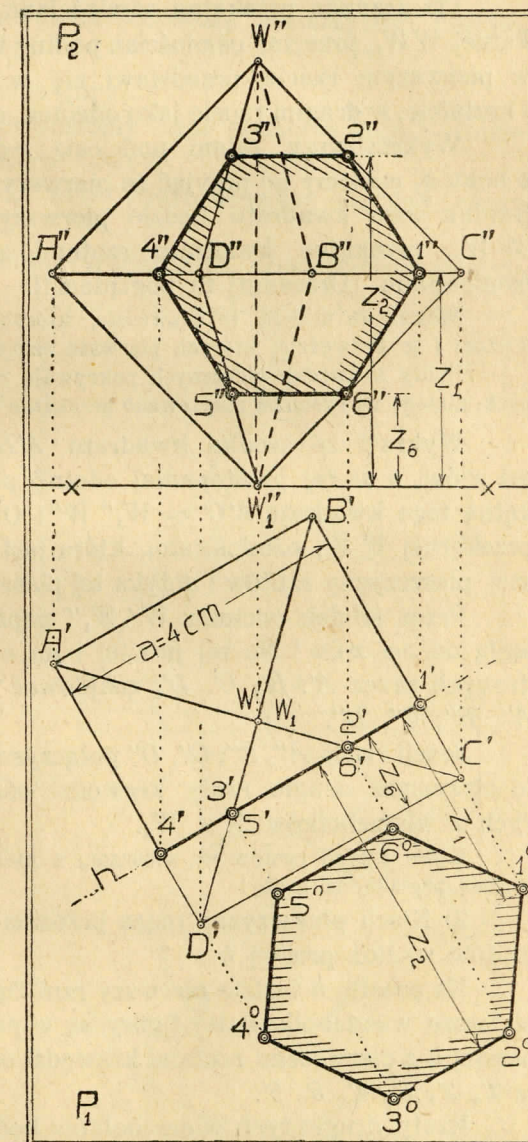
Zbadaj na modelu, które z krawędzi bocznych są widoczne w pierwszym rzucie, a które w drugim rzucie?

Jaką figurą jest zarys pierwszego rzutu, a jaką jest zarys drugiego rzutu ostrosłupa?

65. Zagadnienie. Ośmiościan umiarowy o krawędzi $a = 4 \text{ cm}$ ma jedną przekątną WW_1 prostopadłą do pierwszej płaszczyzny rzutów, a wierzchołek W_1 leży na tej płaszczyźnie.

Wykreślić rzuty ośmiościanu, a nadto rzuty i rzeczywistą wielkość przekroju jego płaszczyzną, prostopadłą do pierwszej płaszczyzny rzutów. [Rys. 73].

Rozwiązanie.
1) Ustaw model ośmio-



Rys. 73

ścianu przekątną WW_1 prostopadle do pierwszej płaszczyzny rzutów!

Pierwszy rzut przekątnej WW_1 będzie punktem, rzut drugi odcinkiem, prostopadłym do osi x -ów i równym tej przekątnej. (Dlaczego?).

Płaszczyzna przekątna ośmiościanu, prostopadła do przekątnej WW_1 , przecina ośmiościan podług kwadratu $ABCD$, który w pierwszym rzucie przedstawi się w prawdziwej wielkości i kształcie, w drugim rzucie jako odcinek, równoległy do osi x -ów.

Wykreśliwszy zatem pod osią x -ów kwadrat $A'B'C'D'$ o boku a , możemy go przyjąć za pierwszy rzut kwadratu $ABCD$. Środek tego kwadratu będzie pierwszym rzutem przekątnej WW_1 , przekątne kwadratu rzutami co czterech krawędzi ośmiościanu. [Uzasadnij to poglądem!].

Wskaż na modelu te krawędzie, których pierwsze rzuty są widoczne, i te krawędzie, których pierwsze rzuty są niewidoczne!

Rzuty krawędzi widocznych pokrywają rzuty krawędzi niewidocznych, dlatego na rysunku narysowano przekątne kwadratu liniami pełnymi.

Wykreśl ze środka kwadratu $A'B'C'D'$ prostopadłą do osi x -ów, a na tej prostopadłej odetnij powyżej osi x -ów przekątną tego kwadratu $A'C' = W_1'' W''$! Otrzymasz rzut pionowy przekątnej WW_1 ośmiościanu, która jest prostopadła do pierwszej płaszczyzny rzutów i dotyka tej płaszczyzny w punkcie W_1 .

Przez środek odcinka $W'' W_1''$ poprowadź prostą, równoległą od osi x -ów! Na tej prostej i na odnoszących, poprowadzonych przez A', B', C', D' , znajdować się będą drugie rzuty A'', B'', C'', D'' .

Jeżeli rzuty A'', B'', C'', D'' połączysz z rzutami W'' i W_1'' , to otrzymasz drugie rzuty krawędzi ośmiościanu, wychodzących z wierzchołków W i W_1 .

Które z tych rzutów są widoczne, a które niewidoczne, osądź za pomocą poglądu na bryłę!

2) Niech płaszczyzna tnąca przecina pierwszą płaszczyznę rzutów wzdłuż prostej h .

Na prostej h będzie pierwszy rzut figury przekroju. Rzuty pierwsze wierzchołków tej figury są w punktach przecięcia się prostej h z pierwszymi rzutami krawędzi ośmiościanu; oznaczmy je $1', 2', 3', 4', 5', 6'$.

Rzuty drugie tych wierzchołków będą punktami przecięcia się prostopadłych do osi x -ów, wykreślonych przez $1', 2', 3', 4', 5', 6'$, z drugimi rzutami odpowiednich krawędzi ośmiościanu.

Łącząc wierzchołki figury przekroju, otrzymamy jej boki.

Rzeczywistą wielkość figury przekroju otrzymamy, jeżeli wykonamy kład płaszczyzny tnącej na pierwszą płaszczyznę rzutów i narysujemy w znany sposób wielokąt $1^0 2^0 3^0 4^0 5^0 6^0$.

66. *) Ustaw model prostego stożka kołowego o promieniu r , wysokości w , podstawą na pierwszej płaszczyźnie rzutów. [Rys. 74]!

a) Patrz na stożek z góry!

Gdzie będzie rzut poziomy koła podstawowego? Gdzie padnie rzut poziomy wierzchołka?

Widzisz, że obwód koła podstawowego stanowi zarys pierwszego rzutu stożka.

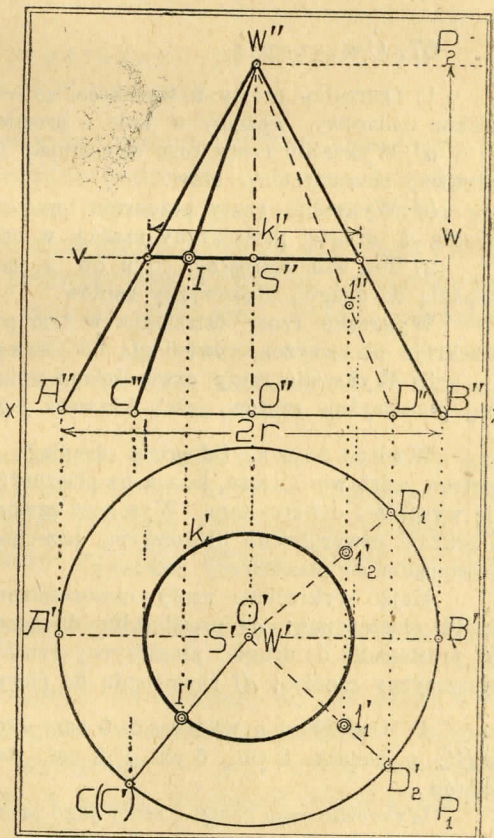
Patrz na stożek z boku, w kierunku, prostopadłym do drugiej płaszczyzny rzutów!

Wyobraź sobie płaszczyznę, poprowadzoną przez wierzchołek stożka W , równoległą do pierwszej płaszczyzny rzutów!

Płaszczyzna ta przecina stożek podług trójkąta WAB , którego dwoma bokami są tworzące WA i WB , trzecim bokiem średnica koła podstawowego AB .

Płaszczyzna trójkąta WAB dzieli stożek na dwie części, na część widoczną i na część niewidoczną. Rzut drugi tego trójkąta stanowi zarys drugiego rzutu stożka.

Czy drugi rzut $W'' A'' B''$ trójkąta WAB jest równy temu trójkątowi? (Dlaczego?)



Rys. 74

Czy drugi rzut $W''O''$ wysokości stożka jest równy tej wysokości? (Dlaczego?)

b) Na rysunku 74 przyjęto pierwszy rzut $W'C'$ tworzącej WC i wyznaczono drugi rzut $W''C''$ tej tworzącej. Objasnij tę konstrukcję!

Na tym rysunku przyjęto drugi rzut I'' punktu I , leżącego na powierzchni stożka i wyznaczono pierwszy rzut tego punktu. Objasnij konstrukcję! Ile otrzymano rzutów pierwszych?

Przetnij stożek płaszczyzną, równoległą do pierwszej płaszczyzny rzutów! Przekonaj się, że przekrój ten jest kołem k_1 , i wyznacz rzuty tego koła! [Rys. 74].

Objasnij na tym rysunku konstrukcję rzutu pierwszego i drugiego punktu I , w którym tworząca stożka WC przecina koło k_1 !

67. Ćwiczenia.

1) Ostrosłup prosty o wysokości $w = 6$ cm ma za podstawę sześciokąt umiarowy, wpisany w koło o promieniu $r = 2,5$ cm.

a) Wykreślić rzuty tego ostrosłupa, jeżeli podstawa jego leży na pierwszej płaszczyźnie rzutów.

b) Wykreślić rzuty przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną, równoległą do drugiej płaszczyzny rzutów w odstępie 3 cm.

2) Ten sam ostrosłup, co w ćw. 1, ma płaszczyznę podstawy prostopadłą do drugiej płaszczyzny rzutów.

Wykreślić rzuty ostrosłupa w tem położeniu, a nadto rzuty jego przekroju płaszczyzną, równoległą do pierwszej płaszczyzny rzutów.

3) Wykreślić rzuty czworościanu umiarowego, stojącego na pierwszej płaszczyźnie rzutów, jeżeli krawędź jego $a = 5$ cm.

Wskazówka. Odległość drugiego rzutu wierzchołka, przeciwnego podstawie (ściana, leżąca na płaszczyźnie poziomej rzutów), równa się wysokości czworościanu. Wysokość czworościanu wykreślisz zapomocą przekroju czworościanu płaszczyzną, przechodzącą przez krawędź boczną, prostopadłą do płaszczyzny podstawy.

Mając wykreślone rzuty czworościanu, wykreśl rzuty jego przekroju płaszczyzną: a) prostopadłą do pierwszej płaszczyzny rzutów; b) prostopadłą do drugiej płaszczyzny rzutów; c) równoległą do drugiej płaszczyzny rzutów; d) równoległą do pierwszej płaszczyzny rzutów!

4) Ostrosłup o wysokości 6 cm, którego podstawą jest trójkąt ABC o bokach 5 cm, 6 cm i 8 cm, stoi na pierwszej płaszczyźnie rzutów.

Wykreślić jego rzuty i rzuty jego przekrojów płaszczyznami, które są równoległe do pierwszej płaszczyzny rzutów w odległościach co 2 cm!

5) Przedstawić rzuty poziome i pionowe linii równych poziomów na ośmiościanie umiarowym o krawędzi $a = 6$ cm, jeżeli ośmiościan ma względem płaszczyzn rzutów takie położenie, jak na rys. 73.

6) Przy pomocy rys. 36 narysuj rzut pierwszy i drugi sześciianu umiarowego o krawędzi $a = 3$ cm, jeżeli jedna przekątna tego sześciianu jest prostopadła do pierwszej płaszczyzny rzutów!

7*) Wykreśl pierwszy i drugi rzut kuli o promieniu $r = 6$ cm, jeżeli współrzędne środka są: $y_1 = 5$ cm, $z_1 = 6$ cm!

a) Wykreśl rzuty kilku przekrojów kuli, równoległych do pierwszej płaszczyzny rzutów!

b) Wykreśl rzuty kilku przekrojów kuli, równoległych do drugiej płaszczyzny rzutów!

c) Wykreśl rzuty przekroju kuli płaszczyzną, przechodzącą przez środek kuli prostopadłą do pierwszej płaszczyzny rzutów!

d) Wykreśl rzuty przekroju kuli płaszczyzną, przechodzącą przez środek kuli prostopadłą do drugiej płaszczyzny rzutów!

III. Rzuty najprostszych przedmiotów technicznych.

68. a) Przy wykreślaniu rzutów przedmiotów technicznych przyjmujemy płaszczyznę podstawy tych przedmiotów za pierwszą płaszczyznę rzutów. Pierwsza płaszczyzna rzutów ma zatem położenie poziome; nazywamy ją wtedy płaszczyzną poziomą rzutów, a pierwszy rzut rzutem poziomym.

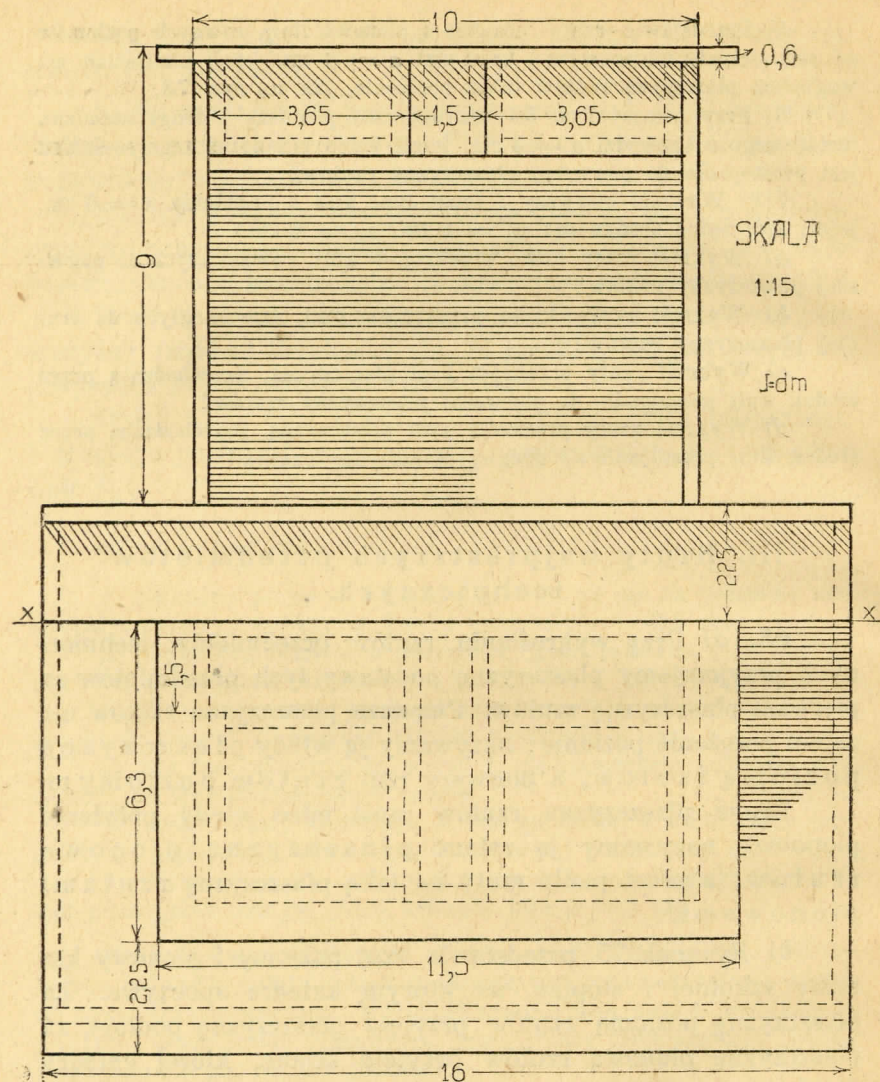
Druga płaszczyzna rzutów musi mieć wtedy położenie pionowe; nazywamy ją zatem płaszczyzną pionową rzutów, a prostopadłe rzuty na taką płaszczyznę rzutami pionowymi.

b) Rysunek 75 przedstawia rzut poziomy i pionowy katedry szkolnej i stopnia, na którym katedra spoczywa. Za płaszczyznę poziomą rzutów przyjęto płaszczyznę podłogi, za płaszczyznę pionową rzutów przyjęto ścianę, której katedra dotyka.

Wskaż na rysunku poszczególne wymiary katedry, szuflad, płyty, stopnia!

Zauważ, że każda długość (równoległa do osi x -ów) występuje w prawdziwej długości w rzucie poziomym i pionowym, każda szerokość występuje w prawdziwej wielkości tylko w rzucie poziomym, a każda wysokość tylko w rzucie pionowym!

Przerysuj ten rysunek w skali 1:10, 1:20!



Rys. 75

69. Ćwiczenia.

1) Wykreśl w stosownej skali rzut poziomy i pionowy: a) pieca; b) szafy; c) całej klasy, zaznaczając na nich rzuty okien, drzwi, rozmieszczenie przedmiotów.

2) Na rysunku 76 jest dany rzut poziomy i pionowy domku partelowego — czyli plan domku!

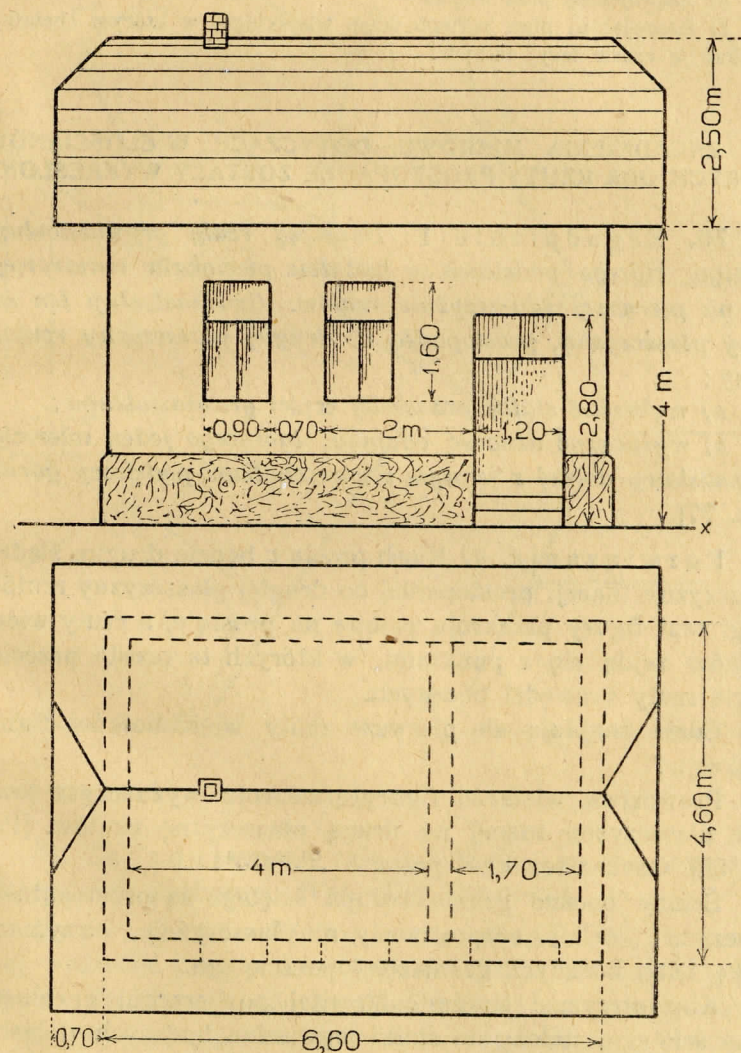
Odczytaj z tego planu szerokość, długość i wysokość domku!

Odczytaj wymiary ubikacji, grubości muru, okapu [wysunięcie dachu poza mur], wysokość dachu, wymiary okien!

3) Narysuj plan znanego ci domu, uzyskawszy wymiary tego domu przez zmierzenie go na miejscu!

4) Narysuj rzut poziomy i pionowy [plan] ubikacji, w których mieszkasz!

Podziałka
1:100



Rys. 76

5) Narysuj plan katedry, biurka, ławki, pieca!

6) Jeżeli rysujemy plan jakiegoś przedmiotu z głowy, to mówimy, że projektujemy plan tego przedmiotu.

a) Zaprojektuj plan ławki szkolnej, w której byłoby ci wygodnie siedzieć!

b) Zaprojektuj plan półki na książki!

c) Zaprojektuj plan stołu do nauki!

d) Zaprojektuj plan jadalni, sypialni!

e) Zaprojektuj plan biurka!

f) Zaprojektuj plan takiego domu wiejskiego, w którym chciałbyś mieszkać w czasie feryj letnich!

§. 7. ZAGADNIENIA MIAROWE, DOTYCZĄCE WIEŁOŚCIANÓW, KTÓRYCH OBA RZUTY PROSTOPADŁE ZOSTAŁY WYKREŚLONE.

70. Zagadnienie 1. Dane są rzuty graniastostupa prostego, którego podstawa w kształcie pięciokąta umiarkowanego leży na pierwszej płaszczyźnie rzutów. Graniastostup ten ściśnamy płaszczyzną, prostopadłą do drugiej płaszczyzny rzutów. Mamy:

a) wykreślić siatkę pozostałej części graniastostupa;

b) wyznaczyć długość odcinka, łączącego jeden wierzchołek podstawy dolnej z jednym z wierzchołków podstawy górnej. [Rys. 77].

Rozwiązania. a) Niech prosta v będzie drugim śladem płaszczyzny tnącej, prostopadłej do drugiej płaszczyzny rzutów. Drugi rzut figury przekroju padnie na prostą v , a rzuty wierzchołków zejdą się z punktami, w których ta prosta przecina drugie rzuty krawędzi bocznych.

Gdzie znajdują się pierwsze rzuty wierzchołków figury przekroju?

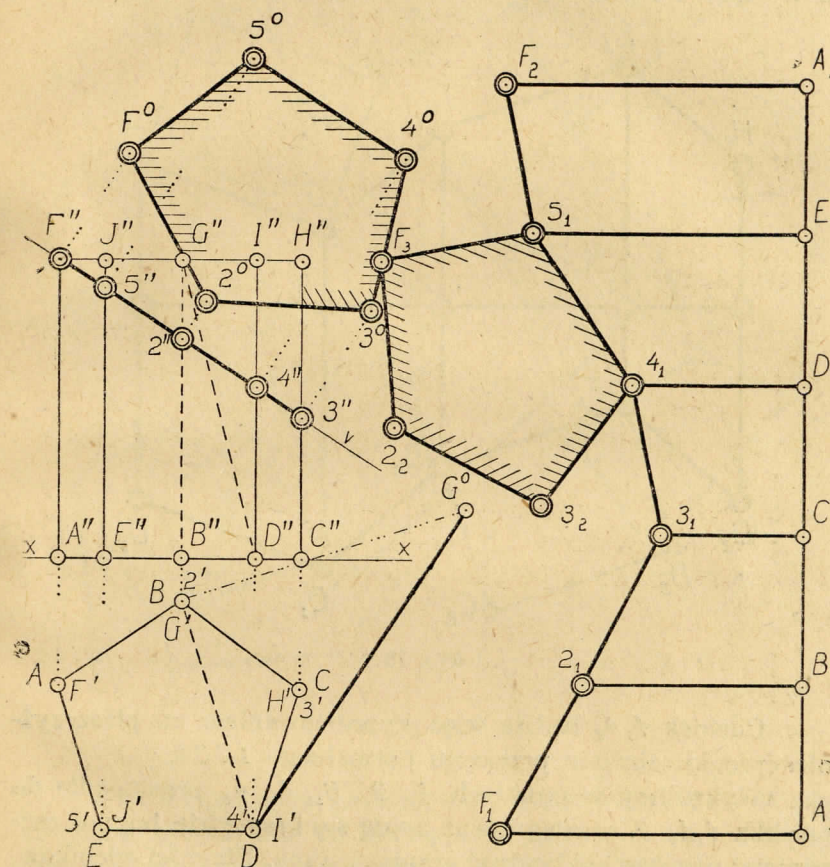
Prawdziwą wielkość figury przekroju wyznaczysz przez kład płaszczyzny tnącej na drugą płaszczyznę rzutów. [Por. rys. 55]. Oznacz ten kład przez $F^0 2^0 3^0 4^0 5^0$!

Ściany boczne graniastostupa ściętego są prostokątami; jeżeli je rozpostrzemy na płaszczyźnie, otrzymamy siatkę ścian bocznych graniastostupa ściętego.

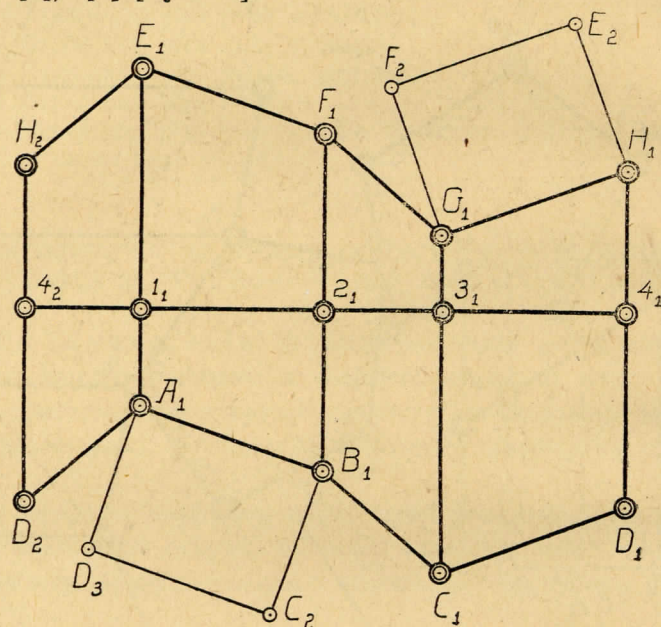
Aby otrzymać siatkę całkowitej powierzchni graniastostupa ściętego, należy do siatki jego ścian bocznych dołączyć podstawę górną $F_5 2_5 3_5 4_5 5_5 \equiv F^0 2^0 3^0 4^0 5^0$ i podstawę dolną graniastostupa.

b) Niech będzie dany odcinek, łączący dwa wierzchołki graniastostupa, przez swe rzuty DG' i $D''G''$.

Prawdziwą długość tego odcinka wyznaczysz, jeżeli wykonasz kład na pierwszą płaszczyznę rzutów trójkąta DGB .



Ponieważ na rys. 68 prawdziwa wielkość takiego przekroju jest już znaleziona w układzie $1+2+3+4+$, przeto należy stąd boki jego odciąć na prostej linii — jako odcinki $1_1 2_1$, $2_1 3_1$, $3_1 4_1$, $1_1 4_2$ [Rys. 78].



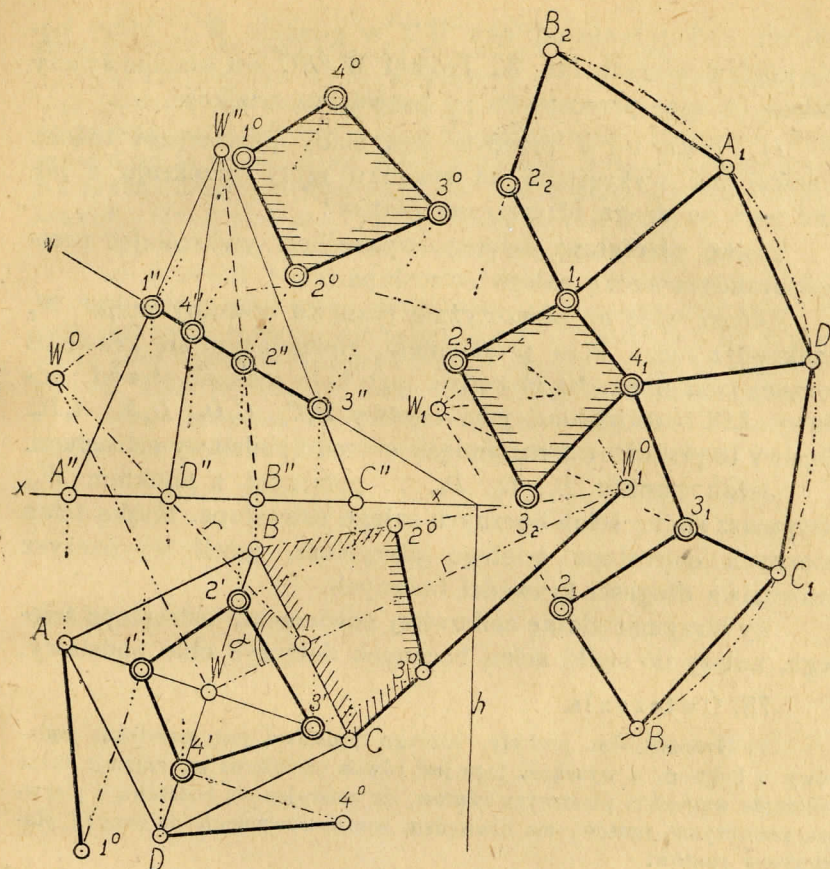
Rys. 78

Odcinek $4_1 4_2$ będzie więc wyprostowaniem na płaszczyźnie rysunku obwodu przekroju normalnego $1 2 3 4$.

Wykreślmy w punktach 1_1 , 2_1 , 3_1 , 4_1 , 4_2 prostopadłe do odcinka $4_1 4_2$. Z prostymi temi zjedną się krawędzie boczne rozwiniętej powierzchni bocznej graniastoslupa. Długości odcinków, na które płaszczyzna tnąca dzieli te krawędzie, odczytamy z drugich rzutów tych krawędzi na rys. 68.

72. Zagadnienie 3. Dane są oba rzuty ostrosłupa prostego, którego kwadratowa podstawa leży na pierwszej płaszczyźnie rzutów.

Wyznaczyć: a) kąt nachylenia do podstawy ścian bocznych; b) prawdziwą wielkość krawędzi bocznych; c) ściąć ten ostrosłup płaszczyzną, prostopadłą do drugiej płaszczyzny rzutów, następnie wykreślić siatkę tak powstałego ostrosłupa ściętego. [Rys. 79].



Rys. 79

Rozwiązanie. a) Poprowadź przez wierzchołek W płaszczyznę, prostopadłą do krawędzi podstawowej BC ! Przetnie ona ostrosłup podług trójkąta, którego jedna połowa jest trójkątem prostokątnym WIW' . Kład tego trójkąta na pierwszą płaszczyznę rzutów jest $W' W^0 I$.

Objasnij, jak wykreślono ten kład!

Kąt ostry α tego trójkąta jest miarą kąta nachylenia ścian bocznych ostrosłupa do podstawy. Dlaczego?

b) Wykonaj kład na pierwszą płaszczyznę rzutów ściany BCW i oznacz go przez BCW_1^0 . Promieniem obrotu r wierzchołek W jest przeciwprostokątna $W^0 I$ trójkąta $WW^0 I$. Jeżeli zatem zakreślisz promieniem r koło ze środka I , to koło to

przetnie przedłużenie odcinka WI w punkcie W_1^0 , który będzie kładem wierzchołka W . Trójkąt W_1^0BC jest kładem ściany bocznej, a więc przedstawia jej prawdziwą wielkość.

c) Proste v i h przedstawiają ślady płaszczyzny tnącej. Objaśnij jak wykreślono na rysunku rzuty przekroju, a jak kład jego na drugą płaszczyznę rzutów!

Siatkę ostrosłupa ściętego wykreślisz, wykreślając przede wszystkim siatkę całego ostrosłupa.

Obierz więc na płaszczyźnie rysunku dowolny punkt W_1 i zakresł z niego koło promieniem, równającym się krawędzi bocznej ostrosłupa. Na obwodzie tego koła rozepnij obwód podstawy $ABCD$ ostrosłupa, jako cięciwy B_1C_1 , C_1D_1 , D_1A_1 , A_1B_1 . Cięciwy te przedstawia rozwinięcie obwodu podstawy ostrosłupa.

Jeżeli punkty B_1 , C_1 , D_1 , ... połączysz z punktem W_1 , otrzymasz siatkę ścian bocznych całego ostrosłupa. Siatkę ścian bocznych ostrosłupa ściętego otrzymasz, jeżeli wyznaczysz prawdziwe długości krawędzi bocznych.

By otrzymać siatkę całkowitej powierzchni ostrosłupa ściętego, należy do siatki ścian bocznych dołączyć obie podstawy.

73. Ćwiczenia.

1) Graniastosłup pochyły, którego podstawą jest sześciokąt umiarowy o boku a , a wysokość jego jest równa odcinkowi w , zajmuje takie położenie względem płaszczyzn rzutów, że opierając się podstawą o pierwszą płaszczyznę rzutów, ma krawędzie boczne równoległe do drugiej płaszczyzny rzutów.

Wykreślić rzuty, a następnie siatkę tego graniastosłupa.

[Por. zagadnienie 2 art. 71!].

2) Ostrosłup prosty o wysokości $w = 5$ cm ma za podstawę pięciokąt umiarowy, wpisany w koło o promieniu $r = 3$ cm.

Wykreślić rzuty tego ostrosłupa, jeżeli opiera się podstawą o pierwszą płaszczyznę rzutów, a następnie:

a) Wyznaczyć prawdziwą długość i kąt nachylenia do pierwszej płaszczyzny rzutów krawędzi bocznych; b) wyznaczyć kąt nachylenia do pierwszej płaszczyzny rzutów ścian bocznych; c) zetnij ten ostrosłup płaszczyzną, prostopadłą do drugiej płaszczyzny rzutów i wykreśl następnie siatkę powstałego ostrosłupa ściętego!

3) Przyjmij pierwszy i drugi rzut dowolnego ostrosłupa pochyłego, a następnie wyznacz prawdziwe wielkości ścian bocznych!

Narysuj je obok siebie, a otrzymasz siatkę ścian bocznych tego ostrosłupa! Wyznacz kąty nachylenia do podstawy ścian bocznych!

4) Na rys. 34 b) przedstawiony jest rzut cechowany ostrosłupa ściętego. Przyjmij drugą płaszczyznę rzutów, wykreśl drugi rzut tego ostrosłupa, a następnie wyznacz:

a) długość prawdziwą krawędzi bocznych; b) kąty nachylenia ścian bocznych do podstawy; c) siatkę tego ostrosłupa.

5) Przyjmij rys. 38 b) za pierwszy rzut równoległościanu, stojącego podstawą na pierwszej płaszczyźnie rzutów. Przyjawszy dowolnie drugą płaszczyznę rzutów, prostopadłą do pierwszej, a dowolny odcinek $w = 6$ cm za wysokość tego równoległościanu, wykreśl jego drugi rzut, jak również drugi rzut wielościanu, powstałego przez połączenie środków krawędzi równoległościanu, jak to widzisz na rys. 38 a)!

Wyznacz kąty nachylenia do pierwszej płaszczyzny rzutów:

a) krawędzi bocznych równoległościanu i wielościanu; b) ścian bocznych równoległościanu i wielościanu! c) Wyznacz prawdziwe długości krawędzi bocznych równoległościanu i wielościanu! d) Wykreśl siatkę ścian bocznych równoległościanu i zaznacz na niej te ściany wielościanu, które się mieszczą na ścianach bocznych równoległościanu!

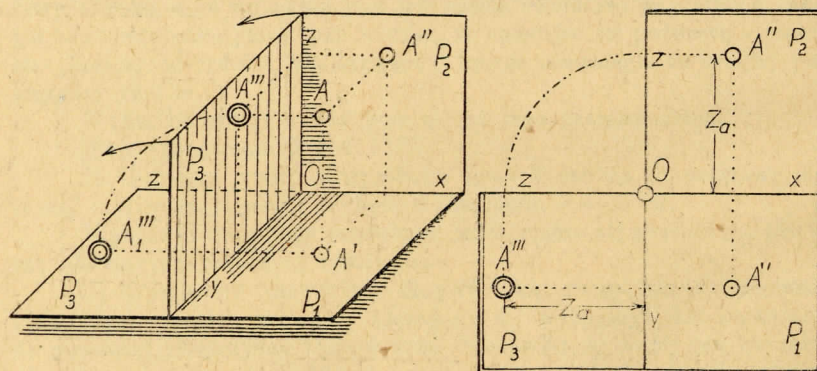
Dołącz następnie stosownie ściany trójkątne wielościanu i obie podstawy, a otrzymasz siatkę całkowitej powierzchni wielościanu!

CZĘŚĆ III

§ 1. RZUTY PROSTOPADŁE NA TRZY PŁASZCZYZNY, WZGLĘDEM SIEBIE PROSTOPADŁE.

74. a) Niech będą dane dwie płaszczyzny rzutów P_1 i P_2 , które są do siebie prostopadłe i przecinają się wzdłuż osi x -ów. Przetnijmy płaszczyzny te trzecią płaszczyzną P_3 , prostopadłą do osi x -ów, przyjmując ją za trzecią płaszczyznę rzutów. [Rys. 80].

Krawędź płaszczyzny P_3 z płaszczyzną P_1 oznaczmy przez y , z płaszczyzną P_2 przez z . Otrzymamy w ten sposób trzy osie x , y , z , względem siebie prostopadłe w punkcie O , w którym przecinają się wszystkie trzy płaszczyzny.



Rys. 80

Mając model trzech do siebie prostopadłych płaszczyzn rzutów [Rys. 80], przyjmijmy w przestrzeni dowolny punkt A i wyznaczmy jego rzut prostopadły na P_1 , oznaczając go przez A' [pierwszy rzut], na P_2 , oznaczając go przez A'' [drugi rzut], w końcu na płaszczyznę P_3 , oznaczając go przez A''' .

Rzut A''' nazywać będziemy trzecim rzutem punktu A , także rzutem bocznym, gdyż trzecia płaszczyzna rzutów P_3 nosi często nazwę „płaszczyzny bocznej“.

Zauważ na modelu, jak również na rys. 80, że:

- 1) Odległość rzutu bocznego A''' od osi y jest równa odległości rzutu drugiego A'' od osi x .
- 2) Odległość rzutu bocznego od osi z równa jest odległości rzutu pierwszego A' od osi x .

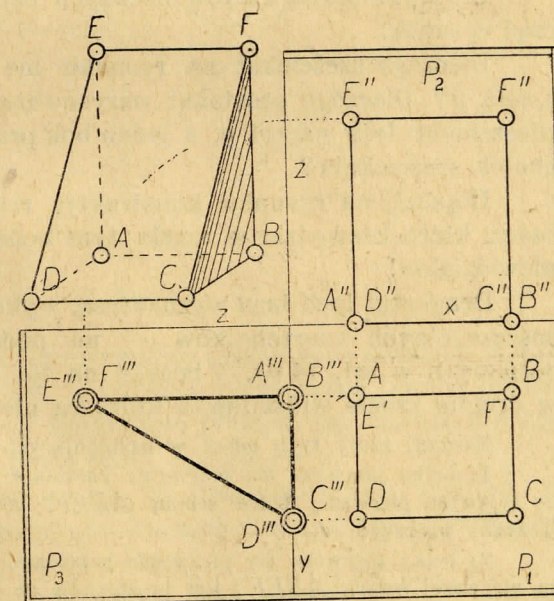
b) Obróćmy płaszczyznę P_3 dokoła osi y tak, by nakryła się z pierwszą płaszczyzną rzutów P_1 ; rzut A''' padnie wtedy na prostą, poprowadzoną z pierwszego rzutu A' , prostopadłą do osi y .

Jeżeli następnie obrócimy płaszczyznę P_1 wraz z płaszczyzną P_3 dokoła osi x -ów tak, by padła na przedłużenie drugiej płaszczyzny rzutów, natenczas oś y padnie na przedłużenie osi z [Rys. 80].

Rysunek 80 wskazuje, w jaki sposób wykreśla się wtedy trzeci rzut A''' punktu A , którego pierwszy i drugi rzut jest dany.

Objasnij na rys. 80 konstrukcję drugiego rzutu punktu A , przyjmując pierwszy i trzeci rzut za dane!

75. Zagadnienie 1. Dany jest pierwszy i drugi rzut klina prostokątnego $ABCDEF$, którego jedna ściana przyprostokątna leży na pierwszej płaszczyźnie rzutów, druga zaś jest równoległa do drugiej płaszczyzny rzutów. Wykreślić rzut tego klina na płaszczyznę boczną, przecinającą pierwszą płaszczyznę rzutów wzdłuż osi y . [Rysunek 81].



Rys. 81

Rozwiązanie. Trzeci rzut podstawy $ABCD$ znajdować się będzie w osi y . Dlaczego?

Krawędź EF , równoległa do osi x , przedstawi się w rzucie bocznym jako punkt $E'''F'''$, którego odległość od osi y równa jest odległości rzutu E'' (lub F'') od osi x .

Jak przedstawi się rzut boczny ściany $ABEF$, a jak ściany BCF ?

Wykreśl rzut boczny tego samego klina, jeżeli ściana BCF będzie równoległa do drugiej płaszczyzny rzutów!

76. Zagadnienie 2. Belka, kształtu umiadowego graniastostupa sześciokonnego, leży na pierwszej płaszczyźnie rzutów tak, że krawędzie boczne są równoległe do drugiej płaszczyzny rzutów. Na tej belce i pierwszej płaszczyźnie rzutów opiera się druga belka, której normalny przekrój jest kwadratem. Wykreślić rzuty tych belek. [Rys. 82]¹⁾.

Rozwiązanie. Wyobraź sobie płaszczyznę boczną, przecinającą pierwszą płaszczyznę rzutów podług osi y ! Rzut boczny pierwszej belki będzie sześciokątem umiadowym, belki drugiej prostokątem. Każdy wierzchołek tych figur będzie łączył rzuty boczne co dwóch wierzchołków belek. Dlaczego?

Od wykreślenia rzutów bocznych belek należy zatem zacząć rysunek.

Dlaczego sześciokąt na rysunku ma jeden bok wspólny z osią y ? Dlaczego prostokąt narysowano tak, że jeden jego wierzchołek leży na osi y , a jeden bok przechodzi przez wierzchołek sześciokąta?

Objaśnij na rysunku konstrukcję rzutu pierwszego! Zaznacz, które krawędzie w rzucie tym będą widzialne, a które niewidzialne!

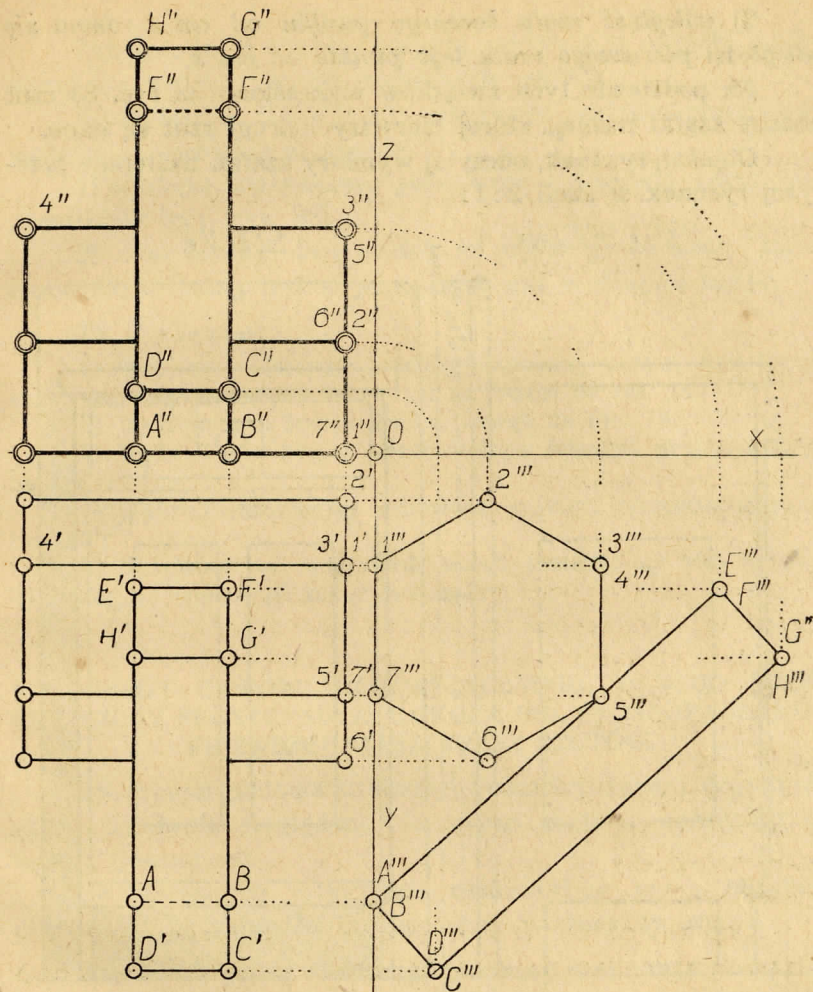
Drugi rzut tych brył wyznaczysz, wykreślając drugie rzuty poszczególnych wierzchołków — na podstawie właściwości, poznanych w art. 74 a), i bacząc na to, które krawędzie są w drugim rzucie widzialne, a które są niewidzialne!

Narysuj rzuty tych belek w następujących położeniach:

1) belka pierwsza ma pierwotne położenie, belka zaś druga opiera się tylko na pierwszej belce ścianą $ABEF$, będąc równoległą do płaszczyzny bocznej;

2) belka pierwsza ma pierwotne położenie, belka druga opiera się na pierwszej ścianą $ABEF$ i jest prostopadła do płaszczyzny bocznej.

¹⁾ Należy uzmysłowić zagadnienie odpowiednim modelem.



Rys. 82

77. Dotychczas jednoczyliśmy płaszczyznę boczną z pierwszą płaszczyzną rzutów, obracając płaszczyznę boczną dokoła osi y . Możemy jednak zjednoczyć płaszczyznę boczną z drugą płaszczyzną rzutów przez obrót dokoła osi z .

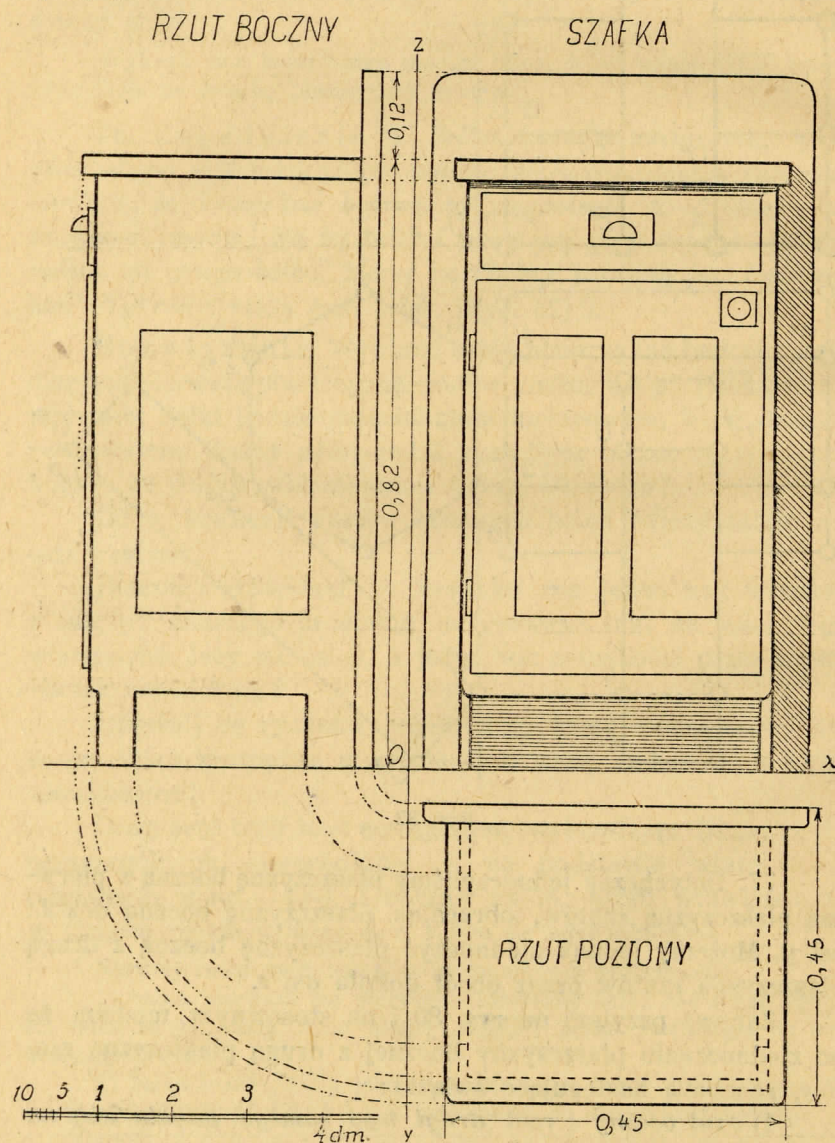
Zauważ przytem na rys. 80 i na stosownym modelu, że po zjednoczeniu płaszczyzny bocznej z drugą płaszczyzną rzutów, zachodzą następujące związki:

1) rzut boczny i rzut drugi tego samego punktu leżą na jednej prostej, prostopadłej do osi z ;

2) odległość rzutu bocznego punktu od osi z równa się odległości pierwszego rzutu tego punktu od osi x .

Na podstawie tych związków wykreślono na rys. 83 rzut boczny szafki nocnej, której pierwszy i drugi rzut są dane.

Objaśnij rysunek, odczytaj wymiary szafki, następnie prze-rysuj rysunek w skali 2:1!



Rys. 83

Zauważ, że w rzucie bocznym widzimy tę ściankę szafki, której nie widzimy w obu pierwszych rzutach.

Wykreślanie zatem rzutu bocznego jakiegoś przedmiotu może mieć dwojakie znaczenie:

1) ułatwia wykreślenie pierwszego i drugiego rzutu tego przedmiotu [por. rys. 82];

2) rzut boczny daje widok tej części przedmiotu, której często nie widzimy ani w pierwszym ani w drugim rzucie.

78. Ćwiczenia.

1) Przyjawszy stosownie płaszczyznę boczną, narysuj rzut boczny katedry, której pierwszy i drugi rzut są podane na rys. 75!

2) Wykreśl rzut boczny domku, danego na rys. 76.

3) Wykreśl rzut boczny graniastosłupa ściętego, przedstawionego na rys. 77!

4) Wykreśl rzut boczny ostrosłupa ściętego, przedstawionego na rys. 79!

5) Przedstaw we wszystkich trzech rzutach: a) piec szkolny, b) ławkę, c) biurko, d) znany ci domek.

§ 2. OBRÓT UTWORU GEOMETRYCZNEGO, DANEGO PRZEZ SWE RZUTY PROSTOPADŁE, DOKOŁA OSI, PROSTOPADŁEJ DO PIERWSZEJ PŁASZCZYZNY RZUTÓW.

79. Celem nadania utworowi geometrycznemu dogodniejszego położenia względem płaszczyzn rzutów, obracamy go dokoła pewnej osi.

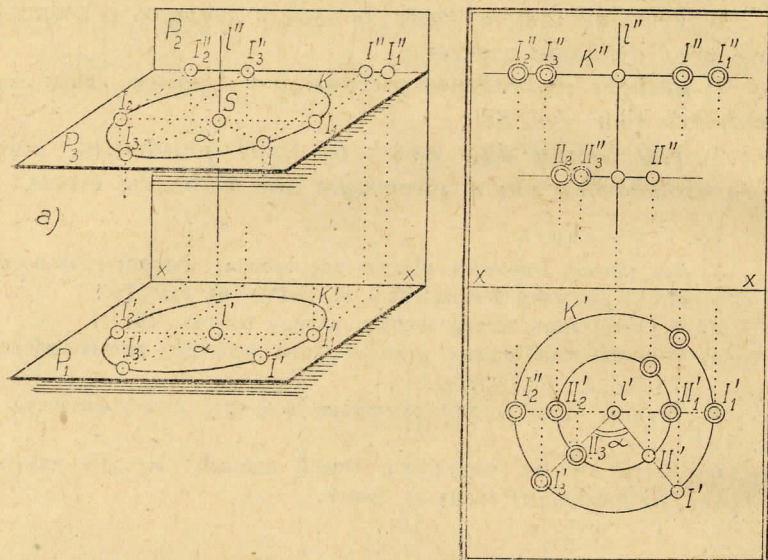
W następnych artykułach zastanowimy się o obrotach dokoła osi, prostopadłej do pierwszej płaszczyzny rzutów.

80. Niech punkt I , którego pierwszy rzut oznaczono przez I' , drugi rzut przez II'' [Rys. 84 a)], obraca się dokoła prostej l , prostopadłej do pierwszej płaszczyzny rzutów. Punkt I opisze wtedy koło w przestrzeni K , którego płaszczyzna P_3 jest równoległa do pierwszej płaszczyzny rzutów, a więc prostopadła do drugiej płaszczyzny rzutów. Oznaczmy punkt przecięcia się osi l z płaszczyzną P_3 przez S . Punkt S będzie właśnie środkiem koła K .

Spostrzegamy przytem następujące właściwości:

1) Gdy punkt I , obracając się w przestrzeni dokoła l , opisuje koło K , to jego pierwszy rzut I' opisuje takie same koło K' na pierwszej płaszczyźnie rzutów, dokoła punktu I' , w którym prosta l przebija tę płaszczyznę.

2) Drugi rzut I'' punktu I opisuje wtedy prostą, równoległą do osi x .



Rys. 84

Zbadaj te właściwości na poglądzie, obracając np. graniastosłup prosty, stojący na pierwszej płaszczyźnie rzutów, dokoła jednej jego krawędzi bocznej!

Wykreśl pierwszy i drugi rzut punktu I , jeżeli go obrócisz dokoła prostej l o kąt $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 50^\circ, 180^\circ, \dots$ zgodnie ze wskazówką zegarka.

81. Zagadnienie 1. Dany jest pierwszy i drugi rzut odcinka AB , wyznaczyć jego prawdziwą długość [Rys. 85].

Rozwiązanie. Pomyślmy sobie, że poprowadziliśmy przez jeden koniec np. B tego odcinka oś l , prostopadłą do pierwszej płaszczyzny rzutów.

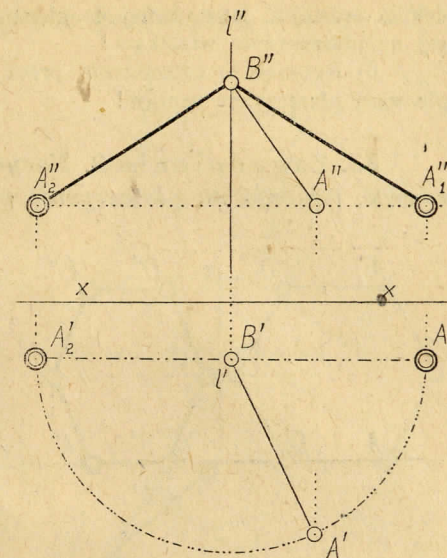
Pierwszy rzut l' tej osi będzie punktem, schodzącym się z B' , drugi rzut l'' będzie prostą, prostopadłą do osi x .

Jeżeli odcinek AB obracać się będzie w przestrzeni dokoła tej osi l , to punkt B będzie w spoczynku, punkt zaś końcowy A opisze koło, którego pierwszy rzut będzie kołem, zakreślonym promieniem $A'B'$ ze środka B' , drugi zaś rzut tego koła będzie prostą, przechodzącą przez A'' , równoległą do osi x .

W każdym więc położeniu, jakie przyjmuje odcinek podczas tego obrotu, możemy z łatwością wykreślić jego rzuty.

Wyobraźmy sobie w końcu, że obróciliśmy odcinek tak, że zajął on położenie równoległe do drugiej płaszczyzny rzutów; wtedy drugi rzut tego odcinka będzie równy samemu odcinkowi (dlaczego?), pierwszy zaś rzut będzie równoległy do osi x .

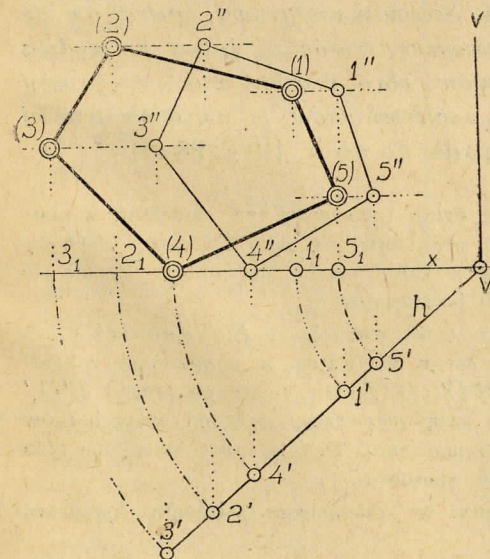
Takie położenie odcinka względem drugiej płaszczyzny rzutów możesz osiągnąć przez obrót jego dokoła osi l — w prawo lub w lewo. Rysunek wskazuje, jak wykreśla się rzuty odcinka w tym szczególnym położeniu.



Rys. 85

Wyznacz prawdziwą wielkość tego odcinka przez kład płaszczyzny rzucającej!

82. Zagadnienie 2. Dane są rzuty wielokąta (pięciokąta), leżącego na płaszczyźnie, prostopadłej do pierwszej płaszczyzny rzutów. Wyznaczyć prawdziwą wielkość tego wielokąta [Rys. 86].



Rys. 86

Wskazówka. 1) Obróć płaszczyznę wielokąta dokoła jej drugiego śladu v tak, by zjednoczyła się z drugą płaszczyzną rzutów. Drugi rzut wielokąta w nowym położeniu będzie równy danemu odcinkowi.

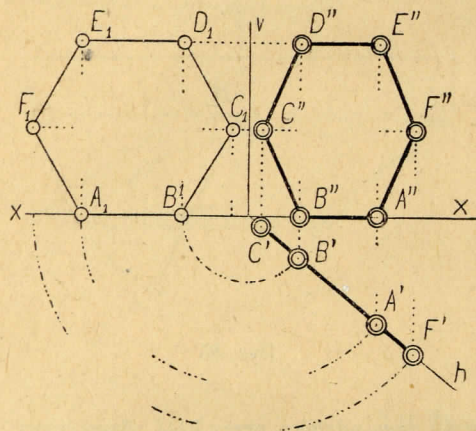
Przeprowadź konstrukcję!

2) Rozwiąż to zagadnienie przez obrót wielokąta

dokoła prostej l , prostopadłej do pierwszej płaszczyzny rzutów, a leżącej na płaszczyźnie wielokąta!

3) Rozwiąż to zagadnienie przez kład płaszczyzny wielokąta na pierwszą płaszczyznę rzutów!

83. Zagadnienie 3. Narysować rzuty sześciokąta umiarowego, leżącego na płaszczyźnie prostopadłej do pierwszej płaszczyzny rzutów, danej przez ślady v i h . [Rysunek 87].



Rys. 87

84. Zagadnienie 4. Sześcian umiarowy, opierający się jedną ścianą o drugą płaszczyznę rzutów a jedną krawędzią o pierwszą płaszczyznę rzutów, obrócić o kąt α dokoła prostej l , przechodzącej przez jeden z wierzchołków, leżących na drugiej płaszczyźnie rzutów, prostopadle do osi x . [Rys. 88 a)].

Wskazówka. Rysujesz drugi i pierwszy rzut sześcianu w pierwotnym położeniu. Drugi rzut przedstawi się jako kwadrat, pierwszy rzut jako prostokąt, obejmujący w sobie cztery prostokąty. Czemu się równają długości poszczególnych prostokątów?

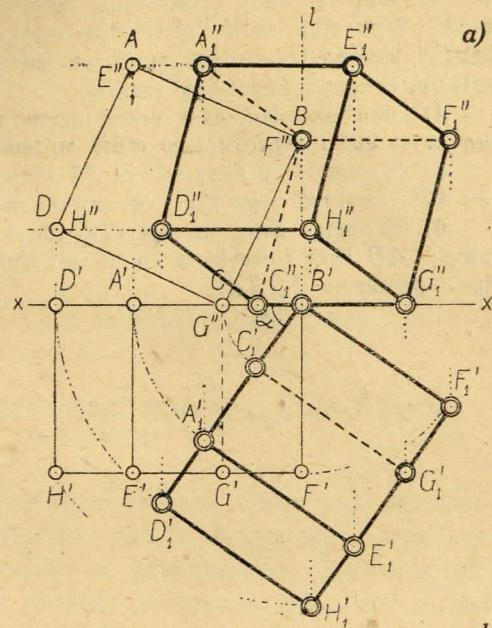
Niech oś obrotu przechodzi przez wierzchołek B . Poprowadź przez B' prostą $B'D_1'$, nachyloną do osi x pod kątem α , a następnie zakresł z B' łuki promieniami $B'A'$, $B'D'$, $B'C'$. Otrzymasz na prostej $B'D_1'$ punkty A_1' , D_1' , C_1' , które będą pierwszymi rzutami wierzchołków kwadratu $ABCD$ w zmienionym położeniu. Drugie rzuty zmienione tych wierzchołków wykreślisz znany sposób.

Podobnie wykreślisz rzuty w zmienionym położeniu kwadratu $EFGH$.

85. Zagadnienie 5. Na rys. 88 b) dane są rzuty graniastopu prostego, o podstawie prostokątnej, którego ściany boczne mają położenie skośne do drugiej płaszczyzny rzutów. Obrócić ten graniastop dokoła krawędzi AE tak, aby jedna jego ściana boczna przedstawiła się w prawdziwej wielkości w drugim rzucie, zaś druga ściana boczna w trzecim rzucie (bocznym).

Uczeń przeprowadzi rozumowania i konstrukcję samodzielnie!

Na ile sposobów możesz wykonać taki obrót?

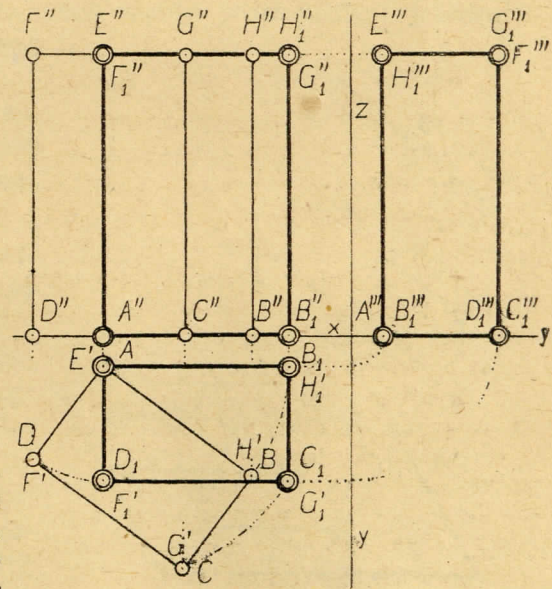


86. Cwiczenia.

1) Na drugiej płaszczyźnie rzutów leży kwadrat i prosta l , prostopadła do osi x . Obrócić kwadrat dokoła prostej l o kąt $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ, \dots$ i wykreślić jego rzuty.

2*) Wykreślić rzuty koła, leżącego na płaszczyźnie prostopadłej do pierwszej płaszczyzny rzutów, jeżeli promień koła $r = 3$ cm, zaś kąt nachylenia płaszczyzny koła do drugiej płaszczyzny rzutów wynosi $\alpha = 30^\circ, 60^\circ, 75^\circ, \dots$

Rozwiąż zadanie to dwiema metodami: za pomocą kładu i obrotu!



Rys. 88

3) Dany jest pierwszy i drugi rzut ostrosłupa prostego, którego podstawą jest sześciokąt umiarkowy, leżący na pierwszej płaszczyźnie rzutów. Ostrosłup ten ścina płaszczyzna, prostopadła do drugiej płaszczyzny rzutów. Wykreślić siatkę ostrosłupa ściętego, wyznaczając prawdziwe wielkości krawędzi bocznych przez ich obrót do położenia równoległego względem drugiej płaszczyzny rzutów.

4) Obróć sześciokąt, dany przez pierwszy i drugi rzut na rys. 88 a), o kąt $\alpha = 90^\circ$ i wykreśl jego rzuty w tem nowem położeniu!

5) Graniastosłup dany na rys. 77 obróć około krawędzi EJ o kąt $\alpha = 30^\circ$ i wykreśl jego rzuty w nowem położeniu!

6) Ostrosłup dany na rys. 79 obróć około wysokości tak, by krawędź AB była równoległa do osi x i wykreśl następnie rzuty ostrosłupa i przekroju 1234!

CZĘŚĆ IV

O RÓWNOLEGLYM RZUCIE UKOŚNYM.

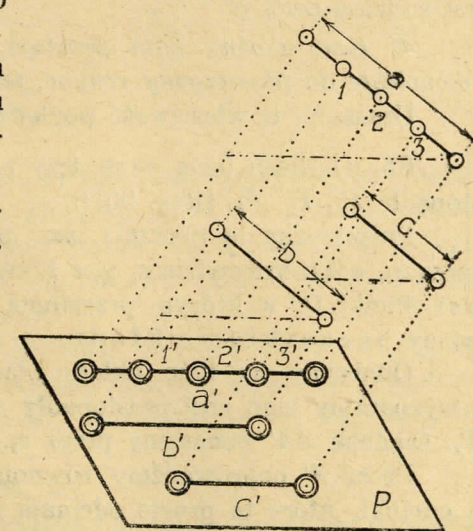
§ 1. ZASADNICZE WŁAŚCIWOŚCI RÓWNOLEGLEGO RZUTU UKOŚNEGO

87. Rzuty prostokątne są znakomitą metodą do przedstawiania rysunkiem przedmiotów, jeżeli chodzi o ich wymiary; podobieństwo jednak kształtów przedmiotów często w tych rzutach zaciera się. Zato wielkie złudzenie kształtów przedmiotu daje nam jego równoległy rzut ukośny na jedną płaszczyznę. Dlatego często, obok rzutów prostokątnych jakiegoś przedmiotu, rysujemy jego rzut ukośny ¹⁾.

W praktyce odbywa się rysowanie równol. rzutu ukośnego na podstawie następujących właściwości:

1° *Rzuty ukośne odcinków równoległych są równoległe.* [Rys. 89].

Uzasadnij tę właściwość poglądem, ustawivszy trzy proste druciki względem siebie równoległe, a ich cienie przy świetle słonecznem niech ci przedstawiają równoległe rzuty ukośne tych odcinków!



Rys. 89

¹⁾ Tu należy powtórzyć „wstęp” na str. 2—7.

Tę właściwość uzasadnia również rysunek 89; objaśnij go!

2° Rzut ukośny odcinka może być mniejszy, większy lub równy temu odcinkowi — zależy to od kąta nachylenia do płaszczyzny rzutów prostych rzucających i odcinka samego.

Uzasadnij tę właściwość poglądem, zmieniając kąt nachylenia prostych rzucających i kąt nachylenia odcinka samego!

Oznaczywszy kąt nachylenia prostych rzucających przez β , zaś kąt nachylenia odcinka przez α , uzasadnij, że dla $\alpha = 0, 180 - 2\beta$ rzut ukośny odcinka równy jest odcinkowi samemu, bez względu na wielkość kąta β !

Stosunek długości rzutu odcinka do długości samego odcinka nazywamy współczynnikiem skrócenia rzutu odcinka.

Zauważ na rys. 89, że $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = q$, to znaczy:

Jeżeli odcinki są względem siebie równoległe, natenczas ich rzuty mają ten sam współczynnik skrócenia.

3° Jeżeli punkt 1 dzieli odcinek a w pewnym stosunku, np. 1:4, to w tym samym stosunku dzieli rzut ukośny 1' tego punktu rzut ukośny a' odcinka a .

Przeprowadź dowód tego twierdzenia według rys. 89!

Jeżeli więc punkt 2 jest środkiem odcinka a , to rzut ukośny 2' jest środkiem rzutu a' .

4° Rzut ukośny kąta prostego, którego oba ramiona są równoległe do płaszczyzny rzutów, jest kątem prostym.

Uzasadnij tę właściwość poglądem! [Por. również rys. 90].

88. a) Niech będą dane trzy płaszczyzny, do siebie prostopadłe P_1, P_2, P_3 . [Rys. 90]¹⁾.

Płaszczyzny te tworzą t. zw. prostokątny układ płaszczyzn, a ich krawędzie x, y, z t. zw. prostokątny układ osi. Punkt O , w którym przecinają się te płaszczyzny, nazywamy początkiem układu.

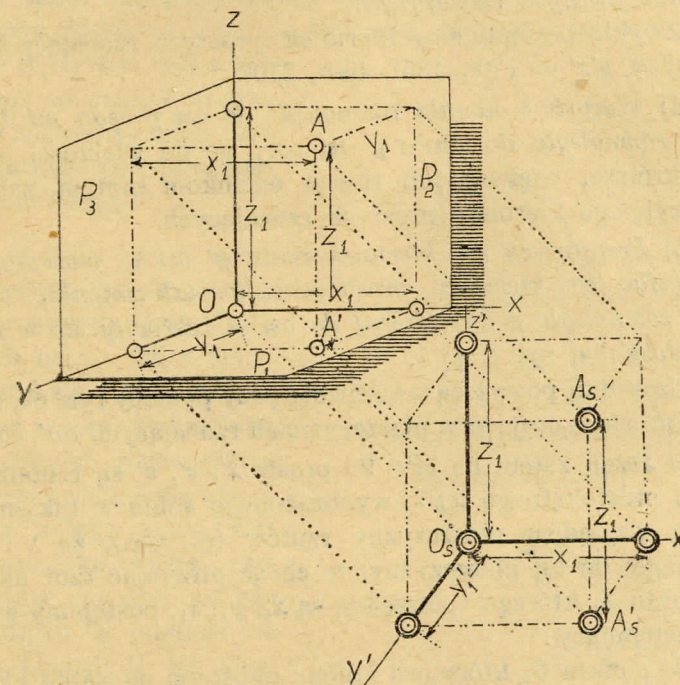
Odnieśmy do tego układu płaszczyzn dowolny punkt A i wyznaczmy jego rzut prostopadły A' na pierwszą płaszczyznę P_1 . Odcinek AA' oznaczmy przez z_1 .

Przez A' poprowadźmy równoległe do osi x i do osi y , a odcinki, które te proste odcinają na tych osiach, oznaczmy przez y_1, x_1 .

¹⁾ Zaopatrzyć się w odpowiedni model.

Zauważ na modelu, że odcinek x_1 jest równy odległości punktu A w przestrzeni od płaszczyzny P_3 , zaś odcinek y_1 odległości tego punktu od płaszczyzny P_2 !

Odcinki x_1, y_1, z_1 nazywamy współrzędnymi punktu A .



Rys. 90

b) Wyobraźmy sobie, że trzymamy powyższy prostokątny układ płaszczyzn tak, że płaszczyzna P_2 ma położenie równoległe względem płaszczyzny rzutów, którą jest np. płaszczyzna rysunku. Z tego wynika, że również osie x i z będą równoległe do płaszczyzny rzutów.

Obrawszy dowolny kierunek w przestrzeni, rzućmy równoległe do niego na płaszczyznę rysunku układ osi x, y, z wraz z punktem A , jego rzutem prostopadłym A' i współrzędnymi x_1, y_1, z_1 .

Zauważymy przytem, że:

1) Jakikolwiek przyjmimy kierunek prostych rzucających, to zawsze rzuty x' i z' osi x i z będą tworzyły z sobą kąt prosty. [Por. 4° art. 87].

2) Rzuty wszystkich odcinków, równoległych do osi x lub do osi z , będą również równoległe do rzutów tych osi i równym odcinkom. [Por. 1^o, 2^o art. 87].

3) Rzut y' osi y będzie miał kierunek zależny od przyjętego kierunku prostych rzucających.

Zwykle przyjmujemy kierunek prostych rzucających tak, by kąt $\angle y'x' = 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 210^\circ$.

4) Wszystkie odcinki równoległe do osi y będą miały swe rzuty równoległe do rzutu y' tej osi; co do wielkości jednak będą krótsze, większe lub równe odcinkom samym, zależnie od przyjętego kierunku prostych rzucających.

5) Przyjawszy raz kierunek rzutu y' osi y , możemy, niezmieniając tego kierunku, proste rzucające tak zmieniać, by odcinki, równoległe w przestrzeni do osi y , skróciły się w żądanym stosunku, np. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1$.

Uzasadnij powyższą właściwość przy pomocy rys. 89, zmieniając proste rzucające w płaszczyznach rzucających $aa', bb', cc'!$

c) Jeżeli zatem na rys. 90 proste x', y', z' są rzutami osi układu prostokątnego xyz , wyobrazonego sobie w takim położeniu względem płaszczyzny rzutów (pł. rys.), że x i z są równoległe do tej płaszczyzny, to chcąc otrzymać rzut ukośny A_s punktu A , którego współrzędne są x_1, y_1, z_1 , postąpimy w sposób następujący:

Od punktu O_s , który jest rzutem ukośnym początku układu O , odcinamy na prostej x' niezmienną współrzędną x_1 , na prostej y' skróconą współrzędną y_1 . Skrócenie współrzędnej y możemy przyjąć z góry, według umowy, np. przyjmujemy tak, by $y_1' = \frac{y_1}{2}$ a zatem $q = \frac{1}{2}$. [Por. 2^o art. 87].

Otrzymamy w ten sposób na prostych x', y' rzuty współrzędnych x_1, y_1 punktu A . Kreśląc z końców tych rzutów równoległe do x' względnie y' , otrzymamy w ich przecięciu się punkt A'_s , który jest rzutem ukośnym punktu A' . [Dlaczego?].

Prosta, wykreślona przez A'_s , równoległa do z' , będzie rzutem prostej $A'A$ w przestrzeni. [Dlaczego?]. Jeżeli zatem na tym rzucie odetniemy od A'_s współrzędną z_1 w naturalnej wielkości, otrzymamy punkt A_s , który jest rzutem ukośnym na płaszczyznę rysunku danego punktu A .

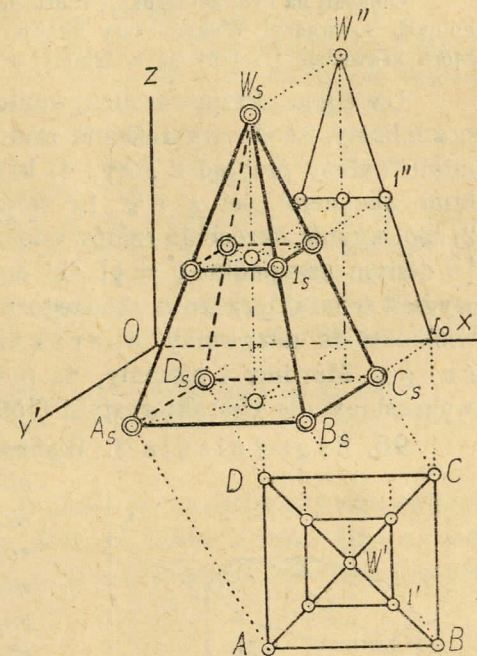
Dlaczego rzut ukośny współrzędnej z_1 jest w danym przypadku równy długości współrzędnej samej?

§ 2. RYSOWANIE RÓWNOLEGŁEGO RZUTU UKOŚNEGO WIEŁOŚCIANÓW

89. Zagadnienie 1. Na rysunku 91 dany jest pierwszy i drugi rzut prostopadły ostrosłupa prostego, którego kwadratowa podstawa leży na pierwszej płaszczyźnie rzutów.

Wykreślić rzut ukośny tego ostrosłupa na drugiej płaszczyźnie rzutów prostokątnych (na płaszczyznę pionową).

Rozwiązanie. Odniesmy ten ostrosłup do prostokątnego układu trzech osi¹⁾. Oś x niech schodzi się z daną osią x , oś z z prostą, wykreśloną na drugiej płaszczyźnie rzutów prostopadłe do x . Oś y należy sobie wyobrazić jako prostą, prostopadłą do obu osi poprzednich w punkcie ich przecięcia się O . Oś y jest zatem prostopadła do płaszczyzny rzutu ukośnego (t. j. do płaszczyzny pionowej).



Rys. 91

Rzuty osi x i z schodzą się z niemi samemi, ukośny rzut osi y niech przedstawia prosta y' , tworząca z osią x kąt 150° .

Wszystkie odcinki, równoległe w przestrzeni do y , jak np. I_0B, DA będą miały swe rzuty ukośne równoległe do y' . Rozchodzi się tylko w jakim stosunku mają się skrócić?

Niech stosunek ten będzie $q = \frac{1}{2}$. W tym przypadku rzut ukośny odcinka I_0B otrzymasz, jeżeli na prostej I_0B_s , równoległej do y' , odetniesz odcinek $I_0B_s = \frac{1}{2} I_0B$.

Rzut ukośny punktu C znajdziesz, jeżeli przez C poprowadzisz równoległą do BB_s , gdyż wtedy $I_0C_s = \frac{1}{2} I_0C$, i t. d.

¹⁾ Zaopatrzyć się w odpowiedni model.

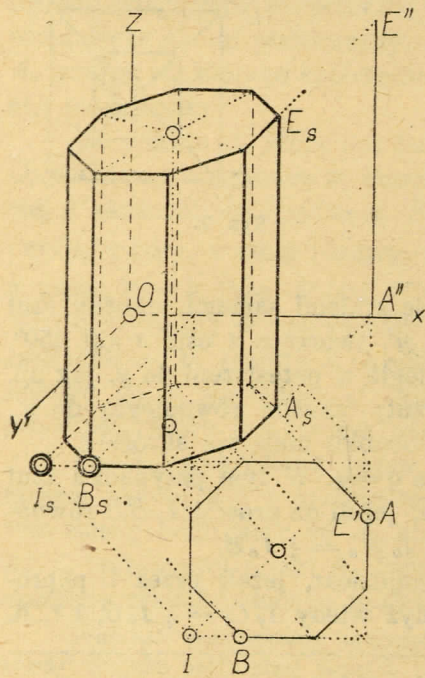
Objaśnij konstrukcję rzutów ukośnych innych wierzchołków kwadratu $ABCD$!

Kwadrat ten przedstawi się w rzucie ukośnym jako równoległobok $A_s B_s C_s D_s$, przyczem środek tego równoległoboku będzie rzutem ukośnym środka kwadratu. [Dlaczego?]

Objaśnij na rys. konstrukcję rzutu ukośnego wierzchołka W , poszczególnych krawędzi! Wskaż rzuty ukośne poszczególnych ścian, rozeznaj, które krawędzie i ściany są widzialne, a które są niewidzialne!

Uwaga. Przy rozwiązywaniu powyższego zagadnienia poznaliśmy, że do wykreślenia rzutu ukośnego jakiegoś przedmiotu należy przyjąć z góry: 1) kąt $y'x'$, zawarty między rzutami ukośnymi osi x i y [w powyższym przypadku 150°]; 2) współczynnik skrócenia rzutów odcinków, równoległych do osi y [w danym przypadku $q = \frac{1}{3}$]. Od doboru tych wielkości zależy wygląd (charakter) rzutu ukośnego danego przedmiotu. Dlatego wielkości te nazywamy charakterystyką rzutu ukośnego. Mówimy i piszemy, że powyższy rzut ukośny został wykreślony dla charakterystyki $(150^\circ, \frac{1}{3})$.

90. Zagadnienie 2. Wykreślić rzut ukośny graniastostupa prostego, którego podstawa jest ośmiokątem umiarkowanym, leżącym na płaszczyźnie, prostopadłej do płaszczyzny rzutu ukośnego, jeżeli charakterystyką rzutu jest: $(135^\circ, \frac{1}{3})$.



Rys. 92

Wskazówka. Płaszczyznę rzutu ukośnego niech będzie płaszczyzna rysunku; płaszczyzna podstawy będzie przeto prostopadłą do płaszczyzny rysunku i z nią się przecinała wzdłuż prostej x .

Wyobraźmy sobie trzecią płaszczyznę, prostopadłą do obu pierwszych, która przecina płaszczyznę rysunku wzdłuż prostej z , płaszczyznę podstawy wzdłuż prostej y .

Otrzymujemy w ten sposób układ prostokątny trzech płaszczyzn i trzech osi, do którego odnosimy dany graniastostup, ustawiając go tak, by krawędzie boczne

były równoległe do osi z , krawędzie zaś podstawowe były częścią równoległe do osi x , częścią do osi y .

Wskaż krawędzie podstawowe, które nie będą równoległe do żadnej z tych osi!

Wyobraźmy sobie teraz, że wykonaliśmy rzut ukośny prostokątnego układu osi x, y, z i graniastostupa. Rzuty osi x i z zjedzą się z niemi samemi (dlaczego?), rzut osi y możemy narysować tak, by tworzył z osią x żądany kąt 135° . [Por. art. 88 b), 3)].

Celem wykreślenia rzutu ukośnego podstawy dolnej graniastostupa, wykonujemy kład jej płaszczyzny dokoła osi x na płaszczyznę rysunku i w kładzie rysujemy tę podstawę w rzeczywistej wielkości.

Z kładu tego przechodzimy do rzutu ukośnego podobnie jak na rys. 91, z tą tylko różnicą, że tutaj wszystkie odcinki, równoległe do osi y , mają się skracać w stosunku 1:3.

Przyjawszy zatem odcinek $A''A_s$, równoległy do osi y' , równy $\frac{1}{3} A''A$, wykreślimy rzuty ukośne wszystkich innych wierzchołków podstawy dolnej przy pomocy równoległych do y' i do prostej $A_s A$.

Jeżeli odcinek $E''A''$ przedstawia rzeczywistą długość krawędzi bocznych graniastostupa, to długość ta nie zmieni się również w rzucie ukośnym. Dlaczego?

Objaśnij samodzielnie dalszą konstrukcję rzutu ukośnego!

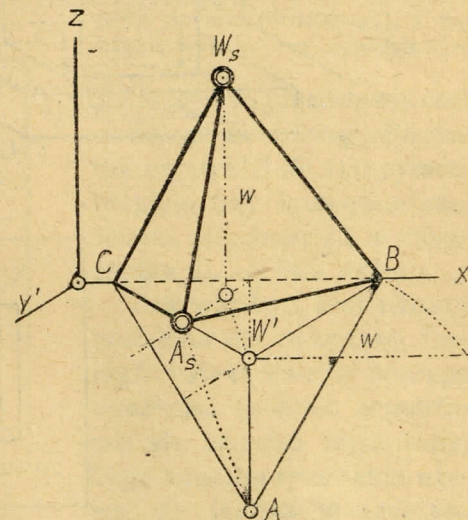
Wykreśl rzut ukośny tego graniastostupa dla tej samej charakterystyki w dwukrotnym powiększeniu!

91. Zagadnienie 3. Dany jest prostopadły rzut poziomy czworoscianu umiarkowanego, którego jedna ściana leży na płaszczyźnie poziomej rzutów, a jedna krawędź schodzi się z osią x -ów.

Wykreślić rzut ukośny tego czworoscianu na płaszczyznę pionową rzutów dla charakterystyki $(150^\circ, \frac{1}{3})$. [Rys. 93].

Wskazówka. Narysuj pod osią x -ów trójkąt równoboczny i uważaj go za rzut poziomy czworoscianu. Punkt przecięcia się wysokości W' będzie rzutem poziomym wierzchołka tego czworoscianu. Wysokość czworoscianu znajdziemy przy pomocy trójkąta prostokątnego $WW'A$.

Wskaż ten trójkąt na modelu czworoscianu!



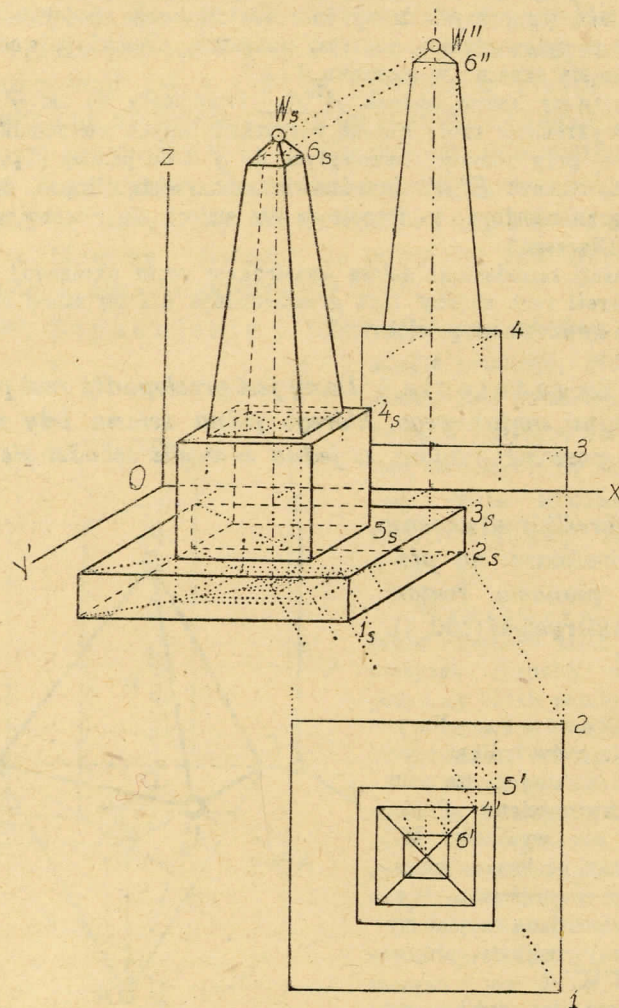
Rys. 93

Przez dowolny punkt osi x -ów kreślimy następnie prostą z , prostopadłą do x , i prostą y' , tworzącą z osią x kąt 150° , przyjmując te proste za rzut ukośny układu prostokątnego osi, do którego odnosimy dany czworościan.

Przedłużmy wysokość AW' trójkąta ABC do przecięcia się z osią x -ów, a przez ten punkt poprowadźmy równoległą do y' . Na tej prostej będzie rzut ukośny wspomnianej wysokości, jednak skrócony w stosunku $\frac{1}{3}$.

Objasnij dalszą konstrukcję rzutu ukośnego tej bryły! Dlaczego wysokość czworościanu występuje w rzucie ukośnym w rzeczywistej wielkości? Przerysuj rysunek w dwukrotnym powiększeniu!

92. Cwiczenie. Na rys. 94 dany jest rzut poziomy i pionowy



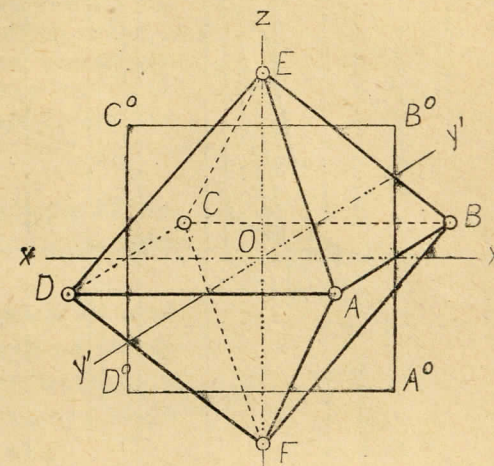
Rys. 94

pomnika. Wykreślić rzut ukośny tego pomnika na płaszczyznę pionową rzutów dla charakterystyki $(150^\circ, \frac{1}{3})$.

Objasnij nasamprzód konstrukcję rzutu ukośnego na rysunku, a następnie narysuj ten rzut samodzielnie w skali 1:2!

93. Jeżeli jakiś wielościan ma trzy do siebie prostopadłe osie symetrii lub trzy prostopadłe, w jednym punkcie schodzące się krawędzie, naten- czas można te proste przyjąć za układ osi, do którego odniesiemy ten wielościan.

a) Na rys. 95 przedstawiono rzut ukośny ośmiościanu umiarowego dla charakterystyki $(150^\circ, \frac{1}{3})$, przyjmując trzy osie symetrii ośmiościanu za osie układu. Przekrój tego ośmiościanu płaszczyzną xy jest kwadratem $A^0 B^0 C^0 D^0$.

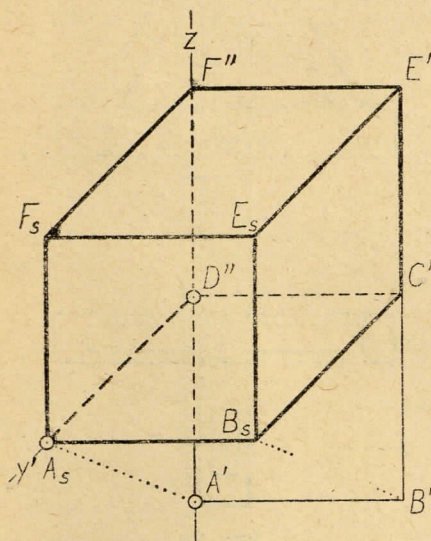


Rys. 95

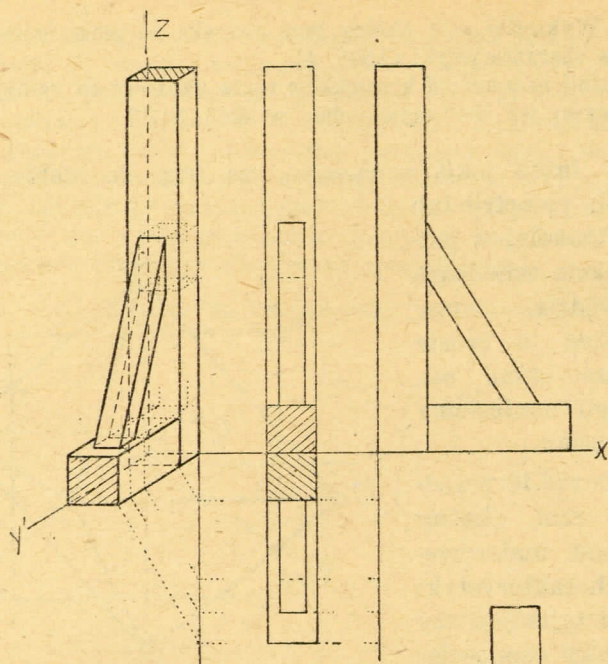
Objasnij ten rysunek przy pomocy modelu (drucianego), a następnie wykonaj rys. samodzielnie!

b) Rys. 96 przedstawia rzut sześciannu umiarowego dla charakterystyki $(135^\circ, 1)$, przyczem przyjęto trzy krawędzie sześciannu, schodzące się w wierzchołku D , za osie układu.

Jak widzimy, rzut ukośny sześciannu dla powyższej charakterystyki nie robi dobrego wrażenia: sześciann przedstawia się zanadto wydłużony. Tego sposobu rysowania używa się jednak w praktyce bardzo często, dla łatwości



Rys. 96



Rys. 97

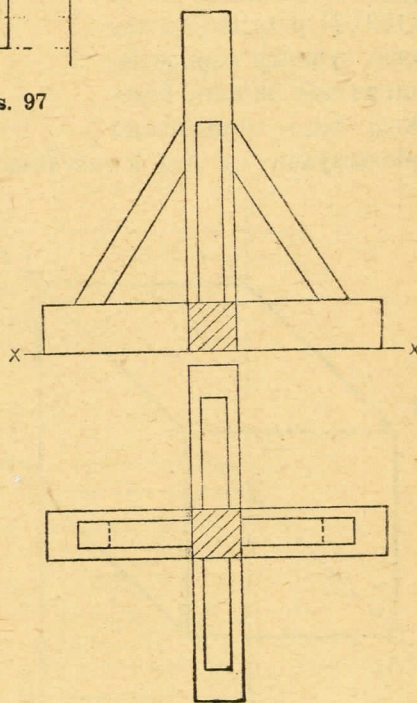
przenoszenia odcinków y do rzutu ukośnego.

Rzut ukośny dla powyższej charakterystyki nosi nazwę perspektywy kawalerskiej¹⁾.

c) Na rys. 97 dana jest podpora drewniana w trzech rzutach prostopadłych, na podstawie których narysowano rzut ukośny dla charakterystyki ($150^\circ, \frac{1}{2}$).

Objaśnij ten rysunek i prze-rysuj go w innej skali!

Narysuj następnie rzut ukośny podpory drewnianej, danej na rysunku 98, przyjąwszy stosowny



Rys. 98

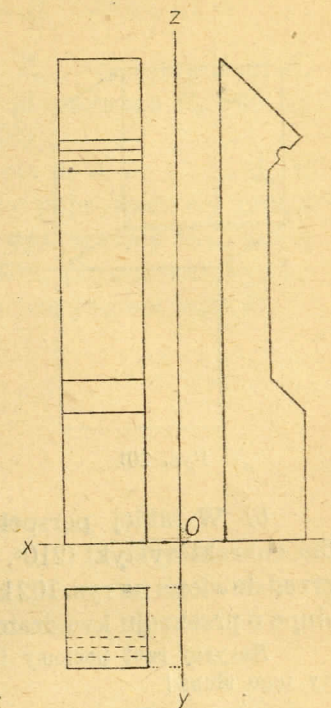
układ prostokątny osi i charakterystykę.

d) Przedstaw w rzucie ukośnym dla charakterystyki ($150^\circ, \frac{1}{2}$) podporę murywaną, daną przez trzy prostopadłe rzuty na rys. 99.

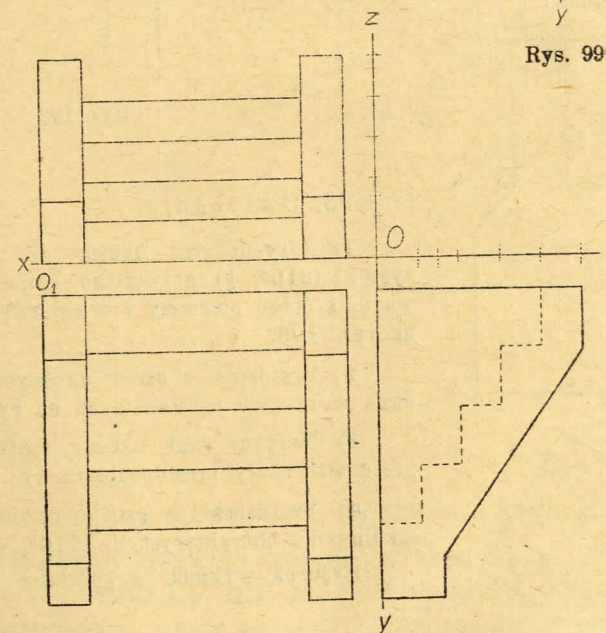
e) Na rys. 100 przedstawione są w trzech rzutach prostopadłych schody. Narysuj ich rzut ukośny dla charakterystyki ($135^\circ, 1$), przyjąwszy za układ trzech osi krawędzie, schodzące się w punkcie O_1 .

94. Wszystkie dotychczasowe rzuty ukośne są wykreślone dla kąta $(y'x') < 180^\circ$.

Obrazy te przedstawiają się nam tak, jak gdybyśmy patrzyli na przedmioty z bardzo wielkiej wysokości. Takie rzuty ukośne nazywamy dlatego „perspektywą ptasią“.

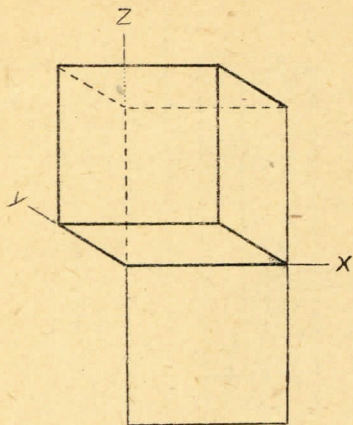


Rys. 99



Rys. 100

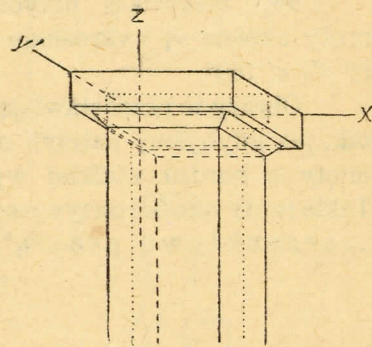
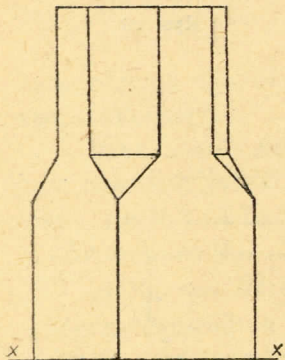
¹⁾ Nazwa pochodzi od włoskiego geom. Cavalieri'ego [1598–1647].



Rys. 101

b) W takiej perspektywie dla charakterystyki ($210^\circ, \frac{1}{2}$) jest przedstawiona na rys. 102 korona słupa o przekroju kwadratowym.

Narysuj rzut poziomy i pionowy tego słupa!



Rys. 102

95. Cwiczenia.

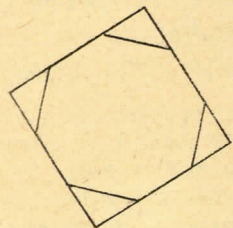
1) Narysuj rzut ukośny dla charakterystyki ($210^\circ, \frac{1}{2}$) gotyckiego słupa podporowego, którego pierwszy i drugi rzut są dane na rys. 103.

2) Przedstaw w rzucie ukośnym katedrę, daną w rzutach prostopadłych na rys. 75.

3) Narysuj rzut ukośny szafki, danej przez swe rzuty prostopadłe na rys. 83.

4) Przedstaw w rzucie ukośnym piec szkolny dla charakterystyki ($210^\circ, \frac{1}{2}$).

Rysunek wykonaj w podziałce 1:10.

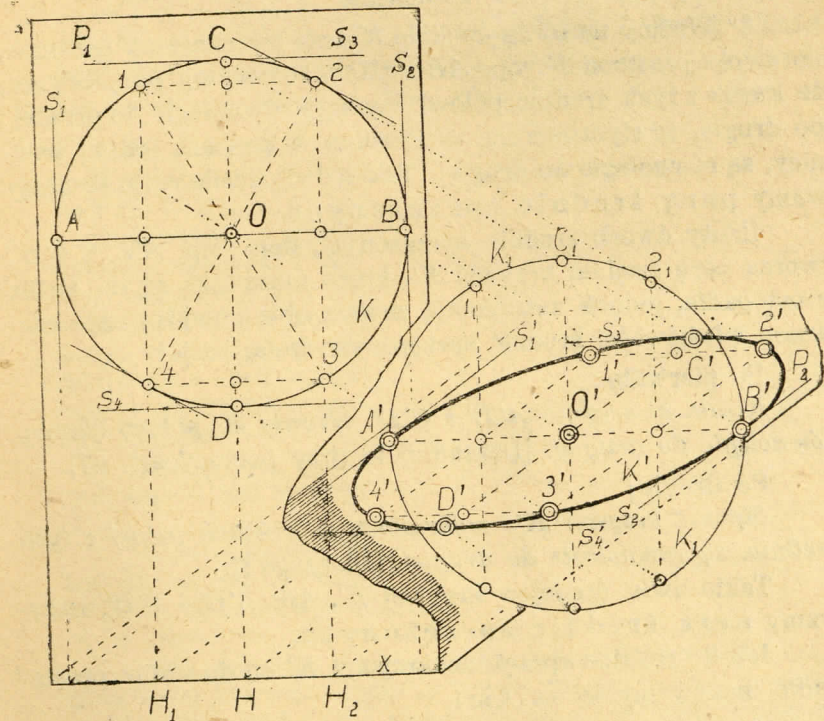


Rys. 103

§ 3. RZUT UKOŚNY KOŁA, WALCA (STOŻKA), KULI

96. a) Na dowolnej płaszczyźnie P_1 narysujmy koło K , a następnie rzućmy go równolegle na płaszczyznę P_2 tak, by rzut środka O zeszedł się z O' . [Rys. 104].

Rzuty poszczególnych punktów koła 1, 2, 3, 4, ... A, B, C, D otrzymamy, jeżeli przez te punkty poprowadzimy proste rzucające, równoległe do prostej OO' , i wyznaczmy ich punkty przebiecia $1', 2', 3', 4', \dots A', B', C', D'$ z płaszczyzną rzutów P_2 . Rzuty te utworzą krzywą K' , która jest rzutem koła K .



Rys. 104

b) Spostrzegamy następujące właściwości krzywej K' :

1° Przyjmijmy dowolne średnice w kole K , np. $AB, CD, 13, 24, \dots$ i wyznaczmy ich rzuty $A'B', C'D', 1'3', 2'4', \dots$. Rzuty te przechodzić muszą przez O' , który musi być ich wspólnym środkiem. [Dlaczego? Por. 3° art. 87].

Rzut O' jest zatem środkiem krzywej K' , zaś rzuty $A'B'$, $C'D'$, $1'3'$, $2'4'$, ... są średnicami tej krzywej.

2° Wiemy, że styczne koła K , wykreślone w końcach jakiejkolwiek średnicy są do siebie równoległe; np. styczne s_1 i s_2 , s_3 i s_4 , wykreślone w końcach średnicy AB , CD .

Rzuty s_1' , s_2' , s_3' , s_4' , ... stycznych koła K są stycznymi krzywej K' [Uzasadnij to!]. A ponieważ rzuty ukośne dwóch prostych równoległych są również równoległe, przeto $s_1' \parallel s_2'$, $s_3' \parallel s_4'$, ... A zatem:

Styczne krzywej K' , wykreślone w końcach jakiejkolwiek jej średnicy, są do siebie równoległe.

3° Weźmy na uwagę w kole K dwie jakiejkolwiek średnice, do siebie prostopadłe, np. AB i CD . Zauważymy po pierwsze, że każda z tych średnic połowi cięciwy, równoległe do drugiej; po drugie, że styczne koła, wykreślone w końcach jednej średnicy, są równoległe do drugiej. Takie dwie średnice koła nazywamy parą średnic sprzężonych.

Rzuty dwóch średnic sprzężonych koła, np. $A'B'$ i $C'D'$, tworzą parę średnic krzywej K' , które niezawsze są do siebie prostopadłe, jednak zatrzymują zawsze obie powyżej naprowadzone właściwości średnic sprzężonych koła, to jest:

Po pierwsze:

Każda ze średnic $A'B'$ i $C'D'$ krzywej K' połowi cięciwy, równoległe do drugiej. [Uzasadnij to przy pomocy art. 87].

Po drugie:

Styczne krzywej K' , wykreślone w końcach jednej z tych średnic, są równoległe do drugiej. [Dlaczego?].

Takie dwie średnice krzywej K' , jak $A'B'$ i $C'D'$, nazywamy parą średnic sprzężonych.

Jeżeli średnice sprzężone krzywej K' są do siebie prostopadłe, nazywamy je osiami.

4° Na rys. 104 przyjęliśmy jedną średnicę AB w kole K , równoległą do płaszczyzny rzutów P_2 , z czego wynika, że rzut tej średnicy, jak również rzuty wszystkich cięciw, równoległych do niej, przedstawiają się w prawdziwych długościach. [Dlaczego?].

Rzut średnicy sprzężonej CD , jak również rzuty wszystkich cięciw, równoległych do niej, skracają się w tym samym stosunku. [Por. art. 87].

Wobec tego możemy wykreślić punkty $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, ... krzywej K' przy pomocy koła K_1 , zakreślonego na średnicy $A'B'$.

Uzasadnij tę konstrukcję i opisz ją słowami!

Tej konstrukcji punktów krzywej K' nie można zastosować wtedy, gdy średnice sprzężone krzywej K' są do siebie prostopadłe. [Dlaczego?].

5° Krzywą K' można uważać za przekrój płaszczyzną rzutów walca, opisanego na kole K , którego tworzące są równoległe do kierunku rzutu ukośnego OO' .

Krzywą K' nazywamy elipsą¹⁾.

97. Zagadnienie. Dana jest elipsa e , której obwód jest wykreślony. Wyznaczyć: a) parę średnic sprzężonych, b) środek, c) osie tej krzywej. [Rys. 105].

Wskazówka. Wykreśl dwie równoległe cięciwy 12 , 34 . Prosta, łącząca środki tych cięciw, jest jedną średnicą r tej krzywej. Wykreśl następnie cięciwę 25 , równoległą do r . Jeżeli przez środek tej cięciwy poprowadzisz prostą q , równoległą do cięciwy 12 , to będzie to średnica, sprzężona z r .

Punkt przecięcia się O tych średnic jest środkiem elipsy.

Celem wyznaczenia osi krzywej e , zakreśl z jej środka dowolne koło, a punkty,

w których ono przecina elipsę, oznacz przez 6 , 7 , 8 , 9 .

Jeżeli połączysz środek cięciwy 67 ze środkiem O , otrzymasz jedną oś tej krzywej. Prosta ta bowiem jest prostopadła do wszystkich cięciw, równoległych do 67 , a zatem również do średnicy z nią sprzężonej.

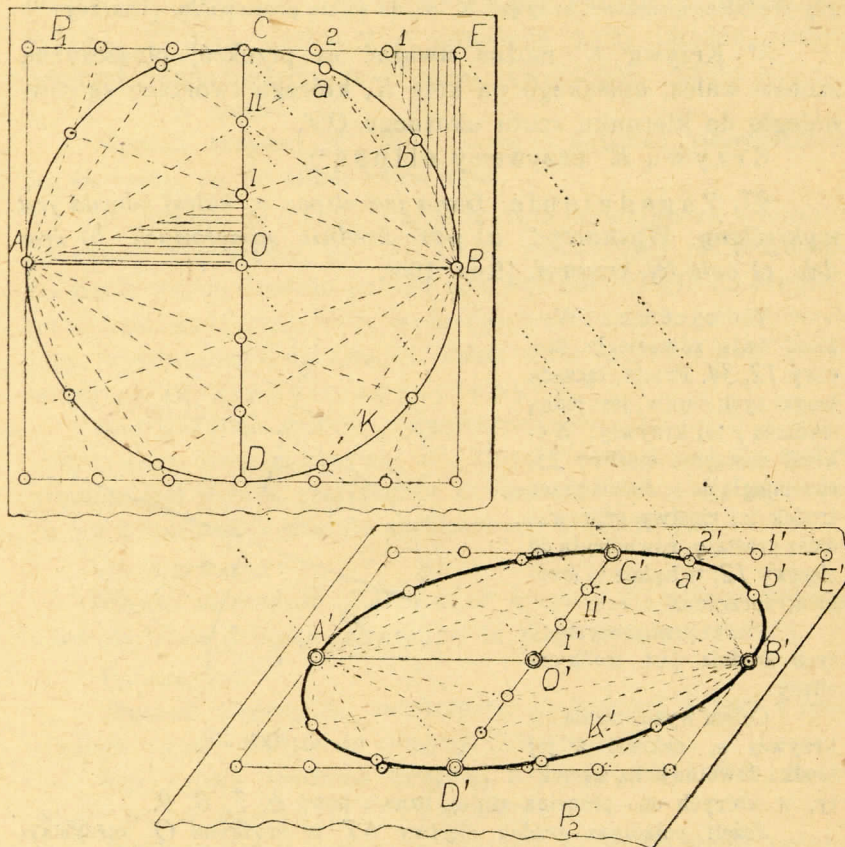
98. a) Na rys. 106 przyjęliśmy na płaszczyźnie P_1 koło K , narysowaliśmy parę średnic sprzężonych AB i CD , a następnie opisaliśmy na kole kwadrat, styczny w końcach tych średnic.

Poszczególne punkty a , b , ... ćwiartki obwodu koła BC możemy otrzymać w sposób następujący:

¹⁾ Według podręcznika Geometrii dla kl. III powtórz o rzucie prostopadłym koła! — Rozwiąż ćw. 23 art. 20!

Czem jest przekrój walca obrotowego w ćw. 7) art. 63 ze względu na koło podstawowe tego walca?

Podzielmy połowę boku kwadratu CE na pewną ilość równych części, np. na 3 części punktami I i 2 . Następnie podzielmy na taką samą ilość równych części promień OC punktami I i II .



Rys. 106

Punkty podziału $1, 2$ na CE połączmy z punktem B , punkty zaś podziału I, II na OC z punktem A .

Udowodnimy przedewszystkiem, że punkt b , w którym przecinają się proste $B1$ i AI , znajdować się musi na obwodzie danego koła.

Weźmy na uwagę trójkąty $BE1$ i AOI . Trójkąty te są przystające, gdyż $BE = AO$, $E1 = OI$, $\sphericalangle E = \sphericalangle O = 90^\circ$. Stąd wynika, że $\sphericalangle B$ w pierwszym trójkącie jest równy $\sphericalangle A$ w dru-

gim trójkącie. A ponieważ ramię BE kąta B jest prostopadłe do ramienia AO kąta A , przeto również ramię $B1$ musi być prostopadłe do ramienia AI . Punkt więc b , w którym przecinają się te ramiona, znajdować się musi na obwodzie danego koła.

Udowodnij tak samo, że punkt a , w którym przecinają się proste $B2$ i AII , znajduje się również na obwodzie koła K .

Objasnij analogiczną konstrukcję punktów ćwiartki obwodu koła AC, AD, DB !

b) Wyobraźmy sobie teraz, że rzuciliśmy koło K ukośnie na płaszczyznę P_2 .

Rzuty $A'B'$ i $C'D'$ średnic AB i CD będą średnicami sprzężonymi elipsy K' .

Rzut kwadratu, opisanego na kole K , będzie równoległobokiem, opisanym na elipsie K' w końcach średnic sprzężonych $A'B'$ i $C'D'$.

Rzuty $1', 2'$ punktów $1, 2$ dzielą na 3 równe części odcinek $C'E'$, podobnie rzuty I', II' punktów I, II dzielą na 3 równe części odcinek $O'C'$. [Dlaczego?].

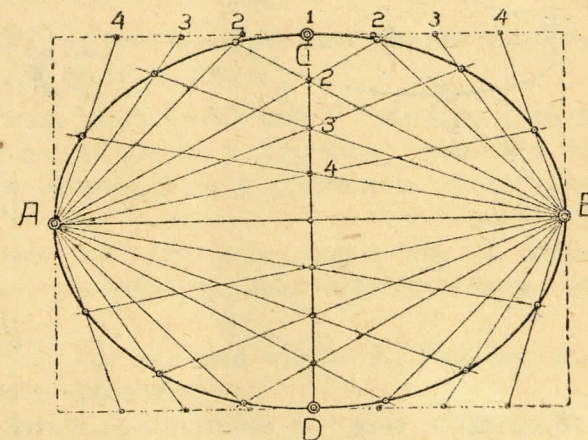
Proste $B'1'$ i $A'I'$ są rzutami prostych $B1$ i AI ; ich punkt przecięcia się b' jest zatem rzutem punktu b koła, jest więc punktem elipsy K' . Podobnie uzasadnimy, że punkt a' , w którym przecinają się proste $A'II'$ i $B'2'$, jest również punktem elipsy K' .

Objasnij konstrukcję punktów dalszych części elipsy.

Doszliśmy zatem do konstrukcji elipsy, która się da przeprowadzić przy użyciu samego tylko lineалу.

Opisz tę konstrukcję słowami!

Konstrukcji tej można użyć i wtedy, gdy średnice sprzężone są prostopadłe do siebie, gdy zatem elipsa jest dana przez swe osie, jak to widzisz na rysunku 107.



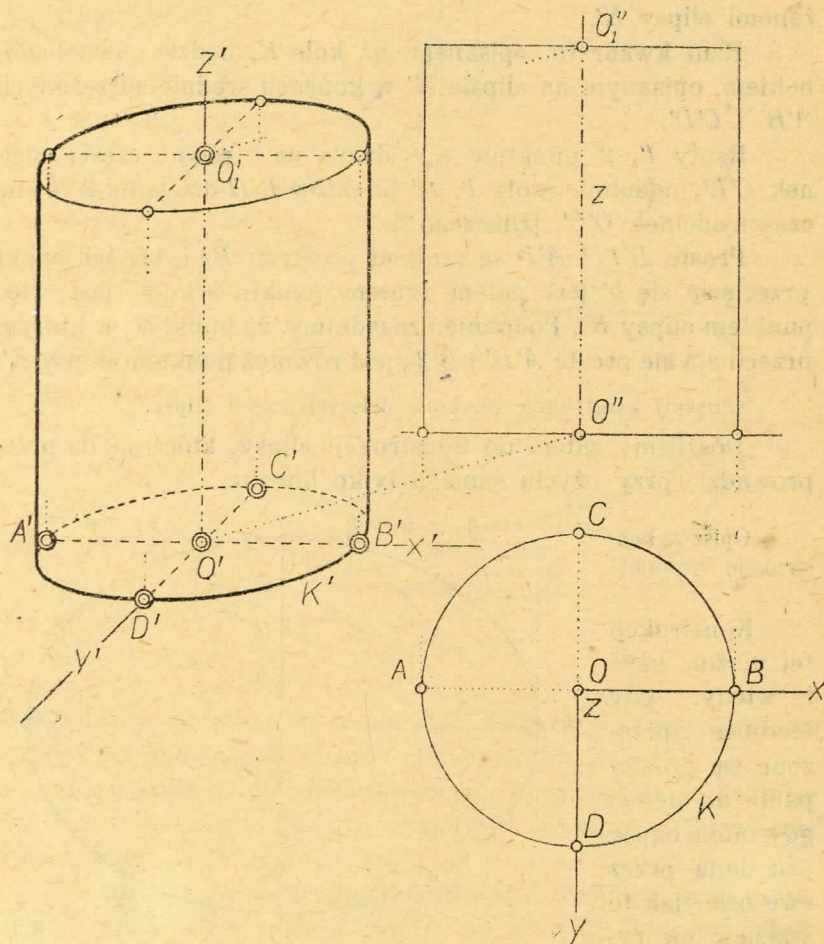
Rys. 107

Objasnij konstrukcję elipsy na rys. 107! Wykreśl elipsę, jeżeli
a) osie jej są długie 10 cm, 6 cm; b) średnice sprzężone są długie 10 cm, 8 cm, kąt zaś między nimi zawarty wynosi 30° .

99. Zagadnienie. Wykreślić rzut ukośny walca obrotowego dla charakterystyki ($135^\circ, \frac{1}{2}$), jeżeli płaszczyzna jego podstawy ma położenie prostopadłe do płaszczyzny rzutów. [Rys. 108].

Rozwiązanie. Przyjmijmy płaszczyznę poziomą rzutów za podstawę walca, a płaszczyznę pionową za płaszczyznę rzutu ukośnego.

Jak się przedstawi walec w rzucie poziomym, a jak w rzucie pionowym?



Rys. 108

Przyjmijmy w walec trzy osie do siebie prostopadłe: oś z niech się schodzi z osią walca, oś x z średnicą AB koła podstawowego, równoległą do płaszczyzny rzutu ukośnego (płaszczyzna pionowa); oś y będzie wtedy prostopadła do tej płaszczyzny.

Wskaż rzuty poziome i pionowe tych osi!

Jeżeli wyobrazimy sobie teraz, że rzucamy walec ukośnie na płaszczyznę pionową rzutów, natenczas rzuty x' i y' osi x i z będą zawsze tworzyły ze sobą kąt prosty, rzutowi zaś y' osi y możemy nadać dowolny kierunek, a więc według tematu zagadnienia taki, by tworzył z x' kąt 135° .

Koło podstawowe K walca przedstawi się w tym rzucie ukośnym jako elipsa K' , której jedna średnica $A'B'$ równać się będzie średnicy AB koła, średnicę zaś z nią sprzężoną $C'D'$, leżącą na osi y' , możemy skrócić w dowolnym stosunku, a więc według tematu jak 1:2.

Oś walca przedstawi się w rzucie ukośnym w prawdziwej wielkości; rzut ukośny koła górnego będzie elipsą, przystającą do elipsy K' .

Uczeń wykreśli te elipsy zapomocą konstrukcji, wyjaśnionej na rys. 106.

Kontur rzutu ukośnego walca składać się będzie ze wspólnych stycznych obu elips, równoległych do osi walca i części obwodów tych elips.

Wykreślić rzut ukośny stożka obrotowego, którego płaszczyzna podstawowa jest prostopadła do płaszczyzny rzutów.

100. Zagadnienie. Wykreślić rzut ukośny kuli dla charakterystyki ($135^\circ, \frac{1}{4}$). [Rys. 109].

Rozwiązanie. Niech środek kuli O będzie początkiem układu prostokątnego osi. Oś z i x przyjmijmy równoległe do płaszczyzny rzutu ukośnego, oś y prostopadła do tej płaszczyzny.

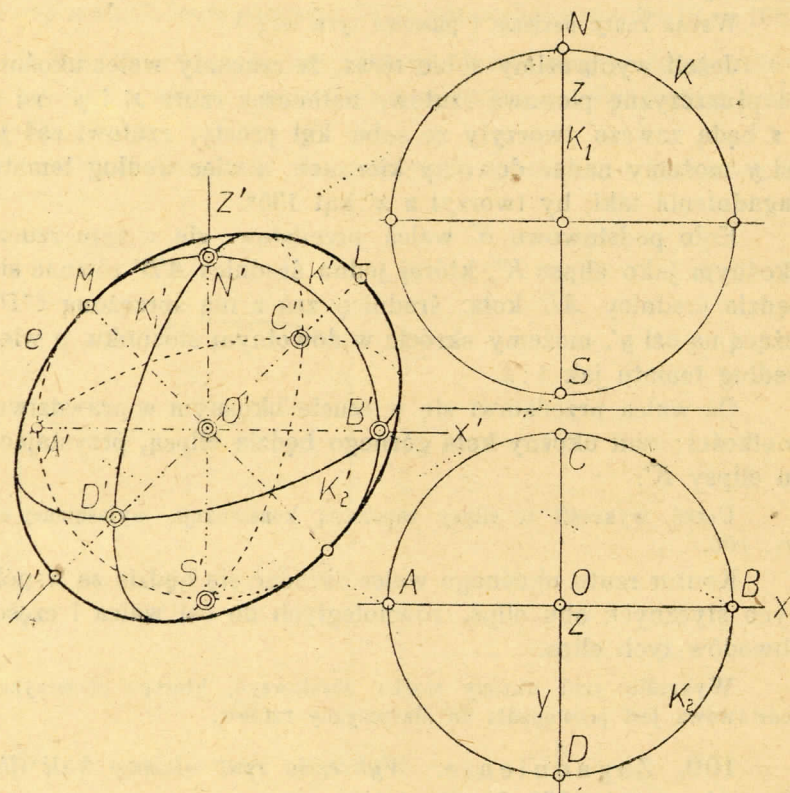
Na płaszczyźnie (xz) leży koło wielkie kuli K , które w rzucie ukośnym przedstawi się jako koło K' w tej samej wielkości.

Na płaszczyźnie (xy) leży koło wielkie K_2 . Rzut jego K_2' wykreślisz znany ci sposobem.

Tak samo z łatwością wykreślisz rzut koła wielkiego K_1 , leżącego na płaszczyźnie (zy) .

Wykreśl rzut ukośny dowolnego południka, dowolnego równoleżnika kuli!

Kontur rzutu ukośnego kuli stanowić będzie obwiednia rzutów wszystkich kół, leżących na kuli.



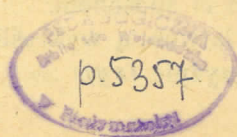
Rys. 109

Kontur ten jest elipsą e , podług której przecina płaszczyzna rzutów walec, opisany na kuli, równoległe do kierunku rzutu ukośnego.

Podaję bez dowodu konstrukcję osi tej elipsy:

Ośią mniejszą jest średnica koła K' , prostopadła do y' .

Półoś $O'L = MC'$.



SPIS RZECZY

	Str.
Wstęp	2

CZĘŚĆ I

Rzut prostopadły na jedną płaszczyznę

§ 1. Rzut prostopadły punktu	8
§ 2. Rzut prostopadły odcinka i linii prostej	10
§ 3. Rzut prostopadły płaszczyzny i figury na niej leżącej	22
§ 4. Kład płaszczyzny. Podniesienie płaszczyzny	37
§ 5. Rzut prostopadły wielościanu	49

CZĘŚĆ II

Rzuty prostopadłe na dwie płaszczyzny, prostopadłe względem siebie

§ 1. Rzuty punktu	67
§ 2. Rzuty odcinka i linii prostej	72
§ 3. Rzuty płaszczyzny i figur na niej leżących	79
§ 4. Kład i podniesienie płaszczyzny rzucającej	85
§ 5. Kład dowolnej płaszczyzny na pierwszej płaszczyźnie rzutów i podniesienie dowolnej płaszczyzny z pierwszej płaszczyzny rzutów	88
§ 6. Rzuty bryły	94
§ 7. Zagadnienia miarowe, dotyczące wielościanów, których rzuty prostopadłe zostały wykreślone	114

CZĘŚĆ III

§ 1. Rzuty prostopadłe na trzy płaszczyzny, względem siebie prostopadłe	120
§ 2. Obrót utworu geometrycznego, danego przez swe rzuty prostopadłe, dokoła osi, prostopadłej do pierwszej płaszczyzny rzutów	125

CZĘŚĆ IV

O równoległym rzucie ukośnym

	Str.
§ 1. Zasadnicze właściwości równoległego rzutu ukośnego	131
§ 2. Rysowanie równoległego rzutu ukośnego wielościanów	135
§ 3. Rzut ukośny koła, walca (stożka), kuli	143

Zauważono błąd drukarski: na str. 7 wiersz 12 zamiast $\neq 90^\circ$, ma być $\neq 90^\circ$.

Stankiewicz

126108
2618 78

30—