

Pedagogiczna
Biblioteka Wojewódzka
w Białymstoku

p.53.19

NAUKA FIZYKI

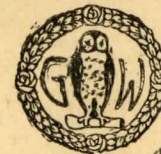
PODREČZNIK PRZEZNACZONY DO UŻYTKU
UCZNIÓW KLAS WYŻSZYCH SZKÓŁ ŚREDNICH

CZYTELNIĄ

PRZĘZ

DRA WŁADYSŁAWA NATANSONA
i
DRA KONSTANTEGO ZAKRZEWSKIEGO,
PROFESORÓW UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

TOM I



Wojciech

NAKŁAD GEBETHNERA I WOLFFA
WARSZAWA — KRAKÓW — LUBLIN — ŁÓDŹ — POZNAŃ

NAUKA FIZYKI

WYDAWCA

Wydawnictwo

NAUKA FIZYKI

NAUKA FIZYKI
TOM I

NAKLAD GEBETHNERA I WOLFFA



WARSZAWA — KRAKÓW — LUBLIN — ŁÓDŹ — POZNAŃ

DRUKARNIA UNIwersYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

NAUKA FIZYKI

PODRĘCZNIK PRZEZNACZONY DO UŻYTKU
UCZNIÓW KLAS WYŻSZYCH SZKÓŁ ŚREDNICH

PRZEZ

DRA WŁADYSŁAWA NATANSONA
i
DRA KONSTANTEGO ZAKRZEWSKIEGO,
PROFESORÓW UNIwersYTETU JAGIELLOŃSKIEGO .

TOM I



NAKLAD GEBETHNERA I WOLFFA
WARSZAWA — KRAKÓW — LUBLIN — ŁÓDŹ — POZNAŃ



53 (09513)

SPIS RZECZY TOMU I-go.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

§§	Zasady kinematyki.	Str.
1.	O zjawiskach ruchu. Przedmiot kinematyki	1
2.	Określenie ruchu. Układy odniesienia. Względność ruchu	2
3.	O mierzeniu kątów, długości, pól oraz objętości	4
4.	O pomiarach czasu. Jednostki czasu	6
5.	O zegarach	8
6.	O pojęciu punktu w kinematyce	10
7.	O ruchu prostoliniowym	11
8.	O ruchu prostoliniowym jednostajnym	13
9.	O ruchu kołowym	14
10.	O ruchu kołowym jednostajnym	17
11.	Kierunek ruchu. Przemieszczenie, rozumiane jako wektor	19
12.	Prędkość ruchu prostoliniowego jednostajnego, rozumiana jako wektor	20
13.	Prędkość ruchu kołowego jednostajnego, rozumiana jako wektor	21
14.	Ruch niejednostajny. Prędkość chwilowa albo prawdziwa	22
15.	O ruchu prostoliniowym niejednostajnym. Średnie przyspieszenie	25
16.	O ruchu prostoliniowym jednostajnie przyspieszonym	27
17.	Droga, przebywana w ruchu prostoliniowym jednostajnie przyspieszonym	28
18.	O ruchu prostoliniowym opóźnionym oraz jednostajnie opóźnionym	30
19.	Przykład ruchu prostoliniowego jednostajnie przyspieszonego	31
20.	Przyspieszenie, rozumiane jako wektor	34
21.	Ruch prostoliniowy przyspieszony. Przyspieszenie chwilowe albo prawdziwe	35
22.	Zasada niezależności ruchów	36
23.	Twierdzenie o równoległoboku przemieszczeń	38
24.	Twierdzenie o równoległoboku prędkości	39
25.	O rozkładaniu prędkości. O rzutach prędkości	41
26.	Prędkość w dowolnym ruchu kołowym	42
27.	Przyspieszenie w ruchu kołowym jednostajnym	43
28.	Wartość i kierunek przyspieszenia w ruchu kołowym jednostajnym	45
29.	Twierdzenie o równoległoboku przyspieszeń	47
30.	O ruchu harmonicznym prostym	48
31.	Bliższa analiza praw ruchu harmonicznego prostego	52

ROZDZIAŁ DRUGI.

Zasady dynamiki.

§§	Str.
32. Dynamika jest nauką o ruchu jakichkolwiek brył materialnych	54
33. Newton. Działania i siły dynamiczne	55
34. Działanie ciał materialnych jest zawsze wzajemne	57
35. Drugie prawo ruchu Newtona	60
36. Zasada działania i przeciwdziałania	62
37. Dalsze uwagi nad zasadą działania i przeciwdziałania	64
38. Zasada zachowania masy	65
39. Punkt materialny	66
40. Określenie grama; określenie litra	66
41. Prawo bezwładności	67
42. Istotne znaczenie prawa bezwładności	68
43. Czy bezwładność materji sama przez się jest oczywista	69
44. O środku masy	70
45. Twierdzenie o równoległoboku sił	72
46. Galileusz. Jak ciała upuszczone spadają	73
47. Jednostka siły; dyna. Jednostki ciężarowe	76
48. Streszczenie zasad dynamiki	77
49. Prawa ruchu planet dokoła słońca	78
50. Prawo siły, wywieranej na planety przez słońce	79
51. Newtona prawo wzajemnego przyciągania się ciał	80
52. Ruch dwóch ciał przyciągających się	81
53. O ciężeniu powszechnym	82
54. Ciężkość jest szczególnym przypadkiem powszechnego ciężenia	83

ROZDZIAŁ TRZECI.

O sile ciężkości.

55. Pole ciężkości	86
56. Opór powietrza	87
57. Przyspieszenie ciężkości nie zależy od natury ciała, poddanego działaniu tej siły	88
58. Ruch ciała, rzuconego pionowo do góry	90
59. Ruch ciała, rzuconego w kierunku poziomym	91
60. Pion i jego zastosowanie do mierzenia sił	93
61. Równia pochyła	95
62. O tarcu	98
63. Wahadło	100
64. Prawa ruchu wahadłowego	103
65. Zmiany przyspieszenia ciężkości na ziemi	104
66. Jak zmierzono masę ziemi i jej gęstość średnią	106
67. Ruch kołowy; siła dośrodkowa, siła odśrodkowa	109
68. Wpływ obrotu ziemi na przyspieszenie ciężkości	114

ROZDZIAŁ CZWARTY.

O pracy i energii.

§§	Str.
69. O pracy	117
70. Określenie pojęcia pracy	118
71. Jednostki pracy	120
72. Dzielnosc	122
73. Pojęcie energii	123
74. Energia kinetyczna	124
75. Ilość ruchu	126
76. Dwa sposoby pojmowania masy	127
77. Energia potencjalna	128
78. Energia potencjalna pola ciężkości	132
79. Energia całkowita pola ciężkości	133
80. Dalsze twierdzenia o polu ciężkości	135
81. Zasada zachowania energii	138
82. Siły zachowawcze i niezachowawcze	140
83. Perpetuum mobile	141
84. Uogólniona zasada zachowania energii	143

ROZDZIAŁ PIĄTY.

O równowadze i ruchu ciał sztywnych.

85. O ciałach sztywnych	145
86. O przesuwalności siły, przyłożonej do ciała sztywnego	146
87. Obrót ciała sztywnego dokoła osi nieruchomej	147
88. Moment siły względem osi obrotu	148
89. Ciało sztywne, obracające się koło osi, jest poddane działaniu dwóch sił; warunek równowagi	150
90. O dźwigni	152
91. Praca sił czynnych podczas ruchu dźwigni	154
92. O machinach	155
93. Wypadkowa dwóch sił, przyłożonych do ciała sztywnego	156
94. Jedynym możliwym ruchem jest obrót; reguła momentów	158
95. Wypadkowa sił równoległych, przyłożonych do ciała sztywnego	159
96. Jedynym możliwym ruchem jest obrót; równowaga pod wpływem sił równoległych	160
97. O parze sił	162
98. Środek sił równoległych	163
99. Środek i wypadkowa wielu sił równoległych	164
100. Całkowity ciężar ciała; środek ciężkości	165
101. O równowadze ciał ciężkich	168
102. O wadze i ważeniu	170
103. Gęstość i ciężar właściwy	173

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

Zasady kinematyki.

§ 1. O zjawiskach ruchu. Przedmiot kinematyki.

Zjawiska ruchu odbywają się dokoła nas nieustannie. Codziennie spostrzegamy, że poruszają się ludzie i zwierzęta, wozy i powozy, kłosa i drzewa, kamyki i okręty, kółka zegarków i koła lokomotywy, krople deszczu i chmury na niebie, okruszyny pyłu i słońca w przestworzu płonące. Codziennie spostrzegamy, że wszystkie materialne przedmioty, podpadające pod zmysły, są w ruchu. Niektóre ciała są w ruchu powolnym, inne są w szybkim; niektóre są w ruchu prostym i łatwo zrozumiałym, inne w zawiłym i dziwnym; ale *w ruchu są wszystkie*. O żadnym materialnym ciele nie możemy powiedzieć, iż znajduje się w bezwzględnym spoczynku.

Łatwo widzimy, że nie tylko materialne ciała mogą poruszać się. Kiedy promień słońca wpada przez szczelinę do zaciemnionego pokoju, tworzy na ścianie lub na podłodze jasną świetlną plamę, która z biegiem czasu posuwa się widocznie; gdy przed lampą jasno świecącą przesuwamy rękę, jej cień skacze dziwnie po powierzchni otaczających przedmiotów. A zatem światło lub cień może się także przemieszczać. Gdy wiatr wieje, widzimy, jak falowanie posuwa się szybko przez łany stojącego w polu zboża; na morzu, na rzece spostrzegamy góry i doły, które udzielają się z miejsca do miejsca. A zatem różne zmiany i rozmaite zjawiska mogą szerzyć się i roznosić się w materialnych ośrodkach; na czem, jak zobaczymy, polegają ważne fizyczne procesy.

W *kinematyce* rozważamy zjawiska ruchu, ale nie zajmujemy się wcale tem, *co* się porusza; ograniczamy się w niej do badania ruchu samego w sobie t. j. ruchu, oderwanego od własności poruszającej się rzeczy. Ze względu na takie ograniczenie

zadania, wystarcza nam w kinematyce, oprócz pojęć geometrycznych, jedno tylko *nowe* pojęcie, pojęcie *czasu*. Kinematyka jest więc geometrią, wzbogaconą o pojęcie czasu; można ją także nazwać geometrią ruchu.

Ruch brył masywnych zależy w wysokim stopniu od ich rozmaitych materialnych własności; ale kinematyka nie próbuje odkryć tej zależności, tego związku, który stanowi przedmiot innej nauki, mianowicie *dynamiki*.

§ 2. Określenie ruchu. Układy odniesienia. Względność ruchu.

Wyobraźmy sobie pewien ruch, na przykład ruch piłki, rzuconej w pokoju, ruch pociągu, pędzącego po szynach albo ruch okrętu, płynącego po morzu. Gdy mówimy, że piłka, pociąg lub okręt *porusza się*, jaki w gruncie rzeczy *fakt* chcemy w tych słowach wyrazić? Chcemy oczywiście powiedzieć, że z biegiem czasu zmienia się położenie piłki względem przedmiotów, znajdujących się w pokoju albo też względem podłogi, sufitu lub ścian. Chcemy powiedzieć, że z biegiem czasu zmienia się położenie pociągu na torze kolejowym, że zmienia się na przykład jego odległość od pewnej upatrzonej stacji. Chcemy powiedzieć, że z biegiem czasu zmienia się położenie okrętu na morzu; na przykład, że zmienia się jego odległość od stałego lądu. Co zatem mamy na myśli, mówiąc, że «ciało *M* porusza się»? Wyrażając się w taki sposób, chcemy powiedzieć, że z biegiem czasu zmienia się położenie tego ciała *M* względem pewnych *innych ciał* materialnych *A, B, C* i t. d. *Jeżeli położenie pewnego ciała względem innych ciał z biegiem czasu się zmienia, zmianę tę nazywamy ruchem*. Owe *inne* ciała materialne *A, B, C* i t. d., względem których położenie ciała *M* z biegiem czasu się zmienia, nazywamy *ciałami odniesienia*, albowiem do nich odnosimy nieustannie w umyśle poruszające się ciało *M*.

Położenia ciała *M* nie możemy poznać ani określić inaczej, tylko w odniesieniu do ciał *A, B, C...*; ruchu ciała *M* nie możemy wyobrazić sobie inaczej, jak w odniesieniu do ciał *A, B, C...*, które w nim *nie* biorą udziału. Mówi się zatem, że ruch ciała *M* jest *ruchem względnym*, mianowicie odniesionym do ciał *A, B, C...*, które w nim nie uczestniczą.

Wszelki ruch jest względny. Nie możemy pomyśleć innego ruchu niż względny. W nieskończonej próżni i w pustce bez-

względnej, w której nie byłoby wcale ciał odniesienia, nie byłoby podobna ruchu nie tylko zbadać i zmierzyć, lecz nawet go zauważyć.

Jak powiedzieliśmy, odnosimy ruch ciała *M* do innych ciał materialnych *A, B, C...*, które w nim nie biorą udziału. Ale jakże wyznaczyć położenie ciała *M* względem ciał *A, B, C...*? Ciała materialne mają zazwyczaj zawiłą budowę i postać, którą niełatwo ściśle opisać. W kinematyce chcemy rozumować równie dokładnie i jasno jak w geometrii; lecz pragniemy zarazem posługiwać się pomocą pojęć możliwie najprostszych. Umawiamy się zatem, jak następuje: w poruszającym się ciele *M* wybieramy pewien określony *punkt* i przywiązujemy do niego uwagę; z ciałami odniesienia *A, B, C...* łączymy w myśli pewne geometryczne *utwory*, np. pewne powierzchnie albo płaszczyzny, pewne linie krzywe lub proste; wreszcie wybrany punkt ciała *M* odnosimy (jak w geometrii) do tych geometrycznych utworów, złożonych z ciałami *A, B, C* i jak one, nie biorących udziału w ruchu ciała *M*. Owe geometryczne utwory (powierzchnie, płaszczyzny, linie krzywe lub proste), połączone z ciałami odniesienia, nazywamy wówczas *układami odniesienia*.

Przypuśćmy na przykład, że w pewnej chwili wypuściliśmy piłkę z ręki, pozwalając jej spadać swobodnie. Od owej początkowej chwili czas upływał i odległość piłki od podłogi zmniejszała się. Jeżeli w każdej chwili zjawiska możemy podać wysokość środka piłki ponad płaszczyznę podłogi, ruch środka piłki będzie opisany. W tym więc razie płaszczyzna podłogi będzie układem odniesienia.

Przypuśćmy, że rzuciliśmy piłkę ukośnie ku ścianie; jej ruch będzie wówczas bardziej zawiły niż w przypadku poprzednim. Lecz gdybyśmy w każdej chwili wiedzieli, jaka jest odległość środka piłki od trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn (dwóch ścian i podłogi), spotykających się w narożu pokoju, ruch tego środka byłby odtworzony. Całość owych trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn nazywamy w tym razie układem odniesienia.

Narysujmy na mapie Państwa Polskiego przebieg toru kolejowego, prowadzącego z Krakowa do Warszawy. Gdybyśmy w dowolnej chwili wiedzieli, w którym miejscu tej linii znajduje się np. przednia oś lokomotywy pociągu, ruch byłby znany. Linia krzywa lub łamana, złożona z powierzchnią kraju i wyobrażająca tor kolejowy, jest tutaj układem odniesienia.

Na pełnym oceanie wyobraźmy sobie okręt transatlantycki, płynący z New-Yorku do Gdańska. Gdybyśmy w każdej chwili mogli przytoczyć szerokość i długość geograficzną miejsca, w którym znajduje się okręt, jego ruch byłby wiadomy. W tym razie układem odniesienia będzie powierzchnia kuli ziemskiej, pokryta siecią południków i równoleżników.

W wielu zagadnieniach naukowych albo praktycznych, w których trzeba zbadać odbywający się ruch, za ciało odniesienia wybieramy kulę ziemską, na której mieszkamy; z kulą ziemską łączymy układy odniesienia, które wybieramy możliwie dogodnie. Przypuśćmy na przykład, że badamy ruch tłoka w maszynie możliwie dogodnie. Przypuśćmy na przykład, że badamy ruch tłoka w maszynie parowej, obrót wirownicy, wahanie się belki wagi lub oscylacje igiełki magnetycznej w galwanometrze. Rama wirownicy albo podstawa maszyny parowej jest umocowana w podłodze; cewka galwanometru albo płyta wagi jest przytwierdzona do ściany budynku. A zatem te ciała uczestniczą w dziennym obrocie ziemi dookoła osi, w jej rocznym obiegu dookoła słońca, oraz w innych ruchach, które musimy przypisywać naszej planecie. W naszym badaniu nie troszczymy się jednak o rozmaite ruchy kuli ziemskiej, albowiem tłok, wirownica, belka wagi, igiełka magnetyczna odbywają je *również*; zadanie zaś, którem jesteśmy zajęci, wymaga jedynie poznania *ruchu względnego*: ruchu tłoka względem podstawy maszyny, ruchu wirownicy względem jej ramy, ruchu belki względem słupa i płyty wagi, ruchu igiełki względem cewki galwanometru.

Przez długie wieki sądzono, że *kula ziemna jest nieruchoma*; mnóstwo ludzi jeszcze i dziś żyje i działa w tem przekonaniu. Powiedzielibyśmy źle, mówiąc, że przytoczone zdanie jest *mylne*; ono nie wyraża ani prawdy ani nieprawdy; ono *nic* nie wyraża. Każdy ruch jest względny; przeto i spoczynek, który jest szczególnym przypadkiem ruchu, może być tylko *względny*. Dwa pociągi, jadące po torach równoległych, jednakowo prędko i w tym samym kierunku, są względem siebie w spoczynku, lecz względem stacji są w ruchu. Podróżny jest w spoczynku względem wagonu, jest w ruchu względem przydrożnych słupów telegraficznych; słupy telegraficzne są w spoczynku względem Wiatr, są w ruchu względem wód, Wisłą płynących lub względem księżyca. Wiadomo zatem istotnie, że zdanie *«ziemia jest nieruchoma»* nie zawiera żadnej treści, dopóki nie wymieniamy ciała, względem którego ziemia ma być nieruchoma.

Starożytni astronomowie (najczęściej zresztą bezwiednie) wybierali ziemię za *ciało odniesienia*. Ponieważ ten wybór od nas zależy, więc nie popełniali bynajmniej błędów; ale utrudniali sobie osiągnięcie celu, do którego dążyli, mianowicie zrozumienie porządku ruchów niebieskich. Skoro wychodzimy z zakresu spraw ziemskich, *geocentryczny* (t. j. połączony z ziemią) układ odniesienia staje się niedogodny. Kopernik wybrał słońce za ciało odniesienia; jak zobaczymy w rozdz. II-im, ten wybór był znacznie szczęśliwszy.

§ 3. O mierzeniu kątów, długości, pól oraz objętości.

Przy badaniu jakiegobądź ruchu, jak wiadomo z artykułów poprzednich, musimy wyznaczać położenie poruszającego się

ciała względem ciała odniesienia. Do takich wyznaczeń potrzebne są zwykle pomiary pewnych *kątów* albo też pewnych *długości*.

Zmierzyć pewien kąt, to znaczy: porównać go z innym kątem, który został przyjęty za jednostkę kątów. Jednostką kątów jest *radjan* czyli kąt, któremu na kole odpowiada łuk, równy promieniowi. Inną, bardziej sztuczną i dowolną jednostką kątów jest *stopień*, czyli jedna dziewięćdziesiąta część kąta prostego; stopień, jak wiadomo, zawiera 60 minut kątowych, minuta zawiera 60 sekund kątowych. Ponieważ kąt prosty jest równy $\frac{1}{2}\pi$ radjanom, zatem radjan w stopniach, minutach i sekundach wynosi: $57^{\circ} 17' 44''$.

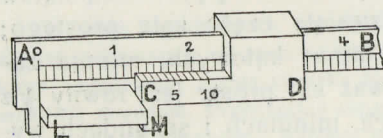
Zmierzyć pewną długość, to znaczy: porównać ją z inną długością, którą przyjęto za jednostkę długości. Za jednostkę długości w fizyce przyjęto *centymetr* (w skróceniu: cm). Według uchwały z dn. 26-go września 1889 r. konferencji międzynarodowej, zgromadzonej w Paryżu, określenie centymetra jest następujące: centymetr jest jedną setną częścią najkrótszej odległości, która (w temperaturze 0°C) oddziela od siebie kreski N° 2 i N° 5 na międzynarodowym *wzorcu* (t. zw. prototypie), wyrobionym z irydoplatyny i noszącym na sobie znak M 6; ten wzorzec od 1889 roku znajduje się w Biurze międzynarodowym Miar i Wag w Sèvres, pod Paryżem. Z centymetra wynikają w znany sposób inne metryczne miary długości. Sto centymetrów stanowi *metr* (m); tysiąc metrów stanowi *kilometr* (km); jedna dziesiąta część centymetra nazywa się *milimetrem* (mm). *Mikron* (μ) jest jedną tysięczną częścią milimetra; *mikromilimetr* ($\mu\mu$) jest jedną milionową częścią milimetra.

Układ metryczny pochodzi z czasów Wielkiej Rewolucji. Prac przygotowawczych dokonała komisja paryskiej Akademii Nauk, w której uczestniczyli Lagrange, Laplace, Monge i inni wielcy uczeni. Ustawa, uchwalona w r. 1795-ym przez Konwent, postanawiała, że «metr jest jedną dziesięcio-milionową częścią ćwierci południka ziemskiego». Na zasadzie pomiarów geodetycznych wykonano wzorzec platynowy metra i złożono go w r. 1799-ym w Archiwum narodowym francuskim; jego dokładną kopją jest wyżej wspomniany wzorzec M 6. Mimo wielkiej staranności owych prac, wzorce metra nie są ściśle zgodne z określeniem, przyjętem za podstawę metrycznego układu. Wiemy obecnie, że kwadrant południka ziemi wynosi $1'0001868 \times 10^9$ cm, nie zaś 10^9 cm, jak było zamiarem prawodawcy. Jak powiedzieliśmy, określenie centymetra i metra, które dziś obowiązuje, nie ma wcale związku z wymiarami kuli ziemskiej.

Rozporządzając wzorcem centymetra lub metra, czyli t. zw. *skalą* metryczną, możemy mierzyć długości. Najprostszy sposób

dokonania podobnego pomiaru polega na bezpośrednim przyłożeniu skali do mierzonego przedmiotu.

Przy takim bezpośrednim mierzeniu długości możemy odczytywać wzrokiem nieuzbrojonym podziałki centymetrowe a nawet milimetrowe; do mierzenia części milimetra służy skala pomocnicza, zwana *nonjuszem* albo *wernjerem*.



Rys. 1.

Wyobraźmy sobie nonjusz CD (rys. 1), którego skala ma 9 mm długości i jest podzielona na 10 części; każda taka część ma zatem 0.9 mm a więc o 0.1 mm mniej niż podziałka skali właściwej AB . Przypuśćmy, że mamy zmierzyć długość LM , zawartą np. pomiędzy 12 a 13 mm. Przyłożwszy początek C nonjusza do końca M przedmiotu, poszukujemy najbliższej

kreski nonjusza, przypadającej w przedłużeniu którejkolwiek bądź kreski skali AB . Jeżeli, jak na rysunku, kreska 5 nonjusza zgadza się z pewną kreską skali właściwej AB , wnosimy wówczas, że długość LM jest 12.5 mm.

W geometrii uczymy się mierzyć *pola* figur dwuwymiarowych, które można narysować na płaszczyźnie lub na (zakrzywionych) powierzchniach, np. pola prostokąta, trójkąta, koła, elipsy, kulistego trójkąta, pobocznicy stożka i t. p. W geometrii poznajemy również sposoby mierzenia *objętości* utworów geometrycznych trójwymiarowych, jak prostopadłościan, walec, kula, stożek, elipsoida i t. p. Wiemy, że jednostką pól w geometrii jest pole kwadratu, którego bokiem jest jednostka długości; że jednostką objętości jest objętość sześcianu, którego krawędzią jest jednostka długości. W fizyce jednostką pól jest zatem *centymetr kwadratowy* (cm^2), jednostką objętości jest *centymetr sześcienny* (cm^3).

W pierwotnym układzie metrycznym wyraz *litr* miał oznaczać tysiąc centymetrów sześciennych. Zobaczymy jednakże w następnym rozdziale tej książki, że obecnie obowiązujące określenie tego pojęcia jest odmienne (§ 40); według tego określenia wartość litra w centymetrach sześciennych może być znaleziona tylko na drodze doświadczalnej. Z najdokładniejszych dotychczasowych pomiarów wynika, że 1 litr wynosi $1.000027 \times 10^3 \text{ cm}^3$; jeżeli zatem wysoki stopień ścisłości nie jest niezbędny, możemy uważać wyraz *litr*, jak dawniej, za synonim tysiąca centymetrów sześciennych.

§ 4. O pomiarach czasu. Jednostki czasu.

Jak powiedzieliśmy w § 2-gim, ruchem nazywamy zmianę położenia, która dla dokonania się wymaga czasu. Wyobraźmy sobie dwie stacje A i B toru kolejowego. Pociąg pośpieszny przebywa drogę AB w przeciągu 20 minut, pociąg towarowy na

odbycie tej drogi zużywa godzinę. Zmiana położenia jest w obu razach ta sama, ale w pierwszym ruchu wymaga czasu krótszego niż w drugim. Ażeby więc zbadać ruch, nie dosyć jest zmierzyć odbywające się w nim zmiany położenia; potrzeba nadto zmierzyć *odstępów czasu*, których zmiany te wymagają.

Zasadniczą jednostką odstępów czasu w naukach ścisłych jest *sekunda gwiazdowa*, czyli jedna 86400-ta część okresu czasu, w ciągu którego kula ziemską obraca się, względem gwiazd stałych, jeden raz dokoła swej osi; albo też, co na to samo wypada, jedna 86400-ta część okresu czasu, w ciągu którego firmament gwiazd stałych obraca się, względem ziemi, jeden raz dokoła swej osi. Czas jednego takiego całkowitego obrotu nazywamy *dobą gwiazdową*; dzielimy go na 24 *godziny gwiazdowe*, lub na 1440 *minut gwiazdowych*, lub (jak powiedzieliśmy) na 86400 *sekund gwiazdowych*.

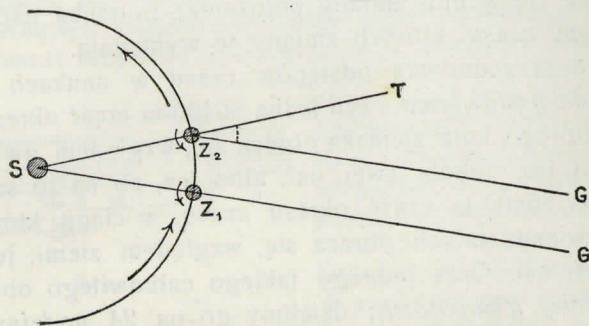
W czynnościach codziennego życia nie kierujemy się zazwyczaj ruchem gwiazd po sklepieniu niebieskiem; stosujemy się raczej do pojawiania się, do posuwania się i do znikania owej olbrzymiej pochodni, która dla nas tworzy rano, południe i wieczór, od której wszelkie życie na ziemi jest całkowicie zależne. W czynnościach codziennych nie posługujemy się tedy czasem gwiazdowym, ale raczej *słonecznym*. Wiemy jednakże, że słońce nie ma stałego miejsca na kuli niebieskiej, że przesuwa się nieustannie wśród gwiazd; z tego powodu czas *prawdziwy* słoneczny ani też t. zw. czas *średni* słoneczny nie zgadza się dokładnie z czasem gwiazdowym.

Wyobraźmy sobie, że Z_1 i Z_2 (rys. 2) są dwa położenia ziemi w jej rocznym obiegu dokoła słońca S ; przypuśćmy, że odpowiadają one dwóm chwilom, których odstęp wynosi jedną dobę *gwiazdową*. Pewna gwiazda G góruje w obu położeniach Z_1 i Z_2 ; ze względu na niezmienną odległość gwiazd stałych, narysowano Z_1G i Z_2G jako linie równoległe. Jeżeli jednak Z_1S jest przedłużeniem GZ_1 w położeniu Z_1 , tedy w położeniu Z_2 jest inaczej: Z_2S nie przypada w przedłużeniu GZ_2 . Zważywszy kierunek rocznego obiegu ziemi dokoła słońca oraz kierunek dziennego obrotu ziemi dokoła osi, łatwo zrozumieć, że doba słoneczna jest nieco dłuższa niż doba gwiazdowa.

Jak wiadomo z kosmografii, *rokiem zwrotnikowym* nazywa się okres czasu, który upływa pomiędzy dwiema kolejnymi chwilami przejścia słońca przez punkt wiosenny; jest to okres niemal dokładnie stały, zmniejsza się tylko o $\frac{1}{4}$ sekundy w ciągu stulecia. *Dobą średnią słoneczną* nazywamy jedną 365.2422-tą część roku zwrotnikowego. Stosunek tej doby do doby gwiazdowej wynosi:

$$\frac{\text{doba średnia słoneczna}}{\text{doba gwiazdowa}} = \frac{366.2422}{365.2422} = 1.002738;$$

doba średnia słoneczna wynosi zatem 24 godz., 3 min., 56⁵⁵ sek. gwiazdowych, czyli jest dłuższa niemal o 4 minuty od doby gwiazdowej. Stąd przeciwnie wy-

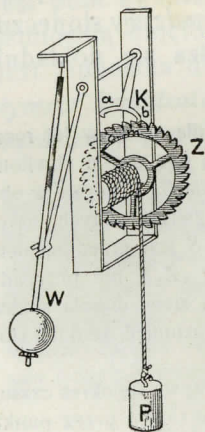


Rys. 2.

nika, że okres jednego obrotu ziemi dokoła osi trwa 23 godz., 56 min., 4⁰⁹ sek. średnich słonecznych lub 86164⁰⁹ sekund średnich słonecznych.

§ 5. O zegarach.

Do mierzenia okresów czasu służą przyrządy, zwane *zegarami*. Rys. 3 wyobraża (w uproszczeniu) ważniejsze części mechanizmu zegara *wahadłowego*. Widzimy na tym rysunku ciało ciężkie *P*, którego powolne opadanie, pod wpływem ciężkości, sprawia obrót kół i wskazówek czyli ruch całego mechanizmu. Pod wpływem tego działania, kółka zegara (opuszczone na rysunku), wraz z t. zw. *kołem wychwytowym* *Z*, poruszałoby się coraz prędzej, gdyby nie zapobiegało temu *wahadło* *W* wraz z *kotwicą* *K*. Niezmiennie złączona z wahadłem kotwica uczestniczy w jego ruchu. Gdy na przykład wahadło odchyliło się na lewo, lewy koniec *a* kotwicy podnosi się, pewien ząb np. *c* zostaje uwolniony, koło wychwytowe wykręca się nieco na prawo; lecz jednocześnie zaczął opuszczać się koniec *b* kotwicy, który zatem powstrzyma za chwilę ruch koła wychwytowego. Ponieważ wahadło waha się dalej, koniec *b* wkrótce podniesie się, ząb *m* zostanie uwolniony, a

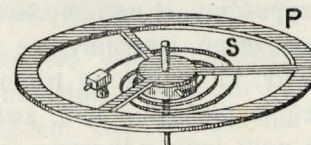


Rys. 3.

opadnie; ta sama gra powtarza się za każdym wahaniami. Zobaczymy w rozdz. III-im, że wahadła wahają się prawidłowo, że ich kolejne wahaniami, powtarzając się, są do siebie podobne; ruch koła *Z* bywa więc powstrzymywany i uwalniany regularnie; można by powiedzieć, że jest to ruch «równomiernie skaczący». Wahadło ujednastajnia zatem ruch mechanizmu zegarowego.

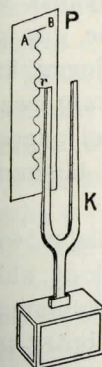
Nieustanne uderzenia zębów koła wychwytowego o kotwicę udzielają zarazem wahadłu coraz nowych lekkich impulsów i pobudzają je tym sposobem do ruchu, który wyczerpałby się rychło bez tej pomocy, skutkiem rozmaitych tarć i oporów.

W zegarkach kieszonkowych popędu mechanizmowi dostarcza silną sprężynę, którą skręcamy przy t. zw. nakręcaniu zegarka. Rolę wahadła odgrywa tu t. zw. *balans*; jest to cienka spiralna sprężynka *S* (rys. 4), połączona jednym końcem z lekkim, obracalnym kołem osi pierścieniem *P*. Podczas wahań pierścienia sprężynka *S* zwija się i rozwija naprzemian, działa więc pod wpływem własnej sprężystości, jak zwykle wahadło pod wpływem ciężkości.



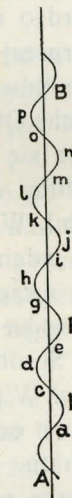
Rys. 4.

Niejednokrotnie wypada w fizyce mierzyć krótkie odstępy czasu, wynoszące na przykład kilka setnych lub tysięcznych części sekundy; zwykle zegary nie mogą być w tym razie pomocne. Uciekamy się wówczas do innych urządzeń, z których opiszemy jedno, najprostsze. Powszechnie znane są t. zw. *widełki strojowe* (*K* na rys. 5-ym); noszą one również nazwę *kamertonu*. Kamerton jest to pręt wyrobiony z najlepszej, sprężystej stali, zgięty w podkowę i osadzony na nóżce. Uderzony, kamerton wydaje dźwięk; jak



Rys. 5.

zobaczymy w późniejszym rozdziale, ramiona kamertonu odbywają wówczas ruch, przybliżenie podobny do wahadłowego; sprężystość stali, z której widełki są wyrobione, pobudza je bowiem do drgań, podobnie jak ciężkość pobudza wahadło do wahań. Przypuśćmy, iż przymocowaliśmy lekkie ostrze czyli rysik *r* do ramienia widełek (rys. 5). Do ostrza *r* zbliżamy płytkę *P* szklaną, którą poprzednio pokryliśmy sadzą. Jeżeli płytka *P* podczas drgań widełek jest nieruchoma, otrzymujemy na niej kreskę *AB* prostopadłą do długości ramion. Lecz jeżeli, podczas drgań widełek, płytka *P* posuwa się jednostajnie w kierunku prostopadłym do *AB*, otrzymujemy krzywą falistą *abcdefgh*



Rys. 6.

(rys. 6); punkty *b, d, f, h...* są przebiegane w chwilach, gdy ruch rysika odwraca się. Ruch widełek między *a i e*, między *c i g*, między *e i i* t. d. nazywamy *całkowitem drganiem*; odstęp czasu, zajęty przez jedno drganie, nazywamy *okresem*. Zobaczymy później, że okres danych widełek jest stały; dlatego chwile zwrotów *b, d, f, h i t. d.* a tak samo chwile *a, c, e, g i t. d.* przypadają w sta-

łych odstępach; krzywa falista jest regularna, fale $abcde$ i t. d. powtarzają się na niej jednakowo. Przypuśćmy, że rysik r dał znaki A, B (rys. 6) w chwili początkowej i w chwili końcowej zjawiska, którego czas trwania mamy zmierzyć. Widzimy wówczas z otrzymanej krzywej, ile razy zjawisko to trwało dłużej niż okres drgania widełek. Na rys. 6-ym AB zawiera 9 odstępów takich jak Aa , lub ac , lub ce i t. d.; czas trwania zjawiska wynosił więc 9 półokresów drgania lub 4.5 okresu. Pozostaje tylko znaleźć okres drgania widełek, co jest rzeczą łatwą, jak zobaczymy w rozdziale późniejszym. Na takiej zasadzie polega urządzenie *chronografów* czyli przyrządów, służących do mierzenia krótkich odstępów czasu.

§ 6. O pojęciu punktu w kinematyce

Przypuśćmy, że umiemy mierzyć odległości, kąty, okresy czasu; przypuśćmy, iż umiemy badać ruch *ilościowo*. Już z codziennych spostrzeżeń wnosimy, że ciała poruszają się naogół w sposób zawiły, który byłoby trudno opisać dokładnie. Gdy na przykład biegnie pies albo koń, zwierzę posuwa się naprzód jako całość ale nogi jego odbywają zarazem ruch własny, zbliżony do wahadłowego. Gdy rzucamy książkę, czapkę lub inny przedmiot do góry, przedmiot ten jako całość podnosi się, a później opada, ale zazwyczaj wykręca się wówczas, odwraca się, wykonywa ruch bardzo złożony. Różne punkty zwierzęcia, książki lub czapki poruszają się więc niejednakowo, odbywają ruchy różne; ile jest punktów w poruszającym się przedmiocie, tyle ruchów odmiennych. Objąć naraz tyle zjawisk jest niepodobna. Co jednak wydaje się nadmiernie trudne, nieraz może być dokonane, gdy potrafimy *rozłożyć* zadanie, zbliżając się do celu kolejnymi krokami. W każdej chwili powinniśmy umieć skierować *całą* uwagę na jeden przedmiot, na jedno pytanie; na umiejętności oderwania uwagi od nieistotnych zagadnień polega nieraz tajemnica powodzenia w abstrakcyjnej nauce.

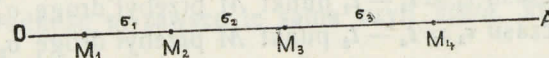
Spróbujmy uprościć zadanie, o którym przed chwilą mówiliśmy. W poruszającym się ciele wybieramy punkt określony, który łatwo odnaleźć; skupiamy uwagę na ruchu owego wybranego punktu. Upatrzwszy na przykład świecący guzik na obroży psa lub na uprząży konia, śledzimy ruch tego punktu, który odtąd jest niejako wyobrazicielem zwierzęcia. Podobnie, zamiast całej piłki, uważamy jej środek; zamiast okrętu — jego latarnię. Może się zdarzyć, że wybrany punkt porusza się w sposób stosunkowo prosty, mimo iż ruch ciała jest wielce zawiły. Jeżeli np. koń biegnie w arenie cyrkowej, guzik jego uprząży porusza się przy-

bliżenie po kole poziomem; latarnia okrętu odbywa być może ruch prostoliniowy, chociaż okręt kołysze się i chwieje się, płynąc; środek piłki, spadającej swobodnie w pokoju, biegnie na dół po linii prostej pionowej.

W wielu zagadnieniach możemy poprzestać na zbadaniu ruchu, który odbywa pewien określony punkt ciała; niekiedy musimy, chwilowo, na takim zbadaniu poprzestać. Często wówczas mówimy tylko o owym wybranym punkcie poruszającego się ciała, o innych zaś punktach nie wspominamy. W tem znaczeniu mówimy w kinematyce o ruchu *geometrycznego punktu*.

§ 7. O ruchu prostoliniowym.

Przypuśćmy, że punkt M porusza się wzdłuż prostej OA (rys. 7). To znaczy, że prosta OA nie uczestniczy w ruchu punktu M ; że pozostaje w spoczynku względem ciał odniesienia lub



Rys. 7.

układów odniesienia, do których punkt M podczas ruchu wciąż odnosimy. Taki ruch punktu nazywa się *prostoliniowym*. Możemy również w tym razie powiedzieć, że *tor* punktu jest linią prostą.

Skoro wiadomo, że punkt może poruszać się tylko po nieruchomej prostej OA , zatem do wyznaczenia położenia tego punktu wystarczy w każdej chwili odległość punktu od pewnego stałego miejsca O , wybranego na prostej OA . Tę odległość, zmierzoną w centymetrach lub innych jednostkach długości, będziemy oznaczali przez s .

Gdy punkt M porusza się po prostej OA , odległość s zmienia się z biegiem czasu; rośnie, gdy M oddala się od O , maleje zaś, gdy M ku punktowi O się przybliża. Gdybyśmy wiedzieli, *według jakiego prawa odległość s zmienia się z czasem*, znalibyśmy ruch punktu M . Ażeby poznać to prawo, musimy prowadzić rachubę czasu podczas ruchu punktu; rozpoczynamy ją w chwili, zwanej *początkową*. Od początkowej chwili do uważanej chwili upłynęła pewna liczba sekund; tę liczbę oznaczamy przez t . Wartość t wyznacza chwilę, którą chcemy rozważać. Za-

miast mówić: «chwila, aż do której, poczynając od chwili początkowej, upłynął odstęp czasu t sekund», możemy krótko powiedzieć: «chwila t »; niejednokrotnie dla zwięzłości będziemy wyrażali się w ten sposób. Wyrażenie «chwila $t=0$ » oznacza więc chwilę początkową; wyrażenie «chwila $t=1$ » oznacza chwilę o 1 sekundę późniejszą i t. d.

Uważajmy dwie chwile: pewną chwilę t_1 i inną, późniejszą t_2 . Pomiedzy temi chwilami upłynął odstęp czasu $t_2 - t_1$; oznaczmy go przez τ_1 . Niechaj będą s_1 i s_2 odległości punktu M od miejsca O , odpowiadające chwilom t_1 i t_2 . Przypuśćmy, że M z biegiem czasu oddala się od O ; w takim razie mamy $s_2 > s_1$. Droga, którą przebył punkt M od chwili t_1 do chwili t_2 , wynosi $s_2 - s_1$; oznaczamy ją przez σ_1 . Uważajmy późniejsze chwile t_3, t_4 i t. d. i postępujemy dalej w sposób wskazany; otrzymamy wyniki, zestawione w następującej tabliczce:

w odstępie czasu $\tau_1 = t_2 - t_1$ punkt M przebył drogę $\sigma_1 = s_2 - s_1$
w odstępie czasu $\tau_2 = t_3 - t_2$ punkt M przebył drogę $\sigma_2 = s_3 - s_2$
w odstępie czasu $\tau_3 = t_4 - t_3$ punkt M przebył drogę $\sigma_3 = s_4 - s_3$
i t. d.

Weźmy teraz na uwagę stosunek drogi σ_1 (przebytej w odstępie czasu τ_1) do długości odstępu τ_1 ; nazywamy go *średnią prędkością* punktu M pomiędzy chwilami t_1 i t_2 ; oznaczamy go przez v_1 . Weźmy podobnie na uwagę stosunek drogi σ_2 do odstępu τ_2 ; nazywamy go *średnią prędkością* punktu M pomiędzy chwilami t_2 i t_3 ; oznaczamy go przez v_2 ; i tak dalej. Mamy więc

$$1. \quad v_1 = \frac{\sigma_1}{\tau_1}; \quad v_2 = \frac{\sigma_2}{\tau_2} \quad \text{i t. d.}$$

Średnią prędkością punktu M pomiędzy dwiema chwilami nazywamy zawsze *stosunek drogi, przebytej przez punkt między temi chwilami, do odstępu czasu, który pomiędzy nimi upływa*.

Drogi σ wyrażamy w centymetrach, odstępy czasu wyrażamy w sekundach; stąd wynika, że prędkości ruchu v , obliczone według równań (1), wypadną wyrażone w jednostce: cm/sek.

Wyobraźmy sobie na przykład, że, obserwując ruch punktu M , znaleźliśmy, co następuje:

w chwilach: $t_1 = 3$ sek. $t_2 = 5$ sek. $t_3 = 7$ sek. $t_4 = 9$ sek.
odległości od O : $s_1 = 25$ cm $s_2 = 45$ cm $s_3 = 69$ cm $s_4 = 99$ cm.

Obliczamy z tych spostrzeżeń, że średnie prędkości wynosiły:

w odstępie τ_1 (od t_1 do t_2) τ_2 (od t_2 do t_3) τ_3 (od t_3 do t_4)
średnia prędkość $v_1 = 10$ cm/sek $v_2 = 12$ cm/sek $v_3 = 15$ cm/sek.

§ 8. O ruchu prostoliniowym jednostajnym.

Ruch prostoliniowy nazywamy *jednostajnym*, jeżeli średnia prędkość jest w nim zawsze ta sama, bez względu na to, między którymi chwilami jest utworzona. Jakkolwiek wybralibyśmy chwile t_1, t_2, t_3 i t. d., pomiędzy którymi upływają odstępy τ_1, τ_2 i t. d., mamy więc zawsze w ruchu prostoliniowym jednostajnym

$$1. \quad \frac{\sigma_1}{\tau_1} = \frac{\sigma_2}{\tau_2} = \frac{\sigma_3}{\tau_3} = \text{i t. d.}$$

lub, innemi słowy:

$$2. \quad v_1 = v_2 = v_3 = \text{i t. d.}$$

W ruchu prostoliniowym jednostajnym mamy zatem tylko jedną średnią prędkość v , zawsze tę samą czyli *stałą*, która wynosi

$$3. \quad v = \frac{\sigma}{\tau};$$

τ jest tutaj *dowolnym* odstępem czasu, σ jest drogą, przebytą w tym odstępie. Z równania (3) wynikają dalsze równania

$$4. \quad \sigma = v\tau \quad \text{oraz} \quad \tau = \frac{\sigma}{v}.$$

W powyższych równaniach (1) założmy, że

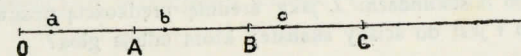
$$5. \quad \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \text{i t. d.};$$

otrzymamy natychmiast

$$6. \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \text{i t. d.}$$

Jeżeli punkt porusza się w linii prostej jednostajnie, przebywa drogi jednakowe w jednakowych odstępach czasu.

Czy możemy odwrócić to twierdzenie? Możemy, lecz powinniśmy wówczas w niem mówić o jednakowych, ale *zresztą dowolnych* odstępach czasu. Z na-



Rys. 8.

stępującego przykładu przekonywamy się, że to zastrzeżenie jest wówczas niezbędne. Przypuśćmy, że punkt M przebiega drogę OA (rys. 8) w przeciągu pierwszej sekundy; że w przeciągu drugiej przebiega drogę $AB = OA$; że

w przeciągu trzeciej przebiega $BC = AB = OA$ i t. d. Pomimo to ruch punktu M może nie być jednostajny. Jeżeli w pierwszej półsekundzie punkt przebywa drogę Oa krótszą aniżeli aA i jeżeli taka nierówność dróg półsekundowych powtarza się w następujących sekundach, tedy ruch w istocie nie jest jednostajny.

Ażeby opisać własności ruchu prostoliniowego jednostajnego, rozpoczynamy rachubę czasu w pewnej chwili początkowej, w której zatem (§ 7) kładziemy $t = 0$. Niechaj odległość ruchomego punktu M od stałego miejsca O na torze OA (rys. 7) wynosi s_0 w chwili $t = 0$; w chwili późniejszej t ta odległość niechaj wynosi s . Ponieważ ruch jest jednostajny i prędkość v jest stała, mamy według (4):

$$7. \quad s - s_0 = vt \quad \text{czyli} \quad s = s_0 + vt.$$

Zadania.

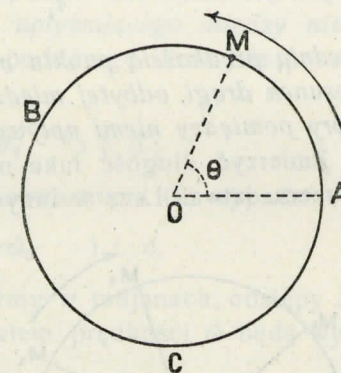
1. Kula wystrzelona z armaty przebiega najpierw zasłonę A ; o 0.01 sek później przebiega drugą zasłonę B . Odległość AB wynosi 5 metrów. Obliczyć średnią prędkość pocisku.
2. Przez pół godziny pociąg poruszał się ruchem jednostajnym, z prędkością 1.7×10^3 cm/sec. Jak daleko zajechał?
3. Wózek posuwa się po drodze ruchem jednostajnym, przebywając metr w przeciągu 0.9 sekundy. Jakiego czasu wymagać będzie przebycie drogi 1.2 km?
4. Prędkość 75 cm/sec wyrazić w jednostce: km/godz. Kładąc łokieć = 57.6 cm, wyrazić tę samą prędkość w jednostce: łokieć/minuta. Kładąc miłę ang. = 1609 m, wyrazić tę samą prędkość w jednostce: miła ang./doba.
5. W 4 sekundy po ujrzeniu błyskawicy usłyszeliśmy grzmot. Przypuszczając, że głos biegł w powietrzu jednostajnie, z prędkością 340 m/sec, obliczyć, jak daleko od nas piorun uderzył.
6. Światło biegnie w próżni z prędkością stałą 3×10^{10} cm/sec. Gdyby z tą prędkością mogło przebiec kulę ziemską wzdłuż osi, od bieguna do bieguna (odległość ta wynosi 12713030 m), w jakim czasie dokonałoby tej drogi?
7. Światło, wysłane przez gwiazdę α Centauri, biegnie przez 3 lata i 115 dni, zanim dobiegnie do ziemi. Jak znaczna jest odległość, która dzieli nas od tej gwiazdy?
8. Balon, śród gęstej mgły, unoszony przez wiatr, zbliża się ku ścianie stromej skalistej. Huk wystrzału, odbity od tej ściany, powrócił (jako *echo*) do łódki balonu po 5 sekundach. Po upływie minuty astronauta powtarza tę samą próbę; echo powraca po 3 sekundach. Z jaką średnią prędkością posuwał się balon? Jak daleko było i jest do ściany skalistej, która odbija głos?

§ 9. O ruchu kołowym.

Przypuśćmy, że punkt M porusza się po obwodzie koła ABC (rys. 9). Przez to zdanie chcemy powiedzieć, że koło ABC nie

bierze udziału w ruchu punktu M ; że pozostaje w spoczynku względem ciał lub układów odniesienia, do których punkt M odnosimy, ażeby się o jego ruchu upewnić. Taki ruch punktu M nazywamy *kołowym*.

Miewamy nieraz sposobność dostrzegania ruchu kołowego; często posługujemy się takim ruchem. Koniec wskazówki zegara posuwa się po jego tarczy ruchem kołowym. Dowolny punkt kamienia młyńskiego, wirownicy, skrzydeł wiatraka, koła rozpędowego w maszynie parowej, ożywiony jest również ruchem kołowym. Względem gwiazd stałych kula ziemiska obraca się około swej osi; każdy punkt jej powierzchni biegnie po obwodzie równoleżnika, na którym jest położony. Księżyc krąży dokoła ziemi przybliżenie po kole; ziemia biegnie dokoła słońca przybliżenie po kole.



Rys. 9.

Przypuśćmy, że w chwili t chcemy wyznaczyć położenie punktu M na obwodzie koła ABC (rys. 9).

Postępujemy w tym celu podobnie, jak postępowaliśmy w § 7-ym, w którym rozważaliśmy ruch prostoliniowy. Na obwodzie koła wybieramy punkt stały A ; poczynając od A , mierzymy długość łuku AM w jednym z dwóch możliwych kierunków, np. w kierunku, wskazanym przez strzałkę (rys. 9). Długość łuku AM , w ten sposób zmierzoną i wyrażoną np. w centymetrach, będziemy oznaczali przez s .

Uważajmy dwie chwile: chwilę t_1 i późniejszą t_2 ; pomiędzy nimi upłynął odstęp czasu $\tau_1 = t_2 - t_1$. Niechaj s_1 i s_2 oznaczają łuki AM (zmierzone, jak powiedzieliśmy), które odpowiadają chwilom t_1 i t_2 . Przypuśćmy, że łuk s_2 jest dłuższy niż s_1 . Droga, którą odbył punkt M w czasie od t_1 do t_2 , wynosi $s_2 - s_1$; oznaczmy ją przez σ_1 . Uważajmy późniejsze chwile t_3 , t_4 i t. d. i twórzmy, jak w pierwszym odstępie, drogi, zataczone przez punkt M w następujących odstępach czasu. Otrzymamy wyniki następujące:

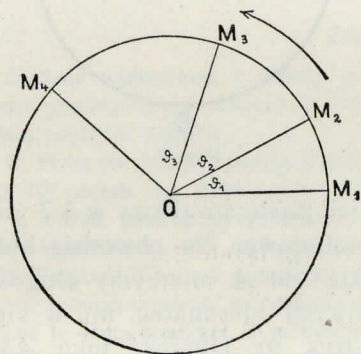
w odstępie czasu $\tau_1 = t_2 - t_1$ punkt M przebył drogę $\sigma_1 = s_2 - s_1$
w odstępie czasu $\tau_2 = t_3 - t_2$ punkt M przebył drogę $\sigma_2 = s_3 - s_2$
w odstępie czasu $\tau_3 = t_4 - t_3$ punkt M przebył drogę $\sigma_3 = s_4 - s_3$
i dalej podobnie. Bierzemy teraz na uwagę stosunek drogi σ_1

(przebytej w odstępie τ_1) do długości odstępu τ_1 ; nazywamy go *średnią prędkością* punktu M pomiędzy chwilami t_1 i t_2 ; oznaczamy go przez v_1 . Podobnie tworzymy średnią prędkość punktu pomiędzy chwilami t_2 i t_3 , którą oznaczamy przez v_2 i t. d. Mamy zatem

$$1. \quad v_1 = \frac{\sigma_1}{\tau_1}; \quad v_2 = \frac{\sigma_2}{\tau_2} \quad \text{i t. d.}$$

Średnią prędkością punktu między dwiema chwilami nazywamy *stosunek drogi, odbytej między temi chwilami, do odstępu czasu, który pomiędzy nimi upływa*.

Zmierzyć długość łuku na obwodzie płaskiego krążka, jest to rzecz łatwa. Leczą w innych razach pomiar łuku może być trudny lub wręcz niemożliwy, na przykład pomiar łuku na równiku ziemi, pomiar łuku na sklepieniu niebieskiem. Zamiast łuków, bierzemy wówczas na uwagę *kąty*, które odpowiadają im w środku koła.



Rys. 10.

Například, na rys. 9-ym, łukowi AM odpowiada w środku koła kąt AOM , utworzony przez promień stały OA i ruchomy OM . Wartość kąta AOM , wyrażoną w radjanach (§ 3), będziemy oznaczali przez θ . Uważamy chwilę t_1 i późniejszą t_2 , pomiędzy którymi upłynął odstęp czasu τ_1 . Niechaj będą θ_1 i θ_2 wartości kąta AOM , odpowiadające chwilom t_1 i t_2 ; przypuśćmy, że $\theta_2 > \theta_1$. W czasie od t_1 do t_2 promień OM wykręcił się o kąt $\vartheta_1 = \theta_2 - \theta_1$ (rys. 10). Uważając dalsze chwile t_3, t_4 i t. d., powiemy podobnie, że

w odstępie czasu: promień OM wykręcił się o kąt:

$$\begin{aligned} \tau_1 = t_2 - t_1 & \quad \vartheta_1 = \theta_2 - \theta_1 \\ \tau_2 = t_3 - t_2 & \quad \vartheta_2 = \theta_3 - \theta_2 \\ \tau_3 = t_4 - t_3 & \quad \vartheta_3 = \theta_4 - \theta_3 \end{aligned}$$

i tak samo dalej. Tworzymy teraz stosunek wykręcenia ϑ_1 (dokonanego w odstępie τ_1) do długości odstępu τ_1 ; nazywamy ten stosunek *średnią prędkością kątową* między chwilami t_1 a t_2 i oznaczamy go przez $\tilde{\omega}_1$. Podobnie tworzymy średnią prędkość

kątową między chwilami t_2 i t_3 , którą oznaczamy przez $\tilde{\omega}_2$ i t. d. Mamy

$$2. \quad \tilde{\omega}_1 = \frac{\vartheta_1}{\tau_1}; \quad \tilde{\omega}_2 = \frac{\vartheta_2}{\tau_2} \quad \text{i t. d.}$$

Średnią prędkością kątową między dwiema chwilami nazywamy *stosunek wykręcenia się promienia, które dokonywa się między temi chwilami, do odstępu czasu, upływającego między nimi*.

Jeżeli r oznacza promień koła, po którego obwodzie porusza się punkt M , mamy

$$3. \quad \sigma_1 = r\vartheta_1; \quad \sigma_2 = r\vartheta_2 \quad \text{i t. d.};$$

zatem z porównania równań (1) z równaniami (2) wypada

$$4. \quad v_1 = r\tilde{\omega}_1; \quad v_2 = r\tilde{\omega}_2 \quad \text{i t. d.}$$

Ponieważ kąty θ oraz ϑ mierzymy w radjanach, odstępy zaś czasu τ mierzymy w sekundach, zatem prędkości $\tilde{\omega}$ będą wyrażone w jednostce: 1/sek.

§ 10. O ruchu kołowym jednostajnym.

Ruch kołowy nazywamy *jednostajnym*, jeżeli średnia prędkość jest w nim ta sama bez względu na to, między którymi chwilami jest utworzona. Jakikolwiek są chwile t_1, t_2, t_3 i t. d., pomiędzy którymi upływają odstępy τ_1, τ_2 i t. d., w ruchu kołowym jednostajnym mamy

$$1. \quad \frac{\sigma_1}{\tau_1} = \frac{\sigma_2}{\tau_2} = \frac{\sigma_3}{\tau_3} = \text{i t. d.}$$

lub innemi słowy

$$2. \quad v_1 = v_2 = v_3 = \text{i t. d.}$$

Zważywszy równania (4) poprzedzającego artykułu, widzimy, że w ruchu kołowym jednostajnym mamy również

$$3. \quad \tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \text{i t. d.};$$

zatem w takim ruchu średnia prędkość kątowa jest zawsze ta sama, bez względu na chwile, między którymi jest utworzona. W ruchu kołowym jednostajnym mamy więc tylko *jedną* średnią prędkość v oraz *jedną* średnią prędkość kątową $\tilde{\omega}$, które spełniają równania



$$4. \quad v = \frac{\sigma}{\tau}; \quad \tilde{\omega} = \frac{\vartheta}{\tau}; \quad v = r\tilde{\omega};$$

τ jest tutaj dowolnym odstępem czasu, σ jest drogą, przebytą przez punkt M po obwodzie koła w odstępie τ , ϑ jest kątem, odpowiadającym łukowi σ w środku koła. Mamy oczywiście

$$5. \quad \sigma = v\tau; \quad \tau = \frac{\sigma}{v}; \quad \vartheta = \tilde{\omega}\tau; \quad \tau = \frac{\vartheta}{\tilde{\omega}}.$$

Przypuśćmy, że w uważanym ruchu jednostajnym *jeden całkowity obieg* po obwodzie koła trwa przez czas T ; czas T nazywa się wówczas *okresem ruchu*. Okresowi T odpowiada oczywiście wartość 2π kąta ϑ ; mamy zatem

$$6. \quad \tilde{\omega} = \frac{2\pi}{T} \quad \text{lub} \quad \tilde{\omega}T = 2\pi.$$

Jeżeli ruch kołowy jest bardzo szybki, okres T może być drobną częścią sekundy; tak poruszają się koła i inne części składowe różnych maszyn. Przypuśćmy, że T wynosi jedną $n^{\text{tą}}$ część sekundy; liczba n (albo $\frac{1}{T}$) wyraża wówczas liczbę obiegów, dokonanych w przeciągu sekundy. Przemysłowcy i inżynierowie posługują się chętniej liczbą n aniżeli pojęciem okresu T lub prędkości kątowej $\tilde{\omega}$, które w zastosowaniach praktycznych mniej są dogodne.

Zadania.

1. Koło o średnicy 24 cm kręci się jednostajnie, odbywając 300 obrotów w ciągu minuty. Obliczyć liczbę n obiegów w sekundzie, okres T jednego obrotu, prędkość kątową $\tilde{\omega}$ oraz prędkość v punktu na obwodzie koła. Obliczyć: ile czasu trwa wykręcenie się koła o stopień? o ile stopni wykręca się koło w przeciągu 0.01 sekundy?

2. Jaka jest prędkość kątowa wskazówki minutowej oraz wskazówki godzinnej naszych zegarów?

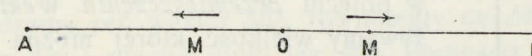
3. Czy wszystkie punkty kuli ziemskiej w jej ruchu obrotowym mają prędkość kątową tę samą? Jeżeli tak, jaka jest ta prędkość kątowa? Wyrazić ją w jednostkach: 1/sekunda gwiazdowa, 1/sekunda średnia słoneczna.

4. Promień kuli ziemskiej wynosi przybliżenie 6.37×10^8 cm; z jaką prędkością biegnie punkt na równiku, skutkiem ruchu obrotowego kuli ziemskiej? Wiedząc, że szerokość geograficzna Warszawy wynosi $52^\circ 13' 5''$, Krakowa zaś $50^\circ 3' 52''$, obliczyć tę prędkość w obu miejscowościach.

§ 11. Kierunek ruchu. Przemieszczenie, rozumiane jako wektor.

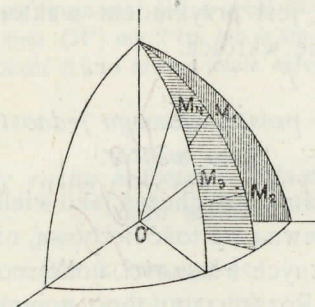
W §§ 7-ym i następnych mówiliśmy o *prędkości* ruchów prostoliniowych lub kołowych. Jest to jedna z najważniejszych cech ruchu; ale równie ważny jest *kierunek*, w którym odbywa się ruch. Obadwa pojęcia są znane z pospolitego doświadczenia; wypada nam tylko nadać im niezbędną w nauce dokładność.

Uważajmy ruch prostoliniowy (§ 7); przypuśćmy, że zadana jest prosta AB (rys. 11), w której ten ruch jest umiejscowiony.



Rys. 11.

Ruch punktu M może odbywać się wówczas w dwóch przeciwnych kierunkach, w kierunku OA albo też w kierunku OB . Jeżeli od punktu O ruchomy punkt M poruszył się do A lub do B , powiadamy, że M doznał *przemieszczenia* OA lub OB .



Rys. 12.

Przypuśćmy teraz, że prosta, w której ruch ma być umiejscowiony, nie jest zadana; że wiadomy jest tylko początkowy punkt O , w którym ruch się zaczyna. Wychodząc z O , punkt M może posuwać się wówczas w nieskończenie wielu prostych, rozchodzących się z O jak promienie powierzchni kulistej (rys. 12); przemieszczenia punktu M będą więc rozmaicie położone w przestrzeni, wybiegając z O naksztalt promieni powierzchni kulistej.

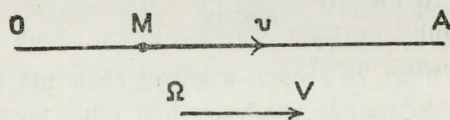
Jakie własności przemieszczenia punktu powinny być wiadome, ażeby ono było zupełnie określone? Ażeby przemieszczenie punktu było określone, ażeby nie mogło być co do niego

wątpliwości, powinniśmy wiedzieć: (1) jak położona w przestrzeni jest prosta, w której ono jest umiejscowione (2) od którego punktu tej prostej ono się zaczyna (3) w którym z dwóch kierunków, możliwych w tej prostej, ono się dokonywa (4) dokąd ono sięga, czyli (innymi słowy) jaka jest jego długość, wyrażona w określonych jednostkach, np. w centymetrach (rys. 13). Będziemy odtąd upatrywali wszystkie te cechy w pojęciu *przemieszczenia*. *Wektorem* nazywamy wielkość, której można przypisywać wszystkie powyższe cechy przemieszczenia i której przypisać je należy, ażeby ją w zupełności określić. Powtarzamy: *wektor jest umiejscowiony w pewnej prostej; jest przyłożony do pewnego punktu tej prostej; ma pewien w tej prostej kierunek; nareszcie ma pewną długość*. Przemieszczenie punktu M , ożywionego ruchem prostoliniowym, jest przykładem wektora; z innymi przykładami zapoznamy się wkrótce.

Rys. 13.

§ 12. Prędkość ruchu prostoliniowego jednostajnego, rozumiana jako wektor.

Prędkość rozumieliśmy dotychczas jako wielkość arytmetyczną; przypisywaliśmy jej pewną wartość liczbową, nie przypisywaliśmy jej jednak geometrycznych własności, umiejscowienia w linii prostej lub skierowania. Rozszerzamy teraz pojęcie prędkości w taki



Rys. 14.

sposób, ażeby ona stała się wektorem; możemy z niej wówczas odczytać właściwości ruchu, których sama wartość liczbowa prędkości wyrazić nie może.

Wyobraźmy sobie, że punkt M porusza się jednostajnie w prostej OA (rys. 14); prędkość ruchu niechaj wynosi v cm/sek. W prostej OA narysujmy przemieszczenie, którego doznaje punkt

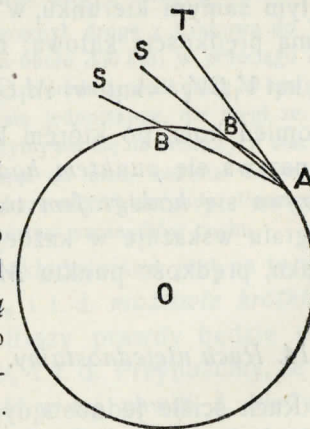
M podczas ruchu, w ciągu jednej sekundy; to przemieszczenie Mv wyobraża prędkość v , rozumianą wektorjalnie. Wektor Mv , wyobrażający prędkość, jest oczywiście umiejscowiony w prostej OA , t. j. w prostoliniowym torze punktu, zaczyna się od chwilowego położenia M tego punktu, jest skierowany w stronę ruchu; długość tego wektora wynosi v cm (t. j. tyle jednostek długości, ile prędkość v ma jednostek prędkości). Często rysujemy wektor, wyobrażający prędkość ruchu prostoliniowego, nie w samej linii toru, lecz w równoległej do niej linii. Wybieramy na przykład dowolny punkt Ω (rys. 14), nie leżący w prostej OA ; wyprowadzamy zeń wektor ΩV , równoległy do Mv , skierowany zgodnie z Mv i równie długi jak Mv . Ponieważ nie może być wątpliwości co do umiejscowienia i początku wektora, wyobrażającego prędkość, przeto wektor ΩV uzmysławia nam dostatecznie prędkość punktu M , rozumianą wektorjalnie.

Powinniśmy o tem pamiętać, że przemieszczenie Mv lub ΩV wyobraża prędkość v , ale nią *nie jest*. Wartość prędkości wynika z pewnych pomiarów długości i czasu; wartość przemieszczenia wynika z pomiaru tylko długości. Dlatego też jednostka prędkości jest zgoła inna, niż jednostka przemieszczenia. Jeżeli np. ruch jednostajny odbywa się w prostej OA z prędkością 2 cm/sek lub 5 km/sek, przemieszczenie Mv (lub ΩV) ma 2 cm lub 5 km długości. Wyrażenie «prędkość 2 cm» lub «prędkość 5 km» nie ma wcale określonego znaczenia, więc jest niedorzeczne.

§ 13. Prędkość ruchu kołowego jednostajnego, rozumiana jako wektor.

W przypadku ruchu kołowego jednostajnego postąpmy podobnie, jak w przypadku ruchu prostoliniowego. W jakim kierunku porusza się punkt, biegnący po obwodzie koła? Uważajmy punkty A i B na obwodzie koła (rys. 15). Zbliżajmy punkt B nieograniczenie do A ; sieczna AS , która przecina obwód w A i B , staje się w granicy styczną AT w punkcie A . Punkt, biegnący po obwodzie koła, porusza się więc wszędzie w kierunku stycznej do obwodu.

Weźmy na uwagę punkt M (rys. 16), który krąży po obwodzie koła $M_1 M_2 M_3$



Rys. 15.

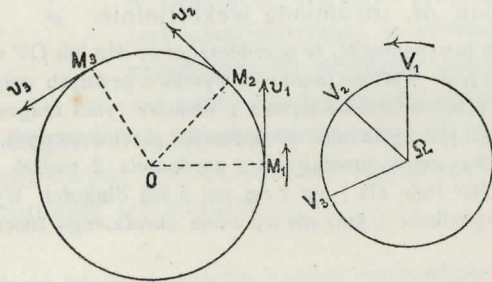
w kierunku strzałki. W miejscu M_1 punkt porusza się w kierunku M_1v_1 , stycznym do obwodu w tym miejscu; w miejscach M_2, M_3 i t. d. porusza się podobnie w kierunkach stycznych M_2v_2, M_3v_3 i t. d. Jak w artykule poprzednim, wybieramy dowolny punkt Ω i prowadzimy proste

1. $\Omega V_1 \parallel M_1v_1; \Omega V_2 \parallel M_2v_2; \Omega V_3 \parallel M_3v_3$ i t. d.

Ponieważ ruch jest jednostajny, prędkość jest stała; przypuśćmy, że wynosi v cm/sek. Na prostych $\Omega V_1, \Omega V_2, \Omega V_3$ i t. d. odcinamy długości

2. $\Omega V_1 = \Omega V_2 = \Omega V_3 = \text{i t. d.} = v$ cm.

Wyobraźmy sobie punkt V , umieszczony w zakończeniu odcinków $\Omega V_1, \Omega V_2, \Omega V_3$ i t. d. Ponieważ, według (2), te odcinki są



Rys. 16.

równe sobie, punkt V biegnie po kole $V_1V_2V_3$; widzimy, że biegnie w tym samym kierunku, w którym M biegnie po $M_1M_2M_3$ i z tą samą prędkością kątową; na przykład

3. kąt $V_1\Omega V_2 =$ kątowi M_1OM_2 ; kąt $V_2\Omega V_3 =$ kątowi M_2OM_3 i t. d.

Promień koła, po którym biegnie punkt V , wynosi v cm. Punkt V nazywa się *punktem hodograficznym* punktu M ; koło $V_1V_2V_3$ nazywa się *hodografem* toru kołowego $M_1M_2M_3$. Promień hodografu wskazuje w każdej chwili, co do wartości i co do kierunku, prędkość punktu M , rozumianą jako wektor.

§ 14. Ruch niejednostajny. Prędkość chwilowa albo prawdziwa.

Ruch ściśle jednostajny, którym zajmowaliśmy się w artykułach poprzednich, wyjątkowo tylko wydarza się w przyrodzie; odbywające się dokoła nas rodzaje ruchu naogół są niejedno-

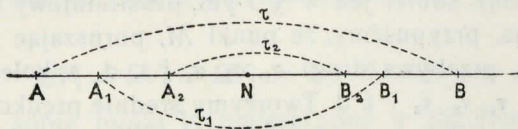
stajne. O wyjeżdżającym ze stacji pociągu mówimy, że jedzie *coraz prędzej*; gdy pociąg dojeżdża do stacji, na której ma się zatrzymać, powiadamy, że posuwa się *coraz powolniej*. Mówimy, że kamień wypuszczony z ręki biegnie coraz prędzej ku ziemi; że rzucony pionowo do góry podnosi się coraz powolniej. Tworzymy więc niejako intuicyjnie pojęcie prędkości w ruchu niejednostajnym; sądzimy, że ona jest zmienna, że rośnie z czasem albo maleje. Spróbujmy wyjaśnić sobie dokładnie owo pojęcie.

Wyobraźmy sobie, jak w § 7-ym, prostoliniowy ruch punktu. Jak wówczas, przypuśćmy, że punkt M , poruszając się w prostej OA (rys. 7), przebywa drogi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ i t. d. w kolejnych odstępach czasu τ_1, τ_2, τ_3 i t. d. Tworzymy średnie prędkości v_1, v_2, v_3 i t. d., odpowiadające tym odstępom; równania (1) § 7-go pozwalają obliczyć te średnie prędkości, które naogół nie będą równe sobie, albowiem ruch jest niejednostajny. Jasną jest rzeczą, że, utworzywszy *średnie* prędkości v_1, v_2, v_3 i t. d., *nie opisaliśmy jeszcze ruchu zupełnie dokładnie*. Ażeby to dobrze zrozumieć, powróćmy do przykładu rozpędzającego się pociągu. Przypuśćmy, że, obserwując ruch pociągu w odstępie czasu τ_1 , znaleźliśmy średnią prędkość v_1 . Gdybyśmy podzielili odstęp τ_1 na dwa krótsze odstępy τ' i τ'' , z których τ' jest wcześniejszy, τ'' zaś późniejszy, wówczas średnia prędkość w odstępie τ' okazałaby się z pewnością mniejsza, aniżeli średnia prędkość w odstępie τ'' . Opisanie ruchu w odstępie τ_1 zapomocą jednej tylko średniej v_1 jest więc ogólnikowe; jeżeli ten odstęp jest długi, opisanie może być niedostateczne, nie dosyć szczegółowe.

Wyobraźmy sobie, że pociąg kolejowy przebył drogę z Krakowa do Warszawy (która wzdłuż dzisiejszego toru wynosi około 350 km) w przeciągu 7 godzin. Powiadamy o tym pociągu, że poruszał się ze średnią prędkością 50 km/godz. Lecz pociąg w rzeczywistości nie poruszał się jednostajnie, nie biegł ze stałą prędkością 50 km/godz; w istocie pociąg zatrzymywał się na niektórych stacjach; wyjeżdżając z nich, rozpędzał się; dojeżdżając do nich, zwalniał biegu; gdy biegł «całą parą», musiał mieć prędkość większą niż 50 km/godz. Poprzestając na podaniu średniej prędkości, pomijamy mnóstwo szczegółów ruchu.

Ażeby opisanie ruchu stało się dokładniejsze, jest na to tylko jedna rada: *uczynić odstępy τ_1, τ_2, τ_3 i t. d. możliwie krótkimi*; im te odstępy będą krótsze, tem bliższy prawdy będzie obraz ruchu, który dają prędkości v_1, v_2, v_3 i t. d. Przypuśćmy, że zajmuje nas osobliwie ruch punktu M w tej chwili t , kiedy on przebiega przez punkt N toru (rys. 17). Dokoła chwili t wybieramy odstęp czasu τ taki, ażeby chwila t była w nim zawarta.

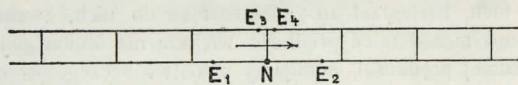
Przypuśćmy, że w przeciągu odstępu τ punkt M przebył drogę AB (rys. 17); AB oczywiście obejmuje w sobie punkt N . Średnia prędkość w odstępie τ wynosi AB/τ . Ponieważ ta średnia nie wyraża dosyć dokładnie własności ruchu w chwili t , wybieramy więc krótszy odstęp czasu τ_1 , znowu obejmujący chwilę t ; jeżeli A_1B_1 (rys. 17) jest drogą, przebytą w czasie τ_1 , średnia prędkość w tym odstępie wynosi A_1B_1/τ_1 . Jeżeli i ta średnia nie wyraża własności ruchu w chwili t z dostateczną ścisłością, tworzymy



Rys. 17.

dokoła t jeszcze krótszy odstęp τ_2 ; średnia prędkość w tym odstępie wynosi A_2B_2/τ_2 (zob. rys. 17). Jesteśmy przekonani o tem, że A_1B_1/τ_1 daje prawdziwszy obraz ruchu punktu w chwili t aniżeli AB/τ ; że A_2B_2/τ_2 odzwierciedla go wierniej aniżeli A_1B_1/τ_1 . Postępujemy podobnie coraz dalej i dalej. Im krótszy odstęp τ wybieramy dokoła t , im bardziej zbliżamy ku sobie granice odcinka σ , przebieganego w czasie τ , tem wiarogodniejszym wyrazem własności ruchu w chwili t wydaje się średnia prędkość σ/τ w odstępie τ . *Prawdziwą lub chwilową prędkością v punktu M w chwili t nazywamy granicę, do której dąży średnia prędkość σ/τ , utworzona w odstępie czasu τ (który zawiera chwilę t w sobie), gdy zarówno ten odstęp τ jak odpowiadająca mu droga σ dążą jednocześnie do zera.*

Niechaj rys. 18 wyobraża tor kolejowy. Przejeżdżający pociąg przebiega z pewną prędkością v przed słupem kilometrowym N ; postawiono nam za za-



Rys. 18.

danie zmierzenie tej prędkości. Umieszczamy dwa przyrządy elektryczne E_1 i E_2 : pierwszy przed, drugi za miejscem N ; przyrządy te przesyłają sygnały o przejściu lokomotywy do chronografu, którego zasadę znamy z § 5-go. Ustawiliśmy E_1 o 3 metry przed słupem N , E_2 o 3 metry za nim; odcinek $\sigma_{12} = E_1E_2$ wynosi więc 6 m. Chronograf mierzy odstęp czasu τ_{12} , który upływa między (sygnalizowanymi przez E_1 i E_2) chwilami t_1 i t_2 . Przypuśćmy, że chronograf wskazał

$\tau_{12} = 0.29$ sekundy; otrzymujemy 2069 cm/sec jako średnią prędkość pociągu pomiędzy chwilami t_1 i t_2 lub między miejscami E_1 i E_2 . Jeżeli nie posiadamy doskonalszych narzędzi mierniczych, musimy zadowolnić się tem przybliżeniem. Przypuśćmy jednakże, że nasz spółzawodnik rozporządzał przyrządami dokładniejszymi i umiał posłużyć się nimi. Umieścił on przyrząd sygnalizujący E_3 o 50 cm przed miejscem N , drugi przyrząd E_4 o 50 cm za tem miejscem; odcinek $\sigma_{34} = E_3E_4$ w jego postępowaniu wynosił 1 metr. Na chronografie odczytał $\tau_{34} = t_4 - t_3 = 0.049$ sek. Otrzymał więc prędkość średnią 2041 cm/sec pomiędzy miejscami E_3 i E_4 (lub odpowiednimi chwilami t_3 i t_4); musimy uznać ten wynik za wiarogodniejszy, niż przez nas otrzymany.

Powiadamy zatem, że pociąg przebiegł przed słupem N z prędkością 2041 cm/sec. Inżynier kolejowy lub maszynista, który kieruje ruchem lokomotywy, nie wyraziłby się w taki sposób; powiedziałby raczej, że pociąg «poruszał się z prędkością 73.5 km na godzinę». Rozumiemy, że w tem zdaniu niema oczywiście nic błędnego, chociażby nawet pociąg zatrzymał się (dajmy na to) o ćwierć kilometra po za słupem N , o którym mówiliśmy. Co mamy na myśli, mówiąc, że pociąg przebiega przed słupem N z prędkością 73.5 km na godzinę? Chcemy przez to powiedzieć, że, *gdyby* on, poczynając od miejsca N , poruszał się dalej jednostajnie i *gdyby* prędkość tego ruchu jednostajnego była równa jego chwilowej czyli prawdziwej prędkości w miejscu N , w takim razie w przeciągu następującej godziny przebyłby drogę 73.5 kilometrów.

§ 15. O ruchu prostoliniowym niejednostajnym.

Średnie przyspieszenie.

Przypuśćmy, że punkt M porusza się w prostej OA (rys. 7) ruchem niejednostajnym. Uważajmy pewną chwilę t_1 oraz inną, późniejszą t_2 . Przypuśćmy, że w chwili t_1 prawdziwa prędkość punktu M wynosi v_1 ; że w chwili t_2 wynosi v_2 . Przypuśćmy, że $v_2 > v_1$; zatem w chwili t_2 punkt porusza się *prędzej*. Gdy ktoś idzie coraz prędzej, mówimy, że przyspiesza kroku; o ruchu rozpędzającego się pociągu mówimy, że jest przyspieszony. Utwórzmy więc pojęcie *przyspieszenia*, które byłoby *miarą wzrastania prędkości podczas ruchu*. W odstępie τ_1 , upływającym między chwilami t_1 i t_2 , prawdziwa prędkość punktu powiększyła się o $v_2 - v_1$; tworzymy stosunek $(v_2 - v_1)/\tau_1$ i nazywamy go *średnim przyspieszeniem f_1 punktu M pomiędzy chwilami t_1 i t_2* .

Miarą przyspieszenia nie może oczywiście być sama wartość różnicy $v_2 - v_1$. Ruch może być słabo przyspieszony; mimo to, czekając przez bardzo długi czas τ_1 , moglibyśmy dostrzec w nim znaczną zmianę $v_2 - v_1$ prędkości. Ruch może być mocno przyspieszony; mimo to, biorąc bardzo krótki czas τ_1 , znaleźlibyśmy w nim nieznaczną zmianę prędkości.

Przyspieszenie punktu w jego ruchu prostoliniowym jest widocznie *szybkością wzrastania* prawdziwej prędkości. Miarą prędkości ruchu nie jest sama droga, przebyta w pewnym odstępie czasu, lecz stosunek tej drogi do owego

odstępu (§ 7); podobnie miarą przyspieszenia nie jest sam przyrost prędkości, lecz stosunek tego przyrostu do odstępu czasu, w którym on się wydarzył.

Uważamy teraz dalsze chwile t_3 , t_4 i t. d.; w każdym odstępie czasu, oddzielającym dwie kolejne chwile, postępujemy podobnie, jak postąpiliśmy w odstępie τ_1 . Otrzymujemy co następuje:

w odstępie $\tau_1 = t_2 - t_1$ prędkość punktu M powiększyła się o $v_2 - v_1$
 w odstępie $\tau_2 = t_3 - t_2$ prędkość punktu M powiększyła się o $v_3 - v_2$
 w odstępie $\tau_3 = t_4 - t_3$ prędkość punktu M powiększyła się o $v_4 - v_3$

i t. d. Średnie przyspieszenia w odstępach τ_1 , τ_2 , τ_3 i t. d. były zatem

$$1. \quad f_1 = \frac{v_2 - v_1}{\tau_1}; \quad f_2 = \frac{v_3 - v_2}{\tau_2}; \quad f_3 = \frac{v_4 - v_3}{\tau_3}$$

i t. d. Średniem przyspieszeniem punktu pomiędzy dwiema chwilami nazywamy stosunek, który zachodzi między przyrostem prawdziwej prędkości, wydarzającym się między temi chwilami a odstępem czasu, oddzielającym je od siebie.

Jaką jednostką powinniśmy mierzyć przyspieszenia? Ponieważ prędkości v wyrażamy w cm/sek, odstępy zaś τ wyrażamy w sekundach, zatem, według równań (1), przyspieszenia f wypadną wyrażone w jednostce

$$2. \quad \frac{\left(\frac{\text{cm}}{\text{sek}}\right)}{\text{sek}}, \text{ którą piszemy: cm/sek}^2.$$

Wyobraźmy sobie ruch prostoliniowy, w którym znaleźliśmy:

$t =$	3 sek	5 sek	7 sek	9 sek
$v =$	50 cm/sek	60 cm/sek	72 cm/sek	86 cm/sek

Średnie przyspieszenia wynosiły w tym ruchu:

w odstępie między $t = 3$ a $t = 5$ sek.	$f = 5$ cm/sek ²
w odstępie między $t = 5$ a $t = 7$ sek.	$f = 6$ cm/sek ²
w odstępie między $t = 7$ a $t = 9$ sek.	$f = 7$ cm/sek ²

Przypuśćmy, że chcemy wyrazić prędkości w innej jednostce, np. w cm/min. Mamy np.

$$50 \text{ cm/sek} = 3000 \text{ cm/min}; \text{ i podobnie dalej.}$$

Przejdźmy podobnie od sekund do minut w jednostce przyspieszenia. Mamy np.:

$$5 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2} = 5 \frac{\text{cm/sek}}{\text{sek}} = \frac{300 \text{ cm/min}}{\text{sek}} = \frac{18000 \text{ cm/min}}{\text{min}} = 18000 \frac{\text{cm}}{\text{min}^2}$$

W przejściu od sekund do minut liczba, wyrażająca prędkość, zwiększyła się 60 razy, liczba zaś, wyrażająca przyspieszenie, zwiększyła się 3600 czyli 60² razy. Widzimy z tego przykładu, że pisanie jednostki przyspieszenia w postaci cm/sek² ma pewne uzasadnienie.

§ 16. O ruchu prostoliniowym jednostajnie przyspieszonym.

Ruch prostoliniowy punktu nazywamy *jednostajnie przyspieszonym*, jeżeli średnie przyspieszenie jest w nim zawsze to samo, bez względu na to, między którymi chwilami jest utworzone. Jakkolwiek wybralibyśmy więc chwile t_1 , t_2 , t_3 i t. d., pomiędzy którymi upływają odstępy τ_1 , τ_2 i t. d., mamy zawsze w ruchu prostoliniowym jednostajnie przyspieszonym

$$1. \quad \frac{v_2 - v_1}{\tau_1} = \frac{v_3 - v_2}{\tau_2} = \frac{v_4 - v_3}{\tau_3} = \text{i t. d.}$$

lub innemi słowy

$$2. \quad f_1 = f_2 = f_3 = \text{i t. d.}$$

W ruchu prostoliniowym jednostajnie przyspieszonym mamy zatem tylko jedno średnie przyspieszenie *stałe*, które oznaczamy przez f .

Jak w § 7-ym, rozpoczynamy rachubę czasu w chwili początkowej, w której kładziemy $t = 0$. Prędkość punktu M w chwili początkowej niechaj wynosi v_0 ; w dowolnej chwili późniejszej t niechaj wynosi v . Okres czasu, upływający od chwili początkowej do chwili t , możemy wybrać za którybyś powyższy odstęp τ ; skoro f jest stałe, mamy wówczas

$$3. \quad \frac{v - v_0}{t} = f;$$

stąd otrzymujemy

$$4. \quad v = v_0 + ft.$$

Kładąc $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \text{i t. d.}$ w równaniach (1), otrzymujemy

$$5. \quad v_2 - v_1 = v_3 - v_2 = v_4 - v_3 = \text{i t. d.}$$

W ruchu prostoliniowym jednostajnie przyspieszonym, jednakowym odstępom czasu odpowiadają jednakowe przyrosty prędkości. W twierdzeniu odwrotnym musimy zastrzec, że odstępy czasu, o których mówimy, są nie tylko jednakowe, lecz, że mogą być dowolnie wybrane; podobnie jak w § 8-ym, przekonywamy się, że to zastrzeżenie jest niezbędne.

Zadania.

1. Jaką wartość ma przyspieszenie punktu, poruszającego się po torze prostoliniowym, z prędkością stałą?
2. W chwili $t = 0$ prędkość $v_0 = 5$ cm/sek. Wiedząc, że ruch jest prostoliniowy jednostajnie przyspieszony i że f ruchu $= 1$ cm/sek², obliczyć prędkość

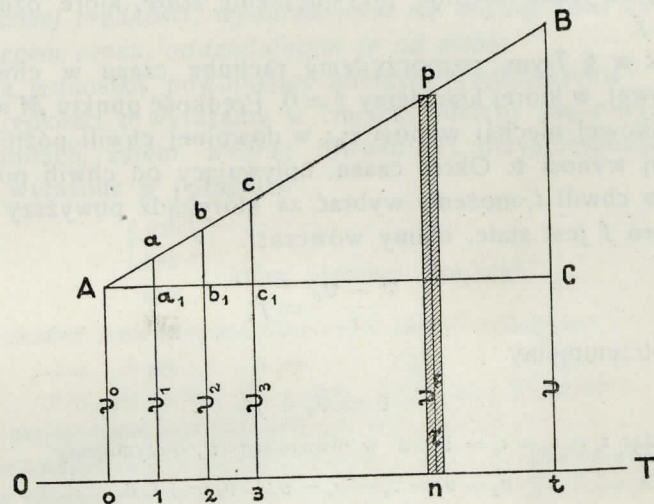
v osiągniętą po kwadransie. Znaleźć czas, w którym prędkość ruchu dojdzie do 100 m/sek.

3. Pociąg kolejowy ma 90 m długości. Przy pomocy sekundowego zegarka obserwator A spostrzegł, że pociąg (od przodu lokomotywy do tylnej ściany ostatniego wagonu) przebiegł koło niego w przeciągu 4 sekund. Inny obserwator B umieścił się dalej wzdłuż toru; koło niego pociąg przejechał w przeciągu 3 sekund. Jakie prędkości pociągu możemy obliczyć na mocy tych danych? Znaleźć je w cm/sek.

4. Wiadomo, w przypadku powyższego zadania 3-go, że pociąg przebiegł koło obserwatora B o pół minuty później, niż koło obserwatora A . Jakie przyspieszenie pociągu możemy obliczyć? Znaleźć je w cm/sek² oraz w m/min².

§ 17. Droga, przebywana w ruchu prostoliniowym jednostajnie przyspieszonym.

Wyobraźmy sobie ruch prostoliniowy jednostajnie przyspieszony. Niechaj prędkość poruszającego się punktu M wynosi v_0



Rys. 19.

w chwili $t=0$; w późniejszej chwili t niechaj wynosi v . Ponieważ ruch jest jednostajnie przyspieszony, przyspieszenie f jest stałe; równania § 16-go stosują się. Oznaczmy przez s_0 odległość punktu M w chwili $t=0$ od stałego miejsca O toru; przez s rozumiemy tę samą odległość w chwili t . W jaki sposób odległość s zależy od czasu t ? Żeby na to pytanie znaleźć odpowiedź, posługujemy się rozumowaniem graficznym.

Na osi OT (rys. 19) odcinamy odcinki 01, 12, 23 i t. d., które,

według umówionej skali, wyobrażają pierwszą, drugą, trzecią i t. d. sekundę, od chwili $t=0$ począwszy; punkt 0 wyobraża zatem chwilę początkową, punkt 1 chwilę $t=1$ sek i t. d. W punktach 0, 1, 2, 3... t wyprowadzamy prostopadłe do OT i odmierzamy na nich, według umówionej skali, prędkości: $v_0, v_1, v_2, v_3 \dots v$, które punkt M w odpowiednich chwilach osiągnął. Powiadamy, że końce $A, a, b, c, \dots B$ odcinków $OA, 1a, 2b, 3c, \dots tB$ leżą na *wspólnej prostej* AB . Istotnie, gdy poprowadzimy prostą AC równoległą do OT , widzimy, że

$$1. \quad Ab_1 = 2Aa_1; \quad Ac_1 = 3Aa_1 \quad \text{i t. d.},$$

wnosimy zatem z równań (1) § 16-go, że

$$2. \quad b_1b = 2a_1a; \quad c_1c = 3a_1a \quad \text{i t. d.}$$

Takie własności trójkątów Aa_1a, Ab_1b, Ac_1c i t. d. dowodzą, że te trójkąty mają kąt ostry w A wspólny, t. j. że a, b, c i t. d. leżą na wspólnej linii prostej AB .

Dzielimy teraz odstęp, który upłynął od $t=0$ do chwili t , na pewną liczbę bardzo krótkich odstępów τ , z których jeden jest wskazany na rys. 19-ym. W środkowej chwili n tego odstępu prowadzimy prostą prostopadłą do osi OT , aż do przecięcia się w p z prostą AB ; długość np wyobraża wówczas, w umówionej skali, prędkość v_n punktu M w chwili n . Gdyby punkt M poruszał się jednostajnie w pobliżu chwili n , z prędkością stałą v_n , przebyłby w czasie τ drogę $v_n\tau$ (§ 8); wartość liczbowa tej drogi wyobraża zatem prostokąt, zacieniowany na rysunku.

Przypuśćmy, że pewien pomocniczy (pomyślany, czyli fikcyjny) punkt N porusza się w sposób następujący: w każdym z bardzo krótkich odstępów τ ma on prędkość stałą, równą prędkości v , jaką ma punkt M w środkowej chwili tego odstępu. Droga, którą pomocniczy punkt N odbędzie pomiędzy chwilą $t=0$ a chwilą t , będzie wyrażona przez sumę wielu wąskich pasków czyli prostokątów, zbudowanych podobnie jak zacieniowany prostokąt. Im krótsze będą odstępki τ , tem bardziej zbliżać się będzie ruch fikcyjnego punktu N do ruchu rzeczywistego punktu M ; im krótsze będą odstępki τ , tem bardziej zbliżać się będzie do pola figury $OABt$ owa suma pasków czyli prostokątów, o której przed chwilą wspomnieliśmy. Dochodzimy zatem do wniosku: pole figury $OABt$ wyobraża wartość liczbową drogi $s - s_0$, którą punkt

M przebywa pomiędzy początkową chwilą $t=0$ a chwilą t . Pozostaje obliczyć pole $OABt$; widzimy z rysunku, że ono składa się z dwóch części:

(1) z pola prostokąta $OtCA$, które wynosi $v_0 t$

(2) z pola trójkąta ACB ; to pole wynosi $\frac{1}{2}(v-v_0)t$, co podług równania (3) w § 16-ym można przepisać w postaci $\frac{1}{2}ft^2$.

Otrzymujemy zatem ostatecznie

$$3. \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}ft^2.$$

Wartość s_0 zależy od wyboru miejsca O , od którego liczymy s ; jeżeli miejsce O wybierzemy w tym punkcie toru, przez który przebiega punkt M w początkowej chwili rachuby czasu, wówczas $s_0 = 0$. Mamy wówczas z (3)

$$4. \quad s = v_0 t + \frac{1}{2}ft^2.$$

Rugując t z obecnego równania (4) i z równania (3) albo (4) w § 16-ym, otrzymujemy

$$5. \quad v^2 - v_0^2 = 2fs.$$

Zadania.

1. Pociąg wyjeżdża ze stacji; po upływie 2 minut od chwili wyruszenia przebył odległość 2160 m. Zakładając, że ruch był prostoliniowy i jednostajnie przyspieszony, obliczyć przyspieszenie. W tem samym założeniu obliczyć prędkość pociągu w odległości 540 m od stacji; obliczyć prędkość pociągu po upływie 1, 2, 3 minut od chwili wyruszenia.

2. Ciało zaczyna poruszać się ruchem prostoliniowym jednostajnie przyspieszonym; przyspieszenie wynosi 1 m/sek², prędkość początkowa jest żadna. Jak długo i jak daleko ciało biec musi, ażeby osiągnąć prędkość głosu w zwykłym powietrzu (340 m/sek)? Ile czasu zajmie przebycie drogi 72 m? Jak daleko ciało dobiegnie po upływie godziny?

§ 18. O ruchu prostoliniowym opóźnionym oraz jednostajnie opóźnionym.

Przypuśćmy, że punkt M porusza się w linii prostej; wyobraźmy sobie, że w chwili t_1 prędkość prawdziwa wynosi v_1 , w późniejszej zaś chwili t_2 wynosi v_2 , gdzie $v_2 < v_1$. Powiadamy wówczas, że między t_1 i t_2 ruch jest *opóźniony*. Rozumując znów przez τ_1 odstęp $t_2 - t_1$, tworzymy stosunek $(v_1 - v_2)/\tau_1$;

stosunek ten nazywamy *średnim opóźnieniem* punktu M między uważanymi chwilami t_1 i t_2 . Podobnie postępujemy dalej, w następujących odstępach τ_2, τ_3 i t. d. Co powiedzieliśmy w § 15-ym o ruchu prostoliniowym przyspieszonym, możemy powtórzyć, z łatwo zrozumiałymi zmianami, w obecnym przypadku ruchu prostoliniowego opóźnionego.

Jeżeli średnie opóźnienie w ruchu prostoliniowym jest *stałe*, bez względu na to, między którymi chwilami jest utworzone, wówczas ruch nazywamy *jednostajnie opóźnionym*. Rozumując jak w § 16-ym, możemy obliczyć prawdziwą prędkość v punktu M , odpowiadającą chwili t w takim ruchu. Jeżeli v_0 , jak w § 16-ym, jest prędkością w chwili początkowej $t=0$, f zaś wartością stałego opóźnienia, otrzymujemy

$$1. \quad v = v_0 - ft.$$

Rozumując jak w § 17-ym, znajdujemy odległość s , która w chwili t oddziela punkt M od stałego miejsca O toru. Jeżeli s_0 oznacza tę samą odległość OM w chwili $t=0$, otrzymujemy

$$2. \quad s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}ft^2.$$

Porównawszy obecne równania (1) i (2) z równaniami: (4) § 16-go oraz (3) § 17-go, spostrzegamy, że wartość $+f$ ówczesnych wzorów jest teraz zastąpiona przez $-f$. Umawiamy się zatem, że każde *opóźnienie* ruchu prostoliniowego będziemy uważali za *ujemne przyspieszenie*; możemy wówczas stosować prawa §§ 16-go i 17-go zarówno w przypadku ruchu jednostajnie przyspieszonego jak w przypadku ruchu jednostajnie opóźnionego.

Zadania.

1. Pociąg, o którym mowa w zad. 1-em § 17-go, dojeżdża do stacji B , na której ma się zatrzymać; prędkość ruchu zmniejsza się z czasem dokładnie tak samo, jak powiększała się przy wyjeździe z ówczesnej stacji A . Jakie jest przyspieszenie w pobliżu stacji B ?

2. Dojeżdżając do stacji B , powyższy pociąg znajduje się jeszcze w odległości 10 m od miejsca, w którym zatrzyma się; jaką w tej chwili ma prędkość? Ile sekund jeszcze upłynie, zanim się zatrzyma? Jeżeli wiadomo, że za 15 minuty stanie, w jakiej odległości znajduje się wówczas od miejsca postoju?

§ 19. Przykład ruchu prostoliniowego jednostajnie przyspieszonego.

W §§ 16-ym i 17-ym poświęciliśmy bliższą uwagę własnościom ruchu prostoliniowego jednostajnie przyspieszonego, albo-

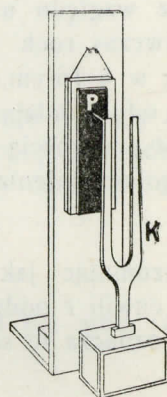
wiem ten rodzaj ruchu wydarza się codziennie przed naszymi oczyma. Wiemy, że otaczające nas ciała materialne, skoro zostaną swobodnie puszczane, *spadają*. Jakże poruszają się wówczas? Tego nie odkryje rozumowanie. Rozumowanie może kierować doświadczeniem, może porządkować jego wyniki i wydobywać z nich nieoczekiwane następstwa; ale doświadczenia nie może zastąpić.



Rys. 20.

Prosty przyrząd, zwany *pionem* (rys. 20), jest każdemu znany; wiadomo, że wskazuje on t. zw. *pionowy* kierunek. Ciało swobodnie puszczane, które nie zostało rzucone ani popchnięte w żadnym kierunku, biegnie ku ziemi po linii (prawie dokładnie) prostej pionowej. Chcemy zbadać, w jaki sposób porusza się ono po tym torze.

Wyobraźmy sobie płytkę szklaną *P* (rys. 21), którą dla bezpieczeństwa przyklejono do drewnianej deseczki; płytkę tę powleczone sadzą w płomieniu świecy lub naftowej lampy. Deseczka wraz z płytką *P* wisi na nitce; jeżeli



Rys. 21.

przepalimy nitkę ostrym płomykiem, deseczka wraz z płytką *P* opada ku dołowi. Rysujemy na płycie linię prostą *qq* pionową (rys. 22) i zbliżamy do niej widelki strojowe *K* (por. § 5), zaopatrzone w rysik. Przypuśćmy z początku, że płyta jest w spoczynku; niechaj *a* na prostej *qq* będzie punktem, w którym rysik dotyka wówczas płyty. Pozwólmy płycie opadać, gdy widelki jeszcze nie drgają; torem rysika na płycie jest wówczas prosta *qq*. Wyobraźmy sobie teraz, że wprowadzamy widelki w drganie i jednocześnie uwalniamy płytę, która poczyną opadać; rysik pozostawia wówczas ślad falisty na płycie, w postaci krzywej *abcde...* (rys. 22). Odległości *ab*, *bc*, *cd*, *de* i t. d. są to oczywiście drogi, przebyte przez płytę w ciągu pierwszego, drugiego, trzeciego i t. d. półokresu drgania widelków. Wymierzamy owe odległości starannie; znajdujemy

1. $bc = 3 ab$; $cd = 5 ab$; $de = 7 ab$ i t. d.

Stąd obliczamy drogi *s*, przebieżone do końca pierwszego, drugiego, trzeciego i t. d. półokresu:

$$2. \quad ab; \quad ac = ab + bc = 4 ab; \quad ad = ac + cd = 9 ab; \\ ae = ad + de = 16 ab; \quad \text{i tak dalej.}$$

Drogi te *s* mają się do siebie jak 1:4:9:16 i t. d.; ponieważ zaś odpowiadają chwilom $t = 1, 2, 3, 4 \dots$ półokresom, więc zgadzają się z formułą, znaną nam z poprzedzającego artykułu

$$3. \quad s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Widzimy zatem, że płyta porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym. Takim samym ruchem są ożywione wszelkie ciała, gdy spadają swobodnie. Zobaczymy w III-im rozdziale, że wszystkie ciała materialne, spadając, okazują to samo przyspieszenie, które nazywa się *przyspieszeniem ciężkości* i bywa zwykle oznaczane literą *g* (od wyrazu łacińskiego *gravitas*, ciężkość).

Napiszmy *g* zamiast *f* w równaniu (3); otrzymujemy

$$4. \quad s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Spróbujmy posłużyć się wzorem (4) w celu zmierzenia przyspieszenia *g*. Przypuśćmy, że w opisanym doświadczeniu użyliśmy widełek, których całkowite drganie powtarza się 125 razy w przeciągu sekundy; okres wynosi więc 0.008 sek, półokres 0.004 sek. Przypuśćmy, że powtórzyliśmy doświadczenie wielokrotnie; że, tworząc wynik przeciętny, znaleźliśmy 3.14 cm jako drogę, przebytą przez płytę w przeciągu 20 półokresów. Kładąc w równaniu (4)

$$5. \quad t = 0.08 \text{ sek} \quad s = 3.14 \text{ cm},$$

otrzymujemy przybliżenie $g = 981 \text{ cm/sek}^2$; tyle wynosi w istocie przyspieszenie *g* w Polsce.

Zadania.

1. Przypuśćmy, że całkowite drganie widełek powtarza się 250 razy w ciągu sekundy; ile wyniesie droga, przebyta przez płytę podczas 20 półokresów? Jeżeli droga *s* jest przebiegana przez płytę w przeciągu *x* okresów drgania, ile drgań na sekundę wykonywają użyte widełki?

2. Możemy przybliżenie ocenić wartość przyspieszenia *g* przy pomocy następującego doświadczenia. Trzymamy w ręku metalową kulę w wysokości 4.905 m nad kamienną posadzką lub płytą. Uwalniamy nagle tę kulę w chwili, gdy zegar, głośno bijący sekundy, wydzwania którąkolwiek sekundę. Słyszymy wówczas, że kula uderza płytę lub posadzkę w chwili następnego sekundowego sygnału. Spadanie trwało zatem 1 sekundę. Czy wynik ten zgadza się z równa-

niem (4) i z powyżej podaną wartością przyspieszenia g ? Jakie są najważniejsze źródła błędów w tym doświadczeniu i jak można je było ominąć?

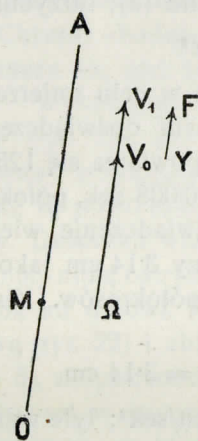
3. Pociąg kolejowy biegnie z prędkością 25 m/sek. Gdyby podróżny, ożywiony taką prędkością, uderzył o nieruchomą ścianę przedziału (jak to niestety wydarza się w razie nagłego spotkania się pociągów), skutek uderzenia byłby taki sam, jak gdyby podróżny był spadł z wysokości 31,85 m nad ziemią. Sprawdzić, że tak jest istotnie.

4. W książkach angielskich znajdujemy zazwyczaj podaną, jako wartość przyspieszenia g , wartość 32,2 stóp ang. na sek². Przypuszczając, że stopa ang. = 30,48 cm, obliczyć, jakiej wartości g w cm/sek² odpowiada dana powyższa. Wyrazić g w jednostce: m/min².

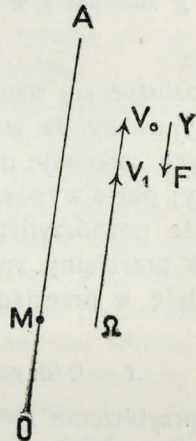
5. Przypuśćmy, że jednostką długości jest cm. Jaką jednostkę czasu τ należałoby przyjąć, ażeby liczbową wartość g , wyrażoną w cm/ τ ², wypadła równa jedności?

§ 20. Przyspieszenie, rozumiane jako wektor.

Uważajmy jeszcze raz ruch prostoliniowy jednostajnie przyspieszony; w takim ruchu obowiązuje równanie (4) § 16-go.



Rys. 23.



Rys. 24.

Weźmy na uwagę chwilę $t=1$ sek; przypuśćmy, że prędkość punktu M wynosiła wówczas v_1 cm/sek. Kładąc $t=1$ sek w formule (4) § 16-go, otrzymujemy

$$1. \quad v_1 = v_0 + f \cdot 1 \text{ sek.}$$

Ażeby otrzymać v_1 , musimy więc dodać do v_0 dodatkową prędkość, wynoszącą f cm/sek. Wybieramy w tym celu dowolny punkt Ω (rys. 23); z punktu Ω wyprowadzamy wektor ΩV_0 , który co do kierunku i długości wyobraża prędkość v_0 . Do wektora ΩV_0 doda-

jemy drugi wektor $V_0 V_1$, idący w przedłużeniu ΩV_0 i mający f cm długości; wówczas ΩV_1 co do kierunku i długości wyobraża prędkość v_1 . Powiadamy, że $V_0 V_1$ (lub równy i równoległy YF) wyobraża przyspieszenie f poruszającego się punktu M .

Gdyby ruch prostoliniowy punktu M był jednostajnie opóźniony (§ 18), doszlibyśmy podobnie do wniosku, że wektor $V_0 V_1$ (lub równy i równoległy YF), który wyobraża przyspieszenie, jest skierowany przeciwnie niż ΩV_0 oraz ΩV_1 (rys. 24).

§ 21. Ruch prostoliniowy przyspieszony. Przyspieszenie chwilowe albo prawdziwe.

W kilku artykułach ostatnich, poczynając od § 16-go, zajmowaliśmy się własnościami ruchu prostoliniowego jednostajnie przyspieszonego albo jednostajnie opóźnionego. Lecz ten wypadek ruchu nie jest oczywiście regułą, jest raczej wyjątkiem. Ażeby to twierdzenie na przykładzie objaśnić, wyobraźmy sobie jeszcze raz ruch kolejowego pociągu pomiędzy stacjami A i B . Przypuśćmy, iż pociąg, wyjeżdżając ze stacji A , ma stałe przyspieszenie f ; gdyby miał je dalej bez zmiany, poruszałby się wkrótce z ogromną, niebezpieczną i nawet niemożliwą prędkością. Ruch pociągu, który przy wyjeździe z A był jednostajnie przyspieszony, przeobraża się wkrótce w ruch jednostajny; zatem wartość przyspieszenia od f zeszła do zera. Gdy przyspieszenie zmalało do zera, prędkość v nie zmniejszyła się przez to; zamiast rosnąć, utrwaliła się tylko, przemieniła się w stałą. Gdy pociąg dojeżdża do B , gdzie ma się zatrzymać, prędkość v zaczyna się zmniejszać, przyspieszenie f od zera przechodzi do wartości ujemnych. Widzimy, że pomiędzy A i B przyspieszenie, chociaż przez pewien czas może być stałe, naogół jednak jest *zmiennie*.

Gdy przyspieszenie jest zmiennie, mówimy, że dany ruch prostoliniowy jest *niejednostajnie przyspieszony*. Ażeby taki ruch opisać, posługujemy się postępowaniem, które znamy z § 15-go; w kolejnych odstępach czasu τ_1, τ_2, τ_3 i t. d. tworzymy *średnie przyspieszenia* f_1, f_2, f_3 i t. d., odpowiadające tym odstępom. Lecz utworzywszy takie średnie przyspieszenia, nie opisaliśmy jeszcze ruchu zupełnie dokładnie. Ponieważ przez przeciąg czasu np. τ_1 charakter ruchu mógł ulegać zmianie (na przykład u końca tego okresu ruch mógł być bardziej przyspieszony niż na po-

czątku), więc opisanie ruchu w odstępie τ_1 zapomocą średniego f_1 jest tylko ogólnikowe. Przypuśćmy dla objaśnienia, że podano tylko *średnią* temperaturę powietrza w Warszawie w m. maju 1920-go roku lub *średnią* ilość deszczu w Zakopanem za m. sierpień 1919, nie wchodząc w bliższe szczegóły; takie opisanie przebiegu temperatury lub opadów atmosferycznych w tych miejscowościach i okresach czasu byłoby bardzo ogólnikowe i w wielu razach okazałoby się niedostateczne.

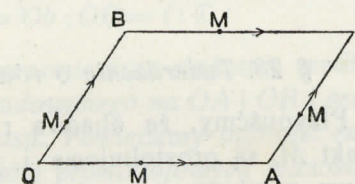
Ażeby opisanie ruchu stało się dokładniejsze, mamy ku temu tylko jeden sposób; ten sam, który znamy z § 14-go. Tworzymy krótkie, możliwie jaknajkrótsze odstępy czasu τ_1, τ_2, τ_3 i t. d.; im one będą krótsze, tem subtelniejszy, tem wiarygodniejszy będzie obraz ruchu, który tworzą przyspieszenia f_1, f_2, f_3 i t. d. Przypuśćmy, że zajmuje nas osobliwie ruch punktu M w pewnej chwili t . Dokoła tej chwili tworzymy odstęp czasu τ , tak żeby chwila t leżała w jego obrębie; z prędkości punktu przy końcu i u początku okresu τ oraz z długości τ wyliczamy średnie przyspieszenie f , które odpowiada odstępowi τ . Jeżeli ta średnia nie wyraża własności ruchu w chwili t dostatecznie dokładnie, tworzymy dokoła t coraz krótsze odstępy τ_1, τ_2 i t. d. (rys. 17); w taki jednak sposób, ażeby każdy odstęp zawierał w sobie chwilę t . Im krótszy dokoła t wybraliśmy odstęp τ , tem wiarygodniejszym wyrazem własności ruchu w chwili t wydaje się średnie przyspieszenie f , odpowiadające odstępowi τ . *Prawdziwem lub chwilowem przyspieszeniem punktu M w chwili t jego ruchu prostoliniowego nazywamy granicę, do której dąży średnie przyspieszenie w odstępie τ (zawierającym chwilę t w sobie), gdy zarówno odstęp τ , jak różnica prędkości punktu, u końca i u początku odstępu τ , jednocześnie dążą do zera.* Jeżeli prawdziwe przyspieszenie w chwili t okaże się dodatnie, mówimy, że prostoliniowy ruch punktu jest w tej chwili rzeczywiście (albo dodatnio) *przyspieszony*; jeżeli ono wypadnie ujemne, nazywamy ruch w chwili t *opóźnionym*; gdyby ono w chwili t było równe zeru, powiedzielibyśmy, że ruch w najbliższym sąsiedztwie tej chwili jest *jednostajny*.

§ 22. Zasada niezależności ruchów.

Wyobraźmy sobie, że człowiek M chodzi po pokładzie okrętu N , okręt zaś N jednocześnie płynie po jeziorze lub rzece. Czło-

wiek M odbywa wówczas dwa naraz ruchy: (1) odbywa swój własny, osobisty ruch względem okrętu (2) uczestniczy w ruchu okrętu, który przecież wraz z sobą unosi człowieka M .

Uważajmy po kolei *trzy* następujące zjawiska: (I) (a) okręt N pozostaje najprzód nieruchomy; człowiek M , poruszając się po nim, odbywa pewną drogę, np. prostą OA (rys. 25); (b) człowiek M w miejscu A pokładu okrętu pozostaje względem niego nieruchomy; okręt płynie w kierunku AC , skutkiem czego jego punkt A a zarazem człowiek M przenosi się do C . W ostatecznym wyniku dwóch kolejnych ruchów (a) i (b) człowiek M , wyruszywszy z O , dociera do C .



Rys. 25.

(II) Przypuśćmy, że opisane dwa ruchy odbywają się w przeciwnym porządku: (a) najprzód okręt N posuwa się w kierunku OB równoległym do AC (rys. 25); spoczywający na pokładzie człowiek M przenosi się z O do B , gdzie $OB = AC$; (b) okręt pozostaje nieruchomy; człowiek M , posuwając się po nim w kierunku $BC \parallel OA$, odbywa drogę BC , która jest $= OA$. Widzimy, że w wyniku obecnych dwóch ruchów (a) i (b) człowiek M dotrze do tego samego miejsca C , które był w zjawisku (I) osiągnął. Porządek dodawania się ruchów nie ma wpływu na ostateczny wynik zjawiska.

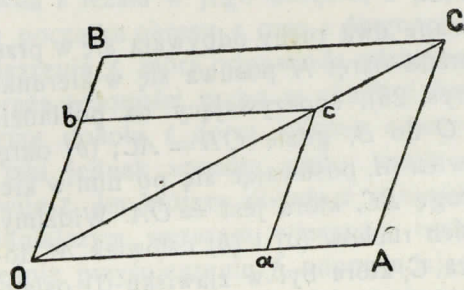
(III) Przypuśćmy, że ruchy, które uważaliśmy dotychczas za *kolejne*, odbywają się *jednocześnie*. Człowiek M porusza się względem okrętu N po torze OA ; jednocześnie ten tor, ulegając ruchowi okrętu, posuwa się w taki sposób, iż każdy jego punkt zatacza drogę równoległą do OB i równą OB . Odbywając oba te ruchy *spółcześnie*, człowiek osiągnie ostatecznie to samo miejsce C , w którym znalazł się w wyniku I-go albo też II-go zjawiska.

Twierdzenia, które tutaj poznaliśmy, wynikają z ogólnej zasady, zwanej *prawem niezależności ruchów*; zasada ta orzeka, że *dwa ruchy, spółczesne albo kolejne, które odbywa ten sam punkt, nie przeszkadzają ani nie pomagają sobie wzajemnie; każdy ruch odbywa się tak samo, jak gdyby drugi nie odbywał się wcale*. Przekonamy się wkrótce, jak częste i ważne są zastosowania, które ta zasada znajduje.

Przypuśćmy, że punkt M odbywa jednocześnie dwa ruchy; nazwijmy je dla zwięzłości *składowymi* ruchami punktu M . Punkt, który wykonywa jednocześnie dwa ruchy składowe, jest ożywiony ruchem *wypadkowym*, powstającym przez *złożenie*, według zasady niezależności, obu ruchów składowych. Zobaczymy natomiast, w prostym przypadku, jak dokonywa się *składanie* dwóch ruchów składowych.

§ 23. Twierdzenie o równoległoboku przemieszczeń.

Przypuśćmy, że obadwa ruchy składowe, które wykonywa punkt M , są prostoliniowe i jednostajne. Niechaj OA na rys. 26-y wyobraża przemieszczenie, którego punkt M doznałby w pewnym odstępie czasu T , gdyby poruszał się tylko pierwszym



Rys. 26.

ruchem składowym; OB na tym samym rysunku niechaj wyobraża przemieszczenie, którego doznałby M w tym samym czasie T , gdyby wykonywał tylko ruch drugi składowy. Poprowadźmy prostą AC , równą OB i równoległą do OB ; według § 22 go, punkt M , ożywiony ruchem wypadkowym, dojdzie w czasie T do miejsca C . Uważajmy teraz inny odstęp czasu t , rozpoczynający się jednocześnie z T , ale krótszy niż T . Niechaj Oa i Ob (rys. 26) wyobrażają przemieszczenia, których doznaje punkt M w czasie t , z osobna w pierwszym i w drugim ruchu składowym. Prowadzimy prostą ac równą Ob i równoległą do Ob ; jak przed chwilą, widzimy, że po upływie czasu t punkt M dojdzie do miejsca c . Łatwo teraz udowodnimy, że punkt c leży na przekątnej OC równoległoboku $OACB$. Oznaczmy przez u prędkość punktu M w pierwszym, przez v jego prędkość w drugim ruchu składowym; mamy

$$1. \quad Oa = ut \quad OA = uT \quad Ob = vt \quad OB = vT.$$

Stąd wyprowadzamy

$$2. \quad Oa : OA = t : T; \quad Ob : OB = t : T$$

a zatem także

$$3. \quad Oa : OA = Ob : OB.$$

Proporcję (3) przepisujemy w postaci

$$4. \quad Oa : OA = ac : AC$$

skąd wynika, że c leży na prostej OC . Mamy również oczywiście

$$5. \quad Oc : OC = Oa : OA = Ob : OB = t : T.$$

W ruchu wypadkowym punkt M przemieszcza się zatem wzdłuż przekątnej OC równoległoboku, zbudowanego na OA i OB i przebywa drogi proporcjonalne do czasu. Powiadamy ogólnie: *ruch wypadkowy, złożony z dwóch ruchów prostoliniowych jednostajnych, jest prostoliniowy jednostajny; przemieszczenie wypadkowe, którego ruchomy punkt doznaje w ruchu wypadkowym, jest dane (co do długości i co do kierunku) przez przekątną równoległoboku, zbudowanego na przemieszczeniach składowych; ta przekątna wychodzi oczywiście ze wspólnego początku składowych przemieszczeń*. Twierdzenie to nazywamy *zasadą równoległoboku przemieszczeń*.

Zadania.

1. Przemieszczenia składowe są umiejscowione w tej samej prostej. Znaleźć wypadkowe przemieszczenie (1) gdy kierunki składowych przemieszczeń są zgodne (2) gdy te kierunki są sobie przeciwne.

2. Złożyć dwa równe sobie przemieszczenia, zakładając, że one zawierają między sobą kąt: 0° , 45° , 90° , 135° , 180° .

3. Idąc poziomo naprzód ze stałą prędkością 1 m/sek, podnoszę lampę pionowo do góry ze stałą prędkością 15 cm/sek. Znaleźć przemieszczenie, którego lampa doznaje w przeciągu 25 sekund względem ziemi oraz kąt nachylenia tego przemieszczenia względem poziomemu.

4. W spokojnym powietrzu aeroplan posuwałby się prostoliniowo i jednostajnie ku północy, z prędkością 30 m/sek; silny wiatr unosi go jednak na wschód, ruchem prostoliniowym jednostajnym, z prędkością 12 m/sek. Znaleźć wypadkowe przemieszczenie po 10 sek i wyznaczyć jego kierunek.

5. Przypuśćmy, że punkt M odbywa jednocześnie dwa ruchy prostoliniowe jednostajnie przyspieszone. Udowodnić, że ruch wypadkowy w tym razie jest również prostoliniowy jednostajnie przyspieszony, podobnie jak ruchy składowe.

§ 24. Twierdzenie o równoległoboku prędkości.

Jeżeli punkt jednocześnie odbywa dwa ruchy, zatem jest obdarzony dwiema naraz prędkościami. Przypuśćmy, że punkt M odbywa jednocześnie dwa ruchy prostoliniowe jednostajne. Nie-

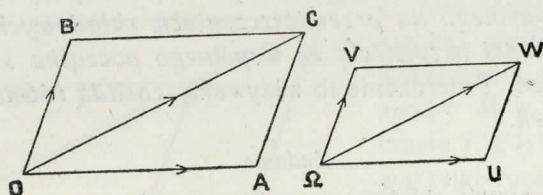
chaj będą OA i OB (rys. 27) składowe przemieszczenia, których doznaje punkt M w czasie t w pierwszym oraz w drugim swoim ruchu składowym; przekątnia OC równoległoboku $OABC$ wyobraża wówczas przemieszczenie wypadkowe, którego doznaje punkt M w czasie t . Oznaczmy przez u prędkość pierwszego składowego ruchu, przez v prędkość drugiego; te prędkości nazywamy *składowymi*. Według § 23-go ruch wypadkowy jest prostoliniowy jednostajny, odbywa się więc z prędkością stałą, którą nazywamy *wypadkową*; oznaczmy ją przez w . Mamy

$$1. \quad OA = ut \quad OB = vt \quad OC = wt$$

zatem

$$2. \quad OA : OB : OC = u : v : w$$

Prędkości u , v , w są wektorami; rysujemy je zatem, jak powiedziano w § 12-ym. Z dowolnego punktu Ω (rys. 27) prowadzi-



Rys. 27.

dzimy proste ΩU , ΩV , ΩW , równoległe odpowiednio do OA , OB , OC ; na tak poprowadzonych prostych odcinamy następnie długości ΩU , ΩV , ΩW , zawierające tyle cm, ile u , v , w zawierają jednostek cm/sek. Proporcję (2) przepisujemy teraz w postaci

$$3. \quad OA : OB : OC = \Omega U : \Omega V : \Omega W$$

która wskazuje, że figury $OABC$ i ΩUVW są *podobne*; skąd wynika, że ΩUVW jest *równoległobokiem*, zbudowanym na bokach ΩU i ΩV i że ΩW jest jego *przekątną*. Wygłaszamy zatem twierdzenie następujące: *prędkość wypadkowa w jest dana (co do wartości i co do kierunku) przez przekątnię równoległoboku, zbudowanego na prędkościach składowych u , v .*

Przechodzimy teraz do ogólniejszego przypadku. Przypuśćmy, że ruchy składowe punktu M są prostoliniowe lecz niejednostajne. Załóżmy, że odstęp czasu t , w którym dokonywają się przemieszczenia, jest nadzwyczajnie krótki. Boki i przekątnia równoległoboku *przemieszczeń* są wówczas nadzwyczajnie krótkie;

ale boki i przekątnia wyprowadzonego zeń równoległoboku *średnich* (w czasie t) *prędkości* mogą wcale nie być krótkie. Niechaj długość odstepu czasu t zbliża się nieograniczenie do zera; średnie (w czasie t) prędkości dążą do prawdziwych prędkości, równoległobok średnich prędkości dąży w granicy do równoległoboku prawdziwych prędkości. *Prawdziwa prędkość wypadkowa jest dana (co do wartości i co do kierunku) przez przekątnię równoległoboku, zbudowanego na prawdziwych prędkościach składowych.*

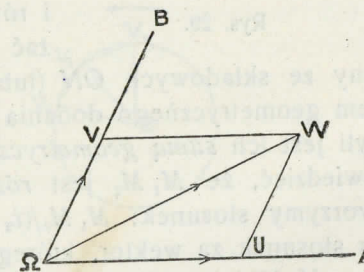
Dodawanie *arytmetyczne* stosuje się do wielkości arytmetycznych, które mają tylko jedną własność, *wartość liczbowa*. *Algebraiczne* dodawanie, oprócz liczbowej wartości, uwzględnia również *znak* uważanych wielkości. Przemieszczeń ani prędkości nie możemy dodawać do siebie arytmetycznie ani algebraicznie, ponieważ one, prócz wartości liczbowej, mają jeszcze inne cechy: są *umiejscowione w prostych*, są *skierowane w przestrzeni*; musimy dodawać je do siebie *geometrycznie*. Prawidła geometrycznego dodawania są właśnie zawarte w zasadzie równoległoboku.

Zadania.

1. Wóz toczy się po drodze, która wznosi się do góry; w chwili t wóz ma prędkość 1.97 m/sek w kierunku poziomym, oraz 0.35 m/sek w pionowym. Obliczyć prędkość wypadkową wozu w chwili t oraz jej nachylenie do poziomu.
2. Znaleźć wypadkową następujących prędkości: 1 cm/sek na zachód, 2 cm/sek na północ, 3 cm/sek na wschód.
3. Ruchy składowe punktu są skierowane prostopadle do siebie; prędkości u , v są dane. Jak znaleźć algebraicznie wypadkową w oraz dostawy kątów, tworzonych z tą wypadkową przez kierunki składowych?

§ 25. O rozkładaniu prędkości. O rzutach prędkości.

W § 24-ym widzieliśmy, w jaki sposób składowe prędkości ΩU i ΩV (rys. 28) *składają się* na wypadkową ΩW . Możemy odwrócić bieg postępowania; rys. 28 uczy zarazem, w jaki sposób daną prędkość ΩW można *rozłożyć* na składowe ΩU i ΩV . Zasada równoległoboku zawiera więc w sobie prawo zarówno składania, jak rozkładania prędkości. Istnieje jednak pewna różnica między temi zagadnieniami. Gdy składowe prędkości ΩU i ΩV są dane, ich wypadkowa ΩW jako wektor jest zupełnie określona. Gdy zaś dana jest prędkość ΩW , którą mamy rozłożyć,



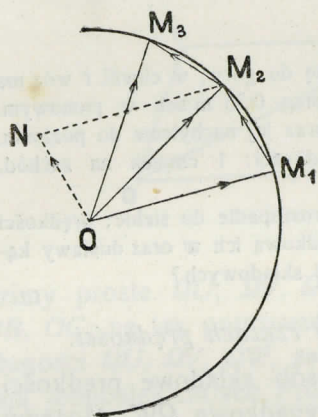
Rys. 28.

składowe jej stają się dopiero wówczas określone, gdy wiadomo, w jakich kierunkach ΩA , ΩB one mają być utworzone. Łatwo sprawdzić rysunkiem, że tę samą ΩW należy rozmaicie rozłożyć w rozmaitych kierunkach.

Prędkości składowe ΩU i ΩV rys. 28-go bywają nazywane rzutami prędkości ΩW na kierunki OA i OB ; mówi się wówczas, że ΩW jest *odniesiona* do stałych *osi* OA i OB . Zazwyczaj odnosimy prędkości do kierunków stałych, wzajemnie prostopadłych do siebie, czyli do t. zw. *osi prostokątnych*; składowe nazywamy wówczas *prostopadłymi rzutami* prędkości na osi prostokątne.

§ 26. Prędkość w dowolnym ruchu kołowym.

Powracamy jeszcze raz do ruchu kołowego, którym zajmowaliśmy się już w §§ 9, 10 i 13. Niechaj $M_1 M_2 M_3$ (rys. 29) wyobraża tor kołowy czyli *orbitę* kołową, którą zatacza punkt M ; M_1 , M_2 , M_3 są miejsca, przebiegane w chwilach t_1 , t_2 , t_3 . Ze środka koła O prowadzimy promienie OM_1 , OM_2 , OM_3 ; nadając każdemu promieniowi kierunek od środka ku obwodowi, możemy je poczytywać za wektory. Uważajmy wektor OM_2 ; nie odróżnia on się długością, ale odróżnia się kierunkiem od wektora OM_1 . Zbudujmy wektor $M_1 M_2$, skierowany od M_1 do M_2 ; oraz wektor ON , równy wektorowi $M_1 M_2$ i równoległy do niego. Możemy uważać OM_2 za wektor wypadkowy, złożony ze składowych ON (lub $M_1 M_2$) i OM_1 ; OM_2 jest wynikiem geometrycznego dodania do siebie wektorów OM_1 i $M_1 M_2$ czyli jest ich *sumą geometryczną*. Możemy więc równie słusznie powiedzieć, że $M_1 M_2$ jest *różnicą geometryczną* $OM_2 - OM_1$. Tworzymy stosunek: $M_1 M_2 / (t_2 - t_1)$; jak w § 12-ym, uważamy ten stosunek za wektor, którego kierunek zgadza się z kierunkiem $M_1 M_2$; długość tego wektora wynosi tyle cm, ile jednostek cm/sek zawiera stosunek $M_1 M_2 / (t_2 - t_1)$. Zbliżamy ku sobie chwile t_1 i t_2 ; skracamy więc odstęp $t_2 - t_1$ i prowadzimy go nieograniczenie do zera. Wektor $M_1 M_2$ skracą się coraz bardziej,



Rys. 29.

przebiega punkt M w chwilach t_1 , t_2 , t_3 . Styczne do orbity wektory $M_1 v_1$, $M_2 v_2$, $M_3 v_3$ wskazują wartości i kierunki chwilowe

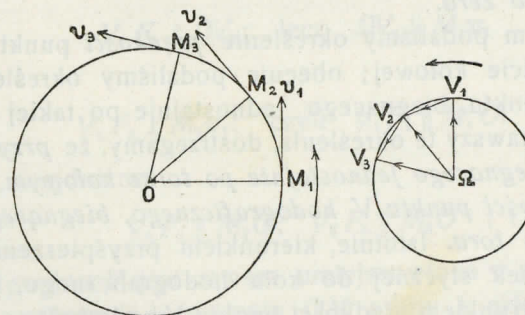
jego *długość* dąży do zera, ale jego *kierunek* nie ginie przez to, nie znika. Sieczna, zawarta pomiędzy punktami A , B obwodu koła (rys. 15), zachowuje kierunek od A do B , gdy B zbliża się ku A i w granicy przybiera kierunek stycznej (§ 13); podobnie wektor $M_1 M_2$ ma wciąż określony kierunek, jakkolwiek blisko M_2 dociera do M_1 ; w granicy $M_1 M_2$ przybiera kierunek stycznej do orbity w miejscu, w którym schodzą się M_2 i M_1 . Jeżeli t jest chwilą, w której spotykają się t_2 i t_1 , powiadamy: *prawdziwą (lub chwilową) prędkością punktu M w chwili t* nazywamy wektor, umiejscowiony w stycznej do orbity; jego *długością* jest granica, do której dąży stosunek $M_1 M_2 / (t_2 - t_1)$, gdy zarówno odstęp czasu $t_2 - t_1$, jak odpowiednia geometryczna różnica $M_1 M_2$ promieni dąży do zera.

Podane tu określenie prędkości w ruchu kołowym zgadza się oczywiście z określeniami, zawartymi w §§ 9, 10 i 13, ale jest ogólniejsze i zupełniejsze, ponieważ dotyczy się dowolnego (jednostajnego lub niejednostajnego) ruchu kołowego i ponieważ, w obecnym określeniu, prędkość jest rozumiana jako wektor.

Moglibyśmy zastosować obecną określenie do dowolnego ruchu prostoliniowego. Jeżeli punkt O wybierzemy w linii toru, promienie nie będą różniły się od dawniejszych odległości OM (rys. 7). Różnica geometryczna takich odległości sprowadza się do zwykłej algebraicznej różnicy. Natomiast w ruchu kołowym geometryczna różnica promieni nie jest zerem, chociaż długości ich są równe.

§ 27. Przyspieszenie w ruchu kołowym jednostajnym.

Przypuśćmy, że punkt M krąży jednostajnie po orbicie kołowej; M_1 , M_2 , M_3 (rys. 30) niechaj oznaczają miejsca, które



Rys. 30.

przebiega punkt M w chwilach t_1 , t_2 , t_3 . Styczne do orbity wektory $M_1 v_1$, $M_2 v_2$, $M_3 v_3$ wskazują wartości i kierunki chwilowe

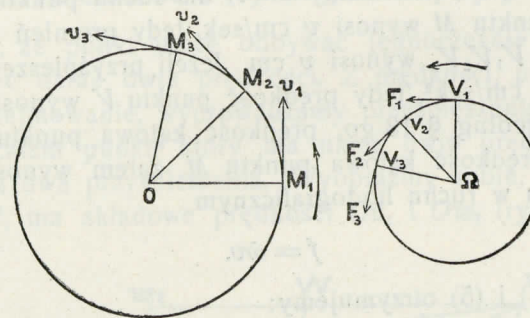
wych prędkości v_1, v_2, v_3 , którymi punkt M jest ożywiony w owych chwilach. Jak w § 13-ym, zbudujemy hodograf orbity $M_1 M_2 M_3$; niechaj nim będzie $\Omega V_1 V_2 V_3$ (rys. 30). Ponieważ punkt M krąży jednostajnie po kole $M_1 M_2 M_3$, przeto hodograf $\Omega V_1 V_2 V_3$ jest również kołem. Uważajmy wektor ΩV_2 ; nie różni się on od ΩV_1 długością, ale różni się kierunkiem. Zbudujmy wektor $V_1 V_2$, skierowany od V_1 do V_2 ; podobnie jak $M_1 M_2$ w § 26-ym, możemy poczytywać $V_1 V_2$ za różnicę geometryczną $\Omega V_2 - \Omega V_1$. Tworzymy stosunek $V_1 V_2 / (t_2 - t_1)$ i uważamy go za wektor, o kierunku zgodnym z kierunkiem $V_1 V_2$, o długości zawierającej tyle cm, ile w stosunku $V_1 V_2 / (t_2 - t_1)$ zawiera się jednostek cm/sek². Postępujemy dalej podobnie; tworzymy stosunek $V_2 V_3 / (t_3 - t_2)$ i t. d.; następnie przechodzimy do granicy. Zbliżamy ku sobie chwile t_1 i t_2 , t_2 i t_3 i t. d. Wektory $V_1 V_2$, $V_2 V_3$ i t. d. skracają się coraz bardziej; długości ich dążą do zera, ale ich kierunki *nie* nikną. Gdy M_2 dociera do M_1 , gdy zatem V_2 dociera do V_1 , wektor $V_1 V_2$ nie przestaje mieć kierunku; w granicy, gdy M_2 i M_1 , oraz V_2 i V_1 spotykają się, $V_1 V_2$ przybiera kierunek stycznej do obwodu koła $V_1 V_2 V_3$. Jeżeli t jest chwilą, w której schodzą się t_1 i t_2 , powiadamy: *prawdziwem (albo chwilowem) przyspieszeniem punktu M w chwili t nazywamy wektor o następujących własnościach: jego kierunek zgadza się z kierunkiem stycznej do koła hodograficznego, w miejscu odpowiadającem chwili t ; jego długością jest granica, do której dąży stosunek $V_1 V_2 / (t_2 - t_1)$, gdy zarówno odstęp czasu $t_2 - t_1$ jak odpowiednia geometryczna różnica $V_1 V_2$ prędkości dążą do zera.*

W § 26-ym podaliśmy określenie *prędkości* punktu, biegnącego po orbicie kołowej; obecnie podaliśmy określenie *przyspieszenia* punktu, biegnącego jednostajnie po takiej samej orbicie. Porównawszy te określenia, dostrzegamy, że *przyspieszenie punktu M , biegnącego jednostajnie po torze kołowym, nie różni się od prędkości punktu V hodograficznego, biegnącego po hodografie tego toru.* Istotnie, kierunkiem przyspieszenia punktu M jest kierunek stycznej do koła hodograficznego, który jest oczywiście kierunkiem prędkości punktu V hodograficznego. Wartością przyspieszenia punktu M jest granica, do której dąży stosunek $V_1 V_2 / (t_2 - t_1)$, gdy $t_2 - t_1$ oraz $V_1 V_2$ dążą do zera; ale różnica $V_1 V_2$ jest zarazem geometryczną różnicą promieni ΩV_2 i ΩV_1 hodografu; zatem wartość przyspieszenia punktu M jest

identyczna z wartością prędkości punktu V hodograficznego w tej samej chwili.

§ 28. Wartość i kierunek przyspieszenia w ruchu kołowym jednostajnym.

Przypuśćmy, że punkt M krąży jednostajnie po orbicie kołowej $M_1 M_2 M_3$ (rys. 31); styczne $M_1 v_1, M_2 v_2, M_3 v_3$ do orbity wyobrażają prędkości punktu M w chwilach t_1, t_2, t_3 . Zbudujmy



Rys. 31.

hodograf $\Omega V_1 V_2 V_3$ orbity $M_1 M_2 M_3$. Przypuśćmy, że styczne $V_1 F_1, V_2 F_2, V_3 F_3$ do koła hodograficznego wyobrażają prędkości punktu hodograficznego V w chwilach t_1, t_2, t_3 . Według § 27-go kierunki stycznych $V_1 F_1, V_2 F_2, V_3 F_3$ zgadzają się z kierunkami przyspieszenia punktu M ; ich długości wyobrażają wartości tego przyspieszenia. Mamy na przykład

$$1. \quad V_1 F_1 \perp \Omega V_1; \text{ lecz } \Omega V_1 \parallel M_1 v_1$$

a zatem

$$2. \quad V_1 F_1 \perp M_1 v_1; \text{ czyli } V_1 F_1 \parallel M_1 O.$$

Podobnie znajdujemy

$$3. \quad V_2 F_2 \parallel M_2 O; \quad V_3 F_3 \parallel M_3 O \text{ i t. d.}$$

prędkość punktu V jest zawsze umiejscowiona w prostej równoległej do położenia promienia OM orbity i skierowana przeciwnie niż ten promień. Dochodzimy zatem do następującego wniosku: *przyspieszenie punktu M , biegnącego jednostajnie po orbicie kołowej, jest stale skierowane od chwilowego miejsca*

punktu M ku środkowi O orbity, w kierunku przeciwnym kierunkowi OM promienia.

Znajdźmy teraz wartość tego przyspieszenia. Oznaczmy przez r promień orbity punktu M , przez v prędkość tego punktu, przez ω jego prędkość kątową; mamy wówczas, podług §§ 9 i 10:

$$4. \quad v = \omega r.$$

Ruch punktu hodograficznego V jest kołowy i jednostajny, podobnie jak ruch punktu M ; ustanówmy zatem dla tego ruchu taki sam związek, jaki mamy w (4) dla ruchu punktu M . Jeżeli prędkość punktu M wynosi v cm/sek, tedy promień koła hodograficznego $V_1V_2V_3$ wynosi v cm. Jeżeli przyspieszenie punktu M wynosi f cm/sek², tedy prędkość punktu V wynosi f cm/sek. Nareszcie, według § 13-go, prędkość kątowa punktu V jest ta sama, jak prędkość kątowa punktu M , zatem wynosi ω 1/sek. Mamy zatem w ruchu hodograficznym

$$5. \quad f = \omega v.$$

Z równań (4) i (5) otrzymujemy:

$$6. \quad f = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

Twierdzenie, które tu znaleźliśmy i które w równaniu (6) znajduje swój wyraz, posłuży nam do rozwiązania doniosłych zagadnień. Ruch wahadła na ziemi, ruch planety na niebie — to może najważniejsze rodzaje ruchu, które ukazuje nam wszechświat; rozmyślając nad nimi, umysł ludzki przenika powoli do coraz głębszych tajemnic. W powyższej formule (6) są w gruncie rzeczy zawarte pierwsze prawa tych ruchów.

Zadania.

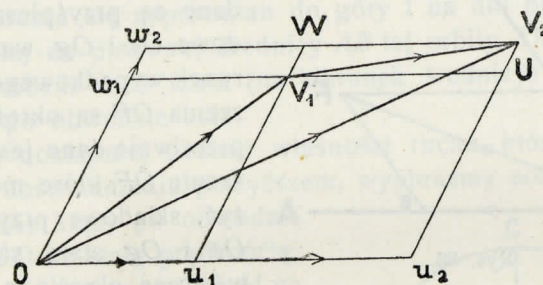
1. Kręcąc się jednostajnie, koło o średnicy 80 cm wykonywa 480 obrotów w ciągu minuty. Obliczyć przyspieszenie punktu, leżącego na obwodzie koła.
2. Dwie wirownice kręcą się jednostajnie; w tym samym czasie pierwsza odbywa dwa razy więcej obrotów niż druga. W jakim stosunku pozostają przyspieszenia w jednakowej odległości od osi obrotu? W jakim stosunku musiałyby pozostawać promienie, ażeby przyspieszenia na obwodzie były jednakowe?
3. Szyny toru kolejowego tworzą łuk koła o promieniu 210 m. Obliczyć przyspieszenie pociągu, przejeżdżającego tamtędy z prędkością 90 km/godz wskazać kierunek tego przyspieszenia.
4. U końca sznurka o długości 50 cm uwiązaliśmy kamień; ujawszy drugi

koniec sznurka, wprawiamy sznurek i kamień w ruch obrotowy, kołowy i jednostajny. Ile sekund powinien trwać obrót, ażeby przyspieszenie kamienia było równe 981 cm/sek²?

5. Uważamy ziemię za kulę o promieniu 6.37×10^8 cm. Jaką wartość i jaki kierunek ma na równiku przyspieszenie f , wynikające z ruchu obrotowego ziemi dokoła jej osi? W jakim stosunku do przyspieszenia ciężkości $g = 981$ cm/sek² pozostaje owo przyspieszenie f ? Ażeby przyspieszenia f i g były równe sobie, jaka musiałaby być prędkość kątowa dziennego obrotu ziemi? Te same zagadnienia rozwiązać dla Warszawy lub dla Krakowa (por. zad. 4 § 10-go).

§ 29. Twierdzenie o równoległoboku przyspieszeń.

Wiemy, że punkt może odbywać jednocześnie dwa ruchy, zatem mieć naraz dwie prędkości. Z prędkości, przez geometryczne odejmowanie, wyprowadzamy przyspieszenia (§§ 15, 20, 21, 27); zatem punkt, który ma naraz dwie prędkości, może mieć naraz dwa przyspieszenia. Wyobraźmy sobie, że punkt M w chwili t_1 ma składowe prędkości Ou_1 i Ow_1 (rys. 32); prę-



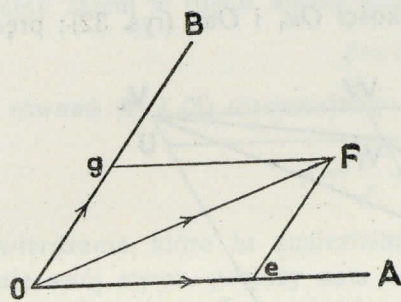
Rys. 32.

kość wypadkowa punktu w tej chwili jest OV_1 . W późniejszej chwili t_2 składowe prędkości punktu są Ou_2 i Ow_2 , wypadkowa prędkość jest OV_2 . Między chwilami t_1 i t_2 punkt M ma dwa składowe średnie przyspieszenia, mianowicie wektory $u_1u_2/(t_2 - t_1)$ oraz $w_1w_2/(t_2 - t_1)$ (§§ 15, 20).

Poprowadźmy od punktu V_1 do punktu V_2 wektor V_1V_2 ; jak w § 26-ym powiadamy, że V_1V_2 jest różnicą geometryczną $OV_2 - OV_1$. Zbudujmy równoległobok V_1UV_2 (w którym $V_1U \parallel u_1u_2$, $V_1W \parallel w_1w_2$); sprawdzamy, że V_1V_2 jest wypadkową składowych u_1u_2 i w_1w_2 . Geometryczna różnica V_1V_2 wypadkowych OV_2 i OV_1 jest więc wypadkową różnic u_1u_2 (czyli $Ou_2 - Ou_1$) i w_1w_2 (czyli $Ow_2 - Ow_1$).

Przypuśćmy, że chwile t_1 i t_2 spotykają się ze sobą w chwili t . Odstęp $t_2 - t_1$ dąży wówczas do zera; długości wektorów $u_1 u_2$, $w_1 w_2$, $V_1 V_2$ dążą do zera, ale kierunki tych wektorów *nie* zanikają. Stosunek $u_1 u_2 / (t_2 - t_1)$ dąży do granicy, którą nazywamy przyspieszeniem punktu M (w chwili t) w pierwszym ruchu składowym; stosunek $w_1 w_2 / (t_2 - t_1)$ dąży do granicy, która jest przyspieszeniem M (w chwili t) w drugim ruchu składowym; stosunek $V_1 V_2 / (t_2 - t_1)$ dąży do granicy, którą nazywamy *prawdziwym* (lub *chwilowym* t. j. odpowiadającym chwili t) *przyspieszeniem punktu M w ruchu wypadkowym*. Widzimy, że prawdziwe przyspieszenie punktu składa się w każdej chwili z obu przyspieszeń składowych według zasady równoległoboku.

Ponieważ jednocześnie przyspieszenia punktu składają się ze sobą według zasady równoległoboku, zatem dowolne przyspieszenie OF punktu M (rys. 33) możemy zawsze rozłożyć na skła-



Rys. 33.

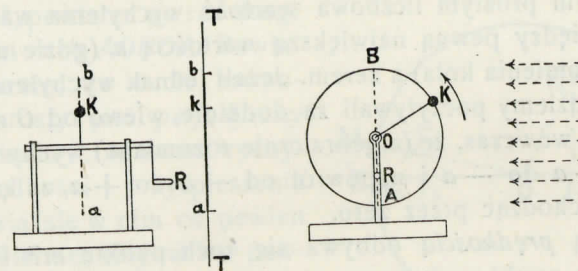
domo, w jakich kierunkach (np. OA i OB) one mają być utworzone.

Składowe Oe i Og przyspieszenia OF , utworzone w kierunkach osi OA i OB (rys. 33), nazywamy *rzutami* tego przyspieszenia na kierunki OA i OB . Jeżeli OA i OB są prostokątnymi osiami, rzuty przyspieszenia na ich kierunki nazywają się *prostopadłymi rzutami*.

§ 30. O ruchu harmonicznym prostym.

Wyobraźmy sobie, albo (co byłoby lepiej) wykonajmy doświadczenie następujące. Kulkę nieprzezroczystą K (rys. 34), osadzoną na pręciku OK , wprowadzamy (przy pomocy rękojeści R) w ruch kołowy jednostajny. Oświetlamy jednocześnie kulkę K

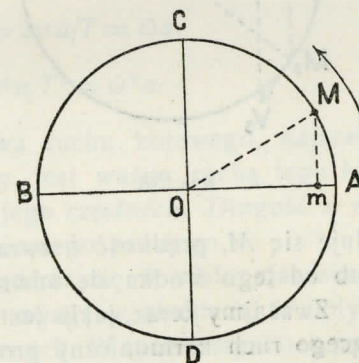
mocnym światłem, wychodzącym z lampy dostatecznie odległej, lub też pomiędzy lampą a kulą K umieszczamy soczewkę; soczewka sprawia, że promienie światła, które przez nią przeszły, stają się równoległe do siebie. Za kulą, prostopadle do padających promieni, ustawiamy ekran czyli białą tablicę TT . Kula na ekran rzuca cień k , który jest jej prostopadłym rzutem na płaszczyznę ekranu. Gdy kula K biegnie po orbicie kołowej $KBAK$,



Rys. 34.

rzut k porusza się naprzemian do góry i na dół po prostej ab , równoległej do pionowej średnicy AB tej orbity. Uzmysławiamy tym sposobem ruch rzutu (na kierunek średnicy) punktu, biegnącego po obwodzie koła.

Ażeby dokładniej poznać własności ruchu, który dostrzegaliśmy w doświadczeniu powyższym, wyobraźmy sobie, że punkt M (rys. 35) krąży po obwodzie koła $ACBD$ ze stałą prędkością; prostopadły rzut m punktu M na średnicę AB porusza się wówczas po tejże średnicy, w kierunku naprzemian od A do B i od B do A . Chcemy zbadać prawa tego ruchu.



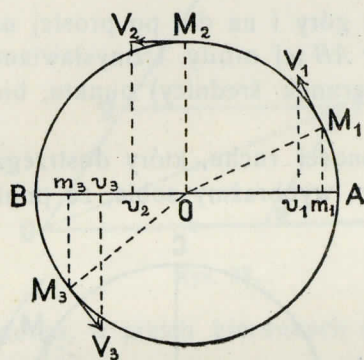
Rys. 35.

Zaczynamy od chwili $t = 0$, w której punkt M , przypuśćmy, znajduje się w miejscu A ; w tejże chwili punkt m zajmuje zatem to samo miejsce A . Gdy punkt M

od A przechodzi ku C , od C ku B , od B ku D , od D zaś na powrót powraca ku A , punkt m od A zbliża się ku O , od O oddala się aż do B , od B na powrót cofa się ku O , wreszcie od O wychyla się znowu ku A . Widzimy, że m odbywa ruch pro-

stolinjowy, ale bynajmniej *nie* jednostajny, nawet niejednostajnie-runkowy; punkt m drga wzdłuż średnicy AB , wychylając się ze środka koła O raz w prawo, raz w lewo. Ruch punktu m , który dokonywa się w tych warunkach, nazywamy *ruchem harmonicznym prostym* lub *drżaniem harmonicznym prostym*; środek koła O nazywamy *środkiem* tego ruchu; chwilową odległość Om punktu m od środka O nazywamy *wychyleniem* punktu m . W ruchu harmonicznym prostym liczbowa wartość wychylenia waha się zatem pomiędzy pewną największą wartością a (gdzie a jest długością promienia koła) a zerem. Jeżeli jednak wychylenie w prawo od O będziemy poczytywali za dodatnie, w lewo od O za ujemne, powiemy, wówczas, że (algebraicznie rozumiane) wychylenie waha się od $+a$ do $-a$ i napowrót od $-a$ do $+a$, za każdym razem przechodząc przez zero.

Z jaką *prędkością* odbywa się ruch punktu m ? Pamiętając o tem, że punkt m jest rzutem punktu M na AB , łatwo widzimy



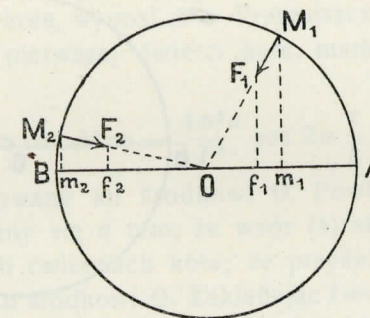
Rys. 36.

z określenia pojęcia prędkości, że prędkość punktu m jest równa rzutowi mv (rys. 36) prędkości MV punktu M na kierunek AB . Ponieważ ruch punktu M jest jednostajny, prędkość MV jest stała; ale kierunek tej prędkości MV jest zmienny, dlatego prędkość mv wypada rozmaita (rys. 36). W miejscach A i B prędkość v punktu m jest zerem, w miejscu O jest największa i równa prędkości V punktu M ; zależnie od tego, w której ćwiertci koła znajduje się M , prędkość v zwraca się naprzemiennie ku środkowi O lub od tego środka się odwraca.

Zważajmy teraz, jakie jest *przyśpieszenie* punktu m , odbywającego ruch harmoniczny prosty. Znajdujemy je w każdym położeniu punktu m podobnie, jak przed chwilą wyznaczaliśmy prędkość. Z określenia przyśpieszenia wnosimy, że przyśpieszenie punktu m jest równe rzutowi mf przyśpieszenia MF punktu M na kierunek AB (rys. 37). Przyśpieszenie F punktu M wynosi V^2/a (§ 28), ma zatem wartość stałą; ale kierunek tego przyśpieszenia jest zmienny (rys. 37); dlatego przyśpieszenie f punktu

m ma wartość w różnych miejscach rozmałą. W środku O przyśpieszenie f jest równe zeru, w miejscach A i B jest największe, równe mianowicie przyśpieszeniu V^2/a punktu M ; zwrócone jest zawsze ku środkowi O .

Skoro punkt M dokonał jednego obiegu $ACBDA$ (rys. 35), powraca do A i rozpoczyna bieg drugi, który jest ściśle kopją pierwszego; zatem i m , przebiegłszy od A do B i od B napowrót do A , powtarza po raz drugi tenże sam ruch $AOBOA$. Powiadać przeto, że ruch harmoniczny prosty jest *periodyczny* czyli *okresowy*; te same wychylenia, prędkości i przyśpieszenia powtarzają się w nim co pewien czas regularnie; cały ruch w pewnych odstępach czasu siebie odzwierciedla. Ruch $AOBOA$ punktu m nazywamy *całkowitem drżaniem*; czas, zajęty przez jedno całkowite drżanie, równy okresowi punktu M (czyli czasowi trwania jego po kole obiegu, § 10) nazywamy *okresem* ruchu harmonicznego prostego. Oznaczając ten okres przez T , prędkość zaś kątową krążenia punktu M po kole przez ω , mamy (§§ 10 i 28):



Rys. 37.

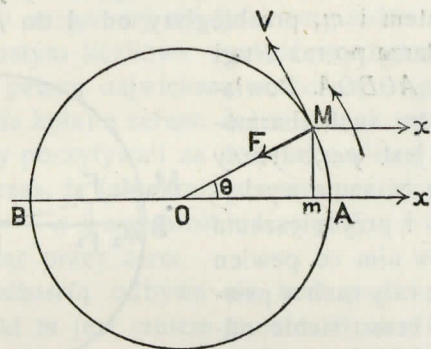
1. $\omega = 2\pi/T; \quad V = 2\pi a/T = \omega a.$
2. $F = V^2/a = 4\pi^2 a/T^2 = \omega^2 a.$

Wielkość ω , czyli prędkość kątową ruchu kołowego, dającego w rzucie ruch harmoniczny prosty, jest ważną cechą tego harmonicznego ruchu; nazywamy ją jego *częstością*. Długość a nazywamy *amplitudą* ruchu harmonicznego prostego.

Ruch harmoniczny prosty wydarza się w wielu zjawiskach, którym wypada poświęcać pilną uwagę w akustyce, w optyce, w teorii zjawisk elektromagnetycznych. W tych wszystkich przypadkach częstość ω oraz okres T drgania bezpośrednio są dane przez budowę albo naturę drgającego układu, jak o tem wspominaliśmy w przykładzie widełek strojowych (§ 5). Natomiast amplitudy drgania zazwyczaj nie są zależne od właściwości układu; dany układ może odbywać drgania rozmaitych amplitud, zależnie od wpływów, które go pobudziły albo pobudzają do drgań.

§ 31. Bliższa analiza praw ruchu harmonicznego prostego.

Rozumiejmy przez Ox kierunek (liczony dodatnio od O do A) osi, w której umiejscowiony jest ruch harmoniczny prosty punktu m (rys. 38); przez x oznaczajmy wychylenie punktu m czyli jego odległość od początku O ; przez θ rozumiejmy kąt AOM , który



Rys. 38.

tworzy chwilowy promień OM z kierunkiem Ox . Czas t liczymy, jak w artykule poprzednim, od chwili, w której M przebiega przez A ; mamy więc:

$$1. \quad \theta = \omega t.$$

Otrzymujemy tem samem

$$2. \quad x = a \cos \omega t = a \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Kładąc po kolei: $t = 0 \quad \frac{1}{4}T \quad \frac{1}{2}T \quad \frac{3}{4}T \quad T \quad \frac{5}{4}T$ i t. d.
mamy z (2): $x = a \quad 0 \quad -a \quad 0 \quad a \quad 0$ i t. d.,

odnajdujemy więc wyniki, które już znamy z poprzedniego artykułu.

Znajdźmy prędkość v punktu m , odbywającego ruch harmoniczny prosty. Wiemy z poprzedzającego artykułu, że prędkość V punktu M , krążącego po kole, wynosi ωa . Przypuśćmy, że M znajduje się, jak na rys. 38-ym, w pierwszej ćwierci koła; wówczas kierunek V tworzy kąt $\frac{1}{2}\pi + \theta$ z dodatnim kierunkiem osi Ox ; zatem

$$3. \quad v = \omega a \cos(\frac{1}{2}\pi + \theta) = -\omega a \sin \omega t = -\frac{2\pi a}{T} \sin 2\pi \frac{t}{T};$$

ujemny znak stąd wynika, że x w pierwszej ćwierci koła zmniejsza

sza się z czasem; prędkość tu jest skierowana przeciwnie niż $+Ox$. Łatwo sprawdzamy, powtarzając rozumowanie, że wzór (3) stosuje się we wszystkich ćwierciach koła. Kładąc znowu $t = 0, \frac{1}{4}T, \frac{1}{2}T$ i t. d., odnajdujemy na prędkość v wartości, które znamy już z artykułu poprzedzającego.

Obliczmy przyspieszenie f punktu m , odbywającego ruch harmoniczny prosty. Wiemy z poprzedniego artykułu, że przyspieszenie F punktu M , krążącego po kole, wynosi $\omega^2 a$. Przypuszczając, że M znajduje się znów w pierwszej ćwierci koła, mamy, jak na rys. 38-ym:

$$4. \quad f = \omega^2 a \cos(\pi - \theta) = -\omega^2 a \cos \omega t = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \cos 2\pi \frac{t}{T};$$

przyspieszenie f jest tutaj skierowane ku środkowi O . Powtarzając rozumowanie, przekonywamy się o tem, że wzór (4) stosuje się bez zmiany we wszystkich ćwierciach koła; że przyspieszenie f jest zawsze skierowane ku środkowi O . Zakładając $t = 0, \frac{1}{4}T, \frac{1}{2}T$ i t. d., powracamy do wyników, które znamy z poprzedzającego artykułu.

Z równań (2) i (4) wyprowadzamy wniosek następujący:

$$5. \quad f = -\omega^2 x.$$

Jeżeli $x > 0$, mamy $f < 0$ i przeciwnie; co potwierdza znaną nam własność przyspieszenia w ruchu harmonicznym prostym.

Zadania.

1. Punkt porusza się według praw ruchu harmonicznego prostego, podanych w artykule niniejszym. Amplituda wynosi 10 cm, okres 1 sekundę. Obliczyć wychylenie, prędkość, przyspieszenie w chwilach: $t = \frac{1}{8}$ sek, $\frac{3}{8}$ sek; $t = \frac{1}{4}$ sek, $\frac{5}{8}$ sek; $t = \frac{1}{2}$ sek, $\frac{3}{4}$ sek.

2. Do formuł (2), (3), (4) niniejszego artykułu wstawić, zamiast wartości t , wartość $t + T$; jaki wniosek wypada z otrzymanego wyniku?

3. Ruch kołowy jednostajny punktu M po obwodzie koła $ACBDA$ (rys. 35) rozłożyć na ruchy składowe, odbywające się (1) wzdłuż średnicy AB (2) wzdłuż średnicy $CD \perp AB$.

ROZDZIAŁ DRUGI.

Zasady dynamiki.

§ 32. *Dynamika jest nauką o ruchu jakichkolwiek bądź brył materialnych.*

Któż nie podziwiał owego widoku, który niebo gwiazdziste, w noc cichą, czystą, pogodną, w nieopisanej krasie nad nami rozciąga! Nic równać się na ziemi nie może z tym obrazem niezmiernie potęgi; nic nie porusza równie głęboko każdego szlachetnego umysłu.

Ogromny, wspaniały, wciąż zmienny, świat zawsze przykuwał do siebie uwagę człowieka. Lecz długo dziwił go tylko i trwożył, budził w nim lęk i onieśmienie. Bardzo powoli zaczynało się *świadome* dostrzeganie i badanie; w trudzie rodziła się myśl ścisła, ostrożna, która czuwa nad sobą i sprawdza samą siebie. Dzisiaj rozumiemy, że mamy przed sobą nieskończoność przemian i zjawisk, które tylko własnym wysiłkiem możemy poznać i pojąć. Jest to zadanie niezmierne, do którego pokolenie za pokoleniem przykładać się musi.

Już przed tysiącami lat chińscy, hinduscy, babilońscy, Chaldejscy, egipscy i greccy uczeni i mędrcy dostrzegali wędrówki słońca, księżyca i gwiazd po sklepieniu niebieskiem i rozmyślali nad niemi. Lecz zjawiska niebieskie, przynajmniej na pozór, są bezładne i niezrozumiałe. Przez długi czas mogło wydawać się, że po firmamencie błakają się światła bez żadnego porządku. Myśl ludzka nie wyrzekała się nigdy nadziei, że dopatrzy się prawidłowości w ruchach na niebie i przez całe stulecia wysilała się, ażeby odczytać ich tajemnicę. Dopiero w bliskich nam czasach Kopernik, Keplera, Galileusz, Newton, Laplace i inni wielcy mężowie wytłumaczyli prawa mechanizmu, który nazywamy *układem słonecznym*; mechanizmu, który unosi

nas wszystkich na jednym z podrzędnych swych kółek. Dziś rozumiemy nareszcie, w jaki sposób poruszają się bryły materji, czem w swoim ruchu rządzą się ciała niebieskie i ziemskie.

Ostateczny, rozstrzygający udział w tych odkryciach miał Newton. Jego geniusz stworzył *mechanikę niebios*, czyli ścisłą teorię ruchów, dostrzeganych na niebie. Jednakże, według myśli Newtona, ogół ruchów astronomicznych jest wielkim, lecz przecież tylko szczególnym przykładem prawdziwości zasad jeszcze ogólniejszych, mianowicie *zasad dynamiki*. Dynamika jest nauką o ruchu dowolnych, małych czy wielkich, ciał materialnych. Newton wypowiedział prawa dynamiki i zbudował tym sposobem naukę, którą w sto lat po nim Lagrange doprowadził do doskonałości.

Lagrange rzekł o Newtonie, że był on «nietylko największym, lecz i najszcześniejszym z pomiędzy myślicieli»; albowiem «tylko raz można odkryć fundamentalne prawa zjawisk w przyrodzie». W istocie, zasady dynamiki Newtona przez dwieście lat przechowały się w nauce bez zmiany. Dopiero społeczne nam badania, dokonane w innych dziedzinach fizyki, w teorii promieniowania, w teorii zjawisk elektromagnetycznych, rozszerzają obecnie nasz widnokrąg poznania. Wiemy dzisiaj, że, mimo swej potęgi, zasady Newtona są tylko krańcowym wyrazem (a zatem przypadkiem szczególnym) szerszych praw, wnikających znacznie głębiej w treść rzeczywistości.

§ 33. *Newton. Działy i siły dynamiczne.*

Izaak Newton urodził się na Boże Narodzenie 1642 roku; ojcem był mu skromny rolnik w Woolsthorpe, wiosce w Lincolnshire, niedaleko miasteczka Grantham leżącej. Za radą wykształconego wuja oddany w 19-ym roku życia do *Trinity College* (części uniwersytetu) w Cambridge, zjednał sobie wkrótce podziw powszechny; w roku 1669-ym objął już katedrę w tym słynnym uniwersytecie. W latach 1665 i 1666, z powodu panującej zarazy, zamknięto szkoły w Cambridge. Newton, który spędził ten czas w domu rodzinnym, dokonał wówczas odkryć, po wszystkie czasy pamiętnych. Stworzył tam różniczkowy i całkowity rachunek i nieporównanym tym czynem dał początek nowoczesnej analizie matematycznej. Tam także zrozumiał zasadnicze *prawa ruchu* ciał materialnych i gdy je sformułował, położył

fundament pod budowę dynamiki. I tam wreszcie przeniknął, że istnieje we wszechświecie *grawitacja* czyli ciężenie powszechne, którego odkrył prawo proste i dokładne. Te i inne jeszcze zdobywcze genjuszu zebrał i ogłosił w słynnym dziele *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, które ukazało się w Londynie w roku 1687. Od pojawienia się tego dzieła na widok publiczny zaczyna się istnienie ścisłej nauki o zjawiskach, odbywających się w świecie fizycznym.

Jakiż był bieg myśli Newtona? Za jego czasów oddawna wiadano, że kula ziemską, księżyc, planety (jak Wenus, Mars i inne) są to bryły olbrzymie, które różnią się tylko ogromem od gór, skał, głazów i kamieni, słowem od pospolitych ciał materialnych, z którymi miewamy wciąż do czynienia na ziemi. Jakże poruszają się pospolite ciała na ziemi? nie dostrzegamy, by one krążyły bez końca po torach zawitych. Musimy rozważyć okoliczności ruchu ziemskich ciał materialnych, ażeby ogólne *prawa ruchu* przeniknąć.

Dostrzegamy codziennie, że można *poruszać* rozmaite przedmioty. Woły ciągną pług, który pruje glebę i odwraca skiby; koń ciągnie wóz naładowany; lokomotywa wprawia w ruch szeregi wagonów; człowiek pcha taczki, kręci koło lub, siadłszy w czółnie, posuwa się wraz z niem po powierzchni wody. Z uderzenia kija lub młotka wynika ruch kuli na bilardzie albo w krokiecie; kółka w zegarku kręcą się, wskazówki na jego tarczy posuwają się pod naciskiem sprężyny; pocisk, pod działaniem naboju, wybiega z armaty z nadzwyczajną prędkością. Możemy przytoczyć wiele podobnych przykładów. Mówimy więc, uogólniając, że: *działanie* niektórych ciał nadaje ruch innym ciałom albo też zmienia ich ruch, który był się już przedtem odbywał. Powiadamy dokładniej, że: *działanie pewnych ciał zmienia bądź wartość prędkości, bądź kierunek prędkości, bądź wreszcie razem wartość i kierunek prędkości innych ciał materialnych*.

Jeżeli my sami jesteśmy ciałem, wpływającym w ten sposób na ruch innych ciał materialnych, czujemy wówczas, że, podczas wspomnianego działania, mięśnie nasze dokonywają pewnego *wysiłku*. Czujemy dobrze wysiłek, gdy coś ciągniemy albo popychamy, gdy coś uciskamy albo ugniatamy, gdy coś skręcamy albo wyciągamy, gdy coś dźwigamy albo wyrzucamy do góry. Powiadamy w tych przypadkach, że *wywieramy siłę*. Pojęcie *siły* czerpiemy zatem pierwotnie z pamięci własnego mięsni-

wego wysiłku; a poczucie tego wysiłku jest wszystkim znane tak dobrze, że jego świadomość nie zyskałaby na jasności przez opisywanie go w słowach. W tem rozumieniu wyraz *siła* nie wymaga zatem określeń.

Ale przed chwilą widzieliśmy (i przekonywamy się o tem codziennie), że nie tylko człowiek i nie tylko pociągowe zwierzęta mają możność i zdolność wywierania siły. Może ją wyrzucić wiatr albo wichur, który obraca młyny, wydyma żagle lub wzbija tumany pyłu w powietrzu. Może ją wyrzucić woda w potoku płynąca, kula wystrzelona ze strzelby, wagon rozpędzony po szynach, każde wogóle ciało, które, jak mówimy, *ożywione jest ruchem*. Wiemy także, że rozmaite inne ciała mogą wywierać siłę; na przykład magnes, który przyciąga opłatki żelazne, pałeczka szklana naelektryzowana, skręcona sprężyna, wyciągnięta taśma kauczukowa, ściśnięte powietrze, para wodna w maszynie parowej, gaz wytwarzany w motorze automobilu. W tych i w wielu innych przypadkach mówimy, że wywierane są pewne *siły*; lecz oczywiście w tych razach nie może być mowy o mięśniowym wysiłku. A zatem musimy w fizyce *rozszerzyć* pierwotny zakres pojęcia siły.

Skoro pragniemy w nauce rozszerzyć zakres pewnego pojęcia, musimy podać nowe, obszerniejsze jego określenie. To określenie powinno być jasne, dokładne, ilościowe; powinno być niezależne od wrażeń jednej osoby i mieć dla wszystkich to samo znaczenie. Ażeby uzyskać takie określenie naukowego pojęcia *siły*, przypatrzmy się ponownie przykładom zjawisk, w których pewne ciała zmieniają wartość, albo kierunek, albo i wartość i kierunek prędkości innych ciał materialnych.

§ 34. Działanie ciał materialnych jest zawsze wzajemne.

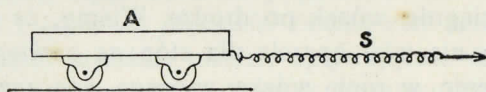
Człowiek ciągnie wózek po drodze. Wiemy, że nie mógłby ciągnąć, gdyby nie miał oparcia dla stóp na powierzchni ziemi. Jeżeli wprawienie w ruch wózka wymaga znacznego wysiłku, dostrzegamy wyraźnie, iż człowiek mięśniami nóg odpycha się, w kierunku ruchu, od nierówności gruntu, o które się oparł. Lecz jakże odpycha się od tych nierówności? uciska je mocno. Wie z doświadczenia (choć może nie uświadamia sobie tej wiedzy), że właśnie wówczas, gdy naciśnie, sam odepchnięty zosta-

nie. Im mocniej przyciśnie, tem silniej zostanie popchnięty w przeciwnym kierunku.

Gdy płynie statek parowy, machina porusza w nim koła łopatkowe lub śrubę w taki sposób, jak gdyby chciała zgnieść albo ścisnąć warstwy wody najbliższej leżące. Na *działanie*, zmierzające ku takiemu celowi, woda odpowiada *przeciwdziałaniem* t. j. siłą, która wprawia w ruch cały statek. Ptak podobnie bije skrzydłami powietrze, ażeby przez chwilę wesprzeć się na niem; uderzona i ściśnięta, najbliższa warstwa powietrza odpowiada przeciwdziałaniem, skierowaniem ku górze. W próżni ptak albo samolot nie mógłby szybować; o próżnię *nie* można się oprzeć. Po nadzwyczaj gładkiej albo śliskiej posadzce lub po równej tafli lodowej bardzo trudno jest ciągnąć.

Wyobraźmy sobie, że umieściliśmy się w huśtawce i że wyrzucamy ułożone w niej kamienie. Huśtawka cofa się za każdym rzutem. Gdy wywieraliśmy siłę na kamień, kamień wywierał siłę przeciwną na nas a przez nas na huśtawkę. Armata lub strzelba cofa się podobnie przy każdym strzale. Magnes przyciąga kawałek żelaza, ale jest też nawzajem przyciągany przez żelazo; dosyć umieścić te ciała na korkach, pływających po wodzie, ażeby przekonać się o wzajemności przyciągań, o zobopólnem działaniu. Wprawiamy w ruch koło rozpędowe masywne, osadzone na osi. Dopóki przyspieszamy obrót lub go zwalniamy, czujemy, że koło opiera się, doznajemy przeciwdziałania od poruszającego się ciała. Doznajemy zatem tego przeciwdziałania wówczas i tylko wówczas, gdy sami na koło wywieramy działanie; jeżeli koło kręci się jednostajnie, działanie nasze staje się niepotrzebne; wraz z niem znika i przeciwdziałanie.

Wyobraźmy sobie wózek A (rys. 39), do którego przymocowana jest sprężyna S; przypuśćmy, że wózek stoi na stole poziomym i gładkim i porusza się



Rys. 39.

niemal bez tarcia. Ciągnąc swobodny koniec sprężyny, możemy ją wyciągnąć czyli wydłużyć. Wyciągnięta sprężyna usiłuje, jak wiadomo, powrócić do pierwotnej długości; będzie zatem ciągnęła wózek w kierunku strzałki, będzie wywierała siłę na wózek. Ale dopóki ciągniemy, dopóki porusza się wózek, sprężyna pozostanie *wyciągnięta*. Wiemy, że nie można wyciągnąć sprężyny inaczej,

jak ciągnąc końce w strony przeciwnie; zatem widzimy, że, kiedy sprężyna działa na wózek pewną siłą w kierunku strzałki, wózek odpowiada działaniem, skierowaniem w przeciwnym kierunku.

Podobnych spostrzeżeń możemy mnóstwo uczynić, obserwując ruch ciał i działanie jednych na inne. Wyprowadzamy z nich wniosek, który Newton wygłosił jako jedną z naczelných zasad dynamiki. *Działanie ciał materialnych jest zawsze zobopólne, wzajemne*; gdy ciało A działa na ciało B, jednocześnie ciało B działa na ciało A. Jak widzimy na przytoczonych przykładach, *działania są zawsze skierowane w strony przeciwnie*. Jeżeli ciało A przyciąga ciało B ku sobie, tedy nawzajem ciało B ciągnie ku sobie ciało A. Jeżeli A odpycha ciało B od siebie, wówczas nawzajem ciało B odpycha od siebie ciało A. W twierdzeniach, które wypowiedzieliśmy, zawiera się *część* podstawowej zasady dynamiki, zasady *wzajemnego oddziaływania ciał materialnych na siebie albo działania i przeciwdziałania*; zasada ta nazywa się także *trzeciem prawem ruchu* Newtona. Mówimy, że w tych twierdzeniach zawiera się tylko *część* owej zasady; zobaczymy istotnie (w § 36-ym), że one wymagają jeszcze ważnego uzupełnienia.

Siłą nazywamy każde z dwóch działań, z których składa się całość wzajemnego oddziaływania na siebie dwóch ciał materialnych. Wyobraźmy sobie parę ciał: A, B; działanie pomiędzy niemi jest zobopólne. Powiadamy, że ciało A działa na B pewną siłą, że ciało B działa na A pewną siłą, wprost przeciwną poprzedniej. Gdy rozważamy ruch ciała B, możemy nie wymieniać wyraźnie ciała A, które działa na B; możemy i o tem przemilczać, że jednocześnie ciało B działa na A. Lecz będzie to tylko skrócony sposób wyrażania się. W istocie siła jest tylko *jednostronnym* objawem wzajemnego oddziaływania na siebie ciał materialnych; objawem, dostrzeganym ze stanowiska bądź jednego, bądź drugiego z pomiędzy ciał działających. Powiadamy niekiedy, że ciało A wywiera siłę na ciało B; innym razem, dla wygody rozumowania, możemy powiedzieć przeciwnie, że ciało B wywiera siłę na A. Czy jednak wyrażamy się w pierwszy sposób czy w drugi, wypowiadamy w istocie ten sam fakt; tylko spoglądamy wówczas na ten fakt z przeciwnych stanowisk. Zupełnie podobnie, powiada J. Clerk-Maxwell, pewną wymianę możemy nazwać bądź *sprzedażą* bądź *kupnem*, gdy ją rozważamy z przeciwnych punktów widzenia.

§ 35. Drugie prawo ruchu Newtona.

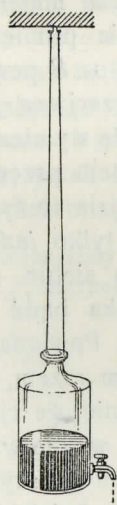
Całość wzajemnego oddziaływania na siebie dwóch ciał materialnych składa się zatem z dwóch sił czyli z dwóch działań sobie przeciwnych. Jakaż jest ilościowa miara tych działań?

Jak powiedzieliśmy (§ 33), działanie ciał zmienia wartość albo kierunek prędkości innych ciał materialnych. Owóż miarą szybkości, z jaką w pewnej chwili zmienia się wartość albo kierunek prędkości poruszającego się ciała, jest (jak wiemy z rozdziału pierwszego) *przyspieszenie* tego ciała. Widzieliśmy, że przyspieszenie jest wektorem, którego wartość i kierunek wyraża sposób, w jaki *prędkość* w danej chwili *rośnie* lub *maleje* a ponadto, być może, *wykręca się w przestrzeni*.

Skoro działanie ciał materialnych polega na zwiększaniu, zmniejszaniu lub wykręcaniu prędkości innych ciał materialnych, więc możemy uznać chwilowe przyspieszenie ciała za miarę działania lub siły, która w danej chwili jest wywierana na ciało. Siła, przyłożona do ciała, ma zmieniać się w tym samym stosunku jak przyspieszenie, czyli ma być wprost proporcjonalna do przyspieszenia. Siła, wywierana w pewnej chwili przez ciało *A* na ciało *B*, ma być wprost proporcjonalna do przyspieszenia ciała *B* w tejże chwili; siła, wywierana przez ciało *B* na ciało *A*, ma być wprost proporcjonalna do przyspieszenia ciała *A* w danej chwili.

Ale, jak powiedzieliśmy, przyspieszenie jest wektorem, który ma nie tylko pewną wartość liczbową, lecz zawsze pewien kierunek. Siłę poczytujemy więc również za wektor, któremu nadajemy kierunek przyspieszenia.

Dopóki rozważamy ruch określonego ciała *C*, które podczas ruchu nie zmienia się wcale, dopóty chwilowe przyspieszenie ciała *C* uważamy za miarę siły, która właśnie działa na ciało. Wyobraźmy sobie jednakże, że ciała *C* przybywa albo ubywa podczas ruchu; jaki jest wówczas związek pomiędzy przyspieszeniem a siłą? Na sznurkach (rys. 40) zawieszamy (podobnie jak wahadło) butelkę, którą wypełniamy rtęcią. Im



Rys. 40.

więcej rtęci znajduje się w butelce, tem trudniej jest ją poruszyć; im rtęci jest mniej, tem poruszyć ją łatwiej. Powiadamy

dokładniej: im więcej rtęci znajduje się w butelce, tem większej siły *F* potrzeba, ażeby ciału nadać pewne określone przyspieszenie *f*; im mniej rtęci tam się znajduje, tem mniejsza siła *F* wystarcza, ażeby wytworzyć określone przyspieszenie *f*. Stąd wnosimy, że siła *F* zależy wprawdzie od przyspieszenia *f*, ale nie zależy wyłącznie od niego; siła *F* musi zależeć jeszcze od pewnego innego czynnika. Oznaczmy ów inny czynnik (który niebawem bliżej poznamy) przez *m* i napiszmy równanie:

$$1. \quad F = mf.$$

Dopóki nie dolewamy ani nie odlewamy rtęci, siła *F*, jak wiemy, pozostaje proporcjonalna do przyspieszenia *f*. Jeżeli więc przyspieszenie wynosi $f_1, f_2, f_3 \dots$ w chwilach $t_1, t_2, t_3 \dots$, siła zaś ma wówczas wartości $F_1, F_2, F_3 \dots$, tedy:

$$2. \quad \frac{F_1}{f_1} = \frac{F_2}{f_2} = \frac{F_3}{f_3} = \dots;$$

to zaś, wobec związku (1), wymaga, ażeby *m* była ta sama. Jeżeli dolewamy rtęci do flaszki, siła *F*, sprawiająca dane przyspieszenie *f*, staje się większa; zatem *m* wówczas wzrosła. Jeżeli odlewamy rtęci, okazuje się, że siła *F*, sprawiająca dane przyspieszenie *f*, jest mniejsza; zatem *m* zmalała. Wielkość *m* zależy więc od ilości rtęci w butelce; wolnoby nam było wybrać za *m* na przykład objętość rtęci, zawartej w naczyniu.

Uogólnijmy teraz zasadę naszych doświadczeń. Wyobraźmy sobie dwa ciała C_1 i C_2 różnej natury; na przykład koło rozpuć żelazne (C_1) i drugie, równie wielkie, drewniane (C_2), z których każde kręci się jednakowo łatwo na osi; albo wagonik, wyładowany węglem (C_1) i drugi, równej objętości, wypełniony trocinami (C_2), które obadwa stoją na szynach; albo jeszcze, wracając do wózka, wyobrazonego na rys. 39-ym, przypuśćmy, że umieściliśmy na nim kulę ołowianą (C_1), innym zaś razem korkową (C_2). Popchnijmy jednakowo mocno wagoniki C_1 i C_2 ; pokręćmy w jednakowy sposób obadwa koła C_1 i C_2 ; pociągajmy wózek C_1 i wózek C_2 (rys. 39) jednakowym mięśniowym wysiłkiem (o czym wyciągnięcie sprężyny może zaświadczyć). Przekonamy się, że przyspieszenia f_1 i f_2 , wytworzone w tych razach przez tę samą siłę *F* w ciałach C_1 i C_2 , są niejednakowe. Napiszemy więc teraz

$$3. \quad F = m_1 f_1; \quad F = m_2 f_2$$

rozumiejąc tutaj przez m_1 cechę, charakteryzującą ciało C_1 ; przez m_2 cechę, charakteryzującą C_2 . Tą cechą w przypadku rtęci w butelce mogła być jej objętość, albowiem rtęć dolewana lub odlewana nie różni się od pozostającej; ale dla ciał różnych m oczywiście *nie* może być objętością. Powiadamy, że m jest *nową* cechą czyli własnością ciał, którą poznajemy w zjawiskach ruchu; nazywamy ją *masą*. Dopóki ciało nie zmienia się, masa jego pozostaje stała; ciało podczas ruchu może mieć rozmaite przyspieszenia, świadczące o działaniu odpowiednich sił, lecz masa nie zależy od przyspieszenia, ani od siły; masa ciała nie zmienia się, dopóki natura ciała nie ulegnie zmianie. Każde jednak odmienne ciało $C_1, C_2, C_3 \dots$ posiada też masę $m_1, m_2, m_3 \dots$ inną, odmienną.

Równania (1), (2), (3) wyrażają t. zw. *drugie prawo ruchu* Newtona. Zasada ta mówi, że wartości: siły F , działającej na ciało i przyspieszenia f , które ono posiada, jeżeli zmieniają się z biegiem czasu, pozostają proporcjonalne do siebie; współczynnikiem proporcjonalności jest masa m ciała, która jest cechą stałą, w ruchu niezmienną, charakteryzującą dane ciało, dla rozmaitych ciał różną.

Posłużyliśmy się tutaj wyrazem *masa* w tem samym znaczeniu, które nadajemy mu w języku potocznym. Nazywamy ciało *masywnem*, jeżeli dana siła wytwarza w niem stosunkowo nieznaczne przyspieszenie; lub jeżeli, dla nadania ciału danego przyspieszenia, potrzeba siły stosunkowo znacznej. O takim ciecie nieraz co prawda mówią ludzie, że «jest ciężkie»; ale podobny sposób wyrażania się nie jest poprawny. Kto nie dostrzega różnicy między dwiema różnymi własnościami materji, pomiędzy *ciężarem* a *masą*, ten nie zrozumiał głębokiej prawdy, tkwiącej w zasadach dynamiki.

§ 36. Zasada działania i przeciwdziałania.

Jak w § 34-ym, wyobraźmy sobie dwa ciała materialne A i B , które okazują w pewnej chwili przyspieszenia f_A i f_B . Oznaczmy przez m_A i m_B masy tych ciał. Ciała A i B wywierają w owej chwili na siebie siły następujące:

1. siła, wywierana na A przez B : $F_{AB} = m_A f_A$
2. siła, wywierana na B przez A : $F_{BA} = m_B f_B$.

Wiemy, że siły F_{AB} i F_{BA} są zawsze skierowane przeciwnie (§ 34). Ale oprócz określonego *kierunku*, każda siła ma pewną *wartość* (por. § 35). Czy niema związku pomiędzy wartościami sił F_{AB} i F_{BA} ?

Newton pierwszy zrozumiał, że możemy zawsze wyobrażać sobie, iż te wartości są sobie równe:

$$3. \quad F_{AB} = F_{BA}.$$

Z równań (1), (2) i (3) wynika

$$4. \quad m_A f_A = m_B f_B$$

czyli

$$5. \quad f_A : f_B = m_B : m_A.$$

W ciągu ruchu ciał A i B przyspieszenia f_A i f_B przybierają wogóle coraz nowe wartości; natomiast stosunek m_B/m_A jest niezmienny. A zatem, według równania (5), zmienne z czasem wielkości f_A i f_B muszą zachowywać stosunek *stały*. Stwierdzamy, że tak jest *zawsze*, bez żadnego wyjątku. Planeta i słońce, kula ziemiska i księżyc, żelazo i magnes, woda i wiosło, skrzydło ptaka i powietrze, huśtawka i kamień, armata i pocisk, listki elektroskopu, które rozchylają się, wszystkie słowem ciała na niebie i ziemi są temu prawu posłuszne. Żeglarz i astronom, inżynier i fizyk zasadzają się na niem codziennie i sprawdzają je nieustannie. Winniśmy podziwiać Newtona, gdy pisze: *mutationes velocitatum, in contrarias itidem partes factae... sunt corporibus reciproce proportionales*; w tych kilku słowach Newton odgaduje prawdę powszechną.

Spójrzmy na tę prawdę niejako od strony odwrotnej. Skoro przyspieszenia f_A i f_B ciał A i B , działających na siebie, zachowują w ciągu ruchu stały stosunek, przeto ów stosunek f_A/f_B możemy *uznać* za odwrotny stosunek ich mas; możemy założyć (5) jako *określenie* stosunku m_B/m_A . Zmierzywszy f_A/f_B , otrzymujemy wówczas m_B/m_A . Możemy wybrać ciało A w taki sposób, ażeby m_A była *jednostką masy*; kładąc $m_A = 1$, otrzymujemy wartość m_B ze stosunku f_A/f_B . Widzimy zatem, że moglibyśmy zmierzyć tą drogą, przynajmniej w zasadzie, masę każdego ciała. Ale mamy w praktyce dogodniejsze w tym celu metody.

Pewna dodatkowa uwaga jest tutaj potrzebna. Wyobraźmy sobie parę ciał A, B ; zmierzyszy stosunek przyspieszeń f_A/f_B , wyprowadziliśmy zeń odwrotny stosunek mas m_B/m_A oraz (jeżeli $m_A = 1$) samą masę m_B . Niechaj teraz będzie dana inna para ciał A, C ; przy pomocy podobnych pomiarów znajdujemy masę m_C . Tak znaleziona m_C pozostaje w pewnym stosunku do m_B ; przypuśćmy na przykład, że znaleźliśmy $m_C = 5m_B$. Spróbujmy sprawdzić ten wynik. Zbliźmy do siebie ciała B i C , natomiast A oddalmy daleko; obserwujemy wówczas wzajemne oddziaływanie pomiędzy ciałami B i C , oddziaływanie, któremu wpływ ciała A nie przeszkadza. Zbadawszy przyspieszenia, które B i C okazują w takich warunkach, otrzymujemy znowu stosunek ich mas. Czy jednak znajdziemy

znowu $m_C = 5m_B$, jak poprzednio? Mierzmy obecnie m_C/m_B bezpośrednio; dawniej wymierzaliśmy ten stosunek za pośrednictwem masy m_A . Tylko doświadczenie może przekonać nas o tym, że w obu razach wartość stosunku m_C/m_B wypadła ta sama. Ale takich lub podobnych doświadczeń dokonano tysiące od czasów Newtona.

Wypowiedzieliśmy już całkowicie третią zasadę dynamiki; obecne twierdzenie (3) albo (4) jest uzupełnieniem, które zapowiedzieliśmy w § 34-ym.

Trzecia zasada dynamiki jest krótkim i ścisłym streszczeniem olbrzymiego zasobu doświadczeń; jest zarazem źródłem pojęcia *mas*y. Druga zasada jest określeniem pojęcia siły. Uczmy się wszędzie odróżniać *określenia* od *twierdzeń*. Określenia są zależne od powszechnej zgody ludzi myślących; one stwarzają język nauki ale nie wzbogacają wiedzy. Treścią nauki są twierdzenia, oparte na doświadczeniu i z doświadczeniem zgodne; one nie zależą od woli uczonych, od postanowień choćby całej ludzkości. Można by bez niedorzeczności wyobrazić sobie, że zwołani na kongres uczeni postanowiliby (gdyby okazała się tego potrzeba), iż mamy przez wyraz *siła* rozumieć odtąd, nie iloczyn przyspieszenia przez masę, lecz jakąś inną wielkość, inne dynamiczne pojęcie; ale uchylić treść trzeciego prawa Newtona, zmusić słońce czy pyłkę, ażeby mu nie były posłuszne, to nie jest w mocy niczyjej.

Niejednokrotnie czytujemy w książkach, że *masa* jest to «ilość materji» albo, że *siła* jest to «przyczyna, która zmienia stan spoczynku lub ruchu». Takie określenia nie przynoszą pożytku; «ilość materji» oraz «przyczyna, zmieniająca stan spoczynku lub ruchu» są to wyrazy bez treści. Na zasadzie takich określeń nikt nie potrafi zmierzyć pewnej siły lub wyznaczyć masy. Siła i masa są to *pojęcia*, więc niejako znaki albo narzędzia naszego myślenia. Niedorzecznością byłoby powiedzieć, że znak $+$ jest przyczyną dodawania, że znak 100°C jest przyczyną, iż woda gotuje się. O *przyczynach* ruchu fizyka nic nie wie, nie może wiedzieć i wiedzieć nie chce.

§ 37. Dalsze uwagi nad zasadą działania i przeciwdziałania.

Musimy dokładnie zrozumieć zasadę działania i przeciwdziałania, ponieważ ona jest fundamentem dynamiki. Spróbujmy rozproszyc wszelką niejasność, która w niej mogłaby może pozostać.

Oczywistą jest rzeczą, że dwie siły, równe i przeciwne sobie, muszą się równoważyć czyli znosić wzajemnie, *jeżeli działają na to samo ciało*. Przypuśćmy, że człowiek X popycha ciało C na prawo, jednocześnie zaś inny człowiek Y pcha to samo ciało C równie mocno na lewo; wówczas C oczywiście nie poruszy się wcale. Lecz trzecia zasada dynamiki tyczy się *innego* zjawiska. Dwa ciała A i B działają na siebie; powiadamy, że siły F_{AB} i F_{BA} , wywierane przez te ciała, są sobie przeciwne i równe.

Siła F_{AB} działa na ciało A , siła F_{BA} działa na ciało B ; te dwie siły *nie* są przyłożone do tego samego ciała, lecz do dwóch różnych ciał; o znoszeniu się tych sił nie może być mowy.

Koń ciągnie wóz, do którego jest zaprzężony; przypuśćmy, że ciągnie go za pośrednictwem rzemieni, sznurów czy pasów uprząży. Te sznury lub pasy, gdy koń ciągnie, są naprężone, napięte. Skoro nie można napiąć sznura inaczej, jak ciągnąc jego końce w strony przeciwne, więc powiadamy: koń ciągnie wózek, lecz jednocześnie wózek ciągnie konia. Przypuśćmy, że N jest siłą, którą koń wywiera na wózek; według trzeciego prawa ruchu, wózek nawzajem wywiera na konia siłę N równie znaczną i skierowaną przeciwnie. Jeżeli zobopólne działania są sobie równe, *czemuż tedy koń zwycięża w walce ze sprzeciwiającym się wózkiem?*

Nie zapominajmy o tem, o czem już wspominaliśmy na wstępie § 34-go: ażeby ciągnąć, koń musi mieć oparcie dla kopyt; koń wspiera się o nierówności gruntu, o kamienie, o piasek i odpycha się od nich w kierunku ruchu. Po gładkim asfalcie koń trudno ciągnie; w razie gołedzi ślizga się, nie znajduje dla kopyt oparcia. Ażeby odpychać się od nierówności gruntu lub innej podstawy, o którą się wspiera, koń ją uciska; doznaje wówczas przeciwdziałania, które wprawia go w ruch. Podobnie, gdy chcemy podnieść się na palcach, uciskamy posadzkę. Niechaj F oznacza siłę, którą koń wywiera na podstawę kopyt i której wzajemnie od niej doznaje. Dopóki F jest mniejsza niż N , koń *nie* ciągnie. Wzmagając wysiłek mięśni, koń wzmaga przeciwdziałanie podstawy; skoro F stanie się większa niż N , koń poczyni iść naprzód. Jakie siły działają na wózek? Przedewszystkiem wspomniana siła N , która ciągnie naprzód; następnie różne opory i tarcia, które działają w przeciwnym kierunku. Gdy N przeważa ponad temi hamującymi wpływami, wózek rusza z miejsca.

§ 38. Zasada zachowania masy.

Określone ciało materialne ma zawsze tę samą, określoną masę. Wiemy, że na dane ciało mogą działać rozmaite siły; na przykład ciężkość (czyli przyciąganie ziemi), ciążenie powszechne (np. przyciąganie słońca lub księżyca); siły mięśniowe, wywierane przez człowieka lub zwierzę; siły sprężyste, kapilarne, elektryczne, magnetyczne. Jakakolwiek jest natura siły, która sprawia w ciele przyspieszenie, masa ciała, obliczona z równania (1) § 35-go lub z równania (5) § 36-go, wypadła zawsze ta sama. Masa ciała nie zależy również od tego, czy ono jest zimne czy gorące; masa nie zależy od temperatury. Masa ciała nie zmienia się, czy ciało jest oświetlone czy ciemne; nie zmienia się, jeśli w jego łonie odbywają się chemiczne reakcje. Masa ciała tylko wówczas zmienia się, gdy materja wpływa z zewnątrz do niego lub też nazewnątrz z niego odpływa. Trwałość i niezmiennosc

masy, którą wyraziliśmy w zdaniach powyższych, stanowi treść prawa, zwanego *zasadą zachowania masy*.

Słynny chemik francuski Antoni August Lavoisier (1743—1794) orzekł pierwszy, że chemiczne reakcje nie zmieniają całkowitej sumy mas wszystkich ciał, które biorą w nich udział. Wygłosiwszy to prawo, Lavoisier stworzył metodę ilościowego badania, która w chemii jest fundamentalna: metodę, zasadającą się na *ważeniu*. J. S. Stas stwierdził, że dokładność prawa Lavoisiera rozciąga się co najmniej do 0-00001 części sumy mas, która ma pozostać niezmienna. Inni uczeni posuwają tę granicę jeszcze dalej; jakkolwiek z niektórych nowszych badań wyniki pewne w tej mierze wątpliwości, w zwykłej jednak dynamice możemy bez obawy uważać prawo zachowania masy za zupełnie dokładne.

§ 39. Punkt materialny.

W rozdziale I-y m wytlumaczyliśmy, w jakim znaczeniu mówimy w kinematyce o ruchu punktu, o prędkości punktu, o jego przyspieszeniu. W podobnym celu posługujemy się w dynamice pojęciem punktu. Mówimy w tej nauce o masie punktu, o siłach, które działają na punkt lub które on na inne punkty wywiera. Wyrażając się w taki sposób, życzymy sobie, ażeby *punkt* wyobrażał ciało i w niektórych względach mógł je w rozumowaniu zastąpić; dlatego przypisujemy mu masę, dlatego przypuszczamy, że wpływa na ruch innych punktów i sam od nich takich wpływów doznaje. Punkt, obdarzony takimi własnościami, nazywamy w dynamice *punktem materialnym*.

§ 40. Określenie grama; określenie litra.

Międzynarodowa jednostka masy, zwana *kilogramem*, została określona w umowie 1889-go roku w sposób następujący: kilogramem jest masa pewnego ciała *K*, wyrobionego z irydjoplatyny, które znajduje się w Biurze międzynarodowym Miar i Wąg w Sèvres, pod Paryżem; ciało to nazywa się *międzynarodowym wzorcem kilograma*. W fizyce posługujemy się zwykle jedną tysięczną częścią kilograma; taka jednostka masy nazywa się *gramem* (w skróceniu gr).

Litrem, według tej samej międzynarodowej umowy, nazywa się objętość jednego kilograma chemicznie czystej wody, znajdującej się w temperaturze 4°C i pod ciśnieniem jednej atmosfery.

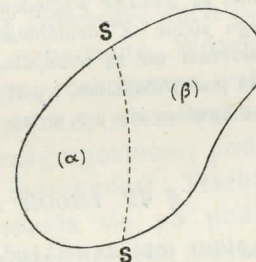
Według zasad, przyjętych w pierwotnym układzie metrycznym (§ 3), litr miał być równy sześciennemu decymetrowi; miał zatem zawierać tysiąc centy-

metrów sześciennych. Jednakże, według powyższego określenia, przyjętego w umowie międzynarodowej 1889-go roku, kilogram nie ma związku z masą sześciennego decymetra wody; zatem litr *nie* jest równy sześciennemu decymetrowi. Według pomiarów, dokonanych przez pp. Guillaume, Benoît i Buisson i innych uczonych francuskich, litr wynosi $1\cdot000027\text{ dm}^3$; jeżeli zatem wysoka dokładność nie jest niezbędna, możemy uważać litr w przybliżeniu za 1 dm^3 czyli za 1000 cm^3 .

§ 41. Prawo bezwładności.

Wyobraźmy sobie bryłę sztywną, np. kamień; wykonajmy nad nim w myśli pewne doświadczenie. Próbujemy usunąć kamień z pod działania wszelkich ciał materialnych. Zabieramy kamień z powierzchni ziemi, ona bowiem wywiera pewną siłę na kamień. Oddalamy kamień od ziemi, od planet, od słońca, od wszystkich gwiazd widzialnego wszechświata; zanosimy go w nieskończone przestworze, w próżnię zupełną, gdzie znikają wszystkie obce działania, wszystkie siły zewnętrzne. Jak zachowa się kamień? Jak się będzie poruszał?

Wyobraźmy sobie w łonie kamienia pewną powierzchnię *SS* (rys. 41), która dzieli go na dwie części: (α) i (β). Pomiędzy temi częściami pewne siły muszą być czynne, chociaż naszym dostrzeżeniom nie są bezpośrednio dostępne. Skoro te siły są czynne, stosują się zatem do trzeciego prawa dynamiki. Jeżeli część (α) popycha naprzód część (β), w takim razie (β) uciska część (α) wstecz równie mocno. Jeżeli część (α) pociąga część (β) na lewo, tedy część (β) ciągnie część (α) równie mocno na prawo. Ale kamień



Rys. 41.

stanowi całość spójną, sztywną, *niezmienną*; nie możemy poruszyć z osobna (α), nie wprowadzając w ruch (β) i odwrotnie. Co zatem dzieje się z dwoma ciśnieniami, albo z dwoma ciągnięciami, które, na rozległości powierzchni *SS*, są wywierane przez część (α) na część (β), przez część (β) na część (α)? Z powodu spójni kamienia te siły zniosą się, zrównoważą się ściśle. Kamień zachowa się tak, jak gdyby nie działały w nim żadne siły *wewnętrzne*. Ale na kamień, który usunęliśmy z pod wpływu całej reszty świata, nie działają również żadne siły *zewnętrzne*. Mamy więc ciało, na które nie działają żadne siły, ani zewnętrzne,

ani wewnętrzne; jakże porusza się ono? Równanie (1) § 35-go odpowiada na to pytanie. Kładąc w tem równaniu $F=0$, otrzymujemy $f=0$; lecz jeżeli przyspieszenie jest stałe równe zeru, tedy, według rozdziału I-go, ruch jest prostoliniowy jednostajny, albo też nie odbywa się wcale. *Ciało, usunięte z pod wpływu ogółu ciał materialnych, poruszałoby się ruchem prostoliniowym jednostajnym względem ogółu ciał, które nie wywierają na nie żadnego działania.* Przypadek spoczynku mieści się oczywiście w ogólniejszym przypadku ruchu prostoliniowego jednostajnego, ponieważ prędkość stała może, w szczególnym przypadku, być równa zeru.

Zostaliśmy doprowadzeni do wniosku, który nazywamy *prawem bezwładności* albo *pierwszą zasadą dynamiki*. Ruch prostoliniowy i jednostajny ciała, usuniętego z pod działania wszelkich sił, nazywamy *bezwładnym*; *bezwładnością* nazywamy własność ciał materialnych, która wyrażałaby się w ich ruchu bezwładnym, gdyby on mógł odbywać się rzeczywiście.

W trzecim prawie dynamiki twierdzimy, że każde ciało może udzielać innym ciałom przyspieszeń; w pierwszym prawie orzekamy jednocześnie, że samemu sobie ciało nie może udzielać przyspieszeń. Uważamy każde ciało za czynne, za *władne* względem innych ciał, za nieczynne i bezwładne względem samego siebie. Z rozumowania, podanego w niniejszym artykule, wnosimy, że te założenia nie są bynajmniej sprzeczne ze sobą. Przeciwnie, prawo bezwładności jest wnioskiem, wynikającym z zasady działania i przeciwdziałania i właściwie zawiera się już w tej zasadzie.

§ 42. Istotne znaczenie prawa bezwładności.

Łatwo jest zauważyć, że ani jednego ciała nie potrafimy usunąć z pod wpływu wszystkich pozostałych ciał materialnych; dlatego niektórzy sądzą, że prawo bezwładności tyczy się jakiegoś fikcyjnego, niemożliwego przypadku. W istocie rzeczy jednak nie troszczymy się o to, czy ruch ściśle bezwładny odbywa się gdziekolwiek bądź we wszechświecie. W dynamice musimy często rozwiązać zadanie następującej natury. Przypuśćmy, że w pewnej początkowej chwili $t=0$ znamy położenie i ruch pewnego ciała M , którego masa jest znana. Przypuśćmy, że w późniejszej chwili t dane są siły F_{MA} , F_{MB} , F_{MC} i t. d., które są wywierane na ciało M , w tej chwili t , przez obce ciała $A, B, C, \dots$; przypuśćmy, że te siły w chwili początkowej $t=0$ nie były przyłożone do ciała M . Chcemy przewidzieć, jak w chwili t ciało M poruszać

się musi. Ażeby to zadanie rozwiązać, powinniśmy wiedzieć, czy ciało M samo przez się spółdziała (i jak ono spółdziała) z siłami F_{MA} , F_{MB} , F_{MC} i t. d., które do niego są przyłożone. Zasada niezależności ruchów (§ 22) wraz z prawem bezwładności rozstrzyga tę sprawę. Nazwijmy dla skrócenia ruchem *własnym* ciała M ten ruch, który ciało M odbywało w chwili $t=0$, gdy siły F_{MA} , F_{MB} , F_{MC} i t. d. nie były jeszcze do niego przyłożone. Prawo bezwładności orzeka, że ruch własny ciała M *trwa bez zmiany*, zachowuje się czyli nie ginie; podług § 22-go, *dodaje się on*, według twierdzenia o równoległoboku (§§ 22, 23, 24), do ruchu, wytwarzanego przez siły obce F_{MA} , F_{MB} , F_{MC} i t. d. Prawo bezwładności spełnia się więc nieustannie; możemy dopatrzeć się go w każdym ruchu brył materialnych. Fikcja osamotnionego we wszechświecie ciała jest tylko wybiegiem, służącym do wypowiedzenia tego prawa w prostej i uderzającej postaci.

§ 43. Czy bezwładność materji sama przez się jest oczywista.

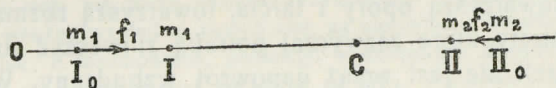
Prawda, zawarta w prawie bezwładności materji, sama przez się nie jest oczywista. Wszystkim rodzajom ruchu, dostrzeganym na ziemi, towarzyszą opory i tarcia, towarzyszą rozmaite hamowania i wstręty, które zazwyczaj potrafią zniweczyć ruch bardzo szybko, jeżeli nie jest wciąż napowrót wzbudzany. Wózek, popchnięty po bruku, zatrzymuje się rychło; rozkołysane wahadło albo dzwonek drgający uspakaja się wprędce; woda wzburzona w naczyniu układa się niebawem do równego poziomu; podmuch powietrza w zamkniętym pokoju ginie natychmiast. Trzeba ciągnąć kanapę lub skrzynię, ażeby posunęła się po podłodze; trzeba nieustannie wiosłować, ażeby czółno płynęło naprzód po stawie. Ruchy dokoła nas wyczerpują się, milkną. O tem wiedzieli Arystoteles i jego uczniowie i dlatego tak nauczali: ruch jest skutkiem, siła przyczyną; gdy znika przyczyna, skutek ginie; *cessante causa cessat effectus*. Ruch zamiera, gdy nie podsyca go, gdy wciąż nie wzbudza go siła. Ażeby trwać, każdy ruch wymaga działania siły, nawet ruch jednostajny. Tak uczyli filozofowie przez całe stulecia; mnóstwo ludzi niewykształconych jeszcze i dzisiaj sądzi podobnie. Dopiero Galileusz dostrzegł ten błąd i wyprowadził zeń ludzkość myślącą.

Trwanie ruchu wciąż hamowanego wymaga rzeczywiście nieprzerwanego działania siły. Ale *nie* każdy ruch jest hamowany;

ruch ziemi około słońca, obrót ziemi dokoła osi, nie są hamowane. Co więcej: niektóre ruchy są słabo hamowane, inne są mocno hamowane. Opory i tarcia są przeszkodą, są zakłóceniem ruchu; *nie* należą do jego istoty. Umieścimy skrzynię na wałkach lub kanapę na rolkach a potoczą się łatwo; ustawmy wagon na szynach, rozpędzony mknij wówczas daleko; kula, która po suknie porusza się leniwie, biegnie chyżo po tafli szkła albo lodu. Wystarczy naoliwić łożysko koła rozpędowego, ażeby zrozumieć wielką myśl Galileusza; nieco oliwy obala scholastyczną dynamikę. Siedząc w rozpędzonym wagonie, hamowniczy całym wysiłkiem mięśni działa na hamulce, kiedy chce zmniejszyć prędkość wagonu i zatrzymać go w biegu; ów hamowniczy zna dobrze bezwładność materji, lepiej niż ci, którzy o niej tylko w książkach czytali.

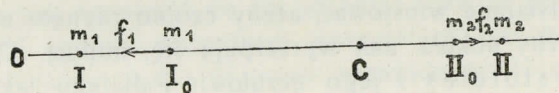
§ 44. O środku masy.

Wyobraźmy sobie dwa punkty materjalne, których masy są m_1 i m_2 . W początkowej chwili $t=0$ punkty znajdują się w spoczynku w miejscach I_0 i II_0 (rys. 42 lub 43) i wywierają na siebie



Rys. 42.

siły równe i przeciwne sobie. Jeżeli m_1 przyciąga ku sobie m_2 , tedy nawzajem m_2 przyciąga m_1 (rys. 42); jeżeli m_1 odpycha m_2 , tedy m_2 odpycha m_1 (rys. 43). Pod wpływem tych sił punkty



Rys. 43.

poczynają się poruszać. Jeżeli się przyciągają, zbliżają się ku sobie i po upływie pewnego czasu t znajdą się w miejscach I i II (rys. 42); jeżeli się odpychają, oddalają się od siebie i w chwili t będą zajmowały położenia I i II (rys. 43). Wybieramy na prostej $I_0 II_0$ punkt C w taki sposób, ażeby

$$1. \quad I_0 C : C II_0 = m_2 : m_1.$$

Taki punkt C (tylko pomyślany, w którym masy niema) nazy-

wamy *środkiem masy* układu m_1, m_2 . Udowodnimy niżej, że z trzeciej zasady dynamiki wynika następująca własność tego punktu: *środek masy nie porusza się, gdy punkty m_1 i m_2 (które były pierwotnie w spoczynku) poczynają poruszać się pod wpływem sił, które wywierają na siebie wzajemnie*. Naprzykład w chwili t punkt C będzie w tem samym miejscu jak w chwili $t=0$ i będziemy mieli znowu

$$2. \quad IC : CII = m_2 : m_1.$$

Przypuśćmy, że odstęp czasu t jest niezmiernie krótki. Oznaczmy przez f_1 i f_2 średnie przyspieszenia punktów w tym odstępzie. Czy punkty przyciągają czy odpychają się wzajemnie, mamy zawsze według § 36-go:

$$3. \quad m_1 f_1 = m_2 f_2.$$

Oznaczmy przez v_1 i v_2 prędkości punktów w chwili t . Ponieważ początkowo punkty były w spoczynku, mamy $f_1 = v_1/t$, $f_2 = v_2/t$; zatem, podług (3)

$$4. \quad m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

Na linii prostej $I_0 II_0$ wybieramy dowolny punkt stały O , od którego liczymy wszystkie odległości x , naprzykład:

$$5. \quad OI_0 = x_1^0; \quad OII_0 = x_2^0; \quad OI = x_1; \quad OII = x_2.$$

Na tej samej prostej wybieramy punkt C w taki sposób, żeby

$$6. \quad (m_1 + m_2)x_C^0 = m_1 x_1^0 + m_2 x_2^0; \quad (m_1 + m_2)x_C = m_1 x_1 + m_2 x_2.$$

Skoro t jest czasem nadzwyczajnie krótkim, mamy, w przypadku rys. 42-go:

$$7. \quad v_1 = (x_1 - x_1^0)/t; \quad v_2 = -(x_2 - x_2^0)/t.$$

Otrzymujemy z (7) i (4)

$$8. \quad m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 x_1^0 + m_2 x_2^0$$

co, według (6), znaczy:

$$9. \quad x_C = x_C^0.$$

Tworząc podobnie v_1 i v_2 w przypadku rys. 43-go, otrzymujemy w tym razie znowu równanie (9). Punkt C zatem istotnie nie porusza się wcale, jak zapowiedzieliśmy. Z określeń (6) wypada

$$10. \quad (x_C^0 - x_1^0) : (x_2^0 - x_C^0) = m_2 : m_1$$

$$11. \quad (x_C - x_1) : (x_2 - x_C) = m_2 : m_1$$

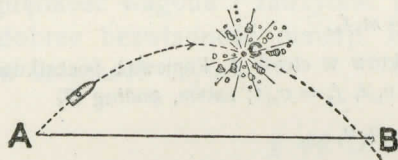
co jest zgodne z twierdzeniami (1) i (2).

W rozumowaniu powyższem mogliśmy byli powiedzieć, że prędkość v_C środka masy C jest równa zeru; lub że jego przyspieszenie f_C jest równe zeru. Chociażby punkty m_1 i m_2 miały dowolne prędkości w chwili $t=0$, twierdzenie $f_C=0$ nie przestałoby być prawdziwe. Podobnie jak kamień, o którym była mowa w § 41-ym, środek masy układu m_1, m_2 porusza się ruchem *bezwładnym*,

jeżeli działają w tym układzie tylko siły *wewnętrzne* t. j. wzajemne siły pomiędzy punktami.

Każdy układ punktów materialnych, każde ciało materialne posiada środek masy; prawo ruchu tego środka, które tutaj poznaliśmy, jest zawsze prawdziwe, jeżeli w układzie są czynne tylko siły *wewnętrzne*; *środek masy układu albo spoczywa albo porusza się ruchem bezwładnym, jeżeli w tym układzie czynne są tylko siły wewnętrzne.*

Powracając naprzykład do przypadków, wspomnianych w § 34-ym, mówimy, że w każdym z nich środek masy pozostaje w spoczynku; środek masy huśtawki i kamieni, magnesu i kawałka żelaza, armaty i pocisku, podczas ruchu tych ciał pozostaje w spoczynku. Gdyby armata wchłaniała pocisk w siebie,

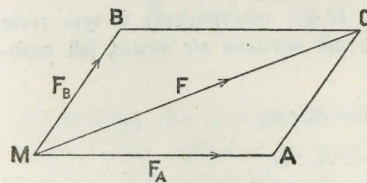


Rys. 44.

zamiast go wyrzucać ze siebie, posuwałaby się naprzód przy strzale. Człowiek, który zawisłby w próżni, gdzieś niezmiernie daleko od ziemi, słońca i gwiazd, nie poruszyłby swego środka masy, jakkolwiek poruszałby rękoma albo nogami. Gdyby lokomotywa wisiała na łańcuchach lub gdyby jej koła, w braku tarcia, ślizgały się po szynach, ruch tłoków wywoływałby tylko drgania różnych części i narządów maszyny, nie posuwając jej naprzód. Przypuśćmy, że wystrzelony z armaty granat, w chwili, w której wybucha, biegnie po krzywej *ACB* (rys. 44); jego części i cząstki rozpryskują się wówczas we wszystkie strony, ale środek masy *C* biegnie ruchem niezakłóconym po dotychczasowej orbicie, tak samo, jak gdyby granat nie był wybuchnął.

§ 45. Twierdzenie o równoległoboku sił.

Uzupełniamy teraz poprzedzające wiadomości w pewnym ważnym względzie. Może się zdarzyć, zdarza się nawet codziennie, że pewne ciało *M* pozostaje pod wpływem dwóch naraz ciał materialnych; doznaje ono wówczas spóczesnego działania dwóch sił. Twierdzimy, że każda z tych sił działa niezależnie od drugiej; każda wytwarza w ciele *M* takie przyspieszenie, jak gdyby pozostała siła nie istniała.



Rys. 45.

Przypuśćmy, że ciało *M* znajduje się pod wpływem dwóch ciał: *A* i *B*. Niechaj *MA* (rys. 45) wyobraża siłę F_A , którą ciało *A* wywiera na *M*; niechaj *MB* wyobraża siłę F_B , którą na *M* wywiera ciało *B*. Oznaczmy przez

f_A przyspieszenie, które siła F_A nadałaby ciału *M*, gdyby ciało *B* nie istniało; oznaczmy przez f_B przyspieszenie, które nadałaby ciału *M* siła F_B , gdyby ciało *A* nie było obecne; oznaczmy przez *m* masę ciała *M*. Z § 35-go wiemy, że

$$1. \quad F_A = mf_A; \quad F_B = mf_B,$$

że kierunek siły F_A zgadza się z kierunkiem przyspieszenia f_A , że kierunek siły F_B zgadza się z kierunkiem przyspieszenia f_B . Umówiliśmy się przed chwilą, że *MA* i *MB* na rys. 45-ym mają wyobrażać siły F_A i F_B ; lecz skoro przyspieszenia f są proporcjonalne do sił F i skierowane jak one, zatem możemy przypuścić, że *MA* i *MB* na rys. 45-ym wyobrażają przyspieszenia f_A i f_B ; w tym celu musimy tylko założyć, że skala rysunku została odpowiednio zmieniona; zamiast być skalą sił, jak poprzednio, jest teraz skalą przyspieszeń. Dodajemy teraz f_A i f_B do siebie geometrycznie, według zasad § 29-go; jeżeli *MC* jest przekątnią równoległoboku, którego bokami są *MA* i *MB*, *MC* w skali przyspieszeń wyobraża przyspieszenie *wypadkowe* f , które składa się geometrycznie ze składowych f_A i f_B . Wyobraźmy sobie siłę F , której wartość wynosi

$$2. \quad F = mf$$

i której kierunek zgadza się z kierunkiem *MC* przyspieszenia f . Powracając na rys. 45-ym od skali przyspieszeń do skali sił, widzimy, że wektor *MC* wyobrazi wówczas siłę F co do wartości i co do kierunku. Siłę tę F nazywamy *wypadkową* siłą *składowych* F_A i F_B , złożoną z nich geometrycznie. Powiadamy, że *siła wypadkowa tworzy się z sił składowych według zasady równoległoboku.*

Zasada równoległoboku stosuje się zatem do sił, podobnie jak, według §§ 24-go i 29-go, stosuje się do prędkości i do przyspieszeń; ustanawia więc ona również sposób *rozkładania* sił, podobnie jak ustanawia sposób rozkładania prędkości i przyspieszeń (§§ 25 i 29). Możemy tworzyć ukośne lub prostopadłe rzuty sił na kierunki danych osi, podobnie jak tworzyliśmy rzuty prędkości albo przyspieszeń.

§ 46. Galileusz. Jak ciała upuszczone spadają.

«Przedstawiamy tu nową naukę o bardzo dawnym przedmiocie. Od niepamiętnych czasów znany jest ruch; niemało pism

«o nim niebylejakich wydali filozofowie. Jednakże spostrzegłem niektóre właściwości ruchu, które w wysokim stopniu zasługują na uwagę; nie wiedziano o nich dotychczas lub niedosyć dokładnie». Temi słowy rozpoczyna się rozdział trzeci, najważniejszy, dzieła Galileusza, ogłoszonego w Lejdzie 1638 roku p. t. *Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno a due nuove Scienze*, lub raczej «dzień trzeci» rozpraw i rozstrząsań, poświęconych nowej nauce.

Była to istotnie nowa nauka o pospolitym przedmiocie. Codziennie przekonywamy się o tem, że otaczające nas ciała są ciężkie; że ciała te, gdy są upuszczone, spadają. Jak już Mach zauważył, filozofowie długo rozmyślali nad zapytaniem: *dlaczego* spadają? Dopiero Galileusz postawił sobie pytanie: *jak* spadają? Wszyscy wiedzą, powiada, że ciała tem prędzej biegną ku ziemi, im dłużej spadają; prędkość ruchu wzrasta zatem w miarę spadania. Przypuśćmy, że w chwili $t=0$ ciało ciężkie M zostało swobodnie upuszczone, bez żadnej początkowej prędkości; jaka może być prędkość v w dowolnej późniejszej chwili t ? Po kilku odmiennych domysłach, które sam uznał za błędne, Galileusz przypuścił, że prędkość v jest proporcjonalna do czasu t , który upłynął od początku spadania. Jeżeli więc g oznacza pewną stałą czyli współczynnik proporcjonalności, mamy

$$1. \quad v = gt.$$

Ruch ciała M jest prostoliniowy i jednostajnie przyspieszony (§§ 16, 17 i 19); przyspieszenie ciała w tym ruchu jest stałe i równe współczynnikowi g . Droga s , przebieżona od chwili początkowej $t=0$, wynosi

$$2. \quad s = \frac{1}{2}gt^2.$$

Z równań (1) i (2) wyprowadzamy

$$3. \quad v^2 = 2gs.$$

Równania (1), (2) i (3) streszczają w sobie prawa, według których ciała ciężkie spadają swobodnie w próżni, bez początkowej prędkości. Wiemy z § 19-go, że te równania zgadzają się z doświadczeniem; że przyspieszenie ciężkości g wynosi w Polsce około 981 cm/sek².

Zastosujmy jeszcze równanie (1) § 35-go do obecnego przypadku. Siłę F , która pobudza ciało do spadania, nazywamy jego

ciężarem. Oznaczając ciężar ciała przez p (od łacińskiego *pondus*), masę ciała przez m i pisząc g zamiast f , znajdujemy

$$4. \quad p = mg.$$

Ciężar ciała jest proporcjonalny do masy; współczynnikiem proporcjonalności jest przyspieszenie ciężkości g .

Możemy teraz ocenić śmiałość i doniosłość założenia, które Galileusz bierze za punkt wyjścia. Perypatetycy nauczali, że trwanie ruchu, nawet jednostajnego, wymaga nieustannego działania siły (§ 43); byli zatem w kłopotcie, gdy zapytywano: czemu spadające ciała biegną coraz prędzej ku ziemi? Według ich nauki, sama ciężkość nie wystarczała, ażeby wytwarzać ruch przyspieszony. Ażeby uratować twierdzenie, na którym budowali całą dynamikę, arystotelicy uciekali się do dodatkowych, sztucznych przypuszczeń; mówili na przykład, że powietrze «zamyka się» za ciałem ku ziemi biegnącym i pobudza je tym sposobem do coraz większej prędkości. Galileusz nie ukrywa pogardy, którą żywi dla podobnych pomysłów; wie dobrze, że powietrze przeszkadza, a nie pomaga, ruchowi ciał w nim spadających; nie waha się jednak w pierwszym przybliżeniu zaniebierać drobne zakłócenie, które opór powietrza do zjawiska spadania wprowadza. Galileusz rozumie, że ruch ciała spadającego musi być przyspieszony *właśnie dlatego*, że działa na nie bezustannie siła ciężkości. Siła ciężkości ma wartość stałą i kierunek stały; zatem ruch ciała spadającego jest prostoliniowy i jednostajnie przyspieszony. Taki jest bieg myśli Galileusza. Odgaduje on prawdę prostą i głęboką: *bynajmniej nie prędkość, ale przyspieszenie jest objawem i jest miarą siły*. I oto widzimy, jak czyta tę prawdę w zamięcie zjawisk zmiennych i zawiłych; jak po raz pierwszy, co prawda tylko w szczególnym przypadku, pojmuje istotną treść drugiego prawa ruchu Newtona, w którym pośrednio i pierwsze się mieści.

Lecz kiedy już odgadł prawa zjawiska, Galileusz postanawia domysł swój *sprawdzić* i o jego słuszności przekonać i samego siebie i innych. Ucieka się do doświadczenia; dokonuje pomiarów nad sposobem spadania ciał ciężkich; ażeby ich dokonać, stwarza metody, wynajduje przyrządy. Choć w porównaniu do dzisiejszych mało dokładne, spostrzeżenia Galileusza są dostateczne, ażeby go utwierdzić w przekonaniu, że wpadł na trop prawdy. Tym sposobem jedno zjawisko, spадanie, zo-

stało ilościowo opanowane. Gdy Galileusz tego dokonał, giną zakręty dialektyki, rozpraszają się mgły scholastyczne; spadanie ciał ciężkich przestaje być niezrozumiałe. Stąd dla nas wynika ważna wskazówka. Myśli ludzkiej potrzeba niewzruszonego gruntu rzeczywistości, ażeby, zasadzając się na nim, umiała trwale budować; gdy zanadto oddalamy się od faktów, gubimy się zwykle w przestworzu bezbrzeżnym, bezkształtnym i niemal zawsze bezpłodnym.

Scholastyczna dynamika niewątpliwie gromadziła błędy na błędach; lecz i w niej można znaleźć ziarno prawdy, choć przeinaczonej. Wyobraźmy sobie kulę metalową, zanurzoną w dużej masie cieczy bardzo *lepkiej*, na przykład w mazi lub w smole. Kula jest ciężka; siła ciężkości działa na nią na dół pionowo i pobudza do spadania. Lecz ciecz bardzo lepka przeszkadza ruchowi; im ruch kuli jest szybszy, tem opór cieczy staje się większy. Jeżeli spadanie trwa długo, działanie lepkości uśmierza do pewnego stopnia wpływ siły ciężkości, znosi mianowicie przyspieszenie, wytwarzane wciąż przez tę siłę. Ruch kuli staje się wówczas *jednostajny*; do ciężaru kuli proporcjonalna jest jej prędkość (która jest stała) a nie przyspieszenie (które jest zerem). Prawo ruchu kuli, poruszającej się w taki sposób, odkrył w r. 1850-ym uczony angielski G. G. Stokes, nosi też ono słusznie jego nazwisko.

Widzimy, że ruch, przyspieszany przez siłę obcą, zewnętrzną (jak tutaj przez ciężkość) ale zarazem hamowany i tamowany przez opór, może odbywać się tak, jak gdyby nie było ani obcej siły, ani oporu, jak gdyby odbywał się przez prostą bezwładność. Tylko do takiego szczególnego przypadku stosują się zasady Arystotelesowskiej dynamiki.

§ 47. Jednostka siły; dyna. Jednostki ciężarowe.

Przypuśćmy, że siła F , działając na ciało o masie m , sprawia w niem przyspieszenie f ; według równania (1) § 35-go mamy wówczas

$$1. \quad F = mf.$$

Jednostka siły jest więc iloczynem jednostki masy przez jednostkę przyspieszenia. Za jednostkę masy w § 40-ym przyjęliśmy 1 gram; za jednostkę przyspieszenia w § 15-ym przyjęliśmy 1 cm/sek². Stąd wynika, że nasza jednostka siły jest następująca:

$$2. \quad 1 \text{ gr cm/sek}^2.$$

Siła, która (sama jedna) działając na 1 gram, wytwarza w nim przyspieszenie 1 cm/sek², nazywa się *dyną*.

Oznaczmy przez p ciężar ciała, którego masa jest m . Według (4) § 46-go:

$$3. \quad p = mg.$$

Widzimy zatem, że ciężar 1 grama jest równy g dynom; odwrotnie, 1 dyna jest równa ciężarowi $1/g$ części grama.

Ciężkość jest siłą najpospolitszą, z którą w doświadczeniu codziennem zapoznajemy się stosunkowo najlepiej. Gdy więc pragniemy uzmysłowić wartość pewnej siły, porównujemy ją chętnie z ciężarem wiadomej masy; mówiąc na przykład o sile, równej ciężarowi 3 kilogramów, powołujemy się na powszechnie znane wrażenie mięśniowe. — Technicy, przemysłowcy, nieraz i uczeni, mówią często przez skrócenie o «sile trzech kilogramów»; *ciężar kilograma* nazywają wówczas, przez skrócenie, *kilogramem*. Słuchając rozmów potocznych, przekonywamy się, że wyrazy *kilogram*, *gram*, *funt*, *cełnar*, *tonna* w rozumieniu wielu osób oznaczają raz masę, to znowu ciężar tych wzorców.

Grawitacyjną lub *ciężarową jednostką siły* nazywamy ciężar pewnej określonej masy, na przykład ciężar 1 grama. Zachowując 1 cm/sek² jako jednostkę przyspieszenia, powiadamy na zasadzie wzoru (3): jeżeli ciężarową jednostką siły jest ciężar 1 grama, ciężarową jednostką masy jest masa g gramów. Wówczas:

$$4. \quad \text{masa } 1 \text{ grama} = \frac{1}{g} \text{ ciężarowej jednostki masy.}$$

Za przykładem A. Witkowskiego rozumiemy przez *gr masę*, przez *Gr* zaś oznaczamy *ciężar 1 grama*; podobnie odróżniamy *kg* i *Kg* i *t. d.*

Zobaczymy w rozdz. III im, że wartość przyspieszenia g zmienia się (niezbyt zresztą znacznie), zależnie od położenia ciała na powierzchni ziemi; a zatem od tego położenia zależy również ciężarowa jednostka masy. Gdy zadawaliśmy się pierwszym przybliżeniem, ciężarowe jednostki masy i siły są, jak widzimy, dogodne w codziennem użyciu; ale ponieważ są *zmiennie*, zatem w ścisłej nauce nie powinniśmy posługiwać się niemi.

§ 48. Streszczenie zasad dynamiki.

Możemy streścić zasady dynamiki w kilku zdaniach.

Ciała materialne wywierają siły na siebie nawzajem; to znaczy, że zobopólnie wytwarzają w sobie przyspieszenia.

Przyspieszenie ciała jest miarą działającej na nie siły; siła

jest wprost proporcjonalna do przyspieszenia. Spółczynnikiem proporcjonalności jest masa, cecha niezmienna, charakteryzująca ciało, dla każdego ciała inna.

Jak przyspieszenie, siła jest wektorem i ma jego kierunek.

Siły, wywierane przez dwa nawzajem na siebie działające ciała, są równe sobie i skierowane przeciwnie; stąd wynika, że masy tych ciał są odwrotnie proporcjonalne do przyspieszeń.

Przyspieszenie, proporcjonalne do siły, znika z nią razem; ciało, usunięte z pod działania jakichkolwiek bądź sił, poruszałoby się zatem ruchem prostoliniowym jednostajnym. Taki ruch, zwany bezwładnym, może trwać niezależnie od ruchów, wytwarzanych w ciele przez przyłożone siły.

Jeżeli siła ma wartość stałą i kierunek stały, przyspieszenie ma również stałą wartość i stały kierunek; ruch ciała wówczas jest prostoliniowy i jednostajnie przyspieszony.

Jeżeli na pewne ciało działają jednocześnie dwa inne ciała, siły, które one wywierają, składają się według zasady równoległoboku. Według tejże zasady siły mogą się rozkładać.

§ 49. Prawa ruchu planet dokoła słońca.

Wiele lat przed Newtonem, Mikołaj Kopernik zrozumiał, że ziemia i inne planety biegną dokoła słońca po drogach krzywych, płaskich, zamkniętych, które nazywamy *orbitami* (*Nicolaus Copernici Torinensis De Revolutionibus Orbium Coelestium libri VI. 1543*). Kopernik uważał orbity ziemi i planet za koła; Keppler, na zasadzie spostrzeżeń Tycho Brahe, uznał orbitę Marsa a następnie orbity innych planet za *elipsy*, których jedno ognisko zajmuje słońce lub, dokładniej, pewien punkt bryły słonecznej. Towarzyszący nam księżyc krąży podobnie dokoła ziemi po torze przybliżeniu eliptycznym, którego jedno ognisko zajmuje środek ziemi. Orbity planet i księżyca różnią się zresztą mało od kół; w pierwszym przybliżeniu możemy uważać te orbity za koła.

Wszystkie planety naszego słonecznego układu krążą dokoła tej samej wielkiej bryły centralnej, dokoła słońca; dlatego Keppler domyślał się, że pomiędzy ich orbitami lub obiegami musi zachodzić jakaś zależność; po długich latach poszukiwania, znalazł ją istotnie w r. 1618-ym. *Kwadraty okresów planet* (czyli czasów, w których one odbywają jeden obieg dokoła słońca)

mają się do siebie jak sześciiany wielkich półoś ich orbit eliptycznych; lub w przybliżeniu (jeżeli uznajemy te orbity za koła) mają się do siebie jak sześciiany promieni ich orbit.

§ 50. Prawo siły, wywieranej na planety przez słońce.

Newton wiedział wszystko, co wyłożyliśmy w niniejszym rozdziale: o bezwładności materji, o prawach działania sił, o spadaniu ciał ciężkich ku ziemi, o krążeniu planet dokoła słońca i księżyców dokoła planet. Wiedział, że ciało, na które nie wpływałaby żadna siła, musiałoby poruszać się po torze prostym ze stałą prędkością albo też pozostawać w spoczynku. Skoro ziemia (lub dowolna inna planeta) biegnie po eliptycznej lub w przybliżeniu po kołowej orbicie, *zbacza zatem co chwila od kierunku ruchu poprzedzającego*; zdradza więc nieustannie, że *znajduje się pod wpływem pewnej siły*.

Przypuśćmy dla uproszczenia, że planeta krąży dokoła słońca jednostajnie, po orbicie kołowej. Wiemy wówczas (§ 28), że przyspieszenie planety jest stale skierowane ku środkowi koła, gdzie znajduje się słońce. Stąd wnosimy, że *planety poruszają się tak, jak gdyby nieprzerwanie ulegały działaniu siły przyciągającej, skierowanej ku słońcu*. Ten sam wniosek wynika z praw dokładniejszych, według których poruszają się planety po eliptycznych orbitach.

Wiemy z § 28-go, jaka jest wartość przyspieszenia f planety, ożywionej ruchem jednostajnym kołowym. Jeżeli r jest promieniem orbity, v prędkością planety, ω jej prędkością kątową, T okresem czyli czasem jednego całkowitego obiegu, mamy

$$1. \quad f = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Według drugiej zasady dynamiki, siła F , działająca na planetę, musi mieć wartość następującą

$$2. \quad F = mf,$$

gdzie m jest masą planety. Z (1) i (2) otrzymujemy

$$3. \quad F = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}.$$

Porównajmy bieg dwóch planet: A i B . Przez m_A i m_B oznaczamy masy tych planet, przez r_A i r_B promienie ich orbit, przez

T_A i T_B ich okresy (czyli czasy obiegu); przez F_A i F_B rozumiemy wartości sił przyciągania, wywieranych na te planety przez słońce. Piszemy równanie (3) najprzód dla planety A, następnie dla planety B; z tych wzorów wyprowadzamy

$$4. \quad F_A : F_B = \frac{m_A r_A}{T_A^2} : \frac{m_B r_B}{T_B^2}.$$

Jednakże prawo Keplera, o którym mówiliśmy w artykule poprzednim, orzeka, że:

$$5. \quad T_A^3 : T_B^3 = r_A^3 : r_B^3.$$

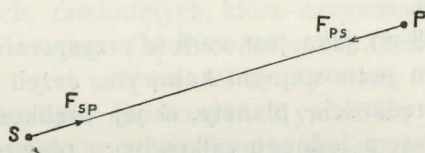
Łącząc ze sobą równania (4) i (5), dochodzimy do wniosku, iż

$$6. \quad F_A : F_B = \frac{m_A}{r_A^2} : \frac{m_B}{r_B^2}.$$

Siła, wywierana przez słońce na planetę, jest wprost proporcjonalna do masy planety, odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości planety od słońca.

§ 51. Newtona prawo wzajemnego przyciągania się ciał.

Odwołujemy się teraz do zasady działania i przeciwdziałania, którą poznaliśmy w §§ 34-ym, 36-ym i 37-ym. Jeżeli planeta P (rys. 46) doznaje od słońca S siły F_{PS} , skierowanej ku słońcu



Rys. 46.

wzdłuż prostej PS, tedy według powołanej zasady słońce S musi nawzajem doznawać od planety P siły F_{SP} skierowanej przeciwnie t. j. wzdłuż prostej SP. *Wszystkie ciała wszechświata przyciągają się wzajemnie wzdłuż kierunków łączących je linii prostych.*

Widzieliśmy w artykule poprzednim, że każde ciało jest przyciągane w stosunku prostym jego masy; zatem siła F_{PS} musi być wprost proporcjonalna do masy m_P planety P, siła F_{SP} musi być wprost proporcjonalna do masy m_S słońca S. Lecz ponieważ

$$1. \quad F_{PS} = F_{SP},$$

przeto obiedwie te siły muszą być proporcjonalne jednocześnie i do m_P i do m_S czyli do iloczynu $m_P m_S$. Oznaczając więc przez r_{PS} najkrótszą odległość PS i rozumiejąc przez k pewną stałą powszechną, czyli jednakową dla wszelkich ciał P i S, dochodzimy do wniosku, który okrył sławą nazwisko Newtona:

$$2. \quad F_{PS} = F_{SP} = \frac{k m_P m_S}{r_{PS}^2}.$$

Wszystkie ciała wszechświata przyciągają się wzajemnie wprost proporcjonalnie do iloczynu swych mas, odwrotnie proporcjonalnie do kwadratów dzielących je odległości.

§ 52. Ruch dwóch ciał przyciągających się.

Weźmy do pomocy drugie prawo dynamiki, równanie (1) § 35-go i utwórzmy przyspieszenia planety i słońca na zasadzie prawa (2) poprzedniego artykułu. Twierdzimy, że

$$1. \quad \text{przyspieszenie planety } f_P = \frac{F_{PS}}{m_P} = \frac{k m_S}{r_{PS}^2}$$

$$2. \quad \text{przyspieszenie słońca } f_S = \frac{F_{SP}}{m_S} = \frac{k m_P}{r_{PS}^2}.$$

Stąd wynika, iż

$$3. \quad f_P : f_S = m_S : m_P.$$

Weźmy na uwagę na przykład kulę ziemską i słońce. Masa słońca jest 333432 razy większa niż masa ziemi; zatem według (3) przyspieszenie ziemi jest 333432 razy większe niż przyspieszenie słońca. Dlatego możemy w pierwszym przybliżeniu powiedzieć, że kula ziemską biegnie dokoła słońca, jak gdyby słońce było nieruchome. W istocie obiedwie te bryły krążą dokoła wspólnego środka masy (§ 44), który jednak leży zawsze o wiele bliżej środka słońca aniżeli środka ziemi.

Co tu powiedzieliśmy, stosuje się do każdej pary ciał. Ziemia przyciąga kamień ku sobie; to przyciąganie, które nazywamy ciężarem kamienia, czujemy mięśniowo, gdy trzymamy kamień w ręku. Gdy upuszczamy kamień swobodnie, nie rzucając go, nie nadając mu żadnej ubocznej początkowej prędkości, kamień spada ku ziemi; planeta bez początkowej prędkości spadałaby podobnie ku słońcu. Jak zobaczymy w rozdz. III-im, kamień rzucony ukośnie, zataczając pewną krzywą, dobiega powierzchni ziemi; gdybyśmy mogli rzucić go z pewną olbrzymią prędkością, począłby okrążać kulę ziemską, stałby się małym księżycem.

Ziemia przyciąga kamień i kamień przyciąga ziemię; siły obustronnie wywierane są równe, przyspieszenia są w odwrotnym stosunku do mas. Kamień, którego masa wynosi kilogram, posiada masę 6×10^{24} razy mniejszą niż masa ziemi; przyspieszenie ziemi biegnącej ku kamieniowi jest więc 6×10^{24} razy mniejsze niż przyspieszenie kamienia biegnącego ku ziemi (por. §§ 36 i 44).

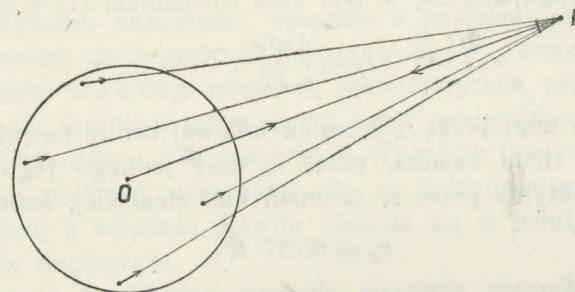
§ 53. O ciężeniu powszechnem.

Zastanowiwszy się nad prawem (2) § 51-go, dostrzegamy natychmiast, że ono nie może stosować się w tej postaci do wielkich brył, do ciał nadzwyczaj rozległych; nie może przynajmniej stosować się ściśle. Istotnie, odległość r_{ps} ma jasne i określone znaczenie, gdy ciała P i S są punktami; lecz z różnych miejsc w bryle słonecznej możemy poprowadzić rozmaite proste do różnych miejsc ziemi i proste te nie będą sobie równe. Jakaż zatem odległość r_{ps} powinna stać w formule (2) § 51-go, ażeby wypadła prawdziwa wartość przyciągania, czynnego między słońcem a ziemią? Czyżby ta formuła była tylko przybliżenie prawdziwa? czy stosowałaby się tylko w założeniu, że rozmiary własne słońca i planet wolno zaniedbać w stosunku do ogromnych odległości, które oddzielają te ciała od siebie?

Newton nie waha się w odpowiedzi na to pytanie. Według Newtona *ciężenie powszechne działa pomiędzy każdą dwiema najmniejszymi cząstkami materji, ściśle proporcjonalnie do ich mas, odwrotnie proporcjonalnie do kwadratów dzielących je odległości*. Przyciąganie czynne pomiędzy słońcem a ziemią jest *siłą wypadkową*, wynikającą z geometrycznego dodawania się do siebie (§ 45) sił, działających pomiędzy wszystkimi cząstkami słońca a wszystkimi cząstkami ziemi; takie samo twierdzenie stosuje się do każdej pary dwóch (dużych czy małych) ciał materialnych.

Nasuwało się zatem następujące zadanie. Wyobraźmy sobie ciało O kuliste (rys. 47); przypuśćmy, że każdy najmniejszy element przestrzenny tej kuli ma tę samą masę, czyli innemi słowy, że *gęstość* (§ 103) tej kuli jest stała. Należy obliczyć siłę wypadkową, która tworzy się przez geometryczne dodanie do siebie przyciągań, wywieranych przez wszystkie cząstki kuli O na punkt materialny P , nazewnątrż kuli leżący (rys. 47). Na wiosnę 1685 roku Newton rozwiązał to zadanie, które w ówczesnym stanie nauki przedstawiało niebywałe trudności. Wynik rachunku był zdumiewający. *Kula jednostajnej gęstości działa nazewnątrż do-*

kładnie tak samo, jak gdyby jej masa była całkowicie skupiona w jej geometrycznym środku. To wspaniałe twierdzenie rozstrzygnęło o losie mechaniki niebios; skoro Newton je odkrył, me-



Rys. 47.

chanizm słonecznego układu stawał się dostępny analizie matematycznej. Wolno było odtąd przypuszczać, że formuła (2) § 51-go jest ściśła, gdy r_{ps} oznacza wzajemną odległość *środków kul*: słonecznej i ziemskiej.

§ 54. Ciężkość jest szczególnym przypadkiem powszechnego ciężenia.

Dostrzegamy nieustannie na ziemi działanie siły ciężkości. Wiemy, że działanie tej siły nie ogranicza się do powierzchni ziemi; możemy je stwierdzić u szczytu najwyższych wież, u szczytu najwyższych gór; wiemy, że aeroplan lub ptak, gdy szybuje, nie przestaje być ciężki. Jeżeli tak jest, czyż może gdziekolwiekbyś istnieć nagle, ostra granica działania ciężkości? Lecz jeżeli jej nie ma, zatem i księżyc, choć tak daleki od ziemi, musi być ciężki. Tak rozmyślając, Newton pojął, że *ciężkość przedmiotów na ziemi jest tylko przykładem, jest przypadkiem szczególnym powszechnego ciężenia*; a ta myśl, taka prosta, nadzwyczajnie pomogła do szybkiego tryumfu nauki Newtona. Albowiem ciężenie powszechne, do którego odwołuje się Newton, ażeby wytłumaczyć urządzenie słonecznego układu, nie jest czemś doraźnie wymyślonem, nie jest siłą hipotetyczną, którą *ad hoc* stwarzać potrzeba; ciężenie jest pospolitym objawem natury, z którym każdy z nas oswaja się od dzieciństwa. Jeżeli domysł Newtona jest słuszny, ciężenie jest *faktem*.

Sprawdźmy zatem ten domysł; przekonajmy się, czy rzeczy-

wiecie przyciąganie, którego księżyc doznaje od ziemi, jest jego pospolitą (powiedzmy *ziemską*) ciężkością. Możemy łatwo obliczyć przyspieszenie f_K , które księżyc faktycznie objawia w swym ruchu. Posługujemy się w tym celu równaniem (1) § 50-go:

$$1. \quad f_K = \frac{4\pi^2 r_K}{T_K^2}.$$

Rozumiemy tutaj przez r_K promień kołowej orbity księżyca, którą on dokoła ziemi zatacza, przez T_K czas jednego jego obiegu. Jeżeli oznaczmy przez R promień kuli ziemskiej, mamy

$$2. \quad r_K = 60.27 R;$$

mamy dalej

$$3. \quad T_K = 2360591.5 \text{ sek};$$

wreszcie, jak dobrze wiadomo:

$$4. \quad 2\pi R = 4 \times 10^9 \text{ cm}.$$

Wstawiając te wartości do formuły (1), otrzymujemy

$$5. \quad f_K = \frac{2\pi \times 60.27 \times 4 \times 10^9}{(2360591.5)^2} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2} = 0.272 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}.$$

Zapytujemy teraz: jakie powinno być przyspieszenie γ_K jakiegokolwiek ciała, poddanego sile ziemskiej ciężkości, jeżeli odsuniemy to ciało do odległości r_K od środka ziemi? Według prawa odwrotnej proporcjonalności ciężenia do kwadratów odległości powinniśmy oczekiwać, że

$$6. \quad \gamma_K : g = R^2 : r_K^2$$

albowiem zwykle przyspieszenie ciężkości (§ 46)

$$7. \quad g = 981 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}$$

obserwujemy przecież w odległości R od środka naszej planety. A zatem, według (6) i (7):

$$8. \quad \gamma_K = g \frac{R^2}{r_K^2} = \frac{981}{(60.27)^2} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2} = 0.270 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}.$$

Wartości f_K (5) i γ_K (8) zgadzają się ze sobą dostatecznie w stopniu przybliżenia, którego możemy oczekiwać w pobieżnym naszym rachunku.

Newton już w roku 1666-ym dokonał był porównania przyspieszeń f_K i γ_K , które tu przytoczyliśmy; posłużył się jednakże w tem porównaniu niedokładną wartością obwodu $2\pi R$ ziemi, której wymiary szacowano wówczas z pewnem, dość grubem przybliżeniem do prawdy. Z tego powodu, w pierwszych swych rachunkach, Newton otrzymał, jako faktyczne przyspieszenie księżyca f_K , wynik o jedną ósmą część mniejszy niż przyspieszenie ciężkości γ_K . W roku 1679 Newton powrócił do poprzednich obliczeń, zasadzając się na dokładniejszych danych liczbowych; a wówczas prawda ukazała się w pełni, przed jego wzrokiem duchowym.

Odkrycia Newtona wywarły wrażenie niezmiernie. Nigdy w dziejach ludzkiego myślenia nie dokonał się postęp tak nagły, tak olśniewający. Jak przed promieniami słońca pierzchają nocne cienie i mgły, podobnie, gdy ukazały się *Principia*, potężne światło pojmowania rozblysło. Na przeciąg dwóch niemal stuleci myśl Newtona zapanowała nad rozwojem nauki.

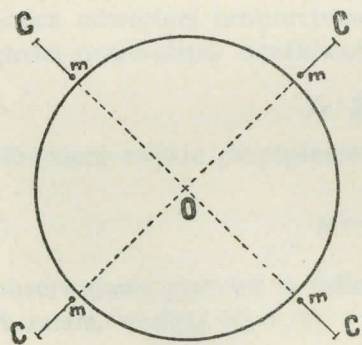
ROZDZIAŁ TRZECI.

O sile ciężkości.

§ 55. Pole ciężkości.

W pobliżu kuli ziemskiej działa siła ciężkości; powiadamy w fizyce krótko, że dokoła tej kuli istnieje *pole ciężkości*. Mówimy podobnie, że dokoła słońca rozciąga się pole ciężenia ku słońcu, pole grawitacyjne. Powiadamy, że dokoła magnesu istnieje pole magnetyczne, dokoła ciała naelektryzowanego — pole elektryczne i t. d.

Ciała, znajdujące się w polu ciężkości, spadają w kierunku niemal dokładnie pionowym, jeżeli mają swobodę poruszania się w tym kierunku (§§ 19 i 46). Dostrzegamy wprawdzie, że niektóre ciała (np. korek w wodzie, dym lub balon w powietrzu) nie spadają, lecz przeciwnie, pozostawione samym sobie wznoszą się do góry. Lecz te pozorne wyjątki nie wynikają bynajmniej z odpychania, wywieranego na owe ciała przez ziemię, lecz raczej z przeważającego przyciągania, wywieranego na ich otoczenie: wodę lub powietrze. Przekonamy się o tem w późniejszym rozdziale.



Rys. 48.

Kierunek pionowy, poprowadzony w którejkolwiek miejscowości, dąży wszędzie, w znacznym przybliżeniu, do środka O kuli ziemskiej (rys. 48). Ten fakt sam przez się

byłby dostateczną wskazówką (gdybyśmy nie mieli w tej mierze innych dowodów), że pole ciężkości wynika z przyciągania, które kula ziemiska wywiera na każde ciało, umieszczone w jej sąsiedztwie.

Kierunki pionowe, poprowadzone w dwóch miejscowościach, tworzą ze sobą w środku O kuli ziemskiej kąt tem mniejsze (rys. 48), im bliżej siebie położone są piony. Wiedząc, że promień kuli ziemskiej wynosi 6.37×10^8 cm, obliczamy łatwo kąt, który tworzą ze sobą kierunki dwóch pionów, oddalonych od siebie (na powierzchni ziemi) np. o kilometr. Przekonywamy się tym sposobem, że w obrębie budynku, a nawet w obrębie miasta, wolno najczęściej uważać kierunki pionowe za równoległe.

Najważniejsze prawa ciężkości i spadania wyłożyliśmy już w §§ 19-ym i 46-ym. Jeżeli p jest ciężarem ciała, którego masa jest m , mamy, jak wiadomo:

$$1. \quad p = mg$$

gdzie przez g oznaczamy *przyspieszenie ciężkości*. Badanie siły ciężkości sprowadza się zatem do pomiaru przyspieszenia ciężkości. Ażeby zmierzyć wartość przyspieszenia g , musimy odwołać się do doświadczenia; musimy zbadać rozmaite sposoby spadania ciał pod wpływem ciężkości. Że jednak takie spадanie odbywa się zwykle w powietrzu, które stawia opór poruszającemu się w niem ciału (§ 46), przeto owemu oporowi poświęcamy przedewszystkiem nieco uwagi.

§ 56. Opór powietrza.

Skąd powstaje opór powietrza? Poruszające się ciało wprawia w ruch przyległe warstwy tego ośrodka; ponieważ udziela im przyspieszeń, więc, stosownie do trzeciego prawa dynamiki, doznaje od tych warstw przeciwdziałania t. j. siły, która jest skierowana przeciwnie niż prędkość ciała, zatem, w spadaniu swobodnem, przeciwnie niż siła ciężkości. Łatwo zrozumieć, że opór powietrza zależy od postaci i od rozległości powierzchni, która podczas ruchu uderza o powietrze a także od prędkości ciała. Im mniejsza jest ta rozległość, im powolniejszy jest ruch, tem mniejszy jest opór.

Idąc powoli, nie uświadamiamy sobie oporu powietrza; zaczynamy go odczuwać, gdy szybko biegamy. Wystrzelona kula armatnia, pędzący automobil, lokomotywa w ruchu doznają w powietrzu znacznego oporu. Powiewajmy wachlarzem lub arkuszem tektury; spostrzegamy natychmiast, jak dalece opór zależy od nachylenia rozległej powierzchni przedmiotu do kierunku ruchu.

Opór, który przeciwstawia się ruchowi ciała, spadającego w powietrzu, zależy więc od innych własności ciała aniżeli ciężar, który zależy przedewszystkiem od masy. Jeżeli ciało, przed-

stawiając zewnętrzną powierzchnię nieznaczną, ma jednak masę stosunkowo znaczną, jeżeli np. jest wyrobione z żelaza lub z ołowiu, opór powietrza podczas spadania jest stosunkowo drobny w porównaniu do ciężaru ciała.

Gdybyśmy usunęli powietrze lub przynajmniej rozrzedzili je znacznie, uwolnilibyśmy spadające ciało od oporu powietrza. Tak postąpił Newton w znanym doświadczeniu, które do dziś dnia powtarzamy. Wyciągamy powietrze z rury szklanej, w której umieszczono monetę i piórko; odwracając szybko rurę, spostrzegamy, że obadwa ciała przebiegają jej długość w czasie jednakowym; gdy wpuszczymy powietrze, piórko opada powolniej aniżeli moneta.

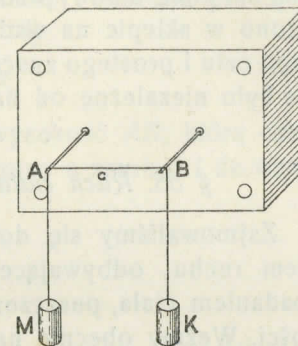
§ 57. Przyspieszenie ciężkości nie zależy od natury ciała, poddanego działaniu tej siły.

W danej miejscowości na powierzchni ziemi przyspieszenie ciężkości ma wartość jednakową dla wszystkich ciał materialnych. Stąd wynika, według równania (1) artykułu poprzedzającego, że w tej samej miejscowości ciężary ciał są wprost proporcjonalne do ich mas. Lub innymi słowy: kula ziemską przyciąga rozmaite ciała materialne, jednakowo względem niej położone, w stosunku prostym ich mas. Wszystkie te twierdzenia są oczywiście zawarte w prawie powszechnego ciężenia (§§ 51 i 54) i wynikają z tego prawa jako proste następstwa. Tem ważniejszą jest rzeczą, ażebyśmy upewnili się o ich prawdziwości.

Powróćmy do § 19-go i przypomnijmy sobie podane w nim równanie (4). Przypuśćmy, że przyspieszenie g jest stałą, jednakową dla wszystkich ciał materialnych. Ze wspomnianego wzoru wówczas wypada, że wszystkie ciała, ciężkie czy lekkie, spadając w próżni, bez początkowej prędkości, z wysokości jednakowej, powinny dobiegać ziemi w czasie jednakowym. Galileusz doszedł do tego wniosku, gdy rozpoczynał w Pizie swoją działalność; korzystając z istnienia w tem mieście słynnej wieży pochyłej, wypuszczał z jej szczytu kule, wyrobione z rozmaitych metali. Czasy spadania tych kul okazywały się jednakowe.

Powtarzamy doświadczenie Galileusza w prosty sposób. Na nici, przewieszanej przez dwa pręciki A , B (rys. 49), wiszą dwa walce: żelazny lub mosiężny M oraz drewniany lub kamienny K . Walce te mają jednakową postać i objętość równą; wiszą w tej samej wysokości ponad poziomem posadzki. Przepalamy nić, dotykając jej w c ostrym płomykiem. Walce M i K zaczynają biec równocześnie i jednocześnie dobiegają posadzki; słyszymy istotnie tylko jedno, zgodne o nią stuknięcie.

Ciała upuszczone szybko dobiegają ziemi; dostrzeganie i badanie ich ruchu jest niełatwe. Prosty przyrząd, który znamy wszyscy, zwany *wahadłem* (zob. § 63), pozwala badać działanie ciężkości na ciałach w warunkach bardziej dogodnych. Ruch wahadła w istocie jest kolejnym wznoszeniem się do góry i opadaniem ku dołowi; prawa działania ciężkości muszą zdradzać się w tym ruchu podobnie jak w swobodnym spadaniu. Gdyby przyspieszenie ciężkości było niejednakowe dla dwóch wahadeł odmiennych, skutki takiej różnicy objawiłyby się w ich ruchu. Tak rozumował 19-letni Galileusz w katedrze pizańskiej; w sto lat później Newton powraca do tej myśli i obiera ją za nić przewodnią starannego badania.



Rys. 49.

«Rzecz spróbowałem wykonać» mówi Newton (*Principia*, liber III, prop. VI) «dla złota, srebra, ołowiu, szkła, piasku, dla soli pospolitej, dla drewna, wody i zboża. Przygotowałem dwa okrągłe, równe, drewniane pudełka; jedno wypełniłem drewnem, w drugim... umieściłem kawałek złota o tym samym ciężarze. Wahadła te... były dokładnie zgodne co do zewnętrznej postaci i co do ciężaru i doznawały od powietrza jednakowego oporu. Umieściwszy jedno w pobliżu drugiego, widziałem, że poruszały się długo, tam i napowrót, odbywając jednakowe wahania».

Newton wnosi, że wartości przyspieszenia g , które dla badanych ciał wypadają, jeżeli wogóle są nierówne, różnią się od siebie nie więcej niż o 0.001 część całkowitej wartości. Bessel, powtórzywszy w r. 1830 doświadczenie Newtona, oddala tę granicę do 0.00001; Eötvös jest zdania w r. 1896-ym, że dzisiejsze metody miernicze pozwalają ją posunąć do 0.0000001.

Gdy nabywamy paczkę cukru lub woreczek mąki, zapytujemy, ile otrzymamy kupowanego towaru; gdy za wóz węgla uiszczamy zapłatę, pragniemy upewnić się, ile w nim znajduje się tego materiału. Na takie pytania odpowiadamy, *ważąc* towary, które są przedmiotem wymiany czyli, innymi słowy, stwierdzając ich *ciężar*. Gdy jednak kupujemy mąkę, kaszę, sól albo węgiel, nie dbamy o to bynajmniej, jak mocno te ciała są przyciągane przez ziemię; ciężar tych ciał (sam przez się nieraz raczej ich niepożądana właściwość) jest dla nas wskazówką, jaka jest ich *masa*. Ponieważ masy ciał są proporcjonalne do ciężarów, więc: *ciężar*

jednakowo ciężkie mają masy jednakowe. Kilogram aluminium czy sialmiaku, kilogram czekolady czy herbaty ma masę tę samą, jaką ma kilogramowy wzorzec mosiężny albo niklowy, który położono w sklepie na wadze. Ważenie ciał nie miałoby praktycznego celu i prostego znaczenia, gdyby przyspieszenie ciężkości g nie było niezależne od natury ciała, poddanego działaniu tej siły.

§ 58. Ruch ciała, rzuconego pionowo do góry.

Zajmowaliśmy się dotychczas przeważnie jednym przypadkiem ruchu, odbywającego się w polu ciężkości, mianowicie spadaniem ciała, puszczonego swobodnie, bez początkowej prędkości. Weźmy obecnie na uwagę inne przypadki.

W chwili $t=0$, w miejscu A ponad ziemią (rys. 50), wyrzucamy do góry punkt materialny M w kierunku pionowym; niechaj v_0 będzie początkową prędkością, którą nadajemy punktowi. Posłuszny rzutowi, bezwładny punkt M biegnie pionowo do góry; lecz jednocześnie działa nań siła ciężkości i nadaje mu drugi ruch, niezależny, taki sam, jaki odbywałby się, gdybyśmy punktu nie byli rzucili. Punkt M jest zatem ożywiony naraz dwoma ruchami. W pierwszym ruchu, bezwładnym, nie zmienia się ani wartość v_0 ani pionowy ku górze kierunek prędkości. Ruch drugi jest jednostajnie przyspieszony i odbywa się pionowo ku dołowi ze stałym (co do wartości i co do kierunku) przyspieszeniem g . W chwili t prędkość pierwszego ruchu wynosi v_0 , podobnie jak w chwili początkowej; prędkość drugiego wynosi gt (§ 46).

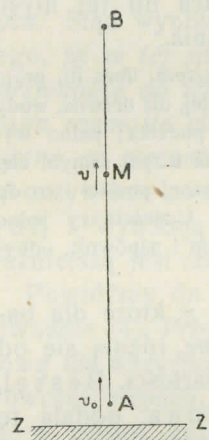
Te dwie składowe prędkości tworzą ze sobą kąt 180° ; wypadkowa prędkość v , liczona do góry, wypada zatem (por. § 18):

$$1. \quad v = v_0 - gt;$$

zmniejsza się ona z czasem, jak o tem wiemy z pospolitych spostrzeżeń. Po upływie czasu

$$2. \quad \tau = v_0/g$$

punkt dobiegnie do miejsca B (rys. 50), w którym zawróci



Rys. 50.

i pocznie opadać, stosownie do praw, według których porusza się punkt, spadający bez początkowej prędkości.

Liczona od miejsca A droga s , którą punkt M przebywa w przeciągu t sekund, wynosi (por. § 18):

$$3. \quad s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Ażeby obliczyć osiągniętą najwyższą wysokość AB , którą oznaczamy przez σ , wstawmy wartość (2) czasu τ zamiast t do wzoru (3); otrzymujemy

$$4. \quad \sigma = v_0^2 / 2g.$$

Z równań (2) i (4) wnosimy, że

$$5. \quad \sigma = \frac{1}{2} g \tau^2.$$

Zmierzywszy σ i τ , moglibyśmy obliczyć z tych danych wartość przyspieszenia ciężkości.

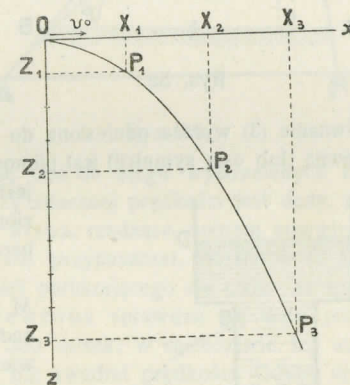
§ 59. Ruch ciała, rzuconego w kierunku poziomym.

Wyobraźmy sobie, że materialny punkt M został poziomo rzucony. Przypuśćmy, że w chwili $t=0$, w miejscu O ponad ziemią (rys. 51), nadaliśmy punktowi prędkość początkową v_0 cm/sek w kierunku poziomym Ox . Wówczas punkt M ożywiony jest naraz dwoma ruchami. Ruch pierwszy, bezwładny, wynika z rzutu; odbywa się zatem w poziomym kierunku Ox ze stałą prędkością v_0 cm/sek. Ruch drugi wynika z działania siły ciężkości; więc odbywa się w kierunku pionowym Oz ze stałym przyspieszeniem g cm/sek². Na osi Ox odłóżmy odcinki

$$OX_1 = v_0 \text{ cm}; \quad OX_2 = 2v_0 \text{ cm}; \quad OX_3 = 3v_0 \text{ cm} \quad \text{i t. d.}$$

Gdyby siła ciężkości nie była czynna, punkt M po upływie czasu $t=1, 2, 3 \dots$ sekund byłby dobiegł do miejsc $X_1, X_2, X_3 \dots$ na osi Ox . Na osi Oz odłóżmy odcinki

$$OZ_1 = \frac{1}{2} g \text{ cm}; \quad OZ_2 = \frac{4}{2} g \text{ cm}; \quad OZ_3 = \frac{9}{2} g \text{ cm} \quad \text{i t. d.}$$



Rys. 51.

Gdybyśmy nie byli rzucili punktu M , uwalniając go tylko, byłby on dobiegł, po upływie 1, 2, 3... sekund, do miejsc $Z_1, Z_2, Z_3...$ na osi Oz . Ażeby znaleźć rzeczywisty tor punktu, prowadzimy w X_1, X_2 i t. d. linie proste pionowe i odcinamy na nich $X_1P_1 = OZ_1, X_2P_2 = OZ_2$ i t. d.; otrzymujemy tym sposobem punkty P_1, P_2, P_3 i t. d. Według § 22-go, punkt M , posłuszny jednocześnie działaniu rzutu i sile ciężkości, dobiegnie, po upływie 1, 2, 3... sekund, do miejsc $P_1, P_2, P_3...$ Te miejsca tworzą krzywą, zwaną *parabolą*. Tor punktu, rzuconego poziomo w polu ciężkości, jest zatem parabolą.

Ażeby dokładniej wykreślić parabolę, którą zatacza punkt M , możemy założyć np. $t = 0.5, 1.0, 1.5...$ sek powtórzyć konstrukcję. Równanie tej krzywej otrzymujemy w sposób następujący. Oznaczając przez x drogę, przebytą przez M w czasie t w ruchu bezwładnym, mamy

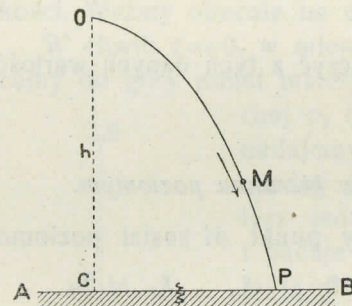
$$1. \quad x = v_0 t.$$

Rozumiejmy przez z drogę, przebytą przez M w tym samym czasie t w ruchu, który wytwarza siła ciężkości; zatem

$$2. \quad z = \frac{1}{2} g t^2.$$

Rugując t z (1) i (2) otrzymujemy

$$3. \quad x^2 = \frac{2v_0^2}{g} z.$$



Rys. 52.

Równanie (3) wyraża odniesioną do prostokątnych osi Ozx parabolę, której osią główną (lub osią symetrii) jest pionowa oś Oz ; wierzchołkiem głównym paraboli jest początek O , styczną zaś w O jest oś pozioma Ox ; stała $2v_0^2/g$ jest t. zw. *parametrem* paraboli.

Przypuśćmy, że miejsce O (z którego punkt M został rzucony) znajduje się w wysokości h nad powierzchnią ziemi AB (rys. 52). Po upływie jakiego czasu τ punkt M dobiegnie powierzchni? Piszac

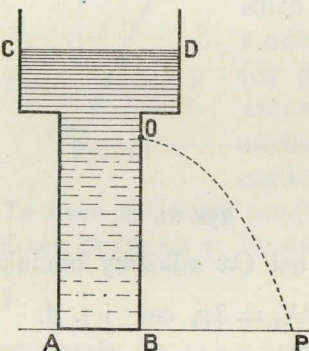
$$4. \quad h = \frac{1}{2} g \tau^2,$$

odpowiadamy na to pytanie, gdyż równanie (4) wyznacza τ . Dalsze równanie

$$5. \quad \xi = v_0 \tau$$

pozwala wówczas znaleźć odległość CP , którą oznaczyliśmy przez ξ .

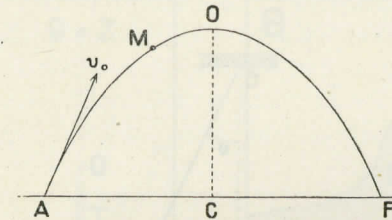
Niechaj $ABCD$ (rys. 53) wyobraża wysoki zbiornik, wypełniony wodą lub rtęcią; jeżeli w miejscu O ścianki pionowej uczyniono w nim otwór, ciecz tryska i płynęłaby strumieniem poziomym, gdyby siła ciężkości nie zakrzywiała orbity



Rys. 53.

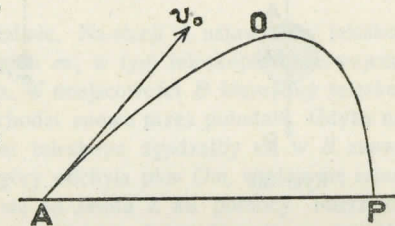
każdej cząstki cieczy. Strumień OP ma istotnie kształt w przybliżeniu paraboliczny. Doświadczenie to zawdzięczamy Torricelliemu.

Wyobraźmy sobie, że punkt ciężki M został rzucony ukośnie (rys. 54). Poprzedni sposób rozumowania stosuje się i do tego ogólniejszego przypadku. Punkt M odbywa znowu dwa ruchy:



Rys. 54.

ruch jednostajny w kierunku, w którym został rzucony; ruch jednostajnie przyspieszony w kierunku pionowym ku dołowi. Orbita, zataczana przez punkt M , jest parabolą AOP (rys. 54), o pionowej osi symetrii OC ; przekonujemy się o tem graficznie, za pomocą konstrukcji, podobnej do tej, którą posłużyliśmy się w zadaniu o rzucie poziomym.



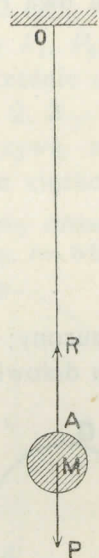
Rys. 55.

Twierdzenia o ruchu punktu, rzuconego w polu ciężkości, które streściliśmy tutaj, wykrył Galileusz. Stosowałyby się one do biegu wystrzelonych kul i pocisków, gdyby opór powietrza, który przy znacznej prędkości jest duży, nie wnosił do ich ruchu istotnych powikłań. Prawa, rządzące oporem powietrza, usiłowano odgadnąć oddawna; już Newton przypuszczał, że ten opór jest wprost proporcjonalny do kwadratu prędkości poruszającego się ciała. Ze współczesnych badań wiadomo, że założenie Newtona sprawdza się dość przybliżenie dla prędkości, dochodzących do 300 m/sek; w sąsiedztwie tej wartości opór zaczyna rosnać znacznie szybciej niż kwadrat prędkości. Gdyby opór powietrza, stosownie do założenia Newtona, zmieniał się proporcjonalnie do kwadratu prędkości, tor punktu, wystrzelonego ukośnie z miejsca A na powierzchni ziemi, miałby postać AOP podaną na rys. 55-ym, jak widzimy, *nie* symetryczną. Orbita AOP tego rysunku nazywa się *balistyczną krzywą* Eulera; obliczona została przez tego uczonego w połowie XVIII-go stulecia.

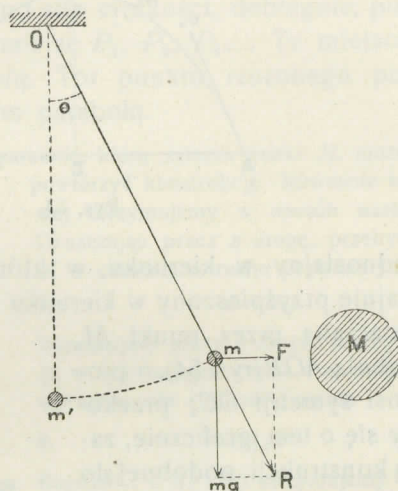
§ 60. Pion i jego zastosowanie do mierzenia sił.

Przypuśćmy, że na nici OA (rys. 56) zawiesiliśmy kulę M dość ciężką, na przykład żelazną lub ołowianą. Pod wpływem

ciężaru kuli nieć wyciąga się; jej długość staje się większa. W wyciągniętej tym sposobem nici pojawia się siła, skierowana pionowo do góry, która sprzeciwia się dalszemu wydłużaniu. Ta siła AR , zwana *sprężystym przeciwdziałaniem* lub *reakcją*



Rys. 56.



Rys. 57.

sprężystą nici, równoważy się z ciężarem MP kuli M , skierowanym pionowo ku dołowi.

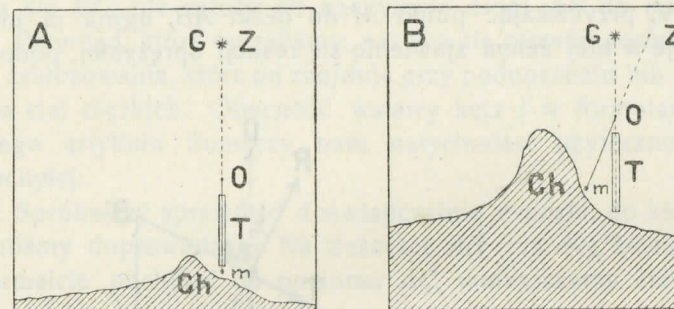
Przyrząd, wyobrażony na rys. 56-ym, jest *pionem*, znanym nam już z § 19-go. Niekiedy można posługiwać się pionem w celu mierzenia sił stosunkowo nieznacznych. Przypuśćmy na przykład, że kulka metalowa m (rys. 57), zawieszona na nici jedwabnej, została naelektryzowana i ma na sobie dodatni elektryczny ładunek. Zbliżamy ku niej kulę M naelektryzowaną ujemnie, która wywiera na m przyciąganie F . Kulka m znajduje się wówczas pod wpływem dwóch sił: własnego ciężaru, który wynosi mg (jeżeli m jest masą kulki) oraz przyciągania F . Pod działaniem tych sił pion odchyła się od pierwotnego położenia Om' i przybiera nowe położenie Om , które tworzy kąt θ z poprzednim. Równowaga nastąpi, gdy wypadkowa R sił mg i F , przypadając w przedłużeniu nici Om , wypręży nią i zrównoważy się z jej sprężystym przeciwdziałaniem. Mamy wówczas

$$F = mg \tan \theta;$$

zmierzwszy kąt θ , możemy więc obliczyć siłę F .

Rozumowanie powyższe wyjaśnia myśl, którą kierował się uczony francuski Bouguer, gdy w r. 1738 próbował doświadczalnie wykazać, że ciała ziemskie, tak samo jak ciała niebieskie, przyciągają się wzajemnie, stosując się do prawa

powszechnego ciążenia. W Andach peruwjańskich wznosi się potężna góra Chimborazo, mająca przeszło 6000 m wysokości; Bouguer postanowił przekonać się, czy pion, umieszczony w pobliżu, odchyła się ku górze pod wpływem jej przyciągania. Wyobraźmy sobie dwie miejscowości: jedną A (rys. 58), znacznie oddaloną od górskiego masywu; drugą B , wybraną na południowym



Rys. 58.

stoku góry, w jej bezpośrednim sąsiedztwie. Na stacji A ustawiliśmy teleskop T w położeniu pionowym, jak świadczy pion m ; w tym teleskopie obserwujemy gwiazdę G , przechodzącą przez południk. W miejscowości B kierujemy teleskop T ku tej samej gwiazdzie G , gdy przechodzi znowu przez południk. Gdyby nie było góry (Ch na rysunku), kierunek osi teleskopu zgadzałby się w B znowu z kierunkiem pionu. Lecz przyciąganie góry odchyła pion Om , wydaje się zatem obserwatorowi, że gwiazda G oddaliła się od zenitu Z ku północy. Mierzmy kąt GOZ , który odpowiada kątowi θ poprzedniego doświadczenia; z wartości tego kąta możemy wyliczyć wartość przyciągania, wywieranego przez górę na kulkę m pionu. Podobne spostrzeżenia wykonał Maskelyne w r. 1774 w pobliżu góry Schiehallion; w r. 1855 powtórzyli je Clarke i James w okolicy Arthur's Seat w Szkocji. Powrócimy niebawem do wyników, które znalaziono w tych i podobnych badaniach.

§ 61. Równia pochyła.

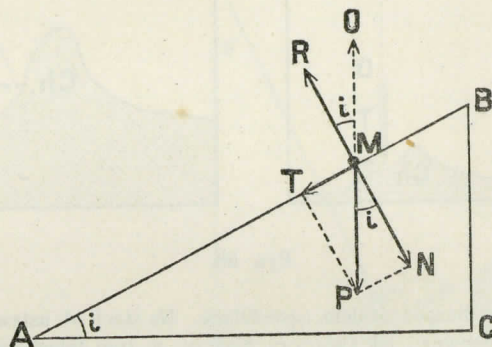
Wyobraźmy sobie deskę płaską, umieszczoną w położeniu pochyłym; na rys. 59-ym AB wyobraża tę deskę w przecięciu pionowym, AC wyobraża w takim samym przecięciu płaszczyznę poziomą. Prostopadła MR do płaszczyzny AB tworzy z kierunkiem pionowym do góry MO kąt OMR , który oznaczamy przez i ; tę samą wartość i ma kąt CAB na naszym rysunku.

Przypuśćmy, że na płaszczyźnie AB leży ciężki punkt M ; jeżeli m jest masą punktu, g zaś (jak zwykle) przyspieszeniem ciężkości, ciężar punktu M wynosi mg ; przypuśćmy, że siłę tę

wyobraża wektor MP na rys. 59-ym. Rozkładamy siłę MP na składową MN , prostą do płaszczyzny AB i na drugą składową MT , równoległą do tej płaszczyzny. Widzimy, że

$$1. \quad MN = mg \cos i; \quad MT = mg \sin i.$$

Siła MN , przyciskając punkt M do deski AB , ugina ją nieco; wywołuje w niej zatem zjawienie się reakcji sprężystej, podobnie



Rys. 59.

jak ciężar kuli zawieszony wywołuje reakcję sprężystą nici pionu (§ 60). Reakcja sprężysta MR deski AB , stosownie do trzeciej zasady dynamiki, jest równa sile MN i skierowana wprost przeciwnie niż ona. Wyobraźmy sobie, że deska AB jest wyrobiona z tak bardzo sprzeciwiającego się, niemal doskonale sztywnego materiału, że, nawet pod działaniem znacznego ciężaru, ugięcie jej jest znikomo małe i może być zaniedbane. Uważając zatem deskę AB za płaszczyznę (taką samą, jaką była przed umieszczeniem na niej punktu M), dochodzimy do wniosku, że ruch punktu M może odbywać się tylko w kierunku MT ; składowa MN nie wywiera wpływu na ruch, ponieważ jest prostopadła do jego kierunku. Punkt M posuwa się zatem ruchem jednostajnie przyspieszonym w kierunku MT , pod działaniem siły $mg \sin i$; przyspieszenie w tym ruchu jest $g \sin i$. Prędkość v punktu w chwili t jest dana przez

$$2. \quad v = gt \sin i;$$

droga s przebyta aż do chwili t wynosi

$$3. \quad s = \frac{1}{2}gt^2 \sin i.$$

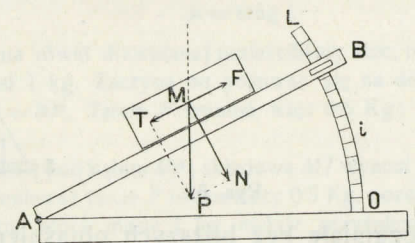
Jeżeli, wyruszywszy z B , punkt M dobiegł do A , mamy w miejscu A :

$$4. \quad v^2 = 2g \cdot AB \cdot \sin i = 2g \cdot BC;$$

prędkość v w miejscu A zależy więc tylko od pionowego opuszczenia się BC , nie zależy od nachylenia drogi AB do poziomu.

Przyrząd, który opisaliśmy, nazywa się *równią pochyłą*; znane są zastosowania, które on znajduje przy podnoszeniu lub opuszczaniu ciał ciężkich. Obecność wstawy kąta i w formułach niniejszego artykułu tłumaczy nam natychmiast użyteczność równi pochyłej.

Spróbujmy sprawdzić doświadczalnie wnioski, do których zostaliśmy doprowadzeni. Na deseczce AB (rys. 60), którą możemy rozmaicie pochylać do poziomu AC , umieszczamy ciało ciężkie

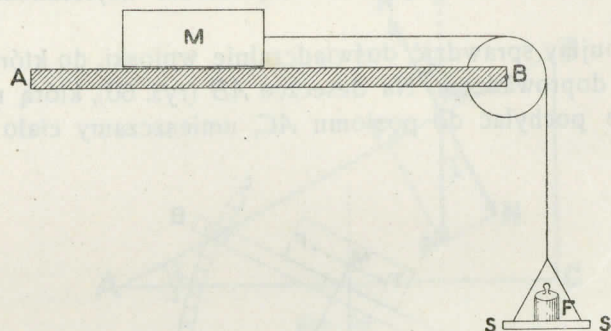


Rys. 60.

M o dość rozległej podstawie; kąt nachylenia i odczytujemy na łuku OL . Według naszych wzorów, ciało M powinno sunąć po deseczce AB , jeżeli kąt nachylenia i jest chociażby niewiele większy od zera; dla $i > 0$ mamy istotnie $\sin i > 0$, przyspieszenie $g \sin i$ jest więc wówczas większe od zera. Doświadczenie uczy jednakże, iż rzeczywisty przebieg zjawiska jest całkiem odmienny. Dopóki kąt nachylenia i jest mały, ciało M zazwyczaj nie ześlizguje się po AB ; dopiero gdy kąt i przybierze pewną wartość, ciało M zaczyna sunąć ku dołowi; lecz i wówczas okazuje się (jak zobaczymy), że przyspieszenie ruchu jest mniejsze niż wartość $g \sin i$, której mogliśmy oczekiwać według poprzednich wzorów. Widocznie zatem, oprócz siły ciężkości, jeszcze jakaś *inna* siła działa na ciało, umieszczone na równi pochyłej. Wiemy istotnie, że ciało M doznaje *tarcia* od deseczki AB w doświadczeniu rys. 60-go; działania tej siły nie uwzględniliśmy w rozumowaniu powyższem.

§ 62. O tarcia.

Ustawiamy poziomo deseczkę AB przyrządu, wyobrażonego na rys. 60-ym. Wówczas $i = 0$, zatem $\sin i = 0$; więc składowa MT siły ciężkości działającej na ciało (ryss. 59 i 60) znika wówczas. Pomimo to i w takim położeniu deseczki AB potrzeba pewnej siły F , ażeby poruszyć ciało M . Siła ta F jest więc miarą tarcia, którego od deski AB doznaje ciało M ; nazywamy ją po prostu «tarcie ciała M o deskę AB ». Przyrząd, wyobrażony na rys. 61-ym, pozwala zmierzyć siłę F ; urządzenie tego



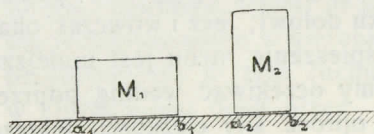
Rys. 61.

przyrządu jest zrozumiałe bez bliższych objaśnień. Jeżeli ciężar ciała, umieszczonego na szalce SS , został tak dobrany, ażeby zaledwie wystarczał do wprawienia w ruch ciała M , wówczas ciężar ten jest miarą siły F .

Dokonywając takich doświadczeń, spostrzegamy, że siła F wypada wprost proporcjonalna do ciężaru ciała M ; możemy zatem założyć:

$$1. \quad F = \mu mg.$$

Wielkość μ , zwana *spółczynnikiem tarcia*, nie zależy od ciężaru ciała M . Nie zależy ona również od pola powierzchni ab , którą ciało M dotyka deski AB ; dwa ciała M_1 i M_2 , jednakowego ciężaru i jednakowej natury, wymagają w powyższym doświadczeniu (rys. 61) użycia tej samej siły F , chociaż pola $a_1 b_1$ i $a_2 b_2$ ich powierzchni zetknięcia z podstawą



Rys. 62.

są rozmaite (rys. 62). Spółczynnik tarcia μ zależy natomiast w wysokim stopniu od rodzaju substancji, z której wyrobione są ciała

M i AB ; jest naprzykład stosunkowo mały dla żelaza, dla mosiądzu i innych metali, dla drewna zaś i dla kamieni jest większy. Spółczynnik μ zależy również od stanu powierzchni zetknięcia, naprzykład od stopnia jej wygładzenia; zmniejsza się znacznie, skoro pokryjemy powierzchnie ciał AB oraz M warstewką gliceryny, oliwy lub innego smaru.

Do mierzenia wartości współczynnika μ możemy użyć przyrządu, wyobrażonego na rys. 60-ym. Przypuśćmy, iż, przechylając deseczkę AB , utrafilimy kąt i taki, ażeby ciało M właśnie poczynęło posuwać się na dół; mamy wówczas widocznie

$$2. \quad F = MT = mg \sin i.$$

Stosując się do powyższego równania (1), zakładamy zarazem, że

$$3. \quad F = \mu \cdot MN = \mu \cdot mg \cos i.$$

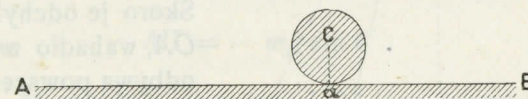
Z równań (2) i (3) wynika

$$4. \quad \mu = \tan i.$$

Przypuśćmy, że na równi drewnianej umieściliśmy klocek, również drewniany, którego masa wynosi 1 kg. Zaczyna on posuwać się na dół, gdy kąt nachylenia równi wynosi: $i = 30^\circ$. Tarcie F wynosi więc 0.5 Kg; współczynnik μ wypada równy 0.577.

Ustawmy równię pod kątem 45° ; składowa MT wynosi wówczas $1 \text{ Kg} \times \sin 45^\circ$ czyli 0.707 Kg. Ponieważ tarcie F równoważy 0.5 Kg, pozostaje więc siła 0.207 Kg czyli 203067 dyn, która masie 1 kg nadaje przyspieszenie 203067 cm/sec². Skoro ruch rozpoczyna się, tarcie maleje; przy przejściu ze spoczynku do ruchu współczynnik μ jest większy niż podczas ruchu. Im prędkość ruchu jest większa, tem mniejszy jest ten współczynnik.

Przypuszczaliśmy wyżej, że ciało M , poruszając się po płaszczyźnie AB , dotyka jej całą powierzchnią ab (rys. 62); powia-



Rys. 63.

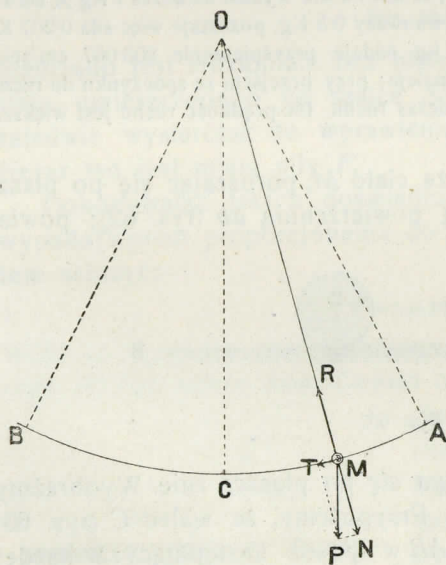
damy wówczas, że ciało *ślizga się* po płaszczyźnie. Wyobraźmy sobie teraz inny przypadek. Przypuśćmy, że walec C (rys. 63) porusza się po płaszczyźnie AB w sposób następujący: w każdej chwili dotyka on płaszczyzny AB tylko jedną, ale (w kolejnych chwilach) coraz inną tworzącą; w chwili naprzykład, której odpowiada rys. 63, walec dotyka płaszczyzny tworzącą a . Powiadamy, że walec C *toczy się* po płaszczyźnie AB . Koła wozów i powo-

zów toczą się po powierzchni ziemi lub szyn, ślizgając się przytem najczęściej nieznacznie. Toczeniu się towarzyszy tarcie, podobnie jak towarzyszy ślizganiu się; ale jego wartość w tym razie jest inna. Jeżeli natura i ciężar toczącego się i ślizgającego się ciała są jednakowe, tarcie w przypadku toczenia się jest mniejsze niż w przypadku ślizgania się.

W dynamice zaniedbujemy zazwyczaj wpływ tarcia. Gdy roztrząsamy ruch ciał niebieskich w niemal pustym przestrzowie, postępowanie to jest uzasadnione; lecz w rozważaniu ruchów, które na ziemi dochodzą do skutku, pomijanie tarcia prowadzi nieraz do wniosków tylko zgrubsza prawdziwych. Ruchowi ciał ziemskich towarzyszą zawiłe zjawiska tarcia, które zawsze przeszkadzają ruchowi, nie pomagają mu nigdy. Dlatego też owe zjawiska bywają nam zwykle niepożądane; staramy się im zapobiegać albo je przynajmniej łagodzić. Niekiedy jednakże tarcie bywa nam pożyteczne; jako przykład można przytoczyć: tarcie podeszwy o podłogę, tarcie hamulca o koło wagonu, tarcie pasa o transmisyjne koło maszyny.

§ 63. Wahadło.

Na cienkiej, lekkiej i (o ile podobna) nierozciągliwej nici OM zawieszamy kulę M (rys. 64) tak małą, że wolno nam będzie



Rys. 64.

poczytywać ją za punkt materialny. Taki przyrząd nazywamy *wahadłem*. Pozostawione samemu sobie, wahadło ustanawia się w położeniu pionowym OC , w którym wisi spokojnie; wówczas nazywamy je *pionem* (§ 19). Skoro je odchylimy, np. do OA , wahadło *waha się* t. j. odbywa powszechnie znany ruch wahadłowy pomiędzy OA i OB . Spróbujmy zrozumieć ten ruch i zapoznać się z jego prawami.

Oznaczmy przez l długość nici OM ; przez θ kąt COM odchylenia nici od pionowego położenia; przez

x łuk CM , odpowiadający kątowi θ odchylenia. Uważamy θ oraz x za dodatnie, gdy M znajduje się w części CA toru; uważamy

je za ujemne, gdy M znajduje się w części CB . Wyrażając kąt θ w radianach (§ 3), mamy

$$1. \quad x = l\theta.$$

Oznaczmy przez m masę punktu M , przez g (jak zwykle) przyspieszenie ciężkości. Ciężar punktu M wynosi mg i jest skierowany na dół pionowo. Wyrażamy ten ciężar przez wektor MP na rys. 64-ym i rozkładamy go na dwie składowe: (1) na składową MN , skierowaną w przedłużeniu nici (2) na składową MT , styczną do łuku koła, po którym porusza się M . Składowa MN wypręża nić i wywołuje w niej napięcie MR , równe i przeciwne; ale siła MR , przyłożona do punktu M , nie wywiera wpływu na ruch, który odbywa się wciąż prostopadłe do kierunku MR ; punkt M w swoim ruchu jest posłuszny wyłącznie stycznej składowej MT . Widzimy, że MT jest zawsze tak skierowana, że sama przez się skłaniałaby punkt M do powrotu do C . Jeżeli M wznosi się od C do A lub od C do B , siła MT opóźnia ruch; jeżeli M od A lub od B opada ku C , siła MT ruch przyspiesza. Ruch punktu M po łuku ACB lub BCA nie jest zatem jednostajny. Gdyby siła MT miała wartość stałą, punkt M odbywałby ruch jednostajnie przyspieszony po łukach AC i BC , jednostajnie opóźniony po łukach CA i CB . Lecz siła MT nie jest stała wzdłuż toru; siła ta ma wartość zmienną. Będziemy uważali siłę MT za dodatnią, gdy jest zwrócona w kierunku od B ku A ; gdy jest zwrócona w stronę przeciwną t. j. w kierunku od A do B , będziemy ją uważali za ujemną. W tem rozumieniu mamy zawsze

$$2. \quad MT = -mg \sin \theta.$$

Istotnie, gdy M znajduje się w części CA toru, mamy $\theta > 0$, więc $\sin \theta > 0$, $MT < 0$; gdy M znajduje się w części CB toru, mamy $\theta < 0$, $\sin \theta < 0$ oraz $MT > 0$; równanie (2) pozostaje więc ważne we wszystkich fazach ruchu. W miejscach A oraz B wartość bezwzględna siły MT jest największa; w miejscu C równa się zeru, przez położenie C punkt M przebiega dzięki swej bezwładności.

Rozważmy przyspieszenie, które okazuje punkt M w ruchu wahadłowym. Przyspieszenie to możemy rozłożyć na dwa przyspieszenia składowe. Pierwszem jest przyspieszenie, znane z § 28-go; wiemy, że ono jest skierowane wzdłuż nici, od M do O . Gdyby

ruch punktu M po łuku ACB lub BCA koła odbywał się jednostajnie, wzdłuż nici skierowane przyspieszenie byłoby jedynym, a zatem też całkowitem przyspieszeniem punktu M . Wiemy jednakże, że ruch punktu M po łuku koła jest niejednostajny; oprócz dośrodkowego przyspieszenia, skierowanego wzdłuż nici, istnieje więc drugie, skierowane prostopadłe do jej kierunku. To drugie przyspieszenie, które oznaczamy przez f , wynika z działania siły MT ; mamy zatem z (2):

$$3. \quad f = -g \sin \theta.$$

Przypuśćmy, że kąt θ zawsze pozostaje mały; wstawę $\sin \theta$ możemy wówczas zastąpić przybliżeniem przez wartość kąta θ wyrażoną w radianach. Według (3) i (1) otrzymujemy w tem założeniu

$$4. \quad f = -\frac{g}{l}x.$$

Widzimy teraz, że (w przyjętym stopniu przybliżenia) ruch wahadłowy punktu M jest ruchem harmonicznym prostym, którego prawa znamy z §§ 30-go i 31-go. Równanie obecne (4) zgadza się rzeczywiście z równaniem (5) § 31-go; obadwa wypowiadają zasadniczą własność ruchu harmonicznego prostego, która na tem polega, że przyspieszenie w takim ruchu jest zawsze skierowane ku środkowi drgań i że jest wprost proporcjonalne do wychYLENIA x , liczonego od środka drgań.

Utażsamiamy zatem obecny wyraz g/l z wielkością ω^2 § 31-go. Innymi słowy, rozumiejąc przez T okres ruchu, kładziemy, stosownie do równania (1) § 30-go:

$$5. \quad \frac{g}{l} = \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

czyli

$$6. \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

OA i OB , jak powiedzieliśmy, są skrajnymi położeniami nici, pomiędzy którymi odbywa się wahanie; CA i CB są zatem największymi wartościami łuku x ; podobnie jak w § 30-ym, nazywamy je *amplitudami* wahań. Okres T , dany przez (6), jest odstępem czasu, w którym dokonywa się jedno całkowite wahanie, na przykład ruch punktu M od A przez C do B i od B napowrót przez C do A .

§ 64. Prawa ruchu wahadłowego.

Niektóre dalsze prawa ruchu wahadłowego możemy odczytać z równania (6) artykułu poprzedzającego.

I. Wzór (6) okazuje, że okres wahań nie zależy od amplitudy, która nie występuje w formule. Powinniśmy jednak o tem pamiętać, że owa formuła jest przybliżona i stosuje się jedynie w przypadku, gdy nawet największe możliwe odchylenie θ jest małym kątem. Jeżeli więc amplituda wahanja jest mała, nie wywiera ona wpływu na okres; tę własność małych wahań wahadła, odkrytą przez Galileusza, nazywamy ich *izochronizmem*.

II. Z równania (6) wynika, że okres wahań nie zależy od masy wahadła. Tej niezależności mogliśmy oczekiwać ze względu na podobieństwo ruchu wahadłowego do swobodnego spadania; jak wiemy (§§ 19 i 57), czas spadania nie zależy od masy ciała spadającego.

III. Według (6) okres T wahań jest wprost proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z długości l nici wahadła.

Jeżeli np. długość l_1 pewnego wahadła Nr. 1 jest 4 razy większa niż długość l_2 innego wahadła Nr. 2, okres T_1 pierwszego wahadła jest 2 razy dłuższy niż okres T_2 drugiego; co łatwo sprawdzić pomiarem.

IV. Według (6) okres T jest odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z przyspieszenia ciężkości.

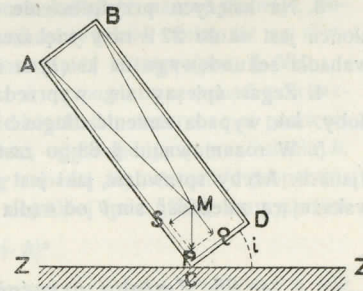
Przy pomocy przyrządu, wyobrażonego na rys. 65-ym, możemy uzmysłowić sobie tę zależność. Kula M wahadła jest zawieszona na dwóch lekkich, ale sztywnych pręcikach AM i BM w ramie czworokątnej $ABCD$, którą możemy przechylać względem poziomu ZZ . Wahania kuli M odbywają się tutaj widocznie nie pod wpływem całkowitego jej ciężaru MP , lecz tylko pod wpływem rzutu tego ciężaru na płaszczyznę wahań t. j. pod wpływem składowej $MP \cdot \cos i$. Okres wahań wyniesie więc:

$$1. \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos i}}$$

będzie więc dłuższy niż w zwykłym przypadku pionowego ustawienia, w którym $i = 0$.

Powróćmy do równania (5) § 63-go, które przepisujemy w postaci

$$2. \quad g = 4\pi^2 l / T^2.$$



Rys. 65.

Przypuśćmy, że zmierzylismy w centymetrach długość l nici wahadła i że stwierdziliśmy, ile sekund wynosi okres T jego wahań. Przy pomocy wzoru (2) możemy wówczas obliczyć w cm/sek^2 wartość przyspieszenia ciężkości, czynnej w miejscu, w którym dokonywamy dostrzeżeń.

Fodaliśmy tylko główną zasadę postępowania, które służy do znalezienia wartości przyspieszenia g . Pragnąc poznać dokładną wartość tej stałej, musimy liczyć się z rozmaitymi okolicznościami, które tu pominęliśmy. Kula wahadła nigdy nie jest punktem; nie wahadła nie może być pozbawiona masy ani ciężaru. Każda nie jest w pewnej mierze rozciągliwa; wszelkie zawieszenie poddaje się do pewnego stopnia działaniu ciężaru kuli i bierze niejaki udział w ruchu, który ona odbywa. Powietrze, stawiając opór, sprzeciwia się wahanom; tarcie w miejscu zawieszenia i w łonie nici wahadła przeszkadza jego ruchowi. Nareszcie i wzór (2) powyższy, jak wiemy, nie jest ścisły i stosuje się tylko w razie, gdy amplitudy są małe. W badaniu dokładnym wypada rozważyć wpływ tych zakłóceń i zapobiec im przez stosowne urządzenie przyrządu lub uwzględnić ich spółdziałanie na drodze rachunku. Udoskonalone w ten sposób wahadło jest dzisiaj, w fizyce i w geofizyce, jednym z najcenniejszych narzędzi mierniczych i badawczych.

Zadania.

1. Sekundowem nazywa się wahadło, którego okres T wynosi 2 sekundy; zakładając $g = 981 \text{ cm}/\text{sek}^2$, obliczyć długość takiego wahadła. Jaka winna być długość wahadła, jeżeli jego okres ma wynosić 4 sek? Jaki jest okres wahadła, którego długość wynosi 1 m?

2. Sekundowe wahadło oddalamy od ziemi do odległości, w której dokoła niej krąży księżyc (§ 54). Przypuszczamy, że księżyc jest nieobecny, wahadło porusza się tylko pod wpływem ziemskiego przyciągania. Jaki jest okres wahań?

3. Na księżycu przyspieszenie ciężkości jest około 6·1 razy mniejsze, niż na słońcu jest około 27·9 razy większe, niż na powierzchni ziemi. Znaleźć długość wahadła sekundowego na księżycu i na słońcu.

4. Zegar śpieszy się, wyprzedzając zegar dokładny o 5 sekund w ciągu doby. Jak wypada zmienić długość zegarowego wahadła?

5. W rozumowaniu § 63-go zastąpiliśmy $\sin \theta$ przez kąt θ , wyrażony w radianach. Ażeby sprawdzić, jaki jest stopień tego przybliżenia, wykreślić krzywą, wskazującą zależność $\sin \theta$ od θ (dla wartości θ , idących od zera do pięciu stopni).

§ 65. Zmiany przyspieszenia ciężkości na ziemi.

W ręku Newtona i jego następców wahadło posłużyło do udowodnienia, że w danej miejscowości na powierzchni ziemi przyspieszenie ciężkości ma dla wszystkich ciał wartość jednakową (§ 57). Przypuśćmy, że zmieniamy miejsce spostrzeżeń. Przypuśćmy na przykład, że przenosimy się od równika ku biegunom na powierzchni ziemi; lub też, że w danej miejscowości

wznosimy się balonem w powietrzu do góry. Spostrzegamy wówczas, że wartość przyspieszenia g zmienia się; ale zmienia się dla wszystkich ciał *jednakowo*. Przyspieszenie ciężkości jest więc stałą powszechną, niezależną od natury ciała, które poddajemy badaniu, ale zależną od położenia tego ciała względem kuli ziemskiej.

Ciężar ciała jest równy iloczynowi masy ciała przez przyspieszenie ciężkości (§ 46). Wiemy, że masa ciała jest niezmienna (§ 38); skoro jednak przyspieszenie ciężkości zależy od położenia ciała względem kuli ziemskiej, zatem od tego położenia zależy również ciężar ciała, który zmienia się wprost proporcjonalnie do przyspieszenia g .

W następującej tablicy podajemy niektóre wartości przyspieszenia ciężkości, znalezione drogą wahadłowych dostrzeżeń lub też wyliczone pośrednio z takich dostrzeżeń.

Na równiku, u poziomu morza	$g = 978\cdot03 \text{ cm}/\text{sek}^2$
W 45° szerok. geogr., u poz. morza	980·62
We Lwowie	980·93
W Paryżu	980·94
W Krakowie	981·07
W Greenwich (pod Londynem)	981·19
W Warszawie	981·22
W Poznaniu	981·26
W Wilnie	981·44
Na biegunach, u poziomu morza	983·22

Zmienność przyspieszenia ciężkości na powierzchni ziemi wynika z rozmaitych przyczyn. Jedną przyczyną jest niedoskonała kulistość naszej planety; ziemia, spłaszczona na biegunach, przyciąga na nich oczywiście silniej niż na równiku. Poznamy wkrótce okoliczność, która wzmacnia tę różnicę (por. § 68).

Przypuśćmy, że wznosimy się o wysokość h , w powietrzu, ponad powierzchnię ziemi. Oznaczmy przez g_0 przyspieszenie ciężkości, zmierzone u powierzchni, gdzie $h=0$; przez g rozumiejmy wartość, odpowiadającą wzniesieniu h . Według prawa powszechnego ciążenia (§ 51) g zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości od środka kuli ziemskiej (por. § 53); mamy zatem

$$1. \quad g : g_0 = R^2 : (R + h)^2$$

gdzie R jest promieniem ziemi, którą tu uważamy za kulę. Ponieważ h jest zwykle mała w stosunku do R , otrzymujemy z (1) w przybliżeniu

$$2. \quad g = g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R}\right).$$

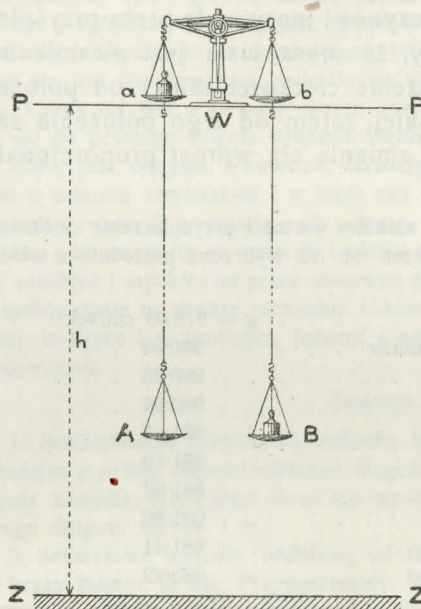
Załóżmy $g_0 = 981 \text{ cm}/\text{sek}^2$, $R = 6\cdot37 \times 10^8 \text{ cm}$; przypuszczając, że $h = 1 \text{ km}$, otrzymujemy przybliżenie

$$3. \quad g - g_0 = -0\cdot3 \text{ cm}/\text{sek}^2.$$

Jeżeli mierzymy g na powierzchni płaskowzgórza lub u szczytu góry, rozumo-

wanie powyższe nie stosuje się; obecność wyniosłości ładu wpływa na inny sposób zmieniania się wartości g .

Jolly w Monachjum, w r. 1878-ym, sprawdził doświadczalnie, że przyspieszenie ciężkości zmniejsza się w miarę wznoszenia się ponad powierzchnię ziemi. Wyobraźmy sobie wagę W (§ 102), ustawioną na poziomie PP w wysokości h ponad powierzchnią ziemi ZZ (rys. 66).



Rys. 66.

W jednym z doświadczeń Jolly'ego masa 5 kg, spuszczone na dół o wysokość 21 m, okazała się cięższa o 32 Mg. Sprawdzamy bez trudności, że ten wynik zgadza się dość przybliżenie z wymaganiami równania (2) w artykule niniejszym.

Przyspieszenie ciężkości zmienia się zatem, zależnie od wzniesienia ponad powierzchnią ziemi, ale zmienia się nader powolnie. W wielu zagadnieniach możemy tak rozumować, jak gdyby nad ziemią przyspieszenie g było niezmiennie. Możemy nieraz również przypuszczać, że kierunki przyspieszeń, które wytwarza siła ciężkości, są do siebie równoległe (§ 55). Pole siły ciężkości, któremu przypisujemy tak uproszczone własności, nazywamy *jednorodnem*.

§ 66. Jak zmierzono masę ziemi i jej gęstość średnią.

Wyobraźmy sobie dwie kule, których masy wynoszą m_1 i m_2 i których środki znajdują się od siebie w odległości r . Według

prawa powszechnego ciążenia, kule te przyciągają się; każda z dwóch sił, z których składa się wzajemne pomiędzy kulami działanie, wynosi

$$1. \quad F = \frac{km_1m_2}{r^2}.$$

Obie dwie kule są przyciągane przez ziemię. Jeżeli M jest masą kuli ziemskiej, R jej promieniem, ciężar kuli o masie m_2 wynosi

$$2. \quad p_2 = \frac{kMm_2}{R^2}.$$

Z równań (1) i (2) otrzymujemy

$$3. \quad \frac{F}{p_2} = \frac{m_1}{M} \left(\frac{R}{r} \right)^2.$$

Gdybyśmy zatem potrafili zmierzyć siłę przyciągania F , czynnego pomiędzy kulami m_1 i m_2 , moglibyśmy obliczyć masę M kuli ziemskiej; istotnie p_2 , m_1 , R oraz r są znane lub mogą być łatwo znalezione.

Doświadczenie, oparte na podobnej zasadzie, wykonał po raz pierwszy w r. 1797 Lord Cavendish w Clapham pod Londynem; rozmaici uczeni powtarzali je później, wprowadzając poprawki i udoskonalenia. Przypuśćmy dla przykładu, że mamy:

$$4. \quad m_1 = 150 \text{ kg} = 1.5 \times 10^5 \text{ gr}; \quad m_2 = 20 \text{ kg} = 2 \times 10^4 \text{ gr}; \quad r = 30 \text{ cm}$$

i wyobraźmy sobie, że doświadczenie dało wynik następujący:

$$5. \quad \frac{F}{p_2} = 1.128 \times 10^{-8};$$

zatem siła F była równa ciężarowi 0.2256 miligrama. Powracając do równania (3) i kładąc zamiast R wartość $6.37 \times 10^8 \text{ cm}$, otrzymujemy

$$6. \quad M = 6 \times 10^{27} \text{ gr.}$$

Wartość dokładna jest $5.997 \times 10^{27} \text{ gr}$. Objętość V kuli ziemskiej wynosi

$$7. \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 1.0827 \times 10^{27} \text{ cm}^3;$$

zatem stosunek M/V czyli t. zw. *średnia gęstość* ziemi D jest

$$8. \quad D = \frac{M}{V} = 5.54 \text{ gr/cm}^3.$$

Masa kuli ziemskiej jest 5·54 razy większa niż masa kuli wodnej tej samej objętości. Ponieważ średnia gęstość powierzchniowych warstw skorupy ziemskiej, które są nam dostępne, wynosi około 2·5 gr/cm³, wypada przeto przypuszczać, że wnętrze naszej planety jest utworzone z ciał stosunkowo bardzo gęstych; być może, że to wnętrze jest nadzwyczajnie mocno ściśnięte, więc z tego powodu jest gęste.

Obliczamy jeszcze wartość stałej powszechnej k czyli współczynnika proporcjonalności, znajdującego się w formule Newtona. Przypuśćmy, że siła F , równa ciężarowi 0·2256 miligrama, była obserwowana pod Londynem, gdzie $g = 981·2$ cm/sek² (§ 65). Z poprzednich wzorów (1) i (4) wyprowadzamy wówczas:

$$9. \quad 0·2256 \times 10^{-3} \times 981·2 \text{ dyn} = \frac{k \times 1·5 \times 10^8 \text{ gr} \times 2 \times 10^4 \text{ gr}}{(30 \text{ cm})^2}$$

skąd wynika

$$10. \quad k = 6·64 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gr sek}^2.$$

Zadania.

1. Obliczyć w dynach siłę przyciągania, czynną pomiędzy dwiema kulami, z których każda ma masę 5 kg, jeżeli ich środki znajdują się w odległości 1 m od siebie. W jakim stosunku pozostaje ta siła do ciężaru każdej kuli?

2. Jaki istnieje związek pomiędzy wielkościami k , M , R (w oznaczeniach niniejszego artykułu) a średnią wartością przyspieszenia g ?

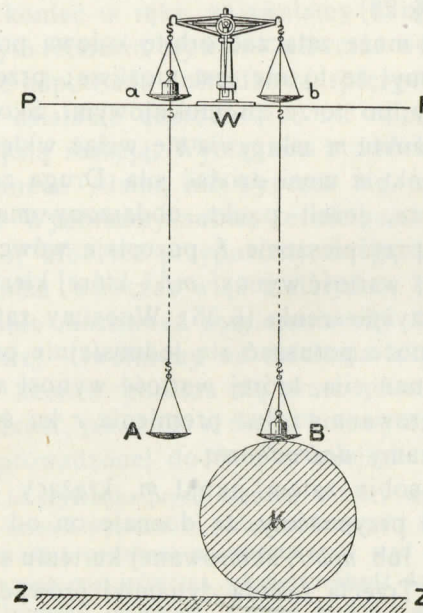
3. Wiadomo, że średnia gęstość Marsa jest mniejsza niż średnia gęstość ziemi w stosunku 0·69 : 1. Wiadomo, że objętość Marsa jest mniejsza niż objętość ziemi w stosunku 0·157 : 1. Obie dwie planety uważamy za kule jednostajnej gęstości. Obliczyć, w jakim stosunku do średniego przyspieszenia g na ziemi pozostaje średnie przyspieszenie ciężkości na powierzchni Marsa.

4. Wiadomo, że masa słońca jest 333432 razy większa niż masa ziemi; że promień kuli słonecznej jest 109·05 razy większy niż promień kuli ziemskiej. Obliczyć przyspieszenie ciężkości, działającej na powierzchni słońca.

5. Masa księżyca jest mniejsza od masy ziemi w stosunku 0·012 : 1. Obliczyć w dynach przyciąganie, czynne pomiędzy księżycem a ziemią w ich średniej odległości, która jest 60·27 razy większa niż promień kuli ziemskiej.

Wypada nam jeszcze na przykładzie objaśnić, w jaki sposób można zmierzyć siłę, którą oznaczyliśmy przez F w równaniu (1) niniejszego artykułu i w następującym wywodzie. Powróćmy w tym celu do opisanego w § 65-ym doświadczenia Jolly'ego. Przypuśćmy, że, po dokonaniu wspomnianych tam ważeń, podsunęto wielką kulę K (rys. 67) pod szalkę dolną B , w której znajduje się jedno z badanych ciał; kula K może być wyrobiona z ołowiu lub z żelaza, może nią być naczynie szklane kuliste, wypełnione rtęcią. Do przyciągania ziemi, działającego na ciało,

które umieściliśmy w B , dołącza się wówczas dodatkowe przyciąganie, wywierane na to samo ciało przez kulę K . To dodatkowe przyciąganie działa wprowadzie nietylko na ciało umiesz-



Rys. 67.

zione w B , lecz również na ciało, znajdujące się w a ; ale na pierwsze działa silniej, ponieważ B jest bliższe kuli K aniżeli a . Widzimy, że można zmierzyć siłę F zapomocą wagi.

Doświadczenia Jolly'ego udoskonalili Poynting w Anglii oraz Richarz i Krigar-Menzel w Niemczech; wyniki, które otrzymano w tych badaniach, nie różnią się znacznie od wyżej przytoczonych. Inne metody, którymi posługiwano się dotychczas, celem znalezienia masy lub średniej gęstości kuli ziemskiej, prowadzą również do zgodnych z niemi rezultatów.

§ 67. Ruch kołowy; siła dośrodkowa, siła odśrodkowa.

Przypuśćmy, że punkt, obdarzony masą m , porusza się jednostajnie po obwodzie koła, którego środek znajduje się w punkcie O . Gdy punkt m odbywa taki rodzaj ruchu, jego przyspieszenie, jak wiemy z § 28-go, jest skierowane wzdłuż promienia; od punktu m ku środkowi O ; z tego powodu nazywamy je *dośrodkowym* przyspieszeniem. Jeżeli v jest prędkością, z jaką po-

rusza się punkt, r zaś promieniem kołowej orbity, wartość dośrodkowego przyspieszenia wynosi v^2/r . Oznaczając przez ω prędkość kątową obiegu, możemy wyrazić wartość tego przyspieszenia w postaci $\omega^2 r$ (§ 28).

Czy punkt m może zataczać orbitę kołową przez prostą bezwładność? Wiemy, że to nie jest możliwe; przez bezwładność punkt m biegłby po torze prostoliniowym. Skoro, wbrew bezwładności, tor punktu m zakrzywia się wciąż wklęsłe ku środkowi O , zatem na punkt m musi działać siła. Druga zasada dynamiki nam powiada, że, jeżeli punkt, obdarzony masą m , zdradza w swym ruchu przyspieszenie f , pozostaje wówczas pod działaniem siły, której wartość wynosi mf i której kierunek zgadza się z kierunkiem przyspieszenia (§ 35). Wnosimy zatem, że punkt m tylko wówczas może poruszać się jednostajnie po kołowej orbicie, gdy działa nań siła, której wartość wynosi mv^2/r albo $m\omega^2 r$ i która jest skierowana wzdłuż promienia r ku środkowi O koła. Taką siłę nazywamy *dośrodkową*.

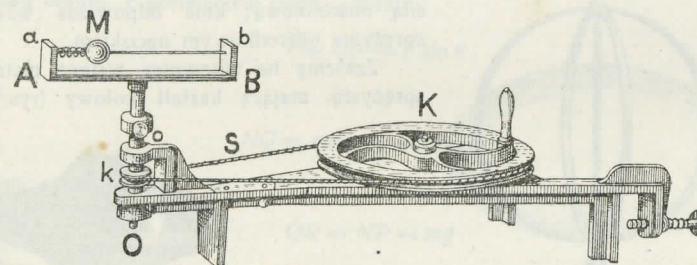
Wyobraźmy sobie zatem punkt m , krążący jednostajnie po obwodzie koła i przypuśćmy, że doznaje on od środka O działania siły mv^2/r lub $m\omega^2 r$, skierowanej ku temu środkowi wzdłuż promienia koła. Trzecia zasada dynamiki prowadzi nas wówczas do wniosku, że na działanie środka O punkt m odpowiada przeciwdziałaniem, wynoszącym również mv^2/r lub $m\omega^2 r$ i skierowanym od O ku m wzdłuż promienia koła (§ 36). To przeciwdziałanie nazywamy *siłą odśrodkową*. Siła dośrodkowa jest przyłożona do punktu m , biegnącego po torze kołowym; siła odśrodkowa jest przyłożona do środka O tego toru; siły te nie równoważą i nie znoszą się, albowiem działają na dwa różne ciała. Z dośrodkowego i z odśrodkowego działania składa się całość wzajemnego oddziaływania na siebie ciał m i O ; siły te zatem są nierozłączne, każda jest towarzyszem drugiej, niejako jej nieuchronnym odgłosem; jeżeliby którakolwiek działać przestała, natychmiast znikłaby i zginęłaby druga.

Rozważmy niektóre przykłady. Wiemy, że ziemia krąży, niemal jednostajnie, po orbicie przybliżonej kołowej (§§ 49, 50); w środku tej orbity znajduje się słońce. Bez widocznego, materialnego pośrednictwa słońce ciągnie ziemię ku sobie, stosownie do prawa Newtona; ta siła, przyłożona do ziemi, jest siłą dośrodkową, objawiającą się w ruchu rocznym naszej planety. Na działanie słońca ziemia odpowiada równem przeciwdzia-

łaniem, mianowicie przyciąganiem, wywieraniem na słońce; to przyciąganie jest siłą odśrodkową w uważanym przypadku.

Przypuśćmy, że umocowaliśmy kamień na jednym końcu nici; ujawszy drugi koniec w rękę, zniewalamy kamień do krążenia po torze kołowym. Kamień wywiera wówczas odśrodkowe działanie na nić; nić odpowiada dośrodkową sprężystą reakcją. Ręka wywiera na nić działanie dośrodkowe; nić odpowiada ręce odśrodkową sprężystą reakcją. Wyciągana z dwóch końców, przeciwnie skierowanymi siłami, nić wypręża się, sprzeciwiając się obu działaniom. Wyobraźmy sobie, że nić została przecięta lub urwała się nagle; albo też przypuśćmy, że jej koniec wypuściliśmy z ręki. Znika wówczas więź materialna, która łączyła kamień z ręką; ginie możliwość wywierania siły dośrodkowej, zatem i odśrodkowej. Uwolniony od działania siły, pozostawiony samemu sobie, kamień porusza się przez prostą bezwładność; zachowując prędkość, jaką miał w ruchu kołowym, kamień biegnie po stycznej, poprowadzonej do toru w miejscu zerwania uwięzi.

Przestrzegamy tu czytelnika przed błędem, w który wpaść łatwo. Krążąc po obwodzie koła, kamień wywiera za pośrednictwem nici na rękę siłę odśrodkową, skierowaną wzdłuż promienia nazewną; ale stąd *nie* wynika bynajmniej, ażeby ten kamień miał wówczas jakąkolwiek dążność do wyrwania się, do ucieczki w kierunku promienia. Kamień wywiera siłę odśrodkową, ale



Rys. 68.

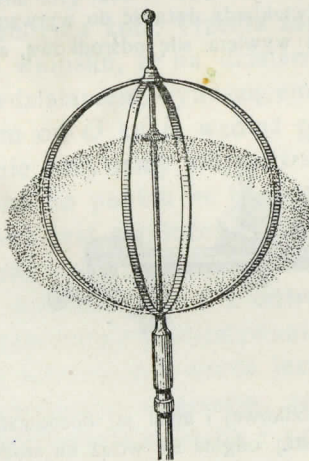
jej nie ulega; doznaje on, przeciwnie, siły dośrodkowej i musi jej doznawać, skoro porusza się po linii krzywej, która od prostej odgina się wciąż ku środkowi orbity. Kamień wywiera siłę odśrodkową i doznaje dośrodkowej, dopóki nić albo sznurek łączy go z ręką, dopóki istnieją przymusy i więzy, które ruch jego krępują; obiedwie siły giną jednocześnie, skoro tylko te więzy lub spójnie zostały zniesione.

Do badania ruchu obrotowego możemy posługiwać się przyrządem, który nazywamy *wirownicą* (lub *centryfugą*). Na osi Oo mniejszego koła k (rys. 68) utwierdzamy tę część przyrządu,

którą chcemy wprowadzić w ruch obrotowy; koło to k poruszamy zapomocą większego koła K , które obracamy ręką; ruch koła K przenosi się na k za pośrednictwem sznura lub struny S . Na osi Oo wirownicy umocujemy naprzykład ramkę AB (rys. 68), w której po drucie ab może przesuwac się swobodnie kula M . Skoro ramce AB nadamy ruch obrotowy, kula M widocznie zdąży ku obwodowi ramy; spotykając opór sprężyny aM , uciska ją i dopiero pod wpływem jej przeciwdziałania poczyną zataczać orbitę kołową.

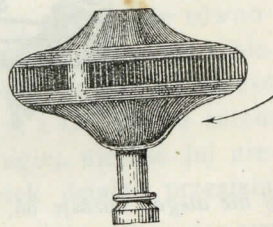
Przypuśćmy, że sprężynę aM wyjęliśmy i że jej nie ma w przyrządzie; podczas obrotu kula M ucieka wtedy po drucie, jak może najdalej od środka. Czy to zachowanie się kuli jest objawem działania siły odśrodkowej? Bynajmniej; wiemy z poprzedzających objaśnień, że wniosek podobny byłby mylny i błędny. Gdy kula ucieka od środka wzdłuż drutu, *nie* odbywa przecież ruchu kołowego; *nie* doznaje więc siły dośrodkowej, koniecznej w tym ruchu; nie wywiera też odpowiedniej siły dośrodkowej. Gdy nie ma sprężyny aM , kula M nie doznaje działania siły dośrodkowej, albowiem na przewierconą kulę drut takiej siły wywrzeć nie może; zatem kula porusza się wówczas niemal wyłącznie ruchem *bezwładnym*. Istotnie, kula nie przesuwac się wcale wzdłuż drutu nieruchomego; posuwac się ona wzdłuż drutu, który jednocześnie *wykręca się*. Gdy nie ma sprężyny aM , kula M porusza się zatem przybliżenie *po prostej*; dlatego oddala się wtedy od osi obrotu. Ruch kuli po orbicie kołowej staje się dopiero wówczas możliwy, gdy ściśnięta sprężyna aM działa na kulę M siłą dośrodkową; kula odpowiada wówczas sprężynie odśrodkowym naciskiem.

Załóżmy na wirownicy wstęgę metalową sprężystą, mającą kształt kołowy (rys. 69);



Rys. 69.

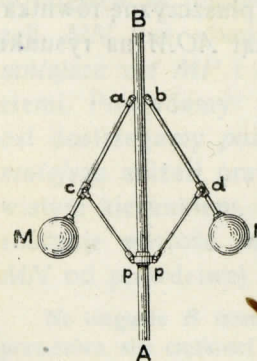
każda cząstka wstęgi zachowuje się podczas obrotu podobnie jak kula M w doświadczeniu poprzednim; dlatego kołowa wstęga spłaszcza się w kierunku osi obrotu, wydyma się w kierunkach poprzecznych. Podobne zjawisko dostrzegamy w doświadczeniu następującem. W naczyniu szklanem, spłaszczonem wzdłuż osi, na równiku wydętym, znajduje się woda i rtęć. Naczynie umieszczamy na osi wirownicy i wprowadzamy je w ruch obrotowy; rtęć, która jest znacznie gęstsza



Rys. 70.

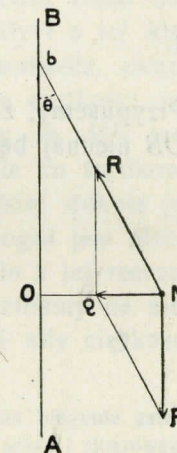
niż woda (a więc w równej objętości posiada o wiele większą masę), ucieka wówczas ku obwodowi równika i zgromadza się cała w jego sąsiedztwie. Na takiej zasadzie polega działanie t. zw. *wirówek*, używanych w cukrownictwie, w młeczarstwie i w innych gałęziach przemysłu.

Regulator odśrodkowy Watta składa się z osi AB (rys. 71), po której może ślizgać się pierścień pp , połączony z pierścieniami c i d zapomocą ruchomych prętów pc , pd ; pierścienie c i d mogą posuwac się wzdłuż prętów acM i bdN , ruchomych dokoła osi a , b i zaopatrzonych w masywne kule M , N . Znajdujemy bez



Rys. 71.

trudności warunek równowagi prętów acM i bdN , odchylonych od pionowego położenia. Przypuśćmy, że pręt bN podczas obrotu odchylił się o kąt θ (rys. 72). Na punkt N działa ciężar NP kuli N , skierowany pionowo ku dołowi oraz przeciwdziałanie sprężyste, którym pręt opiera się wydłużaniu; wypadkowa NQ tych dwóch sił jest siłą dośrodkową przyłożoną do N . Mamy



Rys. 72.

$$1. \quad NQ = QR \cdot \tan \theta.$$

Oznaczmy przez l długość pręta bN . Jeżeli m jest masą kuli N , ω prędkością kątową obrotu, r promieniem obrotu, mamy

$$2. \quad r = QN = l \sin \theta$$

oraz

$$3. \quad NQ = m\omega^2 r = m\omega^2 l \sin \theta.$$

Wiemy na koniec, że

$$4. \quad QR = NP = mg.$$

Z równań (1), (3) i (4) otrzymujemy

$$5. \quad \cos \theta = g/\omega^2 l.$$

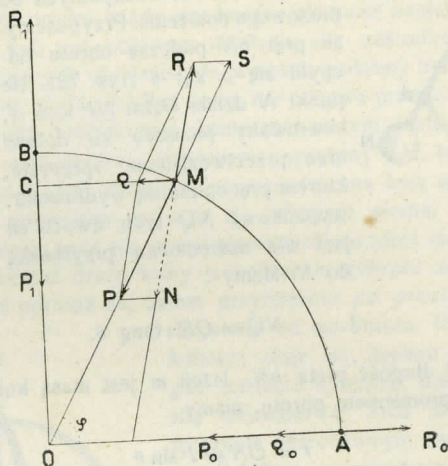
Dopóki prędkość kątowa jest mniejsza niż $\sqrt{g/l}$, równanie (5) nie daje dla kąta θ wartości możliwej; pręt istotnie nie odchylił się wówczas. Skoro pręt odchylił się, kąt θ rośnie, gdy ω zwiększa się, jak tego wymaga równanie (5). Jeżeli więc obrót jest zbyt szybki, aM i bN rozchylają się (rys. 71), pp podnosi się, skutkiem czego dopływ pary do maszyny parowej, z którą regulator jest sprzężony, zmniejsza się. Dzięki połączeniu z regulatorem Watta maszyna parowa może więc niejako czuwać sama nad sobą i zapobiegać zbyt szybkiemu własnemu ruchowi.

§ 68. Wpływ obrotu ziemi na przyspieszenie ciężkości.

Kula ziemiska względem gwiazd stałych kręci się około swej osi; jeden obrót, jak wiemy, trwa 86164·09 sekund średnich słonecznych (§ 4). Prędkość kątowna ω obrotu ziemi wynosi więc

$$1. \quad \omega = \frac{2\pi}{86164 \cdot 09 \text{ sek}} = \frac{0 \cdot 000072921}{\text{sek}}.$$

Przypuśćmy, że OA na rys. 73-im wyobraża płaszczyznę równika; OB niechaj będzie połową osi ziemskiej; kąt AOM na rysunku



Rys. 73.

niechaj nazywa się φ . Przypuśćmy, że ziemia jest kulista i że rozkład masy jest w niej jednostajny; punkt materialny, umieszczony w M , doznaje wówczas od kuli ziemskiej przyciągania MP , skierowanego wzdłuż promienia MO ku środkowi ziemi O . Gdyby ziemia nie obracała się, pion w miejscu M wskazywałby MS jako kierunek pionowo do góry idący, jeżeli MS jest przedłużeniem OM ; sprężysta reakcja, którą nć pionu sprzeciwia się wydłużaniu, byłaby umiejscowiona w prostej MS i wyobrażona przez długość $MS = MP$. Ziemia jednakże obraca się (względem gwiazd stałych) dokoła OB i pion w miejscu M nie wisi jak SM lecz jak RM ; sprężysta reakcja nici pionu MR oraz przyciąganie ziemi MP składają się na stosunkowo bardzo małą siłę dośrodkową MQ , przyłożoną do M w kierunku MC , ku środkowi C koła, po którego obwodzie biegnie punkt M .

Ponieważ promień r tego koła wynosi $R \cos \varphi$, jeżeli R jest promieniem kuli ziemskiej, zatem

$$2. \quad MQ = m\omega^2 r = m\omega^2 R \cos \varphi.$$

Wyobraźmy sobie, że w miejscu M powierzchni ziemi badamy siłę ciężkości. Ponieważ o wartości tej siły i o jej kierunku sądzimy z zachowania się pionu albo wahadła, zatem w miejscu M poczytamy MN za czynną tam siłę ciężkości, jeżeli MN jest równa i przeciwna MR . Widzimy, że MN jest *mniejsza* niż MP i *nie* jest skierowana dokładnie ku środkowi ziemi. Powiadamy: skutkiem obrotu kuli ziemskiej dokoła jej osi dostrzegamy *pozorną* siłę ciężkości, która naogół jest nieco *mniejsza* aniżeli prawdziwa i *nie* zgadza się ściśle z jej rzeczywistym kierunkiem. Dla jasności rysunku przesadziliśmy na nim znacznie wartość MQ oraz odchylenie pozornej siły ciężkości MN od prawdziwej MP .

Na biegunie B mamy $\varphi = 90^\circ$, $r = 0$, więc $MQ = 0$; na biegunie zatem prawdziwa siła ciężkości BP_1 i reakcja nici BR_1 są równe sobie i skierowane przeciwnie. Oznaczmy przez γ prawdziwe przyspieszenie ciężkości t. j. przyspieszenie, które kula ziemiska wytwarzałaby na całej swojej powierzchni, gdyby nie obracała się koło osi. Pozorne czyli dostrzegalne na biegunie przyspieszenie wynosi zatem również γ . Przenieśmy się teraz do miejsca A na równiku; tam mamy $\varphi = 0^\circ$, $r = R$; siła MQ przybiera więc na równiku wartość możliwie największą $m\omega^2 R$ lub przypuśćmy AQ_0 na rys. 73-im. Siła AQ_0 stanowi wówczas różnicę pomiędzy prawdziwą siłą ciężkości AP_0 a reakcją nici AR_0 :

$$3. \quad AP_0 - AR_0 = m\omega^2 R.$$

Pozorne czyli dostrzegalne na równiku przyspieszenie ciężkości g_0 jest więc mniejsze od prawdziwego γ , mianowicie

$$4. \quad \gamma - g_0 = \omega^2 R$$

gdzie

$$5. \quad \omega^2 R = (0 \cdot 000072921)^2 \times 6 \cdot 37 \times 10^8 \text{ cm/sek}^2 = 3 \cdot 39 \text{ cm/sek}^2.$$

Ponieważ γ jest wartością przyspieszenia na biegunie, widzimy zatem, że, gdyby ziemia była doskonale kulista i gdyby rozkład masy był w niej jednostajny, różnica wartości przyspieszenia ciężkości, obserwowanych na biegunie i na równiku, powinna wynosić 3·39 cm/sek². Z § 65-go wiemy atoli, że ta różnica jest większa; że mianowicie wynosi 5·19 cm/sek². Domyślamy się zatem, że ruch obrotowy ziemi dokoła jej osi nie jest jedyną przyczyną zmian wartości przyspieszenia g na powierzchni ziemi. Jak już powiedzieliśmy w § 65-ym, drugą, współdziałającą w tym względzie okolicznością jest spłaszczenie naszej planety oraz rozmieszczenie w niej mas przyciągających, które bynajmniej nie jest jednostajne.

Zadania.

1. Przypuszczamy, że ziemia jest kulą, że rozkład masy jest w niej jednostajny, że sprawiałaby na całej swojej powierzchni przyspieszenie γ , gdyby nie obracała się koło osi względem gwiazd stałych. Obliczyć prędkość kątową Ω obrotu, przy której nić pionu na równiku nie wyprężałaby się wcale; przy której przyspieszenie pozorne g_0 na równiku byłoby równe zeru. Jak długo trwałby wówczas jeden obrót dookoła osi? W jakim stosunku do obecnej (istotnej) prędkości kątowej ω pozostaje owa Ω ? Znajac γ , ωR oraz φ w danym miejscu M powierzchni ziemi, obliczyć pozorne czyli dostrzegalne tam przyspieszenie ciężkości oraz kąt odchylenia kierunku MN od MP (rys. 73).

2. Kąt CMN (rys. 73) wynosi w Krakowie $50^\circ 3' 52''$, w Warszawie $52^\circ 13' 5''$. Obliczyć w przybliżeniu siłę MQ w tych miejscowościach; przekonać się, w jakim stosunku ona pozostaje do ciężaru ciał materialnych.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

O pracy i energii.

§ 69. O pracy.

Od młodych lat uczymy się upatrywać *pracę* w naszych zajęciach codziennych. Wiemy, że niemal każda czynność żąda od nas pracy. Zaoranie pola lub wykopanie rowu, podniesienie ciężkiej skrzyni do góry lub przesunięcie jej po podłodze, rozcięcie kartek w książce, którą czytamy lub nalanie wody do szklanki: wszystko wymaga pracy. Wybicie tunelu lub przekopanie morskiego kanału jest oczywiście pracą olbrzymią; ale nawet nakręcenie zegarka, nawet podniesienie powieki łączy się z pracą, chociaż stosunkowo niewielką.

Pracują dookoła nas ludzie; pracują zwierzęta, które przymuszamy do pracy; pożytecznie, choć niewidocznie i cicho, pracują wszystkie rośliny. Pracują rozmaite maszyny, budowane przez człowieka i kierowane przez niego; szybciej, sprawniej i nieporównanie obficie pracują aniżeli człowiek mógłby pracować. Parowe, gazowe i wodne motory poruszają młocarnie, tartaki, heblarnie, tokarnie, walcownie; dźwigają młoty lub windy, wtłaczają wodę do sieci rur miejskich, wprawiają w bieg dynamaszyny, z których otrzymujemy prąd elektryczny. Działalność maszyn powołuje do pracy papiernie, drukarnie, tkalnie, przędzalnie i niezliczone inne zakłady fabryczne; ona sprawia, że ropa może tryskać z szybu, że tonny węgla wyłaniają się na powierzchnię ziemi, które zostały wyrwane z głęboko pod nią ukrytych pokładów. Maszyny ciągną długie szeregi wagonów pełnych towaru lub w szalonym pędzie biegną na czele pośpieszonych pociągów. Maszyny wprawiają w ruch olbrzymie okręty, nie dbając o wichry, o fale morskie i prądy; inne znów w portach ładują ogromne zapasy na statki lub je wyładowują. Ma-

szyny wyrabiają samochody, czołgi, aeroplany, którym ich własne maszyny zapewniają dzielność i sprawność.

Lecz nie tylko ludzie, zwierzęta i maszyny pracują; cały wszechświat widzialny jest wciągnięty w wir pracy; wszystko wciąż pracę pochłania albo jej dostarcza. W powietrzu zrywa się wiatr albo wichur; to znowu deszcz pada, sypie śnieg albo siecze grad. Wodospady i rzeki toczą masy wód ku oceanom. Fale morza huczą i przelewają się, szarpiąc skały, niosąc wydmy piasku; posłuszne ciążeniu, raz biegną w niepowstrzymanym pędzie ku brzegom, to znowu od nich uciekają pośpiesznie. Pod naszymi stopami chwieją się ziemskie pokłady i wszystko w nich albo na nich obsuwa i przesuwa się wiecznie, od kamyków począwszy aż do potwornych skał i lodowców. Śród pyłu przestworzy niebieskich krążą księżycy, planety, komety; ich ruch pochłania lub uwalnia nieziemskie ilości pracy. Biegając w dal niewiadomą, słońce rozgrzewa i rozświeca wszystko dokoła; jego dobroczynne działanie budzi do życia. Tysiące razy wspanialsze, inne promienne słońca jaśnieją z głębi otchłani przestrzennych. Gdziekolwiek zwrócimy uwagę, wszędzie odbywa się praca.

§ 70. Określenie pojęcia pracy.

Widzimy, jak ważne jest pojęcie pracy, jak szeroki ma zakres. Lecz w naukach ścisłych tylko ilościowe pojęcia mają wartość rzetelną; co nie może być *zmierzone*, pozostaje mgliste i ostatecznie zawsze dowolne. Praca może być duża lub mała, jak powiedzieliśmy w artykule poprzednim; możemy więc *mierzyć pracę* i powinniśmy umieć ją mierzyć.

Przypuśćmy, że punkt materialny m pozostaje pod wpływem siły F . Jeżeli punkt m porusza się *zgodnie* z kierunkiem działania siły F (to znaczy: ściśle w jej kierunku lub pod kątem ostrym do niego), mówimy wówczas, że *siła wykonywa pracę*; rozumie się, że pracę dodatnią. Jeżeli punkt porusza się *sprzecznie* z kierunkiem siły F , czyli w kierunku wręcz mu przeciwnym lub pod kątem rozwartym do niego, powiadamy, że praca jest wykonywana *wbrew* sile; lub też mówimy, że siła wykonywa pracę ujemną. Na granicy między ruchami zgodnymi a sprzecznymi z kierunkiem działania siły znajduje się ruch, względem tego kierunku *ojojętny* czyli prostopadły do niego; mówimy, że w takim ruchu siła F *nie* pracuje.

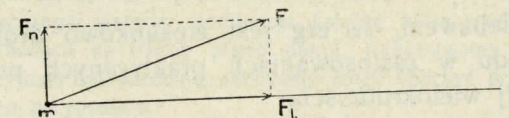
Przypuśćmy, że punkt m w pewnym czasie odbył drogę prostą l i że w tym czasie nie zmieniała się wartość ani nie zmieniał się kierunek siły F . Przez (Fl) rozumiemy kąt, zawarty między kierunkami siły F i przemieszczenia l . Pracą siły F na drodze l nazywamy wówczas wyrażenie

$$1. \quad W = Fl \cos (Fl),$$

które ma wartość dodatnią, gdy kąt (Fl) jest równy zeru lub jest ostry; które ma wartość ujemną, gdy ten kąt jest rozwarty lub równy dwóm prostym; które wreszcie równa się zeru, gdy kąt (Fl) jest równy prostemu. Widzimy, że te własności wyrażenia (1) są zgodne z założeniami, które, jako nieodłączne od pojęcia pracy, przed chwilą przyjęliśmy.

Można zapytać, dlaczego przemieszczenie l punktu m miało być skierowane pod kątem ostrym, prostym lub rozwartym do kierunku siły F ? Dlaczego niezawsze przypada w kierunku działania tej siły? Jeżeli punkt materialny jest *swobodny* i jeżeli jest pozbawiony *początkowej prędkości* w chwili, gdy podpada pod wpływ siły F , wówczas porusza się w kierunku działania tej siły; mamy wówczas $(Fl) = 0$ i praca W przybiera postać iloczynu Fl . Przypuśćmy jednak, że swobodny punkt m , w chwili przyłożenia siły F , ma prędkość inaczej skierowaną niż siła F ; według §§ 22-go i 42-go ruch punktu m odbywa się wówczas naogół pod kątem do kierunku siły. Mamy tego przykład w ruchu punktu ciężkiego, rzuconego ukośnie w polu ciężkości; zatacza on parabolę, mimo iż siła ciężkości działa zawsze na dół pionowo (§ 59). Przypuśćmy dalej, że punkt m nie jest swobodny, że jego ruch jest skrępowany przez ograniczające warunki; wahadło dostarcza przykładu takiego punktu (§ 63). Ruch odbywa się wówczas znowu zazwyczaj pod kątem do kierunku działania siły przyłożonej. Możemy powiedzieć, że wahadło porusza się nie pod samym tylko wpływem siły ciężkości; że działa na nie również reakcja, wywołana w nici przez jej wyprężenie. Ale reakcja ta nie dostarcza ani nie odbiera pracy wahadłu, albowiem jest zawsze prostopadła do kierunku przemieszczenia jego ciężkiego punktu.

Wyobraźmy sobie, że punkt m , na który działa siła F (rys. 74), porusza się wzdłuż prostej ml . Rozłożmy siłę F na składową F_n



Rys. 74.

prostopadłą do przemieszczenia ml i na składową F_l , przypadającą w kierunku tego przemieszczenia. Jeżeli zgodzimy się na

twierdzenie, według którego składowa F_n nie pracuje w uważanym ruchu, tedy zostaje składowa F_t , której wartość wynosi $F \cdot \cos(Fl)$ i która przypada w kierunku przemieszczenia ml . Mamy więc

$$2. \quad W = F_t \cdot l,$$

wzór, który pozwala z innej strony spojrzeć na określenie pracy i lepiej je zrozumieć.

Według określenia (1) lub (2), praca *nie* jest wektorem; jest nieskierowaną wielkością, podobnie jak na przykład objętość lub masa. Zatem ilości pracy dodają się do siebie algebraicznie. Korzystając z tej własności pracy, możemy uogólnić wzór (1). Przypuśćmy, że wartość albo kierunek siły F zmienia się podczas odbywania przez punkt m drogi l . Rozcinamy wówczas tę drogę na mniejsze części, jeśli potrzeba, na niezmiernie małe odcinki; tworzymy dla każdej z tych części z osobna wyrażenie podobne do powyższego (1). Załóżmy np., że l składa się z części $l_1, l_2, \dots$:

$$3. \quad l = l_1 + l_2 + \dots$$

oraz, że F_1 jest siłą czynną na drodze l_1 , F_2 siłą czynną na l_2 i t. d. Suma

$$4. \quad W = F_1 l_1 \cos(F_1 l_1) + F_2 l_2 \cos(F_2 l_2) + \dots$$

wyraża pracę, wykonaną na drodze l .

§ 71. Jednostki pracy.

W artykule poprzednim wyprowadziliśmy pojęcie pracy z pojęć przemieszczenia i siły, podobnie jak na przykład w stereometrii pojęcie objętości wyprowadzamy z pojęć pola i długości. *Jednostka pracy* musi zatem wynikać z jednostki długości i z jednostki siły. W § 3-im przyjęliśmy centymetr za jednostkę długości; w § 47-ym przyjęliśmy dynę za jednostkę siły. Powiadamy zatem, że *jednostką pracy jest praca, wykonywana przez siłę równą 1 dynie na drodze, przypadającej w kierunku tej siły i równej 1 centymetrowi*. Jednostka ta nazywa się *ergiem*:

$$1. \quad \text{erg} = 1 \text{ dyna} \times 1 \text{ centymetr} = 1 \text{ gr cm}^2/\text{sek}^2.$$

Zobaczymy niebawem, że erg jest stosunkowo drobną pracą; z tego względu w zastosowaniach praktycznych posługujemy się chętniej jej wielokrotnością:

$$2. \quad 1 \text{ joule} = 10^7 \text{ ergów}.$$

Wiemy, że ciężar p ciała, którego masa jest m , wynosi

$$3. \quad p = mg,$$

gdzie g jest przyspieszeniem ciężkości, czynnem w miejscu dostrzeżeń (§ 46). Przypuśćmy, że ciało obniża się o wysokość h w kierunku pionowym ku dołowi; siła ciężkości wykonywa w tem przemieszczeniu pracę

$$4. \quad W = ph = mgh.$$

Jeżeli masę m wyraziliśmy w gramach, przyspieszenie g w cm/sek^2 , ciężar p z formuły (3) wypadnie wyrażony w dynach; jeżeli nadto drogę h podaliśmy w centymetrach, otrzymamy z (4) pracę W wyrażoną w ergach. Załóżmy na przykład

$$5. \quad m = 1 \text{ kg} \quad g = 981 \text{ cm}/\text{sek}^2 \quad h = 1 \text{ m};$$

gdy kilogram obniża się o metr ku dołowi, siła ciężkości wykonywa pracę, która wynosi 98100000 ergów czyli 9·81 joule'ów; pracę tę nazywamy *kilogramometrem* (w skróceniu: *kgm*). Przypuśćmy podobnie, że sześcienny milimetr wody obniża się o centymetr ku dołowi; siła ciężkości wykonywa wówczas pracę, która wynosi 0·981 erga; widzimy zatem, że erg jest rzeczywiście pracą stosunkowo nieznaczną, jak wyżej powiedzieliśmy.

Określiliśmy tutaj kilogramometr oraz miligramocentymetr; podobnie moglibyśmy określić np. gramocentymetr, stopofunt i inne podobne jednostki pracy, których nazwy są już dostatecznem określeniem. Kilogramometr, gramocentymetr, stopofunt i t. p. są to oczywiście *ciężarowe jednostki pracy* (§ 47), łatwo zrozumiałe, ponieważ odwołują się do pospolitych naszych doświadczeń; skoro one jednak zależą od wartości g ; przeto są zmienne i dlatego w nauce nie mogą być uznane za ścisłe, zasadnicze jednostki.

Zadania.

1. Robotnik wniósł 12 cegieł na wysokość 6 m; pozostawiwszy tam 6 cegieł, wniósł pozostałe na dalszą wysokość 5 m. Każda cegła waży 2·5 kg. Obliczyć w kilogramometrach i w ergach całkowitą pracę, którą robotnik wykonał.

2. Nakręcając zegar wagowy, podnosząc książkę, która spadła na podłogę, wbiegając po schodach na trzecie piętro domu, wykonywamy pewną pracę. Jakie dane winny nam być wiadome, ażebyśmy mogli obliczyć pracę, wykonaną w każdym z tych przypadków?

3. Pociąg kolejowy waży 150 tonn. Dla pokonania, po torze poziomym, oporów i tarcia, lokomotywa musi ciągnąć siłą, równą średnio 7·5 Kg na 1 tonnę ciężaru pociągu. Obliczyć pracę lokomotywy na drodze 1 kilometra.

4. Masa księżyca wynosi $7 \cdot 2 \times 10^{25}$ gr (§ 66); przyspieszenie, którego on doznaje od ziemi, wynosi $0 \cdot 272 \text{ cm}/\text{sek}^2$ (§ 54). Ile pracy wykonywa przyciąga-

nie ziemskie, gdy księżyc przebiega metr pod kątem 89° do promienia wodzącego orbity?

5. Punkt o masie 1 kg zesuwa się bez tarcia po równi pochyłej (§ 61), której kąt nachylenia do poziomu wynosi 45° . Jeżeli droga, liczona wzdłuż równi, wynosi 35 cm, jaką pracę wykonywa siła ciężkości?

6. W jakim stosunku do kilogramometra pracy, wykonanego na biegunie ziemi, znajduje się kilogramometr pracy, wykonany na równiku? Jaka jest różnica pomiędzy kilogramometrami, wykonanymi we Lwowie i Wilnie (§ 65)? lub u szczytu wieży Eiffla (mającej 300 m wysokości) i u jej podstawy (§ 65)?

§ 72. Dzielność.

Wyobraźmy sobie, iż, pracując przez godzinę, pewien robotnik wykonał tyle pracy, ile otrzymujemy w ciągu sześciu minut od zaprzęzonego konia; tyle, ile możemy w przeciągu pół sekundy od maszyny parowej uzyskać. W tych trzech razach ogólna ilość pracy była jednakowa, ale *szybkość* jej skutecznienia była rozmaita; w jednakowym czasie koń dawał nam 10 razy więcej pracy niż człowiek, maszyna zaś 7200 razy więcej. Z tego przykładu widzimy, że rozmaite źródła pracy mogą nam jej dostarczać z bardzo rozmaitą szybkością; ta szybkość jest ważną własnością lub cechą źródła pracy. *Stosunek ilości dokonanej pracy do odstępu czasu, w którym została dokonana*, nazywamy (średnią w tym odstępie) *dzielnością* albo *sprawnością* pracującego organizmu lub mechanizmu.

Przypuśćmy, że praca W , dana przez wzór (1) § 70 go, została dokonana w czasie t ; średnia w tym czasie dzielność D pracującego układu, przyrządu, człowieka albo zwierzęcia wynosiła

$$1. \quad D = \frac{W}{t} = F \frac{l}{t} \cos (Fl) = Fv \cos (Fl)$$

gdzie v jest średnią w czasie t prędkością punktu, który odbywa drogę l . Jednostką dzielności jest oczywiście 1 gr cm^2/sek^3 czyli *erg na sekundę*; w praktycznych zastosowaniach posługujemy się zwykle wielokrotnościami tej jednostki, które wynoszą:

$$2. \quad \text{watt} = 10^7 \text{ ergów na sekundę};$$

$$3. \quad \text{kilowatt} = 10^{10} \text{ ergów na sekundę}.$$

Dzielność 1 kgm/sek wynosi 9·81 wattów, jeżeli g ma wartość 981 cm/sek^2 . *Dzielnością konia parowego* nazywamy często w technice 75 kgm/sek; jednostka ta wynosi 735·7 wattów, jeżeli g ma powyższą wartość. W końcu XVIII-go stulecia inżynier i uczony angielski James Watt wprowadził w użycie

jako jednostkę dzielności, średnią dzielność mocnego (angielskiego) konia roboczego; ta jednostka, zwana *horse-power* (lub w skróceniu *HP*), wynosi 550 stopuntów angielskich na sekundę lub w przybliżeniu 746 wattów.

Dzielność zwykłego konia waha się między 40 a 60 kgm/sek. Dzielność dorosłego mężczyzny wynosi zazwyczaj od 5 do 10 kgm/sek; na przykład cyklista, gdy jedzie po gładkiej drodze, okazuje dzielność 5 kgm/sek; wioślarz około 10 kgm/sek; robotnik, który kręci korbę maszyny, ma dzielność 6–7 kgm/sek.

Zadania.

1. Punkt ciężki, którego masa wynosi m , spada swobodnie w próżni, bez początkowej prędkości; $g = 981 \text{ cm}/\text{sek}^2$. Oznaczamy przez t czas, liczony od początkowej chwili zjawiska; przez s rozumiemy drogę, odbytą w czasie t pionowo ku dołowi. Udowodnić, że dzielność δ , z jaką pracuje w chwili t siła ciężkości, wynosi

$$\delta = mg^2 t = mg \sqrt{2gs}.$$

Obliczyć tę dzielność w ergach na sekundę, w wattach, w koniach parowych lub w jednostkach *HP*, zakładając np.:

$$m = 1 \text{ kg}; \quad t = 1 \text{ sek} \quad \text{albo też} \quad s = 1 \text{ m}.$$

2. Tatarnik wszedł na górę, której wysokość, liczona pionowo, wynosi 2500 m; wejście to zajęło mu 5 godzin czasu. Wiedząc, że ciężar tatarnika wynosi 66 Kg, obliczyć średnią dzielność, którą okazał w tej wycieczce.

3. Wodospad Niagary toczy średnio 7650 m^3 wody na sekundę. Wysokość, z której woda spada, wynosi 49 m. Jaką dzielność mogłyby rozwinąć maszyny, które zdołałyby pochwycić i zużytkować jedną dziesiątą część energii wodospadu?

§ 73. Pojęcie energii.

Gdy nakręciliśmy zegarek, jego wskazówki i kółka są przez pewien czas w ruchu. Zatem praca, którą włożyliśmy w skrócenie sprężyny, nie jest stracona; skrócona sprężyna jest rzetelnym dłużnikiem i skoro tylko może, stara się zwrócić pracę pobraną. Zegar wagowy jest zaopatrzony w ciężarki. Skoro podnieśliśmy je do góry, ciężarki, opuszczając się pod działaniem siły ciężkości, utrzymują w ruchu mechanizm zegara przez tydzień lub dłużej. Praca, którą wykonaliśmy wbrew sile ciężkości, nie znikła; możemy obrazowo powiedzieć, że przechowywała się i tylko stopniowo, powoli, została wydana. Każde ciało ciężkie, podniesione o pewną wysokość, dostarcza nam pracy, skoro mu pozwolimy obniżyć się napowrót. Spadając ze szczytu wieży kościelnej, cegła oddaje pracę, którą wydał na jej wyniesienie murarz, może przed kilkuset laty. Gdy kamień stacza się z Ryśów albo Giewontu, wyzwala się praca, która przez długie wieki,

niejako w uśpieniu, trwała nienaruszona. Nawałnica, która siecze nam pola lub wodospad Niagary, który zasila pracą ludne osady i miasta, zwraca obecnie olbrzymie zasoby pracy, wyłożonej (niewiadomo kiedy i gdzie) na odparowanie wody i na jej krążenie w atmosferze ziemskiej.

Ażeby rozłupać kłodę, drwal z rozmachem uderza siekierą; nadał więc pewną prędkość narzędziu a w tym celu musiał pracę wykonać. Ale ta praca nie jest stracona; poruszające się ciało może dostarczyć pracy, której nieruchome ciało sprawić nie zdoła. Kamień rzucony, pocisk wystrzelony z armaty, lokomotywa pędząca po torze — mogą dokonać rozmaitych skutków, mogą skutecznici różnorodną pracę. Ażeby wprowadzić w ruch ciało masywne, potrzeba więc pracy; ale ta praca nie ginie. Poruszające się ciało ma w sobie pewien zasób pracy, z którego czerpiąc, może pracę nazewną oddawać.

Z przytoczonych przykładów wnosimy, że w przyrodzie mogą gromadzić się, że w niej nawet wszędzie istnieją *zapasy* czyli *zasoby pracy*. Każdy zasób pracy nazywamy *energją*. Pojęcie energii, stworzone głównie przez Tomasza Younga (1807) i przez Lorda Kelvina (1851), jest dzisiaj fundamentalnem pojęciem nauki fizyki; jest jednym z najważniejszych narzędzi myślenia, nie tylko w tej nauce, lecz we wszystkich wogóle oddziałach umiejętności, poświęconych badaniu zjawisk natury.

§ 74. Energja kinetyczna.

Wyobraźmy sobie punkt materialny ciężki, który spada swobodnie w próżni zupełnej, bez początkowej prędkości, pod wyłącznym wpływem siły ciężkości. Pole ciężkości, w którym punkt spada, uważamy za jednorodne (§§ 55 i 65). Przypuśćmy, że od początkowej chwili zjawiska upłynął czas t i przebieżona została droga s . Ciężar punktu wynosi mg , jeżeli m jest masą punktu, g zaś przyspieszeniem ciężkości; wartość tej siły według założenia jest stała; kierunek jej jest niezmienny, zgodny z kierunkiem przemieszczenia. Praca W , wykonana przez ciężkość od początkowej chwili spadania aż do chwili t , wynosi

$$1. \quad W = mgs.$$

Prędkość v punktu w chwili t czyni zadosyć równaniu

$$2. \quad v^2 = 2gs$$

(por. §§ 17 i 46). Z równań (1) i (2) wyprowadzamy

$$3. \quad W = \frac{1}{2} mv^2.$$

Pracując nad punktem, ciągnąc go ku dołowi, siła ciężkości nagromadziła w nim zasób pracy $\frac{1}{2} mv^2$; ten zasób nazywamy *kinetyczną energją* poruszającego się punktu.

Spróbujmy uogólnić wynik, do którego zostaliśmy doprowadzeni. Punkt swobodny, którego masa wynosi m , porusza się pod wpływem siły F ; wartość tej siły jest stała i kierunek jej jest niezmienny, zatem ruch punktu jest prostoliniowy i jednostajnie przyspieszony, odbywa się zaś w kierunku działania siły. Oznaczamy przez v_0 prędkość punktu w początkowej chwili $t = 0$, przez v jego prędkość w chwili t . Przyspieszenie f punktu jest stałe; wartość f możemy obliczyć z równania

$$4. \quad f = \frac{v - v_0}{t}.$$

Droga s , przebieżona od chwili początkowej, wynosi według § 17-go:

$$5. \quad s = v_0 t + \frac{1}{2} ft^2$$

albo też, jak widzimy, dopomagając sobie formułą (4):

$$6. \quad s = \frac{1}{2} (v + v_0) t.$$

Według tych założeń, praca W , wykonana przez siłę F na drodze s , wynosi

$$7. \quad W = Fs = mfs = \frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2),$$

jest zatem równa przyrostowi *kinetycznej energii punktu*. Dzięki nieustannym przyczynom, pochodzącym z pracy siły F na wszystkich po kolei odcinkach drogi, nagromadza się zasób pracy czyli energia punktu, podobnie jak z gromadzenia się oszczędności powstaje majątek. Jeżeli punkt, mający kinetyczną energję, napotka na opór lub wywoła tarcie, jeżeli na przykład uderzy o zaporę lub wpadnie do lepkiego ośrodka, nagromadzona kinetyczna energia będzie się rozpraszała; punkt wykona pracę, równą stracie, którą jego kinetyczna energia poniesie.

Zadania.

1. Kula armatnia, której masa wynosi 500 kg, została wystrzelona z prędkością 480 m/sek. Obliczyć w ergach energję kinetyczną kuli.

2. Kula, o której mowa w 1-em zadaniu, została wystrzelona z prędkością 600 m/sek lub 720 m/sek; jaka jest wówczas jej kinetyczna energia? Gdy prędkość masy m zwiększy się lub zmniejszy się x razy, w jakim stosunku zmienia się jej kinetyczna energia?

3. Kula, o której mowa w 1-em zadaniu, odbyła we wnętrzu armaty drogę 1.75 m, zanim została z niej wyrzucona. Obliczyć w dynach średnią wartość siły, która była przyłożona do kuli podczas przebiegania tej drogi.

4. Ta sama kula (zad. 1), wpadając do grubej warstwy piasku, zatrzymuje się w niej w głębokości 6 m od powierzchni. Obliczyć w dynach średnią wartość oporu, który piasek przeciwstawia ruchowi kuli.

5. Pociąg biegnie z prędkością 75 km/godz; jego masa wynosi 250 tonn. Obliczyć kinetyczną energję tego pociągu. Jaka siła mogłaby go zatrzymać na drodze, mającej 25 m długości? Opory i tarcia zaniedbujemy.

6. Masa młotka wynosi 1 kg. Ażeby wprowadzić młotek w szybki ruch, wywieramy nań siłę, która sześciokrotnie przenosi jego ciężar. Pod wpływem naszego działania i własnego ciężaru młotek opadł o 50 cm na dół pionowo. Jaka suma pracy została tutaj wydana? Jaką prędkość osiągnął młotek po przebieżeniu wymienionej drogi? Przypuśćmy, że młotek trafia gwoździ tkwiący w desce i wbija go głębiej o 6 mm; obliczyć średni opór, którym deska sprzeciwiała się posuwaniu się gwoźdźcia.

Wyobraźmy sobie układ, złożony z punktów materialnych; ich masy oznaczmy przez m_1, m_2, m_3 i t. d. Będziemy nieraz rozważali własności takiego układu, który dla skrócenia będziemy nazywali *materiałnym układem*. Niechaj prędkości punktów układu wynoszą v_1, v_2, v_3 i t. d. *Kinetyczną energję* układu nazywamy sumę

$$8. \quad T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \text{i t. d.},$$

złożoną z kinetycznych energii wszystkich po kolei punktów układu.

§ 75. Ilość ruchu czyli pęd.

Powracamy jeszcze raz do przedmiotu, którym zajmowaliśmy się w artykule poprzedzającym. Punkt o masie m , swobodny, porusza się pod działaniem siły F , której wartość jest stała i kierunek niezmienny; ruch punktu jest prostoliniowy i jednostajnie przyspieszony, odbywa się zaś w kierunku działania siły. Oznaczamy przez v_0 prędkość punktu w chwili $t=0$, przez v jego prędkość w chwili t , przez s drogę, przebieżoną między temi dwiema chwilami. Wiemy wówczas, że dwie następujące zależności są spełnione:

$$1. \quad Ft = m(v - v_0);$$

$$2. \quad Fs = \frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2).$$

Pierwsze równanie wynika z (1) § 35-go i (4) § 74-go; drugie nie różni się od równania (7) § 74-go. Równanie (2) powiada, że praca, wykonywana przez siłę F na drodze s , gromadzi i przechowuje się w postaci kinetycznej energii poruszającego się punktu. Treść równania (1) jest nam również znana; wyraża się w niem drugie zasadnicze twierdzenie dynamiki. Nadajmy iloczynowi mv nazwę *ilości ruchu* albo *pędu*; możemy wówczas wypowiedzieć treść równania (1) w sposób obrazowy. Możemy powiedzieć, że pędzący wpływ siły F , mierzony przez iloczyn Ft , równa się powiększeniu się ilości ruchu albo pędu, które dokonało się w czasie t .

Równaniami (1) i (2) możemy posługiwać się w rozmaity sposób. Jeżeli znamy wartości F i s , możemy obliczyć, jaka na drodze s dokonała się zmiana kinetycznej energii. Jeżeli wartości F i t są nam wiadome, znajdujemy zmianę, która w czasie t zaszła w pędzie poruszającego się punktu. Przypuśćmy przeciwnie, że dana nam jest zmiana kinetycznej energii punktu; możemy wówczas powiedzieć, na jakiej drodze siła F wytworzyła tę zmianę lub na jakiej drodze jest w stanie ją zniszczyć. Przypuśćmy, że zmiana pędu punktu jest podana; równanie (1) pozwala wówczas przekonać się, w jakim czasie siła F sprawia taką zmianę lub w jakim czasie byłaby zdolna ją unicestwić.

Dla przykładu wyobraźmy sobie dwa ciała: pociąg kolejowy, którego masa wynosi 400 tonn oraz niewielką kulę, wystrzeloną ze strzelby; masa tej kuli niechaj wynosi 10 gramów. Przypuśćmy, że pociąg porusza się nader powoli; wyobraźmy sobie na przykład, że właśnie zajeżdża na stację i ma już tylko prędkość 1 cm/sek. Kula przeciwnie pędzi z dużą prędkością; przypuśćmy, że posiada prędkość 400 m/sek. Znajdujemy:

$$\text{dla pociągu: } \frac{1}{2} mv^2 = 2 \times 10^8 \text{ gr cm}^2/\text{sek}^2; \quad mv = 4 \times 10^8 \text{ gr cm/sek}$$

$$\text{dla kuli: } \frac{1}{2} mv^2 = 80 \times 10^8 \text{ gr cm}^2/\text{sek}^2; \quad mv = 4 \times 10^5 \text{ gr cm/sek.}$$

Kinetyczna energia pociągu jest 40 razy *mniej* niż kinetyczna energia kuli; pęd pociągu przeciwnie jest 1000 razy *większy* niż pęd kuli. Jeżeli ruchowi pociągu i ruchowi kuli przeciwstawimy *tę samą* siłę stałą, zatrzyma ona pociąg na drodze 40 razy krótszej niż kulę; ale zatrzyma go w czasie 1000 razy dłuższym.

§ 76. Dwa sposoby pojmowania masy.

Pojęcie masy jest niezmiennie ważne w dynamice. Określaliśmy je dotychczas w związku z pojęciami przyspieszenia i siły, ustanawiając (w drugim rozdziale) zasadnicze twierdzenia dyna-

miki. Możemy powiedzieć, że w tym rozdziale kierowaliśmy się równaniem (1) poprzedzającego artykułu; o sile wnioskowaliśmy z pędu, albo ze zmiany pędu, poruszającego się ciała; *masa* była dla nas *zdolnością nabierania pędu*, którą dane ciało posiada.

Pojęcie kinetycznej energii prowadzi do innego sposobu pojmowania masy. Przez *masę* ciała możemy rozumieć jego *zdolność gromadzenia w sobie kinetycznej energii*. Młotek, wyrobiony z wosku lub z korka, jak wiemy wszyscy, funkcjonowałby lichy. Mówiąc, że żelazna lub stalowa główka młotka ma masę większą niż drewniana albo korkowa, mamy na myśli, że, poruszając się z jednakową prędkością, ma znacznie większą kinetyczną energję. *Masa jest zatem pojemnością ciała na kinetyczną energję.*

Ażeby to jeszcze lepiej wyjaśnić, uciekamy się do porównania. Dobrze wiadomo, że wodę, krążącą w rurach wodociagowych miejskich, pompują czyli wtłaczają do rur maszyny parowe. Ale maszyny działają przerywanemi pchnięciami. Gdyby rury wodociagowe były bezpośrednio połączone z tłoczaczami pompami, woda nie płynęłaby ciągłym strumieniem z kurka wodociagu, tryskałaby raczej w podskokach, raz mocniej, to znowu słabiej. Z tego względu, pomiędzy tłoczaczami pompami a siecią wodociagowych przewodów inżynierowie, budujący instalację, umieszczają zwykle *zbiornik* znacznej pojemności, który, gromadząc duży zapas wody, ujednastajnia płynięcie.

Przyjrzyjmy się teraz *kołu rozpędowemu* (albo «zamachowemu») w hali maszyn przemysłowego zakładu; zrozumiemy bez dalszych wyjaśnień, że, dzięki potężnej swej masie, to koło, skoro zostało wprawione w obrót, staje się *zbiornikiem kinetycznej energii*; że wobec tej energii spełnia taką rolę, jaką wobec wody odgrywa wodociagowy rezerwuuar. Koło rozpędowe pobiera ilości pracy, które są chwilowo zbytne i gromadzi je jako kinetyczną energję; w miarę potrzeby wydaje z tego zasobu, przekazując energję mechanizmom, z którymi jest sprzężone; tym sposobem ujednastajnia bieg całego urządzenia.

§ 77. Energja potencjalna.

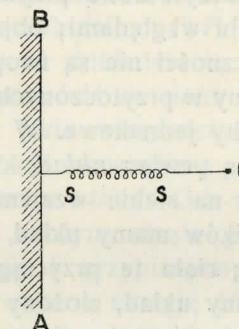
Energja kinetyczna nie jest jedyną postacią, w której może przechowywać się praca. Widzimy to z przykładów, przytoczonych w § 73-im. Wyobraźmy sobie jeszcze raz kamień, który leży u szczytu góry albo cegłę położoną pod dachem budynku; wyobraźmy sobie obraz uczipiony na haku, most nad przepaścią wiszący albo samolot, który unosi się wysoko w powietrzu. Ze *wzniesieniem* tych ciał, z ich *położeniem* względem ziemi łączy się istnienie pewnej energii, nawet i wówczas, gdyby one nie poruszały się wcale względem ziemi; istotnie, gdy któremukolwiek z tych ciał pozwolimy spadać ku ziemi, odzyskamy pracę, która została wydana na podniesienie ciała do góry. Przez to

samo, że ciało ciężkie jest oddalone od środka ziemi, która je przyciąga, przez to samo nagromadziła się pewna energja; nazywamy ją *energją ciężkości*.

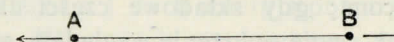
Kuli ziemskiej nie możemy dowolnie oddalać od słońca ani jej przybliżać ku słońcu. Wiemy jednak z rozdz. II-go, że ciężkość jest tylko szczególnym przypadkiem powszechnego ciążenia; że, gdy kamień znajduje się w polu ciężkości lub planeta w polu ciążenia, istota rzeczy jest w obu razach ta sama. Pomiedzy planetą a słońcem działa przyciąganie; to przyciąganie wykonywa pracę, gdy planeta zbliża się ku słońcu; gdy planeta oddala się od słońca, praca jest wykonywana przeciwko temu przyciąganiu. A zatem istnieje zasób pracy, istnieje energja, gdy planeta znajduje się w pewnej odległości od słońca; energję tę nazywamy *energją ciążenia*.

Przypuśćmy, że punkt *C* (rys. 75) jest połączony ze ścianą *AB* za pośrednictwem sprężyny *SS*; jeżeli *C* oddala się od *AB*, musi tę sprężynę wyciągać. Oddalenie punktu od ściany wymaga wykonania pracy przeciwko sile sprężystości, która budzi się w wyciąganej sprężynie. Skoro zostanie oddalony od ściany, punkt *C* zdradza energję, której nie okazywał, gdy sprężyna miała długość normalną; istotnie, pozwalając punktowi zbliżyć się na powrót ku ścianie, możemy odzyskać pracę, którą wydaliśmy na oddalenie. Gdy sprężyna jest wydłużona, istnieje więc nagromadzony zasób pracy, istnieje energja. Taką energję, zależną od wydłużenia, wygięcia, skręcenia lub innego odkształcenia ciał sprężystych, nazywamy *energją sprężystości*.

Wyobraźmy sobie dwie kule metalowe *A* i *B* (rys. 76), naelektryzowane *jednoimiennie*, na przykład obiedwie dodatnio. Dzięki



Rys. 75.



Rys. 76.

swym elektrycznym ładunkom kule odpychają się wzajemnie; jeżeli chcemy zbliżyć je ku sobie, musimy wykonać pracę. Przy-

puśćmy, że zbliżyliśmy kule ku sobie; wykonaną wówczas pracę możemy odzyskać, pozwalając, by kule oddaliły się napowrót od siebie. Gdy zatem kule były zbliżone, istniał pewien zapas pracy, nagromadzona była pewna energia. Gdy wogóle dwa jednoimiennie naelektryzowane ciała znajdują się w jakiegokolwiek odległości od siebie, już przez to samo istnieje pewna energia, że one nie są nieskończenie oddalone od siebie. Dwa różnoimiennie naelektryzowane ciała przyciągają się; jeżeli chcemy oddalić je od siebie, musimy wykonać pracę; oddalwszy je od siebie, możemy odzyskać pracę wydaną, gdy ciała zbliżą się ku sobie napowrót. Gdy zatem dwa różnoimiennie naelektryzowane ciała znajdują się w jakiegokolwiek odległości od siebie, już przez to samo istnieje pewna energia, że nie stanowią jednego ciała, że są rozłączone. Taką energję, zależną od wzajemnego położenia względem siebie ciał naelektryzowanych, nazywamy *elektryczną energją*.

Przytoczone przykłady różnią się oczywiście od siebie pod wielu względami; objawy ciężkości, ciążenia, sprężystości i elektryczności nie są naogół do siebie podobne. Mimo to dostrzegamy w przytoczonych przykładach niektóre rysy wspólne, pewne cechy jednakowe. W tych wszystkich przykładach mamy przed sobą pewien *układ*, którego składowe części wywierają pewne siły na siebie wzajemnie. W pierwszym z przytoczonych przypadków mamy układ, składający się z kuli ziemskiej i z kamienia; ciała te przyciągają się wzajemnie. W drugim przypadku mamy układ, złożony ze słońca i z planety; między temi ciałami działa ciążenie. Sprężyna jest układem, którego części, gdy je oddalamy od siebie, odpowiadają sprężystą reakcją. W ostatnim przypadku układ składał się z pewnej liczby ciał naelektryzowanych; takie ciała odpychają się lub też przyciągają się wzajemnie. Przypuśćmy, że pewna *praca* została *wykonana* w układzie; dzieje się to wówczas, gdy składowe części układu zbliżają się ku sobie albo oddalają od siebie, gdy wogóle zmienia się ich wzajemne położenie względem siebie. Praca ta *nie zginęła*, nie jest stracona; gdy składowe części układu przybiorą napowrót pierwotne swoje położenie względem siebie, wyłożona praca zostanie *zwrócona*. Praca jest wykonywana, gdy kamień oddala się od ziemi lub planeta od słońca, gdy sprężyna wydłuża się, gdy jednoimiennie naładowane ciała zbliżają się ku sobie lub różnoimiennie naładowane oddalają od siebie; praca jest

zwracana, gdy kamień zbliża się ku ziemi lub planeta ku słońcu, gdy sprężyna się kurczy, gdy jednoimiennie naładowane ciała oddalają się od siebie lub różnoimiennie naładowane zbliżają ku sobie. We wszystkich zatem przytoczonych przykładach widzimy, że w układzie mogą gromadzić się *zasoby pracy*, że może w nim istnieć *energja*. Taka energia, jak mówimy, jest pracą *in potentia*; to znaczy, że w razie wyzwolenia się może przeobrażać się w pracę; dlatego taką energję nazywamy *potencjalną*.

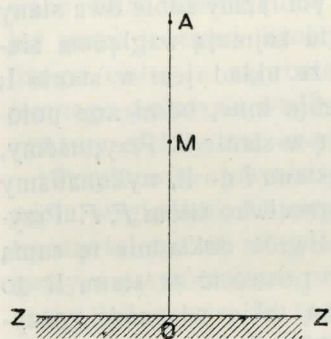
Wyobraźmy sobie układ materialny, który w skróceniu niechaj nazywa się *M*. Pomiędzy składowymi częściami tego układu mają działać siły, które oznaczamy przez *F, F*; są to zatem czynne w układzie siły *wewnętrzne*. Wyobraźmy sobie dwa stany układu *M*, stan I i II. Gdy części układu zajmują względem siebie określone położenie, powiadamy, że układ jest w stanie I; gdy te części przybrały względem siebie inne, odmienne położenie, powiadamy, że układ znajduje się w stanie II. Przypuśćmy, iż, zmuszając układ *M* do przejścia ze stanu I do II, wykonaliśmy w układzie w tem przejściu pracę *W* przeciwko siłom *F, F*. Przypuśćmy powtórę, że otrzymujemy napowrót dokładnie tę samą pracę *W*, gdy układowi *M* pozwalamy powrócić ze stanu II do początkowego stanu I. Jeżeli układ ma takie własności, nazywamy go *zachowawczym układem*, siły zaś wewnętrzne, które są w nim czynne, nazywamy *zachowawczemi siłami*. Gdy układ jest zachowawczy, przypisujemy mu w każdym stanie pewną *potencjalną energję*; na przykład w stanie I przypisujemy mu potencjalną energję U_I , w stanie II potencjalną energję U_{II} . Za określenie potencjalnej energii *U* przyjmujemy następujące równanie:

$$1. \quad W = U_{II} - U_I.$$

Praca *W*, wykonana w przejściu ze stanu I do stanu II, jest zatem równa zmianie, której w tem przejściu doznała potencjalna energia układu. Jeżeli w przejściu z I do II wykonano w układzie dodatnią pracę *W* wobec sił *F, F*, wówczas U_{II} jest większa niż U_I ; w przejściu z I do II energia potencjalna układu powiększyła się zatem. W przejściu przeciwnym, od II do I, układ zwraca napowrót pracę *W*; energia potencjalna zmniejsza się wówczas i powraca do początkowej wartości U_I .

§ 78. Energia potencjalna pola ciężkości.

Zastosujmy pojęcia, które obecnie poznaliśmy, do ponownego rozważenia praw, rządzących jednorodnym polem ciężkości. Wyobraźmy sobie punkt materialny w jednorodnym polu ciężkości; oznaczmy przez m masę tego punktu. Punkt m , jak wiemy, nie stanowi sam przez się całkowitego układu; układ, który wypada nam obecnie rozważać, składa się z kuli ziemskiej i z punktu; jest to oczywiście układ zachowawczy. Gdy punkt m znajduje się w miejscu O , na powierzchni ziemi ZZ (rys. 77), powiadamy, że układ jest w stanie (O); gdy ten punkt podnieśliśmy do miejsca



Rys. 77.

M , leżącego w wysokości z ponad poziomem ZZ , mówimy, że układ znajduje się w stanie (M). Przez U_0 oznaczamy energię potencjalną układu w stanie (O), przez U tę samą energię w stanie (M).
Podnosząc punkt m o wysokość z , wykonaliśmy pracę mgz przeciwko ciężkości; według równania (1) § 77-go mamy więc

$$1. \quad U = U_0 + mgz.$$

Przypuśćmy, iż podnieśliśmy punkt m aż do miejsca A (rys. 77), w którym jego wzniesienie ponad ZZ wynosi OA lub przypuśćmy h . Oznaczając przez U_A energię potencjalną układu w stanie (A), mamy podług poprzedzającego wzoru (1):

$$2. \quad U_A = U_0 + mgh.$$

W miejscu A pozostawiamy punkt m samemu sobie, nie udzielając mu żadnej prędkości. Pod wpływem przyciągania ziemi punkt biegnie na dół pionowo; gdy przebył drogę AM , którą oznaczmy przez s , znajduje się w wysokości OM czyli z (albo $h-s$) ponad powierzchnią ziemi; energia potencjalna układu ma wówczas wartość U , daną przez (1). Gdy zatem punkt spadał, energia potencjalna układu zmniejszała się; w przejściu ze stanu (A) do stanu (M) układ stracił ilość

$$3. \quad U_A - U = mg(h-z) = mgs$$

potencjalnej energii. Jednakże widoczną jest rzeczą, że układ

zyskiwał wówczas kinetyczną energję; spadając, punkt osiąga coraz większe prędkości. Prędkość v punktu m w uważanym miejscu M drogi jest dana, jak wiadomo, przez formułę

$$4. \quad v^2 = 2gs$$

(por. §§ 17 i 46); energia kinetyczna punktu w miejscu M wynosi przeto

$$5. \quad \frac{1}{2}mv^2 = mgs,$$

tylęż, ile, według (3), wynosi strata energii potencjalnej. *Układ zyskał tyle kinetycznej, ile stracił potencjalnej energii.*

Rozważmy teraz zjawisko odwrotne. Przypuśćmy, że w miejscu O na powierzchni ziemi (rys. 77) punkt m został wyrzucony pionowo do góry z prędkością v_0 ; w tej początkowej chwili punkt miał zatem kinetyczną energję $\frac{1}{2}mv_0^2$. Z §§ 18-go i 58-go wiemy, że punkt będzie się wznosił ruchem opóźnionym; jego kinetyczna energia będzie się więc stopniowo wyczerpywała, natomiast potencjalna energia układu (złożonego, jak dawniej, z ziemi i z punktu) będzie wzrastała. W chwili t , w której osiągnięta wysokość wynosi OM czyli z , mamy prędkość

$$6. \quad v = v_0 - gt;$$

zarazem mamy

$$7. \quad z = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

(por. § 58). Z równań (6) i (7) wyprowadzamy

$$8. \quad v^2 = v_0^2 - 2gz$$

a zatem

$$9. \quad \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = mgz = U - U_0.$$

Układ zyskuje więc tyle potencjalnej, ile traci kinetycznej energii.

§ 79. Energja całkowita pola ciężkości.

Całkowitą energję układu, złożonego z ziemi i z punktu, nazwijmy sumę E jego kinetycznej i potencjalnej energii:

$$1. \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + U.$$

Gdy punkt m spada swobodnie, układ zyskuje tyle kinetycznej, ile traci potencjalnej energii (§ 78); zatem *całkowita energja E pozostaje niezmienna*. Ażeby sprawdzić ten wniosek, zwracamy się do równań (3) i (5) artykułu poprzedzającego; wypada z nich natychmiast, że

$$2. \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + U = U_A.$$

Mamy tu dwie energie: kinetyczną i potencjalną; każda z osobna

jest zmienna podczas spadania, ale ich suma jest stała, ponieważ jest wciąż równa stałej wartości U_A .

Obliczamy jeszcze raz całkowitą energię układu w początkowym stanie (A) i w końcowym stanie (O); por. rys. 77. W stanie (A) mamy $v = 0$ oraz $U = U_A$; z obecnego równania (1) wynika więc, że $E = U_A$, jak być powinno. W stanie (O) mamy $v^2 = 2gh$ oraz $U = U_0$; z równania (1) wypada zatem, że

$$3. \quad E = mgh + U_0$$

lub, według (2) § 78-go: $E = U_A$.

Weźmy na uwagę zjawisko odwrotne, opóźniony ruch punktu, wyrzuconego pionowo do góry. Z równania (9) w artykule poprzedzającym wnosimy, że

$$4. \quad \frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{1}{2}mv_0^2 + U_0;$$

a zatem, przez cały czas ruchu, całkowita energia E pozostaje równa swojej początkowej wartości E_0 . Według § 58-go mamy $v_0^2 = 2gh$; początkowa wartość E_0 wypada więc

$$5. \quad E_0 = mgh + U_0;$$

przez porównanie z formułą (2) § 78-go otrzymujemy $E_0 = U_A$. W miejscu A największego wzniesienia mamy $v = 0$; w tem miejscu toru mamy więc znowu $E = U_A$.

Uczyńmy tu jeszcze niektóre uzupełniające uwagi. W poprzedzającym i w niniejszym artykule odnosiliśmy ruch spadającego punktu do kuli ziemskiej jako do ciała odniesienia. Rozumowaliśmy tak, jak gdybyśmy uważali kulę ziemską za nieruchomą, jak gdybyśmy jej kinetyczną energję uznawali za równą zeru. Kula ziemska nie jest nieruchoma; wiemy, że biegnie dokoła słońca po eliptycznej orbicie; wspólnie ze słońcem porusza się, prawdopodobnie po linii prostej, względem gwiazd stałych. Punkt spadający ku ziemi uczestniczy we wszystkich jej ruchach. Kinetyczna energia punktu, o której mówiliśmy w powyższym wywodzie, jest więc energją ruchu punktu *względem* ziemi. Potencjalna energia układu jest podobnie energją położenia punktu *względem* ziemi.

Przypuszczaliśmy w poprzedzającym wywodzie, że przyciąganie, czynne pomiędzy ziemią a punktem, jest *jedyną* siłą, czynną w układzie; innemi słowy, układ, złożony z ziemi i punktu, uważaliśmy za *odosobniony*. W istocie rzeczy taki układ nie jest ściśle odosobniony; według prawa powszechnego ciążenia księżyc, słońce, planety, nawet gwiazdy stałe, muszą wywierać pewne siły na kamień spadający albo rzucony; ale siły te są oczywiście bardzo słabe w porównaniu do siły ziemskiej ciężkości.

Jak wiemy, układ, złożony z ziemi i z punktu, jest zachowawczy. Porównajmy jego zachowanie się z własnościami innego układu. Przypuśćmy, że na poziomej powierzchni stołu leży kamień; gdy przesuwamy ten kamień po powierzchni stołu, nie wykonywamy pracy przeciwko sile ciężkości ani też siła ciężkości nie wykonywa pracy; wydajemy wówczas pracę z powodu tarcia, które stół przeciwstawia ruchowi (§ 62). Wydawanie tej pracy nie przyspasabia jednak układu do zwrócenia nam pracy wydanej. Tarcie nie może cofnąć kamienia napowrót, gdy przesunęliśmy go po powierzchni stołu; jeżeli życzymy sobie, by kamień wrócił do pierwotnego swego miejsca, musimy wyłożyć nową pracę na powrotne przemieszczenie. Układ, w którym działa tarcie, nie jest zachowawczy;

pracy, którą taki układ pochłania, niepodobna uznać za wzbogacenie jego potencjalnej energii.

Zadania.

1. Punkt o masie 100 gr znajduje się w wysokości 5 m nad powierzchnią ziemi. Jeżeli punkt spadnie na tę powierzchnię, jak zmieni się potencjalna energia układu, złożonego z ziemi i z punktu?

2. Punkt o masie 1 kg spada (bez początkowej prędkości) ze szczytu wieży pięciopiętrowej, której każde piętro ma 5 m wysokości; opór powietrza zanedbujemy. Obliczyć w poziomie każdego piętra kinetyczną energję punktu oraz różnicę wartości, które ma potencjalna energia układu (złożonego z ziemi i z punktu), gdy punkt jest w danym poziomie i gdy znajduje się na powierzchni ziemi; sprawdzić, że całkowita energia układu pozostaje niezmienna.

§ 80. Dalsze twierdzenia o polu ciężkości.

Przypuśćmy, że punkt, którego masa jest m , znajduje się w jednorodnem polu ciężkości. Wyobraźmy sobie, że punkt ten posuwa się w kierunku MQ (rys. 78), który tworzy kąt φ z kierunkiem MP , idącym pionowo do góry. Ciężar mg punktu działa wzdłuż MO ; jeżeli więc punkt posunął się o odstęp MB (albo l) po prostej MQ , wykonaliśmy pracę

$$1. \quad W = mgl \cos \varphi$$

wbrew sile ciężkości. Oznaczmy przez z rzut MA przemieszczenia MB na kierunek pionowy MP ; mamy

$$2. \quad W = mgz,$$

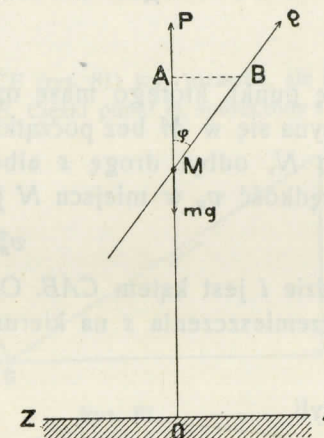
zatem praca W zależy tylko od pionowego podniesienia się z . Praca wykonana po drodze MB jest równa pracy, wykonanej po drodze MA i nie zależy od nachylenia drogi MB względem pionu.

Gdy punkt m posuwa się od M do B , energia potencjalna układu, składającego się z ziemi i z punktu, zmienia się według wzoru

$$3. \quad U_B - U_M = W;$$

zatem

$$4. \quad U_B = U_M + mgz.$$



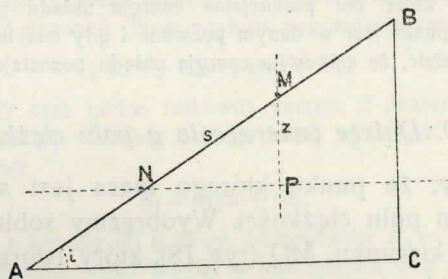
Rys. 78.

Otrzymujemy więc według § 78-go:

$$5. \quad U_B = U_A.$$

Czy punkt m zajmuje miejsce B , czy też miejsce A , nie ma to wpływu na potencjalną energję układu; zależy ona wyłącznie od t. zw. *poziomu* punktu t. j. od wysokości poziomej płaszczyzny, w której ten punkt jest położony.

Wyobraźmy sobie równię pochyłą AB (rys. 79), której tarcie zaniedbujemy (§§ 61 i 62). Przypuśćmy, że po tej równi posuwa



Rys. 79.

się punkt, którego masę oznaczamy przez m . Ruch punktu zaczyna się w M bez początkowej prędkości; gdy punkt dobiegnie do N , odbył drogę s albo MN i wiemy z § 61-go, że jego prędkość v_N w miejscu N jest dana przez

$$6. \quad v_N^2 = 2gs \sin i$$

gdzie i jest kątem CAB . Oznaczając więc przez z ($=MP$) rzut przemieszczenia s na kierunek pionowy, otrzymujemy

$$7. \quad v_N^2 = 2gz$$

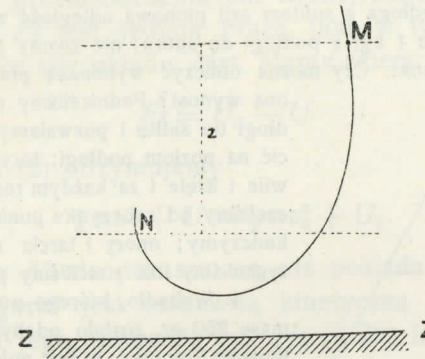
czyli

$$8. \quad \frac{1}{2}mv_N^2 = mgz = U_M - U_N.$$

Całkowita energia, czyli suma $\frac{1}{2}mv_N^2 + U_N$, pozostaje niezmienna w ruchu punktu po równi pochyłej. Energia kinetyczna powiększa się o tyle, o ile potencjalna maleje; albo zmniejsza się o tyle, o ile potencjalna narasta. Zmiana zarówno kinetycznej jak potencjalnej energii zależy wyłącznie od pionowego przemieszczenia się punktu.

Wnioski te pozostają prawdziwe i wówczas, gdy tor punktu jest krzywodrożny. Możemy wyobrazić sobie, że krzywodrożny tor MN (rys. 80) jest granicą, do której dąży nieograniczenie

rosnąca liczba nieograniczenie malejących, rozmaicie nachylnych dróg prostych; stosując się do każdej z tych dróg, twierdzenia poprzednie pozostają ważne i dla całości toru. Jako przy-



Rys. 80.

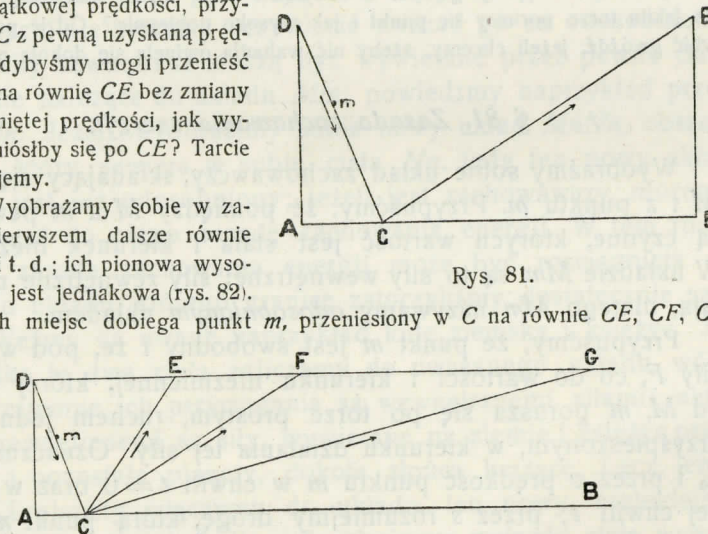
kład możemy przytoczyć ruch krzywodrożny, który odbywa punkt ciężki wahadła (§ 63); w tym ruchu obowiązują zatem powyższe twierdzenia.

Zadania.

1. Nachylenie do poziomu równi CD i CE (rys. 81) jest rozmaite, ale ich pionowa wysokość jest jednakowa: $AD = BE$. Ciężki punkt m , spuszczonej z D bez początkowej prędkości, przybiega do C z pewną uzyskaną prędkością. Gdybyśmy mogli przenieść go w C na równię CE bez zmiany tej osiągniętej prędkości, jak wysoko wzniosłby się po CE ? Tarcie zaniedbujemy.

2. Wyobraźmy sobie w zadaniu pierwszym dalsze równie CF , CG i t. d.; ich pionowa wysokość AD jest jednakowa (rys. 82).

Do jakich miejsc dobiega punkt m , przeniesiony w C na równie CE , CF , CG



Rys. 82.

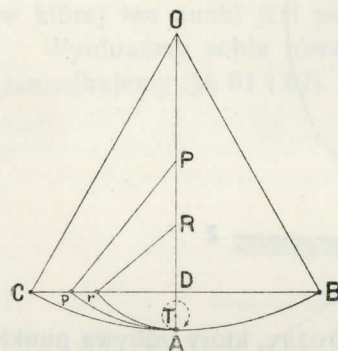
i t. d. bez straty prędkości? Pochylamy równie coraz bardziej; w końcu otrzymujemy równię CB poziomą. Dokąd dobiegnie punkt m , przeniesiony na CB

bez zmiany osiągniętej prędkości? Idąc za myślą tego rozumowania, zostajemy doprowadzeni do wygłoszenia jednego z zasadniczych praw dynamiki; mianowicie którego?

3. Pomiędzy podłogą a sufitem sali pionowa odległość wynosi 5 m. Podnosimy punkt, o masie 1 kg, z podłogi do sufitu; nie znamy jednak toru, po którym poruszał się punkt. Czy można obliczyć wykonaną pracę? Jeżeli tak, ile

ona wynosi? Podnieśliśmy punkt 7 razy z podłogi do sufitu i pozwalamy mu 7 razy powrócić na poziom podłogi; tory przejścia były zaiste i kręte i za każdym razem odmienne. Zaczęliśmy od spoczynku punktu i na spoczynku kończymy; opory i tarcia zaniedbujemy. Czy zyskaliśmy lub straciliśmy pewną ilość pracy?

4. Wahadło, którego punkt ciężki posiada masę 250 gr, zostało odchylone o 30° od pionowego kierunku; w tem położeniu nie ma prędkości. Długość nici wahadła wynosi 80 cm. Obliczyć kinetyczną energię i prędkość, które wahadło mieć będzie, przebiegając przez najniższy punkt toru. Zakładamy $g = 981 \text{ cm/sek}^2$, opory i tarcia zaniedbujemy. Wahadło przebie-



Rys. 83.

gło przez najniższy punkt toru i wznosi się do góry po stronie przeciwnej; jak wysoko wzniesie się? jaką ma prędkość w miejscu największego wzniesienia?

5. Punkt ciężki wahadła OA (rys. 83) przebiega tor BAC od B do C ; BC jest pozioma. Wbijamy gwoździć w miejscu P albo R ; co stanie się wówczas? Po jakim torze poruszy się punkt i jak wysoko pobiegnie? Gdzie powinniśmy wbić gwoździć, jeżeli chcemy, ażeby nic wahadła owinęła się dokoła niego?

§ 81. Zasada zachowania energii.

Wyobraźmy sobie układ zachowawczy, składający się z ciała M i z punktu m . Przypuśćmy, że pomiędzy M a m pewne siły są czynne, których wartość jest stała i kierunek niezmienny. W układzie Mm są to siły wewnętrzne; siły zewnętrzne nie działają, dlatego Mm nazywamy *odosobnionym* układem.

Przypuśćmy, że punkt m jest swobodny i że, pod wpływem siły F , co do wartości i kierunku niezmienniej, której doznaje od M , m porusza się po torze prostym, ruchem jednostajnie przyspieszonym, w kierunku działania tej siły. Oznaczmy przez v_0 i przez v prędkość punktu m w chwili $t=0$ oraz w uważanej chwili t ; przez s rozumiejmy drogę, którą punkt m odbył pomiędzy temi chwilami. Wiemy z § 75-go, że

$$1. \quad Fs = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2).$$

Ponieważ układ jest zachowawczy, posiada potencjalną energję;

oznaczmy przez U_0 i przez U jej wartość w chwili $t=0$ oraz w uważanej chwili t . Przypuśćmy, że między temi chwilami ciało M nie doznało przemieszczenia ani żadnej zmiany wewnętrznej; wówczas praca Fs jest jedyną pracą, jaką w tym czasie wykonały wewnętrzne siły układu Mm . Mamy zatem według § 77-go:

$$2. \quad Fs = U_0 - U.$$

Z równań (1) i (2) otrzymujemy

$$3. \quad \frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{1}{2}mv_0^2 + U_0.$$

Ponieważ masa M nie porusza się, nie posiada zatem kinetycznej energii; $\frac{1}{2}mv^2$ jest całkowitą kinetyczną energją układu; $\frac{1}{2}mv^2 + U$ jest jego *całkowitą energją* (§ 79), którą, jak dawniej, oznaczamy przez E . Równanie (3) przepisujemy zatem w postaci

$$4. \quad E = E_0.$$

Jeżeli układ zachowawczy jest odosobniony, jego całkowita energia pozostaje niezmienna. W tem zdaniu wypowiedzieliśmy nadzwyczajnie ważne twierdzenie, które w dynamice nazywa się *zasadą zachowania energii*.

Jeżeli układ Mm pozostaje pod wpływem pewnych sił zewnętrznych, nie możemy oczywiście uważać go za odosobniony. Ale te siły zewnętrzne muszą być wywierane przez pewne ciała obce, nie należące do układu Mm ; powiedzmy na przykład przez ciała Nn . Jeżeli wyobrazimy sobie nowy układ $MnNn$, obszerniejszy, który zawiera w sobie ciała Nn , tedy ten nowy układ $MmNn$ jest już odosobniony; jeżeli jest zachowawczy, możemy zastosować do niego zasadę zachowania energii. W tem rozumieniu zasada zachowania energii może być rozciągnięta do każdego układu, którego granice zatoczyliśmy dostatecznie szeroko. Weźmy na uwagę na przykład kulę ziemską i księżyc. Jeżeli tylko te dwa ciała zaliczamy do uważanego układu, wówczas wzajemne ich przyciągania są wewnętrznymi siłami; natomiast zewnętrznymi są siły, wywierane na ziemię i księżyc przez słońce i pozostałe planety, dokoła słońca krążące. Lecz jeżeli słońce i planety włączymy do układu, ten nowy, rozleglejszy układ będzie niemal ściśle odosobniony; gwiazdy stałe wywierają nań wpływ bardzo nieznaczny.

W szczególnym przypadku jednorodnego pola ciężkości wypowiedzieliśmy już zasadę zachowania energii w §§ 78 i 79-ym; w artykule niniejszym wygło-

siliśmy ją w nieco ogólniejszych, lecz jeszcze stosunkowo dość ciasnych założeniach. Zasada zachowania energii, w takiej postaci, jaką poznaliśmy tutaj, jest *ogólna* i rozciąga się do całego zakresu dynamiki. Wyobraźmy sobie na przykład dwie materialne cząstki swobodne i pozbawione początkowych prędkości; cząstki te ciążą ku sobie stosownie do prawa Newtona (§ 53); pod wpływem tego ciężenia biegną ku sobie. Ponieważ wzajemne przyciąganie się punktów staje się wówczas coraz większe, ruch ich zatem *nie* jest jednostajnie przyspieszony, jest w wyższej mierze przyspieszony aniżeli jednostajnie. Rozumowanie niniejszego artykułu nie stosuje się do takiego przypadku; dokładniejszy rachunek wykazuje jednakże, iż zasada zachowania energii i w tym razie jest ściśle prawdziwa.

§ 82. Siły zachowawcze i niezachowawcze.

Jeżeli tylko siły zachowawcze są czynne w pewnym układzie, wówczas wszystko, co stało się w tym układzie, może się odstać; zmiany są w nim *odwracalne*, mogą, gdy dokonały się, cofać się wstecz. W polu ciężkości ciało może spadać ku ziemi, ale może też zostać rzucone do góry. Kołyszące się wahadło może wznosić się ku górze, lecz wówczas niebawem zawraca i opada ku dołowi. Obiegając słońce po eliptycznej orbicie, planeta raz zbliża się ku słońcu, to znowuż od niego oddala się. Umocowana na sprężynie cząstka materialna, gdy odbywa drgania, może wyciągać sprężynę, ale może również ją ścisnąć. Wszelkie takie zjawiska możemy uważać za *odwracalne przemiany energii*. Gdy ciało spada ku ziemi, kinetyczna energia tworzy się kosztem potencjalnej; gdy ciało biegnie ku górze, potencjalna wzrasta kosztem kinetycznej. W kołysaniu się wahadła, w eliptycznym ruchu planety, w drganiu umocowanej na sprężynie cząstki dostrzegamy podobnie kolejne przemiany potencjalnej energii w kinetyczną, kinetycznej w potencjalną.

Nie wszystkie jednak siły w przyrodzie są zachowawcze; dlatego zjawiska w istocie *nie* są odwracalne. Rzeczywiste zjawiska składają się z odwracalnych i z nieodwracalnych przemian energii, sprzężonych ze sobą, nieodłącznych od siebie. Innymi słowy, odwracalnym przemianom energii towarzyszą wszędzie nieodwracalne, które nie cofają się nigdy.

Ileż razy w ciągu tej książki musieliśmy dla ścisłości zastrzeżać, że wyobrażamy sobie odwracalne zjawisko *bez* nieodwracalnych, które w istocie rzeczy są z niem połączone! Przypuszczaliśmy, że planety i księżyce krążą, że ciała ciężkie spadają w próżni zupełnej; przypuszczaliśmy, że równie pochyłe,

stoły i szyny mogą nie okazywać tarcia; że sprężyny lub widelki strojowe są niezmiennie i niejako wieczyste; że nici wahadeł są doskonale giętkie i nierozciągliwe; że różne pręty, sztaby i płyty są bezwzględnie sztywne, że bez żadnej zmiany postaci krępują i ograniczają ruch punktów. Zakładaliśmy fikcyjne okoliczności zagadnień; przypuszczaliśmy idealne warunki, do których zjawiska mogą się tylko przybliżać; wyobrażaliśmy sobie świat prostszym, niż nim jest rzeczywistość. W przyrodzie niema ruchu bez lepkości, bez tarcia, bez uderzeń, oporów lub przeszkód; każdy ruch napotyka na przeciwności podobne i musi z nimi się zmagać. Czy wznosi się czy opada, wahadło zawsze doznaje oporów, które ruch jego hamują; one wahadło nigdy nie przysparzają energii, zawsze ją odbierają i gubią. Sprężyna może się skręcać i znowu rozkręcać; taśma kauczukowa może się wyciągać i napowrót się kurczyć. Ale niema sprężyn ani taśm doskonale sprężystych; ustrój ciała nieznacznie rozluźnia się przy każdym odkształceniu; własności jego sprężyste, powoli lecz niepowrotnie, zanikają i giną.

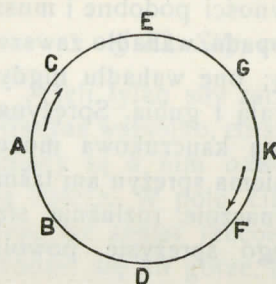
Powtarzamy: *nie* wszystkie siły są zachowawcze. Prócz zachowawczych działają w zjawiskach siły *niezachowawcze* czyli *rozpraszające*. Właściwe znaczenie tej drugiej nazwy zrozumiemy niebawem.

§ 83. Perpetuum mobile.

Perpetuum mobile jest to nazwa dawnej mrzonki, starego błędu czy obłędu; jest to napis nad smutną kartą w dziejach ludzkiej myśli. W rozmaitych epokach, zwłaszcza w XVI-em, XVII-em, nawet jeszcze w XVIII-em stuleciu niezliczeni pseudowynalazcy silili się na wymyślenie maszyny, która mogłaby wytwarzać dowolne ilości pracy z niczego. Ale wynalazek taki nie powiódł się *nigdy, nikomu*. Prawdziwi badacze natury ostrzegali zawsze przed takimi bezpłodnymi próbami, twierdząc, że *perpetuum mobile* jest niemożliwe. Już w roku 1775 oświadczyła Akademia Nauk w Paryżu, że będzie odrzucała bez rozbiórki rękome rozwiązania mniemanego zagadnienia, jakim być miało zbudowanie *perpetuum mobile*. Mimo werdyktu nauki, jeszcze i dzisiaj zdarzają się ludzie, których nieuctwo, powierzchowność i zarożumiałość sprowadzają na manowce owej ułudy.

Wyobraźmy sobie pewien układ *M* zachowawczy. Wyobraźmy sobie na przykład, że ciało ciężkie znajduje się w próżni, w polu

ciężkości; że planeta znajduje się w próżni, w polu ciężenia; że punkt masywny jest połączony z niezmienną sprężyną; że ciało naelektryzowane umieściliśmy w izolującym ośrodku, w polu elektrycznym. Przypuśćmy, że układ M jest w pewnym początkowym stanie A , w którym położenia i prędkości jego części składowych są określone. Wyobraźmy sobie, że zmusiliśmy układ do przejścia ze stanu A do innego stanu K , przyczem układ pochłonął zzewnątrz ilość pracy W . Przypuśćmy, że, dążąc od stanu początkowego A do końcowego K , układ przebiegł stany



Rys. 84.

pośrednie C, E, G ; mówimy w przenośni, że odbył niejako drogę $ACEGK$ (rys. 84). Niechaj układ powraca teraz z końcowego stanu K do początkowego A po drodze odmiennej, np. po drodze $KFDBA$. Układ odbył ostatecznie zjawisko $ACEGKFDBA$; doprowadziło go ono napowrót do stanu A , od którego rozpoczęło się; takie zjawisko nazywamy *kołowem*. Ponieważ układ jest zachowawczy, zatem praca, wydana przez układ nazewną po drodze $KFDBA$, jest równa pracy, pobranej przez układ zzewnątrz na drodze $ACEGK$ (§ 77); i pierwsza praca i druga wynosi W . Ostateczna suma pracy, pochłoniętej przez układ na drodze kołowej, jest równa zeru; możemy równie słusznie powiedzieć, że ostateczna suma pracy, wydanej nazewną przez układ na drodze kołowej, jest równa zeru.

Machina, która ma być nieprzerwanie czynna, winna odbywać zjawisko kołowe; do nieograniczonej działalności tylko wówczas jest zdolna, gdy co pewien czas periodycznie powraca do stanu swego początkowego. Widzimy zatem, że *układ zachowawczy nie może stanowić perpetuum mobile*; okresowo pracując, układ zachowawczy nie może oddawać więcej pracy nazewną, niż zzewnątrz jej czerpie; nie może pracy dostarczać, której skądkolwiekby nie otrzymał.

Wyrażając się obrazowo, możemy powiedzieć, że przyroda w postaci *pracy* załatwia swoje rachunki; pracę przechowywa i chroni, ale i nas także zmusza do rzetelności. Kto usiłuje zbudować *perpetuum mobile*, zamierza podstępnie podejść przyrodę. Ale natury nie można oszukać; umiemy jej rozkazywać, lecz tylko wówczas, gdy jej prawom jesteśmy posłuszni.

Łacińskie wyrażenie *perpetuum mobile* znaczy dosłownie coś, co może poruszać się wiecznie. Owóż układ zachowawczy może poruszać się wiecznie; wprawiony w ruch, taki układ musi poruszać się bez końca, jak krążąca w próżni dokoła słońca planeta lub wahające się w próżni doskonałe wahadło. Biorąc tę nazwę dosłownie, powiedzielibyśmy zatem, że *perpetuum mobile* jest urzeczywistnione w każdym zachowawczym układzie. Ci jednak, którzy upierali się przy niedorzeczności, noszącej tę nazwę, dążyli do czegoś całkiem innego: dowolne ilości pracy chcieli wytwarzać z niczego. W samej więc nazwie *perpetuum mobile* tkwi pomyłka, zresztą zrozumiała, ponieważ nazwa ta pochodzi z epoki, w której prawa ruchu i pracy nie były jeszcze znane. Nazwy w nauce bywają niekiedy przestarzałe, niestosowne lub mylne; treści żadnego pojęcia nie powinniśmy domniemywać się z nazwy, lecz wywodzić ją z określenia.

§ 84. Uogólniona zasada zachowania energii.

Doszliśmy przed chwilą do wniosku, że układ zachowawczy nie może stanowić *perpetuum mobile*. Ale wiemy skądinąd, że zachowawcze układy nie istnieją (§ 82); w każdym rzeczywistym materialnym układzie, prócz zachowawczych, działają siły niezachowawcze. Zatem układ rzeczywisty, gdy odbywa zjawisko kołowe, nie tylko nie może oddawać nazewną coraz nowych ilości pracy, lecz przeciwnie musi czerpać, musi ssąć pracę zzewnątrz za każdym obiegiem, ażeby ją wydawać na walkę z oporami i tarcie. *Perpetuum mobile* żąda więc tam *dodatniego* wyniku, gdzie w najlepszym razie otrzymać możemy *mały ujemny*.

Z pewnością nie istnieje nigdzie energia, która nie istniała już przedtem; z pewnością nie stwarzamy nigdy energii z niczego. Czy jednak nie umiemy jej niszczyć? czy nie widzimy codziennie, że ona pozornie ginie w przyrodzie? Energia kinetyczna znika, gdy pocieramy zapalnik, gdy ruch pociągu wstrzymują hamulce; w cóż zamienia się wówczas? Gdy młotem uderzamy podkowę, energia ruchu napozór gdzieś ginie. Woda, oliwa lub smoła odbiera energję ciała, które porusza się w takim ośrodku; co dzieje się z tą energją? Gdzie kryje się praca, której nie zwraca napowrót niedoskonale sprężysta taśma albo sprężyna?

Newton sądził, że energia ginie istotnie w podobnych przypadkach; tego mniemania była większość uczonych aż do połowy XIX-go stulecia. Prawo zachowania energii wydawało się wówczas twierdzeniem idealnym, wnioskiem oderwanej dynamiki, prawdziwym tylko dla zachowawczych układów, nieściśłem

i nieobowiązującym dla układów rzeczywistych. Lecz w połowie XIX-go stulecia Joule, Mayer, Helmholtz i inni wielcy badacze odrzucili ten lękliwy sposób myślenia; zrozumieli, że jego bezpłodność tkwi w jego ciasnocie. Joule, Mayer i Helmholtz przypuścili, że, prócz zwykłej w dynamice (kinetycznej i potencjalnej) energii, istnieje ciepła, chemiczna, elektryczna, magnetyczna, elektromagnetyczna, promienista energia; założyli, że zasada zachowania energii stosuje się nie tylko do zjawisk ruchu lecz *do wszelkich wogóle zjawisk fizycznych*. Z zasady dynamiki uczynili tym sposobem zasadę całej nauki o przyrodzie; dokonali zarazem (jak wyrzekł Lord Kelvin) «największej reformy, jakiej doznała fizyka od czasów Newtona».

Gdy kinetyczna energia działaniem tarcia pozornie zamiera, nie przepada ona istotnie; zamienia się w ciepłą energję. Gdy ruch ciała, poruszającego się w powietrzu, w wodzie lub innym ośrodku, napotyka na opór, energia nie ginie; rozlewa się tylko na znaczną masę ośrodka. Uderzywszy o podłogę, kula lub piłka nie odskakuje napowrót ze ściśle tą samą kinetyczną energją, jaką miała, spadając; wyginana pałeczka, nić wciągana, skręcana sprężyna zluźniają się i tracą sprężyste własności. Przy każdym bowiem odkształceniu ciała te zużywają nieco energii na zmianę swej własnej budowy; zmiana taka wymaga pracy, podobnie jak wymaga jej rozłupanie drzewa, zmiżdżenie kryształu soli, stopienie kawałka ołowiu lub podniesienie kamienia o pewną wysokość.

Wszystko wymaga pracy i nic jej nie niszczy. Energia przelewa się z ciała do ciała albo z miejsca do miejsca, staje się niekiedy użyteczna lub nieużyteczna, ważna dla nas albo też obojętna; zmienia kształty, własności a wówczas zmienia i nazwy, pod którymi ją znamy; ale nie tworzy się nigdy i nigdy nie ginie. Taka jest treść wielkiej prawdy, która nazywa się w fizyce *zasadą zachowania energii*. Powrócimy do niej niejednokrotnie w późniejszych rozdziałach tej książki.

ROZDZIAŁ PIĄTY.

O równowadze i ruchu ciał sztywnych.

§ 85. O ciałach sztywnych.

W dotychczasowych wywodach zajmowaliśmy się różnemi przypadkami równowagi lub ruchu punktów materialnych. Wiemy jednakże, że punkty materialne w przyrodzie nie istnieją; istnieją *ciała rozciągłe*, które nie są punktami; dlatego badanie równowagi lub ruchu punktów może być tylko wstępem do zrozumienia praw, według których ciała poruszają się lub pozostają w spoczynku. Do wykładu tych właśnie praw, jednak tylko w najprostszych przypadkach, przechodzimy obecnie.

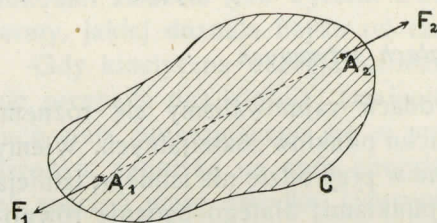
Gdy rzeczywiste ciała materialne poddajemy działaniu sił, dostrzegamy zazwyczaj, że one doznają pewnych zmian postaci; takie zmiany nazywamy *odkształceniami*. Odkształcenia bywają niekiedy *znaczne* i bezpośrednio podpadają pod zmysły; cienką trzcinową laseczkę łatwo wyginamy, kauczukową rurkę łatwo wyciągamy, ujawszy ją w ręce; postać sprężyny zmieniamy dowolnie, kosztem słabego wysiłku. W wielu jednak razach odkształcenia ciał są *małe* a nawet bardzo małe, jeżeli wywierane siły nie są wyjątkowo ogromne. Wyobraźmy sobie na przykład ciało, wyrobione z kamienia, z cegły, mosiądzu lub żelaza; wiemy, że takie ciało odkształca się nader nieznacznie pod wpływem na przykład własnego ciężaru albo też sił, które możemy wywrzeć bezpośrednim mięśniowym wysiłkiem. Od tego spostrzeżenia jest tylko jeden krok do utworzenia pojęcia *ciał doskonale sztywnych*. *Ciało, które nie odkształcałoby się wcale pod wpływem przyłożonych do niego sił*, nazywamy ciałem *doskonale sztywnem* (lub, dla zwięzłości, krótko *sztywnem*).

Pojęcie ciała niezmiennego, nieodkształcalnego czyli (doskonale) sztywnego oczywiście jest fikcją, podobnie jak np. pojęcie płaszczyzny jest fikcją; ciała

doskonale sztywne w przyrodzie nie istnieją. Ale zjawiska równowagi i ruchu ciał materialnych rozciągłych są nadzwyczajnie zawite; ścisłe poznanie praw ich zachowania się jest bardzo trudnym zadaniem. Zaczynamy zatem badanie, zaniedbując odkształcenia, których ciała doznają; w tym celu tworzymy w dynamice pojęcie ciał sztywnych. Uwzględniając owe odkształcenia, przechodzimy już do innego działu nauki, zwanego *teorią sprężystości*.

§ 86. O przesuwalności siły przyłożonej do ciała sztywnego.

Wyobraźmy sobie ciało sztywne czyli bryłę sztywną C (rys. 85), poddaną działaniu dwóch równych i przeciwnych sobie sił F_1 i F_2 ,

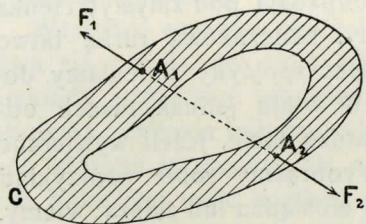


Rys. 85.

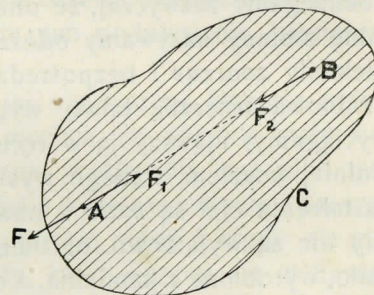
których kierunek działania leży w tej samej prostej A_1A_2 ; o takich siłach będziemy mówili, że są *umiejscowione* w tej prostej, np. F_1 i F_2 w A_1A_2 . Uznajemy za rzecz oczywistą, że siły F_1 i F_2 równoważą się czyli znoszą się wzajemnie, nie

sprawiając skutku. Twierdzenie to nie przestałoby być słuszne, gdyby prosta A_1A_2 , w której siły F_1 i F_2 są umiejscowione, przebiegała przez ciało C tylko w części swej długości (rys. 86).

Gdyby ciało C mogło odkształcać się, siły F_1 i F_2 , przedstawione na ry-



Rys. 86.



Rys. 87.

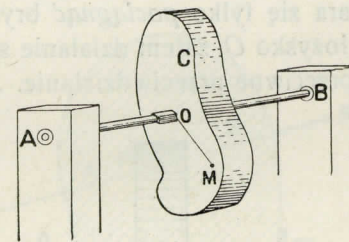
sunkach 85 lub 86, sprawiłyby w niem pewne wydłużenia w kierunkach linii prostej A_1A_2 oraz pewne skrócenia w kierunkach poprzecznych; lecz zaniedbujemy te odkształcenia, skoro ciało C uważamy za (doskonale) sztywne.

Na ciało sztywne C (rys. 87) działa siła F , przyłożona w punkcie A i umiejscowiona w prostej AB . Dodajmy w myśli dwie dalsze siły F_1 i F_2 , określone jak następuje: obiedwie są umiejscowione w prostej AB ; F_1 jest przyłożona do A , F_2 do B ; war-

tość każdej z tych sił jest równa wartości danej siły F ; kierunki F i F_2 są zgodne, kierunki F i F_1 są sobie przeciwne. Według poprzedniego założenia siły F_1 i F_2 znoszą się; dodając je zatem do siły F , nie zmieniamy przez to okoliczności zadania. Innymi słowy, ogół sił F , F_1 i F_2 sprowadza się do siły F . Ale tenże sam ogół sprowadza się do siły F_2 , albowiem F i F_1 , równe sobie, skierowane przeciwnie i przyłożone do tego samego punktu, znoszą się. A zatem siłę F możemy w zupełności zastąpić przez F_2 . Widzimy, że F_2 nie różni się od F ani umiejscowieniem ani wartością ani kierunkiem, lecz różni się od niej punktem przyłożenia, mianowicie B , gdy F jest przyłożona w A . Powiadamy: *siłę, przyłożoną do ciała sztywnego, możemy dowolnie przesuwać w prostej, w której ta siła jest umiejscowiona*. Ważne to twierdzenie zawdzięczamy Varignonowi (1654—1722).

§ 87. Obrót ciała sztywnego dokoła osi nieruchomej.

Ważnym i zajmującym przypadkiem ruchu bryły sztywnej jest jej *obróć dokoła nieruchomej osi*. Przypuśćmy, że chcemy wprawić ciało C (rys. 88) w ruch obrotowy. Przeciągamy przez to ciało sztywny pręt i łączymy go z ciałem niezmiennie; ów pręt, zwany *materiałną osią obrotu*, osadzamy w łożyskach, w których może kręcić się swobodnie. Pręt wraz z ciałem C może obracać się wówczas dokoła pewnej prostej AB , która jest prawdziwą, *idealną* czyli *geometryczną osią obrotu*. Punkt, leżący w tej prostej, nie porusza się podczas obrotu; każdy inny punkt ciała C , na przykład punkt M , porusza się podczas obrotu po obwodzie pewnego koła; płaszczyzna tego koła jest prostopadła do osi AB , promieniem koła jest prostopadła odległość OM punktu M od osi, środkiem koła jest przecięcie O tej prostopadłej z osią.



Rys. 88.

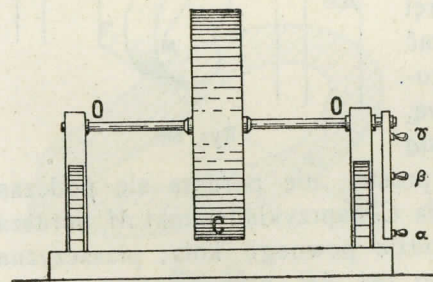
Punkt, leżący w tej prostej, nie porusza się podczas obrotu; każdy inny punkt ciała C , na przykład punkt M , porusza się podczas obrotu po obwodzie pewnego koła; płaszczyzna tego koła jest prostopadła do osi AB , promieniem koła jest prostopadła odległość OM punktu M od osi, środkiem koła jest przecięcie O tej prostopadłej z osią.

Jak powiedzieliśmy, opisany tu ruch nazywa się *obrotem* ciała sztywnego dokoła osi nieruchomej. Ruchem obrotowym ożywione bywają masywne koła rozpędowe machin, koła i kółka zegarów, a także wirownice, o których była mowa w § 67-ym. Względem firmamentu gwiazd stałych kula ziemską kręci się

około prostej, łączącej bieguny; zatem Ziemia dokonywa również obrotu dookoła swej osi, zachowując się przytem w przybliżeniu tak, jak gdyby była ciałem sztywnym.

§ 88. Moment siły względem osi obrotu.

Wyobraźmy sobie bryłę sztywną C , która może obracać się dookoła osi O , ale innego ruchu odbywać nie może, ponieważ oś O jest nieruchoma. Niechaj rys. 89 wyobraża prostopadłe do kierunku osi przecięcie bryły C ; ponieważ oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzny rysunku, przedstawia się więc na nim jako punkt O . Przypuśćmy, że na bryłę C działa prostopadła do osi siła F_0 , umiejscowiona w prostej, która przechodzi przez O . Oczywiście jest rzeczą, że taka siła F_0 nie może wywołać obrotu bryły; ona stara się tylko pociągnąć bryłę wraz z osią. Ale bryła opiera się o łożysko O , zatem działanie siły F_0 wzbudza w tem łożysku równe i przeciwne przeciwdziałanie. Jedynym wynikiem działania siły F_0



Rys. 90.

jest nacisk, wywierany przez oś na łożysko i przez łożysko na oś. Wyobraźmy sobie inną (znów prostopadłą do osi) siłę F (rys. 89), umiejscowioną w prostej AP , która nie przechodzi przez O . Widzimy natychmiast, że taka siła F może wywołać obrót bryły C dookoła osi O .

Od czego zależy wpływ, wy-

wierany przez siłę F na obrót ciała C , czyli zdolność tej siły do wykłacania ciała? Ta zdolność nie zależy jedynie od wartości siły F ; że tak jest, wiemy o tem z pospolitych doświadczeń. Jeżeli naprzykład masywne koło C (rys. 90) można kręcić dookoła osi OO zapomocą korby, na której, w rozmaitej odległości od osi, znajdują się trzy rękojeści α , β , γ , tedy zgadujemy, nawet

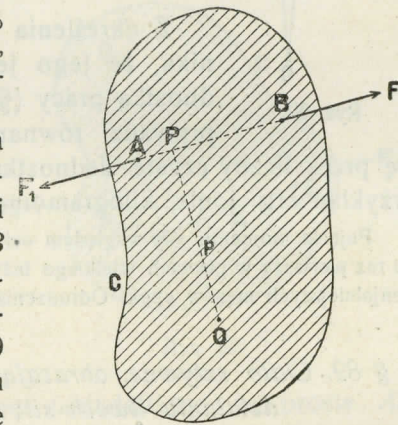
nie spróbawwszy, o ile łatwiej jest poruszyć C za pośrednictwem α niż zapomocą β lub tembardziej γ . Zdolność siły F do obracania ciała C dookoła osi O (rys. 89) zależy zatem (1) od wartości tej siły (2) od odległości, w której ona działa od osi obrotu. Lecz, według § 86-go, możemy dowolnie przesuwac siłę F w prostej AP , w której jest umiejscowiona; zdolność siły F do obracania ciała C dookoła osi O nie może więc zależeć od odległości OA punktu A przyłożenia siły od osi, musi raczej zależeć od odległości całej wogóle prostej AP od osi czyli musi zależeć od długości OP prostopadłej, poprowadzonej z O do AP (rys. 89). Ramieniem p (względem osi O) siły F , umiejscowionej w prostej AP , nazywamy właśnie długość OP prostopadłej, poprowadzonej z O do AP ; wartością momentu siły F (względem osi O) nazywamy iloczyn

1. Fp czyli: wartość siły $\times$ długość ramienia.

Moment siły względem osi jest liczbową miarą pewnej właściwości tej siły, mianowicie jej zdolności obracania ciała sztywnego dookoła uważanej osi.

Wniosek, do którego zostaliśmy doprowadzeni, stanie się zupełnie oczywistym w ciągu niniejszego rozdziału. Sprawdźmy go tymczasem na przykładzie siły F_0 , o której była mowa na początku artykułu. Ramie, zatem i moment siły F_0 względem osi O równa się zeru; istotnie, zdolność siły F_0 do kręcenia ciała C dookoła osi O nie istnieje.

Powyższe określenie pojęcia momentu nie byłoby wystarczające. Zważmy, że siła o wartości F , umiejscowiona w prostej AB (rys. 91), może mieć dwa przeciwne kierunki, jak F_1 i F_2 na rysunku. Niechaj rys. 91 (jak rys. 89 i jak wiele innych w następnych wywodach) wyobraża prostopadłe do osi O przecięcie bryły C . Dodatnim kierunkiem osi obrotu O



Rys. 91.

nazwijmy ten jej kierunek, który, od płaszczyzny rysunku zwracając się ku górze, biegnie ku czytelnikowi. Wyobraźmy sobie obserwatora, który spogląda na rys. 91 od strony dodatniego kierunku osi obrotu. Umawiamy się, że moment siły względem

dodatniego kierunku osi obrotu uważamy za *dodatni*, gdy ta siła stara się obrócić ciało C w kierunku, dla wspomnianego obserwatora *przeciwnym* do ruchu wskazówek na tarczy zegara. Jeżeli siła dąży do obrócenia ciała w kierunku, dla tego obserwatora *zgodnym* z kierunkiem ruchu wskazówek na tarczy zegara, moment tej siły względem dodatniego kierunku osi obrotu po-
czytujemy za *ujemny*. Według tej umowy

2a. moment F_1 względem $+O$ jest dodatni i wynosi $+F \cdot p$

2b. moment F_2 względem $+O$ jest ujemny i wynosi $-F \cdot p$, jeżeli F oznacza wartość liczbową siły F_1 lub siły F_2 na rys. 91-ym.

Przypuśćmy, że siła F , przyłożona w A , usiłuje obrócić ciało dokoła osi O (rys. 92). Wyobraźmy sobie, że dokonał się istotnie mały obrót ciała, o drobny kąt θ ; praca W , wykonana wówczas przez siłę F , równa się iloczynowi siły F przez przemieszczenie AB . Promieniem obrotu jest OA lub OB czyli ramię p siły F względem osi O . Jeżeli więc kąt θ został wyrażony w radianach (§ 3), mamy $AB = p \cdot \theta$ oraz

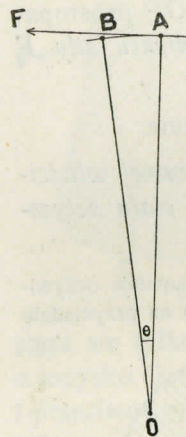
$$3. W = F \cdot AB = F \cdot p \cdot \theta = (\text{Mom. } F \text{ wzgl. } O) \times \theta.$$

Z określenia momentu siły względem osi wynika, że jego jednostka jest identyczna z jednostką pracy (§ 71); do tego samego wniosku prowadzi równanie (3), albowiem kąty wyrażają się przez liczby czyste. Jednostką momentu może więc być na przykład erg, joule, kilogramometr i t. p.

Pojęcie momentu siły względem osi obrotu spotykamy jasno sformułowane po raz pierwszy w pismach wielkiego inżyniera, artysty i badacza, jednego z najgenialniejszych mężów epoki Odrodzenia, Lionarda da Vinci (1452—1519).

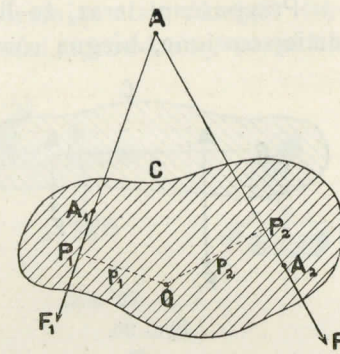
§ 89. Ciało sztywne, obracające się koło osi, jest poddane działaniu dwóch sił; warunek równowagi.

Przypuśćmy, że ciało sztywne C może tylko obracać się dokoła nieruchomej osi O ; rys. 93 przedstawia przecięcie ciała prostopadłe do tej osi. Wyobraźmy sobie, że do ciała C są przyłożone dwie siły, na przykład F_1 i F_2 na rys. 93-im; możemy łatwo rozstrzygnąć, czy one, wspólnie działając, wywołają obrót ciała C dokoła osi O , czy go nie wywołają. Każda z dwóch sił,



Rys. 92.

niezależnie od drugiej, usiłuje wykręcić ciało C dokoła O ; zdolność każdej siły do sprawienia tego obrotu zależy, jak wiemy, od jej momentu względem osi O . Dla obserwatora, spoglądającego na rys. 93-ci od strony dodatniego kierunku osi O , siła F_1 stara się obrócić bryłę na lewo (przeciwnie niż poruszają się wskazówki na tarczy zegara); siła F_2 stara się obrócić ją na prawo (tak samo jak poruszają się wspomniane wskazówki). Przez p_1 i p_2 oznaczmy ramiona (OP_1 i OP_2) sił F_1 i F_2 względem osi O ; moment siły F_1 względem dodatniego kierunku osi O wynosi $+F_1 p_1$, moment siły F_2 względem tegoż kierunku wynosi $-F_2 p_2$ (§ 88). Jeżeli zatem

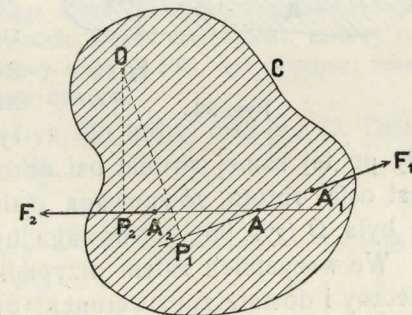


Rys. 93.

$$1. +F_1 p_1 - F_2 p_2 = 0,$$

wówczas ciało C nie obraca się; dążność siły F_1 do wywołania obrotu na lewo równoważy się wówczas z dążnością siły F_2 do wywołania obrotu na prawo. Jeżeli ciało sztywne, które może

tylko obracać się dokoła nieruchomej osi, jest poddane działaniu dwóch sił, znajduje się ono wówczas (i tylko wówczas) w równowadze, gdy momenty sił względem osi obrotu mają wartości równe, znaki zaś przeciwne. Prawidło to nazywa się *regułą momentów*; jego słuszność sprawdza się nieustannie w doświadczeniu codziennem.

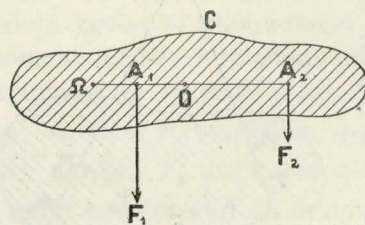


Rys. 94.

W rozumowaniu powyższem zakładaliśmy, że proste AP_1 i AP_2 (rys. 93), w których siły F_1 i F_2 są umiejscowione, przecinają się w pewnym punkcie A rysunku i że kierunki sił F_1 i F_2 tworzą w tym punkcie kąt *ostry*. Pozostawiając w mocy pierwsze z tych założeń, przypuśćmy, że kierunki sił przyłożonych F_1 i F_2 tworzą kąt *rozarty* w punkcie A przecięcia się prostych AP_1 i AP_2 (rys. 94). Poprzednie rozumowanie stosuje

się bez zmiany w obecnym przypadku; reguła momentów pozostaje w mocy, jej wyśłowienie nie zmienia się w niczym.

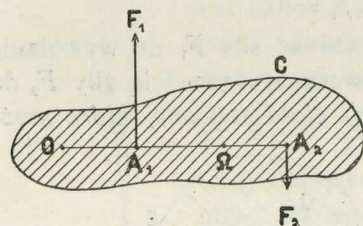
Przypuśćmy teraz, że linie proste, w których siły F_1 i F_2 są umiejscowione, biegną równolegle do siebie; nie przecinają się



Rys. 95.

one wówczas w żadnym punkcie rysunku. Kąt, który tworzą kierunki sił przyłożonych, wynosi w tym razie bądź 0° , bądź 180° ; w pierwszym przypadku nazywamy siły równoległe *zgodnie* skierowanymi, w drugim *sprzecznie* skierowanymi. Jeżeli siły równoległe F_1 i F_2 są zgodnie skie-

rowane (rys. 95), reguła momentów wskazuje, że linie proste ich umiejscowienia (A_1F_1 i A_2F_2) muszą znajdować się po przeciwnych stronach osi obrotu. Gdy na przykład O (rys. 95) jest osią obrotu ciała C , momenty sił F_1 i F_2 względem tej osi mają znaki przeciwne; gdyby osią tą była $+\Omega$ (rys. 95), obadwa momenty byłyby ujemne i równowaga byłaby niemożliwa. Jeżeli siły równoległe F_1 i F_2 są skierowane *sprzecznie* (rys. 96), reguła momentów wymaga, ażeby linie proste (A_1F_1 i A_2F_2), w których siły są umiejscowione, bie-



Rys. 96.

gły po tej samej stronie osi obrotu. Gdy na przykład O (rys. 96) jest osią obrotu, równowaga ciała C jest możliwa; gdyby osią tą była Ω (rys. 96), równowaga byłaby widocznie niemożliwa.

We wszystkich zatem przypadkach równanie (1) wyraża (konieczny i dostateczny) warunek równowagi ciała sztywnego, obracalnego koło nieruchomej osi. Równaniu temu możemy nadać kształt następującej proporcji:

$$2. \quad F_1 : F_2 = p_2 : p_1;$$

do równowagi potrzeba i wystarcza, ażeby wartości sił przyłożonych były odwrotnie proporcjonalne do długości ramion.

§ 90. O dźwigni.

Dźwignią w życiu potocznym nazywamy zwykle sztywny pręt albo sztabę, wogóle ciało sztywne wydłużonej postaci, które

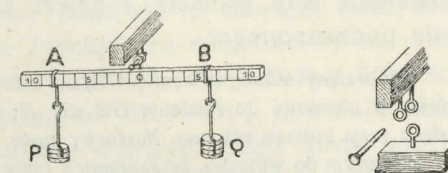
może kręcić się dokoła pewnej osi, najczęściej poziomej. Rysunki 97 i 98 wyobrażają proste typy dźwigni; ich urządzenie nie wymaga bliższych objaśnień. Zawieszając ciała różnych ciężarów w rozmaitych odległościach od osi, sprawdzamy na takich dźwigniach łatwo słuszność reguły momentów w przypadku sił równoległych, mianowicie ciężkości. W tem zastosowaniu reguła momentów bywa nazywana *zasadą dźwigni*.

Ścisłe rzecz biorąc, widzimy, że ciężary ciał zawieszonych nie są jedynymi siłami, które działają na dźwignie, wyobrażone na ryss. 97 i 98-ym; ciężary ramion dźwigni muszą współdziałać w ustanawianiu się ich równowagi. Lecz ciężary ramion są zazwyczaj nieznaczne w stosunku do ciężarów ciał zawieszonych.

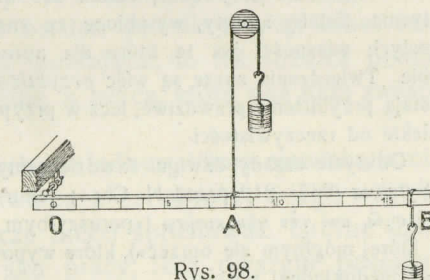
Zastosowania dźwigni są nadzwyczajnie częste i różne; oto niektóre przykłady: nożyce, szczypce, obcęgi, różne zgniatacze, krajalnice, wiosła, łopaty, drągi (służące do podważania), studnie, zwane «żorawiami», zastawy rogatki. Znany powszechnie przyrząd, zwany wagą (§ 102), jest dźwignią; nasze ręce i nogi działają również według praw dźwigni.

Wyobraźmy sobie dźwignię (rys. 99), której osią jest O . Działając w B siłą F , równowa-

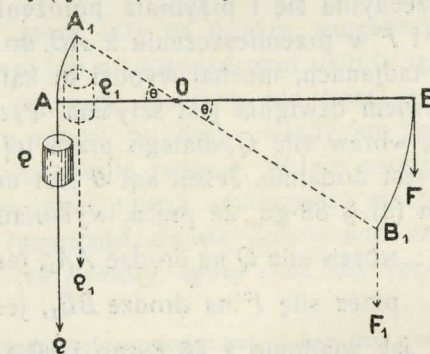
żymy ciężar Q ciała zawieszonego w A . Dla określoności przypuśćmy, że $OB = 2OA$; do równowagi potrzeba wówczas i wystarcza, aby wartość F była $= \frac{1}{2}Q$. Gdybyśmy przyłożyli w B siłę, która nieznacznie przewyższa wartość $\frac{1}{2}Q$, jej moment względem osi O byłby nieco większy niż moment ciężaru Q względem tejże osi; dźwignia poruszyłaby się zatem, jak wskazuje rysunek. Gdyby długość



Rys. 97.



Rys. 98.



Rys. 99.

ramienia OB była $= 3OA$, do równowagi potrzeba byłoby i wystarczałoby, ażeby F była $= \frac{1}{3}Q$; przykładając w B siłę nieco znacniejszą niż $\frac{1}{3}Q$, sprawilibyśmy, iż dźwignia poruszyłaby się. Widzimy, że dźwignia pozwala podnieść ciężkie ciało do góry działaniem siły słabszej, a nawet znacznie słabszej, niż ciężar ciała podnoszonego.

Wyobraźmy sobie, że ramię OA , na które działa ciężar Q , jest nadzwyczaj krótkie w stosunku do ramienia OB siły F ; że jest naprzykład dziesięć lub sto tysięcy razy krótsze niż ono. Można by może, nie rozważwszy rzeczy dokładnie, być skłonny do wniosku, że zapomocą takiej dźwigni potrafilibyśmy naciskiem dłoni podnieść do góry lokomotywę lub skałę. Lecz wniosek taki byłby mylny. Wszystkie powyższe nasze wywody zasadzają się na założeniu, że dźwignia jest ciałem doskonale sztywnem; żadna zaś dźwignia w istocie nie jest doskonale sztywna. Sztaby i pręty, wyrobione ze znanych nam ciał, nie mają nigdy tak prostych własności jak te, które dla uproszczenia rozumowań wyobrażaliśmy sobie. Twierdzenia nasze są więc *przybliżone*; gdy odkształcenia są małe, pozostają przybliżenie prawdziwe, lecz w przypadku znacznych odkształceń byłyby dalekie od rzeczywistości.

Odkrycie zasady dźwigni zawdzięczamy, o ile wiadomo, Archimedesowi z Syrakuz (287—212 przed N. Chr.); jemu bywa też przypisywane zdanie *δὲς ποῦ στῶ, καὶ τὴν γῆν κινήσω* («poruszyłbym ziemię, gdyby dano mi podstawę, na której mógłbym się oprzeć»), które wypowiada zasadę dźwigni w uderzającej, choć niedokładnej postaci.

§ 91. Praca sił czynnych podczas ruchu dźwigni.

Przypuśćmy, że dźwignia AB (rys. 99) znajdowała się z początku w położeniu poziomem; gdy wzmocniliśmy nieco siłę F , przechyliła się i przybrała położenie A_1B_1 . Obliczmy pracę sił Q i F w przemieszczeniu z AB do A_1B_1 . Kąt AOA_1 , zmierzony w radjanach, niechaj wynosi θ ; kąt BOB_1 wynosi również θ , albowiem dźwignia jest sztywna. Przemieszczenie AA_1 dokonywa się wbrew sile Q , dlatego praca tej siły jest ujemna; praca siły F jest dodatnia. Jeżeli kąt θ jest mały, wiemy, według twierdzenia (3) § 88-go, że praca, wykonana

1. wbrew sile Q na drodze AA_1 , jest $= -Q \cdot AA_1 = -Q \cdot OA \cdot \theta$
2. przez siłę F na drodze BB_1 , jest $= +F \cdot BB_1 = +F \cdot OB \cdot \theta$

Jak wiadomo z §§ 89-go i 90-go, wartość siły F , zapewniająca równowagę dźwigni, wynika z warunku

$$3. \quad Q \cdot OA = F \cdot OB;$$

do przechylenia (ale niezmiernie powolnego) dźwigni wystarcza

siłą, niezmiernie mało przewyższającą tę wartość F . Widzimy zatem z (1) i (2), że praca, dostarczana przez dźwignię, może być dowolnie mało różna od pracy, którą musimy wydać na poruszenie przyrządu; w granicy obiedwie prace stałyby się sobie równe. Słabą siłą możemy podnieść na dźwigni ciało, którego ciężar jest znaczny; ale zyskując na sile, tracimy na przemieszczeniu i w rachunku pracy nie odnosimy *żadnej korzyści*; wykonana praca jest mniejsza, ale może być dowolnie mało mniejsza od pracy, którą musimy wyłożyć. Skąd może pochodzić różnica pomiędzy pracą przez nas wydaną a tą, która nam zostaje zwrócona? Zasada zachowania energii odpowiada na to pytanie. Owa różnica musi być równa kinetycznej energii dźwigni. Ruch dźwigni może być bardzo powolny, więc kinetyczna energia tego ruchu może być znikająca; to też różnica pomiędzy pracą wyłożoną na dźwignię a pracą, którą ona nam zwraca, może być dowolnie mała.

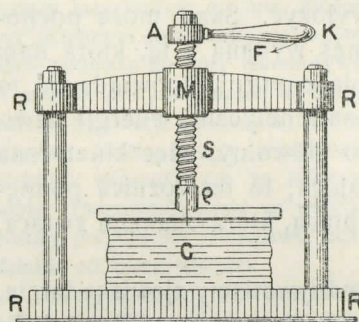
W twierdzeniach powyższych zaniedbywaliśmy zjawiska tarcia, które ruch każdej dźwigni wytwarza w osi obrotu; z tego względu musimy owe twierdzenia jeszcze nieco sprostować. Istotne dźwignie pracują nietylko bez zysku pracy, lecz owszem pociągają za sobą pewną jej *stratę*; praca, zamieniona przez tarcie na ciepłą energję, rozprasza się niepożytecznie i jest stracona dla celów, do których dążymy, posługując się dźwignią.

§ 92. O machinach.

Gdy kamień albo ciężka kłoda leży na drodze, zagrażając przejście, ludzie niewykształceni lub niedoświadczeni usiłują ręką tę zaporę na bok odrzucić; człowiek rozumny nie traci czasu na próżne wysiłki, udaje się raczej po drągi, windy lub inne przybory, które pozwolą na dokonanie zadania. W tym prostym przykładzie spostrzegamy, na czym polega użyteczność machin. *Machiny pozwalają siłami rozporządzalnemi dokonywać dzieł i czynności, do których, bez ich pomocy, zgola inne siły byłyby potrzebne.*

Dźwignia jest prostym przykładem maszyny; innym przykładem jest równia pochyła (§ 61). Jako maszyna działa zarówno tragarz, gdy podnosi kuferek, jak potężny «żoraw», który łatwo dźwiga wagon wyładowany. Machiny pozwalają podnosić, przesuwac i spuszczać ciężkie przedmioty, poruszać duże masy i utrzymywać je w ruchu wbrew tarcia, pozwalają giąć, walcować, ugniatać, przebijać, krajać, łupać, piłować lub miażdżyć ciała twarde i zbite, stawiające opór ogromny.

Według zasady zachowania energii żadna maszyna, jakakolwiek jest jej budowa, nie może dać więcej pracy, aniżeli jej dostarczamy. Maszyny nie oszczędzają pracy; mogą ją tylko tak przeobrażać, że jej dokonanie staje się możliwe. Lecz, w takim razie, czemu maszyny są użyteczne? czemu pozwalają nieraz małymi siłami cel pożądaný osiągnąć? Odpowiedź jest łatwa. Ilość wykonanej pracy zależy nie tylko od pracującej siły, lecz nadto od drogi, na której ta siła pracuje. *Korzyść na sile, zapewniona przez maszynę, bywa zwykle okupiona niekorzyścią na drodze.*



Rys. 100.

czyli oporem Q . Przypuśćmy, że w miejscu K działamy siłą F . Jeżeli obrócimy korbę AK raz jeden dookoła, punkt przyłożenia siły F odbywa drogę $2\pi r$ (gdzie r jest promieniem obrotu AK a zarazem ramieniem siły F względem osi obrotu), śruba zaś obniży się o pewną wysokość pionową h , która nazywa się *krokiem* śruby. Widzimy, że:

1. praca, wykonana przez siłę F na drodze $2\pi r$, jest $= 2\pi r F$
2. praca, wykonana wbrew sile Q na drodze h , jest $= h Q$.

Przypuśćmy, że ruch odbywa się nadzwyczajnie powoli i że wolno nam zaniedbać tarcie; w najkorzystniejszym (ściśle biorąc nieosiągalnym) przypadku uzyskalibyśmy pracę hQ , równą wyłożonej pracy $2\pi r F$. W istocie uzyskamy zatem pracę hQ , która jest mniejsza aniżeli $2\pi r F$, lecz może zbliżać się do tej granicznej wartości. Stosunek $F:Q$ jest więc wogóle większy aniżeli stosunek $h:2\pi r$, lecz może zbliżać się do tej granicznej wartości. Wartość graniczna, do której w najkorzystniejszym przypadku może dowolnie zbliżyć się stosunek $F:Q$, zależy od stosunku kroku śruby do promienia obrotu.

§ 93. Wypadkowa dwóch sił, przyłożonych do ciała sztywnego.

Poczynając od § 87-go zakładaliśmy, że uważane ciało sztywne może jedynie obracać się dookoła nieruchomej osi. Będziemy teraz rozumowali ogólniej. Przypuśćmy, że ciało jest bez ograniczeń ruchome; może na przykład kręcić się dookoła jakiegobądź

osi, ale może również posuwać się jako całość w dowolnym kierunku. O takim ciele mówimy, że jest *swobodne*, że może odbywać wszelkie rodzaje ruchu, które zgadzają się z jego sztywnością.

Na ciało sztywne C (rys. 101) niechaj działają siły F_1 i F_2 , przyłożone w A_1 i A_2 , umiejscowione w prostych AA_1 i AA_2 , które leżą w tej samej płaszczyźnie; rys. 101 wyobraża przecięcie ciała z tą płaszczyzną. Przypuszczamy, że proste AA_1 i AA_2 przecinają się w punkcie A ; poza obrębem rozumowania pozostaje przypadek sił równoległych (§ 89), którym zajmujemy się w artykule późniejszym (§ 95).

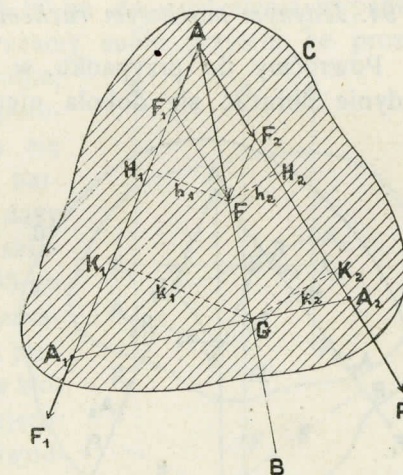
Według twierdzenia Varignona (§ 86) wolno przesuwac siłę, przyłożoną do ciała sztywnego, w prostej, w której jest umiejscowiona. Zadane siły A_1F_1 i A_2F_2 przesuwamy zatem do punktu A przecięcia się prostych, w których one są umiejscowione. Budujemy równoległobok AF_1FF_2 ; jego przekątnia AF wyobraża *wypadkową* siłę A_1F_1 i A_2F_2 czyli siłę, która może je w zupełności zastąpić. Ale siłę AF możemy znowu przesuwac w prostej AB , w której jest umiejscowiona; każda więc siła tej samej wartości i tego samego kierunku jak AF , umiejscowiona w prostej AB , może być uznana za wypadkową sił A_1F_1 i A_2F_2 .

Wyprowadzmy z punktu F prostopadłe: $FH_1 \perp AA_1$ i $FH_2 \perp AA_2$; oznaczmy długości tych prostopadłych przez h_1 i h_2 . Widzimy z rys. 101-go, że

1. pole trójkąta AF_1F jest $= \frac{1}{2} F_1 h_1$
2. pole trójkąta AF_2F jest $= \frac{1}{2} F_2 h_2$

gdzie F_1 i F_2 oznaczają, jak zwykle, wartości sił F_1 i F_2 . Ponieważ AF_1FF_2 jest równoległobokiem, pola (1) i (2) są sobie równe; więc

$$3. \quad F_1 h_1 = F_2 h_2.$$



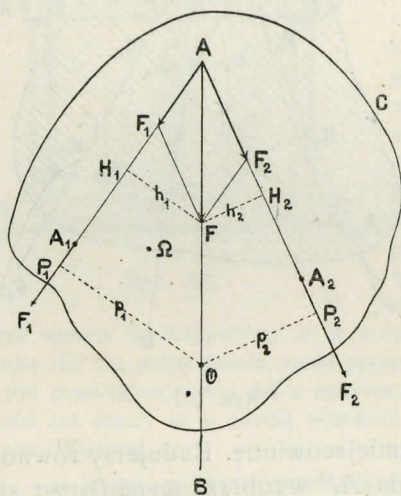
Rys. 101.

Poprowadźmy prostą A_1A_2 i z miejsca G jej przecięcia się z prostą AB wyprowadźmy prostopadłe: $GK_1 \perp AA_1$, $GK_2 \perp AA_2$; długości tych prostopadłych oznaczmy przez k_1 i k_2 . Możemy łatwo udowodnić na zasadzie równania (3), że

$$4. \quad F_1 k_1 = F_2 k_2.$$

§ 94. Jedyńm możliwym ruchem jest obrót; reguła momentów.

Powróćmy do przypadku, w którym ciało sztywne C może jedynie obracać się dokoła nieruchomej osi O ; rys. 102 wyo-



Rys. 102.

brazą przecięcie ciała, prostopadłe do tej osi. Przypuśćmy, że na ciało C działają siły F_1 i F_2 , przyłożone w punktach A_1 i A_2 , umiejscowione w prostych AA_1 i AA_2 . Jeżeli wypadkowa F sił F_1 i F_2 jest umiejscowiona w prostej AB , przechodzącej przez oś obrotu O , moment tej wypadkowej względem osi O jest równy zeru, zatem siły F_1 i F_2 nie mogą obrócić ciała C dokoła osi O . Gdyby oś obrotu leżała na przykład w Ω (rys. 102), moment wypadkowej F wzglę-

dem tej osi byłby różny od zera, siły F_1 i F_2 mogłyby obrócić ciało dokoła tej osi.

Przypuśćmy, że oś obrotu leży w O i że siły F_1 i F_2 nie wywołują dokoła tej osi obrotu; jaki jest warunek równowagi? Wyprowadziwszy z punktu F prostopadłe: $FH_1 \perp AA_1$ i $FH_2 \perp AA_2$, których długości, jak w § 93-im, oznaczamy przez h_1 i h_2 , mamy (§ 93):

$$1. \quad F_1 h_1 = F_2 h_2.$$

Z punktu O wyprowadźmy prostopadłe OP_1 i OP_2 do tychże prostych AA_1 i AA_2 ; przez p_1 i p_2 oznaczmy długości tych prostopadłych czyli ramiona sił F_1 i F_2 . Ponieważ A , F i O leżą na tej samej prostej, więc

$$2. \quad h_1 : h_2 = p_1 : p_2.$$

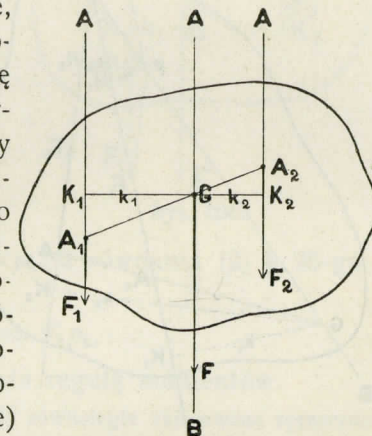
Porównawszy (2) z (1), widzimy, że

$$3. \quad F_1 p_1 = F_2 p_2;$$

to równanie wyraża znaną nam już z § 89-go regułę momentów.

§ 95. Wypadkowa sił równoległych, przyłożonych do ciała sztywnego.

Przypuśćmy teraz, że siły, przyłożone do ciała sztywnego, są umiejscowione w prostych równoległych; w § 93-im pozostawiliśmy ten przypadek poza obrębem rozumowania. Przypuśćmy, że siły są *zgodnie* skierowane (§ 89). Powtarzamy konstrukcję (rys. 101), która posłużyła w § 93-im do znalezienia wypadkowej F sił F_1 i F_2 ; lecz wyobrażamy sobie przytem, że proste, w których F_1 i F_2 są umiejscowione, dążą do zajęcia równoległych położeń i że punkt A przecięcia się tych prostych oddala się coraz bardziej. Wartość wypadkowej F dąży wówczas do sumy wartości sił składowych (§ 45); równanie (4) § 93-go nie przestaje być słuszne i wyznacza wciąż miejsce punktu G na prostej A_1A_2 ; wreszcie prosta AB (w której wypadkowa F jest umiejscowiona) staje się w granicy równoległa do (równoległych do siebie) A_1F_1 i A_2F_2 . Tym sposobem przechodzimy od rys. 101-go do rys. 103-go;



Rys. 103.

od przypadku sił, tworzących ze sobą kąt ostry, przechodzimy do przypadku skierowanych *zgodnie* sił równoległych. Na rys. 103-im A_1F_1 i A_2F_2 są takimi siłami; ich wypadkową może być np. siła GF , której wartość F spełnia warunek

$$1. \quad F = F_1 + F_2;$$

odległości $k_1 = GK_1$ i $k_2 = GK_2$ czynią zadosyć równaniu

$$2. \quad F_1 k_1 = F_2 k_2.$$

Przypuśćmy teraz, że siły F_1 i F_2 są równoległe, ale *sprzecznie* skierowane. Ażeby znaleźć prawa tworzenia wypadkowej w tym razie, zaczynamy od przypadku sił, tworzących ze sobą kąt *rozwarty*, poczem postępujemy podobnie jak wyżej.

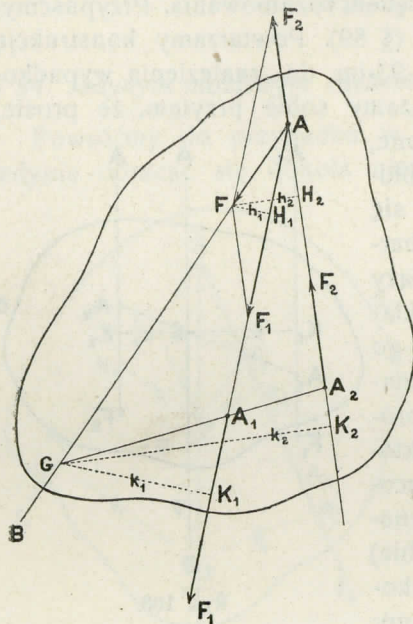
Kierunki sił F_1 i F_2 , przyłożonych w A_1 i A_2 (rys. 104), przecinając się w A , tworzą ze sobą kąt rozwarty. Przesuwamy te siły do A , budujemy równoległobok AF_1FF_2 i otrzymujemy wypadkową F , umiejscowioną w AB ; AB z A_1A_2 przecina się w G . Jak w § 93-im otrzymujemy

$$3. \quad F_1 h_1 = F_2 h_2; \quad 4. \quad F_1 k_1 = F_2 k_2$$

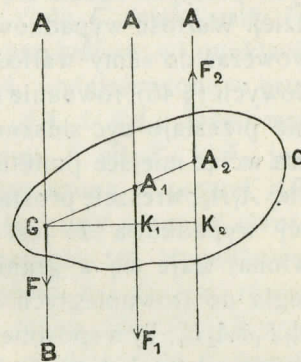
gdzie h_1 i h_2 są długości prostopadłych FH_1 i FH_2 , wyprowadzonych z F do AA_1 i AA_2 , k_1 zaś i k_2 są długości prostopadłych GK_1 i GK_2 , wyprowadzonych z G do tych samych prostych.

Przypuszczamy teraz, że proste, w których F_1 i F_2 są umiejscowione, dążą do zajęcia równoległych położeń. Punkt A oddala się wówczas coraz bardziej;

wartość wypadkowej F dąży do różnicy wartości sił składowych (§ 45); równanie (4) nie przestaje obowiązywać i wyznacza miejsce punktu G na prostej A_1A_2 ; prosta AB , w której wypadkowa F jest umiejscowiona, dąży do zajęcia położenia równoległego do prostych, w których umiejscowione są F_1 i F_2 . Tym sposobem



Rys. 104.



Rys. 105.

od rys. 104-go przechodzimy do rys. 105-go; od przypadku sił, tworzących ze sobą kąt rozwarty, przechodzimy do przypadku sił równoległych, skierowanych sprzecznie.

Przypuśćmy, że F_1 i F_2 są wartościami dwóch sił równoległych, skierowanych sprzecznie; jeżeli (jak na rys. 105-ym) $F_1 > F_2$, mamy

$$5. \quad F = F_1 - F_2.$$

Z równań (4) i (5) wyprowadzamy bez trudności

$$6. \quad Fk_1 = F_2(k_2 - k_1); \quad 7. \quad Fk_2 = F_1(k_2 - k_1).$$

§ 96. Jedynym możliwym ruchem jest obrót; równowaga pod wpływem sił równoległych.

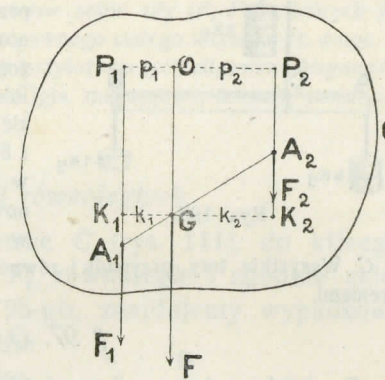
Jak w § 94-ym, przypuśćmy ponownie, że ciało może jedynie obracać się dokoła nieruchomej osi O . Przypuśćmy, że w punk-

tach A_1 i A_2 ciała C (rys. 106) przyłożone są siły równoległe F_1 i F_2 skierowane zgodnie. Do równowagi potrzeba i wystarcza, ażeby wypadkowa F sił F_1 i F_2 była umiejscowiona w prostej przechodzącej przez O ; moment wypadkowej względem osi obrotu jest wówczas równy zeru. Jeżeli GF (rys. 106) jest prostą, w której F jest umiejscowiona, do równowagi potrzeba i wystarcza, ażeby oś przecinała płaszczyznę rysunku w punkcie O leżącym na tej prostej. Prowadząc prostopadłe $k_1 = GK_1$ i $k_2 = GK_2$ do A_1F_1 i A_2F_2 oraz ramiona $p_1 = OP_1$ i $p_2 = OP_2$ sił względem osi, mamy $k_1 = p_1$ i $k_2 = p_2$; z równania (2) § 95-go wynika więc

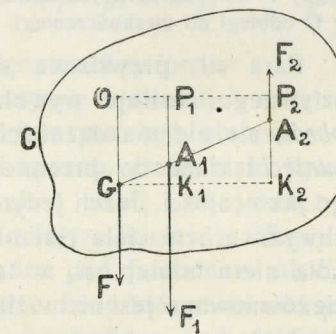
$$1. \quad F_1p_1 = F_2p_2,$$

co w obecnym przypadku wyraża regułę momentów.

Jeżeli na ciało sztywne działają siły równoległe skierowane sprzecznie, rozumiemy podobnie. Do równowagi potrzeba i wystarcza, ażeby oś obrotu przecinała płaszczyznę rysunku w punkcie O leżącym na prostej GF , w której wy-



Rys. 106.



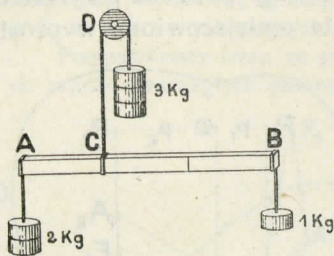
Rys. 107.

padkowa F jest umiejscowiona (rys. 107). Prowadząc prostopadłe $k_1 = GK_1$ i $k_2 = GK_2$ do A_1F_1 i A_2F_2 oraz ramiona $p_1 = OP_1$ i $p_2 = OP_2$ sił względem osi, mamy znowu $k_1 = p_1$, $k_2 = p_2$; z równań (4), (6) i (7) § 95-go otrzymujemy

$$2. \quad F_1p_1 = F_2p_2 \quad 3. \quad Fp_1 = F_2(p_2 - p_1) \quad 4. \quad Fp_2 = F_1(p_2 - p_1);$$

dzięki twierdzeniu (5) § 95-go trzy ostatnie równania są sobie równoważne.

Proste doświadczenie, przedstawione na rys. 108-ym, pozwala uzmysłowić sobie powyższe twierdzenia. Trzy siły równoważą się w tem doświadczeniu, mianowicie: siła 2 Kg, przyłożona w punkcie A i skierowana pionowo na dół; siła 1 Kg, przyłożona w B i skierowana również pionowo na dół; wreszcie siła 3 Kg, przyłożona w C i skierowana pionowo do góry.



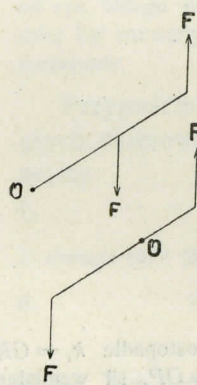
Rys. 108.

Równowagę tych trzech sił możemy wyrazić w sposób trojaki: (1) siły: 1 Kg w B i 3 Kg w C równoważą się z siłą 2 Kg w A (2) siły: 3 Kg w C i 2 Kg w A równoważą się z siłą 1 Kg w B (3) siły 2 Kg w A i 1 Kg w B równoważą się z siłą 3 Kg w C. Wszystkie trzy przypadki równowagi zgadzają się z powyższymi twierdzeniami.

§ 97. O parze sił.

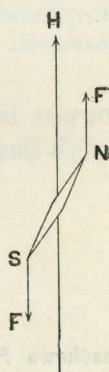
Powróćmy do wyników § 95-go i rozważmy przypadek, w którym siły F_1 i F_2 , równoległe i sprzecznie skierowane, są równe sobie: $F_1 = F_2$. Mamy wówczas z równania (5) § 95-go: $F = 0$. *Siły równoległe, sprzecznie skierowane i równe sobie, nie mają wypadkowej, nie można zatem ich zrównoważyć działaniem jednej siły.* Układ dwóch takich sił nazywamy *parą sił*.

Weźmy na uwagę rys. 105 oraz równania (6) i (7) § 95-go. Różnica $k_2 - k_1$ jest odstępem $K_1 K_2$ na wspomnianym rysunku. Jeżeli więc przypuścimy, że proste $A_1 F_1$ i $A_2 F_2$ nie zmieniają się, wartości zaś F_1 i F_2 dążą ku sobie, wówczas k_1 i k_2 muszą wzrastać, gdy F dąży ku zeru; zatem G oddala się coraz bardziej. Gdy $F = 0$, punkt G odbiegł do nieskończoności.



Rys. 109.

Para sił, przyłożona do ciała sztywnego, usiłuje wywołać jego *obrót*, ale nie ma dążności do *posunięcia* ciała, do przemieszczenia go jako całości. Jeżeli jedynym możliwym ruchem ciała jest obrót dookoła nieruchomej osi, w takim razie równowaga jest niemożliwa; pod działaniem pary sił ciało nie może wówczas być w równowadze (rys. 109, w którym O oznacza oś obrotu), jak to widzimy natychmiast z reguły momentów.



Rys. 110.

Przykłady działania pary sił spotykamy często. Gdy w korek wkręcamy korkociąg lub świder w deskę, gdy śrubę wkręcamy w obejmującą ją mutrę

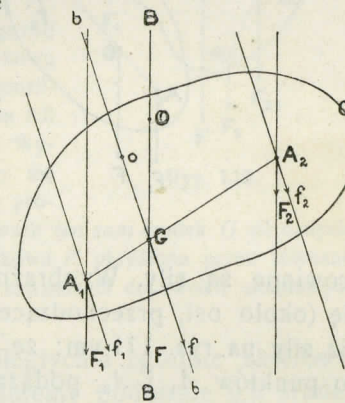
lub ją wykrecamy z tej mutry, wywieramy zwykle parę sił. W różnych prasach, windach, kołowrotach, gdy oś przyrządu chcemy wprowadzić w ruch obrotowy, wywieramy parę sił na końce średnicy obrotu.

Przekonamy się w nauce o magnetycznych zjawiskach, że ziemia wywiera na igłę magnesową NS (rys. 110) dwie równe sobie siły (F, F), z których jedna jest zawsze skierowana równoległe do pewnego stałego kierunku H , druga — do wprost przeciwnego kierunku; punkty przyłożenia tych sił, zwane *biegunami* igły, znajdują się w pobliżu jej końców. Igła magnesowa doznaje zatem od ziemi działania, które jest parą sił.

§ 98. Środek sił równoległych.

Wyobraźmy sobie ciało sztywne C (rys. 111), do którego w A_1 i A_2 przyłożono siły F_1 i F_2 , równoległe i zgodnie skierowane. W sposób, znany z § 95-go, znajdujemy wypadkową F sił F_1 i F_2 ; niechaj BGB będzie prostą, w której F jest umiejscowiona. Przypuść

F_1 i F_2 odchylają się o pewien kąt od kierunków pierwotnych, przy czem jednak wartości sił nie zmieniają się a punkty ich przyłożenia pozostają w poprzednich miejscach bryły. Niechaj np. $A_1 f_1$ i $A_2 f_2$ wyobrażają przyłożone siły po wykreśleniu; ich wypadkową jest f , umiejscowiona w bGb .



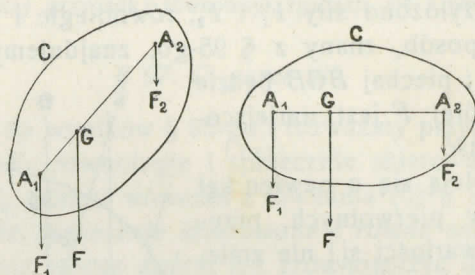
Rys. 111.

Przez ciało C poprowadźmy (prostopadle do płaszczyzny rysunku)

oś, około której ciało ma być obracalne. Spróbujmy wybrać miejsce osi w taki sposób, ażeby ciało było w równowadze zarówno pod działaniem sił F_1 i F_2 jakoteż pod działaniem sił f_1 i f_2 . Czy takie miejsce istnieje? Wiemy z § 96-go, że ciało C jest w równowadze pod działaniem sił F_1 i F_2 , gdy oś przecina płaszczyznę rysunku w którymkolwiek punkcie prostej BGB ; że ciało C jest w równowadze pod działaniem sił f_1 i f_2 , gdy oś przecina płaszczyznę rysunku w którymkolwiek punkcie prostej bGb . Jeżeli umieścimy oś w O , ciało będzie w równowadze pod wpływem F_1 i F_2 , ale nie będzie w równowadze pod wpływem f_1 i f_2 ; jeżeli oś tę poprowadzimy przez o , ciało będzie w równowadze pod wpływem f_1 i f_2 , ale nie będzie w równowadze pod wpływem F_1 i F_2 . Widzimy, że tylko punkt G spełnia nasze

wymagania; ponieważ G leży zarazem na BGB i na bGb , zatem, gdy oś obrotu przechodzi przez G , ciało jest w równowadze pod wpływem zarówno F_1 i F_2 jakoteż f_1 i f_2 . A więc ciało C , które może obracać się tylko dokoła osi, przechodzącej przez G prostopadle do płaszczyzny rysunku, pozostaje zawsze w równowadze, jakkolwiek wykręca się siły równoległe przyłożone do ciała. Taki punkt G nazywamy *środkiem sił równoległych* przyłożonych do ciała.

W powyższem rozumowaniu przypuszczaliśmy, że ciało C pozostaje nieporuszone; że wykręcają się proste, w których umiej-



Rys. 112.

scowione są siły. Wyobraźmy sobie teraz, że ciało C wykręca się (około osi, przechodzącej przez G) w kierunku przeciwnym niż siły na rys. 111-ym; że siły F_1 i F_2 , pozostając przyłożone do punktów A_1 i A_2 , podążają za nim, zachowując pierwotne kierunki. Takie zjawisko uzmysławia rys. 112. Rozumujemy w tym razie tak samo jak w poprzednim przypadku; istotnie, jeżeli kąt wykręcenia jest jednakowy, obrót *względny* sił względem ciała jest dokładnie ten sam w obu przypadkach.

§ 99. Środek i wypadkowa wielu sił równoległych.

Wyobraźmy sobie ciało sztywne C (rys. 113), do którego w punktach A_1 , A_2 i A_3 przyłożone są siły F_1 , F_2 i F_3 , równoległe i zgodnie skierowane. Znajdujemy najprzód środek G_{23} sił F_2 i F_3 (§ 98). Budujemy następnie wypadkową F_{23} sił F_2 i F_3 (§ 95); wypadkowa ta ma wartość

$$1. \quad F_{23} = F_2 + F_3$$

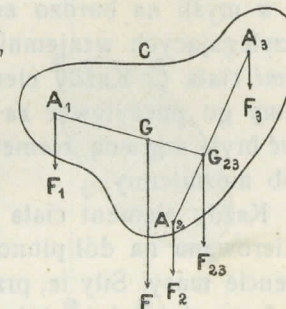
i jest umiejscowiona w prostej $G_{23}F_{23}$, która przecina prostą

A_2A_3 w punkcie G_{23} ; przypuśćmy, że wypadkowa F_{23} jest przyłożona do ciała C w punkcie G_{23} . Według tych samych zasad budujemy dalej środek G sił F_1 i F_{23} oraz ich wypadkową F . Wypadkowa F ma wartość

$$2. \quad F = F_1 + F_{23} = F_1 + F_2 + F_3$$

i jest umiejscowiona w prostej GF , która przecina prostą A_1G_{23} w punkcie G . Obie dwie wypadkowe, F_{23} i F , są równoległe do swoich składowych i są z nimi zgodnie skierowane. Punkt G nazywamy *środkiem* zadanych trzech sił F_1 , F_2 i F_3 ; siłę F nazywamy ich *wypadkową*.

Złożyliśmy najprzód ze sobą siły F_2 i F_3 ; ich wypadkową F_{23} złożyliśmy następnie z siłą F_1 . Mogliśmy byli inaczej postąpić: złożyć najprzód ze sobą siły F_3 i F_1 , następnie zaś ich wypadkową F_{31} złożyć z siłą F_2 . Istniała jeszcze trzecia możliwość: mogliśmy złożyć siły F_1 i F_2 , poczem ich wypadkową F_{12} mogliśmy złożyć z siłą F_3 . Wykonawszy stosowne rysunki, przekonywamy się o tem, że wszystkie trzy drogi postępowania prowadzą do tego samego wyniku. Wypada zawsze *ten sam* środek G sił danych; wypada zawsze *ta sama* ostateczna wypadkowa F , określona przez równanie (2), umiejscowiona w tej samej prostej GF , równoległa do swoich składowych i zgodnie z nimi skierowana.



Rys. 113.

Jeżeli *dowolna* liczba sił równoległych i zgodnie skierowanych działa na bryłę sztywną, znajdujemy podobnie ich środek i ich wypadkową; miejsce tego środka i wartość owej wypadkowej nie zależą od kierunku sił ani od położenia bryły. Jeżeli w środku sił równoległych przyłożymy do ciała siłę równą i wprost przeciwną ich wypadkowej, ciało pozostanie w równowadze, jakkolwiek odchylalibyśmy (względem ciała) kierunki sił równoległych albo jakkolwiek kręcilibyśmy ciało względem niezmiennego kierunku działania przyłożonych sił równoległych.

§ 100. Całkowity ciężar ciała; środek ciężkości.

Ciała, z którymi codziennie miewamy do czynienia, wydają się jednolite. W późniejszym rozdziale tej książki zadamy sobie pytanie, czy ta jednolitość jest rzeczywista, czy jej pozory nie wynikają raczej z niedoskonałości zmysłów, którymi posługujemy się, ażeby ciał materialnych doświadczać i badać ich wła-

ściwości. W owym pytaniu streszcza się głęboki i piękny problem *budowy materji*.

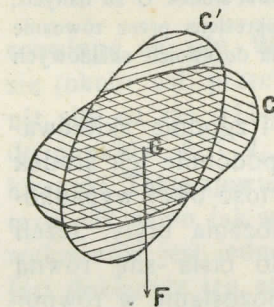
W dynamice wyrażamy się nieraz w taki sposób, jak gdybyśmy wierzyli w istotną jednolitość ciał, które podpadają pod zmysły. Jednakże wyniki rozumowania w dynamice nie są zależne od przypuszczeń, które w tej mierze czynimy i w każdym założeniu pozostają prawdziwe.

Przypuśćmy, że zajmujemy się pewnym ciałem C . Podzielmy je w myśli na bardzo znaczną liczbę bardzo drobnych części, przylegających wzajemnie do siebie; części te nazywamy *elementami* ciała C . Każdy element ma być tak znikomą mały, że możemy go poczytywać za punkt materialny. Jeżeli całość ciała ma być bryłą sztywną, elementy muszą być połączone ze sobą w sposób niezmienny.

Każdy element ciała C jest ciężki; na każdy działa więc siła, skierowana na dół pionowo i proporcjonalna do zawartej w elemencie masy. Siły te, przyłożone do elementów ciała C , są (nie mał zupełnie dokładnie, § 55) równoległe do siebie i zgodnie skierowane. Znajdźmy wypadkową tych sił; nazywamy ją *całkowitym ciężarem ciała*.

Znajdźmy środek wszystkich tych sił; nazywamy go *środkiem ciężkości*.

Środek ciężkości jest, z określenia środkiem pewnych sił równoległych, ma zatem wszystkie własności, które przysługują takiemu środkowi. Jeżeli naprzykład ciało C wykręci się dowolnie, siły, przyłożone do elementów ciała i stanowiące ich ciężar, skierują się inaczej niż poprzednio względem tych elementów (rys. 114), ale środek ciężkości G nie

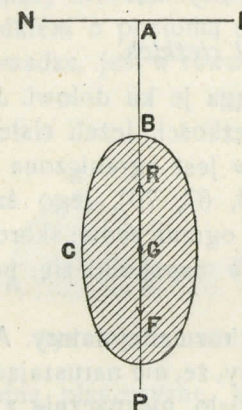


Rys. 114.

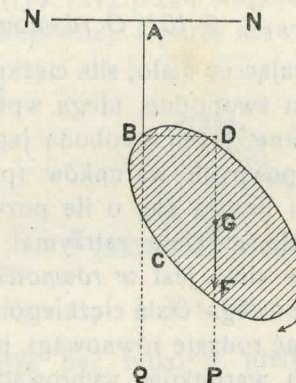
zmieni miejsca w ciele (§§ 98 i 99). Miejsce środka ciężkości w danym ciele nie zależy zatem od położenia lub od ruchu ciała względem kuli ziemskiej; zależy tylko od postaci ciała i od rozłożenia w niem masy.

Całkowity ciężar ciała jest siłą, umiejscowioną w prostej pionowej, która przechodzi przez środek ciężkości; możemy zrównoważyć tę siłę, działając na ciało siłą tej samej wartości, umiejscowioną w tej samej prostej i skierowaną do góry. Uważajmy na przykład ciało sztywne C , zawieszone na nici AB (rys. 115).

Całkowity ciężar F ciała jest umiejscowiony w prostej pionowej GP , przechodzącej przez środek ciężkości G . Jeżeli prosta GP przypada w przedłużeniu kierunku AB , obidwie siły, ciężar F i reakcja R nici, są umiejscowione w tej samej prostej $ABGP$; ponieważ są przesuwalne w tej prostej, możemy wyobrażać sobie,



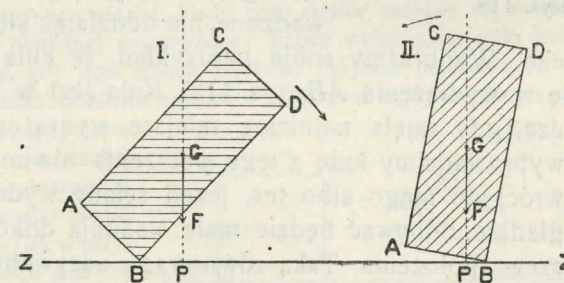
Rys. 115.



Rys. 116.

że, jak GF i GR , są przyłożone w G i tam równoważą się wzajemnie.

Wyobraźmy sobie teraz, że ciało C przybrało położenie, które jest przedstawione na rys. 116-ym; prosta GP , w której ciężar F jest umiejscowiony, nie leży wówczas w przedłużeniu kierunku ABQ nici. Moment ciężaru F względem



Rys. 117.

osi poziomej, przechodzącej przez B , nie jest tutaj równy zero; siła F obraca zatem ciało C dokoła tej osi, dopóki ramię BD (a z niem razem i ów moment) nie zniknie; co właśnie nastąpi w położeniu, wyobrażonem na rys. 115-ym.

Podobnie mają się rzeczy, gdy ciało jest podparte. Wyobraźmy sobie słup $ABCD$ (rys. 117), którego podstawą jest AB ; przypuśćmy, że środek ciężkości ciała znajduje się w G . Jeżeli przechylimy słup około krawędzi B jako osi,

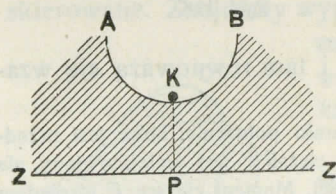
przewraca się on w położeniu I, nie przewraca się w położeniu II; w pierwszym położeniu moment ciężaru F ciała względem osi B (liczonej do góry od płaszczyzny rysunku) jest ujemny, w drugim położeniu ten moment jest dodatni (§ 88). Znamy rozmaite zastosowania tych zasad w życiu codziennym; przestrzega ich tragarz, dźwigający ciężkie przedmioty i murarz, gdy ustawia ścianę z cegieł i cyklista usadowiony na rowerze i akrobata, który przebiega po linie; czytelnik wskaże sam bez trudności inne podobne przykłady.

§ 101. O równowadze ciał ciężkich.

Działając na ciało, siła ciężkości pociąga je ku dołowi. Jeżeli ciało jest swobodne, ulega wpływowi ciężkości. Jeżeli ciało jest skrupowane, jeżeli swoboda jego ruchów jest ograniczona działaniem pewnych warunków (por. §§ 63, 67, 70), jego środek ciężkości obniża się, o ile pozwalają te ograniczenia; skoro środek ciężkości ciała zatrzymał się i ciało uspokoiło się, powiadamy, że ciało jest *w równowadze*.

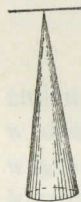
Równowaga ciała ciężkiego może być rozmaitej natury. Ażeby rozpoznać rodzaje równowagi, przypuśćmy, że, nie naruszając krępujących warunków, wyprowadziliśmy ciało nieznacznie z równowagi, w której ono się już było znalazło; poczem pozostawiamy je samemu sobie. Mogą wówczas zajść różne zdarzenia:

(1) Może wydarzyć się, że ciało samo przez się powróci do położenia równowagi, z którego zostało wyprowadzone, nie oddalając się od niego



Rys. 118.

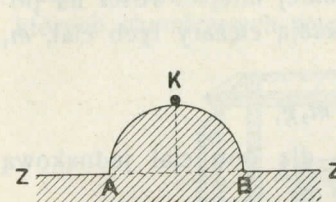
bardzo daleko. Wyobraźmy sobie na przykład, że kula ciężka K znajduje się w wydrążeniu AB (rys. 118). Kula jest w równowadze, gdy zajęła najniższe miejsce wydrążenia; jeżeli wyprowadzimy kulę z tego położenia równowagi, powróci do niego albo też, jeżeli ściany wydrążenia są gładkie, odbywać będzie małe wahania dookoła najniższego położenia. Taką równowagę nazywamy *trwałą*, *pewną* albo *bezpieczną* równowagą. Wahadło w najniższym punkcie swego toru (§ 63) jest w trwałej równowadze; podobnie stożek ciężki, zawieszony na swoim wierzchołku (rys. 119). Kostka, która spoczywa na poziomej płaszczyźnie, przylegając do niej podstawą, znajduje się w trwałej czyli bezpiecznej równowadze.



Rys. 119.

(2) Może wydarzyć się, że ciało, wychylone (choćby bardzo nie-

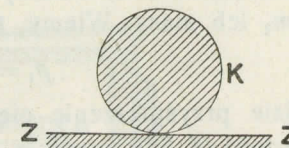
znacznie) z położenia równowagi i pozostawione samemu sobie, odbiega coraz bardziej od tego położenia i oddala się niepowrotnie od niego. Powiadamy wówczas, że równowaga, w której znajdowało się ciało, była *nietrwała*, *niepewna* lub *chwiejna*. Kula K , położona w najwyższym punkcie wyniosłości AB (rys. 120), jest w takiej niebezpiecznej równowadze; stożek, opierający się wierzchołkiem o poziomą podstawę (rys. 121), jeżeli wogóle jest w równowadze, jest w równowadze niepewnej. Oparta krawędzią



Rys. 120.



Rys. 121.

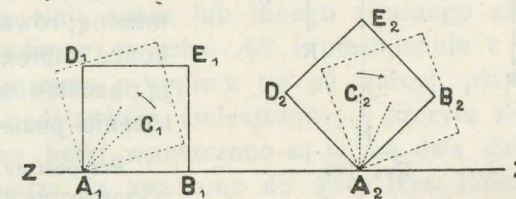


Rys. 122.

o poziomą płaszczyznę, kostka może być tylko w nietrwałej równowadze.

(3) Może wydarzyć się, że ciało, wychylone z położenia równowagi i pozostawione samemu sobie, zachowuje miejsce, w którym je pozostawiliśmy; powiadamy wówczas, że ciało jest w równowadze *obojętnej*. Na doskonale gładkiej, poziomej płaszczyźnie ZZ (rys. 122) kula K jest w obojętnej równowadze; każde miejsce na płaszczyźnie jest dla kuli położeniem równowagi.

Czy możemy przewidzieć, kiedy ciało ciężkie znajdzie się w trwałej, w nietrwałej lub w obojętnej równowadze? Łatwo widzimy, że ciało jest w równowadze *trwałej*, gdy jego środek ciężkości przybrał położenie, ze względu na krępujące warunki *możliwie najniższe*; słuszność tego twierdzenia sprawdzamy w przypadkach, przytoczonych pod (1). Gdy środek ciężkości zajął położenie, ze względu na warunki *możliwie najniższe* [jak w przykładach podanych pod (2)], równowaga jest *nietrwała*. Jeżeli warunki, ograniczające swobodę ruchu ciała, nie nastęrczają możliwości ani najniższego ani najwyższego wzniesienia się środka ciężkości, jeżeli te warunki [jak w (3)] są *wszędzie jednakowo spełnione*, równowaga jest *obojętne*.



Rys. 123.

Wyobraźmy sobie na przykład sześcienną kostkę $ABDE$ (rys. 123); niechaj C będzie jej środkiem ciężkości. Jeżeli kostka spoczywa na płaszczyźnie pozi-

mej ZZ , przylegając do niej ścianą, jak $A_1B_1D_1E_1$ na rys. 123-im, przechylenie kostki dookoła krawędzi A_1 zmusiłoby środek C_1 do podniesienia się do góry; zatem w położeniu $A_1B_1D_1E_1$ kostka jest w trwałej równowadze. Jeżeli przeciwnie kostka dotyka płaszczyzny ZZ tylko krawędzią, jak $A_2B_2D_2E_2$ na rys. 123-im, przechylenie około tej krawędzi pozwoli opuścić się niżej środkowi C_2 ; położenie $A_2B_2D_2E_2$ może więc być tylko położeniem chwiejnej równowagi.

§ 102. O wadze i wazeniu.

Badamy dwa ciała C_1 i C_2 w tej samej miejscowości na powierzchni ziemi; niechaj p_1 i p_2 oznaczają ciężary tych ciał, m_1 i m_2 ich masy. Wiemy, że

$$1. \quad p_1 = m_1 g; \quad p_2 = m_2 g,$$

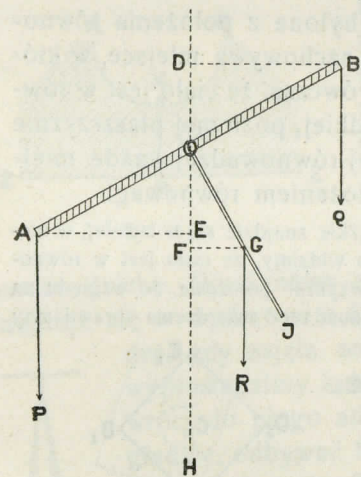
gdzie przyspieszenie ciężkości g ma dla obu ciał jednakową wartość (§ 57); przeto

$$2. \quad p_1 : p_2 = m_1 : m_2.$$

Stosunek ciężarów jest równy stosunkowi mas, nie zależy zatem od przyspieszenia ciężkości, nie dotykają go zmiany, którym ulega g , gdy posuwamy się po powierzchni ziemi lub wznosimy się nad nią (§ 65). Jeżeli $m_1 = m_2$, wówczas $p_1 = p_2$ i naodwrot; porównując ciężary, porównujemy zarazem masy.

Wagę nazywa się przyrząd, służący do porównywania pomiędzy sobą ciężarów. W zasadzie waga jest poprostu dźwignią równoramienną; równe ciężary, działając na końce ramion takiej wagi, powinny ją pozostawiać w równowadze w położeniu poziomem.

Przypuśćmy, że siły P i Q , obiedwie skierowane na dół pionowo (rys. 124), działają na końce A i B ramion belki równoramiennej wagi AB , której pozioma oś przechodzi w punkcie O przez płaszczyznę rysunku. Załóżmy, że długość równych sobie ramion OA i OB wynosi l ; przez R rozumiemy ciężar całej wagi, który wyobraźmy sobie, iż jest przyłożony w jej środku ciężkości G . Gdy belka AB znajduje się w położeniu poziomem, niechaj prosta OG przybiera położenie pionowe; gdy belka przechyliła się (jak na rysunku), niechaj kąt HOG odchylenia od pionu nazywa się θ . Odległość OG oznaczmy przez h .



Rys. 124.

Przypuśćmy, że siły P i Q , obiedwie skierowane na dół pionowo (rys. 124), działają na końce A i B ramion belki równoramiennej wagi AB , której pozioma oś przechodzi w punkcie O przez płaszczyznę rysunku. Załóżmy, że długość równych sobie ramion OA i OB wynosi l ; przez R rozumiemy ciężar całej wagi, który wyobraźmy sobie, iż jest przyłożony w jej środku ciężkości G . Gdy belka AB znajduje się w położeniu poziomem, niechaj prosta OG przybiera położenie pionowe; gdy belka przechyliła się (jak na rysunku), niechaj kąt HOG odchylenia od pionu nazywa się θ . Odległość OG oznaczmy przez h .

Pod działaniem sił P, Q, R (przyłożonych w A, B, G) przyrząd jest w równowadze; zatem, według zasady dźwigni:

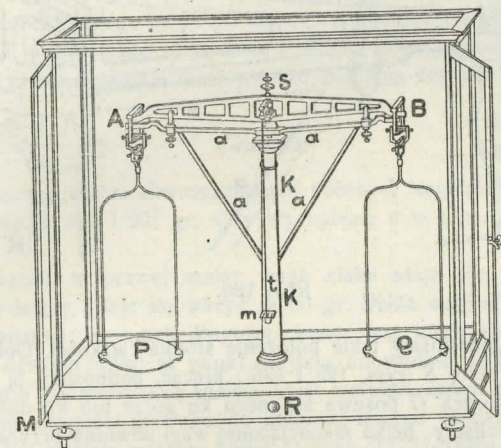
$$3. \quad P \times AE = Q \times BD + R \times GF.$$

Wyrażając AE, BD i GF przez l, h oraz θ , otrzymujemy

$$4. \quad (P - Q)l = Rh \tan \theta.$$

Jeżeli $P = Q$, mamy wówczas $\theta = 0$.

Budowę rozpowszechnionego typu wagi objaśniają rysunki 125 i 126. Belka wagi AB jest wyrobiona w kształcie kraty; w niektórych chemicznych wagach miewa postać trójkąta, wyglądając

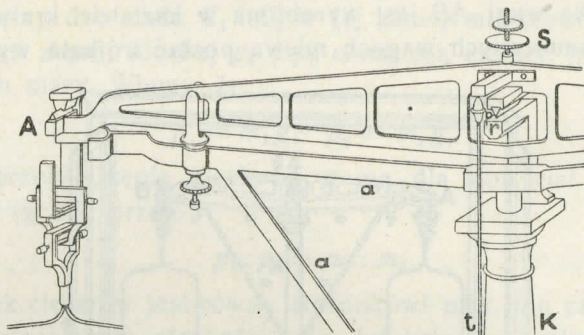


Rys. 125.

jak daszek spadzisty. Belka wagi powinna być o ile podobna sztywna, jednak niezbyt masywna i ciężka. Oś obrotu belki jest dolna krawędź czyli *ostrze* trójsściennego pryzmatu p (rys. 126), wyrobionego ze stali, agatu lub innego twardego ciała; pryzmat ten jest osadzony w belce AB i niezmiennie z nią połączony. Ostrze pryzmatu p wspiera się na górnej, płaskiej powierzchni twardej podstawki r , umieszczonej u szczytu słupa K . W pobliżu końców belki wpuszczone są w nią dwa dalsze pryzmaty, których ostrza są zwrócone do góry (rys. 126); na tych ostrzach spoczywają lekkie ramki, które dźwigają szalki P i Q (rys. 125); ciała, które ważymy, umieszczamy na owych szalkach. Z belką wagi łączy się dosyć długa, cienka wskazówka t , której położenie (albo wahania) obserwujemy przy pomocy skali m . Waga stoi na podstawie MN , zaopatrzonej w śruby, dzięki czemu możemy ustawić pionowo słup KK . Belkę AB wraz z przy-

zmatem p możemy podnosić do góry zapomocą podparcia $aaaa$, na które działa główka R ; urządzenie to, zwane *aretowaniem* wagi, ma na celu oszczędzanie ostrza pryzmatu w czasie, w którym waga nie jest czynna.

Pod działaniem sił P, Q, R waga powinna ustanawiać się w położeniu równowagi trwałej (§ 101). Jeżeli środek ciężkości G (rys. 124) leży poniżej osi obrotu (czyli poniżej ostrza środkowego pryzmatu p , rys. 126), równowaga jest trwała; wahająca się waga nie wywraca się. W rys. 124-ym oraz w wywodzie



Rys. 126.

równania (4) przypuściliśmy takie położenie środka ciężkości. Dokładne wagi są zaopatrzone w śrubkę S (rys. 125 i 126); kręcąc, podnosimy ją lub obniżamy, skutkiem czego środek G posuwa się nieco ku górze lub ku dołowi.

Jak powiedzieliśmy, belka nieobciążonej wagi powinna przybierać położenie poziome; nie zmienia się ono, gdy na szalkach umieścimy ciała, których ciężary są równe. Jeżeli więc belka takiej wagi obciążonej jest w równowadze w położeniu poziomem, wnosimy, że ciężary ciał leżących na szalkach są sobie równe. Waga nazywa się *rzetelną*, jeżeli czyni zadosyć tym wymaganiom. Równość długości ramion (liczonych od ostrza środkowego pryzmatu do ostrzy bocznych pryzmatów) oraz równość ciężarów szalek są warunkami rzetelności wagi.

Przypuśćmy, że dana jest różnica $P - Q$ czyli t. zw. *przewaga*; zapytujemy, kiedy wychylenie θ będzie możliwie największe? Według (4) wówczas, gdy długość l jest o ile podobna największa, ciężar zaś R i odległość h o ile podobna najmniejsze. Powiadamy, że waga jest *czuła*, gdy wychylenie θ przy nieznaczej przewadze $P - Q$ jest znaczne. Odległość h nie może być jednakże zbyt mała, wpływałoby to bowiem szkodliwie na bezpieczeństwo równowagi; długość l nie może być zbyt wielka, ponieważ wanie się wagi byłoby wówczas powolne, ważenie zajmowałoby wiele czasu. Ważąc dokładnie, nie czekamy zresztą na ustanowienie się równowagi; obserwujemy wychylenia wskazówki i z nich wyliczamy idealne położenie równowagi.

Do wagi należy zbiór *wzorców masy* czyli t. zw. *ciężarków*; są to zwykle bryłki mosiężne lub niklowe, niekiedy szklane, złote lub platynowe, których ciężar jest dokładnie znany. Ciężary

tych wzorców bywają tak dobrane, że można z nich składać dowolne ciężary. *Konikiem* nazywa się kawałek platynowego lub złotego drutu, zgięty w kabląk (rys. 127); jego masa wynosi zwykle 10 mgr. Położony na belce, np. w odległości 0.7 długości ramienia, liczonej od osi obrotu, konik działa tak, jak gdyby 7 mgr leżało na szalce (§ 89).



Budowę wag doprowadzono obecnie do wysokiego stopnia doskonałości. Nawet zwykła *chemiczna* lub *analityczna* waga (jakie spotykamy pospolicie w pracowniach chemicznych) jest już czułym i dokładnym przyrządem; na dobrej wadze chemicznej, postępując umiejętnie i bardzo starannie, można znaleźć ciężar przedmiotu, ważącego do kilkuset gramów i nie popełnić przytem większego błędu niż ćwierć miligramu. Zakłady *metrologiczne* (jak np. przykład wspomniane w §§ 3-im i 40-ym międzynarodowe Biuro Miar i Wag pod Paryżem) posiadają wagi jeszcze znacznie doskonalsze.

Zadania.

1. Na tej samej wadze równoramiennej położono najprzód 100 i 101 gr na szalkach; następnie 200 i 201 gr. Czy wychylenie θ w obu razach będzie jednakowe?

2. Umieszczone w prawej szalce wagi, ciało zdaje się ważyć 20.50 gr; umieszczone w lewej, zdaje się ważyć 20.00 gr. Belka wagi nie jest (widocznie) ściśle równoramienna; stosunek długości ramion jest nieco różny od jedności. Biorąc zasadę dźwigni (§ 90) za punkt wyjścia, udowodnić, że prawdziwy ciężar ciała jest *średnią geometryczną* znalezionych wartości, zatem wynosi 20.248 gr; oraz że stosunek długości prawego do długości lewego ramienia wynosi 1.012. Udoskonalony ten sposób ważenia podał Gauss (1777—1855).

3. Ażeby zważyć ciało C , równoważymy je na wadze t. zw. *tarę*, np. drobnym śrutem, piaskiem, rtęcią i t. p.; zdjawszy następnie ciało C z wagi, lecz pozostawiając tarę w jej miejscu pierwotnem, ważymy tarę w zwykły sposób. Taką metodę ważenia wskazał Borda; dlaczego ona jest pewniejsza niż pospolita? jakiego błędu możemy w tem postępowaniu uniknąć?

§ 103. Gęstość i ciężar właściwy.

Średnią gęstością danego ciała nazywamy stosunek jego masy do jego objętości. Oznaczając masę ciała przez M , jego objętość przez V , otrzymujemy na średnią gęstość D ciała:

$$1. \quad D = M/V.$$

Jeżeli jednostką masy jest gram, jednostką zaś objętości centymetr sześcienny, tedy jednostką gęstości jest 1 gr/cm³.

Pojęciu gęstości możemy nadać proste znaczenie. Przypuśćmy, że V cm³ jednolitego ciała posiada masę M gramów; w takim

razie 1 cm³ tego ciała ma masę M/V czyli D gramów. Gęstość ciała wyraża się więc tą samą liczbą, która podaje masę jednostki objętości; na przykład, w powyższych jednostkach, masę sześciennego centymetra, wyrażoną w gramach.

Ciała materialne bywają zwykle niejednolite; gleba, rudy, minerały, które znajdujemy w przyrodzie, tkaniny, drewno, papier po bliższem zbadaniu okazują się niejednolite. Przypuśćmy, że szukamy gęstości ciała niejednolitego; otrzymamy naogół wyniki niejednakowe, jeżeli będziemy ją obliczali w różnej objętości V , np. raz w 1 cm³, drugi raz w 1 mm³. Znajdujemy się tu widocznie wobec podobnego zadania, jakie mieliśmy przed sobą, mówiąc o średniej i prawdziwej prędkości (§ 14). Wyrażenie (1) daje oczywiście *gęstość średnią w objętości V* . Im mniejszą posłużymy się objętością V , tem bliższa *prawdziwej* (w danem miejscu) *gęstości* będzie wartość znaleziona z (1). *Prawdziwą* albo *miejscową gęstość* określamy jako granicę, do której dąży stosunek (1), gdy M i V jednocześnie zbliżają się ku zeru.

Średnim ciężarem właściwym danego ciała nazywamy stosunek ciężaru ciała do jego objętości. Oznaczając ciężar ciała przez P , jego objętość przez V , mamy na średni ciężar właściwy Δ :

$$2. \quad \Delta = P/V.$$

Jeżeli g oznacza przyspieszenie ciężkości, istnieje (jak wiadomo) związek

$$3. \quad P = Mg \quad \text{zatem:} \quad 4. \quad \Delta = Dg.$$

W układzie miar, którym posługujemy się zwykle w fizyce, jednostka ciężaru właściwego jest następująca:

$$5. \quad \frac{\text{ciężar 1 grama}}{1 \text{ cm}^3} = \frac{g \text{ dyn}}{1 \text{ cm}^3} = g \text{ gr/cm}^2\text{sek}^2.$$

W układzie ciężarowym (§ 47) jednostką ciężaru jest ciężar grama czyli *Gram*; w tym układzie jednostką ciężaru właściwego jest oczywiście 1 Gr/cm³. Ciężar właściwy ciała wyraża się zatem w układzie ciężarowym tą samą liczbą, którą wyraża się gęstość w zwykłym układzie jednostek fizycznych. Przypuśćmy na przykład, że ciężar bryłki żelaznej wynosi 46·8 Gr i że jej objętość wynosi 6 cm³. Masa bryłki wynosi przeto 46·8 gr. Średnia gęstość bryłki wypada 7·8 gr/cm³; średni ciężar właściwy 7·8 Gr/cm³.

Jeżeli V cm³ ciała jednolitego waży P Gr, tedy 1 cm³ waży P/V Gr; ciężar właściwy wyraża się zatem tą samą liczbą, która podaje ciężar jednostki objętości; w powyższych na przykład jednostkach układu ciężarowego, ciężar sześciennego centymetra, wyrażony w Gramach.

Jeżeli uważane ciało jest niejednolite, powinniśmy utworzyć pojęcie *prawdziwego* w danem miejscu albo *miejscowego* ciężaru właściwego, podobnie jak utworzyliśmy wyżej pojęcie prawdziwej czyli miejscowej gęstości.

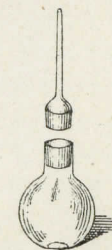
Przytaczamy wartości gęstości oraz ciężaru właściwego niektórych substancji. Liczba, podana w tablicy, wyraża gęstość w jednostce gr/cm³ a zarazem ciężar właściwy w jednostce Gr/cm³. Liczby ujęte w nawias są średnie przybliżone.

Korek	(0·24)	Cegła	(2·1)
Drewno.	(0·5) do (0·8)	Gips palony	(1·8)
Alkohol etylowy (20° C)	0·79	Szkło	(2·5) do (4·7)
Nafta (15° C)	(0·80)	Glin	2·58
Oliwa (15° C)	(0·90)	Dżament	(3·5)
Lód (0° C)	0·92	Żelazo	7·0 do 7·9
Woda 4° C	1·0000	Miedź	8·9
. . . 15° C	0·9991	Ółów	11·4
Mleko	(1·03)	Rtęć (15° C)	13·56
Piasek suchy	(1·5)	Platyna	21·5

Piknometrem nazywamy prosty przyrząd, służący do mierzenia gęstości cieczy. Wyobraźmy sobie flaszeczkę szklaną (rys. 128), która zamyka się szlifowaną zatyczką, otwartą jak rurka. Napełniamy to naczynko wodą aż do kreski, umieszczonej na ścianie zatyczki i ważymy je wówczas; odjawszy ciężar pustego naczynka, otrzymujemy objętość jego wnętrza czyli *pojemność*. Napełniamy naczynko badaną cieczą aż do wspomnianej kreski; odjawszy ciężar pustego piknometru, znajdujemy ciężar (lub masę) znanej objętości, wypełnionej uważaną cieczą.

Zadania.

1. Sześcienn szklany, którego krawędź ma 5 cm długości, waży 355 Gramów; jaka jest średnia gęstość tego ciała?
2. Ile waży litr nafty? ile waży litr rtęci? Jaką objętość zajmuje 100 gr alkoholu lub 500 gr oliwy? O ile więcej waży litr mleka niż litr wody?
3. Wykonano z cegły mur, którego grubość wynosi 60 cm, długość 6 m, wysokość 4 m; obliczyć ciężar muru.
4. Naczynie w 15° C zawiera 339 gr rtęci; obliczyć jego pojemność.
5. Piasek wydobyty z ziemi waży 450 Kg; obliczyć objętość wykopu.
6. Po wypełnieniu rtęcią, rurka o długości 20 cm, w 15° C, waży o 34·08 Gr więcej niż pusta. Obliczyć promień średniego wewnętrznego przecięcia.
7. Ciężar właściwy kilku metali wyrazić w jednostce: dyna/cm³.



Rys. 128.