PEDAGOGICZNA BIBLIOTEKA
WOJEWÓDZKA W BIAŁYMSTOKU
21114

Biblioteka Pedagogiczna CEN
nr inw.: KG - 21114
BC KSK / 21114

Prof. Dr. BOLESŁAW LEBIEDZIŃSKI

ANALIZA MATEMATYCZNA

Podręcznik dla studentów wyższych uczelni

LICZBY. CIĄGI. SZEREGI. GRANICE. FUNKCJE. NIESKOŃCZONOSTKI. POCHODNE i RÓŻNICZKI. ROZWIJANIE FUNKCJI NA SZEREGI. MAXIMA i MINIMA.

WARSZAWA — 1923
GŁÓWNA KSIĘGARNIA WOJSKOWA

PEDAGOGICZNA
Biblioteka Wojewódzka
w Białymstoku
21.114.

PRZEDMOWA.

W literaturze polskiej, zwłaszcza zastosowanej do potrzeb szkolnych, mamy stosunkowo bardzo nie wiele podręczników Analizy Matematycznej. Z chwilą zmartwychwstania Rzeczypospolitej Polskiej i otworzenia wrót, wiodących do swobodnego korzystania z wyższej wiedzy w rodzinnym języku, zjawiła się gwałtowna potrzeba wydania wielu podręczników z dziedziny wiedzy matematycznej, a zwłaszcza kursu Analizy Matematycznej, któryby ułatwiał przyswajanie słuchaczom wykładów akademickich. W nadziei, że choć w nieznacznym stopniu praca moja przysłużyć się może do wypełnienia tego zadania, książkę niniejszą napisałem. Kurs mój Analizy Matematycznej będzie się składał z czterech tomów, w których będzie zawarty całokształt wiedzy z dziedziny tego przedmiotu w zakresie kursu wyższych uczelni. Tom pierwszy tego kursu zawiera pojęcia podstawowe i zasady rachunku różniczkowego z zastosowaniami do badania własności funkcji; tom drugi — całkowanie funkcji teorję całek określonych z zastosowaniami do rozwiązywania zagadnień z analizy i geometrji; tom trzeci będzie zawierał geometrję różniczkową, a tom czwarty — równania różniczkowe całkowe.

Byłbym bardzo szczęśliwy, gdyby moja praca przyniosła pożytek naszej młodzieży akademickiej, przyczyniła się do pogłębienia zasad matematyki wśród tych wszystkich, którzy pragną należć jej praktyczne zastosowania i wpłynęła wogóle na uprzystępnienie i umiłowanie tej wiedzy.

Spełnię wreszcie miły obowiązek, wyrażając serdeczne podziękowanie Wojskowemu Instytutowi Naukowo-Wydawniczemu, który, nie żałując środków, podjął się wydania niniejszego kursu w warunkach bardzo ciężkich dla wydawnictwa prac naukowych.

Bolesław Lebiedziński.

Warszawa
5 kwietnia 1921 r.

Rozdział I.

Rozwój pojęcia liczby. Liczby rzeczywiste.

§ 1. **Układ liczbowy.** Zbiór liczb

$$[a, b, c, d \ldots] \ldots [L]$$

tworzy układ liczbowy. Liczby $a, b, c \ldots$, tworzące układ liczbowy, nazywamy jego elementami. Stosownie do liczby elementów rozróżniamy układy skończone i nieskończone. Układ liczbowy $[L]$ nazywamy względem pewnego działania algebraicznego pełnym, jeżeli po wykonaniu tego działania nad dwoma jakimikolwiekbądź elementami układu $[L]$ znajdujemy w rezultacie element, należący do tego samego układu. Układ liczbowy nazywamy algebraicznym, jeżeli dla wszystkich elementów tego układu mają miejsce zasadnicze prawa algebry, to jest prawo przemienności owe i łączności owe względem dodawania i mnożenia oraz prawo rozdzielności owe. Według tych praw, dla wszystkich elementów układu algebraicznego będzie

$$a+b=b+a;\ ab=ba\ldots \text{ (prawo przemienności owe)}$$

$$(a+b)+c=a+(b+c);\ (ab).c=a(bc)=\ldots \text{ (prawo łączności owe),}$$

$$a(b+c)=ab+ac\ldots \text{ (prawo rozdzielności owe).}$$

Układ liczbowy

$$[a, b, c, d \ldots] \ldots [L],$$

ułożony w ten sposób, że

$$a<b<c<d<\ldots$$

nazywamy uporządkowanym według wielkości liczbowej jego elementów.

Układ liczbowy $[L]$ nieskończony, uporządkowany według wielkości liczbowej jego elementów, posiadający pierwszy lecz nie ostatni element, będziemy nazywali układem ograniczonym z góry.

Układ liczbowy $[L]$ nieskończony, uporządkowany według wielkości liczbowej jego elementów posiadający ostatni lecz nie

pierwszy element, będziemy nazywali układem ograniczonym z dołu.

Układ liczbowy $[L]$, nieskończony, uporządkowany według wielkości liczbowej jego elementów, posiadający zarówno pierwszy jak i ostatni element, będziemy nazywali układem zupełnie ograniczonym.

Układ liczbowy $[L]$, nieskończony, uporządkowany według wielkości liczbowej jego elementów, nie posiadający ani pierwszego, ani ostatniego elementu, będziemy nazywali układem zupełnie nieograniczonym.

Układ liczbowy $[L]$, uporządkowany według wielkości liczbowych jego elementów nazywamy wszędziegęstym (überall dicht, partout dense) jeżeli między każdymi dwoma elementami układu $[L]$ istnieje nieskończenie wiele elementów tego układu.

§ 2. **Układ liczb naturalnych.** Pierwszym i najprostszym układem liczbowym, znanym w matematyce, jest układ wszystkich liczb całkowitych, dodatnich. Układ ten, uporządkowany według wielkości liczbowych swoich elementów,

$$[1, 2, 3, 4 \ldots] \ldots [N]$$

będziemy nazywali układem liczb naturalnych. Układ $[N]$ oczywiście będzie algebraiczny, gdyż dla niego mają miejsce zasadnicze prawa algebry. Zauważyć należy, że dla układu $[N]$ ma miejsce jeszcze tak zwane prawo monotoniczne względem dodawania i mnożenia, które polega na tem, że jeżeli a, b i x są jakimikolwiekbądź elementami układu $[N]$, to nierówność

$$a < b$$

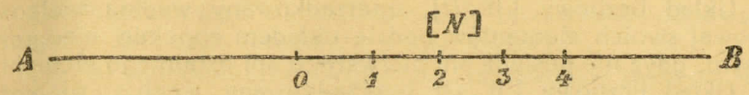
pociąga za sobą nierówności

$$a + x < b + x$$
$$a \cdot x < b \cdot x$$

Układ liczb naturalnych $[N]$ będzie układem ograniczonym z góry, gdyż posiada pierwszy element 1. Układ $[N]$ będzie względem dodawania i mnożenia pełny, ponieważ suma i iloczyn dwóch jakichkolwiek bądź liczb całkowitych dodatnich będzie również liczbą całkowitą dodatnią, natomiast układ $[N]$ będzie niepełny względem odejmowania i działania, gdyż różnica i iloraz dwóch liczb całkowitych dodatnich nie zawsze lecz tylko w poszczególnych przypadkach są liczbami całkowitemi dodatniemi.

Możemy przedstawić układ $[N]$ geometrycznie w następujący sposób: wyobraźmy sobie prostą AB, którą będziemy nazywali osią liczbową. Obieramy na tej prostej dowolny punkt O za początkowy. (Rys. 1).

Obrazem geometrycznym liczby a układu $[N]$, będziemy nazywali punkt, znajdujący się na osi liczbowej naprawo



Rys. 1.

od punktu początkowego O w odległości od tego punktu równej a dowolnie wybranym jednostkom długości. Każdemu elementowi układu liczbowego $[N]$ odpowiada pewny punkt na osi liczbowej, który będzie obrazem geometrycznem tego elementu. Zbiór punktów, przedstawiających γ obrazy geometryczne wszystkich elementów układu liczbowego $[N]$, nazywamy obrazem geometrycznym tego układu.

§ 3. **Układ liczb wymiernych.** Pierwszego rozszerzenia układu liczbowego poza liczby całkowite dodatnie dokonano przez wprowadzenie ułamków. Rozszerzenie to zawiera nowe ujęcie istoty liczby. Nie jest ona już wynikiem bezpośredniego liczenia, lecz zawiera pierwsze cechy abstrakcji. Liczby ułamkowe wprowadził do matematyki po raz pierwszy Diophantes z Aleksandrji, który żył około r. 300 po Chr. Z punktu widzenia logicznego można uważać liczbę ułamkową $\frac{a}{b}$ za parę liczb całkowitych (a, b). Możemy wówczas określić stosunek wzajemny oraz działania dodawania i mnożenia liczb ułamkowych. Określenia te opierają się jedynie na własnościach liczb całkowitych dodatnich.

Powiadamy, że dwie liczby ułamkowe $\frac{a}{b}$ i $\frac{a_1}{b_1}$ są równe, jeżeli $ab_1 = a_1 b$; powiadamy dalej, że liczba ułamkowa $\frac{a}{b}$ jest mniejsza od liczby ułamkowej $\frac{a_1}{b_1}$, jeżeli $ab_1 < ba_1$

Sumą dwóch liczb ułamkowych $\frac{a}{b}$ i $\frac{a_1}{b_1}$ określamy jako parę liczb całkowitych $(ab_1 + a_1 b;\ bb_1)$, zaś iloczyn ich jako parę $(aa_1,\ bb_1)$.

Zbiór wszystkich liczb dodatnich całkowitych i ułamkowych nazywamy układem dodatnich liczb wymiernych i oznaczamy przez symbol $[W.D]$. Ponieważ określenia wzajemnego stosunku oraz działań dodawania i mnożenia opierają się na własnościach liczb całkowitych dodatnich, dla układu $[W.D]$ mają miejsce zasadnicze prawa algebry. A więc układ liczbowy $[W.D]$ jest algebraiczny. Z tegoż powodu prawo monotoniczne, określone w poprzednim paragrafie, zachodzi również dla liczb układu $[W.D]$.

Układ liczbowy $[W.D]$ będzie pełny względem dodawania, mnożenia oraz dzielenia, gdyż wynikiem każdego z tych działań, wykonanego nad dwoma jakimikolwiekbądź elementami układu $[W.D]$, jest element tego samego układu.

Układ liczbowy $[W.D]$, uporządkowany według wielkości liczbowej swoich elementów, będzie układem zupełnie nieograniczonym, gdyż nie posiada ani pierwszego ani ostatniego elementu.

Układ liczbowy $[W.D]$, uporządkowany według wielkości liczbowych swoich elementów, będzie wszędziegęsty, ponieważ między dwiema dowolnemi dodatniemi liczbami wymienionemi istnieje nieskończenie wiele takich samych liczb. Obrazem geometrycznym układu liczbowego $[W.D]$ będzie zbiór nieskończony punktów na osi liczbowej, znajdujących się naprawo od punktu początkowego O, z których każdy będzie obrazem geometrycznym pewnego elementu układu.

Na mocy wszędziegęstości układu liczbowego $[W.D.]$ między abrazami geometrycznymi dwóch jakichkolwiek elementów układu mieści się nieskończenie wiele punktów, z których każdy jest obrazem geometrycznym pewnego elementu układu.

Następne rozszerzenie układu liczbowego było wykonane przez wprowadzenie liczb ujemnych, które wiąże się z radykalną zmianą w samym pojęciu liczby. Wprowadzenie tych liczb zniosło wielowiekową tradycję, która utrwaliła wśród matematyków myśl, jakoby liczba musiała wyrażać samą tylko wielkość. Liczba ujemna dodaje do tego pojęcia wielkości pojęcie kierunku lub zwrotu, zaś algebrze nadaje charakter formalnego symbolizmu. Z algebraicznego punktu widzenia zaznaczyć należy, iż liczby ujemne wprowadzono po to, aby umożliwić działania odejmowania dla wszelkich dwóch liczb dodatnich.

Formalnie wprowadza się liczby ujemne w taki oto sposób: jeżeli a i b są dwie jakiekolwiek liczby dodatnie i jeżeli $a<b$, wówczas wyraz $a-b$ nie ma w układzie liczb $[W.D]$ żadnej wogóle treści. Wyraz $b-a$ natomiast jest zupełnie określoną liczbą dodatnią c, która należy do układu $[W.D]$. Otóż wyraz $a-b$ oznaczamy nowym symbolem $-c$. Według tego określenia, każdej liczbie dodatniej układu $[W.D]$ odpowiada jeden z tych nowych symbolów, które nazwaliśmy liczbami ujemnemi. Liczbę dodatnią c nazywamy wartością bezwzględną liczby ujemnej $-c$. Jednocześnie wprowadzamy symbol $0=a-a$, który nazywamy zerem.

Stosunki wzajemne co do wielkości między liczbami ujemnemi oraz między ujemnemi a dodatniemi (włącznie z zerem) ustanawiamy przez określenie, w myśl którego: 1) każda liczba ujemna jest mniejsza od wszelkich liczb dodatnich, 2) dla dwóch liczb ujemnych $-a$ i $-b$ będzie $-a<-b$ jeżeli $b<a$.

Celem zachowania dla liczb ujemnych zasadniczych praw algebry, musimy ustalić pewne prawidła co do znaków przy dodawaniu i mnożeniu liczb ujemnych; prawidła te będziemy uważali za pewne umowy.

Według tych prawideł będzie:

$$a+(-b)=a-b.$$
$$(-a).b=a.(-b)=-(ab).$$
$$(-a).(-b)=a.b.$$

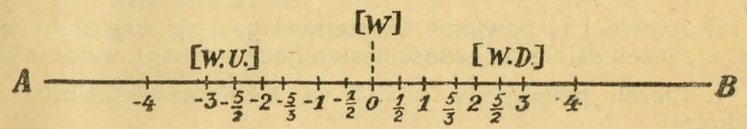
Łatwo przekonać się że przy tych określeniach dodawania i mnożenia zachodzą zasadnicze prawa algebry.

Prawo monotoniczne względem dodawania zachodzi bez żadnej zmiany, zaś względem mnożenia owo prawo należy zmodyfikować tak, ażeby brzmiało: jeżeli $a<b$, wówczas

$$ax<bx, \quad \text{gdy } x>0$$
$$ax=bx, \quad \text{gdy } x=0$$
$$ax>bx, \quad \text{gdy } x<0$$

Obrazem geometrycznym liczby ujemnej $-a$ nazywamy punkt na prostej AB, znajdujący się na lewo od punktu początkowego O w odległości a przyjętych jednostek długości (Rys. 2). Oczywista, obrazy geometryczne liczb a i $-a$ są punktami symetrycznymi względem punktu początkowego O, który przyjmujemy za obraz geometryczny liczby 0. Z tego wynika, że obrazy geometryczne układu dodatnich liczb wymiernych $[WD]$ i układu liczb ujemnych $[W.U]$ uporządkowanych według wielkości liczbowej ich elementów, są symetrycznemi względem punku początkowego O. Zbiór wszystkich liczb dodatnich i ujemnych włącznie z zerem nazywamy układem liczb wymiernych i oznaczamy przez symbol:

$$[W].=[W.D]+[W.U]$$



Rys. 2.

Układ liczbowy $[W]$ jest układem algebraicznym, ponieważ przy wyżej oznaczonych określeniach dodawania i mnożenia liczb ujemnych zachowują się zasadnicze prawa algebry. Układ liczbowy $[W]$ będzie pełnym względem wszystkich czterech zasadniczych działań algebraicznych: dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, gdyż wynikiem tych działań nad jakiemikolwiek dwiema liczbami układu $[W]$ jest liczbą a również należącą do tego samego układu.

Układ liczbowy $[W]$ jest zupełnie nieograniczony, gdyż nie posiada ani pierwszego ani ostatniego elementu. Układ $[W]$ jest układem wszędziegęstym, gdyż układy $[W.D]$ i $[W.U]$, z których składa się układ $[W]$, są układami wszędziegęstymi.

Obrazem geometrycznym układu liczbowego $[W]$ jest nieskończenie wielka liczba punktów (lecz nie wszystkich) na osi liczbowej AB.

§ **4. Grupa. Układ $[W]$ jako grupa. Pole liczbowe.** Aby lepiej zrozumieć pojęcie układu liczbowego oraz jego rozwoju historycznego, rozpatrzmy wprzód pojęcia nieco ogólniejsze.

Rozpatrzmy zbiór skończony lub nieskończony jakichkolwiekbądź jednorodnych przedmiotów:

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots .]$$

który oznaczmy symbolicznie przez $[A]$.

Działaniem $*$ na dowolnych dwóch elementach α i β zbioru $[A]$ lub ich kompozycją, będzie skojarzenie, którego wynikiem jest trzeci element $\varkappa$, należący lub też nie należący do zbioru $[A]$.

Będziemy oznaczali:

$$\alpha * \beta = \varkappa.$$

Trzeba zauważyć, że rezultat kompozycji dwóch elementów zależy od porządku elementów przy kompozycji, a mianowicie w przypadku ogólnym będziemy mieli:

$$\alpha * \beta = \varkappa,$$

zaś

$$\beta * \alpha = \lambda.$$

W przypadku szczególnym, gdy

$$\alpha * \beta = \beta * \alpha$$

działanie $*$ nazywamy przemiennościowem.

O zbiorze $[A]$ powiemy, że stanowi grupę względem działania $*$, jeżeli dzieje się zadość następującym czterem założeniom:

1. Jeżeli przedmioty α i β są elementami zbioru $[A]$, przedmiot

$$\alpha * \beta = \delta$$

również będzie elementem zbioru $[A]$

2. Jeżeli przedmioty α, β i γ są elementami zbioru $[A]$, rezultat działania $*$ na przedmiotach α i $\beta * \gamma$ jest ten sam co na przedmiotach $\alpha * \beta$ i γ czyli

$$\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma$$

3. W zbiorze $[A]$ istnieje taki element i, iż dla każdego elementu α tego zbioru będzie

$$\alpha * i = i * \alpha = \alpha$$

Taki element i nazywamy jednostką grupy $[A]$.

4. Istnieje w zbiorze $[A]$ dla każdego elementu α taki element α_1 iż

$$\alpha * \alpha_1 = i$$

Element α_1 nazywamy elementem odwrotnym czyli odwrotnością elementu α w grupie $[A]$.

Nie trudno udowodnić: 1) że każda grupa posiada tylko jedną jednostkę 2) że każdemu elementowi grupy odpowiada

w tejże grupie jeden i tylko jeden określony element odwrotny. W samej rzeczy, przypuszczając, iż grupa $[A]$ posiada dwa elementy identyczne i i i_1, będziemy mieli według określenia

$$i * i_1 = i_1 * i = i,$$

$$i_1 * i = i_1.$$

Stąd wynika, że:

$$i = i_1$$

Przypuszczając, że w grupie $[A]$ jakiemukolwiekbądź elementowi α odpowiadają dwa elementy odwrotne α_1 i α'_1, możemy napisać według określenia

$$\alpha * \alpha_1 = i$$

$$\alpha * \alpha'_1 = i$$

Przeto

$$(\alpha * \alpha_1) * \alpha'_1 = i * \alpha'_1 = \alpha'_1$$

$$(\alpha * \alpha_1) * \alpha'_1 = i * \alpha'_1 = \alpha_1$$

Według zaś własności (2) grupy będziemy mieli

$$(\alpha * \alpha_1) * \alpha'_1 = \alpha * (\alpha_1 * \alpha'_1) = \alpha'_1$$

$$(\alpha * \alpha'_1) * \alpha_1 = \alpha * (\alpha'_1 * \alpha_1) = \alpha_1$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\alpha_1 * \alpha'_1 = i \quad \text{i} \quad \alpha'_1 * \alpha_1 = i,$$

otrzymujemy

$$\alpha'_1 = \alpha_1$$

co mieliśmy do udowodnienia.

Działanie $*$ będziemy nazywali przemiennościowem, jeżeli porządek elementów, nad którymi to działanie wykonywamy, nie odgrywa roli to jest nie wpływa na rezultat działania (naprzykład mnożenie, dodawanie); w przeciwnym zaś razie to działanie będziemy nazywali nieprzemiennościowem (naprzykład odejmowanie, dzielenie i t. p.).

Grupę względem działania $*$ nazywamy przemiennościową czyli abelową, jeżeli działanie $*$ będzie przemiennościowe.

Jeżeli dla pewnej grupy $[A] = [\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots .]$ względem dwóch działań $*$ i $\circ$ mają miejsce wyrażenia

$$\alpha * (\beta \circ \gamma) = (\alpha * \beta) \circ (\alpha * \gamma) \qquad (4)$$

$$(\beta \circ \gamma) * \alpha = (\beta * \alpha) \circ (\gamma * \alpha) \qquad (5)$$

grupę $[A]$ nazywamy symetryczną względem działania $*$.

W tym przypadku, gdy grupa $[A]$ jest przemiennościową, wyrażenie (5) będzie wynikiem wyrażenia (4).

Wyrażenie (4) nazywamy prawem rozdzielnościowem dla działania $*$ względem działania $\circ$; grupę zaś, dla której to pra-

wo będzie miało miejsce, nazywamy p o l e m względem działań $*$ i $\bigcirc$.

Rozpatrzmy naprzykład zbiór podstawień, wykonanych nad elementami a, b, c, ułożonymi w porządku abc; ten zbiór będzie zawierał sześć elementów α, β, γ, δ, Δ i ε, które oznaczamy

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} a & c & b \\ a & b & c \end{pmatrix}; \quad \gamma = \begin{pmatrix} b & a & c \\ a & b & c \end{pmatrix}; \quad \delta = \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} c & a & b \\ a & b & c \end{pmatrix}; \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

gdzie przez symbol $\begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$ oznaczono przemianę, przy której element a zastąpiono przez element b, element b przez c, element zaś c przez a.

„Iloczynem" dwóch jakichkolwiekbądź podstawień β i δ nazywamy takie działanie, przy którym wykonywamy kolejno nad przemianą abc podstawienie β, zaś nad otrzymanym rezultatem podstawienie δ. Mnożenie podstawień będziemy oznaczali symbolem

$$\beta \times \delta$$

Łatwo przekonać się, że zbiór $[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \Delta, \varepsilon]$ . . . . (P) tworzy grupę względem „mnożenia". W samej rzeczy, mnożąc elementy β i δ, otrzymujemy:

$$\beta \times \delta = \begin{pmatrix} a & c & b \\ a & b & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a & c \\ a & b & c \end{pmatrix} = \gamma$$

to jest element zbioru (P).

Dalej będziemy mieli:

$$\beta \times (\gamma \times \varepsilon) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ a & b & c \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} b & a & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & b & c \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} a & c & b \\ a & b & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Z drugiej strony będziemy mieli:

$$(\beta \times \gamma) \times \varepsilon = \left[\begin{pmatrix} a & c & b \\ a & b & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b & a & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & b & c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Stąd wynika, że:

$$\beta \times (\gamma \times \varepsilon) = (\beta \times \gamma) \times \varepsilon$$

W zbiorze (P) jest element:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

takim, że dla każdego elementu zbioru (P), naprzykład Δ, będzie

$$\Delta \times \alpha = \begin{pmatrix} c & a & b \\ a & b & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a & b \\ a & b & c \end{pmatrix} = \Delta$$

Przeto α jest jednostką zbioru (P).

Nareszcie widzimy, że każdemu elementowi zbioru (P) odpowiada w tym samym zbiorze element odwrotny. Odwrotnością elementu δ w zbiorze (P) będzie element ε, gdyż

$$\delta \times \varepsilon = \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} = \alpha,$$

inne zaś elementy będą jednocześnie własną swą odwrotnością.

A więc zbiór (P) stanowi grupę względem „mnożenia".

Łatwo zauważyć, że grupa (P) będzie nieprzemiennościowa. W samej rzeczy dla dwóch jakichkolwiekbądź elementów β i ε będziemy mieli:

$$\beta \times \varepsilon = \begin{pmatrix} a & c & b \\ a & b & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a & b \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

Zaś

$$\varepsilon \times \beta = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & b & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & c & b \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix};$$

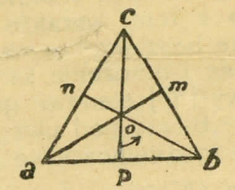
więc

$$\beta \times \varepsilon \neq \varepsilon \times \beta,$$

to jest grupa (P) jest nieprzemiennościowa.

Powyższą grupę można zilustrować geometrycznie w sposób następujący (Rys. 3).

Mamy trójkąt równoboczny abc.



Rys. 3.

Rozważmy obroty trójkąta abc naokoło jego środka o oraz jego linji symetrji am, bn, cp, przekształcające trójkąt na siebie. Rozumiemy przez to taki ruch trójkąta, po odbyciu którego zmieniają się tylko litery przy jego wierzchołkach. Łatwo przekonać się, że zbiór wszystkich obrotów trójkąta stanowi grupę (P). W samej rzeczy, mamy sześć różnych obrotów, które przekształcają trójkąt abc na siebie, a mianowicie: trzy obroty trójkąta we własnej jego płaszczyźnie naokoło jego środka o kąty 120°, 240° i 360°; oraz trzy obroty trójkąta naokoło prostych am, bn i cp o kąt 180° właśnie

te obroty przekształcają trójkąt na siebie i odpowiadają sześciu różnym elementom zbioru (P), a mianowicie: obrotowi trójkąta naokoło środka o o kąt 120° odpowiada w zbiorze (P) element δ; obrotowi naokoło środka o kąt 240° odpowiada element ε, obrotowi zaś naokoło o o kąt 360° odpowiada element α; obrotowi trójkąta o kąt 180° naokoło prostej am odpowiada element β, naokoło prostej bn —element Δ, obrotowi zaś naokoło prostej cp odpowiada element γ. A więc zbiór wszystkich powyższych obrotów istotnie stanowi grupę nieprzemiennościową; jednostka tej grupy będzie obrót trójkąta abc naokoło jego środka o o kąt 360°.

Wracamy teraz znowu do układu $[W]$ liczb wymiernych. Ponieważ układ $[W]$ będzie pełny względem dodawania i mnożenia, pierwszy warunek, aby układ ten stanowił grupę względem dodawania i mnożenia, jest spełniony. Dalej, ponieważ dla układu $[W]$ daje się zastosować prawo łącznościowe względem dodawania i mnożenia, które wyraża się w ten sposób, że

$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$
$$a.(bc)=(a.b)\ c,$$

więc drugi warunek, aby układ (P) stanowił grupę względem dwóch wyżej wymienionych działań, jest spełniony.

W układzie $[W]$ istnieją liczby 0 i 1, z których pierwsza jest jednostką zbioru $[W]$, jako grupy względem dodawania, zaś druga jest elementem tego zbioru jako grupy względem mnożenia. Jest to właśnie trzeci warunek dla grupy. Wreszcie widzimy, że w układzie $[W]$ każdemu elementowi a (z wyjątkiem o) odpowiada element $-a$ oraz $\frac{1}{a}$, które są odpowiednio elementami odwrotnymi elementu a zbioru $[W]$ jako grupy względem dodawania i mnożenia. A więc czwarty warunek dla grupy jest spełniony.

Układ $[W]$ liczb wymiernych stanowi więc grupę względem dodawania i mnożenia z tem wszakże zastrzeżeniem, że dla liczby 0 tego układu nie będziemy wymagali odwrotności.

Ponieważ dodawanie i mnożenie są to działania przemiennościowe, układ liczbowy $[W]$ stanowi grupę przemiennościową względem tych działań. Biorąc pod uwagę, że dla liczb układu $[W]$ ma miejsce prawo rozdzielnościowe

$$a.(b+c)=ab+ac,$$

widzimy, że układ $[W]$ będzie polem względem dodawania i mnożenia. Pole to nazywamy p o l e m l i c z b o w e m.

§ 5. **Przekroje Dedekinda. Liczby niewymierne Podług Dedekinda.** Podzielmy układ liczbowy $[W]$, uporządkowany według wielkości liczbowych swoich elementów, na dwie klasy $[A]$ i $[B]$ takie, iż: 1) żadna z tych klas nie jest pusta, 2) każdy z elementów układu $[W]$ należy do klasy $[A]$, albo do klasy $[B]$, 3) każdy z elementów klasy $[A]$ jest mniejszy od każdego elementu klasy $[B]$

Podział układu liczbowego $[W]$, który spełnia wyżej wymienione warunki, nazywamy podług Dedekinda p r z e k r o j e m układu $[W]$. Przekrój będziemy oznaczali przez symbol $[A \mid B]$.

Łatwo przekonać się, że możliwy jest jeden z trzech wykluczających się wzajemnie przypadków następujących:

1. W klasie $[A]$ istnieje liczba największa, a w klasie $[B]$ nie istnieje liczba najmniejsza.
2. W klasie $[A]$ istnieje liczba najmniejsza, a w klasie $[B]$ nie istnieje liczba największa.
3. W klasie $[A]$ nie istnieje liczba największa, a w klasie $[B]$ nie istnieje liczba najmniejsza.

Innych przekrojów układu $[W]$ oprócz wymienionych być nie może.

W samej rzeczy, przypuśćmy, że możliwy jest jeszcze czwarty typ przekroju układu $[W]$, przy którym w klasie $[A]$ istnieje liczba a większa od wszystkich innych liczb tej klasy, zaś w drugiej klasie $[B]$ istnieje liczba b mniejsza od wszystkich innych liczb klasy $[B]$. Oczywista, wszystkie liczby zawarte między a i b, to jest mniejsze od a, ale większe od b, nie mogłyby należyć ani do klasy $[A]$ ani do klasy $[B]$, gdyż według przypuszczenia a jest największą liczbą w klasie $[A]$, b jest najmniejszą liczbą w klasie $[B]$. A więc przy wyżej wymienionym podziale układu $[W]$ nie wszystkie liczby tego układu byłyby zaliczone do klasy, co jest w sprzeczności z samem pojęciem przekroju.

Przekroje pierwszego i drugiego typu nazywamy przekrojami z a m k n i ę t y m i. O każdym z owych przekrojów będziemy mówili, że o k r e ś l a p e w n ą l i c z b ę wymierną A. Jest to właśnie największa liczba klasy $[A]$ (w przekrojach pierwszego typu) lub najmniejsza liczba klasy $[B]$ (w przekrojach drugiego typu). O liczbie A będziemy mówili, że s p r a w i a p r z e k r ó j, czyli p o ł o ż o n a j e s t n a p r z e k r o j u. Jako przykład przekroju zamkniętego przytoczymy przekrój, przy którym do klasy $[A]$ zaliczone są wszystkie liczby mniejsze od 3, zaś do klasy $[B]$ wszystkie liczby większe od 3 oraz sama liczba 3. W tym przypadku dany przekrój określa liczbę wymierną 3; czyli innemi słowy liczba 3 sprawia dany przekrój.

Każdej więc liczbie wymiernej układu $[W]$ odpowiadają w tym układzie dwa pewne przekroje zamknięte

Przekrój układu $[W]$ trzeciego typu, czyli przekrój, przy którym w klasie $[A]$ nie istnieje liczba najmniejsza, a w klasie $[B]$ nie istnieje liczba największa, nazywamy przekrojem o t w a r t y m. Oczywista, w układzie $[W]$ niema takiej liczby wymiernej, któraby przekrój ten sprawiała. O przekroju otwartym będziemy mówili podług Dedekinda, że określa pewną liczbę n i e w y m i e r n ą. Chodzi nam przedewszystkiem o to, ażeby udowodnić istnienie przekrojów otwartych wyłącznie na podstawie teorji liczb wymiernych. W tym celu udowodnimy twierdzenie następujące:

T w i e r d z e n i e. Oznaczymy przez N pewną liczbę wymierną, która nie jest kwadratem żadnej liczby wymiernej,

i podzielimy układ liczbowy $[W]$ na dwie klasy $[A]$ i $[B]$, zaliczając do klasy $[A]$ wszystkie liczby układu $[W]$, których kwadraty są mniejsze od liczby N, a do klasy $[B]$ wszystkie inne liczby układu $[W]$. Udowodnimy, że ten podział układu $[W]$ stanowi przekrój otwarty.

Dowód. Oczywista, rozważany podział układu $[W]$ na dwie klasy stanowi pewien przekrój układu $[W]$, gdyż zachodzą pierwsze dwa warunki charakteryzujące przekrój.

Pozostaje więc tylko do udowodnienia, że przekrój ten jest otwarty. W tym celu oznaczmy przez a jakąkolwiek liczbę klasy $[A]$ i wybierzmy drugą liczbę wymierną m taką, żebyśmy mieli:

$$a < m < a+1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Wówczas będziemy mieli na mocy nierówności (6)

$$m^2 - a^2 = (m-a)\,(m+a) < (m-a)\,(2m+1). \quad . \quad 6^{(*)}$$

Liczba a, jako liczba należąca do klasy $[A]$, spełnia nierówność.

$$N - a^2 > 0$$

Będziemy zatem mogli liczbę m tak dobrać, żeby prócz nierówności (6) zachodziła nierówność,

$$m - a < \frac{N-a^2}{2a+1}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Wówczas będziemy mieli ze względu na (7) nierówność

$$(2a+1)\,(m-a) < N - a^2 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Na mocy nierówności (6*) i (8) mamy

$$m^2 - a^2 < N - a^2,$$

skąd

$$m^2 < N$$

Z tego wynika, że liczba m należy do klasy $[A]$

Stwierdzamy więc, że do każdej liczby a zbioru $[A]$ można dobrać większą od niej liczbę m, należącą również do klasy $[A]$. Przeto w klasie $[A]$ nie istnieje liczba największa.

Pozostaje tylko do udowodnienia, że w klasie $[B]$ nie istnieje liczba najmniejsza. W tym celu oznaczmy przez b jakąkolwiek liczbę klasy $[B]$ i wybierzmy pewną liczbę wymierną $n > b$.

Mamy tedy

$$b^2 - n^2 = (b-n)\,(b+n) < 2b\,(b-n) \quad \ldots \quad (9)$$

Biorąc pod uwagę, że liczba b, jako należąca do klasy $[B]$, jest od zera większa, liczbę n możemy wyznaczyć tak, ażeby zachodziła nierówność

$$b - n < \frac{b^2 - N}{2b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Wówczas mieć będziemy ze względu na nierówność (10)

$$2b\,(b-n) < b^2 - N$$

Z tej zaś nierówności i nierówności (9) mamy

$$b^2 - n^2 < b^2 - N,$$

skąd

$$n^2 < N$$

Z nierówności tej wynika, że liczba n należy do klasy $[B]$. Stwierdzamy więc, że do każdej liczby b klasy $[B]$ można dobrać większą od niej liczbę n, należącą również do klasy $[B]$. Przeto w klasie $[B]$ nie istnieje liczba najmniejsza.

Z tego wszystkiego wnosimy, że przekrój rozważony jest otwarty. Więc wykazaliśmy istnienie przekrojów otwartych.

Przejdźmy teraz do interpretacji geometrycznej przekroju w układzie liczbowym $[W]$. Przyjmijmy prostą MN (Rys. 4) za oś liczbową układu $[W]$.

Rys. 4.

Obrazami geometrycznymi różnych liczb wymiernych będą, jak wiadomo, różne punkty $A, A', A'' \ldots B'', B' \ldots$ na prostej MN. Przypuśćmy, że K jest punkt pewny na prostej AB. Względem tego punktu wszystkie punkty $A, A', A'' \ldots B'', B' \ldots$ możemy podzielić na dwie klasy $[A]$ i $[B]$, zaliczając do klasy $[A]$ wszystkie punkty $M, M', M'' \ldots$ położone nalewo od punktu K, zaś do klasy $[B]$ wszystkie punkty $N, N', N'' \ldots$ położone naprawo od K.

Oczywista, każda z liczb wymiernych, której obrazem geometrycznym jest jeden z punktów należących do klasy $[A]$, jest mniejsza od każdej z liczb wymiernych, której obrazem geometrycznym jest jeden z punktów należących do klasy $[B]$.

Stąd wynika, że punktowi K odpowiada pewien przekrój w układzie liczbowym $[W]$, mianowicie taki, przy którym do klasy $[A]$ zaliczone są wszystkie liczby wymierne, których obrazami geometrycznymi są punkty leżące nalewo od punktu K, zaś do klasy $[B]$ wszystkie liczby wymierne, których obrazami geometrycznymi są punkty, położone naprawo od K. W tym przypadku, gdy punkt K zaliczony jest do klasy $[A]$, lub do klasy $[B]$, przekrój w układzie liczbowym $[W]$, odpowiadający punktowi K, będzie zamknięty; w przeciwnym zaś razie przekrój ten będzie otwarty. W pierwszym przypadku przekrój ten określa pewną liczbę wymierną, w drugim zaś liczbę niewymierną. Obrazem geometrycznym tej liczby będzie właśnie punkt K.

Z tego wynika, że każdemu punktowi prostej odpowiada jedna i tylko jedna liczba wymierna lub niewymierna. Chodzi jteraz o to, czy będzie odpowiedniość ta wzajemna, to jest czy

PEDAGOGICZNA Biblioteka Wojewódzka w Białymstoku

będzie odpowiadał każdej liczbie wymiernej i niewymiernej pewny punkt prostej. Otóż trzeba zauważyć, iż wszystkie usiłowania dowiedzenia tej wzajemnej odpowiedniości są bezskuteczne. Jest to właśnie postulat, który, jak słusznie zauważył Tannery, znajduje się w ścisłym związku z postulatem ciągłości linji prostej, podanym przez Dedekinda.

Cantor podał następującą interpretację geometryczną tego postulatu. Niech $[A \mid B]$ będzie przekrójem układu liczbowego $[W]$. Oznaczamy barwą niebieską wszystkie punkty osi liczbowej, które odpowiadają liczbom klasy $[A]$, oraz tę część osi, która znajduje się nalewo od każdego punku, oznaczonego barwą niebieską. Oznaczamy barwą czerwoną wszystkie punkty osi liczbowej, które odpowiadają liczbom klasy $[B]$, oraz tę część osi, która znajduje się naprawo od każdego punktu, oznaczonego barwą czerwoną. Natomiast każdy punkt nie oznaczony barwą niebieską ani czerwoną będziemy uważali za punkt „biały". Oczywista, każdy punkt, odpowiadający jakiejkolwiek liczbie wymiernej, będzie oznaczony barwą niebieską lub czerwoną. Ponieważ każdy punkt „niebieski" będzie leżał nalewo od każdego punktu „czerwonego", — części osi, oznaczone różnemi barwami, nie mogą posiadać wspólnych punktów. Między temi częściami nie będzie dwóch punktów „białych". Istotnie, przypuśćmy, że istnieją między częściami oznaczonemi różnemi barwami dwa punkty „białe" R i S, z których R znajduje się nalewo od S; oczywista, między tymi dwoma punktami są punkty, odpowiadające liczbom wymiernym; przeto one powinny być oznaczone czerwoną lub niebieską barwą.

Jeżeli jeden z tych punktów jest „niebieski", to część osi liczbowej, znajdująca się nalewo od tego punktu, powinna być oznaczona barwą niebieską; przeto punkt R również jest „niebieski", co przeczy przypuszczeniu, że punkt R jest „biały". Jeżeli jeden z punktów leżących na osi liczbowej jest czerwony, to część osi liczbowej, znajdującą się naprawo od tego punktu powinna być oznaczona barwą niebieską; przeto punkt S również jest czerwony, co przeczy przypuszczeniu, że punkt S jest „biały"

Ażeby uniknąć tych sprzeczności, musimy przypuścić jedno z dwojga: albo istnieje jeden punkt biały, dzielący oś liczbową na części oznaczone odpowiednio niebieską i czerwoną barwą, albo takiego punktu wcale niema. W pierwszym przypadku punkt „biały" będzie odpowiadał pewnej liczbie niewymiernej określonej przez dany przekrój. Postulat o wzajemnej odpowiedniości między układem wszystkich liczb wymiernych lub niewymiernych a punktami osi liczbowej przypuszcza, iż każdej liczbie niewymiernej odpowiada pewien punkt „biały" na tej osi.

Udowodnimy bardzo ważne twierdzenie charakteryzujące przekrój układu liczbowego $[W]$.

Twierdzenie. Mając dany jakikolwiek przekrój układu liczbowego $[W]$, zawsze potrafimy wyznaczyć dwie liczby wymierne a i b, należące odpowiednio do klasy $[A]$ i $[B]$, a przytem takie ażeby było

$$b - a < \varepsilon$$

gdzie ε oznacza dowolnie naprzód daną dodatnią liczbę wymierną.

Dowód. Oznaczamy przez a_0 jakąkolwiek liczbę wymierną, należącą do klasy $[A]$ przy danym przekroju układu $[W]$, a przez w drugą dowolną wymierną liczbę dodatnią.

Rozpatrzmy zbiór zwiększających się liczb wymiernych:

$$a_0,\ a_0 + w,\ a_0 + 2w,\ a_0 + 3w. + \ldots .\ a_0 + mw,\ \ldots . \quad (A)$$

Oczywista, istnieje taka liczba całkowita m, iż wszystkie liczby zbioru (A) postaci $a_0 + nw$, gdzie $n > m$, będą należały do klasy $[B]$; pierwsza z takich liczb jest

$$b = a_0 + (m+1)w$$

Oznaczając przez

$$a = a_0 + m \,.\, w$$

ostatnią liczbę zbioru (A) należącą do klasy $[A]$, będziemy mieli

$$b - a = w$$

Zakładając $w < \varepsilon$, otrzymujemy nierówność

$$b - a < \varepsilon$$

o dowód której właśnie chodziło.

W tym przypadku, gdy przekrój dany jest otwarty, to jest określa pewną liczbę niewymierną α, wówczas liczby wymierne

$$b = a_0 + (m+1)w \text{ i } a = a_0 + mw$$

nazywamy wartościami przybliżonemi liczby niewymiernej α.

§ **6. Inne teorje liczb niewymiernych.** Metoda traktowania liczb niewymiernych podana przez Dedekinda polega na określeniu liczby niewymiernej jako przekroju $[A \mid B]$ otwartego w układzie liczbowym $[W]$.

Zauważyć należy, że oprócz metody Dedekinda istnieją jeszcze inne metody traktowania liczb niewymiernych, z których zauważmy metodę ciągów, podaną przez Cantora i Heinego, oraz metodę nieskończonych ułamków dziesiętnych. Łatwo przekonać się, że metody te znajdują się w ścisłym związku z metodą Dedekinda, a raczej są jej przypadkami szczególnymi.

Ciągiem nazywamy zbiór liczb następujących w pewnym porządku po sobie

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4 \ldots .\ u_n \ldots .$$

przyczem każda liczba jest określona przez swoje położenie w zbiorze. Wskaźniki 1, 2, 3 . . . n . . . oznaczają kolejne numery miejsc ciągu zajmowanych przez jego wyrazy.

Rozpatrzmy dwa ciągi nieskończone liczb wymiernych

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n,\ \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ \ldots\ U_n,\ \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{II})$$

z których pierwszy składa się z liczb zwiększających się (lub przynajmniej nie zmniejszających się)

$$u_1 \leqq u_2 \leqq u_3 \ldots \leqq u_n \leqq \ldots$$

drugi zaś z liczb zmniejszających się (lub przynajmniej nie zwiększających się)

$$U_1 \geqq U_2 \geqq U_3 \geqq \ldots U_n \geqq \ldots$$

Przypuśćmy, że każda liczba ciągu (I) jest mniejsza od każdej liczby ciągu (II) i że dla każdej dodatniej liczby ε naprzód danej można wyznaczyć taką liczbę całkowitą m, iżby zachodziła nierówność

$$U_n - u_n < \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

dla każdej liczby $n \geqq m$.

Mając dane dwa ciągi, możemy udowodnić następujące twierdzenie, podane przez Cantora.

T w i e r d z e n i e C a n t o r a. Istnieje jedna i tylko jedna taka liczba (wymierna lub niewymierną), która jest większa (lub przynajmniej nie mniejsza) od wszystkich liczb ciągu (I), a mniejsza (lub przynajmniej nie większa) od wszystkich liczb ciągu (II).

D o w ó d. Podzielmy wszystkie liczby układu liczbowego $[W]$ na dwie klasy $[A]$ i $[B]$, zaliczając do klasy $[A]$ wszystkie liczby wymierne, które są mniejsze przynajmniej od jednej z liczb ciągu (I) (lub są jemu równe), zaś do klasy [B] wszystkie liczby wymierne, które są większe przynajmniej od jednej z liczb ciągu (II) (lub są jemu równe).

Łatwo przekonać się, że przy takiej klasyfikacji każda liczba wymierna będzie zaliczona do klasy $[A]$ albo do klasy $[B]$. Istotnie, przypuśćmy, że pewna liczba x została zaliczona do klasy $]A]$; oczywista, w ciągu (I) istnieje przynajmniej jedna liczba nie mniejsza od x. Ponieważ każda liczba ciągu (II) jest mniejsza od każdej liczby ciągu (I), to każda liczba ciągu (II) jest większa od x, przeto liczba x nie może być zaliczona do klasy $[B]$. Chodzi teraz o to, czy wszystkie liczby wymierne przy wyżej oznaczonej klasyfikacji będą zaliczone do jednej z dwóch klas. Łatwo przekonać się, że tylko jedna liczba wymierna może zostać niezaliczoną ani do klasy $[A]$, ani do klasy $[B]$. Oczywista, jakakolwiek liczba wymierna może zostać niezaliczoną ani do klasy $[A]$ ani do klasy $[B]$ tylko wtedy, gdy liczba ta jest większa od wszystkich liczb ciągu (I), a mniejsza od wszystkich liczb ciągu (II).

Przypuśćmy, że istnieją dwie liczby M i N niezaliczone ani do klasy $[A]$, ani do klasy $[B]$. Wówczas dla każdej liczby n będziemy mieli.

$$u_n < M; \quad N < U_n$$

Skąd

$$U_n - u_n > N - M$$

Ostatnia nierówność jest w sprzeczności z nierównością (II). Sprzeczności tej możemy uniknąć tylko, przypuszczając, że

$$M = N.$$

A więc może być jedno z dwojga, albo wsystkie liczby wymierne przy podziale będą zaliczone do jednej z dwóch klas, albo wszystkie z wyjątkiem jednej.

W pierwszym przypadku, gdy wszystkie liczby wymierne zaliczone są do klasy, podział stanowi przekrój w układzie $[W]$ jednego z trzech wyżej rozważonych typów. Liczba wymierna lub niewymierna określona przez przekrój ten jest właśnie ta liczba, która spełnia warunki twierdzenia.

W drugim przypadku, gdy istnieje jedna liczba wymierna nie zaliczona do klasy, możemy zaliczyć ją do klasy $[A]$ lub do klasy $[B]$. Wówczas otrzymamy znowu przekrój, który określa pewną liczbę wymierną, mianowicie tę liczbę, która z początku została niezaliczoną do klasy. Liczba ta spełnia warunki twierdzenia. A więc we wszystkich przypadkach dwa ciągi liczb wymiernych (I) i (II) określają pewną liczbę wymierną lub niewymierną.

Metoda traktowania liczb niewymiernych podana przez Cantora i Heinego polega właśnie na określeniu liczby za pomocą dwóch ciągów typu (I) i (II).

Widzimy więc, że metoda ta znajduje się w ścisłym związku z metodą Dedekinda.

Należy zauważyć, że istnieje jeszcze jedna metoda traktowania liczb niewymiernych, a mianowicie, która traktuje te liczby, uważając je za nieskończone ułamki dziesiętne. Zastanowimy się nad tą metodą i ustalimy związek między nią a metodą Dedekinda.

Rozpatrzmy zbiór nieskończony liczb

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11^a)$$

z których każda może mieć tylko jednę z dziesięciu wartości, a mianowicie

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Rozpatrzmy symbol

$$A,\ a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

w którym A będziemy uważali jako liczbę jednostek, a — jako liczbę dziesiętnych części, a_2 — jako liczbę setnych częśći i t. d.

Symbol (13) nazywamy nieskończonym ułamkiem dziesiętnym.

Symbol (13) będzie określony, jeżeli każdej wartości n będzie odpowiadała pewna wartość liczby a_n Symbol (13) będzie znany, jeżeli będziemy mieli związek między liczbami n i a_n.

Przypuśćmy, że poczynając od pewnego miejsca nie wszystkie liczby a_n symbolu (13) są równe 0 lub 9. Łatwo przekonać się, że ułamek dziesiętny (13) określa pewny przekrój w układzie liczb wymiernych $[W]$. Wybierzmy liczbę dowolną p i rozpatrzmy ułamek dziesiętny.

$$A,\ a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_p,\ \ldots$$

który oznaczmy przez u_1. Niektóre z liczb a_{p+1}, a_{p+2} .... mogą być równe zeru (ale według umowy nie wszystkie). Niech $a_{p'}$ będzie pierwsza z tych liczb większa od zera. Ułamek dziesiętny

$$A,\ a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_p\ \ldots\ a_{p'}$$

oznaczmy przez u_2; mamy $u_1 < u_2$.

Niektóre z liczb $a_{p'+1}$, $a_{p'+2}$, $a_{p'+3}$ .... mogą być równe zeru (ale według umowy nie wszystkie). Niech $a_{p''}$ będzie pierwsza z tych liczb większa od zera. Ułamek dziesiętny

$$A,\ a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_p\ \ldots\ a_{p'}\ \ldots\ a_{p''}$$

oznaczamy przez u_3. Mamy $u_1 < u_2 < u_3$.

Postępując dalej w taki sam sposób, otrzymujemy zbiór skończonych ułamków dziesiętnych

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4\ \ldots \qquad (I)$$

przytem

$$u_1 < u_2 < u_3 < u_4\ \ldots$$

Oznaczając przez a_q liczbę dowolną (II^a) nierówną 9, rozpatrzmy ułamek dziesiętny

$$A,\ a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ (a_q + 1)$$

który oznaczmy przez U_1. Niektóre z liczb a_{q+1}, a_{q+2} .... mogą być równe 9 (ale według umowy nie wszystkie). Niech $a_{q'}$ będzie pierwsza z tych liczb mniejsza od 9. Ułamek dziesiętny

$$A,\ a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ (a_{q'} + 1)$$

który oznaczmy przez U_2, a więc mamy $U_2 < U_1$

Niektóre z liczb $a_{q'+1}$, $a_{q'+2}$ .... mogą być równe 9 (ale według umowy nie wszystkie). Niech $a_{q''}$ jest pierwsza z tych liczb mniejsza od 9. Ułamek dziesiętny

$$A,\ a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ (a_{q''} + 1)$$

oznaczmy przez U_3; będziemy mieli $U_3 < U_2 < U_1$.

Postępując dalej w taki sam sposób otrzymujemy zbiór skończonych ułamków dziesiętnych

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ \ldots. \qquad (II)$$

przytem

$$U_1 > U_2 > U_3 > U_4 > \ldots.$$

Łatwo zrozumieć, że każda liczba zbioru (II) jest większa od każdej liczby zbioru (I). W samej rzeczy, każda liczba zbioru (I) posiada kilka cyfr dziesiętnych wspólnych z każdą z innych liczb tego zbioru; są one albo równe 0, albo mniejsze od odpowiednich cyfr liczby zbioru (III) o jedność.

Z drugiej strony widzimy, że przy zwiększaniu się liczby n liczba wspólnych cyfr w ułamkach dziesiętnych U_n i u_n również będzie się zwiększała; przeto różnica $U_n - u_n$ przy dość wielkiej wartości liczby n może być mniejsza od dowolnie małej liczby ε. Z tego wynika, na mocy twierdzenia Cantora, że istnieje jedna taka liczba x, wymierna lub niewymierna, która jest większa od wszystkich liczb zbioru (I), a mniejsza od wszystkich liczb zbioru (II). Liczbę tę nazywamy właśnie wartością symbolu (13).

$$x = A,\ a_1\ a_2\ a_3\ \ldots.$$

Przykład: Rozpatrzmy symbol

$$3{,}1415926\ \ldots.$$

określający liczbę niewymierną π.

W tym przypadku mamy

$p = 1$	$u_1 = 3{,}1$	$q = 1$	$U_1 = 3{,}2$
$p' = 2$	$u_2 = 3{,}14$	$q' = 2$	$U_2 = 3{,}15$
$p'' = 3$	$u_3 = 3{,}141$	$q'' = 3$	$U_3 = 3{,}142$
$p''' = 4$	$u_3 = 3{,}1415$	$q''' = 4$	$U_4 = 3{,}1416$
$p^{IV} = 5$	$u_4 = 3{,}14159$	$q^{IV} = 5$	$U_5 = 3{,}141593$
. . . . .			
. . . . .			

A więc liczba π może być określona za pomocą dwóch zbiorów

3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; ....

3,2; 3,15; 3,142; 3,1416; 3,141593; ....

Uwaga. Łatwo zrozumieć, dlaczego odrzuciliśmy przypadki, w których poczynając od pewnego miejsca wszystkie cyfry dziesiętne są równe albo zeru albo 9; w pierwszym bowiem przypadku mielibyśmy do czynienia z ułamkiem skończonym, w drugim zaś z nieskończonym ułamkiem okresowym (o okresie 9), który zawsze jest liczbą wymierną.

§ 7. **Działania na liczbach niewymiernych.** Dwie liczby niewymierne α i α_1, określone odpowiednio przez przekroje $[A \mid B]$

i $[A_1 \mid B_1]$ w układzie liczbowym $[W]$, uważamy za równe, jeżeli wszystkie liczby klasy $[A]$ są liczbami klasy $[A_1]$, zaś wszystkie liczby klasy $[B]$ są liczbami klasy $[B_1]$.

O dwóch liczbach niewymiernych α i α_1, określonych odpowiednio przez przekroje $[A \mid B]$ i $[A_1 \mid B_1]$ w układzie liczbowym $[W]$, powiadamy, że liczba α jest mniejsza od α_1, jeżeli klasy $[B]$ i $[A_1]$ posiadają jakąkolwiek liczbę wspólną. Liczbę niewymierną α określoną przez przekrój $[A \mid B]$ uważamy za dodatnią, jeżeli w klasie $[A]$ są liczby dodatnie.

Liczbę niewymierną α, określoną przez przekrój $[A \mid B]$, uważamy za ujemną, jeżeli w klasie $[B]$ są liczby ujemne.

Zastanowimy się teraz nad działaniami na liczbach niewymiernych.

I. Dodawanie. Oznaczmy przez M i N dwie liczby (niewymierne lub wymierne), określone odpowiednio przez przekroje $[A \mid B]$ $[A_1 \mid B_1]$ w układzie liczb wymiernych $[W]$. Oznaczmy jeszcze przez x i y dowolne liczby, należące odpowiednio do klasy $[A]$ i $[A_1]$. Wybierzmy dwie dowolne liczby x' i y' odpowiednio większe od M i N.

Sumą dwóch liczb M i N nazywamy taką liczbę (niewymierną lub wymierną) S, która jest większa od wszystkich liczb $x+y$, a mniejsza od wszystkich liczb $x'+y'$. Udowodnimy teraz. że liczba S istnieje i jest liczbą zupełnie określoną.

W tym celu podzielmy wszystkie liczby wymierne $[W]$ na dwie klasy $[P]$ i $[Q]$, zaliczając do klasy $[P]$ wszystkie liczby wymierne, które równe są różnym liczbom $x+y$, lub są mniejsze przynajmniej od jednej z tych liczb, a do klasy $[Q]$ wszystkie liczby wymierne, które są równe różnym liczbom $x'+y'$, lub są większe przynajmniej od jednej z tych liczb. Ponieważ

$$\begin{matrix} x < M < x' \\ y < N < y' \end{matrix} \quad \ldots . \quad (14)$$

przeto

$$x+y < x'+y' \quad \ldots . \quad (15)$$

Z nierówności tej wynika, że każda liczba klasy $[P]$ będzie mniejsza od każdej liczby klasy $[Q]$. Ponieważ liczba x' należy do klasy $[B]$, a liczba y' należy do klasy $[B_1]$ możemy wyznaczyć na mocy twierdzenia udowodnionego w § 6 takie liczby wymierne x i x', y i y', że będą zachodziły nierówności

$$\begin{matrix} x' - x < \alpha \\ y' - y < \alpha \end{matrix} \quad \ldots . \quad (16)$$

dla każdej dowolnie wybranej liczby dodatniej α. Nierówności (16) pociągają za sobą nierówność

$$(x'+y') - (x+y) < 2\alpha$$

A więc przy podziale układu liczbowego $[W]$ na klasy $[P]$ i $[Q]$ w klasie $[P]$ i klasie $[Q]$ istnieją takie liczby wymierne, których różnica jest mniejsza od dowolnej liczby 2α. Na mocy twierdzenia Cantora, udowodnionego w § 6, będzie jedno z dwojga, albo przy wyżej oznaczonym podziale wszystkie liczby układu $[W]$ będą zaliczone do klasy, albo wszystkie z wyjątkiem jednej liczby. W pierwszym przypadku podział sprawia pewien przekrój otwarty, określający pewną liczbę niewymierną, a w drugim przekrój zamknięty określający pewną liczbę wymierną, mianowicie tę, która została niezaliczoną ani do pierwszej ani drugiej klasy, A więc w obydwóch przypadkach podział wszystkich liczb wymiernych układu $[W]$ określa jednę jedyną liczbę S, która jest większa od wszystkich liczb $x+y$ a mniejsza od wszystkich liczb $x'+y'$. Jest to właśnie według określenia sumą dwóch liczb M i N. A więc suma dwóch liczb (niewymiernych lub wymiernych) wyznaczonych przez przekroje jest liczbą zupełnie określoną, o co nam właśnie chodziło.

Łatwo przekonać się, że wszystkie własności zasadnicze sumy algebraicznej mają miejsce również przy nowem traktowaniu pojęcia sumy.

Uzasadnimy, naprzykład, prawo przemienności owe

$$M+N=N+M$$

Biorąc pod uwagę, że prawo przemienności owe jest prawdziwe dla liczb wymiernych, będziemy mieli

$$x+y=y+x$$

Z tego wnioskujemy, że każda liczba wymierna, która przy podziale wszystkich liczb wymiernych na dwie klasy $[P]$ i $[Q]$, określającym liczbę $M+N$, będzie zaliczona do klasy $[P]$ (względnie do klasy $[Q]$) również zostanie zaliczona do tej samej klasy przy podziale określającym liczbę $N+M$. A więc przekroje liczb wymiernych określających liczby $M+N$ i $N+M$ są indentyczne. Dowodzi to, iż zachodzi tu prawo przemienności owe względem dodawania liczb (niewymiernych lub wymiernych) określonych przez przekroje. W taki sam sposób możemy uzasadnić prawo łączności owe względem dodawania.

II. Mnożenie. Oznaczmy przez M i N dwie liczby niewymierne (lub wymierne), określone odpowiednio przez przekroje $[A \mid B]$ i $[A_1 \mid B_1]$ w układzie liczb wymiernych $[W]$. Oznaczmy jeszcze przez x i y dowolne liczby wymierne, należące odpowiednio do klasy $[A]$ i $[A_1]$. Wybierzmy dwie dowolne liczby wymierne x' i y'. Iloczynem dwóch liczb M i N nazywamy taką liczbę (niewymierną, lub wymierną) T, która jest większa od wszystkich liczb xy a mniejsza od wszystkich liczb $x'y'$. Iloczyn dwóch liczb M i N jest liczbą zupełnie określoną. Aby tego dowieść, podzielmy wszystkie liczby układu $[W]$ na dwie klasy $[P]$ i $[Q]$, zaliczając do klasy $[P]$ wszystkie liczby wymierne, które równe są różnym liczbom xy lub są mniejsze przynajmniej od jednej z tych liczb, a do klasy $[Q]$ wszystkie liczby wymier-

ne, które równe są wszystkim liczbom $x'y'$ lub są większe przynajmniej od jednej z tych liczb.

W sposób analogiczny poprzedniemu udowodnimy, że podział liczb wymiernych na klasy $[P]$ i $[Q]$ stanowi przekrój określający pewną liczbę (niewymierną lub wymierną). Liczba ta będzie właśnie iloczynem liczb M i N.

Łatwo przekonać się, że wszystkie własności zasadnicze iloczynów algebraicznych mają miejsce również przy nowem traktowaniu pojęcia iloczynu. Uzasadnimy, naprzykład, prawo przemienności owe

$$MN = NM.$$

Ponieważ prawo przemiennościowe jest prawdziwe dla liczb wymiernych, będziemy mieli

$$xy = yx.$$

Z tego wnioskujemy, że każda liczba wymierna, która przy podziale wszystkich liczb wymiernych na dwie klasy $[P]$ i $[Q]$, określającym liczbę MN, została zaliczona do klasy $[P]$ (względnie do klasy $[Q]$) również będzie zaliczona do tej samej klasy przy podziale, określającym liczbę NM. Więc przekroje liczb wymiernych, określających liczby MN i NM, są jednakowe. Dowodzi to, iż zachodzi tu prawo przemiennościowe względem mnożenia.

W taki sam sposób możemy uzasadnić prawo łącznościowe względem mnożenia oraz prawo rozdzielnościowe.

Odejmowanie i dzielenie, jako działania odwrotne do dodawania i mnożenia, nie potrzebują nowego określenia; nie potrzebuje nowego określenia również potęgowanie w tym przypadku, gdy wykładnik jest liczbą całkowitą, jest to bowiem przypadek szczególny mnożenia.

Przejdźmy teraz do potęgowania z wykładnikiem ułamkowym, czyli do wyciągania pierwiastków.

Oznaczmy przez M pewną liczbę dodatnią większą od jedności i przypuśćmy, że p jest pewna liczba całkowita dodatnia.

Podzielmy wszystkie liczby wymierne układu $[W]$ (dodatnie i ujemne) na dwie klasy $[A]$ i $[B]$, zaliczając do pierwszej klasy $[A]$ wszystkie liczby wymierne, których p^{te} potęgi są mniejsze od M, a do drugiej klasy $[B]$ wszystkie liczby wymierne, których p^{te} potęgi są większe od M.

Ponieważ w zespole liczb klasy $[A]$ i zespole liczb klasy $[B]$ znajdują się niewątpliwie takie liczby, że różnica pomiędzy liczbami różnych klas jest liczbą dowolnie małą, przeto na mocy twierdzenia Cantora wnosimy, że wyżej oznaczony podział stanowi przekrój, określający pewną liczbę wymierną lub niewymierną. Liczbę tę nazywamy wartością arytmetyczną pierwiastku stopnia $\sqrt[p]{M}$.

Jeżeli liczba całkowita p jest liczbą nieparzystą, to pierwiastek stopnia p liczby M zawsze istnieje, a wartość jego jest liczbą oznaczoną w zupełności i od zera odmienną.

Jeżeli liczba całkowita i dodatnia p jest liczbą parzystą, to pierwiastek stopnia p liczby M istnieje tylko w przypadku, gdy liczba M jest liczbą dodatnią. Wówczas każdej liczbie M odpowiadają dokładnie dwie symetryczne pomiędzy sobą wartości na jej pierwiastek p-go stopnia (dodatnia i ujemna).

Zastanowimy się teraz nad potęgowaniem z wykładnikiem niewymiernym.

Przypomnijmy sobie najpierw dwa twierdzenia, znane z algebry, a mianowicie:

Twierdzenie I. Jeżeli x i x_1 są dwie jakiekolwiek liczby wymierne i przytem $x_1 > x$, wówczas będziemy mieli

$$a^{x_1} > a^x$$

dla każdej liczby $a > 1$.

Dowód. Możemy napisać bezpośrednio

$$\frac{a^{x_1}}{a^x} = a^{x_1 - x}$$

Oznaczmy

$$x_1 - x = \frac{p}{q}$$

gdzie p i q są liczbami całkowitemi, dodatniemi. Wówczas będziemy mieli

$$\frac{a^{x_1}}{a^x} = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p},$$

Ponieważ

$$a^p > 1,$$

będzie

$$\frac{a^{x_1}}{a^x} > 1.$$

Stąd otrzymujemy nierówność

$$a^{x_1} > a^x$$

którą właśnie mieliśmy udowodnić.

Twierdzenie II. Jeżeli liczba a jest większa od 1, wówczas potrafimy wyznaczyć taką liczbę wymierną ε żeby było

$$a^{\varepsilon} - 1 < \alpha$$

gdzie α oznacza dowolnie dowolnie naprzód daną, byle od zera większą, liczbę wymierną.

Dowód. Oznaczmy przez N liczbę całkowitą, która spełnia nierówność

$$N \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

Wówczas mamy

$$\varepsilon \leqslant \frac{1}{N}$$

W myśl Twierdzenia I będziemy mieli

$$a^{\varepsilon} - 1 \leqslant a^{\frac{1}{N}} - 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Wybierzmy

$$\varepsilon < \frac{\alpha}{a-1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

wówczas

$$N > \frac{a-1}{\alpha}.$$

Stąd mamy

$$1 + N\alpha > a$$

Ponieważ przy $\alpha > 0$

$$(1+\alpha)^N > 1 + N\alpha$$

przeto

$$a < (1+\alpha)^N.$$

Stąd będziemy mieli

$$a^{\frac{1}{N}} < 1 + \alpha$$

czyli

$$a^{\frac{1}{N}} - 1 < \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Nierówności (17) i (19) pociągają za sobą nierówność

$$a^{\varepsilon} - 1 < \alpha$$

dla liczby ε, która spełnia nierówność (18)

Wnosimy stąd, że Twierdzenie II zachodzi w podanem brzmieniu.

W n i o s e k. Jeżeli α jest liczbą większą od 1, wówczas potrafimy wyznaczyć takie dwie liczby wymierne x i x_1, ażeby było

$$a^{x_1} - a^x < \alpha$$

gdzie α oznacza dowolnie naprzód daną, byle od zera większą, liczbę wymierną.

D o w ó d. Istotnie, oznaczając

$$\frac{\alpha}{a^x} = w,$$

na mocy udowodnionego twierdzenia, wnosimy, że zawsze można wyznaczyć takie liczby x i x_1 ażeby

$$a^{x_1 - x} - 1 < w$$

czyli

$$a^{x_1 - x} - 1 < \frac{\alpha}{a^x}$$

Stąd wynika, że

$$a^{x_1} - a^x = a^x\left(a^{x_1 - x} - 1\right) < \alpha$$

Stwierdzamy więc, że wniosek zachodzi w podanem brzmieniu.

Po udowodnieniu wyżej wymienionych twierdzeń możemy określić potęgę o wykładniku niewymiernym. Oznaczmy przez m pewną liczbę niewymierną, a przez x i x_1 dwie dowolne liczby wymierne, z których $x < m$ $x_1 > m$.

Wówczas przez symbol a^m będziemy oznaczali taką liczbę, która jest większa od wszystkich liczb a^x, mniejszą zaś od wszystkich liczb a^{x_1}. Łatwo udowodnić, że liczba a^m istnieje i jest liczbą zupełnie określoną.

W tym celu podzielmy wszystkie liczby wymierne $[W]$ na dwie klasy $[A]$ i $[B]$, zaliczając do klasy $[A]$ wszystkie liczby wymierne, które nie są większe przynajmniej od jednej z liczb a^x, a do klasy $[B]$ wrzystkie liczby wymierne, które nie są mniejsze przynajmniej od jednej z liczb a^{x_1}. Ponieważ $x_1 > x$, przeto na mocy Twierdzenia I wnosimy, że każda liczba klasy $[B]$ jest większa od każdej liczby klasy $[A]$. Na mocy wniosku z Twierdzenia II widzimy, że w zespole liczb klasy $[A]$ i zespole liczb klasy $[B]$ są liczby, których różnica jest liczbą dowolnie mała. Na zasadzie twierdzenia Cantora wnosimy, iż podział wszystkich liczb wymiernych $[W]$ na klasy $[A]$ i $[B]$ stanowi przekrój, określający pewną liczbę. Liczbę tę właśnie oznaczamy przez a^m.

§ **8. Układ liczb rzeczywistych.** Zbiór wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych tworzy układ liczb rzeczywistych, który oznaczamy przez symbol $[R]$. Obrazem geometrycznym układu $[R]$ jest zbiór wszystkich punktów osi liczbowej, którą będziemy nazywali o s i ą l i c z b r z e c z y w i s t y c h.

Układ liczbowy $[W]$ wszystkich liczb wymiernych nazywamy c z ę ś c i ą w ł a ś c i w ą układu liczbowego $[R]$ wszystkich liczb rzeczywistych. Oczywista, każdemu przekrojowi w układzie $[W]$ odpowiada w układzie $[R]$ o ściśle określonej wartości liczba rzeczywista m, która sprawia ów przekrój. Odwrotnie, każdej liczbie rzeczywistej układu liczbowego $[R]$ odpowiada jeden przynamniej przekrój w układzie liczbowym $[W]$, który liczba ta sprawia; jeżeli liczba m jest niewymierna, to istnieje jeden tylko przekrój w układzie $[W]$, który tej liczbie odpowiada; ten przekrój jest przekrojem otwartym; jeżeli zaś liczba m jest niewymierna, to istnieją ściśle oznaczone dwa takie przekroje w układzie $[W]$, które liczba ta sprawia, przytem każdy z tych dwóch przekrojów jest przekrojem otwartym.

Podzielmy wszystkie liczby układu $[R]$ na dwie takie klasy niepuste $[R_1]$ i $[R_2]$, żeby każdy element pierwszej klasy $[R_1]$

był mniejszy od każdego elementu drugiej klasy $[R_2]$, i udowodnimy twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Istnieje w układzie liczbowym $[R]$ taka o ściśle określonej wartości liczba rzeczywista, która sprawia przekrój $[R_1 \mid R_2]$ w tym układzie i jest albo największą liczbą w klasie $[R_1]$, albo najmniejszą w klasie $[R_2]$, czyli innemi słowy przekrój $[R_1 \mid R_2]$ jest zamknięty.

Dowód. Ażeby tego dowieść, oznaczmy przez $[A_1]$ i $[A_2]$ zbiory liczb wymiernych, z których zbiór $[A_1]$ jest częścią właściwą zbioru $[R_2]$. Zbiory $[A_1]$ i $[A_2]$ mogą być uważane za klasy odpowiadające pewnemu przekrojowi $[A_1 \mid A_2]$ w układzie $[W]$ liczb wymiernych. Oznaczmy przez m liczbę rzeczywista, która sprawia przekrój $[A_1 \mid A_2]$. Łatwo możemy stwierdzić, że liczba m będzie również sprawiała przekrój $[R_1 \mid R_2]$. Istotnie, jeżeli pewna liczba rzeczywista m_1 spełnia nierówność

$$m_1 < m$$

to zawsze istnieje liczba wymierna a spełniająca nierówności

$$m_1 < a < m \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Ze względu na nierówność (20), liczba a należy do klasy $[A]$, a zatem liczba ta należy i do klasy $[R_1]$, skąd ze względu na nierówność (20), wynika, że liczba m_1 należy także do zbioru $[R_1]$. Zupełnie analogicznie stwierdzamy, że każda liczba rzeczywista $m_2 > m$ należy do zbioru $[R_2]$. Z tego wynika, że liczba m sprawia przekrój $[R_1 \mid R_2]$. Ponieważ układ $[R]$ zawiera wszystkie liczby rzeczywiste, liczba m musi również należeć do tego układu, przeto albo do klasy $[R_1]$ albo do klasy $[R_2]$, a na tem właśnie polega twierdzenie, o które chodziło.

Twierdzenie odwrotne brzmi:

Twierdzenie. Każdej liczbie rzeczywistej układu liczbowego $[R]$ odpowiadają w tym układzie dwa takie przekroje, które ona sprawia.

Dowód. Żeby to twierdzenie to uzasadnić, oznaczmy przez $[R_1']$ zbiór wszystkich liczb rzeczywistych mniejszych od dowolnej liczby rzeczywistej m, a przez $[R'_2]$ zbiór wszystkich liczb rzeczywistych większych od tejże liczby. Oczywista, każda liczba zbioru $[R'_1]$ będzie mniejsza od każdej liczby zbioru $[R'_2]$. Stąd wywnioskujemy z łatwością, że po rozszerzeniu jednego ze zbiorów $[R'_1]$ lub $[R'_2]$, przez dołączenie do niego liczb równych liczbie m, zbiory te przedstawiać będą odpowiednio klasy pierwszej i drugiej kategorji w stosunku do pewnego przekroju w układzie $[R]$ liczb rzeczywistych, a na tem właśnie polega twierdzenie o które chodziło. Układ liczbowy $[R]$ nazywamy ciągłym. Oraz ten układ $[R]$ będzie polem liczbowem, gdyż stanowi grupę przemiennościową względem dodawania i mnożenia (z tem jednak zastrzeżeniem, że nie będziemy wymagali odwrotności dla elementu 0).

§ **9. Liczby algebraiczne i przestępne. Lemat Liouville'a.** Wszystkie liczby rzeczywiste mogą być podzielone na liczby algebraiczne i przestępne.

Liczbą algebraiczną nazywamy każdą liczbę rzeczywistą, która jest pierwiastkiem równania algebraicznego:

$$A_o x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} x + A_n = 0 \quad \ldots \quad (21)$$

o spółczynnikach całkowitych A_o, A_1, $A_2, \cdots A_{n-1}$, A_n

Przypuśćmy, że ω jest liczbą algebraiczną; wówczas musi istnieć jedno przynajmniej równanie algebraiczne postaci (21), którego pierwiastkiem jest liczba ω.

Oznaczając więc część lewą równania (21) przez symbol $F_n(x)$, będziemy mieli:

$$F_n(\omega) = 0 \quad \ldots \quad (22)$$

Jeżeli liczba m jest najmniejsza ze wszystkich liczb n, przy których ma miejsce tożsamość (22), to liczbę ω nazywamy liczbą algebraiczną stopnia m.

Liczba rzeczywista, która nie jest algebraiczną, nazywa się liczbą przestępną.

Wogóle trudno jest bardzo rozstrzygnąć, czy dana liczba rzeczywista jest algebraiczną czy też przestępna.

Istnienie liczb przestępnych udowodnił pierwszy matematyk francuski Liouville (1851). Drugi dowód istnienia liczb przestępnych, oparty na teorji mnogości, ogłosił Cantor w 1873 roku. W roku 1874 francuski matematyk Charles Hermite dowiódł, że liczba e, zasada logarytmów naturalnych, jest przestępna. W roku 1882 matematyk niemiecki Lindemann ogłosił swój dowód o przestępności liczby π.

Przytoczmy tu dowód elementarny istnienia liczb przestępnych podany przez Liouville'a.

Lemat Liouville'a. Jeżeli $\frac{a}{b}$ jest dowolna liczba wymierna, to dla każdej liczby algebraicznej ω stopnia m, większego od jedności, istnieje taka liczba N, że nierówność $b > N$ pociąga za sobą nierówność

$$\left| \frac{a}{b} - \omega \right| > \frac{1}{b^{m+1}}.$$

Dowód. Przypuśćmy, że ω jest liczbą algebraiczną stopnia m, czyli innemi słowy istnieje taki wielomian m-go stopnia

$$F_m(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m \cdots (23),$$

którego pierwiastkiem jest liczba ω.

$$F_m(\omega) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (23')$$

Oznaczmy przez $\frac{a}{b}$ jakikolwiek ułamek wymierny, spełniający nierówność

$$\left|\frac{a}{b}-\omega\right|\leq 1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Łatwo przekonać się, że liczba $\frac{a}{b}$ nie jest pierwiastkiem wielomianu (23'). W samej rzeczy, przypuszczając, że $\frac{a}{b}$ jest pierwiastkiem wielomianu (23'), możemy napisać tożsamość

$$F_m(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\cdots+A_{m-1}x+A_m-$$

$$-\left(A_0\frac{a^m}{b^m}+A_1\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}}+\cdots+A_{m-1}\frac{a}{b}+A_m\right)=A_0\left(x_m-\frac{a^m}{b^m}\right)+$$

$$+A_1\left(x_{m-1}-\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}}\right)+\cdots+A_{m-2}\left(x^2-\frac{a^2}{b^2}\right)+A_{m-1}\left(x-\frac{a}{b}\right)=$$

$$=\left(x-\frac{a}{b}\right)\frac{f_{m-1}(x)}{b^{m-1}}$$

gdzie $f_{m-1}(x)$ jest wielomianem stopnia $m-1$ o spółczynnikach całkowitych.

Zakładając w ostatniej tożsamości $x=\omega$, otrzymujemy ze względu na (23')

$$\left(\omega-\frac{a}{b}\right)\frac{f_{m-1}(\omega)}{b^{m-1}}=0.$$

Stąd wnosimy, że będzie jedno z dwojga: albo

$$\omega=\frac{a}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

albo

$$f_{m-1}(\omega)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26).$$

Lecz ani pierwszy ani drugi wzór nie może zachodzić, skoro ω jest liczbą algebraiczną stopnia $m>1$.

Założenie, że

$$F_m\left(\frac{a}{b}\right)=0$$

doprowadziło nas zatem do sprzeczności. Przeto ułamek $\frac{a}{b}$ nie jest pierwiastkiem równania (23').

Oznaczając

$$Q=\left|A_0a^m+A_1a^{m-1}b+A_2a^{m-2}b^2+\cdots+A_mb^m\right|$$

będziemy mieli

$$\left|F_m\left(\frac{a}{b}\right)\right|=\frac{Q}{b^m}.$$

Ponieważ Q jest liczbą całkowitą dodatnią, przeto

$$\left|F_m\left(\frac{a}{b}\right)\right|\geq\frac{1}{b^m}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27).$$

Z drugiej strony, uwzględniając (23') zupełnie analogicznie, możemy napisać tożsamość

$$\left|F_m\left(\frac{a}{b}\right)\right|=\left|F_m\left(\frac{a}{b}\right)-F_m(\omega)\right|=\left|\frac{a}{b}-\omega\right|\cdot\varphi_{m-1}\left(\frac{a}{b}\right)\cdots(27)$$

gdzie

$$\varphi_{m-1}\left(\frac{a}{b}\right)=\alpha_0\left(\frac{a}{b}\right)^{m-1}+\alpha_1\left(\frac{a}{b}\right)^{m-2}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{a}{b}+\alpha_{m-1}$$

jest wielomianem całkowitym stopnia $m-1$ o spółczynnikach $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$, niezależnych ani od p, ani od q.

Oznaczmy przez P dowolną liczbę dodatnią, spełniającą nierówności

$$\omega-1<P;\ \omega+1<P.$$

Wówczas, ze względu na nierówność (24), będziemy mieli

$$\left|\frac{a}{b}\right|<P.$$

Oznaczając

$$|\alpha_0|P^{m-1}+|\alpha_1|P^{m-2}+\cdots+|\alpha_{m-1}|P+|\alpha_m|=L,$$

otrzymujemy nierówność

$$\left|\varphi_{m-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right|<L$$

Uwzględniając nierówność (28), będziemy mieli

$$\left|F_m\left(\frac{a}{b}\right)\right|<\left|\frac{a}{b}-\omega\right|\cdot L$$

Dalej, ze względu na nierówność (27), otrzymujemy

$$\left|\frac{a}{b}-\omega\right|>\frac{1}{L\cdot b^m}$$

Jeżeli nadto

$$L<b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

to będzie

$$\left|\frac{a}{b}-\omega\right|>\frac{1}{b^{m+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Stąd wynika, że jeżeli ułamek $\frac{a}{b}$ spełnia nierówność

$$\left|\frac{a}{b}-\omega\right|\leqslant 1$$

oraz na miejsce nierówność (29), to zachodzi nierówność (30).

Biorąc pod uwagę, że nierówność

$$\left|\frac{a}{b}-\omega\right|>1,$$

pociąga za sobą stale nierówność (30) przy $b\geqslant 1$, wywnioskujemy z łatwością, że lemat Liouville'a zachodzi w podanem brzmieniu.

Uzasadniwszy lemat Liouville'a, możemy udowodnić istnienie liczb przestępnych za pomocą następującego twierdzenia.

Twierdzenie. Każda liczba Θ postaci dziesiętnego ułamka nieskończonego

$$\Theta=\frac{\beta_1}{10^1}+\frac{\beta_2}{10^{1.2}}+\frac{\beta_3}{10^{1.2.3}}+\frac{\beta_4}{10^{1.2.3.4}}+\quad .\ .\ . \quad (31)$$

gdzie liczby β_1, β_2, β_3, $\beta_4\cdots$ są liczbami naturalnemi, spełniającemi nierówność

$$O\leqslant\beta_i\leqslant 9$$

jest liczbą przestępną.

Dowód. Ażeby twierdzenie to uzasadnić, załóżmy wbrew twierdzeniu, że ω jest liczbą algebraiczną stopnia m i oznaczmy

$$\frac{\beta_1}{10^1}+\frac{\beta_2}{10^{1.2}}+\frac{\beta_3}{10^{1.2.3}}+\cdots+\frac{\beta_p}{10^{1.2.3\ldots p}}=\frac{a}{10^{1.2.3\ldots p}}=\frac{a}{b} \quad (32)$$

gdzie p jest jakąkolwiek liczbą naturalną, spełniającą nierówność

$$p>m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Będziemy mieli oczywiście

$$\omega-\frac{a}{b}=\frac{\beta_{p+1}}{10^{1.2.3\ldots(p+1)}}+\frac{\beta_{p+2}}{10^{1.2.3\ldots(p+2)}}+\quad .\ .\ . \quad (34)$$

Stąd wnosimy, że zachodzi nierówność

$$\left|\omega-\frac{a}{b}\right|\leqslant\frac{1}{10^{[1.2.3\ldots p.(p+1)]-1}}$$

Ponieważ

$$10^{[1.2.3\ldots p(p+1)]-1}=10^{1.2.3\ldots p.p+(1.2.3\ldots p)-1}>10^{1.2.3\ldots p.p}\geqslant b^{m+1}$$

Przeto

$$\left|\omega-\frac{a}{b}\right|<\frac{1}{b^{m+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Z drugiej strony w przypuszczeniu, że ω jest liczbą algebraiczną stopnia, możemy na zasadzie udowodnionego lematu Liouville'a, znaleźć zawsze taką liczbę dodatnią N, że dla $b>N$ będzie stale

$$\left|\omega-\frac{a}{b}\right|>\frac{1}{b^{m+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Weźmy liczbę p taką, żeby zachodziła nadto nierówność

$$10^{1.2.3\ldots p}>N$$

Wówczas mielibyśmy, że dla jednej i tej samej liczby $\frac{a}{b}$ zachodzą jednocześnie nierówności (35), (36), które są sprzeczne. Stąd wnioskujemy, że ω nie jest liczbą algebraiczną, lecz przestępną. Istnieją więc liczby przestępne.

Rozdział II.

Rozwój pojęcia liczby. Liczby urojone i zespolone.

§ **1. Uwagi ogólne.** Podobnie jak liczby ujemne stały się niezbędne, skoro działanie odejmowania miało być możliwem, tak też trzeba było wprowadzić liczby urojone i zespolone, aby uczynić wyciąganie pierwiastków zawsze możliwem. Rozszerzenie pojęcia liczby, uczynione przez wprowadzenie liczb urojonych i zespolonych, nadało algebrze charakter formalnego symbolizmu i znacznie posunęło naprzód ideę połączenia wielkości z kierunkiem. Pierwszy wprowadził liczby urojone matematyk Cardano (1501 — 1576 r.). Badając równania kwadratowe i sześcienne, Cardano zauważył, że w wielu przypadkach pierwiastki tych równań nie mogą być wyrażone za pomocą liczb rzeczywistych. Następnie, w r. 1579 matematyk Bombelli wyłożył po raz pierwszy w swej algebrze wyliczania z liczbami zespolonemi. W r. 1797 matematyk Caspar Wessel, a po nim Gauss (1799 r.) i Argand (1806 r.) ułożyli znaną obecnie i powszechnie używaną metodę geometrycznej interpretacji liczb zespolonych za pomocą punktów na płaszczyźnie. Właściwą istotę tych liczb poznano dopiero w początkach XIX stulecia z prac wybitnych matematyków europejskich Cauch'ego, Jacobi'ego, Weierstrassa, Rimanna, dzięki którym liczby zespolone zajęły niezbędne stanowisko we wszystkich gałęziach analizy matematycznej, a zwłaszcza w teorji równań i teorji funkcji analitycznych.

§ **2. Liczby urojone.** Rozważmy pierwiastek z liczby ujemnej $\sqrt{-A}$, gdzie $A>0$. Oczywista, pierwiastek ten nie oznacza żadnej liczby rzeczywistej (ani dodatniej ani ujemnej), albowiem potęga o wykładniku parzystym tak liczby dodatniej jak i ujemne, jest liczbą dodatnią.

Wyrażenie

$$\sqrt{-A}$$

nazwano liczbą urojoną.

Możemy napisać

$$\sqrt{-A}=\sqrt{A}\cdot\sqrt{-1}=a\cdot\sqrt{-1}$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą.

Oznaczamy

$$\sqrt{-1}=i$$

i uważamy i za nowy symbol, a mianowicie za jednostkę urojoną.

Dla jednostki tej zachodzi wzór charakterystyczny

$$i^2=-1 \text{ czyli } i^2+1=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Każda liczba urojona może być wyrażona przez jednostkę urojoną i, naprzykład

$$\sqrt{-A}=ai.$$

Liczbę a nazywamy spółczynnikiem rzeczywistym liczby urojonej ai. Zbiór wszystkich liczb urojonych nazywamy układem liczb urojonych i oznaczamy symbolem $[U]$. Każdej liczbie rzeczywistej a układu $[R]$ odpowiada jedna i tylko jedna liczba ai układu $[U]$, co oznaczamy symbolem

$$[U]=[R]\cdot i.$$

Przyjmijmy dla liczb urojonych $[U]$ wszystkie określenia, jakie zostały przyjęte dla liczb rzeczywistych $[R]$, uwzględniając wzór (1) charakterystyczny dla liczb urojonych.

1. Dwie liczby urojone ai i bi uważamy za równe sobie, jeśli ich spółczynniki rzeczywiste są równe sobie

$$a=b.$$

2. Z dwóch liczb urojonych ai i bi uważamy za większą tę liczbę, której spółczynnik rzeczywisty jest większy.

Sumą dwóch (lub kilku) liczb urojonych ai i bi nazywamy liczbę urojoną

$$(a+b)\,i$$

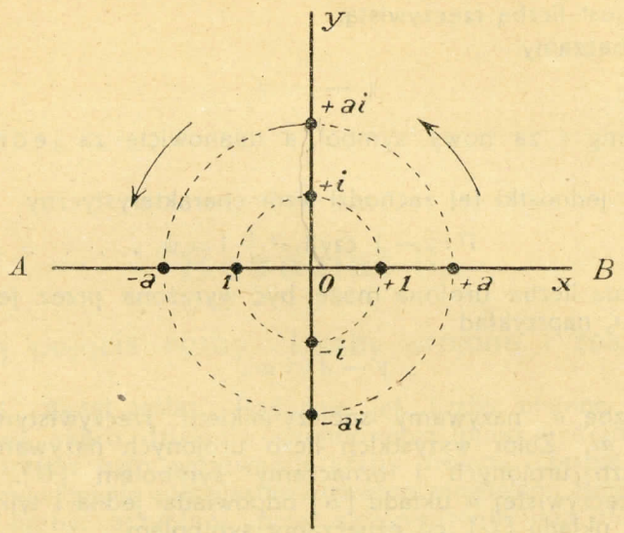
której spółczynnik rzeczywisty jest sumą spółczynników rzeczywistych wszystkich składników.

Iloczynem dwóch liczb urojonych ai i bi nazywamy liczbę rzeczywistą

$$(ab)\,i^2=-ab.$$

Przy danych określeniach dla liczb urojonych zachodzą wszystkie zasadnicze prawa algebry, a mianowicie, prawo przemiennościowe i łącznościowe względem działań dodawania i mnożenia, oraz prawo rozdzielnościowe i prawo monotoniczne.

Przejdźmy teraz do interpretacji geometrycznej liczb urojonych. Przypuśćmy, że prosta AB (Rys. 5) jest osią liczb rzeczywistych.



Rys. 5.

Niech będzie a jakakolwiek liczba rzeczywista. Obrazem geometrycznym liczby a jest punkt a położony na osi AB w odległości a dowolnie wybranych jednostek długości na prawo lub nalewo od punktu o, w zależności od tego czy a jest liczbą dodatnią, czy też ujemną Obrazem geometrycznym liczby—a jest punkt położony na osi AB symetrycznie z punktem a.

Możemy więc powiedzieć, że pomnożenie każdej liczby rzeczywistej a układu $[R]$ przez -1 jest równoważne obrotowi odcinka (czyli wektora) Oa naokoło punktu symetryi osi liczb rzeczywistych o w danej płaszczyźnie o kąt 180°.

Biorąc pod uwagę, że

$$a\cdot(-1)=a\cdot i\cdot i$$

wnosimy, że działanie mnożenia jakiejkolwiek liczby rzeczywistej przez i jest takie, iż przy wykonaniu dwukrotnem daje wynik równoważny pomnożeniu owej liczby przez -1. Stąd wypływa interpretacja mnożenia liczb rzeczywistych przez i, jako obrotu odcinków, odpowiadających tym liczbom, naokoło punktu symetrji osi liczb rzeczywistych w danej płaszczyźnie o kąt 90°. Ponieważ każda liczba urojona ai może być uważana jako wynik mnożenia liczby rzeczywistej a przez jednostkę urojoną i, to obrazy geometryczne wszystkich liczb urojonych $[U]$ są punktami, położonymi na prostej, przechodzącej przez punkt o i prostopadłej do osi liczb rzeczywistych. Prostą tę nazywamy osią liczb urojonych. Wobec

tego, że każdej liczbie układu liczb rzeczywistych $[R]$ odpowiada jedna liczba układu $[U]$, przeto każdemu punktowi położonemu na osi liczb rzeczywistych odpowiada jeden punkt, położony na osi liczb urojonych, przyczem odległości owych punktów od punktu o wspólnego obydwom osiom są równe sobie. Obrazy geometryczne liczb urojonych dodatnich są położone w górę od osi liczb rzeczywistych, zaś liczb ujemnych w dół od tej osi.

§ **3. Liczby zespolone.** Wyrażenie

$$L=a+bi$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistemi układu $[R]$ (dodatniemi lub ujemnemi, wymiernemi lub niewymiernemi), zaś i jest jednostką urojoną, nazywa się liczbą zespoloną. Liczby rzeczywiste a i b nazywamy spółczynnikami liczby zespolonej L (a—pierwszy, spółczynnik zaś b—drugi). Liczby zespolone otrzymujemy przy rozwiązywaniu równań algebraicznych. Przypuśćmy, że mamy równanie kwadratowe

$$mx^2+nx+p=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wiadomo, że pierwiastki tego równania objęte są wzorem

$$x=\frac{-n\pm\sqrt{n^2-4mp}}{2m}=a\pm\sqrt{k}$$

gdzie

$$a=-\frac{n}{2m},\quad k=\frac{n^2-4mp}{4m^2}$$

W razie gdy $n^2<4mp$, k jest liczbą ujemną, zaś pierwiastki równania (2) przyjmują postać

$$x=a\pm bi$$

gdzie b jest pierwiastkiem kwadratowym z bezwzględnej wartości k.

Z abstrakcyjnego punktu widzenia liczbę zespoloną $a+bi$ można uważać za parę liczb rzeczywistych (a, b).

Dwie liczby zespolone

$$a+bi=(a,\ b)$$
$$a_1+b_1i=(a_1,\ b_1)$$

uważamy za równe sobie, jeżeli spółczynniki owych liczb są odpowiednio równe sobie, to jest jeżeli

$$a=a_1$$
$$b=b_1$$

Wartość dodatnią pierwiastka

$$\sqrt{a^2+b^2}$$

nazywamy modułem liczby zespolonej $a+bi$.

Widoczna, że moduły dwóch liczb zespolonych równych są sobie równe. Odwrotne twierdzenie nie ma miejsca, ponieważ równość

$$a^2+b^2=a_1^2+b_1^2$$

nie zawsze pociąga za sobą równości

$$a = a_1; \quad b = b_1$$

Dwie liczby zespolone

$$(a, b) = a + bi \text{ i } (a, -b) = a - bi$$

różniące się tylko znakiem drugiego spółczynnika, nazywamy liczbami zespolonemi, w z a j e m n i e z e s o b ą s p r z ę ż o n e m i.

Liczby zespolone obejmują sobą wszystkie liczby tak rzeczywiste jak i urojone, które stanowią przypadki szczególne liczb zespolonych. Każdą liczbę rzeczywistą a możemy rozpatrywać jako liczbę zespoloną, której drugi spółczynnik równa się zeru

$$a = a + o.\, i = (a,\, o)$$

Każdą liczbę urojoną bi możemy rozpatrywać jako liczbę zespoloną, której pierwszy spółczynnik równa się zeru

$$bi = o + b.\, i = (o,\, b)$$

Zbiór wszystkich liczb zespolonych tworzy układ liczb zespelonych, który oznaczamy symbolem $[Z]$. Układ $[Z]$ oczywiście obejmuje sobą układ liczb rzeczywistych $[R]$ oraz układ liczb urojonych $[U]$. Symbolicznie oznaczamy

$$[Z] = [R] + [U] = [R] + [R] \cdot i$$

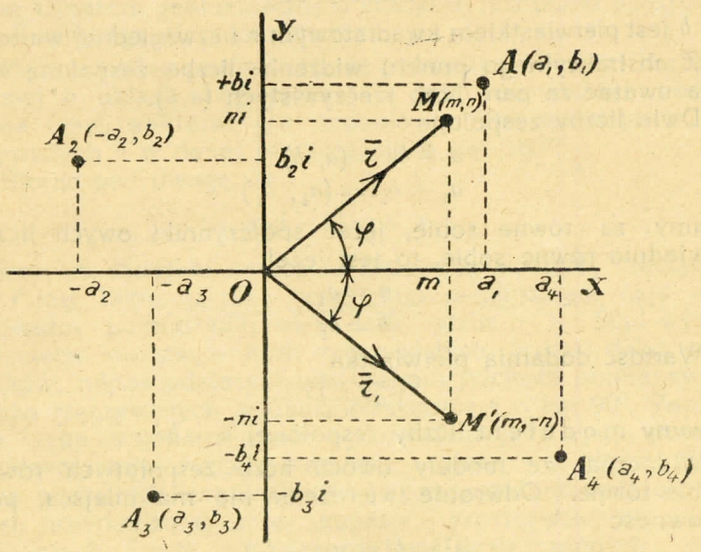
Przejdźmy teraz do interpretacji geometrycznej liczb zespolonych.

Weźmy liczbę zespoloną

$$a + bi = (a, b)$$

i dwie proste OX i OY wzajemnie prostopadłe.

Przyjmijmy prostą OX za oś liczb rzeczywistych, zaś prostą OY za oś liczb urojonych (Rys. 6).



Rys. 6.

Przeprowadźmy przez obrazy geometryczne liczb a i bi położone odpowiednio na osiach OX i OY linje prostopadłe do odpowiednich osi. Punkt A przecięcia się tych prostopadłych przyjmiemy za obraz geometryczny liczby zespolonej $a + bi$. Jest to właśnie punkt, którego spółrzędne prostokątne są odpowiednio a i b.

Płaszczyznę oxy przechodzącą przez oś rzeczywistą ox i oś urojoną oy nazywamy p ł a s z c z y z n ą l i c z b o w ą. Widoczna, że każdej liczbie zespolonej $a + bi = (a, b)$ odpowiada jeden i tylko jeden punkt na płaszczyznie liczbowej (a mianowicie obraz geometryczny tej liczby) i odwrotnie, każdy punkt płaszczyzny liczbowej wyobraża jedyną liczbę zespoloną. Jeżeli w liczbie zespolonej

$$a + bi = (a, b)$$

$a > o,\ b > o,$ to obraz geometryczny A_1 tej liczby jest położny w pierwszym kącie płaszczyzny liczbowej;

jeżeli $a < o,\ b > o,$ to obraz geometryczny A_2 tej liczby jest położony w drugim kącie płaszczyzny liczbowej;

jeżeli $a < o,\ b < o,$ to obraz geometryczny A_3 tej liczby jest położony w trzecim kącie płaszczyzny liczbowej;

jeżeli $a > o,\ b < o,$ to obraz geometryczny A_4 tej liczby jest położony w czwartym kącie płaszczyzny liczbowej

Dwóm równym liczbom zespolonym odpowiada jeden i ten sam obraz geometryczny.

Dwóm liczbom zespolonym z i z' sprzężonym odpowiadają obrazy geometryczne M i M', położone na jednej prostej prostopadłej do osi OX i symetryczne względem tej osi (Rys. 6).

Obrazem geometrycznym układu liczbowego $[Z]$ jest zbiór wszystkich punktów na płaszczyznie liczbowej. Zbiór punktów, położonych na osi OX liczb rzeczywistych, który stanowi część właściwą zbioru punktów na płaszczyznie liczbowej jest obrazem wszystkich liczb rzeczywistych $[R]$. Zbiór punktów, położonych na osi OY liczb urojonych, który stanowi również część właściwą zbioru punktów na płaszczyznie liczbowej, jest obrazem geometrycznym wszystkich liczb urojonych $[U]$.

Niech punkt M będzie obrazem geometrycznym dowolnej liczby zespolonej $z = m + ni$; widoczna, że punktowi M odpowiada pewny zorjentowany odcinek czyli wektor $\overline{OM}$, który nazywamy wektorem przedstawiającym liczbę Z, lub wprost wektorem liczby Z.

Długość r tego wektora równa się $\sqrt{m^2 + n^2}$ czyli modułowi danej liczby zespolonej. Kąt φ, który tworzy wektor $\overline{OM}$ z osią liczb rzeczywistych OX, nazywamy a r g u m e n t e m czyli amplitudą. Ażeby uniknąć dwuznaczności należy umówić się co do wartości kąta φ. Kąt ten zawsze należy liczyć w kierunku odwrotnym do kierunku obrotu wskazówki zegarka (od osi OX przez oś OY), od 0 do 2π i dalej do $2n\pi$, gdzie n może być jakąkolwiek liczbą całkowitą dodatnią. Kąt liczony w tym kierunku będziemy uważali za dodatni, liczony zaś w kierunku odwrotnym za ujemny.

Oczywista, dwie dane r i φ zupełnie wystarczają do wyznaczenia wektora $\overline{OM}$ na płaszczyźnie, a zatem i do wyznaczenia liczby zespolonej $m+ni$. Będziemy mieli

$$m=r\cos\varphi;\ n=r\sin\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Odwrotnie, mając daną liczbę zespoloną $z=m+ni$ obliczymy jej moduł r i argument φ, posługując się wzorami

$$r=\sqrt{m^2+n^2};\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{n}{m}$$

wypływającymi z równości (3). Liczbę zespoloną możemy więc wyrazić przez jej moduł i argument w sposób następujący

$$m+ni=r_{\varphi}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Jest to właśnie tak zwane trygonometryczne wyrażenie liczby zespolonej.

Ze wzoru (4) wynika, że 1) wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie lub ujemne stanowią szczególny przypadek liczb zespolonych o argumencie $\varphi=0$ lub $\varphi=\pi$; 2) wszystkie liczby urojone dodatnie lub ujemne stanowią szczególny przypadek liczb zespolonych o argumencie $\varphi=\frac{\pi}{2}$ lub $\varphi=\frac{3\pi}{2}$.

Ze wzoru (4) jeszcze wynika, że jeżeli dwie liczby zespolone

$$z=m+ni=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$z_1=m_1+n_1i=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$

są równe sobie, wówczas będzie

$$r=r_1;\ \varphi=\varphi_1+2k\pi$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

§ 4. Działania na liczbach zespolonych. Dodawanie.

Niech

$$z_1=m_1+n_1i=(m_1,\ n_1)$$
$$z_2=m_2+n_2i=(m_2,\ n_2)$$

będą dwie jakiekolwiek liczby zespolone.

Sumą tych liczb nazywamy liczbę zespoloną

$$Z=z_1+z_2=(m_1+m_2)+(n_1+n_2)i=(m_1+m_2,\ n_1+n_2).$$

Zupełnie analogicznie sumą ilukolwiek liczb zespolonych

$$z_1=m_1+n_1i=(m_1,\ n_1),\ z_2=m_2+n_2i=(m_2,\ n_2),$$
$$z_3=m_3+n_3i=(m_3,\ n_3)\cdots z_k=m_k+n_ki=(m_k,\ n_k)$$

nazywamy liczbę zespoloną

$$Z=z_1+z_2+z_3+\cdots+z_k=M+Ni=(M,\ N)$$

gdzie

$$M=m_1+m_2+m_3+\cdots+m_k$$
$$N=n_1+n_2+n_3+\cdots+n_k.$$

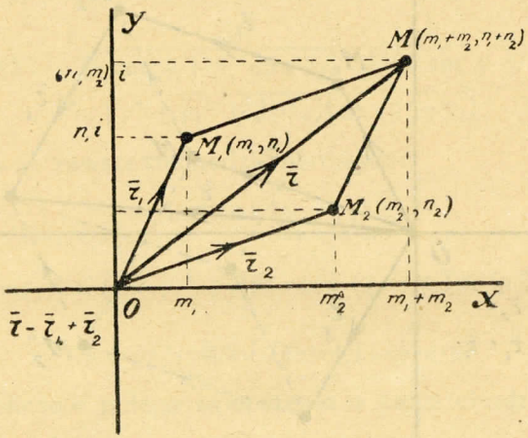
Przy takiem określeniu dodawania liczb zespolonych będzie zachodziło prawo przemienności oraz łączności względem tego działania. W samej rzeczy, mamy

$$z_a+z_b=(m_a+m_b)+(n_a+n_b)i=(m_b+m_a)+(n_b+n_a)i=z_b+z_a$$
$$z_a+(z_b+z_c)=[m_a+(m_b+m_c)]+[n_a+(n_b+n_c)]i=$$
$$=[(m_a+m_b)+m_c]+[(n_a+n_b)+n_c]i=(z_a+z_b)+z_c.$$

Z tego wnosimy, że układ liczbowy $[K]$ stanowi grupę przemienności względem dodawania. Jednostką tej grupy będzie liczba $(o,\ o)$ którą nazywamy „zerem“ w kładzie $[K]$. Odwrotnością elementu $a+bi=(a,\ b)$ jest element $a-bi=(a,-b)$.

Prawo monotoniczne względem dodawania musi upaść wobec faktu, że liczby zespolone wogóle nie nadają się do porównywania ze sobą w tym znaczeniu, jak naprzykład liczby naturalne złożone z tej samej jednostki.

Przejdźmy teraz do interpretacji geometrycznej dodawania liczb zespolonych.



Rys. 7.

Niech $z_1=m_1+n_1i$ i $z_2=m_2+n_2i$ będą dwie jakiekolwiek liczby zespolone, których obrazy geometryczne są odpowiednio punkty M_1 i M_2, zaś wektory $\overline{OM_1}=r_1$ i $\overline{OM_2}=r_2$ (Rys. 7). Przeprowadźmy przez punkt M_1 prosą równoległą do wektora $\overline{OM_2}$, zaś przez punkt M_2 prostą równoległą do wektora $\overline{OM_1}$. Łatwo przekonać się z rysunku (7), że wierzchołek M otrzymanego

równoległoboku OM_1MM_2 będzie obrazem geometrycznym liczby zespolonej $L=z_1+z_2$, zaś wektor $\overline{OM}=\bar{r}$, którego kierunek zlewa się z przekątną tego równoległoboku będzie wektorem liczby Z. Z rysunku widzimy, że wektor ten zamyka obwód OM_1M, to jest łączy początek pierwszego boku obwodu z końcem ostatniego.

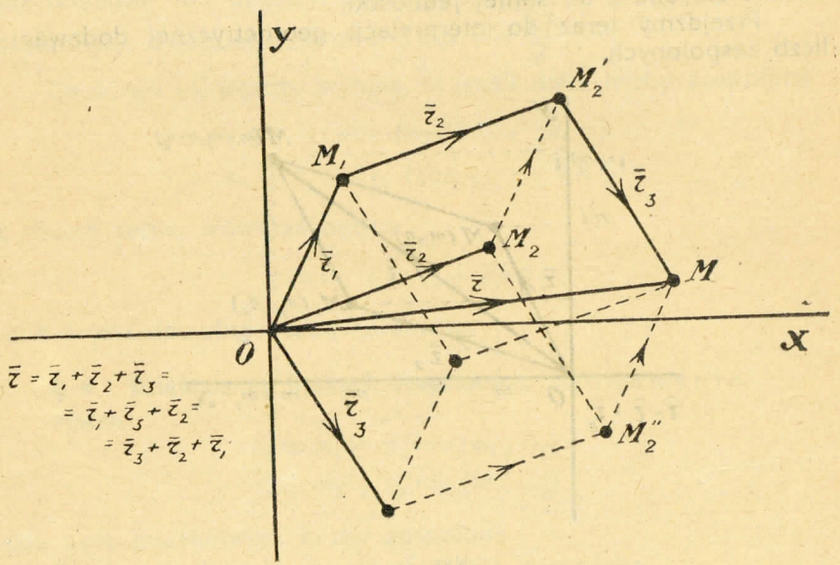
A więc dodawanie dwóch liczb zespolonych sprowadza się do zwykłego dodawania wektorów przedstawiających te liczby, to jest do wyznaczenia wektora wypadkowego, zamykającego obwód z linji łamanych odpowiednio równych geometrycznie tym wektorom. Z rys. 7 widzimy bezpośrednio, że zachodzi prawo przemienności względem dodawania, gdyż

$$\bar{r}_1+\bar{r}_2=\bar{r}_2+\bar{r}_1=\bar{r}.$$

Prawidło geometrycznego dodawania liczb zespolonych zachodzi niezależnie od położenia obrazów geometrycznych dodajników oraz ich liczby. Niech naprzykład

$$z_1=m_1+n_1i;\quad z_2=m_2+n_2i;\quad z_3=m_3+n_3i$$

są trzy jakiekolwiek liczby zespolone (Rys. 8), których obrazami



Ry. 8.

geometrycznemi są odpowiednio punkty M_1, M_2, M_3; wektory

$$\overline{OM_1}=\bar{r}_1,\quad \overline{OM_2}=\bar{r}_2,\quad \overline{OM_3}=\bar{r}_3$$

są odpowiednio wektorami liczb z_1, z_2, z_3. Wektor $\overline{OM}=\bar{r}$, zamykający obwód $OM_1M_2'M$, złożony z wektorów, równych

geometrycznie wektorom $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ i $\bar{r}_3$, będzie wektorem liczby zespolonej

$$Z=z_1+z_2+z_3$$

Z rysunku 8 widzimy bezpośrednio, że zachodzi prawo przemienności owe i łączności owe względem dodawania. W samej rzeczy, będziemy mieli:

$$\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3=\bar{r}_1+\bar{r}_3+\bar{r}_2=\bar{r}_3+\bar{r}_1+\bar{r}_2.$$
$$(\bar{r}_1+\bar{r}_2)+\bar{r}_3=\bar{r}_1+(\bar{r}_2+\bar{r}_3)=\bar{r}$$

Udowodnimy twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Suma ilukolwiek liczb zespolonych jest liczbą zespoloną, której moduł nie może być większym od sumy i mniejszym od różnicy modułów dodajnych.

Dowód. Niech będą

$$z=\rho\ (\cos\varphi+i\ \sin\varphi)$$
$$z_1=\rho_1\ (\cos\varphi_1+i\ \sin\varphi_1)$$

dwie jakiekolwiek liczby zespolone. Suma tych liczb będzie:

$$z+z_1=\rho\ (\cos\varphi+i\ \sin\varphi)+\rho_1\ (\cos\varphi_1+i\ \sin\rho_1)=$$
$$=(\rho\ \cos\varphi+\rho_1\ \cos\varphi_1)+i\ (\rho\,.\sin\varphi+\rho_1\ \sin\varphi_1)$$

Przeto

$$Mod\ (z+z_1)=\sqrt{(\rho\cos\varphi+\rho_1\ \cos\varphi_1)^2+(\rho\ \sin\varphi+\rho_1\sin\varphi_1)^2}=$$
$$=\sqrt{\rho^2+\rho_1{}^2+2\rho\rho_1\ \cos\ (\varphi-\varphi_1)}$$

Ponieważ zawsze zachodzi nierówność

$$-1\leqslant\cos\ (\varphi-\varphi_1)\leqslant 1$$

przeto

$$(\rho-\rho_1)^2\leqslant\rho^2+\rho_1{}^2+2\rho\rho_1\ \cos\ (\varphi-\varphi_1)\leqslant(\rho+\rho_1)^2$$

stąd

$$\rho-\rho_1\leqslant Mod\ (z+z_1)\leqslant\rho+\rho_1$$

a na tem właśnie polega twierdzenie o które chodziło.

2. Odejmowanie. Ponieważ prawo przemienności zachodzi przy dodawaniu liczb zespolonych, przeto dodawaniu odpowiada jedno tylko działanie odwrotne, które nazywamy odejmowaniem. Celem odejmowania jest: mając zadane dwie liczby zespolone z_1 i z_2, wyznaczyć taką trzecią liczbę zespoloną z, aby suma liczb z_2 i z równała się z_1. Liczbę z nazywamy różnicą liczb zespolonych z_1 i z_2 i oznaczamy

$$z=z_1-z_2$$

Jeżeli

$$z_1 = m_1 + n_1 i$$
$$z_2 = m_2 + n_2 i$$
$$z = m + n i$$

to

$$(m + m_2) + (n + n_2)\, i = m_1 + n_1 i$$

Skąd

$$m_1 = m + m_2, \quad n_1 = n + n_2$$

Przeto

$$m = m_1 - m_2, \quad n = n_1 - n_2$$

Mamy więc

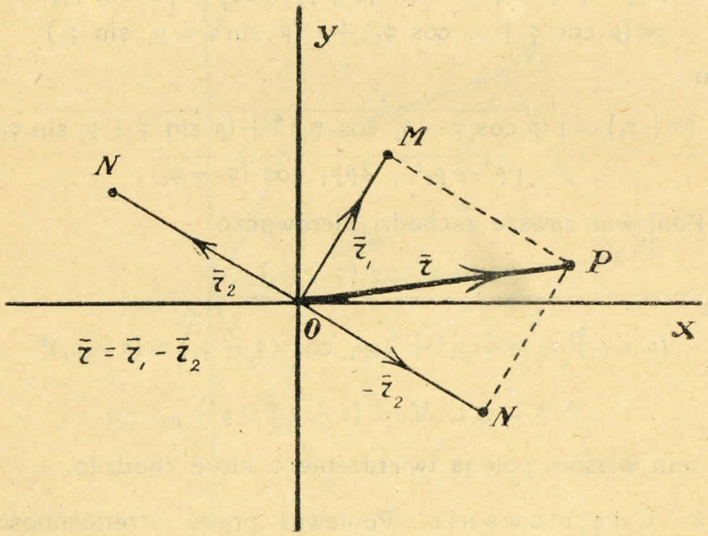
$$z = z_1 - z_2 = (m_1 - m_2) + (n_1 - n_2)\, i = [(m_1 - m_2),\ (n_1 - n_2)]$$

czyli

$$z = z_1 + (-z_2)$$

gdzie $(-z_2)$ jest liczbą zespoloną odwrotną do liczby z_2.

Niech $\overline{OM} = \bar{r}_1$ i $\overline{ON} = \bar{r}_2$ są odpowiednio wektorami liczb zespolonych z_1 i z_2, zaś $OR = r$ jest wektorem liczby zespolonej $z = z_1 - z_2$. Oznaczmy przez $\overline{ON_1} = -\bar{r}_2$ wektor liczby zespolone



Rys. 9.

$(-z_2)$. Dodajmy teraz wektory $\overline{OM}$ i $\overline{ON_1}$. Suma tych wektorów czyli wektor $\overline{OP} = r$, zamykający obwód OMP, będzie wektorem liczby zespolonej $z = z_1 - z_2$.

Dla modułu różnicy dwóch liczb zespolonych zachodzi twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Różnica dwóch liczb zespolonych jest liczbą zespoloną, której moduł jest nie większy od sumy i nie mniejszy od różnicy modułów tych liczb.

Twierdzenie to można udowodnić w sposób zupełnie analogiczny do tego, którego używaliśmy przy dowodzie twierdzenia o module sumy liczb zespolonych.

Mnożenie. Przypuśćmy, że mamy dwie liczby zespolone

$$z_1 = m_1 + n_1 i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$
$$z_2 = m_2 + n_2 i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Iloczynem tych liczb nazywamy liczbę zespoloną

$$Z = z_1 . z_2 = (m_1 m_2 - n_1 n_2) + (n_2 m_1 + m_2 n_1)\, i = \\ = [(m_1 m_2 - n_1 n_2),\ (m_1 n_2 + m_2 n_1)] \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Widoczna, że wyrażenie (7) jest rezultatem mnożenia liczb (5) i (6), jeżeli będziemy uważali je za dwumiany algebraiczne i uwzględniali wzór charakterystyczny dla liczb urojonych ($i^2 = -1$).

W przypadku szczególnym, gdy z_1 i z_2 będą liczbami sprzężonemi

$$z_1 = m + n i$$
$$z_2 = m - n i,$$

wówczas iloczyn Z będzie liczbą rzeczywistą, równą kwadratowi modułu.

$$Z = z_1 z_2 = m^2 + n^2$$

Udowodnimy twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Iloczyn dwóch liczb zespolonych może się stać zerem wtedy i tylko wtedy, gdy jeden przynajmniej z czynników jest zerem.

Dowód. Przypuśćmy, że mamy dwie liczby zespolone

$$z_1 = m_1 + n_1 i \ \text{ i } \ z_2 = m_2 + n_2 i$$

Jeżeli iloczyn tych liczb jest zerem, wówczas będzie

$$m_1 m_2 - n_1 n_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$
$$n_2 m_1 + m_2 n_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Przypuśćmy, że liczba z_1 nie jest zerem, wówczas będzie

$$m_1 \gtrless 0 \ \text{ i } \ n_1 \gtrless 0$$

Ze wzoru (8) będziemy mieli

$$m_2 = \frac{n_1 n_2}{m_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

podstawiając wyrażenie (8) do (7) otrzymujemy

$$m_1 n_2 + \frac{n_1^2 n_2}{m_1} = \frac{n_2^2 (m_1^2 + n_1^2)}{m_1} = 0$$

skąd

$$n_2(m_1^2+n_1^2)=0$$

Ponieważ m_1 nie jest zerem, to suma $m_1^2+n_1^2$ również nie może być zerem. Przeto musi być

$$n_2=0,$$

a zatem, ze względu na (10) $m_2=0$

to jest $z_2=0.$

Zupełnie analogicznie możemy udowodnić, że jeżeli $z_2 \gtrless 0$, wówczas musi być

$$z_1=0$$

Jeden więc z czynników iloczynu $Z=z_1 z_2$ równego zeru musi być zerem.

A więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu. Prawidło mnożenia dwóch liczb zespolonych, które, jak było powiedziano, jest analogiczne do mnożenia dwumianów algebraicznych (przy uwzględnieniu wyrażenia $i^2=-1$) stosować możemy do mnożenia ilukolwiek liczb zespolonych.

Łatwo udowodnić, że przy wyżej podanem określeniu mnożenia liczb zespolonych, mnożeniu tych liczb przysługuje prawo przemienności i łączności oraz prawo rozdzielności.

Twierdzenie. Jeżeli:

$$z_1=m_1+n_1 i;\ z_2=m_2+n_2 i;\ z_3=m_3+n_3 i$$

są jakiemikolwiek liczbami zespolonemi, to zachodzą wzory następujące:

1) $z_1 \cdot z_2 = z_2 z_1$

2) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

3) $(z_1+z_2)\cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$

Dowód. 1) Możemy napisać bezpośrednio w myśl określenia mnożenia liczb zespolonych

$$z_1 \cdot z_2 = (m_1 m_2 - n_1 n_2)+(m_1 n_2 + m_2 n_1) i$$
$$z_2 \cdot z_1 = (m_2 m_1 - n_2 n_1)+(n_1 m_2 + n_2 m_1) i$$

Stąd wynika, że

$$z_1 z_2 = z_2 \cdot z_1$$

2) W myśl określenia mnożenia liczb zespolonych mamy

$$z_1 z_2 = (m_1 m_2 - n_1 n_2)+(m_1 n_2 + m_2 n_1) i$$
$$(z_1 z_2) z_3 = [(m_1 m_2 - n_1 n_2) m_3 - (m_1 n_2 + m_2 n_1) n_3]+$$
$$+[(m_1 m_2 - n_1 n_2) n_3 + (m_1 n_2 + m_2 n_1) m_3] i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Z drugiej strony mamy

$$(z_2 \cdot z_3) = (m_2 m_3 - n_2 n_3)+(m_3 n_2 + m_2 n_3) i$$
$$z_1 (z_2 z_3) = [(m_2 m_3 - n_2 n_3) m_1 + (m_3 n_2 + m_2 n_3) n_1]+$$
$$+[(m_3 n_2 + m_2 n_3) m_1 + (m_2 m_3 - n_2 n_3) n_1] i \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Ze wzorów (11), (12) wnioskujemy, że

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

3) W myśl określenia dodawania i mnożenia liczb zespolonych mamy

$$(z_1+z_2) z_3 = [(m_1+m_2)+(n_1+n_2) i]\cdot(m_3+n_3 i) =$$
$$=[(m_1+m_2) m_3 - (n_1+n_2) n_3]+[(m_1+m_2) n_3 +$$
$$+(n_1+n_2) m_3] i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Z drugiej strony będziemy mieli

$$z_1 z_3 + z_2 z_3 = [(m_1 m_3 - n_1 n_3)+(m_1 n_3 + m_3 n_1) i]+[(m_2 m_3 - n_2 n_3)+$$
$$+(m_2 n_3 + m_3 n_2) i] = [(m_1 m_3 - n_1 n_3)+(m_2 m_3 - n_2 n_3)]+$$
$$+[(m_1 n_3 + m_3 n_1)+(m_2 n_3 + m_3 n_2)] i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Zestawiając wzory (13) i (14), otrzymujemy

$$(z_1+z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$$

a na tem właśnie polega prawo rozdzielnościowe, o które chodziło.

Należy zauważyć, że rozszerzenie układu liczbowego przez wprowadzenie liczb zespolonych, dla których zachodziłyby wszystkie zasadnicze prawa algebry, wymagało od nas wprowadzenia tylko jedynego warunku, charakteryzującego naturę liczb urojonych, a mianowicie

$$i^2+1=0.$$

Prawo monotoniczne przy mnożeniu upada z tego samego względu co i przy dodawaniu.

Łatwo przekonać się, że układ liczbowy $[Z]$ stanowi grupę względem mnożenia. Istotnie:

1) Zachodzi dla tego układu prawo przemiennościowe i łącznościowe mnożenia.

2) Istnieje w tym układzie liczba $(1,0)$, która może być uważana za jednostkę grupy.

3) Istnieje w układzie $[Z]$, dla każdego elementu z (z wyjątkiem $(0,0)$ element odwrotny z_1 to jest taki, iż

$$z \cdot z_1 = (1,0)$$

W samej rzeczy, niech

$$z=a+bi=(a,b)$$

zaś

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

Wówczas

$$z \cdot z_1 = (a + bi)(a_1 + b_1 i) = 1.$$

Stąd wnosimy, że

$$a a_1 - b b_1 = 1$$
$$a b_1 + b a_1 = 0$$

Przeto

$$a_1 = \frac{a}{a^2 + b^2}; \; b_1 = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Jeżeli $a > o$ i $b > o$, to spółczynniki a_1 i b_1 są zupełnie określone, a przeto i liczba z_1 będzie określona.

A więc układ liczbowy $[Z]$ stanowi grupę przemiennościową względem dodawania i mnożenia, z tym jednak zastrzeżeniem, że nie będziemy wymagali odwrotności dla liczby „zero".

Biorąc pod uwagę, że dla tego układu zachodzi również prawo rozdzielnościowe, widzimy, że układ liczb zespolonych $[Z]$ stanowi pole liczbowe.

Udowodnimy twierdzenie następujące:

T w i e r d z e n i e. Moduł iloczynu dwóch (lub ilukolwiek) liczb zespolonych równa się iloczynowi modułów, zaś argument sumie argumentów wszystkich czynników.

D o w ó d. Przypuśćmy, że liczby zespolone z_1 i z_2 zadane są w postaci trygonometrycznej

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$
$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

W myśl określenia liczb zespolonych będziemy mieli

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) i] = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] \quad . \quad . \quad (15)$$

czyli w postaci skróconej

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2)_{\varphi_1 + \varphi_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Wzór (16) będzie zachodził również dla iloczynu ilukolwiek liczb zespolonych; dla trzech czynników będziemy mieli naprzykład

$$z_1 z_2 z_3 = [(r_1 r_2)_{\varphi_1 + \varphi_2} \cdot (r_3)_{\varphi_3}] = (r_1 r_2 r_3)_{\varphi_1 + \varphi_2 + r_3}$$

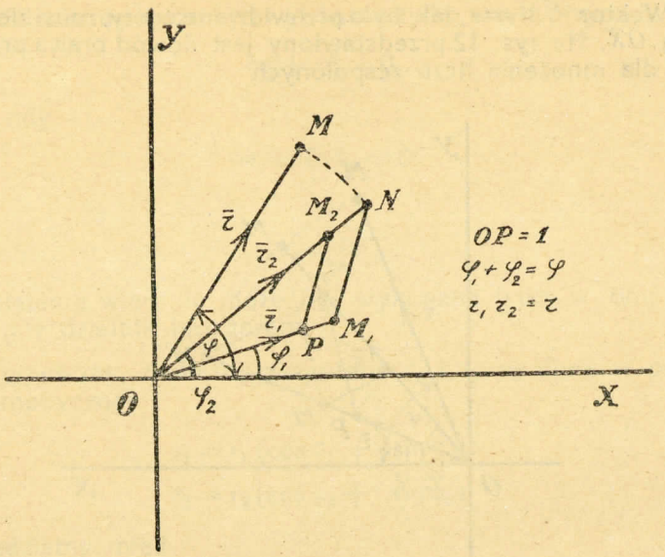
Wogóle mamy

$$z_1 z_2 z_3 \cdots z_n = (r_1 r_2 r_3 \cdots r_n)_{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_n}.$$

A więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Przejdźmy teraz do interpretacji geometrycznej mnożenia liczb zespolonych.

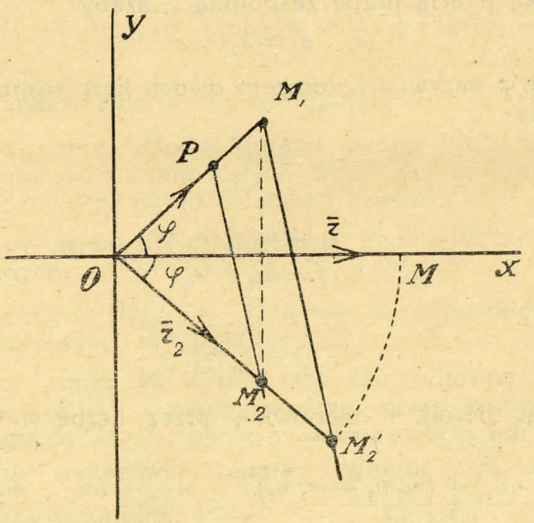
Przypuśćmy, że wektory $\overline{OM_1} = \bar{r}_1$ i $\overline{OM_2} = \bar{r}_2$ są odpowiednio wektorami liczb zespolonych z_1 i z_2 (Rys. 10).



Rys. 10.

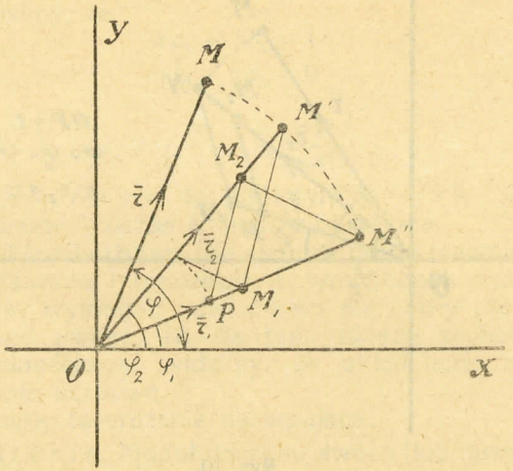
Odłóżmy na prostej OM_1 odcinek $OP = 1$ i połączmy punkt P z punktem M_2; przeprowadźmy następnie przez punkt M_1 prostą równoległą do PM_2, która przecina prostą OM_2 w punkcie N.

Obróćmy wektor $\overline{ON}$ naokoło punktu O o kąt φ; otrzymujemy wektor $\overline{OM} = \bar{r}$, który będzie wektorem liczby zespolonej $Z = z_1 \cdot z_2$. Na rys. 11 wykonano mnożenie liczb zespolonych sprzężonych, których wektorami są $\overline{OM_1} = \bar{r}_1$ i $\overline{OM_2} = \bar{r}_2$



Rys. 11.

Wektor $\overline{OM} = \bar{r}$, jak było przewidziane zgóry, musi zlewać się z osią OX. Na rys. 12 przedstawiony jest dowód prawa przemienności dla mnożenia liczb zespolonych



Rys 12.

W analogiczny sposób można udowodnić prawo łączności oraz prawo rozdzielności dla mnożenia liczb zespolonych.

4. Dzielenie. Wskutek tego, że prawo przemienności zachodzi przy mnożeniu liczb zespolonych, mnożeniu temu odpowiada jedno tylko działanie odwrotne, które nazywamy dzieleniem. Celem, jego jest, mając zadane dwie liczby zespolone z_1 i z_2, wyznaczyć taką trzecią liczbę zespoloną z, ażeby

$$z_1 = z_2 \cdot z$$

Liczbę z nazywamy ilorazem dwóch liczb zespolonych z_1 i z_2 i oznaczamy

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

Jeżeli

$$z_1 = m_1 + n_1 i$$
$$z_2 = m_2 + n_2 i$$

to

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{m_1 + n_1 i}{m_2 + n_2 i}$$

Mnożąc licznik i mianownik przez liczbę $m_2 - n_2 i$, otrzymujemy

$$z = \frac{(mm_1 + nn_1) + (m_2 n_1 - m_1 n_2) i}{m_2^2 + n_2^2} = \frac{mm_1 + nn_1}{m_2^2 + n_2^2} + \frac{m_2 n_1 - m_1 n_2}{m_2^2 + n_2^2} i$$

Dzielenie nie może być wykonane tylko w tym przypadku, gdy

$$m_2^2 + n_2^2 = 0$$

to jest, gdy

$$m_2 = 0;\ n_2 = 0$$

czyli

$$z_2 = 0.$$

Dzielenie więc nie może być wykonane tylko w tym przypadku, gdy dzielnik jest zerem.

Przypuśćmy, że liczby zespolone z_1 i z_2 są dane w postaci trygonometrycznej

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$
$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

Będziemy mieli

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2}$$

Mnożąc licznik i mianownik przez $\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2$, otrzymujemy

$$z = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot$$

$$\cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)$$

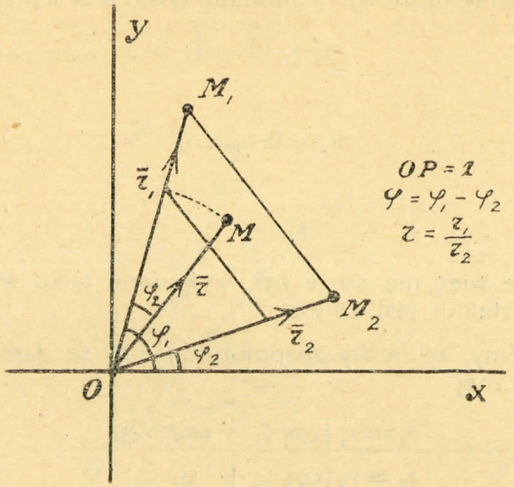
A więc mamy twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Moduł ilorazu dwóch liczb zespolonych równy jest ilorazowi modułów tych liczb, zaś amplituda ilorazu jest równa różnicy amplitud dzielnej i dzielnika.

Przejdźmy teraz do interpretacji geometrycznej dzielenia liczb zespolonych.

Przypuśćmy, że $\overline{OM_1} = \bar{r}_1$ i $\overline{OM_2} = \bar{r}_2$ są odpowiednio wektorami liczb zospolonych z_1 i z_2 (Rys. 13).

Połączmy punkt M_1 z punktem M_2; odłóżmy na prostej OM_2 odcinek $OP = 1$ i przeprowadźmy przez punkt P prostą PN, równoległą do $M_2 M_1$; obróćmy odcinek ON o kąt φ_2 w kierunku obrotu wskazówki zegara. Wektor $\overline{OM} = r$ będzie wektorem liczby zespolonej $z = \frac{z_1}{z_2}$



Rys. 13.

5. Potęgowanie. Ponieważ potęgowanie jest mnożeniem równych czynników, działanie to nie potrzebuje specjalnego określenia. Przypuśćmy, że mamy daną liczbę zespoloną w postaci trygonometrycznej

$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

wówczas na mocy prawidła mnożenia liczb zespolonych, mamy

$$z^n = [r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n\,(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

czyli w postaci skróconej $z^n = (r^n)_{n\varphi}$

W przypadku szczególnym, gdy moduł $r = 1$, wzór powyższy przyjmuje postać

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \ldots \quad (17)$$

Wzór (17) znany jest pod nazwą wzoru Moivre'a.

Łatwo przekonać się, że wzór Moivre'a zachodzi również w tym przypadku, gdy n jest liczbą całkowitą ujemną.

W samej rzeczy, zakładając

$$n = -m$$

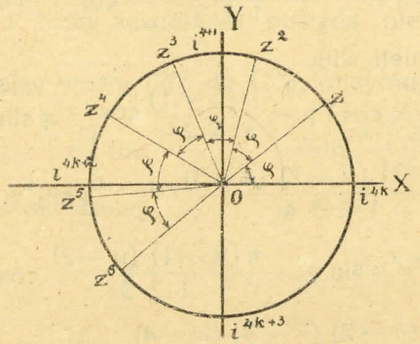
gdzie m jest jakąkolwiek liczbą całkowitą dodatnią, będziemy mieli

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m} = \frac{1}{\cos m\varphi + i\sin m\varphi}$$

Mnożąc licznik i mianownik przez $\cos m\varphi - i\sin m\varphi$, otrzymujemy:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \frac{\cos m\varphi - i\sin m\varphi}{\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi} = \cos m\varphi - i\sin m\varphi =$$
$$= \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

Ilustracja geometryczna wzoru Moivre'a podana jest na rys. 14. Widzimy obrazy geometryczne różnych potęg zmiennej zespolonej z o module $r = 1$ są położone na obwodzie koła o promieniu równym jedności.



Rys. 14.

W przypadku szczególnym, gdy

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

wzór Moivre'a daje

$$i^2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$i^3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

$$i^4 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

$$i^5 = \cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2} = i$$

$$i^6 = \cos 3\pi + i\sin 3\pi = -1 \text{ i t. d.}$$

Wogóle będziemy mieli

$$i^{4k} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1$$

$$i^{4k+1} = \cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = i$$

$$i^{4k+2} = \cos[(2k+1)\pi] + i\sin[(2k+1)\pi] = -1$$

$$i^{4k+3} = \cos\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(2k\pi = \frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

W tych wzorach liczbie k możemy nadawać wszystkie wartości całkowite dodatnie lub ujemne.

Wzór Moivre'a ma częste zastosowanie w matematyce. Rozwińmy nawias lewej strony tego wzoru podług wzoru Newtona, znanego z algebry. Otrzymujemy

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \cdots$$

$$+ i\left[n\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}\varphi\sin^{n-3}\varphi + \cdots\right]$$

Będziemy mieli więc

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi + \cdots$$

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi + \cdots$$

Są to ogólne wyrażenia Sin'usa i Cosin'usa wielokrotnego kąta $n\varphi$ przez potęgi Sin i Cosin'usa kąta φ. Zakładając w tych wyrażeniach kolejno $n=2$ i $n=3$, otrzymujemy znane wzory trygonometryczne:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi; \quad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$

6. Pierwiastkowanie. Pierwiastkiem m-go stopnia z jakiejkolwiek liczby zespolonej z nazywamy taką liczbę zespoloną, której m-ta potęga jest równa z. Pierwiastkowanie oznaczamy symbolem

$$\sqrt[m]{z}.$$

Przypuśćmy, że liczba zespolona z dana jest w postaci trygonometrycznej

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oznaczamy

$$y = \sqrt[m]{z} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Wtedy, w myśl określenia pierwiastkowania, będziemy mieli

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = [\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^m = \rho^m(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Z tego wzoru wnosimy, że

$$\rho^n = r; \; n\theta = \varphi + 2k\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Za wzorów (19) wynika, że

$$\rho = \sqrt[n]{r}; \; \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

gdzie $\sqrt[m]{r}$ jest tak zwana wartość arytmetyczna pierwiastką n-go stopnia z r.

Ponieważ k jest liczbą dowolną, widzimy, że pierwiastek n-go stopnia z liczby zespolonej posiada nieograniczoną liczbę wartości.

Podstawiając wzory (20) do (18), otrzymujemy

$$y = \sqrt[m]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{m} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{m}\right),$$

czyli w postaci skróconej

$$y = \left(\sqrt[m]{r}\right)_{\frac{\varphi + 2k\pi}{m}}$$

Ponieważ k może przybierać dowolne wartości całkowite, pierwiastek $y = \sqrt[m]{z}$ może mieć nieskończoną liczbę wartości, odpowiadających różnym wartościom k dodatnim i ujemnym. Łatwo jednak przekonać się, że z tych wszystkich wartości tylko m są różne. Są to wartości

$$y_0 = \sqrt[m]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{m} + i\sin\frac{\varphi}{m}\right)$$

$$y_1 = \sqrt[m]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{m} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{m}\right)$$

$$y_2 = \sqrt[m]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 4\pi}{m} + i\sin\frac{\varphi + 4\pi}{m}\right)$$

$$y_3 = \sqrt[m]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 6\pi}{m} + i\sin\frac{\varphi + 6\pi}{m}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

. . . . . .

. . . . . .

$$y_{m-1} = \sqrt[m]{r}\left[\cos\frac{\varphi + 2(m-1)\pi}{m} + i\sin\frac{\varphi + 2(m-1)\pi}{m}\right]$$

odpowiadające wartościom

$$k = 0, 1, 2, 3 \cdots m-1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Istotnie, niech p będzie liczbą dowolną. Liczbę tę możemy przedstawić w postaci

$$p = sm + q,$$

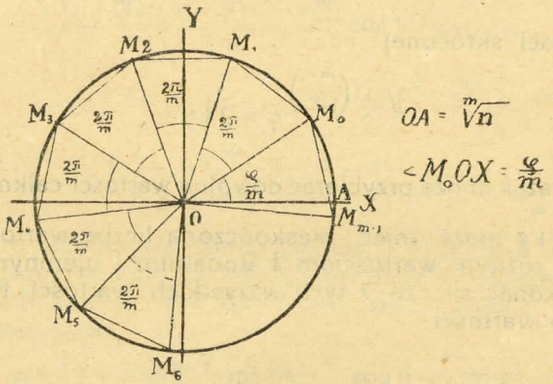
gdzie q jedna z liczb (22), zaś s jest dowolną liczbą całkowitą. Wówczas

$$y_p = \sqrt[m]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi q}{m} + 2\pi s\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi q}{m} + 2\pi s\right)\right] =$$

$$= \sqrt[m]{r}\left[\cos\frac{\varphi + 2\pi q}{m} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi q}{m}\right] = y_q$$

A więc każda z liczb y_p równa się jednej z liczb (21)

Wszystkie m wartości pierwiastka $\sqrt[m]{z}$ dają się z łatwością przedstawić geometrycznie. Przypuśćmy (Rys 15), że wektor $\overline{OM} = \overline{r}$ jest wektorem liczby zespolonej z



Rys. 15

Wykreślmy z punktu O jako środka koło promieniem $OA = \sqrt[m]{r}$ Odłóżmy od osi OX kąt $M_0OX = \frac{\varphi}{m}$ Wektor $\overline{OM_0}$ będzie wektorem liczby zespolonej y_0. Podzielmy cały obwód koła na m równych części i oznaczmy punkty podziału przez $M_1, M_2, M_3, \ldots M_{m-1}$. Oczywista, punkty te będą odpowiednio obrazami geometrycznymi liczb zespolonych $y_1, y_2, y_3 \ldots y_{m-1}$, przytem znajdują się one na wierzchołkach foremnego wielokąta $M_0\, M_1\, M_2 \ldots M_{m-1}$ o m bokach, wpisanego w koło o promieniu $\sqrt[m]{r}$. Z rozważań powyższych wynika, że obrazy geometryczne wszystkich wartości pierwiastka $\sqrt[m]{z}$ zlewają się z jednym z punktów $M_0, M_1, M_2 \ldots M_{m-1}$. Łatwo zrozumieć, że wszystkie wartości pierwiastka $\sqrt[m]{z}$ będą liczbami

zespolonemi, przyczem między niemi niema liczb wzajemnie ze sobą sprzężonych. W samej rzeczy punkty M_{m-1} i M_0 nie mogą być symetrycznymi względem osi OX, bo gdyby tak było, mielibyśmy (Rys. 15)

$$\smile M_0 M_{m-1} = 2AM_0$$

czyli

$$\frac{2\pi}{m} = \frac{2\varphi}{m}$$

Skąd

$$\varphi = \pi$$

co właśnie jest wykluczone, skoro z jest liczbą zespoloną, nie sprowadzającą się do liczby rzeczywistej. Jeżeli zaś punkty M_0 i M_{m-1} nie są symetryczne względem osi OX, to punkty M_1 i M_{m-2}, jak również i wszystkie inne punkty M_2, M_3 ... M_{m-3} nie będą symetryczne względem osi OX. Stąd wnioskujemy, że: 1) żaden z punktów M_0, M_1 ... M_{m-1} nie jest położony na osi OX, czyli innemi słowy wszystkie wartości y_0, y_1 ... y_{m-1} pierwiastka $\sqrt[m]{z}$ są liczbami zespolonemi i 2) między temi wartościami niema liczb wzajemnie ze sobą sprzężonych.

Zbadajmy przypadki poszczególne, gdy: 1) z jest liczbą rzeczywistą i 2) z jest liczbą urojoną.

Pierwszy przypadek. Przypuśćmy, że z jest liczbą rzeczywistą dodatnią równa a. Wówczas będzie

$$\varphi = o; \quad r = a$$

Przeto

$$y_0 = \sqrt[m]{a}$$

$$y_1 = \sqrt[m]{a}\left(\cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}\right)$$

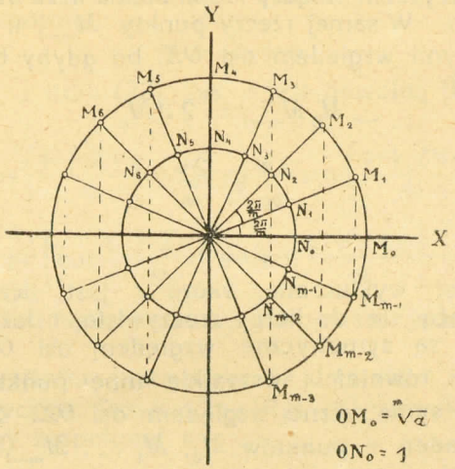
$$y_2 = \sqrt[m]{a}\left(\cos\frac{4\pi}{m} + i\sin\frac{4\pi}{m}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_{m-1} = \sqrt[m]{a}\left[\cos\frac{2(m-1)\pi}{m} + i\sin\frac{2(m-1)\pi}{m}\right]$$

W tym razie punkt M_0 będzie leżał na osi OX, ponieważ jest obrazem geometrycznym liczby rzeczywistej dodatniej $\sqrt[m]{a}$. A więc w tym przypadku, gdy $z = a$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią, zaś m — liczbą nieparzystą, pierwiastek $\sqrt[m]{z}$ będzie posiadał jedną wartość rzeczywistą i $m - 1$ wartości zespolone. Wartość rzeczywista $\sqrt[m]{a}$ nazywa się zwykle pierwiastkiem arytmetycznym m-go stopnia liczby a. Obrazy geometryczne różnych wartości pierwiastka $\sqrt[m]{z}$ w rozważanym przypadku oznaczone są na Rys. 16.



Rys. 16.

W tym przypadku, gdy m jest liczbą parzystą, istnieje jeszcze druga wartość pierwiastka $\sqrt[m]{z}$ rzeczywista, ujemna i równa $-\sqrt[m]{a}$. Obraz geometryczny tej liczby znajduje się na osi OX nalewo od punktu O, w odległości równej $\sqrt[m]{a}$. Obrazy geometryczne $2m-2$ innych wartości będą punktami symetrycznymi względem osi OX, czyli innemi słowy wartości te będą liczbami wzajemnie ze sobą sprzężonemi (Rys. 16).

Załóżmy $z=1$ i oznaczmy przez $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}$ różne wartości pierwiastka $\sqrt[m]{1}$. Wówczas będziemy mieli:

$$\alpha_0 = \sqrt[m]{1} = 1$$

$$\alpha_1 = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$$

$$\alpha_2 = \cos\frac{4\pi}{m} + i\sin\frac{4\pi}{m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{m-1} = \cos\frac{2(m-1)\pi}{m} + i\sin\frac{2(m-1)\pi}{m}$$

Zauważyć należy, że

$$\alpha_2 = \alpha_1^2$$
$$\alpha_3 = \alpha_1^3$$
$$\alpha_4 = \alpha_1^4$$
$$\ldots\ldots$$
$$\alpha_{m-1} = \alpha_1^{m-2}$$

Obrazami geometrycznymi liczb $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}$ będą punkty $N_0, N_1, N_2 \ldots N_n$, leżące na wierzchołkach foremnego wielokąta o m bokach, wpisanego w koło o promieniu równym 1.

Jeżeli, naprzykład, $m=2$, wówczas będziemy mieli dwie wartości pierwiastka $\sqrt{1}$, a mianowicie

$$\alpha_0 = 1; \quad \alpha_1 = -1.$$

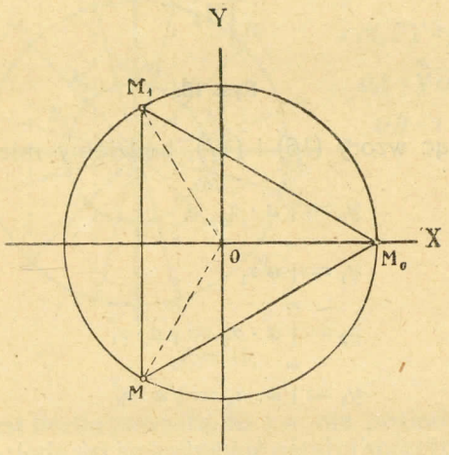
Gdy $m=3$, wówczas będziemy mieli trzy wartości pierwiaska $\sqrt[3]{1}$, a mianowicie

$$\alpha_0 = 1; \quad \alpha_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\alpha_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\alpha_2 = \alpha_1^2$$

Obrazami geometrycznymi liczb $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ są odpowiednio punkty M_0, M_1, M_2, położone na wierzchołkach równobocznego trójkąta $M_0\ M_1\ M_2$, wpisanego w koło o promieniu równym 1 (rys. 17).



Rys. 17.

Gdy $m=4$, wówczas będziemy mieli cztery wartości na $\sqrt[4]{1}$, z których dwie są rzeczywiste, a mianowicie

$$\alpha_0 = 1.$$

$$\alpha_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

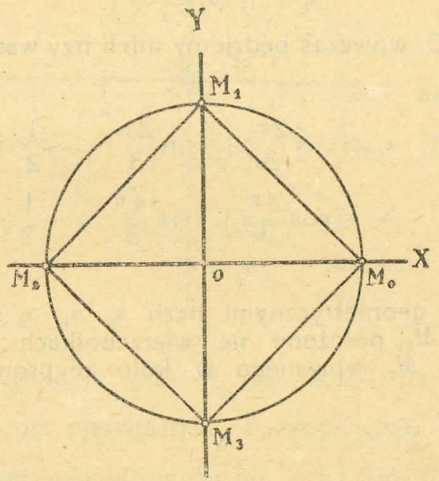
$$\alpha_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$\alpha_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

oczywiście

$$\alpha_2 = \alpha_1^2;\quad \alpha_3 = \alpha_1^3$$

Obrazy geometryczne M_0, M_1, M_2, M_3 liczb α_0, α_1, α_2, α_3 są oznaczone na rys. 18.



Rys. 18.

Zestawiając wzory (16) i (17), będziemy mieli

$$y_0 = \sqrt[m]{a}\cdot\alpha_0$$
$$y_1 = \sqrt[m]{a}\,\alpha_1$$
$$y_2 = \sqrt[m]{a}\cdot\alpha_2 = \sqrt[m]{a}\cdot\alpha_1^2$$
$$y_3 = \sqrt[m]{a}\cdot\alpha_3 = \sqrt[m]{a}\cdot\alpha_1^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{m-1} = \sqrt[m]{a}\,\alpha_{m-1} = \sqrt[m]{a}\cdot\alpha_1^{m-1}$$

A więc wszystkie wartości pierwiastka m-go stopnia z liczby rzeczywistej dodatniej otrzymamy, mnożąc pierwiastek arytmetyczny z tej liczby przez kolejne wartości pierwiastka tegoż stopnia z jedności.

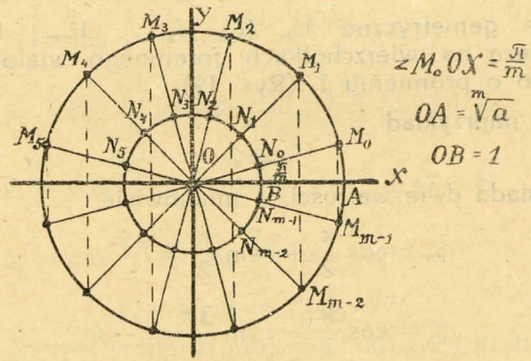
Przypuśćmy, że z jest liczbą rzeczywistą ujemną $-a$ $(a>o)$. Wówczas będzie

$$r = \sqrt[m]{a};\varphi = \pi$$

Przeto

$$y_0 = \sqrt[m]{a}\left(\cos\frac{\pi}{m} + i\sin\frac{\pi}{m}\right)$$
$$y_1 = \sqrt[m]{a}\left(\cos\frac{3\pi}{m} + i\sin\frac{3\pi}{m}\right)$$
$$y_2 = \sqrt[m]{a}\left(\cos\frac{5\pi}{m} + i\sin\frac{5\pi}{m}\right) \quad \ldots\ldots \quad (18)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{m-1} = \sqrt[m]{a}\left[\cos\frac{(2m-1)\pi}{m} + i\sin\frac{(2m-1)\pi}{m}\right]$$

Obrazy geometryczne M_0, M_1, $M_2 \ldots M_{m-1}$ liczb y_0, y_1, $y_2 \ldots y_{m-1}$ będą punktami, symetrycznie położonemi względem osi OX i będą się znajdowały na wierzchołkach foremnego wielokąta, wpisanego w koło o promieniu $\sqrt[m]{a}$ (Rys. 19).



Rys. 19.

Jeżeli m jest liczbą parzystą, to $\sqrt[m]{a}$ nie posiada wartości rzeczywistych, zespolone zaś są wszystkie parami sprzężone ze sobą.

Jeżeli m jest liczbą nieparzystą, jedna z wartości na $\sqrt[m]{a}$ będzie rzeczywistą, zaś wszystkie inne wartości będą liczbami zespolonemi, parami ze sobą sprzężonemi.

Przypuśćmy, że $z = -1$, wówczas będzie

$$r = 1 \quad \varphi = \pi$$

Oznaczmy przez β_0, β_1, $\beta_2 \ldots \beta_{m-1}$ różne wartości na $\sqrt[m]{-1}$; będziemy mieli

$$\beta_0 = \cos\frac{\pi}{m} + i\sin\frac{\pi}{m}$$

$$\beta_1 = \cos\frac{3\pi}{m} + i\sin\frac{3\pi}{m} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

$$\beta_2 = \cos\frac{5\pi}{m} + i\sin\frac{5\pi}{m}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\beta_{m-1} = \cos\frac{(2m-1)\pi}{m} + i\sin\frac{(2m-1)\pi}{m} = 1$$

Zauważyć należy, że

$$\beta_1 = \beta_0^3$$
$$\beta_2 = \beta_5^0$$
$$\beta_3 = \beta_0^7$$
. . . . . .
. . . . . .
$$\beta_{m-1} = \beta_0^{2m-1}$$

Obrazy gemetryczne M_0, M_1, $M_2 \ldots M_{m-1}$ liczb β_0, β_1, $\beta_2 \ldots \beta_{m-}$ leżą na wierzchołkach foremnego wielokąta, wpisanego w koło o promieniu 1. (Rys. 19).

Jeżeli, naprzykład

$$m = 2,$$

to $\sqrt{-1}$ posiada dwie wartości, a mianowicie

$$\beta_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$\beta_1 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

$$\beta_1 = \beta_0^3$$

Gdy $m = 3$, wówczas $\sqrt[3]{-1}$ posiada trzy wartości, a mianowicie:

$$\beta_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

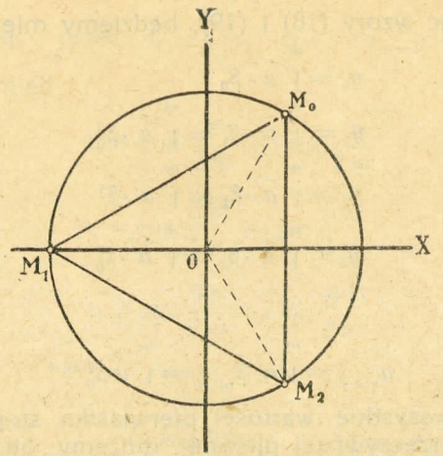
$$\beta_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$\beta_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\beta_1 = \beta_0^3$$

$$\beta_2 = \beta_0^5$$

Obrazy geometryczne M_0, M_1, M_2 tych liczb oznaczone są na rys. 20.



Rys. 20.

Gdy $m = 4$, wówczas $\sqrt[4]{-1}$ posiada cztery wartości, a mianowicie:

$$\beta_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

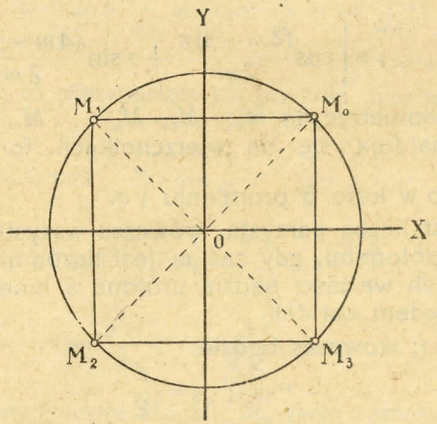
$$\beta_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

$$\beta_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$\beta_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

$$\beta_1 = \beta_0^3;\ \beta_2 = \beta_0^5;\ \beta_3 = \beta_0^7.$$

Obrazy geometryczne M_0, M_1, M_2 i M_3 tych liczb oznaczone są na rys. 21.



Rys. 21.

Zestawiając wzory (18) i (19), będziemy mieli

$$y_0 = \sqrt[m]{a}\cdot\beta_0$$
$$y_1 = \sqrt[m]{a}\cdot\beta_1 = \sqrt[m]{a}\cdot\beta_0^3$$
$$y_2 = \sqrt[m]{a}\cdot\beta_2 = \sqrt[m]{a}\cdot\beta_0^5$$
$$y_3 = \sqrt[m]{a}\cdot\beta_3 = \sqrt[m]{a}\cdot\beta_0^7$$
. . . . . .
. . . . . .
$$y_{m-1} = \sqrt[m]{a}\cdot\beta_{m-1} = \sqrt[m]{a}\,\beta_0^{2m-1}$$

A więc wszystkie wartości pierwiastka stopnia m z jakiejkolwiek liczby rzeczywistej ujemnej możemy otrzymać, mnożąc pierwiastek arytmetyczny z wartości bezwzględnej tej liczby przez wartości pierwiastka tegoż stopnia z -1.

Drugi przypadek: Przypuśćmy, że z jest liczba urojona ai, gdzie a może być liczbą dodatnią, lub też ujemną.

Przypuśćmy, że $a>0$, wówczas będzie

$$r = a;\ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Przeto

$$y_0 = \sqrt[m]{a}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2m} + i\sin\frac{\pi}{2m}\right)$$
$$y_1 = \sqrt[m]{a}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{2m} + i\sin\frac{5\pi}{2m}\right) \quad . \ . \ . \ . \quad (20)$$
$$y_2 = \sqrt[m]{a}\cdot\left(\cos\frac{9\pi}{2m} + i\sin\frac{9\pi}{2m}\right)$$
. . . . . .
. . . . . .
$$y_{m-1} = \sqrt[m]{a}\left[\cos\frac{(4m-3)\pi}{2m} + i\sin\frac{(4m-3)\pi}{2m}\right]$$

Obrazy geometryczne M_0, M_1, M_2 . . . M_{m-1} liczb y_0, y_1, y_2 . . . y_{m-1} znajdują się na wierzchołkach foremnego wielokąta, wpisanego w koło o promieniu $\sqrt[m]{a}$.

Gdy m jest liczbą parzystą, wówczas wszystkie wartości (20) są liczbami zespolonemi, gdy zaś m jest liczbą nieparzystą, wówczas jedna z tych wartości będzie urojoną a inne liczbami symetrycznemi względem osi OY.

Niech $z = i$; wówczas będzie

$$r = 1;\ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Oznaczając przez ε_0, ε_1, ε_2, ε_3 . . . ε_{m-1} różne wartości $\sqrt[m]{i}$ będziemy mieli

$$\varepsilon_0 = \cos\frac{\pi}{2m} + i\sin\frac{\pi}{2m}$$
$$\varepsilon_1 = \cos\frac{5\pi}{2m} + i\sin\frac{5\pi}{2m}$$
$$\varepsilon_2 = \cos\frac{9\pi}{2m} + i\sin\frac{9\pi}{2m}$$
. . . . . .
. . . . . .
$$\varepsilon_{m-1} = \cos\frac{(4m-3)\pi}{2m} + i\sin\frac{(4m-3)\pi}{2m}.$$

Należy zauważyć, że

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0^5$$
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0^9$$
. . . . . .
. . . . . .
$$\varepsilon_{m-1} = \varepsilon_0^{4m-3}$$

Jeżeli naprzykład

$$m = 2,$$

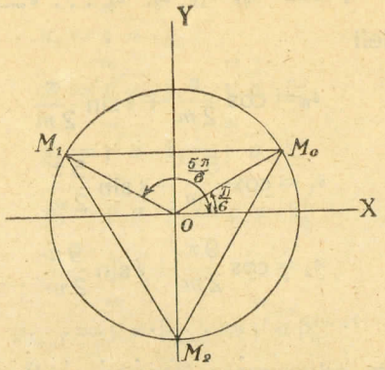
to pierwiastek $\sqrt{i}$ posiada dwie wartości, a mianowicie:

$$\varepsilon_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{2}{2}}(1+i)$$
$$\varepsilon_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\sqrt{\frac{2}{2}}(1+i)$$

Jeżeli $m = 3$, to pierwiastek $\sqrt[3]{i}$ posiada trzy wartości, a mianowicie:

$$\varepsilon_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}i$$
$$\varepsilon_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}i$$
$$\varepsilon_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

Obrazy geometryczne M_0, M_1, M_2 tych wartości są wierzchołkami trójkąta równobocznego $M_0\ M_1\ M_2$ (Rys. 22).



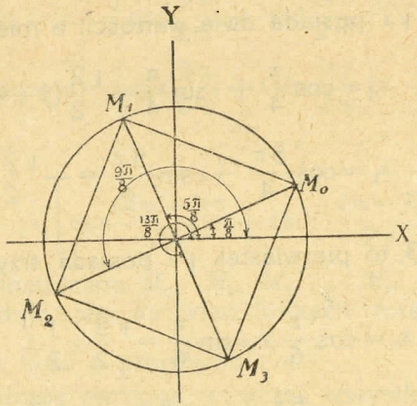
Rys. 22.

Jeżeli $m=4$, to pierwiastek $\sqrt[4]{i}$ posiada cztery wartości, a mianowicie

$$\varepsilon_0 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}; \quad \varepsilon_1 = \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}; \quad \varepsilon_3 = \cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}$$

Obrazy geometryczne M_0, M_1, M_2, M_3 tych wartości są wierzchołkami kwadratu $M_0\ M_1\ M_2\ M_3$ (Rys. 23).



Rys. 23.

Zestawiając wzory (20) i (21), otrzymujemy

$$y_0 = \sqrt[m]{a}\cdot\varepsilon_0$$

$$y_1 = \sqrt[m]{a}\cdot\varepsilon_1 = \sqrt[m]{a}\cdot\varepsilon_0^5$$

$$y_2 = \sqrt[m]{a}\cdot\varepsilon_2 = \sqrt[m]{a}\cdot\varepsilon_0^9$$

. . . . . .

. . . . . .

$$y_{m-1} = \sqrt[m]{a}\cdot\varepsilon_{m-1} = \sqrt[m]{a}\cdot\varepsilon_0^{4m-3}$$

A więc wszystkie wartości pierwiastka m-go stopnia z liczby urojonej dodatniej z możemy otrzymać, mnożąc pierwiastek arytmetyczny z modułu tej liczby przez różne wartości pierwiastka m-go stopnia z i.

Analogiczne rezultaty otrzymamy i w tym przypadku, gdy z będzie liczbą urojoną, ujemną.

Układ $[Z]$ liczb typu $z=a+bi$, to jest liczb o dwóch jednostkach 1 i i jest najprostszy ze wszystkich układów liczb zespolonych. Widzieliśmy, że ten układ jest algebraiczny, gdyż dla liczb tego układu zachodzą zasadnicze prawa algębry, pod warunkiem, że zachodzi między dwiema jednostkami 1 i i związek charakterystyczny

$$i^2+1=0$$

Samo przez się nasuwa się teraz pytanie, czy nie można byłoby jeszcze więcej rozszerzyć pojęcie liczby przez wprowadzenie wyższych liczb zespolonych, czyli liczb o wielu jednostkach. Otóż trzeba zauważyć, że takie rozszerzenie jest zupełnie możliwe, z tym jednak zastrzeżeniem, że nie będziemy wymagali, żeby rozszerzony układ liczbowy był algebraicznym; można bowiem udowodnić, że nie można rozszerzyć układ liczbowy, poza liczby zespolone z o dwuch jednostkach 1 i i, nie poświęcając jednego lub więcej praw zasadniczych algebry. Matematyk angielski Hamilton w swojej teorji kwaternionów pierwszy dał przkład rozszerzonego układu liczb zespolonych. Główne zasady teorji kwaternionów, oraz ogólne pojęcia o wyższych liczbach zespolonych, podanych przez Hankel'a, czytelnik znajdzie w dodatku II do tomu I mego kursu.

Rozdział III.

Ogólne pojęcia z teorji mnogości. Ciągi liczbowe i ich granice.

§ **1. Określenia. Zbiory równoważne.** Teorja mnogości, której twórcą jest niemiecki matematyk G. Cantor, zajmuje się badaniem własności zbiorów oderwanych, niezależnie od natury ich elementów. Same pojęcie zbioru zaliczamy do pojęć pierwotnych, to jest takich, które nie dają się określić przez inne prostsze pojęcia.

Niech

$$[a, b, c, d, \dots] \quad \dots\dots\dots \quad [A]$$
$$[a_1, b_1, c_1, d_1, \dots] \quad \dots\dots\dots \quad [A_1]$$

będą dwa zbiory jakichkolwiekbądź objektów.

Chodzi nam o to, czy możemy w jakiś sposób porównać te zbiory, nie wiedząc nic o indywidualnych własnościach ich elementów. Gdyby zbiory $[A]$ i $[A_1]$ zawierały skończoną liczbę elementów, moglibyśmy wtedy opierać sposób „porównania" tych zbiorów na zwyczajnem liczeniu składających je elementów, uważając wówczas zbiory za równe, jeżeli liczby elementów w każdym z tych zbiorów są te same. W tym zaś przypadku, gdy zbiory $[A]$ i $[A_1]$ są nieskończone, (to jest zawierają nieskończenie wiele elementów), o liczeniu ich elementów nie może być nawet mowy; jednakże jest bardzo prosty sposób „porównania" zbiorów nieskończonych, nie opierający się na liczeniu, ani nawet na samem pojęciu liczby. Sposób ten opiera się jedynie na pojęciu o d p o w i e d n i o ś c i.

Rozważmy naprzykład pułk żołnierzy. Zwyczajnie każdy żołnierz ma jeden karabin i każdy karabin należy do jakiegoś żołnierza. Powiadamy wtedy, że liczba karabinów jest ta sama co i liczba żołnierzy. Możemy to powiedzieć bez żadnego liczenia.

Ustaleniem o d p o w i e d n i o ś c i d o s k o n a ł e j między elementami dwóch zbiorów $[A]$ i $[A_1]$ nazywać będziemy takie wzajemne podporządkowanie, przy którem każdemu elementowi zbioru $[A]$ odpowiada jeden tylko element zbioru $[A_1]$ i naodwrót. Innemi słowy, o dwóch zbiorach $[A]$ i $[A_1]$ będziemy mówili, że są w odpowiedniości doskonałej wtedy i tylko wtedy, gdy elementy tych zbiorów dają się skojarzyć w pary, przyczem do każdej pary musi wchodzić tylko jeden element z każdego zbioru

i każdy element ma swoją parę. W tym przypadku, gdy zbiory $[A]$ i $[A_1]$ są skończone, liczba par jest skończona, a skojarzenie elementów tych zbiorów zakończymy po jednoczesnem wyczerpaniu wszystkich elementów. Z tego wynika, że między zbiorami skończonemi można ustalić odpowiedniość doskonałą wtedy i tylko wtedy, gdy liczby elementów w każdym z tych zbiorów są te same. Natomiast w tym przypadku, gdy zbiory $[A]$ i $[A_1]$ są nieskończone, liczba par ich elementów jest nieskończenie wielką, zaś skojarzenie w pary jest operacją nieskończoną. Z punktu widzenia teorji mnogości zbiory nieskończone, znajdujące się w odpowiedniości doskonałej, uważamy za „jednakowo liczne".

O dwóch danych zbiorach $[A]$ i $[A_1]$ będziemy mówili, że są wzajemnie r ó w n o w a ż n e, czyli są r ó w n e j m o c y, jeżeli między ich elementami daje się ustalić odpowiedniość doskonałą.

Równoważność wzajemną zbiorów $[A]$ i $[A_1]$, będziemy oznaczali symbolem

$$[A] \sim [A_1]$$

Z podanej definicji wynika bezpośrednio, że dla zbiorów wzajemnie równoważnych zachodzą:

1. P r a w o s y m e t r j i polegające na tem, że wzór

$$[A] \sim [A_1]$$

pociąga za sobą zawsze wzór

$$[A_1] \sim [A]$$

2. P r a w o p r z e c h o d n i o ś c i, według którego wzory

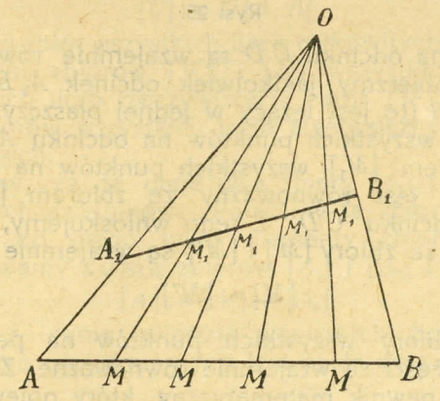
$$[A] \sim [A_1] \text{ i } [A_1] \sim [A_2]$$

pociągają za sobą wzór

$$[A] \sim [A_2]$$

Przytoczmy kilka przykładów zbiorów równej mocy:

1. Przypuśćmy, że mamy dwa odcinki AB i A_1B_1 prostych, znajdujących się w jednej płaszczyźnie, byle tylko nie stanowiących jednej prostej (Rys. 24).



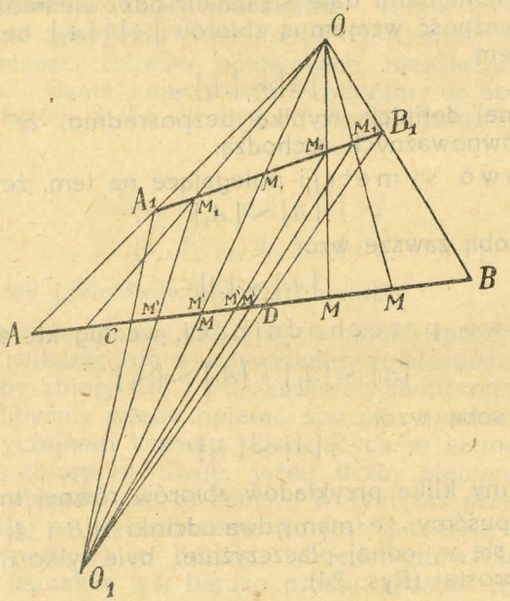
Rys. 24.

Łatwo przekonać się, że zbiory wszystkich punktów na odcinkach AB i A_1B_1 są wzajemnie równoważne. Istotnie, zgodzimy się, aby każdemu punktowi M na odcinku AB odpowiadał na odcinku A_1B_1 taki punkt M_1, który leży jednocześnie na prostej OM, łączącej punkt M z punktem O przecięcia się prostych AA_1 i BB_1.

W ten sposób ustalimy oczywiście pewną odpowiedniość doskonałą między zbiorami $[M]$ i $[M_1]$ punktów na odcinkach AB i A_1B_2. Stąd wnioskujemy, że

$$[M] \sim [M_1]$$

Obierzmy na odcinku AB (Rys. 25) dwa dowolne punkty C i D. Łatwo przekonać się, że zbiory wszystkich punktów na



Rys. 25.

odcinku AB i na odcinku CD są wzajemnie równoważne. Aby tego dowieść, obierzmy jakikolwiek odcinek A_1B_1 komplanarny z odcinkiem AB (to jest leżący w jednej płaszczyźnie z AB).

Zbiór $[M]$ wszystkich punktów na odcinku AB jest równoważny ze zbiorem $[M_1]$ wszystkich punktów na odcinku A_1B_1, zaś zbiór $[M_1]$ jest równoważny ze zbiorem $[M']$ wszystkich punktów na odcinku CD. Z tego wnioskujemy, w myśl prawa przechodniości, że zbiory $[M]$ i $[M']$ są wzajemnie równoważne

$$[M] \sim [M']$$

A więc zbiory wszystkich punktów na pewnym odcinku prostej i jego części są wzajemnie równoważne. Z tego wnioskujemy, że znany pewnik matematyczny, który opiewa, że „całość“

jest większa od jakiejkolwiek ze swych części z punktu widzenia teorji mnogości nie jest prawdziwy, gdyż liczba elementów zbioru nieskończonego może być „równa“ liczbie elementów zbioru, stanowiącego część danego zbioru.

2. Weźmy pod rozwagę zbiór $[N_1]$ wszystkich liczb całkowitych dodatnich parzystych, i zbiór $[N_2]$ kwadratów wszystkich liczb naturalnych. Aby zrozumieć, jak można ustalić między temi zbiorami odpowiedniość doskonałą, dość jest napisać je w taki oto sposób

$$\begin{array}{l} [1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots . \ n \ldots] \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ [N] \\ \quad |\quad |\quad |\quad |\qquad\quad | \\ [2,\ 4,\ 6,\ 8 \ldots . \ 2n \ldots] \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ [N_1] \end{array}$$

lub

$$\begin{array}{l} [1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots . \ n \ldots] \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ [N] \\ \quad |\quad |\quad |\quad |\qquad\quad | \\ [1,\ 4,\ 9,\ 16 \ldots n^2 \ldots] \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ [N_2] \end{array}$$

A więc każdej liczbie całkowitej dodatniej a zbioru $[N]$ odpowiada liczba parzysta $2a$ zbioru $[N_1]$ względnie liczba a^2 zbioru $[N_2]$. Z tego wnioskujemy, że zbiory $[N]$, $[N_1]$ i $[N_2]$ są wzajemnie równoważne, pomimo to, że zbiory $[N_1]$ i $[N_2]$ stanowią tylko część zbioru $[N]$.

Przypuśćmy, że mamy jakikolwiek zbiór $[A]$. D z i e l n i k i e m zbioru $[A]$, czyli jego c z ę ś c i ą w ł a ś c i w ą, nazywamy taki zbiór $[A_1]$, którego wszystkie elementy są jednocześnie elementami zbioru $[A]$.

Naprzykład zbiór $[W]$ wszystkich liczb wymiernych jest dzielnikiem zbioru $[R]$ wszystkich liczb rzeczywitych; zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest dzielnikiem zbioru $[Z]$ wszystkich liczb zespolonych; zbiór wszystkich punktów na przekątnej pewnego kwadratu jest dzielnikiem zbioru wszystkich punktów, leżących wewnątrz tego kwadratu.

W s p ó l n y m d z i e l n i k i e m dwóch zbiorów $[A]$ i $[B]$ nazywamy taki zbiór $[C]$, którego wszystkie elementy są elementami zarówno zbioru $[A]$, jak i zbioru $[B]$. Wspólny dzielnik dwóch zbiorów $[A]$ i $[B]$ oznaczamy symbolem

$$[C] = D[A, B]$$

Naprzykład zbiór wszystkich liczb całkowitych $[C]$ jest wspólnym dzielnikiem zbiorów $[W]$ i $[R]$ wszystkich liczb wymiernych i wszystkich liczb rzeczywistych; zbiór $[W]$ jest wspólnym dzielnikiem zbiorów wszystkich liczb algebraicznych i wszystkich liczb rzeczywistych.

Przypuśćmy, że są dane dwa zbiory $[A_1]$ i $[A_2]$, nie posiadające wspólnych dzielników. Połączmy te zbiory w jeden zbiór $[A]$, zaliczając do niego tylko elementy zbiorów $[A_1]$ i $[A_2]$. Zbiór $[A]$ nazywamy s u m ą zbiorów $[A_1]$ i $[A_2]$ i oznaczamy

$$[A] = [A_1] + [A_2]$$

Naprzykład sumą zbiorów wszystkich liczb wymiernych i wszystkich liczb niewymiernych jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

Wogóle sumą kilku zbiorów $[A_1], [A_2] \cdots [A_n]$, nie posiadających wspólnych dzielników, nazywamy zbiór $[A]$, zawierający tylko elementy zbiorów $[A_1], [A_2] \cdots [A_n]$

$$[A] = [A_1] + [A_2] + \cdots + [A_n]$$

Suma skończonej liczby zbiorów posiada oczywiście własność przemienności oraz łączności składników.

Oczywista, że wzory

$$[\mathfrak{A}_1] \sim [\mathfrak{B}_1] \text{ i } [\mathfrak{A}_2] \sim [\mathfrak{B}_2]$$

pociągają za sobą zawsze wzór

$$[\mathfrak{A}_1] + [\mathfrak{A}_2] \sim [\mathfrak{B}_1] + [\mathfrak{B}_2]$$

Przypuśćmy, że mamy dwa zbiory $[A]$ i $[B]$, z których zbiór $[B]$ jest dzielnikiem zbioru $[A]$. Utwórzmy nowy zbiór $[C]$, usuwając ze zbioru $[A]$ wszystkie elementy zbioru $[B]$. Zbiór $[C]$ nazywamy różnicą zbiorów $[A]$ i $[B]$ oznaczamy

$$[C] = [A] - [B]$$

Należy zauważyć, że wzory

$$[A] \sim [A_1] \text{ i } [B] \sim [\mathfrak{B}_1]$$

nie zawsze pociągają za sobą wzór

$$[A] - [B] \sim [\mathfrak{A}_1] - [\mathfrak{B}_1]$$

Niech $[A]$ i $[B]$ oznaczają dwa dane zbiory. Utwórzmy zbiór $[P]$ wszystkich par

$$(a, b)$$

gdzie a oznacza jakikolwiek element zbioru $[A]$, zaś b jakikolwiek element zbioru $[B]$. Zbiór $[P]$ nazywamy iloczynem zbiorów $[A]$ i $[B]$ i oznaczamy

$$[P] = [A] \cdot [B]$$

Pojęcie iloczynu zbiorów natychmiast daje się uogólnić i na większą ich liczbę. Oczywista, że iloczyn skończonej liczby zbiorów posiada własność przemienności oraz łączności czynników. Prawo rozdzielnościowe, łączące dodanie z mnożeniem zbiorów, również będzie zachodziło.

§ 2. Zbiory przeliczane. Zbiory równoważne ze zbiorem

$$[1, 2, 3, 4 \ldots n \ldots] \quad \ldots\ldots\ldots \quad [N]$$

wszystkich liczb naturalnych nazywamy przeliczalnemi. Widzieliśmy w § 1, że zbiór wszystkich liczb dodatnich parzystych, oraz zbiór kwadratów wszystkich liczb naturalnych jest przeliczalny.

Rozpatrzmy teraz zbiór $[W]$ wszystkich liczb wymiernych i udowodnijmy, że ten zbiór jest przeliczalny.

Aby tego dowieść, zauważmy, że każdą liczbę wymierną a można w jeden i tylko jeden sposób przedstawić w postaci ułamka nieprzywiedlnego $\frac{m}{n}$ o naturalnym mianowniku n

Liczbę

$$p = |m| + n$$

gdzie $|m|$ jest wartością bezwzględną licznika m, nazywamy wysokością liczby a.

Podzielmy wszystkie liczby wymierne na klasy według ich wysokości, zaliczając do klasy p-ej wszystkie liczby wymierne o wysokości p.

Oczywista, przy takim podziale każda liczba wymierna będzie zaliczona do pewnej klasy, przytem każda z klasy będzie zawierała skończoną ilość liczb wymiernych; do klasy p-ej naprzykład należeć będą liczby

$$\frac{-(p-1)}{1}, \frac{-(p-2)}{2}, \cdots \frac{-2}{p-1}, \frac{-1}{p-1}, \frac{0}{p}, \frac{1}{p-1}, \frac{2}{p-2}, \cdots \frac{p-2}{2}, \frac{p-1}{1}$$

Uporządkujmy liczby w każdej klasie według ich wielkości i rozważmy nasamprzód wszystkie liczby pierwszej klasy (o wysokości 1), następnie wszystkie liczby drugiej klasy (o wysokości 2) i tak dalej. W taki sposób każdej liczbie wymiernej możemy wyznaczyć określone w zupełności miejsce w postępie liczb naturalnych, czyli innemi słowy możemy ustalić odpowiedniość doskonałą między zbiorem $[W]$ wszystkich liczb wymiernych, a zbiorem $[N]$, liczb naturalnych.

A więc zbiór $[W]$, jako równoważny ze zbiorem $[N]$, jest przeliczalny.

Udowodnimy jeszcze, że zbiór wszystkich liczb algebraicznych jest przeliczalny.

Istotnie, w myśl definicji, podanej w § 9 rozdz. I, możemy powiedzieć, że jeżeli w jest liczbą algebraiczną stopnia n, to musi istnieć przynajmnej jedno równanie postaci

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots A_{n-1} x + A_n = 0 \quad . \quad (I)$$

o spółczynnikach całkowitych, niezredukowalne, (to jest takie, którego lewej jego strony nie można rozłożyć na wielomiany algebraiczne niższego stopnia), którego pierwiastkiem jest liczba w.

Zbiór wszystkich liczb algebraicznych jest nieskończony, gdyż zawiera przynajmniej wszystkie liczby wymierne, które można uważać za liczby algebraiczne pierwszego stopnia.

Nazywamy, za przykładem Cantora, wysokością równania (I) liczbę

$$H = n - 1 + |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n-1}| + |a_n| \, . \quad (I)$$

gdzie $|a_i|$ oznacza wartość bezwzględną spółczynnika a_i

Ponieważ

$$H \geq n$$

$$\text{i} \quad H \geq |a_k| \quad (k = 0, 1, 2, 3 \cdots n)$$

przeto zbiór różnych liczb $|a_0|, |a_1|, |a_2| \ldots |a_{n-1}|, |a_n|$, spełniających wzór ( ), jest skończony, czyli innemi słowy liczba

wszystkich niezredukowalnych równań danej wysokości H jest skończona.

Podzielmy wszystkie pierwiastki równań postaci (1), czyli innemi słowy wszystkie liczby algebraiczne na klasy, zaliczając do p-ej klasy pierwiastki wszystkich równań algebraicznych o wysokości p. Ponieważ każde z równań może posiadać tylko skończoną liczbę pierwiastków, przeto ilość liczb algebraicznych w każdej klasie będzie również skończona. Uporządkujmy liczby w każdej klasie według ich wielkości i rozważmy nasamprzód wszystkie liczby pierwszej klasy, następnie wszystkie liczby drugiej klasy i t. d. Postępując w taki sposób, możemy oczywiście wyznaczyć dla każdej liczby wymiernej określone w zupełności miejsce w postępie liczb naturalnych, czyli innemi słowy możemy ustalić odpowiedniość doskonałą między zbiorem wszystkich liczb algebraicznych, a zbiorem $[N]$ liczb naturalnych.

A więc zbiór wszystkich liczb algebraicznych, jako równoważny ze zbiorem $[N]$, jest przeliczalny.

Cantor udowodnił dwa bardzo ważne twierdzenia następujące, które podajemy tu bez dowodu.

1. Do każdego danego zbioru nieskończonego można dodać jakikolwiek zbiór skończony albo nieskończony, przeliczalny, nie zmieniając przez to mocy danego zbioru.

2. Z każdego danego zbioru nieskończonego można usunąć jakikolwiek zbiór skończony, nie zmieniając przez to mocy danego zbioru, czyli innemi słowy w każdym danym zbiorze nieskończonym można wyznaczyć taki jego dzielnik, który będzie równoważny z danym zbiorem.

Należy zauważyć, że w myśl definicji zbioru przeliczalnego elementy tego zbioru można zawsze ponumerować w taki sposób, że każdemu numerowi będzie odpowiadał jeden i tylko jeden element zbioru, przyczem każdy element zbioru będzie posiadał określony w zupełności numer.

A więc każdy zbiór przeliczalny możemy pisać w następujący sposób

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Zbiór przeliczalny postaci (2) nazywamy ciągiem. Szczegółowe badanie ciągów liczbowych będzie podane w art. 00.

§ **3. Zbiory nieprzeliczalne (o mocy continuum).** Zbiory nieskończone, które nie są równej mocy ze zbiorem $[N]$ liczb naturalnych, nazywamy zbiorami nieprzeliczalnemi.

Rozpatrzmy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, spełniających nierówności

$$a \leqslant x \leqslant b$$

gdzie $b > a$. Ten zbiór nazywamy przedziałem liczbowym i oznaczamy symbolem

$$[a, b]$$

Z punktu widzenia geometrycznego uważamy przedział $[a, b]$ jako odcinek prostej, którego punkty krańcowe odpowiadają liczbom a i b.

Udowodnimy, że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych przedziału $[a, b]$ jest nieprzeliczalny. Aby tego dowieść, weźmy najpierw pod rozwagę zbiór wszystkich liczb rzeczywistych przedziału

$$[0, 1]$$

Wiemy, że każdą liczbę rzeczywistą można w jednen tylko sposób przedstawić w postaci nieskończonego lub skończonego ułamka dziesiętnego. Przypuśćmy, że zbiór wszystkich takich ułamków jest przeliczalny.

Wyobraźmy sobie, że wszystkie ułamki są ustawione jako ciąg

$$u_1, u_2, u_3, u_4 \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

o wyrazach

$$u_1 = O, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots .$$
$$u_2 = O, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots .$$
$$u_3 = O, c_1 c_2 c_3 c_4 \ldots .$$
$$u_4 = O, d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots .$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

gdzie litery $a_i, b_i, c_i, d_i, \ldots$ oznaczają różne cyfry od 0 do 9 włącznie.

Rozważmy nieskończony ułamek dziesiętny

$$v = O, p_1 p_2 p_3 p_4 \ldots .$$

gdzie

$$p_1 \neq a_1;\ p_2 \neq b_2;\ p_3 \neq c_3;\ p_4 \neq d_4 \ldots .$$

Oczywista, ułamek v będzie się różnił od u_1 przynajmniej przez pierwszą swą cyfrę; od u_2 przynajmniej przez drugą swą cyfrę; od u_3 przez trzecią cyfrę i naogół od u_n przynajmniej przez n-tą swą cyfrę.

Z tego wnioskujemy, że ułamek v nie będzie należał do ciągu (3). Z drugiej zaś strony ten ułamek, jako pewna liczba rzeczywista przedziału $[0, 1]$, według założenia powinien należeć do ciągu (3).

Doszliśmy więc do sprzeczności, dowodzącej fałszywości naszego założenia o przeliczalności zbioru wszystkich liczb rzeczywisty przedziału $[0, 1]$. A więc ten zbiór jest nieprzeliczalny. O tym zbiorze mówimy, że jest zbiorem o mocy continuum.

Podporządkujmy każdej liczbie α, należącej do przedziału $[0, 1]$, liczbę

$$\beta = (b - a)\alpha + a,$$

należącą do przedziału $[a, b]$. Ponieważ między liczbami α i β istnieje odpowiedniość doskonała, przeto zbiory wszystkich liczb rzeczywistych przedziałów $[0, 1]$ i $[a, b]$ są wzajemnie równoważne.

A więc zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, zawartych wewnątrz przedziału $[a, b]$, jest nieprzeliczalny o mocy continuum.

Podporządkujmy teraz każdej liczbie rzeczywistej dodatniej y liczbę

$$x = \frac{y}{1+y},$$

należącą do przedziału [0, 1]. Wówczas oczywiście ustalimy odpowiedniość doskonałą między zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich a zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych przedziału [0,1]. Stąd wnioskujemy, że te zbiory są wzajemnie równoważne, czyli innemi słowy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich jest nieprzeliczalny o mocy continuum.

W analogiczny sposób możemy udowodnić, że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych ujemnych jest nieprzeliczalny o mocy continum. Ponieważ między zbiorem $[R]$ i zbiorem wszystkich punktów na prostej (osi liczbowej) istnieje odpowiedniość doskonała, przeto zbiór wszystkich punktów na prostej jest przeliczalny o mocy continuum.

Łatwo można udowodnić, że zbiór $[Z]$ wszystkich liczb zespolonych typu $z = a + bi$ jest nieprzeliczalny o mocy continuum.

Istotnie, zbiór $[Z]$ możemy uważać jako zbiór wszystkich par liczb rzeczywistych

$$(a, b),$$

czyli innemi słowy jako iloczyn

$$[Z] = [R] \cdot [R]$$

Oczywista, wystarcza udowodnić, że iloczyn zbiorów liczb rzeczywistych, zawartych w przedziale [0, 1], jest zbiór nieprzeliczalny o mocy continuum. Aby tego dowieść, będziemy przedstawiali każdą liczbę rzeczywistą przedziału [0, 1] w postaci ułamka dziesiętnego. Połączmy za przykładem Königa w jeden symbol każdą cyfrę dziesiętna ułamka, różną od zera, wraz ze wszystkim bezpośrednio poprzedzającemi ją zerami. Taki symbol nazywamy symbolem Königa. Naprzykład dla liczby

$$x = 0,2406\,008\,000509\ldots$$

symbolami Königa będą

$k_1 = (2)$; $k_2 = (4)$; $k_3 = (06)$; $k_3 = (008)$; $k_5 = (0005)$; $k_6 = (09)$ i t. d.

Ciąg nieskończony

$$[k_1, k_2, k_3, k_4 \ldots] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

nazywać będziemy ciągiem Königa.

A więc każdej liczbie rzeczywistej, należącej do przedziału [0, 1], będzie odpowiadał oznaczony w zupełności ciąg Königa i odwrotnie każdy ciąg postaci (4) odpowiada w zupełności określonej liczbie rzeczywistej, należącej do przedziału [0, 1].

Niech x i y będą dwie jakiekolwiek liczby rzeczywiste, należące do przedziału [0, 1]. Oznaczmy przez

$$[k_1, k_2, k_3 \ldots\ldots] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$
$$[k'_1, k'_2, k'_3 \ldots\ldots] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

ciągi Königa odpowiadające liczbom x i y

Utwórzmy z ciągów (5) i (6) ciąg

$$[k_1, k'_1, k_2, k'_2, k_3, k'_3 \ldots\ldots], \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

wstawiając wyrazy ciągu (6) między wyrazy ciągu (5). Oczywista ciąg (7) będzie ciągiem Königa, odpowiadającym pewnej oznaczonej w zupełności liczbie rzeczywistej α, spełniającej nierówności

$$0 < \alpha \leq 1$$

A więc każdej parze liczb rzeczywistych (x, y), należących do przedziału [0, 1], odpowiada pewna oznaczona w zupełności liczba α, należąca do tego samego przedziału; naodwrót każdej liczbie rzeczywistej α, należącej do przedziału [0, 1], której odpowiada ciąg Königa

$$[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \ldots\ldots]$$

będzie odpowiadała określona w zupełności para liczb rzeczywistych

$$(x, y)$$

przedziału [0, 1].

Ciągi Königa, odpowiadające liczbom x i y, są odpowiednio

$$[a_1, a_3, a_5 \ldots\ldots]$$
$$[a_2, a_4, a_6 \ldots\ldots]$$

A więc między wszystkiemi parami liczb rzeczywistych

$$(x, y),$$

należących do przedziału [0, 1] i wszystkimi liczbami tego przedziału można ustalić odpowiedniość doskonałą. Z tego wnosimy, że iloczyn dwóch zbiorów liczb rzeczywistych, należących do przedziału [0, 1], jest równoważny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych przedziału [0, 1], a zatem jest nieprzeliczalny o mocy continuum.

Ponieważ zbiór $[R]$ wszystkich liczb rzeczywistych jest równoważny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych przedziału [0, 1], przeto zbiór wszystkich par liczb rzeczywistych

$$(a, b),$$

czyli innemi słowy zbiór wszystkich liczb zespolonych jest nieprzeliczalny o mocy continuum. Biorąc pod uwagę, że między zbiorem wszystkich liczb zespolonych, a zbiorem wszystkich punktów na płaszczyźnie istnieje odpowiedniość doskonała, wnosimy, że zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie jest nieprze-

liczalny o mocy continnum, to jest równoważny ze zbiorem wszystkich punktów na prostej. Mamy tu ciekawy, wprost paradoksalny, przykład zbiorów równej mocy, z punktu widzenia teorji mnogości, „jednakowo licznych", mimo to, że liczba elementów pierwszego zbioru jest o nieskończenie wiele razy większa od liczby elementów drugiego. Zachodzi jednak między temi zbiorami pewna różnica, którą wyjaśnimy dalej.

W analogiczny sposób moglibyśmy udowodnić, że zbiór wszystkich układów liczb rzeczywistych

$$(a\ b\ c \ldots . b)$$

jest nieprzeliczalny o mocy continuum.

Stąd wnosimy, że zbiór wszystkich wyższych liczb zespolonych, czyli innemi słowy zbiór wszystkich punktów przestrzeni m-wymiarowej jest nieprzeliczalny o mocy continuum. *)

§ **4. Zbiory uporządkowane.** Niech $[A]$ oznacza pewien zbiór skończony lub nieskończony. Przypuśćmy, że dla każdej pary jego elementów jest zawarta umowa, wedle której jeden z tych elementów uważamy jako element wcześniejszy od drugiego.

Umowę tę wyrażamy symbolem

$$„a < b",$$

jeżeli a uważamy jako element wcześniejszy od b, lub symbolem

$$„b < a",$$

jeżeli b uważamy jako element wcześniejszy od a.

Przypuśćmy nadto, że dla elementów zbioru $[A]$ wzory

$$„a < b" \quad „b < c"$$

pociągają za sobą wzór

$$„a < c"$$

Zbiór $[A]$ nazywamy wówczas u p o r z ą d k o w a n y m.

Element x zbioru uporządkowanego $[A]$ nazywać będziemy b e z p o ś r e d n i m n a s t ę p n i k i e m elementu y tego samego zbioru $[A]$, jeżeli

$$„y < x"$$

i jeżeli nadto między y i x niema żadnego elementu zbioru $[A]$.

Element x zbioru uporządkowanego $[A]$ nazywać będziemy b e z p o ś r e d n i m p o p r z e d n i k i e m elementu y tego samego zbioru $[A]$, jeżeli

$$„x < y"$$

i jeżeli nadto między x i y niema żadnego elementu zbioru $[A]$.

Element a zbioru uporządkowanego $[A]$, poprzedzający wszystkie inne elementy tego zbioru, nazywamy jego p i e r w s z y m elementem.

Element b zbioru uporządkowanego $[A]$, poprzedzany przez wszystkie inne elementy tego zbioru, nazywamy jego o s t a t n i m elementem.

*) Patrz Dodatek II.

Wszystkie zbiory uporządkowane można podzielić na cztery kategorje, a mianowicie:

1. Zbiory, nie posiadające ani pierwszego, ani ostatniego elementu.
2. Zbiory, posiadające pierwszy, lecz nie ostatni element.
3. Zbiory, posiadające ostatni, lecz nie pierwszy element.
4. Zbiory, posiadające zarówno pierwszy jak i ostati element.

Rozważmy kilka przykładów zbiorów uporządkowanych.

1. Zbiór $[N]$ wszystkich liczb naturalnych

$$[1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots n \ldots]$$

jest uporządkowany według wielkości swoich elementów. W tym zbiorze z dwóch jakichkolwiek elementów uważamy za wcześniejszy ten element, którego wielkość liczbowa jest większa. Przy takiem uporządkowaniu zbiór posiada pierwszy, lecz nie ostatni element. Każdy element tego zbioru posiada bezpośredni następnik i bezpośredni poprzednik, z wyjątkiem pierwszego elementu, który nie posiada bezpośredniego poprzednika.

2. Zbiór $[-N]$ wszystkich liczb całkowitych ujemnych

$$[\ldots -n \ldots -4,\ -3,\ -2,\ -1]$$

jest uporządkowany według wielkości swoich elementów. Zbiór ten nie posiada pierwszego elementu, natomiast posiada ostatni element. Każdy element tego zbioru posiada bezpośredni następnik i poprzednik, z wyjątkiem ostatniego elementu, który nie posiada bezpośredniego następnika.

3. Zbiór $[C]$ wszystkich liczb całkowitych zarówno dodatnich, jak i ujemnych wraz z zerem

$$[\ldots -n \ldots -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots n \ldots]$$

jest uporządkowany według wielkości swoich elementów. Zbiór $[C]$ nie posiada ani pierwszego, ani ostatniego elementu. Każdy element tego zbioru posiada zarówno bezpośredni następnik, jak i bezpośredni poprzednik.

4. Zbiór $[W]$ wszystkich liczb wymiernych możemy uporządkować kilkoma różnemi sposobami, a mianowicie:

a) Zbiór $[W]$ możemy uporządkować według wielkości jego elementów. Zbiór ten oczywiście nie będzie posiadał ani pierwszego, ani ostatniego elementu.

b) Zbiór $[W]$ możemy uporządkować w sposób podany w § 2, a mianowicie:

$$\left[\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1} \ldots\right]$$

Przy takiem uporządkowaniu zbiór $[W]$ będzie posiadał pierwszy, lecz nie ostatni element.

c) Zbiór $[W]$ możemy napisać, układając jego elementy jeszcze w sposób następujący:

$$\begin{array}{l}
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\frac{-3}{1},\ \frac{-3}{2},\ \frac{-3}{4},\ \frac{-3}{5}\ \ldots \\
\frac{-2}{1},\ \frac{-2}{3},\ \frac{-2}{5},\ \frac{-2}{7}\ \ldots \\
\frac{-1}{1},\ \frac{-1}{2},\ \frac{-1}{3},\ \frac{-1}{4}\ \ldots \\
\qquad\frac{0}{1} \\
\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}\ \ldots \\
\frac{2}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{7}\ \ldots\ldots \\
\frac{3}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{5}\ \ldots\ldots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}$$

Liczby w każdym wierszu posiadają jeden i ten sam licznik, a różne mianowniki. Wypiszmy kolejno liczby wszystkich wierszy o licznikach

$$\ldots\ldots -n \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots n \ldots$$

nie zmieniając porządku liczb w każdym wierszu. Oczywista, w ten sposób uporządkujemy zbiór wszystkich liczb wymiernych. Przy takiem uporządkowaniu dla dwóch ułamków a i b o różnych licznikach przyjmujemy

$$„a < b“$$

jeżeli licznik ułamka a jest mniejszy od licznika ułamka b; zaś dla dwóch ułamków a_1 i b o tym samym liczniku przyjmujemy

$$„a < b“$$

jeżeli mianownik ułamka a jest mniejszy od mianownika ułamka b. Oczywista, wzory „$a < b$“ i „$b < c$“ pociągają za sobą wzór „$a < c$“. Przy takiem uoprządkowaniu zbiór $[W]$ nie będzie posiadał ani pierwszego, ani ostatniego elementu. Każdy element posiada bezpośredni następnik i poprzednik, z wyjątkiem elementów

$$\ldots \frac{-n}{1}, \ldots \frac{-3}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \ldots \frac{n}{1} \ldots,$$

które nie posiadają bezpośredniego poprzednika.

§ 5. **Zbiory gęste i ciągłe. Continuum linjowe.** Zbiór uporządkowany $[A]$ nazywamy g ę s t y m, jeżeli między dwoma jakiemikolwiek elementami zbioru $[A]$ istnieje element tego samego zbioru. Nietrudno spostrzec, że między dwoma jakiemikolwiek elementami zbioru gęstego istnieje nieskończenie wiele elementów tego zbioru. Zbiór $[N]$ wszystkich liczb naturalnych nie jest gęsty, natomiast zbiór $[W]$ wszystkich liczb wymiernych, uporządkowany według wielkości swoich elementów, jest gęsty.

Przypuśćmy, że zbiór $[M]$ taką jest częścią właściwą zbioru gęstego $[A]$, iż:

1. Każdy element a zbioru $[A]$, poprzedzający jeden z elementów zbioru $[M]$, należy również do zbioru $[M]$.
2. Zbiór $[M]$ nie posiada ostatniego elementu. Zbiór $[M]$ nazywamy wówczas o d c i n k i e m p o d s t a w o w y m zbioru $[A]$.

Przypuśćmy, że $[A]$ oznacza zbiór gęsty, a $[M]$ — odcinek podstawowy tego zbioru.

G r a n i c ą zbioru $[M]$ nazywać będziemy taki element zbioru $[A]$, iż każdy element zbioru $[A]$, poprzedzający g, należy do zbioru $[A]$.

Zbiór gęsty $[A]$, którego każdy odcinek podstawowy $[M]$ posiada granicę (w samym zbiorze), nazywamy c i ą g ł y m.

Weźmy zbiór $[W]$ wszystkich liczb wymiernych, uporządkowany według wielkości elementów; rozważmy dalej zbiór liczb wymiernych, których kwadrat jest mniejszy od 2. Oczywista, ten zbiór można uważać za odcinek podstawowy zbioru $[W]$. Zbiór ten nie posiada granicy, a zatem zbiór $[W]$ nie jest ciągły.

Weźmy teraz zbiór $[R]$ wszystkich liczb rzeczywistych, uporządkowany według wielkości elementów. Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, których kwadrat jest mniejszy od 2, będzie odcinkiem podstawowym zbioru $[R]$. Ten zbiór posiada granicę $\sqrt{2}$, należącą do zbioru $[R]$. Ponieważ to samo możemy powiedzieć o każdym odcinku podstawowym zbioru $[R]$, przeto zbiór $[R]$ jest ciągły.

Zauważmy jeszcze jedną bardzo ważną własność zbiorów ciągłych.

Przypuśćmy, że mamy zbiór uporządkowany $[P]$. Podzielmy ten zbiór na dwie części $[A]$ i $[B]$ tak, żeby każdy element zbioru $[A]$ był wcześniejszy od każdego elementu zbioru $[B]$. Taki podział nazywamy za przykładem Dedekinda p r z e k r o j e m (shnitt, coupure) i oznaczamy symbolem $[A \mid B]$.

Oczywista, możliwe są cztery przypadki następujące:

1. Zbiór $[A]$ posiada element ostatni, a zbiór $[B]$ posiada element pierwszy. W tym przypadku mówimy, że przekrój $[A \mid B]$ wyznacza s k o k.
2. Zbiór $[A]$ posiada element ostatni, a $[B]$ nie posiada elementu pierwszego.
3. Zbiór $[A]$ nie posiada elementu ostatniego, a $[B]$ posiada element pierwszy.
4. Zbiór $[A]$ nie posiada ostatniego, a zbiór $[B]$ nie posiada pierwszego elementu.

W ostatnim przypadku mówimy, że przekrój $[A \mid B]$ wyznacza l u k ę.

Łatwo spostrzec, że zbiór ciągły nie posiada ani skoków, ani luk. A więc każdy przekrój $[A \mid B]$ zbioru ciągłego będzie albo typu drugiego, albo typu trzeciego, czyli innemi słowy istnieje dla każdego przekroju w danym zbiorze element x taki, iż każdy element, poprzedzający x, należy do zbioru $[A]$, zaś każdy element, następujący po x, należy do zbioru $[B]$. Ostatnia własność jak łatwo spostrzec, charakteryzuje zbiór ciągły.

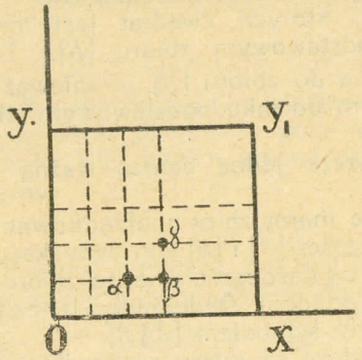
Jeżeli zbiór ciągły $[C]$ zawiera zbiór przeliczalny $[P]$ taki, iż między każdemi dwoma elementami $[C]$ znajduje się element zbioru $[P]$, wówczas mówimy, że zbiór $[C]$ stanowi c o n t i n u u m l i n j o w e.

Weźmy naprzykład zbiór $[R]$ wszystkiah liczb rzeczywistych, uporządkowany według wielkości jego elementów. Zbiór $[W]$ wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny i posiada element swój między dwiema jakiemikolwiek liczbami rzeczywistemi zbioru $[R]$. A więc zbiór $[R]$ stanowi continuum linjowe.

Przytoczmy przykład zbioru ciągłego, nie stanowiącego continuum linjowego.

Niech $[C]$ oznacza zbiór wszystkich punktów, leżących wewnątrz i na obwodzie danego kwadratu o boku równym jedności. Widzieliśmy w § 3, że zbiór $[C]$ jest nieprzeliczalny o mocy continuum. Uporządkujmy elementy zbioru $[C]$ w sposób następujący:

1. Z dwóch punktów kwadratu α i β (Rys. 26), znajdują-



Rys. 26.

cych się w różnych odległościach od boku $0y$, będziemy uważali za wcześniejszy punkt α, który jest bliższy $0y$.

2. Z dwóch punktów β i γ kwadratu, znajdujących się w jednakowej odległości od boku $0y$, uważamy za wcześniejszy punkt β, który jest biiższy $0x$. Oczywista, w myśl określenia porządku wzory

$$„\alpha < \beta“ \quad \text{i} \quad „\beta < \gamma“$$

pociągają za sobą zawsze wzór

$$„\alpha < \gamma“$$

Zbiór $[C]$ będzie ciągły, gdyż nie posiada ani skoków, ani luk. Nie trudno udowodnić, że ten zbiór nie stanowi continuum linjowego. W samej rzeczy, gdyby istniał zbiór $[P]$ taki, iż między każdemi dwoma punktami zbioru $[C]$ znajdowałby się punkt zbioru $[P]$, powinnibyśmy mieć punkt w zbiorze $[P]$ odpowiadający każdemu punktowi leżącemu na podstawie kwadratu. Ponieważ zbiór punktów na odcinku prostej jest, jak wiadomo, nieprzeliczalny, przeto zbiór $[C]$ nie stanowi continuum linjowego. Ponieważ zbiór wszystkich punktów kwadratu o boku równym jedności jest równoważny ze zbiorem $[Z]$ wszystkich liczb zespolonych

$$z = a + bi,$$

gdzie a i b są dowolne liczby rzeczywiste, spełniające nierówności

$$0 \leq a \leq 1, \quad 0 \leq b \leq 1,$$

przeto zbiór $[Z]$, będąc zbiorem ciągłym o mocy continuum, nie stanowi jednak continuum linjowego. Istnieją zatem zbiory ciągłe o mocy continuum, nie stanowiące continuum linjowego.

§ **6. Zbiory liczb rzeczywistych.** Zajmiemy się teraz szczegółowem badaniem zbiorów nieskończonych liczb rzeczywistych, czyli zbiorów punktów na prostej. Każdy z takich zbiorów $[E]$ jest oczywiście dzielnikiem zbioru $[R]$ wszystkich liczb rzeczywistych. Ponieważ każdej liczbie rzeczywistej odpowiada pewien punkt na osi liczbowej, przeto możemy zamiast wyrazu „liczba“ używać wyrazu „punkt“.

O t o c z e n i e m liczby (punktu) x zbioru $[E]$ nazywamy przedział liczbowy (§ 3), zawierający liczbę x. Otoczenie liczby x oznaczamy symbolem $[E_x]$.

Liczbę β nazywamy l i c z b ą (punktem) s k u p i e n i a (point limite, häufungspunkt) zbioru $[E]$, jeżeli w każdem otoczeniu $[E_B]$ jest nieskończenie wiele liczb danego zbioru $[E]$. Liczba β może należeć do tego zbioru, lub też nie. Rozróżniamy lewostronne i prawostronne liczby (punkty) skupienia.

L e w o s t r o n n ą liczbą skupienia nazywamy taką liczbę skupienia β, której każde otoczenie nie zawiera liczb mniejszych od β. P r a w o s t r o n n ą liczbą skupienia nazywamy taką liczbę skupienia β, której każde otoczenie, nie zawiera liczb większych od β. Liczbę, która jest zarówno lewostronną jak i prawostronną liczbą skupienia, nazywamy o b u s t r o n n ą liczbą skupienia.

Przykłady: 1. Zbiór

$$\left[0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots \frac{1}{2^n} \cdots\right]$$

posiada lewostronną liczbę skupienia

$$\beta = 0,$$

należąca do zbioru

2. Zbiór

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{6}{7}, \ldots\right]$$

posiada dwie liczby skupienia, jedną $\beta_1 = 0$ lewostronną i drugą $\beta_2 = 1$ prawostronną.

Liczby β_1 i β_2 nie należą do zbioru.

3. Zbiór

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{9}{16}, \frac{7}{16}, \ldots\right]$$

posiada jedną obustronną liczbę skupienia

$$\beta = \frac{1}{2}$$

należącą do zbioru.

4. Zbiór wszystkich liczb niewymiernych przedziału (a, b), gdzie a i b są jakiemikolwiek liczbami wymiernemi, posiada dwie liczby skupienia

$$\beta_1 = a \quad \beta_2 = b$$

nie należące do zbioru, przytem β_1 będzie lewostronną a β_2 — prawostronną liczbą skupienia.

Liczbę γ nazywamy za przykładem Lindöleva liczbą zgęszczenia (point de condensation, verdichtungspunkt) zbioru $[E]$, jeżeli wszystkie otoczenia tej liczby zawierają nieprzeliczalną mnogość liczb zbioru $[E]$.

Liczba α zbioru $[E]$, która nie jest ani liczbą skupinia, ani liczbą zgęszczenia, nazywamy liczbą odosobnioną (point isolé) zbioru $[E]$. Zbiór, którego wszystkie liczby są odosobnione, nazywamy przerywanym czyli dyskretnym. Przykładem zbioru dyskretnego jest zbiór liczb całkowitych.

Zbiór $[E]$, zawierający wszystkie swoje liczby skupienia, nazywamy zamkniętym (fermé, abgeschlossen).

Zbiór $[E]$, którego wszystkie punkty są punktami skupienia, nazywamy zbiorem w sobie gęstym (dense en lui même, insichdicht).

Zbiór $[E]$, zamknięty i w sobie gęsty, nazywamy doskonałym (parfait, perfekt). Każda z liczb zbioru $[W]$ wszystkich liczb wymiernych jest liczbą skupienia tego zbioru (oraz jego liczbą zgęszczenia). Oprócz tych liczb skupienia zbiór $[W]$ posiada jeszcze nieskończenie wiele liczb skupienia pomiędzy liczbami niewymiernemi, ponieważ każda liczba rzeczywista może być uważana za liczbę skupienia zbioru $[W]$. A więc zbiór $[W]$ jest w sobie gęsty, lecz nie zamknięty, a zatem nie jest

doskonały. Natomiast zbiór $[R]$ wszystkich liczb rzeczywistych jest zbiorem doskonałym.

Zbiór wszystkich liczb skupienia zbioru $[E]$ nazywamy pochodnym zbioru $[E]$ i oznaczamy przez $[E']$.

W tym przypadku, gdy zbiór $[E]$ jest zamknięty, wówczas zbiór $[E']$ stanowi część właściwą zbioru $[E]$. Jeżeli zbiór $[E']$ jest w sobie gęsty, to stanowi część właściwą swego zbioru pochodnego $[E']$. Natomiast w przypadku, gdy zbiór $[E]$ jest doskonały, wówczas zbiory $[E]$ i $[E']$ zawierają jedne i te same liczby.

Łatwo przekonać się, że zbiór $[E']$ jest zawsze zamknięty, to jest zawierającym wszystkie swoje liczby skupienia. Istotnie, każda z liczb skupienia M zbioru $[E']$ będzie również liczbą skupienia zbioru $[E]$, gdyż w każdym otoczeniu liczby M istnieje nieskończenie wiele liczb zbioru $[E']$, a zatem i liczb zbioru $[E]$. A więc zbiór $[E']$ jest zamknięty.

Zbiór $[E]$ nazywamy ograniczonym zgóry (borné supérieurement), jeżeli wszystkie liczby tego zbioru są mniejsze od pewnej liczby A.

Zbiór $[E]$ nazywamy ograniczonym zdołu (borné inférieurement) jeżeli wszystkie liczby tego zbioru są większe od pewnej liczby a.

Zbiór $[E]$ nazywamy zupełnie ograniczonym (borné), jeżeli on jest ograniczony zarówno zgóry jak i zdołu; każda z liczb x takiego zbioru spełnia nierówności

$$a < x < A.$$

Udowodnijmy następujące twierdzenie, podane przez Weierstrassa:

Twierdzenie Weierstrassa. Każdy zupełnie ograniczony zbiór nieskończony $[E]$ posiada przynajmniej jedną liczbę skupienia.

Dowód. Podzielmy wszystkie liczby rzeczywiste na dwie klasy $[A]$ i $[B]$, zaliczając do klasy $[A]$ każdą liczbę x, jeżeli istnieje nieskończenie wiele liczb zbioru $[E]$ większych od x; do klasy $[B]$ zaś każdą liczbę rzeczywistą, dla której ten warunek nie jest spełniony. Przy takim podziale wszystkie liczby rzeczywiste będą zaliczone albo do klasy $[A]$, albo do klasy $[B]$, przytem żadna z klas nie będzie pusta, gdyż według umowy zbiór $[E]$ jest zupełnie ograniczony. Dalej widzimy, że każda z liczb klasy $[A]$ jest mniejszą od każdej liczby klasy $[B]$. Stąd wnosimy, że wyżej wymieniony podział będzie stanowił przekrój $[A' | B]$ w układzie liczb rzeczywistych, określający pewną liczbę rzeczywistą β. Liczba β jest właśnie liczbą skupienia zbioru $[E]$. Istotnie, oznaczając przez ε dowolnie małą liczbę dodatnią, weźmy pod rozwagę otoczenie liczby β, zawierające wszystkie liczby rzeczywiste przedziału $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$. W tym otoczeniu jest nieskończenie wiele liczb zbioru $[E]$, należących do klasy $[A]$ i do klasy $[B]$. Ponieważ według umowy między dowolną liczbą kla-

sy $[A]$ i dowolną liczbą klasy $[B]$ znajduje się nieskończenie wiele liczb danego zbioru, przeto β jest liczbą skupienia zbioru $[F]$. A więc udowodniliśmy twierdzenie Weierstrassa.

Uwaga. Łatwo przekonać się, że jeżeli zbiór $[E]$ posiada więcej niż jedną liczbę skupienia, to liczba skupienia β, określona przez przekrój $[A \mid B]$, jest największą ze wszystkich liczb skupienia zbioru (la plus grande limite). W samej rzeczy, przypuśćmy, że istnieje liczba skupienia β_1 zbioru $[E]$ większa od β. Przyjmijmy za otoczenie liczby β_1 przedział (r, s), gdzie liczba r jest zawarta między liczbami β i β_1. Wówczas będziemy mieli nierówności

$$\beta < r < \beta_1 < s$$

Z tych nierówności wnosimy, że liczba r należy do klasy $[A]$, gdyż istnieje nieskończenie wiele liczb zbioru $[E]$ większych od r, należących do otoczenia (r, s) liczby β. Z drugiej strony r, jako liczba większa od β, będzie należała do klasy $[B]$. Doszliśmy więc do sprzeczności, dowodzącej fałszywości naszego założenia, że istnieje liczba skupienia zbioru $[E]$ większa od β. A więc β_1 jest największą ze wszystkich liczb skupienia zbioru $[E]$. W sposób całkiem analogiczny możemy udowodnić, że przekrój, przy którym do klasy $[A]$ zaliczona jest każda liczba rzeczywista x, jeżeli istnieje nieskończenie wiele liczb zbioru $[E]$ mniejszych od x, do klasy $[B]$ zaś każdą liczbę rzeczywistą, dla której ten warunek nie jest spełniony — określa liczbę skupienia zbioru $[E]$ najmniejszą ze wszystkich liczb skupienia tego zbioru.

Kresem górnym (borne supérieure, obere Grenze) zbioru $[E]$ nazywamy taką liczbę M, która spełnia warunki następujące:

1. W zbiorze $[E]$ nie istnieje liczba większa od $[M]$.

2. Jakkolwiek małą będzie liczba dodatnia ε, istnieje zawsze w zbiorze $[E]$ liczba większa od $M - \varepsilon$.

Kresem dolnym (borne inférieure, untere Grenze) zbioru $[E]$ nazywamy taką liczbę m, która spełnia warunki następujące:

1. W zbiorze $[E]$ nie istnieje liczba mniejsza od m.

2. Jakkolwiek mała będzie liczba dodatnia ε, zawsze istnieje w zbiorze $[E]$ liczba mniejsza od $m + \varepsilon$.

Liczby M i m mogą należeć do zbioru $[E]$ lub też nie.

W tym przypadku, gdy liczby M i m należą do zbioru $[E]$, będą one odpowiednio największą i najmniejszą liczbą zbioru $[E]$, W tym przypadku, gdy liczby M i m nie należą do zbioru $[E]$, wówczas liczba M będzie największą prawostronną, zaś m najmniejszą lewostronną liczbą skupienia zbioru $[E]$.

Udowodnijmy twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Zbiór ograniczony zgóry, posiada kres górny, a zbiór ograniczony zdołu, posiada kres dolny.

Dowód. Niech $[E]$ będzie zbiorem ograniczonym zgóry. Podzielmy wszystkie liczby rzeczywiste na dwie klasy $[A]$ i $[B]$, zaliczając do klasy $[A]$ wszystkie liczby rzeczywiste, które nie są

większe przynajmniej od jednej liczby zbioru $[E]$, do klasy $[B]$ zaś wszystkie liczby rzeczywiste, które są większe od wszystkich liczb zbioru $[E]$. Przy takim podziale 1) żadna z klas nie będzie pustą, 2) wszystkie liczby rzeczywiste będą zaliczone albo do klasy $[A]$, albo do klasy $[B]$, 3) każda liczba klasy $[A]$ jest mniejszą od każdej liczby klasy $[B]$. Z tego wnioskujemy, że wyżej wymieniony podział stanowi pewien przekrój $[A \mid B]$ w układzie liczb rzeczywistych. Ten przekrój określa pewną liczbę rzeczywistą M.

Udowodnijmy, że M jest kresem górnym zbioru $[E]$. W tym celu okażmy przedewszystkiem, że nie istnieje w zbiorze $[E]$ liczb większych od M. Załóżmy, że y jest właśnie taką liczbą. Oczywista, wszystkie liczby rzeczywiste między M a y będą należały do klasy $[A]$, z drugiej zaś strony te liczby jako większe od M powinny należeć do klasy $[B]$. Doszliśmy więc do sprzeczności dowodzącej fałszywości naszego założenia, że istnieje w zbiorze $[E]$ liczba większa od M. A zatem niema liczb w zbiorze $[E]$ większych od M. Pozostaje jeszcze do udowodnienia, że jakkolwiek małą będzie liczba dodatnia ε, istnieje w zbiorze $[E]$ liczba większa od $M - \varepsilon$, czyli innemi słowy dla każdej liczby $C < M$ można znaleźć w zbiorze $[E]$ liczbę większą od C.

Istotnie, w klasie $[A]$ są liczby p, które spełniają nierówności

$$C < p < M$$

Z drugiej zaś strony te liczby, jako należące do klasy $[A]$, według umowy nie są większe od jednej przynajmniej z liczb x zbioru $[E]$. Liczba x spełnia więc nierówności

$$C < x < M$$

to jest znajduje się zawsze między C i M. Z tego wszystkiego wynika, że liczba M jest kresem górnym zbioru $[E]$.

W analogiczny sposób można udowodnić, że zbiór, ograniczony zdołu posiada kres dolny m.

Oczywista, największa i najmniejsza z liczb skupienia każdego zbioru będzie odpowiednio kresem górnym i dolnym zbioru pochodnego.

Przykłady 1. Zbiór

$$\left[0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6} \cdots \frac{n-1}{n} \cdots\right]$$

posiada kres górny $M = 1$ i kres dolny $m = 0$.

Liczba m jest odosobniona i najmniejsza w zbiorze, natomiast M jest prawostronną liczbą skupienia, nie należącą do zbioru.

2. Zbiór

$$\left[\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4} \cdots \frac{n+1}{n} \cdots\right]$$

posiada kres górny $M = 2$, który jest liczbą odosobnioną i największą ze wszystkich liczb zbioru, oraz kres górny $m = 1$, który jest lewostronną liczbą skupienia, nie należącą do zbioru.

3. Zbiór wszystkich liczb niewymiernych przedziału (a, b), gdzie a i b są liczbami wymiernemi, posiada kres górny $M=b$ i kres dolny $m=a$. Liczby M i m są właśnie odpowiednio prawostronną i lewostronną liczbą skupienia.

§ 7. **Ciągi liczbowe.** Ciągiem liczbowym nazywamy zbiór nieskończony liczb rzeczywistych, które dają się ponumerować, to jest liczb następujących w pewnym porządku po sobie

$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_n \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Wskaźniki 1, 2, 3, ... n ..., tworzące zbiór $[N]$ liczb naturalnych, oznaczają kolejne numery miejsc ciągu. Liczby $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n \ldots$; tworzące ciąg nazywamy jego wyrazami. Każdy wyraz ciągu jest określony przez swoje położenie, czyli przez swój numer. Ciąg jest dany, gdy znamy prawo tworzenia jego wyrazów. Prawo tworzenia wyrazów ciągu możemy zadać w postaci wzoru, określającego zależność wyrazu u_n od jego numeru n Ten wzór nazywamy ogólnym wyrazem ciągu.

Przykłady 1. Zbiór

$$\left[\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4} \ldots\right]$$

będzie ciągiem liczbowym, o wyrazie ogólnym

$$u_n = \frac{n+1}{n}$$

2. Zbiór

$$\left[1, \frac{3}{4}, \frac{4}{8}, \frac{5}{16} \ldots\right]$$

będzie ciągiem liczbowym, o wyrazie ogólnym

$$u_n = \frac{n+1}{2^n}$$

3. Zbiór

$$\left[-2, 1-\frac{8}{9}, 1 \ldots\right]$$

będzie ciągiem liczbowym, o wyrazie ogólnym

$$u_n = \frac{(-1)^n 2^n}{n^2}$$

Uwaga. Ciąg liczbowy można określić, nie dając jego ogólnego wyrazu. Naprzykład ciąg, którego każdy wyraz jest najmniejszym dzielnikiem (większym od 1) swego numeru posiadający pierwszy wyraz $u_1 = 1$, będzie

$$[1, 2, 3, 2, 5, 2, 7, 2 \ldots.]$$

Ten ciąg składa się z liczb całkowitych dodatnich, przytem wyrazy ciągu o numerach nieparzystych są to kolejne liczby nieparzyste, wszystkie zaś wyrazy o numerach parzystych są równe 2.

Jest to właśnie przykład ciągu, którego wyrazy mogą powtarzać się nieskończenie wiele razy.

Ciąg liczbowy

$$u_1, u_2, u_3 \ldots u_n \ldots$$

nazywa się rosnącym, jeżeli każdy następujący wyraz tego ciągu, jest większy (lub przynajmniej nie mniejszy) od poprzedniego wyrazu, to jest jeżeli

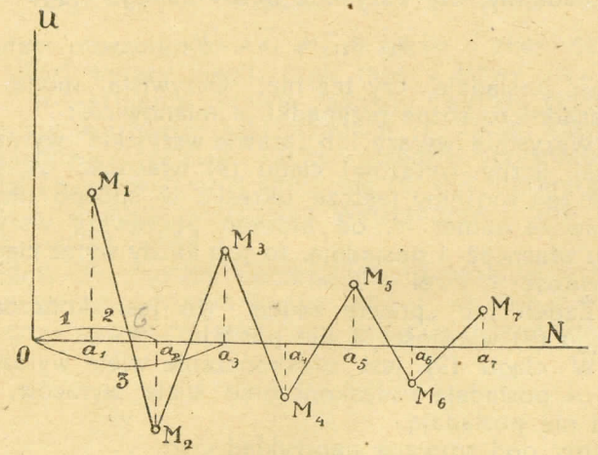
$$u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant u_4 \ldots u_{n-1} \leqslant u_n \ldots$$

Ciąg liczbowy nazywa się malejącym, jeżeli każdy następujący wyraz tego ciągu jest mniejszy (lub przynajmniej nie większy) od poprzedniego wyrazu, to jest jeżeli

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant u_4 \geqslant \ldots u_{n-1} \geqslant u_n \geqslant \ldots$$

Ciągi rosnące i malejące nazywamy ciągami monotonicznemi.

Ciąg liczbowy, którego wszystkie wyrazy są większe od pewnej liczby A, jest ograniczony zgóry. Ciąg, którego wszystkie wyrazy są mniejsze od pewnej liczby a, jest ograniczony zdołu. Ciąg liczbowy, ograniczony zarówno zgóry, jak i zdołu, jest zupełnie ograniczony. Ciąg liczbowy możemy zilustrować w sposób geometryczny. Weźmy dwie osie ON i OU wzajemnie prostopadłe (Rys. 27) i odłóżmy na osi ON kolejno odcinki



Rys. 27.

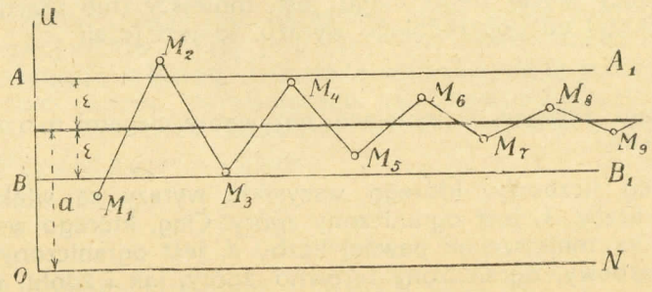
$Oa_1 = 1$; $Oa_2 = 2$; $Oa_3 = 3$; .... zaś na linjach prostopadłych do osi ON (równoległych do osi OU) wartości liczbowe wyrazów ciągu $a_1 M_1 = u_1$; $a_2 M_2 = u_2$; $a_3 M_2 = u_3$ .... (w górę od osi ON, gdy $u_n < 0$ i nadół od tej osi, gdy $u_n < 0$). Punkty $M_1, M_2, M_3 \ldots$ otrzymane w ten sposób, będą obrazami geometrycznemi wyra-

zów ciągu, a linja łamana $M_1 M_2 M_3 \ldots$ będzie wykresem ciągu.

W tym przypadku, gdy ciąg jest ograniczony zdołu lub zgóry, wówczas istnieje taka prosta równoległa do osi ON, która wykres ciągu nie przecina w żadnym punkcie.

Liczbą skupienia ciągu nazywamy taką liczbę a, której każde otoczenie $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Na rys. 27 przedstawiony jest wykres ciągu, posiadającego liczbę skupienia a.

W myśl twierdzenia Weierstrassa każdy ciąg ograniczony posiada przynajmniej jedną liczbę skupienia.



Rys. 28.

§ **8. Granica ciągu.** Niech A oznacza pewną własność jakiejś liczby. Zbadajmy, czy wszystkie liczby danego ciągu

$$u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots u_n \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

tę własność posiadają, czy też nie. Oczywista, mogą zachodzić tu trzy zasadniczo różne przypadki, a mianowicie:

1. Wszystkie wyrazy lub „prawie wszystkie“ wyrazy (oprócz skończonej liczby wyrazów) ciągu (9) własność A posiadają. Przypadek ten możemy jeszcze określić w sposób następujący: istnieje zawsze numer m, od którego począwszy wszystkie wyrazy ciągu własność A posiadają, to jest każdy wyraz ciągu u_n posiada własność A, jeżeli $n \geq m$.

2. Żaden lub „prawie żaden“ (to jest skończona liczba) wyraz ciągu (9) własności A nie posiada.

3. W ciągu (9) jest nieskończenie wiele wyrazów, które własność A posiadają i nieskończenie wiele wyrazów, które tej własności nie posiadają.

Weźmy pod rozwagę naprzykład ciąg

$$1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots n \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Dajmy na to, że A oznacza: „jest większe od 20“; wówczas zachodzi dla ciągu (10) pierwszy przypadek: jeżeli A oznacza „mniejsze od 20“, zajdzie przypadek drugi; jeżeli A oznacza „jest liczbą parzystą“, będziemy mieli do czynienia z przypadkiem trzecim.

Weźmy teraz pod rozwagę ciąg

$$u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots u_n \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

posiadający jedną i tylko jedną liczbę skupienia a.

Niech ε będzie dowolną, jakkolwiek małą, liczbą dodatnią. Rozpatrzmy przedział $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, który jest pewnem otoczeniem liczby a. Przyjmijmy za własność A należność do przedziału $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$. Oczywista, zachodzi tu przypadek pierwszy, gdyż w myśl określenia liczby skupienia, w każdem otoczeniu $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu, to jest „prawie wszystkie“ jego wyrazy.

Liczbę a, posiadającą tę własność, że w każdem jej otoczeniu $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ znajdują się „prawie wszystkie“ wyrazy ciągu (11), nazywamy jego granicą i oznaczamy symbolem

$$\lim_{n \to \infty} u_n = a \quad \text{lub} \quad u \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$$

Ciąg, posiadajacy pewną granicę, nazywamy zbieżnym. A więc każdy ciąg, posiadający jedną jedyną liczbę skupienia, jest zbieżnym, przytem liczba skupienia tego ciągu będzie jego granicą.

Łatwo można udowodnić, że, odwrotnie, każdy ciąg zbieżny jest ograniczony i posiada jedną liczbę skupienia, która jest właśnie granicą tego ciągu. W samej rzeczy, jeżeli

$$\lim_{n \to \infty} u_n = a$$

to w każdem otoczeniu $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ liczby a znajdują się „prawie wszystkie“ wyrazy ciągu, czyli innemi słowy poza przedziałem $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ niema „prawie żadnego“ wyrazu ciągu. Wobec tego możemy wyznaczyć taki przedział $(\alpha,\ \beta)$, w którym są zawarte wszystkie wyrazy ciągu (9), ten przedział oczywiście obejmuje przedział $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$. A więc ciąg (9) jest ograniczony i posiada zatem w myśl twierdzenia Weierstrassa liczbę skupienia, którą jest właśnie liczba a.

Załóżmy, że ciąg (9) oprócz liczby a posiada jeszcze drugą liczbę skupienia b, przytem będzie albo $a > b$ albo $a < b$. Wówczas możemy wyznaczyć takie trzy liczby k, l, m, które spełniają nierówności

$$k > a > l > b > m$$

gdy

$$a > b$$

lub nierówności

$$k < a < l < b < m$$

gdy

$$a < b$$

Ponieważ a jest według umowy granicą ciągu (9), przeto w przedziale $(k,\ l)$ znajdują się „prawie wszystkie“ wyrazy ciągu, natomiast „prawie żaden“ z wyrazów ciągu nie należy do prze-

działu (l, m). Z drugiej strony, z założenia, że b jest również liczbą skupienia ciągu (9), wynika, iż w przedziale (l, m) znajdują się „prawie wszystkie" wyrazy tego ciągu. Doszliśmy więc do sprzeczności, dowodzącej fałszywości naszego założenia, że ciąg (9) posiada dwie różne liczby skupienia a, b. A zatem ciąg zbieżny posiada jedną jedyną liczbę skupienia.

Z tego wnioskujemy, że ciąg zbieżny i ciąg ograniczony o jednej liczbie skupienia, są to pojęcia identyczne.

Granicę ciągu można określić jeszcze w sposób następujący: Liczba a jest granica ciągu (9), jeżeli, jakkolwiek małą będzie liczba dodatnia ε, „prawie wszystkie" wyrazy ciągu spełniają nierówności

$$-\varepsilon < u_n - a < \varepsilon$$

to jest

$$|u_n - a| < \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

czyli innemi słowy można dla każdej dodatniej liczby ε dobrać taką liczbę m całkowitą dodatnią, że dla każdej liczby $n \geq m$ będzie zachodziła nierówność (12). Geometrycznie można określić granicę ciągu w sposób następujący:

Liczba a jest granicą ciągu, jeżeli, jakkolwiek wąski będzie pas 2ε, między dwiema linjami AA_1 i BB_1 równoległemi do osi ON, przechodzącemi w odległości $a - \varepsilon$ i $a + \varepsilon$ od tej osi, zawsze można wyznaczyć taki kres K, od którego wprawo obrazy geometryczne wszystkich wyrazów ciągu są zawarte wewnątrz pasu AA, BB (Rys. 28).

Oczywista, taka definicja granicy ciągu wynika bezpośrednio z definicji granicy jako liczby skupienia.

Przykład. Ciąg

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots . \frac{n-1}{n} \ldots$$

jest zbieżny i posiada granicę $a = 1$. Obierzmy naprzykład

$$\varepsilon = \frac{3}{100}$$

wówczas dla każdej liczby całkowitej dodatniej $n \geq m$, gdzie

$$m > \frac{100}{3}$$

to jest dla

$$n = 34, 35, 36 \ldots .$$

będzie zachodziła nierówność

$$\left|1 - \frac{n-1}{n}\right| < \frac{3}{100}$$

Z definicji granicy, jako punktu skupienia ciągu liczbowego, wypływają bezpośrednio wnioski następujące:

1. Każdy ciąg zbieżny może posiadać jedną jedyną granicę.

2. Ciąg, utworzony przez dodanie do ciągu zbieżnego lub usunięcie z niego pewnej skończonej liczby wyrazów, będzie również zbieżnym i posiadał tę samą granicę a, co i ciąg dany.

3. Ciąg stanowiący część właściwą ciągu zbieżnego, jest również zbieżny.

4. Jeżeli ciągi

$$u_1, u_2, u_3 \ldots . u_n \ldots .$$
$$u'_1, u'_2, u'_3 \ldots . u'_n \ldots .$$

posiadają jedną i tę samą granicę a, to ciąg

$$u_1, u'_1, u_2, u'_2, u_3, u'_3 \ldots . u_n, u'_n \ldots .$$

posiada również granicę a.

5. Jeżeli ciąg

$$u_1, u_2, u_3 \ldots . u_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

posiada granicę a, ciąg zaś

$$v_1, v_2, v_3 \ldots . v_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

posiada granicę $b > a$, to „prawie wszystkie" wyrazy u_n ciągu są mniejsze od odpowiednich wyrazów v_n ciągu (13).

6. Jeżeli ciągi

$$u_1, u_2, u_3 \ldots . u_n \ldots .$$
$$v_1, v_2, v_3 \ldots . v_n \ldots .$$

posiadają jedną i tę samą granicę a, a nadto dla „wszystkich prawie" wyrazów tych ciągów zachodzą nierówności

$$u_n \leq w_n \leq v_n$$

to ciąg

$$w_1, w_2, w_3 \ldots . w_n \ldots .$$

będzie posiadał również granicę a.

Niech A oznacza jakąkolwiek liczbę dodatnią. Powiadamy, że ciąg

$$u_1, u_2, u_3 \ldots . u_n \ldots .$$

posiada granicę równą nieskończoności

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \infty$$

jeżeli „prawie wszystkie" wyrazy tego ciągu są większe od A, czyli innemi słowy, jeżeli można wyznaczyć taką liczbę całkowitą dodatnią m, iż

$$u_n > A$$

dla każdej liczby

$$n \geq m$$

Może się zdarzyć, że ciąg u_n nie posiada żadnej określonej granicy, jak naprzykład ciąg

$$a, -a, a, -a, a \ldots . (-1)^{n-1} a \ldots .$$

Oczywista, nie można wyznaczyć takiej liczby l, aby w otoczeniu $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ znajdowały się „prawie wszystkie" wyrazy ciągu. A zatem ten ciąg nie posiada granicy.

Ciąg, posiadający granicę nieskończoną lub wcale nie posiadający określonej granicy, nazywamy r o z b i e ż n y m.

Udowodnijmy twierdzenia następujące:

T w i e r d z e n i e I. Ciąg liczbowy

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

rosnący i ograniczony zgóry jest zbieżny i posiada granicę równą swemu kresowi górnemu.

D o w ó d. Istotnie w myśl twierdzenia § 6, ciąg (15) posiada kres górny M. Według definicji kresu górnego ciągu, jakkolwiek małą będzie liczba dodatnia ε, istnieje taki wyraz ciągu u_m, który spełnia nierówność

$$u_m > M - \varepsilon \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Ponieważ ciąg (15) jest rosnący, przeto „prawie wszystkie" wyrazy tego ciągu są większe od u_m, to jest dla każdej liczby całkowitej dodatniej $n \geq m$ będzie

$$u_n \geq u_m \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Z nierówności (16) i (17) wynika że

$$M - \varepsilon < u_n \leq M$$

A więc dla każdego $n \geq m$ będzie

$$M - u_n < \varepsilon$$

Stąd wnosimy, że

$$M = \lim_{n \to \infty} u_n$$

Twierdzenie zatem zachodzi w podanem brzmieniu.

W analogiczny sposób moglibyśmy udowodnić, że nieskończony malejący ciąg liczbowy, ograniczony zdołu, jest zbieżny i że granicą tego ciągu będzie jego kres dolny.

T w i e r d z e n i e II. Jeżeli a jest liczbą skupienia ciągu

$$u_1, u_2, u_3 \ldots . u_n \ldots \ldots \quad (18)$$

to można wyznaczyć taką część właściwą tego ciągu

$$u'_1, u'_2, u'_3 \ldots . u'_n \ldots .$$

którego granicą będzie liczba a

D o w ó d. Weźmy pod rozwagę ciąg liczbowy

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots . \omega_n \ldots ,$$

którego każdy wyraz ω_n spełnia nierówności

$$\omega_n < a < \omega_n + \frac{1}{n}, \ldots \ldots \quad (19)$$

gdzie a jest liczbą skupienia ciągu (18). Oznaczmy przedział

$$\left(\omega, \omega_n + \frac{1}{n}\right) \text{ przez } (\Omega_n)$$

Każdy z przedziałów (Ω_n) jest oczywiście pewnem otoczeniem liczby a. Ponieważ a jest według umowy liczbą skupienia ciągu (18), przeto w otoczeniu (Ω_n) znajdują się „prawie wszystkie" wyrazy tego ciągu.

Oznaczmy przez

$$u'_1, u'_2, u'_3 \ldots . u'_n \ldots .$$

wyrazy ciągu (18), które są odpowiednio pierwszymi w przedziałach $(\Omega_1), (\Omega_2), (\Omega_3) \ldots . (\Omega_n) \ldots .$

Ciąg

$$u'_1, u'_2, u'_3 \ldots . u'_n \ldots .$$

stanowi oczywiście część właściwą ciągu (18).

Udowodnijmy, że

$$\lim_{n \to \infty} u'_n = a$$

W tym celu rozważmy pewne otoczenie (k, l) liczby a Będziemy mieli

$$k < a < l$$

Obierzmy jeszcze dwie liczby k' i l', spełniające nierówności

$$k < k' < a < l' < l \ldots \ldots \quad (20)$$

Udowodnijmy, że w tym przypadku, gdy jednocześnie zachodzą nierówności

$$n > \frac{1}{k'-k} \text{ i } n > \frac{1}{l-l'}, \ldots \ldots \quad (21)$$

wówczas przedział (Ω_n) stanowi część właściwą przedziału (k, l), czyli innemi słowy „prawie wszystkie" przedziały (Ω_n) są zawarte w przedziale (k, l)

Załóżmy, że

$$\omega_n \leq k \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

dla jakiejkolwiek liczby n, spełniającej nierówności (21).

Wówczas będzie, ze względu na nierówność (21) i (20),

$$\omega_n + \frac{1}{n} < k + (k' - k),$$

czyli

$$\omega_n + \frac{1}{n} < k' < a$$

ostatnia zaś nierówność stanowi sprzeczność z nierównością (19).

Stąd wnosimy, że nasze założenie o istnieniu nierówności (22) jest fałszywe. A zatem zachodzi nierówność

$$\omega_n > k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22 \text{ bis}$$

dla każdej liczby całkowitej dodatniej n, spełniającej nierówności (21).

Załóżmy teraz, że

$$\omega_n + \frac{1}{n} \geq l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23$$

dla jakiejkolwiek liczby n, spełniającej nierówności (21).

Wtedy będzie zachodziła nierówność

$$\omega_n + (l - l') > l$$

czyli

$$\omega_n > l' > a$$

Te nierówności stanowią sprzeczność z nierównością (19).

A więc założenie nasze, że zachodzi nierówność (23) dla liczby n, spełniającej nierówności (21), jest fałszywe.

A zatem zachodzi nierówność

$$\omega_n + \frac{1}{n} < l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Z nierówności (22 bis), (24) wnosimy, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n, spełniającej nierówności (21), przedział

$$(\Omega_n) = \left(\omega_n,\ \omega_n + \frac{1}{n}\right)$$

jest zawarty wewnątrz przedziału (k, l), czyli innemi słowy „prawie wszystkie“ przedziały (Ω_n), a zatem i „prawie wszystkie“ wyrazy ciągu (18) zawarte są w przedziale (k, l), który jest otoczeniem liczby a.

Stąd wnioskujemy, że

$$\lim_{n \to \infty} u'_n = a$$

A na tem właśnie polega twierdzenie, o dowód którego nam chodziło.

Udowodniliśmy w § 2 tego rozdziału, że zbiór wszystkich liczb wymiernych $[W]$ jest przeliczalny, to jest daje się ustawić w ciąg liczbowy. Oczywista, każda liczba rzeczywista, (wymierna lub niewymierna) będzie liczbą skupienia tego ciągu. Z udowodnionego twierdzenia wnioskujemy więc, że każdej liczbie rzeczywistej a, odpowiada ciąg zbieżny liczb wymiernych, którego granicą jest liczba a.

Uwaga. Do tego samego wniosku można przyjść, posługując się twierdzeniem Cantora, udowodnionem w § 6 Rozdz. I.

Wiadomo; że podług teorji Cantora i Heinego, każdą liczbę rzeczywistą można wyznaczyć za pomocą dwóch ciągów liczbowych

$$u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots . u_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$
$$U_1,\ U_2,\ U_3 \ldots . U_n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

posiadających własności następujące:

1. Ciąg (25) jest rosnący, a ciąg (26) — malejący.
2. Każda liczba ciągu (25) jest mniejsza od każdej z liczb ciągu (26).
3. Dokażdej dodatniej liczby ε można dobrać taką liczbę całkowiią, dodatnią m, żeby zachodziła nierówność

$$|U_n - u_n| < \varepsilon$$

przy $n \geq m$.

W myśl twierdzenia Cantora, udowodnionego w § 6 Rozdz. I, istnieje zawsze taka liczba rzeczywista a, która będzie niemniejszą od każdej liczby ciągu (25), a niewiększą od każdej liczby ciągu (26), i naodwrót każdej liczbie rzeczywistej a odpowiadają dwa cięgi, posiadające trzy wyżej wymienione własności.

Utwórzmy teraz ciąg

$$u_1,\ U_1,\ u_2,\ U_2,\ u_3,\ U_3 \ldots . u_n,\ U_n \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Oczywista, ciąg (27) jest zbieżny i posiada granicę a, gdyż w każdem dowolnem otoczeniu liczby a, znajdują się „prawie wszystkie“ liczby ciągu (27). Stąd wnioskujemy, że każdą liczbę rzeczywistą a można uważać jako granicę pewnego ciągu.

Twierdzenie Cauchy'ego. Na to, żeby ciąg liczbowy

$$u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots . u_n \ldots . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

był zbieżny, potrzeba i wystarcza, aby do każdej liczby dodatniej ε można było dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówności

$$n' \geq m \text{ i } n'' \geq m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

pociągają za sobą nierówność

$$|u_{n'} - u_{n''}| < \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Dowód. Udowodnijmy najpierw, że wypowiedziany warunek jest konieczny, to jest, gdy ciąg (28) jest zbieżny, wówczas musi istnieć taka liczba m, przy której nierówności (29) pociągają za sobą nierówności (30).

Przypuśćmy, że ciąg (28) posiada granicę

$$\lim_{n \to \infty} u_n = a$$

W myśl definicji granicy, do każdej dowolnej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówności

$$n' \geq m \quad \text{i} \quad n'' \geq m$$

pociągają za sobą odpowiednio nierówności

$$|u_{n'} - a| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad |u_{n''} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Będziemy mieli

$$|u_{n'} - u_{n''}| \leq |u_{n'} - a| + |a - u_{n''}|$$

A zatem, ze względu na nierówności (31), otrzymujemy

$$|u_{n'} - u_{n''}| < \varepsilon,$$

co dowodzi pierwszej części twierdzenia.

Należy dla dowodu twierdzenia tylko okazać, że wypowiedziany warunak jest wystarczający, czyli innemi słowy, skoro istnieje taka liczba całkowita dodatnia m, przy której nierówności (29) pociągają za sobą nierówność (30), wówczas ciąg (28) będzie zbieżny. Niech ε oznacza jakąkolwiek liczbę dodatnią. Przypuśćmy, że m jest taka liczba całkowita dodatnia, przy której nierówności

$$n' \geq m \quad \text{i} \quad n'' \geq m$$

pociągają za sobą niarówność

$$|u_{n'} - u_{n''}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Oczywista, wszystkie wyrazy u_n, dla których $n > m$, to jest „prawie wszystkie“ wyrazy ciągu (28), będą się znajdowały w przedziale

$$\left(u_{n'} - \frac{\varepsilon}{2}, \; u_{n'} + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

czyli innemi słowy ciąg (28) będzie posiadał w tym przedziale określoną w zupełności liczbę skupienia a.

Na mocy twierdzenia str. 96, istnieje taki ciąg zbieżny (stanowiący część właściwą ciągu (28), którego granicą jest liczba a.

Stąd wynika, ze można wyznaczyć taką liczbę całkowitą dodatnią $\nu > m$, przy której będzie zachodziła nierówność

$$|u_\nu - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Będziemy mieli

$$|u_n - a| \leq |u_n - u_\nu| + |u_\nu - a|$$

A zatem, ze względu na nierówność (32) i (33), otrzymujemy

$$|u_n - a| < \varepsilon$$

dla każdej liczby $n \geq m$.

Stąd wnosimy, że ciąg (28) jest zbieżny.

Dowiedliśmy więc twierdzenia Cauchy'ego.

To twierdzenie możemy wysłowić jeszcze w sposób następujący:

Na to, żeby ciąg liczbowy (28) był zbieżny potrzeba i wystarcza, aby do każdej liczby dodatniej ε można było dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n \geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$|u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$$

dla każdej liczby całkowitej dodatniej p.

§ **9. Twierdzenia podstawowe o granicach.** Udowodnijmy teraz kilka twierdzeń podstawowych o granicach ciągów liczbowych, na których właśnie opiera się cała teorja granic.

I. Przypuśćmy, że mamy ciąg zbieżny

$$u_1, \; u_2, \; u_3, \; \ldots \; u_n \; \ldots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

którego granicą jest

$$\lim_{n \to \infty} u_n = u$$

Utwórzmy z wartości bezwzględnych wyrazów tego ciągu ciąg

$$|u_1|, \; |u_2|, \; |u_3|, \; \ldots \; |u_n| \; \ldots \ldots \ldots \quad (34')$$

W myśl twierdzeń, dobrze znanych z algebry, będziemy mieli

$$|u| - |u_n| \leq |u - u_n|$$
$$|u_n| - |u| \leq |u - u_n|$$

Z tych nierówności otrzymujemy

$$-|u - u_n| \leq |u_n| - |u| \leq |u - u_n|$$

Ponieważ u jest granica ciągu (34), przeto do każdej liczby dodatniej ε, można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n \geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$|u - u_n| < \varepsilon$$

Stąd wnosimy, że

$$\lim_{n \to \infty} |u_n| = |u| = \left|\lim_{n \to \infty} u_n\right|$$

A więc możemy wysłowić twierdzenie następujące:

T w i e r d z e n i e I. Granica ciągu, którego wyrazy są wartości bezwzględne wyrazów pewnego ciągu zbieżnego, równa się wartości bezwzględnej granicy tego ciągu.

II. Przypuśćmy, że są dane dwa ciągi zbieżne

$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_n \ldots \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

$$v_1, v_2, v_3, \ldots v_n \ldots \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

Utwórzmy ciąg

$$w_1, w_2, w_3, \ldots w_n \ldots, \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

którego ogólny wyraz

$$w_n = u_n + v_n$$

Ciąg (37) nazywamy s u m ą ciągów (35) i (36).

Przypuśćmy, że

$$\lim_{n \to \infty} u_n = u; \quad \lim_{n \to \infty} v_n = v$$

W myśl definicji granicy, do każdej dodatniej liczby ε można dobrać takie dwie liczby całkowite dodatnie m_1 i m_2, przy których nierówności

$$n \geq m_1 \text{ i } n \geq m_2$$

pociągają za sobą odpowiednio nierówności

$$|u_n - u| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad |v_n - v| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

Niech m oznacza liczbę największą z liczb m_1 i m_2; wówczas będą oczywiście zachodziły jednocześnie nierówności (38).

Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy

$$|u_n - u| + |v_n - v_n| < \varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

Biorąc zaś pod uwagę, że zachodzą nierówności

$$|(u+v) - (u_n + v_n)| \leq |u_n - u| + |v_n - v|,$$

otrzymujemy, ze względu na nierówność (39),

$$|(u+v) - (u_n + v_n)| < \varepsilon$$

czyli

$$|(u+v) - w_n| < \varepsilon. \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

Ostatnia nierówność będzie zachodziła przy wartościach na $n \geq m$

Z nierówności (40) wnosimy, że

$$\lim_{n \to \infty} w_n = u + v = \lim_{n \to \infty} u_n + \lim_{n \to \infty} v_n \quad \ldots \quad (41)$$

Uogólnienie tego wzoru na większą liczbę ciągów jest natychmiastowe.

Przypuśćmy, że mamy naprzykład trzy ciągi zbieżne u_n, v_n, w_n, i przytem

$$\lim_{n \to \infty} u_n = u; \quad \lim_{n \to \infty} v_n = v; \quad \lim_{n \to \infty} w_n = w$$

Wówczas na mocy wzoru (41) mamy

$$\lim_{n \to \infty} (u_n + v_n + w_n) = \lim_{n \to \infty} (u_n + v_n) + \lim_{n \to \infty} w_n = \lim_{n \to \infty} u_n + \lim_{n \to \infty} v_n + \lim_{n \to \infty} w_n.$$

Wogóle dla sumy ilukolwiek ciągów zbieżnych u_n, v_n, $w_n \ldots t_n$ będziemy mieli

$$\lim_{n \to \infty} (u_n + v_n + \cdots + t_n) = \lim_{n \to \infty} u_n + \lim_{n \to \infty} v_n + \lim_{n \to \infty} w_n + \cdots + \lim_{n \to \infty} t_n \quad (42)$$

Godnym uwagi jest, że wzór (42) nie ma miejsca w tym przypadku, gdy liczba ciągów dodajnych jest nieograniczenie wielka.

W analogiczny sposób moglibyśmy udowodnić, że różnica dwóch ciągów zbieżnych u_n i v_n, to jest ciąg, którego ogólny wyraz jest

$$r_n = u_n - v_n$$

będzie zbieżny i przytem

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \lim_{n \to \infty} u_n - \lim_{n \to \infty} v_n$$

Otrzymane wyniki możemy streścić w następującem twierdzeniu:

T w i e r d z e n i e II. G r a n i c a s u m y a l g e b r a i c z n e j i l u k o l w i e k c i ą g ó w z b i e ż n y c h r ó w n a s i ę s u m i e a l g e b r a i c z n e j g r a n i c w s z y s t k i c h p o s z c z e g ó l n y c h c i ą g ó w.

III. Przypuśćmy, że mamy dwa ciągi zbieżne

$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_n \ldots \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

$$v_1, v_2, v_3, \ldots v_n, \ldots \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

których granice są

$$\lim_{n \to \infty} u_n = u \quad \lim_{n \to \infty} v_n = v$$

Utwórzmy ciąg

$$w_1, w_2, w_3 \ldots w_n, \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

w którym

$$w_n = u_n \cdot v_n$$

Ciąg (45) nazywać będziemy i l o c z y n e m ciągów (43), (44).

Niech ε_1 oznacza jakąkolwiek liczbę dodatnią. Oczywista, istnieją takie dwie liczby całkowite dodatnie m_1 i m_2, przy których nierówności

$$n \geq m_1 \text{ i } n \geq m_2 \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

pociągają za sobą odpowiednio nierowności

$$|u - u_n| < \varepsilon_1 \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

$$|v - v_n| < \varepsilon_1 \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

Niech m oznacza liczbę największą z liczb m_1 i m_2. Oczywista, dla każdej liczby $n \geq m$ będą zachodziły jednocześnie nierówności (47) i (48).

Możemy napisać

$$u v - u_n v_n = (u - u_n) v - (v - v_n) u + (u_n - u)(v - v_n) \quad . \quad (49)$$

A zatem będzie zachodziła nierówność

$$|u v - u_n v_n| \leq |u - u_n| \cdot |v| + |v - v_n| \cdot |u| + |u_n - u| \cdot |v - v_n|,$$

czyli ze względu na nierówności (47) i (48),

$$|u v - u_n v_n| < \varepsilon_1 (|u| + |v|) + \varepsilon_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Oznaczając przez ε jakąkolwiek naprzód daną liczbę dodatnią, obieramy liczbę ε_1 tak, ażeby ona spełniała jednocześnie nierówności

$$\varepsilon_1 < 1; \quad \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{1 + |u| + |v|}$$

Wówczas, ze względu na nierówność (50), otrzymujemy

$$|u v - u_n v_n| < \varepsilon$$

dla każdej liczby $n \geq m$

Z ostatniej nierówności wnosimy, że

$$\lim_{n \to \infty} u_n v_n = u \cdot v = \lim_{n \to \infty} u_n \cdot \lim_{n \to \infty} v_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Uogólnienie tego wzoru na większą liczbę ciągów jest natychmiastowe.

Jeżeli są dane naprzykład trzy ciągi u_n, v_n, w_n, to na mocy wzoru (51) będziemy mieli

$$\lim_{n \to \infty} (u_n \cdot v_n \cdot w_n) = \lim_{u \to \infty} (u_n \cdot v_n) \cdot \lim_{n \to \infty} w_n = \lim_{n \to \infty} u_n \cdot \lim_{n \to \infty} v_n \cdot \lim_{n \to \infty} w_n$$

Wogóle dla iloczynu ilukolweik ciągów zbieżnych

$$u_n, \; v_n, \; w_n, \; \ldots \; t_n$$

będziemy mieli

$$\lim_{n \to \infty} (u_n \cdot v_n \cdot w_n \; \ldots \; t_n) = \lim_{n \to \infty} u_n \cdot \lim_{n \to \infty} v_n \cdot \lim_{n \to \infty} w_n \; \ldots \; \lim_{n \to \infty} t_n \quad (52)$$

A więc możemy wysłowić twierdzenie następujące:

Twierdzenie III. Granica iloczynu ilukolwiek ciągów zbieżnych równa się iloczynowi granic tych ciągów.

Godnym uwagi jest, że wypowiedziane twierdzenie nie ma miejsca w tym przypadku, gdy liczba ciągów, z których tworzymy iloczyn, będzie nieograniczenie wielką.

W przypadku szczególnym, gdy wszystkie ciągi są te same, to jest, gdy

$$u_n = v_n = w_n = \ldots = t_n,$$

wówczas iloczynem tych ciągów będzie ciąg

$$u_1^m, \; u_2^m, \; u_3^m \; \ldots \; u_n^m \; \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Ciąg (53) nazywać będziemy potęgowym. Oczywista, w myśl twierdzenia III, będziemy mieli

$$\lim u_n^m = (\lim u_n)^m$$

IV. Przypuśćmy, że mamy ciąg zbieżny o wyrazach

$$u_1, \; u_2, \; u_3 \; \ldots \; u_n \; \ldots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

z których żaden nie równa się zezu.

Niech u oznacza granicę tego ciągu ($u \gtrless 0$). Weźmy pod rozwagę ciąg

$$\frac{1}{u_1}, \; \frac{1}{u_2}, \; \frac{1}{u_3} \; \ldots \; \frac{1}{u_n} \; \ldots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

utworzony z odwrotności wyrazów ciągu (54).

Ponieważ ciąg (54) posiada granicę u, przeto do każdej liczby dodatniej ε_1 można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n \geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$|u_n - u| < \varepsilon_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Obieramy

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{2} |u| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Biorąc pod uwagę, że zachodzi nierówność

$$|u - u_n| \geq |u| - |u_n|,$$

będziemy mieli

$$|u_n| < \frac{1}{2} |u| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

dla każdej liczby $n \geq m$.

Możemy napisać

$$\left| \frac{1}{u} - \frac{1}{u_n} \right| = \frac{|u_n - u|}{|u| \cdot |u_n|} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Zestawiając razem nierówności (56), (58) i (59), otrzymujemy

$$\left| \frac{1}{u} - \frac{1}{u_n} \right| < \frac{2\varepsilon_1}{u^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

Ostatnia nierówność zachodzi oczywiście przy $n \geq m$.

Załóżmy

$$\varepsilon_1 = \frac{u^2}{2}\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

Wówczas otrzymujemy wobec (60)

$$\left|\frac{1}{u} - \frac{1}{u_n}\right| < \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

przy $n \geq m$.

Ostatnia nierówność wskazuje, że

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} u_n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

Przypuśćmy, że mamy dwa ciągi zbieżne

$$u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots u_n \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad (64)$$
$$v_1, v_2, v_3 \ldots\ldots v_n \ldots\ldots, \quad \ldots\ldots \quad (65)$$

posiadające granice

$$\lim_{n \to \infty} u_n = u$$
$$\lim_{n \to \infty} v_n = v$$

Załóżmy jeszcze, że wszystkie wyrazy ciągu (65), oraz jego granica są różne od zera.

Utwórzmy ciąg

$$\frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}, \frac{u_3}{v_3} \ldots\ldots \frac{u_n}{v_n} \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad (66)$$

którego ogólny wyraz jest $\frac{u_n}{v_n}$

Ciąg (66) nazywamy i l o r a z e m ciągów (64) i (65).

Oznaczając

$$\frac{1}{v_n} = w_n,$$

możemy ciąg (66) uważać jako iloczyn ciągów u_n i w_n

W myśl twierdzenia III i wzoru (63) będziemy mieli:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \to \infty} (u_n \cdot w_n) = \lim_{n \to \infty} u_n \cdot \lim_{n \to \infty} w_n = u \cdot \frac{1}{v} = \frac{u}{v} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} u_n}{\lim\limits_{n \to \infty} v_n} \quad (67)$$

A więc możemy wysłowić twierdzenie następujące:

T w i e r d z e n i e IV. G r a n i c a i l o r a z u d w ó c h c i ą g ó w z b i e ż n y c h r ó w n a s i ę i l o r a z o w i g r a n i c t y c h c i ą g ó w. Godnym uwagi jest, że wypowiedziane twierdzenie

nie ma miejsca w tym przypadku, gdy granica mianownika równa jest zeru.

Za działania podstawowe na ciągach uważamy działania następujące:

1) D o d a w a n i e a l g e b r a i c z n e, to jest działanie, za pomocą którego od ciągów u_n i v_n przechodzimy do ciągu $u_n \pm v_n$.

2) M n o ż e n i e, to jest działanie, za pomocą którego od ciągów u_n i v_n przechodzimy do ciągu $u_n \cdot v_n$.

3) I n w e r s j a, to jest działanie, za pomocą którego od ciągu u_n przechodzimy do ciągu $\frac{1}{u_n}$ (przypuszczamy że $u_n \neq 0$).

Przypuśćmy, że mamy kilka ciągów zbieżnych

$$u_n, v_n, w_n \ldots\ldots t_n \ldots,$$

których granice są odpowiednio liczby $u, v, w \ldots t$. Utwórzmy ciąg, którego ogólny wyraz będzie

$$r_n = R(u_n, v_n, w_n \ldots\ldots t_n),$$

gdzie symbolem R oznaczono rezultat działań podstawowych, wykonanych nad ciągami $u_n, v_n, w_n \ldots t_n$ w pewnym porządku. Łatwo spostrzec w myśl udowodnionych twierdzeń podstawowych, że

$$\lim_{n \to \infty} r_n = R(u, v, w \ldots\ldots t) \quad \ldots\ldots \quad (68)$$

Weźmy naprzykład pod rozwagę ciąg

$$s_n = \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \cdots + a_{p-1} n + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + b_2 n^{q-2} + \cdots + b_{q-1} n + b_q}, \quad (69)$$

którego wyraz ogólny jest stosunek wielomianów odpowiednio stopnia p i q. Możemy napisać

$$s_n = n^{p-q} \cdot \frac{a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{n} + a_2 \frac{1}{n^2} + \cdots + a_p \cdot \frac{1}{n_p}}{b_0 + b_1 \cdot \frac{1}{n} + b_2 \frac{1}{n^2} + \cdots + b_q \cdot \frac{1}{n_q}} = n^{p-q} \cdot R\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n_2} \cdots \frac{1}{n_p} \cdots \frac{1}{n_q}\right) \quad (70)$$

Ponieważ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} = \cdots = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} \cdots = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n_q} = 0,$$

przeto

$$\lim_{n \to \infty} R\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3} \cdots \frac{1}{n^p}\right) = \frac{a_0}{b_0}, \quad \ldots\ldots \quad (71)$$

a zatem

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a_0}{b_0} \lim_{n \to \infty} (n^{p-q}). \quad \ldots\ldots \quad (72)$$

Tu zajść mogą trzy różne przypadki, a mianowicie:

1) $p>q$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty}(n^{p-q})=\infty,$$

a zatem

$$\lim_{n\to\infty} s_p=\infty$$

2) $p<q$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty}(n^{p-q})=0,$$

a zatem

$$\lim_{n\to\infty} s_n=0$$

3) $p=q$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty}(n^{p-q})=1, \text{ a zatem}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{a_0}{b_0}$$

Przykłady: Znajdziemy granice ciągów:

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-2n^2-1}{4n^2+n-2}=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{3-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}}{4+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}}{4+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}\right)=\frac{3}{4}\cdot\lim_{n\to\infty} n=\infty$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-5n+3}{6n^3-2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{6-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{6-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}\right)=0\cdot\frac{1}{3}=0$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3+7n-1}{3n^3+4n^2-n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{7}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{3+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}\right)=\frac{2}{3}$$

Przypuśćmy, że ciąg

$$u^1,\ u^2,\ u^3,\ \ldots\ u_n\ \ldots.$$

jest zbieżny i posiada granicę

$$\lim_{n\to\infty} u_n=u$$

Weźmy pod rozwagę ciąg

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ \ldots.\ w_n\ \ldots.,\ \ldots\ldots \quad (73)$$

którego wyraz ogólny

$$w_n=\sqrt[k]{u_n},$$

gdzie k jest jakakolwiek liczba całkowita dodatnia. Łatwo udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} w_n=\sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} u_n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (74)$$

Wzór (74) możemy udowodnić bezpośrednio w tym przypadku, gdy $u=0$. W samej rzeczy, w myśl definicji granicy, do każdej dodatniej liczby ε_1, można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n\geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$|u_n|<\varepsilon_1$$

Obieramy $\varepsilon_1=\varepsilon^k$,

gdzie ε jest jakakolwiek naprzód dana liczba dodatnia.

Oczywista, przy $n\geq m$ będzie zachodziła nierówność

$$|u_n|<\varepsilon^k$$

czyli

$$|w|=|\sqrt[k]{u_n}|<\varepsilon,$$

a zatem

$$\lim_{n\to\infty} w_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{u_n}=0$$

Przypuśćmy teraz, że u nie równa się zezu. W takim razie do każdej liczby dodatniej ε_1 możemy dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m_1, przy której nierówność $n\geq m_1$ pociąga za sobą nierówność

$$|u_n-u|<\varepsilon_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

Ponieważ według założenia u nie jest równa zeru, przeto istnieje taka liczba całkowita dodatnia m, przy której nierówność $n\geq m_2$ pociąga za sobą nierówność

$$u_n>\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

gdzie α jest pewna liczba dodatnia, mniejsza od $|u|$. Możemy dalej napisać

$$|u_n-u|=|w_n-\sqrt[k]{u}|\cdot|w_n^{k-1}+w_n^{k-2}\cdot\sqrt[k]{u}+\cdots+\sqrt[k]{u^{k-1}}| \quad . \quad (77)$$

Oznaczając dla skrócenia

$$|w_n^{k-1} + w_n^{k-2} \cdot \sqrt[k]{u} + \cdots + \sqrt[k]{u^{k-1}}| = A,$$

będziemy mieli:

$$|w_n - \sqrt[k]{u}| = \frac{|u_n - u|}{A} \quad \ldots\ldots \quad (78)$$

Niech m oznacza liczbę największą z liczb m_1 i m_2. Oczywista, przy $n \geq m$ będą zachodziły jednocześnie nierówności (75) i (76), a zatem będziemy mieli

$$A > \sqrt[k]{\alpha^{k-1}} + \sqrt[k]{\alpha^{k-2}} \cdot \sqrt[k]{\alpha} + \cdots + \sqrt[k]{\alpha^{k-1}},$$

czyli

$$A > k\sqrt[k]{\alpha^{k-1}} \quad \ldots\ldots \quad (79)$$

Ze wzoru (78), w myśl nierówności (75) i (79), będziemy mieli przy $n \geq m$

$$|w_n - \sqrt[k]{u}| < \frac{\varepsilon_1}{k\sqrt[k]{\alpha^{k-1}}} \quad \ldots\ldots \quad (80)$$

Niech ε_1 oznacza jąkąkolwiek, naprzód daną, liczbę dodatnią Obieramy

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \cdot k\sqrt[k]{\alpha^{k-1}} \quad \ldots\ldots \quad (81)$$

W takim razie nierówność (80) daje przy $n \geq m$

$$|w_n - \sqrt[k]{u}| < \varepsilon$$

Stąd wnosimy, że

$$\lim_{n \to \infty} w_n = \lim_{n \to \infty} \sqrt[k]{u_n} = \sqrt[k]{n} = \sqrt[k]{\lim_{n \to \infty} u_n},$$

co właśnie mieliśmy do udowodnienia.

§ **10. O ciągach wykładniczych.** Niech

$$u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots\ u_n \ldots\ldots \quad (82)$$

oznacza pewien ciąg liczbowy o wyrazach wymiernych.

Utwórzmy ciąg

$$a^{u_1},\ a^{u_2},\ a^{u_3} \ldots\ a^{u_n} \ldots\ldots \quad (83)$$

gdzie a jest jakakolwiek liczba rzeczywista.

Ciąg (83) nazywać będziemy ciągiem wykładniczym.

Zajmiemy się obecnie badaniem ciągów wykładniczych. Rozważmy najpierw ciąg

$$a,\ a^2,\ a^3,\ a^4 \ldots\ a^n \ldots\ldots \quad (84)$$

Mogą tu zajść różne przypadki, które rozważmy oddzielnie.

Niech będzie $a > 1$. Wówczas ciąg (84) rośnie nieograniczenie. Udowodnijmy, że

$$\lim_{n \to \infty} a^n = \infty$$

Załóżmy w tym celu,

$$a = 1 + \alpha \quad \text{gdzie} \quad \alpha > 0$$

Będziemy mieli

$$a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha \ldots\ldots \quad (85)$$

Niech A oznacza jakąkolwiek liczbę dowolną. Jeżeli teraz weźmiemy

$$n > \frac{A-1}{\alpha},$$

wówczas będzie

$$a^n > A.$$

A więc widzimy, że począwszy od pewnego numeru n, wszystkie wyrazy ciągu (84) są większe od dowolnej liczby A, a zatem

$$\lim_{n \to \infty} a^n = \infty$$

Niech będzie

$$a = 1,$$

w takim razie wszystkie wyrazy ciągu są równe 1, a zatem

$$\lim_{n \to \infty} a^n = 1. \quad \ldots\ldots \quad (86)$$

Przypuśćmy, że liczba a spełnia nierówności

$$0 < a < 1$$

Oznaczmy

$$\frac{1}{a} = b \quad \text{gdzie} \quad b > 1$$

W takim razie będzie

$$\lim_{a \to \infty} a^n = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{b^n} = \frac{1}{\lim_{a \to \infty} b^n} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (87)$$

Przypuśćmy, że liczba a spełnia nierówności

$$-1 < a < 0$$

Załóżmy

$$b = -a$$

Oczywista

$$0 < b < 1$$

W takim razie będzie

$$\lim_{n\to\infty} a^n = (-1)^n \lim_{n\to\infty} b^n = 0 \quad \ldots\ldots \quad (88)$$

Niech będzie $a < -1$. Wprowadźmy liczbę $b = -a$, gdzie $b > 1$. W takim razie będzie

$$a^n = (-1)^n b^n$$

Gdy $n = 2p$, wówczas będzie

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$$

gdy zaś $n = 2p+1$, wówczas mamy

$$\lim_{n\to\infty} a^n = -\infty \quad \ldots\ldots \quad (89)$$

A więc ciąg (84) w tym przypadku granicy nie posiada. Jeżeli nakoniec $a = -1$, to przy $n = 2p$ będzie $a^n = 1$, zaś przy $n = 2p+1$, $a^n = -1$. A zatem ciąg (84) granicy nie posiada.

Weźmy teraz pod rozwagę ciąg wykładniczy

$$a^{\frac{1}{1}},\ a^{\frac{1}{2}},\ a^{\frac{1}{3}},\ a^{\frac{1}{4}} \ldots\ a^{\frac{1}{n}} \ldots\ldots \quad (90)$$

gdzie $a > 1$.

Ponieważ $a > 1$, przeto

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} > 1$$

Załóżmy

$$\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n, \quad \ldots\ldots \quad (91)$$

gdzie $\alpha = 0$.

Wiemy, że zachodzi nierówność

$$(1+\alpha_n)^n > 1 + n\alpha_n,$$

a zatem wobec (91)

$$a > 1 + n\alpha_n,$$

czyli

$$0 < \alpha_n < \frac{a-1}{n} \quad \ldots\ldots \quad (92)$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a-1}{n} = 0,$$

przeto

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \quad \ldots\ldots \quad (93)$$

A zatem wobec (91)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (92)$$

Uwaga. Ze wzoru (92) wynika, że do każdej liczby $\eta > 1$ można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n \geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$a^{\frac{1}{n}} < \eta \quad \ldots\ldots \quad (93)$$

Dla ciągu

$$a^{\frac{-1}{1}},\ a^{\frac{-1}{2}},\ a^{\frac{-1}{3}} \ldots\ a^{\frac{-1}{n}} \ldots\ldots \quad (94)$$

będziemy mieli

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{-1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}} = 1$$

Weźmy pod rozwagę ciąg wykładniczy

$$a^{u_1},\ a^{u_2},\ a^{u_3} \ldots\ a^{u_n} \ldots\ldots \quad (95)$$

i przypuśćmy, że granicą ciągu

$$u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots\ u_n \quad \ldots\ldots \quad (96)$$

jest zero.

Niech ε oznacza dowolną liczbę dodatnią. Oczywista, można wyznaczyć taką liczbę całkowitą dodatnią m, aby liczby

$$a^{\frac{1}{m}} \text{ i } a^{\frac{-1}{m}}$$

się znajdowały w przedziale $(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$.

Ponieważ „prawie wszystkie“ wyrazy ciągu (96) są zawarte w przedziale

$$\left(\frac{-1}{m},\ \frac{1}{m}\right),$$

przeto „prawie wszystkie“ wyrazy ciągu znajdują się w przedziale

$$\left(a^{\frac{-1}{m}},\ a^{\frac{1}{m}}\right),$$

a zatem i w przedziale $(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$.

Stąd wnosimy, że

$$\lim_{n\to\infty} a^{u_n} = 1.$$

Przypuśćmy, że jest dany ciąg zbieżny o wyrazach wymiernych.

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots\ u_n, \ldots\ldots \quad (97)$$

którego granica

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u$$

Weźmy pod rozwagę ciąg wykładniczy

$$a^{u_1},\ a^{u_2},\ a^{u_3}\ \ldots\ a^{u_n},\ \ldots\ \ldots \qquad (98)$$

gdzie a jest jakakolwiek liczba rzeczywista

Ponieważ ciąg (97) posiada granicę u, przeto można wyznaczyć takie dwie liczby rzeczywiste k i l $(l > k)$, że wszystkie wyrazy ciągu (97) będą się znajdowały wewnątrz przedziału

$$(k,\ l)$$

Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu (97) są liczby wymierne, przeto wszystkie wyrazy ciągu (98) będą się znajdowały wewnątrz przedziału

$$(\alpha^k,\ \alpha^l),$$

czyli innemi słowy ciąg (98) będzie zupełnie ograniczony, a zatem w myśl twierdzenia Wierstrassa ciąg ten będzie posiadał liczbę skupienia.

Nietrudno okazać, że ciąg (98) będzie posiadał tylko jedną liczbę skupienia, która będzie właśnie granicą tego ciągu. Aby tego dowieść, załóżmy, że ciąg (98) posiada dwie liczby skupienia α i β gdzie $\beta > \alpha$. W myśl twierdzenia II § 8, istnieją dwa ciągi zbieżne

$$a^{v_1},\ a^{v_2},\ a^{v_3}\ \ldots\ a^{v_n}\ \ldots\ \ldots \qquad (99)$$

$$a^{w_1},\ a^{w_2},\ a^{w_3}\ \ldots\ a^{w_n},\ \ldots\ \ldots \qquad (100)$$

stanowiące części właściwe ciągu (98) i posiadające granice

$$\lim_{n\to\infty} a^{w_n} = \alpha;\quad \lim_{n\to\infty} a^{w_n} = \beta.$$

Obierzmy cztery liczby wymierne ξ, ξ_1, η, η_1, spełniające nierówności

$$\xi < \alpha < \xi_1$$
$$\eta < \beta < \eta_1$$

Ponieważ α i β są odpowiednio liczbami skupienia ciągów (99) i (100), przeto „prawie wszystkie“ wyrazy ciągu (99) znajdują się wewnątrz przedziału (ξ, ξ_1), a „prawie wszystkie“ wyrazy ciągu (100) wewnątrz przedziału (η, η_1), czyli innemi słowy wewnątrz przedziału (ξ_1, η) niema „prawie żadnego“ wyrazu ani ciągu (99), ani ciągu (100). Stąd wnosimy, że „prawie wszystkie“ wyrazy ciągu

$$a^{w_n} - a^{v_n}$$

są większe od $\eta - \xi_1$, czyli innemi słowy, można wyznaczyć taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n \geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$a^{w_n} - a^{v_n} > \eta - \xi_1 \qquad (101)$$

Możemy napisać

$$a^{w_n} - a^{v_n} = a^{v_n}\left(a^{w_n - v_n} - 1\right) < a^{l}\left(a^{w_n - v_n} - 1\right)$$

Ponieważ ciągi

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots\ v_n\ \ldots$$
$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ \ldots\ w_n\ \ldots$$

stanowią części właściwe ciągu (97), przeto

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = u,$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty} (w_n - v_n) = 0.$$

Ostatni wzór wskazuje, że do każdej dodatniej liczby ε można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m_1, przy której nierówność $n \geq m_1$ pociąga za sobą nierówność

$$a^{w_n - v_n} < \varepsilon \qquad (102)$$

Załóżmy

$$\varepsilon < \frac{\eta - \xi_1}{a^l}$$

Wówczas wobec nierówności (102)

$$a^{w_n} - a^{v_n} < \eta - \xi_1 \qquad (103)$$

Zestawiając nierówności (101) i (103) przy wartości na n, spełniającej jednocześnie nierówności

$$n \geq m \text{ i } n \geq m_1$$

widzimy, że doszliśmy do sprzeczności, dowodzącej fałszywości założenia, że ciąg (98) posiada dwie różne liczby skupienia. Istnieje zatem jedna i tylko jedna liczba skupienia ciągu (98), która będzie właśnie jego granicą. Granicę tę możemy przyjąć za definicję wyrażeniu a^u, gdzie u jest jakakolwiek liczba rzeczywista (niewymierna lub wymierna).

Przyjmujemy więc

$$a^u = \lim_{n\to\infty} a^{u_n},$$

jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u$$

Mamy tu nową definicję wyrażenia a^u jako granicy pewnego ciągu (patrz § 7 Rozdz. I).

Tak naprzykład wyrażenie $a^{\sqrt{3}}$ możemy uważać jako granicę ciągu wykładniczego

$$a^1,\ a^{1,7},\ a^{1,73},\ a^{1,732},\ a^{1,73205},\ a^{1,7330508}\ \ldots$$

lub ciągu

$$a^2,\ a^{1,8},\ a^{1,74},\ a^{1,733},\ a^{1,7321},\ a^{1,73206}\ \ldots$$

gdyż ciągi przybliżonych wartości na $\sqrt{3}$,

1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,73205; 1,7320508 ...
2; 1,8; 1,74; 1,733; 1,7321; 1,73206 .....

posiadają granicę $\sqrt{3}$ *).

Uwaga. Godnem jest uwagi, że wyraźnie a^u nie zależy od ciągu u_u, skoro $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. Istotnie przypuśćmy, że dwa ciągi u_n i u'_n posiadają jedną i tę samą granicę u. Wówczas ciąg

$$u_1,\ u',\ u_2,\ u'_2\ \ldots\ u_n,\ u'_n\ \ldots$$

będzie posiadał również granicę u.

A zatem, na mocy udowodnionego twierdzenia, ciąg wykładniczy

$$a^{u_1},\ a^{u'_1},\ a^{u_2},\ a^{u'_2},\ \ldots\ a^{u_n},\ a^{u'_n}\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (104)$$

Ponieważ ciąg

$$a^{u_1},\ a^{u_2},\ a^{u_3}\ \ldots\ a^{u_u}\ \ldots$$

stanowi część właściwą ciągu (104), przeto

$$\lim_{n\to\infty} a^{u'_n} = \lim_{n\to\infty} a^{u_n} = a^u$$

Opierając się na definicji wyrażenia a^u, jako granicy ciągu, możemy natychmiast rozciągnąć własności potęgi o wykładnikach wymiernych na potęgi o wykładnikach rzeczywistych, a mianowicie:

I. Jeżeli $a > 1$ a nadto $u > 0$, to

$$a^u > 1$$

Aby tego dowieść, oznaczmy przez k dowolną liczbę wymierną, spełniającą nierówność

$$0 < k < u$$

Jeżeli

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n$$

*) Ponieważ każdą liczbę można uważac jako granicę ciągów Cantora (§ 6 Rozdz. I).

gdzie u_u są liczby wymierne, to „prawie wszystkie“ wyrazy ciągu u_n będą się znajdowały wewnątrz przedziału (k, u) i spełniały nierówności

$$u_n > k$$

A zatem „prawie wszystkie“ wyrazy ciągu

$$a^{u_1},\ a^{u_2},\ a^{u_3}\ \ldots\ a^{u_n}\ \ldots$$

są większe od a^k.

Stąd wnosimy, że

$$a^u = \lim_{n\to\infty} a^{u_n} > 1,$$

co właśnie mieliśmy do udowodnienia.

II. Jeżeli u i v są jakiekolwiek liczby rzeczywiste, to zachodzi wzór

$$a^u \cdot a^v = a^{u+v}$$

Istotnie, w myśl definicji potęgi o wykładniku rzeczywistym

$$a^u = \lim_{n\to\infty} a^{u_n}$$

$$a^v = \lim_{n\to\infty} a^{v_n},$$

gdzie u_n i v_n są dwa ciągi, posiadające odpowiednio granice u i v

Będziemy mieli

$$a^u \cdot a^v = \lim_{n\to\infty} a^{u_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{v_n} = \lim_{n\to\infty} a^{u_n+v_n}$$

A zatem

$$a^u \cdot a^v = a^{\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n)} = a^{u+v}, \quad \ldots\ (106)$$

co właśnie mieliśmy do udowodnienia.

III. Jeżeli u i v są jakiekolwiek liczby rzeczywiste, a nadto

$$u < v,$$

wówczas

$$a^u < a^v$$

Istotnie, oznaczając

$$v = u + w, \quad \text{gdzie } w > 0,$$

otrzymujemy na mocy wzoru (106)

$$a^v = a^{u+w} = a^u \cdot a^w$$

Ponieważ $w > 0$, przeto na mocy wzoru (105) będziemy mieli

$$a^w > 1$$

a zatem

$$a^v > a^u , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

co właśnie mieliśmy do udowodnienia.

IV. Jeżeli u jest jakakolwiek liczba rzeczywista, to zachodzi wzór

$$(ab)^u = a^u \cdot b^u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

Istotnie, w myśl definicji potęgi o wykładniku rzeczywistym, mamy

$$(ab)^u = \lim_{n \to \infty} (ab)^{u_n} = \lim_{n \to \infty} a^{u_n} \cdot \lim_{n \to \infty} b^{u_n} = a^u \cdot b^u$$

V. Jeżeli u i v są dwie jakiekolwiek liczby rzeczywiste, to zachodzi wzór

$$(a^u)^v = a^{u \cdot v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

Rozważmy dwa różne przypadki

1. v jest liczba wymierna. Oznaczając $v = \frac{p}{q}$, będziemy przypuszczali, że p jest liczba dodatnia, to jest, jeżeli $v > 0$, wówczas $q > 0$, jeżeli zaś $v > 0$, to $q < 0$.

Dajmy na to, że u jest granica pewnego ciągu o wyrazach wymiernych u_n, wówczas w myśl definicji potęgi o wykładniku rzeczywistym

$$a^u = \lim_{u \to \infty} a^{u_n}$$

Możemy napisać

$$\lim_{n \to \infty} [(a^{u_n})^v] = \lim_{n \to \infty} (a^{u_n \cdot v}) = a^{uv} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

Z drugiej zaś strony, na mocy twierdzenia, udowodnionego na str. 109, będziemy mieli

$$\lim_{n \to \infty} \left[(a^{u_n})^v \right] = \lim_{n \to \infty} (a^{u_n})^{\frac{p}{q}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[q]{(a^{u_n})^p} =$$

$$= \sqrt[q]{(\lim_{n \to \infty} a^{u_n})^p} = \sqrt[q]{(a^u)^p} = (a^u)^{\frac{p}{q}} = (a^u)^v \quad . \quad . \quad (111)$$

Zestawiając rezultaty, otrzymane we wzorach (110) i (111), będziemy mieli

$$(a^u)^v = a^{uv}$$

2. v jest liczba niewymierna. Dajmy na to, że v jest granica pewnego ciągu o wyrazach wymiernych v_n

W takim razie możemy napisać

$$(a^u)^v = \lim_{n \to \infty} [(a^u)^{v_n}]$$

Ponieważ v_n jest liczba wymierna, przeto w myśl wzoru (109), uzasadnionego dla liczby wymiernej będziemy mieli

$$(a^u)^v = \lim (a^{uv_n}) = a^{\lim_{n \to \infty} u \cdot v_n} = a^{uv}$$

A więc uzasadniliśmy wzór (109) w zupełności.

Niech

$$u_1, u_2, u_3, \ldots . u_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

oznacza ciąg zbieżny o wyrazach rzeczywistych.

Przypuśćmy, że a jest granica tego ciągu.

Utwórzmy ciąg wykładniczy

$$a^{u_1}, a^{u_2}, a^{u_3}, \ldots . a^{u_n} \ldots . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (113)$$

Łatwo można udowodnić, że ciąg (113) jest zbieżny i że

$$\lim_{n \to \infty} a^{u_n} = a^u$$

Niech

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots . \omega_n \ldots .$$

oznacza ciąg o wyrazach wymiernych, spełniających nierówności

$$\omega_n < u_n < \omega_n + \frac{1}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

Wówczas będą zachodziły dla każdej liczby n nierówności

$$0 < u_n - \omega_n < \frac{1}{n}$$

$$0 < \left(\omega_n + \frac{1}{n}\right) - u_n < \frac{1}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

Ponieważ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

przeto ze względu na nierówności (115)

$$\lim_{n \to \infty} (u_n - \omega_n) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(\omega_n + \frac{1}{n}\right) - u_n \right] = 0$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = \lim_{n\to\infty} u_n = u$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\omega_n + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} u_n = u$$

Stąd wnosimy, że

$$\lim_{n\to\infty} a^{\omega_n} = a^u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (116)$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{\omega_n + \frac{1}{n}} = a^u .$$

Z drugiej zaś strony, ze względu na nierówności (114), mamy

$$a^{\omega_n} < a^{u_n} < a^{\omega_n + \frac{1}{n}}$$

A zatem na zasadzie wzorów (116)

$$\lim_{n\to\infty} a^{u_n} = a^u,$$

co właśnie mieliśmy do udowodnienia.

§ **17. Ciąg logarytmowy.** Musimy tu uzasadnić niektóre twierdzenia z algebry, a przedewszystkiem udowodnić ściśle istnienie logarytmów.

W tym celu uzasadnimy twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Jeżeli M jest jakakolwiek liczba dodatnia, a zaś jakakolwiek liczba wymierna, większa lub mniejsza od 1, to istnieje jedna i tylko jedna liczba x, która czyni zadość równaniu.

$$a^x = M \quad \ldots\ldots\ldots \quad (117)$$

Dowód. Rozważmy najpierw ten przypadek, gdy $a > 1$. Podzielmy zbiór $[R]$ wszystkich liczb rzeczywistych na dwie klasy $[A]$ i $[B]$, zaliczając do klasy $[A]$ wszystkie liczby α, czyniące zadość nierówności

$$a^\alpha \leq M, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (118)$$

a do klasy $[B]$ wszystkie liczby α, czyniące zadość nierówności

$$a^\alpha > M \quad \ldots\ldots\ldots \quad (119)$$

Łatwo spostrzec, że ten podział stanowi pewien przekrój $[A \mid B]$ w zbiorze $[R]$.

Istotnie: 1) każda liczba rzeczywista α będzie należała albo do klasy $[A]$, albo do klasy $[B]$, gdyż czyni zadość albo nierówności (118), albo nierówności (119) 2) klasy $[A]$ i $[B]$ nie

i $[B]$ nie są puste, 3) każda liczba p klasy $[A]$ jest mniejsza od każdej z liczb q klasy $[B]$, gdyż nierówność

$$a^p \leq M \leq a^q$$

przy $a > 1$ pociąga za sobą nierówność

$$p < q$$

A więc podział zbioru wszystkich liczb rzeczywistych na klasy $[A]$ i $[B]$ stanowi pewien przekrój $[A \mid B]$.

Przekrój $[A \mid B]$ wyznacza pewną liczbę rzeczywistą x. Oczywista, mogą tu zajść dwa i tylko dwa różne przypadki, a mianowicie: 1) x jest największa liczba w klasie $[A]$, 2) jest najmniejsza liczba w klasie $[B]$.

Łatwo spostrzec, że w klasie $[B]$ niema liczby największej. Przypuśćmy, że to nie jest prawdą, to jest, że w klasie $[B]$ istnieje liczba q_0, najmniejsza ze wszystkich liczb tej klasy.

Wówczas będziemy mieli

$$\frac{a^{q_0}}{M} < 1.$$

Zakładając

$$\eta = \frac{a^{q_0}}{M},$$

powiadam, w myśl uwagi, umieszczonej na str. 113, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia m, przy której będzie zachodziła nierówność

$$a^{\frac{1}{m}} < \frac{a^{q_0}}{M},$$

czyli nierówność

$$M < a^{q_0 - \frac{1}{m}}$$

Stąd wnosimy, że liczba

$$q = q_0 - \frac{1}{m} < q_0$$

należy do klasy $[B]$. Z drugiej zaś strony liczba q, nie może należeć do klasy $[B]$, gdyż według założenia najmniejsza ze wszystkich liczb tej klasy jest właśnie liczba q_0. A więc doszliśmy do sprzeczności, dowodzącej fałszywości naszego założenia, że w klasie $[B]$ istnieje liczba najmniejsza. A zatem w klasie $[B]$ niema takiej liczby.

Stąd wnosimy, że x jest liczba największa ze wszystkich liczb klasy $[A]$, czyli innemi słowy albo liczba x jest największa ze wszystkich liczb rzeczywistych, spełniających nierówności

$$a^x < M, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (120)$$

albo liczba x jest największa z liczb rzeczywistych, czyniących zadość równaniu

$$a^x = M$$

Łatwo można udowodnić, że w klasie niema największej liczby, spełniającej nierówności (120). Aby tego dowieść, przypuśćmy, że to nie jest prawda, to jest, że p_0 jest właśnie taka liczba. Zakładając

$$\eta = \frac{M}{a^{p_0}} > 1,$$

powiadam, że w myśl uwagi, umieszczonej na str. 113, istnieje taka liczba całkowita dodatnia m, iż będzie zachodziła nierówność

$$a^{\frac{1}{m}} > \frac{M}{a^{p_0}},$$

czyli nierówność

$$a^{p_0+\frac{1}{m}} < M$$

Stąd wnosimy, że liczba

$$p = p_0 + \frac{1}{m} > p_0$$

należy do klasy $[A]$. Z drugiej zaś strony liczba p nie może należeć do klasy $[A]$, gdyż największa z liczb, należących do tej klasy jest właśnie liczba p_0. A więc doszliśmy znowu do sprzeczności, dowodzącej fałszywości naszego przypuszczenia, że istnieje w klasie $[A]$ największa liczba, spełniająca nierówność (120). A zatem x taką liczbą być nie może. Stąd wnosimy, że jedynem prawdziwem przypuszczeniem może być tylko przypuszczenie, że x jest liczbą, czyniącą zadość równaniu (117). Pozostaje jeszcze do okasania, że x jest jedną jedyną liczbą odpowiadającą temu warunkowi. Przypuśćmy, wbrew twierdzeniu, że istnieją dwie różne liczby x i x_1, czyniące zadość równaniu (117). W takim razie musimy mieć

$$a^x = M = a^{x_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

Z drugiej strony równość (121) pociąga za sobą równość

$$x = x_1,$$

gdyż nierówności

$$x > x_1, \quad x < x_1$$

pociągają za sobą odpowiednio nierówności

$$a^x > a^{x_1} \text{ i } a^x < a^{x_1}$$

Stąd wnosimy, że przypuszczenie, iż liczby x i x_1 są różne jest fałszywe. A zatem istnieje tylko jedna jedyna liczba, która czyni zadość równaniu (117).

Rozważmy teraz przypadek, gdy

$$a < 1$$

Oznaczmy

$$\frac{1}{a} = b, \text{ gdzie } b > 1$$

Udowodniliśmy, że istnieje jedna i tylko jedna liczba y, która czyni zadość równaniu

$$b^y = a^{-y} = M$$

Stąd wnioskujemy, że istnieje jedna i tylko jedna liczba $x = -y$, która przy $a < 1$ czyni zadość równaniu (117). A więc udowodniliśmy nasze twierdzenie w zupełności.

Liczba x nazywa się **logarytmem** liczby M, przy podstawie równej a i oznacza się zwykle przez

$$\mathrm{Log}_a\, x$$

A więc dowiedliśmy twierdzenia, że dla każdej liczby dodatniej M istnieje jedna i tylko jedna liczba rzeczywista x, która jest logarytmem liczby M, przy podstawie większej lub mniejszej od jedności. Posługując się podaną definicją logarytmu, oraz wzorami, udowodnionymi w § 10, można uzasadnić z łatwością twierdzenia następujące:

I. Jeżeli α i β są dwie jakiekolwiek liczby rzeczywiste dodatnie, z których $\alpha > \beta$, wówczas będzie

$$\mathrm{Log}_a\, \alpha > \mathrm{Log}_a\, \beta, \quad \text{gdy } a > 1$$

$$\mathrm{Log}_a\, \alpha < \mathrm{Log}_a\, \beta, \quad \text{gdy } a < 1$$

II. Jeżeli α i β są dwie jakiekolwiek liczby rzeczywiste dodatnie, to zachodzi wzór

$$\mathrm{Log}_a\, (\alpha \cdot \beta) = \mathrm{Log}_a\, \alpha + \mathrm{Log}_a\, \beta$$

III. Jeżeli α i β są jakiekolwiek liczby rzeczywiste, z których $\alpha > 0$, to zachodzi wzór

$$\mathrm{Log}_a\, (\alpha)^\beta = \beta\, \mathrm{Log}_a\, \alpha$$

Dowód tych twierdzeń pozostawiamy czytelnikowi. Przypuśćmy, że mamy ciąg zbieżny o wyrazach dodatnich

$$u_1, u_2, u_3, \ldots . u_n \ldots ., \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

którego granicą jest liczba u.

Utwórzmy ciąg

$$\mathrm{Log}_a\, u_1, \mathrm{Log}_a\, u_2, \mathrm{Log}_a\, u_3, \ldots . \mathrm{Log}_a\, u_n \ldots . \quad . \quad (123)$$

Ciąg ten nazywamy **logarytmowym**.

Ponieważ ciąg (122) jest zbieżny, przeto można wyznaczyć takie dwie liczby k i l, spełniające nierówności

$$k < u < l,$$

ażeby wszystkie wyrazy ciągu (122) znajdowały się wewnątrz przedziału

$$(k, l).$$

Oczywista, wszystkie wyrazy ciągu (123) będą się znajdowały wewnątrz przedziału

$$(\mathrm{Log}_a\, k,\ \mathrm{Log}_a\, l).$$

Stąd wnosimy, że ciąg (123) jest ograniczony, a zatem w myśl twierdzenia Weierstrassa będzie posiadał liczbę skupienia. Udowodnimy teraz, że ciąg ten będzie posiadał jedną jedyną liczbę skupienia. Przypuśćmy, że to nie jest prawdą, to jest, że ciąg (123) posiada dwie różne liczby skupienia α i β.

Niech

$$\mathrm{Log}_a\, v_1,\ \mathrm{Log}_a\, v_2, \ldots \mathrm{Log}_a\, v_n, \ldots$$

$$\mathrm{Log}_a\, w_1,\ \mathrm{Log}_a\, w_2, \ldots \mathrm{Log}_a\, w_n, \ldots$$

oznaczają ciągi, stanowiące części właściwe ciągu (123), których granice są odpowiednio liczby α i β.

Przypuśćmy, że $a > 1$; wówczas będziemy mieli

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} a^{\mathrm{Log}_a v_n} = a^{\lim_{n\to\infty} \mathrm{Log}_a v_n} = a^{\alpha}$$

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} a^{\mathrm{Log}_a w_n} = a^{\lim_{n\to\infty} \mathrm{Log}_a w_n} = a^{\beta}$$

Ponieważ ciągi v_n i w_n stanowią części właściwe ciągu (122), przeto

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} u_n = u$$

A zatem

$$a^{\alpha} = a^{\beta} = u$$

Skąd

$$\alpha = \beta = \mathrm{Log}_a\, u$$

A więc przypuszczenie, że liczby α i β za różne było fałszywe. Istnieje zatem jedna i tylko jedna liczba skupienia ciągu (123)

$$\alpha = \mathrm{Log}_a\, u,$$

która jest właśnie granicą tego ciągu.

A więc

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Log}_a\, u_n = \mathrm{Log}_a\, u = \mathrm{Log}_a \lim_{n\to\infty} u_n \quad . \quad . \quad . \quad (124)$$

Przypuśćmy teraz, że $a > 1$. W takim razie $\frac{1}{a} > 1$

W myśl określenia logarytmu będziemy mieli

$$u_n = a^{\mathrm{Log}_a u_n}$$

$$u_n = \left(\frac{1}{a}\right)^{\mathrm{Log}_{\left(\frac{1}{a}\right)} u_n} = a^{-\mathrm{Log}_{\left(\frac{1}{a}\right)} u_n}$$

Z tych wzorów wnosimy, że

$$\mathrm{Log}_a\, u_n = -\mathrm{Log}_{\left(\frac{1}{a}\right)} u_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

Ponieważ $\frac{1}{a} > 1$, przeto

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Log}_{\left(\frac{1}{a}\right)} u_n = \mathrm{Log}_{\left(\frac{1}{a}\right)} [\lim_{n\to\infty} u_n] = \mathrm{Log}_{\left(\frac{1}{a}\right)} u = -\mathrm{Log}_a\, u$$

A zatem, ze względu na (124)

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Log}_a\, u = \mathrm{Log}_a\, u = \mathrm{Log}_a \lim_{n\to\infty} u_n$$

Rozważmy kilka przypadków szczegółowych:

1. Dajmy na to, że $a > 1$, a

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$$

Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Log}_a\, u_n = \infty$$

Istotnie, oznaczając przez A liczbę dodatnią, zakładamy

$$a^A = M, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (126)$$

gdzie M jest dowolna liczba dodatnia.

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$, przeto do każdej liczby dodatniej M możemy dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n \geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$u_n > M,$$

czyli ze względu na (126)

$$a^{\mathrm{Log}_a u_n} > a^A.$$

Stąd wynika, że

$$\mathrm{Log}_a\, u_n > A, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127)$$

czyli innemi słowy, jakkolwiek wielką będzie liczba dodatnia A, możemy wyznaczyć taką liczbę m, żeby zachodziła nierówność (127), skoro $n \geq m$.

A zatem

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Log}\, u_n = \infty,$$

skoro

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty \quad \text{i} \quad a > 1$$

Oznaczamy to wprost pisząc $\operatorname{Log}_a \infty = \infty$, jeżeli $a > 1$

2. Dajmy na to, że $a > 1$, a

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

W takim razie możemy napisać

$$\operatorname{Log}_a u_n = - \operatorname{Log}_a \left(\frac{1}{u_n} \right) \ldots \ldots \quad (128)$$

A zatem

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Log}_a u_n = - \lim_{n \to \infty} \operatorname{Log}_a \left(\frac{1}{u_n} \right) = - \infty,$$

gdyż

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{u_n} \right) = \infty, \text{ skoro } \lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

Oznaczamy to pisząc

$$\operatorname{Log}_a 0 = - \infty, \text{ jeżeli } a > 1$$

3. Przypuśćmy, że $a < 1$; i

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \infty$$

W takim razie, posługując się wzorem (125), otrzymujemy

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Log}_a u_n = - \lim_{n \to \infty} \operatorname{Log}_{\left(\frac{1}{a}\right)} = - \infty$$

Oznaczamy to, pisząc

$$\operatorname{Log}_a \infty = - \infty, \text{ jeżeli } a < 1$$

4. Jeżeli $a < 1$ i $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$, to na mocy wzoru (128) otrzymujemy

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Log}_a u_n = \infty$$

Oznaczamy to, pisząc

$$\operatorname{Log}_a 0 = \infty, \text{ jeżeli } a < 1$$

Przypuśćmy, że mamy ciąg zbieżny

$$u_1, u_2, u_3 \ldots . u_n \ldots .$$

którego granica jest $u > 0$.

Utwórzmy ciąg

$$w_1, w_2, w_3 \ldots . w_n \ldots .,$$

ktorego wyraz ogólny

$$w_n = u_n^m,$$

gdzie m jest jakakolwiek liczba rzeczywista.

Nietrudno udowodnić, że

$$\lim_{n \to \infty} w_n = \left(\lim_{n \to \infty} u_n \right)^m = u^m$$

W samej rzeczy, możemy napisać

$$w_n = a^{m \operatorname{Log}_a u_n},$$

gdzie a jest jakakolwiek liczba dodatnia

Stąd

$$\lim w_n = a^{\lim (m \operatorname{Log}_a u_n)} = a^{m \lim \operatorname{Log}_a u_n} =$$

$$= a^{m \operatorname{Log}_a (\lim u_n)} = \left(a^{\operatorname{Log}_a u_n} \right)^m = u^m = \left(\lim u_n \right)^m \quad (129)$$

przy $n \to \infty$

co właśnie mieliśmy do udowodnienia.

Rozważmy kilka przypadków szczególnych:

I. Przypuśćmy, że $u = 0$. W takim razie ze względu na wzór (129) będziemy mieli

$$\lim_{n \to \infty} w_n = 0 \qquad \text{jeżeli } m > 0$$

$$\lim_{n \to \infty} w_n = \infty \qquad \text{jeżeli } m < 0$$

$$\lim_{n \to \infty} w_n = 1 \qquad \text{jeżeli } m = 0$$

II. Przypuśćmy, że $u = \infty$. W takim razie, ze względu na wzór (129), będziemy mieli

$$\lim_{n \to \infty} w_n = \infty \qquad \text{jeżeli } m < 0$$

$$\lim_{n \to \infty} w_n = 0 \qquad \text{jeżeli } m < 0$$

W tym przypadku, gdy $m = 0$, wówczas będziemy mieli do czynienia z wyrażeniem nieoznaczonem typu ∞^0, którego granicy znaleźć bezpośrednio nie możemy.

Przypuśćmy, że mamy ciąg zbieżny

$$u_1, u_2, u_3, \ldots . u_n \ldots .$$

o wyrazach dodatnich, oraz ciąg zbieżny

$$v_1, v_2, v_3, \ldots . v_n \ldots .$$

Oznaczmy

$$\lim_{n \to \infty} u_n = u \qquad \lim_{n \to \infty} v_n = v.$$

Utwórzmy ciąg

$$w_1, w_2, w_3, \ldots . w_n, \ldots . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130)$$

którego wyraz ogólny

$$w_n = u_n^{v_n}$$

Nietrudno udowodnić, że ciąg (130) jest zbieżny i

$$\lim w_n = (\lim u_n)^{\lim v_n} = u^v$$

przy $n \to \infty$

Możemy napisać

$$w_n = a^{v_n \operatorname{Log}_a u_n},$$

gdzie a jest dowolna liczba dodatnia

W granicy będzie

$$\lim w_n = a^{\lim (v_n \operatorname{Log}_a u_n)} = a^{\lim v_n \cdot \lim \operatorname{Log}_a u_n} =$$

$$= a^{\lim v_n \cdot \operatorname{Log}_a \lim u_n} = a^{v \operatorname{Log}_a u} = \left(a^{\operatorname{Log}_a u}\right)^v =$$

$$= u^v = \left(\lim u_n\right)^{\lim v_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

przy $n \to \infty$,

co mieliśmy właśnie do udowodnienia.

Należy zauważyć następujące przypadki szczególne:

I. $u = 0$. Wówczas

$$\operatorname{Log}_a u = -\infty$$

Ze względu na (131) otrzymujemy

$$\lim_{n \to \infty} w_n = 0, \quad \text{jeżeli } v > 0$$

$$\lim_{n \to \infty} w_n = \infty, \quad \text{jeżeli } v < 0$$

W tym przypadku, gdy $v = 0$, wówczas nie można wyznaczyć bezpośrednio granicy ciągu w_n. Może się zdarzyć że ta granica będzie liczbą zupełnie określoną, lub też nie. Wówczas mówimy, że mamy do czynienia z wyrażeniem nieoznaczonem typu 0^0.

II. Przypuśćmy, że

$$u = \infty$$

Wówczas $\operatorname{Log}_a u = \infty$

Ze względu na wzór (131) mamy

$$\lim_{n \to \infty} w_n = \infty, \quad \text{gdy } v > 0$$

$$\lim_{n \to \infty} w_n = 0, \quad \text{gdy } v > 0$$

W tym przypadku gdy $v = 0$, wówczas nie można wyznaczyć bezpośrednio granicy ciągu w_n. Będziemy mieli wtedy do czynienia z wyrażeniem nieoznaczonem typu ∞^0.

III. Przypuśćmy że

$$v = \pm \infty$$

W takim razie ze względu na wzór (131) będziemy mieli: przy $n \to \infty$

1) $\lim w_n = \infty$, jeżeli $\alpha > 1$ i $\beta = \infty$

2) $\lim w_n = 0$, jeżeli $\alpha > 1$ i $\beta = \infty$

3) $\lim w_n = 0$, jeżeli $\alpha > 1$ i $\beta = \infty$

4) $\lim w_n = 0$, jeżeli $\alpha > 1$ i $\beta = -\infty$

W tym przypadku, gdy $\alpha = 1$, wyznaczyć granicę ciągu w_n bezpośrednio niemożna. Wówczas będziemy mieli do czynienia z wyrażeniem nieoznaczonem typu 1^∞. W § 18. damy sposób wyznaczania granic wyrażeń tego typu.

Przykłady: 1. Weźmy pod rozwagę ciąg

$$w_n = \left(\frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 - n + 1}\right)^{\frac{n^2 - 1}{2n^2 - 1}}$$

Wówczas będziemy mieli

$$u = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + n - 1}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}\right) = \frac{2}{3}$$

$$v = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{2n^2 - 1}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}}\right) = \frac{1}{2}$$

A więc

$$\lim_{n \to \infty} w_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + n - 1}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

2. Weźmy pod rozwagę ciąg

$$w_n = \left(\frac{3n^2 - n^2 + 1}{4n^3 + n^2 - 1}\right)^{\frac{n^4 - 1}{n^2 + 1}}$$

Wówczas będzie

$$u=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3-n^2+1}{4n^3+n^2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{4+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}\right)=\frac{3}{4}$$

Stąd wnosimy (III przyp. 3), że

$$\lim_{n\to\infty} w_n=0.$$

3. Weźmy pod rozwagę ciąg

$$w_n=\left(\frac{2n^2-n+1}{2n^2+n-1}\right)^{\frac{n^3-1}{n^2}}$$

Wówczas będzie

$$u=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-n+1}{2n^2+n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}}{1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n^2}}\right)=1$$

$$v=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{1}{n^2}\right)=\infty$$

Stąd widzimy że w_n jest wyrażenie nieoznaczone typu 1^∞, którego granicy wyznaczyć bezpośrednio nie możemy.

§ **18. Ciąg** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Weźmy pod rozwagę ciąg

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3\ldots\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ldots \qquad (132)$$

którego wyraz ogólny będzie

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Wiemy z algebry, że jeżeli $1+h>0$, to

$$(1+h)^n>1+nh$$

Zakładając

$$h=-\frac{1}{n^2},$$

otrzymamy

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-\frac{1}{n},$$

skąd

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1},$$

znajdujemy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

Stąd wnosimy, że ciąg (132) jest rosnący
Z drugiej zaś strony mamy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{n^3}+$$

$$+\cdots+\frac{1}{n^n}=2+\frac{1}{1\cdot2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)+$$

$$+\cdots+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Zastąpimy w wyrażeniu

$$A_n=\frac{1}{1\cdot2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

czynniki

$$\left(1-\frac{1}{n}\right),\ \left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

przez 1, spółczynniki zaś

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3},\ \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4},\ \cdots\ \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots n}$$

odpowiednio przez

$$\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots\ \frac{1}{2^{n-1}}$$

Wówczas będziemy mieli

$$A_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{n-1}}$$

Stąd wnosimy, że dla każdej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$A_n < 1,$$

a zatem nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

A więc ciąg (132) jest ograniczony zgóry, a zatem na mocy znanego już twierdzenia jest zbieżny.

Granicę tego ciągu oznaczamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad \ldots\ldots\ldots \quad (133)$$

Liczba e odgrywa bardzo ważną rolę w Analizie Matematycznej. Matematyk Neper (Napir) przyjął ją za podstawę naturalnych czyli hyperbolicznych logarytmów. Przybliżone obliczenie tej liczby podamy w następnym rozdziale.

Weźmy teraz pod rozwagę ciąg

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{1}\right)^1},\ \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2},\ \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}\cdots\ \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}\cdots, \quad (134)$$

którego ogólny wyraz jest

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Łatwo przekonać się, że ciąg (134) jest malejący. W samej rzeczy, zakładając w znanej z algebry tożsamości Bezout

$$a^{n+1} - b^{n+1} > (a-b)\cdot(n+1)\,b^n \quad (a>b>0)\ ^*)$$

$$a = 1-\frac{1}{n+1};\quad b = 1-\frac{1}{n},$$

otrzymujemy

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Stąd mamy

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1-\frac{1}{n}\right)^n,$$

*) Wzór Bezout wynika bezpośrednio ze wzoru $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n)$ pod warunkiem, że $a > b > 0$.

czyli

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$$

co dowodzi, że ciąg (134) jest malejący

Możemy dalej napisać

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

Przechodząc do granicy, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]\cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = 1,$$

przeto

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}\right] = e$$

A więc granicą ciągu (134) jest liczba e

Przypuśćmy, że mamy ciąg rozbieżny

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n\ \ldots, \quad \ldots\ldots \quad (135)$$

którego granica

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$$

Weźmy pod rozwagę ciąg

$$w_1,\ w_2,\ w_3\ \ldots\ w_n\ \ldots, \quad \ldots\ldots \quad (136)$$

którego ogólny wyraz jest

$$w_n = \left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n}$$

1. Przypuśćmy, że wszystkie wyrazy ciągu (136) są liczby dodatnie

Weźmy pod rozwagę tylko te wyrazy ciągu (135), które są większe od 1.

Niech

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (137)$$

oznacza ciąg, którego wszystkie wyrazy są liczby całkowite, spełniające nierówności

$$0 \leq u_n - \alpha_n < 1,$$

czyli nierówności

$$\alpha_n \leq u_n < 1 + \alpha_n \ldots \ldots \ldots \quad (138)$$

W takim razie zachodzą nierówności

$$1 + \frac{1}{1+\alpha_n} < 1 + \frac{1}{u_n} \leq 1 + \frac{1}{\alpha_n} \ldots \ldots \quad (139)$$

Z tej nierówności wnosimy, że

$$\left(1+\frac{1}{1+\alpha_n}\right)^{u_n} < \left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n} \leq \left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{u_n},$$

a zatem ze względu na nierówności (139) zachodzą à fortiori nierówności

$$\left(1+\frac{1}{1+\alpha_n}\right)^{\alpha_n} < \left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n} < \left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n+1}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\right] = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right] \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$

wnosimy, że jakkolwiek małą będzie dowolna liczba dodatnia ε, można wyznaczyć taką liczbę całkowitą dodatnią m, ażeby przy $n \geq m$ wyrazy

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} \text{ i } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

znajdowały się w przedziale

$$(e-\varepsilon,\ e+\varepsilon)$$

Ponieważ wskaźniki „prawie wszystkich“ wyrazów ciągu (135) są większe od m, przeto „prawie wszytkie“ wyrazy ciągów

$$\left(1+\frac{1}{\alpha_n+1}\right)^{\alpha_n} \text{ i } \left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n+1}$$

znajdują się w przedziale

$$(e-\varepsilon,\ e+\varepsilon)$$

A zatem, ze względu na (139), „prawie wszystkie“ wyrazy ciągu (136) znajdują się w tym samym przedziale

Stąd wnosimy, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n} = e$$

skoro

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$$

2. Przypuśćmy teraz, że wyrazy ciągu (135) są liczby ujemne i przytem

$$\lim u_n = -\infty$$

Weźmy pod uwagę tylko te wyrazy ciągu (135), które są mniejsze od -1.

Zakładamy

$$v_n = -1 - u_n$$

W takim razie wszystkie wyrazy ciągu v_n będą liczbami dodatniemi, większemi od 1 i przytem

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \infty$$

Możemy napisać

$$\left(1+\frac{1}{v_n}\right)^{v_n} = \left(\frac{1+u_n}{u_n}\right)^{-u_n-1} = \left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n} \cdot \left(1+\frac{1}{u_n}\right)$$

A zatem

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{v_n}\right)^{v_n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n}\right] \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$$

Gdy

$$\lim_{u\to\infty} v_n = \infty, \quad \text{czyli} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty,$$

wówczas

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{v_n}\right)^{v_n}\right] = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{u_n}\right) = 1$$

A zatem

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n}\right] = e,$$

skoro

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$$

A więc

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{u_n} \right)^{u_n} \right] = e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

skoro

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \pm \infty$$

Przypuśćmy, że

$$\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3, \ \ldots \ \omega_n \ \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

oznacza ciąg, którego ogólny wyraz jest

$$\omega_n = \frac{1}{u_n}$$

W takim razie będzie

$$\lim_{n \to \infty} \omega_n = 0$$

skoro

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \pm \infty,$$

a zatem

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \omega_n \right)^{\frac{1}{\omega_n}} \right] = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{u_n} \right)^{u_n} \right] = e \quad . \quad (141)$$

Przypuśćmy, że ciąg

$$u_1, \ u_2, \ u_3, \ \ldots \ u_n \ \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (142)$$

posiada granicę u, nie równą zeru.

Weźmy pod rozwagę ciąg, którego ogólny wyraz jest

$$\left(1 + \frac{u_n}{n} \right)^n$$

Zakładamy

$$\frac{u_n}{n} = \omega_n$$

W takim razie będzie

$$\lim_{n \to \infty} \omega_n = \lim_{u \to \infty} \frac{u_n}{n} = 0$$

a przeto

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{u_n}{n} \right)^n \right] = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \omega_n \right)^{\frac{1}{\omega_n}} \right] = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \omega_n \right)^{\frac{1}{\omega^n}} \right]^{u_n}$$

A zatem na mocy wzoru (141) przy $n \to \infty$ będzie

$$\lim \left[\left(1 + \frac{u_n}{n} \right) \right] = \left\{ \lim \left[\left(1 + \omega_n \right) \right]^{\frac{1}{\omega_n}} \right\}^{\lim u_n} = e \quad . \quad . \quad (143)$$

Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu (142) równe są a, gdzie a jest liszba stała, wówczas będzie

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{a}{n} \right)^n \right] = e^a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (144)$$

Za pomocą wzoru (141) możemy łatwo wyznaczać wyrażenia nieoznaczone typu 1^{∞}, o którem była mowa w § 17.

Przypuśćmy, że mamy ciąg, którego ogólny wyraz jest

$$\alpha_n^{\beta_n},$$

gdzie α_n i β_n są to ciągi, posiadające granice

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 1 \qquad \lim_{n \to \infty} \beta_n = \infty$$

Załóżmy

$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{u_n}$$

Stąd

$$u_n = \frac{1}{\alpha_u - 1}$$

Załóżmy jeszcze

$$v_n = \frac{\beta_n}{u_n} = \beta_n (\alpha_n - 1)$$

W takim razie będziemy mieli

$$\alpha_n^{\beta_n} = \left[\left(1 + \frac{1}{u_n} \right)^{u_n} \right]^{\beta_n (\alpha_n - 1)}$$

Ponieważ

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \infty,$$

przeto przy $n \to \infty$ będzie

$$\lim \left(\alpha_n^{\beta_n} \right) = e^{\lim \beta_n [(\alpha_n - 1)]}.$$

Oznaczając

$$\lim_{n \to \infty} [\beta_n (\alpha_n - 1)] = m$$

Otrzymujemy

$$\lim_{n \to \infty} \left(\alpha_n^{\beta_n} \right) = e^m \quad \ldots \ldots \quad (145)$$

Przykład. Znaleźć granicę ciągu

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(\frac{2n^2 - n + 1}{2n^2 + n - 1} \right)^{\frac{n^2-1}{n}} \right]$$

Ponieważ

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n^2 - n + 1}{2n^2 + n - 1} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \right) = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(n - \frac{1}{n} \right) = \infty,$$

przeto będziemy mieli do czynienia z wyrażeniem nieoznaczonym typu 1^∞.

Zakładając

$$\alpha_n = \frac{2n^2 - n + 1}{2n^2 + n - 1}; \quad \beta_n = \frac{n^2 - 1}{n},$$

będziemy mieli

$$m = \lim_{n \to \infty} \left[\beta_n (\alpha_n - 1) \right] = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{(n^2 - 1)(-2n + 2)}{n(2n^2 + n - 1)} \right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(-2 + \frac{2}{n}\right)}{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \right] = -1.$$

A zatem

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(\frac{2n^2 - n + 1}{2n^2 + n - 1} \right)^{\frac{n^2-1}{n}} \right] = \frac{1}{e}$$

Ćwiczenia. Znaleźć granice ciągów

1. $u_n = \dfrac{3n^2 - 4n + 1}{6n^2 + 2n - 3}$ Odp. $\frac{1}{2}$
2. $u_n = \dfrac{2n^2 + 3n + 4}{3n^3 + 1}$ Odp. 0
3. $u_n = \dfrac{8n^3 + 2}{n^2 + 2n + 1}$ Odp. ∞

4. $u_n = \dfrac{(2n^2 + 1)(3n - 4)}{6n(n^2 - 1)}$ Odp. 1
5. $u_n = \dfrac{2n(n + 1)(n - 2)}{n(n - 1)(n^2 + 1)}$ Odp. 2
6. $u_n = \left(\dfrac{3n^2 - n + 1}{n^2 - n + 2} \right)^{\frac{2n^2+1}{n^2+1}}$ Odp. 9
7. $u_n = \left(\dfrac{2n^3 - n^2 + 1}{n^3 + n - 1} \right)^{\frac{2n^2+1}{2n^2-1}}$ Odp. 2
8. $u_n = \left(\dfrac{n^3 - 2n^2 + 1}{3n^3 - n + 1} \right)^{\frac{5n^2+1}{2n^2+1}}$ Odp. $\frac{1}{9}\sqrt{\frac{1}{3}}$
9. $u_n = \left(\dfrac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + 2n + 1} \right)^{\frac{n^3-1}{n^2+1}}$ Odp. $\dfrac{1}{e^5}$
10. $u_n = \left(\dfrac{n^4 - n^3 + 1}{n^4 + n^2 - 1} \right)^{\frac{n^2-1}{n}}$ Odp. $\dfrac{1}{e}$

§ **19. Twierdzenia Stolza.** I. Przypuśćmy, że dwa ciągi

$$u_1, u_2, u_3, \ldots \ldots u_n \ldots$$

$$v_1, v_2, v_3, \ldots \ldots v_n \ldots$$

posiadają granice równe zeru, i że ciąg v_n jest malejący. Stolz udowodnił, że jeżeli ciąg, którego ogólny wyraz jest

$$\frac{u_n - u_{n+1}}{v_n - v_{n+1}},$$

będzie zbieżny, wówczas

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{u_n - u_{n+1}}{v_n - v_{n+1}}$$

Przytoczmy tu dowód tego twierdzenia.

Dowód. Oznaczamy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n - u_{n+1}}{v_n - v_{n+1}} = k$$

W myśl definicji gramcy, do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n \geq m$ pociąga za sobą nierówności

$$k - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_n - u_{n+1}}{v_n - v_{n+1}} < k + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$k-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{u_{n+1}-u_{n+2}}{v_{n+1}-v_{n+2}}<k+\frac{\varepsilon}{2}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$k-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{u_{n+p-1}-u_{n+p}}{v_{n+p-1}-v_{n+p}}<k+\frac{\varepsilon}{2},$$

gdzie p jest dowolna liczba całkowita dodatnia.

Ponieważ ciąg v_n jest malejący, przeto

$$v_n \geq v_{n+1} \geq v_{n+2} \geq \ldots \geq v_{n+p-1} \geq v_{n+p}$$

Na mocy twierdzenia, dobrze znanego z algebry, będziemy mieli

$$k-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{(u_n-u_{n+1})+(u_{n+1}-u_{n+2})+\ldots+(u_{n+p-1}-u_{n+p})}{(v_n-v_{n+1})+(v_{n+1}-v_{n+2})+\ldots+(v_{n+p-1}-v_{n+p})}<k+\frac{\varepsilon}{2}$$

czyli

$$k-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{u_n-u_{n+p}}{v_n-v_{n+p}}<k+\frac{\varepsilon}{2}$$

Stąd

$$\left|\frac{u_n-u_{n+p}}{v_n-v_{n+p}}-k\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (146)$$

Ostatnia nierówność zachodzi w tym przypadku, gdy p jest dowolna liczba całkowita dodatnia, zaś $n \geq m$.

Ponieważ ciągi u_n i v_n posiadają granice równe zeru, przeto dla każdej stałej liczby n będziemy mieli

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-u_{n+p}}{v_n-v_{n+p}}=\frac{u_n}{v_n}$$

Z tego wynika, że jakkolwiek mała jest liczba dodatnia ε, można wyznaczyć taką liczbę p, iż będzie zachodziła nierówność

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-\frac{u_n-u_{n+p}}{v_n-v_{n+p}}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Zestawiając nierówności (146) i (147) otrzymujemy

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-k\right|<\varepsilon$$

dla każdej liczby $n \geq m$.

Stąd wnosimy, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k$$

A więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-u_{n+1}}{v_n-v_{n+1}}$$

A na tem właśnie polega pierwsze twierdzenie Stolza, do którego dowód chodziło.

II. Przypuśćmy, że mamy dane dwa ciągi

$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_n \ldots$$
$$v_1, v_2, v_3, \ldots v_n \ldots$$

z których ciąg v_n jest rosnący i nieograniczony „z góry"

Drugie twierdzenie Stolza polega na tem, że jeżeli ciąg,

$$\frac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}$$

jest zbieżny, wówczas

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}$$

Dowód. Oznaczmy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}=k$$

Oczywista, do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n \geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$\left|\frac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}-k\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

czyli nierówności

$$k-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{u_{m+1}-u_m}{v_{m+1}-v_m}<k+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$k-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{u_{m+2}-u_{m+1}}{v_{m+2}-v_{m+1}}<k+\frac{\varepsilon}{2}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$k-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{u_n-u_{n+1}}{v_n-v_{n-1}}<k+\frac{\varepsilon}{2}$$

Ponieważ ciąg v_n jest rosnący, przeto

$$v_m \leq v_{m+1} \leq v_{m+2} \leq \ldots \leq v_{n-1} \leq v_n$$

a zatem będą zachodziły nierówności

$$k-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{(u_{m+1}-u_m)+(u_{m+2}-u_{m+1})+\ldots+(u_n-u_{n-1})}{(v_{m+1}-v_m)+(v_{m+2}-v_{m+1})+\ldots+(v_n-v_{n-1})}<k+\frac{\varepsilon}{2}$$

czyli

$$k-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{u_n-u_m}{v_n-v_m}<k+\frac{\varepsilon}{2}$$

Stąd

$$\left|\frac{u_n-u_m}{v_n-v_m}-k\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots\ldots \quad (149)$$

Ponieważ ciąg v_n jest rosnący, przeto możemy wyznaczyć taką liczbę m, ażeby zachodziła nierówność

$$v_m>0$$

Obieramy teraz taką liczbę $n>m$, ażeby zachodziła nierówność

$$|\,u_m-k\,v_m\,|<\frac{\varepsilon}{2}\,v_n \quad \ldots\ldots \quad (150)$$

Możemy napisać

$$\frac{u_n}{v_n}-k=\frac{u_m-kv_m}{v_n}+\left(1-\frac{v_m}{v_n}\right)\left(\frac{u_n-u_m}{v_n-v_m}\right)-k,$$

czyli

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-k\right|\leqslant\frac{|u_m-kv_m|}{v_n}+\left(1-\frac{v_m}{v_n}\right)\left(\frac{u_n-u_m}{v_n-v_m}-k\right)$$

Uwzględniając nierówności (148), (149) i (150), otrzymujemy

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-k\right|\leqslant\varepsilon$$

przy $n>m$.

Stąd wnosimy, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k,$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}$$

A więc udowodniliśmy drugie twierdzenie Stolza.

Uwaga. Łatwo można udowodnić, że jeżeli

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-u_{n+1}}{v_n-v_{n+1}}=\infty,$$

to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\infty$$

Dowód tego twierdzenia pozostawiamy czytelnikowi.

Z drugiego twierdzenia Stolza możemy wyciągnąć wniosek następujący:

Wniosek. Jeżeli ciąg u_n jest zbieżny, to ciąg, którego ogólny wyraz jest

$$\frac{u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n}{n}$$

będzie również zbieżnym, a nadto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n}{n}=\lim_{n\to\infty}u_n$$

Istotnie, zakładając

$$w_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$$
$$v_n=u,$$

będziemy mieli, na mocy drugiego twierdzenia Stolza

$$\lim_{n\to\infty}\frac{w_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{w_n-w_{n-1}}{v_n-v_{n-1}} \quad \ldots\ldots \quad (156)$$

to jest

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=\lim_{n\to\infty}u_n$$

Załóżmy we wzorze (151)

$$w_n=\lg u_1+\lg u_2+\cdots+\lg u_n$$
$$v_n=n$$

Wówczas będziemy mieli

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg(u_1\cdot u_2\cdot u_3\cdots u_n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\lg u_n$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty}\lg\sqrt[n]{u_1\cdot u_2\cdot u_3\cdots u_n}=\lim_{n\to\infty}\lg u_n$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\lim_{n\to\infty}\lg\sqrt[n]{u_1\cdot u_2\cdot u_3\cdots u_n}=\lg\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_1\cdot u_2\cdot u_3\cdots u_n},$$

będziemy mieli

$$\lg\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_1\cdot u_2\cdot u_3\cdots u_n}=\lg\lim_{n\to\infty}u_n$$

Stąd wnosimy, że

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_1\cdot u_2\cdot u_3\cdots u_n}=\lim_{n\to\infty}u_n$$

Zastępując w ostatnim wzorze u_n przez $\frac{u_n}{u_{n-1}}$, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_1 \cdot \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad . \quad . \quad (152)$$

Przykłady: 1. Weźmy pod rozwagę ciąg, którego ogólny wyraz jest

$$\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p-1}},$$

gdzie p jest jakakolwiek liczba całkowita dodatnia.

Załóżmy

$$w_n = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$$
$$v_n = n^{p+1}$$

Wówczas na mocy wzoru (152) będziemy mieli

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} \right]$$

Z drugiej zaś strony

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} \right] = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{p+1} \right]} \right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{(p+1)\left(1 - \frac{p}{2n} + \cdots \right)} \right] = \frac{1}{p+1}$$

A więc

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \right] = \frac{1}{p+1}$$

Zakładając kolejno

$$p = 1,\ 2,\ 3 \ldots,$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2} \right] = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} \right] = \frac{1}{3} \quad . \quad . \quad . \quad (153)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4} \right] = \frac{1}{4}$$

i t. d.

2. Weźmy pod rozwagę ciąg, którego wyraz ogólny jest

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$$

Załóżmy

$$u_n = n$$

Wówczas będzie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) = 1.$$

A zatem wzór (152) daje nam

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \left(n^{\frac{1}{n}} \right) = 1$$

3. Weźmy pod rozwagę ciąg, którego wyraz ogólny jest

$$\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$$

Załóżmy

$$u_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$$

przeto (uwaga do drugiego twierdz. Stolza)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = \infty$$

4. Weźmy pod rozwagę ciąg, którego ogólny wyraz jest

$$\frac{\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}}{n}$$

Załóżmy

$$u_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n^n}$$

Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n\,(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^n}{(n+1)^n} \right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \right] = \frac{1}{e}$$

A zatem wzór (152) nam daje

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}}{n}=\frac{1}{e}$$

5. Weźmy pod rozwagę ciąg, którego ogólny wyraz jest

$$\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}}{n}$$

Zakładamy

$$u_n=\frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{n^n}$$

Wówczas będzie

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2(2n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+2}{n+1}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^n}{(n+1)^n}\right]$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+2}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)=4$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^n}{(n+1)^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]=\frac{1}{e},$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{4}{e}$$

A zatem wzór (152) daje nam

$$\lim\sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{n}}=\frac{4}{e}$$

Udowodnijmy jeszcze dwa twierdzenia Cezaro, które opierają się na twierdzeniach Stolza.

Twierdzenie I. (Cezaro). Przypuśmy, że mamy dwa ciągi zbieżne

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n\ \ldots$$

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots\ v_n\ \ldots$$

posiadające granice

$$\lim_{n\to\infty}u_n=u\qquad\lim_{n\to\infty}v_n=v$$

Weźmy pod rozwagę ciąg

$$w_1,\ w_2,\ w_3\ \ldots\ w_n,\ \ldots$$

którego ogólny wyraz jest

$$w_n=\frac{1}{n}(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1)$$

Udowodnijmy, że ciąg w_n jest zbieżny, a nadto

$$\lim_{n\to\infty}w_n=\lim_{n\to\infty}u_n\cdot\lim_{n\to\infty}v_n=uv$$

Dowód. Aby tego dowieść, oznaczmy przez k największą z liczb całkowitych, spełniających nierówność

$$k\leq\frac{n}{2}$$

W takim razie możemy napisać

$$k=\frac{n}{2}-\alpha,$$

gdzie α spełnia nierówności

$$0<\alpha<1.$$

Będziemy mieli

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n}=\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n}=\frac{1}{2}$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}u_n=u,$$

przeto na mocy twierdzenia I § 9 (str. 101)

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=|u|$$

W myśl wniosku z drugiego twierdzenia Stolz'a będziemy mieli

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}(|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_k|)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n}\cdot$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}(|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_k|)\right]=\frac{1}{2}|u|$$

Obieramy liczbę

$$\beta>\frac{1}{2}|u|$$

Oczywista, możemy wyznaczyć taką liczbę całkowitą, dodatnią m, aby dla $n \geqslant m$ zachodziła nierówność

$$\frac{1}{n}(|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_1|)<\beta$$

Weźmy pod rozwagę wyrażenie

$$\omega_n=\frac{1}{n}\left[u_1(v_n-v)+u_2(v_{n-1}-v)+\cdots+u_k(v_{n-k+1}-v)\right]$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} v_n=v,$$

przeto do każdej dodatniej liczby ε można dobrać taką liczbę całkowitą, dodatnią m_1, przy której nierówność $n \geqslant m_1$ pociąga za sobą nierówność

$$|v_n-v|<\frac{\varepsilon}{\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (154)$$

Oczywista, dla każdej liczby n, spełniającej jednocześnie nierówności

$$n>m; \quad n>m_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (155)$$

będzie zachodziła nierówność

$$|\omega_n| \leqslant \frac{|u_1|\cdot|v_n-v|+|u_2|\cdot|v_{n-1}-v|+\cdots+|u_k|\,|v_{n-k+1}-v|}{n}$$

Ze względu na nierówność (154) wnosimy, że zachodzi nierówność

$$|\omega_n|<\frac{\varepsilon}{\beta}\cdot\frac{|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_k|}{n}<\varepsilon$$

dla liczby n, spełniającej nierówności (155)

Stąd wnosimy, że

$$\lim_{n\to\infty}|\omega_n|=0$$

to jest

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_kv_{n-k+1})\right]=$$

$$=v\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}(u_1+u_2+\cdots+u_k)\right]$$

Ponieważ

$$v\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}(u_1u_2+\cdots+u_k)\right]=v\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n}\cdot$$

$$\cdot\lim_{u\to\infty}\left[\frac{u_1+u_2+\cdots+u_k}{k}\right]=\frac{1}{2}uv$$

przeto

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_kv_{n-k+1})\right]=\frac{1}{2}\cdot uv \quad (155a)$$

W taki sam sposób możemy udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}(u_nv_1+u_{n-1}v_2+\cdots+u_{k+1}v_{n-k})\right]=\frac{1}{2}uv \quad (155b)$$

Dodając wzory (155a) i (155b) stronami, znajdziemy

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1)\right]=uv,$$

co właśnie mieliśmy do udowodnienia.

Twierdzenie II (Cezaro). Przypuśćmy, że dane są dwa ciągi

$$u_1, u_2, u_3 \ldots . u_n \ldots .$$

$$v_1, v_2, v_3 \ldots . v_n \ldots ,$$

z których drugi posiada granicę równą zeru

Twierdzenie polega na tem, że jeżeli

$$\lim(v_1+v_2+\ldots+v_n)=\infty,$$

a ciąg

$$\frac{1}{n}(u_1+u_2+\ldots+u_n)$$

jest zbieżny, to

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n}{v_1+v_2+\cdots+v_u}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[(u_1+u_2+\cdots+u_n)\right] \quad (156)$$

Dowód. Rozważmy oddzielnie dwa przypadki:

1. Ciąg u_n jest zbieżny. Wówczas zakładając

$$u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n=a_n$$

$$v_1+v_2+\cdots+v_n=b_n,$$

będziemy mieli w myśl drugiego twierdzenia Stolz'a

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n}{v_1+v_2+\cdots+v_n}\right]=\lim_{n\to\infty}u_n$$

Ponieważ ciąg u_n posiada określoną w zupełności granicę, przeto na mocy wniosku z drugiego twierdzenia Stolz'a otrzymujemy wzór (156).

2. Ciąg u_n jest rozbieżny. Oznaczmy

$$\frac{u_1+u_2+\cdots u_n}{n}=\omega_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\omega_n=\alpha$$

Możemy napisać

$$u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n=\omega_1(v_1-v_2)+2\omega_2(v_2-v_3)+$$
$$+3\omega_3(v_3-v_4)+\cdots+n\omega_n(v_n-v_{n+1})+n\omega_nv_{n+1}$$

Zakładając dalej

$$m(v_m-v_{m+1})=w_m,$$

będziemy mieli

$$w_1+w_2+w_3+\cdots+w_n=v_1+\cdots+v_n-nv_{n+1} \quad . \quad (157)$$

Możemy więc napisać

$$u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n=\omega_1w_1+\omega_2w_2+\cdots+\omega_nw_n+$$
$$+\omega_n[(v_1+v_2+\cdots+v_n)-(w_1+w_2+\cdots+w_n)]$$

Skąd

$$\frac{u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n}{v_1+v_2+\cdots+v_n}=\omega_n+\left(\frac{w_1+w_2+\cdots+w_n}{v_1+v_2+\cdots v_n}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{\omega_1w_1+\omega_2w_2+\cdots+\omega_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}-\omega_n\right) \quad . \quad . \quad . \quad (158)$$

Ponieważ ciąg v_n jest malejący, przeto

$$w_n>0$$

Łatwo udowodnić, że ciąg, którego ogólny wyraz jest

$$w_1+w_2+\cdots+w_n$$

jest rosnący i nieograniczony zgóry; udowodnijmy więc, że jakkolwiek wielką będzie liczba M, możemy wyznaczyć taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n\geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$w_1+w_2+\cdots w_n>M$$

Ponieważ suma

$$v_1+v_2+\cdots+v_n$$

rośnie nieograniczenie razem z n, możemy obrać taką liczbę całkowitą dodatnią k, aby zachodziła nierówność

$$v_1+v_2+\cdots+v_k>M$$

Obieramy dalej liczbę m tak, aby zachodziła nierówność

$$v_{n+1}<\frac{1}{k}(v_1+v_2+\cdots+v_k-M) \quad . \quad . \quad . \quad (159)$$

dla każdej liczby $n\geq m$, co jest rzeczą zupełnie możliwą, gdyż v_n maleje nieograniczenie.

Będziemy mieli więc ze względu na (157)

$$w_1+w_2+\cdots+w_n=(v_1+v_2+\cdots+v_k)+(v_{k+1}+v_{k+2}+\cdots+$$
$$+v_n-nv_{n+1})$$

Ponieważ ciąg v_n jest malejący, przeto

$$v_{k+1}+v_{k+2}+\cdots+v_n>(n-k)v_{n+1},$$

a zatem

$$w_1+w_2+\cdots+w_n>v_1+v_2+\cdots+v_k-kv_{n+1}$$

Stąd, na mocy nierówności (159) wnosimy, że

$$w_1+w_2+\cdots+w_n>M$$

Posługując się drugiem twierdzeniem Stolz'a, będziemy mieli

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\omega_1w_1+\omega_2w_2+\cdots+\omega_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}\right]=\lim_{n\to\infty}\omega_n \quad . \quad (160)$$

Wracając do wzoru (158), otrzymujemy ze względu na (160)

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\omega_1w_1+\omega_2w_2+\cdots+\omega_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}-\omega_n\right]=0.$$

Ponieważ wyraz

$$\beta_n=\frac{w_1+w_2+\cdots+\omega_nw_n}{v_1+v_2+\cdots+v_n}=1-\frac{nv_{n+1}}{v_1+v_2+\cdots+v_n}$$

spełnia zawsze nierówności

$$0<\beta_n<1,$$

przeto

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n}{v_1+u_2+\cdots+v_n}\right]=\lim_{n\to\infty}\omega_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}\right],$$

a na tem właśnie polega twierdzenie, o którego dowód chodziło.

Rozdział IV.

Teorja szeregów.

§ 1. **Określenia. Ciągi zbieżne i rozbieżne.** Dajmy na to, że mamy ciąg liczbowy

$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots \quad (1)$$

Wyrażenie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n \quad (2)$$

nazywamy szeregiem nieskończonym.

Wyrażenia

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1 \\ s_2 &= u_1 + u_2 \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ s_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots u_n \end{aligned} \quad (3)$$

nazywamy sumami częściowemi szeregu (2).

Sumy częściowe tworzą oczywiście pewien ciąg liczbowy

$$s_1, s_2, s_3, \ldots s_n, \quad (4)$$

Szereg nazywamy zbieżnym, jeżeli ciąg (4), utworzony z sum częściowych tego szeregu jest zbieżny.

W przeciwnym razie szereg nazywamy rozbieżnym.

Granicę S ciągu (4) nazywać będziemy sumą szeregu (2) A więc

$$S = \lim_{n \to \infty} s_n$$

Wyraz u_n nazywa się wyrazem ogólnym szeregu (2)

Wyrażenie

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots = \sum_{i=n+1}^{i=\infty} u_i$$

nazywamy resztą szeregu (2), odpowiadającą liczbie n.

Sumę częściową s_n możemy uważać za wartość przybliżoną na S; wówczas liczba r_n będzie wyrażała błąd który popełniamy, przyjmując sumę częściową s_n za sumę szeregu.

Posługując się twierdzeniem Cauchy'ego o zbieżności ciągów liczbowych, udowodnionem w § 8 Rozdz. III możemy wysłowić następujące ogólne kryterjum zbieżności szeregu:

Kryterjum Cauchy'ego. Na to aby szereg

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad (2)$$

był zbieżny potrzeba i wystarcza, iżby do każdej liczby dodatniej ε można było dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n \geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$|s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon \quad (5)$$

dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej p.

Kryterjum Cauchy'ego może być bardzo rzadko używana przy badaniu zbieżności szeregów, albowiem zawiera nieskończoną liczbę warunków, z których każdy jest konieczny, lecz nie wystarczający. Analityczne wyrażenia tych warunków otrzymamy, zakładając w nierówności (5) kolejno $p = 1, 2, 3, \ldots$.

Zakładając naprzykład $p = 1$, możemy wysłowić następujące konieczne kryterjum zbieżności szeregu:

Na to aby szereg (2) był zbieżnym potrzeba, żeby do każdej liczby dodatniej ε można było dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n \geq m$ pociąga za sobą nierówność.

$$|u_{n+1}| < \varepsilon, \quad (6)$$

czyli innemi słowy żeby granica ciągu

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

Jest to kryterjum konieczne lecz nie wystarczające, gdyż nierówność (6) wynika z nierówności (5) tylko przy $p = 1$.

Przytoczmy tu kilka ciągów zbieżnych i rozbieżnych:

Przykład I. Weźmy pod rozwagę szereg Leibniz'a

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m(m+1)} \quad (1)$$

Sumy częściowe tego szeregu będą

$$s_1 = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

. . . . . .

Ponieważ

$$S = \lim_{n\to\infty} s = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = 1,$$

przeto szereg Leibniz'a będzie zbieżny

II. Rozważmy szereg

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n + \cdots = \sum_{m=1}^{m=\infty} aq^m, \quad . \quad \text{(II)}$$

który przedstawia nieskończony postęp geometryczny, o ilorazu q.

Sumy częściowe tego szeregu będą

$$s_1 = a$$

$$s_2 = a + aq = a(1+q)$$

$$s_3 = a + aq + aq^2 = a(1+q+q^2)$$

. . . . . .

. . . . . .

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}) = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

. . . . . .

Rozważmy oddzielnie trzy różne przypadki, a mianowicie:

1) $q > 1$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a \cdot \lim_{n\to\infty}\left[1 + nq + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}q^2 + \cdots\right] = \infty,$$

a zatem szereg (II) przy $q > 1$ będzie rozbieżny

2) $-1 < q < 1$. W takim razie

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$$

A zatem szereg (II) przy

$$-1 < q < 1$$

będzie zbieżny

3) $q = \pm 1$. Wówczas

$$s_n = an, \quad \text{gdy } q = 1$$

$$s_{2n} = 0; \quad s_{2n+1} = a, \quad \text{gdy } q = -1.$$

Stąd wnosimy, że ciąg s_n nie posiada granicy, a zatem szereg (II) będzie rozbieżny.

4) $q < -1$. Wówczas ciąg s_n granicy nie posiada, a zatem szereg będzie rozbiezny.

A więc szereg (II) będzie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy liczba q spełnia nierówności

$$-1 < q < 1.$$

III. Weźmy pod rozwagę szereg

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m}, \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

który nazywa się h a r m o n i c z n y m.

W tym przypadku granica ciągu

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Aczkolwiek warunek konieczny zbieżności szeregu jest spełniony, to jednak szereg (III), jak możemy łatwo się przekonać, będzie rozbieżny.

Weźmy pod rozwagę ciąg

$$s_n = \frac{1}{n}$$

Widzimy bezpośrednio, że ten ciąg jest rosnący, gdyż

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{n} > s_n$$

Łatwo udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$$

Przypuśćmy, że n jest liczbą, składającą się z m cyfr, to jest spełniającą nierówności

$$10^m > n > 10^{m-1}$$

Oznaczmy przez σ_p sumę wszystkich ułamków postaci $\frac{1}{q}$ pod warunkiem, że liczba q spełnia nierówności

$$10^{p-1} \leq q < 10^p$$

Możemy napisać w takim razie

$$s_n \geq \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \cdots + \sigma^{m-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Oczywista, zachodzą nierówności

$$\sigma_1 > \frac{9}{10}; \quad \sigma_2 > \frac{90}{100} = \frac{9}{10}; \quad \sigma_3 > \frac{900}{1000} = \frac{9}{10} \cdots$$

Wogóle

$$\sigma_k = \frac{1}{10^{k-1}} + \frac{1}{10^{k-1}+1} + \frac{1}{10^{k-1}+2} + \frac{1}{10^k - 1} > \frac{9 \cdot 10^{k-1}}{10^k} = \frac{9}{10}$$

Ze względu na (6) mamy

$$s_n \geq \frac{9}{10}(m-1)$$

Stąd wnosimy, że

$$\lim s_n = \infty,$$

a zatem szereg harmoniczny jest rozbieżny.

IV. Weźmy pod rozwagę szereg

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{n^k} + \cdots = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^k} \quad . \quad . \quad (IV)$$

Przy $k = 1$ szereg (IV) przyjmuje postać

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV')$$

Szereg (IV') jest harmoniczny, a zatem rozbieżny.

Rozważmy szereg (IV) w przypuszczeniu, że $k > 1$.

Łatwo spostrzec, że ciąg

$$s_n = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots \frac{1}{n^k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

jest rosnący, gdyż

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)^k} > s_n$$

Nietrudno okazać, że ciąg (7) jest ograniczony.

Przypuśćmy, że n jest liczba, składająca się z m cyfr, czyli innemi słowy spełniająca nierówności

$$10^m > n \geq 10^{m-1}.$$

Oznaczmy przez σ — sumę wszystkich ułamków postaci $\frac{1}{q^k}$, pod warunkiem, że liczba q spełnia nierówności

$$10^p > q^k > 10^{p-1}$$

Możemy napisać

$$s_n \leq \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \cdots + \sigma_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Rozważając sumy σ_1, σ_2 ... σ_m, znajdziemy nierówności

$$\sigma_1 = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{9^k} < 9$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{10^k} + \frac{1}{11^k} + \cdots + \frac{1}{99^k} < 9 \cdot \frac{1}{10^{k-1}}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\sigma_p = \frac{1}{10^{(p-1)k}} + \frac{1}{10^{(p-1)k}+1} + \cdots + \frac{1}{10^{pk}-1} < 9 \cdot \frac{1}{10^{(p-1)(k-1)}}$$

. . . . . .

$$\sigma_m < 9 \cdot \frac{1}{10^{(m-1)(k-1)}}$$

Ze względu na (8) możemy napisać

$$s_n < 9 + 9 \cdot \frac{1}{10^{k-1}} + 9 \cdot \frac{1}{10^{2(k-1)}} + \cdots + 9 \cdot \frac{1}{10^{(k-1)(m-1)}}$$

Ponieważ $\frac{1}{10^{k-1}} < 1$, przeto

$$s_n < 9 \cdot \left[1 + \frac{1}{10^{k-1}} + \frac{1}{10^{2(k-1)}} + \cdots + \frac{1}{10^{(k-1)(m-1)}} + \cdots\right],$$

czyli

$$s_n < 9 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^k}} = \frac{9 \cdot 10^k}{10^k - 1}$$

Z tego wnosimy, że ciąg s_n jest ograniczony zgóry, a zatem jest zbieżny.

V. Weźmy pod rozwagę szereg

$$1 + \frac{a}{1.} + \frac{a^2}{1 \cdot 2.} + \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3.} + \cdots = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{a^m}{1\ 2 \cdot 3 \cdots m}, \quad . \quad (V)$$

gdzie a jest jakakolwiek liczba dodatnia lub ujemna

Łatwo udowodnić, że suma tego szeregu

$$s = e^a,$$

gdzie e jest liczba Neper'a

Aby tego dowieść, weźmy pod rozwagę ciąg

$$s_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = 1 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

gdzie

$$u_m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m\cdot}\cdot\frac{a^m}{n^m} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1-\frac{n-m+1}{n}\right)\cdot\frac{a^m}{n^m}$$

Jeżeli m jest liczbą stałą, to

$$\lim_{n\to\infty} u_m = \frac{a^m}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}$$

Rozważmy oddzielnie dwa przypadki:

1. Przypuśćmy że $a>0$. Wówczas będziemy mieli

$$u_{m+k} = u_m\cdot\frac{\left(1-\frac{m}{n}\right)\left(1-\frac{m+1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m+k-1}{n}\right)}{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}\cdot a^k$$

Zastępując w liczniku ostatniego wyrażenia wszystkie czynniki przez 1, czynniki zaś mianownika

$$m+2,\ m+3\cdots m+k$$

przez $m+1$, otrzymujemy nierówność

$$u_{m+k} < u_m\left(\frac{a}{m+1}\right)^k \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Oznaczając przez p liczbę całkowitą, spełniającą nierówność

$$a-1 < p \leqslant a, \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

obieramy liczbę m tak, aby zachodziły nierówności

$$n > m \geqslant p \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

W takim razie będziemy mieli nierówność

$$u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_n < u_m\left[\frac{a}{m+1}+\frac{a^2}{(m+1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{a^3}{(m+1)^3}+\cdots+\frac{a^{n-m}}{(m+1)^{n-m}}\right] \quad \ldots \quad (11)$$

Ponieważ nierówności (10) i (11) pociągają za sobą nierówność

$$\frac{a}{m+1} < 1,$$

przeto

$$\frac{a}{m+1}+\frac{a^2}{(m+1)^2}+\cdots\frac{a^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} < \frac{a}{m+1}+\frac{a^2}{(m+1)^2}+\frac{a^3}{(m+1)^2}+\cdots$$

to jest

$$\frac{a}{m+1}+\frac{a^2}{(m+1)^2}+\cdots+\frac{a^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} < \frac{\frac{a}{m+1}}{1-\frac{a}{m+1}} = \frac{a}{m+1-a}$$

a zatem

$$u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_n < \frac{a\cdot u_m}{m+1-a}$$

Stąd wnosimy, że będą zachodziły nierówności

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n - \frac{a u_m}{m+1-a} < 1+u_1+u_2+\cdots u_m < \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$$

Uważając każdy z wyrazów ostatnich nierówności jako ciąg, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n - \frac{a^{m+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m(m+1-a)} < 1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1\cdot 2}+$$

$$+\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{a^m}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m} < \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$$

Biorąc zaś pod rozwagę, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a,$$

otrzymujemy nierówność

$$e^a - \frac{a^{m+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m(m+1-a)} < 1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{a^m}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m} < e^a \quad (12)$$

Łatwo można udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a^{m+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m(m+1-a)}\right] = 0.$$

Oznaczmy przez p liczbę, spełniającą nierówności

$$p \leqslant a \leqslant p+1,$$

i załóżmy

$$\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\cdots\frac{a}{p} = A$$

W takim razie możemy napisać

$$\frac{a^m}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m} = A\cdot\frac{a}{p+1}\cdot\frac{a}{p+2}\cdots\frac{a}{m},$$

a zatem

$$\frac{a^m}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m} < A\cdot\left(\frac{a}{p+1}\right)^{m-p}$$

Ponieważ

$$\frac{a}{p+1} < 1,$$

przeto

$$\lim_{m\to\infty}\left[A\left(\frac{a}{p+1}\right)^{m-p}\right] = A\lim_{m\to\infty}\left[\left(\frac{a}{p+1}\right)^{m-p}\right] = 0$$

a zatem

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{a^m}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}\right] = 0$$

Wobec tego

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{a^{m+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m(m+1-a)}\right] = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{a^m}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}\right)\cdot$$

$$\cdot\lim_{m\to\infty}\left(\frac{a}{m+1-a}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (13)$$

Wracając do nierówności (12), będziemy mieli

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{a^m}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}\right) = \lim s_m = s = e^a$$

A więc

$$e^a = 1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1\cdot 2}+\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

w tym przypadku, gdy $a>0$

2. Przypuśćmy, że $a<0$. Łatwo można udowodnić, że zachodzą w takim razie nierówności

$$0 < u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n < u_m$$

Załóżmy, że $n > |a|$. Wówczas $r+1 \geq |a|$

Wobec tego będziemy mieli

$$\left|\frac{u_{r+1}}{u_r}\right| = \cdot\frac{|a|}{r+1}\left(1-\frac{r}{n}\right) < 1,$$

a zatem

$$|u_{r+1}| < u_r$$

W tym przypadku, gdy m jest liczbą parzystą, wówczas

$$u_m > 0 \quad u_{m+2} > 0 \quad u_{m+4} > 0, \ldots \text{ natomiast}$$
$$u_{m+1} < 0 \quad u_{m+3} < 0 \quad u_{m+5} < 0 \ldots$$

a zatem

$$u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n = u_m + (u_{m+1} + u_{m+2}) +$$
$$+ (u_{m+3} + u_{m+4}) + \cdots < u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n =$$
$$= (u_m + u_{m+1}) + (u_{m+2} + u_{m+3}) + \cdots > 0.$$

Zestawiając ostatnie wzory, otrzymujemy

$$0 < u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n < u_m \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

W tym przypadku, gdy m jest liczbą nieparzystą, w sposób całkiem analogiczny znajdziemy

$$0 > u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n > u_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Posługując się nierównościami (15) lub (16), możemy napisać

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = 1 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{m-1} + \theta\cdot u_m,$$

gdzie

$$1 > \theta > 0$$

Oznaczając

$$1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{a^{m-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-1)} = s_{m-1}$$

$$1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{a^m}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m} = s_m$$

i biorąc pod uwagę wzór (144) § 18 Rozdz. III

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a,$$

wnosimy, że zachodzą nierówności

$s_{m-1} < e^a < s_m$, jeżeli m jest liczbą parzystą,

lub nierówności

$s_{m-1} > e^a > s_m$, jeżeli m jest liczbą nieparzystą.

Biorąc pod uwagę, że

$$|s_m - s_{m-1}| = \frac{|a|^m}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m},$$

będziemy mieli ze względu na (13)

$$\lim_{m\to\infty}|s_m - s_{m-1}| = \lim_{m\to\infty}\frac{|a|^m}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m} = 0.$$

a zatem

$$\lim_{n \to \infty} s_m = e^a ,$$

to jest

$$e^a = 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1 \cdot 2} + \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

A więc wzór (14) zachodzi również w tym przypadku, gdy $a < 0$

Zakładając $a = 1$, otrzymamy

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} \qquad (17)$$

A więc liczba Neper'a jest sumą szeregu (17).

Obliczmy wartość przybliżoną sumy szeregu (17), czyli wartość przybliżoną na e. Obierzmy w tym celu pewną liczbę całkowitą dodatnią m.

Możemy wówczas napisać

$$e = s_m + R_m ,$$

gdzie

$$s_m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m},$$

a

$$R_m = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m(m+1)} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+1)(m+2)} + \cdots$$

Oczywista, zachodzi nierówność

$$R_m < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} \left[\frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+1)^3} + \cdots \right],$$

czyli

$$R_m < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} \cdot \frac{\frac{1}{m+1}}{1 - \frac{1}{m+1}} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} \cdot \frac{1}{m}$$

Możemy napisać

$$R_m = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} \cdot \frac{\theta}{m}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

gdzie

$$0 < \theta < 1.$$

Wyrazenie (18) przedstawia właśnie ten błąd, który popełniamy, przyjmując s_m za wartość na e.

Podajemy tu obliczenie przybliżone wartości na e, zakładając $m = 15$.

$$\begin{aligned}
1 + 1 &= 2 \\
\frac{1}{1 \cdot 2} &= 0,5 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} &= 0,166\,.\,666\,.\,666\,.\,667 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} &= 0,041\,.\,666\,.\,666\,.\,667 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} &= 0,008\,.\,333\,.\,333\,.\,333 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 6} &= 0,001\,.\,388\,.\,888\,.\,889 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 6 \cdot 7} &= 0,000\,.\,198\,.\,412\,.\,698 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 7 \cdot 8} &= 0,000\,.\,024\,.\,801\,.\,587 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 8 \cdot 9} &= 0,000\,.\,002\,.\,755\,.\,732 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 9 \cdot 10} &= 0,000\,.\,000\,.\,275\,.\,573 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 10 \cdot 11} &= 0,000\,.\,000\,.\,025\,.\,052 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 11 \cdot 12} &= 0,000\,.\,000\,.\,002\,.\,088 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 12 \cdot 13} &= 0,000\,.\,000\,.\,000\,.\,161 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 13 \cdot 14} &= 0,000\,.\,000\,.\,000\,.\,011 \\
\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 14 \cdot 15} &= 0,000\,.\,000\,.\,000\,.\,001 \\
e &= 2,718\,.\,281\,.\,828\,.\,459
\end{aligned}$$

W tym wypadku będziemy mieli

$$R_{15} < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 14 \cdot 15} \cdot \frac{1}{15} = 0,00000000000005$$

Łatwo udowodnić, ze e jest liczbą niewymierną.

Przypuśćmy, że to nie jest prawdą, to jest załóżmy wbrew rzeczywistości, że liczba e daje się przedstawić w postaci ułamka nieprzywiedlnego

$$e = \frac{p}{q}$$

Zakładając $m = q$, otrzymujemy nierówności

$$2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q} < \frac{p}{q} < 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q} \cdot \frac{1}{q}$$

Mnożąc te nierówności przez iloczyn

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q \cdot q,$$

otrzymujemy

$$N < p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q < N + 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

gdzie oznaczono

$$N = 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots q\cdot q + 1\cdot 3\cdot 4\cdots q\cdot q + \cdots + q$$

Nierówności (19) nie mogą mieć miejsca, a to z tego powodu, że między dwiema liczbami całkowitemi N i $N+1$ nie może się znajdować liczba całkowita $p\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots q$. Doszliśmy więc do sprzeczności, dowodzącej fałszywości naszego założenia, że e jest liczbą wymierną. A zatem e jest liczbą niewymierną. Matematyk francuski C. Hermite udowodnił, nadto że e jest liczbą przestępną.

§ **2. Twierdzenia podstawowe o szeregach.** Twierdzenie I

Jeżeli wyrazy szeregu zbieżnego

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

(o wyrazach dodatnich) pomnożymy odpowiednio przez wyrazy ciągu

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots a_n,\ \cdots$$

których wartości bezwzględne są mniejsze od pewnej liczby L, to otrzymany w ten sposób szereg

$$u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 + \cdots + u_n a_n + \cdots = \sum_{u=1}^{u=\infty} a_n u_n$$

będzie zbieżny.

Dowód. Dajmy na to, że istnieje taka liczba dodatnia L, iż zachodzi nierówność

$$|a_n| < L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

dla każdej wartości na n. Ponieważ szereg (20) jest zbieżny, przeto w myśl twierdzenia Cauchy'ego, do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n \geqslant m$ pociąga za sobą nierówność

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots + u_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{L} \quad . \quad . \quad (22)$$

dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej p.

W myśl nierówności (21) będziemy mieli

$$|u_{n+1}\cdot a_{n+1} + u_{n+2} a_{n+2} + u_{n+3}\cdot a_{n+3} + \cdots + u_{n+p} a_{n+p}| <$$
$$< |u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots + u_{n+p}|\cdot L,$$

czyli ze względu na nierówność (22)

$$|u_{n+1}\cdot a_{n+1} + u_{n+2}\cdot a_{n+2} + u_{n+3}\cdot a_{n+3} + \ldots + u_{n+p}\cdot a_{n+p}| < \varepsilon$$

Stąd wnosimy w myśl twierdzenia Cauchy'ego, że szereg

$$u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 + \cdots + u_n a_n + \cdots$$

będzie zbieżny, a na tem właśnie polega twierdzenie, o którego dowód chodziło. Z udowodnionego twierdzenia wypływają natychmiast wnioski następujące:

Wniosek I. Jeżeli szereg nieskończony

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

o wyrazach dodatnich jest rozbieżny, wówczas szereg otrzymany przez pomnożenie wyrazów szeregu Σu_n przez liczby, niemniejsze od pewnej liczby dodatniej, będzie również rozbieżny.

W samej rzeczy, gdyby otrzymany szereg był zbieżny, wówczas szereg dany $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n$ musiałby być również zbieżnym, w myśl udowodnionego twierdzenia. Jednakże szereg (23) jest rozbieżny, a zatem szereg, utworzony z wyrazów szeregu (23) przez pomnożenie przez liczby nie mniejsze od pewnej liczby dodatniej, będzie rozbieżny.

Wniosek II. Jeżeli szereg

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots$$

który otrzymamy, usuwając z szeregu (24) skończoną liczbę wyrazów, będzie również zbieżny.

Aby tego dowieść, wystarcza w powyższem twierdzeniu założyć niektóre liczby $a = o$, pozostałe zaś liczby $a = 1$.

Wniosek III. Szereg nieskończony

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

będzie zbieżny, jeżeli wartości bezwzględne jego wyrazów nie są większe od odpowiednich wartości pewnego szeregu zbieżnego o wyrazach dodatnich

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots = \sum_{n=1}^{n=\infty} v_n$$

Aby tego dowieść, zakładamy

$$u_1 = a_1 v_1;\quad u_2 = a_2 v_2;\quad u_3 = a_3 v_3 \cdots u_n = a_n v_n \cdots$$

gdzie a_1, a_2, $a_3 \cdots a_n \cdots$ są to liczby nie większe od jedności. W myśl udowodnionego twierdzenia wnosimy, że szereg (25) będzie zbieżny.

Wniosek IV. Szereg nieskończony będzie zbieżny, jeżeli szereg, utworzony z wartości bezwzględnych jego wyrazów, będzie zbieżny.

Aby tego dowieść, wystarcza założyć w udowodnionem twierdzeniu niektóre z liczb $a = 1$, inne zaś liczby $a = -1$. Odwrotny wniosek nie jest słuszny.

Przykłady. 1. Szereg Leibniza

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

będzie zbieżny, gdyż szereg

$$\frac{1}{1^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots$$

którego wyrazy są większe od odpowiednich wyrazów szeregu Leibniza, jest zbieżny.

2. Szereg

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots+\frac{1}{n^k}+\cdots$$

będzie rozbieżny przy $k<1$, gdyż wyrazy tego szeregu będą większe od odpowiednich wyrazów szeregu harmonicznego

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

który, jak wiadomo, jest rozbieżny.

Lemat Abela. Przypuśćmy; że wartości bezwzględne wyrazów ciągu

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \ldots.\ \sigma_n\ \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

są mniejsze od pewnej liczby L. Pomnóżmy wyrazy tego ciągu odpowiednio przez wyrazy ciągu monotonicznego

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots.\ \alpha_n\ \ldots.\ \ldots\ldots \quad (27)$$

(o wyrazach dodatnich). Abel udowodnił, że suma

$$\omega = \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2(\sigma_2-\sigma_1) + \alpha_3(\sigma_3-\sigma_2) + \cdots + \alpha_p(\sigma_p-\sigma_{p-1})$$

spełnia nierówności

$$|\omega| < L\alpha_1, \text{ jeżeli ciąg (27)}$$

jest malejący, lub też nierówności

$$|\omega| < L\alpha_p, \text{ jeżeli ten ciąg jest rosnący.}$$

Dowód. Aby tego dowieść napiszmy

$$\omega = \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2(\sigma_2-\sigma_1) + \alpha_3(\sigma_3-\sigma_2) + \cdots + \alpha_p(\sigma_p-\sigma_{p-1}) =$$
$$= (\alpha_1-\alpha_2)\sigma_1 + (\alpha_2-\alpha_3)\sigma_2 + \cdots + \alpha_p\sigma_p$$

W tym przypadku, gdy ciąg jest malejący, będzie zachodziła nierówność

$$|\omega| < [(\alpha_1-\alpha_2)+\cdots+(\alpha_{p-1}-\alpha_p)+\alpha_p]L = L\alpha_1$$

Jeżeli zaś ciąg (27) jest rosnący, wówczas będzie

$$|\omega| < [(\alpha_2-\alpha_1)+(\alpha_3-\alpha_2)+\cdots+(\alpha_{p-1}-\alpha_{p-1})+\alpha_p]\cdot L < 2L\alpha_p$$

a zatem

$$|\omega| < L\cdot\alpha_p$$

Udowodniliśmy więc lemat Abel'a.

Posługując się udowodnionym lematem, Abel uzasadnił twierdzenie następujące:

Twierdzenie Abela. Jeżeli wyrazy szeregu zbieżnego

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots = \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n \quad \ldots \quad (28)$$

pomnożymy odpowiednio przez wyrazy pewnego ciągu monotonicznego

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots.\ a_n\ \ldots,\quad \ldots\ldots \quad (29)$$

ograniczonego zgóry, wówczas otrzymany szereg będzie również zbieżny

Dowód. Załóżmy

$$\sigma_1 = u_{n+1} \qquad \alpha_1 = a_{n+1}$$
$$\sigma_2 = u_{n+1}+u_{n+2} \qquad \alpha_2 = a_{n+2}$$
$$\sigma_3 = u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3} \qquad \alpha_3 = a_{n+3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$
$$\sigma_p = u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\cdots+u_{n+p} \qquad \alpha_p = a_{n+p}$$

Ponieważ szereg (28) jest zbieżny, przeto w myśl kryterjum Cauchy'ego wartości bezwzględne

$$|\sigma_1|,\ |\sigma_2|,\ |\sigma_3|,\ \ldots.\ |\sigma_p|$$

przy dostatecznie wielkiej wartości p mogą się stać mniejsze od jakiejkolwiek liczby dodatniej ε.

Dajmy na to, że ciąg (29) jest malejący. Obierzmy liczbę L, spełniającą nierówność

$$L < \frac{\varepsilon}{a_{n+1}},$$

gdzie ε jest naprzód daną dowolną liczbą dodatnią.

W myśl powyżej udowodnionego lematu Abela, będziemy mieli

$$|a_{n+1}\cdot u_{n+1}+a_{n+2}\cdot u_{n+2}+a_{n+3}\cdot u_{n+3}+\cdots+a_{n+p}\cdot u_{n+p}|<La_{n+1}<\varepsilon$$

Stąd wnosimy w myśl kryterjum Cauchy'ego, że szereg

$$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+\cdots+a_nu_n+\cdots=\sum_{n=1}^{n=\infty}a_nu_n$$

jest zbieżny

Przypuśćmy teraz, że ciąg (29) jest rosnący, przytem wszyskie wyrazy tego ciągu są mniejsze od pewnej liczby β.

Zakładając

$$L<\frac{\varepsilon}{2a_{n+p}},$$

otrzymujemy w myśl lematu Abela

$$|a_{n+1}\cdot u_{n+1}+a_{n+2}\cdot u_{n+2}+\cdots+a_{n+p}\cdot u_{n+p}|<2La_{n+p}<\varepsilon$$

A zatem na mocy kryterjum Cauchy'ego szereg (28) będzie zbieżny. Udowodniliśmy więc twierdzenie Abela w zupełności.

§ 3. Szeregi o wyrazach naprzemian dodatnich i ujemnych. Kryterjum Bernoulli'ego.

Przypuśćmy, że mamy szereg nieskończony

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\pm u_n\mp u_{n+1}\mp\ldots \quad (30)$$

którego wyrazy są liczbami naprzemian dodatniemi i ujemnemi. Dla takich szeregów Bernoulli podał kryterjum następujące:

Kryterjum Bernoulli'ego. Na to, aby szereg (30) o wyrazach naprzemian dodatnich i ujemnych był zbieżny, wystarcza, żeby ciąg u_n był malejący, a nadto żeby

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

Dowód. Weźmy pod rozwagę wyrażenie

$$u_n-u_{n+1}+u_{n+2}-\cdots\pm u_{n+p}$$

Jeżeli p jest liczbą nieparzystą, to możemy napisać

$$u_n-u_{n+1}+u_{n+2}-\cdots\pm u_{n+p}=(u_n-u_{n+1})+(u_{n+2}-u_{n+3})+\cdots+(u_{n+p-1}-u_{n+p})$$

jeżeli zaś p jest liczbą parzystą, wówczas piszemy

$$u_n-u_{n+1}+u_{n+2}-\cdots\pm u_{n+p}=(u_n-u_{n+1})+(u_{n+2}-u_{n+3})+\cdots+(u_{n+p-2}-u_{n+p-1})+u_{n+p}$$

Ponieważ, według umowy

$$u_n>u_{n+1}>u_{n+2}>\cdots>u_{n+p-1}>u_{n+p},$$

przeto w obydwóch przypadkach będzie

$$u_n-u_{n+1}+u_{n+2}\cdots\pm u_{n+p}>0.$$

Stąd wnosimy, że

$$|s_{n+p}-s_n|=|\pm u_n\mp u_{n+1}\pm\cdots\pm u_{n+p}|=$$
$$=u_n-u_{n+1}+u_{n+2}-\cdots\pm u_{n+p} \quad (31)$$

Wyrażenie (31) można napisać jeszcze w postaci

$$u_n-u_{n+1}+u_{n+2}-\cdots\pm u_{n+p}=u_n-(u_{n+1}-u_{n+2})-$$
$$-(u_{n+3}-u_{n+4})-\cdots-(u_{n+p-2}-u_{n+p-1})-u_{n+p}, \quad (32)$$

jeżeli p jest liczbą nieparzystą, lub też w postaci

$$u_n-u_{n+1}+u_{n+2}-\cdots\pm u_{n+p}=u_n-(u_{n+1}-u_{n+2})-\cdots-$$
$$-(u_{n+p-1}-u_{n+p}), \quad (33)$$

jeżeli p jest liczbą nieparzystą.

Ze wzorów (32), (33) wnosimy, że zachodzi nierówność

$$u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots\pm u_{n+p}<u_n,$$

a zatem wobec (31)

$$|s_{n+p}-s_n|<u_n \quad (34)$$

Ponieważ, według umowy

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0,$$

przeto do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n\geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$|u_n|<\varepsilon \quad (35)$$

Zestawiając nierówności (34) i (35), otrzymujemy nierówność

$$|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon,$$

skoro $n\geq m$.

Stąd wnioskujemy w myśl twierdzenia Cauchy'ego, że szereg (30) jest zbieżny, a na tem właśnie polega kryterjum Bernoulli'ego.

Uwaga. Oznaczmy przez R_n błąd, który popełniamy, przyjmując sumę częściową s_{n-1} za sumę szeregu (30).

Będziemy więc mieli

$$R_n=S-s_{n-1}=\pm u_n\mp u_{n+1}\pm u_{n+2}\mp\cdots=\pm[(u_n-u_{n+1})+(u_{n+2}-u_{n+3})+\cdots]$$

Stąd wnosimy, że liczby R_n i u_n mają znaki jednakowe. Z drugiej zaś strony możemy napisać

$$R = \pm [u_n - (u_{n+1} - u_{n+2}) - (u_{n+3} - u_{n+4}) - \cdots],$$

a zatem

$$|R_n| < u_n$$

A więc błąd R_n, który popełniamy, przyjmując sumę częściową s_n szeregu (30) za sumę tego szeregu, będzie miał ten sam znak co i wyraz u_n szeregu, a przytem wartość bezwzględna błędu R_n będzie mniejsza od wyrazu u_n.

Przykłady 1. Weźmy pod rozwagę szereg Leibniza

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots \pm \frac{1}{n} \mp \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Ponieważ

$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, a nadto ciąg u_n jest malejący, przeto szereg Leibniza jest zbieżny.

2. Weźmy pod rozwagę szereg

$$2 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{2}{2m} - \frac{2}{2m} + \frac{2}{2m} \cdots$$

Aczkolwiek

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0,$$

jednakże, jak przekonamy się niebawem, szereg (36) będzie rozbieżny. Istotnie, ponieważ

$$\frac{2}{2m+1} - \frac{1}{2m} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{1}{2m} > 0,$$

przeto każdy wyraz szeregu o wskaźniku nieparzystym będzie większy od swego poprzedniego wyrazu o wskaźniku parzystym. Widzimy więc, że ciąg u_n nie będzie malejący, a zatem kryterjum Bernolli'ego nie można zastosować. Z drugiej zaś strony możemy szereg (3) napisać w postaci szeregu o wyrazach dodatnich, a mianowicie

$$\left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right) + \cdots$$

Ponieważ

$$\frac{2}{2m-1} - \frac{1}{2m} = \frac{2m+1}{(2m-1)2m} > \frac{1}{2m},$$

przeto wyrazy szeregu (36) będą mniejsze od odpowiednich wyrazów szeregu

$$\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2m} + \cdots$$

który można otrzymać, mnożąc wyrazy szeregu harmonicznego

przez $\frac{1}{2}$. Stąd wnosimy w myśl twierdzenia I (wniosek I) § 2, że szereg dany jest rozbieżny.

3. Rozważmy jeszcze szereg

$$\frac{a}{1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \cdots \pm \frac{a^n}{n} \mp \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

gdzie a jest liczbą, spełniającą nierówności

$$-1 \leqslant a \leqslant 1.$$

Ponieważ $\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n} = 0$,

a nadto ciąg u_n jest malejący, przeto w myśl kryterjum Bernoulli'ego szereg (37) będzie zbieżny. Udowodnijmy, że suma tego szeregu

$$s = \lg(1 + a)$$

(gdzie lg jest logarytm naturalny).

W tym celu weźmy pod rozwagę szereg

$$1 - m\alpha + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\alpha^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^3 + \cdots,$$

którego suma, jak udowodnimy niebawem, równa się $(1-a)^m$.

Zakładając $m = \frac{1}{n}$, otrzymujemy

$$(1-a)^{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} \cdot a + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)}{1 \cdot 2} a^2 - \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\left(\frac{1}{n} - 2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 + \cdots$$

Stąd

$$n\left[1 - (1-a)^{\frac{1}{n}}\right] = \frac{a}{1} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{a^2}{2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\frac{a^3}{3} + \cdots$$

Oznaczając

$$u_m = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left[1 - \frac{1}{(m-1)n}\right] \cdot \frac{a^m}{m},$$

możemy napisać

$$n\left[1 - (1-a)^{\frac{1}{n}}\right] = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_m + \cdots$$

Dajmy na to, że liczba m pozostaje bez zmiany; w takim razie będziemy mieli

$$\lim_{n \to \infty} u_m = \frac{a^m}{n}$$

Dalej mamy

$$u_{m+k} = u_m \left(1 - \frac{1}{mn}\right)\left[1 - \frac{1}{(m+1)n}\right] \cdots \left[1 - \frac{1}{(m+k-1)n}\right] \cdot \frac{mak}{m+k} < u_m a^k$$

Stąd wnosimy, że

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots < u_m (a + a^2 + a^3 + \cdots) = \frac{a u_m}{1-a},$$

a zatem

$$n\left[1-(1-a)^{\frac{1}{n}}\right] - \frac{a u_m}{1-a} < u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_m < n\left[1-(1-a)^{\frac{1}{n}}\right]$$

Z drugiej zaś strony rozważając ciąg

$$\beta_n = n\left(\alpha_n^{\frac{1}{n}} - 1\right),$$

otrzymamy

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{\beta_n}{n}\right)^n$$

Oznaczając granice ciągów α_n i β_n odpowiednio przez α i β, na mocy wzoru (144) str. 137, będziemy mieli

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{\beta_n}{n}\right)^n\right] = e^{\beta}$$

Stąd wynika, że

$$\beta = \lim_{n \to \infty} \left[n\left(\alpha^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right] = \lg \alpha$$

Zakładając w ostatnim wzorze $\alpha = 1 - a$, otrzymujemy

$$\lim_{n \to \infty} \left\{n\left[1-(1-a)^{\frac{1}{n}}\right]\right\} = -\lg(1-a).$$

Jeżeli liczba n rośnie nieograniczenie, liczba zaś m pozostaje niezmienną, wówczas

$$-\lg(1-a) - \frac{a^{m+1}}{m(1-a)} < \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{4} + \cdots + \frac{a^m}{m} < \lg(1-a)$$

Gdy zaś liczba m rośnie nieograniczenie, wówczas

$$-\lg(1-a) = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \cdots + \frac{a^m}{m} + \cdots\right)$$

Zastępując w tym wzorze a przez a^2, liczbę zaś n przez największą liczbę całkowitą, zawartą w $\frac{n}{2}$, i uwzględniając wzór

$$\lg(1+a) = \lg(1-a^2) - \lg(1-a)$$

otrzymujemy

$$\lg(1+a) = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{a}{1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \cdots \pm \frac{a^n}{n}\right),$$

czyli

$$\lg(1+a) = \frac{a}{1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \cdots \pm \frac{a^n}{n} \mp \cdots \quad \ldots \quad (38)$$

Zakładając $a = 1$, otrzymamy szereg

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots \pm \frac{1}{n} \mp \cdots$$

który będzie zbieżny, a przytem sumą tego szeregu będzie lg2. Przy $a = -1$, otrzymujemy szereg

$$-\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots\right), \quad \ldots \quad (39)$$

który jest rozbieżny.

Biorąc pod rozwagę szereg

$$\lg(1-a) = -\frac{a}{1} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} - \frac{a^m}{m} \cdots$$

widzimy, że przy $a = -1$ szereg ten będzie zbieżny, a przy $a = 1$ rozbieżny.

Zajmowaliśmy dotąd badaniem szeregów o wyrazach dodatnich, oraz szeregów o wyrazach naprzemian dodatnich i ujemnych. Zajmiemy się teraz badaniem szeregów o wyrazach dodatnich, i ujemnych, następujących po sobie w dowolnym porządku. Udowodnijmy w tym celu następujące twierdzenie, podane przez Dirichlet.

Twierdzenie Dirichlet. Szereg

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots \ldots \quad (40)$$

o wyrazach dodatnich i ujemnych (w liczbie nieskończonej) będzie zbieżnym, jeżeli szereg

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + \cdots |u_n| + \cdots \quad (41)$$

utworzony z wartości bezwzględnych wyrazów szeregu (40) będzie zbieżny.

Dowód. Dajmy na to że szereg $\Sigma |u_n|$ jest zbieżny. W takim razie w myśl kryterjum Cauchy'ego można do każdej dodatniej liczby ε dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n \geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \cdots + |u_{n+1}| < \varepsilon$$

dla dowolnej liczby p.

Biorąc zaś pod uwagę, że

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+|u_{n+3}|+\cdots+|u_{n+p}|,$$

otrzymujemy nierówność

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n-p}|<\varepsilon,$$

skoro $n\geq m$.

Stąd wnosimy, że szereg (40) będzie zbieżny, a na tem właśnie polega twierdzenie Dirichlet, o którego dowód chodziło.

§ **4. O szybkości zbieżności szeregów.** Dajmy na to, że dane są dwa szeregi

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$
$$v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

zbieżne, których reszta są odpowiednio r_n i ρ_n.

Z dwu szeregów (42) i (43) pierwszy nazywa się szybciej zbieżnym niż drugi, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{\rho_n}=0.$$

Przypuśćmy, że szeregi (42), i (43) są rozbieżne i oznaczmy sumy częściowe tych szeregów odpowiednio przez s_n i σ_n. O tych szeregach mówimy, że szereg (42) rozbiega się powolniej niż szereg (43), jeżeli

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{\sigma_n}=0.$$

Udowodnijmy twierdzenia następujące:

Twierdzenie I. Z dwu szeregów $\sum_{n=1}^{n=\infty}u_n$ i $\sum_{u=1}^{n=\infty}v_n$ o wyrazach dodatnich pierwszy będzie szybciej zbieżny lub powolniej rozbieżny niż drugi, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u^n}{v^n}=0.$$

Dowód. Przypuśćmy, że szeregi $\sum_{n=1}^{n=\infty}u_n$ i $\sum_{n=1}^{n=\infty}v_n$ są zbieżne. Oznaczmy

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n=s_n;\ v_1+v_2+v_3+\cdots v_n=\sigma_n.$$

Ponieważ szeregi dane są zbieżne, przeto ciągi u_n i v_n są malejące. W myśl zaś pierwszego twierdzenia Stolza będziemy mieli

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{\rho_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{r_n-r_{n+1}}{\rho_n-\rho_{n+1}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0.$$

Stąd wnosimy, że szereg $\sum_{n=1}^{n=\infty}u_n$ będzie szybciej zbieżny, niż szereg $\sum_{n=1}^{n=\infty}v_n$.

Dajmy na to, że szeregi dane są rozbieżne. W takim razie ciąg v_n będzie rosnący, a nieograniczony zgóry.

W myśl drugiego twierdzenia Stolza będziemy mieli

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{\sigma_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{s_n-s_{n-1}}{\sigma_u-\sigma_{n-1}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0.$$

Stąd wnosimy, że szereg $\sum_{n=1}^{n=\infty}u_n$ będzie powolniej rozbieżny, a na tem właśnie polega twierdzenie, o którego dowód chodziło.

Twierdzenie II. Jeżeli szereg

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\cdots+\frac{1}{u_n}+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

o wyrazach dodatnich jest rozbieżny, to będzie rozbieżnym również szereg

$$\frac{1}{u_1\sigma_1}+\frac{1}{u_2\sigma_2}+\frac{1}{u_3\sigma_3}+\cdots+\frac{1}{u_n\sigma_n}+\cdots, \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

w którym

$$\sigma_n=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\cdots+\frac{1}{u_n},$$

a przytem szereg (46) będzie powolniej rozbieżny niż szereg (45).

Dowód. Oznaczmy przez ω_n sumę n pierwszych wyrazów szeregu (46). Oczywista, będziemy mieli

$$\omega_{n+p}-\omega_n\geq\left[\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_{n+2}}+\cdots+\frac{1}{u_{n+p}}\right]\cdot\frac{1}{u_{n+p}}=1-\frac{\omega_n}{\omega_{n+p}}$$

Przypuszczając, że liczba n pozostaje bez zmiany, możemy do tej liczby dobrać taką liczbę p, aby zachodziła nierówność

$$\omega_{n+p}>2\omega_n$$

Wówczas będzie

$$\omega_{n+p}-\omega_n>\frac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Dajmy na to, że n rośnie nieograniczenie, przybierając różne wartości n_1, n_2, n_3 . . . Oznaczając przez p_1, p_2, p_3 . . . wartości na p (odpowiadające wartościom n_1, n_2, n_3 . . .), przy których

będzie zachodziła nierówność (47), widzimy, że $\lim_{n\to\infty}(\omega_{n+p}-\omega_n)$ nie jest zerem, a zatem konieczne kryterjum Cauchy'ego nie będzie spełnione. Stąd wnosimy, że szereg (46) będzie rozbieżny. Biorąc zaś pod uwagę, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{u_n\sigma_n}:\frac{1}{u_n}\right)=0,$$

wnosimy w myśl twierdzenia I, że szereg (46) będzie powolniej zbieżny niż szereg (45), a na tem właśnie polega twierdzenie, o którego dowód chodziło.

Posługując się udowodnionem twierdzeniem, możemy do każdego szeregu rozbieżnego dobrać szeregi powolniej rozbieżne, niż dany szereg.

Dajmy na to, że ciąg $\frac{1}{u_n}$ jest ograniczony zgóry. W takim razie ciąg u_n nie będzie nieograniczenie malejącym, a zatem ciąg $u_n\sigma_n$ będzie nieograniczenie rosnącym. Oznaczając $a_n=\lg\sigma_n$ · $b_n=\omega_n$, otrzymujemy w myśl drugiego twierdzenia Stolz'a.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}\right],$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lg\sigma_n}{\omega_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\lg\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}\right)}{\frac{1}{u_n\sigma_n}}\right]$$

Z drugiej zaś strony mamy

$$\lg\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}\right)=\lg\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_n-\frac{1}{u_n}}\right),$$

a zatem

$$\lg\left[\frac{\lg\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}\right)}{\frac{1}{u_n\sigma_u}}\right]=\lg\left[\left(\frac{\sigma_n-\frac{1}{u_u}}{\sigma_n}\right)^{-u_n\sigma_n}\right]=\lg\left[\left(1-\frac{1}{u_u\sigma_n}\right)^{-u_n\sigma_n}\right]$$

Stąd wnosimy, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lg\sigma_n}{\omega_n}\right)=\lg\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{u_n\sigma_n}\right)^{-u_n\sigma_n}\right]=\lg e=1 \quad (48)$$

W myśl twierdzenia II wnosimy, że szereg

$$\frac{1}{u_1\sigma_1\omega_1}+\frac{1}{u_2\sigma_2\omega_2}+\cdots+\frac{1}{u_n\sigma_n\omega_n}+\cdots \quad . \quad (49)$$

będzie rozbieżny, a nadto powolniej niż szereg (46). Uwzględniając zaś wzór (48) możemy stwierdzić że szereg

$$\frac{1}{u_1\sigma_1\lg\sigma_1}+\frac{1}{u_2\sigma_2\lg\sigma_2}+\cdots+\frac{1}{u_n\sigma_n\lg\sigma_n}+\cdots \quad . \quad (50)$$

będzie również rozbieżny, a nadto powolniej niż szereg (46). Oznaczając przez λ_n sumę n pierwszych wyrazów szeregu (50), w sposób analogiczny do powyższego udowodnimy, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lg\omega_n}{\lambda_n}\right)=1 \quad . \quad (51)$$

Zestawiając zaś wzory (48) i (51), otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lg\lg\sigma_n}{\lambda_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lg_2\sigma_n}{\lambda_n}\right)=1$$

A zatem szereg

$$\frac{1}{u_1\sigma_1\lg_2\sigma_1}+\cdots+\frac{1}{u_2\sigma_2\lg_2\sigma_2}+\cdots+\frac{1}{u_u\sigma_n\lg\sigma_n}+\cdots$$

będzie rozbieżny a przytem powolniej niż szereg (50).

W taki sam sposób możemy otrzymać nieskończenie wiele szeregów rozbieżnych, z których każdy następny będzie się rozbiegał powolniej niż poprzedni.

Zakładając naprzykład $u_n=1$, otrzymujemy szeregi rozbieżne:

$$1+1+1+\cdots+1+\cdots$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

$$\frac{1}{2\lg 2}+\frac{1}{3\lg 3}+\frac{1}{4\lg 4}+\cdots+\frac{1}{n\lg n}\cdots \quad . \quad (52)$$

$$\frac{1}{2\lg_2 2}+\frac{1}{3\lg_2 3}+\frac{1}{4\lg_2 4}+\cdots+\frac{1}{n\lg_2 n}+\cdots$$

i t. d. Każdy następny z tych szeregów będzie się rozbiegał powolniej niż poprzedni.

§ **5. Kryterja zbieżności pierwszej kategorji.** Wszystkie kryterja zbieżności szeregów nieskończonych dają się podzielić na dwie kategorje, a mianowicie: 1) kryterja oparte na badaniu ogólnego wyrazu szeregu i 2) kryterja oparte na badaniu stosunku dwóch sąsiednich wyrazów szeregu*). Zaczynamy więc z rozważania kryterjów pierwszej kategorji.

*) Należy zaznaczyć, że istnieją kryterja zbieżności szeregów których niemożna zaliczyć ani do pierwszej ani do drugiej kategorji. Takie są naprzykład kryterja, podane przez Pringsheima, kryterja całkowe i t. p.

I. Jeżeli szereg nieskończony

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

jest zbieżny, szereg zaś

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \cdots + \frac{1}{a_n} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

o wyrazach dodatnich jest rozbieżny, to granica ciągu $a_n u_n$ (jeżeli ta granica wogóle istnieje) musi być zerem.

Aby tego dowieść, przypuśćmy że $\lim_{n \to \infty} a_n u_n$ nie jest zerem.

W takim razie można znaleźć taką liczbę dodatnią α, przy której będą zachodziły nierówności

$$a_n u_n > \alpha > 0,$$

czyli

$$u_n > \frac{\alpha}{a_n}$$

A więc wyrazy szeregu (53) będą większe od odpowiednich wyrazów szeregu $\sum \frac{\alpha}{a_n}$ który właśnie będzie rozbieżny, skoro szereg (54) jest rozbieżny; a zatem ponieważ wedle umowy szereg (53) jest zbieżny, przeto przypuszczenie, że granica $a_n u_n$ przy $n \to \infty$ nie jest zerem, było niesłuszne.

A więc $\lim_{n \to \infty} a_n u_n = 0$

Zakładamy $a_n = n$. Wówczas szereg (54) będzie harmoniczny, a zatem rozbieżny. Stąd wnosimy że w szeregu zbieżnym o wyrazach dodatnich (o ile taka granica istnieje) równa się zeru.

Należy zauważyć że warunek $\lim_{n \to \infty} a_n u_n = 0$ nie jest ani koniecznym, ani dostatecznym, są bowiem szeregi zbieżne, wcale nie posiadające określonej granicy $a_n u_n$, z drugiej zaś strony są szeregi rozbieżne, dla których jednak warunek $\lim_{n \to \infty} a_n u_n = 0$ jest spełniony. Abel pierwszy udowodnił, że nie można znaleźć takiego ciągu a_n, aby warunek ten był kryterjum decydującem przy badaniu zbieżności szeregu. W samej rzeczy szereg

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \cdots$$

musi być rozbieżny, gdyż dla niego $u_n = \frac{1}{a_n}$ a zatem $\lim_{n \to \infty} u_n a_n = 1$.

Na mocy twierdzenia II § 4 szereg

$$\frac{1}{a_1 \sigma_1} + \frac{1}{a_2 \sigma_2} + \cdots + \frac{1}{a_n \sigma_n} + \cdots$$

gdzie σ_1 jest to suma n pierwszych wyrazów szeregu (54), będzie również rozbieżny. Dla tego jednak szeregu będzie

$$u_n = \frac{1}{a_n \sigma_n}, \quad \text{a zatem} \quad \lim_{n \to \infty} a_n u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sigma_n} = 0.$$

Catalan udowodnił twierdzenie następujące:

Twierdzenie Catalan'a. Jeżeli szereg

$$u_1 + u_2 + u^5 + \cdots + u_u + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

o wyrazach dodatnich wciąż malejących jest zbieżny, to niezawodnie

$$\lim_{n \to \infty} n u_n = 0.$$

Dowód. Twierdzenie Catalan'a łatwo udowodnimy, posługując się drugiem twierdzeniem Stolza (§ Roz.). Oznaczmy jak zwykle

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = s_n$$

i zakładamy

$$a_n = \frac{s_n}{u_n} - n, \quad b_n = \frac{1}{u_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Ponieważ szereg (55) jest zbieżny, przeto niezawodnie

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

Stąd wnosimy, że ciąg b_n będzie rosnący a nieograniczony zgóry.

W takim razie w myśl drugiego twierdzenia Stolza będzie

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

Będziemy mieli więc

$$\frac{a_n}{b_n} \left(\frac{s_n}{u_n} - n \right) u_n = s_n - n u_n$$

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \frac{s_n u_{n-1} - s_{n-1} u_n + u_n u_{n-1}}{u_{n-1} - u_n}$$

Podstawiając w ostatnim wzorze

$$s_n = s_{n-1} + u_n$$

otrzymujemy po uproszczeniu

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = s_{n-1}$$

A zatem ze względu na (56)

$$\lim_{n\to\infty} s_n - n u_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} n u_n = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

A na tem właśnie polega twierdzenie Catalana, o którego dowód nam chodziło.

Kryterjum Catalan'a. Szereg nieskończony

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

będzie zbieżny, jeżeli można znaleźć taką liczbę $k > 1$, przy której iloczyn $n^k u_n$ będzie liczbą skończoną.

W samej rzeczy, jeżeli $n^k u_n$ jest liczbą skończoną, wówczas będzie zachodziła nierówność

$$n^k u_n < M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

gdzie M jest pewna liczba określona.

Z nierówności (59) mamy

$$u_n < \frac{M}{n^k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

A więc wyrazy szeregu (58) będą mniejsze od odpowiednich wyrazów szeregu

$$\frac{M}{1^k} + \frac{M}{2^k} + \frac{M}{3^k} + \cdots + \frac{M}{n^k} + \cdots$$

Ostatni szereg będzie zbieżny przy $k > 1$, gdyż wtedy szereg

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{n^k} + \cdots$$

jest zbieżny. Z nierówności (60) wnosimy, że szereg (58) będzie również zbieżny. A więc udowodniliśmy kryterjum Catalan'a.

Przykład. Weźmy pod rozwagę szereg, którego wyraz ogólny

$$u_n = \frac{2n^2 - n + 1}{3n^4 + n - 1}$$

Dla tego szeregu będzie

$$n^2 u_n = \frac{2n^4 - n^3 + n^2}{3n^4 + n - 1} = \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}}$$

Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}} \right) = \frac{2}{3}$$

Stąd wnosimy, że szereg dany będzie zbieżny.

Kryterjum Catalan'a można uogólnić natychmiast w sposób następujący:

Szereg nieskończony, którego ogólny wyraz jest

$$u_u = \frac{a_0 n^l + a_1 n^{l-1} + a_2 n^{l-2} + \cdots + a_{l-1} n + a^l}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + b_2 n^{m-2} + \cdots + b^{m-1} n + b_m}$$

będzie zbieżny, jeżeli $l \leq m - 2$, a rozbieżny jeżeli $l \geq m - 1$. Uogólnienie kryterjum Catalan'a pozostawiamy czytelnikowi.

Twierdzenie Cauchy'ego. Szereg nieskończony

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

o wyrazach dodatnich jest zbieżny, jeżeli począwszy od pewnej wartości na $n \geq m$ będzie zachodziła nierówność

$$\sqrt[n]{u_n} < \alpha < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Szereg (61) będzie rozbieżny, jeżeli począwszy od pewnej wartości na $n \geq m$, będzie zachodziła nierówność

$$\sqrt[n]{u_n} > 1.$$

Dowód. Dajmy na to, że dla $n \geq m$ zachodzi nierówność (62). Porównywamy szereg (61) z postępem geometrycznym

$$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^n + \cdots$$

gdzie $\alpha < 1$.

Szereg (61), jak wiadomo, jest zbieżny. Ponieważ dla wszystkich wartości $n \geq m$ zachodzi nierówność (62), przeto

$$u_n < \alpha^n,$$

a zatem szereg (61) będzie zbieżny.

Jeżeli zaś począwszy od pewnej wartości $n \geq m$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{u_n} > 1,$$

to

$$u_n > 1,$$

a zatem szereg (61) będzie rozbieżny, gdyż warunek konieczny zbieżności szeregu, wypływający z ogólnego kryterjum Cauchy'ego (§ 1), nie jest spełniony. Udowodniliśmy więc twierdzenie Cauchy'ego.

Na udowodnionem twierdzeniu oparte jest następujące kryterjum zbieżności szeregów:

Kryterjum Cauchy'ego. Szereg nieskończony

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \quad . \ . \ . \ . \quad (62)$$

jest zbieżny lub rozbieżny stosownie do tego czy $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ będzie liczbą mniejszą czy też większą od jedności.

Weźmy pod rozwagę ten przypadek, gdy

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1.$$

Oczywista, do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n\geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$\sqrt[n]{u_n}-L<\varepsilon.$$

Założymy $\varepsilon=\frac{1-L}{2}$, wówczas dla każdej liczby $n\geq m$ zachodzić będą nierówności

$$\sqrt[n]{u_n}<\frac{1+L}{2}<1.$$

W myśl zaś udowodnionego twierdzenia Cauchy'ego wnosimy, że szereg (62) będzie zbieżny.

Dajmy na to, że

$$L>1$$

Zakładając $\varepsilon=\frac{L-1}{2}$, widzimy, że dla każdej liczby $n\geq m$ będzie zachodziła nierówność

$$-\frac{L-1}{2}<\sqrt[n]{u_n}<L,$$

czyli

$$\sqrt[n]{u_n}>\frac{L+1}{2}>1.$$

Stąd wnosimy w myśl udowodnionego twierdzenia Cauchy'ego, że szereg (62) jest rozbieżny.

Kryterjum Cauchy'ego nie daje odpowiedzi na to czy dany szereg jest zbieżny czy też rozbieżny w przypadku gdy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1.$$

Jest to właśnie przypadek wątpliwy, w którym uciec się trzeba do innych kryterjów zbieżnosci. Należy jednak zauważyć, że jeżeli ciąg $\sqrt[n]{u_n}$ jest rosnący, a nadto $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$, wówczas szereg (62) będzie napewno rozbieżny.

Przykład. Weźmy pod rozwagę już dobrze znany szereg

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots+\frac{1}{n^k}+\cdots, \quad . \ . \ . \quad (63)$$

w którym oznaczmy

$$v_1=\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}$$

$$v_2=\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{6^k}+\frac{1}{7^k}$$

. . . . . .

$$v_n=\frac{1}{(2^{n-1})^k}+\frac{1}{(2^{n-1}+1)^k}+\frac{1}{(2^{n-1}+2)^k}+\cdots+\frac{1}{(2^n-1)^k}$$

Oczywista

$$v_1<1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}=1+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$v_2<\frac{1}{4^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{4^k}=\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$v_n<\frac{1}{(2^n)^k}+\frac{1}{(2^n)^k}+\cdots+\frac{1}{(2^n)^k}=\left(\frac{1}{2^n}\right)^{k-1}$$

. . . . . .

Ponieważ

$$v_1<1+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1};\quad \sqrt[n]{v_2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1};\quad \cdots\ \sqrt[n]{v_n}<\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}<1,$$

przeto w myśl twierdzenia Cauchy'ego szereg

$$v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n$$

będzie zbieżny, skoro $k<1$; a zatem będzie zbieżny i szereg (63).

Dajmy na to, że $k \leqslant 1$. Oznaczmy

$$v_1 = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k}$$

$$v_2 = \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k}$$

$$v_3 = \frac{1}{5^k} + \frac{1}{6^k} + \frac{1}{7^k} + \frac{1}{8^k}$$

. . . . . .

$$v_n = \frac{1}{(2^{n-1}+1)^k} + \frac{1}{(2^{n-1}+2)^k} + \cdots + \frac{1}{(2^n)^k}$$

. . . . . .

Oczywista

$$v_1 > \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^k}; \quad 2v_1 > 2^{2-k}$$

$$v_2 > \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^k} = \frac{2}{4^k}; \quad 2v_2 > 4^{1-k}$$

$$v_3 > \frac{1}{8^k} + \frac{1}{8^k} + \frac{1}{8^k} + \frac{1}{8^k}; \quad 2v_3 > 8^{1-k}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$v_n > \frac{1}{(2^n)^k} + \frac{1}{(2^n)^k} + \cdots + \frac{1}{(2^n)^k}; \quad 2v_n > (2^n)^{1-k}$$

. . . . . .

Stąd wnosimy, że

$$\sqrt{2v_1} = 2^{1-\frac{k}{2}}; \quad \sqrt{2v_2} > 2^{1-k}; \quad \sqrt{2v_3} > 2^{1-k} \ldots .$$

wogóle

$$\sqrt[n]{2v_n} > 2^{1-k}$$

Ponieważ $k \leqslant 1$, przeto $\sqrt[n]{2v_n} \geqslant 1$, a zatem w myśl twierdzenia Cauchy'ego szereg

$$2v_1 + 2v_2 + 2v_3 + \cdots + 2v_n + \cdots$$

będzie rozbieżny przy $k \leqslant 1$. Dowodzi to, że szereg (63) w tym przypadku będzie również rozbieżny.

Uwaga. Widzimy że twierdzeniu Cauchy'ego w zastosowaniu do szeregu (63) daje zupełnie określoną odpowiedź, natomiast kryterjum Cauchy'ego dla tego szeregu nie daje odpowiedzi co do jego zbieżności, gdyż

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^k}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^k = 1.$$

Udowodnijmy jeszcze jedno twierdzenie, podane przez Cauchy'ego.

Twierdzenie Cauchy'ego. Szereg nieskończony

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

o wyrazach dodatnich jest zbieżny lub rozbieżny, stosownie do tego, czy począwszy od pewnego miejsca, to jest od pewnej wartości na $n \geqslant m$, zachodzi nierówność

$$\frac{\lg \frac{1}{u_n}}{\lg n} > p > 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

lub też nierówność

$$\frac{\lg \frac{1}{u_n}}{\lg n} < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

Dowód. Weźmy już znany szereg zbieżny

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

pod warunkiem, że $p > 1$. Z nierówności (65) wynika, że

$$\lg \frac{1}{u_n} < p \lg n$$

Skąd $\frac{1}{u_n} > n^k$, czyli $u_n < \frac{1}{n^k}$.

A więc, począwszy od pewnego miejsca, wyrazy szeregu (64) będą mniejsze od odpowiednich wyrazów ciągu zbieżnego (67), a zatem szereg (64) będzie zbieżny.

Jeżeli dla każdej wartości na $n \geqslant m$ zachodzi nierówność (66), wówczas

$$\frac{1}{u_n} < n, \quad \text{czyli} \quad u_n > \frac{1}{n}.$$

A więc począwszy od pewnego miejsca, wyrazy szeregu (64) będą większe od odpowiednich wyrazów szeregu harmonicznego, a zatem szereg (64) będzie rozbieżny. Udowodniliśmy więc

twierdzenie Cauchy'ego. Na tem twierdzeniu oparte jest następujące kryterjum, który nazywamy logarytmowem kryterjum Cauchy'ego.

Logarytmowe kryterjum Cauchy'ego. Szereg

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

o wyrazach dodatnich jest zbieżny lub rozbieżny, stosownie do tego, czy granica

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg\frac{1}{u_n}}{\lg n}$$

jest liczbą większą lub też mniejszą od jedności, gdy zaś ta granica równa się jedności, wówczas kryterjum Cauchy'ego nie daje odpowiedzi na to, czy dany szereg jest zbieżny, czy też nie.

Przykłady: Weźmy pod rozwagę szeregi, których wyrazy ogólne są

$$u_n=\frac{1}{(\lg n)^{\lg n}};\quad v_n=\frac{1}{(\lg_2 n)^{\lg n}};\quad w_n=\frac{1}{(\lg n)^{\lg_2 n}}$$

Dla tych szeregów będzie odpowiednio

$$p_n=\frac{\lg\frac{1}{u_n}}{u_n}=\lg_2 n;\quad q_n=\frac{\lg\frac{1}{v_n}}{v_n}=\lg_3 n;\quad r=\frac{\lg\frac{1}{w_n}}{w_n}=\frac{(\lg_2 n)^2}{\lg n}$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\infty;\quad \lim_{n\to\infty}q_n=\infty;\quad \lim_{n\to\infty}r_n=0,$$

przeto w myśl kryterjum logarytmowego Cauchy'ego szeregi Σu_n i Σv_n są zbieżne, a szereg Σw_n — rozbieżny.

Twierdzenie Jameta. Szereg o wyrazach dodatnich

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68a)$$

jest zbieżny, jeżeli można wyznaczyć taką liczbę całkowitą dodatnią m, iż dla każdej liczby $n\geq m$ będzie zachodziła nierówność

$$(1-\sqrt[n]{u_n})\frac{n}{\lg n}>k>1.$$

Szereg o wyrazach dodatnich jest rozbieżny, jeżeli począwszy od dostatecznie wielkiej wartości n, wciąż zachodzi nierówność

$$(1-\sqrt[n]{u_n})\frac{n}{\lg n}\leq 1.$$

Dowód. Załóżmy $u_n=\frac{1}{n^{\alpha_n}}$. W takim razie będzie

$$\sqrt[n]{u_n}=n^{-\frac{\alpha_n}{n}},\quad \text{czyli}\quad \sqrt[n]{u_n}=e^{-\frac{\alpha_n}{n}\lg n}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$e^{-\frac{\alpha_n}{n}\lg n}>1-\frac{\alpha_n}{n}\lg n$$

widzimy, że

$$\alpha_n>(1-\sqrt[n]{u_n})\frac{n}{\lg n}$$

Jeżeli $k>l$, to $\alpha>k>1$ dla każdej liczby $n\geq m$.

Ponieważ wyrazy szeregu

$$\frac{1}{1^{\alpha_1}}+\frac{1}{2^{\alpha_2}}+\frac{1}{3^{\alpha_3}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha_n}}+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

są mniejsze od odpowiednich wyrazów szeregu

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots+\frac{1}{n^k}+\cdots$$

przeto szereg (68a) będzie zbieżny.

Dajmy na to, że począwszy od pewnej wartości n, zachodzi nierówność

$$(1-\sqrt[n]{u_n})\cdot\frac{n}{\lg n}\leq 1.$$

W takim razie będzie

$$u_n\geq\left(1-\frac{1}{n}\lg n\right)^n$$

Weźmy pod rozwagę szereg

$$1+\left(1-\frac{1}{2}\lg 2\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\lg 3\right)^3+\left(1-\frac{1}{4}\lg 4\right)^4+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\lg n\right)^n+\cdots$$

i załóżmy

$$\frac{n}{\lg n}=\mu_n$$

Będziemy mieli

$$\lg n\cdot u_n=\left[1+\mu_n\lg\left(1-\frac{1}{\mu_n}\right)\right]\lg n\cdots \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

Ponieważ

$$\lg\left(1-\frac{1}{\mu_n}\right)<-\frac{1}{\mu_n}$$

przeto zachodzą nierówności

$$\frac{1}{\mu_n} < -\lg\left(1-\frac{1}{\mu_n}\right) = \lg\left(1+\frac{1}{\mu_n-1}\right) < \frac{1}{\mu_n-1},$$

a zatem ze względu na (70)

$$0 < \lg n\cdot u_n < \frac{\lg n}{\mu_n - 1} \quad \ldots\ldots \quad (71)$$

możemy dalej napisać

$$\frac{\lg n}{\mu_n - 1} = \frac{\mu_n}{\mu_n - 1}\cdot\frac{\lg^2 n}{n} \quad \ldots\ldots \quad (72)$$

Udowodnijmy najpierw kilka wzorów nieco ogólniejszych. Rozważmy ciąg $\frac{n}{a^n}$, gdzie a jest pewną liczbą dodatnią, większą od jedności. Załóżmy $a=1+\alpha$, gdzie $\alpha>0$. W takim razie będzie

$$a^n = (1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^2 + \cdots + \alpha^n$$

Ponieważ wszystkie wyrazy w prawej części ostatniego wzoru są liczbami dodatniemi, przeto

$$a^n > \frac{n(n-1)\cdot\alpha}{1\cdot 2},$$

a zatem

$$0 < \frac{n}{a^n} < \frac{2}{(n-1)\alpha}$$

Stąd wnosimy, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{a^n}\right) = 0.$$

Zakładając

$$a^n = \omega_n,$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lg_a \omega_n}{\omega_n}\right) = 0, \quad \ldots\ldots \quad (73)$$

skoro $\lim_{n\to\infty}\omega_n = \infty$.

Znajdziemy jeszcze granicę ciągu

$$\frac{\lg_a^m \omega_n}{\omega_n^{\frac{p}{m}}}$$

przy $n\to\infty$. Możemy napisać

$$\frac{\lg_a^m \omega_n}{\omega_n^{\frac{p}{m}}}\left(\frac{\lg_a^m \omega_n}{\omega_n^{\frac{p}{m}}}\right)^m$$

Oznaczmy $\omega_n^{\frac{p}{m}} = \alpha_n$. W takim razie będzie

$$\frac{p}{m}\lg_a \omega_n = \lg_a \alpha_n,$$

czyli

$$\lg_a \omega_n = \frac{m}{p}\lg_a \alpha_n$$

A więc

$$\frac{\lg_a^m \omega_n}{\omega_n^{\frac{p}{m}}} = \left[\frac{m}{p}\left(\frac{\lg_a \alpha_n}{\alpha_n}\right)\right]^m$$

Stąd wnosimy, że

$$\lim\left[\frac{\lg_a^m \omega_n}{\omega_n^{\frac{p}{m}}}\right] = \left(\frac{m}{p}\right)^m \cdot \lim\left(\frac{\lg_a \alpha_n}{\alpha_n}\right)^m = 0, \quad \ldots \quad (74)$$

skoro $\lim_{n\to\infty}\omega_n = \infty$.

Wracając do wzoru (72), będziemy mieli przy $a=e$ wobec (73).

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\lg n}\right) = \infty, \quad \text{a zatem}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mu_n}{\mu_n - 1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\mu_n}}\right) = 1$$

Na mocy zaś wzoru (74) otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\lg^2 n}{n}\right] = 0$$

Stąd wnosimy, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lg n}{n-1}\right) = 0.$$

Uwzględniając zaś nierówności (71), otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}(\lg n\, u_n) = \lg \lim_{n\to\infty}(n\cdot u_n) = 0.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty}(n\cdot u_n) = 1.$$

W myśl twierdzenia Catalana § 5 będzie szereg (68a) rozbieżny.

A więc dowiedliśmy twierdzenia Jameta w zupełności. Na tem twierdzeniu opiera się kryterjum następujące:

Kryterjum Jamet. Szereg $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny lub rozbieżny, stosownie do tego, czy granica

$$L=\lim\left[\left(1-\sqrt[n]{u_n}\right)\cdot\frac{\lg n}{n}\right]$$

jest większa, lub też mniejsza od jedności.

Przy $L=1$ mamy do czynienia z przypadkiem wątpliwym.

§ 6. **Kryterja zbieżności drugiej kategorji.** Kryterja drugiej kategorji, jak już zaznaczono, oparte są na badaniu stosunku dwu sąsiednich wyrazów szeregu. Udowodnijmy następujący lemat podany przez Duhamel'a:

Lemat Duhamel'a: 1. Szereg nieskończony

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

o wyrazach dodatnich, jest zbieżny, jeżeli można wyznaczyć taką liczbę całkowitą m, iż dla każdej liczby $n\geq m$ będzie zachodziła nierówność

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{v_{n+1}}{v_n},$$

gdzie $v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n+\cdots$ jest pewien szereg zbieżny.

2. Szereg nieskończony (75) jest rozbieżny, jeżeli można wyznaczyć taką liczbę całkowitą dodatnią m, iż dla każdej liczby $n\geq m$ będzie zachodziła nierówność

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\frac{v_{n+1}}{v_u},$$

gdzie $v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots$ jest pewien szereg rozbieżny.

Dowód 1. Dajmy na to, że $v_1+v_2+v_3\cdots+v_n+\cdots$ oznacza pewien szereg zbieżny. Ponieważ według umowy istnieje taka liczba całkowita dodatnia m, przy której nierówność $n\geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{v_{n+1}}{v_n},$$

przeto przy $n\geq m$ będzie

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}<\frac{u_n}{v_n}$$

A więc ciąg $\frac{u_n}{v_n}$ będzie malejący, a zatem ograniczony zgóry.

Ponieważ szereg Σv_n jest zbieżny, przeto szereg

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}u_u=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{u_n}{v_n}\cdot v_n$$

w myśl twierdzenia Abela będzie równiez zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{u=\infty}v_n$

2. Dajmy na to, że szereg jest rozbieżny. Jeżeli dla każdej liczby $n\geq m$ będzie zachodziła nierówność

$$\frac{u_{u+1}}{u_n}>\frac{v_{n+1}}{v_n},$$

to

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}>\frac{u_n}{v_n}$$

Stąd wnosimy, że ciąg $\underset{n=\infty}{\frac{u_n}{v_n}}$ jest rosnący, a zatem ograniczony zdołu. Ponieważ szereg $\underset{n=1}{\Sigma v_n}$ jest rozbieżny, przeto w myśl wniosku 1 do twierdzenia I § 2 szereg

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}u_n=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{u_n}{v_n}\cdot v_n$$

będzie rozbieżny. A więc dowiedliśmy lematu Duhamel'a.

Twierdzenie Dalembert'a. 1. Szereg nieskończony

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

o wyrazach dodatnich jest zbieżny, jeżeli można wyznaczyć taką liczbę całkowitą m, iż dla każdej liczby $n\geq m$ będzie zachodziła nierówność

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<q<1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

2. Szereg nieskończony (76) będzie rozbieżny, jeżeli można wyznaczyć taką liczbę całkowitą dodatnią, iż dla każdej liczby $n\geq m$ będzie zachodziła nierówność

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

Dowód. 1. Weźmy pod rozwagę szereg

$$1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

i załóżmy $v_n=q_{n-1}$. W takim razie będzie $\frac{v_{n+1}}{v_n}=q$.

Z nierówności (77) wynika, że

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Ponieważ przy $k<1$ szereg (79) jest zbieżny, przeto w myśl lematu Duhamel'a szereg (76) będzie również zbieżny.

2. Jeżeli $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ dla każdej liczby $n\geq m$, to $u_{n+1}>u_n$.

A więc począwszy od pewnego miejsca wyrazy szeregu u_n rosną wraz z n. Stąd wnosimy, że ogólne kryterjum Cauchy'ego nie jest spełnione, a zatem szereg (76) będzie rozbieżny.

Udowodniliśmy więc twierdzenie Dalembert'a w zupełności.

Na udowodnionem twierdzeniu oparte jest następujące kryterjum:

Kryterjum Dalemberta. Szereg nieskończony $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$ o wyrazach dodatnich będzie zbieżny lub rozbieżny, stosownie do tego czy będzie granica $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=L$ mniejsza, lub też większa od jedności [1]).

Dowód. Dajmy na to, że $L<1$. Ponieważ L jest granica stosunku $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, przeto do każdej liczby dodatniej ε możemy dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n\geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-L\right|<\varepsilon$$

Obieramy $\varepsilon=\frac{1-L}{2}$. W takim razie zachodzi dla każdej liczby $n\geq m$ nierówność

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}-L<\frac{1-L}{2},$$

czyli

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{1+L}{2}<1,$$

a zatem w myśl twierdzenia Dalembert'a dany szereg będzie zbieżny.

Przypuśćmy teraz, że $L<1$. Obieramy $\varepsilon=\frac{L-1}{2}$.

W takim razie dla każdej liczby $n\geq m$ będzie zachodziła nierówność:

$$-\frac{L-1}{2}<\frac{u_{n+1}}{u_n}-L.$$

Skąd

$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\frac{L+1}{2}>1$, skoro $n\geq m$, a zatem w myśl twierdzenia Dalembert'a szereg dany będzie rozbieżny. W tym przypadku, gdy $L=1$ kryterjum Dalembert'a nie daje odpowiedzi na to czy szereg będzie zbieżny, lub też rozbieżny. Mamy tu do czynienia z przypadkiem wątpliwym, albowiem wówczas szereg może być zbieżny lub rozbieżny. Jeżeli jednak stosunek $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pozostaje wciąż większy od 1, to szereg dany będzie napewno rozbieżny, gdyż będzie zachodziła dla każdej wartości na n nierówność $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$.

[1]) Wzór (152) $\lim\sqrt[n]{u_n}=\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}$ udowodniony na str. 144 daje natychmiast możność ustalić związek między kryterjum Cauchy'ego a kryterjum Dalemberta.

Przykłady. 1. Weźmy pod rozwagę szereg

$$1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1\cdot2}+\frac{a^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots+\frac{a^n}{1\cdot2\cdot3\cdots n}+\cdots \quad (80)$$

Zastosujmy do tego szeregu kryterjum Dalembert'a. Będziemy więc mieli

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a_n}{1\cdot2\cdot3\cdots n}:\frac{a^{n-1}}{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}=\frac{a}{n},$$

a zatem

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=0.$$

Stąd wnosimy, że dla każdej liczby a szereg (80) jest zbieżny. W § 1 przykł. V udowodniliśmy, że suma tego szeregu równa się e^a.

2. Weźmy pod rozwagę szereg:

$$1+\left(\frac{a}{1}\right)^1+1\cdot2\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2+1\cdot2\cdot3\left(\frac{a}{3}\right)^3+\cdots+1\cdot2\cdot3\cdots n\left(\frac{a}{n}\right)^n+\cdots$$

Zastosujmy do tego szeregu kryterjum Dalembert'a. Będziemy więc mieli

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=a\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}=\frac{a\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{1-\frac{1}{n}},$$

a zatem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\frac{a}{e}$$

Stąd wnosimy, że szereg będzie zbieżny, gdy $a<e$, a rozbieżny przy $a>e$. Gdy $a=e$, wówczas będziemy mieli do czynienia z przypadkiem wątpliwym.

3. Weźmy znany już szereg harmoniczny

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \quad (81)$$

Dla tego szeregu będzie

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}},\quad \text{a zatem}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1.$$

Jakkolwiek $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, a stosunek $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pozostaje wciąż mniejsze od jedności, wszakże szereg (81) jest rozbieżny. W tych przypadkach, gdy kryterjum Dalemberta nie daje odpowiedzi na to, czy szereg dany jest zbieżny, lub też rozbieżny, może być pożyteczne kryterjum następujące:

Szereg

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

jest zbieżny lub też rozbieżny, stosownie do tego, czy szereg

$$u_1+2u_2+4u_4+8u_8+\cdots 2^k u_{2k}+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

jest zbieżny, lub też rozbieżny.

Dowód. Rozważając wyrazy szeregu (82), otrzymujemy

$u_1<2u_1$; $2u_2=2u_2$; $4u_4<2u_3+2u_4$; $8u_8<2u_5+2u_6+2u_7+2u_8$

A więc

$$u_1+2u_2+4u_4+8u_8+\cdots<2(u_1+u_2+u_3+\cdots),$$

czyli

$$s_1<s,$$

gdzie przez s_1 i s oznaczono odpowiednio sumy szeregów (83) i (82). Stąd wnosimy, że skoro szereg (82) jest zbieżny, szereg (83) będzie również zbieżny.

Z drugiej zaś strony mamy

$u_1=u_1$; $2u_2>u_2+u_3$; $4u_4>u_4+u_5+u_6+u_7$; $8u_8>u_8+u_9+\cdots+u_{16}$

i t. d.

Przeto widzimy, że

$$u_1+2u_2+4u_4+8u_8+\cdots>u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

czyli

$$s_1>s$$

Stąd wnosimy, że jeżeli szereg (83) jest rozbieżny, to szereg (82) będzie również rozbieżny.

Przykład. Weźmy pod rozwagę szereg

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots$$

którego zbieżność ze względu na wzór

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$$

jest wobec kryterjum Cauchy'ego wątpliwa.

Utwórzmy szereg

$$u_1+2u_2+4u_4+8u_8+\cdots=1+2^{1-\alpha}+4^{1-\alpha}+8^{1-\alpha}+\cdots$$

Szereg $1+2^{1-\alpha}+4^{1-\alpha}+8^{1-\alpha}+\cdots$ stanowi postęp geometryczny, a zatem będzie rozbieżny, skoro $2^{1-\alpha}<1$, czyli gdy $\alpha>1$. Szereg ten jest rozbieżny, skoro $2^{1-\alpha}\geq$, czyli gdy $\alpha\leq 1$.

Stąd wnosimy, że szereg dany jest zbieżny lub też rozbieżny, stosownie do tego, czy będzie $\alpha>1$, czy też $\alpha\leq 1$.

Twierdzenie Raabe'go. Szereg nieskończony

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

o wyrazach dodatnich jest zbieżny, jeżeli można wyznaczyć taką liczbę całkowitą dodatnią m, iż dla $n\geq m$ będzie zachodziła nierówność

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)>k>1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Szereg o wyrazach dodatnich jest rozbieżny, jeżeli począwszy od dostatecznie wielkiej wartości na n, zachodzi wciąż nierówność

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)<1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

Dowód. Aby tego dowieść, uzasadnijmy najpierw wzór

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1+\alpha_n)^k-1}{\alpha_n}\right]=k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

skoro $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

Oznaczmy

$(1+\alpha_n)^k-1=\beta_n$; w takim razie będzie

$(1+\alpha_n)^k=1+\beta_n$, przytem $\lim \beta_n=0$, skoro $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

Po logarytmowaniu otrzymujemy

$$k\lg(1+\alpha_n)=\lg(1+\beta_n);$$

Ostatnie wyrażenie możemy napisać w postaci

$$k\alpha_n\lg\left[(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}\right]=\beta_n\lg\left[(1+\beta_n)^{\frac{1}{\beta_n}}\right],$$

skąd

$$\alpha_n = \frac{\beta_n}{k} \frac{\lg\left[(1+\beta_n)^{\frac{1}{\beta_n}}\right]}{\lg\left[(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}\right]} \quad \ldots\ldots \quad (88)$$

Podstawiając wzór (88) w (87), otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1+\alpha_n)^k-1}{\alpha_n}\right] = k \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\lg\left[(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}\right]}{\lg\left[(1+\beta_n)^{\frac{1}{\beta_n}}\right]}\right\} =$$

$$= k \frac{\lg\left\{\lim\left[(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}\right]\right\}}{\lg\left\{\lim\left[(1+\beta_n)^{\frac{1}{\beta_n}}\right]\right\}} = k \cdot \frac{\lg e}{\lg e} = k$$

Przejdziemy teraz do dowodu twierdzenia Raabe'go.

Aby dowieść tego twierdzenia, porównywamy szereg (84) ze znanym już szeregiem

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots\ldots\ldots \quad (89)$$

zbieżnym przy $k > 1$. Oznaczając $\frac{1}{n^k} = v_n$, weźmy pod rozwagę wyrażenie

$$n \cdot \left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right) = n\left[\frac{(n+1)^k}{n^k} - 1\right] = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Zakładając w tym wzorze $\frac{1}{n} = \alpha_n$ otrzymujemy w myśl wzoru (87)

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right)\right] = k \quad \ldots\ldots \quad (90)$$

Oznaczmy

$$\lim_{n\to\infty}\left[n \cdot \left(\frac{v_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right] = L \quad \ldots\ldots \quad (91)$$

i przypuśćmy, że liczba L jest większa od jedności. W takim razie możemy znaleźć zawsze taką liczbę k, która będzie spełniała nierówności

$$L > k > 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

Ze wzorów (90), (91) i (92) wnioskujemy, że można znaleźć taką liczbę całkowitą dodatnią m, iż dla każdej wartości $n \geq m$ będzie zachodziła nierówność

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right)$$

Stąd $\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{v_n}{v_{n+1}}$, czyli $\frac{u^{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$ . . . . (93)

Ponieważ przy $k > 1$ szereg (89) jest zbieżny, przeto w myśl lematu Duhamela szereg (84) będzie również zbieżny.

Dajmy na to, że $L < 1$. Przyjmijmy za szereg (89) szereg harmoniczny

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

W takim razie będzie

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n-1}} - 1\right)\right] < \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right)\right],$$

a zatem można wyznaczyć taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której zachodzi nierówność

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right), \quad \ldots\ldots \quad (94)$$

skoro $n \geq m$.

Nierówność (94) wskazuje, że skoro $n \geq m$, będzie $\frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{u_n}{u_{n+1}}$, czyli $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Ponieważ szereg harmoniczny jest rozbieżny, przeto szereg (84) będzie w myśl lematu Duhamela również rozbieżny. A więc udowodniliśmy twierdzenie Raabe'go. Na tem twierdzeniu polega następujące:

Kryterjum Raabe'go. Szereg

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

o wyrazach dodatnich jest zbieżny lub rozbieżny, stosownie do tego, czy granica

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_u}{u_{n+1}} - 1\right)\right]$$

jest liczbą większą lub też mniejszą od jedności.

Przykłady 1. Weźmy pod rozwagę szereg

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7} + \cdots$$

Będziemy mieli

$$u_n = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots(2n-2)}\cdot\frac{1}{2n-1}; \quad u_{n+1} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{2n+1},$$

przeto

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n+1}{2n-1} = \frac{4+\frac{2}{n}}{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2}$$

W granicy otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=1,\ \text{przytem wciąż}\ \frac{u_n}{u_{n+1}}>1$$

A więc kryterjum Dalemberta nie daje odpowiedzi na to, czy szereg dany jest zbieżny, czy też rozbieżny. Kryterjum Raabego natomiast daje odpowiedź zupełnie określoną, a mianowicie wskazuje, że szereg dany jest zbieżny, gdyż

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\left(4+\frac{2}{n}\right)}{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2}\right]=\frac{3}{2}>1$$

2. Weźmy pod rozwagę szereg

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1\cdot 2}{(a+1)(a+2)}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(a+1)(a+2)(a+3)}+\cdots$$

W takim razie będzie

$$u_n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)};\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n+1}\right)=1,$$

a zatem kryterjum Dalembert'a nie daje odpowiedzi na pytanie, czy szereg dany jest zbieżny lub też rozbieżny.

Stosując kryterjum Raabe'go, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right]=a\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{n+1}\right)=a$$

A więc dany szereg będzie zbieżny przy $a<1$ i rozbieżny, przy $a<1$. Przy $a=1$ szereg przybiera postać

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\cdots$$

to jest będzie szeregiem harmonicznym, a zatem rozbieżnym.

W tym przypadku, gdy dany szereg jest zbieżny możemy łatwo znaleźć jego sumę. W samej rzeczy

$$\frac{u_{n-1}}{u_n}=1+\frac{a}{n},$$

skąd

$$(a-1)\,u_n=n\,u_{n-1}-(n+1)\,u_n$$

Zakładając w tym wzorze kolejno $n=1,2,3\ldots(n-1)$ i dodając stronami otrzymane rezultaty, znajdziemy

$$(a-1)\,s_n=1-(n+1)\,u_n,$$

skąd

$$s_n=\frac{1-(n+1)\,u_n}{a-1}$$

Biorąc zaś pod uwagę, że w myśl twierdzenia Catalana, $\lim n\,.\,u_n=0$, otrzymujemy

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{a-1}.$$

Kryterjum Gauss'a. Weźmy pod rozwagę szereg, w którym stosunek dwóch sąsiednich wyrazów

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^p+a_1n^{p-1}+a_2n^{p-2}+\cdots+a_n}{n^p+b_1n^{p-1}+b_2n^{p-2}+\cdots+b_n},\quad\ldots\quad(95)$$

gdzie p jest liczbą całkowitą dodatnią. W takim razie

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\left[\frac{(a_1-b_1)n^{p-1}+(a_2-b_2)n^{p-2}+\cdots+(a_n-b_n)}{n^p+b_1n^{p-1}+b_2n^{p-2}+\cdots+b_n}\right],$$

czyli

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\frac{(a_1-b_1)+\frac{(a_2-b_2)}{n}+\cdots+\frac{a_n-b_n}{n^{p-1}}}{1+\frac{b_1}{n}+\frac{b_2}{n^2}+\cdots+\frac{b_n}{n^p}}$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right]=a_1-b_1$$

A więc dany szereg w myśl kryterjum Raabego będzie zbieżny, gdy $a_1-b_1>1$ i rozbieżny, gdy $a_1-b_1<1$. To kryterjum podane zostało przez Gaussa.

Przykład. Rozważmy szereg

$$1+ab+\frac{a(a-1)\,b(b-1)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}+\frac{a(a-1)(a-2)b(b-1)(b-2)}{1\cdot 2\cdot 3\quad 1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

W tym szeregu będzie

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^2}{(a-n+1)(b-n+1)}=\frac{n^2}{n^2-(a+b+2)n+(a+1)(b+1)}$$

W myśl kryterjum Gaussa widzimy, że dany szereg jest zbieżny, gdy

$$a+b+2>1,\ \text{czyli}\ a+b+1>0$$

a rozbieżny gdy

$$a+b+2<1,\ \text{czyli}\ a+b+1<0$$

Rozważmy teraz ogólne kryterjum drugiej kategorji, podane przez Kummer'a, a obejmujące prawie wszystkie dotychczas znane kryterja tej kategorji. Udowodnijmy najpierw twierdzenie następujące:

Twierdzenie Kummera. Dajmy na to, że

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots\quad\ldots\quad(96)$$

oznacza pewien szereg nieskończony o wyrazach dodatnich a

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

szereg rozbieżny, również o wyrazach dodatnich. Szereg (96) jest zbieżny, jeżeli można wyznaczyć taką liczbę całkowitą dodatnią m, iż dla każdej liczby $n \leqslant m$ będą zachodziły nierówności

$$\omega_n = a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > k > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

Szereg (96) jest rozbieżny, jeżeli począwszy od dostatecznie wielkiej wartości n, wciąż zachodzi nierówność

$$\omega_n = a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} < 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

Dowód. Dajmy na to, że począwszy od pewnej wartości $n \geqslant m$, zachodzą nierówności (98). Ponieważ wszystkie wyrazy szeregu (96) są to liczby dodatnie, przeto nierówności (98) pociągają za sobą niezawodnie nierówność

$$a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} > k u_{n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

Stąd wnosimy, że ciąg $a_n u_n$ o wyrazach dodatnich jest malejący, a zatem posiada określoną w zupełności granicę L.

Weźmy teraz pod rozwagę szereg

$$v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

którego ogólny wyraz będzie

$$v_n = a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1}$$

Ponieważ ciąg

$$s_n = v_1+v_2+\cdots+v_n = a_1 u_1 - a_{n+1} \cdot u_{n+1}$$

posiada określoną w zupełności granicę $a_1 u_1 - L$, przeto szereg (101) jest zbieżny. Mnożąc wszystkie wyrazy szeregu (101) przez $\frac{1}{k}$, otrzymujemy szereg $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{v_n}{k}$, który będzie zbieżny. Z nierówności (100) wnosimy, że wyrazy ciągu (96) będą mniejsze od odpowiednich wyrazów szeregu zbieżnego a zatem w myśl wniosku III z twierdzenia I § 2, szereg będzie zbieżny.

Przypuśćmy teraz, że począwszy od pewnej wartości n, zachodzi nierówność $\omega_n < 0$.

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{a_n}$, jest rozbieżny, przeto uważając wy-

razy szeregu (96) jako iloczyny z wyrazów szegu $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{a_n}$ i odpowiednich wyrazów ciągu

$$a_1 u_1,\ a_2 u_2,\ a_3 u_3, \cdots a_n u_n, \cdots$$

wnosimy, że szereg (96) jest rozbieżny.

Dowiedliśmy więc twierdzenia Kummera. Na tem twierdzeniu oparte jest kryterjum następujące:

Kryterjum Kummera. Szereg nieskończony

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

o wyrazach dodatnich jest zbieżny lub rozbieżny, stosownie do tego, czy granica ciągu

$$\omega_n = a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}$$

jest większa lub też mniejsza od zera w przypuszczeniu, że szereg $\sum_{n=1}^{u=\infty} \frac{1}{a_n}$ jest rozbieżny. W przypadku, gdy $\lim \omega_n = 0$, kryterjum Kummera nie daje odpowiedzi na to, czy dany szereg jest zbieżny lub też rozbieżny. Jest to właśnie przypadek wątpliwy wobec powyższego kryterjum.

Jeżeli jednak ω_n posiada granicę 0, pozostając wciąż ujemnem, to dany szereg będzie napewno rozbieżny. Rozważając przypadki szczególne, odpowiadające różnym przypuszczeniom, co do postaci ciągu a_n, przekonamy się, że prawie wszystkie, dotychczas znane kryterja zbieżności drugiej kategorji zawarte są w kryterjum Kummera.

W samej rzeczy, kładąc $a_n = 1$, otrzymamy

$$\lim_{n \to \infty} \omega_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right),$$

a zatem szereg Σu_n jest zbieżny, jeżeli

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_u}{u_{n+1}} > 1 \quad \text{czyli} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{a_n} = 1+1+1+\cdots$ jest rozbieżny,

przeto szereg (102) będzie rozbieżny, skoro $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} < 1$, czyli

$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Jest to właśnie już znane kryterjum Dalembert'a.

$$\lim_{n \to \infty} \left[n \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1) \right] > 0,$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right]>1.$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ jest rozbieżny, przeto szereg (102) będzie rozbieżny, skoro

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right]<1.$$

Jest to właśnie znane już kryterjum Raabe'go.

Kładąc $a_n=n$, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\omega_n=\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\frac{u_n}{u_{n+1}}-(n+1)\right],$$

a zatem szereg Σu_n jest zbieżny, skoro

Z kryterjum Kummera wypływają kryterja logarytmowe, podane przez Bertrand'a. Z tych kryterjów rozważmy najprostszy, a mianowicie:

Kryterjum Bertranda. Szereg nieskończony

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

o wyrazach dodatnich jest zbieżny lub rozbieżny, stosownie do tego, czy granica

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]\lg n\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

jest większą lub mniejszą od jedności.

Dowód. Zakładając $a_n=n\lg n$, w wyrażeniu na ω_n, otrzymujemy

$$\omega_n=n\cdot\lg\frac{u_n}{u_{n+1}}-(n+1)\lg(n+1)$$

Oznaczmy przez

$$\alpha_n=n\lg n\cdot\frac{u_n}{u_{n+1}}-(n+1)\lg n$$

$$\beta_n=(n+1)[\lg(n+1)-\lg n]=(n+1)\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

W takim razie będzie

$$\lim_{n\to\infty}\omega_n=\lim_{n\to\infty}\alpha_n-\lim_{n\to\infty}\beta_n$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=\lim_{n\to\infty}\left[\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]=\lg\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]=\lg e=1,$$

będziemy mieli

$$\lim_{n\to\infty}\omega_n=\lim_{n\to\infty}\alpha_n-1.$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n\cdot\lg n}$ jest rozbieżny, przeto na mocy kryterjum Kummera szereg (103) będzie zbieżny, skoro

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[n\cdot\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]\lg n\right\}>1$$

jeżeli zaś

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[n\cdot\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]\lg n\right\}<1,$$

wówczas szereg (103) będzie rozbieżny, a na tem właśnie polega kryterjum Bertrand'a, o którego dowód chodziło.

Gdy $\lim\alpha_n=1$, wówczas będziemy mieli do czynienia z przypadkiem wątpliwym.

Zakładając $a_n=n\lg n\lg_2 n$; $a_n=n\lg n\lg_3 n$; $a_n=n\lg n\lg_4 n$ i t. d. i posługując się kryterjum Kummera, możemy znaleźć wszystkie logarytmowe kryterja Bertrand'a.

Szczegóły co do tych kryterjów i ich zastosowania do badania zbieżności szeregów nieskończonych podajemy w Dodatku III do niniejszego kursu.

Przykład. Weźmy pod rozwagę szereg

$$\frac{1}{2^\alpha(\lg 2)^\beta}+\frac{1}{3^\alpha(\lg 3)^\beta}+\frac{1}{4^\alpha(\lg 4)^\beta}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha(\lg n)^\beta}+\cdots \quad (I)$$

Ze względu na wzór (38) § 3 możemy napisać

$$\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n};\ \lg\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>-\frac{1}{1+n}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\lg\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=-\lg\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

otrzymujemy nierówności

$$\frac{1}{n+1}<\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

czyli

$$\frac{1}{n+1}<\lg(n+1)-\lg n<\frac{1}{n},$$

skąd

$$1+\frac{1}{(n+1)\lg n}<\frac{\lg(n+1)}{\lg n}<1+\frac{1}{n\lg n}$$

Z ostatnich nierówności wnosimy, że

$$\frac{\lg(n+1)}{\lg n}=1+\frac{\theta_n}{n\lg n}, \quad \ldots\ldots \quad (104)$$

gdzie $0<\theta_n<1$.

Będziemy mieli więc

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{(n+1)^\alpha \lg(n+1)^\beta}{n^\alpha(\lg n)^\beta}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha\left[\frac{\lg(n+1)}{\lg n}\right]^\beta \quad (105)$$

Możemy napisać

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha=\left[1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2\cdot n^2}+\cdots\right] \ldots \quad (106)$$

w myśl zaś wzoru (104)

$$\left[\frac{\lg(n+1)}{\lg n}\right]^\beta=\left(1+\frac{\theta_n}{n\lg n}\right)^\beta=\left[1+\frac{\beta\cdot\theta_n}{n\lg n}+\frac{\beta(\beta-1)\theta_n^2}{1\cdot 2n^2\lg^2 n}+\cdots\right] \quad (107)$$

Podstawiając wzory (106) i (107) do (105), otrzymujemy

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\left[1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2\cdot n^2}+\cdots\right]\cdot\left[1+\frac{\beta\theta_n}{n\lg n}+\frac{\beta(\beta-1)\theta_n^2}{2n^2\lg^2 n}+\cdots\right]$$

Stąd

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\alpha+\frac{\beta\cdot\theta_n}{\lg n}+\varepsilon_n, \quad \ldots\ldots \quad (108)$$

gdzie przez ε_n oznaczono sumę wyrazów, zawierających w mianowniku iloczyn $n^p\lg^q n$.

Ze wzoru (108) wnosimy, że

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right]=\alpha$$

A więc szereg (I) będzie zbieżny, gdy $\alpha>1$, a rozbieżny gdy $\alpha<1$. Przy $\alpha=1$ mamy do czynienia z przypadkiem wątpliwym wobec kryterjum Raabe'go.

Zastosujmy kryterjum Bertrand'a; w takim razie będzie

$$\lim\left\{\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)-1\right]\lg n\right\}=\beta\lim_{n\to\infty}\theta_n=\beta,$$

a zatem w przypadku, gdy $\alpha=1$ szereg (I) będzie zbieżny, skoro $\beta>1$ a rozbieżny przy $\beta\leqslant 1$.

Zanim skończymy badanie kryterjów drugiej kategorji, przytoczmy jeszcze jedno kryterjum, podane przez Guidice, zresztą stosunkowo rzadko używane.

Kryterjum Guidice. Szereg nieskończony

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \quad \ldots\ldots \quad (109)$$

o wyrazach dodatnich jest zbieżny, jeżeli można wyznaczyć taki ciąg a_n, iż począwszy od pewnej wartości na n, będzie zachodziła nierówność

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}\geqslant a_n\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right) \ldots\ldots \quad (110)$$

Dowód. Z nierówności (110) wynika nierówność

$$\frac{u_n}{a_n}-\frac{u_{n+1}}{a_{n+1}}\geqslant u_{n+1}. \quad \ldots\ldots \quad (111)$$

Ostatnia nierówność wskazuje, że ciąg $\frac{u_n}{a_n}$ o wyrazach dodatnich jest wciąż malejący, a zatem posiaga określoną w zupełności granicę. Stąd wnioskujemy natychmiast, że szereg

$$\left(\frac{u_1}{a_1}-\frac{u_2}{a_2}\right)+\left(\frac{u_2}{a_2}-\frac{u_3}{a_3}\right)+\left(\frac{u_3}{a_3}-\frac{u_4}{a_4}\right)+\cdots$$

jest zbieżny, a przeto będzie zbieżny również szereg (109).

Przykład. Weźmy szereg

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\frac{a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)}+\cdots+$$
$$+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}+\cdots \quad \ldots \quad (II)$$

gdzie $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \ldots$ jest to ciąg dowolny o wyrazach dodatnich. Ponieważ

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=a_n\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right),$$

przeto w myśl kryterjum Guidice szereg (II) jest zbieżny dla każdego ciągu a_n.

§ 77. **Szeregi bezwzględnie zbieżne.** Rozważając szeregi nieskończone o wyrazach dodatnich, nie zwracaliśmy uwagi na porządek, w którym wyrazy danego szeregu następują po sobie. Należy zaznaczyć, jak się przekonamy niebawem, o ile wchodzą w grę szeregi nieskończone o wyrazach dodatnich, nie odgrywa porządek wyrazów w szeregu żadnej roli i nie wpływa na wartość jego sumy. Dla szeregów zaś o wyrazach dowolnych (dodatnich i ujemnych), jak udowodnił francuski matematyk L. Dirichlet, porządek wyrazów w szeregu odgrywa bardzo ważną rolę, gdyż wpływa na wartość sumy szeregu. Najlepszy przykład szeregu, którego suma zależy od uporządkowania jego wyrazów, dostarczył Dirichlet, rozważając szereg nieskończony

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots \quad \ldots\ldots \quad (112)$$

Sereg (112) można przedstawić w dwóch postaciach, a mianowicie:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+$$

$$+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n}\right)+\cdots$$

i

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\cdots \quad (114)$$

Oznaczając przeto s_n i s'_n odpowiednio sumy n pierwszych wyrazów szeregu (112) w postaciach (113), (114), będziemy mieli

$$s'_n-s_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4n}-\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right),$$

czyli

$$s'_n-s_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\right]$$

Biorąc pod uwagę, że suma szeregu (112)

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n=\lg 2,$$

otrzymamy

$$\lim_{n\to\infty}(s'_n-s_n)=\frac{1}{2}\lg 2,$$

a zatem

$$s'=\lim_{n\to\infty} s'_n=\frac{3}{2}\lg 2=\frac{3}{2}s. \quad (115)$$

Napiszmy szereg (112) jeszcze w postaciach

$$\left(1-\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}\right)+\cdots \quad (116)$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)+\cdots \quad (117)$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right),$$

będziemy mieli

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right),$$

a zatem

$$s_1=\frac{1}{2}s_2, \quad (118)$$

gdzie s_1 i s_2 oznaczają odpowiednio sumy szeregów (116), (117). Wzory (115), (118) wskazują, że suma szeregu (112) zależy od porządku jego wyrazów.

Szereg zbieżny, którego suma nie zależy od uporządkowania jego wyrazów, nazywamy bezwzględnie zbieżnym, czyli bezwarunkowo zbieżnym (absolument convergente, unbedingt convergent).

Szereg zbieżny, którego suma zależy od uporządkowania jego wyrazów i zmienia się przy zmianie porządku, w jakim one następują po sobie, nazywamy względnie zbieżnym, czyli warunkowo zbieżnym (semi-convergente, bedingt convergent). Udowodnijmy twierdzenia następujące:

Twierdzenie I. Szereg zbieżny o wyrazach dodatnich jest zawsze bezwzględnie zbieżny.

Dowód. Dajmy na to, że pewien szereg o wyrazach dodatnich jest zbieżny i oznaczmy przez s_n i s_{n_1} odpowiednio sumy n i n_1 wyrazów danego szeregu przy pierwszem i drugiem uporządkowaniu jego wyrazów. Obierzmy liczbę n tak, ażeby w skład sumy s_n wchodziły wszystkie wyrazy sumy s'_{n_1}. W takim razie będzie niezawodnie

$$s'_{n_1}\leqslant s_n,$$

a zatem

$$s'\leqslant s, \quad (119)$$

gdzie s' i s oznaczają odpowiednio sumy danego szeregu przy pierwszem i drugiem uporządkowaniu.

Obierzmy teraz liczbę n_1 tak, ażeby w skład sumy s'_{n_1} wchodziły n pierwszych wyrazów sumy s_n. Oczywista, będzie zachodziła nierówność

$$s'_{n_1}\geqslant s_n, \text{ a zatem } s'\geqslant s \quad (120)$$

Zestawiając wzory (119) i (120), otrzymamy

$$s'=s$$

Stąd wnosimy, że dany szereg jest bezwzględnie zbieżny, a na tem właśnie polega twierdzenie o którego dowód chodziło.

Twierdzenie II (Rimann'a). Niech będzie dany szereg nieskończony

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \quad (121)$$

o wyrazach dodatnich i ujemnych, dla którego $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Niech

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

oznaczają odpowiednio szeregi, złożone z wyrazów dodatnich oraz bezwzględnych wartości wyrazów ujemnych danego szeregu (121), wziętych w tym porządku w jakim istotnie zachodzą.

Twierdzenie Rimann'a brzmi jak następuje:

Jeżeli dwa szeregi (122) i (123) są zbieżne, to szereg dany (121) będzie bezwzględnie zbieżny. Jeżeli zaś obydwa szeregi są rozbieżne można zawsze rozmieścić ich wyrazy tak, aby szereg (121) był zbieżny lub rozbieżny (nieograniczenie rosnący lub nieoznaczony), i w przypadku gdy jest zbieżny mógł mieć wartość zupełnie dowolną.

Dowód. Weźmy pod rozwagę n pierwszych wyrazów szeregu (121) i przypuśćmy, że wśród tych wyrazów istnieje k wyrazów dodatnich i l ujemnych. Oznaczmy przez S_n, V_k i W_l odpowiednio sumy n pierwszych wyrazów szeregu (121) k pierwszych wyrazów szeregu (122) i l pierwszych wyrazów szeregu (123), a przez S, U, i V sumy tych szeregów. W takim razie będzie

$$V_k - W_l = S_n$$

Oczywista liczby k i l rosną nieograniczenie, gdy liczba n rośnie nieograniczenie, a zatem

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{k\to\infty} V_k - \lim_{l\to\infty} W_l \quad V = W -$$

Ponieważ szeregi (122) i (123) o wyrazach dodatnich są zbieżne, przeto w myśl twierdzenia I będą one bezwzględnie zbieżne. Stąd wnosimy, że liczby V i W a zatem i S nie będą zależały od uporządkowania wyrazów składowych. A więc szereg (121) jest bezwzględnie zbieżny.

Dajmy na to, że obydwa szeregi (122) i (123) są rozbieżne. Niech L oznacza dowolną liczbę dodatnią. Oczywista, można dobrać do liczby dowolnej L taką liczbę α, aby zachodziły nierówności

$$V_{\alpha-1} < L \leq V_\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (124)$$

gdyż $\lim_{h\to\infty} v_h = \infty$.

Przypuśćmy, że po α wyrazach dodatnich $v_1, v_2, \cdots v_\alpha$ szeregu (122) następuje β wyrazów ujemnych szeregu (123).

Ponieważ $\lim_{l\to\infty} v = \infty$, przeto liczbę β można wyznaczyć tak, aby zachodziły nierówności

$$W_{\beta-1} \leq V_\alpha - L < W_\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

Zestawiając nierówności (124) i (125), otrzymamy

$$V_\alpha - W_{\beta-1} \geq L > V_\alpha - W_\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (126)$$

Dajmy na to, że po α wyrazów dodatnich szeregu (122) i β wyrazów ujemnych z szeregu (123) następuje znowu $\gamma - \alpha$ wyrazów dodatnich $v_{\alpha+1}, v_{\alpha+2} \ldots v_\gamma$. Oczywista, możemy dobrać taką liczbę $\gamma > \alpha$ tak, aby zachodziły nierówności

$$V_{\gamma-1} - V_\alpha \leq L - (V_\alpha - W_\beta) < V_\gamma - V_\alpha \quad . \quad . \quad (127)$$

Z nierówności (126) i (127) otrzymujemy

$$V_\alpha - W_\beta + (V_{\gamma-1} - V_\alpha) \leq L < V_\alpha - W_\beta + (V_\gamma - V_\alpha)$$

Przypuśćmy, że po α wyrazach dodatnich, β ujemnych, $\gamma - \alpha$ dodatnich, następuje $\delta - \beta$ wyrazów ujemnych szeregu (121).

Suma tych wyrazów będzie

$$W_\delta - W_\beta$$

Obieramy liczbę δ tak, aby

$$V_\alpha - W_\beta + (V_\gamma - V_\alpha) - (W_{\delta-1} - W_\beta) < L \leq (V_\alpha - W_\beta) + (V_\gamma - V_\alpha) - (W_\delta - W_\beta)$$

Kontynuując w ten sposób, można wyznaczyć taką liczbę $\mu > \nu$, aby wyrażenie

$$S_\mu = V_\alpha - W_\beta + (V_\gamma - V_\alpha) - (W_\delta - W_\beta) + \cdots + (V_\mu - V_\nu)$$

było większe od liczby dowolnej L, a wyrażenie

$$S_{\mu-1} = V_\alpha - W_\beta + (V_\gamma - V_\alpha) - (W_\delta - W_\beta) + \cdots + (V_{\mu-1} - V_\nu)$$

było nie większe od L. Analogicznie możemy wyznaczyć taką liczbę $\lambda > \rho$, aby wyrażenie

$$S_\lambda = V_\alpha - W_\beta + (V_\gamma - W_\alpha) - (W_\delta - W_\beta) + \cdots - (W_\lambda - W_\rho)$$

było mniejsze od L, a wyrażenie

$$S_{\lambda-1} = V_\alpha - W_\beta + (V_\gamma - V_\alpha) - (W_\delta - W_\beta) + \cdots - (W_{\lambda-1} - W_\rho)$$

było nie większe od L.

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} u_\mu = \lim_{n\to\infty} u_\mu = 0,$$

przeto na mocy nierówności

$$S_{\mu-1} \leq L < S_\mu$$

$$S_{\lambda-1} \leq L < S_\lambda$$

będziemy mieli

$$\lim_{n\to\infty} S_\mu = \lim_{n\to\infty} S_\lambda = S = L.$$

Stąd wnioskujemy, że suma szeregu (121) przy pewnem uporządkowaniu jego wyrazów może się stać równą zupełnie dowolnej liczbie L.

Obierając za L wyrazy ciągu

$$L_1, L_2, L_3 \ldots L_n \ldots$$

rozbieżnego, w sposób zupełnie analogiczny do podanego możemy udowodnić, że przy pewnem uporządkowaniu wyrazów szeregu (121), ten szereg może się stać rozbieżnym. A więc udowodniliśmy twierdzenie Rimann'a w zupełności.

Twierdzenie Dirichlet. Na to, aby szereg nieskończony

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad \ldots \quad (128)$$

był bezwzględnie zbieżny, potrzeba i wystarcza, żeby szereg

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots \quad \ldots \quad (129)$$

utworzony z wartości bezwzględnych wyrazów szeregu (128), był zbieżny.

Dowód. Dajmy na to, że szereg (129) jest zbieżny. Oznaczmy przez σ_n sumę n pierwszych wyrazów szeregu (129). Oczywista, w myśl znanego twierdzenia Cauchy'ego, jakkolwiek małą będzie liczba dodatnia ε, dla każdej liczby całkowitej dodatniej p będzie zachodziła nierówność

$$\sigma_{n+p} - \sigma_n = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Oznaczmy przez $u_r, u_s, u_t, \ldots u_q$ jakiekolwiek wyrazy, wybrane z pośród wyrazów $u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3} \ldots u_{n+p}$. Ponieważ

$$|u_r + u_s + u_t + \cdots u_q| \leq |u_r| + |u_s| + |u_r| + \cdots + |u_q| < \varepsilon,$$

przeto $\lim_{n\to\infty} (u_r + u_s + u_t + \cdots u_q) = 0.$

Oznaczmy przez

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

sumę n pierwszych wyrazów szeregu (128) przy pewnem uporządkowaniu jego wyrazów, a przez s'_{n_1} sumę n_1 pierwszych wyrazów $u'_1, u'_2, u'_3 \ldots u'_\nu$ tegoż samego szeregu przy jakiemkolwiek innem uporządkowaniu. Obierzmy liczbę ν tak, ażeby ciąg, złożony z wyrazów $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n$, stanowił część właściwą ciągu $u'_1, u'_2, u'_3 \ldots u'_\nu$. W takim razie będziemy mieli

$$s'_\nu = s_n + u_r + u_s + u_t + \cdots + u_q,$$

gdzie $u_r, u_s, u_t \ldots u_q$ są to wyrazy szeregu (128) $u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots u_\nu$, wzięte w pewnym porządku.

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} (u_r + u_s + u_t + \cdots + u_q) = 0,$$

przeto

$$\lim_{n\to\infty} S'_\nu = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

czyli

$$S' = S.$$

Stąd wnosimy, że suma szeregu (128) nie zależy od porządku ego wyrazów, a zatem szereg ten jest bezwzględnie zbieżny.

Dajmy na to, że szereg (128) jest bezwzględnie zbieżny.

Oznaczmy $S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} = D_p$. Nieh D'_p oznacza sumę wszystkich wyrazów dodatnich, zawartych w sumie D_p, a D''_p — sumę wartości bezwzględnych wszystkich wyrazów ujemnych, zawartych w sumie D_p. W takim razie będzie

$$D_p = D'_p - D''_p$$

Ponieważ szereg (128) jest zbieżny, przeto w myśl udowodnionego twierdzenia Rimann'a

$$\lim_{n\to\infty} D'_p = 0; \quad \lim_{n\to\infty} D''_p = 0,$$

a zatem

$$\lim_{n\to\infty} (\sigma_{n+1} - \sigma_n) = \lim_{n\to\infty} (D'_p + D''_p) = 0.$$

Stąd wnosimy natychmiast, że szereg

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$$

utworzony z wartości bezwzględnych wyrazów szeregu (128) jest zbieżny, czyli innemi słowy, że szereg ten jest bezwzględnie zbieżny; a na tem właśnie polega twierdzenie Dirichlet, o którego dowód chodziło.

§ 8. **Dodawanie i mnożenie szeregów.** Dodawanie. Przypuśćmy, że dane są dwa szeregi zbieżne

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad \ldots \quad (130)$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots \quad \ldots \quad (131)$$

których sumy będą odpowiednio s i s'.

Sumą dwóch szeregów (130) i (131) nazywamy szereg

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \cdots + (u_n + v_n) + \cdots \quad (132)$$

Udowodnijmy, że szereg (132) będzie zbieżny i że nadto suma tego szeregu

$$\sigma = s + s'$$

Dowód. Oznaczmy, jak zwykle

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$
$$s'_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$$
$$\sigma_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n)$$

Możemy napisać

$$\sigma_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = S_n + S'_n,$$

a zatem

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} s'_n$$

Stąd wnosimy, że szereg (132) będzie zbieżny, skoro szeregi (130) i (131) są zbieżne, a nadto

$$\sigma_1 = s + s'$$

Uogólnienie udowodnionego twierdzenia w tym przypadku, gdy liczba szeregów dodajnych jest większa od dwóch, jest natychmiastowe.

Mnożenie. Dajmy na to, że

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (133)$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (134)$$

oznaczają dwa szeregi o wyrazach ogólnych u_n i v_n.

Szereg nieskończony

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

o wyrazie ogólnym

$$w_n = u_1 v_n + v_2 v_{n-1} + u_3 v_{n-3} + \cdots + u_n v_1$$

nazywamy iloczynem dwóch szeregów (133) i (134).

Udowodnijmy przedewszystkiem następujące twierdzenie, podane przez Abela:

Twierdzenie Abela. Jeżeli iloczyn dwóch szeregów nieskończonych (133) i (134) stanowi szereg zbieżny, to suma szeregu (135) równa się iloczynowi sum szeregów (133) i (134).

Dowód. Oznaczmy przez U_n, V_n, W_n odpowiednio sumy n pierwszych wyrazów szeregów (133), (134) i (135) a przez U, V, W, sumy tych szeregów. Dodając wzory

$$w_1 = u_1 v_1;\ w_2 = u_2 v_2;\ \ldots .\ w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1,$$

otrzymujemy

$$W_n = u_1 V_n + u_2 V_{n-1} + u_3 V_{n-2} + \cdots + u_n V_1$$

Zakładając w ostatnim wzorze kolejno $n = 1, 2, 3 \ldots n$ i dodając otrzymane rezultaty, znajdujemy

$$W_1 + W_2 + W_3 + \cdots + W_n = U_1 V_n + U_2 V_{n-1} + \cdots + U_n V_1 \quad (136)$$

W myśl pierwszego twierdzenia Cezaro, udowodnionego w § 19 Rozdziału III, będziemy mieli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(U_1 V_n + U_2 V_{n-2} + \cdots + U_n U_1) = \lim_{n\to\infty} (U_n V_n) = U.V. \quad (137)$$

Z drugiej zaś strony, na mocy wzoru (151) str. 143 będzie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(W_1 + W_2 + W_3 + \cdots + W_n) = \lim_{n\to\infty} W_n = W \quad . \quad (138)$$

Zestawiając zaś wzory (137) i (138), otrzymujemy ze względu na (136)

$$W = U.V,$$

a na tem właśnie polega twierdzenie Abela, o którego dowód nam chodziło.

Twierdzenie Mertensa. Na to, aby iloczyn dwóch szeregów nieskończonych był szeregiem zbieżnym, wystarcza ażeby jeden przynajmniej z danych szeregów był bezwzględnie zbieżny.

Dowód. Dajmy na to, że

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (139)$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

oznaczają dwa szeregi, z których pierwszy naprzykład jest bezwzględnie zbieżny, drugi zaś tylko zbieżny. Oznaczmy przez U i V odpowiednio sumy szeregów (139) i (140).

Ponieważ szereg (139) jest wedle umowy bezwzględnie zbieżny, przeto w myśl twierdzenia Dirichlet szereg

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots \quad . \quad . \quad (141)$$

utworzony z wartości bezwzględnych wyrazów szeregu, (139) będzie również zbieżny. Oznaczmy przez A sumę szeregu (141). Ponieważ szereg (140) jest zbieżny, przeto istnieje taka liczba B, że wszystkie wyrazy szeregu (140) spełniają nierówności

$$|v_n| < B$$

Ponieważ szereg (141) zbieżny, przeto w myśl ogólnego kryterjum Cauchy'ego, do każdej liczby dodatniej ε_1 można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m_1, przy której nierówność $n \geq m$, pociąga za sobą nierówność

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \cdots + |u_{n+q}| < \varepsilon_1 \quad (142)$$

dla każdej liczby całkowitej q. Zakładając

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(A+B)},$$

otrzymamy nierówność

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \cdots + |u_{n+q}| < \frac{\varepsilon}{2(A+B)} \quad . \quad (143)$$

zachodzącą dla wszystkich wartości na $n \geq m_1$.

Z drugiej zaś strony, biorąc pod uwagę, że $V = \lim_{n\to\infty} V_n$, wnosimy w myśl twierdzenia Cauchy'ego (str. 99), że istnieje

taka liczba całkowita dodatnia m_2, iż dla dwóch liczb $n \geq m_2$ i $n' \geq m_2$ zachodzi niezawodnie nierówność

$$| V_{n_1} - V_n | < \frac{\varepsilon}{2(A+B)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (144)$$

Weźmy pod rozwagę wartość bezwzględną

$$| U_n V_n - U.V |$$

Ponieważ

$$\lim_{n \to \infty} (U_n V_n) = U.V,$$

przeto do każdej liczby dodatniej $\frac{\varepsilon}{2}$ można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m_3, przy której nierówność $n \geq m_3$ pociąga za sobą nierówność

$$| U_n V_n - U.V | < \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (145)$$

Oznaczamy przez m liczbę, największą ze wszystkich liczb m_1, m_2, m_3. Oczywista, nierówności (143), (144), (145) będą zachodziły razem, skoro $n \geq m$.

Załóżmy $p \geq 2n$ i weźmy pod rozwagę sumę

$$W_p = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_p ,$$

gdzie

$$w_1 = u_1 v_1; \quad w_2 = u_2 v_2 + u_2 v_1; \quad w_3 = u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1 \quad (146)$$
$$w_p = u_1 v_p + u_2 v_{p-1} + u_3 v_{p-2} + \cdots + u_p v_1$$

Sumie W_p można nadać postać następującą:

$$W_p = u_1 (v_1 + v_2 + \cdots + v_p) + u_2 (v_1 + v_2 + \cdots + v_{p-1}) +$$
$$+ u_3 (v_1 + v_2 + \cdots + v_{p-2}) + \cdots + u_{p-1} (v_1 + v_2) + u_p v_1,$$

czyli

$$W_p = u_1 V_p + u_2 V_{p-1} + u_3 V_{p-2} + \cdots + u_p V_1$$

Weźmy dalej pod rozwagę wyrażenie

$$U_n V_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) V_n = u_1 V_n + u_2 V_n + \cdots + u_n V_n$$

Możemy napisać

$$W_p - U_n V_n = u_1 (V_p - V_n) + u_2 (V_{p-1} - V_n) + u_3 (V_{p-2} - V_n) + \cdots$$
$$\cdots + u_n (V_{p-n+1} - V_n) + u_{n+1} V_{p-n} + u_{n+2} V_{p-n-1} + \cdots + u_p V_1$$

Załóżmy

$$u_1 (V_p - V_n) + u_2 (V_{p-1} - V_n) + u_3 (V_{p-2} - V_n) + \cdots$$
$$\cdots + u_n (V_{p-n+1} - V_n) = \sigma_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147)$$
$$u_{n+1} V_{p-n} + u_{n+2} V_{p-n-1} + \cdots + u_p V_1 = \sigma_2 \quad . \quad . \quad (148)$$

W takim razie będzie

$$W_p - U_n V_n = \sigma_1 + \sigma_2 ,$$

a zatem

$$| W_p - U_n V_n | \leq | \sigma_1 | + | \sigma_2 |$$

Z wyrażenia (147) wnosimy, że

$$| \sigma_1 | \leq | u_1 | \cdot | V_p - V_n | + | u_2 | \cdot | V_{p-1} - V_n | + | u_3 | \cdot | V_{p-2} - V_n | + \cdots$$
$$\cdots + | u_n | \cdot | V_{p-n+1} - V_n |$$

Uwzględniając zaś nierówność (144) dla wartości na n_1 równych kolejno $n_1 = p$, $p-1$, $p-2$, ... $p-n$, otrzymujemy nierówność,

$$| V_p - V_n | < \frac{\varepsilon}{2(A+B)}; | V_{p-1} - V_n | < \frac{\varepsilon}{2(A+B)} \cdots | V_{p-n} - V_n | < \frac{\varepsilon}{2(A+B)},$$

a zatem

$$| \sigma_1 | < \frac{\varepsilon}{2(A+B)} [| u_1 | + | u_2 | + | u_3 | + \cdots + | u_n |]$$

Ponieważ

$$| u_1 | + | u_2 | + | u_3 | + \cdots + | u_n | < A,$$

przeto

$$| \sigma_1 | < \frac{\varepsilon}{2(A+B)} \cdot A = \frac{A\varepsilon}{2(A+B)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (149)$$

Dalej mamy

$$| \sigma_2 | \leq | u_{n+2} | \cdot | V_{p-n-1} | + | u_{n+3} | \cdot | V_{p-n-2} | + \cdots + | u_p | \cdot | V_1 |$$

Ponieważ

$$| V_{p-n-1} | < B; \quad | V_{p-n-2} | < B \ \ldots \ | V_1 | < B,$$

przeto

$$| \sigma_2 | < B [| u_{n+1} | + | u_{n+2} | + \cdots + | u_p |],$$

czyli na mocy nierówności (143)

$$| \sigma_2 | < \frac{B \cdot \varepsilon}{2(A+B)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (150)$$

Uwzględniając zaś nierówności (149) i (150), otrzymamy

$$| W_p - U_n V_n | < | \sigma_1 | + | \sigma_2 | < \frac{\varepsilon}{2},$$

czyli

$$-\frac{\varepsilon}{2} < W_p - U_n V_n < \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (151)$$

Dodając do nierówności (151) nierówność

$$-\frac{\varepsilon}{2} < U_n V_n - UV < \frac{\varepsilon}{2},$$

wypływającą z nierówności (145), dostaniemy

$$-\varepsilon < W_p - U\,V < \varepsilon, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (152)$$

skoro

$$p \geq 2n \geq 2m.$$

Z nierówności (152) wnosimy, że szereg $w_1 + w_2 + \cdots + w_n + \cdots$ jest zbieżny, a nadto suma tego szeregu

$$W = \lim_{n \to \infty} W_n = U \cdot V.$$

Ostatni wzór wypływa zresztą bezpośrednio z twierdzenia Abela, skoro udowodniono, że szereg $\sum_{n=1}^{n=\infty} w_n$ jest zbieżny. Udowodniliśmy więc twierdzenie Mertensa.

Twierdzenie Cauchy'ego. Iloczyn dwóch szeregów nieskończonych

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (154)$$

bezwzględnie zbieżnych jest również szeregiem bezwzględnie zbieżnym.

Dowód. Dajmy na to, że szeregi (153), (154) są bezwzględnie zbieżne. Weźmy pod rozwagę szeregi

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (155)$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (156)$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (157)$$

gdzie

$$\alpha_n = |u_n|; \quad \beta_n = |v_n|, \quad \text{a} \quad \gamma_n = \alpha_1 \beta_n + \alpha_2 \beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n \beta_1.$$

Ponieważ szeregi (155) i (156) (w myśl twierdzenia Dirichleta) są bezwzględnie zbieżne, przeto, na mocy udowodnionego twierdzenia Mertensa, szereg (157) będzie również zbieżny.

Weźmy pod rozwagę szereg

$$|w_1| + |w_2| + |w_3| + \cdots + |w_n| + \cdots \quad . \quad . \quad (158)$$

gdzie

$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_n v_1$$

Ponieważ

$$|w_n| \leq |u_1| \cdot |v_n| + |u_2| \cdot |v_{n-1}| + \cdots + |u_n| \cdot |v_1| =$$
$$= \alpha_1 \beta_n + \alpha_2 \beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n \beta_1 = \gamma_n,$$

przeto szereg (158) będzie zbieżny, a zatem szereg

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n + \cdots$$

jest bezwzględnie zbieżnym, a na tem właśnie polega twierdzenie Cauchy'ego, o którego dowód nam chodziło.

§ **9. Iloczyny nieskończone.** Dajmy na to, że $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n, \ldots$ oznacza pewien ciąg nieskończony. Wyrażenie

$$u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \ldots u_n = \prod_{n=1}^{n=\infty} u_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (159)$$

nazywa się iloczynem nieskończonym.

Wyrażenia

$$\begin{aligned} p_1 &= u_1 \\ p_2 &= u_1 \cdot u_2 \\ p_3 &= u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ p_n &= u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \ldots u_n \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (160)$$

nazywamy iloczynami częściowymi. Jeżeli ciąg

$$p_1, p_2, p_3 \ldots p_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (160)$$

jest zbieżny, wówczas iloczyn nieskończony (159) nazywa się zbieżnym. Granicę P ciągu (160) nazywamy wartością iloczynu (159). A więc

$$P = \lim_{n \to \infty} p_n = \lim_{n \to \infty} (u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \ldots u_n)$$

Jeżeli ciąg (160) jest rozbieżny, lub posiada granicę $P = 0$, to iloczyn nieskończony (159) nazywamy rozbieżnym.

Weźmy pod rozwagę szereg

$$\lg P = \lg u_1 + \lg u_2 + \lg u_3 + \cdots + \lg u_n + \cdots \quad . \quad (161)$$

Oczywista, iloczyn nieskończony (159) jest zbieżny, skoro szereg (161) będzie zbieżny. Warunkiem zaś koniecznym, aby szereg ten był zbieżny, jest

$$\lim_{n \to \infty} \lg u_n = \lg \lim_{n \to \infty} u_n = 0,$$

czyli

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 1.$$

Iloczyn nieskończony (159) można pisać w postaci

$$(1 + v_1)(1 + v_2)(1 + v_3) \ldots (1 + v_n) \ldots = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + v_n)$$

W takim razie warunek konieczny, aby ten iloczyn był zbieżny, przyjmując postać

$$\lim_{n \to \infty} v_n = 0.$$

Udowodnijmy kilka twierdzeń podstawowych o zbieżności iloczynów nieskończonych

Twierdzenie I. Na to, aby iloczyn nieskończony

$$(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\ldots(1+v_n)\ldots=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+v_n) \quad (161)$$

o czynnikach dodatnich był zbieżny (względnie rozbieżny), potrzeba i wystarcza żeby szereg nieskończony

$$v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (162)$$

był zbieżny (względnie rozbieżny).

Dowód. Możemy napisać

$$p_n=(1+v_1)(1+v_2)\cdots(1+v_n)=1+v_1+v_2+\cdots+v_n+R_n,$$

gdzie przez R_n oznaczono sumę iloczynów wyrazów $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$, złożonych z dwóch, trzech, ... n czynników. Oczywista, zachodzi nierówność

$$p_n > 1+\omega_n,$$

gdzie

$$\omega_n=v_1+v_2+\cdots+v_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (163)$$

Z nierówności (163) wypływa, że ciąg p_n, a zatem i iloczyn (161) będzie rozbieżny, skoro ciąg ω_n jest rozbieżny.

Dajmy na to, że szereg (162) jest zbieżny. W takim razie w myśl ogólnego kryterjum Cauchy'ego, do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n \geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots+v_{n+r}<\varepsilon$$

dla dowolnej liczby całkowitej r. Oznaczając przez $\sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_r$ iloczyny z dwóch, trzech ... r czynników $v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots v_{n+r}$, możemy napisać

$$(1+v_{n+1})(1+v_{n+2})\cdots(1+v_{n+r})=1+v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots+v_{n+r}+$$
$$+\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_r$$

Z drugiej zaś strony łatwo spostrzec, że

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &< (v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots+v_{n+r})^2\\
\sigma_3 &< (v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots+v_{n+2})^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (165)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sigma_r &< (v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots+v_{n+r})^r
\end{aligned}$$

Obierając $\varepsilon < q < 1$, otrzymujemy ze względu na nierówności (164) i (165)

$$(1+v_{n+1})(1+v_{n+2})\cdots(1+v_{n+r})<1+q+q^2+\cdots+q^r$$

Biorąc zaś pod rozwagę, że

$$1+q+q^2+\cdots+q^r<\frac{1}{1-q},$$

możemy napisać

$$(1+v_{n+1})(1+v_{n+2})\ldots(1+v_{n+r})<\frac{1}{1-q}$$

Stąd wnosimy, że dla każdej liczby całkowitej r zachodzi nierówność

$$p_{n+r}<\frac{p_n}{1-q}, \text{ czyli } \frac{p_{n+r}}{p_n}<\frac{1}{1-q}$$

Z ostatniej nierówności widzimy, że

$$\lg(1+v_{n+1})+\lg(1+v_{n+2})+\cdots+\lg(1+v_{n+2})<\lg\frac{1}{1-q}$$

dla dowolnej liczby r, a zatem szereg

$$\lg(1+v_1)+\lg(1+v_2)+\cdots+\lg(1+v_n)+\cdots$$

będzie zbieżny. Stąd wnioskujemy, że iloczyn nieskończony będzie również zbieżny. A więc Twierdzenie I zachodzi w podanem brzmieniu.

Przykłady 1. Iloczyn nieskończony

$$(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)\ldots(1+a^{2^n})\ldots$$

jest zbieżny dla wartości na a, przy których szereg

$$a+a^2+a^4+a^8+\cdots$$

jest zbieżny, to jest dla $|a|<1$. Możemy zresztą przekonać się w tem bezpośrednio. W samej rzeczy

$$p_{n+1}=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdots(1+a^{2n})=1+a+a^2+a^3+\cdots$$
$$\cdots+a^{2^{n+1}-1}=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}$$

Oczywista, ciąg p_n będzie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|a|<1$. W tym przypadku będziemy mieli

$$P=\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}=\frac{1}{1-a}$$

2. Iloczyn nieskończony

$$\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{a}{n}\right)\ldots$$

przy $a>0$ jest rozbieżny, gdyż szereg $\frac{a}{1}+\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\cdots+\frac{a}{n}+\cdots$ jest rozbieżny. Łatwo spostrzec, że $P=\lim_{n\to\infty}p_n=\infty$.

Twierdzenie II. Iloczyn nieskończony

$$(1-v_1)(1-v_2)(1-v_3)\dots(1-v_n)\dots = \prod_{n=1}^{n=\infty}(1-v_n) \quad (166)$$

przy $v_n > 0$ jest zbieżny lub też rozbieżny, stosownie do tego, czy szereg

$$v_1+v_2+v_3+\dots+v_n+\dots \quad (167)$$

jest zbieżny, lub rozbieżny. W ostatnim przypadku iloczyn (166) będzie rozbieżny, ponieważ $P=0$.

Dowód. Dajmy na to, że szereg (167) jest zbieżny. Z wyrażenia $p_n=(1-v_1)(1-v_2)(1-v_3)\dots(1-v_n)$ wynika, że

$$\frac{1}{p_n}=\left(1+\frac{v_1}{1-v_1}\right)\left(1+\frac{v_2}{1-v_2}\right)\dots\left(1+\frac{v_n}{1-v_n}\right). \quad (168)$$

Ponieważ szereg (167) jest zbieżny, przeto, począwszy od pewnej wartości na n, wszystkie wyrazy tego szeregu są mniejsze od jedności, a zatem $\frac{v_n}{1-v_n}>0$

W myśl zaś Twierdzenia I. iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1+\frac{v_n}{1-v_n}\right)$ będzie zbieżny, skoro szereg

$$\frac{v_1}{1-v_1}+\frac{v_2}{1-v_2}+\frac{v_3}{1-v_3}+\dots+\frac{v_n}{1-v_n}+\dots \quad (169)$$

jest zbieżny. Szereg nieskończony (169) jest zbieżny, w myśl twierdzenia Abela (§ 2), gdyż wyrazy tego szeregu można uważać jako iloczyny z odpowiednich wyrazów szeregu zbieżnego (167) i wyrazów ciągu ograniczonego

$$\frac{1}{1-v_1},\ \frac{1}{1-v_2},\ \frac{1}{1-v_3}\dots\frac{1}{1-v_n},\dots$$

Ponieważ iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1+\frac{v_n}{1-v_n}\right)$ jest zbieżny, przeto $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{P_n}\right)$ jest liczbą określoną w zupełności, nie równą zeru, a zatem $\lim_{n\to\infty} p_n = P$ będzie liczbą również zupełnie określoną. Stąd wnosimy, że iloczyn (166) jest zbieżny.

Przypuśćmy teraz, że szereg (167) jest rozbieżny.

W takim razie szereg (169) będzie również rozbieżny, a zatem w myśl Twierdzenia I. iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1+\frac{v_n}{1-v_n}\right)$

będzie rozbieżny. Stąd wynika, że $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p_n}=\infty$, a zatem $\lim_{n\to\infty} p_n = P = 0$. A więc iloczyn nieskończony (166) jest rozbieżny. Twierdzenie II zostało więc udowodnione.

Przykład 1. Iloczyn nieskończony

$$\left(1-\frac{a}{1}\right)\left(1-\frac{a}{2}\right)\left(1-\frac{a}{3}\right)\dots\left(1-\frac{a}{n}\right)\dots$$

przy $a>0$ jest rozbieżny, gdyż szereg $\frac{a}{1}+\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\dots+\frac{a}{n}+\dots$ jest rozbieżny

2. Iloczyn nieskończony

$$\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\left(1-\frac{1}{3^k}\right)\left(1-\frac{1}{4^k}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^k}\right)\dots$$

jest zbieżny przy $k>1$, (względnie rozbieżny przy $k\leqslant 1$), gdyż w tych przypadkach szereg $\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\dots+\frac{1}{n^k}+\dots$ jest zbieżny (względnie rozbieżny).

Twierdzenie III. Iloczyn nieskończony

$$(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\dots(1+v_n)\dots = \prod_{n=1}^{n=\infty}(1+v_n), \quad (170)$$

gdzie $v_1, v_2, v_3, \dots v_n \dots$ są to liczby dodatnie lub ujemne, jest zbieżny, skoro szereg

$$u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots, \quad (171)$$

utworzony z wartości bezwzględnych wyrazów szeregu $v_1+v_2+v_3+\dots+v_n+\dots$ jest zbieżny.

Dowód. Aby tego dowieść załóżmy

$$\alpha_n = p_{n+1}-p_n=(1+v_1)(1+v_2)\dots(1+v_n)\,v_{n+1}$$
$$\beta_n = P_{n+1}-P_n=(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)\,u_{n+1}$$

Ponieważ szereg (171) jest zbieżny, przeto w myśl Twierdzenia I. iloczyn nieskończony $(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)\dots = \prod_{n=1}^{n=\infty}(1+u_n)$ będzie zbieżny, a zatem będzie zbieżny również szereg

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3+\dots\beta_n+\dots \quad (172)$$

Ponieważ $|\alpha_n|<\beta_n$, przeto szereg $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n+\dots$ jest bezwzględnie zbieżny. Suma szeregu (172) będzie wartością iloczynu nieskończonego (170), który będzie zatem zbieżny. Iloczyn nieskończony (170) którego zbieżność spowodowana jest zbieżnością szeregu (171) nazywamy bezwzględnie zbieżnym

Iloczyny bezwzględnie zbieżne posiadają własności analogiczne do własności szeregów bezwzględnie zbieżnych. Własności te podane zostaną w twierdzeniach następujących:

Twierdzenie IV. Jeżeli iloczyn nieskończony

$$(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\ldots(1+v_n)\ldots=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+v_n) \quad (172)$$

jest bezwzględnie zbieżny, to do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, że będzie zachodziła nierówność

$$|(1+v_\alpha)(1+v_\beta)\ldots(1+v_\lambda)-1|<\varepsilon, \quad (173)$$

skoro

$$m\geq\alpha;\ m\geq\beta;\ \ldots\ m\geq\lambda$$

Dowód. Niech

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \quad (174)$$

oznacza szereg, utworzony z wartości bezwzględnych wyrazów szeregu

$$v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n+\cdots \quad (175)$$

Będziemy więc mieli

$$|(1+v_\alpha)(1+v_\beta)\ldots(1+v_\lambda)-1|<(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\ldots(1+u_\lambda)-1,$$

a zatem

$$|(1+v_\alpha)(1+v_\beta)\ldots(1+v_\lambda)-1|<e^{u_\alpha+u_\beta+\cdots u_\lambda}-1 \quad (176)$$

Ponieważ iloczyn nieskończony (172) jest wedle umowy bezwzględnie zbieżny, przeto szereg (172) będzie zbieżny, a zatem można wyznaczyć taką liczbę całkowitą dodatnią m, iż będzie zachodziła nierówność

$$u_\alpha+u_\beta+\cdots+u_\lambda<\lg(1+\varepsilon) \quad (177)$$

skoro $m\geq\alpha$; $m\geq\beta$; $\ldots$ $m\geq\lambda$.

Z nierówności (177) wypływa nierówność

$$e^{u_\alpha+u_\beta+\cdots u_\lambda}<1+\varepsilon \quad (178)$$

Zastawiając nierówności (176) i (178), otrzymujemy nierówność

$$|(1+v_\alpha)(1+v_\beta)\ldots(1+v_\lambda)-1|<\varepsilon,$$

a na tem właśnie polega twierdzenie, o którego dowód chodziło.

Z udowodnionego twierdzenia wypływa natychmiast wniosek następujący:

Wniosek. Iloczyn nieskończony (172) bezwzględnie zbieżny nie może być zerem, skoro żaden z jego czynników nie równa

się zeru. W samej rzeczy na mocy udowodnionego twierdzenia można do każdej liczby dodatniej ε dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której nierówność $n\geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$|(1+v_{n+1})(1+v_{n+2})\ldots(1+v_{n+p})-1|<\varepsilon$$

Obieramy $\varepsilon<1$. W takim razie będzie.

$$|\prod_{p=1}^{p=\infty}(1+v_{n+p})|>1-\varepsilon,$$

a zatem

$$P=\lim_{n\to\infty}[1+v_1).(1+v_2)\ldots(1+v_n)]>0$$

Udowodnijmy teraz twierdzenie następujące:

Twierdzenie V. Wartość iloczynu nieskończonego

$$(1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_n)\ldots=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+v_n) \quad (179)$$

bezwzględnie zbieżnego nie zależy od porządku czynników

Dowód. Dajmy na to, że wyrażenia

$$(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\ldots(1+v_n)\ldots \quad (180)$$
$$(1+v'_1)(1+v'_2)(1+v'_3)\ldots(1+v'_n)\ldots \quad (181)$$

przedstawiają dwa iloczyny nieskończone, złożone z jednych i tych samych czynników, lecz następujących po sobie nie w jednakowym porządku.

Oznaczmy przez P i P' odpowiednio wartości iloczynów (180) i (181). Ponieważ iloczyn (179) jest bezwzględnie zbieżny, przeto szereg nieskończony $|v_1|+|v_2|+|v_3|+\cdots|v_n|+\cdots$ a zatem będzie zbieżny również szereg

$$|v'_1|+|v'_2|+|v'_3|+\cdots+|v'_n|+\cdots$$

Stąd wnosimy, że iloczyn nieskończony (179) jest zbieżny.

Obierzmy liczbę całkowitą dodatnią $m>n$ tak, aby n pierwszych wyrazów iloczynu (181) było zawarte w m pierwszych wyrazach iloczynu (180). W takim razie będzie

$$\frac{p_m}{p_n}=(1+v_\alpha)(1+v_\beta)\cdots(1+v_\lambda),$$

gdzie $\alpha>n$; $\beta>n\cdots\lambda>n$.

W myśl Twierdzenia IV. możemy obrać liczbę n tak, ażeby zachodziła nierówność

$$\left|\frac{p'_m}{p_n}-1\right|<\varepsilon \quad (182)$$

Biorąc pod uwagę, że gdy liczba n zwiększa się nieograniczenie widzimy że liczba m będzie również się zwiększała nieograniczenie, a zatem z nierówności (182) wnosimy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p'_m}{p_n} = \frac{P'}{P} = 1,$$

a zatem

$$P' = P$$

Stąd wnioskujemy, że porządek czynników bezwzględnie zbieżnego iloczynu nieskończonego nie wpływa na jego wartość. A więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Twierdzenie VI. 1. Iloczyn nieskończony.

$$(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\cdots(1+v_n)\cdots = \prod_{n=1}^{n=\infty}(1+v_n), \quad (183)$$

gdzie $v_1, v_2, v_3 \ldots v_n \ldots$ są to liczby dodatnie lub ujemne, jest zbieżny, jeżeli szeregi

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (184)$$
$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2 + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (185)$$

są jednocześnie zbieżne.

2. Iloczyn (183) będzie rozbieżny, skoro jeden z szeregów (184), (185) jest rozbieżny.

Dowód. Dajmy na to, że szeregi (184) i (185) są jednocześnie zbieżne. Posługując się szeregiem

$$\lg(1+\alpha) = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + \cdots \quad . \quad . \quad (186)$$

możemy napisać

$$\lg(1+\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2}(1+\omega), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (187)$$

gdzie $|\omega| < \frac{1}{2}$.

W myśl wzoru (187) będziemy mieli

$$\lg(1+v_1) = v_1 - \frac{v_1^2}{2}(1+\delta_1)$$
$$\lg(1+v_2) = v_2 - \frac{v_2^2}{2}(1+\delta_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lg(1+v_n) = v_n - \frac{v_n^2}{2}(1+\delta_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

gdzie wszystkie liczby α_n spełniają nierówności

$$-\frac{1}{2} < \alpha_n < \frac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (188)$$

Stąd wnosimy, że

$$\lg p_n = \lg(1+v_1) + \lg(1+v_2) + \cdots + \lg(1+v_n) = v_1 + v_2 + \cdots + v_n - \frac{1}{2}[v_1^2(1+\delta_1) + v_2^2(1+\delta_2) + \cdots + v_n^2(1+\delta_n)] \quad . \quad . \quad (189)$$

Biorąc pod uwagę, że dla każdej liczby n zachodzą nierówności

$$\frac{v_n^2}{2} < v_n^2(1+\delta_n) < \frac{3}{2}v_n^2,$$

wnosimy, że skoro szeregi (184) i (185) są zbieżne, ciąg $\lg p_n$, a zatem i p_n posiada określoną w zupełności granicę nie równą zeru, czyli innemi słowy iloczyn nieskończony (183) będzie wtedy zbieżnym. Twierdzenie VI zachodzi więc w podanem brzmieniu.

2. Przypuśćmy teraz, że jeden z szeregów (184), (185) jest rozbieżny. Jeżeli szereg (185) jest rozbieżny, szereg zaś (184) zbieżny, wówczas ze wzoru (189) wnosimy, że

$$\lim_{n\to\infty} \lg p_n = -\infty, \text{ a zatem } P = 0$$

A więc iloczyn (183) będzie wtedy rozbieżny. Jeżeli zaś szereg (184) jest rozbieżny, a szereg (185) zbieżny, wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \lg p_n = \infty, \text{ a zatem } P = \infty.$$

Iloczyn (183) będzie zatem rozbieżny. Udowodniliśmy więc Twierdzenie VI w zupełności.

Uwaga. Godnem jest uwagi, że iloczyn nieskończony (183) może być zbieżnym mimo to, że obydwa szeregi (184) i (185) są rozbieżne. W samej rzeczy, w tym przypadku wyrażenie (189) przyjmuje postać nieoznaczoną, $\infty - \infty$, a zatem może mieć wartość zupełnie określoną.

§ **10. Szeregi podwójne.** Udowodniliśmy w § 3 Rozdz. III, że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest równej mocy ze zbiorem liczb zespolonych, czyli innemi słowy ze zbiorem wszystkich par liczb rzeczywistych. Weźmy pod uwagę tylko liczby całkowite. W takim razie każdej parze dwóch liczb całkowitych (a, b) będzie odpowiadała pewna liczba całkowita A i odwrotnie. Należy zaznaczyć, że odpowiedniość doskonałą miedzy tymi zbiorami można ustalić wieloma sposobami. Dajmy na to, że cała płaszczyzna jest podzielona na kwadraty, z których każdy możemy wyznaczyć za pomocą dwóch liczb, a mianowicie numeru wiersza i numeru kolumny, w której ów kwadrat się znajduje. Umieszczając w każdym z tych kwadratów pewną liczbę całkowitą, ustalimy odpowiedniość doskonałą między zbiorami wszystkich liczb rzeczywistych a zbiorem wszystkich par tych liczb.

Podajemy niżej w dwóch Tablicach I i II dwa różne sposoby umieszczania liczb całkowitych w kwadratach płaszczyzny.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	4	7	11	16	22	29	37	↙
2	3	5	8	12	17	23	30	↙	↙	
3	6	9	13	18	24	31	↙	↙		
4	10	14	19	25	32	↙	↙			
5	15	20	26	33	↙	↙				
6	21	27	34	↙	↙					
7	28	35	↙	↙						
8	36	↙	↙							
	↙	↙								

Tab. I.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	5	10	17	26	37	↡	
2	4	3	6	11	18	27	↡	↡	
3	9	8	7	12	19	28	↡	↡	
4	16	15	14	13	20	29	↡	↡	
5	25	24	23	22	21	30	↡	↡	
6	36	35	34	33	32	31	↡	↡	
7	←	←	←	←	←	←	↡	↡	
8	←	←	←	←	←	←	←	↡	

Tab. II.

Dajmy na to, że mamy pewien szereg nieskończony

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (190)$$

Podzielmy płaszczyznę prostemi poziomemi i pionowemi na kwadraty i w każdym kwadracie otrzymanej w ten sposób siatki wpiszmy jeden z wyrazów szeregu (190).

Przypuszczając, że liczbie n wskaźnika wyrazu u_n odpowiadać będzie para liczb (i, j), umieszczamy wyraz u_n w kwadracie *i-ego* wiersza i *j-ej* kolumny. Oznaczając w takim razie

$$u_n = v_{ij},$$

otrzymamy tablicę,

	1	2	3	4
1	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}
2	v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{24}
3	v_{31}	v_{32}	v_{33}	v_{34}
4	v_{41}	v_{42}	v_{43}	v_{44}

w której pierwszy wiersz zawiera wyrazy

$$v_{11}, v_{12}, v_{13}, \cdots v_{1n}, \cdots$$

drugi

$$v_{21}, v_{22}, v_{23}, \cdots v_{2n}, \cdots$$

trzeci

$$v_{31}, v_{32}, v_{33}, \cdots v_{3n}, \cdots$$

i t. d. A więc szeregowi nieskończonemu (190) odpowiada zbiór nieskończony szeregów

$$\begin{aligned} &v_{11} + v_{12} + v_{13} + \cdots + v_{1n} + \cdots \\ &v_{21} + v_{22} + v_{23} + \cdots + v_{2n} + \cdots \\ &v_{31} + v_{32} + v_{32} + \cdots + v_{3n} + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (191)$$

Szeregi typu (191) nazywamy p o d w ó j n y m i (serie à double entrée). Udowodnijmy bardzo ważne twierdzenie podstawowe o szeregach podwójnych.

T w i e r d z e n i e I. Dajmy na to, że szeregowi nieskończonemu (190) odpowiada zbiór nieskończony szeregów (191). Oznaczmy przez $S_1, S_2, S_3 \ldots$ odpowiednio sumy szeregów (191), a przez A sumę (190).

Twierdzenie, o którego dowód chodzi, brzmi:

J e ż e l i szereg (190) j e s t b e z w z g l ę d n i e z b i e ż n y, wówczas: 1) s z e r e g i (191) b ę d ą r ó w n i e ż b e z w z g l ę d n i e z b i e ż n e. 2) s z e r e g $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n + \cdots$ (192), u t w o r z o n y z s u m s z e r e g ó w (191), b ę d z i e b e z w z g l ę d n i e z b i e ż n y, a n a d t o s u m a t e g o o s t a t n i e g o s z e r e g u

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = A.$$

D o w ó d. Udowodnijmy wypowiedziane twierdzenie najpierw w tym przypadku, gdy wyrazy szeregu (190) są liczbami dodatniemi. Oznaczmy przez A_n sumę n pierwszych wyrazów szeregu (193). Ponieważ ciąg $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n \ldots$ jest rosnący i posiada określoną w zupełności granicę A, przeto $A_n < A$. Niechaj

$$\begin{aligned} S_1^{(n)} &= v_{11} + v_{12} + v_{13} + \cdots + v_{1n} \\ S_2^{(n)} &= v_{21} + v_{22} + v_{23} + \cdots + v_{2n} \\ S_3^{(n)} &= v_{31} + v_{32} + v_{33} + \cdots + v_{3n} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (193)$$

oznaczają sumy n pierwszych wyrazów szeregów (191). Dajmy na to, że n_1 oznacza największy wskaźnik wyrazów szeregu (190), wchodzących w skład sumy $S_1^{(n)}$; n_2 — największy wskaźnik wyrazów szeregu (190), wchodzących w skład sumy $S_2^{(n)}$ i t. d. Oznaczmy przez p największą z liczb

$$n_1, n_2, n_3, \ldots n_m,$$

odpowiadających sumom

$$S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, S_3^{(n)} \ldots S_m^{(n)},$$

i rozważmy sumę

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots u_p = A_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (194)$$

Łatwo udowodnić, że zachodzi nierówność

$$S_1^{(n)} + S_2^{(n)} + S_3^{(n)} + \ldots + S_m^{(n)} \leq A_p \quad \ldots \quad (195)$$

W samej rzeczy, każdy z dodajników sum

$$S_1^{(n)},\ S_2^{(n)},\ S_3^{(n)} \ldots S_m^{(n)}$$

jest zarazem dodajnikiem sumy (194), gdyż numery tych dodajników są mniejsze od N, w skład zaś sumy (194) wchodzić mogą wyrazy szeregu (190), nie należące do żadnej z sum $S_1^{(n)}, S_2^{(n)} \ldots S_m^{(n)}$. Stąd wnosimy, że zachodzi nierówność (195), czyli też nierówność $S_i^{(n)} < A_p$. Biorąc zaś pod uwagę, że $A_p < S$, otrzymamy nierówność

$$S_i^{(n)} < S$$

Ponieważ ciąg $S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, S_3^{(n)} \ldots$ jest rosnący, a ograniczony zgóry, przeto posiada określoną w zupełności granicę. Stąd wnioskujemy, że wszystkie szeregi (191) są zbieżne, a zatem w myśl Twierdzenia I § 7 bezwzględnie zbieżne. Udowodnijmy teraz, że szereg

$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n + \cdots$$

jest zbieżny, a nadto, że jego suma równa się właśnie sumie A szeregu (190). Z nierówności $A_p < S$ i (195) wypływa nierówność

$$S_1^{(n)} + S_2^{(n)} + S_3^{(n)} + \cdots + S_m^{(n)} < A$$

Dajmy na to, że liczba n pozostaje niezmienna. W takim razie będzie

$$\lim_{m \to \infty} \left[S_1^{(n)} + S_2^{(n)} + \cdots + S_m^{(n)}\right] \leq A,$$

czyli

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_m \leq A$$

Ponieważ ciąg o wyrazie ogólnym $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_m$ jest rosnący, a ograniczony zgóry, przeto szereg (190) będzie zbieżny, a zatem, jako szereg o wyrazach dodatnich — bezwzględnie zbieżny. Oznaczając przez S sumę szeregu (192), otrzymujemy nierówność

$$S \leq A \quad \ldots \quad (196)$$

Weźmy pod uwagę sumę $A_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ i oznaczmy przez $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ odpowiednio numery wierszów tablicy, w których skład wchodzą wyrazy sumy A_n. Niechaj m będzie największą z liczb $m_1, m_2 \ldots m_n$. Oznaczmy dalej przez n_1 największą z liczb j przy wyrazach v_{1j} (pierwszego wiersza tablicy), wchodzących w skład sumy A_n; przez n_2 — największą z liczb j przy wyrazach v_{2j} (drugiego wiersza tablicy), wchodzących w skład sumy A_n i t. d. Niechaj q oznacza największą z liczb $n_1, n_2, n_3 \ldots$ Rozważmy sumę

$$S_1^{(q)} + S_2^{(q)} + \cdots + S_m^{(q)} \quad \ldots \quad (197)$$

Łatwo spostrzec, że

$$A_n \leq S_1^{(q)} + S_2^{(q)} + \cdots + S_m^{(q)}$$

Ponieważ ciąg (197) jest rosnący, przeto

$$S_1^{(q)} + S_2^{(q)} + \cdots + S_m^{(q)} < \lim_{m \to \infty} \left[S_1^{(q)} + S_2^{(q)} + \cdots + S_m^{(q)}\right],$$

czyli

$$A_n < S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_m$$

Ponieważ

$$\lim_{n \to \infty} (S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_m) = S,$$

a nadto ciąg $S_1, S_2, S_3 \ldots$ jest rosnący, przeto

$$A_n < S,$$

a zatem

$$S > A \quad \ldots \quad (198)$$

Zestawiając nierówności (196), (198), wnioskujemy, że

$$S = A.$$

Udowodniliśmy więc twierdzenie w tym przypadku, gdy wyrazy szeregu (190) są dodatnie.

Udowodnijmy teraz to twierdzenie w przypadku ogólnym, gdy wyrazy szeregu (190) mają różne znaki. Ponieważ szereg (190) jest bezwzględnie zbieżny, przeto w myśl Twierdzenia Dirichleta szereg

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots \quad \ldots \quad (199)$$

utworzony z wartości bezwzględnych wyrazów szeregu (190), jest również zbieżny. Ponieważ wyrazy szeregu (199) są to liczby dodatnie, przeto w myśl twierdzenia, udowodnionego w przypadku szczególnym, szeregi

$$\begin{aligned} &|v_{11}| + |v_{12}| + |v_{13}| + \cdots + |v_{1m}| + \cdots \\ &|v_{21}| + |v_{22}| + |v_{23}| + \cdots + |v_{2m}| + \cdots \\ &|v_{31}| + |v_{32}| + |v_{33}| + \cdots + |v_{3m}| + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \quad \ldots \quad (200)$$

będą zbieżne, a zatem szeregi (191) są bezwzględnie zbieżne. Oznaczmy przez $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$ odpowiednio sumy szeregów (200). W myśl udowodnionego twierdzenia szereg

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \cdots + \sigma_n + \cdots \quad \ldots \quad (201)$$

będzie zbieżny. Pozostaje więc jeszcze do udowodnienia, że szereg (201) będzie bezwzględnie zbieżny i że suma tego szeregu równa się sumie A szeregu (190). Oczywista, zachodzą nierówności

$$|S_1| \leq \sigma_1; \quad |S_2| \leq \sigma_2 \ldots |S_m| \leq \sigma_m \ldots$$

Ponieważ szereg (201) jest zbieżny, przeto szereg

$$|S_1| + |S_2| + |S_3| + \cdots + |S_m| + \cdots$$

będzie również zbieżny, a zatem szereg

$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n + \cdots$$

jest bezwzględnie zbieżny.

Oznaczmy przez A', S'_1, $S'_2 \ldots S'_m \ldots$ odpowiednio sumy wszystkich wyrazów dodatnich szeregów (190) i (191), a przez A'', S''_1, $S''_2 \ldots S''_m \ldots$ odpowiednio sumy wszystkich wyrazów ujemnych tych szeregów. W takim razie można napisać

$$A = A' - A''; \; S_1 = S'_1 - S''_1; \; S_2 = S'_2 - S''_2 \ldots S_m = S'_m - S''_m . \quad (202)$$

Z drugiej zaś strony będzie

$$A' = S'_1 + S'_2 + S'_3 + \cdots + S'_m + \cdots$$
$$A'' = S''_1 + S''_2 + S''_3 + \cdots + S''_m + \cdots$$

Na mocy twierdzenia o dodawaniu szeregów otrzymamy

$$A' - A'' = (S'_1 - S''_1) + (S'_2 - S''_2) + \cdots + (S'_k - S''_k) + \cdots$$

czyli ze względu na (202)

$$A' - A'' = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_m + \cdots$$

Stąd wnosimy, że

$$S = \lim_{n \to \infty} (S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_m) = A$$

A więc udowodniliśmy twierdzenie w zupełności.
W myśl udowodnionego twierdzenia można napisać

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} u_i = \sum_{k=1}^{k=\infty} v_{1k} + \sum_{k=1}^{k=\infty} v_{2k} + \cdots + \sum_{k=1}^{k=\infty} v_{jk} + \cdots$$

Twierdzenie II. (odwrotne). Jeżeli wszystkie szeregi

$$v_{11} + v_{12} + v_{13} + \cdots + v_{1n} + \cdots$$
$$v_{21} + v_{22} + v_{23} + \cdots + v_{2n} + \cdots \quad (204)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

odpowiadające szeregowi

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots u_n + \cdots$$

są bezwzględnie zbieżne, a nadto szereg

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \cdots \sigma_n + \cdots,$$

utworzony z wartości bezwzględnych szeregów (203) jest zbieżny, to szereg (204) będzie również zbieżny.

Dowód tego twierdzenia, który nie nastręcza żadnych trudności, pozostawiamy czytelnikowi.

Zastosujmy udowodnione twierdzenie do dowodu twierdzenia Cauchy'ego, o mnożeniu szeregów bezwzględnie zbieżnych.

Dajmy na to, że dane są dwa szeregi bezwzględnie zbieżne

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots$$

których sumy oznaczmy odpowiednio przez U i V.

Załóżmy $u_i \, v_j = w_{ij}$.

Umieśćmy wszystkie liczby całkowite w siatce graficznej na płaszczyźnie w sposób dowolny i rozważmy sumę

$$\sum_{i,j=1}^{i,j=\infty} w_{ij} = w_{11} + (w_{12} + w_{21}) + (w_{31} + w_{22} + w_{13}) + \cdots$$

Na mocy udowodnionego twierdzenia o podwójnych szeregach możemy napisać

$$\sum_{i,j=1}^{i,j=\infty} w_{ij} = \sum_{j=1}^{j=\infty} w_{ij} + \sum_{j=1}^{j=\infty} w_{2j} + \sum_{j=1}^{j=\infty} w_{3j} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (205)$$

Z drugiej zaś strony

$$\sum_{j=1}^{j=\infty} w_{1j} = u_1 v_1 + u_1 v_2 + \cdots = u_1 (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = u_1 V \quad (206)$$

$$\sum_{j=1}^{j=\infty} w_{2j} = u_2 v_1 + u_2 v_2 + \cdots = u_2 (v_1 v_2 + \cdots + v_n) = u_2 V$$

i t. d.

Podstawiając wzory (206) do (205), otrzymamy

$$\sum_{i,j=1}^{i,j=\infty} w_{ij} = u_1 V + u_2 V + \cdots = (u_1 + u_2 + \cdots) V = U.V.$$

Za pomocą szeregów podwójnych można łatwo wyznaczać sumy szeregów nieskończonych. Rozważmy naprzykład szereg

$$a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + na^n + \cdots$$

Łatwo spostrzec, że przy $|a| < 1$ szereg ten jest zbieżny. Możemy więc napisać

$$a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + na^n + \cdots = a + (a^2 + a^2) + (a^3 + a^3 + a^3) + \cdots$$
$$\cdots + (a^n + a^n + \cdots + a^n) + \cdots$$

Umieszczamy wyrazy tego szeregu w tablicy

a	a^2	a^3	a^4
a^2	a^3	a^4	a^5
a^3	a^4	a^5	a^6
a^4	a^5	a^6	a^7

W myśl udowodnionego twierdzenia o szeregach podwójnych możemy napisać

$$a+2a^2+3a^3+\cdots+na^n+\cdots=(a+a^2+a^3+\cdots+a^n+\cdots)+$$
$$+(a^2+a^3+a^4+\cdots+a^n+\cdots)+(a^3+a^4+a^5+\cdots+a^n+\cdots)+\cdots$$

Oznaczając

$$\sigma_1=a+a^2+a^3+\cdots+a^n+\cdots;\quad \sigma_2=a^2+a^3+a^4+\cdots+a^n+\cdots$$
$$\sigma_3=a^3+a^4+a^5+\cdots+a^n+\cdots;$$

będziemy mieli

$$\sigma_1=\frac{a}{1-a};\quad \sigma_2=\frac{a^2}{1-a};\quad \sigma_3=\frac{a^3}{1-a}\quad \text{i t. d.}$$

Szereg $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\cdots+\sigma_n+\cdots$ przedstawia postęp geometryczny którego suma równa się

$$\sigma=\frac{a}{(1-a)^2},$$

a zatem

$$a+2a^2+3a^3+\cdots+na+\cdots=\sigma=\frac{a}{(1-a)^2}$$

Zastosujmy twierdzenie o szeregach podwójnych do wyprowadzenia bardzo ważnej tożsamości, podanej przez Eulera.

W tym celu weźmy szereg dobrze znany

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots\frac{1}{n^k}+\cdots$$

zbieżny przy $k>1$. Oznaczając przez S sumę tego szeregu, rozważmy szereg

$$S-1=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots\qquad (207)$$

Umieśćmy wszystkie liczby całkowite w siatce graficznej na płaszczyźnie w sposób następujący: w pierwszym wierszu umieszczamy kolejno wszystkie liczby całkowite parzyste

2, 4, 6, 8, 10 . . .

W drugim wierszu umieszczamy wszystkie liczby całkowite, podzielne przez 3, które nie zostały umieszczone w pierwszym wierszu, a mianowicie

3, 9, 15, 21, 27

w trzecim wierszu umieszczamy wszystkie liczby całkowite podzielne przez 5, które nie zostały umieszczone w pierwszych dwóch wierszach, a więc

5, 25, 35, 55

Postępując dalej w ten sposób otrzymamy tablicę w której umieszczone zostaną wszystkie liczby całkowite.

	1	2	3	4	5	6	7
1	2	4	6	8	10	12	
2	3	9	15	21	27	33	
3	5	25	35	55	65	85	
4	7	49	77	91			
5	11	121					
6	13						

Łatwo spostrzec, że przy takiem umieszczeniu liczb całkowitych do pierwszej kolumny wchodzić będą kolejno wszystkie liczby proste. Oznaczmy przez S_r sumę szeregu (207), którego pierwszy wyraz jest liczbą prostą r. W takim razie otrzymamy szeregi

$$S_2=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{6^k}+\cdots$$
$$S_3=\frac{1}{3^k}+\frac{1}{9^k}+\frac{1}{15^k}+\cdots\qquad (208)$$
$$S_5=\frac{1}{5^k}+\frac{1}{25^k}+\frac{1}{35^k}+\cdots$$

i t. d.

W myśl twierdzenia o szeregach podwójnych możemy napisać

$$S-1=S_2+S_3+S_5+\cdots$$

Przekształćmy każdy z szeregów (208) w sposób następujący:

$$S_2=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{6^k}+\cdots=\frac{1}{2^k}\left(1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots\right)=\frac{1}{2^k}\cdot S$$

$$S_3 = \frac{1}{3^k} + \frac{1}{9^k} + \frac{1}{15^k} + \cdots = \frac{1}{3^k}\left(1 + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{5^k} + \cdots\right) = \frac{1}{3^k}\left(S - S_2\right)$$

$$S_5 = \frac{1}{5^k} + \frac{1}{25^k} + \cdots = \frac{1}{5^k}(S - S_2 - S_3) = \frac{1}{5}\left(S - S_2 - \frac{S - S_2}{3^k}\right) =$$

$$= \frac{(S - S_2)}{5} : \left(1 - \frac{1}{3^k}\right) = \frac{S}{5^k}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\left(1 - \frac{1}{3^k}\right)$$

Wogóle

$$S_p = \frac{1}{p^k}(S - S_2 - S_3 - \cdots - S_{p'}) = \frac{S}{p^k}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\left(1 - \frac{1}{3^k}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p'^k}\right),$$

gdzie p' jest to największa z liczb prostych mniejsza od p. Mnożąc ostatni wzór przez p^k, dostaniemy

$$S - S_2 - S_3 - \cdots - S_{p'} = S\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\left(1 - \frac{1}{3^k}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p'^k}\right),$$

skąd

$$\lim_{p' \to \infty} (S - S_2 - S_3 - \cdots - S_{p'}) = S - \lim (S_2 - S_3 - \cdots - S_{p'}) = 1,$$

a zatem

$$S = \frac{1}{\lim\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\left(1 - \frac{1}{3^k}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p'^k}\right)} = \frac{1}{\prod_{p'=1}^{p'=\infty}\left(1 - \frac{1}{p'^k}\right)}.$$

Stąd otrzymujemy

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{n^k} + \cdots = \frac{1}{\prod_{p=1}^{p=\infty}\left(1 - \frac{1}{p'^k}\right)}.$$

Jest to właśnie tożsamość Eulera, o której dowód nam chodziło.

§ 11. Szeregi i iloczyny nieskończone o wyrazach zespolonych. Rozważmy ciąg o wyrazach zespolonych

$$z_1 = a_1 + ib_1;\ z_2 = a_2 + ib_2;\ z_3 = a_3 + ib_3;\ \ldots\ z_n = a_n + ib_n;\ \ldots \quad (209)$$

Ciąg (209) nazywamy zbieżnym wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi

$$\begin{aligned} &a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots \\ &b_1, b_2, b_3, \ldots b_n, \ldots \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (210)$$

są zbieżne. Dajmy na to, że a i b oznaczają odpowiednio granice ciągów (210). W takim razie liczbę zespoloną

$$A = a + bi$$

nazywamy granicą ciągu (209).

Udowodnijmy twierdzenia następujące:

Twierdzenie I. Na to, aby ciąg liczb zespolonych

$$z_1 = a_1 + ib_1;\ z_2 = a_2 + ib_2 \ldots z_n = a_n + ib_n \ldots . \quad (211)$$

posiadał pewną granicę A, potrzeba i wystarcza, żeby do każdej dodatniej liczby ε można było dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której warunek $n \geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$\text{Mod}\,(z_n - A) < \varepsilon,$$

Dowód. Dajmy na to, że ciąg (211) jest zbieżny i posiada granicę $A = a + bi$. W takim razie ciągi

$$a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \ldots \text{ i } b_1, b_2, b_3 \ldots b_n \ldots \quad . \quad . \quad (212)$$

są zbieżne. Niechaj ε oznacza dowolną liczbę dodatnią. Oczywista, do dowolnej liczby dodatniej ε_1 dobrać można takie dwie liczby całkowite dodatnie m_1 i m_2, przy których warunki $n \geq m_1$; $n \geq m_2$ pociągają za sobą nierówności

$$|a_n - a| < \varepsilon_1;\quad |b_n - b| < \varepsilon_1 \ldots . \quad (213)$$

Oznaczmy przez m największą z liczb m_1 i m_2. W takim razie obie nierówności (213) zachodzić będą jednocześnie, skoro $n \geq m$. Z nierówności tych otrzymamy

$$(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 < 2\varepsilon_1^2,$$

czyli

$$\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = \text{Mod}\,(z_n - A) < \varepsilon_1\sqrt{2},$$

skoro $n \geq m$. Obierając $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, znajdziemy, że

$$\text{Mod}\,(z_n - A) < \varepsilon$$

dla $n \geq m$.

Przypuśćmy, że do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której warunek $n \geq m$ pociąga za sobą nierówność

$$\text{Mod}\,(z_n - A) < \varepsilon$$

Nierówność ta jest równoważna z nierównością

$$\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon$$

Biorąc zaś pod uwagę, że

$$|a_n - a| \leq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2}$$
$$|b_n - b| \leq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2},$$

wnosimy, że zachodzić będą nierówności

$$|a_n - a| < \varepsilon;\quad |b_n - b| < \varepsilon, \quad \ldots\ldots \quad (214)$$

skoro $n \geq m$. Nierówności (214) wskazują, że ciągi (212) są zbieżne i posiadają odpowiednio granice a i b. Stąd wnioskujemy, że ciąg (221) będzie również zbieżny, a nadto granica tego ciągu będzie właśnie liczbą $A = a + bi$. Udowodniliśmy więc twierdzenie w zupełności.

Posługując się twierdzeniem Cauchy'ego, udowodnionem w § 8 Rozdz. III dla ciągów o wyrazach rzeczywistych w sposób zupełnie analogiczny do tego, którego użyliśmy przy dowodzie poprzedniego twierdzenia, możemy udowodnić twierdzenie następujące:

Twierdzenie II. Na to, aby ciąg o wyrazach zespolonych

$$z_1 = a_1 + ib_1;\ z_2 = a_2 + ib_2;\ \ldots\ z_n = a_n + ib_n\ \ldots \qquad (215)$$

był zbieżny, potrzeba i wystarcza, żeby do każdej liczby dodatniej ε można było dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, przy której zachodzić będzie nierówność

$$\operatorname{Mod}(z_{n+p} - z_n) < \varepsilon$$

dla każdej liczby całkowitej dodatniej p, skoro $n \geq m$.

Twierdzenie III. Jeżeli ciąg o wyrazach zespolonych

$$z_1 = a_1 + ib_1;\ z_2 = a_2 + ib_2;\ \ldots\ z_n = a_n + ib_n,\ \ldots \qquad (215)$$

jest zbieżny, to ciąg

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2};\ \sqrt{a_2^2 + ib_2^2};\ \ldots\ \sqrt{a_n^2 + ib_n^2},\ \ldots \qquad (216)$$

utworzony z modułów wyrazów ciągu (215), będzie również zbieżny, a nadto granicą tego ciągu będzie liczba $\sqrt{a^2 + b^2}$, gdzie a i b są to odpowiednio granice ciągów $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n; \ldots b_1, b_2, b_3 \ldots b_n \ldots$ (217)

Dowód. Dajmy na to, że ciąg (215) jest zbieżny. W takim razie będą zbieżne ciągi (217), przyczem

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a;\quad \lim_{n \to \infty} b_n = b.$$

W myśl Twierdzenia § 9 Rozdz. III otrzymamy

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{(\lim a_n)^2 + (\lim b_n)^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

co właśnie mieliśmy do udowodnienia.

Przejdziemy teraz do szeregów nieskończonych o wyrazach zespolonych.

Szeregiem nieskończonym o wyrazach zespolonych nazywamy wyrażenie

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + (a_3 + ib_3) + \cdots + (a_n + ib_n) + \ldots \qquad (218)$$

Szereg (218) nazywamy zbieżnym, jeżeli zbieżnym jest ciąg, utworzony z sum częściowych szeregu (218)

$$\sigma_1 = a_1 + ib_1$$
$$\sigma_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)$$
$$\sigma_3 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + (a_3 + ib_3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sigma_n = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + \cdots + (a_n + ib_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Granicę S tego ciągu nazywać będziemy, sumą szeregu (218). W myśl definicji zbieżności ciągu o wyrazach zespolonych, szereg nieskończony (218) będzie zbieżnym wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są szeregi

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$
$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots$$

Na mocy Twierdzenia II o ciągach liczb zespolonych wypowiedzieć możemy twierdzenie następujące:

Twierdzenie IV. Na to, aby szereg nieskończony (218) o wyrazach zespolonych był zbieżny, potrzeba i wystarcza, żeby do każdej liczby dodatniej ε można było dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, iżby zachodziła nierówność

$$\operatorname{Mod}(\sigma_{n+p} - \sigma_n) < \varepsilon$$

dla każdej liczby całkowitej dodatniej p, skoro $n \geq m$.

Twierdzenie V. Na to, aby szereg nieskończony (218) o wyrazach zespolonych był zbieżny wystarcza, żeby szereg, utworzony z modułów wyrazów danego szeregu był zbieżny.

Dowód. Dajmy na to, że szereg

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \cdots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} + \ldots \qquad (219)$$

jest zbieżny. Ponieważ

$$a_n \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2};\quad b_n \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

przeto szeregi $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$; $b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$ będą zbieżne, a zatem będzie zbieżny również szereg (218).

Udowodniliśmy więc Twierdzenie V.

Szereg nieskończony o wyrazach zespolonych nazywamy bezwzględnie czyli bezwarunkowo zbieżnym, jeżeli szereg, utworzony z modułów wyrazów danego szeregu jest bezwzględnie zbieżny.

Twierdzenie VI. Jeżeli szereg nieskończony o wyrazach zespolonych

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)+\cdots+(a_n+ib_n)+\cdots \quad . \quad (220)$$

jest bezwzględnie zbieżny, wówczas będą bezwzględnie zbieżne również szeregi

$$\begin{matrix} a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \\ b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n+\cdots \end{matrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (221)$$

i naodwrót.

Dowód. Dajmy na to, że szereg (220) jest bezwzględnie zbieżny. W takim razie szereg

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}+\quad . \quad . \quad (222)$$

będzie zbieżny. Ponieważ

$$|a_n| \leq \sqrt{a_n^2+b_n^2} \text{ i } |b| \leq \sqrt{a_n^2+b_n^2},$$

przeto szeregi

$$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots \text{ i } |b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|+\cdots \quad (223)$$

są zbieżne, a zatem szeregi (221) będą bezwzględnie zbieżne. Odwrotnie, jeżeli szeregi (221) są bezwzględnie zbieżne, to szeregi (222) będą zbieżne, a zatem szereg

$$v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n+\cdots$$

gdzie $v_n=|a_n|+|b_n|$, będzie również zbieżny.

Z drugiej zaś strony ponieważ

$$v_n \geq \sqrt{a_n^2+b_n^2},$$

przeto szereg (222) będzie zbieżny. Stąd wnioskujemy, że szereg (220) będzie w danym przypadku bezwzględnie zbieżny. A więc możemy uważać Twierdzenie VI za udowodnione.

Posługując się Twierdzeniem Dirichleta, udowodnionem w § 7 dla szeregów nieskończonych o wyrazach rzeczywistych i uwzględniając Twierdzenie VI, możemy wysłowić twierdzenie następujące:

Twierdzenie VII. Na to, aby suma szeregu nieskończonego (220) o wyrazach zespolonych nie zależała od porządku, w którym wyrazy następują po sobie, potrzeba i wystarcza, żeby szereg ten był bezwzględnie zbieżny.

Posługując się twierdzeniami o dodawaniu i mnożeniu szeregów, udowodnionemi w § 8 dla szeregów o wyrazach rzeczywistych, udowodnimy natychmiast twierdzenia te w tym przypadku, gdy wyrazy szeregu są liczbami zespolonemi, a mianowicie:

Twierdzenie VIII. Suma dwóch lub więcej szeregów, zbieżnych o wyrazach zespolonych będzie również szeregiem zbieżnym, a nadto suma tego szeregu równa się sumie sum szeregów dodajnych.

Twierdzenie IX. Jeżeli jeden z dwóch szeregów

$$\begin{matrix} u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \\ v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n+\cdots \end{matrix}$$

o wyrazach zespolonych jest bezwzględnie zbieżny, to iloczyn tych szeregów, czyli szereg

$$w_1+w_2+w_3+\cdots+w_n+\cdots,$$

gdzie

$$w_n=u_1v_n+u_2v_{n-2}+\cdots+u_{n-1}v_2+u_nv_1$$

będzie zbieżny.

Twierdzenie X. Iloczyn dwóch szeregów bezwzględnie zbieżnych o wyrazach zespolonych będzie szeregiem również bezwzględnie zbieżnym.

§ 12. **Iloczyny nieskończone o czynnikach zespolonych.** Niechaj $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ oznacza pewien ciąg o wyrazach zespolonych $z_n=a_n+ib_n$. Iloczynem nieskończonym o czynnikach zespolonych nazywać będziemy wyrażenie

$$(1+z_1)(1+z_2)(1+z_3)\cdots(1+z_n)\cdots=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+z_n) \quad . \quad (224)$$

Iloczyn (224) nazywamy zbieżnym, jeżeli ciąg

$$\begin{aligned} q_1&=(1+z_1) \\ q_2&=(1+z_1)(1+z_2) \\ q_3&=(1+z_1)(1+z_2)(1+z_3) \quad . \quad . \quad . \quad (225) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_n&=(1+z_1)(1+z_2)(1+z_3)\ldots(1+z_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

jest zbieżny. Granicę Q tego ciągu uważamy jako wartość iloczynu (224).

W myśl Twierdzenia II § 11 iloczyn nieskończony (224) jest zbieżny, jeżeli do każdej dodatniej liczby ε można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, iż dla każdej liczby całkowitej dodatniej p zachodzić będzie nierówność

$$\text{Mod}\,(q_{n+p}-q_n)<\varepsilon,$$

skoro $n \geq m$, czyli, co na jedno wychodzi, nierówność

$$\text{Mod}\left(\frac{q_{n+p}}{q_n}-1\right)<\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (226)$$

Udowodnijmy twierdzenia następujące:

Twierdzenie I. Na to, aby iloczyn nieskończony

$$(1+z_1)(1+z_2)\cdots(1+z_n)\cdots=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+z_n)$$

o czynnikach zespolonych $(1+z_n)$ był zbieżny, wystarcza, żeby iloczyn, utworzony z modułów czynników iloczynu (226), był zbieżny.

Dowód. Rozważmy iloczyn nieskończony

$$(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_n)\cdots=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+r_n), \quad (227)$$

gdzie $r_n = \operatorname{Mod} z_n$. Jeżeli iloczyn (227) jest zbieżny, to w myśl Twierdzenia I § 9 szereg $r_1+r_2+r_3+\cdots+r_n\cdots$ (228) będzie zbieżny, a zatem do każdej dodatniej liczby ε można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, iż dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej p, zachodzić będzie nierówność

$$|r_{n+1}+r_{n+2}+\cdots+r_{n+p}|<\varepsilon,$$

skoro $n \leq m$. Oznaczając przez ρ_n iloczyn z n pierwszych czynników iloczynu (227), otrzymujemy dla każdej liczby $n \geq m$ i dowolnej liczby całkowitej dodatniej p, nierówność

$$\left|\frac{\rho_{n+p}}{\rho_n}-1\right|<\frac{q}{1-q}\ ^{1)},$$

gdzie q jest liczba spełniająca nierówności

$$q<\varepsilon<1$$

Ponieważ

$$\operatorname{Mod}\left(\frac{q_{n+p}}{q_n}-1\right)<\left|\frac{\rho_{n+p}}{\rho_n}-1\right|,$$

przeto zachodzi nierówność

$$\operatorname{Mod}\left(\frac{q_{n+p}}{q_n}-1\right)<\varepsilon,$$

skoro $n \geq m$. Z tej nierówności wynika, że iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+z_n)$ jest zbieżny, a zatem twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu. Udowodnione twierdzenie podaje dostateczny, lecz nie konieczny warunek zbieżności iloczynów nieskończonych o czynnikach zespolonych, albowiem iloczyn nieskończony (226) może być zbieżny mimo to, że iloczyn (227) jest rozbieżny.

Iloczyn nieskończony o czynnikach zespolonych nazywamy bezwzględnie czyli bezwarunkowo zbieżnym, jeżeli iloczyn, utworzony z modułów jego czynników jest zbieżny. Z udowodnionego twierdzenia oraz Twierdzenia I § 9 wypływa natychmiast twierdzenie następujące:

Twierdzenie II. Na to, aby iloczyn nieskończony

$$(1+z_1)(1+z_2)\ldots(1+z_n)\ldots=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+z_n) \quad (229)$$

o wyrazach zespolonych był bezwzględnie zbieżny, potrzeba i wystarcza, żeby szereg

$$z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n+\cdots$$

był bezwzględnie zbieżny.

Twierdzenie III. Wartość iloczynu nieskończonego o czynnikach zespolonych

$$(1+z_1)(1+z_2)\ldots(1+z_n)\ldots=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+z_n) \quad (230)$$

bezwzględnie zbieżnego, nie zależy od porządku, w jakim jego czynniki następują po sobie.

Dowód. Dajmy na to, że iloczyn (230) jest bezwzględnie zbieżny. W takim razie na mocy Twierdzenia II szereg

$$z_1+z_2+\cdots+z_n+\cdots \quad (231)$$

będzie bezwzględnie zbieżny, a zatem szereg

$$r_1+r_2+\cdots+r_n,+\cdots$$

utworzony z modułów wyrazów szeregu (230), będzie zbieżny. W myśl zaś Twierdzenia I iloczyn nieskończony

$$(1+r_1)(1+r_2)\ldots(1+r_n)\ldots=\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+r_n)$$

będzie wtedy również zbieżny. Uwzględniając zaś Twierdzenie V § 9 o niezależności wartości iloczynu bezwzględnie zbieżnego o czynnikach rzeczywistych od porządku, w jakim te czynniki następują po sobie, wnosimy natychmiast, że tę samą własność posiadają również iloczyny bezwzględnie zbieżne o czynnikach zespolonych. Twierdzenie więc zostało udowodnione.

---

[1]) Patrz dowód Twierdzenia I § 9 tegoż samego rozdziału.

Rozdział V.

O funkcjach.

§ 1. **Określenia.** Liczbą zmienną nazywamy taką liczbę x, która może zajmować dowolne miejsca w zbiorze liczb rzeczywistych. A więc jasną jest rzeczą, że każdej liczbie zmiennej x odpowiadać będzie pewien zbiór $[x]$ liczb rzeczywistych. Różne elementy zbioru $[x]$, odpowiadającego zmiennej liczbie x, nazywać będziemy wartościami tej zmiennej.

Zmienną x nazywamy skończoną, jeżeli zbiór $[x]$, odpowiadający tej zmiennej, jest zupełnie ograniczony, czyli innemi słowy jeżeli elementy zbioru $[x]$ zawarte są wewnątrz pewnego przedziału. Przedział (a, b), zawierający wszystkie wartości zmiennej x, nazywamy jej obszarem.

Zmienną x nazywać będziemy ciągłą w pewnym obszarze (a, b), jeżeli zbiór $[x]$, odpowiadający zmiennej x, będzie zamknięty, to jest ciągły w przedziale (a, b), a zawierający w tym przedziale zarówno pierwszy, jak i ostatni element. Taki zbiór, jak wiadomo, zawiera wszystkie swoje liczby skupienia.

Dajmy na to, że $[x]$ i $[y]$ oznaczają dwa zbiory, odpowiadające dwom zmiennym x i y. Przypuśćmy, że każdemu elementowi zbioru $[x]$ podporządkowany został pewien element zbioru $[y]$. W takim razie mówimy, że zmienna y jest funkcją zmiennej x. Oznaczmy to pisząc

$$y = f(x)$$

Zmienną x nazywamy zmienną niezależną.

Elementy zbioru $[y]$ nazywać będziemy wartościami funkcji y. A więc każdej wartości zmiennej niezależnej x odpowiada pewna wartość jej funkcji x. Godnem jest uwagi, że wypowiedziana definicja funkcji pozostaje w sile w tym przypadku, gdy jeden i ten sam element zbioru $[y]$ podporządkowany zostanie kilku różnym elementom zbioru $[x]$, a również i w tym przypadku, gdy zbiór $[y]$ zawiera elementy, które nie zostały podporządkowane żadnemu elementowi zbioru $[x]$.

Zmienną y nazywamy jednowartościową funkcją zmiennej x, jeżeli każdemu elementowi zbioru $[x]$ odpowiada jeden

i tylko jeden element zbioru $[y]$; w przeciwnym zaś razie y nazywamy funkcją wielowartościową zmiennej x.

Jeżeli każdym dwom różnym elementom zbioru $[x]$ są podporządkowane zawsze dwa różne elementy zbioru $[y]$, wówczas każdemu elementowi zbioru $[y]$ odpowiada jeden i tylko jeden element x zbioru $[x]$, a przytem taki, iż

$$f(x) = y$$

Oznaczmy ten element przez

$$x = \varphi(y)$$

Funkcję $\varphi(y)$, (która oczywiście będzie określona w zupełności dla wszystkich elementów zbioru $[y]$), nazywamy funkcją odwrotną funkcji $f(x)$. Oczywista, dla każdej wartości na x będzie

$$\varphi[f(x)] = x,$$

a dla każdej wartości na y

$$f[\varphi(y)] = y$$

Jasnem jest, że w tym przypadku wzory

$$y = f(x) \quad \text{i} \quad x = \varphi(y) \qquad \ldots\ldots (1)$$

ustalają pewną odpowiedniość doskonałą między elementami zbioru $[x]$ i $[y]$. W takim razie mówimy o funkcjach (1), że są wzajemnie odwracalne. Widoczną, odwracalność ta będzie jednoznaczną.

Funkcję $y = f(x)$ zmiennej rzeczywistej nazywać będziemy analityczną, jeżeli odpowiedniość między zbiorami $[x]$ i $[y]$ ustalona została za pomocą wzoru analitycznego. W tym przypadku litera f oznacza pewny zbiór analitycznych operacji, które trzeba wykonać w pewnym porządku nad wartością zmiennej niezależnej x, aby znaleźć odpowiednią wartość jej funkcji. Naprzykład funkcje

$$y = x^2 + 1; \quad y = \sqrt[3]{1+x}; \quad y = \sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}}$$

$$y = \sin x; \quad y = \lg(1-x) \text{ i t. d.}$$

Funkcję $y = f(x)$ nazywamy ograniczoną w pewnym obszarze (a, b) zmiennej niezależnej x, jeżeli zbiór $[y]$ wszystkich wartości funkcji, odpowiadających wszystkim wartościom zmiennej x obszaru (a, b), będzie ograniczony.

Kresem dolnym względnie górnym funkcji y w pewnym obszarze (a, b) zmiennej niezależnej x nazywamy kres dolny, względnie górny, zbioru $[y]$, odpowiadającego przedziałowi (a, b) zmiennej niezależnej x. Innemi słowy, dolna granica m funkcji y w obszarze (a, b) jest to liczba spełniająca warunki:

1) liczba m jest nie większa od żadnej wartości funkci y w obszarze (a, b),

2) jakkolwiek małą jest liczba dodatnia ε, w przedziale $(m, m+\varepsilon)$, zawarty jest przynajmniej jeden element zbioru $[y]$ obszaru (a, b).

Analogicznie, górna granica M funkcji y w obszarze (a, b) jest to liczba spełniająca warunki:

1) liczba M jest nie mniejsza od żadnej wartości funkcji y w obszarze (a, b),

2) jakkolwiek małą jest liczba dodatnia ε, w przedziale $(M-\varepsilon, M)$ zawarty jest przynajmniej jeden element zbioru $[y]$ obszaru (a, b). Jeżeli liczby m i M należą do zbioru $[y]$ i są zatem wartościami funkcji y w obszarze (a, b), wówczas nazywamy je odpowiednio najmniejszą i największą wartością funkcji y w tym obszarze.

Różnicę $M-m$ nazywać będziemy wahaniem, czyli oscylacją funkcji y w obszarze (a, b).

O funkcji $y=f(x)$ mówimy, że jest skończoną w pewnym obszarze (a, b), jeżeli zbiór $[y]$, odpowiadający zbiorowi $[x]$ w przedziale (a, b), jest zupełnie ograniczony.

W myśl twierdzenia § 6 Rozdz. III, możemy wysłowić twierdzenie następujące:

Twierdzenie I. Funkcja $y=f(x)$, skończona w pewnym obszarze, posiada w tym obszarze zarówno dolną, jak i górną granicę.

Twierdzenie II. Jeżeli funkcja $y=f(x)$ zmiennej x jest skończoną w otoczeniu wszystkich wartości na x w ograniczonym obszarze (a, b), to ona będzie skończoną w tym obszarze.

Dowód. Aby tego dowieść, udowodnijmy, że jeżeli funkcja y nie jest skończoną w pewnym obszarze (a, b), wówczas istnieje przynajmniej jedna wartość na x w tym obszarze, w której otoczeniu funkcja y nie będzie skończoną. Przypuszczając więc, że y nie jest skończoną w obszarze (a, b), powiadamy, że istnieje w zbiorze $[y]$ przynajmniej jeden element y_1, większy od dowolnej liczby k_1, element y_2, większy od dowolnej liczby $k_2 > y$, element y_3 większy od dowolnej liczby $k_3 > y_2$ i t. d. A więc, obrawszy pewien ciąg $k_1, k_2, k_3 \ldots k_n \ldots$, możemy wyznaczyć taki ciąg

$$y_1, y_2, y_3, \ldots y_n, \ldots \quad (2)$$

którego wyrazy czynić będą zadość nierównościom

$$k_1 < y_1 < k_2 < y_2 < k_3 < \ldots k_n < y_n < \ldots$$

Dajmy na to, że ciągowi (2) odpowiadać będzie ciąg wartości na x

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \quad (3)$$

Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu (3) są zawarte wewnątrz skończonego przedziału (a, b), przeto w myśl Twierdzenia Weierstrassa (§ 6 Rozdz. III) ciąg (2) posiada przynajmniej jedną liczbę skupienia α, w której otoczeniu są zawarte „prawie wszystkie" wyrazy ciągu (2). Niechaj ε oznacza dowolnie małą liczbę dodatnią. Łatwo przekonać się, że w obszarze $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ wartości funkcji będą większe od dowolnej liczby L. W tym celu obieramy liczbę μ tak, ażeby przy $n > \mu$ zachodziła nierówność

$$k_n > L,$$

co jest rzeczą zupełnie możliwą, albowiem α jest liczbą skupienia zbioru $[x]$ w przedziale (a, b). Oczywista, zawsze można wyznaczyć taką liczbę n, iż wyraz x_n zbioru $[x]$ będzie się znajdował wewnątrz przedziału $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$. Ponieważ wartość y_n funkcji y, odpowiadająca wartości x_n zmiennej x, czyni zadość nierówności

$$y_n > k_n > K,$$

przeto w otoczeniu $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ zbioru $[x]$ wartości funkcji y mogą być większe od dowolnej liczby K, a zatem w tym otoczeniu funkcja y nie będzie skończoną. Stąd wnosimy, że skoro dana funkcja jest skończona w otoczeniu wszystkich wartości zmiennej niezależnej x obszaru (a, b), będzie ona również skończoną w całym obszarze (a, b). A na tem właśnie polega twierdzenie, o którego dowód nam chodziło.

Twierdzenie III (Weierstrassa). Jeżeli funkcja $y=f(x)$ jest skończoną w ograniczonym obszarze (a, b), wówczas w tym obszarze zawarta jest przynajmniej jedna taka liczba, w której otoczeniu funkcja posiada ten sam kres górny i dolny, co i w całym obszarze (a, b).

Dowód. Dajmy na to, że funkcja y posiada kres dolny m. Jeżeli m jest najmniejszą wartością funkcji dla pewnej wartości zmiennej $x=a$, to dowolne otoczenie $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ liczby a będzie właśnie tem otoczeniem, o które chodzi.

Przypuśćmy, że w danym obszarze (a, b) funkcja y nie przybiera wartości najmniejszej. W takim razie dla wszystkich wartości na x w obszarze (a, b) zachodzić będzie nierówność

$$f(x) - m > 0,$$

przyczem różnica $f(x)-m$ może się stać dowolnie małą. Stąd wnosimy, że funkcja

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)-m}$$

będzie nieskończoną w obszarze, zawierającym liczbę m. W myśl zaś poprzedniego twierdzenia, istnieje w takim obszarze przynajmniej jedna taka wartość $x=p$, w której otoczeniu funkcja $\varphi(x)$ jest nieskończoną, czyli innemi słowy, do każdej dowolnej liczby L można dobrać takie otoczenie $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ liczby p, w której znajdzie się przynajmniej jedna taka wartość $x=x_0$, iż będzie zachodziła nierówność

$$\varphi(x_0) > L,$$

czyli

$$f(x_0) < \frac{1}{L} + m$$

Stąd wnioskujemy, że w otoczeniu $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ liczby p, stanowiącem część właściwą przedziału (a, b), liczba m będzie kresem dolnym funkcji $y=f(x)$ w obszarze (a, b).

W sposób całkiem analogiczny można udowodnić istnienie w obszarze (a, b) takiej wartości na x, w której otoczeniu funkcja y posiada ten sam kres górny, co i w całym obszarze (a, b), skoro funkcja będzie skończoną w tym obszarze.

Dowiedliśmy więc twierdzenia Weierstrass'a.

§ **2. Granica funkcji.** Przypuśćmy, że $x=c$ jest jakąkolwiek wartością zmiennej x w pewnym obszarze (a, b). Niechaj dalej

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

oznacza w obszarze (a, b) pewien ciąg nieskończony, którego granicą jest właśnie liczba c. Oczywista, takich ciągów istnieje nieskończenie wiele. Każdemu z ciągów (4) odpowiada pewny ciąg

$$y_1, y_2, y_3, \ldots y_n, \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

stanowiący część właściwą zbioru $[y]$, określającego funkcję $y=f(x)$. Jeżeli istnieje taka liczba L, która będzie granicą dla każdego z ciągów (5), wówczas mówimy, że L jest granicą funkcji $y=f(x)$ przy $x=a$, czyli że y zmierza do L, gdy x zmierza do c. Oznaczmy to, pisząc

$$L=\lim_{x=c} f(x)$$

Rozróżniamy granice prawostronne i lewostronne. Liczbę L_p (względnie L_l) nazywamy prawostronną (względnie lewostronną) granicę funkcji $f(x)$ przy $x=c$, jeżeli c jest prawostronną (względnie lewostronną) granicą ciągów (5).

Oznaczmy to, pisząc

$$L_p=\lim_{x=c+0} f(x), \text{ czyli } L_p=f(c+0)$$

$$L_l=\lim_{x=c-0} f(x), \text{ czyli } L_l=f(c-0)$$

Granicę L w zwykłem tego słowa znaczeniu możemy uważać jako obustronną granicę funkcji $f(x)$ przy $x=c$. A więc

$$L=L_p=L_l$$

Dajmy na to, naprzykład, że $y=E(x)$, gdzie symbolem $E(x)$ oznaczono największą z liczb całkowitych, nie większych od x. Łatwo spostrzec, ze istnieje przy $x=0$ zarówno lewostronna, jak i prawostronna granica funkcji y, a mianowicie:

$$L_l=\lim_{x=0-0} y=-1, \quad L_p=\lim_{x=0+0} y=0$$

O funkcji $y=f(x)$ będziemy mówili, że posiada pewną własność A w otoczeniu liczby c, jeżeli istnieje pewne otoczenie $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ w zbiorze $[x]$ [1]), wewnątrz którego wszyst-

[1]) Sama liczba c może do otoczenia $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ nie należeć.

kie wartości funkcji y własność A posiadają. Przypuśćmy naprzykład, że odpowiedniość między zmienną niezależną x a jej funkcja $f(x)$ ustalona została za pomocą wzoru

$$f(x)=3-x^2$$

Możemy o takiej funkcji powiedzieć, że w otoczeniu liczby 0 jest mniejszą od 2, albowiem w otoczeniu zerowem $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ funkcja będzie mniejszą od 2.

O funkcji $f(x)$ będziemy mówili, że posiada pewną własność A w otoczeniu prawostronnem (względnie lewostronnem) liczby c, jeżeli istnieje takie otoczenie prawostronne (względnie lewostronne) liczby c w zbiorze $[x]$, wewnątrz którego wszystkie wartości funkcji $f(x)$ własność A posiadają. Dajmy na to, naprzykład, że odpowiedniość między zmienną niezależną x a jej funkcją $f(x)$ ustalona została za pomocą wzoru

$$y=1+x, \text{ lub } y=1-x$$

W pierwszym przypadku w lewostronnem otoczeniu liczby 0, a w drugim przypadku w prawostronnem otoczeniu tej samej liczby funkcja y jest mniejsza od 1, albowiem istnieje w pierwszym przypadku lewostronne otoczenie zerowe $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, a w drugim prawostronne otoczenie zerowe $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, wewnątrz którego funkcja y jest mniejszą od 1.

Granicę funkcji $y=f(x)$ przy $x=c$ można zdefinjować jeszcze w sposób następujący:

Liczbę L_p (względnie L_l) nazywamy prawostronną (względnie lewostronną) granicą funkcji $y=f(x)$ przy $x=c$, jeżeli, jakkolwiek małą będzie liczba dodatnia ε, dla każdego prawostronnego (względnie lewostronnego) otoczenia liczby c zbioru $[x]$, funkcja $f(x)$ posiada tę własność, że

$$|f(x)-L_p|<\varepsilon, \text{ względnie } |f(x)-L_l|<\varepsilon$$

Innemi słowy L_p (względnie L_l) jest prawostronną (względnie lewostronną) granicą funkcji $y=f(x)$, jeżeli do każdej dodatniej liczby ε można dobrać taką liczbę dodatnią δ, że nierówności

$$0<x-c<\delta,$$

względnie nierówności

$$0<c-x<\delta$$

pociągają za sobą nierówność

$$|f(x)-L_p|<\varepsilon, \text{ względnie } |f(x)-L_l|<\varepsilon$$

Liczbę L nazywamy granicą funkcji $y=f(x)$ przy $x=c$, jeżeli, jakkolwiek małą będzie liczba dodatnia ε, w każdym otoczeniu liczby c zbioru $[x]$ funkcja $y=f(x)$ posiada tę własność, że

$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

Innemi słowy L będzie granicą funkcji $y=f(x)$ przy $x=c$, jeżeli do każdej dodatniej liczby ε, naprzód danej, można dobrać taką liczbę dodatnią η, iż nierówności

$$c<x\leq c+\eta$$
$$c-\eta\leq x<c$$

pociągają za sobą nierówność

$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

O funkcji $y=f(x)$ powiadamy, że zmierza do L, gdy x zmierza do nieskończoności, jeżeli do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę A, iż nierówność $x>A$ pociąga za sobą nierówność

$$|f(x)-L|\varepsilon$$

Oznaczmy to, pisząc

$$\lim_{x=\infty} f(x)=L$$

Powiadamy, że lewostronna (względnie prawostronna) granica funkcji $f(x)$ przy $x=c$ równa się nieskończoności, jeżeli do każdej liczby A dobrać można taką liczbę dodatnią δ, iż w lewostronnem otoczeniu $(c-\delta, c)$ liczby c, względnie w jej prawostronnem otoczeniu $(c+\delta, c)$, z wyjątkiem samej liczby c, wartości funkcji spełniają nierówność

$$f(x)>A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Oznaczmy to, pisząc

$$\lim_{x=c-0} f(x)=\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x=c+0} f(x)=\infty$$

Analogicznie, określamy pojęcia lewostronnej i prawostronnej granicy

$$\lim_{x=c-0} f(x)=-\infty, \quad \text{lub} \quad \lim_{x=c+0} f(x)=-\infty$$

W tym przypadku, gdy nierówność (6) zachodzi w otoczeniu $(c-\delta, c+\delta)$, wówczas mówimy, że granica funkcji $f(x)$ przy $x=c$ równa się nieskończoności, czyli funkcja $f(x)$ zmierza do nieskończoności, gdy zmienna x zmierza do c.

Oznaczmy to, pisząc

$$\lim_{x=c} f(x)=\infty$$

O funkcji $y=f(x)$ mówimy, że posiada nieskończoną granicę przy $x=\infty$, czyli dąży do nieskończoności, gdy x dąży do nieskończoności, jeżeli do każdej dowolnej liczby A można dobrać taką liczbę a zbioru $[x]$, iż nierówność $x>a$ pociąga za sobą nierówność

$$|f(x)|>A.$$

Oznaczmy to symbolicznie

$$\lim_{x=\infty} f(x)=\pm\infty$$

O funkcji $y=f(x)$, która przy danej wartości na $x=a$ (skończonej lub nieskończonej) posiada nieskończoną granicę, mówimy wprost, że jest nieskończona przy $x=a$.

Udowodnijmy twierdzenie następujące:

Twierdzenie I. Na to, aby funkcja $y=f(x)$ posiadała przy $x=c$ prawostronną granicę L_p, potrzeba i wystarcza, żeby do każdej liczby dodatniej ε, naprzód danej, można byłoby dobrać taką liczbę dodatnią η, iż dla każdej pary wartości x' i x'' w przedziale $(c, c+\eta)$, z wyjątkiem $x=c$, będzie zachodziła nierówność

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

Dowód. Udowodnijmy najpierw, że warunek, podany w twierdzeniu, jest konieczny. Przypuśćmy, że przy $x=c$ funkcja $f(x)$ posiada określoną w zupełności granicę prawostronną

$$L_p=\lim_{x=a+0} f(x)=f(a+0)$$

W takim razie, jakkolwiek małą będzie liczba dodatnia ε, istnieje taka liczba dodatnia η, iż zachodzić będzie nierówność

$$|f(x)-L_p|<\frac{1}{2}\varepsilon$$

dla każdej wartości na x, spełniającej nierówności

$$c<x\leq c+\eta$$

Jeżeli wartości x' i x'' znajdują się w przedziale $(c, c+\eta)$, przyczem $x'>c$, $x''>c$, wówczas zachodzą nierówności

$$|f(x')-L_p|<\frac{\varepsilon}{2}; \quad |f(x'')-L_p|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Stąd wnosimy, że

$$|f(x')-f(x'')|\leq|f(x)-L_p|+|L_p-f(x'')|<\varepsilon,$$

co dowodzi, iż warunek, podany w twierdzeniu, jest konieczny. Należy jeszcze okazać, że ów warunek jest wystarczający.

Dajmy na to, że dla naprzód danej liczby dodatniej ε wyznaczony został taki przedział $(c, c+h)$, w którym dla każdej wartości na x, z wyjątkiem $x=c$, zachodzi nierówność

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Obierzmy w przedziale $(c, c+\eta)$ dowolny ciąg malejący, którego granicą będzie liczba c i rozważmy ciąg $[F]$ odpowiednich wartości funkcji $f(x)$. Oczywista, można wyznaczyć zawsze ciąg zbieżny

$$f(c_1),\ f(c_2),\ f(c_3)\ \ldots\ f(c_n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

stanowiący część właściwą ciągu $[F]$, gdyż z nierówności (7) wypływa nierówność

$$f(c_1)-\frac{\varepsilon}{2}<f(c_n)<f(c_1)+\frac{\varepsilon}{2}$$

Oznaczmy przez L_p granicę ciągu (8) i obierzmy liczbę n tak, ażeby zachodziła nierówność

$$|f(c_n)-L_p|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

W myśl nierówności (7) dla każdej wartości na x w przedziale $(c, c+\eta)$, z wyjątkiem $x=c$, będziemy mieli

$$|f(x)-f(c_n)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Dodając nierówności (9) i (10) stronami, otrzymamy

$$|f(x)-L_p|\leq|f(x)-f(c_n)|+|f(c_n)-L_p|<\varepsilon$$

Stąd wnioskujemy, że L_p jest granicą prawostronną funkcji $f(x)$ przy $x=c$. A na tem właśnie polega twierdzenie, o którego dowód nam chodziło. W sposób całkiem analogiczny można udowodnić twierdzenie następujące:

Twierdzenie II. Na to, aby funkcja $y=f(x)$ posiadała przy $x=c$ lewostronną granicę L_l, potrzeba i wystarcza, żeby do każdej liczby dodatniej ε, naprzód danej, można byłoby dobrać taką liczbę dodatnią η_1, iż dla każdej pary wartości x' i x'' w przedziale $(c-\eta_1, c)$, z wyjątkiem tylko $x=c$, zachodzić będzie nierówność

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

§ **3. Twierdzenie podstawowe o granicach funkcji.** Z definicji granicy funkcji jako granicy ciągu, wnosimy natychmiast, że dla granic funkcji zachodzą te same twierdzenia podstawowe, które w swoim czasie udowodnione zostały dla ciągów w Rozdz. III, a mianowicie:

1. Funkcja $y=f(x)$ może posiadać przy danej wartości zmiennej niezależnej x tylko jedną jedyną granicę.

2. Jeżeli funkcja $y=f(x)$ w pewnym obszarze (a, b) czyni zadość nierównościom

$$\varphi(x)<f(x)<\psi(x),$$

gdzie $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ oznacza funkcje zmiennej x, posiadające przy $x=c$ w tym obszarze jedną i tą samą granicę L, wówczas

$$\lim_{x=c} f(x)=L.$$

3. Granica wartości bezwzględnej funkcji $y=f(x)$ przy $x=c$ równa się wartości bezwzględnej granicy funkcji przy $x=c$, to jest

$$\lim_{x=c}|f(x)|=|\lim_{x=c} f(x)|$$

4. Granica przy $x=c$ sumy algebraicznej dwóch lub ilukolwiek (w liczbie skończonej) funkcji zmiennej niezależnej x równa się sumie algebraicznej granic wszystkich dodajnych funkcji przy $x=c$, to jest jeśli

$$F(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_m(x),$$

to

$$\lim_{x=c} F(x)=\lim_{x=c} f_1(x)+\lim_{x=c} f_2(x)+\lim_{x=c} f_3(x)+\cdots+\lim_{x=c} f_m(x)$$

5. Granica iloczynu przy $x=c$ dwóch lub ilukolwiek (w liczbie skończonej) czynników, z których każda jest pewną funkcją zmiennej niezależnej x, równa się iloczynowi granic wszystkich czynników przy $x=c$, to jest jeśli

$$F(x)=f_1(x).f_2(x).f_3(x)\ \ldots\ f_m(x),$$

to

$$\lim_{x=c} F(x)=\lim_{x=c} f_1(x).\lim_{x=c} f_2(x).\lim_{x=c} f_3(x)\ \ldots\ \lim_{x=c} f_m(x)$$

6. Granica ilorazu dwóch funkcji zmiennej niezależnej x, z których każda posiada oznaczoną w zupełności granicę przy $x=c$ (a nadto granica mianownika nie równa się zeru), równa się ilorazowi granic przy $x=c$ licznika i mianownika, to jest jeżeli

$$F(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)},\ \text{to}\ \lim_{x=c} F(x)=\frac{\lim_{x=c} f(x)}{\lim_{x=c}\varphi(x)}$$

pod warunkiem, że $\lim_{x=c}\varphi(x)\gtrless 0$.

§ **4. Ciągłość funkcji.** W § 2 określiliśmy granice prawostronną, lewostronną i granicę w zwykłem tego słowa znaczeniu przy $x=c$, jako granicę ciągów

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

odpowiadających ciągom

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

pod warunkiem, że granicą ciągów (11) jest właśnie liczba c. Jasną jest rzeczą, że z podanej definicji granicy jeszcze nie wynika, iż granica ciągu należy do zbioru $[y]$. W tym zaś przypadku gdy granica ciągów (11) będzie należała do zbioru $[y]$, będzie ona odpowiadała liczbie c zbioru $[x]$, lub też jakiejkolwiek innej liczbie tego zbioru.

O funkcji $y=f(x)$, mówimy, że posiada przy $x=c$ własność ciągłości prawostronnej, jeżeli granica prawostronna tej funkcji przy $x=c$ równa się jej wartości, odpowiadającej wartości $x=c$, to jest jeżeli

$$\lim_{x=c+0} f(x)=f(c+0)=f(c).$$

O funkcji $y=f(x)$ mówimy, że posiada przy $x=c$ własność ciągłości lewostronnej, jeżeli granica lewostronna tej funkcji przy $x=c$ równa się jej wartości, odpowiadającej wartości $x=c$, to jest jeżeli

$$\lim_{x=c-0} f(x)=f(c-0)=f(c).$$

Funkcję $y=f(x)$ nazywamy przy $x=c$ ciągłą, w zwykłem tego słowa znaczeniu, jeżeli granica tej funkcji przy $x=c$ równa się wartości funkcji odpowiadającej wartości $x=c$, to jest jeżeli

$$\lim_{x=c} f(x)=f(c+0)=f(c-0)=f(c)$$

Z podanej definicji wynika bezpośrednio:

1. Suma algebraiczna skończonej liczby funkcyj zmiennej niezależnej x ciągłych przy $x=c$, jest również funkcją ciągłą przy $x=c$. W samej rzeczy jeżeli

$$F(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_m(x),$$

$$\text{to } \lim_{x=c} F(x)=\lim_{x=c} f_1(x)+\lim_{x=c} f_2(x)+\cdots+\lim_{x=c} f_m(x)$$

Ponieważ $f_1(x)$, $f_2(x)\cdots f_m(x)$ są to funkcje ciągłe przy $x=c$, przeto w myśl podanej definicji funkcji ciągłych będzie

$$\lim_{x=c} f_1(x)=f_1(c);\ \lim_{x=c} f_2(x)=f_2(c)\cdots\lim_{x=c} f_m(x)=f_m(c),$$

a zatem

$$\lim_{x=c} F(x)=f_1(c)+f_2(c)+\cdots+f_m(c)=F(c)$$

A więc $F(x)$ jest funkcją ciągłą przy $x=c$

2. Iloczyn skończonej liczby czynników, z których każdy jest pewną funkcją zmiennej niezależnej x, będzie ciągłą przy $x=c$, skoro każdy z czynników jest funkcją ciągłą przy $x=c$.

Istotnie, jeżeli

$$F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdots f_m(x),$$

to w myśl § 2.

$$\lim_{x=c} F(x)=\lim_{x=c} f_1(x)\cdot\lim_{x=c} f_2(x)\cdots\lim_{x=c} f_m(x)$$

Ponieważ funkcje $f_1(x)$, $f_2(x)\cdots f_m(x)$ są ciągłe przy $x=c$, przeto

$$\lim_{x=c} f_1(x)=f_1(c);\ \lim_{x=c} f_2(x)=f_2(c)\cdots\lim_{x=c} f_m(x)=f_m(c),$$

a zatem

$$\lim_{x=c} F(x)=f_1(c)\cdot f_2(c)\cdots f_m(c)=F(c)$$

Stąd wnosimy, że $F(x)$ jest funkcją ciągłą przy $x=c$.

3. Iloraz dwóch funkcji jest funkcją ciągłą przy $x=c$, skoro licznik i mianownik są funkcjami ciągłemi przy $x=c$, a wartość mianownika przy tej wartości zmiennej niezależnej nie równa się zeru.

W samej rzeczy, jeżeli $F(x)=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, a nadto $\varphi(c)\gtrless 0$,

to w myśl § 2

$$\lim_{x=c} F(x)=\frac{\lim\limits_{x=c} f(x)}{\lim\limits_{x=c}\varphi(x)}=\frac{f(c)}{\varphi(x)}=F(c)$$

A więc funkcja $F(x)$ jest ciągła przy $x=c$.

Udowodnijmy kilka twierdzeń podstawowych o funkcjach ciągłych.

Twierdzenie I. Na to, aby funkcje $y=(x)$ była ciągłą przy $x=c$ potrzeba i wystarcza, żeby do każdej liczby dodatniej ε, naprzód danej, można byłoby dobrać taką liczbę dodatnią η, iż dla każdej pary wartości x' i x'', należącej do przedziału $(c-\eta,\ c+\eta)$, będzie zachodziła nierówność

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

Dowód. Udowodnijmy oddzielnie, że funkcja $y=f(x)$, będzie posiadała przy $x=c$ własność ciągłości, zarówno prawostronnej, jak i lewostronnej.

Dajmy na to, że $f(c+0)=f(c)$. W takim razie, w myśl Twierdzenia I § 2, do każdej liczby dodatniej ε, naprzód danej, dobrać można taką liczbę dodatnią η', iż dla każdej pary liczb x' i x'', należących do przedziału $(c+\eta)$, z wyjątkiem $x=c$, będzie zachodziła nierówność

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Z drugiej zaś strony, ponieważ $f(c+0)=f(c)$, przeto w myśl określenia prawostronnej granicy funkcji, do liczby ε można dobrać taką liczbę dodatnią η'', iż nierówność

$$c<x<c+\eta$$

pociąga za sobą nierówność

$$|f(x)-f(c)|<\varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Oznaczaczając przez η największą z liczb η' i η'', po zestawieniu nierówności (13) i (14), otrzymamy nierówność

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (14b)$$

dla każdej pary wartości x' i x'', zawartych w przedziale $(c, c+\eta)$. Z drugiej zaś strony, obierając $x'=c$, a za x'' dowolną liczbę w przedziale $(c, c+\eta)$, będziemy mieli w myśl nierówności (14b)

$$|f(x'')-f(c)|<\varepsilon,$$

skoro

$$c<x<c+\eta$$

Stąd wnosimy, że

$$f(c+0)=f(c).$$

A więc na to, aby funkcja $y=f(x)$ posiadała przy $x=c$ własność ciągłości prawostronnej potrzeba i wystarcza, żeby dokażdej dodatniej ε, naprzód danej, można byłoby dobrać taką liczbą dodatnią η, iż dla każdej pary wartości x' i x'', należących do przedziału $(c, c+\eta)$, będzie zachodziła nierówność,

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

W sposób całkiem analogiczny można udowodnić, że na to, aby funkcja $y=f(x)$ przy $x=c$ posiadała własność ciągłości lewostronnej potrzeba i wystarcza, żeby do każdej dodatn ej liczby ε naprzód danej można byłoby dobrać taką liczbę dodatnią η, iż dla każdej pary wartości $x'x''$, należących do przedziału $(c-\eta, c)$, zachodzić będzie nierówność,

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

Zestawiając otrzymane rezultaty, wnosimy, że na to, aby funkcja $y=f(x)$ przy $x=c$ posiadała własności ciągłości zarówno prawostronnej, jak i lewostronnej, czyli innemi słowy aby była ciągłą (w zwykłem tego słowa znaczeniu), potrzeba i wystarcza, żeby do każdej liczby dodatniej ε można byłoby dobrać taką liczbę dodatnią η, iż dla każdej wartości x' i x'', należących do przedziału $(x-\eta, c+\eta)$, będzie zachodziła nierówność

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

a na tem właśnie polega twierdzenie, o którego dowód chodziło.

Funkcję $y=f(x)$ nazywamy ciągłą w pewnym obszarze (a, b), jeżeli ona jest ciągłą przy każdej wartości na x, należącej do tego obszaru.

Powyżej udowodnione twierdzenie wskazuje, iż na to, aby funkcja $y=f(x)$ była ciągła w obszarze (a, b) potrzeba i wystarcza żeby, jakkolwiek małą będzie liczba dodatnią ε, do każdej liczby c obszaru (a, b) można było dobrać takie otoczenie $(c-\eta, c+\eta)$, iż dla każdej pary wartości x' i x'', należących do tego otoczenia, będzie zachodziła nierówność,

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Dajmy na to, że funkcja $y=f(x)$ jest ciągłą w obszarze (a, b). Obieramy liczbę dodatnią ε. Dalej możemy obrać w obszarze (a, b) wartości na x tak, aby ich otoczenia, dla których zachodzi nierówność (15), miały wspólne granice, lub też wspólne części. W taki sposób przedział (a, b) podzielony zostanie na skończoną liczbę części, dla każdej z których zachodzić będzie nierówność (15). A więc można wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Twierdzenie II. Jeżeli funkcja $y=f(x)$ jest ciągłą w obszarze (a, b), to można ten obszar podzielić na skończoną liczbę części, takich, że w każdej części wartość bezwzględna różnicy pomiędzy dwiema wartościami funkcji będzie mniejsza od dowolnie małej naprzód danej liczby dodatniej ε.

Wypowiedziane Twierdzenie można udowodnić jeszcze w sposób następujący:

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie nie jest słuszne, to jest, że niemożna przedział (a, b) podzielić na skończoną liczbę części takich, iż dla każdej pary wartości x' i x'', zawartych wewnątrz każdej z tych części, zachodzić będzie nierówność

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon, \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

gdzie ε jest dowolna naprzód dana liczba dodatnia. Obierzmy liczbę $c=\frac{a+b}{2}$ i podzielmy przedział (a, b) na dwie części (a, c) (c, b). Ponieważ według przypuszczenia przedział (a, b) nie może być podzielony na części tak, ażeby dla każdej części zachodziła nierówność (16), przeto przynajmniej jeden z przedziałów (a, c), (c, b) niemożna podzielić na części, dla którychby zachodziła nierówność (16). Oznaczmy ten przedział przez (a_1, b_1). Podzielmy ten przedział na dwie części $\left(a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right)$ $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right)$. Oczywista, jeden przynajmniej z tych przedziałów nie może być podzielony na części, dla którychby zachodziła nierówność (16). Oznaczmy ten przedział przez (a_2, b_2). Rozumując dalej w ten sam sposób, otrzymujemy ciąg przedziałów

$$(a_1, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2) \ldots, (a_n, b_n) \ldots$$

Szerokość każdego następnego przedziału będzie dwa razy mniejszą od szerokości poprzedniego, a własności wszyst-

kich przedziałów są te same, co i przedziału (a, b). Według założenia wewnątrz każdego przedziału (a_i, b_i) znajdują się dwie takie wartości x' x'', dla których zachodzi nierówność

$$|f(x') - f(x'')| > \varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Ciąg

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

jest malejący. Ponieważ wszystkie wyrazy tego ciągu są mniejsze od liczby b, przeto ciąg ten jest ograniczony zgóry, a zatem posiada określoną w zupełności granicę l. Liczby $b_1, b_2, b_3 \ldots b_n \ldots$ (18) tworzą ciąg rosnący, a ograniczony zdołu, gdyż wszystkie wyrazy tego ciągu są większe od a. Stąd wnosimy, że ciąg (c) posiada oznaczoną w zupełności granicę l_1. Ponieważ granica ciągu

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}; \quad b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2} \cdots b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \cdots$$

jest zero, przeto ciągi (17) i (18) posiadają jedną i tę samą granicę. A więc $l = l_1$.

Przypuśćmy, że liczba l leży w przedziale (a, b). Ponieważ funkcja $y = f(x)$ jest ciągłą przy $x = l$, przeto można znaleźć taką liczbę dodatnią η, iż będzie zachodziła nierówność

$$|f(x) - f(l)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

skoro

$$|x - l| < \eta$$

Obieramy liczbę n tak, ażeby zachodziły nierówności

$$|a_n - l| < \eta, \quad |b_n - l| < \eta$$

W takim razie przedział (a_n, b_n) będzie stanowił część właściwą przedziału $(l - n, l + \eta)$. Niechaj x' i x'' będą dwie jakiekolwiek wartości na x przedziału (a_n, b_n). W takim razie będą zachodziły nierówności

$$|f(x') - f(l)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|f(x'') - f(l)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

a zatem nierówność

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Zestawiając nierówności (16) i (19), widzimy, że doszliśmy do sprzeczności, dowodzącej fałszywości naszego przypuszczenia, że przedział (a, b) nie daje się podzielić na takie części, żeby dla każdej z tych części zachodziła nierówność (16). A zatem przedział (a, b) można zawsze podzielić na skończoną liczbę części takich, iż dla każdej pary wartości na x, zawartych w tych częściach, zachodzić będzie nierówność (16) dla każdej naprzód danej dowolnej liczby ε. A więc dowiedliśmy naszego twierdzenia w zupełności.

Z tego twierdzenia wypływa wniosek następujący:

Wniosek. Każda funkcja $x = f(x)$, ciągła w pewnym obszarze (a, b), jest również skończoną w tym obszarze.

Podzielmy przedział (a, b) na m części

$$(a, x_1); \ (x_1, x_2); \ (x_2, x_3) \ldots (x_{m-1}, b)$$

tak, ażeby dla każdej pary wartości x' i x'' w każdym przedziale (x_{k-1}, x_k) zachodziła nierówność

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

gdzie ε jest dowolną liczbą dodatnią. W takim razie dla pierwszego przedziału (a, x_1) będzie

$$|f(x)| < f(a) + \varepsilon$$

i

$$|f(x_1)| < |f(a)| + \varepsilon$$

dla drugiego przedziału (x_1, x_2) będzie

$$|f(x)| < |f(x_1)| + \varepsilon,$$

A zatem a fortiori

$$|f(x)| < |f(a)| + 2\varepsilon$$

Zakładając w ostatniej nierówności $x = x_2$, dostaniemy

$$|f(x_2)| < |f(a)| + 2\varepsilon$$

Postępując dalej w ten sam sposób, otrzymamy dla ostatniego przedziału (x_{m-1}, b) nierówność

$$|f(x)| < |f(x_{m-1})| + \varepsilon < |f(a)| + m\varepsilon$$

Stąd wnosimy, że funkcja $f(x)$, co do wartości bezwzględnej, w obszarze (a, b) pozostaje mniejszą od wartości

$$|f(a)| + m\varepsilon,$$

a zatem jest skończoną w tym obszarze.

Udowodnijmy teraz bardzo ważne twierdzenie następujące.

Twierdzenie III (Cantor'a). Jeżeli funkcja $x = f(x)$ jest ciągłą w obszarze (a, b), to do każdej liczby dodatniej ε dobrać można taką liczbę dodatnią η, iż dla każdych dwóch wartości x' i x'', należących do obszaru (a, b), będzie zachodziła nierówność

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

skoro

$$|x' - x''| < \eta$$

Dowód. Aby tego dowieść, podzielmy przedział (a, b) na m części

$$(a, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3) \ldots (x_{m-1}, b) \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

tak, iż dla każdego przedziału (x_{k-1}, x_k) zachodzić będzie nierówność

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

skoro x' i x'' należą do tego przedziału. Niech η oznacza liczbę mniejszą od szerokości wszystkich przedziałów (20). Obierzmy w przedziale (a, b) dwie jakiekolwiekbądź liczby x' i x'', czyniące zadość nierówności

$$|x' - x''| < \eta$$

Oczywista, mogą zajść dwa przypadki, a mianowicie, albo obrane liczby x' i x'', znajdują się w jednym z przedziałów (20), albo też w dwóch przedziałach sąsiednich. W pierwszym przypadku zachodzić będzie nierówność

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

w drugim zaś nierówność

$$|f(x') - f(x'')| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

A więc dowiedliśmy twierdzenia Cantora w zupełności. Twierdzenie to można wysłowić jeszcze w sposób następujący:

Jeśli funkcja $x = f(x)$ jest ciągła w pewnym obszarze (a, b), to do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę dodatnią η, iż oscylacja funkcji $f(x)$ w każdym obszarze nie większym od η, a zawartym w obszarze (a, b), będzie mniejszą od ε.

Funkcja $y = f(x)$, do której stosuje się twierdzenie Cantora, nazywamy jednostajnie ciągłą. A więc powyższe twierdzenie Cantora wskazuje, że ciągłość jednostajna jest zarazem ciągłością zwyczajną, czyli każda funkcja ciągła będzie zarazem jednostajnie ciągłą.

Udowodnijmy jeszcze kilka twierdzeń podstawowych o funkcjach ciągłych:

Twierdzenie IV. Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest ciągła przy $x = c$, a przytem $f(c)$ nie równa się zeru, to $f(x)$ w otoczeniu liczby c ma ten sam znak, co i wartość $f(c)$.

Dowód. Ponieważ funkcja $f(x)$ jest ciągła przy $x = c$, przeto do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę dodatnią η, iż dla każdej wartości na x, zawartej w przedziale $(c - \eta, c + \eta)$, zachodzić będzie nierówność

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon,$$

czyli

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Obierzmy $\varepsilon = |f(c)|$. W takim razie z nierówności (22) wnosimy, że wartości na funkcję $f(x)$ w otoczeniu $(c - \eta, c + \eta)$ liczby c będą dodatnie lub też ujemne, stosownie do tego, czy $f(c) > 0$, lub $f(c) < 0$. Dowiedliśmy więc naszego twierdzenia.

Twierdzenie V. Jeżeli funkcja $x = f(x)$, ciągła w pewnym obszarze dla dwóch wartości $x = a$ $x = b$ tego obszaru ma dwie wartości, jedną dodatnią a drugą ujemną, to istnieje przynajmniej jedna taka wartość na $x = c$, zawarta między a i b, iż

$$f(c) = 0.$$

Dowód. Przypuśćmy, że $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, (gdzie $b > a$). W takim razie na mocy twierdzenia IV wszystkie wartości na x w otoczeniu liczby a są dodatnie, natomiast wszystkie wartości w otoczeniu liczby b są ujemne. Jasną jest rzeczą, że zbiór wszystkich wartości na x, dla których wartości na funkcję $f(x)$ są dodatnie, posiada w zupełności określoną granicę dolną. Oznaczmy tę granicę przez c.

W myśl definicji granicy dolnej dla każdej liczby dodatniej α zachodzi wzór

$$f(c - \alpha) \leqslant 0.$$

A zatem

$$f(c) \leqslant 0.$$

Łatwo jednak spostrzec, że liczba $f(c)$ nie może być ujemną. W samej rzeczy, załóżmy wbrew rzeczywistości, iż $f(c) = -k$, gdzie k jest jakąkolwiek liczbą dodatnią.

Ponieważ, według umowy funkcja $x = f(x)$ jest ciągłą przy $x = c$, przeto można wyznaczyć taką liczbę dodatnią η, iż zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(c)| < k, \quad \text{skoro} \quad |x - c| < \eta.$$

Stąd wnosimy, że $f(x) < 0$ dla wszystkich wartości na x, w przedziale $(c, c + \eta)$, a zatem liczba c nie może być dolną granicą takich wartości na x, przy których $f(x) > 0$. Doszliśmy więc do sprzeczności, dowodzącej fałszywości założenia, że $f(c) < 0$. A zatem

$$f(c) = 0.$$

Dowiedliśmy więc naszego twierdzenia w zupełności.

Z udowodnionego twierdzenia wypływa bezpośrednio bardzo ważny wniosek następujący:

Wniosek. Funkcja $x = f(x)$ ciągła w pewnym obszarze, która dla dwóch wartości $x = a$, $x = b$ tego przedziału ma odpowiednio wartości $f(x)$ i $f(b)$, przyjmuje dla wartości $x = c$, pośredniej między a i b wartość L, zawartą między wartościami $f(a)$ i $f(b)$.

Dowód. Weźmy pod rozwagę funkcję

$$\varphi(x) = f(x) - L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Oczywista, funkcja $\varphi(x)$ będzie ciągłą w obszarze (a, b), skoro funkcja $x = f(x)$ jest w nim ciągła.

Ponieważ liczba L spełnia nierówność

$$f(a) < L < f(b),$$

przeto wobec (23) zachodzić będą nierówności

$$\varphi(a) < 0; \quad \varphi(b) > 0.$$

W myśl zaś udowodnionego twierdzenia istnieje niezawodnie taka liczba c, pośrednia między a i b, przy której

$$\varphi(c) = 0,$$

czyli wobec (23)

$$f(c) = L$$

A na tem polega wniosek, o którego dowód chodziło.

Twierdzenie VI. (Weierstrassa). Jeżeli funkcja $x = f(x)$ jest ciągła w pewnym obszarze, to w tym obszarze będzie ona posiadała zarówno wartość największą, jak i najmniejszą.

Dowód. Ponieważ funkcja $y = f(x)$ jest ciągłą w danym obszarze, przeto w myśl wniosku z twierdzenia II będzie skończoną w tym samym obszarze. A zatem w myśl znanego twierdzenia, będzie posiadała w nim zarówno wartość górną, jak i dolną. Oznaczmy tę granicę odpowiednio przez M i m. A więc należy okazać, że istnieją w danym obszarze takie dwie wartości $x = x_1$ i $x = x_2$, przy których

$$f(x) = M \quad \text{i} \quad f(x_2) = m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Załóżmy wbrew twierdzeniu, że niema takich wartości na x w danym obszarze, dla którychby zachodziły wzory (24).

Weźmy pod rozwagę funkcję

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{M - f(x)} \quad \text{i} \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{f(x) - m}$$

W myśl naszego założenia funkcje $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ będą ciągłemi w danym obszarze. Z drugiej zaś strony funkcje te są nieskończone w tym obszarze. W samej rzeczy, ponieważ M i m są to odpowiednio górna i dolna granice funkcji $f(x)$ w danym obszarze, przeto, jakkolwiek małą będzie liczba dodatnia ε, istnieje w danym obszarze taka wartość na x, przy której wartość na $f(x)$ czynić będzie zadość nierówności

$$f(x) > M - \varepsilon,$$

względnie

$$f(x) < m + \varepsilon$$

Stąd wnosimy, że, jakkolwiek małą będzie liczba ε, zachodzić będą nierówności

$$\varphi_1(x) > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{i} \quad \varphi_2(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

Z ostatnich nierówności wnosimy, że funkcje $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ nie są skończone w danym obszarze. Z drugiej zaś strony w myśl wniosku z twierdzenia II, funkcje te, jako ciągłe, powinny być skończonemi. Widzimy więc, że doszliśmy do sprzeczności, dowodzącej fałszywości naszego założenia, że nie istnieją takie wartości na x w danym obszarze, przy których funkcja $f(x)$ przyjmuje wartość największą i najmniejszą. A więc istnieją w danym obszarze takie wartości $x = x_1$ i $x = x_2$, przy których $f(x)$ przyjmuje odpowiednio wartość największą i najmniejszą. Dowiedliśmy zatem twierdzenia Weierstrassa w zupełności.

Dajmy na to, że funkcja $x = f(x)$ jest ciągłą dla wszystkich wartości wymiernych na x w pewnym przedziale. W takim razie, w myśl twierdzenia III, do każdej wartości wymiernej $x = c$ w danym przedziale można dobrać takie otoczenie $(c - \eta, c + \eta)$, że, jakkolwiek małą będzie liczba dodatnia ε, naprzód dana, zachodzić będzie nierówność

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

dla każdej pary wartości wymiernych x' i x'', należących do przedziału $(c - \eta, c + \eta)$.

Niechaj $x = a$ oznacza pewną liczbę niewymierną w danym przedziale. Oczywista, liczbę a można uważać jako granicę pewnego ciągu o wyrazach wymiernych

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Przypuśćmy, że liczba a należy do otoczenia $(c - \eta, c + \eta)$ pewnej liczby c. Jasną jest rzeczą, że „prawie wszystkie“ wyrazy ciągu (26) należą również do przedziału $(c - \eta, c + \eta)$. A zatem w myśl nierówności (25) można wyznaczyć taką liczbę n, iż zachodzić będzie nierówność

$$|f(a_{n_1}) - f(a_{n_2})| < \varepsilon,$$

skoro $n_1 \geq n$, $n_2 \geq n$. Stąd, w myśl znanego twierdzenia Cauchy'ego wnosimy, że istnieje w zupełności określona granica ciągu

$$f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots f(a_n) \ldots$$

Granicę tę uważamy jako wartość funkcji $f(a)$ przy $x = a$.

Łatwo udowodnić twierdzenie następujące:

Twierdzenie VII. Funkcja $x = f(x)$, ciągła dla wszystkich wartości wymiernych na x w pewnym obszarze, jest również ciągłą dla wszystkich wartości niewymiernych tego obszaru, a zatem będzie ciągłą w tym obszarze.

Dowód. Ponieważ funkcja $y=f(x)$ jest ciągłą dla wszystkich wartości wymiernych na x w danym obszarze, przeto, jakkolwiek małą jest liczba dodatnia ε, naprzód dana, można znaleźć taką liczbę dodatnią η, iż będzie zachodziła nierówność

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

dla każdej pary wartości x' i x'', należących do przedziału $(a-\eta, a+\eta)$. W myśl definicji wartości funkcji dla wartości niewymiernej na zmienną niezależną, wnosimy, że nierówność (27) będzie zachodziła również w tym przypadku, gdy jedna z liczb x', x'' jest niewymierną. Stąd wynika, że bez względu na to, czy liczby x' i x'' są wymierne, lub też niewymierne, byle się znajdowały w przedziale $(a-\eta, a+\eta)$, zawsze można wyznaczyć takie dwie liczby wymierne a' i a'' tego przedziału, dla których będą zachodziły nierówności

$$|f(x')-f(a')|<\frac{\varepsilon}{3};\quad |f(x'')-f(a'')|<\frac{\varepsilon}{3}$$

Biorąc zaś pod uwagę, że

$$f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-f(a')|+|f(a')-f(a'')|+|f(a'')-f(x'')|,$$

wnosimy że zachodzi nierówność

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

dla każdej pary wartości na x, należących do przedziału $(a-\eta a+\eta)$.

§ 5. **O funkcjach przerywalnych. Dwa rodzaje przerw.** Funkcja, która nie jest ciągłą przy pewnej wartości $x=a$, nazywamy przerywalną przy $x=a$. Odróżniamy dwa rodzaje przerw funkcji. Powiadamy, że przy $x=a$ zachodzi w funkcji $y=f(x)$ przerwa pierwszego rodzaju, jeżeli wartości $f(a)$, $f(a+o)$, $f(a-o)$, będąc określonemi w zupełności, nie są równe sobie. Jeżeli przy $x=a$ zachodzi w funkcji $y=f(x)$ przerwa pierwszego rodzaju, przyczem

$$f(a+0)=f(a-0), \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

przyjmujemy wówczas liczbę (28) za wartość funkcji $f(x)$ przy $x=a$. A zatem możemy tę funkcje uważać jako ciągłą przy $x=a$.

Powiadamy, że przy $x=a$ zachodzi w danej funkcji $x=f(x)$ regularna przerwa pierwszego rodzaju, jeżeli pomiędzy wartościami $f(a)$, $f(a+0)$, $f(a-0)$ zachodzi związek następujący:

$$f(a)=\frac{f(a+0)+f(a-0)}{2}$$

Powiadamy, że przy $x=a$ zachodzi w funkcji $y=f(x)$ przerwa drugiego rodzaju, jeżeli wartości $f(a-0)$, $f(a+0)$ są nieskończone, lub wcale nie istnieją. Widzimy więc, że przerwa drugiego rodzaju przy $x=a$ może zajść w funkcji bez względu na to, jaką wartość przy $x=a$ owa funkcja przybiera.

§ 6. **Funkcje monotoniczne i funkcje z ograniczoną warjacją.** Funkcję $y=f(x)$ nazywamy monotoniczną w pewnym obszarze (a, b), jeżeli dla każdych dwóch dowolnych wartości $x=x_1$ i $x=x_2$ tego obszaru wyrażenie

$$(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]$$

ma jeden i ten sam znak. W tym przypadku, gdy zachodzi nierówność

$$(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]\geqslant 0,$$

wówczas funkcję $f(x)$ nazywamy rosnącą w obszarze (a, b); gdy zaś zachodzi nierówność

$$(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]<0,$$

wówczas funkcję $f(x)$ nazywamy malejącą w tym obszarze.

Łatwo spostrzec, że funkcja monotoniczna w pewnym obszarze jest lub ciągła w tym obszarze, lub też przywalna, przyczem w ostatnim przypadku posiada tylko przerwy pierwszego rodzaju. W samej rzeczy, dajmy na to, że funkcja $f(x)$, rosnąca w obszarze (a, b), posiada wewnątrz tego obszaru przerwę przy $x=x_0$. Oznaczmy przez ε zmienną dowolną, zmierzającą do zera, a przyjmującą tylko wartości dodatnie. Jasną jest rzeczą, że funkcja $f(x_0-\varepsilon)$ nie jest malejącą. Z drugiej zaś strony funkcja ta jest ograniczona zgóry, gdyż $f(x_0-\varepsilon)\leqslant f(b)$. Stąd wnosimy, że funkcja $f(x_0-\varepsilon)$ posiada przy $\varepsilon=0$ pewną granice $f(x_0-0)$, która jest właśnie lewostronną granicą funkcji $f(x)$ przy $x=x_0$. Analogicznie, funkcja $f(x+\varepsilon)$ posiada granicę $f(x_0+0)$, która będzie granicą prawostronną funkcji $f(x)$ przy $x=x_0$. Ponieważ $f(x_0-\varepsilon)\leqslant f(x_0+\varepsilon)$, przeto $f(x_0-0)\leqslant f(x_0+0)$. W tym przypadku, gdy $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, wówczas $f(x_0)=(x_0-0)$. A zatem funkcja $f(x)$ jest ciągłą przy $x=x_0$. Jeżeli zas $f(x_0+0)>f(x_0+0)$, wówczas funkcja $f(x)$ przy $x=x_0$ posiada przerwę pierwszego rodzaju.

Dajmy na to, że $y=f(x)$ oznacza pewną funkcję ograniczoną w obszarze (a, b). Niechaj $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{n-1}$ stanowią pewien układ liczb, spełniających warunek

$$x_0=a<x_1<x_2<x_3<\cdots x_{n-1}<x_n=b \quad \ldots \quad (29)$$

Rozważmy wyrażenie

$$u=|f(x_1)-f(a)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(b)-f(x_{n-1})| \quad \ldots \quad (30)$$

Jasną jest rzeczą, że każdemu układowi (29) odpowiada pewna wartość na u. Funkcję $y=f(x)$ nazywamy funkcją z ograniczoną warjacją w obszarze $(a_1 b)$ (la fanction à variations bornée), jeżeli zbiór wszystkich wartości na u jest ograniczony. Kres górny u tego zbioru nazywa się warjacją zupełną, funkcji $f(x)$ w obszarze (a, b). Funkcje z ograniczoną warjacją podane zostały przez Jordan'a, który zbadał również własności podstawowe tych funkcji. Jasną jest rzeczą, że każda funkcja monotoniczna w pewnym obszarze jest w tym samym obszarze funkcją

z ograniczoną warjacją. Łatwo spostrzec, że suma dwóch lub kilku funkcji z ograniczoną warjacją iest również funkcią z ograniczoną warjacją.

Najgłówniejsza właściwość funkcji z ograniczoną warjacją polega na tem, że taką funkcję zawsze można przedstawić w postaci różnicy dwóch funkcyj monotonicznych, wciąż rosnących.

Dajmy na to, że $y=f(x)$ oznacza pewną funkcję z ograniczoną warjacją w obszarze (a, b). Oznaczmy przez α sumę wszystkich wartości dodatnich różnicy $f(x_i)-f(x_{i-1})$, a przez β sumę wszystkich jej wartości ujemnych.

W takim razie będzie

$$u=|f(x_1)-f(a)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(b)-f(x_{n-1})=\alpha+\beta$$
$$f(b)-f(a)=\alpha-\beta$$

Przeto

$$u=2\alpha+f(a)-f(b)$$
$$u=2\beta+f(b)-f(a)$$

Ponieważ $f(x)$ jest funkcją z ograniczoną warjacją, przeto zbiory wartości na α i β są ograniczone. Oznaczmy przez A i B odpowiednio kresy górne tych zbiorów.

Oczywista, zachodzą wzory następujące:

$$u=2A+f(a)-f(b);\quad u=2B+f(b)-f(a)$$

Liczby A i B będziemy nazywali odpowiednio zupełną warjacją dodatnią i zupełną warjacją ujemną funkcji $f(x)$ w obszarze (a, b).

Oznaczmy przez $u(x)$; $A(x)$; $B(x)$ odpowiednio wartości na warjację funkcji $f(x)$ w obszarze (a, x), gdzie liczba x spełnia nierówności.

$$a<x<b$$

Łatwo spostrzec, że funkcje $A(x)$ i $B(x)$ są rosnące (lub przynajmniej nie malejące) w obszarze (a, x).

Ponieważ pomiędzy funkcjami $f(x)$, $u(x)$, $A(x)$ i $B(x)$ dla każdej wartości na x zachodzą związki

$$u(x)=2A(x)+f(a)-f(x);\quad u(x)=2B(x)+f(x)-f(a),$$

przeto

$$f(x)=f(a)+A(x)-B(x)$$

Ponieważ funkcje $A(x)$ i $B(x)$ nie są majejące, przeto każdą funkcję z ograniczoną warjacją, przedstawić można w postaci dwóch funkcyj monotonicznych, wciąż rosnących.

Niechaj $w(x)$ oznacza funkcję dowolną, wciąż rosnącą w obszarze (a, b). Oznaczmy

$$A(x)+w(x)=A_1(x);\quad B(x)+w(x)=B_1(x)$$

Wtedy możemy napisać

$$f(x)=f(a)+A_1(x)-B_1(x)$$

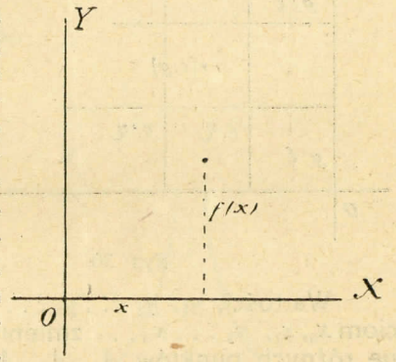
Ponieważ funkcje $A_1(x)$ i $B_1(x)$ są rosnące w obszarze (a, b), a nadto $w(x)$ jest funkcją zupełnie dowolną, przeto funkcję $f(x)$ z ograniczoną warjacją w obszarze (a, b) da się przedstawić w postaci różnicy dwóch dowolnych funkcyj monotonicznych, wciąż rosnących w tym samym obszarze (a, b).

Biorąc pod uwagę, że funkcja monotoniczna jest ciągła, lub też przerywalna (mając w tym ostatnim przypadku przerwy pierwszego rodzaju), wnosimy, że tę samą własność posiada każda funkcja z ograniczoną warjacją.

Natomiast nie każda funkcja z ograniczoną warjacją jest ciągła. Można bowiem udowodnić, że jeżeli $f(x)$ jest funkcją z ograniczoną warjacją w obszarze (a, b), to jej zupełna warjacja $u(x)$ w obszarze (a, x) jest funkcja ciągła zmiennej x *).

Łatwo spostrzec, że każdą funkcję z ograniczoną warjacją w pewnym obszarze (a, b), a ciągłą w tym obszarze można przedstawić w postaci różnicy funkcyj wciąż rosnących a ciągłych w obszarze (a, b),

§ 7. Geometryczna interpretacja funkcji. Niechaj $0x$ i $0y$ oznaczają dwie dowolne osie wzajemnie prostopadłe. Obrazem geometrycznym pary liczb $[a, b]$ na płaszczyźnie nazywać będziemy punkt P o spółrzędnych a i b, względem obranych osi. Niechaj $y=f(x)$ oznacza pewną funkcję zmiennej x. Obrazem geometrycznym tej funkcji na płaszczyźnie nazywamy zbiór punktów, z których każdy jest obrazem geometrycznym na tej płaszczyźnie pary liczb



Rys. 29.

$$[x, f(x)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Dajmy na to, że $y=f(x)$ oznacza pewną funkcję w obszarze (a, b). Wszystkie punkty (31) leżą wewnątrz pasu, równoległego do osi $0y$, a ograniczonego prostemi $x=a$, $x=b$. W tym przypadku, gdy funkcja $f(x)$ jest ograniczona w przedziale (a, b), wówczas wszystkie punkty, tworzące obraz geometryczny funkcji w obszarze (a, b), będą zawarte wewnątrz prostokąta ABA_1B_1, ograniczonego prostemi $x=a$; $x=b$; $y=m$; $y=M$, gdzie m i M są to odpowiednio dolny i górny kres funkcji $f(x)$ w obszarze (a,b)

Dajmy na to, że g jest granicą funkcji $y=f(x)$ przy $x=c$ $(a<c<b)$. W takim razie do każdej dowolnej liczby ε można dobrać takie otoczenie $(c-\eta, c+\eta)$, żeby „prawie wszystkie“

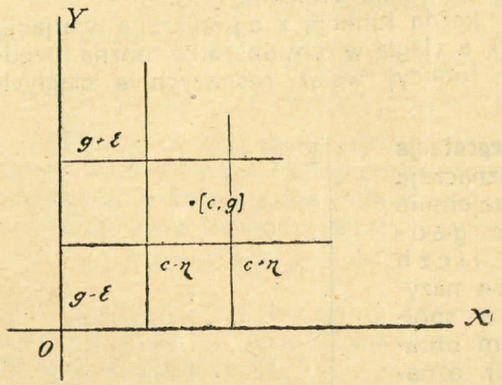
*) Goursat Curs d'Analyse Mathematique Vi p. 23—25.

punkty $[x, f(x)]$, z wyjątkiem chyba jednego punktu $[c, f(c)]$ znajdowały się wewnątrz prostokąta, utworzonego prostemi

(I) $x = c - \eta$; $x = c + \eta$; $y = g - \varepsilon$; $y = g + \varepsilon$ (Rys. 30).

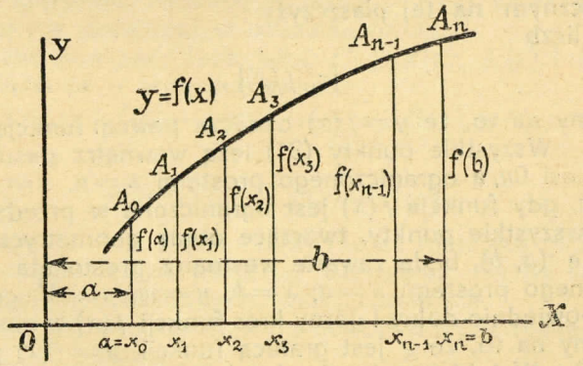
W tym przypadku, gdy funkcja $y = f(x)$ jest ciągłą przy $x = c$, wówczas obraz geometryczny pary liczb $[a, f(c) = g]$ będzie również należał do prostokąta utworzonego prostemi (I) bez względu na wartości ε i η. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w pewnym obszarze (a, b), wówczas dla każdej wartości $x = c$ w przedziale (a, b) obraz geometryczny pary liczb $[c, f(c) = y]$ będzie należał do prostokąta, utworzonego prostemi (I).

Miejscem geometrycznem wszystkich punktów $[x, f(x)]$, czyli innemi słowy obrazem geometrycznym funkcji $f(x)$, ciągłej w pewnym obszarze (a, b), będzie pewna krzywa (ciągła w sensie geometrycznym). Odwrotnie, każda krzywa C ciągłą, w sensie geometrycznym, można uważać jako obraz geometryczny pewnej funkcji ciągłej (Rys. 31). Obraz geometryczny funkcji nazywają jej wykresem.



Rys 30.

Wartości, $y_1, y_2 \ldots y_n \ldots$ tej funkcji, odpowiadające wartościom $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$ zmiennej niezależnej x przedstawiają rzędne różnych punktów $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n \ldots$ krzywej C. (Rys. 31).

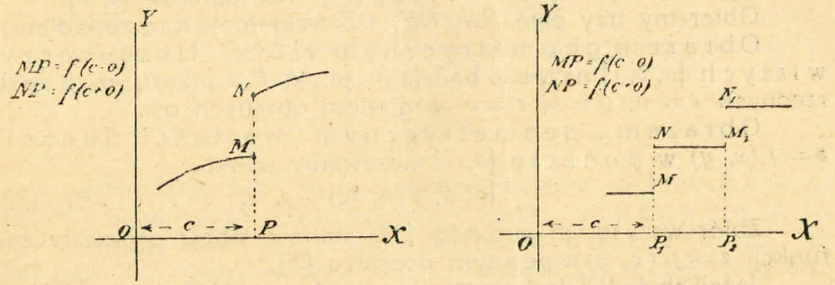


Rys 31.

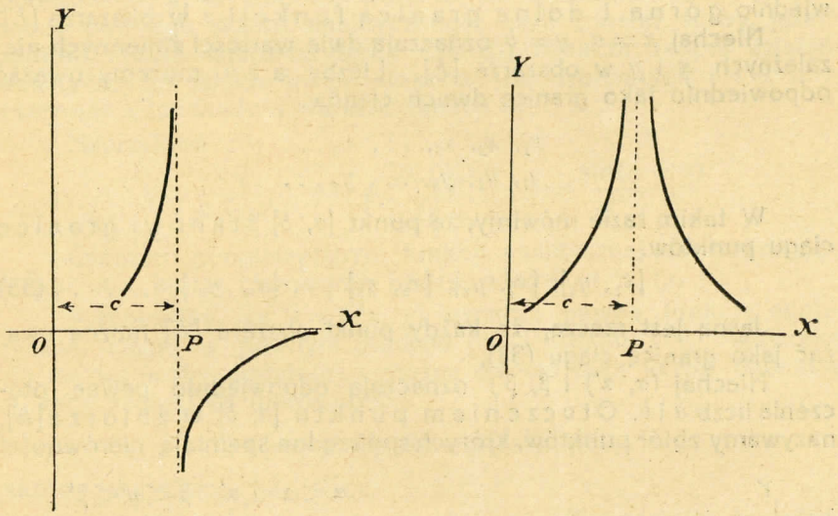
Uwaga. Podkreślamy tutaj różnicę pomiędzy pojęciami ciągłości krzywej w sensie geometrycznym a analitycznym, gdyż nie wszystkie krzywe ciągłe w sensie analitycznym posiadają

właściwości krzywych, ciągłych w sensie geometrycznym. Jordan Peano, Hilbert, Sierpiński i inni matematycy przytoczyli właśnie kilka przykładów takich krzywych.

Na rys. 32 i 33 przedstawione są odpowiednio obrazy geometryczne (wykresy) funkcyj przerywalnych posiadających dla $x = c$ przerwy pierwszego i drugiego rodzaju.



Rys. 32.



Rys. 33.

§ 8. Funkcje dwóch i wielu zmiennych niezależnych. Niechaj $[E]$ oznacza pewien zbiór wartości dwóch zmiennych niezależnych x i y, czyli innemi słowy zbiór par liczb rzeczywistych $[x, y]$, należących odpowiednio do zbiorów $[x]$ i $[y]$. Zbiór $[E]$ nazywamy obszarem dwuch zmiennych x. y. Obrazem geometrycznym zbioru $[E]$, jako zbioru par liczb rzeczywistych, będzie pewien zbiór punktów na płaszczyznie. Dajmy na to, że każdemu punktowi zbioru $[E]$ odpowiada pewna liczba rzeczywista z. Wówczas mówimy, ze z

jest funkcją dwóch zmiennych niezależnych x i y w obszarze $[E]$. Oznaczamy to, pisząc

$$z = f(x, y).$$

Oczywista, wszystkie wartości na z stanowią pewien zbiór $[Z]$ liczb rzeczywistych. Element zbioru $[Z]$, odpowiadający pewnemu punktowi $[a, b]$ zbioru $[E]$, nazywamy wartością funkcji z przy $x = a$; $y =$ b, czyli wprost wartością z w punkcie $[a, b]$.

Obierzmy trzy osie OX, OY, OZ wzajemnie prosropadłe.

Obrazem geometrycznym trójki liczb rzeczywistych $[a, b, c]$ nazywać będziemy punkt P w przestrzeni o spółrzędnych $x = a$; $y = b$; $z = c$ względem obranych osi.

Obrazem geometrycznym wartości funkcji $z = f(x, y)$ w punkcie $[a, b]$ nazywamy punkt

$$[a, b, f(a, b)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Zbiór wszystkich punktów (32) stanowi obraz geometryczny funkcji $z = f(x, y)$ w pewnym obszarze $[E]$.

Jeżeli zbiór $[O]$ jest ograniczony, wówczas funkcję $z = f(x, y)$ nazywamy ograniczoną w obszarze $[E]$.

Górną i dolną granicę zbioru $[Z]$ nazywamy wówczas odpowiednio górną i dolną granicą funkcji z w obszarze $[E]$.

Niechaj $x = a$, $y = b$ oznaczają dwie wartości zmiennych niezależnych x i y w obszarze $[E]$. Liczby a i b możemy uważać odpowiednio jako granice dwuch ciągów.

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \ldots$$
$$y_1, y_2, y_3, \ldots y_n \ldots$$

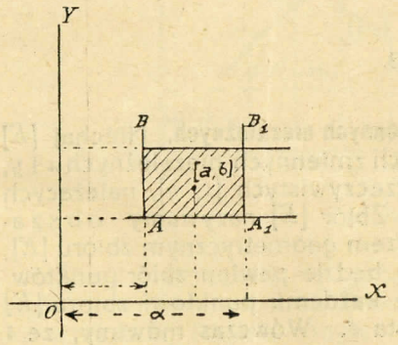
W takim razie mówimy, że punkt $[a, b]$ stanowi granicę ciągu punktów.

$$[x_1, y_1]; [x_2, y_2]; [x_3, y_3] \ldots [x_n\ y_n] \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Jasną jest rzeczą, że każdy punkt obszaru $[E]$ można uważać jako granicę ciągu (33),

Niechaj (α, α') i $\beta, \beta')$ oznaczają odpowiednio pewne otoczenia liczb a i b. Otoczeniem punktu $[a, b]$ w zbiorze $[E]$, nazywamy zbiór punktów, których spółrzędne spełniają nierówności

$$\alpha < x < \alpha' \quad \beta < y < \beta'$$



Rys. 34.

Wszystkie te punkty leżą wewnątrz prostokąta AA, BB, (rys. 34), utworzonego prostemi $x = \alpha$; $x = \alpha'$; $y = \beta$; $y = \beta'$.

Punkt $[a, b]$ może należeć do swego otoczenia, lub też nie.

Niechaj z będzie pewną funkcją zmiennych x i y. Przypuśćmy, że $[a, b]$ jest jakikolwiek punkt $[a, b]$.

Niechaj

$$[x_1, y_1]; [x_2, y_2]; [x_3, y_3] \ldots [x_n, y_n] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

stanowią pewien ciąg punktów, którego granicą jest właśnie punkt $[a, b]$. Oczywista, takich ciągów istnieje nieskończenie wiele. Każdemu z ciągów (34) odpowiada pewien ciąg wartości funkcji $z_1, z_2, z_3 \ldots z_n \ldots$, stanowiący część właściwą zbioru $[Z]$ wszystkich wartości na funkcję $z = f(x, y)$ w pewnym obszarze $[E]$.

Dajmy na to, że istnieje taka liczba rzeczywista L, która jest wspólną granicą każdego z ciągów (34).

Liczbę L nazywamy wówczas granicą funkcji $z = f(x, y)$ w punkcie $[a, b]$. Oznaczamy to, pisząc

$$L = \lim_{\substack{x=a \\ y=b}} f(x, y)$$

Jeżeli nadto $L = f(a, b)$, wówczas mówimy, że funkcja $f(x, y)$ dwóch zmiennych niezależnych jest ciągłą w punkcie $[a, b]$.

Funkcja, $z = f(x, y)$ jest ciągłą w obszarze $[E]$, jeżeli ona jest ciągła we wszystkich punktach $[x, y]$ tego obszaru.

Funkcję $z = (x, y)$ dwóch zmiennych niezależnych x i y nazywamy analityczną, jeżeli odpowiedniość pomiędzy zbiorem punktów $[x, y]$ a zbiorem wartości na z podana została za pomocą pewnego wzoru analitycznego, czyli innemi słowy, jeżeli symbol f (czyli charakterystyka funkcji) oznacza zespół działań analitycznych, jakich trzeba dokonać na zmiennych x i y, aby otrzymać odpowiednią wartość funkcji z.

Naprzykład

$$y = \frac{xy}{x+y}; \quad y = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{\lg(x \cdot y)}}; \quad y = \frac{\sin(x+y)}{e^{x^2+y^2}}$$

Obrazem geometrycznym funkcji analitycznej jest pewna powierzchnia, której równaniem będzie właśnie $z = f(x, y)$.

Przypuśćmy, że $z = f(x, y)$ oznacza pewną funkcję analityczną, ciągłą w pewnym punkcie $[a, b]$ obszaru $[E]$. Wówczas do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę dodatnią η, żeby zachodziła nierówność

$$| f(a+h, b+h) - f(a, b) | < \varepsilon,$$

skoro $| h | < \eta$; $| k | < \eta$.

Funkcja, ciągła w pewnym obszarze $[E]$, posiada tę własność dla każdego punktu $[x, y]$ tego obszaru.

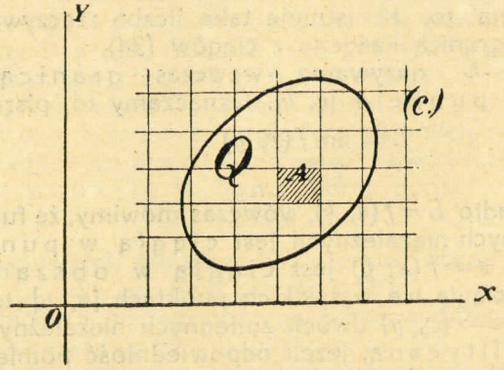
Dajmy na to, że obszar $[E]$ jest zbiorem wszystkich punktów P, leżących wewnątrz i na obwodzie pewnej krzywej zamkniętej C. Oznaczmy przez Q pole tej krzywej. Łatwo udowodnić twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Jeżeli $z = f(x, y)$ oznacza pewną funkcję, ciągłą w obszarze Q, to dla każdej liczby dodatniej ε, naprzód danej, można podzielić pole

Q na części tak, aby różnica wartości funkcji z w dwóch dowolnych punktach, należących do jednej i tej samej części, będzie mniejszą od ε.

Dowód. Poprowadźmy szereg prostych, równoległych do osi OX, OY.

Proste te dzielą pole Q o obwodzie zamkniętym (C) na części A_i (Rys. 35).



Rys. 35.

Przypuśćmy, że wysłowione twierdzenie nie jest słuszne. W takim razie twierdzenie to nie jest słuszne przynajmniej dla jednej części A_i pola Q. Dzielimy element pola A_i na części A_i' znowu za pomocą prostych równoległych do osi OX i OY. Ponieważ, według przypuszczania, wysłowione twierdzenie nie jest słuszne dla elementu pola A_i', przeto ono nie jest słuszne przynajmniej dla jednej części tego elementu A_i''. Postępując z elementem A_i'' w sposób powyższy, otrzymany ciąg A_i', A_i'' A_i''' ... $A_i^{(n)}$ ... Przypuśćmy, że element $A_i^{(n)}$ tego ciągu jest zawarty pomiędzy prostemi

$$x=a_n;\ x=b_n;\ y=c_n;\ y=d_n.$$

Oczywista, ciągi

$$a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ a_n\ \ldots$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3\ \ldots\ b_n\ \ldots$$

mają jedną wspólną granicę

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=l$$

Ciągi

$$c_1,\ c_2,\ c_3\ \ldots\ c_n\ \ldots$$
$$d_1,\ d_2,\ d_3\ \ldots\ d_n\ \ldots$$

mają również jedną wspólną granicę.

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\lim_{n\to\infty} d_n=m$$

Jasną jest rzeczą, że granicą ciągu

$$A_i',\ A_i'',\ A_i'''\ \ldots\ A_i^{(n)}\ \ldots$$

będzie punkt $[l, m]$, położony wewnątrz pola Q, lub też na jego obwodzie (c).

Ponieważ funkcja $z=f(x,y)$ jest ciągła w punkcie $[l, m]$, przeto do każdej liczby dodatniej ε dobrać można taką liczbę dodatnią η, iż będzie zachodziła nierówność

$$|\ f(l+h,\ m+k)-f(l,m)\ |<\frac{\varepsilon}{2}$$

dla każdych wartości na h i k, spełniających nierówności

$$|\ h\ |<\eta;\quad |\ k\ |<\eta$$

Obierzmy liczbę n tak, ażeby punkty $[a_n, c_n]$ i $[b_n, d_n]$ leżały wewnątrz prostokąta, utworzonego prostemi

$$x=l-y;\ x=l+y;\ y=m-y;\ y=m+y.$$

Niechaj $[x', y']$ i $[x', y'']$ oznaczają dwa jakiekolwiek punkty tego prostokąta. W takim razie będą zachodziły nierówności

$$|\ f(x',y')-f(l,m)\ |<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|\ f(x'',y'')-f(l,m)\ |<\frac{\varepsilon}{2}$$

A zatem

$$|\ f(x',y')-f(x'',y'')\ |<\varepsilon$$

Stąd wnosimy, że założenie nasze o niesłuszności wysłowionego twierdzenia jest fałszywe. A zatem to twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Dajmy na to, że pole Q, ograniczone krzywą zamkniętą (C) podzielone zostało na części A_i za pomocą prostych, równoległych do osi OX i OY.

Niechaj η oznacza odległość pomiędzy dwiema prostemi. Liczbę η można obrać tak, ażeby różnica dwóch wartości funkcji $z=f(x,y)$ w dwóch dowolnych punktach jednej i tej samej części A_i była mniejszą od liczby dodatniej $\frac{\varepsilon}{2}$. Niechaj $[x, y]$ i $[x', y']$ będą dwa dowolne punkty pola Q, których odległość wzajemna jest mniejsza od η. Oczywista, punkty te będą się znajdowały wewnątrz jednego i tego samego elementa pola A_i, lub wewnątrz dwóch elementów sąsiednich. Tak w pierwszym, jak i w drugim przypadku będzie zachodziła nierówność.

$$|\ f(x.y)-f(x',y')\ |<\frac{2.\varepsilon}{2}=\varepsilon\quad .\ .\ .\ .\ .\quad (35)$$

A więc, jeżeli funkcja $z=f(x,y)$ dwóch zmiennych x i y jest ciągła w pewnym obszarze, wówczas do każdej liczby dodatniej ε, naprzód danej, można dobrać taką liczbę dodatnią η, iż będzie

zachodziła nierówność (35) dla każdych dwóch punktów danego obszaru, których odległość wzajemna jest mniejsza od η.

O funkcji, posiadającej powyższą własność mówimy, że jest jednostajnie ciągła w pewnym obszarze.

A więc ciągłość zwyczajna funkcji dwóch zmiennych niezależnych jest zarazem ciągłością jednostajną.

W sposób bardzo podobny do podanego w § 4 można udowodnić twierdzenia następujące:

Twierdzenie I. Funkcja dwóch zmiennych niezależnych x i y, ciągła w pewnym obszarze $[E]$ będzie skończoną w tym samym obszarze.

Twierdzenie II. Funkcja dwóch zmiennych niezależnych x i y, ciągła w pewnym obszarze $[E]$ przybiera w tym obszarze wartość zarówno najmniejszą, jak i największą, czyli innemi słowy osiąga zarówno górną, jak i dolną swoją granicę.

Twierdzenie III. Jeżeli funkcja dwóch zmiennych niezależnych x i y ciągła w obszarze $[E]$ przybiera w jednem punkcie A tego obszaru wartość dodatnią, w drugim zaś B wartość ujemną, i jeżeli nadto możemy połączyć te dwa punkty linją, zawartą całkowicie w danym obszarze, wtedy na tej linji zawsze znajdziemy taki punkt C (przynajmniej jeden), iż wartość funkcji w punkcie C jest zerem.

Z tego twierdzenia wypływa bezpośrednio wniosek następujący:

Wniosek. Jeżeli funkcja dwóch zmiennych niezależnych x i y, ciągła w pewnym obszarze $[E]$, przybiera w dwóch punktach A i B tego obszaru odpowiednio wartości z_1 i z_2, i jeżeli nadto punkty A i B można połączyć linją, nie przekraczającą granic obszaru $[E]$, wówczas na tej linji istnieje przynajmniej jeden punkt C pomiędzy A i B, iż wartość funkcji z w punkcie C jest zawartą pomiędzy z_1 a z_2.

Przejdziemy teraz do rozważania funkcji wielu zmiennych niezależnych.

Niechaj $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ będą m zmienne niezależne.

Punktem przestrzeni m wymiarowej nazywać będziemy zbiór liczb rzeczywistych

$$[x_1^0, x_2^0, x_3^0 \dots x_m^0] \quad \dots\dots \quad (36)$$

Zbiór wszystkich punktów (36) stanowi obszar m wymiarowy [E].

Dajmy na to, że każdemu punktowi (36) pewnego obszaru m—wymiarowego $[\Sigma]$ odpowiada pewna liczba rzeczywista u. Mówimy wtedy, że u jest funkcją m zmiennych niezależnych $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$. Oznaczamy to, pisząc

$$u = f(x_1, x_2, x_3 \dots x_m)$$

Jasną jest rzeczą, że zbiorowi $[\Sigma]$ odpowiada pewny zbiór liczb $[u]$. Element zbioru $[u]$, odpowiadający punktowi (36) zbioru $[\Sigma]$, nazywamy wartością funkcji u w punkcie (36). Oznaczamy to, pisząc

$$u_0 = f(x_1^0, x_2^0, x_3^0 \dots x_m^0)$$

Obrazem geometrycznym fukcji $u = f(x_1, x_2, x_3 \dots x_m)$ m zmiennych niezależnych $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ w punkcie m— wymiarowym $[x_1^0, x_2^0, x_3^0 \dots x_m^0]$ nazywamy punkt

$$[x_1^0, x_2^0, x_3^0 \dots x_m^0; \quad u_0 = f(x_1^0, x_2^0, x_3^0 \dots x_m^0)] \quad \dots \quad (37)$$

w przestrzeni $(m+1)$ — wymiarowej

Zbiór wszystkich punktów (37) stanowi obraz geometryczny funkcji u w obszarze $[\Sigma]$.

Liczbę L nazywamy granicą funkcji u w punkcie $[x_1^0, x_2^0, x_3^0 \dots x_m^0]$, jeżeli L jest granicą ciągu wartości

$$u_1, u_2, u_3 \dots u_n \dots,$$

odpowiadających punktom

$$[x_1', x_2', x_3' \dots x_m']; \quad [x_1'', x_2'', x_3'' \dots x_m''] \dots [x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)} \dots x_m^{(n)}]. \quad (38)$$

pod warunkiem, że

$$x_1^0 = \lim_{n \to \infty} x_1^{(n)}; \quad x_2^0 = \lim_{n \to \infty} x_2^{(n)}; \quad x_3^0 = \lim_{n \to \infty} x_3^{(n)} \dots x_m^0 = \lim_{n \to \infty} x_m^{(n)}$$

Oznaczamy to, pisząc

$$L = \lim f(x_1, x_2, x_3 \dots x_m)$$
$$x_1 = x_1^0; \quad x_2 = x_2^0 \dots x_m = x_m^0$$

Funkcję $u = f(x_1, x_2, x_3 \dots x_m)$ m zmiennych niezależnych $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ nazywamy ciągłą w punkcie $[x_1^0, x_2^0, x_3^0 \dots x_m^0]$, jeżeli

$$L = \lim f(x_1, x_2, x_3 \dots x_m) = f(x_1^0, x_2^0, x_3^0 \dots x_m^0)$$
$$x_1 = x_1^0; \quad x_2 = x_2^0 \dots x_m = x_m^0$$

Funkcję $u = f(x_1, x_2, x_3 \dots x_m)$, ciągłą we wszystkich punktach obszaru m — wymiarowego $[\Sigma]$, nazywamy ciągłą w obszarze $[\Sigma]$.

Funkcję $u = f(x_1, x_2, x_3 \dots x_m)$ m zmiennych niezależnych $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ nazywamy analityczną, jeżeli odpowiedniość

pomiędzy zbiorem $[\Sigma]$, a zbiorem $[u]$ ustalona została za pomocą pewnego wzoru analitycznego, czyli innemi słowy jeżeli symbol tej funkcji f (czyli inaczej jej charakteryka) oznacza zespół działań analitycznych, jakiego dokonać należy na zmiennych niezależnych $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$, aby otrzymać odpowiednią wartość, funkcji u.

Godnem jest uwagi, że wszystkie twierdzenia, udowodnione dla funkcyj jednej i dwóch zmiennych niezależnych, zachodzą również dla funkcji wielu zmiennych niezależnych.

Rozdział VI.

Funkcje analityczne jednej zmiennej niezależnej.

§ 1. **Klasyfikacja funkcyj analitycznych.** Funkcją analityczną nazywamy taką funkcję $y=f(x)$, którą da się wyrazić pewnym wzorem analitycznym, czyli innemi słowy taką funkcję, dla której wiadomem jest, jakiego zespołu działań analitycznych należy dokonać nad zmienną niezależną x by otrzymać odpowiednią wartość na funkcję $f(x)$.

Naprzykład

$$y=\frac{3x+4}{x^2+1}; \quad y=\frac{\sqrt{3x^2-1}}{x}; \quad y=\sin x^2; \quad y=\lg x \text{ i t. d.}$$

są to funkcje analityczne zmiennej niezależnej x.

Zespół działań analitycznych, którego należy dokonać nad x, aby otrzymać funkcję, oznaczamy symbolami f, φ, $\varphi \ldots \theta$. Symbol ten nazywamy charakterystyką funkcji.

Wszystkie funkcje analityczne można podzielić na dwie kategorje, a mianowicie na funkcje algebraiczne i funkcje przestępne.

Funkcję $y=f(x)$ nazywamy algebraiczną, jeżeli f jest symbolem skończonej liczby podstawowych działań algebraicznych, a mianowicie dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia, potęgowania i wyciągania pierwiastków.

Naprzykład

$$y=\frac{\sqrt{3x^2-x+1}}{x^3-x+2}; \quad y=\frac{(x-1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^3-4}}; \quad y=(5x^2-6x+1)^2$$

Można udowodnić, że każda funkcja algebraiczna $y=f(x)$ będzie pierwiastkiem pewnego równania algebraicznego postaci

$$X_0y^n+X_1y^{n-1}+X_2y^{n-2}+\cdots+X_{n-1}y+X_n=0,$$

gdzie spółczynniki $X_0, X_1, X_2 \cdots X_{n-1}, X_n$ są to pewne funkcje zmiennej niezależnej x.

Każdą funkcję analityczną, która nie jest algebraiczną, nazywamy przestępną.

Do kategorji funkcyj przestępnych należą funkcje:

1. Wykładnicze $y=a^x$; $y=e^x$
2. Logarytmowe $y=\lg_a x$; $y=\lg x$

3. Trygonometryczne $y=\sin x$: $y=\cos x$ $y=\operatorname{tg} x$; $y=\operatorname{cotg} x$; $y=\sec x$; $y=\operatorname{cosec} x$

4. Kołowe, czyli cyklometryczne $y=\operatorname{arc\,sin} x$; $y=\operatorname{arc\,cos} x$; $y=\operatorname{arc\,tg} x$; $y=\operatorname{arc\,cotg} x$; $y=\operatorname{arc\,sec} x$; $y=\operatorname{arc\,cosec} x$

5. Hyperboliczne $y=\operatorname{sh} x$; $y=\operatorname{ch} x$; $y=\operatorname{th} x$; $y=\operatorname{sch} x$; $y=\operatorname{csch} x$;

Funkcję analityczną $y=f(x)$ nazywamy jednowartościową, jeżeli każdej wartości na x odpowiada jedna i tylko wartość na y

Naprzykład

$$y=\frac{x^3-x+1}{x^5-1}; \quad y=\sin x^2; \quad y=\operatorname{arc\,tg}(1+x^2)$$

Funkcję $y=f(x)$ nazywamy wielowartościową jeżeli danej wartości na x odpowiadają dwie, lub kilka wartości na funkcję y.

Naprzykład

$$y=\pm\sqrt{x}; \quad y=\pm\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}$$

Do kategorji funkcyj wielowartościowych należą wszystkie funkcje cyklometryczne.

Funkcje algebraiczne można podzielić na wymierne i niewymierne.

Funkcję algebraiczną $y=f(x)$ nazywamy wymierną, jeżeli jej symbol f nie zawiera pierwiastkowania.

Naprzykład

$$y=x^2+x-1; \quad y=\frac{2x^2-3}{x^3-1} \text{ i t. d.}$$

Ogólnym typem funkcji wymiernej jest funkcja ułamkowa

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}x+b^n},$$

gdzie spółczynniki $a_0, a_1, a_2\cdots a_{n-1}, a_n, b_0, b_1, b_2\cdots b_n$ są to liczby stałe.

Funkcją algebraiczną $y=f(x)$ nazywamy niewymierną, jeżeli jej symbol f zawiera pierwiastkowanie.

Naprzykład

$$y=\sqrt{2x}; \quad y=\frac{\sqrt{3x^3+x+1}}{\sqrt[3]{x^5+1}}$$

Funkcję wymierną $y=f(x)$ nazywamy wielomianem algebraicznym, jeżeli symbol f nie zawiera dzielenia przez x.

Naprzykład

$$y=3x^2-3x-1; \quad y=x^6-1\ldots$$

Wielomian algebraiczny n-go stopnia w postaci ogólnej będzie

$$y=f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

gdzie spółczynniki $a_0, a_1, a_2\ldots a_n$ są to liczby stałe.

Przypuśćmy, że zależność analityczna pomiędzy dwiema zmiennemi y, a x jest taka, że gdy y uważamy jako funkcję zmiennej x, to możemy naodwrót x uważać jako funkcję zmiennej y; wówczas x i y nazywamy funkcjami wzajemnie odwrotnemi.

A więc wtedy wzór

$y=f(x)$ pociąga za sobą wzór $x=\varphi(y)$

Naprzykład funkcje

$$y=\lg x \text{ i } x=a^y$$
$$y=\sqrt[m]{x} \text{ i } x=y^m$$
$$y=\sin x \quad x=\operatorname{arc\,sin} y$$

i t. d. są funkcjami wzajemnie odwrotnemi.

Przypuśćmy, że zależność analityczna pomiędzy zmiennemi x a y podana została zapomocą równania

$$f(x,y)=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gdzie symbolem f oznaczono zespół takich działań analitycznych nad x i y, których ostatecznym wynikiem jest zero.

Jasną jest rzeczą, że każdej wartości na x odpowiadać będzie jedna lub kilka wartości na y.

Wówczas mówimy o funkcji y, że jest określona równaniem (1) i nazywamy funkcją uwikłaną zmiennej x.

Gdybyśmy chcieli funkcję uwikłaną przedstawić w postaci wyraźnej

$$y=\varphi(x),$$

musielibyśmy rozwiązać równanie, określające funkcję y. Ponieważ jednak rozwiązania równania można dokonać tylko w bardzo ograniczonej liczbie przypadków, przeto jesteśmy zmuszeni do rozważania funkcyj i w postaci uwikłanej.

Funkcję $y=f(x)$ nazywamy parzystą, jeżeli jej wartość nie zmienia się przy zmianie znaku x.

A więc dla funkcji parzystą bez względu na wartość x zachodzi wzór

$$f(x)=f(-x)$$

Naprzykład

$$y=1+x^2; \quad y=\cos x$$

Funkcja $y=f(x)$, która bez względu na wartość x, spełnia warunek

$$f(x)=-f(-x)$$

nazywa się nieparzystą.

Np.

$$y = x^3 - x; \quad y = \sin x; \quad y = tg\, x.$$

Jasną jest rzeczą, że istnieje nieskończenie wiele funkcyj, które nie dają się zaliczyć ani do kategorji funkcyj parzystych, ani do kategorji funkcyj nieparzystych.

Np.

$$y = x^3 - 1; \quad y = 1 - \sin x; \quad y = \lg x \text{ i t. d.}$$

§ **2. O wielomianach algebraicznych.** Wielomianem algebraicznym n-go stopnia nazywamy funkcję postaci

$$f_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

gdzie spółczynniki a_0, a_1, a_2 $\cdots$ a_n są to liczby stałe

Rozważmy najpierw najprostszy wielomian algebraiczny, czyli też funkcję potęgową

$$y = x^n,$$

gdzie n jest to liczba całkowita.

Jasnem jest, że dla wartości dodatnich na x funkcja y przybiera wartości dodatnie, dla wartości zaś ujemnych na x funkcja dana przybiera wartości dodatnie przy n parzystem, a ujemne przy n nieparzystem. Nadto dla $x = 0$; $y = 0$. Łatwo spostrzec, że funkcja $y = x^m$ jest ciągła dla wszystkich wartości na x. W samej rzeczy, niechaj x przybiera wartości na x, należące do przedziału (a, b), którego granice spełniają nierówności

$$0 \leq a \leq x \leq b$$

Wówczas dla każdej pary wartości $x = x_1$ i $x = x_2$, należących do przedziału (a, b), będzie zachodziła nierówność

$$| x^n{}_2 - x^n{}_1 | < n b^{n-1} | x_2 - x_1 |$$

Niechaj ε oznacza dowolną liczbę dodatnią.

Oznaczmy przez

$$\delta = \frac{\varepsilon}{n b^{n-1}}$$

Wówczas dla każdej pary wartości na x, należących do przedziału (a, b), będzie zachodziła nierówność

$$| x^n{}_2 - x^n{}_1 | < \varepsilon,$$

skoro

$$| x_2 - x_1 | < \delta$$

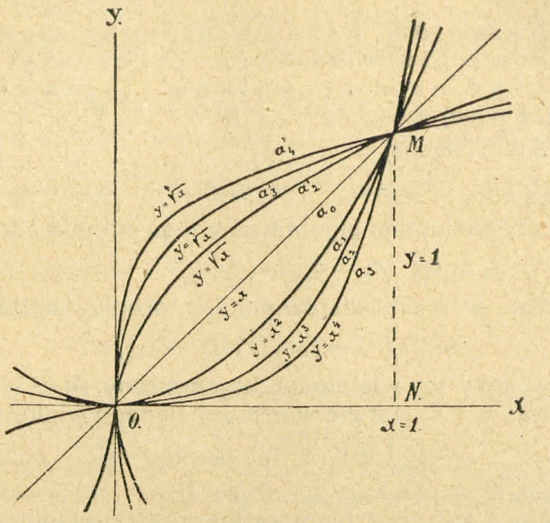
A zatem, w myśl zasadniczego twierdzenia o ciągłości funkcyj, wnosimy, że funkcja $y = x^n$ jest ciągła dla wszystkich wartościj na x.

Na rysunku 36 przedstawione są wykresy funkcyj

$$y = x^2; \quad y = x^3 \text{ i } y = x^4$$

Są to krzywe, przechodzące przez punkt (0, 0) i punkt (1, 1). Na tym samym rysunku podane są wykresy funkcyj odwrotnych względem funkcyj $y = x^2$; $y = x^3$; $y = x^4$, a mianowicie funkcyj

$$y = \sqrt{x}; \quad y = \sqrt[3]{x^3}; \quad y = \sqrt[4]{x^4}$$



Rys. 36.

Przejdziemy teraz do rozważania własności podstawowych wielomianu algebraicznego n-go stopnia

$$f_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

Przedewszystkiem zauważyć należy, że wielomian ten jest funkcją ciągłą dla wszystkich wartości na x, jako suma funkcyj ciągłych w liczbie skończonej.

Liczba c nazywa się pierwiastkiem wielomiana $f_n(x)$, jeżeli dla tej liczby

$$f_n(c) = 0$$

Udowodnijmy kilka twierdzeń podstawowych o wielomianach algebraicznych.

Twierdzenie I. Jeżeli $x = c$ jest pierwiastkiem wielomianu algebraicznego n-go stopnia $y = f_n(x)$, wówczas $f_n(x)$ dzieli się przez dwumian $x - c$.

Dowód. Podzielmy wielomian $f_n(x)$ przez dwumian $x - c$. Jasną jest rzeczą, że ilorazem będzie wielomian algebraiczny $(n-1)$-go stopnia $f_{n-1}(x)$, a resztą pewna liczba stała r. Możemy więc napisać tożsamościowo

$$f_n(x) = (x - c)\, f_{n-1}(x) + r$$

Zakładając w tej tożsamości $x = c$, otrzymamy

$$f_n(c) = r$$

Pamiętając jednak, że $x=c$ jest pierwiastkiem danego wielomianu $f_n(x)$, możemy napisać

$$f_n(c)=r=0$$

Stąd wnosimy, że wielomian $f_n(x)$ dzieli się przez dwumian linjowy $x-c$.

Twierdzenie II. Każdy wielomian algebraiczny n-go stopnia o pierwiastkach rzeczywistych daje się rozłożyć na n czynników linjowych względem zmiennej x.

Dowód. Niechaj

$$y=f_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

oznacza pewny wielomian algebraiczny n-go stopnia o pierwiastkach

$$x_1=c_1;\quad x_2=c_2;\quad x_3=c_3\ \cdots\ x_n=c_n$$

Wówczas, w myśl twierdzenia I, możemy napisać

$$f_n(x)=f_{n-1}(x)\cdot(x-c_1),$$

gdzie $f_{n-1}(x)$ jest to wielomian algebraiczny $(n-1)$-go stopnia.
Ponieważ $x=c_2$ jest pierwiastkiem danego wielomianu, przeto

$$f_n(c_2)=(c_2-c_1)\cdot f_{n-1}(c_2)=0$$

Skoro $c_2\neq c_1$, funkcja $f_{n-1}(c_2)=0$
A zatem $x=c_2$ jest pierwiastkiem wielomianu $f_{n-1}(x)$.
Biorąc to pod uwagę, możemy napisać, w myśl twierdzenia I,

$$f_{n-1}(x)=(x-c_2)f_{n-2}(x),$$

gdzie $f_{n-2}(x)$ jest to pewny wielomian algebraiczny $(n-2)$-go stopnia
A więc

$$f_n(x)=(x-c_1)(x-c_2)f_{n-2}(x)$$

Ponieważ $x=c_3$ jest pierwiastkiem danego wielomiana, przeto

$$f_n(c_3)=(c_3-c_1)(c_3-c_2)f_{n-2}(c_3)=0$$

Przypuszczając, że $c_1\neq c_2\neq c_3$, możemy napisać

$$f_{n-2}(c_3)=0$$

A zatem $x=c_3$ jest pierwiastkiem wielomiana $f_{n-2}(x)$.
Postępując w ten sposób dalej, otrzymamy

$$f_n(x)=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ \cdots\ (x-c_{n-1})f_1(x),$$

gdzie $f_1(x)$ oznacza wielomian algebraiczny pierwszego stopnia, a mianowicie

$$f_1(x)=a_0x+b$$

Ponieważ $x=c_n$ jest pierwiastkiem danego wielomianu, przeto

$$f_n(c_n)=(c_n-c_1)(c_n-c_2)\ldots(c_n-c_{n-1})f_1(c_n)=0.$$

Stąd wnosimy, że

$$f_1(c_n)=0.$$

Przeto

$$f_1(x)=(x-c_n)\cdot a_0.$$

A zatem

$$f_n(x)=a_0(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_{n-1})(x-c_n)$$

A więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Z udowodnionego twierdzenia wypływa bezpośrednio wniosek następujący:

Wniosek. Wielomian algebraiczny n-go stopnia, który staje się zerem dla $n+1$ różnych wartości na x, równa się zeru tożsamościowo.

W samej rzeczy, przypuśćmy, że dany wielomian algebraiczny

$$f_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \quad . \quad (1)$$

posiada n pierwiastków

$$x=c_1;\quad x=c_2;\quad x=c_3\ldots x=c_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wtedy, w myśl udowodnionego twierdzenia, możemy napisać

$$f_n(x)=a_0(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n)$$

Przypuśćmy teraz, że wielomian $f_n(x)$ staje się zerem jeszcze dla $x=c$, gdzie c nie równa się żadnemu z pierwiastków (2).

Będziemy mogli wtedy napisać

$$f_n(c)=a_0(c-c_1)(c-c_2)\ldots(c-c_n)=0.$$

Stąd wypływa bezpośrednio, że $a_0=0$.
A zatem dany wielomian będzie wielomianem $(n-1)$-go stopnia.
W taki sam sposób możemy przekonać się, że

$$a_1=0;\quad a_2=0\ldots a_n=0,$$

czyli innemi słowy, że dany wielomisn staje się zerem tożsamościowo.

Przypuśćmy, że dany wielomian algebraiczny $y=f_n(x)$ ma p pierwiastków równych c_1; q pierwiastków równych c_2; r pierwiastków równych c_3 i t. d. t pierwiastków równych c_m.

Wtedy mówimy o funkcji y, że posiada p-krotny pierwiastek c_1; q-krotny pierwiastek c_2; r-krotny pierwiastek $r\ldots$ t-krotny pierwiastek c_m.

Dany wielomian algebraiczny można przedstawić wówczas w postaci iloczynu

$$f_n(x)=(x-c_1)^p(x-c_2)^q(x-c_3)^r\ldots(x-c_m)^t\,\psi_k(x),$$

gdzie $\psi_k(x)$ jest to wielomian algebraiczny stopnia

$$k=n-(p+q+r+\cdots+t),$$

nie posiadający pierwiastków wielokrotnych.

Twierdzenie. Jeżeli wielomian algebraiczny $y=f_n(x)$ o spółczynnikach rzeczywistych ma pier-

wiastek zespolony $x=\alpha+\beta i$, wówczas liczba $x_1=\alpha-\beta i$, wzajemnie sprzężona z x, będzie również pierwiastkiem danego wielomianu.

Dowód. Jeżeli dany wielomian algebraiczny posiada pierwiastek $x=\alpha+\beta i$, to $f_n(x)$ dzieli się przez $x-\alpha-\beta i$.

Udowodnijmy, że owa funkcja będzie się dzieliła przez $x-\alpha+\beta i$, czyli innemi słowy przez iloczyn

$$(x-\alpha-\beta i)\cdot(x-\alpha+\beta i)=(x-\alpha)^2+\beta^2$$

Możemy napisać tożsamość

$$f_n(x)=[(x-\alpha)^2]\,\varphi_{n-2}(x)+\psi_1(x)=[(x-\alpha)^2]\cdot\varphi_{n-2}(x)+mx+p, \quad (3)$$

gdzie $\varphi_{n-2}(x)$ jest to wielomian algebraiczny $(n-2)$-go stopnia.

Zakładając w tożsamości (3) $x=\alpha+\beta i$, otrzymamy

$$m\alpha+n+m\beta i=0.$$

Stąd

$$\beta m=0; \quad m\alpha+n=0.$$

Ponieważ $\beta\gtrless 0$, przeto $m=0$; a zatem $n=0$.

Stąd wnosimy, że wielomian $f_n(x)$ dzieli się przez trójmian kwadratowy $(x-\alpha)^2+\beta^2$. A zatem $x=\alpha-\beta_i$ jest pierwiastkiem wielomianu $f_n(x)$.

Widzimy więc, że liczba pierwiastków zespolonych wielomianu algebraicznego o spółczynnikach rzeczywistych jest zawsze parzystą.

Przypuśćmy, że wielomian algebraiczny $y=f_n(x)$ posiada p pierwiastków równych $x=\alpha_1+\beta_1 i$; q pierwiastków $x=\alpha_2+\beta_2 i$; r pierwiastków $x=\alpha_3+\beta_3 i$; t pierwiastków $x=\alpha_k+\beta_k i$.

Wtedy ten wielomian będzie miał również p pierwiastków $x=\alpha_1-\beta_1 i$, q pierwiastków $x=\alpha_2-\beta_2 i$; r pierwiastków $x_3=\alpha_3-\beta_3 i$ .... t pierwiastków $x=\alpha_k+\beta_k i$.

Przeto wielomian $f_n(x)$ będzie się dzielił przez iloczyn

$$[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^p\cdot[(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2]^q\cdot[(x-\alpha_3)^2+\beta_3^2]^r\ldots[(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2]^t$$

A więc

$$f_n(x)=[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^p\cdot[(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2]^q\ldots[(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2]^t\cdot\psi_m(x),$$

gdzie $\psi_m(x)$ jest to wielomian algebraiczny stopnia

$$m=n-2(p+q+r+\cdots+t),$$

mający wyłącznie pierwiastki rzeczywiste.

Łatwo dowieść, że, mając dane $n+1$ wartości szczególnych na wielomian algebraiczny n-go stopnia, można wyznaczyć spółczynniki tego wielomianu.

W samej rzeczy, niechaj

$$y=f_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \quad . \quad . \quad (4)$$

oznacza pewien wielomian n-go stopnia, którego spółczynniki $a_0, a_1 \ldots a_n$ są nieznane. Natomiast dane są $n+1$ wartości

$$y_0, y_1, y_2 \ldots y_n,$$

które przybiera wielomian dla $n+1$ szczególnych wartości na x.

Możemy więc napisać

$$f_n(x_0)=y_0; \quad f_n(x_1)=y_1 \ldots f_n(x_n)=y_n,$$

czyli szczegółowo

$$\begin{aligned}
&a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+a_2x_0^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x_0+a_n=y_0\\
&a_0x_1^n+a_1x_1^{n-1}+a_2x_1^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x_1+a_n=y_1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_0x_n^n+a_1x_n^{n-1}+a_2x_n^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x_n+a_n=y_n
\end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ $n+1$ równań linjowych względem spółczynników $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ i podstawiając znalezione wyrażenia na te spółczynniki do wzoru (3), znajdziemy szukany wielomian.

Aby układ równań (4) był rozwiązalny względem spółczynników $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$, koniecznem jest, żeby wyznacznik

$$\Delta=\begin{vmatrix}
1\,x_0, & x_0^2, & x_0^3 \ldots & x_0^n\\
1\,x_1, & x_1^2, & x_1^3 \ldots & x_1^n\\
1\,x_2, & x_2^2, & x_2^3 \ldots & x_2^n\\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\
1\,x_n, & x_n^2, & x_n^3 \ldots & x_n^n
\end{vmatrix}=\prod_{ij}(x_i-x_j)$$

gdzie $i, j=1, 2, 3 \ldots n$, był różny od zera.

Wówczas będziemy mieli

$$a_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad (i=1, 2, 3 \ldots n)$$

gdzie

$$\Delta_i=\begin{vmatrix}
1\,x_0\,x_0^2 \ldots & x_0^{i-1} & y_0\,x_0^{i+1} \ldots & x_0^n\\
1\,x_1\,x_1^2 \ldots & x_1^{i-1} & y_1\,x_1^{i+1} \ldots & x_1^n\\
1\,x_2\,x_2^2 \ldots & x_2^{i-1} & y_2\,x_2^{i+1} \ldots & x_2^n\\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\
1\,x_n\,x_n^2 \ldots & x_n^{i-1} & y_n\,x_n^{i+1} \ldots & x_n^n
\end{vmatrix}$$

Widzimy więc, że

$$a_i=\varphi_i(x_0, x_1, x_2 \ldots x_n, y_0, y_1 \ldots y_n), \qquad (i=1, 2, 3 \ldots n)$$

gdzie φ_i są to funkcje linjowe względem $y_0, y_1 \ldots y_n$.

Podstawiając znalezione wyrażenia na spółczynniki a_i w dany wielomian, otrzymamy

$$F(x) = \psi_0(x)y_0 + \psi_1(x)y_1 + \psi_2(x)y_2 + \cdots + \psi_n(x)y_n, \qquad (5)$$

gdzie funkcje $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ ... $\psi_n(x)$ są to wielomiany algebraiczne stopnia $m \leqslant n$.

Ponieważ, według umowy

$$F(x_0) = y_0; \quad F(x_1) = y_1 \ldots F(x_n) = y_n,$$

przeto

$$\begin{aligned}
&\psi_0(x_0) = 1; \quad \psi_1(x_0) = 0; \quad \psi_2(x_0) = 0 \ldots \psi_n(x_0) = 0\\
&\psi_0(x_1) = 0; \quad \psi_1(x_1) = 1; \quad \psi_2(x_1) = 0 \ldots \psi_n(x_1) = 0\\
&\psi_0(x_2) = 0; \quad \psi_1(x_2) = 0; \quad \psi_2(x_2) = 1 \ldots \psi_n(x_2) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\psi_0(x_n) = 0; \quad \psi_1(x_n) = 0; \quad \psi_2(x_n) = 0 \ldots \psi_n(x_n) = 1
\end{aligned}$$

t. j.

$$\begin{aligned}
&\psi_i(x_k) = 0 \qquad \text{gdzie } i \gtrless k\\
&\psi_i(x_i) = 1 \qquad i = 1, 2, 3 \ldots n
\end{aligned}$$

A więc wielomian $\psi_i(x)$ ma pierwiastki x_0, x_1, x_2, $\cdots$ x_{i-1}, x_{i+1} $\cdots$ x_n. W myśl zaś twierdzenia II, możemy napisać ten wielomian w postaci iloczynu n czynników linjowych

$$\psi_i(x) = Q_i(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n),$$

gdzie Q_i są to spółczynniki stale ($i = 1, 2, 3 \cdots n$).

Ponieważ

$$\psi_i(x_i) = 1, \quad \text{przeto}$$

$$Q_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

A zatem

$$\psi_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

Podstawiając znalezione wartości na funkcje $\psi_i(x)$ do wzoru (5), otrymujemy szukany wielomian w postaci następjącej:

$$F_1(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

Wzór ten znany jest pod nazwą interpolacyjnego wzoru Lagrange'a.

Przykład. Mając dane cztery wartości szczególne na wielomian algebraiczny trzeciego stopnia

$$y_0 = -1; \quad y_1 = 4; \quad y_2 = -2; \quad y_3 = -3,$$

odpowiadające wartościom

$$x_0 = 1; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -2,$$

znaleźć wielomian.

Na mocy wzoru Lagrange'a możemy napisać

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 +\\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3 =\\
&= \frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{6} + \frac{4(x-1)(x+2)(x-2)}{6} -\\
&- \frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{6} + \frac{(x-1)(x+1)(x-2)}{4} =\\
&= \frac{11}{12}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{41}{12}x + \frac{17}{6}
\end{aligned}$$

§ 3. O funkcjach algebraicznych ułamkowych.

Funkcja algebraiczna ułamkowa w postaci ogólnej będzie

$$F(x) = \frac{f_m(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}x + b_n}$$

gdzie spółczynniki a_0, a_1 $\cdots$ a_m, b_0, b_1 $\cdots$ b_n są to liczby stałe. Funkcja ułamkowa jest funkcją ciągłą dla wszystkich wartości na x, z wyjątkiem tych, które są pierwiastkami wielomianu $\varphi_n(x)$ Dla tych wartości na x funkcja $F(x)$ doznaje przerwy drugiego rodzaju.

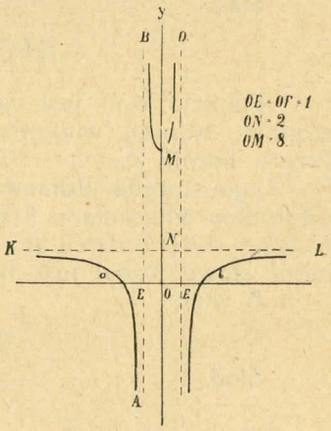
Jako przykład rozważmy funkcję ułamkową

$$y = \frac{2(x^2-4)}{x^2-1}$$

Dla $x = 0$; $y = 8$; dla $x = 1-\varepsilon$; $y = +\infty$; dla $x = 1+\varepsilon$; $y = -\infty$.

Pierwiastki funkcji y będą $x = 2$ i $x = -2$; dla $x = \pm\infty$; $y = 2$.

Przy wartości $x = \pm 1$ funkcja y doznaje przerwy drugiego rodzaju. Wykres danej funkcji przedstawiony jest na rys. 37.



Rys. 37.

Przejdziemy teraz do rozkładania funkcji ułamkowej na ułamki najprostsze.

Niechaj będzie dana algebraiczna funkcja ułamkowa

$$F(x) = \frac{f_m(x)}{\varphi_n(x)},$$

gdzie $f_m(x)$ i $\varphi_n(x)$ są to wielomiany algebraiczne odpowiednio stopnia m i n. Przypuśćmy nadto, że $m < n$ (gdyby liczba m

była większą lub równą n, wówczas moglibyśmy za pomocą dzielenia przedstawić daną funkcję, jako sumę wielomianu algebraicznego i pewnej funkcji ułamkowej, której licznik jest wielomianem algebraicznym stopnia niższego niż stopień mianownika).

Rozważmy kilka przypadków poszczególnych.

I. Mianownik $\varphi_n(x)$ ma n pierwiastków rzeczywistych nie równych sobie. Oznaczmy pierwiastki wielomianu $\varphi_n(x)$ przez $a, b, c \ldots k, l$.

Wówczas możemy napisać

$$\varphi_n(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l)$$

Udowodnijmy, że funkcję $F(x)$ można napisać w postaci następującej:

$$F(x) = \frac{f_m(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{\psi(x)}{\theta(x)}, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

gdzie $\psi(x)$ i $\theta(x)$ są to wielomiany algebraiczne, przyczem stopień wielomianu $\psi(x)$ jest mniejszy, niż stopień wielomianu $\theta(x)$; A_1 jest spółczynnik stały.

Możemy napisać

$$\frac{f_m(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{A_1\theta(x) + (x-a)\psi(x)}{\varphi_n(x)},$$

czyli

$$f_m(x) = A_1\theta(x) + (x-a)\psi(x)$$

Stąd

$$\psi(x) = \frac{f_m(x) - A_1\theta(x)}{x-a}$$

Funkcja $\theta(x)$ jest wielomianem algebraicznym $(n-1)$-go stopnia; stopień wielomianu $f_m(x)$ jest nie większy od $(n-1)$. Przeto licznik $f_m(x) - A_1\theta(x)$ jest wielomianem algebraicznym $(n-1)$-go stopnia. Ponieważ stopień wielomianu $\psi(x)$ jest mniejszy od stopnia wielomianu $\theta(x)$, t. j. mniejszy od $n-1$, przeto funkcja $f_m(x) - A_1\theta(x)$ dzieli się przez dwumian linjowy $x-a$, czyli innemi słowy $x=a$ jest pierwiastkiem równania $f_m(x) - A_1\theta(x) = 0$.

A więc

$$f_m(a) - A_1\theta(a) = 0$$

Stąd

$$A_1 = \frac{f_m(a)}{\theta(a)}$$

Jasną jest rzeczą, że $x=a$ nie jest pierwiastkiem wielomianu $f_m(x)$, (gdyby tak było, wówczas ułamek $\frac{f_m(x)}{\varphi_n(x)}$ można było by skrócić o dwumian linjowy $x-a$); nadto $\theta(a)$ nie jest zerem, albowiem $x=a$ nie jest pierwiastkiem wielomianu $\theta(x)$.

A zatem A jest liczbą skończoną, określoną w zupełności.

Stąd wnosimy, że wzór (6) rzeczywiście zachodzi.

Możemy dalej napisać

$$\theta(x) = (x-b)(x-c)\ldots(x-l)$$

W sposób analogiczny do poprzedniego możemy się przekonać, że zachodzi tożsamość

$$\frac{f_m(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{x-b} + \frac{\psi_1(x)}{\theta_1(x)},$$

gdzie $\theta_1(x) = (x-c)(x-d)\cdots(x-l)$ jest to wielomian algebraiczny $(n-2)$-go stopnia.

Postępując w taki sam sposób, otrzymamy tożsamość,

$$\frac{f_m(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{x-b} + \frac{A_3}{x-c} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{x-k} + \frac{A_n}{x-l}, \quad \ldots \quad (7)$$

gdzie $A_1, A_2, A_3 \cdots A_{n-1}, A_n$ są to liczby stałe.

Jest to właśnie wzór na rozkładanie ułamku danego na ułamki najprostsze.

Przykład. Rozłożyć funkcję ułamkową

$$y = \frac{-3x+2}{x^2-3x+2}$$ na ułamki najprostsze

Ponieważ pierwiastki równania

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

będą $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$, przeto w myśl ogólnego wzoru możemy napisać tożsamość

$$\frac{-3x+2}{x^2-3x+2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2},$$

czyli

$$-3x+2 = A_1(x-2) + A_2(x-1)$$

Zakładając w tej tożsamości $x=1$, otrzymamy

$$-A_1 = -1 \qquad \text{czyli } A_1 = 1.$$

Zakładając zaś $x=2$, dostaniemy

$$A_2 = -4$$

A zatem

$$\frac{-3x+2}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2}$$

2. Rozłożyć na ułamki najprostsze funkcje

$$y = \frac{2x+7}{x^3+2x^2-3x}$$

Pierwiastki wielomianu x^3+2x^2-3x będą

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -3$$

W myśl ogólnego wzoru (7), możemy napisać tożsamość

$$\frac{2x+7}{x^3+2x^2-3x}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x+3},$$

czyli

$$2x+7=A_1(x-1)(x+3)+A_2(x+3)x+A_3x(x-1)$$

Zakładając w tej tożsamości $x=0$, otrzymamy

$$7=-3A_1;\quad \text{stąd}\quad A_1=-\frac{7}{3}$$

Przeto

$$2x+7=-\frac{7}{3}(x^2+2x-3)+A_2(x+3)x+A_3x(x-1),$$

czyli

$$\frac{7}{3}x^2+\frac{20}{3}x=A_2(x+3)x+A_3x(x-1),$$

czyli

$$\frac{7}{3}x+\frac{20}{3}=A_2(x+3)+A_3(x-1)$$

Zakładając w ostatniej tożsamości kolejno $x=1$; $x=-3$, otrzymamy

$$4A_2=9;\quad \text{czyli}\quad A_2=\frac{9}{4}$$

$$-4A_3=-\frac{1}{3};\quad \text{czyli}\quad A_3=\frac{1}{12}$$

A więc

$$\frac{2x+7}{x^3+2x^2-3x}=-\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{x}+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{x+3}$$

II. Wielomian algebraiczny $\varphi_n(x)$ ma pierwiastki rzeczywiste wielokrotne. Przypuśćmy, że wielomian $\varphi_n(x)$ ma p pierwiastków równych a; q pierwiastków równych b; r pierwiastków równych c i t pierwiastków równych l.

Wówczas możemy przedstawić wielomian $\varphi_n(x)$ w postaci następującej

$$\varphi_n(x)=(x-a)^p(x-b)^q(x-c)^r\dots(x-l)^t$$

Udowodnijmy, że funkcję $\frac{f^m(x)}{\varphi_n(x)}$ można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned}\frac{f_m(x)}{\varphi_n(x)}=&\frac{A_p}{(x-a)^p}+\frac{A_{p-1}}{(x-a)^{p-1}}+\frac{A_{p-2}}{(x-a)^{p-2}}+\dots+\frac{A_1}{x-x}+\\&+\frac{B_q}{(x-b)^q}+\frac{B_{q-1}}{(x-b)^{q-1}}+\frac{B_{q-2}}{(x-q)^{q-2}}+\dots+\frac{B_1}{x-b}+\\&+\frac{C_r}{(x-c)^r}+\frac{C_{r-1}}{(x-c)^{r-1}}+\frac{C_1}{(x-c)^{r-2}}+\dots+\frac{C_1}{x-c}+\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&\frac{L_t}{(x-l)^t}+\frac{L_{t-1}}{(x-l)^{t-1}}+\frac{L_{t-2}}{(x-l)^{t-2}}+\dots+\frac{L_1}{x-l}\end{aligned}\qquad(8)$$

Oznaczmy

$$\varphi_n(x)=(x-a)^p\psi(x),\quad \text{gdzie}\quad \psi(x)=(x-b)^q(x-c)^r\dots(x-l)^t$$

i udowodnijmy, że zawsze można znaleźć taką liczbę stałą A_p, żeby zachodziła tożsamość

$$\frac{f_m(x)}{\varphi_n(x)}=\frac{A_p}{(x-a)^p}+\frac{\theta(x)}{(x-a)^{p-1}\psi(x)},\qquad(9)$$

gdzie $\theta(x)$ jest to wielomian algebraiczny stopnia $\alpha\leqslant n-2$.

Możemy napisać

$$\frac{f_m(x)}{\varphi_n(x)}=\frac{A_p\,.\,\psi(x)+(x-a)\theta(x)}{(x-a)^p\psi(x)},$$

czyli

$$f_m(x)=A_p\psi(x)+(x-a)\,.\,\theta(x)$$

Stąd

$$\theta(x)=\frac{f_m(x)-A_p\psi(x)}{x-a}$$

Ponieważ $\theta(x)$ jest wielomian algebraiczny, przeto funkcja $f_m(x)-A_p\,.\,\psi(x)$ powinna się dzielić przez dwumian $x-a$.

A zatem $x=a$ jest pierwiastkiem tej funkcji, to jest

$$f_m(a)-A_p\psi(a)=0.$$

Stąd

$$A_p=\frac{f_m(a)}{\psi(a)}$$

Ponieważ $f_m(x)$ i $\psi(a)$ nie są zerami, przeto A_p jest liczbą stałą, określoną w zupełności.

W taki sam sposób moglibyśmy dowieść, że

$$\begin{aligned}&\frac{\theta(x)}{(x-a)^{p-1}\psi(x)}=\frac{A_{p-1}}{(x-a)^{p-1}}+\frac{\theta_1(x)}{(x-a)^{p-2}\psi(x)}\\&\frac{\theta_1(x)}{(x-a)^{p-2}\psi(x)}=\frac{A_{p-2}}{(x-a)^{p-2}}+\frac{\theta_2(x)}{(x-a)^{p-3}\psi(x)}\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&\frac{\theta_{p-2}(x)}{(x-a)\psi(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{\omega(x)}{\psi(x)}\end{aligned}\qquad(10)$$

Dodając wzory (9) i (10) stronami, otrzymamy wzór następujący:

$$\frac{f_m(x)}{\varphi_n(x)}=\frac{A_p}{(x-a)^p}+\frac{A_{p-1}}{(x-a)^{p-1}}+\frac{A_{p-2}}{(x-a)^{p-2}}+\dots+\frac{A_1}{x-a}+\frac{\omega(x)}{\psi(x)}\qquad(11a)$$

Postępując w taki sposób z funkcją $\frac{\omega(x)}{\psi(x)}$, otrzymamy

$$\frac{\omega(x)}{\psi(x)}=\frac{B_q}{(x-b)^q}+\frac{B_{q-1}}{(x-b)^{q-1}}+\frac{B_{q-2}}{(x-b)^{q-2}}+\dots+\frac{B_1}{x-b}+\frac{\omega_1(x)}{\psi_1(x)},\qquad(11b)$$

gdzie funkcja

$$\psi_1(x) = (x-c)^r \ldots (x-t)^t$$

Dalej będziemy mieli

$$\frac{\omega_1(x)}{\psi_1(x)} = \frac{C_r}{(x-c)^r} + \frac{C_{r-1}}{(x-c)^{r-1}} + \frac{C_{r-2}}{(x-c)^{r-2}} + \cdots + \frac{C_1}{x-c} + \frac{\omega_2(x)}{\psi_2(x)}, \quad (11c)$$

gdzie $\psi_2(x)$ jest to wielomian algebraiczny, mający te same pierwiastki, co i wielomian $\varphi_n(x)$ z wyjątkiem pierwiastków a, b, c.

Nareszcie otrzymamy

$$\frac{\omega_{n-2}(x)}{\psi_{n-2}(x)} = \frac{L_t}{(x-l)^t} + \frac{L_{t-1}}{(x-l)^{t-1}} + \frac{L_{t-2}}{(x-l)^{t-2}} + \cdots + \frac{L_1}{x-l} \quad (11d)$$

Dodając wzory (11) do siebie stronami, otrzymamy wzór (8).

Przykłady 1. Rozłożyć na ułamki proste funkcję

$$y = \frac{3x^3 - 2x - 5}{x^5 + x^4 - x^3 - x^2}$$

Ponieważ

$$x^5 + x^4 - x^3 - x^2 = x^2(x+1)^2(x-1),$$

przeto wielomian $x^5 + x^4 - x^3 - x^2$ posiada dwukrotny pierwiastek $x_1 = x_2 = 0$, dwukrotny pierwiastek $x_3 = x_4 = -1$ i pierwiastek $x_5 = 1$.

W myśl ogólnego wzoru, możemy napisać tożsamość

$$\frac{3x^3 - 2x - 5}{x^5 + x^4 - x^3 - x^2} = \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_1}{x} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{C_1}{x-1},$$

czyli

$$3x^3 - 2x - 5 = A_2(x+1)^2(x-1) + A_1 x(x+1)^2(x-1) + B_2 x^2(x-1) + B_1 x^2(x+1)(x-1) + C_1 x^2(x+1)^2.$$

Zakładając w tej tożsamości $x = 0$, otrzymamy

$$-5 = -A_2, \quad \text{czyli} \quad A_2 = 5.$$

Przeto

$$3x^3 - 2x - 5 = 5(x^3 + x^2 - x - 1) + A_1 x(x+1)^2(x-1) + B_2 x^2(x-1) + B_1 x^2(x+1)(x-1) + C_1 x^2(x+1)^2,$$

czyli

$$-2x^3 - 5x^2 + 3x = A_1 x(x+1)^2(x-1) + B_2 x^2(x-1) + B_1 x^2(x+1)(x-1) + C_1 x^2(x+1)^2,$$

czyli też

$$-2x^2 - 5x + 3 = A_1(x+1)^2(x-1) + B_2 x(x-1) + B_1 x(x+1)(x-1) + C_1 x(x+1)^2$$

Zakładając w ostatniej tożsamości jeszcze raz $x = 0$, dostaniemy

$$-A_1 = 3; \quad \text{czyli} \quad A_1 = -3.$$

Przeto

$$-2x^2 - 5x + 3 = -3(x^3 + x^2 - x - 1) + B_2 x(x-1) + B_1 x(x+1)(x-1) + C_1 x(x+1)^2,$$

czyli

$$3x^3 + x^2 - 8x = B_2 x(x-1) + B_1 x(x+1)(x-1) + C_1 x(x+1)^2,$$

czyli też

$$3x^2 + x - 8 = B_2(x-1) + B_1(x+1)(x-1) + C_1(x+1)^2.$$

Załóżmy w ostatniej tożsamości $x = 1$. Otrzymamy wtedy

$$-4 = 4C_1; \quad \text{stąd} \quad C_1 = -1.$$

Przeto

$$3x^2 + x - 8 = B_2(x-1) + B_1(x+1)(x-1) - (x^2 + 2x + 1),$$

czyli

$$4x^2 + 3x - 7 = B_2(x-1) + B_1(x+1)(x-1).$$

Zakładając w ostatniej tożsamości $x = -1$, otrzymamy

$$-6 = -2B_2; \quad \text{stąd} \quad B_2 = 3.$$

Przeto

$$4x^2 + 3x - 7 = 3(x-1) + B_1(x+1)(x-1).$$

Dzieląc obie części tej tożsamości przez dwumian $x-1$, dostaniemy

$$4x + 7 = 3 + B_1(x+1),$$

czyli

$$4(x+1) = B_1(x+1)$$

Stąd

$$B_1 = 4$$

A więc będziemy mieli

$$\frac{3x^3 - 2x - 5}{x^5 + x^4 - x^3 - x^2} = \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{4}{x+1} - \frac{1}{x-1}$$

Ćwiczenia Rozłożyć na ułamki proste wielomiany algebraiczne

1. $y = \dfrac{3x+2}{x^2 - 5x + 6}$
2. $y = \dfrac{2x^2+1}{(x+6)(x-2)(x-1)}$
3. $y = \dfrac{3x^3 - x + 2}{(x+2)^2(x-1)(x+1)}$
4. $y = \dfrac{3x^3 - 1}{(x+1)^3(x-2)}$
5. $y = \dfrac{x^2 - 5}{x(x^2-1)(x-3)}$
6. $y = \dfrac{2x^4 - 1}{x^3(x-1)^2(x+3)}$
7. $y = \dfrac{2x^2 - x + 3}{x^2(x-4)^2(x+2)}$
8. $y = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 2}{x^3(x-2)^3(x+4)}$
9. $y = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^4(x-1)^2}$
10. $y = \dfrac{10x^3 - 7x^2 + x + 4}{(x-1)^3(x+1)^3(x-2)}$

III. Wielomian algebraiczny $\varphi_n(x)$ posiada pierwiastki zespolone. Dajmy na to, że wielomian $\varphi_n(x)$ ma prócz pierwiastków rzeczywistych jeszcze pierwiastki zespolone. Niechaj $a = \alpha + \beta i$ oznacza m-krotny pierwiastek tego wielomianu. Wtedy ten wielomian będzie miał m-krotny pierwiastek $x = \alpha - \beta i$. A zatem funkcja $\varphi_n(x)$ będzie się dzieliła przez

$$(x - \alpha - \beta i)^n (x - \alpha + \beta i)^n = (x^2 + px + q)^n$$

Przeto możemy napisać

$$\varphi_n(x) = (x^2+px+q)^n \psi(x),$$

gdzie $\psi(x)$ jest to wielomian algebraiczny, mający te same pierwiastki co i wielomian $\varphi_n(x)$, z wyjątkiem pierwiastków $x=\alpha+\beta i$; $x=\alpha-\beta i$.

Udowodnijmy, że zawsze można znaleźć takie liczby P i Q, żeby zachodziła tożsamość

$$\frac{f_m(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{\theta(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}\cdot\psi(x)},$$

gdzie $\theta(x)$ jest to wielomian algebraiczny stopnia niższego niż wielomian $(x^2+px+q)^{n-1}\cdot\psi(x)$.

Możemy napisać

$$\frac{f_m(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{(Px+Q)\psi(x)+(x^2+px+q)\theta(x)}{(x^2+px+q)^n\psi(x)},$$

czyli

$$f_m(x) = (Px+Q)\psi(x)+(x^2+px+q)\theta(x).$$

Stąd

$$\theta(x) = \frac{f_m(x)-(Px+Q)\psi(x)}{(x^2+px+q)^n}$$

Ponieważ $\theta(x)$ jest wielomianem algebraicznym, przeto funkcja $f_m(x)-(Px+Q)\psi(x)$ dzieli się przez trójmian x^2+px+q. Stąd wnosimy, że $x=\alpha+\beta i$ i $x=\alpha-\beta i$ powinny być pierwiastkami tej funkcji, czyli innemi słowy

$$f_m(\alpha+\beta i)-[P(\alpha+\beta i)+Q]\cdot\psi(\alpha+\beta i)=0$$
$$f_m(\alpha-\beta i)-[P(\alpha-\beta i)+Q]\cdot\psi(\alpha-\beta i)=0$$

Stąd

$$P(\alpha+\beta i)+Q = \frac{f_m(\alpha+\beta i)}{\psi(\alpha+\beta i)} = M+Ni$$

$$P(\alpha-\beta i)+Q = \frac{f_m(\alpha-\beta i)}{\psi(\alpha-\beta i)} = M-Ni$$

A zatem

$$M = P\alpha+Q; \quad N = P\beta,$$

skąd

$$P = \frac{N}{\beta}; \quad Q = \frac{M\beta-N\alpha}{\beta}$$

Ponieważ $\beta \neq 0$, przeto liczby P i Q będą skończone.
A zatem zachodzi wzór

$$\frac{f_m(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{\theta(x)}{(x^2+qx+q)^{n-1}\psi(x)},$$

o którego dowód chodziło.

W ten sam sposób możemy otrzymać wzór następujący:

$$\frac{f_m(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \cdots + \frac{P_{n-1}x+Q_{n-1}}{x^2+px+q} + \frac{\omega(x)}{\psi(x)}$$

Przykład. Rozłożyć na ułamki proste funkcję

$$y = \frac{x^5-2x^3+3x+1}{(x^2+1)^3}$$

Wielomian $(x^2+1)^3$ ma potrójny pierwiastek zespolony $x=i$ i potrójny pierwiastek $x=-i$.

W myśl ogólnego wzoru na rozłożenie funkcji ułamkowej, możemy napisać

$$\frac{x^5-2x^3+3x+1}{(x^2+1)^3} = \frac{Px+Q}{(x^2+1)^3} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+1)^2} + \frac{P_2x+Q_2}{x^2+1},$$

czyli

$$x^5-2x^3+3x+1 = (Px+Q)+(P_1x+Q_1)(x^2+1)+$$
$$+(P_2x+Q_2)(x^2+1)^2$$

Zakładamy w tej tożsamości $x_1=i$, $x_2=-i$, czyli też $x^2+1=0$.

Wtedy otrzymamy

$$x_1^5-2x_1^3+3x_1+1 = Px_1+Q$$
$$x_2^5-2x_2^3+3x_2+1 = Px_2+Q$$

Ponieważ $x_1^2=-1$; $x_2^2=1$, przeto dwa ostatnie równania można napisać w sposób następujący:

$$6x_1+1 = Px_1+Q$$
$$6x_2+1 = Px_2+Q$$

Stąd

$$P=6; \quad Q=1$$

Przeto

$$x^5-2x^3+3x+1 = 6x+1+(P_1x+Q_1)(x^2+1)+(P_2x+Q_2)(x^2+1)^2,$$

czyli

$$x^5-2x^3-3x = (P_1x+Q_1)(x^2+1)+(P_2x+Q_2)(x^2+1)^2$$

Dzieląc obie części ostatniej tożsamości przez dwumian x^2+1, otrzymamy

$$x^3-3x = P_1x+Q_1+(P_2x+Q_2)(x^2+1)$$

Zakładamy w tej tożsamości $x_1=i$ $x_2=-i$.

Wtedy otrzymamy równania

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 &= P_1x_1+Q_1 \\ -4x_2 &= P_1x_2+Q_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{stąd} \quad P_1=-4; \quad Q_1=0$$

Przeto

$$x^3-3x = -4x+(P_2x+Q_2)(x^2+1),$$

czyli

$$x^3+x = (P_2x+Q_2)(x^2+1),$$

Dzieląc obie części ostatniej tożsamości przez dwumian x^2+1, otrzymamy

$$x = P_2x+Q_2$$

Stąd

$$P_2=1; \quad Q_2=0$$

A więc

$$\frac{x^5-2x^3+3x+1}{(x^2+1)^3}=\frac{6x+1}{(x^2+1)^3}-\frac{4x}{(x^2+1)^2}+\frac{x}{x^2+1}$$

2. Rozłożyć na ułamki proste funkcję

$$y=\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}$$

Ponieważ wielomian $(x-1)^3(x^2+1)$ ma pierwiastki: potrójny pierwiastek $x=1$; $x=i$; $x=-i$, przeto na mocy ogólnego wzoru możemy napisać

$$\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}=\frac{A_1}{(x-1)^3}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{Px+Q}{x^2+1},$$

czyli

$$3x^2+x-2=A_1(x^2+1)+A_2(x-1)(x^2+1)+A_3(x-1)^2(x^2+1)+$$
$$+(Px+Q)(x-1)^3$$

Zakładając w tej tożsamości $x=1$, otrzymamy

$$2=2\cdot A_1, \quad \text{czyli } A_1=1$$

Przeto

$$2x^2+x-3=A_2(x-1)(x^2+1)+A_3(x-1)^2(x^2+1)+$$
$$+(Px+Q)(x-1)^3$$

Dzieląc obie części tej tożsamości przez dwumian $x-1$, dostaniemy

$$2x+3=A_2(x^2+1)+A_3(x-1)(x^2+1)+(Px+Q)(x-1)^2$$

Zakładając w ostatniej tożsamości $x=1$, otrzymamy

$$5=2A_2, \quad \text{czyli } A_2=\frac{5}{2}$$

Przeto

$$-\frac{5}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}=A_3(x^2+1)(x-1)+(Px+Q)(x-1)^2$$

Zakładając w tej tożsamości $x=1$, otrzymamy

$$-3=2A_3, \quad \text{czyli } A_3=-\frac{3}{2}$$

Przeto

$$-x+1=(Px+Q)(x-1),$$

czyli

$$Px+Q=-1$$

A zatem

$$P=0; \quad Q=-1$$

Będziemy więc mieli

$$\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}=\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+1}$$

Ćwiczenia. Rozłożyć na ułamki proste wielomiany algebraiczne

1. $y=\dfrac{x^2-x+1}{(x^2+3)(x-1)}$
2. $y=\dfrac{x^3-1}{(x^2+x+1)\cdot(x+1)}$
3. $y=\dfrac{2x-4}{(x^3+1)(x-2)}$
4. $y=\dfrac{3x^2-5}{(x^2+4x-1)(x+2)^2}$
5. $y=\dfrac{x^5-1}{(x^4-1)^2(x+3)}$
6. $y=\dfrac{7x^3-2x^2+x-4}{(x^3+1)^2(x^3-1)}$
7. $y=\dfrac{x^3-x^2-x-1}{(x^4-1)^2(x^2+x-1)^2}$
8. $y=\dfrac{x^4+2}{(x^2+4)^2(x^2-4)^2}$

§ 4. O elementarnych funkcjach przestępnych.

I. Funkcje wykładnicze. Określiliśmy w swoim czasie liczbę a^u, jako granicę ciągu

$$a^{u_1}, a^{u_2}, a^{u_3} \cdots a^{u_n}, \quad \cdots \cdots \cdots \quad (13)$$

(gdzie $u_1, u_2, u_3, \cdots u_n \cdots$ są to liczby wymierne), pod warunkiem, że

$$u=\lim_{n\to\infty} u_n$$

Dajmy na to, że liczba u może przybierać różne wartości rzeczywiste, czyli innemi słowy uważajmy $u=x$ jako zmienną niezależną. Wtedy zbiór wszystkich ciągów (13) określi funkcję

$$y=a^x$$

Funkcję tę nazywamy wykładniczą.
W myśl wzoru

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta},$$

udowodnionego w Rozdziale III, możemy napisać

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$$

Jest to właśnie wzór „dodawania" funkcyj wykładniczych. Godnem jest uwagi, że wzór ten, który można napisać w postaci równania funkcyjnego

$$f(x_1)\cdot f(x_2)=f(x_1+x_2),$$

zachodzi tylko dla funkcyj wykładniczych. Funkcja wykładnicza $y=a^x$ przybiera wszystkie wartości od 0 do ∞, gdy zmienna niezależna x przybiera wartości zawarte w przedziale $(-\infty, +\infty)$
W myśl znanego wzoru

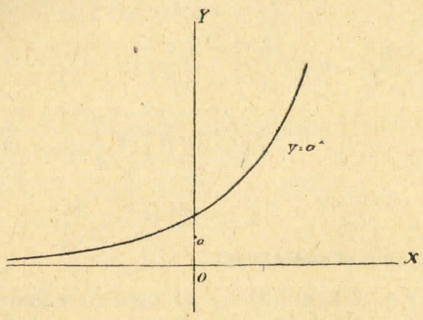
$$\lim_{n\to\infty} a^{u_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} u_n},$$

udowodnionego w Rozdziale III, możemy napisać

$$\lim_{x=c} a^x = a^{\lim x} = a^c$$

Stąd wypływa, że funkcja a^x jest ciągła dla wszystkich wartości na x.

Wykres tej funkcji przedstawiony jest na rys. 38.



Rys. 38.

Ze wszystkich funkcyj wykładniczych odgrywa szczególną rolę w Analizie Matematycznej funkcja

$$y = e^x,$$

gdzie e jest to zasada logarytmów naturalnych ($e = 2,718..$) Wzór „dodawania" tej funkcji będzie

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$$

Funkcję $y = e^x$ można określić jeszcze jako sumę szeregu nieskończonego

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{x^x}{1.2.3 \cdots n} + \ldots \quad (14)$$

W Rozdziale IV udowodniliśmy, że szereg ten jest zbieżny (str. 157—162) dla wszystkich wartości na x zarówno dodatnich, jak i ujemnych.

W myśl nowej definicji funkcji e^x, można napisać

$$e^{x_1} = 1 + \frac{x_1}{1} + \frac{x_1^2}{1.2} + \frac{x_1^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{x_1^n}{1.2.3 \cdots n} + \ldots (15)$$

$$e^{x_2} = 1 + \frac{x_2}{1} + \frac{x_2^2}{1.2} + \frac{x_2^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{x_2^n}{1.2.3 \cdots n} + \ldots (16)$$

Mnożąc te szeregi stronami, otrzymamy

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = 1 + \frac{x_1 + x_2}{1} + \frac{(x_1 + x_2)^2}{1.2} + \frac{(x_1 + x_2)^3}{1.2.3} + \cdots = e^{x_1+x_2}$$

Jest to właśnie nowy dowód wzoru „dodawania" funkcji e^x

II. Funkcje logarytmowe. Określiliśmy w swoim czasie liczbę $v_n = \mathrm{Log}_a u_n$ jako taką liczbę, która spełnia warunek

$$u^n = a^{v_n}$$

Przeto funkcje określone za pomocą ciągów

$$a^{u_1},\ a^{u_2},\ a^{u_3} \cdots a^{u_n} \cdots$$

$$\mathrm{Log}_a u_1;\ \mathrm{Log}_a u_2;\ \mathrm{Log}_a u_3 \cdots \mathrm{Log}_a u_n \quad . \ . \quad (17)$$

są to funkcje wzajemnie odwrotne.

Zbiór, wartości, określonych ciągami (17), wyznacza funkcję

$$y = \mathrm{Log}_a x$$

Funkcję tę nazywamy logarytmową.

W myśl wzoru

$$\mathrm{Log}_a \alpha + \mathrm{Log}_a \beta = \mathrm{Log}_a (\alpha \cdot \beta),$$

udowodnionego w Rozdziale III, możemy napisać wzór charakterystyczny dla funkcji logarytmowej

$$\mathrm{Log}_a x_1 + \mathrm{Log}_a x_2 = \mathrm{Log}_a (x_1 \cdot x_2),$$

czyli też w postaci równania funkcyjnego

$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2)$$

W myśl twierdzenia o ciągłości funkcyj wzajemnie odwrotnych, wnosimy, że funkcja logarytmowa jest ciągłą dla wszystkich wartości na x, dla których ta funkcja przybiera wartości rzeczywiste. Zresztą wynika to bezpośrednio ze wzoru

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{Log}_a u_n = \mathrm{Log}_a (\lim_{n \to \infty} u_n)$$

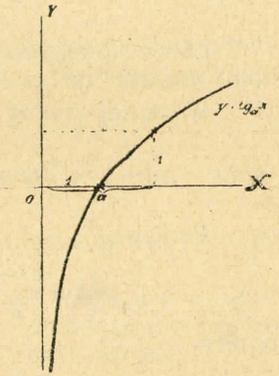
udowodnionego w Rozdziale III.

Przeto

$$\lim_{x=c} \mathrm{Log}_a x = \mathrm{Log}_a (\lim x) = \mathrm{Log}_a c$$

Funkcja logarytmowa $\mathrm{Log}_a x$ przybiera wszystkie wartości rzeczywiste od $-\infty$ do $+\infty$, odpowiadające wartościom na zmienną niezależną x, zawartym w przedziale $(0, +\infty)$.

Wykres funkcji logarytmowej przedstawiony jest na rys. 39.



Rys. 39.

Ze wszystkich funkcyj logarytmowych odgrywa szczególną rolę w Analizie Matematycznej funkcja

$$y = \lg x$$

gdzie symbolem lg oznaczono logarytm naturalny.

III. Funkcje trygonometryczne. Znamy sześć funkcyj trygonometrycznych, a mianowicie:

$$y = \sin x;\quad y = \cos x;\quad y = \mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y = \mathrm{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x};\quad y = \sec x = \frac{1}{\cos x};\quad y = \mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Funkcje $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{lec} x$ i $\mathrm{cosec} x$ są to funkcje okresowe o okresie 2π, a funkcje $\mathrm{tg}\, x$ i $\mathrm{cotg}\, x$ o okresie π.

Albowiem

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x;\quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x$$
$$\sec(x + 2k\pi) = \sec x;\quad \mathrm{cosec}\,(x + 2k\pi) = \mathrm{cosec}\, x$$
$$\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}\, x;\quad \mathrm{cotg}(x + \pi) = \mathrm{cotg}\, x$$

Obszar zmienności tych funkcyj będzie

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \qquad \infty > |\operatorname{cosec} x| \geqslant 1$$
$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \qquad \infty > |\sec x| \geqslant 1$$
$$-\infty \leqslant \operatorname{tg} x \leqslant +\infty; \quad -\infty \leqslant \operatorname{cotg} x \leqslant +\infty$$

Funkcje $y = \sin x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{cosec} x$; $y = \operatorname{cotg} x$ są nieparzyste, gdyż

$$\sin(-x) = -\sin x; \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x; \quad \operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x;$$
$$\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$$

Natomiast funkcje $y = \cos x$ i $y = \sec x$ są parzyste, gdyż $\cos(-x) = \cos x$; $\sec(-x) = \sec x$.

Dla funkcyj trygonometrycznych $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ zachodzą następujące wzory „dodawania"

$$\begin{aligned} \sin(x_1 \pm x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 \pm \sin x_2 \cos x_1 \\ \cos(x_1 \pm x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \sin x_2 \\ \operatorname{tg}(x_1 \pm x_2) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} x_2}{1 \mp \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2} \end{aligned} \quad . \quad . \quad (18)$$

Łatwo spostrzec, że funkcja $y = \sin x$ jest ciągłą dla wszystkich wartości na x.

W samej rzeczy dla każdej wartości $x = a$ możemy napisać

$$|\sin x - \sin a| = \left|2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}\right| = 2 \cdot \left|\cos \frac{x+a}{2}\right| \cdot \left|\sin \frac{x-a}{2}\right|$$

Ponieważ

$$\left|\sin \frac{x-a}{2}\right| < \frac{|x-a|}{2}; \quad \left|\cos \frac{x+a}{2}\right| \leqslant 1,$$

przeto

$$|\sin x - \sin a| < 2 \cdot \frac{|x-a|}{2}, \quad \text{czyli} \quad |\sin x - \sin a| < |x-a|$$

A więc nierówność

$$|x - a| < \varepsilon$$

pociąga za sobą nierówność

$$|\sin x - \sin a| < \varepsilon.$$

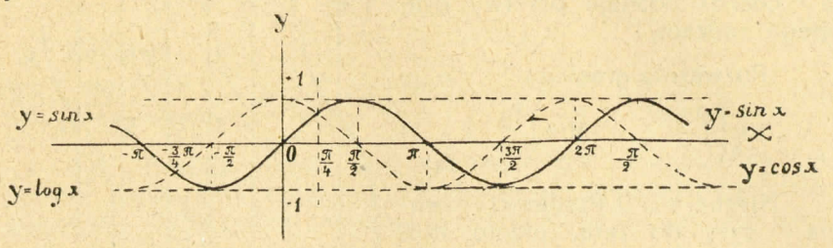
A zatem

$$\lim_{x=a} \sin x = \sin a$$

Stąd wnosimy, że funkcja $y = \sin x$ jest ciągłą dla wszystkich wartości na x.

W sposób zupełnie analogiczny do poprzedniego możemy udowodnić, że funkcja $y = \cos x$ jest ciągłą dla wszystkich wartości na x.

Wykresy funkcyj $y = \sin x$ i $y = \cos x$ są przedstawione na rys. 40.



Rys. 40.

Ponieważ

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

przeto

$$\lim_{x=a} \operatorname{tg} x = \frac{\lim\limits_{x=a} \sin x}{\lim\limits_{x=a} \cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a$$

Stąd wnosimy, że funkcja $y = \operatorname{tg} x$ jest ciągła dla wszystkich wartości na x z wyjątkiem takich wartości, które są pierwiastkami funkcji $\cos x$, to jest dla

$$x = \frac{2k+1}{2}\pi,$$

gdzie k jest to dowolna liczba całkowita.

Dla tych wartości na x funkcja $y = \operatorname{tg} x$ doznaje przerwy drugiego rodzaju.

W taki sam sposób możemy udowodnić, że funkcja $y = \operatorname{cotg} x$ jest ciągła dla wszystkich wartości na x z wyjątkiem takich wartości, które są pierwiastkami funkcji $\sin x = 0$, to jest

$$x = k\pi,$$

gdzie k jest to dowolna liczba całkowita.

Wykresy funkcyj $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{cotg} x$ są przedstawione na rys. 41 i 42.

Ponieważ

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}; \quad y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},$$

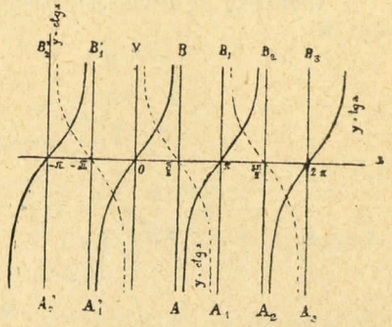
przeto funkcja $y = \sec x$ jest ciągła dla wszystkich wartości na x z wyjątkiem

$$x = \frac{2k+1}{2}\pi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

a funkcja $y = \operatorname{cosec} x$ jest ciągła dla wszystkich wartości na x z wyjątkiem

$$x = k\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Dla wartości (a) funkcja $y = \sec x$ a dla wartości (b) funkcja $y = \operatorname{cosec} x$ doznaje przerwy drugiego rodzaju.



Rys. 41 i 42.

Rozważmy granice

$$\lim_{x=0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) \quad \text{i} \quad \lim_{x=0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)$$

Niechaj $x > 0$. Ponieważ zmienna x dąży do zera, przeto możemy zawsze uważać, że $x < \frac{\pi}{2}$

Wtedy dla każdej wartości na x zachodzą nierówności

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

Stąd

$$\frac{\sin x}{x} < 1; \quad \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

A więc

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Stąd

$$1 - \cos x > 1 - \frac{\sin x}{x} > 0,$$

czyli

$$2\sin^2\frac{x}{2} > 1 - \frac{\sin x}{x} > 0$$

Ponieważ

$$\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}, \quad \text{przeto} \quad 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

A zatem

$$\frac{x^2}{2} > 1 - \frac{\sin x}{x} > 0$$

Niechaj ε oznacza dowolną liczbę dodatnią.

Obierając zmienną x tak, aby zachodziła nierówność $x < \sqrt{2\varepsilon}$, będziemy mieli

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon; \quad \text{to jest} \quad \lim_{x=0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

Dajmy na to, że $x < 0$. Załóżmy $x = -y$; wtedy $y > 0$.

A zatem

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin y}{y}$$

Stąd

$$\lim_{x=0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x=0}\left(\frac{\sin y}{y}\right) = 1.$$

Ponieważ

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}, \quad \text{przeto} \quad \lim_{x=}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) = \lim_{x=0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\lim_{x=0}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 1.$$

§ 5. **Funkcje kołowe czyli cyklometryczne.** Przejdziemy teraz do rozważania funkcyj odwrotnych do funkcyj trygonometrycznych. Funkcje te nazywają się funkcjami kołowemi, czyli cyklometrycznemi.

Niechaj x oznacza, jak zwykle, zmienną niezależną. Rozważmy łuk, którego sinus równa się x. Jest to właśnie pewna funkcja x.

Oznaczamy ją symbolem

$$y = \operatorname{Arc}\sin x$$

Oczywista, zmienna niezależna x może przybierać tylko wartości zawarte w przedziale $(-1, +1)$.

Jasnem jest, że $y = \arcsin x$ jest funkcją wielowartościową, gdyż luków, mających jeden i ten sam sinus, istnieje nieskończenie wiele.

Niechaj y_1 będzie najmniejszy łuk, (co do wartości liczbowej), którego sinus równa się x. Oznaczamy

$$y_1 = \operatorname{arc}\sin x$$

Oczywista

$$y = (-1)^k y_1 + k\pi,$$

gdzie k jest to dowolna liczba całkowita.

Funkcja y_1 jest funkcją jednowartościową, przytem wszystkie wartości, które może przybierać owa funkcja, są zawarte w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$.

Funkcją $y = \operatorname{Arc}\operatorname{cosec} x$ nazywamy taki łuk, którego cosecans równa się x.

Jeżeli $y_1 = \operatorname{Arc}\operatorname{cosec} x$ oznacza najmniejszy łuk, którego cosec'ans równa się x, to

$$y = (-1)^k y_1 + k\pi,$$

gdzie k jest to dowolna liczba całkowita.

Zmienna niezależna x może przybierać wartości większe od jedności co do wartości liczbowej.

Funkcja $\operatorname{arccosec} x$ jest funkcją jednowartościową, przytem wszystkie jej wartości są zawarte w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$.

Rozważmy teraz łuk, którego cosinus równa się x. Łuk ten jest pewną funkcją x, ktorą oznaczamy symbolem

$$y = \operatorname{Arc}\cos x$$

Jest to funkcja wielowartościowa. Oznaczając przez $y_1 = \arccos x$ najmniejszy łuk, którego cosinus równa się x, możemy napisać

$$y = \pm y_1 + 2k\pi,$$

gdzie k jest to dowolna liczba całkowita.

Jasną jest rzeczą, że wszystkie wartości na y_1, odpowiadające różnym wartościom na x są zawarte w przedziale $(0, \pi)$. W tym właśnie przedziale y_1 jest funkcją jednowartościową zmienną niezależną x.

Oznaczając przez $y = \operatorname{arc\,sec} x$ łuk, którego secans równa się x, a przez $y_1 = \operatorname{arc\,sec} x$ najmniejszy łuk, którego secans równa się x, możemy napisać

$$y = \pm y_1 + 2k\pi,$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Wszystkie wartości na funkcję $y_1 = \operatorname{arcsec} x$, odpowiadające wartościom na x większym od jedności (co do wartości liczbowej) są zawarte w przedziale $(0, \pi)$.

Rozważmy łuk, którego tangens równa się x. Jest to funkcja zmiennej niezależnej x.

Oznaczmy ją symbolem

$$y = \mathrm{Arc\,tg}\, x$$

Jest to funkcja wielowartościowa zmiennej x. Jeżeli $y_1 = \operatorname{arc\,tg} x$ oznacza najmniejszy łuk (co do wartości liczbowej), którego tangens równa się x, to

$$y = y_1 + k\pi,$$

gdzie k jest to dowolna liczba całkowita. Funkcja y_1 jest jednowartościowa, przytem wszystkie jej wartości, odpowiadające wszystkim wartościom na x w przedziale $(-\infty, +\infty)$, są zawarte w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$.

To samo można powiedzieć o funkcjach

$$y = \mathrm{Arc\,co\,tg}\, x \quad \text{i} \quad y_1 = \mathrm{Arc\,cotg}\, x$$

W analizie rozważamy tylko najmniejsze wartości funkcyj kołowych, a mianowicie funkcje $y = \operatorname{arc\,sin} x$; $y = \operatorname{arc\,cos} x$; $y = \operatorname{arc\,tg} x$; $y = \operatorname{arc\,cotg} x$; $y = \operatorname{arc\,sec} x$; $y = \operatorname{arc\,cosec} x$. Obszary zmienności tych funkcyj wyznaczone są nierównościami

$$-1 \leq x \leq 1 \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arc\,sin} x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-1 \leq x \leq 1 \qquad 0 \leq \operatorname{arc\,cos} x \leq \pi$$

$$-\infty < x < \infty \qquad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < \frac{\pi}{2}$$

$$-\infty < x < \infty \qquad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,co\,tg} x < \frac{\pi}{2}$$

$$-1 \leq x \leq 1 \qquad 0 \leq \operatorname{arc\,sec} x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arc\,co\,sec} x \leq \frac{\pi}{2}$$

Niechaj $y = \operatorname{arc\,sin} x$. Wówczas $x = \sin y$

A zatem

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\operatorname{cotg} y = \frac{1}{\operatorname{tg} y} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

$$\sec y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\operatorname{cosec} y = \frac{1}{\sin y} = \frac{1}{x}$$

W taki sam sposób można napisać wyrażenia na funkcje trygonometryczne łuków, zadanych w postaci innych funkcyj kołowych. Wyrażenia te są streszczone w tablicy następującej:

	$\operatorname{arc\,sin} x$	$\operatorname{arc\,cos} x$	$\operatorname{arc\,tg} x$	$\operatorname{arc\,cotg} x$	$\operatorname{arc\,sec} x$	$\operatorname{arc\,cosec} x$
sin.	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{x}$
cos.	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$
tg.	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
cotg.	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$
sec.	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
cosec.	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	x

Przejdziemy teraz do rozważania wzorów „dodawania“ funkcyj kołowych.

Udowodnijmy najpierw wzory następujące:

$$\operatorname{arc\,sin} x + \operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,cotg} x = \pm\frac{\pi}{2} \quad (x > 0;\ x < 0) \quad . \quad . \quad (19)$$

$$\operatorname{arc\,sec} x + \operatorname{arc\,cosec} x = \frac{\pi}{2}$$

Wyprowadźmy pierwszy wzór (19)
Oznaczmy przez $z = \arcsin x$. Wtedy $x = \sin z$.
Przeto

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = x$$

A zatem

$$\frac{\pi}{2} - z = \arccos x,$$

czyli

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

W analogiczny sposób możemy wyprowadzić wszystkie wzory (19).

Przejdziemy do wyprowadzenia wzorów dodawania funkcyj kołowych różnych zmiennych niezależnych

Niechaj będą $u = \arcsin x$ i $v = \arcsin y$

Wtedy $x = \sin u$; $y = \sin v$

$$\cos u = \sqrt{1-x^2}; \quad \cos v = \sqrt{1-y^2}$$

Na mocy wzoru

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v =$$

$$= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

możemy napisać

$$w = u + v = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

Zastępując w tym wzorze y na $-y$ będziemy mieli

$$u - v = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$$

A zatem

$$\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right) \quad . \quad (20)$$

Niechaj będą $u = \arccos x$; $v = \arccos y$

Wtedy $x = \cos u$; $y = \cos v$

$$\sin u = \sqrt{1-x^2}; \quad \sin v = \sqrt{1-y^2}$$

Ponieważ

$$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v =$$

$$= xy - \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-y^2},$$

przeto

$$u + v = \arccos\left[xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right]$$

Zastępując w tym wzorze y na $-y$, będziemy mieli

$$u - v = \arccos\left[xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right]$$

A zatem

$$\arccos x \pm \arccos y = \arccos\left[xy \mp \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right] \quad . \quad (21)$$

Na mocy wzorów (19) możemy napisać

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x; \quad \arccos y = \frac{\pi}{2} - \arcsin y$$

A zatem

$$\arccos x + \arccos y = \pi - (\arcsin y + \arcsin x)$$

$$\arccos x - \arccos y = \arcsin y - \arcsin x$$

Niechaj będą

$$u = \operatorname{arc\,tg} x; \quad v = \operatorname{arc\,tg} y$$

Wtedy $x = \operatorname{tg} u$ $y = \operatorname{tg} v$

Ponieważ

$$\operatorname{tg}(u+v) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} v} = \frac{x+y}{1-xy},$$

przeto

$$u + v = \operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1+xy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Zastępując w tych wzorach y na $-y$, otrzymamy wzór

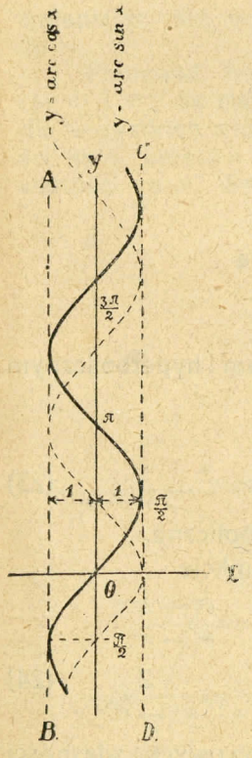
$$u - v = \operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy}$$

A zatem

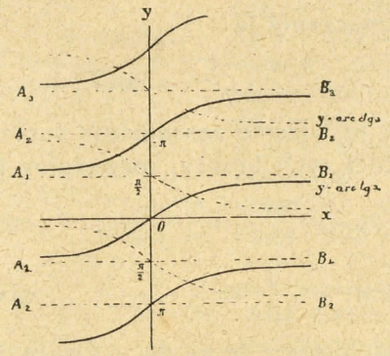
$$\operatorname{arc\,tg} x \pm \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x \pm y}{1 \mp xy}$$

Ponieważ funkcja $y = \sin x$ jest ciągłą w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, przeto funkcja $y = \arcsin x$ jest ciągła w przedziale $(-1, +1)$.

Ponieważ funkcja $y = \cos x$ jest ciągła w przedziale $(0, \pi)$, przeto funkcja $x = \arccos x$ jest ciągła w tym samym przedziale.



Rys. 43.



Rys. 44.

Ponieważ funkcja $y=\operatorname{tg} x$ jest ciągła w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ przeto funkcja $y=\operatorname{arc\,tg} x$ jest ciągła w tym samym przedziale.

Wykresy funkcyj $y=\operatorname{arc\,sin} x$; $y=\operatorname{arc\,cos} x$; $y=\operatorname{arc\,tg} x$ i $y=\operatorname{arc\,cotg} x$ są przedstawione na rys. 43 i 44.

Ćwiczenia Obliczyć funkcje

1. $y=\sin(2\operatorname{arc\,sin} x)$ Odp: $y=2x\sqrt{1-x^2}$
2. $y=\sin(2\operatorname{arc\,cos} x)$
3. $y=\cos\left(2\operatorname{arc\,sin}\frac{4}{5}\right)$
4. $y=\operatorname{tg}(2\operatorname{arc\,tg} x)$ Odp: $y=\frac{2x}{1-x^2}$
5. $y=\operatorname{cotg}(2\operatorname{arc\,sec} 3)$ Odp: $y=\frac{7}{8}\sqrt{2}$
6. $y=\cos(3\operatorname{arc\,sin} x)$ Odp: $y=4\sqrt{(1-x^2)^3}-3\sqrt{1-x^2}$
7. $y=\operatorname{cosec}\left(3\operatorname{arc\,sin}\frac{2}{3}\right)$
8. $y=\operatorname{arc\,sin}\frac{5}{13}+\operatorname{arc\,sin}\frac{12}{13}$
9. $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{6}$
10. $y=2\operatorname{arc\,cotg}\frac{5}{4}-\operatorname{arc\,tg}\frac{40}{9}$

§ **5. O funkcjach hyperbolicznych.** Funkcję

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad \text{i} \quad \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

nazywamy odpowiednio hyperbolicznym sinus'em i hyperbolicznym kosinus'em x.

Oznaczamy je

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh} x; \quad \frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Są to właśnie zasadnicze funkcje hyperboliczne.

Prócz tych funkcyj rozważamy jeszcze funkcje

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}; \quad \operatorname{cth} x=\frac{1}{\operatorname{th} x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

$$\operatorname{sch} x=\frac{1}{\operatorname{ch} x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}; \quad \operatorname{cs\,ch} x=\frac{1}{\operatorname{sh} x}=\frac{2}{e^x-e^{-x}} \quad (24)$$

Przejdziemy teraz do rozważania podstawowych własności funkcyj hyperbolicznych.

Ze wzorów, określających funkcje $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$, wypływa bezpośrednio, że

$$\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x=e^x$$
$$\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x=e^{-x}$$

A zatem

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Jest to właśnie wzór zasadniczy w teorji funkcyj hyperbolicznych.

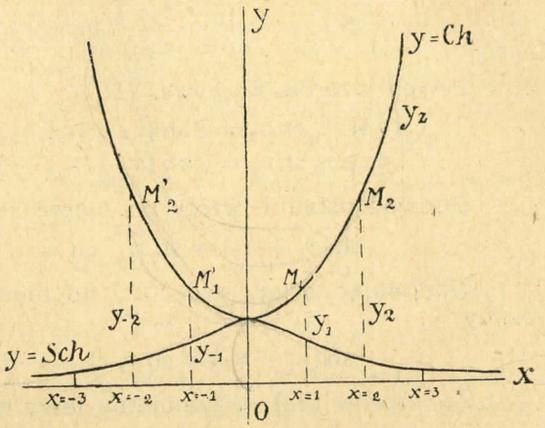
Ze wzoru (25) wynika, że

$$\operatorname{ch} x=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}$$

A więc dla wszystkich wartośai na x

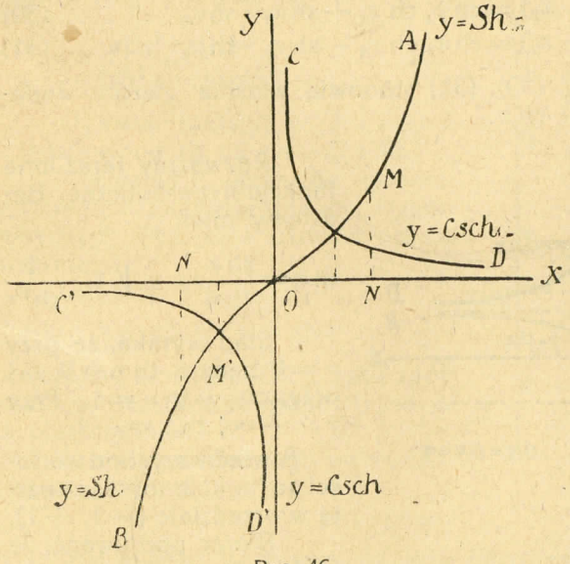
$$\operatorname{ch} x \geq 1$$

Ponieważ wartości bezwzględne funkcyj e^x i e^{-x} są funkcjami rosnącemi zmiennej x, przeto funkcja $\operatorname{ch} x$ przybiera tylko wartości dodatnie, zmieniając się od 1 do ∞.



Rys. 45.

Ponieważ funkcje e^x i e^{-x} są ciągłe dla wszystkich wartości na x, przeto i funkcja $\operatorname{ch} x$ jest funkcją ciągłą dla wszystkich wartości na x. Wykres funkcji $\operatorname{ch} x$ przedstawiony jest na Rys. 45.



Rys. 46.

Ze wzorów. (23) wynika, że funkcja $\operatorname{sh} x$ zmienia się w sposób następujący: gdy zmienna niezależna x rośnie od 0 do ∞, wówczas funkcja $\operatorname{sh} x$ rośnie również od 0 do ∞; gdy zmienna x maleje przybierając różne wartości od 0 do $-\infty$, wówczas i $\operatorname{sh} x$ maleje od 0 do $-\infty$. A więc wszystkie wartości, które może przybierać funkcja $\operatorname{sh} x$ zawarte są w przedziale $(-\infty, +\infty)$. Nadto funkcja ta jest ciągłą dla wszystkich wartości na x.

Wykres funkcji $\operatorname{sh} x$ przedstawiony jest na Rys. 46.

Wyprowadźmy teraz tak zwane „wzory dodawania“ dla funkcyj $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$.

Niechaj x_1 i x_2 będą dwie dowolne wartości, które przybiera zmienna niezależna x.

Dla tych wartości możemy napisać.

$$\operatorname{sh} x_1 = \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2}; \quad \operatorname{ch} x_1 = \frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{2}$$
$$\operatorname{sh} x_2 = \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2}, \quad \operatorname{ch} x_2 = \frac{e^{x_2} + e^{-x_2}}{2} \qquad (26)$$

Z tych wzorów wypływa, że

$$4 \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 = 2 \operatorname{sh}(x_1 + x_2) + 2 \operatorname{sh}(x_1 - x_2)$$
$$4 \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} x_2 = 2 \operatorname{sh}(x_1 + x_2) - 2 \operatorname{sh}(x_1 - x_2) \qquad (27)$$

Dodając ostatnie wzory do siebie stronami, dostaniemy

$$\operatorname{sh}(x_1 + x_2) = \operatorname{sh} x_1 \cdot \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} x_2 \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Odejmując drugi wzór (27) od pierwszego stronami, otrzymamy

$$\operatorname{sh}(x_1 - x_2) = \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 - \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} x_2 \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

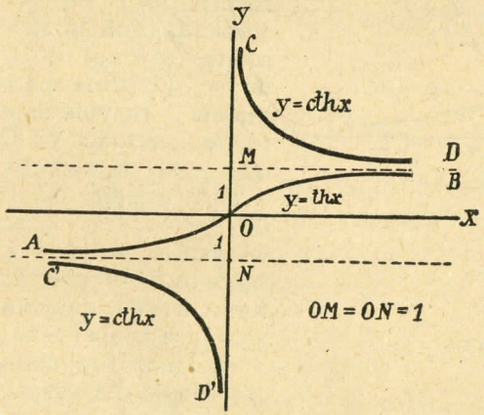
Ze wzorów (22) otrzymujemy jeszcze wzory

$$4 \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 = 2 \operatorname{ch}(x_1 + x_2) + 2 \operatorname{ch}(x_1 - x_2)$$
$$4 \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2 = 2 \operatorname{ch}(x_1 + x_2) - 2 \operatorname{ch}(x_1 - x_2)$$

Z tych wzorów dostaniemy

$$\operatorname{ch}(x_1 + x_2) = \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{sh} x_1 \cdot \operatorname{sh} x_2 \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$
$$\operatorname{ch}(x_1 - x_2) = \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 - \operatorname{sh} x_1 \cdot \operatorname{sh} x_2 \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Wzory (28), (29), (30), (31) stanowią właśnie „wzory dodawania“ funkcyj $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$.



Rys. 47.

Rozważmy teraz inne funkcje hyperboliczne. Będziemy mieli

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}$$

Stąd wynika, że przy $x = 0$ będzie $\operatorname{th} x = 0$, zaś przy; $x = \infty$ $\operatorname{th} x = 1$. Przy $x = -\infty$, $\operatorname{th} x = -1$.

A więc wszystkie wartości na funkcję $\operatorname{th} x$ są zawarte w przedziale $(-1, +1)$.

Biorąc pod uwagę, że funkcje $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$ są funkcjami ciągłemi dla wszystkich skończonych wartości na x, a nadto $\operatorname{ch} x \gtrless 0$, wnosimy, że funkcja $\operatorname{th} x$ jest funkcją ciągłą dla wszystkich wartości na x. Wykres funkcji $\operatorname{th} x$ jest przedstawiony na Rys. 47.

Ze wzoru (20) mamy

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \pm \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}}$$

Stąd wynika, że dla $x = 0$; $\operatorname{cth} x = \pm \infty$; przy $x > 0$; $\operatorname{cth} x > 0$, a przy $x < 0$; $\operatorname{cth} x < 0$. Dla $x = \infty$; $\operatorname{cth} x = 1$, a przy $x = -\infty$ $\operatorname{cth} x = -1$. Funkcja $\operatorname{cth} x$ jest ciągłą dla wszystkich wartości na x różnych od zera. Przy $x = 0$ funkcja ta doznaje przerwy, przechodząc od $-\infty$ do $+\infty$ (przerwy drugiego rodzaju)

Wykres funkcji $\operatorname{cth} x$ przedstawiony jest na Rys. 47.

Funkcje $\operatorname{sch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ i $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$ dla wartości $x = 0$ przybierają wartości $\operatorname{sch} x = 1$; $\operatorname{csch} x = \pm \infty$

dla $x = \pm \infty$ $\operatorname{sch} x = 0$; $\operatorname{csch} x = 0$
przy $x > 0$ $\operatorname{sch} x > 0$; $\operatorname{csch} x > 0$
przy $x < 0$ $\operatorname{sch} x > 0$; $\operatorname{csch} x < 0$.

A więc wszystkie wartości, które może przybierać funkcja $\operatorname{sch} x$, są zawarte w przedziale (0,1); a wartości, które przybiera funkcja $\operatorname{csch} x$, są zawarte w przedziale $(-\infty, +\infty)$.

Funkcja $\operatorname{sch} x$ jest ciągła dla wszystkich skończonych wartości na x; natomiast funkcja $\operatorname{csch} x$ (będąc ciągłą dla wszystkich wartości na x z wyjątkiem 0), doznaje przerwy przy $x = 0$. Ze wzorów (24) wnosimy, że

$$\operatorname{sch}^2 x + \operatorname{th}^2 x = 1$$
$$\operatorname{cth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1.$$

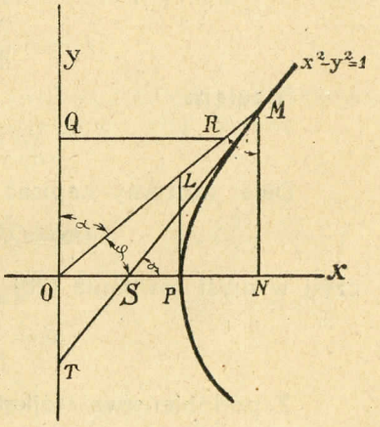
Wykresy funkcyj $\operatorname{sch} x$ i $\operatorname{csch} x$ przedstawione są na rys. 45 i 46.

Przejdziemy teraz do geometrycznego rozważania funkcyj hyperbolicznych. Niechaj u oznacza pewną zmienną.

Załóżmy

$$x = \operatorname{ch} u; \quad y = \operatorname{sh} u$$

i uważajmy zmienne x i y, jako spółrzędne prostokątne pewnego punktu M na płaszczyźnie.



Rys. 48.

W myśl zasadniczego wzoru (25) możemy napisać

$$x^2 - y^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Stąd wynika, że punkt M leży na równobocznej hyperboli danej równaniem (32) (rys. 48).

Możemy napisać

$$ON = x = \operatorname{ch} u; \quad MN = y = \operatorname{sh} u$$

Przeprowadźmy przez punkt P (wierzchołek hyperboli) prostą prostopadłą do osi OX i oznaczmy przez L punkt przecięcia się tej prostej z prostą OM.

Z podobieństwa trójkątów OMN i OPL wypływa, że

$$\frac{PL}{MN} = \frac{OP}{ON}; \text{ czyli } \frac{PL}{y} = \frac{1}{x}$$

Stąd

$$PL = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u} = \operatorname{th} u$$

Przeprowadźmy styczną MC do hyperboli w punkcie M. Przypuśćmy, że owa styczna przecina osi OX i OY odpowiednio w punktach S i T. Równanie stycznej MT będzie

$$Xx - Yy = 1,$$

gdzie X i Y są to spółrzędne bieżące prosty MC. Oznaczając przez α kąt pomiędzy styczną MT a osią OX, zaś przez φ kąt pomiędzy tą osią a prostą OM, możemy napisać

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{y} = \operatorname{cotg} \varphi$$

Stąd

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad \text{czyli} < OMN = \alpha$$

Wobec tego trójkąty OMN i SMN są podobne. Z podobieństwa tych trójkątów wypływa, że

$$\frac{NS}{MN} = \frac{MN}{ON}$$

A zatem

$$NS = \frac{MN^2}{ON} = \frac{y^2}{x}$$

Dalej możemy napisać

$$OS = ON - NS = \frac{x^2 - y^2}{x}.$$

czyli w myśl równania (28)

$$OS = \frac{1}{x} = \frac{1}{\operatorname{ch} u} = \operatorname{sch} u$$

Z podobieństwa trójkątów OST i OMN wypływa, że

$$\frac{OT}{ON} = \frac{OS}{MN}$$

A zatem

$$OT = \frac{ON \cdot OS}{MN} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\operatorname{sh} u} = \operatorname{csch} u$$

Odłóżmy na osi OY odcinek $OQ = 1$ i poprowadźmy przez punk $t\,Q$ prostą, równoległą do osi OX. Przypuśćmy, że prosta ta przecina prostą OM w punkcie R.

Z podobieństwa trójkątów OQR i OMN wypływa, że

$$QR = \frac{OQ \cdot ON}{MN} = \frac{x}{y} = \frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u} = \operatorname{cth} u$$

Rozważmy teraz związki pomiędzy funkcjami hyperbolicznemi a frygonometrycznemi zmiennej niezależnej x.

Poprowadźmy przez punkt M hyperboli prostą równoległą do osi OX i oznaczmy przez G punkt przecięcia się owej prostej z prostą PF, prostopadłą do osi OX, a przechodzącej przez wierzchołek hyperboli.

Oznaczmy jeszcze przez θ kąt GOX. Ten kąt nazwijmy „kątem przestępnym“, a zmienną u — „kątem uogólnionym“.

Chodzi nam teraz o ustalenie związków pomiędzy funkcjami hyperbolicznemi kąta u, a funkcjami trygonometrycznemi kąta θ.

W tym celu wykreślamy z punktu O jako środka okrąg koła o promieniu równym jedności. Wtedy możemy napisać

$$MN = PG; \text{ t. j. } \operatorname{sh} u = \operatorname{tg} \theta.$$

Przeto

$$\operatorname{csch} u = \frac{1}{\operatorname{sh} u} = \operatorname{ctg} \theta$$

Dalej na mocy równania hyperboli

$$\operatorname{ch} u = x = \sqrt{1 + y^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u} = \sec \theta$$

$$\operatorname{sch} u = \frac{1}{\operatorname{ch} u} = \cos \theta$$

$$\operatorname{th} u = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u} = \operatorname{tg} \theta \cos \theta = \sin \theta$$

Laisant ustalił bardzo ciekawy związek pomiędzy kątami u a θ. Ze wzorów, określających funkcje $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$ wynika

$$e^u = \operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u,$$

czyli

$$e^u = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}\right)^2}{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} =$$

$$= \frac{\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

A zatem

$$u = \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

Jest to właśnie wzór Laisant'a
Ze wzoru

$$e^u = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}$$

wynika, że

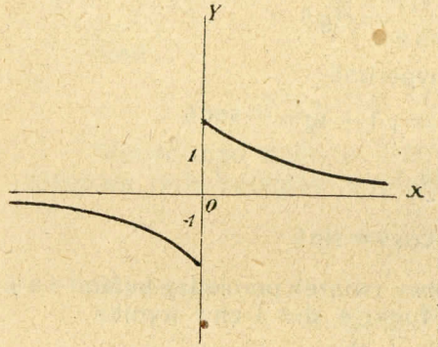
$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{e^u-1}{e^u+1} = \frac{e^{\frac{u}{2}}-e^{-\frac{u}{2}}}{e^{\frac{u}{2}}+e^{-\frac{u}{2}}} = \operatorname{th}\frac{u}{2}$$

§ **6. Niektóre przykłady funkcyj przerywanych.** Rozważmy najpierw funkcje przerywane, doznające przerw pierwszego rodzaju, to jest takie, dla których wartości

$$f(a-0);\quad f(a+0)\quad \text{i}\quad f(a)$$

są skończone, lecz nie równe sobie.

1. $$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$$



Rys. 49.

Dla tej funkcji

$$f(-0) = \lim_{\varepsilon=0} f(-\varepsilon) = -1;$$

$$f(+0) = \lim_{\varepsilon=0} f(+\varepsilon) = 1.$$

Przeto dla $x=0$ zachodzi przerwa pierwszego rodzaju, przytem gdy zmienna niezależna przechodzi przez wartość zerową, wówczas funkcja dana przeskakuje z -1 na $+1$.

Wykres tej funkcji przedstawiony jest na Rys. 49.

2. $$f(x) = \frac{1}{1+a^{\frac{1}{x}}} \qquad (a>1)$$

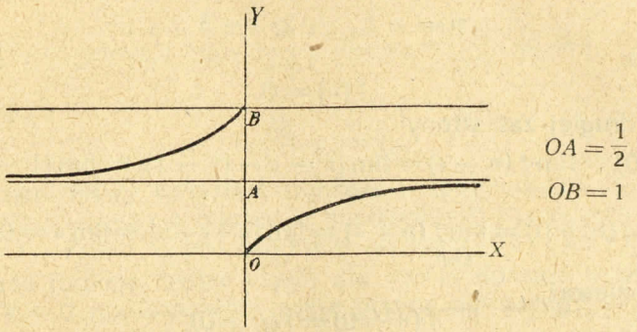
Dla tej funkcji

$$f(-0) = \lim_{\varepsilon=0} f(-\varepsilon) = 1;\quad f(+0) = \lim_{\varepsilon=0} f(+\varepsilon) = 0$$

Przeto dla $x=0$ funkcja $f(x)$ doznaje przerwy pierwszego rodzaju, przytem gdy zmienna niezależna x przechodzi przez wartość zerową, wówczas funkcja dana przeskakuje z 0 na 1.

Przy $x=\pm\infty$; $f(x)=\frac{1}{2}$

Wykres danej funkcji przedstawiony jest na Rys. 50.



Rys. 50.

3. $$f(x) = \lim\left(\frac{1}{1+x^{2n}}\right) \qquad (n=1,\ 2,\ 3\ldots)$$

Oczywista, $f(x)=0$ dla wszystkich wartości na x, spełniających warunek $|x|>1$; $f(x)=1$ dla wszystkich wartości na x, spełniających warunek $|x|<1$.

Dla $x=\pm 1$ $f(x)=\frac{1}{2}$

A więc

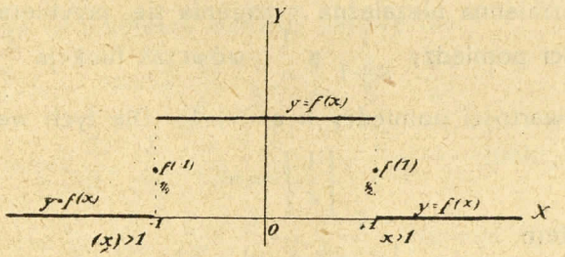
$$f(-1-0) = \lim_{\varepsilon=0} f(-1-\varepsilon) = 0;\quad f(-1+0) = \lim_{\varepsilon=0} f(-1+\varepsilon) = 1$$

$$f(1-0) = \lim_{\varepsilon=0} f(1-\varepsilon) = 1;\quad f(1+0) = \lim_{\varepsilon=0} f(1+\varepsilon) = 0$$

$$f(-1) = f(+1) = \frac{1}{2}$$

Stąd wnosimy, że dla $x=\pm 1$ zachodzi regularna przerwa pierwszego rodzaju funkcji $f(x)$.

Wykres danej funkcji przedstawiony jest na Rys. 51.



Pys. 51.

4. $f(x)=x-[x]$, gdzie symbolem $[x]$ oznaczono największą liczbę całkowitą, mniejszą od x.

Gdy zmienna niezależna x przybiera wartości całkowite zarówno dodatnie, jak i ujemne

$$n = \pm 1;\quad \pm 2;\quad \pm 3\ldots,$$

wówczas

$$f(n) = 0.$$

Z drugiej zaś strony

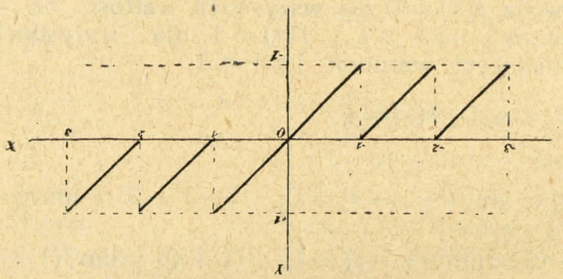
$$f(n-0) = \lim_{\varepsilon=0} f(n-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon=3} [n-\varepsilon-(n-1)] = \lim_{\varepsilon=0} (1-\varepsilon) = 1$$

$$f(n+0) = \lim_{\varepsilon=0} f(n+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon=0} [n+\varepsilon-n] = \lim \varepsilon = 0.$$

Ponieważ

$$f(n-0) = f(n+0),$$

przeto dla wszystkich wartości całkowitych na x, zarówno dodatnich, jak i ujemnych zachodzi przerwa pierwszego rodzaju dla funkcji $f(x)$. Wykres tej funkcji przedstawiony jest na Rys. 52.



Rys. 52.

5. $f(x) = x\left[\frac{1}{x}\right]$, gdzie symbolem $\left[\frac{1}{x}\right]$ oznaczono największą liczbę całkowitą, mniejszą od $\frac{1}{x}$.

Gdy zmienna niezależna x zmienia się, przybierając wszystkie wartości pomiędzy $\frac{1}{n+1}$ a $\frac{1}{n}$, wówczas funkcja $\frac{1}{x}$ przybiera wszystkie wartości pomiędzy n a $n+1$. Dla tych wartości na $\frac{1}{x}$

$$\left[\frac{1}{x}\right] = n$$

A zatem

$$f(x) = nx.$$

A więc w przedziale $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ dana funkcja jest linjową. Wykresem funkcji w tym przedziale (Rys. 53) będzie odcinek

prostej, przechodzącej przez punkt początkowy. Punkty krańcowe tego odcinka będą miały spółrzędne

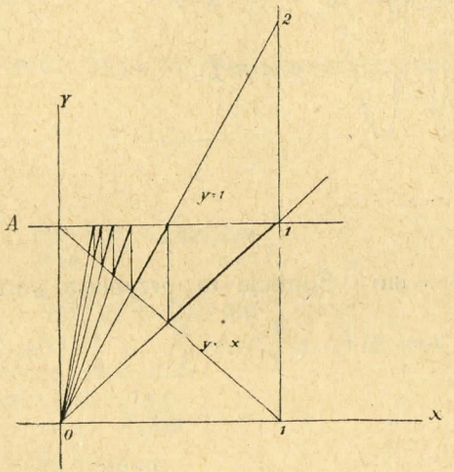
$$x_1 = \frac{1}{n+1};\quad y_1 = \frac{n}{n+1} \qquad x_2 = \frac{1}{n};\quad y_2 = 1$$

A więc

$$x_1 + y_1 = 1,$$

czyli innemi słowy wszystkie punkty o spółrzędnych x_1, y_1 leżą na prostej $y = -x$; a punkty o spółrzędnych x_2, y_2 leżą na prostej $y = 1$. Punkt A jest punktem asymptotycznym.

Dana funkcja, będąc ciągłą dla $x = 0$, doznaje w otoczeniu punktu $x = 0$ nieskończenie wiele przerw pierwszego rodzaju.



Rys. 53.

6. $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$

Fukcja ta przybiera wartości zerowe dla

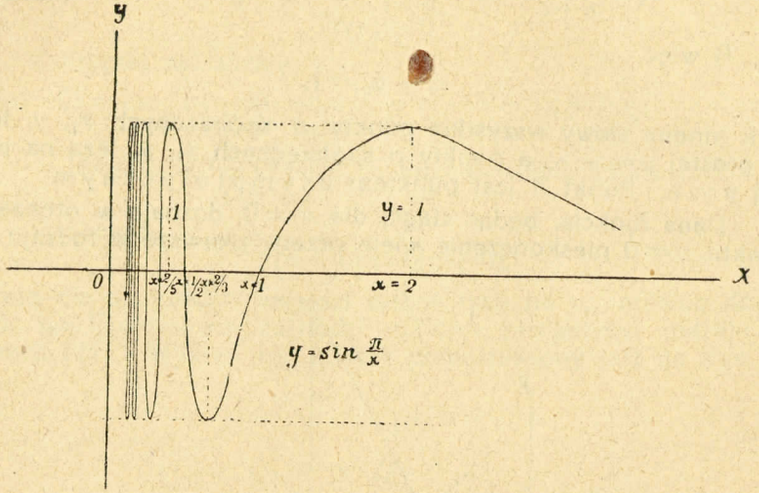
$$x = 1;\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}\ldots\frac{1}{n}\ldots$$

Dla $x = 2, \frac{2}{5},\ \frac{2}{9},\ \frac{2}{13},\ \frac{2}{17},\ldots\frac{2}{1+4n}\ldots$ funkcja $f(x) = 1$.

Dla $x = \frac{2}{3},\ \frac{2}{7},\ \frac{2}{11},\ \frac{2}{15}\ldots\frac{2}{4n-1}$ funkcja $f(x) = -1$.

Dla $x = 0$ funkcja dana jest nie określona, gdyż w przedziale $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ przybiera nieskończenie wiele razy różne wartości od -1 do $+1$.

Stąd wnosimy, że funkcja $\sin\frac{\pi}{x}$, będąc ciągłą dla wszystkich wartości na x, doznaje przerwy przy $x=0$. Wykres tej funkcji przedstawiony jest na Rys. 54.



Rys. 54.

7. $f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$ Funkcja ta przybiera wartości zerowe dla

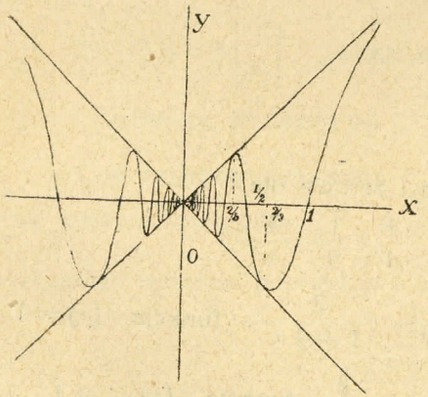
$$x=\pm 1,\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{1}{3};\ \pm\frac{1}{4}\cdots\pm\frac{1}{n}\cdots$$

Ponieważ

$$-x\leqslant f(x)\leqslant x,$$

przeto

$$\lim_{x=\pm 0} f'(x)=0.$$



Rys. 55.

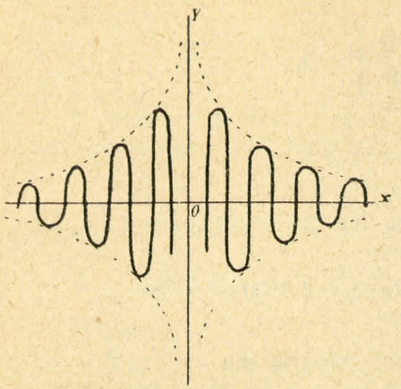
Przyjmując, że dla $x=0$ $f(x)=0$, wnosimy, że funkcja dana jest ciągłą dla wszystkich wartości na x.

Wykres tej funkcji przedstawiony jest na Rys. 55.

Jest to właśnie krzywa, zawarta pomiędzy dwiema dwusiecznemi kątów spółrzędnych.

8. $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$. Oczywista, wartości na funkcję spełniają nierówności

$$-\frac{1}{x}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{x}$$



Rys. 56.

A zatem gdy x przybiera wartości z otoczenia liczby 0, wówczas funkcja $f(x)$ przybiera różne wartości, wahając się między $-\infty$ a $+\infty$. Przeto funkcja ta jest nieokreśloną dla $x=0$; a zatem doznaje przerwy dla tej wartości na x.

Wykres tej funkcji przedstawiony jest na Rys. 56.

Jest to właśnie krzywaz awarta pomiędzy dwiema hyperbolami, których równania będą $y=\frac{1}{x}$ i $y=-\frac{1}{x}$.

Rozważmy teraz kilka funkcyj, mających przerwę drugiego rodzaju.

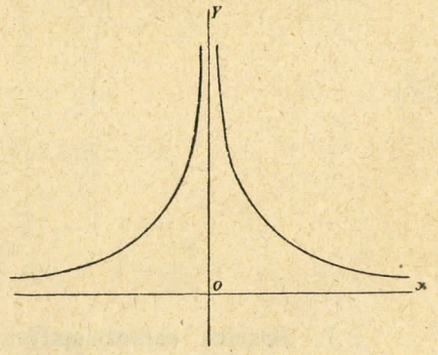
9. $$f(x)=\frac{1}{x^2}$$

Mamy

$$\lim_{\varepsilon=0} f(0-\varepsilon)=\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\varepsilon^2}=\infty$$

$$\lim_{\varepsilon=0} f(0+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\varepsilon^2}=\infty$$

A zatem funkcja dana dla $x=0$ doznaje przerwy drugiego rodzaju. Wykres tej funkcji przedstawiony jest na Rys. 57.



Rys. 57.

10. $f(x)=\operatorname{tg} x$. Funkcja ta doznaje przerw drugiego rodzaju dla wartości $x_k=\frac{(2k+1)\pi}{2}$

gdyż

$$\lim_{\varepsilon=0} f(x_k-\varepsilon)=\infty$$

$$\lim_{\varepsilon=0} f(x_k+\varepsilon)=-\infty$$

Wykres tej funkcji przedstawiony jest na Rys. 41.

11. $$f(x)=\frac{3(x^2-9)}{x^2-4}$$

Mamy $$f(0)=\frac{27}{4}$$

Dla $x=\pm 3$; $f(x)=0$

Ponieważ

$$\lim_{x=\pm\infty}\left[\frac{3(x^2-9)}{x^2-4}\right]=3,$$

przeto

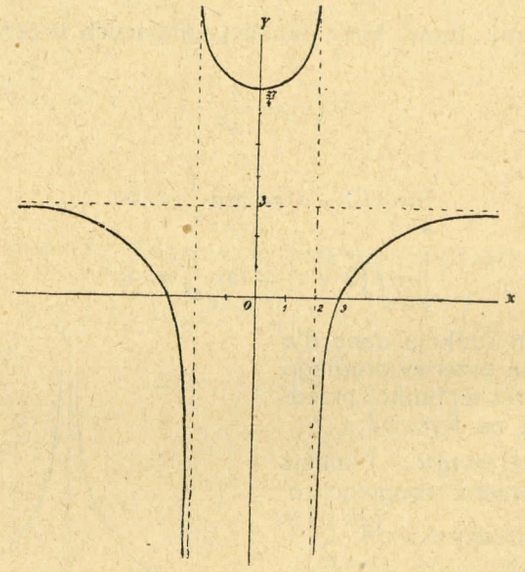
$$f(\pm\infty)=+3$$

Dalej

$$\lim_{\varepsilon=0} f(2-\varepsilon)=+\infty;\quad \lim_{\varepsilon=0} f(-2-\varepsilon)=-\infty$$

$$\lim_{\varepsilon=0} f(2+\varepsilon)=-\infty;\quad \lim_{\varepsilon=0} f(-2+\varepsilon)=+\infty$$

A zatem funkcja dana jest przerywaną dla $x=\pm 2$.
Wykres tej funkcji przedstawiony jest na Rys. 58.



Rys. 58.

§ 7. **Granice najważniejszych funkcyj.** Niechaj będzie dana funkcja

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}} \qquad (x>-1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Znajdźmy granicę tej funkcji dla $x=0$.
Rozważmy oddzielnie dwa przypadki:
I. $x>0$. Przypuśćmy, że zmienna x przybiera wartości, spełniające nierówności

$$1>x>0$$

Wtedy

$$\frac{1}{x}>1$$

A zatem możemy obrać liczbę całkowitą dodatnią n tak, ażeby zachodziły nierówności

$$n+1>\frac{1}{x}\geqslant n,$$

czyli

$$\frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}$$

A zatem

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>(1+x)^{\frac{1}{x}}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

Dla $x=0$; $n=\infty$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=e,$$

przeto

$$\lim_{x=0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

II. $x<0$, czyli innemi słowy zmienna x przybiera wartości spełniające nierówności

$$1>1+x>0$$

Załóżmy

$$1+x=\frac{1}{1+z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Jasną jest rzeczą, że $z>0$ a $\lim_{x=0} z=0$.

Ze wzoru (34) wynika, że

$$x=-\frac{z}{1+z},$$

czyli

$$\frac{1}{x}=-\left(\frac{1}{z}+1\right)$$

A zatem

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=(1+z)^{\left(1+\frac{1}{z}\right)}$$

Przeto w granicy dla $x=0$ będziemy mieli $(z>0)$

$$\lim_{x=0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{z=0}(1+z)^{\frac{1}{z}}\cdot\lim_{z=0}(1+z)=\lim_{z=0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e,$$

A więc dla wszystkich wartości na x, spełniających warunek $1+x>0$,

$$\lim_{x=0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=e \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

Niechaj będzie dana funkcja

$$f(x)=\mathrm{Lg}_a\,(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{\mathrm{Lg}_a\,(1+x)}{x}$$

Znajdźmy granicę tej funkcji dla $x=0$.
Będziemy mieli

$$\lim_{x=0} f(x)=\mathrm{Lg}_a\left[\lim_{x=0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\mathrm{Lg}_a\,e$$

A więc

$$\lim \mathrm{Lg}_a\,(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{Lg}_a\,e$$

Dana jest funkcja

$$f(x)=\frac{a^x-1}{x} \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

Znajdźmy granicę tej funkcji dla $x=0$.
Oznaczmy

$$a^x-1=z$$

Jasną jest rzeczą, że

$$\lim_{z=0} z=\lim_{x=0} a^x=1.$$

Możemy napisać

$$1+z=a^x,$$

czyli

$$x\,\mathrm{lg}_b\,a=\mathrm{lg}_b\,(1+z)$$

Stąd

$$x=\frac{\mathrm{lg}_b\,(1+z)}{\mathrm{lg}_b\,a} \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

Podstawiając ostatnie wyrażenie na x do (36), otrzymamy,

$$f(x)=\frac{z}{\frac{\mathrm{lg}_b\,(1+z)}{\mathrm{lg}_b\,a}}=\frac{z}{\frac{z}{\mathrm{lg}_b\,a}\cdot\mathrm{lg}_b\,(1+z)^{\frac{1}{z}}}$$

W granicy dla $x=0$ mamy

$$\lim_{x=0} f(x)=\frac{\mathrm{lg}_b\,a}{\lim\left[\mathrm{lg}_b\,(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]}=\frac{\mathrm{lg}_b\,a}{\mathrm{lg}_b\,e}=\mathrm{Lg}\,a$$

A więc

$$\lim\frac{a^x-1}{x}=\mathrm{lg}\,a$$

Dana jest funkcja

$$f(x)=\frac{(1+x)^m-1}{x}, \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

gdzie m jest to liczba dowolna
Znajdźmy granicę tej funkcji dla $x=0$.
Oznaczmy

$$(1+x)^m-1=z$$

Jasną jest rzeczą, że

$$\lim_{x=0} z=1.$$

Możemy napisać

$$(1+x)^m=1+z$$

A zatem

$$m\,\mathrm{Lg}_a\,(1+x)=\mathrm{Lg}_a\,(1+z),$$

czyli

$$m\cdot x\,\mathrm{Lg}_a\,(1+x)^{\frac{1}{x}}=z\,\mathrm{Lg}_a\,(1+z)^{\frac{1}{z}}$$

Stąd

$$x=\frac{z}{m}\cdot\frac{\mathrm{Lg}_a\,(1+z)^{\frac{1}{z}}}{\mathrm{Lg}_a\,(1+x)^{\frac{1}{x}}} \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

Podstawiając ostatnie wyrażenie na x do (38), otrzymamy

$$f(x)=m\cdot\frac{\mathrm{Lg}_a\,(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{Lg}_a\,(1+z)^{\frac{1}{z}}}$$

W granicy dla $x=0$ znajdziemy

$$\lim_{x=0} f(x)=m\cdot\frac{\mathrm{Lg}_a\,e}{\mathrm{Lg}_a\,e}=m$$

A więc

$$\lim_{x=0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m$$

Zadania: 1. Znaleźć granicę funkcji

$$y=\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}\right) \quad \text{przy } x=0$$

Możemy napisać

$$y=\left[\frac{\frac{(\sqrt{1+x}-1)\,x}{x}-\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)}{x^2}x^2}{\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right)x}\right]$$

A zatem

$$\lim_{x=0} y=\lim_{x=0}\frac{\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2\right)}{\frac{1}{2}x}=\lim_{x=0}\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}}\right)=1.$$

2. Znaleźć granicę funkcji

$$y=\frac{\sqrt[3]{1+2x+x^3}-1}{3x-x^3} \quad \text{przy } x=0$$

Możemy napisać

$$\frac{\sqrt[3]{1+2x+x^3}-1}{3x-x^3}=\frac{\sqrt[3]{1+2x+x^3}-1}{2x+x^3}\cdot\frac{2x+x^3}{3x-x^3}$$

A zatem

$$\lim_{x=0} y=\lim_{x=0}\left[\frac{\sqrt[3]{1+2x+x^3}-1}{2x+x^3}\right]\cdot\lim\left[\frac{2x+x^3}{3x-x^3}\right]_{x=0}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\lim_{z=0}\frac{\sqrt[3]{1+z}-1}{z}=\frac{1}{3},$$

będziemy mieli

$$\lim_{x=0} y=\frac{1}{3}\cdot\lim\left[\frac{2+x^2}{3-x^2}\right]_{x=0}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9},$$

3. Znaleźć granicę funkcji

$$y=\left(\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}\right) \quad \text{przy } x=0$$

Możemy napisać

$$\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}=\frac{\sqrt{1+3x}-1}{3x}\cdot\frac{3x}{x}$$

A zatem

$$\lim_{x=0} y=\lim_{x=0}\left(\frac{\sqrt{1+3x}-1}{3x}\right)\cdot\lim_{x=0}\left(\frac{3x}{x}\right)=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}$$

4. Znaleźć granicę funkcji

$$y=\left(\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\right) \quad \text{przy } x=0$$

Możemy napisać

$$\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{(\sqrt[3]{1+x}-1)-(\sqrt{1-x}-1)}{x}=$$

$$=\left[\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}-\frac{\sqrt{1+(-x)}-1}{-x}\cdot\left(\frac{-x}{x}\right)\right]$$

A zatem

$$\lim_{x=0} y=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

5. Znaleźć granicę funkcji

$$y=\left[\frac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt{1+x}}{x}\right] \quad \text{przy } x=0$$

Możemy napisać

$$\frac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt{1+x}}{x}=\frac{(\sqrt[3]{1+2x}-1)-(\sqrt{1+x}-1)}{x}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{2x}\cdot\frac{2x}{x}-\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right)$$

A zatem

$$\lim_{x=0} y=2\lim_{x=0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{2x}\right)\cdot-\lim\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\right.$$

6. Znaleźć granicę funkcji

$$y=\frac{\sqrt{\cos x-1}}{x^2} \quad \text{przy } x=0$$

Możemy napisać

$$\frac{\sqrt{1-\cos x}-1}{x^2}=\frac{\sqrt{1+(\cos x-1)}-1}{x^2}=\frac{\sqrt{1+(\cos x-1)}-1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+(\cos x-1)}-1}{\cos x-1}\cdot-\frac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

A zatem

$$\lim_{x=0} y=\lim_{x=0}\left[\frac{\sqrt{1+(\cos x-1)}-1}{\cos x-1}\right]\cdot-\frac{1}{2}\lim_{x=0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\cdot\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

7. Znaleźć granicę funkcji

$$y=\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x} \quad \text{przy } x=2\pi$$

Wprowadźmy nową zmienną

$$z=x-2\pi$$

Wtedy będziemy mogli napisać

$$\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x}=\frac{\sqrt{\cos z}-1}{\sin^2 z}=\frac{\sqrt{1+(\cos z-1)}-1}{\cos z-1}\cdot\frac{1}{2\cos^2\frac{z}{2}}$$

A zatem

$$\lim_{x=\pi} y = \lim_{z=0}\left[\frac{\sqrt{1+(\cos z-1)}-1}{\cos z-1}\right]\cdot\lim_{z=0}\left(\frac{1}{2\cos^2\frac{z}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$

8. Znaleźć granicę funkcji

$$y=x^{\frac{1}{x-1}} \quad \text{przy } x=1$$

Oznaczmy $x=1+\frac{1}{n}$

Wtedy będziemy mogli napisać

$$x^{\frac{1}{x-1}}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x-1}}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

A zatem

$$\lim_{x=1} y=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=e$$

9. Znaleźć granicę funkcji

$$y=\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{x+1} \quad \text{przy } x=\infty$$

Oznaczmy

$$\frac{2x-3}{2x+1}=1+\frac{1}{n};\quad \text{wtedy } \frac{1}{n}=-\frac{4}{2x+1}$$

A zatem

$$\lim_{x=\infty} y=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}\cdot(x+1)}=e^{\lim\limits_{x=\infty}\left[\frac{-4(x+1)}{2x+1}\right]}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

10. Znaleźć granicę funkcji

$$y=(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} \quad \text{przy } x=\frac{\pi}{4}$$

Oznaczamy

$$\operatorname{tg} x=1+\frac{1}{n};\quad \text{wtedy } \frac{1}{n}=\operatorname{tg} x-1$$

Możemy więc napisać

$$(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{\operatorname{tg} 2x}{n}}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{(\operatorname{tg} x-1)\,.\,\operatorname{tg} 2x}$$

A zatem

$$\lim_{x=\frac{\pi}{4}} y=e^{\lim\limits_{x=\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x-1)\operatorname{tg} 2x}$$

Ponieważ

$$\lim_{x=\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x-1)\operatorname{tg} 2x=\lim_{x=\frac{\pi}{4}}\left[\frac{-2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\right]=-1,$$

przeto

$$\lim_{x=\frac{\pi}{4}} y=\frac{1}{e}$$

Ćwiczenia. Znaleźć granicę funkcji:

1. $y=\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$ przy $x=\pi$ Odp.: $-\frac{5}{4}$
2. $y=\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$; przy $x=0$ Odp.: $x=\frac{1}{2}$
3. $y=\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}{x}$; przy $x=0$ Odp.: $-\frac{1}{6}$
4. $y=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{1+x}-1}$ przy $x=0$ Odp.: $\frac{1}{3}$
5. $y=\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}-\cos x}$ przy $x=2\pi$ Odp.: $-\frac{1}{3}$
6. $y=\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos 2x}}{\sin^2 x}$ przy $x=\pi$ Odp.: $-\frac{1}{2}$
7. $y=\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}+1}{\sin^2 x}$ przy $x=\pi$ Odp.: $\frac{1}{6}$
8. $y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ przy $x=\infty$ Odp.: 1
9. $y=\dfrac{\sqrt{2+2x}-2}{x^2-3x+2}$ przy $x=1$ Odp.: $-\frac{1}{2}$
10. $y=\dfrac{\sqrt{\sin x}-1}{\cos^2 x}$ przy $x=\frac{\pi}{2}$ Odp.: $-\frac{1}{4}$
11. $y=\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ przy $x=0$ Odp.: $\frac{3}{2}$

12. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^2-3x+2}$ przy $x=2$ Odp.: $\dfrac{1}{12}$

13. $y=\dfrac{\lg \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{co\,tg} x}$ przy $x=\dfrac{\pi}{4}$ Odp.: e

14. $y=\dfrac{\lg \operatorname{tg} x}{x-\dfrac{\pi}{4}}$ przy $x=\dfrac{\pi}{4}$ Odp.: 2

15. $y=x^2 \lg \cos \dfrac{\pi}{x}$ przy $x^2=\infty$ Odp.: $-\dfrac{\pi^2}{2}$

16. $y=\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\operatorname{cotg}(x-a)}$ przy $x=a$ Odp.: $e^{\operatorname{ctg} a}$

17. $y=(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{cosec}^2 x}$ przy $x=0$ Odp.: e^3

18. $y=(\cos x)^{\operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$ przy $x=\dfrac{\pi}{4}$ Odp.: $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

§ **8. O funkcjach zmiennej zespolonej. Funkcja** e^z Rozważmy ciąg o wyrazach zespolonych

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n$$

i znajdźmy granicę tego ciągu.

Oznaczając

$$1+\frac{x+iy}{n}=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

mamy

$$\rho=\sqrt{\left(\frac{x+n}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}};\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{n+x}$$

Możemy napisać

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}[\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)]=\lim_{n\to\infty}\rho^n\cdot[\lim_{n\to\infty}\cos(n\varphi)+$$

$$+i\lim_{n\to\infty}\sin(n\varphi)]=\lim_{n\to\infty}\rho^n\cdot[\cos(\lim_{n\to\infty}n\varphi)+i\sin\lim_{n\to\infty}(n\varphi)]$$

Ponieważ

$$\rho^2=\left(\frac{x+n}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}=\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2},$$

przeto

$$\lim_{n\to\infty}\rho^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{2n}=e^{2x}$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\rho^n=e^x$$

Dalej możemy napisać

$$n\varphi=n\cdot\operatorname{tg}\varphi\cdot\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}$$

Ponieważ $\lim\operatorname{tg}\varphi=\lim_{n\to\infty}\dfrac{y}{n+x}=0$, przeto $\lim_{n\to\infty}\varphi=0$

A zatem

$$\lim_{n\to\infty}n\varphi=\lim_{n\to\infty}(n\cdot\operatorname{tg}\varphi)\cdot\lim_{\varphi=0}\left(\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot y}{n+x}\right)=y$$

A więc

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^x(\cos y+i\sin y)$$

Wyrażenie $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ oznaczamy przez e^z i uważamy je jako funkcję wykładniczą zmiennej zespolonej z.

A więc wzorem, określającym funkcję e^z, będzie

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)\quad\ldots\ldots\quad(40)$$

Przejdziemy teraz do rozważania własności podstawowych funkcji e^z, wypływających bezpośrednio ze wzoru (40) i przekonajmy się, że własności zasadnicze tej funkcji są analogiczne do własności funkcji e^x zmiennej rzeczywistej x. Wiadomo, że dla funkcji $f(x)=e^x$ zachodzi charakterystyczny wzór dodawania

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$$

Łatwo udowodnić, że dla funkcji $f(z)=e^z=e^{x+iy}$ również zachodzi wzór dodawania

$$f(z_1+z_2)=f(z_1)\cdot fz_2),$$

czyli

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}.$$

W samej rzeczy, na mocy wzoru, określającego funkcję e^z, możemy napisać

$$e^{z_1}=e^{x_1+iy_1}=e^{x_1}(\cos y_1+\mathrm{i}\sin y_1)$$
$$e^{z_2}=e^{x_2+iy_2}=e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)$$

Mnożąc ostatnie wzory stronami, otrzymamy

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)]=e^{z_1+z_2}$$

Jest to właśnie wzór, o którego dowód nam chodziło.

Udowodnijmy jeszcze wzór następujący:

$$(e^z)^m=e^{mz},$$

gdzie m jest pewną liczbą rzeczywistą

W myśl wzoru Moivre'a, będziemy mieli

$$(e^z)^m=(e^{x+iy})^m=[e^x(\cos y+i\sin y)]^m=e^{mx}(\cos my+i\sin my)$$

Z drugiej zaś strony, w myśl definicji funkcji e^z, mamy

$$e^{mx}(\cos my+i\sin my)=e^{mz}$$

A więc

$$(e^z)^m = e^{mz}$$

W myśl wzoru, określającego funkcję e^z, możemy każdej liczbie zespolonej nadać postać następującą:

$$u = \rho e^{i\theta}$$

Istotnie, jeżeli ρ i θ oznaczają odpowiednio moduł i argument liczby zespolonej u, to

$$u = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

Z drugiej zaś strony

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

Zestawiając wzory (41) i (42), otrzymamy

$$u = \rho e^{i\theta}$$

Udowodnijmy teraz, że funkcja $e^z = e^{x+iy}$ jest funkcją okresową, i że okres jej równa się $2\pi i$.

W samej rzeczy, w myśl definicji e^z możemy napisać

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x[\cos(y+2k\pi) + i\sin(y+2k\pi),$$

gdzie k jest to pewna liczba całkowitn (ujemna, dodatnia lub też zero).

Z drugiej zaś strony

$$e^x[\cos(y+2k\pi) + i\sin(y+2k\pi)] = ex+(y+2k\pi)i = z+2k\pi i$$

A zatem

$$e^z = ez + 2k\pi i$$

Stąd wnosimy, że e^z jest funkcją okresową o okresie 2π.

Niechaj $w=e^z$ oznacza funkcję zmiennej zespolonej $z=x+iy$

Oznaczmy

$$w = u + iv.$$

W myśl definicji funkcji e^z możemy napisać

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = u + iv$$

Stąd

$$u = e^x\cos y; \quad v = e^x\sin y.$$

Rozważmy obszar zmienności funkcji z i obszar zmienności funkcji w (Rys. 60).

W tym celu w obszarze (w) obieramy układ osi ou i ov; a w obszarze (z) układ osi ox, oy (Rys. 60). Punktowi o w obszarze z o spółrzędnych $x=0$; $y=0$ odpowiada w obszarze w punkt A o spółrzędnych $u=1$; $v=0$. Punktom na płaszczyźnie (z), położonym na osi ox, odpowiadają na płaszczyźnie (w) punkty, położone na prostej ou. Punktom płaszczyzny (z), położonym na prostej oy odpowiadają na płaszczyźnie (w) punkty o spółrzędnych

$$u = \cos y; \quad v = \sin y.$$

Ponieważ

$$u^2 + v^2 = 1,$$

przeto punktom płaszczyzny (z), położonym na osi oy odpowiadają na płaszczyźnie (w), punkty położone na okręgu koła, wykreślonego ze środka 0, o promieniu równym jedności.

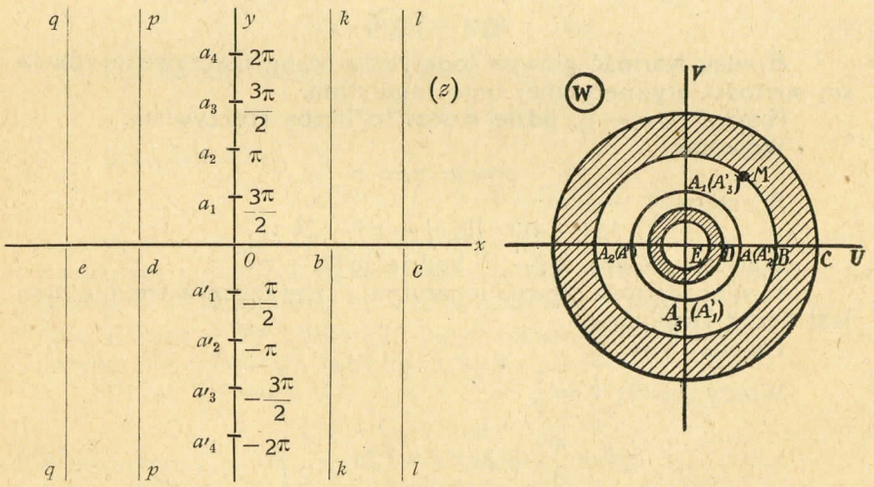
Punktom $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$ leżącym na płaszczyźnie (z) na osi oy w odległości

$$\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}\ 2\pi \ldots$$

od osi $0x$ odpowiadają na płaszczyźnie (w) punkty A_1, A_2, A_3, A_4.

Punktom $a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 \ldots$ położonym na osi oy w kierunku ujemnym odpowiadają na płaszczyźnie w punkty $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 \ldots$, przyczem punkt A'_1 pokrywa się z punktem A_3, punkt A'_2 z punktem A_2, punkt A'_1 z punktem A_3.

Punktowi b $(z=\alpha)$ odpowiada na płaszczyźnie (w) punkt B $(w=e^a)$. Punktom płaszczyzny (z), położonym na prostej bk, równoległej do osi oy, odpowiadają na płaszczyźnie (w) punkty, położone na okręgu koła o promieniu $oB=e^a$. Punktom płaszczyznyny (z), położonym wewnątrz pasa, utworzonego dwiema prostemi bkk, cll, odpowiadają na płaszczyźnie (w) punkty, położone wewnątrz pasa kołowego, ograniczonego dwoma okręgami kół o promieniach oB i oC. Punktom płaszczyzny (z), położonym na płaszczyźnie z wewnątrz pasa dpp, eqq odpowiadają na płaszczyźnie w punkty, położone wewnątrz pasa kołowego, ograniczonego dwoma okręgami kół o promieniach oD i oE.



Rys. 60.

§ **9. Funkcja logarytmowa zmiennej zespolonej**. Niechaj $z=x+iy$ oznacza zmienną zespoloną. Logarytmem zmiennej z nazywamy taką zmienną w, iż $e^w=z$. Oznaczmy tę funkcję symbolem $\lg z$.

Niechaj $w=u+iv$. Wtedy możemy napisać

$$e^w = e^{u+iv} = \rho e^{i\varphi},$$

gdzie ρ i φ są to odpowiednio moduł i argument zmiennej $e^w=z$.

Będziemy mieli

$$e^{i\varphi} = e^{(\varphi+2k\pi)i}$$

A zatem

$$e^w = \rho e^{i(\varphi + 2k\pi)}$$

Stąd

$$w = \lg\rho + i(\varphi + 2k\pi)$$

Z tego wzoru wypływa, że funkcja w jest funkcją wielowartościową przyczem każdej wartości na k odpowiada pewna wartość na w. Tę wartość na w, która odpowiada wartości $k = 0$, nazywamy główną wartością logarytmu z. Oznaczamy ją symbolem w_p.

Oczywista

$$w_p = \lg\rho + i\varphi$$

A więc

$$w = w_p + 2k\pi i$$

W przypadku szczególnym, gdy $z = a$ jest liczbą rzeczywistą, wówczas $\rho = a$; $\varphi = 0$.

A zatem

$$\lg a = [\lg a] + 2k\pi i,$$

gdzie przez $[\lg a]$ oznaczono wartość arytmetyczną logarytmu.

Wartość główna logarytmu liczby rzeczywistej będzie

$$\lg a = [\lg a]$$

A więc wartość główna logarytmu liczby rzeczywistej równa się wartości arytmetycznej tego logarytmu.

Niechaj $z = -a$, gdzie a jest to liczba rzeczywista.

Wówczas

$$\rho = a;\ \varphi = \pi$$

A zatem

$$\lg(-a) = [\lg a] + \pi i + 2k\pi i$$

Wartość główna $\lg(-a)$ będzie $\lg[a] + \pi i$.

A więc wartość główna logarytmu liczby rzeczywistej ujemnej jest liczbą zespoloną.

Niechaj $z = i$

Wtedy $\rho = 1$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\lg i = \frac{\pi}{2} i + 2k\pi i = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Wartość główna $\lg i = \frac{\pi}{2} i$

Ze wzoru (43) wypływa, że

$$i^i = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = e^{-\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi i}$$

Rozważmy jeszcze funkcję

$$W = z^m = (x + iy)^{a+bi}$$

Funkcję tę możemy określać za pomocą wzoru

$$W = e^{m \lg z} = e^{(a+bi)[\lg\rho + i(\varphi + 2k\pi)]},$$

gdzie ρ i φ są to odpowiednio moduł i argument liczby z. Oznaczając przez R i θ odpowiednio moduł i arpument zmiennej W, możemy napisać

$$W = Re^{i\theta} = e^{[a\lg\rho - b(\varphi + 2k\pi)] + i[b\lg\rho + a(\varphi + 2k\pi)]},$$

Stąd

$$R = e^{a\lg\rho - b(\varphi + 2k\pi)}$$

$$\theta = b\lg\rho + a(\varphi + 2k\pi) + 2l\pi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

gdzie l jest dowolną liczbą całkowitą.

Łatwo spostrzec, że funkcję z^m można otrzymać, posługując się wzorem Moivre,a.

W samej rzeczy, w myśl tego wzoru możemy napisać

$$W_1 = [\rho e^{i(\varphi + 2k\pi)}]^{a+bi} = \rho^{a+bi} \cdot e^{i(\varphi + 2k\pi)(a+bi)} =$$

$$= \rho^{a+bi} e^{(-b+ia)(\varphi + 2k\pi)}$$

t. j. $$W_1 = \rho^a e^{-b(\varphi + 2k\pi)} \cdot e^{i[b\lg\rho + a(\varphi + 2k\pi)]} = re^{i\psi},$$

gdzie

$$r = \rho^a \cdot e^{-b(\varphi + 2k\pi)} = e^{[a\lg\rho - b(\varphi + 2k\pi)]}$$

$$\psi = b\lg\rho + a(\varphi + 2k\pi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Zestawiając wzory (44) i (45), mamy

$$R = r;\ \theta = \psi + 2l\pi$$

Stąd wnosimy, że

$$W = Re^{i\theta} = re^{\psi + 2l\pi} = re^{i\psi} = W_1$$

Ponieważ obrazy geometryczne liczb zespolonych z i $ze^{2k\pi i}$ zlewają ze sobą, przeto istnieje nieskończenie wiele wartości na funkcję z^m. Wszystkie te wartości stanowią postęp geometryczny o ilorazu $e^{2\pi mi}$. Wartość na z, odpowiadającą wartości $k = 0$ nazywa się główną wartością funkcji z^m.

Moduł tej wartości

$$r = \rho^a \cdot e^{-b\varphi} = e^{a\lg\rho - b\varphi},$$

a argument

$$\psi = b\lg\rho + a\varphi$$

W przypadku szczególnym, gdy $z = 1$; $m = i$; mamy

$$\rho = 1;\ \varphi = 0;\ a = 0;\ b = 1$$

$$r = e^{-2k\pi};\ \psi = 0$$

Stąd wynika, że wszystkie wartości na 1^i są liczbami rzeczywistemi; główna zaś wartość na 1^i równa się jedności.

§ **10. Funkcje trygonometryczne zmiennej zespolonej.** Funkcje. trygonometryczne zmiennej zespolonej $z = x + iy$ określamy wzorami

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{-zi} - e^{zi}}{e^{-zi} + e^{zi}}; \quad \operatorname{cotg} z = i \cdot \frac{e^{-zi} + e^{zi}}{e^{zi} - e^{-zi}}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{zi} + e^{-zi}}; \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{zi} - e^{-zi}}$$

Łatwo spostrzec, że funkcje trygonometryczne zmiennej zespolonej są to funkcje okresowe o okresie 2π.

W samej rzeczy, w myśl wzorów, określających te funkcję, będziemy mieli

$$\sin(z + 2k\pi) = \frac{e^{(z+2k\pi)i} - e^{-(z+2k\pi)i}}{2i} = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = \sin z$$

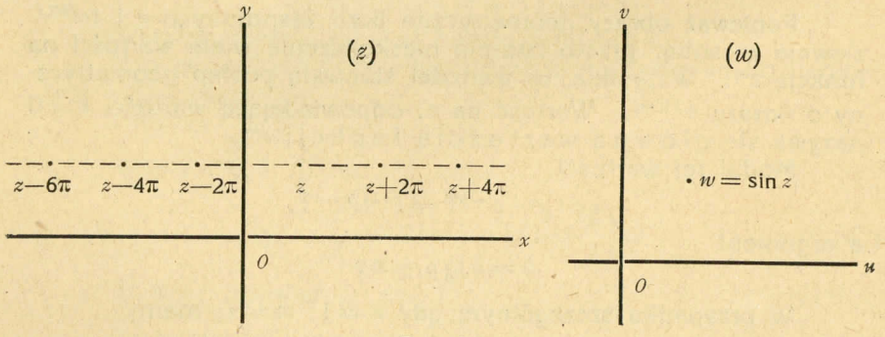
$$\cos(z + 2k\pi) = \frac{e^{(z+2k\pi)i} + e^{-(z+2k\pi)i}}{2} = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \cos z$$

$$\operatorname{tg}(z + 2k\pi) = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{-zi} - e^{zi}}{e^{-zi} + e^{zi}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{-zi} - e^{zi}}{e^{-zi} - e^{zi}} = \operatorname{tg} z$$

Stąd wnosimy, że każdemu punktowi na płaszczyznie (w) przedstawiającemu obraz geometryczny funkcji $w = \sin z$; $w = \cos z$; $w = \operatorname{tg} z$ i t. d. odpowiada na płaszczyźnie z nieskończenie wiele punktów

$$z - 4\pi; \quad z - 2\pi; \quad z + 2\pi; \quad z + 4\pi \quad \text{i t. d.}$$

Wszystkie te punkta leżą na prostej równoległej do osi ox na równych odległościach 2π. (Rys. 61).



Rys. 61.

Posługując się wzorem dodawania dla funkcji e^z

$$e^z \cdot e^{z_1} = e^{z_1 + z_2},$$

udowodnimy łatwo wzory dodawania dla funkcyj $\sin z$ i $\cos z$

Będziemy więc mieli

$$\begin{aligned} \sin(z + z_1) &= \sin z \cdot \cos z_1 + \sin z_1 \cdot \cos z \\ \cos(z + z_1) &= \cos z \cdot \cos z_1 - \sin z \cdot \sin z_1 \end{aligned} \quad \ldots \quad (46)$$

Zakładając we wzorach, określających funkcje $\sin z$ i $\cos z$ $x = 0$, otrzymamy

$$\sin iy = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i\,\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = \operatorname{sh} y$$

$$\cos iy = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} = \operatorname{ch} y$$

A więc sinus zmiennej zespolonej jest liczbą urojoną, natomiast cosinus zmiennej zsepolonej jest zawsze liczbą rzeczywistą.

Ze wzorów (46), określających funkcje $\sin z = \sin(x + iy)$ i $\cos z = \cos(x + iy)$, wynika, że

$$\cos z = \frac{e^{ix} \cdot e^{-y} + e^{-ix} \cdot e^{y}}{2} = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})(e^{y} + e^{-y}) - (e^{ix} - e^{-ix})(e^{y} - e^{-y})}{4} =$$

$$= \cos x \cdot \cos iy - \sin x \sin iy$$

$$\sin z = \frac{e^{ix} \cdot e^{-y} - e^{ix} e^{y}}{2i} = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})(e^{y} + e^{-y}) - (e^{ix} + e^{-ix})(e^{y} - e^{-y})}{4i} =$$

$$= \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$

Są to właśnie wzory „dodawania“ funkcyj $\sin z$ i $\cos z$.

Rozdział VII.

O nieskończonostkach.

§ **1. Określenia. Klasyfikacja nieskończonnostek.** Nieskończonostką nazywamy taką liczbą zmienną, której granicą jest zero, czyli innemi słowy taka liczba zmienna, która maleje nieograniczenie. Aby dokładniej wyrazić pojęcie o względnej wielkości dwóch nieskończonostek, rozróżniamy nieskończonostki różnych rzędów.

Dwie nieskończonostki β i γ uważamy za nieskończonostki jednego rzędu, jeżeli granica stosunku $\frac{\beta}{\gamma}$ jest liczbą stałą, nie równą zeru.

O nieskończonostce β mówimy, że jest nieskończonostką rzędu wyższego niż nieskończonostka γ, jeżeli granica stosunku $\frac{\beta}{\gamma}$ jest zerem.

Wśród nieskończonostek wybieramy nieskończonostkę α zagłówną i uważamy ją za nieskończonostkę pierwszego rzędu.

Nieskończonostkę γ uważamy za nieskończonostkę n-go rzędu, jeżeli granica stosunku $\frac{\gamma}{\alpha^n}$ jest liczbą stałą nie równą zeru. Oznaczamy to pisząc $rz_\alpha\ \gamma = n$.

W myśl podanej definicji możemy napisać.

$$\frac{\gamma}{\alpha^n} = C + \varepsilon,$$

czyli

$$\gamma = \alpha^n (C + \varepsilon) = C\alpha^n + \varepsilon\alpha^n,$$

gdzie ε jest nieskończonostką.

Wyraz $C\alpha^n$ nzywamy główną częścią nieskończonostki γ. Jest to właśnie nieskończonostka tegoż samego rzędu co i nieskończnostka γ. Różnica zaś pomiędzy nieskończonostką γ a jej główną częścią jest nieskończonostką rzędu wyższego niż γ.

Przykłady 1. Nieskończonostka

$$\beta = 3\alpha^3 + 2\alpha^4$$

jest trzeciego rzędu względem α, gdyż $\lim_{\alpha=0} \frac{\beta}{\alpha} = 3$.

2. Nieskończonostka $\beta = \sqrt[5]{2\alpha^3}$

jest rzędu $\frac{3}{5}$ względem α, gdyż $\lim_{\alpha=0} \frac{\beta}{\alpha^{\frac{3}{5}}} = \sqrt[5]{2}$

3. Nieskończonostka $\beta = \sin 3\alpha$

jest pierwszego rzędu względem α, gdyż $\lim_{\alpha=0} \frac{\beta}{\alpha} = 3 \lim_{\alpha=0} \left(\frac{\sin 3\alpha}{3\alpha}\right) = 3$.

4. Nieskończonostka $\beta = 1 - \cos\alpha$

jest drugiego rzędu względem α, gdyż $\lim_{\alpha=0} \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{1}{2} \lim_{\alpha=0} \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$

§ **2. Twierdzenia podstawowe o nieskończonostkach.** Udowodnijmy teraz kilka twierdzeń podstawowych o nieskończonostkach.

Twierdzenie I. Rząd iloczynu nieskończonostek w liczbie skończonej względem głównej nieskończonostki α równa się sumie rzędów wszystkich czynników iloczynu względem nieskończonostki α.

Dowód. Niechaj β_1 i β_2 oznaczają nieskończonostki odpowiednio rzędu m_1 i m_2.

Wtedy możemy napisać

$$\beta_1 = \alpha^{m_1}(C_1 + \varepsilon_1); \quad \beta_2 = \alpha^{m_2}(C_2 + \varepsilon_2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gdzie ε_1 i ε_2 są to pewne nieskończonostki a C_1 i C_2 — liczby stałe

Mnożąc wzory (2) stronami, otrzymamy

$$\beta_1 . \beta_2 = \alpha^{m_1 + m_2}(C_1C_2 + C_1\varepsilon_2 + C_2\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) = \alpha^{m_1 + m_2}(C + \varepsilon),$$

gdzie C jest liczbą stałą a ε nieskończonostką.

Z ostatniego wzoru wnosimy, że

$$\lim_{\alpha=0}\left(\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha^{m_1+m_2}}\right) = C.$$

A zatem iloczyn $\beta_1\beta_2$ jest to nieskończonostka rzędu $m_1 + m_2$.

Twierdzenie powyższe zachodzi dla iloczynu ilukolwiek nieskończonostek.

Twierdzenie II. Suma algebraiczna nieskończonostek jednego i tego samego rzędu m w liczbie skończonej jest nieskończonostką rzędu $k \geqslant m$,

Dowód. Niechaj Ω oznacza sumę algebraiczną n nieskończonostek $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$ rzędu m względem głównej nieskończonostki α

$$\Omega = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_n$$

Możemy więc napisać

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha^m (C_1 + \varepsilon_1) \\ \beta_2 &= \alpha^m (C_2 + \varepsilon_2) \\ \beta_3 &= \alpha^m (C_3 + \varepsilon_3) \quad \dots\dots\dots \quad (3) \\ &\dots\dots\dots \\ \beta_n &= \alpha^m (C_n + \varepsilon_n), \end{aligned}$$

gdzie $C_1, C_2, C_3 \dots C_n$ są to liczby stałe, zaś $E_1, E_2, E_3 \dots E_n$ — nieskończonostki.

Dodając wzory (3) do siebie stronami, dostaniemy

$$\Omega = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_n = \alpha^m (C_1 + C_2 + C_3 + \cdots C^n) = \alpha^m (C + E),$$

gdzie C jest liczbą stałą a E nieskończonostką.

W tym przypadku gdy $C \gtrless 0$, wówczas Ω będzie nieskończonostką rzędu m.

Jeżeli zaś $C = 0$, wówczas Ω będzie nieskończonostką rzędu wyższego od m.

A na tem właśnie polega twierdzenie, o którego dowód chodziło.

Twierdzenie III. Rząd sumy algebraicznej nieskończonostek różnych rzędów w liczbie skończonej równa się najmniejszemu rzędowi danych nieskończonostek.

Dowód. Niechaj Ω oznacza sumę algebraiczną

$$\Omega = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_n$$

nieskończostek $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \cdots \beta_n$, których rzędy będą odpowiednio $m_1, m_2, m_3 \cdots m_n$.

Przypuśćmy, że

$$m_1 < m_2 < m_3 \cdots < m_n$$

Możemy napisać

$$\Omega = \beta_1 \left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_2} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_4}{\beta_3} \cdot \frac{\beta_3}{\beta_2} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} + \cdots + \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} \cdot \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} \cdots \frac{\beta_3}{\beta_2} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = \beta_1 (1 + \omega),$$

gdzie przez ω oznaczono sumę

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_3}{\beta_2} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_4}{\beta_3} \cdot \frac{\beta_3}{\beta_2} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} + \cdots + \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} \cdot \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n+2}} \cdots \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

Oznaczmy przez ξ największą z liczb

$$\left|\frac{\beta_2}{\beta_1}\right|; \left|\frac{\beta_3}{\beta_1}\right| \cdots \left|\frac{\beta_n}{\beta_1}\right|$$

Możemy wtedy napisać nierówność

$$|\omega| < \xi + \xi^2 + \xi^3 + \cdots + \xi^{n-1}$$

Biorąc pod uwagę, że suma S postępu geometrycznego o nieskończonej liczbie wyrazów

$$S = \xi + \xi^2 + \xi^3 + \cdots + \xi^n + \cdots > |\omega|,$$

mamy a fortiori

$$|\omega| < \frac{\xi}{1 - \xi}$$

Stąd wnosimy, że ω jest nieskończonostką.

A zatem

$$\lim \frac{\Omega}{\beta_1} = 1.$$

to jest nieskończonostki Ω i β_1 są jednego rzędu.

Dowiedliśmy więc naszego twierdzenia w zupełności.

Przykłady 1. Znajdźmy rzęd nieskończonostki

$$\beta = \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha$$

Będziemy mieli

$$rz_\alpha \beta = rz_\alpha \left(2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) = rz_\alpha \operatorname{tg} \alpha + rz_\alpha \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) = 1 + 2 = 3.$$

2. Znajdźmy rząd nieskończonostki

$$\beta = \operatorname{tg}^3 \alpha - \sin^3 \alpha$$

Możemy napisać

$$\operatorname{tg}^3 \alpha - \sin^3 \alpha = (\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha)(\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha + \sin^2 \alpha)$$

Przeto

$$rz_\alpha \beta = rz_\alpha (\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha) + rz_\alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha + \sin^2 \alpha)$$

Mamy

$$rz_\alpha (\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha) = 3 \quad \text{(przykł. 1).}$$

$$rz_\alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha) = 2$$

A zatem

$$rz_\alpha \beta = 3 + 2 = 5.$$

3. Znajdźmy rząd nieskończonostki

$$\beta = 2 \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha$$

Będziemy mieli

$$rz_\alpha \beta = rz_\alpha [\operatorname{tg} \alpha + (\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha)]$$

Ponieważ

$$rz_\alpha (\operatorname{tg} \alpha) = 1; \quad rz_\alpha (\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha) = 3,$$

przeto

$$rz_\alpha \beta = 1.$$

§ 3. O nieskończonostkach wzajemnie równoważnych.

Dwie nieskończonostki β i γ jednego i tego samego rzędu nazywamy wzajemnie równoważnemi, jeżeli granica stosunku $\frac{\beta}{\gamma}$ równa się jedności

W myśl tej definicji możemy napisać

$$\frac{\beta}{\gamma}=1+\varepsilon,$$

czyli

$$\beta=\gamma(1+\varepsilon), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

gdzie ε jest nieskończonostką.

Wzór (4) stanowi ogólne wyrażenie na nieskończonostkę β równoważną z nieskończonostką γ.

Ponieważ

$$\lim\frac{\beta-\gamma}{\gamma}=\lim\varepsilon=0$$

$$\lim\frac{\beta-\gamma}{\beta}=\lim\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}=0,$$

przeto różnica $\beta-\gamma$ jest to nieskończonostka rzędu wyższego niż β i γ.

A więc możemy podać definicję następującą:

Dwie nieskończonostki β i γ nazywamy wzajemnie równoważnemi, jeżeli różnica $\beta-\gamma$ jest nieskończonostką rzędu wyższego niż β i γ.

Jako przykład nieskończonostek wzajemnie równoważnych mogą służyć nieskończonostki

$$\alpha,\ \sin\alpha,\ \operatorname{tg}\alpha,\ \arcsin\alpha \text{ i t. d.}$$

Udowodnijmy teraz dwa twierdzenia podstawowe o nieskończonostkach wzajemnie równoważnych.

Twierdzenie I. Granica stosunku dwóch danych nieskończonostek równa się granicy stosunku nieskończonostek odpowiednio równoważnych z danemi nieskończonostkami.

Dowód. Niechaj β i γ oznaczają dwie nieskończonostki, a β_1 i γ_1 nieskończonostki odpowiednio równoważne z β i γ. Wówczas możemy napisać

$$\beta_1=\beta(1+\varepsilon);\quad \gamma_1=\gamma(1+\varepsilon_1), \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

gdzie ε i ε_1 są to nieskończonostki.

Ze wzorów (5) otrzymujemy

$$\frac{\beta_1}{\gamma_1}=\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_1}$$

W granicy zaś mamy

$$\lim\frac{\beta_1}{\gamma_1}=\lim\frac{\beta}{\gamma}\cdot\lim\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_1}=\lim\frac{\beta}{\gamma}$$

A więc wypowiedziane twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Udowodnione twierdzenie możemy jeszcze wysłowić w sposób następujący:

Granica stosunku dwóch nieskończonostek nie zmieni się, jeżeli nieskończonostki te zastąpimy innemi, różniącemi się odpowiednio od danych o nieskończonostki wyższego rzędu.

Twierdzenie II. Granica sumy danych nieskończonostek w liczbie nieskończonej, równa się granicy sumy nieskończonostek odpowiednio równoważnych z danemi pod warunkiem, że granica sumy wartości bezwzględnych danych nieskończonostek jest liczbą skończoną.

Dowód. Niechaj

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3\ldots\beta_n\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

będą nieskończonostki dane, a

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3\ldots\gamma_n\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

nieskończonostki odpowiednio równoważne z nieskończostkami (6)

Przypuśćmy, że suma wartości bezwzględnych danych nieskończonostek (6)

$$|\beta_1|;\quad |\beta_2|;\quad |\beta_3|;\quad \ldots|\beta_n|\ldots$$

ma granicę skończoną Q

W myśl definicji nieskończonostek wzajemnie równoważnych możemy napisać bez względu na liczbę całkowitą i,

$$\gamma_i=\beta_i(1+\varepsilon_i)=\beta_i+\beta_i\varepsilon_i, \qquad (i=1, 2, 3\ldots n)$$

gdzie ε_i są to nieskończonostki

Będziemy więc mieli

$$\sum_{i=1}^{i=n}\gamma_i=\sum_{i=1}^{i=n}\beta_i+\sum_{i=1}^{i=n}\varepsilon_i\beta_i \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

W granicy zaś przy $n=\infty$ możemy napisać

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n}\gamma_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n}\beta_i+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n}\varepsilon_i\beta_i$$

Oznaczając przez e i E odpowiednio najmniejszą i największą wartość nieskończonostek ε_i, możemy napisać nierówności

$$0<\left|\sum_{i=1}^{i=n}\varepsilon_i\beta_i\right|\leq\sum_{i=1}^{i=n}|\varepsilon_i|\cdot|\beta_i|$$

Ponieważ

$$e\sum_{i=1}^{i=n}|\beta_i|<\sum_{i=1}^{i=n}|\varepsilon_i|\cdot|\beta_i|<E\sum_{i=1}^{i=n}|\beta_i| \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

a nadto

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n}|\beta_i| = Q \text{ (liczba skończona),}$$

przeto

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n}|\varepsilon_i|\cdot|\beta_i| = 0$$

Uwzględniając zaś nierówności (9) stwierdzamy, że

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n}\varepsilon_i\,\beta_i = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Zestawiając wzory (8) i (10), wnosimy, że

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n}\beta_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n}\gamma_i$$

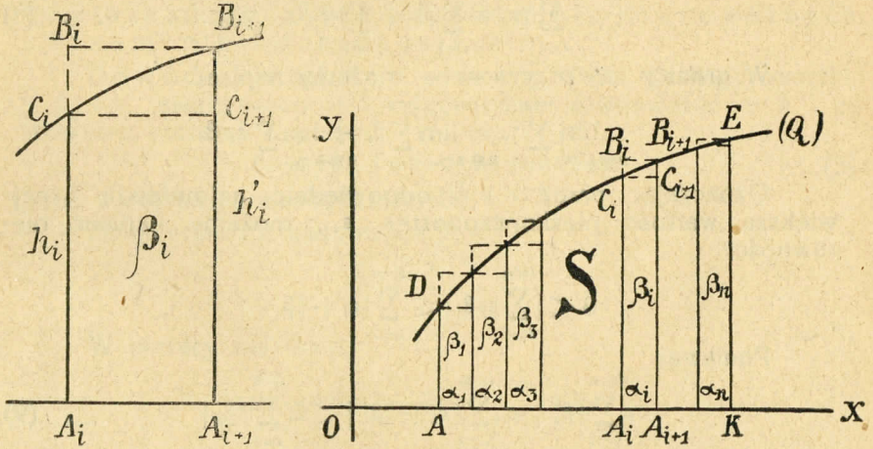
A na tem właśnie polega twierdzenie, o którego dowód chodziło.

Udowodnione twierdzenie daje się wysłowić jeszcze w sposób następujący:

Granica sumy nieskończonostek, w liczbie nieskończonej, nie zmieni się, jeżeli te nieskończonostki zastąpimy innemi, różniącemi się odpowiednio od danych o nieskończonostki wyższego rzędu, pod warunkiem, że granica sumy wartości bezwzględnych danych nieskończonostek jest liczbą skończoną.

Zastosujmy drugie twierdzenie podstawowe o nieskończonostkach wzajemnie równoważnych do obliczania pól krzywych płaskich.

§ 4. **Obliczenie pól krzywych płaskich.** Niechaj będzie dana pewna krzywa (Q) (Rys. 62).



Rys. 62.

Obliczmy pole S, zawarte pomiędzy odcinkiem AK osi odciętych, krzywą Q i dwiema rzędnemi AD i KE.

Podzielmy podstawę AK pola S na n części

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha\ \ldots\ \alpha_n$$

i przez punkty podziału poprowadźmy proste, równoległe do osi OY. W ten sposób dzielimy pole S na n części

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots\ \beta_i\ \ldots\ \beta_n\,.$$

Przypuśćmy, że liczba n rośnie nieograniczenie. Wówczas wielkości $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ dążą do zera, przyczem suma ich równa się S.

Rozważmy pola nieskończenie małych prostokątów, opisanych i wpisanych w elementy pola S.

Oznaczając przez S_i i δ_i odpowiednio pole nieskończenie małych prostokątów $A_i A_{i+1} B_{i+1} B_i$ i $A_i A_{i+1} C_{i+1} C_i$ o podstawie $A_i A_{i+1} = \alpha_i$ (Rys. 62).

Będziemy mieli

$$S_i = \alpha_i\, A_i\, B_i = \alpha_i\, h'_i$$
$$\delta_i = \alpha_i\, A_{i+1}\, B_{i+1} - \alpha_i\, h'_i$$

Stąd

$$\delta_i - S_i = \alpha_i\,(h'_i - h'_i\,).$$

Jeżeli liczba n rośnie nieograniczenie, wówczas różnica $h'_i - h_i$ maleje nieograniczenie, t. j. będzie nieskończonostką. A zatem różnica δ_i i S_i będzie nieskończonostką rzędu wyższego niż nieskończonostki δ_i i S_i

$$\delta_i - \beta_i < \delta_i - S_i$$
$$\delta_i - S_i < \delta_i - S_i$$

Przeto nieskończonostki $\delta_i - \beta_i$ i $\beta_i - S_i$ będą rzędu wyższego niż δ_i, S_i i β_i. Stąd wnosimy, że nieskończonostki δ_i, β_i i S_i są wzajemnie równoważne.

W myśl drugiego twierdzenia zasadniczego o nieskończonostkach wzajemnie równoważnych możemy napisać

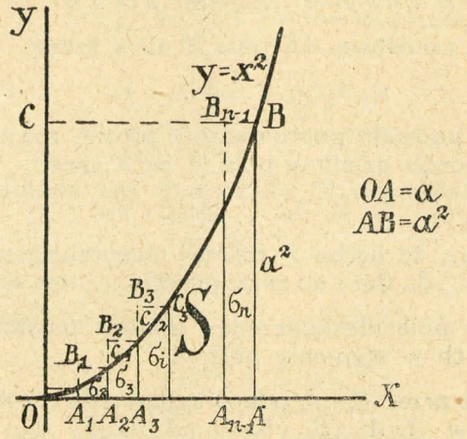
$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n}\beta_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n}\delta_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n}S_i$$

A więc pole S krzywej (Q) można uważać, jako granicę pól prostkątów, wpisanych lub opisanych dokoła krzywej (C), pod warunkiem, że liczba owych prostokątów rośnie nieograniczenie.

Przykład. Obliczmy pole, zawarte między osią odciętych, parabolą, określoną równaniem,

$$y = x^2$$

a rzędną AB (Rys. 63).



(Rys. 63.

Podzielmy odcinek $OA=a$ na n części równe. Wówczas długość każdego odcinka $A_{i-1}\ A_i=\frac{a}{n}$

Rzędne, odpowiadające punktom 0, A_1, A_2, A_3, ... A_i ... A_n, będą odpowiednio

$$0;\ \frac{a^2}{n^2},\ \frac{4a^2}{n^2},\ \frac{9a^2}{n^2}\cdots\frac{i^2a^2}{n^2}\cdots a^2$$

Pola δ_i prostokątów, opisanych dokoła paraboli, będą odpowiednio

$$\frac{a^3}{n^3};\ \frac{4a^3}{n^3},\ \frac{9a^3}{n^3}\cdots\ \frac{i^2a^3}{n^3}\cdots\ \frac{n^2a^3}{n^3}$$

Suma tych pól będzie

$$\sum_{i=n}^{i=n}\delta_i=a^3\cdot\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots n^2}{n^3}$$

W myśl drugiego twierdzenia podstawowego o nieskończonostkach wzajemnie równoważnych będziemy mieli

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n}\delta_i=a^3\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}\right]=\frac{a^3}{3},$$

czyli

$$S=\frac{1}{3}P,$$

gdzie P jest to pole prostokąta $OABC$.

Rozdział VIII.

Pochodne i różniczki funkcji jednej zmiennej niezależnej.

§. **1. Pochodne.** Niechaj $y=f(x)$ oznacza pewną funkcję zmiennej niezależnej x. Dajmy na to, że zmienna x przybiera wartość szczególną $x=x_0$. Nadajmy zmiennej x przyrost dowolny $\Delta x_0=h$; wówczas funkcja y nabywa przyrost

$$\Delta y=f(x_0+h)-f(x_0)$$

Dzieląc przyrost funkcji Δy przez przyrost zmiennej niezależnej Δx_0, otrzymamy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Stosunek przyrostów funkcji y i zmiennej niezależnej x zależy tak x_0, jak od h. Dajmy na to, że przyrost h dąży do zera. Granicę ułamku $\frac{\Delta y}{\Delta x_0}$ (skoro owa granica istnieje) nazywamy pochodną funkcji $y=f(x)$ dla $x=x_0$.

Rozróżniamy pochodne prawostronne i lewostronne.

Pochodną prawostronną funkcji $y=f(x)$ dla $x=x_0$ nazywamy wyrażenie

$$y'_{(P)}=\lim_{h=0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right]$$

Pochodną lewostronną funkcji $y=f(x)$ dla $x=x_0$ nazywamy wyrażenie

$$y'_{(l)}=\lim_{h=0}\left[\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]=\lim_{h=-0}\left[\frac{f(x_0-h)-f(x)}{h}\right]$$

W tym przypadku, gdy obie pochodne są sobie równe, t. j. gdy

$$\lim_{h=0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right]=\lim_{h=0}\left[\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right],$$

wówczas powiadamy, że funkcja $y=f(x)$ posiada dla $x=x_0$ obustronną pochodną lub wprost pochodną. Funkcję taką nazywamy różniczkowalną w punkcie $x=x_0$.

Pochodną jej oznaczamy symbolem

$$y' = f(x) = \lim_{h=0}\left[\frac{f(x_0+h) - fx_0)}{h}\right],$$

O funkcji $y = f(x)$ mówimy, że jest różniczkowalną w pewnym przedziale (a, b), jeżeli owa funkcja jest różniczkowalną dla wszystkich wartości na x, należących do tego przedziału.

Przykłady 1. Niechaj $y = f(x)$ oznacza funkcję, która dla $x = 0$ równa się zeru, a dla $x \gtrless 0$ równa się $x\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$.

A więc

$$f(0) = 0 \qquad f(h) = h\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{h}$$

Stąd wnosimy, że dla $x = 0$ pochodna prawostronna danej funkcji będzie

$$y'_{(P)} = \lim_{h=+0}\left[\frac{f(x)}{h}\right] = \lim_{h=+0}\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{h} = \frac{\pi}{2},$$

a pochodna lewostronna dla tej samej wartości $x = 0$

$$y'_{(l)} = \lim_{h=-0}\left[\frac{f(x)}{h}\right] = \lim_{h=-0}\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{h} = -\frac{\pi}{2}$$

2. Niechaj $y = f(x)$ oznacza funkcję zmiennej niezależnej x, która spełnia warunki następujące:

1. Dla wartości szczególnej $x = 0$; $y = 0$; dla wartości zaś $x \gtrless 0$ funkcja

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

Mamy więc według umowy

$$f(0) = 0 \qquad f(h) = \frac{h}{1 + e^{\frac{1}{h}}}$$

Przeto dla $x = 0$

$$y'_{(P)} = \lim_{h=+0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] = \lim_{h=+0}\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}} = 0$$

pochodna zaś

$$y'_{(l)} = \lim_{h=-0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] = \lim_{h=-0}\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}} = 1$$

A więc dla wartości $x = 0$ pochodne lewostronna i prawostronna danej funkcji nie są sobie równe.

Przypuśćmy, że funkcja $y = f(x)$ posiada dla pewnej wartości na x jedną pochodną (obustronną).

Wówczas będziemy mieli

$$f'(x) = \lim_{h=0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] = \lim_{h=0}\left[\frac{f(x-h) - f(x)}{-h}\right]$$

Stąd

$$\left[\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}\right] = \varepsilon$$

czyli

$$f(x+h) - f(x-h) = h \cdot \varepsilon = \omega, \quad \ldots \quad (1)$$

gdzie ω jest nieskończonostką.

Z wyrażenia (1) wnosimy, że $f(x)$ powinna być ciągłą dla pewnej wartości na x, skoro dla tej wartości owa funkcja posiada jedną jedyną pochodną. Godnem jest uwagi, że nie każda funkcja ciągła posiada jedną jedyną pochodną (obustronną). Rozważmy, jako przykład funkcji ciągłej, lecz nie posiadającej jednej pochodnej, określonej w zupełności, funkcję

$$y = x\left[\frac{1}{x}\right],$$

gdzie symbolem $\left[\frac{1}{x}\right]$ oznaczono największą liczbę całkowitą, nie większą od $\frac{1}{x}$. Funkcja $\left[\frac{1}{x}\right]$, jak wiadomo, będąc ciągłą dla $x = 0$, doznaje jednak w otoczeniu punktu $x = 0$ nieskończenie wiele przerw.

Łatwo przekonać się, że funkcja ta nie posiada określonej w zupełności pochodnej (obustronnej) przy $x = 0$.

Istotnie, w danym przypadku możemy napisać

$$f(0) = 1; \quad f(h) = h\left[\frac{1}{h}\right]$$

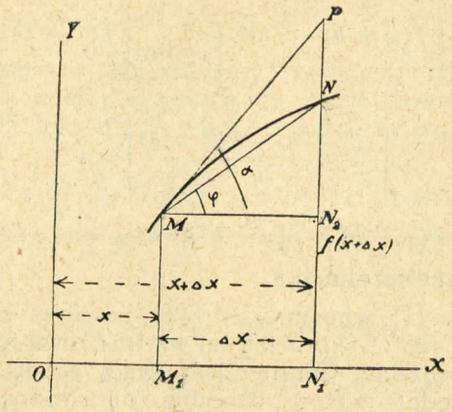
Przeto dla $x = 0$ będzie

$$f'(x) = \lim_{h=0}\left[\frac{f(h) - f(0)}{h}\right] = \lim_{h=0}\left\{\left[\frac{1}{h}\right] - \frac{1}{h}\right\}$$

Ponieważ funkcja $\left[\frac{1}{h}\right] - \frac{1}{h}$ waha się wciąż pomiędzy 0 a 1, nie dążąc do żadnej określonej granicy, przeto funkcja $f(x)$ nie posiada dla $x = 0$ określonej w zupełności pochodnej (obustronnej), aczkolwiek jest funkcją ciągłą dla $x = 0$.

§ **2. Geometryczna interpretacja pochodnej.** Niechaj wykresem funkcji różniczkowalnej $y = f(x)$ będzie pewna krzywa (Rys. 64).

Obieramy na tej krzywej punkt M o spółrzędnych x, y i punkt N o spółrzędnych $x+\Delta x$, $y+\Delta y$.



Rys. 64.

Będziemy mieli

$$\Delta x = M_1N_1 = MN_2;\ f(x) = MM_1;\ f(x+\Delta x) = NN_1$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = NN_1 - MM_1 = NN_2 \quad . \quad . \quad (2)$$

Z drugiej zaś strony z trójkąta MNN_2 wypływa, że

$$NN_2 = MN_2 \operatorname{tg}\varphi = \Delta x \,.\, \operatorname{tg}\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

gdzie φ jest to kąt, który tworzy sieczna MN z osią $0x$.

Ze wzorów (2) i (3) otrzymujemy

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x \,.\, \operatorname{tg}\varphi$$

A zatem

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg}\varphi$$

Gdy przyrostek Δx zmniejszamy nieograniczenie, wówczas punkt N zbliża się do punktu M, a sieczna MN obraca się dokoła punktu M.

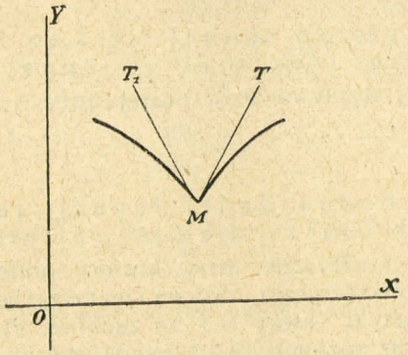
W granicy przy $\Delta x = 0$ mamy

$$f'(x) = \lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} \lim_{\Delta x=0} \varphi = \operatorname{tg}\alpha$$

Prostą MT, która tworzy z osią $0x$ kąt α będzie styczną do krzywej w punkcie M.

A więc wartość na pochodną funkcji $y=f(x)$ dla pewnej wartości na zmienną niezależną x równa się tangensowi kąta, który tworzy styczna do krzywej $y=f(x)$ w punkcie, odpowiadającym owej wartości na x.

W tym przypadku, gdy funkcja $y=f(x)$ dla pewnej wartości na x posiada prawostronną i lewostronną pochodną, nie równe sobie, wówczas krzywa $y=f(x)$ posiada w odpowiednim punkcie M dwie różne styczne MT i MT_1 (Rys. 65), czyli innemi słowy punkt M będzie punktem kątowym.



Rys. 65.

§ **3. Różniczka funkcji.** Niechaj

$$y' = f'(x)$$

oznacza pewną funkcję różniczkowalną zmiennej niezależnej x.

Pochodna tej funkcji

$$y' = \lim_{\Delta x=0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

A zatem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

gdzie ε jest to nieskończonostka.

Możemy więc napisać

$$\Delta y = f'(x) \,.\, \Delta x + \varepsilon \Delta x$$

Iloczyn z pochodnej funkcji przez przyrostek zmiennej niezależnej nazywa się r ó ż n i c z k ą funkcji y i oznacza i się symbolem dy.

A więc

$$f'(x)\,\Delta x = dy$$

Widzimy, że

$$\Delta y = dy + \varepsilon \Delta x$$

to jest p r z y r o s t e k f u n k c j i r ó ż n i s i ę o d r ó ż n i c z k i t e j f u n k c j i o n i e s k o ń c z o n o s t k ę r z ę d u w y ż s z e g o, n i ż p r z y r o s t e k z m i e n n e j n i e z a l e ż n e j Δy, c z y l i i n n e m i s ł o w y p r z y r o s t e k f u n k c j i i j e j r ó ż n i c z k a s ą t o n i e s k o ń c z o n o s t k i w z a j e m n i e r ó w n o w a ż n e.

Geometrycznie różniczka funkcji $y=f(x)$ przedstawia się jako odcinek PN_2 rzędnej, odpowiadającej odciętej $x+\Delta x$, zawarty pomiędzy punktem N_2 a styczną do krzywej w punkcie M (Rys. 64).

Załóżmy

$$y = f(x) = x$$

Wówczas

$$dy = \Delta x = dx$$

A więc

$$dy = y'dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

To jest różniczka funkcji jest to iloczyn z jej pochodnej przez różniczkę zmiennej niezależnej.

Ze wzoru (2) wypływa wzór następujący:

$$y = \frac{dy}{dx}$$

A więc pochodna danej funkcji jest to stosunek różniczek funkcji i zmiennej niezależnej.

Działanie matematyczne, przy którem obliczamy pochodną funkcji względnie jej różniczki, nazywa się różniczkowaniem.

Dział matematyki, który ma za zadanie ustalenie prawideł różniczkowania oraz różnych zastosowań metody różniczkowania do badania własności funkcji analitycznych, nazywa się zwykle Rachunkiem różniczkowym.

Rachunek różniczkowy jest zdobyczą końca XVII wieku. Jakkolwiek już matematycy francuscy początku XVII wieku jak to Pascal, Fermat i Descartes posługiwali się przy rozwiązywaniu niektórych zagadnień matematycznych metodami zbliżonemi do metody rachunku różniczkowego, to jednak zasługa stworzenia tej metody należy się Leibniz'owi i Newtonowi. Ci dwaj słynni matematycy, wychodząc z różnych założeń, prawie jednocześnie przyszli do jednych i tych samych rezultatów. Problem określenia i wyznaczenia stycznej naprowadził Leibniza na myśl stworzenia pojęcia różniczki. Newton natomiast przyszedł do pojęcia pochodnej przy badaniach mechanicznych, uważając pochodną jako prędkość ruchu.

Rozwój zasad Rachunku różniczkowego zawdzięczamy szczególnie matematykom wieku XIX, a mianowicie Lagrange'owi, Riemann'owi, Gauss'owi Weierstrass'owi i Cauchy'emu. Prace owych matematyków w dziedzinie Analizy nieskończenie małych otworzyły nowe tory w metodach badania własności funkcji analitycznych oraz wywarły wybitny wpływ na rozwój innych gałęzi wiedzy ścisłej, opartych na zasadach matematycznych.

§ 4. Twierdzenia zasadnicze rachunku różniczkowego.

Niechaj będzie

$$y = f(x) = c,$$

gdzie c jest stałą.

Będziemy wtedy mieli

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

i

$$dy = y'\,dx = 0.$$

A więc możemy wysłowić twierdzenie następujące:

I. Pochodna ilości stałej, oraz jej różniczka, równa się zeru.

Rozważmy sumę algebraiczną

$$y = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

n funkcji u_1, u_2, u_3, . . . u_n zmiennej niezależnej x.

Oznaczając przez Δu_k przyrost funkcji u_k, odpowiadający przyrostowi $\Delta x = h$ zmiennej niezależnej x, możemy napisać wyrażenie na przyrost funkcji

$$\Delta y = (u_1 + \Delta u_1) + (u_2 + \Delta u_2) + \cdots + (u_n + \Delta u_n) - (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \\ = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \cdots + \Delta u_n .$$

A zatem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \frac{\Delta u_2}{\Delta x} + \cdots \frac{\Delta u_n}{\Delta x}$$

W granicy przy $\Delta x = 0$ będziemy mieli

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta u_2}{\Delta x} \right) + \cdots + \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta u_n}{\Delta x} \right),$$

czyli

$$y' = u'_1 + u'_2 + \cdots + u'_n$$

Mnożąc przez dx obie części ostatniego wzoru, otrzymamy wzór

$$dy = y'dx = du_1 + du_2 + \cdots + du_n .$$

A więc możemy wysłowić twierdzenie następujące:

II. Pochodna (względnie różniczka) sumy algebraicznej funkcji równa się sumie algebraicznej pochodnych (względnie różniczek) tych funkcji.

Dajmy na to, że funkcja

$$u_2 = u_1 + c, \text{ gdzie } c \text{ jest stałą.}$$

Wtedy

$$u'_2 = u'_1 \quad \text{i} \quad du_2 = du_1.$$

A więc dwie funkcje których różnica jest stała, mają pochodne (względnie różniczki) równe sobie.

Niechaj y oznacza iloczyń dwóch funkcji u i v zmiennej niezależnej x

$$y = uv.$$

Gdy zmienna niezależna x nabywa przyrostek Δx_1, wówczas funkcje u i v nabywają odpowiednio przyrostki Δu i Δv.

Przyrostek funkcji y będzie

$$\Delta y = (u + \Delta u)\,(v + \Delta v) - u.v = v.\,\Delta u + u\Delta v + \Delta u.\,\Delta v.$$

Dzieląc przyrostek Δy przez Δx, dostaniemy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v.\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

W granicy przy $\Delta x = 0$ będziemy mieli

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v . \lim \frac{\Delta u}{\Delta v} + u . \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x=0} \Delta v . \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

czyli

$$y' = v . u' + uv' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Mnożąc przez dx, otrzymamy

$$y' dx = dy = vdu + udv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

A więc możemy wysłowić twierdzenie następujące:

III. Pochodna (względnie różniczka) iloczynu dwóch funkcji jednej i tej samej zmiennej niezależnej równa się iloczynowi pochodnej (względnie różniczki) pierwszego czynnika przez drugi + iloczyn pochodnej (względnie różniczki) drugiego czynnika przez pierwszy.

Wzory (3) i (4) można napisać w postaci następującej:

$$y' = uv \left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} \right); \quad dy = uv . \left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} \right).$$

Niechaj będzie dana funkcja

$$y = u . v . w$$

gdzie u, v, w są to pewne funkc,e zmiennej niezależnej x.

Wtedy możemy napisać w myśl wzoru (3)

$$y' = u . (v . w) = u' . (v . w) + u . (v . w)' = u' v . w + uv' w + uv . w' =$$

$$= u . v . w \left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} \right)$$

Różniczka zaś

$$dy = v . w . du + u . w\, dv + u . v\, dw = u . v . w \left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} \right)$$

Wzory (3) i (4) będą zachodziły w tym przypadku, gdy funkcja y będzie iloczynem wielu czynników $u_1, u_2 \ldots u_n$.

Jeżeli więc

$$y = u_1 . u_2 . u_3 \ldots u_n ,$$

wówczas

$$y' = u_1 . u_2 . u_3 \ldots u_n \left[\frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \frac{u'_3}{u_3} + \cdots + \frac{u'_n}{u_n} \right]$$

$$dy = u_1 . u_2 . u_3 \ldots u_n \left[\frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \frac{du_3}{u_3} + \cdots + \frac{du_n}{u_n} \right]$$

W przypadku szczególnym, gdy $y = Au$ (gdzie A jest to spółczynnik stały), będziemy mieli

$$y' = Au'; \quad dy = Adu$$

A więc pochodna (względnie różniczka) iloczynu funkcji przez liczbę stałą równa się iloczynowi pochodnej, (względnie różniczki) funkcji przez tą samą liczbę stałą.

Niechaj y będzie ilorazem dwóch funkcyj u i v zmiennej niezależnej x

$$y = \frac{u}{v}$$

Możemy wtedy napisać

$$u = y . v$$

A zatem

$$u' = y' . v + v' . y$$

Stąd

$$y' = \frac{u' - v' . y}{v} = \frac{u' - \frac{u}{v} . v'}{v} = \frac{u' v - u . v'}{v^2} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Mnożąc przez różniczkę dx, dostaniemy

$$dy = \frac{v . du - udv}{v^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

A więc możemy wysłowić twierdzenie następujące:

IV. Pochodna (względnie różniczka) ilorazu dwóch funkcyj jednej i tej samej zmiennej niezależnej równa się pochodnej (względnie różniczce), pomnożonej przez mianownik, mniej pochodna (względnie różniczka) mianownika, pomnożona przez licznik, a wszystko podzielone przez kwadrat mianownika.

Wzory (5), (6) można napisać jeszcze w postaci następującej:

$$y' = \frac{u}{v} \left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} \right); \quad dy = \left(\frac{du}{u} - \frac{dv}{v} \right)$$

Przypuśćmy, że y jest pewną funkcją zmiennej u, przyczem u jest funkcją zmiennej niezależnej x. Jasną jest rzeczą, że y jest również pewną funkcja x.

Możemy więc napisać, że

$$y = f(u); \; u = \varphi(x); \; y = F(x)$$

Oznaczając przez Δx przyrostek zmiennej niezależnej x, a przez Δu i Δy odpowiednio przyroski, nabyte przez u i y, możemy napisać

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

W granicy zaś przy $\Delta x = 0$ mamy

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Przypuśćmy teraz, że

$$y = f(u); \; u = \varphi(v), \; v = \psi(x)$$

Wtedy

$$y = F(x)$$

Oznaczając przez Δx przyrostek zmiennej niezależnej x a przez Δv, Δu, Δy przyrostki funkcyj v, u, y, odpowiadające przyrostkowi Δx, możemy napisać

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

W granicy zaś przy $\Delta x=0$ mamy

$$y'_x=y'_u u'_v v'_x$$

A więc możemy wysłowić twierdzenie następujące:

V. Pochodna funkcji złożonej względem zmiennej niezależnej równa się iloczynowi z pochodnej tej funkcji względem tej zmiennej, od której owa funkcja zależy, przez pochodną tej funkcji, która bezpośrednio zależy od zmiennej niezależnej.

Co do różniczki funkcji złozonej, będziemy mieli wzory następujące:

$$dy=y'_u\cdot u'_x\cdot dx=y'_u\,du$$
$$dy=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x\,dx=y'_u u'_v\,dv=y'_u\,du$$

A więc różniczka funkcji złożonej równa się iloczynowi z pochodnej tej funkcji względem tej zmiennej, od której owa funkcja bezpośrednio zależy przez różniczkę tej zmiennej.

Niechaj

$$y=f(x),$$

oznacza pewną funkcję zmiennej niezależnej x.

Funkcja odwrotna w stosunku do funkcji $f(x)$ będzie

$$x=\varphi(y).$$

Oznaczmy przez Δy przyrostek zmiennej y, odpowiadający przyrostkowi zmiennej x.

Możemy napisać

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

W granicy zaś dla $\Delta x=0$ $(\Delta y=0)$ mamy

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y=0}\frac{\Delta x}{\Delta y}},$$

czyli

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}};\quad y'_x=\frac{1}{x'_y}$$

A więc możemy wysłowić twierdzenie następujące:

VI. Pochodna funkcji odwrotnej w stosunku do danej równa się odwrotności pochodnej funkcji danej.

§ **5. Pochodne i różniczki wielomianów algebraicznych.** Rozważmy najpierw pochodną najprostszej funkcji potęgowej

$$y=x^m,$$

gdzie m jest dowolną liczbą stałą (dodatnią, lub ujemną, całkowitą, lub ułamkową).

Będziemy mieli

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^m-x^m}{\Delta x}=x^{m-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m-1}{\frac{\Delta x}{x}}=x^{m-1}\frac{(1+u)^m-1}{u},$$

gdzie

$$u=\frac{\Delta x}{x}$$

Ponieważ

$$\lim_{u=0}\left[\frac{(1+u)^m-1}{u}\right]=m,$$

przeto

$$y'=\lim_{\Delta=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{m-1}\lim_{u=0}\left[\frac{(1+u)^m-1}{u}\right]=mx^{m-1}\quad\ldots\quad(8)$$

Mnożąc pochodną y' przez dx, dostaniemy

$$dy=mx^{m-1}dx\quad\ldots\quad(9)$$

W przypadkach szczególnych będziemy mieli

$$m=1\qquad y=x\qquad y'=1\qquad dy=dx$$
$$m=-1\qquad y=\frac{1}{x}\qquad y'=-\frac{1}{x^2}\qquad dy=-\frac{dx}{x^2}$$
$$m=-2\qquad y=\frac{1}{x^2}\qquad y'=\frac{2}{x^3}\qquad dy=\frac{2}{x^3}dx$$

Zakładając $m=-n$, otrzymamy

$$y=\sqrt[n]{x};\quad y'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{\sqrt[n]{nx^{n-1}}};\quad dy=\frac{dx}{\sqrt[n]{nx^{n-1}}}$$

Naprzykład dla $n=2$

$$y=\sqrt{x};\quad y'=\frac{1}{2\sqrt{x}};\quad dy=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

dla $n=3$

$$y=\sqrt[3]{x};\quad y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};\quad dy=\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Przypuśćmy, że u jest pewną funkcją x. Wówczas $y=u^m$ będzie funkcją złożoną zmiennej niezależnej x.

W myśl wzoru na pochodną funkcji złożonej mamy

$$y'=m\,.\,u^{m-1}u'_x$$

Posługując się twierdzeniami podstawowemi rachunku różniczkowego, możemy napisać wyrażenie na pochodną wielomianu algebraicznego m-go stopnia

$$y=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots a_{m-1}x+a_m,$$

gdzie a_0, a_1, $a_2\ldots a_{m-1}$, a_m są to liczby stałe.

Będziemy mieli

$$y'=a_0mx^{m-1}+a_1(m-1)x^{m-2}+a_2(m-2)x^{m-3}+\cdots+a_{m-1}$$

A więc pochodna wielomianu algebraicznego m-go stopnia jest wielomianem algebraicznym $(m-1)$-go stopnia.

Przykłady. 1. Mamy daną funkcję

$$y=(2x^2+3)(1+4x^3)$$

Znaleźć pochodną tej funkcji.

W myśl wzoru na pochodną iloczynu dwóch funkcyj mamy

$$y'=(2x^2+3)'(1+4x^3)+(1+4x^3)'\cdot(2x^2+3)$$

Pochodne

$$(2x^2+3)'=4x;\quad (1+4x^3)'=12x^2$$

A zatem

$$y'=4x(1+4x^3)+12(2x^2+3)x^2=4x(1+9x+10x^3)$$

2. Znaleźć pochodną funkcji $y=\dfrac{2x^2-1}{3x-2}$

W myśl wzoru na pochodną ilorazu mamy

$$y'=\frac{(2x^2-1)'(3x-2)-(3x-2)'(2x^2-1)}{(3x-2)^2}=\frac{4x(3x-2)-3(2x^2-1)}{(3x-2)^2}=$$

$$=\frac{6x^2-8x+3}{(3x-2)^2}$$

3. Mamy daną funkcję $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

Znaleźć pochodną tej funkcji.

Oznaczając $\dfrac{1+x}{1-x}=u$, możemy napisać

$$y=\sqrt{u};\quad y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'_x$$

$$u'_x=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{(1+x)'\cdot(1-x)-(1-x)'(1+x)}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}$$

A więc

$$y'=\frac{\sqrt{1-x}}{2\,.\sqrt{1+x}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

4. Mając daną funkcję $y=\left(\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^n$

znaleźć jej pochodną.

W myśl wzoru na pochodną funkcji złożonej, otrzymamy

$$y'=n\cdot\frac{x^{n-1}}{(1+\sqrt{1-x^2})^{n-1}}\cdot\frac{1}{(1+\sqrt{1-x^2})\,.\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{nx^{n-1}}{(1+\sqrt{1-x^2})^n\,.\sqrt{1-x^2}}$$

§ 6. Pochodne i różniczki funkcyj wykładniczych i logarytmowych.

Niechaj y oznacza najprostszą funkcję wykładniczą

$$y=a^x$$

Będziemy mieli

$$\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x$$

A zatem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

W granicy przy $\Delta x=0$ mamy

$$y'=\lim_{\Delta x=0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=a^x\,.\lim_{\Delta x=0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

Ponieważ

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\lg a,$$

przeto

$$y'=a^x\lg a\quad\ldots\ldots\ldots\quad(10)$$

Różniczka

$$dy=a^x\lg a\,.\,dx\quad\ldots\ldots\ldots\quad(11)$$

Naogół, jeżeli y jest funkcją złożoną postaci $y=a^u$, gdzie u jest pewną funkcją zmiennej niezaleznej x, wówczas

$$y'=a^u\,.\,\lg a\,.\,u'_x;\quad dy=a^u\,.\,\lg a\,du$$

W przypadku szczególnym, gdy $a=e$ (podstawa logarytmów naturalnych) $\lg a=\lg e=1$

$$y=e^x;\quad y'=e^x;\quad dy=e^x\,dx$$

Jeżeli zaś u jest pewną funkcją zmiennej niezależnej x, wówczas pochodna funkcja $y=e^u$ będzie

$$y'=e^u\,.\,u'_x$$

Niechaj y oznacza funkcję logarytmową

$$y=\mathrm{Log}_a x$$

Wtedy

$$x=a^y$$

W myśl wzoru na pochodne funkcyj wzajemnie odwrotnych, mamy

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{a^y \lg a}$$

czyli

$$y'_x = \frac{1}{a^{\operatorname{Log}_a x} \cdot \lg a} = \frac{1}{x \lg a} = \frac{\operatorname{Log}_a e}{x} \quad \ldots \quad (12)$$

Różniczka

$$dy = \frac{dx}{x \lg a} = \frac{\operatorname{Log}_a e}{x} dx \quad \ldots \quad (13)$$

W przypadku szczególnym gdy $a = e$

$$y = \lg x.$$

W takim razie

$$\operatorname{Log}_a e = 1 \qquad \text{a zatem}$$

$$y' = \frac{1}{x}; \text{ różniczka zaś } dy = \frac{dx}{x}$$

Jeżeli y jest funkcją złożoną postaci

$$y = \operatorname{Log}_a u, \quad \text{lub } y = \lg u,$$

gdzie u jest pewną funkcją zmiennej niezależnej x, wówczas

$$y' = \frac{\operatorname{Log}_a e}{u} \cdot u', \text{ lub } y' = \frac{u'}{u}$$

Przykłady 1. Mając daną funkcję

$$y = xe^{x^2},$$

znaleźć jej pochodną

Oznaczając $x^2 = u$, będziemy mieli $y = xe^u$.

Pochodna y będzie

$$y' = e^u + x \cdot e^u \cdot u' = e^u (1 + xu') = e^{x^2} (1 + 2x^2).$$

Mając daną funkcję

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

znaleźć jej pochodną.

Będziemy mieli

$$y' = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

2. Mając daną funkcję

$$y = \lg \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}},$$

znaleźć jej pochodną

Oznaczamy

$$\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2} = u; \quad \sqrt{u} = v$$

Możemy napisać

$$y = \lg v; \; y' = \frac{v'}{v} = \frac{\frac{u'}{2\sqrt{u}}}{\sqrt{u}} = \frac{u'}{2u}$$

$$u' = \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}\right)' = \frac{-2x(a^2 + x^2) - 2x(a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^2} = -\frac{4a^2 x}{(a^2 + x^2)^2}$$

A więc

$$y' = -\frac{4a^2 x}{(a^2 + x^2)^2} \cdot \frac{a^2 + x^2}{2(a^2 - x^2)} = -\frac{2a^2 x}{a^4 - x^4}$$

3. Mając daną funkcję

$$y = \lg \left(\frac{e^{ax} - 1}{e^{ax} + 1}\right)^m,$$

znaleźć jej pochodną

Będziemy mieli

$$y' = m \cdot \left(\frac{e^{ax} - 1}{e^{ax} + 1}\right)^{m-1} \left(\frac{e^{ax} + 1}{e^{ax} - 1}\right)^m \cdot \frac{2ae^{ax}}{(e^{ax} + 1)^2} = \frac{2ame^{ax}}{(e^{ax} + 1)(e^{ax} - 1)} = \frac{2ame^{ax}}{e^{2ax} - 1}$$

Niechaj y oznacza funkcję potęgowo-wykładniczą

$$y = u^v,$$

gdzie u i v są to pewne funkcje zmiennej niezależnej x.

Będziemy mieli

$$\lg y = v \cdot \lg u.$$

Biorąc pochodne obu części tego wyrażenia, otrzymamy

$$\frac{y'}{y} = (v \lg u)' = v' \lg u + \frac{u'}{u} v.$$

Stąd

$$y' = u^v \cdot \lg u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} u'.$$

Różniczka zaś

$$dy = u^v \lg u \, dv + v \cdot u^{v-1} \, du.$$

A więc pochodna (względnie różniczka) funkcji potęgowo wykładniczej równa się sumie pochodnych tej funkcji, uważając ją kolejno jako funkcję potęgową i jako funkcję wykładniczą.

Przykład 1. Mając daną funkcję potęgowo-wykładniczą

$$y = x^x,$$

znaleźć jej pochodną i różniczkę.

Różniczkując tę funkcję, jako funkcję wykładniczą, otrzymamy

$$x \cdot x^{x-1} \, dx = x^x \, dx.$$

Różniczkując daną funkcję, jako funkcję potęgową, otrzymamy.

$$x^x \lg x \, dx$$

W myśl wzoru na różniczkę funkcji potęgowo-wykładniczej mamy

$$dy = (x^x \lg x + x^x) dx = x^x (1 + \lg x) dx$$

Pochodna danej funkcji będzie

$$y' = x^x (1 + \lg x)$$

§ 7. Pochodne i różniczki funkcyj trygonometrycznych.

Rozważmy pochodną funkcji $y = \sin x$

Przyrostek Δy, odpowiadający przyrostkowi zmiennej niezależnej Δx, będzie

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

Stąd

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

W granicy przy $\Delta x = 0$ będziemy mieli

$$y' = \lim_{\Delta x=0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x=0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)\cdot\lim_{\Delta x=0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\lim_{\Delta x=0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right) = 1,$$

otrzymujemy

$$y' = \lim_{\Delta x=0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Różniczka zaś

$$dy = \cos x\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Rozważmy teraz pochodną funkcji $y = \cos x$

Dla tej funkcji możemy napisać

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x$$

Stąd

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

W granicy przy $\Delta x = 0$, otrzymamy

$$y' = \lim_{\Delta x=0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = -\lim_{\Delta x=0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)\cdot\lim_{\Delta x=0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= -\lim_{\Delta x=0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x$$

Różniczka zaś będzie $dy = -\sin x\,.\,dx$.

W tym przypadku gdy funkcje

$$y = \sin u; \quad y_1 = \cos u$$

są funkcjami złożonemi zmiennej niezależnej x, wówczas będziemy mieli

$$y' = \cos u\,.\,u'; \quad y'_1 = -\sin u\,.\,u'$$

Przejdziemy teraz do rozważania pochodnej funkcji $y = \operatorname{tg} x$. Będziemy mieli

$$\Delta y = \operatorname{tg}(x+\Delta x) - \operatorname{tg} x$$

A zatem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x)-\operatorname{tg} x}{\Delta x} = \frac{\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\Delta x}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\Delta x}-\operatorname{tg} x}{\Delta x} = (1+\operatorname{tg}^2 x)\frac{\operatorname{tg}\Delta x}{\Delta x}$$

W granicy przy $\Delta x = 0$ mamy

$$y' = \lim_{\Delta x=0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = (1+\operatorname{tg}^2 x)\,.\lim_{\Delta x=0}\frac{\operatorname{tg}\Delta x}{\Delta x}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\lim_{\Delta x=0}\left(\frac{\operatorname{tg}\Delta x}{\Delta x}\right) = 1,$$

otrzymamy

$$y' = 1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Różniczka zaś danej funkcji będzie

$$dy = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Wzór (16) można otrzymać jeszcze w inny sposób, a mianowicie różniczkując funkcję

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$ jako iloraz, otrzymamy

$$y' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x$$

W przypadku gdy y jest funkcją złożoną postaci

$$y = \operatorname{tg} u,$$

gdzie u jest pewną funkcją zmiennej niezależnej x, wówczas

$$y' = (1+\operatorname{tg}^2 u)\,u' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$$

Rozważmy pochodną funkcji

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

W myśl znanego prawidła, możemy napisać

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\operatorname{cotg}^2 x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Różniczka zaś danej funkcji będzie

$$dy = -(1+\operatorname{cotg}^2 x)dx \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Przykłady. 1. Mając daną funkcję $y = \dfrac{\sin x}{\sin x - \cos x}$,

znaleźć jej pochodną.

Będziemy mieli

$$y' = \frac{(\sin x)'(\sin x - \cos x) - [(\sin x - \cos x)' \sin x]}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x(\sin x - \cos x) - \sin x(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x - \cos x)^2} = \frac{1}{\sin 2x - 1}$$

2. Mając daną funkcję $y = \lg \dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$,

znaleźć jej pochodną.

Oznaczamy $\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x} = u$.

Będziemy mieli wtedy $y = \lg u$; $y' = \dfrac{u'}{u}$

$$u' = \left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)' = \frac{(\cos x)'(1-\cos x) + (1+\cos x)'(\cos x)'}{(1-\cos x)^2} =$$

$$= \frac{2(\cos x)'}{(1-\cos x)^2} = -\frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$$

A więc

$$y' = -\frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2} \cdot \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = -\frac{2\sin x}{(1+\cos x)(1-\cos x)} = -\frac{2\sin x}{1-\cos^2 x}$$

§ **8. Pochodne i różniczki funkcyj kołowych.** Rozważmy pochodną funkcji kołowej $y = \operatorname{arc\,sin} x$.

Będziemy mieli $x = \sin y$

W myśl wzoru na pochodną funkcyj wzajemnie odwrotnych, możemy napisać

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

Różniczka zaś danej funkcji będzie

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

W tym przypadku, gdy y jest funkcją złożoną postaci

$$y = \operatorname{arc\,sin} u,$$

gdzie u jest pewną funkcją zmiennej niezależnej x, wówczas

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad dy = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Niechaj y oznacza funkcją kołową $y = \operatorname{arc\,tg} x$

Możemy napisać $x = \operatorname{tg} y$

A zatem

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Różniczka zaś danej funkcji będzie

$$dy = \frac{dx}{1+x^2} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

W tym przypadku gdy y jest funkcją złożoną postaci

$$y = \operatorname{arc\,tg} u,$$

to jest gdy u jest pewną funkcją zmiennej niezależnej x, wówczas

$$y' = \frac{u'}{1+u^2}; \quad dy = \frac{du}{1+u^2}$$

Rozważmy pochodną funkcji $y = \operatorname{arc\,sec} x$

Możemy napisać $x = \sec y$

A zatem

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{\cos^2 y}{\sin y} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \ldots \quad (27)$$

Różniczka zaś danej funkcji będzie

$$dy = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

Dla funkcji złożonej $y = \operatorname{arc\,sec} u$ gdzie u, jest pewną funkcją niezależnej x, mamy

$$y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}; \quad dy = \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$$

Biorąc pod uwagę wzory

$$\operatorname{arc\,sin} x + \operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,cotg} x = \pm\frac{\pi}{2} \quad \begin{pmatrix}\text{znak } + \text{ dla } x>0\\ \text{znak zaś } - \text{ dla } x<0\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{arc\,sec} x + \operatorname{arc\,cosec} x = \frac{\pi}{2},$$

możemy napisać

$$(\operatorname{arc\,cos} x)' = -(\operatorname{arc\,sin} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arc\,cotg} x)' = -(\operatorname{arc\,tg} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arc\,cosec} x)' = -(\operatorname{arc\,sec} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Różniczki zaś

$$d(\operatorname{arc\,cos} x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(\operatorname{arc\,cotg} x) = -\frac{dx}{1+x^2};\quad d(\operatorname{arc\,cosec} x) = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Przykłady 1. Mając daną funkcję

$$y = \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2},$$ znaleźć jej pochodną.

Oznaczając $\frac{2x}{1-x^2} = u$

możemy napisać

$$y = \operatorname{arctg} u;\quad y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$u' = \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' = \frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

A więc

$$y' = \frac{1}{\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}+1}\cdot\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

2. Mając daną funkcję

$$y = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}),$$

znaleźć jej pochodną.

Różniczkując daną funkcję złożoną w myśl ogólnego prawidła, otrzymamy

$$y = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{1-2x^2} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

§ **9. O funkcjach rosnących i malejących.** O funkcji $y=f(x)$ mówimy, że jest rosnącą w przedziale (a, b), jeżeli dla dwóch dowolnych wartości $x=x_1$; $x=x_3$, należących do tego przedziału, zachodzi nierówność

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0, \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

czyli też narówności

lub $f(x_2)-f(x_1) > 0$, gdy $x_2-x_1 > 0$

$f(x_2)-f(x_1) < 0$, gdy $x_2-x_1 < 0$.

O funkcji $y=f(x)$ mówimy, że jest malejącą w przedziale (a, b), jeżeli dla dwóch dowolnych wartości $x=x_1$ i $x=x_2$, należących do tego przedziału, zachodzi nierówność

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0, \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

która jest równoważna z nierównością

$$f(x_2)-f(x_1) < 0;\ \text{gdy}\ x_2-x_1 > 0$$

lub też nierówności

$$f(x_2)-f(x_1) > 0;\ \text{gdy}\ x_2-x_1 < 0.$$

Ponieważ nierówność (41), względnie nierówność (42), zachodzi dla dowolnych wartości $x=x_1$ i $x=x_2$ przedziału (a, b), przeto dla funkcji rosnącej w tym przedziale zachodzi nierówność

$$\lim_{x_2=x_1}\left[\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right] = f'(x_1) > 0,$$

a dla funkcji malejącej

$$\lim_{x_1=x_2}\left[\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right] = f'(x_1) < 0.$$

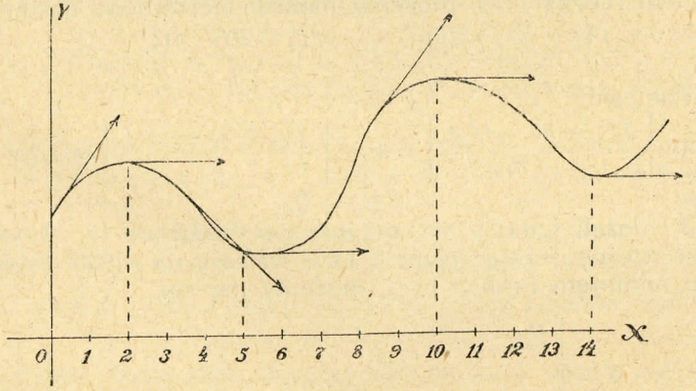
A więc możemy wysłowić twierdzenie następujące:

Twierdzenie 1. Na to, aby funkcja $y=f(x)$ ciągła i różniczkowalna w pewnym przedziale (a, b) była rosnąca, potrzeba i wystarcza, żeby pochodna tej funkcji dla wszystkich wartości na zmienną niezależną x w tym przedziale przybierała wartości dodatnie.

2. Na to, aby funkcja $y=f(x)$, ciągła i różniczkowalna w pewnym przedziale (a, b) była malejąca, potrzeba i wystarcza, żeby pochodna tej funkcji dla wszystkich wartości na zmienną niezależną x w tym przedziale przybierała wartości ujemne.

Dla tych wartości na x, przy których pochodna funkcji staje się zerem, funkcja dana może przybierać wartość największą, względnie najmniejszą.

Na Rys. 70 przedstawiony jest wykres funkcji rosnącej w przedziałach (0, 2); (5, 10); malejącej w przedziałach (2, 5);



Rys. 70.

(10, 14); a przybierającej przy $x=2$ i $x=10$ wartość największą, a przy $x=5$ i $x=14$ wartość najmniejszą.

Przykład. Zbadać funkcję $y=x^2-5x+6$.

Pochodna tej funkcji $y'=2x-5$.

A więc funkcja dana jest rosnącą w przedziale $\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$, a malejącą w przedziale $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$. Dla $x=\frac{5}{2}$ dana funkcja przybiera wartość najmniejszą.

§ **10. Twierdzenie Rolle'go.** Przypuśćmy, że $y=f(x)$ oznacza pewną funkcję, spełniającą warunki następujące:

1. $y=f(x)$ jest funkcją jednowartościową i ciągłą w przedziale (a, b).

2. $y=f(x)$ jest funkcją różniczkowalną w tym przedziale.

3. Wartości funkcji $y=f(x)$ dla wartości krańcowych $x=a$ i $x=b$ przedziału (a, b) są równe zeru t. j. $f(a)=f(b)=0$.

Wówczas istnieje wewnątrz przedziału (a, b) przynajmniej jedna taka wartość $x=\xi$, dla której $f'(\xi)=0$.

Dowód. Rozważmy oddzielnie trzy przypadki następujące:

1. Funkcja $y=f(x)$ równa się zeru dla wszystkich wartości na x w przedziale (a, b).

2. Funkcja $y=f(x)$ przybiera wartości dodatnie dla wszystkich wartości na x w przedziale $(a. b)$.

3. Funkcja $y=f(x)$ przybiera wartości ujemne dla wszystkich wartości na x w przedziale (a, b).

1. W tym przypadku gdy $y=f(x)$ równa się zeru dla wszystkich wartości na x w przedziale (a, b) twierdzenia Rolle'go nie potrzebujemy udowadniać, albowiem warunek $f'(x)=0$ pociąga za bą warunek $f'(x)=0$ dla wszystkich wartości na x w przedziale (a, b).

2. Przypuśćmy teraz, że funkcja $y=f(x)$ przybiera w przedziale (a, b) wartości dodatnie.

Oznaczając przez ξ tę wartość na x, dla której zachodzi maximum funkcji $f(x)$, możemy napisać nierówności następujące:

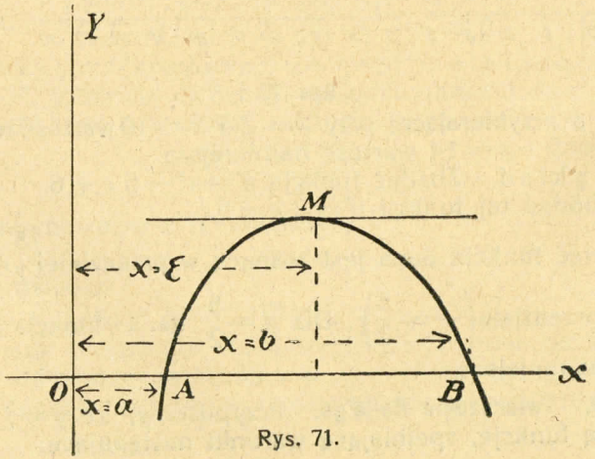
$$\frac{f(\xi-h)-f(\xi)}{-h}>0;\quad \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}<0$$

Ponieważ

$$\lim_{h=0}\left[\frac{f(\xi-h)-f(\xi)}{-h}\right]=\lim_{h=0}\left[\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\right]=f'(\xi),$$

przeto $f'(\xi)=0$.

3. Jeżeli funkcja $f(x)$ przybiera w przedziale (a, b) wartości ujemne, to, oznaczając przez ξ taką wartość na x, dla której zachodzi minimum funkcji $f(x)$, możemy napisać



Rys. 71.

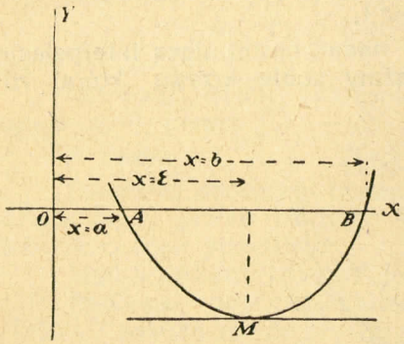
$$\frac{f(\xi-h)-f(\xi)}{-h}<0;\quad \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}>0$$

Ponieważ

$$\lim_{h=0}\left[\frac{f(\xi-h)-f(\xi)}{-h}\right]=\lim_{h=0}\left[\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\right]=f'(\xi),$$

przeto $f'(\xi)=0$.

A zatem dowiedliśmy twierdzenia Rolle'go w ogólności.



Rys. 72.

Twierdzeniu Rolle'go można nadać następującą interpelacją geometryczną:

Przypuśćmy, że krzywa $y=f(x)$ przecina oś OX w dwóch punktach A i B (Rys. 71 i 72). Wówczas istnieje przynajmniej jeden taki punkt M o spółrzędnych $=x$ ξ; $y=f(\xi)$, gdzie $a<\xi<b$, iż styczna do krzywej w punkcie M jest równoległą do osi OX.

§ **11. Wzór Lagrange'a.** Przypuśćmy, że $y=f(x)$ oznacza pewną funkcję x, spełniającą warunki następujące:

1. Funkcja $y=f(x)$ jest funkcją jednowartościową i ciągłą w danym przedziale (a, b).

2. Funkcja $y=f(x)$ jest funkcją różniczkowalną w tym przedziale.

Wówczas istnieje przynajmniej jedna wartość $x=\xi$ w przedziale (a, b), dla której zachodzi wzór następujący;

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Wzór (43) podany został przez Lagrange'a $(a<\xi<b)$.

Dowód. Aby dowieść wzoru Lagrange'a, rozważmy funkcję

$$\varphi(x)=f(b)-f(x)-P(b-x),$$

gdzie P jest liczbą stałą narazie nieoznaczoną. Jasną jest rzeczą, że $\varphi(b)=0$. Na to, aby $\varphi(a)$ była zerem wystarcza założyć

$$P=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Stosując do funkcji $\varphi(x)$ twierdzenie Rolle'go, udowodnione w poprzednim paragrafie, wnosimy, że istnieje w przedziale (a, b) przynajmniej jedna wartość $x=\xi$, dla której $\varphi'(\xi)=0$.

Pochodna funkcji $\varphi(x)$ dla wartości $x=\xi$ będzie

$$\varphi'(\xi)=-f'(\xi)+P.$$

A więc w myśl twierdzenia Rolle'go

$$-f'(\xi)+P=0,$$

czyli

$$P=f'(\xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Zestawiając wzory (44) i (45), otrzymamy

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

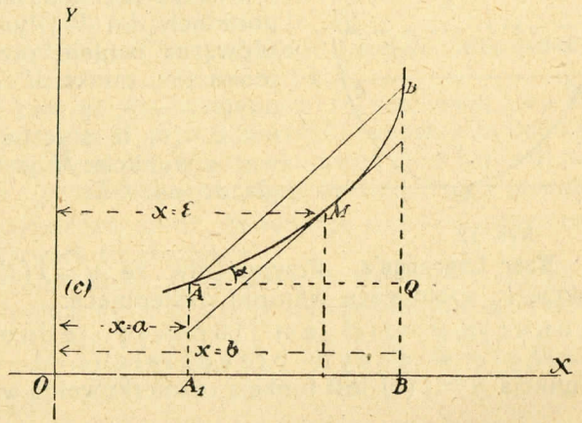
Stąd $$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi).$$

Jest to właśnie wzór Lagrange'a, o którego dowód nam chodziło. Oznaczając $b-a=h$, możemy wzór Lagrange'a wypisać w postaci następującej:

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+h),$$

gdzie $$0<\theta<1.$$

Wzorowi Lagrange'a można nadać następującą interpelację geometryczną (Rys. 73). Wyobraźmy sobie krzywą której równanie jest $yf(x)$.



Rys. 73.

Obieramy na tej krzywej dwa punkty A i B, których odcięte są odpowiednio $x=a$ i $x=b$. Możemy powiedzieć, że istnieje na krzywej M przynajmniej jeden punkt M o spółrzędnych $x=\xi$; $y=f(\xi)$, leżący pomiędzy punktami A i B, w którym styczna do krzywej jest równoległą do cięciwy AB, łączącej punkty krańcowe A i B.

W samej rzeczy z trójkąta ABQ mamy

$$BQ=AQ\,\mathrm{tg}\,BAQ,$$

czyli $$f(b)-f(a)=(b-a)\ \mathrm{tg}\ BAQ$$

Stąd $$\mathrm{tg}\,BAQ=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Oznaczając przez α kąt, który tworzy styczna do krzywej (c) w punkcie M z osią OX, możemy napisać

$$\mathrm{tg}\,\alpha=f'(\xi)$$

Ponieważ, w myśl wzoru Lagrange'a

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

przeto $$\mathrm{tg}\,BAQ=\mathrm{tg}\,\alpha.$$

A więc styczna do krzywej (c) w punkcie M jest równoległą do cięciwy AB.

Ze wzoru Lagrange'a wypływają natychmiast wnioski następujące:

Wniosek I. Jeżeli funkcja $f'(x)$ równa się zeru dla wszystkich wartości na x przedziału (a, b), wówczas funkcja $f(x)$ jest stałą w tym przedziale.

W samej rzeczy, oznaczając przez x_1 i x_2 dwie wartości na x w przedziale (a, b), możemy napisać w myśl wzoru Lagrange'a

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f[x_1+\theta(x_2-x_1)],$$

gdzie $0<\theta<1$.

Ponieważ, według założenia, $f'(x)$ równa się zeru w przedziale (a, b), przeto $f'[x_1+\theta(x_2-x_1)]=0$.

A zatem $$f(x_2)=f(x_1)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (46)$$

Ponieważ obraliśmy liczby x_1 i x_2 zupełnie dowolnie w przedziale (a, b) przeto równość (46) będzie zachodziła dla wszystkich liczb tego przedziału

Stąd wnosimy, że $f(x)$ jest stałą w przedziale (a, b).

Ponieważ pochodna funkcji, przybierającej wartość stałą $f(x)=C$ zawsze równa się zeru, przeto możemy wysłowić twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Na to, aby funkcja przybierała wartość stałą w danym przedziale (a, b) potrzeba i wystarcza, żeby pochodna tej funkcji w przedziale (a, b) była zerem.

Wniosek II. Jeżeli pochodne dwóch funkcyj $f(x)$ i $\varphi(x)$ są równe sobie dla wszystkich wartości na x przedziału (a, b) wówczas różnica

$$f(x)-\varphi(x)=C,$$

gdzie C jest liczbą stałą.

W samej rzeczy, oznaczając

$$f(x)-\varphi(x)=F(x),$$

możemy napisać dla wszystkich wartości na x w przedziale (a, b)

$$F'(x)=f'(x)-\varphi'(x)=0$$

A zatem w myśl wniosku I

$$F(x)=f(x)-\varphi(x)=C,$$

gdzie C jest liczbą stałą, dla wszystkich wartości na x przedziału (a, b).

Ponieważ pochodna funkcji

$$f(x)-\varphi(x)=C$$

jest zawsze zerem, przeto możemy wysłowić twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Na to, aby dwie funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ różniły się od siebie o liczbę stałą w pewnym przedziale (a, b) potrzeba i wystarcza, żeby pochodne tych funkcyj w tym przedziale były równe sobie.

§ **12. Wzór Cauchy'ego.** Przypuśćmy, że dwie funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ spełniają warunki, następujące:

1. Funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ są funkcjami jednowartościowemi i ciągłemi w pewnym przedziale (a, b).
2. Funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ są funkcjami różniczkowalnemi w tym przedziale.
3. Funkcja $\varphi(x)$ nie przybiera wartości zerowych w przedziale (a, b).

Wówczas dla funkcyj $f(x)$ i $\varphi(x)$ w przedziale (a, b) zachodzi wzór następujący:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

gdzie $x=\xi$ jest pewna wartość na x w przedziale (a, b), t. j.

$$a<\xi<b$$

Wzór (47) podany został przez Cauchy'ego.

Dowód. Rozważmy funkcję

$$F(x)=f(b)-f(x)-P[\varphi(b)-\varphi(x)],$$

gdzie P jest liczbą stałą narazie nieokreśloną.

Jasnem jest, że $F(b)=0$.

Na to, aby $F(a)$ była zerem, wystarcza obrać liczbę

$$P=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

Wówczas w myśl twierdzenia Rolle'go istnieje taka liczba ξ mniejsza od b, a większa od a, iż

$$\varphi'(\xi)=0.$$

Pochodna zaś $\varphi(x)$ dla $x=\xi$ będzie

$$\varphi'(\xi)=-f(\xi)+P\varphi'(\xi)$$

A więc $$-f'(\xi)+P\varphi'(\xi)=0.$$

Stąd

$$P=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \quad \ldots\ldots \quad (49)$$

Zestawiając zaś wzory (48) i (49), otrzymamy wzór

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

Jest to właśnie wzór Cauchy'go, o którego dowód nam chodziło.

Łarwo spostrzec, że wzór Lagrange'a możemy otrzymać, zakładając we wzorze Ceuchy'ego $\varphi(x)=x$

Oznaczając $b-a=h$, możemy napisać wzór Cauchy'ego w postaci następującej:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)},$$

gdzie $$0<\theta<1.$$

Rozdział IX.

Pochodne i różniczki wyższych rzędów funkcji jednej zmiennej.

§ **1. Określenia.** Pierwsza pochodna $f'(x)$ funkcji $y=f(x)$ jest również pewną funkcją zmiennej x. Jeżeli funkcja $f'(x)$ jest ciągłą, to możemy znaleźć jej pochodną przy pewnej wartości na x. Otrzymujemy wtedy drugą pochodną, lub inaczej pochodną drugiego rzędu funkcji $y=f(x)$. Pochodną tę oznaczamy symbolem

$$y''=f''(x)$$

Postępując w ten sposób dalej, można otrzymać pochodną trzeciego, czwartego, piątego rzędu i t. d. Oznaczamy je symbolami

$$y'''=f'''(x); \quad y^{(IV)}=f^{(IV)}(x); \quad y^{(V)}=f^{(V)}(x)\ldots$$

W ogóle pochodną n rzędu oznaczamy przez

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)$$

Wiadomo, że warunkiem koniecznym istnienia pochodnej funkcji przy danej wartości $x=a$ jest, aby funkcja była ciągłą przy $x=a$ i aby funkcja była skończoną w każdym otoczeniu liczby a. Aby więc istniała druga pochodna funkcji przy danej wartości $x=a$, koniecznem jest: aby funkcja $f(x)$ i jej pierwsza pochodna była skończoną w każdem otoczeniu liczby $x=a$ aby funkcja $f(x)$ była ciągłą w temże otoczeniu i aby pierwsza pochodna $f'(x)$ była ciągłą przy $x=a$.

Rozumujac w ten sposób dalej, wnosimy, że warunki istnienia pochodnej $f^{(n)}(x)$ przy $x=a$ są następujące: [1] funkcja $f(x)$ i jej pochodne aż do pochodnej rzędu $(n-1)$-go mają być skończone w dowolnem otoczeniu liczby a, [2] funkcja $f(x)$ i jej pochodne aż do pochodnej rzędu $(n-2)$-go mają być ciągłemi w każdem otoczeniu liczby a i [3] pochodna rzędu $(n-1)$-go powinna być ciągłą przy $x=a$.

Podajemy teraz definicję różniczek wyższych rzędów funkcji $y=f(x)$ jednej zmiennej niezależnej x.

Różniczką drugą lub inaczej różniczką drugiego rzędu danej funkcji $y=f(x)$ nazywamy różniczkę pierwszej różniczki $dy=f'(x)dx$. Drugą różniczkę oznaczamy przez $d^2y=d(dy)$. W myśl podanej definicji różniczki drugiego rzędu

$$d^2y=d[f'(x)\,dx]=d[f'(x)]\,dx+f'(x)d^2x$$

Ponieważ x jest zmienną niezależną, przeto jej różniczkę dx można uważać jako stałą, a zatem $d^2x=0$.

Stąd wnosimy, że

$$d^2y=d[f'(x)]\,dx=f''(x)\,dx^2$$

A więc druga różniczka funkcji $y=f(x)$ równa się iloczynowi drugiej pochodnej tej funkcji przez kwadrat pierwszej różniczki zmiennej niezależnej x.

Określenia różnicki trzeciej, czwartej i następnych są analogicznemi z określeniem różniczki drugiej a mianowicie różniczką trzeciego rzędu nazywamy różniczkę drugiej różniczki i t. d. Oznaczamy to, pisząc

$$d^3y=d(d^2y);\quad d^4y=d(d^3y)\text{ i t. d.}$$

Wogóle

$$d^n y=d(d^{n-1}y)$$

Wykonywując różniczkowanie i biorąc pod uwagę że wszystkie różniczki zmiennej niezależnej x począwszy od drugiej, są równe zeru znajdujemy wzory

$$d^3y=f'''(x)dx;\quad d^4y=f^{(IV)}(x)\,dx\text{ i t. d.}$$

Udowodnijmy, że wogóle zachodzi wzór

$$d^n y=f^n(x)\,dx^n\quad\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

Aby tego dowieść, załóżmy, że wzór (1) zachodzi dla dowolnej liczby n i udowodnijmy, że zajdzie on również dla liczby n, o jedność większej

Różniczkując wzór (1), dostaniemy

$$d^{n+1}y=d(d^n y)=d[f^{(n)}(x)\,dx^n]=df^{(n)}(x)\,dx^n+f^n(x)d(dx^n)=$$
$$=f^{(n+1)}(x)\,dx^{n+1}+nf^{(n)}(x)\,dx^{n-1}d^2x$$

Ponieważ $d^2x=0$, przeto $d^{(n+1)}y=f^{(n+1)}(x)\,dx^{n+1}$.

A więc wzór (1) będzie zachodził dla rzędu $n+1$ skoro zachodzi dla rzędu n. Ponieważ wzór ten zachodzi dla $n=2$, przeto będzie on zachodził dla $n=3$, 4, 5 i t. d., czyli innemi słowy będzie zachodził dla dowolnej liczby n.

A więc n—ta różniczka funkcji $y=f(x)$ równa iloczynowi n—tej pochodnej tej funkcji przez n—tą potęgę pierwszej różniczki zmiennej niezależnej x.

Przejdziemy teraz do różniczek rzędu wyższego funkcyj złożonych jednej zmiennej niezależnej.

Mamy funkcję $y=f(u)$, gdzie $u=\varphi(x)$.

Wiemy, że

$$dy=f'(u)\,du\quad\ldots\ldots\ldots\quad(2)$$

Różniczkując wzór ( ), dostaniemy

$$d^2y=d[f'(u)du]=d[f'(u)]\cdot du+f'(u)d^2u=f''(u)du^2+f'(u)d^2u.\quad(3)$$

Godnem jest uwagi, że w tym przypadku różniczka d^2u nie jest zerem, gdyż u nie jest zmienną niezależną, lecz pewną funkcją tej zmlennej

Różniczkując wzór (3), otrzymujemy

$$d^3y=d[f''(u)\,du^2]+d[f'(u)\,d^2u]+f'''(u)\,du^3+2f''(u)\,du\,du^2+$$
$$+f''(u)\,du\,d^2u+f'(u)\,d^3u=f'''(u)\,du^3+3f''(u)\,du\,d^2u+f'(u)du^3$$

W taki sam sposób znajdujemy różniczki d^4y, d^5y i t. d.

Widzimy więc, że wzory na różniczki wyższych rzędów funkcji złożonej i zwyczajnej są różne. W przypadku szczególnym, gdy u jest funkcją linjową zmiennej niezależnej x postaci

$$u=ax+b,$$

wówczas

$$du=adx;\quad d^2u=d^3u=d^4u=\cdots=d^n u=0,$$

a zatem $d^2y=f''(u)\,du^2$; $d^3y=f'''(u)\,du^3$ i t. d.

A więc tylko w tym przypadku, gdy u jest funkcją linjową względem x, różniczki wyższych rzędów funkcji złożonej $y=f(u)$ mają te same wyrażenia, co i dla funkcji zwyczajnej.

§ 2. Pochodne i różniczki wyższych rzędów najprostszych funkcji.

Mamy daną sumę algebraiczną

$$y=u+v+w+\cdots+t,$$

gdzie u, v, $w\ldots t$ są to pewne funkcje zmiennej niezależnej x.

Pierwsza pochodna funkcji y będzie

$$y'=u'+v'+w'+\cdots+t'$$

Różniczkując funkcję y', dostaniemy

$$y''=u''+v''+w''+\cdots t''$$

Mnożąc przez dx^2, otrzymujemy

$$d^2y=d^2u+d^2v+d^2w+\cdots+d^2t$$

Mnożąc pochodne trzeciego, czwartego rzędu i t. d.

$$y'''=u'''+v'''+w'''+\cdots+t'''$$
$$y^{(IV)}=u^{(IV)}+v^{(IV)}+w^{(IV)}+\cdots+t^{(IV)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}+w^{(n)}+\cdots+t^{(n)}$$

odpowiednio przez dx^3, dx^4 ... dx^n, otrzymujemy

$$d^3y = d^3u + d^3v + d^3w + \cdots + d^3t$$
$$d^4y = d^4u + d^4v + d^4w + \cdots + d^4t$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d^ny = d^nu + d^nv + d^nw + \cdots + d^nt$$

Mamy daną funkcję

$$y = x^m$$

Biorąc kolejno pochodne i różniczki tej funkcji, otrzymujemy

$$y' = mx^{m-1} \qquad dy = mx^{m-1}$$
$$y'' = m(m-1)x^{m-2} \qquad d^2y = m(m-1)x^{m-2}dx^2$$
$$y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3} \qquad d^3y = m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wogóle

$$y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n},$$

a

$$d^ny = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}dx^n$$

Gdy m jest liczbą całkowitą dodatnią, wówczas

$$y^{(m)} = m\cdot(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1$$
$$d^my = m(m-1)(m-2)\ldots 2.2.1.dx^m$$

Wszystkie zaś pochodne i różniczki wyższych rzędów

$$y^{(m+1)} = y^{(m+2)} = \cdots = 0$$
$$d^{m+1}y = d^{m+2}y = \cdots = 0$$

Niechaj będzie dany wielomian o wykładniku m postaci

$$y = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}x + a_m \quad . \quad . \quad (4)$$

gdzie spółczynniki a_1, a_2, ... a_{m-1}, a_m są liczbami stałemi.

Różniczkując kolejno funkcję (4), otrzymujemy

$$y' = a_0mx^{m-1} + a_1(m-1)x^{m-2} + a_2(m-2)x^{m-3} + \cdots + 2a_{m-2}x + a_{m-1}$$
$$y'' = a_0m(m-1)x^{m-2} + a_1(m-1)(m-2)x^{m-3} + a_2(m-2)(m-3)x^{m-4} + \cdots + 2a_{m-2}$$
$$y''' = a_0m(m-1)(m-2)x^{m-3} + a_1(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4} + \cdots + 2.3.a_{m-3}$$ i t. d.

Wogóle

$$y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)a_0x^{m-n} + m(m-1)\cdots(m-2)\cdots$$
$$\cdots(m-n)a_1x^{m-n+1} + \cdots + m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1.a_{m-n}$$

W tym przypadku, gdy m jest liczbą całkowitą dodatnią wówczas

$$y^{(m)} = m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1.a_0$$
$$d^my = m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1.a_0dx^m \quad . \quad . \quad (5)$$

a pochodne i różniczki wyższych rzędów

$$y^{(m+1)} = y^{(m+2)} = \cdots = 0.$$
$$d^{m+1}y = d^{m+2}y = \cdots = 0.$$

Mamy daną funkcję wykładniczą

$$y = a^x$$

Różniczkując kolejno tę funkcję, otrzymujemy

$$y' = a^x \lg a \qquad dy = a^x \lg a\,dx$$
$$y'' = a^x \lg^2 a \qquad d^2y = a^x \lg^2 a\,dx^2$$
$$y''' = a^x \lg^3 a \qquad d^3y = a^x \lg^3 a\,dx^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wogóle $\quad y^{(n)} = a^x \lg^n a \qquad d^ny = a^x \lg^n a\,dx^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$

W przypadku szczególnym, gdy $a = e$ (podstawa logarytmów naturalnych), mamy

$$y' = e^x; \quad y' = y'' = y''' = \cdots = y^{(n)} = e^x$$
$$dy = e^x\,dx; \quad d^2y = e^x\,dx^2; \quad d^3y = e^x\,dx^3 \ldots$$

wogóle

$$d^ny = e^x\,dx^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Jeżeli $\quad y = e^{-x}$,

to $\quad y' = y''' = y^{(V)} = \cdots = y^{(2k-1)} = -e^{-x}$

a $\quad y'' = y^{(IV)} = y^{(VI)} = \cdots = y^{(2k)} = e^{-x}$

$$d^{(2k-1)}y = -e^{-x}dx^{(2k-1)}$$
$$d^{2k}y = e^{-x}dx^{2k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Przejdziemy teraz do funkcji trygonometrycznych.
Mamy daną funkcję

$$y = \sin x$$

Różniczkując kolejno tę funkcję, otrzymujemy

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y^{(IV)} = \sin x = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y^{(V)} = \cos x = \sin\left(x + 5\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = y'$$

i t. dalej

Wogóle możemy udowodnić, że

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Biorąc wod uwagę, że

$$\sin\left[x+(n+4k)\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

otrzymujemy

$$y^{(n+4k)}=y^n,$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią, lub zerem.

Dla różniczki n-go rzędu będziemy mieli wyrażenie

$$d^n y=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)dx^n$$

Oczywista,

$$d^{(n+4k)}y=d^n y$$

Mamy daną funkcję

$$y=\cos x$$

Różniczkując ją kolejno, otrzymujemy

$$y'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=-\cos x=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'''=\sin x=\cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{(IV)}=\cos x=\cos\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos x=y$$

$$y^{(V)}=-\sin x=\cos\left(x+5\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x=y'$$

i t. dalej.

Wogóle zachodzą wzóry

$$y^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$d^n y=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)dx^n \qquad \ldots\ldots (10)$$

Ze wzorów (10) wynika, że

$$y^{(n+4k)}=y^n;\quad d^{(n+4k)}y=d^n y,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią

Mamy daną funkcję

$$y=\lg(1+x)$$

Różniczkując kolejno tę funkcje, otrzymujemy

$$y'=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$$
$$y''=-1\cdot(1+x)^{-2}$$
$$y'''=1.2.(1+x)^{-3}$$
$$y^{(VI)}=-1.2.3\,(1+x)^{-4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Wogóle

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}.1.2.3\ldots(n-1)\,(1+x)^{-n}=(-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1+x)^n}$$

a

$$d^n y=(-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1+x)^n}dx^n$$

Mamy daną funkcję

$$y=\operatorname{arc\,tg} x$$

Wiemy, że

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)=\frac{1}{2i}[(x-i)^{-1}-(x+i)^{-1}],\quad .(11)$$

gdzie $i=\sqrt{-1}$.

Różniczkując kolejno wzór (11), otrzymujemy

$$y''=-\frac{1}{2i}[(x-i)^{-2}-(x+i)^{-2}]$$

$$y'''=-\frac{1.2}{2i}[(x-i)^{-3}-(x+i)^{-3}]$$

i t. dalej

Wogóle

$$y^n=(-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{2i}[(x-i)^{-n}-(x+i)^{-n}]$$

Wzór ten możemy napisać w postaci następującej:

$$y^{(n)}=(-1)^n\cdot\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{2i}\left[\frac{(x+i)^n-(x-i)^n}{(x^2+1)^n}\right],$$

czyli

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}.1.2.3\ldots(n-1)}{(x^2+1)^n}\cdot\left[nx^{n-1}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}x^{n-5}+\cdots+(-1)^{\frac{n-2}{2}}\cdot nx\right]$$

dla n parzystego

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}.1.2.3\ldots(n-1)}{(x^2+1)^n}\left[nx^{n-1}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}x^{n-3}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}x^{n-5}+\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right]$$

dla n nieparzystego

W przypadku szczególnym, gdy $x=0$ wzory poprzednie przyjmują postać dla n parzystego $n=2k$

$$y^{(2k)}=0,$$

dla n zaś nieparzystego $n=2k+1$

$$y^{(2k+1)}=(-1)^k.1.2.3\ldots 2k.$$

Pochodne funkcji $y=\operatorname{arc\,tg} x$ można przedstawić jeszcze w innej postaci.

Różniczkując kolejno tę funkcję i zakładając

$$z=\frac{\pi}{2}-y \quad \text{arc cotg } x,$$

otrzymujemy

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\cos^2 y=\sin^2 z$$

$$y''=2\sin z\cos z\cdot z'=-\sin 2z\cdot y'=-\sin 2z\cdot\sin^2 z$$

$$y'''=-[2\cos 2z\cdot\sin^2 z+2\sin z\cos z\sin 2z]\,z'=2[\cos 2z\cdot\sin z+$$
$$+\cos z\cdot\sin 2z]\sin^2 z=1\cdot 2\sin 3z\cdot\sin^3 z$$

Udowodnijmy teraz wzór ogólny

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}.1.2.3\ldots(n-1)\sin nz\cdot\sin^n z \quad . \quad . \quad (12)$$

Przypuśćmy, że wzór ten zachodzi dla pewnej liczby n i udowodnijmy, że będzie on zachodził dla liczby n o jedność większej.

Różniczkując wzór (12), dostaniemy

$$y^{(n+1)}=(-1)^n.1.2.3\ldots(n-1)[n\cos nz\cdot\sin^n z+n\sin nz\sin^{n-1}z\cos z]\sin^2 z=$$
$$=(-1)^n 1.2.3\ldots n\sin[(n+1)z]\,\sin^{n+1}z$$

Ponieważ wzór (12) zachodzi dla $n=1,2,3$, będzie on również zachodził dla $n=4,5,6$ i t. d., to jest będzie zachodził dla dowolnej liczby całkowitej n.

Zakładając we wzorze (12) $x=0$, otrzymamy dla liczby parzystej $n=2k$

$$y_0^{(2k)}=(-1)^{2k-1}.1.2.3\ldots(2k-1)\sin k\pi=0,$$

a dla liczby nieparzystej $n=2k+1$

$$y_0^{(2k+1)}=(-1)^{2k}.1.2.3\ldots 2k\cdot\sin\left[\frac{(2k+1)}{2}\pi\right]=(-1)^k.1.2.3\ldots 2k,$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, dodatnią.

Przykłady 1. Mamy daną funkcję

$$y=\frac{1+x}{1-x}$$

Znaleźć pochodne tej funkcji różnych rzędów względem x.

Różniczkując ją kolejno, otrzymujemy

$$y'=\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}$$

$$y''=2\cdot\frac{1.2}{(1-x)^3}$$

$$y'''=2\cdot\frac{1.2.3.}{(1-x)^4}$$

i t. d.

Wogóle będziemy mieli

$$y^{(n)}=2\cdot\frac{1.2.3\ldots n}{(1-x)^{n+1}}$$

2. Mamy daną funkcję

$$y=\frac{1}{1-x^2}$$

Znaleźć jej pochodne różnych rzędów.

Możemy napisać

$$y=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

Różniczkując kolejno, otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2};\quad\left(\frac{1}{1+x}\right)'=-\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3};\quad\left(\frac{1}{1+x}\right)''=\frac{2}{(1+x)^3}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'''=\frac{2.3}{(1-x)^4};\quad\left(\frac{1}{1+x}\right)'''=-\frac{2.3.}{(1+x)^4}$$

. . . . . .

. . . . . .

Wogóle

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}=\frac{1.2.3\ldots n}{(1-x)^{n+1}};\quad\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n.1.2.3\ldots n}{(1+x)^{n+1}}$$

Ostatecznie więc będziemy mieli

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(n)}=\frac{1.2.3\ldots n}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^{(n)}}{(1+x)^{n+1}}\right]$$

3. Mamy dane funkcje

$$y=e^{ax}\cos bx \quad \text{i} \quad y=e^{ax}\sin bx$$

Znaleźć pochodne n-go rzędu tych funkcji.

Możemy napisać

$$y+iz=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)=e^{(a+bi)x}$$

Biorąc pochodną n-go rzędu, otrzymujemy

$$y^{(n)} + iz^{(n)} = (a+bi)^n e^{(a+bi)x} \quad \ldots\ldots (8)$$

Oznaczając

$$a+bi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

będziemy mieli na mocy dobrze znanego wzoru

$$(a+bi)^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \ldots\ldots (9)$$

gdzie $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$

Podstawiając wzór (9) do (8), otrzymujemy

$$y^n + iz^{(n)} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)\cdot\rho^n\cdot(\cos n\theta + i\sin n\theta) =$$
$$= \rho^n e^{ax}[\cos(bx+n\theta) + i\sin(bx+n\theta)]$$

Stąd wynika, że

$$y^{(n)} = \rho^n e^{ax}\cos(bx+n\theta)$$
$$z^{(n)} = \rho^n e^{ax}\sin(bx+n\theta)$$

W przypadku szczególnym, gdy $a=1$; $b=1$ będziemy mieli

$$y = e^x\cos x; \quad z = e^x\sin x$$
$$\rho = \sqrt{2} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

Przeto

$$y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}}e^x\cdot\cos\left(x+n\frac{\pi}{4}\right); \quad z^n = 2^{\frac{n}{2}}e^x\sin\left(x+n\frac{\pi}{4}\right)$$

§ 3. **Wzór Leibniz'a.** Mamy funkcję

$$y = uv,$$

gdzie u i v są funkcjami zmiennej niezależnej x.

Różniczkując y kolejno względem x, otrzymujemy

$$y' = u'v + uv'$$
$$y'' = u''v + 2u'v' + v''u$$
$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$
. . . . . .
. . . . . .

i t. d.

Z tych wzorów widać już, jakiem będzie prawo, wedle którego tworzy się wzór ogólny.

Udowodnijmy, że dla dowolnej liczby n zachodzi wzór

$$y^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{(n-2)}v'' + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}u^{(k)}v^{(n-k)} + \ldots + nu^{(n-1)}v' + u^{(n)}v. \quad (13)$$

Przypuśćmy, że wzór (13) zachodzi dla pewnej wartości na n i udowodnijmy, że będzie on również zachodził dla wartości na n, o jedność większej.

Różniczkując w tym celu wzór (13), otrzymujemy

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + \begin{matrix} n \\ +1 \end{matrix}\Big| u^{(n)}v' + \begin{matrix} \frac{n(n-1)}{1.2.} \\ +n \end{matrix}\Big| u^{(n-1)}v'' + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}\Big| u^{(n-k+1)}v^{(k)} + \ldots + \begin{matrix} n \\ +\frac{n-1}{1.2} \end{matrix}\Big| u''v^{(n-1)} +$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{1.2.3\ldots(k-1)}\Big|$$
$$+ (n+1)u'v^{(n)} + uv^{(n+1)},$$

czyli

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + \frac{(n+1)}{1}u^{(n)}v' + \frac{(n+1)n}{1.2}u^{(n-1)}v'' + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k)}{1.2.3\ldots k}u^{(n-k+1)}v^{(k)} + \ldots + \frac{(n+1)n}{1.2}u''v^{(n-1)} +$$
$$+ (n+1)u'v^{(n)} + uv^{(n+1)}.$$

A więc otrzymaliśmy dla $n+1$, ten sam wzór, co dla liczby n.

Ponieważ wzór (13) zachodzi dla $n=2$ i 3, będzie on również zachodził dla $n=4$, 5, 6 i t. d., to jest dla dowolnej liczby n. Wzór (13) podany został przez Leibniz'a.

Mnożąc wzór (13) przez dx, otrzymujemy

$$d^n y = v.d^n u + nd^{n-1}u\,dv + \frac{n(n-1)}{1.2}d^{n-2}u.d^2v + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}d^{n-k}u.d^k v + \ldots + nd u d^{n-1}v +$$
$$+ ud^n v.$$

Ostatni wzór możemy napisać w postaci symbolicznej

$$d^n y = (du+dv)^{(n)}.$$

Przy używaniu tego wzoru, analogicznego do wzoru na dwumian Newtona, należy zastąpić $(du)^k$ i $(dv)^k$ odpowiednio przez $d^k u$ i $d^k v$, a $(du)^0$, $(dv)^0$ odpowiednio przez u i v.

Przytoczmy tu kilka przykładów na zastosowanie wzoru Leibniz'a.

Przykłady 1. Mając daną funkcję

$$y = e^x.x^3,$$

znaleźć jej pochodną n-go rzędu

Oznaczając

$$u = x^3 \quad v = e^x,$$

będziemy mieli

$$u' = 3x^2; \quad u'' = 6x; \quad u''' = 6; \quad u^{(IV)} = u^{(V)} = \ldots = 0.$$

$$v' = v'' = v''' = \ldots = v^{(n)} = e^x$$

Posługując się wzorem Leibniz'a, możemy napisać

$$y^{(n)} = x^3 e^x + 3nx^2 e^x + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot 6x e^x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot 6e^x =$$

$$= e^x \{[x^3 + 3nx^2 + 3(n-1)nx + n(n-1)(n-2)]\}$$

2. Posługując się wzorem Leibniz'a można znaleźć pochodne wyższych rzędów funkcji

$$y = \operatorname{arc\,tg} x \text{ i } y = \arcsin x$$

przy $x = 0$.

Różniczkując funkcję

$$y = \operatorname{arc\,tg} x$$

dwa razy, otrzymujemy

$$y' = \frac{1}{1+x^2}; \quad y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Stąd wypływa wzór następujący:

$$(1+x^2) \cdot y'' + 2xy' = 0.$$

Posługując się wzorem Leibniz'a otrzymujemy po uproszczeniu

$$(1+x^2) y^{(n+2)} + 2(n+1) x y^{(n+1)} + n(n+1) y^{(n)} = 0 \quad . \quad (14)$$

Oznaczmy przez $y_0, y'_0, y''_0 \ldots$ odpowiednio wartości funkcji y i jej pochodnych przy $x = 0$.

Przy $x = 0$ równanie (14) przyjmuje postać

$$y_0^{(n+2)} + n(n+1) y_0^{(n)} = 0,$$

czyli

$$y_0^{(n+2)} = -n(n+1) y_0^{(n)}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$y_0 = 0; \quad y_0' = 1; \quad y_0'' = 0,$$

otrzymujemy

$$y_0^{(IV)} = y_0^{(VI)} = \ldots = y_0^{(2k)} = 0.$$

Zakładając kolejno $n = 1, 3, 5 \ldots 2k+1$, otrzymujemy

$$y_0''' = -1.2.y_0'$$
$$y_0^{(V)} = -3\ 4.y_0'''$$
$$y_0^{(VII)} = -5.6.y_0^{(V)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_0^{(2k+1)} = -(2k-1).2k.y^{(2k-1)}$$

Z tych wzorów otrzymujemy po uproszczeniu

$$y_0^{(2k+1)} = (-1)^k .1.2.3 \ldots (2k-1).2k$$

Mamy daną funkcję

$$y = \arcsin x$$

Różniczkując ją dwa razy, otrzymujemy

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad y'' = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Stąd wypływa wzór następujący

$$(1-x^2) y'' - x y' = 0.$$

Posługując się wzorem Leibniz'a, możemy napisać

$$(1-x^2) y^{(n+2)} - x(2n+1) y^{(n+1)} - n^2 y^{(n)} = 0.$$

Zakładając w ostatniem równaniu $x = 0$, dostaniemy

$$y_0^{(n+2)} - n^2 y_0^{(n)} = 0,$$

czyli

$$y_0^{(n+2)} = n^2 y_0^{(n)}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$y_0 = 0; \quad y'_0 = 1 \quad y''_0 = 0.$$

otrzymujemy

$$y_0^{(IV)} = y_0^{(VI)} = \ldots = y_0^{(2k)} = 0.$$

Zakładając kolejno $n = 1, 3, 5, 7 \ldots 2k+1$, dostaniemy

$$y_0''' = 1^2 . y_0'$$
$$y_0^{(V)} = 3^2 . y_0'''$$
$$y_0^{(VII)} = 5^2 . y_0^{(V)} \qquad \ldots\ldots (15)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(2k+1)} = (2k-1)^2 y_0^{(2k-1)}$$

Ze wzorów (15) otrzymujemy po uproszczeniu

$$y_0^{(2k+1)} = (2k-1)^2 (2k-3)^2 \ldots 5^2 . 3^2 . 1^2$$

Ćwiczenia. Mając daną funkcję y, znaleźć jej pochodną n-go rzędu

1. $y = \sqrt{x}$

   Odp. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1} .1.3.5 \ldots (2n-3)\sqrt{x}}{2^n . x^n}$

2. $y = \dfrac{a}{x^m}$

Odp. $y^{(n)} = (-1)^n . am(m+1)(m+2) \ldots (m-n+1) x^{-(m+n)}$

3. $y=\sqrt[m]{x}$

Odp. $y^{(n)}=(-1)^{n-1}(m-1)(2m-1)(3m-1)\ldots[(n-1)m-1]\dfrac{x^{\frac{1-mn}{m}}}{m^n}$

4. $y=\dfrac{1}{a\pm bx}$

Odp. $y^{(n)}=(\pm b)^n\cdot\dfrac{1.2.3\ldots n}{(a\pm bx)^{n+1}}$

5. $y=\dfrac{1}{\sqrt{a\pm bx}}$

Odp. $y^{(n)}=\mp b^n\cdot\dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n\sqrt{a\pm bx\,(a\pm bx)^n}}$

6. $y=x^{n-1}\lg x$

Odp. $y^{(n)}=\dfrac{1.2.3\ldots(n-1)}{x}$

7. $y=\sin x\cos x$

Odp. $y^{(n)}=2^{n-1}\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

8. $y=\cos^2 x-\sin^2 x$

Odp. $y^{(n)}=2^n\cdot\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

9. $y=\cos^2 x$

Odp. $y^{(n)}=2^{n-1}\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

10. $y=\sin^2 x$

Odp. $y^{(n)}=2^{n-1}\sin\left[2x+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right]$

11. $y=\sin^3 x$

Odp. $y^{(n)}=\dfrac{3}{4}\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-\dfrac{3^n}{4}\sin\left(3x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

12. $y=\dfrac{1}{a^2-b^2x^2}$

Odp. $y^{(n)}=\dfrac{1.2.3\ldots n\,b^n}{2a\,(a^2-b^2x^2)^{n+1}}\cdot[(a+bx)^{n+1}-(a-bx)^{n+1}]$

13. $y=\dfrac{x}{a^2+x^2}$

Odp. $y^{(n)}=(-1)^n\,1.2.3\ldots n\cdot\dfrac{\cos[(n+1).\theta]}{(a^2+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}$

gdzie $\theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{a}{x}$

14. $y=\dfrac{a}{a^2+x^2}$

Odp. $y^{(n)}=(-1)^{n-1}.1.2.3\ldots(n-1)\dfrac{\sin n\theta}{(a^2+x^2)^{\frac{n}{2}}}$

gdzie $\theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{a}{x}$

Rozdział X.

Różniczkowanie fuukcji wielu zmiennych.

§ **1. Pochodne i różniczki cząstkowe.** Niechaj

$$u=f(x,y,z\ldots t)$$

oznaczą pewną funkcję n zmiennych należących $x, y, z\ldots t$, ciągłą w pewnym obszarze względem wszystkich zmiennych niezależnych.

Dajmy na $y, z\ldots t$ wartości oznaczone $b, c\ldots k$. Wtedy u można uważać jako funkcję jednej zmiennej niezależnej x i będzie można znaleźć pochodnę tej funkcji względem x dla dowolnej wartości na $x=a$.

Ta pochodna, jeżeli istnieje, nazywa się pochodną cząstkową funkcji u względem x w punkcie A $[a, b, c\ldots k]$ i oznacza się za pomocą symbolu Jakobi'ego $\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]_A$, lub też symbolu $[f'_x(x, y, z\ldots t)]_A$.

Dla pochodnej cząstkowej w nieokreślonym punkcie A będziemy używali wprost oznaczenia $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, lub też $f'_x(x, y, z\ldots t)$.

Widzimy więc, że wyznaczanie pochodnej cząstkowej danej funkcji względem pewnej zmiennej sprowadza się do różniczkowania funkcji jednej zmiennej, uważając inne zmienne jako stałe. Oczywista, możemy napisać

$$\frac{du}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x,+\Delta x, y\,z\ldots t)-f(x,y,\ldots t)}{\Delta x}\right]$$

Analogicznie, pochodne cząstkowe funkcji u względem innych zmiennych $y, z\ldots t$ będą

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y u}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{f(x,y+\Delta y,z\ldots t)-f(x,y,z\ldots t)}{\Delta y}\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta_z u}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{f(x,y,z+\Delta z\ldots t)-f(x,y,z\ldots t)}{\Delta z}\right]$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta_t u}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{f(x,yz\ldots t+\Delta t)-f(x,y,z\ldots t)}{\Delta t}\right]$$

Różniczką cząstkową funkcji wielu zmiennych niezależnych $u=f(x,y,z\ldots t)$, względem pewnej zmiennej nazywa się iloczyn z pochodnej cząstkowej funkcji u względem tej zmiennej i jej różniczki. Różniczki cząstkowe funkcji u względem zmiennych $x, y, z\ldots t$ oznaczamy odpowiednio przez

$$d_x u=\frac{\partial u}{\partial x}dx;\quad d_y u=\frac{\partial u}{\partial y}dy;\quad d_z u=\frac{\partial u}{\partial z}dz\ \ldots\ d_t u=\frac{\partial u}{\partial t}dt$$

Jasną jest rzeczą, że różniczki cząstkowe funkcji różnić się będą od odpowiednich przyrostów funkcji o nieskończonostki rzędu wyższego niż owe przyrosty

A więc

$$\Delta_x u=d_x u+\varepsilon_x;\quad \Delta_y u=d_y u+\varepsilon_y\ldots\Delta u_t=d_t u+\varepsilon_t,$$

gdzie ε_x, $\varepsilon_y\ldots\varepsilon_t$ są to nieskończonostki rzędu wyższego niż nieskończenie małe przyroste funkcji $\Delta_x u$, $\Delta_y u\ldots\Delta_t u$.

Przy wyznaczaniu pochodnych cząstkowych posługujemy się zasadniczemi wzorami rachunku różniczkowego, dla funkcji jednej zmiennej niezależnej (mianowicie tej względem której różniczkowanie wykonujemy), uważając wszystkie inne zmienne jako stałe.

Przykłady 1. Mamy daną funkcję

$$u=\frac{xyz}{x+y+z}$$

trzech zmiennych niezależnych x, y, z.

Pochodne cząstkowe tej funkcji względem zmiennych x, y, z będą

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{yz(x+y+x)-xyz}{(x+y+z)^2}=\frac{yz(x+y)}{(x+y+z)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xz(x+y+z)-xyz}{(x+y+z)^2}=\frac{zx(x+z)}{(x+y+z)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{xy(x+y+z)-xyz}{(x+y+z)^2}=\frac{xy(x+y)}{(x+y+z)^2}$$

2. Mamy daną funnkcję

$$u=\operatorname{arc\,tg}\frac{xy}{x+y}$$

Pochodne cząstkowe tej funkcji względem x i y będą

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{(x+y)^2}}\cdot\frac{y(x+y)-xy}{(x+y)^2}=\frac{y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{(x+y)^2}}\cdot\frac{x(x+y)-xy}{(x+y)^2}=\frac{x^2}{x^2y^2+(x+y)^2}$$

§ 2. **Różniczka zupełna.** Niechaj $u=f(x,y,z\ldots t)$, oznacza pewną funkcję wielu zmiennych niezależnych $x, y, z\ldots t$, mającą określone w zupełności pochodne cząstkowe względem wszystkich zmiennych niezależnych.

Różniczką zupełną du funkcji u nazywamy sumę różniczek cząstkowych tej funkcji względem wszystkich zmiennych.

A więc

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\cdots+\frac{\partial u}{\partial t}dt\quad\ldots\quad(1)$$

Można udowodnić twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Jeżeli pochodne cząstkowe funkcji $u=f(x,y,z\ldots t)$ wielu zmiennych niezależnych są funkcjami ciągłemi względem wszystkich zmiennych niezależnych, wówczas różniczka zupełna tej funkcji, będąc powiększona o liczby nieskończenie małe rzędy wyższego, wyobraża przyrost, który nabywa funkcja, gdy zmiennym niezależnym nadajemy równocześnie pewne przyrosty nieskończenie małe.

Dowód. Udowodnijmy twierdzenie dla funkcji dwóch zmiennych niezależnych $u=f(x,y)$.

Nadajmy równocześnie zmiennym niezależnym x i y odpowiednio przyrosty Δx i Δy.

Wyrażenie

$$\Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y)\quad\ldots\quad(2)$$

wyobraża ten przyrost, jaki nabywa funkcja u, gdy zmiennym niezależnym nadajemy przyrosty Δx i Δy. Dodając i odejmując od wyrażenia (2) $f(x,\ y+\Delta y)$, dostaniemy

$$\Delta u=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\quad(3)$$

W myśl twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej dla funkcji jednej zmiennej możemy napisać

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta y[f'_y(x,y)+\varepsilon],\quad\ldots\quad(4)$$

gdzie ε jest liczbą nieskończenie małą, skoro Δy jest przyrostem nieskończenie małym.

Podobnież

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x\,[f'_x(x, y+\Delta y)+\varepsilon_1] \quad . \quad (5)$$

gdzie ε_1 jest liczbą nieskończenie małą, skoro Δx jest przyrostem nieskończenie małym.

Jeżeli założymy, że obydwie pochodne cząstkowe $f'_x(x, y)$ i $f'_y(x, y)$ są funkcjami ciągłemi zmiennych niezależnych x, y, będziemy mogli napisać

$$f'_x(x, y+\Delta y) = f'_x(x, y)+\varepsilon_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

gdzie ε_2 jest liczbą nieskończenie małą.

Podstawiając wzór (6) do (5), otrzymujemy

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = [f'x(x, y)+\varepsilon_1+\varepsilon_2]\,\Delta x \quad . \quad (7)$$

Podstawiając wzory (4) i (6) do (3), dostaniemy

$$\Delta u = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y + \omega,$$

gdzie $\omega = (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta y$ jest to liczba nieskończenie mała rzędu wyższego niż nieskończenie małe Δx i Δy.

Biorąc zaś pod uwagę, że $\Delta x = dx$ i $\Delta y = dy$, możemy napisać

$$\Delta u = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy + \omega = d_x u + d_y u + \omega = du + \omega$$

A zatem różnica między Δu i du jest nieskończenie małą. Dowiedliśmy więc naszego twierdzenia.

Przykłady 1. Daną jest funkcja

$$u = \lg \sin \frac{x}{y}$$

Znaleźć jej różniczkę zupełną du.

Różniczkując funkcję u względem x i y, dostaniemy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\cos\frac{x}{y}}{\sin\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y}\operatorname{cotg}\frac{x}{y};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\cos\frac{x}{y}}{\sin\frac{x}{y}} \cdot -\frac{x}{y^2} = -\frac{x}{y^2}\operatorname{cotg}\frac{x}{y}$$

Różniczka zupełna funkcji u będzie

$$du = \frac{ydx - xdy}{y^2}\operatorname{cotg}\frac{x}{y}$$

2. Daną jest funkcja

$$u = e^{\frac{xy}{x+y}}$$

Znaleźć jej różniczkę zupełną du.

Różniczkując daną funkcję względem x i y, dostaniemy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\frac{xy}{x+y}} \frac{y(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2} e^{\frac{xy}{x+y}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{\frac{xy}{x+y}} \cdot \frac{x(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2} \cdot e^{\frac{xy}{x+y}}$$

Różniczka zupełna funkcji u będzie

$$du = \frac{e^{\frac{xy}{x+y}}}{(x+y)^2}(y^2dx + x^2dy)$$

Ćwiczenia. Mając daną funkcję, znaleźć jej różniczki zupełne

1. $u = \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$ Odp. $du = \frac{2xy\,(ydx - xdy)}{(x^2+y^2)\sqrt{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}}$

2. $u = x^y$ Odp. $du = x^y\left(\frac{y}{x}dx + \lg x \cdot dy\right)$

3. $u = \lg\left(\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}\right)$ Odp. $du = \frac{2(ydx - xdy)}{y\sqrt{x^2-y^2}}$

4. $u = \sin(x^m y^n)$ Odp. $du = x^{m-1}y^{n-1}\cos(x^m y^n)\cdot(mydx + nxdy)$

5. $u = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$ Odp. $du = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$

6. $u = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)$ Odp. $du = \frac{2(ydx - xdy)}{y^2 \sin\frac{2x}{y}}$

7. $u = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$ Odp. $du = \frac{2(x^2-y^2)(ydx - xdy)}{(x^2+xy+y^2)^2}$

8. $u = \lg\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}$ Odp. $du = \frac{ydx - xdy}{y\sqrt{x^2-y^2}}$

9. $u = \lg \operatorname{tg}(xy)$ Odp. $du = \frac{2(ydx + xdy)}{\sin(2xy)}$

10. $u = \operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}$ Odp. $du = \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}$

11. $u = \operatorname{arc\,sin}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$

Odp. $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$

12. $u = \arccos(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} - xy)$

Odp. $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$

13. $u = \frac{e^z y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ Odp. $du = \frac{e^z y\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xe^z(x\,dy - y\,dx)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

14. $u = \frac{x^2 y}{a^2 - z^2}$ Odp. $du = \frac{2xy\,dx}{a^2-z^2} + \frac{x^2\,dy}{a^2-z^2} + \frac{2x^2yz\,dz}{(a^2-z^2)^2}$

15. $u = \frac{ay - bz}{cz - ax}$ Odp. $du = \frac{a}{(cz-ax)^2}[(ay-bz)\,dx + (cz-ax)\,dy + (bx-cy)\,dz]$

§ 3. Pochodne i różniczki rzędu wyższego funkcji wielu zmiennych. Dajmy na to, że funkcja

$$u = f(x, y, z \ldots t)$$

zmiennych niezależnych $x, y, z \ldots t$ ma w pewnym obszarze pochodne cząstkowe pierwszego rzędu względem wszystkich zmiennych niezależnych. Jasną jest rzeczą, że te pochodne można uważać za n nowych funkcyj tychże zmiennych i brać względem nich pochodne cząstkowe.

Otrzymamy w ten sposób pochodne cząstkowe drugiego rzędu. Dla funkcji $u = f(x, y)$ dwóch zmiennych niezależnych x i y można napisać cztery pochodne cząstkowe drugiego rzędu, z których, jak się przekonamy niebawem, dwie są równe sobie.

Są to właśnie pochodne

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y); \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$$

Symbol $\frac{\partial^2 u}{\partial y}$ rozumiemy w ten sposób, że bierze się najprzód pochodna u względem x, a potem pochodna względem y; symbol zaś $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ rozumiemy w ten sposób, że bierze się najprzód pochodna u względem y, a potem pochodna względem x.

Dla funkcji $u = f(x, y, z)$ trzech zmiennych niezależnych x, y, z można napisać dziewięć pochodnych cząstkowych drugiego rzędu, a mianowicie

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y, z); \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = f''_{xz}(x, y, z); \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y, z)$$

Z tych dziewięciu pochodnych tylko sześć są różne.

W ten sam sposób, w jaki utworzyliśmy pochodne cząstkowe drugiego rzędu, możemy utworzyć pochodne cząstkowe rzędu trzeciego, czwartego, piątego i t. d.

Używamy dla tych pochodnych znakowania

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \cdots \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$

Ogólnem wyrażeniem na pochodną n-go rzędu funkcji $u = f(x, y, z \ldots t)$ n zmiennych niezależnych $x, y, z \ldots t$, będzie

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma \ldots \partial t^\lambda}$$

Symbol ten rozumiemy w ten sposób, że najprzód bierze się α razy pochodną u względem x, potem β razy pochodna względem y; potem γ razy pochodna względem z i t. d. Jasną jest rzeczą, że $\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda = m$.

Udowodnijmy teraz bardzo ważne twierdzenie o przemienności różniczkowań, polegające na tem, że jeżeli pochodne cząstkowe funkcji danej są funkcjami ciągłemi w pewnym obszarze, wówczas rezultat różniczkowania nie zależy od porządku, w którym różniczkowanie wykonujemy.

Udowodnijmy twierdzenie o przemienności różniczkowań dla funkcji $u = f(x, y)$ dwóch zmiennych niezależnych, to jest że zachodzi nierówność

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

w każdym punkcie M, skoro pochodne cząstkowe $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ są funkcjami ciągłemi w pewnym obszarze, a pochodne $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ są ciągłe w punkcie M.

Nadajmy zmiennej niezależnej y przyrostek dowolny k, nie zmieniając narazie zmiennej x. Wówczas funkcja u nabywa przyrost

$$f(x, y + k) - f(x, y) = \varphi(x, y)$$

Nadajemy potem zmiennej x przyrost dowolny h, nie zmieniając zmiennej y.

Wtedy funkcja $\varphi(x, y)$ nabywa przyrost

$$\Delta = \varphi(x+h, y) - \varphi(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y).$$

Na podstawie twierdzenia Lagrange'a o średnej wartości funkcji można napisać

$$\Delta = \varphi(x+h, y) - \varphi(x, y) = h\varphi'_x(x+\theta_1 h, y),$$

gdzie $1 > \theta_1 > 0$, czyli

$$\Delta = h[f'_x(x+\theta_1 h, y+k) - f'_x(x+\theta_1 h, y)]$$

Po powtórnem zastosowaniu wzoru Lagrange'a dostaniemy

$$\Delta = h.k f''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k), \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

gdzie $1 > \theta_2 > 0$

Będziemy nadawali teraz przyrosty zmiennym niezależnym x i y w innym porządku, a mianowicie nadajemy najpierw przyrost h zmiennej niezależnej x, nie zmieniając narazie y. Wtedy funkcja $f(x, y)$ nabywa przyrost

$$f(x+h, y) - f(x, y) = \psi(x, y)$$

Nadajemy następnie zmiennej y przyrost k. W takim razie funkcja $\psi(x, y)$ nabywa przyrost

$$\Delta_1 = \psi(x, y+k) - \psi(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y)$$

W myśl wzoru Lagrange'a o średniej wartości funkcji, możemy napisać

$$\Delta_1 = \psi(x, y+k) - \psi(x, y) = k\psi'_y(x, y+\theta_3 k),$$

gdzie $0 < \theta_3 < 1$.

Czyli

$$\Delta_1 = k[f'_y(x+h, y+\theta_3 k) - f'_y(x, y+\theta_3 k)]$$

Po powtórnem zastosowaniu wzoru Lagrange'a, dostaniemy

$$\Delta_1 = k.h f''_{yx}(x+\theta_4 h, y+\theta_3 k), \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

gdzie $0 < \theta_4 < 1$.

Biorąc pod uwagę, że $\Delta = \Delta_1$, możemy napisać po zestawieniu wzorów (8) i (9)

$$f''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k) = f''_{yx}(x+\theta_4 h, y+\theta_3 k)$$

Jeżeli pochodne cząstkowe f''_{xy} i f''_{yx} w pewnym punkcie M są funkcjami ciągłemi, wówczas dla wartości granicznych $h = 0$ i $k = 0$ będziemy mieli

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y),$$

a na tem właśnie polega twierdzenie o przemienności różniczkowania.

Oczywista, twierdzenie o przemienności różniczkowania może być uogólnione do pochodnych jakiegokolwiek rzędu n funkcji $u = f(x, y, z \ldots t)$ wielu zmiennych niezależnych.

Jeżeli tylko sprawdzają się warunki ciągłości funkcji u i jej pochodnych, to wartości pochodnych cząstkowych rzędu n nie będą zależały od porządku, w którym bierzemy pochodne. A więc

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma \ldots \partial s^k \partial t^\lambda} = \frac{\partial^n u}{\partial z^\gamma \partial x^\alpha \partial y^\beta \ldots \partial t^\lambda \partial s^k}$$

pod warunkiem, że $\alpha + \beta + \gamma + \cdots + k + \lambda = n$.

Przykłady 1. Dana jest funkcja $u = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$

Różniczkując u kolejno względem x i y, otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Zmieniając porządek różniczkowania, będziemy mieli

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = -\frac{x}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

A więc rzeczywiście

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

2. Dana jest funkcja $u = e^{\frac{xy}{z}}$

Różniczkując tę funkcję kólejno dwa razy względem x, jeden raz względem y i jeden raz względem z, otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} e^{\frac{xy}{z}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{z^2} e^{\frac{xy}{z}}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = e^{\frac{xy}{z}}\left(\frac{xy^2}{z^3} + \frac{2y}{z^2}\right)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} = -e^{\frac{xy}{z}}\left(\frac{x^2y^3+5y^2xz+4yz^2}{z^5}\right)$$

Zmieniając porządek różniczkowania, będziemy mieli

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2} e^{\frac{xy}{z}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = -\frac{y}{z^2} e^{\frac{xy}{z}}\left(\frac{xy}{z}+1\right)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z\, \partial x^2} = -\left(\frac{xy^3}{z^4} + \frac{2y^2}{z^3}\right) e^{\frac{xy}{z}}; \quad \frac{\partial^4 u}{\partial z \partial x^2 \partial y} = -e^{\frac{xy}{z}}\left(\frac{x^2y^3+5y^2xz+4yz^2}{z^5}\right)$$

A więc $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} = \frac{\partial^4 u}{\partial z \partial x^2 \partial y}$

Ćwiczenia Znaleźć pochodne cząstkowe wyższego rzędu funkcji

1. $u = \frac{2xy}{x^3-y^3}$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x . \partial y} = ?$

Odp. $\frac{\partial^2 u}{\partial x . \partial y} = -4\frac{x^6+7x^3y^3+y^6}{(x^3-y^3)^3}$

2. $u = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = ?$

Odp. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{2x^3 y}{(x^4-y^4)^{3/2}}$

3. $u = \dfrac{x+y}{\sin(x-y)}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = ?$

Odp. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{x+y}{\sin^3(x-y)}[1+\cos^2(x-y)]$

4. $u = \operatorname{arc\,sin}\sqrt{\dfrac{x-y}{y}}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = ?$

Odp. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{y}{(xy-y^2)^{3/2}}$

5. $u = \lg[(x+y)^2\cdot(y+z)]$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = ?$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = ?$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = ?$

Odp. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{2}{(x+y)^2}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = -\dfrac{1}{(y+z)^2}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = 0$

6. $u = \dfrac{xyz}{x^2-z^2}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = ?$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = ?$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = ?$

Odp. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{z(x^2+z^2)}{(x^2-z^2)^2}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = -\dfrac{x(x^2+z^2)}{(x^2-z^2)^2}$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = -\dfrac{y(x^4+6x^2z^2+z^4)}{(x^2-z^2)^2}$.

7. $u = \lg x^{y^z}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = ?$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = ?$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = ?$

Odp. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{zy^{z-1}}{x}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = y^{z-1}\lg[x(1+z\lg y)]$

§ **4. Różniczki zupełne wyższego rzędu.** Niechaj $u = f(x,y)$ oznacza pewną funkcję dwóch zmiennych niezależnych x i y, różniczkowalną w danym obszarze względem tych zmiennych.

Różniczką zupełną danej funkcji będzie

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Jasną jest rzeczą, że du można uważać jako funkcję zmiennych niezależnych x i y, a zatem według znanego już prawidła możemy znaleźć jej różniczkę zupełną. Różniczkę tę nazywamy r ó ż n i c z k ą z u p e ł n ą d r u g i e g o r z ę d u i oznaczamy symbolem

$$d^2u = d(dy)$$

Przypuśćmy, że funkcja u jest taka, że do niej stosuje się twierdzenie o przemienności różniczkowań. Różniczkując wzór (10), dostaniemy

$$d^2u = d_x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\partial x\right) + d_x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\partial y\right) + d_y\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx\right) + d_y\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\right) \quad . \quad (11)$$

Ponieważ x i y są zmiennemi niezależnemi, przeto

$$d^2x = 0; \quad d^2y = 0.$$

A zatem

$$d_x\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2; \quad d_x\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,dx}dy\,dx$$

$$d_y\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy; \quad d_y\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

Podstawiając te wzory do (11), dostaniemy

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Jest to wzór na różniczkę zupełną drugiego rzędu funkcji dwóch zmiennych niezależnych x i y.

Dla funkcji trzech zmiennych niezależnych $u = f(x,y,z)$ znajdujemy

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}dx\,dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,dz}dy\,dz$$

W sposób zupełnie analogiczny do poprzedniego, znajdziemy wzór na różniczkę zupełną drugiego rzędu funkcji $u = f(x,y,z\ldots t)$ wielu zmiennych niezależnych $x, y, z \ldots t$.

Będziemy mieli

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dt^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}dx\,dz + \cdots + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}dx\,dt + \cdots + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}dy\,dz + \cdots$$

czyli

$$d^2u = \sum_{i,k=1}^{i,k=n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k},$$

gdzie przez x_i i x_k oznaczono dwie dowolne zmienne, niezależne, obrane pośród zmiennych $x, y, z \ldots t$.

Wzór na d^2u można przedstawić jeszcze w bardzo dogodnej postaci symbolicznej.

Podnieśmy do kwadratu wyrażenie

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \cdots + \frac{\partial u}{\partial t}dt \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

i w rozwinięciu otrzymanego wzoru uważajmy kwadraty i iloczyny z $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}\cdots\frac{\partial u}{\partial t}$ za pochodne drugiego rzędu, pisząc $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ zamiast $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ zamiast $\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$ i t. d.

Wtedy oczywiście rozwinięcie kwadratu wyrażenia (13) zamieni się na wyrażenie różniczki zupełnej drugiego rzędu funkcji u. Możemy więc napisać symbolicznie

$$d^2u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}dz+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\cdots+\frac{\partial u}{\partial t}dt\right)^{(2)}$$

Różniczkę zupełną drugiego rzędu d^2u można uważać jako funkcję tychże samych zmiennych niezależnych, od których zależy funkcja u.

Przeto jest rzeczą zupełnie możliwą znaleźć jej różniczkę zupełną. Różniczkę tę nazywamy r ó ż n i c z k ą z u p e ł n ą t r z e c i e g o r z ę d u i oznaczmy symbolem

$$d^3u=d(d^2u)$$

Dla znalezienia różniczki zupełnej trzeciego rzędu funkcji $u=f(x,y)$ dwóch zmiennych niezależnych x i y różniczkujemy wzór (12). Otrzymujemy wtedy

$$d^3u=d_x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2\right)+2d_x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy\right)+d_x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\right)+d_y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2\right)+$$
$$+2d_y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy\right)+d_y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\right)\quad\ldots\quad(14)$$

Ponieważ $d^2x=d^3x=0$; $d^2y=d^3y=0$, przeto

$$d_x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3;\quad d_x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy$$
$$d_x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\partial y^2\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dxdy^2;\quad d_y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy$$
$$d_y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2;\quad d_y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3$$

Podstawiając otrzymane wzory do (14), dostaniemy

$$d^3u=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3$$

Dla funkcji trzech zmiennych niezależnych $u=f(x,y,z)$ znajdujemy

$$d^3u=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3+\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}dz^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial z}dx^2dz+$$
$$+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial z^2}dxdz^2+3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}dy^2dz+3\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z^2}dydz^2+$$
$$+6\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}dydz$$

Analogicznie można znaleźć wzór na różniczkę zupełną trzeciego rzędu funkcji $u=f(x,y,z\ldots t)$ wielu zmiennych niezależnych. Będziemy używali oznaczenia symbolicznego

$$d^3u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\cdots+\frac{\partial u}{\partial t}dt\right)^{(3)}$$

Różniczkując kolejno wzór ( ) n razy, znajdziemy różniczkę zupełną d^nu funkcji u.

Udowodnijmy, że różniczkę zupełną m-go rzędu funkcji $u=f(x,y,z\ldots t)$ n zmiennych niezależnych $x,y,z\ldots t$ można napisać w postaci symbolicznej

$$d^mu=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\cdots+\frac{\partial f}{\partial t}dt\right)^{(m)}\quad\ldots\quad(15)$$

Dla oznaczenia myśli przypuśćmy, że u jest funkcją dwóch zmiennych niezależnych x i y.

Dowód słuszności ogólnego wzoru

$$d^mu=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^{(m)}\quad\ldots\ldots\quad(16)$$

polega na tem, że przypuszczając, iż wzór ten zachodzi dla jakiejkolwiek liczby całkowitej dodatniej m, udowadniamy, że będzie on zachodził dla liczby $n+1$, to jest że różniczka zupełna $m+1$-go rzędu

$$d^{n+1}u=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^{(m+1)}$$

Według powyższego objaśnienia znaczenia symbolicznego wzoru (16) możemy napisać

$$d^mu=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^{(m)}=\sum_{k=0}^{k=m}C_k\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^k\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{m-k}dx^k\cdot dy^{m-k},$$

gdzie $C_k=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots k}$ jest spółczynnikiem dwumianowym.

Przechodząc do zwykłego oznaczenia, piszemy

$$d^nu=\sum_{k=0}^{k=m}C_k\frac{\partial^m f}{\partial x^k\,\partial y^{m-k}}dx^k\,dy^{m-k}$$

Różniczkując ostatni wzór, dostaniemy

$$d^{m+1}u=\sum_{k=0}^{k=m}C_k\,.\,dx^k\,.\,dy^{m-k}\,.\,d\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^k\,dy^{m-k}}\right)$$

Ponieważ

$$d\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^k\,\partial y^{m-k}}\right)=\frac{\partial^{m+1}f}{\partial x^{k+1}\partial y^{m-k}}dx+\frac{\partial^{m+1}f}{\partial x^k\,\partial y^{m-k+1}}dy,$$

przeto

$$d^{m+1}u=\sum_{k=0}^{k=m}C_k\,dx^k\,dy^{m-k}\left[\frac{\partial^{m+1}f}{\partial x^{k+1}\partial y^{m-k}}dx+\frac{\partial^{m+1}f}{\partial x^k\,\partial y^{m-k+1}}dy\right]$$

Używając przyjętego oznaczenia symbolicznego, piszemy

$$d^{m+1}u=\sum_{k=0}^{k=m}C_k\,dx^k\,dy^{m-k}\frac{\partial^m f}{\partial x^k\,\partial y^{m-k}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)\cdot\sum_{k=0}^{k=m}C_k\,dx^k\,dy^{m-k}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^k\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{m-k}=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)d^m u=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^{m+1}$$

Stąd wnosimy, że wzór (16) będzie zachodził dla liczby $m+1$, skoro on zachodzi dla liczby m.

Udowodniliśmy bezpośrednio, że wzór (16) zachodzi dla $m=2$, przeto wzór ten zachodzi dla $m=3$. Skoro on zachodzi dla $m=3$, będzie zachodził dla $m=4$, 5, 6 i t. d., a zatem dla dowolnej liczby m.

Uogólnienie wzoru (16) dla funkcji $u=f(x, y, z\ldots t)$ wielu zmiennych niezależnych nie nastręcza żadnych trudności. Czytelnik zechce je wykonać jako ćwiczenie.

Przykłady 1. Znaleźć różniczkę zupełną drugiego rzędu funkcji

$$u=\frac{xy}{x+y}$$

Różniczkując tę funkcję względem x i y, otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{(x+y)y-xy}{(x+y)^2}=\frac{y^2}{x^2+y^2};\quad\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{(x+y)x-xy}{(x+y)^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{2y(x+y)^2-2y^2(x+y)}{(x+y)^4}=\frac{2xy}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2y^2(x+y)}{(x+y)^4}=-\frac{2y^2}{(x+y)^3};\quad\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2x^2(x+y)}{(x+y)^4}=-\frac{2x^2}{(x+y)^3}$$

A zatem

$$d^2u=-2\frac{y^2dx^2+x^2dy^2-2xy\,dx\,dy}{(x+y)^3}=-\frac{2(y\,dx-x\,dy)^2}{(x+y)^3}$$

Tę różniczkę możemy znaleźć jeszcze w inny sposób. Różniczkując bezpośrednio funkcję u dwa razy, otrzymujemy

$$du=\frac{(x+y)\,d(xy)-xy\,d(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{y^2dx+x^2dy}{(x+y)^2}$$

$$d^2u=\frac{(x+y)^2\,d(y^2dx+x^2dy)-(y^2dx+x^2dy)\,d[(x+y)^2]}{(x+y)^4}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$d(y^2dx+x^2dy)=2(x+y)\,dx.dy$$
$$d[(x+y)^2]=2(x+y)(dx+dy)$$

otrzymujemy

$$d^2u=\frac{2(x+y)^2dxdy-2y^2dx^2-2x^2dy^2-2(x^2+y^2)dxdy}{(x+y)^3}=-2\frac{(ydx-xdy)^2}{(x+y)^3}$$

2. Znaleźć różniczkę zupełną drugiego rzędu funkcji

$$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Różniczkując daną funkcję względem x, y i z, dostaniemy

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}=-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}};\quad\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=-\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}};\quad\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

A więc

$$d^2u=\frac{(x^2+z^2)\,dx^2+(x^2+z^2)dy^2+(x^2+y^2)dz^2-2xydxdy-2xzdxdz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-$$

$$-\frac{2yz\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\frac{(xdy-ydx)^2+(zdx-xdz)^2+(ydz-zdy)^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Ćwiczenia. Znaleźć różniczki zupełne wyższego rzędu funkcji.

1. $u=xyz$; $d^2u=?$

   Odp. $d^2u=2(zdxdy+ydxdz+xdy\,dz)$

2. $u=x^y$; $d^2u=?$

Odp. $d^2u=y(y-1)x^{y-2}dx^2+2x^{y-1}(1+y\lg x)dxdy+x^y(\lg x)^2\,dy^2$

3. $u=\lg x^y+\lg y^x$; $d^2u=?$

   Odp. $d^2u=\left(\frac{-ydx^2}{x^2}-\frac{x}{y^2}dy^2\right)+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx\,dy$

4. $u=\sin(x+y+z)$; $d^2u=?$

   Odp. $d^2u=\sin(x+y+z+\pi)(dx+dy+dz)^2$

5. $u = \sin(x+y)\cos(x-y)$; $d^3u = ?$

Odp. $d^3u = 4\left[\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)dx^3 + \sin\left(2y+\frac{3\pi}{2}\right)dy^3\right]$

6. $u = x^3 - 3axy + y^3$; $d^3u = ?$

Odp. $d^3u = 12(dx^3 + dy^3)$

7. $u = x\lg y + y\lg z + z\lg x$; $d^3u = ?$

Odp. $d^3u = 2\left(\frac{z}{x^3}dx^3 + \frac{x}{y^3}dy^3 + \frac{y}{z^3}dz^3\right) - 3\left(\frac{dz\,.\,dx^2}{x^2} + \frac{dx\,dy^2}{y^2} + \frac{dy\,dz^2}{z^2}\right)$

§ **5. Różniczkowanie funkcji złożonych.** Niechaj będzie $u = f(x,y,z\ldots v)$ funkcją wielu zmiennych $x, y, z \ldots v$, które nie są od siebie niezależne, lecz przedstawiają pewne funkcje zmiennej niezależnej t, złożoną za pośrednictwem funkcyj $x,y,z\ldots v$.

Łatwo można dowieć, że jeżeli u jest funkcją ciągłą zmiennych $x, y, z \ldots v$ i jeżeli te ostatnie są funkcjami ciągłemi zmiennej t, to i u jest funkcją ciągłą zmiennej t. Mozna również udowodnić, gdy u jest funkcią różniczkowalną względem zmiennych $x, y, z \ldots v$ i jeżeli te ostatnie są funkcjami różniczkowalnemi zmiennej ni t, to i u jest funkcją różniczkowalną zmiennei t.

Przejdziemy teraz do wyznaczenia pochodnej funkcji u względem t. Nadajemy w tym celu zmiennej t przyrost dowolny Δt. Funkcje $x, y, z \ldots v$ otrzymują wtedy odpowiednio przyrosty $\Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots \Delta v$, funkcja zaś u nabywa przyrost Δu. Jasną jest rzeczą, że przyrosty $\Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots \Delta v$ nie są dowolne, gdyż zależą od przyrostu zmjennej t. Gdyby zmienne $x, y, z \ldots v$ były od siebie niezależne, wtedy przyrosty tych zmiennych byłyby dowolnymi.

A zatem, wtedy moglibyśmy napisać

$$\Delta x = dx; \quad \Delta y = dy; \quad \Delta z = dz \ldots \quad \Delta v = dv$$

Przypuszczając, iż pochodne funkcji u względem zmiennych $x, y, z \ldots v$ są funkcjami ciągłemi, w myśl wzoru na przyrost funkcji wielu zmiennych niezależnych moglibyśmy napisać

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \cdots + \frac{\partial u}{\partial v}dv + \varepsilon, \quad \ldots (17)$$

gdzie ε jest nieskończonostką rzędu wyższego niż nieskończenie małe różniczki $dx, dy, dz \ldots dv$.

Oczywista, wzór (17) zachodzi bez względu na to, jakiemi są przrosty $dx, dy, dz \ldots dv$. Załóżmy w szczególności, że przyrosty te są równe odpowiednio przyrostom $\Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots \Delta v$ funkcji $x, y, z \ldots v$, gdy zmienna t otrzymuje przyrost dowolny Δt. W tym przypuszczeniu możemy napisać.

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \cdots + \frac{\partial u}{\partial v}\Delta v + \varepsilon$$

Skąd

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta t} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\Delta t} + \frac{\varepsilon}{\Delta t}$$

Dajmy na to, że funkcje $x, y, z \ldots v$ są różniczkowalne względem zmiennej t.

Przechodząc do granicy $\Delta x = 0$, otrzymamy

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$$

Jest to właśnie wzór na pochodną funkcji złożonej.

Dajmy na to, że funkcja u zależy od t d w o j a k o, a mianowicie wyraźnie i za pośrednictwem zmiennych $x, y, z \ldots v$, które są pewnemi funkcjami zmiennej t.

Wtedy

$$u = f(x, y, z \ldots v, t), \text{ a zatem}$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt} \quad (18)$$

Wówczas pochodną $\left(\frac{du}{dt}\right)$ nazywamy p o c h o d n ą z u p e ł n ą f u n k c j i z ł o ż o n e j u względem t.

Różniczka zupełna rzędu pierwszego funkcji złożonej $u = f(x, y, z \ldots v)$ wyraża się tym samym wzorem, jakim wyraziłaby się, gdyby zmienne były niezależnemi, a mianowicie

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \cdots + \frac{\partial n}{\partial v}dv \quad \ldots (19)$$

Własność ta nie stosuje się jednak już do różniczek rzędu wyższego, gdyż różniczki $dx, dy, dz \ldots dv$ nie będą w tym przypadku stałemi, lecz będą zależały od x. Wobec tego, wzory na różniczki rzędu drugiego i rzędów wyższych funkcji złożonej można napisać różniczkując wzór (19) według podanego prawidła, uważając różniczki $dx, dy, dz \ldots dv$ za ilości zmienne.

Istnieje atoli jeden przypadek, w którym mimo, że $x, y, z \ldots v$ są funkcjami zmiennej niezależnej x, to jednak różniczki ich mogą być uważane za stałe. Jest to przypadek, gdy zmienne $x,y,z\ldots v$ są funkcjami linjowemi zmiennej x postaci

$$x = a_1t + b_1; \quad y = a_2t + b_2; \quad z = a_3t + b_3 \ldots \quad v = a_nt + b_n$$

W tym przypadku wzory na różniczki rzędu wyższego, tak funkcji zmiennej niezależnej, jak i funkcji złożonej są jednej postci.

Dajmy na to, że pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji u są funkcjami ciągłemi. W takim razie, różniczkując wzór (19) względem t, dostaniemy

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\cdots+\frac{\partial^2u}{\partial v^2}\cdot\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+$$
$$+2\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)+2\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{dx}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{d^2v}{dt^2}$$

W tym przypadku, gdy $x, y, z \ldots v$ są funkcjami linjowemi zmiennej t, wtedy

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{d^2v}{dt^2}=0.$$

A zatem wzór na drugą pochodną funkcji złożonej można napisać w postaci symbolicznej

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}\right)^{(2)}$$

W rozwinięciu tego wzoru należy kwadraty i iloczyny pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu funkcji u zastąpić odpowiedniemi pochodnemi cząstkowemi drugiego rzędu.

Wogóle w tym przypadku, gdy $x, y, z \ldots v$ są funkcjami linjowemi zmiennej t zachodzi ogólny wzór na pochodną rzędu m-go funkcji złożonej u

$$\frac{d^mu}{dx^m}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}\right)^{(m)}$$

Podajmy teraz wzór na pochodną funkcji złożonej wielu zmiennych niezależnych.

Pomyślmy sobie pewną funkcję

$$U=f(u,v,w\ldots r)$$

n zmiennych $u, v, w \ldots r$, które nie są niezależnemi, lecz przedstawiają pewne funkcje

$$u=\varphi_1(x, y, z \ldots t)$$
$$v=\varphi_2(x, y, z \ldots t)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$r=\varphi_k(x, y, z \ldots t)$$

k zmiennych niezależnych $x, y, z \ldots t$.

Oznaczmy przez $\Delta u, \Delta v \ldots \Delta r$ odpowiednio przyrosty, które nabywają zmienne $u, v \ldots r$, gdy zmiennym niezależnym $x, y, z \ldots t$ nadajemy odpowiednio przyrosty $\Delta x, \Delta y \ldots \Delta t$.

W myśl wyżej podanych rozumowań możemy napisać wzór na przyrost funkcji U w postaci

$$\Delta U=\frac{\partial U}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial U}{\partial v}\Delta v+\frac{\partial U}{\partial w}\Delta w+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\Delta r+\varepsilon,$$

gdzie ε jest nieskończonostką rzędu wyższego niż nieskończenie małe przrosty $\Delta u, \Delta v \ldots \Delta r$.

Z drugiej zaś strony mamy

$$\Delta u=du+\varepsilon_1;\quad \Delta v=dv+\varepsilon_2;\quad \Delta w=dw+\varepsilon_3 \ldots \Delta r=dr+\varepsilon_n \ldots (21)$$

Podstawiając wzory (21) do wzoru (20), otrzymamy

$$\Delta U=\frac{\partial U}{\partial u}du+\frac{\partial U}{\partial v}dv+\frac{\partial U}{\partial w}dw+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}dr+\omega,$$

gdzie ω jest nieskończonostką rzędu wyższego niż nieskończenie małe różniczki $du, dv \ldots dr$.

Wyrażenie

$$dU=\frac{\partial U}{\partial u}du+\frac{\partial U}{\partial v}dv+\frac{\partial U}{\partial w}dw+\cdots+\frac{\partial U}{\partial t}dt \quad \ldots (22)$$

będzie różniczką zupełną funkcji u.

Ponieważ zmienne $u, v, w \ldots r$ są funkcjami zmiennych niezależnych $x, y, z \ldots t$, przeto

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\cdots+\frac{\partial u}{\partial t}dt$$
$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz+\cdots+\frac{\partial v}{\partial t}dt \quad (23)$$
$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz+\cdots+\frac{\partial w}{\partial t}dt$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$dr=\frac{\partial r}{\partial x}dx+\frac{\partial r}{\partial y}dy+\frac{\partial r}{\partial z}dz+\cdots+\frac{\partial r}{\partial t}dt$$

Podstawiając różniczki te do (22), otrzymujemy

$$dU=\left(\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right)dx+$$
$$+\left(\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\right)dy+$$
$$+\left(\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}\right)dz+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\left(\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right)dt \quad \ldots (24)$$

Z drugiej zaś strony, uważając u za funkcję zmiennych niezależnych $x, y, z \ldots t$, możemy napisać

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz+\cdots+\frac{\partial U}{\partial t}dt \quad \ldots \quad (25)$$

Zestawiając spółczynniki różniczek $dx, dy, dz \ldots dt$ we wzorach (24) i (25), będziemy mieli

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x}&=\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\\
\frac{\partial U}{\partial y}&=\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\\
\frac{\partial U}{\partial z}&=\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} \quad \ldots \quad (26)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial U}{\partial t}&=\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}
\end{aligned}$$

Są to właśnie wzory na pochodne cząstkowe funkcji U względem zmiennych niezależnych $x, y, z \ldots t$.

Rozważmy teraz przypadek, gdy U jest funkcją, tak zmiennych $u, v, w \ldots r$, jak zmiennych niezależnych $x, y, z \ldots t$, które wchodzą wyraźnie do wyrażenia na funkcję U. Wówczas różniczka zupełna funkcji U będzie

$$\begin{aligned}
dU=&\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz+\cdots+\frac{\partial U}{\partial t}dt+\\
&+\frac{\partial U}{\partial u}du+\frac{\partial U}{\partial v}dv+\frac{\partial U}{\partial w}dw+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}dr,
\end{aligned}$$

czyli ze względu na wzory (26)

$$\begin{aligned}
du=&\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right]dx+\\
&+\left[\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\right]dy+\\
&+\left[\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}\right]dz+\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\left[\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}\right]dt
\end{aligned}$$

Oznaczając przez $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\cdots\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$ tak zwane zupełne pochodne cząstkowe funkcji U względem zmiennych niezależnych $x, y, z \ldots t$, możemy napisać

$$du=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)dz+\cdots+\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)dt$$

Zestawiając współczynniki różniczek $dx, dy, dz \ldots dt$, otrzymujemy wyrażenia na cząstkowe pochodne funkcji U względem zmiennych $x, y, z \ldots t$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)&=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\\
\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)&=\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\\
\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)&=\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)&=\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}
\end{aligned}$$

Cząstkowe pochodne zupełne

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\cdots\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$$

są funkcjami zmiennych $x, y, z \ldots t, u, v, w \ldots r$. Różniczkując $\frac{\partial u}{\partial x}$ względem x, dostaniemy

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)=&\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial u\partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial u\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots\right.\\
&\left.\cdots+\frac{\partial^2 U}{\partial u\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial v\partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial v\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots\right.\\
&\left.\cdots+\frac{\partial^2 U}{\partial v\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial w\partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial w\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial w\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial w^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots\right.\\
&\left.\cdots+\frac{\partial^3 U}{\partial w\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots+\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\\
&+\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial w^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

co stanowi wzór na zupełną pochodną cząstkową drugiego rzędu funkcji u względem x. W taki sam sposób znajdziemy zupełne pochodne cząstkowe

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right);\quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)\cdots\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right);\quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right);\quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}\right)\text{ i t. d.}$$

W tym przypadku, gdy funkcja U nie należy wyraźnie od $x, y, z \ldots t$, będziemy mieli

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 U}{\partial w^2}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\cdots+\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+$$
$$+2\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+2\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots+2\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial r}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+$$
$$+2\frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 U}{\partial w^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\cdots+\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+$$
$$+2\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+2\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+\cdots+2\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial r}\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+$$
$$+2\frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial w}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 U}{\partial w^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+\cdots+\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+$$
$$+\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial w}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{\partial^2 U}{\partial u\,\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial w}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}$$

W taki sam sposób możemy znaleźć wszystkie inne pochodne cząstkowe funkcji U drugiego rzędu.

O różniczkach zupełnych funkcyj złożonych wielu zmiennych należy zauważyć co następuje:

Różniczka rzędu pierwszego wyraża się tym samym wzorem, jakim wyraziłaby się, gdyby zmienne nie były zależnemi, a mianowicie

$$dU=\frac{\partial U}{\partial u}du+\frac{\partial U}{\partial v}dv+\frac{\partial U}{\partial w}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}dr \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Własność ta wszakże nie stosuje się już do różniczek zupełnych rzędu wyższego, gdyż przy różniczkowaniu wzoru (27) nie możemy uważać różniczki $du, dv, dw \ldots dz$ za ilości stałe.

Istnieje atoli jeden przypadek, w którym, mimo, że $u, v, w \ldots r$ nie są zmiennemi niezależnemi, to jednak różniczki $du, dv \ldots dr$ mogą być uważane jako stałe; jest to mianowicie przypadek, gdy $u, v, w \ldots t$ są funkcjami linjowemi zmiennych $x, y, z \ldots t$ postaci

$$u=a_1x+a_2y+a_3z+\cdots+a_nt$$
$$v=b_1x+b_2y+b_3z+\cdots+b_nt$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r=k_1x+k_2y+k_3z+\cdots+k_nt$$

Wtedy bowiem różniczki

$$du=a_1dx+a_2dy+a_3dz+\cdots+a_ndt$$
$$dv=b_1dx+b_2dy+b_3dz+\cdots+b_ndt$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$dr=k_1dx+k_2dy+k_3dz+\cdots+k_ndt$$

są stałemi; a zatem różniczki zupełne wyższych rzędów są równe zeru.

Przeto zachodzi w tym przypadku wzór symboliczny na różniczkę zupełną rzędu m-go

$$d^mU=\left(\frac{\partial U}{\partial u}du+\frac{\partial U}{\partial v}dv+\frac{\partial U}{\partial w}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial r}dr\right)^{(m)}$$

Przykłady 1. Dana jest funkcja

$$U=\frac{x^2u}{u^2-v^2},$$

gdzie x jest zmienną niezależną, a u i v są funkcjami zmiennej x. Znaleźć różniczkę zupełną dU i pochodną zupełną $\frac{dU}{dx}$. Znajdziemy najpierw pochodne $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial u}$ i $\frac{\partial U}{\partial v}$. Będziemy mieli

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{2xu}{u^2-v^2};\quad \frac{\partial U}{\partial u}=\frac{(u^2-v^2)x^2-2u^2x^2}{(u^2-v^2)^2}=-\frac{x^2(u^2+v^2)}{(u^2-v^2)^2}$$
$$\frac{\partial U}{\partial v}=\frac{2x^2uv}{(u^2-v^2)^2}$$

Przeto

$$dU=\frac{2xu}{(u^2-v^2)}dx-\frac{x^2(u^2+v^2)}{(u^2-v^2)^2}du+\frac{2x^2uv}{(u^2-v^2)^2}dv$$

Stąd

$$\frac{dU}{dx}=\frac{2xu}{u^2-v^2}-\frac{x^2(u^2+v^2)}{(u^2-v^2)^2}u'+\frac{2x^2uv}{(u^2-v^2)^2}v'$$

Wyrażenie na różniczkę zupełną dU moglibyśmy otrzymać, różniczkując U, jako funkcję trzech zmiennych x, u, v.

Będziemy mieli

$$du=\frac{(u^2-v^2)(2ux\,dx+x^2du)-x^2u(2u\,du-2v\,dv)}{(u^2-v^2)^2}=\frac{2xu}{u^2-v^2}\,dx-$$

$$-\frac{x^2(u^2+v^2)}{(u^2-v^2)^2}\,du+\frac{2x^2uv}{(u^2-v^2)^2}\,dv,$$

2. Dana jest funkcja

$$U=\lg\frac{x+u}{y+v},$$

gdzie u i v są to funkcje zmiennych niezależnych x i y. Znaleźć różniczkę zupełną funkcji U.

Znajdziemy najpierw zupełne pochodne cząstkowe $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$ i $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$. Będziemy mieli

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{x+u}+\frac{1}{x+u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{y+v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)=\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{y+v}+\frac{1}{x+u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{y+v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

Przeto

$$dU=\left[\frac{1}{x+u}+\frac{1}{x+u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{y+v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right]dx+\left[-\frac{1}{y+v}+\frac{1}{x+u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{y+v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right]dy$$

Ten sam rezultat otrzymamy, różniczkując bezpośrednio funkcję U. Uwzględniając, że u i v są funkcjami x i y, otrzymamy

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy;\quad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy,$$

a zatem

$$dU=\frac{(y+v)\left(dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)-(x+u)\left(du+\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)}{(y+v)(x+u)}=$$

$$=\left[\frac{1}{x+u}+\frac{1}{x+u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{y+v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right]dx+\left[-\frac{1}{y+v}+\frac{1}{x+u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{y+v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right]dy$$

§ 6. Funkcje jednorodne wielu zmiennych. Twierdzenie Euler'a. Niechaj $u=f(x, y, z\ldots v)$ będzie pewną funkcją zmiennych niezależnych $x, y, z\ldots v$. Funkcję u nazywamy jednorodną stopnia m względem zmiennych niezależnych, jeżeli posiada taką własność, iż po podstawieniu zamiast zmiennych $x, y, z\ldots v$

wyrażeń $tx, ty, tz\ldots tv$, gdzie t jest liczbą dowolną, funkcja u nabywa czynnik t^m, to jest, jeżeli

$$u_1=f(tx, ty, tz\ldots tv)=t^mf(x, y, z\ldots v)=t^mu. \quad . \quad . \quad (28)$$

Liczbę m nazywamy stopniem jednorodności funkcji u.

Ponieważ dla funkcji jednorodnej wzór (28) zachodzi dla dowolnego t, przeto możemy założyć $t=\frac{1}{x}$; $t=\frac{1}{y}\ldots t=\frac{1}{v}$

Wtedy będziemy mieli

$$u=f(x, y, z\ldots v)=x^mf\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\cdots\frac{v}{x}\right)=y^m\left(\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y}\cdots\frac{v}{y}\right)=\ldots$$

$$\ldots=v^mf\left(\frac{x}{v}, \frac{y}{v}, \frac{z}{v}\cdots 1\right)$$

A więc każdą funkcję jednorodną stopnia m można przedstawić w postaci iloczynu m-ej potęgi dowolnie obranej zmiennej niezależnej przez funkcję, w której zmienne niezależne zastąpiono przez stosunki wszystkich zmiennych niezależnych do obranej zmiennej niezależnej.

Przykłady 1. Funkcja

$$u=x^4y^2-x^3z^3=x^6\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2-\left(\frac{z}{x}\right)^3\right]$$

będzie funkcją jednorodną stopnia 6, gdyż dla niej mamy

$$t^4x^4.t^2y^2-t^3x^3.t^3z^3=t^6(x^4y^2-x^3z^3)=t^6u.$$

2. Funkcja

$$u=\frac{x\sin\frac{x}{y}}{x^2+y^2}+\frac{1}{\sqrt{xy}}$$

jest jednorodną stopnia -1, gdyż

$$\frac{tx\sin\frac{tx}{ty}}{t^2x^2t^3y^2}+\frac{1}{\sqrt{tx.ty}}=t^{-1}\cdot\left(\frac{x\sin\frac{x}{y}}{x^2+y^2}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\right)=t^{-1}u.$$

Tę funkcję można napisać w postaci

$$u=y^{-1}\left[\frac{\frac{x}{y}\sin\frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}+\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}}}\right].$$

3. Funkcja

$$u=x\sqrt{x}+4x\sqrt{y}-2y\sqrt{y}=x^{\frac{3}{2}}\left[1+4\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$$

jest jednorodną stopnia $^3/_2$, gdyż

$$tx\sqrt{tx}+4tx\sqrt{ty}-2ty\sqrt{ty}=t^{3/2}u.$$

4. Funkcja

$$u=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{\sqrt{x+y}}{x}$$

jest jednorodną stopnia $\frac{1}{2}$, gdyż

$$e^{\frac{tx}{ty}}\cdot\frac{\sqrt{tx+ty}}{tx}=t^{-\frac{1}{2}}\cdot u.$$

5. Funkcja

$$u=\left(x+y\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{z}\right)^{\frac{z}{y+z}}$$

jest jednorodną stopnia $\frac{z}{y+z}$, gdyż

$$\left(tx+ty\operatorname{arc\,tg}\frac{tx}{tz}\right)^{\frac{tz}{ty+tz}}=t^{\frac{z}{y+z}}\cdot u.$$

Udowodnijmy dla funkcji jednorodnych stopnia m wzór zasadniczy, podany przez Euler'a

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}x+\frac{\partial u}{\partial y}y+\frac{\partial u}{\partial z}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial v}v\right)^{(m)}=(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).u,$$

gdzie w prawej części mamy wyrażenie symboliczne na różniczkę zupełną n-go rzędu funkcji u, w którem różniczki zmiennych niezależnych $dx,\ dy,\ dz\ldots dv$ zastąpiono odpowiednio przez $x,\ y,\ z\ldots v$.

W myśl definicji funkcji jednorodnej

$$u=f(x,y,z\ldots v)$$

stopnia m możemy napisać

$$f(tx,\ ty,\ tz\ldots tv)=t^m f(x,y,z\ldots v)$$

Załóżmy

$$tx=x_1;\quad ty=ty_1;\quad tz=z_1\ldots tv=v_1$$

Wtedy

$$u_1=f(x_1,y_1,z_1\ldots v_1)=t^m f(x,y,z\ldots v)=t^m\cdot u.$$

Będziemy uważali funkcję u_1 za funkcję zmiennego parametru t. Różniczkując ją względem t kolejno n razy, otrzymujemy

$$du_1=\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial u_1}{\partial v_1}dv_1\right)^{(1)}=mt^{m-1}u\cdot dt$$

$$d^2u_1=\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}dy_1+\cdots+\frac{\partial u_1}{\partial v_1}dv_1\right)^{(2)}=m(m-1)t^{m-2}u\cdot dt^2$$

$$d^3u_1=\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}dy_1+\cdots+\frac{\partial u_1}{\partial v_1}dv_1\right)^{(3)}=m(m-1)(m-2)t^{m-3}u\cdot dt^3$$

. . . . . (29)

$$d^nu_1=\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}dy_1+\cdots+\frac{\partial u_1}{\partial v_1}dv_1\right)^{(n)}=$$

$$\ldots=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)t^{m-n}u\cdot dt^n$$

Biorąc pod uwagę, że

$$dx_1=xdt;\quad dy_1=ydt\ldots dv_1=vdt,$$

a nadto

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial u}{\partial x};\quad\frac{\partial u_1}{\partial y_1}=\frac{\partial u}{\partial y}\cdots\frac{\partial u_1}{\partial v_1}=\frac{\partial u}{\partial v}$$

będziemy mieli z (29)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}x+\frac{\partial u}{\partial y}y+\cdots+\frac{\partial u}{\partial v}v\right)^{(1)}=m.t^{m-1}.u$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}x+\frac{\partial u}{\partial y}y+\cdots+\frac{\partial u}{\partial v}v\right)^{(2)}=m(m-1)t^{m-2}.u$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}x+\frac{\partial u}{\partial y}y+\cdots+\frac{\partial u}{\partial v}v\right)^{(3)}=m(m-1)(m-2)t^{m-3}.u$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}x+\frac{\partial u}{\partial y}y+\cdots+\frac{\partial u}{\partial v}v\right)^{(n)}=m(m-1)(m-2)\ldots(m-u+1)t^{m-n}.u$$

Zakładając w tych wzorach $t=1$, otrzymujemy

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}x+\frac{\partial u}{\partial y}y+\cdots+\frac{\partial u}{\partial v}v\right)^{(1)}=m.u$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}x+\frac{\partial u}{\partial y}y+\cdots+\frac{\partial u}{\partial v}v\right)^{(2)}=m(m-1)u$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}x+\frac{\partial u}{\partial y}y+\cdots+\frac{\partial u}{\partial v}v\right)^{(3)}=m(m-1)(m-2)u$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\left(\frac{\partial u}{\partial u}x+\frac{\partial u}{\partial y}y+\cdots+\frac{\partial u}{\partial v}\cdot v\right)^{(m)}=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).u,$$

a na tem właśnie polega twierdzenie Euler'a, o którego dowód chodziło.

Sprawdzimy wzór Eulera na poszczególnych przykładach.

Przykład 1. Funkcja

$$u = x\sqrt{x} + 4x\sqrt{y} - 2y\sqrt{y}$$

jest jednorodną stopnia $\frac{3}{2}$

Dla tej funkcji będziemy mieli

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3}{2}\sqrt{x} + 4\sqrt{y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2x - 3y}{\sqrt{y}}$$

Przeto

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}x + \frac{\partial u}{\partial y}y\right)^{(1)} = \frac{\partial u}{\partial y}x + \frac{\partial u}{\partial y}y = \frac{3}{2}x\sqrt{x} + 6x\sqrt{y} - 3y\sqrt{y} = \frac{3}{2}u$$

Dalej będziemy mieli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{3}{4\sqrt{x}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2}{\sqrt{y}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{3y + 2x}{2y \cdot \sqrt{y}}$$

Przeto

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}x + \frac{\partial u}{\partial y}y\right)^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}xy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}y^2 = \frac{3}{4}x\sqrt{x} + 3x\sqrt{y} -$$

$$-\frac{3}{2}y\sqrt{y} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}(x\sqrt{x} + 4x\sqrt{y} - 2y\sqrt{y}) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot u$$

2. Funkcja $u = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{\sqrt{x+y}}{x}$ jest jednorodną stopnia $\frac{1}{2}$

Różniczką zupełną tej funkcji będzie

$$du = e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{ydx - xdy}{y^2} \cdot \frac{\sqrt{x+y}}{x} + \frac{dx + dy}{2x\sqrt{x+y}} - \sqrt{x+y}\,dx\right)$$

Podstawiając w tym wzorze zamiast różniczek dx i dy odpowiednio zmienne x i y, otrzymamy

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}x + \frac{\partial u}{\partial y}y\right)^{(1)} = e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x+y}{2x\sqrt{x+y}} - \sqrt{x+y}\right) = -\frac{1}{2}e^{\frac{x}{y}}\frac{\sqrt{x+y}}{x} = -\frac{1}{2}u$$

3. Funkcja $u = \left(x + y\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{z}\right)^{\frac{z}{y+z}}$ jest jednorodną stopnia $\frac{z}{y+z}$. Różniczką zupełną tej funkcji będzie

$$du = \frac{x}{y+z}\left(x + y\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{z}\right)^{\frac{x}{y+z}-1} \cdot \left(dx + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{z}dy + y\frac{zdx - xdz}{x^2 + z^2}\right) +$$

$$+\left(x + y\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{z}\right)^{\frac{x}{y+z}}\lg\left(x + y\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{z}\right) \cdot \frac{(y+z)dx - x(dy+dz)}{(y+z)^2}$$

Podstawiając w tym wzorze zamiast różniczek dx, dy, dz odpowiednio zmienne x, y, z otrzymamy

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}x + \frac{\partial u}{\partial y}y + \frac{\partial u}{\partial z}z\right)^{(1)} = \frac{x}{y+z}\left(x + y\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{z}\right)^{\frac{x}{y+z}-1} \cdot \left(x + y\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{z}\right) =$$

$$= \frac{x}{y+z}\left(x + y\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{z}\right)^{\frac{x}{y+z}} = \frac{x}{y+z} \cdot u.$$

Rozdział XI.

O funkcjach uwikłanych jednej i wielu zmiennych.

§ **1. Funkcje uwikłane jednej zmiennej.** W Analizie Matematycznej bardzo często się zdarza, że zależność między dwiema zmiennemi x i y da się ustalić za pomocą równania postaci

$$f(x, y)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Gdyby się udało równanie to rozwiązać względem y lub x, otrzymalibyśmy wtedy y, jako pewną funkcję x, względnie x jako funkcje y. Ponieważ nie każde równanie daje się rozwiązać względem zmiennych, przeto pozostaje jedyny sposób badania zależności między zmiennemi, uważając jedną z nich, naprzykład y, jako funkcję drugiej x, określonej równaniem (1). Takie funkcje są znane pod nazwą funkcyj uwikłanych.

Należy przedewszystkiem udowodnić, że funkcje uwikłane jednej zmiennej rzeczywiście istnieją.

Niechaj $f(x, y)$ będzie funkcją, spełniającą warunki następujące:

1. Funkcja $f(x, y)$ jest ciągłą w pewnym obszarze E.
2. Funkcja $f(x, y)$ jest różniczkowalną względem y, a przytem pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial y}$ jest funkcją ciągłą w obszarze E.
3. Funkcja $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0), który nazywać będziemy początkowym, należącym do obszaru E, równa się zeru, a jej pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial y}$ w tym punkcie nie jest zerem.

Udowodnijmy twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ i jej pochodna cząstkowa względem y spełnia powyższe warunki, wówczas istnieje jedna i tylko jedna funkcja $\varphi(x)$, posiadająca własności następujące:

1. Wartość funkcji $\varphi(x)$ dla $x=x_0$ równa się y_0.
2. Funkcja $\varphi(x)$ jest ciągłą dla $x=x_0$.

3. Funkcja $\varphi(x)$ będąc podstawioną zamiast y wyrażenie funkcji $f(x, y)$ daje tożsamościowo

$$f(x, y)=0$$

w każdem otoczeniu punktu (x_0, y_0), należącem do obszaru E, czyli innemi słowy funkcja $y=\varphi(x)$ może być uważana jako pierwiastek równania

$$f(x, y)=0).$$

Dowód. Przypuśćmy, dla ustalenia myśli, że $f_y(x_0, y_0)>0$. Ponieważ, wedle przypuszczenia, funkcja $f'_y(x, y)$ jest ciągłą w punkcie (x_0, y_0), przeto w otoczeniu punktu (x_0, y_0) funkcja $f'_y(x, y)$ pozostaje dodatnią, czyli innemi słowy istnieją takie liczby ε i η, iż dla wszystkich wartości na x i y, spełniających warunki

$$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$$
$$y_0-\eta<y<y_0+\eta,$$

a należących do obszaru E, zachodzić będzie nierówność

$$f'_y(x, y)=0.$$

Ponieważ wedle przypuszczenia $f'_y(x_0, y_0)>0$, przeto funkcja $f(x_0, y)$ jest rosnąca przy $y=y_0$.

Biorąc zaś pod uwagę, że $f(x_0, y_0)=0$, wnosimy, że istnieje taka liczba dodatnia k, przy której zachodzą nierówności

$$f(x_0, y_0-k)<0; \quad f(x_0, y_0+k)>0.$$

Ponieważ funkcja $f(x, y)$ jest ciągłą w obszarze E, a nadto $f(x_0\, y_0-k)<0$, przeto istnieje taka liczba dodatnia ε_1, że zachodzi nierówność

$$f(x, y_0-k)<0,$$

skoro

$$-\varepsilon_1<x<\varepsilon_1.$$

Analogicznie możemy stwierdzić, iż istnieje taka liczba dodatnia ε_2, że zachodzi nierówność

$$f(x, y_0+k)>0, \text{ skoro } -\varepsilon_2<x<\varepsilon_2$$

Oznaczając przez ω najmniejszą z liczb ε_1 i ε_2, wnosimy, że zachodzić będą równocześnie nierówności

$$f(x, y_0-k)<0; \quad f(x, y_0+k)>0, \text{ skoro } -\omega<x<\omega \quad . \quad (2)$$

Oznaczmy przez a jedną z wartości na x, spełniających nierówności (2). Możemy wtedy napisać

$$f(a, y_0-k)<0; \quad f(a, y_0+k)>0$$

Ponieważ $f(x, y)$ jest ciągłą w obszarze E, przeto istnieje przynajmniej jedna wartość $y=b$, spełniająca nierówności

$$y_0-k<b<y_0+k,$$

dla której

$$f(a, b) = 0$$

Łatwo spostrzec, że każdej wartości $x = a$ odpowiada jedna i tylko jedna wartość $y = b$. W samej rzeczy, gdyby pewnej wartości $x = a$ odpowiadały dwie wartości $y = b_1$ i $y = b_2$, czyli innemi słowy gdyby równocześnie zachodziły wzory

$$f(a, b_1) = 0 \quad \text{i} \quad f(a, b_2) = 0,$$

wówczas w myśl twierdzenia Rolle'go, istniałaby przynajmniej jedna taka wartość $y = \xi$, spełniająca nierówności

$$y_0 - k < b_1 < \xi < b_2 < y_0 + k,$$

iż

$$f'_y(a, \xi) = 0.$$

Jest to jednak rzeczą niemożliwą, gdyż sprzeciwia założeniu, że pochodna $f'(x, y)$ w obszarze E nie jest zerem. A więc każdej wartości na x, spełniającej nierówności (2) odpowiada jedna i tylko jedna wartość na y, przy której

$$f(x, y) = 0$$

Stąd wnosimy, że $y = \varphi(x)$ będzie funkcją jednowartościową zmiennej x, spełniającą równanie (1) dla każdej wartości na x w obszarze E, $y = \varphi(x)$ nazywamy właśnie funkcję uwikłaną zmiennej x, określoną równaniem (1).

Łatwo spostrzec, że $y = \varphi(x)$ będzie funkcją ciągłą dla $x = x_0$. W samej rzeczy, zmieniając liczbę k, zmieniamy przez to liczbę ω. A więc jakkolwiek małą będzie liczba k, możemy zawsze wyznaczyć taką wartość na ω, iż dla wszystkich wartości na zmienną x, spełniających nierówności

$$-\omega < x < \omega$$

odpowiednie wartości y będą czyniły zadość nierównościom

$$y_0 - k < y < y_0 + k$$

Stąd wnosimy, że $y = \varphi(x)$ jest funkcją ciągłą dla $x = x_0$. Oczywista, dla $x = x_0$ $y = \varphi(x) = y_0$.

Dowiedliśmy więc naszego twierdzenia w zupełności.

Przypuśćmy, że funkcja $f(x, y)$ dwóch zmiennych x i y spełnia wszystkie warunki, podane w poprzedniem twierdzeniu, a nadto posiada pochodne cząstkowe względem x, dla wartości sąsiednich z $x = x_0$.

Możemy wtedy udowodnić, że funkcja $y = \varphi(x)$, określona równaniem $f(x_1 y) = 0$, jest różniczkowalną względem x. Weźmy pod uwagę wartości x i y oraz $x + \Delta x$, $y + \Delta y$. Wedle założenia granice

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y+\Delta y)}{\Delta x}\right] = f'_x(x,\ y+\Delta y)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y}\right] = f'_y(x,\ y)$$

są liczbami skończonemi.

Wobec tego możemy napisać

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y+\Delta y) = \Delta x f'_x(x,\ y+\Delta y) + \alpha \Delta x \quad . \quad (3)$$

i

$$f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y) = \Delta y f'_y(x, y) + \beta \Delta y, \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

gdzie α i β są to ilości, zmierzające do zera, gdy Δx i Δy dążą do zera

Dodając wzory (3) i (4) stronami, dostaniemy

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x, y) = \Delta x [f'_x(x,\ y+\Delta y) + \alpha] + \\ + \Delta y [f'_y(x, y) + \beta] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Uważajmy teraz y jako pierwiastek równania

$$f(x, y) = 0,$$

a $y + \Delta y$ jako pierwiastek równania

$$f(x + \Delta x, y) = 0.$$

Wtedy ze wzoru (5) dostaniemy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x,\ y+\Delta y) + \alpha}{f'_y(x, y) + \beta}$$

W granicy, gdy przyrost Δx dąży do zera, w myśl ciągłości funkcji y, otrzymamy

$$y' = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim\left[\frac{f'_x(x,\ y+\Delta y) + \alpha}{f'(x, y) + \beta}\right] = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} \quad . \quad (6)$$

Stąd wnosimy, że y jest funkcją różniczkowalną.

Do wzoru (6) na pochodną y' można dojść na innej drodze, skoro już dowiedziono uprzednio, że ta pochodna istnieje. Wyobraźmy sobie, iż podstawiliśmy do funkcji $f(x, y)$ zamiast y jej wartość jako funkcji $\varphi(x)$ zmiennej x. Ponieważ wartość tę otrzymano z równania $f(x, y) = 0$, przeto, podstawiając $y = \varphi(x)$ do $f(x, y)$, otrzymamy funkcję, która jest z pewnością zerem dla wszystkich wartości na x (przy których równanie $f(x, y) = 0$ określa y).

Jasną jest rzeczą, że pochodna tej funkcji jest zerem. Różniczkując więc funkcję $f(x, y)$, jako funkcję złożoną zmiennych x i y, gdzie y jest funkcją x, dostaniemy

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

skąd

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Wzór (6) wskazuje, że możemy znaleźć wartość pochodnej funkcji uwikłanej, nie szukając uprzednio samej funkcji.

Analogicznie można udowodnić, że istnieje pochodna drugiego rzędu $\frac{d^2y}{dx^2}$, skoro istnieją pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ i } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Pochodną drugiego rzędu funkcji uwikłanej określonej równaniem $f(x, y)=0$, znajdziemy, różniczkując równanie

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Dostaniemy wtedy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

Stąd

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}\left[\frac{\partial f}{\partial x^2}+2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right],$$

czyli wobec (6)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right)^2\right]$$

W sposób całkiem analogiczny możemy znaleźć wszystkie pochodne funkcji uwikłanej.

Przykłady 1. Dana jest funkcja uwikłana, określona równaniem

$$f(x, y)=x^3+y^3-3axy=0$$

Znaleźć jej pochodną pierwszego i drugiego rzędu. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3ay; \quad \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3ax,$$

a zatem

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}$$

Różniczkując równanie

$$(x^2-ay)+(y^2-ax)\frac{dy}{dx}=0,$$

otrzymamy

$$2x-2a\frac{dy}{dx}+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y^2-ax)\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

czyli

$$2x+\frac{2a(x^2-ay)}{y^2-ax}+\frac{2y(x^2-ay)^2}{(y^2-ax)^2}+(y^2-ax)\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Stąd

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2x(y^2-ax)^2+2a(x^2-ay)(y^2-ax)+2y(x^2-ay^2)}{ax-y^2}$$

2. Dana jest funkcja uwikłana y, określona równaniem

$$f(x, y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{a^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{b^2},$$

a zatem

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

Różniczkując równanie

$$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0,$$

otrzymamy

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{y}{b^2}\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

czyli

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\frac{b^4x^2}{a^4y^2}+\frac{y}{b^2}\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Stąd

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{y^3}\cdot\frac{(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4}=-\frac{b^4}{a^2y^3}$$

3. Dana jest funkcja uwikłana y, określona równaniem

$$f(x, y)=y-xe^y-1=0.$$

Znaleźć jej pochodną pierwszego i drugiego rzędu. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-e^y; \quad \frac{\partial f}{\partial y}=1-xe^y$$

A zatem

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{e^y}{1-xe^y}=\frac{e^y}{2-y}$$

Różniczkując bezpośrednio ostatni wzór, dostaniemy

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(2-y)e^y+e^y}{(2-y)^2}\cdot\frac{dy}{dx}=e^{2y}\cdot\frac{3-y}{(2-y)^3}$$

Ćwiczenia. Znaleźć pochodne funkcyj uwikłanych, określonych równaniami

1. $y\lg x-x\lg y=0;\quad \frac{dy}{dx}=?$

Odp. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{1-\lg x}{1-\lg y}$

2. $\sin y-x\sin(a+y)=0;\quad \frac{dy}{dx}=?$

Odp. $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin(a+y)}{\cos y-x\cos(a+y)}$

3. $\operatorname{tg} y-x\sin y-1=0;\quad \frac{dy}{dx}=?$

Odp. $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2 y\sin y}{1-x\cos^3 y}$

4. $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=0;\quad \frac{dy}{dx}=?$

Odp. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\cdot\frac{y+2\sqrt{(1+x)(1+y)}}{x+2\sqrt{(1+x)(1+y)}}$

5. $(x^2+y^2)^2-a^2x+b^2y=0;\quad \frac{dy}{dx}=?$

Odp. $\frac{dy}{dx}=\frac{a^2-4x(x^2+y^2)}{b^2+4y(x^2+y^2)}$

6. $(a+y)^2(b^2-y^2)-x^2y^2=0;\quad \frac{dy}{dx}=?$

Odp. $\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2\sqrt{b^2-y^2}}{y^3+ab^2}$

7. $e^{x-y}-x^y=0;\quad \frac{dy}{dx}=?;\quad \frac{d^2y}{dx^2}=?$

Odp. $\frac{dy}{dx}=\frac{\lg x}{(1+\lg x)^2};\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1-\lg x}{x(1+\lg x)^3}$

8. $x^2\cos^2 y-2ax\cos y+a^2=0;\quad \frac{dy}{dx}=?;\quad \frac{d^2y}{dx^2}=?$

Odp. $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{x^2\sin y};\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{a(2x\sin y+a\operatorname{cotg} y)}{x^4\sin^2 y}$

9. $\cos(x-y)-y\sin x=0;\quad \frac{dy}{dx}=?$

Odp. $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2y\sin y+y^2}{1-\cos y-y\sin y}$

10. $x\sin y-y\cos x=0;\quad \frac{dy}{dx}=?$

Odp. $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin y+y\sin x}{x\cos y-\cos x}$

11. $y\operatorname{arc\,tg} x-y^2+x^2=0;\quad \frac{dy}{dx}=?$

Odp. $\frac{dy}{dx}=\frac{y(y+2x+2x^3)}{(1+x^2)(y^2+x^2)}$

12. $a^{\lg x}-\left(\frac{x}{y}\right)^n=0;\quad \frac{dy}{dx}=?\quad \frac{d^2y}{dx^2}=0$

Odp. $\frac{dy}{dx}=\frac{(n-\lg a)y}{nx};\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\lg a}{n}\cdot\frac{y}{x^2}$

13. $\left(\frac{a}{e}\right)^x y\lg x=0;\quad \frac{dy}{dx}=?$

Odp. $\frac{dy}{dy}=y\left(\lg a-1-\frac{1}{x\lg x}\right)$

14. $a^{x^y}+\sqrt{\sec xy}=0;\quad \frac{dy}{dx}=?$

Odp. $\frac{dy}{dx}=\frac{2yx^{y-1}\lg a-y\operatorname{tg} xy}{x\operatorname{tg} xy-2x^y\lg a.\lg x}$

15. $y\sin x-x\operatorname{arc\,tg} y;\quad \frac{dy}{dx}=?$

Odp. $\frac{dy}{dx}=\frac{y(1+y^2)(x\cos x-\sin x)}{x[x-(1+y^2)\sin x]}$

16. $xy - \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} = 0; \quad \frac{dy}{dy} = ?$

Odp. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left[\frac{1-(x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)}\right]$

17. $y \lg x - \sin y \quad \frac{dy}{dy} = ?$

Odp. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}\left(\frac{y - x\sin y}{y\cos y - \sin y}\right)$

§ **2. Funkcje uwikłane wielu zmiennych.** Niechaj $f(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n, y)$ oznacza pewną funkcję $n+1$ zmiennych $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n, y$, spełniającą warunki następujące:

1. Funkcja $f(x_1, x_2 \ldots x_n, y)$ jest ciągłą w pewnym obszarze E.

2. Funkcja $f(x_1, x_2 \ldots x_n, y)$ jest różniczkowalną względem y, a nadto jej pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial y}$ jest funkcją ciągłą w obszarze E.

3. Funkcja $f(x_1, x_2 \ldots x_n, y)$ w punkcie $(x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0, y^0)$, który nazywać będziemy p o c z ą t k o w y m, należącym do obszaru E równa się zeru, a jej pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial y}$ w tym punkcie nie jest zerem.

W sposób całkiem analogiczny do podanego w poprzednim paragrafie możemy udowodnić twierdzenie następujące:

T w i e r d z e n i e: J e ż e l i f u n k c j a $f(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n, y)$ i j e j p o c h o d n a c z ą s t k o w a w z g l ę d e m y s p e ł n i a p o w y ż s z e w a r u n k i, w ó w c z a s i s t n i e j e j e d n a i t y ł k o j e d n a f u n k c j a $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$, p o s i a d a j ą c a w ł a s n o ś c i n a s t ę p u j ą c e:

1. W a r t o ś ć f u n k c j i $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ d l a $x_1 = x_1^0$; $x_2 = x_2^0 \ldots x_n = x_n^0$ r ó w n a s i ę y_0.

2. F u n k c j a $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ j e s t c i ą g ł ą d l a $x_1 = x_1^0$; $x_2 = x_2^0 \ldots x_n = x_n^0$.

3. F u n k c j a $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$, b ę d ą c p o d s t a w i o n a z a m i a s t y w w y r a ż e n i e f u n k c j i $f(x_1, x_2 \ldots x_n, y)$, d a j e t o ż s a m o ś c i o w o

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n, y) = 0,$$

w k a ż d y m o t o c z e n i u p u n k t u $(x_1^0, x_2^0, x_3^0 \ldots x_n^0, y_0)$, n a l e ż ą c e m d o o b s z a r u E, c z y l i i n n e m i s ł o w y f u n k c j a

$$y = \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

m o ż e b y ć u w a ż a n ą j a k o p i e r w i a s t e k r ó w n a n i a

$$f(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n, y) = 0 \ldots\ldots (8)$$

Funkcję tę nazywamy f u n k c j ą u w i k ł a n ą n z m i e n n y c h $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$, o k r e ś l o n ą r ó w n a n i e m (8).

Przypuśćmy, że funkcja $f(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n, y)$ spełnia wszystkie warunki, podane w wysłowionem twierdzeniu, a nadto posiada pochodne cząstkowe względem wszystkich zmiennych $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ dla wartości sąsiednich z $x_1 = x_1^0$; $x_2 = x_2^0$; $x_3 = x_3^0 \ldots$ $\ldots x_n = x_n^0$. Można wtedy okażać, że funkcja $y = \varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$ jest różniczkowalną.

Rozważmy dwa układy wartości na zmienne

$$x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n, y$$

$$x_1, x_2, \ldots x_i + \Delta x_i \ldots x_n, y + \Delta y,$$

należące do obszaru E.

Wedle założenia istnieją granice

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n, y+\Delta y) - f(x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n, y+\Delta y)}{\Delta x_i} =$$

$$= f'_{x_i}(x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n, y+\Delta y)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n, y+\Delta y) - (x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n \ldots y)}{\Delta y} =$$

$$= f'_y(x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_n y)$$

Możemy napisać

$$f(x_1, x_2 \ldots x_i + \Delta x_i \ldots x_n, y+\Delta y) - f(x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n, y+\Delta y) =$$
$$= \Delta x_i [f'_{x_i}(x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n, y+\Delta y) + \omega_i]$$

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n \ldots x_i, y+\Delta y) - f(x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n, y) =$$
$$= \Delta y [f'_y(x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n, y) + \varepsilon],$$

gdzie ω_i dąży do zera razem z Δx_i, a ε dąży do zera razem z y.

Dodając ostatnie wzory, dostaniemy

$$f(x_1, x_2 \ldots x_i + \Delta x_i \ldots x_n, y+\Delta y) - f(x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_n, y) =$$
$$= \Delta x_i [f'_{x_i}(x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n, y+\Delta y) + \omega_i] + \Delta y [f'_y(x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n, y) + \varepsilon] \quad (9)$$

Uważajmy y, jako pierwiastek równania

$$f(x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n, y) = 0$$

dla wartości $x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n$, a $y + \Delta y$ jako pierwiastek tegoż równania, lecz dla wartości $x_1, x_2 \ldots x_i + \Delta x_i \ldots x_n$.

Wtedy będziemy mieli

$$f(x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n, y) = 0; \quad f(x_1, x_2 \ldots x_i + \Delta x_i \ldots x_n, y+\Delta y) = 0,$$

A zatem wzór (9), przyjmuje postać

$$\Delta x_i [f'_{x_i}(x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n, y+\Delta y) + \omega_i] + y [f'_y(x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n, y) + \varepsilon] = 0$$

Skąd

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_i} = -\frac{f'_{x_i}(x_1, x_2 \ldots x_n, y) + \omega_i}{f'_y(x_1 x_2 \ldots x_n, y) + \varepsilon}$$

Gdy przyrost Δx dąży do zera, przyrost Δy będzie również dążył do zera.

A zatem

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{f'_{x_i}(x_1, x_2 \ldots x_n, y)}{f'_y(x_1, x_2 \ldots x_n, y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad . \quad (10)$$

Jest to właśnie wzór na pochodną cząstkową y względem x_i.

Jeżeli istnieją pochodne cząstkowe funkcji f względem wszystkich zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_n$, to istnieją pochodne cząstkowe y względem każdej z tych zmiennych.

Analogicznie można udowodnić, że istnieją pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji y względem zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_n$, skoro istnieją pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f względem tych zmiennych.

Pochodne cząstkowe funkcji uwikłanej wielu zmiennych możemy znaleźć, posługując się prawidłem różniczkowania funkcji złożonej. Przypuśćmy, że dane jest równanie

$$f(x_1, x_2, x_3 \ldots x_i \ldots x_n, y) = 0,$$

które określa pewną funkcję uwikłaną y zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_n$. Uważając ją za funkcją złożoną zmiennej x_i, różniczkujemy względem tej zmiennej. W rezultacie dostaniemy równanie

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

skąd

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f_i}{\partial y}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Rożniczkując równanie (11), otrzymamy równanie, z którego możemy wyznaczyć pochodne drugiego i wyższych rzędów. Różniczkując naprzykład równanie (11) względem x_i i x_k, otrzymamy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x_k} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_k} = 0$$

Podstawiając do tych równań wzór na pochodne cząstkowe $\frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial y}{\partial x_k}$ znajdziemy po rozwiązaniu pochodne cząstkowe drugiego rzędu $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_k}$, $(i, k = 1, 2, 3 \ldots n)$.

Naprzykład, pochodne cząstkowe pierwszego rzędu $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ funkcji uwikłanej dwóch zmiennych x i y, określonej równaniem

$$f(x, y, z) = 0$$

otrzymamy z równań następujących:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Różniczkując te równania względem x i y, dostaniemy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Podstawiamy do tych równań pochodne cząstkowe $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$, otrzymane z rownań (12). Rozwiązując nareszcie równania (13) względem $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, znajdziemy wzory szukane na pochodne drugiego rzędu funkcji z względem x i y. W sposób zupełnie analogiczny znajdziemy pochodne funkcji z wyższych rzędów.

Te same wzory dostaniemy, posługując się wzorem na różniczki zupełne funkcji złożonej. Będziemy mieli

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

$$d^2 f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz\right)^{(2)} + \frac{\partial f}{\partial z} d^2 z = 0$$

Z tych wzorów otrzymamy pochodne

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Przykład. Mamy daną funkcję uwikłaną z, określoną równaniem

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

Różniczkując to równanie względem x i y, dostaniemy

$$x + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad y + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Stąd

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Różniczkując równanie (14) względem x i y, otrzymamy

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1+\frac{x^2}{z^2}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{z^2}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1+\frac{y^2}{z^2}+z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

Z tych równań dostaniemy, ze względu na (15)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{z^2+x^2}{z^3};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{z^3};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{y^2+z^2}{z^3}$$

Znajdziemy teraz pochodne $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ze wzorów na różniczki zupełne pierwszego i drugiego rzędu funkcji $f(x, y, z)$. Będziemy mieli

$$\begin{aligned} &x dx+y dy+z dz=0\\ &dx^2+dy^2+dz^2+z d^2z=0, \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

gdyż $d^2x=d^2y=0$.

Z pierwszego wzoru (16) dostaniemy

$$dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Stąd wnosimy, że

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Podstawiając wzór (17) na różniczkę zupełną dz do drugiego wzoru (16), otrzymamy

$$dx^2+dy^2+\left(\frac{x}{z}\right)^2 dx^2+2\frac{xy}{z^2}dxdy+\left(\frac{y}{z}\right)^2 dy^2+z d^2z=0,$$

skąd

$$d^2z=-\frac{x^2+z^2}{z^3}dx^2-2\frac{xy}{z^3}dxdy-\frac{y^2+z^2}{z^3}dy^2$$

A zatem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x^2+z^2}{z^3};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{z^3};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{y^2+z^2}{z^3}$$

2. Funkcje uwikłane, określone układem równań równoczesnych. Niechaj będą dane m funkcyj

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_m)\\ &f_2(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_m)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &f_m(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_m), \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

z których każda zależy od $n+m$ zmiennych

$$x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_m$$

Przypuśćmy, że układ funkcyj (19) spełnia warunki następujące:

1. Funkcje $f_1, f_2 \ldots f_m$ oraz ich pochodne cząstkowe względem $y_1, y_2 \ldots y_m$ są fnnkcjami ciągłemi dla wartości początkowych

$$x_1=x_1^0;\ x_2=x_2^0 \ldots x_n=x_n^0;\ y_1=y_1^0,\ y_2=y_2^0 \ldots y_m=y_m^0$$

2. Funkcje $f_1, f_2 \ldots f_m$ dla wartości początkowych zmiennych są zerami, t. j.

$$f_1^0=0;\quad f_2^0=0 \ldots f_m^0=0$$

3. Wyznacznik*)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}; & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \ldots \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}; & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \ldots \frac{\partial f_2}{\partial y_m}\\ \ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}; & \frac{\partial f_m}{\partial y_2} \ldots \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} = \frac{D(f_1, f_2 \ldots f_m)}{D(y_1, y_2 \ldots y_m)}$$

dla wartości początkowych zmiennych nie jest zerem.

Udowodnijmy twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Jeżeli układ (19) m funkcyj $m+n$ zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_m$ spełnia powyższe warunki, to istnieje jeden i tylko jeden układ funkcyj

$$\begin{aligned} &y_1=\varphi_1(x_1, x_2 \ldots x_n)\\ &y_2=\varphi_2(x_1, x_2 \ldots x_n)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &y_m=\varphi_m(x_1, x_2 \ldots x_n) \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

n zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_n$, posiadający własności następujące:

1. Dla wartości początkowych zmiennych

$$x_1=x_1^0,\ x_2=x_2^0 \ldots x_n=x_n^0$$

funkcje (19) stają się zerami.

*) Wyznacznik ten nazywa się funkcyjnym wyznacznikiem Jacobi, czyli wprost jakobianem. Szczegółowo wyznacznik Jacobi będziemy rozważali w następnym rozdziale.

2. Funkcje (20) są ciągłe dla wartości początkowych

$$x_1 = x_1^0;\ x_2 = x_2^0 \ldots x_n = x_1^0$$

3. Funkcje (20) dla wartości początkowych zmiennych oraz wartości sąsiednich, będąc podstawione do funkcyj (19), dają tożsamościowo

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_m) = 0 \\ &f_2(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_m) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_m(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_m) = 0, \end{aligned} \qquad (21)$$

czyli innemi słowy, funkcje (20) mogą być uważane, jako pierwiastki równań (21). Funkcje te nazywamy funkcjami uwikłanemi, określonemi układem równań (21)

Dowód. W poprzednim paragrafie twierdzenie zostało udowodnione dla przypadku szczególnego, gdy $m = 1$. Przypuśćmy teraz, iż wysłowione twierdzenie zachodzi dla układu $m-1$ funkcyj (19) i udowodnijmy, iż będzie ono również zachodziło dla układu m funkcyj.

Ponieważ wyznacznik

$$\frac{D(f_1, f_2 \ldots x_m)}{D(y_1, y_2 \ldots y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_m}{\partial y_2} \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \quad . \ . \ . \ (2$$

nie jest zerem dla wartości początkowych zmiennych

$$x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0 \ldots x_n = x_n^0;\ y_1 = y_1^0;\ y_2 = y_2^0 \ldots y_m = y_m,$$

przeto elementy ostatniej kolumny tego wyznacznika dla owych wartości nie są wszystkie zerami. Przypuśćmy, dla ustalenia myśli, że element wyznacznika (22) $\frac{\partial f_m}{\partial y_m}$ nie jest zerem dla wartości początkowych zmiennych.

W takim razie na podstawie twierdzenia § 1 istnieje jedna i tylko jedna funkcja $y_m = \psi(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_{m-1})$ zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_{m-1}$, która posiada własności następujące:

1. Funkcja $\psi(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_{m-1})$ jest ciągłą dla wartości początkowych zmiennych

$$x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0 \ldots x_n = x_n^0, y_1 = y_1^0 \ldots y_{m-1} = y_{m-1}^0$$

2. Wartość

$$\psi(x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0, y_1^0, y_2^0 \ldots y_m^0) = 0.$$

3. Funkcja $\psi(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_{m-1})$ czyni zadość równaniu

$$f_m(x_1, x_2, x_n, y_1, y_2 \ldots y_{m-1}, y_m) = 0 \quad . \ . \ . \ (23)$$

dla wartości zmiennych sąsiednich z początkowemi.

Podstawiając funkcję $y_m = \psi_m$ w wyrażenia na funkcje (19), otrzymujemy tożsamości

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_{m-1}, \psi_m) = F_1(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_{m-1}) \\ &f_2(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_{m-1}, \psi_m) = F_2(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_{m-1}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_{m-1}(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_{m-1}, \psi_m) = F_{m-1}(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_{m-1}) \\ &f_m(x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_{m-1}, \psi_m) = 0. \end{aligned} \qquad (24)$$

W § 1 udowodniono, że funkcja ψ posiada pochodne cząstkowe względem zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_m, y_1, y_2 \ldots y_{m-1}$.

Różniczkując zatem tożsamości (24) względem y_k, otrzymamy

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial y_k} + \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y_k} = \frac{\partial F_1}{\partial y_k} \\ &\frac{\partial f_2}{\partial y_k} + \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y_k} = \frac{\partial F_2}{\partial y_k} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_k} + \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y_k} = \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_k} \\ &\frac{\partial f_m}{\partial y_k} + \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y_k} = 0 \end{aligned} \qquad (25)$$

Okażmy, że wyznacznik

$$\frac{D(f_1, f_2 \ldots f_m)}{D(y_1, y_2 \ldots y_m)} = \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \cdot \frac{D(F_1, F_2 \ldots F_{m-1})}{D(y_1, y_2 \ldots y_{m-1})}$$

W tym celu do elementów pierwszej kolumny wyznacznika (22) dodajemy elementy jego ostatniej kolumny, pomnożone przez $\frac{\partial \psi}{\partial y_1}$; następnie do elementów drugiej kolumny dodajemy elementy ostatniej kolumny, pomnożone przez $\frac{\partial \psi}{\partial y_2}$ i t. d.; nareszcie do elementów przedostatniej kolumny dodajemy elementy ostatniej kolumny, pomnożone przez $\frac{\partial \psi}{\partial y_{m-1}}$. W myśl własności podstawowych wyznaczników, wyznacznik (22) nie zmienia się. Uwzględniając zatem wzory (25), możemy napisać

$$\frac{D(f_1, f_2 \dots f_m)}{D(y_1, y_2 \dots y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \dots \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}, & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \dots \frac{\partial F_2}{\partial y_{m-1}}, & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_2} \dots \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}}, & \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_m} \\ 0, & 0 \dots\dots 0, & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \frac{D(F_1, F_2 \dots F_{m-1})}{D(y_1, y_2 \dots y_{m-1})}$$

Ponieważ dla wartości poczatkowych zmiennych

$$x_1 = x_1^0 \dots x_n = x_n^0;\ y_1 = y_1^0 \dots y_m = y_m^0$$

wyznacznik (22), oraz pochodna $\frac{\partial f_m}{\partial y_m}$ nie jest zerem, przeto wyznacznik

$$\frac{D(F_1, F_2 \dots F_{m-1})}{D(y_1, y_2 \dots y_{m-1})}$$

dla owych wartości początkowych nie jest zerem.

Ponieważ funkcje $F_1, F_2 \dots F_{m-1}$, $n + m - 1$ zmiennych $x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_{m-1}$ w myśl tożsamości (23) spełnia warunki, podane w twierdzeniu dla funkcyj $f_1, f_2 \dots f_m$, przeto istnieje jeden i tylko jeden układ $m - 1$ funkcyj

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, x_2 \dots x_n) \\ y_2 &= \varphi_2(x_1, x_2 \dots x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{m-1} &= \varphi_{m-1}(x_1, x_2 \dots x_n) \end{aligned} \qquad (26)$$

zmiennych $x_1, x_2 \dots x_n$

Funkcje te są ciągłemi dla wartości początkowych $x_1 = x_1^0 \dots$ $\dots x_n = x_n^0$ i równemi zeru dla tych wartości

Nadto dla wartości sąsiednich z początkowemi funkcje (20) czynią zadość równaniom

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_{m-1}) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_{m-1}) &= 0 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ F_{m-1}(x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_{m-1}) &= 0, \end{aligned}$$

czyli też równaniom

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_{m-1}, \varphi_m) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_{m-1}, \varphi_m) &= 0 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ f_{m-1}(x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_{m-1}, \varphi_m) &= 0 \end{aligned}$$

Podstawiając funkcje (26) w wyrażenie (24), otzymamy

$$y_m = \varphi_m(x_1, x_2 \dots x_n, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{m-1}) = \varphi_m(x_1, x_2 \dots x_n)$$

Ponieważ funkcja φ_m jest ciągłą i równą zeru dla wartości początkowych zmiennych $x_1, x_2 \dots x_n$, a nadto wraz z funkcjami (26) czyni zadość równaniom (21), przeto twierdzenie będzie zachodziło dla układu m funkcyj (19), skoro zachodzi dla $m - 1$ funkcyj.

Biorąc pod uwagę, że twierdzenie to zachodzi dla $m = 1$, wnosimy, że będzie ono zachodziło wogóle dla dowolnej liczby funkcyj (19).

Uwaga. W tym przypadku szczególnym, gdy $m = k$, a równanie (26) można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \varphi_1(y_1, y_2 \dots y_m) &= x_1 \\ \varphi_2(y_1, y_2 \dots y_m) &= x_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_m(y_1, y_2 \dots y_m) &= x_m, \end{aligned} \qquad (27)$$

funkcje (19) mają postać

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_m) &= \varphi_1(y_1, y_2 \dots y_m) - x_1 \\ f_2(x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_m) &= \varphi_2(y_1, y_2 \dots y_m) - x_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_m) &= \varphi_2(y_1, y_2 \dots y_m) - x_m \end{aligned}$$

Przeto

$$\frac{\partial f_k}{\partial y_l} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_l} \quad (k, l = 1, 2, 3 \dots m)$$

A zatem

$$\frac{D(f_1, f_2 \dots f_m)}{D(y_1, y_2 \dots y_m)} = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m)}{D(y_1, y_2 \dots y_m)}$$

Stąd wnosimy, że jeżeli wyznacznik $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m)}{D(y_1, y_2 \dots y_m)}$ nie jest zerem, to równania (21) określają $y_1, y_2 \dots y_m$, jako funkcje zmiennych $x_1, x_2 \dots x_n$.

Przypuśćmy, że układ funkcyj (19) spełnia wszystkie warunki udowodnionego twierdzenia, a nadto posiadają pochodne cząstkowe względem zmiennych $x_1, x_2 \dots x_n$.

Możemy udowodnić, a to w sposób całkiem analogiczny do podanego w poprzednim paragrafie, że istnieją wówczas pochodne cząstkowe funkcyj $y_1, y_2 \dots y_m$ względem zmiennych $x_1, x_2 \dots x_n$.

Pochodne te znajdziemy, różniczkując równania (21) i uważając funkcje $f_1, f_2 \dots f_m$, jako funkcje złożone zmiennych $x_1, x_2 \dots x_n$.

Różniczkując więc równania (21) względem zmiennej x_i, otrzymamy

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_i}+\dots+\frac{\partial f_1}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial y_m}{\partial x_i}=0\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x_i}+\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_i}+\dots+\frac{\partial f_2}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial y_m}{\partial x_i}=0\\
&\dots\dots\dots

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0.$$

Podstawiając do tych równań już otrzymane wyrażenia na pochodne $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, możemy wyznaczyć pochodne $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$

W sposób całkiem analogiczny znajdziemy pochodne cząstkowe wyższych rzędów funkcyj u i v względem zmiennych x i y.

Pochodne funkcyj u i v można otrzymać jeszcze w nieco inny sposób, biorąc różniczki zupełne funkcyj f i φ, uważając x i y jako zmienne niezależne. Będziemy więc mieli

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv=0,$$

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv=0.$$

Z tych równań znajdziemy

$$du=Mdx+Ndy;\quad dv=M_1dx+N_1dy,$$

gdzie M, N, M_1, N_1 są to pewne funkcje zmiennych x, y, u, v.

Stąd wnosimy, że

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M;\quad\frac{\partial u}{\partial y}=N;\quad\frac{\partial v}{\partial x}=M_1;\quad\frac{\partial v}{\partial y}=N_1$$

Dalej mamy

$$d^2f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial u}\partial u+\frac{\partial f}{\partial v}dv\right)^{(2)}+\frac{\partial f}{\partial u}d^2u+\frac{\partial f}{\partial v}d^2v=0.$$

$$\partial^2\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right)^{(2)}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}d^2u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}d^2v=0.$$

Z tych równań znajdziemy po podstawieniu otrzymanych poprzednio wyrażeń na różniczki du i dv

$$d^2u=Pdx^2+2Qdxdy+Rdy^2$$

$$d^2v=P_1dx^2+2Qdxdy+R_1dy^2,$$

gdzie P, Q, R; P_1, Q_1, R_1 są to pewne funkcje zmiennych x, y, u, v.

A zatem

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=P;\quad\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=Q;\quad\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=R$$

$$\frac{\partial^2v}{\partial x^2}=P_1;\quad\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}=Q_1;\quad\frac{\partial^2v}{\partial^2y}=R_1$$

Przykłady 1. Funkcje uwikłane y i z jednej zmiennej x określone są równaniami

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=0$$

$$x+y+z=0$$

Różniczkując te równania względem x, dostaniemy

$$x^2-yz+(y^2-xz)y'+(z^2-xy)z'=0$$

$$1+y'+z'=0 \qquad \ldots \text{(a)}$$

Rugując z ostatnich równań pochodną y', otrzymamy

$$x^2-yz-y^2+xz+(z^2-xy-y^2+xz)z'=0$$

skąd

$$z'=\frac{y-x}{z-y}$$

Podstawiając to wyrażenie na z' w drugie równanie (a), dostaniemy

$$1+y'+\frac{y-x}{z-y}=0$$

skąd

$$y'=\frac{x-z}{z-y}$$

Te same wyrażenia na pochodne y' i z' znajdziemy z wyrażeń na różniczki zupełne funkcyj $f=x^3+y^3+z^3-3xyz$ i $\varphi=x+y+z$

Będziemy więc mieli

$$df=x^2dx+y^2dy+z^2dz-yzdx-xzdy-xydz=0$$

$$d\varphi=dx+dy+dz=0,$$

czyli

$$(x^2-yz)dx+(y^2xz)dy+(z^2-xy)dz=0$$

$$dx+dy+dz=0.$$

Stąd

$$dy=\frac{x-z}{z-y}dx;\quad dz=\frac{y-x}{z-y}dy,$$

a zatem

$$y'=\frac{x-z}{z-y};\quad z'=\frac{y-x}{z-y}$$

2. Funkcje uwikłane u i v zmiennych x i y określone są równaniami

$$xy-u-v=0;\quad x+y-uv=0$$

Różniczkując te równania względem x i y, dostaniemy

$$y-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}=0; \qquad x-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

(a) . . . . . (b)

$$1-v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}=0; \qquad 1-v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Stąd

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{uy-1}{u-v};\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{vy-1}{v-u};\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{ux-1}{u-v};\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{vx-1}{v-u}$$

Różniczkując równania (a) względem x, a równania (b) względem y, otrzymamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0;\ 2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \quad . \ . \ . \ (c)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0;\ 2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \quad . \ . \ . \ (d)$$

Z równań (c) i (d) znajdziemy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{-2}{u-v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-2(uy-1)(vy-1)}{(u-v)^3};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2}{u-v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=$$

$$=-\frac{2(ux-1)(vx-1)}{(u-v)^3}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{-2}{u-v}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2(uy-1)(vy-1)}{(u-v)^3};\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{2}{u-v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=$$

$$=\frac{2(ux-1)(vx-1)}{(u-v)^3}$$

Różniczkując równania (a) względem y, otrzymamy

$$1-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0, \quad . \ . \ . \ (e)$$

skąd

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{u-v}\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)=$$

$$=-\frac{u(u-v)^2+(uy-1)(vx-1)+(vy-1)(ux-1)}{(u-v)^3}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{1}{v-u}\left(v+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{v(u-v^2)+(uy-1)(vx-1)+(vy-1)(ux-1)}{(u-v)^3}$$

Pochodne cząstkowe $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ możemy otrzymać, posługując się wyrażeniami na różniczki zupełne funkcyj $f=xy-u-v$; $\varphi=uv-x-y$.

Będziemy mieli

$$ydx+xdy-du-dv=0$$
$$dx+dy-vdu-udv=0, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (a')$$

stąd

$$du=\frac{uy-1}{u-v}dx+\frac{ux-1}{u-v}dy$$
$$dv=\frac{vy-1}{v-u}dx+\frac{vx-1}{v-u}dy \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (b')$$

A zatem

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{uy-1}{u-v};\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{ux-1}{u-v};\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{vy-1}{v-u};\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{vx-1}{v-u}$$

Różniczkując równania (a') dostaniemy

$$2dxdy-d^2u-d^2v=0;\quad 2dudv+vd^2u+ud^2v=0$$

Podstawiając do tych równań wzory (b'), otrzymamy

$$2dxdy-d^2u-d^2v=0$$

$$-2\frac{(uy-1(vy-1)}{(u-v)^2}dx^2-2\left[\frac{(uy-1)(vx-1)+(ux-1)(vy-1)}{(u-v)^2}\right]dxdy-$$

$$-2\frac{(ux-1)(vx-1)}{(u-v)^2}dy^2+vd^2u+ud^2v=0$$

Rozwiązując te równania względem d^2u i d^2v, otrzymamy

$$d^2u=-\frac{(2uy-1)(vy-1)}{(u-v)^3}dx^2-2\frac{u(u-v)^2+(uy-1)(vx-1)+(vy-1)(ux-1)}{(u-v)^3}dxdy+$$

$$+2\frac{(ux-1)(vx-1)}{(u-v)^3}dy^2$$

$$d^2v=\frac{-2}{(v-u)^3}(uy-1)(vy-1)dx^2+$$

$$+2\frac{v(u-v)^2+(uy-1)(vx-1)+(vy-1)(ux-1)}{(u-v)^3}dxdy+$$

$$+\frac{2(ux-1)(vx-1)}{(u-v)^3}dy^2$$

Z tych wzorów otrzymamy te same wyrażenia na pochodne pierwszego i drugiego rzędu funkcyj u i v względem x i y, co i poprzednio.

Ćwiczenia. Dane są funkcje uwikłane, określone równaniami. Znaleźć pochodne tych funkcyj

1. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=a \end{cases}$ $\quad y'_x=?\quad z'_x=?$

Odp. $y'=\frac{z-x}{y-z}$; $z'=\frac{x-y}{y-z}$

2. $\begin{cases} x^3+y^2-3z+a=0 \\ z^2-2y^2-x+b=0 \end{cases}$ $y'=?$ $z'=?$

Odp. $y'=-\frac{6x^2z+3}{4yz-12y}$; $z'=\frac{-12x^2y+2y}{4yz-12y}$

3. $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0; \end{cases}$ $\frac{\partial z}{\partial x}=?$ $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=?$

Odp. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{y}{z}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{c^4(b^2-y^2)}{a^2b^2c^3}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{c^4(a^2-x^2)}{a^2b^2c^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{c^4xy}{a^2b^2c^2}$

4. $\begin{cases} u^2+x^2+y^2+z^2-a^2=0 \\ \lg(xy)+\frac{y}{x}-b^2=0 \\ \lg\frac{z}{x}+xz-c^2=0 \end{cases}$ $\frac{du}{ax}=?$

Odp. $\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\left[\frac{y^2(x-y)}{x(x+y)}+\frac{z^2(xz-1)}{x(xz+1)}-x\right]$

5. $\begin{cases} x+y+z+u-a=0 \\ x^2+y^2+z^2+u^2-b=0 \\ x^3+y^3+z^3+u^3-c=0 \end{cases}$ $\frac{dy}{dx}=?$ $\frac{dz}{dx}=?$ $\frac{du}{dx}=?$

Odp. $\frac{dy}{dx}=-\frac{(u-x)(z-x)}{(u-y)(z-y)}$; $\frac{dz}{dx}=-\frac{(u-x)(y-x)}{(u-z)(y-z)}$;

$\frac{du}{dx}=-\frac{(z-x)(y-z)}{(z-u)(y-u)}$

Rozdział XII.

Wyznaczniki funkcyjne.

§ 1. **Różniczkowanie wyznaczników.** Niechaj $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ będą funkcje jednej zmiennej niezależnej x. Utwórzmy wyznacznik o n^2 elementach

$$D=\begin{vmatrix} y_{11}, & y_{12}, & y_{13} \ldots & y_{1n} \\ y_{21}, & y_{22}, & y_{23} \ldots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1}, & y_{n2}, & y_{n3} \ldots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

którego elementy y_{ik} $(i, k=1, 2, 3 \ldots n)$ są pewnemi funkcjami różniczkowalnemi zmiennej niezależnej x. Wyznacznik D nazywamy funkcyjnym. Jest to pewna funkcja zmiennej x.

Oznaczając przez Y_{ik} dopełnienie algebraiczne minora wyznacznika D, odpowiadające jego elementowi y_{ik}, możemy napisać

$$Y_{ik}=\frac{\partial D}{\partial y_{ik}},$$

gdyż wyznacznik D jest funkcją linjową względem swoich elementów.

Uważając wyznacznik D za funkcję złożoną zmiennej x, możemy znaleźć pochodną D względem x.

Będziemy mieli

$$\frac{dD}{dx}=\sum_{i,k=1}^{i,k=n}\frac{\partial D}{\partial y_{ik}}\cdot\frac{dy_{ik}}{dx}=\sum_{i,k=1}^{i,k=n}Y_{ik}y'_{ik}$$

Biorąc zaś pod uwagę, że suma $\sum_{k=1}^{k=n}Y_{ik}y'_{ik}$ równa się wyznacznikowi D, w którym elementy i-go wiersza zastąpiono odpowiednio przez elementy

$$y'_{i1}, y'_{i2}, y'_{i3} \ldots y'_{in},$$

będziemy mieli

$$\frac{dD}{dx}=\begin{vmatrix} y'_{11}, y'_{12}, y'_{13}\dots y'_{1n}\\ y_{21},\ y_{22},\ y_{23}\dots y_{2n}\\ \dots\dots\dots\\ y_{n1},\ y_{n2},\ y_{n3}\dots y_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_{11},\ y_{12},\ y_{13}\dots y_{1n}\\ y'_{21}, y'_{22}, y'_{23}\dots y'_{2n}\\ \dots\dots\dots\\ y_{n1},\ y_{n2},\ y_{n3}\dots y_{nn}\end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} y_{11},\ y_{12},\ y_{13}\dots y_{1n}\\ y_{21},\ y_{22},\ y_{23}\dots y_{2n}\\ \dots\dots\dots\\ y'_{n1}, y'_{n2}, y'_{n3}\dots y'_{nn}\end{vmatrix}$$

co stanowi wzór na pochodną wyznacznika D względem zmiennej x.

§ **2. Wyznacznik funkcyjny Wrońskiego (wrońskiana).** Niechaj $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$ będą funkcje jednej zmiennej x. Utwórzmy wyznacznik

$$W[y_1, y_2, y_3 \dots y_n]=\begin{vmatrix} y_1,\ y_2,\ y_3 \dots y_n\\ y'_1,\ y'_2\ y'_3 \dots y'_n\\ y''_1,\ y''_2\ y''_3 \dots y''_n\\ \dots\dots\dots\\ y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)}, y_3^{(n-1)} \dots y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}$$

którego drugi wiersz zawiera pierwsze pochodne elementów pierwszego wiersza, wiersz trzeci zawiera drugie pochodne elementów plerwszego wiersza i t. d., nareszcie wiersz ostatni zawiera pochodne rzędu n-1-go elementów pierwszego wiersza.

Wyznacznik W podany został przez polskiego matematyka Wrońskiego, a zatem nazywa się zwykle wyznacznikiem Wrońskiego lub wprost wrońskianem.

Teorja wrońskianów odgrywa bardzo ważną role w teorji równań różniczkowych linjowych.

Wronskian posiada własności następujące:

1. Niechaj u będzie funkcją dowolną zmienej x. Udowodnimy, że zachodzi wzór następujący:

$$W[uy_1,\ uy_2,\ uy_3 \dots uy_n]=u^n\ W[y_1, y_2, y_3 \dots y_n]$$

analogiczny ze wzorem charakterystycznym dlą funkcyj jednorodnych.

Ponieważ elementy wyznacznika

$$W[uy_1,\ uy_2,\ uy_3 \dots uy_n]$$

są wielomianami, przeto wyznacznik ten można napisać w postaci sumy wyznaczników. Każdy z tych wyznaczników z wyjątkiem wyznacznika

$$\begin{vmatrix} uy_1,\ uy_2,\ uy_3 \dots uy_n\\ uy'_1,\ uy'_2,\ uy'_3 \dots uy'_n\\ uy''_1,\ uy''_2,\ uy''_3 \dots uy''_n\\ \dots\dots\dots\\ uy_1^{(n-1)}, uy_2^{(n-1)}, uy_3^{(n-1)} \dots uy_n^{(n-1)}\end{vmatrix}=$$

$$=u^n\begin{vmatrix} y_1,\ y_2,\ y_3 \dots y_n\\ y'_1,\ y'_2,\ y'_3 \dots y'_n\\ y_1'',\ y''_2,\ y''_3 \dots y''_n\\ \dots\dots\dots\\ y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)}, y_3^{(n-1)} \dots y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}=u^n\ W[y_1, y_2, y_3 \dots y_n]\ .\quad (1)$$

posiada dwa wiersze, których elementy są wzajemnie proporcjonalne. Wobec tego wszystkie wyznaczniki z wyjątkiem (1) są równe zeru. Stąd wynika, że

$$W[uy_1,\ uy_2,\ uy_3 \dots uy_n]=u^n\ W[y_1, y_2, y_3 \dots y_n],$$

co stanowi wzór, o którego dowód chodziło

2. Udowodnijmy, że pochodna wronskiana

$$\frac{dW}{dx}=\begin{vmatrix} y_1,\ y_2,\ y_3 \dots y_n\\ y'_1,\ y'_2,\ y'_3 \dots y'_n\\ y''_1,\ y''_2,\ y''_3 \dots y''_n\\ \dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\\ y_1^{(n-2)}, y_2^{(n-2)}, y_3^{(n-2)} \dots y_n^{(n-2)}\\ y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, y_3^{(n)} \dots y_n^{(n)}\end{vmatrix}$$

to jest otrzymuje się wprost, podstawiając w ostatnim wierszu zamiast pochodnych rzędu $(n-1)$-go odpowiednie pochodne rzędu n-go.

Istotnie, różniczkując wyznacznik W według prawidia, podanego w poprzednim paragrafie, otrzymujemy pochodną $\frac{dW}{dx}$ w postaci sumy n wyznaczników, z których pierwsze $n-1$ wyznacznika są równe zeru, jako posiadające po dwa wiersze, utworzorzone z jednych i tych samych elementów.

Przeto

$$\frac{dW}{dx}=\begin{vmatrix} y_1,\ y_2 \dots y_n\\ y'_1,\ y'_2 \dots y'_n\\ y''_1,\ y''_2 \dots y''_n\\ \dots\dots\dots\\ y_1^{(n-2)}, y_2^{(n-2)} \dots y_n^{(n-2)}\\ y_1^{(n)}, y_2^{(n)} \dots y_n^{(n)}\end{vmatrix}$$

Udowodnijmy twierdzenie o linjowej zależności funkcyj, odgrywające bardzo ważną rolę w teorji równań różniczkowych linjowych.

Twierdzenie. Jeżeli pomiędzy funkcjami $y_1, y_2 \dots y_n$ jednej i tej samej zmiennej x zachodzi związek linjowo-jednorodny, czyli innemi słowy jeżeli funkcje te są linjowo od siebie zależne, wówczas wyznacznik Wrońskiego $W[y_1, y_2 \dots y_n]$ równa się zeru tożsamościowo.

Dowód. Dajmy na to, że pomiędzy n funkcjami $y_1 y_2 \dots y_n$ zmiennej niezależnej x zachodzi związek linjowo-jednorodny

$$a_1 y_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n y_n = 0, \quad \dots\dots \quad (2)$$

gdzie stałe spółczynniki $a_1\ a_2 \dots a_n$, nie są równocześnie zerami.

Różniczkując ten związek kolejno $n-1$ razy, dostaniemy

$$\begin{aligned} &a_1 y'_1 + a_2 y'_2 + \ldots + a_n y'_n = 0 \\ &a_1 y''_1 + a_2 y''_2 + \ldots + a_n y''_n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_1 y_1^{(n-1)} + a_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + a_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Równania (2) i (3) stanowią układ n równań linjowych jednorodnych względem spółczynników $a_1, a_2 \ldots a_n$.

Ponieważ wszystkie te spółczynniki nie są równe równocześnie zeru, przeto wyznacznik

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2 \ldots y_n \\ y'_1, & y'_2 \ldots y_n \\ \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W[y_1, y_2 \ldots y_n] = 0$$

A zatem twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Warunek istnienia linjowej zależności pomiędzy funkcjami jednej zmiennej niezależnej, podany w udowodnionem twierdzeniu nie jest dostatecznym, gdyż, jak słusznie zauważył Peano, może istnieć taki układ funkcyj jednej zmiennej, linjowo od siebie niezależnych, dla którego wyznacznik Wrońskiego równa się zeru tożsamościowo.

Wszakże zachodzi twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Jeżeli wyznacznik Wrońskiego $W[y_1, y_2 \ldots y_n]$, utworzony z n funkcyj $y_1, y_2 \ldots y_n$ jednej zmiennej niezależnej x, równa się zeru tożsamościowo, a nadto jeżeli minory wyznacznika W, odpowiadające wszystkim elementom jego ostatniego wiersza nie są równocześnie zerami, wówczas pomiędzy funkcjami $y_1, y_2 \ldots y_n$ zachodzi związek iinjowo-jednorodny postaci

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n = 0,$$

gdzie spółczynniki stałe nie są równocześnie zerami.

Dowód. Dajmy na to, że wyznacznik Wrońskiego

$$W[y_1, y_2 \ldots y_n] = \begin{vmatrix} y_1, & y_2 \ldots y_n \\ y'_1, & y'_2 \ldots y'_n \\ y''_1, & y''_2 \ldots y''_n \\ \ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)} \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

tożsamościowo.

Przypuśćmy nadto, że minory tego wyznacznika $A_{n1}, A_{n2} \ldots A_{nn}$, odpowiadające elementom jego ostatniego wiersza $y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)} \ldots y_n^{(n-1)}$, nie są zerami.

Oczywista,

$$W = A_{n1} y_1^{(n-1)} + A_{n2} y_2^{(n-1)} + \ldots + A_{nn} y_n^{(n-1)}, \quad (4)$$

gdzie

$$(-1)^{n+k} A_{nk} = \begin{vmatrix} y_1, & y_2 \ldots y_{k-1}, & y_{k+1} \ldots y_n \\ y'_1, & y'_2 \ldots y'_{k-1}, & y'_{k+1} \ldots y'_n \\ y''_1, & y''_2 \ldots y''_{k-1}, & y''_{k+1} \ldots y''_n \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-2)}, & y_2^{(n-2)} \ldots y_{k-1}^{(n-2)}, & y_{k+1}^{(n-2)} \ldots y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} \quad (5)$$

Jasną jest rzeczą, że wyznacznik (5) jest również wyznacznikiem Wrońskiego $W[y_1, y_2 \ldots y_{k-1}, y_{k+1} \ldots y_n]$. Różniczkując go względem x wedle prawidła, podanego powyżej, dostaniemy

$$(-1)^{n+k} \frac{dA_{nk}}{dx} = \begin{vmatrix} y_1, & y_2 \ldots y_{k-1}, & y_{k+1} \ldots y_n \\ y'_1, & y'_2 \ldots y'_{k-1}, & y'_{k+1} \ldots y'_n \\ y''_1, & y''_2 \ldots y''_{k-1}, & y''_{k+1} \ldots y''_n \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-3)}, & y_2^{(n-3)} \ldots y_{k-1}^{(n-3)}, & y_{k+1}^{(n-3)} \ldots y_n^{(n-3)} \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)} \ldots y_{k-1}^{(n-1)}, & y_{k+1}^{(n-1)} \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

czyli

$$(-1)^{n+k} \frac{dA_{n,k}}{dx} = (-1)^{n+k-1} A_{n-1,k},$$

gdzie przez $A_{n-1,k}$ oznaczono minor wyznacznika W, odpowiadający jego elementowi $y_k^{(n-2)}$

A więc

$$\frac{dA_{nk}}{dx} = -A_{n-1,k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

dla $k = 1, 2, 3 \ldots n$

Ponieważ według umowy, wyznacznik W równa się zeru tożsamościowo, przeto w myśl zasadniczej własności wyznaczników będziemy mieli

$$\frac{A_{n-1,1}}{A_{n,1}} = \frac{A_{n-1,2}}{A_{n,2}} = \ldots = \frac{A_{n-1,n}}{A_{n,n}} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Zastawiając wzory (6) i (7) wnosimy, że minory $A_{n,1}, A_{n,2} \ldots A_{n,n}$ są odpowiednio proporcjonalne do swoich pochodnych, t. j.

$$\frac{\frac{dA_{n,1}}{dx}}{A_{n,1}} = \frac{\frac{dA_{n,2}}{dx}}{A_{n,2}} = \ldots = \frac{\frac{dA_{n,n}}{dx}}{A_{n,n}}$$

Ztych proporcyj dostaniemy

$$\frac{\frac{A\,d_{n,k}}{dx}}{A_{n,k}} = A_{n,1}\,\frac{\frac{dA_{n,1}}{dx}+A_{n,2}\frac{dA_{n,2}}{dx}+\cdots+A_{n,n}\frac{dA_{n,n}}{dx}}{A_{n,1}^2+A_{n,2}^2+\cdots+A_{n,n}^2}=\frac{1}{F}\frac{dF}{dx}, \quad . \quad (8)$$

gdzie $F^2=A_{n,1}^2+A_{n,2}^2+\cdots+A_{n,n}^2$

Ze wzoru (8) otrzymamy

$$\frac{F\frac{dA_{n,k}}{dx}-A_{n,k}\frac{dF}{dx}}{A_{n,k}\,.\,F}=0,$$

a zatem

$$\frac{F\frac{dA_{n,k}}{dx}-A_{n,k}\frac{dF}{dx}}{F^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{A_{n,k}}{F}\right)=0,$$

Stąd

$$A_{n,k}=a_k\,.\,F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

dla wszystkich wartości na $k=1, 2, 3 \ldots n$.

Podstawiając wzory (9) do wzoru $A_{n1}y_1+A_{n2}y_2+\ldots$ $\ldots+A_{nn}y_n=0$, dostaniemy

$$(a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n)\,F=0.$$

Ponieważ funkcja F nie jest zerem, przeto zachodzi wzór

$$a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3+\cdots+a_ny_n=0,$$

co stanowi właśnie związek linjowo-jednorodny pomiędzy funkcjami danemi $y_1, y_2 \ldots y_n$.

Dowiedliśmy więc naszego twierdzenia.

§ 3. **Wyznacznik funkcyjny Jacobi'ego (Jacobian).** Niechaj

$$\begin{aligned} y_1&=f_1(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)\\ y_2&=f_2(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n&=f_n(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) \end{aligned}$$

będą funkcje n zmiennych niezależnych $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$, posiadające pochodne cząstkowe pierwszego rzędu względem wszystkich zmiennych niezależnych.

Utwórzmy wyznacznik

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial y_3}{\partial x_3}\cdots\frac{\partial y_1}{\partial y_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_3}\cdots\frac{\partial x_2}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_3}{\partial x_2}, & \frac{\partial y_3}{\partial x_3}\cdots\frac{\partial y_3}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_n}{\partial x_2}, & \frac{\partial y_n}{\partial x_3}\cdots\frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Wyznacznik ten nazywa się zwykle wyznacznikiem funkcyjnym Jakobie'go, lub wprost jakobianem funkcyj (10).

Będziemy używali oznaczenia symbolicznego, podanego przez Donkin'a

$$J=\frac{D(y_1, y_2, y_3 \ldots y_n)}{D(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)}$$

Wyznacznik Jakobi'ego posiada bardzo ważne własności, które ustalają daleko posuniętą analogję pomiędzy działaniem określonem prez wyznacznik Jacobie'go układu funkcyj wielu zmiennych a działaniem, jakie określa pochodna funkcji jednej zmiennej.

Przejdziemy do rozważania tych własności.

1. Przypuśćmy, że $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ będą funkcje zmiennych $z_1, z_2, z_3 \ldots z_n$, które są znowu funkcjami zmiennych niezależnych $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$. Udowodnijmy, że wyznacznik Jacobi'ego funkcyj $y_1, y_2 \ldots y_n$, uważanych za funkcje zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_n$ równa się iloczynowi wyznacznika Jakobi'ego zmiennych $y_1, y_2 \ldots y_n$, uważanych za funkcje zmiennych $z_1, z_2 \ldots z_n$ i wyznacznika Jacobi'ego zmiennych $z_1, z_2, \ldots z_n$, uważanych za funkcje zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_n$ to jest

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3 \ldots y_n)}{D(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)}=\frac{D(y_1, y_2, y_3 \ldots y_n)}{D(z_1, z_2, z_3 \ldots z_n)}\cdot\frac{D(z_1, z_2, z_3 \ldots z_n)}{D(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)}$$

Będziemy mieli w myśl podanej definicji jakobian'a

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3 \ldots y_n)}{D(z_1, z_2, z_3 \ldots z_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial z_2}, & \frac{\partial y_1}{\partial z_3}\cdots\frac{\partial y_1}{\partial z_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial z_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial z_2}, & \frac{\partial y_2}{\partial z_3}\cdots\frac{\partial y_2}{\partial z_n}\\ \frac{\partial y_3}{\partial z_1}, & \frac{\partial y_3}{\partial z_2}, & \frac{\partial y_3}{\partial z_3}\cdots\frac{\partial y_3}{\partial z_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial y_n}{\partial z_1}, & \frac{\partial y_n}{\partial z_2}, & \frac{\partial y_n}{\partial z_2}\cdots\frac{\partial y_n}{\partial z_n} \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad (12)$$

a

$$\frac{D(z_1, z_2, z_3 \ldots z_n)}{D(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial z_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial z_1}{\partial x_3}\cdots\frac{\partial z_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial z_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial z_2}{\partial x_3}\cdots\frac{\partial z_2}{\partial x_n}\\ \frac{\partial z_3}{\partial x_1}, & \frac{\partial z_3}{\partial x_2}, & \frac{\partial z_3}{\partial x_3}\cdots\frac{\partial z_3}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial z_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial z_n}{\partial x_2}, & \frac{\partial z_n}{\partial x_3}\cdots\frac{\partial z_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad (13)$$

Pomnóżmy przez siebie wyznaczniki (12) i (13) wedle znanego prawidła mnożenia wyznaczników.

Kombinując naprzykład $i-ty$ wiersz pierwszego wyznacznika z k — tą kolumną drugiego, otrzymamy wyrażenie

$$\frac{\partial y_i}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial x_k}+\frac{\partial y_i}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial z_2}{\partial x_k}+\frac{\partial y_i}{\partial z_3}\cdot\frac{\partial z_2}{\partial z_k}+\ldots+\frac{\partial y_i}{\partial z_n}\cdot\frac{\partial z_n}{\partial x_k}=\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$$

Ponieważ wyrażenie to stanowi element o wskaźnikach i, k wyznacznika iloczynowego, przeto

$$\frac{D(y_1,y_2,y_3\ldots y_n)}{D(z_1,z_2,z_3\ldots z_n)}\cdot\frac{D(z_1,z_2,z_3\ldots z_n)}{D(x_1,x_2,x_3\ldots x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1},&\frac{\partial y_1}{\partial x_2},&\frac{\partial y_1}{\partial x_3}\ldots&\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1},&\frac{\partial y_2}{\partial x_2},&\frac{\partial y_2}{\partial x_3}\ldots&\frac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1},&\frac{\partial y_n}{\partial x_2},&\frac{\partial y_n}{\partial x_3}\ldots&\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

A zatem otrzymamy wzór

$$\frac{D(y_1,y_2,y_3\ldots y_n)}{D(z_1,z_2,z_3\ldots z_n)}\cdot\frac{D(z_1,z_2,z_3\ldots z_n)}{D(x_1,x_2,x_3\ldots x_n)}=\frac{D(y_1,y_2,y_3\ldots y_n)}{D(x_1,x_2,x_3\ldots x_n)}\quad(\mathrm{I})$$

o którego dowód chodziło.

Wzór ten przypomia wzór na pochodną funkcji złożonej jednej zmiennej.

2. Wyznacznik Jacobi'ego zmiennych $y_1,y_2,y_3\ldots y_n$, uważanych jako funkcje zmiennych $x_1,x_2,x_3\ldots x_n$, zówna się odwrotności wyznacznika Jacobi'ego rmiennych $x_1,x_2,x_3\ldots x_n$, uważanych jako funkcje zmiennych $y_1,y_2,y_3\ldots y_n$, to jest

$$\frac{D(y_1,y_2,y_3\ldots y_n)}{D(x_1,x_2,x_3\ldots x_n)}=\frac{1}{\frac{D(x_1,x_2,x_3\ldots x_n)}{D(y_1,y_2,y_3\ldots y_n)}}\quad\ldots\quad(\mathrm{II})$$

Wzór (II), o którego dowód chodzi, wypływa bezpośrednio ze wzoru (I). W samej rzeczy, zamieniając we wzorze (I) zmienne $x_1,x_2,x_3\ldots x_n$ odpowiednio przez $y_1,y_2,y_3\ldots y_n$, zmienne zaś $z_1,z_2,z_3\ldots z_n$, odpowiednio przez $x_1,x^2,x_3\ldots x_n$, dostaniemy

$$\frac{D(y_1,y_2,y_3\ldots y_n)}{D(y_1,y_2,y_3\ldots y_n)}=\frac{D(y_1,y_2,y_3\ldots y_n)}{D(x_1,x_2,x_3\ldots x_n)}\cdot\frac{D(x_1,x_2,x_3\ldots x_n)}{D(y_1,y_2,y_3\ldots y_n)}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\frac{D(y_1,y_2,y_3\ldots y_n)}{D(y_1,y_2,y_3\ldots y_n)}=\begin{vmatrix}1&0&0\ldots0\\0&1&0\ldots0\\0&0&1\ldots0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0\ldots1\end{vmatrix}=1$$

otrzymujemy wzór

$$\frac{D(y_1,y_2,y_3\ldots y_n)}{D(x_1,x_2,x_3\ldots x_n)}=\frac{1}{\frac{D(x_1,x_2,x_3\ldots x_n)}{D(y_1,y_2,y_3\ldots y_n)}}$$

Wzór ten przypomia związek między pochodnemi funkcyj wzajemnie odwrotnych jednej zmiennej.

Przypuśćmy, że żależności między zmiennemi $y_1,y_2\ldots y_n$ a zmiennemi $x_1,x_2\ldots x_n$ ustalone zostały w postaci równań

$$\begin{aligned}&F_1(y_1,y_2\ldots y_n;\ x_1,x_2\ldots x_n)=0\\&F_2(y_1,y_2\ldots y_n;\ x_1,x_2\ldots x_n)=0\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&F_n(y_1,y_2\ldots y_n;\ x_1,x_2\ldots x_n)=0\end{aligned}\quad(14)$$

Uważając $y_1,y_2\ldots y_n$ jako funkcje uwikłane zmiennych $x_1,x_2\ldots x_n$, określone równaniami (14) różniczkujemy te równania względem x_i

Otrzymamy

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i}=\frac{\partial F_k}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_k}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_i}+\ldots+\frac{\partial F_k}{\partial y_n}\cdot\frac{\partial y_n}{\partial x_i}\quad\ldots\quad(15)$$

Z drugiej strony, mnożąc wyznaczniki

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1},&\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\ldots&\frac{\partial F_1}{\partial y_n}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1},&\frac{\partial F_2}{\partial y_2}\ldots&\frac{\partial F_2}{\partial y_n}\\ \ldots&\ldots&\ldots\\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1},&\frac{\partial F_n}{\partial y_2}\ldots&\frac{\partial F_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}=\frac{D(F_1,F_2\ldots F_n)}{D(y_1,y_2\ldots y_n)}$$

i

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1},&\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\ldots&\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1},&\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\ldots&\frac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ \ldots&\ldots&\ldots\\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1},&\frac{\partial y_n}{\partial x_2}\ldots&\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}=\frac{D(y_1,y_2\ldots y_n)}{D(x_1,x_2\ldots x_n)},$$

dostaniemy na mocy wzoru (15)

$$\frac{D(F_1,F_2\ldots F_n)}{D(y_1,y_2\ldots y_n)}\cdot\frac{D(y_1,y_2\ldots y_n)}{D(x_1,x_2\ldots x_n)}=-\frac{\partial F_k}{\partial x_i},$$

gdzie $i,k=1,2,3\ldots n$

czyli

$$\frac{D(y_1, y_2 \dots y_n)}{D(x_1, x_2 \dots x_n)} = (-1)^n \frac{D(F_1, F_2 \dots F_n)}{D(x_1, x_2 \dots x_n)} : \frac{D(F_1, F_2 \dots F_n)}{D(y_1, y_2 \dots y_n)} \quad \text{(III)}$$

Jest to wzór analogiczny do wzoru na pochodną funkcji uwikłanej

Twierdzenie. Na to, aby funkcje

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2 \dots x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2 \dots x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2 \dots x_n) \end{aligned} \quad \dots\dots \text{(16)}$$

n zmiennych niezależnych $x_1, x_2 \dots x_n$ były od siebie niezależne potrzeba i wystarcza, żeby wyznacznik funkcyjny Jacobi

$$\frac{D(f_1, f_2 \dots f_n)}{D(x_1, x_2 \dots x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

równał się zeru tożsamościowo.

Dowód. Przypuśćmy, że między funkcjami (16) zachodzi związek postaci

$$F(y_1, y_2 \dots y_n) = 0$$

Różniczkując równanie (16) względem zmiennych $x_1, x_2 \dots x_n$, otrzymamy

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_1} = 0 \\ &\frac{\partial F}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_2} = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{\partial F}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = 0 \end{aligned}$$

Mamy więc układ równań linjowych i jednorodnych względem pochodnych

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}, \frac{\partial F}{\partial y_2} \dots \frac{\partial F}{\partial y_n}$$

Ponieważ nie wszystkie pochodne są zerami, przeto wyznacznik, utworzony ze spółczynników przy tych pochodnych, czyli też wyznacznik Jacobi

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \dots \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \dots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad \dots\dots\dots \text{(17)}$$

powinien być zerem tożsamościowo.

Odwrotnie, przypuśćmy, że wyznacznik (17) równa zeru tożsamościowo. Dajmy na to, że zależność funkcyjna między zmiennemi $y_1, y_2 \dots y_n$ a zmiennemi $x_1, x_2 \dots x_n$ podana została w postaci równań

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, x_2, x_3 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_n) = 0 \\ &\varphi_2(x_1, x_2, x_3 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_n) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\varphi_n(x_1, x_2, x_3 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_n) = 0 \end{aligned} \quad \dots \text{(18)}$$

Rugując z tych równań zmienne $x_1, x_2 \dots x_{k-1}, y_{k+1}, y_{k+2} \dots y_n$ otrzymamy równanie, zawierające zmienne

$$y_1, y_2 \dots y_k, x_k, x_{k+1} \dots x_n$$

Zakładając kolejno $k = 1, 2, 3 \dots n$, dostaniemy n równań postaci

$$\begin{aligned} y_1 &= F_1(x_1, x_2 \dots x_n) \\ y_2 &= F_2(x_1, x_2 \dots x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= F_n(x_1, x_2 \dots x_n) \end{aligned} \quad \dots\dots \text{(19)}$$

Zestawiając równania (18) i (19), będziemy mieli tożsamości

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= y_1 - F_1 \\ \varphi_2 &= y_2 - F_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_n &= y_n - F_n \end{aligned}$$

Przeto

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}=1;\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2}=0;\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_3}=0\cdots\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n}=0$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1}=0;\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2}1;\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_3}=0\cdots\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_n}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial y_1}=0;\quad \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_2}=0\cdots\frac{\partial\varphi_n}{\partial y_n}=1,$$

a

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}=-\frac{\partial F_1}{\partial x_1};\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}=-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}=-\frac{\partial F_1}{\partial x_n}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}=0;\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}=-\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}=-\frac{\partial F_2}{\partial x_n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}=0;\quad \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}=0\cdots\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}=-\frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

A zatem wyznacznik Jacobi

$$\frac{D(\varphi_1,\ \varphi_2\dots\varphi_n)}{D(y_1,\ y_2\dots y_n)}=1$$

wyznacznik zaś

$$\frac{D(\varphi_1,\ \varphi_n\dots\varphi_n)}{D(x_1,\ x_2\dots x_n)}=(-1)^n\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Posługując zaś wzorem (III), będziemy mieli

$$\frac{D(y_1,\ y_2\dots y_n)}{D(x_1,\ x_2\dots x_n)}=\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Ponieważ wedle założenia $\frac{D(y_1,\ y_2\dots y_n)}{D(x_1,\ x_2\dots x_n)}=0$ tożsamościowo, przeto jedna z pochodnych $\frac{\partial F_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial x_n}$ będzie zerem tożsamościowo.

Przypuśćmy, dla ustalenia myśli, że $\frac{\partial F_m}{\partial x_m}=0$

Wtedy oczywiście funkcja F_m nie zawiera wyraźnie zmiennej x_m. Rugując zmienną x_{m+1} z dwóch równań układu (19)

$$y_m=F_m(y_1,\ y_2\dots y_{m-1},\ x_{m+1}\dots x_n)$$

$$y_{m+1}=F_{m+1}(y_1,\ y_2\dots y_{m-1},\ x_{m+1}\dots x_n),$$

otrzymamy równanie

$$\psi_0(y_1,\ y_2\dots y_{m+1},\ x_{m+2},\ x_{m+3}\dots x_n)=0$$

Rugując zmienną x_{m+2} z ostatniego równania i równania układu (19)

$$y_{m+2}=\varphi_{m+2}(y_1,\ y_2\dots y_{m+1},\ x_{m+2},\ x_{m+3}\dots x_n)=0,$$

otrzymamy równanie

$$\psi_1(y_1,\ y_2\dots y_{m+2},\ x_{m+3}\dots x_n)=0$$

Postępując dalej w taki sam sposób, otrzymamy po wyrugowaniu ostatniej zmiennej x_n równanie

$$\psi(y_1,\ y_2\dots y_n)=0,$$

nie zawerające zmiennych $x_1,\ x_2\dots x_n$.

Równanie to przedstawia właśnie zależność między funkcjami $y_1,\ y_2\dots y_n$. Dowiedliśmy więc twierdzenia w zupełności.

§ 4. Wyznacznik funkcyjny Hesse'go (Hessian). Niechaj będzie dana funkcja $F(x_1,\ x_2\dots x_n)$ n zmiennych niezależnych $x_1,\ x_2\dots x_n$. Oznaczmy

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=z_1;\quad \frac{\partial F}{\partial x_2}=z_2\cdots\frac{\partial E}{\partial x_n}=z_n$$

Wyznacznik Jacobi'ego

$$\frac{D(z_1,\ z_2,\ z_3\dots z_n)}{D(x_1,\ x_2,\ x_3\dots x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2F}{\partial x_1^2}, & \frac{\partial^2F}{\partial x_1\partial x_2}\cdots\frac{\partial^2F}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2F}{\partial x_2\partial x_1}, & \frac{\partial^2F}{\partial x_2^2}\cdots\frac{\partial^2F}{\partial x_2\partial x_n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{\partial^2F}{\partial x_n\partial x_1}, & \frac{\partial^2F}{\partial x_n\partial x_2}\cdots\frac{\partial^2F}{\partial x_n^2}\end{vmatrix}$$

nazywa się funkcyjnym wyznacznikiem Hesse'go, lub wprost Hessianem. Hessian będziemy oznaczali symbolem

$$H_{x_1\ x_2,\dots x_n}(F).$$

Udowodnijmy bardzo ważne twierdzenie o linjowem przekształceniu Hessian'a. Twierdzenie to odgrywa nadzwyczaj ważną rolę w teorji form.

Twierdzenie. Jeżeli zmienne $x_1,\ x_2\dots x_n$ zastąpimy przez inne zmienne $y_1,\ y_2\dots y_n$ za pomocą przekształcenia linjowego

$$\begin{aligned}x_1&=a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3+\cdots+a_{1n}y_n\\ x_2&=a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3+\cdots+a_{2n}y_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n&=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+a_{n3}y_3+\cdots+a_{nn}y_n\end{aligned}\qquad(20)$$

wówczas zachodzi wzór następujący

$$H_{y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_n}(F) = \delta^2 H_{x_1,\ x_2\ \ldots\ x_n}(\varphi),$$

gdzie F jest to funkcja zmiennych $y_1,\ y_2 \ldots y_n$ którą otrzymamy po przekształceniu funkcji φ a

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11},\ a_{12},\ a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23} \ldots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1},\ a_{n2},\ a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

jest tak zwany wyznacznik przekształcenia linjowego (20).

Dowód. Różniczkując tożsamość

$$\varphi(x_1,\ x_2 \ldots x_n) = F(y_1,\ y_2 \ldots y_n)$$

względem x_k $(k = 1,\ 2,\ 3 \ldots n)$, otrzymamy

$$\varphi_k = \frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} a_{1k} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} a_{2k} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} a_{nk} = a_{1k} z_1 + a_{2k} z_2 + \cdots + a_{nk} z_n.$$

W myśl własności (1) Jakobiana możemy napisać

$$\frac{D(F_1,\ F_2,\ F_3 \ldots F_n)}{D(y_1,\ y_2,\ y_3 \ldots y_n)} = \frac{D(F_1,\ F_2,\ F_3 \ldots F_n)}{D(x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots x_n)} \cdot \frac{D(x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots x_n)}{D(y_1,\ y_2,\ y_3 \ldots y_n)}$$

Z drugiej zaś strony w myśl tej samej własności mamy

$$\frac{D(F_1,\ F_2,\ F_3 \ldots F_n)}{D(x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots x_n)} = \frac{D(F_1,\ F_2,\ F_3 \ldots F_n)}{D(z_1,\ z_2,\ z_3 \ldots z_n)} \cdot \frac{D(z_1,\ z_2,\ z_3 \ldots z_n)}{D(x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots x_n)}$$

Zestawiając dwa ostatnie wzory, otrzymujemy

$$\frac{D(F_1,\ F_2,\ F_3 \ldots F_n)}{D(y_1,\ y_2,\ y_3 \ldots y_n)} = \frac{D(F_1,\ F_2,\ F_3 \ldots F_n)}{D(z_1,\ z_2,\ z_3 \ldots z_n)} \cdot \frac{D(z_1,\ z_2,\ z_3 \ldots z_n)}{D(x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots x_n)} \cdot \frac{D(x_1,\ x_2 \ldots x_n)}{D(y_1,\ y_2 \ldots y_n)}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\frac{D(F_1,\ F_2 \ldots F_n)}{D(z_1,\ z_2 \ldots z_n)} = \begin{vmatrix} a_{11},\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21},\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1},\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \delta$$

$$\frac{D(x_1,\ x_2 \ldots x_n)}{D(y_1,\ y_2 \ldots y_n)} = \begin{vmatrix} a_{11},\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21},\ a_{22} \ldots a_{nn} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1},\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \delta$$

Otrzymujemy

$$\frac{D(F_1,\ F_2 \ldots F_n)}{D(y_1,\ y_2 \ldots y_n)} = \delta^2 \frac{D(z_1,\ z_2 \ldots z_n)}{D(x_1,\ x_2 \ldots x_n)},$$

czyli

$$H_{y_1,\ y_2 \ldots y_n}(F) = \delta^2 H_{x_1,\ x_2 \ldots x_n}(\varphi).$$

A na tem właśnie polega twierdzenie, o którego dowód chodziło.

Rozdział XIII.

Zamiana zmiennych.

§ 1. **Funkcje jednej zmiennej niezależnej.** Mamy dane wyrażenie różniczkowe

$$F(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}), \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

zawierające zmienną niezależną x, jej funkcję y oraz kolejne pochodne funkcji y względem x.

Przekształćmy wyrażenie różniczkowe (1), przyjmując za nową zmienną niezależną zmienną t, związaną z x zapomocą wzoru

$$x = \varphi(t) \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Chcąc dowiedzieć się, jaką postać przybiera wyrażenie (1) po przekształceniu, trzeba wyrazić funkcje y oraz jej pochodne y', y'', y''', $y^{(n)}$ przez zmienną t i pochodne funkcji y względem t.

Mamy wzór

$$y = \frac{dy}{dx} \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Różniczkując ten wzór, dostaniemy

$$dy' = y''dx = \frac{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x}{dx^2}$$

Stąd

$$y'' = \frac{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x}{dx^3} \ldots\ldots \quad (4)$$

Różniczkując wzór (4), otrzymamy

$$dy'' = y'''dx = \frac{(dxd^3y - dy \cdot d^3x) - 3(dxd^2y - dyd^2x)d^2x}{dx^4}$$

Stąd

$$y''' = \frac{(dxd^3y - dyd^3x) - 3(dxd^2y - dyd^2x)d^2x}{dx^5} \ldots \quad (5)$$

W podobny sposób otrzymamy wyrażenia na pochodne wyższych rzędów $y^{(IV)}$, $y^{(V)}$ i t. d.

Godnem jest uwagi, że wzór (3), (4), (5) i t. d. mają miejsce dla dowolnej zmiennej niezależnej, albowiem przedstawiają wyrażenia na pochodne funkcji y przez jej różniczki różnych rzędów.

Przyjmijmy teraz zmienną t za zmienną niezależną.

Oznaczmy przez Y, Y', Y'', Y''' i t. d. funkcję y i jej kolejne pochodne, uważając y jako funkcję zmiennej niezależnej t.

Dzieląc następnie liczniki i mianowniki wzorów (3), (4), (5) odpowiednio przez dt, dt^2, dt^3, dostaniemy wzory następujące:

$$y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y'}{x'} \ldots\ldots\ldots \quad (3')$$

$$y'' = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{x'Y'' - x''Y'}{x'^3} \ldots \quad (4')$$

$$y''' = \frac{\left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^3x}{dt^3} \cdot \frac{dy}{dt}\right) - 3\left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}\right)\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5} =$$

$$= \frac{(x'Y''' - x'''Y') - 3(x'Y'' - x''Y')x''}{(x')^5} \ldots \quad (5')$$

W podobny sposób otrzymamy wzory na pochodne wyższych rzędów funkcji y.

Znalezione wzory (3'), (4'), (5') podstawiamy do wyrażenia różniczkowego (1). Przekształcenie wyrażenia (1) zostało w ten sposób dokonane.

Dajmy na to, że równanie $y = f(x)$ da się rozwiązać względem zmiennej x. Przyjmijmy y za zmienną niezależną i uważajmy x jako funkcję y.

Oczywista, w tym przypadku różniczki

$$d^2y = d^3y = \cdots = 0.$$

A zatem wzory (3), (4), (5), przybierają postać

$$y' = \frac{1}{x'}, \quad y'' = -\frac{dyd^2x}{dx^3} = -\frac{x''}{x'^3}$$

$$y''' = -\frac{dyd^3x + 3dy(d^2x)^2}{dx^5} = -\frac{x'x''' + 3x''^2}{x'^5} \quad (16)$$

i t. d.

Przykłady 1. Mamy dane równanie różniczkowe

$$xy'' + 2y' = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Jaką postać przybiera to równanib, gdy zmienną niezależną będzie zmienna t, związana z x zapomocą wzoru

$$x = \frac{1}{t} \ ?$$

Różniczkując ten wzór, otrzymamy

$$x' = -\frac{1}{t^2}; \quad x'' = \frac{2}{t^3}$$

Posiłkując się wzorami (3') i (4'), otrzymamy

$$y' = -t^2 Y'; \quad y'' = t^4 Y'' + 2t^3 Y'$$

Podstawiając te wzory w równanie (a), otrzymamy

$$\frac{1}{t}(t^4 Y'' + 2t^3 Y') - 2t^2 Y' = 0,$$

czyli

$$y'' = 0.$$

2. Mamy dane równanie różniczkowe

$$y'' + y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Jak się zmieni to równanie, jeżeli zmienną niezależną będzie zmienna t, związana z x zapomocą wzoru

$$t = \cos x; \quad \text{czyli} \quad x = \arccos t?$$

Różniczkując ostatni wzór względem t, dostaniemy

$$x' = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}; \quad x'' = \frac{-t}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}$$

W myśl wzoru (4') mamy

$$y'' = (1-t^2)Y'' - tY'$$

Podstawiając ostatni wzór w równanie (b), otrzymamy równanie

$$(1-t^2)\,Y'' - tY' + Y = 0.$$

3. Mamy dane równanie różniczkowe

$$y'' - xy'^2 - yy'^3 = 0.$$

Jaką postać przybiera to równanie, gdy zmienna niezależną jest y?

Posiłkując się wzorami (b), będziemy mieli

$$\frac{x''}{x'^3} + \frac{x}{x'^2} + \frac{y}{x'^3} = 0.$$

Usuwając mianowniki, otrzymujemy równanie

$$x'' + xx' + y = 0.$$

4. Mamy dane równanie różniczkowe

$$x^2 y''' + 3x^2 y'' + xy' - y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Jak się zmieni to równanie, jeżeli zmienną niezależną będzie zmienna t, związana z x zapomocą wzoru

$$x = e^t.$$

Różniczkując ten wzór, otrzymamy

$$x' = e^t; \quad x'' = e^t; \quad x''' = e^t.$$

W myśl wzorów (3'), (4'), (5') mamy

$$y' = \frac{1}{e^t} \cdot Y'; \quad y'' = (Y'' - Y') \cdot \frac{1}{e^{2t}}$$

$$y''' = \frac{1}{e^{3t}}(Y''' - 3Y'' + 2Y')$$

Podstawiając te wzory w dane równanie (c), otrzymamy równanie

$$Y''' + Y' - Y = 0.$$

Niech będzie dane wyrażenie różniczkowe

$$F(x,\ y,\ y',\ y'' \ldots),$$

zawierające zmienną niezależną x, jej funkcję y oraz kolejne pochodne y względem x.

Chodzi o to, jak się przekształci dane wyrażenie, jeżeli zmienną niezależną x zastąpimy przez nową zmienną niezależną v, a y przez nową zmienną u.

Równanie, łączące zmienne x i y z u i v, można zadać w postaci

$$x = f_1(u, v); \quad y = f_2(u, v), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

lub też w postaci

$$u = \varphi_1(x, y); \quad v = \varphi_2(x, y), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

lub nareszcie w postaci

$$\psi_1(x, y, u, v) = 0; \quad \psi_2(x, y, u, v) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Różniczkując w pierwszym przypadku równania (a), dostaniemy

$$dx = \frac{\partial f_1}{\partial u}du + \frac{\partial f_2}{\partial v}dv; \quad dy = \frac{\partial f_2}{\partial u}du + \frac{\partial f_2}{\partial v}dv \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Różniczkujemy jeszcze raz równania (a). Biorąc pod uwagę, że $d^2v = 0$, otrzymamy

$$\begin{aligned} d^2x &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial u \partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 f_1}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2}d^2u \\ d^2y &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial u_2}du^2 + 2\frac{\partial^2 f_2}{\partial u \partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 f_2}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2}d^2u \end{aligned} \quad . \quad . \quad (8)$$

Podstawiając wzory (7) i (8) do wzorów (3) i (4), otrzymamy wzory na pochodne y' i y'', wyrażone przez funkcję u, v i pochodne funkcji u względem v. W podobny sposób można przekształcić pochodne wyższych rzędów.

Dajmy na to, że zależność zmiennych u i v od x i y ustalona została zapomocą równań (b). Różniczkując te równania, otrzymamy

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy;\quad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Z tych wzorów możemy wyznaczyc różniczki dx i dy przez du i dv.

Po powtórnem różniczkowaniu równań (b), dostaniemy

$$\begin{aligned} d^2u&=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial u}{\partial x}d^2x+\frac{\partial u}{\partial y}d^2y \\ d^2v=0&=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial v}{\partial x}d^2x+\frac{\partial v}{\partial y}d^2y \end{aligned} \quad . \quad (10)$$

Posługując się wzorami (9) i (10), możemy wyrazić różniczki dx i dy przez du i dv, a różniczki d^2x, d^2y przez du, dv i d^2u. Podstawiając znalezione wzory na różniczki dx, dy, d^2x, d^2y do wzorów (3) i (4), otrzymamy wzory na pochodne y względem x, wyrażone przez pochodne u względem v.

W podobny sposób znajdziemy wzory, na pochodne wyższych rzędów.

Przypuśćmy, że zależności zmiennych u i v od x i y ustalone zostały zapomocą równań (c).

Różniczkując te równania, otrzymamy

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi_1}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi_1}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi_1}{\partial u}du+\frac{\partial\psi_1}{\partial v}dv=0 \\ &\frac{\partial\psi_2}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi_2}{\partial u}du+\frac{\partial\psi_2}{\partial v}dv=0 \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Z tych równań możemy wyznaczyć różniczki dx i dy.

Różniczkując równania (11) w sposób całkiem analogiczny do poprzedniego, potrafimy wyznaczyć różniczki dx^2, dy^2 przez du, dv, d^2u. Postępując dalej jak w przypadku ogólnym, znajdziemy wzory na pochodne funkcji y względem x, wyrażone przez pochodne funkcji u względem v.

Przykłady 1. Mamy dane wyrażenie różniczkowe

$$\frac{xy'-y}{x+yy'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Przypuśćmy, że równania, łączące nowe zmienne u i v z dawnemi będą

$$x=u\cos v;\quad y=u\sin v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Jak się przekształci to wyrażenie, jeżeli zastąpimy zmienną niezależną x przez v, a y przez u.

Różniczkując równania (b), dostaniemy

$$dx=\cos v\,du-u\sin v\,dv;\quad dy=\sin v\,du+u\cos v\,dv$$

Stąd

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin v\,du+u\cos v\,dv}{\cos v\,du-u\sin v\,dv}=\frac{\sin v.u'+u\cos v}{\cos v.u'-u\sin v}$$

Podstawiając ten wzór w wyrażenie (a), otrzymamy

$$\frac{xy'-y}{x+yy'}=\frac{u^2(\sin^2 v+\cos^2 v)}{u(\sin^2 v+\cos^2 v)u'}=\frac{u}{u'}$$

2. Mamy dane wyrażenie różniczkowe

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Przekształćmy to wyrażenie, przyjmując za nową zmienną niezależną θ, a za nową funkcję ρ.

Niechaj równania łączące zmienne ρ i θ z x i y będą

$$x=\rho\cos\theta;\quad y=\rho\sin\theta$$

Różniczkując te równania dwa razy, otrzymamy

$$\begin{aligned} &dx=\cos\theta\,d\rho-\rho\sin\theta d\theta;\quad dy=\sin\theta\,d\rho+\rho\cos\theta d\theta \\ &d^2x=\cos\theta.d^2\rho-2\sin\theta\,d\rho d\theta-\rho\cos\theta d\theta^2 \\ &d^2y=\sin\theta.d^2\rho+2\cos\theta d\rho d\theta-\rho\sin\theta d\theta^2 \end{aligned}$$

Podstawiając ostatnie wzory do wzorów (3') i (4'), otrzymamy

$$y'=\frac{\sin\theta.\rho'+\rho\cos\theta}{\cos\theta.\rho'-\rho\sin\theta};\quad y''=\frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\cos\theta.\rho'-\rho\sin\theta)^3}$$

Podstawiając otrzymane wzory na pochodne y' i y'' w dane wyrażenie (c), dostaniemy

$$R=\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}$$

3. Mamy dane równanie różniczkowe

$$xyy''-xy'^2+y^3=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Wprowadźmy nowe zmienne u i v, połączone z dawnemi zmiennemi wzorami

$$x=e^v;\quad y=e^u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Przekształćmy równanie (a), uważając v jako zmienną niezależną, a zmienną u jako funkcję v.

Różniczkując wzory (b), dostaniemy

$$dx=e^v\,dv;\quad dy=e^u\,du$$

$$d^2x=e^v\,dv^2;\quad d^2y=e^u\,(d^2u+du^2)$$

Podstawiając te wzory do wzorów (3') i (4'), otrzymamy

$$y'=e^{u-v}.u';\quad y''=\frac{e^{u+v}(d^2u\,dv+dvdu^2-dud v^2)}{e^{3v}dv^3}=e^{u-2v}(u''+u'^2-u')$$

Podstawiając ostatnie wzory na pochodne w równanie (a), otrzymamy

$$u'' - u' + e^{u+v} = 0.$$

Ćwiczenia 1. Przekształcić równanie różniczkowe

$$(1-x)^3 y' + 2a(1+x) = 0,$$

przyjmując t za nową zmienną niezależną, gdzie $t = \frac{1+x}{1-x}$

Odp. $Y' + at = 0.$

2. Przekształcić równanie różniczkowe

$$(y''' + yy')y'^2 - y''^2(3y' + x^2) = 0,$$

przyjmując y za zmienną niezależną

Odp. $x''' + x^2x'' - yx'^3 = 0.$

3. Przekształcić równanie różniczkowe

$$(1+x^2)xy'' - (1 - x^2y\sqrt{1+x^2})y' - x^3y^2 = 0,$$

przyjmując t za nową zmienną niezależną, gdzie $t = \sqrt{1+x^2}$

Odp. $Y'' + YY' - Y^2 = 0.$

4. Przekształcić równanie różniczkowe

$$(1-x^2)^2 y'' - 2x(1-x^2)y' + \frac{2a}{1-x}y = 0,$$

przyjmując t za nową zmienną niezależną, gdzie $x = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$

Odp. $Y'' + a(e^{2t}+1)Y = 0.$

5. Przekształcić równanie różniczkowe

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0,$$

przyjmując t za nową zmienną niezależną, gdzie $x^2 = 4t$.

Odp. $tY'' + Y' + Y = 0.$

6. Przekształcić równanie różniczkowe.

$$(1-x^2)^2 y''^2 - 2x(1-x^2)y'y'' + y'^2 + 1 = 0,$$

przyjmując t za nową zmienną niezależną, gdzie $x = \sin t$.

Odp. $Y''^2 + Y'^2 + 1 = 0.$

7. Przekształcić równanie różniczkowe

$$(x+y-6)y' + (x+y+6) = 0,$$

przyjmując v za nową zmienną niezależną, a u za nową funkcję, jeżeli $x = u + v$; $y = u - v$.

Odp. $uu' + 3 = 0.$

8. Przekształcić równanie różniczkowe

$$[(x-y)\sqrt{x^2-y^2} + (x-y)^2 - 2y^2]y' + (x+y)\sqrt{x^2-y^2} + x^2 + y^2 + 0,$$

przyjmując v za nową zmienną niezależną, a u za nową funkcję, jeżeli $x = u^2 + v^2$; $y = 2uv$.

Odp. $(u+v)^2 u' + (u-v)^2 = 0.$

§ **2. Funkcje wielu zmiennych niezależnych.** Mamy dane wyrażenie różniczkowe

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdots\right), \quad . \quad . \quad (1)$$

zawierające zmienne niezależne x, y, funkcję z tych zmiennych oraz jej pochodne cząstkowe różnych rzędów względem x i y. Chodzi o to, jak się przekształci wyrażenie (1), jeżeli zmienne niezależne zastąpimy przez nową zmienną t, związaną z dawnemi zmiennemi x i y zapomocą równania

$$f(x, y, t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Oznaczmy przez $Z(t)$ funkcję z, w której x i y zastąpiono przez zmienną znalezioną z równania (12). Oczywista, można napisać tożsamość

$$z(x, y) = Z(t)$$

Różniczkując tę tożsamość względem x, y, otrzymamy

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{dx} = \frac{dZ}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dZ}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} \\
&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{d^2Z}{dt^2}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \frac{dZ}{dt}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \\
&\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{d^2Z}{dt^2}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \frac{dZ}{dt}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13) \\
&\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{dZ}{dt}\right)^2 \cdot \frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{dZ}{dt}\cdot\frac{d^2 t}{\partial x \partial y} \text{ i t. d.}
\end{aligned}$$

Pochodne cząstkowe $\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$ i t. d. możemy znaleźć, różniczkując równanie (12) w przypuszczeniu, że t jest funkcją zmiennych x i y.

Podstawiając wzory (13) w wyrażenie różniczkowe (1), sprowadzamy go do postaci

$$F_1\left(t, \frac{dZ}{dt}, \frac{d^2Z}{dt^2} \cdots\right)$$

Przykłady 1. Mamy dane wyrażenie różniczkowe

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Jak się przekształci to wyrażenie, jeżeli zmienne x, y zastąpimy przez zmienną t, daną przez równanie

$$x^2+y^2-(\lg t)^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Różniczkując tożsamość

$$z(x, y)=Z(t)$$

względem zmiennych x, y, otrzymamy

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dZ}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dZ}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} \quad \ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

Różniczkując (b) względem x i y, będziemy mieli

$$x-\frac{\lg t}{t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=0; \quad y-\frac{\lg t}{t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=0.$$

Stąd

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{xt}{\lg t}; \quad \frac{\partial t}{\partial y}=\frac{yt}{\lg t} \quad \ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

Podstawiając wzory (d) w wyrażeniu (c), dostaniemy

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xt}{\lg t}\cdot\frac{dZ}{dt}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yt}{\lg t}\cdot\frac{dZ}{dt}$$

Podstawiając ostatnie wzory w wyrażenie różniczkowe (l), otrzymujemy

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{(x^2+y^2)\,t^2}{\lg^2 t}\left(\frac{dZ}{dt}\right)^2=t^2\left(\frac{dZ}{dt}\right)^2$$

2. Mamy dane równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Jak się zmieni to równanie, jeżeli zmienne niezależne x, y zastąpimy przez zmienną t, daną przez równanie

$$x^2+y^2-t^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Różniczkując tożsamość

$$z(x, y)=Z(t),$$

otrzymujemy

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dZ}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dZ}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{d^2Z}{dt^2}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\frac{dZ}{dt}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{d^2Z}{dt^2}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+\frac{dZ}{dt}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \quad \ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

Różniczkując równanie (b) względem x i y otrzymamy

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{x}{t} \quad \frac{\partial t}{\partial y}=\frac{y}{t}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}=\left(t-x\frac{\partial t}{\partial x}\right)\frac{1}{t^2}=\frac{1}{t}-\frac{x^2}{t^3}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=\left(t-y\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{1}{t^2}=\frac{1}{t}-\frac{y^2}{t^3} \quad \ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

Podstawiając te wzory w (c), dostaniemy

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{x^2}{t^2}\cdot\frac{d^2Z}{dt^2}+\left(\frac{1}{t}-\frac{x^2}{t^3}\right)\cdot\frac{dZ}{dt}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{y^2}{t^2}\cdot\frac{d^2Z}{dt^2}+\left(\frac{1}{t}-\frac{y^2}{t^3}\right)\cdot\frac{dZ}{dt} \quad \ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

Podstawiając następnie wyrażenia (e) do (a), otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{d^2Z}{dt^2}+\frac{1}{t}\cdot\frac{dZ}{dt}$$

3. Mamy dane równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

gdzie u jest funkcja trzech zmiennych niezależnych x, y, z. Jak się przekształci to równanie, jeżeli zastąpimy te zmienne przez nową zmienną t, związaną z x, y, z zapomocą równania

$$x^2+y^2+z^2-t^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Różniczkując tożsamość

$$u(x, y, z)=U(t)$$

względem zmiennych x, y, z, otrzymamy

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{dU}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{d^2U}{dt^2}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\frac{dU}{dt}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial U}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{d^2U}{dt^2}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+\frac{dU}{dt}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \quad \ldots \quad \text{(c)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{dU}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial z} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{d^2U}{d^2t}\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2+\frac{dU}{dt}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Różniczkując równanie (b) względem x, y, z, dostaniemy

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{x}{t}; \quad \frac{\partial t}{\partial y}=\frac{y}{t}; \quad \frac{\partial t}{\partial z}=\frac{z}{t}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}=\left(t-x\frac{\partial t}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{t^2}=\frac{1}{t}-\frac{x^2}{t^3} \quad \ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=\left(t-y\frac{\partial t}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{t^2}=\frac{1}{t}-\frac{y^2}{t^3}$$
$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=\left(t-z\frac{\partial t}{\partial z}\right)\cdot\frac{1}{t^2}=\frac{1}{t}-\frac{z^2}{t^3} \quad \ldots \text{(d)}$$

Podstawiajmy te wzory w (e) i dodajemy otrzymane rezultaty, będziemy mieli ostatecznie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{d^2U}{dt^2}+\frac{2}{t}\cdot\frac{dU}{dt}$$

W podobny sposób można przekształcić wyrażenia różniczkowe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

gdzie u jest funkcją n zmiennych niezależnych $x_1, x_2 \ldots x_n$, przyjmując za nową zmienną niezależną t, daną przez równanie

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-t^2=0.$$

W rezultacie otrzymamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=\frac{d^2U}{dt^2}+\frac{n-1}{t}\cdot\frac{dU}{dt}$$

Mamy dane wyrażenie różniczkowe

$$F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdots\right), \quad \ldots \text{(I)}$$

zawierające dwie zmienne niezależne x i y, funkcje ich z i pochodne cząstkowe różnych rzędów tej funkcji względem zmiennych niezależnych x, y. Wprowadźmy nowe zmienne u i v, związane z dawnemi zapomocą wzorów

$$x=f(u,\ v);\quad y=\varphi(u,\ v) \quad \ldots \text{(14)}$$

Chodzi o to, jak się przekształci wyrażenie (I), jeżeli zastąpimy zmienne niezależne x i y przez nowe zmienne u i v.

Oznaczmy przez $Z(u, v)$ funkcję z, wyrażoną przez zmienne u i v, znalezione ze wzorów (14). Oczywista, można napisać tożsamość

$$z(x,\ y)=Z(u,\ v).$$

Różniczkując tę tożsamość względem x i y, otrzymamy

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \quad \ldots \text{(15)}$$

Pochodne cząstkowe $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ możemy wyznaczyć z równań

$$(16)\quad \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=1;\quad \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \ldots (17)$$

Ponieważ funkcje f i φ są od siebie niazależne, przeto wyznacznik Jacobi

$$\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u}\\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$$

Stąd wnosimy, że równania (16) i (17) da się rozwiązać względem pochodnych cząstkowych $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$. Podstawiając wartości na te pochodne w wyrażenia (15), otrzymamy wyrażenia na pochodne $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, potrzebne do wykonania przekształcenia wyrażenia (I).

Różniczkujemy następnie równania (15) względem x i y. Otrzymamy

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 Z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 Z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 Z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial Z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 Z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 Z}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 Z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+$$
$$+\frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \quad (18)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 Z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 Z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 Z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial Z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Różniczkując równania (16) względem x, dostaniemy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \quad (19)$$

Z tych równań możemy wyznaczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, posługując się wyrażeniami na pochodne $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, znalezionemi z równań (16).

Różniczkując równania (17) względem y, dostaniemy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \quad (20)$$

Uwzględniając wartości na pochodne $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, otrzymane poprzednio, znajdziemy z równań (20) wyrażenia na pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$. Różniczkując następnie równania (6) względem y lub też równania (17) względem x, otrzymamy

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\\&+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0\\&\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\\&+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0.\end{aligned}\qquad(21)$$

Posługując się wyrażeniami na pochodne $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, znalezionemi z równań (16) i (17), możemy wyznaczyć z równań (21) wzory na pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$.

Podstawiając otrzymane wyrażenia na pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$. W sposób całkiem analogiczny do podanego otrzymamy wyrażenia na pochodne funkcji Z wyższych rzędów. Podstawiając znalezione wyrażenia na pochodne do wyrażenia różniczkowego (I), rozwiązujemy zagadnienie w zupełności.

Przypuśćmy, że związki między nowemi zmiennemi u, v, a dawnemi x, y są dane w postaci następującej:

$$u=\psi(x,y);\quad v=\vartheta(x,y)\quad\ldots\ldots\quad(22)$$

Różniczkując wzory (22) względem x i y, otrzymamy

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial x};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \psi}{\partial y};\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial \vartheta}{\partial x};\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\\&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\partial y};\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}\ \text{i t. d.}\end{aligned}\qquad(23)$$

Podstawiając wzory (23) do (18), otrzymujemy związek między pochodnemi funkcji z względem x i y, a pochodnemi funkcji Z względem u i v.

Podstawiając znalezione wyrażenia na pochodne funkcji z względem x, y w wyrażenie różniczkowe (I), rozwiązujemy zagadnienie.

Przypuśćmy, że zmienne x i y są związane z u i v zapomocą równań

$$F(x,y,u,v)=0;\quad F_1(x,y,u,v)=0$$

Różniczkując te równania względem x i y, otrzymamy

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0\\&\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{aligned}\qquad(25)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0\\&\frac{\partial F_1}{\partial y}+\frac{\partial F_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{aligned}\qquad(26)$$

Z tych równań możemy wyznaczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, jeżeli wyznacznik Jacobi'ego

$$\frac{D(F,F_1)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial u}\\ \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$$

Różniczkujemy następnie równania (25) względem x, a równania (26) względem y. Otrzymamy ze znalezionych równań pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$. Różniczkując nareszcie równania (26) względem x, lub też równania (25) względem y, otrzymamy jeszcze dwa równania, niezbędne do wyznaczenia pochodnych cząstkowych $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$.

Podstawiamy znalezione wartości na pochodne do wzorów (18). Otrzymane w ten sposób wyrażenia na pochodne funkcji z względem x i y podstawiamy do wyrażenia różniczkowego (I).

Przypuśćmy nareszcie, że związki pomiędzy x i y a u i v są dane w postaci równań

$$u=f(x,y,z);\quad v=\varphi(x,y,z).\quad\ldots\ldots\quad(27)$$

Różniczkując te równania, otrzymamy

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\\&\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x};\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\end{aligned}\qquad\ldots\quad(28)$$

Postępując z tymi wzorami jak poprzednio, rozwiązujemy zagadnienie w zupełności.

Przykłady 1. Mamy dane równanie różniczkowe

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0\quad\ldots\ldots\quad(a)$$

Jak się zmieni to równanie, jeżeli zastąpimy zmienne niezależne x i y przez nowe zmienne u i v, określone wzorami

$$\begin{aligned}x&=u\cos v\\ y&=u\sin v\end{aligned}?\quad\ldots\ldots\quad(b)$$

Różniczkując tożsamość $z(x, y) = Z(u, v)$ względem x i y, otrzymujemy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Różniczkując wzory (b) względem x i y, znajdziemy

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos v - u\sin v\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 1$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}\sin v + u\cos v\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}\cos v - u\sin v\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (d)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}\sin v + u\cos v\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Z tych równań otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos v;\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\sin v}{u}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin v;\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\cos v}{u} \quad \ldots\ldots \quad (e)$$

Podstawiając wzory (e) do (c), otrzymamy po uproszczeniu równanie

$$\frac{\partial Z}{\partial v} = 0$$

2. Mamy dane równanie różniczkowe

$$a\frac{\partial z}{\partial y} + b\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Przekształćmy to równanie, przyjmując za zmienne niezależne u i v pod warunkiem, że

$$u = x$$
$$v = y - bz \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Różniczkując wzory (b) względem x i y, otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1;\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -b\frac{\partial z}{\partial x};\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0\quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 - b\frac{\partial z}{\partial y} \quad \ldots \quad (c)$$

Podstawiając ostatnie wzory w równania (15), dostaniemy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial u} - b\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial Z}{\partial v}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial v}\left(1 - b\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Mnożąc pierwsze z ostatnich równań przez a, drugie zaś przez b i dodając otrzymane rezultaty, będziemy mieli

$$a\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial y} - b\left(a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} - 1\right)\frac{\partial z}{\partial v},$$

czyli na mocy (a)

$$a\cdot\frac{\partial z}{\partial u} = 1.$$

3. Mamy dane równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Przekształćmy to równanie, przyjmując za nowe zmienne niezależne u i v, gdzie

$$u = y + x$$
$$v = y - x \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Różniczkując wzory (b) względem x i y, otrzymamy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1\quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots \quad (c)$$

Podstawiając wzory (c) do wzorów (18), dostaniemy

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} \quad \ldots\ldots \quad (d)$$

Podstawiając wzory (d) w równanie różniczkowe (a), otrzymujemy ostatecznie równanie

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

4. Mamy dane równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Przekształćmy to równanie, przyjmując za nowe zmienne niezależne ρ i θ, gdzie

$$x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\theta \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Różniczkując te wzory względem x i y, otrzymamy (patrz przykł. 1)

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\cos\theta;\quad \frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{\rho}$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial y}=\sin\theta;\quad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{\rho}\qquad\ldots\ldots\ (c)$$

Przeto wzory (15) przybierają postać

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}-\frac{\sin\theta}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial y}=\sin\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\cos\theta}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\qquad\ldots\ldots\ (d)$$

Różniczkując ostatnie wyrażenia względem x i y, otrzymujemy

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\cos\theta\left(\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial^2u}{\partial\rho.\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)-\sin\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\sin\theta}{\rho}\left(\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial^2u}{\partial\rho\partial\theta}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)-\frac{\partial u}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\sin\theta}{\rho^2}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\sin\theta\left(\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial^2u}{\partial\rho\rho\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)+\cos\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{\cos\theta}{\rho}\left(\frac{\partial^2u}{\partial\rho\partial\theta}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)-\frac{\partial u}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\rho}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{\cos\theta}{\rho^2}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)$$

Podstawiając w te wzory pochodne $\frac{\partial\rho}{\partial x}$, $\frac{\partial\rho}{\partial y}$, $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$, otrzymujemy

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\cos^2\theta\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{\sin^2\theta}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}-2\sin\theta.\cos\theta\cdot\left(\rho\frac{\partial^2u}{\partial\rho.\partial\theta}-\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$
$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\sin^2\theta\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{\cos^2\theta}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{\cos^2\theta}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}+2\frac{\sin\theta.\cos\theta}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial^2u}{\partial\rho.\partial\theta}-\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\qquad(e)$$

Podstawiając te wzory w równanie (a), otrzymamy ostateczne równanie

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}=0.$$

5. Mamy dane wyrażenie różniczkowe

$$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\qquad\ldots\ldots,\quad(a)$$

Przekształćmy to równanie, przyjmując za nowe zmienne niezależne ρ, φ, θ, jeżeli

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta$$
$$y=\rho\sin\varphi\sin\theta\qquad\ldots\ldots\ (b)$$
$$z=\rho\cos\theta$$

Wyrażenie (a) nazywa się parametrem różniczkowym Lame'godrugiego rzędu.

Wprowadźmy zmienną pomocniczą r, gdzie

$$r=\rho\sin\theta$$

Przekształćmy wyrażenie Δ_2u, przyjmując

$$x=r\cos\varphi$$
$$y=r\sin\varphi$$

Na zasadzie otrzymanego w przykładzie 4 rezultatu, możemy napisać

$$\Delta_2u=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$$

Ponieważ

$$r=\rho\sin\theta$$
$$z=\rho\cos\theta,$$

przeto w myśl wzorów (d) i (e), otrzymanych w przykładzie 4, będziemy mieli

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}=\sin\theta\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{\cos^2\theta}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{\cos^2\theta}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}+2\frac{\sin\theta.\cos\theta}{\rho^2}\left(\rho\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\rho\partial\theta}-\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=\cos^2\theta\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{\sin^2\theta}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}-2\frac{\sin\theta.\cos\theta}{\rho^2}\left(\rho\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\rho\partial\theta}-\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

Podstawiając znalezione wyrażenia w (a), znajdziemy ostatecznie

$$\Delta_2u=\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{2}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\operatorname{cotg}\theta}{\rho^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}$$

Jest to właśnie wyrażenie na parametr Lame'go w spółrzędnych biegunowych w przestrzeni.

6. (Ortogonalne przekształcenia). Mamy dane wyrażenia różniczkowe

$$\Delta_1u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\qquad\ldots\ldots\ (a)$$

$$\Delta_2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\qquad\ldots\ldots\ (b)$$

(parametry różniczkowe Lame'go pierwszego i drugiego rzędu).

Przekształćmy wyrażenia (a) i (b), przyjmując za nowe zmienne niezależne ξ, η, ζ, związane z dawnemi zmiennemi x, y, z zapomocą wzorów

$$\xi=a_1x+a_2y+a_3z$$
$$\eta=b_1x+b_2y+b_3z\qquad\ldots\ldots\ (c)$$
$$\zeta=c_1x+c_2y+c_3z$$

gdzie pomiędzy współczynnikami $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ zachodzą związki następujące:

$$\text{(d)}\quad \begin{array}{ll} a_1^2+b_1^2+c_1^2=1 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0 \\ a_2^2+b_2^2+c_2^2=1 & a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3=0 \\ a_3^2+b_3^2+c_3^2=1 & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0 \end{array} \quad \text{(e)}$$

Ze wzorów (c) (d) i (e) otrzymamy

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=x^2+y^2+z^2 \quad \text{(f)}$$

$$\begin{aligned} x &= a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta \\ y &= a_2\xi+b_2\eta+c_2\zeta \\ z &= a_3\xi+b_3\eta+c_3\zeta \end{aligned} \quad \text{(i)}$$

W myśl ostatnich wzorów mamy

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2=&(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\xi^2+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\eta^2+(c_1^2+c_2^2+c_3^2)\zeta^2+ \\ &+2(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)\eta\zeta+2(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\xi.\zeta+2(a_1b_1+ \\ &+a_2b_2+a_3b_3)\xi.\eta \end{aligned} \quad \text{(k)}$$

Zestawiając wzory (k) i (f), znajdujemy wzory następujące:

$$\text{(l)}\quad \begin{array}{ll} a_1^2+a_2^2+a_3^2=1 & b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0 \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2=1 & a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0 \\ c_1^2+c_2^2+c_3^2=1 & a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \end{array} \quad \text{(m)}$$

Przekształcenia zapomocą wzorów (c) nazywamy przekształceniami ortogonalnemi.

Różniczkując tożsamość

$$u(x, y, z)=U(\xi, \eta, \zeta)$$

względem x i y, z, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial x}=a_1\frac{\partial U}{\partial \xi}+b_1\frac{\partial U}{\partial \eta}+c_1\frac{\partial U}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial y}=a_2\frac{\partial U}{\partial \xi}+b_2\frac{\partial U}{\partial \eta}+c_2\frac{\partial U}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial z}=a_3\frac{\partial U}{\partial \xi}+b_3\frac{\partial U}{\partial \eta}+c_3\frac{\partial U}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad \text{(n)}$$

Z tych wzorów dostaniemy ze względu na (l) i (m)

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right)^2=\Delta_1 U$$

Różniczkując następnie wzory (n) względem x, y, z, otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+ \\ &+2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \zeta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial x}+2\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial x}=a_1^2\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+b_1^2\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}+ \\ &+c_1^2\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}+2a_1b_1\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta}+2a_1c_1\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta}+2b_1c_1\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \eta\partial \zeta} \end{aligned}$$

W taki sam sposób znajdziemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= a_2^2\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+b_2^2\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}+c_2^2\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}+2a_2b_2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta}+2a_2c_2\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \zeta}+ \\ &+2b_2c_2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta\partial \zeta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= a_3^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+b_3^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}+c_3^2\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}+2a_3b_3\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta}+2a_3c_3\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \zeta}+ \\ &+2b_3c_3\frac{\partial^2 U}{\partial \eta\partial \zeta} \end{aligned}$$

Dodając ostatnie wzory, otrzymamy w myśl wzorów (l) i (m)

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}=\Delta_2 U$$

Stąd wnosimy, że parametry różniczkowe (a) i (b) są niezmiennikami ze względu na przekształcenia ortogonalne.

Mamy dane wyrażenie różniczkowe

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdots\right), \quad \text{(l)}$$

zawierające zmienne niezależne x i y, ich funkcję z, oraz pochodne cząstkowe funkcji z względem x i y.

Obieramy u i v za nowe zmienne niezależne, za funkcję zaś nową zmienną W.

Związek między nowemi zmiennemi u, v, w a dawnemi x, y, z można podać zapomocą wzorów

$$x=f_1(u, v, w); \quad y=f_2(u, v, w); \quad z=f_3(u, v, w), \quad \text{(29)}$$

lub też zapomocą wzorów

$$u=\varphi_1(x, y, z); \quad v=\varphi_2(x, y, z); \quad w=\varphi_3(x, y, z), \quad \text{(30)}$$

lub nareszcie zapomocą równań

$$F_1(x, y, z, u, v, w)=0; \quad F_2(x, y, z, u, v, w)=0; \quad F_3(x, y, z, u, v, w)=0 \quad \text{(31)}$$

Chodzi o to, jak się przekształci wyrażenie różniczkowe (l), gdy zmienne x, y, z zastąpimy odpowiednio przez nowe zmienne u, v, w.

Przypuśćmy więc, że związek pomiędzy zmiennemi ustalony został zapomocą wzorów (29).

Oznaczmy przez $w(x, y, z)$ funkcję w, wyrażoną przez zmienne x, y, z, zaś przez $W(u, v)$ tę samą funkcję lecz wyrażoną przez zmienne u, v. Oczywista, możemy napisać tożsamość

$$w(x, y, z) = W(u, v)$$

Różniczkując tę tożsamość względem x, y, dostaniemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial W}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial W}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad . \ . \ . \ . \quad (31)$$

Pochodne cząstkowe $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ można znaleźć, posługując się wzorami (29).

Różniczkując mianowicie równania (29) względem x, otrzymujemy

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial f_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial f_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f_3}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad . \ . \ . \ . \quad (32)$$

Z tych właśnie równań możemy wyznaczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}$.

Analogicznie znajdziemy wyrażenia na pochodne

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Przypuśćmy teraz, że związki pomiędzy zmiennemi x, y, z a w, v, w są dane zapomocą wzorów (30).

Różniczkując te wzory względem x, y, z, dostaniemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \quad . \ . \ . \quad (33)$$

Jasną jest rzeczą, że pochodne cząstkowe $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \ldots$, wchodzące do tych wzorów będą funkcjami zmiennych x, y, z. Funkcje te trzeba zastąpić zmiennemi u, v, w zapomocą wzorów (30).

W tym przypadku, gdy wyrażenie różniczkowe (I) zawiera pochodne $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, które trzeba zastąpić przez pochodne funkcji W względem u i v, różniczkujemy wzory (31). Otrzymane w ten sposób wyrażenia na pochodne $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ podstawiamy w (I).

Dajmy na to, że związki pomiędzy zmiennemi x, y, z, a u, v, w są dane w postaci równań (31). Różniczkując je względem x, y, z, otrzymamy

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad . \quad (34)$$

i t. d.

Z tych wzorów możemy wyrazić pochodne cząstkowe $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ przez $\frac{\partial W}{\partial u}, \frac{\partial W}{\partial v}$.

Różniczkując wzory (34) względem x, y, z, otrzymamy nowe równania, z których możemy wyrazić pochodne $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ przez pochodne $\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v}, \frac{\partial W}{\partial u}, \frac{\partial W}{\partial v}$. Podstawiając otrzymane rezultaty do danego wyrażenia różniczkowego (I), rozwiązujemy zagadnienie w zupełności.

Przykłady 1. Mamy dane równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (a)$$

Przekształćmy to równanie, przyjmując za nowe zmienne niezależne u i v, a za funkcję tych zmiennych W. Przypuśćmy, że związki pomiędzy nowemi zmiennemi u, v, w a dawnemi x, y, z są ustalone za pomocą wzorów

$$u = x + y; \quad v = x - y; \quad w = xy - z \quad . \ . \ . \ . \quad (b)$$

Różniczkując ostatnie wzory względem x i y, otrzymamy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (c)$$

Wzory (31) przybierają postać

$$\frac{\partial W}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{vx}=y-\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$\frac{\partial W}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=x-\frac{\partial z}{\partial x} \quad \ldots\ldots \text{(d)}$$

Podstawiając wzory (c) do wzorów (d), otrzymamy

$$\frac{\partial W}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial v}=y-\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$\frac{\partial W}{\partial u}-\frac{\partial W}{\partial v}=x-\frac{\partial z}{\partial y} \quad \ldots\ldots \text{(e)}$$

Różniczkując pierwsze równanie (e) względem x i y, drugie zaś względem y, otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 W}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 W}{vu\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 W}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 W}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=1-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \quad \text{(f)}$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 W}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial^2 W}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Podstawiając wzory (c) do wzoru (f), dostaniemy

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 W}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}=-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}=1-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \quad \ldots\ldots \text{(g)}$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 W}{\partial u.\partial v}+\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}=-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Podstawiając wartości na pochodne $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ z równań (g) w równanie (a), otrzymujemy po uproszczeniu

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$$

2. Mamy dane równanie różniczkowe

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-e^z=0 \quad \ldots\ldots \text{(a)}$$

Przekształćmy to równanie, przyjmując za nowe zmienne niezależne u i v a W za funkcję tych zmiennych w przypuszczeniu, że związki pomiędzy zmiennemi x, y z a u, v, w są dane w postaci wzorów

$$u=x^2-y^2$$
$$v=2e^z \quad \ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$
$$W=x^2+y^2$$

Różniczkując tożsamość

$$W(u,\ v)=x^2+y^2$$

względem x i y, otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x;\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y;\ \frac{\partial v}{\partial x}=2e^z\frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial v}{\partial y}=2e^z\frac{\partial z}{\partial y} \quad \ldots \text{(c)}$$

Podstawiając te wzory w (31), otrzymamy

$$x\frac{\partial W}{\partial u}+e^z\cdot\frac{\partial W}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=x$$
$$-y\frac{\partial W}{\partial u}+e^z\cdot\frac{\partial W}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=y$$

Stąd

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xe^{-z}}{\dfrac{\partial W}{\partial v}}\left(1-\frac{\partial W}{\partial u}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xe^{-z}}{\dfrac{\partial W}{\partial v}}\left(1-\frac{\partial W}{\partial u}\right) \quad \ldots\ldots \text{(d)}$$

Podstawiamy następnie otrzymane wyrażenia w (a), uwzględniając wzory (b). Otrzymujemy

$$\left(1-\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2+\left(1+\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2-\frac{v^3}{8}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\right)^2=0,$$

czyli

$$\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2-\frac{v^3}{16}\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2+1=0.$$

Ćwiczenia. Mamy dane wyrażenia różniczkowe:

1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Przekształcić to wyrażenie, przyjmując za zmienną niezależną t, określoną równaniem $x^2-y^2=e^{2t}$

Odp. $\frac{1}{e^{2t}}\cdot\frac{d^2 z}{dt^2}$

2. $xy^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2x^2y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+x^3y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-y^3\frac{\partial z}{\partial x}-x^3\frac{\partial z}{\partial y}=0$. Przekształcić je, przyjmując za zmienną niezależną t, określoną równaniem $x^2+y^2=t^2$

Odp. $\frac{d^2 z}{dt^2}-\frac{1}{t}\cdot\frac{dz}{dt}=0$

3. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$. Przekształcić je, przyjmując za nowe zmienne niezależne ρ i φ, określone wzorami $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$.

Odp. $\rho\cdot\frac{\partial z}{\partial\rho}$.

4. $$\left(x^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+3x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(y^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}+3y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

Przekształcić je, przyjmując za nowe zmienne niezależne u i v, określone wzorami $x=e^{u+v}$; $y=e^{u-v}$.

Odp. $\frac{\partial^3 z}{\partial u^3}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial v^3}$.

§ **3. Przekształcenie Legendre'a.** W zakończeniu niniejszego rozdziału rozważmy przekształcenie funkcji dwóch zmiennych niezależnych, podane przez Legendre'a.

Niech będzie dane jakiekolwiek wyrażenie różniczkowe, zawierające pochodne cząstkowe funkcji dwóch zmiennych niezależnych x i y. Chodzi o to, ażeby przekształcić dane wyrażenie, przyjmując za zmienne niezależne pochodne cząstkowe

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}\quad q=\frac{\partial z}{\partial y} \qquad \ldots\ldots \quad (35)$$

za fnnkcję zaś

$$u=px+qy-z \qquad \ldots\ldots \quad (36)$$

W tym celu musimy przedewszystkiem zastąpić pochodne funkcji z względem zmiennych x i y przez pochodne fnnkcji u względem zmiennych p i q.

Różniczkując wyrażenie (35) względem p i q, otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial p}=x;\quad \frac{\partial u}{\partial q}=y \qquad \ldots\ldots \quad (37)$$

Różniczkujemy następnie zmienne (35) względem p i q. Oznaczając

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=s;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t,$$

otrzymamy wyrażenia

$$\begin{aligned} r\frac{\partial x}{\partial p}+s\frac{\partial y}{\partial p}&=1; \quad s\frac{\partial x}{\partial p}+t\frac{\partial y}{\partial p}=0\\ r\frac{\partial x}{\partial q}+s\frac{\partial y}{\partial q}&=0; \quad s\frac{\partial x}{\partial q}+t\frac{\partial y}{\partial q}=1 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots \quad (38)$$

Przypuśćmy że $rt-s\neq 0$. Wtedy z równań (38) znajdziemy wzory na pochodne cząstkowe

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial p}&=\frac{t}{rt-s^2}; \quad \frac{\partial y}{\partial p}=-\frac{s}{rt-s^2}\\ \frac{\partial x}{\partial q}&=-\frac{s}{rt-s^2}; \quad \frac{\partial y}{\partial q}=\frac{r}{rt-s^2} \end{aligned} \qquad \ldots\ldots \quad (39)$$

Z drugiej strony, różniczkując wyrażenie (37) względem p i q, dostaniemy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}=\frac{\partial x}{\partial p};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q}=\frac{\partial^2 u}{\partial q\partial p}=\frac{\partial x}{\partial q}=\frac{\partial y}{\partial p};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}=\frac{\partial y}{\partial q} \qquad \ldots \quad (40)$$

Zestawisjąc wzory (39) (40), mamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}=\frac{t}{rt-s^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q}=-\frac{s}{rt-s^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}=\frac{r}{rt-s^2} \qquad \ldots \quad (41)$$

Z tych wzorów wynika, że

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q}\right)^2=\frac{1}{rt-s^2} \qquad \ldots\ldots \quad (42)$$

Oznaczamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}=R;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q}=S;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}=T$$

Na mocy wzorów (41) i (42) będziemy mieli

$$R=\frac{t}{rt-s^2};\quad S=-\frac{s}{rt-s^2};\quad T=\frac{r}{rt-s^2} \qquad \ldots \quad (43)$$

$$RT-S^2=\frac{1}{rt-s^2} \qquad \ldots\ldots \quad (44)$$

Dzieląc wzory (23) przez (44), otrzymujemy

$$r=\frac{T}{RT-S^2};\quad s=\frac{-S}{RT-S^2};\quad t=\frac{R}{RT-S^2} \qquad \ldots \quad (45)$$

Ze wzorów (45) wnosimy, że w przekształceniu Legendre'a pochodne r, s, t wyrażają się przez pochodne R, S, T w ten sam sposób, co i pochodne R, S, T, wyrażone przez pochodne r, s, t.

Rozdział XIV.

Rzeregi nieskończone o wyrazach zmiennych. Szeregi potęgowe. Wzory Taylor'a i Maclorin'a.

§ 1. **Szeregi nieskończone o wyrazach zmiennych** Niechaj

$$u_0 = f_0(x);\quad u_1 = f_1(x);\quad u_2 = f_2(x);\quad u_3 = f_3(x) \ldots u_n = f_n(x) \ldots \quad (1)$$

będą pewne funkcje zmiennej niezależnej x.

Pomyślmy sobie ciąg

$$s_0 = u_0;\ s_1 = u_0 + u_1;\ s_2 = u_0 + u_1 + u_3 \ldots s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n \quad (2)$$

Ciąg (2) stanowi szereg nieskończony o wyrazach zmiennych.

Dajmy na to, że zmienna x przybiera wartość szczególną $x = x_0$. Ciąg (2) stanowi wtedy szereg nieskończony o wyrazach stałych. Takie szeregi rozważaliśmy szczegółowo w Rozdziale IV. Jeżeli szereg (2) jest zbieżny dla $x = x_0$, wówczas $s = \lim_{n \to \infty} s_n$, czyli suma szeregu (2) jest liczbą określoną w zupełności.

Przypuśćmy, że szereg (2) jest zbieżny dla wszystkich wartości na x w pewnym przedziale (a, b).

Oczywista, każdej wartości na x w tym przedziale odpowiada określona w zupełności wartość na s. A zatem sumę s można uważać w tym przypadku jako pewną funkcję $s(x)$.

Jeżeli szereg (2) jest zbieżny dla pewnej wartości $x = x_0$, to dla każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę, całkowitą dodatnią m, żeby zachodziła nierówność

$$| u_n + u_{n+1} + u_{n+2} \ldots | = | r_n | x | < \varepsilon,$$

skoro $n \geq m$.

Oczywista, liczba m w przypadku ogólnym zależy zarówno od liczby ε, jak i od wartości $x = x_0$.

Przypuśćmy, że szereg (2) posiada tę własność, że do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę całkowitą m największą ze wszystkich liczb m', m''... odpowiadających różnym wartościom na x w przedziale (a, b), żeby zachodziła nierówność

$$| r_n(x) | < \varepsilon,$$

skoro $n \geq m$. Szereg (2) posiadający taką własność nazywamy jednostajnie zbieżnym w przedziale (a, b).

A więc na to, aby szereg nieskończony (2) o wyrazach zmiennych był jednostajnie zbieżny w przedziale (a, b) potrzeba i wystarcza, żeby do każdej liczby dodatniej ε można było dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, żeby dla każdej wartości na x w przedziale (a, b) zachodziła nierówność

$$| r_n(x) | < \varepsilon,$$

skoro $n \geq m$.

Udowodnijmy teraz twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Jeżeli wyrazy szeregu nieskończonego

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad (3)$$

są funkcjami zmiennej niezależnej x, ciągłemi w pewnym przedziale (a, b), a nadto szereg (3) jest jednostajnie zbieżnym w tym przedziale, wówczas suma tego szeregu będzie funkcją zmiennej x, ciągłą w przedziale (a, b).

Dowód. Przypuśćmy, że $s(x)$ jest sumą szeregu (3). Oczywista, dla każdej wartości na n, możemy napisać

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

Ponieważ według założenia szereg (3) jest jednostajnie zbieżny w przedziale (a, b), przeto do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę całkowitą m, iż dla każdej wartości na x w przedziale (a, b) zachodzić będzie nierówność

$$| r_n(x) | < \frac{\varepsilon}{3},$$

skoro $n \geq m$.

Ponieważ suma n funkcyj ciągłych jest również funkcją ciągłą, przeto do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę dodatnią δ, iż dla dowolnych wartości na x i x' przedziału (a, b) będzie zachodziła nierówność

$$| s_n(x) - s_n(x') | < \frac{\varepsilon}{3},$$

skoro $| x - x' | < \delta$.

A więc dla dowolnej wartości na $n \geq m$ będziemy mieli

$$| s(x) - s(x') | = [s_n(x) - s_n(x')] + [r_n(x) - r_n(x')] | <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

jeżeli x x' są to wartości na x w przedziale (a, b).

Stąd wnosimy, że funkcja $s(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale (a, b). A na tem właśnie polega twierdzenie, o którego dowód chodziło.

Przykłady 1. Rozważmy szereg nieskończony

$$\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Łatwo widzieć, że szereg ten jest jednostajnie zbieżny w dowolnym przedziale.

W samej rzeczy, wiadomo, że szereg

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

jest zbieżny. Wobec tego do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę całkowitą m, że będzie zachodziła nierówność

$$\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\cdots\right|<\varepsilon,$$

skoro $n \geq m$. Ponieważ dla każdej wartośai na x

$$\left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}+\frac{\sin(n+2)x}{(n+2)^2}+\cdots\right|<\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\right|,$$

przeto do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę m, iż dla wszystkich wartości na x będzie zachodziła nierówność

$$\left|\frac{\sin(n+1)x}{(n-1)^2}+\frac{\sin(n+2)x}{(n+2)^2}+\cdots\right|<\varepsilon,$$

skoro $n \geq m$. A zatem szereg (a) jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale.

2. Rozważmy szereg

$$(1-x)+(1-x)x+(1-x)x^2+\cdots+(1-x)x^n+\cdots \quad . \quad (a)$$

w przedziale (0, 1). Łatwo spostrzec, że szereg (a) jest zbieżny dla wszystkich wartości na x wewnątrz przedziału (0, 1), oraz dla wartości $x=0$ i $x=1$.

Reszta szeregu (a) będzie

$$r_n(x)=(1-x)x^n+(1-x)x^{n+1}+(1-x)x^{n+2}+\cdots=x^n$$

Oczywista, nierówność

$$|\,r_n(x)\,|=x^n<\varepsilon, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

pociąga nierówność

$$n>\left|\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}\right|,$$

gdzie ε jest dowolną liczbą dodatnią, naprzód daną.

Gdy x dąży do zera, wtedy $\left|\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}\right|$ dąży do nieskończoności. A zatem nie można wyznaczyć takiej skończonej liczby m, żeby nierówność (b) zachodziła dla wszystkich wartości na x w przedziale (0, 1), skoro $n \geq m$.

Stąd wynika, że szereg (a) nie jest jednostajnie zbieżny w tym przedziale.

§ 3. **Szeregi potęgowe. Twierdzenia Abel'a.** Rozważmy szereg nieskończony o wyrazach zmiennych

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

gdzie $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ są to spółczynniki stałe. Szeregi typu (5) nazywamy szeregami potęgowymi. Szeregi potęgowe odgrywają bardzo ważną rolę w Analizie Matematycznej.

Udowodnijmy kilka twierdzeń o szeregach potęgowych.

Twierdzenie I. Szereg potęgowy.

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich wartości na x, spełniających warunek $|\,x\,|<\alpha$, jeżeli granica ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\alpha$$

Dowód. Niechaj

$$A_0+A_1X+A_2X^2+\cdots+A_nX^n+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

oznacza szereg potęgowy, którego wyrazami, są wartości bezwzględne odpowiednich wyrazów szeregu (5)

$$A_n=|\,a_n\,|; \quad X=|\,x\,|\,.$$

Stosunek dwóch wyrazów sąsiednich szeregu (6) będzie

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{A_{n+1}}{A_n}\cdot X$$

Przypuśćmy, że

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{A_{n+1}}=\alpha$$

Wtedy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{X}{\alpha}$$

Stąd wnosimy, że szereg (6) jest zbieżny, gdy

$$X=|\,x\,|<\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

A zatem szereg (5) jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich wartości na x, spełniających warunek (7).

Dla wartości

$$X = |x| = \alpha$$

szereg (5) może być bezwzględnie zbieżnym, lub wprost zbieżnym, lub też rozbieżnym, gdyż granica stosunku dwóch sąsiednich wyrazów szeregu (6) w tym przypadku równa się jedności.

W tym przypadku, gdy $\alpha = \infty$, granica

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 0,$$

dla wszystkich wartości na x. A więc jeżeli

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \infty,$$

to szereg potęgowy (5) jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich wartości na x.

Jeżeli $\alpha = 0$, wówczas $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$.

Szereg (5) jest zatem rozbieżny dla wszystkich wartości na x, z wyjątkiem $x = 0$, gdyż przy $x = 0$ szereg sprowadza się do pierwszego wyrazu a_0.

Przykłady 1. Szereg potęgowy

$$1 + 1.x + 1.2x^2 + 1.2.3x^3 + \cdots$$

jest rozbieżny dla wszystkich wartości na x, gdyż

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

2. Szereg potęgowy

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich wartości na x, gdyż

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty$$

3. Szereg potęgowy

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

dla którego

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

jest zbieżny przy $x = 1$, a rozbieżny przy $x = -1$.

Udowodnijmy teraz trzy twierdzenia Abel'a o szeregach potęgowych.

Pierwsze twierdzenie Abel'a. Jeżeli szereg potęgowy

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

jest zbieżny dla wartości $x = x_0$, to szereg ten będzie bezwzględnie zbieżny dla wszystkich wartości na x, spełniających warunek

$$|x| < |x_0|$$

Dowód. Jeżeli szereg jest zbieżny przy $x = x_0$, to istnieje tak liczba stała P, iż dla każdej liczby n zachodzi nierówność

$$|a_n x_0^n| < P.$$

A zatem

$$|a_n x^n| = |a_n| \cdot |x_0| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < P \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

Stąd wnosimy, że szereg

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots$$

jest zbieżny, gdy

$$|x| < x_0$$

Oczywista, wtedy szereg (8) będzie bezwzględnie zbieżny. Dowiedliśmy więc pierwszego twierdzenia Abel'a.

Rozważmy szereg potęgowy o wyrach

$$A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \cdots + A_n X^n + \cdots, \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

gdzie spółczynniki A_0, A_1, $A_2 \ldots A_n \ldots$ są to liczby dodatnie.

Umówmy się nadawać zmiennej x tylko wartości dodatnie.

Podzielmy wszystkie liczby dodatnie na dwie klasy, zaliczając do klasy M wszystkie liczby X, dla których szereg (9) jest zbieżny, a do klasy N wszystkie liczby X, dla których szereg (9) jest rozbieżny.

Jasną jest rzeczą, że każda liczba dodatnia należy do klasy M albo do klasy N, a nadto każda liczba klasy N będzie większa od każdej liczby klasy M. Stąd wnosimy, że istnieje taka liczba dodatnia ρ, iż dla wszystkich liczb $X < \rho$ szereg (9) jest zbieżny, a dla wszystkich liczb $X > \rho$ szereg ten jest rozbieżny. Dla $X = \rho$ szereg (9) może być zbieżny lub też rozbieżny. Może się zdarzyć, że przy podziale wszystkich liczb dodatnich na dwie klasy M i N jedna z tych klas będzie pustą. Jeżeli klasa N będzie pustą, to szereg (9) jest zbieżny dla wszystkich wartości na x. Wówczas przyjmiemy $\rho = \infty$. Jeżeli klasa M będzie pustą, to szereg (9) jest rozbieżny dla wszystkich wartości na x (z wyjątkiem $x = 0$). Wówczas przyjmiemy $\rho = 0$.

Rozważmy teraz szereg potęgowy

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

o wyrazach dowolnych. Niechaj

$$A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \cdots + A_n X^n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

oznacza szereg, którego wyrazy są wartościami bezwzględnemi odpowiednich wyrazów szeregu (10). A więc $|a_i| = A_i$; $|x| = X$.

Niechaj ρ będzie liczbą dzielącą wszystkie wartości dodatnie na klasy M i N. Jasną jest rzeczą, że szereg (10) jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich wartości na x w przedziale $(-\rho, +\rho)$. Łatwo spostrzec, że dla wartości na x, spełniającej nierówność $|x| > \rho$, szereg (10) jest rozbieżny.

Przypuśćmy wbrew rzeczywistości, że szereg (10) jest zbieżny, przy $x = x_0$. Wówczas w myśl pierwszego twierdzenia Abel'a szereg (11) byłby zbieżny dla wszystkich wartości na X, mniejszych od $|x_0|$.

Jeżeli zaś $|x_0| > \rho$, to zawsze istnieje taka liczba dodatnia X, spełniająca nierówności

$$\rho > X > |x_0|,$$

dla której szereg (11) jest zbieżny. Jest to jednak rzeczą niemożliwą, gdyż ρ jest taką liczbą, iż dla wszystkich liczb większych, od ρ szereg (11) jest rozbieżny. Doszliśmy więc do sprzeczności, dowodzącej fałszywości przypuszczenia, że szereg (9) jest zbieżny dla wartości na x, większych od ρ co do wartości liczbowej. A zatem szereg (10) będzie rozbieżny dla wartości na x, nienależących do przedziału $(-\rho + \rho)$.

Z powyższego wnioskujemy, że dla każdego szeregu potęgowego istnieje liczba dodatnia ρ, posiadająca własności następujące:

1. Szereg (9) jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich wartości na x w przedziale $(-\rho, +\rho)$.

2. Szereg (9) jest rozbieżny dla wszystkich wartości na x, większych od ρ co do wartości bezwzględnej.

Dla $x = \rho$ lub $x = -\rho$ szereg może być bezwzględnie zbieżnym lub wprost rozbieżnym, lub nawet rozbieżnym.

Liczbę ρ nazywamy promieniem zbieżności szeregu (9). Promień zbieżności może przybierać wszelkie wartości dodatnie od zera do nieskończoności.

Przykłady 1. Szereg potęgowy

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

posiada promień zbieżności $\rho = 1$, gdyż granica stosunku dwóch sąsiednich wyrazów szeregu (a)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x.$$

Dla wartości zaś $x = 1$ i $x = -1$ szereg (a) jest rozbieżny.

2. Szereg potęgowy

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$

posiada promień zbieżności $\rho = 1$, gdyż

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n-1}{n} \cdot x \right) = x.$$

Dla wartości $x = 1$ szereg dany jest rozbieżny, a dla $x = -1$ zbieżny.

3. Szereg potęgowy

$$1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots$$

posiada promień zbieżności $\rho = 1$, gdyż

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \left[\left(\frac{n-1}{n} \right) x \right] = x$$

Szereg dany jest również zbieżny dla wartości $x = +1$ i $x = -1$.

Udowodnijmy teraz ważne twierdzenie o zbieżności szeregów potęgowych, podane przez Cauchy i Hadamard'a.

Twierdzenie Cauchy—Hadamard'a. 1. Jeżeli ciąg

$$|a_1|; \ |a_2|^{\frac{1}{2}}; \ |a_3|^{\frac{1}{3}} \cdots |a_n|^{\frac{1}{n}} \cdots \quad . \ . \ . \quad (12)$$

posiada największą liczbę skupienia ω, nie równą zeru (t. j. jest ograniczony), to szereg potęgowy

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad . \ . \ . \quad (13)$$

jest bezwzględnie zbieżny dla wartości na x, spełniających warunek $|x| < \frac{1}{\omega}$, a rozbieżny dla wartości na x, spełniających warunek $|x| > \frac{1}{\omega}$.

2. Jeżeli ciąg (12) posiada liczbę skupienia $\omega = 0$, to szereg (13) jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich wartości na x.

3. Jeżeli zaś ciąg (12) nie posiada liczby skupienia, czyli innemi słowy jest nieograniczony, to szereg (13) jest zbieżny tylko dla jednej jedynej wartości $x = 0$.

Dowód 1. Dajmy na to, że ciąg (12) jest ograniczony, a zatem posiada największą liczbę skupienia ω, różną od zera. Przypuśćmy, że zmienna x przybiera wartości, spełniające waru-

nek $|x| < \frac{1}{\omega}$. Jasną jest rzeczą, że można wyznaczyć taką liczbę dodatnią ε, iż

$$|x| < \frac{1}{\omega + 2\varepsilon}$$

Ponieważ, według założenia ω, jest największą liczbą skupienia ciągu (12) przeto „prawie wszystkie“ jego wyrazy $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ spełniają warunek $|a_n|^{\frac{1}{n}} < \omega + \varepsilon$. Przeto „prawie wszstkie“ wyrażenia $|a_n|^{\frac{1}{n}} \cdot |x|$ spełniają nierówność

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \cdot |x| < \frac{\omega + \varepsilon}{a + 2\varepsilon},$$

a zatem będzie

$$|a_n x_n| < \left(\frac{\omega + \varepsilon}{\omega + 2\varepsilon}\right)^n$$

Ponieważ $\frac{\omega + \varepsilon}{\omega + 2\varepsilon} < 1$, przeto szereg

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots$$

jest zbieżny dla $|x| < \frac{1}{\omega}$. A więc szereg (13) będzie bezwględnie zbieżny dla tych wartości na x.

Przypuśćmy teraz, że zmienna x przybiera wartości, spełniające warunek $|x| < \frac{1}{\omega}$, czyli $\left|\frac{1}{x}\right| < \omega$. Ponieważ „prawie wszystkie“ wyrazy ciągu (12) spełniają warunek

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} > \left|\frac{1}{x}\right|, \text{ czyli } |a_n x^n| > 1$$

przeto warunek

$$\lim_{n \to \infty} (a^n x^n) = 0$$

niema miejsca; a zatem szereg (13) jest rozbieżny dla wartości

$$|x| > \frac{1}{\omega}.$$

2. Przypuśćmy, że ciąg (11) posiada największą liczbę skupienia $\omega = 0$. Wówczas, jak wiadomo $\omega = 0$ będzie jedną jedyną liczbą skupienia ciągu (12). Stąd wnosimy, że

$$\lim_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Ponieważ dla każdej wartości na x

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0,$$

przeto w myśl znanej cechy zbieżności Cauchy'ego szereg

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots$$

będzie zbieżnym. A więc szereg (13) będzie bezwzględnie zbieżny dla wszystkich wartości na x.

3. Dajmy na to, że ciąg (12) nie posiada żadnej liczby skupienia. Łatwo dowieść, że w tym przypadku szereg (13) jest zbieżny tylko dla $x = 0$.

W samej rzeczy, przypuśćmy wbrew rzeczywistości, że szereg (13) jest zbieżny dla jakiejkolwiek wartości $x = x_0 \geq 0$. Wtedy powinno być

$$\lim_{n \to \infty} (a_n x^n) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Ponieważ według założenia ciąg (12) nie posiada największej liczby skupienia, przeto „prawie wszystkie“ wyrazy tego ciągu spełniają warunek

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{|x_0|}$$

Stąd dla „prawie wszystkich“ wartości na n

$$|a_n x_0|^n > 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Zestawiając (13) i (14) wnosimy, że doszliśmy do sprzeczności, dowodzącej fałszywości naszego przypuszczenia, że szereg (12) jest zbieżny dla $x = x_0 \geq 0$. A więc szereg (13) będzie zbieżny tylko dla $x = 0$.

Dowiedliśmy zatem twierdzenia Cauchy-Hadamarda w zupełności.

Udowodnijmy teraz drugie twierdzenie Abel'a:

Drugie twierdzenie Abel'a. Szereg potęgowy

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad . \quad . \quad (16)$$

zbieżny w przedziale $(-\alpha, +\alpha)$ jest szeregiem jednostajnie zbieżnym w przedziale $(-\beta, +\beta)$, gdzie β jest dowolną liczbą dodatnią mniejszą od $|\alpha|$; a zatem szereg (16) przedstawia funkcję $f(x)$, ciągłą w przedziale $(-\alpha, +\alpha)$.

Dowód. Niechaj x_0 oznacza dowolną liczbę, należącą do przedziału $(-\alpha, +\alpha)$. Wtedy, w myśl pierwszego twierdzenia Abel'a, szereg (16) jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich wartości na x, których wartość bezwzględna jest mniejsza od $|x_0|$. Obierzmy taką wartość na $x = X$, która spełnia nierówności

$$\beta < |X| < |x_0|$$

Ponieważ szereg (15) jest bezwzględnie zbieżny dla $x = x_0$, przeto do każdej dodatniej liczby ε można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, żeby zachodziła nierówność

$$|a_n x^n| + |a_{n+1} x^{n+1}| + \cdots < \varepsilon,$$

skoro $n \geq m$.

Niechaj x oznacza jakąkolwiek wartość na x w przedziale $(-\beta, +\beta)$. Oczywista. $|x| < |X|$. Przeto do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m żeby zachodziła nierówność

$$|a_n x^n| + |a_{n+1}x^{n+1}| + \cdots < \varepsilon$$

skoro $n \geq m$.

Wtedy

$$|r_n(x)| = |a_n x^n| + |a_{n+1}x^{n+1}| + \cdots \leq |a_n x^n| + |a_{n+1}x^{n+1}| + \cdots < \varepsilon$$

dla każdej wartości na x w przedziale $(-\beta, +\beta)$.

Stąd wnosimy, że szereg (16) jest jednostajnie zbieżny w przedziale $(-\beta, +\beta)$; a na tem właśnie polega drugie twierdzenie Abel'a, o którego dowód nam chodziło.

Trzecie twierdzenie Abel'a. Jeżeli szereg potęgowy

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

jest zbieżny dla $x = \beta$, to będzie on jednostajnie zbieżny w każdym przedziale (α, β), skoro

$$|\alpha| \leq |\beta|,$$

czyli innemi słowy szereg (16) w każdym z tych przedziałów będzie przedstawiał ciągłą funkcję zmiennej x.

Dowód. Aby dowieść twierdzenia, wystarcza rozważyć tylko przedział $(0, \beta)$, jeżeli $\beta < 0$, względnie przedział $(\beta, 0)$, jeżeli $\beta < 0$, albowiem dla przedziałów $(\alpha, 0)$, względnie $(0, \alpha)$ pod warunkiem, że $|\alpha| < |\beta|$, szereg (16) będzie jednostajnie zbieżny w myśl drugiego twierdzenia Abel'a.

Rozważmy ciąg

$$\sigma_1 = a_{n+1}\beta^{n+1}$$
$$\sigma_2 = a_{n+1}\beta^{n+1} + a_{n+2}\beta^{n+2}$$
$$\sigma_3 = a_{n+1}\beta^{n+1} + a_{n+2}\beta^{n+2} + a_{n+3}\beta^{n+3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ponieważ według założenia szereg (16) jest zbieżny dla $x = \beta$, przeto dla każdej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę całkowitą dodatnią m, żeby zachodziła nierówność

$$|\sigma_n| < \varepsilon,$$

skoro $n \geq m$

Możemy napisać

$$a_{n+1}\beta^{n+1} + a_{n+2}\beta^{n+2} + \cdots + a_{n+p}\beta^{n+p} = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_3 - \sigma_2) + \cdots + (\sigma_p - \sigma_{p-1})$$

Wyobraźmy sobie grupę p liczb dodatnich

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots \omega_p,$$

spełniających nierówności

$$1 > \omega_1 > \omega_2 > \omega_3 > \cdots > \omega_{p-1} > \omega_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Będziemy mieli

$$a_{n+1}\beta^{n+1}\omega_1 + a_{n+2}\beta^{n+2}\omega_2 + \cdots + a_{n+p}\beta^{n+p}\omega_p = \sigma_1\omega_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)\omega_2 + \cdots + (\sigma_p - \sigma_{p-1})\omega_p = \sigma_1(\omega_1 - \omega_2) + \sigma_2(\omega_2 - \omega_3) + \cdots + \sigma_p(\omega_{p-1} - \omega_p) + \sigma_p\omega_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Uwzględniając nierówności (17), będziemy mieli dla każdej liczby dodatniej ε

$$|a_{n+1}\beta^{n+1}\omega_1 + a_{n+2}\beta^{n+2}\omega_2 + \cdots + a_{n+p}\beta^{n+p}\omega_p| < \varepsilon \cdot \omega_1 < \varepsilon,$$

skoro $n \geq m$.

Niechaj $x = x_0$ oznacza jakąkolwiek wartość na x, spełniającą warunek $|x_0| \leq |\beta|$.

Możemy napisać

$$a_{n+k}x^{n+k} = a_{n+k}\beta^{n+k} \cdot \left(\frac{x_0}{\beta}\right)^{n+k}, \text{ gdzie } k = 1, 2, 3 \ldots p$$

Ponieważ wyrazy ciągu

$$\left(\frac{x_0}{\beta}\right)^{n+1}, \left(\frac{x_0}{\beta}\right)^{n+2} \cdots \left(\frac{x_0}{\beta}\right)^{n+p}$$

są liczbami o wartościach bezwzględnych, nie większych od jedności, przeto do każdej dodatniej liczby ε można dobrac taką liczbę całkowitą dodatnią m, żeby zachodziła nierówność

$$|a_{n+1}x_0^{n+1} + a_{n+2}x_0^{n+2} + \cdots + a_{n+p}x_0^{n+p}| < \varepsilon,$$

skoro $n \geq m$ dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej p i dla każdej wartości x o wartości liczbowej, mniejszej od β.

Stąd wnosimy, że szereg (16) jest jednostajnie zbieżny w przedziale $(0, \beta)$, względnie $(\beta, 0)$, (nie wyłączając i wartości $x = \beta$).

A zatem trzecie twierdzenie Abel'a zostało udowodnione w zupełności.

Z udowodnionego twierdzenia wypływa bezpośrednio ważny wniosek następujący:

Wniosek. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest sumą pewnego szeregu potęgowego

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

zbieżnego w przedziale (α, β), nie wyłączając i wartości granicznej β, to granicą tej funkcji przy $x = \beta$ jest

$$f(\beta) = a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \cdots + a_n\beta^n + \cdots$$

Przykład. Szereg

$$f(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

jest zbieżny w przedziale $(-1, +1)$ oraz dla własności granicznej $x=1$. Przeto

$$\lim_{x=1} f(x) = f(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

Uwaga. Godnem jest uwagi, że wypowiedziany wniosek niema miejsca w tym przypadku, gdy przy $x=\beta$ szereg dany nie jest zbieżny, nawet gdyby funkcja $f(x)$ była ciągłą przy $x=\beta$.

Jako przykład można przytoczyć szereg

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Szereg ten jest zbieżny dla wartości na x, jeżeli $|x| < 1$. Wtedy

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

Przy $x=-1$ funkcja $f(x)$ jest ciągłą. Mimo to,

$f(-1) = -\frac{1}{2}$ nie równa się sumie szeregu nieokreślonego

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

§ **2. Różniczkowanie szeregów potęgowych** Niechaj będzie dany szereg potęgowy

$$f(x) = a_0 + a_1 + x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad . \quad . \quad (19)$$

o promieniu zbieżności ρ, t. j. jednostajnie zbieżny w przedziale $(-\rho, \rho)$. Rozważmy szereg potęgowy

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots \quad . \quad . \quad (20)$$

którego wyrazy równe są pochodnym odpowiednich wyrazów szeregu (19). Udowodnijmy, że szereg (20) posiada ten sam promień zbieżności, co i szereg (19), to jest przedstawia w przedziale $(-\rho, \rho)$ pewną fnnkcję $\varphi(x)$.

Aby tego dowieść, wystarcza udowodnić że szereg

$$A_1 + 2A_2 X + 3A_3 X^2 + \cdots + nA_n X^{n-1} + \cdots \quad . \quad . \quad (21)$$

gdzie $A_1, A_2 \ldots A_n$ są to wartości bezwzględne odpowiednich spółczynników $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ szeregu (19) jest zbieżny, jeżeli $X<\rho$, a rozbieżny jeżeli $X>\rho$.

Dajmy na to, że $X<\rho$. Niechaj α oznacza pewną liczbę, spełniającą nierówności

$$X < \alpha < \rho$$

Rozważmy szereg potęgowy

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha}\cdot\frac{X}{\alpha} + \frac{3}{\alpha}\left(\frac{X}{\alpha}\right)^2 + \cdots + \frac{n}{\alpha}\left(\frac{X}{\alpha}\right)^{n-1} + \cdots \quad . \quad . \quad (22)$$

Jasną jest rzeczą że szereg (22) jest zbieżny, albowiem granica stosunku dwóch sąsiednich wyrazów tego szeregu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{X}{\alpha} < 1.$$

Pomnóżmy wyrazy szeregu (22) odpowiednio przez wyrazy ciągu

$$A_1\alpha;\ A_2\alpha^2;\ A_3\alpha^3 \ldots A_n\alpha^n \ldots$$

Ponieważ ten ciąg jest ograniczony, przeto szereg, otrzymany po mnożeniu będzie zbieżny

A zatem szereg

$$A_1 + 2A_2 X + 3A_3 X^2 + \cdots + nA_n X^{n-1} + \cdots$$

będzie zbieżny, dla $X<\rho$.

Przypuśćmy teraz, że $X>\rho$. Łatwo okazać że szereg (20) będzie rozbieżny. W samej rzeczy gdyby szereg ten był zbieżny, to szereg

$$A_1 X + 2A_2 X^2 + \cdots + n A_n X^n + \cdots$$

czyli też szereg dany (19) byłby również zbieżny. Jest to jednak rzeczą niemożliwą, gdyż X nie należy do przedziału $(-\rho, \rho)$ Stąd wnosrmy, że szereg (19) jest rozbieżny dla $X>\rho$.

A więc udowodniliśmy, że szereg (21) jest zbieżny dla $X<\rho$, a rozbieżny dla $X>\rho$.

Stąd wnosimy, że szereg (20) jest jednostajnie zbieżny w przedziale $(-\rho, \rho)$, czyli innemi słowy posiada ten sam promień zbieżności ρ, co i szereg (19).

Wobec tego, szereg (20) przedstawia w przedziale $(-\rho, \rho)$ pewną funkcję

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

Udowodnijmy teraz, że

$$\varphi(x) = f'(x)$$

Niechaj x będzie wartością zmiennej niezależnej, należącą do przedziału $(-\rho, +\rho)$, gdzie ρ jest to promień zbieżności szeregu potęgowego

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Przypuśćmy, że $|x| < X$, gdzie $X<\rho$. Oznaczmy przez h pewną liczbę spełniającą nierówność

$$h < X - |x|$$

Wówczas będzie

$$|x| + h < X,$$

a zatem

$$|x + h| < X < \rho.$$

Możemy napisać

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=a_1\frac{(x+h)-x}{h}+a_2\frac{(x+h)^2-x^2}{h}+$$
$$+a_3\frac{(x+h)^3-x^3}{h}+\cdots$$

Odejmując funkcję

$$\varphi(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots,$$

otrzymamy

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\varphi(x)=a_2\left[\frac{(x+h)^2-x^2}{h}-2x\right]+$$
$$+a_2\left[\frac{(x+h)^3-x^3}{h}-3x^2\right]$$

W myśl twierdzenia Lagrange'a o średniej wartości funkcji mamy

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=n\xi_n^{n-1},$$

gdzie ξ jest to liczba, zwarta między x i $x+h$.

Przeto

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}=n(\xi_n^{n-1}-x^{n-1})$$

W myśl tegoż twierdzenia Lagrange'a

$$\xi_n^{n-1}-x^{n-1}=(\xi_n-x)(n-1)\eta_n^{n-2},$$

gdzie n jest liczbą zawartą między x i ξ_n a zatem między x i $x+h$.

Stąd

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}=n(n-1)(\xi_n-x)\eta_n^{n-2}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$|\eta_n|<X, \quad \text{a} \quad |\xi_n-x|<|h|$$

możemy napisać

$$\left|\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}\right|<n(n-1)|x_0|^{n-2}\cdot|h|$$

Przeto

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\varphi(x)<h\cdot[2.1A_2+3.2A_3X+\cdots]$$

W granicy przy $h=0$ będziemy mieli

$$\lim_{h=0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\varphi(x)\right]=0.$$

A zatem

$$\lim_{h=0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=f'(x)=\varphi(x)$$

W sposób zupełnie analogiczny do poprzedniego można udowodnić, że jeżeli szereg

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+ax^n+\cdots$$

jest zbieżny o promieniu zbieżności ρ, wówczas szeregi

$$\varphi(x)=2.1.a_2+3.2.a_3x+4.3.a_4x^2+\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi(x)=n(n-1)\ldots2.1.a_n+(n+1).n\ldots2a_{n+1}x+$$
$$(n+2)(n+1)\ldots3a^{n+2}x^2+\cdots$$

są zbieżne o promieniu zbieżności ρ, a nadto

$$\varphi(x)=f''(x)$$
$$\cdots\cdots$$
$$\psi(x)=f^{(n)}(x)$$

Niechaj będzie dany szereg potęgowy

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots \quad (I)$$

zbieżny w pewnym przedziale $(-\rho, +\rho)$. Pochodne funkcji $f(x)$ będą

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$$
$$f''(x)=1.2.a_2+3.2.a_3x+\cdots$$
$$f'''(x)=3.2.1a_3+4.3.2.1a_4x+\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1.a_n+\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Załóżmy $x=0$. Wówczas będziemy mieli

$$f(0)=a_0;\quad f'(0)=a_1;\quad f''(0)=1.2.a_2;\quad f(0)=1.2.3.a_3\ldots$$
$$f^{(n)}(0)=n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1.a_n \text{ i t. d.}$$

Przeto

$$a_0=f(0);\quad a_1=\frac{f'(0)}{1};\quad a_2=\frac{f''(0)}{1.2};\quad a_3=\frac{f'''(0)}{1.2.3}\cdots$$
$$\ldots a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n} \text{ i t. d.}$$

Podstawiając otrzymane wzory na spółczynnik $a_0, a_1, a_2\ldots a_n$ w szereg (I), nadajemy mu postać następującą:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{1.2}x^2+\frac{f'''(0)}{1.2.3}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}x^n+\cdots \quad (I')$$

A więc każdy szereg potęgowy zbieżny w pewnym przedziale można przedstawić w postaci (23). Szereg (23) nazywa się szeregiem Maclorin'a. Przekonamy się niebawem, że każdą funkcję, spełniającą pewne warunki, można przedstawić w postaci szeregu Maclorin'a.

§ 5. **Wzór Taylor'a dla funkcji jednej zmiennej.** Niechaj będzie dana funkcja $f(x)$ jednej zmiennej niezależnej x ciągłą w pewnym przedziale a posiadająca określone w zupełności pochodne dla $x=a$, które są funkcjami skończonemi i ciągłemi w danym przedziale.

Rozwińmy tę funkcję w szereg nieskończony podług rosnących potęg dwumianu $x-a$.

Przypuśćmy najpierw, że rozwinięcie to jest możliwem, i obliczmy współczynniki przy różnych potęgach dwumianu $x-a$.

A więc, niech będzie

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+A_3(x-a)^3+\cdots$$
$$\cdots+A_n(x-a)^n+\cdots \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Biorąc kolejne pochodne tej funkcji względem x, otrzymamy

$$f'(x)=A_1+2A_2(x-a)+3A_3(x-a)^2+4A_4(x-a)^3+\cdots+nA_n(x-a)^{n-1}+\cdots$$
$$f''(x)=2A_2+2.3.A_3(x-a)+3.4A_4(x-a)^2+\cdots+(n-1)nA_n(x-a)^{n-2}+\cdots$$
$$f'''(x)=1.2.3.A_3+1.2.3.4.A_4(x-a)+\cdots+(n-2)(n-1)nA_n(x-a)^{n-3}+\cdots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x)=1.2.3\ldots(n-1)n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Zakładając w tych wzorach $x=a$, dostaniemy wyrażenia na spółczynniki rozwinięcia

$$A_0=f(a);\quad A_1=\frac{f'(a)}{1};\quad A_2=\frac{f''(a)}{1.2};\quad A_3=\frac{f'''(a)}{1.2.3};\quad A_4=\frac{f^{(IV)}(a)}{1.2.3.4}\cdots$$
$$\cdots A_n=\frac{f^{(n)}(a)}{1.2.3\ldots(n-1).n} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Podstawiając otrzymane wyrażenia do wzoru (24), dostaniemy

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{1.2.3}f'''(a)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{(x-a)^n}{1.2.3}f^{(n)}(a)+\cdots \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

Wzór ostatni nazywa się wzorem Taylor'a.

W tym przypadku, gdy funkcja $f(x)$ jest wielomianem algebraicznym stopnia n, liczba wyrazów w prawej części wzoru (26) będzie skończoną, gdyż wszystkie pochodne rzędów wyższych od

n są zerami. Stąd wnosimy, że wielomian algebraiczny jest funkcją rozwijalną na szereg Taylor'a.

Przykład. Mamy daną funkcję

$$f(x)=x^5-2x^3+3x-1.$$

Rozwińmy tę funkcję w szereg Taylora według potęg dwumianu $x-2$. Posługując się wzorami (25), otrzymamy

$$A_0=f(2)=21;\quad A_1=f'(2)=59;\quad A_2=\frac{f''(2)}{1.2}=68;$$
$$A_3=\frac{f'''(2)}{1.2.3}=38;\quad A_4=\frac{f^{(IV)}(2)}{1.2.3.4}=10;\quad A_5=\frac{f^{(V)}(2)}{1.2.3.4.5}=1;$$
$$A_6=A_7=\cdots=0.$$

Przeto będziemy mieli

$$f(x)=x^5-2x^3+3x-1=21+59(x-2)+68(x-2)^2+$$
$$+38(x-2)^3+10(x-2)^4+(x-2)^5.$$

Rozważmy teraz przypadek ogólny, gdy $f(x)$ jest jakąkolwiek junkcją zmiennej x, spełniającą warunki następujące:

1. Funkcja $f(x)$ jest ciągłą w pewnym przedziale (α, β).
2. Funkcja $f(x)$ posiada pochodne skończone i ciągłe w przedziale (α, β).

Umówmy się uważać sumę

$$f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

jako wartość przybliżoną funkcji $f(x)$ w przedziale (α, β).

Oznaczając przez R_n różnicę pomiędzy istotną jej wartością a przybliżoną, możemy napisać

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+R_n$$

Załóżmy dalej

$$R_n=(x-a)^p\,Q,$$

gdzie p jest dowolną liczbą całkowitą spełniającą nierówności

$$n\geq p\geq 1.$$

Będziemy mieli

$$f(x)-f(a)-\frac{x-a}{1}f'(a)-\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)-\cdots-\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)-$$
$$-(x-a)^p\,Q.$$

Rozważmy następnie funkcję

$$\varphi(z)=f(x)-f(z)-\frac{x-z}{1}f'(z)-\frac{(x-z)^2}{1.2}f''(z)-\cdots$$
$$\cdots-\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(z)-(x-z)^p\,Q\ldots \quad \ldots \quad (27)$$

Ponieważ funkcja ta znika na końcach przedziału (a, x), przeto, w myśl znanego twierdzenia Rolle'go, istnieć będzie taka wartość $z=\xi$ w przedziale (a, x), dla której pierwsza pochodna funkcji φ będzie zerem. A więc

$$\varphi'(\xi)=0,$$

gdzie

$$\xi=a+\vartheta(x-a) \qquad 1>\vartheta>0$$

Różniczkując funkcję (27) względem z, dostaniemy po uproszczeniu

$$\varphi'(z)=-\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(z)+p(x-z)^{p-1}Q$$

Przeto

$$\varphi'(\xi)=-\frac{(x-\xi)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(\xi)+p(x-\xi)^{p-1}Q$$

Stąd

$$Q=\frac{(x-\xi)^{n-p}}{1.2.3\ldots(n-1)p}f^{(n)}(\xi)$$

Ponieważ

$$x-\xi=x-[a+\vartheta(x-a)]=(x-a)(1-\vartheta),$$

przeto będziemy mieli

$$Q=\frac{(x-a)^{n-p}(1-\vartheta)^{n-p}}{1.2.3\ldots(n-1)p}\cdot f^{(n)}[a+\vartheta(x-a)],$$

a zatem

$$R_n=\frac{(x-a)^n(1-\vartheta)^{n-p}}{1.2.3\ldots(n-1)p}f^{(n)}[a+\vartheta(x-a)] \quad . \quad . \quad (28)$$

Wyrażenie R_n nazywamy wyrazem dopełniającym szeregu (26) lub też wprost resztą szeregu (26).

Wzór zaś

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{1.2.3}f'''(a)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+\frac{(x-a)^n(1-\vartheta)^{n-p}}{1.2.3\ldots(n-1)p}f^{(n)}[a+\vartheta(x-a)]$$

stanowi rozwinięcie funkcji $f(x)$ na szereg Taylora z wyrazem dopełniającym.

Wyrażenie (28) na resztę podano zostało przez niemieckiego matematyka Schlömilch'a.

Zakładając we wzorze (28) $p=n$, otrzymamy

$$R_n=\frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}[a+\vartheta(x-a)]$$

Wyrażenie to podane zostało przez Lagrange'a.

Zakładając nareszcie we wrorze (28) $p=1$, otrzymamy

$$R_n=\frac{(x-a)^n(1-\vartheta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}[a+\vartheta(x-a)]$$

Wzór ten podany został przez Cauchy'ego.

W tym przypadku, gdy n rośnie nieograniczenie, wzór Taylora stanowi szereg nieskończony. Wiadomo, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby szereg nieskończony był zbieżnym w przedziale (α, β) jest

$$\lim_{n\to\infty} R_n=0,$$

dla każdej wartości na x w przedziale (α, β).

Tylko w tym przypadku szereg (26) będzie przedstawiał funkcję $f(x)$ zmiennej x.

Załóżmy we wzorze (26)

$$x=a+h$$

Zamieniając w rezultacie a przez x, otrzymamy wzór Taylora w postaci następującej:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+R_n, \quad (29)$$

gdzie

$$R_n=\frac{h^n(1-\vartheta)^{n-p}}{1.2.3\ldots(n-1)p}f^{(n)}(x+\vartheta h) \quad \text{(Schlömilch)},$$

lub

$$R_n=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x+\vartheta h) \quad \text{(Lagrange)},$$

lub też

$$R_n=\frac{h^n(1-\vartheta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+\vartheta h) \quad \text{Cauchy)}.$$

Wzór (29) można napisać jeszcze w postaci

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)=\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+R_n$$

Wzór ten stanowi wyrażenie na przyrost funkcji $f(x)$, rozwinięty według rosnących potęg h, przyrostu zmiennej niezależnej x.

Oznaczając

$$h=\Delta x=dx,$$

będziemy mieli wzór

$$\Delta f(x)=f'(x)dx+\frac{1}{1.2}f''(x)dx^2+\frac{1}{1.2.3}f'''(x)dx^3+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}+R_n,$$

czyli

$$\Delta f(x) = dx + \frac{1}{1.2} d^2x + \frac{1}{1.2.3} d^3x + \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} d^{n-1}x + R_n$$

Wzór ten stanowi rozwinięcie przyrostu funkcji podług różniczek tej funkcji rosnących rzędów.

Załóżmy teraz we wzorze (26)

$$a = 0.$$

Wówczas wzór ten przybiera postać

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0) + R_n, \quad (30)$$

gdzie reszta R_n może przybierać jedną z trzech postaci, a mianowicie:

$$R_n = \frac{x^n (1-\theta)^{n-p}}{1.2.3\ldots(n-1)p} f^{(n)}(\theta x) \quad \text{(Schlömilch);}$$

$$R_n = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\theta x) \quad \text{(Lagrange);}$$

$$R_n = \frac{x^n (1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n)}(\theta x) \quad \text{(Cacuchy).}$$

Wyrażenie (30) nazywa się szeregiem Maclorina'a.

Wzór ten stanowi rozwinięcie funkcji $f(x)$ na szereg potęgowy. W poprzednim artykule udowodniliśmy, że każdy szereg potęgowy zbieżny w pewnym przedziale, a zatem wyznaczający w tym przedziale pewną funkcję $f(x)$, daje się przedstawić w postaci szeregu Maclorina.

Teraz widzimy, że każda funkcja, spełniająca pewne warunki, daje się rozwinąć w szereg Maclorin'a.

§ 6. Wzory Taylora i Maclorina dla funkcji wielu zmiennych.

Niechaj będzie dana funkcja

$$U = f(x, y, z \ldots w),$$

m zmiennych niezależnych $x, y, z \ldots w$.

Nadajmy tym zmiennym odpowiednio przyrosty $h, k, l \ldots q$ i rozwińmy wyrażenie

$$f(x+h, \; y+k, \; z+l \ldots w+q)$$

w szereg według rosnących potęg przyrostków $h, q, l \ldots q$.

Załóżmy

$$x + ht = \xi; \quad y + kt = \eta; \quad z + lt = \zeta \ldots w + qt = \rho,$$

gdzie t jest pewną liczbą zmienną.

Oznaczmy dalej

$$U_1 = f(\xi, \eta, \zeta \ldots \rho) = F(t)$$

i zastosujmy do funkcji $F(t)$ wzór Maclorin'a.

Będziemy więc mieli

$$F(t) = F(0) + \frac{t}{1} F'(0) + \frac{t^2}{1.2} F''(0) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{t^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(0) + R_n, \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

gdzie

$$R_n = \frac{t^n}{1.2.3\ldots n} F^{(n)}(\theta) \qquad (1 > \theta > 0).$$

Obliczmy teraz wartości pochodnych

$$F(0); \quad F'(0); \quad F''(0) \ldots F^{(n-1)}(0).$$

Będziemy mieli

$$F(0) = f(x, y, z \ldots w) = U.$$

Biorąc pod uwagę, że $\xi, \eta, \zeta \ldots \rho$ są funkcjami linjowemi zmiennej t, możemy napisać

$$d^k F(t) = \left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial U_1}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial U_1}{\partial \zeta} d\zeta + \cdots + \frac{\partial U_1}{\partial \rho} \partial\rho \right)$$

$(k = 1, 2, 3 \ldots n)$

Z drugiej zaś strony mamy

$$d^k F(t) = F^{(k)}(t) dt^k; \quad d\xi = h dt; \quad d\eta = k dt; \quad d\zeta = l dt \ldots d\rho = q dt$$

Przeto

$$F^{(k)}(t) = \left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} h + \frac{\partial U_1}{\partial \eta} k + \frac{\partial U_1}{\partial \zeta} l + \cdots + \frac{\partial U_1}{\partial \rho} q \right) \quad . \quad (32)$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_1}{\partial \xi} &= \frac{\partial U_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \zeta} = \frac{\partial U_1}{\partial x} \\
\frac{\partial U_1}{\partial \eta} &= \frac{\partial U_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial U_1}{\partial y} \\
\frac{\partial U_1}{\partial \zeta} &= \frac{\partial U_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\partial U_1}{\partial z} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (33) \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial U_1}{\partial \rho} &= \frac{\partial U_1}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} = \frac{\partial U_1}{\partial w}
\end{aligned}$$

podstawiamy wzory (33) do wyrażenia (32). Otrzymamy wtedy

$$F^{(k)}(t) = \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} h + \frac{\partial U_1}{\partial y} k + \frac{\partial U_1}{\partial z} l + \cdots + \frac{\partial U_1}{\partial w} q \right)$$

Ponieważ dla $t = 0$

$$U_1 = F(0) = U,$$

przeto

$$F^{(k)}(0)=\left(\frac{\partial U}{\partial x}h+\frac{\partial U}{\partial y}k+\frac{\partial U}{\partial z}l+\cdots+\frac{\partial U}{\partial w}q\right)$$

Podstawiając otrzymane wyrażenie do wzoru (31), znajdujemy wzór

$$U_1=U+\frac{t}{1}\left(\frac{\partial U}{\partial x}h+\frac{\partial U}{\partial y}k+\frac{\partial U}{\partial z}l+\cdots+\frac{\partial U}{\partial w}q\right)^{(1)}+$$
$$+\frac{t^2}{1.2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}h+\frac{\partial U}{\partial y}k+\frac{\partial U}{\partial z}l+\cdots+\frac{\partial U}{\partial w}q\right)^{(2)}+$$
$$+\frac{t^3}{1.2.3}\left(\frac{\partial U}{\partial x}h+\frac{\partial U}{\partial y}k+\frac{\partial U}{\partial z}l+\cdots+\frac{\partial U}{\partial w}q\right)^{(3)}+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{t^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\left(\frac{\partial U}{\partial x}h+\frac{\partial U}{\partial y}k+\frac{\partial U}{\partial z}l+\cdots+\frac{\partial U}{\partial w}q\right)^{(n-1)}+R_n, \quad (34)$$

gdzie

$$R_n=\frac{t^n}{1.2.3\ldots n}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}h+\frac{\partial U}{\partial y}k+\frac{\partial U}{\partial z}l+\cdots+\frac{\partial U}{\partial w}q\right)^{(n)}\right]$$
$$x+\vartheta ht,\quad y+\vartheta kt\ldots\quad w+\vartheta qt$$
$$0<\vartheta<1.$$

Zakładając we wzorze (34) $t=1$, dostaniemy

$$f(x+h,\ y+k,\ z+l\ldots w+q)=f(x,\ y,\ z\ldots w)+$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l+\cdots+\frac{\partial f}{\partial w}q\right)^{(1)}+$$
$$+\frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l+\cdots+\frac{\partial f}{\partial w}q\right)^{(2)}+\quad\ldots\quad(35)$$
$$+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l+\cdots+\frac{\partial f}{\partial w}q\right)^{(3)}+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l+\cdots+\frac{\partial f}{\partial w}q\right)^{(n-1)}+R_n,$$

gdzie

$$R_n=\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l+\cdots+\frac{\partial f}{\partial w}q\right)^{(n)}$$
$$x+\vartheta h,\quad y+\vartheta k\ldots\quad w+\vartheta q$$

Jest to właśnie wzór Taylor'a dla funkcji wielu zmiennych niezależnych.

Dla funkcji $u=f(x,y)$ dwóch zmiennych niezależnych x i y wzór Taylor'a przybiera postać

$$f(x+h,\ y+k)=f(x,y)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}h.k+\right.$$
$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\right)+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}h^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}h^2k+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}h.k^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}k^3\right)+\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}h^{n-1}+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2}\partial y}h^{n-2}k+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-1)\ (n-2)}{1.2}\cdot\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-3}\partial y^2}h^{n-3}k^2+\cdots+\frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}k^{n-1}\right)+R_n,$$

gdzie

$$R_n=\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left[\frac{\partial^n f}{\partial x^n}h^n+\frac{n}{1}\cdot\frac{\partial^n f^{(n-1)}}{\partial x^{n-1}\partial y}h^{n-1}k+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}h^{n-2}k+\cdots+\frac{\partial^n f}{\partial y^n}k^n\right]$$
$$x+\vartheta h$$
$$y+\vartheta k$$

Zakładamy we wzorze Taylor'a (35)

$$x=y=z=\cdots=w=0$$

i zastępujemy $h,\ k,\ l\cdots q$ odpowiednio przez $x,\ y,\ z\cdots w$

Otrzymamy wtedy wzór

$$f(x,y,z\ldots w)=f(0,0,0\ldots 0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{\partial f}{\partial z}z+\cdots+\frac{\partial f}{\partial w}w\right)_0^{(1)}+$$
$$+\frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{\partial f}{\partial z}z+\cdots+\frac{\partial f}{\partial w}w\right)^{(2)}+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{\partial f}{\partial z}z+\cdots+\frac{\partial f}{\partial w}w\right)^{(3)}+\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{\partial f}{\partial z}z+\cdots+\frac{\partial f}{\partial w}w\right)_0^{(n-1)}+R_n,$$

gdzie znaczek 0 przy nawiasach wskazuje, że w odpowiedniem wyrażeniu trzeba założyć $x=y=z\ldots=w=0$

Reszta

$$R_n = \frac{1}{1.2.3...(n-1)n}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{\partial f}{\partial z}z+\cdots+\frac{\partial f}{\partial w}w\right)^{(n)}$$

$$\theta x,\ \theta y \ldots\ \theta w$$

Jest to właśnie wzór Maclorin'a dla funkcji wielu zmiennych niezależnych.

Dla funkcji $u=f(x, y)$ dwóch zmiennych niezależnych x i y wzór Maclorin'a przybiera postać

$$f(x, y)=f(0, 0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y\right)_0+\frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}xy+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y^2\right)_0+\cdots+\frac{1}{1.2.3...(n-1)}\left[\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-1}}x^{n-1}+\frac{n-1}{1}\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-2}\partial y}x^{n-2}y+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{\partial^{n-1}f}{\partial y^{n-1}}y^{n-1}\right]_0+R_n,$$

gdzie reszta

$$R_n=\frac{1}{1.2.3...n}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y\right)^{(n)}$$

$$\theta x,\ \theta y$$

Posługując się wzorem Taylor'a (35), możemy łatwo wyprowadzić znany wzór Euler'a dla funkcyj jednorodnych

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}x+\frac{\partial U}{\partial y}y+\cdots+\frac{\partial U}{\partial w}w\right)^{(n)}=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)U,$$

gdzie m jest to stopień jednorodności funkcji U.

W samej rzeczy, jeżeli $U=f(x, y, z\ldots w)$ jest funkcją jednorodną stopnia m, wówczas zachodzi wzór zasadniczy

$$f(tx,\ ty,\ tz\ldots tw)=t^m f(x, y, z\ldots w)\ldots\quad\ldots\quad(36)$$

Zakładamy $t=1+\alpha$

Wtedy wzór (36) przybiera postać

$$f(x+\alpha x,\ x+\alpha y,\ z+\alpha z\ldots w+\alpha w)=(\alpha+1)^m f(x, y, z\ldots w)$$

Rozwińmy lewą część tego wzoru na szereg Taylor'a

Dostaniemy wtedy

$$f(x+\alpha x,\ y+\alpha y,\ z+\alpha z\ldots w+\alpha w)=f(x,\ y,\ z\ldots w)+$$

$$+\frac{\alpha}{1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{\partial f}{\partial z}z+\cdots+\frac{\partial f}{\partial w}w\right)+$$

$$+\frac{\alpha^2}{1.2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{\partial f}{\partial z}z\cdots+\frac{\partial f}{\partial w}w\right)^{(2)}+$$

$$+\frac{\alpha^{(3)}}{1.2.3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{\partial f}{\partial z}z+\cdots+\frac{\partial f}{\partial w}w\right)^{(3)}+$$

. . . . . .

$$+\frac{x^n}{1.2.3...n}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{\partial f}{\partial z}z+\cdots+\frac{\partial f}{\partial w}w\right)^{(n)}+\cdots$$

. . . . . (37)

Biorąc pod uwagę, że

$$(1+\alpha)^m f(x, y, z\ldots w)=1+m\alpha+\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\alpha^3+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}\alpha^n+\cdots\quad(38)$$

otrzymamy po zestawieniu wzorów (37) i (38) wzory następujące:

$$\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{\partial f}{\partial z}z+\cdots+\frac{\partial f}{\partial w}w=mf(x, y, z\ldots w)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{\partial f}{\partial z}z+\cdots n+\frac{\partial f}{\partial w}w\right)^{(2)}=m(m-1)f(x, y, z\ldots w)$$

. . . . . .

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{\partial f}{\partial z}z+\cdots+\frac{\partial f}{\partial w}w\right)^{(n)}=(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)f(x, y, z\ldots w)$$

Otrzymaliśmy więc znane już wzory Euler'a.

Rozdział XV.

Rózwijanie funkcyj na szeregi potęgowe.

§ 1. **Rozwijanie funkcji wykładniczej na szereg potęgowy.** Stosując wzór Maclorin'a do różnych funkcyj, spełniających warunki podane w § 5 poprzedniego Rozdziału, będziemy mogli przedstawić je w postaci szeregów potęgowych.

Jasną jest rzeczą, że rozwinięcie funkcji na szereg potęgowy według wzoru Maclorin'a jest rozwinięciem jedynie możliwem, czyli innemi słowy, że szeregi

$$f(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+\cdots a_nx^n+\cdots$$

$$f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(0)+\cdots$$

są to szeregi identyczne.

Przejdziemy teraz do rozwijania elementarnych funkcyj na szeregi potęgowe.

Niechaj będzie dana funkcja wykładnicza $f(x)=a^x$

Będziemy mieli

$$f(0)=1;\ f'(0)=lga;\ f''(0)=lg^2a\ldots f^{(n)}(0)=lg^n a$$

Podstawiając te wyrażenia na pochodne funkcji a^x dla $x=o$ do szeregu Maclorin'a

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0)+R_n,$$

otrzymamy szereg

$$a^x=1+\frac{x}{1}lga+\frac{x^2}{1.2}lg^2a+\frac{x^3}{1.2.3}lg^3a+\cdots$$

$$\cdots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}lg^{n-1}a+R_n, \quad \ldots\ldots (1)$$

gdzie reszta

$$R_n=\frac{x^n lg^n a}{1.2.3\ldots n}a^{\vartheta x} \qquad (0<\vartheta<1)$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^n lg^n a}{1.2.3\ldots n}\right]=0$$

dla wszystkich wartości na x, przeto

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0,$$

A zatem szereg (1) przedstawia rozwinięcie funkcji a^x na szereg potęgowy dla wszystkich wartości na x.

Zakładając w szeregu (1) $a=e$, otrzymamy rozwinięcie funkcji $y=e^x$ na szereg potęgowy

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}+R_n\cdots. \quad (2)$$

Zakładając w szeregu (2) $x=1$, otrzymamy już znany szereg

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}+\cdots$$

Zastępując w szeregu (2) x przez $-x$, otrzymamy

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}+R_n\cdots \quad (3)$$

Dodając i odejmując stronami szeregi (2) i (3), otrzymamy rozwinięcia funkcyj hyperbolicznych Shx i Chx na szeregi potęgowe

$$Shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\cdots+\frac{x^{2k+1}}{1.2.3\ldots(2k+1)}+\cdots$$

$$Chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\cdots+\frac{x^{2k}}{1.2.3\ldots2k}+\cdots$$

§ 2. **Rozwijanie funkcyj trygonometrycznych na szeregi potęgowe. Wzory Euler'a i Moivre'a.** Mamy daną funkcję

$$f(x)=\sin x$$

Funkcja ta, oraz jej różne pochodne są funkcjami skończonemi i ciągłemi dla wszystkich wartości na x.

Będziemy mieli

$$f(0)=0;\ f'(0)=1;\ f''(0)=0;\ f'''(0)=-1;\ f^{(IV)}(0)=0;$$
$$f^{(V)}(0)=1 \text{ i t. d.}$$

Przeto wzór Maclorin'a dla funkcji $f(x)=\sin x$ przybiera postać

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\cdots+R_n,. \quad (4)$$

gdzie reszta R_n w postaci, podanej przez Lagrange'a, będzie

$$R_n=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\sin\left(\vartheta x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \qquad (0<\vartheta<1)$$

Ponieważ dla wszystkich wartości na x zachodzi nierówność

$$\left|\sin\left(\theta x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leq 1,$$

przeto

$$|R_n|\leq\left|\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\right|.$$

A zatem

$$\lim_{n\to\infty} R_n=0$$

dla wszystkich wartości na x.

Stąd wnozimy, że szereg (4) przedstawia rozwinięcie funkcji $f(x)=\sin x$ na szereg potęgowy dla wszystkich wartości na x.

Niech będzie dana funkcja

$$f(x)=\cos x$$

Funkcja ta, oraz jej różne pochodne są funkcjami skończonemi i ciągłemi dla wszystkich wartości na x.

Będziemy mieli

$$f(0)=1;\quad f'(0)=0;\quad f''(0)=-1;\quad f'''(0)=0;\quad f^{(IV)}(0)=1;$$
$$f^{(V)}(0)=0 \text{ i t. d.}$$

Przeto wzór Maclorin'a dla funkcji $f(x)=\cos x$ przybiera postać

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4.}+\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\cdots+R_n, \quad . \quad (5)$$

gdzie reszta w postaci, podanej przez Lagrange'a, będzie

$$R_n=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\cos\left(\theta x+n\frac{\pi}{2}\right) \qquad (0<\theta<1)$$

Ponieważ dla wszystkich wartości na x zachodzi nierówność

$$\left|\cos\left(\theta x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leq 1,$$

przeto

$$\lim_{n\to\infty}|R_n|\leq\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\right|=0.$$

Stąd wnosimy, że szereg (5) przedstawia rozwinięcie funkcji $f(x)=\cos x$ dla wszystkich wartości na n.

Szeregami (5) i (6) można posługiwać się przy obliczeniu sinusów i cosinusów różnych kątów.

Przypuśćmy, że mamy do obliczenia sin α^0 i cos α^0.

Wyrażając kąt α^0 w radjanach, otrzymamy

$$x=\frac{\alpha.\pi}{180}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha}{90}=\frac{\pi}{2}\cdot\mu.$$

Szeregi (5) i (6) przybierają postać

$$\sin\alpha^0=\sin x=\frac{\mu}{1}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\mu^3}{1.2.3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{\mu^5}{1.2.3.4.5}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5-\cdots$$

$$\cos\alpha^0=\cos x=1-\frac{\mu^2}{1.2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{\mu^4}{1.2.3.4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4-\frac{\mu^6}{1.2.3.4.5.6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6+\cdots$$

Mamy

$$\frac{\pi}{2}=1{,}570.796.33 \qquad \frac{1}{1.2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=1{,}233.700.55$$

$$\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3=0{,}645.964.10 \qquad \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4=0{,}253.669.51$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5=0{,}079.692.33 \qquad \frac{1}{1.2.3.4.5.6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6=0{,}020\,863.48$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\left(\frac{\pi}{2}\right)^7=0{,}004.681.75;$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}\left(\frac{\pi}{2}\right)^8=0{,}000.919.26;$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}\left(\frac{\pi}{2}\right)^9=0{,}000.160.44;$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{10}=0{,}000.025.20;$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{11}=0{,}000.036.0;$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{12}=0{,}000.000.47;$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{13}=0{,}000.000.06;$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{14}=0{,}000.000.01;$$

§ **3. Wzory Euler'a i Moivre'a.** Posługując się rozwinięciem funkcji wykładniczej i funkcyj trygonometrycznych na szeregi potęgowe, możemy otrzymać znane już wzory Euler'a i Moivre'a.

Zamieniamy we wzorze (2) x na ix. Biorąc pod uwagę, że

$$i^{4k}=1;\quad i^{4k+1}=i;\quad i^{4k+2}=-1;\quad i^{4k+3}=-i,$$

otrzymamy

$$e^{xi}=1+xi-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}i+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}i-\cdots-$$

$$=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\cdots+i\left(x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots\right)$$

Zastępując w tym wzorze x przez $-x$, otrzymamy

$$e^{-ix}=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\cdots-i\left(x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots\right)$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\cdots$$

mamy

$$e^{xi}=\cos x+i\sin x$$
$$e^{-xi}=\cos x-i\sin x$$

Dodając i odejmując te wzory stronami, otrzymamy wzory Euler'a

$$\cos x=\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2};\quad \sin x=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$$

Zastępując we wzorze (2) x przez mxi, dostaniemy

$$e^{mxi}=1+mxi-\frac{m^2x^2}{1.2}-\frac{m^3x^3}{1.2.3}i+\frac{m^4x^4}{1.2.3.4}+\cdots=$$
$$=1-\frac{m^2x^2}{1.2}+\frac{m^4x^4}{1.2.3.4}-\cdots+i\left(mx-\frac{m^3x^3}{1.2.3}+\frac{m^5x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots\right)$$

Zastępując w ostatnim wzorze x przez $-x$, otrzymamy szereg

$$e^{-mxi}=1-mxi-\frac{m^2x^2}{1.2}+\frac{m^3x^3}{1.2.3}i+\frac{m^4x^4}{1.2.3.4}-\cdots=$$
$$=1-\frac{m^2x^2}{1.2}+\frac{m^4x^4}{1.2.3.4}-\frac{m^6x^6}{1.2.3.4.5.6}+\cdots-i\left(mx-\frac{m^3x^3}{1.2.3}+\frac{m^5x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots\right)$$

Uwzględniając zaś szeregi

$$\sin mx=mx-\frac{m^3x^3}{1.2.3}+\frac{m^5x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots$$

$$\cos mx=1-\frac{m^2x^2}{1.2}+\frac{m^4x^4}{1.2.3.4}-\cdots,$$

możemy napisać wzory

$$e^{mxi}=\cos mx+i\sin mx$$
$$e^{-mxi}=\cos mx-i\sin mx$$

Dodając i odejmując te wzory stronami, dostaniemy wzory

$$\cos mx=\frac{e^{mxi}+e^{-mxi}}{2}$$

$$\sin mx=\frac{e^{mxi}-e^{-mxi}}{2i}$$

Z ostatnich wzorów otrzymujemy

$$\cos mx+i\sin mx=e^{mxi}=(e^{xi})^m=(\cos x+i\sin x)^m$$
$$\cos mx-i\sin mx=e^{-mxi}=(e^{-xi})^m=(\cos x-i\sin mx)^m$$

Są to właśnie znane już wzory Moivre'a

§ **4. Rozwinięcie funkcji lg $(1+x)$ na szereg potęgowy. Obliczanie logarytmów.** Niechaj będzie dana funkcja

$$f(x)=\lg(1+x)$$

Pochodna rzędu n tej funkcji względem x będzie

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{m-1}\cdot\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{(1+x)^m}$$

Dla wartości szczególnej $x=0$ mamy

$$f(0)=0;\ f'(0)=1;\ f''(0)=-1;\ f'''(0)=1.2;\ f^{(IV)}(0)=-1.2.3$$
$$\ldots f^{(n-1)}(0)=(-1)^{n-2}\cdot 1.2.3\ldots(n-2)$$

Wzór Maclorin'a dla funkcji lg $(1+x)$ przybiera postać

$$\lg(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}+R_n,\ \cdots\quad (7)$$

gdzie reszta w postaci Lagrange'a będzie

$$R_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n\qquad (0<\theta<1)$$

Chodzi nam o ustalenie przedziału, w którym da się rozwinąć funkcję lg $(1+x)$ na szereg potęgowy.

Oczywista, jeżeli

$$|x|>1,$$

wówczas szereg jest rozbieżny, albowiem wartość bezwzględna stosunku dwóch sąsiednich wyrazów tego szeregu

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)x\right|$$

jest większą od jedności.

Dla wartości na x, spełniających nierówności

$$0<x\leqslant 1,\quad \ldots\ldots\ldots\quad (8)$$

reszta szeregu R_n dąży do zera, gdy n rośnie nieograniczenie, albowiem wtedy

$$\frac{x}{1+\theta x}\leqslant 1$$

A więc dla wartości na x, spełniających nierówności (8), szereg (7) jest zbieżny, a zatem funkcja lg $(1+x)$ jest rozwijalną na szereg potęgowy.

Rozważmy teraz szereg (7) dla wartości na x, spełniających nierówności

$$-1<x<0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Reszta szeregu w postaci. podanej przez Cauchy'ego, będzie

$$R_n=\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(\theta x)=\frac{(-1)^{n-1}x^n(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n}=$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{1-\theta}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1-\theta}=0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\right]=0,$$

przeto dla wartości na x, spełniających nierówności (9),

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0$$

A zatem dla tych wartości na x funkcja $\lg(1+x)$ jest rozwijalną na szereg potęgowy.

A więc funkcja $f(x)=\lg(1+x)$ jest rozwijalną na szereg potęgowy

$$\lg(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

dla wszystkich wartości na x, spełniających nierówności

$$-1<x\leq 1.$$

Jasną jest rzeczą, że za pomocą szeregu (7) można obliczać logarytmy liczb, zawartych pomiędzy 0 a 2.

Dla $x=1$ mamy szereg

$$\lg 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

Ponieważ szereg ten jest powoli zbieżny, przeto nie jest dogodny w zastosowaniu do obliczania logarytmów.

Rozważmy dwa szeregi

$$\lg(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\lg(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

zbieżne dla wartości na x, spełniających nierówności

$$0<x<1.$$

Odejmując szereg (10) od szeregu (7), otrzymamy

$$\lg(1+x)-\lg(1-x)=\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right) \quad . \quad (11)$$

Załóżmy

$$\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{\alpha}{y}$$

Stąd

$$x=\frac{\alpha}{2y+\alpha}$$

Podstawiając ostatnie wyrażenie do szeregu (11), otrzymamy wzór

$$\lg(y+\alpha)=\lg y+2\left[\frac{\alpha}{2y+\alpha}+\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{2y+\alpha}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{\alpha}{2y+\alpha}\right)^5+\cdots\right]$$

Załóżmy teraz $\alpha=1$. Wtedy będziemy mieli wzór

$$\lg(y+1)=\lg y+2\left[\frac{1}{2y+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2y+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2y+1}\right)^5+\cdots\right] \quad (12)$$

Szereg ten jest szybko zbieżny, a zatem jest bardzo dogodny w zastosowaniu do obliczania logarytmów.

Rozważmy szereg

$$\frac{1}{2y+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2y+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2y+1}\right)^5+\cdots+\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{2y+1}\right)^{2n-1}+\rho_n \quad (12)$$

Znajdźmy ten błąd ρ_n, który popełniamy przy obliczaniu sumy tego szeregu, zatrzymując się na wyrazie

$$\frac{1}{(2n-1)}\left(\frac{1}{2y+1}\right)^{2n-1}$$

Oznaczając przez R'_n i R''_n odpowiednio reszty szeregów

$$\lg(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+R'_n \quad . \quad . \quad . \quad (10')$$

$$\lg(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+R''_n \quad . \quad . \quad (7')$$

w postaci, podanej przez Lagrange'a, możemy napisać

$$R'_n=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\theta' x)^{2n+1}};\quad R''_n=\frac{-x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\theta'' x)^{2n+1}},$$

gdzie

$$0\leq\theta'\leq 1$$
$$0\leq\theta''\leq 1$$

Po odejmowaniu szeregu (10') od szeregu (7'), otrzymamy wzór

$$\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right]+R'_n-R''_n$$

Ponieważ dla wartości na x, spełniających nierówności

$$-1 < x \leqslant 1,$$

$$\frac{x}{1+\theta' x} \leqslant x \; ; \quad \frac{x}{1+\theta'' x} \leqslant \frac{x}{1-x},$$

przeto

$$R'_n - R''_n \leqslant \frac{1}{2n+1}\left[x^{2n+1} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^{2n+1}\right],$$

czyli

$$R'_n - R''_n \leqslant \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\left[\frac{(1-x)^{2n+1}+1}{(1-x)^{2n+1}}\right] \leqslant \frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x)^{2n+1}}$$

Zakładając

$$x = \frac{1}{2y+1},$$

otrzymujemy

$$\rho_n = R'_n - R''_n \leqslant \frac{2}{(2n+1)(2y)^{2n+1}}$$

Ostatnie wyrażenie przedstawia właśnie ten błąd, który popełniamy przy obliczaniu logarytmu według wzoru (12); zatrzymując się na wyrazie

$$\frac{1}{(2n-1)}\left(\frac{1}{2y+1}\right)^{2n+1}$$

Przejdziemy teraz do obiiczania logarytmów naturalnych Będziemy mieli

$$\lg 1 = 0$$

Zakładając w szeregu (12) $y = 1$, otrzymujemy szereg

$$\lg 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \cdots\right]$$

Mamy

$$\frac{1}{3} = 0{,}333.333.333.1;$$

$$\frac{1}{2.3^3} = 0{,}012.345.679.0;$$

$$\frac{1}{5.3^5} = 0{,}000.823.045.3;$$

$$\frac{1}{7.3^7} = 0{,}000.065.321.1;$$

$$\frac{1}{9.3^9} = 0{,}000.005.645.0;$$

$$\frac{1}{11.3^{11}} = 0{,}000.000.513.2;$$

$$\frac{1}{13.3^{13}} = 0{,}000.000.048.2;$$

$$\frac{1}{15.3^{15}} = 0{,}000.000.004.6;$$

$$\frac{1}{17.3^{17}} = 0{,}000.000.000.5;$$

$$\frac{1}{2}\lg 2 = 0{,}346.573.590.2;$$

Stąd

$$\lg 2 = 0{,}693.147.180.4$$

Błąd popełniony

$$\delta \leqslant \frac{1}{19.2^{18}}$$

to jest

$$\delta < 0{,}000.000.2$$

Zakładając we wzorze (12)

$$y = 2,$$

otrzymamy szereg

$$\lg 3 = \lg 2 + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \frac{1}{7.5^7} + \cdots\right]$$

Mamy

$$\frac{1}{5} = 0{,}200.000.000.0;$$

$$\frac{1}{3.5^3} = 0{,}002.666.666\,7;$$

$$\frac{1}{5.5^5} = 0{,}000.064.000.0;$$

$$\frac{1}{7.5^7} = 0{,}000.001\,825.6;$$

$$\frac{1}{9.5^9} = 0{,}000.000.056.9;$$

$$\frac{1}{11.5^{11}} = 0{,}000.000.001.9;$$

$$\frac{1}{13.5^{13}} = 0{,}000.000.000.1;$$

Dodając ostatnie wyrażenia, otrzymujemy

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \cdots + \frac{1}{13.5^{13}} = 0.202.732.554.2;$$

czyli

$$2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \cdots + \frac{1}{13.5^{13}}\right] = 0{,}405.465.108.4;$$

Ponieważ

$$\lg 2 = 0{,}693.147.180.4.$$

przeto

$$\lg 3 = 1{,}098\,612\,288\,8;$$

W analogiczny sposób otrzymujemy

$$\lg 4 = 2\lg 2 = 1{,}386.294.360.8;$$
$$\lg 5 = 1{,}609.437.912\,1$$
$$\lg 6 = \lg 3 + \lg 2 = 1{,}791.759.469.2$$
$$\lg 7 = 1{,}945.910.149.0$$
$$\lg 8 = 3\lg 2 = 2{,}079.441.541.2$$
$$\lg 9 = 2\lg 3 = 2{,}197.224.577.6$$
$$\lg 10 = \lg 2 + \lg 5 = 2{,}302.585.092.6$$

Gdybyśmy chcieli obliczyć logarytm pospolity, (o podstawie 10) jakiejkolwiek liczby, musielibyśmy logarytm naturalny tej liczby pomnożyć przez tak zwany zamiennik (moduł)

$$M = \frac{1}{\lg 10} = \frac{1}{2{,}302.585.09} = 0{,}434.294.48;$$

Oznaczając logarytm pospolity symbolem Log, będziemy mieli:

$$\text{Log } 1 = M\lg 1 = 0.000.000.00;$$
$$\text{Log } 2 = M\lg 2 = 0{,}301.029\,99;$$
$$\text{Log } 3 = M\lg 3 = 0{,}477.121.25;$$
$$\text{Log } 4 = M\lg 4 = 0.602.059.99;$$
$$\text{Log } 5 = M\lg 5 = 0{,}698.970.00;$$
$$\text{Log } 6 = M\lg 6 = 0{,}778.151.25;$$
$$\text{Log } 7 = M\lg 7 = 0{,}845.098.04;$$
$$\text{Log } 8 = M\lg 8 = 0{,}903.089.98;$$
$$\text{Log } 9 = M\lg 9 = 0{,}954.242.51;$$
$$\text{Log } 10 = M\lg 10 = 1{,}000.000.00;$$

Gdybyśmy chcieli bezpośrednio obliczyć logarytmy pospolite, musielibyśmy zastosować wzór

$$\log(y+1) = \log y + 2M\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2y+1}\right)^5 + \cdots\right]$$

§ **5. Rozwijanie funkcji dwumianowej na szereg potęgowy.** Niech będzie dana funkcja

$$f(x) = (1+x)^m,$$

gdzie m jest dowolną liczbą rzeczywistą. Funkcję tę nazywamy funkcją dwumianową. Zamierzamy sobie rozwinąć tę funkcję na szereg potęgowy.

Mamy

$$f(0) = 1;\quad f'(0) = m;\quad f''(0) = m(m-1);\quad f'''(0) = m(m-1(m-2)$$
$$\ldots f^{n-1}(0) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)$$

Stosując do funkcji $f(x)$ wzór Maclorin'a, będziemy mieli

$$f(x) = (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1} + R_n, \quad . \quad (13)$$

gdzie reszta w postaci, podanej przez Cauchy'ego, będzie

$$R_n = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(1+\theta x)^{m-n}$$

Ponieważ stosunek dwóch sąsiednich wyrazów szeregu

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(m-n+1)}{n}\cdot x$$

dąży do granicy $-x$, gdy liczba n rośnie nieograniczenie, przeto dla $|x| > 1$ szereg (13) będzie rozbieżny

Rozważmy szereg (13) dla wartości na x, spełniających nierówności

$$-1 < x < 1$$

Możemy napisać

$$R_n = mx\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}(1+\theta x)^{m-1}\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1}$$

Ponieważ

$$0 < \theta < 1; \qquad -1 < x < 1$$

przeto

$$1-\theta < 1+\theta x,$$

czyli

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

W granicy przy $n = \infty$ otrzymamy

$$\lim_{n\to\infty} R_n = mx(1+\theta x)^{m-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1}\right]$$

W myśl wzoru (14) będziemy mieli

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Oznaczając dalej

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1} = r_n, \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

możemy napisać

$$\frac{(m-1)(m-2)..(m-n)}{1.2.3...n}x^n = r_{n+1}$$

Stąd

$$r_{n+1} = \frac{m-n}{n} \cdot x r_n$$

Obieramy taką wartość na $n=k$, żeby zachodziły nierówności

$$\left|\frac{m-k}{k} \cdot x\right| < p < 1,$$

gdzie p jest to pewien ułamek dodatni.

Wtedy będziemy mieli

$$| r_{k+1} | < p . | r_k | ; | r_{k+2} | < p | r_{k+1} |,$$

czyli

$$| r_{k+2} | < p^2 . | r_k |$$

Naogół możemy napisać

$$| r_{k+s} | < p^s . | r_k |$$

Stąd wnosimy, że

$$\lim_{n \to \infty} r_n = 0,$$

lbowiem $| r_{k+s} |$ dąży do zera, gdy n rośnie nieograniczenie.

Uwzględniając wzory (15), (16), możemy napisać

$$\lim_{n \to \infty} R_n = O$$

Stąd wnosimy, że dla wartości na x, spełniających nierówności

$$-1 < x < 1,$$

zereg (14) jest zbieżny

Przypuśćmy, że

$$x = \pm 1$$

Dla $x=1$ reszta szeregu (13) w postaci, podanej przez Lagrange'a, będzie

$$R_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{(1+\theta)^n} \cdot (1+\theta)^m \cdot \left(-\frac{m}{1}\right) \cdot \left(\frac{-m+1}{2}\right) \cdots \left(\frac{-m+n-1}{n}\right) =$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{1}{(1+\theta)^n} \cdot (1+\theta)^m \left(1-\frac{m+1}{1}\right)\left(1-\frac{m+1}{2}\right) \cdots \left(1-\frac{m+n-1}{n}\right)$$

Mamy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(1+\theta)^n} = 0$$

Iloczyn nieskończony

$$\left(1-\frac{m+1}{1}\right)\left(1-\frac{m+1}{2}\right) \cdots \left(1-\frac{m+n-1}{n}\right) \cdots$$

równa się zeru, gdy

$$m+1 > 0; \quad \text{czyli } m > -1$$

Wtedy

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0,$$

a zatem szereg (13) jest zbieżny.

Będziemy więc mieli szereg

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \cdots$$

Przypuśćmy teraz, że $x=-1$

Weźmy resztę szeregu (13) w postaci, podanej przez Cauchy'ego. Możemy napisać

$$R_n = m(1-\theta)^{m-1} \cdot (-1)^{2n-1} \cdot \left(\frac{-m+1}{1}\right) \cdot \left(\frac{-m+2}{2}\right) \cdots \left(\frac{-m+n-1}{n-1}\right) =$$

$$= m(1-\theta)^{m-1} \cdot (-1)^{2n-1}\left(1-\frac{m}{1}\right)\left(1-\frac{m}{2}\right)\left(1-\frac{m}{3}\right) \cdots \left(1-\frac{m}{n-1}\right).$$

Iloczyn nieskończony

$$\left(1-\frac{m}{1}\right)\left(1-\frac{m}{2}\right)\left(1-\frac{m}{3}\right) \cdots \left(1-\frac{m}{n-1}\right) \cdots$$

równa się zeru tylko wtedy, gdy $m > 0$

Oczywista, w tym przypadku

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0,$$

a zatem szereg (13) będzie zbieżny.

Szereg (13) przybiera wówczas postać

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} - \cdots$$

A więc szereg (13) jest zbieżny:

1) dla wartości na $| x | < 1$
2) dla $x=1$, jeżeli $m > 1$
3) dla $x=-1$, jeżeli $m > 0$.

Zakładając $m = -\mu$, otrzymamy szereg

$$\frac{1}{(1+x)^\mu} = 1 - \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2}x^2 - \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}x^3 + \ldots \quad (17)$$

Zastępując w tym szeregu x przez $-x$, dostaniemy szereg

$$\frac{1}{(1-x)^{\mu}} = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}x^3 + \ldots \quad (18)$$

Dla wartości szczególnej $\mu = 1$ szeregi (17) i (18) przybierają postać

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \ldots \ldots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \ldots \ldots$$

Szereg (13) można zastosować do obliczania pierwiastków. Obliczmy naprzykład

$$\sqrt[n]{A}.$$

Możemy uważać liczbę A, jako sumę algebraiczną

$$A = a^n \pm b$$

Przeto

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{a^n \pm b} = a\left(1 \pm \frac{b}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Obieramy liczby a i b tak, żeby

$$\frac{b}{a^n} < 1$$

Możemy wówczas napisać

$$\sqrt[n]{A} = a\left[1 \pm \frac{1}{n}\cdot\frac{b}{a^n} \pm \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1.2}\cdot\left(\frac{b}{a^n}\right)^2 + \ldots\right]$$

Posługując się tym szeregiem, obliczamy wartość przybliżoną na pierwiastek $\sqrt{A}$

Przykłady. 1. Obliczmy wartość przybliżoną na $\sqrt{2}$. Możemy napisać

$$\sqrt{2} = \frac{1}{5}\sqrt{50} = \frac{1}{5}\sqrt{1+7^2} = \frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{7^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Będziemy więc mieli

$$\left(1+\frac{1}{7^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{49} - \frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{49^2} + \frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{49^3} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{49^4} + \ldots$$

$$\begin{aligned} 1 &= 1{,}000\,000.000 \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{49} &= 0{,}010.204.080 \\ \frac{1}{2.4.6}\cdot\frac{1}{49^3} &= 0{,}000.000.531 \\ &= 1{,}010.204.611 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{49^2} &= 0{,}000.052.061 \\ \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{49^4} &= 0{,}000\,000.006 \\ &= 0{,}000.052.067 \end{aligned}$$

A więc wartość przybliżona

$$\left(1+\frac{1}{7^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 0{,}010.152.544$$

Przeto wartość przybliżona na pierwiastek $\sqrt{2}$ będzie

$$\sqrt{2} = \frac{5}{7}\left(1+\frac{1}{7^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{7}{5}\cdot 1{,}010.152.544 = 1{,}414.213.556$$

2. Obliczmy wartość przybliżoną na

$$\sqrt[5]{1000}$$

Zakładając

$$a = 4; \quad b = 24,$$

możemy napisać

$$\sqrt[5]{1000} = 4\left(1 - \frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Mamy więc szereg

$$(1-x)^{\frac{1}{5}} = 1 - \frac{x}{5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{x^2}{10} - \frac{4.9}{5.10}\cdot\frac{x^3}{15} - \frac{4.9.14}{5.10.15}\cdot\frac{x^4}{20} + \ldots$$

Zakładając w tym szeregu $x = \frac{3}{128}$, otrzymamy

$$\left(1-\frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{5}} = \begin{aligned} 1 &- 0{,}004.687.500.0 \\ &- 0{,}000.043.945.3 \\ &- 0{,}000.000.618.0 \\ &- 0{,}000.000.010.1 \\ &- 0{,}000.000.000.2 \\ &\overline{0{,}995.267.926{,}4} \end{aligned}$$

A więc wartość przybliżona na pierwiastek $\sqrt[5]{1000}$ będzie

$$\sqrt[5]{1000} = 4 \,.\, 0{,}995.267.926.4 = 3{,}981.071.705.6$$

§ 6. Rozwinięcie funkcyj kołowych na szeregi potęgowe.

Zanim przejdziemy do rozwijania funkcyj kołowych na szereci potęgowe, wyprowadźmy wzór ogólny na rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy, mając dane rozwinięcie pochodnej tej funkcji.

Przypuśćmy więc, że mamy dane rozwinięcie na szereg potęgowy funkcji

$$f'(x)=f'(0)+\frac{f''(0)}{1}\cdot x+\frac{f'''(0)}{1.2}x^2+\frac{f^{(IV)}(0)}{1.2.3}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1}+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{1.2.3\ldots n}x^n \qquad (0<\theta<1)\ .\ .\ (19)$$

Łatwo udowodnić, że możliwem jest rozwinięcie na szereg potęgowy funkcji

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{1.2}x^2\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}x^n+$$

$$+\frac{f^{n+1}(\theta_1 x)\,x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} \qquad (0<\theta_1<1)\ .\ .\ .\ (20)$$

dla wszystkich wartości na x, dla których rozwinięcie (19) jest możliwem.

Istotnie, zakładając

$$f'(0)=a_1;\ f''(0)=a_2;\ \frac{f''(0)}{1.2}=a_3\ \ldots\ \frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots(n-1)}=a_n,$$

możemy napisać

$$f'(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots+a_nx^{n-1}+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{1.2.3\ldots n}x^n$$

$$f(x)=f(0)+\frac{a_1}{1}x+\frac{a_2}{2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{1.2.3\ldots(n+1)}x^{n+1}$$

Oczywista, resztę ostatniego szeregu możemy napisać w postaci następującej:

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\theta_1 x)}{1.2.3\ldots(n+1)}x^{n+1}=\left(\frac{x}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\right)f^{(n+1)}(\theta_1 x)$$

Ponieważ, według przypuszczenia, szereg (19) jest zbieżny, przeto

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n+1)}(\theta_1 x)\right]=0$$

A zatem

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0$$

Stąd wnosimy, że szereg (20) jest zbieżny dla wszystkich wartości na x, dla których szereg (19) jest zbieżny.

Zestawiając te szeregi, widzimy, że spółczynnik szeregu (20) da się wyrazić bardzo łatwo przez spółczynniki szeregu (20).

Przejdźmy teraz do rozwijania funkcyj kołowych na szeregi potęgowe

Niechaj będzie dana funkcja

$$f(x)=\operatorname{arc\,tg}x$$

Pochodna tej funkcji będzie

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Wiadomo, że funkcja $\frac{1}{1+x^2}$ może być rozwiniętą na szereg potęgowy

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots\ldots\ (21)$$

dla wszystkich wartości na x, spełniających nierówności

$$-1<x<1\ \ldots\ldots\ (22)$$

Stąd wnosimy, że rozwinięcie funkcji $\operatorname{arc\,tg}x$ na szereg potęgowy będzie

$$\operatorname{arc\,tg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots$$

jest możliwem dla wszystkich wartości na x, spełniających nierówności (22)

Łatwo jednak spostrzec, że rozwinięcie tej funkcji jest również możliwem dla

$$|x|=1$$

W samej rzeczy, w tym przypadku będziemy mieli

$$f(0)=f''(0)=f^{(IV)}(0)=\ldots f^{(2k)}(0)=0$$

$$f'(0)=1;\ f'''(0)=-1.2;$$

$$f^{(V)}(0)=1.2.3.4\ldots f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k\cdot 1.2.3\ldots 2k$$

Podstawiając ostatnie wyrażenia na pochodne do szeregu Maclorin'a, otrzymamy rozwinięcie funkcji $\operatorname{arc\,tg}x$ na szereg potęgowy w postaci następującej:

$$\operatorname{arc\,tg}x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots\ldots\ (23)$$

Ponieważ

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^n}-\frac{1}{(x+i)^n}\right],$$

przeto resztą szeregu (23) w postaci, podanej przez Langrange'a, będzie wyrażenie

$$R_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2ni}x^n\left[\frac{1}{(\theta x-i)^n}-\frac{1}{(\theta x+i)^n}\right]$$

Oznaczmy

$$\frac{1}{(\theta x - i)^n} = \alpha + \beta i$$

Wtedy

$$\frac{1}{(\theta x + i)^n} = \alpha - \beta i$$

A zatem

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \cdot \beta$$

Ponieważ

$$\text{Mod}\,(\theta x - 1) = \sqrt{1 + \theta^2 x^2},$$

przeto

$$\text{Mod.}\,(\alpha + \beta i) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{(\sqrt{1 + \theta^2 x^2})^n}$$

Stąd wnosimy, że

$$|\beta| \leqslant \frac{1}{(\sqrt{1 + \theta^2 x^2})^n}$$

A zatem

$$|R_n| \leqslant \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{x^2}{1 + \theta^2 x^2}}\right)$$

Jeżeli $x^2 \leqslant 1$, to jest jeżeli $|x| \leqslant 1$,
wówczas

$$\frac{x^2}{1 + \theta^2 x^2} < 1$$

Stąd wnosimy, że

$$\lim_{n \to \infty} |R_n| = 0$$

A więc szereg (23) jest zbieżny dla wartości na x, spełniających warunek

$$|x| \leqslant 1.$$

Przejdziemy teraz do rozwijania funkcji

$$f(x) = \text{arc sin}\, x$$

na szereg potęgowy
Pochodną tej funkcji będzie funkcja

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Wiadomo, że funkcja ta jest rozwijalną na szereg potęgowy

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots \quad (24)$$

dla wszystkich wartości na x, spełniających nierówności

$$-1 < x < 1 \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Biorąc pod uwagę, że w tym przypadku

$$f(0) = \text{arc sin}\, 0 = 0,$$

możemy napisać szereg, przedstawiający rozwinięcie funkcji arc sin x na szereg potęgowy, w postaci następującej:

$$\text{arc sin}\, x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots \quad (26)$$

Oczywista, szereg ten jest zbieżny dla wszystkich wartości a x, spełniających nierówności (25)

Dla wartości $|x| = 1$ szereg (26) przybiera postać

$$\text{arc sin}\, x = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots \quad (27)$$

Szereg ten jest zbieżny.

Stąd wnosimy, że funkcja arc sin x jest rozwijalną na szereg potęgowy dla wszystkich wartości na x, spełniających warunek

$$|x| \leqslant 1.$$

Rozważmy teraz rozwinięcia innych funkcyj kołowych

Ponieważ

$$\text{arc cosec}\, x = \text{arc sin}\, \frac{1}{x},$$

przeto funkcja arc cosec x jest rozwijalną na szereg potęgowy

$$\text{arc cosec}\, x = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3x^3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5x^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7x^7} + \quad (28)$$

dla wszystkich wartości na x, spełniających warunek

$$|x| \geqslant 1$$

Posługując się znanymi wzorami

$$\text{arcsin}\, x + \text{arccos}\, x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{arctg}\, x + \text{arccotg}\, x = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\text{arcsec}\, x + \text{arccosec}\, x = \frac{\pi}{2},$$

znajdziemy rozwinięcia na szeregi potęgowe funkcyj arc cos x, arc cotg x i arc sec x.

Będziemy mieli mianowicie

$$\text{arc cos } x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} - \cdots$$

$$\text{arc cotg } x = \pm\frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \cdots$$

Szeregi te są zbieżne dla wszystkich wartości na x, spełniających warunek $|x| \leqslant 1$

Nareszcie funkcja arc sec x jest rozwijalną na szereg potęgowy

$$\text{arc sec } x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3x^3} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5x^5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7x^7} - \cdots$$

dla wszystkich wartości na x, spełniających warunek $|x| \geqslant 1$.

§ 7 **Obliczanie liczby** π. Załóżmy w szeregu

$$\text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{7} + \cdots$$

$x = 1$.

Wówczas szereg ten przybiera postać

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Jest to właśnie wzór, na $\frac{\pi}{4}$, podany przez Leibnitz'a. Ponieważ szereg

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

jest powoli zbieżny, przeto wzór Leibnitz'a nie nadaje się do obliczenia liczby π.

Posługując się tym wzorem wyprowadźmy inne wzory, więcej się nadające do obliczania π.

Wzór Leibnitz'a możemy napisać w postaci następującej:

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \cdots,$$

czyli też w postaci

$$\frac{\pi}{4} = 2\cdot\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \cdots\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29$$

Napiszmy teraz wzór Leibnitz'a w postaci następującej:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) - \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13}\right) - \cdots,$$

czyli też w postaci

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 2\left(\frac{1}{3.5} + \frac{1}{7.9} + \frac{1}{11.13} + \cdots\right) \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Dodając (29) i (30) wzory stronami, otrzymamy wzór

$$\frac{\pi}{2} = 1 + 2\left[\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} + \frac{1}{9.11} - \frac{1}{11.13} + \cdots\right]$$

Wzór ostatni możemy napisać w postaci następującej:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + 2.4\left[\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{5.7.9} + \frac{1}{9.11.13} + \cdots\right], \quad . \quad . \quad (31)$$

lub też w postaci

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{2}{1.3} - 2.4\left[\frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{7.9.11} + \frac{1}{11.13.15} + \cdots\right] . \quad (32)$$

Dodając wzory (31) i (32) stronami, otrzymamy wzór na liczbę π.

$$\pi = 2 + \frac{2}{1.3} + 2.4\left[\frac{1}{1.3.5} - \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} - \frac{1}{7.9.11} + \cdots\right]$$

Ostatni wzór możemy napisać w nieco innej postaci, a mianowicie:

$$\pi = 2 + \frac{2}{1.3} + 2.4.6\left[\frac{1}{1.3.5.7} + \frac{1}{5.7.9.11} + \cdots\right],$$

lub też w postaci

$$\pi = 2 + \frac{2}{1.3} + \frac{2.4}{1.3.5} - 2.4.6\left[\frac{1}{3.5.7.9} + \frac{1}{7.9.11.13} + \cdots\right]$$

Ostatni wzór bardzo się nadaje do obliczania liczby π, albowiem szereg w prawej części tego wzoru jest szybko zbieżny. Euler stosuje inny wzór do obliczania liczby π.

Załóżmy, za przykładem Euler'a,

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{2}; \quad \text{tg } \beta = \frac{1}{3}$$

Wtedy

$$\text{tg } (\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha . \text{ tg } \beta} = 1$$

Stąd

$$\alpha + \beta = \text{arc tg } 1 = \frac{\pi}{4}$$

A więc

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg } \frac{1}{2} + \text{arc tg } \frac{1}{3}$$

Z drugiej zaś strony mamy

$$\text{arc tg } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} - \cdots$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}-\ \dots$$

Przeto

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}\right)-\ \dots$$

Jest to właśnie wzór Eulera.
J. Machin oblicza liczbę π w sposób następujący:

Załóżmy

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}$$

Wtedy

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{5}{12};\quad \operatorname{tg}4x=\frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}=\frac{120}{119}>1$$

Stąd wnosimy, że

$$4\alpha>\frac{\pi}{4}$$

Oznaczając dalej

$$\beta=4\alpha-\frac{\pi}{4},$$

będziemy mieli

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}4\alpha-1}{1+\operatorname{tg}4\alpha}=\frac{1}{239},$$

czyli

$$\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$$

Widzimy więc, że

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$$

A zatem

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}-\ \dots\right)-\left(\frac{1}{239}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3}+\ \dots\right)$$

Jest to właśnie ten wzór, którego używał Machin do obliczania liczby π. Szereg Machin'a jest szybciej zbieżny, niż szereg Eulera.

Obliczmy liczbę π według wzoru Machin'a.

Mamy

$$\frac{1}{5}=0{,}200.000.000.0 \qquad -\frac{1}{3.5^3}=-\,0{,}002.666.666.7$$

$$\frac{1}{5.5^5}=0{,}000.064.000.0 \qquad -\frac{1}{11.5^{11}}=-\,0{,}000.000.001.9$$

$$-\frac{1}{7.5^7}=-\,0{,}000.001.828.6 \qquad \frac{1}{13.5^{13}}=0{,}000.000.000.1.$$

$$\frac{1}{9.5^9}=0{,}000.000.056.9 \qquad \frac{1}{239}=0{,}004.184.100.4$$

$$-\frac{1}{3.239^3}=-\,0{,}000.000.024.4$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}=0{,}004.184.076.0$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}=0{,}200.064.005.7-0{,}002\,668.497.2=0{,}197.395.559.8$$

A więc

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}=0{,}789.582.239.2-0{,}004.184.076.0=$$
$$=0{,}785\,.398\,163.2$$

a

$$\pi=3{,}141.592\,652.8$$

Posługując się wzorem Machin'a, Schenks obliczył liczbę π z dokładnością $\frac{1}{10^{707}}$.

Przytoczmy na zakończenie francuski wierszyk, którego można używać do zapamiętania liczby π.

Que j'aime à faire apprendre
Un homme utile aux sages!
Immortel Archimède artiste ingénieur
Que de ton jugement peut priser la valeur
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Ilość liter w wyrazach tego wierszyku wyznacza odpowiednie cyfry liczby π, a mianowicie

$$\pi=3{,}141.592.553.589.793.238.462.643.383.279.$$

Rozdział XVI.

Szeregi Lagrange'a. Funkcje Legendre'a. Liczby Bernoulli'ego i Euler'a.

§ 1. **Szereg Lagrange'a.** Niechaj y oznacza pewną funkcję zmiennej niezależnej x, określoną równaniem

$$y = z + x\varphi(y), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gdzie φ jest dowolną funkcją zmiennej y.

Przypuśćmy, że dana jest jeszcze funkcja

$$u = f(y)$$

Lagrange podał sposób rozwijania funkcji u na szereg potęgowy względem zmiennej x.

Ponieważ y jest funkcją x, przeto u jest również funkcją x.

Zastosujmy do tej funkcji wzór Maclorin'a.

Będziemy więc mieli szereg

$$u = f(y) = u_0 + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0 x + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_0 x^2 + \frac{1}{1.2.3}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right]_0 x^3 + \cdots, \quad (2)$$

gdzie

$$u_0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0, \quad \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_0, \quad \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right]_0, \quad \cdots$$

są to wartości na funkcję u i jej pochodne różnych rzędów względdm x dla wartości szczególnej $x = 0$.

Chodzi nam teraz o wyznaczanie spółczynników szeregu (2).

Różniczkując równanie (1) względem x i z, dostaniemy

$$\frac{\partial y}{\partial x} = x\varphi'(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 1 + x\varphi'(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}$$

Stąd mamy

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\varphi(y)}{1 - x\varphi'(y)}; \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{1 - x\varphi'(y)}$$

Z ostatnich wzorów wypływa wzór następujący:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Różniczkujemy wzór (3) względem z i mnożymy otrzymany rezultat przez funkcję dowolną $\psi(y)$.

Otrzymamy

$$\psi(y)\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial z} = \psi(y)\cdot\frac{\partial\left[\varphi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\right]}{\partial z},$$

czyli

$$\psi(y)\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{\partial x} = \psi(y)\cdot\frac{\partial\left[\varphi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\right]}{\partial z} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Mnożąc równanie (4) przez równanie

$$\frac{\partial\psi(y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial\psi(y)}{\partial z},$$

dostaniemy

$$\frac{\partial\psi(y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = \psi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial\psi(y)}{\partial z},$$

czyli

$$\frac{\partial\psi(y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial\psi(y)}{\partial z}\cdot\left[\varphi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\right] \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Dodając wzory (4) i (5) do siebie stronami, otrzymamy wzór

$$\psi(y)\cdot\partial\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\psi(y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} = \varphi(y)\cdot\frac{\partial\left[\varphi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\right]}{\partial z} + \frac{\partial\psi(y)}{\partial z}\left[\varphi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\right]$$

Ostatnie równanie można napisać w postaci następującej:

$$\frac{\partial\left[\psi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\right]}{\partial x} = \frac{\partial\left[\varphi(y)\cdot\varphi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\right]}{\partial z} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Z ostatniego równania wnosimy, że przy różniczkowaniu funkcji $\psi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}$ względem x, można najpierw pomnożyć tę funkcję przez $\varphi(y)$, a następnie różniczkować otrzymany rezultat względem zmiennej z. Różniczkując równanie (6) względem x, dostaniemy

$$\frac{\partial^2\left[\psi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\right]}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\left[\psi(y)\cdot\varphi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\right]}{\partial z\,.\,\partial x},$$

czyli

$$\frac{\partial^2\left[\psi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\right]}{\partial x^2}=\frac{\partial\left\{\frac{\partial\left[\psi(y)\cdot\varphi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\right]}{\partial x}\right\}}{\partial z}$$

W myśl wzoru (6) możemy napisać

$$\frac{\partial\left\{\frac{\partial\left[\psi(y)\cdot\varphi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\right]}{\partial x}\right\}}{\partial z}=\frac{\partial^2\left\{[\varphi(y)]^2\cdot\psi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\right\}}{\partial z^2}$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{\partial^2\left[\psi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\right]}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\left\{[\varphi(y)]^2\cdot\psi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\right\}}{\partial z^2}\quad\ldots\quad(7)$$

Różniczkujemy wzór (7) $n-3$ razy względem x. W myśl wzoru (6) otrzymamy

$$\frac{\partial^{n-1}\left[\psi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\right]}{\partial x^{n-1}}=\frac{\partial^{n-1}\left\{[\varphi(y)]^{n-1}\cdot\psi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\right\}}{\partial z^{n-1}}\quad\ldots\quad(8)$$

Ponieważ funkcję $\psi(y)$ obraliśmy zupełnie dowolnie, przeto możemy założyć

$$\psi(y)=\varphi(y)\cdot f'(y)$$

Pomnóżmy ten wzór przez $\frac{\partial y}{\partial z}$. W myśl wzoru (3) możemy napisać

$$\psi(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=\varphi(y)\cdot f'(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=f'(y)\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial f(y)}{\partial x}$$

Różniczkując ostatnie równanie $n-1$ razy względem x, dostaniemy

$$\frac{\partial^n f(y)}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}\left[\psi(y)\frac{\partial y}{\partial z}\right]}{\partial x^{n-1}}\quad\ldots\ldots\quad(9)$$

W myśl wzoru (8) możemy napisać

$$\frac{\partial^n f(y)}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}\left\{[\varphi(y)]^n f'(y)\frac{\partial y}{\partial z}\right\}}{\partial z^{n-1}}$$

Z równań (1), (3) otrzymujemy dla $x=0$ wzory następujące:

$$y_0=z;\quad u_0=f(y_0)=f(z)$$

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_0=\varphi(z);\quad\left[\frac{\partial y}{\partial z}\right]_0=1$$

Przeto

$$\left[\frac{\partial f(y)}{\partial x}\right]_0=f'(y_0)\cdot\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_0=\varphi(z)\cdot f'(z)$$

Na mocy wzoru (9) otrzymujemy ostatecznie

$$\left[\frac{\partial^n f(y)}{\partial x^n}\right]_0=\frac{d^{n-1}\{[\varphi(z)]^n\cdot f'(z)\}}{dz^{n-1}}$$

A zatem wzór (2) przybiera postać

$$f(y)=f(z)+f'(z)\cdot\varphi(z)\cdot\frac{x}{1}+\frac{d\{[\varphi(z)]^2 f'(z)\}}{dz}\cdot\frac{x^2}{1.2}+$$

$$+\frac{d^2\{[\varphi(z)]^3 f'(z)\}}{dz^2}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{d^{n-1}\{[\varphi(z)]^n\cdot f'(z)\}}{dz^{n-1}}\cdot\frac{x^n}{1.2.3..n}+\ldots$$

Jest to właśnie szereg Lagrange'a, o którego wyprowadzenie nam chodziło.

W przypadku szczególnym, gdy

$$f(y)=y\quad\text{mamy}\quad f(z)=z;\ f'(z)=1.$$

A zatem szereg Lagrange'a przybiera postać następującą:

$$y=z+\varphi(z)\frac{x}{1}+\frac{d[\varphi(z)]^2}{dz}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^2[\varphi(z)]^3}{dz^2}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{d^{n-1}[\varphi(z)]^n}{dz^n}\cdot\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots$$

Przykłady. 1. Rozwińmy funkcję

$$u=f(y)=e^y$$

na szereg Lagrange'a, mając dane równanie

$$y=xe^y+1$$

W tym przypadku mamy

$$\varphi(y)=e^y;\quad z=1;\quad\varphi(z)=e^z$$

$$f(z)=f'(z)=e^z;$$

A zatem

$$\frac{d\{[\varphi(z)]^2 f'(z)\}}{dz}=\frac{d(z^{3z})}{dz}=3e^{3z}=3e^3$$

$$\frac{d^2\{[\varphi(z)]^3 f'(z)\}}{dz^2} = \frac{d^2(e^{4z})}{dz^2} = 4^2 e^{4z} = 4^2 e^4$$

. . . . . .

. . . . . .

Szereg Lagrange'a przybiera postać

$$e^y = e + \frac{e^2}{1}x + \frac{3e^3}{1.2}x^2 + \frac{4^2.e^4}{1.2.3}x^3 + \frac{5^3.e^5}{1.2.3.4}x^4 + \cdots$$

W przypadku szczególnym dla $x=1$ będziemy mieli wzór

$$e^y = e\left(1 + e + \frac{3e^2}{1.2} + \frac{4^2.e^3}{1.2.3} + \frac{5^3.e^4}{1.2.3.4} + \cdots\right)$$

2. Rozwińmy na szereg Lagrange'a funkcję

$$u = f(y) = \lg y,$$

mając dane równanie

$$y^2 - 2y + 1 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

W tym przypadku

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y^2$$

$$z = \frac{1}{2}; \quad \varphi(y) = \frac{1}{2}y^2; \quad x = 1; \quad f(y) = \lg y$$

Przeto

$$\frac{d\{[\varphi(z)]^2 f'(z)\}}{dz} = \frac{3z^2}{2^2} = \frac{1.3}{2^2}$$

$$\frac{d^2\{[\varphi(z)]^3 f'(z)\}}{dz^2} = \frac{4.5\,z^3}{2^3} = \frac{4.5}{2^6}$$

$$\frac{d^3\{[\varphi(z)]^5 f'(z)\}}{dz^3} = \frac{7.6.5}{2^4}z^4 = \frac{7.6.5}{2^8}$$

i t. d.

A zatem szereg Lagrange'a przybiera postać

$$\lg y = \lg\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{1.2.2^4} + \frac{4.5}{1.2.3.2^6} + \frac{5.6.7}{1.2.3.4.2^8} + \cdots$$

Ponieważ $y=1$ jest pierwiastkiem równania (a), przeto

$$\lg 1 = 0 = \lg\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{3}{1.2.2^2} + \frac{4.5}{1.2.3.2^4} + \frac{5.6.7}{1.2.3.4.2^6} + \cdots\right)$$

Stąd

$$\lg 2 = \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{3}{1.2.2^2} + \frac{4.5}{1.2.3.2^4} + \frac{5.6.7}{1.2.3.4.2^6} + \cdots\right)$$

3. (Równanie Euler'a). Rozwińmy funkcję

$$u = f(y) = y$$

na szereg Lagrange'a, mając dane równanie

W tym przypadku mamy

$$y = z + e\sin y. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

$$f(y) = y; \quad \varphi(y) = \sin y; \quad f(z) = z; \quad f'(z) = 1$$

$$\varphi(z) = \sin z$$

Wiadomo, że

$$2^{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n z = \sin nz - n\sin[(n-2)z] + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin[(n-4)z] +$$

$$\cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2.3\cdots\frac{n-1}{2}}\sin z$$

dla n nieparzystego.

Dla n parzystego mamy wzór

$$2^{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n z = \cos nz - n\cos[(n-2)z] + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos[(a-4)z] + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}n(n-1)\cdots\left(\frac{n}{2}+2\right)}{1.2.3\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cos z + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n(n-1\cdots\left(\frac{n}{2}-1\right)}{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

Współczynnik w szeregu Lagrange'a przy ϵ^k będzie

$$\frac{1}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{d^{k-1}[\sin^k z]}{dz^{k-1}}$$

Mamy

$$\frac{d^{k-1}[\sin nz]}{dz^{k-1}} = n^{k-1}\sin\left[nz + (k-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{d^{k-1}[\cos nz]}{dz^{k-1}} = n^{k-1}\cos\left[nz + (k-1,\frac{\pi}{2}\right] = n^{k-1}\sin\left[nz + k\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$

A zatem

$$\frac{d[\sin^2 z]}{dz} = \frac{1}{2}\cdot 2.\sin 2z$$

$$\frac{[d^2\sin^3 z]}{dz^2} = \frac{1}{2^2}\left[3^2\sin 3z - 3\sin z\right]$$

$$\frac{d^3[\sin^4 z]}{dz^3} = \frac{1}{2^3}\left[4^3\sin 4z - 4.2^3\sin 2z\right]$$

$$\frac{d^4[\sin^5 z]}{dz^4}=\frac{1}{2^4}\left[5^4\sin 5z-5.3^4\sin 3z+\frac{5.4}{1.2}2^4\sin 2z\right]$$

. . . . . .

Szereg Lagrange'a przybiera w tym przypadku postać

$$y=z+e\sin z+\frac{e^2}{1.2}\sin 2z+\frac{e^3}{1.2.3.2^2}\left[3^2\sin 3z-3\sin z\right]+$$

$$+\frac{e^4}{1.2.3.4.2^3}\left[4^3\sin 4z-4.2^3\sin 2z\right]+\cdots+$$

$$+\frac{e^k}{1.2.3\ldots k.2^{k-1}}\left\{k^{k-1}\sin kz-k(k-2)^{k-1}\sin\left[(k-2)z\right]+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{k(k-1)}{1.2}(k-4)^{k-1}\sin\left[(k-4)z\right]\right\}+\cdots$$

Równanie (b) podane zostało przez Kepler'a i odgrywa ważną rolę w Astronomji teoretycznej, gdzie temu równaniu nadaje się zwykle postać

$$E=M+e\sin E$$

(M — oznacza czas, lub wielkość proporcjonalna do czasu, e — mimośród eliptycznej drogi planety, E — jej anomalję mimośrodową)

§ 2 **Funkcje Legendre'a** Niech będzie dana funkcja

$$u=f(y)=y$$

Zamierzamy sobie rozwinąć tę funkcję na szereg Lagrange'a według potęg rosnących α w przypuszczeniu, że

$$y=x+\frac{\alpha}{2}(y^2-1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Będziemy więc mieli

$$y=x+\frac{\alpha}{2}(x^2-1)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{d[(x^2-1)^2]}{dx}+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3\frac{d^2[(x^2-1)^3]}{dx^2}+$$

$$+\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n\frac{d^{n-1}[(x^2-1)]^n}{dx^{n-1}}+\cdots$$

Różniczkujac szereg Lagrange'a wyraz za wyrazem, otrzymamy

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{d[x^2-1]}{dx}+\frac{1}{1.2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\frac{d^2[(x^2-1)^2]}{dx^2}+$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3\frac{d^3[(x^2-1)^3]}{dx^3}+\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}+\cdots \quad (11)$$

Z drugiej strony będziemy mieli po rozwiązaniu równania (10) względem y

$$y=\frac{1}{\alpha}\pm\frac{1}{\alpha}\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}$$

Ponieważ dla $\alpha=0$; $y=x$, przeto

$$y=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Różniczkując wzór (11) względem x, otrzymamy

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1}{1-2\alpha x+\alpha^2}}=(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Zestawiając wzory (11), (13) możemy napisać wzór

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{d[x^2-1]}{dx}+\frac{1}{1.2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\frac{d^2[(x^2-1)^2]}{dx^2}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}+\quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Oznaczając

$$X_k=\frac{1}{1.2.3\ldots k}\frac{d^k[(x^2-1)^k]}{dx^k}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

możemy napisać wzór (14) w postaci następującej:

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=1+X_1\alpha+X_2\alpha^2+\cdots+X_n\alpha^n+\cdots \quad (16)$$

Spółczynniki

$$X_1,\ X_2,\ X_3\ldots X_n\ldots$$

przy różnych potęgach α w szeregu (14) nazywają się funkcjami czyli wielomianami Legendre'a.

Fukcje Legendre'a odgrywają bardzo ważną rolę w Analizie Matematycznej i posiadają bardzo ciekawe właściwości.

Funkcję Legendre'a X_k można łatwo przedstawić w postaci wielomianu względem x.

Istotnie, różniczkując n razy wzór

$$(1-x^2)^n=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots k.1.2.3\ldots n-k}x^{2n-k}$$

względem x, dostaniemy

$$\frac{d^n[(1-x^2)^n]}{dx^n}=\sum^k(-1)^k\frac{(2n-k)(2n-k-1)\ldots(n-2k+1).1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots k.1.2.3\ldots(n-k)}x^{n-2k},$$

gdzie suma zawiera wszystkie wyrazy, odpowiadające wartościom na k, spełniającym nierówności

$$0\leq k\leq\frac{n}{2}$$

Stąd wynika, że

$$X_n = \sum_{k} (-1)^k \frac{1.2.3\ldots(2n-2k)}{2^n . 1.2.3\ldots k . 1.2.3\ldots(n-k)} x^{2n-k}$$

Jest to właśnie wzór na funkcję X_k w postaci wielomiana względem x.

Zakładając w tym wzorze ogólnym kolejno $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, otrzymujemy wyrażenia na różne funkcje Legendre'a

$$X_0 = 1$$

$$X_1 = x.$$

$$X_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$X_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$X_4 = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$$

$$X_5 = \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x \qquad \text{i t. d.}$$

Z ogólnego wyrażenia na X_k wnosimy, że wszystkie funkcje Legendre'a o wskaźnikach parzystych są funkcjami parzystemi, a wszystkie funkcje o wskaźnikach nieparzystych są funkcjami nieparzystemi.

Zakładając w wyrażeniu

$$R = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

kolejno $x = 1$; $x = -1$; $x = 0$, otrzymamy wzory

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha + \alpha^2 - \cdots + (-1)^n \alpha^n + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1.3}{2.4}\alpha^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^6 + \cdots +$$

$$\cdots + (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.4\ldots 2n} x^{2n} + \cdots$$

Z tych wzorów wnosimy, że dla $x = 1$ wszystkie funkcje Legendre'a

$$X_0 = X_1 = X_2 = \cdots = X_n = \cdots = 1$$

dla $x = -1$

$$X_0 = 1;\ X_1 = -1;\ X_2 = 1 \ldots X_n = (-1)^n \ldots$$

Nareszcie dla $x = 0$ wszystkie funkcje Legendre'a o wskaźnikach nieparzystych

$$X_1 = X_3 = X_5 = \cdots = X_{2n-1} = \cdots = 0$$

a funkcję Legendre'a o wskaznikach parzystych będą

$$X_0 = 1;\quad X_2 = -\frac{1}{2};\quad X_4 = \frac{1.3}{2.4} \cdots X_{2n} = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.4.6\ldots 2n}$$

Różniczkując wyraźnie

$$R = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

względem α, otrzymamy wzór

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = (x - \alpha) R^3$$

Stąd

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial \alpha} = (x - \alpha) R \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Z drugiej zaś strony, różniczkując szereg

$$R = 1 + X_1 \alpha + X_2 \alpha^2 + \cdots + X_n \alpha^n + \ldots \quad (18)$$

względem α, dostaniemy

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = X_1 + 2X_2 \alpha + \cdots + n X_n \alpha^{n-1} + \ldots \quad (19)$$

Zestawiając wzory (17), (18), (19), możemy napisać tożsamość względem α

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)(X_1 + 2X_2 \alpha + \cdots + n X_n \alpha^{n-1} + \cdots) =$$
$$= (x - \alpha)(1 + X_1 \alpha + X_2 \alpha^2 + \cdots + X_n \alpha^n + \cdots)$$

Zestawiając spółczynniki wyrazów tej tożsamości zawierających α^n, otrzymamy wzór ogólny

$$(n+1) X_{n+1} - (2n+1) x X_n + n X_{n-1} = 0 \ldots \quad (20)$$

Wzór ten stanowi związek pomiędzy funkcjami Legendr'a o trzech wskaźnikach kolejnych $n+1$, n, $n-1$.

Posługując się wzorem (20), możemy znaleść wyrażenia na funkcje Legendre'a w postaci wielomianów.

W samej rzeczy, zakładając we wzorze (20) kolejno $n = 0$, 1, 2, 3, 4,... otrzymamy wzory następujące:

$$X_1 = x$$
$$2X_2 - 3x X_1 + 1 = 0$$
$$3X_3 - 5x X_2 + 2X_1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (21)$$
$$4X_4 - 7x X_3 + 3X_2 = 0$$

i t. d.

Z tych równań otrzymamy wyrażenie na funkcje Legendre'a w postaci wielomianów.

$$X_1 = x;\quad X_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2};\quad X_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x;\quad X_4 = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$$

i t. d.

Rozwiązując równania (21) względem x, x^2, x^3, x^4 i t. d., otrzymamy wzory.

$$x = X_1$$
$$x^2 = \frac{2}{3} X_2 + \frac{1}{3}$$
$$x^3 = \frac{2}{5} X_3 + \frac{3}{5} X_1$$
$$x^4 = \frac{8}{35} X_4 + \frac{4}{7} X_2 + \frac{1}{5}$$

Wogóle dla n parzystego zachodzi wzór.

$$x^n = a_n X_n + a_{n-2} X_{n-2} + a_{n-4} X_{n-4} + \cdots + a_2 X_2,$$

a dla n nieparzystego zachodzi wzór

$$x^n = a_n X_n + a_{n-2} X_{n-2} + a_{n-4} X_{n-4} + \cdots + a_1 X_1$$

Stąd wnosimy, że każdą funkcję całkowitą postaci

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n$$

można przedstawić w postaci wielomiana algebraicznego, linjowego względem funkcji Legendre'a X_1, X_2 ... X_n.

Przejdziemy teraz do rozważania podstawowych właściwości funkcyj Legendre'a.

1. Pierwiastki funkcji Lerendue'a X_n są liczbami rzeczywistemi, zawartemi w przedziale $(-1, +1)$.

Istotnie, równanie

$$(x^2 - 1)^n = 0$$

posiada n pierwiastków równych $+1$ i n pierwiastków równych -1.

W analizie algebraicznej udowodniono, że jeżeli wszystkie pierwiastki równania algebraicznego są liczbami rzeczywistemi, wówczas pierwiastki równania, otrzymanego po różniczkowaniu, również będą liczbami rzeczywistemi, zawartemi pomiędzy największym a najmniejszym pierwiastkiem równania pierwotnego.

Ponieważ

$$X_n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1.2.3...n} \frac{d^n [(1-x^2)^n]}{dx^n},$$

przeto wszystkie pierwiastki równania

$$X_n = 0$$

będą liczbami rzeczywistemi, zawartemi w przedziale $(-1, +1)$.

2. Funkcja Legendre'a X_n czyni zadość równaniu różniczkowemu linjowemu drugiego rzędu

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + n(n+1)u = 0.$$

Aby tego dowieść, zróżniczkujmy wyrażenie

$$R = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

dwa razy względem x i α.

Otrzymamy

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \alpha R^3; \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = 3\alpha R^2 \frac{\partial R}{\partial x} = 3\alpha^2 R^5; \frac{\partial R}{\partial \alpha} = (x-\alpha) R^3;$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} = -R^3 + 3(x-\alpha) R^2 \frac{\partial R}{\partial \alpha} = -R^3 + 3(x-\alpha)^2 R^5$$

Z tych wzorów wypływają równania

$$2x\frac{\partial R}{\partial x} - 2\alpha\frac{\partial R}{\partial \alpha} = 2\alpha^2 R^3$$

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial R}{\partial x} + \alpha^2\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} + 2\alpha\frac{\partial R}{\partial \alpha} = 0,$$

czyli

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial R}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\alpha^2 \cdot \frac{\partial R}{\partial \alpha}\right] = 0 \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Z drugiej zaś strony mamy

$$\frac{\partial R}{\partial x} = X_1 + 2X_2\alpha + \cdots + (n+1) X_{n+1} \alpha^n + \cdots$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = \alpha\frac{dX_1}{dx} + \alpha^2\frac{dX_2}{dx} + \cdots + \alpha^n\frac{dX_n}{dx} + \cdots$$

Podstawiając ostatnie wzory do równania (23), otrzymamy natychmiast wzór

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}\right] + n(n+1)X_n = 0,$$

czyli

$$(1-x^2)\frac{d^2X_n}{dx^2} - 2x\frac{dX_n}{dx} + n(n+1)X_n = 0$$

Wzór ostatni wskazuje, że funkcja Legendre'a X_n rzeczywiście czyni zadość równaniu różniczkowemu (22).

Ćwiczenia. 1. Rozwińmy funkcję

$$f(y) = y$$

na szereg Lagrang'a, mając dane równanie

$$y = xa^y + 1.$$

Odp. $y = 1 + a \cdot \frac{x}{1} + 2a^2 \lg a \frac{x^2}{1.2} + 3^2 a^3 \lg^2 a \frac{x^3}{1.2.3} +$

$$+ 4^3 a^4 \lg^3 a \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

2. Rozwińmy funkcję

$$f(y)=y$$

na szereg Lagrange'a, mając dane równanie

$$x\lg y+a-y=0$$

Odp.: $y=a+\lg b\cdot\frac{x}{1}+\frac{2\lg b}{b}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\frac{3\lg a}{a^2}(2-\lg b)\cdot\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots$

2. Rozwińmy funkcję

$$f(y)=y$$

na szereg Lagrange'a według potęg x, mając dane równanie

$$xy^n-y+a=0$$

Odp.:

$$y=a\left[1+a^{n-1}x+2na^{2n-2}\cdot\frac{x^2}{1.2}+3n(3n-1)\cdot a^{3n-3}\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots\right]$$

4. Rozwińmy funkcję

$$f(y)=y^n$$

na szereg Lagrange'a według potęg x, mając dane równanie

$$y^2-5y+6=0$$

Odp.:

$$y^n=\left(\frac{6}{5}\right)^n\left[1+n\cdot\frac{6}{5^2}+\frac{n(n+3)}{1.2}\cdot\frac{6^2}{5^4}+\frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}\cdot\frac{6^3}{5^6}+\cdots\right]$$

5. Rozwińmy funkcję

$$f(y)=y^n$$

na szereg Lagrange'a według potęg $\frac{x}{2}$, mając dane równanie

$$y^2-\frac{2}{x}y+1=0$$

Odp.: $y^n=\left(\frac{x}{2}\right)^n\left[1+n\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{n(n+3)}{1.2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^4+\cdots\right]$

Rozwinąć funkcję

$$f(y)=\operatorname{Cos} y$$

na szereg Lagrange'a weług potęg e, mając dane równanie Keplera

$$\operatorname{Cos} y=\cos z+\frac{e}{2}(\cos 2z-1)+\frac{e^2}{1.2.2^2}(3\cos 3z-3\cos z)+$$

$$+\frac{e^3}{1.2.3.2^3}(4^2.\cos 4z-4.2^2\cos 2z)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{e^k}{1.2.3\ldots k.2^k}\Big\{(k+1)^{k-1}\cos[(k+1)z]-(k+1)(k-1)^{k-1}\cos[(k-1)z]+$$

$$+\frac{(k+1)k}{1.2}(k-3)^{k-1}\cos[(k-3)z]+\cdots\Big\}+\cdots$$

§ **3. Liczby Bernoulli'ego i Euler'a.** Niechaj będzie dana funkcja

$$y=\frac{xe^x}{e^x-1}$$

Rozwińmy tę funkcje na szereg potęgowy. Otrzymamy

$$\frac{xe^x}{e^x-1}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

czyli

$$xe^x=(e^x-1)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots)$$

Biorąc pod uwagę, że

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\cdots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\cdots,$$

będziemy mieli

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots=\left(1+\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{1.2.3}+\cdots\right)(a_0+a_1x+a_2x+\cdots+a_nx^n+\cdots)$$

Porównywując spółczynniki przy jednakowych potęgach zmiennej x, dostaniemy.

$$a_0=1;$$

$$a_1=\frac{1}{2};\quad a_2=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1.2}$$

$$a_3=0;\quad a_4=-\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{1.2.3.4}$$

$$a_5=0;\quad a_6=\frac{1}{42}\cdot\frac{1}{1.2.3.4.5.6}$$

$$a_7=0;\quad a_8=-\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots8}$$

$$a_9=0;\quad a_{10}=\frac{5}{66}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots10}$$

$$a_{11}=0;\quad a_{12}=-\frac{691}{2730}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots12}$$

$$a_{13}=0;\quad a_{14}=\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots14}$$

$$a_{15}=0$$

i t. d.

Oznaczamy.

$a_0 = 1 = B_0$

$a_1 = \frac{1}{2} = B_1$

1.2. $a_2 = \frac{1}{6} = B_2$

1.2.3.4. $a_4 = -\frac{1}{30} B_4 \qquad B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = B_{11} = \cdots = B_{2k-1} = 0$

1.2.3.4.5.6. $a_6 = \frac{1}{42} = B_6$

1.2.3.4.5.6.7.8. $a_8 = -\frac{1}{30} = B_8$

1.2.3.4.5.6.7.8.9.10. $a_{10} = \frac{5}{66} = B_{10}$

1.2,3.4.... 10.11.12. $a_{12} = -\frac{691}{2730} = B_{12}$

1.2.3.4.... 11.12.13.14. $a_{14} = \frac{7}{6} = B_{14}$

i t. d.

Liczby B_0, B_1, B_2, B_3 ... nazywami liczbami Bernoulli'ego Liczby te odgrywają bardzo ważną rolę w Analizie Matematycznej.

Związek pomiędzy liczbami Bernoulli'ego można napisać w następującej postaci symbolicznej:

$$(B+1)^k - B^k = k, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

gdzie czynnik B^k należy zastąpić przez B_k.

Zakładając w tym wzorze kolejno $k = 1, 2, 3\ldots$, otrzymamy po rozwiązaniu równań wszystkie liczby Bernoulli'ego.

A więc możemy napisać

$$\frac{xe}{e^x - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1} x + \frac{B_2}{1.2} x^2 + \frac{B_3}{1.2.3} x^3 + \cdots + \frac{B_n}{1.2.3\ldots n} x^n + \cdots,$$

czyli też w postaci symbolicznej

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = e^{Bx},$$

przyczem w rozwinięciu funkcji e^{Bx} czynniki B^k należy zastąpić przez B_k

Jako przykład przytoczmy wzór na sumę potęg całkowitych liczb naturalnych, wyrażoną przez liczby Bernoulli'ego

Rozważmy w tym celu funkcję

$$y = 1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{(n-1)x}$$

Pochodna k-go rzędu tej funkcji względem x będzie

$$y^{(k)} = 1^k \cdot e^x + 2^k \cdot e^{2x} + 3^k e^{3x} + \ldots + (n-1)^k e^{(n-1)x}$$

Dla $x = 0$ będzie

$$y_0^{(k)} = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + (n-1)^k = S_n^{(k)}$$

Z drugiej zaś strony możemy napisoć

$$y = \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1} = \frac{e^{nx} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} = \left[\frac{nx + \frac{n^2x^2}{1.2} + \cdots}{x}\right] \cdot \left[1 + \frac{B_0 x}{1} + \frac{B_1 x^2}{1.2} + \frac{B_2 x^4}{1.2.3.4} + \cdots\right] =$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_k x^k + \cdots,$$

gdzie

$$\alpha_k = \frac{n^{k+1}}{1.2.3\ldots(k+1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n^k}{1.2.3\ldots k} + \frac{B_1}{1.2} \cdot \frac{n^{k-1}}{1.2.3\ldots(k-1)} + \cdots$$

A więc

$$S_n^k = y_0^k = 1.2.3\ldots k.\alpha_k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{2} n^k + \frac{B_1}{1.2} \cdot k.n^{k-1} + \frac{B_2}{1.2.3.4} k(k-1)(k-2)n^{k-3} + \cdots \quad \ldots \quad (25)$$

czyli też w postaci symbolicznej

$$S_n^{(k)} = \frac{(n+B)^{k+1} - B^{k+1}}{k+1}$$

Zakładając w tym wzorze kolejno $k = 1, 2, 3, 4, 5$ i t. d., otrzymamy

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12} = \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1)$$

t t. d.

Ze wzoru (25) wypływa bezpośrednio znany już wzór

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n^k}{n^{k+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}\right]=\frac{1}{k+1}$$

Niechaj będzie funkcja

$$y=\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\frac{2e^x}{e^{2x}+1}$$

Rozwińmy tę funkcję na szereg potęgowy.

Otrzymamy

$$\frac{2e^x}{e^{2x}+1}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

czyli

$$2e^x=(e^{2x}+1)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots),$$

czyli

$$\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots\right)+\left(1+\frac{x}{1}+\frac{2x^2}{1.2}+\frac{4x^3}{1.2.3}+\cdots\right)\cdot(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\cdots)$$

Porównywując spółczynniki przy jednakowych potęgach x, dostaniemy

$a_0=1$ $\quad a_2=-\frac{1}{1.2}$ $\quad a_9=0$ $\quad a_{10}=-\frac{50521}{1.2.3\ldots9.10}$

$a_1=0$ $\quad a_{11}=0$

$a_3=0$ $\quad a_4=\frac{5}{1.2.3.4}$ $\quad a_{13}=0$ $\quad a_{12}=\frac{2702765}{1.2.3\ldots11.12}$

$a_5=0$

$a_7=0$ $\quad a_6=-\frac{61}{1.2.3.4.5.6}$

$a_8=\frac{1365}{1.2.3.4.5.6.7.8}$ i t. d.

Oznaczamy.

$a_5=1=E_5$

$1.2.\ a_2=-1=E_2$

$1.2.3.4.\ a_4=5=E_4$

$1.2.3.4.5.6.\ a_6=-61=E_6$

$1.2.3.4\ldots8\ a_8=1365=E_8$

$1.2.3.4\ldots10\ a_{10}=-50521=E_{10}$

$1.2.3.4\ldots12\ a_{12}=2702765=E_{12}$

I t. d.

$$a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{2k-1}=E_1=E_3=E_5=\cdots=E_{2k-1}=0$$

Liczby $E_0, E_1, E_2, E_3\cdots$ nazywamy liczbami Euler'a.

Związek pomiędzy liczbami Euler'a można przedstawić w następującej postaci symbolicznej:

$$(E+1)^k+(E-1)^k=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Zakładając w tym wzorze kolejno $k=1,2\,3\,\cdots$ otrzymamy wszystkie liczby Euler'a.

Możemy więc napisać.

$$\frac{2}{e^x+e^{-x}}=E_0+\frac{E_1}{1}x+\frac{E_2}{1.2}x^2+\frac{E_3}{1.2.3}x^3+\cdots\frac{E_n}{1.2.3\ldots n}x^n+\cdots,$$

czyli też w postaci symbolicznej

$$\frac{2}{e^x+e^{-x}}=e^{Ex}$$

Pomiędzy liczbami Barnouill'ego a liczbami Euler'a zachodzą pewne związki, a mianowicie

$$\frac{4xe^{4x}}{e^{4x}-1}(e^{-x}-e^{-3x})=\frac{4x}{e^x+e^{-x}}$$

A zatem

$$e^{(4B-1)x}-e^{(4B-3)x}=2xe^{Ex}$$

Przeto

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{(4B-1)^k-(4B-3)^k}{k}x^k=2\sum_{k=2}^{k=n}E^{k-1}x^k$$

Wobec tego

$$E_{k-1}=\frac{(4B-1)^k-(4B-3)^k}{2k}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Dalej

$$\frac{4xe^{4x}}{e^{4x}-1}-\frac{2xe^{2x}}{e^{2x}-1}=\frac{2xe^x}{e^x+e^{-x}}$$

czyli

$$e^{4Bx}-e^{2Bx}=xe^{(E+1)x}$$

A zatem

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}B^kx^k=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{k(E+1)^{k-1}}{2^k(2^k-1)}x^k$$

Przeto

$$B_k=\frac{k.(E+1)^{k-1}}{2^k(2^k-1)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

We wzorach (27) i (28) czynniki E^k i B^k należy zastąpić odpowiednio liczbami E_k, B_k

Rozdział XVII.

Rozwiązywanie wzorów nieoznaczonych

§ 1. Wzory nieoznaczone postaci $\frac{0}{0}$. Twierdzenie l'Hospital'a.

Wyobraźmy sobie funkcję

$$F(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

przypuśćmy, że dla $x=a$ obie funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ stają się zerem. Wtedy wartość funkcji $F(x)$ dla $x=a$ przybiera postać $\frac{0}{0}$, która nie przedstawia wartości oznaczonej.

Wartością prawdziwą funkcji $F(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ dla $x=a$ nazywamy granicę tej funkcji przy $x=a$. Oznaczamy to, pisząc

$$[F(x)]_{x=a}=\lim_{x=a}\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]=\lim_{h=o}\left[\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}\right]$$

A więc zagadnienie o rozwiązaniu nieoznaczoności $\frac{0}{0}$ sprowadza się do wyznaczania granicy funkcji.

W tym paragrafie wskażemy metodę, która często może być użyteczną przy rozwiązaniu nieoznaczoności $\frac{0}{0}$.

Metoda ta oparta jest bezpośrednio na twierdzeniu l'Hospital'a:

Twierdzenie l'Hospital'a. Jeżeli funkcja

$$F(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

dla $x=a$ przybiera postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$, a nadto pochodne funkcyj $f(x)$ i $\varphi(x)$ różnych rzędów do rzędu $k-1$ włącznie dla $x=a$ są równe zeru, t. j. jeżeli

$$f(a)=0;\ f'(a)=0;\ f''(a)=0\ \ldots\ f^{(k-1)}(a)=0$$
$$\varphi(a)=0;\ \varphi'(a)=0;\ \varphi''(a)=0\ \ldots\ \varphi^{(k-1)}(a)=0,$$

Wówczas wartość prawdziwa funkcji $F(x)$ dla $x=a$

$$[F(x)]_{x=a}=\frac{f^{(k)}(a)}{\varphi^{(k)}(a)}$$

Dowód. Posługując się wzorem Taylora, możemy napisać

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=\frac{f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\cdots}{\varphi(a)+\frac{h}{1}\varphi'(a)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(a)+\cdots}$$

$$=\frac{\cdots+\frac{h^{k-1}}{1.2.3\ldots(k-1)}f^{(k-1)}(a)+\frac{h^k}{1.2.3\ldots k}f^{(k)}(a+\theta h)}{\cdots+\frac{h^{k-1}}{1.2.3\ldots(k-1)}\varphi^{(k-1)}(a)+\frac{h^k}{1.2.3\ldots k}\varphi^{(k)}(a+\theta_1 h)},$$

gdzie

$$0<\theta<1;\qquad 0<\theta_1<1.$$

Ponieważ

$$f(a)=f'(a)=f''(a)=\cdots f^{(k-1)}(a)=0$$
$$\varphi(a)=\varphi'(a)=\varphi''(a)=\cdots=\varphi^{(k-1)}(a)=0,$$

przeto

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=\frac{f^{(k)}(a+\theta h)}{\varphi^{(k)}(a+\theta h)}$$

Stąd wnosimy, że wartość prawdziwa funkcji $F(x)$ dla $x=a$ będzie

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\lim_{h=o}\left[\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}\right]=\frac{f^{(k)}(a)}{\varphi^{(k)}(a)}$$

A na tem właśnie polega twierdzenie l'Hospital'a, o którego dowód chodziło.

W przypadkach szczególnych, gdy $k=1, 2, 3$ i t. d., będziemy mieli odpowiednio:

$$k=1\quad f(a)=0;\ \varphi(a)=0\qquad \left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

$$k=2\quad \begin{cases} f(a)=0; & \varphi(a)=0 \\ f'(a)=0; & \varphi'(a)=0 \end{cases}\qquad \left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{f''(a)}{\varphi''(a)}$$

$$k=3\quad \begin{cases} f(a)=0; & \varphi(a)=0 \\ f'(a)=0; & \varphi'(a)=0 \\ f''(a)=0; & \varphi''(a)=0 \end{cases}\qquad \left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{f'''(a)}{\varphi'''(a)}$$

i t. d.

Łatwo udowodnić, że twierdzenie l'Hospital'a zachodzi również w tym przypadku, gdy $a=\infty$. Istotnie, zakładając $x=\frac{1}{z}$, będziemy mieli

$$f(x)=f\left(\frac{1}{z}\right)=f_1(z)$$

$$\varphi(x)=\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=\varphi_1(z)$$

Przeto

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f_1(z)}{\varphi_1(z)}$$

Dla $x=\infty$; $z=0$. W myśl twierdzenia l'Hospital'a

$$\left[\frac{f_1(z)}{\varphi_1(z)}\right]_{z=0}=\frac{f'_1(0)}{\varphi'_1(0)}=\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=\infty}$$

Biorąc zaś pod uwagę, że

$$f'_1(z)=-\frac{1}{z^2}f'\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\varphi'_1(z)=-\frac{1}{z^2}\varphi'\left(\frac{1}{z}\right),$$

możemy napisać

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=\infty}$$

Przykłady 1. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=\frac{1-\cos x}{x^2} \quad \text{dla} \quad x=0$$

W myśl twierdzenia l'Hospital'a

$$\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\right]_{x=0}=\left[\frac{\sin x}{2x}\right]_{x=0}=\left[\frac{\cos x}{2}\right]_{x=0}=\frac{1}{2}$$

2. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x} \quad \text{dla} \quad x=0.$$

W myśl twierdzenia l'Hospital'a

$$\left[\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}\right]_{x=0}=\left[\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{1-\cos x}\right]_{x=0}$$

Ponieważ

$$\left[\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{1-\cos x}\right]_{x=0}=\left[\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right]_{x=0}=3,$$

przeto wartość prawdziwa funkcji

$$\left[\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}\right]_{x=0}=3.$$

3. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=\frac{e^x-1}{x^n} \quad \text{dla } x=0.$$

W myśl twierdzenia l'Hospital'a będziemy mieli

$$\left[\frac{e^x-1}{x^n}\right]_{x=0}=\left[\frac{e^x}{nx^{n-1}}\right]_{x=0}=\infty$$

4. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x} \quad \text{dla } x=0.$$

W myśl twierdzenia l'Hospital'a będziemy mieli

$$\left[\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}\right]_{x=0}=\left[\frac{2xe^{x^2}}{\sin x}\right]_{x=0}=\left[\frac{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}{\cos x}\right]_{x=0}=2.$$

Rozwiązywania naoznaczoności $\frac{0}{0}$ w niektórych przypadkach można bardzo łatwo dokonać, rozwijając funkcje w szeregi nieskończone.

W samej rzeczy, możemy napisać

$$f(a+h)=a_0h^n+a_1h^{n+1}+a_2h^{n+2}+\cdots$$

$$\varphi(a+h)=b_0h^m+b_1h^{m+1}+b_2h^{m+2}+\cdots$$

Wtedy

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\lim_{h=0}\left[\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}\right]=\lim_{h=0}\left[\frac{a_0h^n+a_1h^{n+1}+a_2h^{n+2}+\cdots}{b_0h^m+b_1h^{m+1}+b_2h^{m+2}+\cdots}\right]$$

W tym przypadku gdy $n>m$

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=0.$$

Jeżeli $n=m$, to

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{a_0}{b_0}$$

Jeżeli nareszcie $n < m$, wówczas

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a} = \infty.$$

Przykłady. 1. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \text{ dla } x = 0$$

Bęziemy mieli

$$\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\right]_{x=0} = \lim_{h=0}\left[\frac{1-\cos h}{h^2}\right] =$$

$$= \lim_{h=0}\left[\frac{\frac{h^2}{1.2} - \frac{h^4}{1.2.3.4} - \frac{h^6}{1.2.3.4.5.6} - \cdots}{h^2}\right] = \frac{1}{2}$$

2. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$\frac{x - \sin x}{x^2(1-e^x)} \qquad \text{dla } x = 0.$$

Możemy napisać

$$\left[\frac{x-\sin x}{x^2(1-e^x)}\right]_{x=0} = \lim_{h=0}\left[\frac{h-\sin h}{h^2(1-e^h)}\right] =$$

$$= \lim_{h=0}\left[\frac{\frac{1}{1.2.3} - \frac{h^2}{1.2\,3.4.5} = \cdots}{-1 - \frac{h}{1.2} - \frac{h^2}{1.2.3} - \cdots}\right] = -\frac{1}{6}$$

Ćwiczenia. Wyznaczyć wartości prawdziwe funkcyj

1. $\dfrac{6x^2-5x+1}{8x^2-2x-1}$ $x=\dfrac{1}{2}$ Odp. $\dfrac{1}{6}$
2. $\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$ $x=1; x=2$ Odp. $\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{5}$
3. $\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-x^2-5x-3}$ $x=3$ Odp. $\dfrac{1}{4}$
4. $\dfrac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{2x^3-3ax^2+a^3}$ $x=a$ Odp. $\dfrac{2}{3}$
5. $\dfrac{x^5-10x+8}{x^3-6x+4}$ $x=2$ Odp. $6\ \dfrac{2}{3}$
6. $\dfrac{x^3+4x^2-2x-8}{x^4-8x^2+12}$ $x=\pm\sqrt{2}$ Odp. $\dfrac{-4\mp\sqrt{2}}{4}$

7. $\dfrac{5x^4-6x^2+1}{5x^4+4x^2-1}$ $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ Odp. $-\dfrac{2}{3}$
8. $\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ $x=0$ Odp. $\dfrac{1}{2}$
9. $\dfrac{1-\sqrt[n]{a^n-x^n}}{x^n}$ $x=0$ Odp. $\dfrac{1}{na^{n-1}}$
10. $\dfrac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$ $x=1$ Odp. $\dfrac{16}{9}$
11. $\dfrac{x}{e^x+e^{-x}}$ $x=0$ Odp. $\dfrac{1}{2}$
12. $\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}$ $x=0$ Odp. 1.
13. $\dfrac{a^x-1}{xa^x}$ $x=0$ Odp. lga
14. $\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ $x=0$ Odp. ∞
15. $\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$ $x=0$ Odp. $\dfrac{1}{P}$
16. $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin 2x-\cos 2x-1}$ $x=\dfrac{\pi}{4}$ Odp. $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$
17. $\dfrac{\operatorname{cotg}x+\operatorname{cosec}x-1}{\operatorname{cotg}x-\operatorname{cosec}x+1}$ $x=\dfrac{\pi}{2}$ Odp. 1.
18. $\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$ $x=0$ Odp. $\dfrac{1}{2}$
19. $\dfrac{a^{\lg x}-x}{\lg x}$ $x=1$ Odp. $\lg a-1$.
20. $\dfrac{\operatorname{arc\,cos}\,(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}$ $x=0$ Odp. 1.
21. $\dfrac{xe^{2x}+e^{2x}-x+1}{e^{2x}-1.}$ $x=0$ Odp. -1.
22. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{1-x-\lg(e-x)}$ $x=0$ Odp. $\dfrac{2e}{1-e}$
23. $\dfrac{\lg x}{\sqrt{x^2-1}}$ $x=1$ Odp. 0.
24. $\dfrac{\lg(x^2-3)}{x^2+3x-10}$ $x=2$ Odp. $\dfrac{4}{7}$

25. $\dfrac{\lg(a+x)-\lg a}{x}$ $x=0$ Odp. $\dfrac{1}{a}$

26. $\dfrac{x^x-1}{x\lg x}$ $x=0$ Odp. 1.

27. $\dfrac{x^x-x}{\lg x-x+1}$ $x=1$ Odp. -2.

28. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{\lg(1+x)}$ $x=0$ Odp. 2.

29. $\dfrac{e^{ax}-e^{ap}}{(x-p)^n}$ $x=p$ Odp. ∞

30. $\dfrac{1-x}{\operatorname{cotg}\dfrac{\pi x}{2}}$ $x=1$ Odp. $\dfrac{2}{\pi}$

31. $\dfrac{\sin x}{\operatorname{arctg} x}$ $x=0$ Odp. 1.

32. $\dfrac{\sin nx}{\sin x}$ $x=0$ Qdp. n.

33. $\dfrac{2\sin x-1}{\cos 3x}$ $x=\dfrac{\pi}{6}$ Odp. $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

34. $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ $x=0$ Odp. 0.

35. $\dfrac{\cos x-\sin x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ $x=\dfrac{\pi}{4}$ Odp. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

36. $\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$ $x=0$ Odp. $\dfrac{1}{3}$

37. $\dfrac{\sin^2 x\cos x}{1-\cos x}$ $x=0$ Odp. 2.

38. $\dfrac{\operatorname{tg}\pi x-\pi x}{2x^2\operatorname{tg}\pi x}$ $x=0$ Odp. $\dfrac{\pi^2}{6}$

39. $\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{2e^x-2-2x}$ $x=0$ Odp. 0.

40. $\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$ $x=\dfrac{\pi}{4}$ Odp. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

41. $\dfrac{\lg\cos x}{x}$ $x=0$ Odp. 0.

42. $\dfrac{x^3\cos x+\sin^3 x}{x^2\sin x}$ $x=0$ Odp. 2.

43. $\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$ $x=0$ Odp. 1.

44. $\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$ $x=0$ Odp. -2

45. $\dfrac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2\cos x}$ $x=0$ Odp. 4.

46. $\dfrac{lg\cos x}{\sin^2 x}$ $x=0$ Odp. $-\dfrac{1}{2}$

47. $\dfrac{\lg\sin x-\lg x}{1-\cos x}$ $x-0$ Odp. $-\dfrac{1}{3}$

48. $\dfrac{\cos ax-\cos an}{n^2-x^2}$ $x=n$ Odp. $\dfrac{a\sin an}{2n}$

49. $\dfrac{1-\cos x}{x\lg(1+x)}$ $x=0$ Odp. $\dfrac{1}{2}$

50. $\dfrac{e^{mx}-e^{ma}}{(x-a)^n}$ $x=a$ Odp. $\dfrac{m^n\cdot e^{ma}}{1.2.3\ldots n}$

51. $\dfrac{x^m-x^{m+n}}{1-x^{2p}}$ $x=1$ Odp. $\dfrac{n}{2p}$

52. $\dfrac{\cos ax-\cos an}{(n^2-x^2)^m}$ $x=n$ Odp. $(-1)^m\dfrac{a^m\cos(an+\frac{1}{2}mx)}{(2n)^m.\,1.2.3\ldots m}$

§ 2. Wzory nieoznaczone postaci $\frac{\infty}{\infty}$; $0.\infty$; $\infty-\infty$.

Rozważmy teraz wzory, przybierające dla wartości szczególnych zmiennej niezależnej x postać nieoznaczona $\frac{\infty}{\infty}$. Metoda rozwiązania nieoznaczności $\frac{\infty}{\infty}$ oparta jest bezpośrednio na twierdzeniu l'Hospital'a, udowodnionem w poprzednim paragtafie.

Niechaj

$$F(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

oznacza pewną funkcję zmiennej niezależnej x, przybierającą dla $x=a$ wartość nieoznaczoną $\frac{\infty}{\infty}$

Możemy napisać

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\left[\frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\right]_{x=a}=A \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Ponieważ

$$f(a)=\infty;\quad \varphi(a)=\infty,$$

przeto

$$\frac{1}{f(a)}=\frac{1}{\varphi(a)}=0.$$

A zatem w myśl twierdzenia l'Hospital'a będziemy mieli

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\left[\frac{\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}}{\frac{f'(x)}{f(x)^2}}\right]_{x=a}=\left\{\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]^2_{x=a}\cdot\left[\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\right]_{x=a}\right\},$$

czyli

$$A=A^2\left[\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\right]_{x=a}$$

Jeżeli liczba A nie równa się zeru i nieskończoności, to

$$A=\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

Zestawiając wzory (1) i (2) otrzymamy wzór

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}\quad\ldots\ldots\quad(3)$$

W tym przypadku, gdy

$$f'(a)=\infty;\quad f''(a)=\infty\cdots f^{(k-1)}(a)=\infty$$
$$\varphi'(a)=\infty;\quad \varphi''(a)=\infty\cdots\varphi^{(k-1)}(a)=\infty,$$

wówczas

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\frac{f^{(k)}(a)}{\varphi^{(k)}(a)}$$

Dajmy na to, że $A=0$.

W takim razie możemy napisać

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}+1\right]_{x=a}=\left[\frac{f(x)+\varphi(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=1\cdot\quad\ldots\quad(4)$$

Z drugiej zaś strony w myśl wzoru (3) będziemy mieli

$$\left[\frac{f(x)+\varphi(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\left[\frac{f'(x)+\varphi'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}=1+\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}\quad(5)$$

Zestawiając wzory (4) i (5), otrzymujemy

$$\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}=0$$

czyli

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}$$

Przypuśćmy nareszcie, że $A=\infty$.

W takim razie

$$\frac{1}{A}=\left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x=a}=0$$

Wobec tego

$$\left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]=\left[\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\right]=0.$$

A zatem

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a}=\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}$$

Przykłady. 1. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=\frac{\lg x}{x^n}\qquad n>0$$

przy $x=\infty$

Będziemy mieli

$$\left[\frac{\lg x}{x^n}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{1}{nx^n}\right]_{x=\infty}=0$$

2. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=\frac{x^n}{e^x}$$

przy $x=\infty$

Będziemy mieii

$$\left[\frac{x^n}{e^x}\right]_{x=0}=\left[\frac{nx^{n-1}}{e^x}\right]_{x=0}=\left[\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}\right]_{x=0}=\cdots=\left[\frac{n(n-1)(n-2)..3.2.1}{e^x}\right]_{x=0}=0$$

3. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=\frac{\lg x}{\operatorname{cotg} x}$$

przy $x=0$

Będziemy mieli

$$\left[\frac{\lg x}{\operatorname{cotg} x}\right]_{x=0}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right]_{x=0}=\left[-\frac{\sin^2 x}{x}\right]_{x=0}=\left[-\frac{2\sin x\cos x}{1}\right]_{x=0}=0$$

4. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=\frac{\operatorname{lgtg} x}{\operatorname{lgtg} 2x}$$

dla $x=0$

Będziemy mieli

$$\left[\frac{\operatorname{lgtg} x}{\operatorname{lgtg} 2x}\right]_x=\left[\frac{\frac{1}{\sin x\cos x}}{\frac{2}{\sin 2x\cos 2x}}\right]_{x=0}=\left[\frac{\sin 2x\cos x}{2\sin x\cos x}\right]_{x=0}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\left[\frac{\sin 2x\cos 2x}{2\sin x\cos x}\right]_{x=0}=\left[\frac{\sin 4x}{2\sin 2x}\right]_{x=0}=\left[\frac{\cos 4x}{\cos 2x}\right]_{x=}=1,$$

mamy

$$\left[\frac{\operatorname{lgtg} x}{\operatorname{lgtg} 2x}\right]_{x=0}=1,$$

Niechaj

$$F(x)=f(x)\,.\,\varphi(x)$$

oznacza pewną funkcję zmiennej niezależnej x. Dajmy na to, że $f(x)$ i $\varphi(x)$ dla wartości szczególnej $x=a$ przybierają wartości następujące:

$$1)\quad f(a)=0;\quad \varphi(a)=\infty,$$

lub

$$2)\quad f(a)=\infty;\quad \varphi(a)=0$$

Wówczas funkcja $F(x)$ dla $x=a$ przybiera postać nieoznaczoną.

Łatwo spostrzec, że rozwiązywanie nieoznaczoności $0.\infty$ sprowadza się do rozwiązywania nieoznaczoności $\frac{\infty}{\infty}$, lub $\frac{0}{0}$

W samej rzeczy, możemy napisać

$$F(x)=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

A zatem

$$\left[F(x)\right]_{x=a}=\left[\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}\right]_{x=a}$$

Jeżeli

$$f(a)=0;\quad \varphi(a)=\infty,$$

to nieoznaczoność $F(a)=0.\infty$ sprowadza się do nieoznaczoności $\frac{\infty}{\infty}$

Jeżeli zaś

$$f(a)=\infty;\quad \varphi(a)=0,$$

wówczas nieoznaczoność $F(a)=0.\infty$ sprowadza się do nieoznaczoności $\frac{0}{0}$.

Tak w pierwszym jak i w drugim przypadku wartość prawdziwą funkcji $F(x)$ dla $x=a$ można znaleźć, posługując się metodą, opartą na twierdzeniu l'Hospital'a.

Przykłady. 1. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=(a^{\frac{1}{x}}-1)$$

dla $x=\infty$

Będziemy mieli

$$\left[(a^{\frac{1}{x}}-1)\right]_{x=\infty}=\left[\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right]_{x=\infty}=\left]a^{\frac{1}{x}}\cdot\lg a\right]_{x=\infty}=\lg a$$

2. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=2^x\operatorname{tg}\frac{a}{2^x}$$

dla $x=\infty$

Załóżmy $\frac{a}{2^x}=z$

Wtedy

$$\left[2^x\,.\operatorname{tg}\frac{a}{2^x}\right]_{x=\infty}=\left[a.\frac{\operatorname{tg} z}{z}\right]_{z=0}=\left[a.\frac{1}{\cos^2 z}\right]_{z=0}=a$$

3. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=\arcsin x\,.\operatorname{cotg} x$$

dla $x=0$.

Będziemy mieli

$$[\arcsin x\,.\operatorname{cotg} x]_{x=0}=\left[\frac{\arcsin x}{\operatorname{tg} x}\right]_{x=0}=\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}}\right]_{x=0}=1$$

4. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$$

dla $x=1$.

Będziemy mieli

$$\left[(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right]_{x=1}=\left[\frac{x-1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}\right]_{x=1}=\left[-\frac{2}{\pi}\sin^2\frac{\pi x}{2}\right]_{x=1}=-\frac{2}{\pi}$$

Niechaj funkcja

$$F(x)=f(x)-\varphi(x)$$

dla $x=a$ przybiera wartość nieoznaczoną $\infty-\infty$

Wartość prawdziwą tej funkcji znajdziemy, posługując się metodą, opartą na twierdzeniu l'Hospital'a

Istotnie, możemy napisać

$$F(x)=f(x)-\varphi(x)=\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot\varphi(x)}}$$

Ponieważ funkcja

$$\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot\varphi(x)}}$$

dla $x=$ przybiera wartość nieoznaczoną $\frac{0}{0}$, przeto wartość prawdziwą funkcji $F(x)$ dla $x=a$ znajdziemy w myśl twierdzenia l'Hospital'a

Przykłady 1. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}.$$

dla $x=0$

Będziemy mieli

$$\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]_{0=x}=\left[\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\right]_{x=0}=\left[\frac{e^x-1}{e^x+x\,e^x-1}\right]_{x=0}-$$

$$=\left[\frac{e^x}{2\,e^x+x\,e^x}\right]_{x=0}=\frac{1}{2}$$

2. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\lg x}$$

dla $x=1$.

Będziemy mieli

$$\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\lg x}\right]_{x=1}=\left[\frac{x\lg x-x+1}{(x-1)\lg x}\right]_{x=1}=\left[\frac{\lg x}{\lg x+1-\frac{1}{x}}\right]_{x=1}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]_{x=1}=\frac{1}{2}$$

3. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}$$

dla $x=0$

Będziemy mieli

$$\left[\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right]_{x=0}=\left[\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right]_{x=0}$$

Wartość prawdziwą ostatniej funkcji znajdziemy, rozwijając ją na szereg nieskończony

Mamy

$$\left[\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right]_{h=0}=\left[\frac{h^2-\sin^2 h}{h^2.\sin^2 h}\right]_{h=0}$$

$$h^2-\sin^2 h=(h+\sin h)(h-\sin h)=\left(\frac{h^3}{1.2.3}-\frac{h^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\right)\cdot$$

$$\cdot\left(2h-\frac{h^3}{1.2.3}+\frac{h^5}{1.2.3.4.5}-\cdots\right)=h^4\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{h^2}{1.2.3.4.5}+\cdots\right)\cdot$$

$$\cdot\left(2-\frac{h^2}{1.2.3}+\frac{h^4}{1.2.3.4.5}-\cdots\right)$$

$$h^2\sin^2 h=h^2\left(\frac{h}{1}-\frac{h^3}{1.2.3}+\cdots\right)^2=h^4\left(1-\frac{h^2}{1.2.3}+\cdots\right)^2$$

Przeto

$$\left[\frac{h^2-\sin^2 h}{h^2\sin^2 h}\right]_{h=0}=\frac{1}{3},$$

czyli

$$\left[\frac{x^2-\sin^2 x}{x_2\sin^2 x}\right]=\frac{1}{3}$$

Ćwiczenia. Znaleźć wartości prawdziwe funkcji

1. $\operatorname{Sec}\frac{\pi x}{2}\cdot \lg\frac{1}{x}$; dla $x=1$ Odp. $\frac{2}{\pi}$

2. $2^x\cdot\operatorname{Sin}\frac{a}{2^x}$ $x=\infty$ Odp. a

3. $\sqrt{a^2-x^2}\ \operatorname{cotg}\ \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ dla $x=a$ Odp. $\frac{4a}{\pi}$

4. $\frac{\pi x-1}{2x^2}+\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ dla $x=0$ Odp. $\frac{\pi^2}{6}$

Uwaga Ponieważ

$$\frac{\pi x-1}{2x^2}+\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}=\frac{1}{1^2+x^2}+\frac{1}{2^2+x^2}+\frac{1}{3^2+x^2}+\cdots$$

przeto dla $x=0$

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

5. $\frac{\pi}{4x}-\frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}$ dla $x=0$ Odp. $\frac{\pi^2}{8}$

Uwaga Ponieważ

$$\frac{\pi}{4x}-\frac{\pi}{2(x\,e^{\pi x}+1)}=\frac{1}{1^2+x^2}+\frac{1}{3^2+x^2}+\frac{1}{5^2+x^2}+\cdots$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

§ **3. Wzory nieoznaczone postaci** 0^0; ∞^0, 1^∞. Niechaj

$$F(x)=[f(x)]^{\varphi(x)}$$

oznacza pewną funkcję zmiennej niezależnej x.

Przypuśćmy, że dla pewnej wartości szczególnej $x=a$ funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ przybierają wartości następujące:

1) $f(a)=0$; $\varphi(a)=0$

2) $f(a)=\infty$; $\varphi(a)=0$

3) $f(a)=1$; $\varphi(a)=\infty$

W tych przypadkach funkcja $F(x)$ przybiera dla $x=a$ odpowiednio następujące wartości nieoznaczone

$$0^0;\ \infty^0;\ 1^\infty.$$

Łatwo spostrzec, że rozwiązanie tych nieoznaczoności da się sprowadzić do rozwiązania $0.\infty$

Istotnie, możemy napisać

$$\lg F(x)=\varphi(x).\lg f(x)$$

A zatem

$$F(x)=e^{\varphi(x).\lg f(x)}$$

Rozwiązanie nieoznaczoności

$$F(a)=0^0;\ F(a)=\infty^0;\ F(a)=1^\infty$$

sprowadza się zatem do wyznaczania wartości prawdziwej funkcji $\varphi(x).\lg f(x)$, która dla $x=a$ w przypadkach 1, 2 i 3 przybiera wartość nieoznaczoną $0.\infty$

Przykłady. 1. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=x^x$$

dla $x=0$

Możemy napisać

$$[x^x]_{x=0}=e^{[x\lg x]_{x=0}}$$

Ponieważ

$$[x\lg x]_{x=0}=\left[\frac{\lg x}{\frac{1}{x}}\right]_{x=0}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right]_{x=0}=[-x]=0,$$

przeto

$$[x^x]_{x=0}=e^0=1.$$

2. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=x^{\sin x}\quad\text{dla } x=0.$$

Możemy napisać

$$[x^{\sin x}]_{x=0}=e^{[\sin x\,.\,\lg x]_{x=0}}$$

Ponieważ

$$[\sin x\cdot\lg x]_{x=0}=\left[\frac{\lg x}{\operatorname{cosec} x}\right]_{x=0}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}\right]_{x=0}=\left[\frac{-\sin^2 x}{x\cos x}\right]_{x=0}=$$

$$=\left[\frac{-2\sin x\cos x}{\cos x-x\sin x}\right]_{x=0}=0,$$

przeto

$$[x^{\sin x}]_{x=0}=e^0=1.$$

3. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x} \quad \text{dla } x=0$$

Możemy napisać

$$\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}\right]_{x=0}=e^{\left[\operatorname{tg}.x\lg\frac{1}{x}\right]_{x=0}}$$

Ponieważ

$$\left[\operatorname{tg}x.\lg\frac{1}{x}\right]_{x=0}=[-\operatorname{tg}x.\lg x]_{x=0}=\left[\frac{-\lg x}{\operatorname{cotg}x}\right]_{x=0}=\left[\frac{\sin^2 x}{x}\right]_{x=0}=\left[\frac{2\sin x\cos x}{1}\right]_{x=0}=0;$$

przeto

$$\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}\right]_{x=0}=e^0=1.$$

4. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{dla } x=0.$$

Możemy napisać

$$\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]_{x=0}=e^{\left[\frac{1}{x}\lg(1+x)\right]_{x=0}}$$

Ponieważ

$$\left[\frac{1}{x}\lg(1+x)\right]_{x=0}=\left[\frac{\lg(1+x)}{x}\right]_{x=0}=\left[\frac{1}{x+1}\right]_{x=0}=1,$$

przeto

$$\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]_{x=0}=e$$

5. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=x^{\frac{1}{1-x}} \quad \text{dla } x=1$$

Możemy napisać

$$\left[x^{\frac{1}{1-x}}\right]_{x=1}=e^{\left[\lg x\cdot\frac{1}{1-x}\right]_{x=1}}$$

Ponieważ

$$\left[\lg x\cdot\frac{1}{x-1}\right]_{x=1}=\left[\frac{\lg x}{x-1}\right]_{x=1}=\left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}=-1,$$

przeto

$$\left[x^{\frac{1}{1-x}}\right]_{x=1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

6. Znaleźć wartość prawdziwą funkcji

$$F(x)=\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}} \quad \text{dla } x=a$$

Możemy napisać

$$\left[\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}\right]_{x=a}=e^{\left[\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\cdot\lg\left(2-\frac{x}{a}\right)\right]_{x=a}}$$

Ponieważ

$$\left[\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\cdot\lg\left(2-\frac{x}{a}\right)\right]_{x=a}=\left[\frac{\lg\left(2-\frac{x}{a}\right)}{\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2a}}\right]_{x=a}=\left[\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2a}}{2-\frac{x}{a}}\right]_{x=a}=\frac{2}{\pi},$$

przeto

$$\left[\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}\right]_{x=a}=e^{\frac{2}{\pi}}$$

Ćwiczenia. Znaleźć wartości prawdziwe funkcji.

1. $\left(\frac{1}{x^n}\right)^{x^m}$ przy $x=0$ Odp. 1.

2. $(\cos x)^{\cos x}$ przy $x=\frac{\pi}{2}$ Odp. 1.

3. $(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$ przy $x=\frac{\pi}{4}$ Odp. $\frac{1}{e}$

Rozdział XVIII.

O największych i najmniejszych wartościach funkcyj.

(Teorja Maximum i minimum).

§ 1. **Maximum i minimum furkcji jednej zmiennej niezależnej.** Niechaj $y=f(x)$ oznacza pewną funkcję zmiennej niezależnej x różniczkowalną w danym przedziale (a, b). Dajmy na to, że x_0 oznacza pewną wartość na x w tym przedziale.

O funkcji $y=f(x)$ mówimy, że przybiera dla $x=x^0$ wartość największą, cyli innemi słowy, że przy $x=x^0$ zachodzi maximum funkcji $y=f(x)$, jeżeli bez względu na wartość h zachodzi nierówność

$$f(x_0+h)-f(x_0)<0.$$

O funkcji $y=f(x)$ mówimy, że przybiera dla $x=x_0$ wartość najmniejszą, czyli innemi słowy, że przy $x=x_0$ zachodzi minimum funkcji $y=f(x)$, jeżeli bez względu na wartość h zachodzi nierówność

$$f(x_0+h)-f(x_0)>0$$

A więc przy danej wartości $x=x_0$ zachodzi, maximum względnie minimum funkcji $y=f(x)$, jeżeli znak różnicy

$$f(x_0+h)-f(x_0)$$

nie jest uzależniony od znaku h.

Jeżeli zaś znak różnicy $f(x_0+h)-f(x)$ jest uzależniony od znaku liczby h, wówczas dla $x=x_0$ funkcja $y=f(x)$ nie przybiera ani największej, ani najmniejszej wartości.

Chodzi nam o ustalenie warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby dla danej wartości $x=x_0$ funkcja przybierała największą, względnie najmniejszą wartość.

Na mocy wzoru Taylor'a

$$f(x+h)-f(x)=\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\cdots+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^n(x)+\cdots$$

dla znikomo małych wartości na h znak różnicy $f(x+h)-f(x)$ jest uzależniony od znaku pierwszego jej wyrazu $\frac{h}{1}f'(x)$

Przypuśćmy, że $f'(x_0)\gtrless 0$. W takim razie znak różnicy $f(x_0+h)-f(x_0)$ zmienia się przy zmianie znaku liczby h.

Stąd wnosimy, że w tym przypadku, gdy

$$f'(x_0)\gtrless 0$$

funkcja $y=f(x)$ dla $x=x_0$ nie przybiera ani największej, ani najmniejszej wartości

A więc na to, aby przy $x=x_0$ zachodziło maximum lub minimum funkcji $y=f(x)$ potrzeba, żeby wartość $x=x_0$ była pierwiastkiem równania

$$f'(x)=0.$$

Przypuśćmy więc, że $x=x_0$ jest pierwiastkiem równania

$$f'(x)=0,$$

a nadto, że $f''(x_0)\gtrless 0$.

Wówczas znak różnicy $f(x_0+h)-f(x_0)$ będzie zależał od znaku wyrazu $\frac{h^2}{1.2}f''(x_0)$. Ponieważ znak tego wyrazu nie zależy od znaku h, przeto znak różnicy $f(x_0+h)-f(x_0)$ nie zmienią się przy zmianie znaku h. A więc jeżeli $f'(x_0)=0$, wówczas bez względu na liczbę h zachodzą nierówności

$$f(x_0+h)-f(x_0)<0, \quad \text{skoro } f''(x_0)<0$$

$$f(x_0+h)-f(x_0)>0, \quad \text{skoro } f''(x_0)>0$$

W pierwszym przypadku dla $x=x_0$ zachodzi maximum funkcji $f(x)$, a w drugim — minimum.

Przypuśćmy teraz, że dla $x=x_0$

$$f'(x_0)=0; \quad f''(x_0)=0$$

Wówczas wzór Taylor'a

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x_0)+\frac{h^4}{1.2.3.4}f^{(IV)}(x_0)+\cdots+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^n(x_0)+\cdots$$

Jasnem jest, że znak różnicy $f(x_0+h)-f(x_0)$ uzależniony jest od znaku wyrazu $\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)$. Jeżeli $f'''(x_0)=0$, wówczas znak tego wyrazu zmienia się przy zmianie znaku h, a zatem zmienia się również i znak różnicy $f(x_0+h)-f(x_0)$.

Stąd wnosimy, że jeżeli $x=x_0$ jest pierwiastkiem równań

$$f'(x)=0 \text{ i } f''(x)=0,$$

a nadto

$$f'''(x_0)\gtrless 0,$$

wówczas dla $x=x_0$ nie zachodzi ani maximum, ani minimum funkcji $y=f(x)$.

Przypuśćmy, że $x=x_0$ jest pierwiastkiem trzech równań

$$f'(x)=0;\quad f''(x)=0;\quad f'''(x)=0.$$

Wtedy pierwszym wyrazem wzoru Taylor'a nierównym zeru będzie wyraz $\frac{h^4}{1.2.3.4}f^{(4)}(x)$, którego znak przy znikomo małych wartościach na h jest zarazem znakiem różnicy $f(x_0+h)-f(x)$. A więc jeżeli $f^{(IV)}(x_0)\gtrless 0$, to dla $x=x_0$ zachodzi maximum lub minimum funkcji $f(x)$. Maximum funkcji zajdzie wtedy, gdy funkcji $f^{(V)}<0$, a minimum gdy $f^{(IV)}(x_0)>0$.

Naogół możemy wysłowić twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Na to, aby dla $x=x_0$ funkcja przybierała wartość najmniejszą, względnie największą, potrzeba i wystarcza, żeby pierwsza z pochodnych nie równych zeru dla $x=x_0$ była rzędu parzystego. W tym przypadku gdy pierwsza z pochodnych nie równych zeru (rzędu parzystego) jest dla $x=x_0$ dodatnią, wówczas dla tej wartości na x zachodzi minimum funkcji $f(x)$, jeżeli zaś dla $x=x_0$ pierwsza z pochodnych nierównych zeru dla $x=x_0$ (rzędu parzystego) jest ujemną, wówczas dla tej wartości na x zachodzi maximum funkcji $f(x)$.

Wysłowione twierdzenie zachodzi tylko dla funkcyj ciągłych, gdyż dla takich właśnie funkcyj pochodna zmienia znak, przechodząc przez wartość zerową.

Przypuśćmy, że mamy do wyznaczania maximum lub minimum funkcii przerywalnej. Wówczas pochodna funkcji może zmienić znak, przechodząc przez ∞. A zatem wartość na x, przy której może zajść maximum, lub minimum funkcji może uczynić zadość równaniu

$$f(x)=\infty$$

Przypuśćmy, że $x=a$ jest właśnie taką wartością na x.

Jeżeli

$$f'(a-h)<0,\ \text{a}\ f'(a+h)>0,$$

to dla $x=a$ zachodzi minimum funkcyj.

Jeżeli

$$f'(a-h)>0,\ \text{a}\ f'(a+h)<0,$$

to dla $x=a$ zachodzi maximum funkcji

Jeżeli zaś

$$f'(a-h)>0;\ f'(a+h)>0,$$

lub

$$f'(a-h)<0\ \text{i}\ f'(a+h)<0,$$

wówczas dla $x=a$ nie zachodzi ani maximum, ani minimum funkcji f.

Przykłady. Mamy daną funkcję

$$y=2x^3-9x^2+12x+1$$

Wyznaczyć jej maximum i minimum

Mamy

$$y'=6(x^2-3x+2);$$

Przyrównując tę pochodną do zera, otrzymamy równanie

$$x^2-3x+2=0,$$

które po rozwiązaniu daje dwie wartości na x

$$x_1=1;\quad x_2=2$$

Ponieważ

$y''=6\ (2x-3)$, przeto dla $x_1=1$; $y''=-6$, a dla $x=2$; $y''=9$

A więc dla $x=1$ funkcja y ma minimum a dla $x=2$ funkcja y ma maximum.

Wartość największa na y będzie 6, a najmniejsza 5.

2. Mamy daną funkcję.

$$y=x^4-8x^3+22x^2-24x+12$$

Wyznaczyć jej maximum i minimum

Różniczkując daną funkcję względem x i przyrównując otrzymamy rezultat do zera, dostaniemy rownanie

$$y'=4\ (x^3-6x^2+11x-6)=0,$$

którego pierwiastki są

$$x_1=1;\ x_2=2;\ x_2=3$$

Druga pochodna będzie $y''=4\ (3x^2-12x+11)$

Dla wartoścl $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$ będziemy mieli odpowiednio

$$y''=8>0;\ y''=-4<0;\ y''=8>0$$

Stąd wnosimy, że dla wartości $x=1$ i $x=3$ zachodzi minimum funkcji, a dla $x=2$ maximum.

Wartość najmniejsza funkcji (dla $x=1$ i $x=3$) będzie $3>0$, a wartość największą (dla $x=2$) będzie 4.

3. Mamy daną funkcję

$$y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x-1}$$

Wyznaczyć jej maximum i minimum.

Pochodna danej funkcji będzie

$$y' = \frac{2x\ (x-2)}{(x^2+x-1)^2}$$

Pierwiastki równania

$$x(x-2) = 0$$

będą

$$x_1 = 0;\ x_2 = 2$$

Druga pochodna

$$y'' = 4\,\frac{x^3+3x^2+1}{(x^2+x-1)^3}$$

Dla $x_1 = 0$; $y'' = -4 < 0$; dla $x_2 = 2$; $y'' = \frac{21}{125} > 0$

Stąd wnosimy, że dla $x = 0$ zachodzi maximum a dla $x = 2$ minimum danej funkcji, a mianowicie

$$y_{max} = -1;\ y_{min} = \frac{3}{5}$$

4. Mamy dana funkcję

$$y = 3x^5 - 5x^3 - 1$$

Wyznaczamy jej maximum i minimum.

Będziemy mieli $y' = 15x^2(x^2-1)$

Pierwiastki równania $15x^2(x^2-1) = 0$ będą $x_1 = x_2 = 0$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$. Pochodna drugiego rzędu $y'' = 30x(2x^2-1)$.

Dla $x = 0$; $y'' = 0$; dla $x = 1$ $y'' = 30x > 0$; dla $x = -1$; $y'' = -30 < 0$.

A zatem dla $x = 1$ zachodzi minimum funkcji $y_{min} = -\frac{1}{4} - 3$.

Dla $x = 1$ zaś zachodzi maximum funkcji $y_{max} = 1$.

Jeżeli $x = 0$, wówczas mamy do czynienia z przypadkiem nierozstrzygalnym. Pochodna $y''' = 30\ (6x^2-1)$; dla $x = 0$; $y''' = -30$.

Stąd wnosimy, że dla $x = 0$ niema ani maximum, ani minimum funkcji.

5. Mamy daną funkcję

$$y = x^6 + 1$$

Wyznaczmy minimum tej funkcji.

Będziemy mieli $y' = 6x^5$. A więc jedyną wartością na x, przy której może zajść minimum funkcji jest $x = 0$.

Druga pochodna $y'' = 6.\ 5\ x^4 = 30x^4$ dla $x = 0$ jest zerem.

Trzecia pochodna $y''' = 5.\ 5.\ 4\ x^3 = 100\ x^3$ dla $x = 0$ również będzie zerem. Następne pochodne

$y^{(IV)} = 6.\ 5.\ 4.\ 3\ x^2 = 360\ x^2$; $y^{(V)} = 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2\ x = 720\ x$ są zerami dla $x = 0$

Nareszcie $y^{(VI)} = 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1 = 720 > 0$.

Stąd wnosimy, że dla $x = 0$ zachodzi minimum danej funkcji.

6. Mamy daną funkcję

$$y = x^{\frac{1}{x}}$$

Wyznaczmy maximum tej funkcji.

Będziemy mieli

$$y' = x^{\frac{1}{x}} \lg x \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}\, x^{\frac{1}{x}-1} = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\lg x)$$

Pierwiastek równania

$$1 - \lg x = 0$$

będzie

$$x = e$$

Druga pochodna danej funkcji będzie

$$y'' = -\frac{1}{x}x^{\frac{1}{x}-2} + (1-\lg x)\left[-x^{\frac{1}{2}-2}\lg x\,\frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{x}-2\right)x^{\frac{1}{x}-3}\right] =$$

$$= x^{\frac{1}{x}-3} + (1-\lg x)\left[\left(\frac{1}{x}-2\right)x^{\frac{1}{x}-3} - x^{\frac{1}{x}-4}\lg x\right]$$

Dla $x = e$; $y'' = -e^{\frac{1}{e}-3} < 0$.

A zatem dla $x = e$ zachodzi maximum danej funkcji.

7. Dana jest funkcja

$$y = \frac{e^x}{x}$$

Wyznaczmy minimum tej funkcji.

Mamy $y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

Pierwiastek równania

$$e^x(x-1) = 0$$

będzie

$$x = 1.$$

Druga pochodna danej funkcji będzie

$$y'' = \frac{[e^x(x-1)+e^x]x^2 - 2xe^x(x-1)}{x^4} = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$$

Dla $x=1$; $y''=e>0$.

A zatem dla $x=1$ zachodzi minimum danej funkcji.

8. Mamy daną funkcję

$$y = f(x) = (x-a)^{-\frac{4}{3}}$$

Wyznaczmy maximum tej funkcji.
Będziemy mieli

$$f'(x) = -\frac{4}{3}(x-a)^{-7/3}$$

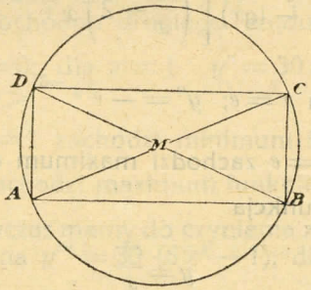
Ponieważ $x=a$ spełnia równanie $f'(x)=\infty$, przeto dla $x=a$ może zajść maximum funkcji
Mamy dalej

$$f'(a-h) = -\frac{4}{3(-h)^{7/3}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{h^7}} > 0$$

$$f'(a+h) = -\frac{4}{3h^{7/3}} = -\frac{4}{3h^2\sqrt[3]{h}} < 0$$

Stąd wnosimy, że dla $x=a$ zachodzi maximum danej funkcji.

9. W koło o promieniu a wpisać prostokąt o największem polu. (Rys. 76).



Rys. 76.

Oznaczmy przez x bok AB prostokąta $ABCD$; wtedy

$$DC = \sqrt{4a^2 - x^2}$$

Przeto pole prostokąta

$$F = x\sqrt{4a^2 - x^2}, \text{ czyli } F^2 = x^2(4a^2 - x^2)$$

Ponieważ dla wartości na x, przy której zachodzi maximum F, będzie zachodziło maximnm F^2, przeto dane zagadnienie sprowadza się do wyznaczania maximum funkcji

$$y = x^2(4a^2 - x^2)$$

Mamy

$$y' = 4x(2a^2 - x^2)$$

Wartość na x, dla której zachodzi maximum funkcji y jest zatem pierwiastkiem równania

$$2a^2 - x^2 = 0$$

Widzimy więc, że

$$x = a\sqrt{2}$$

Pochodna drugiego rzędu

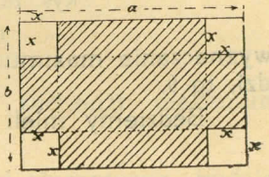
$$y'' = 8a^2 - 12x^2$$

Dla $x = a\sqrt{2}$ $\quad y'' = -16a^2 < 0$

Stąd wnosimy, że dla $x = a\sqrt{2}$ zachodzi maximum y.

A więc kwadrat jest największym prostokątem wpisanym w koło. Pole tego kwadratu będzie $2a^2$.

10. Z kawałka tektury, mającego kształt prostokąta o bokach a i b (Rys. 77), po odcięciu od jego rogów czterech równych kwadratów należy wykonać pudełko prostopadłościenne o możliwie największej objętości. Znaleźć bok x odciętych kwadratów.



Rys. 77.

Objętość y pudełka prostopadłościennego, wykonanego z prostokąta po odcięciu od jego rogów czterech kwadratów o bokach x, będzie

$$y = x(a-2x)(b-2x)$$

Wyznaczmy maximum tej funkcji

Będziemy mieli

$$y' = (b-2x)[(a-2x)-2x] - 2x\cdot(a-2x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$$

Wartości na x, przy których zachodzi maximum funkcji y są pierwiastkami równania kwadratowego

$$12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0.$$

Rozwiązując to równanie, otrzymamy

$$x = \frac{(a+b) \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$$

A więc mamy dwie wartości na x, dla których zachodzi maximum lub minimum funkcji

$$x_1=\frac{(a+b)+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6};\quad x_2=\frac{(a+b)-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$$

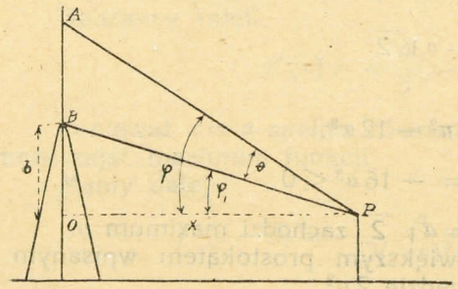
Druga pochodna funkcji y będzie

$$y''=24x-4(a+b)$$

Dla $x=x_1$ $\quad y''=4\sqrt{a^2-ab+b^2}>0$

dla $x=x^2$ $\quad y''=-4\sqrt{a^2-ab+b^2}<0.$

A więc maximum y zachodzi dla $x=x_2$



Rys. 78.

11. Jak blizko trzeba podejść do posągu, żeby widzieć go pod największym kątem widzenia (Rys. 78).

Oznaczmy przez x odległość obserwatora P od posągu AB, przez a i b odpowiednio odległość wierzchołka A i podstawy B posągu od linji poziomej, poprowadzonej przez oko obserwatora P.

Jasnem jest, że dane zagadnienie sprowadza się do wyznaczania maximum kąta widzenia θ, lub, co na jedno wychodzi, tg θ.

Będziemy mieli

$$y=\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\varphi-\varphi_1)=\frac{\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi_1}=\frac{\frac{a}{x}-\frac{b}{x}}{1+\frac{ab}{x^2}}=\frac{x(a-b)}{x^2+ab}$$

Pochodna tej funkcji będzie

$$y'=\frac{(a-b)(x^2+ab)-2x^2(a-b)}{(x^2+ab)^2}=\frac{(a-b)(ab-x^2)}{(x^2+ab)^2}$$

Maximum y zachodzi dla wartości na x, która jest pierwiastkiem równania $a-b-x^2=0$, czyli dla

$$x=\sqrt{ab}$$

A więc wartość na x, dla której kąt θ jest największym, równa się średnio geometrycznej wartości z a i b.

12. Na jakiej wysokości po nad płaszczyzną należy umieścić punkt świecący A, aby punkt B, znajdujący się w danej odległości a od rzutu świecącego punktu na tę samą płaszczyznę, był jaknajsilniej oświetlony.

Oznaczmy kąt ABA_1 przez x, dzielność punktu świecącego przez l, ilość światła, padającego na element płaszczyzny, przez y.

W myśl znanego prawa fizycznego dla zmiany natężenia światła wraz z odległością możemy napisać

$$y=\frac{l}{a^2}\sin x\cos^2 x$$

Zagadnienie więc sprowadza się do wyznaczania takiej wartości na x, dla której zachodzi maximum funkcji y.

Będziemy mieli

$$y'=\frac{l}{a^2}(\cos^3 x-2\cos x\sin^2 x)$$

Wartość na x, przy której zachodzi maximum y, jest pierwiastkiem równania

$$\cos x(\cos^2 x-2\sin^2 x)=0.$$

Pierwiastki tego równania będą

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi;\quad x=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Pierwiastek $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ odrzucamy, jako niepotrzebny, gdyż przy $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $y=0$.

Druga pochodna y będzie

$$y''=\frac{l}{a^2}(3\cos^2 x+2\sin^3 x+4\cos x\sin x)$$

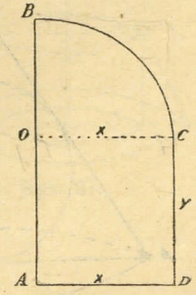
Dla $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$; $y''<0$.

A zatem dla wartości $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$ zachodzi maximum funkcji y.

Wysokość AA_1 punktu świecącego nad płaszczyzną, będzie wtedy $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

13. Wyznaczyć wymiary niszy tak, aby przy danej objętości v miała najmniejszą powierzchnię.

Niszą nazywamy bryłę powstałą przez pół obrotu figury, złożonej z prostokąta $AOCD$, połączonego z kwadratem OBC (Rys. 79).



Rys. 79.

Niechaj promień kwadrantu OBC będzie X a wysokość prostokąta $AOCD$ będzie y.

Powierzchnia pełna niszy będzie

$$S=\frac{\pi x^2}{2}+\pi xy+\pi x^2=\frac{\pi}{2}(3x^2+2xy)$$

Oznaczmy objętość niszy $v=\frac{\pi a^3}{6}$.

Wtedy możemy napisać

$$v=\frac{\pi}{2}x^2y+\frac{\pi x^3}{3}=\frac{\pi a^3}{6}$$

Z ostatniego wzoru otrzymamy

$$y=\frac{a^3-2x^3}{3x^2}$$

A zatem

$$S=\frac{\pi}{2}\left(3x^2+\frac{2a^3-4x^3}{3x}\right)=\frac{\pi}{6}\left(5x^2+\frac{2a^3}{x}\right)$$

Pochodna tej funkcji będzie

$$\frac{dS}{dx}=\frac{\pi}{3}\left(5x-\frac{a^3}{x^2}\right)$$

Przeto wartość na x, przy której zachodzi minimum S, będzie pierwiastkiem równania

$$5x-\frac{a^3}{x^2}=0,$$

czyli

$$x=\frac{a}{\sqrt[3]{5}}$$

Druga pochodna dla $x=\frac{a}{\sqrt[3]{5}}$ przybiera wartosc

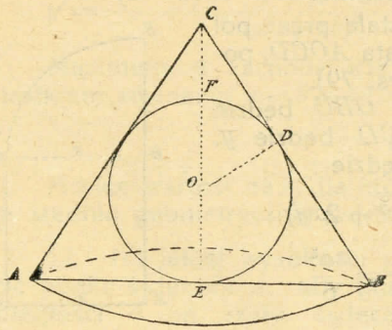
$$\frac{d^2S}{dx^2}=\frac{\pi}{3}\left(5+\frac{2a^3}{x^3}\right)=5\pi>0.$$

A zatem dla tej wartości na x zachodzi rzeczywiście minimum funkcji S.

Wartość na y, odpowiadająca tej wartości na x będzie

$$y=\frac{3}{5}a\cdot\frac{\sqrt[3]{25}}{3}=\frac{a}{\sqrt[3]{5}}=x.$$

A więc powierzchnia niszy o danej objętości przybiera wartość najmniejszą wtedy, gdy promień kwadranta równa się wysokości prostokąta. Wartość ta będzie $S=\frac{\pi}{2}\sqrt{5}\cdot a^2$.



Rys. 80.

14. Jakie mają być wymiary stożka, opisanego na kuli danej, aby objętość stożka była największą (Rys. 80).

Oznaczmy wysokość stożka $CE=x$, a przez D punkt styczności tworzącej CB z kołem przedstawiającem przecięcie kuli z płaszczyzną ACB.

Z podobieństwa trójkątów ECB i OCD wypływa, że

$$\frac{EB}{OD}=\frac{EC}{CD},\quad\text{czyli}\quad\frac{EB}{r}=\frac{x}{\sqrt{x(x-2r)}},$$

gdzie r jest to promień kuli.

A więc

$$EB=\frac{rx}{\sqrt{x(x-2r)}}$$

Objętość stożka, opisanego na kuli, będzie

$$v=\frac{\pi}{3}r^2\cdot\frac{x^2}{x-2r}$$

Pochodna

$$\frac{dv}{dx}=\frac{\pi}{3}r^2\left[\frac{2x(x-2r)-x^2}{(x-2r)^2}\right]=\frac{\pi}{3}xr^2\frac{(x-4r)}{(x-2r)^2}$$

Pierwiastkiem równania

$$\frac{dv}{dx}=0,$$

będzie $x=4r$.

Druga pochodna funkcji v będzie

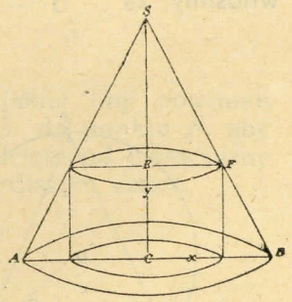
$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{8\pi}{3}\cdot\frac{r^2}{(x-2r)^3}$$

Dla $x=4r$ $\quad\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{\pi}{3r}>0.$

Stąd wnosimy, że dla $x=4r$ zachodzi minimum funkcji

$$v=\frac{8}{3}\pi r^3.$$

14. Ze wszystkich walców, wpisanych w dany stożek kołowy, wyznaczyć taki, którego objętość jest największą (Rys. 81).



Rys. 81.

Oznaczmy przez h wysokość stożka, przez x promień podstawy walca a przez y jego wysokość. Przeto objętość walca

$$V=\pi x^2 y$$

Z podobieństwa trójkątów SHB i FDB wypływa, że

$$\frac{SC}{CB}=\frac{FD}{BD},\quad\text{czyli}$$

$$\frac{h}{a}=\frac{y}{a-x},\quad\text{stąd}\quad y=\frac{h}{a}(a-x)$$

A zatem

$$V=\frac{\pi x^2 h}{a}(a-x)$$

Pochodna

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\pi h}{a}x(2a-3x)$$

Pierwiastki równania $\frac{dV}{dx}=0$ będą $x=0; x=\frac{2a}{3}$

Druga pochodna

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{3\pi h}{a}(a-2x)$$

Dla $x=0$ $\quad \frac{d^2V}{dx^2}=\frac{3\pi h}{a}>0$

dla $x=\frac{2a}{3}$ $\quad \frac{d^2V}{dx^2}=-2\pi h<0$

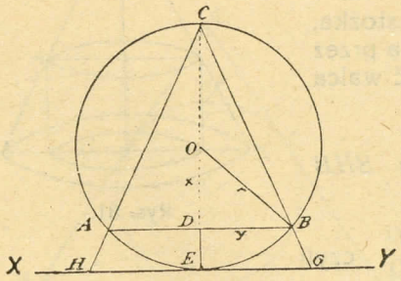
Stąd wnosimy, że dla $x=\frac{2a}{3}$ zachodzi maximum funkcji V.

Wartość na y, odpowiadająca owej wartości na x, będzie $\frac{h}{3}$

Objętość zaś $V=\frac{4a^2h\pi}{27}$

Biorąc pod uwagę, że objętość danego stożka $V_1=\frac{a^2h\pi}{3}$, wnosimy, że

$$V=\frac{4}{9}V_1$$



Rys. 82.

15. Trójkąt równoramienny ABC wpisany w kole danym, obraca się około stycznej XY, równoległej do podstawy AB trójkąta. Wyznaczyć wymiary trójkąta tak, żeby utworzony przez jego obrót bryła miała największą objętość.

Osnaczmy przez r promień koła, przez x odległość podstawy trójkąta AB od środka koła, przez $y=\frac{AB}{2}$

Wtedy objętość bryły, utworzonej przez obrót trójkąta ABC około osi XY

$$V=\frac{2\pi y}{2}[4r^2+(r-x)^2+2r(r-x)]-\pi(r-x)^2\cdot 2y.$$

Ponieważ $y=\sqrt{r^2-x^2}$, przeto po uproszczeniu dostaniemy wzór

$$V=\frac{4}{3}\pi(2r-x)(r+x)\sqrt{r^2-x^2}$$

Pochodna

$$\frac{dv}{dx}=\frac{4}{3}\pi\frac{-(r^2-x^2)+(2r-x)(r-x)-x(2r-x)}{r-x}\cdot\sqrt{r^2-x^2}=$$

$$=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{(3x^2-5rx+r^2)}{r-x}\sqrt{r^2-x^2}$$

Wartość na x dla której zachodzi maximum V, będzie pierwiastkiem równania kwadratowego

$$3x^2-5rx+r^2=0$$

Rozwiązując to równanie; otrzymamy dwie wartości nn x

$$x_1=\frac{5r+r\sqrt{13}}{6};\quad x_2=\frac{5r-r\sqrt{13}}{6}$$

Pierwiastek x_1 odrzucamy jako niepotzebny, gdyż $x_1>r$ (co jest oczywiście niemożliwem)

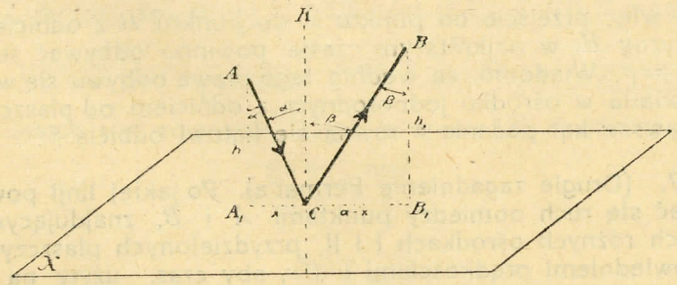
A więc dla

$$x=\frac{5r-r\sqrt{13}}{6};\quad y=\frac{r}{3}\sqrt{\frac{-1+5\sqrt{13}}{2}}$$

zachodzi maximum funkcji V. Łatwo się przekonać, że dla tej właśnie wartości na x druga pochodna $\frac{d^2V}{dx^2}<0$

Czytelnik zechce to sprawdzić.

16. (Pierwsze zadanie Fermat'a). Po jakiej linji powinien odbywać się ruch jednostajny od punktu A do punktu B, aby droga pomiędzy temi punktami wraz z odbiciem od płaszczyzny H (rys. 83), mogła być przebytą jak w najkrótszym czasie.



Rys. 83.

Jasną jest rzeczą, że ruch powinien odbywać się w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny H. Oznaczmy odległości punktów A i B od płaszczyzny H odpowiednio przez h i h_1; $A_1C = x$; $A_1B_1 = a$; $CB_1 = a - x$. Wtedy droga L, przebyta od A do B wraz z odbiciem od płaszczyzny H, będzie

$$L = \sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{h_1^2 + (a-x)^2}$$

Pochodna tej funkcji względem x, będzie

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{a-x}{\sqrt{h_1^2 + (a-x)^2}}$$

A więc wartość na x, przy której zachodzi minimum funkcji L, będzie pierwiastkiem równania

$$x\sqrt{h_1^2 + (a-x)^2} - (a-x)\sqrt{h^2 + x^2} = 0,$$

czyli też

$$(h + h_1)\, x = a\, h$$

Skąd

$$x = \frac{a\,h}{h + h_1}; \quad CB_1 = a - x = \frac{h_1\, a}{h + h_1}$$

Czytelnik łatwo udowodni (rozważając wartość na drugą pochodną $\frac{d^2L}{dx^2}$ dla $x = \frac{ah}{h+h}$), że rzeczywiście przy tej wartości na x zachodzi minimum funkcji L.

Oznaczając kąty $ACK = \alpha$ i $KCB = \beta$, możemy napisać

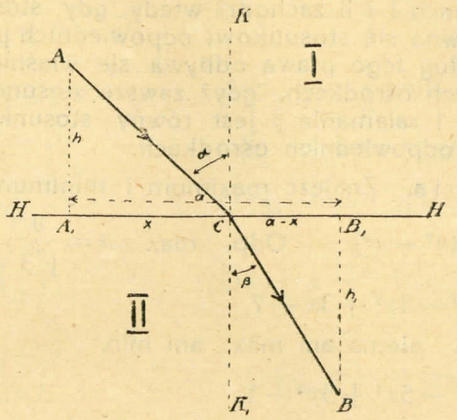
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{h} = \frac{a}{h + h_1}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{a-x}{h_1} = \frac{a}{h + h_1}$$

A zatem

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta, \text{ czyli } \alpha = \beta,$$

A więc przejście od punktu A do punktu B z odbiciem od płaszczyzny H w najkrótszym czasie powinno odbywać się tak, żeby $\alpha = \beta$. Wiadomo, że według tego prawa odbywa się właśnie ruch światła w ośrodku jednorodnym z odbiciem od płaszczyzny, gdyż zawsze kąt padania α równa się kątowi odbicia β.

17. (Drugie zagadnienie Fermat'a). Po jakiej linji powinien odbywać się ruch pomiędzy punktami A i B, znajdującymi się w dwóch różnych ośrodkach I i II, przydzielonych płaszczyzną H z odpowiedniemi prędkościami u i v, aby czas, użyty na przebycie drogi ABC pomiędzy temi punktami, był możliwie najkrótszy. (rys. 84).



Rys. 84.

Jasnem jest, że ruch może się odbywać tylko w płaszczyznie prostopadłej do płaszczyzny H.

Wprowadzając te same oznaczenia, co i w poprzedniem zagadnieniu, wnosimy, że czas t niezbędny na przebycie drogi ACB będzie funkcja x

$$t = \frac{AC}{u} + \frac{CB}{v} = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{u} + \frac{\sqrt{h_1^2 + (a-x)^2}}{v}$$

Pochodna tej funkcji będzie

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{u\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{a-x}{v\sqrt{h_1^2 + (a-x)^2}}$$

Przyrównując tę pochodną do zera, otrzymamy równanie następujące:

$$\frac{x}{u\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{a-x}{v\sqrt{h_1^2 + (a-x)^2}} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Z drugiej zaś strony z trójkątów AA_1C i BB_1C mamy

$$\sin\alpha = \frac{A_1C}{AC} = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}; \quad \sin\beta = \frac{CB_1}{BC} = \frac{a-x}{\sqrt{h_1^2 + (a-x)^2}}. \quad (2)$$

Zestawiając równanie (1) ze wzorami (2), możemy napisać

$$\frac{\sin\alpha}{u} = \frac{\sin\beta}{v},$$

czyli

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{u}{v}$$

A więc minimum czasu zużytego na przebycie drogi podczas ruchu pomiędzy punktami A i B, znajdującemi się w dwóch różnych ośrodkach I i II zachodzi wtedy, gdy stosunek sinusów kątów α i β równa się stosunkowi odpowiednich prędkości. Wiadomo, że według tego prawa odbywa sie właśnie ruch światła w dwóch różnych ośrodkach, gdyż zawsze stosunek sinusów kątów podania α i załamania β jest równy stosunkowi prędkości u i v ruchu w odpowiednich ośrodkach.

Ćwiczenia. Znaleźć maximum i minimum funkcyj

1. $y = x(a^2 - x^2)$ Odp. max $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$; min $x = -\frac{a}{\sqrt{3}}$

2. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$.
   Odp. niema ani max., ani min.

3. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$.
   Odp. max $x = 1$; min $x = 3$
   przy $x = 0$ niema ani max., ani min.

4. $y = x^6 - 6x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 12x + 4$.
   Odp. max. $x = -1$; min. $x = 1$: $x = -2$.

5. $y = x(a+x)^2(a-x)^3$.
   Odp. $x = \frac{a}{3}$ maxim; $x = -\frac{a}{2}$ min; $x = -a$ max

6. $y = (x-1)^4(x+2)^2$
   Odp. $x = -\frac{5}{7}$ max; $x = 1$ minim.
   $x = -2$ niema ani max., ani min.

7. $y = x(x-1)^2(x-2)^3$
   Odp. $x = 1$ max; $x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$ min.
   $x = 2$ niema ani max., ani min.

8. $y = \sqrt{ax^3 - x^4}$
   Odp. $x = \frac{3a}{4}$ max.; $x = 0$ niema ani max., ani min.

9. $y = x\sqrt{r^2 - x^2}$
   Odp. $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ max.; $x = -\frac{r}{\sqrt{2}}$ min.

10. $y = x + \frac{2a^2}{x}$ Odp. $x = \sqrt{2}$ min.

11. $y = \frac{x^2}{1+x^2}$ Odp. $x = 0$ min.

12. $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ Odp. $x = \frac{1}{2}$ min.

13. $y = \frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x}$ Odp. $x = \frac{a}{2}$ min.

14. $y = x^{1-\lg x}$ Odp. $x = \sqrt{e}$ max.

15. $y = \frac{x}{\lg x}$ Odp. $x = e$ min.

16. $y = \left(\frac{a}{x}\right)^x$ Odp. $x = \frac{a}{e}$ max.

17. $y = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}$ Odp. $x = ae$ max.

18. $y = \frac{\lg x}{x^n}$ Odp. $x = e^{\frac{1}{n}}$ max.

19. $y = \cos x \cdot \cos(a-x)$ Odp. $x = \frac{2k\pi - a}{2}$ max.

20. $y = \sin^3 x \cdot \cos x$ Odp. $x = \frac{\pi}{3}$ max.

21. $y = \sin x \cdot \sin(a+x)$ Odp. $x = \frac{(2k+1)\pi - a}{2}$ max.
    $x = \frac{2k\pi - a}{2}$ min.

22. $y = a\,\mathrm{tg}\,x + b\,\mathrm{cotg}\,x$ Odp. $x = \mathrm{arctg} - \sqrt{\frac{b}{a}}$ min.
    $x = \mathrm{arctg} - \sqrt{\frac{b}{a}}$ max.

23. $y = \frac{2 - \sin x}{\cos x}$ Odp. $x = \frac{\pi}{6}$ min.

24. $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ Odp. $x = 0$ min.

25. $y = x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\lg(1+x^2)$ Odp. $x = 0$ min.

26. $y = \frac{1 + 2x\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}$ Odp. $x = \mp 1$ max; $x = 0$ min.

27. Na danej prostej wyznaczyć taki punkt M, żeby suma odległości punktu M od dwóch danych punktów była największą.

28. W dany trójkąt wpisać równoległo bok o największem polu.

29. Ze wszystkich stożków o danej objętości znaleźć taki, żeby powierzchnia boczna była największą.

30. Wpisać w kulę stożek [1] o największej objętości [2] o największej powierzchni zupełnej.

31. Wpisać w kulę walec o największej objętości.

32. Wpisać w kulę prostopadłościan o największej objętości.

§ **2. Maxima i minima funkcyj wielu zmiennych niezależnych.** Niechaj

$$u = f(x, y)$$

oznacza pewną funkcję dwóch zmiennych niezależnych x i y, ciągłą, a posiadającą pochodne cząstkowe względem x i y.

O funkcji u mówimy, że ma maximum dla wartości $x=a, y=b$, jeżeli dla dowolnie małych przyrostów h i k różnica

$$f(a+h, b+k) - f(x, y) < 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

bez względu na znak przyrostów h i k.

O funkcji u mówimy, że ma minimum dla wartości $x=a; y=b$, jeżeli zachodzi nierówność

$$f(a+h, b+k) - f(x, y) > 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

bez względu na znak przyrostów h i k.

Chodzi nam o ustalenie warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby dla danych wartości $x=a; y=b$ zachodziło maximum lub minimum funkcji.

W myśl wzoru Taylor'a dla funkcji dwóch zmiennych niezależnych, możemy napisać

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right] + \frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial^2 f(x+\vartheta h, y+\vartheta_1 k)}{\partial x^2}h^2 + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2 f(x+\vartheta h, y+\vartheta_1 k)}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f(x+\vartheta h, y+\vartheta_1 k)}{\partial y^2}k^2\right], \quad . \quad (5)$$

gdzie

$$0 < \vartheta < 1 \qquad 0 < \vartheta_1 < 1$$

Z tego wzoru wnosimy, że różnica

$$f(x+h, y+k) - f(x, y)$$

ma ten sam znak co i pierwszy wyraz

$$\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{xy}k$$

prawej części wyrażenia (5), zawierający przyrosty h i k w pierwszej potędze.

A więc dla wartości $x=a; y=b$ będzie zachodziło maximum lub minimum funkcji $u=f(x,y)$, jeżeli wyraz

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)_{\substack{x=a\\y=b}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

ma znak stały, bez względu na przyrosty h i k.

Ponieważ wyraz (6) zawiera owe przyrosty w pierwszej potędze, przeto warunkiem koniecznym na to, aby funkcja $u=f(x,y)$ dla $x=a; y=b$ miała maximum lub minimum jest, żeby pochodne cząstkowe

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\substack{x=a\\y=b}} = 0; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\substack{x=a\\y=b}} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

czyli też różniczką zupełną

$$du = 0.$$

Oznaczmy dalej

$$\left[\frac{\partial^2 f(x+\vartheta h, y+\vartheta_1 k)}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=a\\y=b}} = A_1; \quad \left[\frac{\partial^2 f(x+\vartheta h, y+\vartheta_1 k)}{\partial x \partial y}\right]_{\substack{x=a\\y=b}} = B_1$$

$$\left[\frac{\partial^2 f(x+\vartheta h, y+\vartheta_1 k)}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=a\\y=b}} = C_1$$

Uwzględniając warunki (7), możemy napisać

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2}(A_1 h^2 + 2B_1 hk + C_1 k^2)$$

Jasną jest rzeczą, że różnica

$$f(a+h, b+k) - f(a, b)$$

ma ten sam znak co i trójmian

$$A_1 h^2 + 2B_1 hk + C_1 k^2$$

Oznaczmy

$$A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=a\\x=b}\\h=0\\k=0} = (A_1); \quad B = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=a\\y=b}\\h=0\\k=0} = (B_1); \quad C = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=a\\y=b}\\h=0\\k=0} = (C_1)$$

i rozważmy przypadki następujące:

1. $AC - B^2 > 0$. Oczywista, wtedy $A_1 C_1 - B_1^2 > 0$, . (8) albowiem pochodne cząstkowe A_1, B_1, C_1 są funkcjami ciągłemi h i k.

Z nierówności (8) wynika, że liczby A i C mają znaki jednakowe, to jest albo

$$A > 0 \qquad C > 0,$$

albo też

$$A < 0 \qquad C < 0.$$

Możemy napisać

$$\Omega = \frac{1}{A_1}(A_1^2 h^2 + 2A_1 B_1 hk + A_1 C_1 k^2) =$$

$$= \frac{1}{A_1}[(A_1 h + B_1 k)^2 + (A_1 C_1 - B_1^2)k^2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Jeżeli $A_1 C_1 - B_1^2 > 0$, wówczas znak wyrażenia (9) zależy od znaku A_1, a zatem od znaku A.

A więc, jeżeli $AC - B^2 > 0$, wówczas dla $x = a$; $y = b$ zachodzi maximum lub minimum funkcji $u = f(x,y)$; przytem jeżeli $A < 0$, wówczas funkcja dana przybiera wartość najmniejszą, jeżeli zaś $A > 0$, wówczas funkcja dana przybiera wartość największą.

2. $AC - B^2 < 0$. Łatwo spostrzec, że w tym przypadku dla $x = a$; $y = b$ funkcja dana nie przybiera ani największej, ani najmniejszej wartości.

Przypuśćmy najpierw, że jedna przynajmniej z liczb A i C nie równa się zeru. Dajmy na to, że $A \gtrless 0$.

Oczywista, dla $k = 0$; $h \gtrless 0$ zachodzi nierówność

$$[(A_1 h + B_1 k)^2 + (A_1 C_1 - B_1)k^2] > 0,$$

a dla $h = -\frac{B_1 k}{A_1}$ zachodzi nierówność

$$[(A_1 h + B_1 k)^2 + (A_1 C_1 - B_1)k^2] < 0.$$

Stąd wnosimy, że różnica

$$f(a+h,\ b+k) - f(a,b)$$

w tym przypadku zmienia znak w zależności od tych wartości, jakie nadajemy przyrostkom h i k. A zatem w tym przypadku nie zachodzi ani maximum, ani minimum funkcji $f(x,y)$.

Przypuśćmy teraz, że $A = 0$; $C = 0$. Wówczas $B \gtrless 0$.

Oznaczając

$$\varepsilon = \frac{h}{k},$$

możemy napisać

$$\Omega = k^2(A_1 \varepsilon^2 + 2B_1 \varepsilon + C_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Przypuśćmy teraz, że liczba k dąży do zera. Wówczas liczby A_1 i C_1 będą dążyły odpowiednio do A i C, to jest do zera. Jasnem jest, że znak wyrażenia (10) jest uzależniony od znaku wyrazu $2B_1\varepsilon$.

Ponieważ $B \gtrless 0$, przeto spółczynnik B_1 będzie zachowywał znak dla wszystkich znikomo małych wartości na h i k. Ponieważ liczba ε może przybierać różne wartości tak dodatnie, jak i ujemne, przeto wyraz $2B_1\varepsilon$, a zarazem i wyrażenie (10), może przybierać różne wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne. Stąd wnosimy, że w tym przypadku nie zachodzi ani maximum, ani minimum funkcji $f(x,y)$.

3. $AC - B^2 = 0$. W tym przypadku może zajść maximum, lub też nie być ani maximum, ani minimum. Jest to właśnie przypadek nierozstrzygnięty.

Istotnie, ponieważ $A_1 C_1 - B_1^2 = 0$, przeto

$$\Omega = \frac{1}{A}(A_1 h + B_1 k)^2$$

Jasną jest rzeczą, że jeżeli $\frac{h}{k} = -\frac{B_1}{A}$, wówczas $\Omega = 0$.

Aby się dowiedzieć, czy zachodzi w tym przypadku maximum lub minimum, uciec się należy do rozważania pochodnych cząstkowych wyższych rzędów funkcji $f(x,y)$.

Reasumując wszystkie dotychczasowe rozumowania, możemy wysłowić następujące prawidło do wyznaczania tych wartości na x i y, dla których zachodzi maximum lub minimum funkcyj dwóch zmiennych niezależnych:

Chcąc wyznaczyć te wartości na x i y, dla których zachodzi maximum lub minimum funkcji $u = f(x,y)$ dwóch zmiennych niezależnych x i y, rozwiązujemy względem tych zmiennych dwa równania

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Pierwiastki tych równań będą stanowiły właśnie te wartości na x i y, dla których może zachodzić maximum lub minimum funkcji

Rozważamy dalej wyrażenie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2$$

dla znalezionych wartości szczególnych na x i y.

1. Jeżeli dla tych wartości zachodzi nierówność

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

a nadto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0,$$

wówczas mamy do czynienia z minimum funkcji

Jeżeli zaś do nierówności (12) dochodzą nierówności

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0,$$

wówczas mamy do czynienia z maximum funkcji.

2. Jeżeli dla znalezionych wartości na x, y zachodzi nierówność

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2<0,$$

wówczas dla tych wartości na zmienne niezależne nie zachodzi ani maximum, ani minimum funkcji.

3. Jeżeli nareszcie dla znalezionych po rozwiązaniu równań (11) wartości na x i y zachodzi wzór

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=0,$$

wówczas mamy do czynienia z przypadkiem nierozstrzygniętym i musimy wobec tego uciec się do rozważania pochodnych cząstkowych wyższych rzędów danej funkcji.

Analogicznię możemy ustalić warunki konieczne i dostateczne na to, aby zachodziło maximum lub minimum danej funkcji $u=f(x,y,z)$ trzech zmiennych niezależnych x,y,z.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby dla funkcji $u=f(x,y,z)$ zachodziło dla danych wartości na x, y, z maximum lub minimum jest, żeby owe wartości były pierwiastkami układu równań

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0;\ \frac{\partial u}{\partial y}=0;\ \frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

a nadto żeby dla tych wartości na x, y, z zachodziła nierówność

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)^2<\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\cdot\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)^2\right] \quad (13)$$

Oczywista, nierówność ostatnia wymaga, żeby pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ miały dla znalezionych wartość i na x, y, z znaki jednakowe.

Jeżeli nadto dla tych wactości zachodzą nierówności

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}>0;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}>0;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}>0,$$

wówczas mamy do czynienia z minimum funkcji u.

Jeżeli zaś dla znalezionych wartości na x, y, z, zachodzą nierówności

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}<0;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}<0;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}<0,$$

wówczas mamy do czynienia z maximum funkcji u.

Jeżeli dla wartości na x, y, z, otrzymanych z równań

$$\frac{\partial y}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0;\ \frac{\partial u}{\partial z}=0$$

wszystkie pochodne drugiego rzędu, danej funkcji są zerami, wówczas uciekamy się do rozważania pochodnych funkcji wyższych rzędów:

Warunki konieczne i dostateczne na to, aby funkcja dwóch, względnie trzech zmiennych niezależnych, przybierała dla danych wartości na zmienne niezależne wartość największą lub najmniejszą, można podać jeszcze w formie następującej:

Niechaj u będzie funkcją trzech zmiennych niezależnych

$$u=f(x,y,z)$$

Oznaczmy

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f_2;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=f_3$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_{11};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f_{22};\quad \frac{\partial u}{\partial z^2}=f_{33}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_{12};=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=f_{21}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=f_{13};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=f_{23};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=f_{32}$$

Na to, aby dla pewnych wartości na x, y, z funkcja $u=f(x,y,z)$ przybierała największą wartość potrzeba i wystarcza, żeby dla tych wartości na zmienne niezależne,

$$f_1=0;\quad f_2=0;\quad f_3=0,$$

a nadto, żeby

$$\Delta_1=f_{11}<0;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{vmatrix}>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13}\\ f_{21} & f_{22} & f_{23}\\ f_{31} & f_{32} & f_{33}\end{vmatrix}<0$$

Na to, aby dla pewnych wartości na x, y, z funkcja $u=f(x, y, z)$ przybierała najmniejszą wartość, potrzeba i wystarcza, żeby dla tych wartości na zmienne niezależne

$$f_1=0;\ f_2=0;\ f_3=0,$$

a nadto żeby

$$\Delta_1>0;\ \Delta_2>0;\ \Delta_3>0$$

Dajmy na to, że u jest funkcją n zmiennych niezależnych

$$u=f(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_n)$$

Oznaczmy

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=f_1;\ \frac{\partial u}{\partial x_2}=f_2\ \ldots\ \frac{\partial u}{\partial x_n}=f_n$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}=f_{\alpha\beta}\qquad(\alpha,\beta=1,2,3\ldots n)$$

Na to, aby dla pewnych wartości na zmienne niezależne $x_1, x_2, \ldots x_n$ funkcja $u=f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ przybierała największą wartość potrzeba i wystarcza, żeby dla tych wartości na zmienne niezależne

$$f_1=0;\quad f_2=0;\ \ldots\quad f_n=0$$

a nadto, żeby

$$\Delta_1<0;\quad \Delta_3<0;\ \ldots\ \Delta_{2k+1}<0\ \ldots$$

$$\Delta_2>0;\quad \Delta_4>0;\ \ldots\ \Delta_{2k}>0\ \ldots$$

gdzie

$$\Delta_m=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13}\ \ldots & f_{1m}\\ f_{21} & f_{22} & f_{23}\ \ldots & f_{2m}\\ f_{31} & f_{32} & f_{33}\ \ldots & f_{3m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ f_{m1} & f_{m2} & f_{m3}\ \ldots & f_{mm}\end{vmatrix}\qquad(m=1,\ 2,\ 3\ \ldots\ n)$$

Na to, aby dla pewnych wartości na zmienne niezależne $x_1, x_2, x_3\ \ldots\ x_n$ funkcja $u=f(x_1, x_2, x_3\ \ldots\ x_n)$ przybierała najmniejszą wartość, potrzeba i wystarcza, żeby dla tych wartości na zmienne niezależne

$$f_1=0;\ f_2=0;\ f_3=0\ \ldots\ f_n=0,$$

a nadto, żeby

$$\Delta_1>0;\quad \Delta_2>0;\quad \Delta_3>0\ \ldots\quad \Delta_n>0$$

Przykłady 1. Mając daną funkcję

$$u=x^2-xy+y^2-3y,$$

znaleźć jej minimum.

Różniczkując daną funkcję, otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-y;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y-x-3$$

Przyrównując do zera obie pochodne, otrzymujemy dwa równania $2x-y=0;\ 2y-3x-3=0,$
które po rozwiązaniu dają następujące wartości na x i y

$$x=1;\quad y=2$$

Różniczkując dalej, otrzymamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-1;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2$$

Ponieważ znalezione wartości na pochodne spełniają nierówności

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}>0;\qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2<\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

przeto dla wartości $x=1;\ y=2$ zachodzi minimum danej funkcii. Wartość najmniejsza funkcji będzie -3.

2. Mając daną funkcję

$$u=3x^2-8xy+5y^2+4x-6y+3,$$

znaleźć jej maximum względnie minimum.

Różniczkując daną funkcję względem x i y, otrzymamy

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x-8y+4;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=10y-8x-6$$

Przyrównując do zera obie pochodne, otrzymujemy dwa równania

$$6x-8y+4=0;\quad 10y-8x-6=0,$$

które po rozwiązaniu dają następujące wartości na x i y

$$x=-2;\quad y=-1.$$

Różniczkując dalej otrzymamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-8;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=10$$

Ponieważ w tym przypadku

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=-4<0,$$

przeto dla $x=-2$; $y=-1$ nie zachodzi ani maximum, ani, minimum. A więc dana funkcja nie przybiera ani największej ani najmniejszej wartości

3. Mając daną funkcję

$$u=x^3+3xy^2-12x+3y,$$

znaleźć jej maximum i minimum.

Różniczkując daną funkcję względem x i y, otrzymamy

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+3y^2-12; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=6xy+3$$

Przyrównując do zera obie pochodne, otrzymujemy dwa równania

$$x^2+y^2-4=0; \quad 2xy+1=0,$$

które po rozwiązaniu dają następujące wartości na x i y

$$\text{I} \quad x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}; \quad y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2};$$

$$\text{II} \quad x=-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}; \quad y=-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{III} \quad x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}; \quad y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2};$$

$$\text{IV} \quad x=-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}; \quad y=-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$$

Różniczkując dalej, otrzymamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=6y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6x$$

Wobec tego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=36(x^2-y^2)$$

Dla grupy I wartości na x i y mamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=\sqrt{15}>0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=3(\sqrt{3}+\sqrt{5})>0$$

Stąd wnosimy, że dla tych wartości na x i y zachodzi minimum danej funkcji

Dla grupy II wartości na x i y mamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=\sqrt{15}>0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-3(\sqrt{3}+\sqrt{5})<0$$

A zatem dla tych wartości na x i y zachodzi maximum danej funkcji.

Ponieważ dla grupy III i IV wartości na x i y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=-\sqrt{15}<0,$$

przeto dla tych wartości na x i y nie zachodzi ani maximum, ani minimum funkcji.

Wartość największa danej funkcji będzie $3\sqrt{3}+5\sqrt{5}$, a wartość najmniejsza $-3\sqrt{3}-5\sqrt{5}$.

4. Mając daną funkcję

$$u=y^4-8y^3+18y^2-8y+x^3-3x^2-3x,$$

znaleźć jej maximum i minimum

Różniczkując daną funkcję względem x i y, otrzymamy

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-6x-3; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=4y^3-24y^2+36y-8$$

Przyrównując do zera obie pochodne, otrzymamy dwa równania

$$x^2-2x-1=0; \quad y^3-6y^2+9y-2=0.$$

Równania te po rozwiązaniu dają sześć grup pierwiastków

I	$x=1+\sqrt{2}$;	$y=2+\sqrt{3}$	IV	$x=1+\sqrt{2}$;	$y=2$
II	$x=1+\sqrt{2}$;	$y=2-\sqrt{3}$	V	$x=1-\sqrt{2}$;	$y=2+\sqrt{3}$
III	$x=1-\sqrt{2}$;	$y=2$	VI	$x=1-\sqrt{2}$;	$y=2-\sqrt{3}$

Różniczkując dalej, otrzymamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x-6; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12y-48y+36$$

Przeto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=72(x-1)(y^2-4y+3)$$

Dla grupy I i II wartości na x i y mamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=144\sqrt{2}>0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6(1+\sqrt{2})>0$$

A zatem dla tych wartości na x i y zachodzi minimum funkcji.

Dla grupy III wartości na x i y mamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=72\sqrt{2}>0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6(1-\sqrt{2})<0.$$

Stąd wnosimy, że dla wartości na x i y grupy III zachodzi maximum funkcji.

Ponieważ dla wartości na x i y grupy IV, V i VI $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2<0$, przeto dla tych wartości na x i y dana funkcja niema ani maximum, ani minimum.

Wartość największa danej funkcji będzie $3+4\sqrt{2}$, a najmniejsza $-6-\sqrt{2}$.

5. Mając dane na płaszczyźnie n punktów P_1, P_2, $P_3 \ldots P_n$ odpowiednio o spółrzędnych

$$x_1,\ y_1;\quad x_2,\ y_2;\quad x_3,\ y_3\ \ldots\ x_n,\ y_n,$$

wyznaczyć na płaszczyznie taki punkt P, żeby była najmniejszą suma

$$u=m_1 r_1^2+m_2 r_2^2+m_3 r_3^2+\cdots+m_n r_n^2,$$

gdzie r_1, r_2, $r_3 \ldots r_n$ są to odległości punktu P od punktów P_1, P_2, $P_3 \ldots P_n$, a spółczynniki m_1, m_2, $m_3 \ldots m_n$ są liczbami stałemi.

Oznaczając przez ξ i η spółrzędne punktu P, możemy napisać

$$r_1^2=(\xi-x_1)^2+(\eta-y_1)^2;\quad r_2^2=(\xi-x_2)^2+(\eta-y_2)^2\ \ldots$$
$$\ldots r_n=(\xi-x_n)^2+(\eta-y_n)^2$$

A zatem zagadnienie sprowadza się do wyznaczania minimum funkcji

$$u=m_1[(\xi-x_1)^2+(\eta-y)^2]+m_2[(\xi-x_2)^2+(\eta-y_2)^2]+\cdots$$
$$\cdots+m_n[(\xi-x_n)^2+(\eta-y_n)^2]=\sum_{i=1}^{i=n} m_i[(\xi-x_i)^2+(\eta-y_i)^2]$$

Różniczkując tę funkcję względem ξ i η, otrzymamy

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=2m_1(\xi-x_1)+2m_2(\xi-x_2)+\cdots+2m_n(\xi-x_n)=2\sum_{i=1}^{i=n} m_i(\xi-x_i)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=2m_1(\eta-y_1)+2m_2(\eta-y_2)+\cdots+2m_n(\eta-y_n)=2\sum_{i=1}^{i=n} m_i(\eta-y_i)$$

Przyrównując do zera obie pochodne, otrzymamy dwa równania

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i(\xi-x_i)=0;\qquad \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\xi-y_i)=0,$$

które po rozwiązaniu dają następujące wartości na ξ i η

$$\xi=\frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i};\qquad \eta=\frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i}\qquad\ldots\ldots\ (14)$$

Oznaczając przez m_1, $m_2 \ldots m_n$ masy odpowiednich punktów $P_1, P_3 \ldots, P_n$, wnosimy, że punkt P o spółrzędnych (14) jest środkiem mas układu, składających się z n materjalnych punktów P_1. P_2 . . P_n. Funkcja u będzie oznaczała wówczas moment bezwładności układu. Stąd wypływa zwane twierdzenie geometrji mas polegające na tem, że moment bezwładności układu punktów materjalnych względem środka tego układu przybiera wartość najmniejszą.

6. Mając daną funkcję drugiego stopnia

$$u=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0\ \ldots\ .\quad (15)$$

znaleźć jej maximum i minimum.

Różniczkując daną funkcję względem x, y, otrzymamy

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2(Ax+By+D);\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2(Bx+Cy+E)$$

Przyrównując obie pochodne do zera, otrzymamy dwa równania

$$Ax+By+D=0;\quad Bx+Cy+E=0.$$

Równania te po rozwiązaniu dają wartości na x i y, dla których zachodzi maximum, względnie minimum funkcji u.

Maximum tej funkcji będzie zachodziło wówczas, gdy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=4(B^2-AC)>0,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2A<0$$

a minimum gdy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=\ 4(B^2-AC)>0\ \text{ i }\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2A>0$$

W tym zaś przypadku, gdy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=4(B^2-AC)=0,$$

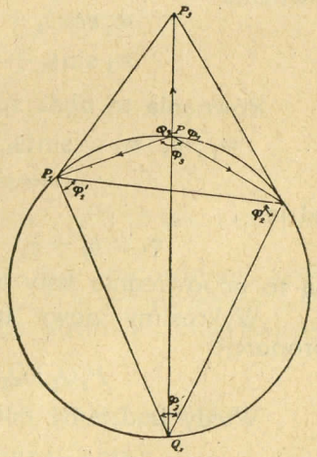
wówczas niema ani maximum, ani minimum dla danej funkcji.

7. Dany jest trójkąt ostrokątny $P_1\ P_2\ P_3$ (rys. 85).

Wyznaczyć taki punkt P w trójkącie, żeby była najmniejszą sumą

$$u=m_1 r_1+m_2 r_2+m_3 r_3,$$

gdzie r_1, r_2, r_3 są to odpowiednio odległości punktu P od wierzchołków danego trójkąta $P_1P_2P_3$ a m_1, m_2, m_3



Rys. 85.

są liczbami stałemi, spełniającemi warunek, że kwadrat jakiejkolwiek z tych liczb m jest mniejszy od sumy kwadratów liczb pozostałych.

Oznaczmy przez x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 odpowiednio spółrzędne punktów P_1, P_2, P_3, a przez ξ, η spółrzędne punktu P. Wtedy możemy napisać

$$u = m_1\sqrt{(\xi-x_1)^2+(\eta-y_1)^2} + m_2\sqrt{(\xi-x_2)^2+(\eta-y_2)^2} + \\ + m_3\sqrt{(\xi-x_3)^2+(\eta-y_3)^2}$$

Różniczkując tę funkcję względem x i y, otrzymamy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = m_1\frac{\xi-x_1}{\sqrt{(\xi-x_1)^2+(\eta-y_1)^2}} + m_2\frac{\xi-x_2}{\sqrt{(\xi-x_2)^2+(\eta-y_2)^2}} + \\ + m_3\frac{\xi-x_3}{\sqrt{(\xi-x_3)^2+(\eta-y_3)^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = m_1\frac{\eta-y_1}{\sqrt{(\xi-x_1)^2+(\eta-y_1)^2}} + m_2\frac{\eta-y_2}{\sqrt{(\xi-x_2)^2+(\xi-y_2)^2}} + \\ + m_3\frac{\eta-y_3}{\sqrt{(\xi-x_3)^2+(\eta-y_3)^2}}$$

Oznaczając przez θ_1, θ_2, θ_3 odpowiednio kąty, które tworzą proste PP_1, PP_2, PP_3 z osią $0x$, możemy napisać

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -(m_1\cos\theta_1 + m_2\cos\theta_2 + m_3\cos\theta_3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -(m_1\sin\theta_1 + m_2\sin\theta_2 + m_3\sin\theta_3)$$

Przyrównując do zera obie pochodne, otrzymamy dwa równania

$$m_1\cos\theta_1 + m_2\cos\theta_2 + m_3\cos\theta_3 = 0$$
$$m_1\sin\theta_1 + m_2\sin\theta_2 + m_3\sin\theta_3 = 0$$

Równania te będą spełnione, skoro zachodzą proporcje

$$m_1 : m_2 : m_3 = \sin(\theta_3-\theta_2) : \sin(\theta_1-\theta_3) : \sin(\theta_2-\theta_1) = \\ = \sin\varphi_1 : \sin\varphi_2 : \sin\varphi_3,$$

gdzie

$$\varphi_1 = \theta_3-\theta_2; \quad \varphi_2 = \theta_1-\theta_3; \quad \varphi_3 = \theta_2-\theta_1$$

są to odpowiednio kąty pomiędzy prostemi PP_1, PP_2, PP_3.

Wykreślmy nowy trójkąt $P_1P_2Q_3$ taki, żeby zachodziły proporcje

$$P_2Q_3 : Q_3P_1 : P_1P_2 = m_1 : m_2 : m_3$$

Wtedy będziemy mieli

$$\sin\varphi'_1 : \sin\varphi'_2 : \sin\varphi'_3 = m_1 : m_2 : m_3,$$

gdzie φ'_1, φ'_2, φ'_3 są to kąty trójkąta $P_1P_2Q_3$. Poprowadźmy teraz przez punkty P_1, P_2, i Q_3 koło i połączmy punkt Q_3 z punktem P_3; punkt P przecięcia się prostej P_3Q_3 z okręgiem jest właśnie ten punkt, o którego wyznaczanie chodziło.

Rozważmy teraz pochodne $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Mamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{m_1}{r_1}\sin^2\theta_1 + \frac{m_2}{r_2}\sin^2\theta_2 + \frac{m_3}{r_3}\sin^2\theta_3$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = -\frac{m_1}{r_1}\cos\theta_1\sin\theta_1 - \frac{m_2}{r_2}\cos\theta_2\sin\theta_2 - \frac{m_3}{r_3}\cos\theta_3\sin\theta_3$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{m_1}{r_1}\cos^2\theta_1 + \frac{m_2}{r_2}\cos^2\theta_2 + \frac{m_3}{r_3}\cos^2\theta_3$$

A zatem

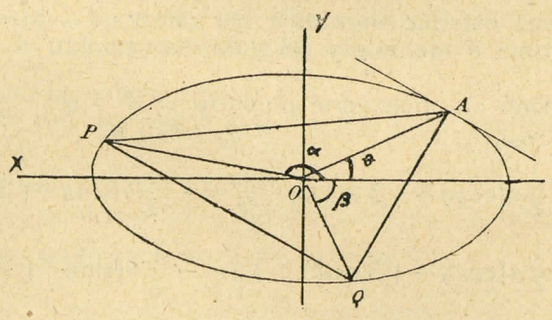
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 = \frac{m_1m_2m_3}{r_1r_2r_3}\left(\frac{r_1}{m_1}\sin^2\varphi_1 + \frac{r_2}{m_2}\sin^2\varphi_2 + \frac{r_3}{m_3}\sin^2\varphi_3\right) > 0$$

Ponieważ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0$, przeto, mamy do czynienia z minimum danej funkcji u.

8. Na elipsie zadanej równaniami

$$x = a\cos t; \quad y = b\sin t$$

dany jest punkt stały A (Rys. 86).



Rys. 86.

Wyznaczyć na obwodzie elipsy punkty P i Q tak, żeby pole U trójkąta APQ było maximum.

Oznaczmy przez x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2; odpowiednio spółrzędne punktów A, P i Q; a przez θ, α, β odpowiednio kąty AOX, POX i QOX. W myśl znanego wzoru na pole trójkąta możemy napisać

$$u = \frac{1}{2}[(x_0y_1 - x_1y_0) + (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_0 - x_0y_2)] = \\ = \frac{1}{2}ab[\sin(\alpha-\theta) + \sin(\beta-\alpha) + \sin(\theta-\beta)]$$

Różniczkując tę funkcję względem α i β, otrzymamy

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} ab[\cos(\alpha - \theta) - \cos(\beta - \alpha)]$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{1}{2} ab[\cos(\beta - \alpha) - \cos(\theta - \beta)]$$

Przyrównując obie pochodne do zera, otrzymamy dwa równania

$$\cos(\alpha - \theta) - \cos(\beta - \alpha) = 0$$
$$\cos(\beta - \alpha) - \cos(\theta - \beta) = 0,$$

które po rozwiązaniu dają następujące wartości na α i β

$$\alpha = \theta + \frac{2\pi}{3}(2m - n); \quad \beta = \theta + \frac{2\pi}{3}(m - 2n),$$

gdzie m i n są to dowolne liczby całkowite.

Jasną jest rzeczą, że w danym przypadku jedynie możliwe są wzory

$$\alpha = \theta + \frac{2\pi}{3}; \quad \beta = \theta + \frac{4\pi}{3}$$

Pole u elipsy przybiera wówczas wartość największą

$$\frac{3}{4} ab\sqrt{3}$$

Ponieważ ostatnie wyrażenie nie zależy od θ, przeto wartość największa pola u nie zależy od położenia punktu A na obwodzie elipsy.

Z wyrażeń na spółrzędne punktów A, P i Q

$$x_0 = a\cos\theta \qquad y_0 = b\sin\theta$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} a(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta); \quad y_1 = -\frac{1}{2} b(\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta)$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} a(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta); \quad y_2 = -\frac{1}{2} b(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)$$

wynika, że

$$x_0 + x_1 + x_2 = 0; \quad y_0 + y_1 + y_2 = 0.$$

A zatem środek trójkąta o największem polu, wpisanego w elipsę pokrywa się ze środkiem tej elipsy.

Ćwiczenia. Wyznaczyć maximum i minimum funkcyj

1. $u = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

   Odp.: min. $x = 3$; $y = 3$
   $u = 0$

2. $u = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y$

   Odp.: min. $x = 1$; $y = -1$; $z = -12$

3. $u = x^3 + y^3 - 3xy$

   Odp.: min. $x = 1$; $y = 1$; $z = -1$

4. $u = \dfrac{x^3 y^3}{(x-a)(y-b)}$

   Odp.: min. $x = \dfrac{3a}{2}$; $y = \dfrac{3b}{2}$

   $$u = \left(\frac{27}{4} ab\right)^2$$

5. $u = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$

   Odp.: max. $x = y = \dfrac{\pi}{3}$; $z = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

6. $u = xyz(a^2 - x^2 - y^2 - z^2)$

Różniczkując daną funkcję względem x, y, z, otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz(a^2 - 3x^2 - y^2 - z^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xz(a^2 - x^2 - 3y^2 - z^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xy(a^2 - x^2 - y^2 - 3z^2)$$

Przyrównując te pochodne do zera, otrzymamy trzy równania

$$yz(a^2 - 3x^2 - y^2 - z^2) = 0$$
$$xz(a^2 - x^2 - 3y^2 - z^2) = 0$$
$$xy(a^2 - x^2 - y^2 - 3z^2) = 0$$

Odrzucamy pierwiastki $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$, ponieważ odpowiadająca im wartość $u = 0$ nie jest ani maximum, ani minimum funkcji.

Rozwiązując więc równania

$$3x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + 3y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + 3z^2 = a^2,$$

otrzymamy następujące wartości na x, y, z:

$$x = y = z = \frac{a}{\sqrt{5}}; \quad x = y = z = -\frac{a}{\sqrt{5}}$$

Różniczkując dalej, otrzymamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6xyz; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6xyz; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -6xyz$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z(a^2 - 3x^2 - 3y^2 - z^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = y(a^2 - 3x^2 - y^2 - 3z^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x(a^2 - x^2 - 3y^2 - 3z^2)$$

Podstawiając znalezione wartości sześciu pochodnych drugiego rzędu w nierówność

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right)^2<\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\cdot\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right)^2\right]$$

przekonamy się, że nierówność ta zachodzi dla wartości

$$x=y=z=\frac{a}{\sqrt{5}}\quad\text{i}\quad x=y=z=-\frac{a}{\sqrt{5}}$$

Ponieważ dla wartości $x=y=z=\frac{a}{\sqrt{5}}$ pochodne $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ są ujemne, przeto dla tych wartości zachodzi maximum funkcji $u=\frac{2a^5}{25\sqrt{5}}$

Ponieważ dla wartości $x=y=z=-\frac{a}{\sqrt{5}}$ pochodne $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ są dodatnie, przeto dla tych wartości zachodzi minimum funkcji $u=-\frac{2a^5}{25\sqrt{5}}$

7. $u=xy^2z^3(a-x-y-z)$

Odp.: max. $x=\frac{a}{7}$; $y=\frac{2a}{7}$; $z=\frac{3a}{7}$

$$u=108\left(\frac{a}{7}\right)^7$$

§ **3. Maximum i minimum funkcyj uwikłanych jednej i wielu zmiennych.** Niech y będzie funkcją uwikłaną zmiennej x, określoną zapomocą równania

$$F(x,y)=0$$

Różniczkując funkcję F względem x, dostaniemy

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

Skąd

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

A więc na to, aby dla pewnej wartości na x zachodziło maximum lub minimum funkcji, potrzeba, żeby dla tej wartości spełniały się równania

$$F(x,y)=0;\quad\frac{\partial F}{\partial x}=0\quad\ldots\ldots\quad(16)$$

Różniczkujemy dalej równanie (15) względem x. Otrzymamy

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0\quad\ldots\quad(17)$$

Ponieważ dla wartości na x, spełniających równania (16), $\frac{dy}{dx}=0$, przeto równanie (17) przybiera postać

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

Stąd

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

A więc, jeżeli dla wartości na x, spełniających równania (16) zachodzi maximum funkcji, określonej równaniem (15), wówczas zachodzi nierówność

$$\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}>0,$$

która wymaga, by

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\ \text{i}\ \frac{\partial F}{\partial y}$$

miały znaki jednakowe.

Jeżeli zaś dla wartości na x, spełniającej równanie (16), zachodzi minimum funkcji, określonej równaniem (15), wówczas zachodzi nierówność

$$\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}<0,$$

która wymaga, by pochodne

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\quad\frac{\partial F}{\partial y}$$

miały znaki różne.

Przykłady. 1. Mając daną funkcję y zmiennej x, określoną za pomocą równania

$$F(x,y)=y^3-3x^2y+x^3-3=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

wyznaczyć jej maximum.

Różniczkując funkcję $F(x,y)$ względem x, otrzymamy

$$\frac{F}{\partial x}=3x^2-6xy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Przyrównując tę pochodną do zera, otrzymamy równanie

$$x(x-2y)=0$$

Stąd

$$x=0 \text{ lub } y=\frac{x}{2}$$

Podstawiając te wartości do równania (a), otrzymujemy

$$y^3-3=0$$

Stąd $$y=\sqrt[3]{3}$$

Podstawiając wartość $y=\frac{x}{2}$ do równania (a), otrzymamy

$$x^3+8=0$$

Stąd

$$x=-2$$

Przeto

$$y=-1.$$

A więc mamy dwie pary wartości, czyniących zadość równaniom (a), (b), a mianowicie

$$x=0 \qquad y=\sqrt[3]{3}$$
$$x=-2 \qquad y=-1.$$

$$\frac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{6x-6y}{3y^2-3x^2}=-\frac{2}{x+y}$$

Podstawiając w to wyrażenie $x=0$; $y=\sqrt[3]{3}$, otrzymamy

$$\frac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}.$$

A zatem dla tych wartości na x i y funkcja osiąga minimum. Podstawiając zaś $x=-2$; $y=-1$, otrzymamy

$$\frac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{2}{3}.$$

Stąd wnosimy, że w ostatnim przypadku mamy do czynienia z maximum funkcji.

2. Mając daną funkcję zmiennej x, określoną równaniem

$$F(x,y)=x^3+y^3-3axy=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

wyznaczyć jej maximum i minimum.

Różniczkując funkcję $F(x,y)$ względem x, dostaniemy

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2-3ay \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Z równania

$$ay-x^2=0$$

otrzymamy

$$x=0; \qquad y=0,$$

lub też $$y=\frac{x^2}{a}$$

Różniczkując równanie (c), dostaniemy

$$(y^2-ax)\frac{d^2y}{dx^2}+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a\frac{dy}{dx}+2x=0$$

$$(y^2-ax)\frac{d^3y}{dx^2}+3\left(2y\frac{dy}{dx}-a\right)\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2=0$$

Kładąc w tych dwóch równaniach $x=0$; $y=0$, otrzymujemy

$$\frac{dy}{dx}=0; \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{3a}$$

A więc przy $x=0$; $y=0$ zachodzi minimum funkcji.

Podstawiając teraz wartość $y=\frac{x^2}{a}$ do równania (f), dostaniemy równanie $x^3-2a^3=0$

Stąd $$x=a\sqrt[3]{2}\,; \qquad y=a\sqrt[3]{4}$$

Podstawiając te wartości w wyrażenie

$$\frac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{2x}{y^2-ax},$$

otrzymamy

$$\frac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{2}{a}.$$

A zatem dla wartości $x=a\sqrt[3]{2}$; $y=a\sqrt[3]{4}$ zachodzi maximum funkcji.

Ćwiczenia. Wyznaczyć maximum lub minimum funkcyj, uwikłanych, określonych równaniami

1. $F(x,y)=y^2+2xy^2+4x-3=0.$

Odp: max: $x=-\frac{1}{2}$; $y=2$, przy $x=1$; $y=-1$ niema ani maximum, ani minimum

2. $F(x,y)=x^3+y^3-a^2x=0$

Odp: max: $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$; $y=a\sqrt[3]{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$

min: $x=-\frac{a}{\sqrt{3}}$; $y=-a\sqrt[3]{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$

3. $F(x,y)=y^2-2mxy+x^2-a^2-0$

Odp: max: $x=\frac{am}{\sqrt{1-m^2}}$; $y=\frac{a}{\sqrt{1-m^2}}$

4. $F(x,y)=y^4-4xy+x^4+2=0$

Odp: niema ani max., ani minimum

5. $F(x,y)=\cos(y-x)-2\sin y-\cos x=0$

Odp: max: $x=\frac{\pi}{6}$; $y=\frac{4\pi}{3}$.

Niechaj z będzie funkcją uwikłaną zmiennych x, y, określoną zapomocą równania $F(x,y,z)=0$. . . . . (17)

Różniczkując to równanie względem x i y, dostaniemy

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

Stąd

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

A więc na to, aby dla pewnych wartości na x i y zachodziło maximum, lub minimum funkcji, określonej równaniem (17), potrzeba i wystarcza, żeby te wartości były pierwiastkami układu

$$F(x,y,z)=0;\quad \frac{\partial F}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Różniczkując jeszcze raz równanie (17) względem x i y, dostaniemy

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0 \quad . \quad . \quad (19)$$

Ponieważ wartości na x i y, spełniające równania (18), czynią zadość równaniom

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

przeto równania (19) przybierają postać

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

Stąd

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Różniczkując równanie

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

względem y, dostaniemy

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Uwzględniając zaś równania (20), mamy równanie

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

Stąd

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

A więc dla wartości na x i y, spełniających równania (18), zachodzi maximum lub minimum funkcji, jeżeli dla tych wartości zachodzi nierówność

$$\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \cdot \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} > \left(\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \right)^2, \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

która wymaga, by wyrażenia

$$\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{i} \quad \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

miały jednakowe znaki. Maximum zachodzi wtedy, gdy oba te wyrażenia są dodatnie, minimum zaś, gdy są ujemne.

Przykład 1. Mamy daną funkcję uwikłaną z zmiennych niezależnych x, y, określoną równaniem

$$F(x, y, z) = z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0.$$

Różniczkujemy tę funkcję względem zmiennych x i y Otrzymamy

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz - y^2 - 3x^2; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = xz - 2xy$$

Przyrównując te pochodne do zera, dostaniemy dwa równania, które po rozwiązaniu dają następujące trzy grupy wartości na x, y, z:

I $x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0$

II $x = -6; \quad y = 6\sqrt{3}; \quad z = 12\sqrt{3}$

III $x = -6; \quad y = -6\sqrt{3}; \quad z = -12\sqrt{3}$

Dalej obliczamy wyrażenia

$$\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{6x}{2z + xy}; \qquad \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x}{2z + xy}; \qquad \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{z - 2y}{2z + xy} \quad (c)$$

Odrzucamy pierwszą grupę wartości na x, y, z jako nie odpowiadającą ani maximum, ani minimum funkcji. Podstawiając następnie do wzorów (c) drugą grupę wartości na x, y, z, otrzymujemy

$$\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\sqrt{3}; \qquad \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = 0; \qquad \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ponieważ warunek (22) jest spełniony, a nadto wyrażenia

$$\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{i} \quad \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

są ujemne, przeto w tym przypadku zachodzi minimum funkcji $z = 12\sqrt{3}$.

Podstawiając do wzorów (c) trzecią grupę wartości na x, y i z, otrzymujemy

$$\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \sqrt{3}; \qquad \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = 0; \qquad \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ponieważ warunek (22) jest spełniony, a nadto wyrażenia

$$\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

są dodatnie, przeto dla trzeciej grupy wartości na x, y, z zachodzi maximum funkcji $z = -12\sqrt{3}$.

§ 4. Maximum i minimum funkcyj zmiennych, związanych ze sobą równaniami (maximum i minimum względne).

Przypuśćmy, że $U = f(x, y, z, u, v \ldots t)$ oznacza pewne funkcję n zmiennych niezależnych x, y, z, $u \ldots t$, związanych ze sobą m równaniami

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x, y, z, u, v \ldots s) = 0 \\ &\varphi_2(x, y, z, u, v \ldots t) = 0 \\ &\varphi_3(x, y, z, u, v \ldots t) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (24) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_m(x, y, z, u, v \ldots t) = 0 \end{aligned}$$

Weźmy różniczkę zupełną

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial u} du + \frac{\partial U}{\partial v} \partial v + \cdots + \frac{\partial U}{\partial t} dt \quad (25)$$

Zróżniczkujmy następnie równania (24). Otrzymamy wtedy

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} dz + \cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} dt = 0 \\ &\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} dz + \cdots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} dt = 0 \quad \ldots \quad (26) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} dz + \cdots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} dt = 0 \end{aligned}$$

Pomnóżmy równania (26) odpowiednio przez nieokreślone czynniki $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_m$ i dodajmy otrzymane równania do (25). W rezultacie będziemy mieli

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}+\right.$$
$$\left.+\cdots+\lambda_m\cdot\frac{\partial \varphi_m}{\partial y}\right)dy+\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\right)dz+$$
$$+\cdots+\left(\frac{\partial U}{\partial t}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}+\cdots+\lambda_m\cdot\frac{\partial \varphi_m}{\partial t}\right)dt=dU$$

Mając dany układ równań (24), możemy uważać, że ów układ wyznacza m funkcyj $n-m$ zmiennych niezależnych.

Obierzmy narazie nieoznaczone czynniki $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_m$ tak, żeby spółczynniki różniczek m zmiennych niezależnych były zerami. Otrzymamy wtedy m równań dodatkowych.

Przyrównując następnie do zera spółczynniki różniczek pozostałych zmiennych, otrzymamy $n-m$ równań. Uwzględniając m równań danych (24), będziemy mieli razem $m+n$ równań. Z tych równań wyznaczamy wartości na zmienne $x, y, \ldots t$, przy których zachodzi maximum lub minimum funkcji U, oraz czynniki $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_m$.

A więc zagadnienie o wyznaczaniu maximum lub minimum funkcji $U=f(x,y,z\ldots t)$ n zmiennych, związanych ze sobą równaniami warunkowemi (27), sprowadza się do rozwiązania tych równań wspólnie z układem równań

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial U}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial U}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial z}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial U}{\partial t}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial t}=0
\end{aligned}\qquad (27)$$

Rozważmy funkcję

$$V=U+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots+\lambda_m\varphi_m$$

Pochodne cząstkowe tej funkcji względem zmiennych $x, y, z, u, v \cdots t$ będą odpowiednio

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\\
&\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial y}
\end{aligned}\qquad (28)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{\partial U}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial U}{\partial t}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial t}
\end{aligned}$$

Zestawiając równania (27) i (28), wnosimy, że zadanie o wyznaczaniu maxima lub minima funkcji n zmiennych, związanych ze sobą m równaniami warunkowemi, sprowadza się do rozwiązania tych równań wspólnie z układem n równań

$$\frac{\partial V}{\partial x}=0;\ \frac{\partial V}{\partial y}=0;\ \frac{\partial V}{\partial z}=0\ \cdots\ \frac{\partial V}{\partial t}=0,$$

czyli też do wyznaczania maximum lub minimum funkcji V. Aby się przekonać, że dla znalezionych wartości na zmienne zachodzi rzeczywiście maximum względnie minimum funkcji U należy rozważyć różniczkę d^2U. W wielu jednak przypadkach rozważanie drugiej różniczki jest zbytecznem, gdyż odpowiedź na pytanie, czy mamy do czynienia z maximum lub minimum funkcji, wypływa bezpośrednio z treści samego zadania.

Przykłady 1. Wyznaczyć maximum funkcji

$$U=x^a\,.\,y^b\,.\,z^c\ \cdots\ t^k$$

gdzie $a, b, c \ldots k$ są to liczby stałe, a zmienne $x, y, z \ldots t$ są związane ze sobą równaniem

$$x+y+z+\cdots+t-A=0.$$

Rozważmy funkcję

$$V=x^a\,.\,y^b\,.\,z^c\ \cdots\ t^k+\lambda(x+y+z+\cdots+t-A)$$

Równania, wyznaczające maximum funkcji U, będą

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial x}=a\,x^{a-1}\,y^b\,z^c\ \cdots\ t^k+\lambda=0\\
&\frac{\partial V}{\partial y}=b\,x^a\,y^{b-1}\,z^c\ \cdots\ t^k+\lambda=0\\
&\frac{\partial V}{\partial z}=c\,x^a\,y^b\,z^{c-1}\ \cdots\ t^k+\lambda=0\\
&\frac{\partial V}{\partial t}=k\,x^a\,y^b\,z^c\ \cdots\ t^{k-1}+\lambda=0
\end{aligned}$$

Stąd mamy

$$-\frac{\lambda}{x^a\,y^b\,z^c\ \cdots\ t^k}=\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\cdots=\frac{k}{t}=$$
$$=\frac{a+b+c+\cdots+k}{x+y+z+\cdots+t}=\frac{a+b+c+\cdots+k}{A}=m$$

Widzimy więc, że wartości na zmienne, przy których zachodzi maximum funkcji U, będą

$$x=\frac{a}{m};\quad y=\frac{b}{m};\quad z=\frac{c}{m}\quad\cdots\quad t=\frac{k}{m}$$

Przeto

$$U_{\max}=\frac{a^a\cdot b^b\cdot c^c\cdots k^k}{m^{a+b+c+\cdots+k}}=\frac{a^a\cdot b^b\cdot c^c\cdots k^k}{\left(\frac{a+b+c+\cdots+k}{A}\right)^{a+b+c+\cdots+k}}$$

W przypadku szczególnym, gdy

$$a=b=c=\cdots=k=1$$

maximum funkcji $U=xyz\cdots t$ będzie zachodziło dla wartości

$$x=y=z=\cdots=t=\frac{A}{n}$$

A zatem

$$U_{\max}=\frac{A^n}{n^n}$$

2. Z pośród trójkątów, mających dany obwód, wyznaczyć trójkąt największy.

Oznaczmy boki szukanego trójkąta odpowiednio przez x, y, z, a jego obwód przez $2p$.

Jasną jest rzeczą, że zadanie o wyznaczaniu największego trójkąta o danym obwodzie sprowadza się do wyznaczania maximum funkcji

$$U=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

pod warunkiem, że

$$x+y+z-2p=0$$

W myśl ogólnej teorji, utwórzmy funkcję

$$V=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}+\lambda(x+y+z-2p)$$

Przyrównując do zera pochodne cząstkowe tej funkcji, otrzymamy trzy równania

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{p(p-y)(p-z)}{2U}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{p(p-x)(p-z)}{2U}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{p(p-x)(p-y)}{2U}=0$$

Stąd mamy

$$\frac{p}{2\lambda U}=\frac{1}{(p-y)(p-z)}=\frac{1}{(p-z)(p-x)}=\frac{1}{(p-x)(p-y)}$$

Mnożąc te równania przez

$$\frac{U^2}{p}=(p-x)(p-y)(p-z),$$

dostaniemy

$$\frac{U}{2\lambda}=p-x=p-y=p-z,$$

czyli

$$x=y=z=\frac{2}{3}p,$$

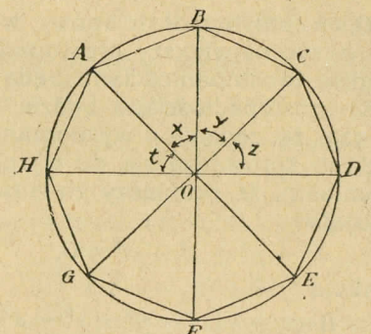
A więc ze wszystkich trójkątów o danym obwodzie największy jest trójkąt równoboczny.

Pole tego trójkąta będzie

$$U_{\max}=\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

3. Ze wszystkich wielokątów foremnych o n bokach, wpisanych w koło o promieniu a, wyznaczyć największy wielokąt.

Połączmy wierzchołki wielokąta $A, B, C\cdots H$ ze środkiem



Rys. 87.

koła i oznaczmy przez $x, y, z\cdots t$ kąty $AOB, BOC, COD\cdots HOA$.

Jasnem jest, iż zadanie o wyznaczaniu największego wielokąta foremnego, wpisanego w koło o promieniu a, sprowadza się do wyznaczania maximum funkcji

$$U=\frac{a^2}{2}(\sin x+\sin y+\sin z+\cdots+\sin t)$$

pod warunkiem, że zmienne $x, y, z\cdots t$ są związane ze sobą równaniem

$$x+y+z+\cdots+t-2\pi=0$$

Utwórzmy funkcję

$$V=\frac{a^2}{2}(\sin x+\sin y+\sin z+\cdots+\sin t)+\lambda(x+y+z+\cdots+t-2\pi)$$

Przyrównując do zera pochodne cząstkowe tej funkcji, otrzymamy n równań

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{a^2}{2}\cos x+\lambda=0;\quad \frac{\partial V}{\partial y}=\frac{a^2}{2}\cos y+\lambda=0$$
$$\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{a^2}{2}\cos z+\lambda=0;\quad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{a^2}{2}\cos t+\lambda=0$$

Stąd mamy

$$-\frac{2\lambda}{a^2}=\cos x=\cos y=\cos z=\ldots=\cos t$$

A zatem maximum funkcji U będzie zachodził dla wartości

$$x=y=z=\ldots=t=\frac{2\pi}{n}$$

A więc ze wszystkich wielokątów o n bokach, wpisanych w koło, największy jest wielokąt foremny.

Pole tego wielokąta będzie

$$U_{\max}=\frac{a^2}{2}n\sin\frac{2\pi}{n}$$

4. Ze wszystkich prostopadłościanów, wpisanych w kulę o promienir a, wyznaczyć największy prostopadłościan.

Niechaj krawędzie prostopadłościanu będą $2x$, $2y$, $2z$.

Wtedy objętość prostopadłościanu będzie $U=8xyz$.

Jasną jest rzeczą, że zadanie o wyznaczaniu maximum objętości prostopadłościanu sprowadza się do wyznaczania maximum funkcji U pod warunkiem, że pomiędzy zmiennemi x, y, z zachodzi związek następujący:

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0.$$

Utwórzmy funkcję

$$V=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2)$$

Przyrównując do zera pochodne cząstkowe tej funkcji, otrzymamy trzy równania

$$\frac{\partial V}{\partial x}=8yz+2\lambda x=0$$
$$\frac{\partial V}{\partial y}=8xz+2\lambda y=0$$
$$\frac{\partial V}{\partial z}=8xy+2\lambda z=0$$

Stąd mamy

$$-\frac{\lambda}{4}=\frac{yz}{x}=\frac{xz}{y}=\frac{xy}{z},$$

czyli

$$x^2=y^2=z^2=\frac{a^2}{3}$$

A zatem maximum objętości prostopadłościanu, wpisanego w kulę, zachodzi dla wartości

$$x=y=z=\frac{a}{3}\sqrt{3}$$

Stąd wnosimy, że szukany prostopadłościan jest sześcianem Objętość tego sześcianu

$$U_{\max}=\frac{8a^3}{3\sqrt{3}}$$

5. Ze wszystkich stożków kołowych danej objętości A znaleźć ten, który ma największą powierzchnię.

Oznaczmy przez x, y, z odpowiednio promień podstawy stożka, jego wysokość i tworzącą.

Wtedy powierzchnia stożka będzie

$$U=\pi x^2+\pi xz=\pi x(x+z)$$

A więc zadanie, jakie mamy do rozwiązania, sprowadza się do wyznaczania maximum funkcji U pod warunkiem, że pomiędzy zmiennemi x, y, z zachodzą związki następujące:

$$\begin{aligned}3A-\pi x^2y&=0\\ x^2+y^2-z^2&=0.\end{aligned}\qquad\text{(a)}$$

Aby wyznaczyć maxima funkcji U, utwórzmy funkcję

$$V=\pi x(x+z)+\lambda_1(3A-\pi x^2y)+\lambda_2(x^2+y^2-z^2)$$

Przyrównując do zera pochodne cząstkowe tej funkcji, otrzymamy trzy równania

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x}&=2\pi x+\pi z-2\pi\lambda_1xy+2x\lambda_2=0\\ \frac{\partial V}{\partial y}&=-\pi\lambda_1x^2+2\lambda_2y=0\\ \frac{\partial V}{\partial z}&=\pi x-2\lambda_2z=0.\end{aligned}\qquad\text{(b)}$$

Z dwóch ostatnich równań znajdujemy wartości na λ_1 i λ_2

$$\lambda_1=\frac{y}{xz};\qquad \lambda_2=\frac{\pi x}{2z}$$

Podstawiając znalezione wartości czynników λ_1 i λ_2 do pierwszego równania (b), otrzymamy

$$x^2+2xz+z^2=(x+z)^2=2y^2$$

Stąd

$$x+z=y\sqrt{2}\qquad\text{(c)}$$

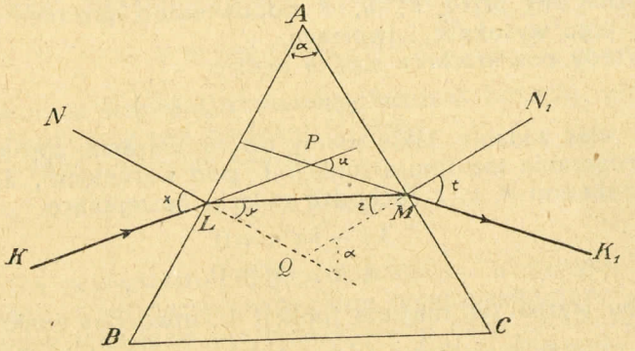
Rozwiązując wspólnie równania (a) i (c), dostaniemy

$$x=\sqrt[3]{\frac{3A}{2\pi\sqrt{2}}};\qquad y=2\sqrt[3]{\frac{3A}{\pi}};\qquad z=3\sqrt[3]{\frac{3A}{2\pi\sqrt{2}}}$$

Dla tych właśnie wartości na x, y, zachodzi maximum funkcji U. Powierzchnią szukanego stożka będzie.

$$U_{max} = 4\pi \sqrt[3]{\frac{9A^2}{8\pi^2}}$$

6. Promień światła KL w płaszczyźnie prostopadłej do krawędzi trójkątnego graniastościanu dosięga ściany AB w punkcie L (Rys. 88), przechodzi następnie przez graniastościan, w kierunku LM i opuszcza graniastościan, idąc dalej, w kierunku MN_1. Pod jakim kątem powinien upaść na ścianę AB promień światła, żeby kąt odchylenia był najmniejszym.



Rys. 88.

Oznaczmy przez α kąt dwuścienny BAC; przez x kąt upadku promienia światła na ścianę AB; przez y kąt załamania, odpowiadający kątowi x; przez z kąt upadku promienia na ścianę AC; przez t kąt załamania, odpowiadający kątowi z; przez μ spółczynnik załamania światła. Możemy wtedy napisać

$$u = \sphericalangle PLM + \sphericalangle LMP = \sphericalangle PLQ - y + \sphericalangle QMP - z = x - y + t - z \quad \text{(a)}$$

Pomiędzy zmiennemi x, y, z i t zachodzą związki następujące:

$$\begin{aligned} y + z - \alpha &= 0 \\ \sin x - \mu \sin y &= 0 \\ \sin t - \mu \sin z &= 0 \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Utwórzmy funkcję

$$V = x - y + t - z + \lambda_1 (y + z - \alpha) + \lambda_2 (\sin x - \mu \sin y) + \\ + \lambda_3 (\sin t - \mu \sin z)$$

Przyrównując do zera pochodne cząstkowe funkcji V względem zmiennych x, y, z i t, otrzymamy cztery równania:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 1 + \lambda_2 \cos x = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -1 + \lambda_1 - \lambda_2 \mu \cos y = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -1 + \lambda_1 - \mu \cdot \lambda_3 \cos z = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 1 + \lambda_3 \cos t$$

Stąd

$$\frac{\xi_3}{\xi_2} = \frac{\cos x}{\cos t} = \frac{\cos y}{\cos z}, \quad \text{czyli}$$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 z}; \quad \text{czyli} \quad \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin^2 t} = \frac{1 - \sin^2 y}{1 - \sin^2 z} \quad \text{(c)}$$

Z dwóch ostatnich równań (a) mamy

$$\frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin^2 t} = \frac{1 - \mu^2 \sin^2 y}{1 - \mu^2 \sin^2 z}$$

Uwzględniając zaś równanie (b), możemy napisać

$$\frac{1 - \mu^2 \sin^2 y}{1 - \mu^2 \sin^2 z} = \frac{1 - \sin^2 y}{1 - \sin^2 z}$$

Stąd

$$\sin^2 y = \sin^2 z, \qquad \text{czyli} \quad y = z = \frac{\alpha}{2}$$

Analogicznie

$$\sin x = \sin t = \mu \sin \frac{\alpha}{2}$$

skąd

$$x = t = \operatorname{arc\,sin}\left(\mu \sin \frac{\alpha}{2}\right)$$

A zatem minimum funkcji u będzie

$$u = 2 \operatorname{arc\,sin}\left(\mu \sin \frac{\alpha}{2}\right) - \alpha$$

Aby się przekonać, że dla wartości $x = t = \operatorname{arc\,sin}\left(\mu \cdot \sin \frac{\alpha}{2}\right)$ rzeczywiście zachodzi minimum funkcji u, przyjmijmy z za zmienną niezależną i obliczmy pochodną $\frac{d^2 u}{dz^2}$.

Różniczkując równanie (a) dwa razy względem z, dostaniemy

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{d^2 x}{dz^2} - \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{d^2 t}{d^2 z} \quad \ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

Różniczkując względem z równanie $y + z = \alpha$, otrzymamy

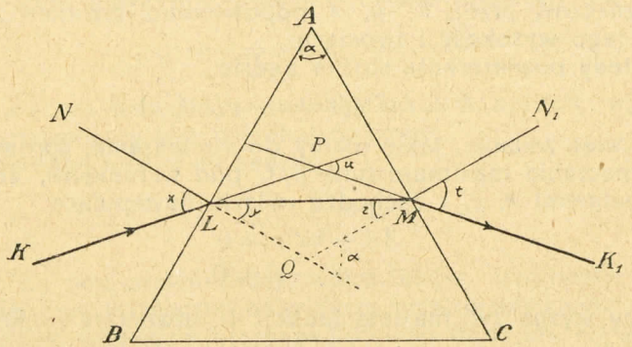
$$\frac{dy}{dz} = -1; \quad \frac{d^2 y}{dz^2} = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

Różniczkując następnie drugie i trzecie równanie (b), dostaniemy po zestawieniu z równaniami (e)

Dla tych właśnie wartości na x, y, zachodzi maximum funkcji U. Powierzchnią szukanego stożka będzie.

$$U_{max} = 4\pi \sqrt[3]{\frac{9A^2}{8\pi^2}}$$

6. Promień światła KL w płaszczyźnie prostopadłej do krawędzi trójkątnego graniastościanu dosięga ściany AB w punkcie L (Rys. 88), przechodzi następnie przez graniastościan, w kierunku LM i opuszcza graniastościan, idąc dalej, w kierunku MN_1. Pod jakim kątem powinien upaść na ścianę AB promień światła, żeby kąt odchylenia był najmniejszym.



Rys. 88.

Oznaczmy przez α kąt dwuścienny BAC; przez x kąt upadku promienia światła na ścianę AB; przez y kąt załamania, odpowiadający kątowi x; przez z kąt upadku promienia na ścianę AC; przez t kąt załamania, odpowiadający kątowi z; przez μ spółczynnik załamania światła. Możemy wtedy napisać

$$u = \sphericalangle PLM + \sphericalangle LMP = \sphericalangle PLQ - y + \sphericalangle QMP - z = x - y + t - z \quad \text{(a)}$$

Pomiędzy zmiennemi x, y, z i t zachodzą związki następujące:

$$\begin{aligned} y + z - \alpha &= 0 \\ \sin x - \mu \sin y &= 0 \\ \sin t - \mu \sin z &= 0 \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Utwórzmy funkcję

$$V = x - y + t - z + \lambda_1 (y + z - \alpha) + \lambda_2 (\sin x - \mu \sin y) + \lambda_3 (\sin t - \mu \sin z)$$

Przyrównując do zera pochodne cząstkowe funkcji V względem zmiennych x, y, z i t, otrzymamy cztery równania:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 1 + \lambda_2 \cos x = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -1 + \lambda_1 - \lambda_2 \mu \cos y = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -1 + \lambda_1 - \mu \cdot \lambda_3 \cos z = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 1 + \lambda_3 \cos t$$

Stąd

$$\frac{\xi_3}{\xi_2} = \frac{\cos x}{\cos t} = \frac{\cos y}{\cos z}, \quad \text{czyli}$$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 z}; \quad \text{czyli} \quad \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin^2 t} = \frac{1 - \sin^2 y}{1 - \sin^2 z} \quad \text{(c)}$$

Z dwóch ostatnich równań (a) mamy

$$\frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin^2 t} = \frac{1 - \mu^2 \sin^2 y}{1 - \mu^2 \sin^2 z}$$

Uwzględniając zaś równanie (b), możemy napisać

$$\frac{1 - \mu^2 \sin^2 y}{1 - \mu^2 \sin^2 z} = \frac{1 - \sin^2 y}{1 - \sin^2 z}$$

Stąd

$$\sin^2 y = \sin^2 z, \qquad \text{czyli} \quad y = z = \frac{\alpha}{2}$$

Analogicznie

$$\sin x = \sin t = \mu \sin \frac{\alpha}{2}$$

skąd

$$x = t = \arcsin \left(\mu \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

A zatem minimum funkcji u będzie

$$u = 2 \arcsin \left(\mu \sin \frac{\alpha}{2} \right) - \alpha$$

Aby się przekonać, że dla wartości $x = t = \arcsin \left(\mu \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right)$ rzeczywiście zachodzi minimum funkcji u, przyjmijmy z za zmienną niezależną i obliczmy pochodną $\frac{d^2 u}{dz^2}$.

Różniczkując równanie (a) dwa razy względem z, dostaniemy

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{d^2 x}{dz^2} - \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{d^2 t}{d^2 z} \quad \ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

Różniczkując względem z równanie $y + z = \alpha$, otrzymamy

$$\frac{dy}{dz} = -1; \quad \frac{d^2 y}{dz^2} = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

Różniczkując następnie drugie i trzecie równanie (b), dostaniemy po zestawieniu z równaniami (e)

$$\cos x \cdot \frac{dx}{dz} = \mu \cos y \frac{dy}{dz} = -\mu \cos y$$

$$-\sin x \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \cos x \cdot \frac{d^2x}{dz^2} = \mu \sin y \cdot \frac{dy}{dz} = -\mu \sin y$$

Stąd

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{\mu \sin y}{\cos x} + \frac{\sin x - \mu^2 \cos^2 y}{\cos^2 x} = \frac{\mu}{\cos x}\left(\frac{\mu \sin x \cos^2 y}{\cos^2 x} - \sin y\right) \quad (f)$$

W sposób zupełnie analogiczny do poprzedniego otrzymamy wzór

$$\frac{d^2t}{dz^2} = \frac{\mu}{\cos t}\left(\frac{\mu \cdot \cos^2 z \cdot \sin t}{\cos^2 t} - \sin z\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

Podstawiając wyrażenia (f) i (g) do równania (d), otrzymamy po uwzględnieniu wzorów $x = t$; $y = z$ następujące wyrażenie na pochodną drugiego rzędu funkcji u względem z:

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{2}{\cos^3 x}[\mu^2 \sin x \cos^2 y - \mu \sin y \cos^2 x] =$$

$$= \frac{2}{\cos^3 x}[\sin x (\mu^2 - \mu^2 \sin^2 y) - \mu \sin y \cdot \cos^2 x] \quad . \quad . \quad (h)$$

Ponieważ $\mu \sin y = \sin x$, przeto wzór (h) przybiera postać

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{2}{\cos^3 x}[\mu^2 \sin x - \sin x (\sin^2 x + \cos^2 x)] = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}(\mu^2 - 1)$$

Przy $\mu > 1$ $\quad \frac{d^2u}{dz^2} > 0$

przy $\mu < 1$ $\quad \frac{d^2u}{dz^2} < 0$

A więc jeżeli $\mu > 1$, to funkcja u przybiera wartość najmniejszą, a jeżeli $\mu < 1$, to wartość najmniejsza dla $x = l = \arcsin\left(\mu \sin \frac{\alpha}{2}\right)$.

Dodatek

Tabela pochodnych i różniczek.

Funkcja	Pochodna	Różniczka
$y = C$	$y' = 0$	$dy = 0$
$y = x$	$y' = 1$	$dy = dx$
$y = x^m$	$y' = mx^{m-1}$	$dy = mx^{m-1} \cdot dx$
$y = a^x$	$y' = a^x \lg a$	$dy = a^x \cdot \lg a \cdot dx$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$dy = e^x \cdot dx$
$y = \lg x$	$y' = \frac{1}{x}$	$dy = \frac{dx}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$dy = \cos x \cdot dx$
$y = \cos x$	$y' = \sin x$	$dy = \sin x \cdot dx$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$dy = -\frac{dx}{\sin^2 x}$
$y = \sec x$	$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$dy = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot dx$
$y = \operatorname{cosec} x$	$y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$dy = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$dy = \frac{dx}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$	$dy = -\frac{dx}{1+x^2}$

Funkcja	Pochodna	Różniczka
$y=\operatorname{arcsec}x$	$y'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$dy=\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
$y=\operatorname{arccosec}x$	$y'=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$dy=-\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
$y=\operatorname{sh}x$	$y'=\operatorname{ch}x$	$dy=\operatorname{ch}x\,dx$
$y=\operatorname{ch}x$	$y'=\operatorname{sh}x$	$dy=\operatorname{sh}x\,dx$
$y=\operatorname{th}x$	$y'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}=1-\operatorname{th}^2x$	$dy=\frac{dx}{\operatorname{ch}^2x}=(1-\operatorname{th}^2x)dx$
$y=\operatorname{cth}x$	$y'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}=1-\operatorname{cth}^2x$	$dy=-\frac{dx}{\operatorname{sh}^2x}=(1-\operatorname{cth}^2x)dx$
$y=\operatorname{sch}x$	$y'=-\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2x}$	$dy=-\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2x}dx$
$y=\operatorname{csch}x$	$y'=-\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2x}$	$dy=-\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2x}dx$

ZADANIA.

Znaleźć pochodną funkcji:

1. $y=(m+nx)(nx-m)$ Odp. $y'=2n^2x$
2. $y=(x+3)^2(x-3)$ Odp. $y'=3(x^2+2x-3)$
3. $y=\frac{1+x}{1-x}$ Odp. $y'=\frac{2}{(1-x)^2}$
4. $y=(1-2x+4x^2-4x^3)(1+2x-4x^2)$
   Odp. $y'=4x(20x^3-24x^2+9x-2)$
5. $y=\frac{x-4}{x^2-3x+1}$ Odp. $y'=-x^2+8x-11$
6. $y=\sqrt{3x+2}$ Odp. $y'=\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$
7. $y=\sqrt{5x^2+3x+2}$ Odp. $y'=\frac{3+10x}{2\sqrt{5x^2+3x+2}}$
8. $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ Odp. $y'=\frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$
9. $y=\sqrt{\frac{3x+2x^2}{3-2x^2}}$ Odp. $y'=\frac{12x}{(3-2x^2)\sqrt{9-4x^4}}$
10. $y=\frac{\sqrt{1-2x+4x^2}}{x+1}$ Odp. $y'=\frac{5x-2}{(x+1)^2\sqrt{1-2x+16}}$
11. $y=\frac{x^5}{\sqrt{2-3x^2}}$ Odp. $y'=\frac{2x^4(5-6x^2)}{\sqrt{(2-3x^2)^3}}$
12. $y=8\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ Odp. $y'=7\sqrt[8]{\frac{1}{x}}$
13. $y=\sqrt[3]{\frac{x^3\sqrt{ax}}{b}}$ Odp. $y'=\frac{7}{6}\sqrt[6]{\frac{ax}{b^2}}$
14. $y=x^n(1-x)^n$ Odp. $y'=nx^{n-1}(1-x)^{n-1}(1-2x)$

15. $y=(a+x)\sqrt{a-x}$ Odp. $y'=\frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$

16. $y=(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$ Odp. $y'=\frac{x(a^2-3x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$

17. $y=(2a^2+3x^2)\sqrt{(a^2-x^2)^3}$ Odp. $y'=-15x^3\sqrt{a^2-x^2}$

18. $y=\frac{2a+bx}{\sqrt{a+bx}}$ Odp. $y'=\frac{b^2x}{2}(a+bx)^{-\frac{3}{2}}$

19. $y=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$ Odp. $y'=\frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}+x}}{2\sqrt{1+x^2}}$

20. $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ Odp. $y'=(3-x)(1-x)^{-\frac{3}{2}}$

21. $y=\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ Odp. $y'=-\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}\cdot(1+\sqrt{x})}$

22. $y=\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$ Odp. $y'=-\frac{2}{x^3}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\right)$

23. $y=a^{x^2}$ Odp. $y'=2xa^{x^2}\lg a$

24. $y=e^{2x^2}+(e^{2x})^2$ Odp. $y'=4e^{4x}(xe^{2x^2-4x}+1)$

25. $y=(e^{-2x})^2$ Odp. $y'=-\frac{4}{e^{4x}}$

26. $y=axe^{ax}$ Odp. $y'=ae^{ax}(1+ax)$

27. $y=axe^{ax^2}$ Odp. $y'=ae^{ax^2}(1+2ax^2)$

28. $y=(4x^3-6x^2+6x-3)e^{2x}$ Odp. $y'=8x^3e^{2x}$

29. $y=\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)^2$ Odp. $y'=\frac{2}{a}\left(e^{\frac{2x}{a}}-e^{-\frac{2x}{a}}\right)$

30. $y=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)e^x$ Odp. $y'=\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}\right)e^x$

31. $y=\frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}-\frac{1}{x}$ Odp. $y'=\frac{2ae^{ax}}{(e^{ax}+1)^2}+\frac{1}{x^2}$

32. $y=\lg(ae^{ax}+b)$ Odp. $y'=\frac{a^2e^{ax}}{ae^{ax}+b}$

33. $y=\sqrt{\frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}}$ Odp. $y'=\frac{ae^{ax}}{(e^{ax}+1)\sqrt{e^{2ax}-1}}$

34. $y=\lg\left(\frac{ae^x-b}{ae^x+b}\right)$ Odp. $y'=\frac{2ab}{a^2e^x-b^2e^{-x}}$

35. $y=\lg[(e^x+1)^2]-x$ Odp. $y'=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

36. $y=\lg(e^x+1)-\left(e^{\frac{1}{x}}+x\right)$ Odp. $y'=\frac{1}{e^x(e^x+1)}$

37. $y=\lg(a+b^{mx})^{\frac{1}{m}}$ Odp. $y'=\frac{b^{mx}\lg b}{a+b^{mx}}$

38. $y=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)e^{-x}$ Odp. $y'=-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{3}{x^4}\right)e^{-x}$

39. $y=a^{x^2-4x+1}$ Odp. $y'=2a^{x^2-4x+1}(x-2)\lg a$

40. $y=\frac{a^x}{x}$ Odp. $y'=\frac{a^x}{x^2}(x\lg a-1)$

41. $y=a^{\lg x}$ Odp. $y'=\frac{a^{\lg x}\cdot\lg a}{x}$

42. $y=a^{e^x}$ Odp. $y'=a^{e^x}\cdot e^x$

43. $y=a^{\sqrt{x^2-1}}$ Odp. $y'=\frac{a^{\sqrt{x^2-1}}\cdot x\lg a}{\sqrt{x^2-1}}$

44. $y=a^x+\frac{1}{a^x}$ Odp. $y'=(a^x-a^{-x})\lg a$

45. $y=a^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$ Odp. $y'=\frac{a^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\lg a}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

46. $y=e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ Odp. $y'=\frac{e^x(2-x^2)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

47. $y=a^{e^{\frac{1}{x}}+1}$ Odp. $y'=\frac{-ae^{\frac{1}{x}+1}\cdot e^{\frac{1}{x}}\lg a}{x^2}$

48. $y=x\lg x$ Odp. $y'=1+\lg x$

49. $y=x^n\lg x$ Odp. $y'=x^{n-1}(n\lg x+1)$

50. $y=\lg(x^n)$ Odp. $y'=\frac{n}{x}$

51. $y=(\lg x)^n$ Odp. $y'=\frac{n(\lg x)^{n-1}}{x}$

52. $y=\lg\lg x=\lg_2 x$ Odp. $y'=\frac{1}{x\lg x}$

53. $y=\lg_n x$ Odp. $y'=\frac{1}{x\lg_{n-1}x\lg_{n-2}x\ldots\lg x}$

54. $y=\lg(x+\sqrt{a^2\pm x^2})$ Odp. $y'=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$

55. $y=\lg\dfrac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$ Odp. $y'=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

56. $y=\lg\sqrt{\dfrac{3x-4}{3x+4}}$ Odp. $y'=\dfrac{12}{9x^2-16}$

57. $y=\lg(a+x+\sqrt{2ax+x^2})$ Odp. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{2ax+x^2}}$

58. $y=\lg\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}$ Odp. $y'=-\dfrac{2a^2}{x\sqrt{a^4-x^4}}$

59. $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$ Odp. $y'=\dfrac{2}{x^2-1}$

60. $y=\lg\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ Odp. $y'=\dfrac{1}{x(1-x^2)}$

61. $y=\operatorname{cosec}(2x-3)$ Odp. $y'=-\dfrac{2\cos(2x-3)}{\sin^2(2x-3)}$

62. $y=9\sin x+\sin 3x$ Odp. $y'=12\cos^3 x$

63. $y=x+\sin x\cos x$ Odp. $y'=2\cos^2 x$

64. $y=(2+\cos^2 x)\sin x$ Odp. $y'=3\cos^3 x$

65. $y=(2+\sin^2 x)\cos x$ Odp. $y'=-3\sin^3 x$

66. $y=3\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^3 x$ Odp. $y'=\dfrac{3}{\cos^4 x}$

67. $y=3\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}^3 x$ Odp. $y'=-\dfrac{3}{\sin^4 x}$

68. $y=\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$ Odp. $y'=\dfrac{\cos 2x}{\cos^4 x}$

69. $y=\dfrac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}$ Odp. $y'=\dfrac{3}{\cos^2 3x}$

70. $y=\dfrac{\sin x}{\sin x-\cos x}$ Odp. $y'=\dfrac{1}{\sin 2x-1}$

71. $y=\dfrac{2+\sin x}{2-\cos x}$ Odp. $y'=\dfrac{2(\cos x-\sin x)-1}{(2-\cos x)^2}$

72. $y=\sin^2 x+2\cos x$ Odp. $y'=-4\sin x\sin^2\dfrac{x}{2}$

73. $y=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$ Odp. $y'=\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$

74. $y=\sec x+\operatorname{tg}^2 x$ Odp. $y'=\dfrac{\sin x(2+\cos x)}{\cos^3 x}$

75. $y=(\sin x)^m$ Odp. $y'=m\sin^{m-1}x\cos x$

76. $y=\sin(x^m)$ Odp. $y'=mx^{m-1}\cos(x^m)$

77. $y=\lg\operatorname{ctg}x$ Odp. $y'=-\dfrac{1}{\sin x\cos x}$

78. $y=e^x\cos ax$ Odp. $y'=e\ (\cos ax-a\sin ax)$

79. $y=a^{1-\sin x}$ Odp. $y'=-\cos x\cdot\lg a.a^{1-\sin x}$

80. $y=\lg(1+\cos x)$ Odp. $y'=-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

81. $y=\operatorname{tg}ax+e^{\operatorname{tg}ax}$ Odp. $y'=\dfrac{a}{\cos^2 ax}(1+e^{\operatorname{tg}ax})$

82. $y=\lg(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x)$ Odp. $y'=\dfrac{2(\sin^4 x+\cos^4 x)}{\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)}$

83. $y=\lg x\cdot\lg\cos x$ Odp. $y'=\dfrac{\lg\cos x}{x}-\lg x.\operatorname{tg}x$

84. $y=\lg\sqrt{\operatorname{ctg}x}$ Odp. $y'=-\dfrac{1}{\sin 2x}$

85. $y=e^{\sin x}.\cos x$ Odp. $y'=e^{\sin x}(\cos^2 x-\sin x)$

86. $y=\sin 4x-\sec 2x$ Odp. $y'=2\cdot\dfrac{2\cos 4x\cos^2 2x-\sin 2x}{\cos^2 2x}$

87. $y=\lg\operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$ Odp. $y'=\sec x$

88. $y=\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x}$ Odp. $y'=\dfrac{-(a-b)\sin 2x}{2\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x}}$

89. $y=\dfrac{\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x}}{\sin x}$ Odp. $y'=\dfrac{-a\cos x\cos^2 x}{\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x}}$

90. $y=-\dfrac{1}{2\sin^2 x}+\lg\operatorname{tg}x$ Odp. $y'=\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin^3 x\cdot\cos^2 x}$

91. $y=\dfrac{\sin^2 x}{a+b\cos^2 x}$ Odp. $y'=\dfrac{(a+b)\sin 2x}{(a+b\cos^2 x)^2}$

92. $y=e^{ax}(a\sin x-\cos x)$ Odp. $y'=e^{ax}(1+a^2)\sin x$

93. $y=\sin(\cos x)$ Odp. $y'=-\sin x.\cos(\cos x)$

94. $y=\sin^3 x.\cos x$ Odp. $y'=\sin^2 x(3-4\sin^2 x)$

95. $y=\sin\lg x$ Odp. $y'=\dfrac{\cos\lg x}{x}$

96. $y=\sin\sqrt{\dfrac{x}{2}}$ Odp. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{2x}}\cos\sqrt{\dfrac{x}{2}}$

97. $y=\operatorname{tg}\dfrac{x-2}{x+2}$ Odp. $y'=\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)\right]\cdot\dfrac{4}{(x+2)^2}$

98. $y = \lg\sqrt{\cos x}$ Odp. $y' = -\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$

99. $y = \lg\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ Odp. $y' = \frac{1}{\sin x}$

100. $y = \lg\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ Odp. $y' = -\frac{1}{\sin x}$

101. $y = \sqrt[4]{\sin^3 x \cdot \cos^3 x}$ Odp. $y' = \frac{3}{2}\operatorname{cotg} 2x$

102. $y = xe^{\cos x}$ Odp. $y' = e^{\cos x}(1 - x\sin x)$

103. $y = \sqrt{1 + \sin 2x}$ Odp. $y' = \cos x - \sin x$

104. $y = \lg\sqrt{\sin x} + \lg\sqrt{\cos x}$ Odp. $y' = \operatorname{cotg} 2x$

105. $y = \frac{\sin x(2 + a\cos x)}{(1 + a\cos x)^2}$ Odp. $y' = \frac{3a + (2 + a^2)\cos x}{(1 + a\cos x)^3}$

106. $y = \sqrt{\sin(a^2 - x^2)}$ Odp. $y' = \frac{-x\cos(a^2 - x^2)}{\sqrt{\sin(a^2 - x^2)}}$

107. $y = \arcsin\frac{x}{a}$ Odp. $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

108. $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ Odp. $y' = \frac{a}{a^2 + x^2}$

109. $y = \arcsin\sqrt{a^2 - x^2}$ Odp. $y' = \frac{-x}{\sqrt{(a^2 - x^2)(1 - a^2x^2)}}$

110. $y = \operatorname{arctg}\frac{1 - x}{1 + x}$ Odp. $y' = -\frac{1}{1 + x^2}$

111. $y = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ Odp $y' = \frac{1}{1 + x^2}$

112. $y = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$ Odp. $y' = \frac{1}{2(1 + x^2)}$

113. $y = \operatorname{arctg}(\sqrt{1 - x^2} - x)$ Odp. $y' = -\frac{1}{2(1 + x^2)}$

114. $y = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\lg(1 + x^2)$ Odp. $y' = \operatorname{arctg} x$

115. $y = \operatorname{arctg} e^x - \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$ Odp. $y' = \frac{2e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2}$

116. $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 + x^2}} e^{\operatorname{arctg} x}$ Odp. $y' = \frac{2}{\sqrt{(1 + x^2)^3}} e^{\operatorname{arctg} x}$

117. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a + x}}$ Odp. $y' = \frac{1}{2(a + 2x)\sqrt{x(a + x)}}$

118. $y = \arccos\frac{a - x}{a} - \sqrt{2ax - x^2}$ Odp. $y' = \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}}$

119. $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} x$ Odp. $y' = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{\cos^2 x}$

120. $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \lg\sqrt{\frac{x - a}{x + a}}$ Odp. $y' = \frac{2ax^2}{x^4 - a^4}$

121. $y = x^3 \cdot \arcsin\frac{1}{x}$ Odp. $y' = 3x^2\operatorname{arccosec} x - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

122. $y = \operatorname{arcsec}\frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ Odp. $y' = \frac{2}{1 + x^2}$

123. $y = \operatorname{arctg}\frac{x - 2}{2\sqrt{x^2 + x - 1}}$ Odp. $y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}$

124. $y = \sqrt{1 - x^2} - x\arcsin\sqrt{1 - x^2}$ Odp. $y' = -\arccos x$

125. $y = (a^2 + x^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ Odp. $y' = a + 2x \cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$

126. $y = \operatorname{arcsec}\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ Odp. $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

127. $y = \arcsin\frac{x + 1}{\sqrt{2}}$ Odp. $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$

128. $y = \arcsin\sqrt{\sin x}$ Odp. $y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \sin^2 x}}$

129. $y = \operatorname{arcsec}\frac{1}{2x^2 - 1}$ Odp. $y' = -\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$

130. $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1 + x^2})$ Odp. $y' = \frac{\sqrt{1 - x^2} - x}{2(\sqrt{1 - x^2} - x - x^3)}$

131. $y = \sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin x - x$ Odp. $y' = \frac{-x\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$

132. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ Odp. $y' = \frac{1}{2}$

133. $y = \arcsin\frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$ Odp. $y' = -\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\cos x}$

134. $y = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$ Odp. $y' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2(a + b\cos x)}$

135. $y = \arccos\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$ Odp. $y' = \frac{1}{(1 + x)\sqrt{2x - 2x^2}}$

136. $y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$ Odp. $y' = -\frac{2}{1+x^2}$

137. $y = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ Odp. $y' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

138. $y = a^{\operatorname{arc\,sec} x^2}$ Odp. $y' = \frac{-2a^{\operatorname{arc\,sec} x^2} \lg a}{x\sqrt{x^4-1}}$

139. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ Odp. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

140. $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ Odp. $y' = \frac{1}{1+x^2}$

141. $y = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \arcsin \frac{2x\sqrt{ab}}{a+bx^2}$ Odp. $y' = \frac{1}{a+bx^2}$

142. $y = e^{\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$ Odp. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

143. $y = \arcsin \sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}$ Odp. $y' = \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}$

144. $y = \operatorname{arctg} [(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - x]$ Odp. $y' = -\frac{1}{2(1+x^2)}$

145. $y = (\sin x)^{\sin x}$ Odp. $y' = (\sin x)^{\sin x} \cos x (1 + \lg \sin x)$

146. $y = x^{\lg x}$ Odp. $y' = 2x^{\lg x - 1} \lg x$

147. $y = x^{\sqrt{x}}$ Odp. $y' = x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1 - \lg x}{x^2}$

148. $y = x^{x^2}$ Odp. $y' = x^{x^2+1} (1 + 2\lg x)$

149. $y = x^{(x^x)}$ Odp. $y' = x^{(x^x)+x} \left[(1 + \lg x) \lg x + \frac{1}{x} \right]$

150. $y = x^{e^x}$ Odp. $y' = x^{e^x} \cdot e^x \cdot \frac{1 + x \lg x}{x}$

151. $y = (a + bx)^{\frac{1}{x}}$

Odp. $y' = \frac{(a+bx)^{\frac{1}{x}}}{x^2} \left[\frac{bx}{a+bx} - \lg(a+bx) \right]$

PEDAGOGICZNA Biblioteka Wojewódzka w Białymstoku

Spis rzeczy.

str.

Przedmowa 3

Rozdział I. Rozwój pojęcia liczby. Liczby rzeczywiste.

§ 1. Układ liczbowy 5
§ 2. Układ liczb naturalnych 6
§ 3. Układ liczb wymiernych 7
§ 4. Grupa. Układ [W] jako grupa. Pole liczbowe . . 9
§ 5. Przekroje Dedekinda. Liczby niewymierne podług Dedekinda 14
§ 6. Inne teorje liczb niewymiernych 18
§ 7. Działania na liczbach niewymiernych 23
§ 8. Układ liczb rzeczywistych 29
§ 9. Liczby algebraiczne i przestępne. Lemat Liouville'a 31

Rozdział II. Rozwój pojęcia liczby. Liczby urojone i zespolone.

§ 1. Uwagi ogólne 36
§ 2. Liczby urojone. 36
§ 3. Liczby zespolone. 39
§ 4. Działania na liczbach zespolonych 42

Rozdział III. Ogólne pojęcia z teorji mnogości. Ciągi liczbowe i ich granice.

§ 1. Określenia. Zbiory równoważne 70
§ 2. Zbiory przeliczalne 74
§ 3. Zbiory nieprzeliczalne (o mocy continuum). . . 76
§ 4. Zbiory uporządkowane 80
§ 5. Zbiory gęste i ciągłe. Continuum linjowe . . . 83
§ 6. Zbiory liczb rzeczywistych 85
§ 7. Ciągi liczbowe 90
§ 8. Granica ciągu 92
§ 9. Twierdzenia podstawowe o granicach 101
§ 10. O ciągach wykładniczych 110
§ 11. Ciąg logarytmowy 120
§ 12. Ciąg $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 130
§ 13. Twierdzenia Stolza 139

Rozdział IV. Teorja szeregów.

§ 1. Określenia. Ciągi zbieżne i rozbieżne 152
§ 2. Twierdzenia podstawowe o szeregach 164
§ 3. Szeregi o wyrazach naprzemian dodatnich i ujemnych. Kryterjum Bernoulli'ego 168
§ 4. O szybkości zbieżności szeregów 174
§ 5. Kryterja zbieżności pierwszej kategorji 177
§ 6. Kryterja zbieżności drugiej kategorji 190
§ 7. Szeregi bezwzględnie zbieżne 205
§ 8. Dodawanie i mnożenie szeregów 211
§ 9. Iloczyny nieskończone 217
§ 10. Szeregi podwójne 225
§ 11. Szeregi i iloczyny nieskończone o wyrazach zespolonych 234

Rozdział V. O funkcjach.

§ 1. Określenia 242
§ 2. Granica funkcji 246
§ 3. Twierdzenia podstawowe o granicach funkcji . . 250
§ 4. Ciągłość funkcji 251
§ 5. O funkcjach przezywanych. Dwa rodzaje przerw. 262
§ 6. Funkcje monotoniczne i funkcje z ograniczonej warjacją 263
§ 7. Geometryczna interpretacja funkcji 265
§ 8. Funkcje dwóch i wielu zmiennych niezależnych . 267

Rozdział VI. Funkcje analityczne jednej zmiennej niezależnej.

§ 1. Klasyfikacja funkcyj analitycznych 275
§ 2. O wielomianach algebraicznych 278
§ 3. O funkcjach algebraicznych ułamkowych 285
§ 4. O elementarnych funkcjach przestępnych . . . 295
§ 5. Funkcje kołowe czyli cyklometryczne 301
§ 6. O funkcjach hyperboliczne 306
§ 7. Niektóre przykłady funkcji przerywanych 312
§ 8. Granice najważniejszych funkcyj 318
§ 9. O funkcjach zmiennej zespolonej. Funkcja e^z . . 326
§ 10. Funkcja logarytmowa zmiennej zespolonej . . . 329

Rozdział VII. O nieskończonostkach.

§ 1. Określenia klasyfikacja nieskończonostek . . . 334
§ 2. Twierdzenia podstawowe o nieskończonostkach . 335
§ 3. O nieskończonostkach wzajemnie równoważnych. 338
§ 4. Obliczanie pól krzywych płaskich 340

Rozdział VIII. Pochodne i różniczki funkcji jednej zmiennej niezależnej.

§ 1. Pochodne 343
§ 2. Geometryczna interpretacja pochodnej 345

§ 3. Różniczka funkcji 347
§ 4. Twierdzenia zasadnicze rachunku różniczkowego . 348
§ 5. Pochodne i różniczki wielomianów algebraicznych 353
§ 6. Pochodne i różniczki funkcyj wykładniczych i logaritmowych 355
§ 7. Pochodne i różniczki funkcji trygonometrycznych. 358
§ 8. Pochodne i różniczki funkcyj kołowych 360
§ 9. O funkcjach rosnących i malejących 362
§ 10. Twierdzenie Rolle'go 363
§ 11. Wzór Lagrange'a 365
§ 12. Wzór Cauchy'ego 368

Rozdział IX. Pochodne i różniczki wyższych rzędów funkcji jednej zmiennej.

§ 1. Określenia 369
§ 2. Pochodne i różniczki wyższych rzędów najprostszych funkcji 371
§ 3. Wzór Leibniza 378

Rozdział X. Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych.

§ 1. Pochodne i różniczki cząstkowe 383
§ 2. Różniczka zupełna 385
§ 3. Pochodne i różniczki rzedu wyższego funkcji 388
§ 4. Różniczki zupełne wyższego rzędu 392
§ 5. Różniczkowanie funkcyj złożonych 398
§ 6. Funkcje jednorodne wielu zmiennych Twierdzenie Eulera 406

Rozdział XI. O funkcjach uwikłanych jednej i wielu zmiennych.

§ 1. Funkcje uwikłane jednej zmiennej 412
§ 2. Funkcje uwikłane wielu zmiennych 420
§ 3. Funkcje uwikłane, określone układem równań równoczesnych 424

Rozdział XII. Wyznaczniki funkcyjne.

§ 1 Różniczkowanie wyznaczników 437
§ 2. Wyznacznik funkcyjny Wrońskiego (wrońskiana) 438
§ 3. Wyznacznik funkcyjny Jacoli'ego (jakolian) . . 442
§ 4. Wyznacznik funkcyjny Hesse'go (Hessian) . . . 449

Rozdział XIII. Zamiana zmiennych.

§ 1. Funkcje jednej zmiennej nieżależnej 452
§ 2. Funkcje wielu zmiennych niezależnych 459
§ 3. Przekształcenie Legendre'a 476

Rozdział XIV. Szeregi nieskończone o wyrazach zmiennych. Szeregi potęgowe. Wzory Taylor'a i Maclorin'a.

§ 1. Szeregi nieskończone o wyrazach zmiennych . . 478
§ 2. Szeregi potęgowe. Twierdzenie Abel'a 481
§ 3. Różniczkowanie szeregów potęgowych 490
§ 4. Wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej . . . 494
§ 5. Wzór Taylora i Madorina dla funkcji wielu zmiennych 498

Rozdział XV. Rozwijanie funkcyj na szeregi potęgowe.

§ 1. Rozwijanie funkcji wykładniczej na szereg potęgowy 504
§ 2. Rozwijanie funkcji trygonometricznych na szeregi potęgowe 505
§ 3. Wzory Eulera i Moivre'a 507
§ 4. Rozwijanie funkcji lg $(1+)$ na szereg potęgowy Obliczanie logarytmów 509
§ 5. Rozwijanie funkcji dwumianowej na szereg potęgowy 514
§ 6. Rozwinięcie funkcji kołowych na szeregi potęgowe 519
§ 7. Obliczanie liczby π 524

Rozdział XVI. Szeregi Lagrange'a. Funkcje Legendre'a. Liczby Bernoulli'ego i Eulera.

§ 1. Szereg Lagrange'a 528
§ 2. Funkcje Legendre'a 534
§ 3. Liczby Bernoulli'ego i Eulera 541

Rozdział XVII. Rozwiazywanie wzorów nieoznaczonych.

§ 1. Wzory nieoznaczone postaci $\frac{0}{0}$. Twierdzenie l'Hospital'a 546
§ 2. Wzory nieoznaczone postaci $\frac{\infty}{\infty}$; $0.\infty$; $\infty - \infty$. 553
§ 3. Wzory nieoznaczone postaci 0^0; ∞^0; 1^∞ . . 560

Rozdział XII. O największych wartościach funkcji (Teorja Maximum i minimum).

§ 1. Maximum i minimum funkcji jednej zmiennej niezależnej 564
§ 2. Maximum i minimum funkcyj wieiu zmiennych niezależnych 582

§ 3. Maximum i minimum funkcyj uwikłanych jednej i wielu zmiennych 598

Dodatek.

Tablica pochodnych i różniczek 615
Zadania na różniczkowanie funkcyj jednej zmiennej niezależnej 617–624

OMYŁKI DRUKU

Str.	Wiersz	Wydrukowano	Powinno być
6	10 zdołu	działania	dzielenia
7	7 zgóry	przedstawiających γ obrazy	przedstawiających obrazy
15	18 zgóry	$[A]$	$[B]$
„	„ „	$[B]$	$[A]$
„	11 zdołu	$[A]$	$[B]$
„	10 „	$[B]$	$[A[$
16	18 „	$(2a+1)$	$(2m+1)$
„	7 „	$n>b$	$n<b$
17	6 zgóry	$n^2<N$	$n^2>N$
75	12 „	$\frac{-2}{p-1}$	$\frac{-2}{p-2}$
320	8—2 zdołu	$\lg_a$	$\mathrm{L}a_a$
„	3 „	$\mathrm{L}ga$	$\lg a$
533	5 „	$n^{k-1}\cos\left[nz+(k-1,\frac{\pi}{2}\right]$	$n^{k-1}\cos\left[nz+(k-1)\frac{\pi}{2}\right]$