

ABSTRACTS

Adam Adamowicz, Andrzej Seweryn

Prediction of the brittle fracture using higher order terms of the asymptotic expansion

The paper deals with the problems of an applications of analytical element method to modelling of stress fields near the cracks and sharp notches in a elastic bodies. The method of analytical elements is applied to find the classical and the generalized stress intensity factors and the coefficients of the higher terms of the asymptotic solution in the case of sheet containing crack or triangular notches. The derived calculations were used to find critical condition of crack propagation.

Jerzy Bakunowicz, Henryk Kopecki

Stability And Critical States Of Orthotropic Sandwich Structures

The paper presents numerical and experimental researches on stability and critical states of sandwich structures. The problem was solved by means of finite element method, concerning geometrical non-linearity. Numerical results compared to the experiment allowed to make some general statements on the design methodology of such structures

Marcin Cegielski, Artur Ganczarski

Effect of continuous damage deactivation on yield and failure surfaces

This article deals with the modeling of the continuous damage deactivation affected yield surfaces of copper and failure surfaces of mortar, from the viewpoint of continuum damage mechanics. The concept of damage deactivation is adapted to Tresca-Guest and Huber-Mises surfaces and two models are presented: the classical discontinuous one, in which microcracks close instantaneously, and the new continuous one, in which they close gradually. The results for both models are compared and verified in order to achieve the best fitting the experimental data. Detailed quantitative and qualitative analysis of obtained solutions confirms the necessity and correctness of an application of the continuous damage deactivation concept.

Barbara Kamieńska-Krzowska, Leszek Semotiuk, Marcin Czerw

Analysis of possibility of objective sound application to active checking on FV580A vertical machining centre

The possibility of application of objective sound on CNC metal working machines to selected linear details measurement in the course of tooling process and also after is ending has been analysed. The advantage of this solution is the possibility of measurements execution without attaching change of treatment object. However, the fault of mentioned above solution is the influence of connected factors with the course of cutting on the precision of the measurements executed.

The comparative studies of measurement results obtained on the FV580A vertical machining centre by means of MP10 objective sound with measurements of the same dimensions on the VISTA coordinates measuring machine have been executed. The results of this measurements show some divergences and they depend from the measured dimension. Their precise analysis permits to state that the application of MP10 sound to the checking of process course of tooling is legitimate with respect on the needs of rapid diagnostic of the treatment object dimension and can be also of the alternative for the measurements executed on the coordinates machines.

Andrzej Kazberuk

Stress concentration around oval hole

In the paper the application of the unified approach method to solve problems of stress concentration around sharp and rounded oval hole in elastic plane was presented. The stress field distribution was obtained for various vertex angles and curvature radii using singular integral equation method. The method based on passage to the limit (when curvature radius tends to zero), was used to obtain stress intensity factor at the vertex of sharp lens hole in a plane under tension. Accuracy of the new method was analyzed by comparing numerical results of stress intensity factors to well known analytical solution. The approximation formulas for estimation of stress intensity and concentration factors were presented.

Tomasz Kopecki

Thin-walled structures design problems, considering advanced, post-buckling deformations

Paper presents the results of experimental investigations and numerical analysis, of thin-walled, open section, cylindrical shells, subjected to constrained torsion. Analysed structures were the copies of isolated, aircraft structures' parts, corresponding to large cutouts. The experiment concerned three versions of models, with different number of reinforcing stringers. Forms of post-critical deformations and representative equilibrium paths, were obtained. Results of experimental research were a base for nonlinear finite elements analysis. Obtained forms of post-critical deformations and equilibrium paths were compared. A number of conclusions and instructions for design of similar bodies, were formulated.

Adam Mazurkiewicz, Tomasz Topoliński

The estimation of changes calculated fem values young's modulus of trabecular bone in function simplifying of modelling of bone

In the paper presented results of measurement of Young's modulus trabecular bone collected from heads of human femoral bone. The results obtained from compression test and calculation FEM. Geometrical models of samples trabecular bone about different exactitude were built on the base μ CT measurement and used to calculations. On the base results of compression test and calculations FEM of models were proposed the minimum resolution of Mct investigation, necessary to receipt in investigation in vivo information about structure of trabecular bone from heads of human femoral bone.

Marek Romanowicz, Andrzej Seweryn

Fracture of wood under biaxial loading condition

A new approach to solving fracture problems of wood was presented. The presented approach made use of concepts of a critical plane and the non-local stress fracture criterion, which were extended to study of fracture phenomenon of orthotropic materials, like wood. In order to evaluate of the validity of the derived non-local fracture criterion of wood, a experimental investigation of the mixed mode fracture toughness of pine wood was made. Experiments have been carried out using specimens with single-edge crack. Crack was notched both along the main orthotropy axis and with some inclinations to the main orthotropy axis. The mixed mode conditions were controlled by varying of the quotient between the stress intensity factors associated with mode I and mode II.

Mykhaylo P. Savruk, Andrzej Kazberuk

Stress intensity factors for diamond-shaped hole in elastic plane under tension

The unified approach to solve problems of stress concentration around sharp and rounded diamond shaped hole in elastic plane based on singular integral equation method was proposed. At first, the problem was solved for an elastic domain with diamond hole with rounded vertex of large curvature. The method based on passage to the limit (when curvature radius tends to zero), was used to obtain stress intensity factor at the vertex of sharp diamond hole in a plane under tension. The numerical results of stress intensity factors for a diamond hole of arbitrary vertex angle were discussed.

Mykhaylo P. Savruk, Adam Tomczyk, Aleksander Yevtushenko

Plane contact problem for semi-space with crack taking into account friction effect

The paper is concerned on effects produced by moving of punch pressed down to semi-space surface including single crack. Integral equations system represents general problem described by Savruk and Yevtushenko (2005) has been reduced to system of linear algebraic equations. Influence of friction coefficient on contact stress distribution and also dependence of crack angle and distance between crack and punch is discussed.

Jerzy Śladek, Grzegorz Sokal, Ksenia Ostrowska, Artur Kmita

Calibration of coordinate measuring arms

When the frequency of assortments changes is very high, the increase of requirements concerning the quality of production creates good conditions for the application of universal measuring tools, such as coordinate systems. The application of systems with rotary kinetic couples is caused by the necessity to measure places which are hard to access by classical measuring machines. Industrial robots adjusted to measuring tasks, and coordinate measuring arms in particular (CMA), are one of the most commonly applied systems. Planning on the application of these type of devices, their accuracy should be analyzed in the conditions of testing length measurement. This article proposes the application of norms and offers recommendations concerning the control and calibration of coordinate measuring machines for CMA calibration tasks. The conducted calibration WRP with use of a ball plate was the starting point for describing the space of Maximum Permissible Errors (MPE) and the uncertainty of assignment of the indication error. Keywords: calibration, MPEP, MPEE, 3D measuring arm, measurement uncertainty.

Borys Storch, Izabela Wierucka

Optical Measurements of Repeatable Contours Using the Image Processing Techniques

Currently, many methods are used to determine the functional parameters of the objects with repeatable contours (e.g. thread parameters). The authors tested the thread parameters measured in the reflected and passing light through optimization of the light source parameters. To perform 2D optical measurement of the thread with use of a microscope and CCD camera, various measuring methods were developed. The tested surface points of the object are optically registered and their data are transmitted to a PC and relevant functional object parameters are calculated using specially designed algorithms of image processing. It is possible to determine the contour parameters as well as important thread parameters with specific measurement accuracy. The methods based on the Fourier Transform as well as on the Spectral Power Density were applied, but the authors developed also some own methods.

Heorhij Sułym, Mikolay Mahorkin

Asymptotic distribution of stresses, displacements and potential deformation energy in the vicinity of corner point in multiwedge elastic body

The asymptotic distribution of stresses, displacements and strain potential energy in the vicinity of corner point in a multi-wedge system under antiplane strain has been studied. As an example we have constructed the asymptotic presentation of stresses and displacements near the top in a two- and three- wedge system. The order of stress singularity and the level of strain potential energy have been investigated numerically

Jarosław Szusta, Andrzej Seweryn

Strain-based damage accumulation model for low cycle fatigue

The paper presents the description of damage accumulation for analysis of fatigue life of structural elements under nonproportional loading states. The numerical algorithm consists of two calculation blocks. First presents method for calculation components of stress and strain tensors using multisurface hardening rule proposed by Mróz. Those components have been used for calculation of fatigue life in second block. Increment of damage accumulation has been addicted from increment of shear strain on physical plane.

Aleksander Yevtushenko, Michał Kuciej

Non-stationary thermal problem in frictional elements

The analytical solution of a boundary-value problem of heat conductivity and corresponding boundary problem of thermoelasticity for tribosystem, consisting of semi-infinity substrate and sliding on its surface a layer is obtained. For materials of frictional pair aluminum-steel it is studied evolution and distribution on depth from a surface of friction of temperatures, thermal fluxes and thermoelastic displacements.

Anna Zawada-Tomkiewicz

Machined surface image analysis for the estimation of this surface parameters

Machined surface image analysis is presented in the paper. The selected methods were analysed for the description of images acquired after the process of turning. Profile and area methods were distinguished. The Optimal Brain Surgeon Method was applied for the selection of the set of parameters which were the most useful in the estimation of surface roughness Ra parameter.

CONTENTS

Adam Adamowicz, Andrzej Seweryn <i>Prediction of the brittle fracture using higher order terms of the asymptotic expansion</i>	5
Jerzy Bakunowicz, Henryk Kopecki <i>Stability And Critical States Of Orthotropic Sandwich Structures</i>	11
Marcin Cegielski, Artur Ganczarski <i>Effect of continuous damage deactivation on yield and failure surfaces</i>	15
Barbara Kamieńska-Krzowska, Leszek Semotiuk, Marcin Czerw <i>Analysis of possibility of objective sound application to active checking on FV580A vertical machining centre</i>	19
Andrzej Kazberuk <i>Stress concentration around oval hole</i>	25
Tomasz Kopecki <i>Thin-walled structures design problems, considering advanced, post-buckling deformations</i>	31
Adam Mazurkiewicz, Tomasz Topoliński <i>The estimation of changes calculated fem values young's modulus of trabecular bone in function simplifying of modelling of bone</i>	37
Marek Romanowicz, Andrzej Seweryn <i>Fracture of wood under biaxial loading condition</i>	41
Mykhaylo P. Savruk, Andrzej Kazberuk <i>Stress intensity factors for diamond-shaped hole in elastic plane under tension</i>	45
Mykhaylo P. Savruk, Adam Tomczyk, Aleksander Yevtushenko <i>Plane contact problem for semi-space with crack taking into account friction effect</i>	49
Jerzy Śladek, Grzegorz Sokal, Ksenia Ostrowska, Artur Kmita <i>Calibration of coordinate measuring arms</i>	53
Borys Storch, Izabela Wierucka <i>Optical Measurements of Repeatable Contours Using the Image Processing Techniques</i>	59
Heorhij Sułym, Mykoła Mahorkin <i>Asymptotic distribution of stresses, displacements and potential deformation energy in the vicinity of corner point in multiwedge elastic body</i>	63
Jarosław Szusta, Andrzej Seweryn <i>Strain-based damage accumulation model for low cycle fatigue</i>	69
Aleksander Yevtushenko, Michał Kuciej <i>Non-stationary thermal problem in frictional elements</i>	73
Anna Zawada-Tomkiewicz <i>Machined surface image analysis for the estimation of this surface parameters</i>	79

SPIS TREŚCI

Adam Adamowicz, Andrzej Seweryn

Prognostowanie pękania elementów ze szczelinami i karbami z uwzględnieniem członów nieosobliwych rozwiązania asymptotycznego.....

5

Jerzy Bakunowicz, Henryk Kopecki

Stateczność oraz stany graniczne ortotropowych struktur przekładkowych

11

Marcin Cegielski, Artur Ganczarski

Effect of continuous damage deactivation on yield and failure surfaces.....

15

Barbara Kamieńska-Krzowska, Leszek Semotiuk, Marcin Czerw

Analiza możliwości zastosowania sondy przedmiotowej do kontroli czynnej na pionowym centrum obróbkowym FV 580 A

19

Andrzej Kazberuk

Koncentracja naprężeń wokół owalnego otworu

25

Tomasz Kopecki

Zagadnienia projektowania cienkościennych ustrojów nośnych z uwzględnieniem zaawansowanych stanów deformacji zakrytycznych

31

Adam Mazurkiewicz, Tomasz Topoliński

Ocena zmian wartości modułu Younga kości gąbczastej w obliczeniach mes w funkcji uproszczeń jej modelowania

37

Marek Romanowicz, Andrzej Seweryn

Pękanie drewna w dwuosiowym stanie obciążenia.....

41

Mykhaylo P. Savruk, Andrzej Kazberuk

Współczynniki intensywności naprężeń w wierzchołku rombowego otworu w rozciąganej płaszczyźnie

45

Mykhaylo P. Savruk, Adam Tomczyk, Aleksander Yevtushenko

Płaskie kontaktowe zagadnienie z uwzględnieniem tarcia dla półprzestrzeni ze szczeliną

49

Jerzy Śladek, Grzegorz Sokal, Ksenia Ostrowska, Artur Kmita

Wzorcowanie współrzędnościowych ramion pomiarowych (WRP)

53

Borys Storch, Izabela Wierucka

Optyczne pomiary zarysów powtarzalnych z wykorzystaniem technik przetwarzania obrazu

59

Heorgij Sulym, Mykoła Machorkin

Rozkład asymptotyczny pól naprężeń przemieszczeń i energii potencjalnej odkształcenia w otoczeniu punktu wierzchołkowego wieloklinowego ciała sprężystego

63

Jarosław Szusta, Andrzej Seweryn

Odształceniowy model kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych w zakresie obciążeń niskocyklowych

69

Aleksander Yevtushenko, Michał Kuciej

Zagadnienie kontaktowe dla układu warstwa-podłoże z uwzględnieniem niestacjonarnej generacji ciepła w wyniku tarcia

73

Anna Zawada-Tomkiewicz

Analiza obrazu powierzchni obrobionej do celów estymacji parametrów tej powierzchni

79

PROGNOZOWANIE PĘKANIA ELEMENTÓW ZE SZCZELINAMI I KARBAMI Z UWZGLĘDNIENIEM CZŁONÓW NIEOSOBLIWYCH ROZWIĄZANIA ASYMPTOTYCZNEGO

Adam ADAMOWICZ*, Andrzej SEWERYN*

* Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

adamow@pb.edu.pl, seweryn@pb.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono metodę elementów analitycznych, służącą do wyznaczania wartości parametrów opisujących osobliwe pola naprężeń w pobliżu wierzchołków ostrych naroży. Wykorzystano ją do wyznaczenia klasycznych i uogólnionych współczynników intensywności naprężeń oraz współczynników stojących przy członach wyższych rzędów rozwinięcia asymptotycznego opisującego pole naprężeń w pobliżu wierzchołków szczelin oraz korbów trójkątnych. Otrzymane wyniki posłużyły do wyznaczenia warunków krytycznych pęknięcia przy zastosowaniu nielokalnego naprężeniowego kryterium kruchego pęknięcia.

1. WPROWADZENIE

Identyfikacja osobliwych pól naprężeń w pobliżu wierzchołków szczelin lub korbów jest nieodzownym elementem prognozowania pęknięcia. Sprowadza się ona do wyznaczenia wartości parametrów analitycznych opisujących te pola, a wykorzystywane do tego techniki obliczeniowe podzielić można na trzy grupy (Seweryn, 2003). W metodach asymptotycznych poszukiwane parametry analityczne wyznaczane są na podstawie porównania wyników obliczeń np. metody elementów skończonych z rozkładami teoretycznymi (He i inni, 1997). W metodach energetycznych wartości poszukiwanych parametrów wyznaczane są na podstawie zmian energii potencjalnej układu wywołanej zmiany wymiaru szczeliny (np. Yang i inni, 2001) lub wykorzystania twierdzenia o wzajemności prac (np. Sinclair i inni, 1984). Prezentowana w pracy metoda elementów analitycznych (Seweryn, Adamowicz, 2005), obok elementów hybrydowych (Lin, Tong, 1980) i metody węzłów analitycznych (Seweryn, 2002), należy do trzeciej grupy - metod bezpośrednich. Poszukiwane parametry analityczne znajdują się w wektorze niewiadomych zagadnienia metody elementów skończonych, obok składowych przemieszczeń węzłów elementów skończonych i wyznaczane są z układu równań równowagi sił węzłowych.

2. OSOBLIWIE POLA NAPRĘŻEŃ

2.1. Rozkład pól naprężeń w otoczeniu wierzchołka szczeliny

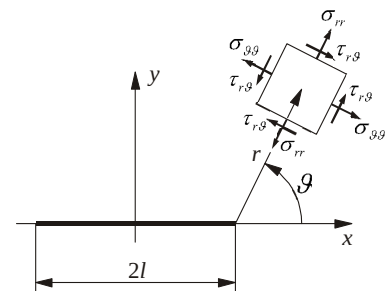
Opis osobliwego pola naprężeń i przemieszczeń w pobliżu wierzchołka szczeliny, w zagadnieniach liniowej teorii sprężystości może być przedstawiony w układzie współrzędnych biegunowych (r, ϑ) (rys. 1) w postaci rozwinięcia (Williams, 1957):

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{m_I} K_{Ik} r^{\frac{k}{2}-1} f_{ij}^{Ik}(\vartheta) + \sum_{k=1}^{m_{II}} K_{IIk} r^{\frac{k}{2}-1} f_{ij}^{IIk}(\vartheta), \quad (1)$$

$$u_i = \sum_{k=1}^{m_I} K_{Ik} r^{\frac{k}{2}} g_i^{Ik}(\vartheta) + \sum_{k=1}^{m_{II}} K_{IIk} r^{\frac{k}{2}} g_i^{IIk}(\vartheta) + u_{Ci},$$

gdzie K_{In} , $K_{II n}$ – współczynniki przy n -tym członie rozwiązania asymptotycznego, a K_{II} i K_{III} odpowiadają klasycznym współczynnikom intensywności naprężeń K_I i K_{II} :

$$K_I + iK_{II} = \lim_{\vartheta \rightarrow 0^+} \left[\sqrt{2\pi r} (\sigma_{\vartheta\vartheta} + i\tau_{r\vartheta}) \right]. \quad (2)$$



Rys. 1. Szczelina z biegunowym układem współrzędnych (r, ϑ)

Wyrażenia opisane wzorami (1) zostaną zapisane w postaci macierzowej:

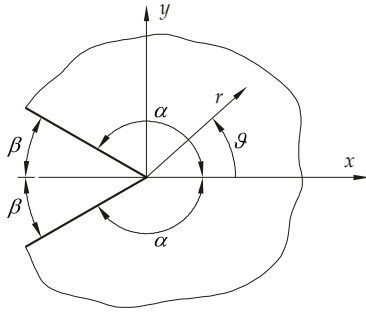
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \mathbf{u}_K, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \mathbf{u}_K, \quad (3)$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}$ i $\mathbf{u}$ są wektorami kolumnami zawierającymi odpowiednio składowe tensora naprężeń i składowe przemieszczeń, $\mathbf{f}$ i $\mathbf{g}$ są macierzami funkcji współrzędnych, a $\mathbf{u}_K$ jest wektorem parametrów analitycznych, opisujących osobliwe pole naprężeń i przemieszczeń:

$$\mathbf{u}_K^T = \{K_I, K_{II}, \dots, K_{Im_I}, K_{II}, K_{III}, \dots, K_{II m_{II}}, u_{Cr}, u_{C\vartheta}\}, \quad (4)$$

u_{Cr} i $u_{C\vartheta}$ są składowymi przemieszczenia wierzchołka szczeliny.

2.2. Rozkład pól naprężeń w otoczeniu wierzchołka karbu trójkątnego



Rys. 2. Karb trójkątny o kącie wierzchołkowym 2α .

Osobliwe pole naprężeń i przemieszczeń w pobliżu wierzchołka ostrego karbu o kącie rozwarcia 2β w układzie współrzędnych biegunowych (r, ϑ) (rys. 2), może być przedstawione w postaci następującego rozwinięcia (Seweryn, Molski, 1996):

$$\sigma_{ij} = \text{Re} \left[\sum_{n=1}^{m_1} \frac{K_{ln}^\lambda}{(2\pi r)^{1-\lambda_{ln}}} A_{ij}(\vartheta, \lambda_{ln}) + \sum_{n=1}^{m_{11}} \frac{K_{11n}^\lambda}{(2\pi r)^{1-\lambda_{11n}}} B_{ij}(\vartheta, \lambda_{11n}) \right],$$

$$u_i = \frac{r}{2\mu} \text{Re} \left[\sum_{n=1}^{m_1} \frac{K_{ln}^\lambda}{(2\pi r)^{1-\lambda_{ln}}} C_{ij}(\vartheta, \lambda_{ln}) + \sum_{n=1}^{m_{11}} \frac{K_{11n}^\lambda}{(2\pi r)^{1-\lambda_{11n}}} D_{ij}(\vartheta, \lambda_{11n}) \right], \quad (5)$$

gdzie K_{ln}^λ , K_{11n}^λ – współczynniki przy n -tym członie rozwiązania asymptotycznego, λ_{ln} i λ_{11n} – n -te pierwiastki o dodatnich częściach rzeczywistych równań charakterystycznych:

$$\lambda_1 \sin 2\alpha - \sin 2\lambda_1 \alpha = 0, \quad \lambda_{11} \sin 2\alpha - \sin 2\lambda_{11} \alpha = 0, \quad (6)$$

A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} i D_{ij} – kombinacje funkcji trygonometrycznych kąta ϑ .

Występujące w wyrażeniu (5) uogólnione współczynniki intensywności naprężeń dla rozrywania (przypadek I) i ścinania wzdłużnego (przypadek II) są zdefiniowane w następujący sposób (Seweryn i Zwoliński, 1993):

$$K_I^\lambda = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 0} \left[(2\pi r)^{1-\lambda_I} \sigma_{\vartheta\vartheta}(r, \vartheta) \right], \quad (7)$$

$$K_{II}^\lambda = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 0} \left[(2\pi r)^{1-\lambda_{II}} \tau_{r\vartheta}(r, \vartheta) \right].$$

Wyrażenia (5) można zapisać w postaci macierzowej (3), wektor parametrów analitycznych $\mathbf{u}_K$ przybierze wówczas postać:

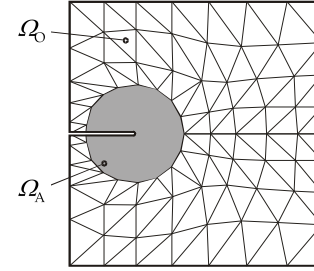
$$\mathbf{u}_K^T = \{K_I^\lambda, K_{I2}^\lambda, \dots, K_{Im_1}^\lambda, K_{II}^\lambda, K_{II2}^\lambda, \dots, K_{II m_{11}}^\lambda, u_{Cr}, u_{C\vartheta}\}. \quad (8)$$

3. METODA ELEMENTÓW ANALITYCZNYCH

Metoda elementów analitycznych jest techniką wyznaczania wartości parametrów opisujących osobliwe pola naprężeń, opartą na metodzie elementów skończonych i polegającą na wykorzystaniu specjalnego elementu skończonego w obszarze przywierzchołkowym ostrego naroża.

W wektorze kolumnie parametrów węzłowych $\mathbf{q}$ zagadnienia MES wydzielono podwektor $\mathbf{u}_O$, zawierający składowe przemieszczenia węzłów standardowych elementów skończonych (obszar Ω_O – rys. 3), podwektor $\mathbf{u}_A$ składowych przemieszczeń węzłów leżących na granicy obszaru analitycznego Ω_A oraz $\mathbf{u}_K$ – wektor poszukiwanych parametrów analitycznych (8):

$$\mathbf{q}^T = \{ \mathbf{u}_O^T, \mathbf{u}_A^T, \mathbf{u}_K^T \} \quad (9)$$



Rys. 3. Ciało ze szczeliną oraz obszary Ω_A i Ω_O .

Energia odkształcenia sprężystego rozpatrywanego układu przyjmie postać:

$$U = \frac{1}{2} \{ \mathbf{u}_O^T, \mathbf{u}_A^T, \mathbf{u}_K^T \} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{OO} & \mathbf{K}_{OA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{AO} & \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_O \\ \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_K \end{Bmatrix} \quad (10)$$

gdzie $\mathbf{K}_A$ jest macierzą sztywności elementu analitycznego Ω_A , której postać wyprowadzona została z wyrażenia na energię odkształcenia sprężystego obszaru analitycznego Ω_A przy wykorzystaniu związków pomiędzy wektorami kolumnami odkształceń $\boldsymbol{\epsilon}$ i naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$ oraz przy zastosowaniu opisu pola naprężeń za pomocą parametrów analitycznych (4) lub (8):

$$U_A = \frac{1}{2} \int_{\Omega_A} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega_A} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{u}_K^T \left(\int_{\Omega_A} \mathbf{f}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{f} d\Omega \right) \mathbf{u}_K = \frac{1}{2} \mathbf{u}_K^T \mathbf{K}_A \mathbf{u}_K$$

gdzie t – grubość elementu. Stąd macierz sztywności elementu analitycznego:

$$\mathbf{K}_A = \int_{\Omega_A} \mathbf{f}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{f} d\Omega. \quad (12)$$

Ciągłość pola przemieszczeń i naprężeń pomiędzy obszarem analitycznym Ω_A a obszarem modelowanym za pomocą standardowych elementów skończonych Ω_O zapewniono przez zastosowanie metody więzów analitycznych (Seweryn i Adamowicz, 2005). Wykorzystano wymuszenie przemieszczeń węzłów granicznych obu obszarów zgodnie z zadaniem rozkładem teoretycznym, uzależniając je od poszukiwanych wartości parametrów analitycznych:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_O \\ \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_K \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_O \\ \mathbf{u}_K \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_A = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{u}_K. \quad (13)$$

Postać macierzy więzów analitycznych Ψ wynika bezpośrednio z przyjętego opisu osobliwego pola przemieszczeń (1) lub (5). Wprowadzenie macierzy więzów analitycznych spowoduje modyfikację globalnej macierzy sztywności. Ostatecznie energia odkształcenia sprężystego układu przybierze postać:

$$U = \frac{1}{2} \{ \mathbf{u}_o^T, \mathbf{u}_k^T \} \mathbf{K}^* \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_o \\ \mathbf{u}_k \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

gdzie $\mathbf{K}^*$ jest zmodyfikowaną macierzą sztywności układu:

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{OO} & \mathbf{K}_{OA} \Psi \\ \Psi^T \mathbf{K}_{AO} & \Psi^T \mathbf{K}_{AA} \Psi + \mathbf{K}_A \end{bmatrix}. \quad (15)$$

4. PROGNOZOWANIE PĘKANIA ELEMENTÓW Z KARBAMI

W nielokalnym naprężeniowym kryterium pękania, zaproponowanym przez Seweryna i Mroza (1995), zakłada się, że inicjacja lub propagacja szczeliny następuje wówczas, gdy uśredniona na odcinku d_0 długości strefy pękania (rys. 4), funkcja naprężeń normalnych σ_n i tnących τ_n w płaszczyźnie fizycznej osiągnie wartość krytyczną, czyli:

$$\max_{(\vartheta, \mathbf{x}_0)} \left[\frac{1}{d_0} \int_0^{d_0} R_\sigma(\sigma_n, \tau_n) dr \right] = 1, \quad (16)$$

gdzie, $\mathbf{x}_0$ – początek lokalnego układu współrzędnych (r, ϑ) określający miejsce pękania.

Do przewidywania pękania materiałów kruchych z wykorzystaniem kryterium (16), wystarczające jest przyjęcie lokalnej funkcji pękania w postaci warunku naprężeń normalnych (Seweryn, 2003):

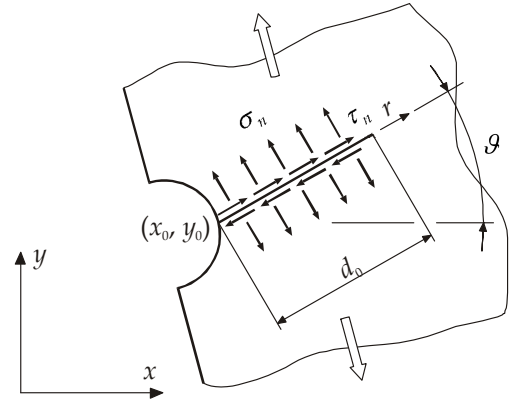
$$R_\sigma(\sigma_n) = \sigma_n / \sigma_c. \quad (17)$$

Długość strefy pękania d_0 wyznacza się z równowagi kryterium Griffitha – Irwina ($K_I = K_{IC}$) oraz nielokalnego kryterium pękania (16) dla przypadku

rozrywanej szczeliny (Seweryn, 2003):

$$d_0 = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_c} \right)^2, \quad (18)$$

gdzie σ_c, K_{IC} – naprężenia niszczące i krytyczna wartość współczynnika intensywności naprężeń.

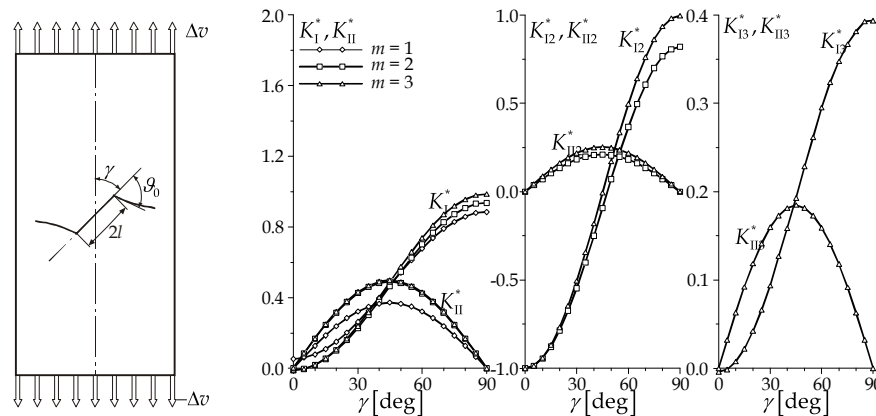


Rys. 4. Lokalny biegunowy układ współrzędnych (r, ϑ) o początku w miejscu przewidywanej inicjacji szczeliny, naprężenia σ_n i τ_n wywołujące dekohezję materiału w strefie uszkodzenia d_0

Nielokalne kryterium kruchego pękania posłużyło do wyznaczenia warunków krytycznych pękania dla zagadnienia tarczy ze szczeliną oraz tarczy z karami trójkątnymi w złożonych stanach obciążenia a wyniki porównano z literaturowymi badaniami doświadczalnymi.

4.1. Zagadnienie tarczy ze szczeliną

W pracy Williamsa i Ewinga (1971) przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych pękania tarczy wykonanej z polimetakrylanu metylu, ze szczeliną nachyloną w stosunku do kierunku działania obciążenia (rys. 5).



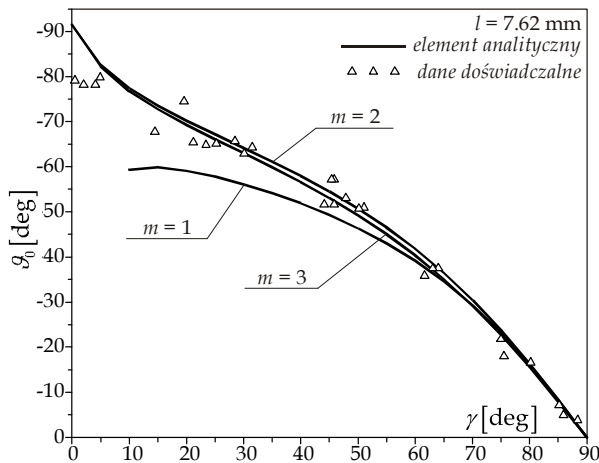
Rys. 5. Tarcza ze szczeliną ukośną oraz wartości współczynników intensywności naprężeń i współczynników stojących przy członach wyższych rzędów rozwinięcia asymptotycznego dla szczeliny o długości $l = 12.7$ mm w funkcji kąta pochylenia szczeliny γ

Zmieniając kąt nachylenia szczeliny γ uzyskiwano różny udział obciążeń rozrywających i ścinających. Dla prezentowanego zagadnienia, przy wykorzystaniu metody elementów analitycznych, obliczono wartości współczynników intensywności naprężeń i współczynników stojących przy członach wyższych rzędów rozwiązania asymptotycznego przy uwzględnieniu różnej liczby m członów rozwiązania asymptotycznego. Wyniki unormowano zgodnie z zależnościami:

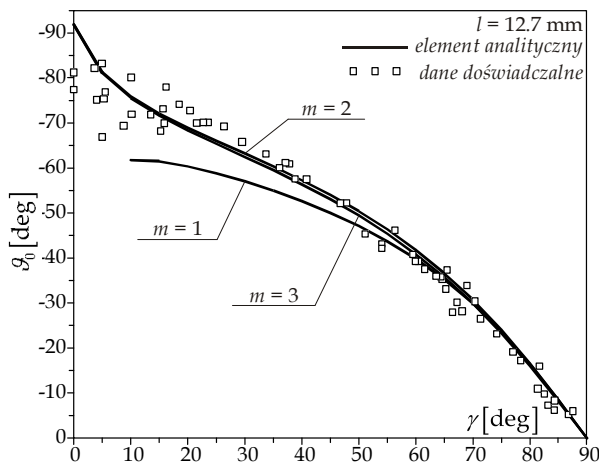
$$K_{In}^* = K_{In} / \sigma(\pi l)^{1-\frac{n}{2}}, \quad K_{II n}^* = K_{II n} / \sigma(\pi l)^{1-\frac{n}{2}} \quad (19)$$

i przedstawiono na rys. 5.

Wyznaczona w doświadczeniu krytyczna wartość współczynnika intensywności naprężeń wyniosła $K_{IC} = 1.370 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$. W obliczeniach przyjęto wartość naprężeń krytycznych $\sigma_c = 102.8 \text{ MPa}$, co na podstawie zależności (18) dało wartość strefy pęknięcia $d_0 = 0.113 \text{ mm}$. Kryterium pęknięcia (16) pozwoliło wyznaczyć kierunki, w których następować będzie propagacja szczeliny. Wybrane wyniki obliczeń przeprowadzonych przy uwzględnieniu różnej liczby członów rozwiązania asymptotycznego m zestawiono z wynikami doświadczalnymi na rys. 6 i 7.



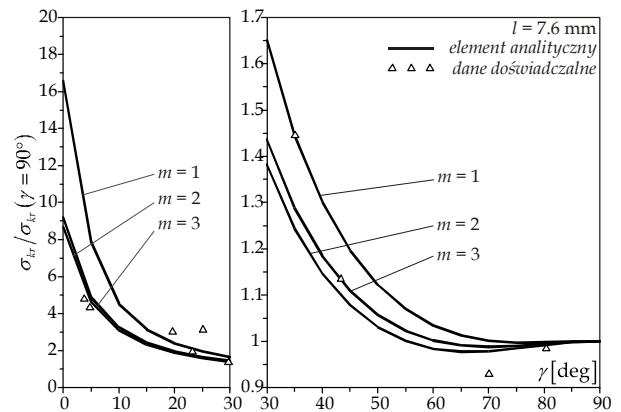
Rys. 6. Kąt propagacji szczeliny ϑ_0 w funkcji kąta nachylenia γ szczeliny o długości $l = 7.62 \text{ mm}$ (dane doświadczalne: Williams, Ewing; 1971)



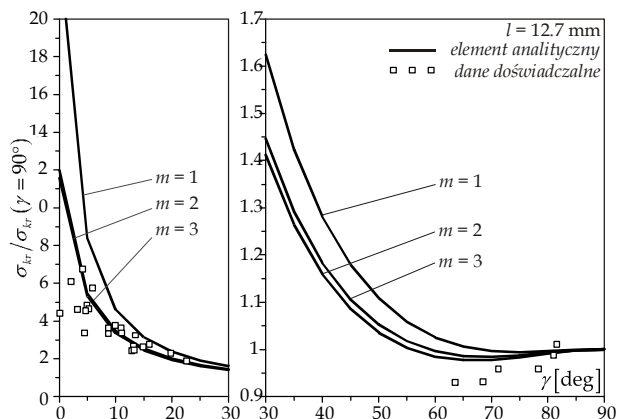
Rys. 7. Kąt propagacji szczeliny ϑ_0 w funkcji kąta nachylenia γ szczeliny o długości $l = 12.7 \text{ mm}$ (dane doświadczalne: Williams, Ewing; 1971)

W przypadku, gdy $\gamma \rightarrow 0^\circ$, wartości współczynników intensywności naprężeń powinny dążyć do zera ($K_I \rightarrow 0$ i $K_{II} \rightarrow 0$) oraz stosunek $K_I/K_{II} \rightarrow 0$, co sugerowałoby przypadek czystego ścinania wzdłużnego (II sposób obciążania) i wartości kąta propagacji szczeliny ϑ_0 zawierające się w przedziale $-80^\circ \div -70^\circ$. Liczne badania doświadczalne wykazują, że kąt propagacji w takim przypadku zbliżony jest do -90° (Williams i Ewing, 1971). Użycie do obliczeń numerycznych opisu pola naprężeń wykorzystującego nie tylko człony osobliwe rozwiązania asymptotycznego, ale także wyższych rzędów, daje rezultaty zgodne z eksperymentalnymi (linie $m = 2, 3$ - rys. 6, 7).

Kryterium (16) pozwoliło wyznaczyć poziom obciążeń krytycznych, przy których następuje pęknięcie. Wyniki tych obliczeń, razem z rezultatami badań doświadczalnych, przedstawiono na rys. 8 i 9. Krytyczne wartości obciążeń osiągają minimum dla kąta pochylenia szczeliny $\gamma = 70^\circ \div 60^\circ$, co zgodne jest z wynikami badań doświadczalnych. Jest to wyraźnie widoczne jedynie w przypadku obliczeń uwzględniających efekt członów wyższych rzędów rozwiązania asymptotycznego.



Rys. 8. Wartości krytycznych obciążeń w zależności od kąta γ pochylenia szczeliny środkowej o długości $l = 12.7 \text{ mm}$ (dane doświadczalne: Williams, Ewing; 1971)



Rys. 9. Wartości krytycznych obciążeń w zależności od kąta γ pochylenia szczeliny środkowej o długości $l = 12.7 \text{ mm}$ (dane doświadczalne: Williams, Ewing; 1971)

4.2. Zagadnienie tarczy z korbami trójkątnymi

Zagadnienie pęknięcia tarczy z korbami trójkątnymi w złożonych stanach obciążenia analizowane było przez Seweryna i innych (1997).

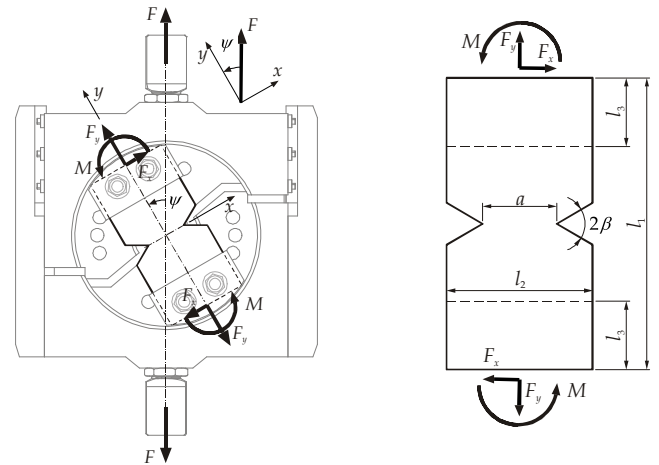
Obciążenia próbek realizowane były za pomocą specjalnego przyrządu (rys. 10), mocowanego w uchwytach maszyny wytrzymałościowej. Proporcje składowej siły rozrywającej F_x i ścinającej F_y obciążenia stopniowane były przez zmianę kąta zamocowania próbki względem osi przyrządu $\psi = \arctg(F_x/F_y)$. Prezentowana praca obejmowała stany obciążeń, dla kąta obciążenia $0^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$. Wartość składowej rozciągającej (ściskającej) i ścinającej obciążenia wyznaczano z zależności:

$$F_x = F \sin \psi, \quad F_y = F \cos \psi, \quad (20)$$

Gdzie F jest siłą zadawaną na maszynie wytrzymałościowej.

Badano próbki o kącie rozwarcia $2\beta = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ$ i 80° , wykonane z polimetakrylanu metylu ($E = 3.3$ GPa i $\nu = 0.35$). Wyniki obliczeń uogólnionych współczynników intensywności naprężeń oraz współczynników stojących przy członach wyższych rzędów rozwiązania asymptotycznego

dla przypadku rozrywania i czystego ścinania przedstawiono w tab. 1.



Rys. 10. Realizacja ścinania wzdłużnego i rozrywania dla próbek płaskich. $l_1 = 200$ mm, $l_2 = 100$ mm, $a = 50$ mm, $l_3 = 47$ mm, $t = 5$ mm

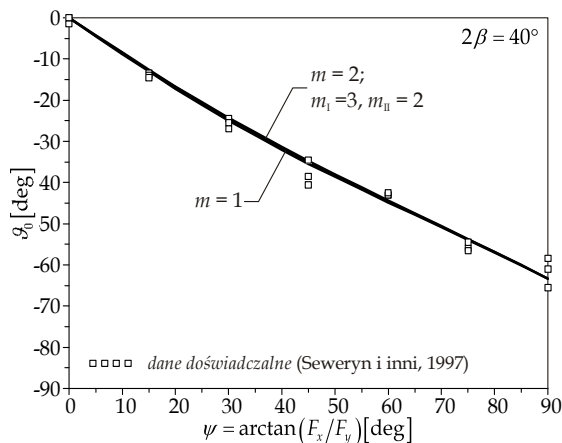
Tab. 1. Wartości współczynnika $\xi_{ii} = K_{ii}^\lambda / F_y$ i $\xi_{Iii} = K_{Iii}^\lambda / F_x$ obliczone metodą elementów analitycznych

2β	Rozrywanie				Ścinanie			
	$\xi_{II} = K_{II}^\lambda / F_y$	$\xi_{I2} = K_{I2}^\lambda / F_y$	$\xi_{I3} = K_{I3}^\lambda / F_y$	$\xi_{I4} = K_{I4}^\lambda / F_y$	$\xi_{III} = K_{III}^\lambda / F_x$	$\xi_{II2} = K_{II2}^\lambda / F_x$	$\xi_{II3} = K_{II3}^\lambda / F_x$	$\xi_{II4} = K_{II4}^\lambda / F_x$
20°	0.6199	-	-	-	0.7790	-	-	-
	0.6225	-0.0594	-	-	0.7344	-0.0006	-	-
	0.6275	-0.0815	4.7192	-	0.7381	-0.0005	7.9695	-
	0.6278	-0.0830	4.9885	-3.4375	0.7367	-0.0005	10.3062	-1.5949
40°	0.6191	-	-	-	0.9738	-	-	-
	0.6188	-0.5830	-	-	0.9512	-0.0002	-	-
	0.6230	-1.4977	6.4143	-	-	-	-	-
60°	0.6541	-	-	-	1.3121	-	-	-
	-	-	-	-	1.4196	0.0005	-	-
80°	0.7214	-	-	-	1.4906	-	-	-
	-	-	-	-	2.2028	0.0026	-	-

Wartości dla obciążeń pośrednich wyznaczone zostały przy pomocy następujących zależności:

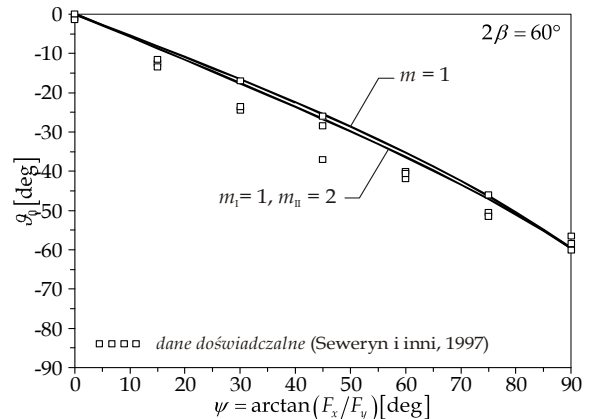
$$K_I^\lambda(\beta, \psi) = \xi_I(\beta) F \cos \psi, \quad (21)$$

$$K_{II}^\lambda(\beta, \psi) = \xi_{II}(\beta) F \sin \psi.$$



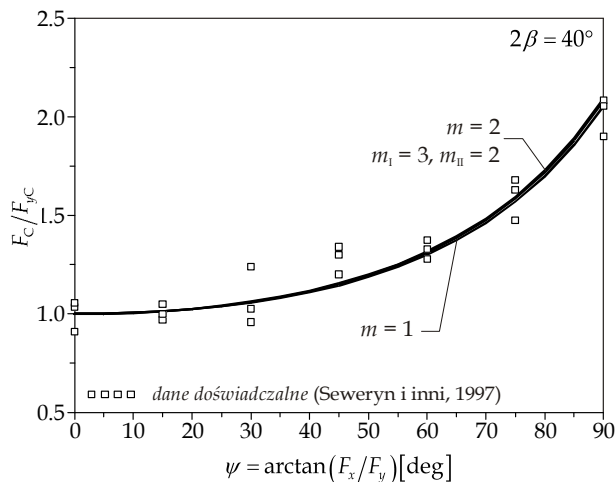
Rys. 11. Kierunek inicjacji szczeliny ϑ_0 dla różnych kątów obciążenia ψ tarczy z korbami trójkątnymi o kącie rozwarcia $2\beta = 40^\circ$; dane doświadczalne: Seweryn i inni (1997)

Krytyczną wartość naprężenia niszczącego σ_c wyznaczono rozciągając próbki z korbami półokrągłymi. Otrzymano $\sigma_c = 115$ MPa. Wyznaczona przez autorów wartość krytycznego współczynnika intensywności naprężeń K_{IC} wyniosła 1.37 MPa $m^{0.5}$. Wykorzystując zależność (18) możliwe było wyznaczenie wartości parametru nielokalności: $d_0 = 0.09035$ mm.

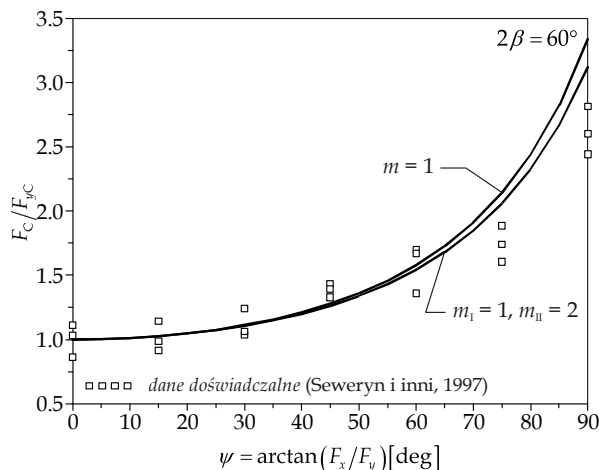


Rys. 12. Kierunek inicjacji szczeliny ϑ_0 dla różnych kątów obciążenia ψ tarczy z korbami trójkątnymi; dane doświadczalne: Seweryn i inni (1997)

Na rys. 11-14 przedstawiono wybrane wyniki obliczeń kierunków inicjacji szczeliny ψ_0 oraz stosunków krytycznych wartości obciążeń: całkowitego do rozciągającego F_C/F_{YC} , wykonanych przy wykorzystaniu nielokalnego naprężeniowego kryterium kruchego pęknięcia. Punktami zaznaczono dane doświadczalne przedstawione w pracy Seweryna i innych (1997).



Rys. 13. Wartość obciążenia krytycznego F_C/F_{YC} dla tarczy z karami trójkątnymi; dane doświadczalne: Seweryn i inni (1997)



Rys. 14. Wartość obciążenia krytycznego F_C/F_{YC} dla tarczy z karami ($2\beta = 60^\circ$); dane doświadczalne: Seweryn i inni (1997)

5. PODSUMOWANIE

Na podstawie wyników przeprowadzonych obliczeń można stwierdzić, że zastosowanie w obliczeniach opisu pola naprężeń i przemieszczeń wykorzystującego jedynie człony osobliwe rozwiązania asymptotycznego powoduje obarczenie otrzymywanych wyników znacznym błędem numerycznym, w wielu przypadkach dyskwalifikującym obliczenia. Wpływ członów wyższych rzędów w asymptotycznym rozwinięciu, opisującym pola naprężeń w pobliżu wierzchołka szczeliny, jest dominujący dla szczelin pochylonych pod małym kątem do kierunku działania obciążenia ($\gamma = 0^\circ \div 10^\circ$). Uwzględnienie tylko członów osobliwych w obliczeniach ($m = 1$) powoduje znaczne zawyżanie poziomu obciążeń krytycznych – zwłaszcza dla małych kątów γ .

Natomiast w rozpatrywanym przypadku poprawa dokładności prognozowania kruchego pęknięcia elementów

z karami trójkątnymi wywołana uwzględnieniem w obliczeniach opisu pola naprężeń i przemieszczeń wykorzystującego człony wyższych rzędów rozwiązania asymptotycznego jest nieznaczna. Otrzymane wyniki są zbliżone do rezultatów badań eksperymentalnych niezależnie od liczby członów rozwiązania asymptotycznego, opisującego osobliwe pole naprężeń w pobliżu wierzchołka karbu.

LITERATURA

1. He W.J., Lin Y., Ding H.J. (1997), A three-dimensional formula for determining stress intensity factors in finite element analysis of cracked bodies, *Eng. Fract. Mech.*, 56, 409-415.
2. Lin K.Y., Tong P. (1980), Singular finite elements for the fracture analysis of V-notched plate, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 15, 1343-1354.
3. Seweryn A. (2002), Modelling of singular stress fields using finite element method, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 39, 4787-4804.
4. Seweryn A. (2003), *Metody numeryczne w mechanice pęknięcia*, Biblioteka Mechaniki Stosowanej, Seria A. Monografie, IPPT PAN, Warszawa.
5. Seweryn A., Adamowicz A. (2005), On analytical constraints and elements methods in modeling stresses near the tips of cracks and V-notches, *Material Science*, 41, 4.
6. Seweryn A., Molski K. (1996), Elastic stress singularities and corresponding generalized stress intensity factors for angular corners under various boundary conditions, *Eng. Fract. Mech.*, 55, 529-556.
7. Seweryn A., Mróz Z. (1995), A non-local stress failure condition for structural elements under multiaxial loading, *Eng. Fract. Mech.*, 51, 955-973.
8. Seweryn A., Poskrobko S., Mróz Z. (1997), Brittle fracture in plane elements with sharp notches under mixed-mode loading, *J. Eng. Mech. ASCE*, 123, 535-543.
9. Seweryn A., Zvolinski J. (1993), Solution for the stress and displacement fields in the vicinity of a V-notch of negative wedge angle in plane problems of elasticity, *Eng. Fract. Mech.*, 44, 275-281.
10. Sinclair G.B., Okajima M., Griffin J. H. (1984) Path independent integrals for computing stress intensity factors at sharp notches in elastic plates, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 20, 999-1008.
11. Williams J.G., Ewing P.D. (1971) Fracture under complex stress - the angled crack problem, *Int. J. Fract.*, 8, 441-446.
12. Williams M.L. (1957) On the stress distribution at the base of stationary crack, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 24, 109.
13. Yang Z.J., Chen J.F., Holt G.D. (2001), Efficient evaluation of stress intensity factors using virtual crack extension technique, *Comput. Struct.*, 79, 2705-2715.

PREDICTION OF THE BRITTLE FRACTURE USING HIGHER ORDER TERMS OF THE ASYMPTOTIC EXPANSION

Abstract: The paper deals with the problems of an applications of analytical element method to modelling of stress fields near the cracks and sharp notches in a elastic bodies. The method of analytical elements is applied to find the classical and the generalized stress intensity factors and the coefficients of the higher terms of the asymptotic solution in the case of sheet containing crack or triangular notches. The derived calculations were used to find critical condition of crack propagation.

Praca naukowa finansowana ze środków budżetowych na naukę w latach 2005 - 2007 jako projekt badawczy nr 4 T07A 030 28.

STATECZNOŚĆ ORAZ STANY GRANICZNE ORTOTROPOWYCH STRUKTUR PRZEKŁADKOWYCH

Jerzy BAKUNOWICZ*, Henryk KOPECKI*

*Katedra Samolotów i Silników Lotniczych, Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa,
Politechnika Rzeszowska, ul. Wincentego Pola 2, 35-959 Rzeszów

hkopecki@prz.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych oraz obliczeń numerycznych utraty stateczności ortotropowych struktur przekładkowych. Jako obiekt badań, przyjęto płyty przekładkowe z okładzinami z polimerowego kompozytu zbrojonego włóknem węglowym i rdzeniem z tworzywa spienionego. W analizie numerycznej uwzględniono nieliniowość geometryczną, śledząc ścieżkę równowagi konstrukcji. Wyniki obliczeń konfrontowano z rezultatami przeprowadzonego eksperymentu umożliwiające dokonywanie weryfikacji modelu numerycznego. Wskazano na uwarunkowania oraz ograniczenia w projektowaniu podobnych ustrojów nośnych.

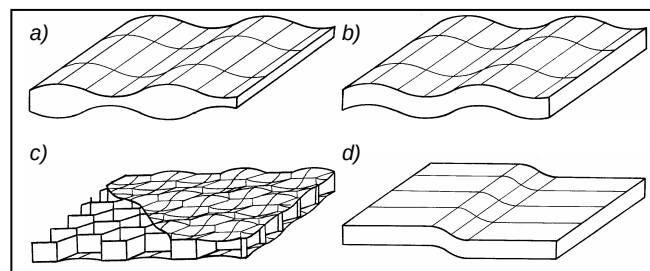
1. WPROWADZENIE

Idea struktur wielowarstwowych o zróżnicowanych właściwościach mechanicznych jest przeniesieniem rozwiązań stworzonych przez naturę w obszar techniki. Pierwszą konstrukcją opartą na koncepcji struktury przekładkowej stworzoną przez człowieka był most kolejowy zaprojektowany przez Sir Williama Fairbairna (1849). Swoją dynamiczny rozwój, będący rezultatem poszukiwania rozwiązań konstrukcyjnych o jak najmniejszym ciężarze, struktury przekładkowe zawdzięczają lotnictwu. W chwili obecnej znalazły one niekwestionowaną pozycję w wielu dziedzinach techniki, a możliwość programowania w dowolny sposób ich właściwości mechanicznych daje szerokie możliwości dalszego rozwoju.

Struktury przekładkowe stanowią szeroko stosowane elementy ustrojów nośnych pracujące jako płyty, powłoki lub belki, rzadziej jako kolumny (Zenkert 1996; Teisseyre i in. 1972). Z punktu widzenia statyki przenoszą obciążenia zgodnie z modelem struktury skorupowej. Ich przewagą nad klasycznymi strukturami jednorodnymi jest zestawienie elementów w odpowiednią konfigurację wraz takim doбором materiałów-składników struktury, aby ich właściwości wzajemnie się uzupełniały.

Nośność struktury przekładkowej, w której dominującymi obciążeniami są siły ściskające lub ścinające, ograniczona jest zdolnością do pozostania stateczną w zakresie obciążeń dopuszczalnych. Podobnie, jak w przypadku klasycznych ustrojów cienkościennych, także w strukturach przekładkowych utrata stateczności może przyjmować charakter globalny lub lokalny. Postaci globalne charakterem odpowiadają w dużej mierze formom pojawiającym się w konstrukcjach cienkościennych. Natomiast stateczność lokalna struktur przekładkowych jest zagadnieniem znacznie bardziej złożonym i, jak dotąd, nie doczekała się rozwiązania o charakterze ogólnym,

odpowiadającego dowolnej konfiguracji struktury. Z racji podziału ról między okładzinę i rdzeń w przenoszeniu obciążeń postaci te są charakterystyczne wyłącznie dla tych struktur. Zagadnienie stanowi wciąż temat badań wielu ośrodków (Librescu, Hause 2000; Noor i in. 1996).



Rys. 1. Postaci utraty stateczności płytowych struktur przekładkowych pod wpływem wydatku siły ściskającej (opis w tekście)

Wyróżnia się kilka postaci lokalnej utraty stateczności struktur przekładkowych przedstawionych na rysunku 1. Postaci o dużej liczbie półfal występują jako symetryczne (rys.1a) i antysymetryczne (rys.1b) pod wspólnym określeniem: *wrinkling*. Dla struktur z rdzeniem komórkowym charakterystyczny jest *facesheet dimpling* (rys.1c). Natomiast struktury z rdzeniem o małej sztywności i restrykcyjnych warunkach brzegowych ulegają często postaci *shear crimping* (Sullins i in. 1969).

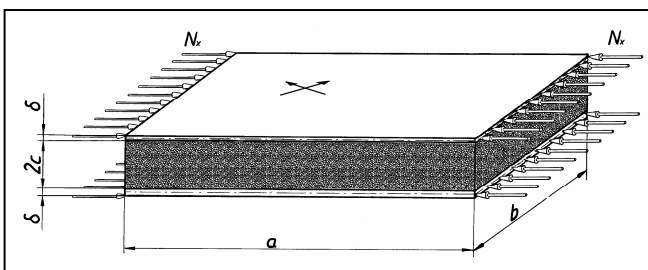
Za pionierską, podnoszącą problem stateczności struktur przekładkowych uważa się pracę Southwella i Skana (1924), natomiast pierwsze metody obliczania obciążeń krytycznych zaproponowali Gough i Elam (1940). Pozycjami znaczącymi, które przyczyniły się do rozwoju dziedziny są prace Bensona i Mayersa (1967), Pearce'a i Webbera (1972), Kima i Honga (1988). Doprowadziły one do powstania modelu analitycznego pozwalającego na wyznaczenie wartości obciążeń krytycznych dla dowolnej konfiguracji struktury przekładkowej. Model

ten posiada však pewne mankamenty, które skłaniają do dalszych poszukiwań, co przykładowo czynią w swoich pracach Kardomateas (2005) oraz Rammerstorfer i inni (np. 2000).

2. PRZEDMIOT BADADAŃ

Przedstawione rozważania dotyczą elementów znajdujących szerokie zastosowanie w strukturach statków powietrznych. Ustroje nośne płatowców wykonane na bazie struktur przekładkowych charakteryzuje wysoka sztywność, pozwalająca na zachowanie żądanej geometrii brył aerodynamicznych w całym zakresie obciążeń dopuszczalnych statku powietrznego. Jak już wspomniano, ustroje te pracują jak struktury skorupowe, zatem pokrycie przenosi nie tylko naprężenia styczne, lecz również naprężenia normalne. Poziomym wymiarującym dla elementu pokrycia skorupowego są obciążenia krytyczne, powyżej których może łatwo dojść do trwałego uszkodzenia struktury, w odróżnieniu od struktur półskorupowych, w których dopuszczalne są lokalne deformacje powyboczeniowe elementów pokrycia w zakresie sprężystym.

Jako obiekt badań obrano płytę przekładkową o okładzinach z polimerowego kompozytu zbrojonego włóknem węglowym oraz rdzeniu z wysokoelastycznego tworzywa spienionego. Przyjęto zróżnicowaną geometrię obiektów, a także kilka wariantów warunków brzegowych. Zasadniczym wariantem obciążenia było jednoosiowe ściskanie. Schematycznie zaprezentowano obiekt na rysunku 2.



Rys. 2. Schemat obciążenia płyty przekładkowej

3. MODEL NUMERYCZNY

Modelowanie struktur przekładkowych, zapewniające poprawność zachowania się ustroju w warunkach obciążeń granicznych oraz deformacji powyboczeniowej jest zagadnieniem, które charakteryzuje się podwójną nieliniowością. Geometryczną, wynikającą z konieczności uwypuklenia lokalnej i globalnej postaci utraty stateczności oraz materiałową, związaną z charakterystykami fizycznymi materiału rdzenia.

Mając na uwadze pierwszą z wymienionych, jako metodę rozwiązania wybrano procedury iteracyjne statyki nieliniowej, oparte na śledzeniu ścieżki równowagi układu w trakcie awansowania stopnia jego deformacji (Felippa 2001).

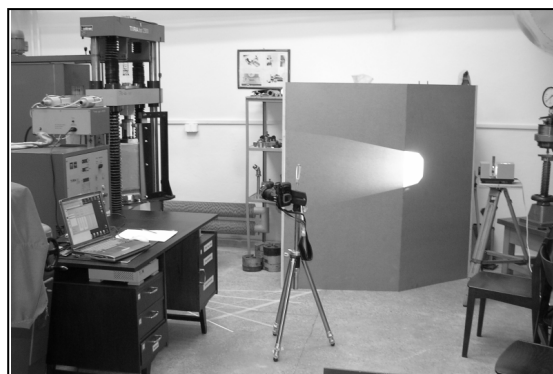
Nieliniowość materiałową wprowadzają rdzenie wykonane z wysokoelastycznych tworzyw spienionych,

posiadające charakterystykę opisaną modelem Ogdena (1972), a możliwą do przybliżenia modelem sprężysto-plastycznym. Na etapie obliczeń, prezentowanym w niniejszej pracy charakterystyki materiałów rdzenia ograniczono do zakresu sprężystego. Jest to zgodne z powszechnie przyjmowanym podejściem w modelach analitycznych (Kim, Hong 1988), w których izotropowy materiał rdzenia posiada charakterystykę liniowo-sprężystą.

Zadanie zrealizowano przy użyciu programu MSC. Software Corporation. Okładziny modelowano elementami płytowo – powłokowymi trój oraz czworobocznymi z węzłami w narożach o dwunastu stopniach swobody w każdym węźle. Rdzeń natomiast elementami bryłowymi pięcio i sześciściennymi z węzłami w narożach o trzech stopniach swobody. Uboga pod względem liczby stopni swobody funkcja kształtu użytych elementów sugerowała zastosowanie gęstej siatki podziału. Jest to model bliski rzeczywistym warunkom pracy konstrukcji, a wynikające z topologii elementów niezgodności stopni swobody objawiały się, dając niepożądane efekty, dopiero na etapie obliczeń, który nie odgrywał znaczącej roli w otrzymaniu poprawnych rezultatów.

4. EKSPERYMENT

Badania doświadczalne przeprowadzono przy użyciu specjalnego układu obciążającego, umożliwiającego zamocowanie elementu w przestrzeni pomiarowej uniwersalnej maszyny wytrzymałościowej Heckert TIRA test 2300. Stanowisko składało się ze sztywnej ramy otwartej, w której pozycjonowano próbki, symulując założone warunki brzegowe. Odbieranie odpowiednich stopni swobody zapewniano doбором sztywności medium mocującego krawędź próbki. W trakcie badań stosowano dwa rodzaje mocowań: gumę silikonową, której sztywność przy uzyskiwanych poziomach obciążenia umożliwiała swobodny obrót krawędzi względem ich osi, natomiast blokowała przemieszczenia prostopadłe do powierzchni płyty, co symulowało przegub sprężysty. Natomiast utwierdzenie uzyskiwano mieszkanką polimerów na bazie żywicy epoksydowej o sztywności porównywalnej ze sztywnością okładzin.

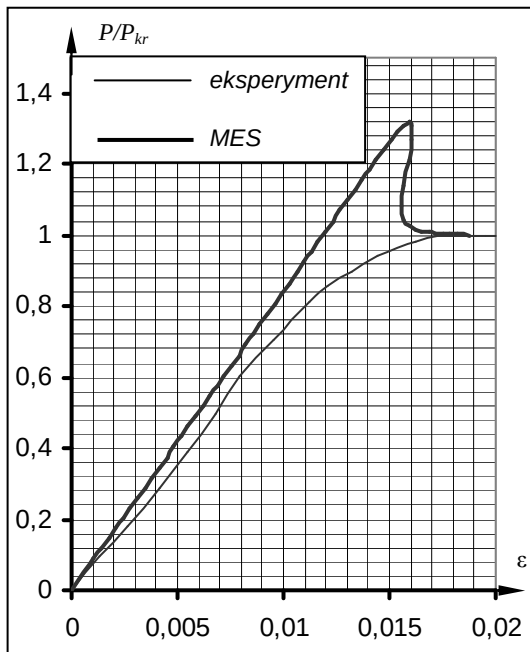


Rys. 3. Stanowisko do badań eksperymentalnych. Maszyna wytrzymałościowa z zamocowaną próbką oraz układ optyczny metody mory cieniowej

Poszukując analogii w sposobie obciążania badanego elementu z pracą rzeczywistej struktury lotniczej, (np. kesonu skrzydła), mocowanie dłuższych krawędzi modelowano przegubem, zaś dla krawędzi krótszych przyjmowano dwójakiego rodzaju warunki brzegowe: przegub lub utwierdzenie. Podczas próby rejestrowano przemieszczenie trawersy ruchomej, zmianę wartości siły ściskającej oraz deformację poprzeczną okładziny. W celu określenia tej ostatniej zastosowano metodę mory cieniowej (Patorski, Kujawińska 1993). Stanowisko przedstawia rysunek 3 (Bakunowicz, Kopecki 2006).

5. WYNIKI – ANALIZA PORÓWNAWCZA

O poprawności stworzonych modeli numerycznych stanowiło odniesienie wyników uzyskanych w obliczeniach numerycznych do analogicznych wielkości otrzymanych w eksperymencie. Spośród kilku branych pod uwagę kryteriów porównawczych, w pracy skupiono się nad przebiegiem charakterystyki procesu oraz obciążeniami i formą zniszczenia.



Rys. 4 Zależność siły ściskającej od skrócenia płyty

Bieżącą sztywność ustroju jak również tendencje jej zmiany określa zależność między obciążeniem, a deformacją. Oprzyrządowanie użyte podczas eksperymentu umożliwiało rejestrację zależności siły ściskającej od całkowitego skrócenia płyty. Odpowiednikami owych parametrów w modelu numerycznym jest ścieżka równowagi, czyli zależność pseudoczasu, będącego w przybliżeniu współczynnikiem proporcjonalności obciążenia w danym stanie do całkowitego założonego obciążenia, od przemieszczenia odpowiednio wybranego węzła siatki elementów skończonych. Reprezentatywną dla badanych obiektów charakterystykę w układzie wielkości względnych przedstawia rysunek 4.

Punktem wspólnym obydwu charakterystyk jest moment zniszczenia, który następował w efekcie pogłębiającej się deformacji zakrytycznej. Wartość obciążeń niszczących w praktyce odpowiadała krytycznym, gdyż od momentu globalnej utraty stateczności siła ściskająca pozostawała na stałym poziomie. Bezwzględne wartości siły krytycznej globalnej utraty stateczności różniły się między sobą o około 20% - uzyskiwane w eksperymencie były zawsze mniejsze od obliczonych. Moment ustalenia się siły na poziomie obciążeń krytycznych w modelu numerycznym następował przy mniejszych wartościach odkształcenia płyty, niż w eksperymencie (zazwyczaj o 0.004, co stanowi 16% zakresu odkształcenia).

W zakresie obciążeń do poziomu $\frac{P}{P_{kr}} \approx 0.5$ obydwie

charakterystyki mają przebieg liniowy. Zaburzenie na krzywej eksperymentalnej w strefie początkowej jest efektem kasowania luzów w układzie obciążającym.

Powyżej $\frac{P}{P_{kr}} \approx 0.5$ charakterystyka eksperymentalna

zmienia przebieg na nieliniowy z zachowaniem ciągłości pochodnej, a w miarę zbliżania się do wartości siły będącej siłą krytyczną, a w konsekwencji niszczącą, pochodna ta maleje do zera. Ścieżka równowagi natomiast zachowuje swój liniowy przebieg, jednak mimo tego, przy poziomie $\frac{P}{P_{kr}} \approx 0.5$ pojawiają się deformacje

poprzeczne w formie *wrinklingu* symetrycznego, informujące o lokalnej utracie stateczności okładzin.

Dalszy przebieg procesu obciążania modelu numerycznego wyznacza charakterystyka z punktem zwrotnym (Felippa 2001). Liniowy przyrost siły postępuje do osiągnięcia przez nią wartości maksymalnej, będącej większą od obciążeń krytycznych globalnej utraty stateczności. Postać globalna pojawia się jako efekt poszukiwania przez układ nowego położenia na ścieżce równowagi, poprzedzonego przejściem przez dwa punkty graniczne. W tym przypadku rozwiązanie jest znajdowane „od góry”. Po osiągnięciu punktu zwrotnego układ zmniejsza wartość siły przy jednocześnie wciąż pogłębianej deformacji lokalnej utraty stateczności. Ten fragment, aż do ustalenia stałego poziomu siły nie ma interpretacji fizycznej, a jedynie jest konsekwencją przyjętego algorytmu rozwiązywania problemu numerycznego.

Konfrontując ze sobą wyniki eksperymentu i obliczeń numerycznych, można stwierdzić, iż sztywność badanych ustrojów została odtworzona w modelu numerycznym poprawnie.

Nieliniowość procesu jest efektem pojawienia się lokalnej utraty stateczności okładzin, którą zidentyfikowano w modelu numerycznym. Niska rozdzielczość układu pomiarowego metody mory nie pozwoliła na zarejestrowanie tego zjawiska w eksperymencie. Na podstawie szeregu kolejnych prób stwierdzono, iż zjawisko jest niezależne od warunków brzegowych

i występuje przy tym samym poziomie $\frac{P}{P_{kr}}$ zarówno

w modelu numerycznym, jak i eksperymencie, będąc jedynie funkcją sztywności płyty.

Poziom obciążenie, przy którym następuje zniszczenie ustroju, determinuje jego nośność graniczną. Wiąże się to zazwyczaj z trwałą deformacją lub destrukcją uniemożliwiającą dalszą eksploatację. W strukturach lotniczych niebagatelnym czynnikiem jest niebezpieczeństwo zaistnienia szybkiej utraty stateczności przed przekroczeniem wytrzymałości konstrukcji. W klasycznych rozwiązaniach cienkościennych dopuszcza się takie stany w lokalnych obszarach, gdyż nie rzutuje to znacząco na eksploatację obiektu. Jednak w odniesieniu do struktur przekładkowych zjawisko posiada zupełnie odmienny charakter. Zniszczenie elementów badanych w trakcie eksperymentu następowało zawsze wartości obciążenia równoznacznej z obciążeniami krytycznymi globalnej utraty stateczności. W modelu numerycznym nie formułowano kryterium zniszczenia. Pola naprężeń zredukowanych dla stanów odpowiadających globalnej utracie stateczności posiadały obszary, w których przekroczona została wartość R_m kompozytu.

6. PODSUMOWANIE

W świetle przedstawionych wyników sugeruje się ograniczanie obciążeń dopuszczalnych elementów płatowca do poziomu $\frac{P}{P_{kr}} = 0.5$. Jest to punkt, w którym struktura

przechodzi z małych (liniowych) deformacji do dużych (nieliniowych). Przy przyjęciu obowiązującego w lotnictwie współczynnika bezpieczeństwa $n = 1.5$ teoretyczne obciążenia niszczące konstyтуują się na poziomie $\frac{P}{P_{kr}} = 0.75$, który zapewnia akceptowalny margines bezpieczeństwa.

Mając na uwadze, iż badane obiekty są dość uproszczone, przewiduje się ukierunkowanie dalszych prac na struktury o bardziej złożonej geometrii. Równocześnie w kolejnym kroku przewiduje się uwzględnianie rzeczywistej charakterystyki materiału rdzenia.

LITERATURA

1. **Bakunowicz J., Kopecki H.** (2006) Load capacity experimental investigation of composite rectangular sandwich plates under axial compression, *Acta Mechanica Slovaca*, Vol. 10, No 1, 33-40.
2. **Benson A. S., Mayers J.** (1967) General Instability and Face Wrinkling of Sandwich Plates – Unified Theory and Applications, *AIAA J.*, Vol. 5, No 4, 729-739.
3. **Fairbairn W.** (1849) *An account of the Britannia and Conway tubular bridges*, John Weale, London.
4. **Felippa C. A.** (2001) *Nonlinear Finite Element Methods (lecture notes)*. University of Colorado, Boulder.
5. **Gough G. S.; Elam C. F.; de Bruyne N. D.** (1940) The Stabilization of a Thin Sheet by a Continuous Supporting Medium. *J. Roy. Aer. Soc.*, Vol. 44, 12-43.
6. **Kardomateas G. A.** (2005) Wrinkling of Wide Sandwich Panels/Beams With Orthotropic Phases by an Elasticity Approach. *J. App. Mech. T-ASME*, Vol. 72, 818-825.
7. **Kim C. G.; Hong C. S.** (1988) Buckling of Unbalanced Anisotropic Sandwich Plates with Finite Bonding Stiffness. *AIAA J.* Vol. 26, No 8, 982-988.
8. **Librescu L.; Hause T.** (2000) Recent developments in the modelling and behaviour of advanced sandwich constructions: a survey. *Compos. Struct.*, Vol. 48, 1-17.
9. **Noor A. K.; Burton W. S.; Bert C. W.** (1996) Computational models for sandwich panels and shells. *App. Mech. Rev. T-ASME*, Vol. 49, No 3, 155-199.
10. **Ogden R. W.** (1972) Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids. *P. Roy. Soc. A*, Vol. 328, No 1571, 567-583.
11. **Patorski K.; Kujawińska M.** (1993) *Handbook of the moiré fringe technique*. Elsevier, Amsterdam.
12. **Pearce T. R. A.; Webber J. P. H.** (1972) Buckling of Sandwich Panels with Laminated Face Plates. *Aeronaut. Quart.*, 148-160.
13. **Romanów F.; Stricker L.; Teisseyre J.** (1972) *Stateczność konstrukcji przekładkowych*. Politechnika Wrocławska, Wrocław.
14. **Southwell R. V.; Skan S. W.** (1924) Stability under shearing forces of flat elastic strip. *P. Roy. Soc. A*, Vol. 105, 582.
15. **Sullins R. T.; Smith G. W.; Spier E. E.** (1969) *Manual for Structural Stability Analysis of Sandwich Plates and Shells*. NASA CR1457, Washington, D.C.
16. **Vonach W. K.; Rammerstorfer F. G.** (2000) Wrinkling of thick orthotropic sandwich plates under general loading conditions. *Arch. App. Mech.*, Vol. 70, 338-348.
17. **Zenkert D.** (1996) *An introduction to sandwich construction*. Chameleon Press, London.

STABILITY AND CRITICAL STATES OF ORTHOTROPIC SANDWICH STRUCTURES

Abstract: The paper presents numerical and experimental researches on stability and critical states of sandwich structures. The problem was solved by means of finite element method, concerning geometrical non-linearity. Numerical results compared to the experiment allowed to make some general statements on the design methodology of such structures.

Artykuł w rozszerzonej formie prezentowano na I Kongresie Mechaniki Polskiej w Warszawie, 28-31 sierpnia 2007.

Pracę wykonano w ramach projektu Komitetu Badań Naukowych nr 5 T12C 045 25.

EFFECT OF CONTINUOUS DAMAGE DEACTIVATION ON YIELD AND FAILURE SURFACES

Marcin CEGIELSKI*, Artur GANCZARSKI*

* Institute of Applied Mechanics, Dept. of Mechanical Engineering, Cracow University of Technology,
Al. Jana Pawła II 37, 31-864 Kraków

Artur.Ganczarski@pk.edu.pl

Abstract: This article deals with the modeling of the continuous damage deactivation affected yield surfaces of copper and failure surfaces of mortar, from the viewpoint of continuum damage mechanics. The concept of damage deactivation is adapted to Tresca-Guest and Huber-Mises surfaces and two models are presented: the classical discontinuous one, in which microcracks close instantaneously, and the new continuous one, in which they close gradually. The results for both models are compared and verified in order to achieve the best fitting the experimental data. Detailed quantitative and qualitative analysis of obtained solutions confirms the necessity and correctness of an application of the continuous damage deactivation concept.

1. INTRODUCTION

Degradation of a material leads to a change of mechanical properties of it such that: decrease of the material stiffness described by modified constants of elasticity, decrease of the material strength, which can be described by appropriate strength criterion of damaged material and growth of the material anisotropy resulting from directional nature of damage effects.

Therefore the constitutive equations of damage material should include aforementioned effects and they also should be reducible to the equations valid for the initial state when growth of material degradation has not been initiated. Considering the strength condition of damaged material our investigation are limited to the simplified case when undamaged material is isotropic. Consequently, the strength condition is understood here as a state when either the yield condition is fulfilled or ultimate stress is reached. The strength condition may be presented as the following scalar function

$$f(\sigma, D) = 0, \quad (1)$$

where σ stands for the stress tensor and D describes isotropic damage parameter, which vanishes in case of the undamaged material. Graphical interpretation of Eq. (1), presented schematically in Fig. 1, performs certain limit surface defined in stress space, which shrinks and deforms due to damage. The decrease of material strength with damage can be explained in such a way that achievement of limit surface in the undamaged material requires stress σ_{ij} (vector OA), whereas in case of damaged material the appropriate stress σ_{ij}^* is essentially smaller (vector OA_1).

Limit surfaces play fundamental role in the generalized theories of plasticity–damage (see Lemaitre and Chaboche 1985, Lemaitre 1992) and creep–damage phenomena (see Litewka 1991), where they serve

as the dissipation potentials. Hence, two postulates are crucial for the question, whether a given limit surface may be applied as the dissipation potential used in theories based on generalized associated flow rule: f is a scalar continuous or partly continuous (having at most finite set of corner points) and convex function of its arguments.

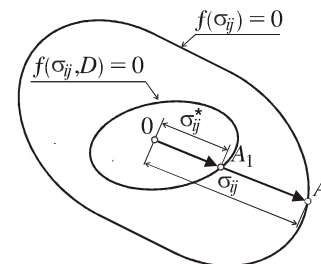


Fig. 1. Change of the limit surface due to damage

2. REVIEW OF EXPERIMENTAL DATA

2.1. Isochronous creep rupture curves for copper

Isochronous creep rupture curves or, in other words, curves of identical time to rupture, are very convenient graphical interpretation of the fracture criterion accompanying creep. Usually, these curves are drawn in the principal stress co-ordinate system and each point of the subsequent curve represents the stress level leading to rupture, after time characteristic for this curve is reached.

Relatively the highest number experiments in the field of rupture accompanying creep under biaxial stress state was done for copper at 523 K (see Finnie and Abo el Ata 1971, Johson et al. 1956, Murakami and Sanomura 1985, Murakami et al. 1986), which enabled Litewka (1991) to compare their results for several magnitudes of rupture time (Fig. 2).

Detailed analysis of subsequent isochronous creep rupture curves did not confirm assumption of invariant shape, initially noticed by Broberg (1975), and allowed Litewka (1991) to formulate hypothesis that, depending on the level of stress, they may approach either Huber-Mises ellipses (higher magnitude of stress) or Tresca-Guest hexagon (lower magnitude of stress).

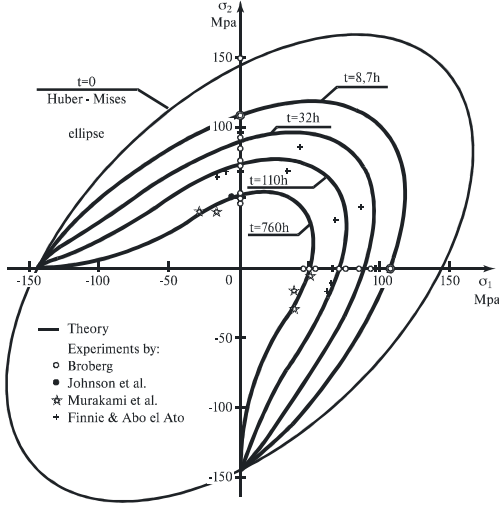


Fig. 2. Isochronous creep rupture curves for copper at temperature 523 K (after Litewka 1991)

2.2. Mortar damage loading surfaces

The mechanical behavior of masonry was subject of several experimental studies by Page (1981, 1983), Dhanasekar et al. (1985), Rots (1997) and van der Pluijm (1999). Experimental failure envelope shape, obtained in uniaxial tension, uniaxial compression, biaxial compression under medium confinement, triaxial compression under medium confinement and hydrostatic compression, is presented in Fig. 3. The failure envelope is much more sensitive in tension than in compression (k stands for ratio of compressive/tensile strength).

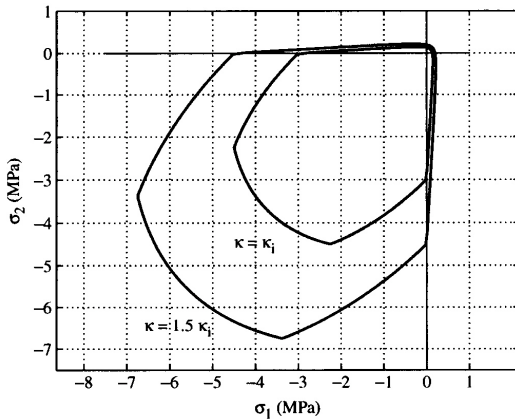


Fig. 3. Mortar damage loading surfaces (after Page 1991, 1993, Dhanasekar et al. 1985, Rots 1997 and van der Pluijm 1999)

3. LIMIT SURFACES AFFECTED BY DAMAGE

3.1. Discontinuous damage deactivation

In what follows, modeling of damage influence on Tresca-Guest or Huber-Mises limit surfaces is directly associated with the kinetic theory of damage evolution proposed by Lemaitre and Chaboche (1985) and Lemaitre (1992). Key point of this theory is the limit surface treated as the yield potential referring to theory of associated plasticity and built on the basis of effective stress concept. In general case, damage is anisotropic phenomenon usually described by the second order tensor. However, in order to make derivations possible, the simplest isotropic damage is assumed and the effective stress equals to

$$\tilde{\sigma} = \sigma / (1 - D), \quad (2)$$

where D stands for damage and h denotes crack closure opening parameter. Such simplified scalar description of damage does not allow for distinction of microcrack orientation but, simultaneously, it is sufficient to trace influence of damage closure on change of the macroscopic properties of material.

Direct substitution of Eq. (2) into Eq. (1) shows that the form of yield potential essentially differs in case of tension, when damage is active, than in case of compression, when damage remains inactive. This phenomenon is called damage deactivation and its description requires to take into account the parameter h

$$h = \begin{cases} 1 & \text{tension} \\ 0 & \text{compression} \end{cases} \quad (3)$$

As consequence, in case of the plane stress state and under assumption that damage is active if at least one of stress components is positive ($\sigma_1 > 0$ and/or $\sigma_2 > 0$) or, in other words, $h = 1$ if $\text{Tr} \langle \sigma \rangle = \langle \sigma_1 \rangle + \langle \sigma_2 \rangle$ is positive. The Macauley brackets $\langle \cdot \rangle$ are defined as $\langle x \rangle = 0.5(x + |x|)$. In the Tresca-Guest case yield potential takes following form

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= 1 - D & \Sigma_2 &= 1 - D & \text{in 1}^{\text{st}} \text{ quarter} \\ \Sigma_1 &= -1 & \Sigma_2 &= -1 & \text{in 3}^{\text{rd}} \text{ quarter} \\ \Sigma_1 - \Sigma_2 &= \pm(1 - D) & & & \text{in 2}^{\text{nd}} \text{ and 4}^{\text{th}} \text{ quarters} \end{aligned}, \quad (4)$$

whereas in the case of Huber-Mises

$$\Sigma_1^2 - \Sigma_1 \Sigma_2 + \Sigma_2^2 = \begin{cases} (1 - D)^2 & \text{in 1}^{\text{st}}, 2^{\text{nd}}, 4^{\text{th}} \text{ quarters} \\ 1 & \text{in 3}^{\text{rd}} \text{ quarter} \end{cases}, \quad (5)$$

where $\Sigma_i = \sigma_i / \sigma_y$ is dimensionless stress (σ_y denotes yield stress) which turns out to be non-smooth and non-convex function (see Figs 4, 5). Namely, for any nonzero damage state (here $D = 0.6$) there exist two linear segments (OA_1 and OB_1 for Tresca-Guest hexagon, or A_1A_2 and B_1B_2 for Huber-Mises ellipse), corresponding to instantaneous damage deactivation that link together appropriate segments of second and third or third and fourth quarters, respectively.

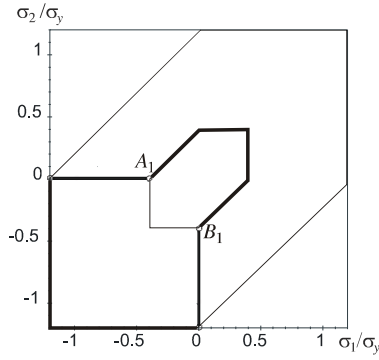


Fig. 4. Tresca-Guest yield surface in case of discontinuous damage deactivation effect ($D=0.6$)

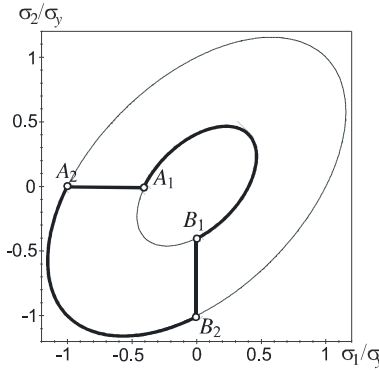


Fig. 5. Huber-Mises yield surface in case of discontinuous damage deactivation effect ($D=0.6$)

3.2. Continuous damage deactivation

The aforementioned defect of the yield potential Eqs (4-5) may successfully be removed by introducing continuous damage deactivation, when microcracks do not close instantaneously but gradually like which is schematically shown in Fig. 6 (see Hansen and Schreyer 1995, Foryś and Ganczarski 2002, Ganczarski and Barwacz 2007, Ganczarski and Cegielski 2007)

$$h(\sigma) = h_c + (1 - h_c)\chi(\sigma)/\chi(\sigma_b), \quad (5)$$

where h_c stands for the critical magnitude of damage deactivation parameter (assumed for simplicity equal to 0.0), σ_b denotes stress referring to the full microcrack opening and $\chi(\sigma)$ is the Hayhurst function

$$\chi(\sigma) = \alpha \text{Tr}(\sigma) + (1 - \alpha)J_2(\sigma), \quad (6)$$

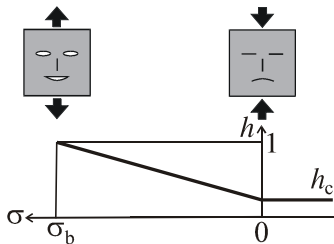


Fig. 6. Graphical interpretation of continuous damage deactivation

Restricting considerations to the simplified case when $\chi(\sigma)$ depends only on positive value of the first invariant of stress tensor $\alpha=1$ and $\text{Tr}(\sigma)=\text{Tr}\langle\sigma\rangle$ and assuming, additionally, that microcracks are fully opened under maximum tension

$$\sigma_b = \begin{cases} (1-D)\sigma_y & \text{points } A_1 \text{ and } B_1 \text{ at Tresca hexagon} \\ \frac{2(1-D)\sigma_y}{\sqrt{3}} & \text{points } A_1 \text{ and } B_1 \text{ at Mises ellips} \end{cases}, \quad (7)$$

and closed completely under compression ($h_c=0$ at points 0 or A_2 and B_2 , respectively), the yield surfaces are given by formulas: the Tresca-Guest case

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= 1-D & \Sigma_2 &= 1-D & \text{in 1}^{\text{st}} \text{ quarter} \\ \Sigma_1 &= -1 & \Sigma_2 &= -1 & \text{in 3}^{\text{rd}} \text{ quarter} \\ \Sigma_1 - (1 + \frac{D}{1-D})\Sigma_2 &= -1 & & & \text{in 2}^{\text{nd}} \text{ quarter} \\ (1 + \frac{D}{1-D})\Sigma_1 - \Sigma_2 &= 1 & & & \text{in 4}^{\text{th}} \text{ quarter} \end{aligned} \quad (8)$$

and the Huber-Mises case

$$\begin{aligned} \Sigma_1^2 - \Sigma_1\Sigma_2 + \Sigma_2^2 &= \\ &= \begin{cases} (1-D)^2 & \text{between points } A_1 \text{ and } B_1 \\ (1 - \frac{D}{1-D} \frac{\sqrt{3}}{2} \Sigma_2)^2 & \text{between points } A_1 \text{ and } A_2 \\ (1 - \frac{D}{1-D} \frac{\sqrt{3}}{2} \Sigma_1)^2 & \text{between points } B_1 \text{ and } B_2 \\ 1 & \text{in 3}^{\text{rd}} \text{ quarter} \end{cases}, \end{aligned} \quad (9)$$

schematically shown in Figs 7 and 8.

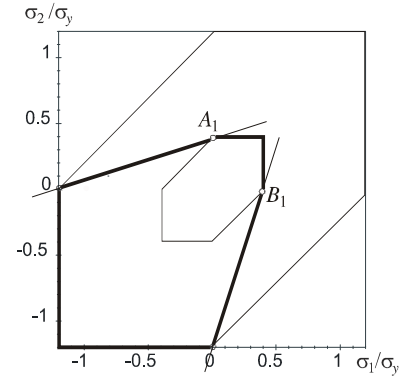


Fig. 7. Tresca-Guest yield surface in case of continuous damage deactivation effect ($D=0.6$)

New yield surfaces are composed of either two segments of the Tresca hexagon joined by two straight lines or the Mises ellipses linked together by two hyperbolas, becoming parabolas in particular case of $D=2\sqrt{3}/(3+2\sqrt{3})\approx 0.5358$. Subsequent stages of damage affected yield surfaces shown in Figs 9 and 10 exhibit qualitatively and quantitatively good agreement with experimental investigations demonstrated in Figs 2 and 3. In comparison to curves presented in Figs 4 and 5 the convexity and smoothness (except finite set of points) are recovered, hence they both may serve as damage affected yield potentials: the Tresca-Guest hexagon for modeling of metallic materials subjected to lower magnitudes of stress

and the Huber-Mises ellipses for modeling of both metallic materials subjected to higher magnitudes of stress and concrete or rock like materials.

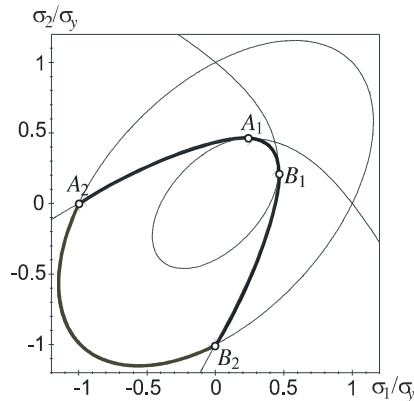


Fig. 8. Huber-Mises yield surface in case of continuous damage deactivation effect ($D=0.6$)

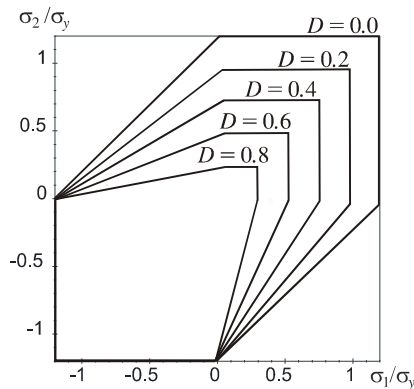


Fig. 9. Subsequent stages of damage affected Tresca-Guest yield surface by use of continuous damage deactivation

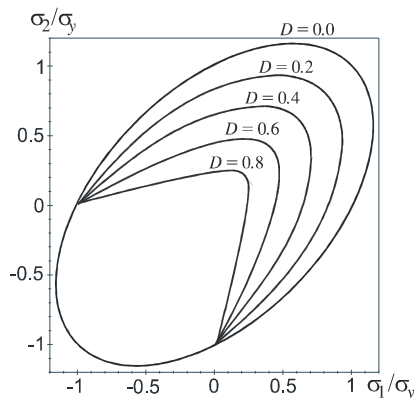


Fig. 10. Subsequent stages of damage affected Huber-Mises yield surface by use of continuous damage deactivation

4. CONCLUSIONS

1. Modeling of limit surfaces by use of the classical discontinuous damage deactivation leads to insufficient mapping of complex experimental data revealing physically unjustified discontinuities.

2. Application of the continuous damage deactivation concept gives both quantitatively and qualitatively good agreement with the experimental data, and confirms necessity and correctness of this approach in modeling of damage affected limit surfaces of copper and mortar.

REFERENCES

1. **Broberg H.** (1975) Creep damage and rupture, a phenomenological study, PhD Thesis, Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg.
2. **Dhanasekar M., Page A.W., Kleeman P.W.** (1985), The failure of brick masonry under biaxial stresses, in *Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2*, 295-313.
3. **Finnie I., Abo el Ata M.M.** (1971), Creep and creep-rupture of copper tubes under multiaxial stress, in *Advances in Creep Design*, eds. Smith A.J., Nicolson A.M., Wiley, New York, 329-352.
4. **Foryś P., Ganczarski A.** (2002), Modelling of microcrack closure effect, *Proc. Int. Symp. Anisotropic Behaviour of Damaged Materials* (on CD ROM).
5. **Ganczarski A., Barwacz L.** (2007), Low cycle fatigue based on unilateral damage evolution, *Int. J. Damage Mechanics*, Vol. 16, No 2, 159-177.
6. **Ganczarski A., Cegielski M.** (2007), Efekt ciągłej deaktywacji uszkodzenia, *Acta Mechanica et Automatica*, Vol. 1, No 1, 35-38.
7. **Hansen N.R., Schreyer H.L.** (1995), Damage deactivation, *Trans. ASME*, 62, 450-458.
8. **Johson A.E., Henderson J., Mathur V.D.** (1956), Combined stress fracture of commercial copper at 250°C, *The Engineer*, 24, 261-265.
9. **Lemaitre J., Chaboche J.-P.** (1985), *Mécanique des matériaux solides*, Bordas, Paris.
10. **Lemaitre J.** (1992), *A course on damage mechanics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
11. **Litewka A.** (1991), Damage and fracture of metals in creep conditions, Thesis of Poznań University of Technology, No 250 (in Polish).
12. **Murakami S., Sanomura Y.** (1985), Creep and creep damage of copper under multiaxial states of stress, in *Plasticity today*, eds. Sawczuk A, Bianchi G., Elsevier, London, 535-551.
13. **Murakami S., Sanomura Y., Saitoh K.** (1986), Formulation of cross-hardening in creep and its effect on the creep damage process of copper, *J. Eng. Mat. Techn.*, 108, 167-173.
14. **Page A.W.** (1981), The biaxial compressive strength of brick masonry, *Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2*, 71, 893-906.
15. **Page A.W.** (1983), The strength of brick masonry under biaxial tension-compression, *Int. J. Masonry Constr.*, 3, 26-31.
16. **Rots J.G.** (1997), *Structural masonry-an experimental-numerical basis for practical design rules*, Balkema, Rotterdam.
17. **van der Pluijm R.** (1999), *Discontinuous modelling of strain localisation and failure*, PhD Thesis, Delft Univ. Techn.

ACKNOWLEDGEMENTS

Authors gratefully acknowledge the support rendered by the State Committee for Scientific Research, KBN, Poland, Project PB-807/T07/2003/25.

ANALIZA MOŻLIWOŚCI ZASTOSOWANIA SONDY PRZEDMIOTOWEJ DO KONTROLI CZYNNEJ NA PIONOWYM CENTRUM OBRÓBKOWYM FV 580A

Barbara KAMIEŃSKA-KRZOWSKA*, Leszek SEMOTIUK*, Marcin CZERW**

b.krzowska@pollub.pl, l.semotiuk@pollub.pl

* Politechnika Lubelska, Wydział Mechaniczny, Katedra Podstaw Inżynierii Produkcji
ul. Nadbystrzycka 38d, 20-618 Lublin

** Fabryka Łożysk Tocznych – Kraśnik S.A., ul. Fabryczna 6, 23-210 Kraśnik

Streszczenie: Przeanalizowano możliwość zastosowania sondy przedmiotowej na obrabiarkach CNC do pomiarów wybranych wymiarów liniowych detali w trakcie procesu obróbkowego a także po jego zakończeniu. Zaletą takiego rozwiązania jest możliwość wykonywania pomiarów bez zmiany zamocowania przedmiotu obrabianego. Wadą natomiast jest wpływ czynników związanych z przebiegiem procesu skrawania na dokładność wykonywanych pomiarów.

Przeprowadzono badania porównawcze wyników pomiarów uzyskanych na pionowym centrum obróbkowym FV580A za pomocą sondy przedmiotowej MP10 z pomiarami tych samych wymiarów na współrzędnościowej maszynie pomiarowej VISTA. Wyniki tych pomiarów wykazują pewne rozbieżności i zależą one od mierzonego wymiaru. Dokładna ich analiza pozwala stwierdzić, że zastosowanie sondy MP10 do kontroli przebiegu procesu obróbki jest zasadne ze względu na potrzeby szybkiego diagnozowania wymiaru obrabianego przedmiotu i może być również alternatywą dla pomiarów wykonywanych na maszynach współrzędnościowych.

1. WSTĘP

W obecnych czasach wymagania stawiane wyrobom przemysłu maszynowego są coraz wyższe. Jednocześnie konkurencja na rynku zmusza firmy do obniżania kosztów produkcji. Sytuacja ta dopinguje producentów do zwiększania automatyzacji obrabiarek i całych procesów produkcyjnych oraz jakości wykonywanych wyrobów.

W procesie wytwarzania wyrobów metodą obróbki ubytkowej obserwuje się tendencję zmierzającą do maksymalnej automatyzacji samego procesu skrawania sprowadzając do minimum czynności przygotowawcze i obsługowe. Istotnym aspektem jest tutaj redukcja czasów przestojów obrabiarki, możliwości obrabiania większych ilości części, możliwość obsługi przez operatora większej ilości obrabiarek czy też poprawa kontroli procesu produkcyjnego.

Wraz z procesem technologicznym wiąże się nierozdzielnie proces kontroli jakości wykonywanych detali. Obecnie coraz częściej wykorzystuje się współrzędnościowe techniki pomiarowe.

Wiedza na temat wykorzystania współrzędnościowych technik pomiarowych jest powszechna a pomiarowe maszyny współrzędnościowe znalazły zastosowanie w wielu zakładach przemysłowych do kontroli procesów wytwórczych. Jedną z większych ich wad jest oczywiście wysoki koszt zakupu. Alternatywną metodą pomiaru może okazać się wykorzystanie sondy przedmiotowej na obrabiarkach CNC. Koszty zakupu takiej sondy jest wielokrotnie mniejszy niż koszt zakupu maszyny pomiarowej.

Obrabiarkowe sondy pomiarowe pozwalają na wykonanie pomiarów detali obrabianych w trakcie i po zakończeniu przebiegu procesu obróbkowego. Rozwiązanie to daje możliwość wykonania większości pomiarów bez zmiany zamocowania przedmiotu obrabianego bezpośrednio po wykonaniu obróbki bądź w jej trakcie. Biorąc pod uwagę fakt, że na rynku oprogramowania zaczynają pojawiać się wersje programów pozwalających na uproszczenie tworzenia i integrację procedur pomiarowych z procesem produkcyjnym (np. Productivity+™), współdziałające z różnego rodzaju systemami CAD/CAM i układami sterującymi pracą obrabiarek CNC, to wykorzystanie tego typu ciągle rozwijających się systemów do kontroli procesów produkcyjnych wydaje się być bardzo atrakcyjne.

Jednakże wykorzystanie tego typu systemów pomiarowych na obrabiarkach CNC wiąże się z rozwiązaniem wielu zagadnień wpływających bezpośrednio na jakość wykonywanych pomiarów (np. rozszerzalność cieplna obrabianego przedmiotu i inne związane z przebiegiem samego procesu skrawania). Podjęcie tego typu badań może jednak okazać się niecelowe, choćby w przypadku, gdy dokładność pomiarów prowadzonych za pomocą układów wewnątrzobrobkowych będzie zdecydowanie gorsza od dokładności pomiarów prowadzonych np. na maszynach współrzędnościowych. Dlatego też w Katedrze Podstaw Inżynierii Produkcji przeprowadzono próbę porównania jakości pomiarów prowadzonych na pionowym centrum obróbkowym za pomocą sondy przedmiotowej i na pomiarowej maszynie współrzędnościowej.

2. CHARAKTERYSTYKA SONDY POMIAROWEJ MP10

Sondę MP10 (rys. 1) na pionowych centrach obróbkowych można wykorzystać do:

- ustawiania przedmiotu obrabianego (sonda identyfikuje położenie przedmiotu, aktualizując automatycznie offsety robocze);
- lokalizacji przedmiotu oraz detekcji błędów położenia;
- identyfikacji naddatków obróbkowych dla zapewnienia szybkiego i bezpiecznego podejścia narzędzia do przedmiotu obrabianego;
- kontroli detali podczas procesu produkcji, oraz po jego zakończeniu.



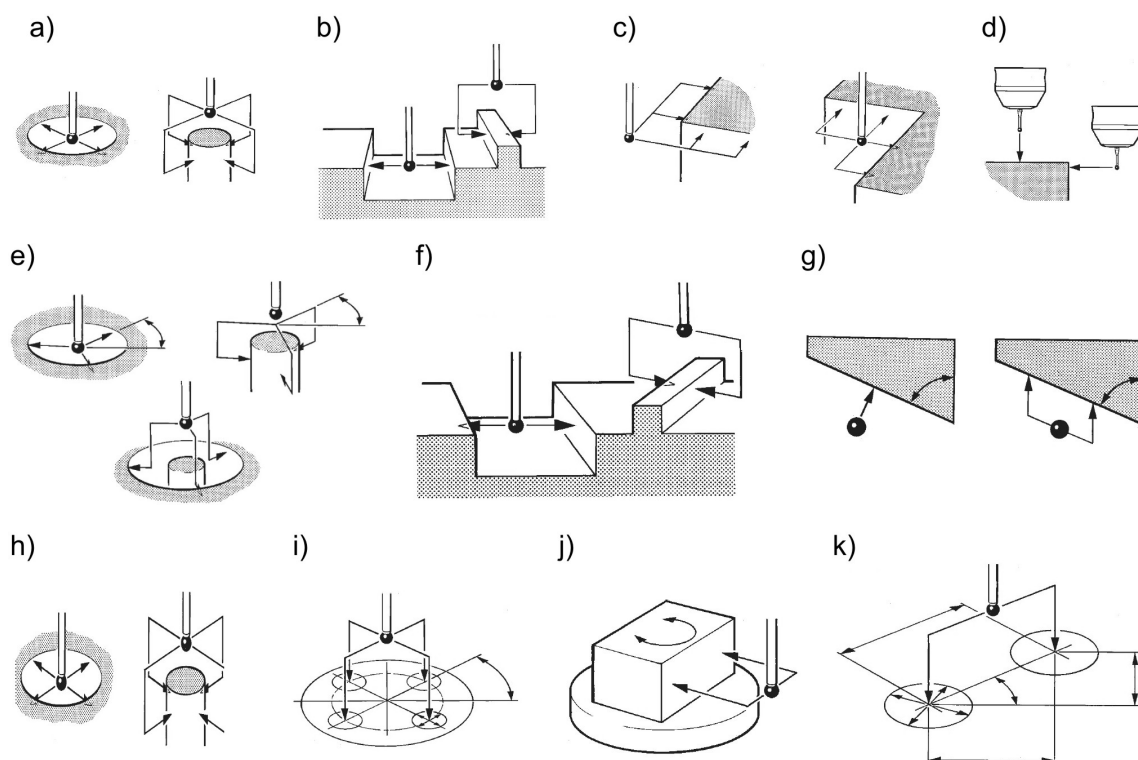
Rys. 1. Widok sondy pomiarowej przedmiotu obrabianego MP10 (materiały informacyjne firmy Renishaw)

Cechy charakterystyczne sondy NC4:

- Powtarzalność pomiarowa - $1,0\mu\text{m}$.
- Detekcja w osiach $\pm X$, $\pm Y$, $\pm Z$.
- Optyczny system transmisji.
- Wysoka odporność na uderzenia i drgania.
- Stopień ochrony IPX8 zapewnia odporność na chłodziwo i wióry.

Programowanie sondy do pomiarów na obrabiarce CNC może przebiegać w następujący sposób:

- dzięki wykorzystaniu specjalistycznego oprogramowania komputerowego;
- poprzez programowane ręczne (napisanie odpowiedniego programu pomiarowego a później umieszczenie go w pamięci obrabiarki);
- dzięki wykorzystaniu gotowych cykli pomiarowych zainstalowanych w pamięci obrabiarki podczas instalacji oprogramowania sondy (rys. 2).

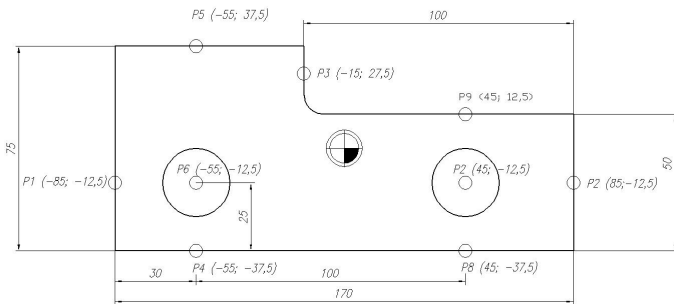


Rys. 2. Cykle pomiarowe dla sondy MP10 dostępne bezpośrednio z systemu sterującego pracą centrum obróbkowego: a) pomiar otworu i wałka, b) pomiar żebra i kieszeni, c) znajdowanie narożnika zewnętrznego i wewnętrznego, d) pozycjonowanie prostej powierzchni XYZ, e) trzypunktowy pomiar otworu i wałka, f) pomiar żebra i kieszeni ustawionej pod kątem, g) pomiar powierzchni z płaszczyzną pod kątem, h) naddatek materiału obrabianego, i) otwór i piasta mierzona na średnicy koła podziałowego, j) pomiar czwartej osi, k) pomiar wzajemnego położenia elementów (Instrukcja obsługi Fanuc seria 0i-MB.)

3. METODYKA BADAŃ

Możliwość wykorzystania systemów sond pomiarowych na centrum obróbkowym zostanie zbadana na wcześniej zaprojektowanym detalu o wymiarach nominalnych pokazanych na rys. 3. Przedmiot ten wykonany został na pionowym centrum frezarskim FV-580A. Półfabrykatem był pręt stalowy walcowany o następujących wymiarach (PN-85/H-93202): szerokość - $80^{+0,7}_{-1,6}$ mm, wysokość - $25^{+0,2}_{-1,4}$ mm, długość - 170 mm, materiał - St3.

Ponieważ charakterystyczne powierzchnie przedmiotu wykorzystywane później jako powierzchnie pomiarowe musiały zostać wykonane w jednym zamocowaniu, dlatego też niezbędne było zaprojektowanie i wykonanie odpowiedniego przyrządu mocującego. Detal ustalony został na kołkach ustalających i płaszczyźnie podstawy a zamocowany za pomocą śruby mocującej. Taki sposób ustalenia i zamocowania przedmiotu obrabianego zapewnił powtarzalność jego ustalenia a co za tym idzie powtarzalność przebiegu procesu obróbki.



Rys. 3. Ustalenie punktów pomiarowych dla sondy przedmiotowej

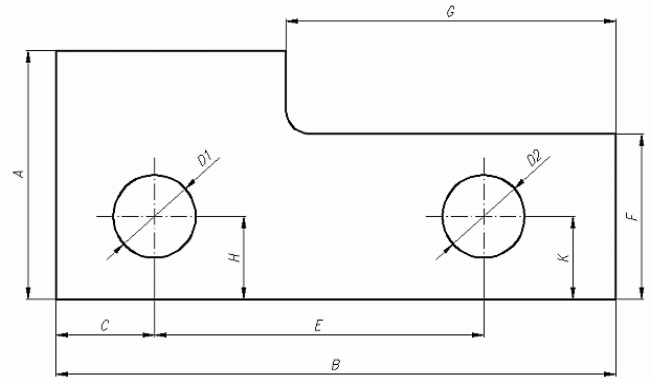
Proces technologiczny wykonany został z wykorzystaniem programu komputerowego do modelowania bryłowego (T-Flex) oraz wspomagania procesów wytwarzania (SPRUTCAM). Program SPRUTCAM umożliwił zaprojektowanie procesu obróbki oraz wygenerowanie kodów sterujących pracą centrum obróbkowego. Do pomiaru korekcji długości i średnicy narzędzia wykorzystano laserową sondę pomiarową NC4 firmy Renishaw.

Podczas projektowania technologii w programie SPRUTCAM wykorzystano dwa niezależne położenia punktu zerowego przedmiotu obrabianego. Do obróbki baz technologicznych ustalono punkt zerowy w dolnym lewym narożu na górnej powierzchni detalu. Do frezowania na gotowo punkt zerowy został ustalony na środku górnej powierzchni detalu.

4. PROGRAM POMIAROWY PRZEDMIOTU OBRABIANEGO Z WYKORZYSTANIEM SONDY MP10

Zadaniem programu pomiarowego było zmierzenie wymiarów liniowych przedmiotu obrabianego oraz średnic otworów.

Punkty pomiarowe oraz ich współrzędne względem punktu zerowego przedmiotu obrabianego pokazane zostały na rys. 3 odpowiednie odcinki pomiarowe na rys. 4.



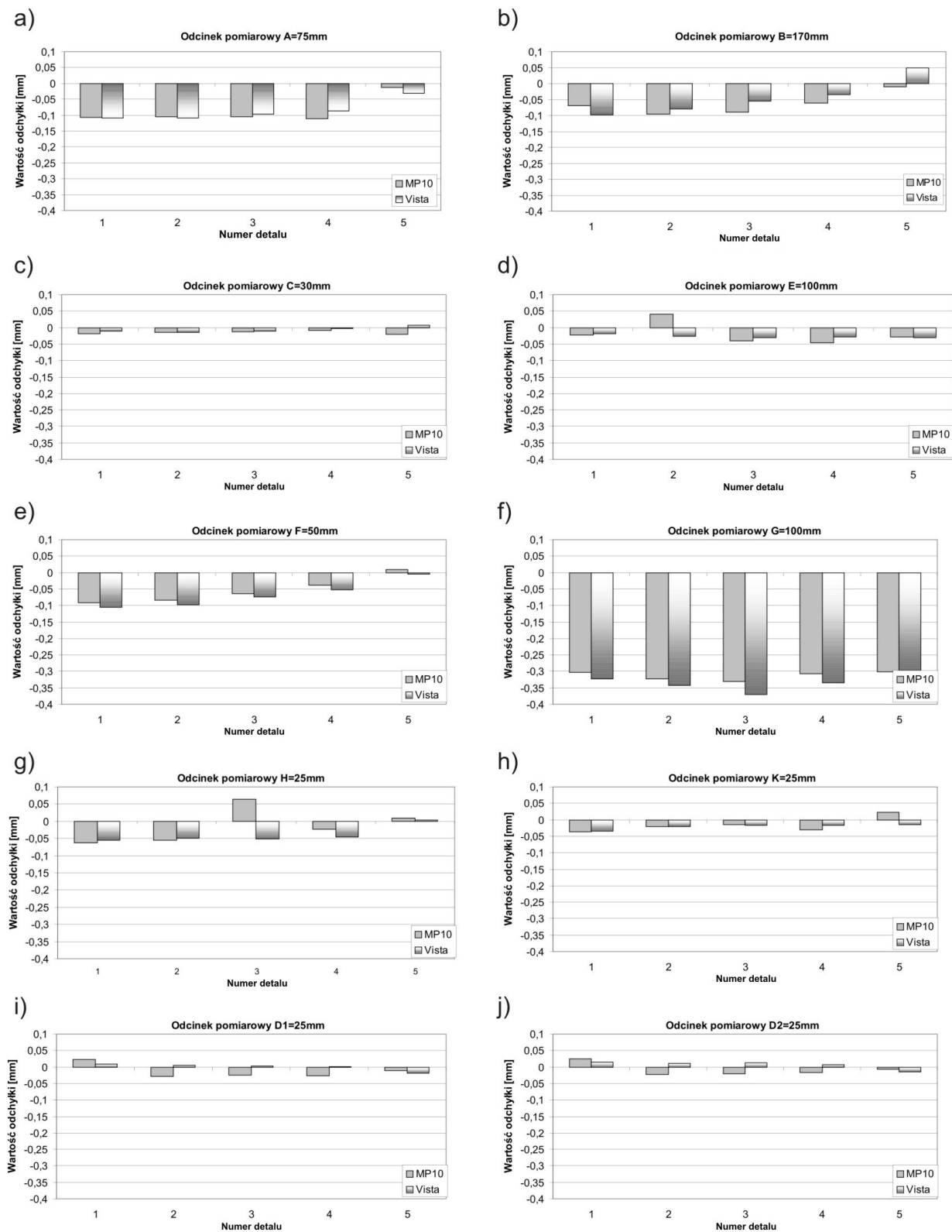
Rys. 4. Oznaczenia odcinków pomiarowych

5. WYNIKI POMIARÓW

Pomiary przedmiotu wykonano na frezarskim centrum obróbkowym pionowym FV-580A za pomocą sondy MP10 firmy RENISHAW, a następnie na współrzędnościowej maszynie pomiarowej VISTA firmy C.ZEISS (rys.5). Jest to maszyna portalowa o zakresach pomiarowych wynoszących X=400mm, Y=500mm, Z=350mm. Można na niej mierzyć przedmioty o masie nie większej niż 280kg przy masie maszyny wynoszącej 400kg. Graniczny błąd dopuszczalny wskazania podczas pomiaru wymiaru wynosi $MPE_E = 2,4 + L/250 \mu m$ dla pomiarów CNC i $2,9 + L/250 \mu m$ dla pomiarów wykonywanych za pomocą pulpitu sterującego, gdzie L – mierzona długość w milimetrach. Graniczny błąd dopuszczalny zespołu głowicy pomiarowej dla pomiarów CNC wynosi $MPE_P = 2,2 \mu m$. Pomiary sondą MP10 zostały wykonane na pięciu detalach. Wyniki pomiarów przedstawione zostały w formie graficznej na wykresach zamieszczonych na rys. 6.



Rys. 5. Współrzędnościowa maszyna pomiarowa VISTA firmy C.ZEISS



Rys. 6. Położenie odchyłek względem wymiaru nominalnego: a) odcinek pomiarowy A=75mm, b) odcinek pomiarowy B=170mm, c) odcinek pomiarowy C=30mm, d) odcinek pomiarowy E=100mm, f) odcinek pomiarowy G=100mm, g) odcinek pomiarowy H=25mm, h) odcinek pomiarowy K=25mm, i) odcinek pomiarowy D1=25mm, k) odcinek pomiarowy D2=25mm

6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI KOŃCOWE

Wykresy zamieszczone na rys. 6 przedstawiają położenie zaobserwowanych odchyłek w stosunku do wymiaru nominalnego dla dwóch metod pomiarowych. Os X reprezentuje numer próbki odpowiadający kolejnym mierzonym elementom, na osi Y zamieszczono wartość obliczonych odchyłek od wymiaru nominalnego. W tabeli 1 podane zostały obliczone różnice w wartościach odchyłek dla dwóch metod pomiarowych.

Wyniki pomiarów wykazują zróżnicowanie pomiędzy wartościami pomiarowymi w zależności od przyjętego odcinka pomiarowego. I tak należy zauważyć, że w przypadku odcinka pomiarowego A największa różnica pomiaru wyniosła 0,024mm, dla B – 0,04mm, dla C – 0,013mm, dla E – 0,0165mm, dla F – 0,015mm, dla G – 0,04mm, dla H – 0,022mm, dla K – 0,014mm, dla D1 – 0,025mm i dla D2 – 0,011mm.

Tab. 1. Wartości różnicy odchyłek od wymiarów nominalnych zmierzonych sondą MP10 Renishaw i na maszynie współrzędnościowej Vista

Symbol	Wymiar nominalny [mm]	Różnica [mm]				
		detal 1	detal 2	detal 3	detal 4	detal 5
A	75	0,003	0,006	0,008	0,024	0,019
B	170	0,028	0,016	0,035	0,026	0,04
C	30	0,0075	0	0,0035	0,007	0,013
E	100	0,0045	0,0145	0,0085	0,0165	0,0025
F	50	0,014	0,014	0,01	0,015	0,005
G	100	0,019	0,02	0,04	0,027	0,003
H	25	0,007	0,007	0,012	0,022	0,005
K	25	0,0005	0,0005	0,0015	0,014	0,007
D1	25	0,013	0,023	0,02	0,025	0,008
D2	25	0,009	0,011	0,006	0,01	0,007

Różnice w zmierzonych wymiarach dla różnych odcinków pomiarowych dla dwóch metod pomiarowych wahały się w granicach $0 \div 0,04$.

Na różnicę wyników pomiarów prowadzonych z wykorzystaniem sondy MP10 a pomiarami współrzędnościową maszyną Vista może mieć wpływ wiele istotnych czynników. Do najważniejszych z nich można zaliczyć:

1. Dokładność ustalenia i zamocowania przedmiotu obrabianego na obrabiarce. Ma to związek z dokładnością dopasowania się układu współrzędnych obrabiarce do punktu zerowego przedmiotu obrabianego. Punkt zerowy ustala się na podstawie pomiaru sondą przedmiotową. Dlatego też najkorzystniejsza jest sytuacja, gdy obróbka detalu i jego pomiar dokonywane są w jednym zamocowaniu. Zmiana zamocowania może w niekorzystny sposób wpłynąć na jakość prowadzonych pomiarów.
2. Niejednakowe warunki prowadzenia pomiarów. Zachowanie identycznych warunków pomiarowych jest bardzo trudne ze względu na sam proces skrawania. Wysoka temperatura w strefie skrawania, zastosowanie czynników chłodzących, odpowiednie nagrzanie podzespołów obrabiarce, aż wreszcie sama dokładność kinematyczna obrabiarce mają wpływ na jakość prowadzonych pomiarów i w szczególny sposób wpływają na zaobserwowaną różnicę wartości pomiarowych.
3. Odpowiednia kalibracja sond pomiarowych. Należy tu szczególną uwagę poświęcić dokładnej kalibracji sondy przedmiotowej. Ciągła kontrola przebiegu procesu produkcji może być wyznacznikiem momentu rozkalibrowania sondy pomiarowej, co ma bezpośredni

wpływ na późniejszą dokładność wyznaczania odpowiednich offsetów obrabiarce, czyli bezpośrednio na dokładność wytwarzania.

4. Strategia prowadzonych pomiarów. Współrzędnościowa maszyna pomiarowa umożliwia dobór odpowiedniej strategii pomiarowej i dokładną analizę otrzymanych wyników. W przypadku sondy MP10 strategia pomiaru wynika z rodzaju zastosowanej metody pomiarowej. Producenci sond pomiarowych starają się rozszerzyć zakres możliwości pomiarowych sond poprzez ofertę odpowiedniego rodzaju oprogramowania, które wspomaga sam proces prowadzenia pomiarów oraz coraz bardziej integruje go z procesem produkcji na obrabiarce CNC.

Wykorzystując sondę przedmiotową MP10 do kontroli wymiarów przedmiotu obrabianego można wyciągnąć również wnioski na temat poprawności założonej technologii wykonania detalu oraz przebiegu samego procesu wytwarzania.

Proces analizy poprawności zaprojektowanej technologii należy zacząć od sposobu jej przygotowania. Technologię wykonania przedmiotu opracowano za pomocą programu SPRUTCAM. Technolog ma tutaj możliwość doboru zastosowanych narzędzi obróbkowych oraz doboru samej strategii obróbki, czyli doboru rodzaju zabiegów obróbkowych oraz przebiegu ścieżek narzędziowych. Program na podstawie wprowadzonych danych obróbkowych generuje ścieżki narzędziowe zakładając, że wykonywany wymiar będzie wymiarem nominalnym.

Na podstawie przeprowadzonych pomiarów wykonanego detalu można stwierdzić, że prawie wszystkie wymiary wykazują tendencję schodzenia na minus, czyli

w głąb materiału. W związku z tym badany detal ma wymiary nominalne z odchyłkami ujemnymi. Potwierdzają to obydwie metody pomiarowe, istnieje więc możliwość błędnego pomiaru średnicy narzędzia obróbkowego. Tą niedogodność można skorygować wprowadzając do wartości korekcyjnych narzędzia odpowiednią wartość średnicy, należy też sprawdzić poprawność kalibracji sondy narzędziowej. Przeprowadzone pomiary wskazują również na postępujące zużycie narzędzia. W większości przypadków wymiary przedmiotów obrabianych mają tendencję wzrostową i zbliżają się powoli do wymiaru nominalnego. Dzięki prowadzonym pomiarom można kontrolować proces samego zużywania się narzędzia i wprowadzać odpowiednią korekcję w pamięci układu sterowania.

Przeprowadzone pomiary wskazują też, że największe odchyłki od wymiaru nominalnego zaobserwowano dla charakterystycznego wymiaru G (rys. 4). Proces technologiczny przewiduje obróbkę konturu przedmiotu a następnie zebranie resztek materiału z charakterystycznego naroża. Taki sposób obróbki wynika z zastosowanych narzędzi. Istnieje tutaj największe prawdopodobieństwo przekroczenia tolerancji wymiarowej. W tym przypadku należałoby zastosować inne narzędzie obróbkowe lub zmienić sam przebieg procesu technologicznego.

Mimo tak wielu niedogodności i niepewności uzyskania właściwego wyniku pomiaru zastosowanie sondy MP10 do kontroli przebiegu procesu produkcji jest zasadne ze względu na potrzebę szybkiego diagnozowania wymiaru przedmiotu obrabianego. Użycie sondy MP10 może być w pewnym zakresie alternatywą dla pomiarów wykonywanych na maszynach współrzędnościowych.

Na tym etapie badań trudno jest wyciągnąć jednoznaczne wnioski na temat jakości wykorzystanej metody pomiarowej (układ pomiarowy wewnątrzobrabiarkowy), dlatego też należy kontynuować badania w kierunku określenia zdolności pomiarowej pomiarowych układów wewnątrzobrabiarkowych z wykorzystaniem oprogramowania wspomagającego tworzenie cykli pomiarowych oraz obróbkę statystyczną wyników.

LITERATURA

1. **Chlebus E.** (2000), Techniki komputerowe CAX w inżynierii produkcji, WNT, Warszawa.
2. Fanuc seria 0i-MB. Instrukcja obsługi.
3. Inspection Plus software. Programming manual.
4. Materiały informacyjne firmy Renishaw.
5. NC1 non-contact tool setting system. Programming Guide (Fanuc compatible).
6. **Plichta J.** (2002), Podstawy programowania obrabiarek sterowanych numerycznie. Koszalin.
7. PN-73/M-55256: Obrabiarki do metali. Kodowanie funkcji przygotowawczych G i funkcji pomocniczych M dla obrabiarek sterowanych numerycznie.
8. PN-93/M-55251: Maszyny sterowane numerycznie. Osie współrzędnych i zwroty ruchów. Nazwy i określenia.
9. Programowanie obrabiarek CNC. Frezowanie. REA, Warszawa 1999.
10. **Ratajczyk E.** (2005), Współrzędnościowa technika pomiarowa. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.

ANALYSIS OF POSSIBILITY OF OBJECTIVE SOUND APPLICATION TO ACTIVE CHECKING ON FV580A VERTICAL MACHINING CENTRE

Abstract: The possibility of application of objective sound on CNC metal working machines to selected linear details measurement in the course of tooling process and also after is ending has been analysed. The advantage of this solution is the possibility of measurements execution without attaching change of treatment object. However, the fault of mentioned above solution is the influence of connected factors with the course of cutting on the precision of the measurements executed.

The comparative studies of measurement results obtained on the FV580A vertical machining centre by means of MP10 objective sound with measurements of the same dimensions on the VISTA coordinates measuring machine have been executed. The results of this measurements show some divergences and they depend from the measured dimension. Their precise analysis permits to state that the application of MP10 sound to the checking of process course of tooling is legitimate with respect on the needs of rapid diagnostic of the treatment object dimension and can be also of the alternative for the measurements executed on the coordinates machines.

KONCENTRACJA NAPRĘŻEŃ WOKÓŁ OWALNEGO OTWORU

Andrzej KAZBERUK*

a.kazberuk@pb.edu.pl

*Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

Streszczenie: W pracy przedstawiono rozwiązanie zagadnienia rozciąganej płaszczyzny osłabionej otworem o kształcie owalnym z wierzchołkami o dowolnej krzywiźnie. Wykorzystano metodę jednolitego podejścia do rozwiązywania zagadnień koncentracji naprężeń wokół karbów ostrych i zaokrąglonych. Dla parametrów, charakteryzujących geometrię otworu, zmieniających się w bardzo szerokim zakresie obliczono współczynniki koncentracji naprężeń w wierzchołku owalu. Wykorzystując zależność wiążącą współczynniki koncentracji naprężeń ze współczynnikami intensywności naprężeń, wyznaczono wartości współczynników intensywności dla odpowiedniego otworu o wierzchołkach ostrych. Przeprowadzając porównanie wyników obliczeń ze znanym rozwiązaniem analitycznym dla otworu soczewkowego, wykazano nie tylko dużą precyzję zastosowanej metody lecz również jej uniwersalność i efektywność. Otrzymane rezultaty posłużyły do konstruowania przydatnych w praktyce inżynierskiej wzorów aproksymacyjnych służących do oszacowania wartości współczynników intensywności naprężeń w wierzchołku soczewki oraz koncentracji naprężeń w wierzchołku otworu owalnego.

1. WPROWADZENIE

Geometryczne nieciągłości występujące w elementach konstrukcyjnych wywołują, jak wiadomo, lokalne zaburzenia pola naprężeń. W wierzchołkach ostrych koncentratorów, naprężenia zgodnie z liniową teorią sprężystości, osiągają wartości nieskończone. W przypadku karbów zaokrąglonych dochodzi również do znacznej koncentracji naprężeń w otoczeniu karbu. Pomimo, że naprężenia te są skończone, trudności rachunkowe przy rozwiązywaniu tego typu zagadnień są często większe niż w przypadku występowania osłabienia pola naprężeń. Wiedza o rozkładzie pola naprężeń w ciele sprężystym w pobliżu koncentratorów jest niezbędna w procesie prawidłowego projektowania, ponieważ nawet w przypadku, gdy pole naprężeń nie zawiera osłabienia to wartości maksymalnych naprężeń mogą znacznie przekroczyć nośność materiału elementu konstrukcyjnego.

W pracy zaprezentowano zastosowanie metody przedstawionej w pracach Savruka i Kazberuka z 2006 i 2007, do rozwiązania problemu koncentracji naprężeń wokół owalnego otworu osłabiającego rozciąganą płaszczyznę sprężystą. Do obliczenia naprężeń wokół otworu wykorzystano metodę osobliwych równań całkowych (Savruk, 1981). Stosując zależność pomiędzy współczynnikami intensywności oraz koncentracji naprężeń dla karbów o dużej krzywiźnie wierzchołków wyznaczono wartości współczynników intensywności naprężeń w odpowiednim otworze o wierzchołkach ostrych. Fakt istnienia rozwiązań analitycznych zagadnienia rozciąganego otworu w kształcie soczewki umożliwił przeprowadzenie porównań i oceny efektywności oraz dokładności metody. Korzystając z otrzymanych wyników zaproponowano wzory przydatne w praktyce inżynierskiej.

2. ZALEŻNOŚĆ POMIĘDZY WSPÓŁCZYNNIKAMI INTENSYWNOŚCI I KONCENTRACJI NAPRĘŻEŃ DLA KARBÓW OSTRYCH I ZAOKRĄGLONYCH

Wielkość naprężeń w wierzchołku karbu o kącie rozwarcia 2β zaokrąglonego krzywą o niewielkim promieniu ρ określa wzór

$$\sigma_{\max} = \frac{K_I^V}{\sqrt{2\pi}} R_I \rho^{-\lambda} \quad (1)$$

gdzie K_I^V to uogólniony współczynnik intensywności naprężeń dla odpowiedniego karbu ostrego, a R_I nazywany jest współczynnikiem wygładzenia naprężeń (Benthem 1987). Dolne indeksy I odnoszą się do typu pola naprężeń wywołanego przez obciążenia rozciągające w otoczeniu wierzchołka karbu. Wykładnik osłabienia λ przyjmuje się jako najmniejszy dodatni pierwiastek równania charakterystycznego

$$(1 - \lambda) \sin 2\alpha + \sin(2\alpha(1 - \lambda)) = 0, \quad \alpha = \pi - \beta \quad (2)$$

Pierwszą zależnością typu (1), szeroko stosowaną w praktyce inżynierskiej do oszacowania wielkości maksymalnych naprężeń normalnych $\sigma_{\max}$ w wierzchołku wąskiego U-podobnego karbu poprzez współczynnik intensywności naprężeń K_I , w wierzchołku odpowiedniej szczeliny był wzór

$$\sigma_{\max} = 2K_I / \sqrt{\pi\rho}, \quad (3)$$

występujący w wielu publikacjach m.in. Creagera i Parisa (1967) i Neubergera (1977). Łatwo go uzyskać korzystając ze znanego rozwiązania zadania o koncentracji naprężeń wokół otworu eliptycznego (np. Savruk 1989). Wynika

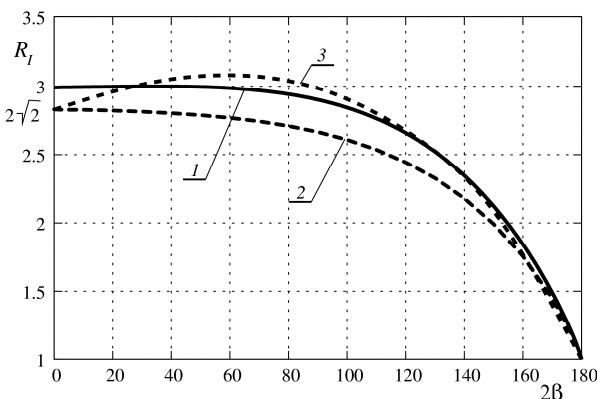
z niego, że dla karbu o kącie rozwarcia $2\beta=0$ współczynnik R_I ma wartość $2\sqrt{2}$. Do niedawna uważano, że wzór (3) jest dokładny dla karbów U-podobnych. Dopiero ostatnio przeprowadzone badania (Savruk, Kazberuk 2006) dowiodły, że relacja pomiędzy współczynnikami intensywności a koncentracji naprężeń powinna uwzględniać nie tylko wielkość promienia krzywizny w wierzchołku karbu, jak do tej pory sądzono, lecz również kształt karbu w otoczeniu wierzchołka. Uwzględnienie tego faktu prowadzi do wartości $R_I=2.989$ dla zagadnienia tzw. szczeliny fizycznej ($2\beta=0$).

W pracy (Savruk, Kazberuk 2006) zaproponowano następującą formułę aproksymacyjną na wyznaczanie wartości współczynnika wygładzenia naprężeń R_I . Wzór dotyczy karbów zaokrąglonych łukiem kołowym i umożliwia oszacowanie R_I z błędem nie przekraczającym 0.1% dla $\beta < 165^\circ$:

$$R_I = \frac{1 + 28.75\gamma + 98.04\gamma^2 - 102.1\gamma^3 + 47.4\gamma^4 - 8.436\gamma^5}{1 + 20.71\gamma}, \quad (4)$$

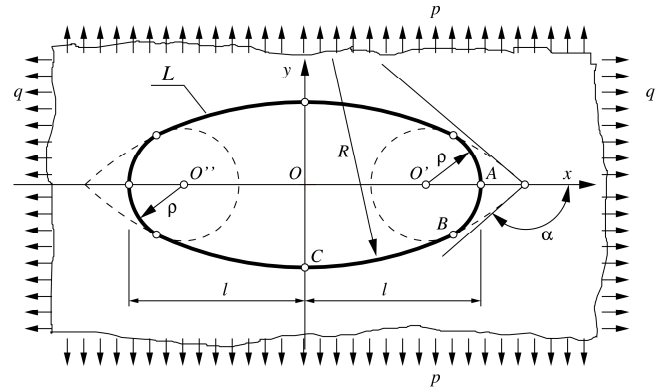
gdzie $\gamma = \pi/2 - \beta$.

Wzory postaci (1) publikowało wielu autorów, m. in. Benthem 1987, Lazzarin, Tovo 1996, Strandberg 1999, Filippi i in. 2002, obliczając wartości współczynnika wygładzenia naprężeń bądź jego analogów. Niektóre z nich przedstawiono na rys.1 porównując z przebiegiem funkcji (4). W celu rozwiązania zagadnienia własnego (Williams 1952) na drodze analitycznej bądź numerycznej, odwzorowywano kształt nieskończonego klina wykorzystując różne krzywe gładkie mające w otoczeniu wierzchołka zmienny promień krzywizny (karby paraboliczne, hiperboliczne). Próby wykorzystania ich zależności do obliczeń współczynników intensywności naprężeń prowadziły do wartości o niewystarczającej dokładności. Z kolei użycie bardzo specyficznych funkcji do opisu karbu lub otworu o dowolnej geometrii stwarza znaczne trudności matematyczne. Stąd wyniknęła konieczność opracowania własnej zależności dla najbardziej oczywistego sposobu zaokrąglenia wierzchołka karbu.



Rys. 1. Współczynnik wygładzenia naprężeń R_I w funkcji kąta β dla różnych krzywych zaokrąglających wierzchołek karbu; 1- Savruk, Kazberuk 2006, 2- Benthem 1987, 3- Filippi, Lazzarin, Tovo 2002

3. KONCENTRACJA NAPRĘŻEŃ WOKÓŁ OWALNEGO OTWORU



Rys. 2. Owalny otwór w rozciąganej płaszczyźnie

Rozważa się nieograniczoną płaszczyznę sprężystą osłabioną owalnym otworem (rys. 2). Kontur brzegu L składa się z łuków kołowych o promieniach R przecinających się pod kątem α . Wierzchołki w ten sposób utworzonej soczewki zaokrąglono łukami o promieniu ρ . Stosunki wielkości tych promieni do połowy rzutu długości owalu na oś x określają parametry $\varepsilon = \rho/l$ oraz $\vartheta = R/l$. Zakłada się, że brzeg otworu (gładki kontur L) jest wolny od obciążeń zewnętrznych. Płaszczyzna poddana jest rozciąganiu naprężeniami $\sigma_x^\infty = q$, $\sigma_y^\infty = p$ w nieskończoności.

Potencjały zespolone naprężeń (Muskhelishvili, 2003) przyjęto w następującej postaci:

$$\Phi_*(z) = \Phi_0(z) + \Phi(z), \quad \Psi_*(z) = \Psi_0(z) + \Psi(z), \quad (5)$$

gdzie $\Phi_0(z)$ i $\Psi_0(z)$ – funkcje opisujące jednorodny stan naprężeń w płaszczyźnie sprężystej

$$\Phi_0(z) = (p+q)/4, \quad \Psi_0(z) = (p-q)/2, \quad (6)$$

a $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ – określają zaburzenie naprężeń. Poszukuje się przedstawień całkowych potencjałów $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ w następującej postaci (Savruk 1981):

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{g'(t)}{t-z} dt, \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L [t g'(t) dt - t \overline{g'(t)} dt] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{\overline{g'(t)}}{t-z} dt - \frac{t \overline{g'(t)}}{(t-z)^2} dt \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Wtedy warunek graniczny na brzegu L przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \sigma_n + i \tau_{ns} &= p(t) \\ &= - \left\{ \Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + \frac{dt}{dt} [t \Phi'_0(t) + \overline{\Psi_0(t)}] \right\}, \quad t \in L, \end{aligned} \quad (8)$$

a w nieskończoności naprężenia dążą zera.

Tak sformułowane zagadnienie brzegowe sprowadza się do rozwiązywania osobliwego równania całkowego (Savruk, 1981)

$$\frac{1}{\pi} \int_L [\tilde{K}(t, t') g'(t) dt + \tilde{L}(t, t') \overline{g'(t)} dt] = p(t'), \quad t' \in L, \quad (9)$$

którego jądra mają postać

$$\begin{aligned} \tilde{K}(t, t') &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-t'} + \frac{\overline{dt'}}{dt} \left(\frac{1}{\overline{t-t'}} - \frac{\bar{t}}{(\bar{t}')^2} \right) \right) + \frac{1}{l} \cdot \frac{ds'}{dt'}, \\ \tilde{L}(t, t') &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\overline{t-t'}} - \frac{\overline{dt'}}{dt} \left(\frac{t-t'}{(\overline{t-t'})^2} - \frac{\bar{t}}{(\bar{t}')^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie s' jest odciętą łukową punktu t' na brzegu L . W jądrach (8) obecne są dodatkowe składniki tworzące w równaniu (9) zerowe funkcjonały zapewniające w przypadku zamkniętego konturu L jednoznaczność rozwiązania równania całkowego dla dowolnej prawej strony.

Uwzględniając symetrię konturu L względem osi x i y , równanie parametryczne brzegu zapisano w postaci

$$t = l\omega(\xi) = l \begin{cases} \omega_0(\xi), & 0 \leq \xi < \pi/2, \\ -\omega_0(\pi - \xi), & \pi/2 \leq \xi < \pi, \\ -\omega_0(\xi - \pi), & \pi \leq \xi < 3\pi/2, \\ \omega_0(2\pi - \xi), & 3\pi/2 \leq \xi < 2\pi, \end{cases} \quad (11)$$

gdzie funkcja $\omega_0(\xi)$

$$\omega_0(\xi) = \begin{cases} (1-\varepsilon) + \varepsilon \cos \frac{\xi_C}{\varepsilon} - i \sin \frac{\xi_C}{\varepsilon}, & 0 \leq \xi \leq \xi_B, \\ \vartheta \cos \left(c \frac{\xi - \xi_B}{\vartheta} + \theta_B \right) + \\ + i \left[\cos \beta - \sin \left(c \frac{\xi - \xi_B}{\vartheta} + \theta_B \right) \right], & \xi_B \leq \xi \leq \pi/2, \end{cases}$$

opisuje kontur L leżący w czwartej ćwiartce układu współrzędnych (kierunek obejścia konturu brzegu jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara). Znaczenie użytych oznaczeń objaśniono poniżej

$$\xi_B = \frac{\varepsilon \theta_B}{c}, \quad c = 2\varepsilon \frac{\theta_B}{\pi} + \vartheta \left(1 - 2 \frac{\theta_B}{\pi} \right), \quad \theta_B = \arctan \frac{\vartheta \cos \beta}{1 - \varepsilon}$$

Długość krzywej AC jest równa $l_{AC} = \pi c / 2$.

Dokonując koniecznej zamiany zmiennych

$$t = l\omega(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi; \quad t' = l\omega(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi$$

równanie całkowe (8) zapisuje się w postaci kanonicznej

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [M(\xi, \eta) u(\xi) + N(\xi, \eta) \overline{u(\xi)}] d\xi = p(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi,$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$M(\xi, \eta) = l\tilde{K}(\omega(\xi), \omega(\eta)), \quad N(\xi, \eta) = l\tilde{L}(\omega(\xi), \omega(\eta));$$

$$u(\xi) = g'(\omega(\xi)) \omega'(\xi), \quad p(\eta) = p(\omega(\eta)).$$

Poszukiwana 2π -okresowa ciągła funkcja $u(\xi)$ ma quasi-osobliwości w otoczeniu wierzchołków rombu, co komplikuje uzyskanie dostatecznie dokładnego rozwiązania dla małych wartości promienia ρ . Ostatnio w celu poprawienia dokładności rozwiązań tego typu równań stosuje się różnorodne nieliniowe odwzorowania zmiennych prowadzące do zagęszczenia węzłów kwadratur całkowania i węzłów kolokacji w otoczeniu wierzchołków otworu. W rozważanym przypadku zastosowano następującą zamianę zmiennych (Johnston 1999)

$$\xi = G(\tau) = \tau - (1/2) \sin 2\tau, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi;$$

$$\eta = G(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Funkcja $G(\tau)$ jednoznacznie odwzorowuje odcinek $\tau \in [0, 2\pi]$ w odcinek $\xi \in [0, 2\pi]$.

W rezultacie uzyskuje się równanie całkowe postaci

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [M(\xi, \eta) u^*(\tau) + N(\xi, \eta) \overline{u^*(\tau)}] G'(\tau) d\tau = p^*(\theta),$$

gdzie $0 \leq \theta \leq 2\pi$ oraz $u^*(\tau) = u(G(\tau))$, $p^*(\tau) = p(G(\theta))$.

Dyskretnym analogiem równania całkowego jest algebraiczny układ równań liniowych (Savruk, 1981)

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{4n} [M(\xi_k, \eta_m) u^*(\tau_k) + N(\xi_k, \eta_m) \overline{u^*(\tau_k)}] G'(\tau_k) = p^*(\theta_m), \quad (12)$$

gdzie $m = \overline{1, 4n}$ oraz

$$\xi_k = G(\tau_k), \quad \tau_k = \frac{\pi(2k-1)}{4n}, \quad k = \overline{1, 4n};$$

$$\eta_m = G(\theta_m), \quad \theta_m = \frac{2\pi(m-1)}{4n}, \quad m = \overline{1, 4n}.$$

Uwzględniając symetrię zadania względem osi Ox i Oy , rząd układu równań (12) zostaje zmniejszony czterokrotnie. Nakładając warunki wynikające z symetrii na poszukiwaną postać funkcji rozwiązania

$$u^*(2\pi - \tau) = \overline{u^*(\tau)}, \quad u^*(\pi - \tau) = -\overline{u^*(\tau)}, \quad (13)$$

a także warunki zerowania się naprężeń stycznych w punktach leżących na osiach symetrii, otrzymuje się układ n zespolonych równań algebraicznych

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n [M^*(\xi_k, \eta_m) u^*(\tau_k)] G'(\tau_k) = p^*(\theta_m), & m = 1, \\ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n [M^*(\xi_k, \eta_m) u^*(\tau_k) + N^*(\xi_k, \eta_m) \overline{u^*(\tau_k)}] G'(\tau_k) = p^*(\theta_m), & m = \overline{2, \dots, n}, \\ \frac{1}{n} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n [M^*(\xi_k, \eta_m) u^*(\tau_k)] G'(\tau_k) = p^*(\theta_m), & m = n+1 \end{cases} \quad (14)$$

dla n niewiadomych wartości funkcji $u^*(\tau_k)$ ($k = \overline{1, \dots, n}$).
Tutaj:

$$\begin{aligned} M^*(\xi_k, \eta_m) &= M(\xi_k, \eta_m) - N(\pi - \xi_k, \eta_m) \\ &\quad - M(\pi + \xi_k, \eta_m) + N(2\pi - \xi_k, \eta_m), \\ N^*(\xi_k, \eta_m) &= N(\xi_k, \eta_m) - M(\pi - \xi_k, \eta_m) \\ &\quad - N(\pi + \xi_k, \eta_m) + M(2\pi - \xi_k, \eta_m). \end{aligned}$$

Należy zauważyć, że wartości funkcji $p^*(\theta)$ w węzłach $\theta_1=0$ i $\theta_{n+1}=\pi/2$ są rzeczywiste;

Po uzyskaniu rozwiązania układu algebraicznych równań liniowych (14) można wyznaczyć zespolone potencjały naprężeń (7), określające stan naprężeń i odkształceń w całej płaszczyźnie sprężystej. Obliczenie wartości naprężenia normalnego σ_s w punktach leżących na brzegu otworu przeprowadza się korzystając bezpośrednio ze znalezionej funkcji $u^*(\tau)$ (Savruk i inni 1989)

$$\begin{aligned} \sigma_s(t) &= 4\operatorname{Re}[\Phi_0(t) + \Phi^+(t)] = 4\operatorname{Re}\Phi_0(t) - 4\operatorname{Im}g'(t) = \\ &= 4\operatorname{Re}\Phi_0(t) - 4\operatorname{Im}[u(\xi)/\omega'(\xi)] = \\ &= 4\operatorname{Re}\Phi_0(t) - 4\operatorname{Im}[u^*(\tau)/\omega'(\xi)] \quad t \in L. \end{aligned}$$

Współczynnik koncentracji naprężeń w wierzchołku A (rys.1) otworu oblicza się ze wzoru

$$k_A = -4\operatorname{Im}[u^*(0)/\omega'(0)],$$

przy czym wartość $u^*(0)$ wyznacza się korzystając z wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a (patrz np. Savruk i inni 1989)

$$u^*(\tau) = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{4n} u^*(\tau_k) \sin[2n(\tau - \tau_k)] \cot\left(\frac{\tau - \tau_k}{2}\right).$$

Uwzględniając warunki symetrii (13), otrzymano

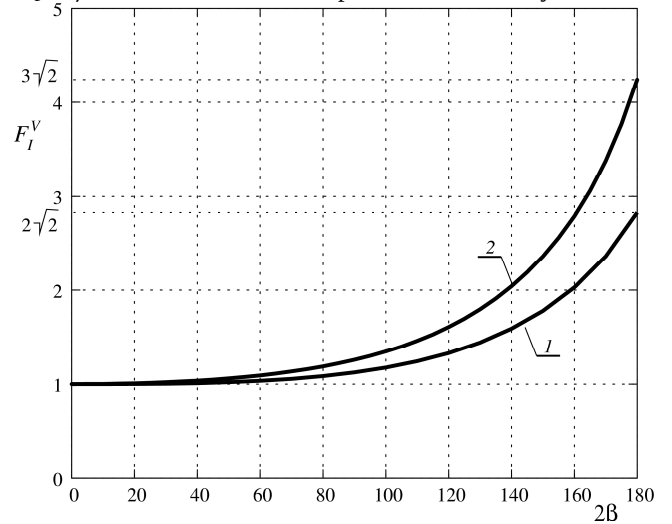
$$u^*(0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sin \tau_k} \operatorname{Re} u^*(\tau_k).$$

Obliczenia przeprowadzono dla dwóch przypadków obciążenia – jednokierunkowego rozciągania ($q=0$) w kierunku osi Oy (prostopadle do dłuższej przekątnej owalu) oraz wszechstronnego ($q=p$) rozciągania. Kąt rozwarcia wierzchołka soczewki 2β określany w wierzchołku A zmieniano w przedziale od 0° do 180° uzyskując stabilne rozwiązania dla $\varepsilon=p/l \geq 0,0001$.

Uogólnione współczynniki intensywności naprężeń K_I^V w ostrym narożu otworu obliczono ze wzoru

$$K_I^V = \left(\sqrt{2\pi}/R_I\right) \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^\lambda (\sigma_s)_{\max}. \quad (15)$$

Przebieg wartości bezwymiarowego współczynnika intensywności naprężeń $F_I^V = K_I^V / (pl^\lambda \sqrt{\pi})$ w funkcji kąta 2β w wierzchołku owalu przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Uogólniony bezwymiarowy współczynnik intensywności naprężeń F_I^V w funkcji kąta wierzchołkowego 2β owalu: 1 - wszechstronne rozciąganie, 2 - jednokierunkowe rozciąganie.

Porównano obliczone współczynniki intensywności naprężeń z rozwiązaniami analitycznymi. Korzystając z zależności przytaczanych w monografiach Savina z 1968 lub Morozova z 1984 roku, w przypadku jednokierunkowego rozciągania, naprężenia w ostrym wierzchołku soczewki oblicza się z następującego wzoru:

$$\sigma_{\theta\theta}(r,0) \big|_{r \rightarrow 0} = pc_1(\alpha) \left(\frac{r}{2l}\right)^{-\lambda} + o\left(\left(\frac{r}{2l}\right)^{-\lambda}\right). \quad (16)$$

Podstawiając wyrażenie (16) do definicji współczynnika intensywności naprężeń wg Grossa i Mendelzona (1972) otrzymano

$$F_I^V = \frac{K_I^V}{pl^\lambda \sqrt{\pi}} = 2^{\lambda+1/2} c_1(\alpha), \quad (17)$$

gdzie

$$\begin{aligned} c_1(\alpha) &= \frac{\pi}{2\alpha \cos(2(1-\lambda)\alpha) + \sin 2\alpha} \times \\ &\times \left\{ \frac{2K}{\lambda} [(1-\lambda)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2((1-\lambda)\alpha)] + \right. \\ &\quad \left. - (1-\lambda)^2 (2-\lambda) \sin^2 \alpha \right\} \end{aligned}$$

a współczynnik K oblicza się z następującej zależności całkowej:

$$K = \frac{1 - 2\sin^2 \alpha \int_0^\infty \frac{\alpha d\tau}{\sinh 2\tau\alpha + \tau \sin 2\alpha}}{4 \int_0^\infty \frac{\sinh^2 \tau\alpha - \tau^2 \sin^2 \alpha}{\tau(\tau^2 + 1)(\sinh 2\tau\alpha + \tau \sin 2\alpha)} d\tau}.$$

Otrzymane różnice w wynikach współczynników intensywności naprężeń obliczonych ze wzorów (15) oraz (17) we wszystkich analizowanych przypadkach rozwarcia wierzchołka soczewki nie przekroczyły 0.1%.

Ponieważ procedura obliczania współczynników intensywności naprężeń ze wzoru (17) jest dosyć kłopotliwa, opracowano wzory przybliżone aproksymując poszukiwane wielkości wielomianami 5-tego stopnia w funkcji kąta rozwarcia wierzchołka. Oznaczając

$$c_1(\alpha) = c_2(\gamma)$$

gdzie $\gamma = \lambda\alpha$ otrzymano przy jednokierunkowym rozciąganiu

$$c_2(\gamma) = 3 - 5.53\gamma + 6.06\gamma^2 - 4.31\gamma^3 + 1.78\gamma^4 - 0.303\gamma^5 \quad (18)$$

oraz

$$c_2(\gamma) = 2 - 3.14\gamma + 3.18\gamma^2 - 2.21\gamma^3 + 0.954\gamma^4 - 0.173\gamma^5 \quad (19)$$

w przypadku wszechstronnego rozciąganiu płaszczyzny. Błąd oszacowania współczynnika intensywności naprężeń w przedziale $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$ ze wzorów (18) i (19) nie przekracza 0.5%.

Wartość wykładnika osobliwości (2) można przybliżyć następującą zależnością:

$$\lambda \approx 0.5 - 0.0976143\beta^{3.57694}$$

z błędem nie przekraczającym 0.5%.

Przykładowe współczynniki intensywności naprężeń przy jednokierunkowym i wszechstronnym rozciąganiu oraz wartości parametrów R_I i λR_I podano w tablicy 1.

Na podstawie uzyskanych wyników numerycznych uwzględniając przedstawione wcześniej związki współczynników koncentracji i intensywności naprężeń w wierzchołkach wycięć ostrych i zaokrąglonych skonstruowano zależność aproksymacyjną postaci

$$k_A = a + 2[1 - b \tanh(c \ln \varepsilon)]\varepsilon^{-\lambda}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1 \quad (20)$$

Otrzymana formuła pozwala na oszacowanie wartości współczynnika koncentracji naprężeń w wierzchołku owalu z błędem nie przekraczającym 0,5% w całym zakresie zmienności parametru ε . Stałą b wyznacza się z równości

$$b = \frac{K_I^V R_I l^{-\lambda}}{2p\sqrt{2\pi}} - 1 = F_I^V R_I / (2\sqrt{2}) - 1 \quad (21)$$

wynikającej z zależności (1) i (20). Stała c obliczana jest metodą najmniejszych kwadratów przy użyciu nieliniowego algorytmu Marquardt-Levenberga. Wartości stałych b i c dla jednokierunkowego i wszechstronnego rozciągania dla kilku reprezentatywnych wartości kąta 2β przedstawiono w tablicy 2.

Tab. 1. Wartości wykładnika osobliwości λ , współczynnika wygładzenia naprężeń R_I oraz bezwymiarowego, uogólnionego współczynnika intensywności naprężeń F_I^V (jedno- i wielokierunkowe rozciąganie otworu owalnego), dla wybranych kątów rozwarcia karbu 2β

2β	λ	R_I	F_I^V	
			$q = 0$	$q = p$
0°	0.5000	2.989	1.000	1.000
15°	0.4998	2.995	1.005	1.000
30°	0.4986	2.999	1.020	1.004
45°	0.4950	2.997	1.048	1.015
60°	0.4878	2.986	1.096	1.035
75°	0.4753	2.957	1.161	1.069
90°	0.4555	2.901	1.260	1.125

Tab. 2. Wartości współczynników we wzorze aproksymacyjnym (20) dla wybranych kątów rozwarcia karbu 2β

2β	$q = 0, a = 1$		$q = p, a = 0$	
	b	c	b	c
0°	0.0568	0.3718	0.0568	0.6502
15°	0.0644	0.2859	0.0591	0.5991
30°	0.0816	0.2245	0.0646	0.5658
45°	0.1108	0.1963	0.0757	0.5377
60°	0.1571	0.1895	0.0927	0.5331
75°	0.2137	0.2070	0.1176	0.5467
90°	0.2923	0.2281	0.1535	0.5648

4. PODSUMOWANIE

W prezentowanej pracy, metoda jednolitego podejścia do problemów koncentracji naprężeń wokół karbów ostrych i zaokrąglonych (Savruk, Kazberuk 2006, 2007) została zastosowana do rozwiązania zagadnienia rozciąganej płaszczyzny osłabionej otworem o owalnym kształcie. Dla parametrów, charakteryzujących geometrię otworu, zmieniających się w bardzo szerokim zakresie, obliczono współczynniki koncentracji naprężeń w wierzchołku owalu. Wykorzystując zależność wiążącą współczynniki koncentracji naprężeń ze współczynnikami intensywności, wyznaczono wartości współczynników intensywności dla odpowiedniego otworu o wierzchołkach ostrych. Przeprowadzając porównanie wyników obliczeń ze znanym rozwiązaniem analitycznym dla otworu soczewkowego, wykazano nie tylko dużą precyzję zastosowanej metody lecz również jej uniwersalność i efektywność. Wykazano również, że wartości współczynników wygładzenia naprężeń (4) określone dla karbów o krawędziach prostych, zachowują ważność dla innych geometrii brzegu (łuk kołowy). Otrzymane rezultaty umożliwiły zbudowanie zwartych wzorów aproksymacyjnych służących do oszacowania wartości współczynników intensywności naprężeń w wierzchołku soczewki, które mogą być z powodzeniem stosowane w praktyce inżynierskiej. Przedstawiono również zależności aproksymujące wielkość koncentracji naprężeń w wierzchołku otworu owalnego dla kilku reprezentatywnych wartości kąta rozwarcia przy dowolnym promieniu zaokrąglenia wierzchołka otworu.

LITERATURA

1. **Benthem J.P.** (1987), Stresses in the region of rounded corners, *Int. J. Solids Struct.*, **23**, 239-252.
2. **Creager M., Paris P.C.** (1967), Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking, // *Int. J. Fract. Mech.*, **3**, 247-252.
3. **Filippi S., Lazzarin P., Tovo R.** (2002), Developments of some explicit formulas useful to describe elastic stress fields ahead of notches in plates, *Int. J. Solids Struct.*, **39**, 4543-4565.
4. **Gross B., Mendelson A.** (1972), Plane elastostatic analysis of V-notched plates, *Int. J. Fract. Mech.*, **8**, 267-276.
5. **Johnston P.R.** (1999), Application of sigmoidal transformations to weakly singular and near-singular boundary element integrals, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **45**, 1333-1348.
6. **Lazzarin P., Tovo R.** (1996), A unified approach to the evaluation of linear elastic stress field in the neighbourhood of crack and notches, *Int. J. Fract.*, **78**, 3-19.
7. **Morozov N.F.** (1984), *Matematičeskie voprosy teorii trešin*, Nauka, 256s.
8. **Muskhelishvili N.I.** (2003) *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Springer, 768 p.
9. **Neuber H.** (1977), Die halbelliptische Kerbe mit Riss als Beispiel zur Korrelation von Mikro- und Makrospannungskonzentrationen, *Ing.-Arch.*, **46**, 389-399.
10. **Pilkey W.D.** (1997), *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2 ed., 544 p.
11. **Savin G.N.** (1968) *Raspredelenie naprâženij okolo otvierstij*, *Nauk. Dumka*, 888 s.
12. **Savruk M.P.** (1981) *Dvumernye zadači yprugosti dlâ tel s Teresinami*, *Nauk. Dumka*, 324 s.
13. **Savruk M.P.** (1988) *Koefficienty intensivnosti naprâženij v telah s trešinami*, *Meh. razrušeniâ i pročnost' materialov, Sprav. posobie* pod red. V.V.Panasûka, *Nauk. dumka*, 620 s.
14. **Savruk M.P., Kazberuk A.** (2006), *Zaležnist' miž koeficientamy intensyvnosti ta koncentracij napružen' dlâ gostryh i zakruglenyh kutovyh vyriziv*, *Fiz.-him. mehanika materialiv*, **42**, 56-65.
15. **Savruk M.P., Kazberuk A.** (2007), *Edinyj podhod k rešeniu zadač o koncentracii naprâženij okolo ostryh i zakruglennyh uglovyh vyrezov*, *Prikladnaâ mehanika*, **43**, 70-87.
16. **Savruk M.P., Osiv P.N., Prokopčuk I.V.** (1989), *Čislennyj analiz v ploskih zadačah teorii trešin*, *Nauk. dumka*, 248 s.
17. **Strandberg M.** (1999), A numerical study of the elastic stress field arising from sharp and blunt V-notches in a SENT-specimen, *Int. J. Fract.*, **100**, 329-342.
18. **Uflând Â.S.** (1967), *Integral'nyê prëobrazobaniâ v zadačah teorii uprugosti*, *Nauka*, 2-ed, 402s.
19. **Williams M.L.** (1952), Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension, *J. Appl. Mech.*, **19**, 526-530.

STRESS CONCENTRATION AROUND OVAL HOLE

Abstract: In the paper the application of the unified approach method to solve problems of stress concentration around sharp and rounded oval hole in elastic plane was presented. The stress field distribution was obtained for various vertex angles and curvature radii using singular integral equation method. The method based on passage to the limit (when curvature radius tends to zero), was used to obtain stress intensity factor at the vertex of sharp lens hole in a plane under tension. Accuracy of the new method was analyzed by comparing numerical results of stress intensity factors to well known analytical solution. The approximation formulas for estimation of stress intensity and concentration factors were presented.

Pracę wykonano w ramach realizacji projektu badawczego nr 4T07A03028.

ZAGADNIENIA PROJEKTOWANIA CIENKOŚCIENNYCH USTROJÓW NOŚNYCH Z UWZGLĘDNIENIEM ZAAWANSOWANYCH STANÓW DEFORMACJI ZAKRYTYCZNYCH

Tomasz KOPECKI*

tkopecki@prz.edu.pl

* Katedra Samolotów i Silników Lotniczych, Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa, Politechnika Rzeszowska, ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów

Streszczenie: W opracowaniu przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych oraz analiz numerycznych cienkościennych profili otwartych, poddanych skręcaniu nieswobodnemu. Analizowane struktury stanowiły odwzorowanie wyizolowanych fragmentów konstrukcji lotniczych, odpowiadających strefom o dużych wykrojach. Eksperyment obejmował trzy wersje modelu, o różnej liczbie podłużnic usztywniających. Określono postacie deformacji zakrytycznych analizowanych struktur oraz przedstawiono reprezentatywne ścieżki równowagi. W oparciu o wyniki eksperymentu, dla jednej ze struktur przeprowadzono analizę numeryczną w ujęciu metody elementów skończonych. Dokonano porównania uzyskanych postaci deformacji zakrytycznych oraz ścieżek równowagi otrzymanych na drodze numerycznej i w wyniku badań eksperymentalnych. Sformułowano szereg wniosków i zaleceń dotyczących zasad projektowania struktur o zbliżonym charakterze.

1. WPROWADZENIE

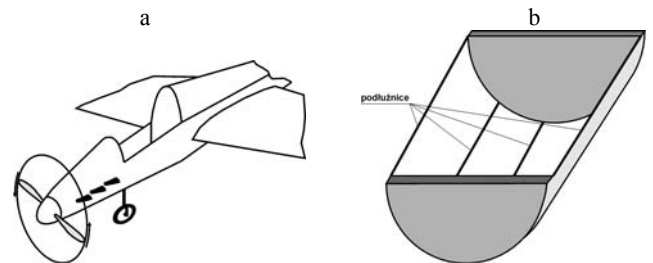
W dążeniu do zwrócenia uwagi na istotność czynnika integrującego nieliniową analizę numeryczną z szeroko rozumianym eksperymentem, w niniejszej pracy przedstawiono metodykę umożliwiającą dokonywanie oceny modelu obliczeniowego oraz jego bieżących korekt, zapewniając poprawną interpretację wyników nieliniowych analiz numerycznych ustroju. Proponowana metodyka opiera się na prowadzeniu, równoległe z nieliniową analizą numeryczną, badań doświadczalnych wybranych elementów struktur nośnych, w szczególności elementów zawierających spodziewane strefy newralgiczne. Zwrócono uwagę na możliwości oraz uwarunkowania dotyczące przeprowadzania adekwatnego eksperymentu, wskazując na rolę badań modelowych, jako szybkiego i ekonomicznie uzasadnionego narzędzia badawczego możliwego do stosowania w trakcie projektowania cienkościennych ustrojów nośnych.

Przedstawione rozważania zilustrowano na przykładzie konstrukcji o stopniu złożoności geometrycznej i zakresach deformacji, charakterystycznych dla współczesnych rozwiązań stosowanych w ustrojach nośnych płatowców. Jako reprezentatywny przykład wybrano strefę struktury nośnej zawierającą obszerny wykroj. W podobnych ustrojach najwyższe poziomy i gradienty naprężeń pojawiają się w warunkach skręcania, które w zakresie obciążeń dopuszczalnych mogą powodować stany deformacji zakrytycznej. W tych warunkach rozkład naprężeń w ustroju staje się podstawą wyznaczania trwałości zmęczeniowej konstrukcji.

2. PRZEDMIOT I ZAKRES BADAŃ

Przedmiot rozważań stanowiła cienkościenna, otwarta, usztywniona podłużnicami cylindryczna powłoka (rys.1b) modelująca strefę obszernego wykroju w strukturze płatowca, (np. kokpitu). Tego rodzaju strefy połączone

są z przylegającymi obszarami struktury o przekroju zamkniętym, kształtowanymi jako powłoki walcowe lub lekko zbieżne. Wymiarujący rodzaj obciążenia struktury, doprowadzający do lokalnej utraty stateczności pokrycia w trakcie obciążania w zakresie poziomów dopuszczalnych, stanowi skręcanie. Z racji konieczności spełniania wspomnianego wymogu sztywności ma ono charakter skręcania nieswobodnego.

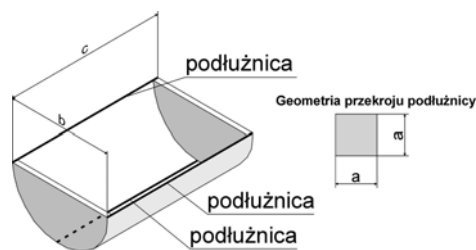


Rys. 1. Przedmiot rozważań

a. przykład strefy rozległego wykroju w strukturze płatowca
b. wyizolowany, newralgiczny fragment konstrukcji

W celu określenia wpływu usztywnień wzłużnych na sztywność skrętną w pełnym zakresie analizowanych deformacji badaniom poddano konstrukcje z: trzema, pięcioma oraz siedmioma podłużnicami. Badania eksperymentalne obejmowały rejestrację fotograficzną kolejnych faz deformacji z jednoczesną notacją wartości kąta skręcenia, jako parametru umożliwiającego sporządzanie reprezentatywnej ścieżki równowagi, w pełnym zakresie deformacji, zarówno podkrytycznych jak i zakrytycznych.

W celu określenie stanu naprężenia w stanie deformacji zakrytycznej, dla wybranego wariantu rozwiązania konstrukcyjnego opracowano adekwatny model numeryczny w ujęciu MES. Podstawą jego budowania i korygowania stanowiła analiza porównawcza form deformacji oraz charakteru ścieżek równowagi otrzymanych na drodze eksperymentalnej i numerycznej.

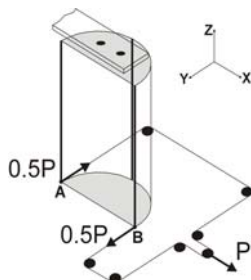


Rys. 2. Schemat geometrii struktury

3. BADANIA EKSPERYMENTALNE

Badania obejmowały trzy warianty rozważanej struktury, różniące się liczbą zastosowanych podłużnic. W pierwszym wariantcie struktura posiadała trzy podłużnice, w drugim pięć, w trzecim – siedem. W celu odwzorowania sztywności skrętnej struktury zapewnionej poprzez doprowadzenie do skręcania nieswobodnego, odpowiednie warunki brzegowe zrealizowano wprowadzając obustronne zamocowanie powłoki do sztywnych płyt brzegowych o grubości 20 mm.

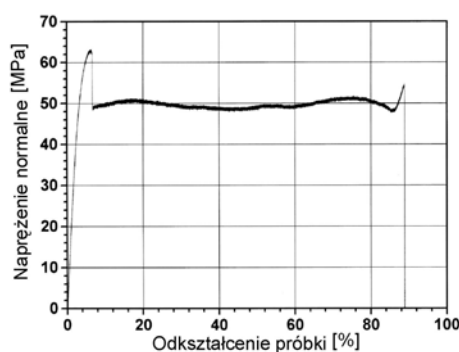
Ogólny, ideowy schemat stanowiska badawczego przedstawia rys. 3.



Rys. 3. Schemat ideowy stanowiska

Struktura wykonana została z poliwęglanu, dla którego wykonano próbę rozciągania oraz wyznaczono stałe materiałowe: moduł Younga $E=3000$ MPa oraz współczynnik Poissona $\nu=0.36$.

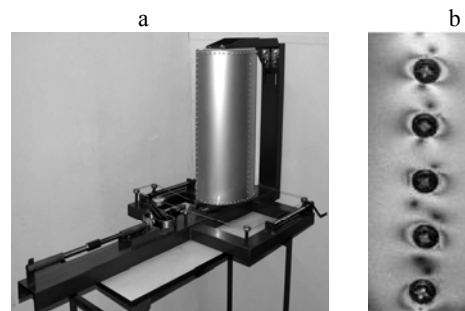
Rys.4 przedstawia charakterystykę w/w materiału odpowiadającą jednowymiarowemu rozciąganiu. Widoczne strefy deformacji sprężystej i niesprężystej sugerują możliwość przybliżania rzeczywistej charakterystyki materiału modelem idealnie sprężysto-plastycznym. Ponadto, z racji niskiej wartości modułu sprężystości (o dwa rzędy niższej w stosunku do stali) możliwe staje się prowadzenie badań eksperymentalnych operując niskimi wartościami obciążenia zewnętrznego.



Rys. 4. Wykres rozciągania dla próbki z poliwęglanu

Wybór materiału, oprócz wspomnianego kształtu charakterystyki fizycznej uzasadnia fakt, iż materiał ten wykazuje wysoką czułość optyczną, dzięki czemu możliwe staje się uzyskiwanie jakościowych informacji o rozkładzie izochrom.

Połączenia pomiędzy płaszczem i podłużnicami zrealizowano za pomocą stalowych śrub. Rozmieszczonych co 20 mm. W celu uniknięcia ewentualnych wstępnych naprężeń w miejscach połączeń śrubowych, podczas montażu modelu prowadzono ciągłą obserwację pól izochrom w otoczeniu każdej z dokręcanych śrub. Widok stanowiska z zamocowanym modelem zaprezentowano na rys. 5



Rys. 5. Widok stanowiska

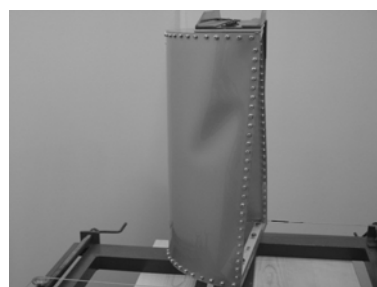
a. stanowisko z modelem przygotowanym do badań
b. rozkład izochrom w otoczeniu śrub

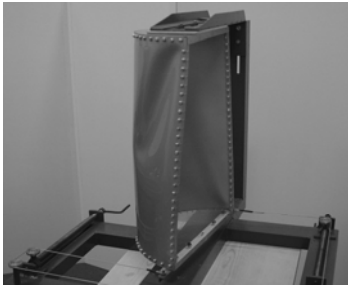
Struktura wzmocniona trzema podłużnicami

W pierwszej kolejności przeprowadzono badania doświadczalne konstrukcji wzmocnionej trzema podłużnicami. Eksperyment przeprowadzono z zachowaniem kontroli obciążenia sposobem grawitacyjnym, co zapewniało stałość jego poziomu. Jednocześnie dokonywano pomiaru maksymalnej wartości kąta skręcenia. Na tej podstawie sporządzono zależność pomiędzy wartością momentu skręcającego a kątem skręcenia modelu, stanowiącą ścieżkę równowagi, dla wybranego reprezentatywnego stopnia swobody. Zależność tę, wraz z zależnościami sporządzonymi dla pozostałych badanych struktur, przedstawiono na rys. 13.

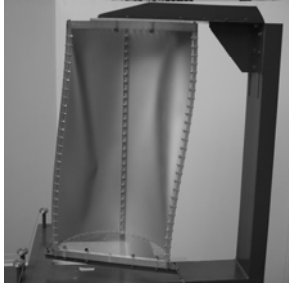
Pierwsze, dostrzegalne oznaki lokalnej utraty stateczności konstrukcji zaobserwowano w sąsiedztwie wręg oraz zewnętrznych podłużnic, przy wartości momentu skręcającego $M_t \approx 20$ Nm, której odpowiadał kąt skręcenia: $\Theta \approx 2^\circ$ (Rys. 6). W miarę wzrostu obciążenia efekt utraty stateczności obejmował coraz większy obszar powłoki, stopniowo osiągając charakter globalny.

Rysunki 6 i 7 prezentują początkową fazę utraty stateczności powłoki odpowiadającą wartościom momentu: $M_t=25$ Nm oraz $M_t=35$ Nm.

Rys. 6. Początek lokalnego wyboczenia. $M_t=25$ Nm



Rys. 7. Kolejna faza deformacji zakrytycznej. $M_t=35$ Nm

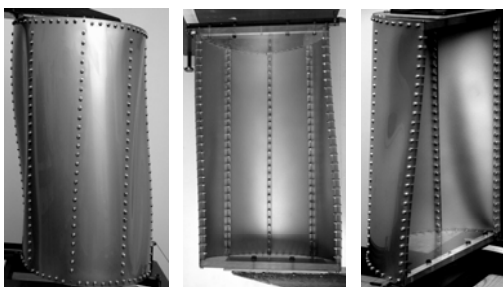


Rys. 8. Zaawansowana deformacja zakrytyczna. $M_t=60$ Nm

Na rys.8 przedstawiono zaawansowaną postać zakrytycznej, sprężystej deformacji struktury. Podłużnice brzegowe uległy znacznemu ugięciu, natomiast podłużnica centralna nie zmieniła swojej początkowej formy. Uzyskane deformacje struktury potwierdzają jej niską sztywność skrętną w stanach zaawansowanych, co pozwala wnioskować, iż podobne rozwiązania, oparte na małej liczbie podłużnic, nie mogą mieć większego praktycznego zastosowania.

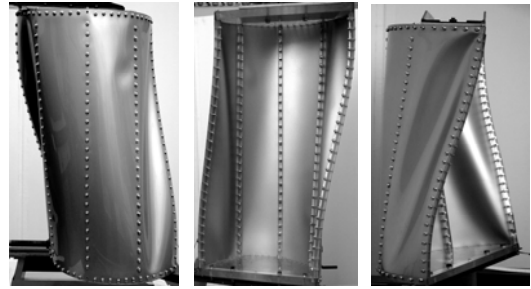
Struktura wzmocniona pięcioma podłużnicami

Kolejny rozpatrywany wariant stanowiła powłoka wzmocniona pięcioma podłużnicami, rozmieszczonymi w jednakowych odległościach. Zwiększenie liczby podłużnic miało na celu zwiększenie sztywności skrętnej, w szczególności w stanach zaawansowanych deformacji. W wyniku, podobnie jak w poprzednim przypadku sporządzono zależność pomiędzy momentem skręcającym a kątem skrócenia struktury (rys. 13).



Rys. 9. Początkowa faza deformacji zakrytycznej (struktura z 5 podłużnicami). $M_t=35$ Nm

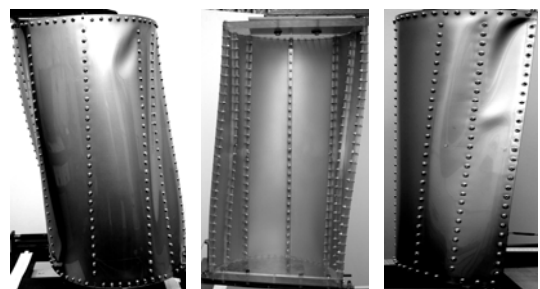
Reprezentatywna ścieżka równowagi (rys.13) potwierdza, iż utrata stateczności rozważanej struktury miała charakter identyczny jak w przypadku struktury z trzema podłużnicami. Obecność dodatkowych podłużnic, pozostających w strefie niskich poziomów naprężeń (rys. 9, 10), nie zmieniła w sposób znaczący charakterystyki badanego modelu.



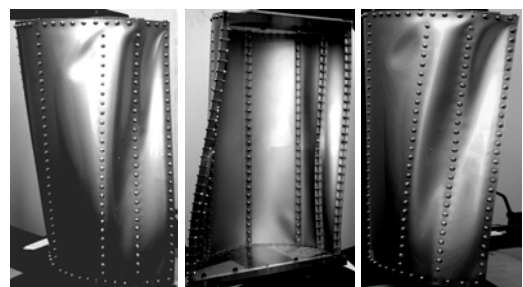
Rys. 10. Zaawansowana faza deformacji zakrytycznej (struktura z 5 podłużnicami). $M_t=75$ Nm

Struktura wzmocniona siedmioma podłużnicami

Zwiększenie liczby podłużnic do siedmiu w znaczący sposób zwiększyło sztywność skrętną struktury. Zaobserwowano również dość istotną zmianę postaci utraty stateczności powłoki przejawiającą się w formie wyraźnego dociążenia czterech skrajnych podłużnic. Uzyskaną w wyniku eksperymentu zależność pomiędzy kątem skrócenia struktury a momentem skręcającym zaprezentowano na rys.13. Postaci zakrytycznej deformacji prezentują rys. 11 i 12. Proces lokalnego wyboczenia zainicjowany został w sąsiedztwie brzegowych podłużnic, przy wartości momentu skręcającego $M_t=33$ Nm. Przyrost deformacji powłoki przebiegał w sposób łagodny. Doświadczenie zakończono po osiągnięciu wartości momentu skręcającego $M_t=110$ Nm. Stwierdzono, iż największe deformacje zachodzą w dwóch skrajnych segmentach liczonych od brzegów powłoki. Obecność dodatkowych podłużnic spowodowała zmniejszenie głębokości fałdów, co w istocie oznacza wzrost sztywności skrętnej układu. Deformacje powłoki oraz podłużnic w centralnym fragmencie ustroju pozostały nadal niewielkie.

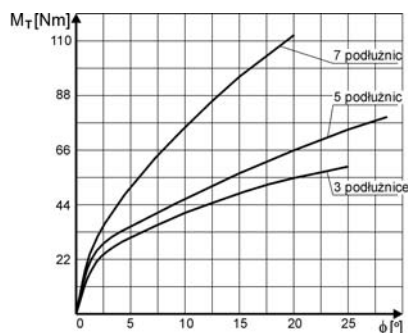


Rys. 11. Początkowa faza deformacji (struktura z 7 podłużnicami) $M_t=55$ Nm



Rys. 12. Zaawansowana deformacja zakrytycznej (struktura z 7 podłużnicami) $M_t=110$ Nm

Na rys. 13 przedstawiono zestawienie charakterystyk odpowiadających trzem wariantom rozwiązania konstrukcyjnego. W porównaniu z dwoma pierwszymi wersjami, struktura wzmocniona siedmioma podłużnicami wykazała znaczący przyrost sztywności skrętnej. Przykładowo, dla wartości momentu skręcającego $M_t = 55 \text{ Nm}$, kąt skreślenia struktury z trzema podłużnicami wyniósł 20° , podczas gdy w przypadku ostatniej wersji modelu tylko ok. 6° . Zastosowane wzmocnienie ma zatem znaczący wpływ zarówno na wzrost sztywności skrętnej, jak i na poziomy i dystrybucję naprężeń w konstrukcji.



Rys. 13. Zestawienie reprezentatywnych ścieżek równowagi

Jakkolwiek krzywe na rys. 13 mają charakter bezbifurkacyjny, należy pamiętać, iż wynika to z pomiarów ustalonych, chwilowych wartości kąta skręślenia, przy sterowaniu obciążeniem. Brak wyraźnych punktów bifurkacji nie oznacza zatem bezbifurkacyjnego charakteru utraty stateczności badanych struktur i jest efektem braku możliwości pomiaru chwilowych spadków obciążenia. Możliwość taka pojawiłaby się w przypadku sterowania przemieszczeniem podczas eksperymentu, jednakże sterowanie obciążeniem jest bardziej adekwatne w przypadku modelowania struktur lotniczych, odpowiadając warunkom występującym podczas lotu.

4. ANALIZA NUMERYCZNA

Rozwiązanie problemu o charakterze nieliniowym w istocie sprowadza się do wyznaczenia przebiegu ścieżki równowagi układu, który wynika z rozwiązania macierzowego równania sił rezidualnych:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \Lambda) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

w którym $\mathbf{u}$ jest wektorem stanu, zawierającym składowe przemieszczeń węzłów struktury, odpowiadające jej aktualnej konfiguracji geometrycznej, Λ jest macierzą zawierającą parametry kontrolne odpowiadające aktualnemu poziomowi obciążenia, natomiast $\mathbf{r}$ jest wektorem rezidualnym, zawierającym niezrównoważone składowe siły, związane z aktualnym stanem deformacji układu.

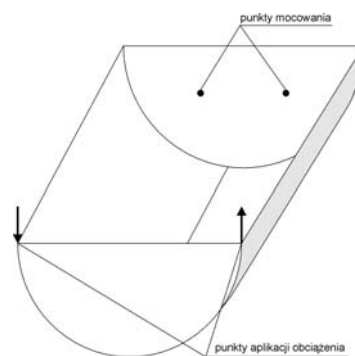
Stosowane we współczesnych programach komercyjnych algorytmy numeryczne określające przebieg ścieżki równowagi, opierają się na ogół na metodach przyrostowo-korekcyjnych, w których pierwsza faza rozwiązania jest fazą prognostyczną, określającą przybliżone położenie punktu ścieżki równowagi w hiperprzestrzeni stanu, natomiast w fazie drugiej

następuje iteracyjna korekcja rozwiązania, przebiegająca według obranej przez użytkownika strategii.

W opisywanych przypadkach, oprócz metody przyrostowej Newtona-Raphsona, przyjęta została strategia korekcyjna oparta na metodzie długości łuku, sformułowanej przez Riksa-Wempnera. Parametry liczbowe algorytmu dobrano w wyniku serii testów numerycznych. Wiarygodność otrzymywanych wyników oceniono na podstawie porównania charakteru deformacji oraz kształtu ścieżek równowagi otrzymanych na drodze numerycznej oraz badań eksperymentalnych; wyniki badań doświadczalnych stanowiły podstawę opracowania i oceny modelu numerycznego.

Uzyskanie modelu numerycznego o właściwościach odpowiadających obiektowi rzeczywistemu, w przypadku analiz nieliniowych, wymaga spełnienia szeregu warunków. Do najistotniejszych należą: przyjęcie prawidłowej koncepcji modelu, tj. użycie właściwego zestawu elementów skończonych i zastosowanie odpowiednich uproszczeń geometrii modelowanego ustroju oraz przyjęcie prawidłowego odwzorowania warunków brzegowych. Spełnienie powyższych warunków wymaga na ogół przeprowadzenia szeregu testów numerycznych.

W opisywanych rozważaniach, przyjęto ogólną koncepcję odwzorowania warunków brzegowych, przedstawioną na rys. 14. Więzy odwzorowano w postaci dwóch punktów mocowania o zablokowanych translacyjnych i rotacyjnych stopniach swobody, co odpowiadało śrubom mocującym wręgę do stanowiska. Wierne odwzorowywanie zamocowania modelu wymagałoby uwzględnienia wielu szczegółów, a zatem użycia elementów skończonych o bardzo zróżnicowanych rozmiarach, co prowadziłoby do złego uwarunkowania macierzy sztywności i powstawania „karów numerycznych”. Jak wykazują testy numeryczne, algorytmy nieliniowe wykazują ogromną wrażliwość na tego rodzaju negatywne cechy modelu i w efekcie uzyskanie rozwiązania jest niemożliwe, bądź też uzyskiwane wyniki znacząco odbiegają od wyników eksperymentu.



Rys. 14. Schemat mocowania i obciążenia modelu

Nieliniowe analizy numeryczne prowadzono przy użyciu programu MSC MARC. Analizie poddano kilka wersji modelu struktury usztywnionej trzema podłużnicami, różniących się sposobem odwzorowania podłużnic oraz ich połączeń z pokryciem. We wszystkich przypadkach wręgi oraz pokrycie modelowano przy użyciu odpowiednich rodzajów czterowęzłowych elementów powłokowych.

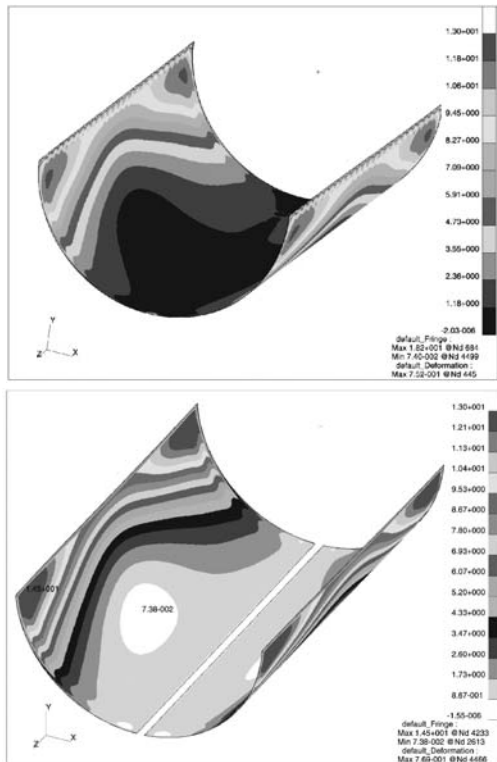
Podłużnice natomiast modelowane były kolejno za pomocą elementów belkowych, powłokowych i trójwymiarowych.

W jednym z modeli połączenia pomiędzy podłużnicami i pokryciem odwzorowano w sposób dyskretny, za pomocą szeregu elementów belkowych, przy jednoczesnym zastosowaniu kontaktu zapobiegającego przenikaniu się elementów w przypadku dużych deformacji. W pozostałych przypadkach zastosowano połączenia o charakterze ciągłym. W obliczeniach uwzględniono nieliniowość geometryczną oraz fizyczną.

Jako cel obliczeń przyjęto uzyskanie jakościowej i ilościowej zbieżności deformacji z wynikami przeprowadzonego wcześniej eksperymentu. Zbieżność taka pozwala bowiem wnioskować o adekwatności modelu numerycznego, a zatem pozwala również wnioskować, iż uzyskane na drodze numerycznej rozkłady wyężenia odpowiadają rzeczywistym.

Wyniki obliczeń dowodzą, iż wpływ sposobu modelowania połączeń nie ma znaczącego wpływu na ogólny charakter rozkładu wyężenia w pokryciu struktury. Ponadto model z połączeniami dyskretnymi charakteryzuje się wysokim stopniem złożoności, co – jak wykazały testy numeryczne – prowadzi do trudności w uzyskaniu zbieżności analiz nieliniowych oraz uzyskiwania niezgodnych z rzeczywistymi postaci deformacji w zakresie zakrytycznym.

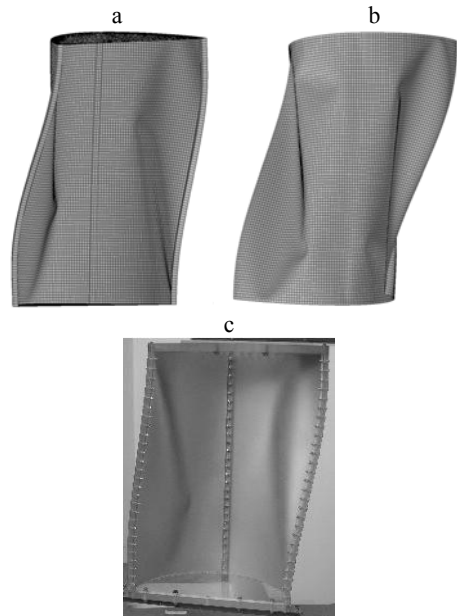
Na rys. 15 przedstawiono porównanie rozkładów wyężenia w zakresie podkrytycznym dla modeli o podłużnicach utworzonych z elementów trójwymiarowych i połączeniach realizowanych różnymi sposobami.



Rys. 15. Porównanie rozkładów wyężenia wg hipotezy H-M-H w warstwie środkowej, pomiędzy modelem z połączeniami dyskretnymi (po lewej) oraz modelem z połączeniami ciągłymi.

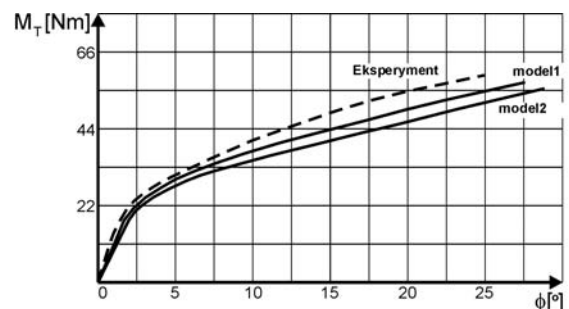
Pożądaną zbieżność deformacji uzyskano ostatecznie dla dwóch wersji modelu o połączeniach ciągłych.

W pierwszym z nich zastosowano podłużnice przestrzenne, utworzone z elementów trójwymiarowych. Należy zwrócić uwagę, iż w tym przypadku nie zachodzi pełna zgodność w liczbie stopni swobody pomiędzy elementami płaszcza i podłużnic (węzły elementów trójwymiarowych nie ulegają obrotom). W drugim zastosowano podłużnice jednowymiarowe, utworzone z elementów belkowych o sześciu stopniach swobody węzłów. Porównanie uzyskanych postaci deformacji odpowiadających maksymalnemu obciążeniu, zaprezentowano na rys. 16



Rys. 16. Porównanie postaci deformacji zakrytycznych:
a. model z podłużnicami z elementów 3D
b. model z podłużnicami z elementów bąbelkowych
c. konstrukcja rzeczywista pod obciążeniem

Dla obydwu modeli sporządzono reprezentatywne ścieżki równowagi, obrazujące zależność momentu skręcającego od kąta skręcenia, analogiczne jak w przypadku eksperymentu. Porównanie ścieżek równowagi modeli numerycznych z wynikiem eksperymentu zaprezentowano na rys. 17.

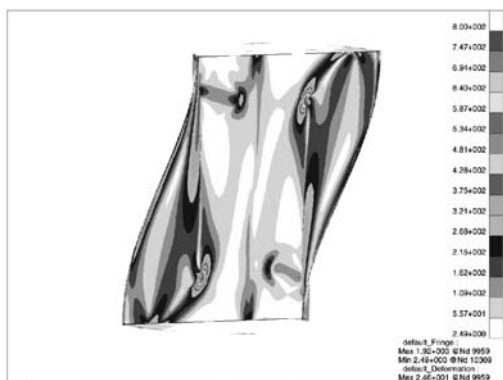


Rys. 17. Porównanie reprezentatywnych ścieżek równowagi: model1 – podłużnice z elementów 3D; model2 – podłużnice z elementów belkowych.

Pomimo odmiennych sposobów odwzorowania struktury, ścieżki równowagi odpowiadające obydwu modelom mają zbliżony przebieg. Ponadto, w obu przypadkach wynik uznać można za zadowalający. Porównując wielkości reprezentatywnych parametrów stanu (kąta skręcenia), przy określonej wartości parametru kontrolnego (momentu skręcającego), można stwierdzić,

iz maksymalna rozbieżność wyników otrzymanych na drodze numerycznej oraz wyników eksperymentu wynosi ok. 30%, dla największych obciążeń. Przy tego rodzaju charakterze przebiegu ścieżek równowagi (niewielki kąt pomiędzy stycznymi do wykresów a osią parametrów stanu), wynik ten uznać można za wysoce zadowalający. Jak dowodzi powyższe zestawienie charakterystyk, model zawierający elementy trójwymiarowe charakteryzuje się bardziej poprawnymi właściwościami sztywnościowymi niż model zawierający elementy belkowe, pomimo niepełnej zgodności zastosowanych elementów. Pomimo tego jednak, formułowanie wniosku o charakterze zalecenia konstrukcyjnego, preferującego ten sposób modelowania, wydaje się przedwczesne i wymaga przeprowadzenia analiz numerycznych struktur o różnych charakterystykach sztywnościowych, tj. zawierających różnego rodzaju wzmocnienia (dodatkowe podłużnice, wręgi itp.).

Uzyskana zbieżność ścieżek równowagi oraz postaci deformacji pozwala wnioskować, iż rozkłady wyężenia otrzymane w wyniku analiz numerycznych są bliskie rozkładów rzeczywistych, a zatem stanowią podstawę szacowania trwałości konstrukcji. Rys. 18 prezentuje rozkład wyężenia dla drugiej wersji modelu.



Rys. 18. Rozkład wyężenia wg hipotezy H-M-H w warstwie środkowej – model z podłużnicami z elementów belkowych.

5. WNIOSKI

Przeprowadzanie równoległe z obliczeniami numerycznymi badań eksperymentalnych okazuje się nadzwyczaj pomocne w procesie konstruowania newralgicznych stref ustrojów nośnych, stwarzające podstawę oceny oraz weryfikacji modeli obliczeniowych w trakcie prowadzenia nieliniowych analiz numerycznych.

Doprowadzanie do zgodności charakteru oraz wielkości deformacji otrzymywanych na drodze obliczeń numerycznych z odpowiednimi wielkościami otrzymanymi na drodze eksperymentalnej pozwala wnioskować o wiarygodności uzyskiwanych numerycznie pól naprężeń w stanach deformacji zakrytycznych. Znajomość stanu naprężenia w warunkach zaawansowanych, eksploatacyjnie dopuszczalnych deformacji, determinuje możliwość określania trwałości zmęczeniowej na drodze numerycznej, przed kosztownym i czasochłonnym wykonawstwem rozwiązania prototypowego.

LITERATURA:

1. **Aborc J.** (1985), *Post-buckling behavior of structures. Numerical techniques for more complicated structures*, Lecture Notes In Physics No 228.
2. **Bathe K.J.** (1996), *Finite element procedures*, Prentice Hall.
3. **Królak M., Młotkowski A.** (1996), *Experimental analysis of post-buckling and collapse behaviour of thin-walled box-section beam*, Thin-Walled Structures No 26, 287-314.
4. **Lynch C.** (2000), *A finite element study of the post buckling state behaviour of a typical aircraft fuselage pane*, PhD. Thesis, Queen's University Belfast.
5. **Lynch C., Murphy A., Price M., Gibson A.** (2004), *The computational post buckling analysis of fuselage stiffened panels loaded in compression*, Thin-Walled Structures No 42, 1445-1464.
6. **Mohri F., Azrar L., Potier-Ferry M.** (2002), *Lateral post buckling analysis of thin-walled open section beams*, Thin-Walled Structures No 40, 1013-1036.
7. **Niu M.C.** (1988), *Airframe structural design*, Conmlit Press Ltd., Hong Kong, 1988.
8. **Rakowski G., Kacprzyk Z.** (2005), *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
9. **Ramm E.** (1982), *The Riks/Wempner Approach – An extension of the displacement control method in nonlinear analysis*, Pineridge Press, Swensea.
10. **Felippa C.** (2007), *Nonlinear Finite Element Methods*, University of Colorado at Boulder.

THIN-WALLED STRUCTURES DESIGN PROBLEMS, CONSIDERING ADVANCED, POST-BUCKLING DEFORMATIONS.

Paper presents an experimental investigations of open section, cylindrical shells, reinforced by stringers, subjected to constrained torsion. Post buckling deformations of used models, were compared with results of nonlinear finite element analysis.

OCENA ZMIAN WARTOŚCI MODUŁU YOUNGA KOŚCI GĄBCZASTEJ W OBLICZENIACH MES W FUNKCJI UPROSZCZEŃ JEJ MODELOWANIA

Adam MAZURKIEWICZ, Tomasz TOPOLIŃSKI*

* Katedra Podstaw Inżynierii Mechanicznej i Mechatroniki, Wydział Mechaniczny,
Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy, ul. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

adam.mazurkiewicz@utp.edu.pl, topol@utp.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono wyniki pomiaru modułu Younga w próbie ściskania oraz obliczonego MES próbek tkanki beleczkowej pobranej z głów ludzkiej kości udowej. Zbudowane zostały modele geometryczne próbek o różnej dokładności do obliczeń MES, na podstawie przeprowadzonych badań mikrotomograficznych. Na podstawie porównania wyników z próby ściskania i obliczeń modeli o różnej dokładności zaproponowano minimalną gęstość skanowania tomograficznego niezbędną do otrzymania w badaniu *in vivo* informacji o budowie struktury kości beleczkowej z głowy kości udowej.

1. WPROWADZENIE

Kość ludzka jest materiałem kompozytowym zbudowanym ze składników o różnych własnościach mechanicznych, strukturze oraz różnym stanie skupienia. Składa się z cieczy, czyli szpiku kostnego i krwi, ciała stałego - tkanki beleczkowej, korowej oraz chrząstki stawowej. Tkanka beleczkowa jest substancją porowatą, przypominającą wyglądem gąbkę, wypełniającą nasady kości długich takich jak np. kość udowa czy ramieniowa oraz wnętrza kości krótkich, np. kręgów kręgosłupa. Zadaniem tej tkanki jest przenoszenie obciążeń z powierzchni stawowych na trzony kości długich (w przypadku tych kości) oraz równomierny rozkład naprężeń w całej objętości kości. Jakość tej tkanki wydaje się mieć decydujący wpływ na odporność całych kości na złamanie. Przykładowo, podczas jednej z najpowszechniej spotykanych chorób oddziałujących na kości, tj. osteoporozy, tkanka ta ulega stopniowej degradacji. W wyniku tego rozkład naprężeń w obciążonej kości zostaje zaburzony, pojawiają się punkty koncentracji naprężeń, w których po przekroczeniu wytrzymałości doraźnej następuje pęknięcie kości. Dlatego też niezwykle istotne jest poznanie zjawisk występujących w strukturze tkanki beleczkowej i reguł nimi rządzących.

Na chwilę obecną techniki takie jak μ CT (Rüegsegger i inni, 1996) umożliwiają obrazowanie objętości kości *in vitro* z dokładnością nawet do kilku μ m. Badanie takie jest jednak bardzo czasochłonne i może trwać nawet kilka – kilkanaście godzin, a więc możliwość stosowania w praktyce jest bardzo ograniczona i oczywiście koszt badania jest wysoki. Jednakże na podstawie wyników takich badań można budować cyfrowe modele tkanki beleczkowej i poddawać je różnorodnym analizom.

W badaniach *in vivo* z kolei, przy użyciu nowoczesnego sprzętu można uzyskać dokładność

skanowania (tzn. jego gęstość i rozdzielczość) około $170\div 300\ \mu$ m (Ulrich i inni, 1998). Taka dokładność jest często zbyt mała żeby opisać strukturę kości beleczkowej, gdyż średnia grubość beleczki zawiera się najczęściej w przedziale $100\div 200\ \mu$ m. Dlatego istotne jest określenie pośredniej, maksymalnej dokładności skanowania, która pozwoli opisać strukturę kości beleczkowej przy założonej wartości błędu. Zważywszy na stały postęp w rozwoju medycznego sprzętu diagnostycznego wydaje się, że osiągnięcie wyższych dokładności, a więc i możliwości takich badań *in vivo* jest kwestią niedługiego czasu. Wyznaczenie takiej dokładności pozwoliłoby w przyszłości na zoptymalizowanie relacji „koszt – uzyskany wynik” takiego badania co ma duże znaczenie ze względu na wpływ takiego badania na pacjentów.

W niniejszej pracy podjęto próbę określenia takiej dokładności na podstawie wyników obliczeń modułu Younga z próby ściskania oraz obliczeń MES próbek tkanki beleczkowej.

2. MATERIAŁ I METODY

Do badań wykorzystano 42 próbki tkanki beleczkowej. Z pośród nich 21 pochodziło z kości osteoporotycznych pozostałe zaś z kości koksartycznych. Próbki w kształcie walca o średnicy 10 mm i wysokości 8,5 mm pobrano z głów ludzkich kości udowych w sposób opisany przez Mazurkiewicza (2006).

Próbki te poddano badaniom na mikrotomografii μ CT 80. Wynikiem badania były obrazy przedstawiające budowę wnętrza próbki. Skanowania dokonano obrazując warstwy próbki prostopadłe do jej osi przy odległości kolejnych skanów równej $36\ \mu$ m oraz przy wielkości piksela w obrazie także $36\ \mu$ m. Szersze wyniki tych badań opisano w pracach (Mazurkiewicz, Topoliński, 2004; Ostrowska i inni, 2004; Ostrowska i inni, 2005).

W teście maszynowym wykonano pomiar modułu Younga próbek w próbie ściskania. Zmierzono moduł styczny Mm, w kierunku wzdłuż osi próbki przy odkształceniu z zakresu $\varepsilon=0,6\div0,8\%$. Szerszy opis warunków przeprowadzenia testu maszynowego przedstawiono w pracach (Ostrowska i inni, 2004; Mazurkiewicz, 2006).

W kolejnym kroku, na podstawie obrazów uzyskanych z mikrotomografu przy użyciu oprogramowania własnego, zbudowano modele próbek z dokładnością rekonstrukcji w zakresie $36\div288\ \mu\text{m}$ z krokiem skoku dokładności $36\ \mu\text{m}$. Sposób budowy modeli geometrycznych próbek opisał Mazurkiewicz (2006).

Dla tak zbudowanych modeli wykonano obliczenia modułu Younga wzdłuż osi próbki oznaczonych odpowiednio M36÷M288. Obliczeń MES dokonano w środowisku programu Ansys, przy założeniach zgodnych z warunkami przeprowadzonej próby ściskania.

3. WYNIKI BADAŃ

Zakres zmienności uzyskanych wyników badań oraz ich wartości średnie w obu grupach próbek przedstawiono w tablicy 1.

Tab. 1. Zakresy wartości uzyskanych wyników

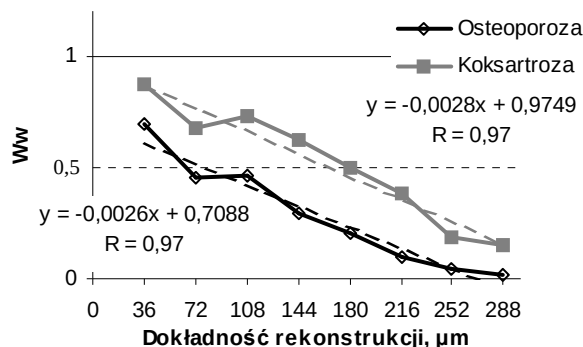
Wskaźnik	Wartość	Osteoporoza	Koksartroza
Mm, MPa	Min	41,2	59,3
	Max	446,7	920,1
	Średnia	281,3	562,2
M36, MPa	Min	10,6	15,9
	Max	990,3	1374,8
	Średnia	212,9	534,0
M72, MPa	Min	1,4	6,414
	Max	836,6	1231,4
	Średnia	145,7	418,2
M108, MPa	Min	0,4	5,52
	Max	928,3	1333,3
	Średnia	147,6	449,5
M144, MPa	Min	0	1,46
	Max	858,3	1304,8
	Średnia	108,9	379,2
M180, MPa	Min	0	0
	Max	817,7	1283,5
	Średnia	83,6	322,3
M216, MPa	Min	0	0
	Max	746,4	1243,6
	Średnia	64,1	259,1
M252, MPa	Min	0	0
	Max	671,2	1172,1
	Średnia	51,0	205,5
M288, MPa	Min	0	0
	Max	568,8	1130,1
	Średnia	37,9	161,5

Dodatkowo wykonano porównanie wyników obliczeń modułu z wynikami eksperymentalnymi dla wartości średnich uzyskanych wyników, przy możliwych do uzyskania dokładnościach odwzorowania architektury próbek.

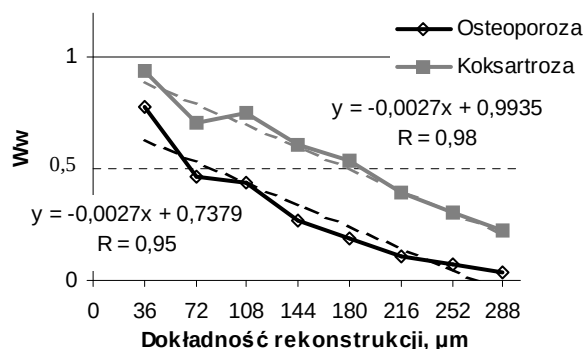
W tym celu zdefiniowano parametr wartości względnej - Ww, wyników obliczeń, określony jako stosunek wartości modułu obliczonego dla danej dokładności, do wartości modułu z eksperymentu (Mm) dla danej próbki. Dla największej możliwej do uzyskania dokładności odwzorowania architektury próbek, tj. $36\ \mu\text{m}$, wartości Ww mieszczą się w zakresie:

- dla próbek osteoporotycznych $0,1\div1,5$, średnio 0,78;
- dla próbek koksartycznych $0,2\div2$, średnio 0,98.

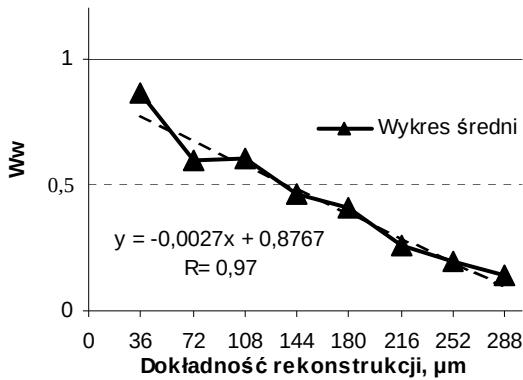
Na rysunku 1 przedstawiono wykresy wartości Ww dla przykładowych próbek osteoporotycznej i koksartycznej. Wykresy te są reprezentatywne co do kształtu, dla grup próbek które reprezentują. Na rysunkach 2÷4 przedstawiono odpowiednio: średnie wykresy Ww dla obu badanych grup próbek, łączny wykres średni oraz zestawienie tych wykresów. Dodatkowo na rysunkach 1÷3 przedstawiono równania prostych regresji opisujących omawiane związki i odpowiadające im wartości współczynników korelacji.



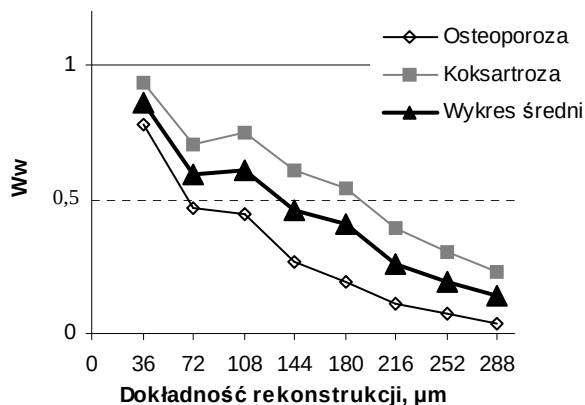
Rys. 1. Wykresy wartości Ww dla przykładowych próbek osteoporotycznej i koksartycznej



Rys. 2. Wykres średniej wartości względnej modułu obu badanych grup próbek



Rys. 3. Łączny wykres średni dla obu grup próbek



Rys. 4. Zestawienie poszczególnych wykresów średnich

Zmniejszenie dokładności odwzorowania (aproksymacji) struktury powoduje w ogólności zmniejszenie obliczonych wartości modułów Younga w odniesieniu do wartości obliczonych przy dokładności 36 µm (przyjętej jako 100%), co przedstawiono w tabelicy 2.

Tab. 2. Średni spadek dokładności obliczeń modułu Younga, przy spadku dokładności rekonstrukcji próbek

Dokładność, µm	Próbki Osteoporotyczne	Próbki Koksartyczne	Łącznie obie grupy próbek
72	40%	28,2%	31,2%
108	43,4%	23,6%	29,9%
144	65,4%	38%	46,7%
180	75,8%	45,3%	52,7%
216	86%	60,2%	70,2%
244	91%	69,2%	77,7 %
288	95,1%	76,8%	84%

4. ANALIZA WYNIKÓW

Moduł sprężystości próbek z kości koksartycznych z próby ściskania jest średnio większy o 99%, natomiast dla wyników obliczeń MES według metodyki własnej z zakresu dokładności rekonstrukcji 36÷288 µm jest większy odpowiednio o: 150; 187; 204; 248; 285; 304; 302 i 326%. Jednak w przypadku pojedynczych wyników jednoznaczne rozróżnienie obu struktur jest wysoce ryzykowne - obszary wyników mniej lub bardziej się pokrywają.

Średnie wykresy zmian wartości modułu dla osteoporozy i koksartrozy wskazują, iż zmiany dla koksartrozy są wyraźnie mniejsze ze spadkiem dokładności, a wykres tych zmian praktycznie jest liniowy – wartość współczynnika korelacji dla wykresu średniego wynosi $R=0,97$.

Warto zwrócić uwagę, że w większości przypadków wyniki obliczeń dla dokładności 72 µm wskazują na większy spadek modułu Younga niż ogólna tendencja spadku rozważanej wielkości. Wydaje się, że jest to związane z wymiarem charakterystycznym beleczek tworzących architekturę próbki. Prawidłowość ta występuje zarówno dla próbek osteoporotycznych jak koksartycznych, wymaga jednak bardziej precyzyjnego wyjaśnienia.

Zwraca także uwagę to, że w przypadku osteoporozy zmniejszenie dokładności rekonstrukcji już do 72 µm przy obliczeniach metodą własną powoduje, że wartość obliczonego modułu Younga spada średnio poniżej 50% wartości otrzymanej z eksperymentu Mm - wartość Ww poniżej 0,5 na rysunku 2. W tym przypadku już nieznaczne uproszczenie architektury powoduje utratę jej ciągłości, a w konsekwencji spadek wartości obliczonego modułu.

5. WNIOSKI

- Zakresy wyników uzyskanych z poszczególnych badań przedstawione w tabelicy 1 częściowo się pokrywają, przy wyraźnie różnych wartościach średnich w obu badanych grupach w poszczególnych przypadkach. W wyniku tego nie jest możliwe „proste” rozróżnienie próbek z obu badanych grup kości na podstawie wartości zbadanych wskaźników wytrzymałościowych.
- Zmniejszenie dokładności odwzorowania struktury kości na potrzeby obliczeń, tj. wykorzystanie mniejszej liczby skanów na jednostkę długości badanej kości (tj. zmniejszenie dawki promieniowania rentgenowskiego), powoduje zmniejszenie wartości uzyskanego modułu. Opis tej zmiany dla wartości średnich możliwy jest przy wykorzystaniu modelu regresji liniowej z wysokim współczynnikiem korelacji, z zauważalnym zaburzeniem dla wymiaru 72 µm. Z jednej jednak strony liniowy opis funkcji zmian wartości modułu w zależności od dokładności odwzorowania struktury pozwalałby na zmniejszenie liczby obserwacji skaningowej struktury kości jednak, z drugiej jednak strony, dla odległości poniżej 144 µm zaczyna tracić sens fizyczny w związku z lokalną utratą ciągłości zamodelowanej struktury. Dlatego zważywszy na otrzymane wyniki a także wymiary pojedynczej

beleczki (około 100÷200 μm) autorzy proponują do przyszłego zastosowania w praktyce rozdzielczość rzędu 108 μm . Jednak należy w tym przypadku zwrócić uwagę, że analizy były prowadzone tylko dla próbek pobranych z głów ludzkiej kości udowej. W przypadku próbek pobranych z innych kości np. kręgow kręgosłupa czy pięty otrzymane wyniki mogą się różnić ze względu na odmienną strukturę beleczkową w tych kościach (Covin, 1999; Yuehuei i Draughn, 1999), wynikającą z innego położenia anatomicznego i spełniania odmiennych funkcji w organizmie. Dlatego przeprowadzone analizy należałoby powtórzyć dla próbek pobranych z innych miejsc szkieletu w celu sprawdzenia czy proponowana rozdzielczość (gęstość skanowania) będzie wystarczająca dla struktur beleczkowych pochodzących z innych kości.

LITERATURA

1. **Covin S.** (1999), *Bone mechanics handbook-second edition*, CRC Press, New York.
2. **Mazurkiewicz A., Topoliński T.** (2004), Ocena wskaźników architektury kości beleczkowej na przykładzie osteoporotycznej i koksartrycznej głowy kości udowej, *Przegląd Lekarski*, 61.
3. **Mazurkiewicz A.** (2006), Badanie wpływu wybranej struktury na jej wytrzymałość jako element diagnozowania nośności kości, *Rozprawa doktorska*, ATR, Bydgoszcz.
4. **Ostrowska A., Mazurkiewicz A., Topoliński T.** (2004), Wytrzymałość statyczna preparatów kostnych a wskaźniki opisu ich architektury, *XXI Sympozjum Mechaniki Eksperymentalnej Ciała Stałego, Jachranka 2004*.
5. **Ostrowska A., Mazurkiewicz A., Będziński R., Ścigała K.** (2005), The Investigations of Mechanical and Histomorphometric Properties of Human Femur Cancellous Bone, *Biomaterials Engineering*, vol.47-53, pp 78-80.
6. **Rüeggsegger P., Koller B., Muller R.** (1996), A microtomographic system for the nondestructive evaluation of bone architecture, *Calcif Tissue Int.*, 58.
7. **Ulrich D., Van Rietbergen B., Weinans H.** (1998), Finite element analysis of trabecular bone structure: a comparison of image-based meshing techniques, *J. Biomech.*, 31.
8. **Yuehuei H., Draughn R.** (1999), *Mechanical testing of bone and the bone-implant interface*, CRC Press, New York.

THE ESTIMATION OF CHANGES CALCULATED FEM VALUES YOUNG'S MODULUS OF TRABECULAR BONE IN FUNCTION SIMPLIFYING OF MODELLING OF BONE

Abstract: In the paper presented results of measurement of Young's modulus trabecular bone collected from heads of human femoral bone. The results obtained from compression test and calculation FEM. Geometrical models of samples trabecular bone about different exactitude were built on the base μCT measurement and used to calculations. On the base results of compression test and calculations FEM of models were proposed the minimum resolution of μCT investigation, necessary to receipt in investigation *in vivo* information about structure of trabecular bone from heads of human femoral bone.

PĘKANIE DREWNA W DWUOSIOWYM STANIE OBCIĄŻENIA

Marek ROMANOWICZ*, Andrzej SEWERYN*

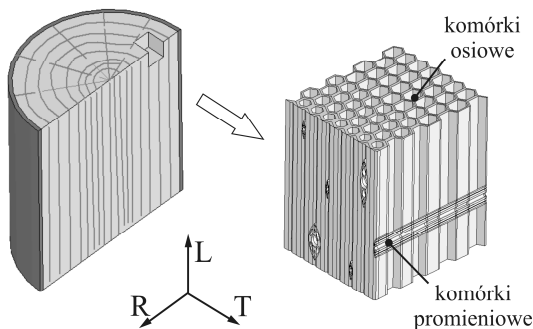
* Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

marekrom@pb.edu.pl, seweryn@pb.edu.pl

Streszczenie: W pracy zaproponowano nowe podejście do prognozowania inicjacji i propagacji pęknięć w drewnie, oparte na koncepcji płaszczyzny krytycznej oraz na nielokalnym naprężeniowym kryterium pęknięcia. W celu oceny poprawności zaproponowanego kryterium pęknięcia przedstawiono własne badania doświadczalne pęknięcia próbek wykonanych z drewna sosny z brzegową szczeliną. Szczelina była nacinana zarówno wzdłuż głównego kierunku ortotropii, jak i pod pewnym kątem do tego kierunku. Badania prowadzono w złożonym stanie obciążenia dla różnych ilorazów współczynników intensywności naprężeń K_I / K_{II} .

1. WPROWADZENIE

Widoczny w ostatnich latach wzrost zainteresowania drewnem jako konstrukcyjnym materiałem budowlanym jest wynikiem dwóch czynników, a mianowicie: bardzo dobrych właściwości mechanicznych drewna odniesionych do jego gęstości oraz problemów związanych z wyczerpywaniem się nieodnawialnych surowców materialnych.



Rys. 1. Budowa drewna: LRT – osie ortotropii

Ortotropię drewna charakteryzują trzy osie symetrii, pokazane na rysunku 1, oznaczone odpowiednio literami: L, R i T. Zdolność drewna do odporności na pęknięcie zależy od układu propagacji szczeliny. Z powodu znacznych różnic w odporności na pęknięcie w poszczególnych układach, szczelina w drewnie propaguje najczęściej równolegle do komórek osiowych, tj. w układzie RL lub TL (pierwsza litera odnosi się do kierunku normalnego do płaszczyzny pęknięcia, a druga określa kierunek propagacji szczeliny).

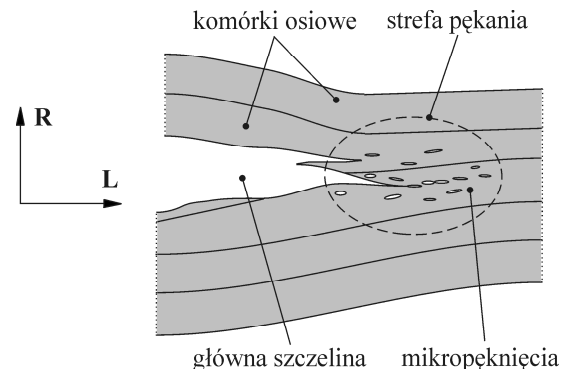
Zdaniem Mindessa i Bentura (1986), Jernkvista (2001) oraz Vasica i Smitha (2002, 2003) w drewnie istnieje strefa pęknięcia w pobliżu wierzchołka szczeliny. Występujące tam mikropełnięcia mogą się łączyć i rozwijać w procesie obciążania, wprowadzając progresywną zmianę mikrostruktury. W konsekwencji, dokładne modelowanie strefy uszkodzeń polegające na obliczaniu rozkładu mikropełnień i zmian podatności

dla tego materiału w obszarze dużych gradientów naprężeń wydaje się być bardzo trudne do zrealizowania.

Celem tej pracy jest przedstawienie nowego podejścia do obliczania inicjacji i propagacji szczelin w konstrukcyjnych elementach drewnianych, opartego na koncepcji płaszczyzny krytycznej oraz na nielokalnym naprężeniowym kryterium pęknięcia, zaproponowanym przez Seweryna i Mroza (1995).

2. NIELOKALNE NAPRĘŻENIOWE KRYTERIUM PĘKANIA DREWNA

Rozpatrzmy model rozwoju szczeliny w drewnie w układzie RL, pokazany na rysunku 2.



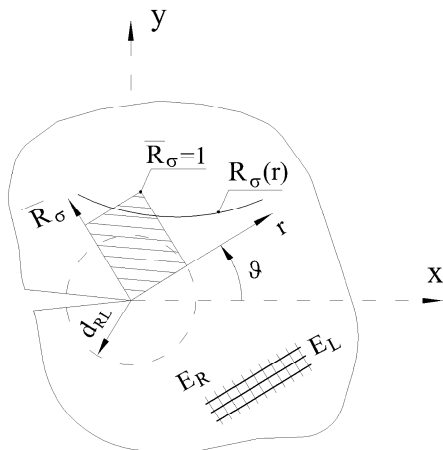
Rys. 2. Model rozwoju szczeliny w drewnie w układzie propagacji RL

Zakładamy, że jeżeli propagacja szczeliny następuje w drewnie w układzie RL, to wówczas uśredniona na odcinku d (rys. 3) funkcja naprężeń normalnych i tnących wywołujących dekohezję $R_\sigma(\sigma_R, \tau_{RL})$ osiąga wartość krytyczną, czyli:

$$R_f = \frac{1}{d} \int_0^d R_\sigma(\sigma_R, \tau_{RL}) dr = 1, \quad \text{gdzie: } d = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{lc}^{RL}}{\sigma_c^R} \right)^2, \quad (1)$$

$R_f, R_\sigma(\sigma_R, \tau_{RL})$ – odpowiednio współczynnik pęknięcia i lokalna naprężeniowa funkcja pęknięcia w układzie

propagacji RL , σ_R , τ_{RL} – odpowiednio normalne i styczne naprężenia na płaszczyźnie krytycznej w układzie propagacji RL . Długość strefy pękania d wyznacza się z równoważności kryterium Griffitha – Irwina dla I sposobu deformacji szczeliny ($K_I = K_{Ic}^{RL}$) oraz nielokalnego kryterium pękania, gdzie: K_{Ic}^{RL} – krytyczna wartość współczynnika intensywności naprężeń dla rozrywania szczeliny w układzie propagacji RL , σ_c^R – normalne naprężenie krytyczne w przypadku jednoosiowego rozciągania w kierunku osi ortotropii R .



Rys. 3. Uśrednienie lokalnej funkcji pękania w okolicy wierzchołka szczeliny

W niniejszej pracy, w celu uwzględnienia występujących w drewnie mikropęknięć zastosowano model ciała z mikropęknięciami o określonej orientacji, wyprowadzony przez Seweryna i innych (2003) na podstawie wcześniejszych prac Gambarotta i Logomarsino (1992). Zgodnie z przyjętym modelem, propagacja mikropęknięć o normalnej R nastąpi wówczas, gdy prędkość uwalnianej energii odkształcenia osiągnie wartość krytyczną, a więc:

$$G^R = \frac{3}{2} a_0^2 \left[c_R (\sigma_R - p_R)^2 + c_{RL} (\tau_{RL} - f_{RL})^2 \right] = G_c^R, \quad (2)$$

gdzie: a_0 – wymiar mikropęknięcia odniesiony do wymiaru początkowego, p_R , f_{RL} – normalne oraz styczne naprężenia działające na powierzchni mikropęknięcia, c_R , c_{RL} – współczynniki podatności wzdłużnej oraz poprzecznej wywołane mikropęknięciami. Krytyczną wartość G_c^R wyznacza się dla przypadku jednoosiowego rozciągania w kierunku R . Uwzględniając warunek otwierania się mikropęknięć bez kontaktu ząbków nierówności ($p_R = 0$ oraz $f_{RL} = 0$), na podstawie wzoru (3), otrzymujemy następującą lokalną funkcję pękania (Seweryn i Romanowicz, 2007):

$$R_\sigma(\sigma_R, \tau_{RL}) = \left(\frac{\sigma_R}{\sigma_c^R} \right)^2 + \frac{c_{RL}}{c_R} \left(\frac{\tau_{RL}}{\sigma_c^R} \right)^2 = 1. \quad (3)$$

Jeżeli natomiast mamy do czynienia ze wzajemnym poślizgiem na powierzchniach nierówności mikropęknięć ($p_R \neq 0$ i $f_{RL} \neq 0$), to po uwzględnieniu warunków kontaktu między ząbkami powierzchni mikropęknięć, lokalną funkcję pękania można zapisać w następujący sposób:

$$R_\sigma(\sigma_R, \tau_{RL}) = \frac{|\tau_{RL}|}{\tau_c^{RL}} + \frac{\sigma_R}{\tau_c^{RL}} \operatorname{tg}(\varphi + \psi) = 1, \quad (4)$$

gdzie: ψ – kąt tarcia, φ – kąt pochylenia nierówności na powierzchni mikropęknięć, τ_c^{RL} – naprężenia niszczące dla czystego ścinania w płaszczyźnie LR .

W niniejszej pracy przyjmuje się założenie, o znanym kierunku propagacji szczeliny w drewnie (kierunek ϑ_0). Oznacza to, że do prognozowania pękania drewna nie jest konieczne obliczanie lokalnego maksimum funkcji $R_\sigma(\sigma_R, \tau_{RL})$. Dlatego, w celu zastosowania nielokalnego naprężeniowego kryterium pękania do szczelin naciętych pod pewnym kątem α do osi ortotropii L zakładamy, że kierunek propagacji pokrywa się z kierunkiem wzmocnienia, a więc lokalną funkcję pękania obliczamy dla $\vartheta_0 = \alpha$ lub $\vartheta_0 = \alpha - 180^\circ$.

Stan naprężenia w bliskim otoczeniu wierzchołka szczeliny dowolnie naciętej względem osi ortotropii, w lokalnym biegunowym układzie współrzędnych (r, ϑ) , opisuje następujące wyrażenie (Lekhnitskii, 1965):

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \Xi_{11}(\vartheta, \mu_1, \mu_2) & \Xi_{12}(\vartheta, \mu_1, \mu_2) \\ \Xi_{21}(\vartheta, \mu_1, \mu_2) & \Xi_{22}(\vartheta, \mu_1, \mu_2) \\ \Xi_{31}(\vartheta, \mu_1, \mu_2) & \Xi_{32}(\vartheta, \mu_1, \mu_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

gdzie: współczynniki $\Xi_{11}, \dots, \Xi_{32}$ są funkcjami trygonometrycznymi kąta ϑ i pierwiastków równania charakterystycznego μ_1 i μ_2 . Pierwiastki te zależą od stałych sprężystości materiału oraz od konfiguracji szczeliny względem osi ortotropii. W celu określenia naprężeń σ_R, τ_{RL} na płaszczyźnie krytycznej, składowe naprężenia opisane wzorem (5) przekształca się zgodnie z prawem transformacji tensora II rzędu z układu xy do układu LR .

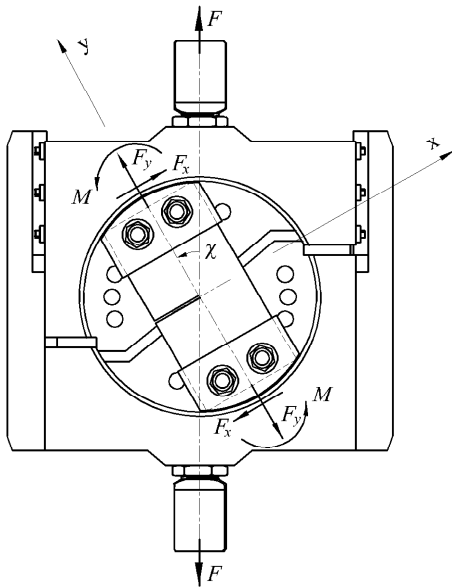
Podstawiając do wzoru (1) lokalną funkcję pękania (3), a także związki na naprężenia (5), otrzymujemy kryterium pękania drewna w przypadku, gdy szczelina nacięta pod kątem α względem osi ortotropii L , poddana jest rozciąganiu i ścinaniu wzdłużnemu, a mianowicie:

$$\lambda_{11} (K_I^{RL})^2 + \lambda_{12} (K_I^{RL}) (K_{II}^{RL}) + \lambda_{22} (K_{II}^{RL})^2 = (K_{Ic}^{RL})^2, \quad (6)$$

gdzie: K_I^{RL} , K_{II}^{RL} – współczynniki intensywności naprężeń odpowiadające rozrywaniu i ścinaniu wzdłużnemu, w przypadku, gdy szczelina propaguje w układzie RL . Współczynniki: λ_{11} , λ_{12} i λ_{22} są funkcjami c_R , c_{RL} oraz stałych sprężystości materiału (Romanowicz, 2006).

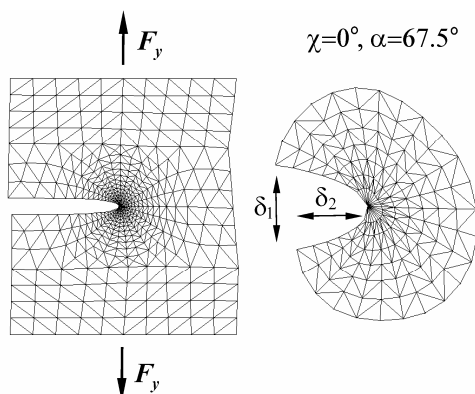
3. BADANIA DOŚWIADCZALNE PĘKANIA DREWNA W DWUOSIOWYM STANIE OBCIĄŻENIA

W celu weryfikacji nielokalnego kryterium pękania (6) wykonano własne badania doświadczalne pękania drewna sosnowego (łac. *pinus sylvestris*) w układzie propagacji szczeliny RL dla przypadku najmniej rozpoznanego, tj. gdy szczelina jest wykonana pod kątem α do kierunku L .



Rys. 4. Schemat przyrządu do zadawania dwuosowego obciążenia w próbkach płaskich

W badaniach wykorzystano przyrząd do zadawania dwuosowego stanu obciążenia opracowany przez Łukaszewicza (2003). Widok przyrządu pokazano na rysunku 4. Płaskie próbki umieszcza się pod kątem χ do kierunku działania siły F zadawanej przez siłownik maszyny wytrzymałościowej. W ten sposób otrzymujemy dwuosowy stan obciążenia w postaci jednocześnie działającej siły rozciągającej ($F_y = F \cos \chi$) i ścinającej ($F_x = F \sin \chi$). Badania przeprowadzono na serwohydraulicznej maszynie wytrzymałościowej MTS 322 sterując przemieszczeniem tłoczyska siłownika, którego prędkość utrzymywano na stałym poziomie, wynoszącym 0.025 mm/s. Badania realizowano w temperaturze pokojowej (około 21°C) i wilgotności względnej 12 %. Podczas badań rejestrowano dla każdej próbki charakterystykę siła – przemieszczenie ruchomego tłoczyska siłownika maszyny wytrzymałościowej. Przyjęto założenie, że propagacja szczeliny następowała w momencie, gdy na powyższej charakterystyce pojawiał się nagły spadek siły (uskok). Iloraz K_I/K_{II} , dla którego następowało pękanie próbek zależał od wartości kątów obciążenia α oraz χ . Dla różnych kombinacji tych kątów badania powtarzano 5 razy.



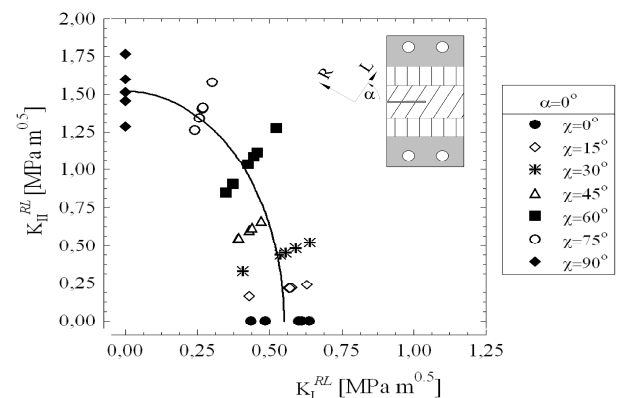
Rys. 5. Zdeformowana, przykładowa siatka MES dla próbki zmodyfikowanej

Doświadczalne wartości sił granicznych F_c zostały wykorzystane w dalszym etapie do obliczenia granicznych wartości współczynników K_I , K_{II} . Badania realizowano dwuetapowo, w układzie propagacji szczeliny RL . Celem pierwszego etapu badań było eksperymentalne określenie dla badanego drewna wartości stałych materiałowych w układzie RL , tj. ilorazu c_{RL}/c_R oraz K_{Ic}^{RL} . Dla realizacji postawionego celu wykonano badania pęknięcia na próbkach ze szczelinami wykonanymi wzdłuż osi ortotropii L i poddanych kombinacji rozciągania i wzdłużnego ścinania. Przyjmowano następujące kąty obciążenia: $\alpha = 0^\circ$; $\chi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ i 90° . Celem drugiego etapu badań było zastosowanie wyznaczonych w etapie pierwszym stałych materiałowych do prognozowania pęknięcia na podstawie nielokalnego kryterium pęknięcia w postaci (6). Dla realizacji tego celu wykonano badania:

- rozciągania próbek ze szczelinami wykonanymi pod kątem α do osi ortotropii L (dla kątów obciążenia $\chi = 0^\circ$; $\alpha = 22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ$ i 90°),
- ścinania próbek ze szczelinami wykonanymi pod kątem α do osi ortotropii L (dla kątów obciążenia $\chi = 90^\circ$; $\alpha = 22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ, 90^\circ$).

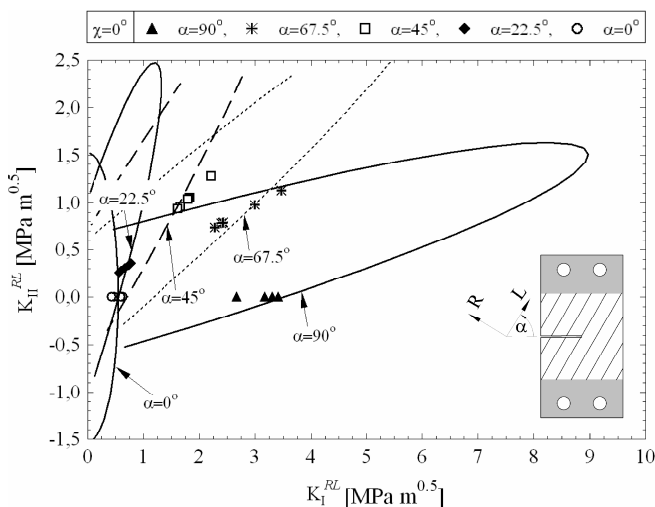
4. WERYFIKACJA NIELOKALNEGO NAPRĘŻENIOWEGO KRYTERIUM PĘKANIA DREWNA

W celu obliczenia pól naprężeń w próbkach wykorzystanych w badaniach zastosowano metodę elementów skończonych. Stałe sprężystości badanego drewna wyznaczono doświadczalnie. Wartości współczynników K_I , K_{II} dla próbek obliczano metodą asymptotyczną, a następnie sprawdzano ich zgodność poprzez ponowne ich wyznaczenie za pomocą całki niezmienniczej J (Seweryn, 2003). Wartości przemieszczeń w węzłach użytych do ekstrapolacji zostały wyznaczone w programie Ansys v.10. Obliczone współczynniki intensywności naprężeń zostały następnie unormowane dla rozciągania względem siły normalnej F_y oraz dla ścinania względem siły stycznej F_x , co pozwoliło w dalszym etapie określić wartości graniczne współczynników K_I , K_{II} (rys. 5).

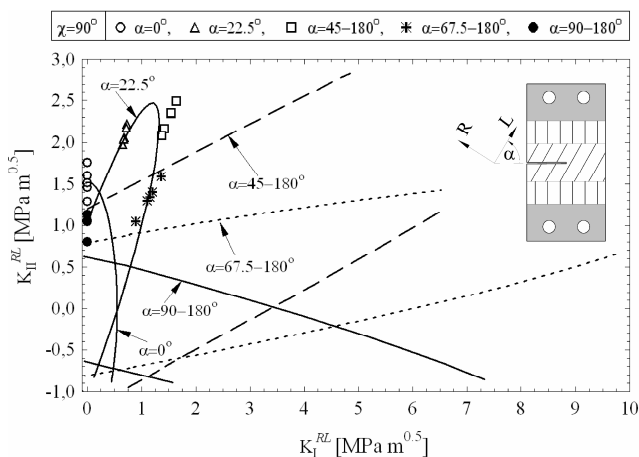


Rys. 6. Graniczne wartości współczynników intensywności naprężeń K_I , K_{II} dla drewna sosnowego dla próbek ze szczelinami, w przypadku gdy $\alpha = 0^\circ$, $\chi \neq 0^\circ$; linia ciągła - nielocalne kryterium pęknięcia (6)

Graniczne wartości współczynników K_I , K_{II} w układzie propagacji RL , w przypadku gdy szczelina nacięta jest wzdłuż osi ortotropii L ($\alpha = 0^\circ$) przedstawiono na rysunku 6. Natomiast na rysunkach 7 i 8 przedstawiono wyniki badań dla szczelin propagujących w układzie RL , ale wykonanych pod kątem α do osi ortotropii L ($\alpha \neq 0^\circ$). Na podstawie aproksymacji wyników badań z rysunku 6, wyznaczono (metodą najmniejszych kwadratów) dla drewna sosnowego (łac. *pinus sylvestris*) wartość ilorazu $c_{RL}/c_R = 0.131$, a także wartość $K_{Ic}^{RL} = 0.55 \text{ MPa m}^{0.5}$. Prognozowanie pękania próbek ze szczelinami naciętymi pod kątem α do osi ortotropii L , za pomocą nielokalnego kryterium pękania (6) przedstawiono na rysunkach 7 i 8.



Rys. 7. Graniczne wartości współczynników K_I , K_{II} dla drewna sosnowego dla próbek ze szczelinami, w przypadku gdy $\chi = 0^\circ$, $\alpha \neq 0^\circ$; linie – wartości obliczone na podstawie nielokalnego kryterium pękania (6)



Rys. 8. Graniczne wartości współczynników K_I , K_{II} dla drewna sosnowego dla próbek ze szczelinami w przypadku gdy $\chi = 90^\circ$, $\alpha \neq 0^\circ$; linie - wartości obliczone na podstawie nielokalnego kryterium pękania (6)

5. WNIOSKI

Na podstawie zrealizowanych badań doświadczalnych pękania drewna sosnowego (łac. *pinus sylvestris*) w układzie propagacji szczeliny RL można stwierdzić, że nielokalne kryterium pękania drewna (6) jest skutecznym narzędziem do oceny propagacji szczeliny wykonanej pod kątem do osi ortotropii L ($\alpha \neq 0^\circ$).

LITERATURA

1. **Gambarotta L., Logomarsino S.** (1993), A microcrack damage model for brittle materials, *Int. J. Solids Struct.*, 30, 177–198.
2. **Jernkvist L.O.** (2001), Fracture of wood under mixed mode loading I. Derivation of fracture criteria, *Eng. Fract. Mech.*, 68, 549–563.
3. **Lekhnitskii S.G.** (1963), *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Holden-Day Inc., San Francisco.
4. **Łukaszewicz A.** (2003), *Modelowanie zagadnień kruchego pękania elementów z karami w dwuosowym stanie obciążenia*, Rozprawa Doktorska, Politechnika Warszawska.
5. **Mindess S., Bentur A.** (1986), Crack propagation in notched wood specimens with different grain orientations, *Wood Sci. Technol.*, 20, 145–155.
6. **Seweryn A.** (2003), *Metody numeryczne w mechanice pękania*, IPPT PAN, Warszawa.
7. **Seweryn A., Kulchitsky – Zhyhailo R.D., Mróz Z.** (2003), On the modeling of bodies with microcracks taking into account of contact of their boundaries, *Appl. Problems Mech. Math.*, 1, 141–149.
8. **Seweryn A., Mróz Z.** (1995), A non-local stress failure condition for structural elements under multiaxial loading, *Eng. Fract. Mech.*, 51, 955–973.
9. **Seweryn A., Romanowicz M.** (2007), Failure conditions of wood under complex loading, *Materials Science* (w druku)
10. **Smith I., Vasic S.** (2003), Fracture behavior of softwood, *Mech. Mater.* 35, 803–815.
11. **Vasic S., Smith I.** (2002), Bridging crack model for fracture of wood, *Eng. Fract. Mech.*, 69, 745–760.
12. **Romanowicz M.** (2006) *Prognozowanie pękania drewna na podstawie kryteriów związanych z płaszczyzną fizyczną*, Rozprawa Doktorska, Politechnika Białostocka.

FRACTURE OF WOOD UNDER BIAXIAL LOADING CONDITION

Abstract: A new approach to solving fracture problems of wood was presented. The presented approach made use of concepts of a critical plane and the non-local stress fracture criterion, which were extended to study of fracture phenomenon of orthotropic materials, like wood. In order to evaluate of the validity of the derived non-local fracture criterion of wood, a experimental investigation of the mixed mode fracture toughness of pine wood was made. Experiments have been carried out using specimens with single-edge crack. Crack was notched both along the main orthotropy axis and with some inclinations to the main orthotropy axis. The mixed mode conditions were controlled by varying of the quotient between the stress intensity factors associated with mode I and mode II.

Praca naukowa finansowana ze środków budżetowych na naukę w latach 2005-2007, jako projekt badawczy numer 4T07A03028.

WSPÓŁCZYNNIKI INTENSYWNOŚCI NAPRĘŻEŃ W WIERZCHOŁKU ROMBOWEGO OTWORU W ROZCIĄGANEJ PŁASZCZYZNIE

Mykhaylo P. SAVRUK*, Andrzej KAZBERUK*

* Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

savruk@pb.edu.pl, a.kazberuk@pb.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono zależność współczynnika intensywności naprężeń w ostrym wierzchołku otworu w kształcie rombu od kąta wierzchołkowego. Rozważono dwa przypadki obciążenia – jedno- i dwukierunkowe rozciąganie płaszczyzny. Wykorzystując metodę osobliwych równań całkowych otrzymano rozwiązanie dla rozciąganej płaszczyzny sprężystej osłabionej rombownym otworem o wierzchołkach zaokrąglonych łukiem o małym promieniu krzywizny. Przejście graniczne w rozwiązaniu numerycznym umożliwiło uzyskanie wartości współczynników intensywności naprężeń w odpowiednich ostrych narożach dla dowolnych kątów rozwarcia wierzchołka otworu.

1. WPROWADZENIE

Zgodnie z liniową teorią sprężystości w wierzchołkach ostrych naroży powstają nieskończone naprężenia. Również przy małym promieniu krzywizny zaokrąglenia brzegu obszaru sprężystego, powstałe spiętrzenie naprężeń znacznie przekracza wytrzymałość materiału nawet przy stosunkowo niskich poziomach obciążenia. W takich przypadkach do oceny nośności elementu konstrukcji stosuje się metody mechaniki pękania.

Rozwiązywanie zagadnień teorii sprężystości w obszarach, których brzeg nie jest gładki, prowadzi do znacznych trudności matematycznych, wynikających z istnienia osobliwości pola naprężeń w punktach kątowych brzegu (wierzchołkach karbu). Podobne problemy powstają w zagadnieniach koncentracji naprężeń w otoczeniu karbów zaokrąglonych łukami o dużej krzywiznie. Dlatego duże znaczenie mają metody przybliżone rozwiązywania zadań tej klasy na podstawie współczynników koncentracji naprężeń obliczanych w zaokrąglonych wierzchołkach karbów o niewielkim promieniu krzywizny, które otrzymuje się różnymi metodami. W postępowaniu tym, niezbędna jest znajomość zależności o charakterze asymptotycznym pomiędzy współczynnikiem koncentracji naprężeń w wierzchołku karbu zaokrąglonego a współczynnikiem intensywności naprężeń w wierzchołku odpowiedniego ostrego koncentratora naprężeń.

2. ZALEŻNOŚĆ POMIĘDZY WSPÓŁCZYNNIKAMI INTENSYWNOŚCI I KONCENTRACJI NAPRĘŻEŃ DLA KARBÓW OSTRYCH I ZAOKRĄGLONYCH

Przeprowadzone badania własne (Savruk i Kazberuk, 2006) wykazały, że na stosunek współczynników intensywności i koncentracji naprężeń wpływa nie tylko wielkość promienia krzywizny w wierzchołku karbu lecz również kształt karbu w pewnym otoczeniu wierzchołka.

Zależność tą zapisuje się w postaci wzoru:

$$\sigma_{\max} = K_I^V R_I \rho^{-\lambda} / \sqrt{2\pi}, \quad (1)$$

gdzie ρ – promień krzywizny a K_I^V to uogólniony współczynnik intensywności naprężeń w wierzchołku karbu. Występujący tu bezwymiarowy parametr R_I , nazywany również współczynnikiem wygładzenia naprężeń (Bentham 1987), charakteryzuje przejście od współczynnika intensywności naprężeń w wierzchołku karbu ostrego (lub szczeliny), poddanego rozciąganiu typu I, do maksymalnych normalnych naprężeń w wierzchołku karbu zaokrąglonego. Wykładnik osobliwości λ przyjmuje się jako najmniejszy dodatni pierwiastek równania charakterystycznego

$$(1 - \lambda) \sin 2\alpha + \sin(2\alpha(1 - \lambda)) = 0, \quad \alpha = \pi - \beta,$$

gdzie 2β jest kątem rozwarcia karbu.

Wartości współczynnika wygładzenia naprężeń R_I otrzymano rozwiązując zagadnienie nieskończonego klina w płaszczyźnie zadaną w nieskończoności asymptotyką pola naprężeń (Savruk i Kazberuk 2006). Poniżej w tab. 1 podano niektóre wartości parametrów R_I i λ dla karbów o krawędziach prostych zaokrąglonych łukiem kołowym.

Pierwszą zależnością typu (1) był wzór często stosowany w praktyce inżynierskiej do oszacowania wielkości naprężeń maksymalnych w wierzchołku wąskiego U-podobnego karbu

$$\sigma_{\max} = 2K_I / \sqrt{\pi\rho}, \quad (2)$$

gdzie K_I – współczynnik intensywności naprężeń dla szczeliny. W postaci (2) wzór występuje w wielu pracach m.in. Creagera i Parisa (1967) i Neubergera (1977). Łatwo go uzyskać korzystając ze znanego rozwiązania zadania o koncentracji naprężeń wokół otworu eliptycznego (np. Savruk, 1989). Do niedawna uważano, że jest to zależność dokładna. Ostatnio przeprowadzone

badania (Savruk, Kazberuk 2006) dowiodły, że przy jednakowej krzywiznie w wierzchołku uzyskuje się różne zależności dla różnych kształtów konturu karbu.

Tab. 1. Wartości współczynnika R_I dla wybranych kątów rozwarcia karbu 2β

2β	λ	R_I	2β	λ	R_I
0°	0,5000	2,989	75°	0,4753	2,957
1°	0,5000	2,991	90°	0,4555	2,901
5°	0,5000	2,993	105°	0,4261	2,807
10°	0,4999	2,994	120°	0,3843	2,659
15°	0,4998	2,995	135°	0,3264	2,440
30°	0,4985	2,999	150°	0,2480	2,124
45°	0,4950	2,997	165°	0,1427	1,678
60°	0,4878	2,986	180°	0	1,000

Uogólnienie wzoru (1) na przypadki karbów mających w otoczeniu wierzchołka zmienny promień krzywizny (karby paraboliczne, hiperboliczne) publikowało wielu autorów, m. in. Benthem (1987), Lazzarin i Tovo (1996), Filippi i inni (2002), Strandberg (1999). Próby wykorzystania ich zależności do obliczeń współczynników intensywności naprężeń w wierzchołkach karbów ostrych prowadziły do wartości o niewystarczającej dokładności. Stąd konieczność opracowania własnej zależności.

3. KONCENTRACJA NAPRĘŻEŃ WOKÓŁ GŁADKIEGO OTWORU

Rozważa się nieograniczoną płaszczyznę sprężystą osłabioną otworem w kształcie rombu o wierzchołkach zaokrąglonych łukami kołowymi o promieniach ρ_1 i ρ_2 . Całkowitą długość otworu odpowiadającą dłuższej przekątnej rombu, oznaczono $2l$ (rys.1). Zakłada się, że brzeg otworu (gładki kontur L) jest wolny od obciążeń zewnętrznych. Płaszczyzna poddana jest rozciąganiu naprężeniami $\sigma_x^\infty = q$, $\sigma_y^\infty = p$ w nieskończoności.

Potencjały zespolone naprężeń (Muskhelishvili, 2003) przyjęto w następującej postaci:

$$\Phi_*(z) = \Phi_0(z) + \Phi(z), \quad \Psi_*(z) = \Psi_0(z) + \Psi(z), \quad (3)$$

gdzie $\Phi_0(z)$ i $\Psi_0(z)$ – funkcje opisujące jednorodny stan naprężeń w płaszczyźnie sprężystej

$$\Phi_0(z) = (p+q)/4, \quad \Psi_0(z) = (p-q)/2, \quad (4)$$

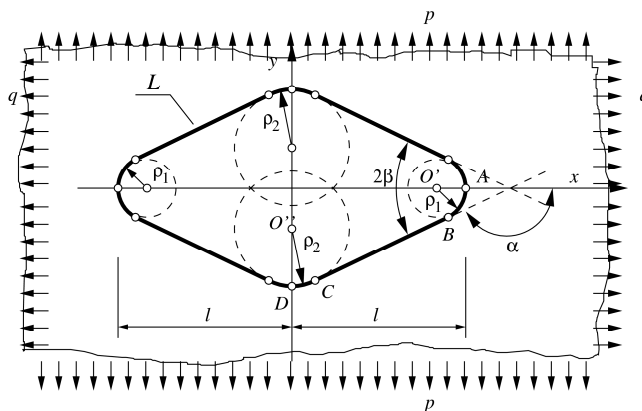
a $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ – określają zaburzenie naprężeń. Poszukuje się przedstawień całkowych potencjałów $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ w następującej postaci (Savruk, 1981):

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{g'(t)}{t-z} dt, \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi z^2} \int_L \left[t g'(t) dt - t \overline{g'(t)} d\bar{t} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{\overline{g'(t)}}{t-z} d\bar{t} - \frac{\bar{t} g'(t)}{(t-z)^2} dt \right] \end{aligned} \quad (5)$$

Wtedy warunek graniczny na brzegu L przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \sigma_n + i\tau_{ns} &= p(t) \\ &= - \left\{ \Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + \frac{dt}{dt} \left[t \overline{\Phi'_0(t)} + \overline{\Psi_0(t)} \right] \right\}, \quad t \in L, \end{aligned} \quad (6)$$

a w nieskończoności naprężenia dążą zera.



Rys. 1. Otwór rombowy w rozciąganej płaszczyźnie

Tak sformułowane zagadnienie brzegowe sprowadza się do rozwiązania osobliwego równania całkowego (Savruk, 1981)

$$\frac{1}{\pi} \int_L [\tilde{K}(t, t') g'(t) dt + \tilde{L}(t, t') \overline{g'(t)} d\bar{t}] = p(t'), \quad t' \in L, \quad (7)$$

którego jądra mają postać

$$\begin{aligned} \tilde{K}(t, t') &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-t'} + \frac{dt'}{dt} \left(\frac{1}{t-t'} - \frac{\bar{t}}{(t')^2} \right) \right) + \frac{1}{l} \cdot \frac{ds'}{dt'}, \\ \tilde{L}(t, t') &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-t'} - \frac{dt'}{dt} \left(\frac{t-t'}{(t-t')^2} - \frac{\bar{t}}{(t')^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie s' jest odciętą łukową punktu t' na brzegu L . W jądrach (8) obecne są dodatkowe zerowe funkcjonały zapewniające w przypadku zamkniętego konturu L jednoznaczność rozwiązania równania całkowego dla dowolnej prawej strony.

Uwzględniając symetrię konturu L względem osi x i y , równanie parametryczne brzegu zapisano w postaci

$$t = l\omega(\xi) = l \begin{cases} \omega_1(\xi), & 0 \leq \xi < \pi/2, \\ -\omega_1(\pi - \xi), & \pi/2 \leq \xi < \pi, \\ -\omega_1(\xi - \pi), & \pi \leq \xi < 3\pi/2, \\ \omega_1(2\pi - \xi), & 3\pi/2 \leq \xi < 2\pi, \end{cases} \quad (9)$$

gdzie funkcja $\omega_1(\xi)$ opisuje kontur L leżący w czwartej ćwiartce układu współrzędnych (kierunek obejścia konturu brzegu jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara).

Dokonując zamiany zmiennych

$$t = l\omega(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi; \quad t' = l\omega(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi$$

równanie całkowe (6) zapisuje się w postaci kanonicznej

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [M(\xi, \eta) u(\xi) + N(\xi, \eta) \overline{u(\xi)}] d\xi = p(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi,$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$M(\xi, \eta) = I\tilde{K}(\omega(\xi), \omega(\eta)), \quad N(\xi, \eta) = I\tilde{L}(\omega(\xi), \omega(\eta));$$

$$u(\xi) = g'(\omega(\xi)) \omega'(\xi), \quad p(\eta) = p(\omega(\eta)).$$

Poszukiwana 2π -okresowa ciągła funkcja $u(\xi)$ ma quasi-osobliwości w otoczeniu wierzchołków rombu, co komplikuje uzyskanie dostatecznie dokładnego rozwiązania dla małych wartości promienia ρ . Ostatnio w celu poprawienia dokładności rozwiązań tego typu równań stosuje się różnorodne nieliniowe odwzorowania zmiennych prowadzące do zagęszczenia węzłów kwadratur całkowania i węzłów kolokacji w otoczeniu wierzchołków otworu. W rozważanym przypadku zastosowano następującą zamianę zmiennych (Johnston, 1999)

$$\xi = G(\tau) = \tau - (1/4) \sin 4\tau, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi;$$

$$\eta = G(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Funkcja $G(\tau)$ jednoznacznie odwzorowuje odcinek $\tau \in [0, 2\pi]$ w odcinek $\xi \in [0, 2\pi]$.

W rezultacie uzyskuje się równanie całkowe postaci

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [M(\xi, \eta) u^*(\tau) + N(\xi, \eta) \overline{u^*(\tau)}] G'(\tau) d\tau = p^*(\theta),$$

gdzie $0 \leq \theta \leq 2\pi$ oraz $u^*(\tau) = u(G(\tau))$, $p^*(\theta) = p(G(\theta))$.

Dyskretnym analogiem równania całkowego jest algebraiczny układ równań liniowych (Savruk, 1981)

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{4n} [M(\xi_k, \eta_m) u^*(\tau_k) + N(\xi_k, \eta_m) \overline{u^*(\tau_k)}] G'(\tau_k) = p^*(\theta_m), \quad (10)$$

gdzie $m = \overline{1, 4n}$ oraz

$$\xi_k = G(\tau_k), \quad \tau_k = \frac{\pi(2k-1)}{4n}, \quad k = \overline{1, 4n};$$

$$\eta_m = G(\theta_m), \quad \theta_m = \frac{2\pi(m-1)}{4n}, \quad m = \overline{1, 4n}.$$

Uwzględniając symetrię zadania względem osi Ox i Oy , rząd układu równań (10) zostaje zmniejszony czterokrotnie. Nakładając warunki wynikające z symetrii na poszukiwaną postać funkcji rozwiązania

$$u^*(2\pi - \tau) = \overline{u^*(\tau)}, \quad u^*(\pi - \tau) = -\overline{u^*(\tau)}, \quad (11)$$

a także warunki zerowania się naprężeń stycznych w punktach leżących na osiach symetrii, otrzymuje się układ n zespolonych równań algebraicznych

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n [M^*(\xi_k, \eta_m) u^*(\tau_k)] G'(\tau_k) = p^*(\theta_m), & m=1, \\ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n [M^*(\xi_k, \eta_m) u^*(\tau_k) + N^*(\xi_k, \eta_m) \overline{u^*(\tau_k)}] G'(\tau_k) = p^*(\theta_m), & m=2, \dots, n, \\ \frac{1}{n} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n [M^*(\xi_k, \eta_m) u^*(\tau_k)] G'(\tau_k) = p^*(\theta_m), & m=n+1 \end{cases} \quad (12)$$

dla n niewiadomych wartości funkcji $u^*(\tau_k)$ ($k = \overline{1, \dots, n}$). Tutaj:

$$M^*(\xi_k, \eta_m) = M(\xi_k, \eta_m) - N(\pi - \xi_k, \eta_m) - M(\pi + \xi_k, \eta_m) + N(2\pi - \xi_k, \eta_m),$$

$$N^*(\xi_k, \eta_m) = N(\xi_k, \eta_m) - M(\pi - \xi_k, \eta_m) - N(\pi + \xi_k, \eta_m) + M(2\pi - \xi_k, \eta_m).$$

Należy zauważyć, że wartości funkcji $p^*(\theta)$ w węzłach $\theta_1 = 0$ i $\theta_{n+1} = \pi/2$ są rzeczywiste;

Po uzyskaniu rozwiązania układu algebraicznych równań liniowych (12) można wyznaczyć zespolone potencjały naprężeń (5), określające stan naprężeń i odkształceń w całej płaszczyźnie sprężystej. Obliczenie wartości naprężenia normalnego σ_s w punktach leżących na brzegu otworu przeprowadza się korzystając bezpośrednio ze znalezionej funkcji $u^*(\tau)$ (Savruk i inni, 1989)

$$\begin{aligned} \sigma_s(t) &= 4 \operatorname{Re} [\Phi_0(t) + \Phi^+(t)] = 4 \operatorname{Re} \Phi_0(t) - 4 \operatorname{Im} g'(t) = \\ &= 4 \operatorname{Re} \Phi_0(t) - 4 \operatorname{Im} [u(\xi)/\omega'(\xi)] = \\ &= 4 \operatorname{Re} \Phi_0(t) - 4 \operatorname{Im} [u^*(\tau)/\omega'(\xi)] \quad t \in L. \end{aligned}$$

Współczynnik koncentracji naprężeń w wierzchołku A (rys.1) otworu oblicza się ze wzoru

$$k_A = -4 \operatorname{Im} [u^*(0)/\omega'(0)],$$

przy czym wartość $u^*(0)$ wyznacza się korzystając z wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a (patrz np. Savruk i inni, 1989)

$$u^*(\tau) = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{4n} u^*(\tau_k) \sin[2n(\tau - \tau_k)] \cot\left(\frac{\tau - \tau_k}{2}\right).$$

Uwzględniając warunki symetrii (11), otrzymano

$$u^*(0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sin \tau_k} \operatorname{Re} u^*(\tau_k).$$

Obliczenia przeprowadzono dla dwóch przypadków obciążenia – jednokierunkowego rozciągania ($q=0$) w kierunku osi Oy (prostopadle do dłuższej przekątnej rombu) oraz wszechstronnego ($q=p$) rozciągania. Przyjęto, że promienie zaokrąglenia wierzchołków są równe $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Kąt rozwarcia ramion rombu 2β określany w wierzchołku A zmieniano w przedziale od 5° do 175° uzyskując stabilne rozwiązania dla $\varepsilon = \rho/l \geq 0,0001$.

Uogólnione współczynniki intensywności naprężeń K_I^V w ostrym narożu otworu obliczono ze wzoru

$$K_I^V = (\sqrt{2\pi}/R_1) \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^\lambda (\sigma_s)_{\max} \quad (13)$$

Przebieg wartości bezwymiarowego współczynnika intensywności naprężeń $F_I^V = K_I^V / (pl^\lambda \sqrt{\pi})$ w funkcji kąta 2β rozwarcia boków rombu przedstawiono na rys. 2.

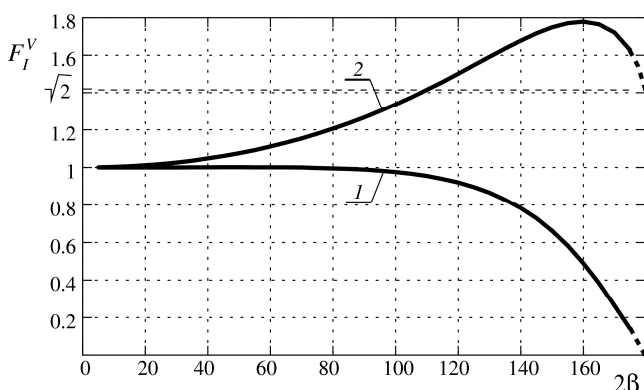
Otrzymane wartości współczynników intensywności naprężeń w wierzchołku rombu poddanego jednokierunkowemu rozciąganiu dobrze zgadzają się z wynikami opublikowanymi przez Dunna i innych (1997) dla kątów $2\beta \leq 150^\circ$ (z krokiem 15°).

W szczególnym przypadku otworu kwadratowego $2\beta=\pi/2$ podstawiając do wzoru (13) współczynniki $R_I = 2,901$ i $\lambda = 0,4555$ otrzymano następujące wzory:

$$K_I^V = 1.266 p l^\lambda \sqrt{\pi} \quad (q = 0),$$

$$K_I^V = 0.989 p l^\lambda \sqrt{\pi} \quad (q = p),$$

które są praktycznie identyczne z opublikowanymi w pracach Noda i inni 1996 i Kraviec' 2002.



Rys. 2. Uogólniony bezwymiarowy współczynnik intensywności naprężeń F_I^V w funkcji kąta wierzchołkowego 2β rombu: 1 - wszechstronne rozciąganie, 2 - jednokierunkowe rozciąganie.

4. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono aplikację metody numerycznego obliczania współczynników intensywności naprężeń w wierzchołku karbu ostrego na podstawie rozwiązania zadania o koncentracji naprężeń w wierzchołku odpowiedniego zaokrąglonego naroża. Otrzymano wartości współczynników intensywności naprężeń w ostrych narożach otworu osłabiającego rozciąganą płaszczyznę. Otwór ma kształt rombu o kącie rozwarcia wierzchołka zmieniającym się od 5° do 175° . Początkowo przyjmuje się gładki brzeg otworu zakładając zaokrąglenie wierzchołków łukami o dużej krzywiznie. Wykorzystując metodę osobliwych równań całkowych i transformacje nieliniowe do numerycznego obliczania całek quasi-osobliwych otrzymano rozkład naprężeń wokół krawędzi otworu przy dowolnej wartości promienia zaokrąglenia wierzchołka. Następnie, na podstawie zależności pomiędzy współczynnikami koncentracji i intensywności naprężeń dla karbów ostrych i zaokrąglonych łukiem kołowym, przechodząc do granicy ($\rho \rightarrow 0$) uzyskano współczynniki intensywności naprężeń w wierzchołku odpowiedniego ostrego naroża. Przeprowadzone porównania szczególnych przypadków z wynikami uzyskiwanymi innymi metodami wykazały wysoką dokładność oraz efektywność obliczeniową prezentowanego podejścia.

LITERATURA

1. **Benthem J.P.** (1987), Stresses in the region of rounded corners, *Int. J. Solids Struct.*, **23**, 239-252.
2. **Creager M., Paris P.C.** (1967), Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking, *Int. J. Fract. Mech.*, **3**, 247-252.
3. **Dunn M.L., Suwito W., Cunningham S.** (1997), Stress intensities at notch singularities, *Eng. Fract. Mech.*, **57**, 417-430.
4. **Filippi S., Lazzarin P., Tovo R.** (2002), Developments of some explicit formulas useful to describe elastic stress fields ahead of notches in plates, *Int. J. Solids Struct.*, **39**, 4543-4565.
5. **Johnston P.R.** (1999), Application of sigmoidal transformations to weakly singular and near-singular boundary element integrals, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **45**, 1333-1348.
6. **Kraviec' V.S.** (2002) Dosлідження напруженого стану нескінченної пластини з квадратним отвором, *Mechanika i fizyka ruinyvaniâ budiveli'nih materialiv ta konstrukcij. L'viv: Kamenâr*, **5**, 95-105.
7. **Lazzarin P., Tovo R.** (1996), A unified approach to the evaluation of linear elastic stress field in the neighbourhood of crack and notches, *Int. J. Fract.*, **78**, 3-19.
8. **Muskhelishvili N.I.** (2003) *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Springer, 768 p.
9. **Neuber H.** (1977), Die halb elliptische Kerbe mit Riss als Beispiel zur Korrelation zur Mikro- und Makrospannungskonzentrationen, *Ing.-Arch.*, **46**, 389-399.
10. **Noda N.-A., Oda K., Inoue T.** (1996), Analysis of newly-defined stress intensity factors for angular corners using singular integral equations of the body force method, *Int. J. Fract.*, **76**, 243-261.
11. **Savruk M.P.** (1981) *Dvumernye zadachi yprugosti dlâ tel s Teresinami*, Nauk. Dumka, 324 s.
12. **Savruk M.P.** (1988) Koëfficienty intensivnosti naprâženij v telah s trešinami, *Meh. razrušenâ i pročnost' materialov, Sprav. posobie pod red. V.V.Panasika*, Nauk. Dumka, 620c.
13. **Savruk M.P., Kazberuk A.** (2006), Zaležnist' miž koëficientami intensivnosti ta koncentracij napružen' dlâ gostryh i zakruglenyh kutovyh vyriziv, *Fiz.-him. mehanika materialiv*, **42**, 56-65.
14. **Savruk M.P., Osiv P.N., Prokopčuk I.V.** (1989), Čislenyj analiz v ploskih zadachah teorii trešin, *Nauk. dumka*, 248 s.
15. **Strandberg M.** (1999), A numerical study of the elastic stress field arising from sharp and blunt V-notches in a SENT-specimen, *Int. J. Fract.*, **100**, 329-342.

STRESS INTENSITY FACTORS FOR DIAMOND-SHAPED HOLE IN ELASTIC PLANE UNDER TENSION

Abstract: The unified approach to solve problems of stress concentration around sharp and rounded diamond shaped hole in elastic plane based on singular integral equation method was proposed. At first, the problem was solved for an elastic domain with diamond hole with rounded vertex of large curvature. The method based on passage to the limit (when curvature radius tends to zero), was used to obtain stress intensity factor at the vertex of sharp diamond hole in a plane under tension. The numerical results of stress intensity factors for a diamond hole of arbitrary vertex angle were discussed.

Pracę wykonano w ramach realizacji projektu nr S/WM/1/03.

PŁASKIE KONTAKTOWE ZAGADNIENIE Z UWZGLĘDNIENIEM TARCIA DLA PÓŁPRZESTRZENI ZE SZCZELINĄ

Mykhaylo SAVRUK*, Adam TOMCZYK*, Aleksander YEVTUSHENKO*

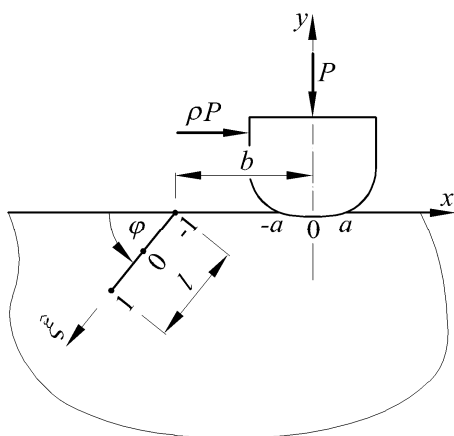
* Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

savruk@pb.edu.pl, atom@pb.edu.pl, ayevt@pb.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono wyniki analizy wpływu przesuwania się dociskanego stempla po powierzchni półprzestrzeni sprężystej, osłabionej pojedynczym pęknięciem. Zaprezentowano układ algebraicznych równań liniowych, do którego można sprowadzić układu równań całkowych reprezentujący zagadnienie ogólne (Savruk i Yevtushenko, 2005). Zbadano wpływ współczynnika tarcia na rozkład naprężeń kontaktowych pod stemplą i wpływ odległości szczeliny od stempla oraz kąta nachylenia szczeliny na wartości współczynników intensywności naprężeń.

1. WPROWADZENIE

Niniejsza praca stanowi kontynuację pracy Savruka i Yevtushenki (2005) dla przypadku szczeliny o długości l , wnikającej jednym z wierzchołków w powierzchnię półprzestrzeni w odległości b od osi symetrii stempla. Założono się, że stempel znajduje się w równowadze pod wpływem siły normalnej P i stycznej ρP , gdzie ρ jest współczynnikiem tarcia. (rys. 1). Na krawędziach szczeliny zadane jest samozrównoważone obciążenie. Kontur szczeliny oznaczono przez L , a strefę kontaktu stempla z powierzchnią półprzestrzeni – L_0 .



Rys. 1. Schemat zagadnienia

Należy znaleźć rozkład ciśnienia pod stemplą oraz wartości współczynników intensywności naprężeń w wierzchołku szczeliny, znajdującym się wewnątrz półprzestrzeni.

2. UKŁAD RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

Układ równań całkowych zagadnienia, otrzymany w sposób analogiczny jak w pracy Savruka i Yevtushenki (2005), ma postać:

$$\varepsilon \rho \sigma(\eta) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(\xi) d\xi}{\xi - \eta} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-1}^1 \left[K_1(\bar{\xi}, \eta) g'(\bar{\xi}) + L_1(\bar{\xi}, \eta) \overline{g'(\bar{\xi})} \right] d\bar{\xi} = F(\eta), \quad |\eta| < 1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[K_2(\bar{\xi}, \bar{\eta}) g'(\bar{\xi}) + L_2(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \overline{g'(\bar{\xi})} \right] d\bar{\xi} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 M(\xi, \bar{\eta}) \sigma(\xi) d\xi = p(\bar{\eta}), \quad |\bar{\eta}| < 1, \quad (2)$$

$$\int_{-1}^1 \sigma(\xi) d\xi = A = -\frac{P}{a}, \quad \int_{-1}^1 g'(\bar{\xi}) d\bar{\xi} = 0. \quad (3)$$

gdzie:

$$K_1(t, x) = \frac{2}{\kappa + 1} \left[\kappa f_{21}(t, x) - \overline{f_{22}(t, x)} - x \overline{g_{22}(t, x)} - \overline{h_{22}(t, x)} \right]$$

$$L_1(t, x) = \frac{2}{\kappa + 1} \left[\kappa f_{22}(t, x) - \overline{f_{21}(t, x)} - x \overline{g_{21}(t, x)} - \overline{h_{21}(t, x)} \right]$$

$$K_2(t, t') = f_{21}(t, t') + \overline{f_{22}(t, t')} + \frac{dt'}{dt} \left[t' \overline{g_{22}(t, t')} + \overline{h_{22}(t, t')} \right]$$

$$L_2(t, t') = f_{22}(t, t') + \overline{f_{21}(t, t')} + \frac{dt'}{dt} \left[t' \overline{g_{21}(t, t')} + \overline{h_{21}(t, t')} \right]$$

$$M(t, t') = f_{11}(t, t') + \overline{f_{11}(t, t')} + \frac{dt'}{dt} \left[t' \overline{g_{11}(t, t')} + \overline{h_{11}(t, t')} \right]$$

$$f_{11}(t, z) = -\frac{1+i\rho}{2i} \frac{1}{t-z}, \quad f_{21}(t, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{\bar{t}-z} \right),$$

$$f_{22}(t, z) = \frac{t-\bar{t}}{2(\bar{t}-z)^2}, \quad g_{11}(t, z) = -\frac{1+i\rho}{2i} \frac{1}{(t-z)^2},$$

$$g_{21}(t, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(t-z)^2} - \frac{1}{(\bar{t}-z)^2} \right),$$

$$g_{22}(t, z) = \frac{t-\bar{t}}{(\bar{t}-z)^3},$$

$$h_{11}(t, z) = -\frac{1}{2i} \left[\frac{1-i\rho}{t-z} - \frac{t(1+i)}{(t-z)^2} \right],$$

$$h_{21}(t, z) = -\frac{\bar{t}}{2} \left(\frac{1}{(t-z)^2} - \frac{1}{(\bar{t}-z)^2} \right),$$

$$h_{22}(t, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{\bar{t}-z} - \frac{(t-\bar{t})(\bar{t}+z)}{(\bar{t}-z)^3} \right),$$

$$F(\eta) = 4G(\kappa+1)df(x)/dx,$$

$$p(\bar{\eta}) = N^\pm(\bar{\eta}) + iT^\pm(\bar{\eta}),$$

$$t = a\xi, \quad x = a\eta, \quad -1 < \xi, \eta < 1, \quad (t, x \in L_0),$$

$$t = a\omega(\bar{\xi}), \quad t' = a\omega(\bar{\eta}), \quad -1 < \bar{\xi}, \bar{\eta} < 1, \quad (t, t' \in L),$$

$$\omega(\bar{\xi}) = -\frac{b}{a} - \frac{l}{2a}(\bar{\xi}+1)e^{i\varphi} = -b^* - \frac{l^*}{2}(\bar{\xi}+1)e^{i\varphi},$$

$$\frac{dt'}{dt} = e^{-2i\varphi}, \quad b^* = b/a, \quad l^* = l/a,$$

$$\varepsilon = (\kappa - 1)/(\kappa + 1), \quad \kappa = 3-4\nu,$$

gdzie G – moduł Kirchhoffa, ν – współczynnik Poissona, $f(x)$ – funkcja, opisująca kształt podstawy stempli, $g'(\zeta)$ – funkcja niewiadoma na konturach szczelin, N i T – normalna i styczna, składowe wektora powierzchniowych naprężeń na brzegach szczelin.

W przypadku półprzestrzeni jednorodnej, bez szczelin, mamy $g'(\zeta)=0$ i układ równań całkowych (1), (2) sprowadza się do jednego równania przy spełnieniu warunku (3). Łatwo zapisać rozwiązanie ogólne tego równania, w niniejszej pracy ograniczymy się tylko do rozwiązania dla stempli o płaskiej podstawie (Galín, 1980; Muskhelishvili, 1962)

$$q(\eta) = \pi^{-1} A \cos \pi \mu. \quad (4)$$

3. UKŁAD LINIOWYCH RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH

Rozwiązania układu równań całkowych (1), (2), spełniających warunki (3), poszukujemy w klasie funkcji, posiadających osobliwości całkowalne (Savruk, 1981):

$$\sigma(\xi) = w(\xi) q(\xi),$$

$$w(\xi) = (1-\xi)^\alpha (1+\xi)^\beta, \quad -1 < \alpha, \beta < 0, \quad (5)$$

$$\alpha = -0.5 + \mu, \quad \beta = -0.5 - \mu, \quad \mu = \arctan \varepsilon \rho,$$

$$g'(\bar{\xi}) = (1-\bar{\xi}^2)^{-0.5} u(\bar{\xi}),$$

gdzie $g(\zeta)$ i $u(\zeta)$ są funkcjami ciągłymi w przedziale domkniętym $[-1, 1]$.

Dla znalezienia nieznanymi funkcji $g(\zeta)$ i $u(\zeta)$ skorzystamy się z metody kolokacji po węzłach Gaussa-Chebysheva (Savruk et al., 1999). W wyniku jej zastosowania do układu równań całkowych (1)-(2) otrzymano układ liniowych równań algebraicznych postaci:

$$\sum_{k=1}^n a_{mk} q(\xi_k) + \text{Im} \sum_{k=1}^{\bar{n}} [b_{1mk} u(\bar{\xi}_k) + c_{1mk} \overline{u(\bar{\xi}_k)}] = F(\eta_m), \quad (6)$$

$$m = 1, \dots, n-1,$$

$$\sum_{k=1}^{\bar{n}} [b_{2mk} u(\bar{\xi}_k) + c_{2mk} \overline{u(\bar{\xi}_k)}] + \sum_{k=1}^n d_{mk} q(\xi_k) = p(\bar{\eta}_m), \quad (7)$$

$$m = 1, \dots, \bar{n}-1$$

$$\sum_{k=1}^n a_{nk} q(t_k) = A, \quad \sum_{k=1}^{\bar{n}} u(\bar{\xi}_k) = 0, \quad (8)$$

gdzie współczynniki określono jak niżej:

$$a_{mk} = -\frac{1}{n} (-1)^k \sqrt{1-\xi_k^2} \left\{ \frac{X_0}{1-\eta_m} \left[\frac{1}{1-\xi_k} - \frac{T_n(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{R_0}{1+\eta_m} \left[\frac{(-1)^n}{1+\xi_k} + \frac{T_n(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} \right] + X_3(\eta_m) + X_4(\eta_m) \frac{T_n(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} \right\}$$

$$a_{nk} = \frac{\pi}{n} \sqrt{1-\xi_k^2} \left[w(\xi_k) - (-1)^k \frac{X_0}{1-\xi_k} + (-1)^{k+n} \frac{R_0}{1+\xi_k} \right]$$

$$b_{1mk} = \frac{1}{\bar{n}} K_1(\bar{\xi}_k, \eta_m) \quad b_{2mk} = \frac{1}{\bar{n}} K_2(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_m)$$

$$c_{1mk} = \frac{1}{\bar{n}} L_1(\bar{\xi}_k, \eta_m) \quad c_{2mk} = \frac{1}{\bar{n}} L_2(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_m)$$

$$d_{mk} = \frac{1}{n} \sqrt{1-\xi_k^2} [M(\xi_k, \bar{\eta}_m) w(\xi_k) - (-1)^k \frac{X_0 M(1, \bar{\eta}_m)}{1-\xi_k} + (-1)^{n+k} \frac{R_0 M(-1, \bar{\eta}_m)}{1+\xi_k}]$$

$$X_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{2\alpha}{\sin \pi \alpha} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X(\xi_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \right]$$

$$R_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{2\beta}{\sin \pi \beta} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R(\xi_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \right]$$

$$X_1(x) = \frac{1}{2} \left[X(x) \cot \pi \alpha - \frac{1}{\sin \pi \alpha} - R(x) \cot \pi \beta + \frac{1}{\sin \pi \beta} \right]$$

$$X_3(x) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n w(\xi_r) \sqrt{1 - \xi_r^2} F(x, \xi_r, \xi_k),$$

$$X_4(x) = \varepsilon \rho w(x) + X_1(x),$$

$$X(x) = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^\alpha, R(x) = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^\beta,$$

$$F(x, \xi_r, \xi_k) = \begin{cases} \frac{T_n(x)}{(x - \xi_k)(x - \xi_r)}, & x \neq \xi_k, x \neq \xi_r, \xi_k \neq \xi_r, \\ -\frac{n(-1)^r}{\sqrt{1 - \xi_r^2}(\xi_r - x)} + \frac{T_n(x)}{(\xi_r - x)^2}, & x \neq \xi_k = \xi_r. \end{cases}$$

$$\xi_k, \bar{\xi}_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad \eta_m, \bar{\eta}_k = \cos \frac{\pi m}{n},$$

przy czym $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ jest wielomianem Chebysheva pierwszego rodzaju stopnia n .

W wyniku rozwiązywania układu równań liniowych (6)-(8) znajdujemy wartości funkcji $q(\xi)$ oraz $u(\xi)$ odpowiednio w węzłach ξ_k i $\bar{\xi}_k$. Wtedy za pomocą interpolacyjnego wielomianu Lagrange'a dla węzłów $\bar{\xi}_k$ znajdujemy wartości funkcji $u(\xi)$ w dowolnym punkcie

$$u(\xi) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k u(\xi_k) \sqrt{1 - \xi_k^2} \frac{T_n(x)}{\xi - \xi_k}, \quad -1 \leq \xi \leq 1. \quad (9)$$

a w szczególności

$$u(1) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{\frac{1 + \bar{\xi}_k}{1 - \bar{\xi}_k}} u(\bar{\xi}_k). \quad (10)$$

Współczynniki intensywności naprężeń w wierzchołku szczeliny $\bar{\xi} = 1(K_{I,II}^+)$ wyznaczamy według wzoru (Savruk, 1981):

$$K_I - iK_{II} = -\sqrt{\pi a} |\omega'(1)| \frac{u(1)}{\omega'(1)}. \quad (11)$$

Podstawiając wartości $u(1)$ daną zależnością (10) i $\omega'(1) = -0.5le^{i\varphi}$ do równania (11) otrzymujemy:

$$K_I - iK_{II} = -\sqrt{\frac{2\pi a}{l^*}} e^{-i\varphi} u^*(1). \quad (12)$$

przy czym $u^*(1) = u(1)/A$.

3. ANALIZA NUMERYCZNA I WYNIKI

Obliczenia przeprowadzono dla przypadku wciskania w powierzchnię półprzestrzeni stępła o płaskiej podstawie o długości $2a$. Założono także, że brzegi szczeliny są wolne od obciążeń ($N = T = 0$)

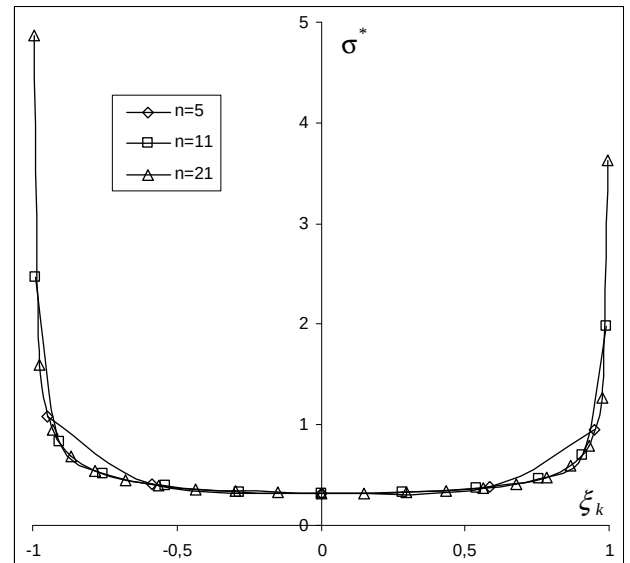
Bezwymiarowymi parametrami wejściowymi zagadnienia są $l^* = l/a$, $b^* = b/a$, oraz kąt nachylenia szczeliny φ i liczba węzłów kolokacji $n = \hat{n}$.

Na poniższych rysunkach przedstawiono wyniki

rozwiązania układu równań algebraicznych (6)-(8) ze względu na wartości naprężeń pod stępłem. Należy podkreślić, że prezentowane wykresy sporządzono w układach bezwymiarowych. Wartość naprężeń pod stępłem odniesiono do parametru A ($\sigma^* = \sigma/A$), podobnie obliczenia przeprowadzono dla unormowanych wartości $u^*(\bar{\xi}_k) = u(\bar{\xi}_k)/A$. Chcąc uzyskać bezwymiarowe wartości współczynników intensywności naprężeń K_i^* unormowano je w następujący sposób: $K_i^* = K_i A / \sqrt{a}$.

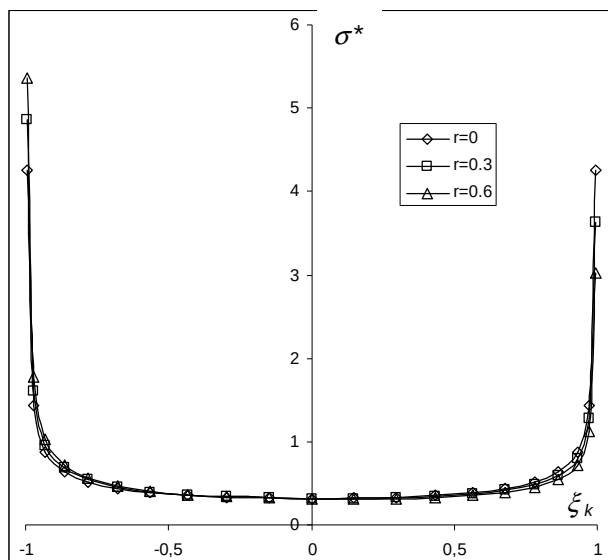
Rysunek 2 obrazuje zbieżność rozwiązania układu równań (6)-(8). Warto zauważyć, że w zasadzie dla liczby węzłów kolokacji wynoszącej 20 uzyskano już dobrą zbieżność. Na rysunku 3 pokazano wpływ wartości współczynnika tarcia na rozkład naprężeń kontaktowych. Łatwo zauważyć, że dla zagadnienia bez tarcia mamy niemal idealnie symetryczny rozkład naprężeń. Wzrost współczynnika tarcia wyraźnie powoduje zaburzenie tej symetrii. Wartości naprężeń w kierunku przesuwania się stępła maleją wraz ze wzrostem współczynnika tarcia.

Kolejne rysunki przedstawiają wyniki analizy parametrycznej obrazującej wpływ odległości szczeliny od osi stępła oraz jej długości na wartości współczynników intensywności naprężeń K_I i K_{II} . Łatwo zauważyć, że charakter obu rysunków jest zbliżony.

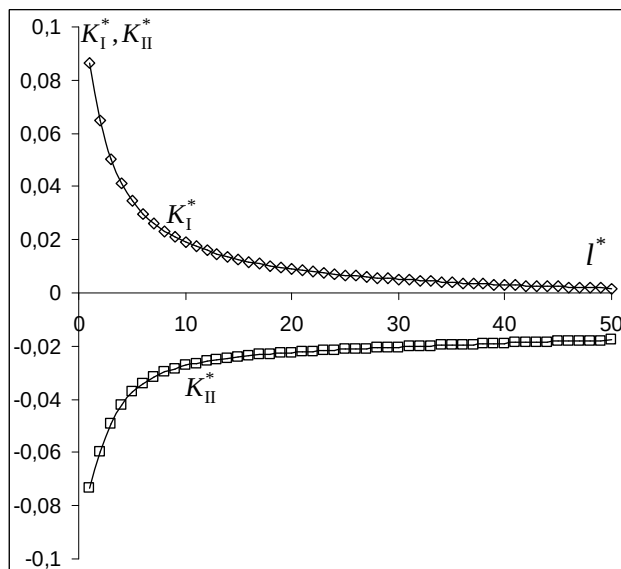


Rys. 2. Zbieżności rozwiązania układu równań w postaci rozkładów naprężeń pod stępłem dla różnych ilości węzłów kolokacji ($\nu = 0.3$, $\rho = 0.3$, $b^* = 5$, $l^* = 1$, $\varphi = 30^\circ$)

W tabeli 1 przedstawiono zależność współczynników intensywności naprężeń od kąta pochylenia szczeliny. Jesteśmy w stanie zaobserwować, że w raz ze wzrostem wartości kąta φ wartości współczynnika K_I wyraźnie wzrastają. W przypadku współczynnika K_{II} obserwujemy jego wzrost w przedziale od 0° do 45° , zaś po przekroczeniu wartości 45° - spadek wartości.



Rys. 3. Wpływ współczynnika tarcia na rozkład naprężeń pod stemplem ($n = 21, \nu = 0.3, b^* = 5, l^* = 1, \varphi = 30^\circ$)



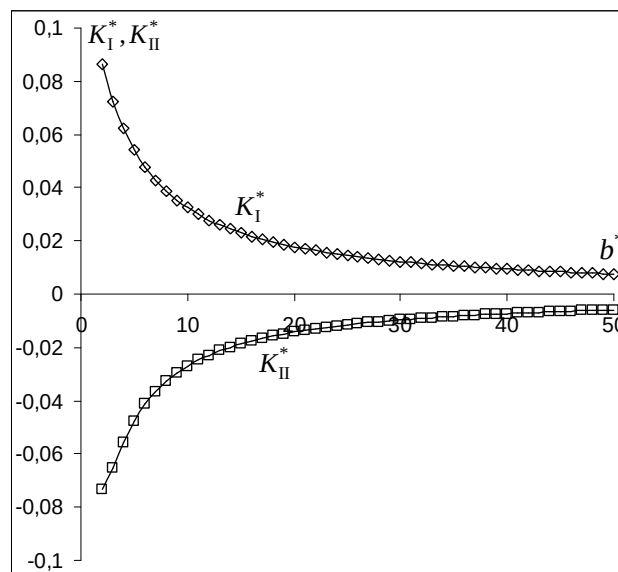
Rys. 4. Wpływ długości szczeliny na wartość współczynników intensywności naprężeń przed jej wierzchołkiem ($n = 21, \nu = 0.3, b^* = 2, \varphi = 45^\circ, \rho = 0.3$)

Tab. 1. Wartości współczynników intensywności naprężeń w funkcji kąta nachylenia szczeliny ($n = 21, \nu = 0.3, b^* = 5, l^* = 1, \rho = 0.3$)

$\varphi [^\circ]$	K_I^*	K_{II}^*
10	0.01996	-0.01880
30	0.04257	-0.02533
45	0.05414	-0.04756
60	0.07882	-0.02691
80	0.09648	-0.02018

Podsumowując należy stwierdzić, że przedstawiona w pracy metoda może być z powodzeniem stosowana do wyznaczania wartości współczynników intensywności naprężeń i rozkładów naprężeń kontaktowych w tego typu

zagadnieniach. Warto wspomnieć, że odpowiednia modyfikacja przedstawionych rozwiązań może pozwolić na analizę np. zagadnień w których występuje szczelina krzywoliniowa, układ szczelin czy też owalne otwory lub układy tych otworów.



Rys. 5. Wpływ odległości stempla od szczeliny na wartość współczynników intensywności naprężeń przed jej wierzchołkiem ($n = 21, \nu = 0.3, \varphi = 45^\circ, \rho = 0.3, l^* = 1$)

LITERATURA

1. Galin L.A. (1980), *Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity*, Nauka, Moscow, (in Russian).
2. Muskhelishvili N.I. (1962), *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. M.: Nauka, Moscow, (in Russian).
3. Savruk M.P. (1981), *Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks*, Naukova Dumka, Kiev, (in Russian).
4. Savruk M.P., Madenci E., Shkarayev S. (1999), Singular integral equations of the second kind with generalized Cauchy-type kernels and variable coefficients, *Int. J. Num. Methods in Engng.*, Vol. 45, No. 10, 1457-1470.
5. Savruk M., Yevtushenko A. (2005), Płaskie zagadnienie kontaktowe dla półprzestrzeni ze szczelinami z uwzględnieniem tarcia w strefie kontaktu, *Materiały III Sympozjum Mechniki Zniszczenia Materiałów i Konstrukcji, Augustów 2005*, Wydaw. Polit. Białostockiej, 357-360.

PLANE CONTACT PROBLEM FOR SEMI-SPACE WITH CRACK TAKING INTO ACCOUNT FRICTION EFFECT

Abstract: The paper is concerned on effects produced by moving of punch pressed down to semi-space surface including single crack. Integral equations system represents general problem described by Savruk and Yevtushenko (2005) has been reduced to system of linear algebraic equations. Influence of friction coefficient on contact stress distribution and also dependence of crack angle and distance between crack and punch is discussed.

WZORCOWANIE WSPÓŁRZĘDNOŚCIOWYCH RAMION POMIAROWYCH (WRP)

Jerzy SŁADEK*, Grzegorz SOKAL**, Ksenia OSTROWSKA*, Artur KMITA*

* Politechnika Krakowska, Instytut Technologii Maszyn i Automatyzacji Produkcji,
Laboratorium Metrologii Współrzędnościowej, al. Jana Pawła II 37, 31-864 Kraków

** Akademia Pedagogiczna im. KEN w Krakowie, Wydział Matematyczno-Fizyczno-Techniczny,
Katedra Informatyki i Metod Komputerowych, ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków

sladek@mech.pk.edu.pl, Sokal@inf.ap.krakow.pl,
Ostrowska@m6.mech.pk.edu.pl, kmita@m6.mech.pk.edu.pl

Streszczenie: Wzrost wymagań odnośnie jakości produkcji przy często zmieniającym się jej asortymencie stwarza warunki wykorzystania uniwersalnych narzędzi pomiarowych takich jak systemy współrzędnościowe. Konieczność objęcia pomiarem miejsc trudno dostępnych dla klasycznych maszyn pomiarowych wymaga stosowania systemów z rotatorycznymi parami kinematycznymi. Do najpowszechniej obecnie stosowanych systemów można zaliczyć roboty przemysłowe przystosowane do zadań pomiarowych oraz przede wszystkim współrzędnościowe ramiona pomiarowe (WRP). Planując wykorzystanie tego typu urządzeń pomiarowych należy przeanalizować ich dokładność w warunkach kontrolnego pomiaru długości. W artykule zaproponowano wykorzystanie norm oraz zaleceń dotyczących sprawdzania i wzorcowania współrzędnościowych maszyn pomiarowych do zadania wzorcowania WRP. Przeprowadzona kalibracja WRP z wykorzystaniem płyty kulowej posłużyła jako punkt wyjściowy do określenia obszaru błędów granicznych (MPE) i niepewności wyznaczenia błędu wskazania. Słowa kluczowe: Współrzędnościowe Ramiona Pomiarowe, niepewność pomiaru, kalibracja, MPE_p, MPE_E.

1. WPROWADZENIE

Pierwsze ramiona pomiarowe zostały opatentowane w roku 1973. Początkowo zakres ich zastosowań ograniczał się do pomiaru elementów instalacji, rur czy prostego odtwarzania wymiarów modeli, przez projektantów form przemysłowych. Szybko jednak zauważono ich zalety, oraz dostrzeżono potencjalnie szeroki zakres zastosowań, jako systemów mobilnej metrologii współrzędnościowej. Wykorzystanie, bowiem, ramion pomiarowych jako narzędzi mobilnej kontroli dokładności pozwala na znaczne przyspieszenie procesu pomiaru bezpośrednio na stanowisku wytwarzania czy montażu. Szczególnie w ostatnich latach zauważamy intensywny rozwój tej techniki. Związane jest to ze wzrostem wymagań jakościowych w obszarze przemysłu samochodowego, lotniczego czy elektro- mechanicznego, co prowadzi do koniecznej specyfikacji wymagań wymiarowo-kształtowych i związanej z tym technologii pomiarów. Powstaje, więc, zapotrzebowanie na systemy mobilne takie właśnie jak ramiona pomiarowe (Ratajczak, 2005).

Wiadomo jest, że uzyskiwane wyniki pomiarów są wtedy przydatne z punktu widzenia szeroko rozumianej kontroli jakości (z zastosowaniem konstrukcji, technologii, wytwarzania), gdy są podawane z określeniem ich dokładności. Kluczową rolę odgrywa tu urządzenie pomiarowe. W przypadku WRP jest to zadanie szczególnie trudne i nie zawsze jednoznaczne. Przeprowadzone badania miały na celu opracowania metody wzorcowania i określenie obszaru maksymalnych błędów granicznych MPE (*Maximum Permissible Errors*) dla ramion

pomiarowych. Badania przeprowadzono we współpracy z firmą Hexagon Metrology Poland z wykorzystaniem WRP firmy ROMER.

1.1 Maszyny współrzędnościowe, a ramiona pomiarowe

Współrzędnościowe ramiona pomiarowe WRP są to systemy, które nie posiadając par kinematycznych przesuwnych, tylko obrotowe, wykraczają poza klasyfikację przyjętą w normie ISO 10360. W normie tej podano następującą definicję: „współrzędnościowa maszyna pomiarowa jest urządzeniem, którego zespoły realizujące pomiar przemieszczają się w określonych współrzędnych z tym, że minimum jeden z nich realizuje przesuw”. Ramiona pomiarowe nie spełniają, więc, tego wymogu, lecz ze względu na funkcje pomiarowe oraz obszar zastosowań powinno się je zaliczyć do systemów współrzędnościowych. Dlatego też istnieje konieczność powiązania z WMP i dążenia do opracowania norm i zaleceń odnośnie sprawdzenia ich dokładności, tak by możliwe było ich porównanie. Podobny problem występuje w przypadku wykorzystywania robotów przemysłowych do zadań pomiarów współrzędnościowych. Przykładem może być adaptacja Robota Przemysłowego Comau Smart 3S do wykonywania zadań pomiarowych i poszukiwanie metod wzorcowania takiego systemu. Przeprowadzone badania wykazały celowość i zasadność adaptacji techniki wzorcowania charakterystycznej dla WMP do wzorcowania urządzeń nie posiadających przesuwnych par kinematycznych.

2. DOKŁADNOŚĆ RAMION POMIAROWYCH - TESTY PRODUCENTÓW

Przeprowadzane przez producentów badania celem ustalenia błędu granicznego ramion pomiarowych obejmują:

A. Test pojedynczego punktu na kuli kalibracyjnej

Test ten polega na pomiarze kuli wzorcowej. Z zebranych punktów obliczana jest sfera skojarzona metodą najmniejszych kwadratów, skorygowana o promień teoretyczny końcówki.

B. Test powtarzalności punktu

Test ten jest używany do określenia powtarzalności WRP. Stożek umieszczony jest w obszarze pomiarowym WRP, a następnie zbierane są punkty przy wychyleniu ramienia w różnych kierunkach. Z tak zebranych punktów oblicza się położenie punktu średniego i odległość każdego punktu od niego. Jako wynik oblicza się podwojoną wartość odchylenia standardowego eksperymentalnego z uzyskanych odległości.

C. Test przestrzennej dokładności liniowej

Przestrzenna dokładność pomiaru długości jest określana przy pomocy wzorcowego liniału otworowego (dostarczanego z każdym ramieniem np. w przypadku firmy Romer), mierzonego w różnych położeniach i orientacjach w przestrzeni pomiarowej ramienia (Sokal, 2005).

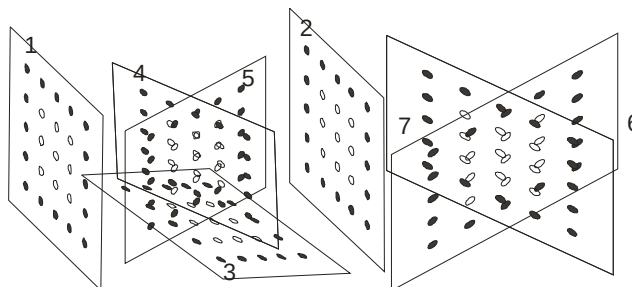
Zaprezentowane testy, nie doczekały się do tej pory powszechnie akceptowanych opracowań normalizacyjnych. Sposób przeprowadzania pomiarów oraz ich specyfikacja dotycząca danego producenta WRP uwiaryściły potrzebę przeanalizowania dostępnych normy i zaleceń dotyczących współrzędnościowych maszyn pomiarowych jako systemów o podobnym obszarze zastosowań. Postanowiono zaadaptować tu zalecenie VDI/VDE 2617-5 opracowane wspólnie przez PTB i Volkswagen AG, które pozwala na wykorzystywanie w pomiarach sprawdzających wykalibrowanej płyty kulowej lub otworowej. Wykalibrowane są tu współrzędne środków kul lub otworów. Przedmiotem zaś sprawdzenia są kombinacje długości będących odległościami środków poszczególnych otworów lub kul, przez co uzyskuje się podobny efekt jak przy wykorzystaniu wzorców końcowych. Technologia pomiarów z wykorzystaniem płyt kulowych odpowiada technice pomiarów z wykorzystaniem ramion i ich możliwością wyboru punktu styku dla możliwie różnych konfiguracji ramienia. Należy zaznaczyć, że wykorzystanie płyt otworowych granitowych do zadania oceny dokładności lokalizacji poszczególnych otworów z wykorzystaniem ramion pomiarowych podjęto już w pracy (Tyka i Góralczyk, 2006).

3. METODA KALIBRACJI I SPRAWDZANIA RAMION POMIAROWYCH

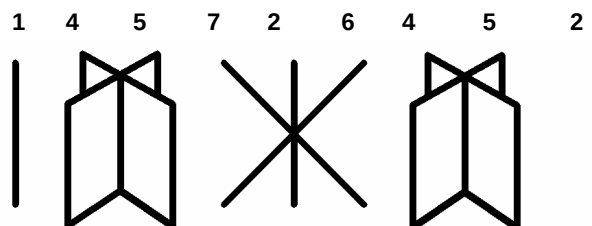
3.1. Koncepcja metody

Jak podano w poprzednim rozdziale, w wyniku dokonanej analizy, przyjęto pomysł procedury wzorcowania a następnie sprawdzenia WRP wykorzystującej płytki

wzorcowe kulowy. Istotne jest, że kształt geometryczny wzorca kulowego pozwala na sprawdzenie systemów redundantnych takich jak WRP. Ponadto wzorce te są wykorzystywane zgodnie z zaleceniami VDI/VDE 2617-5 do sprawdzenia współrzędnościowych maszyn pomiarowych. Pozwala to na podjęcie w dalszych badaniach zadania porównania dokładności WMP i ramion pomiarowych w ramach wspólnego testu. W pracach nad procedurą wzorcującą wykorzystano też normę ISO 10360-2 oraz ISO/TS23165:2006(E) dotyczącą wyznaczania niepewności maszyn pomiarowych. Adaptując te normy i zalecenia do specyfiki WRP, uwzględniono też konstrukcję ramion i praktykę pomiarową w wyniku czego zaproponowano zestaw położeń wzorca pokrywający jego zakres pomiarowy. Ponadto zgodnie ze Śladek (2001), współrzędnościowe ramie pomiarowe podobnie jak, a WMP, powinny być traktowane jako jeden wspólny system składający się z części mechanicznej, systemu stykowego, oprogramowania oraz operatora. Wpływ tych elementów jest wyraźny w każdym zidentyfikowanym punkcie pomiarowym. Wyznaczenie błędu wskazania E jest oparte na porównaniu wartości wzorcowych z wartościami wskazanymi przez WRP. Przedmiotem oceny są odległości (długości) pomiędzy wyznaczonymi środkami kul. W wyniku badań ustalono, iż do wyznaczenia błędu wskazania wystarczy 16 kul, usytuowanych na obrzeżach wzorca. Uwzględniając optymalną ze względu na czas pomiarów metodykę, oraz wymogi możliwie pełnego pokrycia przestrzeni pomiarowej WRP przyjęto - zgodnie z Rys. 1a siedem położeń wzorca w różnych kierunkach w przestrzeni pomiarowej, gdzie pomiary powtarzane są trzy krotnie.



Rys. 1a. Ustawienie płyty w przestrzeni pomiarowej



Rys. 1b. Ustawienie płyty na całej długości pola pomiarowego

Rys. 1b. przedstawia sposób ułożenie płyty wzorcowej, na całej długości obszaru pomiarowego WRP. Dla pełnej weryfikacji kinematyki urządzenia układ został powtarzany przy trzech różnych zamocowaniach obracanych o 120° , przy podstawie. Ostatnie zamocowanie urządzenia jest usytuowane na poziomie o 400 mm niższym, od mierzonego elementu.

3.2. Kalibracja wzorca

Do badań użyto, stalowy wzorec płytowy o wymiarach 250x250 mm opracowany i zbudowany w Laboratorium Metrologii Współrzędnościowej na Politechnice Krakowskiej. We wzorcu zamocowano 25 kul, w pięciu rzędach po pięć w każdym rzędzie. Współrzędne środków kul zostały wyznaczone, w lokalnym układzie współrzędnych wzorca, w wyniku wzorcowania na dokładnej WMP - PMM 12106 Leitz z wykorzystaniem techniki *swing-round* (Śladek, 2001) w warunkach stabilizacji termicznej $\pm 0.1K$. Uzyskana niepewność wzorca wynosi:

$$U(\varepsilon_{cal}) = 0.88 + 0.002 \cdot L, \quad (1)$$

gdzie L to odległość poszczególnych środków kul wzorca w [mm].

3.3. Błąd systemu stykowego

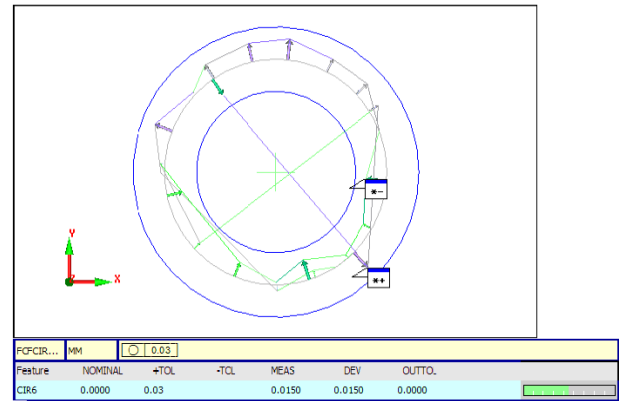
Błąd wskazania systemu stykowego P wyznaczono w oparciu o procedurę zgodną ISO 10360-2. Gdzie $P = R_{max} - R_{min}$ jako odległości promieniowe od gaussowskiego elementu odniesienia. Jako element wzorcowy zaleca się wybrać kulę bądź pierścień wzorcowy ze średnicą nominalną nie mniejszą niż 10 mm i nie większą niż 50mm o określonych i potwierdzonych certyfikatem błędach kształtu F . Celem wyznaczenia błędu wskazania P przyjęto wykonanie pomiaru w 25 punktach i obliczenie metodą najmniejszych kwadratów wg Gaussa elementu najlepszego dopasowania i wyznaczenia długość promienia okręgu wyrównawczego R .

Niepewność rozszerzona wyznaczenia błędu P związana jest z charakterystyka elementu wzorcowego następującą zależnością zgodnie z ISO/TS 23165:2006(E):

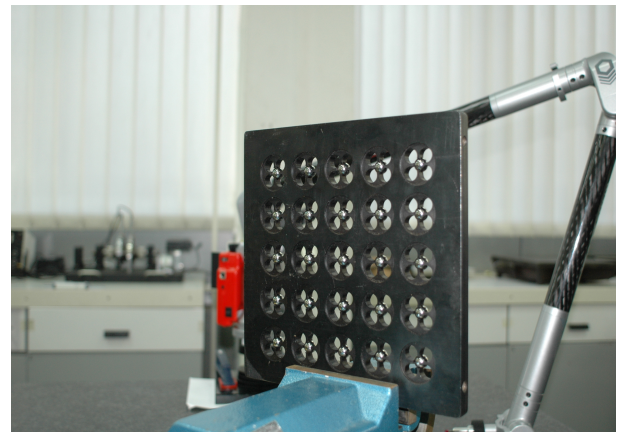
$$U_g = 2 \sqrt{\left(\frac{F}{2}\right)^2 + u^2(F)} \quad (2)$$

gdzie:

F - jest to błąd kształtu wzorca kulistego lub pierścieniowego,
 $U(F)$ –niepewność standardowa wyznaczonego błędu kształtu wzorca kulistego.



Rys.2. Błąd wskazania elementu stykowego



Rys. 3. Płytowy wzorec kulowy użyty do pomiarów

Określony maksymalny błąd elementu stykowego wyniósł: $P = 15,5 \mu m$.

W badaniach wykorzystywano sztywną końcówkę stykową o średnicy 6 mm. Podobną procedurę należy wykorzystać w przypadku stosowania głowicy elektrostatycznej (np. Renishaw lub TESA).

W przypadku procedury sprawdzania opartej o potwierdzenie obszaru błędów granicznych dopuszczalnych zgodnie z ISO 10360 błąd graniczny dopuszczalny głowicy pomiarowej ramion, mpe_p , należy określić jako:

$$MPE_p = 15.5 \mu m \geq P \quad (3)$$

3.4. Niepewność pomiaru temperatury

Przyjęto zakres zmian temperatury w granicach osiągalnych dla dokładnie klimatyzowanego laboratorium to jest $\pm 0,1[K]$.

Niepewność pomiaru temperatury wzorca określono dla zmiany temperatury ΔT_w , przy przyjętym współczynniku rozszerzalności mierzonego wzorca płytowego α_w :

$$u(\varepsilon_w) = \Delta T_w \cdot \alpha_w = 0,1K \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} [\mu m K^{-1}] = 0,51 [\mu m] \quad (4)$$

W przypadku, gdy korekcja temperatury przedmiotu nie zostanie przyjęta, będziemy musieli przyjąć ΔT_w ,

określając maksymalne odchylenia temperatury przedmiotu od temperatury odniesienia 20 °C (ISO/TS 23165:2006(E)).

3.5. Maksymalny błąd graniczny wyznaczany dla pomiaru długości MPE

Przeprowadzone badania i analiza pozwoliły na wyznaczenie błędu wskazania E , niepewności jego wyznaczenia $U(E)$, MPE_E , oraz MPE_p dla WRP o zakresie pomiarowym $\pm 1.25[m]$. Wartości E błędu wskazania w warunkach ustalonych tj. przy założeniu minimalizacji wpływu strategii pomiarowej i stabilizacji warunków zewnętrznych dopuszczone przez warunki techniczne lub wymagania stosowania nie przekracza pewnego obszaru, który może być wyznaczony jako obszar błędów granicznych dopuszczalnych MPE. Na osi odciętych naniesiona jest wartość wzorcowa mierzonej długości w [mm], dla której dokonywany był pomiar wzorcujący. Oś rzędnych opisuje wartości błędu wskazania E . Posuwając się wzdłuż badanej osi wyznacza się wartości błędów dla kolejnych zmierzonych długości.

Sumaryczny błąd wskazania E dla pomiaru długości przedstawia następujące równanie:

$$E = x_{wskaz} - x_{kal} \quad (5)$$

gdzie ogólnie:

x_{wskaz} - wartość wielkości wskazana, x_{kal} - wartość wielkości wzorcowa

w wyniku pomiarów uzyskano wartości wskazania E i dla nich określono równanie błędów granicznych MPE

$$E = A + K/L \quad (6)$$

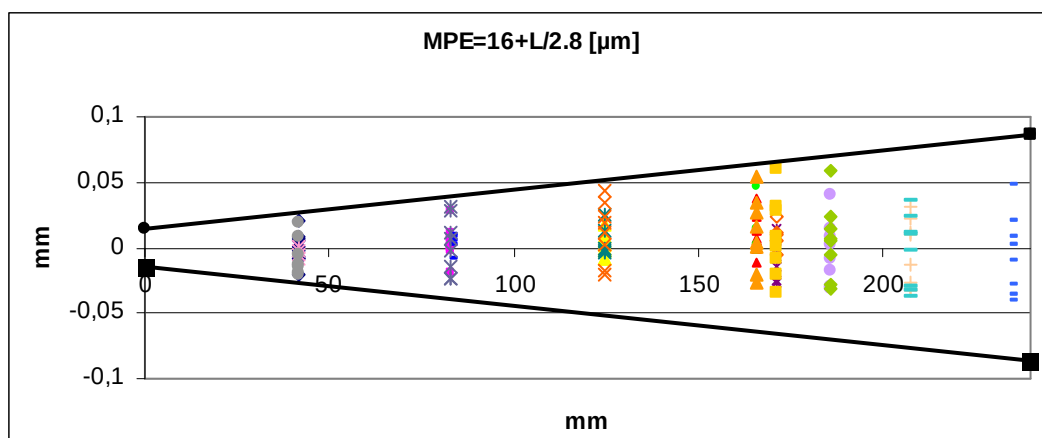
gdzie:

$A = 15.034 [\mu m]$

$K = 2.8 [\mu m]$

Do obliczenia całkowitego obszaru błędu pomiaru długości konieczne jest, więc uwzględnienie błędów wskazania w poszczególnych obszarach, wykonując pomiary w jednym zamocowaniu ramienia i przy narastających wartościach przemieszczenia ramienia można było określić całkowity obszar błędów MPE jako:

$$MPE = 16 + L/2.8 [\mu m] \quad (7)$$



Rys.4. Wybrany wykres MPE dla ramienia pomiarowego w zakresie użytego wzorca płytowego

Na wykresie zaprezentowano wybrane wyniki dla jednego z położeń płyty.

3.6. Procedura wyznaczania niepewności błędu wskazania $u(E)$

Procedura wyznaczenia niepewności błędu wskazania $u(E)$ polega na obliczeniu wszystkich składowych niepewności pomiaru i jest konieczna dla wyznaczenia obszaru błędów granicznych MPE

$$u(E) = \sqrt{u^2(\varepsilon_{cal}) + u^2(\varepsilon_{\alpha}) + u^2(\varepsilon_t) + u^2(\varepsilon_{align}) + u^2(\varepsilon_{fixt})} \quad (8)$$

gdzie:

$u(\varepsilon_{cal})$ – niepewność kalibracji użytego wzorca,

$u(\varepsilon_{\alpha})$ – niepewność wyznaczenia współczynnika rozszerzalności liniowej wzorca,

$u(\varepsilon_t)$ – niepewność temperatury,

$u(\varepsilon_{align})$ – niepewność wyznaczenia układu współrzędnych,

$u(\varepsilon_{fixt})$ – niepewność mocowania przedmiotu.

Tab.1. Specyfikacja WRP i warunków otoczenia

WRP	Zakres pomiarowy MPE _P MPE _E Kompensacja temperaturowa	2025 mm 15 μm 16+L/2.8 μm brak
Wzorzec pierscieniowy	Błąd kształtu, F	(0.06± 0.1) μm
Wzorzec płytowy	Niepewność kalibracji wzorca Współczynnik rozszerzalności cieplnej	0.88+0.002*L 11,5 10 ⁻⁶ μm

Niepewność standardowa wzorca wynosi:

$$u_g = \sqrt{\left(\frac{0.06}{2}\right)^2 + (0.1)^2} = 0.1 \mu\text{m} \quad (9)$$

Niepewność rozszerzona:

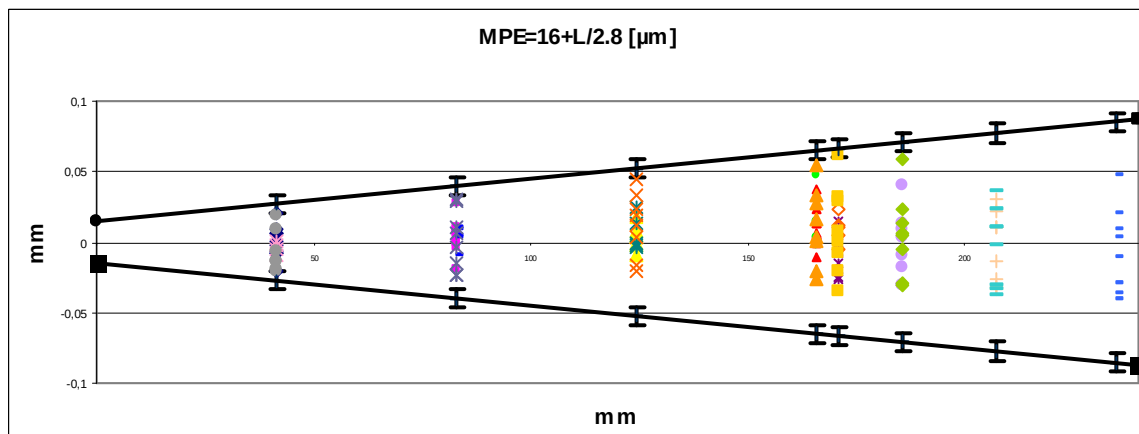
$$U_g = k \cdot u(P) = 2 \cdot 0.1 = 0.2 \mu\text{m} \quad (10)$$

Według normy ISO/TS 23165:2006(E) składniki niepewności $u(\varepsilon_{align})$, oraz $u(\varepsilon_{fixt})$ należy redukować do minimum, stosując różne strategie pomiarowe. Składnik $u(\varepsilon_{align})$ można pominąć, jeśli układ współrzędnych wzorca przy jego kalibracji, był taki sam jak przy pomiarach sprawdzających. Również $u(\varepsilon_{fixt}) = 0$ jeśli zamocowanie przy pomiarach nie było zmienione.

Poniżej w tabeli 2 zaprezentowano budżet wyznaczenia niepewności błędu wskazania $u(E)$.

Tab. 2. Budżet niepewności pomiaru WRP

L, mm	41.46	82.99	124.44	165.95	171.08	185.5	207.45	235.00
	3	2	3	6	8	6	2	2
$u(\varepsilon_{cal}), \mu\text{m}$	0.48	0.53	0.56	0.61	0.62	0.63	0.65	0.68
$u(\varepsilon_{\alpha}), \mu\text{m}$	0.004	0.008	0.012	0.017	0.017	0.019	0.02	0.023
$u(\varepsilon_{align}), \mu\text{m}$	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
$u(\varepsilon_{fixt}), \mu\text{m}$	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
$u(\varepsilon_t), \mu\text{m}$	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
$u(E), \mu\text{m}$	0.481	0.523	0.565	0.606	0.611	0.626	0.648	0.675
$U(E), \mu\text{m}$	0.963	1.046	1.129	1.212	1.223	1.252	1.295	1.351

**Rys. 5.** Niepewności błędu wskazania $U(E)$

4. PODSUMOWANIE

Współrzędnościowe ramiona pomiarowe (WRP) to systemy mobilnej metrologii współrzędnościowej. Podstawowymi ich zaletami to niski koszt, oraz możliwość pracy w zróżnicowanych warunkach zewnętrznych. Przeprowadzone badania wykazały, że istnieje charakterystyczny dla tych urządzeń obszar pomiarowy o podwyższonej niepewności pomiarów. Dla ramienia o zakresie do ± 1.25 [m], jest to obszar o promieniu ok. 250 mm. Istnienie tego obszaru wynika z kinematyki urządzenia oraz charakterystyki pracy enkoderów, szczególnie na końcach ich zakresów pomiarowych. Zaproponowana procedura wzorcowania i sprawdzania oparta o wykorzystanie wzorców płytowych pozwala na szybkie i pewne sprawdzenie dokładności WRP.

Istotnym jest też możliwe rozwinięcie metody stosowania wzorców płytowych i ewentualnie laserowych systemów śledzących w nowej koncepcji wyznaczania dokładności współrzędnościowych systemów pomiarowych takiej jak Metoda Macierzowa (Śladek, 2001). Wyznaczony obszar błędów granicznych dopuszczalnych zarówno dla systemu stykowego MPE_P jak i pomiaru długości MPE_E pokrywa obszar stosowania ramienia. Podano też procedurę wyznaczenia niepewności wzorcowania poprzez wyznaczenie niepewności błędu wskazania $U(E)$ uwzględniając warunki wzorcowania: niepewność wyznaczenia temperatury, niepewność kalibracji użytych wzorców oraz niepewność systemu stykowego. Podano budżet tak obliczonej niepewności. Równanie błędów granicznych dla badanego ramienia dla tak opracowanej metodyki sformułowano jako: $MPE_E = 16 + L/2.8$ [μm] i uzależnione jest od mierzonej długości oraz ważne jest poza obszarem podwyższonej niepewności czyli powyżej promienia o średnicy 250 [mm] liczonej od punktu zamocowania WRP. Dla porównania MPE_E , wyznaczone przez producenta jest wyższe i wynosi ± 0.035 [μm] ponadto nie uwzględnia obszaru podwyższonej niepewności.

Aby w pełni określić składowe niepewności wzorcowania ramion, uzależnione od parametrów tego urządzenia niezbędne są dalsze prace takie jak:

- powiązanie podobszarów kontrolnych ograniczonych wymiarami płyty wzorcowej, tak by możliwe było określenie równania MPE dla całego obszaru kontrolnego zależnie od mierzonej długości,
- zweryfikowanie kinematyki ramion pomiarowych
- obliczenie zadania prostego i odwrotnego kinematyki w trakcie pomiarów z wykorzystaniem laserowych systemów nadążnych.
- budowa modelu wyznaczania dokładności pomiarów realizowanych przy wykorzystaniu WRP.

Do realizacji trzech ostatnich zadań, konieczne jest ustalenie zależności położenia punktu końcowego od położenia punktów pośrednich ramienia. Aby to było możliwe, konieczne jest zdaniem autorów, zastosowanie notacji Denavita-Hartenberga, którą wprowadzono do robotyki w celu uproszczenia opisu kinematyki robota. Notacja ta może być z powodzeniem zastosowana dla ramion pomiarowych pozwalając za pomocą macierzy przedstawić algorytm oceny dokładności przemieszczenia.

LITERATURA

1. **Śladek J.** (2001), Ocena i modelowanie dokładności maszyn oraz pomiarów współrzędnościowych.- Zeszyty naukowe seria Mechanika nr 87 - Politechnika Krakowska.
2. **Ratajczak E.** (2005), Współrzędnościowa Technika Pomiarowa, Wyd Polit. Warszawskiej Warszawa.
3. **Tyka A, Góralczyk A.** (2006), Próba wykorzystania dwuwymiarowego wzorca płytowego z stożkowymi elementami pomiarowymi do kontroli dokładności ramion pomiarowych, VII-th International Scientific Conference Coordinate Measuring Technique, Zeszyty Naukowe ATH Bielsko-Biała.
4. **Ostrowska K.** (2006), Metody oceny dokładności hybrydowych maszyn pomiarowych i ich zastosowanie, Conference „Automation in Production Planning and Manufacturing“, Zielina.
5. **Sokal G.** (2005), Metoda podwyższenia dokładności pomiarów współrzędnościowych dokonywanych przez przemysłowe, Praca doktorska, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska, Kraków.

NORMY I ZALECENIA

1. **ISO 10360** – Specyfikacje geometrii wyrobów (GPS) Badania odbiorcze i okresowe współrzędnościowych maszyn pomiarowych (CMM)
2. **ISO/TS 23165:2006(E)** – Geometrical product specifications (GPS) — Guidelines for the evaluation of coordinate measuring machine (CMM) test uncertainty
3. **VDI/VDE 2617** – Genauigkeit von Koordinatenmessgeräten – Kengrößen und deren Prüfung VDI-

CALIBRATION OF COORDINATE MEASURING ARMS

Abstract: When the frequency of assortments changes is very high, the increase of requirements concerning the quality of production creates good conditions for the application of universal measuring tools, such as coordinate systems. The application of systems with rotary kinetic couples is caused by the necessity to measure places which are hard to access by classical measuring machines. Industrial robots adjusted to measuring tasks, and coordinate measuring arms in particular (CMA), are one of the most commonly applied systems. Planning on the application of these type of devices, their accuracy should be analyzed in the conditions of testing length measurement. This article proposes the application of norms and offers recommendations concerning the control and calibration of coordinate measuring machines for CMA calibration tasks. The conducted calibration WRP with use of a ball plate was the starting point for describing the space of Maximum Permissible Errors (MPE) and the uncertainty of assignment of the indication error. Keywords: calibration, MPE_P , MPE_E , 3D measuring arm, measurement uncertainty

OPTYCZNE POMIARY ZARYSÓW POWTARZALNYCH Z WYKORZYSTANIEM TECHNIK PRZETWARZANIA OBRAZU

Borys STORCH*, Izabela Wierucka*

* Zakład Monitorowania Procesów Technologicznych, Wydział Mechaniczny,
Politechnika Koszalińska, ul. Raclawicka 15-17, 75-620 Koszalin

borys.storch@tu.koszalin.pl, izabela.wierucka@tu.koszalin.pl

Streszczenie: W niniejszej pracy przedstawiono metodykę pomiaru gwintów oraz monitorowania jakości wymiarowo-kształtowej przedmiotu obrabianego w świetle odbitym i przechodzącym. Wielkości wyznaczone z cyfrowej analizy obrazu wykorzystywane są w ocenie dokładności wykonania, która opisywana jest za pomocą tolerancji. Możliwe jest wyznaczenie parametrów zarysu oraz istotnych parametrów gwintu z określoną dokładnością pomiarową. Zostały zastosowane metody pomiaru na bazie transformaty Fouriera oraz widmowej gęstości mocy, jak również własne opracowane algorytmy.

1. WPROWADZENIE

Rozwój technik przetwarzania obrazu oraz coraz większe zautomatyzowanie procesów produkcyjnych i kontroli jakości pozwala na stosowanie coraz nowszych metod pomiarowych. Jednym z opracowywanych zastosowań jest monitorowanie jakości wymiarowo-kształtowej przedmiotu obrabianego.

Metrologia wielkości geometrycznych to pomiary wymiarów opisujących postać geometryczną mierzonego elementu lub zespołu, pomiary odstępstw od teoretycznego kształtu powierzchni i linii (odchyłki kształtu), pomiary odstępstw od przyjętego wzajemnego położenia wyodrębnionych linii i powierzchni (odchyłka położenia), pomiary ilościowe struktury geometrycznej powierzchni (chropowatość i falistość powierzchni) oraz pomiary wymiarów wad struktury geometrycznej powierzchni (pęknięcia, rysy, wżery, plamy, itd.). Do pomiarów wielkości geometrycznych stosuje się przyrządy pomiarowe w skład, których wchodzi przyrządy suwmiarkowe, przyrządy mikrometryczne, czujniki, maszyny pomiarowe, przyrządy do pomiarów kątów, interferometry, przyrządy do pomiaru chropowatości i falistości powierzchni (profilografometry), przyrządy do pomiarów odchyłek kształtu i położenia (kształtografy), przyrządy do pomiaru kół zębatych oraz inne przyrządy pomiarowe (Adamczak, Makiela 2000, Białas 1999, Humienny 2004).

Pomiary gwintów zewnętrznych i wewnętrznych, walcowych oraz stożkowych, które są przedmiotem badań autorów, można przeprowadzić na mikroskopie pomiarowym, metodą trójwałeczkową lub na współrzędnościowej maszynie pomiarowej (Malinowski, Jakubiec 1996). Zastosowanie sond optyczno-dotykowych we współrzędnościowych maszynach pomiarowych umożliwia pomiary z dokładnością rzędu 0,35 μm (Ratajczak 1994).

W optycznych metodach pomiarów wymiarów i kształtów dokonywane są pomiary kształtu obiektów trójwymiarowych (pomiary objętościowe) bazujące na cyfrowych projektorach światła i sprzęcie komputerowym, badania mikroelementów przy pomocy optycznych systemów pomiarowych interferometrii siatkowej, optycznych systemów ekstensometrów warsztatowych, układów elektronicznej interferometrii plamkowej, a także badania mikrostruktury obiektów trójwymiarowych interferometrią heterodynową (Kujawińska 2001).

Metrologiczne wykorzystanie metod wizyjnych do pomiaru wielkości geometrycznych wyrobów w procesie produkcji umożliwia realizację zdalnego i szybkiego pomiaru. Pozwala to na wyeliminowanie wielu niedogodnień metod dotykowych (Demant i in. 1999).

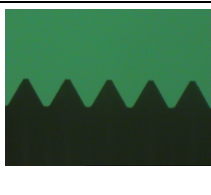
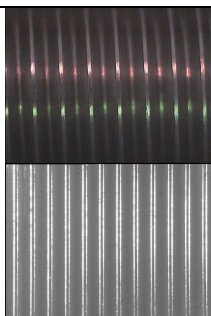
Pomiar optyczny wielkości geometrycznych gwintu powinien łączyć w sobie oczekiwanie dokładności porównywalnej z dotykowymi technikami pomiaru metodą trójwałeczkową, mikroskopową oraz na CMM współrzędnościowych maszynach pomiarowych (Ratajczak 1994). Dodatkowo, pomiar wymiarów w jednym, losowo wybranym przekroju, budzi wątpliwości wszystkich, którzy zajmują się metodyką pomiaru gwintu. Rozwiązaniem jest metoda statystycznej oceny poprawności wykonania gwintu na całej jego długości. Dotychczas stosowane metody pomiaru gwintów niosą z sobą również ogromny niedostatek, jeśli chodzi o trójwymiarowy pomiar gwintu. Polega to na tym, że w wymienionych powyżej metodach pomiaru, odczytuje się umowne wielkości dla gwintów, ale tylko w jednej tworzącej. Wynik jest uśredniany i odczytywany z dość dużą tolerancją. Techniki komputerowe umożliwiają przeprowadzenie tego pomiaru w układzie obwodowym z odczytem dla dowolnej liczby przekrojów gwintu.

Do monitorowania wielkości geometrycznych proponowana jest identyfikacja obrazów cyfrowych gwintu

z wykorzystaniem metod przetwarzania obrazów. Przyjęto, że pomiary wykonywane będą w świetle odbitym i przechodzącym przy optymalizacji parametrów źródła światła. W przypadku tych badań kwalifikacji podlega tylko część gwintowana śruby (wymiary i geometria zarysu gwintu).

Z definicji niskiego poziomu wizji wynika, że dla rozpoznania elementów nie jest potrzebna dodatkowa wiedza ani oprogramowanie. Wystarcza jedynie wyróżnić metodami segmentacji krawędź obiektu. Wysoki poziom wizji dotyczy pozyskiwania dodatkowej wiedzy o oglądanych elementach, rozumienia przez system rzutów w przestrzeni trójwymiarowej, wykorzystania do zagadnienia metrologii itp. (Woźnicki 1996). Analiza omówionych zastosowań pozwoliła na pewne uogólnienie problemów możliwych do rozwiązania, które zestawiono w tabeli 1.

Tab. 1. Charakterystyka zagadnienia badawczego

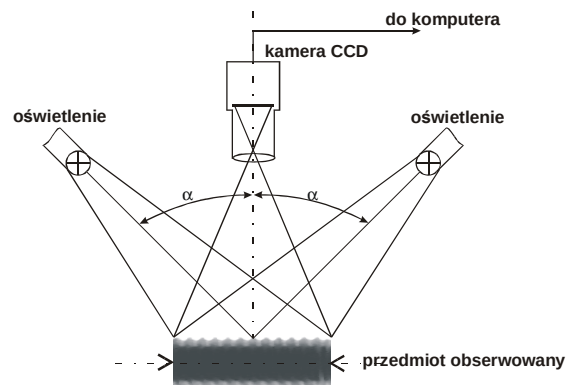
Objekt badań o kształcie regularnym powtarzalnym (np. gwint, koło zębate)		
W świetle przechodzącym	Skok gwintu, średnica podziałowa, średnica wewnętrzna i zewnętrzna, kąt gwintu, wielkość występu i bruzdy gwintu	
W świetle odbitym (światło halogenowe, diody LED)	Skok gwintu, skok gwintu na replce z duracrylu w miejscach trudno dostępnych do pomiaru, np. nakrętki	

2. METODA POMIAROWA

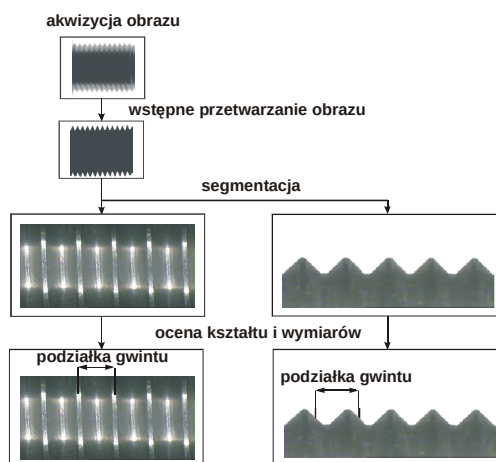
Kontrola geometrii wytwarzanego przedmiotu jest przede wszystkim kontrolą powykonawczą w czasie, której mierzona jest określona liczba cech, jedna po drugiej lub w kilku etapach produkcji. Produkcja i kontrola mogą być prowadzone równolegle, zatem kontrola jakości staje się częścią składową procesu produkcji (Borzykowski 2004).

Do pomiarów parametrów gwintu zaproponowano algorytm, który dla oświetlenia przedmiotu obrabianego światłem przechodzącym (lub odbitym) wykorzystuje przetwarzanie obrazu 2D celem określenia jego dokładności wymiarowo-kształtowej. Na dokładność metody pomiarowej wpływają: rozdzielczość pozyskanego obrazu, metoda wstępnej obróbki danych, metoda segmentacji oraz dobór klasyfikatora zdolnego podać klasę dokładności wykonania.

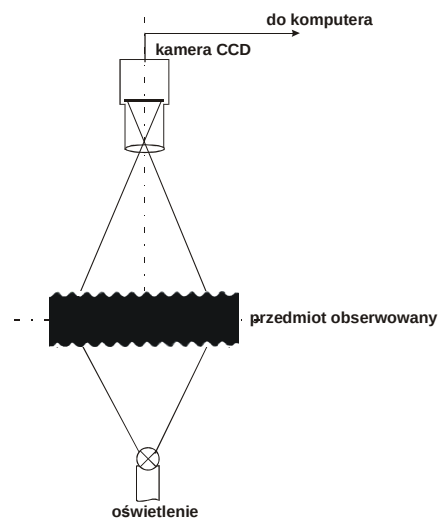
Na rysunkach 1 i 3 zaprezentowano schemat układu oświetleniowego, natomiast na rysunkach 2 i 4 metodykę pomiarową.



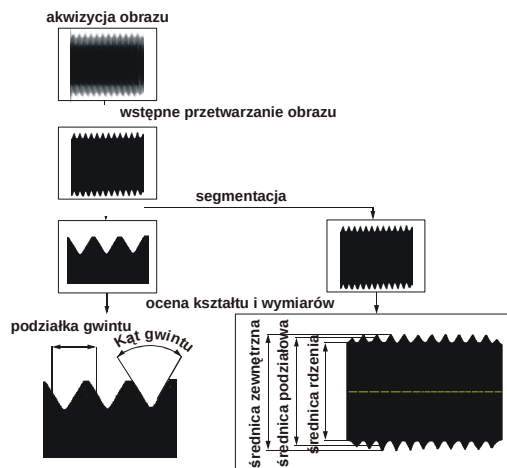
Rys. 1. Schemat układu oświetleniowego gwintu w świetle odbitym (Storch i Wierucka 2006)



Rys. 2. Metodyka pomiaru zarysów gwintu w świetle odbitym (Storch i Wierucka 2006)



Rys. 3. Schemat układu oświetleniowego gwintu w świetle przechodzącym (Storch i Wierucka 2006)



Rys. 4. Metodyka pomiaru zarysów gwintu w świetle przechodzącym (Storch, Wierucka 2006)

Wygenerowany w układzie wizyjnym obraz cyfrowy przetwarzany jest metodami przetwarzania sygnałów obrazowych w celu wyznaczenia charakterystyk pomiarowych. Zastosowane metody filtracji spłotowych i statystycznych poprawiają jego jakość, usuwają szumy i zakłócenia. Następnie wydzielany jest przedmiot obrabiany, w tym przypadku gwint, różnymi metodami segmentacji obrazu. Przy dobrej jakości obrazu wejściowego najprostszym rozwiązaniem jest zastosowanie segmentacji przez progowanie (Tadeusiewicz 1997).

W pracy proponuje się własny algorytm segmentacji oparty na metodzie obliczania punktu środka ciężkości zarysu gwintu opracowany w programie MATLAB. Obraz po segmentacji filtrowany jest filtrami krawędziowymi. Idealna krawędź rozpatrywana jest jako funkcja skoku jednostkowego określona w dziedzinie przestrzeni. W rzeczywistości obraz krawędzi otrzymany w systemie optycznym jest zniekształcony przez aberracje soczewek oraz zjawisko rozproszenia. Zjawiska te są odpowiedzialne za zniekształcenia geometryczne obrazu, jak i za efekty rozmycia krawędzi obiektów. W przypadku pomiaru położenia krawędzi efekt rozmycia krawędzi obiektów ma znaczący wpływ na dokładność pomiaru i jest uwzględniany w modelu matematycznym krawędzi.

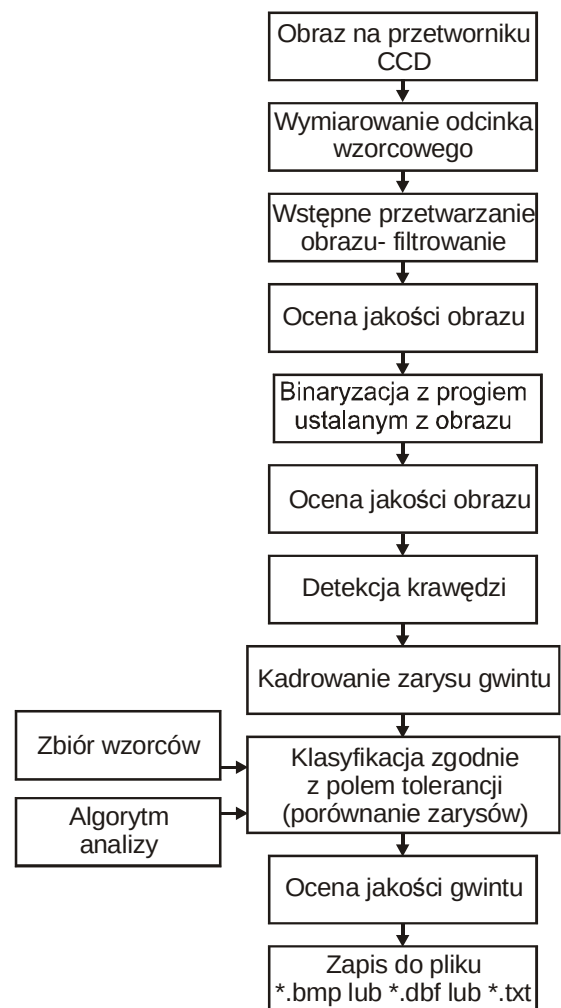
W wyniku tych przekształceń uzyskiwany jest obraz zarysu gwintu. Powstały w ten sposób obraz porównywany jest z zarysem wzorcowym w celu jego oceny i wyznaczenia klasy dokładności gwintu przy uwzględnieniu pól tolerancji.

3. ALGORYTM KLASYFIKOWANIA ZARYSU GWINTU

Klasyfikacja zarysu gwintu oznacza tworzenie mapy klasyfikacji obrazu wejściowego, gdzie każdy obszar identyfikowany jest z klasą zarysu, do której należy. Klasyfikator składa się z algorytmów wyznaczających zależne komponenty sygnału, z mechanizmu do przetwarzania tych komponentów i z mechanizmu dyskryminacji do klasyfikowania na bazie tych informacji (Kurzyński 1997), jak przedstawiono na rysunku 5.

Procedura przetwarzania obrazów do określenia parametrów gwintu składa się z dwóch etapów:

1. Etap ustalania wartości klasyfikatora (KWALIFIKACJA GWINTU)
 - wstępna obróbka obrazu gwintu,
 - zastosowanie segmentacji do wydzielenia obiektów na obrazie proponowaną metodą obliczania punktu środka ciężkości zarysu gwintu,
 - wyznaczenie charakterystyk geometrycznych gwintu z wyznaczeniem skoku gwintu, wysokości zęba, długości podstawy gwintu, górnej podstawy oraz kąta z pomocą funkcji autokorelacji, widmowej gęstości mocy oraz transformaty Fouriera,
 - synteza klasyfikatora wyznaczającego klasę wykonania gwintu.
2. Etap klasyfikowania gwintu (KLASYFIKACJA GWINTU).
 - wyznaczenie według zoptymalizowanej strategii pomiarów charakterystyk pomiarowych gwintu wraz z dokładnością wykonania,
 - wyznaczenie klasy dokładności gwintu przy uwzględnieniu pól tolerancji.



Rys. 5. Algorytm kwalifikacji i klasyfikacji zarysów gwintu

Kwalifikację gwintu przeprowadzano przez porównanie rzeczywistych zarejestrowanych zarysów z ich wzorcami z PN-83/M-02113, które podane są w postaci funkcji dyskretnej jednej zmiennej. Klasyfikacja następuje od zadanej przez operatora górnej

i dolnej odchyłki średnic gwintu zewnętrznego lub od wyboru skojarzonych z nimi pól tolerancji. Porównanie zarysów odbywa się dwuetapowo. Najpierw porównuje się zarysy: rzeczywisty min-mat i wzorcowy (z podaniem górnej odchyłki średnicy gwintu zewnętrznego). Zarys min-mat jest to geometrycznie idealny zarys gwintu odpowiadający najmniejszej możliwej ilości materiału gwintu. Zarys min-mat odpowiada dolnym wymiarom średnic gwintu zewnętrznego i górnym wymiarom średnic gwintu wewnętrznego. Wynik porównania TRUE, powoduje przejście do porównania zarysów max-mat i wzorcowego (z podaniem dolnej odchyłki średnicy gwintu zewnętrznego), natomiast FALSE - kończy obliczenia z wynikiem negatywnym dla tej zadanej klasy tolerancji. Zarys max-mat jest to geometrycznie idealny zarys gwintu odpowiadający największej możliwej ilości materiału gwintu. Zarys max-mat odpowiada górnym wymiarom średnic gwintu zewnętrznego i dolnym wymiarom średnic gwintu wewnętrznego. Operację powtarza się dla następnej klasy tolerancji. Gwint (a dokładniej oba jego zarysy rzeczywiste) jest zaakceptowany po pomyślnym przejściu obu etapów testu. Zasadą jest, że zarys rzeczywisty min-mat nie mógł nigdzie przeciąć zarysu wzorcowego min-mat, a zarys rzeczywisty max-mat - przeciąć zarysu wzorcowego max-mat.

Odpowiedzią klasyfikatora jest decyzja, czy gwinty jest DOBRY (TRUE) czy ZŁY (FALSE), czyli czy mieści się on w zadanej klasie dokładności oraz zapis odpowiedzi jakościowej oraz ilościowej do bazy danych.

4. PODSUMOWANIE

Wielkości wyznaczone z cyfrowej analizy obrazu zarysów powtarzalnych można wykorzystać w ocenie dokładności wykonania, która opisywana jest za pomocą tolerancji. System monitorowania jakości wykonania gwintu, opisany w artykule, przetestowano zarówno na obrabiarce, jak też wykorzystano w dziale kontroli jakości wyrobu do oznaczania jakości wykonania gwintu.

Istotnym zagadnieniem w obu przypadkach było dążenie do ograniczenia liczby niezbędnych pomiarów, a także czasu ich trwania. W dalszych badaniach przewiduje się automatyzację stanowiska do akwizycji obrazu.

LITERATURA

1. **Adamczak A., Makiela W.** (2000), Monitorowanie i sterowanie procesem z wykorzystaniem współrzędnościowej techniki pomiarowej. Metrologia w Systemach Jakości, Kielce.
2. **Białas S.** (1999), Metrologia techniczna z podstawami tolerowania wielkości geometrycznych dla mechaników. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
3. **Humienny Z.** (2004), Specyfikacja geometrii wyrobów. WNT, Warszawa.
4. **Malinowski J., Jakubiec W.** (1996), Metrologia wielkości geometrycznych, Wydawnictwo Naukowo Techniczne, Warszawa.
5. **Ratajczyk E.** (1994), Współrzędnościowa technika pomiarowa. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
6. **Kujawińska M.** (2001), Rozwój technik fotonicznych. Komputerowo wspomagane optyczne systemy pomiarowe. PAK nr 13.
7. **Demant Ch., Streicher-Abel B., Waszkewitz P.** (1999), Industrial Image Processing. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York.
8. **Woźnicki J.** (1996), Podstawowe techniki przetwarzania obrazu. Wydawnictwo Łączności i Telekomunikacji, Warszawa.
9. **Borzykowski J.** (2004), Współczesna metrologia. WNT, Warszawa.
10. **Storch B., Wierucka I.** (2006), Optyczne pomiary zarysów powtarzalnych z wykorzystaniem technik przetwarzania obrazu w świetle odbitym i przechodzącym. V Sympozjum Naukowe, Techniki Przetwarzania Obrazu TPO, ISBN 82-7207-664-2.
11. **Tadeusiewicz R.** (1997), Komputerowa analiza i przetwarzanie obrazów. Wydawnictwo Fundacji Postępu Telekomunikacji, Kraków.
12. **Kurzyński M.** (1997), Rozpoznawanie obiektów. Metody statystyczne. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
13. Norma PN-83/M-02113 (Gwinty metryczne - tolerancje)

OPTICAL MEASUREMENTS OF REPEATABLE CONTOURS USING THE IMAGE PROCESSING TECHNIQUES

Abstract: Currently, many methods are used to determine the functional parameters of the objects with repeatable contours (e.g. thread parameters). The author tested the thread parameters measured in the reflected and passing light through optimization of the light source parameters. To perform 2D optical measurement of the thread with use of a microscope and CCD camera, various measuring methods were developed. The tested surface points of the object are optically registered and their data are transmitted to a PC and relevant functional object parameters are calculated using specially designed algorithms of image processing. Various algorithms shown in the block scheme were applied for image evaluation. It is possible to determine the contour parameters as well as important thread parameters with specific measurement accuracy. The methods based on the Fourier Transform as well as on the Spectral Power Density were applied, but the authors developed also some own methods.

ROZKŁAD ASYMPTOTYCZNY PÓŁ NAPRĘŻEŃ, PRZEMIESZCZEŃ I ENERGII POTENCJALNEJ ODKSZTAŁCENIA W OTOCZENIU PUNKTU WIERZCHOŁKOWEGO WIELOKLINOWEGO CIAŁA SPRĘŻYSTEGO

Heorgij SULYM^{*}, Mykoła MACHORKIN^{}**

^{*} Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

^{**} Instytut Podstawowych Zagadnień Mechaniki i Matematyki im. Ja. S. Pidstryhacza Narodowej Akademii Nauk Ukrainy, Lwów, ul. Naukowa 3 b, Ukraina

sulym@pb.edu.pl, mahorkin@ukr.net

Streszczenie: W pracy dokonano analizy rozkładów asymptotycznych pól naprężeń, przemieszczeń i energii potencjalnej odkształcenia w otoczeniu wspólnego wierzchołka wielu połączonych w ciało sprężyste klinów w warunkach odkształcenia antypłaskiego. Jako przykład podano rozkłady asymptotyczne naprężeń i przemieszczeń w otoczeniu wierzchołka układu, złożonego z dwóch oraz trzech klinów. Metodą numeryczną zbadano rząd osobliwości naprężeń i poziom potencjalnej energii odkształcenia w tych układach.

1. WSTĘP

Elementy konstrukcji budowlanych, węzły oraz części maszyn i mechanizmów często są modelowane jako niejednorodne wieloskładnikowe struktury. Występują również klinopodobne załamania powierzchni połączenia różnych materiałów, ciała które mieszczą w sobie cienkie wady podobne do szczelin albo inkluzji z innych materiałów, szczególnie przy naruszeniu kontaktu idealnego między składnikami. Analogicznymi strukturami można modelować styki płyt litosfery, strefę połączenia ziaren w polikryształach, okolice spiczastych inkluzji w metalach i inne. Jak świadczą dane z eksperymentów, zniszczenie w takich systemach najczęściej zaczyna się właśnie w miejscach połączenia kilku materiałów albo w miejscach, w których wady (szczególnie cienkie) dotyczą granic połączenia materiałów. Dlatego też trzeba rozwijać metody analityczne oraz analityczno-numerycznego prognozowania wytrzymałości elementów konstrukcji, w których mogą być inicjowane procesy zniszczenia lub pękania

Konstrukcje, złożone z kilku materiałów, które zbiegają się do jednego wspólnego punktu, badali Bogy (1971a, 1971b), Grinčenko i Ulitko (1998), Ulitko i Lovejkin (1999, 2000), Zadoân (1987). Zagadnienia teorii szczelin, wychodzących na granicę podziału materiałów rozważane w pracach Rice i Sih (1965), Bogy (1971b), Dunders (1969). Defekty na granicach podziału materiałów przeanalizowano w artykułach Denysûka (1992), Butvinnika i innych (1989, 1983), Savruka i Shkarayeva (1999); Savruka (2002). Dość dokładną, ale tym nie mniej niepełną analizę tego pytania, można znaleźć w pracach Sinclair (2004a, 2004b). Modelowali oni kompozyty jako

układy połączonych ze sobą klinów przy odpowiednich sposobach obciążenia w nieskończoności lub na powierzchniach brzegowych układu. Rozwiązania odpowiednich zagadnień brzegowych otrzymywano przy pomocy metody kompleksowych potencjałów Kołosowa-Muschieliszwiliego albo z wykorzystaniem funkcji Eri. Wobec konieczności wykonywania skomplikowanych przekształceń płaskie zadanie było otrzymane dla dwuklinowych bimateriałów (Bogy, 1971a) oraz szczeliny na granice łamanej podziału materiałów (Bogy, 1971b), a w warunkach zagadnienia antypłaskiego – dla kompozytu trzyklinowego (Butvinnik i inni, 1983), oraz dla defektu, leżącego na linii podziału faz (Savruk, 2002). Autorzy ci ograniczali się do badania rzędu osobliwości w otoczeniu punktów osobliwych.

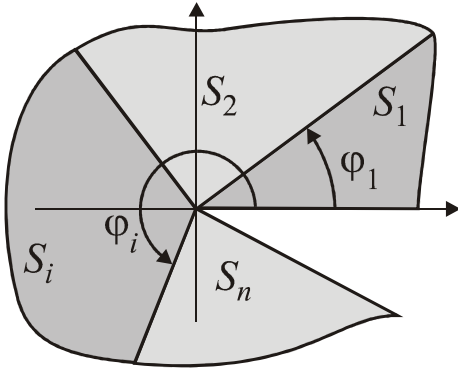
Dla oceny wytrzymałości układów mechanicznych z koncentratorami naprężeń, które powodują niepierwiastkową osobliwość naprężeń, celowo jest stosować kryteria energetyczne, w których zasadniczą wagę odgrywa zupełna lub właściwa energia odkształcenia w otoczeniu badanego koncentratora. Autorzy niniejszej publikacji nie znaleźli prac, w których podejście energetyczne byłoby omawiane z uwzględnieniem pakietów klinów.

W pracach szkoły naukowej Ja. S. Pidstryhacza (Kuśnir i inni, 2003; Podstrigač i inni, 1984) zaproponowano i rozwinięto metodykę modelowania układu złożonego z różnych jednorodnych (warstwowych) materiałów z wykorzystaniem jednolitego wzoru, który mieści funkcje skokowe. Wykorzystując takie podejście oraz aparat funkcji uogólnionych zaproponowano uniwersalną metodę otrzymania rozkładów asymptotycznych naprężeń

i przemieszczeń dla układów złożonych z dowolnej ilości klinów z jednym wspólnym punktem (rys. 1) przy podłużnym ścinaniu (zagadnienie antypłaskie). Jako przykład przeanalizowano układy, składające się z dwóch i trzech klinów, dla których zbadano również charakter rozkładu potencjalnej energii odkształcenia.

2. POSTAWIENIE ZAGADNIENIA

Niech ośrodek nieograniczony w postaci układu klinów (rys. 1), składa się z wycinka kąтового o kącie wierzchołkowym α_{n+1} oraz dowolnej ilości n klinów z kątami wierzchołkowymi α_j ($\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1} = 2\pi$) i znajdują się w warunkach odkształcenia antypłaskiego, gdy $u = u(r, \varphi) = 0$, $v = v(r, \varphi) = 0$, $w = w(r, \varphi)$. Zagadnienie wyznaczenia naprężeń i odkształceń ośrodka w otoczeniu punktu narożnego będziemy rozwiązywać w układzie biegunowym o środku w punkcie wierzchołkowym układu klinów.



Rys.1. Schemat geometryczny zagadnienia

Podejście ogólne do formułowania klasycznym modelem matematycznym zagadnienia sprężenia ze sobą części układu o różnych właściwościach mechanicznych sformułowane w wielu podręcznikach z teorii sprężystości (Bożydarnyk i Sulym, 1994). Zgodnie z nim w każdym z elementów układu spełnione są:

1) związki geometryczne

$$\varepsilon_{rr}^i = \varepsilon_{\varphi\varphi}^i = \varepsilon_{zz}^i = \varepsilon_{r\varphi}^i = 0, \quad \varepsilon_{\varphi z}^i = \frac{1}{2r} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi}, \quad \varepsilon_{rz}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial w_i}{\partial r}; \quad (1)$$

2) związki fizyczne (prawo Hooke'a)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i &= \sigma_{\varphi\varphi}^i = \sigma_{zz}^i = \sigma_{r\varphi}^i = 0, \\ \sigma_{\varphi z}^i &= \frac{\mu_i}{r} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi}, \quad \sigma_{rz}^i = \mu \frac{\partial w_i}{\partial r}; \end{aligned} \quad (2)$$

3) równania równowagi

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}^i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}^i}{\partial \varphi} = 0; \quad (3)$$

4) warunki kontaktu mechanicznego doskonałego na liniach $\varphi_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i$ połączenia klinów

$$w_i|_{\varphi_i} = w_{i+1}|_{\varphi_i}, \quad \sigma_{\varphi z}^i|_{\varphi_i} = \sigma_{\varphi z}^{i+1}|_{\varphi_i} \quad (i = \overline{1, n-1}); \quad (4)$$

5) warunki brzegowe na brzegach wycinka klinowego (jeden komplet z czterech możliwych)

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi z}^n|_{\varphi_n} &= \sigma_{\varphi z}^1|_{\varphi=0} = 0, \quad w_n|_{\varphi_n} = w_1|_{\varphi=0} = 0, \\ \sigma_{\varphi z}^n|_{\varphi_n} &= w_1|_{\varphi=0} = 0, \quad w_n|_{\varphi_n} = \sigma_{\varphi z}^1|_{\varphi=0} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

Rozważmy cały obszar z połączonych klinów $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$ jako jedną całość. Dla niego według metody przedstawionej w publikacjach (Kuśnir i inni, 2003; Podstrigač i inni, 1984), za pomocą funkcji skokowej Heaviside'a przedłużymy zdefiniowane w obszarach S_i funkcje przemieszczeń w_i oraz stałe współczynniki Kirchhoffa μ_i na cały obszar S w postaci

$$\begin{aligned} w(\varphi, r) &= w_1(\varphi, r) + \sum_{i=1}^n (w_{i+1} - w_i) S_+(\varphi - \varphi_i), \\ \mu(\varphi) &= \mu_1 + \sum_{i=1}^n (\mu_{i+1} + \mu_i) S_+(\varphi - \varphi_i), \\ S_+ &= \{1(\xi > 0); \quad 0(\xi \leq 0)\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Po uwzględnieniu związku pomiędzy klasycznymi pochodnymi oraz uogólnionymi (Kuśnir i inni, 2003), zamiast układu równań (3) z warunkami (4) otrzymamy równania w postaci (Kuśnir i inni, 2003; Podstrigač i inni, 1984)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = \sum_{i=1}^n C_{\sigma i} \delta_+(\varphi - \varphi_i); \quad (7)$$

$$C_{\sigma i} = -\frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi_i - 0}, \quad (8)$$

$$w|_{\varphi=\varphi_i+0} - w|_{\varphi=\varphi_i-0} = 0 \quad (i = \overline{1, n-1}),$$

z warunkami brzegowymi (5).

Tak sformułowane zagadnienie według (Kuśnir i inni, 2003; Podstrigač i inni, 1984), nazywa się uogólnionym zagadnieniem sprężenia.

3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Rozwiązanie zagadnienia (7) poszukujemy w postaci (6), gdzie

$$w_i = \sum_{j=1}^{\infty} r^{q_j} (A_{ij} \cos(q_j \varphi) + B_{ij} \sin(q_j \varphi)) = \sum_{j=1}^{\infty} r^{q_j} w_{ij}^*. \quad (9)$$

Zaznaczmy, że parametr q w otoczeniu wierzchołka układu klinowego określający rząd osobliwości naprężeń za pomocą zależności $\lambda=1-q$, jest w przypadku ogólnym wielkością zespoloną. Dlatego z całego zbioru możliwych wartości q_j będziemy wybierać tylko te, które należą do zbioru $(0;1)$. Decydujący wpływ na wartość naprężeń w otoczeniu punktu osobliwego ma parametr q_j o minimalnej wartości (Bogy, 1971a, 1971b; Liebowitz, 1968). Wobec tego nie będziemy dalej stosować sumowania względem wskaźnika j , zakładając, że w otoczeniu punktu osobliwego asymptotykę naprężeń określa współczynnik znajdujący się obok największej osobliwości. Jeżeli zajdzie potrzeba, taką sumę nietrudno uzyskać. Rozwiązanie ogólne zagadnienia (7) z uwzględnieniem (9) zapiszemy jak poniżej:

$$\begin{aligned} \frac{w}{r^q} &= A_1 \cos(q\varphi) + B_1 \sin(q\varphi) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} [A_i^* \cos(q\varphi) + B_i^* \sin(q\varphi)] S_+(\varphi - \varphi_i), \quad (10) \\ A_i^* &= A_{i+1} - A_i, \quad B_i^* = B_{i+1} - B_i. \end{aligned}$$

Spełniając warunek (8), z uwzględnieniem (10) wyznaczamy współczynniki A_i^* , B_i^* , wskutek czego dla asymptotyk naprężeń i przemieszczeń otrzymujemy następujące wyrażenia

$$\begin{aligned} w(r, \varphi) r^{1-\lambda} &= A_1 \cos(q\varphi) + B_1 \sin(q\varphi) - \\ &- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{q\mu_{i+1}} (A_1 L_1^i + B_1 L_2^i) \sin[q(\varphi - \varphi_i)] S_+(\varphi - \varphi_i); \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^\lambda \mu(\varphi) \sigma_{\varphi z}(r, \varphi) &= -A_1 q \sin(q\varphi) + q B_1 \cos(q\varphi) - \\ &- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} (A_1 L_1^i + B_1 L_2^i) \cos[q(\varphi - \varphi_i)] S_+(\varphi - \varphi_i); \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(\varphi) r^\lambda \sigma_{rz}(r, \varphi) &= A_1 \cos(q\varphi) + B_1 \sin(q\varphi) - \\ &- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{q\mu_{i+1}} (A_1 L_1^i - B_1 L_2^i) \sin[q(\varphi - \varphi_i)] S_+(\varphi - \varphi_i), \quad (13) \end{aligned}$$

gdzie L_1^i, L_2^i określają zależności rekurencyjne

$$\begin{aligned} L_1^i &= -q \sin(q\varphi_j) - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} L_1^i \cos[q(\varphi_j - \varphi_i)], \\ L_2^i &= q \cos(q\varphi_j) - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} L_2^i \cos[q(\varphi_j - \varphi_i)]. \end{aligned} \quad (14)$$

W celu wyznaczenia niewiadomych A_1, B_1 wykorzystamy warunki (5), spełnienie których daje jednorodny układ równań algebraicznych. Warunek istnienia rozwiązania nietrywialnego stanowi jednocześnie równanie charakterystyczne dla wyznaczenia zbioru wartości parametru q . Ponieważ układ równań jest jednorodny, to jakiś jeden współczynnik pozostaje nieokreślony i zależy on w rzeczywistości od stanu naprężeń układu sprężystego (w całości). Jego wyznaczenie jest odrębnym zagadnieniem wykraczającym poza tematykę niniejszej publikacji. Jeden ze sposobów jego rozwiązania jest opisany w pracy (Parton and Perlin, 1984).

W zależności od tego, jakie dokładnie są przyjęte warunki brzegowe (5) na brzegach układu klinowego, określimy wartości współczynników i równania charakterystyczne do obliczenia parametru q :

1) brzegi wycinka są wolne od naprężeń -

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi z} \Big|_{\varphi=\varphi_n} &= \sigma_{\varphi z} \Big|_{\varphi=0} = 0: \\ B_1 &= 0, \\ -q \sin(q\varphi_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} L_1^i \cos[q(\varphi_n - \varphi_i)] &= 0; \end{aligned} \quad (15)$$

2) brzegi wycinka są sztywno zamocowane $w \Big|_{\varphi_n} = w \Big|_{\varphi=0} = 0$:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, \\ \sin(q\varphi_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{q\mu_{i+1}} L_2^i \sin[q(\varphi_n - \varphi_i)] &= 0; \end{aligned} \quad (16)$$

3) jeden brzeg wycinka jest wolny od naprężeń, a drugi - sztywnie zamocowany $w \Big|_{\varphi=\varphi_n} = \sigma_{\varphi z} \Big|_{\varphi=0} = 0$:

$$\begin{aligned} B_1 &= 0, \\ \cos(q\varphi_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{q\mu_{i+1}} L_1^i \sin[q(\varphi_n - \varphi_i)] &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

bądź $\sigma_{\varphi z} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = w \Big|_{\varphi=0} = 0$:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, \\ q \cos(q\varphi_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} L_2^i \cos[q(\varphi_n - \varphi_i)] &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Na podstawie relacji (11) – (13) z uwzględnieniem (15) – (18) można stwierdzić, że dla dowolnej ilości klinów zależności asymptotyczne, przemieszczeń i naprężeń przy antyplaskim odkształceniu mają postać

$$\begin{aligned} w(r, \varphi) &= r^{1-\lambda} \tilde{K} f_1(\varphi), \quad \sigma_{\varphi z}(r, \varphi) = r^{-\lambda} \tilde{K} f_2(\varphi), \\ \sigma_{rz}(r, \varphi) &= r^{-\lambda} \tilde{K} f_3(\varphi), \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie $\tilde{K}$ - współczynnik, określający stan naprężenia układu, $\lambda=1-q$ - rząd osobliwości naprężeń, q - najmniejsza wartość rozwiązania odpowiedniego równania (15) - (18), należąca do przedziału $(0;1)$, $f_i(\varphi)$ ($i=1, 2, 3$) - funkcja, która występuje w zależności asymptotycznej obok najmniejszej wartości rzędu osobliwości i charakteryzuje rozkład kątowy naprężeń.

Warto szczególnie zaznaczyć, że współczynnik $\tilde{K}$ jest odpowiednikiem współczynnika intensywności naprężeń dla defektu cienkiego, położonego w ośrodku jednorodnym (Bożydaruk i Sulym, 1994). Podczas obliczania granicy dla jednakowych modułów ścinania klinów $\mu_1=\mu_2=\dots=\mu_n$ lub $\varphi_i=0$ ($i=1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$) wartości $\tilde{K}$ oraz współczynników intensywności naprężeń pokrywają się, tj. można uważać $\tilde{K}$ jako uogólniony współczynnik intensywności naprężeń w otoczeniu punktu osobliwego układu wieloklinowego.

Korzystając ze wzorów (15) - (19) i relacji (1) wyznaczmy energię właściwą odkształcenia w otoczeniu punktu osobliwego układu klinowego oraz energię odkształcenia w każdym z elementów układu według wzorów (Liebovitz, 1968)

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{\varphi z} \sigma_{\varphi z} + \varepsilon_{rz} \sigma_{rz}) = \frac{1}{2} \left(\sigma_{rz} \frac{\partial w}{\partial r} + \sigma_{\varphi z} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \\ W^* &= \iint_S W dS. \end{aligned} \quad (20)$$

Uwzględniając przedstawienie naprężeń i przemieszczeń (19) oraz przyjmując, że całkowanie odbywa się po małym obszarze S ($ds=rdrd\varphi$) dla wartości r od 0 do r_0 i φ od θ_1 do θ_2 , to przy $\lambda \in (0,1)$ zależność (20) można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} W &= \frac{r^{-2\lambda} \tilde{K}^2}{2} f_4(\varphi), \quad W^* = \frac{\tilde{K}^2 r_0^{2(1-\lambda)}}{4} f^*, \\ f_4(\varphi) &= \frac{1}{\mu(\varphi)} (f_3^2(\varphi) + f_2^2(\varphi)), \\ f^* &= \frac{1}{(1-\lambda)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\frac{1}{\mu(\varphi)} (f_3^2(\varphi) + f_2^2(\varphi)) \right] d\varphi. \end{aligned} \quad (21)$$

Ponieważ θ_1 i θ_2 są liczbami określonymi, to wartość f^* dla zadanej geometrii i stałych sprężystych jest stałą. Określa ona wartość energii odkształcenia, a funkcja $f_4(\varphi)$ charakteryzuje rozkład energii właściwej jako funkcji kąta.

Dla układu zbudowanego z dwóch lub trzech klinów na podstawie wzorów (14) otrzymujemy następującą postać funkcji L_1^j, L_2^j :

$$\begin{aligned} L_1^1 &= -q \sin(q\varphi_1), \quad L_1^2 = -q \sin(q\varphi_2) + \\ &+ \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_2} q \sin(q\varphi_1) \cos[q(\varphi_2 - \varphi_1)], \\ L_2^1 &= q \cos(q\varphi_1), \quad L_2^2 = q \cos(q\varphi_2) - \\ &- \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_2} q \cos(q\varphi_1) \cos[q(\varphi_2 - \varphi_1)]. \end{aligned} \quad (22)$$

Wykorzystując zależność (22) i w oparciu na wzory (11)–(13), (19), (21) wyznaczamy wartości funkcji $f_i(\varphi)$ $i=1,4$ wewnątrz układu oraz wartość f_i^* dla każdego z jej elementów S_i ($i=1,3$).

4. ANALIZA NUMERYCZNA

Numeryczne obliczenia potencjalnej energii odkształcenia w otoczeniu wierzchołka każdego z klinów układu przeprowadzono dla przypadku, gdy kąt wierzchołkowy wycinka klinowego był równy zero i jego brzegi były wolne od naprężeń (szczelina półnieskończona) lub sztywnie zamocowane (półnieskończona doskonale sztywna inkluzja). Wyniki obliczeń przedstawiono w tab. 1-2

W tab. 1 przedstawiono wyniki badań układu zbudowanego z dwóch połączonych klinów. Obliczenia wykazały, że przy stosunku modułów ścinania $\gamma=0,1; 0,01; 0,001$ obraz jakościowy rozkładu energii potencjalnej odkształcenia wewnątrz klinów słabo zależy od γ . Obecność półnieskończonej szczeliny powoduje koncentrację największej ilości potencjalnej energii odkształcenia w klinie o mniejszym module ścinania dopóki jego kąt wierzchołkowy nie zacznie spełniać warunku $5\pi/4 < \alpha_1 < 6\pi/4$. Wtedy w zależności od stosunku modułów ścinania, przy pewnych wartościach kąta z tego przedziału, większa ilość energii skupia się w klinie z większym modulem ścinania. Dla doskonale sztywnej inkluzji podobna sytuacja powstaje przy kątach $\pi/2 < \alpha_1 < 3\pi/4$. Otrzymane rzędy osobliwości pokrywają się z wynikami pracy (Butvinnik i inni, 1983).

Tab. 1. Potencjalna energia odkształcenia, nagromadzona w komponentach układu dwuklinowego

$n = 2; \frac{\mu_2}{\mu_1} \equiv \gamma = 0.01; \alpha_1 \in (0; 2\pi); \alpha_2 = 2\pi - \alpha_1$					
α_1	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
Szczelina półnieskończona					
λ	0,500	0,634	0,500	0,365	0,500
f_1^*	0	1,430	1,960	3,230	3,926
f_2^*	0,392	7,541	19,63	0,435	0
Doskonale sztywna cienka inkluzja półnieskończona					
λ	0,500	0,365	0,500	0,634	0,500
f_1^*	0	0,886	1,963	2,850	3,926
f_2^*	39,27	10,27	0,196	0,115	0

Tab. 2. Potencjalna energia odkształcenia, nagromadzona w komponentach układu trzyklinowego

$n = 3; \mu_1/\mu_2 = \gamma_1 = 0.001; \mu_3/\mu_1 = \gamma_2 = 0.1, \alpha_1 = \kappa\alpha_3; \kappa = 2; \alpha_2 \in [0; 2\pi]; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$					
α_2	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
Szczelina półnieskończona					
λ	0,352	0,496	0,254	0,335	0,500
$f_1^* \cdot 10^{-3}$	1,570	1,350	0,960	0,510	0
f_2^*	0	0,670	1,150	2,99	3,920
$f_3^* \cdot 10^{-3}$	0,001	49,12	42,31	0,014	0
Doskonale sztywna cienka inkluzja półnieskończona					
λ	0,603	0,950	0,957	0,950	0,500
$f_1^* \cdot 10^{-3}$	683,0	6,890	2,590	1,370	0
f_2^*	0	9,320	6,220	3,070	0,004
$f_3^* \cdot 10^{-3}$	13,86	0,800	0,020	0,0008	0

Tab. 2 obrazuje niektóre wyniki obliczeń dla układu trzyklinowego. Dla inkluzji sztywnej i dla szczeliny największa ilość potencjalnej energii odkształcenia skupia się w klinie o kącie wierzchołkowym większym od π .

Zmniejszenie stosunku modułów ścinania γ_1, γ_2 lub stosunku kątów wierzchołkowych κ powoduje zmianę nagromadzonej w klinach energii. Nie ma to jednak wpływu na jakościowe prawo rozdzielania energii na poszczególne kliny. Zaznaczmy również, że w przypadku ogólnym ośrodka, złożonego z trzech klinów, przy niektórych wartościach parametrów $\gamma_1, \gamma_2, \kappa$ istnieją obszary wartości α_2 , w których rzeczywiste rozwiązania dla rzędu osłabłości nie istnieją. Dla tego, by otrzymać rozkład energii odkształcenia w takich układach potrzebne są dodatkowe badania.

5. WNIOSKI

Sformułowano uogólnione zagadnienie sprężenia dla obszaru, złożonego z dowolnej ilości klinów i odnaleziono jego rozwiązanie ogólne. Zaproponowana została efektywna metoda konstruowania rozkładów asymptotycznych pól fizyko-mechanicznych w otoczeniu środka układu klinowego. Wyprowadzono postać jawną równań charakterystycznych dla obliczenia rzędów osłabłości naprężeń w punkcie osłabliwym. Wprowadzono pojęcie uogólnionego współczynnika naprężeń w otoczeniu wierzchołka układu wieloklinowego. Przeprowadzono analizę numeryczną rzędu osłabłości oraz charakteru rozkładu potencjalnej energii odkształcenia w dwuklinowym oraz trzyklinowym układach.

LITERATURA

1. **Bogy D.B.** (1971a), Two edge-bonded elastic wedges on different materials and wedge angles under surface tractions, *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 38, No. 2, 377-386.
2. **Bogy D.B.** (1971b), On the plane elastostatic problem of a loaded crack terminating at a material interface, *Ibid*, 38, No. 4, 911-918.
3. **Bożydarnyk V.V., Sulym G.T.** (1994), *Elementy teorii plastyczności ta micnosti*, Lviv: Svit, 945 s.
4. **Butvinnik I.P.** (1990), Theory of crack-type defects in the vicinity of the boundary of media, *Materials Science*, 25, No. 4, 428-431.
5. **Butvinnik I.P., Bereżnickij L. T., Pohmurskij V. I.** (1983), O porâdke singularnosti naprâženij v kompozitah pri antiploskoj dêformacii, *Fiziko-himična mehanika materialiv*, No. 2, 96-97.
6. **Denysuk I. T.** (1992), Singular stresses in an isotropic matrix containing an elastic wedge, *Materials sciences*, 28, No. 4, 388 - 394.
7. **Dunders J.** (1969), Edge bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading, *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 36, No. 1, 650-652.
8. **Grinčenko V.T., Ulitko A.F.** (1998), O lokal'nyh osobennostâh v matëmatičeskijh modelâh fizičeskijh polëj, *Mat. metody i fiziko-mehanični polâ*, 41, No. 1., 12-34.
9. **Kušnir R.M., Nikolyšin N.N., Osadčuk V.A.** (2003), *Pružny i pružnoplastyčnyj hranyčnyj stan obolonok z defektamy*, "Spolom" wydawniczyj dim, Lviv. 318 s.
10. **Liebowitz H.** (1968), *Mathematical fundamentals*, v. 2, Academic Press, New York and London
11. **Parton V.Z., Perlin P.I.** (1984), *Mathematical methods of the theory of elasticity*. In 2 v. Moscow: Mir Publishers, 674 p.
12. **Podstrigač Â.S., Lomakin V.A., Kolâno Ū.M.** (1984), *Termouprugost' tël nêodnorodnoj struktury*, Moskva: Nauka, 368 c.
13. **Rice J.R., Sih G.C.** (1965), Plane problems of cracks in dissimilar media, *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 32, No. 2, 418-423.
14. **Savruk M.P. and Shkarayev S.V.**, (1999), Similarity of Stress-Singularity Problems for Materials with Linear and Bilinear Behaviors, *Materials Science*, v. 2., 807 - 820.
15. **Savruk M.P.** (2002), Longitudinal Shear of an Elastic Wedge with Cracks and Notches, *Materials Science*, No. 5, 672-685.

16. **Sinclair G.B.** (2004a), Stress singularities in classical elasticity—I: Removal, interpretation, and analysis, *Applied Mechanics Reviews*, 57, No. 4, 251–298.
17. **Sinclair G.B.** (2004b), Stress singularities in classical elasticity—II: Asymptotic identification, *Ibid*, 57, No. 5, 385–439.
18. **Ulitko A.F, Lovejkin A.V.** (1999) Rivnovaga pruznogo prostoru poslablenogo ploskym, klynopodibnym v plani rozrizom, *Mat. metody i fiziko-mehanični polâ*, 42, No. 2, 108–114.
19. **Ulitko A.F, Lovejkin A.V.** (2000), Zadača pro rivnovagu prostoru z dvoma rozrizamy – po pivplošyni ta klynopodibnymy u plani, kotri ležat' v odnij plošyni, *Mat. metody i fiziko-mehanični polâ*, 43, No. 1, 109–114.
20. **Zadoân M.A.** (1987), Prodolnyj sdvig sostavnogo klina, *Doklady Akademii nauk SSSR*, 296, No. 2, 297–302.

**ASYMPTOTIC DISTRIBUTION OF STRESSES,
DISPLACEMENTS AND POTENTIAL DEFORMATION
ENERGY IN THE VICINITY OF CORNER POINT IN
MULTIWEDGE ELASTIC BODY**

Abstract: The asymptotic distribution of stresses, displacements and strain potential energy in the vicinity of corner point in a multi-wedge system under antiplane strain has been studied. As an example the asymptotic presentation of stresses and displacements near the top in a two- and three-wedge systems are constructed. The order of stress singularity and the level of strain potential energy have been investigated numerically

Pracę wykonano w ramach pracy statutowej S/WM/1/03 w Politechnice Białostockiej.

ODKSZTAŁCENIOWY MODEL KUMULACJI USZKODZEŃ ZMĘCZENIOWYCH W ZAKRESIE OBCIĄŻEŃ NISKOCYKLOWYCH

Jarosław SZUSTA*, Andrzej SEWERYN*

* Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

szusta@pb.edu.pl, seweryn@pb.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono propozycję modelu obliczania trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych w warunkach złożonych obciążeń, w zakresie małej liczby cykli. Prezentowane podejście składa się z dwóch bloków obliczeniowych. Pierwszy służy do wyznaczania składowych tensora naprężenia i odkształcenia. Zawiera związki konstytutywne i prawo kinematycznego wzmocnienia. Wykorzystano w nim wielopowierzchniowy model Mroza. W drugim bloku znajdują się zależności określające zmianę miary kumulacji uszkodzeń oraz kryterium pękania. W modelu kumulacji uszkodzeń wykorzystano podejście związane z przyrostem plastycznych odkształceń postaciowych na płaszczyźnie fizycznej.

1. WPROWADZENIE

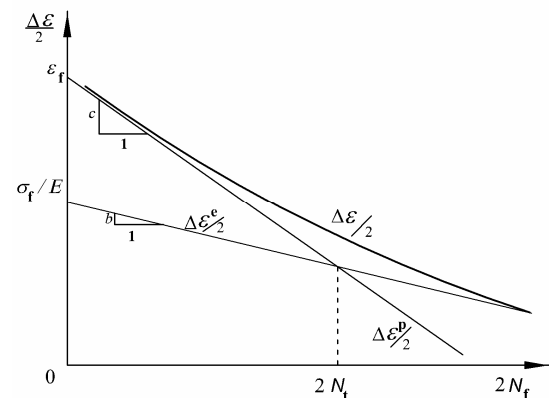
Wiele modeli prognozowania trwałości w warunkach obciążeń niskocyklowych było formułowanych przy użyciu parametrów makroskopowych. Można je podzielić na kilka kategorii: naprężeniowe (Harik i inni, 2002), odkształceniowe (Kuroda, 2001), energetyczne (Kaleta, 1995; Łagoda, 2001; Lee, 2003), a także związane z płaszczyzną krytyczną (Han, 2002) lub elementem objętościowym (Varvani-Farahani, 2000) oraz kohezyjne (Pettit i inni, 2001). Są one formułowane na podstawie badań doświadczalnych lub analizy teoretycznej. Często wykazują analogie do klasycznych hipotez wytrzymałości. Mimo dużej liczby kryteriów kumulacji uszkodzeń w złożonych stanach obciążeń w zakresie małej liczby cykli, żadne z nich nie uzyskało ogólnej akceptacji. Posługiwanie się tymi kryteriami wymaga dużej ostrożności i powinno być ograniczone do udokumentowanych doświadczalnie przypadków szczególnych. Istnieje więc uzasadniona potrzeba stworzenia modelu kumulacji uszkodzeń, przy pomocy którego możliwe by było prognozowanie trwałości zmęczeniowej szerszej grupy przypadków obciążeń, w zakresie małej liczby cykli.

Wytrzymałość zmęczeniowa w zakresie stało amplitudowych obciążeń, uogólniona na obciążenia wieloosiowe, często jest opisywana z użyciem zakresu równoważnego odkształcenia $\Delta \varepsilon_{eq}$. Wykorzystuje się do tego celu np. zależność Mansona-Coffina, zmodyfikowaną przez Morrowa (1965) (rys. 1):

$$\frac{\Delta \varepsilon_{eq}}{2} = \frac{\sigma_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon_f (2N_f)^c, \quad (1)$$

gdzie: $\varepsilon_{eq} = \left(\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij} \right)^{1/2}$, e_{ij} – składowe dewiatora odkształcenia, N_f – liczba cykli do zniszczenia, E – moduł Younga, σ_f , b – odpowiednio współczynnik (naprężenie krytyczne podczas rozciągania) i wykładnik naprężeniowej (sprężystej) krzywej wytrzymałości zmęczeniowej,

ε_f , c – współczynnik (odkształcenie krytyczne) i wykładnik plastycznej krzywej wytrzymałości zmęczeniowej.



Rys. 1. Krzywa Mansona-Coffina; osie w układzie logarytmicznym

2. MODEL WZMOCNIENIA MATERIAŁU

Przedstawiony w niniejszej pracy model składa się z dwóch bloków obliczeniowych:

Blok I:

- związki konstytutywne (wiążące historię obciążenia z historią stanu naprężenia i odkształcenia);
- prawo kinematycznego wzmocnienia (model wielopowierzchniowy Mroza (1967) z uwzględnieniem modyfikacji Garuda (1981));

Blok II:

- zależności obliczeniowe zmian miary kumulacji uszkodzeń;
- prawo kumulacji uszkodzeń (związane z przyrostem plastycznych odkształceń postaciowych) oraz kryterium pękania materiału (warunek naprężeniowy związany z płaszczyzną krytyczną).

Analiza zachowania materiału poddanego działaniu nieproporcjonalnych wymuszeń, wiąże się

z wykorzystaniem przyrostowych związków fizycznych (uogólnionego prawa Hooke'a oraz gradientowego prawa płynięcia stowarzyszonego z powierzchnią plastyczności):

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{kk} \delta_{ij} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2)$$

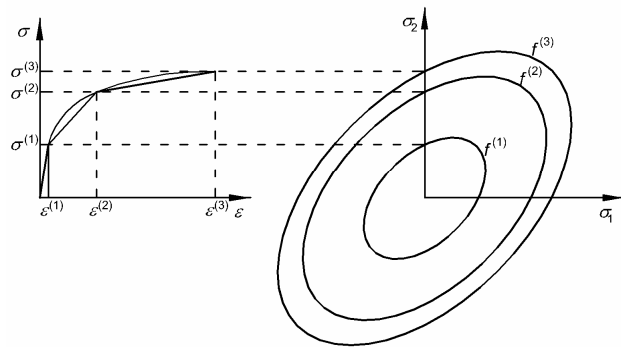
gdzie: $d\varepsilon_{ij}$, $d\sigma_{ij}$ – przyrost składowych tensora odkształcenia i naprężenia, $d\lambda$ – współczynnik proporcjonalności, ν – współczynnik Poissona, δ_{ij} – delta Kroneckera.

Powierzchnie plastyczności określono warunkiem Hubera-von Misesa:

$$f = \frac{3}{2} (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) - R_i^2 = 0, \quad (3)$$

gdzie: s_{ij} – składowe dewiatora naprężenia; α_{ij} – składowe tensora określającego translację powierzchni plastyczności; R_i – rozmiar powierzchni plastyczności.

Wartości składowych tensorów naprężenia i odkształcenia wyznaczono na podstawie prawa kinematycznego wzmocnienia, wykorzystującego model wielopowierzchniowy Mroza (1967) z uwzględnieniem modyfikacji Garuda (1981).

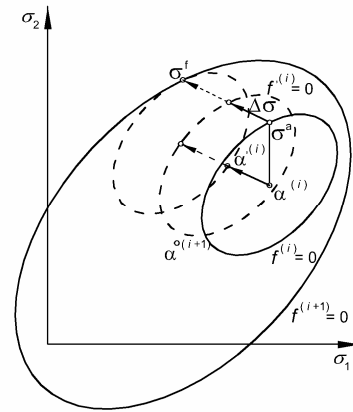


Rys. 2. Pierwszy postulat Mroza i odpowiadająca mu wieloliniowa reprezentacja krzywej rozciągania oraz ślady przecięcia powierzchni plastyczności płaszczyzną $\sigma_3 = 0$

Mróz sformułował dwa postulaty. Pierwszy postulat (rys. 2) dotyczy podziału przestrzeni naprężeń na obszary związane ze stałymi modułami plastycznymi. Są one ograniczone sąsiednimi powierzchniami plastyczności.

Drugi postulat (rys. 3) wiąże się z kinematycznym wzmocnieniem materiału i dotyczy prawa translacji powierzchni plastyczności, traktowanych jako sztywne obiekty geometryczne. Zmodyfikowany sposób wyznaczania wektora translacji powierzchni plastyczności $f^{(i)} = 0$ zaproponował Garud (1981). Przyjął on, że punkt opisujący aktualny stan naprężenia σ^a , leżący na powierzchni plastyczności $f^{(i)} = 0$, oraz punkt σ^f , opisujący fikcyjny stan naprężenia na powierzchni $f^{(i+1)} = 0$, są związane kierunkiem przyrostu stanu naprężenia $\Delta\sigma$ (rys. 3). Wektor translacji powierzchni plastyczności $f^{(i)} = 0$ wyznacza się z warunku styczności powierzchni $f^{(i)} = 0$ oraz $f^{(i+1)} = 0$ w punkcie σ^f . Powyższe założenie tożsamościowo spełnia warunek zgodności i jest wystarczające do wyznaczenia kierunku i modułu wektora hipotetycznego przemieszczenia powierzchni. Szczegółowy opis wyznaczania składowych tensorów naprężenia i odkształcenia w prezentowanym

przypadku znaleźć można np. w pracach Seweryna (2004, 2007).

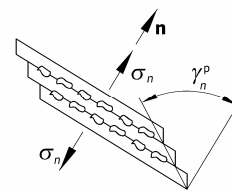


Rys. 3. Prawo translacji powierzchni plastyczności (drugi postulat Mroza zmodyfikowany przez Garuda)

3. PRAWO KUMULACJI USZKODZEŃ

Źródłem powstawania i rozwoju uszkodzeń w materiałach polikrystalicznych są poślizgi w ziarnach, tworzące później pasma poślizgów, blokujące się na granicach ziaren. Przełamanie tych blokad, czyli wzbudzenie poślizgów w sąsiednich ziarnach, sprzyja łączeniu się pasm poślizgów, a w następstwie powstaniu odkształceń plastycznych (postaciowych) oraz inkubacji i rozwojowi mikropęknięć Kocańda i Kocańda(1989).

Duży wpływ na proces kumulacji uszkodzeń, wywołanych poślizgami na płaszczyźnie fizycznej, ma składowa normalna wektora naprężenia na tej płaszczyźnie. W przypadku, gdy na płaszczyźnie fizycznej występuje naprężenie rozciągające, następuje ułatwione generowanie nowych uszkodzeń i szybszy rozwój już istniejących. Naprężenie ściskające natomiast spowalnia proces kumulacji uszkodzeń.



Rys. 4. Generowanie defektów na płaszczyźnie fizycznej przez pasma poślizgów

Proponowane w niniejszej pracy prawo kumulacji uszkodzeń, wywołanej odkształceniami plastycznymi, sformułowano przyrostowo i uzależniono od naprężeniowej funkcji kumulacji uszkodzeń oraz przyrostu plastycznych odkształceń postaciowych na danej płaszczyźnie fizycznej, a mianowicie:

$$d\omega_{np} = A_p \Psi_p(\sigma_n, \omega_{np}) d\gamma_n^p, \quad (4)$$

gdzie $d\omega_{np}$ jest przyrostem miary kumulacji uszkodzeń na płaszczyźnie fizycznej, spowodowanym rozwojem odkształceń plastycznych, σ_n jest naprężeniem normalnym, a $d\gamma_n^p$ – jest przyrostem plastycznych odkształceń

postaciowych na tej płaszczyźnie.

Przyrost miary kumulacji uszkodzeń $d\omega_{np}$ uzależniono od wartości naprężeń normalnych σ_n oraz miary kumulacji uszkodzeń ω_{np} na płaszczyźnie fizycznej za pomocą funkcji kumulacji uszkodzeń Ψ_p . Funkcję tę zaproponowano w następującej postaci:

$$\Psi_p(\sigma_n, \omega_{np}) = \left(1 - \frac{1}{3} R_\sigma(\sigma_n, \omega_{np})\right)^{1/c}, \quad (5)$$

gdzie R_σ jest naprężeniową funkcją pęknięcia, c jest wykładnikiem występującym w równaniu (1).

Mechanizm kumulacji uszkodzeń opisywany zależnościami (4)-(5) przedstawiono na rys. 4.

Kryterium inicjacji szczeliny można zapisać w postaci warunku naprężeniowego związanego z płaszczyzną fizyczną, a mianowicie:

$$R_{f\sigma} = \max_{(n)} \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} \right) = 1, \quad (6)$$

gdzie $R_{f\sigma}$ jest naprężeniowym współczynnikiem pęknięcia, $\sigma_c = \sigma_c^*(1 - \omega_{np})$ jest aktualną wartością normalnych naprężeń niszczących dla materiału, zależną od miary kumulacji uszkodzeń. Do obliczeń można przyjąć, że wartość naprężeń niszczących dla materiału nieuszkodzonego $\sigma_c^* = \sigma_f$.

Można także zaproponować prostszy warunek inicjacji szczeliny, a mianowicie Seweryn i inni (2007):

$$\max_{(n)} \omega_{np} = 1. \quad (7)$$

W tym przypadku zakłada się, że inicjacja szczeliny nastąpi wówczas, gdy miara kumulacji uszkodzeń wywołanych odkształceniami plastycznymi na wybranej płaszczyźnie fizycznej osiągnie wartość krytyczną.

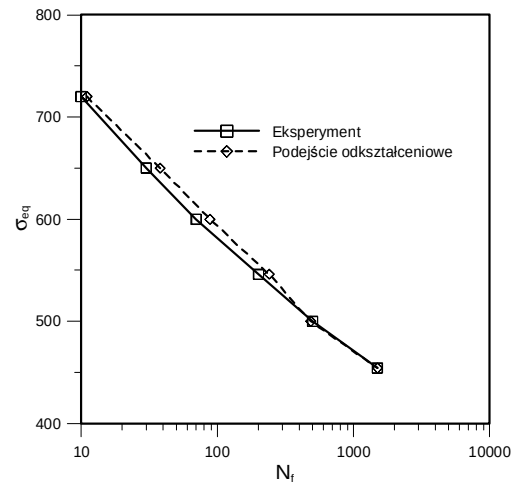
W celu określenia miejsca i kierunku inicjacji szczeliny rozpatruje się wszystkie płaszczyzny fizyczne, na których zachodzi kumulacja uszkodzeń wywołana obciążeniami. Uszkodzenia sumuje się niezależnie dla wszystkich płaszczyzn, po czym sprawdza się na której z nich warunek inicjacji szczeliny (6) lub (7) został osiągnięty najszybciej.

Zaproponowany opis kumulacji uszkodzeń zweryfikowano wykorzystując dane materiałowe dla stali SAE1045 (Leese i inni, 1989). Testy numeryczne wykonano dla dwóch podstawowych typów obciążenia. W pierwszym przypadku próbki poddano działaniu cyklicznego, symetrycznego rozciągania - ściskania. Obciążenie realizowano za pomocą zadanych przyrostów naprężeń normalnego. Wyniki przeprowadzonych obliczeń porównano z danymi doświadczalnymi (rys. 5).

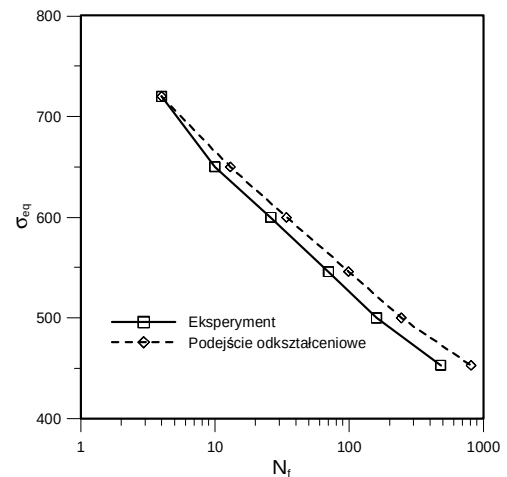
Drugi test polegał na symetrycznym skręcaniu próbek. Tak jak poprzednio, obciążenie realizowano za pomocą przyrostów naprężenia tnącego, tak aby zachować tę samą amplitudę mierzoną naprężeniem zredukowanym Hubera -

von Misesa $\sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}$, gdzie s_{ij} składowe dewiatora

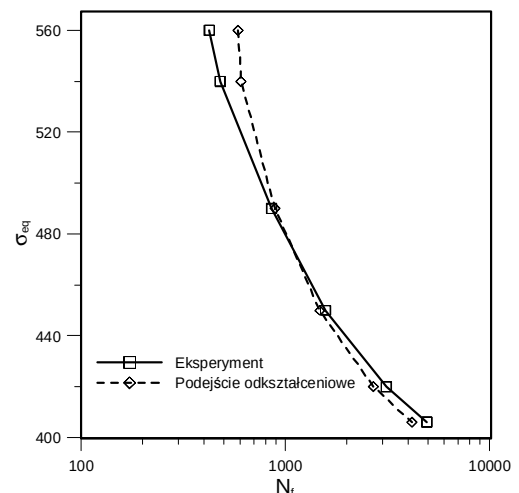
naprężeń. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunku 6.



Rys. 5. Wyniki obliczeń numerycznych i badań doświadczalnych (Leese i inni, 1989) dla jednoosiowego, symetrycznego rozciągania – ściskania (stal SAE 1045)

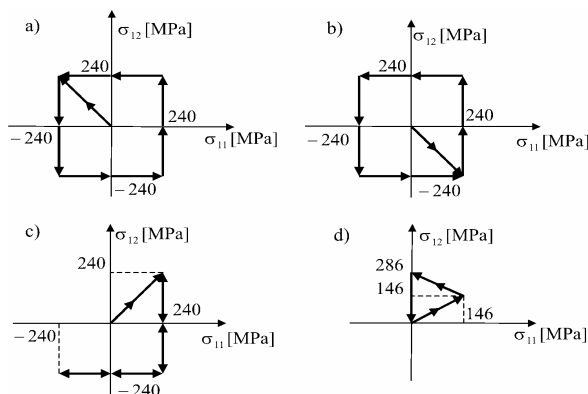


Rys. 6. Wyniki obliczeń numerycznych i badań doświadczalnych (Leese i inni, 1989) dla symetrycznego skręcania (stal SAE 1045)



Rys. 7. Wyniki obliczeń numerycznych i badań doświadczalnych (Baum i inni 2003) dla jednoosiowego, symetrycznego rozciągania – ściskania (stal L290GA)

Następne obliczenia numeryczne wykonano dla stali do budowy rurociągów L290GA (Baum i inni, 2003). Rozpatrzono dwa przypadki obciążeń: jednoosiowe, symetryczne rozciąganie - ściskanie oraz obciążenia złożone.



Typ obciążenia	a)	b)	c)	d)
Eksperyment	2880	2640	1648	kilkaset tysięcy
N_f (podejście odształceniowe)	2077	2077	1718	∞

Rys. 8. Historie obciążeń nieproporcjonalnych i odpowiadające im zestawienie wyników obliczeń numerycznych i badań doświadczalnych (Baum i inni, 2003) dla stali L290GA

Konfiguracje pętli obciążenia przedstawione za pomocą odpowiednich wartości amplitud składowej normalnej i stycznej wektora naprężenia, pokazano na rys. 8. Obliczoną trwałość, dla wybranych obciążeń proporcjonalnych (symetrycznego rozciągania - ściskania) – rys. 7, oraz nieproporcjonalnych – rys. 8, porównano z wynikami badań eksperymentalnych Bauma i innych (2003).

4. PODSUMOWANIE

Przedstawiony model umożliwia określenie miejsca i kierunku inicjacji szczeliny oraz liczbę cykli lub czas działania złożonego obciążenia niskocyklowego dla dowolnego kształtu elementu konstrukcyjnego. Niezbędna jest wówczas znajomość pól naprężeń i odształceń w elemencie.

Zaletą modelu jest stosunkowo mała liczba parametrów materiałowych, które można wyznaczyć w bezpośredni sposób w testach monotonicznego i cyklicznego rozciągania oraz monotonicznego lub cyklicznego skręcania. Należy zwrócić uwagę na dobrą dokładność prognozowania wytrzymałości zmęczeniowej przy zastosowaniu podejścia odształceniowego, także w przypadku obciążeń złożonych.

LITERATURA

1. Baum C., Ott W., Buczyński A., Trautmann K-H., Nowack H., (2003), *Further evaluation of the advanced prediction method EVICD for arbitrary multiaxial loading*, First Int. Conference on Fatigue Damage of Materials-Experiment and Analysis, 14-16, July, Toronto, Canada.
2. Garud Y.S., (1981), A new approach to the evaluation of fatigue under multiaxial loadings, *J. Engng. Mater. Technol.*, ASME, 103, 118-125.
3. Han C., Chen X., Kim K.S., (2002), Evaluation of multiaxial fatigue criteria under irregular loading, *Int. J. Fatigue*, 4: 913-922.
4. Harik V. M., Klinger J. R., Bogett T. A., (2002), Low-cycle fatigue of unidirectional composites Bi-linear S-N-curves, *Int. J. Fatigue*, vol. 24, 455-462.
5. Kaleta J., Piotrowski A., Harig H., (1995), Cyclic properties and hysteresis energy accumulation in selected sintered steels. In: Teoh SH, Lee KH, editors. *Proc. of Fracture Engineering Materials and Structures*. Singapore.
6. Kocańda S., Kocańda A., (1989), *Niskocyklowa wytrzymałość zmęczeniowa metali*, PWN, Warszawa.
7. Kuroda M., (2001), Extremely low cycle fatigue life prediction based on a new cumulative fatigue damage model, *Int. J. Fatigue*, vol. 24, 39-53
8. Lee B. L., Kim K. S., Nam K. M., (2003), Fatigue analysis under variable amplitude loading using an energy parameter, *Int. J. Fatigue*, vol. 25, 621-631.
9. Leese G. E., Socie G., (1989), *Multiaxial Fatigue: Analysis and Experiments*, Ae-14, ISBN: 0-89883-780-4.
10. Łagoda T., (2001), Energy models for fatigue life estimation under uniaxial random loading. Part I: The model elaboration, *Int. J. Fatigue*, vol. 23, 467-480
11. Morrow J.D., (1965), Cyclic plastic stain energy and fatigue of metals, In: *Internal Friction, Damping and Cyclic Plasticity*, ASTM STP, 378, Philadelphia, 45-84.
12. Mróz Z., (1967), On the description of anisotropic workhardening, *J. Mech. Phys. Solids*, 15, pp. 163-175.
13. Petti R. G., Chen C., Ingraffea A. R., Hui C., (2001), Process zone size effects on naturally curving cracks, *Engng Fract. Mech.*, vol. 68, 1181-1205
14. Seweryn A. (red.), (2004), *Modelowanie zagadnień kumulacji uszkodzeń i pęknięcia w złożonych stanach obciążeń*, Wyd. PB, Białystok.
15. Seweryn A., Buczyński A., Szusta J., (2007), Damage accumulation model for low cycle fatigue, *Int. J. Fatigue* (w druku).
16. Varvani-Farahani A., (2000), A new energy-critical plane parameter for fatigue life assesment of various metallic materials subjected to in-phase and out-of-phase multiaxial fatigue loading conditions, *Int. J. Fatigue*, 22: 295-305.

STRAIN-BASED DAMAGE ACCUMULATION MODEL FOR LOW CYCLE FATIGUE

Abstract: The paper presents the description of damage accumulation for analysis of fatigue life of structural elements under non-proportional loading states. The numerical algorithm consists of two calculation blocks. First presents method for calculation components of stress and strain tensors using multisurface hardening rule proposed by Mróz. Those components have been used for calculation of fatigue life in second block. Increment of damage accumulation has been addicted from increment of shear strain on physical plane.

Praca naukowa finansowana ze środków budżetowych na naukę w latach 2005 – 2007 jako projekt badawczy nr 4 T07A 030 28.

ZAGADNIENIE KONTAKTOWE DLA UKŁADU WARSTWA - PODŁOŻE Z UWZGLĘDNIENIEM NIESTACJONARNEJ GENERACJI CIEPŁA W WYNIKU TARCIA

Aleksander YEVTUSHENKO*, Michał KUCIEJ*

ayevt@pb.edu.pl, kuciej@pb.edu.pl

* Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

Streszczenie: Otrzymano analityczne rozwiązanie zagadnienia przewodnictwa ciepłego i odpowiedniego zagadnienia quasi-statycznej termosprężystości dla układu tarcowego, złożonego z podłoża (półprzestrzeni) i ślizgającej się po jego powierzchni ze stałą prędkością warstwy. Dla pary tarcowej aluminium–stal zbadano ewolucję i rozkład po głębokości od powierzchni tarcia temperatur, strumieni ciepłych i przemieszczeń.

1. WPROWADZENIE

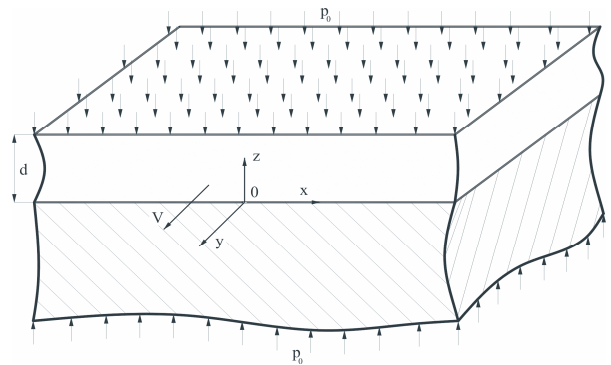
Współcześnie, formułowanie zagadnień ciepłych tarcia jest realizowane w dwóch wariantach. W pierwszym - elementy pary tarcowej są umyślnie rozdzielane i na każdej z roboczych powierzchni zadawana jest intensywność strumieni ciepłych w takiej postaci, żeby ich suma była równa mocy sił tarcia. Współczynnik rozdzielania strumieni ciepłych wyznacza się eksperymentalnie lub oblicza się za pomocą empirycznych wzorów (Block i Jaeger, 1942). Przy takich założeniach otrzymano rozwiązanie zagadnienia przewodnictwa ciepłego tarcia dla podstawy z naniesioną na jej powierzchnię warstwą kompozytową (Yevtushenko et al., 2004, Matysiak et al., 2005) oraz zagadnienia przewodnictwa ciepłego tarcia podczas hamowania dla ciała z jednorodną lub kompozytową warstwą ochronną (Yevtushenko et al., 2005a, 2005b). Rozkład naprężeń termicznych powstający pod wpływem nagrzewania impulsem cieplnym powierzchni warstwy połączonej idealnie z półprzestrzenią zbadano w pracy (Matysiak et al., 2007).

Drugi wariant formułowania zagadnień przewodnictwa ciepłego tarcia przewiduje równoczesne rozwiązanie równań przewodnictwa ciepłego i termosprężystości dla każdego z elementów tarcowych oraz wyznaczenie intensywności strumieni ciepłych (Johnson, 1985).

Celem pracy jest rozwiązanie w ramach drugiego podejścia niestacjonarnego zagadnienia ciepłego tarcia dla układu warstwa-podłoże.

2. ZAGADNIENIE PRZEWODNICTWA CIEPŁA

Niech po powierzchni półprzestrzeni ze stałą prędkością V ślizga się w kierunku osi y warstwa o grubości d (rys. 1). Na zewnętrznej powierzchni warstwy oraz na nieskończoności w półprzestrzeni przyłożono ciśnienie p_0 , działające w kierunku zgodnym z osią z . Na powierzchni kontaktu $z = 0$, pod wpływem sił tarcia generują się strumienie ciepła skierowane odpowiednio do wewnątrz elementów pary tarcia. Wszystkie wielkości i parametry odnoszące się do warstwy będziemy oznaczać indeksami dolnymi „s” a do półprzestrzeni – „f”.



Rys. 1. Schemat zagadnienia

Pole temperatury w warstwie $T_s(z,t)$ i półprzestrzeni $T_f(z,t)$ otrzymamy z rozwiązania zagadnienia początkowo-brzegowego przewodnictwa ciepłego:

$$\frac{\partial^2 T_s(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{k_s} \frac{\partial T_s(z,t)}{\partial t}, \quad 0 \leq z \leq d, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T_f(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{k_f} \frac{\partial T_f(z,t)}{\partial t}, \quad -\infty < z \leq 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$K_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial z} \right|_{z=0-} - K_s \left. \frac{\partial T_s}{\partial z} \right|_{z=0+} = f V p_0, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$T_f(0,t) = T_s(0,t), \quad t > 0, \quad (4)$$

$$T_s(d,t) = 0, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$T_f(z,t) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$T_s(z,0) = 0, \quad 0 < z < d, \quad T_f(z,0) = 0, \quad -\infty < z < 0. \quad (7)$$

Z uwzględnieniem oznaczeń

$$\zeta = \frac{z}{d}, \quad \tau = \frac{k_s t}{d^2}, \quad T_0 = \frac{f V p_0 d}{K_s}, \quad K^* = \frac{K_f}{K_s}, \quad T_{s,f}^* = \frac{T_{s,f}}{T_0}, \quad (8)$$

Zagadnienie początkowo-brzegowe przewodnictwa cieplnego (1) – (7) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 T_s^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial T_s^*(\zeta, \tau)}{\partial \tau}, \quad 0 < \zeta < 1, \quad \tau > 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 T_f^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{k^*} \frac{\partial T_f^*(\zeta, \tau)}{\partial \tau}, \quad -\infty < \zeta < 0, \quad \tau > 0, \quad (10)$$

$$K^* \frac{\partial T_f^*}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0-} - \frac{\partial T_s^*}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0+} = 1, \quad \tau > 0, \quad (11)$$

$$T_f^*(0, \tau) = T_s^*(0, \tau), \quad \tau > 0, \quad (12)$$

$$T_s^*(1, \tau) = 0, \quad \tau > 0, \quad (13)$$

$$T_f^*(\zeta, \tau) \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow -\infty, \quad \tau > 0, \quad (14)$$

$$T_s^*(\zeta, 0) = 0, \quad 0 < \zeta < 1, \quad T_f^*(\zeta, 0) = 0, \quad -\infty < \zeta < 0. \quad (15)$$

Stosując do zagadnienia nieustalonego przewodnictwa cieplnego (9) – (15) transformację całkową Laplace’a względem liczby Fouriera (τ), otrzymano wartości bezwymiarowych temperatur w warstwie i podłożu:

$$T_s^*(\zeta, \tau) = \frac{1}{(1+\varepsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n T_{s,n}^*(\zeta, \tau), \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad \tau \geq 0, \quad (16)$$

$$T_{s,n}^*(\zeta, \tau) = 2\sqrt{\tau} \left[\operatorname{ierfc} \left(\frac{2n+\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{ierfc} \left(\frac{2n+2-\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) \right], \quad (17)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

$$T_f^*(\zeta, \tau) = \frac{1}{(1+\varepsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n T_{f,n}^*(\zeta, \tau), \quad -\infty < \zeta \leq 0, \quad \tau \geq 0, \quad (18)$$

$$T_{f,n}^*(\zeta, \tau) = 2\sqrt{\tau} \left[\operatorname{ierfc} \left(\frac{2n\sqrt{k^*} - \zeta}{2\sqrt{k^*}\tau} \right) - \operatorname{ierfc} \left(\frac{(2n+2)\sqrt{k^*} - \zeta}{2\sqrt{k^*}\tau} \right) \right], \quad (19)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

gdzie

$$\Lambda^n = \begin{cases} (-1)^n \lambda^n, & 0 \leq \lambda < 1, \\ |\lambda|^n, & -1 < \lambda \leq 0, \end{cases} \quad (20)$$

$$-1 < \lambda = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} < 1, \quad \varepsilon = \frac{K^*}{\sqrt{k^*}} = \frac{K_f}{K_s} \sqrt{\frac{k_s}{k_f}}. \quad (21)$$

Intensywności strumieni ciepłych w warstwie i półprzestrzeni:

$$q_s(z, t) \equiv -K_s \frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z}, \quad 0 \leq z \leq d, \quad t \geq 0, \quad (22)$$

$$q_f(z, t) \equiv K_f \frac{\partial T_f(z, t)}{\partial z}, \quad -\infty < z \leq 0, \quad t \geq 0,$$

z uwzględnieniem oznaczeń (8) przyjmą postać:

$$q_s^*(\zeta, \tau) \equiv \frac{q_s(z, t)}{\sqrt{p_0}} = -\frac{\partial T_s^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad \tau \geq 0, \quad (23)$$

$$q_f^*(\zeta, \tau) \equiv \frac{q_f(z, t)}{\sqrt{p_0}} = K^* \frac{\partial T_f^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta}, \quad -\infty < \zeta \leq 0, \quad \tau \geq 0. \quad (24)$$

Podstawiając do wzoru (23) i (24) wartości temperatur $T_{s,f}^*$ (16) – (19), otrzymano bezwymiarowe intensywności strumieni ciepłych:

$$q_s^*(\zeta, \tau) = \frac{1}{(1+\varepsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n q_{s,n}^*(\zeta, \tau), \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad \tau \geq 0, \quad (25)$$

$$q_{s,n}^*(\zeta, \tau) = \operatorname{erfc} \left(\frac{2n+\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{2n+2-\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (26)$$

$$q_f^*(\zeta, \tau) = \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n q_{f,n}^*(\zeta, \tau), \quad -\infty < \zeta \leq 0, \quad \tau \geq 0, \quad (27)$$

$$q_{f,n}^*(\zeta, \tau) = \operatorname{erfc} \left(\frac{2n\sqrt{k^*} - \zeta}{2\sqrt{k^*}\tau} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{(2n+2)\sqrt{k^*} - \zeta}{2\sqrt{k^*}\tau} \right), \quad (28)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Na powierzchni tarcia $\zeta = 0$ ze wzorów (25) – (28) wynika, że

$$q_f^*(0, \tau) + q_s^*(0, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n \operatorname{erfc} \left(\frac{2n}{2\sqrt{\tau}} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^{n+1} \operatorname{erfc} \left(\frac{2n+2}{2\sqrt{\tau}} \right) =$$

$$= \operatorname{erfc}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda^n \operatorname{erfc} \left(\frac{2n}{2\sqrt{\tau}} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda^n \operatorname{erfc} \left(\frac{2n}{2\sqrt{\tau}} \right) = 1,$$

czyli spełnienie warunku brzegowego (11).

Rozwiązanie (16) – (21) zagadnienia przewodnictwa cieplnego (9) – (15) otrzymano dla przypadku zerowej temperatury na powierzchni $\zeta = 1$ warstwy (warunek brzegowy (13)). Jeżeli powierzchnia ta jest izolatorem cieplnym, tzn.

$$\frac{\partial T_s^*}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} = 0, \quad \tau > 0, \quad (29)$$

to rozwiązanie równań przewodnictwa cieplnego (9) i (10), z uwzględnieniem brzegowych i początkowych warunków (11), (12), (14), (15) i (29), również ma postać (16) i (18), gdzie:

$$T_{s,n}^*(\zeta, \tau) = 2\sqrt{\tau} \left[\operatorname{ierfc} \left(\frac{2n+\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) + \operatorname{ierfc} \left(\frac{2n+2-\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) \right], \quad (30)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

$$T_{f,n}^*(\zeta, \tau) = 2\sqrt{\tau} \left[\operatorname{ierfc} \left(\frac{2n\sqrt{k^*} - \zeta}{2\sqrt{k^*}\tau} \right) + \operatorname{ierfc} \left(\frac{(2n+2)\sqrt{k^*} - \zeta}{2\sqrt{k^*}\tau} \right) \right], \quad (31)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Odpowiednie intensywności strumieni ciepłych obliczamy za pomocą wzorów (25) i (27), gdzie:

$$q_{s,n}^*(\zeta, \tau) = \operatorname{erfc} \left(\frac{2n+\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{2n+2-\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right), \quad (32)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

$$q_{f,n}^*(\zeta, \tau) = \operatorname{erfc} \left(\frac{2n\sqrt{k^*} - \zeta}{2\sqrt{k^*}\tau} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{(2n+2)\sqrt{k^*} - \zeta}{2\sqrt{k^*}\tau} \right), \quad (33)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

3. ZAGADNIENIE TERMOSPŁĘŻYSTOŚCI

Znając pola temperatury (16) – (19) sformułowano odpowiednie quasi-statyczne zagadnienie termosprężystości w postaci:

$$\frac{\partial^2 w_s}{\partial z^2} = \beta_s \frac{\partial T_s}{\partial z}, \quad 0 \leq z \leq d, t > 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 w_f}{\partial z^2} = \beta_f \frac{\partial T_f}{\partial z}, \quad -\infty < z \leq 0, t > 0, \quad (35)$$

$$\sigma_s(0, t) = \sigma_f(0, t), \quad t > 0, \quad (36)$$

$$w_s(0, t) = w_f(0, t), \quad t > 0, \quad (37)$$

$$\sigma_s(d, t) = \sigma_f(-\infty, t) = -p_0, \quad t > 0, \quad (38)$$

gdzie

$$\sigma_{s,f}(z, t) = \mu_{s,f} \chi_{s,f} \left[\frac{\partial w_{s,f}(z, t)}{\partial z} - \beta_{s,f} T_{s,f}(z, t) \right], \quad (39)$$

$$\beta_{s,f} = \frac{\alpha_{s,f}(1+\nu_{s,f})}{(1-\nu_{s,f})}, \quad \mu_{s,f} = \frac{E_{s,f}}{2(1+\nu_{s,f})}, \quad \chi_{s,f} = \frac{2(1-\nu_{s,f})}{(1-2\nu_{s,f})}.$$

Z uwzględnieniem oznaczeń (8) zagadnienie brzegowe termosprężystości (34) – (38) i relację (39) zapiszemy w postaci bezwymiarowej

$$\frac{\partial^2 w_s^*}{\partial \zeta^2} = \beta_s T_0 \frac{\partial T_s^*}{\partial \zeta}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \tau > 0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 w_f^*}{\partial \zeta^2} = \beta_f T_0 \frac{\partial T_f^*}{\partial \zeta}, \quad -\infty < \zeta \leq 0, \tau > 0, \quad (41)$$

$$\sigma_s^*(0, \tau) = \sigma_f^*(0, \tau), \quad \tau > 0, \quad (42)$$

$$w_s^*(0, \tau) = w_f^*(0, \tau), \quad \tau > 0, \quad (43)$$

$$\sigma_s^*(1, \tau) = \sigma_f^*(-\infty, \tau) = -1, \quad \tau > 0, \quad (44)$$

$$\sigma_{s,f}^*(\zeta, \tau) = \frac{\mu_{s,f} \chi_{s,f}}{p_0} \left[\frac{\partial w_{s,f}^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} - \beta_{s,f} T_0 T_{s,f}^*(\zeta, \tau) \right], \quad (45)$$

$$\text{gdzie } w_{s,f}^* = \frac{w_{s,f}}{d}, \quad \sigma_{s,f}^* = \frac{\sigma_{s,f}}{p_0} \quad (46)$$

Rozwiązanie brzegowego zagadnienia quasi-statycznej termosprężystości (40) – (41) otrzymano przy pomocy transformacji całkowej Laplace'a:

$$w_s^*(\zeta, \tau) = -\frac{p_0}{\mu_s \chi_s} \zeta + \frac{\beta_s T_0}{(1+\varepsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n [w_{s,n}^*(\zeta, \tau) - w_{s,n}^*(0, \tau)], \quad (47)$$

$$0 \leq \zeta \leq 1, \quad \tau \geq 0,$$

$$w_{s,n}^*(\zeta, \tau) = -2\tau \left[I \left(\frac{2n+\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) + I \left(\frac{2n+2-\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (48)$$

$$w_f^*(\zeta, \tau) = -\frac{p_0}{\mu_f \chi_f} \zeta + \frac{\beta_f T_0}{(1+\varepsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n [w_{f,n}^*(\zeta, \tau) - w_{f,n}^*(0, \tau)], \quad (49)$$

$$-\infty < \zeta \leq 0, \quad \tau \geq 0,$$

$$w_{f,n}^*(\zeta, \tau) = 2\tau \sqrt{k^*} \left\{ I \left(\frac{2n\sqrt{k^*} - \zeta}{2\sqrt{k^*}\tau} \right) - I \left(\frac{(2n+2)\sqrt{k^*} - \zeta}{2\sqrt{k^*}\tau} \right) \right\}, \quad (50)$$

gdzie $I(x) = 0.5 \operatorname{erfc}(x) - x \operatorname{ierfc}(x)$. Prawe strony rozwiązań (47) i (49) zawierają liniowe i nieliniowe (względem zmiennej ζ) składniki, odpowiadające sprężystej i termosprężystej części przemieszczeń.

W przypadku izolacji cieplnej na zewnętrznej powierzchni warstwy (29), bezwymiarowe przemieszczenia $w_{s,f}^*$ obliczamy ze wzorów (47) i (49) z uwzględnieniem wartości temperatur (16), (18), (30) i (31):

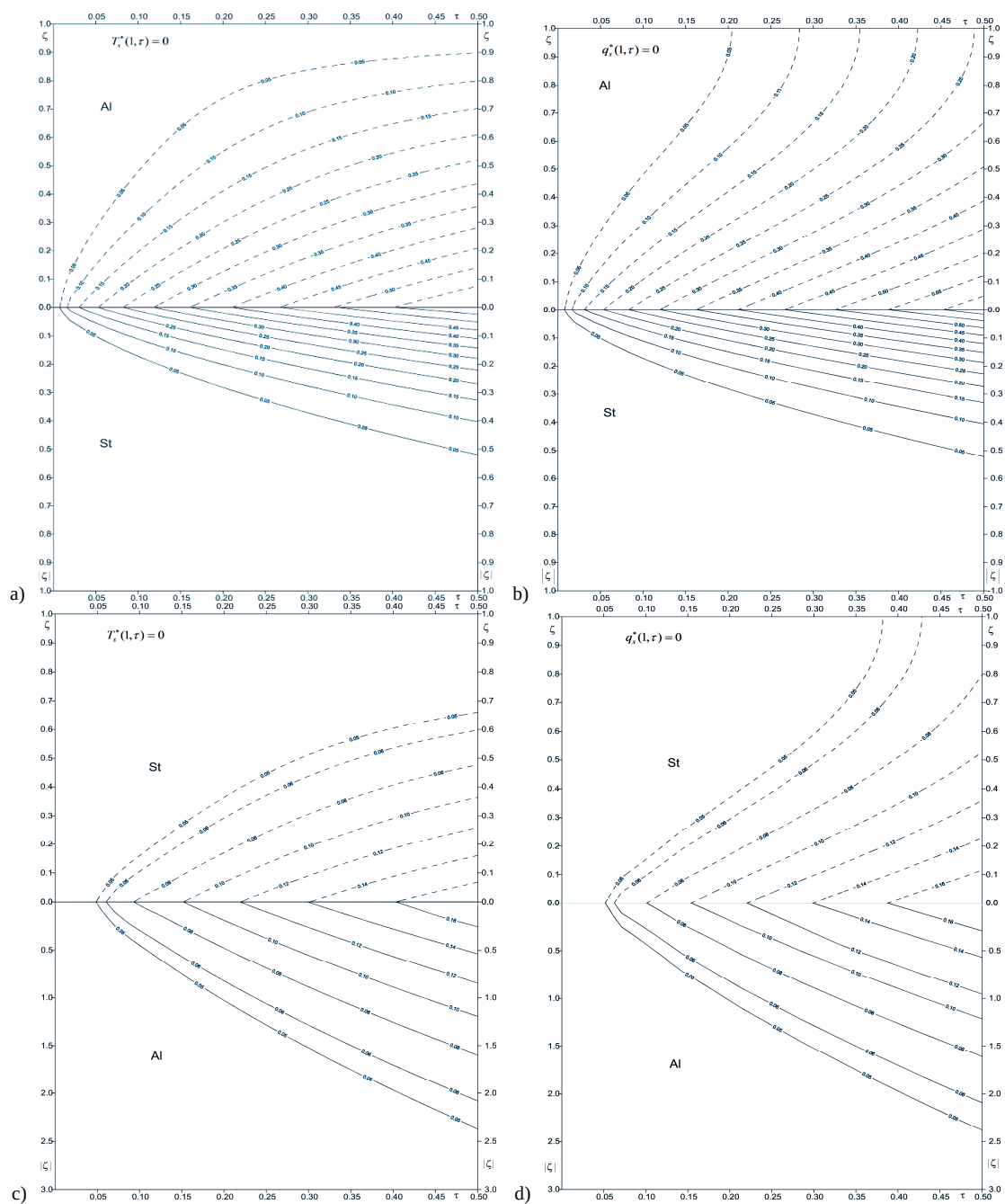
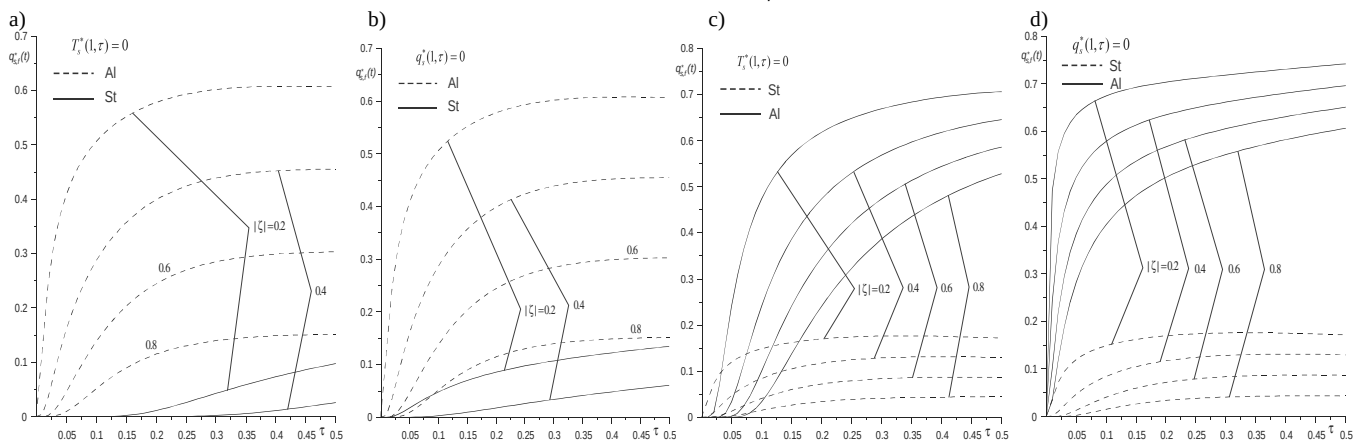
$$w_{s,n}^*(\zeta, \tau) = -2\tau \left[I \left(\frac{2n+\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) - I \left(\frac{2n+2-\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (51)$$

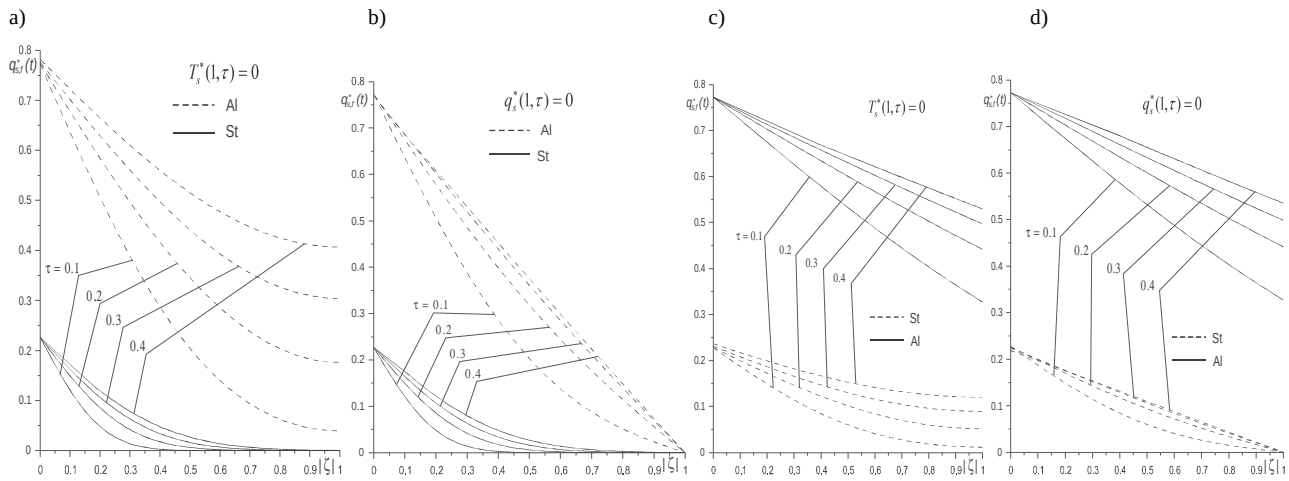
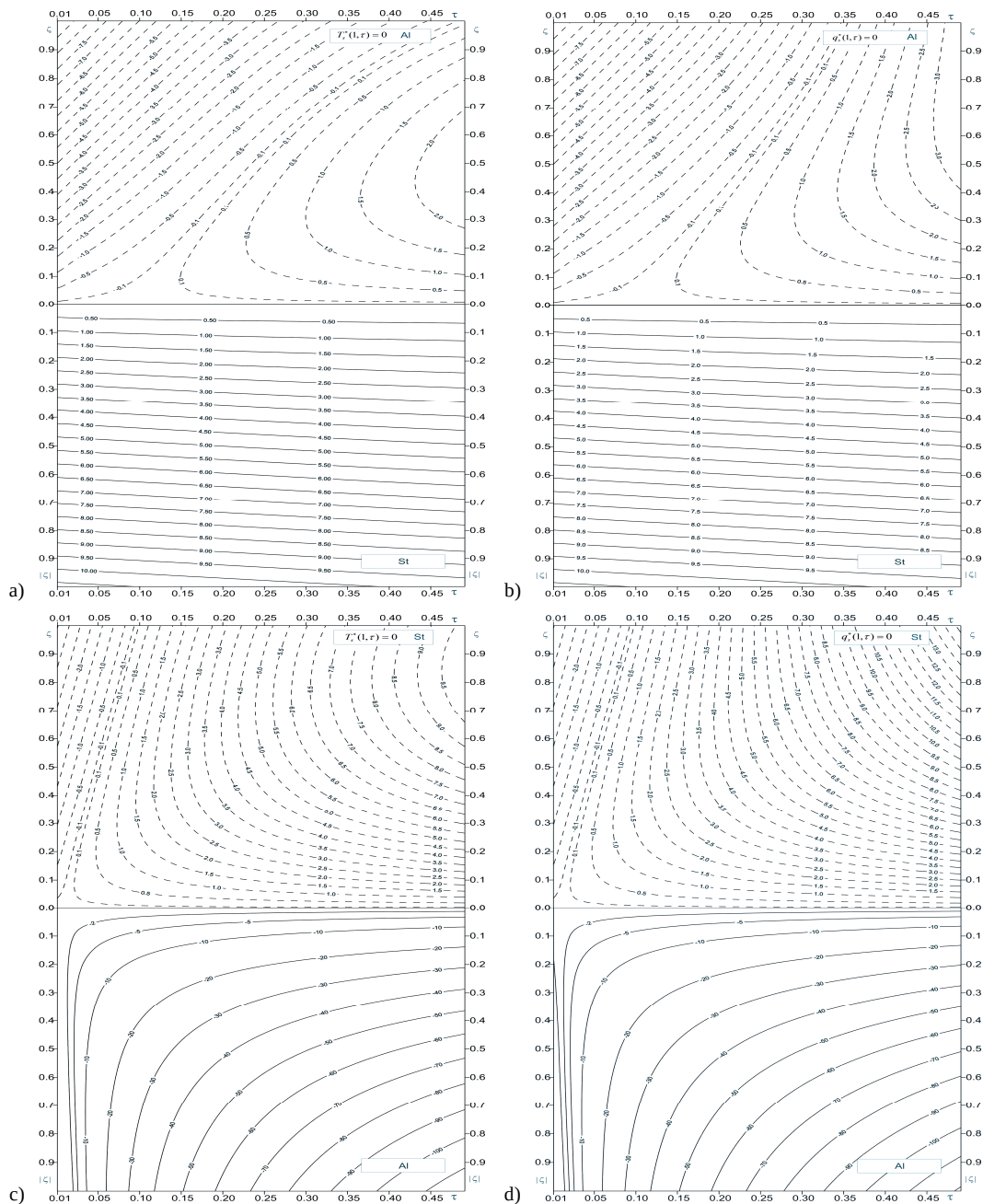
$$w_{f,n}^*(\zeta, \tau) = 2\tau \sqrt{k^*} \left\{ I \left(\frac{2n\sqrt{k^*} - \zeta}{2\sqrt{k^*}\tau} \right) + I \left(\frac{(2n+2)\sqrt{k^*} - \zeta}{2\sqrt{k^*}\tau} \right) \right\}. \quad (52)$$

4. ANALIZA NUMERYCZNA

Bezwymiarowymi parametrami wejściowymi zagadnienia są: współrzędna przestrzenna ζ oraz czas τ (liczba Fouriera) (8). Obliczenia bezwymiarowych temperatur $T_{s,f}^*$, intensywności strumieni cieplnych $q_{s,f}^*$ oraz przemieszczeń $w_{s,f}^*$ przeprowadzono dla warstwy i podłoża z aluminium ($\nu=0.34$, $\mu=0.027$ MPa, $K=209$ W/(mK), $k=8.6 \cdot 10^{-5}$ m²/s, $\alpha=13 \cdot 10^{-6}$ K⁻¹) i stali ($\nu=0.3$, $\mu=0.08$ MPa, $K=22$ W/(mK), $k=1.1 \cdot 10^{-5}$ m²/s, $\alpha=13 \cdot 10^{-6}$ K⁻¹) dla dwóch wariantów warunków brzegowych na zewnętrznej powierzchni warstwy, przy zerowej: temperaturze (13) lub intensywności strumienia ciepła (29). Wyniki obliczeń przedstawiono na wykresach, gdzie linie ciągłe oznaczają wartości obliczone dla podłoża, a przerywane – dla warstwy. Izotermy bezwymiarowych temperatur pokazano na rys. 2. Na tej samej odległości od powierzchni tarcia, dla dwóch wariantów warunków brzegowych na zewnętrznej powierzchni warstwy, temperatura w elemencie z aluminium jest zawsze wyższa od temperatury elementu ze stali. Na powierzchni tarcia $\zeta = 0$ temperatury warstwy i podłoża są równe, zgodnie z warunkiem brzegowym (12).

Efektywna głębokość nagrzewania (odległość od powierzchni tarcia, na której temperatura jest równa 5% od maksymalnej na powierzchni) dla elementu pary tarciowej z aluminium jest zawsze większa niż dla elementu ze stali. W przypadku podtrzymania na zewnętrznej powierzchni warstwy zerowej temperatury, efektywna głębokość nagrzewania aluminiowego elementu jest równa 0.9 (rys. 2a) i 2.3 (rys. 2c), odpowiednio dla stalowego – 0.52 oraz 0.67. Jeżeli zewnętrzna powierzchnia warstwy jest izolatorem cieplnym, to temperatura przyjmuje znaczące wartości na całej grubości warstwy (rys. 2b, d), a efektywna głębokość nagrzewania podstawy z aluminium jest zawsze większa niż warstwy ze stali (rys. 2d). Porównując rys. 2a i 2b oraz 2c i 2d można zauważyć, że rodzaj warunków brzegowych na zewnętrznej powierzchni warstwy praktycznie nie wpływa na temperaturę w podłożu.

Rys. 2. Izotermy bezwymiarowej temperatury w warstwie $T_s(z, t)$ i podłożu $T_f(z, t)$ Rys. 3. Ewolucja bezwymiarowych intensywności strumieni ciepłych w warstwie i podłożu dla różnych wartości $|\zeta|$


 Rys. 4. Ewolucja bezwymiarowych intensywności strumieni ciepłych w warstwie i podłożu dla różnych wartości τ

 Rys. 5. Rozkład bezwymiarowych przemieszczeń w warstwie $w_s^* \times 10^4$, i podłożu $w_f^* \times 10^4$

Zmianę w czasie bezwymiarowych intensywności strumieni ciepłych w warstwie (q_s^*) i podłożu (q_f^*) pokazano na rys. 3. Wyraźnie widać dwa etapy tej zmiany w warstwie: przejściowy ($0 < \tau \leq 0.3$) i ustalony ($\tau > 0.3$). Intensywność strumienia ciepła w podstawie wzrasta monotonicznie z upływem czasu. W stosunku ilościowym intensywność strumienia ciepła dla zadanych wartości $|\zeta|$ w elemencie z aluminium jest zawsze większa niż w elemencie ze stali.

Rozkład intensywności strumieni ciepła w warstwie i podłożu w zależności od głębokości od powierzchni tarcia pokazano na rys. 4. Wraz ze zwiększeniem odległości od powierzchni tarcia, intensywności strumieni ciepła monotonicznie zmniejszają się. Warunki brzegowe na zewnętrznej powierzchni warstwy mają bardzo mały wpływ na rozkład intensywności strumienia ciepłego w podłożu q_f^* . W przypadku zerowej temperatury na powierzchni warstwy, intensywność strumienia ciepłego q_s^* ze zwiększeniem ζ zmniejsza się do pewnej niezerowej wartości (rys. 4a, c). Jeżeli zewnętrzna powierzchnia warstwy jest izolowana, to q_s^* zmniejsza się niemal liniowo od maksymalnej wartości na powierzchni tarcia do zera (rys. 4b, d). Intensywność strumienia ciepłego q_f^* w stalowej podstawie szybko zmniejsza się ze zwiększeniem ζ od wartości 0.22 na powierzchni roboczej do zera ($q_f^* \equiv 0$ przy $\zeta > 0.8$) (rys. 4a, b). W podstawie z aluminium intensywność strumienia ciepła q_f^* zmniejsza się liniowo względem ζ .

Obliczenia bezwymiarowych przemieszczeń $w_{s,f}^*$ (46) przeprowadzono dla parametrów wejściowych: $f=0.3$, $d=0.01\text{m}$, $V=5\text{m/s}$, $p_0=1\text{MPa}$ i przedstawiono na rys. 5. W podstawie ze stali, przemieszczenia na ustalonych odległościach od powierzchni tarcia są dodatnie i zwiększają się z upływem czasu liniowo (rys. 5a, b). W początkowej fazie nagrzewania, przemieszczenia w warstwie z aluminium są ujemne, a ich wartości bezwzględne zwiększają się wraz ze zwiększeniem odległości od powierzchni tarcia. Przy $\tau \approx 0.15$ w pobliżu powierzchni $\zeta=0$ pojawia się i zaczyna rozszerzać się obszar dodatnich przemieszczeń. Rozkład ujemnych przemieszczeń w podstawie z aluminium jest nieliniowy (rys. 5c, d). Przemieszczenia w stalowej warstwie są ujemne tylko w początkowym czasie nagrzewania ($0 < \tau < 0.1$), a następnie zmieniają znak i zwiększają się nieliniowo z upływem czasu oraz z odległością od powierzchni tarcia.

5. WNIOSKI

Otrzymano analityczne rozwiązanie zagadnienia ciepłego tarcia dla warstwy ślizgającej się ze stałą prędkością po powierzchni podłoża. Zbadano ewolucję i rozkład (po odległości od powierzchni tarcia) temperatury, intensywności strumieni ciepłych oraz przemieszczeń w elementach pary aluminium – stal. Ustalono, że:

- na tej samej odległości od powierzchni tarcia, temperatura elementu aluminiowego jest wyższa niż stalowego;
- niezależnie od warunków brzegowych na zewnętrznej powierzchni warstwy, intensywność strumienia ciepła i efektywna głębokość nagrzewania w elemencie z aluminium jest zawsze większa niż w elemencie ze stali;

- przemieszczenia w elementach pary tarciowej zwiększają się wraz ze zwiększaniem odległości od powierzchni tarcia. Przemieszczenia w podłożu z aluminium są większe niż przemieszczenia stalowej warstwy.

OZNACZENIA

$\text{erf}(x)$ – funkcja błędu Gaussa;
 $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$; $\text{ierfc}(x) = \pi^{-1/2} \exp(-x^2) - x \text{erfc}(x)$;
 f – współczynnik tarcia;
 K – współczynnik przewodnictwa cieplnego; k – współczynnik dyfuzji cieplnej; p_0 – ciśnienie;
 T – temperatura; $T^* = T/T_0$ – temperatura bezwymiarowa;
 t – czas; V – prędkość; z – współrzędna przestrzenna;
 w – przemieszczenie w kierunku osi z ;
 $w^* = w/d$ – przemieszczenie bezwymiarowe;
 α – współczynnik rozszerzalności liniowej;
 $\sigma \equiv \sigma_{zz}$ – naprężenia normalne;
 $\sigma = \sigma/p_0$ – bezwymiarowe naprężenia normalne;
 $\tau = k_s t/d^2$ – bezwymiarowy czas (liczba Fouriera);
 $\zeta = z/d$ – bezwymiarowa współrzędna; d – grubość warstwy,
 E – moduł Younga; ν – współczynnik Poissona.

NON-STATIONARY THERMAL PROBLEM IN FRICTIONAL ELEMENTS

Abstract: The analytical solution of a boundary-value problem of heat conductivity and corresponding boundary problem of thermoelasticity for tribosystem, consisting of semi-infinity substrate and sliding on its surface a layer is obtained. For materials of frictional pair aluminum-steel it is studied evolution and distribution on depth from a surface of friction of temperatures, thermal fluxes and thermoelastic displacements.

LITERATURA

1. **Block H.** (1937), Theoretical studies of temperature rise at surfaces of actual contact under oiliness lubrication conditions, *Proc. Gen. Discussion on Lubrication and Lubricants, Inst. of Mechanical Engineers*, No 2, 222–235.
2. **Jaeger J. C.** (1942), Moving sources of heat and the temperatures of sliding contacts, *Proceeding of the Royal Society*, No 66, 203–224.
3. **Yevtushenko A., Matysiak S. J., Kuciej M.** (2004), Non-stationary heating of a uniform foundation with a surface composite layer, *Journal of Friction and Wear*, Vol. 25, No 6, 577–584.
4. **Matysiak S., Yevtushenko A.** (2005), Transient heat conduction problem for a composite layer on a homogeneous substrate, *Mathematical Methods and Physicomechanical Fields*, Vol. 48, No 2, 172–179.
5. **Yevtushenko A., Matysiak S. J., Kuciej M.** (2005a), A thermal problem of friction when a coated body is braked, *Journal of Friction and Wear*, Vol. 26, No 2, 151–158.
6. **Yevtushenko A., Kuciej M., Rozniakowska M.** (2005b), Thermal cleavage stresses in a piecewise-homogeneous plate, *Materials Science*, No 5, 581–588.
7. **Matysiak S. J., Yevtushenko A., Kuciej M.** (2007), Temperature field during breaking of a massive body with composite coating, *Physicochemical Mechanics of Materials*, Vol. 43, No 1, 61 – 67.
8. **Johnson K. L.** (1985), *Contact mechanics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2007 – 2008 jako projekt badawczy Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego – N 50100432/0498.

ANALIZA OBRAZU POWIERZCHNI OBROBIONEJ DO CELÓW ESTYMACJI PARAMETRÓW TEJ POWIERZCHNI

Anna ZAWADA-TOMKIEWICZ*

* Zakład Monitorowania Procesów Technologicznych, Wydział Mechaniczny,
Politechnika Koszalińska, ul. Raclawicka 15-17, 75-620 Koszalin

anna.zawada-tomkiewicz@tu.koszalin.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono zagadnienia modelowania obrazu powierzchni obrobionej. Zostały przeanalizowane wybrane metody opisu obrazu dla powierzchni po toczeniu. Wyróżniono metody profilowe i obszarowe. Zastosowano metodę pruningu OBSM do wybrania, które parametry obrazu są najbardziej przydatne w estymacji parametru Ra chropowatości powierzchni obrobionej.

1. WPROWADZENIE

Powierzchnia obrobiona stanowi ważny element jakości wyrobu. Parametry chropowatości powierzchni są ważne z punktu widzenia zjawisk tarcia, kontaktu, przepływu ciepła, sztywności połączeń czy dokładności pozycjonowania. Wśród wielu rozwijanych metod pomiaru chropowatości są systemy wizyjne. Są one rozwijane, bo dają możliwość pozyskiwania informacji obszarowej o mikronierównościach na powierzchni, których rozkład w swojej naturze jest trójwymiarowy (Gadelmawla, 2004; Myszkini i inni, 2003).

Najprostszy system wizyjny można zbudować z kamery i karty akwizycji danych. W dobie rozwoju technologii informacyjnej nie stanowi dziś problemu zestawienie takiego układu, który dawałby podgląd zjawisk i procesów. Do takich celów wystarczającym rozwiązaniem jest zastosowanie kamery internetowej i karty telewizyjnej. Gdy jednak na układ wizyjny nałożone zostaną wymagania odnośnie automatycznej pracy, powiększeń i innych okazuje się, że jest to zagadnienie złożone (Pernkopf i O'Leary, 2003; Sodhi i Tiliouine, 1996; Tsai i Hsieh, 1999). Tor pomiarowy przeznaczony do akwizycji obrazu powierzchni obrobionej powinien dać możliwość obserwacji struktury geometrycznej powierzchni. Głębina układu optycznego powinna zawierać się w granicy parametrów chropowatości, czyli być większa niż kilkanaście μm . Pole widzenia kamery wraz z układem optycznym powinno gwarantować ergodyczność zachowania cech. Pole widzenia nie może być mniejsze niż odcinek pomiarowy dla danego procesu i generowanej chropowatości.

Właściwe oświetlenie jest kolejnym ważnym zagadnieniem w tworzeniu toru wizyjnego. Dobór prawidłowego oświetlenia ma na celu uwypuklenie cech kierunkowej struktury geometrycznej powierzchni. Podstawowym parametrem było dobranie właściwego kąta padania światła, gdyż wartości pomiarowe uzyskane z systemu wizyjnego to optycznie przetransformowane mikrotopograficzne cechy rozkładu światła, na które wpływ ma wielokrotne rozpraszanie, zacienianie i szum

optyczny. Stwierdzono, że prawdopodobieństwo odbić wewnętrznych jest małe, jeśli wartość kąta padania światła nie przekroczy 30° (Łukanowicz, 2001).

W Zakładzie Monitorowania Procesów Technologicznych Politechniki Koszalińskiej opracowano metodę oceny chropowatości powierzchni z zastosowaniem systemu wizyjnego. Układ wizyjny zastosowany w tej metodzie został opracowany jako złożenie powiązanych ze sobą geometrycznie i zadaniowo układów takich jak: system mocowania kamery, system oczyszczający strefę obróbki, system oświetleniowy oraz system chroniący wcześniej wymienione układy. Pomiar jest możliwy do zrealizowania w trakcie ruchu przedmiotu dzięki krótkiemu czasowi pozyskiwania i przetwarzania danych obrazowych. Zaletą systemu jest także to, że jest to pomiar bezstykowy, zdalny i nieniszczący (Storch, 2006; Zawada-Tomkiewicz, 2004).

Podstawą oprogramowania systemu wizyjnego jest zbiór danych obrazowych. Obraz powierzchni to tysiące liczb, których praktycznym zastosowaniem może być wizualizacja. Obiektywne miary opisu powierzchni można wyznaczyć, gdy poziomy szarości zostaną opisane parametrami rozpatrującymi ich rozkład przestrzenny. Miary te, odpowiednio opracowane odzwierciedlają cechy rzeczywistej powierzchni.

Najczęściej do opisu obrazu powierzchni obrobionej były używane metody analizy tekstury obrazu. Stosowano opis za pomocą metod statystycznych I rzędu oraz proste techniki oparte o wartości rozkładu jasności pikseli w obrazie. Bardziej złożone metody bazowały już na metodach analizy tekstur obrazu, gdzie rozpatrywane były zależności między pikselami. Były to jedno lub dwuwymiarowe metody częstotliwościowe, metody falkowe i inne. Celem artykułu jest przedstawienie wybranych metod analizy obrazu do celów estymacji parametru Ra chropowatości powierzchni oraz przeprowadzenie analizy przydatności poszczególnych cech. Dla konkretnego zastosowania zaprezentowano selekcję cech i dobrano optymalny podzbiór cech opisujących powierzchnię obrobioną.

2. SPECYFIKA OBRAZU POWIERZCHNI PO TOCZENIU

Cyfrowy obraz powierzchni stali obrobionej toczeniem uwidacznia ślady trajektorii naroża ostrza z dostrzegalną deformacją plastyczną. W zależności od właściwości materiału obrabianego, ostrza i parametrów skrawania ślady na powierzchni są bardziej lub mniej regularne, a zakłócenia wynikające z mechaniki oddzielania wióra mniej lub bardziej widoczne. Szczegółowy opis powierzchni po toczeniu można znaleźć w Oczom i Libimowv (2003), Pawlus (2005), Storch (2006).

Można wyróżnić obecnie dwa kierunki rozwoju metod opisu chropowatości powierzchni. Są to metody trójwymiarowe oraz metody opisu powierzchni supergładkich. Systemy wizyjne można umieścić w zakresie metod trójwymiarowych, dających pomiary przydatne w ilościowej i jakościowej inspekcji powierzchni.

Analiza powierzchni obrobionej w toczeniu może odbywać się poprzez analizę całego obrazu, lub jego fragmentu. Fragmentem może być kwadratowe okno obrazu lub fragment profilu (Tsai i Hsieh, 1999; Zawada-Tomkiewicz, 2004).

Ze względu na kierunkowość obrazu powierzchni po toczeniu i jej jednorodność wzdłuż śladów obróbki, reprezentacją całego obrazu może być jego profil pobierany w kierunku prostopadłym. Zastosowano do analizy profilu obrazu powierzchni metody używane do analizy powierzchni. Profil powierzchni, podobnie jak obrazu, składa się z pasm różnych częstotliwości. Matematyczną techniką transformującą profil z reprezentacji przestrzennej na częstotliwościową jest analiza Fouriera. Statystyczny opis znaczenia różnych częstotliwości, które współliniują w profilu powierzchni i które mogą być przetwarzane przy użyciu funkcji widmowej gęstości mocy opisano w Boryczko (2003). Podobnie jak w analizie Fouriera, analiza falkowa umożliwia przetworzenie profilu na przesunięte i przeskalowane wersje oryginalnej falki. Wybór funkcji falkowej zależy od szczególnego celu analizy i jest rozpatrywany szerzej w Zawada-Tomkiewicz i Storch (2006), Zawada-Tomkiewicz i Storch (2004).

Obraz powierzchni po toczeniu przedstawia jednorodną, anizotropową strukturę, która składa się z pewnych cyklicznych linii. Tę regularność obrazu powierzchni określono mianem tekstury, której obecność i parametry w analizie obrazów można wykryć metodami analizy tekstur. Zastosowanie analizy tekstur w ocenie chropowatości polega na poszukiwaniu znaczących lokalnych zmian w wartościach cech tekstury, które odzwierciedlają zmiany parametrów powierzchni (Zawada-Tomkiewicz, 2004). Klasyfikacja tekstur oznacza tworzenie mapy klasyfikacji obrazu wejściowego, gdzie każdy obszar jest identyfikowany z klasą tekstury do której należy. Klasyfikacja danej tekstury polega więc na wyznaczeniu podobieństwa, w sensie miar statystycznych, danej tekstury do tekstur wcześniej zdefiniowanych. Określenie podobieństwa jest złożonym i wielowymiarowym zagadnieniem, na dokładność którego wpływ ma skala, odległość, oświetlenie, punkt obserwacji oraz wiele innych czynników.

3. METODA ANALIZY POWIERZCHNI

Cyfrowy obraz powierzchni obrobionej w toczeniu reprezentowany jest macierzą liczb, będących odzwierciedleniem stanu odbicia światła od tej powierzchni. Światło tworzy na powierzchni wzór śladów obróbki o wyraźnym ukierunkowaniu.

Podstawowymi cechami statystycznymi opisującymi obraz jest średnia jasność obrazu, wartość maksymalna i minimalna. Średnia jasność oraz inne cechy statystyczne I rzędu w istotny sposób zależą od tego, z jakiego fragmentu obrazu zostały wyznaczone – od jego wielkości i położenia. Różnice wynikające ze zmienności obrazu w zależności od położenia są niwelowane przez wyrównanie poziomów jasności dla całego obrazu.

Statystyczny rozkład występowania w obrazie cyfrowym poszczególnych poziomów jasności oznaczany jest jako histogram. Poszczególne składowe funkcji histogramu oznaczają liczbę występujących w obrazie pikseli o danej jasności. Histogram może być opisywany parametrami takimi jak asymetria, skośność, szerokość piku, energia i entropia. Analiza rozkładu histogramu i jego cech pozwala na sprawdzenie, czy obraz danej powierzchni jest obrazem idealnego losowego rozkładu poziomów jasności, jaki jest rozrzut poziomów jasności, gdzie występują skupienia wartości oraz ile tych punktów skupienia występuje (Zawada-Tomkiewicz, 2004).

Ekspert obserwując samą powierzchnię lub obraz tej powierzchni jest w stanie potwierdzić jej przydatność. Jest to miara subiektywna, która wymaga sporej wiedzy i doświadczenia. Według Sodhi i Tiliouine (1996), subiektywna ocena może być przydatna do oceny chropowatości powierzchni powyżej 1,6 μm .

Obliczeniowe miary jakości obrazów dają bardziej obiektywną od ludzkiej ocenę jakości powierzchni. W analizie obrazu powierzchni zastosowano miary bliskości obrazów cyfrowych dla porównania obrazu cyfrowego powierzchni obrobionej i obrazu cyfrowego idealnie gładkiej powierzchni odniesienia – zwierciadła. Podstawowymi normami były: średnia różnica, zawartość strukturalna, znormalizowana korelacja skośna, maksymalna różnica, zgodność, błąd średniokwadratowy, szczytowy błąd średniokwadratowy, znormalizowany błąd bezwzględny, znormalizowany błąd średniokwadratowy, norma Minkowskiego, stosunek sygnału do szumu, szczytowy stosunek sygnału do szumu.

3.1. Parametry częstotliwościowe profilu obrazu

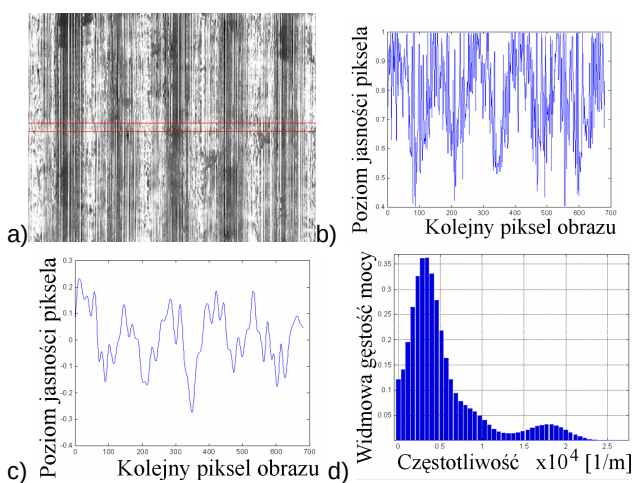
Zmiana wysokości nierówności wzdłuż odcinka elementarnego nazywana jest jednowymiarową reprezentacją przestrzenną lub profilem powierzchni. Podobną reprezentacją jest też obraz powierzchni, gdzie poziomy jasności piksela odzwierciedlają zmiany na powierzchni. W przypadku zastosowania przekształcenia Fouriera w każdym przypadku otrzymujemy reprezentację częstotliwościową.

Analiza Fouriera pozwala analizować sygnał zmian częstotliwości sygnałów składających się na profil. Funkcja widmowej gęstości mocy jest statystyczną reprezentacją

różnych częstotliwości w sygnale opisującym profil obrazu powierzchni.

Analiza Fouriera nie może być zastosowana dla profili, które zawierają niestacjonarność takie jak dryf, trendy, gwałtowne zmiany wysokości profilu, gdyż nie jest przystosowana do ich identyfikowania.

W procesie analizy częstotliwości, pobierane są dane z wierszy środkowego pasma macierzy danych reprezentującej obraz powierzchni obrobionej. Dla każdego z danych wiersza dokonywane jest skalowanie, następnie filtracja pasmowa i obliczenie funkcji widmowej gęstości mocy. Kolejnym krokiem jest wyszukiwanie, w poszczególnych pasmach częstotliwości wartości maksymalnej mocy oraz odpowiednie przeliczenie częstotliwości (Zawada-Tomkiewicz, 2004). Przykładowy obraz powierzchni wraz z analizą częstotliwościową przedstawia rysunek 1.

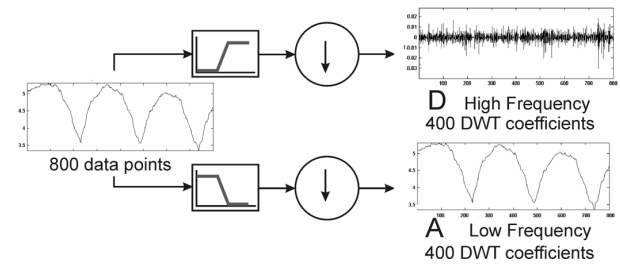


Rys. 1. Cyfrowy obraz z zaznaczonym pasmem środkowym (a), pojedynczy wiersz obrazu pasma środkowego obrazu (b), ten sam wiersz po filtracji pasmowej (c) i widmowa gęstość mocy (d), dla noży bez pokrycia, posuwu 0,27 mm/obr, prędkości skrawania 187,5 m/min i czasu skrawania 6 min.

3.2. Parametry falkowe profilu obrazu powierzchni obrobionej

Analiza falkowa jest techniką analizy sygnału wykorzystującą zmienną wielkość okna. Umożliwia użycie długich odstępów próbkowania dla lepszego opisu niskich częstotliwości i gęstsze próbkowanie dla uzyskania informacji wysokoczęstotliwościowej. Transformata falkowa dzieli sygnał na sumę ortogonalnych sygnałów składowych dla różnych rozdzielczości czasowych. Dzięki temu możliwe jest odrębne analizowanie składowych sygnału w różnych rozdzielczościach przestrzennych (rysunek 2).

Transformata falkowa dzieli analizowany sygnał na sygnały składowe powstałe na skutek odwzorowania falki podstawowej, po przeprowadzonej operacji przesunięcia i skalowania, na sygnał analizowany.



Rys. 2. Pierwszy poziom dekompozycji falkowej profilu powierzchni obrobionej

O wyborze rodzaju falki decyduje człowiek lub użycie metod obiektywnych. Wybór falki-matki z wykorzystaniem testu statystycznego polega na sprawdzeniu czy po dekompozycji w szczegółach znajduje się jeszcze użyteczna informacja. Metoda wykorzystuje założenie, że jeśli szczegóły zawierają mniej informacji, wtedy falka-matka lepiej odzwierciedla charakter danych.

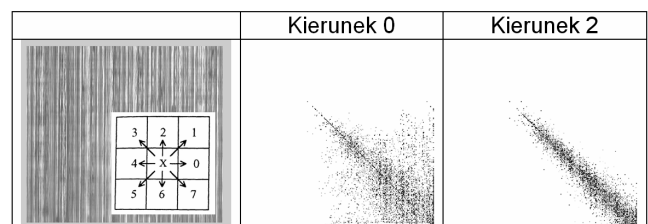
Wybór funkcji falkowej przy użyciu testu szumu białego ujawnił, że osąd ludzki i komputerowe obliczenia są w dobrej zgodności (Zawada-Tomkiewicz i Storch (2004)). Wszystkie funkcje falkowe wybrane przez test szumu białego były podobne w kształcie. Ten kształt przypominał podstawową nierówność struktury geometrycznej powierzchni. Dobre wyniki uzyskano dla wszystkich falek typu Coiflet oraz tych falek biortogonalnych, które w kształcie i właściwościach zbliżone były do falki typu Coiflet.

Jako cechy falkowe stosowane są parametry statystyk I rzędu takie jak wartość maksymalna czy średnia różnica. Parametry falkowe wyznaczone są dla każdego z poziomów dekompozycji (Zawada-Tomkiewicz i Storch, 2006; Zawada-Tomkiewicz i Storch, 2004).

3.3. Macierze sąsiedztwa

Metoda klasyfikacji tekstury, wykorzystująca macierze sąsiedztwa polega na zestawieniu, w formie odpowiednio dobranych tablic, liczby współwystąpień poziomów jasności we wszystkich parach punktów obrazu cyfrowego spełniających przyjęte reguły ich wzajemnego położenia. Przykładowe macierze sąsiedztwa przedstawia tab. 1.

Tab. 1. Macierze sąsiedztwa w zależności od wielkości okna dla różnych kierunków



Tekstura kierunkowa, z jaką mamy do czynienia w obrazie powierzchni po toczeniu, odzwierciedla się w obrazach macierzy sąsiedztwa dla różnych kierunków. Im bardziej jednolita wartość poziomów na danym

kierunku, tym bardziej skupione są wartości wokół głównej przekątnej. Rozkład wartości macierzy sąsiedztwa dla kierunku 2 różni się od pozostałych kierunków we wszystkich przebadanych przypadkach.

W analizie tekstur nie wykorzystuje się bezpośrednio macierzy sąsiedztwa, lecz pewne cechy charakterystyczne tych macierzy. Algorytm wykorzystania metody macierzy sąsiedztwa do opisu tekstury obejmuje tworzenie macierzy sąsiedztwa dla danego kierunku i odległości oraz wyliczenie parametrów macierzy sąsiedztwa.

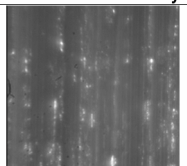
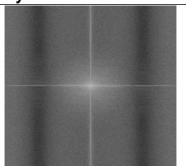
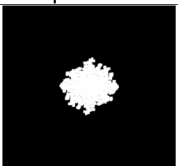
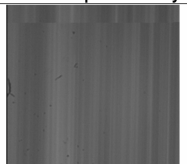
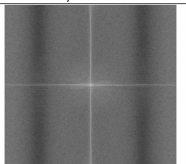
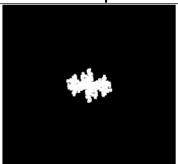
Przyjmuje się takie parametry macierzy sąsiedztwa jak entropia, energia, jednorodność, kontrast, organizację struktury, złożoność i inne (Gademawla, 2004; Zawada-Tomkiewicz, 2004). Z badań nad powierzchnią po toczeniu wynika, że najlepsze rezultaty uzyskano dla współczynnika entropii.

3.4. Metody dwuwymiarowej transformaty Fouriera

Transformata Fouriera jest wykorzystywana w algorytmach detekcji lub ilościowego opisu tych cech obrazu, które są znacznie lepiej widoczne, łatwiejsze do analizy w spektrum Fouriera niż w samym obrazie. Dotyczy to okresowości, rozmycia oraz orientacji.

W obrazie, detale i ostre krawędzie są powiązane ze średnimi do wysokich częstotliwościami przestrzennymi, ponieważ wprowadzają znaczącą zmianę poziomów szarości na krótkiej odległości. Stopniowa zmiana topografii na obrazie jest związana z niskimi przestrzennymi częstotliwościami. Przez filtrację częstotliwości przestrzennych można usunąć, osłabić lub podkreślić składowe przestrzenne, do których się odnoszą. Przykładowy obraz i jego transformatę Fouriera przedstawia tab. 2.

Tab. 2. Zastosowanie filtracji częstotliwościowej do uzyskania pojedynczego obiektu

Okno obrazu	Transformata Fouriera	Selekcja największego obiektu
Obraz statyczny blok obrazu 512x 512 pikseli		
		
Obraz pobierany w ruchu, blok obrazu 512 x 512 pikseli		
		

Obraz transformaty Fouriera poddano binaryzacji. W wyniku segmentacji otrzymano obszary odpowiadające występującym w obrazie obiektom. Analiza zbinyzowanego obrazu pozwoliła wydzielić obszar odpowiadający zakresowi wysokich częstotliwości. Ten obszar następnie opisywano współczynnikami kształtu takimi jak: promień zastępczy, współczynnik Fereta,

cyrkularności, Malinowskiej, Blaira-Blissa, Danielssona i Haralicka. Przykładowo współczynnik Malinowskiej określa się następującym wzorem:

$$R_M = \frac{\text{obwód obiektu}}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot \text{pole obiektu}}} - 1 \quad (1)$$

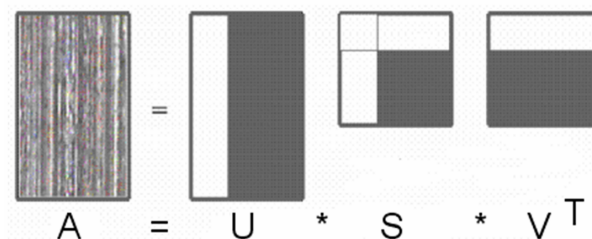
3.5. Rozkład według wartości szczególnych (SVD)

Reprezentacja danych obrazowych charakteryzuje się dużą przestrzenną zależnością. Dlatego dane te mogą być przetworzone do innej reprezentacji, charakteryzującej się niezależnością danych (rysunek 3). Dane obrazu powierzchni A mogą być rozdzielone jako iloczyn

$$A = U \times S \times V^T \quad (2)$$

U oraz V są macierzami unitarnymi odpowiednio o rozmiarach $N \times M$ oraz $M \times M$ a macierz S jest macierzą diagonalną o wymiarach $M \times M$, która składa się z wartości własnych macierzy A .

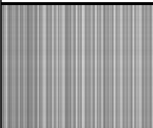
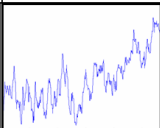
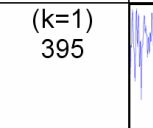
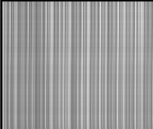
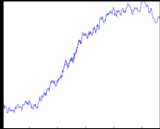
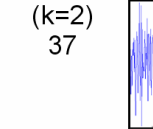
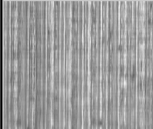
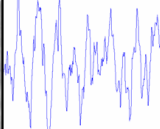
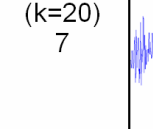
Wartości własne na przekątnej mogą być dodatnie lub równe zero. W rozkładzie SVD nazywane są wartościami singularnymi lub szczególnymi.



Rys. 3. Dekompozycja SVD obrazu powierzchni obrobionej

Składowa pierwsza obrazuje dane, złożone w strukturę, która reprezentuje największą wariancję, niejednorodność. W kolejnych wektorach macierzy U można wyróżnić uśrednione zmiany w profilu na kierunku równoległym do kierunku tekstury obrazu.

Tablica 3. Dekompozycja SVD obrazu powierzchni obrobionej na główne składowe

Obraz	U_k	S_k	V_k
		(k=1) 395	
		(k=2) 37	
		(k=20) 7	

Składowa druga V jest strukturą, która wyjaśnia drugą największą ilość wariancji, wyznaczoną w ten sam sposób jak pierwsza składowa. W następujących po sobie wektorach macierzy został pokazany uśredniony profil obrazu cyfrowego powierzchni obrabianej w kierunku prostopadłym do śladów obróbki. Ważną własnością drugiej składowej jest to, że jest ona zupełnie niezależna od składowej pierwszej. Wszystkie składowe są wzajemnie niezależne.

Ważną własnością dekompozycji SVD jest zdolność do koncentrowania większości cech sygnału w ograniczonej, i zwykle małej liczbie biortogonalnych składowych. Wartości osobliwe są silnie uporządkowane a największa z nich przewyższa najmniejszą kilka rzędów w amplitudzie. Ta zdolność dekompozycji SVD do koncentrowania cech dominujących do kilku przestrzennych dominujących wartości powoduje, że jest przydatna do analizy sygnałów przestrzennych.

Większość energii obrazu jest skupiona w kilku pierwszych wektorach własnych. Ponad 90% całkowitej energii zawiera tylko pierwsza składowa główna, a 99% pierwszych 20 składowych. Wartości na głównej przekątnej, reprezentujące energię sygnału są stosowane jako cechy charakterystyczne obrazu (Zawada-Tomkiewicz i Storch, 2006).

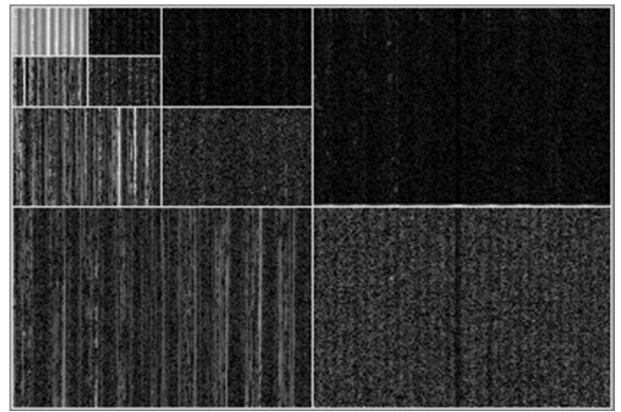
3.6. Parametry dwuwymiarowej transformaty falkowej

Dwuwymiarowa dyskretna transformata falkowa umożliwia analizę obrazu w różnych rozdzielczościach. Transformata falkowa dzieli obraz na cztery części (rysunek 4):

- Górna lewa część jest tworzona przez dwuwymiarową funkcję skalującą.
- Górna prawa część jest tworzona przez horyzontalną funkcję falkową.
- Dolna lewa część jest tworzona przez wertykalną funkcję falkową.
- Dolna prawa część jest tworzona przez diagonalną funkcję falkową.

Najmniej szczegółów obrazu jest widoczne w części obrazu odpowiedzialnej ze dekompozycje wertykalną. Taki podobraz, wyświetlony z innymi, wydaje się prawie czarny, pozbawiony treści. Najwięcej informacji z podobrazów szczegółów jest zawartych w podobrazach horyzontalnych. Zawierają one tę część odfiltrowanej informacji częstotliwościowej, która opisuje drobne różnice w poszczególnych wierszach obrazu. Są one o tyle interesujące, że nie przykrywa ich składowa niskoczęstotliwościowa.

Wielopoziomową dekompozycję można otrzymać przez przeprowadzanie dekompozycji dla kolejnych aproksymacji. Przedstawienie dekompozycji obrazu, tak jak na rysunku 4, umożliwia obejrzenie wyniku końcowego dekompozycji bez możliwości obejrzenia aproksymacji z kolejnych kroków.



Rys. 4. Dekompozycja falkowa trójpłazimowa obrazu powierzchni obrabianej

Sama dekompozycja obrazu na składowe to tylko odpowiednia filtracja. Gdy założymy, że została wykonana optymalnie dla danego typu danych, to istnieje możliwość dla takich zdekomponowanych danych znalezienia opisów, które wrażliwe będą na wybrane parametry wizualne obrazów składowych. Wykonano dwa poziomy dekompozycji falkowej filtrami biortogonalnymi 3.7. Jako cechy dwuwymiarowej transformaty falkowej wybrano współczynnik entropii macierzy sąsiedztwa.

4. SELEKCJA CECH OBRAZU

Automatyzacja procesu pobierania i analizy danych obrazowych wymusiła analizę cech i dobór takiego zbioru, który by jak najpełniej opisywał cechy charakterystyczne powierzchni obrabianej. Istnieje wiele metod selekcji cech. W układach liniowych można zastosować analizę składników głównych, natomiast w układach nieliniowych należy sięgnąć po metody sztucznej inteligencji. Zastosowano sieci neuronowe, z metodą optymalizacji struktury sieci Optimal Brain Surgeon Metod (Zawada-Tomkiewicz i Tomkiewicz, 2004). Optymalizacja struktury i jednoczesna selekcja cech polegała na eliminacji neuronów wejściowych, które miały mały wpływ na wartość wyjściową sieci. Metoda polegała więc na wyborze cech na wejściu sieci, których zmiana wartości wejściowej powodowała największy wpływ na wartość błędu wyjściowego (zmiana funkcji kosztów w czasie treningu sieci).

Badania zostały przeprowadzone dla toczenia stali PN-EN 10083-2-C45+N ostrzami z węglików spiekanych 4015 firmy Sandvik Coromant o geometrii TNMG 16 04 08-PF i parametrach skrawania $vc=550\text{m/min}$, $f=0,125\text{ mm/obr}$, $ap=0,5\text{ mm}$ przy zmiennym czasie skrawania. W trakcie skrawania pozyskiwano obrazy powierzchni oraz mierzono parametr Ra chropowatości powierzchni. Środkowy fragment obrazu wyrównano, a następnie opisano dwudziestoma dwoma parametrami. Były to: trzy cechy statystyk I rzędu (średnia jasność, odchylenie standardowe jasności i asymetria histogramu), siedem cech kształtu zbinaryzowanej dwuwymiarowej transformaty Fouriera, cztery cechy z wartości aproksymacji drugiego poziomu dwuwymiarowej transformaty falkowej liczonej filtrami biortogonalnymi 3,7 (współczynnik entropii macierzy sąsiedztwa dla czterech kierunków) oraz osiem pierwszych

głównych składowych rozkładu SVD. Przyjęto sieć neuronową jednokierunkową z metodą uczenia Lavenberg'a – Marquardt'a. Na początku sieć składała się z dwudziestu dwóch neuronów w warstwie wejściowej, dziesięciu neuronów w warstwie ukrytej i jednego neuronu wyjściowego.

Przeprowadzono dwadzieścia eksperymentów optymalizacyjnych. Podczas każdego z nich sieć była uczona i po procesie uczenia wybrane wagi, które miały wartość mniejszą od założonego progu, były obcinane. Zestawiono dla każdego z neuronów wejściowych wagę ze względu na cel uczenia i stwierdzono, że z dwudziestu dwóch cech wejściowych preferowanych było tylko sześć. Sieć wybrała różnorodne cechy takie jak:

- średnią jasność obrazu – jasność jest mocno skorelowana z wszelkimi zakłóceniami na powierzchni spowodowanymi przez zmiany na ostrzu, niejednorodność materiału.
- wartość odchylenia poziomów jasności – obrazuje zmienność w obrębie analizowanego obszaru obrazu,
- współczynnik asymetrii histogramu – informuje o rozkładzie poziomów jasności,
- współczynnik kształtu Malinowskiej dla zbinaryzowanego obrazu transformaty Fouriera – daje informację o rozkładzie wysokich częstotliwości w obrazie,
- współczynnika entropii macierzy sąsiedztwa z wartości aproksymacji drugiego poziomu dwuwymiarowej transformaty falkowej liczonej filtrami biortogonalnymi 3.7 – informuje o rozproszeniu informacji w zakresie niskich częstotliwości,
- wartość głównej składowej rozkładu SVD – obrazuje energię obrazu.

5. WNIOSKI

Obraz powierzchni obrabianej jest reprezentacją dwuwymiarową powierzchni, którą można zastosować do oceny tej powierzchni. W pracy zaproponowano kilka wybranych metod analizy obrazu powierzchni po toczeniu. Zwrócono uwagę, jaka musi być minimalna liczba danych do analizy oraz jak taką analizę przeprowadzić.

Opisując obraz powierzchni obrabianej bazowano na metodach analizy powierzchni oraz metodach analizy tekstur obrazu. Zaprezentowano metody profilowe i obszarowe. Analiza metod polegała na ocenie ich przydatności w ocenie chropowatości powierzchni.

Zastosowanie metody pruningu sieci neuronowej pozwoliło ocenić, że sieć neuronowa eliminuje cechy zależne tak, że z przeanalizowanych dwudziestu dwóch cech obrazu zostało wybranych sześć uzyskanych różnymi metodami.

LITERATURA

1. **Boryczko A.** (2003), Metoda analizy częstotliwościowej nierówności powierzchni toczonej w diagnozowaniu układu obróbkowego. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej.
2. **Gadelmawla E.S.** (2004), A vision system for surface roughness characterization using the gray level co-occurrence matrix. *NDT and E International* nr 37/7, ss. 577-588
3. **Łukianowicz Cz.** (2001), Podstawy pomiarów nierówności powierzchni metodami rozpraszania światła. Wydawnictwo Politechniki Koszalińskiej.
4. **Myshkin N.K., Grigoriev, A.Ya., Chizhik, S.A., Choi, K.Y., Petrokovets, M.I.** (2003), Surface roughness and texture analysis in microscale. *Wear* nr 254/10, ss. 1001-1009.
5. **Oczko K.E., Liubimov V.** (2003), Struktura geometryczna powierzchni. Wydawnictwo Politechniki Rzeszowskiej Rzeszów.
6. **Pawlus P.** (2005), Topografia powierzchni. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej. Rzeszów.
7. **Pernkopf F., O'Leary P.** (2003), Image acquisition techniques for automatic visual inspection of metallic surfaces. *NDT and E International* nr 36/8, ss. 609-617.
8. **Sodhi M.S., Tiliouine K.** (1996), Surface roughness monitoring using computer vision. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* nr 36/7, ss. 817-828.
9. **Storch B.** (2006), Zjawiska przykrawędziowe i monitorowanie chropowatości powierzchni po obróbce jednoostrzowej. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Koszalińskiej.
10. **Tsai D.-M., Hsieh C.-Y.** (1999), Automated surface inspection for directional textures. *Image and Vision Computing* nr 18/1, ss. 49-62.
11. **Zawada-Tomkiewicz A.** (2004), Neural networks in surface roughness estimation. *Image Processing & Communications* nr 9/3-4, ss. 79-87.
12. **Zawada-Tomkiewicz A., Storch B.** (2006), The application of wavelet analysis in identification of surface roughness parameters. *Advances in Manufacturing Science and Technology* nr 30/3, ss. 79-93.
13. **Zawada-Tomkiewicz A., Storch B.** (2006), Decomposition of a Machined Surface Image for the Estimation of Surface Roughness Parameters. *Annals of DAAAM International Vienna*, ss. 453-454
14. **Zawada-Tomkiewicz A., Storch B.** (2004), Introduction to the Wavelet Analysis of a Machined Surface Profile. *Advances in Manufacturing Science and Technology* nr 28/2, ss. 91-100
15. **Zawada-Tomkiewicz A., Tomkiewicz D.** (2004), The Application of Optimal Brain Surgeon Method for optimization of tool wear estimator structure. *Polyoptimization and CAD* nr III. WNT Warszawa, ss. 218-225

MACHINED SURFACE IMAGE ANALYSIS FOR THE ESTIMATION OF THIS SURFACE PARAMETERS

Abstract: Machined surface image analysis is presented in the paper. The selected methods were analysed for the description of images acquired after the process of turning. Profile and area methods were distinguished. The Optimal Brain Surgeon Method was applied for the selection of the set of parameters which were the most useful in the estimation of surface roughness Ra parameter.