



544/02573

WSZELKIE PRAWA ZASTRZEŻONE

H. Omeljan IV 8

## WSTĘP

### § 1. Przedmiot i cel geometrii.

Wszystkie ciała, podpadające pod nasze zmysły, zajmują pewne miejsce, pewną część przestrzeni: własność ta nazywa się rozciągłością materji. Każdą taką część przestrzeni nazywamy bryłą bez względu na to, czy jest wypełniona materją, czy też nie. Badanie brył pod względem ich postaci, wzajemnego położenia i wielkości jest przedmiotem geometrii.

Nazwa ( $\gamma\eta$  = ziemia,  $\mu\epsilon\tau\rho\acute{\epsilon}\omega$  = mierzę) pochodzi z zamierzchłej przeszłości, kiedy to badania geometryczne ograniczały się jedynie do mierzenia pól. Dziś nazywamy tę gałąź geometrii praktycznej miernictwem, jednakowoż ludzi, zajmujących się zawodowo miernictwem, do dziś dnia nazywamy geometrami.

Do zbadania postaci brył niezbędną jest znajomość ich ograniczeń, które nazywamy powierzchniami; te znowu bywają często ograniczone linjami (n. p. powierzchnie zamykające walec lub ostrosłup są ograniczone linjami, ale powierzchnia kuli nie posiada już linii ograniczających); wreszcie linje bywają ograniczone punktami (części obwodu kwadratu, ale koło już nie!). Przedmiotem naszych badań będą więc: punkty, linje, powierzchnie i bryły, które obejmujemy wspólną nazwą: utwory geometryczne (lub figury geometryczne).

Wszystkie te utwory otrzymaliśmy, wychodząc od brył. Możemy jednakże dostąpić także drogą odwrotną i budować bryły z utworów prostszych. I tak: jeżeli się porusza punkt, to drogę przez niego zakreśloną nazywamy linją, jeżeli się porusza linja — byleby nie w kierunku swej długości — powstaje powierzchnia, wreszcie powierzchnia poruszająca się — byle nie w kierunku swej rozciągłości — zakreśla bryłę. Linję nazywamy utworem geometrycznym jednomiarowym, powierzchnię dwumiarowym, a bryłę trójwymiarowym; punkt zaś niema żadnego wymiaru. (Czy przez skończony ruch punktu może powstać powierzchnia?).



W przyrodzie spotykamy najczęściej utwory o budowie nadzwyczaj zawiłej, której zrozumienie i opisanie sprawia naszemu umysłowi ogromne trudności (n. p. drzewo liściaste). Dopiero badaniem poszczególnych części tych utworów i to jak najbardziej uproszczonych, wyrównanych czyli wyidealizowanych, dochodzimy do poznania brył zawilśzonych. Także dzieła rąk ludzkich, chociaż dążą do pewnych prawidłowych postaci, do pewnej symetrii, są w rzeczywistości tylko przybliżonemi modelami tych idealnych form geometrycznych, jakimi byśmy je chcieli uczynić. Wystarczy popatrzeć przez mikroskop na najdokładniej urobioną kulę, by spostrzec, że to nierówności znajduje się na jej powierzchni.

Staramy się zatem najpierw zbadać dokładnie utwory geometryczne najprostsze, a więc najbardziej prawidłowe, nie istniejące nawet w otaczającym nas świecie i dopiero z nich budujemy utwory bardziej złożone, zbliżone do kształtów spotykanych w przyrodzie.

Postępujemy tu podobnie, jak n. p. w mechanice, gdzie, chcąc dokładnie zrozumieć ruch ciała rzuconego w górę, badamy najpierw ruch jednostajny, jednostajnie przyspieszony i opóźniony, jakkolwiek tak proste ruchy nie odbywają się w przyrodzie. Później uwzględniamy opór powietrza, zmniejszanie się siły grawitacyjnej przy oddalaniu się ciała od środka ziemi, wpływ obrotu ziemi i inne czynniki — a dopiero na podstawie znajomości tych wszystkich prostszych zjawisk zdołamy z wielkiem przybliżeniem zrozumieć ruch badany.

Takiemi najprostszymi, najłatwiejszymi do pojęcia utworami są dla nas: punkt, linja prosta i powierzchnia płaska czyli płaszczyzna.

Nazywamy je utworami pierwotnymi, albowiem z punktów, prostych i płaszczyzn buduje się wszystkie inne figury, jak np. wielokąty, wielościany, linie krzywe, powierzchnie krzywe itd. (Wymień znane ci linie krzywe, powierzchnie krzywe!).

*Przybliżonym obrazem punktu* jest dla nas drobnutka cząstka jakiegokolwiek ciała, kropka na rysunku, pyłek itp. *Przybliżonym obrazem linji prostej* jest wyprężona nitka, krawędź kryształu lub deski itp. *Czwartka papieru, wygładzona powierzchnia tablicy, stołu, szyby, swobodna powierzchnia cieczy w naczyniu itp. dają nam przybliżony obraz płaszczyzny.*

Nie można jednak nauki ścisłej — a geometria była zawsze wzorem ścisłości — opierać na takich przybliżonych, niedokładnych obrazach pojęć podstawowych. Musimy zatem te pojęcia pierwotne jak najdokładniej opisać, wymienić ich własności charakterystyczne, odróżniające te zasadnicze figury geometryczne od innych przedmiotów i figur, słowem podać ich określenie czyli definicję. Zadanie

to nie jest tak łatwe, jakby się mogło wydawać na pierwszy rzut oka. Tak n. p. rozmaite dawniej podawane próby określenia (definicji) linji prostej obracały się w błędnem kole. Jeżeli np. ktoś mówi: „linja prosta jest to linja, nie zmieniająca kierunku“, to zapomina o tem, że, aby wyjaśnić, co to jest kierunek, musiał się już posługiwać pojęciem linji prostej. Tak samo powiedzenie: „linja prosta jest to najkrótsza odległość“ nie może nas zadowolić, bo przecież odległość jest to linja prosta, łącząca dwa punkty. Podobnie opisywanie prostej zapomocą obrotu (jako osi ruchu obrotowego) — prowadzi do tego samego błędu. Tak samo ma się rzecz z definicją punktu i płaszczyzny.

Zbiór wszystkich punktów, prostych i płaszczyzn posiada bardzo wiele różnorodnych własności: wszakże wszystkie twierdzenia geometrii są własnościami tego zbioru; jednakże przeważna ilość tych własności zależy od siebie wzajemnie, z jednych wynikają drugie. Trzeba więc wybrać z pośród nich pewne możliwie najprostsze własności, twierdzenia, z którychby już wszystkie inne wynikały; trzeba całą geometrię oprzeć na jakichś prostych własnościach zbioru punktów, prostych i płaszczyzn, z których można wyprowadzić wszystkie inne prawa geometrii, ale które same już nie dadzą się wysnuć z innych praw geometrycznych. Te zasadnicze, proste założenia geometrii musimy więc przyjąć bez dowodu, biorąc je z doświadczenia zewnętrznego. Ponieważ zaś staramy się te podstawowe prawa geometrii tak wybrać, aby były dla każdego jasne, oczywiście, nazywamy je pewnikami czyli aksjomatami. Nie należy jednak sądzić, aby przyjęte przez nas pewniki były jakimiś prawdami niewzruszonymi, niewątpliwymi. Przeciwnie, ponieważ nasze zmysły i najlepsze nasze przyrządy miernicze są bądź co bądź niedoskonałe, przeto spostrzegamy w świecie zewnętrznym wszystkie prawidłowości niedokładnie, z pewnem tylko przybliżeniem. Możliwość się n. p. spierać o to, czy pomiędzy dwoma punktami da się tylko jedna linja prosta wykreślić czy też więcej — a doświadczenie zewnętrzne nie pomogłoby do rozstrzygnięcia tego sporu (p. str. 15). Wiadomo bowiem, że ani punktu, ani linji prostej narysować ściśle nie możemy, ani też ich w naturze nie spotykamy. Podobnie żadnem doświadczeniem nie można ściśle rozstrzygnąć, czy przez punkt leżący poza linją prostą przechodzi tylko jedna linja prosta równoległa do niej. Doświadczenie prowadzi nas więc do rozmaitych możliwości, do niepewności, a dopiero my sami wybieramy z pośród tych możliwości te, które są dla naszych rozważań najdogodniejsze, najprostsze i te wyidealizowane, proste własności utworów geometrycznych przyjmujemy za założenia czyli pewniki naszej geometrii. *Pewniki są to więc*



*założenia podstawowe, zbudowane na podstawie doświadczenia zewnętrznego, a odnoszące się do idealnych utworów geometrycznych.*

Podanie wszystkich odpowiednich pewników było zadaniem nie łatwym, to też czekało ono przez długie wieki na ścisłe rozwiązanie. Euklides\*), którego geometrię aż do XIX stulecia uważano za najdoskonalsze dzieło matematyczne, podaje za mało pewników a i z tych nie wszystkie są od siebie niezależne. Przez cały wiek XIX znakomici badacze, jak Gauss, Łobaczewskij, Bolyai, Riemann, Helmholtz, Klein, Pasch, Peano i inni, starali się usunąć i uzupełnić te braki. Uwieńczeniem tej pracy było dzieło niemieckiego uczonego D. Hilberta p. t. „Podstawy geometrii“ w r. 1898, które zawiera pierwszy zupełny system pewników. Można by twierdzić, że dopiero od tego czasu wiemy dokładnie, na jakich podstawach spoczywa cały gmach naszej geometrii.

W następnym ustępie podajemy przyjęty dziś ogólnie układ pewników obmyślony przez Hilberta. Składa się on z 21 pewników, rozdzielonych na 5 grup.

## § 2. Spis pewników.

### Grupa I. Pewniki połączenia

- I<sub>1</sub>. Dwa różne punkty wyznaczają zawsze jedną linię prostą.
- I<sub>2</sub>. Dwa dowolne różne od siebie punkty linii prostej wyznaczają tę samą linię prostą.
- I<sub>3</sub>. Na prostej leżą przynajmniej dwa punkty; na płaszczyźnie leżą przynajmniej trzy punkty nie znajdujące się na jednej linii prostej.
- I<sub>4</sub>. Trzy punkty nie leżące na tej samej linii prostej wyznaczają zawsze jedną płaszczyznę.
- I<sub>5</sub>. Dowolne trzy punkty płaszczyzny nie leżące na jednej prostej wyznaczają tę samą płaszczyznę.
- I<sub>6</sub>. Jeżeli dwa punkty prostej leżą na płaszczyźnie, to każdy punkt tej prostej leży na tej płaszczyźnie.

\*) Grecy, opierając się niewątpliwie na wiedzy Egipcjan, zaczęli geometrię uprawiać dla samej nauki. Już w VI wieku przed n. Chr. Pytagoras zakłada w Krotonie sławną szkołę, w której wysunięto na pierwszy plan geometrię idealną i wzbogacono zbiór znanych prawd geometrycznych. Tradycje tej szkoły przeszły w IV wieku do szkoły Platona w Atenach (Akademja platońska) i Eudoksa w Cyzikos. Wszystkie te badania i odkrycia zebrał w III wieku przed n. Chr. Euklides, żyjący w Aleksandrii, twórca szkoły aleksandryjskiej, w dziele złożonym z 13 ksiąg, znanem pod nazwą: „Elementy geometrii“. Książka ta przez dwadzieścia wieków przeszła stanowiła najważniejsze źródło dla wszelkich badań geometrycznych. We wszystkich szkołach do niedawna uczono prawie bez zmiany tego, co się w tem dziele zawiera. W Anglii do dziś dnia w szkole używa się tłumaczenia Euklidesa jako podręcznika do nauki geometrii. Oprócz biblij — zdaniem historyków — żadna inna książka tak się nie rozpowszechniła i nie była tłumaczona na tyle języków, co „Elementy“ Euklidesa. Dlatego też całą geometrię, której się w szkole uczymy, nazywamy „geometrią euklidesową“, w przeciwieństwie do innych systemów geometrii, zbudowanych na innych pewnikach, sprzecznych z tradycyjnymi podstawami geometrii.

I<sub>7</sub>. Jeżeli dwie płaszczyzny mają jeden punkt wspólny, to mają przynajmniej jeszcze jeden punkt wspólny.

I<sub>8</sub>. Istnieją przynajmniej cztery punkty nie leżące na jednej płaszczyźnie.

*Uwaga:* Pewniki I<sub>4</sub>—I<sub>8</sub> są potrzebne w stereometrii, w planimetrii zaś nie używa się ich.

### Grupa II. Pewniki uporządkowania

II<sub>1</sub>. Jeżeli punkt  $B$  linii prostej leży między punktami  $A$  i  $C$  tej linii prostej, to leży on także (odwrotnie) między punktami  $C$  i  $A$ .

II<sub>2</sub>. Jeżeli  $A$  i  $C$  są punktami linii prostej, to na tej prostej istnieje zawsze przynajmniej jeden punkt  $B$  leżący między  $A$  i  $C$  i przynajmniej jeden punkt  $D$  (leżący poza  $C$  t. j.) taki, że  $C$  leży między  $A$  i  $D$ .

II<sub>3</sub>. Z pośród trzech dowolnych punktów linii prostej zawsze tylko jeden leży między dwoma innymi.

II<sub>4</sub>. Jeżeli trzy punkty  $A, B, C$  płaszczyzny, nie leżące na jednej linii prostej, połączymy odcinkami a dowolna prosta, nie przechodząca przez  $A, B$ , ani  $C$  trafia jeden z tych odcinków pomiędzy jego końcami, to musi trafić też jeden z pozostałych odcinków między jego końcami.

### Grupa III. Pewniki przystawania

III<sub>1</sub>. Jeżeli na prostej mamy dwa punkty  $A$  i  $B$  i punkt  $A'$  na tej lub na innej prostej  $a'$ , to można z każdej strony punktu  $A'$  znaleźć na tej prostej  $a'$  jeden tylko punkt  $B'$  taki, że odcinek  $AB$  jest przystający do odcinka  $A'B'$  (czyli równy mu), co piszemy  $AB \cong A'B'$ . Każdy odcinek jest sam do siebie przystający, t. j. zawsze  $AB \cong AB$  i  $AB \cong BA$ .

*Uwaga.* Króćiej wypowiadamy ten pewnik tak: każdy odcinek można na każdej prostej w danym kierunku odciąć od danego punktu tylko w jeden sposób.

III<sub>2</sub>. Jeżeli jeden odcinek przystaje do dwóch innych, to i te dwa są do siebie przystające,

III<sub>3</sub>. Jeżeli dwa odcinki  $AB$  i  $BC$  jednej prostej nie mają (prócz  $B$ ) żadnego punktu wspólnego i są przystające do dwóch odcinków  $A'B'$  i  $B'C'$  tej samej lub innej prostej, nie mających również (prócz  $B'$ ) żadnych punktów wspólnych, to także odcinki (sumy)  $AC$  i  $A'C'$  są przystające.

III<sub>4</sub>. Mając dany jakiś kąt  $\sphericalangle(h, k)$  na jednej płaszczyźnie  $\alpha$  i prostą  $a'$  na płaszczyźnie  $\alpha'$  i obrawszy jedną stronę prostej  $a'$



na  $\alpha'$  weźmy promień  $h'$  prostej  $\alpha'$  mający początek w punkcie  $O'$ . Wtedy w płaszczyźnie  $\alpha'$  istnieje tylko jeden promień  $k'$  taki, że kąt  $\sphericalangle(h, k)$  jest przystający (równy) do kąta  $\sphericalangle(h', k')$ , leżącego po obranej stronie prostej  $\alpha'$ .

Piszemy to  $\sphericalangle(h, k) \cong \sphericalangle(h', k')$ . Każdy kąt przystaje sam do siebie, t. j.  $\sphericalangle(h, k) \cong \sphericalangle(h, k)$  i  $\sphericalangle(h, k) \cong \sphericalangle(k, h)$ .

*Uwaga.* Krótko mówiąc: każdy kąt można tylko w jeden sposób przemieścić do każdego promienia, jeżeli oberzemy wierzchołek i stronę.

III<sub>5</sub>. Jeżeli jeden kąt przystaje do dwóch innych, to i te dwa przystają do siebie.

III<sub>6</sub>. Jeżeli w dwóch trójkątach są równe po dwa boki i kąty między nimi zawarte, to i dwie pozostałe pary kątów są odpowiednio równe, t. j. jeżeli

$$AC \cong A'C', AB \cong A'B' \text{ i } \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C', \text{ to i } \\ \sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B' \text{ i } \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'.$$

#### Grupa IV. Pewnik równoległości

IV. Przez punkt  $A$  leżący poza prostą  $\alpha$  przechodzi tylko jedna linia prosta równoległa do niej, leżąca w płaszczyźnie wyznaczonej przez prostą  $\alpha$  i punkt  $A$ .

#### Grupa V. Pewniki ciągłości

V<sub>1</sub>. (Pewnik Archimedes). Jeżeli na linii prostej mamy dwa odcinki: jeden większy  $AB$ , drugi mniejszy  $AC$ , to zawsze można mniejszy odcinek tyle razy do siebie dodać, że otrzymana suma będzie większa od większego odcinka  $AB$ .

*Uwaga:* znaczy to, że od każdego punktu linii prostej można się dostać poza każdy inny (choćby bardzo daleki) zapomocą skończonej liczby równych (choćby dowolnie małych) kroków.

V<sub>2</sub>. (Pewnik zupełności). Zbiór punktów, prostych i płaszczyzn, które rozważamy w naszej geometrii, jest zupełny, t. j. nie da się już rozszerzyć bez naruszania poprzednich pewników. To znaczy: nie można dodać do naszego zbioru punktów, prostych i płaszczyzn takich elementów, któreby wraz z nimi spełniały wszystkie poprzednie pewniki.

*Uwaga.* Okazano, że pewnik zupełności można zastąpić następującym prostszym pewnikiem: „linia prosta jest utworem geometrycznym ciągłym (nieprzerwanym)“.

Mając w ten sposób zestawione już wszystkie własności wystarczające do scharakteryzowania zbioru punktów, prostych i płaszczyzn,

możemy dopiero teraz podać definicję tych wszystkich utworów zasadniczych razem, a mianowicie: „zbiór punktów, prostych i płaszczyzn naszej geometrii jest to zbiór elementów (przedmiotów), spełniających 21 wyżej wymienionych pewników“.

Niektóre z tych pewników są tak proste, podają prawdy tak oczywiste, że zwykle nie wymienia się ich nawet wyraźnie (np. pewniki I<sub>3</sub>, I<sub>8</sub>, II<sub>1</sub>, III<sub>2</sub>, III<sub>3</sub>, III<sub>6</sub>) jakkolwiek wszystkie są niezbędne do zbudowania naszej geometrii a opuszczenie lub zaprzeczenie któregośkolwiek z nich wywołałoby lukę w dowodzie lub zmieniłoby zasadniczo własności badanych utworów geometrycznych. Potrzebę innych pewników zrozumiemy w dalszym toku nauki i wskażemy zawsze, z jakiego źródła pochodzą. Będziemy je przytem wypowiadali nieraz w postaci zwięźlejszej aniżeli w oryginalnem brzmieniu Hilberta. Z pewników moglibyśmy już wyprowadzić wszystkie prawa geometrii, nie odwołując się już do doświadczeń świata zewnętrznego, ale opierając się jedynie na rozumowaniu. Jednakże nieraz pogląd czyli spostrzeżenie zewnętrzne ułatwiają znacznie odkrywanie i zrozumienie nowych praw geometrycznych. Natomiast należy pamiętać o tem, że spostrzeżenia nasze są zawsze niedokładne i mogłyby nas doprowadzić do mylnych wniosków, gdybyśmy nie poparli doświadczenia ścisłym rozumowaniem, dowodzeniem (por. § 34 i 35). Mimoto nie będziemy w dalszym toku nauki dowodzili drobiazgowo wszystkich twierdzeń, z którymi się spotkamy, wymagałoby to bowiem nieraz bardzo rozwlekłych rozumowań. Zwłaszcza pominiemy dowodzenia takich twierdzeń, które są poglądowo bardzo oczywiste (np. dowód, że między dwoma punktami linii prostej leży nieskończenie wiele punktów tej prostej).

*Uwaga.* Cały nasz układ pewników można zastąpić innemi równoważnemi układami, biorąc niektóre proste twierdzenia wynikające z pewników za pewniki, a wtedy odpowiednie pewniki staną się twierdzeniami, dającymi się udowodnić. Można jednak także zbudować geometrię z pewników zupełnie odmiennych, nawet sprzecznych z naszymi i w ten też sposób powstały w nowszych czasach inne, zupełnie ścisłe systemy geometrii, t. zw. geometrie nieeuklidesowe. Mają one jednak przeważnie tylko naukowy interes: w praktyce, w badaniach fizycznych te inne geometrie nie znalazły dotychczas zastosowania, ponieważ są trudniejsze od naszej zwyczajnej, tradycyjnej geometrii euklidesowej.

Część geometrii, zajmującą się utworami leżącymi na jednej płaszczyźnie, nazywamy planimetrią, naukę zaś o utworach geometrycznych leżących w przestrzeni, na rozmaitych płaszczyznach, nazywamy stereometrią.



## Część I

# Planimetria

### Rozdział I

#### O linii prostej

#### § 3. Zasadnicze własności linii prostej.

Postępując od utworów geometrycznych najprostszych do coraz to więcej złożonych, zajmimy się najpierw *jedną* linią prostą. Przez każdy punkt w przestrzeni, a tak samo przez każdy punkt na płaszczyźnie przechodzi nieskończenie wiele linii prostych. Przez dwa oddzielne punkty przechodzi jednak *zawsze tylko jedna* linia prosta. Na poparcie tego twierdzenia możemy przytoczyć rozmaite spostrzeżenia: n. p. istnieje bardzo wiele dróg krzywych, łączących dwa miejsca, ale tylko jedna droga prosta; jeżeli przyłożymy lineal do krawędzi deski tak, aby się w dwóch punktach dotykał krawędzi, to wszystkie inne punkty linealu nakryją się z odpowiednimi punktami krawędzi deski — o ile tylko ta krawędź jest linią prostą; do wytyczenia linii prostej w polu wystarczą dwa znaki (n. p. tyczki). Tę własność linii prostej przyjęto za **pewnik**, który wypowiadamy następującymi słowami:

**I<sub>1</sub>. Dwa różne punkty wyznaczają zawsze jedną linię prostą.**

Zwyczajnie w praktyce używa się do wyznaczenia linii prostej punktów dosyć od siebie oddalonych; jeżeli się bowiem obierze punkty bardzo bliskie, n. p. prawie zlewające się na rysunku, to już małe odchylenie się od prostej łączącej te punkty na przestrzeni leżącej między temi punktami wywołuje wielki błąd w dalszych częściach linii prostej. Błąd ten pochodzi stąd, że w praktyce nigdy nie mamy do czynienia z prawdziwymi, idealnymi punktami i idealnymi liniami prostymi. W geometrii idealnej zajmujemy się tylko takimi liniami prostymi, które są wyznaczone zapomocą dowolnych swych dwóch punktów, niekoniecznie odpowiednio od siebie oddalonych. To założenie przyjmujemy jako następny pewnik geometryczny:

**I<sub>2</sub>. Dwa dowolne różne od siebie punkty linii prostej wyznaczają tę samą linię prostą.**

Linję prostą pojmujemy zawsze jako *nieograniczoną*, to znaczy: jakkolwiek daleko od siebie pomyślimy dwa punkty linii prostej, to *poza* nimi istnieją na tej prostej jeszcze dalsze punkty i to w obydwu kierunkach.

*Uwaga.* Osobnym pewnikiem (I<sub>3</sub> na str. 4) zastrzegamy się, że na każdej prostej istnieją przynajmniej dwa punkty.

Można więc zawsze linię prostą przedłużać dowolnie w obydwie strony. Stąd widzimy, że na każdej linii prostej jest nieskończenie wiele punktów, leżących *poza* dwoma punktami, dowolnie obranymi. Mimo to niema takich punktów, do którychby się nie można dostać zapomocą skończonej liczby równych kroków, chociażby te kroki były dowolnie małe: wszystkie zatem punkty są dostępne. Ale nie tylko *poza* dwoma punktami istnieje nieskończenie wiele punktów prostej, lecz także *między* dwoma punktami istnieją zawsze inne punkty, chociażbyśmy je obrali bardzo blisko siebie; między temi punktami istnieją znowu inne itd. bez granic, a więc także *między* dwoma punktami istnieje na linii prostej nieskończenie wiele punktów. (Mówimy, że zbiór punktów linii prostej jest wszędzie gęsty).

W geometrii praktycznej można obrać między dwoma punktami prostej tylko skończoną liczbę „punktów“, ale pamiętajmy o tem, że „punkty“ geometrii praktycznej nie są punktami matematycznymi, t. j. idealnymi, bez żadnych wymiarów. Te własności linii prostej należą także do podstawowych założeń geometrii. Ujmujemy je w następujące pewniki:

**II<sub>2</sub>. Między dwoma punktami linii prostej i poza nimi znajdują się zawsze inne punkty prostej.**

**V<sub>1</sub>. Od każdego punktu linii prostej można się dostać poza każdy inny punkt tej linii zapomocą skończonej liczby równych ale dowolnych (nawet bardzo małych) kroków (jest to pewnik Archimedes).**

Linję prostą pojmujemy jako *niezamkniętą*. Cóż ją odróżnia od linii zamkniętych? Jeżeli na jakiegokolwiek linii zamkniętej (np. na kole) obierzemy trzy punkty *A, B, C* dowolnie, to o każdym z tych punktów można powiedzieć, że leży między dwoma innymi. Jeżeli zaś weźmiemy trzy dowolne punkty linii prostej, to tylko jeden leży między dwoma innymi. Tę własność ujęto też w osobny pewnik (por. § 2. II<sub>3</sub>). Posuwając się więc *poza* dwa punkty prostej nigdy nie wrócimy z powrotem pomiędzy te punkty.



Można się spotkać z twierdzeniem, że linja prosta zamyka się w nieskończoności, naksztalt koła o ogromnym promieniu czyli innemi słowami: że prosta ma w nieskończoności jeden punkt. Takie twierdzenie sprzeciwia się nie tylko  $II_3$ , lecz także pewnikowi Archimedesa, byłby to bowiem taki punkt, do którego nie można się dostać zapomocą skończonej liczby kroków. W naszej geometrii jest więc to twierdzenie błędne. Jeżeli jednak weźmiemy za podstawę geometrii inny zbiór pewników, jak to n. p. czynimy w t. zw. geometrii rzutowej, to tam może prosta mieć w nieskończoności jeden i tylko jeden punkt t. zw. punkt niewłaściwy. Tak samo błędne byłoby — po przyjęciu naszych pewników — powiedzenie, że linja prosta ma dwa punkty w nieskończoności (jeden na prawo, drugi na lewo). Nieograniczoność prostej tak tylko należy rozumieć, że jakkolwiek daleko posunęlibyśmy się na linii prostej, to istnieją zawsze punkty jeszcze dalsze, coraz to inne.

W pojęciu linii prostej mieści się jeszcze jedna ważna własność, nie zawarta w pewnikach wymienionych dotychczas. Linję prostą uważamy za nieprzerwany czyli ciągły zbiór punktów. Dla zapewnienia ciągłości nie wystarczy żądać, aby między każdymi dwoma punktami prostej leżało nieskończenie wiele punktów (wszędzie gęsto), mogłyby się bowiem na niej mimo to znajdować przerwy punktowe. Nam zaś chodzi o to, aby każdy przekrój linii prostej trafił nie w próżnię, ale także w jakiś punkt leżący na prostej; chcemy, aby każde miejsce, około którego skupia się nieskończenie wiele punktów prostej, samo także należało do tej prostej. Te własności prostej ujmujemy krótko w następujący pewnik:

**$V_2$ . Linja prosta jest figurą ciągłą (t. j. niema przerw ani luk).**

#### § 4. Odcinki.

Ile razy mówimy „linja prosta“ bez żadnego dodatku, mamy zawsze w myśli prostą nieograniczoną, całą.

Jeżeli na linii prostej obierzemy jakiś jeden punkt  $A$  (fig. 1), to otrzymujemy dwie części, zwane promieniami, z których każdy jest z jednej strony ograniczony (punktem  $A$ ),

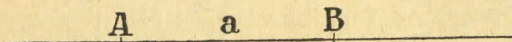


Fig. 1.

z drugiej zaś nie. Często jeden promień nazywamy kierunkiem dodatnim, drugi ujemnym! Jeżeli na linii prostej obierzemy dowolnie punkty  $A$  i  $B$ , to część prostej, ograniczoną już z obu stron punktami  $A$  i  $B$ , nazywamy jej odcinkiem lub odległością punktów  $A$  i  $B$ . Punkty  $A$  i  $B$  nazywamy końcami odcinka a o każdym innym punkcie odcinka mówimy, że leży między  $A$  i  $B$ , lub — co na jedno wychodzi — między  $B$  i  $A$  (por. § 2. Pewnik  $II_1$ ).

Jeżeli jakiś punkt przebiega kolejno wszystkie punkty jakiegoś odcinka, to mówimy, że ten punkt wykonuje ruch postępowy od jednego końca odcinka do drugiego.

Do wykreślenia figury, która ma nam wyobrażać odcinek, używa się w geometrii praktycznej lineалу. Aby sprawdzić dokładność lineалу, powołujemy się na pewnik  $I_1$  orzekający, że między dwoma punktami da się tylko jedna linja prosta poprowadzić. W tym celu przykładamy lineał do dwóch podanych punktów i wzdłuż jego krawędzi kreślimy linję. Następnie odwracamy lineał około tej krawędzi i drugi raz kreślimy wzdłuż niego linję; jeżeli obydwie linje się nakryją, lineał jest dobry. Odcinek oznaczamy albo dwoma literami wielkimi, oznaczającymi punkty ograniczające, albo jedną małą literą umieszczoną pośrodku i czytamy: odcinek  $AB$  lub odcinek  $a$ .

Często zachodzi potrzeba znalezienia odcinka równego danemu odcinkowi na tej samej prostej, ale w innem miejscu, lub na innej prostej. W geometrii praktycznej robi się to tak, że dany odcinek bierzemy w rozwartość cyrkla i usztywniwszy odpowiednio jego ramiona przenosimy odcinek do żadanego miejsca. (Jak wykonać to zadanie przy pomocy lineалу?)

Możliwość i jednoznaczność tej konstrukcji — znanej z licznych doświadczeń — zapewniamy sobie osobnym pewnikiem (por. § 2.  $III_1$ ).

Takiego samego sposobu używamy w celu porównania dwóch odcinków  $AB$  i  $A'B'$ . Jeżeli jeden odcinek przeniesiemy tak, aby jeden jego punkt graniczny, n. p.  $A$ , nakrył się z punktem  $A'$ , ograniczającym drugi odcinek i jeżeli zachowamy ten sam kierunek dla obu odcinków, to mogą zajść trzy wypadki:

1. drugi koniec  $B$  odcinka padnie pomiędzy punkty  $A'B'$ , wtedy nazywamy pierwszy odcinek mniejszym i piszemy

$$AB < A'B';$$

2. punkt  $B$  padnie na punkt  $B'$ , wtedy pierwszy odcinek jest przystający czyli równy drugiemu

$$AB = A'B';$$

3. punkt  $B$  padnie poza odcinek  $A'B'$ , wtedy pierwszy odcinek nazywamy większym i piszemy

$$AB > A'B'.$$

Do tych znaków  $=$ ,  $>$ ,  $<$ , można zastosować te same prawa, których się używa w arytmetyce dla liczb równych i nierównych, a więc n. p.: dwa odcinki równe trzeciemu są i między sobą równe (por. § 2. Pewnik  $III_2$ ), lub: jeżeli jeden odcinek jest równy drugiemu, a ten drugi jest większy od trzeciego, to i pierwszy jest większy od trzeciego i t. p.



Wobec tego odcinki zaliczamy także do wielkości, podobnie jak liczby.

Na odcinkach możemy wykonywać podobne działania, jak na liczbach w arytmetyce.

I tak, jeżeli punkt  $B$  leży między  $A$  i  $C$  (fig. 2), to odcinki  $AB$  i  $BC$  nazywamy odcinkami kolejnymi, a cały odcinek  $AC$  nazywa się sumą kolejnych odcinków  $AB$  i  $BC$ . Możemy jednak *dodawać* także odcinki niekolejne, nawet leżące na różnych liniach

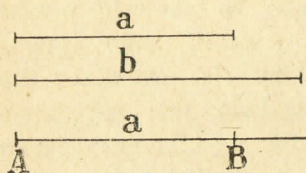


Fig. 2.

prostych. Dodać dwa odcinki to znaczy do końca jednego przyłożyć drugi w tym samym kierunku, na tej samej linii prostej.

Np. chcemy dodać odcinki  $a$  i  $b$ . Na dowolnej prostej odcinamy  $AB = a$  a od końca  $B$  dalej w tym samym kierunku  $BC = b$ .

Odcinek  $AC$ , jako suma kolejnych odcinków  $AB$  i  $BC$ , jest zarazem sumą równych im odcinków  $a$  i  $b$ .

*Uwaga:* na jakiegokolwiek innej prostej wykonamy tę konstrukcję, otrzymamy inny odcinek  $A'C'$  ale zawsze będzie  $A'C' = AC$ , a więc suma będzie zawsze równa. Tę jednoznaczność wyniku dodawania zapewniamy sobie osobnym pewnikiem (por. § 2. Pewnik III<sub>3</sub>). Jest to już ostatni z jedenastu pewników (I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub>, I<sub>3</sub>, II<sub>1</sub>, II<sub>2</sub>, II<sub>3</sub>, III<sub>1</sub>, III<sub>2</sub>, III<sub>3</sub>, IV<sub>1</sub>, IV<sub>2</sub>) potrzebnych do scharakteryzowania własności linii prostej i jej części.

*Odejmowanie* odcinków określa się — podobnie jak w arytmetyce — jako odwrócenie dodawania. Odjąć od odcinka  $c$  odcinek  $d$  to znaczy znaleźć taki odcinek  $r$ , aby  $r + d = c$ . Aby to działanie wykonać konstrukcyjnie, odcinamy  $d$  od początku  $c$  w tę samą stronę, po której leży  $c$  względem swego początku (por. fig. 3) lub od końca  $c$  w stronę przeciwną. Możemy także przenieść obydwa odcinki na inną linię prostą i na niej wykonać odejmowanie. N. p. odcinek  $NR$  na fig. 3 jest różnicą odcinków  $NP$  i  $RP$ , a więc  $c$  i  $d$ . Konstrukcję wykonujemy podobnie, jak przy szukaniu sumy dwóch odcinków. Piszemy:  $NR = c - d$ .

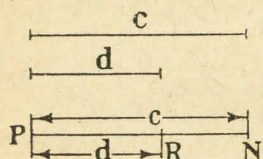


Fig. 3.

Jeżeli na linii prostej chcemy odróżniać kierunki i umówimy się n. p. kierunek od  $P$  ku  $N$  uważać za dodatni, to odcinki  $RN$ ,  $PR$ ,  $PN$  uważamy za dodatnie, odcinki zaś

$NR$ ,  $RP$ ,  $NP$  za ujemne. Wtedy  $NR = -RN$ \*) i odwrotnie; jeżeli więc  $NP = c$ , to  $PN = -c$ . Przemiana porządku liter, oznaczających końce odcinków, wywołuje zmianę znaku. Działania odcinkami opatrzonemi znakami wykonuje się tak, jak liczbami dodatnimi i ujemnymi w algebrze (n. p. dodać odcinek ujemny, znaczy odjąć jego wartość przeciwną).

Jeżeli jakiś odcinek kilka razy do siebie dodamy, n. p. 5 razy, to mówimy, żeśmy odcinek pomnożyli przez liczbę 5. N. p. (fig. 4)

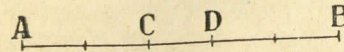


Fig. 4.

$$AB = 5 \cdot CD$$

Później będziemy także mówili o *mnożeniu odcinka przez odcinek* (przy proporcjonalności figur i przy mierzeniu pól).

Co się tyczy *dzielenia odcinka przez liczbę*, to jasne jest, co znaczy podzielić odcinek na 2, 3, 4, ... 10, ... równych części (odwrócenie mnożenia przez liczbę!). Sposób rozwiązywania tego zagadnienia omówimy również później. Piszemy n. p.  $AB : 5 = CD$ . Dzielenie to można prowadzić dowolnie daleko. Nigdy nie dojdziemy do tak małego odcinka, którego by już dalej nie można podzielić. Pewnik bowiem II<sub>2</sub> poucza, że między dwoma punktami znajdują się zawsze inne jeszcze punkty prostej. W geometrii praktycznej przeciwnie, dzielenie odcinka można doprowadzić tylko do pewnej granicy, poniżej której już dwa końce odcinka zlewają się ze sobą i z wszystkimi punktami, któreby mogły między nimi leżeć.

Działaniem bardzo pokrewnem z dzieleniem jest *mierzenie* odcinków, t. j. badanie, ile razy jeden odcinek mieści się w drugim. Działanie to wykonujemy przez odejmowanie kolejnego odcinka od drugiego. Jeżeli n. p. (fig. 5) odcinek  $CD$  odejmiemy od  $AB$ , od pozostałej reszty znowu odejmiemy  $CD$  i jeżeli po 5 odejmowaniach wyczerpiemy cały odcinek  $AB$ , to mówimy, że *stosunek odcinka  $AB$  do odcinka  $CD$  wynosi 5*, a piszemy to, używając znaku dzielenia

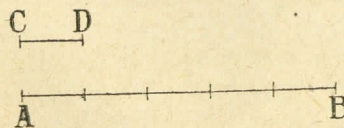


Fig. 5.

$$AB : CD = 5.$$

Odcinek  $AB$  nazywamy *poprzednikiem*,  $CD$  *następnikiem*, a liczbę *niemianowaną 5* *wykładnikiem stosunku*.

\*) *Uwaga:* wtedy odstępujemy od końcowej równości wymienionej w pewniku III<sub>1</sub>.



Jeżelibyśmy odcinek  $CD$  obrali za jednostkę mierniczą, to wykładnik 5 (wynik mierzenia) nazwalibyśmy liczbą wymiarową odcinka  $AB$ . Przy mierzeniu może pozostać jakaś reszta; nauczymy się później, jak się wtedy szuka wykładnika stosunku.

Wszystkie te działania, wykonywane na odcinkach, podlegają tym samym prawom, co działania arytmetyczne, wykonywane na liczbach (n. p. dodawanie podlega prawu łączności, przemienności i t. p.) co łatwo sprawdzić (por. ćw. 5). Korzystając z tego możemy sobie często ułatwić działania arytmetyczne, jeżeli liczby zastąpimy odcinkami (rachunek graficzny) i odwrotnie: mając wykonać działanie na odcinkach, zastępujemy je liczbami (wymiarowemi) i rachujemy arytmetycznie.

N. p. mając wykonać odejmowanie  $732 - 189$  możemy z korzyścią użyć metra opatrzonego podziałką milimetrową. Wynajdujemy punkt  $732\text{ mm}$  i cyrklem odcinamy od tego punktu ku początkowi podziałki odcinek  $189\text{ mm}$ : otrzymamy naturalnie punkt  $543\text{ mm}$ . Odwrotnie: mając dodać n. p. odcinek o długości  $5\text{ m}$  do odcinka wynoszącego  $18\text{ m}$ , nie będziemy wykonywali konstrukcji, ale od razu podamy wynik: odcinek długości  $23\text{ m}$ .

### Ćwiczenia I

§ 3. 1. Na jakie części rozpada się linia prosta, jeżeli obierzemy na niej dwa dowolne punkty? 3, 4, 5, dowolnych punktów? Ile różnych odcinków powstanie?

§ 4. 2. Przenieś na papier podziałkę centymetrową przy pomocy cyrkla!

3. Udowodnij geometrycznie, że jeżeli  $a = b$ , a  $b > c$ , to  $a > c$ .

4. Jakie położenie mogą mieć względem siebie dwa nierówne odcinki tej samej linii prostej? (rysunek!).

5. Dodaj dwa dowolnie podane odcinki i wykaż prawo:  $a + b = b + a$ .

Wskazówka: oprzeć się na tem, że  $AC = CA$ , przyczem  $AC = a + b$ .

\* 6. Obrawszy dowolny trójkąt, dodaj jego boki.

7. Wykaż na odcinkach, że  $a + (b + c) = (a + b) + c$   
 $= (a + c) + b$  (prawo łączności).

8. Odejmij od dowolnie podanego odcinka drugi: a) mniejszy, b) większy odcinek.

9. Odejmij od siebie dwa boki trójkąta, prostokąta!

10. Wykazać, że, jeżeli na linii prostej leżą dowolnie 3 punkty  $A, B, C$ , to zawsze  $AB + BC + CA = 0$  (uwzględnić znaki odcinków!).

11. Znając odległość dwu miejsc  $AB$ , znaleźć punkt, mający 7 razy większą odległość od  $A$ , aniżeli punkt  $B$ . Dwa rozwiązania!

12. Mając podane dwa odcinki, znaleźć (w przybliżeniu) wykładnik ich stosunku drogą geometryczną.

13. Podziel na oko dowolny odcinek na 2, 3, 4, równe części i zbadaj następnie cyrklem dokładność wyniku. Jak można dalej na oko poprawiać konstrukcję?

14. Zmierzyć długość i szerokość zeszytu, używając odstępu dwóch jego linii jako jednostki mierniczej.

15. Zmierzyć długość i szerokość zeszytu, używając  $1\text{ dm}$  jako jednostki mierniczej.

16. Zbadaj, ile centymetrów — przeciętnie — wynosi krok i oblicz, ile jest kroków ze Lwowa do Krakowa ( $342\text{ km}$ ). Jak długo trzebaby odbywać pieszo tę drogę, licząc 2 kroki na sekundę?

17. Zmierzyć obwód ziemi, używając kroku jako jednostki mierniczej i wiedząc, że  $1\text{ metr}$  jest  $1/40,000,000$  częścią obwodu ziemi (patrz zad. 16). Jak długo trwałaby podróż piechotą na około ziemi, gdyby nie było oceanów?

18. Wykonaj geometrycznie działania:  $312 - 178 + 547$ ;  $65 - 198$ ;  $47 - 123$ ; używając podziałki milimetrowej na metrze.

19. Wykonaj graficznie dzielenie  $1:96:2:8$  (za jednostkę obierz  $1\text{ dm}$ !).

## Rozdział II

### O dwóch liniach prostych. Kąty

Dwie proste, leżące na jednej płaszczyźnie, mogą mieć względem siebie trojaki położenie: mają dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mają żadnego punktu wspólnego.

#### § 5. Proste nakrywające się.

Pewnik  $I_1$  poucza, że przez dwa punkty da się poprowadzić tylko jedną linię prostą. Jeżelibyśmy więc okazali o dwóch liniach prostych, że mają dwa punkty wspólne, to te linie miałyby już wszystkie inne punkty wspólne, czyli tworzyłyby jedną linię prostą; tem bardziej, gdyby te dwie linie proste miały trzy lub więcej punktów wspólnych. O takich dwóch prostych mówimy, że się nakrywają. W geometrii praktycznej pewnik  $I_1$  nie jest ściśle spełniony, ponieważ

punkty geometrii praktycznej mają zawsze pewne rozmiary. I tak n. p. na fig. 6 poprowadziliśmy przez „punkty“  $A$  i  $B$  jedną „linię prostą“. Jeżeli jednak weźmiemy „linię“ nieco cieńszą, to możemy ich trzy lub więcej

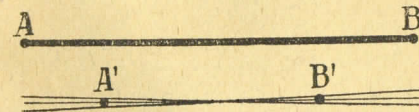


Fig. 6.

między punktami  $A'$  i  $B'$  poprowadzić. Stąd wynika w praktyce bardzo często chwiejność, niepewność konstrukcji zwłaszcza, jeżeli punkty  $A'$   $B'$  leżą blisko siebie, a linia prosta ma być daleko poza nie przedłużona. (Por. jednak § 2. Pewnik  $I_2$ ).



## § 6. Proste przecinające się. Kąty.

Dwie linie proste\*) — różne od siebie — mogą mieć najwyżej jeden punkt wspólny. Wtedy mówimy, że się te linie przecinają. Punkt wspólny nazywamy punktem przecięcia (lub spodkiem prostej). W geometrii praktycznej i to twierdzenie nie jest prawdziwe, jeżeli się bowiem dwie „linie proste” przecinają, to mają kawałek płaszczyzny wspólny (w przybliżeniu równoległobok  $EFGH$  na fig. 7).

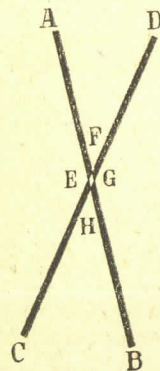


Fig. 7.

Podobnie jak każdy punkt dzieli linię prostą na dwa promienie, tak i każda prosta dzieli płaszczyznę na dwie części nieograniczone, na dwa obszary (zwane półpłaszczyznami) nie mające żadnych punktów wspólnych prócz tej prostej. Z jednego obszaru nie można się dostać do drugiego, nie przekraczając tej prostej.

*Uwaga:* Można to udowodnić opierając się na pewniku  $II_4$ , który orzeka, że każda prosta nie przechodząca przez wierzchołki trójkąta a trafiająca bok trójkąta pomiędzy dwoma wierzchołkami musi trafić także drugi bok pomiędzy jego końcami.

*Dwie przecinające się proste dzielą całą płaszczyznę na cztery części nieograniczone, (z których każda jest częścią wspólną dwóch odpowiednich półpłaszczyzn), zwane kątami. (Fig. 8).*

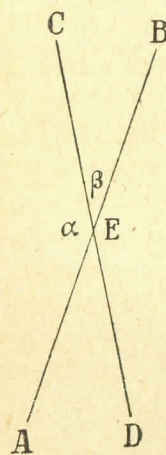


Fig. 8.

Punkt przecięcia się tych prostych nazywamy wierzchołkiem każdego kąta, a promienie, tworzące kąt, ramionami kąta.

Ramiona każdego kąta dzielą płaszczyznę — podobnie jak jedna prosta — na dwie części: wewnętrzną, zawartą między ramionami, czyli pole kąta i zewnętrzną (w której istnieją proste nieograniczone, nie przecinające ramion kąta).

Z pola kąta nie można się dostać na zewnątrz, o ile nie wychodzimy z płaszczyzny, nie przekraczając ramion (które trzeba naturalnie pojmować jako nieograniczone\*\*). Skróconym znakiem kąta jest  $\sphericalangle$ . Kąt

\*) Na każdej płaszczyźnie znajdują się przynajmniej dwie różne proste, albowiem według pewnika  $I_3$  na każdej płaszczyźnie znajdują się 3 punkty nie leżące na jednej prostej. Dwa z nich wyznaczają jedną prostą a trzeci z którymkolwiek z poprzednich wyznacza drugą, inną od poprzedniej prostą. Obydwie te proste według pewnika  $I_6$  leżą całe na płaszczyźnie.

\*\*) Dowód polega na pewniku  $II_4$ .

znaczymy albo trzema literami, przyczem literę, oznaczającą wierzchołek, bierzemy zawsze za środkową:  $\sphericalangle AEC$ ,  $\sphericalangle CEB$  i t. p., albo jedną literą, zwykle grecką, umieszczoną na polu kąta przy wierzchołku, n. p.  $\sphericalangle \alpha$ ,  $\sphericalangle \beta$ , lub jedną wielką literą oznaczającą wierzchołek, o ile nie zachodzi żadna wątpliwość, t. j. o ile nie ma więcej kątów przy tym samym wierzchołku. Kąt utworzony przez dwa promienie  $a, b$  można też oznaczać:  $\sphericalangle (a, b)$ .

Do każdego kąta można znaleźć w każdym innem miejscu kąt równy i to tylko jeden, jeżeli obierzemy jedno ramię, wierzchołek i kierunek (stronę). (Por. § 2. Pewnik  $III_4$ ). Praktycznie robi się to zapomocą osobnego przyrządu: kątomierza lub też osobną konstrukcją, zapomocą cyrkla. Nazywamy to przenoszeniem kąta. Obydwa te sposoby omówimy dokładniej później — będziemy się jednak już teraz posługiwać kątomierzem, znanym z elementarnej nauki geometrii. Takiego samego sposobu używamy w celu **porównania dwóch kątów**:  $\sphericalangle ABC$ ,  $\sphericalangle A'B'C'$ . Jeżeli jeden kąt przeniesiemy tak, aby jego ramię  $AB$  i wierzchołek  $B$  nakryły się z ramieniem  $A'B'$  i wierzchołkiem  $B'$  i jeżeli zachowamy ten sam kierunek dla obydwu kątów, to mogą się zdarzyć trzy przypadki:

1. drugie ramię  $BC$  padnie na pole kąta  $A'B'C'$ , wtedy pierwszy kąt nazywamy mniejszym i piszemy:

$$\sphericalangle ABC < \sphericalangle A'B'C'$$

2. ramię  $BC$  padnie na ramię  $B'C'$ ; wtedy pierwszy kąt jest równy drugiemu i piszemy:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$$

3. ramię  $BC$  padnie poza pole kąta  $A'B'C'$ , wtedy pierwszy kąt jest większy i piszemy:

$$\sphericalangle ABC > \sphericalangle A'B'C'.$$

Do znaków  $>$ ,  $=$ ,  $<$ , można stosować te same prawa, których się używa w arytmetyce dla liczb równych i nierównych. (Por. § 2. Pewnik  $III_5$ ).

Kąty należą więc też do wielkości, podobnie jak odcinki i liczby.

Z tych określeń wynika, że wielkość kąta nie zależy zupełnie od długości ramion.

Na kątach można wykonywać zupełnie podobne działania, jak na odcinkach. Można więc kąty **dodawać**, przenosząc jeden tak, aby jego ramię i wierzchołek nakryły się z wierzchołkiem i ramieniem drugiego kąta, drugie zaś ramię prowadząc po przeciwnej stronie



tego wspólnego ramienia tak, by powstały kąty kolejne (fig. 9).

N. p.  $\sphericalangle D' A' B' = \alpha + \beta$ .

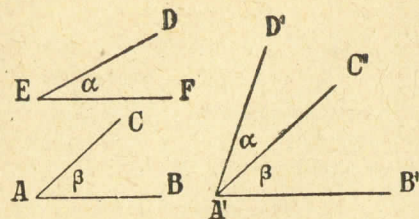


Fig. 9.

Przez dodawanie kątów można jednak dojść do figury, która już nie powstaje z przecięcia się dwóch różnych prostych, ale z rozcięcia płaszczyzny zapomocą jednej prostej na dwie półpłaszczyzny.

Stanie się to wtedy, jeżeli ramię  $A' D'$  padnie na przedłużenie ramienia  $A' B'$  poza wierzchołek  $A'$ .

Figura ta nie jest już kątem w pierwotnym znaczeniu. Aby się jednak suma kątów zawsze nazywała „kątem“, musimy rozszerzyć pojęcie kąta i oprócz tych właściwych kątów, utworzonych przez dwie różne linie proste, nazwać także *kątami* utwory geometryczne powstające z dwóch promieni tej samej linii prostej, biegnących w kierunkach

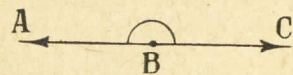


Fig. 10.

przeciwnych. Takie kąty nazywamy **kątami półpełnymi**:  $\sphericalangle A B C$  na fig. 10.

Polem kąta półpełnego jest półpłaszczyzna. Wszystkie kąty półpełne są sobie równe (a pewniki III<sub>4</sub> i III<sub>5</sub> stosują się do nich także).

Jeżeli utworzymy sumę dwóch kątów półpełnych, to drugie ramię drugiego kąta nakryje się z pierwszym ramieniem pierwszego kąta.

Otrzymamy w ten sposób utwór geometryczny, zwany **kątem pełnym**, n. p.  $\sphericalangle A B C$  na fig. 11.

Polem jego jest cała płaszczyzna, a ramiona nakrywają się.

Przy dodaniu kilku kątów może się zdarzyć, że otrzymamy więcej, aniżeli kąt pełny. Wtedy mówimy, że pole tego kąta pokrywa płaszczyznę drugi raz, trzeci raz i t. d.

**Odejmowanie** tem się tylko różni od dodawania, że drugie ramię prowadzi się po tej samej stronie wspólnego ramienia, np. na fig. 9.

$\sphericalangle D' A' B' - \sphericalangle D' A' C' = \sphericalangle C' A' B$ .

Jeżeli sobie wyobrazimy człowieka, stojącego na płaszczyźnie kąta (na tej stronie płaszczyzny, którą obierzemy za stronę dodatnią), w jego wierzchołku i zwróconego twarzą do pola kąta, to jego prawe ramię wskaże *prawe ramię kąta*, a lewe: *lewe ramię kąta*. Zwykle jeżeli bierzemy pod uwagę najpierw prawe ramię a później lewe, to kąt nazywamy dodatnim n. p.  $B E C$ , (fig. 8) w przeciwnym razie ujemnym n. p.  $C E B$ .

Jeżeli jakiś kąt kilka razy dodamy do siebie, n. p. 5 razy, to mówimy, żeśmy kąt pomnożyli przez liczbę 5. N. p. na fig. 12.

$\sphericalangle A B C = 5 \alpha$ .

**Podzielić kąt przez liczbę** znaczy znaleźć taki kąt, któryby pomnożony przez tę liczbę dawał kąt pierwotny. Sposób dzielenia kąta na 2, 4, 8... równych części poznamy później.

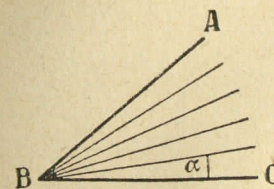


Fig. 12.

Podział dowolnego kąta na trzy równe części jest już zagadnieniem trudniejszym, nie da się bowiem wykonać przy pomocy jedynie cyrkla i lineалу, zapomocą skończonej liczby konstrukcji. — Obmyślono jednak inne środki pomocnicze, inne linie krzywe oprócz koła, które pozwalają to zagadnienie rozwiązać z zupełną ścisłością. N. p. Hippiasz z Elis, znany sofista (V. wiek przed Chr.), obmyślił w tym celu linję krzywą, zwaną: *quadratrix*, Nikomedes (II. w. po n. Chr.) linję, zwaną *muszlą Nikomedesa*, później używano hyperboli i innych.

Działania wykonywane na kątach podlegają tym samym prawom arytmetycznym, co działania liczbami.

Działaniem pokrewnem z dzieleniem kąta jest mierzenie kąta, t. j. badanie, ile razy jeden kąt mieści się w drugim. Działanie to wykonujemy przez kolejne odejmowanie jednego kąta od drugiego. N. p. na fig. 13. jeżeli kąt  $\gamma$  odejmiemy od kąta  $\alpha$ , od pozostałej reszty znowu odejmiemy kąt  $\gamma$  i jeżeli po 6 odejmowaniach wyczerpiemy cały kąt  $\alpha$ , to mówimy, że *stosunek kąta  $\alpha$  do kąta  $\gamma$  wynosi 6* a piszemy to używając znaku dzielenia

$$\alpha : \gamma = 6.$$

$\alpha$  nazywa się *poprzednikiem stosunku*,  $\gamma$  *następnikiem* a 6 *wykładnikiem*. Jeżelibyśmy kąt  $\gamma$  obrali za jednostkę mierniczą, to wykładnik 6, wynik mierzenia, nazwalibyśmy *liczbą wymiarową kąta*.

W geometrii praktycznej każdy kąt da się wymierzyć przy pomocy każdej jednostki z taką dokładnością, na jaką przyrządy miernicze pozwalają.

Co się tyczy wyboru ogólnie uznanej jednostki, to mamy tu naturalnie znowu zupełną dowolność, tak samo jak przy odcinkach. Jednakowoż od najdawniejszych czasów ogólnie przyjęto jako jednostkę do mierzenia kątów t. zw. kąt prosty; znaczymy go literą  $R$ .



Kątem prostym nazywamy połowę kąta półpełnego n. p. na fig. 14.  $\sphericalangle ABC = R$ . Ponieważ wszystkie kąty półpełne są sobie równe, przeto ich połowy są sobie równe, więc *wszystkie kąty proste są także równe*.

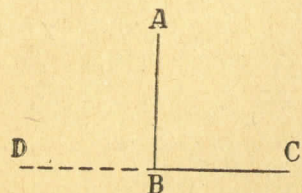


Fig. 14.

Tę jednostkę podzielono na 90 równych części, zwanych **stopniami**:  $1^\circ = \frac{R}{90}$ ; stopień podzielono na 60 równych części, zwanych minutami (partes minutae primae):  $1' = \frac{1^\circ}{60}$ ; wreszcie minutę podzielono na 60 równych części, zwanych sekundami,  $1'' = \frac{1'}{60}$  (partes minutae secundae). Sekundy są już tak drobnymi jednostkami, że tylko przy pomocy najlepszych lunet astronomicznych dadzą się odczytać. Używa się ich też wyłącznie przy pomiarach astronomicznych. Kąt prosty ma więc  $90^\circ$ , kąt półpełny  $180^\circ$  a kąt pełny  $360^\circ$ .

Ten podział według systemu sześćdziesiątkowego (mieszanego z 90-kowym) uskutecznił już około 2000 przed n. Chr. w Babilonie, a od II. wieku przed Chr. zaczęto go używać także w Grecji. System ten jest jednak dla nas niewygodny, ponieważ przywykliśmy używać przy innych miarach systemu dziesiętkowego (metr, kilogram). Dlatego też w najnowszych czasach wprowadzono we Francji podział kąta prostego na 100 równych części, stopni nowego rodzaju. Taki nowy stopień podzielono na 100 minut, a minutę na 100 sekund. Jednostki takie wprowadzono już nawet do przyrządów mierniczych.

Kąty mniejsze od prostego nazywamy ostre, kąty większe od prostego, ale mniejsze od półpełnego rozwartymi. Kąty większe od półpełnego nazywamy kątami wklęsłymi, w przeciwieństwie do ostrych, prostych i rozwartych, które obejmujemy wspólnym mianem: kąty wypukłe — tak się one bowiem przedstawiają obserwatorowi, stojącemu na płaszczyźnie poza polem kąta.

## § 7. Kąty przyległe i wierzchołkowe.

a) Dwa kąty, mające wspólny wierzchołek, wspólne ramie, a których druga para ramion tworzy jedną linię prostą (jedno ramie jest przedłużeniem drugiego), nazywamy **kątami przyległymi**.

N. p. kąty  $\sphericalangle ABC$  i  $\sphericalangle CBD$  na fig. 15.

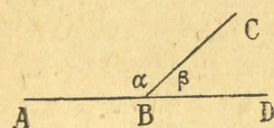


Fig. 15.

Kąt półpełny  $\sphericalangle ABD$  jest sumą tych kątów przyległych, więc  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .

O kątach, których suma wynosi  $180^\circ$ , mówimy, że się *spełniają do  $180^\circ$* . A więc: dwa kąty przyległe spełniają się do  $180^\circ$ .

Odwrotnie: gdybyśmy o dwóch kątach wykazali, że mają wspólny wierzchołek, wspólne ramie i wynoszą razem  $180^\circ$ , to druga para ramion musi tworzyć jedną linię prostą.

Jeżeli jeden z kątów przyległych jest prosty:  $\gamma = 90^\circ$ , to i drugi  $\delta = 90^\circ$  jako reszta do  $180^\circ$ . Proste, tworzące ze sobą kąt prosty, nazywamy **liniami prostokątnymi** i znaczymy to w następujący sposób (fig. 16):

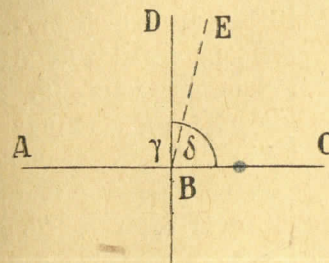


Fig. 16.

$DB \perp AC$  lub  $AC \perp DB$ .

Każdą inną prostą, wychodzącą z punktu B, n. p. BE, nazywamy **pochyłą** lub **ukośną** względem AC i BD.

Przez punkt B leżący na linii AC można tylko jedną linię prostokątną do AC wykreślić, ponieważ w przeciwnym razie powstałyby przy wierzchołku B dwa kąty proste nierówne n. p.  $\sphericalangle DBC$  i  $\sphericalangle EBC$ , co jest niemożliwe.

Z każdego punktu płaszczyzny można się więc po niej posuwać w dwóch prostokątnych do siebie kierunkach. Tę własność płaszczyzny nazywamy **dwuwymiarowością**.

Także wszystkie powierzchnie krzywe są utworami dwuwymiarowymi. Wykażemy później, w nauce stereometrii, że w każdym punkcie przestrzeni można wykreślić trzy linie prostokątne do siebie, że więc przestrzeń jest trójwymiarowa.

Dwa kąty, których suma wynosi  $90^\circ$ , nazywamy **kątami dopełniającymi**.

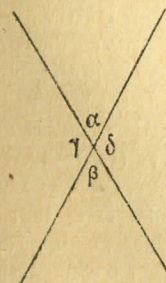


Fig. 17.

b) Dwa kąty o wspólnym wierzchołku takie, że ramiona jednego kąta są przedłużeniami — poza wierzchołek — ramion drugiego kąta, nazywamy **kątami wierzchołkowymi**. Kąty takie powstają więc przez przecięcie się dwóch linii prostych. Na fig. 17 kąty  $\alpha$  i  $\beta$  są względem siebie wierzchołkowe; tak samo  $\gamma$  i  $\delta$ . Ponieważ obydwu kątów  $\alpha$  i  $\beta$  brakuje tyle samo do  $180^\circ$ , mianowicie kąt  $\delta$ , przeto te kąty są równe

$$\alpha = \beta.$$

Z tej samej przyczyny  $\gamma = \delta$ . Stąd wniosek: **kąty wierzchołkowe są sobie równe**.



## § 8. Proste równoległe.

Poza prostą  $b$  obierzmy dowolny punkt  $A$ . Przez ten punkt przechodzi nieskończenie wiele prostych, tworzących *pek promieni*. Kilka z tych prostych narysowaliśmy na fig. 18. Jedne z nich przecinają prostą  $b$  już w obrębie figury (n. p.  $d, e, f, g$ ), inne przedłużone odpowiednio przetną prostą  $b$  (n. p. proste  $a, i$ ) a jedna z nich, mianowicie  $a$ , nie przetnie prostej  $b$ , chociażbyśmy obydwie proste  $a$  i  $b$  dowolnie przedłużali.

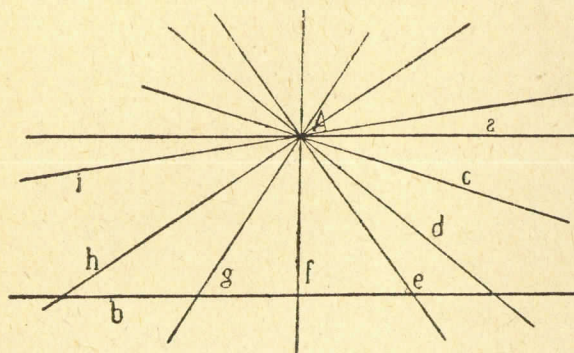


Fig. 18.

Dwie proste, leżące na jednej płaszczyźnie, które się nie przecinają, chociażbyśmy je dowolnie przedłużali, nazywamy **równoległymi** i piszemy  $a \parallel b$  lub  $b \parallel a$ .

Spostrzeżenie to przyjęto za **pewnik**, który wypowiadamy w następujący sposób:

**IV. Przez punkt, leżący poza linią prostą, można do niej poprowadzić jedną ale tylko jedną, linię równoległą; leży ona na płaszczyźnie wyznaczonej przez daną prostą i dany punkt.**

Już od starożytności próbowano udowodnić, t. j. wysnuć jako wniosek z innych pewników, że przez każdy punkt poza linią prostą da się do niej tylko jedna linia równoległa poprowadzić. Żadna jednak próba nie doprowadziła do celu.

Już Proclus, komentator Euklidesa, w V. wieku po n. Chr. podawał kilka takich „dowodów”; w czasach nowożytnych Saccheri (1667—1733) w dziele p. t. „Euclides ab omni naevo vindicatus”, J. Lambert 1766, Legendre (1752—1833) i inni przyczynili się bardzo do wyjaśnienia całej teorii linii równoległych, jakkolwiek zawsze jeszcze usiłowali udowodnić pewnik IV.

Doświadczenie nie może nam dać w tej sprawie żadnej pewności. Gdybyśmy bowiem spróbowali narysować najpierw dwie proste równoległe:  $a \parallel b$ , w odstępie 1 cm, a potem dwie proste  $c$  i  $d$ , w takim samym odstępie, ale przecinające się dopiero w odległości 20 km, to przecież nikt nie potrafiłby odróżnić prostych  $c$  i  $d$  od prostych równoległych. Tak samo nikt nie może zapewnić, czy proste  $a$  i  $b$  nie przetną się, jeżeli je odpowiednio przedłużymy: owszem jest bardzo prawdopodobnem, że przy rysowaniu zboczymy o bardzo mały kąt.

Dlatego też nie sprzeciwia się zupełnie zdrowemu rozumowi, jeżelibyśmy przyjęli, że przez punkt  $A$  poza linią prostą  $b$  nie da się ani jedna linia równoległa poprowadzić (przypadek ten badał Riemann w połowie XIX wieku), lub też, że są dwie równoległe, w obydwie strony od punktu  $A$ , a pomiędzy nimi cała wiązka prostych nie przecinających się z  $b$  ale nie równo oddalonych (przypadek ten zbadali J. Bolyai, Węgier 1832 i Łobaczewskij, Rosjanin 1826).

Wtedy jednakowoż cała geometria musiałaby ulec gruntownej zmianie, nie byłaby jednak fałszywą, nieprawdziwą. Mogłaby ona nawet równie dobrze zbliżyć się do rzeczywistości, jak nasza, t. zw. euklidesowa geometria. W ten też sposób powstały geometrie nieeuklidesowe, którym nie można nic zarzucić co do ścisłości. Co najwyżej można powiedzieć, że inne geometrie są niewygodne, mają trudniejsze wzory i twierdzenia. Podobnie nie można się sprzeczać, czy prawdziwą miarą jest metr, czy łokieć lub arszyn — można tylko utrzymywać, że miary metryczne są najwygodniejsze, bo polegają na systemie dziesiętkowym. Można jednak równie dobrze zmierzyć wszystko tak metrem jak łokciem.

## Ćwiczenia II

§ 6—7. 1. Wykreślić trzy proste przecinające się i wypisać otrzymane kąty. Które z nich są wierzchołkowe?

2. Wykreśliwszy z jednego punktu prostej dwa promienie nachylone, leżące po tej samej stronie linii prostej, wykazać, że suma trzech powstałych kątów wynosi  $180^\circ$ .

3. Dwa dowolne obrane kąty dodać na rysunku (przy pomocy kątomierza).

4. Dodać trzy kąty dowolnego trójkąta.

5. Wykazać rysunkiem, że  $(\alpha + \beta) + \gamma = (\alpha + \gamma) + \beta$ .

6. Odjąć od dowolnie podanego kąta drugi kąt.

7. Znając kąt, jaki tworzą wskazówki zegara o godzinie 1-szej, wykreślić kąt utworzony o godzinie 5-tej, 8-mej, 11-tej.

8. Mając podane dwa kąty, z których jeden jest bardzo mały, zmierzyć większy przy pomocy mniejszego (w przybliżeniu).

9. Jaki kąt zakresła promień równoleżnika ziemskiego przy dziennym obrocie ziemi koło osi w ciągu 1 godziny, 1 minuty, 1 sekundy?

10. Jaki kąt zakresła wielka wskazówka zegara w ciągu 1 minuty, 1 sekundy, a jaki mała wskazówka?

11. Jaki kąt dziennie zakresła prosta, łącząca ziemię ze słońcem? (Przyjąć drogę ziemi jako linię kołową, przebieganą ruchem jednostajnym).

12. Znaleźć rachunkiem sumę kątów:

a)  $28^\circ 36' 45'' + 36^\circ 42' 29''$ ,

b)  $136^\circ 38' + 5^\circ 47' 8''$ ,

c)  $84^\circ 59' 59'' + 5^\circ 1''$ .

13. Znaleźć różnice:

a)  $108^\circ 23' 14'' - 26^\circ 54' 17''$ ,

b)  $90^\circ - 42^\circ 30'$ ,

c)  $180^\circ - (29^\circ 36' + 58^\circ 42')$ .

14. Obliczyć kąt dopełniający do kąta  $23^\circ 47' 16''$ .



15. Wykazać, że dwa kąty dopełniające można zawsze przedstawić w postaci  $45^\circ + \alpha$  i  $45^\circ - \alpha$ .

16. Znaleźć kąt trzy razy większy od kąta  $19^\circ 24' 32''$ .

17. Znaleźć kąt pięć razy mniejszy od kąta  $106^\circ 34' 15''$ .

18. Znaleźć stosunek kątów  $48^\circ 36' : 5^\circ 24'$ .

19. Obliczyć kąt spełniający się z kątem  $24^\circ 35' 20''$ .

20. Ile wynosi kąt przyległy do kąta  $\alpha = 34^\circ 27'$ ?

21. Wykazać, że jeżeli jeden z kątów przyległych wzrasta, to drugi maleje.

22. Wykazać, że proste, połowiące dwa kąty przyległe, są do siebie prostopadłe.

23. Dwie linie proste przecinają się pod kątem  $\beta = 45^\circ 31'$ ; obliczyć trzy pozostałe kąty, utworzone przez te linie proste.

24. Wykazać, że proste, połowiące dwa kąty wierzchołkowe, tworzą jedną linię prostą.

25. Wykazać, że linie, połowiące dwie pary kątów wierzchołkowych, utworzonych przez te same linie proste, są do siebie prostopadłe.

### Rozdział III

## Trzy linie proste. Trójkąty. Koło

### § 9. Położenie trzech linii prostych.

Dotychczas rozpatrywaliśmy dokładniej jedną linię prostą i dwie linie proste na płaszczyźnie. Przechodząc obecnie do trzech linii prostych, leżących na tej samej płaszczyźnie, zbadamy przedewszystkiem ich wszystkie możliwe położenia. Okażemy, że są cztery możliwe przypadki:

1. trzy proste *nie mają żadnego punktu przecięcia*; 2. mają *jeden punkt przecięcia*; 3. *dwa punkty przecięcia* i 4. *trzy punkty przecięcia*.

Więcej punktów przecięcia nie mogą trzy linie proste posiadać; wiemy bowiem, że dwie linie proste — nie nakrywające się — mają co najwyżej jeden wspólny punkt n. p.  $A$  a więc trzecia linia może jeszcze przeciąć pierwszą z nich w jednym punkcie n. p.  $B$ , a drugą także tylko w jednym punkcie n. p.  $C$ , mamy więc najwyżej trzy punkty przecięcia. Zbadajmy te cztery możliwe przypadki.

Trzy proste, mające tylko jeden punkt wspólny (przyp. drugi), tworzą razem trzy pary kątów wierzchołkowych, nie przedstawiają więc dla nas nowego utworu. Tym przypadkiem nie będziemy się więc osobno zajmowali.

### § 10. Trzy linie proste równoległe.

Aby zbadać, czy są możliwe trzy proste (nieograniczone), nie mające żadnego punktu wspólnego, weźmy dowolną linię prostą  $a$  i poprowadźmy dwie linie  $b$  i  $c$  równoległe do niej  $b \parallel a$  i  $c \parallel a$  (fig. 19).

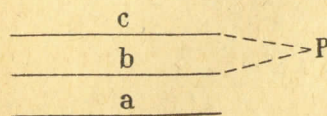


Fig. 19.

Linie te nie mają żadnego punktu wspólnego z linią  $a$ ; zachodzi pytanie, czy one mogą się przeciąć *ze sobą* w jakimś punkcie n. p.  $P$ . Otóż gdybyśmy to przypuścili, popadlibyśmy w sprzeczność z pewnikiem IV. o liniach równoległych, według którego przez każdy

punkt  $P$ , leżący poza prostą  $a$ , może przechodzić tylko jedna linia równoległa do  $a$ . W naszym bowiem przypadku przez punkt  $P$  przechodziłyby dwie linie równoległe do  $a$ . Otóż nasze przypuszczenie było błędne. Linie  $b$  i  $c$  nie mogą się ze sobą przeciąć, są więc także do siebie równoległe. Linie  $a, b, c$  nie mają więc żadnego punktu wspólnego. Wniosek, do któregośmy doszli, wypowiada się zwykle tak:

**Dwie proste równoległe do tej samej trzeciej są także między sobą równoległe.** Literami:  $b \parallel a$  i  $c \parallel a$  pociąga za sobą  $b \parallel c$ . Wystarczy więc sprawdzić, że dwie proste są równoległe do tej samej trzeciej, aby się przekonać tem samem, że te proste są i do siebie równoległe.

Sposób rozumowania, któregośmy tu użyli, nazywa się *dowodem niewprost* a polega na następującej myśli przewodniej: chcąc wykazać prawdziwość jakiegoś twierdzenia, stawiamy na razie przypuszczenie wprost przeciwne; następnie wykazujemy, że to przypuszczenie prowadzi do sprzeczności albo z przyjętymi już pewnikami, albo z udowodnionymi już prawami, musimy je więc odrzucić.

Trzeba tylko sobie jasno zdać sprawę z tego, co znaczy „twierdzenie wprost przeciwne”. Otóż n. p. twierdzeniem wprost przeciwnem do: „jakaś rzecz jest biała”, nie jest „ta rzecz jest czarna”, ale: „ta rzecz nie jest biała”. Twierdzenie wraz z twierdzeniem wprost przeciwnem muszą wyczerpywać wszystkie możliwości. Barwy: biała i nie biała wyczerpują wszystkie możliwości, zaś barwy: biała i czarna nie wyczerpują wszystkiego, mogą być bowiem prócz nich barwy: zielona, żółta i t. d. Gdybyśmy więc wykazali, że rzecz jakaś nie może być czarna, to nie możemy z tego wnioskować: „a więc ta rzecz jest biała”, może być bowiem również dobrze zielona, czerwona i t. d. W dowodzie naszego twierdzenia geometrycznego postępowaliśmy dobrze, bo chcąc udowodnić, że proste  $b$  i  $c$  są równoległe, przypuszczaliśmy tymczasowo: proste  $b$  i  $c$  przecinają się. Ponieważ dwie odrębne linie proste  $b$  i  $c$  nie mogą mieć innych wzajemnych położeń, przeto



wyczerpaliśmy wszystkie możliwości twierdzeniem pierwszym i twierdzeniem przeciwnem.

Dowodu niewprost, zwanego także *reductio ad absurdum*, używa się bardzo często w matematyce, w fizyce a i w życiu potocznym ma on wielkie znaczenie, jeżeli się go używa poprawnie, t. zn. z uwzględnieniem wszelkich możliwości.

## § 11. O trójkątach.

Aby zrozumieć twierdzenia o trzech prostych, mających dwa punkty przecięcia (przyp. trzeci), musimy najpierw omówić przypadek czwarty: *trzy proste, mające trzy punkty przecięcia*.

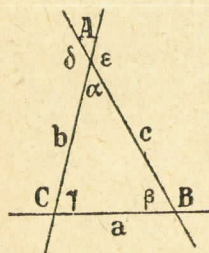


Fig. 20.

Tak n. p. na fig. 20 trzy proste przecinają się w punktach  $A, B, C$ .

Część płaszczyzny ograniczoną odcinkami  $AB, BC$  i  $CA$  nazywamy trójkątem. Linję łamaną  $ABC$  nazywamy konturem trójkąta a długość jej obwodem trójkąta. Część płaszczyzny leżąca wewnątrz konturu trójkąta nazywamy polem trójkąta.

Punkty przecięcia  $A, B, C$  nazywamy wierzchołkami trójkąta a odcinki ograniczające:  $AB, BC, CA$  nazywamy bokami trójkąta. Przy każdym wierzchołku znajdują się po cztery kąty, ale tylko jeden z nich leży wewnątrz trójkąta. Te kąty:  $\alpha, \beta, \gamma$  nazywamy **kątami wewnętrznymi**, lub krótko kątami trójkąta (bez wyraźnego wymieniania nazwy). Kąty przyległe do kątów wewnętrznych nazywamy **zewnątrznymi** n. p. kąty  $\delta$  i  $\epsilon$ ; są one ograniczone bokiem z jednej, a przedłużeniem drugiego boku z drugiej strony. Kąty wierzchołkowe do kątów wewnętrznych nie mają osobnej nazwy. O wierzchołku  $A$ , nie leżącym na boku  $BC$  i o kącie  $\alpha$  mówimy, że *leżą naprzeciw* boku  $BC$ .

Dla wygodnego zapamiętania najczęściej oznacza się bok, leżący naprzeciw jakiegoś wierzchołka, tą samą literą, co wierzchołek tylko z małego alfabetu (porównaj fig. 20).

Według wielkości boków rozróżniamy trójkąty różnoboczne, jeżeli wszystkie boki są różne co do długości, równoramienne, jeżeli tylko dwa boki są równe i równoboczne, jeżeli wszystkie boki są równe. W trójkącie równoramionym boki równe nazywamy często ramionami, a bok nierówny podstawą.

Linja prostopadła z wierzchołka trójkąta na przeciwległy bok lub na jego przedłużenie nazywa się wysokością trójkąta. Każdy trójkąt ma trzy wysokości.

Poznaliśmy już sposoby przenoszenia i porównywania odcinków i kątów. Aby przenieść trójkąt np.  $ABC$  na fig. 21 w inne miejsce

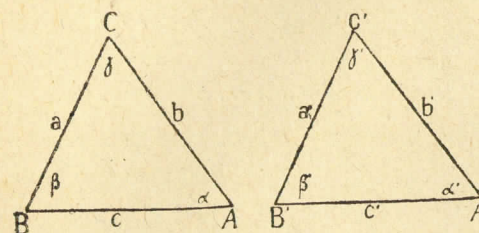


Fig. 21.

nowego trójkąta są równe odpowiednim kątom pierwotnego trójkąta. Np. na naszej figurze przenieśliśmy  $\angle \gamma$  do wierzchołka  $C'$ , a więc  $\angle \gamma = \angle \gamma'$  i odcięliśmy  $C'B' = CB$ ,  $C'A' = CA$ . Przez zmierzenie lub przez nakrycie jednego trójkąta drugim (wyciętym z papieru) można sprawdzić, że także  $\angle \alpha = \angle \alpha'$  i  $\angle \beta = \angle \beta'$ . To spostrzeżenie prowadzi nas do przyjęcia następującego pewnika:

**III<sub>6</sub>.** Jeżeli w dwóch trójkątach są równe po dwa boki i kąty między nimi zawarte, to i dwie pozostałe pary kątów są odpowiednio równe.

*Uwaga:* Jest to już ostatni z 16 pewników potrzebnych w planimetrii. W dalszej nauce planimetrii nie potrzebujemy się więc już opierać na żadnych doświadczeniach, pomiarach: wszystkie prawa planimetrii można już udowodnić na podstawie tych pewników, rozumowaniem, nie wychodzącym poza zakres geometrii.

Zostawiając dokładniejsze badanie własności trójkąta do dalszych ustępów, udowodnimy tu jeszcze tylko następujące twierdzenie:

**Kąt zewnętrzny trójkąta jest większy od każdego z kątów wewnętrznych nie przylegających do niego.**

Aby porównać  $\angle \delta$  z  $\angle \beta$ , (fig. 22) połówimy bok  $BC$  w punkcie  $D$  i prowadzimy prostą  $AD$ ; przedłużamy ją o taki sam odcinek  $DE = AD$  do punktu  $E$ , leżącego już na polu  $\angle \delta$ , wreszcie łączymy  $E$  z  $C$ .

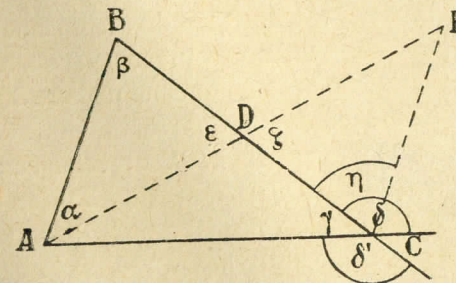


Fig. 22.

Porównajmy teraz ze sobą trójkąty  $ABD$  i  $CED$ . Mają one po dwa boki odpowiednio równe:  $CD = DB$  i  $AD = DE$ , tudzież kąty między nimi zawarte równe:  $\epsilon = \zeta$  jako kąty wierzchołkowe. Na podstawie pewnika III<sub>6</sub> muszą więc być



i pozostałe kąty parami równe, a więc:  $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \eta$ . Ponieważ zaś  $\sphericalangle \delta$  jest większy od  $\sphericalangle \eta$  (dlaczego?) przeto także  $\sphericalangle \delta > \sphericalangle \beta$ . Gdybyśmy jeszcze chcieli porównać  $\sphericalangle \delta$  z  $\sphericalangle \alpha$ , to trzeba by drugi raz to samo rozumowanie powtórzyć, połówiąc znowu bok  $AC$  i porównując  $\sphericalangle \alpha$  z  $\sphericalangle \delta'$ , wierzchołkowym do  $\delta$  (przeprowadź ten dowód!). Pokaże się, że także:  $\sphericalangle \delta > \sphericalangle \alpha$ .

Dowodzenie, jakiegoś tu używali, nazywamy dowodem wprost. Myślą przewodnią takiego dowodu jest: opierając się na pewnikach i na poznanych już twierdzeniach, zbudować taki łańcuch logicznych rozumowań, aby jego ostatniem ogniwnem było żądane twierdzenie. Innymi słowy: okazać, że nasze twierdzenie jest wynikiem pewników i twierdzeń poznanych poprzednio. Często mamy kilka dróg, które możemy dojść do dowiedzenia twierdzenia; zależy to od tego, na których pewnikach i twierdzeniach się oprzemy. Zdarzają się jednak twierdzenia, do których trudno znaleźć drogę wprost. Próbuje wtedy dowodu niewprost. Jeżeli i ta droga nie prowadzi do celu, nie możemy wciągać takiego twierdzenia w zbiór praw geometrycznych czy też matematycznych, chociażby się wydawało bardzo prawdopodobnem.

Dlatego w nauce geometrii najczęściej nie postępujemy tak, aby z góry wypowiadać jakieś twierdzenie, a później udowadniać jego prawdziwość, tylko postępujemy krok za krokiem, budując z poznanych twierdzeń to, co się z nich daje odrazu wydobyć a z tej rozszerzonej podstawy wnosimy się znowu stopniowo do coraz to trudniejszych i zawilszych praw, nasuwających się nam w ciągu rozważań.

## § 12. Dwie proste równoległe przecięte trzecią.

Trzy proste, leżące na płaszczyźnie, mają tylko dwa punkty przecięcia, jeżeli dwie z nich są równoległe, a trzecia przecina jedną z nich. Ta trzecia prosta musi także i drugą przeciąć, w przeciwnym bowiem razie mielibyśmy dwie proste równoległe do tej samej trzeciej, a mimo to przecinające się, wbrew udowodnionemu na str. 25 twierdzeniu.

Linję prostą  $AB$ , przecinającą dwie inne  $CD$  i  $EF$ , (fig. 23) nazywamy linią poprzeczną. Tworzy ona z niemi 8 kątów: 4 są zewnętrzne a 4 wewnętrzne,

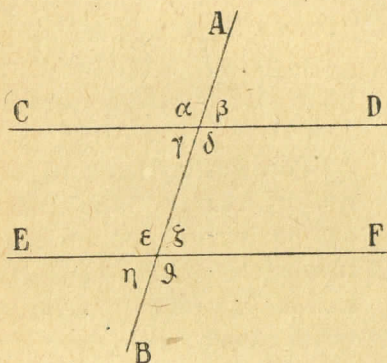


Fig. 23.

t. j. leżą między linjami przeciętymi. Kąty, nie mające wspólnego wierzchołka, łączymy w pary i nadajemy im osobne nazwy. I tak: 1. Kąty takie, jak  $\alpha$  i  $\epsilon$ ,  $\delta$  i  $\theta$  nazywamy kątami odpowiedniami. Są to kąty, leżące po tej samej stronie linii poprzecznej, przyczem jeden jest zewnętrzny, drugi wewnętrzny. 2. Kąty, leżące po tej samej stronie linii poprzecznej, ale obydwa zewnętrzne lub obydwa wewnętrzne, nazywamy kątami jednostronnemi.

N. p.  $\alpha$  i  $\eta$ ,  $\delta$  i  $\zeta$ ,  $\gamma$  i  $\epsilon$ .

3. Kąty, leżące po przeciwnych stronach linii poprzecznej, obydwa zewnętrzne lub obydwa wewnętrzne, nazywają się kątami naprzemianległemi.

N. p.  $\alpha$  i  $\theta$ ,  $\delta$  i  $\epsilon$ .

Nazwy te zachowujemy także, jeżeli linje  $CD$ ,  $EF$  nie są równoległe. O tych kątach udowodnimy:

**Jeżeli dwie linje równoległe są przecięte trzecią, to parami kąty odpowiednie są sobie równe, kąty naprzemianległe są sobie równe a kąty jednostronne spełniają się do  $180^\circ$ .**

Prawa matematyczne wypowiadamy zwykle w postaci zdania warunkowego. Pierwsza część zdania, n. p. w powyższem twierdzeniu: „jeżeli dwie linje równoległe są przecięte trzecią” nazywa się założeniem (hipotezą), druga część wnioskiem (tezą) czyli właściwem twierdzeniem. Założenie zawiera warunek, wystarczający do prawdziwości wniosku.

Jest to twierdzenie zasadnicze o liniach równoległych, używane często przy rozważaniu utworów geometrycznych, w których skład wchodzi linje równoległe. Twierdzenie to (nie całe) wypowiada się czasem także tak: każda prosta poprzeczna przecina dwie proste równoległe pod tym samym kątem, przyczem mamy naturalnie w myśli kąty odpowiednie. Łatwo to udowodnić niewprost.

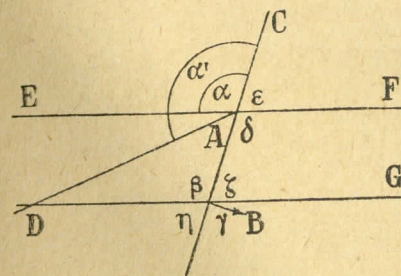


Fig. 24.

Chcemy n. p. (fig. 24) wykazać, że dwa kąty odpowiednie są równe n. p.  $\alpha = \beta$ . Spróbujmy, do czego by poprowadziło przypuszczenie, że te kąty nie są równe, a więc, że albo  $\alpha < \beta$ , albo  $\alpha > \beta$ . Rozważmy najpierw pierwsze przypuszczenie, t. j.  $\alpha < \beta$ . Wtedy moglibyśmy wykreślić w punkcie  $A$ , przy ramieniu  $AC$  jakiś inny kąt  $\alpha'$  równy kątowi  $\beta$ , ale naturalnie większy od  $\sphericalangle \alpha$ . Ramię

tego kąta  $\alpha'$  musi więc leżeć poza polem kąta  $\alpha$ , musi zatem przeciąć linję  $BG$  w jakimś punkcie  $D$  (nie może być równoległe do  $BG$ , bo



już jedna linja  $EF$  przez punkt  $A$  przechodząca, jest równoległa do  $BG$ ). Powstałby więc trójkąt  $ABD$ , w którym  $\alpha'$  jest kątem zewnętrznym a  $\beta$  wewnętrznym. Ponieważ jednak  $\alpha' = \beta$ , przeto popadamy w sprzeczność z twierdzeniem z § 11 o kącie zewnętrznym trójkąta, które orzeka, że kąt zewnętrzny musi być większy od kąta wewnętrznego nie przyległego. Widzimy więc, że przypuszczenie  $\alpha < \beta$  jest nie do przyjęcia. Zupełnie tak samo wykazalibyśmy, że  $\alpha > \beta$  prowadzi do sprzeczności. (Udowodnij!) Pozostaje więc tylko jedna możliwość:

$$\alpha = \beta.$$

Co do innych kątów, to już z równości  $\alpha = \beta$  wynika ich równość (względnie spełnianie się).

N. p. kąty  $\varepsilon$  i  $\zeta$  są równe, jako kąty przyległe do równych kątów. Kąty  $\gamma$  i  $\delta$  są równe, jako wierzchołkowe do równych kątów. Także kąty naprzemianległe są równe, n. p. kąt  $\gamma = \alpha$ , ponieważ  $\gamma$  jest tak samo wielki, jak  $\angle \beta$  (jako wierzchołkowy), i t. d.

Wreszcie także kąty jednostronne spełniają się do  $180^\circ$ , n. p.  $\alpha + \eta = 180^\circ$ , ponieważ  $\alpha$  równa się kątowi  $\beta$ , przyległemu do  $\eta$  i t. d. Przeprowadźmy takie rozumowanie dokładniej dla jakiegokolwiek jednej pary kątów. N. p. chcemy sprawdzić, czy  $\varepsilon = \eta$ , wiedząc, że  $\alpha = \beta$ . Szukamy, w jakim związku są te nowe kąty z kątami  $\alpha$  i  $\beta$ . Widzimy, że  $\alpha + \varepsilon = 180^\circ$  jako kąty przyległe, a także  $\beta + \eta = 180^\circ$ . Widocznie więc  $\alpha + \varepsilon = \beta + \eta$ , bo obydwie sumy wynoszą tyle samo stopni. Odejmując od obu stron tej równości równe wielkości  $\alpha = \beta$ , otrzymamy jako równe reszty:  $\varepsilon = \eta$ .

Dowodzenia matematyczne piszemy często według pewnego schematu, w którym są uwidocznione trzy części dowodzenia: założenie ( $Z$ ), twierdzenie ( $T$ ) i dowód ( $D$ ). Poprzedni dowód można n. p. ująć w następujący schemat:

$$\begin{array}{ll} Z. & \alpha = \beta \\ T. & \varepsilon = \eta \\ D. & \alpha + \varepsilon = 180^\circ \\ & \beta + \eta = 180^\circ \\ & \alpha + \varepsilon = \beta + \eta \\ & - \alpha = - \beta \\ \hline & \varepsilon = \eta \end{array}$$

W takim skróconym schemacie występują przejrzystość wszystkie pośrednie twierdzenia pomocnicze. Ten sposób pisanie ma ponadto i tę zaletę, że jest rodzajem międzynarodowego pisma naukowego, zrozumiałego dla każdego, zajmującego się matematyką.

Wykazaliśmy więc, że z założenia  $EF \parallel DG$ , wynika równość tych kątów. Można teraz wykazać *odwrotnie*: z równości którejkolwiek pary kątów odpowiednich lub naprzemianległych lub ze spełniania się dwóch kątów jednostronnych wynika równoległość linii przeciętych. To, co było w poprzednim twierdzeniu wnioskiem, to wzięliśmy teraz za założenie, a to, co było założeniem, za wniosek. Takie twierdzenie nazywa się twierdzeniem odwrotnym względem poprzedniego (a jakie jest twierdzenie przeciwne? por. str. 25).

Zastanówmy się najpierw, czy odwrócenie twierdzenia wymaga osobnego dowodu? Znamy przecież wiele przykładów, że odwrócenie jest prawdziwe tak samo, jak twierdzenie pierwotne. N. p. każde ciało posiada jakiś ciężar i odwrotnie: wszystko, co posiada jakiś ciężar, jest ciałem. Istnieje jednak o wiele więcej przykładów, w których *odwrócenie nie jest prawdą*. N. p. każdy ptak posiada skrzydła, ale nie wszystko, co posiada skrzydła, jest ptakiem. Z tej przyczyny powinno się prawdziwość twierdzenia odwrotnego zawsze osobno badać.

Wróćmy do naszego twierdzenia odwrotnego. Twierdzimy, że z założenia:  $\alpha = \beta$  wynika:  $a \parallel b$  (fig. 25).

Najszybciej dojdziemy do celu, używając znowu dowodzenia niewprost. Gdyby linja  $a$  nie była równoległa do  $b$ , to dałaby się przez punkt  $A$  poprowadzić jakaś inna linja  $a' \parallel b$ . Wtedy jednak musiałby kąt  $\alpha'$  być równy kątowi  $\beta$ , a więc i kątowi  $\alpha$ , który według założenia jest tak samo wielki jak  $\angle \beta$ . Ale w takim razie linja  $a'$  musi się nakryć z linją  $a$ , jako drugie ramię kąta równego. Otóż żadna inna linja oprócz linji  $a$  nie może być równoległą do  $b$ .

Zbierając twierdzenie i odwrócenie w jeden wniosek, powiemy: *cechą (właściwością) charakterystyczną prostych równoległych jest to, że dowolna poprzeczna tworzy z nimi równe kąty odpowiednie* (równe kąty naprzemianległe, lub spełniające się kąty jednostronne): to znaczy, że oprócz linii równoległych, żadna inna para prostych nie ma tej własności, aby z poprzeczną tworzyły równe kąty odpowiednie (lub naprzemianległe i t. d.).

Przy pomocy tej własności można odróżnić proste równoległe od innych i tak też zwykle postępujemy: *aby się przekonać, czy dwie linje proste są równoległe*, musielibyśmy je przedłużyć w nieskończoność — tego jednak uczynić nie zdołamy. Natomiast zawsze można do nich przyłożyć trzecią linję poprzeczną i *zmierzyć, czy dwa kąty n. p. odpowiednie są sobie równe*.

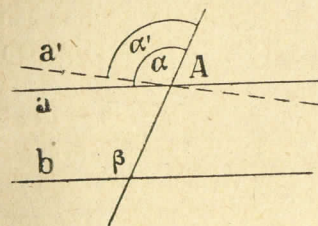


Fig. 25.



Widzimy stąd, jak ważnem jest udowodnienie nie tylko twierdzenia, ale odwrócenia — o ile jest prawdziwem. Zyskujemy przez to często łatwiejsze sposoby odróżniania pewnych utworów geometrycznych od innych. Takiej metody odróżniania zapomocą cech charakterystycznych używa się w naukach przyrodniczych do odróżnienia n. p. owadów zbliżonych kształtem zewnętrznym, roślin, minerałów (nazywa się to *oznaczeniem gatunku*), pierwiastków chemicznych (*analiza*). Wiedząc n. p., że każdy kryształ soli jest sześciannem i znalazłszy jakiś przezroczysty sześcienny kryształ, żaden mineralog nie powie jeszcze, że ma przed sobą sól, dokąd nie zbada jakiejs własności charakterystycznej, t. j. takiej, którą ma każdy kawałek soli, ale żadne inne ciało n. p. charakterystyczny smak. Taką własność charakterystyczną nazywamy ściślej: *warunkiem koniecznym i wystarczającym dla prawdziwości twierdzenia*.

Na tej własności linii równoległych polega także pospolicie używany sposób wykreślenia linii równoległych. Do lineалу przykładamy jakiś kąt, n. p. kąt prosty w dwóch różnych miejscach i wzdłuż jego ramienia, nie przylegającego do lineалу, kreśli się każdym razem linię prostą. Taki kąt mamy urzeczywistniony (w przybliżeniu) na tak zwanych „trójkątach” rysunkowych czyli „ekierkach”. Fig. 26 objaśnia ten sposób.

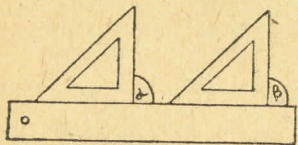


Fig. 26.

Jako przypadek szczegółowy mieszczą się w twierdzeniu o prostych równoległych także twierdzenia następujące: **dwie linie proste, prostopadłe do tej samej trzeciej są do siebie równoległe** (dlaczego?) i odwrotnie: *jeżeli z dwóch prostych równoległych jedna jest prostopadła do trzeciej (poprzecznej) to i druga musi być do niej prostopadła*.

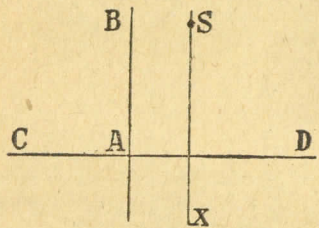


Fig. 27.

Na podstawie tego można wykazać, że z każdego punktu poza prostą da się do niej poprowadzić tylko jedną linię prostopadłą. Wiemy, że przez punkt A (fig. 27) na prostej CD przechodzi jedna linia prostopadła  $AB \perp CD$ . Aby z dowolnego punktu S leżącego poza CD poprowadzić linię prostopadłą do CD, kreślimy linię  $SX \parallel AB$  (że taka linia istnieje, o tem poucza pewnik IV), to ona jest  $\perp CD$ . Więcej linii prostopadłych z punktu S niema (dlaczego?).

### § 13. O kątach w trójkącie.

Mówiąc o kątach zewnętrznych trójkąta wykazaliśmy (str. 27), że kąt zewnętrzny jest większy od każdego z wewnętrznych, nie

przyległych do niego. Obecnie możemy wykazać dokładniej, czemu się równa kąt zewnętrzny. Wystarczy w tym celu wykreślić przez punkt B (fig. 28) linię  $BD \parallel AC$ , dzielącą kąt zewnętrzny  $\delta$  na dwie części:  $\epsilon$  i  $\zeta$ .

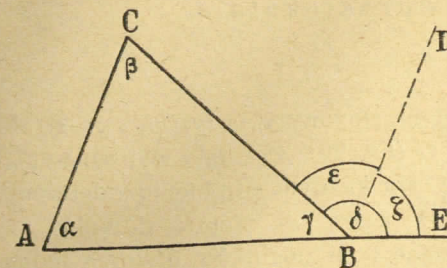


Fig. 28.

$\zeta = \alpha$  jako kąty odpowiednie,  $\epsilon = \beta$  jako kąty naprzemianległe, więc i ich sumy są równe

$$\zeta + \epsilon = \alpha + \beta.$$

Ale  $\zeta + \epsilon = \delta$ ,

$$\text{więc } \delta = \alpha + \beta.$$

Słowami: **kąt zewnętrzny trójkąta równa się sumie dwóch kątów wewnętrznych, nie przyległych do niego**. Stąd łatwo obliczyć sumę wszystkich kątów wewnętrznych trójkąta. Mianowicie  $\delta + \gamma = 180^\circ$  jako kąty przyległe, ale zamiast  $\delta$  można wziąć równą mu sumę  $\alpha + \beta$  i otrzymamy

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Słowami: **w każdym trójkącie suma kątów wewnętrznych równa się  $180^\circ$** . Wielkość więc jednego kąta zależy od wielkości dwóch innych, czyli jest funkcją dwóch pozostałych kątów.

To samo można wykazać bez użycia kątów zewnętrznych, jeżeli poprowadzimy n. p. przez C linię równoległą do AB.

W geometrii praktycznej możnaby także użyć takiego pogładowego dowodu: odciąć kawałki pola trójkąta wraz z wierzchołkami i poukładać te kąty obok siebie kolejno przy jednej linii prostej, przy jednym wierzchołku. Do ścisłego jednak dowodu musimy użyć linii równoległej. Twierdzenie to jest tak ściśle związane z pewnikiem IV o liniach równoległych, że można go nawet użyć zamiast tego pewnika, a wtedy pewnik IV wyniknąłby z niego jako wniosek (udowodnij to przenosząc wszystkie kąty do jednego wierzchołka!). W geometriach nieeuklidesowych, o których mówiliśmy na str. 23, suma kątów w trójkącie jest bądźto większa od  $180^\circ$  (Riemann), bądźto mniejsza (Łobaczewskij). Sprawdzić tego żadnem mierzeniem nie można, bo już sekundy nie dadzą się ściśle zmierzyć a cóż dopiero mówić o częściach sekundy.

Wskutek twierdzenia o sumie kątów wewnętrznych, w trójkącie może być najwyżej jeden kąt prosty a dwa inne muszą być wtedy ostre, a także najwyżej jeden kąt rozwarty, dwa zaś inne są wtedy ostre. Wklęsły kąt, t. j. większy od  $180^\circ$ , nie może się znajdować w trójkącie. Na tem polega podział trójkątów według wielkości kątów. I tak rozróżniamy trójkąty: **ostrokątne**, jeżeli wszystkie kąty są ostre, **prostokątne**, jeżeli jeden kąt jest prosty i **rozwartokątne**, jeżeli jeden kąt jest rozwarty. Dla boków trójkąta



prostokątnego przyjęto pewne stałe nazwy. I tak boki zamykające kąt prosty zwą się przystokątnikami, bok zaś leżący naprzeciw kąta prostego nazywa się przeciwprostokątnią.

#### § 14. Koło i inne linie krzywe.

Weźmy pod uwagę pęk promieni złożony ze wszystkich prostych przechodzących przez jeden punkt  $O$  (fig. 29). Pęk taki wypełnia całą płaszczyznę. Na każdym promieniu odetnijmy od punktu  $O$  równy — zresztą dowolny — odcinek. Końce tych odcinków utworzą jedną nieprzerwaną\*) linię krzywą zamkniętą, zwaną kołem lub ściślej linią kołową a także okręgiem. *Koło jest więc linią, której każdy punkt jest równo oddalony od stałego punktu  $O$ .*

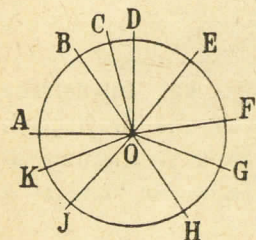


Fig. 29.

Wyrażamy się często także tak: koło jest *miejszem geometrycznem* punktów równo oddalonych od stałego punktu, to znaczy: 1. że punkty, równo oddalone od  $O$ , nie mogą leżeć na innem miejscu płaszczyzny, jak tylko na kole i 2. że koło żadnych innych punktów nie zawiera. W ogólności: *miejszem geometrycznem* punktów spełniających jakieś żądanie nazywamy *zbiór*, który zawiera *wszystkie punkty, spełniające dany warunek* a nie zawiera żadnego innego punktu. Do wykreślenia koła używa się tego samego przyrządu, który służy do przenoszenia równych odcinków, a więc cyrkla.

Stały punkt  $O$  nazywa się *środkiem koła*, a równe odcinki promieni pęku nazywamy *promieniami koła*. Punkty, których odległość od środka jest mniejsza od promienia, leżą wewnątrz koła. Punkty, których odległość od środka jest większą od promienia, leżą zewnątrz koła. Zbiór wszystkich punktów, leżących wewnątrz koła, nazywamy *powierzchnią* lub  *polem koła* a samą linię kołową nazywamy także *obwodem* lub *okręgiem koła*.

Odcinek, utworzony przez dwa promienie leżące na tej samej linii prostej, nazywamy *średnicą koła*. Można także powiedzieć: *średnica jest to odcinek, łączący dwa punkty obwodu a przechodzący przez środek koła*. Każdą część obwodu koła, ograniczoną dwoma punktami, nazywamy *łukiem koła* i używamy znaku  $\frown$ , np.  $\widehat{AK}$ ,  $\widehat{HG}$ , aby odróżnić łuk od prostej  $AK$  lub  $HG$ , łączącej punkty końcowe łuku.

\*) Że koło jest linią nieprzerwaną, to jest ciągłą, można udowodnić czyli wywnioskować z naszych pewników; dowód ten jest jednak za trudny dla szkoły średniej.

*Położenie linii prostej względem koła* może być trojaki: a) linia prosta może mieć z kołem *dwa punkty wspólne* i wtedy nazywa się *sieczną* a odcinek zawarty między temi punktami *cięciwą*, n. p. (fig. 30)  $RP$ ; b) linia prosta, mająca z kołem tylko *jeden punkt wspólny*  $H$ , nazywa się *styczną* a ten punkt punktem styczności, n. p.  $CD$  i c) linia prosta nie ma z kołem żadnego punktu wspólnego, n. p.  $EF$ .

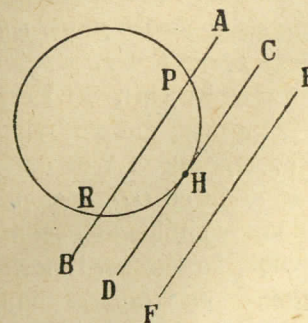


Fig. 30.

*Uwaga:* później wykazemy ściśle, że linia prosta nie może mieć z kołem więcej punktów wspólnych (por. § 24 c).

*Położenie dwóch kół względem siebie.*

Dwa koła, mające wspólny środek (a różne promienie), nazywają się *współśrodkowe*, w przeciwnym razie: *mimośrodkowe*. Aby zbadać wszystkie możliwe położenia dwóch kół względem siebie, wyjdźmy od kół współśrodkowych:  $k$  i  $K$  o pro-

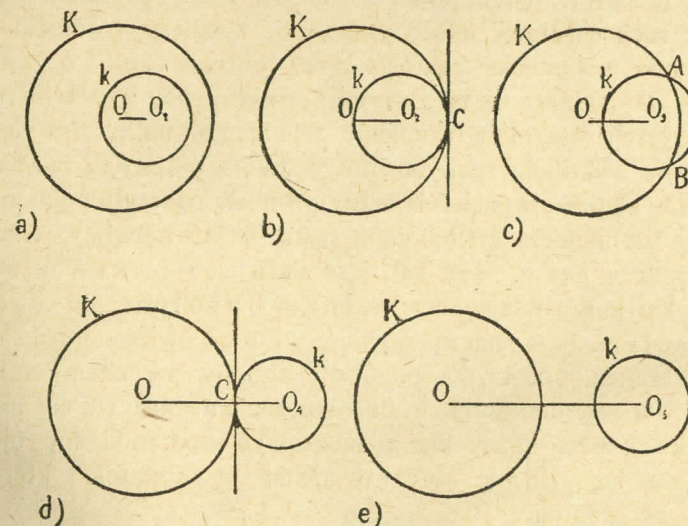


Fig. 31.

mieniach:  $r$  i  $R$  i poruszajmy mniejsze koło tak, aby jego środek posuwał się po jakiejś linii prostej. a) (fig. 31) Najpierw koło  $k$  leży wewnątrz koła  $K$ , nie dotykając go zupełnie, dokąd odległość środków  $OO_1$  jest dosyć mała, a mianowicie mniejszą od różnicy obu promieni:  $R-r$ . b) Gdy  $k$  zbliży się do  $K$  tak, że odległość jego



środku  $O_2$  do  $O$  wynosi  $R-r$ , wtedy koła mają jeden punkt  $C$  wspólny, *dotykają się wewnętrznie*; takie dwa koła mają wspólną styczną, przechodzącą przez ten wspólny punkt  $C$ . c) Jeżeli przekroczyliśmy punkt  $O_2$  n. p. do punktu  $O_3$ , to koła *przecinają się w dwóch punktach*  $A$  i  $B$ . Odległość  $OO_3$  jest już  $> R-r$  ale jeszcze  $< R+r$ . Części kół nie nakrywające się przytem nazywamy księżycami. d) Przy dalszem posuwaniu się, gdy  $OO_4 = R+r$ , koła mają znowu tylko jeden punkt wspólny, *dotykają się zewnętrznie*; styczna w tym punkcie  $C$  do koła  $K$  jest zarazem styczną koła  $k$ . e) Jeżeli  $OO_5$  jest już większe od  $R+r$ , koła nie mają żadnego punktu wspólnego i jedno leży całkowicie *zewnątrz drugiego*. Widzimy więc, że jest *pięć możliwych położań* dwóch kół względem siebie *zależnie od długości* linii, łączącej środki, zwanej *linią środkową kół*.

*Uwaga:* wszystkie te twierdzenia o położeniu dwóch kół względem siebie zaczerpnęliśmy tu z poglądu. Można je jednak wszystkie udowodnić ściśle opierając się na własnościach trójkątów i na ciągłości linii kołowej.

*Obroty:* Jeżeli bierzemy pod uwagę kolejno wszystkie promienie, przechodzące przez jeden punkt  $S$ , mówimy, że promień pierwotny wykonuje **ruch obrotowy** około punktu  $S$ , zwanego środkiem obrotu. Każdy punkt promienia zakreśla przy obrocie koło o wspólnym środku  $S$ . Opisujemy to tak: *torem punktu przy ruchu obrotowym jest koło*. Jeżeli wszystkie promienie z jednego punktu  $S$  wychodzące *równocześnie* wykonują ruch obrotowy, to nazywamy to *ruchem obrotowym całej płaszczyzny*. Jeżeli każdy promień naszego pęku promieni zastąpimy promieniem odchylonym o kąt  $\alpha$ , to mówimy, żeśmy wykonali *obrót o kąt  $\alpha$* . Ten kąt jest miarą wielkości obrotu. Obrót o kąt pełny nazywamy pełnym obrotem lub całkowitym obrotem. (Co znaczą słowa półobrót? ćwierć obrotu?) Jeżeli pewien kierunek obrotu, n. p. obrót zgodny z ruchem wskazówek zegara, nazwiemy dodatnim, to obrót przeciwny nazywa się ujemnym. W związku z tem każdy kąt  $\alpha$  może być dodatnim lub ujemnym, zależnie od tego, który obrót uważamy za dodatni i które ramie uważamy za ruchome.

Jeżeli połączymy ruch obrotowy punktu z ruchem postępowym, to znaczy, jeżeli promień obraca się, a jakiś punkt na nim równocześnie się posuwa, to jako tor tego punkt otrzymamy linię krzywą otwartą, zwaną spiralną. Z pomiędzy linii spiralnych najprostszą jest taka, w której równym obrotem odpowiadają równe przesunięcia, t. zn. gdy promień obróci się n. p. o  $10^\circ$ , punkt posunie się o  $1\text{ mm}$ , przy obrocie o  $20^\circ$  punkt posunie się o  $2\text{ mm}$  i t. d. Taka spiralna nazywa się spiralną Archimedesza. Aby ją wykreślić, rysujemy pęk promieni, tworzących same równe kąty i obieramy na jednym ramieniu jednego kąta jakiś punkt, n. p. wierzchołek, a na drugim odcinamy od

wierzchołka jakiś odcinek  $AB$  (fig. 32). Na następnym promieniu odcinamy dwa razy większy odcinek  $AC$ , na dalszym trzy razy większy  $AD$  i t. d.

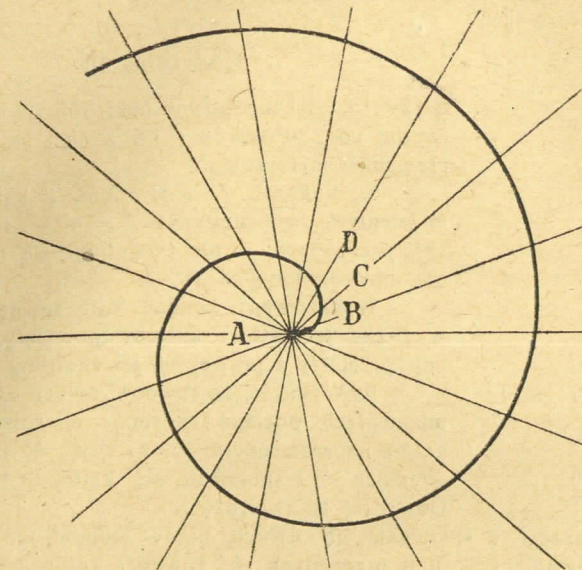


Fig. 32.

Jeżeli promienie weźmiemy odpowiednio gęsto i otrzymane punkty połączymy jedną, nieprzerwaną linią, otrzymamy spiralną Archimedesza.

*Uwaga:* do łączenia punktów łukami linii krzywych służą osobne przybory rysunkowe zwane krzywkami: są to figury powyginane w rozmaite sposoby, mające w różnych swych częściach rozmaite stopnie zakrzywienia.

Inne spiralne otrzymuje się, jeżeli ruch postępowy nie jest jednostajny.

Można jednak inaczej połączyć ruch obrotowy z ruchem postępowym, n. p. punkt wykonuje ruch obrotowy około  $S$ , a równocześnie  $S$  przesuwają się po linii prostej  $SX$ . Tory takiego

ruchu nazywamy cykloidami; ich wykreślenie jest już nieco trudniejsze.

Prócz kół, linii spiralnych i cykloid bada się w geometrii bardzo wiele innych linii krzywych (por. n. p. ćw. 28 i 29 na str. 39). Najczęściej otrzymuje się je jako miejsca geometryczne punktów, spełniających pewne warunki. I tak n. p. miejscem geometrycznym punktów, których suma odległości od

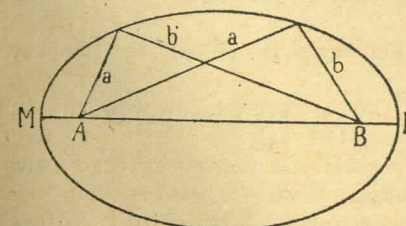


Fig. 33.

dwóch stałych punktów ma stałą wartość, jest linia krzywa zamknięta, zwana *elipsą*. Por. fig. 33, gdzie

$$a + b = MP$$

$$a' + b' = MP \text{ i t. d.}$$



Miejszem geometrycznym punktów równo oddalonych od stałego punktu i stałej prostej jest znana z mechaniki linia krzywa: *parabola*. Por. fig. 34. gdzie  $a = b$ ,  $a' = b'$  i t. d.

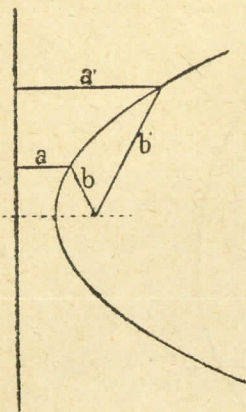


Fig. 34.

### Ćwiczenia III

§ 12—13. 1. Przedłużone boki trójkąta dzielą płaszczyznę na 7 obszarów; ile z nich najwyżej może przecinać linia prosta?

2. Wykazać, że z równości 2 kątów naprzemianległych wewnętrznych wynika równoległość linii przeciętych — nie powołując się na twierdzenie udowodnione na str. 29.

Wskazówka: zbadać kąty zewnętrzne i wewnętrzne trójkątów, któreby powstały, gdyby się linie przecięły z prawej lub lewej strony poprzecznej.

3. Wykazać, że równość dwóch kątów naprzemianległych pociąga za sobą: a) równość innych kątów naprzemianległych; b) równość kątów odpowiednich; c) spełnianie się kątów jednostronnych. Odwrócić to twierdzenie!

4. Wykazać, że spełnianie się dwóch kątów jednostronnych pociąga za sobą: a) równoległość linii przeciętych; b) równość kątów odpowiednich; c) równość kątów naprzemianległych; d) spełnianie się innych par kątów jednostronnych. Odwrócić to twierdzenie!

5. Wykazać, że jeżeli suma dwóch kątów jednostronnych wynosi mniej aniżeli  $180^\circ$ , to linie przecięte przecinają się ze sobą po tej samej stronie, po której leżą te kąty jednostronne (u Euklidesa to twierdzenie zastępuje nasz pewnik o liniach równoległych). Odwrócić to twierdzenie!

6. Dwa kąty odpowiednie wynoszą po  $48^\circ 36'$ ; obliczyć wszystkie inne kąty utworzone przez te linie.

7. Jakie kąty występują w figurach mających postać liter: Z, H, A, F?

8. Wykreślić w trójkącie linię równoległą do podstawy. Jakie kąty powstaną?

9. Dwie linie równoległe przecięto trzecią pod kątem  $\alpha = 75^\circ 42'$ ; obliczyć wszystkie kąty!

10. W trójkącie dwa kąty wewnętrzne wynoszą po  $69^\circ 50'$ ; obliczyć trzeci kąt i kąty zewnętrzne.

11. Kąt zewnętrzny trójkąta wynosi  $141^\circ 26'$ , a jeden z kątów wewnętrznych nie przyległych wynosi  $35^\circ 58'$ ; obliczyć pozostałe kąty.

12. W trójkącie dwa kąty są równe, a trzeci jest połową każdego z nich. Obliczyć te kąty. (Jest to t. zw. trójkąt złoty).

13. Obliczyć sumę trzech kątów zewnętrznych, leżących przy różnych wierzchołkach trójkąta.

14. Wykazać, że proste, połowiące dwa kąty odpowiednie, są do siebie równoległe.

15. Wykazać, że proste, połowiące dwa kąty jednostronne, są do siebie prostopadłe.

16. Ile wynosi suma kątów ostrych w trójkącie prostokątnym?

17. Jeden kąt ostry trójkąta prostokątnego wynosi  $57^\circ 16'$ . Ile wynoszą inne kąty?

18. Na promieniach pęku złożonego z trzech promieni obracć wierzchołki trójkąta i wykreślić na tym samym pęku trójkąt o bokach równoległych do pierwszego. Co można powiedzieć o kątach tych trójkątów?

§ 14. 19. Dana jest linia prosta i punkt A poza nią. Znaleźć na tej prostej punkty oddalone od A o dany odcinek a. Ile takich punktów znajdziemy? Jakie są możliwe przypadki zależnie od długości a?

20. Dany jest kąt i punkt P na polu tego kąta. Ile jest punktów na ramionach tego kąta, mających daną odległość od P? Jakie przypadki są możliwe?

21. Wykreśl pięć możliwych położeń dwóch różnych kół na jednym rysunku rysując tylko raz koło większe.

22. Wykaż możliwość pięciu położeń dwóch kół, poruszając tylko większe koło.

23. Wykreśl księżycę, powstałe z dwóch równych kół.

24. Z dwóch podanych punktów mamy zakreślić koła. Jaki warunek muszą spełniać promienie, aby się koła przecięły? stykały?

25. Koło obraca się koło osi nie przechodzącej przez jego środek (jest przytwierdzone „mimośrodkowo“). Narysować kilka położeń tego koła. Jaki tor opisuje przytem środek koła?

26. Narysuj koło stykające się wewnętrznym z kołami otrzymanymi w zadaniu poprzednim.

27. Koło otoczyć sześcioma równymi mu kołami, stykającymi się zewnętrznym ze sobą i z danym kołem.

28. Pęk promieni przeciąć linią prostą p i od punktów przecięcia na każdym promieniu odciąć w obydwie strony ten sam odcinek d. Otrzymane punkty utworzą dwie gałęzie linii krzywej, zwanej muszlą Nikomedeasa (p. str. 19).

29. Z dowolnego punktu na obwodzie koła wykreślić pęk promieni i na każdym z nich odciąć dwa równe odcinki od punktu przecięcia się z kołem do wnętrza koła i na zewnątrz. Linia, łącząca te wszystkie punkty, nazywa się ślimakiem Pascala (matematyk i filozof francuski z XVIII wieku).

30. Wykreślić spiralną Archimedeasa, w której wzrostowi kąta o  $10^\circ$  odpowiada przesunięcie punktu o  $\frac{1}{2} mm$ . Ile skrętów otrzymamy, posuwając się na odległość 1 dm od wierzchołka pęku? O ile stopni obrócił się równocześnie promień?

31. Wykreślić kilkanaście punktów, których suma odległości od dwóch stałych punktów A i B, oddalonych od siebie o 4 cm. wynosi 6 cm. (przy pomocy łuków kół).

32. Z dowolnego punktu A na obwodzie koła poprowadzić pęk siecznych i średnicę. Na drugim końcu średnicy poprowadzić styczną i na każdej siecznej odciąć od punktu A odcinek, leżący na niej a zawarty między styczną a obwodem koła. Powstanie wówczas linia krzywa, zwana cisoidą.



## Przystawanie i ruch

## § 15. Przystawanie trójkątów.

Podobnie jak odcinki i kąty, tak trójkąty mogą być równe. Trzeba tu jednak odróżnić dwa rodzaje równości. Równość może być zupełna, co do wielkości i co do kształtu i wtedy nazywa się przystawaniem, może się zaś odnosić tylko do wielkości i wtedy się nazywa równością pola (powierzchni) lub równoważnością. N. p. (fig. 35) trójkąty *I* i *II* są przystające, trójkąty zaś



Fig. 35.

*I* i *III* są tylko równe co do powierzchni. Znakiem przystawania jest  $\cong$  t. j. połączenie znaku  $=$  i znaku  $\sim$ , oznaczającego podobieństwo postaci (similis — podobny, stąd przewrócona litera *S*), podczas gdy znakiem równości po-

wierzchni jest zwyczajny znak równości. Napiszemy więc  $I \cong II$ , ale  $I = III$ . O tym drugim gatunku równości będziemy mówili później; obecnie zajmijmy się przystawaniem.

I tak odcinki równe są zarazem przystające, tak samo kąty, albowiem o ich kształcie rozstrzyga już wielkość. Nie można tego powiedzieć już o trójkątach. Nie umiemy jeszcze porównać ani pola, ani postaci figur, musimy inaczej określić przystawanie. Otóż dwa trójkąty nazywamy przystającymi, jeżeli boki i kąty jednego są równe odpowiadającym bokom i kątom drugiego trójkąta. W dwóch trójkątach te boki odpowiadają sobie, które leżą naprzeciw równych kątów, a podobnie kąty. Mówimy także krótko: w trójkątach przystających boki i kąty są parami równe.

Okazemy później, że takie dwa trójkąty można przez ruch sprowadzić do zupełnego nakrycia się i stąd pochodzi nazwa „przystawanie“.

Aby więc zbadać, czy dwa trójkąty są przystające, trzeba by sprawdzać aż sześć równości (równość trzech boków i trzech kątów). Okazuje się jednakowoż, że boki i kąty są tak ze sobą związane, że wystarczy wykazać równość tylko trzech części, aby mieć zapewnioną równość pozostałych trzech. (Zamiast „części trójkąta“ mówimy często „elementy“). Jednakże nie jest obojętnem, które trzy części wybierzemy.

## § 16. Pierwszy przypadek przystawania. (I.)

Zacznijmy od najprostszego przypadku, o którym mowa w pewniku III<sub>6</sub>. Według tego pewnika dwa trójkąty (fig. 36) mające dwa boki

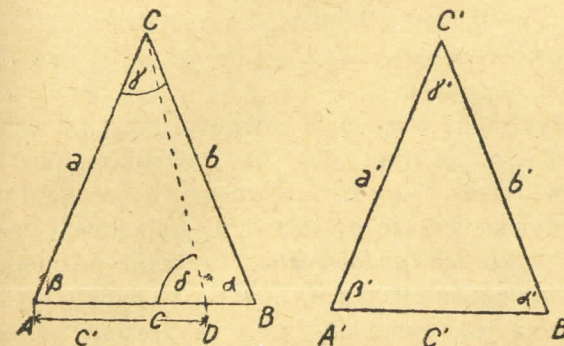


Fig. 36.

równe i kąty między nimi zawarte równe, mają i dwa inne kąty równe. Chodzi więc tylko jeszcze o trzeci bok.

Czy z równości:

$$\begin{array}{l|l} a = a' & \alpha = \alpha' \\ b = b' & \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' & \end{array}$$

mamy prawo wnioskować, że  $c = c'$ ?

Użyjmy dowodzenia

niewprost. Gdyby  $c' < c$ , to odcinając  $c'$  od punktu *A* na boku *AB*, natrafilibyśmy na punkt *D*, leżący między *A* i *B*. Łącząc go z wierzchołkiem *C* otrzymamy trójkąt *ADC*, w którym:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \alpha' \\ AD = c' \\ \beta = \beta' \end{array} \right\} \text{więc według pewnika III}_6 \text{ także } \delta = \alpha'.$$

Ale z drugiej strony  $\alpha = \alpha'$  więc musiałoby być  $\delta = \alpha$ , co jest niemożliwe, bo  $\delta$  jest kątem zewnętrznym trójkąta *CDB*. Więc niemożliwe jest, aby  $c' < c$ .

Tak samo wykazuje się, że niemożliwe jest, aby  $c' > c$ , musi więc być  $c' = c$ .

Trójkąty *ABC* i *A'B'C'* mają więc wszystkie boki parami równe i wszystkie kąty parami równe, są zatem przystające.

• Jest to t. zw. *pierwszy przypadek przystawania*. (I.) Dwa trójkąty, mające po dwa boki równe i kąt między nimi zawarty parami równe, są przystające.

Twierdzeniu temu można nadać także inną postać.

Postawmy sobie zadanie: zbudować trójkąt, znając dwa boki i kąt między nimi zawarty, n. p. boki mają mieć długość *a*, *b* a kąt wielkość  $\gamma$  na fig. 37.

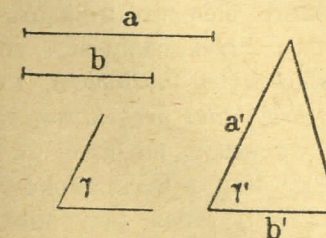


Fig. 37.

Aby tę konstrukcję wykonać, rysujemy w dowolnem miejscu płaszczyzny kąt  $\gamma' = \gamma$  i na ramionach jego odcinamy długości  $a' = a$



i  $b' = b$ . Łącząc punkty końcowe tych odcinków, otrzymujemy trójkąt. Ilekolwiek trójkątów zbudowalibyśmy z tych trzech elementów, wszystkie one będą przystające według naszego twierdzenia (I). Wyrażamy to tak: *dwa boki i kąt między nimi zawarty wyznaczają dokładnie trójkąt* (co do kształtu i wielkości). Wielkość pozostałych kątów i boków zależy od wielkości boków  $a$ ,  $b$  i kąta  $\gamma$ , czyli: bok  $c$  i kąty  $\alpha$  i  $\beta$  są funkcjami wielkości  $a$ ,  $b$  i  $\gamma$ .

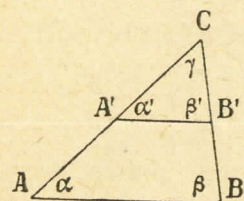


Fig. 38.

Spróbujmy teraz oprzeć się na wzajemnej równości innych trzech części, n. p. (fig. 38) na równości trzech kątów. Okaże się, że z równości trzech kątów nie wynika jeszcze przystawanie trójkątów (wynika tylko ich *podobieństwo*, o czym później). W dowolnym trójkącie  $ABC$  z punktu  $A'$ , leżącego na ramieniu  $AC$ , wykreślimy linię równoległą do  $AB$ . Trójkąt  $A'B'C'$  ma z trójkątem  $ABC$  wszystkie kąty parami równe (dlaczego?) a mimo to widocznie  $CA' < CA$ , zatem o przystawaniu mowy być nie może. Trzy więc kąty *nie wyznaczają dokładnie trójkąta* (co to znaczy?).

Użyliśmy tu dowodu niewprost, który polegał na wskazaniu jednego „przykładu” sprzeciwiającego się twierdzeniu, t. zw. kontr-przykładu. Jest to najłatwiejszy sposób obalania fałszywych twierdzeń. Tem przewyższa dowód niewprost wszystkie inne sposoby dowodzenia. Albowiem do udowodnienia prawdziwości jakiegoś twierdzenia nie wystarcza podanie jednego ani wielu przykładów, do obalenia zaś twierdzenia wystarczy zupełnie jeden przykład przeciwny. N. p.: Gdyby ktoś twierdził, że w potęgowaniu jest prawo przemienności i podał przykład  $4^2 = 2^4$ , to nie udowodni przez to niczego. Natomiast wystarczy podać przykład  $3^2 \neq 2^3$ , aby wykazać, że w potęgowaniu nie ma prawa przemienności.

## § 17. Drugi przypadek przystawania (II).

Widzieliśmy, że nie jest obojętnym, które elementy trójkątów porównujemy (lub podajemy do zbudowania). Przekonamy się, że istnieją tylko *cztery możliwości*, to jest *cztery przypadki przystawania*. (Wymień wszystkie możliwe zestawienia po trzy z trzech boków i trzech kątów!) Jeden przypadek już zbadaliśmy. Zajmijmy się teraz dalszymi.

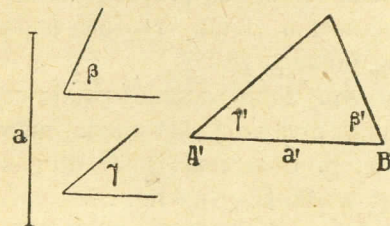


Fig. 39.

Ponieważ z równości trzech kątów nie można wnosić o przy-

stawianiu, weźmy teraz dwa kąty i jeden bok. Jeżeli znamy dwa kąty, to trzeci obliczymy według wzoru:  $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ ; obojętnym więc jest, które kąty są podane. Najwygodniej dla nas będzie użyć dwóch kątów, leżących przy podanym boku. Z tych części łatwo zbudować trójkąt (fig. 39), odcinając na dowolnej linii  $a' = a$ , a przy końcach tego odcinka kąty  $\beta = \beta'$  i  $\gamma = \gamma'$  (czy wielkość kątów  $\beta$  i  $\gamma$  jest dowolna?).

Twierdzymy, że *wszystkie trójkąty zbudowane z tych trzech elementów są przystające*. Jest to drugi przypadek przystawania.

(II). Dwa trójkąty, mające jeden bok i dwa kąty parami równe, są przystające.

Dowód: Założenie:

$$c = c'$$

$$\alpha = \alpha'$$

$$\beta = \beta'$$

Przedewszystkiem wykażemy, że  $a = a'$ . Gdyby  $a' < a$ , odci-

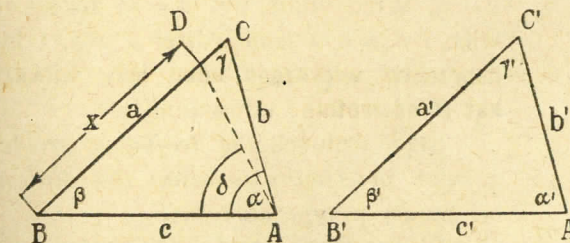


Fig. 40.

libyśmy (fig. 40)  $x = a'$  i łącząc koniec odcinka  $x$  z wierzchołkiem kąta  $\alpha$  otrzymalibyśmy trójkąt  $BAD \cong B'A'C'$  (według I). Więc kąt  $\delta = \alpha'$ , ale ponieważ  $\alpha' = \alpha$ , mielibyśmy  $\delta = \alpha$ , co jest niemożliwe, bo ramię kąta  $\delta$

leży na polu kąta  $\alpha$ . Tak samo niemożliwym jest, by  $a' > a$ . Musi więc być  $a = a'$ .

Teraz możemy już zastosować (I) przypadek przystawania, (albowiem  $a = a'$ ,  $c = c'$ ,  $\beta = \beta'$ ) więc  $ABC \cong A'B'C'$ . *na symetrię*

## § 18. Zastosowanie pierwszego i drugiego przypadku przystawania.

Z (I) i (II) przypadku przystawania łatwo wyprowadzić następujący ważny wniosek:

Jeżeli w jednym trójkącie dwa boki są równe, to i kąty, leżące naprzeciw nich, są równe i odwrotnie (czyli w trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe).

Dla dowodu weźmy trójkąt równoramienny, w którym  $a = b$  i narysujmy go raz jeszcze, ale w położeniu przewróconym (fig. 41), to  $a$  z pierwszego trójkąta równa się bokowi  $b$  z drugiego,  $b$  z pierwszego równa się bokowi  $a$  drugiego, kąt zaś  $\gamma$  między nimi zawarty jest taki sam; zatem te dwa tró-



kąty według (I) mają i inne kąty odpowiednio równe. Otóż  $\beta$  z pierwszego trójkąta równa się kątowi  $\alpha$  z drugiego trójkąta. Ponieważ zaś to jest taki sam kąt, jak  $\alpha$  w pierwszym trójkącie, więc  $\beta$  w pierwszym trójkącie równa się kątowi  $\alpha$  w pierwszym trójkącie, o co nam właśnie chodziło.

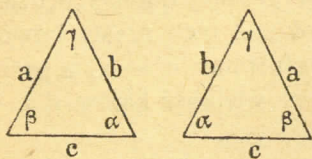


Fig. 41.

Tak samo udowadnia się odwrócenie: naprzeciw równych kątów w jednym trójkącie leżą równe boki. (Opieramy się na równościach  $c = c$ ,  $\beta = \alpha$ ,  $\alpha = \beta$ ). Z tych twierdzeń wynika, że w trójkącie równobocznym wszystkie kąty są równe, wynoszą więc po  $60^\circ$ .

Z twierdzenia i odwrócenia wynika już, że naprzeciw nierównych boków leżą nierówne kąty i odwrotnie. Wątpliwem jest jeszcze, czy naprzeciw większego boku leży większy kąt, czy też mniejszy? Jeżeli  $b > a$  (fig. 42), to odcinamy na  $b$  odcinek  $x = a$ . Wtedy musi być  $\delta = \epsilon$ , ale  $\epsilon > \alpha$  więc i  $\delta > \alpha$  a tembardziej  $\beta > \alpha$ . Otóż **naprzeciw większego boku leży większy kąt (i odwrotnie; udowodnij!).**

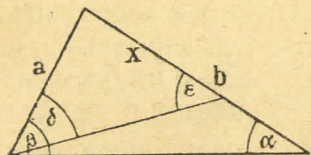


Fig. 42.

Stąd wniosek: *w trójkącie prostokątnym przeciwprostokątnia jest dłuższa od każdej przyprostokątnej.* (Wypowiedz podobne twierdzenie o trójkącie rozwartokątnym!).

Opierając się na tem można wykazać, że *linia prosta jest krótszą od wszystkich linii łamanych, łączących dwa punkty.*

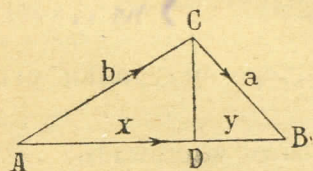


Fig. 43

Weźmy najpierw linię łamaną  $ABC$  (fig. 43), łączącą punkty  $A$  i  $B$ , złożoną z dwóch części. Poprowadźmy z punktu  $C$  linię prostą do  $AB$ , to otrzymujemy dwa trójkąty prostokątne. A więc:  $b > x$ ,  $a > y$ , zatem także  $b + a > x + y$ , a to znaczy, że droga  $ACB$  jest dłuższa, aniżeli droga  $AB$ . Twierdzenie to wypowiadamy często tak:

**W trójkącie suma dwóch boków jest większa od trzeciego.** Udowodnij na podstawie tego, że różnica dwóch boków trójkąta musi być mniejsza od trzeciego!

Biorąc teraz linię łamaną, złożoną z kilku części, dojdziemy do tego samego wniosku, rozkładając tę figurę na trójkąty.

$$\begin{array}{l} \text{N. p. fig. 44: } a + b > x \\ \quad \quad \quad c + d > y \end{array}$$

$$a + b + c + d > x + y$$

t. j.:  $ACDB > AB$

lub fig. 45:

$$\begin{array}{l} a + b > x \text{ więc } a + b + c > x + c \\ \text{ale } x + c > d \end{array}$$

więc tembardziej  $a + b + c > d$ .

Tak samo dowodzi się dla linii łamanej złożonej z więcej części. Ponieważ zaś każdą linię krzywą uważamy za granicę, do jakiej dąży linia łamana, o coraz to większej liczbie boków, to twierdzenie nasze można także rozszerzyć na wszystkie linie krzywe i powiedzieć ogólnie:

**Linia prosta jest najkrótszą drogą między dwoma punktami — z pomiędzy wszystkich dróg czy to łamanych, czy to krzywych.**

### § 19. Trzeci przypadek przystawania. (III).

Omówiliśmy już równość trzech kątów, dwóch kątów i dowolnego boku, jednego kąta i dwóch boków zamykających go. Pozostają jeszcze: jeden kąt i dwa boki nie zamykające tego kąta i trzy boki.

Zacznijmy znowu od konstrukcji. Mając dane dwa boki  $a, b$  i kąt nie zawarty między nimi, n. p. kąt  $\beta$  leżący *naprzeciw boku większego  $b$* , wykreślamy najpierw ten kąt (fig. 46), następnie na jego ramieniu odcinamy bok  $a$ , wreszcie z końca tego boku zataczamy łuk koła promieniem  $b$ . Koło to trafi drugie ramię kąta (że trafi, to udowodnimy później w § 24) w punkcie  $C$ . Łącząc go

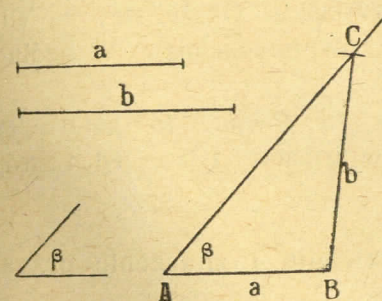


Fig. 46.

z punktem  $B$  otrzymamy trójkąt  $ABC$ .

*Uwaga:* koło trafi też przedłużenie boku  $AC$  poza  $C$  w jakimś punkcie  $D$ , ale trójkąt  $ABD$ , któryby wtedy powstał, ma kąt przy  $A$  nierówny kątowi  $\beta$ , a mianowicie  $180^\circ - \beta$ . Narysuj! Jedynie, gdyby  $\beta = 90^\circ$ , otrzymalibyśmy pod  $AB$  drugi trójkąt przystający do  $ABC$ .



Rozważaniem nieco trudniejszym, jak w (I) i (II) przypadku (por. ćw. 12 str. 62), dochodzi się do wniosku, że wszystkie trójkąty, z tych trzech elementów zbudowane, są przystające. Stąd trzeci przypadek przystawiania:

(III). Dwa trójkąty, mające po dwa boki równe i kąt większego z nich przeciwny równy, są przystające.

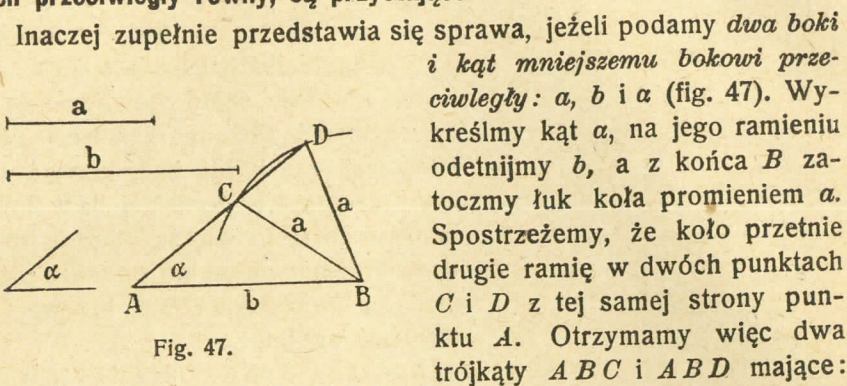


Fig. 47.

$$\left. \begin{array}{l} AB = AB \\ BC = BD \\ \alpha = \alpha \end{array} \right\} \text{ a mimo to nie przystające.}$$

Co więcej: jeżeli bok  $a$  za krótki, to koło zupełnie nie przetnie drugiego ramienia; wtedy więc z takich trzech elementów nie można wcale zbudować trójkąta (pozostaje t. zw. trójkąt otwarty). Jest jednak jedna pośrednia długość boku  $a$ , przy której koło dotknie drugiego ramienia w jednym punkcie. Wtedy jedynie trójkąty zbudowane z tych elementów byłyby przystające. Okaże się, że wtedy trójkąt jest prostokątny ( $b$  jest przeciwprostokątną). W ogólności zatem trzeba ten przypadek odrzucić.

Jeżeli wreszcie boki  $a$  i  $b$  są równe, to kąt  $\alpha$  musi być ostry (dlaczego?) i wtedy otrzymamy tylko jeden trójkąt (równoramienny).

## § 20. Czwarty przypadek przystawiania i znaczenie przystawiania w geometrii.

Pozostaje jeszcze ten przypadek, kiedy trzy boki są parami równe. Zaczniemy od konstrukcji. Dane są trzy boki. Aby z nich zbudować trójkąt (fig. 48), odcinamy bok  $a$  na dowolnej linii prostej, a z końców  $A$  i  $B$  zakreślamy koła promieniami  $b$  i  $c$ . Jeżeli tylko te boki są dosyć długie (jak długie?), koła przetną się w dwóch punktach  $C$  i  $C'$ . Powstają więc dwa trójkąty, ale przystające. Wszystkie

trójkąty wogóle, zbudowane z tych trzech elementów, są przystające, co można udowodnić w sposób podobny, jak dla trzeciego przypadku.

Stąd więc wynika czwarty i ostatni przypadek przystawiania:

(IV). Dwa trójkąty, mające trzy boki parami równe, są przystające.

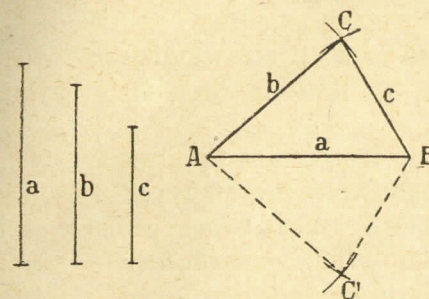


Fig. 48.

Widzimy więc, że z równości boków dwóch trójkątów wynika równość kątów, ale odwrotnie: z równości kątów nie wynika bynajmniej równość boków (por. str. 42). Aby przenieść kąt, wystarczy więc zamknąć

go w trójkąt i przenieść boki trójkąta. Najczęściej używa się do tego celu trójkąta równoramiennego.

Zastanówmy się nad tem, jaką korzyść mieć można z przypadków przystawiania trójkątów. Przedewszystkiem służą one do ułatwienia badania, czy dwa trójkąty są przystające. Dalej służą do przeniesienia trójkąta w inne miejsce płaszczyzny (t. zn. do znalezienia w innym miejscu płaszczyzny trójkąta przystającego). Nadto pozwalają one z trzech podanych części zbudować trójkąt zupełnie określony co do kształtu i wielkości, ponieważ trzy części są funkcjami trzech pozostałych. Polecając n. p. rzemieślnikowi wykonanie trójkąta z drzewa, wystarczy podać mu trzy wymiary, n. p. jeden bok i dwa kąty, zamiast sześciu wymiarów. Tak samo, jeżeli idzie o zmierzenie trójkąta — wystarczy wykonać trzy pomiary: pozostałe części można wtedy otrzymać albo w przybliżeniu rysunkiem, albo ściśle rachunkiem. Rachunek, prowadzący do tego, tworzy osobny dział geometrii, zwany trygonometrią, którą się zajmujemy na wyższym stopniu nauki.

Przy zdejmowaniu planów opieramy się również na przystawianiu trójkątów. Mając n. p. zrobić plan pola ograniczonego dowolną linią łamaną, mierzy się tylko jeden bok, przypuśćmy  $AB$  na fig. 49, a pozatem same kąty. Przez zmierzenie jeszcze kątów  $\alpha$  i  $\beta_1$  mamy już wyznaczony trójkąt  $ABG$ , możemy go więc na planie narysować. Wskutek tego i bok  $BG$  mamy znany. Przy boku  $BG$  mierzy się znowu kąty  $\gamma$  i  $\beta_2$  i uzyskuje się tą drogą następny trójkąt:  $BGF$ . Stąd znowu od boku  $BF$  kąty  $\delta$  i  $\beta_3$  i t. d.

W ten sposób z jednej długości i kątów otrzymujemy wszystkie inne części składowe bez dalszego mierzenia. Mierzenie bowiem dłu-



gości w polu jest połączone z pewnymi trudnościami, do mierzenia zaś kątów posiadamy bardzo dokładne i wygodne przyrządy. Takie postępowanie nazywamy „triangulacją“ (trójkątowaniem). Jeżeli plan narysujemy w odpowiednim zmniejszeniu, możemy z niego już wymierzyć pozostałe części, jeżeli zaś tylko zanotujemy wielkości mierzone w polu, obliczamy pozostałe przy pomocy trygonometrii.

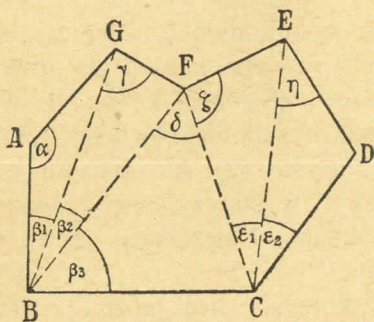


Fig. 49.

równe odpowiednim promieniom i cięciwom drugiego i tworzą równe kąty.

Nasuwa się pytanie, czy nie wystarczy zbadanie równości dwóch części, celem sprawdzenia przystawania trójkątów.

Spotykamy często w rozmaitych utworach geometrycznych trójkąty, które mają tylko po dwa elementy równe, a trzecie nie. Trójkąty takie *nie są przystające*, ale okazuje się, że jest przecież pewien związek między ich bokami a kątami. N. p.: jeżeli dwa trójkąty mają po dwa boki równe, a kąty między nimi zawarte nierówne (fig. 50), to trzecia para boków nie jest równa, ale na przeciw większego kąta leży większy bok. Innymi słowami: *jeżeli w trójkącie wzrasta kąt zamknięty dwoma bokami o stałej wielkości, to wzrasta także bok, leżący naprzeciw tego kąta*.

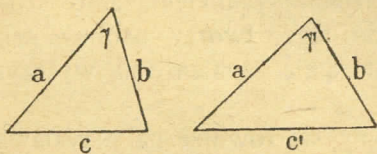


Fig. 50.

Tak samo odwrotnie: *jeżeli dwa boki nie zmieniają się, a trzeci wzrasta, to i kąt, leżący naprzeciw niego, musi wzrastać*.

Dowody tych twierdzeń pomijamy (polegają one na § 18).

## § 21. Ruch postępowy i obrotowy.

Poznamy obecnie bliżej związek, jaki zachodzi między przystawaniem a ruchem.

W geometrii, podobnie jak w mechanice, sprowadzamy wszystkie ruchy do dwóch najprostszych, zasadniczych ruchów: do ruchu postępowego i obrotowego.

*Ruchem postępowym jakiegokolwiek figury nazywamy posuwanie się wszystkich jej punktów po liniach prostych równoległych o te same odcinki.*

Weźmyż dowolny odcinek  $AB$  (fig. 51) i poprowadźmy z jego końców dwie linie równoległe do siebie. Odetnijmy na nich równe kawałki  $BB' = AA'$ . Aby można było wykazać równość odcinków  $a$  i  $a'$ , użyjemy przystawania trójkątów. Linia pomocnicza  $AB'$  rozetnie naszą figurę na dwa trójkąty  $AB'B$  i  $AA'B'$ . Trójkąty te są przystające według (I), albowiem  $AB' = AB'$ ,  $BB' = AA'$  i  $\alpha = \beta$ , jako kąty naprzemianległe.

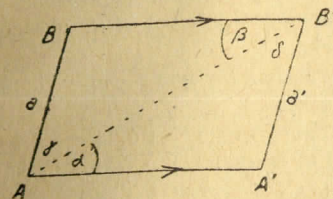


Fig. 51.

Z przystawania trójkątów wynika równość innych jego części, więc także  $a = a'$  a o to właśnie chodziło. Z przystawania trójkątów wynika także, że  $\angle \gamma = \angle \delta$ , a więc że  $A'B' \parallel AB$ . Słowami: przy ruchu postępowym odcinek pozostaje zawsze równoległy do pierwotnego położenia.

Przy ścisłym dowodzeniu należy także wykazać, że odcinek  $a$  przy ruchu nie doznał wykrzywienia, t. j. że pozostał linią prostą, że więc żaden punkt po ruchu nie leży ani przed prostą  $A'B'$  ani za prostą  $A'B'$ . (Udowodnij opierając się na twierdzeniu o sumie boków trójkąta!). W przeciwnym razie ta konstrukcja geometryczna nie zasługiwałaby na nazwę „ruch“.

Stąd natychmiast wynika: **trójkąt nie zmienia przy ruchu postępowym ani wielkości ani kształtu, czyli pozostaje przystający do pierwotnego położenia.** Jego boki bowiem nie doznają zmiany, a więc i kąty nie zmieniają się przy ruchu postępowym.

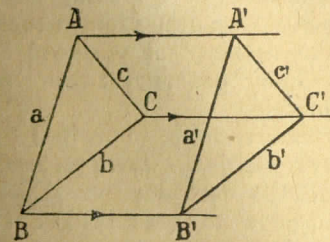


Fig. 52.

Z fig. 52 widzimy, jakiej konstrukcji trzeba użyć, aby trójkąt  $ABC$  przesunąć ruchem postępowym o odcinek np.  $AA'$ . Prowadzi się z wierzchołków trójkąta proste równoległe do siebie i na każdej z nich odcina się równy odcinek  $AA' = BB' = CC'$ . Łącząc punkty  $A'B'C'$ , otrzymamy trójkąt w nowym położeniu. To samo odnosi się do każdej figury wielokątnej, ponieważ każda da się złożyć z trójkątów.



Odcinek  $AA'$  nazywa się wielkością przesunięcia, linie równoległe  $BB'$ ,  $AA'$ ,  $CC'$  torami ruchu postępowego.

Ruchem obrotowym jakiegokolwiek utworu geometrycznego nazywamy taki ruch, przy którym każdy punkt figury porusza się po kole około tego samego środka, t. zw. środka obrotu (por. str. 36) o ten sam kąt.

Aby ten ruch geometrycznie wykonać, łączy się wszystkie punkty danej figury z jednym stałym punktem i ten pęk promieni obraca się o żądany kąt (por. str. 36).

N. p. na fig. 53. wykonaliśmy obrót odcinka  $AB$  około punktu  $O$  o kąt  $\angle AOA'$  w następujący sposób:

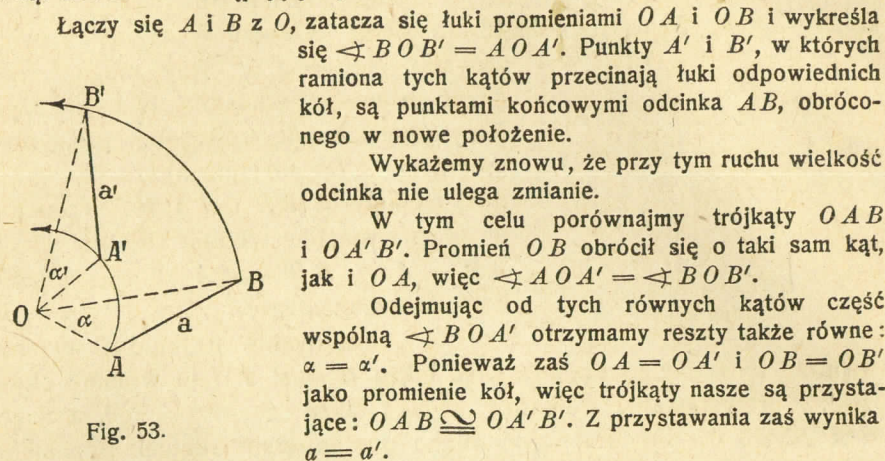


Fig. 53.

Uwaga: Tak samo jak przy ruchu postępowym należałoby wykazać, że linia prosta  $AB$  pozostaje przy tej konstrukcji geometrycznej linią prostą. Wtedy dopiero można tę konstrukcję nazwać ruchem w pospolitem tego słowa znaczeniu. (Dowodzi się niewprost!).

Ponieważ odcinki nie ulegają zmianie, to przez obrót trójkąta boki jego się nie zmieniają, trójkąt więc pozostaje przystający do pierwotnego położenia. To samo odnosi się do wszystkich figur: **przez ruch obrotowy lub postępowy nie zmienia się wielkość ani kształt figur geometrycznych**, pozostają one przystające do pierwotnego położenia. Z ruchu obrotowego i postępowego możemy złożyć każdy najzawilszy ruch, a więc przy **żadnym ruchu figur jako całości ani wielkość ani kształt figur geometrycznych nie ulega zmianie**.

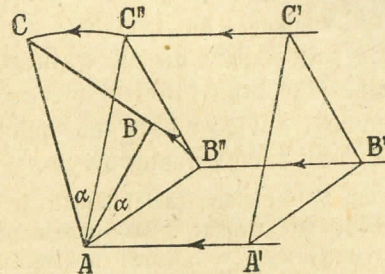


Fig. 54.

Niech te trójkąty (fig. 54) leżą w dowolnych miejscach płaszczyzny n. p.:

$$ABC \cong A'B'C'.$$

Uwaga: W tym samym porządku, t. zn., że, jeżeli postępując od  $A$  przez  $B$  do  $C$  mamy pole trójkąta po lewej ręce, to tak samo postępując od  $A'$  przez  $B'$  do  $C'$  powinniśmy mieć pole trójkąta po lewej ręce.

Wykonajmy najpierw ruch postępowy w kierunku  $A'A$  o długość  $A'A$ . Otrzymamy trójkąt  $AB''C''$ .

Aby go sprowadzić do nakrycia z trójkątem  $ABC$ , trzeba jeszcze wykonać obrót około punktu  $A$  o kąt  $\angle B''AB = \alpha$ . (Wtedy istotnie punkt  $B''$  padnie na  $B$ , bo  $AB'' = AB$  a punkt  $C''$  padnie na  $C$ , bo  $AC'' = AC$  a kąt  $C''AC$  wynosi także  $\alpha$ , albowiem  $\angle B''AC'' = \angle BAC$ , a odejmując od obydwu kątów część wspólną  $\angle BAC''$ , otrzymamy  $\alpha = \angle C''AC$ ).

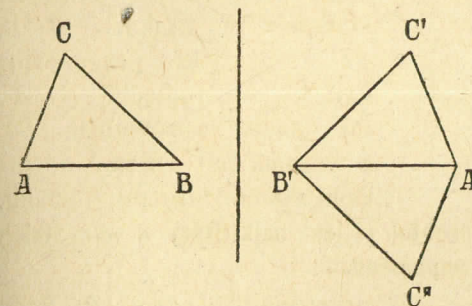


Fig. 55.

To samo odnosi się nie tylko do trójkątów, ale do wszystkich figur przystających (z zachowaniem tego samego porządku).

Weźmy teraz trójkąty przystające, ale w odwrotnym porządku (fig. 55). Tych figur nie sprowadzimy do nakrycia ani przez ruch postępowy, ani przez ruch obrotowy w danej płaszczyźnie. Trzeba najpierw jeden z trójkątów „przewrócić”, a więc wykonać ruch obrotowy w przestrzeni, trzeba się wznieść ponad płaszczyznę, n. p. obrócić trójkąt  $A'B'C'$  około prostej  $A'B'$  do położenia  $A'B'C''$ . Teraz dopiero można ruchem obrotowym i postępowym w płaszczyźnie sprowadzić obydwa trójkąty do nakrycia, tak, jak w poprzednim przypadku.

Uwaga: Ruch obrotowy w przestrzeni omówimy dokładniej dopiero w stereometrii, tam też dopiero udowodnimy, że trójkąt obrócony  $A'B'C''$  est przystający do pierwotnego  $A'B'C'$ .

To samo odnosi się nie tylko do trójkątów, ale do wszelkich innych figur płaskich. Udowodniliśmy więc w zupełności prawdziwość naszego twierdzenia.

Wystarczy więc jeden ruch postępowy i dwa obroty, aby dwie figury przystające sprowadzić do nakrycia.

Widzieliśmy z jednej strony, że przez ruch otrzymujemy same figury przystające, z drugiej zaś, że figury przystające dadzą się sprowadzić do nakrycia przez ruch. Jest to więc własność charakterystyczna figur przystających (a zarazem „ruchu”). Można więc teraz powiedzieć: **figury przystające są to takie figury, które dadzą się sprowadzić do nakrycia przez ruch**.

Teraz jasnym jest dla nas znaczenie słowa „przystawianie”.

Uwaga: Ruch figur geometrycznych odpowiada ruchowi ciał sztywnych w mechanice. W rzeczywistości nie istnieją ciała zupełnie sztywne a więc i ruchy odbywające się w przyrodzie są zawilsze.



## § 22. Odległość punktu od prostej. Proste pochyle. Rzuty.

Opierając się na przystawianiu trójkątów możemy zbadać dokładniej utwory geometryczne poznane już w poprzedniej nauce. I tak najpierw zastosujemy poznane twierdzenia do pęku promieni przeciętego linią prostą, nie przechodzącą przez wierzchołek pęku. Pomiędzy promieniami pęku musi istnieć jeden (i tylko jeden) prosto-

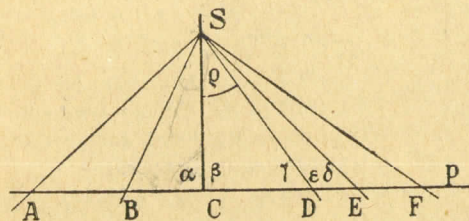


Fig. 56.

że: odcinek  $SC$  prostopadły do prostej  $p$  jest najkrótszy z wszystkich odcinków, jakie można z  $S$  do  $p$  poprowadzić.

Z tej przyczyny odcinek prostej prostopadłej z punktu poza prostą wykreślonej nazywamy odległością punktu od prostej. Punkt  $C$ , spodek prostopadłej, nazywamy także rzutem punktu  $S$  na prostą  $p$ . Punkty  $A, B, D, E, \dots$  nazywamy także rzutami, ale rzutami ukośnemi. Jeżeli zaś mówimy rzut — bez żadnego dodatku, mamy na myśli tylko rzut prostopadły. Odcinki  $BC, AC$  nazywamy także rzutami odcinków  $SB, SA$  na prostą  $p$ .

Co do innych odcinków z punktu  $S$  wychodzących to łatwo spostrzec, że są one tem większe, im dalej ich spodek leży od punktu  $C$ , a więc im większy jest rzut. N. p.  $SE > SD$ , bo leży w trójkącie  $SDE$  naprzeciw większego kąta, albowiem  $\angle \epsilon > \angle \delta$  jako kąt rozwarty. Wielkość ich wzrasta nieograniczenie w miarę oddalania się od punktu  $C$ . Jednakowoż z wyjątkiem promienia równoległego każdy inny przecina prostą (albo sam albo jego przedłużenie poza wierzchołek). Są jednakże pomiędzy temi odcinkami także po dwa równe, mianowicie te, których spodki są równo oddalone od spodka prostopadłej, t. j., których rzuty są równe. Jeżeli bowiem  $BC = CD$ , to z porównania trójkątów  $SBC$  i  $SDC$ , stosując (I) przypadek przystawiania, widzimy, że  $SB = SD$ .

Ponieważ od punktu  $C$  można na prostej  $p$  z każdej strony tylko jeden odcinek równy odmierzyć, istnieją więc tylko po dwa równe odcinki pochyle każdej wielkości.

padły do prostej  $p$ :  $SC \perp p$ . (por. str. 21). Porównajmy odcinki  $SA, SB, SC, SD$  i t. d. Otóż  $SC < SB$  jako przyprostokątnia w trójkącie  $SCB$ ,  $SC < SA$  jako przyprostokątnia w trójkącie  $SCA$ ; tak samo porównując  $SC$  z wszystkimi innymi odcinkami dochodzimy do wniosku,

Wszystkie te twierdzenia dadzą się odwrócić, a mianowicie:

*Odcinki pochyle równe, z jednego punktu poza prostą poprowadzone, mają rzuty równe. Z wzrostem odcinka pochylego wzrasta jego rzut.* (Udowodnij!) (Trzeba użyć (III) przypadku przystawiania).

Można także łatwo wykazać zależność od kąta: im bardziej odcinek jest nachylony, t. j. im mniejszy kąt z prostą  $p$  tworzy, tem większy jest jego rzut, odcinki zaś jednakowo nachylone mają równe rzuty. (Wypowiedz inne odwrócenia, n. p. zależność od kąta  $\varphi$  na fig. 56).

Mówiliśmy dotychczas o rzutach odcinków, przecinających

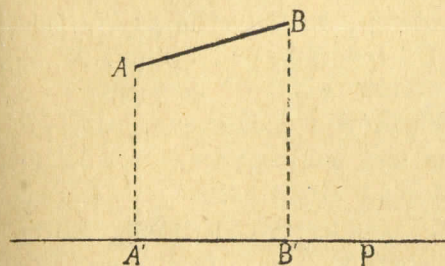


Fig. 57.

daną linią prostą  $p$ . Jeżeli odcinek niema z prostą  $p$  żadnych punktów wspólnych, to rzut jego tworzymy (fig. 57) wykreślając z jego końców proste prostopadłe do  $p$ , proste rzucające  $AA'$  i  $BB'$ . Odcinek  $A'B'$  nazywa się rzutem odcinka  $AB$  na prostą  $p$  lub na oś  $p$ . Rzuty wszystkich punktów pośrednich między  $A$  i  $B$  padną pomiędzy  $A'$  i  $B'$  i wypełnią cały odcinek  $A'B'$ . Odcinki równe i równo nachylone mają rzuty równe. (Udowodnij!).

Im mniejszy kąt tworzy odcinek z kierunkiem prostej  $p$ , tem większy jest jego rzut; gdy nachylenie odcinka zmniejsza się od  $90^\circ$

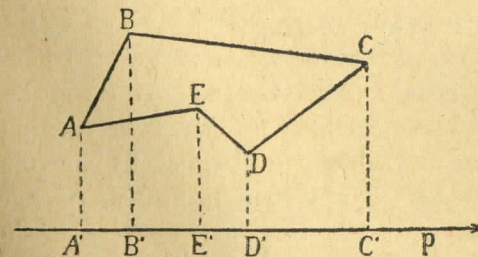


Fig. 58.

do  $0^\circ$ , to wielkość rzutu wzrasta od zera do wielkości odcinka  $AB$  (wykaż!). Rzut jakiegokolwiek figury na linię prostą  $p$  otrzymujemy, kreśląc z wszystkich punktów tej figury linie prostopadłe do osi  $p$  (fig. 58). Obierzmy na tej prostej pewien kierunek, n. p. od  $A'$  ku  $C'$  jako dodatni, to odcinki  $A'B', B'C', \dots$  są dodatnie, a odcinki  $C'D', D'E', \dots$  ujemne. Z figury odczytujemy, że przy takim ustaleniu kierunku rzut figury zamkniętej ma wartość zero.



Istotnie biorąc sumę rzutów kolejnych boków:  $AB, BC, CD, \dots$ , otrzymamy:

$$A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A'.$$

Zbierając odcinki dodatnie razem i ujemne razem, otrzymujemy:

$$A'C' + C'A'$$

ale  $C'A' = -A'C'$  (por. str. 13), więc jako wartość tej sumy otrzymujemy:

$$A'C' - A'C' = 0.$$

Figurę zamkniętą ograniczoną kilkoma odcinkami prostymi nazywamy wielokątem.

### § 23. Odległość prostych równoległych. Równoległe w trójkącie.

Jeżeli dwie linie proste są równoległe, to wszystkie punkty jednej z nich są równo oddalone od drugiej:  $AD = BC = \dots$  (por. fig. 59).

Wynika to z przystawania trójkątów  $ABC$  i  $ADC$  (II).

Odwrotnie: jeżeli jakieś punkty są równo oddalone od jednej prostej  $q$ , to leżą one na prostej równoległej do  $q$  (dowód niewprost!). Jest to więc własność charakterystyczna prostej równoległej. Możemy więc twierdzenie i odwrócenie wypowiedzieć jednym zdaniem:

*Miejscem geometrycznym punktów równo oddalonych od prostej jest prosta równoległa. Tę równą odległość punktów nazy-*

*wamy odległością prostych równoległych. (Uwaga: na tej własności polega nazwa „proste równoległe“).*

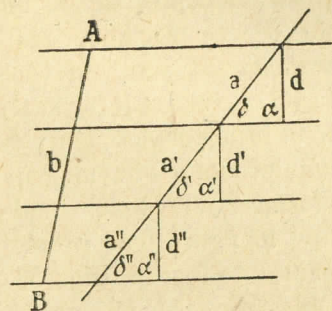


Fig. 59.

Jeżeli jakaś poprzeczna przecina kilka prostych równoległych, poprowadzonych w równych odstępach, to te równoległe odcinają na niej równe kawałki. Dowód wynika z przystawania (II) trójkątów wykreślonych na fig. 60. Twierdzenie to może posłużyć do tego, aby dowolny odcinek  $b$  podzielić na kilka równych części. Trzeba tylko narysować kilka linii równoległych w równych odstępach i z jakiegokolwiek punktu  $A$  jednej z prostych równoległych (fig. 60) odciąć ten odcinek

tak, aby jego koniec  $B$  sięgał do ostatniej linii równoległej. Postępowanie takie jest praktyczne zwłaszcza wtedy, jeżeli mamy różne odcinki dzielić na tyle samo równych części.

Odwrotnie: jeżeli z punktów dzielących jakiś odcinek na równe części wykreślimy linie do siebie równoległe, to one na każdej innej poprzecznej odcinają tyleż równych kawałków.

Dowód: (fig. 60)  $a = a' = a''$ ,  $\alpha = \alpha' = \alpha'' = 90^\circ$ ,  $\delta = \delta' = \delta''$ , więc trójkąty przystają, a z przystawania wynika  $d = d' = d''$ .

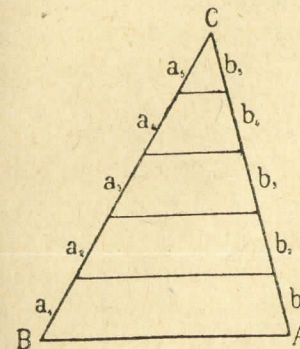


Fig. 61.

Stosując to do trójkąta, otrzymamy ważne twierdzenie: proste równoległe do podstawy trójkąta, a dzielące jeden bok na kilka równych części, dzielą i drugi na tyle samo równych części. A więc n. p. prosta (fig. 61) równoległa do podstawy, odcinająca na jednym boku  $\frac{1}{5}$  część od wierzchołka, odcina także na drugim boku jego piątą część.

Zwłaszcza często używa się tego twierdzenia w najprostszym przypadku: Prosta poprowadzona przez środek jednego boku trójkąta równoległa do drugiego połówi także bok trzeci (wykaż wprost na fig. 62, prowadząc z  $D$  i  $E$  prostopadłe do  $AB$ , a z  $C$  prostopadłą do  $DE$ ).

Wykażemy jeszcze, że ten odcinek, łączący środki boków, równa się połowie boku równoległego.

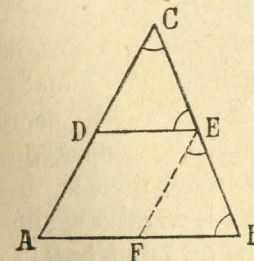


Fig. 62.

Łaźnienie:  $AD = DC$ ,  $DE \parallel AB$ . Wiemy juź, że  $CE = EB$ . Wykreślimy z  $E$  prostą  $EF \parallel AC$ , to otrzymamy trójkąty  $DCE$  i  $EFB$  przystające, (bo  $CE = EB$  i odpowiednie kąty są równe). Z przystawania wynika:  $DE = FB$ . Ale linia  $EF \parallel AC$ , a przechodzi przez środek boku  $BC$ , więc połówi trzeci bok  $AB$ , a więc

$$FB = \frac{AB}{2} \text{ i } DE = \frac{AB}{2}.$$

Odwrócenia tego twierdzenia są także prawdziwe:

Prosta, łącząca środki dwóch boków trójkąta, jest równoległa do trzeciego, a jej odcinek równa się jego połowie (dowód niewprost!).

Jak jeszcze można to twierdzenie odwrócić?

### § 24. Zastosowanie twierdzeń o przystawaniu trójkątów do koła. Prosta i koło.

Opierając się na twierdzeniu o najkrótszej odległości punktu od prostej, możemy dokładniej określić położenie prostej względem koła.



Odległość prostej od środka koła może być: a) większa od promienia, b) równa promieniowi i c) mniejsza od promienia.

a) Jeżeli  $d > R$  (fig. 63), to prowadząc ze środka koła linię  $OA \perp p$  widzimy, że  $OA > R$ , zatem punkt  $A$  leży poza kołem. Tembardziej każdy inny punkt tej prostej musi leżeć poza kołem, bo każdy inny odcinek z  $O$  do prostej  $p$  sięgający jest jeszcze dłuższy.

Zatem: cała prosta  $p$  leży poza kołem, jeżeli  $d > R$ .

b) Jeżeli  $d = R$ , n. p. dla prostej  $q$ , to prowadząc z  $O$  linię prostą do  $q$ , otrzymamy punkt  $C$ , leżący zarazem na kole. Każdy inny punkt

prostej  $q$  ma odległość od  $O$  większą, aniżeli  $OC$ , zatem większą od promienia, leży więc poza kołem. Linia prosta  $q$  jest więc styczną koła, jeżeli  $d = R$ . Widzimy, że promień koła, przechodzący przez punkt styczności, jest prosty do stycznej. Ale także odwrotnie: linia prostopadła do promienia na końcu promienia wykreślona jest styczną koła. (Udowodnij nie wprost!) To podaje sposób konstrukcji stycznej a zarazem wskazuje, że w każdym punkcie na kole istnieje tylko jedna styczna.

c) Jeżeli  $d < R$  (fig. 64), to prostopadła  $OA$  ze środka koła jest krótsza od promienia, zatem punkt  $A$  leży wewnątrz koła. Tak samo punkty bliskie  $A$ . Jeżeli się jednak posuwamy od punktu  $A$  w obydwie strony, to odległość od środka  $O$  wzrasta w sposób ciągły i trafimy\*) na dwa punkty  $B$  i  $C$ , których odległość od  $O$  jest już równa promieniowi. Te punkty leżą więc na obwodzie koła, są wspólne kołu i prostej. Więcej takich punktów nie będzie, bo z punktu  $O$  poza prostą  $p$  dadzą się do niej tylko dwa równe pochyłe odcinki

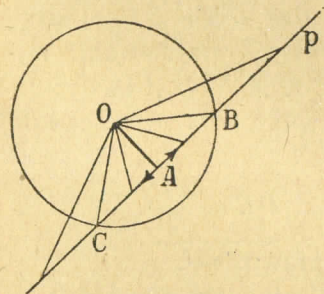


Fig. 64.

poprowadzić. Jeżeli od punktów  $B$  i  $C$  posuwamy się jeszcze dalej, odległość od środka wzrasta jeszcze bardziej; punkty te leżą już poza kołem.

\*) Ścisły dowód tego twierdzenia opiera się na ciągłości linii prostej i wymaga dłuższych rozważań.

Jeżeli więc  $d < R$ , to prosta przecina koło w dwóch punktach, jest sieczną koła. Łatwo wykazać, że linia  $OA$  połowi cięciwę  $BC$  (III). Odwrotnie: linia prostopadła w środku cięciwy trafia środek koła (nie wprost!).

Podobne rozważania można przeprowadzać o położeniu dwóch kół względem siebie.

## § 25. O kątach środkowych.

Kąt, którego wierzchołkiem jest środek koła, a ramionami promienie, nazywa się kątem środkowym, n. p.  $\angle \alpha$ . O kącie  $\alpha$  mówimy, że się wspiera na łuku  $\widehat{AB}$ , lub na cięciwie  $AB$ . Kąt wklęsły  $\beta$ , wspiera się na łuku  $\widehat{B'DA}$  (fig. 65).

Dwa łuki są przystające, jeżeli należą do równych kątów środkowych w tem samym kole, lub w kołach o równych promieniach, n. p.  $AB$

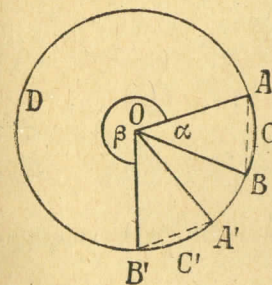


Fig. 65.

i  $A'B'$ , można je bowiem sprowadzić do nakrycia przez obrót. Łuki mogą być równe a nieprzystające (por. fig. 66), to znaczy nie dadzą się sprowadzić do nakrycia przez sam

ruch obrotowy i postępowy łuku jako całości. Trzebaby chyba takie łuki wygiąć, wyprostować, a to nie już nie jest ruch figury jako całości. Do równych kątów środkowych należą także równe cięciwy, jak to wynika z przystawiania trójkątów  $OAB$  i  $OA'B'$  (I). Także odwrócenia tych twierdzeń są prawdziwe:

Do przystających łuków należą równe cięciwy i równe kąty środkowe. (Jakie odwrócenie jest jeszcze możliwe? Udowodnij!). Na tych prostych uwagach polega budowa

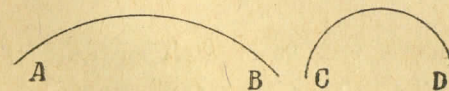


Fig. 66.

i użycie znanego przyrządu, zwanego kątomierzem. Jest to półkole, którego obwód jest podzielony na 180 przystających łuków, a przez to i kąt półpełny środkowy rozpada się na 180 równych kątów: każdy kąt wynosi więc  $1^\circ$ .

Uwaga: Używa się czasem jako kątomierza trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna jest podzielona na 90 części, ale już nierównych. Zwiększają się one ku brzegom (ku przyprostokątniom) od środka przeciwprostokątnej, gdzie są najmniejsze. Do przenoszenia łuku po tem samym kole



można użyć cyrkla; mianowicie przenosimy równe cięciwy a do nich już należą równe łuki.

Im dalej leży cięciwa od środka koła, tem jest mniejsza i odwrotnie. Udowodnij!

## § 26. O kątach obwodowych czyli wpisanych.

Kąt, którego wierzchołek leży na obwodzie, a ramiona są cięciwami, nazywa się **kątem obwodowym lub wpisanym**, n. p.:  $\angle BAC$  (fig. 67). O kącie tym mówimy, że wspiera się na łuku  $BC$ , zawartym między jego ramionami lub, że jest wpisany w łuk  $BAC$ . Między kątem obwodowym a środkowym, wspierającym się na tym samym łuku, zachodzi bardzo prosty związek. Wykreślmy promienie  $OB$  i  $OC$  i poprowadźmy średnicę  $AOD$ , to otrzymamy dwa trójkąty równoramienne. W każdym z nich kąty, leżące przy boku nierównym, są równe, oznaczyliśmy je więc tą samą literą. Ponieważ kąty  $\alpha$  i  $\beta$  są kątami zewnętrznymi, więc  $\alpha = 2\varepsilon$ ,  $\beta = 2\delta$ , zatem ich suma:  $\alpha + \beta = 2(\varepsilon + \delta)$  czyli

$$\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC \quad \text{słowami:}$$

Kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta obwodowego, wspierającego się na tym samym łuku lub:

**kąt obwodowy równa się połowie kąta środkowego, wspierającego się na tym samym łuku.**

(Udowodnij to samo, jeżeli środek  $O$  leży poza polem kąta obwodowego lub na jego ramieniu!).

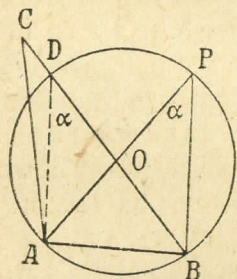


Fig. 68.

Ponieważ zaś kąty środkowe, wspierające się na równych łukach, są równe, przeto i: **kąty obwodowe, wspierające się na równych łukach, są równe.**

Odwrocenie tego twierdzenia prowadzi do rozmaitych ważnych konstrukcyj. Brzmi ono: *jeżeli na jakimś odcinku wspierają się równe kąty, to ich wierzchołki leżą na obwodzie koła, którego cięciwą jest ten odcinek.* Dowód nie wprost: gdyby jakiś wierzchołek  $C$  (fig. 68) leżał poza kołem  $O$ , na którym leży wierzchołek  $P$  jednego kąta, to łącząc  $D$  z  $A$  otrzymalibyśmy w trójkącie  $CDA$  kąt zewnętrzny  $A DB = \alpha$  (jako obwodowy, wspierający się na tym samym łuku, co  $\angle P$ ). Wtedy więc  $\angle C$  nie mógłby wynosić  $\alpha$

(jako wewnętrzny kąt trójkąta). Tak samo gdyby  $C$  leżał wewnątrz koła.

To twierdzenie można także tak wypowiedzieć: *miejscom geometrycznym punktów leżących z jednej strony odcinka, z których jakiś odcinek widać pod tym samym kątem, jest łuk koła zakreślonego na tym odcinku, jako na cięciwie, mianowicie ta część obwodu koła, która leży z jednej strony tej cięciwy.* Im mniejszy ten kąt, tem dalej leży środek tego koła od odcinka  $AB$ .

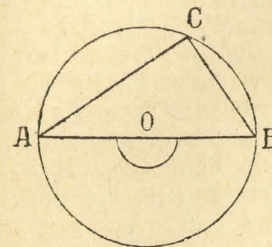


Fig. 69.

Szczegółowym przypadkiem kątów obwodowych są t. zw. kąty w półkolu; są to kąty obwodowe, wspierające się na średnicy, a więc na połowie okręgu koła. Każdy taki kąt, jako połowa kąta półpełnego  $AOB$  (fig. 69), jest kątem prostym. Otóż: **każdy kąt w półkolu jest prosty.** Twierdzenie to można odwrócić: *jeżeli na jakimś odcinku wspierają się kąty proste, to ich wierzchołki leżą na obwodzie tego samego koła.* Z tem wiąże się konstrukcja koła bez pomocy cyrkla, a tylko przy użyciu ruchomego kąta prostego (n. p. trójkąt prostokątny z drzewa) lub też przez kreślenie linii prostopadłych za pomocą trójkąta.

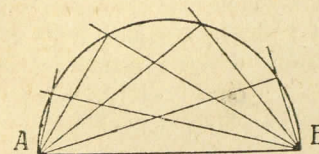


Fig. 70.

Chcąc n. p. zbudować koło o średnicy  $AB$  (fig. 70) rysujemy z punktu  $A$  dowolny pęk promieni, a z punktu  $B$  pęk promieni prostopadłych do promieni pęku  $A$ . Spodki tych prostopadłych są punktami żadanego koła. Kreśląc je odpowiednio gęsto i łącząc jedną linią nieprzerwaną otrzymujemy koło.

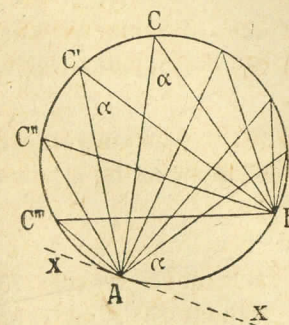


Fig. 71\*).

Podobnie możnaby się oprzeć na ogólnem twierdzeniu o kątach obwodowych i zbudować koło przy pomocy dowolnie obranego kąta  $\alpha$  lub też przy pomocy dwóch pęków promieni, przecinających się pod dowolnym kątem  $\alpha$  (fig. 71). Wtedy jednakże otrzymamy koło wspierające się na pewnej cięciwie krótszej a nie na średnicy. Udowodnij, że pęki  $A$  i  $B$  są przystające!

\*) połączyć punkt  $A$  z punktem  $B$  odcinkiem linii prostej!



Na twierdzeniu o kątach obwodowych polega także przyrząd używany do rysowania linii zbiegających się ku jednemu punktowi, leżącemu poza płaszczyzną rysunku. Składa się on z trzech sztywnie połączonych ramion, schodzących się w jednym punkcie  $CX, CY, CZ$  (fig. 72). Obiera się stały odcinek  $AB$  i posuwa się cały przyrząd tak, aby dwa skrajne ramiona przechodziły zawsze przez końce  $A$  i  $B$  odcinka. Wtedy wierzchołek  $C$  posuwa się po kole, a ramię środkowe trafia zawsze (swym przedłużeniem wstecz, poza  $C$ ) punkt  $D$ . Wszystkie bowiem punkty, z których widać odcinek  $AB$  pod kątem stałym  $ACB$ , leżą na kole. Kąty  $ACD, AC'D$  i t. p. są więc równymi kątami obwodowymi. Ponieważ zaś jedno ramię zawsze przechodzi przez  $A$ , to drugie musi zawsze przechodzić przez  $D$  (dlaczego?). Linje więc  $CX, C'X'$  i t. d. zbiegają się ku jednemu punktowi  $D$ , który może leżeć już poza płaszczyzną rysunku. ( $A$  i  $B$  muszą leżeć jeszcze na płaszczyźnie rysunku). W przyrządzie do rysowania linii  $CX, C'X'$  i t. d. są zrobione tylko ramiona  $CA, CB$  i  $CX$ . Prosta zaś  $CD$  jest tylko idealnym przedłużeniem ramienia  $CX$ . Używa się go zwłaszcza w rysunku perspektywicznym, gdzie linje równoległe w naturze rysuje się jako zbieżne ku jednemu punktowi.

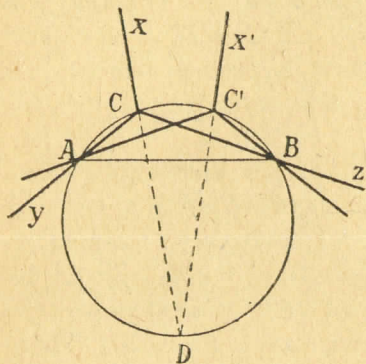


Fig. 72.

ramiona  $CA, CB$  i  $CX$ . Prosta zaś  $CD$  jest tylko idealnym przedłużeniem ramienia  $CX$ . Używa się go zwłaszcza w rysunku perspektywicznym, gdzie linje równoległe w naturze rysuje się jako zbieżne ku jednemu punktowi.

## § 27. Kąt między styczną a cięciwą.

W pęku promieni z poprzedniego ustępu istnieje jeden promień styczny do koła ( $XX'$ ). Jeżeli cięciwa  $BC$  fig. 71, obracając się koło punktu  $B$  przez położenia  $BC', BC'', BC'''$  dąży do położenia  $BA$ , to druga cięciwa  $AC$  dąży do położenia stycznego  $AX$ . Ponieważ przy całym ruchu kąt przy  $C$  ma ciągle tę samą wielkość, to i przy położeniu granicznym pozostanie taki sam kąt między cięciwą  $AB$  a prostą  $XX$ . Stąd twierdzenie:

**Kąt stycznej z cięciwą  $AB$ , przechodzącą przez punkt styczności, równa się wszystkim kątom obwodowym, wspierającym się na tej cięciwie, a leżącym po przeciwnej stronie cięciwy.**

Moglibyśmy to także udowodnić odrazu bez rozważań granicznych, mianowicie: poprowadźmy z punktu styczności  $A$  (fig. 73) średnicę  $AOC$  i połączmy  $C$  z  $B$ , to  $\angle B$  wynosi  $90^\circ$ , jako kąt w półkolu. Na kąty  $\beta$  i  $\gamma$  razem pozostaje także  $90^\circ$ . Ale  $\alpha$  wraz z  $\gamma$  tworzą kąt prosty, wynoszą więc razem również  $90^\circ$ . Ponieważ więc kątowi  $\beta$  i kątowi  $\alpha$  tyle samo brakuje do  $90^\circ$ , zatem te kąty są równe  $\beta = \alpha$ .

Ponieważ wszystkie inne kąty obwodowe, wspierające się na cięciwie  $AB$ , są równe kątowi  $\beta$ , więc  $\alpha$  równa się istotnie każdemu kątowi obwodowemu wspierającemu się na cięciwie  $AB$ .

Opierając się na tem twierdzeniu, można zbudować koło, z którego obwodu widać odcinek  $AB$  pod żądanym kątem. Rysujemy od jednego końca odcinka (fig. 74) prostą  $AX$  pod danym kątem  $\alpha$ .

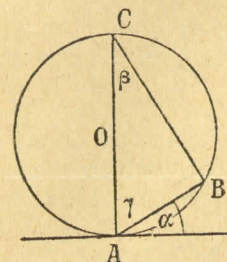


Fig. 73.

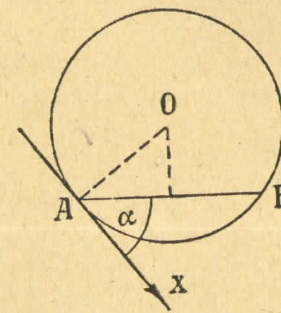


Fig. 74.

Prosta ta ma być styczną do koła w punkcie  $A$ , prosta zaś  $AB$  cięciwą. Środek koła musi więc leżeć na linii prostopadłej do  $AX$  a przechodzącej przez punkt  $A$ , a także na linii prostopadłej w środku  $AB$ , a więc w punkcie przecięcia się  $O$  tych linii. Promieniem zaś jego jest  $OA$  (lub  $OB$ ).

## Cwiczenia IV

§ 15—17. 1. Zbudować trójkąt, znając dwa boki n. p.  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $b = 6 \text{ cm}$  i kąt między nimi zawarty, n. p.  $\gamma = 35^\circ$ .

2. Z pewnego punktu wymierzono odległości do dwóch krańców stawu:  $a = 327 \text{ m}$  i  $b = 452 \text{ m}$  i kąt zawarty między temi długościami:  $\gamma = 56^\circ$ . Ile wynosi długość stawu? Zmierzyć na rysunku w odpowiednio dobranej skali!

3. Z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym poprowadzono prostopadłą do przeciwprostokątnej. Zbadać, jakie części są równe w dwóch powstałych trójkątach. Czy są one przystające?

4. Zbudować trójkąt, znając jeden bok i dwa kąty przy nim leżące n. p.:  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $\beta = 39^\circ$ ,  $\gamma = 65^\circ$ .

5. Zbudować trójkąt, znając jeden bok i dwa kąty, z których jeden leży naprzeciw tego boku n. p.  $a = 7.2 \text{ cm}$ ,  $\beta = 123^\circ$ ,  $\alpha = 28^\circ$ .

6. Z jednej strony rzeki zmierzono wzdłuż jej biegu długość  $AB = 56 \text{ m}$ . Jakie pomiary trzeba jeszcze wykonać z tej samej strony rzeki, aby można zbadać odległość punktów  $A$  i  $B$  od punktu  $C$  po drugiej stronie rzeki leżącego i szerokość rzeki.

7. Wykazać, że w dwóch trójkątach przystających odpowiednie wysokości są równe.



§ 18. 8. W trójkącie równoramiennym kąt u wierzchołka wynosi  $46^{\circ} 29'$ ; ile wynoszą inne kąty?

9. Ile elementów trzeba znać, aby wyznaczyć: a) trójkąt równoramienny? b) trójkąt równoboczny?

10. Wykazać, że różnica dwóch boków trójkąta jest mniejsza od trzeciego boku.

11. Wykazać, że linia łamana złożona z czterech odcinków jest dłuższa, aniżeli prosta łącząca jej końce.

§ 19—20. 12. Udowodnić, że trójkąty przystają w przypadku (III).

*Wskazówka:* Jeżeli danymi elementami są  $a, b, \beta$ , to do boku  $b$  trójkąta  $ABC$  przykładamy po drugiej jego stronie trójkąt  $ACB''$  przystający do  $A'B'C'$ , łączymy  $B$  z  $B''$  i badamy trójkąty  $CBB''$  i  $ABB''$ , które są równoramienne.

13. Jak długi musi być mniejszy bok  $a$ , aby się zamknął trójkąt zbudowany z dwóch boków  $a, b$  i kąta leżącego naprzeciw mniejszego boku  $a$ ?

14. Zbudować trójkąt, znając  $a = 3 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$ ,  $c = 5 \text{ cm}$ . Zmierzyć jego kąty! (trójkąt egipski).

15. Przenieść dowolny trójkąt w inne miejsce płaszczyzny.

16. Przenieść dany kąt w inne miejsce płaszczyzny, nie używając kątomierza.

17. Ile części trzeba znać do konstrukcji trójkąta prostokątnego?

18. Wykazać, że środki boków trójkąta równobocznego są wierzchołkami nowego trójkąta równobocznego.

19. Udowodnij, że w dwóch trójkątach, mających dwa boki równe, a trzecie nierówne, naprzeciw większego boku leży większy kąt. (Nie wprost!).

§ 21. 20. Przesunąć dowolny trójkąt o  $4 \text{ cm}$ : a) w kierunku jego wysokości, b) w kierunku jednego z boków.

21. Obrócić dany trójkąt o  $60^{\circ}$  około dowolnego punktu, leżącego poza polem tego trójkąta. Wykonać po kolei pięć takich obrotów.

22. Obrócić trójkąt o dany kąt około jednego z wierzchołków.

23. Dwa trójkąty przystające, nie leżące równolegle, sprowadzić do nakrycia ruchem obrotowym i postępowym.

§ 22—23. 24. Znaleźć kilka punktów odległych o  $3 \text{ cm}$  od danej prostej  $p$ . Co jest miejscem geometrycznym tych punktów?

25. Dowolny odcinek podzielić na pięć równych części przy pomocy linii równoległych. Co trzeba zrobić, jeżeli odcinek nie sięga do ostatniej linii równoległej?

26. Przepołowić boki dowolnego trójkąta, którego jeden wierzchołek jest niedostępny (przy pomocy linii równoległych).

27. Udowodnić, że prosta, łącząca środki dwóch boków trójkąta, jest równoległa do trzeciego. (Dowód nie wprost!).

28. Boki trójkąta różnobocznego zmniejszyć pięciokrotnie i zbudować z nich nowy trójkąt.

29. Jakąkolwiek figurę przerysować w podziałce zmniejszonej trzy razy.

30. Wykazać, że prostopadła w środku cięciwy przechodzi przez środek koła. (Dowód nie wprost!).

§ 24. 31. Wykazać, że cięciwa wzrasta w miarę zbliżania się prostej do środka koła.

32. Wykazać, że linia prostopadła do stycznej w punkcie styczności wykreślona trafia środek koła.

33. Wykreślić w kole sześć promieni, tworzących kąty środkowe po  $60^{\circ}$ , a na ich końcach styczne do koła.

34. Wykreślić dwa koła współśrodkowe i taką cięciwę koła większego, aby była styczną koła mniejszego. Wykazać, że ta cięciwa jest przepołowiona punktem styczności z kołem mniejszym.

35. Wykreślić w kole o promieniu  $4 \text{ cm}$  kilka takich cięciw, że ich odległość od środka wynosi  $3 \text{ cm}$ . Jakie jest miejsce geometryczne środków tych cięciw?

36. Punkt  $A$  jest o  $3 \text{ cm}$  oddalony od prostej  $p$ . Znaleźć na tej prostej punkty, odległe o  $4\frac{1}{2} \text{ cm}$  od punktu  $A$ .

37. Wykazać, że najbliższą drogą z punktu  $P$  poza kołem do obwodu koła jest prosta, której przedłużenie przechodzi przez środek koła. (Wziąć do porównania drugą prostą i połączyć ze środkiem koła jej punkt przecięcia się z kołem, leżący bliżej  $P$ ).

38. Znaleźć punkt, którego odległość od obwodu koła o promieniu  $3 \text{ cm}$  wynosi  $2 \text{ cm}$  (por. ćw. 37). Co jest miejscem geometrycznym takich punktów?

39. Poza kołem o promieniu  $4 \text{ cm}$  leży punkt  $S$  w odległości  $2 \text{ cm}$ . Znaleźć na kole punkty odległe o  $2\frac{1}{2} \text{ cm}$ ,  $3 \text{ cm}$ ,  $4 \text{ cm}$ ,  $6 \text{ cm}$ ,  $7 \text{ cm}$  od punktu  $S$ .

§ 25—27. 40. Dwa koła przecinają się. Wykazać, że linia środkowa połowi kąty środkowe, należące w obydwu kołach do wspólnej cięciwy.

41. Dwa koła przecinają się. Wykazać, że prosta, łącząca punkty przecięcia jest: a) prostopadła do linii środkowej, b) jest przepołowiona linią środkową.

42. Przenieść dowolny kąt przy pomocy cyrkla, uważając go za kąt środkowy koła o dowolnym promieniu.

43. Zbudować koło na danej średnicy przy pomocy ruchomego kąta prostego.

44. Wykazać, że środek przeciwprostokątnej jest równo oddalony od wszystkich wierzchołków trójkąta prostokątnego.

45. Zbudować koło na danej cięciwie przy pomocy ruchomego kąta ostrego. Ile takich kół można zbudować; od czego zależy ich wielkość?

46. Obierając odcinek  $AB = 2 \text{ cm}$  (fig. 74) jako cięciwę koła, a kąt prostej  $AX$  z tym odcinkiem  $\angle XAB = 15^{\circ}$  jako kąt stycznej z cięciwą, wykreślić koło.

## Rozdział V

## S y m e t r j a

### § 28. Twierdzenia o trójkątach równoramiennych.

Widzieliśmy już, że w trójkącie równoramiennym kąty, leżące przy podstawie, są równe i odwrotnie: jeżeli kąty, leżące przy podstawie, są równe, to trójkąt jest równoramienny.



Wysokość przedziela trójkąt równoramienny na dwa trójkąty przystające:

$ADC \cong BDC$  (III). (Fig. 75).

Z przystawania wynika równość pozostałych części, więc:

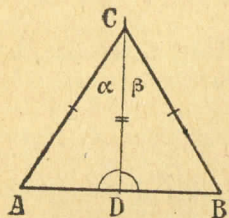


Fig. 75.

1.  $\alpha = \beta$ : wysokość połówi kąt u wierzchołka w trójkącie równoramiennym.

2.  $AD = BD$ : wysokość połówi podstawę w trójkącie równoramiennym.

Twierdzenie to można odwrócić w rozmaity sposób:

Linia, połówiąca kąt u wierzchołka trójkąta równoramiennego, połówi podstawę i jest do niej prostopadła.

Linia, łącząca wierzchołek trójkąta równoramiennego ze środkiem podstawy, połówi kąt u wierzchołka i jest prostopadła do podstawy.

Prostopadła w połowie podstawy przechodzi przez wierzchołek i połówi kąt u wierzchołka.

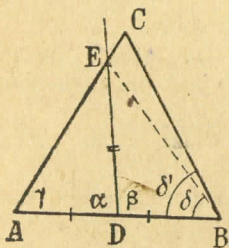


Fig. 76.

Proste dowody tych twierdzeń wynikają z przystawania, jedynie ostatnie twierdzenie udowadnia się nie wprost, w następujący sposób:

Czynimy założenie (fig. 76):

$AC = BC$ ,  $AD = BD$  i  $\alpha = \beta = 90^\circ$ .

Gdyby prostopadła  $DE$  nie trafiła wierzchołka, tylko bok, n. p.  $AC$ , to łącząc  $E$  z  $B$  otrzymalibyśmy  $ADE \cong BDE$  (I); więc musiałoby być  $\gamma = \delta$ , a to niemożliwe, bo  $\gamma = \delta'$ ,

a  $\delta$  jest przecież mniejsze od  $\delta'$ . Tak samo nie może linia  $DE$  trafić między  $B$  i  $C$ , musi więc trafić w punkt  $C$ , a wtedy już z przystawania wynika połowienie kąta u wierzchołka.

## § 29. Utwory symetryczne.

Figury takie, jak dwie części trójkąta równoramiennego, powstałe przez wykreślenie wysokości, spotykamy często w geometrii idealnej i praktycznej. Są to figury przystające, ale części równe następują po sobie w obydwu figurach w odwrotnym porządku. Figury takie nazywają się: **względem siebie symetryczne**. Figury, dające się rozłożyć na symetryczne względem siebie części, nazywamy **utworami symetrycznymi**. Linję prostą, dzielącą figurę symetryczną na dwie części względem siebie symetryczne, nazywamy **osią sy-**

metrii tej figury lub symetryczną figurę. — N. p. w trójkącie równoramiennym osią symetrii jest wysokość. (Figur symetrycznych używa się często do ornamentów).

Aby do jakiejś figury (n. p. I na fig. 77) znaleźć symetryczną względem niej, używamy następującej konstrukcji: wybieramy dowolną

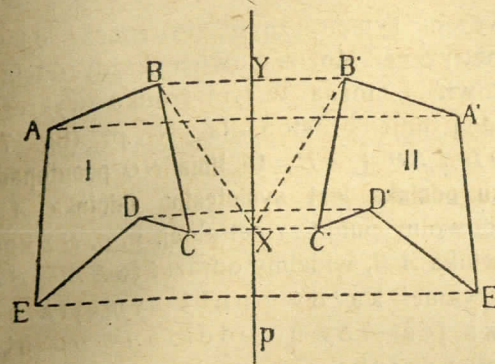


Fig. 77.

prostą  $p$  za oś symetrii. Z punktów  $A, B, C, D, E$  danej figury I kreślimy linie prostopadłe do  $p$  i przedłużamy je poza linję  $p$  o takie same odcinki do punktów  $A', B', C', D', E'$ .

Figura II ma wszystkie boki i kąty równe odpowiednim bokom i kątom figury I, ale w odwrotnym porządku, jest więc istotnie figurą

symetryczną względem I. — Taką figurę nazywamy także obrazem figury I (zwierciadło płaskie wytworzyłoby taki obraz), a konstrukcję tę nazywamy odbiciem figury I w prostej  $p$ . Aby wyka-

zać, że np.  $BC = B'C'$ , łączymy  $B$  i  $B'$  z  $X$  (fig. 78). Z przystawania trójkątów  $BXY$  i  $B'XY$  (I) wynika  $XB = B'X$  i  $\alpha = \beta$ , zatem i ich reszty do  $90^\circ$  są równe  $\gamma = \delta$ .

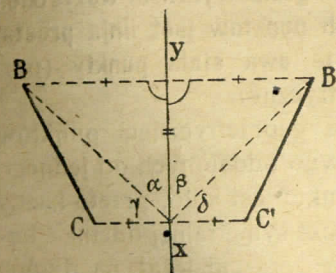


Fig. 78.

Teraz wykazuje się przystawanie  $BCX \cong B'C'X$  (I), więc  $BC = B'C'$ . O takich figurach jak I i II mówimy, że nie tylko są względem siebie symetryczne, ale mają także położenie symetryczne.

Z nauki o przystawaniu wiemy już, że figur symetrycznych względem siebie nie można sprowadzić do nakrycia przez ruch w jednej płaszczyźnie. Można je jednak zawsze sprowadzić do położenia symetrycznego, t. j. do takiego położenia, że punkty odpowiadające sobie w obydwu figurach leżą na tych samych liniach prostopadłych do osi symetrii i w tych samych od niej odległościach, tylko po przeciwnych stronach osi. Wtedy już wystarczy jeden obrót w przestrzeni około tej osi symetrii, aby je sprowadzić do nakrycia. (Por. str. 51).



Widzieliśmy, że do każdego utworu można znaleźć utwór względem niego symetryczny, ale nie każdy utwór jest sam dla siebie figurą symetryczną. N. p. trójkąt równoramienny jest figurą symetryczną, ale trójkąt różnoboczny już nie. (Podaj inne przykłady!)

### § 39. Symetralna odcinka.

Każdy odcinek jest utworem symetrycznym, to znaczy da się podzielić na dwie części symetryczne. Można bowiem każdy odcinek przepołowić i można w tym środku wykreślić doń jedną linię prostą. N. p. (fig. 79)  $AO = OB$  i  $SO \perp AB$ , to linia  $SO$  **prostopadła w środku odcinka jest symetralną odcinka  $AB$** .

Łącząc dowolny punkt symetralnej, n. p.  $S$  z końcami odcinka  $AB$ , widzimy odrazu, że  $SA = SB$ .

Słowami: każdy punkt symetralnej odcinka jest równo oddalony od obu końców odcinka. Odwrotnie: każdy punkt równo oddalony od końców odcinka leży na symetralnej. (Udowodnij!) (IV).

Jest to więc własność charakterystyczna dla linii symetralnej, można po niej odróżnić

symetralną od innych prostych przecinających  $AB$ . Własność tę wyrażamy także w następujący sposób: **miejsce geometryczne wszystkich punktów równo oddalonych od dwóch stałych punktów jest linia prosta, mianowicie symetralna odcinka, łączącego te dwa stałe punkty** (por. str. 34 o znaczeniu słowa: miejsce geometryczne).

Ponieważ z drugiej strony miejscem geometrycznym punktów

równo oddalonych od jednego punktu jest koło, przeto każdy punkt symetralnej odcinka będzie zarazem leżał na dwóch kołach o równych promieniach  $a$  o środkach w punktach  $A$  i  $B$  (fig. 80). W ten sposób można znaleźć dowolnie wiele punktów, leżących na symetralnej. Aby ją jednak zbudować, wystarczą dwa punkty. Zakreślamy więc

z punktów  $A$  i  $B$  dwa równe koła; drugiej pary kół nie potrzeba, ponieważ dwa koła przecinają się już w dwóch punktach (o ile ich

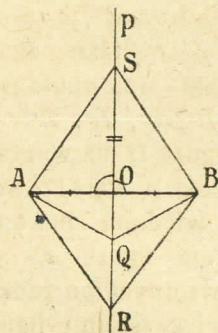


Fig. 79.

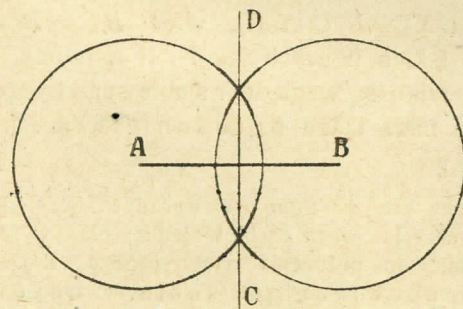


Fig. 80.

promienie są odpowiednio wielkie). Nie trzeba nawet całych kół rysować — wystarczą niewielkie łuki, zawierające punkty przecięcia  $C$  i  $D$ . Linia prosta, łącząca punkty  $C$  i  $D$ , jest symetralną odcinka  $AB$ .

Konstrukcja symetralnej odcinka daje nam zarazem możliwość wykonania wielu innych, pokrewnych zadań.

I tak przy pomocy linii symetralnej można:

- przepołowić dowolny odcinek;
- wykreślić linię prostopadłą w środku odcinka;
- wykreślić linię prostopadłą w dowolnym punkcie na linii prostej i
- wykreślić linię prostopadłą z punktu poza prostą.

Konstrukcje  $a)$  i  $b)$  nie wymagają już bliższych objaśnień. Konstrukcję  $c)$  wykonujemy w następujący sposób:

Od punktu  $A$  (fig. 81), przez który ma przechodzić linia prostopadła, odcinamy na obydwie strony równe odcinki  $BA = AC$  i zakreślamy z punktów  $B$  i  $C$  równe koła (łuki). Ich punkt przecięcia  $D$  jest jednym punktem symetralnej, punkt  $A$  drugim (bo jest równo oddalony od końców odcinka  $BC$ ). Linia  $DA$  jest żadaną prostopadłą.

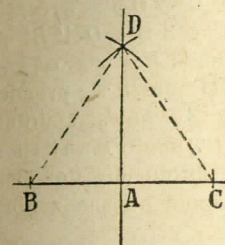


Fig. 81.

Aby wykonać konstrukcję  $d)$ , uważamy dany punkt  $A$  (fig. 82) poza prostą  $p$  za jeden punkt symetralnej. Z tego punktu — jako środka — zataczamy koło, przecinające prostą  $p$  w dwóch punktach  $B$  i  $C$ , równo oddalonych od  $A$ .

Z punktów  $B$  i  $C$  zataczamy jeszcze dwa równe łuki i otrzymujemy drugi punkt symetralnej  $D$ . Linia  $AD$  jest żadaną prostopadłą z punktu  $A$  do  $p$ .

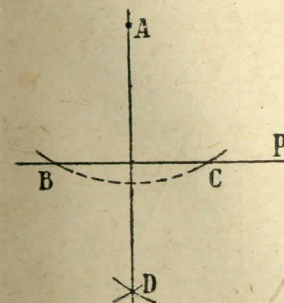


Fig. 82.

Te trzy zadania: kreślenie symetralnej odcinka, prostopadłej w dowolnym punkcie na prostej i prostopadłej z punktu poza prostą nazywamy zadaniami konstrukcyjnymi zasadniczymi. Przy pomocy tych konstrukcyj można wykonać już wiele innych bardziej zawiłych zagadnień, o czym

będzie mowa w osobnym ustępie.

Przy pomocy linii symetralnej odcinka możemy znacznie uprościć ruch, jaki należy wykonać, aby sprowadzić do nakrycia figury przystające (z zach-



waniem tego samego porządku równych części). Wykazaliśmy, że wystarczy wykonać jeden ruch postępowy i jeden obrót. Obecnie wykażemy, że można przez sam obrót, bez przesuwania równoległego, sprowadzić figury przystające do nakrycia lub przez samo przesunięcie równoległe, jeżeli odpowiednie boki są równoległe.

Drugą część twierdzenia udowodniliśmy już przy ruchu postępowym; dla dowodu pierwszej części weźmy najpierw dwa odcinki równe, dowolnie umieszczone na płaszczyźnie, n. p.  $AB$  i  $A'B'$  (fig. 83). Poprowadźmy symetralne odcinków  $AA'$  i  $BB'$  (nie trzeba nawet rysować tych odcinków w całości — wystarczy ich punkty końcowe). O ile  $AA'$  nie jest  $\parallel$  do  $BB'$ , to symetralne przetną się, n. p. w punkcie  $O$ . Wykażemy, że przez obrót około tego punktu  $O$  można sprowadzić  $A'B'$  do nakrycia z  $AB$ . Dla dowodu połączmy  $O$  z  $A$ ,  $B$ ,  $A'$  i  $B'$ . Ponieważ  $O$  leży na symetralnej odcinka  $AA'$ , to  $OA = OA'$ , promień  $OA$  powstał więc przez obrót z  $OA'$ , tak samo  $OB = OB'$ , wreszcie  $AB = A'B'$ , więc trójkąty  $OAB$  i  $OA'B'$  są przystające. Stąd  $\alpha = \alpha'$ , więc i  $\alpha + x = \alpha' + x$  a to znaczy, że o taki sam kąt obrócił się promień  $OA'$ , co i  $OB'$ , odcinek więc  $AB$  powstał istotnie przez obrót odcinka  $A'B'$  około punktu  $O$  o kąt  $\alpha + x^*$ ). Zupełnie tak samo znajduje się środek obrotu dla dowolnej figury, jeżeli jeden jej odcinek ma mieć po obrocie położenie podane z góry.

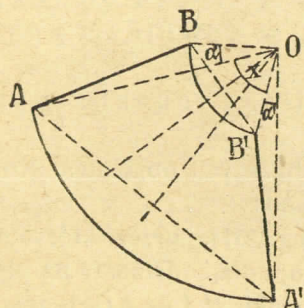


Fig. 83.

### § 31. Symetralna kąta (dwusieczna kąta).

Podobnie jak odcinek, tak i każdy kąt jest utworem symetrycznym. Oś symetrii kąta (symetralną kąta) jest linja połowiąca kąt, czyli dwusieczna kąta. Istotnie, jeżeli  $\alpha = \beta$  (fig. 84), to każdy

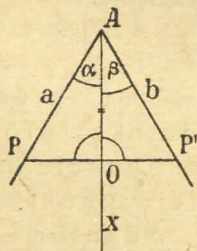


Fig. 84.

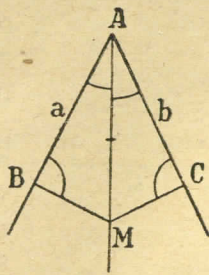


Fig. 85.

punkt  $P$  na jednym ramieniu ma na drugim ramieniu punkt  $P'$  odpowiedni, leżący na linii prostopadłej do linii  $AX$  i w takiej samej odległości na prawo od osi  $AX$ , w jakiej  $P$  leży na lewo. Jeżeli

\*) Gdyby  $AA' \parallel BB'$ , to punktem obrotu  $O$  może być każdy punkt symetralnej boku  $AA'$  lub  $BB'$ . ( $ABB'A'$  jest wtedy trapezem równoramiennym).

bowiem z  $P$  poprowadzimy prostopadłą  $PP'$ , to otrzymamy dwa trójkąty przystające:  $AOP \cong AOP'$  (II) a więc  $PO = P'O$ .

Kreśląc z dowolnego punktu symetralnej (fig. 85) odcinki prostopadłe do ramion:  $MB \perp a$  i  $MC \perp b$ , czyli odległości punktu  $M$  od ramion, spostrzegamy, że te odległości są równe, albowiem trójkąty  $MAB$  i  $MAC$  przystają według (II) przypadku. Odwrotnie: jeżeli jakiś punkt jest równo oddalony od obu ramion kąta, to leży na jego symetralnej (III). Jest to własność charakterystyczna dla symetralnej kąta: żadna inna linja tej własności nie ma. Wypowiadamy to także tak: **miejszem geometrycznym wszystkich punktów równo oddalonych od obydwu ramion kąta jest symetralna tego kąta.**

Na tej podstawie możnaby zbudować symetralną każdego kąta. Trzebaby użyć linii równoległych do ramion kąta w równych odstępach od ramion (jako miejsc geometrycznych punktów równo oddalonych od jednej linii prostej).

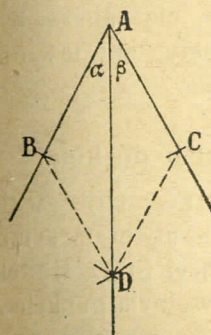


Fig. 86.

Znajdziemy jednakże wygodniejszą konstrukcję, opierając się na przystawianiu trójkątów. Na ramionach kąta  $A$  (fig. 86) odcinamy równe odcinki  $AB$  i  $AC$  a z punktów  $B$  i  $C$  zataczamy znowu równemi promieniami łuki  $BD$  i  $CD$ . Łatwo okazać, że linja  $AD$ , łącząca wierzchołek kąta z punktem przecięcia się łuków  $D$ , jest symetralną kąta, albowiem:  $ADB \cong ADC$  według (IV) przypadku, a więc i kąty są równe:

$$\alpha = \beta.$$

Jest to czwarte zasadnicze zadanie konstrukcyjne (połowienie kąta).

### § 32. Ogólniejsze rodzaje symetrii.

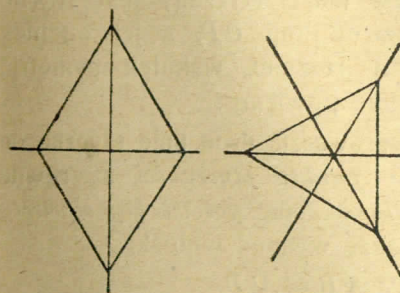


Fig. 87.

Istnieją utwory geometryczne, posiadające więcej osi symetrii, n. p. dwa trójkąty równoramienne o wspólnej podstawie i o równych ramionach posiadają **dwie osie symetrii** (fig. 87); trójkąt równoboczny ma **trzy osie symetrii** (fig. 87), później zaś poznamy utwory, mające kilka osi symetrii. Koło posiada nieskończenie wiele



osi symetrii, mianowicie: *każda linia prosta przechodząca przez środek koła jest jego osią symetrii.* (Udowodnij!)

Oprócz symetrii osiowej istnieje jeszcze t. zw. symetria środkowa. Dwie figury są środkowo symetryczne, jeżeli ich punkty odpowiednie leżą na tych samych liniach prostych, przechodzących przez jeden punkt i w równych odległościach od tego punktu, ale po przeciwnych stronach (fig. 88). Takie figury są przystające (z zachowaniem tego samego porządku równych części) i dadzą się sprowadzić do nakrycia przez obrót w płaszczyźnie o  $180^\circ$ . (Udowodnij przystawanie!) N. p. trójkąty  $ABC$  i  $A'B'C'$  na fig. 88. Punkt  $S$  zowie się środkiem symetrii. Dwie figury symetryczne względem osi nie muszą być symetryczne względem punktu, ani też odwrotnie.

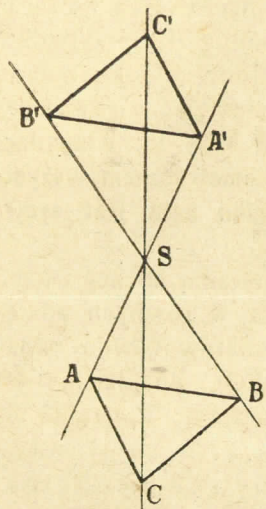


Fig. 88.

### § 33. Zastosowanie symetrii do koła.

Symetrii używa się w geometrii często do dowodzenia twierdzeń. Wiedząc n. p., że koło jest utworem symetrycznym względem każdej linii prostej, przechodzącej przez środek, zbadamy własności stycznych koła. Wykreślmy w dowolnym punkcie  $A$  koła styczną i poprowadźmy przez środek linię  $OP$  nierównoległą do stycznej. Ponieważ linia  $OP$  jest osią symetrii koła, przeto i pod nią znajdzie punkt  $A'$  leżący symetrycznie względem  $A$  na tem samem kole. Prosta  $PA'$  wskutek symetrii jest także styczną, jest równo odchylona od linii  $OP$ , a jej odcinek  $PA' = PA$  również wskutek symetrii.

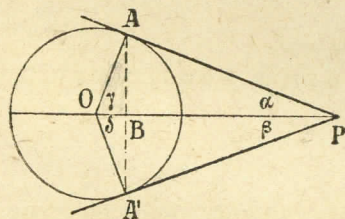


Fig. 89.

Zbierając te wnioski w jedno twierdzenie powiemy:

**Z punktu poza kołem dadzą się poprowadzić dwie linie styczne do koła; ich odcinki od tego punktu do punktu styczności są równe a prosta, łącząca dany punkt ze środkiem koła, połowi kąt zawarty między stycznymi.** Z symetrii można także wysnuć wnioski:

$$\sphericalangle \gamma = \delta, AA' \perp OP, AB = A'B.$$

Wypowiedz te twierdzenia!

Kąt  $\sphericalangle APA'$  zawarty między stycznymi nazywa się kątem widzenia koła z punktu  $P$ . Im więcej się oddalamy od koła, tem mniejszy jest ten kąt widzenia a równocześnie styczne dążą do położenia równoległego. (Dowód polega na twierdzeniach § 18).

Ogólnie w geometrii nazywamy kątem widzenia jakiegoś utworu geometrycznego z jakiegoś punktu kąt, zawarty między skrajnymi promieniami pęku, wychodzącego z  $P$  do wszystkich punktów tej figury.

Aby otrzymać konstrukcyjnie styczne z punktu poza kołem, opieramy się na tem, że kąty  $OAP$  i  $OA'P$  są proste (por. § 24 b). Jeżeli zakreślimy na  $OP$  (fig. 90) jako średnicy półkoło, to każdy kąt, wspierający się na tem półkolu jest prosty. Z pomiędzy tych kątów wybieramy jednak ten, którego wierzchołek leży zarazem na kole  $k$ . Tak samo postępujemy z półkolem, leżącym pod osią  $OP$ . Punkty przecięcia  $A$  i  $A'$  koła  $K$  z kołem  $k$  są więc szukanymi punktami styczności, a proste  $PA$  i  $PA'$  stycznymi.

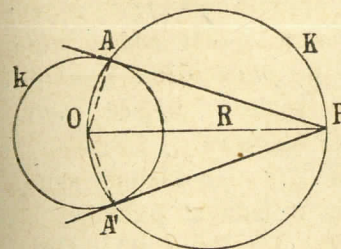


Fig. 90.

Cięciwę  $AA'$  (fig. 89) nazywamy także biegunową punktu  $P$ , a punkt  $P$  biegunem tej prostej. Jeżeli biegun

zbliża się do koła, to biegunowa oddala się od środka, zbliża się więc także do obwodu koła. Jeżeli biegun padnie na obwód koła, to jego biegunowa stanie się styczną w tym punkcie. (Wykonaj odpowiednie rysunki!).

### § 34. Koło opisane na trójkącie.

Jeżeli wierzchołki jakiegoś wielokąta leżą na obwodzie koła, a boki są cięciwami, to ta figura nazywa się wpisaną w koło, a koło jest opisane na tej figurze.

Wykażemy, że na każdym trójkącie można opisać koło.

Wykreślmy w tym celu symetralne dwóch boków trójkąta, linie  $OD$  i  $OE$  (fig. 91). Punkt, w którym się one przecinają, (a czy muszą się przeciąć?) jest równo oddalony od punktów  $A$ ,  $B$  i  $C$ , jako punkt leżący na symetralnych boków

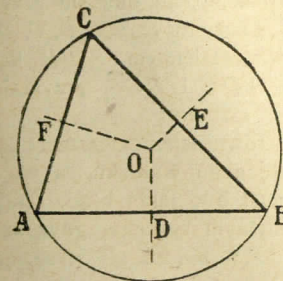


Fig. 91.



$AB$  i  $BC$ . Każdy zaś punkt równo oddalony od punktów  $A$  i  $C$  leży na symetralnej odcinka  $AC$ , zatem przez punkt  $O$  musi przechodzić także trzecia symetralna  $OF$ . Jeżeli teraz z środka  $O$  zatoczmy koło promieniem  $OA$ , to także punkty  $B$  i  $C$  leżą na tem kole, ponieważ  $OA = OB = OC$ . Dowód ten podaje zarazem konstrukcję koła opisanego. Środkiem koła opisanego jest punkt, w którym się przecinają symetralne boków trójkąta. Jest to pierwszy *osobliwy punkt trójkąta*. W dalszej nauce spotkamy takich szczególnych punktów więcej. Twierdzenie to dowodzi zarazem, że przez trzy punkty można tylko jedno koło wykreślić, czyli: *koło jest dokładnie wyznaczone zapomocą trzech punktów* podobnie, jak linja prosta zapomocą dwóch.

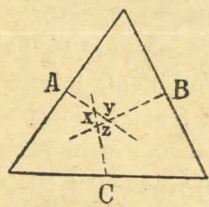


Fig. 92.

Opisanie koła na trójkącie jest zadaniem równoważnem z następującem zagadnieniem, spotykanem często w geometrii praktycznej: *znaleźć punkt równo oddalony od trzech danych na płaszczyźnie punktów*, n. p. na mapie Polski znaleźć miejsce równo oddalone od Poznania, Warszawy i Lwowa.

Gdyby konstrukcja była niedokładna, symetralne nie zeszłyby się w jednym punkcie, ale utworzyłyby mały trójkąt  $XYZ$  (fig. 92). Opierając się jednak na naszym twierdzeniu, poprawilibyśmy odpowiednio ten rysunek. Widzimy tu, jak geometria idealna pozwala prostować błędne nieraz wyniki geometrii praktycznej, poprawiać niedokładność rysunku.

*Uwaga:* Na niedokładności rysunku polegają niektóre „sofizmaty geometryczne”, t. j. takie błędne twierdzenia, których dowód ma pozory prawdziwości, n. p. fałszywy dowód na to, że kąt prosty równa się rozwartemu:

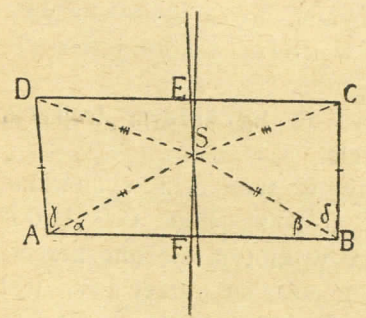


Fig. 93.

Przy końcach odcinka  $AB$  odmierzymy kąt prosty  $B$  i rozwarty  $A$ . Odcinamy na ramionach tych kątów  $BC = AD$  i wykreślamy symetralne odcinków  $AB$  i  $DC$ . Przypuśćmy, że one się przeczną w punkcie  $S$ . Łączymy  $S$  z  $A, B, C, D$ . W trójkącie równoramiennym  $SAB$  kąt  $\alpha = \beta$ . Trójkąty  $ADS$  i  $BCS$  przystają (IV), więc  $\gamma = \delta$ , a zatem:  $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ , czyli kąt prosty  $B$  równa się rozwartemu  $A$ . Doszliśmy do błędnego wniosku, a więc w dowodzeniu musi być jakiś błąd. Cały błąd polega na mylnym rysunku, gdyż symetralne  $ES$  i  $FS$  muszą się przeciąć pod linią  $AB$  i to tak daleko, że  $SD$  padnie poza pole kąta  $BAD$ .

### § 35. Koło wpisane w trójkąt.

Jeżeli wszystkie boki jakiegoś wielokąta są stycznymi koła, to figura nazywa się *opisana na kole*, a *koło jest wpisane* w tę figurę. Wykażemy, że w każdy trójkąt da się wpisać koło.

Wykreślmy w tym celu symetralne dwóch kątów, n. p.  $\sphericalangle C$  i  $\sphericalangle B$  na fig. 94. Punkt  $O$ , w którym się one przecinają, jest równo oddalony od boków  $AC$  i  $BC$ , i od boków  $AB$  i  $BC$ , czyli od wszystkich trzech boków trójkąta, a więc także od  $AC$  i  $AB$ . Stąd widzimy, że punkt  $O$  leży także na symetralnej trzeciego kąta  $A$ , a więc symetralne trzech kątów przecinają się w jednym punkcie. Jeżeli z tego punktu, jako z środka, zakreślimy koło promieniem  $OD$ , równym odległości punktu  $O$  od wszystkich boków, to wszystkie boki będą *stycznymi* tego koła. Dowód ten podaje zarazem konstrukcję koła wpisanego. Środkiem koła wpisanego jest punkt, w którym się przecinają symetralne kątów trójkąta. Jest to drugi *osobliwy punkt trójkąta*. Punkt ten nie nakrywa się ze środkiem koła opisanego, chyba w trójkącie równobocznym!

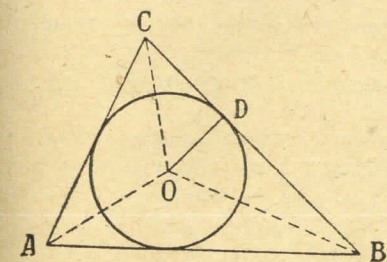


Fig. 94.

Przykład sofizmu: Na podstawie fig. 95, w której  $CE$  ma być symetralną kąta  $C$  a  $DE$  symetralną boku  $AB$ , wykazać, że w każdym trójkącie  $AC = BC$ , t. j. że każdy trójkąt jest równoramienny. (Zacząć od  $CHE \cong CFE$ ).

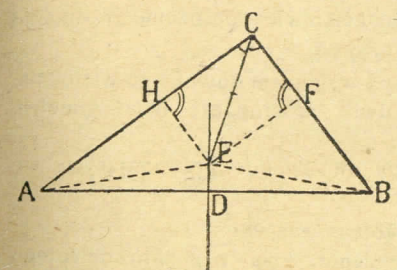


Fig. 95.

### Cwiczenia V

- § 28. 1. Udowodnić odwrócenia twierdzeń z § 28.
2. Udowodnić, że prostopadła z środka koła do cięciwy połowi ją.
- § 29—30. 3. Wykazać, że symetralna cięciwy przechodzi przez środek koła.
4. Opierając się na poprzednim twierdzeniu znaleźć środek koła, z którego mamy podany tylko łuk.
5. Wykazać, że prosta łącząca wierzchołki dwóch trójkątów równoramiennych o wspólnej podstawie jest symetralną podstawy i symetralną kątów u wierzchołków.
6. Wykreślić figurę symetryczną do dowolnego trójkąta.
7. Dwa trójkąty symetryczne, ale leżące w położeniu dowolnem, niesymetrycznem, sprowadzić do położenia symetrycznego przez ruch.



8. Dany odcinek podzielić na dwie cztery, ośm równych części przy pomocy cyrkla i linij (bez podziałki).

9. Dowolny łuk przepołowić.

10. Wykreślić trzy wysokości trójkąta.

11. Znaleźć odległość punktu od prostej konstrukcyjnie.

12. Przy pomocy cyrkla wykreślić w kilku punktach prostej linie prostopadłe i odciąć na nich równe długości. Końce połączyć! Jaka linja powstanie?

13. Boki dowolnego trójkąta przepołowić i środki boków połączyć z przeciwległymi wierzchołkami.

14. Dowolny odcinek sprowadzić do nakrycia z drugim równym odcinkiem przez jeden obrót.

15. Dwa trójkąty przystające (z zachowaniem tego samego porządku równych części) ale leżące w dowolnych miejscach płaszczyzny, nierównolegle, sprowadzić przez jeden obrót do nakrycia.

§ 31. 16. Dowolny kąt przepołowić.

17. Znaleźć konstrukcyjnie kąty:  $45^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $22^\circ 30'$ ,  $7^\circ 30'$ .

18. Dowolny kąt podzielić na ośm równych części.

19. Wykreślić symetralną kąta przy pomocy linii równoległych.

20. Wykreślić koło o promieniu 4 cm, stykające się z ramionami dowolnego kąta. Wykonać tę konstrukcję przy pomocy samych linii równoległych.

§ 32. 21. Z kilku równych kół ułożyć figury, mające dwie, trzy, cztery osie symetrii.

22. Wykazać, że dwa różne koła w jakimkolwiek położeniu posiadają jedną oś symetrii (są więc utworem symetrycznym).

23. Wykreślić figurę środkowo-symetryczną względem dowolnego wielokąta.

24. Wykazać, że figura posiadająca dwie prostopadłe osie symetrii, posiada także środek symetrii.

25. Wykazać, że wspólna oś symetrii dwóch kół przecinających się jest symetralną wspólnej cięciwy.

§ 33. 26. Wykreślić styczne z punktu poza kołem leżącego.

27. Znaleźć kąt widzenia koła o promieniu 3 cm z punktu odległego o 4 cm od koła (zmierzyć).

28. Wykreślić biegun dowolnej cięciwy koła.

29. Dla kilku punktów linij prostej, leżącej poza kołem, znaleźć biegunowe. Co spostrzeżemy?

30. Przez punkt wewnątrz koła leżący poprowadzić kilka cięciw i wykreślić ich bieguny. Co spostrzeżemy?

31. Jaki byłby kąt widzenia kuli ziemskiej, gdybyśmy się wznieśli na wysokość równą promieniowi ziemi? (Zmierzyć na figurze!)

§ 34–35. 32. Opisać koło na dowolnym trójkącie.

33. Znaleźć punkt równo oddalony od trzech danych punktów.

34. Opisać koło na trójkącie ostrokątnym, prostokątnym i rozwartokątnym. Jakie prawo spostrzeżemy?

35. W dowolny trójkąt wpisać koło.

36. Wykreślić koło styczne do trzech danych prostych. Czy to zagadnienie da się zawsze rozwiązać?

37. W dowolny trójkąt wpisać koło, następnie wpisać koło mniejsze stykające się z tem kołem i z dwoma bokami trójkąta, potem koło stykające się z tem nowym kołem i z dwoma bokami i t. d., dokąd pozwoli dokładność rysunku.

38. W dowolny wycinek koła wpisać koło (użyj do pomocy stycznej!)

39. W trójkąt prostokątny wpisać koło i opisać na nim koło.

40. W trójkąt rozwartokątny wpisać koło i opisać na nim koło.

41. Przedłużyć boki trójkąta poza wierzchołki i wpisać koła w otwarte pola zawarte między każdym bokiem i przedłużeniami dwóch innych boków.

42. Wykazać, że punkt przecięcia się symetralnych dwóch kątów zewnętrznych trójkąta jest równo oddalony od trzech linii prostych, na których leżą boki trójkąta.

## Rozdział VI

### Cztery linie proste. Czworoboki

#### § 36. Podział czworoboków.

Widzieliśmy, że trzy linie proste na płaszczyźnie mogą mieć cztery rozmaite położenia względem siebie. O wiele większą różnorodność położen przedstawiają cztery proste. (Wymień i wykreśl wszystkie możliwe typowe położenia!) Z pomiędzy tych utworów tylko niektóre przedstawiają dla nas szczególnie interes.

I tak zajmiemy się najpierw najogólniejszym przypadkiem, t. j. czterema prostymi, z których żadne trzy nie schodzą się w jednym punkcie ani nie są do siebie równoległe.

Taki utwór geometryczny nazywamy czworobokiem zupełnym. Ma on sześć wierzchołków. Linje, łączące wierzchołki, które leżą na różnych bokach, nazywamy przekątniami. Czworobok zupełny ma trzy przekątne (kreskowane linje!). W geometrii elementarnej zajmujemy się tylko czworobokiem niezupełnym, to znaczy albo częścią  $ABDF$ , albo też częścią  $AEDC$  z opuszczeniem odcinków  $FD$  i  $BD$ . Wyłączamy zaś z naszych rozważań czworoboki takie, jak  $FEDBC$ , w których boki przeciwległe przecinają się ze sobą.

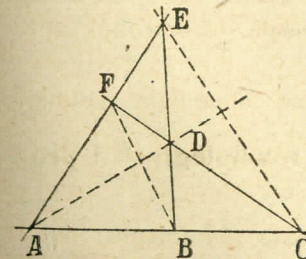


Fig. 96.

Utworem geometrycznym wzajemnym\*) do czworoboku zupełnego jest

\*) Dwa utwory geometryczne nazywają się wzajemne, jeżeli punktem jednej figury odpowiadają linie proste drugiej, a prostym pierwszej figury punkty drugiej. Wtedy linjom prostym przecinającym się w jednym punkcie odpowiadają w drugiej figurze punkty leżące na jednej linij prostej.



czworokąt zupełny (lub czworopunkt). Jest to utwór geometryczny, składający się z czterech punktów i wszystkich linii prostych, łączących po dwa z tych punktów.

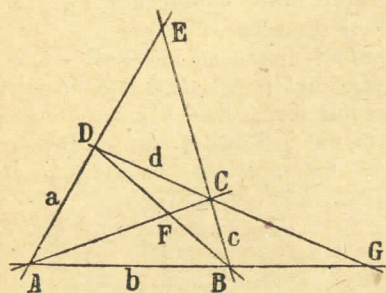


Fig. 97.

Ma on więc sześć boków i trzy t. zw. punkty przekątne, to znaczy punkty przecięcia się przeciwległych boków ( $EF G$ ) (fig. 97). Z takiego czworokąta zupełnego rozważa się w geometrii elementarnej tylko czworokąt niezupełny, zamknięty bokami  $a, b, c, d$ . W geometrii elementarnej nie robimy żadnej różnicy między czworobokiem a czworokątem. Jeden i drugi ma

cztery boki, cztery wierzchołki (kąty) i dwie przekątne.

Utwór geometryczny złożony z czterech odcinków, zamykających część płaszczyzny (ale tylko jedną część), nazywamy czworobokiem lub czworokątem. Prosta, łącząca przeciwległe wierzchołki, nazywamy przekątnią.

W każdym czworokącie **suma kątów wewnętrznych wynosi  $360^\circ$** , ponieważ każdy można rozłożyć zapomocą przekątnej na dwa trójkąty (po  $180^\circ$  suma kątów każdego trójkąta).

Stosownie do wzajemnego położenia czterech prostych, ograniczających czworobok, rozróżniamy trzy rodzaje czworoboków:

1. Jeżeli obydwie pary boków są liniami równoległymi, czworobok nazywa się **równoległobokiem**.
2. Jeżeli tylko jedna para boków jest równoległa, czworobok nazywa się **trapezem**.
3. Jeżeli żadna para boków nie jest równoległa, czworobok nazywa się **trapezoidem**.

Każdy z tych rodzajów podzielimy jeszcze na pewne gatunki.

### § 37. Równoległoboki. Kąty o ramionach równoległych i prostopadłych.

Równoległobok powstaje, jeżeli dwie proste równoległe:  $c \parallel d$  przetniemy drugą parą prostych równoległych:  $a \parallel b$ . Odległość boków równoległych (n. p.  $c, d$ ) nazywamy wysokością równoległoboku (należącą do podstawy  $c$  lub  $d$ ). Opierając się na własnościach dwóch linii równoległych przeciętych trzecią spostrzegamy, że sąsiednie kąty równoległoboku spełniają się do  $180^\circ$  (jako kąty jednostronne). Wobec tego: **przeciwległe kąty równo-**

**ległoboku są równe**, albowiem kątowi  $\alpha$  i kątowi  $\beta$  brakuje tyle samo do  $180^\circ$ , mianowicie różnią się o kąt  $\delta$  od  $180^\circ$ ; tak samo  $\gamma = \delta$ , jako uzupełnienia do  $180^\circ$  tego samego kąta  $\alpha$ .

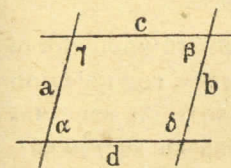


Fig. 98.

Twierdzenie to można odwrócić: *jeżeli w jakimś czworoboku kąty przeciwległe są równe, to czworobok jest równoległobokiem* (to i boki przeciwległe są równoległe). Dowód: jeżeli  $\alpha = \beta$  i  $\gamma = \delta$ , to  $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ , a więc muszą wynosić po  $180^\circ$ . Jeżeli zaś kąty jednostronne wynoszą po  $180^\circ$ , to linie

przecięte są równoległe:  $c \parallel d$ . Tak samo wykaże się o bokach  $a$  i  $b$ .

Równość kątów przeciwległych równoległoboku jest więc jego własnością charakterystyczną. To znaczy: warunkiem koniecznym a zarazem wystarczającym, aby jakiś czworokąt był równoległobokiem, jest równość obydwu par kątów przeciwległych.

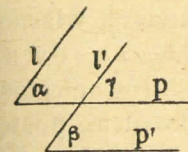


Fig. 99.

Kąty przeciwległe równoległoboku mają ramiona parami równoległe. Nasuwa się pytanie, czy zawsze kąty o ramionach parami równoległych są sobie równe? Jeżeli ramiona takich kątów odpowiednio przedłużymy do przecięcia się z drugą parą ramion, to albo otrzymamy równoległobok, albo jedną z figur 99.

W figurze pierwszej, tak jak w równoległoboku, jest prawe ramię równoległe do prawego, lewe do lewego. Kąt  $\alpha = \gamma$  jako kąty odpowiednie,  $\beta = \delta$  z tej samej przyczyny, więc  $\alpha = \beta$ .

W figurze drugiej jest lewe ramię równoległe do prawego:  $l \parallel p'$ , a prawe do lewego:  $p \parallel l'$ . Kąt  $\alpha = \gamma$ , ale  $\gamma + \beta = 180^\circ$ , więc  $\alpha + \beta = 180^\circ$ . Stąd wynika następujące twierdzenie:

**Kąty, których ramiona są zgodnie równoległe, są równe, kąty zaś, których ramiona są niezgodnie równoległe, spełniają się do  $180^\circ$ .**

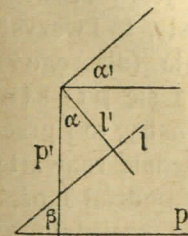


Fig. 100.

Jeżeli mamy dwa kąty  $\alpha$  i  $\beta$  o ramionach zgodnie prostopadłych (fig. 100) i obrócimy jeden z kątów, n. p.  $\alpha$  około jego wierzchołka o  $90^\circ$  (konstrukcja!), to otrzymamy kąt  $\alpha'$  o ramionach zgodnie równoległych, a więc równy kątowi  $\beta$ .

Kąt ten musiał więc i przed obrotem być równy kątowi  $\beta$ , ponieważ przy obrocie wielkość kąta nie ulega zmianie. Stąd często używane twierdzenie: **kąty, których ramiona są zgodnie**



prostokątne, są równe. Zupełnie tak samo można dowieść, że kąty, których ramiona są nieznacznie prostokątne, spełniają się do  $180^\circ$ .

*Uwaga:* Żadne z tych twierdzeń nie da się odwrócić.

Podobny związek, jaki istnieje między kątami równoległoboku, istnieje także między bokami. Przekątnia dzieli każdy równoległobok na dwa przystające trójkąty (fig. 101). (Udowodnij!) A więc także boki przeciwległe równoległoboku są równe:

$$a = b, c = d.$$

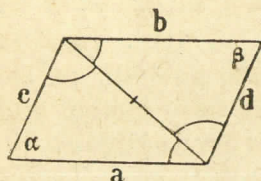


Fig. 101.

Jest to także własność charakterystyczna dla równoległoboku (udowodnij!) [IV]. Własność tę wyrażamy także twierdzeniem: odcinki prostych równoległych odcięte drugą parą prostych równoległych są sobie równe. (Mniej poprawnie wypowiada się nieraz to twierdzenie tak: równoległe między równoległymi są sobie równe). Podobnie charakterystyczną własnością równoległoboku jest: dwa boki przeciwległe są równe i równoległe, stąd już bowiem wynika równość i równoległość drugiej pary boków (udowodnij!). W zastosowaniu do ruchu postępowego możemy ostatnie twierdzenie także tak wypowiedzieć: przy ruchu postępowym odcinek zakreśla albo linię prostą, albo równoległobok.

Czwartą własnością charakterystyczną równoległoboków jest: przekątnie równoległoboku połowią się.

Z przystawania trójkątów I. i II. na fig. 102 (według drugiego przypadku przystawania) wynika istotnie, że  $DO = OB$  i  $AO = OC$ . Udowodnij odwrócenie tego twierdzenia!

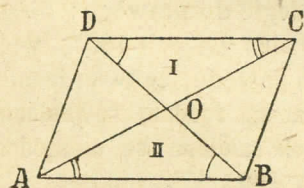


Fig. 102.

*Podział równoległoboków.* Jeżeli w równoległoboku jeden kąt jest prosty, to i wszystkie inne muszą być proste (dlaczego?). Taki równoległobok nazywa się prostokątny. Jeżeli jeden kąt jest ostry, to i przeciwległy jest ostry, a sąsiednie rozwarte.

Równoległobok taki nazywa się skośnokątny. Inny podział można przeprowadzić ze względu na boki. Jeżeli dwa boki sąsiednie są sobie równe, to i pozostałe dwa są im równe; taki równoległobok nazywa się równoboczny. Jeżeli dwa sąsiednie boki są nierówne, równoległobok nazywa się różnoboczny. Mamy więc cztery możliwe kombinacje tych własności:

1. Równoległobok prostokątny i równoboczny nazywa się kwadratem. 2. Równoległobok skośnokątny i równoboczny nazywa się rombem. 3. Równoległobok prostokątny i różnoboczny nazywa się prostokątem. 4. Równoległobok skośnokątny i różnoboczny nazywa się romboidem.

Łatwo spostrzec, że kwadrat ma cztery osie symetrii, prostokąt i romb dwie, a romboid niema żadnej. (Por. fig. 103).

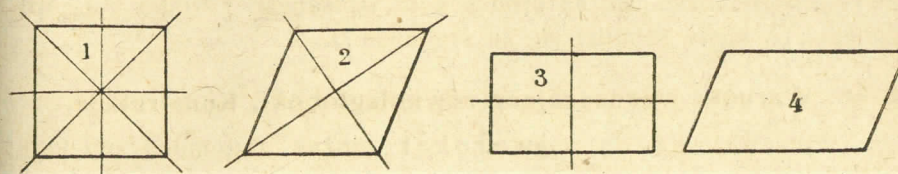


Fig. 103.

Te cztery gatunki równoległoboków można także odróżnić według własności przekątni. I tak: w równoległobokach prostokątnych przekątnie nie tylko się połowią, ale są równe; w równoległobokach zaś równobocznych przekątnie są prostokątne do siebie. Odwrotnie: jeżeli w równoległoboku przekątnie są równe, równoległobok jest prostokątny; jeżeli są prostokątne, równoległobok jest równoboczny. (Dowody tych twierdzeń wynikają z przystawania odpowiednio dobranych trójkątów).

Jako zastosowanie własności równoległoboków wykażemy, że trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Twierdzimy więc, że w trójkącie  $ABC$  linie  $CD$ ,  $BF$  i  $AE$  przecinają się w jednym punkcie (fig. 104). Dla dowodu wykreślmy przez trzy wierzchołki trójkąta linie równoległe do jego boków. W tym większym trójkącie linie  $CD$ ,  $BF$ ,  $AE$  są symetralnami boków, a więc muszą się przeciąć w jednym punkcie. (Istotnie linia  $CD$  jako prostokątna do  $AB$  musi być prostokątną i do drugiej linii równoległej, t. j. do  $ML$ ; że ją trafia w środku, to wynika stąd, że  $MC = AB$  jako przeciwległe boki równoległoboku, a także  $CL = AB$ , więc  $MC = CL = \frac{1}{2} ML$ . Tak samo dowodzi się o linii  $AE$  i  $BF$ ).

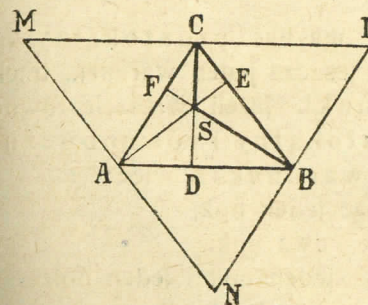


Fig. 104.

Czasem trzeba wysokości przedłużyć poza wierzchołki lub poza ich spodek, aby znaleźć ich punkt przecięcia.



Trójkąt  $ABC$  wraz z wykreślonymi wysokościami ma tę własność, że, jeżeli jeden z punktów  $A, B, C, S$  opuścimy, a z trzech innych utworzymy trójkąt, to punkt opuszczony jest właśnie punktem przecięcia się wysokości tego nowego trójkąta. N. p. gdybyśmy opuścili punkt  $A$ , to trójkąt  $SBC$  ma jako wysokości linie  $ASE, CFA, BDA$  schodzące się w punkcie  $A$ .

Punkt przecięcia się wysokości jest trzecim osobliwym punktem trójkąta, nazywamy go: ortocentrum. Punkt ten leży zwykle gdzieindziej, aniżeli środek koła wpisanego i środek koła opisanego. (A kiedy schodzi się ze środkiem?).

### § 38. Warunki wyznaczające równoległoboki. Konstrukcje.

Ponieważ każdy czworokąt można zapomocą przekątni rozdzielić na dwa trójkąty, przeto do wyznaczenia czworokąta trzeba — zdawałoby się — sześciu warunków: jednakże w tych dwóch trójkątach jest zawsze jeden bok wspólny, wystarczy więc zawsze pięć warunków; a więc i przystawanie czworokątów będzie zapewnione, jeżeli sprawdzimy równość pięciu elementów odpowiednio dobranych i następujących po sobie w tym samym porządku. (Nie wystarczy więc, jeżeli dwa czworoboki mają, n. p. wszystkie cztery boki parami równe\*)!).

Dla równoległoboków wystarczają trzy warunki, ponieważ składają się z dwóch przystających trójkątów. (Dwa warunki są zawarte w słowie: równoległobok; pozostają więc trzy). Konstrukcję wykonujemy najczęściej, budując jeden trójkąt i uzupełniając go trójkątem przystającym.

Jeżeli dodamy, że równoległobok ma być prostokątny lub równoboczny, dorzucamy przez to jeszcze jeden warunek, trzeba więc podać jeszcze tylko dwa warunki. Jeżeli wreszcie równoległobok ma być równocześnie i prostokątny i równoboczny, wystarczy podać jeszcze tylko jeden warunek. A więc:

1. kwadrat można zbudować znając jeden bok,
2. prostokąt „ „ „ dwa boki,
3. romb „ „ „ jeden bok i jeden kąt,
4. romboid „ „ „ dwa boki i kąt.

Zamiast tych typowych, najprostszych danych, mogą być podane także inne części, ale zawsze w odpowiedniej liczbie. N. p. dla kwadratu: jedna przekątnia; dla prostokąta: bok i przekątnia, bok

\*) Czworobok złożony z 4 prętów o danych długościach a tak złączonych, że mogą się obracać około wierzchołków czworoboku, może więc zmieniać kształt w przeciwieństwie do trójkąta, który tworzy układ „sztywny“. Dlatego t. zw. belki kratowe, używane np. przy budowie mostów, są złożone z samych krat trójkątnych a nie np. czworokątnych.

i jego kąt z przekątnią, kąt między przekątniami zawarty i jedna przekątnia i t. p.; dla rombu: bok i przekątnia, kąt ostry i przekątnia, dwie przekątnie i t. p.; dla romboidu: dwa boki i przekątnia, dwie przekątnie i kąt między nimi i t. p.

Zbadać związek tych rozmaitych konstrukcyj z przypadkami przystawania trójkątów!

### § 39. Trapez.

Trapezem nazwaliśmy czworobok, w którym dwa boki są równoległe, dwa inne nie. Tu kąty, leżące przy tym samym boku nierównoległym (do żadnego), spełniają się także jak w równoległoboku do  $180^\circ$ , ale kąty przeciwległe już nie są równe. Boki także mogą być dwa a nawet trzy równe, ale cztery nie. Jeżeli boki nierównoległe są równe, trapez nazywa się równoramienny (symetria!).

Bardzo ważną linią jest prosta, łącząca środki boków nierównoległych, czyli linia środkowa trapezu. Ma ona własności podobne, jak linia, łącząca środki dwóch boków trójkąta (por. § 23 koniec) a mianowicie: linia środkowa trapezu jest: 1. równoległa do boków równoległych i jest: 2. ich średnią arytmetyczną (t. j. połową sumy).

Założenie:  $AE = ED, BF = FC$ . Łączymy  $D$  z  $F$  i przedłużamy tę linię aż do przecięcia się z przedłużonym bokiem  $AB$ . Otrzymujemy trójkąty przystające:  $DCF \cong BGF$  (II). Z przystawania wnioskujemy:  $DF = FG$ . Prosta  $EF$  łączy więc środki dwóch boków trójkąta  $AGD$ , a zatem jest równoległa do  $AG$  (według

twierdzenia z § 23) i równa się połowie  $AG$ , t. j.  $s = \frac{a+b}{2}$ .

Ale z przystawania wynika także, że bok  $BG = b$ , więc:

$$s = \frac{a+b}{2}.$$

Do zbudowania

trapezu potrzebne są cztery elementy; piątym warunkiem jest bowiem równoległość jednej pary boków. N. p. wystarczają części  $a, b, a, \gamma$  lub  $a, b, c, d$ . Zwykle buduje się najpierw trójkąt  $ABE$ , którego bok  $BE \parallel DC$  a później uzupełnia się go równoległobokiem  $BECD$ .

Dla trapezu równoramiennego wystarczają trzy warunki.

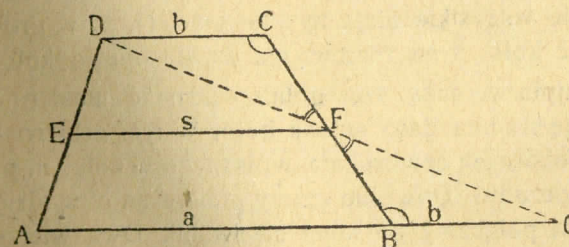


Fig. 105.

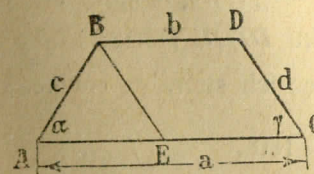


Fig. 106.



### § 40. Trapezoidy. Deltoid.

Trapezoidem nazwaliśmy czworobok, w którym żadna para boków nie jest równoległa. Do konstrukcji trapezoidu potrzeba więc już wszystkich pięciu warunków, o których wspominaliśmy już niejednokrotnie.

Z pomiędzy trapezoidów zasługuje na uwagę: **deltoid**. Jest to czworobok, w którym po dwa boki sąsiednie są równe, a przeciwległe nierówne. Przekątne deltoidu są prostopadłe a jedna z nich jest przepołowiona.

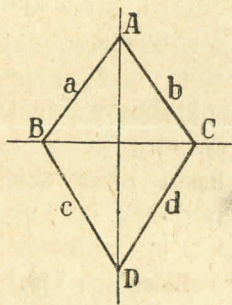


Fig. 107.

Dowód: ponieważ  $a = b$ , to punkt  $A$  leży na symetralnej przekątnej  $BC$  (fig. 107). Ponieważ  $c = d$ , to punkt  $D$  leży także na symetralnej przekątnej  $BC$ . Prosta wyznaczona przez punkty  $A$  i  $D$  jest więc symetralną przekątnej  $BC$ .

Stąd także wynika, że deltoid jest figurą symetryczną, posiada bowiem oś symetrii.

Do konstrukcji deltoidu wystarczą trzy warunki, ponieważ dwa warunki są zawarte w równościach:  $a = b$ ,  $c = d$ .

### § 41. Czworoboki wpisane w koło.

W każdy trójkąt da się wpisać koło i na każdym można opisać koło. Czworoboki już nie wszystkie mają tę własność. N. p. w prostokąt nie da się wpisać koła a na rombie nie da się opisać koła.

Zbadajmy więc najpierw, jaką szczególną własność musi posiadać czworokąt, aby się na nim dało opisać koło. W tym celu rozważmy własności jakiegokolwiek czworokąta wpisanego w koło, n. p. trapezoidu. Dowolne cztery punkty na obwodzie koła połączmy po kolei cięciwami. Dwa wierzchołki przeciwległe połączmy z środkiem koła.

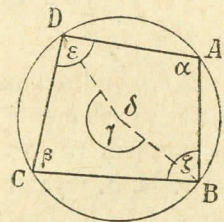


Fig. 108.

$\alpha = \frac{\gamma}{2}$  jako kąt obwodowy, wspierający się na tym samym łuku  $DCB$ . Także:

$\beta = \frac{\delta}{2}$ . Tak samo więc ich sumy są równe.

$$\alpha + \beta = \frac{\gamma + \delta}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Ponieważ zaś suma wszystkich kątów czworokąta  $ABCD$  wynosi  $360^\circ$ , przeto i  $\epsilon + \zeta = 180^\circ$ , czyli  $\alpha + \beta = \epsilon + \zeta$ . Słowami:

w każdym czworokącie w koło wpisanym sumy kątów przeciwległych są sobie równe, mianowicie wynoszą po  $180^\circ$ .

Własność ta jest charakterystyczna, to znaczy, że także odwrotnie: na każdym czworokącie, w którym kąty przeciwległe spełniają się do  $180^\circ$ , da się opisać koło.

Udowodnimy to najszybciej niewprost (fig. 109): gdyby  $\angle C + \angle A = 180^\circ$  i  $\angle D + \angle B = 180^\circ$ , a mimo to czwarty wierzchołek  $A$  nie leżał

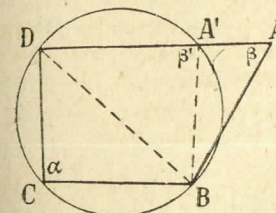


Fig. 109.

na kole, (trzy wierzchołki zawsze można umieścić na obwodzie koła), to jakiś inny punkt  $A'$  boku  $DA$  leżałby na kole. Wtedy jednak według poprzedniego twierdzenia musiałoby być  $\alpha + \beta' = 180^\circ$  a że także według założenia  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , więc mielibyśmy:  $\beta' = \beta$ , a to niemożliwe, bo  $\beta'$  jest kątem zewnętrznym trójkąta  $BA'A$ . Tak samo nie może leżeć  $A$  wewnątrz koła, musi więc leżeć na samym kole. Ośóż na całym czworokącie da się opisać koło.

Z pomiędzy równoległoboków tylko na prostokącie i kwadracie da się koło opisać, z pomiędzy trapezów tylko na trapezie równoramnym.

Do konstrukcji czworokątów, o których wiemy, że się dadzą wpisać w koło, wystarczą cztery warunki: piątym jest równość  $\alpha + \beta = \epsilon + \zeta$ .

### § 42. Czworoboki opisane na kole.

Aby wykryć własność, odróżniającą czworoboki opisane na kole od innych czworoboków, opiszmy na dowolnym kole czworobok.

Wykreślamy w tym celu styczne w czterech dowolnych punktach koła.

Odcinki stycznych z punktu poza kołem do punktów styczności są równe, (por. § 33) więc:

$$\left. \begin{array}{l} a = h \\ f = g \\ e = d \\ b = c \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{stąd } a + b + e + f = h + g + d + c \\ \text{czyli } AB + CD = CB + AD \end{array}$$

to znaczy: w każdym czworokącie opisanym na kole sumy boków przeciwległych są równe. Łatwo wykazać, że warunek ten jest nie tylko konieczny, ale i wystarczający. Innymi słowami: jeżeli w jakimś czworokącie sumy boków przeciwległych są równe, to w ten czworokąt da się wpisać koło.

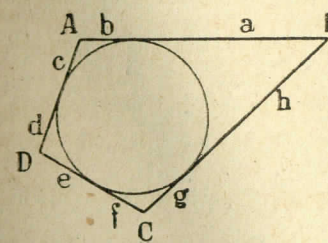


Fig. 110.



Dowód nie wprost: weźmy czworokąt, w którym  $a + b = c + d$ .

Gdyby koło wpisane dotykało tylko trzech boków  $a, d, c$ , a czwarty leżał poza kołem, to z punktu  $A$  poprowadzilibyśmy styczną  $x$ . Wtedy według poprzedniego twierdzenia mielibyśmy:  $a + x = c + d - y$ . Ale zamiast  $c + d$  można podstawić  $a + b$ , więc  $a + x = a + b - y$ , czyli po odjęciu po obu stronach odcinka  $a$  otrzymamy:  $x = b - y$ .

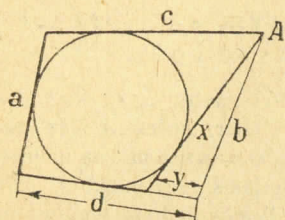


Fig. 111.

Jeden bok trójkąta byłby więc równy różnicy dwóch innych, a to jest niemożliwe. Do takiego samego błędnego wniosku doszlibyśmy przypuszczając, że bok  $b$  jest sieczną koła. Pozostaje więc jedyna możliwość: bok  $b$  jest także

styczny do koła, a więc w ten czworokąt da się wpisać koło.

Z pomiędzy równoległoboków tylko w romb i w kwadrat da się wpisać koło; z pomiędzy trapezoidów w każdy deltoid i w trapezoidy, mające równe sumy boków przeciwnych; tak samo tylko w niektóre trapezy.

Do konstrukcji czworoboków, o których wiemy, że dadzą się opisać na kole, wystarczają cztery warunki; piątym jest równość  $a + b = c + d$ .

## Ćwiczenia VI

§ 36. 1. Wykreślić wszystkie możliwe typowe położenia czterech prostych względem siebie.

2. Ile wynosi w czworokącie (niezupełnym) suma kątów zewnętrznych powstałych przez przedłużenie czterech boków (każdego poza jeden wierzchołek).

3. Wykazać, że w czworokącie wypukłym suma przekątni jest większa od połowy obwodu a mniejsza od całego obwodu.

4. Wykazać, że punkt przecięcia przekątni ma tę własność, iż suma jego odległości od wierzchołków czworokąta jest mniejsza, aniżeli suma takich odległości, mierzonych z dowolnego innego punktu na płaszczyźnie.

§ 37—38. 5. Jaki związek zachodzi między dwoma kątami, których jedna para ramion jest równoległa, a druga prostopadła?

6. Wykazać, że czworobok, w którym dwa boki przeciwległe są równe i równoległe, jest równoległobokiem.

7. Wykazać, że prosta, łącząca środki przeciwległych boków równoległoboku, jest równoległa do drugiej pary boków.

8. Wykazać, że przekątne są osiami symetrii kwadratu.

9. Wykazać, że linie, łączące środki boków prostokąta, są jego osiami symetrii.

10. Wykazać, że równoległobok, w którym przekątne są prostopadłe, jest równoboczny.

11. Wykazać, że równoległobok, w którym przekątne są równe, jest prostokątny.

12. Wykazać, że każdy odcinek, łączący dwa przeciwległe boki równoległoboku a przechodzący przez punkt przecięcia przekątni, jest tym punktem przepołowiony. (Symetria środkowa!)

13. Wykazać, że punkty połowiące boki dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku (dla dowodu wykreślić przekątne czworokąta).

14. Wykazać, że trójkąt  $MNL$  na fig. 104 składa się z czterech trójkątów przystających do  $ABC$ . Jakie stąd ogólne twierdzenie?

15. Wykreślić punkt przecięcia się wysokości w dowolnym trójkącie ostrokątnym, prostokątnym, rozwartokątnym. Co spostrzeżemy?

16. Udowodnić, że dwusieczne kątów każdego równoległoboku zamykają prostokąt.

17. W dowolnym trójkącie rozwartokątnym wykreślić trzy punkty osobliwe.

18. Wykazać, że w trójkącie równobocznym trzy osobliwe punkty nakrywają się.

19. Zbudować kwadrat znając: a) jeden bok, b) przekątnię, c) obwód.

20. Zbudować prostokąt znając: a) dwa boki, b) bok i przekątnię, c) bok i jego kąt z przekątnią, d) przekątnię i kąt między przekątniami zawarty.

21. Na danym prostokącie opisać koło.

22. Zbudować romb znając: a) jeden bok i jeden kąt, b) bok i przekątnię, c) dwie przekątne, d) kąt ostry i przekątnię.

23. Wpisać koło w podany romb.

24. Zbudować romboïd znając: a) jeden bok i jeden kąt, b) dwa boki i przekątnię, c) dwie przekątne i kąt między nimi zawarty.

25. Podać sposób wykreślania linii równoległych przy pomocy równoległoboku.

26. Z punktu  $P$ , leżącego na polu kąta, wykreślić linię prostą w kierunku wierzchołka — jeżeli wierzchołek jest niedostępny. (Objaśnienie: Punkt  $P$  uważa się za punkt przecięcia się trzech wysokości trójkąta. Prowadzi się z  $P$  prostopadłe do ramion kąta, łączy się ich punkty przecięcia z ramionami nieprostokątnymi i prowadzi się z  $P$  trzecią wysokość).

§ 39. 27. Znaleźć konstrukcyjnie średnią arytmetyczną dwóch odcinków: a) bez kreślenia linii równoległych, b) przy pomocy trzech linii równoległych.

28. Zbudować trapez znając: a) dwa boki równoległe i dwa kąty, leżące przy jednym z nich, b) cztery boki, c) trzy boki i przekątnię, d) trzy boki i wysokość.

29. Jak długich sznurów trzeba użyć do zawieszenia t. zw. trapezu do gimnastyki, jeżeli sam trapez ma 80 cm długości, wysokość sali wynosi 7 m, a punkty przytwierdzenia sznurów są od siebie o 2 m odległe? Rozwiązać zadanie konstrukcją geometryczną w zmniejszonej podziale.

30. Narysować przekrój koryta rzeki uregulowanej, znając szerokość koryta u dołu (6 m), głębokość koryta (3 m) i nachylenie ścian bocznych do poziomu ( $\alpha = 60^\circ$ ).

§ 40. 31. Wykreślić trapezoid znając: a) cztery boki i jeden kąt, b) cztery boki i jedną przekątnię. Jakże inne dane wyznaczają trapezoid?

32. Wykreślić deltoid znając: a) dwie przekątne i jeden bok, b) dwa boki nierówne i kąt zawarty między bokami równymi.



§ 41. 33. Znaleźć punkt równo oddalony od czterech danych punktów. Kiedy to zadanie jest wykonalne?

§ 42. 34. Znaleźć punkt równo oddalony od czterech danych prostych. Kiedy to zadanie jest wykonalne?

35. W czworoboku znamy trzy boki i jeden kąt i wiemy, że da się wpisać w koło. Zbudować ten czworokąt i opisać na nim koło.

36. W czworoboku znamy dwa boki, dwa kąty przy jednym z nich leżące i wiemy, że się da opisać na kole. Zbudować ten czworokąt i wpisać koło.

## Rozdział VII

### Wieloboki

#### § 43. Opis wieloboków. Kąty.

Rozważając wzajemne położenie większej liczby prostych, spostrzegamy naturalnie jeszcze większą różnorodność, aniżeli przy czterech liniach prostych.

Podobnie, jak przy wzajemnem położeniu czterech linii prostych, możnaby tu rozważać ogólne figury złożone z kilku linii prostych, z których żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie ani nie są do siebie równoległe, zwane wielobokami zupełnymi i wzajemne do nich figury, złożone z kilku punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej linii prostej i z wszystkich prostych, łączących te punkty parami, zwane wielokątami zupełnymi. W geometrii elementarnej zajmujemy się jednak tylko wielobokami i wielokątami niezupełnymi, zwyczajnymi, przy których nie czynimy różnicy między wielobokami a wielokątami.

Wielobokiem czyli wielokątem nazywamy nieprzerwany, zamknięty łańcuch odcinków łączących kilka punktów, nie leżących na jednej linii prostej, przyczem ten łańcuch przebiega tylko raz przez każdy z danych punktów.

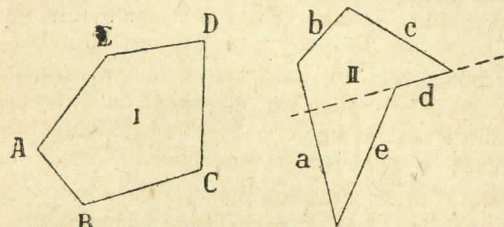


Fig. 112.

lobok I (fig. 112) jest wypukły, wielobok zaś II wklęsły, ponieważ wprowadzie leży po jednej stronie boków  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ale nie leży cały po jednej stronie boku  $d$  lub  $e$ .

Rozróżniamy dwa zasadnicze typy wielokątów: *wypukłe i wklęsłe*. Wielobok nazywa się wypukłym, jeżeli cały leży po jednej stronie *każdego* ze swych boków, ściślej: *każdej prostej ograniczającej go*. Tak n. p. wie-

Do wieloboków wklęsłych należą też t. zw. wieloboki gwiazdaste; są to wieloboki, w których także przeciwległe boki przecinają się ze sobą, n. p. pięciobok  $ABCDE$  (fig. 113).

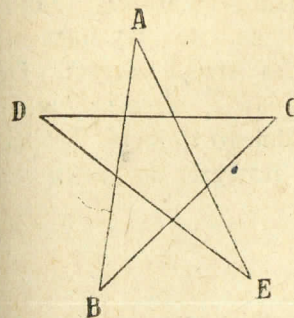


Fig. 113.

W dalszym ciągu zajmujemy się wyłącznie wielobokami *wypukłymi*. Żaden kąt wieloboku wypukłego nie może przekraczać  $180^\circ$  (dlaczego?).

Sumę kątów każdego wieloboku wypukłego łatwo obliczyć, rozkładając go zapomocą przekątni, wychodzących z jednego wierzchołka, na trójkąty. N. p. z siedmioboku powstanie pięć takich trójkątów, więc suma kątów wynosi  $5 \cdot 2R = 10R$ .

(Ile przekątni można poprowadzić z jednego wierzchołka  $n$ -boku? Na ile trójkątów rozpadnie się wskutek tego  $n$ -bok? Ile przekątni można poprowadzić ze wszystkich wierzchołków?)

Sumę kątów zewnętrznych każdego wieloboku obliczymy zapomocą obrotu. Wyobraźmy sobie, że prostą  $AX$  (fig. 114) obróciliśmy o kąt  $\alpha$  i bez obrotu przesunęliśmy od  $A$  do punktu  $B$ , następnie tu obracamy naszą prostą o  $\beta$ , i przesuwamy do punktu  $C$  i t. d. Jasnym jest, że wróciwszy do punktu  $A$ , wykonaliśmy jeden pełny obrót. Stąd wniosek:

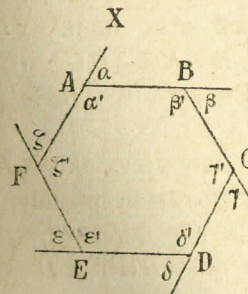


Fig. 114.

W każdym wielokącie suma kątów zewnętrznych (po jednym z każdego wierzchołka) wynosi  $360^\circ$  ( $4R$ ).

Stąd bez pomocy przekątni możemy obliczyć sumę kątów wewnętrznych. Jeżeli kątów jest  $n$ , to dodając kąty wewnętrzne do zewnętrznych, otrzymamy  $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' + \dots = n \cdot 2R$  ponieważ tworzą  $n$  par kątów przyległych.

Z tego jednak  $4R$  odpada na kąty zewnętrzne i zostaje:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \dots = n \cdot 2R - 4R = (n - 2) \cdot 2R.$$

Słowami: *aby znaleźć sumę kątów wewnętrznych dowolnego wielokąta wypukłego, trzeba wziąć tyle razy po  $2R$ , ile jest wierzchołków i odjąć  $4R$ .*

Do konstrukcji wieloboków, a więc i do sprawdzenia przystawania potrzeba większej liczby części składowych, aniżeli dla czworokątów.



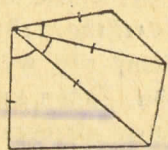


Fig. 115.

tów jest: dla  $n$ -boku  $n-2$ , stąd otrzymana powyżej liczba  $2n-3$  elementów.

#### § 44. Wieloboki umiarowe.

Wielobok, mający wszystkie boki i wszystkie kąty równe, nazywa się umiary, n. p. trójkąt równoboczny, kwadrat. Kąt wieloboku umiary łatwo obliczyć; znamy sumę wszystkich kątów:  $(n-2) \cdot 2R$  a zatem na jeden kąt przypada  $(n-2) \cdot 2R : n$ . Wieloboki umiarowe są figurami symetrycznymi. Widzieliśmy, że trójkąt równoboczny miał trzy osie symetrii, kwadrat cztery; spodziewamy się, że pięciokąt umiary będzie miał pięć osi symetrii, sześciokąt 6 i t. d. — Że tak jest istotnie, wykażemy n. p. dla pięciokąta umiary. Wykreślimy symetralną któregośkolwiek kąta, n. p.  $\sphericalangle C$  i połączmy punkty  $A$  i  $B$ , to łatwo okazać, że  $\triangle ACX \cong \triangle BCX$  (I), więc linia  $CX$  jest symetralną odcinka  $AB$ . Punkty  $A$  i  $B$  leżą zatem symetrycznie.

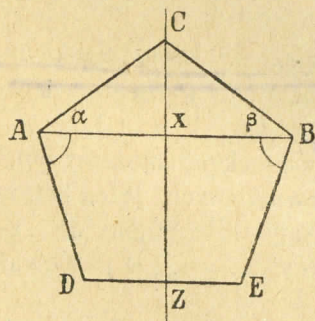


Fig. 116.

W figurze  $ABDE$  kąty przy boku  $AB$  są równe, jako reszty pozostałe po odjęciu równych kątów  $\alpha$  i  $\beta$  od równych kątów  $A$  i  $B$ . Także boki  $BE$  i  $AD$  są równe, zatem ta figura jest trapezem równoramiennym: symetralna boku równoległego jest osią symetrii całej figury. Razem więc: część  $CBEZX$  jest symetryczna względem  $CADZX$ .

Podobnie ma się rzecz z każdym umiarym wielobokiem; ogólnie więc: **wielobok umiary ma tyle osi symetrii, ile boków (lub wierzchołków).**

*Uwaga:* na tej symetrii polega stosowanie wielokątów umiarych do ornamentów (mozaiki, parkiety, witraże).

Każdy wielokąt umiary da się wpisać w koło i opisać na kole, t. zn. posiada punkt równo oddalony od wszyst-

kich wierzchołków i równo oddalony od wszystkich boków. Co więcej: obydwie te punkty nakrywają się.

Dowód: Wykreślimy symetralną  $XX$  któregośkolwiek boku wielokąta umiary, n. p. boku  $AB$  (fig. 117). Przez punkty  $A, B, C$  przeprowadźmy koło. Ponieważ środek koła leży na symetralnej każdej cięciwy, a więc i linia  $XX$  przechodzi przez środek koła. Każda zaś linia prosta, przechodząca przez środek koła, jest jego osią symetrii. Zwróćmy teraz uwagę na czwarty wierzchołek wielokąta: ponieważ  $XX$  jest osią symetrii całego wielokąta, to punkt  $D$  leży symetrycznie do  $C$ , a więc

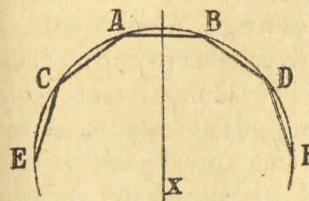


Fig. 117.

także na tem samym kole, które łączy  $CAB$ . Widzimy więc, że koło, łączące trzy wierzchołki wielokąta umiary, przechodzi także przez czwarty. Stosując to samo rozumowanie do punktów  $A, B, D$  i  $F$ , a później do dalszych wierzchołków, dochodzimy do wniosku, że wszystkie wierzchołki wielokąta umiary leżą na tem samym kole. Aby środek tego koła znaleźć, wystarczy wykreślić linie symetralne dwóch boków. Wszystkie inne symetralne muszą przejść przez ten sam punkt (dlaczego?).

Podobne rozumowanie zastosowane do symetralnej kąta wykazuje, że w każdy umiary wielobok da się wpisać koło. Mianowicie: koło (fig. 118) dotykające trzech boków w punktach  $A, B, C$ , musi mieć względem prostej  $YY$  (symetralnej kąta) symetrycznie punkt styczności  $D$  z prostą  $PD$ , symetryczną do  $QA$  i t. d.

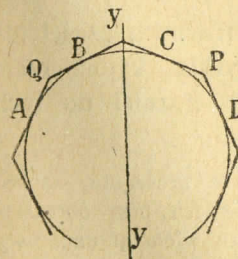


Fig. 118.

Jeżeli liczba boków jest nieparzysta, to symetralna kąta jest zarazem symetralną boku przeciwległego. Wtedy naturalnie punkt przecięcia się symetralnych boków i symetralnych kątów jest ten sam. Jeżeli liczba boków jest parzysta, to wskutek symetrii linie symetrii połowią się (co zresztą łatwo wykazać przy pomocy przystawiania trójkątów [II]). Ich punkt przecięcia się jest więc równo oddalony od wszystkich boków (bo odcinki symetralnych boków są właśnie „odległościami”), musi zatem leżeć na symetralnych wszystkich kątów.

Ten wspólny kąt nazywamy krótko środkiem wielokąta. (Łatwo okazać z rozważania symetrii, że jest to zarazem środek



ciężkości wielokąta. Oprzeć się na mechanicznym określeniu środka ciężkości!).

Jeżeli połączymy środek wielokąta z wierzchołkami, to kąt pełny w środku rozpadnie się na tyle równych części, ile wielobok ma boków. Przez to i koło opisane (lub wpisane) rozpadnie się na tyleż równych części. Podział kąta pełnego (lub koła) — i wykreślenie wieloboku umiarowego, są to więc zadania równoznaczne. Trójkąt równoboczny potrafimy zbudować, więc zdołamy także koło podzielić na *trzy równe części*. Kwadrat daje podział koła na *cztery równe części*. Później podamy sposób budowania (przy pomocy cyrkla i linealu a bez kątomierza) pięciokąta i dziesięciokąta umiarowego, nauczmy się więc zarazem koło dzielić na pięć i dziesięć równych części. Sześciokąt umiarowy pozwala podzielić koło na sześć równych części i to w sposób o wiele prostszy, aniżeli przy pomocy połowienia trzeciej części obwodu, otrzymanej zapo-

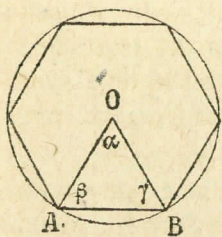


Fig. 119.

mocą trójkąta równobocznego. Ponieważ bowiem  $\alpha = 60^\circ$  (fig. 119), to i na kąty  $\beta$  i  $\gamma$  zostaje po  $60^\circ$ , trójkąt  $AOB$  jest więc równoboczny. Zatem: bok sześciokąta umiarowego równa się promieniowi koła opisanego. Aby więc w dane koło wpisać sześciokąt, wystarczy odciąć sześć razy promień (jako cięciwę) na obwodzie koła. Twierdzenie to nie odnosi się do żadnego innego wielokąta!).

Podział koła na siedm równych części nie da się już skutecznie przy pomocy linealu i cyrkla; kątomierzem jednak można tę konstrukcję wykonać. Wrócimy później do tych zadań przy nauce obliczania obwodów i pól.

Z symetrią wielokątów umiarowych wiąże się także szczególne zachowanie się ich przy obrotach.

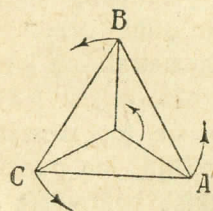


Fig. 120.

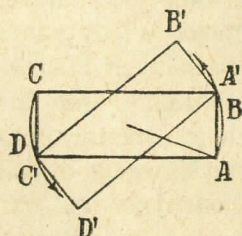


Fig. 121.

Każdy wielokąt umiarowy da się przez pewne obroty o kąt mniejszy od  $180^\circ$  sprowadzić do nakrycia z pierwotnym położeniem. I tak trójkąt równoboczny (fig. 120) wystarczy obrócić około środka o  $120^\circ$ , aby nastąpiło dokładne nakrycie (punkt  $A$  padnie na  $B$ ,  $B$  na  $C$ , a  $C$  na  $A$ ). Po trzech

takich obrotach wrócimy dokładnie do pierwotnego położenia wierzchołków. Podobnie kwadrat może wykonać obrót o  $90^\circ$ , a nie znamy, że zmienił położenie; po czterech obrotach wraca do pierwotnego położenia. Dla pięcio-

kąta umiarowego mamy pięć takich obrotów po  $72^\circ$  i t. d. W ogólności każdy obrót około środka symetrii, sprowadzający dwa wierzchołki do nakrycia, sprawia nakrycie się całej figury. Własność ta odróżnia wielokąty umiarowe od nieumiarowych. Żaden wielobok nieumiarowy nie ma tej własności, choćby nawet był figurą symetryczną. N. p. prostokąt posiadający dwie osie symetrii (fig. 121) można tak obrócić, że  $A$  padnie na  $B$ ,  $C$  na  $D$ , a mimo to inne części nie nakryją się. Dopiero obrót o  $180^\circ$  sprowadza prostokąt do nakrycia z pierwotnym położeniem.

## § 45. Aproksymacja obwodu koła.

Jeżeli w koło wpiszemy wielobok umiarowy, a następnie każdy łuk przepołowimy i wpiszemy nowy wielokąt o podwójnej liczbie boków i w ten sposób postępujemy coraz dalej, spostrzeżemy, że postać tego wielokąta zbliża się coraz to więcej do kształtu koła. Cięciwy coraz trudniej będzie odróżnić od łuków, a kąty obwodowe zbliżają się do  $180^\circ$  tak, że coraz więcej zbliżymy się do jednostajnej, ciągłej zmiany kierunku, charakterystycznej dla koła i wielu innych linii krzywych. Mówimy więc: koło można przybliżać (aproksymować) coraz to dokładniej zapomocą wieloboków umiarowych wpisanych (a tak samo opisanych). Z tego korzysta się przy obliczaniu długości obwodu i łuku koła, czem w osobnym ustępie będziemy się zajmowali.

Zdawaćby się mogło, że można koło aproksymować także zapomocą linii schodkowej, to znaczy wielokąta nieumiarowego (wkłęsłego), którego co drugi wierzchołek leży na obwodzie, a którego boki są równoległe do dwóch średnic prostopadłych. Na oko takie przybliżanie się do koła może się nawet wydać usprawiedliwionem, ponieważ biorąc wierzchołki odpowiednio gęsto, nie odróżnilibyśmy tej linii od koła. Istotnie powierzchnię koła można wyczerpać takim wielokątem, ale obwodu wielokąta nie można uważać za przybliżony obwód koła. Kąty tutaj nie dążą do wspólnej granicy  $180^\circ$ ; zmiana kierunku — jednostajna dla koła — tutaj odbywa się skokami po  $90^\circ$ ! Gdyby taka aproksymacja była dozwolona, moglibyśmy odrzuć z fig. 122 obliczyć obwód koła: mianowicie długość tych schodków równa się podwójnej średnicy  $CD$ ,

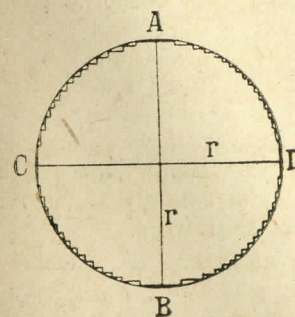


Fig. 122.

a wysokość podwójnej średnicy  $AB$ . Całkowita długość tej linii łamanej wynosi więc  $2.2r + 2.2r = 8r$  i to nawet w granicy, jeżeli schodki zagęszczają się w nieskończoność. Tymczasem na obwód koła otrzymuje się wartość mniejszą od  $7r$  (mianowicie  $6.283 \cdot r$  patrz § 73).



§ 43—44. 1. Wymienić i wykreslić wszystkie możliwe typowe położenia pięciu linii prostych na płaszczyźnie.

2. Wykazać, że każdy wielobok gwieżdzisty jest wklęsły.

3. Obrawszy dowolnie 7 punktów na kole połączyć najpierw sąsiednie, potem co drugi kolejno, potem co trzeci i t. d. Ile rozmaitych wielokątów w ten sposób otrzymamy? Zrób to samo z 6-kątem, 8-kątem.

4. Wykazać, że każda linia łamana wypukła jest krótsza od dowolnej innej linii łamanej, łączącej jej skrajne punkty a leżącej całkowicie po stronie wypukłości.

5. Ile wynosi jeden kąt 5-kąta, 7-kąta, 8-kąta, 9-kąta, 10-kąta umiarkowanego?

6. Ile elementów potrzeba do konstrukcji nieumiarowego 6-kąta? Obierz te części dowolnie i zbuduj 6-kąt!

7. Czy dwa wielokąty, mające wszystkie boki równe, muszą być przystające? Uzasadnij na przykładach!

8. Jakie pomiary należy wykonać, aby zrobić plan pola w postaci 8-kąta nieumiarowego?

9. Jakimi wielokątami umiarkowanymi możnaby zapełnić całą płaszczyznę bez luk i bez nakrywania się podwójnego? (Zbadaj kąty w punktach węzłowych!)

10. Jakie miejsca pozostaną wolne, jeżeli na płaszczyźnie poukładamy kilka szeregów ośmiokątów umiarkowanych, jeden nad drugim?

11. Wykreśliwszy przy pomocy kątomierza pięciobok umiarkowany, opisać koło i wpisać koło.

12. Podzielić obwód koła: a) na 12 równych części, b) na 8, 16 równych części.

13. W ośmiokąt umiarkowany wpisać koło.

14. Wykazać, że dwa kwadraty, obrócone względem siebie o  $45^\circ$ , a mające wspólny środek, mają 8-kąt umiarkowany jako część wspólną (konstrukcja!)

15. Wykazać, że dwa trójkąty równoboczne o wspólnym środku obrócone o  $60^\circ$  mają jako część wspólną 6-kąt umiarkowany. Zbadaj symetrię tej figury!

16. Podzieliwszy koło na sześć równych części, przedłużyć promienie przechodzące przez punkty podziału o ich długość: z punktów końcowych zakreślić koła styczne zewnętrznie. Wykazać, że a) te koła stykają się ze sobą, b) że ich środki są wierzchołkami sześcioboku umiarkowanego.

17. Czy romb ma przy obrotach te same własności, co wielokąty umiarkowane? Uzasadnij!

18. Zbudować z podanego boku: a) 6-kąt umiarkowany, b) 8-kąt umiarkowany.

19. Zbudować, mając podany promień koła opisanego: a) 3-kąt równoboczny, b) 6-kąt umiarkowany, c) 8-kąt umiarkowany.

§ 45. 20. Wykreśliwszy koło o promieniu 1 dm przybliżać jego obwód zapomocą 6-boku, 12-boku, 24-boku i t. d. opisanego i wpisanego. Każdym razem zmierzyć obwód wieloboku opisanego i wpisanego. W jakich granicach zawiera się obwód koła?

## Zadania konstrukcyjne

## §. 46. Ogólne uwagi o zadaniach konstrukcyjnych.

Opierając się na poznanych dotychczas twierdzeniach, niejednokrotnie już budowaliśmy pewne nowe utwory geometryczne z utworów danych, używając tylko linii prostych i kół — a w geometrii praktycznej lineалу i cyrkla (bez kątomierza!). Od czasów Platona wprowadzono zasadę, że do konstrukcyj geometrycznych dozwala się użycia tylko lineалу i cyrkla. Konstrukcje wykonane przy pomocy innych środków pomocniczych (n. p. kątomierza, ruchomego kąta prostego, ekierki, podziałki i t. p.) nazywamy konstrukcjami mechanicznymi. Bardzo wiele zagadnień tak z geometrii, jakoteż z algebry — jak to później zobaczymy — można rozwiązać przy pomocy konstrukcji wyłącznie geometrycznej (linealem i cyrklem). Zadania, do których trzeba używać bądźto nieskończonej liczby kolejnych konstrukcyj geometrycznych, bądźto konstrukcyj mechanicznych, uważał Platon za nierozwiązalne ściśle. Do takich zadań należy n. p. podział kąta na trzy części, zamiana koła na kwadrat, podwojenie sześcianu. W tym ustępie zajmiemy się tylko konstrukcjami przy pomocy lineалу i cyrkla (t. j. konstrukcjami platońskimi).

Przedewszystkiem należy odróżnić konstrukcję idealną od konstrukcji praktycznej, materialnej. Konstrukcja idealna poucza, jak należy kombinować ze sobą rozmaite idealne proste i koła, istniejące już na płaszczyźnie w naszej wyobraźni, aby otrzymać żadaną figurę. Tak n. p. konstrukcja symetralnej odcinka ma takie znaczenie: mamy znaleźć sposób przepołowienia odcinka zapomocą linii prostopadłej. Wiemy, że taki idealny odcinek istnieje. Istnieją także około każdego z jego końców koła o równych promieniach i to dowolnie wiele kół o dowolnie wielkich promieniach. Z pomiędzy tych kół wybieramy w myśli dwa koła równe tak wielkie, aby się przecięły w dwóch punktach. Pomiedzy temi dwoma punktami istnieje jedna linia prosta, łącząca je i to jest właśnie symetralna odcinka. W ten sposób wykonaliśmy idealną konstrukcję symetralnej, to znaczy: wykazaliśmy, że ona istnieje i w jakim jest związku z danym odcinkiem. Geometrycznie rzecz biorąc, zadanie byłoby już wykonane. Uciekamy się jednakowoż z dwóch względów do rysunku a więc do geometrii praktycznej:

1. Łatwiej wyobrażamy sobie utwory geometryczne, które mamy przynajmniej w przybliżeniu narysowane, a więc które działają na nasz zmysł wzroku.

2. W geometrii praktycznej zadania te są potrzebne (często n. p. trzeba przepołowić materialny odcinek).

W geometrii praktycznej zadanie każde da się naturalnie wykonać tylko w przybliżeniu. Może się więc zdarzyć, że biorąc dwie różne pary kół



równych otrzymamy aż dwie symetralne odcinka i t. p. Wtedy jednakże geometria idealna poucza nas, że jest tylko jedna taka linia, możemy więc rysunek poprawić, sprostować (n. p. rysując cieńsze koła). Tak więc geometria idealna chroni nas w praktyce od zbyt jaskrawych błędów, reguluje niedokładność naszego oka, naszych przyrządów rysunkowych.

Konstrukcje, któreśmy dotychczas wykonywali i które nadal wykonywać będziemy, będziemy zawsze pojmowali ze stanowiska geometrii idealnej, a rysunek będzie dla nas tylko obrazem rozumowań, odbywających się w naszym umyśle. Będziemy się mimo to starali wykonać rysunek możliwie najdokładniej, aby się jak najwięcej zbliżyć do prawdziwości geometrii idealnej.

Zadania konstrukcyjne mają wielkie znaczenie w geometrii praktycznej. Zdarzają się bowiem zagadnienia z życia praktycznego trudne do obliczenia ale łatwe do wykreślenia. N. p. chcąc znaleźć odległość dwóch miejsc  $B$  i  $C$ , między którymi znajduje się jakaś przeszkoda, obieramy punkt  $A$  dowolnie i mierzymy odległości  $c$ ,  $b$  i kąt  $\alpha$  (fig. 123). (Por. ćw. 2, str. 61). Z tych części budujemy konstrukcyjnie trójkąt (w pomniejszonej skali). Mierzając na rysunku bok  $BC$  otrzymujemy tę odległość z przybliżeniem, zależnym od dokładności rysunku. Gdybyśmy zaś chcieli obliczyć bok  $BC$ , musielibyśmy wykonać

mozolne obliczenia, wymagające pewnych głębszych wiadomości z trygonometrii. Otrzymalibyśmy wprawdzie dokładniej długość boku  $BC$ , ale w praktyce wystarcza zwykle wartość przybliżona, otrzymana z rysunku.

#### § 47. Zasadnicze zadania konstrukcyjne.

Niektóre najprostsze zadania konstrukcyjne są podstawą dla wszelkich dalszych zagadnień. Dlatego omówimy je raz na zawsze dokładnie, starając się zachować w pamięci sposób ich rozwiązania.

Za takie zasadnicze zadania konstrukcyjne uważa się zwykle następujące zagadnienia:

1. Wykreślanie symetralnej odcinka (por. § 30).
2. Wykreślanie symetralnej kąta (por. § 31).
3. Wykreślanie linii prostopadłych (por. § 30) i to: a) przez punkt poza prostą, b) przez punkt na prostej, c) przez punkt na końcu odcinka prostej.
4. Wykreślanie linii równoległych (naturalnie przy pomocy lineалу i cyrkla, bez ekierki!).

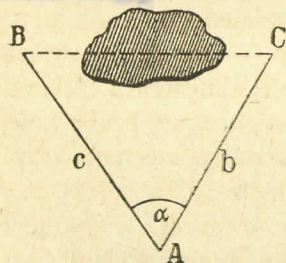


Fig. 123.

5. Przenoszenie kątów (por. § 20).

6. Wykreślanie trójkątów z trzech danych części w czterech przypadkach (§ 16—20).

7. Wykreślanie stycznych do koła a) przez punkt na kole (§ 24), b) przez punkt poza kołem leżący (§ 33).

Z tych zadań omówiliśmy już 1., 2., 3 a, b, 5., 6., 7 a, b. (Zadanie 5. omówiono w zadaniach z. 16 i 42 z Ćw. IV).

Zajmijmy się jeszcze pozostałymi zadaniami 3 c i 4.

3. c. Mamy wykreślić prostopadłą na końcu  $A$  odcinka  $AB$ , nie przedłużając go poza punkt  $A$  (fig. 124). Kąt prosty przy  $A$  można złożyć z kąta  $\alpha = 60^\circ$  i  $\beta = 30^\circ$ . Kąt  $60^\circ$  otrzymuje się przez wykreślenie trójkąta równobocznego  $ABC$  cyrklem. Następnie trzeba by do tego kąta dodać połowę jego. Łatwiejszą jednak konstrukcję otrzymamy, przedłużając bok  $BC$  aż do przecięcia się z linią prostopadłą. Wtedy bowiem kąty  $\gamma$  i  $\beta$  wynoszą razem  $60^\circ$ , ponieważ kąt zewnętrzny trójkąta  $ADC$  wynosi  $60^\circ$ . Ponieważ zaś

$\beta = 30^\circ$ , to i  $\gamma$  musi wynosić  $30^\circ$ , a więc boki, leżące naprzeciw tych kątów, są równe:  $AC = DC$ . Otóż gdy bok  $BC$  przedłużymy o taki

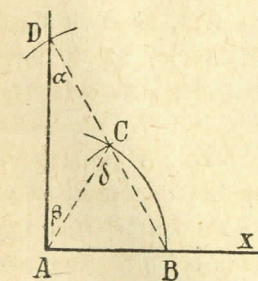


Fig. 125.

Fig. 125. sam odcinek poza  $C$ , to otrzymamy punkt  $D$ , który jest punktem linii prostopadłej do  $AB$ . Z tych rozważań wynika następująca szybka i praktyczna konstrukcja (fig. 125):

Na prostej  $AX$  budujemy przy wierzchołku  $A$  trójkąt równoboczny o dowolnym boku. Następnie łączymy punkt  $B$  z punktem  $C$  (boku  $AC$  nie trzeba nawet wykreślać), na przedłużeniu tego boku odcinamy raz jeszcze ten sam odcinek  $CD$ . Linia  $AD$  jest prostopadłą do  $AX$  i przechodzi przez punkt skrajny  $A$ .

Linie ważniejsze, zwłaszcza linie podane i szukane kreśli się zwykle wyraźniej; inne linie pomocnicze kreskujemy, kropkujemy lub rysujemy je o wiele cieńsze od linii ważnych.

Dla upewnienia się, czy konstrukcja jest dobra, przeprowadza się zwykle jeszcze dowód: otóż  $\sphericalangle CAB = 60^\circ$  (fig. 125), jako kąt trójkąta równobocznego. Dalej: wykreśliliśmy  $DC = AC$ , więc i  $\alpha = \beta$ . Ponieważ  $\delta = 60^\circ$  i  $\delta = \alpha + \beta$ , przeto  $\alpha + \beta = 60^\circ$ , a że  $\alpha$  i  $\beta$  są równe, więc  $\beta = 30^\circ$ . Zatem  $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC + \beta = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ , czyli:

$$AD \perp AX.$$



To samo zadanie możnaby także rozwiązać przy pomocy kąta w półkolu. Z dowolnego punktu  $O$  (fig. 126), nie leżącego na prostej  $AX$ , zataczamy promieniem  $OA$  półkole. Od punktu  $B$ , w którym to półkole przecina prostą  $AX$ , wykreślamy średnicę  $BOC$ . Prosta  $CA$  jest prostopadłą do  $BX$ , ponieważ  $\sphericalangle BAC$  jest kątem w półkolu.

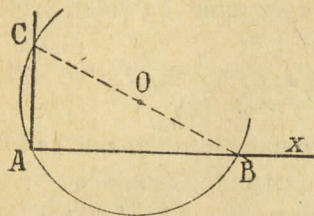


Fig. 126.

linji. Wiemy n. p., że dwa kąty odpowiednie, utworzone przez dwie linie równoległe przecięte trzecią, muszą być równe. Mając więc przez punkt  $A$  (fig. 127) wykreślić linię równoległą do  $p$ , wykreślamy do-

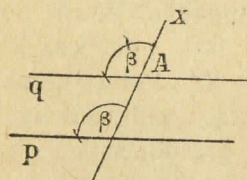


Fig. 127.

wolną linię poprzeczną  $AX$  i kąt  $\beta$  przenosimy (cyrklem) do punktu  $A$  jako wierzchołka a do prostej  $AX$  jako ramienia. Powstanie w ten sposób równy kąt odpowiedni, a więc jego ramię  $q$  jest równoległe do  $p$ . Możnaby użyć także kątów naprzemianległych. Można się oprzeć także na tem, że dwie linie prostopadłe do tej samej trzeciej są do siebie równoległe. Najpraktyczniejszy jednak sposób polega na własnościach równoległoboku (fig. 128):

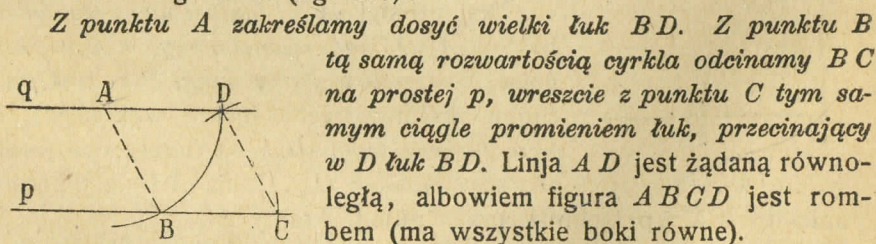


Fig. 128.

Z punktu  $A$  zakreślamy dosyć wielki łuk  $BD$ . Z punktu  $B$  tą samą rozwartością cyrkla odcinamy  $BC$  na prostej  $p$ , wreszcie z punktu  $C$  tym samym ciągle promieniem łuk, przecinający w  $D$  łuk  $BD$ . Linja  $AD$  jest żadaną równoległą, albowiem figura  $ABCD$  jest rombem (ma wszystkie boki równe).

Odcinki  $AB, BC, CD, DA$  nie muszą być wszystkie równe. Wystarczy, jeżeli  $AB = DC$

i  $BC = AD$  (wtedy powstanie romboid). Wygodniej jest jednak wykonać całą konstrukcję jedną rozwartością cyrkla.

Możnaby także konstrukcję prostej równoległej oprzeć na twierdzeniach o linji środkowej trójkąta lub trapezu.

#### § 48. Systematyczny sposób rozwiązywania zadań konstrukcyjnych.

Rozporządzając takim zasobem konstrukcyj zasadniczych, możemy obecnie przejść do zadań zawilszych. W rozwiązywaniu każ-

dego zadania — zwłaszcza trudniejszego — można odróżnić cztery części.

1. Wyobrażamy sobie, że utwór już jest zbudowany i rozpatrujemy, jaką drogą można dojść do wynalezienia części potrzebnych, mając ciągle na oku już gotową figurę. W tym celu najczęściej rysujemy pobieżnie, t. j. szkicujemy żadaną figurę. Ta część rozwiązywania zadań nazywa się rozbiorem lub analizą. Zrozumiemy to lepiej na przykładzie: (por. też str. 95 kreślenie prostopadłej na końcu odcinka).

Znając wysokość trójkąta i dwa kąty, które ona tworzy z bokami, zbudować ten trójkąt. Jeżeli tylko narysujemy jakikolwiek trójkąt, a w nim wysokość, zorientujemy się odrazu, jak należy przeprowadzić konstrukcję. Trzeba będzie mianowicie narysować osobno każdy z trójkątów prostokątnych  $I$  i  $II$  (fig. 129); każdy

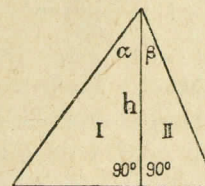


Fig. 129.

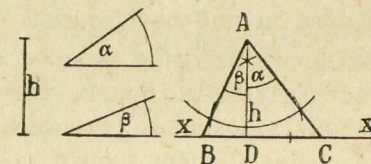


Fig. 130.

zaś z nich da się łatwo narysować, bo znamy w nim bok  $h$  i dwa kąty  $\alpha$  i  $90^\circ$  tudzież  $\beta$  i  $90^\circ$ .

Jest to najważniejsza część zadania, bo podaje nam plan pracy. Po tym rozborze następuje druga część zadania:

2. Konstrukcja. Na dowolnej linii nieograniczonej (fig. 130) w dowolnym jej punkcie, kreślimy linię prostopadłą (zad. zasadnicze 3b) i odcinamy na niej podaną wysokość  $h$ . Do otrzymanego w ten sposób punktu  $A$  przenosimy z jednej strony kąt  $\alpha$ , z drugiej  $\beta$  (5. zad. zasadnicze).

Przedłużając ramiona tych kątów do przecięcia się z prostą  $XX$  otrzymamy żadany trójkąt, złożony z trójkątów prostokątnych  $BAD$  i  $DAC$ . Teraz należałoby przeprowadzić:

3. Dowód, że ta figura spełnia rzeczywiście żądane warunki. Dowód mamy już zwykle gotowy przy analizie. Tu n. p. dowód jest tak prosty, że mogłoby się wydać zbytecznym. Istotnie:

$AD = h$ , ponieważ tak odcięliśmy.

$\sphericalangle BAD = \alpha$ , użyliśmy bowiem konstrukcji udowodnionej już dawniej, tak samo  $\sphericalangle CAD = \beta$ . Prócz tego  $AD \perp BC$ , więc trójkąt, odpowiada warunkom zadania. W niektórych zadaniach jednakże dowód jest konieczny.



4. Po dowodzie powinna nastąpić dyskusja, czy jest możliwe jedno rozwiązanie, czy więcej, a dalej: kiedy rozwiązanie jest wogóle możliwe, a kiedy nie. Tak n. p. w naszym zadaniu widzimy, że możnaby zbudować także drugi trójkąt, spełniający te same warunki, odcinając kąt  $\alpha$  z prawej strony a  $\beta$  z lewej. Ten nowy trójkąt byłby symetryczny względem pierwszego. Widzimy więc, że przy danych warunkach są tu możliwe dwa rozwiązania. Co się tyczy możliwości rozwiązania, to gdyby któryś z kątów  $\alpha, \beta$  był prosty, a tem bardziej rozwarty, zadanie nie dałoby się rozwiązać. Wtedy bowiem któryś z trójkątów prostokątnych *I* lub *II* musiałby zawierać dwa kąty proste lub jeden kąt prosty i jeden rozwarty, a to niemożliwe wobec twierdzenia o sumie kątów w trójkącie.

Tę dyskusję nazywamy determinacją zadania (oznaczeniem). Jest ona uwieńczeniem zadania i daje przegląd wszystkich możliwości w zależności od podanych warunków.

Takiego rozdzielania zadania na cztery części używa się tylko przy trudniejszych zadaniach, przy których łatwo można popaść w błąd bądźto wskutek przeoczenia pewnych możliwości, bądźto skutkiem niedokładności analizy.

#### § 49. Metoda miejsc geometrycznych.

Do rozwiązania każdego zadania konstrukcyjnego prowadzi odmienne rozważanie; są jednak pewne myśli przewodnie wspólne wielkiej ilości zadań, pewne metody, pozwalające podobnym rozumowaniem ująć rozmaite problemy.

Jedną z takich ogólnych metod jest metoda miejsc geometrycznych, której używaliśmy już nieraz.

Metody tej używa się, jeżeli chodzi o znalezienie jakiegoś punktu, spełniającego jakieś dwa warunki. Rysujemy najpierw miejsce geometryczne  $M_1$  punktów, spełniających jeden warunek, później miejsce geometryczne  $M_2$  punktów, spełniających drugi warunek. Punkty wspólne obydwu miejscom  $M_1$  i  $M_2$  spełniają obydwa warunki, są więc żadanymi punktami. Wymień poznane w dotychczasowej nauce miejsca geometryczne!

Łatwo tę metodę zrozumieć np. przy budowaniu trójkąta z trzech danych boków  $a, b, c$ . Odcieśliśmy najpierw na dowolnej prostej (fig. 131) jeden bok i otrzymaliśmy w ten sposób dwa wierzchołki  $B, C$ , trójkąta. Aby znaleźć trzeci wierzchołek, rozumiemy tak: ten wierzchołek ma być odległy o odcinek  $b$  od punktu  $C$ ,

a o odcinek  $c$  od punktu  $B$ . Miejscem geometrycznym wszystkich punktów, które są odległe od punktu  $C$  o odcinek  $b$ , jest koło  $M_1$ ,

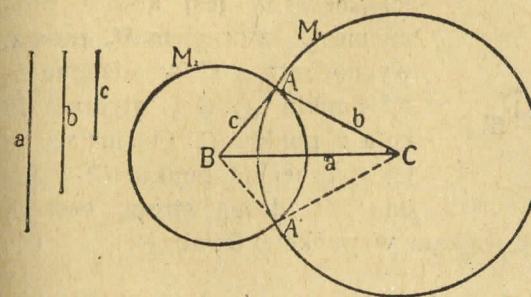


Fig. 131.

miejscem zaś geometrycznym wszystkich punktów, odległych od punktu  $B$  o długość odcinka  $c$ , jest koło  $M_2$ . Wierzchołek trzeci  $A$  musi więc leżeć równocześnie na  $M_1$  i  $M_2$ , a więc tam, gdzie się te dwa miejsca geometryczne przecinają. Otrzymujemy zatem dwa rozwiązania zadania:  $A$  i  $A'$ . Łącząc te punkty z  $B$  i  $C$  mamy żądany trójkąt w położeniu  $ABC$  lub  $A'BC$  (symetrycznie). Taki sposób rozwiązywania zadań jest właśnie metodą miejsc geometrycznych.

Rozważmy jeszcze jeden, nieco trudniejszy przykład:

*Zbudować trójkąt, znając dwa boki i wysokość do jednego z nich poprowadzoną:  $a, b, h_a$ .*

Analiza. Wierzchołki  $B$  i  $C$  (fig. 132) dostaniemy odrazu, jako

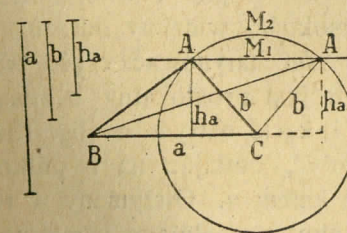


Fig. 132.

końce odcinka  $a$ . Dla trzeciego wierzchołka  $A$  jednym miejscem geometrycznym  $M_1$  jest linia równoległa do  $BC$  w odstępnie  $h_a$ , a drugim  $M_2$  koło o promieniu  $b$ , zakreślone z punktu  $C$  jako środka. Punkt  $A$  musi więc leżeć w miejscu, gdzie się te dwie linie  $M_1$  i  $M_2$  przecinają. Spostrzegamy jednakże, że  $M_1$  i  $M_2$  mają jeszcze drugi punkt przecięcia  $A'$ , spełniający również warunki zadania. Otrzymujemy więc dwa rozwiązania.

Teraz łatwo wykonać konstrukcję. Dowodu tu nie trzeba osobno przeprowadzać. Determinację przeprowadziliśmy już częściowo. Dodajmy jeszcze, że  $h_a$  nie może być większe od  $b$ , albowiem koło  $M_2$  nie przecięłoby wtedy linii  $M_1$ . Gdyby  $h_a = b$ , koło byłoby styczne do  $M_1$  i mielibyśmy tylko jedno rozwiązanie. Wreszcie jeżeli  $h_a < b$ , mamy dwa różne rozwiązania. Trójkąt nie jest więc ściśle wyznaczony zapomocą tych trzech elementów.

To samo zadanie możnaby także rozwiązać inaczej, zaczynając konstrukcję od boku  $b$ . Figura 133. objaśnia to postępowanie. Szu-



kamy miejsc geometrycznych dla spodka wysokości  $h_a$ , która musi wychodzić z punktu  $A$ . Jednym miejscem  $M_1$  jest koło o promieniu  $h_a$ , a drugim  $M_2$  prosta, wychodząca z  $C$  w odstępie  $h_a$  od punktu  $A$ , t. j. styczna do koła z punktu  $C$ . Odcinając na tej stycznej od punktu  $C$  w jedną lub drugą stronę bok  $a$ , otrzymamy trzeci wierzchołek trójkąta w punkcie  $B$  lub  $B'$ .

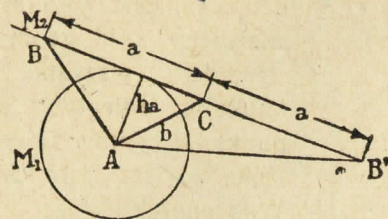


Fig. 133.

## § 50. Metoda figur pomocniczych.

Drugą taką metodą ogólną jest metoda figur pomocniczych. Zamiast budować od razu żadaną figurę, budujemy najpierw inną, dającą się łatwo otrzymać wprost z podanych elementów, n. p. jakąś część żadanej figury. Tę prostszą figurę nazywamy figurą pomocniczą. Z niej dopiero przez dodanie lub odrzucenie pewnych części, dostajemy figurę żadaną. Wyjaśnimy to znowu na przykładach. Wiele takich przykładów mieliśmy już przy konstrukcji czworokątów (por. ćw. VI. Nr. 19 i nast.).

*Zbudować trójkąt równoramienny, znając jedno ramie  $r$  i kąt  $\alpha$ , leżący przy podstawie.* Rysując jakikolwiek trójkąt równoramienny i wykreślając jego wysokość, widzimy od razu, że najłatwiej będzie naprzód narysować część tego trójkąta, mianowicie trójkąt prostokątny o znanej przeciwprostokątnej  $r$  i kącie ostrym  $\alpha$  (fig. 134). To zaś najłatwiej zrobić, budując na  $r$  półkoło i kreśląc cięciwę pod kątem  $\alpha$ . Otrzymany w ten sposób trójkąt prostokątny uzupełniamy symetrycznym trójkątem  $ADC$  do trójkąta równoramiennego  $ABC$  (najłatwiej przedłużyć bok  $BD$  o taki sam odcinek poza  $D$ ). Por. fig. 135.

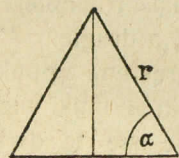


Fig. 134.

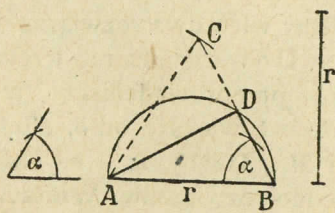


Fig. 135.

*Analiza.* Ponieważ samego żadanego trójkąta nie możemy od razu z tych elementów utworzyć, budujemy trójkąt pomocniczy (fig. 136) z boków  $s$ ,  $c$  i kąta  $\alpha$  między nimi zawartego w znany

sposób. Bok  $s$  trzeba jednak złamać i górną część obrócić tak, aby koniec  $D$  padł na punkt  $A$ . Chodzi tylko o to, w którym punkcie ten bok złamać. Ten szukany punkt  $C$  musi leżeć tak, aby  $CD = AC$ , a więc na symetralnej boku  $AD$  w miejscu, gdzie ona przecina bok  $BD$ .

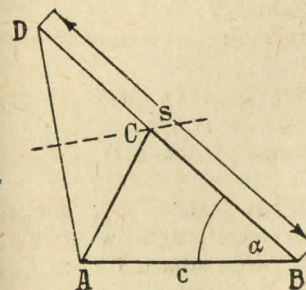


Fig. 136.

Otrzymujemy więc następującą konstrukcję:

Budujemy trójkąt  $ABD$  (fig. 137) z części  $s$ ,  $c$  i  $\alpha$ , kreślimy symetralną boku  $DA$ , a jej punkt przecięcia  $C$  z bokiem  $s$  łączymy z  $A$ .

Że ta konstrukcja jest dobra, wiemy już z analizy. Gdyby jednak chodziło o dowód, to zauważmy, że  $AB = c$ ,  $\angle B = \alpha$ , a  $AC + BC = DC + BC = s$  zgodnie z warunkami zadania.

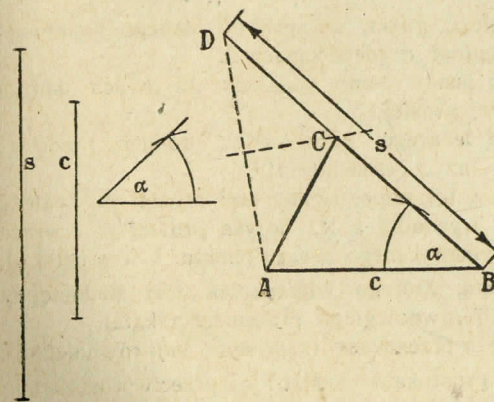


Fig. 137.

*Determinacja.* Zadanie to jest zawsze możliwe, skoro tylko  $s > c$ , o czym zresztą wiemy z ogólnego twierdzenia o sumie dwóch boków w trójkącie. W przeciwnym razie symetralna boku  $AD$  nie trafiłaby boku  $BD$  między punktami  $B$  i  $D$ . (Wykreśl odpowiednią figurę!)

W dalszym ciągu poznamy jeszcze dwie inne ogólne metody rozwiązywania zadań konstrukcyjnych.

Przy rozwiązywaniu zadań konstrukcyjnych posługujemy się też często przesunięciem, obrotem lub symetrycznym odbiciem.

## Cwiczenia VIII\*)

§ 46. 1. Jakimi konstrukcjami są sposoby kreślenia kół w § 26. przy pomocy twierdzeń o kątach obwodowych?

2. Jaką konstrukcją jest kreślenie linii równoległych przy pomocy t. zw. trójkąta (§ 12)?

\*) Obszerniejszy opis metod rozwiązywania zadań konstrukcyjnych i zbiór zadań zawiera dzieło p. t.: J. Petersen. *Metody i teorie rozwiązywania zadań geometrycznych konstrukcyjnych* (tłumaczenie z duńskiego) Warszawa 1881.



3. Z końców  $AB$  odcinka o długości  $a$  widać dwa punkty niedostępne  $C$  i  $D$  pod danymi kątami  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ . Znaleźć konstrukcyjnie odległość tych miejsc  $C$  i  $D$ .

§ 47. 4. Wykreślić przy pomocy cyrkla kilka stycznych w danych punktach na obwodzie koła, nie przedłużając promieni poza obwód.

5. Wykreślić przez punkt poza prostą linię równoległą przenosząc kąt naprzemianległe (przy pomocy cyrkla).

6. Wykonać przesunięcie równoległe dowolnego odcinka przy pomocy cyrkla i linealu.

7. Dowolny pęk promieni przenieść do innego punktu przy pomocy cyrkla i linealu.

8. Dwa zwierciadła płaskie przecinają się pod kątem  $60^\circ$ ; między nimi leży punkt  $P$ . Wykreślić w przekroju obrazy tego punktu w obydwu zwierciadłach, a te obrazy znowu odbić w obydwu zwierciadłach i t. d. Czy konstrukcja skończy się? Jaki kąt muszą tworzyć dwa zwierciadła, aby otrzymać 4, 6, 8, 9, 12, 60 obrazów?

9. To samo zadanie wykonać dla odcinka, leżącego między zwierciadłami.

§ 48. 10. Na danej prostej  $p$  znaleźć punkt, odległy od danego punktu  $P$ , leżącego poza prostą, o daną odległość  $d$  (determinacja!).

11. Na danej prostej znaleźć punkt równo oddalony od dwóch danych punktów  $A$  i  $B$ , nie leżących na tej prostej.

12. Z punktu  $P$ , poza prostą leżącą, poprowadzić promień, przecinający prostą pod podanym kątem  $\alpha$  (użyć przesunięcia!).

13. Dwa punkty  $A$  i  $B$  leżą z tej samej strony linii prostej  $p$ . Znaleźć najkrótszą drogę promienia, który wychodzi z  $A$ , dotyka prostej  $p$  i wraca do  $B$ . (Uwaga: dla dowodu użyć symetrycznego obrazu punktu  $A$  w prostej  $p$ ).

14. Wykreślić symetralną kąta, którego wierzchołek jest niedostępny (przy pomocy linii równoległych lub równoległego przesunięcia kąta).

15. Przedłużyć linię prostą poza przeszkodę (zapomocą linii równoległej).

§ 49—50. 16. Wykreślić trójkąt prostokątny znając:  $a$ ) przeciwprostokątnię i wysokość do niej wykreśloną;  $b$ ) rzuty obu przyprostokątni na przeciwprostokątnię (szuka się miejsc geometrycznych trzeciego wierzchołka).

17. Wykreślić trójkąt równoramienny znając jego ramię i wysokość (szuka się miejsc geometrycznych dwóch wierzchołków podstawy).

18. Wykreślić trójkąt znając  $a, w_b$  i  $w_c$ , t. j. bok i wysokości należące do dwóch innych boków.

19. Wykreślić trójkąt znając jeden bok, kąt przy nim leżący i promień koła opisanego.

20. Wykreślić do danego koła styczną równoległą do jakiejś prostej.

21. Na stycznej do koła znaleźć punkt, z którego widać koło pod danym kątem (patrz zadania poprzednie).

22. Wykreślić trójkąt znając jeden bok, kąt przy nim leżący i promień koła wpisanego (patrz zad. 20 i 21).

23. Opierając się na twierdzeniu z § 27. wykreślić punkty, z których widać dany odcinek pod danym kątem.

24. Wykreślić punkt, z którego widać dwa dane odcinki, leżące dowolnie, pod dwoma danymi kątami (patrz zadanie poprzednie).

25. Wykreślić koło, dotykające dwóch prostych równoległych i przechodzące przez jeden punkt, leżący między nimi (przesunięcie).

26. Wykreślić koło o znanym promieniu, dotykające zewnętrznie drugiego koła i przechodzące przez dany punkt  $P$  (szukać miejsc geometrycznych dla środka tego koła stycznego!).

27. Wykreślić koło o znanym promieniu, dotykające zewnętrznie dwóch danych kół (szukać miejsc geometrycznych dla środka żadanego koła).

28. Wykreślić koło o danym promieniu, dotykające ramion dowolnego kąta (miejscami geometrycznymi środka są równoległe do ramion w odstępie równym promieniowi).

29. Znaleźć punkt, z którego dane koło widać pod danym kątem (patrz zadanie poprzednie). Co jest miejscem geometrycznym takich punktów?

30. Z jakiej odległości widzielibyśmy księżyc pod kątem  $30^\circ$  (promień księżycy obrać na rysunku 1 cm, prawdziwa jego długość jest 1758 km). Rozwiązać konstrukcyjnie.

31. Koło  $k_1$  leży zewnątrz koła  $k_2$  a  $r_1 > r_2$ . Zakreślić koło współśrodkowe z  $k_1$  promieniem  $r_1 - r_2$  i poprowadzić do niego styczne ze środka koła  $k_2$ . Wykazać, że styczne koła  $k_1$  równoległe do stycznych koła wewnętrznego są zarazem stycznymi koła  $k_2$ .

32. Tę samą konstrukcję wykonać z kołem współśrodkowym o promieniu  $r_1 + r_2$ .

33. Na podstawie poprzednich zadań znaleźć cztery styczne wspólne dwom kołom mimośrodkowym (koła pomocnicze mają promienie  $r_1 - r_2, r_1 + r_2$ ).

34. Skonstruować cień i półcień kuli mniejszej oświeconej kulą większą w przekroju. (Trzeba wykreślić styczne wspólne obydwu kołom, patrz zadania 31, 32, 33).

35. Wykreślić trójkąt równoboczny znając jego wysokość.

36. Wykreślić trójkąt prostokątny znając jeden kąt ostry i rzut boku przy nim leżącego na przeciwprostokątnię (figura pomocnicza!).

37. Wykreślić trójkąt równoramienny znając wysokość i jeden kąt, n. p. przy podstawie.

38. Wykreślić trójkąt znając wysokość nakreśloną na jeden bok i dwa kąty przy tym boku leżące.

39. Wykreślić trójkąt znając sumę dwóch boków i kąty jednemu z nich przyległe (por. str. 101).

40. Wykreślić trójkąt znając różnicę  $r$  dwóch boków, bok trzeci  $c$  i kąt  $\gamma$  naprzeciw tego boku leżący. (Trójkąt pomocniczy składa się z  $r$  i kąta  $90^\circ + \frac{\gamma}{2}$ , leżącego naprzeciw  $c$ . Przeprowadź analizę!)

41. Wykreślić trójkąt znając obwód  $u$  i dwa kąty  $\alpha, \beta$ . (Trójkąt pomocniczy układa się z  $u, \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ . Przeprowadź analizę!)

42. W dany romb wpisać kwadrat (wierzchołki kwadratu mają leżeć na bokach rombu).

43. Zbudować trapez, znając dwie przekątne, sumę dwóch boków sąsiednich i kąt między nimi zawarty.



3. Z końców  $AB$  odcinka o długości  $a$  widać dwa punkty niedostępne  $C$  i  $D$  pod danymi kątami  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ . Znaleźć konstrukcyjnie odległość tych miejsc  $C$  i  $D$ .

§ 47. 4. Wykreślić przy pomocy cyrkla kilka stycznych w danych punktach na obwodzie koła, nie przedłużając promieni poza obwód.

5. Wykreślić przez punkt poza prostą linię równoległą przenosząc kąt naprzemianległe (przy pomocy cyrkla).

6. Wykonać przesunięcie równoległe dowolnego odcinka przy pomocy cyrkla i lineалу.

7. Dowolny pęk promieni przenieść do innego punktu przy pomocy cyrkla i lineалу.

8. Dwa zwierciadła płaskie przecinają się pod kątem  $60^\circ$ ; między nimi leży punkt  $P$ . Wykreślić w przekroju obrazy tego punktu w obydwu zwierciadłach, a te obrazy znowu odbić w obydwu zwierciadłach i t. d. Czy konstrukcja skończy się? Jaki kąt muszą tworzyć dwa zwierciadła, aby otrzymać 4, 6, 8, 9, 12, 60 obrazów?

9. To samo zadanie wykonać dla odcinka, leżącego między zwierciadłami.

§ 48. 10. Na danej prostej  $p$  znaleźć punkt, odległy od danego punktu  $P$ , leżącego poza prostą, o daną odległość  $d$  (determinacja!).

11. Na danej prostej znaleźć punkt równo oddalony od dwóch danych punktów  $A$  i  $B$ , nie leżących na tej prostej.

12. Z punktu  $P$ , poza prostą leżącą, poprowadzić promień, przecinający prostą pod podanym kątem  $\alpha$  (użyć przesunięcia!).

13. Dwa punkty  $A$  i  $B$  leżą z tej samej strony linii prostej  $p$ . Znaleźć najkrótszą drogę promienia, który wychodzi z  $A$ , dotyka prostej  $p$  i wraca do  $B$ . (Uwaga: dla dowodu użyć symetrycznego obrazu punktu  $A$  w prostej  $p$ ).

14. Wykreślić symetralną kąta, którego wierzchołek jest niedostępny (przy pomocy linii równoległych lub równoległego przesunięcia kąta).

15. Przedłużyć linię prostą poza przeszkodę (zapomocą linii równoległej).

§ 49—50. 16. Wykreślić trójkąt prostokątny znając:  $a$ ) przeciwprostokątnię i wysokość do niej wykreśloną;  $b$ ) rzuty obu przyprostokątni na przeciwprostokątnię (szuka się miejsc geometrycznych trzeciego wierzchołka).

17. Wykreślić trójkąt równoramienny znając jego ramię i wysokość (szuka się miejsc geometrycznych dwóch wierzchołków podstawy).

18. Wykreślić trójkąt znając  $a, w_b$  i  $w_c$ , t. j. bok i wysokości należące do dwóch innych boków.

19. Wykreślić trójkąt znając jeden bok, kąt przy nim leżący i promień koła opisanego.

20. Wykreślić do danego koła styczną równoległą do jakiejś prostej.

21. Na stycznej do koła znaleźć punkt, z którego widać koło pod danym kątem (patrz zadania poprzednie).

22. Wykreślić trójkąt znając jeden bok, kąt przy nim leżący i promień koła wpisanego (patrz zad. 20 i 21).

23. Opierając się na twierdzeniu z § 27. wykreślić punkty, z których widać dany odcinek pod danym kątem.

24. Wykreślić punkt, z którego widać dwa dane odcinki, leżące dowolnie, pod dwoma danymi kątami (patrz zadanie poprzednie).

25. Wykreślić koło, dotykające dwóch prostych równoległych i przechodzące przez jeden punkt, leżący między nimi (przesunięcie).

26. Wykreślić koło o znanym promieniu, dotykające zewnętrznie drugiego koła i przechodzące przez dany punkt  $P$  (szukać miejsc geometrycznych dla środka tego koła stycznego!).

27. Wykreślić koło o znanym promieniu, dotykające zewnętrznie dwóch danych kół (szukać miejsc geometrycznych dla środka żadanego koła).

28. Wykreślić koło o danym promieniu, dotykające ramion dowolnego kąta (miejscami geometrycznymi środka są równoległe do ramion w odstępie równym promieniowi).

29. Znaleźć punkt, z którego dane koło widać pod danym kątem (patrz zadanie poprzednie). Co jest miejscem geometrycznym takich punktów?

30. Z jakiej odległości widzielibyśmy księżyc pod kątem  $30^\circ$  (promień księżycy obrać na rysunku 1 cm, prawdziwa jego długość jest 1758 km). Rozwiązać konstrukcyjnie.

31. Koło  $k_1$  leży zewnątrz koła  $k_2$  a  $r_1 > r_2$ . Zakreślić koło współśrodkowe z  $k_1$  promieniem  $r_1 - r_2$  i poprowadzić do niego styczne ze środka koła  $k_2$ . Wykazać, że styczne koła  $k_1$  równoległe do stycznych koła wewnętrznego są zarazem stycznymi koła  $k_2$ .

32. Tę samą konstrukcję wykonać z kołem współśrodkowym o promieniu  $r_1 + r_2$ .

33. Na podstawie poprzednich zadań znaleźć cztery styczne wspólne dwom kołom mimośrodkowym (koła pomocnicze mają promienie  $r_1 - r_2, r_1 + r_2$ ).

34. Skonstruować cień i półcień kuli mniejszej oświeconej kulą większą w przekroju. (Trzeba wykreślić styczne wspólne obydwu kołom, patrz zadania 31, 32, 33).

35. Wykreślić trójkąt równoboczny znając jego wysokość.

36. Wykreślić trójkąt prostokątny znając jeden kąt ostry i rzut boku przy nim leżącego na przeciwprostokątnię (figura pomocnicza!).

37. Wykreślić trójkąt równoramienny znając wysokość i jeden kąt, n. p. przy podstawie.

38. Wykreślić trójkąt znając wysokość nakreśloną na jeden bok i dwa kąty przy tym boku leżące.

39. Wykreślić trójkąt znając sumę dwóch boków i kąty jednemu z nich przyległe (por. str. 101).

40. Wykreślić trójkąt znając różnicę  $r$  dwóch boków, bok trzeci  $c$  i kąt  $\gamma$  naprzeciw tego boku leżący. (Trójkąt pomocniczy składa się z  $r$  i kąta  $90^\circ + \frac{\gamma}{2}$ , leżącego naprzeciw  $c$ . Przeprowadź analizę!)

41. Wykreślić trójkąt znając obwód  $u$  i dwa kąty  $\alpha, \beta$ . (Trójkąt pomocniczy układa się z  $u, \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ . Przeprowadź analizę!)

42. W dany romb wpisać kwadrat (wierzchołki kwadratu mają leżeć na bokach rombu).

43. Zbudować trapez, znając dwie przekątne, sumę dwóch boków sąsiednich i kąt między nimi zawarty.



44. Zbudować ośmiokąt umiary, znając: a) najkrótszą przekątnię, b) średnią przekątnię, c) najdłuższą przekątnię.

45. Z końców danego odcinka  $a$  zakreślić łuki promieniem  $a$  od końca odcinka aż do przecięcia się; na połowach odcinka wykonać tę samą konstrukcję w tę samą stronę odcinka  $a$  i znaleźć koło, dotykające wewnętrznie dwóch większych łuków, a zewnętrznie dwóch mniejszych łuków (okno gotyckie z kołem wierzchołkowym).

## Rozdział IX

### Proporcjonalność odcinków. Podobieństwo figur

#### § 51. Stosunek odcinków.

Mówiliśmy już o mierzeniu odcinków (str. 13) i wiemy, co to znaczy **stosunek dwóch odcinków**. Potrafimy obliczyć wykładnik tego stosunku, jeżeli jeden odcinek mieści się w drugim całkowitą liczbę razy, bez reszty. Przy mierzeniu odcinka  $EF$  odcinkiem  $CD$  może jednak pozostać jakaś reszta. N. p. na fig. 138.

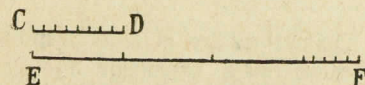


Fig. 138.

$CD$  mieści się w  $EF$  3 razy i pozostaje reszta. Wtedy mierzymy ją jakimś mniejszym odcinkiem, n. p. jakąś całkowitą częścią odcinka  $CD$ .

Na naszej figurze podzieliliśmy odcinek  $CD$  na 8 równych części i widzimy, że reszta odcinka  $EF$  zawiera pięć takich części.

Wtedy liczbą wymiarową odcinka  $EF$  (przy użyciu jednostki  $CD$ ) jest liczba  $3\frac{5}{8}$ .

$$EF:CD = 3\frac{5}{8} \text{ lub } EF = 3\frac{5}{8} CD.$$

Trudno jednak z góry przewidzieć, na jakie części należy resztę podzielić.

Sposób systematyczny polega na t. zw. **mierzeniu łańcuchowym**, które jest geometrycznym odzwierciedleniem znanego z algebry dzielenia łańcuchowego, używanego do znalezienia największej wspólnej miary dwóch liczb (sposób Euklidesa).

Aby zmierzyć odcinek  $AB$  odcinkiem  $CD$ , odcinamy najpierw  $CD$  na  $AB$ . Pozostałą resztę  $EB$  odcinamy na  $CD$ , ile razy można (n. p. na fig. 139 dwa razy) do punktu  $F$ . Resztę  $FD$  odcinamy na reszcie  $EB$  (w naszym przykładzie trzy razy), do punktu  $G$ . Resztę  $GB$  odcinamy na reszcie  $FD$  (w naszym przykładzie pięć razy) i t. d. Jeżeli mierzenie się skończy,

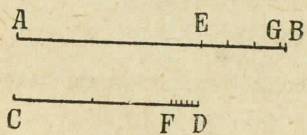


Fig. 139.

to odcinek  $GB$ , którym mierzyliśmy ostatni raz, jest wspólną miarą obydwu odcinków  $AB$  i  $CD$ . Mieści się bowiem w naszym przykładzie pięć razy w  $FD$ .

$$3.5 + 1 = 16 \text{ razy w } EB$$

$$2.16 + 5 = 37 \text{ razy w } CD \text{ a}$$

$$37 + 16 = 53 \text{ razy w } AB.$$

Liczby 53 i 37 są liczbami wymiarowymi odcinków  $AB$  i  $CD$  (przy użyciu odcinka  $GB$  jako jednostki), a stosunek tych liczb wymiarowych:  $53:37$  jest wykładnikiem stosunku odcinków;  $AB:CD = \frac{53}{37}$ .

Jeżeli odcinki mają wspólną miarę, to mierzenie łańcuchowe musi się skończyć, prowadzi więc zawsze do znalezieniażądanego stosunku. Wykładnik stosunku jest wtedy liczbą całą lub ułamkową, t. j. liczbą wymierną, a odcinki nazywają się **współmierne**.

Istnieją jednak (w geometrii idealnej) także odcinki niewspółmierne, a więc nie posiadające żadnej (nawet najdrobniejszej) wspólnej miary. Takimi odcinkami są n. p. bok i przekątnia tego samego kwadratu, jak to później obaczymy.

Łatwiej to spostrzeczemy dla boku dziesięciokąta umiaryowego i promienia koła na nim opisanego.

Narysujmy jeden wycinek takiego dziesięciokąta. Kąt środkowy odpowiedni wynosi  $36^\circ$  (fig. 140) a więc kąty przy podstawie wynoszą razem  $144^\circ$ ;

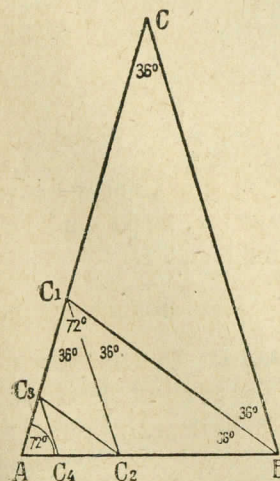


Fig. 140.

na jeden wypada  $72^\circ$ . Poprowadźmy symetralną  $BC_1$  kąta  $B$ . Trójkąt  $BC_1C$  jest równoramienny, a także trójkąt  $BAC_1$ , jak to wynika z obliczenia kąta  $C_1$ . Stąd: bok  $CC_1 = C_1B = AB$ . Odcieśliśmy w ten sposób bok  $AB$  na  $AC$ . Teraz resztę odetnijmy na  $AB$  znowu w ten sam sposób, t. j. kreśląc symetralną  $C_1C_2$  kąta  $C_1$ . Linia  $C_2B$  jest równa  $AC_1$ , powstała więc przez odcięcie reszty  $AC_1$  na boku  $AB$ . Teraz resztę  $AC_2$  odcinamy na  $AC_1$  przy pomocy tej samej konstrukcji od punktu  $C_1$  do punktu  $C_3$ ; pozostałą resztę  $AC_3$  odcinamy od  $C_2$  do  $C_4$  i t. d. Ponieważ symetralna kąta trafia zawsze przeciwległe boki pomiędzy wierzchołkami leżącymi na nich, a nigdy nie trafi któregoś z tych wierzchołków, przeto nigdy nie wyczerpiemy całego odcinka  $AC$  ani  $AB$  przy tem mierzeniu łańcuchowym. Odcinki  $AB$  i  $AC$  są więc niewspółmierne.

Mimo to stosunek takich odcinków można obliczyć, będzie on **liczbą niewymierną**.

Gdybyśmy bowiem odrzucili małą resztę, pozostającą przy mierzeniu, otrzymalibyśmy stosunek wymierny, n. p.  $\frac{l}{q}$ ;



resztę tak, aby się dała zmierzyć, otrzymalibyśmy  $\frac{l+1}{q}$ . W ten sposób zamykamy nasz stosunek pomiędzy dwie liczby, różniące się o  $\frac{1}{q}$ . Gdybyśmy mierzenie łańcuchowe poprowadzili dalej, otrzymalibyśmy drobniejszą resztę, mieściłaby się ona więcej razy w obydwu odcinkach, zamknęlibyśmy więc znowu nasz stosunek pomiędzy dwoma liczbami  $\frac{l'}{q'}$  i  $\frac{l'+1}{q'}$ , różniącymi się o  $\frac{1}{q'}$ , a więc o liczbę mniejszą od  $\frac{1}{q}$  (bo  $q'$  większe). Wartość stosunku możemy więc ujmować w granice coraz to bliższe, zapomocą dwóch szeregów liczb wymiernych:

$$\frac{l}{q}, \frac{l'}{q'}, \frac{l''}{q''}, \dots, i \frac{l+1}{q}, \frac{l'+1}{q'}, \frac{l''+1}{q''}, \dots$$

Różnice odpowiednich wyrazów tych dwóch szeregów liczb wynoszą  $\frac{1}{q}, \frac{1}{q'}, \frac{1}{q''}, \dots$  dążą więc do zera, albowiem  $q, q', q'', \dots$  są coraz to większymi liczbami całkowitemi.

Wspólną granicę tych obydwu zbieżnych szeregów liczb wymiernych nazywamy — jak wiadomo z algebry — liczbą niewymierną.

Stąd wniosek: jeżeli dwa odcinki są niewspółmierne, to ich stosunek jest liczbą niewymierną.

Tak n. p. w naszym przykładzie na fig. 140 można zamknąć stosunek  $AC$  do  $AB$  między następującymi szeregami liczb, 2, 1·7, 1·62, 1·619, 1·6181, 1·61804, a 1, 1·6, 1·61, 1·618, 1·6180, 1·61803, zbliżającymi się do liczby niewymiernej  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (por. § 72).

## § 52. Stosunek podziału odcinka.

Jeżeli jakiś odcinek podzielimy dowolnym punktem na dwie części, to stosunek tych dwóch części nazywamy stosunkiem podziału odcinka.

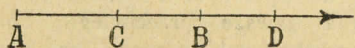


Fig. 141.

N. p.  $\frac{AC}{BC}$  jest stosunkiem podziału odcinka  $AB$ . Podział ten nazywamy wewnętrznym. Jeżeli poza odcinkiem  $AB$  obierzemy punkt  $D$

i utworzymy stosunek  $\frac{AD}{BD}$ , otrzymujemy stosunek podziału zewnętrznego (fig. 141).

Jeżeli zwracamy uwagę na kierunek odcinków (por. str. 12), to stosunek  $\frac{AC}{BC}$  ma wartość ujemną, albowiem odcinek  $AC$  mie-

rzemy na prawo, a  $BC$  na lewo. Jeżeli więc jeden kierunek obierzemy za dodatni, n. p. od  $A$  ku  $C$ , to odcinek  $AC$  uważamy za dodatni, (jego liczba wymiarowa jest dodatnia) a  $BC$  za ujemny. Ich stosunek jest więc liczbą ujemną. Stosunek podziału zewnętrznego:  $\frac{AD}{BD}$  ma zawsze wartość dodatnią (dlaczego?)

(Kiedy stosunek podziału wewnętrznego dąży do 0, — 1, do nieskończoności? Kiedy stosunek podziału zewnętrznego dąży do zera, do nieskończoności?)

Stosunek tych dwóch stosunków nazywamy: stosunkiem podziału podwójnego czterech punktów i używamy skrócenia:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = (ABCD).$$

Jeżeli stosunek pierwszy równa się drugiemu co do wartości bezwzględnej, a tylko znakiem się różni, podział odcinka  $AB$  nazywamy się harmoniczny, w każdym innym razie anharmoniczny.

Przy podziale harmonicznym musi więc być  $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1$ , czyli krótko:  $(ABCD) = -1$ .

Wtedy  $AB$  jest tak samo podzielony punktem  $C$  wewnątrznie, jak punktem  $D$  zewnątrznie. N. p. jeżeli  $BC$  jest trzecią częścią  $AC$ , to i  $BD$  musi być trzecią częścią  $AD$ . Jeżeli punkty  $C, D$  dzielą harmonicznie odcinek  $AB$ , to także odwrotnie punkty  $A, B$  przedzielają harmonicznie odcinek  $CD$ . Albowiem z równości  $\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$

wynika także  $\frac{-CA}{-CB} = -\frac{-DA}{-DB}$ , czyli mnożąc przez  $-CB$  a dzieląc przez  $-DA$ :  $\frac{CA}{DA} = -\frac{CB}{DB}$ , a to znaczymy  $(CDAB) = -1$ .

Takie cztery punkty na prostej nazywają się harmonicznie sprzężone.

Stosunki podziału podwójnego odgrywają ważną rolę przy badaniu t. zw. perspektywicznych szeregów punktów, t. j. szeregów punktów otrzymanych na różnych liniach prostych przez przecięcie jednego pęku promieni.

## § 53. Proporcjonalność odcinków.

Podobnie jak w algebrze, tak i w geometrii ważną rolę odgrywają proporcje. Jeżeli dwa odcinki mają taki sam stosunek, jak dwa inne, nazywamy te cztery odcinki proporcjonalnymi i piszemy:

$$AB : CD = A'B' : C'D'.$$



Najważniejszym przykładem takich odcinków proporcjonalnych są kawałki odcięte na dowolnym pęku promieni zapomocą dwóch linii równoległych.

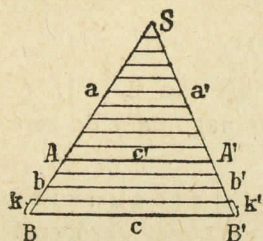


Fig. 142.

Zbadajmy najpierw dwa promienie przecięte dwoma liniami równoległymi. Zajmijmy się najpierw przypadkiem, kiedy odcinki  $a$  i  $b$  są współmierne. Odcinając wspólną miarę  $k$  (fig. 142) na każdym z nich możemy podzielić  $a$  na równe części, n. p. na  $m$  równych części, a tak samo  $b$  tym samym odcinkiem  $k$  na  $p$  równych części.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Więc: } a = m \cdot k \\ b = p \cdot k \end{array} \right\} \text{ich stosunek } a : b = \frac{m}{p}.$$

Jeżeli przez punkty podziału poprowadzimy szereg linii równoległych do  $BB'$ , to wiemy, że także bok  $SB'$  rozpadnie się na tyleż równych — ale już innych od  $k$  — części  $k'$ . (Por. § 23).

$$\text{a więc: } \left. \begin{array}{l} a' = m \cdot k' \\ b' = p \cdot k' \end{array} \right\} \text{stad } a' : b' = \frac{m}{p}.$$

Otrzymaliśmy więc tę samą wartość dla stosunku  $a' : b'$ , co i dla  $a : b$ , zatem:

$$a : b = a' : b' \quad \text{słowami:}$$

**Dwie proste równoległe odcinają na każdej parze promieni odcinki proporcjonalne.** (Twierdzenie Talesa z VII wieku przed n. Chr.).

Jeżeli odcinki  $a$  i  $b$  są niewspółmierne, to dzielimy odcinek  $b$  na wiele drobnych części  $k$ . Wtedy  $k$  mieści się w  $b$  n. p.  $m$  razy, a w  $a$  mieści się n. p.  $p$  razy i zostaje reszta  $r$ , mniejsza od  $k$ . Więc:

$$\begin{aligned} a &= p k + r \\ b &= m k \end{aligned}$$

$$\text{zatem } \frac{a}{b} = \frac{p}{m} + \frac{r}{m k}.$$

$$\text{a więc: } \frac{a}{b} > \frac{p}{m}.$$

Jeżeli resztę opuścimy, otrzymamy na przybliżoną — przez niedomiar — wartość stosunku  $a : b = \frac{p}{m}$ . Jeżeli zaś resztę uzupełnimy, aby wynosiła  $k$ , przez dodanie części  $r'$  mniejszej od  $k$ , to:

$$\begin{aligned} a &= (p + 1) k - r' \\ b &= m k \end{aligned}$$

$$\text{zatem } \frac{a}{b} = \frac{p + 1}{m} - \frac{r'}{m k}$$

$$\text{więc } \frac{a}{b} < \frac{p + 1}{m}.$$

(Opuszczając teraz część drobną  $r'$  otrzymamy na przybliżoną wartość stosunku — przez nadmiar —

$$a : b = \frac{p + 1}{m}.$$

Zupełnie te same nierówności otrzymamy dla stosunku  $a' : b'$  według poprzedniego twierdzenia. Więc:

$$\frac{p}{m} < \frac{a}{b} < \frac{p + 1}{m}, \text{ i } \frac{p}{m} < \frac{a'}{b'} < \frac{p + 1}{m}.$$

Różnica tych wartości przybliżonych wynosi  $\frac{1}{m}$ , jest więc bardzo mała, jeżeliśmy  $b$  podzielili na bardzo drobne części. Różnica pomiędzy  $\frac{a}{b}$  a  $\frac{a'}{b'}$  musi być jeszcze mniejsza od  $\frac{1}{m}$ , czyli dąży do zera z wzrostem  $m$  (wykaż!).

Liczby niewymierne, dla których różnica kolejnych wartości przybliżonych dąży do zera, nazywają się równe, więc  $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$  czyli

$$\underline{a : b = a' : b'} \quad (1)$$

Z tej proporcji można wyprowadzić inne, posługując się znanymi twierdzeniami z algebry. Mianowicie z proporcji  $a : b = a' : b'$  wynikają także proporcje:

$$(a + b) : a = (a' + b') : a'$$

$$(a + b) : b = (a' + b') : b'$$

czyli

$$SB : SA = SB' : SA' \quad (2)$$

$$SB : AB = SB' : A'B' \quad (3)$$

Pierwszą z tych proporcji wyrażamy słowami: *odległości (od wierzchołka pęku) punktów przecięcia jednego promienia z prostymi równoległymi są proporcjonalne do odpowiednich odległości na drugim promieniu.*

Ale także odcinki  $c$  i  $c'$  prostych równoległych mają ten sam stosunek:  $SB : SA$ .

Aby to wykazać, uważamy  $B'$  (fig. 143) za wierzchołek pęku i z  $A'$  prowadzimy  $A'D$  równoległą do  $SB$ . Wtedy według proporcji (3) otrzymamy:

$$B'B : DB = B'S : A'S \text{ czyli:}$$

$$c : c' = SB' : SA' \quad 4)$$

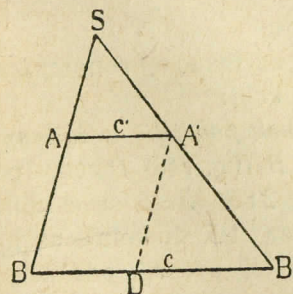


Fig. 143.

Twierdzenia te nie ulegają zmianie, jeżeli proste równoległe leżą po przeciwnych stronach wierzchołka  $S$ .



Wypowiedzieć te twierdzenia, uważając figurę  $SBB'$  za trójkąt!

Na twierdzeniu zawartem w proporcji (4) polega użycie t. zw. cyrkla proporcjonalnego (fig. 144), służącego do pomniejszenia wszystkich odcinków

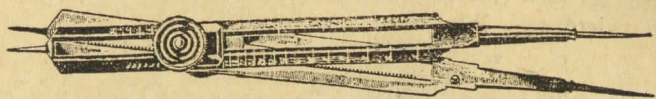


Fig. 144.

jakiegoś rysunku w stałym stosunku. Są to dwa ramiona ruchome około punktu  $O$  (fig. 145) i dające się przesunąć tak, że  $OA'$  ma żądany stosunek do  $OA$ . Wtedy przy każdej wartości ramion końce  $A'B'$  zawierają odcinek, pozostający do  $AB$  w stałym, żądanym stosunku.

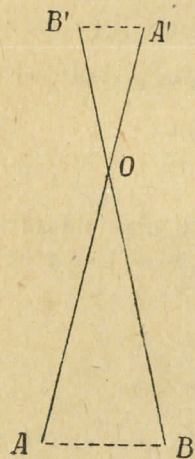


Fig. 145.

Twierdzenia te można odwrócić w następujący sposób:

*Jeżeli dwie proste odcinają na dwóch promieniach odcinki proporcjonalne, to te proste są równoległe.* (Dowód niewprost). Jest to nowy sposób sprawdzenia równoległości linii (nowe kryterjum, jak się nieraz wyrażamy).

Przeniesienie tych twierdzeń na pęki promieni, złożone z dowolnej liczby prostych i przecięte dwoma liniami równoległymi, nie sprawia żadnych trudności. (Przeprowadź dowód).

#### § 54. Zastosowanie twierdzeń o promieniach przeciętych liniami równoległymi.

Przy pomocy poznanych twierdzeń o odcinkach proporcjonalnych można wykonać wiele ważnych konstrukcji:

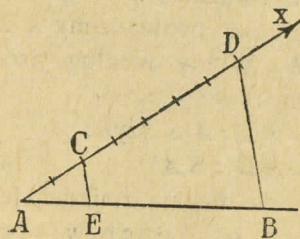


Fig. 146.

a) Dany odcinek podzielić w żądanym stosunku. N. p.  $AB$  (fig. 146) chcemy podzielić w stosunku 2:5. Kreśli się z końca odcinka drugą prostą  $AX$  dowolnie nachyloną do  $AB$ . Na tej prostej odcina się  $2 + 5 = 7$  równych — ale jakichby — kawałków. Łączymy  $D$  z  $B$  a z punktu  $C$  wykreślamy równoległą  $CE$  do  $DB$ , to  $AE:EB = AC:CD$  czyli  $AE:EB = 2:5$ .

b) Do trzech danych odcinków  $a, b, c$  znaleźć czwarty proporcjonalny  $x$ . Zadanie to nazywamy graficznym rozwiązaniem proporcji. Fig. 147 wyjaśnia postępowanie, prowadzące do znalezienia żadanego odcinka  $x$ , spełniającego proporcję:

$$a:b = c:x.$$

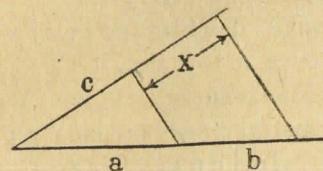


Fig. 147.

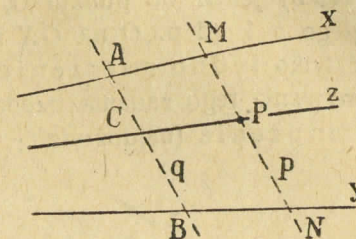


Fig. 148.

c) Wykreślić linię prostą z danego punktu  $P$ , zdążającą do niedostępnego punktu przecięcia się dwóch prostych  $x, y$ .

Prowadzimy przez  $P$  dowolną prostą  $p$ , przecinającą obydwie ramiona  $x, y$ . Kreślimy jakąkolwiek prostą  $q$ , równoległą do  $p$  i dzielimy  $AB$  według  $a$  w tym samym stosunku, w jakim  $P$  dzieli  $MN$ . Prosta  $z$ , łącząca obydwie punkty podziału, zdąża do niedostępnego punktu przecięcia się prostych  $x$  i  $y$ . Uzasadnić tę konstrukcję!

Przy działaniach odcinkami omówiliśmy mnożenie odcinka przez liczbę. Obecnie możemy określić mnożenie odcinka przez

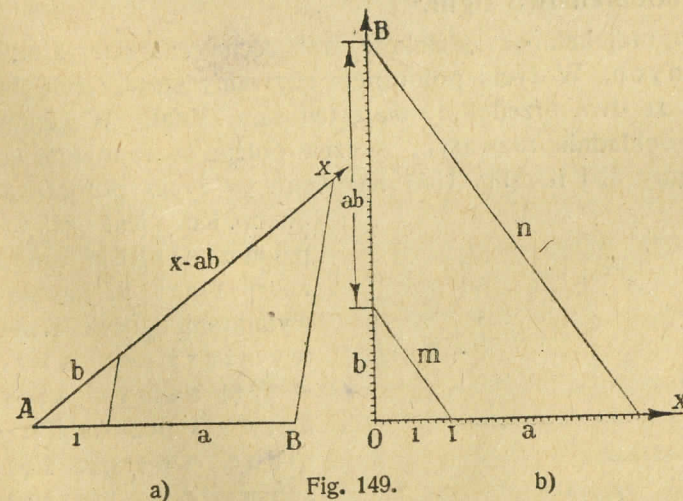


Fig. 149.

odcinek czyli graficzne mnożenie. Rozwiążmy graficznie proporcję  $1:a = b:x$  (fig. 149 a). Otrzymamy odcinek  $x = ab$ . Gdybyśmy użyli papieru „milimetrowego“, wygodniej byłoby obrać proste  $AB$  i  $AX$



Wypowiedzieć te twierdzenia, uważając figurę  $SBB'$  za trójkąt!

Na twierdzeniu zawartem w proporcji (4) polega użycie t. zw. cyrkla proporcjonalnego (fig. 144), służącego do pomniejszenia wszystkich odcinków

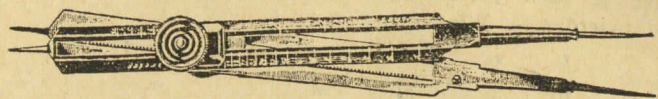


Fig. 144.

jakiegoś rysunku w stałym stosunku. Są to dwa ramiona ruchome około punktu  $O$  (fig. 145) i dające się przesunąć tak, że  $OA'$  ma żądany stosunek do  $OA$ . Wtedy przy każdej wartości ramion końce  $A'B'$  zawierają odcinek, pozostający do  $AB$  w stałym, żądanym stosunku.

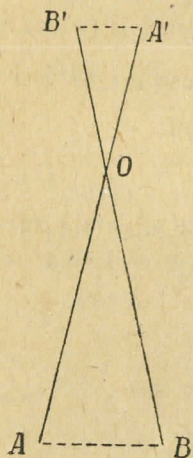


Fig. 145.

Twierdzenia te można odwrócić w następujący sposób:

*Jeżeli dwie proste odcinają na dwóch promieniach odcinki proporcjonalne, to te proste są równoległe.* (Dowód niewprost). Jest to nowy sposób sprawdzenia równoległości linii (nowe kryterjum, jak się nieraz wyrażamy).

Przeniesienie tych twierdzeń na pęki promieni, złożone z dowolnej liczby prostych i przecięte dwoma liniami równoległymi, nie sprawia żadnych trudności. (Przeprowadź dowód).

#### § 54. Zastosowanie twierdzeń o promieniach przeciętych liniami równoległymi.

Przy pomocy poznanych twierdzeń o odcinkach proporcjonalnych można wykonać wiele ważnych konstrukcji:

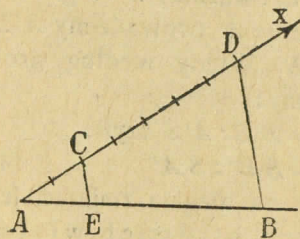


Fig. 146.

a) Dany odcinek podzielić w żądanym stosunku. N. p.  $AB$  (fig. 146) chcemy podzielić w stosunku 2:5. Kreśli się z końca odcinka drugą prostą  $AX$  dowolnie nachyloną do  $AB$ . Na tej prostej odcina się  $2 + 5 = 7$  równych — ale jakichby — kawałków. Łączymy  $D$  z  $B$  a z punktu  $C$  wykreślamy równoległą  $CE$  do  $DB$ , to  $AE:EB = AC:CD$  czyli  $AE:EB = 2:5$ .

b) Do trzech danych odcinków  $a, b, c$  znaleźć czwarty proporcjonalny  $x$ . Zadanie to nazywamy graficznym rozwiązaniem proporcji. Fig. 147 wyjaśnia postępowanie, prowadzące do znalezienia żadanego odcinka  $x$ , spełniającego proporcję:

$$a:b = c:x.$$

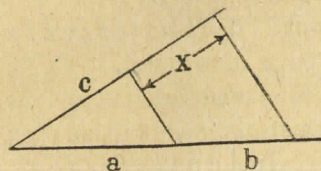


Fig. 147.

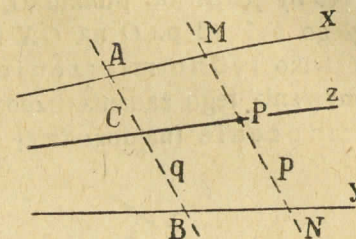


Fig. 148.

c) Wykreślić linię prostą z danego punktu  $P$ , zdążającą do niedostępnego punktu przecięcia się dwóch prostych  $x, y$ .

Prowadzimy przez  $P$  dowolną prostą  $p$ , przecinającą obydwie ramiona  $x, y$ . Kreślimy jakąkolwiek prostą  $q$ , równoległą do  $p$  i dzielimy  $AB$  według  $a$  w tym samym stosunku, w jakim  $P$  dzieli  $MN$ . Prosta  $z$ , łącząca obydwie punkty podziału, zdąża do niedostępnego punktu przecięcia się prostych  $x$  i  $y$ . Uzasadnić tę konstrukcję!

Przy działaniach odcinkami omówiliśmy mnożenie odcinka przez liczbę. Obecnie możemy określić mnożenie odcinka przez

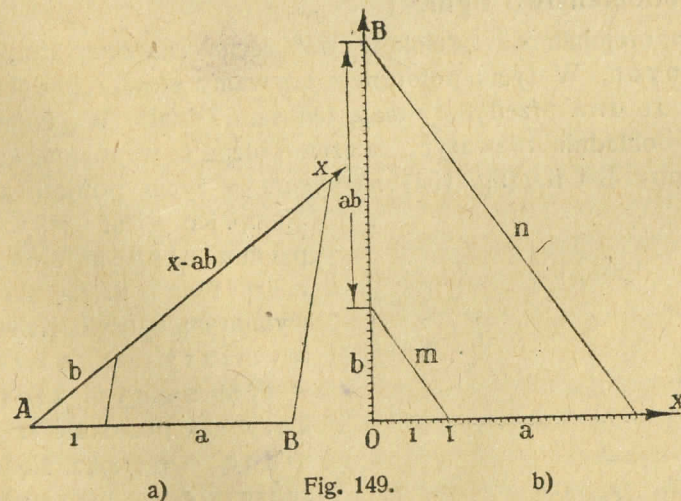


Fig. 149.

odcinek czyli **graficzne mnożenie**. Rozwiążmy graficznie proporcję  $1:a = b:x$  (fig. 149 a). Otrzymamy odcinek:  $x = ab$ . Gdybyśmy użyli papieru „milimetrowego“, wygodniej byłoby obrać proste  $AB$  i  $AX$



prostopadle. Wtedy wprost odczytalibyśmy z podziałki, ile wynosi iloczyn  $ab$ .

Postępowania tego można użyć z korzyścią, jeżeli mamy n. p. pomnożyć liczby wymiarowe dwóch odcinków jeszcze nie zmierzonych: bierzemy je w cyrkiel i odcinamy na ramionach kąta  $XOB$  (fig. 149 b) jeden od punktu  $O$ , na prostej  $OB$  drugi od punktu  $I$  odległego o 1 od p.  $O$  na  $OX$  i prowadzimy linie  $m \parallel n$ . Trzeba wykonać tylko jedno mierzenie. Tymczasem w zwykłym sposobie wykonywania tego zadania trzeba wykonać dwa mierzenia i jedno mnożenie (najdogodniej skrócone mnożenie).

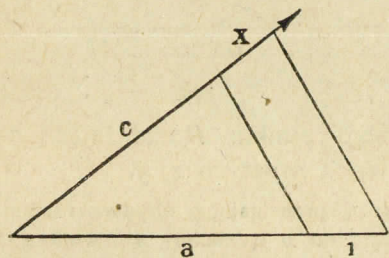


Fig. 150.

znaleźć iloraz  $x = \frac{a}{c}$ , czyli wykonać graficznie dzielenie.

### § 55. Podobieństwo figur.

Proporcjonalność odcinków jest cechą charakterystyczną figur podobnych. W życiu potocznym używamy słowa „podobny“, aby wyrazić, że dwa przedmioty mają ten sam kształt. W geometrii staramy się dokładniej rozważyć, na czym polega ta wspólność kształtów. N. p. figury I. i II. (fig. 151) nazwiemy w życiu potocznym podobnymi. Jedna jest — jak widzimy —

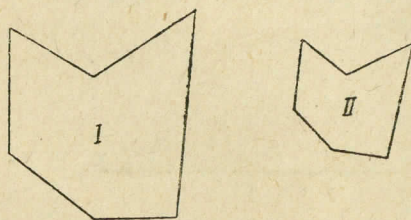


Fig. 151.

pomniejszem drugiej; wymiary figury II. są skróconymi wymiarami figury I., ale wszystkie wymiary są skrócone w tym samym stosunku, kąty zaś pozostały niezmiennione. Opierając się na tem spostrzeżeniu, budujemy następujące określenie:

Figury nazywają się podobne, jeżeli wszystkie odpowiednie odcinki obu figur są proporcjonalne, a wszystkie kąty równe.

Mnożenie odcinków — według tej konstrukcji — posiada prawo przemienności, łączności i rozdzielności (sprawdzić!).

Dzielenie odcinków określamy jako odwrócenie tego mnożenia. Więc n. p. znacząc  $a \cdot b$  literą  $c$ , określamy dzielenie, jako rozwiązanie proporcji  $1 : a = x : c$ .

Z figury 150 widzimy, jak należy wykonać konstrukcję, aby

Tę stałą wartość stosunku dwóch odpowiednich odcinków w dwóch figurach podobnych nazywamy wielkością zmniejszenia (powiększenia) lub krótko zmniejszeniem (powiększeniem).

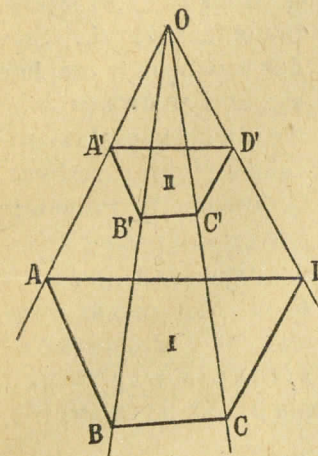


Fig. 152.

Figury przystające są naturalnie także podobne.

Jeżeli przez wierzchołki jakiegokolwiek figury poprowadzimy pęk promieni, to łatwo otrzymać figurę podobną. Trzeba tylko z dowolnego punktu  $A'$  jednego promienia (fig. 152) poprowadzić linię równoległą  $A'B'$  do odpowiedniego boku figury I, z punktu  $B'$  równoległą do  $BC$  i t. d., aż się figura II. zamknie. Istotnie kąty figur I. i II. są równe, jako kąty o ramionach zgodnie równoległych a boki są proporcjonalne. Wykazujemy to łańcuchem proporcji:

$$AB : A'B' = OB : OB' = BC : B'C' = OC : OC' = DC : D'C' = OD : OD' = AD : A'D',$$

z czego wynika:

$$AB : A'B' = BC : B'C' = DC : D'C' = AD : A'D'.$$

To dowodzi zarazem, że figura II musi się zamknąć (w przeciwnym razie stosunki  $AB : A'B'$  i  $AD : A'D'$  nie byłyby równe temu samemu stosunkowi:  $OA : OA'$ ), na co trzeba uważać przy konstrukcji na rysunku. Kąty są równe, boki proporcjonalne, więc  $I \sim II$ . Tak samo możnaby figurę II rysować na przedłużeniu promieni poza wierzchołek  $O$ .

Takie położenie dwóch figur podobnych nazywamy położeniem podobnym, a wierzchołek pęku  $O$  środkiem podobieństwa i to zewnętrznym, jeżeli obydwie figury podobne leżą po tej samej stronie  $O$ , a wewnętrznym, jeżeli figury podobne leżą po przeciwnych stronach punktu  $O$ .

Porównaj zachowanie się dwóch figur przystających, ustawionych równolegle!



Dwa koła mają zawsze położenie podobne. Aby znaleźć ich środek podobieństwa zewnętrzny, wykreśla się dowolne dwa promienie równoległe i linię środkową. Linia, łącząca końce promieni równoległych, przecina się z linią środkową w środku podobieństwa  $S_z$ . Środek wewnętrzny znajduje się, kreśląc dwa promienie równoległe, ale zwrócone w strony przeciwne. (Udowodnij!). Ponieważ i styczne wspólne schodzą się w tych punktach  $S_z$  i  $S_w$ , przeto wynika stąd prosta konstrukcja wspólnych

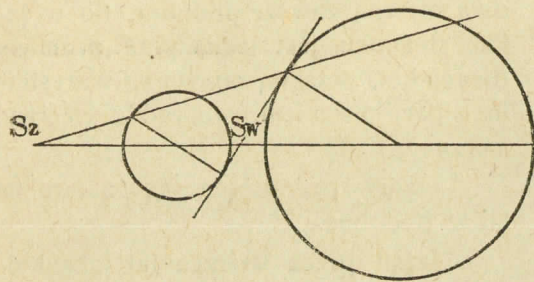


Fig. 153.

stycznych dwóch kół. (Porównaj ćwiczenia 31, 32, 33 na str. 103, gdzie podano inną konstrukcję).

## § 56. Znamiona podobieństwa trójkątów.

Podobnie jak dla zbadania przystawania dwóch figur nie trzeba było porównywać wszystkich boków i kątów, tak i przy badaniu podobieństwa wystarczy porównanie niektórych tylko części składowych.

Dotychczas podaliśmy dwa określenia podobieństwa, równoważne ze sobą:

- a) *boki mają być proporcjonalne a kąty równe* lub
- b) *figury dają się tak ustawić, że wszystkie boki odpowiednie są równoległe, a proste, łączące punkty odpowiednie, tworzą jeden pęk.*

Określenia te podają zupełnie wystarczające znamiona podobieństwa, ale zarazem aż „nadto wystarczające“, to znaczy: wystarczy wiedzieć o wiele mniej o dwóch figurach, aby być pewnym, że są podobne. Wybierzemy te warunki, które są niezbędnie konieczne a zarazem wystarczające.

Jakikolwiek problem naukowy uważamy dopiero wtedy za gruntownie zbadany, jeżeli zdołamy podać warunki wystarczające (t. j. nie za mało) i konieczne (t. j. nie za wiele).

I tak okażemy, że do zbadania podobieństwa dwóch trójkątów wystarczy i są konieczne następujące warunki:

(I') Dwa trójkąty, mające jeden kąt równy, a dwa boki zamykające go proporcjonalne, są podobne ( $\gamma = \gamma'$ ;  $a : a' = b : b'$ ).

(II') Dwa trójkąty, mające dwie pary kątów równe, są podobne. ( $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$ ).

(III') Dwa trójkąty, mające dwa boki proporcjonalne, a kąt, leżący naprzeciwko większego boku równy, są podobne ( $a : a' = b : b'$ ;  $\alpha = \alpha'$  przyczem  $a > b$ ).

(IV') Dwa trójkąty, mające trzy boki proporcjonalne, są podobne.

$$(a : a' = b : b';$$

$$a : a' = c : c').$$

Są to więc cztery przypadki podobieństwa, zupełnie podobne do czterech przypadków przystawania, tylko że „równość boków“ zastępujemy „proporcjonalnością boków“.

Każdy przypadek podobieństwa zawiera tylko dwa warunki (w przystawaniu mieliśmy trzy). Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że w trójkącie z równości kątów wynika proporcjonalność boków (II') i odwrotnie: z proporcjonalności boków wynika równość kątów (IV'). Przy przystawaniu nie mieliśmy takiej wzajemności. Dowodzi to, że sama wielkość boków nie zależy od samych kątów, tylko **stosunki boków są zależne od samych tylko kątów, są funkcjami kątów**. Znając kąty, potrafimy wyznaczyć stosunki boków (a nie same boki). Natomiast z równości boków wynika już równość kątów, więc **kąty są funkcjami samych boków**; znając boki trójkąta, można wyznaczyć kąty. Wszystkie te obliczenia jednak wchodzą już w zakres trygonometrii, gdzie też bada się dokładnie właściwości tych funkcji. (Dla czworokątów już równość kątów nie wywołuje proporcjonalności boków, n.p. prostokąt a kwadrat!)

Dowody przypadków podobieństwa przeprowadzimy tylko dla (II') i (IV'). Inne przeprowadza się w taki sam sposób.

Zacznijmy od przypadku (II'), w którym  $\alpha = \alpha'$  i  $\beta = \beta'$  (fig. 154). Przedewszystkiem musi być  $\gamma = \gamma'$ , jako reszta do  $180^\circ$ . Mamy jeszcze wykazać proporcjonalność boków.

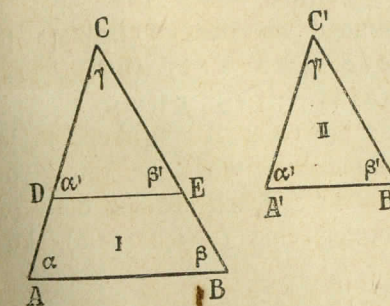


Fig. 154.

Odetnijmy w tym celu boki  $C'A'$  i  $C'B'$  trójkąta  $A'B'C'$  od wierzchołka  $C$ . Ponieważ i  $\gamma = \gamma'$ , to  $CDE \cong A'B'C'$ . Linia  $DE$  będzie równoległa do  $AB$ , bo  $\alpha' = \alpha$ , a to są kąty odpowiednie, utworzone



przez dwie linie, przecięte trzecią. Z równoległości linii wynikają proporcje (por. § 53):

$$CA : CD = CB : CE = AB : DE \text{ czyli}$$

$$CA : C'A' = CB : C'B' = AB : A'B'.$$

Więc trójkąty I i II mają kąty parami równe i boki parami proporcjonalne, są zatem podobne:  $I \sim II$ .

Dla udowodnienia (IV') przypadku, opieramy się na założeniu:

$$AC : A'C' = AB : A'B' = BC : B'C'.$$

Odcinamy  $CD = A'C'$  (fig. 154) i wykreślamy linję:  $DE \parallel AB$ , to trójkąt  $CDE \sim ABC$ , bo mają dwa kąty parami równe ( $\angle D = \angle A$  i  $\angle E = \angle B$ ). Pytanie, czy trójkąt  $CDE$  zastępuje trójkąt  $A'B'C'$ , t. j. czy jest do niego przystający?

Otóż  $AC : CD = BC : CE$  czyli  $AC : A'C' = BC : CE$ , stąd  $CE = \frac{BC \cdot A'C'}{AC}$ . W założeniu zaś mieliśmy:  $AC : A'C' = BC : B'C'$ ,

stąd  $B'C' = \frac{BC \cdot A'C'}{AC}$ , więc  $CE$  ma tę samą wartość, co  $B'C'$ .

Tak samo wykazuje się, że  $DE = A'B'$ , więc trójkąt  $CDE$  jest przystający do  $A'B'C'$ . Ponieważ zaś  $CDE \sim ABC$ , to i  $A'B'C'$  musi być podobny do  $ABC$ .

Dla sprawdzenia podobieństwa czworoboków, pięcioboków, ... wieloboków, trzeba porównać więcej części, ale zawsze o jedną mniej, aniżeli dla sprawdzenia przystawania. Figury bowiem podobne stają się przystającymi, jeżeli jeden bok obydwu figur zrówna się (z zachowaniem kształtu całej figury).

Konstrukcja trójkąta podobnego do danego trójkąta jest bardzo prosta: wystarczy przenieść dwa kąty (II'). Jeszcze prościej można to zrobić, odcinając przy pomocy linii równoległej od trójkąta część górną. Konstrukcja ta jest nieoznaczona: istnieje bowiem nieskończenie wiele trójkątów podobnych różnych pod względem wielkości. Jeżeli jednak dany jest jeszcze jeden bok, lub stosunek zmniejszenia (zwiększenia), konstrukcja jest wtedy oznaczona.

Ponieważ do budowania figur podobnych potrzeba mniej części, aniżeli dla figur przystających, przeto zadania konstrukcyjne ułatwiamy sobie często w ten sposób, że rysujemy najpierw figurę podobną do żądanej figury, a później powiększamy ją lub pomniejszamy odpowiednio do pozostałego warunku zadania. Ten sposób postępowania nazywamy *metodą figur podobnych*. Wyjaśnimy

tę metodę na przykładzie: *zbudować trójkąt, znając dwa kąty  $\alpha, \beta$  i promień koła opisanego  $R$* . Nie troszcząc się na razie o wielkość promienia  $R$ , wykreślamy (fig. 155) dowolny trójkąt podobny do

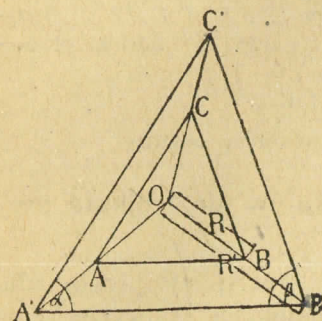


Fig. 155.

żądanego, a możemy to zrobić, ponieważ znamy dwa kąty. Następnie wykreślamy promień  $R'$  koła opisanego dla tego trójkąta i jeżeli on nie ma żądanej długości, odcinamy na nim od środka odpowiedni  $R$ . Teraz powiększamy (lub pomniejszamy) trójkąt tak, aby promień koła opisanego był  $R$ . Najłatwiej to uzyskać, odcinając na prostych  $OA'$ ,  $OB'$ ,  $OC'$  długość  $R$  od  $O$  do punktów  $A, B, C$ .

Na podobieństwie trójkątów polega przyrząd do rysowania figur podobnych (do pomniejszania i powiększania figur), zwany pantografem.

Przyrząd ten (fig. 156) składa się z czterech prętów, tworzących równoległobok:  $ABCD$ . W jednym punkcie  $P$  przytwierdza się przyrząd stale do płaszczyzny rysunku. Ramiona równoległoboku są ruchome w przegubach,

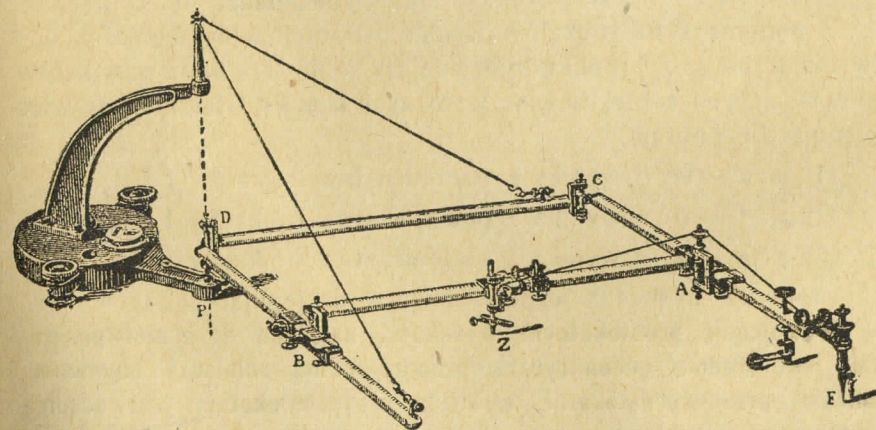


Fig. 156.

około punktów  $A, D, B, C$ , a oprócz tego cały przyrząd można obracać około punktu  $P$ . Jeżeli koniec  $F$ , umieszczony odpowiednio na ramieniu  $AC$ , posuwamy po jakiejś figurze, to ołówek, umieszczony w punkcie  $Z$ , na prostej, łączącej  $P$  z  $F$ , zakreśla figurę podobną, pomniejszoną. Jeżeli pomieniamy role







Punkt  $S$  odcina więc z obu dośrodkowych część trzecią.

Gdybyśmy teraz wykreślili trzecią dośrodkową  $CD$ , to ona musi także odciąć na  $AE$  i  $FB$  trzecią część, a więc musi trafić w punkt  $S$ .

Ten punkt  $S$  nazywamy środkiem ciężkości pola trójkąta. Wykazaliśmy więc:

Dośrodkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który odcina na każdej dośrodkowej od podstawy trzecią część.

Środek ciężkości jest czwartym osobliwym punktem trójkąta.

## § 59. Średnia harmoniczna.

W algebrze rozważa się obok średniej arytmetycznej i geometrycznej także średnią harmoniczną dwóch liczb.

Średnia arytmetyczna wynika z równania:

$$a - s = s - b, \text{ stąd } s = \frac{a + b}{2}.$$

Średnia geometryczna wynika z równania:

$$a : s = s : b; \text{ stąd } s = \sqrt{ab}.$$

Średnia zaś harmoniczna wynika z proporcji:

$$a : (a - s) = b : (s - b) \text{ i jak łatwo obliczyć, ma wartość: } s = \frac{2ab}{a+b}.$$

Znamy już sposób konstrukcyjny znalezienia średniej arytmetycznej (por. twierdzenia o trapezie i ćwiczenie 27, str. 85) i średniej geometrycznej. Średnią harmoniczną otrzymamy z harmonicznego podziału odcinka (por. § 52, str. 107). Jeżeli bowiem (fig. 160):

$$(ABCD) = -1 \text{ czyli}$$

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1, \text{ to}$$

$$AC : BC = -AD : BD$$

$$\text{ale } BC = -CB, \text{ więc}$$

$$AC : -CB = -AD : BD.$$

Mnożąc obie strony przez  $-1$ , otrzymamy  $AC : CB = +AD : BD$ . Z figury zaś widzimy, że wtedy  $a : (s - a) = b : (b - s)$ , czyli zmieniając znaki w 2. i 4. wyrazie  $a : (a - s) = b : (s - b)$ .

Otóż w podziale harmonicznym odcinek podzielony  $AB$  jest średnią harmoniczną między odcinkiem mniejszym a większym. Tak samo można wykazać, że odcinek  $CD$  jest średnią harmoniczną między  $BD$  i  $AD$ .

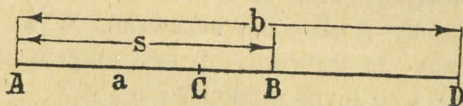


Fig. 160.

Aby więc znaleźć średnią harmoniczną, trzeba umieć do trzech punktów dowolnych znaleźć czwarty harmoniczny. Użyjemy do tego półkola.

Udowodnimy, że biegun i biegunowa koła (por. str. 71) przedzielają harmonicznie średnicę. Z dowolnego punktu  $A$  poza kołem poprowadźmy styczną  $AX$  (fig. 161), to  $A$  jest biegunem

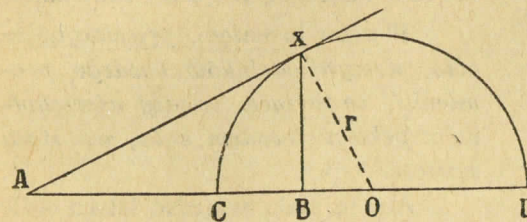


Fig. 161.

a prosta  $BX$ , prostopadła do średnicy, jego biegunową. Ponieważ promień  $OX$  jest prostopadły do stycznej, to trójkąt  $AOX$  jest prostokątny, możemy więc do niego zastosować

twierdzenie o średniej geometrycznej. Otrzymamy proporcję:

$$OB : r = r : OA \text{ czyli } r : OB = OA : r.$$

Stosując do tej proporcji twierdzenie o sumie i różnicy jej wyrazów, otrzymamy:

$$\begin{aligned} (r - OB) : (r + OB) &= (OA - r) : (OA + r) \\ CB : BD &= AC : AD \end{aligned}$$

Zmieniając kierunek trzech odcinków, otrzymamy:

$$OB : -DB = -CA : -DA \text{ a zmieniając znaki 2 i 4 wyrazu } CB : DB = -CA : DA.$$

To zaś dowodzi, że  $(CDBA) = -1$ .

Aby więc znaleźć punkt  $B$ , harmonicznie sprzężony z punktami  $A, C, D$ , a przedzielający wewnętrznie punkty  $C$  i  $D$ , kreślimy koło na średnicy  $CD$ , z punktu  $A$  prowadzimy styczną do koła a z punktu styczności  $X$  cięciwę prostopadłą do średnicy  $CD$ .

Stąd następująca konstrukcja średniej harmoniczej:

Na większym odcinku  $AD = b$ , odcinamy mniejszy  $AC = a$ . Kreślimy punkt  $B$ , harmonicznie sprzężony z  $A, C, D$ , leżący między  $C$  i  $D$ , to odcinek  $AB$  jest średnią harmoniczną między odcinkami  $a$  i  $b$ .

Jak można znaleźć punkt harmonicznie sprzężony z  $B, C, D$ , leżący zewnątrz odcinka  $CD$ ?

## § 60. Zastosowanie podobieństwa trójkątów do koła.

Poprowadźmy z dowolnego punktu  $S$  poza kołem pęk promieni i zwróćmy uwagę na odcinki każdego promienia, zawarte między



wierzchołkiem pęku a obwodem koła, n. p.  $SA, SA', SB, SB'$  i t. d. (fig. 162). Trójkąty  $SA'B'$  i  $SA'B$  są podobne, ponieważ mają po dwa kąty równe ( $\angle A = \angle B, \angle S = \angle S$ ), więc boki, leżące naprzeciw równych kątów, są proporcjonalne:

$$SA : SB' = SB : SA'$$

lub  $SA \cdot SA' = SB \cdot SB'$ . Słowami:

*W pęku promieni, przecinającym koło, iloczyn odcinków każdego promienia, zawartych między wierzchołkiem pęku a obwodem koła, ma stałą wartość.*

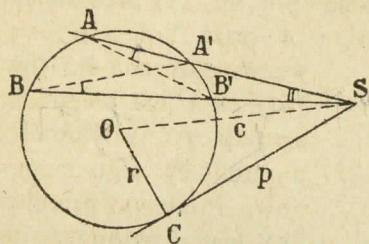


Fig. 162.

Aby tę stałą wartość łatwo obliczyć, zsuwamy punkty  $A$  i  $A'$  coraz bliżej: skoro się te punkty nakryją, sieczna zamienia się na styczną  $SC$ , a iloczyn dwóch różnych odcinków zamieni się na iloczyn dwóch równych odcinków:  $SC \cdot SC$  czyli  $SC^2$ . Otóż stała wartość tego iloczynu równa się drugiej potęgze odcinka stycznej z punktu  $S$ . Dlatego ten iloczyn nazywamy: *potęgą koła ze względu na punkt S*.

Z figury 162 widzimy, że wartość tej potęgi wynosi  $p^2 = c^2 - r^2$  i jest liczbą dodatnią (według twierdzenia Pitagorasa). Gdyby wierzchołek pęku  $S$  leżał wewnątrz koła, to tak samo dowodzi się, że:

$$SA \cdot SA' = SB \cdot SB' = -SC^2.$$

(znak: — pochodzi stąd, że  $SC' = -SC$ ).  $SC$  nie jest teraz odcinkiem stycznej, ale połową cięciwy prostopadłej do linii, łączącej  $S$  ze środkiem koła. (Cięciwa ta jest przepołowiona punktem  $S$ ). Potęga koła ze względu na ten punkt  $S$  wynosi  $-SC^2$  ale  $-SC^2 = -(r^2 - c^2)$  czyli  $p^2 = c^2 - r^2$ , oblicza się więc tym samym wzorem, ale wartość otrzymuje się ujemną, ponieważ

$c < r$ . Jeżeli wreszcie punkt  $S$  leży na kole, to  $c = r$ , więc potęgą:  $p^2 = 0$ , jest więc równa zeru.

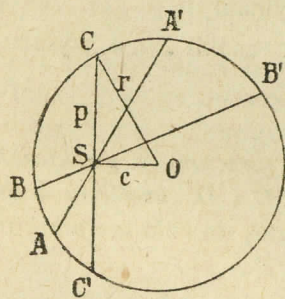


Fig. 163.

## § 61. Dziesięciokąt umiarowy. Podział złoty.

Przy pomocy twierdzeń o podobieństwie trójkątów możemy rozwiązać zadanie, któreśmy pominęli w nauce o wielokątach umiarowych, dotyczące podziału koła na 5 i 10 równych części (por. str. 90 z § 44). Weźmy pod uwagę dziesięciokąt umiarowy,

wpisany w koło o promieniu  $r$ ; bok jego nazwijmy  $b$  i zbadajmy, w jakim związku jest ten bok z promieniem. Łącząc końce  $AB$  jednego boku ze środkiem, otrzymamy trójkąt o kątach  $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$  (fig. 164). Połowiąc  $\angle B$  wyliczamy łatwo, że  $\angle C = 72^\circ$ , a więc  $AB = BC$ , ponieważ trójkąt  $ABC$  jest równoramienny (trójkąt ten rozważaliśmy także na str. 105). Trójkąty  $ABC$  i  $AOB$  są podobne (ponieważ ich kąty przy podstawie wynoszą po  $72^\circ$ ). Z podobieństwa wynika proporcja:

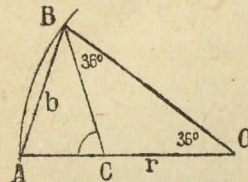


Fig. 164.

$$AO : AB = AB : AC$$

$$r : b = b : (r - CO). \text{ Ale } CO = BC = AB = b \text{ więc}$$

$$r : b = b : (r - b) \quad (1)$$

*Bok dziesięciokąta umiarowego jest średnią geometryczną pomiędzy całym promieniem koła opisanego a resztą, pozostałą po odcięciu tego boku na promieniu.*

Zwróćmy uwagę na podział odcinka  $AO$  punktem  $C$ . Ponieważ  $AB = CO$ , to proporcję naszą możemy także napisać w postaci:

$$AO : CO = CO : AC.$$

*Cały odcinek tak się ma do swej większej części, jak większa do mniejszej.*

Taki podział nazywamy *podziałem złotym*.

Aby odcinek podzielić według podziału złotego, trzeba zakreślić tym odcinkiem koło, wpisać w nie dziesięciokąt umiarowy i odciąć jego bok na danym odcinku. Przy pomocy kątomierza łatwo to uczynić. Zobaczmy jednak, że wystarczy użycie cyrkla i linealu (konstrukcja „platońska“).

Nazwa „podział złoty“ tem się tłumaczy, że taki podział najwięcej odpowiada upodobaniom człowieka, chociażby sobie nie zdawał sprawy, jakie jest prawo tego podziału. Budowle prostokątne greckie mają n. p. długość i szerokość, odpowiadające podziałowi złotemu; krzyże, skrzynie, książki, bilety najpospoliciej są mimowiednie tak robione, że wymiary ich boków przynajmniej w przybliżeniu odpowiadają złotemu podziałowi. Dopatrywano się nawet podobnej proporcjonalności w budowie ciała ludzkiego.

Aby konstrukcyjnie rozwiązać zadanie złotego podziału lub — co na jedno wyjdzie — wpisać dziesięciokąt umiarowy w koło, oprzemy się na proporcji (1). Zamiast  $r$  napiszemy  $a$ , zamiast szukanego  $b$  literę  $x$ , więc:

$$a : x = x : (a - x).$$



Obliczmy najpierw  $x$  z tego równania. Iloczyn wyrazów średnich równa się iloczynowi wyrazów skrajnych:

$$x^2 = a^2 - xa \text{ czyli}$$

$$x^2 + ax = a^2$$

Aby uzupełnić pierwszą stronę do kwadratu, dodajemy po obu stronach  $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ , to:

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Trójkąt po pierwszej stronie powstał z wykonania działania:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2, \text{ więc}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{ stąd}$$

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \text{ czyli}$$

$$x = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$$

Znak pierwiastka może być także:  $-$ , wtedy jednak wartość bezwzględna  $x$  byłaby większa jak  $a$ ; wartość ta jest dla naszego zadania nieprzydatna.

Można jednak i tej drugiej wartości:  $x_1 = -\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$  nadać znaczenie geometryczne. Przedewszystkiem widzimy, że

$$x_1 = -\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2} = -(x + a)$$

Obróćmy na fig. 164 promień  $OA$  o  $72^\circ$  w dół do punktu  $D$  (na fig. 165) i połączmy  $B$  z  $D$ , to  $\angle D = \angle CBO = 36^\circ$  (bo  $OB = OD$  a  $\angle O = 108^\circ$ ). Prosta  $BD$  odcina więc trójkąt  $ABC$  ten sam, któryśmy mieli na fig. 164. Z figury widzimy, że  $BD = x + a = -(x_1)$ .

Odcinek  $BD$  jest bokiem 10-kąta gwiazdzystego, który otrzymujemy, dzieląc obwód koła na 10 równych części i łącząc ze sobą co trzeci punkt podziału. Otóż drugie rozwiązanie równania  $x^2 + ax = a^2$  daje ujemną wartość boku dziesięciokąta gwiazdzystego (narysuj!)

Tę wielkość trzeba teraz wykreślić.

Trudność sprawia  $\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ . Powołując

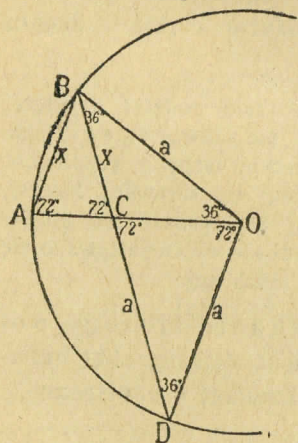


Fig. 165.

się jednak na twierdzenie Pitagorasa widzimy, że jest to przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego, w którym przyprostokątne wynoszą:  $a$  i  $\frac{a}{2}$ . Budujemy więc

taki trójkąt prostokątny (fig. 166). Od tego

$$\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

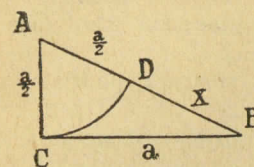


Fig. 166.

mamy odjąć  $\frac{a}{2}$ , to pozostały odcinek jest

żadany  $x$ . W ten sposób znaleźliśmy bok dziesięciokąta umiarowego wpisanego w koło o promieniu  $a$ . Złoty podział uzyskamy, odcinając znalezione  $x$  na odcinku  $a$ . Stąd więc wynika następująca konstrukcja:

Na końcu odcinka  $a$  wykreślamy prostopadłą i odmierzamy na niej  $\frac{a}{2}$ . Łączymy  $A$  z  $B$  i przenosimy  $AC$  na bok  $AB$  do punktu  $D$ . Reszta pozostała jest szukany boki dziesięciokąta a zarazem większym odcinkiem złotego podziału odcinka  $a$ . Ta sama konstrukcja służy więc równocześnie do podziału koła na 10 równych części. Podział na 5 równych części już z tego wynika: należy podzielić koło na 10 części i co drugi punkt podziału opuścić.

Metoda rozwiązania tego zadania polegała na tem, że dla wielkości szukanej oblicza się najpierw algebraicznie pewien wzór, a dopiero potem wykreśla się wielkości w tym wzorze zawarte. Postępowanie takie nazywa się: metodą analizy algebraicznej. Jest to już czwarta ogólna metoda rozwiązywania zadań konstrukcyjnych. Będziemy jej jeszcze używali w następnym rozdziale.

## Ćwiczenia IX

§ 51. 1. Zmierzyć dowolny odcinek drugim mniejszym, używając mierzenia łańcuchowego.

2. Wykreśliwszy kwadrat o boku  $1 \text{ dm}$  i przekątnię, zmierzyć (w przybliżeniu) przekątnię, używając boku jako jednostki mierniczej.

3. Zmierzyć stosunek boku trójkąta równobocznego do wysokości.

4. Stosunek odcinków:  $129 \text{ mm}$  i  $55 \text{ mm}$  znaleźć drogą geometryczną i arytmetyczną i porównać wyniki!

5. Wykazać, że stosunek promienia koła do boku dziesięciokąta umiarowego można przybliżyć zapomocą wyrazów szeregu. (z fig. 140):

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{20}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34} \text{ i t. d.}$$

Jakie jest prawo tego szeregu?

§ 52. 6. Obierając na danym odcinku dowolny punkt, zbadać stosunek podziału wewnętrznego (mierzeniem łańcuchowym).



7. Obierając poza danym odcinkiem na tej samej linii prostej dowolny punkt, zbadać stosunek podziału zewnętrznego.

8. Jakie rozmaite wartości może przybierać stosunek podziału wewnętrznego? Przedstawić graficznie wartości tego stosunku jako funkcję pierwszego odcinka.

9. Jakie rozmaite wartości może przybierać stosunek podziału zewnętrznego? Przedstawić graficznie zbiór tych wartości.

10. Obierając dowolnie cztery punkty na linii prostej, zbadać stosunek podziału podwójnego.

11. Jeżeli  $(ABCD) = k$ , obliczyć:  $(BACD)$ ,  $(DCBA)$  i inne wartości, powstające przez zmianę uporządkowania liter w symbolu  $(ABCD)$ .

12. To samo zadanie wykonać dla  $(ABCD) = -1$ .

§ 53—54. 13. Udowodnić, że dwie proste, odcinające na dwóch promieniach pęku odcinki proporcjonalne, muszą być równoległe (niewprost!).

14. Jak długie muszą być ramiona cyrkla proporcjonalnego, jeżeli chcemy uzyskać pomniejszenie 1:5 (długość całego ramienia  $AA'$  niech wynosi n. p. 1 dm) (por. str. 110, fig. 145).

15. Podzielić dany odcinek w stosunku 11:8.

16. Rozwiązać graficznie proporcję:

a)  $3:7 = 5:x$  i porównać z rozwiązaniem algebraicznym.

b)  $2\frac{1}{2}:x = 7\frac{1}{4}:3\frac{1}{2}$  i algebraicznie.

c)  $2:7:3:4 = x:5:3$ .

17. Boki trójkąta są:  $a = 12\text{ cm}$ ,  $b = 10\text{ cm}$ ,  $c = 6\text{ cm}$ . Podzielić bok  $c$  w stosunku 2:5 i wykreślić równoległą do boku  $a$  przez ten punkt podziału. Obliczyć odcinki boku  $b$  i linię środkową trapezu odciętego.

18. Przez punkt  $P$  na polu danego kąta poprowadzić prostą tak, aby odcinki od  $P$  do ramion danego kąta tworzyły stosunek 3:5. (Wskazówka: wykreślić z  $P$  równoległe do ramion!).

19. Na polu koła dany jest punkt  $P$  i średnica. Przez  $P$  poprowadzić cięciwę tak, aby ją średnica dzieliła w stosunku 2:3. (Wskazówka: podziel średnicę na 5 równych części!).

20. Przez punkt  $P$ , dzielący wysokość trapezu w stosunku  $m:p$ , poprowadzono równoległą do podstawy. Wykazać, że odcinek tej linii zawarty między bokami nierównoległymi wynosi  $s = \frac{ma + pb}{m + p}$ , gdzie  $a$  i  $b$  oznaczają boki równoległe. (Wskazówka: odciąć trójkąt prostą równoległą do jednego z boków nierównoległych i wykreślić w nim wysokość!).

21. Wykreślić linię prostą, zderającą od danego punktu do niedostępnego punktu przecięcia się dwóch danych prostych. Jakie inne podobne konstrukcje poznaliśmy dawniej?

22. Wykonać graficznie mnożenie  $1:73:0:45$ .

23. Wykonać graficznie dzielenie  $1:56:1:37$ .

§ 55—56. 24. Wykreślić dwa dowolne koła współśrodkowe i obliczyć zmniejszenie koła wewnętrznego.

25. Wykazać, że wszystkie wieloboki umiarowe o równej liczbie boków są podobne.

26. Odcinając od trójkąta równobocznego trójkąt zapomocą linii równoległej do jednego z boków, zmierzyć zmniejszenie boków powstałej figury podobnej.

27. Obrawszy dowolny nieregularny ośmiokąt, narysować figurę podobną przy pomocy pęku promieni: a) po tej samej stronie wierzchołka pęku, b) po przeciwnej stronie wierzchołka.

28. Wykreślić do danego trójkąta trójkąt podobny, zmniejszony w stosunku: a) 1:3, b) 2:5.

29. Do danego czworoboku wykreślić czworobok podobny i w podobnym położeniu, zmniejszony w stosunku 2:3 tak, aby środek podobieństwa był: a) wewnętrzny, b) zewnętrzny. Jakie rozmaite położenia może mieć zewnętrzny środek podobieństwa? Czy może leżeć wewnątrz czworokąta?

30. Dwie jakiegokolwiek figury podobne, nie leżące równolegle, sprawdzić do położenia podobnego: a) przesunięciem i obrotem, b) samym obrotem.

31. Dla dwóch czworoboków podobnych, leżących równolegle, znaleźć środek podobieństwa.

32. Znaleźć wewnętrzny i zewnętrzny środek podobieństwa dwóch kół.

33. Wykreślić cztery styczne wspólne dwu kołom.

34. Znaleźć cień i półcień kuli większej, oświetlonej kulą mniejszą i odwrotnie (w przekroju).

35. Ile warunków muszą spełniać dwa trójkąty prostokątne, aby były podobne? Ile warunków muszą spełniać dwa pięciokąty, aby były podobne?

36. Udowodnić: a) pierwszy przypadek podobieństwa trójkątów, b) trzeci przypadek podobieństwa.

37. Wykazać, że w dwóch trójkątach podobnych stosunek odpowiednich wysokości równa się stosunkowi boków.

38. Wykazać, że dwa trójkąty, których boki są wzajemnie parami prostopadłe, są podobne.

39. Wykreślić trójkąt prostokątny, znając przeciwprostokątną i stosunek obu przyprostokątni, n. p. 4:7 (kreśli się trójkąt podobny, o bokach n. p. 4 cm i 7 cm i powiększa się go lub pomniejsza).

40. Zmierzyć wysokość drzewa zapomocą laski o znanej długości, mierząc cień drzewa i cień laski.

41. Jak można zmierzyć głębokość okrągłej studni, badając odbicie się przeciwległego brzegu studni w wodzie? Wskazówka: umieścić oko tak, aby obraz przeciwległego brzegu schodził się w oku z brzegiem bliższym i zmierzyć promień otworu studni, odległość poziomą i pionową oka od bliższego brzegu.

42. Przy pomocy podobnych trójkątów zmierzyć szerokość rzeki, nie przekraczając jej! Wskazówka: użyć dwóch podobnych trójkątów prostokątnych.

43. Wykreślić trójkąt, znając dwa kąty i a) promień koła opisanego, b) promień koła wpisanego (metodą figur podobnych).

44. Wykreślić trójkąt równoboczny, znając sumę boku i wysokości.

45. W podany trójkąt wpisać kwadrat, spoczywający podstawą na jednym boku. (Rysuje się najpierw kwadrat większy, wystający z trójkąta i łączy się wystający wierzchołek kwadratu z przeciwległym wierzchołkiem trójkąta linią  $AX$ ; następnie pomniejsza się go tak, aby wierzchołek leżał na boku trójkąta a zarazem na linii  $AX$ ).

46. W dane koło wpisać prostokąt, którego boki są w stosunku  $1:\sqrt{2}$  (taki przekrój ma belka o możliwie największej wytrzymałości!).

§ 57. 47. Wykreślić średnią geometryczną dwóch danych odcinków.

48. Znaleźć graficznie:  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{15}$ ,  $\sqrt{28}$ .



49. Wykreślić odcinki  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\sqrt{a^2 - b^2}$ , przy pomocy twierdzenia Pitagorasa, znając  $a$  i  $b$ .

50. Wykreślić odcinek  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ , znając  $a, b, c, d$  (każdą liczbę całkowitą można rozłożyć na sumę czterech kwadratów, każdą więc można w ten sposób spierwiastkować przez 2).

51. Wykazać, że w trapezie równoramiennym, opisanym na kole, wysokość jest średnią geometryczną obydwu boków równoległych.

52. Obliczyć przy pomocy twierdzenia Pitagorasa: a) promień koła wpisanego w ośmiokąt umiaryowy o boku  $a = 6 \text{ cm}$ , b) promień koła opisanego na tym ośmiokącie.

§ 58. 53. Wykreślić środek ciężkości dowolnego trójkąta.

54. W trójkącie rozwartokątnym wykreślić 4 punkty osobliwe.

55. Wykazać, że 4 punkty osobliwe trójkąta równobocznego nakrywają się.

56. Wykazać, że trójkąt, w którym dwie dośrodkowe są równe, jest równoramienny.

57. Udowodnić prawdziwość twierdzenia: jeżeli wierzchołki trójkąta są od pewnej prostej dowolnej odległe o odcinki  $x_1, x_2, x_3$ , to odległość środka ciężkości trójkąta od tej prostej jest średnią arytmetyczną tych trzech odległości, t. j.

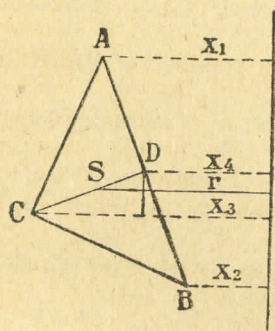


Fig. 167.

$$r = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \text{ (fig. 167).}$$

58. Wykazać, że w każdym trójkącie środek ciężkości  $S$ , środek koła opisanego  $O$  i punkt przecięcia wysokości  $W$  leżą na jednej linii prostej i że  $WS = 2 \cdot SO$  (twierdzenie Eulera). (Wskazówka: połączyć  $W$  z wierzchołkiem  $a$   $O$  ze środkiem przeciwległego boku i wierzchołkiem ze środkiem przeciwległego boku).

§ 59. 59. Znaleźć średnią harmoniczną: a) dwóch odcinków, b) dwóch liczb.

60. Wykonać podział harmoniczny dowolnego odcinka.

61. Wykazać, że odcinek prostej równoległej do boków równoległych trapezu a przechodzącej przez punkt przecięcia przekątni, jest średnią harmoniczną między bokami równoległymi. (Wskazówka: z końca tej równoległej i z końca mniejszego boku równoległego poprowadzić proste równoległe do drugiego boku nierównoległego).

62 a. Wykazać, że symetralna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli bok przeciwległy na odcinki, proporcjonalne do boków, zamykających ten kąt. Wskazówka: wykreślić z jednego wierzchołka leżącego na tym przeciwległym boku prostą równoległą do symetralnej aż do przecięcia się z przedłużeniem boku trójkąta, nie przechodzącego przez ten wierzchołek.

62 b. Wykazać, że symetralna kąta zewnętrznego w trójkącie dzieli bok przeciwległy zewnątrz w stosunku równym stosunkowi boków przyległych. Wskazówka: wykreślić z drugiego wierzchołka równoległą do tej symetralnej.

62 c. Wykazać, że symetralna kąta wewnętrznego i zewnętrznego dzieli harmonicznie przeciwległy bok trójkąta. (Wskazówka: poprowadzić z jednego wierzchołka na tym boku proste równoległe do tych symetralnych).

§ 60. 63. Jakie jest miejsce geometryczne punktów, mających równą potęgę ze względu na jedno koło?

64. Obliczyć potęgę punktu: a) leżącego poza kołem o promieniu  $8 \text{ cm}$  w odległości  $3 \text{ cm}$  od obwodu, b) leżącego wewnątrz koła o promieniu  $6 \text{ cm}$  w odległości  $2 \text{ cm}$  od obwodu.

§ 61. 65. W dowolne koło wpisać umiaryowy dziesięciobok, nie używając kątomierza.

66. Obwód koła podzielić: a) na 5 równych części, b) na 20 równych części bez pomocy kątomierza.

67. Na dowolnym odcinku wykonać złoty podział.

68. Wykreślić prostokąt, którego boki tworzą złoty podział (są odcinkiem większym i mniejszym złotego podziału).

69. Obliczyć bok dziesięciokąta umiaryowego, znając promień koła opisanego (n. p.  $r = 10 \text{ cm}$ ).

70. Wykreślić bez pomocy kątomierza kąt: a)  $72^\circ$ , b)  $36^\circ$ , c)  $18^\circ$ .

71. Przy pomocy boku dziesięciokąta gwiazdowego (str. 124) obliczyć bok pięciokąta umiaryowego jako funkcję promienia koła opisanego. (Wskazówka: podzieliwszy koło na 10 równych części, połączyć 1-szy punkt podziału z 3-cim a 3-ci z 5-tym).

72. Wykazać, że dwie przecinające się przekątnie pięciokąta umiaryowego dzielą się według złotego podziału. (Wskazówka: połączyć końce tych przekątni i wykazać, że większy odcinek przekątni równa się bokowi pięciokąta).

73. Do wnętrza półkola o znanej średnicy wykreślić dwa mniejsze półkola, mające średnice o połowę mniejsze, a następnie wykreślić koło, stykające się z danym półkolem wewnątrz, a z dwoma mniejszymi zewnątrz. Analiza algebraiczna! (Taką formę ma ozdobne okno w stylu romańskim).

*S. Omeljan IV b*  
Rozdział X

## Pole figur płaskich

### § 62. Ogólne uwagi o mierzeniu pola (powierzchni).

Nauczyliśmy się już mierzyć odcinki i kąty. W geometrii zarówno idealnej, jak i praktycznej, potrzeba często zmierzyć pole (powierzchnię) ograniczone jakąś linią łamaną lub krzywą. Wprowadzamy w ten sposób do geometrii nowe wielkości, które trzeba umieć przede wszystkim porównywać. Otóż za równe uważamy przede wszystkim pola figur przystających lub takich, które można rozłożyć na części parami przy-



stające. Jasne jest też, kiedy nazwiemy jedną powierzchnię większą od drugiej i kiedy jedną figurę nazwiemy 2, 3, 4...  $n$ , razy większą od drugiej. (Wypowiedź ściśle te określenia!). Za jednostkę pola, z którą porównujemy wielkość wszystkich powierzchni obrano kwadrat, którego bok wynosi jednostkę długości t. j. 1 m, 1 dm, 1 cm, 1 mm. Nazywamy je metrem kwadratowym: 1 m<sup>2</sup>, decymetrem kwadratowym 1 dm<sup>2</sup>, i t. d. Łatwo zauważyć, że kwadrat o boku 1 m da się rozdzielić na sto przystających kwadratów o bokach 1 dm, 10.000 kwadratów o bokach 1 cm, 100<sup>3</sup> kwadratów o boku 1 mm. A więc:

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2; 1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2; 1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2;$$

zamiennikiem miar pól wyższego rzędu na miary niższego rzędu jest liczba 100.

*Zmierzyć wielkość jakiegoś pola to znaczy zbadać, ile razy to pole jest większe od przyjętej jednostki pola.* Liczbę, wyrażającą ten stosunek pola do jednostki, nazywamy liczbą wymiarową danego pola, bez względu na to, czy jest liczbą wymierną czy też niewymierną. Zadanie to nie przedstawia się tu jednak tak prosto, jak przy mierzeniu odcinków lub kątów, albowiem nie każde pole da się rozłożyć na same kwadraty — podczas gdy każdy odcinek można rozłożyć na mniejsze odcinki, a kąt na mniejsze kąty. Dwa odcinki lub kąty równe są zarazem przystające, podczas gdy dwa pola równe wcale nie muszą być przystające, np. kwadrat i trójkąt otrzymany z kwadratu przez przecięcie go przekątnią i zestawienie tych dwóch trójkątów wzdłuż jednej przyprostokątnej. Aby więc zmierzyć wielkość jakiegoś pola nie wystarczy zwykle odcinać od niego po prostu kolejno kwadrat jednostkowy a z pozostałą resztą postępować podobnie, jak przy mierzeniu łańcuchowem odcinka, bo pozostała reszta może być znacznie większa od kwadratu jednostkowego. Co więcej, nawet gdyby pole było współmierne z jednostką, to mierzenie łańcuchowe mogłoby się nigdy nie skończyć np. przy porównywaniu figur krzywoliniowych z kwadratem jednostkowym. Będziemy więc z reguły postępować inaczej, aniżeli przy mierzeniu odcinków lub kątów. Opierając się na naszym określeniu pól równych, jako dających się złożyć z części parami przystających, będziemy się przede wszystkim starali wykazać, że badana figura jest w tym znaczeniu równa jakiemuś kwadratowi lub prostokątowi, te bowiem dają się mierzyć w sposób podobny do odcinka. Będziemy się starali wykazać równoważność — jak się wyrażamy — badanej figury z prostokątem, rozkładając ją na części parami przystające do odpowiednich części jakiegoś prostokąta lub kwadratu. Jak zobaczymy,

uda się to dla każdego wielokąta; każdy wielokąt potrafimy zamienić na równoważny kwadrat. Dla figur krzywoliniowych jednak, np. dla koła i to postępowanie nie prowadzi do celu. Tam już będziemy musieli używać rozważań granicznych, uważając pole koła za granicę, do jakiej dążą pola wielokątów wpisanych (lub opisanych). Liczba wymiarowa pola krzywoliniowego będzie więc granicą, do jakiej dążą (dające się obliczyć według poprzednio wspomnianej metody) liczby wymiarowe pól odpowiednich wielokątów. Rozszerzając określenie pól równych, powiemy więc ogólniej: *dwa pola nazywają się równe, jeżeli ich liczby wymiarowe są równe* — chociażby się nie dały rozłożyć na części parami przystające.

W praktyce skuteczniamy mierzenie pola bezpośrednio w ten sposób, że daną figurę rysujemy (najczęściej w pomniejszonej skali) na papierze milimetrowym i liczymy kwadraciki. Powinno się osobno zliczyć kwadraty zawarte całe wewnątrz figury: przypuścmy, że jest ich  $n$ . Potem osobno liczymy kwadraty przecięte przez obwód

figury; jeżeli ich jest  $n'$ , to liczba wymiarowa  $P$  powierzchni zawiera się między  $n$  a  $n + n'$ .

$$n < P < n + n'$$

Np. na naszej figurze 168  
 $19 < P < 45$ .

Gdybyśmy zrobili siatkę kwadracików o bokach  $\frac{1}{10}$  mm, otrzymalibyśmy dla  $P$  jeszcze ciaśniejsze granice, a więc większe przybliżenie.

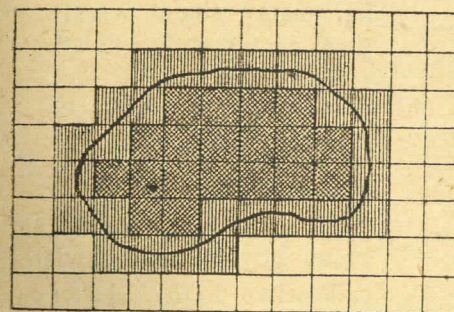


Fig. 168.

Granice, do jakich dążą liczby  $n$  i  $n + n'$  przy podziale danego pola na coraz to drobniejsze kwadraciki, nazywamy *miarą wewnętrzną i miarą zewnętrzną* pól. Jeżeli obydwie miary dążą do jednej, wspólnej granicy, to pole nazywa się mierzalne. Istnieją jednakże pola o tak poplątanem ograniczeniu, że ich miara zewnętrzna jest stale większa od miary wewnętrznej o liczbę skończoną.

Drugi praktyczny sposób mierzenia pola można oprzeć na pomiarach fizykalnych, a mianowicie na ważeniu. Wycina się żadaną figurę z materiału o jednostajnej grubości (n. p. z kartonu) i waży się ją dokładnie. Następnie wycina się 1 cm<sup>2</sup> z tego samego materiału i znowu się waży. Stosunek obydwu ciężarów jest zarazem liczbą wymiarową pola. Istnieją także osobne mechanizmy do przybliżonego



mierzenia pola figury narysowanej na papierze, zwane planimetrami.

W miernictwie praktycznym, gdzie idzie o szybkie zmierzenie pól parcel nieregularnych narysowanych na planie, używa się prawie wyłącznie planimetrów.

Jeżeli mamy do czynienia z figurami regularnymi, możemy obliczyć wielkość powierzchni ściśle (t. j. z dowolnym przybliżeniem).

Zacniemy od najprostszych figur, których pomiar wzoruje się na mierzeniu (łańcuchowem) odcinka.

### § 63. Pole prostokąta.

Jeżeli boki prostokąta zawierają całkowite liczby centymetrów (lub milimetrów i t. p.) bez reszty, to w celu obliczenia pola dzielimy cały prostokąt na same przystające kwadraty zapomocą dwóch systemów linii równoległych do boków. Z figury 169 widzimy, że tych kwadratów jest tyle, ile wynosi iloczyn liczb wymiarowych

obydwo boków, n. p. na tej fig. mamy siedm warstw po pięć centymetrów kwadratowych, zatem:

$$P = 7 \cdot 5 = 35 \text{ cm}^2$$

Ogólnie:

$$P = a \cdot b$$

Podobnie obliczilibyśmy pole, gdyby boki zawierały całkowite liczby jakiejś części jednego centymetra; prostokąt rozłożylibyśmy wtedy na mniejsze kwadraty, będące całkowitami częściami jednostkowego kwadratu.

Gdyby boki były niewspółmierne z 1 cm (a więc i z 1 mm i z jego częściami), dzielilibyśmy prostokąt na coraz to drobniejsze kwadraty i otrzymalibyśmy liczbę

wymiarową pola szeregiem kolejnych przybliżeń z dowolnym przybliżeniem. N. p. na fig. 170 niech boki  $AB$  i  $AD$  będą liczbami

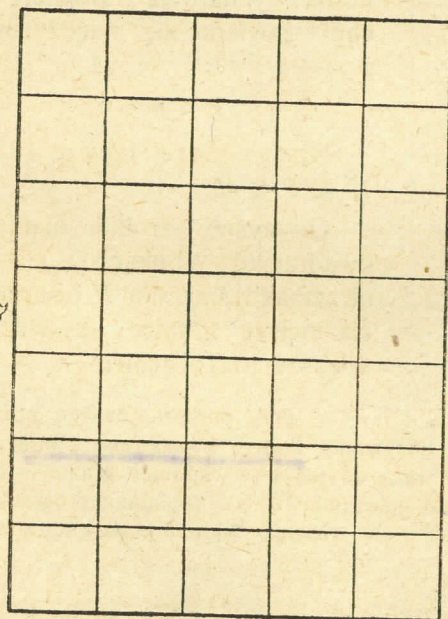


Fig. 169.

niewymiernymi:  $a = 4.821 \dots \text{cm}$  a  $b = 3.756 \dots \text{cm}$ , to pole  $ABCD$  jest zawarte między polami  $A 4 C' 3$  a  $A 5 C'' 4$ , więc jego liczba wymiarowa zawiera się między 3.4 a 5.4.

$$3.4 < P < 5.4$$

Uskuteczniając podział subtelniejszy na milimetry kwadratowe, spostrzegamy znowu, że

$$3.7.4.8 < P < 3.8.4.9$$

W dalszym ciągu otrzymamy:

$$3.75.4.82 < P < 3.76.4.83 \text{ i t. d.}$$

Ponieważ zaś iloczyny  $3.4$ ,  $3.7.4.8$ ,  $3.75.4.82$  i t. d. dążą do granicy  $a \cdot b$ , zarówno jak i iloczyny  $5.4$ ,  $3.8.4.9$ ,  $3.76.4.83$  i t. d., przeto liczba wymiarowa pola dąży także do tej granicy:

$$P = a \cdot b$$

Otrzymujemy więc wzór zupełnie taki sam, jak dla boków współmiernych z 1 cm. Stąd ogólne prawo:

Pole prostokąta równa się iloczynowi liczb wymiarowych obydwu boków, lub krótko: podstawie pomnożonej przez wysokość.

(Jeżeli liczby wymiarowe boków są niewmierne, używa się w praktyce mnożenia skróconego).

Tego prawa można użyć jako graficznego sposobu mnożenia liczb. Trzeba by do danych liczb dobrać odcinki, zbudować z nich prostokąt i podzieliwszy go na centymetrowe (lub milimetrowe) kratki, policzyć je. Sposób ten jest jednak nadto żmudny, aby go z korzyścią można użyć; jest to zresztą właściwie powrót do dodawania.

O wiele praktyczniejszym był sposób podany na str. 111.

Ponieważ kwadrat jest szczególnym przypadkiem prostokąta, mianowicie takim prostokątem, w którym  $a = b$  (boki są równe) przeto wzór na pole kwadratu o boku  $a$  jest:

$$P = a^2$$

Stąd też pochodzi nazwa drugiej potęgi.

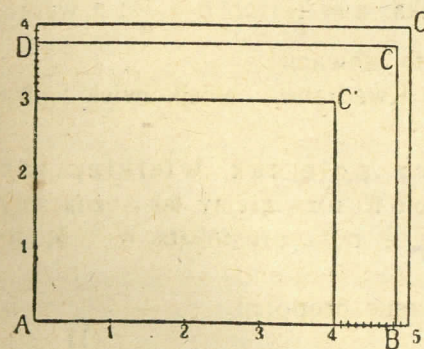


Fig. 170.



Na podstawie wzorów na pole prostokąta i kwadratu można geometrycznie wyjaśnić znane prawa algebry:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ , i  $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$   
(Porównaj figurę 171).

Wzór  $P = a \cdot b$  poucza nas także, że:  
pole prostokąta jest funkcją obydwu boków.

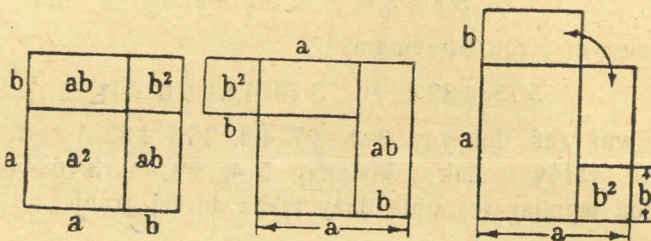


Fig. 171.

Często mamy do czynienia z zadaniem odwrotnym: wiedząc, jakie ma być pole prostokąta, obliczyć jego długość (podstawę) lub szerokość (wysokość). Aby to obliczyć, trzeba tylko odwrócić działanie, prowadzące do obliczenia pól.

I tak z wzoru  $P = ab$ , wynika  $a = \frac{P}{b}$  lub  $b = \frac{P}{a}$ ; z wzoru  $P = a^2$  wynika  $a = \sqrt{P}$ . Wypowiedz to słowami!

Kwadratura prostokąta. Kwadraturą jakiegokolwiek figury nazywamy zadanie następujące:

Znaleźć kwadrat, mający pole tak wielkie, jak dana figura. Dla prostokąta zadanie to rozwiązujemy tak: oznaczmy bok nieznanego kwadratu literą  $x$ , a boki prostokąta  $a$  i  $b$ , to musi być:

$$a \cdot b = x^2 \text{ lub w formie proporcji}$$

$$a : x = x : b$$

(1)

Algebraicznie obliczamy bok kwadratu jako  $x = \sqrt{ab}$ . Aby to samo zadanie rozwiązać konstrukcyjnie (konstrukcją platońską), oprzemy się na proporcji (1). Widzimy z niej, że bok szukanego kwadratu jest średnią geometryczną między bokami prostokąta. Tę średnią geometryczną znajdujemy przy pomocy znanej konstrukcji (por. str. 119) i budujemy na niej kwadrat. Otóż: kwadraturę prostokąta można wykonać przy pomocy lineалу i cyrkla. (Użyliśmy tu metody analizy algebraicznej por. str. 125).

## § 64. Pole równoległoboku.

Posiadając tak prosty sposób obliczenia pola prostokąta, staramy się do każdej innej figury znaleźć prostokąt o równym polu.

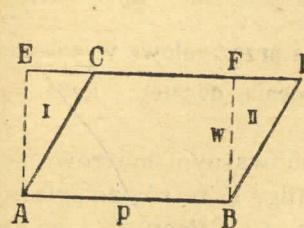


Fig. 172.

Najłatwiej możemy to zrobić z każdym równoległobokiem. N. p.:  $ABCD$  (fig. 172). Przedłużamy bok  $CD$  i z punktów  $A, B$  rysujemy linie prostopadłe do boku  $CD$ . Ponieważ trójkąty  $I$  i  $II$  są przystające, to prostokąt  $ABEF$  ma pole równe z badanym równoległobokiem. Obydwie figury składają się bowiem z dwóch części parami przystających.

Gdyby bok  $AC$  był tak nachylony, że punkt  $F$  padłby poza odcinek  $CD$ , to dowód zmienia się o tyle, że trzeba do prostokąta i do równoległoboku najpierw dodać a potem odjąć pewien trójkąt pomocniczy. (Wykreśl odpowiednią figurę i przeprowadź dowód!). Wtedy rozłożenie prostokąta i równoległoboku na części parami przystające jest nieco zawilsze: trzeba w równoległoboku wykreślić jedną lub więcej linii równoległych do  $FB$  w odstępach  $EF$  od punktu  $F$  na prawo, a w prostokącie linie równoległe do  $AC$  w odpowiednich odstępach od  $A$  (narysuj!).

Ponieważ zaś pole tego prostokąta wynosi:  $p \cdot w$ , przeto i dla równoległoboku:

$$P = p \cdot w.$$

**Pole każdego równoległoboku równa się iloczynowi liczb wymiarowych podstawy i wysokości lub krótko: podstawie pomnożonej przez wysokość.** Stąd wniosek: równoległoboki, mające równe podstawy i równe wysokości, mają i pola równe, jakkolwiek kształt mogą mieć odmienny. Wykaż rysunkiem, że dwa takie równoległoboki składają się z części parami przystających!

## § 65. Pole trójkąta.

Znając pole równoległoboku, możemy obliczyć pole każdego trójkąta. Wiadomo bowiem, że każdy trójkąt można uważać za połowę równoległoboku, który otrzymamy, prowadząc z dwóch wierzchołków linie równoległe do przeciwległych boków.

Pole trójkąta równa się połowie pola tego równoległoboku, więc:

$$P = \frac{p \cdot w}{2}$$

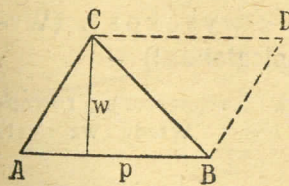


Fig. 173.

gdzie  $p$  jest podstawą nie tylko równoległoboku lecz także trójkąta, a tak samo  $w$



wysokością. Wzór ten można napisać w kilku postaciach zupełnie równoważnych:

$$P = \frac{1}{2} p w = \frac{p}{2} \cdot w = p \cdot \frac{w}{2}. \text{ Ostatni wzór wypowiemy:}$$

**Pole trójkąta oblicza się, mnożąc podstawę przez połowę wysokości.**

(Uwaga: opuszczamy zwykle przy wysłowieniu dodatek: liczba wymiarowa).

Trójkąt można wprost porównać z równoważnym mu równoległobokiem wykreślając ze środka boku  $AC$  (fig. 173) równoległą do podstawy  $AB$ , a z punktu  $B$  równoległą do  $AC$ . (Narysuj i wykaż równoważność!).

Z wzoru na pole trójkąta wysnuwamy następujący wniosek: trójkąty o równych podstawach i wysokościach mają równe pola. Jeżeli dwa trójkąty mają równe pola, a podstawa jednego jest mniejsza, to wysokość musi być w tym samym stosunku większa i odwrotnie.

## § 66. Pole trapezu.

Trapez możemy zmienić albo na trójkąt, albo na równoległobok, równoważny co do pola.

Zamieńmy na trójkąt (fig. 174). W tym celu połowimy jeden z boków nierównoległych n. p.  $CB$  i wykreślamy prostą  $DE$  aż do przecięcia się z przedłużeniem boku  $AB$ . Ponieważ  $I \cong II$ , przeto pole trapezu równa się polu trójkąta  $ADF$ , więc:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot w \quad (1)$$

**Pole trapezu równa się połowie sumy boków równoległych pomnożonej przez wysokość.**

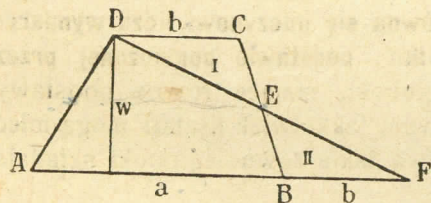


Fig. 174.

Ale:

$$\frac{a+b}{2}$$

równa się linii środkowej trapezu, można więc także obliczyć pole trapezu, mnożąc linię środkową przez wysokość. (Wyprowadź to samo, zamieniając trapez na równoległobok!)

Jeżeli bok  $b$ , posuwając się po liniach  $AD$  i  $BC$ , zmniejsza się równocześnie, to ostatecznie otrzymujemy trójkąt, gdy  $b = 0$ . Wtedy wzór (1) przechodzi na

$$P = \frac{a}{2} \cdot w$$

otrzymujemy więc z pola trapezu wzór na pole trójkąta.

## § 67. Pole wielokąta.

Celem obliczenia pola jakiegokolwiek wielokąta, rozkładamy go na trójkąty i trapezy. Jeżeli wielokąt jest umiary, to możemy go rozłożyć na same przystające — a więc równe co do pola — trójkąty o równych podstawach i wysokościach. Podstawą jest bok wielokąta, a wysokością promień koła wpisanego, zatem pole każdego trójkąta wynosi:

$$b \cdot \frac{r_w}{2}.$$

Jeżeli boków jest  $n$ , to pole całego wielokąta wynosi:

$P = n \cdot b \cdot \frac{r_w}{2}$ . Ale  $n \cdot b = U$ , daje obwód wielokąta. Stąd wzór:

$$P = U \cdot \frac{r_w}{2}.$$

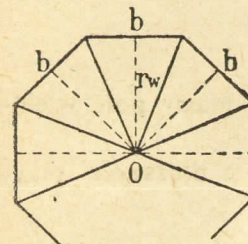


Fig. 175.

**Pole wielokąta umiary równa się obwodowi wielokąta pomnożonemu przez połowę promienia koła wpisanego w ten wielokąt.**

Bok wielokąta umiaryowego zależy od promienia, nie można więc obierać dowolnie  $r$  i  $b$ !

Wieloboki nieumiarowe mamy często podane w ten sposób, że znane są odległości ich wierzchołków od dwóch stałych prostych, prostopadłych do siebie  $OX$  i  $OY$ . (Zdarza się to zwłaszcza w miernictwie). Te odległości nazywamy współrzędnymi wierzchołków. Współrzędne notujemy zwykle obok punktu w nawiasie:  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , przyczem zawsze najpierw piszemy odległość od osi pionowej (por. fig. 176).

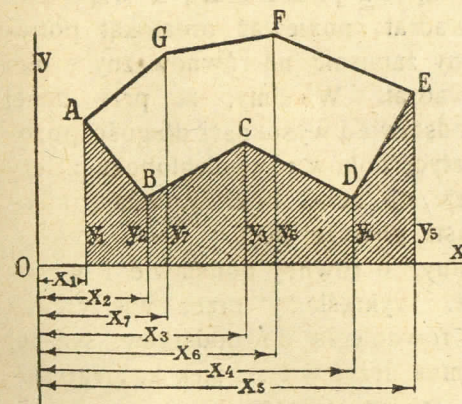


Fig. 176.

my trapezów niezupełnie zacieniowanych odejmujemy sumę trapezów zacieniowanych.



N. p.: Jeżeli punkt  $A$  ma odległości  $x_1, y_1$ , od linii  $OY$  i  $OX$ , punkt  $B \dots x_2, y_2, C \dots x_3, y_3$  i t. d., to trapezy, niezacieniowane mają pole:

$$\frac{y_1 + y_7}{2} (x_7 - x_1) + \frac{y_7 + y_6}{2} (x_6 - x_7) + \frac{y_6 + y_5}{2} (x_5 - x_6)$$

trapezy zaś zacieniowane:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} (x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2} (x_3 - x_2) + \frac{y_3 + y_4}{2} (x_4 - x_3) + \frac{y_4 + y_5}{2} (x_5 - x_4)$$

Odejmując te dwa wyrażenia od siebie otrzymamy pole wielokąta  $ABCDEFGG$ .

Dogodnie jest obrać oś  $OX$  wzdłuż jednej z dłuższych przekątni n. p.  $AE$ .

### § 68. Zamiana figur.

Na podstawie twierdzeń o obliczaniu pól możemy wykonywać konstrukcyjnie zamianę figur na inne, o równym polu. Widzieliśmy już, że każdy prostokąt można zamienić na kwadrat. Obecnie możemy każdy równoległobok zamienić na inny równoległobok o tej samej podstawie i wysokości, o dowolnych kątach.

N. p.: równoległobok  $ABCD$  (fig. 177) zamienia się na  $ABEF$ ,

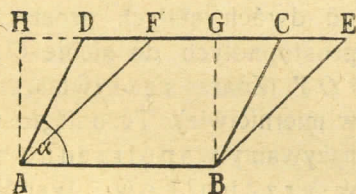


Fig. 177.

przesuwając górny bok po tej samej linii o kawałek  $CE$ . Można więc każdy równoległobok zamienić na prostokąt (n. p.  $ABGH$ ), a więc i na kwadrat, ponieważ prostokąt potrafimy zamienić na równoważny z nim kwadrat. Widzimy, że przy danej podstawie i wysokości długość pozostałych boków równoległoboku zależy

od wielkości kąta  $\alpha$ . Gdy  $\alpha$  maleje do zera, boki wzrastają nieograniczenie; tak samo gdy  $\alpha$  wzrasta powyżej  $90^\circ$ .

Aby trójkąt zamienić na inny, o równej podstawie i wysokości, wykreślamy przez wierzchołek linię równoległą do podstawy. Na tej linii musi leżeć wierzchołek każdego nowego trójkąta (dlaczego?).

Można w ten sposób otrzymać trójkąt prostokątny, równoramienny, rozwartokątny (fig. 178).

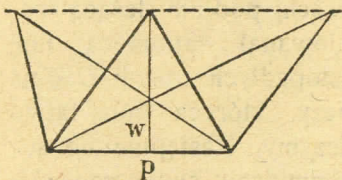


Fig. 178.

Jeżeli chcemy zamienić trójkąt na równoległobok o równej podstawie, musimy jego wysokość skrócić o połowę (dlaczego?) i odwrotnie. Można więc i trójkąt zamienić na prostokąt, a co zatem idzie: na kwadrat, czyli wykonać kwadraturę trójkąta (przy pomocy linealu i cyrkla).

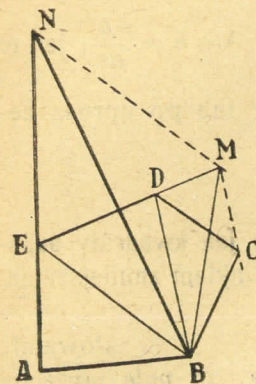


Fig. 179.

Aby wielokąt n. p.  $ABCDE$  na fig. 179 zamienić na trójkąt, odcinamy przekątnią najpierw jeden trójkąt (np.  $DBC$ ) i zamieniamy go na inny  $DMB$ , taki, aby jeden jego bok był przedłużeniem boku pozostałego wielokąta ( $DBEA$ ).

Otrzymamy wielokąt o mniejszej liczbie boków i postępujemy z nim tak samo dalej. Ostatecznie otrzymamy jeden trójkąt ( $ABN$  na naszej figurze). Stąd już łatwo przejść do kwadratury wielokąta.

Powróćmy do trójkąta. Jeżeli chcemy trójkąt zamienić na inny, o równym polu, ale o krótszej podstawie, to trzeba odpowiednio przedłużyć wysokość. Konstrukcyjnie postępujemy podobnie, jak przy zamianie wielokąta na trójkąt. Odcinamy mianowicie część trójkąta i zamieniamy ją na trójkąt, którego bok jest przedłużeniem boku pozostałej części trójkąta (fig. 180).

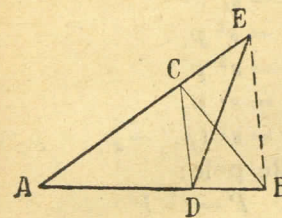


Fig. 180.

N. p.  $ABC$  zamienia się na trójkąt o podstawie  $AD$ , odcinając trójkąt  $DBC$  i zamieniając go na taki trójkąt  $CED$ , któryby tworzył jeden trójkąt z częścią  $ADC$ .

### § 69. Pola figur podobnych.

Znając pole jakiejś figury, można obliczyć pole każdej figury podobnej, jeżeli tylko znamy stosunek zmniejszenia lub powiększenia linijowych wymiarów.

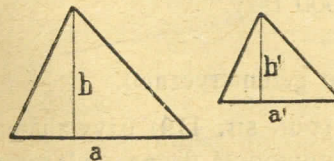


Fig. 181.

Pola figur podobnych pozostają bowiem w pewnym prostym stosunku.

Weźmy pod uwagę dwa trójkąty podobne (fig. 181).

Z podobieństwa wynika proporcja:

$$a : a' = h : h' \quad (1)$$



Pola tych trójkątów wynoszą:

$$P = \frac{a h}{2}; P' = \frac{a' h'}{2}$$

Ich stosunek jest więc:  $P : P' = a h : a' h'$ . Ale  $h = \frac{a h'}{a'}$ , jak to wynika z proporcji (1), więc  $P : P' = \frac{a^2 h'}{a'} : a' h'$  lub po uproszczeniu przez  $h'$  i rozszerzeniu przez  $a'$

$$P : P' = a^2 : a'^2$$

Pola trójkątów podobnych mają się do siebie, jak kwadraty odpowiednich boków. Ponieważ zaś  $a : a' = s$  jest stosunkiem zmniejszenia, więc  $a^2 : a'^2 = s^2$ , stąd  $P : P' = s^2$ , czyli:

$$P = s^2 P'$$

słowami:

*Jeżeli boki trójkąta powiększą się  $s$ -krotnie, to pole wzrośnie  $s^2$  razy, to jest w stosunku kwadratowym.*

To samo odnosi się do wszystkich wielokątów podobnych, ponieważ możemy je rozdzielić na trójkąty parami podobne.

N. p. fig. 182: jeżeli  $a : a' = b : b' = c : c' = s$ , to

$$p_1 = s^2 p_1'$$

$$p_2 = s^2 p_2'$$

$$p_3 = s^2 p_3'$$

$$(p_1 + p_2 + p_3) = s^2 (p_1' + p_2' + p_3')$$

czyli całe pole:

$$P = s^2 P'$$

*Aby więc otrzymać pole figury podobnej, trzeba pole danej figury pomnożyć przez zmniejszenie (lub zwiększenie) podniesione do kwadratu.*

Jeżeli n. p. jakiś rysunek pomniejszą w stosunku 1:6,

to pole zmniejszy się 36 razy. Na mapie z podziałką 1:75.000 długości są 75.000-ną częścią prawdziwych długości, ale pola są zmniejszone w stosunku  $75.000^2$ , t. j. 5.625.000.000 razy.

## § 70. Twierdzenie Pitagorasa (w formie geometrycznej).

Do dowodu twierdzenia Pitagorasa (por. str. 119) używaliśmy dotychczas proporcji, możemy je jednak udowodnić drogą wyłącznie geometryczną.  $c^2$  możemy sobie przedstawić jako kwadrat zbudowany z przeciwprostokątnej, a  $a^2$  i  $b^2$  jako kwadraty zbudowane na obu

przyprostokątniach. Przedstawiliśmy to na fig. 183. Chcemy wykazać, że  $I + II = III$ . Dla dowodu tworzymy rzut boku  $AC$  na  $AB$  i przedłużamy linię rzucającą do punktu  $F$ . Kwadrat  $III$  rozpadł się na

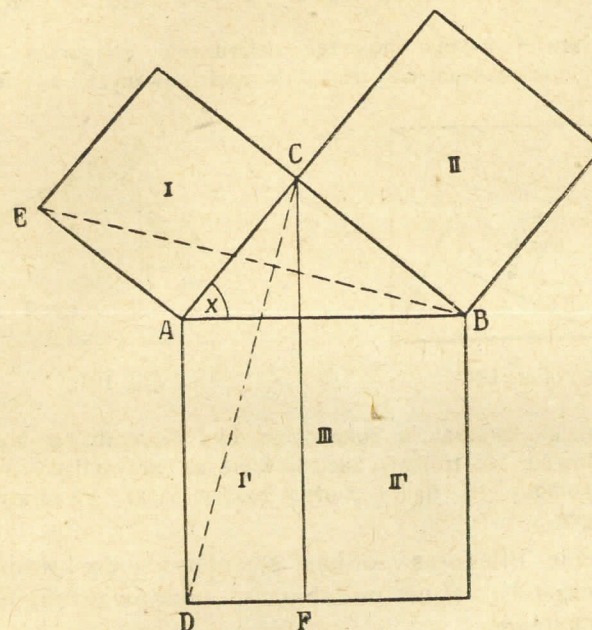


Fig. 183.

dwa prostokąty:  $I'$  i  $II'$ . Wykażemy, że  $I' = I$  a  $II' = II$ . Aby porównać kwadrat  $I$  z prostokątem  $I'$ , łączymy  $C$  z  $D$  i  $E$  z  $B$ . Otrzymane trójkąty są przystające, ( $AC = AE$ ,  $AD = AB$ , a  $\angle CAD = \angle EAB$ , ponieważ powstają przez dodanie tego samego kąta  $x$  do  $90^\circ$ ). Pola tych trójkątów są więc równe. Ale  $EAB$  jest połową kwadratu  $I$ , ponieważ ma z nim wspólną podstawę  $EA$  i równą wysokość (dlaczego?). Tak samo  $CAD$  jest połową prostokąta  $I'$ . Jeżeli zaś połowy jakichś figur mają równe pola, to i całe figury muszą mieć równe pola, zatem  $I = I'$ .

Tak samo wykazuje się, że  $II = II'$ , więc  $I + II = I' + II'$  czyli:

$$I + II = III.$$

Twierdzenie Pitagorasa możemy zatem wypowiedzieć także w następującej, geometrycznej szacie:

**Kwadrat zbudowany na przeciwprostokątnej równa się sumie kwadratów zbudowanych na obu przyprostokątniach.**

Twierdzenie to znane już było w starożytnym Egipcie. W Indjach podawano bardzo ciekawe sposoby dowodzenia. N. p. matematyk indyjski



Bramagupta (w VII. wieku po n. Chr.) używał figury przedstawionej na fig. 184, z której widać, że:

$$c^2 = 4 \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 \text{ więc } c^2 = a^2 + b^2.$$

Jeszcze łatwiej można spostrzec twierdzenie Pitagorasa na fig. 185, gdzie wprost przez przesunięcie trójkątów zacieniowanych w miejsca I i II

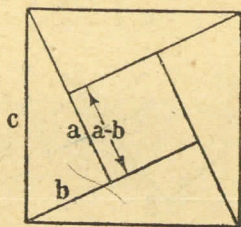


Fig. 184.

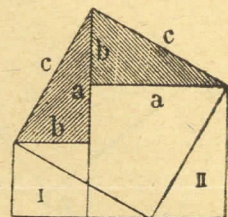


Fig. 185.

zamienia się wielki kwadrat o boku  $c$  na dwa kwadraty o bokach  $b$  i  $a$  (Przeprowadź dowód, że trójkąty zacieniowane są przystające do trójkątów I i II). Przy pomocy tej figury można rozciąć nasze kwadraty na części parami przystające.

Twierdzenie Pitagorasa odnosi się nie tylko do kwadratów, ale wogóle do wszelkich figur podobnych, zbudowanych na bokach trójkąta prostokątnego.

Wiemy bowiem, że dla figur podobnych (fig. 186):

$$\begin{aligned} P_1 : P_3 &= a^2 : c^2 & P_1 c^2 &= P_3 a^2 \\ P_2 : P_3 &= b^2 : c^2 & P_2 c^2 &= P_3 b^2 \end{aligned}$$

Stąd:

$$P_1 c^2 + P_2 c^2 = P_3 (a^2 + b^2).$$

Ale  $a^2 + b^2 = c^2$ , więc  $P_1 c^2 + P_2 c^2 = P_3 c^2$ , lub upraszczając przez  $c^2$ , otrzymamy:  $P_1 + P_2 = P_3$  słowami:

*Suma pól jakichkolwiek figur podobnych, zbudowanych na przyprostokątniach, równa się polu figury podobnej, zbudowanej na przeciwprostokątnej.*

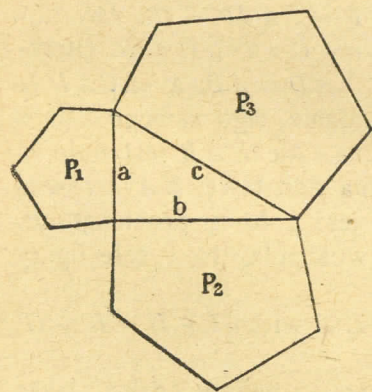


Fig. 186.

## § 71. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenia Pitagorasa używa się przede wszystkim do obliczenia jednego boku trójkąta prostokątnego przy pomocy

znanych dwóch innych boków. Z wzoru bowiem  $a^2 + b^2 = c^2$  (fig. 187) otrzymujemy:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

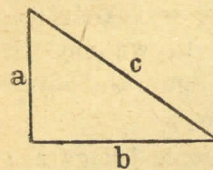


Fig. 187.

*Uwaga:* nie należy sądzić, aby  $\sqrt{c^2 - b^2}$  wynosił  $c - b$ , albowiem  $(c - b)^2 = c^2 - 2bc + b^2$ , a nie  $c^2 - b^2$ ! Ta sama uwaga odnosi się do innych pierwiastków! Trzeba najpierw obliczyć  $c^2 - b^2$  i t. p. a potem obliczyć drugi pierwiastek! Zawsze jest  $c - b < a$  jako różnica dwóch boków trójkąta w porównaniu z trzecim.

Twierdzeniem Pitagorasa posługujemy się także, aby obliczyć przekątną prostokąta lub kwadratu: n. p. dla prostokąta otrzymujemy:

$$p = \sqrt{a^2 + b^2}$$

a stąd odwrotnie można obliczyć jeden bok, znając drugi bok i przekątną (fig. 188).

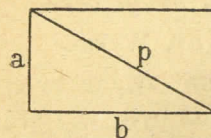


Fig. 188.

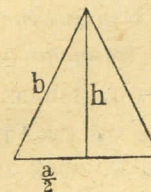


Fig. 189.

Wysokość trójkąta równoramiennego jako funkcja jego boków wyraża się również przy pomocy twierdzenia Pitagorasa:

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Ponieważ zaś każdy wielokąt umiarowy można rozdzielić na same trójkąty równoramienne, przeto posiadamy także sposób obliczenia promienia koła wpisanego w wielokąt (lub opisanego) przy pomocy boku i promienia koła opisanego (wpisanego).

Wysokość i pole trójkąta równobocznego można obliczyć, znając jego bok.

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \quad \text{stąd}$$

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3} \quad (1)$$

$$P = \frac{a}{2} \cdot h = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} \quad \text{czyli}$$

$$P = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}. \quad (2)$$

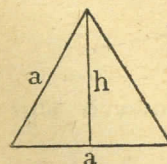


Fig. 190.

pole:



Widzimy więc, że pole trójkąta równobocznego jest funkcją tylko jednej zmiennej, mianowicie jest funkcją długości boku.

Wyraż odwrotnie długość boku w zależności od wielkości pola!

Wyraż pole trójkąta równobocznego jako funkcję wysokości!

Wzory (1) i (2) zasługują na uwagę, ponieważ używa się ich często w planimetrii i stereometrii przy obliczaniu pól figur, złożonych z trójkątów równobocznych (n. p. sześciokąt umiarowy).

Zastosujmy jeszcze twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ukośnokątnego (fig. 191). Wykreślmy wysokość  $h$ , należącą do boku  $b$ , to  $r$  jest rzutem boku  $c$  na bok  $b$ . Wyznaczając  $h$  z dwóch trójkątów prostokątnych, otrzymamy:

$$h^2 = c^2 - r^2$$

$$h^2 = a^2 - (b - r)^2$$

stąd:

$$a^2 - (b - r)^2 = c^2 - r^2$$

czyli

$$a^2 - b^2 + 2br - r^2 = c^2 - r^2$$

a więc:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2br$$

słowami:

*Kwadrat boku trójkąta ostrokątnego równa się sumie kwadratów dwóch innych boków pomniejszonej o podwójne pole prostokąta, utworzonego z drugiego boku i z rzutu trzeciego boku na drugi bok.*

Dla trójkąta rozwartokątnego otrzymujemy  $+2br$ . Wykaż!

Jest to twierdzenie ogólniejsze od tw. Pitagorasa, zwane twierdzeniem Carnota (XVIII wiek) — jakkolwiek znane już było w starożytności.

Podstawiając wartość  $r$  z tego wzoru w  $h^2$ , otrzymalibyśmy wysokość, wyrażoną zapomocą trzech boków.

Wykazać, że:

$$h = \frac{1}{2b} \sqrt{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}$$

lub oznaczając obwód  $a + b + c = 2s$

$$h = \frac{2}{b} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

a stąd otrzymuje się na pole trójkąta wzór (Heron)

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

## § 72. Obliczanie boków (i pól) wielokątów umiarowych wpisanych w koło. Podział koła.

Nauczyliśmy się wykonywać podział koła konstrukcyjnie, obecnie zrobimy to samo ścisłym rachunkiem. Trzeba w tym celu obliczyć

boki wieloboków umiarowych wpisanych w koło, w zależności od promienia koła.

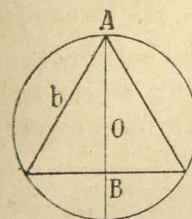


Fig. 192.

Mając dany promień  $r$ , szukamy boku  $b$  wielokąta wpisanego.

Dla trójkąta równobocznego w koło wpisanego (fig. 192) punkt  $O$  jest zarazem środkiem ciężkości (wskutek symetrii), więc  $OA = r$ ,  $OB = \frac{r}{2}$

$$h = \frac{3r}{2}$$

Ale także  $h = \frac{b}{2} \sqrt{3}$  (p. str. 143), więc:  $\frac{b}{2} \sqrt{3} = \frac{3r}{2}$ . Stąd  $b = \frac{3r}{\sqrt{3}}$

$$\text{lub } b = \frac{3\sqrt{3} \cdot r}{3},$$

a więc

$$b = r \cdot \sqrt{3}.$$

W kwadracie wpisanym w koło (fig. 193) przekątnia jest średnicą, więc

$$4r^2 = b^2 + b^2 = 2b^2$$

$$b^2 = 2r^2 \text{ czyli}$$

$$b = r \cdot \sqrt{2}$$

Dla sześciokąta umiarowego w koło wpisanego mamy, jak wiadomo:

$$b = r$$

Z kwadratu można przejść do ośmiokąta, prowadząc dwie średnice prostopadłe do boków i łącząc ich punkty końcowe z wierzchołkami kwadratu. Z figury 193 widzimy, że

$$b' = \sqrt{x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}. \text{ Ale}$$

$$x = r - \frac{b}{2} = r - \frac{r\sqrt{2}}{2} \text{ (bo } b \text{ jest bokiem kwadratu), więc:}$$

$$b' = \sqrt{r^2 - r^2\sqrt{2} + \frac{r^2 \cdot 2}{4} + \frac{r^2 \cdot 2}{4}}$$

$$b' = \sqrt{r^2 - r^2\sqrt{2} + r^2} = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{2}}. \text{ Wyciągając}$$

drugi pierwiastek z  $r^2$ , otrzymamy:

$$b' = r \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$



Podobnie z sześciokąta umiarowego można obliczyć bok dwunastokąta umiarowego wpisanego w koło. Otrzymamy:

$$b' = r \sqrt{2 - \sqrt{3}}. \quad (\text{Udowodnij!})$$

Z tych przykładów widzimy, że znając bok  $n$  boku umiarowego, możemy obliczyć bok  $2n$  boku,  $4n$  boku i t. d. Otóż wychodząc z trójkąta i kwadratu, możemy obliczyć boki wielokątów umiarowych, których liczba boków wynosi:  $4, 8, \dots, 2^n$ , tudzież  $3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, \dots, 3 \cdot 2^n$ .

Pominęliśmy pięciobok i dziesięciobok umiarowy. Już przy złotym podziale mieliśmy (p. str. 124):

$$b = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} - \frac{r}{2}.$$

$$b = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} \sqrt{5} - \frac{r}{2} \quad \text{czyli}$$

$$b = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

Stąd

(1)

Stąd łatwo obliczyć stosunek  $r:b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  (por. str. 106).

Stąd możemy przejść do boku pięciokąta umiarowego rachunkiem nieco zawilszym (por. także str. 129, ćw. 71). Mianowicie stosując twierdzenie o średniej geometrycznej (str. 118) do boku dziesięciokąta umiarowego otrzymamy:

$$x:b = b:2r \quad (\text{fig. 194}); \quad \text{stąd}$$

$$x = \frac{b^2}{2r} \quad \text{czyli biorąc } b \text{ z wzoru (1):}$$

$$x = \frac{r^2}{4} (5 - 2\sqrt{5} + 1) : 2r$$

$$x = \frac{r}{8} (6 - 2\sqrt{5}) = \frac{r}{4} (3 - \sqrt{5}).$$

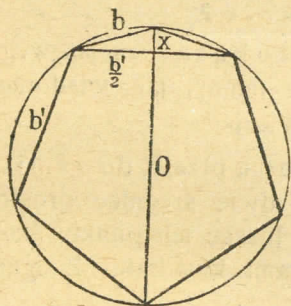


Fig. 194.

Przy pomocy tego odcinka obliczymy połowę boku pięciokąta umiarowego:

$$\frac{b'}{2} = \sqrt{b^2 - x^2}.$$

Podstawiając tu wartość za  $b$  i  $x$  otrzymamy:

$$\frac{b'}{2} = \sqrt{\frac{r^2}{4} (5 - 2\sqrt{5} + 1) - \frac{r^2}{16} (9 - 6\sqrt{5} + 5)}.$$

Przed pierwiastek wyciągamy  $\sqrt{\frac{r^2}{16}} = \frac{r}{4}$  a więc

$$\frac{b'}{2} = \frac{r}{4} \sqrt{4(6 - 2\sqrt{5}) - (14 - 6\sqrt{5})} = \frac{r}{4} \sqrt{24 - 8\sqrt{5} - 14 + 6\sqrt{5}}$$

$$b' = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Uwaga: łatwo sprawdzić rachunkiem, że

$$b'^2 = b^2 + r^2.$$

(Wypowiedz słowami!)

Jeżeli potrafimy obliczyć bok  $5$ -boku, to stąd już można znaleźć bok każdego wieloboku, którego liczba boków wynosi:  $5 \cdot 2, 5 \cdot 2^2, 5 \cdot 2^3, \dots, 5 \cdot 2^n$ .

Wzory te przydają się przy obliczaniu pól i obwodów wielokątów umiarowych.

Widzimy, że wzory, wyrażające związek między bokami niektórych wielokątów umiarowych a promieniami kół opisanych, składają się co najwyżej z drugich pierwiastków — trzeci pierwiastek nie występuje nigdzie w omówionych wielokątach. Możemy więc te boki konstrukcyjnie wyznaczyć przy pomocy lineau i cyrkla (ponieważ potrafimy każdy drugi pierwiastek zbudować konstrukcyjnie). Odnosi się to do wielokątów, których liczba boków wynosi:  $2^n, 3 \cdot 2^n, 5 \cdot 2^n$ , a także  $3 \cdot 5 \cdot 2^n$  ( $n$  dowolna liczba całkowita dodatnia lub zero).

Gauss (w roku 1801) wykazał, że także bok  $17$ -kąta,  $257$ -kąta i wogóle  $(2^n + 1)$  kąta, jeżeli  $2^n + 1$  jest liczbą pierwszą, można wyrazić jako funkcję promienia koła przy pomocy samych drugich pierwiastków, da się więc zbudować przy pomocy cyrkla i lineau. Natomiast boki  $7$ -,  $9$ -,  $11$ -,  $13$ -kąta nie dadzą się w ten sposób obliczyć.

Do obliczenia boków innych wielokątów posiadamy sposoby trygonometryczne.

Ciekawem jest, że  $1^\circ$  nie da się skonstruować przy pomocy lineau i cyrkla; jest to bowiem podział koła na  $360$  części, liczba zaś  $360 = 9 \cdot 5 \cdot 2^3$ , a powiedzieliśmy, że już na dziewięć części nie da się koło konstrukcyjnie podzielić.

Porównując boki wielokątów z promieniem koła opisanego widzimy, że

$$b_3 > r, b_4 > r, b_5 > r, b_6 = r, b_8 < r, b_{10} < r.$$

( $b_3$  = bok trójkąta równobocznego,  $b_4$  = bok kwadratu,  $b_5$  = bok pięciokąta i t. d.). Słowami: boki są najpierw większe od promienia, dla sześciokąta bok jest równy promieniowi, dla dalszych zaś wielokątów coraz to mniejszy w porównaniu z promieniem. Wielkość tego boku dąży do granicy zero, jeżeli liczba boków wzrasta nieograniczenie przy niezmiennym promieniu.



## § 73. Obwód koła.

Dotychczas obliczaliśmy tylko długości odcinków prostych. Jeżeli chcemy zbadać długość obwodu koła, a więc linii krzywej, musimy używać zupełnie odmiennych sposobów.

W geometrii praktycznej łatwo wykonać mierzenie długości także linii krzywych (używa się nitki lub toczy się kółko o znanym obwodzie po danej linii krzywej), w geometrii idealnej jednakowoż ściśle obliczenie długości linii krzywych sprawia wogóle poważne trudności. To obliczanie nazywamy: rektyfikacją linii krzywej, t. j. wyprostowaniem.

Obwód koła uważamy za granicę, do jakiej dążą obwody wielokątów wpisanych o coraz to większej liczbie boków dążących do zera. Najlepiej użyć wieloboków umiarowych (por. str. 91, § 45).

*Uwaga:* jeżeli bierzemy pod uwagę wielokąty umiarowe o coraz to większej liczbie boków, wpisane w jedno koło, to obwody ich są coraz to większe a mimoto wszystkie są mniejsze od obwodu dowolnego wielokąta opisanego, np. od kwadratu opisanego. Nieskończony zbiór liczb wzrastających a utrzymujących się stale poniżej jakiejś skończonej liczby musi posiadać skończoną granicę, a więc obwód koła jest jakąś ściśle określoną, skończoną liczbą.

Przy obliczaniu obwodu oprzemy się na tem, że *obwody dwóch różnych kół tak się mają do siebie, jak ich średnice*. Istotnie, obwody wielokątów umiarowych o równej liczbie boków wpisane w te dwa koła są figurami podobnymi, a więc mają się do siebie, jak średnice. Proporcja ta zachodzi przy dowolnej liczbie boków, a więc zachodzi i w granicy dla obwodów kół.

Jeżeli więc  $U_1 : U_2$  oznaczają obwody dwóch różnych kół, to:

$$U_1 : U_2 = 2r_1 : 2r_2 \text{ czyli}$$

$$U_1 : 2r_1 = U_2 : 2r_2$$

Tak samo dla każdego innego koła otrzymamy tę samą wartość stosunku:  $U : 2r$ . Stąd wniosek:

**Stosunek obwodu koła do średnicy jest dla każdego koła stałą liczbą.** Największą trudność przy obliczeniu obwodu koła sprawia właśnie obliczenie tej liczby stałej. Wpiszmy w koło i opiszmy na kole sześciokąt umiarowy, to długość obwodu koła jest większa od obwodu sześciokąta wpisanego a mniejsza od obwodu sześciokąta opisanego (por. ćw. 4, str. 92). Ponieważ zaś obwód sześciokąta wpisanego wynosi  $6r$ , a sześciokąt opisanego — jak łatwo obliczyć —  $\frac{12r}{\sqrt{3}}$ ,

przeto

$$6r < U < \frac{12r}{\sqrt{3}} \quad \text{a dzieląc całą nierówność}$$

przez  $2r$ :

$$3 < \frac{U}{2r} < \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Liczba  $\frac{U}{2r}$  zawiera się więc w granicach 3 i 3.464... Biorąc teraz 12-bok wpisany i opisany, otrzymamy granice jeszcze bliższe ponieważ obwód 12-boku mniej się różni od obwodu koła, aniżeli obwód 6-boku. Po wykonaniu rachunku otrzymamy:

$$3.106... < \frac{U}{2r} < 3.215...$$

Gdybyśmy jeszcze kilka razy powtórzyli te mozolne rachunki dla 24-kąta, 48-kąta i t. d. otrzymalibyśmy:

$$3.14159 < \frac{U}{2r} < 3.14160$$

Możemy więc napisać

$$\frac{U}{2r} = 3.14159...$$

popołniając błąd przez niedomiar (jaki?).

W podobny sposób możnaby wyjść od kwadratu, ośmiokąta umiarowego i t. d.

Wartość tego stosunku obliczono z wielką dokładnością, do kilkuset miejsc dziesiętnych i udowodniono, że jest liczbą niewymierną (ułamkiem dziesiętnym nieperjodycznym). Liczbę tę oznaczamy literą grecką  $\pi$  (czytaj: pi) i nazywamy ją ludolfiną, na cześć matematyka Ludolfa van Ceulen (XVI. wiek), który ją obliczył z dokładnością 35 miejsc.

Należałoby ją jednak raczej nazywać liczbą Archimedesza, ponieważ Archimedes pierwszy podał sposób jej obliczenia, któregośmy tu właśnie użyli. Przeprowadzając pięć razy rachunek, któryśmy tu zaznaczyli, otrzymał Archimedes dla liczby  $\pi$  granice:

$$3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}, \text{ a więc } 3.1428... > \pi > 3.1408...$$

Już przed Archimedesem zwrócono uwagę, że stosunek obwodu do średnicy jest liczbą stałą dla każdego koła. W biblji (stary testament) podana jest liczba 3 jako stosunek obwodu do średnicy. W wiekach średnich, kiedy prace Archimedesza poszły w zapomnienie, sądzono, że

$$\pi = \sqrt{10} = 3.162...$$

Dopiero w czasach nowożytnych przedsięwzięto na nowo rachunki, wykonane przez Archimedesza. Z tych to czasów pochodzi obliczenie Ludolfa.

W nowszych czasach wykryto inne, szybsze sposoby obliczenia tej liczby i udowodniono, że  $\pi$  jest nie tylko liczbą niewymierną, ale



nie da się także przedstawić zapomocą pierwiastków równań algebraicznych (jest liczbą przestępną), nie da się więc skonstruować przy pomocy lineau i cyrkla. Jest to zdobycz drugiej połowy XIX. wieku.

Doszliśmy więc do następującego wniosku:

Stosunek obwodu koła do średnicy jest liczbą stałą, zwaną ludolfiną, która jest liczbą niewymierną, przestępną i wynosi

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846 \dots$$

Wobec tego obwód koła oblicza się, mnożąc średnicę przez ludolfinę:

$$U = 2r\pi. \quad (1)$$

Obwód koła jest więc funkcją jednej zmiennej, mianowicie promienia; liczba bowiem  $\pi$  jest liczbą stałą.

Stąd już łatwo obliczyć łuk, należący do jakiegokolwiek kąta środkowego. Łuk jest mianowicie taką częścią obwodu, jaką częścią 360 stopni jest kąt środkowy:

$$l : 2r\pi = \alpha : 360^\circ \quad \text{stąd}$$

$$l = \frac{2r\pi\alpha}{360^\circ} \quad \text{czyli}$$

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ} \quad (2)$$

Łuk jest funkcją dwóch zmiennych: promienia i kąta.

Widzimy więc, że łuk w prosty sposób zależy od kąta. Na tem polega nowy sposób mierzenia kątów. Mianowicie: aby zmierzyć jakiś kąt, zakreślamy około jego wierzchołka koło o promieniu równym jednostce długości:  $r = 1$  i badamy, jaki łuk leży między ramionami tego kąta.

Jeżeli kąt  $\alpha = 360^\circ$ , to łuk wynosi wtedy  $2\pi$  (cały obwód), jeżeli  $\alpha = 180^\circ$ , to odpowiedni łuk koła o promieniu równym jednostce jest  $\pi$ ; jeżeli kąt jest prosty, łuk wynosi  $\frac{\pi}{2}$  i t. d. Otóż długość tego łuku przyjmujemy za nową t. zw. łukową miarę kąta. Będziemy więc mówili n. p. kąt wynosi  $\frac{\pi}{6}$ , to znaczy jest szóstą częścią kąta półpełnego, a więc w dawnej mierze wynosi  $30^\circ$ . Ogólnie do zamiany dawnej miary na nową i odwrotnie służy wzór (2) i jego odwrócenie:

$$\alpha = \frac{180 l}{r\pi}$$

przy założeniu  $r = 1$ .

## § 74. Pole koła. Kwadratura koła.

Aby z obwodu koła przejść do pola, uważamy pole koła za granicę pól wielokątów umiarowych wpisanych lub opisanych o coraz to większej liczbie boków. Użyjemy więc wzoru dla wielokąta umiarowego:

$$P = U \cdot \frac{r}{2}, \quad \text{a podstawiając za } U \text{ wartość } 2r\pi, \text{ otrzymamy}$$

$$P = 2r\pi \cdot \frac{r}{2} \quad \text{czyli:}$$

$$P = r^2\pi \quad (3)$$

Pole koła jest funkcją jednej zmiennej, mianowicie promienia.

Ścisły dowód należałoby przeprowadzić tak: pole każdego wielokąta umiarowego opisanego jest większe od  $r^2\pi$ , bo jego obwód jest większy od  $2r\pi$ , ale zbliża się dowolnie do tej wartości. Gdyby więc pole koła było  $P > r^2\pi$ , to możnaby znaleźć taki wielokąt opisany, że jego pole  $F$  byłoby wprawdzie większe od  $r^2\pi$ , ale mniejsze od  $P$ . Pole wielokąta opisanego nie może być jednak mniejsze od pola koła zawartego wewnątrz niego. Więc nie może być  $P > r^2\pi$ . Tak samo wykazuje się, że nie może być  $P < r^2\pi$ .

Z tym wzorem wiąże się słynne zagadnienie o kwadraturze koła. Widzieliśmy, że każdy wielokąt można zamienić na kwadrat o równem polu konstrukcyjnie, używając tylko lineau i cyrkla. Dla koła łatwo to zadanie wykonać rachunkiem. Żądamy mianowicie, aby

$$r^2\pi = x^2 \quad \text{stąd } x = \sqrt{r^2\pi} \quad \text{czyli: } x = r\sqrt{\pi}.$$

Gdybyśmy potrafili otrzymać konstrukcyjnie  $\pi$ , to i  $\sqrt{\pi}$  możnaby zbudować geometrycznie i iloczyn  $r\sqrt{\pi}$ . Ale właśnie wspomnieliśmy w poprzednim ustępie, że  $\pi$  nie da się otrzymać przy pomocy lineau i cyrkla. Stąd wniosek:

*Wykonanie kwadratury koła przy pomocy jedynie lineau i cyrkla jest niemożliwe.*

Natomiast przy pomocy innych przyrządów pomocniczych można wykonać kwadraturę koła ściśle. W przybliżeniu można wykonać kwadraturę także linealem i cyrklem, posiadamy nawet bardzo wiele ciekawych sposobów, dających dosyć znaczne przybliżenie. Konstrukcje te pochodzą z czasów, kiedy nie wiedziano jeszcze o tem, że zadanie to jest niemożliwe i usiłowano je rozwiązać ściśle. Zwłaszcza w średnich wiekach kwadratura koła była ulubionem zagadnieniem uczonych.

Bardzo rozpowszechniona jest przybliżona kwadratura, podana przez Polaka Kochańskiego (1685 roku). Wykreśla się średnicę  $AB$



i styczną w punkcie  $B$ . Ze środka koła prowadzimy pod  $\angle 30^\circ$  linię  $OC$ . Od punktu  $C$  odcinamy na stycznej trzy promienie do punktu  $E$ , to linia  $AE$  przedstawia w przybliżeniu długość półkoła  $r\pi$ . Łatwo obliczyć, że

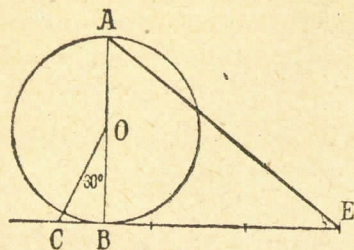


Fig. 195.

$$AE = 3.14153 \dots r$$

$$(\text{zamiast: } 3.14159 \dots r).$$

Jeżeli na odcinku  $AE$  zbudujemy prostokąt o wysokości  $r$ , to jego pole wynosi z wielkiem (jakim?) przybliżeniem  $r^2\pi$  równa się więc w przybliżeniu poła koła. Zamieniając ten prostokąt w znany sposób na kwadrat, otrzymamy przybliżoną kwadraturę koła.

Umiejąc obliczać pole całego koła, łatwo obliczyć pole wycinka koła, t. j. części koła zawartej między łukiem i dwoma promieniami. Wycinki koła, należące do równych łuków, są przystające, mają więc równe pola, a więc do łuku 2, 3, 4... razy większego, należy wycinek o polu 2, 3, 4... razy większem. Stąd wynika, że wycinek jest taką częścią pola koła, jaką częścią obwodu jest łuk.

$$W : r^2\pi = l : 2r\pi$$

$$W = \frac{r^2\pi \cdot l}{2r\pi} \quad \text{czyli: } W = l \cdot \frac{r}{2}.$$

Pole wycinka koła oblicza się tak, jak pole trójkąta, którego podstawą jest łuk a wysokością promień koła.

Pole odcinka koła (t. j. części koła zawartej między łukiem i odpowiednią cięciwą) otrzymuje się jako różnicę lub sumę wycinka koła i odpowiedniego trójkąta (por. fig. 196):

$$ABC = W - T$$

$$ADB = W' + T.$$

Pole pierścienia kołowego (fig. 197) otrzymujemy jako różnicę między polami dwóch kół współśrodkowych

$$P = r_1^2\pi - r_2^2\pi = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)\pi.$$

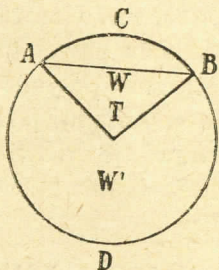


Fig. 196.

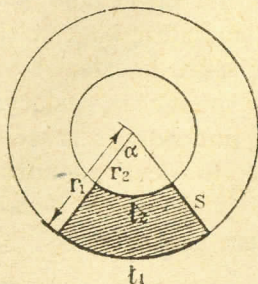


Fig. 197.

Wycinek pierścienia kołowego obliczamy jako różnicę wycinków dwóch kół:

$$W = l_1 \frac{r_1}{2} - l_2 \frac{r_2}{2}.$$

Wzór ten wyraża pole wycinka pierścienia jako funkcję czterech zmiennych. Prostszy wzór otrzymamy jednak, wychodząc z proporcji:

$$\left. \begin{aligned} W_1 : r_1^2\pi &= \alpha : 360^\circ \\ W_2 : r_2^2\pi &= \alpha : 360^\circ \end{aligned} \right\} \begin{aligned} W_1 &= \frac{r_1^2\pi\alpha}{360^\circ} \\ W_2 &= \frac{r_2^2\pi\alpha}{360^\circ} \end{aligned}$$

Stąd

$$W = W_1 - W_2 = (r_1^2 - r_2^2) \frac{\pi\alpha}{360^\circ}$$

$$W = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) \frac{\pi\alpha}{360^\circ}$$

$$\begin{aligned} W &= (r_1 - r_2) \left( \frac{r_1\pi\alpha}{360^\circ} + \frac{r_2\pi\alpha}{360^\circ} \right) \\ &= (r_1 - r_2) \left( \frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2} \right). \end{aligned}$$

Ale  $r_1 - r_2$  jest szerokością pierścienia, więc

$$W = s \cdot \frac{l_1 + l_2}{2}.$$

Pole wycinka pierścienia kołowego oblicza się tak, jak pole trapezu.

Widzimy zarazem, że pole wycinka pierścienia kołowego jest funkcją trzech zmiennych.

### Ćwiczenia X

§ 62. 1. Narysować na papierze milimetrowym dowolną figurę, ograniczoną linią krzywą i zbadać, w jakich granicach zawiera się liczba wymiarowa jej pola.

§ 63. 2. Boki prostokąta wynoszą  $a = \sqrt{6}$ ,  $b = \sqrt{24}$ ; podać kolejne przybliżenia pola tego prostokąta i granice, do której one dążą.

3. Wyjaśnić geometrycznie równości:  $(a-b) \cdot c = ac - bc$ ,  
 $(a+b) \cdot (c+d) = ac + bc + ad + bd$ .

4. Jeden cal wynosi 2.54 cm, ile  $\text{cm}^2$  wynosi cal kwadratowy?

5. Przedstawić graficznie związek pola kwadratu z jego bokiem:  $y = x^2$ .

6. Obliczyć bok kwadratu, mającego pole tak wielkie, jak prostokąt o bokach  $b = 87.2 \text{ cm}$ ,  $c = 45.8 \text{ cm}$ ; wyznaczyć ten bok także konstrukcyjnie.

7. Wykazać, że każdy kwadrat ma większe pole, aniżeli prostokąt o tym samym obwodzie. (Uwaga: jeżeli bok kwadratu oznaczmy  $a$ , to boki prostokąta będą  $a+x$  i  $a-x$ ).



i styczną w punkcie  $B$ . Ze środka koła prowadzimy pod  $\angle 30^\circ$  linię  $OC$ . Od punktu  $C$  odcinamy na stycznej trzy promienie do punktu  $E$ , to linia  $AE$  przedstawia w przybliżeniu długość półkoła  $r\pi$ . Łatwo obliczyć, że

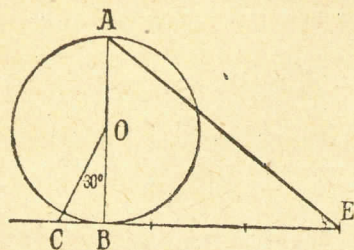


Fig. 195.

$$AE = 3.14153 \dots r$$

$$(\text{zamiast: } 3.14159 \dots r).$$

Jeżeli na odcinku  $AE$  zbudujemy prostokąt o wysokości  $r$ , to jego pole wynosi z wielkiem (jakim?) przybliżeniem  $r^2\pi$  równa się więc w przybliżeniu poła koła. Zamieniając ten prostokąt w znany sposób na kwadrat, otrzymamy przybliżoną kwadraturę koła.

Umiejąc obliczać pole całego koła, łatwo obliczyć pole wycinka koła, t. j. części koła zawartej między łukiem i dwoma promieniami. Wycinki koła, należące do równych łuków, są przystające, mają więc równe pola, a więc do łuku 2, 3, 4... razy większego, należy wycinek o polu 2, 3, 4... razy większem. Stąd wynika, że wycinek jest taką częścią pola koła, jaką częścią obwodu jest łuk.

$$W : r^2\pi = l : 2r\pi$$

$$W = \frac{r^2\pi \cdot l}{2r\pi} \quad \text{czyli: } W = l \cdot \frac{r}{2}.$$

Pole wycinka koła oblicza się tak, jak pole trójkąta, którego podstawą jest łuk a wysokością promień koła.

Pole odcinka koła (t. j. części koła zawartej między łukiem i odpowiednią cięciwą) otrzymuje się jako różnicę lub sumę wycinka koła i odpowiedniego trójkąta (por. fig. 196):

$$ABC = W - T$$

$$ADB = W' + T.$$

Pole pierścienia kołowego (fig. 197) otrzymujemy jako różnicę między polami dwóch kół współśrodkowych

$$P = r_1^2\pi - r_2^2\pi = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)\pi.$$

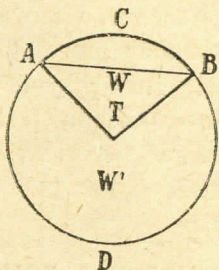


Fig. 196.

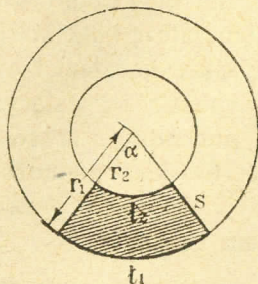


Fig. 197.

Wycinek pierścienia kołowego obliczamy jako różnicę wycinków dwóch kół:

$$W = l_1 \frac{r_1}{2} - l_2 \frac{r_2}{2}.$$

Wzór ten wyraża pole wycinka pierścienia jako funkcję czterech zmiennych. Prostszy wzór otrzymamy jednak, wychodząc z proporcji:

$$\left. \begin{aligned} W_1 : r_1^2\pi &= \alpha : 360^\circ \\ W_2 : r_2^2\pi &= \alpha : 360^\circ \end{aligned} \right\} \begin{aligned} W_1 &= \frac{r_1^2\pi\alpha}{360^\circ} \\ W_2 &= \frac{r_2^2\pi\alpha}{360^\circ} \end{aligned}$$

Stąd

$$W = W_1 - W_2 = (r_1^2 - r_2^2) \frac{\pi\alpha}{360^\circ}$$

$$W = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) \frac{\pi\alpha}{360^\circ}$$

$$\begin{aligned} W &= (r_1 - r_2) \left( \frac{r_1\pi\alpha}{360^\circ} + \frac{r_2\pi\alpha}{360^\circ} \right) \\ &= (r_1 - r_2) \left( \frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2} \right). \end{aligned}$$

Ale  $r_1 - r_2$  jest szerokością pierścienia, więc

$$W = s \cdot \frac{l_1 + l_2}{2}.$$

Pole wycinka pierścienia kołowego oblicza się tak, jak pole trapezu.

Widzimy zarazem, że pole wycinka pierścienia kołowego jest funkcją trzech zmiennych.

### Ćwiczenia X

§ 62. 1. Narysować na papierze milimetrowym dowolną figurę, ograniczoną linią krzywą i zbadać, w jakich granicach zawiera się liczba wymiarowa jej pola.

§ 63. 2. Boki prostokąta wynoszą  $a = \sqrt{6}$ ,  $b = \sqrt{24}$ ; podać kolejne przybliżenia pola tego prostokąta i granice, do której one dążą.

3. Wyjaśnić geometrycznie równości:  $(a-b) \cdot c = ac - bc$ ,  
 $(a+b) \cdot (c+d) = ac + bc + ad + bd$ .

4. Jeden cal wynosi 2.54 cm, ile  $\text{cm}^2$  wynosi cal kwadratowy?

5. Przedstawić graficznie związek pola kwadratu z jego bokiem:  $y = x^2$ .

6. Obliczyć bok kwadratu, mającego pole tak wielkie, jak prostokąt o bokach  $b = 87.2 \text{ cm}$ ,  $c = 45.8 \text{ cm}$ ; wyznaczyć ten bok także konstrukcyjnie.

7. Wykazać, że każdy kwadrat ma większe pole, aniżeli prostokąt o tym samym obwodzie. (Uwaga: jeżeli bok kwadratu oznaczmy  $a$ , to boki prostokąta będą  $a+x$  i  $a-x$ ).



8. Ile wynosi bok kwadratu, mającego dwa razy tak wielkie pole, jak kwadrat o boku  $a = 10 \text{ cm}$ ?

9. Historyk grecki Tucydides podaje, że wyspa, mająca dwa razy większy obwód, ma także dwa razy większe pole. Wykazać błędność tego twierdzenia, przyjmując kwadratowy kształt wyspy.

10. Wykazać rysunkiem, że kwadrat zbudowany na przekątnej innego kwadratu ma pole dwa razy większe od pierwotnego kwadratu.

11. Jak długie musi być pole prostokątne o szerokości  $5 \text{ m}$ , aby zawierało  $1 \text{ ha}$ ?

12. Zmierzyć otwór okna prostokątnego i pole szyb i obliczyć, jaki procent światła pochłaniają ramy.

13. Jaki błąd popełniamy przy obliczeniu pola prostokąta, którego boki:  $a = 4.27 \text{ m}$ ,  $b = 3.64 \text{ m}$  zmierzono z błędem, nie przenoszącym  $\frac{1}{2} \text{ cm}$ ?

§ 64. 14. Dowolny równoległobok zamienić na równy mu prostokąt.

15. Dowolny równoległobok zamienić na romb o równym polu i rozłożyć obie figury na części parami przystające.

16. Obliczyć pole rombu, znając jego przekątne  $d_1 = 20 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 30 \text{ cm}$ . Wyprowadzić ogólny wzór!

17. Wykonać kwadraturę dowolnego równoległoboku geometrycznie i algebraicznie.

§ 65—66. 18. Wykazać, że dwie przekątne dzielą równoległobok na cztery równe trójkąty.

19. Wyprowadzić wzór na pole trapezu, dzieląc go przekątnią na dwa trójkąty.

20. Dowolny trójkąt zamienić na trójkąt równoramienny o równej podstawie i równej wysokości.

21. W trójkącie dwa boki pozostają niezmienione, a kąt między nimi zmieniały. Jak się zmienia pole trójkąta? Kiedy ma największą wartość?

22. Obliczyć pole wielokątne, znając współrzędne wierzchołków:  $A (1 \text{ m}, 3 \text{ m})$   $B (1\frac{1}{2} \text{ m}, 1 \text{ m})$   $C (2 \text{ m}, 2 \text{ m})$   $D (4 \text{ m}, 1 \text{ m})$   $E (5 \text{ m}, 4 \text{ m})$   $F (3\frac{1}{2} \text{ m}, 5 \text{ m})$   $G (1.8 \text{ m}, 4.5 \text{ m})$ .

§ 67—68. 23. Dowolny trójkąt zamienić na trójkąt prostokątny o tej samej podstawie i wysokości. Wykreślając w połowie wysokości linię równoległą do podstawy rozłożyć następnie każdy z trójkątów na 4 lub 5 części parami przystających. *Wskazówka:* jeżeli trójkąty mają wspólną podstawę, to dwa boki przecinają się albo nad linią równoległą albo pod nią; w pierwszym przypadku trzeba jeszcze tylko górne trójkąty rozłożyć każdy na dwie części, w drugim trzeba dolną część rozłożyć na 3 a górną na 2 części.

24. Zamienić trójkąt na inny o dłuższej podstawie ale o równym polu. Wykonać rozkład na części parami przystające (por. zad. 23).

25. Ile wynosi wysokość trójkąta, którego podstawa wynosi  $3 \text{ dm}$ , a pole  $39 \text{ dm}^2$ ?

26. Dowolny wielokąt nieumiarowy zamienić na kwadrat rysunkiem.

27. Podzielić dowolny trójkąt na trzy równe części liniami, wychodzącymi z jednego wierzchołka.

28. Wykazać, że linie, łączące środek ciężkości trójkąta z jego wierzchołkami, dzielą trójkąt na trzy równe części.

29. Dowolny równoległobok podzielić na siedm równych części zapomocą linii, wychodzących z jednego wierzchołka.

30. Dowolny trójkąt podzielić na dwie równe części zapomocą linii równoległej do podstawy (metodą analizy algebraicznej).

§ 69. 31. Ile razy powiększy się pole jakiegokolwiek wielokąta, jeżeli zmienimy go na figurę podobną o trzy razy większym obwodzie?

32. Jak się przedstawi  $1 \text{ km}^2$  na mapie narysowanej w podziałce  $1:25.000$ ?

33. Jak wielki obszar można zmieścić na mapie kwadratowej o boku  $3 \text{ dm}$ , jeżeli używamy podziałki  $1:200.000$ ?

§ 70—71. 34. Mając dane dwa różne kwadraty, wykreślić trzeci kwadrat, mający pole takie, jak obydwa dane kwadraty razem.

35. To samo zadanie wykonać dla: a) trójkątów równobocznych, b) sześciokątów umiarowych, c) kół, d) dowolnych wielokątów nieumiarowych, ale podobnych do siebie.

36. Wykazać, że trójkąt o bokach 3, 4, 5 jest prostokątny. Egipcjanie używali takiego trójkąta do wytyczania kąta prostego. Używali sznura zamkniętego, opatrzonego 12 guzami w równych odstępach. Zginając go w punkcie trzecim i siódmym otrzymywali trójkąt prostokątny.

37. Obliczyć: a) przeciwprostokątnie trójkąta prostokątnego, znając obydwie przyprostokątne:  $a = 12$ ,  $b = 15 \text{ cm}$ , b) pole trójkąta prostokątnego, znając przeciwprostokątnie  $c = 4 \text{ dm}$   $41 \text{ mm}$  i jedną przyprostokątnie  $3 \text{ dm}$   $15 \text{ mm}$ .

38. Obliczyć pole kwadratu, znając jego przekątnie  $d = 21 \text{ cm}$ .

39. Egipcjanie obliczali pole trójkąta równoramiennego, mnożąc podstawę przez połowę boku. Jaki błąd popełniali przytem? N. p. podstawa  $a = 8 \text{ cm}$ , bok  $b = 36 \text{ cm}$ .

40. Obliczyć ramię trójkąta równoramiennego, znając podstawę i wysokość ( $a = 0.75 \text{ cm}$ ,  $w = 2.49 \text{ cm}$ ).

41. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, równoramiennego, znając przeciwprostokątnie  $d = 2 \text{ cm}$ .

42. Obliczyć odległość dwóch punktów, znając ich współrzędne:  $A (1, 4)$ ,  $B (3, 5)$ .

43. W trapezie równoramiennym znane są boki równoległe:  $a = 16.4$ ,  $b = 9.6$  i ramię  $c = 5.8$ . Obliczyć pole.

44. Obliczyć pole trójkąta równobocznego o boku  $a = 20 \text{ cm}$ .

45. Ile wynosi bok trójkąta równobocznego, którego pole wynosi  $1 \text{ m}^2$ .

46. W kole o promieniu  $8 \text{ cm}$  wykreślono cięciwę o długości  $5.4 \text{ cm}$ . Ile wynosi odległość tej cięciwy od środka?

47. Obliczyć pole rombu, znając jeden bok i przekątnie.

48. Obliczyć pole sześciokąta umiarowego, znając jeden bok.

49. Obliczyć pole trójkąta, znając jego boki:  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 17 \text{ cm}$ ,  $c = 21 \text{ cm}$ .

50. Obliczyć promień koła wpisanego w trójkąt, którego boki wynoszą  $13 \text{ cm}$ ,  $14 \text{ cm}$ ,  $15 \text{ cm}$ . (Wyrzucić pole zapomocą tego promienia!).

§ 72. 51. Obliczyć pole trójkąta równobocznego: a) wpisanego w koło o promieniu  $15 \text{ cm}$ , b) opisanego na kole o tym samym promieniu.

52. Wykazać, że pole sześciokąta umiarowego wpisanego w koło jest średnią geometryczną między polem trójkąta równobocznego wpisanego, a trójkąta opisanego na tem kole.



8. Ile wynosi bok kwadratu, mającego dwa razy tak wielkie pole, jak kwadrat o boku  $a = 10 \text{ cm}$ ?

9. Historyk grecki Tucydides podaje, że wyspa, mająca dwa razy większy obwód, ma także dwa razy większe pole. Wykazać błędność tego twierdzenia, przyjmując kwadratowy kształt wyspy.

10. Wykazać rysunkiem, że kwadrat zbudowany na przekątnej innego kwadratu ma pole dwa razy większe od pierwotnego kwadratu.

11. Jak długie musi być pole prostokątne o szerokości  $5 \text{ m}$ , aby zawierało  $1 \text{ ha}$ ?

12. Zmierzyć otwór okna prostokątnego i pole szyb i obliczyć, jaki procent światła pochłaniają ramy.

13. Jaki błąd popełniamy przy obliczeniu pola prostokąta, którego boki:  $a = 4.27 \text{ m}$ ,  $b = 3.64 \text{ m}$  zmierzono z błędem, nie przenoszącym  $\frac{1}{2} \text{ cm}$ ?

§ 64. 14. Dowolny równoległobok zamienić na równy mu prostokąt.

15. Dowolny równoległobok zamienić na romb o równym polu i rozłożyć obie figury na części parami przystające.

16. Obliczyć pole rombu, znając jego przekątne  $d_1 = 20 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 30 \text{ cm}$ . Wyprowadzić ogólny wzór!

17. Wykonać kwadraturę dowolnego równoległoboku geometrycznie i algebraicznie.

§ 65–66. 18. Wykazać, że dwie przekątne dzielą równoległobok na cztery równe trójkąty.

19. Wyprowadzić wzór na pole trapezu, dzieląc go przekątnią na dwa trójkąty.

20. Dowolny trójkąt zamienić na trójkąt równoramienny o równej podstawie i równej wysokości.

21. W trójkącie dwa boki pozostają niezmienione, a kąt między nimi zmieniamy. Jak się zmienia pole trójkąta? Kiedy ma największą wartość?

22. Obliczyć pole wielokątne, znając współrzędne wierzchołków:  $A (1 \text{ m}, 3 \text{ m})$   $B (1\frac{1}{2} \text{ m}, 1 \text{ m})$   $C (2 \text{ m}, 2 \text{ m})$   $D (4 \text{ m}, 1 \text{ m})$   $E (5 \text{ m}, 4 \text{ m})$   $F (3\frac{1}{2} \text{ m}, 5 \text{ m})$   $G (1.8 \text{ m}, 4.5 \text{ m})$ .

§ 67–68. 23. Dowolny trójkąt zamienić na trójkąt prostokątny o tej samej podstawie i wysokości. Wykreślając w połowie wysokości linię równoległą do podstawy rozłożyć następnie każdy z trójkątów na 4 lub 5 części parami przystających. *Wskazówka:* jeżeli trójkąty mają wspólną podstawę, to dwa boki przecinają się albo nad linią równoległą albo pod nią; w pierwszym przypadku trzeba jeszcze tylko górne trójkąty rozłożyć każdy na dwie części, w drugim trzeba dolną część rozłożyć na 3 a górną na 2 części.

24. Zamienić trójkąt na inny o dłuższej podstawie ale o równym polu. Wykonać rozkład na części parami przystające (por. zad. 23).

25. Ile wynosi wysokość trójkąta, którego podstawa wynosi  $3 \text{ dm}$ , a pole  $39 \text{ dm}^2$ ?

26. Dowolny wielokąt nieumiaryowy zamienić na kwadrat rysunkiem.

27. Podzielić dowolny trójkąt na trzy równe części liniami, wychodzącymi z jednego wierzchołka.

28. Wykazać, że linie, łączące środek ciężkości trójkąta z jego wierzchołkami, dzielą trójkąt na trzy równe części.

29. Dowolny równoległobok podzielić na siedm równych części zapomocą linii, wychodzących z jednego wierzchołka.

30. Dowolny trójkąt podzielić na dwie równe części zapomocą linii równoległej do podstawy (metodą analizy algebraicznej).

§ 69. 31. Ile razy powiększy się pole jakiegokolwiek wielokąta, jeżeli zmienimy go na figurę podobną o trzy razy większym obwodzie?

32. Jak się przedstawi  $1 \text{ km}^2$  na mapie narysowanej w podziałce  $1:25.000$ ?

33. Jak wielki obszar można zmieścić na mapie kwadratowej o boku  $3 \text{ dm}$ , jeżeli używamy podziałki  $1:200.000$ ?

§ 70–71. 34. Mając dane dwa różne kwadraty, wykreślić trzeci kwadrat, mający pole takie, jak obydwa dane kwadraty razem.

35. To samo zadanie wykonać dla: a) trójkątów równobocznych, b) sześciokątów umiaryowych, c) kół, d) dowolnych wielokątów nieumiaryowych, ale podobnych do siebie.

36. Wykazać, że trójkąt o bokach 3, 4, 5 jest prostokątny. Egipcjanie używali takiego trójkąta do wytyczania kąta prostego. Używali sznura zamkniętego, opatrzonego 12 guzami w równych odstępach. Zginając go w punkcie trzecim i siódmym otrzymywali trójkąt prostokątny.

37. Obliczyć: a) przeciwprostokątnie:  $a = 12$ ,  $b = 15 \text{ cm}$ , b) pole trójkąta prostokątnego, znając przeciwprostokątnie  $c = 4 \text{ dm}$   $41 \text{ mm}$  i jedną przyprostokątnie  $3 \text{ dm}$   $15 \text{ mm}$ .

38. Obliczyć pole kwadratu, znając jego przekątnie  $d = 21 \text{ cm}$ .

39. Egipcjanie obliczali pole trójkąta równoramiennego, mnożąc podstawę przez połowę boku. Jaki błąd popełniali przytem? N. p. podstawa  $a = 8 \text{ cm}$ , bok  $b = 36 \text{ cm}$ .

40. Obliczyć ramię trójkąta równoramiennego, znając podstawę i wysokość ( $a = 0.75 \text{ cm}$ ,  $w = 2.49 \text{ cm}$ ).

41. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, równoramiennego, znając przeciwprostokątnie  $d = 2 \text{ cm}$ .

42. Obliczyć odległość dwóch punktów, znając ich współrzędne:  $A (1, 4)$ ,  $B (3, 5)$ .

43. W trapezie równoramiennym znane są boki równoległe:  $a = 16.4$ ,  $b = 9.6$  i ramię  $c = 5.8$ . Obliczyć pole.

44. Obliczyć pole trójkąta równobocznego o boku  $a = 20 \text{ cm}$ .

45. Ile wynosi bok trójkąta równobocznego, którego pole wynosi  $1 \text{ m}^2$ .

46. W kole o promieniu  $8 \text{ cm}$  wykreślono cięciwę o długości  $5.4 \text{ cm}$ . Ile wynosi odległość tej cięciwy od środka?

47. Obliczyć pole rombu, znając jeden bok i przekątnie.

48. Obliczyć pole sześciokąta umiaryowego, znając jeden bok.

49. Obliczyć pole trójkąta, znając jego boki:  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 17 \text{ cm}$ ,  $c = 21 \text{ cm}$ .

50. Obliczyć promień koła wpisanego w trójkąt, którego boki wynoszą  $13 \text{ cm}$ ,  $14 \text{ cm}$ ,  $15 \text{ cm}$ . (Wyrzucić pole zapomocą tego promienia!).

§ 72. 51. Obliczyć pole trójkąta równobocznego: a) wpisanego w koło o promieniu  $15 \text{ cm}$ , b) opisanego na kole o tym samym promieniu.

52. Wykazać, że pole sześciokąta umiaryowego wpisanego w koło jest średnią geometryczną między polem trójkąta równobocznego wpisanego, a trójkąta opisanego na tem kole.



130

53. Obliczyć pole kwadratu wpisanego w koło o promieniu  $r = 48 \text{ cm}$  i kwadratu opisanego na tym kole. Zbadać stosunek obydwu pól.

54. Wykonać takie samo obliczenie, jak w zadaniu poprzednim, dla sześciokąta umiarnego.

55. Obliczyć pole ośmiokąta umiarnego, wpisanego w koło o promieniu  $r = 18 \text{ mm}$ .

56. Obliczyć pole ośmiokąta umiarnego, znając jego bok.

57. Wyprowadzić wzór, podający związek boku szesnastokąta umiarnego z promieniem koła wpisanego.

58. To samo zadanie wykonać dla 24-kąta umiarnego.

59. Obliczyć pole dziesięciokąta umiarnego wpisanego w koło o promieniu  $r = 2,8 \text{ dm}$ .

60. Jaki jest wykładnik stosunku odcinków podziału złotego?

61. Obliczyć pole pięciokąta umiarnego, znając promień koła opisanego  $r = 0,12 \text{ cm}$ .

**§ 73–74.** 62. Obliczyć obwód koła, którego promień wynosi  $2,25 \text{ dm}$ .

63. Obwód pnia okrągłego wynosi  $2,5 \text{ m}$ ; jaka jest średnica przekroju?

64. Wiedząc, że obwód ziemi wynosi  $40.000 \text{ km}$ , obliczyć promień ziemi.

65. Ile razy obróci się koło (o promieniu  $1,2 \text{ m}$ ) lokomotywy na drodze ze Lwowa do Krakowa ( $342 \text{ km}$ ?).

66. Średnicę półkola przepołowić i na każdej połowie zakreslić nowe półkole do wnętrza; wykazać, że obwód większego półkola równa się sumie obwodów obydwu mniejszych. Przeprowadzić podobną konstrukcję w mniejszych półkolech, potem w dalszych i t. d. i porównać sumę ich długości z pierwotnym półkolem.

67. Wykazać, że jeżeli obwody dwóch kół współśrodkowych różnią się o  $1 \text{ dm}$ , to ich odstęp będzie jednakowy bez względu na wielkość tych kół (n. p. obwód pomarańczy a obwód ziemi).

68. Podzielić obwód koła na 12 równych części i oznaczyć miejsca, w których te punkty podziału zetkną się ze styczną przy toczeniu się koła po tej stycznej.

69. Na podstawie poprzedniego zadania narysować 12 punktów drogi, jaką przebiega dowolny stały punkt obwodu koła, toczonego się po stycznej. Tę drogę nazywamy cykloidą.

70. Obliczyć łuk koła o promieniu  $r = 9 \text{ cm}$ , należący do kąta środkowego: a)  $50^\circ$ , b)  $42^\circ 15'$ , c)  $138^\circ 20'$ .

71. Ile wynosi w mierze łukowej kąt:  $10^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $2^\circ$ ,  $38^\circ 20' 1'$ ,  $1''$ ?

72. Do jakiego kąta środkowego należy łuk równy promieniowi? Ile wynosi w mierze stopniowej kąt, który w mierze łukowej  $= 1$ ?

73. Obliczyć pole koła o promieniu  $2 \text{ dm}$   $3 \text{ cm}$   $5 \text{ mm}$ .

74. Jeżeli przy mierzeniu promienia koła o średnicy bliskiej  $1 \text{ dm}$  popełnimy błąd mniejszy od  $0,2 \text{ mm}$ , jaki błąd popełnimy przy obliczaniu pola koła? Ile miejsc z ludolfiny wystarczy wtedy zatrzymać przy obliczaniu pola?

75. Wykonać rachunkiem i przybliżonym rysunkiem kwadraturę koła o promieniu  $r = 2 \text{ cm}$ .

76. Jak wielki jest promień koła, pokrywającego powierzchnię  $1 \text{ km}^2$ ?

77. Ile razy powiększy się pole koła, jeżeli promień wzrośnie pięć razy? (Porównaj zadanie 8).

78. Jakie pole ma koło, którego obwód wynosi  $48 \text{ cm}$ ? Porównaj to pole z polem kwadratu, sześciokąta umiarnego, ośmiokąta umiarnego i t. d. o tym samym obwodzie! Jaki stąd wniosek? (Problem Didony: danym obwodem otoczyć możliwie największe pole).

79. Z kwadratu o boku  $56 \text{ cm}$  wycięto 49 kół równych (o promieniu  $4 \text{ cm}$ ); obliczyć pozostałe pole.

80. Na bokach trójkąta prostokątnego wykreślono półkole dwa mniejsze na zewnątrz, większe od wnętrza. Wykazać, że pole dwu takich księżyców równa się polu trójkąta, nie zawiera więc liczby  $\pi$ . — Są to t. zw. księżyce Hipokratesa.

81. Obliczyć wycinek koła o promieniu  $r = 3,8 \text{ cm}$ , należący do kąta środkowego: a)  $40^\circ$ , b)  $22^\circ 30'$ , c)  $250^\circ$ .

82. Przedstawić zapomocą wycinków tego samego koła liczby ludności w poszczególnych krajach Europy.  $1 \text{ cm}^2$  niech reprezentuje 5 milionów ludności. (Uwaga: kąty środkowe mają pozostawać do siebie w takim stosunku, jak liczby ludności).

83. Z koła o promieniu  $2 \text{ dm}$  wycięto wycinek o polu  $1 \text{ dm}^2$ ; jaki łuk i jaki kąt środkowy należą do tego wycinka?

84. Obliczyć pole odcinka, należącego do kąta środkowego: a)  $90^\circ$ , b)  $60^\circ$ , c)  $72^\circ$ , znając promień koła  $r = 18 \text{ cm}$ .

85. Wykazać, że pole pierścienia kołowego równa się polu koła, którego promieniem jest odcinek stycznej do koła wewnętrznego, zawarty między punktem styczności a kołem większym.

86. W jakim odstępzie od danego koła należy poprowadzić drugie koło współśrodkowe, aby pole pierścienia równało się polu koła wewnętrznego?

87. Podzielić pole koła na trzy równe części zapomocą kół współśrodkowych.

88. Obliczyć pole wycinka pierścienia kołowego, znając  $r = 22 \text{ cm}$ ,  $r_1 = 32 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 15^\circ$ .

89. Albrecht Dürer (znakomity malarz niemiecki z XVI wieku) podaje kwadraturę koła, biorąc  $\frac{5}{4}$  średnicy za przekątną kwadratu równego kołu. Jaki błąd popełnia się przytem (n. p.  $r = 10 \text{ cm}$ ).

90. Jak długą musiałaby być większa wskazówka zegarka, aby jej koniec zakreślał  $1 \text{ m}$  na sekundę? Ile  $\text{mm}$  w jednej sekundzie zakreśla wskazówka  $2 \text{ cm}$  długa?

91. Wykazać, że prostokąt zbudowany z dwóch boków trójkąta jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z wysokości, poprowadzonej do trzeciego boku i ze średnicy koła opisanego. Wskazówka: z wierzchołka, z którego wykreślono wysokość, wykreślić średnicę i koniec jej połączyć z jednym z wierzchołków podstawy.

92. Na podstawie poprzedniego zadania wykazać, że promień koła opisanego  $r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4p}$ , gdzie  $a$ ,  $b$ ,  $c$  są bokami a  $p$  polem trójkąta.

93. Jeżeli  $u_n$  i  $U_n$  są obwodami wielokątów umiarnych o  $n$  bokach, z których pierwszy jest wpisany w koło a drugi opisany,

to  $U_{2n} = \frac{2U_n u_n}{U_n + u_n}$ ,  $u_{2n} = \sqrt{u_n U_{2n}}$ . Udowodnij!



94. Wykazać, że dla pól wielokątów umiarowych,  $p_n$  i  $P_n$ , z których pierwszy jest wpisany w koło, a drugi opisany, zachodzą związki:

$$P_{2n} = \frac{2P_n p_{2n}}{P_n + p_{2n}} \text{ i } p_{2n} = \sqrt{p_n \cdot P_n}.$$

95. Wykazać, że dla wielokątów umiarowych o równym obwodzie:

$$\rho_{2n} = \frac{\rho_n + r_n}{2} \text{ i } r_{2n} = \sqrt{r_n \rho_{2n}}$$

gdzie  $\rho$  są promieniami kół wpisanych, a  $r$  opisanych.

96. Obliczyć pole trójkąta krzywolinowego, zamkniętego trzema łukami: a) wklęsłymi trzech równych kół stykających się zewnętrznio; b) wypukłymi trzech równych kół stykających się zewnętrznio (figura podobna do listka koniczyny).

97. Na bokach kwadratu o boku  $a = 6 \text{ cm}$  zakresłono do wnętrza 4 półkola o średnicy równej bokowi. Obliczyć pole rozety, powstałej przez przecięcia się tych półkol. *Wskazówka:* rozeta składa się z 8 odcinków koła, należących do kąta środkowego  $90^\circ$ .

## Część II

# Stereometria

## Rozdział I

### Zasadnicze utwory stereometryczne

#### § 75. Pewniki stereometryczne i najprostsze z nich wnioski.

Dotychczas zajmowaliśmy się tylko utworami geometrycznymi, leżącymi na jednej płaszczyźnie: t. j. obracaliśmy się w sferze dwóch wymiarów. Badając własności tych utworów nie posługiwaliśmy się przestrzenią trójwymiarową — z wyjątkiem badania związku figur symetrycznych (por. str. 51) — nie posługiwaliśmy się nigdy kilkoma płaszczyznami. Jednak geometria ma być nauką o postaci wyidealizowanych przedmiotów świata zewnętrznego, które są przecież trójwymiarowe; porzucimy więc obecnie ciaśniejszy zakres utworów dwuwymiarowych i będziemy badali *utwory przestrzenne trójwymiarowe*, używając naturalnie wiadomości, nabyte w planimetrii. Co więcej: także głębsze zrozumienie planimetrii wymaga pewnych wiadomości ze stereometrii, ponieważ utwory planimetryczne są tylko przekrojami utworów stereometrycznych.

Stereometria, jako rozszerzenie planimetrii, opiera się na tych samych pewnikach, co i planimetria, a oprócz tego przybywają nowe pewniki, służące do odróżnienia płaszczyzn od wszelkich innych możliwych powierzchni (krzywych).

Pewniki te, podobnie jak i planimetryczne, są twierdzeniami wziętymi z zewnętrznego doświadczenia i wyidealizowanymi. Co w świecie zewnętrznym spostrzegamy w przybliżeniu, niedoskonale, to ujmujemy w twierdzenia ścisłe i umawiamy się, że będziemy te własności przypisywali naszym idealnym utworom geometrycznym dokładnie.

Widzieliśmy w planimetrii, że do wyznaczenia linii prostej wystarczą dwa punkty. Do wyznaczenia płaszczyzny dwa punkty nie wystarczają: spostrzegamy to na dowolnym przedmiocie grania-



stym, np. na jakimkolwiek kryształe lub na belce prostokątnej. Zwracając uwagę na dwa punkty którejkolwiek krawędzi takiej bryły, widzimy, że przez te punkty przechodzą dwie różne ściany płaskie tej bryły a moglibyśmy poprowadzić dowolnie wiele innych płaszczyzn, zawierających te same dwa punkty. Wszystkie te płaszczyzny mają nietylko te dwa punkty wspólne, ale całą prostą, łączącą te punkty. Widzimy więc, że przez jedną linię prostą przechodzi nieskończenie wiele płaszczyzn. Jeżeli jednak poza tą linią prostą oberzemy jeszcze jeden punkt, to między temi wszystkimi płaszczyznami istnieje tylko jedna płaszczyzna, zawierająca tę prostą i ten trzeci punkt.

Np. brama przytwierdzona w dwóch punktach w zawiasach może przyjmować jeszcze bardzo wiele rozmaitych położeń w przestrzeni; jeżeli jednak ma dotykać jeszcze trzeciego punktu, nie leżącego na osi obrotu, to położenie jej jest już przez to zupełnie dokładnie określone. Tę własność powierzchni płaskich niedokładnych, spotykanych w świecie otaczającym nas, przypisujemy także idealnym płaszczyznom geometrycznym i wypowiadamy ją w formie następującego pewnika:

**I<sub>4</sub>. Przez trzy punkty, nie leżące na jednej linii prostej, przechodzi (jest wyznaczona) tylko jedna płaszczyzna.**

Bez względu na to, czy trzy punkty leżą blisko, czy dalej, otrzymujemy zawsze tylko jedną płaszczyznę. (W geometrii praktycznej trzy punkty nadto bliskie nie wyznaczają płaszczyzny, podobnie jak dwa punkty bliskie nie wyznaczają prostej w geometrii praktycznej. (Por. § 5, str. 15).

*Uwaga:* jeżeli mamy płaszczyznę wyznaczoną jakimiś trzema punktami, a oberzemy na tej płaszczyźnie dowolne trzy inne punkty nie leżące na jednej prostej, to one znów wyznaczają płaszczyznę ale tę samą — co zastrzegamy osobnym pewnikiem I<sub>5</sub> (por. § 2).

Własność ta, jakkolwiek jest niezmiernie ważna przy wszelkich dowodzeniach i konstrukcjach stereometrycznych, nie daje nam jednak jeszcze wyobrażenia o postaci płaszczyzny, ani też nie daje sposobu odróżnienia płaszczyzny od innych powierzchni (krzywych). Taką charakterystyczną własność uzyskamy, badając stosunek linii prostej do płaszczyzny.

Jeżeli prostą krawędź linealu przyłożymy do powierzchni płaskiej dwoma punktami w dowolnym miejscu i w dowolnym kierunku, to ona styka się z powierzchnią we wszystkich innych punktach. Żadna inna powierzchnia oprócz płaszczyzny nie ma tej własności.

(Na tem polega próba stolarska, czy żądana powierzchnia płaska jest dostatecznie wyrównana).

Wyrazem tego spostrzeżenia z geometrii praktycznej jest następujący pewnik, odnoszący się do idealnej płaszczyzny:

**I<sub>6</sub>. Prosta, mająca z płaszczyzną dwa punkty wspólne, ma z nią wszystkie punkty wspólne (czyli leży cała na tej płaszczyźnie).**

Należy jednak zauważyć, że linia prosta może w nieskończenie wielu położeniach przylegać całkowicie do powierzchni a mimoto powierzchnia nie jest płaską, n. p. walec. Właściwością płaszczyzny jest to, że prosta przylega do niej w każdym miejscu i w każdym kierunku, czego nie widzimy ani na walcu, ani na stożku, ani na żadnej innej powierzchni. Są nawet takie powierzchnie krzywe, na których dadzą się w każdym punkcie wykreślić dwie linie proste w różnych kierunkach, przylegające zupełnie (por. § 115, fig. 322).

Z tych dwóch pewników wyprowadza się od razu kilka ważnych wniosków.

Ponieważ do wyznaczenia płaszczyzny wystarczą trzy punkty, nie leżące na jednej linii prostej, to tembardziej wystarczy jedna linia prosta i punkt, poza nią leżący (trzeba tylko dwa z punktów wyznaczających połączyć linią prostą, to ona cała musi leżeć na żądanej płaszczyźnie). W konstrukcjach geometrycznych często robimy z tego użytek (n. p. wykreślenie płaszczyzny, przechodzącej przez wierzchołek stożka i przez średnicę podstawy!)

Tak samo łatwo wywnioskować, że przez dwie proste przecinające się lub przez dwie proste równoległe jest wyznaczona jedna płaszczyzna.

Twierdzenie to ma wielkie zastosowanie w praktyce (n. p. przy pokrywaniu płaskich dachów przesuwamy płaszczyznę przez krokwie równoległe lub przecinające się).

Opierając się na tem i na pewniku I<sub>6</sub>, możemy utworzyć płaszczyznę ruchem linii prostej a mianowicie, jeżeli prosta posuwa się po ramionach kąta lub po dwóch liniach równoległych tak, aby zawsze przecinała obydwie proste, to zakreśliła płaszczyznę.

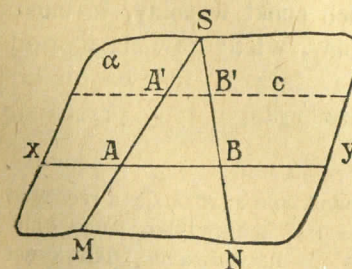


Fig. 198.

*Dowód:* wykreśliśmy płaszczyznę  $\alpha$ , (fig. 198) wyznaczoną przez proste SM i SN. Prosta XY, mająca z nią dwa punkty A i B wspólne, musi cała leżeć na tej płaszczyźnie (według pewnika I<sub>6</sub>). Tak samo w każdym innym położeniu. Jakikolwiek punkt C płaszczyzny  $\alpha$  wybierzemy, znajdzie się



zawsze takie położenie prostej  $XY$ , równoległe do pierwotnego położenia, w którym ona przechodzi przez ten punkt. Ruchem prostej  $XY$  po prostych  $SM$  i  $SN$  możemy więc otrzymać wszystkie punkty płaszczyzny  $\alpha$ .

(Jakim jeszcze ruchem linii prostej można otrzymać płaszczyznę?)

Każdą powierzchnię, powstającą przez ruch linii prostej, nazywamy **powierzchnią prostolinjową**. (Później poznamy także krzywe powierzchnie prostolinjowe, n. p. powierzchnia walca lub stożka). Prosta  $XY$ , zakreślająca swym ruchem płaszczyznę, nazywa się **tworzącą** a **utwór**, po którym ta prosta się ślizga, nazywamy **kierownicą** powierzchni. Wykazaliśmy więc, że **płaszczyzna jest powierzchnią prostolinjową**. Każda powierzchnia prostolinjowa musi być nieograniczona, ponieważ zawiera całą linię prostą — w rozmaitych położeniach — a już sama linia prosta jest nieograniczona. We wszystkich rozumowaniach będziemy więc pojmowali płaszczyznę jako powierzchnię nieograniczoną, na rysunku jednak przedstawiamy zawsze tylko skończony kawałek płaszczyzny.

Pewniki  $I_4$   $I_6$  podają związek punktów z płaszczyzną i linii prostych z płaszczyzną. Brak nam jeszcze punktu wyjścia dla badania położenia płaszczyzny względem płaszczyzny.

*Uwaga:* osobnym pewnikiem  $I_8$  żądamy, aby prócz jednej płaszczyzny istniały jeszcze jakieś inne punkty w przestrzeni — w przeciwnym razie mielibyśmy bowiem ciągle do czynienia tylko z planimetrią. Wystarczy w tym celu stwierdzić, że w naszej geometrii istnieją przynajmniej cztery punkty nie leżące na jednej linii prostej (por. § 2. pewnik  $I_8$ ).

Tu znowu oprzemy się na pewnych prostych spostrzeżeniach. Przypatrując się ścianom izby szkolnej lub deski prostokątnej widzimy, że dwie dotykające się ściany mają zawsze cały odcinek linii prostej wspólny. To samo możemy zauważyć na każdym kryształ, jeżeli tylko jego ściany odpowiednio przedłużymy. Wogóle dwie płaszczyzny przecinające się mają zawsze wspólną linię prostą. Stąd tworzymy **pewnik**:

**$I_7$ . Jeżeli dwie płaszczyzny mają jeden punkt wspólny, to muszą mieć przynajmniej jeszcze jeden punkt wspólny, wtedy bowiem na podstawie pewnika  $I_6$  mają całą linię prostą, łączącą te dwa punkty, wspólną. Linię prostą, wzdłuż której się dwie płaszczyzny przecinają, nazywamy **krawędzią** tych płaszczyzn.**

*Uwaga:* mogłoby się zdawać, że ten pewnik nie zgadza się z rzeczywistością. N. p. na fig. 199 dwie płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  mają tylko jeden punkt wspólny. Jednakowoż trzeba pamiętać, że są tu narysowane tylko części płaszczyzn a pewnik odnosi się do nieograniczonej płaszczyzny. Gdybyśmy płaszczyznę  $\beta$  odpowiednio rozszerzyli, otrzymalibyśmy krawędź przecięcia się.

Dwie płaszczyzny przecinające się tworzą figurę, odpowiadającą kątowi w planimetrii, zwaną **kątem dwuściennym**.

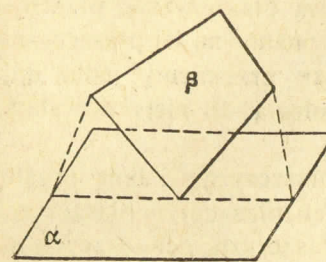


Fig. 199.

Nazwa pochodzi stąd, że płaszczyzny nazywamy także ścianami. W planimetrii każdy kąt posiada dwa ramiona i wierzchołek. Tutaj odpowiadają ramionom dwie ściany kąta  $\alpha$  i  $\beta$  a wierzchołkowi krawędź  $AB$  (fig. 200). Literami oznacza się kąt dwuścienny zwykle:

$$\sphericalangle (\alpha \beta)$$

lub rzadziej:  $\sphericalangle C(AB)E$ , t. j. tak, aby litery, oznaczające krawędź, były w środku. Kąt płaski jest tylko przekrojem kąta dwuściennego.

*Uwaga:* dla wyrazistości rysujemy linie zasłonięte kropkowane lub cieńszą kreską, jeżeli sobie ściany wyobrażamy przezroczyste lub opuszczamy je zupełnie, jeżeli sobie ściany wyobrażamy z materiału nieprzezroczystego.

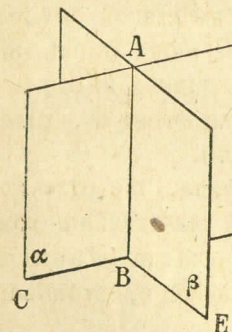


Fig. 200.

Na tej figurze łatwo spostrzec, że dwie linie proste prostopadłe do tej samej trzeciej w przestrzeni nie muszą być równoległe, owszem mogą się przecinać, jak n. p. proste  $CB$  i  $EB$ , prostopadłe do  $AB$  na fig. 200. Wtedy jednak leżą one na dwóch różnych płaszczyznach, zawierających prostą  $AB$ . Widać stąd, że niektóre twierdzenia planimetrii nie dadzą się przenieść do stereometrii bez żadnych zastrzeżeń. Toteż spotykamy się w stereometrii nieraz z dowodzeniem twierdzeń, poznanych już w planimetrii.

Jest to ogólne prawo logiki, że twierdzenia, odnoszące się do ciaśniejszego zakresu pojęć, mogą ulec zmianie, jeżeli je chcemy przenieść do obszerniejszego zakresu i dlatego wymagają zawsze osobnego sprawdzenia.

Opierając się na pewnikach stereometrycznych i na pewniku  $II_4$  z planimetrii (por. § 2.) można wykazać, że płaszczyzna dzieli przestrzeń na dwie części takie, że nie można się dostać z jednej do drugiej nie przekraczając tej płaszczyzny. Mówimy, że punkty obu tych części leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny.

## § 76. Pęk płaszczyzn i pęk przestrzenny.

Podobnie jak w planimetrii mieliśmy do czynienia z pękami prostych, tak w stereometrii ważnym utworem jest **pęk płaszczyzn**.



Jest to zbiór płaszczyzn, przecinających się wzdłuż jednej linii prostej, czyli wychodzących z jednej prostej. Tę prostą nazywamy osią pęku. Jeżeli taki pęk przetniemy jakąkolwiek płaszczyzną, przecinającą krawędź tylko w jednym punkcie, otrzymamy na tej płaszczyźnie pęk promieni. Jeżeli zaś pęk płaszczyzn przetniemy jedną linią prostą, nie trafiającą krawędzi i nierównoległą do niej, powstanie na tej prostej szereg punktów.

Wykreśl pęk płaszczyzn, przecięty płaszczyzną i linią prostą! Jaki utwór otrzymamy, jeżeli przetniemy pęk płaszczyzn płaszczyzną równoległą do osi? Zbiór wszystkich płaszczyzn, schodzących się w jednej krawędzi, wypełnia całą przestrzeń.

Utworem geometrycznym ogólniejszym od pęku płaszczyzn, obszerniejszym, jest zbiór linii prostych i płaszczyzn, przecinających się w jednym punkcie, zwany pękiem przestrzennym. Punkt ten nazywa się wierzchołkiem pęku.

Pęk przestrzenny złożony z wszystkich linii, przechodzących przez jeden punkt, można nazwać zarówno przestrzennym pękiem prostych, jak i przestrzennym pękiem płaszczyzn. Zawiera on bowiem nie tylko wszystkie linie proste, przechodzące przez jeden punkt, ale także każdą płaszczyznę, przechodzącą przez ten punkt: każdą bowiem płaszczyznę można zbudować z samych linii prostych, przechodzących przez jeden punkt (płaski pęk promieni).

Jeżeli pęk przestrzenny przetniemy płaszczyzną, nie przechodzącą przez wierzchołek pęku, otrzymamy na tej płaszczyźnie rozrzucony zbiór punktów i prostych, zwany systemem płaskim. Jeżeli wierzchołek pęku oddala się od systemu płaskiego, promienie dążą do położenia równoległego.

Mówimy, że ten system płaski jest rzucany przez pęk przestrzenny na daną płaszczyznę. Dwa pęki przestrzenne, rzucające ten sam system płaski, nazywają się perspektywiczne a także dwa systemy płaskie nazywają się perspektywiczne, jeżeli są rzucone przez ten sam pęk przestrzenny. Podobne nazwy stosują się i do innych utworów, n. p. pęk płaszczyzn „rzuca” pęk promieni i t. p.

Pęki te mają ważne zastosowanie w rysunku perspektywnym, którym się zajmujemy w jednym z dalszych rozdziałów. Także w optyce, w akustyce i innych działach fizyki rozważa się pęki promieni i utwory przez nie rzucone.

### Ćwiczenia I

§ 75. 1. Trzy punkty wyznaczają jedną płaszczyznę; wykazać, że wzajemnie trzy płaszczyzny wyznaczają jeden punkt. Czy zawsze?

2. Wykazać przy pomocy pewników, że dwie przecinające się proste wyznaczają jedną płaszczyznę.

3. Przez ruch postępowy prostej nie w kierunku jej długości powstaje zawsze płaszczyzna; czy przez ruch obrotowy prostej około osi może powstać płaszczyzna? jakie inne figury mogą powstać?

4. Dwa punkty wyznaczają linię prostą; co wyznaczają dwie płaszczyzny?

§ 76. 5. Mając podany na dowolnej płaszczyźnie pęk promieni i punkt  $S$  nad płaszczyzną, wykreślić pęk płaszczyzn, rzucający te promienie a którego oś przechodzi przez  $S$ .

6. Mając podany szereg punktów i punkt  $T$  poza tą prostą leżący, wykreślić pęk płaszczyzn, rzucający te punkty a którego oś przechodzi przez punkt  $T$ . Narysować oś tego pęku!

7. Mając podany pęk płaszczyzn, przeciąć go: a) płaszczyzną, przecinającą oś w jednym punkcie, b) prostą, nie przecinającą krawędzi.

8. Mając na płaszczyźnie podany wielokąt, wykreślić jakkolwiek pęk przestrzenny, rzucający boki i wierzchołki tego wielokąta. Narysować drugi pęk perspektywiczny do pierwszego.

9. Jakkolwiek pęk przestrzenny przeciąć płaszczyzną. Co zauważymy, jeżeli odsuwamy płaszczyznę coraz dalej od wierzchołka pęku?

10. W latarni projekcyjnej wstawiono w bieg promieni płaszczyznę przeźroczystą z narysowanym kwadratem. Narysować cień, jaki powstanie: a) na płaszczyźnie równoległej do niej, b) na płaszczyźnie nachylonej.

11. Narysować pęk promieni, wychodzących od krawędzi i naroży kostki a zbiegających się w oku. Jeżeli się oko oddala, do jakiego położenia dążą promienie?

## Rozdział II

### Położenie linii prostych i płaszczyzn w przestrzeni

#### Proste i płaszczyzny równoległe

#### § 77. Dwie linie proste.

Na płaszczyźnie dwie proste, nie nakrywające się, mogą mieć względem siebie dwojakie położenie — jak to widzieliśmy w planimetrii: albo przecinają się, albo są równoległe.

Jeżeli jednak linie proste leżą na rozmaitych płaszczyznach, przybywa jeszcze trzecia możliwość. N. p. krawędzie  $a$  i  $b$  kostki przedstawionej na fig. 201 nie przecinają się w rzeczywistości, choćbyśmy je dowolnie daleko przedłużyli.

(Na rysunku te linie mają jeden punkt wspólny, albowiem rysunek jest płaski a na płaszczyźnie dwie linie proste muszą się przecinać, o ile nie są równoległe).



Równoległymi tych linii nie nazwiemy, ponieważ ich punkty są w jednych miejscach bliższe, w innych dalsze od siebie. Podobne położenie ma krawędź  $AB$  kąta dwuściennego (fig. 202) względem prostej, łączącej dowolne punkty  $C$  i  $D$  na płaszczyznach  $\alpha$  i  $\beta$ . Przykładów takich można podać bardzo wiele przy rozpatrywaniu rozmaitych brył. (Podaj przykłady z sali szkolnej!).

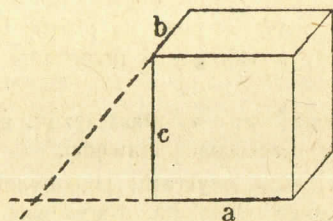


Fig. 201.

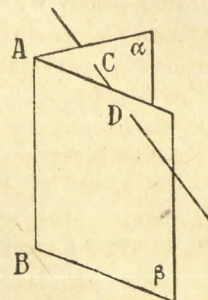


Fig. 202.

Dwie takie linie proste, które ani nie są równoległe, ani się nie przecinają, nazywamy **prostymi wchrowatymi**. Proste wchrowate nie wyznaczają płaszczyzny, niema bowiem takiej płaszczyzny, któraby zawierała te obydwie proste. Każda płaszczyzna, zawierająca jedną z nich, przecina drugą prostą tylko w jednym punkcie: n. p. płaszczyzna, zawierająca prostą  $YY'$  na fig. 203, przecina prostą  $XX'$  w jednym punkcie  $A$ .

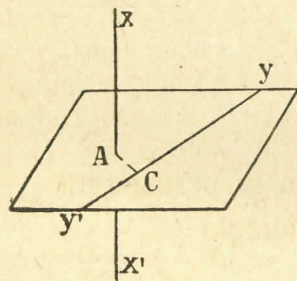


Fig. 203.

Posuwajmy się po dwóch takich liniach równocześnie od punktów  $X$  i  $Y$  ku  $X'$  i  $Y'$ , to odległość zmniejsza się coraz bardziej, ale tylko do pewnej granicy. Najbliższe są punkty  $A$  i  $C$ , stąd zaś począwszy odległość znowu wzrasta nieograniczenie. Na kostce na fig. 201 tą najkrótszą odległością jest odcinek  $c$ . Istnieje więc pewna najkrótsza odległość dwóch prostych wchrowatych, istnieją na nich miejsca najbliższe. Sposób znalezienia tej odległości poznamy później.

Proste wchrowate nie zamykają żadnego kąta. Jednakowoż ich odchylenie od położenia równoległego może być rozmaite. Tak n. p. skłonni jesteśmy powiedzieć, że linie  $b$  i  $a$  na kostce na fig. 201 są odchylone o  $90^\circ$  od położenia równoległego. Dlatego wprowadzamy nowe pojęcie: **kąta prostych wchrowatych**. Przesuwamy jedną z nich n. p.  $a$  równoległe do pierwotnego położenia

tak, aby się przecięła z drugą  $b$ , lub z dowolnego punktu prostej  $b$  prowadzimy linię  $a'$  równoległą do  $a$  (fig. 204). Wtedy powstaje kąt w zwykłym znaczeniu, kąt  $\alpha$  i ten kąt nazywamy kątem dwóch prostych wchrowatych. Jest to kąt, utworzony przez jedną z nich i przez linię równoległą do drugiej, poprowadzoną przez dowolny punkt pierwszej.

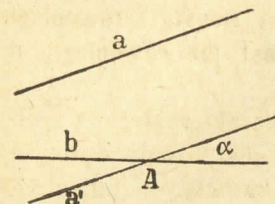


Fig. 204.

Mogłaby zachodzić wątpliwość, czy nie otrzymamy rozmaitych, różnych od siebie kątów  $\alpha$ , jeżeli poprowadzimy linie równoległe do  $a$  przez rozmaite punkty prostej  $b$ . Wykażemy jednakże w następnym ustępie ściśle, że te wszystkie kąty są równe (por. str. 169).

## § 78. Linia prosta i płaszczyzna.

Pewnik  $I_6$  poucza nas, że linia prosta, mająca z płaszczyzną dwa punkty wspólne, musi cała leżeć na tej płaszczyźnie. Jeżeli więc prosta nie leży na płaszczyźnie, to może mieć z nią tylko jeden punkt wspólny. Mówimy wtedy, że prosta przecina płaszczyznę w punkcie, który się nazywa **spodkiem** prostej.

Taka linia prosta, przecinająca płaszczyznę, może być do niej więcej lub mniej nachylona. Jak się mierzy to nachylenie, poznamy w dalszym ciągu.

Wreszcie linia prosta może nie mieć z płaszczyzną żadnego punktu wspólnego. Udowodnimy, że takie położenie jest możliwe. W tym celu na dowolnej płaszczyźnie  $\alpha$  obieramy jakąś prostą  $a$  i przez punkt  $P$ , poza nią leżący, wykreślamy linię  $b \parallel a$ , co zawsze jest możliwe według pewnika planimetrycznego V. Ta prosta  $b$  nie może przeciąć płaszczyzny  $\alpha$ . Dla dowodu prze-

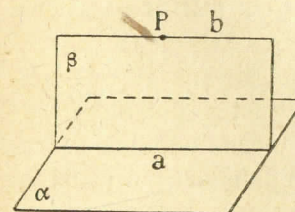


Fig. 205.

suńmy płaszczyznę  $\beta$  przez proste  $a$  i  $b$  (fig. 205). To się da wykonać, ponieważ te proste są równoległe (por. str. 161). Gdyby prosta  $b$  przecinała płaszczyznę  $\alpha$ , to chyba tylko w tych miejscach, gdzie się przecinają płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  (bo cała prosta  $b$  leży na płaszczyźnie  $\beta$ ), a więc w jakimś punkcie wspólnej krawędzi  $a$ . To jest jednakże niemożliwe, ponieważ właśnie wykreśliliśmy  $b \parallel a$ . Prosta  $b$  nie przecina więc



zupełnie płaszczyzny  $\alpha$ . Taką prostą, która nie przecina płaszczyzny, chociażbyśmy ją dowolnie przedłużali, nazywamy prostą równoległą do płaszczyzny. Przeprowadziliśmy więc dowód istnienia prostej równoległej. Każda prosta, równoległa choćby do jednej linii, leżącej na płaszczyźnie, jest już równoległa do całej płaszczyzny.

Prosta ta posiada rzeczywiście niektóre charakterystyczne cechy równoległych prostych. I tak każdy jej punkt jest równo oddalony od płaszczyzny  $\alpha$ , co udowodnimy później, mówiąc o odległości punktu od płaszczyzny. Natomiast pewnik planimetryczny, odnoszący się do dwóch prostych, nie stosuje się już do prostej i płaszczyzny. Widzieliśmy bowiem, że przez punkt poza prostą można do niej poprowadzić tylko jedną linię równoległą. Tymczasem przez punkt, leżący poza płaszczyzną, można poprowadzić bardzo wiele linii prostych, równoległych do płaszczyzny.

Twierdzenie to daje nam sposób poznania, czy prosta jest równoległa do płaszczyzny a zarazem sposób konstrukcji takiej prostej.

Nie należy sądzić, aby prosta równoległa do płaszczyzny była równoległą do wszystkich prostych, leżących na tej płaszczyźnie: jest ona względem niektórych prostych wchrowata a względem innych równoległa. Łatwo wykazać, że prosta równoległa do płaszczyzny jest tylko do tych prostych, leżących na płaszczyźnie, równoległa, które leżą z nią na tej samej drugiej płaszczyźnie. N. p. na fig. 206 prosta  $b \parallel \alpha$ , to aby znaleźć na płaszczyźnie  $\alpha$  jakąś prostą równoległą do  $b$ , prowadzimy dowolną płaszczyznę  $\beta$  przez prostą  $b$ . Krawędź  $a'$  musi być równoległa do  $b$  (dlaczego?). Taksamo krawędź  $a''$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\gamma$  jest równoległa do  $b$  i t. d. Względem innych prostych, leżących na płaszczyźnie  $\alpha$ , np. względem  $AB$  i  $AC$ , jest prosta  $b$  wchrowata.

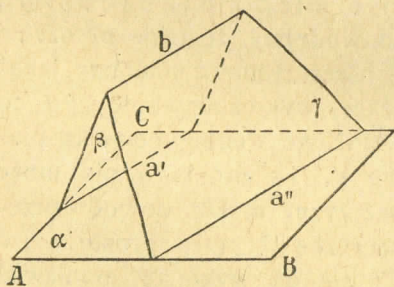


Fig. 206.

Opierając się na tych twierdzeniach o prostej równoległej do płaszczyzny, można uogólnić ważne twierdzenie z planimetrii o prostych równoległych. Widzieliśmy mianowicie, że dwie linie proste równoległe do tej samej trzeciej są także do siebie równoległe, jeżeli wszystkie trzy leżą na jednej płaszczyźnie.

Otóż opierając się na poprzednich twierdzeniach, można udowodnić (dowodem niewprost!), że:

dwie proste, równoległe do tej samej trzeciej, są i do siebie równoległe, chociażby wszystkie trzy proste nie leżały na jednej płaszczyźnie.

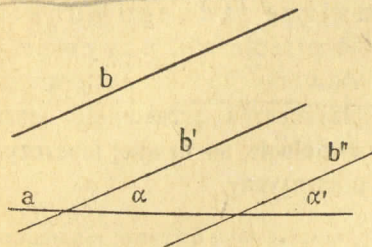


Fig. 207.

Twierdzenie to możemy zaraz zastosować do okazania, że wielkość kąta dwóch prostych wchrowatych nie zależy od tego, w którym miejscu jednej prostej poprowadzimy linię równoległą do drugiej. Jeżeli bowiem  $b' \parallel b$  i  $b'' \parallel b$ , to musi być także  $b' \parallel b''$  (fig. 207). Te dwie proste równoległe są przecięte trzecią  $\alpha$ , więc kąty odpowiednie są sobie równe:

$$\alpha = \alpha'.$$

## § 79. Dwie płaszczyzny.

Dwie płaszczyzny, mające trzy lub więcej punktów wspólnych, nie leżących na jednej linii prostej, nakrywają się zupełnie — według pewnika  $I_4$ .

Dwie płaszczyzny, mające dwa punkty wspólne, mają wspólną całą linię prostą (krawędź), łączącą te dwa punkty. Tak samo, jeżeli dwie płaszczyzny mają jeden punkt wspólny, muszą mieć już całą krawędź wspólną — według pewnika  $I_1$ .

Mogą istnieć także płaszczyzny, nie mające żadnego punktu wspólnego. Przeprowadzimy dowód istnienia takich

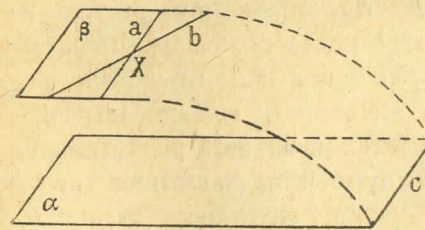


Fig. 208.

płaszczyzn (fig. 208). Przez punkt  $X$ , leżący poza płaszczyzną, poprowadzimy dwie proste  $a$  i  $b$ , równoległe do płaszczyzny  $\alpha$  (dowód istnienia takich prostych przeprowadziliśmy już w ustępie poprzednim).

Twierdzimy, że płaszczyzna przesunięta przez te dwie proste nie ma żadnego punktu wspól-

nego z płaszczyzną  $\alpha$ . Gdyby bowiem płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  przecinały się wzdłuż jakiejś krawędzi  $c$  (leżącej gdzieś daleko — na rysunku zaznaczyliśmy to przez zagięcie górnej płaszczyzny), to ponieważ  $a \parallel \alpha$ , musiałaby ta prosta  $a$  być także równoległą do  $c$ . Tak samo, ponieważ  $b \parallel \alpha$ , to  $b \parallel c$  według drugiego twierdzenia na str. 168. Przez punkt  $X$  przechodziłyby więc dwie proste  $a$  i  $b$ , leżące na tej samej płaszczyźnie i równoległe do  $c$ , a to jest niemożliwe.



A więc płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  nie mogą mieć krawędzi wspólnej, nie mogą się więc w ogóle przeciąć.

Takie dwie płaszczyzny, nie mające żadnego punktu wspólnego, (choćbyśmy je dowolnie przedłużali), nazywamy **płaszczyznami równoległymi**. Z naszego dowodu wynika następująca konstrukcja płaszczyzn równoległych: **płaszczyzna przesunięta przez dwie proste, przecinające się ze sobą a równoległe do drugiej płaszczyzny, jest sama równoległa do tej drugiej płaszczyzny**.

*Uwaga:* dwie proste równoległe do tej samej płaszczyzny nie muszą być do siebie równoległe!

Ponieważ dwie płaszczyzny równoległe nie mają żadnego punktu wspólnego, to oczywiste jest, że jeżeli je przetniemy trzecią płaszczyzną (por. fig. 209), to krawędzie, otrzymane z tego przecięcia, nie mogą mieć także nic wspólnego. Krawędzie te nie są wchrowate, bo leżą na jednej płaszczyźnie (przecinającej tamte dwie), pozostaje więc tylko jedna możliwość, że te krawędzie są równoległe.

Wniosek ten wypowiadamy w następujący sposób:

**Dwie płaszczyzny równoległe przecięte trzecią tworzą z nią krawędzie równoległe.**

Powstały tu kąty dwuścienne odpowiednie, naprzemianległe i jednostronne.

Kątami tymi zajmujemy się później.

W planimetrii musieliśmy przyjąć za pewnik, że przez punkt poza linią prostą da się do niej tylko jedna linia równoległa poprowadzić. W stereometrii możemy już udowodnić, że **przez punkt poza płaszczyzną da się poprowadzić tylko jedną płaszczyznę równoległą do niej**. Oprzemy się właśnie na poprzednim twierdzeniu.

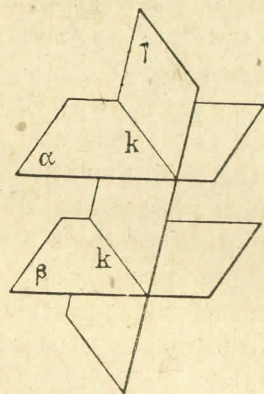


Fig. 209.

Gdyby przez punkt  $P$  (fig. 210) przechodziły dwie płaszczyzny  $\beta$  i  $\gamma$  równoległe do  $\alpha$ , to przecinając te trzy płaszczyzny czwartą  $\delta$ , przechodzącą przez  $P$  i przez dowolną prostą  $k$  na płaszczyźnie  $\alpha$ , otrzymalibyśmy na niej krawędzie  $a$  i  $a'$ .

Na podstawie twierdzenia o dwóch płaszczyznach równoległych przeciętych trzecią wnioskujemy, że  $a \parallel k$  i  $a' \parallel k$ . Przez punkt  $P$  przechodziłyby więc na płaszczyźnie  $\delta$  dwie proste równoległe do  $k$  a to jest niemożliwe. Zatem płaszczyzny  $\beta$  i  $\gamma$  muszą się nakryć, więc istnieje tylko jedna płaszczyzna równoległa do  $\alpha$ , przechodząca przez punkt  $P$ .

Stąd bezpośredni wniosek: **dwie płaszczyzny równoległe do tej samej trzeciej są do siebie równoległe**.

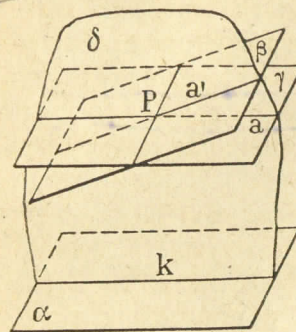


Fig. 210.

Można także teraz wykazać, że proste, poprowadzone z jakiegoś punktu równoległe do danej płaszczyzny, leżą wszystkie na jednej płaszczyźnie i to na płaszczyźnie równoległej do  $\alpha$ . (Udowodnij!).

**Dwie płaszczyzny równoległe do siebie odcinają na wszystkich prostych równoległych, przecinających je, równe kawałki.** (Udowodnij, przesuwając płaszczyznę przez każdą parę prostych równoległych!). Także odwrócenie tego twierdzenia jest prawdziwe.

W planimetrii widzieliśmy, że kąty, których ramiona są zgodnie równoległe, są równe. Twierdzenie to można przenieść także do stereometrii:

**Kąty, których ramiona są zgodnie równoległe, są równe, chociażby leżały na różnych płaszczyznach a ich płaszczyzny są równoległe.**

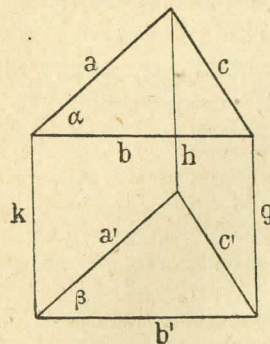


Fig. 211.

Dowód: założenie jest  $a \parallel a'$  i  $b \parallel b'$  (fig. 211). Odcinamy  $a = a'$  i  $b = b'$  i łączymy końce tych odcinków liniami  $c, c', k, h, g$ . Figura  $ka'ha$  jest równoległobokiem, ponieważ jedna para boków jest równa i równoległa. A więc  $k = h$  i  $k \parallel h$ .

Tak samo  $kb'gb$  jest równoległobokiem, więc  $k = g$  i  $k \parallel g$ . Z tych związków wynika  $h = g$  i  $h \parallel g$  a więc i figura  $hc'gc$  jest równoległobokiem.

Wobec  $c = c'$ . Z równości  $a = a', b = b', c = c'$  wynika przystawanie trójkątów  $abc = a'b'c'$  (IV). A więc:

$$\sphericalangle a = \sphericalangle \beta.$$

Aby wykazać równoległość płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ , zauważmy, że  $b \parallel b'$  a więc  $b \parallel \beta$ , tak samo  $a \parallel a'$  pociąga za sobą  $a \parallel \beta$ . Proste  $a$  i  $b$  są równoległe do płaszczyzny  $\beta$  a więc i cała płaszczyzna  $\alpha$  wyznaczona przez te proste jest równoległa do  $\beta$ :

$$\alpha \parallel \beta$$

Jeżeli więc sprawdzimy, że dwie płaszczyzny zawierają dwa kąty o ramionach parami równoległych, to te płaszczyzny są równoległe.



Łatwo wykazać, że kąty o ramionach niezgodnie równoległych spełniają się do  $180^\circ$ .

Poznanie prostych i płaszczyzn równoległych umożliwia zrozumienie ruchu postępowego utworów geometrycznych w przestrzeni. Jeżeli wszystkie punkty jakiegoś utworu geometrycznego zakreślają równe i równoległe odcinki, to ruch ten nazywamy ruchem postępowym, podobnie jak w planimetrii.

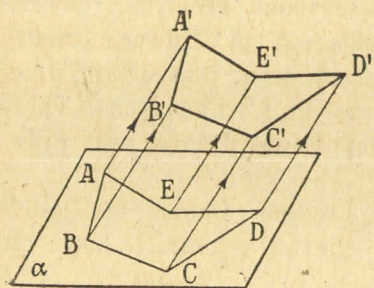


Fig. 212.

Aby wykonać taki ruch, obierzmy n. p. na płaszczyźnie  $\alpha$  dowolny wielokąt  $ABCDE$  (fig. 212). Z jego wierzchołków poprowadźmy proste równoległe do siebie w dowolnym kierunku i na każdej odetnijmy równy kawałek  $AA' = BB' = CC' = DD' = EE'$ . Łącząc punkty  $A' B' C' D' E'$ , otrzymamy wielokąt w nowym położeniu. Jest on przystający do pierwotnego położenia. (Wykaż!).

## Ćwiczenia II

§ 77. 1. Narysować ostrosłup trójboczny (czworościan) i wymienić krawędzie wchrowate.

2. Narysować belkę graniastosłupową, której przekrój jest sześciokątem umiarowym i wymienić krawędzie wchrowate. Jakie kąty tworzą one ze sobą? Jaka jest ich najkrótsza odległość?

§ 78–79. 3. Narysowań przez punkt, leżący poza płaszczyzną, kilka prostych równoległych do niej. Co jest miejscem geometrycznym tych prostych?

4. Mając daną prostą  $a$  równoległą do płaszczyzny i punkt  $X$  na płaszczyźnie, wykreślić przez  $X$  prostą równoległą do  $a$  i leżącą na danej płaszczyźnie.

5. Jak się można przekonać przy pomocy kątomierza, czy prosta w przestrzeni leżąca jest równoległa do danej płaszczyzny?

6. Wykazać, że, jeżeli dwie płaszczyzny są równoległe, to każda prosta, leżąca na jednej płaszczyźnie, jest równoległa do drugiej.

7. Wykazać, że płaszczyzna, przecinająca jedną z dwóch płaszczyzn równoległych, przecina i drugą.

8. Udowodnić, że dwie płaszczyzny równoległe odcinają równe odcinki na wszystkich prostych równoległych do siebie a nierównoległych do tych płaszczyzn.

9. Udowodnić odwrócenie twierdzenia z poprzedniego zadania!

10. Udowodnić, że kąty, których ramiona są niezgodnie równoległe, spełniają się do  $180^\circ$ , chociażby leżały na różnych płaszczyznach.

11. Jeżeli kąt dwuścienny przetniemy dwoma płaszczyznami równoległymi do siebie a przecinającymi krawędź, to kąty przekroju będą równe. Udowodnić!

12. Wiedząc, że krawędzie kostki są po cztery równoległe do siebie a wszystkie kąty na ścianach leżące wynoszą po  $90^\circ$ , wykazać, że przeciwległe ściany są równoległe.

13. Prosta, równoległa do dwóch przecinających się płaszczyzn, jest równoległa do ich krawędzi. (Udowodnij!) (Przesuwa się przez tę prostą płaszczyznę równoległą do jednej z przecinających się płaszczyzn).

14. Mając dane dwie proste wchrowate wykazać, że z każdego punktu można poprowadzić prostą, przecinającą te dwie proste. (Przesunąć płaszczyznę przez dany punkt i jedną z prostych).

15. Przez jedną z dwóch prostych wchrowatych przesunąć płaszczyznę równoległą do drugiej.

16. Czy istnieje płaszczyzna równoległa do dwóch prostych wchrowatych? (Dla dowodu użyć konstrukcji z poprzedniego zadania).

17. Dowolny sześciokąt przesunąć równoległe w przestrzeni o 4 cm pod kątem  $45^\circ$  od płaszczyzny tego sześciokąta.

18. Kostkę przesunąć równoległe w kierunku prostej, łączącej dwa przeciwległe naroża.

19. Wykazać, że przy ruchu postępowym w przestrzeni płaszczyzna pozostanie zawsze płaszczyzną, t. j. 4 punkty leżące na jednej płaszczyźnie przed wykonaniem przesunięcia leżą i po wykonaniu przesunięcia na jednej płaszczyźnie.

## Rozdział III

### Proste i płaszczyzny prostopadłe

#### § 80. Prosta prostopadła do płaszczyzny.

Dotychczas omówiliśmy dokładniej tylko równoległe położenie prostych i płaszczyzn. Przejdziemy obecnie do prostych i płaszczyzn przecinających się. Z pośród rozmaitych możliwych położzeń prostej względem płaszczyzny i płaszczyzny względem płaszczyzny najważniejsze jest dla nas położenie prostopadłe.

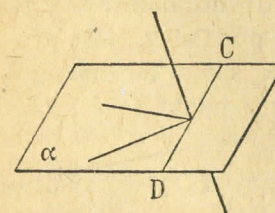


Fig. 213.

Zajmijmy się najpierw prostą prostopadłą. Biorąc pod uwagę jakąkolwiek prostą, przecinającą płaszczyznę ukośnie, spostrzeżemy, że ona z rozmaitych stron ma rozmaite nachylenie do płaszczyzny. Z jednymi liniami prostymi, leżącymi na płaszczyźnie, tworzy kąty ostre, z innymi rozwarte a z jedną kątem prostym (z linią  $CD$ ) (fig. 213). Nie każda jednak linia ma takie własności. Wykażemy, że w każdym punkcie płaszczyzny istnieje jedna linia, która z każdą linią, leżącą na płaszczyźnie,



szczyźnie, tworzy taki sam kąt, mianowicie kąt prosty. Linia ta jest prostopadła do wszystkich bez wyjątku linii, leżących na płaszczyźnie i nazywa się dlatego linią prostopadłą do całej płaszczyzny i na odwrot płaszczyzna nazywa się prostopadłą do tej linii.

Przeprowadzimy dowód istnienia takiej linii, uzyskamy zarazem sposób przekonania się o prostopadłości linii i sposób konstrukcji linii prostopadłej do płaszczyzny.

Weźmy na dowolnej płaszczyźnie  $\alpha$  (fig. 214) dwie przecinające się proste  $a$  i  $b$  i obierzmy linję  $c$ , prostopadłą do obydwu:

$$AO \perp OC, AO \perp OB$$

N. p. mamy wykazać, że  $AO$  jest także prostopadła do  $OD$ . Połączmy dowolne punkty  $B$  i  $C$  prostych  $a, b$  leżące po przeciwnych stronach prostej  $OD$ . Linia  $BC$  przetnie prostą  $OD$  w punkcie  $D$ .

Dla dowodu przedłużamy odcinek  $AO$  a taki sam kawałek  $OA'$  pod płaszczyznę  $\alpha$ . Łącząc punkty  $A$  i  $A'$  z punktami

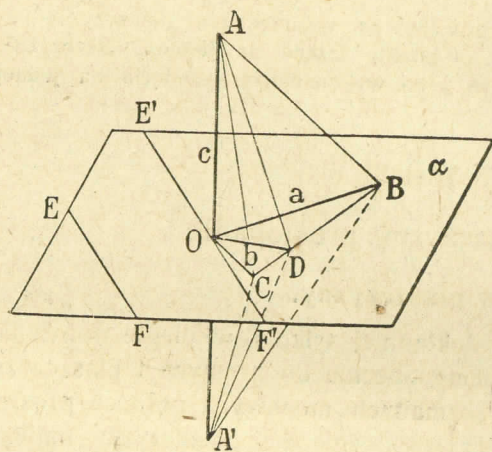


Fig. 214.

$B, C$  i  $D$ , otrzymamy dwa trójkąty równoramienne  $AA'B$  i  $AA'C$  (dlaczego równoramienne?), więc  $AB = A'B$  i  $AC = A'C$ . Trójkąty  $ABC$  i  $A'BC$  są więc przystające (IV). Z przystawania wynika, że także odpowiednie odcinki są równe, więc  $AD = A'D$  (gdybyśmy obrócili dolny trójkąt około  $BC$  tak, aby  $A'$  padł na  $A$ , to  $AD$  nakryje się z  $A'D$ ). W takim razie trójkąt  $AA'D$  jest także równoramienny. Prosta

$OD$ , łącząca jego wierzchołek z środkiem podstawy, jest prostopadła do podstawy; więc  $AO \perp OD$ . Tak samo można udowodnić, że każda inna prosta, przechodząca przez punkt  $O$  a leżąca na płaszczyźnie  $\alpha$ , jest do  $AO$  prostopadła.

Ale także z prostymi wierzchołkami względem  $AO$  tworzy  $AO$  kąt prosty. N. p. kąt z linją  $EF$  znajdziemy, kreśląc przez punkt  $O$  linję  $E'F' \parallel EF$ , ta zaś tworzy już z  $AO$  kąt prosty, jak każda linja, przez  $O$  przechodząca.

Doszliliśmy więc do następującego wniosku:

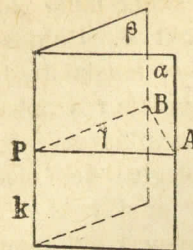


Fig. 215.

Krawędź  $k$  jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych, leżących na płaszczyźnie  $\gamma$ , wyznaczonej przez proste  $PA$  i  $PB$ .

Z każdego punktu, czy to na płaszczyźnie, czy poza płaszczyzną, da się poprowadzić tylko jedną prostą prostopadłą a tak samo z każdego punktu, czy to na prostej, czy to poza prostą, da się do niej tylko jedna płaszczyzna prostopadła poprowadzić (dowody niewprost!)

Długość prostej prostopadłej z punktu poza płaszczyzną, mierzona od tego punktu do płaszczyzny, nazywamy odległością punktu od płaszczyzny. Jest to najkrótszy z wszystkich odcinków, jakimi można połączyć  $P$  (fig. 216) z płaszczyzną. Każdy bowiem inny odcinek jest większy, jako przeciwprostokątnia trójkąta, w którym  $PP'$  jest przyprostokątnią.

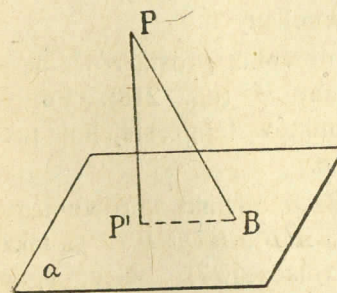


Fig. 216.

Spodek  $P'$  tej linii prostopadłej z punktu  $P$  nazywamy rzutem (prostopadłym) punktu  $P$  na płaszczyznę  $\alpha$  a samą prostą  $PP'$  rzucającą. Jeżeli mówimy „rzut” bez żadnego dodatku, mamy na myśli rzut prostopadły; jeżeli nam chodzi o rzut ukośny, zaznaczamy to wyraźnie.

Rzutem zaś ukośnym punktu na płaszczyznę nazywamy spodek prostej pochyłej, łączącej ten punkt z płaszczyzną; n. p. punkt  $B$  jest ukośnym rzutem punktu  $P$ .

Rzutem jakiegokolwiek figury nazywamy zbiór rzutów wszystkich jej punktów czyli miejsce geometryczne rzutów wszystkich punktów danej figury.

Dwie linie proste, prostopadłe do tej samej płaszczyzny, są do siebie równoległe. Dowód niewprost: założenie jest (fig. 217):

$$a \perp \alpha \text{ i } b \perp \alpha.$$



szczyźnie, tworzy taki sam kąt, mianowicie kąt prosty. Linia ta jest prostopadła do wszystkich bez wyjątku linii, leżących na płaszczyźnie i nazywa się dlatego linią prostopadłą do całej płaszczyzny i na odwrót płaszczyzna nazywa się prostopadłą do tej linii.

Przeprowadzimy dowód istnienia takiej linii, uzyskamy zarazem sposób przekonania się o prostopadłości linii i sposób konstrukcji linii prostopadłej do płaszczyzny.

Weźmy na dowolnej płaszczyźnie  $\alpha$  (fig. 214) dwie przecinające się proste  $a$  i  $b$  i obierzmy linię  $c$ , prostopadłą do obydwu:

$$AO \perp OC, AO \perp OB$$

N. p. mamy wykazać, że  $AO$  jest także prostopadła do  $OD$ . Połączmy dowolne punkty  $B$  i  $C$  prostych  $a, b$  leżące po przeciwnych stronach prostej  $OD$ . Linia  $BC$  przetnie prostą  $OD$  w punkcie  $D$ .

Dla dowodu przedłużamy odcinek  $AO$  a taki sam kawałek  $OA'$  pod płaszczyznę  $\alpha$ . Łącząc punkty  $A$  i  $A'$  z punktami

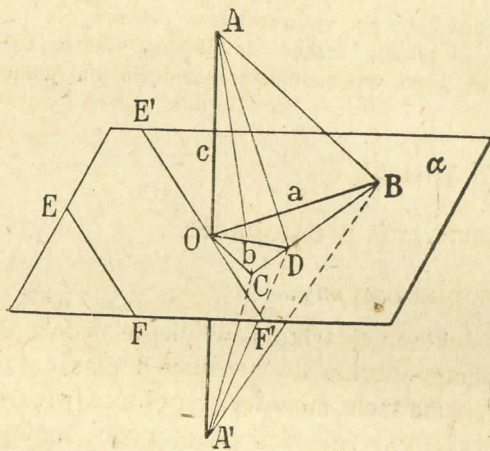


Fig. 214.

$B, C$  i  $D$ , otrzymamy dwa trójkąty równoramienne  $AA'B$  i  $AA'C$  (dlaczego równoramienne?), więc  $AB = A'B$  i  $AC = A'C$ . Trójkąty  $ABC$  i  $A'BC$  są więc przystające (IV). Z przystawania wynika, że także odpowiednie odcinki są równe, więc  $AD = A'D$  (gdybyśmy obrócili dolny trójkąt około  $BC$  tak, aby  $A'$  padł na  $A$ , to  $AD$  nakryje się z  $A'D$ ). W takim razie trójkąt  $AA'D$  jest także równoramienny. Prosta

$OD$ , łącząca jego wierzchołek z środkiem podstawy, jest prostopadła do podstawy; więc  $AO \perp OD$ . Tak samo można udowodnić, że każda inna prosta, przechodząca przez punkt  $O$  a leżąca na płaszczyźnie  $\alpha$ , jest do  $AO$  prostopadła.

Ale także z prostymi wchrowatymi względem  $AO$  tworzy  $AO$  kąt prosty. N. p. kąt z linią  $EF$  znajdziemy, kreśląc przez punkt  $O$  linię  $E'F' \parallel EF$ , ta zaś tworzy już z  $AO$  kąt prosty, jak każda linia, przez  $O$  przechodząca.

Doszliliśmy więc do następującego wniosku:

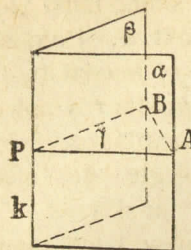


Fig. 215.

Krawędź  $k$  jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych, leżących na płaszczyźnie  $\gamma$ , wyznaczonej przez proste  $PA$  i  $PB$ .

Z każdego punktu, czy to na płaszczyźnie, czy poza płaszczyzną, da się poprowadzić tylko jedna prosta prostopadła a tak samo z każdego punktu, czy to na prostej, czy to poza prostą, da się do niej tylko jedna płaszczyzna prostopadła poprowadzić (dowody niewprost!)

Długość prostej prostopadłej z punktu poza płaszczyzną, mierzona od tego punktu do płaszczyzny, nazywamy odległością punktu od płaszczyzny. Jest to najkrótszy z wszystkich odcinków, jakimi można połączyć  $P$  (fig. 216) z płaszczyzną. Każdy bowiem inny odcinek jest większy, jako

przeciwprostokątnia trójkąta, w którym  $PP'$  jest przyprostokątnią.

Spodek  $P'$  tej linii prostopadłej z punktu  $P$  nazywamy rzutem (prostopadłym) punktu  $P$  na płaszczyznę  $\alpha$  a samą prostą  $PP'$  rzucającą. Jeżeli mówimy „rzut” bez żadnego dodatku, mamy na myśli rzut prostopadły; jeżeli nam chodzi o rzut ukośny, zaznaczamy to wyraźnie.

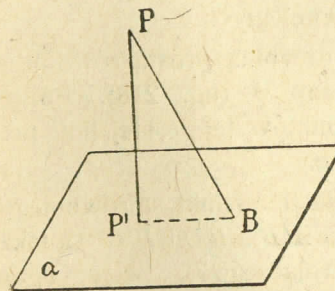


Fig. 216.

Rzutem zaś ukośnym punktu na płaszczyznę nazywamy spodek prostej pochyłej, łączącej ten punkt z płaszczyzną; n. p. punkt  $B$  jest ukośnym rzutem punktu  $P$ .

Rzutem jakiegokolwiek figury nazywamy zbiór rzutów wszystkich jej punktów czyli miejsce geometryczne rzutów wszystkich punktów danej figury.

Dwie linie proste, prostopadłe do tej samej płaszczyzny, są do siebie równoległe. Dowód niewprost: założenie jest (fig. 217):

$$a \perp \alpha \text{ i } b \perp \alpha.$$



Gdyby prosta  $b$  nie była równoległa do  $a$ , to istnieć musi jedna równoległa do  $a$ , n. p.  $b'$ , przechodząca przez punkt  $A$ . Ponieważ zaś  $a \perp c$ , to i prosta  $b'$  musiałaby być prostopadła do  $c$  (jako prosta równoległa do  $a$ ). Poprowadźmy na płaszczyźnie  $\alpha$  proste  $d$  i  $e$  równoległe do siebie a przechodzące przez punkty  $A$  i  $B$ .  $\sphericalangle(ad) = \sphericalangle(b'e)$ , ponieważ ich ramiona są zgodnie równoległe. Ponieważ  $\sphericalangle(ad) = 90^\circ$  to i  $\sphericalangle(b'e)$  musi być prosty, więc  $b' \perp e$ . Mieliliśmy zaś  $b' \perp c$ , więc prosta  $b'$  byłaby prostopadła do całej płaszczyzny  $\alpha$  (ponieważ jest prostopadła do dwóch linii prostych, leżących na tej płaszczyźnie). Jednakże przez punkt  $A$  może przechodzić tylko jedna prosta prostopadła do płaszczyzny  $\alpha$  a tą jest według założenia  $b$ . Prosta  $b'$  musi się więc nakrywać z  $b$  a więc już  $b$  jest równoległa do  $a$ .

Można także wykazać, że dwie płaszczyzny, prostopadłe do tej samej prostej, są do siebie równoległe.

Twierdzenie o prostych prostopadłych do tej samej płaszczyzny zastosujemy do określenia odległości prostej równoległej od płaszczyzny i odległości dwóch płaszczyzn równoległych.

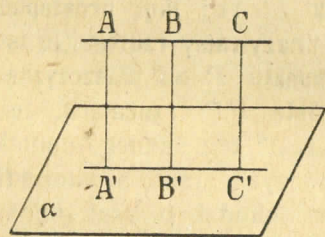


Fig. 218.

Wszystkie te odcinki są równoległe. Odcinki  $AB$  i  $A'B'$ ,  $BC$  i  $B'C'$  są także równoległe (dlaczego?), więc figury  $ABB'A'$ ,  $BCC'B'$  są równoległobokami. Wobec tego  $AA' = BB' = CC'$ , to znaczy: każdy punkt prostej równoległej do płaszczyzny jest od niej równo oddalony. Odległością prostej równoległej od płaszczyzny nazywamy odległość dowolnego jej punktu. W podobny sposób określamy odległość dwóch płaszczyzn równoległych.

Prowadzimy z punktów jednej płaszczyzny szereg linii prostopadłych do drugiej, to te wszystkie linie są równoległe a więc muszą być równe (por. str. 172, ćw. 8).

Ten równy odcinek prostej, prostopadłej z jednej płaszczyzny równoległej do drugiej, nazywamy odległością płaszczyzn równoległych.

Możemy teraz także zbadać najkrótszą odległość dwóch prostych wchrowatych  $a$  i  $b$  (fig. 219). Przez jedną z nich, n. p. przez  $b$ , przesuwamy płaszczyznę  $\beta$  równoległą do prostej  $a$ . Odległość prostej  $a$  od płaszczyzny  $\beta$  jest najkrótszą odległością prostych wchrowatych, ponieważ prosta  $a$ , jako prosta, równoległa do płaszczyzny  $\beta$ , nie zbliża się do niej nigdy więcej a więc nie zbliża się także do prostej  $b$ .

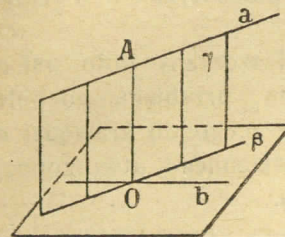


Fig. 219.

Aby znaleźć, w którym miejscu są proste  $a$  i  $b$  najbliższe, wykreślamy ze wszystkich punktów prostej  $a$  proste prostopadłe do płaszczyzny  $\beta$ . One utworzą razem jedną płaszczyznę, która przetnie prostą  $b$  w jakimś punkcie  $O$ . Prosta  $OA$  prostopadła do płaszczyzny  $\beta$  łączy najbliższe punkty prostych wchrowatych  $a$  i  $b$ . Płaszczyzna  $\gamma$  nazywa się prostopadłą do płaszczyzny  $\beta$ . Takimi płaszczyznami zajmiemy się dokładniej w następnym ustępie.

Łatwo wykazać, że linia  $AO$  jest prostopadła do obydwu prostych  $b$  i  $a$ , jest bowiem prostopadła do krawędzi płaszczyzn  $\beta$  i  $\gamma$ , a ta krawędź jest równoległa do  $a$ .

Linia prostopadła do płaszczyzny znajduje zastosowanie w *ruchu obrotowym*, jako oś tego ruchu. Punkt  $A$  (fig. 220) wykonuje ruch obrotowy koło osi  $a$ , jeżeli się porusza po obwodzie koła, leżącego na płaszczyźnie prostopadłej do tej osi a którego środek leży na osi.

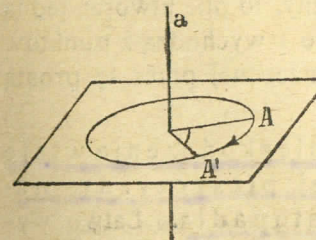


Fig. 220.

Podobnie dowolny utwór geometryczny wykonuje ruch obrotowy, jeżeli jego wszystkie punkty zakreślają łuki kół, leżące w płaszczyznach prostopadłych do osi, przyczem te łuki należą do równych kątów środkowych. Wielkość obrotu mierzymy właśnie tym kątem środkowym. Można więc powiedzieć:

kątem obrotu nazywamy kąt, jaki zakreśla prosta, poprowadzona prostopadłe do osi, z dowolnego punktu utworu geometrycznego, wykonującego obrót. Jeżeli cała przestrzeń wykonuje ruch obrotowy, to tylko punkty leżące na osi są nieruchome. Inne punkty zataczają łuki tem większe, im dalej leżą



Gdyby prosta  $b$  nie była równoległa do  $a$ , to istnieć musi jedna równoległa do  $a$ , n. p.  $b'$ , przechodząca przez punkt  $A$ . Ponieważ zaś  $a \perp c$ , to i prosta  $b'$  musiałaby być prostopadła do  $c$  (jako prosta równoległa do  $a$ ). Poprowadźmy na płaszczyźnie  $\alpha$  proste  $d$  i  $e$  równoległe do siebie a przechodzące przez punkty  $A$  i  $B$ .  $\sphericalangle(a d) = \sphericalangle(b' e)$ , ponieważ ich ramiona są zgodnie równoległe. Ponieważ  $\sphericalangle(a d) = 90^\circ$  to i  $\sphericalangle(b' e)$  musi być prosty, więc  $b' \perp e$ . Mieliśmy zaś  $b' \perp c$ , więc prosta  $b'$  byłaby prostopadła do całej płaszczyzny  $\alpha$  (ponieważ jest prostopadła do dwóch linii prostych, leżących na tej płaszczyźnie). Jednakże przez punkt  $A$  może przechodzić tylko jedna prosta prostopadła do płaszczyzny  $\alpha$  a tą jest według założenia  $b$ . Prosta  $b'$  musi się więc nakrywać z  $b$  a więc już  $b$  jest równoległa do  $a$ .

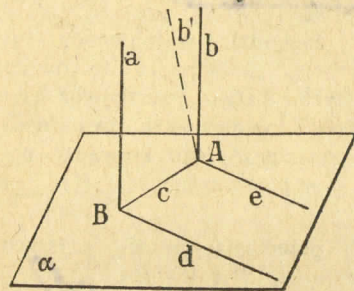


Fig. 217.

Można także wykazać, że dwie płaszczyzny, prostopadłe do tej samej prostej, są do siebie równoległe.

Twierdzenie o prostych prostopadłych do tej samej płaszczyzny zastosujemy do określenia odległości prostej równoległej od płaszczyzny i odległości dwóch płaszczyzn równoległych.

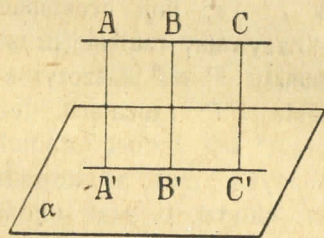


Fig. 218.

Weźmy dowolną prostą równoległą do płaszczyzny  $\alpha$  (fig. 218). Poprowadźmy z punktów tej prostej linie prostopadłe do  $\alpha$ .

Wszystkie te odcinki są równoległe. Odcinki  $AB$  i  $A'B'$ ,  $BC$  i  $B'C'$  są także równoległe (dlaczego?), więc figury  $ABB'A'$ ,  $BCB'B'$  są równoległobokami. Wobec tego  $AA' = BB' = CC'$ , to znaczy: każdy punkt prostej równo-

ległej do płaszczyzny jest od niej równo oddalony. Odległością prostej równoległej od płaszczyzny nazywamy odległość dowolnego jej punktu. W podobny sposób określamy odległość dwóch płaszczyzn równoległych.

Prowadzimy z punktów jednej płaszczyzny szereg linii prostopadłych do drugiej, to te wszystkie linie są równoległe a więc muszą być równe (por. str. 172, ćw. 8).

Ten równy odcinek prostej, prostopadłej z jednej płaszczyzny równoległej do drugiej, nazywamy odległością płaszczyzn równoległych.

Możemy teraz także zbadać najkrótszą odległość dwóch prostych wchrowatych  $a$  i  $b$  (fig. 219). Przez jedną z nich, n. p. przez  $b$ , przesuwamy płaszczyznę  $\beta$  równoległą do prostej  $a$ . Odległość prostej  $a$  od płaszczyzny  $\beta$  jest najkrótszą odległością prostych wchrowatych, ponieważ prosta  $a$ , jako prosta, równoległa do płaszczyzny  $\beta$ , nie zbliża się do niej nigdy więcej a więc nie zbliża się także do prostej  $b$ .

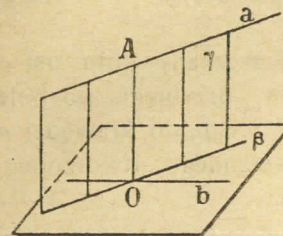


Fig. 219.

Aby znaleźć, w którym miejscu są proste  $a$  i  $b$  najbliższe, wykreślamy ze wszystkich punktów prostej  $a$  proste prostopadłe do płaszczyzny  $\beta$ . One utworzą razem jedną płaszczyznę, która przetnie prostą  $b$  w jakimś punkcie  $O$ . Prosta  $OA$  prostopadła do płaszczyzny  $\beta$  łączy najbliższe punkty prostych wchrowatych  $a$  i  $b$ . Płaszczyzna  $\gamma$  nazywa się prostopadłą do płaszczyzny  $\beta$ . Takimi płaszczyznami zajmiemy się dokładniej w następnym ustępie.

Łatwo wykazać, że linia  $AO$  jest prostopadła do obydwu prostych  $b$  i  $a$ , jest bowiem prostopadła do krawędzi płaszczyzn  $\beta$  i  $\gamma$ , a ta krawędź jest równoległą do  $a$ .

Linia prostopadła do płaszczyzny znajduje zastosowanie w *ruchu obrotowym*, jako oś tego ruchu. Punkt  $A$  (fig. 220) wykonuje ruch obrotowy koło osi  $a$ , jeżeli się porusza po obwodzie koła, leżącego na płaszczyźnie prostopadłej do tej osi a którego środek leży na osi.

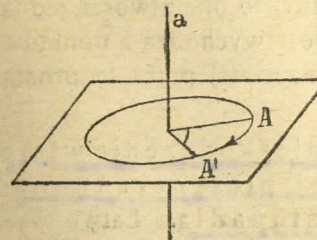


Fig. 220.

Podobnie dowolny utwór geometryczny wykonuje ruch obrotowy, jeżeli jego wszystkie punkty zakreślają łuki kół, leżące w płaszczyznach prostopadłych do osi, przyczem te łuki należą do równych kątów środkowych. Wielkość obrotu mierzymy właśnie tym kątem środkowym. Można więc powiedzieć: kątem obrotu nazywamy kąt, jaki zakreśla prosta, poprowadzona prostopadłe do osi, z dowolnego punktu utworu geometrycznego, wykonującego obrót. Jeżeli cała przestrzeń wykonuje ruch obrotowy, to tylko punkty leżące na osi są nieruchome. Inne punkty zataczają łuki tem większe, im dalej leżą



od osi obrotu — natomiast kąty zakreślone przez wszystkie linie prostopadłe do osi są równe (prędkość kątowna!).

Podobnie jak w planimetrii możnaby i tutaj wykazać, że ta geometryczna konstrukcja posiada właściwości ruchu obrotowego ciał sztywnych, t. j. że linia prosta nie wygnie się przez obrót, lecz pozostanie prostą, że płaszczyzna pozostanie płaszczyzną a wielkość odcinków i kątów nie ulegnie zmianie.

Często używa się w geometrii obrotu płaszczyzny koło osi  $\alpha$ , leżącej na tej płaszczyźnie. Wtedy płaszczyzna, przebiega po kolei wszystkie płaszczyzny pęku płaszczyzn, należącego do krawędzi  $\alpha$ . Wielkość obrotu jest zarazem miarą kąta dwuściennego, utworzonego przez dwie skrajne płaszczyzny (por. str. 185).

Jeżeli jakiś utwór geometryczny wykonuje równocześnie ruch postępowy i obrotowy, to znaczy obraca się koło jakiejś osi a równocześnie posuwa się wzdłuż jakiejś linii prostej, to ruch taki nazywamy ruchem śrubowym. W szczególnym przypadku, jeżeli ruch postępowy odbywa się w kierunku prostopadłym do osi ruchu obrotowego, to taki ruch śrubowy nazywamy toceniem się. W ogólnym ruchu śrubowym każdy punkt zakreśla linię krzywą przestrzenną, zwaną linią śrubową, znaną nam dobrze z mechaniki życia codziennego. Linią tą zajmujemy się dokładniej później, przy nauce o walcu. Przy toczeniu się każdy punkt zakreśla linię krzywą płaską, mianowicie cykloidę (por. w planimetrii str. 37 i str. 156 ćw. 69).

## § 81. Płaszczyzny prostopadłe do siebie.

Jeżeli ze wszystkich punktów linii prostej, leżącej nad płaszczyzną, poprowadzimy linie prostopadłe do płaszczyzny, to one utworzą jedną płaszczyznę. Są bowiem do siebie równoległe i wychodzą z punktów jednej prostej, leżą więc w płaszczyźnie, wyznaczonej przez tę prostą i przez którąkolwiek prostą prostopadłą.

Płaszczyzna taka, zawierająca nieskończenie wiele prostych prostopadłych do drugiej płaszczyzny, nazywa się płaszczyzną do niej prostopadłą. Łatwo wywnioskować, że jeżeli płaszczyzna  $\alpha$  jest prostopadła do  $\beta$ , to i odwrotnie: płaszczyzna  $\beta$  jest prostopadła do  $\alpha$  (wystarczy poprowadzić na drugiej płaszczyźnie szereg linii prostych prostopadłych do wspólnej krawędzi). Wystarczy jednak, jeżeli płaszczyzna zawiera jedną prostą prostopadłą. Twierdzimy więc, że:

Jeżeli  $\alpha \perp \alpha$ , a  $\beta$  jest dowolną płaszczyzną przesuniętą przez  $\alpha$ , to także każda prosta równoległa do  $\alpha$  i leżąca w płaszczyźnie  $\beta$ , jest

prostopadła do  $\alpha$  (fig. 221). (Jest to odwrócenie twierdzenia na str. 176 o dwóch prostych prostopadłych do jednej płaszczyzny).

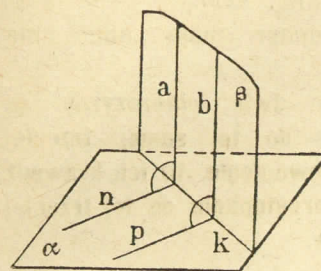


Fig. 221.

N. p. prosta  $b \parallel \alpha$  musi być prostopadła do  $k$ ; aby jednak wykazać, że  $b \perp \alpha$ , trzeba znaleźć jeszcze drugą prostą, leżącą na płaszczyźnie  $\alpha$ , do której prosta  $b$  byłaby prostopadłą. Poprowadźmy  $n \parallel p$ , to kąty  $\sphericalangle(a n)$  i  $\sphericalangle(b p)$  są równe, ponieważ mają ramiona zgodnie równoległe.  $\sphericalangle(a n) = 90^\circ$  a więc i  $\sphericalangle(b p)$  musi być prosty a stąd wynika:  $b \perp p$ . Prosta  $b$ , jako linia prostopadła do dwóch linii  $k$  i  $p$ , leżących na płaszczyźnie  $\alpha$ , jest prostopadła do całej płaszczyzny  $\alpha$ . To samo można wykazać o każdej innej prostej równoległej do  $\alpha$  i leżącej na płaszczyźnie  $\beta$ . Płaszczyzna  $\beta$  jest więc istotnie prostopadła do  $\alpha$ , jako zbiór nieskończenie wielu prostych prostopadłych. Otóż cechą charakterystyczną płaszczyzny prostopadłej jest:

**Jest to płaszczyzna przesunięta przez jedną prostą prostopadłą do drugiej płaszczyzny.** (Użycie pionu w budownictwie!).

Krawędź przecięcia się płaszczyzn prostopadłych zawiera rzuty wszystkich punktów i prostych, leżących na jednej płaszczyźnie, na drugą płaszczyznę.

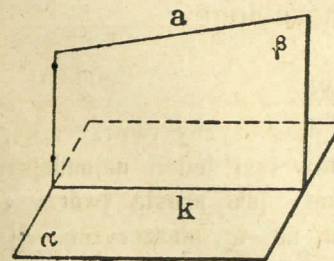


Fig. 222.

Tak n. p. (por. fig. 222) jeżeli  $\beta \perp \alpha$ , to rzuty wszystkich punktów prostej  $a$  leżą na prostej  $k$ . Prosta  $k$  jest więc rzutem prostej  $a$ . Ponieważ  $k$ , jako linia prosta, jest wyznaczona zapomocą dwóch swoich punktów, przeto do wyznaczenia rzutu linii prostej wystarczy podać rzuty dwóch jej punktów (jednym z nich może być punkt przecięcia prostej z płaszczyzną).

Płaszczyzna  $\beta$ , prostopadła z prostej  $a$  do płaszczyzny  $\alpha$ , nazywa się płaszczyzną rzucającą.

(Jeżeli jakaś linia leży już na płaszczyźnie  $\alpha$ , to jest ona swoim własnym rzutem).

Z prostej poza płaszczyzną da się do niej poprowadzić tylko jedną płaszczyznę prostopadłą, ale z punktu poza płaszczyzną



można poprowadzić nieskończenie wiele płaszczyzn prostopadłych. Widzimy stąd, że dwie płaszczyzny prostopadłe do tej samej trzeciej nie muszą być do siebie równoległe (por. fig. 223).

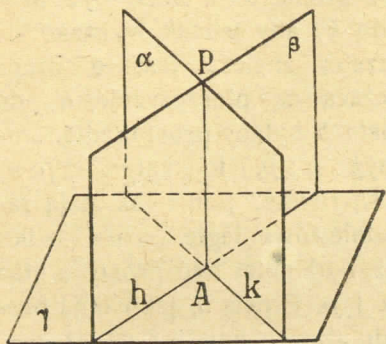


Fig. 223.

Natomiast mają one inną własność.

Jeżeli dwie płaszczyzny są prostopadłe do tej samej trzeciej a nie są równoległe, to ich krawędź musi być prostopadła do tej trzeciej płaszczyzny.

Dowód: płaszczyzna  $\alpha$  zawiera wszystkie proste prostopadłe do  $\gamma$  z punktów na  $\alpha$  leżących a więc i prostopadłą z punktu  $P$ ,

na płaszczyźnie  $\alpha$  leżącego. Tak samo płaszczyzna  $\beta$  zawiera wszystkie proste prostopadłe do  $\gamma$  z punktów, na  $\beta$  leżących a więc i prostopadłą z punktu  $P$ , który jest wspólny płaszczyznom  $\alpha$  i  $\beta$ . Ponieważ zaś z punktu  $P$  istnieje tylko jedna prostopadła do  $\gamma$ , więc musi nią być linia  $PA$  wspólna płaszczyznom  $\alpha$  i  $\beta$ , czyli krawędź płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ .

## Rozdział IV

### Proste i płaszczyzny nachylone

#### § 82. Prosta nachylona do płaszczyzny.

Widzieliśmy, że prosta nachylona do płaszczyzny tworzy z każdej strony inny kąt. Z pomiędzy tych kątów jest jeden najmniejszy, mianowicie kąt, jaki prosta tworzy ze swoim rzutem na tę płaszczyznę. Aby się przekonać, że kąt  $\beta$  jest mniejszy od wszystkich innych kątów prostej  $AB$  z płaszczyzną, porównajmy go z dowolnym innym kątem, n. p. z kątem  $\gamma$  (fig. 224). W tym celu odcinamy  $BC = BA'$  i łączymy  $C$  z  $A$  i  $A'$ . Trójkąt  $AA'C'$  jest prostokątny, więc  $AA' < AC$ . Biorąc pod uwagę trójkąty  $ABC$  i  $ABA'$  widzimy, że mają po

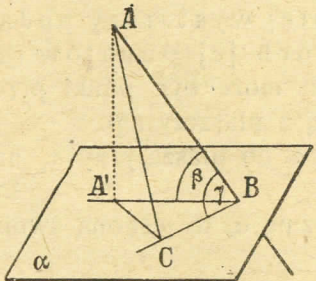


Fig. 224.

dwa boki równe a trzecie nierówne, więc naprzeciw mniejszego boku musi leżeć mniejszy kąt:

$$\beta < \gamma.$$

Tak samo każdy inny kąt jest większy od  $\beta$ .

*Uwaga:* gdyby płaszczyzna  $\alpha$  była pozioma, a prosta  $AB$  ciałem ciężkiem, to przy spadaniu wykonałaby właśnie obrót o kąt  $\beta$  w płaszczyźnie rzucającej.

Kąt, jaki prosta tworzy ze swoim rzutem, nazywamy kątem nachylenia prostej do płaszczyzny lub krótko: kątem prostej z płaszczyzną.

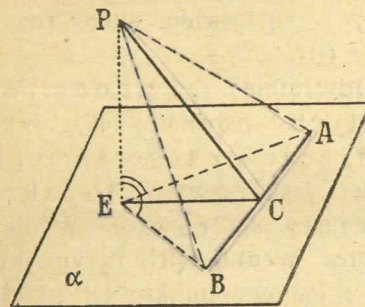


Fig. 225.

Pomiędzy prostymi, leżącymi na płaszczyźnie  $\alpha$ , jedna jest prostopadła do pochyłej  $PC$ , mianowicie ta, która jest prostopadła do jej rzutu. Aby wykazać prawdziwość tego twierdzenia, wychodzimy z założenia:  $AB \perp CE$ . Odcinamy  $AC = BC$  i łączymy  $E$  i  $P$  z punktami  $A, B$ . Trójkąty  $PEB$  i  $PEA$  są przystające, (bo  $PE = PE$ ,  $EB = EA$ ,  $\sphericalangle PEB = \sphericalangle PEA$  jako kąty proste). Więc

$PA = PB$ . Trójkąt  $PAB$  jest równoramienny a więc linia  $PC$ , łącząca wierzchołek ze środkiem podstawy, jest do niej prostopadła. Odwroćenie tego twierdzenia jest również prawdziwe: jeżeli prosta, leżąca na płaszczyźnie  $\alpha$ , jest prostopadła do pochyłej, to jest prostopadła także do jej rzutu. Udowodnij!

Widocznem jest, że proste równoległe do siebie mają do każdej przecinającej je płaszczyzny jednakowe nachylenie (wynika z podobieństwa trójkątów na fig. 226).

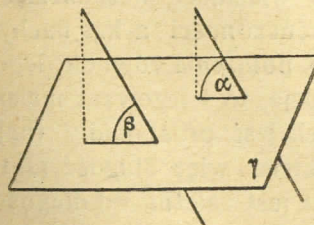


Fig. 226.

Płaszczyzny, rzucające dwie proste równoległe, są także do siebie równoległe, ponieważ jedna zawiera dwie proste przecinające się a równoległe do drugiej płaszczyzny (por. fig. 226).

Stąd wynika, że rzuty prostych równoległych są także równoległe: są to bowiem krawędzie przecięcia się dwóch płaszczyzn równoległych  $\alpha$  i  $\beta$  z trzecią płaszczyzną  $\gamma$ .

Twierdzenie to odnosi się nie tylko do rzutów prostopadłych, ale i do rzutów ukośnych.



### § 83. Twierdzenia o rzutach.

Przy pomocy kątów nachylenia prostej do płaszczyzny możemy teraz zbadać, od czego zależy wielkość rzutu każdego odcinka. W tym celu poprowadzmy z dowolnego punktu, leżącego poza płaszczyzną  $\alpha$ , pęk promieni (fig. 227). Wiemy już (por. str. 175), że odcinek promienia prostopadłego jest najkrótszy. Z pośród innych odcinków pochyłych te wszystkie są równe, których rzuty są równe. Trójkąty (fig. 227)  $SOA$ ,  $SOB$ ,  $SOC$ ,... są bowiem wtedy przystające (II).

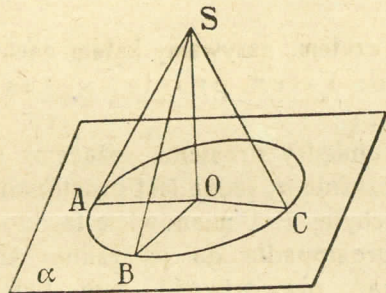


Fig. 227.

Odwrotnie: jeżeli odcinki prostych pochyłych, wychodzących z tego samego punktu, są równe, to także ich rzuty są równe. Wynika to z przystawiania tych samych trójkątów według (III) przypadku. Ponieważ te rzuty wychodzą wszystkie z jednego punktu  $O$ , przeto ich końce leżą na obwodzie koła. Możemy więc także powiedzieć: miejszem geometrycznym punktów, leżących na jednej płaszczyźnie a równo oddalonych od stałego punktu  $S$  poza płaszczyzną, jest koło, którego środkiem jest rzut tego punktu  $S$ .

Wszystkie te równe pochyłe są także równo nachylone do płaszczyzny, jak to wynika z udowodnionego już przystawiania trójkątów na fig. 227.

Łatwo wykazać, że im dłuższy jest odcinek pochyły, z punktu  $S$  wychodzącej, tem większy jego rzut a tem mniejszy jego kąt nachylenia. W granicy, jeżeli odcinek dąży do wielkości nieskończenie wielkiej, to i długość rzutu dąży do nieskończoności a kąt nachylenia dąży do zera czyli: pochyła dąży do położenia równoległego. Z drugiej strony, jeżeli odcinek pochyły maleje, to i jego rzut maleje a kąt nachylenia dąży do  $90^\circ$ . Jeżeli odcinek jest prostopadły (najkrótszy) to rzut jego staje się jednym punktem, więc długość rzutu wynosi zero. Widzimy stąd, że długość rzutu jest zależna od długości odcinka i od kąta nachylenia, czyli:

Długość rzutu jest funkcją długości odcinka i jego kąta nachylenia.

Nigdy jednakże rzut prostopadły nie jest większy od odcinka (dlaczego?). Odnosi się to nie tylko do odcinka, mającego jeden punkt

wspólny z płaszczyzną, ale także do każdego innego odcinka. Weźmy bowiem odcinek  $a$  leżący nad płaszczyzną  $\alpha$  i utwórzmy jego rzut  $r$

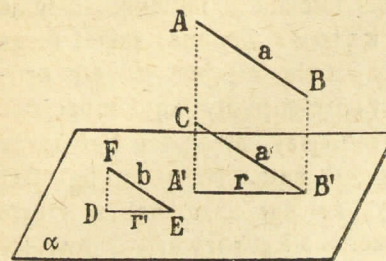


Fig. 228.

(prowadząc z jego końców prostopadłe do  $\alpha$  i łącząc ich spodki). Z punktu  $B'$  (fig. 228) leżącego na  $\alpha$  poprowadźmy prostą  $a'$  równoległą do  $a$  to  $a = a'$  jako przeciwległe boki równoległoboku. Zamiast porównywać odcinek  $a$  z  $r$ , możemy więc porównywać  $a'$  z  $r$ . Widzimy odrazu, że  $a' > r$  a więc i  $a > r$ .

Tylko w położeniu granicznym, równoległym, rzut równa się odcinkowi. (Udowodnij!).

Zbierając te wnioski razem powiemy:

Rzut równa się odcinkowi, jeżeli odcinek jest równoległy do płaszczyzny rzutów, jest mniejszy od odcinka, jeżeli odcinek jest nachylony a maleje do zera, gdy odcinek dąży do położenia prostopadłego. Twierdzenie to dotyczy rzutów prostopadłych.

Stosunek długości odcinka do długości rzutu zależy już tylko od kąta nachylenia. Jeżeli się odcinek powiększy a kąt nachylenia zostanie ten sam, to rzut powiększa się w tym samym stosunku. Łatwo to wywnioskować z podobieństwa trójkątów  $DEF$  i  $A'B'C'$  na fig. 228. Odcinki jednakowo nachylone doznają więc jednakowego pomniejszenia w rzucie.

Przy rzutach ukośnych rzut może być większy od odcinka (por. fig. 229), może być nawet nieskończenie wielki dla skończonego odcinka

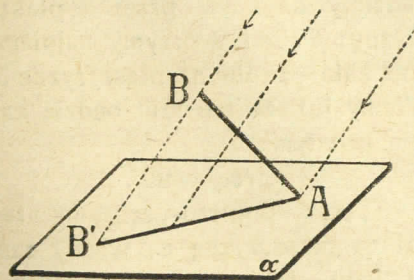


Fig. 229.

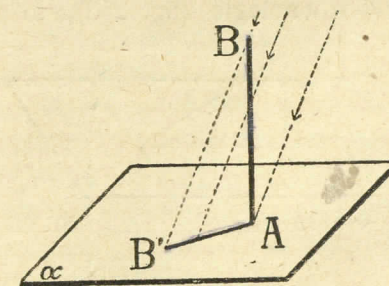


Fig. 230.

(kiedy?). Rzut ukośny odcinka prostopadłego do płaszczyzny rzutów nie jest nigdy punktem (por. fig. 230). Jednakże i tu odcinki jedna-



kowo nachylone doznają takiego samego zniekształcenia (powiększenia lub pomniejszenia).

Zbadawszy w ten sposób zniekształcenie, jakiemu ulegają odcinki, zajmijmy się zniekształceniem kątów. Zmiana, jakiej ulega kąt przy rzucie, nie jest już tak prosta: rzut (prostopadły) kąta może być równy, mniejszy, ale może być także większy od kąta. N. p. z fig. 231 widzimy, że kąt  $\alpha$  doznał w rzucie zmniejszenia a kąt rozwarty  $\beta$  powiększenia (ramię wspólnie przyjęliśmy tu widocznie nachylone do płaszczyzny rzutów).

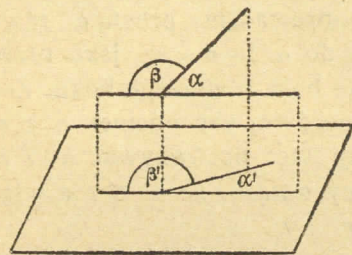


Fig. 231.

Jasne jest natomiast, że: kąty, leżące w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny rzutów, nie ulegają zmianie przez utworzenie rzutu, t. j. są równe swoim rzutom (por. str. 172). (Udowodnij!)

Prawo to odnosi się także do rzutów ukośnych.

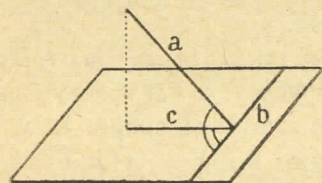


Fig. 232.

Jeżeli ramię  $b$  nie leży na płaszczyźnie rzutów, pozostaje w rzucie kątem prostym:  $\sphericalangle(b'c) = 90^\circ$  (fig. 232).

Jeżeli ramię  $b$  nie leży na płaszczyźnie rzutów, tylko jest do niej równoległe (fig. 233), to prowadzimy najpierw przez  $b$  płaszczyznę:  $\beta \parallel \alpha$  i tworzymy najpierw rzut kąta  $\sphericalangle(ab)$  na płaszczyznę  $\beta$ .

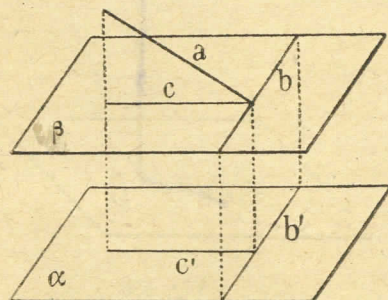


Fig. 233.

Wiemy już, że ten rzut będzie kątem prostym:

$$\sphericalangle(b'c) = 90^\circ.$$

Teraz dopiero rzucamy ten kąt na płaszczyznę  $\alpha$ , wiemy zaś, że kąty, leżące na płaszczyźnie równoległej, są równe swoim rzutom, więc także

$$\sphericalangle(b'c') = \sphericalangle(bc) = 90^\circ.$$

## § 84. Dwie płaszczyzny nachylone do siebie.

Podobnie, jak kąt nachylenia prostej do płaszczyzny mierzyliśmy kątem, leżącym w płaszczyźnie prostopadłej, poprowadzonej z tej prostej do płaszczyzny, tak i kąt nachylenia dwóch płaszczyzn mierzymy kątem, leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do obydwu płaszczyzn. Wiemy już, że płaszczyzna prostopadła do dwóch przecinających się płaszczyzn jest także prostopadła do ich krawędzi (por. str. 180).

Aby więc zmierzyć kąt nachylenia płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  (fig. 234), wystarczy poprowadzić płaszczyznę  $\gamma$  prostopadłą do krawędzi  $k$

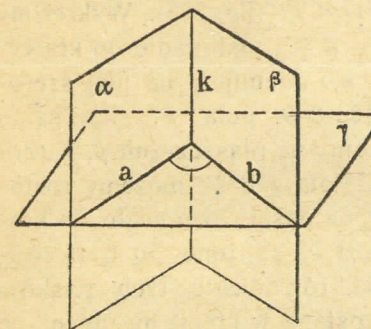


Fig. 234.

(t. zw. przekrój normalny kąta dwuściennego). Płaszczyzna  $\gamma$  przecina  $\alpha$  i  $\beta$  wzdłuż krawędzi  $a$  i  $b$ , które są prostopadłe do  $k$  (jak i każda inna prosta, leżąca na płaszczyźnie  $\gamma \perp k$ ). Możemy więc znaleźć kąt nachylenia dwóch płaszczyzn, t. j. wielkość kąta dwuściennego w następujący sposób:

Prowadzimy przez jakikolwiek punkt krawędzi proste prostopadłe do niej a leżące w płaszczyznach  $\alpha$  i  $\beta$ . Kąt między temi prostymi zawarty jest kątem

nachylenia płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ . Łatwo wykazać, że wielkość tego kąta nie zależy od tego, w którym miejscu poprowadzimy przekrój  $\gamma$  (por. ćw. 11, str. 172). Miara kąta dwuściennego jest zarazem miarą kąta obrotu, jaki musi wykonać płaszczyzna  $\alpha$  koło osi  $k$ , aby zajęła położenie  $\beta$ .

Jeżeli kąt nachylenia dwóch płaszczyzn  $\sphericalangle(ab)$  wynosi  $90^\circ$ , to płaszczyzny są prostopadłe. Wtedy bowiem  $a \perp b$  a wykreśliliśmy  $a \perp k$ , więc  $a \perp \beta$ ; płaszczyzna zaś  $\alpha$ , zawierająca jedną linię  $a$  prostopadłą do płaszczyzny  $\beta$ , musi być sama prostopadła do płaszczyzny  $\beta$  (por. str. 179). Gdyby płaszczyzny były równoległe, to  $a \parallel b$ , więc kąt nachylenia wynosiłby  $0^\circ$ .

Kąty dwuściennie mają własności podobne do kątów płaskich w planimetrii — albowiem kąty płaskie są tylko przekrojami kątów dwuściennych. I tak kąty dwuściennie wierzchołkowe są równe; kąty dwuściennie przyległe spełniają się do  $180^\circ$ . (Udowodnij zapomocą przekroju normalnego!) Jeżeli dwie płaszczyzny równoległe przetniemy trzecią, to otrzymane kąty dwuściennie odpowiednie są równe, naprzemianległe równe a jednostronne



kowo nachylone doznają takiego samego zniekształcenia (powiększenia lub pomniejszenia).

Zbadawszy w ten sposób zniekształcenie, jakiemu ulegają odcinki, zajmijmy się zniekształceniem kątów. Zmiana, jakiej ulega kąt przy rzucie, nie jest już tak prosta: rzut (prostokątny) kąta może być równy, mniejszy, ale może być także większy od kąta. N. p. z fig. 231 widzimy, że kąt  $\alpha$  doznał w rzucie zmniejszenia a kąt rozwarty  $\beta$  powiększenia (ramię wspólnie przyjęliśmy tu widocznie nachylone do płaszczyzny rzutów).

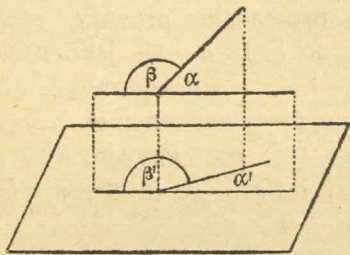


Fig. 231.

Jasne jest natomiast, że: kąty, leżące w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny rzutów, nie ulegają zmianie przez utworzenie rzutu, t. j. są równe swoim rzutom (por. str. 172). (Udowodnij!)

Prawo to odnosi się także do rzutów ukośnych.

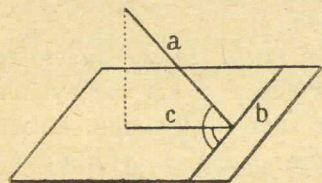


Fig. 232.

Jeżeli ramię  $b$  nie leży na płaszczyźnie rzutów, pozostaje w rzucie kątem prostym:  $\sphericalangle(b'c) = 90^\circ$  (fig. 232).

Jeżeli ramię  $b$  nie leży na płaszczyźnie rzutów, tylko jest do niej równoległe (fig. 233), to prowadzimy najpierw przez  $b$  płaszczyznę:  $\beta \parallel \alpha$  i tworzymy najpierw rzut kąta  $\sphericalangle(ab)$  na płaszczyznę  $\beta$ .

Wiemy już, że ten rzut będzie kątem prostym:

$$\sphericalangle(bc) = 90^\circ.$$

Teraz dopiero rzucamy ten kąt na płaszczyznę  $\alpha$ , wiemy zaś, że kąty, leżące na płaszczyźnie równoległej, są równe swoim rzutom, więc także

$$\sphericalangle(b'c') = \sphericalangle(bc) = 90^\circ.$$

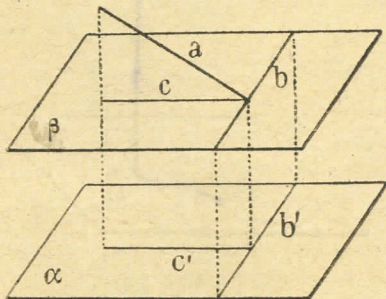


Fig. 233.

## § 84. Dwie płaszczyzny nachylone do siebie.

Podobnie, jak kąt nachylenia prostej do płaszczyzny mierzyliśmy kątem, leżącym w płaszczyźnie prostopadłej, poprowadzonej z tej prostej do płaszczyzny, tak i kąt nachylenia dwóch płaszczyzn mierzymy kątem, leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do obydwu płaszczyzn. Wiemy już, że płaszczyzna prostopadła do dwóch przecinających się płaszczyzn jest także prostopadła do ich krawędzi (por. str. 180).

Aby więc zmierzyć kąt nachylenia płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  (fig. 234), wystarczy poprowadzić płaszczyznę  $\gamma$  prostopadłą do krawędzi  $k$  (t. zw. przekrój normalny kąta dwuściennego). Płaszczyzna  $\gamma$  przecina  $\alpha$  i  $\beta$  wzdłuż krawędzi  $a$  i  $b$ , które są prostopadłe do  $k$  (jak i każda inna prosta, leżąca na płaszczyźnie  $\gamma \perp k$ ). Możemy więc znaleźć kąt nachylenia dwóch płaszczyzn, t. j. wielkość kąta dwuściennego w następujący sposób:

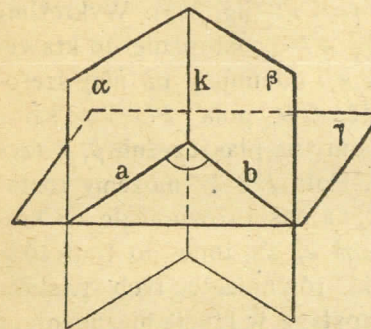


Fig. 234.

Prowadzimy przez jakikolwiek punkt krawędzi proste prostopadłe do niej a leżące w płaszczyznach  $\alpha$  i  $\beta$ . Kąt między temi prostymi zawarty jest kątem

nachylenia płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ . Łatwo wykazać, że wielkość tego kąta nie zależy od tego, w którym miejscu poprowadzimy przekrój  $\gamma$  (por. ćw. 11, str. 172). Miara kąta dwuściennego jest zarazem miarą kąta obrotu, jaki musi wykonać płaszczyzna  $\alpha$  koło osi  $k$ , aby zajęła położenie  $\beta$ .

Jeżeli kąt nachylenia dwóch płaszczyzn  $\sphericalangle(ab)$  wynosi  $90^\circ$ , to płaszczyzny są prostopadłe. Wtedy bowiem  $a \perp b$  a wykreśliliśmy  $a \perp k$ , więc  $a \perp \beta$ ; płaszczyzna zaś  $\alpha$ , zawierająca jedną linję  $a$  prostopadłą do płaszczyzny  $\beta$ , musi być sama prostopadła do płaszczyzny  $\beta$  (por. str. 179). Gdyby płaszczyzny były równoległe, to  $a \parallel b$ , więc kąt nachylenia wynosiłby  $0^\circ$ .

Kąty dwuściennie mają własności podobne do kątów płaskich w planimetrii — albowiem kąty płaskie są tylko przekrojami kątów dwuściennych. I tak kąty dwuściennie wierzchołkowe są równe; kąty dwuściennie przyległe spełniają się do  $180^\circ$ . (Udowodnij zapomocą przekroju normalnego!) Jeżeli dwie płaszczyzny równoległe przetniemy trzecią, to otrzymane kąty dwuściennie odpowiednie są równe, naprzemianległe równe a jednostronne



spełniają się do  $180^\circ$ . (Udowadnia się przez poprowadzenie przekroju normalnego). Podobnie twierdzenia o kątach, których ramiona są parami równoległe lub parami prostopadłe, można przenieść na kąty dwuścienne.

Mówiąc o prostej nachylonej, badaliśmy zmniejszenie odcinka takiej prostej przy rzucie. Jeżeli chcemy to samo rozumowanie przeprowadzić dla płaszczyzn nachylonych, to musimy się zająć częścią płaszczyzny a więc polem. Wykażemy, że pola, leżące na płaszczyznach jednakowo nachylonych, zmniejszają się przy rzucie w tym samym stosunku.

Weźmy jakiekolwiek pole  $P$ , leżące na płaszczyźnie  $\alpha$ , nachylonej do płaszczyzny  $\beta$  i utwórzmy jego rzut  $P'$  (fig. 235). Wykreśliśmy

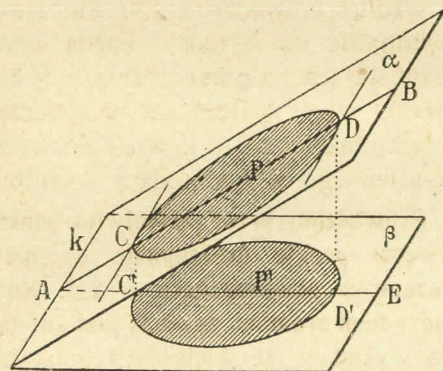


Fig. 235.

linię  $AB$  prostopadłą do krawędzi  $k$  i odetnijmy na niej szerokość  $CD$  pola  $P$ . To samo zróbmy na płaszczyźnie  $\beta$ , w rzucie. Pola  $P$  i  $P'$  możemy rozłożyć na paski równoległe do krawędzi  $k$ , zbliżone do trapezów. Boki równoległe tych pasków pozostaną w rzucie niezmienione co do długości a tylko szerokość każdego zmieni się w stosunku  $C'D' : CD = s$ , więc całe pole zmieni się w tym stosunku:

$$P' : P = s.$$

Ponieważ — jak widzieliśmy na str. 183 — ten stosunek  $C'D' : CD$  zależy tylko od kąta nachylenia, przeto wszystkie pola, leżące na płaszczyźnie  $\alpha$  lub na innej płaszczyźnie, ale tak samo nachylonej do  $\beta$ , doznają zmniejszenia w tym samym stosunku  $s$ .

Kiedy zmniejszenia nie będzie? Kiedy pole rzutu maleje do zera?

### Ćwiczenia III i IV

§ 80. 1. Wykazać, że z punktu na linii prostej da się poprowadzić tylko jedną płaszczyznę prostopadłą do niej (niewprost!).

2. Wykazać, że wszystkie linie proste prostopadłe do danej prostej a przechodzące przez jeden jej punkt, tworzą płaszczyznę prostopadłą do tej prostej.

3. Wykazać, że z punktu poza płaszczyzną da się tylko jedna linia prostopadła do płaszczyzny poprowadzić.

4. Wykazać, że z punktu poza prostą da się do niej tylko jedna płaszczyzna prostopadła poprowadzić.

5. Udowodnić, że miejscem geometrycznym wszystkich punktów równo oddalonych od dwóch końców odcinka jest płaszczyzna prostopadła, przechodząca przez środek odcinka. Jest to płaszczyzna symetralna.

6. Znaleźć miejsce geometryczne punktów równo oddalonych od trzech wierzchołków trójkąta.

7. Wykazać, że dwie płaszczyzny prostopadłe do tej samej prostej są do siebie równoległe. (Przesunąć przez tę prostą dwie dowolne płaszczyzny!).

§ 81. 8. Udowodnić, że płaszczyzna prostopadła do prostej jest także prostopadła do każdej płaszczyzny, zawierającej tę prostą.

9. Dwie płaszczyzny prostopadłe do siebie są także prostopadłe do trzeciej płaszczyzny. Wykazać, że ich krawędzie tworzą układ trzech osi prostopadłych do siebie.

10. Wykazać, że jeżeli jakaś prosta i jakaś płaszczyzna są prostopadłe do tej samej płaszczyzny, to są do siebie równoległe.

11. Wykazać, że miejscem geometrycznym punktów równo oddalonych od ramion kąta płaskiego jest płaszczyzna symetralna tego kąta (t. j. płaszczyzna, zawierająca linię dwusieczną tego kąta i prostopadła do jego płaszczyzny).

12. Znaleźć miejsce geometryczne punktów równo oddalonych od trzech boków trójkąta (patrz poprzednie zadanie).

13. Wykazać, że dwie płaszczyzny równoległe tworzą równe kąty z każdą przecinającą je prostą. (Z dowolnego punktu tej prostej poprowadzić prostopadłą do obu płaszczyzn).

§ 82—84. 14. Wykazać, że im dłuższy jest odcinek pochyłej z punktu poza płaszczyzną, tem większy jego rzut.

15. Punkt, leżący ponad płaszczyzną, połączyć z punktami na obwodzie dowolnego koła, leżącego na tej płaszczyźnie. Który z tych odcinków jest najkrótszy?

16. Wykazać, iż stosunek podziału odcinka nie zmienia się ani przy rzucie prostopadłym, ani przy rzucie ukośnym.

17. Wykazać, że kąty równe, leżące na płaszczyznach równoległych i mające jedną parę ramion równoległą a drugą zwróconą w tę samą stronę, mają i drugą parę ramion równoległą.

18. Wykazać, że kąty dwuścienne: a) odpowiednie są sobie równe, b) naprzemianległe są sobie równe, c) jednostronne spełniają się do  $180^\circ$ .

19. Jaką własność mają punkty płaszczyzny dwusiecznej kąta dwuściennego?

20. Wykazać, że w rzucie koła rzut każdej średnicy jest przepołowiony rzutem środka koła. Kiedy ten rzut będzie kołem a kiedy linią prostą?

21. Rzut odcinka  $a$  ma długość  $a' = 4 \text{ cm}$  a proste rzucające jego końce:  $b = 7 \text{ cm}$ ,  $b' = 9 \text{ cm}$ . Obliczyć długość odcinka  $a$ . Jak daleko trzeba ten odcinek przedłużyć, aby się przeciął z płaszczyzną rzutów?

22. Trójkąt ma podstawę  $5 \text{ cm}$  a wysokość  $6 \text{ cm}$ . Obliczyć rzut pola tego trójkąta na płaszczyznę, nachyloną do jego płaszczyzny pod kątem a)  $45^\circ$ , b)  $60^\circ$  a równoległą do podstawy trójkąta.

23. Obliczyć pole linii krzywej, powstającej z rzutu koła o promieniu  $r = 6 \text{ cm}$  nachylonego tak, że odcinki prostopadłe do krawędzi skracają się w stosunku  $1 : 3$ .

24. Obliczyć pole linii krzywej, powstającej z rzutu koła, leżącego na płaszczyźnie nachylonej pod kątem  $45^\circ$  do płaszczyzny rzutów, znając promień koła  $r = 15 \text{ cm}$ .



## § 85. Określenie naroża (kąta bryłowego).

W planimetrii po zbadaniu wzajemnego położenia dwóch prostych omawialiśmy utwory geometryczne powstające z trzech linii prostych. W stereometri postąpimy podobnie z płaszczyznami. Położenie dwóch płaszczyzn omówiliśmy już w § 79. Trzy płaszczyzny mogą mieć względem siebie następujące położenia:

- trzy płaszczyzny są równoległe do siebie;
- dwie płaszczyzny równoległe są przecięte trzecią płaszczyzną;
- trzy płaszczyzny mają całą krawędź wspólną;
- trzy płaszczyzny przecinają się wzdłuż trzech krawędzi równoległych i
- trzy płaszczyzny przecinają się wzdłuż trzech krawędzi nierównoległych.

Przypadki  $a, b, c, d$  omówiliśmy już w poprzednich ustępach. Nowym jest dla nas przypadek  $e$ .

Łatwo wykazać, że trzy płaszczyzny, przecinające się wzdłuż trzech krawędzi nierównoległych, mają tylko jeden punkt wspólny: jest to punkt, w którym się przecinają trzy krawędzie. Jeżeli z tych płaszczyzn narysujemy tylko części zawarte między krawędziami, otrzymamy utwór geometryczny, przedstawiony na fig. 236. Ten nowy utwór, odpowiadający trójkątowi w planimetrii, nazywamy narożem trójsściennym lub kątem bryłowym trójsściennym.

Jest to więc część przestrzeni zawarta między trzema płaszczyznami przesuniętymi przez trzy proste, przecinające się w jednym punkcie  $S$ .

Takie naroże zawiera trzy kąty płaskie:  $\sphericalangle(hg)$ ,  $\sphericalangle(kg)$  i  $\sphericalangle(hk)$  i trzy kąty dwuścienne:  $\sphericalangle(\beta\gamma)$ ,  $\sphericalangle(\alpha\gamma)$  i  $\sphericalangle(\alpha\beta)$ .

Punkt  $S$  nazywa się wierzchołkiem kąta bryłowego. Mamy tu więc sześć części składowych, czyli sześć „elementów”, podobnie jak w trójkącie. Badanie kątów bryłowych trójsściennych jest niejako rozszerzeniem badań, przeprowadzonych na trójkącie w planimetrii. Nawet brzmienie wielu twierdzeń pozostaje to samo, jeżeli słowo

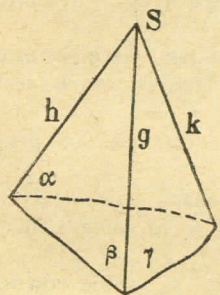


Fig. 236.

„bok” zastąpimy słowem „kąć płaski” a słowo „kąć” słowem „kąć dwuścienny”. Trójkąt jest bowiem tylko przekrojem kąta bryłowego.

Jeżeli więcej płaszczyzn przecina się w jednym punkcie, ale tylko po dwie wzdłuż jednej krawędzi, naroże nazywa się wielościenne. Jeżeli wszystkie kąty płaskie są równe i wszystkie kąty dwuścienne między sobą, to naroże nazywa się umiarowe.

## § 86. Przystawanie kątów bryłowych. Naroże biegunowe.

Dwa utwory przestrzenne nazywają się *przystające*, jeżeli wszystkie elementy jednego utworu (a więc krawędzie, kąty płaskie, kąty dwuścienne i t. d.) są równe odpowiednim elementom drugiego i następują po sobie w tym samym porządku.

Utwory przestrzenne nazywają się *podobne*, jeżeli wszystkie kąty są równe a wszystkie odcinki jednego utworu są proporcjonalne do odpowiednich odcinków drugiego.

Stosując to ogólne określenie przystawania do naroża, powiemy:

Dwa naroża nazywają się *przystające*, jeżeli ich kąty płaskie i kąty dwuścienne są parami równe w tym samym porządku. Takie utwory można sprowadzić do nakrycia przez wykonanie odpowiedniego ruchu. Aby się przekonać, czy dwa naroża trójsściennne są przystające, wystarczy zbadać równość trzech części odpowiednio dobranych, podobnie jak dla trójkątów.

Mamy sześć przypadków przystawania kątów bryłowych trójsściennych (fig. 237), mianowicie: Dwa naroża trójsściennne są przystające, jeżeli mają:

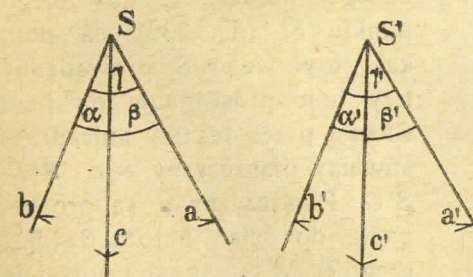


Fig. 237.

- trzy kąty płaskie równe;
- trzy kąty dwuścienne równe;
- dwa kąty płaskie i kąt dwuścienny między nimi zawarty równe;
- dwa kąty dwuścienne i kąt płaski między nimi zawarty równe;
- dwa kąty płaskie i kąt dwuścienny, leżący naprzeciw tego kąta płaskiego, który jest bliższy  $90^\circ$ , równe;
- dwa kąty dwuścienne i kąt płaski, leżący naprzeciw tego kąta dwuściennego, który się mniej różni od  $90^\circ$ , równe.

Nie będziemy tu szczegółowo udowadniaли tych sześciu przypadków a tylko wykażemy poglądowo, jak się do nich dochodzi drogą konstrukcyjną. Weźmy n. p. pierwszy przypadek przystawania.



Mamy podane trzy kąty płaskie  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ . Rysujemy je jeden obok drugiego z tego samego wierzchołka  $S$  na jednej płaszczyźnie. Odcinamy  $SX = SX'$  i obracamy płaszczyznę kątów  $\beta$  i  $\gamma$  około osi  $SA$  i  $SB$  tak długo, aż się zejdą punkty  $X$  i  $X'$  (fig. 238). Wtedy i całe proste  $SX$  i  $SX'$  muszą się nakryć i otrzymamy jeden ściśle oznaczony kąt bryłowy. Wszystkie inne kąty bryłowe, zbudowane z takich samych kątów płaskich, wymagają takich samych obrotów przy konstrukcji, mają więc jednakowe kąty dwuściennne czyli są przystające. Podobnie dochodzimy do przypadków 3 i 5.

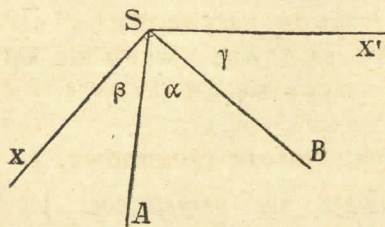


Fig. 238.

Z tej konstrukcji wysnuwamy ważny wniosek:

**W narożu trójsiennym suma dwóch kątów płaskich musi być większa od trzeciego.** W przeciwnym bowiem razie przy obrocie ściany  $\beta$  i  $\gamma$ , albo nie zeszłyby się wcale, albo przecięłyby się dopiero na płaszczyźnie  $\alpha$  a więc nie utworzyłyby kąta bryłowego. (Jakie twierdzenie odpowiada temu twierdzeniu w planimetrii?).

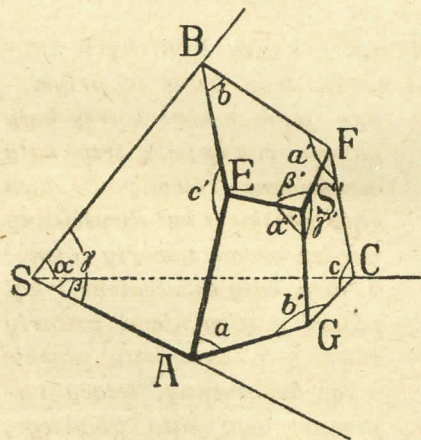


Fig. 239.

Dla dowodu innych przypadków przystawania używa się pomocniczego kąta bryłowego, któryby był niejako dopełnieniem danego naroża. Z dowolnego punktu  $S'$  (fig. 239) na polu kąta bryłowego  $S$  prowadzimy trzy linie prostopadłe do jego ścian i przez te trzy linie przesuwamy płaszczyzny  $S'A$ ,  $S'B$ ,  $S'C$ . Płaszczyzny te są prostopadłe do ścian naroża  $S$  (dlaczego?). W ten sposób powstaje nowe naroże  $S'$ , które nazywamy narożem biegunowym względem  $S$ . Ściany naroża  $S$  i  $S'$  przecinają się wzdłuż krawędzi  $AE$ ,  $AG$ ,  $BE$ ,  $BF$ ,  $CF$ ,  $CG$ . Kąty  $a$ ,  $b$ ,  $c$  które powstały przy krawędziach  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  są kątami dwuściennymi naroża  $S$ . Albowiem: płaszczyzna  $S'A$  jest prostopadła do  $\beta$  i do  $\gamma$  a zatem i do ich krawędzi  $SA$  a wobec tego

$SA \perp EA$  i  $SA \perp GA$ , więc kąt  $a$  jest miarą kąta dwuściennego, leżącego przy krawędzi  $SA$ . Tak samo  $\angle b$  i  $\angle c$ . Biorąc pod uwagę płaski czworokąt  $S'EAG$ , w którym  $\angle E = 90^\circ$  i  $\angle G = 90^\circ$ , widzimy, że:

$$a + a' = 180^\circ. \quad (1)$$

Tak samo  $b + \beta'$  i  $c + \gamma'$  spełniają się do  $180^\circ$ . A więc: *dwuściennne kąty naroża spełniają się do  $180^\circ$  z płaskimi kątami naroża biegunowego.*

Podobnie z czworokąta  $SACG$  wynika, że  $\beta + \beta' = 180^\circ$ , gdzie  $\beta'$  jest kątem dwuściennym naroża  $S'$ .

Tak samo  $a + a' = 180^\circ$ ,  $\gamma + \gamma' = 180^\circ$ , więc:

*Kąty płaskie naroża spełniają się do  $180^\circ$  z kątami dwuściennymi naroża biegunowego.*

Twierdzenia te możemy zastosować do konstrukcji naroża trójsiennego w drugim przypadku przystawania. Mamy podane kąty dwuściennne  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Z wzorów (1) otrzymamy:

$$a' = 180^\circ - a$$

$$\beta' = 180^\circ - b$$

$$\gamma' = 180^\circ - c$$

Z kątów  $a'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  budujemy naroże według pierwszego przypadku a następnie z dowolnego punktu prowadzimy trzy linie prostopadłe do ścian, to one wyznaczą kąt bryłowy, w którym kąty dwuściennne będą miały żądane wielkości:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Podobnie postępujemy w 4 i 6 przypadku.

### § 87. O sumie kątów w narożu.

W trójkącie suma kątów wynosi  $180^\circ$ . W narożu trójsiennym nie mamy już takiej prostej równości, zachodzą natomiast pewne nierówności tak dla kątów płaskich, jak i dla kątów dwuściennych. I tak wykażemy, że:

**w każdym kącie bryłowym trójsiennym suma kątów płaskich jest mniejsza od  $4R$  (t. j. od  $360^\circ$ ).**

Dla dowodu przecinamy naroże (fig. 239) płaszczyzną, nie przechodzącą przez wierzchołek a przecinającą wszystkie krawędzie. Otrzymaliśmy cztery trójkąty, w których suma kątów wynosi  $4 \cdot 2R = 8R$ . Od tej sumy trzeba jednak odjąć sumę kątów trójkąta  $ABC$ , a więc zostanie

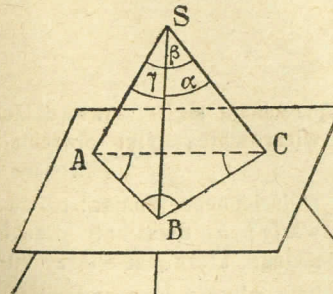


Fig. 240.



6 *R*. Od tego trzeba jeszcze odjąć po dwa kąty, leżące przy wierzchołkach *A*, *B* i *C*. Ponieważ w każdym narożu trójsiennym suma dwóch kątów płaskich jest większa od trzeciego, przeto suma kątów, które mamy jeszcze odjąć, jest większa od  $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C$ , czyli większa od 2 *R*. Jeżeli zaś od 6 *R* odejmiemy coś więcej jak 2 *R*, zostanie liczba mniejsza od 4 *R*. Więc:

$$\alpha + \beta + \gamma < 4 R.$$

Twierdzenie to odnosi się nie tylko do naroża trójsiennego, ale także do każdego naroża wielościennego. (Udowodnij w ten sam sposób!).

Inna nierówność zachodzi dla kątów dwuściennych, mianowicie:

w każdym kącie bryłowym trójsiennym suma kątów dwuściennych jest większa od 2 *R* ale mniejsza od 6 *R*. Dla dowodu używamy naroża biegunowego. Widzieliśmy, że  $\alpha + \alpha' = 180^\circ$ ,  $\beta + \beta' = 180^\circ$  i  $\gamma + \gamma' = 180^\circ$  a więc  $\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 6 R$ . (2)

Stąd odrazu widać, że suma samych kątów dwuściennych  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  jest mniejsza od 6 *R*. Ponieważ zaś  $\alpha' + \beta' + \gamma' < 4 R$ , jako suma kątów płaskich w narożu trójsiennym, to, odejmując od lewej strony równania (2) liczbę  $\alpha' + \beta' + \gamma'$  mniejszą od 4 *R*, otrzymamy resztę większą od 2 *R*, więc

$$2 R < \alpha + \beta + \gamma < 6 R$$

Dla naroża wielościennego otrzymujemy na sumę kątów dwuściennych granice inne, mianowicie, jeżeli liczba ścian wynosi *n*, to:

$$2 R (n - 2) < S < 2 R \cdot n \quad \text{Udowodnij!}$$

Celem zmierzenia wielkości kąta bryłowego określa się z jego wierzchołka kulę o promieniu równym jednostce długości i oblicza się powierzchnię krzywą, jaką odcinają ściany kąta bryłowego. Wielkość tej powierzchni uważa się za miarę kąta bryłowego. Jest to uogólnienie łukowej miary kąta. Obliczenie wielkości powierzchni wyciętej na kuli przez kąt bryłowy sprawia znacznie trudności. W trygonometrii sferycznej bada się tę sprawę dokładniej (por. § 118).

### Cwiczenia V

§ 85. 1. Wykazać, że jeżeli trzy płaszczyzny przecinają się w krawędziach nierównoległych, to te krawędzie nie mogą być wchrowate, tylko przecinają się i to w jednym punkcie.

§ 86. 2. Jak należy wykonać konstrukcję naroża trójsiennego, znając: a) dwa kąty płaskie i kąt dwuścienny między nimi zawarty; b) dwa kąty płaskie i kąt dwuścienny, leżący naprzeciw tego kąta płaskiego, który jest bliższy  $90^\circ$ .

3. Narysować naroże trójsienne, którego kąty płaskie wynoszą po  $90^\circ$  i jego naroże biegunowe.

4. Kąty dwuścienne naroża trójsiennego wynoszą:  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 120^\circ$ . Jak należy wykonać konstrukcję tego naroża przy pomocy naroża biegunowego?

5. Jak wykonamy konstrukcję naroża trójsiennego, mając podane: a) dwa kąty dwuścienne i kąt płaski, między nimi zawarty; b) dwa kąty dwuścienne i kąt płaski, leżący naprzeciw tego kąta dwuściennego, który jest bliższy  $90^\circ$ ? (Użyć naroża biegunowego!).

6. Wykazać, że w narożu trójsiennym naprzeciw równych kątów płaskich leżą równe kąty dwuścienne i odwrotnie (metoda dowodu podobna jak w § 18 dla trójkąta).

7. Wykazać, że w narożu trójsiennym naprzeciw większego kąta dwuściennego leży większy kąt płaski (dla dowodu odjąć mniejszy kąt dwuścienny od większego zapomocą płaszczyzny i oprzeć się na ćw. 6).

§ 87. 8. Wykazać, że w narożu czworościennym suma kątów płaskich wynosi mniej, aniżeli 4 *R*.

9. Wykazać, że w narożu pięćościennym suma kątów dwuściennych jest większa od 6 *R* a mniejsza od 10 *R*.

10. Wykazać, że naroże *S* na fig. 238 jest biegunowem do naroża *S'*.

## Rozdział VI

### S y m e t r j a

#### § 88. Naroża trójsienne symetryczne względem siebie.

Mówiąc o przystawianiu naroży trójsiennych zastrzeżliśmy wyraźnie, że równe części w obydwu narożach mają następować po sobie w tym samym porządku. W planimetrii zastrzeżenie to nie było potrzebne, w stereometrii zaś jest, jak to obaczymy, konieczne. Weźmy pod uwagę dwa naroża trójsienne, mające wszystkie elementy równe ale następujące po sobie w przeciwnym

porządku (to znaczy: patrząc od *S* na punkty *A*, *B*, *C* kolejno musimy zwracać się w kierunku zgodnym z ruchem wskazówki zegarowej, od *S'* zaś widzimy, że punkty *A'*, *B'*, *C'* następują po sobie w porządku odwrotnym fig. 241).

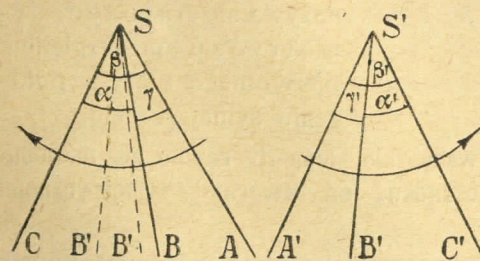


Fig. 241.

Oprócz tego niech kąty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  będą wszystkie różne między sobą. Te naroża nie dadzą się sprowadzić do nakrycia żadnym ruchem. (Sprawdzić na modelu!) Gdyby nawet ściana *S' A' C'*



nakryła ścianę  $SAC$ , to krawędź  $SB'$  będzie leżała albo za płaszczyzną  $SAC$ , albo przed płaszczyzną ale po lewej stronie krawędzi  $SB$ . Utworów  $SABC$  i  $S'A'B'C'$  nie możemy więc nazwać przystającymi, ponieważ nie posiadają zasadniczej własności figur przystających: nie dadzą się sprowadzić do nakrycia przez ruch mimo, że mają wszystkie części równe. Figury te posiadają natomiast inną niemniej ważną własność. Dadzą się one ustawić tak, że jedno naroże jest zwierciadłowym odbiciem drugiego. Ściślej: naroża te dadzą się tak ustawić, że punkty jednego są symetryczne względem odpowiednich punktów drugiego. Aby to udowodnić, oprzemy się na określeniu symetrycznego położenia. O dwóch punktach  $A$  i  $A'$  w przestrzeni mówimy, że leżą *symetrycznie*, jeżeli są jednakowo oddalone od jednej płaszczyzny, leżą po przeciwnych stronach tej płaszczyzny, ale na tej samej linii prostopadłej do płaszczyzny. Tę płaszczyznę nazywamy **płaszczyzną symetrii punktów  $A$  i  $A'$**  lub płaszczyzną symetralną.

Wykonajmy taką konstrukcję dla czterech punktów  $SABC$  naroża  $S$  (fig. 242) i połączmy  $S'$  z  $A'B'C'$ . Otrzymaliśmy w ten

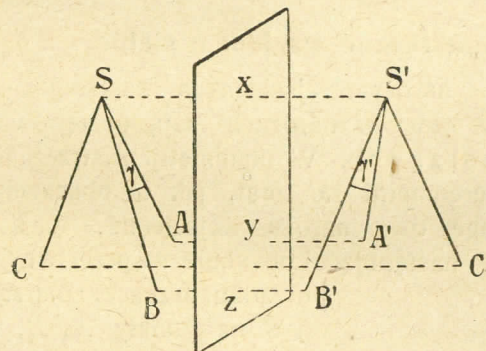


Fig. 242.

sposób naroże  $S'A'B'C'$ , mające wszystkie elementy równe odpowiednim elementom figury  $SABC$ , ale w odwrotnym porządku. (Np.  $SA = S'A'$ , bo trapezy  $SAXY$  i  $S'A'XY$  są przystające, tak samo  $SB = S'B'$ ,  $AB = A'B'$ , więc  $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \gamma'$ ). Otrzymane w ten sposób naroże nazywa się narożem symetrycznym względem pierwotnego i leży w położeniu symetrycznym.

Naroża trójsienne, mające wszystkie elementy równe ale następujące po sobie w odwrotnym porządku, są utworami symetrycznymi względem siebie.

Określenie to stosujemy do wszystkich utworów przestrzennych wogóle.

Utwory symetryczne w planimetrii, t. j. leżące na jednej płaszczyźnie, można było sprowadzić do nakrycia, trzeba było jednak wyjąć jeden utwór

z płaszczyzny dwuwymiarowej i wykonać obrót w trójwymiarowej przestrzeni. Utwory przestrzenne symetryczne względem siebie trzeba by wyjąć z przestrzeni trójwymiarowej i obrócić w przestrzeni czworowymiarowej. Konstrukcja taka jest jednak niemożliwa w naszej geometrii trójwymiarowej i dlatego utwory przestrzenne symetryczne nie dadzą się sprowadzić do nakrycia.

Podaj kilka przykładów utworów trójwymiarowych symetrycznych względem siebie z życia codziennego!

## § 89. Utwory symetryczne. (Inne rodzaje symetrii).

Utwory geometryczne, dające się rozłożyć zapomocą jakiejś płaszczyzny (przekroju) na dwie części symetryczne względem siebie, nazywamy utworami symetrycznymi.

N. p. kostka jest utworem symetrycznym, posiada bowiem płaszczyzny symetrii i to aż dziewięć takich płaszczyzn. Są to trzy płaszczyzny, przechodzące przez środki krawędzi i sześć płaszczyzn, przechodzących przez przekątne przeciwległych ścian (fig. 243 a).

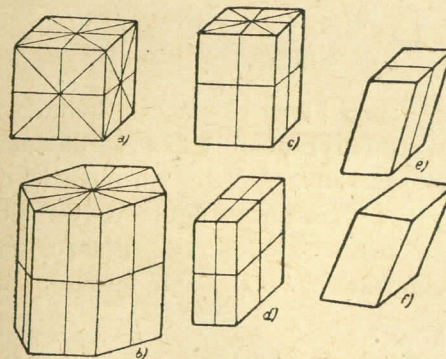


Fig. 243.

Taką symetrię posiadają postacie zupełne kryształów, należących do pierwszego układu krystalograficznego (równosiowego). Postacie drugiego układu krystalograficznego (jednotrójosowego) posiadają siedem płaszczyzn symetrii, n. p. słup sześcioboczny (fig. 243 b). W trzecim układzie: jednodwuosiowym, mamy pięć płaszczyzn symetrii, w czwartym: różnoosiowym trzy, w piątym: jednoskośnym jedną

a w szóstym, trójskośnym, niema żadnej płaszczyzny symetrii. (por. fig. 243 c, d, e, f).

Utwory takie jak postacie szóstego układu krystalograficznego są więc utworami niesymetrycznymi (asymetrycznymi).

Oprócz symetrii względem płaszczyzny mamy jeszcze dwa rodzaje symetrii: symetrię względem punktu i symetrię względem prostej (osi).



nakryła ścianę  $SAC$ , to krawędź  $SB'$  będzie leżała albo za płaszczyzną  $SAC$ , albo przed płaszczyzną ale po lewej stronie krawędzi  $SB$ . Utworów  $SABC$  i  $S'A'B'C'$  nie możemy więc nazwać przystającymi, ponieważ nie posiadają zasadniczej własności figur przystających: nie dadzą się sprowadzić do nakrycia przez ruch mimo, że mają wszystkie części równe. Figury te posiadają natomiast inną niemniej ważną własność. Dadzą się one ustawić tak, że jedno naroże jest zwierciadłowym odbiciem drugiego. Ściślej: naroża te dadzą się tak ustawić, że punkty jednego są symetryczne względem odpowiednich punktów drugiego. Aby to udowodnić, oprzemy się na określeniu symetrycznego położenia. O dwóch punktach  $A$  i  $A'$  w przestrzeni mówimy, że leżą *symetrycznie*, jeżeli są jednakowo oddalone od jednej płaszczyzny, leżą po przeciwnych stronach tej płaszczyzny, ale na tej samej linii prostopadłej do płaszczyzny. Tę płaszczyznę nazywamy **płaszczyzną symetrii punktów  $A$  i  $A'$**  lub płaszczyzną symetralną.

Wykonajmy taką konstrukcję dla czterech punktów  $SABC$  naroża  $S$  (fig. 242) i połączmy  $S'$  z  $A'B'C'$ . Otrzymaliśmy w ten sposób naroże  $S'A'B'C'$ , mające wszystkie elementy równe odpowiednim elementom figury  $SABC$ , ale w odwrotnym porządku. (Np.  $SA = S'A'$ , bo trapezy  $SAXY$  i  $S'A'XY$  są przystające, tak samo  $SB = S'B'$ ,  $AB = A'B'$ , więc  $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \gamma'$ ). Otrzymane w ten sposób naroże nazywa się narożem symetrycznym względem pierwotnego i leży w położeniu symetrycznym.

Naroża trójsienne, mające wszystkie elementy równe ale następujące po sobie w odwrotnym porządku, są utworami symetrycznymi względem siebie.

Określenie to stosujemy do wszystkich utworów przestrzennych wogóle.

Utwory symetryczne w planimetrii, t. j. leżące na jednej płaszczyźnie, można było sprowadzić do nakrycia, trzeba było jednak wyjąć jeden utwór

z płaszczyzny dwuwymiarowej i wykonać obrót w trójwymiarowej przestrzeni. Utwory przestrzenne symetryczne względem siebie trzeba by wyjąć z przestrzeni trójwymiarowej i obrócić w przestrzeni czworowymiarowej. Konstrukcja taka jest jednak niemożliwa w naszej geometrii trójwymiarowej i dlatego utwory przestrzenne symetryczne nie dadzą się sprowadzić do nakrycia.

Podaj kilka przykładów utworów trójwymiarowych symetrycznych względem siebie z życia codziennego!

## § 89. Utwory symetryczne. (Inne rodzaje symetrii).

Utwory geometryczne, dające się rozłożyć zapomocą jakiejś płaszczyzny (przekroju) na dwie części symetryczne względem siebie, nazywamy **utworami symetrycznymi**.

N. p. kostka jest utworem symetrycznym, posiada bowiem płaszczyzny symetrii i to aż dziewięć takich płaszczyzn. Są to trzy płaszczyzny, przechodzące przez środki krawędzi i sześć płaszczyzn, przechodzących przez przekątne przeciwległych ścian (fig. 243 a).

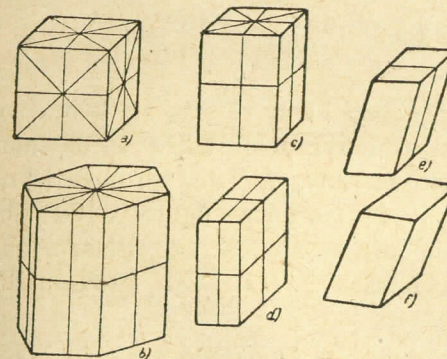


Fig. 243.

Taką symetrię posiadają postacie zupełne kryształów, należących do pierwszego układu krystalograficznego (równosiowego). Postacie drugiego układu krystalograficznego (jednotrójosowego) posiadają siedem płaszczyzn symetrii, n. p. słup sześcioboczny (fig. 243 b). W trzecim układzie: jednodwuosiowym, mamy pięć płaszczyzn symetrii, w czwartym: różnoosiowym trzy, w piątym: jednoskośnym jedną

a w szóstym, trójskośnym, niema żadnej płaszczyzny symetrii (por. fig. 243 c, d, e, f).

Utwory takie jak postacie szóstego układu krystalograficznego są więc utworami niesymetrycznymi (asymetrycznymi).

Oprócz symetrii względem płaszczyzny mamy jeszcze dwa rodzaje symetrii: **symetrię względem punktu** i **symetrię względem prostej (osi)**.



Jeżeli wszystkie punkty jakiejś figury połączymy z jednym punktem  $O$  (fig. 244) i na przedłużeniach tych linii odetniemy odpowiednie odcinki równe, otrzymamy figury symetryczne względem punktu, zwanego **środkiem symetrii**.

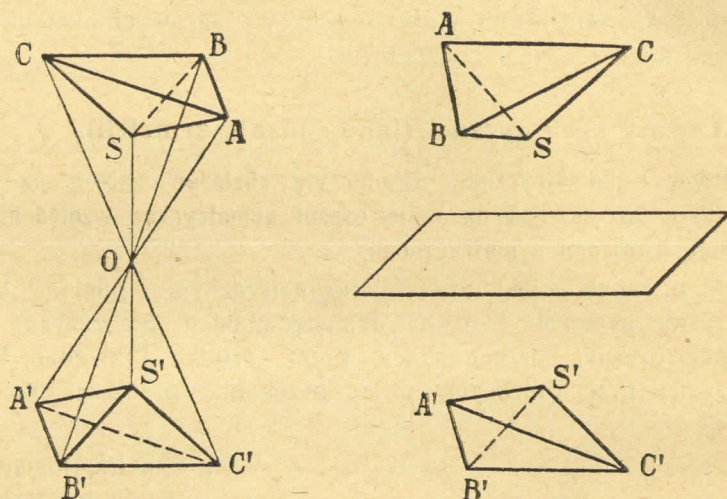


Fig. 244.

Takie figury mają wszystkie odcinki i kąty równe, ale w odwrotnym porządku, są więc figurami symetrycznymi także w dawnym znaczeniu, to znaczy względem płaszczyzny. Aby je sprowadzić do położenia symetrycznego, wystarczy obrócić górną figurę o  $180^\circ$  dookoła pewnej osi, przechodzącej przez środek  $O$ . Płaszczyzną symetrii jest płaszczyzna, przechodząca przez  $O$  a prostopadła do osi obrotu.

Prostym przykładem takich utworów środkowo-symetrycznych jest jakiegokolwiek naroż wraz z narożem wierzchołkowym, t. j. takim narożem, które powstaje przez przedłużenie krawędzi poza wierzchołek (por. fig. 244).

Podobnie określamy symetrię względem linii prostej, zwanej **osią symetrii**. Jeżeli z wszystkich punktów jakiejś figury poprowadzimy linie prostopadłe do osi  $XX$  (fig. 245) i na ich przedłużeniach odetniemy równe odcinki odpowiednie, to otrzymamy figurę symetryczną względem osi  $XX$ . Figury takie, jak to łatwo wykazać, mają wszystkie części składowe równe w tym samym porządku, są więc przystające. Aby je sprowadzić do nakrycia, wystarczy

wykonać obrót o  $180^\circ$  koło osi symetrii. (Punkt  $S$  na fig. 245 leży przed płaszczyzną rysunku a punkt  $S'$  za nią; punkty  $ABC$  obracamy w płaszczyźnie rysunku).

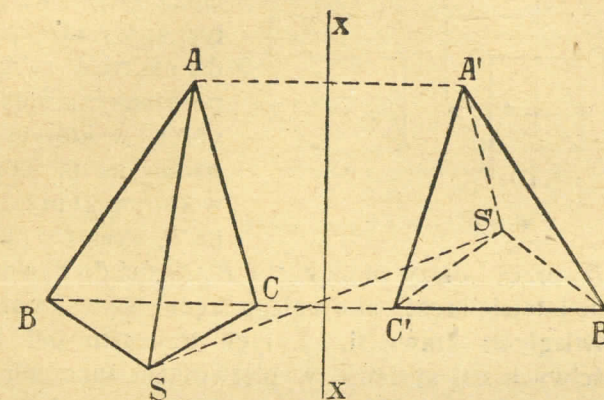


Fig. 245.

Oprócz takich osi symetrii używa się często także **osi symetrii wyższego rzędu**. Weźmy n. p. trójkąt równoboczny (fig. 246) i oś

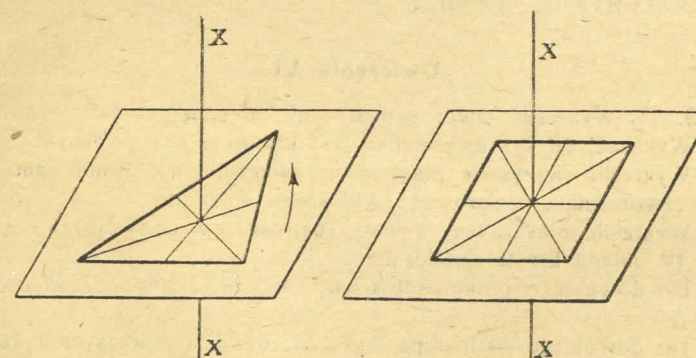
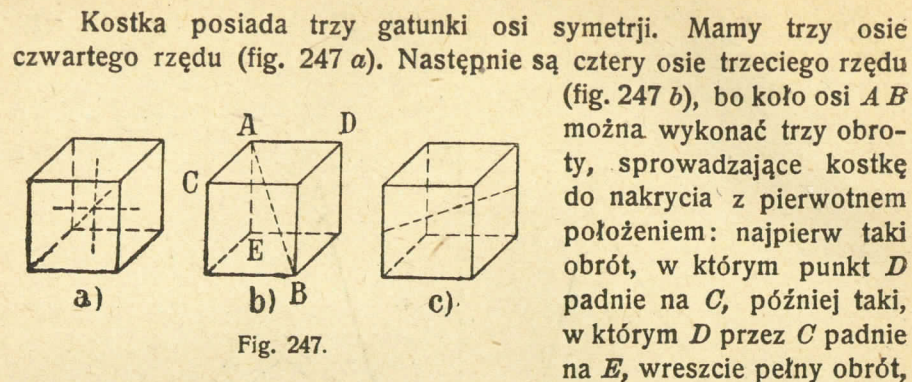


Fig. 246.

prostopadłą do jego płaszczyzny w środku trójkąta. Istnieją tu trzy obroty o  $120^\circ$ , sprowadzające ten trójkąt do nakrycia ze sobą. Taką oś nazywamy osią symetrii trzeciego rzędu. Kwadrat posiada oś symetrii czwartego rzędu. W kwadracie ta oś jest także osią symetrii w pierwotnym znaczeniu, bo obrót połowy kwadratu o  $180^\circ$  sprowadza ją do nakrycia z drugą połową, tymczasem oś trzeciego rzędu trójkąta równobocznego nie posiada tej własności, nie jest więc osią symetrii w znaczeniu pierwotnym.





Kostka posiada trzy gatunki osi symetrii. Mamy trzy osie czwartego rzędu (fig. 247 a). Następnie są cztery osie trzeciego rzędu (fig. 247 b), bo koło osi  $AB$  można wykonać trzy obroty, sprowadzające kostkę do nakrycia z pierwotnym położeniem: najpierw taki obrót, w którym punkt  $D$  padnie na  $C$ , później taki, w którym  $D$  przez  $C$  padnie na  $E$ , wreszcie pełny obrót, przy którym  $D$ , przeszedłszy punkty  $C$  i  $E$ , wróci do dawnego położenia. Wreszcie istnieje sześć osi drugiego rzędu: są to proste, łączące środki przeciwległych krawędzi. Z tych trzynastu osi jest tylko dziewięć właściwych osi symetrii (w pierwotnym znaczeniu), mianowicie osie na fig. 247 a i 247 c. Jest to ogólne prawo, że z pomiędzy osi wyższego rzędu tylko te są właściwymi osiami symetrii, których rząd jest parzysty (drugi, czwarty i t. d.). Za osie krystalograficzne przyjmuje się z reguły osie najwyższych rzędów (n. p. w kostce osie narysowane na fig. 247 a). Płaszczyzny, osie i środki symetrii nazywamy elementami symetrii.

### Ćwiczenia VI

- § 88—89. 1. Wykreślić utwór symetryczny do danej kostki.
2. Wykazać, że kąt dwuścienny jest utworem symetrycznym.
  3. Wykreślić wszystkie płaszczyzny symetrii: a) ośmiościanu umiarkowanego; b) czworościanu umiarkowanego wpisanego w kostkę.
  4. Wykreślić płaszczyzny symetrii ostrosłupów podwójnych, należących do II, III, IV układu krystalograficznego.
  5. Do dowolnego prostopadłościanu wykreślić utwór środkowo-symetryczny.
  6. Do dowolnego ostrosłupa wykreślić utwór osiowo-symetryczny.
  7. Jeżeli jakiś utwór posiada dwie prostopadłe płaszczyzny symetrii, to ich krawędź jest osią symetrii. (Udowodnij!)
  8. Wykazać, że figura, posiadająca jedną płaszczyznę symetrii i jedną prostopadłą do niej oś symetrii, posiada także środek symetrii, mianowicie: spodek tej prostopadłej.
  9. Wykreślić wszystkie osie symetrii: a) ośmiościanu umiarkowanego; b) dowolnego prostopadłościanu.
  10. Jakie elementy symetrii posiada: a) walec prosty; b) stożek prosty; c) kula?
  11. Dwie figury są symetryczne do tej samej trzeciej względem dwóch różnych płaszczyzn. Jaki ruch należy wykonać, aby je sprowadzić do nakrycia?

12. Wykazać przy pomocy symetrii, że punkty, połowiące krawędzie czworościanu umiarkowanego, są wierzchołkami ośmiościanu umiarkowanego.

13. Jakie elementy symetrii posiada kostka, której a) jedna ściana jest czarna a inne białe; b) dwie ściany czarne a inne białe?

14. Jakie elementy symetrii posiada ośmiościan umiarkowany, którego jedno naroże ścięto płaszczyzną, odcinającą równe kawałki czterech krawędzi, schodzących się w tem narożu?

### Rozdział VII

#### O rysunku perspektywicznym

#### §. 90. O perspektywie środkowej (malarskiej).

Zanim przystąpimy do badania brył, musimy się zastanowić nad pewną niedogodnością rysunku. Wspominaliśmy już w planimetrii, że rysunek jest dla nas tylko środkiem pomocniczym, jest niedoskonałym urzeczywistnieniem utworów geometrii idealnej. Zawsze jednak na tym rysunku można było z pewnem przybliżeniem sprawdzić dokładność konstrukcyj i obliczeń a nawet wykonywać przybliżone obliczenia. W stereometrii na pierwszy rzut oka odpadają te wszystkie dogodności. Utwór przestrzenny nie da się narysować na płaszczyźnie nawet w przybliżeniu.

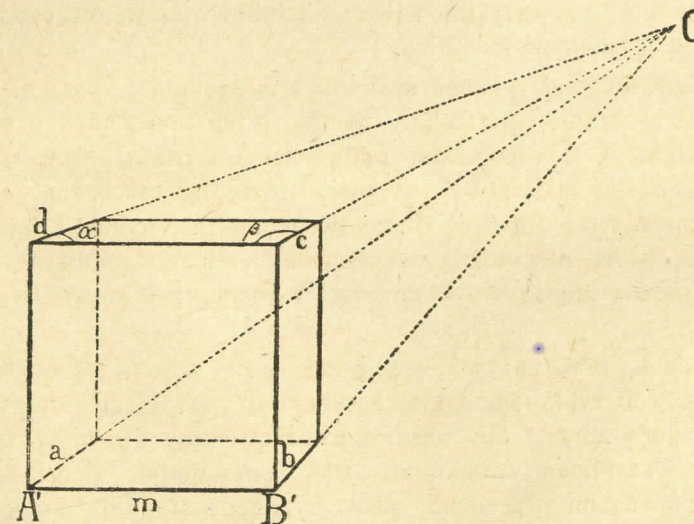


Fig. 248.

To, co rysujemy, jest tylko obrazem płaskim, wywołującym w naszym oku obraz taki sam — lub przynajmniej zbliżony do takiego, jaki powstaje, gdy patrzymy wprost na utwór przestrzenny. N. p. na fig. 248 narysowaliśmy kostkę tak, jak się ona naszemu



oku przedstawia. Ściana tylna, jako dalsza, wydaje się mniejszą od przedniej. Linje  $a, b, c, d$ , które są w rzeczywistości równoległe, zdają się zbiegać ku pewnemu punktowi  $O$ , o czym nas codzienne doświadczenie poucza. Jest to t. zw. „punkt oczny”.

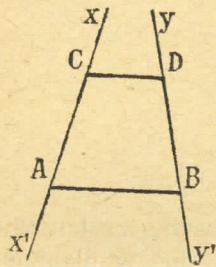


Fig. 249.

*Uwaga:* Obrazy linii równoległych, biegnących od naszego oka, muszą się zbiegać na takim rysunku, ponieważ kąt widzenia przedmiotu bliższego jest zawsze większy, aniżeli kąt widzenia przedmiotu dalszego. A więc odstęp dwóch linii równoległych, który jest wszędzie równy, wyda się nam większy w miejscu  $AB$ , aniżeli w miejscu dalszym  $CD$  (por. fig. 249). Jeżeli więc rysunek ma sprawiać wrażenie rzeczywistości, to musimy odrazu narysować odcinek  $CD$  mniejszy niż  $AB$ . Stąd wynika, że linje równoległe  $xx'$  i  $yy'$  będą się na rysunku przedstawiały jako zbieżne. (Tor kolejowy na rysunku lub na fotografii)!

Linje poziome, równoległe do linji, łączącej nasze oczy, pozostają w rysunku perspektywicznym równoległymi, zarówno jak i linje pionowe.

Kąty proste w naturze występują na rysunku bądźto jako ostre, bądźto jako rozwarte n. p.  $\angle \alpha, \angle \beta$  na fig. 248, a odcinki  $a, b, c, d$ , które powinny być wszystkie równe odcinkowi  $m$ , są wszystkie krótsze i to w rozmaitym stosunku.

Jakkolwiek taki rysunek sprawia w naszym oku złudzenie kostki (najlepsze złudzenie otrzymamy wtedy, jeżeli umieścimy nasze oko nad punktem  $O$  w niewielkiej odległości od płaszczyzny rysunku) i jakkolwiek dla malarstwa ma pierwszorzędne znaczenie, jednakowoż nie nadaje się zupełnie do celów geometrii, techniki i przemysłu. Na figurze takiej nie można skutecznie żadnych pomiarów, jeżeli się nie posiada głębszych wiadomości z geometrii rzutowej a i wtedy obliczenia są bardzo mozolne.

Rysunek taki nazywa się perspektywą środkową lub malarską. Przykładami takiej perspektywy są zdjęcia fotograficzne i każdy dobry obraz. Aby obraz perspektywiczny otrzymać, łączymy oko  $O$  z wszystkimi punktami danego przedmiotu (por. fig. 250) i ten pęk promieni przecinamy płaszczyzną prostopadłą do kierunku widzenia, t. zw. płaszczyzną obrazową. Na tej płaszczyźnie powstanie płaski obraz przedmiotu przestrzennego. Podobny obraz powstaje, jeżeli przedmiot umieszczony przed płaszczyzną obrazową rzuca na nią cień. Cień ten jest także perspektywicznym obrazem przedmiotu jednakże występuje na nim tylko kontur (zarys),

Kierukiem widzenia nazywamy oś stożka, utworzonego przez wszystkie promienie, łączące oko ze skrajnymi widzialnymi punktami.

Ponieważ perspektywa środkowa ma dla celów praktycznych podrzędne znaczenie a konstrukcje potrzebne przy niej są dosyć

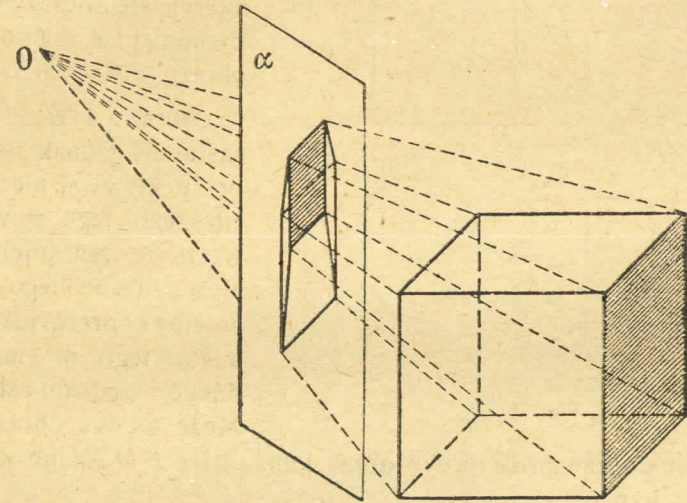


Fig. 250.

złożone, przeto nie będziemy się tutaj zajmowali takim rysunkiem a przejdziemy do znacznie prostszego sposobu przedstawiania utworów geometrycznych, do t. zw. perspektywy równoległej.

## § 91. Perspektywa równoległa.

Wyobraźmy sobie, że oko znajduje się tak daleko od przedmiotu, że promienie, łączące z nim oko, można uważać za wiązkę promieni równoległych. Jeżeli tę wiązkę promieni przetniemy płaszczyzną (t. zw. płaszczyzną obrazową), otrzymamy na niej obraz, zwany perspektywą równoległą.

Rozróżniamy dwa rodzaje perspektywy równoległej zależnie od tego, czy promienie rzucające są prostopadłe do płaszczyzny obrazowej, czy też nachylone. Obraz, powstający przez rzut prostopadły, nazywa się perspektywą równoległą prostopadłą, rzut zaś ukośny tworzy perspektywę równoległą ukośną.

Obydwa te sposoby rysowania przedmiotów łatwo zrozumiemy przy pomocy rysunku kostki (sześciannu).



Zbadajmy najpierw rzut prostopadły. — Ustawmy kostkę jedną ścianą równoległą do płaszczyzny obrazowej (fig. 251), to z wielkiej odległości zobaczymy tylko przednią ścianę; obrazy ścian tylnej i ścian bocznych nakryją się z obrazem ściany przedniej i z obwodem tego obrazu.

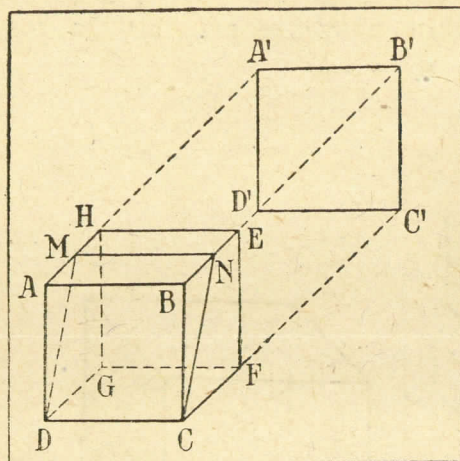


Fig. 251.

ale równie dobrze może to być obraz klina  $ABCDMN$ , lub kwadratu  $ABCD$  i t. p.

Aby na rysunku wystąpiły także ściany boczne kostki, trzeba ją ustawić inaczej, sztuczniej; trzeba jedno naroże zwrócić ku nam. Wtedy wystąpią już na obrazie wszystkie ściany kostki odrębnie (tylne kreskujemy). Proste  $BA$ ,  $BC$ ,  $BE$  prostopadłe do siebie w rzeczywistości tworzą na rysunku kąty rozwarte  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  i doznają pewnych skróceń, zależnych od kątów  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  a różnych dla każdej z tych linii (por. fig. 252).

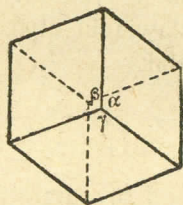


Fig. 252.

Konstrukcja jest tylko wtedy łatwa, jeżeli kostkę umieścimy symetrycznie przed płaszczyzną rysunku tak, aby nachylenie wszystkich krawędzi do płaszczyzny obrazowej było jednakowe (po  $45^\circ$ ). Wtedy kąty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  będą wynosiły po  $120^\circ$  a wszystkie krawędzie doznają tego samego skrócenia. Obrazem kostki będzie sześciokąt umiarkowany z wykreślonymi przekątnymi (por. fig. 253).

Takie obrazy nazywamy już perspektywą równoległą (prostopadłą) i bywają one używane w technice. Dla nas jednak ważniejsze są rzuty ukośne.

Rzut ukośny każdej figury, leżącej na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny obrazowej, jest przystający do tej figury (por. fig. 254

Obraz  $A'B'C'D'$  nie zasługuje jednak na nazwę perspektywy w pierwotnym znaczeniu tego słowa. Słowo to bowiem pochodzi od słowa łacińskiego: „*perspicio*” = przeglądam a z rysunku tego nie mamy żadnego przeglądu całej bryły. Może to być obraz kostki,

i § 83) a więc ani odcinki ani kąty tej figury nie doznają w rzucie żadnej zmiany.

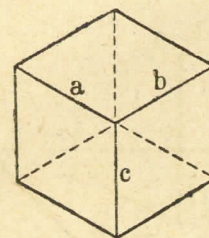


Fig. 253.

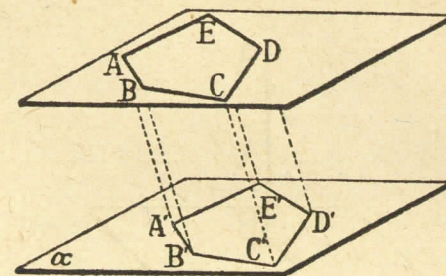


Fig. 254.

Zbadajmyż teraz, jakim zmianom ulegają odcinki prostopadłe do płaszczyzny rzutów. Aby utworzyć rzut odcinka  $AB$  (fig. 255) prostopadłego do  $p$ , wykreślamy z punktu  $A$  prostą  $AA'$ , nachyloną dowolnie do płaszczyzny.

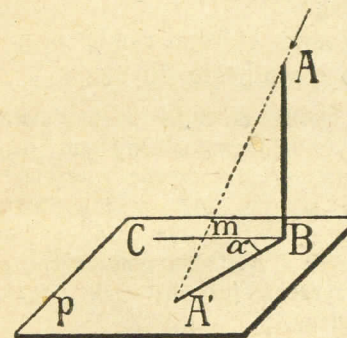


Fig. 255.

Prosta  $AA'$  jest promieniem rzucającym a odcinek  $A'B$  jest ukośnym rzutem odcinka  $AB$ .

Z tej figury widzimy:

1. Rzut ukośny odcinka prostopadłego do płaszczyzny obrazowej może być krótszy lub dłuższy od tego odcinka i to w dowolnym stosunku, zależnym od kąta nachylenia promieni rzucających. Ten stosunek:

$$A'B : AB = s$$

nazywamy **skróceniem** rzutu ukośnego, ponieważ zwykle dla wyrazistości rysunku obieramy kierunek promieni tak, aby  $A'B < AB$ .

W przeciwnym razie ten stosunek należałoby nazwać powiększeniem.

2. Zależnie od tego, z której strony pada promień rzucający, rzut  $A'B$  tworzy rozmaite kąty z prostą  $m$  równoległą do osi naszych oczu. Kąt ten może być ostry, rozwarty a nawet wypukły (por. fig. 256 a, b). Gdybyśmy zwrócili uwagę na kąt prosty, utworzony przez odcinki  $AB$  i  $m$ , to rzutem jego na płaszczyznę  $p$  jest właśnie kąt



$\alpha = \angle A'BC$ . Widzimy więc, że kąt prosty, którego jedno ramię jest równoległe do osi oczu a drugie prostopadłe do płaszczyzny obra-

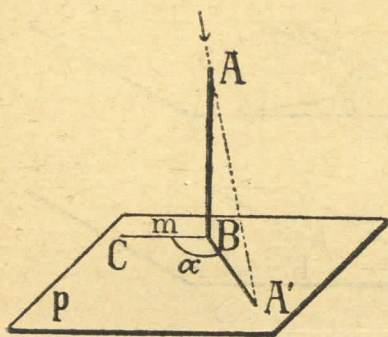


Fig. 256 a.

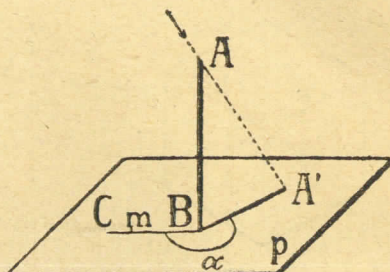


Fig. 256 b.

zowej, doznaje z reguły zmiany: zmienia się on na kąt  $\alpha$  ostry, rozwarty lub wypukły. Kąt ten nazywamy kątem skrócenia ramienia  $AB$  lub kątem zniekształcenia rzutu ukośnego.

Takiej samej zmiany doznaje kąt prosty, którego ramię  $m$  nie leży na płaszczyźnie obrazowej, byle było równoległe do niej.

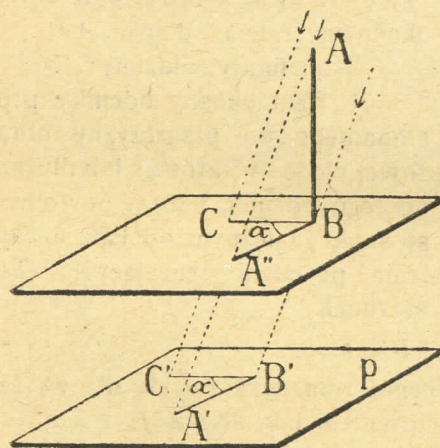


Fig. 257.

Dla dowodu trzeba utworzyć najpierw ukośny rzut tego kąta na płaszczyznę równoległą do  $p$  (fig. 257) a zawierającą ramię  $BC$ . Potem rzucamy ten twór  $CBA''$  na płaszczyznę  $p$ , przyczem już kąt nie dozna zmiany.

Obracszy pewien kierunek promieni padających, otrzymamy pewne skrócenie i skrócenie. Można jednak także postąpić odwrotnie: obrać z góry pewne skrócenie i skrócenie a przez to już będzie określony kierunek promieni rzucających (n. p. na fig. 256, znając kąt  $\alpha$  i stosunek  $AB : A'B$ , wykreślamy dowolny odcinek  $AB$ , obliczamy  $A'B$  i wykreśliwszy  $A'B$  pod żądanym kątem, łączymy  $A$  z  $A'$ ).

Do wyznaczenia rzutu ukośnego wystarczy zatem podać skrócenie  $s$  i skrócenie  $\alpha$ .

Prawa rzutu ukośnego wystąpią jeszcze jaśniej, jeżeli zamiast odcinków weźmiemy pod uwagę jakąś prostą bryłę, n. p. kostkę. Ustawmy kostkę tak, aby jedna ściana była równoległa do płaszczyzny rysunku a dno poziome (wyobraźmy sobie, że płaszczyzna rysunku jest pionowa, n. p. tablica). Jeżeli na tę kostkę patrzymy z wielkiej odległości (ukośnie z boku), to oko nie odczuwa różnicy zbieżności promieni, pochodzących od ściany tylnej a ściany przedniej kostki na fig. 258. Wtedy widzimy i tylną i przednią ścianę w równej wielkości a wobec tego linie  $a, b, c, d$  muszą być na rysunku równoległe. Wogóle przy rzucie ukośnym obrazami linii równoległych są zawsze linie równoległe — co bardzo upraszcza konstrukcję w porównaniu z perspektywą środkową. Natomiast kąty proste kostki, leżące przy linjach biegnących ku nam, ulegną

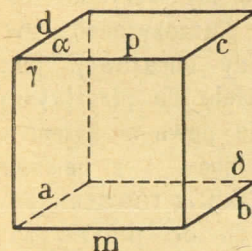


Fig. 258.

zniekształceniu i to tem większemu, im bardziej z boku patrzymy. Dobiera się zwykle takie stanowisko, aby kąt prosty zamienił się na  $\alpha = 30^\circ, 60^\circ$ , lub  $45^\circ$ , wtedy bowiem konstrukcja łatwiejsza (n. p. na fig. 258 jest  $\alpha = 30^\circ$ ). Kąty, leżące w płaszczyznach równoległych do nas, rysujemy niezmiennione, a więc  $\gamma = 90^\circ, \delta = 90^\circ$  i t. p. Długość linii  $a, b, c, d$  rysuje się albo równą długości  $m$  — a więc w naturalnej wielkości — albo też skracamy te linie w pewnym stałym stosunku, jednakowym dla wszystkich linii równoległych do  $a$ . N. p. na fig. 258 skrócenie  $s$  czyli stosunek  $a : m$  wynosi  $1/2$ .

Na fig. 259 narysowaliśmy kostkę dla:

- a)  $\alpha = 45^\circ, s = 1$ ,
- b)  $\alpha = 45^\circ, s = 1/2$ ,
- c)  $\alpha = 45^\circ, s = 1/3$ ,
- d)  $\alpha = 60^\circ, s = 1/2$ ,
- e)  $\alpha = 30^\circ, s = 1/3$ .

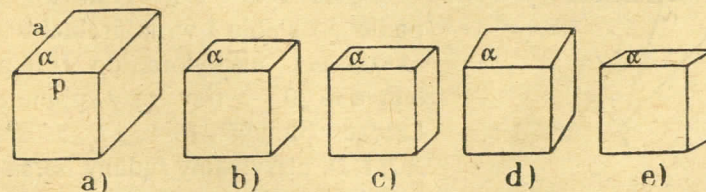


Fig. 259.

Możnaby podobnie odchylić odcinek  $a$  na lewo od odcinka  $p$  (jeżeli patrzymy na kostkę z lewej strony) lub nawet w dół od  $p$  (jeżeli patrzymy na kostkę z dołu).



N. p. na fig. 260: a)  $\alpha = 135^\circ$ ,  $s = \frac{1}{2}$ , b)  $\alpha = 225^\circ$ ,  $s = \frac{1}{2}$ .

Zamiast skrócenia może nastąpić także wydłużenie, jeżeli n. p. odcinki leżą prostopadłe do promieni rzucających.

Zbierając te spostrzeżenia razem powiemy:

aby jakiś przedmiot przedstawić w perspektywie ukośnej, rysujemy wszystkie odcinki i kąty, leżące w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny obrazowej, jako równe. Odcinki prostopadłe do płaszczyzny obrazowej rysujemy pod pewnym kątem  $\alpha$

dowolnym, ale równym dla tych wszystkich odcinków i z pewnym zmniejszeniem  $s$  (lub powiększeniem) — w porównaniu z równymi odcinkami, leżącymi na płaszczyznach równoległych do płaszczyzny obrazowej — dowolnym, ale jednakowym dla wszystkich tych odcinków.

Do narysowania kostki, deski, belki prostokątnej wystarczą te objaśnienia zupełnie. Jeżeli jednak na przedmiocie, którego obraz perspektywiczny mamy narysować, występują także linie ukośne, to z góry nie wiemy, ani jakiemu zniekształceniu ulegną ich kąty nachylenia, ani w jakim stosunku należy je pomniejszyć. Jednakże łatwo te linie powiązać z liniami prostopadłymi i równoległymi do płaszczyzny obrazowej. Wyjaśnimy to na przykładach.

1. Chcemy narysować ośmiościan umiarowy o osi 4 cm, używając kąta  $\alpha = 20^\circ$  (zamiast  $90^\circ$ ) i zmniejszenia  $s = \frac{1}{3}$ . Wiemy, że w ośmiościanie umiarowym naroża leżą na końcach trzech osi równych i prostopadłych do siebie (układ równoosiowy w krystalografii). Ustawiamy ośmiościan tak, aby był jednym narożem zwrócony do płaszczyzny obrazowej.

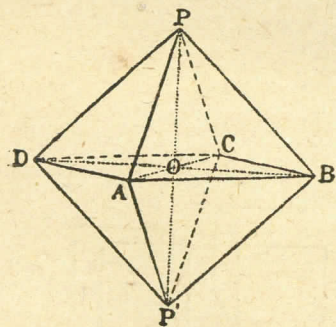


Fig. 261.

Osie  $DB$  i  $PP'$  rysujemy prostopadłe do siebie i w naturalnej wielkości, oś zaś  $AC$  nachyloną do  $DB$  pod kątem  $\alpha = 20^\circ$  i trzy razy pomniejszoną. Łącząc punkty  $P$  i  $P'$  z punktami  $A, B, C, D$ , otrzymamy żądany obraz ośmiościanu.

Widzimy tu zarazem, żeśmy otrzymali ukośne rzuty krawędzi  $AP, CP, AP', CP'...$  nachylonych do płaszczyzny obrazowej, nie znając ani ich zmniejszenia, ani zniekształcenia kątów  $PAO$  i t. d.

2. Narysować gwiazdę, której podstawę tworzą dwa trójkąty równoboczne o bokach po 3,4 cm, obrócone względem siebie o  $60^\circ$  około środka trójkąta, a której wysokość wynosi 1 cm. Potrafimy łatwo przedstawić w perspektywie równoległej prostokąt, przeto opisujemy na danej podstawie (fig. 262) prostokąt  $YZ$  (możliwie najmniejszy) i rysujemy go w perspektywie:  $Y'Z'$ .

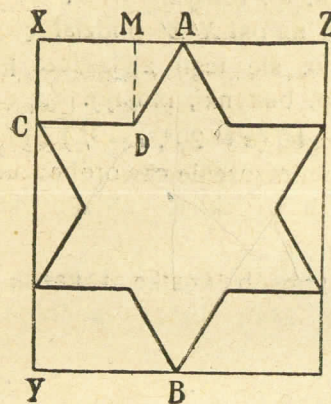


Fig. 262.

Obierzmy n. p.  $\alpha = 45^\circ$ ,  $s = \frac{1}{2}$ . Wierzchołki  $A, B$  przenosimy w niezmienionej odległości od punktów  $X', Y'$ . Wierzchołki boczne trzeba już przenieść w połowie odległości od  $X$  i  $Y$ . Więc n. p.  $X'C' = \frac{1}{2}XC$ .

Trudność sprawia tylko przeniesienie wierzchołków, nie leżących na obwodzie prostokąta. Otóż punkt  $D$  ma odległości  $DC$  i  $DM$  od sąsiednich boków prostokąta. Odległość  $DC$  czyli  $MX$  przenosimy bez zmiany, odległość zaś  $DM$  czyli  $XC$  trzeba zmniejszyć o połowę. Otrzymamy w ten sposób punkty  $M'$  i  $C'$ . Kreśląc z nich linie równoległe do  $X'Y'$  i  $X'Z'$ , otrzymamy punkt  $D'$ . (W jaki sposób możnaby łatwiej otrzymać punkt  $D'$ ?). W podobny sposób przenosimy dalsze wierzchołki. Kreśląc w punktach  $A'B'C'D'...$  linie prostopadłe do  $Y'B'$  i odcinając na nich prawdziwą wysokość (1 cm), otrzymamy także górne dno gwiazdy. Na fig. 263 przedstawiliśmy rysunek wykończony z wypuszczeniem krawędzi zakrytych.

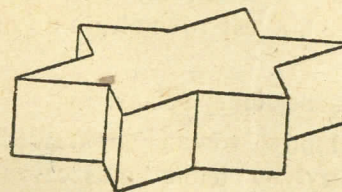


Fig. 263.

Odległości  $DM$  i  $DC$  punktu  $D$  od dwóch linii (osi) prostopadłych



$XZ$  i  $XY$  nazywamy współrzędnymi prostokątnymi punktu  $D$ ; odległości ukośne  $D'M'$  i  $D'C'$  punktu  $D'$  od dwóch linii (osi) ukośnych  $X'Z'$  i  $X'Y'$  nazywamy współrzędnymi ukośnymi. Metoda, jakiejśmy tu użyli, polegała na przeniesieniu współrzędnych każdego punktu z układu prostokątnego do układu ukośnokątnego. Aby sobie ułatwić pomniejszanie odległości, odcina się już od razu na osiach  $XY$  i  $XZ$  jakąś podziałkę, n. p. centymetrową; na osi  $X'Y'$  odcina się podziałkę zmniejszoną a na osi  $X'Z'$  podziałkę taką samą, jak na osiach  $XZ$  i  $XY$ . Używa się tego zwłaszcza przy bardzo skomplikowanych rysunkach (n. p. budynki, mosty).

3. Wykreślić w perspektywie równoległej ( $\alpha = 20^\circ$ ,  $s = \frac{1}{3}$ ) sześcio-czworościan, t. j. bryłę, powstającą przez umieszczenie czworobocznego ostrosłupa na każdej ścianie kostki. Niech wysokość każdego ostrosłupa wynosi  $\frac{1}{4}$  krawędzi kostki.

W tym celu rysujemy w znany sposób kostkę i każdą oś przedłużamy o  $\frac{1}{4}$  część krawędzi (fig. 264). Łącząc końce tych

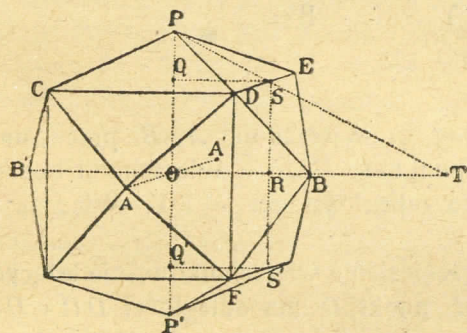


Fig. 264.

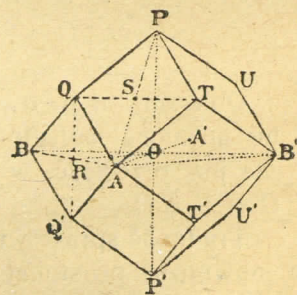


Fig. 265.

przedłużonych osi z narożami kostki, otrzymujemy żadaną bryłę. Z figury tej widzimy zarazem, że ściana  $PDE$  tworzy na osiach odcinki, pozostające w stosunku  $1:2:\infty$ , t. j. jest równoległa do osi  $AA'$ , a  $PO:OT = 1:2$ .

Taki sam jest stosunek odcinków każdej innej ściany.

Gdybyśmy obrali wysokość ostrosłupów równą  $\frac{1}{2}$  krawędzi kostki, to ściany  $PDC$  i  $ADC$  utworzyłyby jedną płaszczyznę, a także wszystkie inne pary odpowiednich ścian i otrzymalibyśmy znany z krystalografii dwunastościan rombowy (por. fig. 265). Z figury tej łatwo sprawdzić, że stosunki odcinków każdej ściany na osiach są  $1:1:\infty$ .

Powróćmy do rzutu ukośnego kostki. Jeżeli kostkę ustawimy także ukośnie, to trzy krawędzie  $a$ ,  $b$ ,  $c$  prostopadłe do siebie wystąpią na rysunku jako

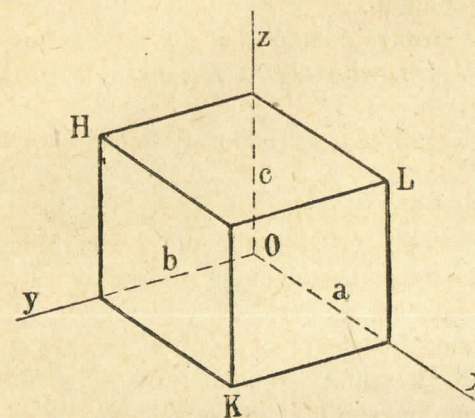


Fig. 266.

proste nachylone pod pewnymi dowolnymi kątami i każda z nich będzie pomniejszona, w ogólności każda w innym stosunku. Z końców tych odcinków kreślimy linie równoległe do  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i równe  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a z ich punktów przecięcia się  $H, K, L$  znowu linie równoległe do osi i w ten sposób uzupełniamy całkowity obraz kostki (fig. 266). Przedłużenia krawędzi

$OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  prostopadłych w naturze a na rysunku nachylonych. Na każdej z tych osi odcinamy podziałkę, n. p. centymetrową (fig. 267), to na rysunku podziałka na każdej osi będzie inna, ale dowolna.  $OM = 1 \text{ cm}$ ,  $ON$  już jest mniejsze od  $1 \text{ cm}$ , ale przedstawia obraz  $1 \text{ cm}$ , tak samo  $OP$ . Mając taką podziałkę na trzech osiach, możemy już każdy przedmiot narysować, jeżeli tylko znamy prawdziwe odległości jego punktów od płaszczyzn  $XOY$ ,  $XOZ$ ,  $YOZ$ . Te odległości nazywamy przestrzennymi współrzędnymi punktu. N. p. wiedząc, że jakiś punkt

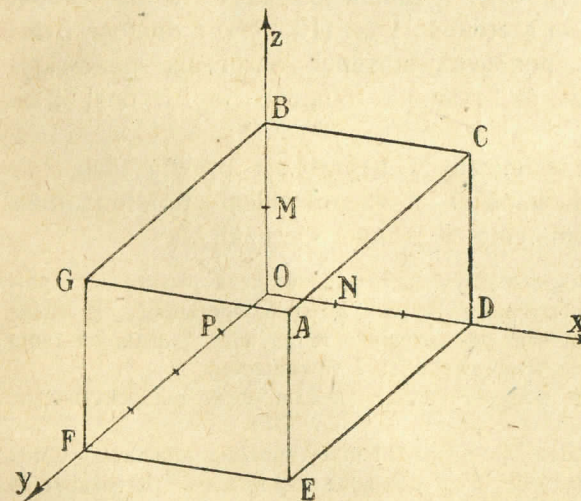


Fig. 267.

jest w rzeczywistości odległy o  $2 \text{ cm}$  od płaszczyzny  $YOX$ , o  $3 \text{ cm}$  od płaszczyzny  $ZOY$  i o  $4 \text{ cm}$  od płaszczyzny  $ZOX$ , znajdziemy



jego obraz, odcinając na osiach  $OZ$ ,  $OX$ ,  $OY$  odpowiednio dwie, trzy i cztery jednostki podziałki i kreśląc następnie  $DE \parallel OY$  i równe  $OF$  a z punktu  $E$  linię  $AE \parallel OZ$  i równą  $OB$ . Koniec  $A$  tego odcinka jest obrazem żadanego punktu.

Moglibyśmy także z innej strony dostać się do tego samego punktu, n. p. kreśląc  $BC \parallel OX$  i równe  $OD$  a z punktu  $C$  prostą  $CA \parallel OY$  i równą  $OF$  i t. p.

Kreśląc w ten sposób współrzędne punktów jakiejś bryły, możemy otrzymać całkowity jej obraz.

W dalszym ciągu będziemy używali wyłącznie takiego położenia przedmiotu, aby osie  $OZ$  i  $OX$  były prostopadłe do siebie. Wtedy na tych osiach odcina się prawdziwą, niezmienną podziałkę, a tylko na osi  $OY$  podziałka jest zmniejszona.

Tego sposobu przedstawiania będziemy używali we wszystkich naszych rysunkach. Jakkolwiek na takim rysunku utwory geometryczne występują zniekształcone, jednakowoż wiemy już teraz, jak wielkie jest to zniekształcenie. Z figury takiej można już odczytać wymiary. N. p. belka prostokątna przedstawiona na fig. 268 w perspektywie równoległej:  $\alpha = 45^\circ$ ,  $s = \frac{1}{3}$ , w pomniejszeniu 1:10 ma grubość i szerokość 1 dm (10.1 cm) a długość 6 dm, ponieważ stosunek skrócenia perspektywicznego wynosi  $\frac{1}{3}$  a na rysunku długość jej wynosi 2 cm (2 cm  $\cdot$  3. 10 = 6 dm).

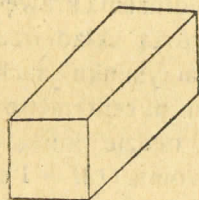


Fig. 268.

Dlatego do celów technicznych używa się prawie wyłącznie perspektywy równoległej ukośnej z zachowaniem prostopadłości dwóch osi i ze skróceniem tylko w jednym kierunku.

*Uwaga:* żaden rysunek perspektywiczny nie wyznacza jeszcze w zupełności wielkości i kształtu przedmiotu. Łatwo bowiem sprawdzić, że różne przedmioty wstawione w ten sam pęk promieni mogą mieć jednakowe rzuty i to zarówno w perspektywie środkowej, jak i równoległej.

N. p. kula  $K$  i stożek ścięty  $S$  mają ten sam obraz perspektywiczny (fig. 269).

Tak samo kula  $K$  i walec  $W$  na fig. 270 mają zupełnie jednakowy obraz w perspektywie równoległej. Aby mieć dokładne wyobrażenie o rozmiarach i postaci bryły, trzeba podać dwa rzuty, na dwie rozmaite płaszczyzny nachylone do siebie, za pomocą dwóch odmiennych pęków promieni (obrazy stereoskopowe w optyce). N. p. gdybyśmy na fig. 270 — dodali jeszcze rzut prostopadły na płaszczyznę poziomą, spostrzeżlibyśmy tam, że walec  $W$  jest ograniczony dwoma kołami i powierzchnią boczną, podczas kiedy kula  $K$  przedstawi się jako koło. Takie badanie

postaci i wielkości ciał przy pomocy dwóch rzutów stanowi osobny dział geometrii, zwany „geometrią wykreślną”. Metodę tę omówimy osobno w następnym rozdziale.

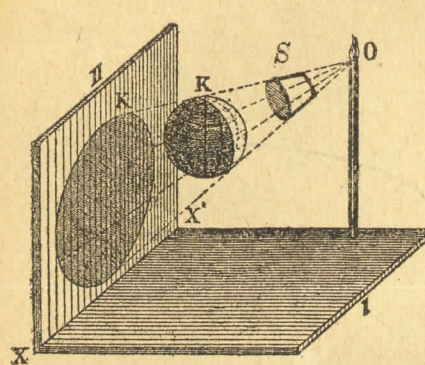


Fig. 269.

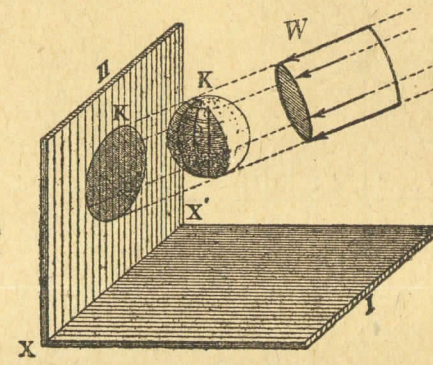


Fig. 270.

Najpospoliej wystarcza jednak zamiast drugiego rzutu jakieś proste dodatkowe określenie. N. p. z rysunku gwiazdy na fig. 263 nie wiemy jeszcze, czy wszystkie krawędzie boczne są prostopadłe do podstawy, czy też nachylone ku nam, ale znacznie dłuższe. Jeżeli jednak dodamy do opisu tej gwiazdy, że krawędzie boczne są w naturze prostopadłe, to już wszystko z tej figury odczytać możemy. Gdybyśmy zamiast tego podali jeszcze drugi rzut, n. p. widok gwiazdy z boku, to widzielibyśmy na tym rysunku, czy krawędzie boczne są pochylone, czy też prostopadłe.

## § 92. Ukośny rzut koła. Elipsa.

W wielu konstrukcjach będzie nam potrzebny ukośny rzut koła (n. p. przy rysowaniu w perspektywie walca, stożka, kuli).

Pomyślimy koło, leżące poziomo a płaszczyznę rysunku (obrazową) pionowo. Średnica  $AB$  (fig. 271) przedstawi się na rysunku w prawdziwej wielkości:  $A'B' = AB$ , średnica zaś  $CD \perp AB$  przedstawi się jako odcinek  $C'D'$  nachylony do  $A'B'$  pod kątem  $\alpha$  i zmniejszony odpowiednio. Na naszym rysunku użyliśmy  $\alpha = 45^\circ$  i  $s = \frac{1}{2}$ .

Aby znaleźć inne punkty, prowadzimy dowolną cięciwę równoległą do  $CD$ , n. p. 12, odcinamy jej odległość od środka w niezmienną wielkość  $O'P' = OP$  i skracamy odcinki  $P1$  i  $P2$  do  $\frac{1}{2}$  długości a następnie przenosimy je na linię  $1'2'$  równoległą do  $C'D'$ .

Jeżeli w ten sposób narysujemy dowolnie wiele cięciw w perspektywie i końce ich połączymy jedną nieprzerwaną linią, otrzymamy jako obraz koła linię krzywą, podobną do spłaszczonego koła. Linia ta nazywa się elipsą. Elipsa jest to zatem ukośny rzut koła.



Gdybyśmy mieli podane odwrotnie: osie  $A'B'$  i  $C'D'$  elipsy (tak zwane średnice sprzężone), to przy pomocy koła o promieniu  $O'A'$  otrzymalibyśmy z łatwością wszystkie inne punkty elipsy.

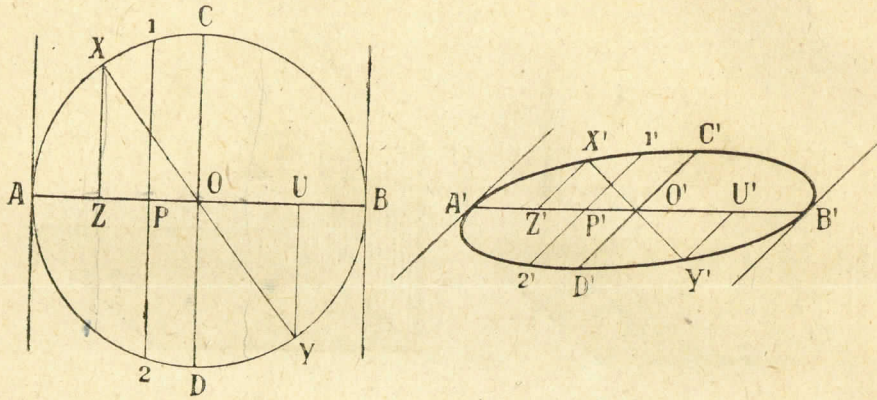


Fig. 271.

Elipsę można także otrzymać z prostopadłego rzutu koła, jednakowoż koło musi być wtedy nachylone do płaszczyzny obrazowej.

Przy pomocy ukośnego rzutu koła można już narysować w perspektywie równoległej takie bryły, jak walec, stożek, kula i t. p.

N. p. na fig. 272 a i 272 b przedstawiony jest walec i stożek dla  $\alpha = 45^\circ$ ,  $s = \frac{1}{2}$ . Na tych figurach są także uwidocznione po dwa prostopadłe do siebie przekroje, zawierające oś walca i stożka.

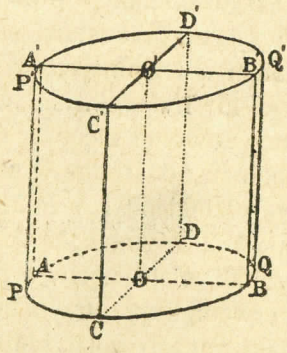


Fig. 272 a.

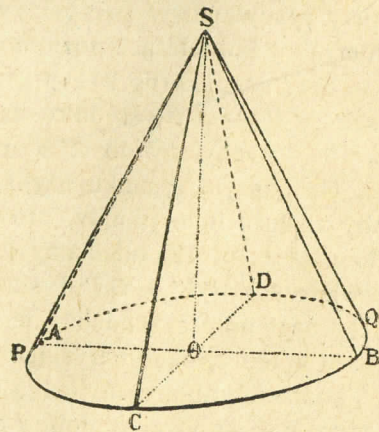


Fig. 272 b.

Uwaga: linie  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $SA$  i  $SB$ , leżące na płaszczyźnie obrazowej, nie są skrajnymi liniami obrazu. Zlewają się one z liniami skrajnymi tylko wtedy, jeżeli  $\alpha = 90^\circ$  lub w przybliżeniu, gdy  $\alpha$  mało się różni od  $90^\circ$ .

Na fig. 273 mamy przedstawioną półkulę niebieską wraz z drogami, jakie zakresłają gwiazdy  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ . Rysunek jest przedstawiony w perspektywie równoległej:  $\alpha = 70^\circ$ ,  $s = \frac{1}{3}$ .

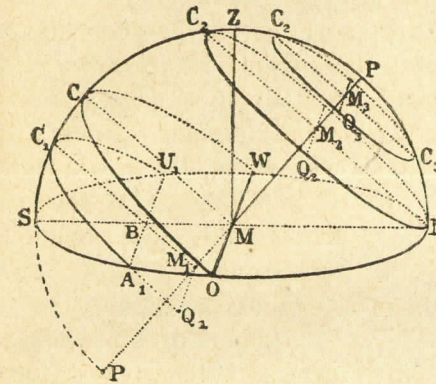


Fig. 273.

Gdybyśmy obrali mniejszy kąt  $\alpha$ , to elipsy  $C_3 C'_3$ ,  $C_2 N \dots$  wystawałyby poza koło  $SZN$ . Konstrukcję każdej z tych elips wykonuje się tak, jak na fig. 271, dobierając do każdej odpowiednie koło pomocnicze. N. p. do zbudowania elipsy  $C_2 N$  wykreśla się koło pomocnicze o promieniu  $M_2 C_2$ .

Podobnie jak w kole cięciwa, przechodząca przez  $O$ , jest przepołowiona w tym punkcie, tak i w elipsie każda cięciwa, przechodząca przez  $O$ , (fig. 271), jest przepołowiona punktem  $O'$ . Aby to wykazać, weźmy pod uwagę dowolną cięciwę n. p.  $X'Y'$  przechodzącą przez  $O'$ . Jest ona obrazem średnicy  $XY$ , którą znajdziemy, prowadząc  $X'Z'$  i  $U'Y'$  równoległe do  $C'D'$  i odcinając w kole  $OZ$  i  $OU$  równe  $O'Z'$  i  $O'U'$ . Prostopadłe  $ZX$  i  $UY$  do prostej  $AB$  wyznaczają na kole końce odpowiedniej średnicy. Ponieważ  $XZ = UY$  (II przypadek przystawania), to i ich połowy są równe, t. j.  $X'Z' = U'Y'$ . Wobec tego  $X'Z'O' \cong U'Y'O'$  (II) a więc  $X'O' = O'Y'$ . Więc istotnie dowolna cięciwa  $X'Y'$ , przechodząca przez  $O'$ , jest w tym punkcie przepołowiona.

Z tego powodu punkt  $O'$  nazywa się środkiem elipsy a każda cięciwa, przechodząca przez środek, nazywa się średnicą elipsy. Średnice takie, jak  $A'B'$  i  $D'C'$ , które są obrazami prostopadłych średnic koła, zwą się średnicami sprzężonymi. Średnice sprzężone mają tę własność, że jedna połowi cięciwy równoległe do drugiej. N. p.  $A'B'$  (fig. 271) połowi nie tylko średnicę  $C'D'$ , ale i każdą cięciwę do niej równoległą — jak to wynika z samej konstrukcji.

Odwrotnie  $C'D'$  (fig. 274) połowi nie tylko średnicę  $A'B'$ , ale także wszystkie cięciwy do niej równoległe, n. p. cięciwę  $M'N'$  dla-



tego, że  $M'N'$  jest obrazem cięciwy koła równoległej do średnicy  $AB$ ; w kole zaś cięciwa  $CD = AB$  położy wszystkie równoległe do  $AB$  cięciwy a w rzucie te cięciwy nie ulegają zmianie. To samo możemy wykazać o każdej innej parze średnic sprzężonych. Stąd łatwo otrzymać konstrukcyjnie średnice sprzężone i środek elipsy, jeżeli tylko sama linia krzywa jest narysowana. Kreśli się kilka równo-

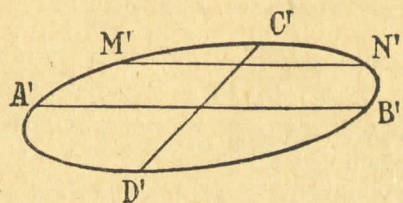


Fig. 274.

ległych cięciw  $c'c''c'''$  (fig. 275) w dowolnym kierunku i środki ich łączy się linią  $MN$ . Następnie kreśli się cięciwy  $d, d'...$  równoległe do  $MN$ , to linia  $PR$ , łącząca ich środki, jest średnicą sprzężoną z  $MN$  a punkt  $O$  środkiem elipsy.

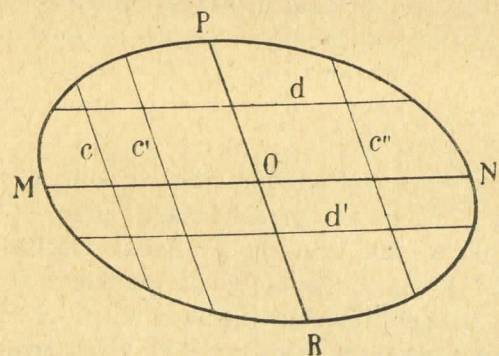


Fig. 275.

na fig. 271 — które są równoległe do  $CD$  — odpowiadają proste poprowadzone przez punkty  $A'$  i  $B'$  równoległe do  $C'D'$ , które muszą być stycznymi do elipsy. Stąd wynika łatwa konstrukcja stycznej w dowolnym punkcie elipsy. Trzeba przez ten punkt  $S$  (fig. 276) wykreślić średnicę  $SL$ , znaleźć średnicę sprzężoną do niej:  $KH$  (jako linję, połowiącą cięciwy równoległe do  $SL$ ) i wykreślić przez punkt  $S$  linję równoległą do  $KH$ . Jest ona styczną do elipsy.

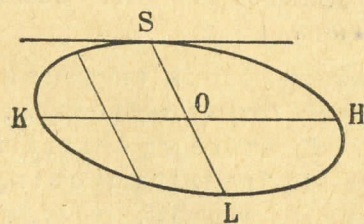


Fig. 276.

Do wyznaczenia koła wystarcza jedna średnica, do wyznaczenia zaś elipsy potrzeba dwóch średnic sprzężonych. Aby zbudować elipsę, należącą do danych średnic sprzężonych  $A'B'$  i  $C'D'$ , uważamy ją za rzut koła o średnicy  $A'B'$ . Zakreślamy koło na średnicy  $A'B'$

i rysujemy średnicę  $CD \perp A'B'$ , to  $C'D'$  jest obrazem średnicy  $CD$ . Połączmy  $C$  z  $C'$ , to tę linję  $CC'$  możemy uważać za promień,

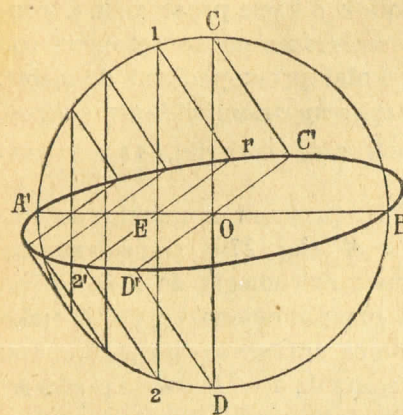


Fig. 277.

rzucający punkt  $C$  na płaszczyznę  $A'D'B'C'$ , prostopadłą do linii  $CD$  (fig. 277). Inne promienie, rzucające inne punkty obwodu koła, muszą być równoległe do  $CC'$ . Aby więc znaleźć obraz cięciwy 12, prowadzimy z punktów 1 i 2 promienie równoległe do  $CC'$  a przez punkt  $E$  linję równoległą do  $C'D'$ , która jest obrazem cięciwy 12. Punkty przecięcia się tej cięciwy z ukośnymi promieniami 11' i 22' są już punktami elipsy. W ten sposób można szybko

można szybko otrzymać dowolnie wiele punktów elipsy.

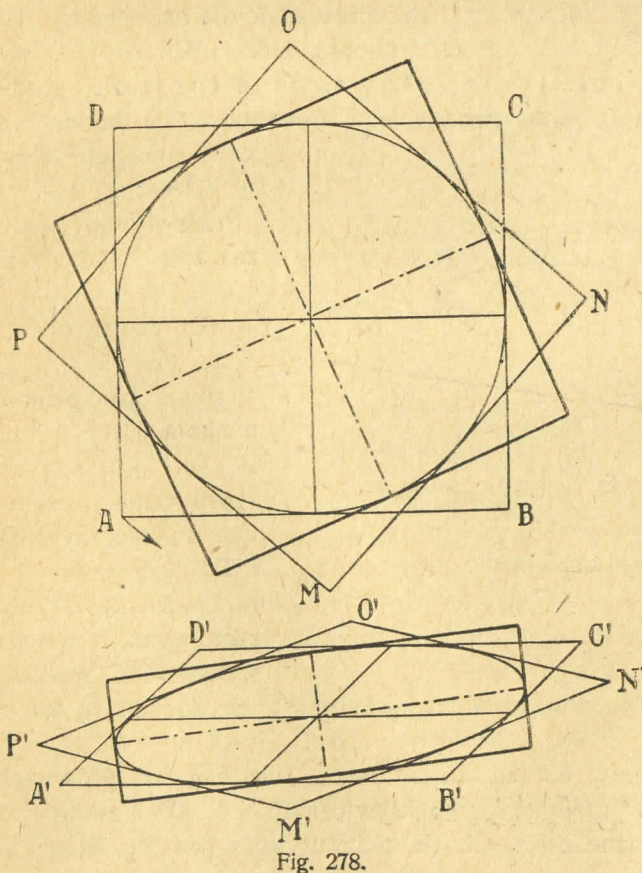


Fig. 278.

Pomiędzy średnicami sprzężonymi znajduje się jedna para średnic sprzężonych prostopadłych. Aby to wykazać, opiszmy na kole kwadrat  $ABCD$  (fig. 278). Na elipsie odpowiada temu kwadratowi równoległobok  $A'B'C'D'$  opisany na elipsie. Jeżeli kwadrat  $ABCD$  obrócimy w położenie  $MNOP$ , to na elipsie



otrzymamy równoległobok  $M'N'O'P'$ . Kąt  $A'$  zamienił się z ostrego na rozwarty  $M'$ . Musiało więc istnieć takie pośrednie położenie kwadratu, któremu odpowiadał równoległobok o kącie prostym, t. j. prostokąt. Osie symetrii tego prostokąta są średnicami sprzężonymi (bo odpowiadają prostopadłym średnicom koła) prostopadłymi do siebie. Takie prostopadłe średnice sprzężone nazywamy osiami głównymi elipsy.

Dziela one elipsę na cztery symetryczne ćwiartki, są osiami symetrii elipsy.

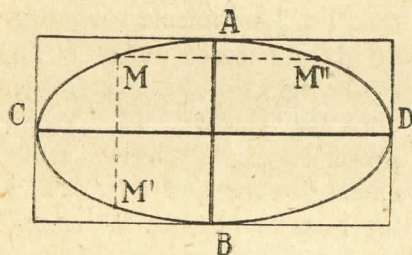


Fig. 279.

N. p. jeżeli z punktu dowolnego  $M$  (fig. 279) poprowadzimy cięciwę równoległą do  $AB$ , to jest ona przepołowiona linią  $CD$  (jako średnicą sprzężoną do  $AB$ ) i jest prostopadłą do  $CD$  a więc punkt  $M'$  elipsy leży symetrycznie względem  $M$ . To samo rozumowanie można przeprowadzić dla osi symetrii  $AB$ , o punktach  $M$  i  $M''$ . Na tej symetrii polega konstrukcja osi głównych elipsy.

Ze środka (fig. 280) zakreślamy koło promieniem dowolnym, ale takim, aby koło przecięło elipsę w czterech punktach.

Przepołowmy kąt zawarte między  $OA$  i  $OB$ ,  $OA$  i  $OD$ .

Ponieważ odcinki  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$  są równe jako promienie koła, przeto punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  leżą symetrycznie względem dwusiecznych  $SS$  i  $TT$ .

( $AX = BX$ , i  $AB \perp SS$ , jak to wynika z przystawiania  $AOX \cong BOX$ ).

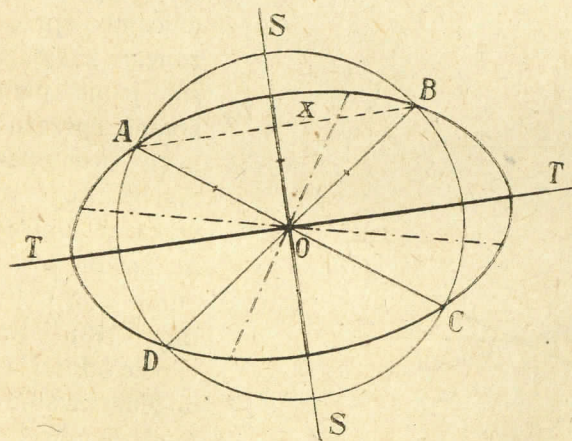


Fig. 280.

Linie  $SS$  i  $TT$  są więc osiami symetrii elipsy a ich odcinki są osiami głównymi.

Elipsę dostajemy odrazu zorjentowaną według osi głównych, jeżeli przyjmujemy w rysunku perspektywicznym  $\alpha = 90^\circ$  a zmniejszenie dowolne, ale różne od  $s = 1$  (n. p. rzut koła prostopadłego do

płaszczyzny rysunku ukośnie od góry lub ukośnie z dołu — bez zbaczania na prawo lub lewo).

Konstrukcja elipsy, której osie główne są znane, polega więc na tem, aby wszystkie cięciwy koła prostopadłe do jednej średnicy zmniejszyć w tym samym stosunku, zachowując ich kąty ze średnicą.

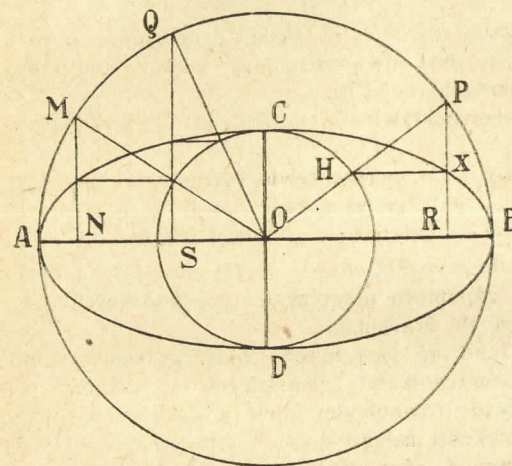


Fig. 281.

Stosunek zmniejszenia musi wynosić tyle, ile stosunek osi głównej mniejszej do osi większej, ponieważ oś wielka jest średnicą zachowaną w prawdziwej wielkości, a tylko oś mała jest średnicą zmniejszoną. Najwygodniej wykonuje się konstrukcję przy pomocy dwóch kół współśrodkowych o średnicach równych osiom elipsy (fig. 281). Aby zmniejszyć połowę cięciwy  $PR$ , łączymy  $P$  ze środkiem koła. — Trzeba

na prostej  $PR$  znaleźć taki punkt  $X$ , aby  $XR:PR = CO:BO$  czyli  $= HO:PO$ . Z podobieństwa trójkątów wiadomo, że wystarczy poprowadzić linię  $HX \parallel OR$ . Wtedy rzeczywiście  $XR$  jest taką częścią  $PR$ , jaką częścią wielkiej osi jest oś mała. Punkt  $X$  jest już punktem elipsy. W ten sposób można otrzymać dowolnie wiele punktów elipsy, pomniejszając odcinki  $MN$ ,  $QS$  i t. d.

Inne własności elipsy poznamy w dalszym ciągu nauki\*).

## Ćwiczenia VII

§ 90. 1. Wykreślić w perspektywie środkowej kostkę tak, aby punkt oczny  $O$  leżał: a) u góry na lewo od rysunku, b) u dołu na lewo, c) u dołu na prawo.

Uwaga: krawędzie prostopadłe do płaszczyzny obrazowej można skracać dowolnie; przez to tylko zmienia się wzniesienie oka nad płaszczyzną rysunku.

2. Kiedy obrazem linii prostej będzie punkt w perspektywie środkowej? Kiedy obrazem kwadratu będzie linia prosta? Narysuj!

\*) Z metodą perspektywy równoległej można się dokładniej zaznajomić np. przy pomocy podręcznika p. t.: „C. H. Müller i O. Pressler. „Leitfaden der Projektions-Lehre“. Lipsk. 1903.



210  
§ 91. 3. Do kartonu przyklejono dziewięć kostek po trzy w jednym rzędzie pionowym i poziomym; oko znajduje się naprzeciw kostki środkowej. Wykreślić obrazy wszystkich kostek.

4. Kiedy ukośny rzut odcinka jest mniejszy od niego, kiedy równy, kiedy większy? Przedstaw to na rysunku!

5. Z której strony trzeba patrzeć na kwadrat leżący poziomo, aby się przedstawiał: a) jako prostokąt, b) jako jedna linia prosta, c) jako równoległobok?

6. Wykreślić w perspektywie równoległej belkę prostokątną o przekroju kwadratowym, której długość jest dwanaście razy większa od szerokości, używając kąta  $\alpha = 45^\circ$  i skrócenia  $s = \frac{1}{3}$ .

7. Wykreślić stół, szafę w perspektywie:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $s = \frac{1}{2}$ , wykonawszy potrzebne mierzenia.

8. Wykreślić w pomniejszeniu w perspektywie równoległej skrzynię, (bez górnego dna), której długość  $a = 1.5\text{ m}$ , szerokość  $b = 0.7\text{ m}$  a wysokość  $c = 0.4\text{ m}$ , jeżeli ściany są zrobione z materiału o grubości  $0.03\text{ m}$ .

9. Narysować w perspektywie  $\alpha = 60^\circ$ ,  $s = \frac{1}{2}$  bryłę powstałą z kostki przez odcięcie wszystkich naroży zapomocą płaszczyzn, przechodzących przez środki każdego z trzech schodzących się krawędzi.

10. Narysować ośmiościan i odciąć jego naroża płaszczyznami równoległymi do osi w odstępach od wierzchołków wynoszących  $\frac{1}{8}$  długości osi.

11. Narysować w perspektywie równoległej dom z dachem ukośnym, którego wysokość wynosi  $\frac{1}{5}$  wysokości całego domu.

12. Narysować w perspektywie równoległej ostrosłup sześcioboczny ścięty płaszczyzną równoległą do podstawy.

13. Narysować w perspektywie równoległej graniastosłup i przeciąć go płaszczyzną ukośną.

*Uwaga:* rysuje się najpierw rzut prostopadły graniastosłupa na płaszczyznę równoległą do krawędzi. Z tego rzutu odmierza się długość odciętych krawędzi.

14. Narysować w perspektywie równoległej ośmioboczną wieżyczkę zakończoną ostrosłupem.

15. Narysować pięć schodów w perspektywie równoległej. Linie niewidoczne opuścić!

16. Narysować w perspektywie równoległej kostkę, zwróconą do nas: a) krawędzią, b) jednym narożem.

*Uwaga:* w płaszczyźnie obrazowej leży przekrój, łączący odpowiednie przekątnie dwóch przeciwległych ścian.

17. Narysować sześcian i wpisać weń czworościan i ośmiościan.

*Uwaga:* krawędzie czworościanu są przekątniami ścian sześcianu, a naroża ośmiościanu leżą w środkach ścian sześcianu.

18. Wpisać w sześcian dwa czworościany przenikające się; linie niewidoczne opuścić (por. poprzednie zadanie).

§ 92. 19. Narysować dowolne koło w rzucie ukośnym, używając zniekształceń: a)  $\alpha = 45^\circ$ ,  $s = 1$ , b)  $\alpha = 30^\circ$ ,  $s = \frac{1}{3}$ , c)  $\alpha = 90^\circ$ ,  $s = \frac{1}{2}$ .

20. Mając podaną elipsę, znaleźć jej środek konstrukcyjnie.

21. Mając podaną elipsę, wykreślić kilka stycznych.

22. Zbudować elipsę, znając jedną parę średnic sprzężonych.

23. Mając podaną elipsę, znaleźć osie główne.

24. Zbudować elipsę, znając jej osie główne.

25. Narysować walec kołowy w perspektywie równoległej.

26. Narysować stożek kołowy w perspektywie równoległej.

27. Narysować w perspektywie równoległej rurę walcową.

28. Narysować w perspektywie równoległej szklankę okrągłą, u góry rozszerzoną.

29. Narysować w perspektywie równoległej kulę z równikiem, zwrotnikami i kołami podbiegunowymi.

30. Narysować kulę z kilkoma południkami w perspektywie równoległej.

31. Narysować w perspektywie równoległej warstwę kuli, ograniczoną dwoma płaszczyznami równoległymi.

## Rozdział VIII

### Metoda geometrii wykreślnej

#### § 93. O dwóch płaszczyznach rzutów.

Ponieważ sporządzanie modeli przestrzennych jest bardzo uciążliwe a nieraz i bardzo kosztowne, przeto przy rozmaitych zagadnieniach geometrycznych i technicznych posługujemy się rysunkiem płaskim. Zasady takiego rysunku omówiliśmy już poglądowo w VII. rozdziale. Najwięcej używanym sposobem przedstawienia utworów przestrzennych jest wykreślanie rzutów prostopadłych. Takimi rzutami prostopadłymi są n. p. kontury przedmiotów, plany budynków, przekroje maszyn, mostów, mapy niewielkich obszarów ziemi. W architekturze, inżynierji a nawet w rozmaitych rzemiosłach posługujemy się rzutami przedmiotów.

Rzutem jakiegokolwiek utworu nazwaliśmy (str. 175) miejsce geometryczne rzutów wszystkich punktów tej figury. Już przy najprostszych utworach geometrycznych nie wystarczy podanie rzutu na jedną płaszczyznę. Utwórzmy n. p. rzut walca prostego na płaszczyznę  $H$  prostopadłą do jego osi, zwaną płaszczyzną poziomą (fig. 282). Ponieważ podstawa walca jest równoległa do tej płaszczyzny, otrzymamy w rzucie koło, równe podstawie walca (przystające do niej; dlaczego?). Ten rzut nazywa się rzutem poziomym (widok z góry!). Z tego jednego rzutu nie mamy jeszcze wyobrażenia, jak wygląda cała bryła. Taki sam rzut ma walec krótki i długi, koło równoległe do płaszczyzny  $H$  lub elipsa nachylona odpowiednio.



Rzut na jedną płaszczyznę nie wyznacza jeszcze wielkości ani położenia utworu geometrycznego.

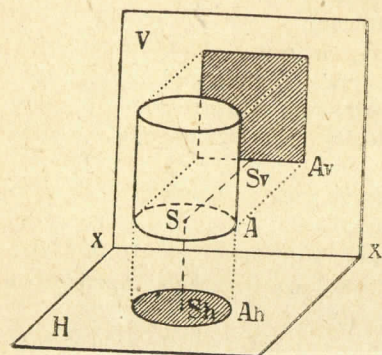


Fig. 282.

walca, ponieważ taki sam rzut posiada n. p. każdy prostopadłościan o tej samej podstawie. Jednak obydwa rzuty razem wyznaczają w zupełności utwór geometryczny, z którego pochodzi. Dowód tego twierdzenia podamy w następnym ustępie. Rysunek taki, jak na fig. 282, sprawia pewne złudzenie rzeczywistości, jest jednakże niepraktyczny, ponieważ koło przedstawia się na nim

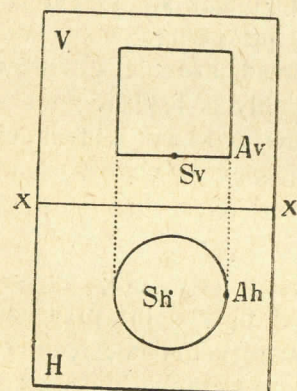


Fig. 283.

jako elipsa i wogóle figury, leżące na płaszczyźnie poziomej  $H$ , przedstawiają się na rysunku zniekształcone. Aby tej niedogodności uniknąć, obracamy płaszczyznę poziomą  $H$  około krawędzi  $XX$  o kąt  $90^\circ$  ku dołowi tak, że płaszczyzna  $H$  przyjmie również położenie pionowe. Płaszczyzny  $H$  i  $V$  tworzą teraz jedną płaszczyznę (fig. 283). Ten obrót nazywamy: sprowadzeniem obydwu rzutów do jednej płaszczyzny rysunku. Teraz rzut pionowy i poziomy przedstawi się nam w naturalnej wielkości. Prostą  $XX$ , która jest śladem pozostałym po krawędzi dwóch płaszczyzn rzutów, nazywamy osią rzutów. W razie potrzeby przedłużamy płaszczyznę poziomą i pionową dowolnie także poza oś rzutów. Takie przedstawienie utworów geometrycznych i przedmiotów świata zewnętrznego najlepiej się nadaje do wykonywania pomiarów i jest najłatwiejsze do wykonania konstrukcyjnego.

Aby uzyskać znajomość części brakujących do poznania walca, wystarczy podać jeszcze drugi rzut na dowolną płaszczyznę nierównoległą do  $H$ . Używamy zawsze płaszczyzny prostopadłej do  $H$  i nazywamy ją płaszczyzną pionową  $V$  a powstający rzut rzutem pionowym (widok z przodu). Na tej płaszczyźnie otrzymamy prostokąt tak szeroki, jak podstawa walca a tak wysoki, jak walec. Ten rzut sam nie wystarczyłby także do poznania i zbudowania

Sporządzić model dwóch płaszczyzn rzutów i na tym modelu rozpatrywać prawa rzutów!

## § 94. Rzuty punktu.

Wykreślmy rzut poziomy i pionowy dowolnego punktu  $A$ . Oznaczamy je zwykle literami  $A_h$  (rzut poziomy) i  $A_v$  (rzut pionowy). Jakie położenie względem siebie mają te rzuty po sprowadzeniu ich do jednej płaszczyzny rysunku?

Przesuńmy płaszczyznę  $\gamma$  przez proste  $AA_v$  i  $AA_h$  (fig. 284 a, b). Płaszczyzna ta jest prostopadła do  $H$  i  $V$ , ponieważ zawiera linie  $AA_h$  i  $AA_v$ , prostopadłe do  $H$  i  $V$ . Wobec tego ta płaszczyzna musi być prostopadła do krawędzi  $H$  i  $V$ , t. j. do osi rzutów. Jeżeli zaś  $XX \perp \gamma$ , to  $XX \perp OA_v$  i  $XX \perp OA_h$ . Po obrocie linie  $OA_v$  i  $OA_h$

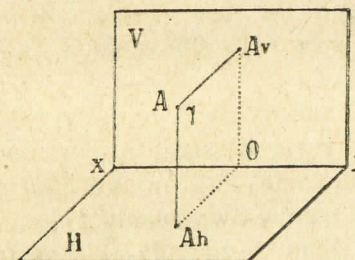


Fig. 284 a.

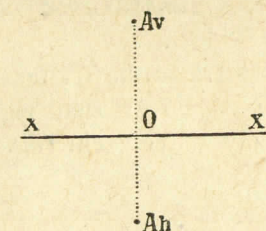


Fig. 284 b.

pozostaną prostopadłe do  $XX$  (bo przez obrót kąt dwóch linii prostych nie ulega zmianie), utworzą więc jedną linię prostą, bo przez punkt  $O$  da się poprowadzić na jednej płaszczyźnie tylko jedną prostą do  $XX$ . Stąd wynika zasadnicze prawo geometrii wykreślnej:

**Rzut poziomy i pionowy dowolnego punktu po sprowadzeniu rzutów do jednej płaszczyzny rysunku leżą na jednej linii prostopadłej do osi rzutów.**

Zastosujmy to n. p. do rzutów dowolnego trójkąta. Jeżeli obierzemy dowolnie rzut poziomy  $A_h, B_h, C_h$ , to rzut pionowy nie jest już zupełnie dowolny. Rzuty pionowe punktów  $A, B, C$  muszą leżeć na liniach prostopadłych do osi  $XX$ , poprowadzonych z punktów  $A_h, B_h, C_h$  (fig. 285). W których punktach tych linii leżą  $A_v, B_v, C_v$ , to już zależy od położenia pierwotnego trójkąta  $ABC$ . Z tej figury wysnuwamy ważny wniosek: jeżeli się dwie linie proste przecinają, to



i ich rzuty przecinają się w punktach, leżących na jednej linii prostopadłej do osi rzutów, n. p.  $A_v A_h$ . Gdyby proste były wchrowate, to ich rzuty mogłyby się także przecinać, ale te punkty nie mogą być rzutami jednego punktu, nie mogą więc leżeć na jednej linii prostopadłej do osi rzutów.

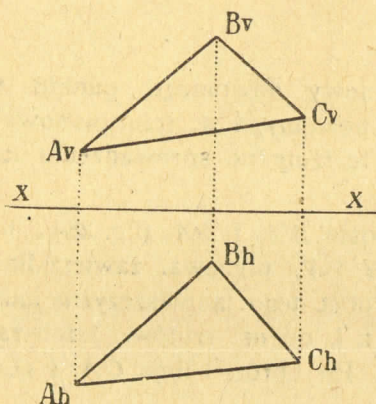


Fig. 285.

Proste równoległe mają także rzuty równoległe. (Dlaczego?). Narysuj te wszystkie przypadki!

Wracając do fig. 284 a, widzimy, że odległość rzutu poziomego do osi rzutów równa się odległości punktu  $A$  od płaszczyzny pionowej a odległość rzutu pionowego od osi rzutów równa się

odległości punktu  $A$  od płaszczyzny poziomej, albowiem  $A_h O = A A_v$  i  $A_v O = A A_h$ .

Opierając się na tem, możemy teraz wykazać, że do wyznaczenia punktu wystarczy znać jego rzuty na dwie płaszczyzny prostopadłe. Obierzmy w tym celu (fig. 286) na dowolnej linii prostopadłej do osi

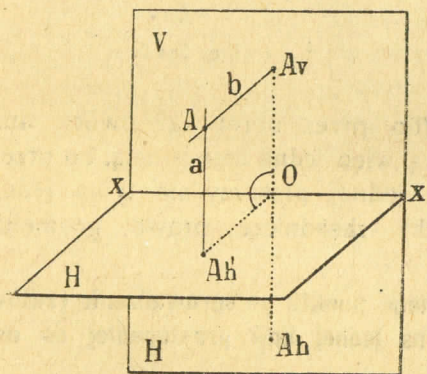


Fig. 286.

Obierzmy w tym celu (fig. 286) na dowolnej linii prostopadłej do osi rzutów dwa punkty  $A_h$  i  $A_v$  i uważajmy je za rzuty jakiegoś punktu. Aby ten punkt znaleźć, obracamy płaszczyznę  $H$  około osi  $XX'$  o  $90^\circ$  w górę, to prosta  $OA_h$  przyjmie położenie  $OA'_h$ . W punktach  $A'_h$  i  $A_v$  prowadzimy linie  $a$  i  $b$  prostopadłe do płaszczyzn  $H$  i  $V$ . Twierdzimy, że te dwie proste przetną się w jednym punkcie  $A$ . Istotnie linie te leżą w jednej płaszczyźnie, prostopadłej do osi  $XX'$ , a zawierającej proste  $OA_v$  i  $OA'_h$  (dlaczego?) a nie są równoległe do siebie

(bo już  $A'_h O \parallel b$ , więc inna linia, przechodząca przez  $A'_h$ , nie może być już równoległa do  $b$ ). Linie te przecinają się w jednym punkcie  $A$ , którego rzutami są rzeczywiście punkty  $A_v$  i  $A_h$ , lub po sprowadzeniu rzutów do jednej płaszczyzny:  $A_v$  i  $A_h$ . Jeżeli więc znamy dwa rzuty punktu, to i ten punkt możemy znaleźć. To samo odnosi

się do utworów geometrycznych, złożonych z większej liczby punktów. Ogólnie więc: dwa rzuty wystarczają do wyznaczenia każdego utworu geometrycznego.

*Uwaga:* przy zagadnieniach bardziej skomplikowanych podaje się czasem jeszcze trzeci rzut na płaszczyznę boczną, t. j. na płaszczyznę pionową  $B$  (fig. 287), prostopadłą do  $V$ . Taki rzut nazywamy rzutem bocznym (widok z boku). Tę płaszczyznę obraca się o  $90^\circ$  około krawędzi  $k$  tak, aby i ją sprowadzić do tej samej płaszczyzny  $V$ .

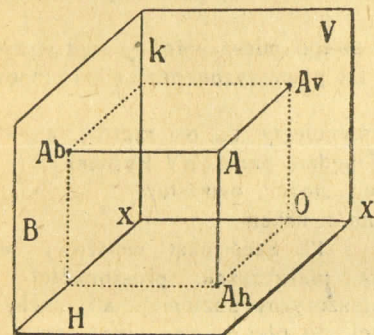


Fig. 287.

Jednakowoż konstrukcję tego rzutu bocznego można już wykonać przy pomocy rzutu poziomego i pionowego: odstęp punktu  $A_b$  od osi  $XX'$  wynosi  $A_v O$  a odstęp od krawędzi  $k$  równa się odcinkowi  $OA_h$ . Znajomość rzutu bocznego nie jest więc konieczna do wyznaczenia utworu geometrycznego.

Takie trzy płaszczyzny prostopadłe do siebie tworzą układ trzech płaszczyzn współrzędnych a odcinki  $AA_h$ ,  $AA_v$  i  $AA_b$  nazywamy współrzędnymi punktu  $A$ .

Wykonywanie konstrukcji i rozwiązywanie zagadnień przy pomocy dwóch rzutów jest przedmiotem osobnej gałęzi matematyki, zwanej *geometrią wykreślną*. Dla nas w dalszym ciągu nauki będzie potrzebne tylko twierdzenie na str. 221, pouczające, jak są ze sobą związane rzuty tego samego punktu. Moglibyśmy wprowadzić rozsunać płaszczyzny  $H$  i  $V$  i zupełnie osobno

badać rzut pionowy i poziomy, przez to jednak utrudnilibyśmy sobie znacznie konstrukcję.

*Uwaga:* do kreślenia linii równoległych do osi rzutów używa się lineau opatrzonego poprzeczną deszczułką, przytwierdzoną prostopadle do lineau, t. zw. przykładnicy. Do kreślenia linii prostopadłych do osi rzutów — a tych najwięcej potrzeba — używa się ekiejki, t. j. trójkąta z drzewa z jednym kątem prostym. (Są to konstrukcje mechaniczne — a nie czysto geometryczne, platońskie).

## Ćwiczenia VIII

- § 93—94. 1. Narysuj jakiekolwiek pudełko w rzucie pionowym i poziomym.  
2. Narysować w rzucie pionowym i poziomym: a) kostkę, b) rurę walcową, c) sprzęty domowe.



3. Trójkąt, leżący na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny poziomej, narysować w rzutach.

4. Gdzie leżą: a) rzuty punktów, znajdujących się na płaszczyźnie poziomej, b) rzuty punktów, znajdujących się na płaszczyźnie pionowej, c) rzuty punktów, znajdujących się na osi rzutów. Narysuj!

5. Przedstawić na jednej płaszczyźnie rzuty koła, leżącego na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny pionowej.

6. Mając podane rzuty belki prostokątnej, narysować ją w perspektywie równoległej.

7. Mając podane rzuty stożka, narysować go w perspektywie równoległej.

8. Narysować: a) przekrój poziomy swego mieszkania, b) rzut wszystkich sprzętów, znajdujących się w pokoju, na płaszczyznę poziomą i pionową (plan i przekrój podłużny pokoju).

9. Kiedy rzut linii prostej będzie równoległy do osi rzutów a kiedy prostopadły? Kiedy jeden rzut linii prostej będzie punktem? Rysunek!

10. Narysować w trzech rzutach walec, stożek, ostrosłup.

11. Narysować w trzech rzutach dzban z uchem.

12. Sześciokąt umiarowy leży na płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny poziomej, ale nachylonej do płaszczyzny pionowej. Wykreślić jego rzuty.

*Uwaga:* najpierw rysuje się rzuty sześciokąta, leżącego na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny pionowej a potem obraca się rzut poziomy odpowiednio. W rzucie pionowym odległości od osi rzutów pozostają niezmienione (por. fig. 288).

13. Koło leży na płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny poziomej a nachylonej do płaszczyzny pionowej. Wykreślić jego rzuty (por. poprzednie zadanie!).

14. Gdzie leżą rzuty punktów, znajdujących się: a) poza płaszczyzną

pionową, ale nad poziomą, b) pod płaszczyzną poziomą, ale przed pionową, c) pod płaszczyzną poziomą i poza płaszczyzną pionową?

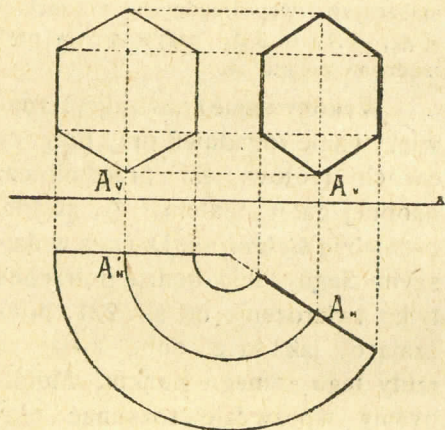


Fig. 288.

## Rozdział IX

### Graniastosłupy i walce

#### § 95. Podział brył.

Część przestrzeni zamkniętą ze wszystkich stron nazywamy bryłą a zbiór powierzchni, ograniczających tę część przestrzeni,

nazywamy powierzchnią bryły. Jeżeli wszystkie powierzchnie ograniczające są płaskie, bryła nazywa się bryłą graniastą lub wielościanem; jeżeli chociaż jedna powierzchnia jest krzywa, bryła nazywa się okrągłą.

Z pomiędzy wielkiej różnorodności brył spotykanych w świecie zewnętrznym wybierzemy tylko takie, które powstają przez pewne proste ruchy lub też takie, które posiadają pewne szczególne własności pod względem symetrii. I tak z ruchu postępowego figur płaskich, otrzymamy graniastosłupy i walce, z ruchu linii prostej przytwierdzonej stałe w jednym punkcie otrzymamy ostrosłupy i stożki a wreszcie z ruchu obrotowego kulę i całą klasę brył obrotowych.

Z pomiędzy brył symetrycznych na szczególną uwagę zasługują bryły ograniczone samymi przystającymi umiarowami wielokątami; bryły te nazwiemy wielościanami umiarowemi.

#### § 96. Graniastosłupy.

Jeżeli jakikolwiek wielokąt wykonuje ruch postępowy wzdłuż linii prostej, nie leżącej na jego płaszczyźnie, to jego powierzchnia zakreśla bryłę, zwaną graniastosłupem. N. p. jeżeli wielokąt  $ABCDE$  (fig. 289) przejdzie ruchem postępowym w położenie równoległe  $A'B'C'D'E'$  to, jak wiadomo, wszystkie jego punkty zakreślą odcinki równoległe i równe:

$$AA' \parallel BB' \parallel CC' \dots$$

Graniastosłup jest więc ograniczony dwoma przystającymi i równoległymi dnami czyli podstawami i tyłoma równoległobokami, ile dno ma boków. Te równoległoboki nazywają się ścianami bocznymi a ich zbiór tworzy pobocznice. Prostopadłą odległość den nazywamy wysokością graniastosłupa. Przekrój prostopadły do wysokości nazywa się przekrojem normalnym.

Krawędzie  $AA', BB', CC' \dots$  nazywają się krawędziami bocznymi a boki podstaw krawędziami podstawowymi.

Jeżeli kierunek ruchu jest prostopadły do płaszczyzny wielokąta, to wszystkie krawędzie boczne są prostopadłe do podstawy,

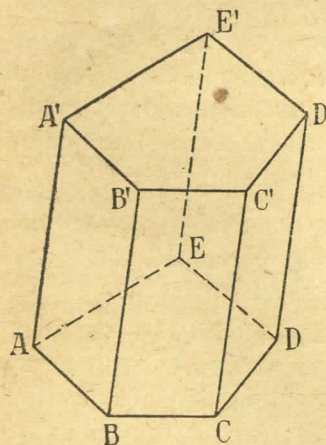


Fig. 289.



można więc każdą z nich uważać za wysokość. Wtedy także i ściany boczne są prostopadłe do podstawy (dlaczego?) a **graniastosłup nazywa się prosty**. Jeżeli krawędzie boczne są nachylone do podstawy, graniastosłup nazywa się *pochyły* (ukośny). Jeżeli w graniastosłupie prostym podstawa jest wielokątem umiarem, graniastosłup nazywa się umiary (nie jest on jednak wielościanem umiarem! [por. § 95.]). Według liczby ścian bocznych rozróżniamy graniastosłupy trójboczne, czworboczne i t. d. Prosta, łącząca dwa naroża przeciwległe, t. j. naroża nie mające wspólnej ściany, nazywa się przekątnią graniastosłupa. Płaszczyznę, łączącą dwie nie sąsiadujące krawędzie równoległe, nazywamy płaszczyzną przekątną.

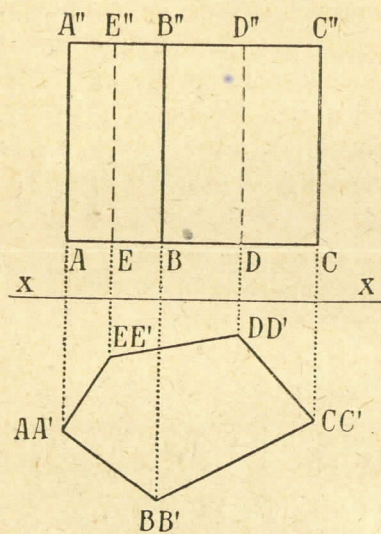


Fig. 290.

Aby **graniastosłup prosty** przedstawić w rzutach prostopadłych, najwygodniej ustawić go tak, aby dno było równoległe do płaszczyzny poziomej (fig. 290). Wtedy na płaszczyźnie pionowej (widok z przodu) otrzymamy prostokąt a na płaszczyźnie poziomej (widok z góry!) jeden wielokąt, ponieważ górne dno zakrywa dno dolne; wielokąt ten będzie przystający do dna graniastosłupa.

Krawędzie niewidzialne zaznaczono na rysunku liniami kropkowanymi. Wierzchołki wielokąta muszą leżeć na przedłużeniach odpowiednich krawędzi bocznych (dlaczego?).

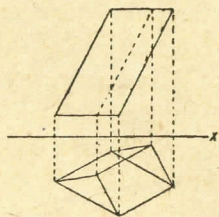


Fig. 291.

Można jednakże i graniastosłup *pochyły* tak ustawić, że górne dno zakryje dolne. Wtedy musi być przekrój normalny równoległy do płaszczyzny poziomej a dna nachylone (por. fig. 295).

Na szczególniejszą uwagę zasługują graniastosłupy, których podstawa jest równoległobokiem. Wtedy wszystkie ściany są równoległobokami i są parami do siebie równoległe (udowodnij!). Dlatego **graniastosłup, którego podstawa jest równoległobokiem, nazywamy równoległościanem**. Każdą ścianę równoległościanu możemy uważać za podstawę. (Udowodnij!) **Równoległościan prosty o podstawie prostokątnej nazywa się prostopadłościanem**. W takim prostopadłościanie są po trzy ściany, schodzące się w jednym narożu, prostopadłe a mianowicie:

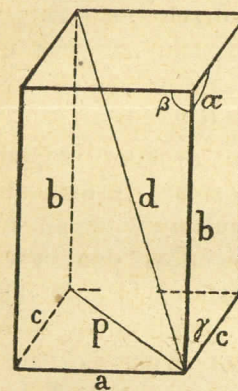


Fig. 292.

z określenia prostopadłościanu wynika, że  $b \perp \gamma$ , więc musi być i  $a \perp \gamma$  i  $\beta \perp \gamma$  jako płaszczyzny, przesunięte przez prostą prostopadłą. Ale także  $a \perp \beta$ , bo  $a$  zawiera prostą  $c$ , która jest prostopadłą do  $b$  i do  $a$  a więc  $c \perp \beta$  a wtedy i  $a \perp \beta$ .

*Uwaga:* takie bryły spotykamy bardzo często, jako dzieła rąk ludzkich: deski, belki, cegły, wogóle materiały budulcowe, skrzynie, izby i t. p., ponieważ ich mechaniczne wykonywanie jest najłatwiejsze. W przyrodzie bryły takie występują bardzo rzadko (niektóre kryształy, łodygi roślin wargowych i t. p.).

Prostopadłościan, którego podstawy i ściany boczne są kwadratami, nazywa się sześciannem lub kostką. Jest to bryła najwięcej symetryczna ze wszystkich graniastosłupów. Wszystkie kostki są bryłami podobnymi do siebie.

W prostopadłościanie występują tylko trzy gatunki krawędzi, po cztery są bowiem zawsze równe. Znając ich wielkość, możemy łatwo obliczyć przekątnię prostopadłościanu.

Z fig. 292 widzimy, że

$$p^2 = a^2 + c^2 \quad a \quad d^2 = b^2 + p^2 \quad \text{więc}$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2. \quad \text{Stąd wniosek:}$$

*kwadrat przekątnej prostopadłościanu równa się sumie kwadratów trzech krawędzi, schodzących się w jednym narożu.*

## § 97. Powierzchnia graniastosłupa. (Siatka).

Celem obliczenia powierzchni jakiegokolwiek bryły lub też sporządzenia jej modelu przestrzennego używa się siatki tej bryły. Aby otrzymać siatkę bryły, trzeba jej *powierzchnię rozwinąć* na jedną



płaszczyznę, to znaczy ułożyć na jednej płaszczyźnie wszystkie powierzchnie ograniczające tak, aby każda następna miała z poprzednią jedną krawędź wspólną. I tak n. p. rozwinięta powierzchnia kostki przedstawia się (fig. 293) jako figura płaska, złożona z sześciu kwadratów, z których cztery leżą w jednym rzędzie a dwa przylegają do nich z boku. Ponieważ powierzchnia jednego kwadratu wynosi  $k^2$ , przeto na powierzchnię całego sześcianu otrzymujemy wzór:

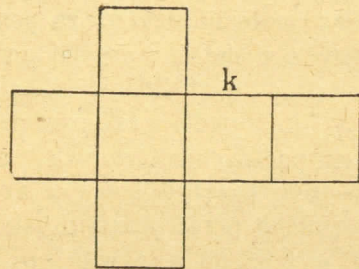


Fig. 293.

$$P = 6k^2$$

Graniastosłup prosty rozwijamy, układając obok siebie prostokątne ściany boczne o równej wysokości (fig. 294). Otrzymamy w ten sposób jeden prostokąt, którego podstawa równa się obwodowi dna, a wysokość wynosi tyle samo, co wysokość graniastosłupa. Dno dotykając tego prostokąta wzdłuż jednego ze swych boków. Jeżeli powierzchnię poboczniczy oznaczmy literą  $M$ , to z figury odczytujemy następujący wzór na powierzchnię graniastosłupa prostego:

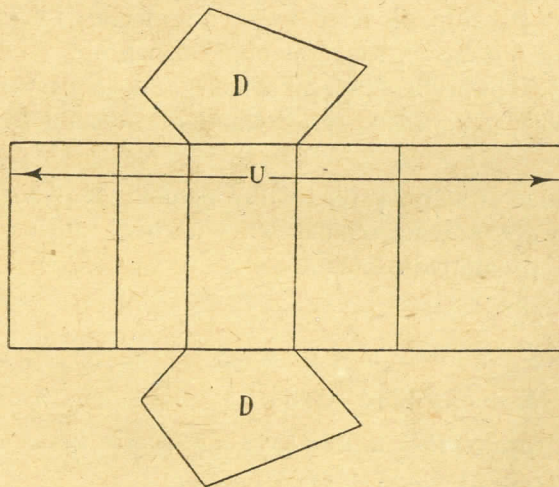


Fig. 294.

$$P = 2D + M \quad (1)$$

Powierznię poboczniczy możemy przedstawić wzorem:

$$M = u \cdot w \quad (2)$$

gdzie  $u$  oznacza obwód podstawy. Do tego samego wyniku można dojść bez siatki, z rozważania samej bryły. Zadanie to łatwo wy-

konać konstrukcyjnie, jeżeli są podane rzuty graniastosłupa, n. p. z fig. 290. Boki wielokąta  $ABCDE$  trzeba odciąć po kolei na jednej linii prostej i zbudować na nich prostokąt o wysokości  $AA'$ . Do tego prostokąta dorysowuje się dna.

Jeżeli graniastosłup prosty jest ustawiony inaczej, n. p. nachylony względem płaszczyzny poziomej, wtedy konstrukcja jest trudniejsza. Trzeba najpierw wykonać obrót do położenia prostopadłego, do czego są potrzebne głębsze wiadomości z geometrii wykreślnej (por. ćw. VIII. Nr. 12).

Jeżeli rozwiniemy graniastosłup pochyły, to wzór

$$P = 2D + M$$

pozostaje, ale pobocznica nie przedstawi się już jako jeden prostokąt, nawet nie jako równoległobok. Wzoru (2) nie można więc używać dla graniastosłupa pochyłego.

Aby rozwinąć graniastosłup pochyły, ustawiamy go tak, aby krawędzie boczne były prostopadłe do płaszczyzny poziomej, a dna prostopadłe do płaszczyzny pionowej. Rzuty graniastosłupa w takim położeniu przedstawiliśmy na fig. 295 a). Dno nie występuje teraz

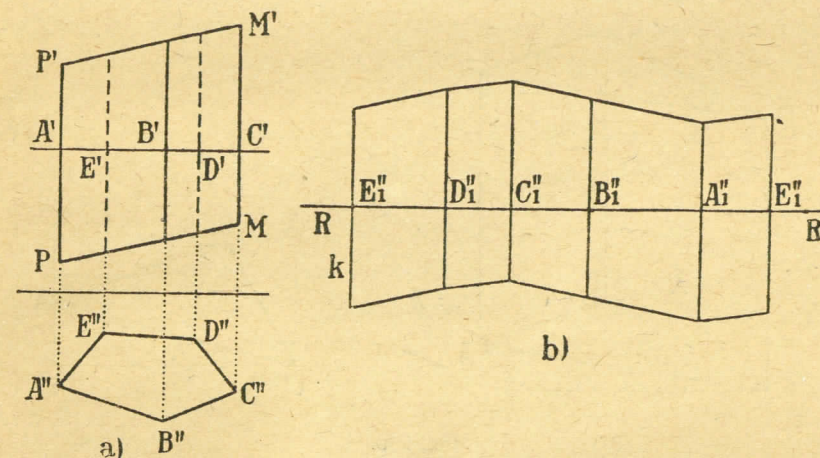


Fig. 295.

w prawdziwej wielkości, natomiast przekrój normalny  $A'B'C'D'E'$  jest przystający do rzutu  $A''B''C''D''E''$  (dlaczego?).

Obwód tego przekroju rozwijamy na dowolnej linii  $RR'$ . Od punktów

$$E''_1, A''_1, B''_1, \dots$$

odcinamy od góry i na dół odpowiednie części krawędzi bocznych, wzięte z rzutu pionowego, w którym te odcinki występują w prawdziwej wielkości. Rozwinięta pobocznica przedstawia się jako pas, którego podstawą jest linia łamana, wznosząca się i opadająca kolejno, nakształt fali. Powierznię tego pasa obliczymy, mnożąc podstawę  $k$  każdego równoległoboku przez wysokości  $E''_1A''_1, A''_1B''_1, \dots$



tworzące razem obwód przekroju normalnego. Trudniej jest natomiast otrzymać z tego rzutu *a)* prawdziwą wielkość dna. Trzeba wykonać obrót płaszczyzny *PM* (t. zw. kład płaszczyzny *PM* na płaszczyznę poziomą).

Do tego samego wyniku dochodzimy od razu bez używania rzutów. Trzeba odciąć od graniastostupa pochyłego zapomocą przekroju normalnego część górną i przesunąć ją na dół tak, aby dno *P'M'* nakryło się z dnem *PM*. W ten sposób otrzymuje się graniastostup prosty, mający tę samą pobocznice (ale inne dna). Obliczając tę pobocznice według wzoru (1) otrzymamy

$$M = k \cdot U$$

gdzie *k* oznacza krawędź boczną a *U* obwód przekroju normalnego.

Rozwinięcie graniastostupa prostego można także wykonać na podstawie rysunku perspektywicznego. N. p. na fig. 296 mamy

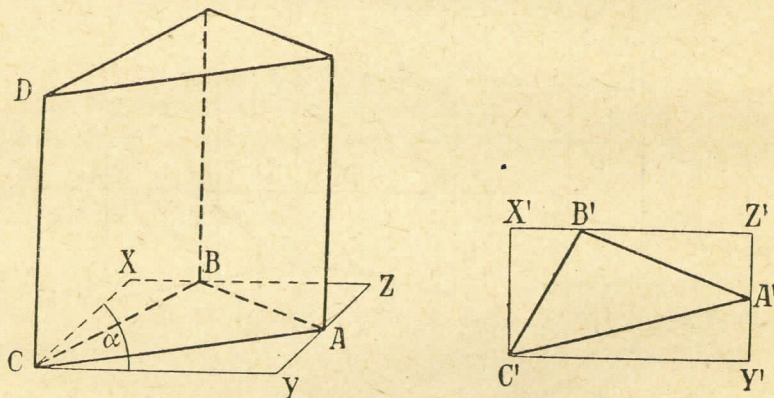


Fig. 296.

przedstawiony graniastostup prosty trójboczny w perspektywie równoległej; zniekształcenie obrano  $\alpha = 45^\circ$ ,  $s = 1$  (por. rozdział VII § 91). Ujmujemy podstawę w równoległobok o kącie  $\alpha = 45^\circ$ . Ten równoległobok jest obrazem prostokąta o bokach  $C'Y' = CY$  i  $C'X' = CX$  (ponieważ stosunek zmniejszenia boków wynosił  $s = 1$ ). Na bokach tego prostokąta odcinamy  $Y'A' = YA$  i  $B'X' = BX$  i otrzymujemy trójkąt  $A'B'C'$  w prawdziwej wielkości.

Rozwijając obwód tego trójkąta i rysując prostokąt o wysokości *CD*, otrzymamy rozwiniętą pobocznice narysowanego graniastostupa.

Dla graniastostupa pochyłego konstrukcja jest trudniejsza a nawet nieoznaczona, dopóki nie znamy prawdziwego kąta nachylenia krawędzi bocznych. Z rysunku perspektywicznego nie potrafimy tego nachylenia odczytać.

## § 98. Walec.

Jeżeli koło wykonuje ruch postępowy wzdłuż linii prostej, nie leżącej na jego płaszczyźnie, powstaje bryła zwana walcem kołowym. Przez ruch postępowy elipsy powstaje walec eliptyczny, wogóle przez ruch postępowy jakiegokolwiek linii krzywej powstaje odpowiedni walec (słup). Mówiąc „walec” bez żadnego dodatku, mamy w myśli walec kołowy. Z tego sposobu powstawania wynika, że dna walca kołowego są kołami przystającymi a pobocznica składa się z samych linii prostych równoległych. Ta pobocznica jest jednakże powierzchnią krzywą, bo linia prosta, mająca z nią dwa punkty wspólne, nie zawsze na niej leży. N. p. sieczna koła przy równoległym przesuwaniu koła zawsze pozostaje sieczną, przecina więc pobocznice w każdym położeniu tylko w dwóch punktach. Ta powierzchnia krzywa nazywa się powierzchnią walcową. Prostopadłą odległość den od siebie nazywamy wysokością walca. Linję prostą, leżącą całkowicie na powierzchni walca, nazywamy bokiem walca, *AA'*. Linia prosta, łącząca środki obydwu podstaw, nazywa się osią walca. (Udowodnij, że oś jest równoległa do boku i równa się bokowi!). Jeżeli bok jest prostopadły do podstawy, to i oś jest prostopadła do podstawy a walec nazywa się prosty; w przeciwnym razie walec jest pochyły.

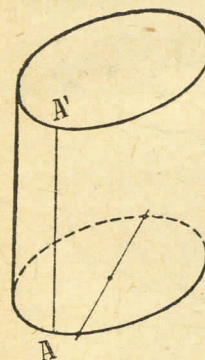


Fig. 297.

Pobocznice walca można otrzymać także przez inny ruch. Posuwamy prostą *AA'* (fig. 297) wzdłuż obwodu koła zawsze równoległe do pierwotnego położenia. Wtedy koło nazywa się kierownicą powierzchni a linia prosta *AA'* tworzącą walca.

Walec jest więc powierzchnią prostolinjową (por. str. 162). (Zastosuj ten sposób otrzymywania także do pobocznicy graniastostupa!). Jeżeli walec jest prosty, to możemy go także otrzymać przez ruch obrotowy prostokąta około

jednego z boków. Dlatego walec prosty nazywamy także walcem obrotowym.

Jeżeli walec przetniemy jakąkolwiek płaszczyzną, zawierającą oś walca, otrzymamy równoległobok i to ukośny lub prostokątny. W walcu prostym każdy przekrój osiowy jest prostokątem, w walcu zaś pochyłym tylko jeden przekrój, mianowicie przekrój prostopadły do płaszczyzny, zawierającej nietylko oś, ale i rzut osi.



Na fig. 298 jest to przekrój  $ABCD$ , prostopadły do płaszczyzny, zawierającej  $O'R$  i  $OO'$ . Walec prosty, którego przekrój osiowy jest kwadratem, nazywa się równoboczny. W takim walcu bok równa się średnicy podstawy:

$$b = 2r$$

Wszystkie walce równoboczne są bryłami podobnymi.

Przekrój walca równoległy do podstawy jest kołem. (Dlaczego?).

W przyrodzie występuje walec często: pnie drzew, żdźbła, niektóre kości i t. p. Także w dziełach rąk ludzkich spotykamy się bardzo często z tą bryłą: rury, koła i osie maszyn, druty, naczynia, kolumny, sklepienia i t. p.

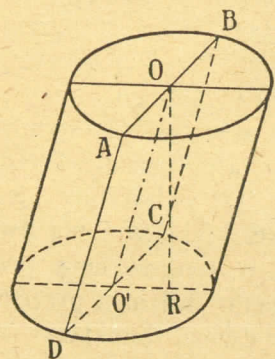


Fig. 298.

Aby walec prosty przedstawić w rzutach, ustawiamy go dnem równoległe do płaszczyzny poziomej. Na płaszczyźnie pionowej otrzymamy prostokąt a na płaszczyźnie poziomej jedno koło. Walec pochyły ustawiony dnem równoległe do poziomej płaszczyzny przedstawi się w rzucie pionowym jako równoległobok pochyły a w rzucie poziomym wystąpią obydwa dna jako koła, połączone wspólnymi stycznymi zewnętrznymi (fig. 299).

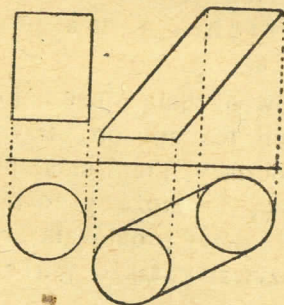


Fig. 299.

Aby walec prosty przedstawić w perspektywie równoległej, zauważmy, że ukośny rzut koła jest elipsą. Dno przedstawi się więc jako elipsa. W skrajnych punktach tej elipsy (fig. 300), (które wystają w ogólności poza średnicę równoległą do

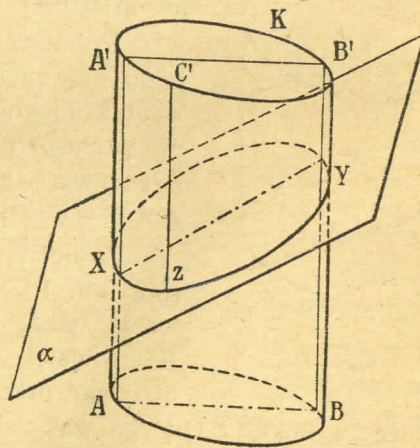


Fig. 300.

płaszczyzny obrazowej) kreślimy dwie linie prostopadłe do średnicy  $AB$  równoległej do płaszczyzny obrazowej. Na tych liniach odcinamy boki walca w prawdziwej wielkości. Górne dno jest elipsą przystającą do dolnej. (Użyliśmy tu zniekształceń  $\alpha = 45^\circ$ ,  $s = \frac{1}{2}$ , por. także fig. 272 a). Podobnie postępujemy z walcem pochyłym.

Każdy ukośny rzut koła na płaszczyznę nierównoległą jest — jak to widzieliśmy — elipsą. Stąd ważny wniosek o przekrojach walca, przecinających oś w jednym punkcie a nierównoległych do podstawy. Przetnijmy walec płaszczyzną  $\alpha$  ukośną względem podstawy. Linję otrzymaną na przekroju możemy uważać za ukośny rzut koła  $K$  za pomocą promieni  $A'X$ ,  $B'Y$ ,  $C'Z$ , .... ukośnych względem płaszczyzny  $\alpha$  a równoległych do siebie.

Linia krzywa  $XY$  jest więc elipsą, zatem: *przekrój walca płaszczyzną nachyloną do osi i do podstawy jest elipsą.*

Jeżeli walec kołowy jest pochyły, to przekroje równoległe do dna są kołami, przekroje zaś nachylone do dna elipsami. Pomiedzy temi przekrojami jeden jest prostopadły do krawędzi bocznych. Nazywamy go podobnie jak w graniastopie przekrojem normalnym. Ten przekrój normalny walca kołowego pochyłego jest elipsą. Zapomocą dwóch przekrojów normalnych możemy więc otrzymać z walca kołowego pochyłego walec eliptyczny prosty.

*Uwaga:* z rozważania walców eliptycznych można wykazać, że każdy rzut elipsy jest znowu elipsą lub kołem, nie otrzymujemy więc nowego gatunku linii krzywych przez utworzenie rzutu elipsy.

Zbadaliśmy już przekroje osiowe i przekroje, przecinające oś. Pozostały jeszcze do omówienia płaszczyzny równoległe do osi.

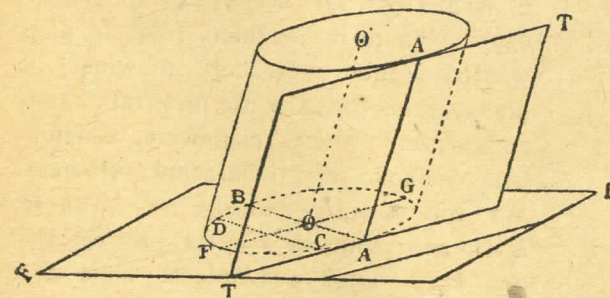


Fig. 301.

Płaszczyzny takie mogą mieć trojake położenie względem powierzchni walcowej, podobnie jak linia prosta względem koła. Płaszczyzna równoległa do osi a zawierająca sieczną  $DC$  podstawy, przecina powierzchnię walcową wzdłuż dwóch tworzących. Można ją nazwać płaszczyzną sieczną. Płaszczyzna równoległa do osi a zawierająca linię  $TA$  (fig. 301) styczną do podstawy, *dotyka powierzchni walcowej wzdłuż*

Płaszczyzny takie mogą mieć trojake położenie względem powierzchni walcowej, podobnie jak linia prosta względem koła. Płaszczyzna równoległa do osi a zawierająca sieczną  $DC$  podstawy, przecina powierzchnię walcową wzdłuż dwóch tworzących. Można ją nazwać płaszczyzną sieczną. Płaszczyzna równoległa do osi a zawierająca linię  $TA$  (fig. 301) styczną do podstawy, *dotyka powierzchni walcowej wzdłuż*



całej tworzącej  $AA'$ , należącej do punktu  $A$ . Taka płaszczyzna nazywa się płaszczyzną styczną walca. Wreszcie płaszczyzna równoległa do osi a zawierająca linię prostą, leżącą poza kołem  $O$  ale w jego płaszczyźnie, nie przecina zupełnie powierzchni walcowej. Każda linia prosta, leżąca w płaszczyźnie stycznej a nierównoległa do linii styczności  $AA'$ , ma z powierzchnią walcową tylko jeden punkt wspólny, jest więc linią styczną do walca. Z każdego punktu poza walcem można poprowadzić dwie płaszczyzny styczne do powierzchni walcowej; ich krawędź musi być równoległa do osi. (Udowodnij!).

Jeżeli wszystkie ściany boczne jakiegoś graniastosłupa są płaszczyznami stycznymi walca a dna są opisane na dnach walca, graniastosłup nazywa się opisany na walcu. Jeżeli wszystkie ściany boczne graniastosłupa są płaszczyznami siecznymi walca a dna są wpisane w dna walca, graniastosłup jest wpisany w walec. Pobocznice walca możemy uważać za granicę, do jakiej dążą pobocznice graniastosłupów wpisanych lub opisanych o corazto większej liczbie ścian bocznych, podobnie jak obwód koła badaliśmy przy pomocy wielokątów wpisanych lub opisanych. Prościej dojdziemy do obliczenia wielkości tej powierzchni krzywej, używając pewnych przejrzystych rozważań mechanicznych.

### § 99. Rozwijanie walca. Powierzchnia walca.

Celem obliczenia powierzchni graniastosłupa tworzyliśmy jego siatkę przez rozwinięcie pobocznicy. Pobocznica walca jest powierzchnią krzywą prostoliniową. Zachodzi pytanie, czy ta powierzchnia jest rozwijalna, to znaczy, czy można tę pobocznice, rozciętą n. p. wzdłuż jednej tworzącej, rozwinąć na płaszczyznę tak, aby nie powstało żadne zmarszczenie ani rozciągnięcie, zmieniające wielkość tej powierzchni, słowem: aby nie doznały zmiany ani długości linii, znajdujących się na powierzchni, ani kąty. Otóż rozwinięcie takie jest możliwe, ponieważ wszystkie boki walca

są równoległe (fig. 302). Istnieje taki skończony ruch, n. p. toczenie walca po płaszczyźnie, że wszystkie boki poukładają się znowu jako linie równoległe a ani długości, ani kąty nie zostaną zmienione.

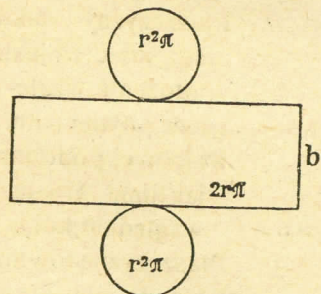


Fig. 302.

Jeżeli walec jest prosty, to z takiego rozwinięcia otrzymamy prostokąt, ponieważ boki, jako linie prostopadłe do podstawy, pozostaną i po rozwinięciu prostopadłe do jej obwodu (rozwiniętego). Podstawą tego prostokąta jest obwód dna a wysokością bok walca. Stąd obliczymy całą powierzchnię:

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot b$$

lub, wyłączając  $2r\pi$  przed nawias:

$$P = 2r\pi(r + b).$$

Jeżeli walec jest równoboczny, to  $b = 2r$ , więc:

$$P = 2r\pi \cdot 3r$$

czyli:

$$P = 6r^2\pi.$$

Wzory te odnoszą się tylko do walców prostych.

Jeżeli walec kołowy jest pochyły, to rozwinięcie jest zagadnieniem trudniejszym. Ustawiając taki walec dogodnie, t. j. tak, aby jego boki były prostopadłe do płaszczyzny poziomej a dno prostopadłe do płaszczyzny pionowej (fig. 303), otrzymamy elipsę jako rzut podstawy. Elipsa ta jest przystająca do przekroju normalnego  $AB$ .

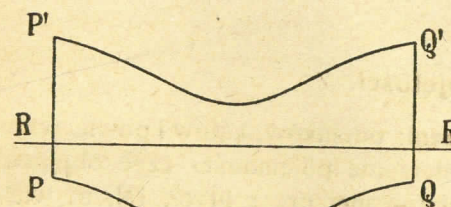
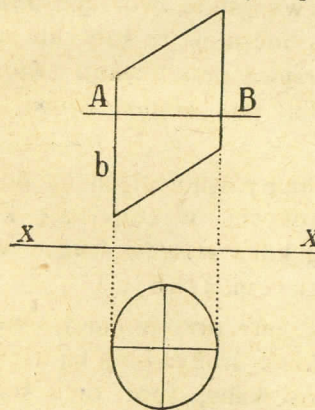


Fig. 303.

Rozwinięcie obwodu tej elipsy jest już zagadnieniem wkraczającym w zakres matematyki wyższej. W przybliżeniu możemy wykonać tę konstrukcję, biorąc małe kawałki obwodu elipsy po kolei w cyrkiel i odcinając je na jednej linii prostej  $RR'$ . Następnie w odpowiednich punktach odmierzymy kawałki krawędzi bocznych do góry i na dół. (Porównaj rozwinięcie graniastosłupa pochyłego!). Otrzymamy w ten sposób pas zamknięty liniami krzywymi falistymi, które nazywamy sinusoidami. Z liniami temi spotkamy się w nauce trygonometrii.



Pas taki można zamienić na prostokąt, przenosząc część jego, leżącą nad osią  $RR'$ , na dół tak, aby  $P'Q'$  nakryło  $PQ$ . Prostokąt ten ma wysokość równą bokowi walca pochyłego a podstawa jego jest rozwiniętym obwodem elipsy  $AB$ . Jest to więc zarazem rozwinięcie walca prostego eliptycznego.

Przy rozwijaniu pobocznic walca jego tworzące pozostały linjami prostymi. Istnieją jednakowoż także inne linie, leżące na walcu, które po rozwinięciu przedstawiają się jako proste. I tak przedewszystkiem każdy przekrój normalny do osi (koło w walcu prostym, elipsa w walcu pochyłym) przedstawi się w rozwiniętej pobocznic, jako

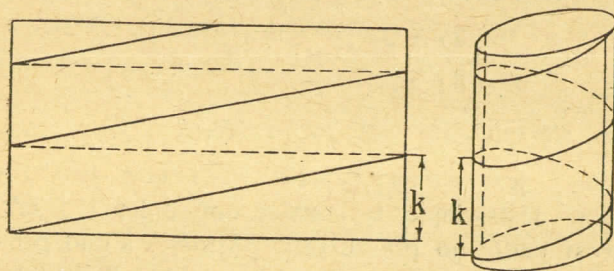


Fig. 304.

linia prosta. Aby znaleźć inne linie, przedstawiające się po rozwinięciu jako linie proste, narysujmy na rozwiniętej pobocznic jakąkolwiek linię prostą ukośnie względem podsta-

wy prostokąta (fig. 304). Ona przecina wszystkie tworzące pod tym samym kątem a więc i po zwinięciu pobocznic te kąty nie ulegną zmianie. Otrzymamy na walcu linię *krzywą przestrzenną*, która się wznosi, przecinając wszystkie tworzące pod tym samym kątem. Taką linię nazywamy *linią śrubową*.

Jeżeli poprowadzimy kilka takich linii równoległych na pobocznic, ale zaczniemy drugą w tej wysokości, w której się kończy pierwsza linia, otrzymamy po zwinięciu kilka *skrętów śruby*. Wysokość  $k$  jednego skrętu nazywa się *krokiem śruby*.

Długość linii śrubowej łatwo obliczymy przy pomocy twierdzenia Pitagorasa, znając obwód walca i krok śruby. Linii tej używa się często w mechanice teoretycznej i stosowanej (por. ruch śrubowy str. 178).

## § 100. Przybliżone pomiary objętości.

Pozналиśmy już sposoby mierzenia odcinków, kątów i powierzchni. Zadaniem równie ważnem jest mierzenie pojemności czyli objętości brył, t. j. wielkości przestrzeni zajmowanej przez bryły. (N. p. wielkość budynku, pojemność kotłów, naczyń, zbiorników, objętość wykopanej lub usypanej ziemi przy robotach ziemnych, wydajność

prądu wody i t. p.) W ścisłym związku z objętością ciał jest ich ciężar. Wiemy mianowicie, że ciężar jednego centymetra sześciennego jakiegokolwiek ciała nazywa się jego ciężarem gatunkowym (jeżeli ciało nie jest jednorodne, używa się przeciętnego ciężaru gatunkowego). Jeżeli znamy ten ciężar gatunkowy i wiemy, ile  $\text{cm}^3$  jakieś ciało zawiera, t. j. jaką posiada objętość, potrafimy obliczyć ciężar ciała, nie ważąc go zupełnie (n. p. ciężar ścian budynku, ciężar mostu, konstrukcji żelaznej, ciężar ropy w zbiornikach i t. p.). Wartość rozmaitych materiałów ocenia się najczęściej według ciężaru; wynika stąd wielkie ekonomiczne znaczenie tego pojęcia. (Kiedy wartość materiału ocenia się według wielkości powierzchni lub według długości?)

Wprowadziliśmy objętość jako nową wielkość. Trzeba przedewszystkiem nauczyć się porównywać te wielkości. Otóż za równe uważamy przedewszystkiem objętości brył przystających i takich, które się dadzą złożyć z brył parami przystających.

Jako jednostkę do mierzenia objętości trzeba obrać jakąś bryłę, której wymiary w rozmaitych kierunkach wynoszą jednostkę długości, a więc  $1\text{ m}$ ,  $1\text{ dm}$ ,  $1\text{ cm}$ . Można więc obrać n. p. kulę; ale kulami nie można wypełnić przestrzeni bez luk, dlatego też używamy bryły graniastej i to najbardziej symetrycznej, najprostszej. Taką bryłą jest sześcián.

Za jednostkę objętości obieramy więc sześcián, którego krawędź wynosi  $1\text{ m}$ ,  $1\text{ dm}$ ,  $1\text{ cm}$ ,  $1\text{ mm}$  i t. d. Taki sześcián nazywamy *metrem sześciennym* (lub *kubicznym*), *decymetrem sześciennym*, *centymetrem sześciennym* i t. d. i oznaczamy znakami:  $1\text{ m}^3$ ,  $1\text{ dm}^3$ ,  $1\text{ cm}^3$ ,  $1\text{ mm}^3$ .

Zmierzyć objętość jakiejś bryły, to znaczy: zbadać, ile razy ta objętość jest większa od przyjętej jednostki objętości. Liczbę wyrażającą ten stosunek objętości do jednostki nazywamy *liczbą wymiarową* danej objętości bez względu na to, czy jest liczbą wymierną czy też niewymierną.

Do liczb wymiarowych objętości stosują się wszystkie te uwagi, któreśmy omówili przy pomiarze pól (por. § 62). Rozszerzając określenie równości objętości powiemy: objętości brył uważamy za równe, jeżeli ich liczby wymiarowe są równe, chociażby się nie dały rozłożyć na części parami przystające.

Dla niektórych brył można wykonać pomiar objętości wprost, t. j. można bryłę rozłożyć (na rysunku lub w myśli) na same kostki o bokach  $1\text{ m}$ ,  $1\text{ dm}$ ,  $1\text{ cm}$ . Trzeba w tym celu poprowadzić odpo-



wiedni system przekrojów płaskich. Należą tu przede wszystkim bryły prostopadłokątne, t. j. prostopadłościan. Objętości innych prostych brył, jak walców, graniastosłupów i t. d. można znaleźć rachunkiem ze znanych wymiarów poszczególnych długości, występujących w tych bryłach.

Przeważnie jednak bryły, występujące w świecie zewnętrznym, są nieprawidłowe, nie można więc ich objętości zmierzyć przy pomocy jakiegoś prawa matematycznego, wzoru. Używamy wtedy sposobów przybliżonych, z których najczęściej rozpowszechnione są: ważenie i zanurzanie w płynach.

Metody ważenia używa się dla ciał, mających wszędzie jednostajną gęstość, t. j. dla ciał jednorodnych. Trzeba tylko znać ciężar  $1 \text{ cm}^3$  tego ciała, t. j. ciężar gatunkowy:  $c$ . Wiedząc, ile gramów waży całe ciało  $a$  ile gramów  $1 \text{ cm}^3$  tego ciała, otrzymamy liczbę centymetrów sześciennych, dzieląc ciężar całkowity przez ciężar gatunkowy. Oznaczając ciężar całego ciała literą  $Q$  a liczbę centymetrów sześciennych czyli liczbę wymiarową objętości literą  $V$ , otrzymamy:

$$V = \frac{Q}{c}.$$

(Dlaczego tą drogą nie można otrzymać ścisłych wyników, t. j. dowolnego przybliżenia?)

Drugiej metody: zanurzania w płynie możemy już użyć dla każdego ciała, bez względu na to, czy jest jednorodne, czy też nie. Jeżeli jakieś ciało zanurzymy w jakimkolwiek płynie, nie rozpuszczającym tego ciała, podniesie się płyn w naczyniu o tyle, ile wynosi objętość zanurzonego ciała. Naczynia obieramy w takiej postaci, aby można łatwo obliczyć objętość każdej części naczynia. Najczęściej używa się naczyń w formie walców, opatrzonych już podziałką na centymetry sześciennie. Podziałkę taką sporządza się zwykle nie rachunkiem, ale doświadczalnie (naczynia kalibrowane!). Odczytując stan poziomu cieczy przed wrzuceniem badanego ciała i po wrzuceniu, otrzymujemy jego objętość, jako różnicę obydwu odczytań.

Dla brył prawidłowych dotychczas poznanych wyprowadzimy jednak ścisłe sposoby obliczania objętości.

## § 101. Objętość graniastosłupa i walca.

Najłatwiej jest obliczyć objętość prostopadłościanu, podobnie jak w planimetrii pole prostokąta. Weźmy najpierw pod uwagę taki pro-

stopadłościan, którego krawędzie zawierają całkowite liczby jednostek długości, n. p. centymetrów, bez reszty. N. p. (fig. 305)  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $b = 3 \text{ cm}$ ,  $c = 5 \text{ cm}$ . Pro-

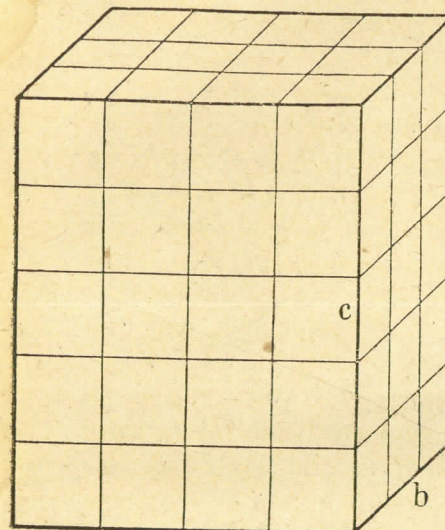


Fig. 305.

wadząc trzy systemy przekrojów płaskich równoległych do ścian prostopadłościanu, w odstępach  $1 \text{ cm}$ , rozdzielimy całą bryłę na same kostki o krawędzi  $1 \text{ cm}$ , to znaczy na same centymetry sześciennie. Liczba tych  $\text{cm}^3$  wynosi:

$$V = a \cdot b \cdot c \quad (1)$$

albowiem na podstawie można ich umieścić  $a \cdot b$  a takich warstw jest w bryle  $c$ . (N. p. na fig. 305 na podstawie jest  $3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^3$  a takich warstw jest pięć, więc wszystkich centymetrów sześciennych jest  $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^3$ ).

Stąd wniosek:

objętość prostopadłościanu obliczamy, mnożąc przez siebie liczby wymiarowe trzech krawędzi, schodzących się w jednym narożu.

Dla sześcianu  $a = b = c$ , więc objętość:

$$V = a^3 \quad (2)$$

(Wykaż, że zamiennikiem miar objętości jest liczba 1000!)

Wzór (1) można przedstawić także w innej postaci: iloczyn  $a \cdot b$  daje pole podstawy  $D$  a  $c$  jest wysokością prostopadłościanu, więc:

$$V = D \cdot w \quad (3)$$

Liczba wymiarowa objętości prostopadłościanu równa się liczbie wymiarowej podstawy pomnożonej przez liczbę wymiarową wysokości. Krótko wyrażamy to zwykle tak:

objętość prostopadłościanu równa się podstawie pomnożonej przez wysokość.

Jeżeliby krawędzie nie zawierały całkowitych liczb centymetrów, próbujemy je wymierzyć milimetrem,  $\frac{1}{10} \text{ mm}$ , ... i objętość obliczamy w ten sam sposób. Gdyby zaś krawędzie były niewspółmierne z jednostką długości, to prostopadłościan nie dałby się już rozłożyć na kostki, mające jednostkę długości. Mimo to wzór na obliczenie objętości pozostaje ten sam. Aby to wykazać, trzeba przeprowadzić po-



dobne rozumowanie, jak w planimetrii przy obliczaniu pola prostokąta (por. str. 132—133). Gdyby n. p.  $a = 5 \cdot 270 \dots \text{cm}$ ,  $b = 3 \cdot 182 \dots \text{cm}$ ,  $c = 4 \cdot 695 \dots \text{cm}$ , były liczbami niewymiernymi, to widocznie szukana liczba wymiarowa objętości zawiera się kolejno między iloczynami:

$$5 \cdot 3 \cdot 4 \text{ a } 6 \cdot 4 \cdot 5$$

$$5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 6 \text{ a } 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7$$

$$5 \cdot 27 \cdot 3 \cdot 18 \cdot 4 \cdot 69 \text{ a } 5 \cdot 28 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 4 \cdot 70$$

albowiem prostopadłościan o krawędziach  $a, b, c$  zawiera się cały wewnątrz prostopadłościanu o krawędziach 6, 4, 5 a mieści w sobie cały prostopadłościan o krawędziach 5, 3, 4. Podobnie możemy go zacieśniać dalej. (Wykonaj odpowiedni rysunek!)

Ponieważ liczba  $V$  zawiera się stale między dwoma iloczynami, dążącymi do tej samej granicy  $a \cdot b \cdot c$ , przeto musi być

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Wszystkie inne proste graniastosłupy i walce można już sprowadzić do obliczenia objętości prostopadłościanu. Widzieliśmy bowiem w planimetrii, że każdą powierzchnię można zamienić na prostokąt o równym polu. Każdy więc słup prosty można zamienić na słup o tej samej wysokości, o podstawie prostokątnej, równej co do pola, t. j. na prostopadłościan. Objętość tego prostopadłościanu równa się objętości pierwotnej bryły, bo podstawa zawiera tyle samo centymetrów kwadratowych (lub jego części), ile w pierwotnej bryle a więc i warstwy o grubości  $= 1$ , spoczywające na tych podstawach w obydwu bryłach, mają równe liczby wymiarowe. Ponieważ zaś wysokość została niezmienną, to i liczba tych warstw pozostaje ta sama. Otóż:

*objętość każdego prostego graniastosłupa i walca równa się liczbie wymiarowej podstawy pomnożonej przez liczbę wymiarową wysokości.*

$$V = D \cdot w \quad (3)$$

(Jednostki użyte do mierzenia linjowych wymiarów podstawy i wysokości muszą być takie same!)

Stąd otrzymujemy dla walca:

$$V = r^2 \pi \cdot w \quad (4)$$

Dla walca równobocznego  $w = 2r$ , więc:

$$V = 2r^3 \pi \quad (5)$$

Jak się mają do siebie objętości dwóch walców równobocznych? dwóch walców podobnych?

Z wzorów (2), (3), (4), (5) wynika ogólne prawo: *objętości dwóch słupów podobnych mają się do siebie tak, jak trzecie potęgi odpowiednich wymiarów linjowych.*

Na podstawie wzoru (3) można wykonywać podobne zamiany i podziały graniastosłupów, jakie się wykonuje w planimetrii na wielokątach (por. str. 138).

Pozostają jeszcze do obliczenia objętości słupów pochyłych.

Okażemy, że ten sam sposób obliczenia odnosi się także do graniastosłupów i walców pochyłych.

Mianowicie udowodnimy, że:

*objętość słupa pochyłego równa się objętości słupa prostego, mającego równą podstawę i równą wysokość.*

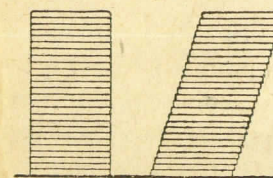


Fig. 306.

Otrzymamy w ten sposób bryłę zbliżoną do graniastosłupa pochyłego o tej samej podstawie. Wysokość nie zmieniła się przytem,

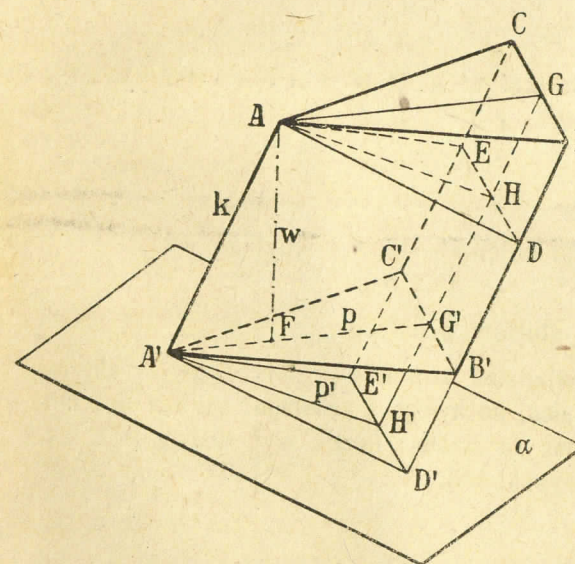


Fig. 307.

bo jest sumą grubości wszystkich płytek. Objętość również pozostała niezmienną jako suma objętości wszystkich płytek. (Zrób to samo ze stosem monet, papierków!)

Ściśle udowodnimy to, opierając się na własności rzutów (str. 186). Weźmy dowolny słup pochyły  $ABCA'B'C'$  (fig. 307). Poprowadźmy przekrój normalny (t. j. prostopadły do krawędzi)  $AED$ . Słup



samej objętości, gdyż składa się z części przystających do odpowiednich części bryły  $ABCA'B'C'$ . (Udowodnij przystawanie!) Objętość słupa prostego a więc i pochyłego wynosi:

$$V = AED.AA' \text{ lub krócej:}$$

$$V = P' \cdot k.$$

Aby obliczyć objętość słupa pochyłego, trzeba by więc znać pole przekroju normalnego  $P'$  i krawędź. Zwykle jednak znamy tylko pole dna  $P$ .

Wykażemy jednakże, że

$$P' \cdot k = P \cdot w.$$

Dowód: dno  $P'$  można uważać za prostopadły rzut dna  $P$  na płaszczyznę  $\alpha$ . Poprowadźmy wysokość  $w$  słupa pochyłego i przetnijmy go płaszczyzną, zawierającą  $k$  i  $w$ . Ona przecina słup pochyły wzdłuż krawędzi  $GG'$  a prosty wzdłuż krawędzi  $HH'$ . Dna tych słupów przecina płaszczyzna wzdłuż  $A'G'$  i  $A'H'$  (jest ona przekrojem normalnym kąta dwuściennego płaszczyzn  $P$  i  $P'$ , por. § 84). Widzieliśmy (str. 186), że powierzchnia  $P'$  zmniejsza się przez rzut w tym samym stosunku, w jakim się skraca odcinek  $A'G'$  prostopadły do krawędzi płaszczyzn  $P$  i  $\alpha$ .

Otóż:

$$P : P' = A'G' : A'H'.$$

Ale z podobieństwa trójkątów  $A'H'G'$  i  $AFA'$  wynika, że

$$A'G' : A'H' = k : w, \text{ więc}$$

$$P : P' = k : w$$

$$P' \cdot k = P \cdot w.$$

Otrzymujemy zatem na objętość słupa pochyłego wzór:

$$V = P \cdot w$$

zupełnie taki sam, jak dla słupów prostych.

Możemy więc wypowiedzieć zupełnie ogólne prawo: objętość każdego graniastosłupa i walca, pochyłego i prostego, oblicza się, mnożąc podstawę przez wysokość (a ściślej: liczbę wymiarową podstawy przez liczbę wymiarową wysokości).

### Ćwiczenia IX

§ 96. 1. Wykazać, że graniastosłup wieloboczny można podzielić na same graniastosłupy trójboczne zapomocą przekrojów, poprowadzonych przez przeciwległe krawędzie boczne.

2. Wykreślić w rzutach graniastosłup umiary o podstawie sześciobocznej, znając krawędź podstawy  $a = 1 \text{ cm}$  i wysokość  $b = 5 \text{ cm}$ . Ten sam rysunek wykonać w perspektywie równoległej.

3. Wykreślić w rzutach graniastosłup pochyły, którego podstawą jest sześciokąt umiary o boku  $a = 1 \text{ cm}$  a krawędź boczna  $b = 6 \text{ cm}$  jest nachylona do podstawy pod kątem  $60^\circ$ . Ten sam graniastosłup wykreślić w perspektywie.

4. Mając dany dowolny graniastosłup pięcioboczny w rzutach, wykreślić go w perspektywie równoległej (ukośnej).

5. Narysować w rzutach graniastosłup ośmioboczny umiary, ustawiony dnem równoległe do płaszczyzny pionowej.

6. Wykazać, że cztery przekątne równoległościanu przecinają się w jednym punkcie.

7. Obliczyć przekątnie sześciianu, znając jedną krawędź.

8. Pokój ma długość  $7 \text{ m}$ , szerokość  $4 \text{ m}$  a wysokość  $5 \text{ m}$ . Obliczyć odległość wierzchołków dwóch najdalszych kątów bryłowych.

9. Jakie płaszczyzny, osie i środki symetrii posiada: a) równoległościan prosty i prostokątny; b) równoległościan prosty ukośnokątny; c) równoległościan pochyły o podstawie prostokątnej. Wykonaj odpowiednie rysunki!

10. Ile wynosi suma kątów płaskich wszystkich ścian w graniastosłupie 4-bocznym, 5-bocznym,  $n$ -bocznym?

11. Ile wynosi suma kątów dwuściennych, leżących przy krawędziach bocznych, w graniastosłupie 4-, 5-...  $n$ -bocznym prostym?

§ 97. 12. Wykonać z kartonu model graniastosłupa, opisanego w zadaniu 2) w powiększeniu dwukrotnym (pod względem długości krawędzi).

13. Wykonać z kartonu model graniastosłupa, opisanego w zadaniu 3) w powiększeniu dwukrotnym (pod względem długości krawędzi).

14. Wykonać rozwinięcie dowolnego graniastosłupa prostego, danego zapomocą rzutów.

15. Wykonać rozwinięcie dowolnego sześciobocznego graniastosłupa pochyłego, danego w rzutach, przyczem przekrój normalny jest równoległy do płaszczyzny poziomej a dno prostopadłe do płaszczyzny pionowej.

16. Mając podany graniastosłup prosty w rzutach, przeciąć go płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny pionowej a nachyloną do poziomej.

Przerysować ten graniastosłup wraz z przekrojem w perspektywie równoległej.

17. Wykonać rozwinięcie pobocznic graniastosłupa z poprzedniego zadania wraz z przekrojem.

18. Mając narysowany dowolny graniastosłup pięcioboczny w perspektywie równoległej, wykonać jego rozwinięcie.

19. Obliczyć powierzchnię kostki, której przekątnia wynosi  $12 \text{ cm}$ .

20. Obliczyć powierzchnię prostopadłościanu, znając trzy krawędzie, schodzące się w jednym narożu.



21. Ile razy powiększy się powierzchnia kostki, jeżeli się krawędź powiększy dwa, trzy, cztery razy?

22. Obliczyć powierzchnię prostopadłościanu, znając stosunek trzech krawędzi  $m : n : p = 2 : 5 : 8$  i przekątnię główną  $d = 24 \text{ cm}$ .

23. W prostopadłościanie znamy pola trzech przekrojów, poprowadzonych przez przeciwległe krawędzie:  $p_1 = 104 \text{ cm}^2$ ,  $p_2 = 12 \cdot \sqrt{89} \text{ cm}^2$ ,  $p_3 = 20 \cdot \sqrt{13} \text{ cm}^2$ . Obliczyć krawędzie.

24. Powierzchnia prostopadłościanu wynosi  $P = 280 \text{ cm}^2$ , ściana boczna  $B = 50 \text{ cm}^2$  a przekątnia główna  $d = \sqrt{161} \text{ cm}$ . Obliczyć krawędzie.

25. Przecięcie prostopadłościanu, przechodzące przez dwie przeciwległe krawędzie boczne, jest kwadratem o polu  $A = 25 \text{ cm}^2$  a podstawa jest także kwadratem. Obliczyć powierzchnię całej bryły.

26. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątnia  $c = 2,4 \text{ dm}$  a przyprostokątnia  $a = 1,9 \text{ cm}$ . Wysokość równa się drugiej przyprostokątnej. Obliczyć powierzchnię.

27. Obliczyć powierzchnię graniastosłupa umiarowego sześciobocznego, znając promień podstawy i wysokość.

28. Obliczyć powierzchnię graniastosłupa umiarowego: a) trójbocznego; b) czworobocznego; c) pięciobocznego; d) ośmiobocznego, znając wysokość i promień koła opisanego na podstawie n. p.  $w = 10 \text{ cm}$ ,  $r = 2 \text{ cm}$ .

29. Obliczyć powierzchnię bryły powstałej z sześcianu przez odcięcie ośmiu naroży zapomocą płaszczyzn, odcinających czwartą część każdej krawędzi. Narysuj tę bryłę w rzutach i w perspektywie!

30. Obliczyć powierzchnię graniastosłupa umiarowego: a) sześciobocznego; b) ośmiobocznego, jeżeli wszystkie krawędzie boczne i podstawowe są równe (n. p.  $k = 2 \text{ cm}$ ). Narysować te bryły w rzutach i perspektywie!

§ 98. 31. Narysować w rzutach i w perspektywie walec prosty, znając promień podstawy  $r = 2 \text{ cm}$  i bok  $b = 6 \text{ cm}$ .

32. Narysować w rzutach i w perspektywie równoległej walec kołowy, którego promień podstawy  $r = 2 \text{ cm}$  a bok wynosi  $b = 8 \text{ cm}$  i jest nachylony do podstawy pod kątem  $75^\circ$ .

33. W walcu, opisanym w poprzednim zadaniu, wykreślić przecięcie osiowe, zawierające rzut osi.

34. Mając dany dowolny walec prosty w rzutach, narysować go w perspektywie równoległej.

35. Narysować w rzutach i w perspektywie równoległej walec prosty przecięty płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny pionowej a nachyloną do poziomej. W jakiej płaszczyźnie leży oś wielka elipsy przekroju a w jakiej oś mała?

36. Mając walec podany w rzutach, znaleźć taki przekrój ukośny, aby oś wielka elipsy przekroju była dwa razy większa od osi małej. Narysować ten przekrój w prawdziwej wielkości.

37. Koło oświecone promieniami równoległymi a prostopadłymi do jego płaszczyzny, rzuca cień na płaszczyznę nachyloną pod kątem  $60^\circ$  do

promieni światła. Narysować to w perspektywie a osobno cień w prawdziwej wielkości.

38. Do dowolnego walca narysowanego w perspektywie równoległej a spoczywającego na płaszczyźnie, poprowadzić płaszczyznę styczną wzdłuż tworzącej  $AA'$ . Trzeba najpierw znaleźć styczną do elipsy, przedstawiającej; dno walca. Por. fig. 301: styczna ma kierunek równoległy do średnicy  $FG$ , sprzężonej z  $AB$ .

39. Z punktu poza walcem poprowadzić dwie płaszczyzny styczne do niego (w perspektywie równoległej).

40. Jakie płaszczyzny, osie i środki symetrii posiada: a) walec prosty b) walec pochyły?

§ 99. 41. Wykonać rozwinięcie dowolnego walca prostego danego: a) w rzutach; b) w perspektywie równoległej o znanem zniekształceniu.

42. Wyciąć z kartonu siatkę walca prostego o promieniu  $r = 4 \text{ cm}$  a o wysokości  $b = 6 \text{ cm}$  i skleić model.

43. Sporządzić model walca równobocznego o wysokości  $5 \text{ cm}$ .

44. Walec pochyły dany zapomocą rzutów (por. fig. 303) rozwinąć na płaszczyźnie przybliżoną konstrukcją. Wykonać model!

45. Narysować w rzutach i w perspektywie równoległej rurę walcową o średnicy wewnętrznej  $1 \text{ cm}$  a o grubości  $3 \text{ mm}$ . Długość rury  $7 \text{ cm}$ .

46. Obliczyć powierzchnię walca równobocznego o wysokości  $6 \text{ cm}$ .

47. Na kwadratowej podstawie  $8 \text{ m}$  szerokiej spoczywa sklepienie, utworzone z części pobocznic dwóch walców, przenikających się (ich średnice  $= 8 \text{ m}$ ). Zatrzymując z tych pobocznic raz części wspierające się na tworzących, drugi raz części ograniczone półkami otrzymamy dwa rodzaje sklepień: klasztorne i krzyżowe. Narysować je w rzutach i w perspektywie.

48. Obliczyć powierzchnię walca prostego, którego bok wynosi  $3 \text{ cm}$  a promień podstawy  $1 \text{ cm}$ .

49. Wykazać, że prostokąt określa pobocznice walca o takiej samej powierzchni bez względu na to, czy się obraca koło dłuższego, czy koło krótszego boku.

50. Obliczyć powierzchnię rury walcowej, opisaną w zadaniu 45.

51. Obliczyć wysokość walca równobocznego, którego powierzchnia  $P = 1 \text{ m}^2$ .

52. Obliczyć powierzchnię walca prostego wpisanego w graniastosłup umiarowy sześcioboczny, znając bok sześciokąta ( $a = 12 \text{ mm}$ ) i wysokość graniastosłupa  $w = 1 \text{ dm}$ . Rysunek!

53. Obliczyć powierzchnię walca opisanego na prostopadłościanie o krawędziach  $a = 3 \text{ cm}$ ;  $b = 4 \text{ cm}$ ;  $c = 5 \text{ cm}$ . Rysunek!

54. Wycięto część walca zapomocą dwóch przecięć osiowych, tworzących kąt  $60^\circ$ . Obliczyć powierzchnię bryły wyciętej, znając promień walca  $r = 2 \text{ cm}$  i wysokość  $b = 5 \text{ cm}$ . Narysuj w rzutach i w perspektywie!

55. Ile  $\text{dm}^2$  blachy trzeba użyć na zrobienie koryta ograniczonego połową pobocznic walca i dwoma półkami? Długość  $4 \text{ m}$ , głębokość  $3,2 \text{ dm}$ . Narysować tę bryłę w położeniu poziomym w pomniejszeniu  $1 : 40$ .



56. Na walcu, którego promień  $r = 3 \text{ cm}$  a wysokość  $w = 8 \text{ cm}$ , znajduje się 16 skrętów śruby. Obliczyć długość linii śrubowej!

57. Długość linii śrubowej tworzącej jeden skręt wynosi  $24 \text{ dm}$  a wysokość walca  $15 \text{ dm}$ . Ile wynosi jego powierzchnia?

§ 100. 58. Ciało waży  $25 \text{ kg}$ . Ile wynosi jego objętość, jeżeli ciężar gatunkowy wynosi  $c = 8$ ?

59. Przez wrzucenie jakiegoś ciała do napełnionego naczynia wylało się  $\frac{1}{2} \text{ l}$  wody. Jak wielką objętość ma to ciało? Ile to jest  $\text{cm}^3$ ?

§ 101. 60. Narysować w perspektywie równoległej równoległoscian prosty o podstawie rombowej i zamienić go na prostopadłościan.

61. Narysować w perspektywie równoległej równoległoscian pochyły i zamienić go na prosty.

62. Graniastosłup prosty o podstawie sześciobocznej zamienić na prostopadłościan w rzutach i w perspektywie.

63. Obliczyć objętość sześcianu, znając: a) powierzchnię jednej ściany  $p = 144 \text{ cm}^2$ , b) przekątnię sześcianu  $d = 8 \text{ cm}$ , c) przekątnię ściany bocznej  $q = 12 \text{ cm}$ .

64. Obliczyć ciężar żelaznej skrzyni sześcienniej, której długość wynosi  $0.5 \text{ m}$  a grubość ścian  $1 \text{ cm}$ . Ciężar gatunkowy żelaza kutego  $c = 7.3$ .

65. Znaleźć krawędź kostki, mającej dwa razy większą objętość od kostki o znanej objętości, n. p.  $V = 50 \text{ dm}^3$  (problem delijski: podwojenie ołtarza sześciennego). Zadanie to nie da się wykonać przy pomocy jedynie cyrkuła i lineatu!

66. Jak długa jest kostka ołowiana, ważąca  $1 \text{ kg}$  (ciężar gatunkowy ołowiu  $c = 11.37$ ).

67. Ile waży cegła, mająca rozmiary  $29 \text{ cm}$ ,  $14 \text{ cm}$ ,  $6.5 \text{ cm}$ , jeżeli jej ciężar gatunkowy  $c = 1.8$ .

68. Ile waży schody kamienne, prowadzące do wysokości  $12 \text{ m}$ , z których każdy ma rozmiary  $1.5 \text{ m}$ ,  $2 \text{ dm}$  a  $1 \text{ dm}$  wysokości a ciężar gatunkowy kamienia  $c = 2.5$ ?

69. Obliczyć objętość graniastosłupa prostego o wysokości  $6 \text{ dm}$ , jeżeli jego podstawa jest: a) trójkątem równobocznym, b) pięciokątem umiartym, c) sześciokątem umiartym, d) ośmiokątem umiartym o boku  $a = 1 \text{ dm}$ .

70. Znając powierzchnię graniastosłupa umiartego 3-, 5-, 6-bocznego, obliczyć jego objętość, jeżeli wysokość jest dwa razy większa od krawędzi podstawy.

71. Obliczyć objętość walca prostego, znając obwód podstawy  $U = 628 \text{ cm}$  i wysokość.

72. Ile wody na sekundę przepływa przez rurę o przekroju kołowym, którego średnica wynosi  $2 \text{ dm}$ , jeżeli prędkość ruchu wody jest  $1.5 \text{ m}$  na sekundę. Ile hektolitrow dziennie może ta rura dostarczyć?

73. Grubość drutu żelaznego wynosi  $3 \text{ mm}$ . Ile metrów tego drutu otrzymamy z  $1 \text{ kg}$  (ciężar gatunkowy  $c = 7.3$ ).

74. Kilogram drutu o ciężarze gatunkowym  $c = 11$  zawiera  $80 \text{ m}$  tego drutu. Ile wynosi promień przekroju?

75. Obliczyć ciężar rury żelaznej (c. g. żelaza lanego  $= 7.8$ ), znając jej grubość:  $2 \text{ cm}$ , promień przekroju wewnętrznego  $r = 15 \text{ cm}$  i długość  $6 \text{ m}$ .

76. Jak szerokie jest naczynie w formie walca, zawierające  $1 \text{ l}$ , jeżeli a) wysokość równa się średnicy podstawy, b) wysokość równa się podwójnej średnicy podstawy.

77. Srebrny drut  $30 \text{ cm}$  długi o grubości  $1 \text{ mm}$  powleczone warstwą złota grubości  $0.3 \text{ mm}$ . O ile zmniejszy się grubość tego drutu i grubość warstwy złota, jeżeli go wyciągniemy do długości  $1 \text{ m}$ ?

78. Naczynie walcowe do mierzenia ilości opadów atmosferycznych ma średnicę  $25 \text{ cm}$ . Podczas deszczu przybyło  $1.36 \text{ kg}$  wody. Jaka była wysokość opadu? O ile  $\text{mm}$  wzniosła się woda w tym naczyniu? Ile hektolitrow wody spadło na przestrzeni  $1 \text{ km}^2$ ?  $1 \text{ m}^2$ ?  $1 \text{ cm}^2$ ?

79. Do naczynia w formie walca o średnicy  $8 \text{ cm}$  wrzucono kostkę sześcienną; woda podniosła się o  $15 \text{ mm}$ . Ile wynosi objętość kostki? Ile wynosi jej krawędź?

80. Obliczyć ciśnienie słupka rtęci o wysokości  $76 \text{ cm}$  na  $1 \text{ cm}^2$  podstawy, znając ciężar gatunkowy rtęci  $= 13.59$ .

81. Walec pływa po wodzie zanurzony do połowy. Obliczyć jego ciężar gatunkowy (prawo hydrostatyczne Archimedesala).

82. Różnica objętości dwóch walców, z których jeden jest opisany na sześcienniku a drugi wpisany, wynosi  $D = 126 \text{ cm}^3$ . Obliczyć krawędź sześcienniku.

83. W rurce włoskowatej o jednostajnej grubości rtęć zajmuje  $15 \text{ cm}$  a ciężar tego słupka rtęci wynosi  $0.64 \text{ gr}$ . Jaka jest średnica przekroju tej rurki (c. g. rtęci  $= 13.6$ )?

84. Obliczyć objętość walca: a) opisanego; b) wpisanego w graniastosłup umiartowy sześcioboczny, którego krawędź podstawy  $a = 2 \text{ cm}$  a wysokość  $b = 24 \text{ cm}$ .

85. Obliczyć objętość graniastosłupa pochyłego o podstawie kwadratowej, znając krawędź podstawy  $a = 2 \text{ cm}$ , krawędź boczną  $b = 36 \text{ cm}$  i nachylenie jej do podstawy  $\alpha = 60^\circ$ .

86. Walec prosty przecięto płaszczyzną nachyloną do osi. Wykazać, że pobocznicą i objętość walca ściętego równa się poboczniczy i objętości walca o tej samej podstawie, którego wysokością jest odcinek osi odcięty tą płaszczyzną pochyłą.

87. Wykazać, że pobocznicą walca prostego równa się powierzchni koła, którego promień jest średnią geometryczną między wysokością a średnicą podstawy.

88. O ile trzeba powiększyć wysokość walca prostego, aby pole poboczniczy powiększyło się o pole podstawy?

89. Znając objętość i pobocznicę walca prostego obliczyć promień.

90. Sprawdzić geometrycznie prawdziwość wzoru  $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$  (modell)



## Ostrosłupy i stożki

## § 102. Ostrosłupy.

Dowolny punkt  $S$ , leżący nad płaszczyzną wielokąta  $ABCDE$  (fig. 308), połączmy z punktem  $A$  i obracajmy prostą  $SA$  około punktu  $S$  tak, aby się ślizgała po obwodzie wielokąta. Powstanie przestrzeń zamknięta a więc bryła, zwana **ostrosłupem**. Wielokąt

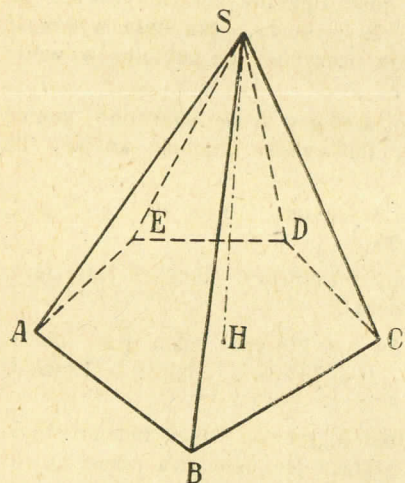


Fig. 308.

$ABCDE$  nazywa się podstawą, punkt  $S$  wierzchołkiem a trójkąty  $SAB, SBC \dots$  ścianami bocznymi; ich zbiór nazywamy **poboczną**. Ostrosłup jest więc bryłą, ograniczoną jednym wielokątem i tyloma ścianami bocznymi, schodzącymi się w jednym punkcie, ile dno ma boków. Można także prościej opisać ostrosłup. Jest to bryła, która powstanie, jeżeli jakiegokolwiek naroże przetniemy płaszczyzną, przechodzącą przez wszystkie krawędzie.

Prostą  $SA$ , której ruch zakreślił poboczną, nazywamy **tworzącą** a wielokąt  $ABCDE$  **kie-rownicą** tej powierzchni. Odcinki

tworzących zawarte między wierzchołkiem a podstawą nazywamy krawędziami bocznymi lub bokami ostrosłupa. Boki dna nazywamy krawędziami podstawowymi. Odległość wierzchołka od podstawy nazywa się **wysokością** ostrosłupa  $SH$ . Trzeba wyraźnie odróżniać wysokość ostrosłupa od wysokości ścian bocznych!

Według liczby ścian bocznych rozróżniamy ostrosłupy trójboczne, czworoboczne i t. d. Ostrosłup trójboczny nazywamy także często **czworościanem**. Mniej ścian nie może mieć żadna bryła graniasta (wielościan). W każdym czworościanie istnieje punkt równo oddalony od wszystkich wierzchołków i punkt równo oddalony od wszystkich ścian. (Udowadnia się przy pomocy płaszczyzn symetrii krawędzi i kątów dwuściennych). Podobnie jak w planimetrii, przy rozważaniu wielokątów, rozkłada się je na trójkąty, tak w stereometrii

rozkłada się często wielościany na same czworościany. Każdą ścianę czworościanu możemy uważać za podstawę **ostrosłupa**.

Jeżeli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są równe, to ich rzuty na podstawę są równe, więc punkty  $A, B, C, D, E$  na fig. 308 leżą wtedy na obwodzie koła, którego środkiem jest spodek wysokości (rzut punktu  $S$ ) a promieniem odległość jego od któregośkolwiek wierzchołka podstawy. Taki **ostrosłup**, którego krawędzie boczne są równe, nazywamy **prostym**.

*Uwaga:* określenie to nie zgadza się z tem, co pospolicie uważamy za ostrosłup prosty. N. p. ostrosłup o podstawie rombowej, którego wierzchołek leży prostopadle nad środkiem podstawy (fig. 309) nazwiemy w potocznym życiu prostym, bo nie pochyla się w żadną stronę. Jednakowoż według naszego określenia nie jest prostym, bo  $SA > SB$  a więc krawędzie boczne nie są równe.

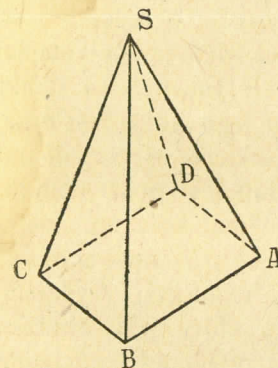


Fig. 309.

Dnem ostrosłupa prostego może być tylko taki wielokąt, na którym da się opisać koło. Jeżeli w ostrosłupie prostym dno jest wielokątem umiarem, ostrosłup nazywamy **umiarem**. Jeżeli dno jest trójkątem równobocznym a przytem krawędzie boczne są równe krawędziom podstawy, to wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi. Z tego wynika, że i wszystkie naroża są przystające (por.

str. 189). Bryłę taką zaliczamy do wielościanów umiarych i nazywamy **czworościanem umiarem**. Inny wielościan umiary otrzymamy

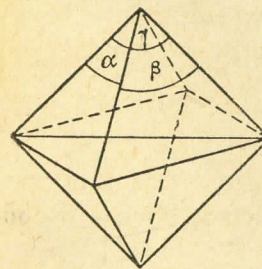


Fig. 310.

z ostrosłupa umiaryego czworościennego, którego krawędź podstawy równą się krawędzi bocznej. Dwa takie ostrosłupy złożone podstawami a których wierzchołki leżą po przeciwnych stronach podstawy, tworzą **ośmiościan umiary** (fig. 310). Wszystkie jego ściany są trójkątami równobocznymi a wszystkie naroża są przystające, można bowiem każde złożyć z dwóch parami przystających naroży trójsściennych (o kątach płaskich  $\alpha = 60^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 90^\circ$ ).

Ostrosłupy występują w naturze często, jako postacie kryształów. Rzadziej spotykamy je jako dzieła rąk ludzkich (niektóre dachy, ostrza i t. p.). Natomiast bardzo często mamy do czynienia z ostrosłupami przy wykonywaniu



rysunków, w nauce o perspektywie, o cieniach. Jeżeli bowiem pęk promieni np. promieni światła przetniemy płaszczyzną, powstaje często ostrosłup, którego wierzchołkiem jest wierzchołek pęku.

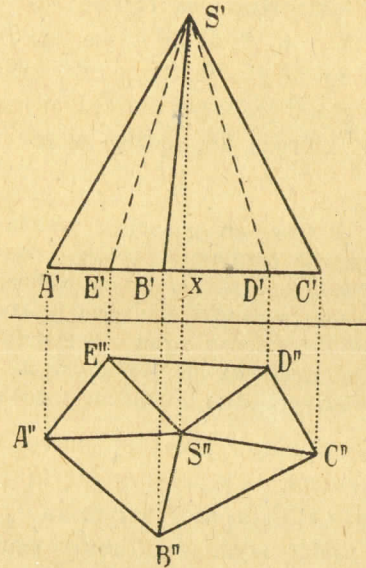


Fig. 311.

Aby ostrosłup przedstawić w rzutach, ustawiamy go tak, aby dno było równoległe do płaszczyzny poziomej. W rzucie pionowym (widok z przodu) otrzymamy trójkąt z kilkoma linjami, poprowadzonymi od wierzchołka do podstawy; w rzucie poziomym (widok z góry!) przedstawi się ostrosłup jako wielokąt przystający do dna, w którym pewien punkt, np. leżący na jego polu, jest połączony z wszystkimi wierzchołkami. Jeżeli ostrosłup jest prosty, punkt ten jest środkiem koła opisanego.

Aby ostrosłup narysować w perspektywie równoległej, rysujemy

najpierw dno w znany sposób; w punkcie, który jest obrazem punktu  $S''$ , kreślimy linię prostopadłą do osi poziomej i odcinamy na niej wysokość  $X S'$  (fig. 311).

### § 103. Powierzchnia ostrosłupa. Siatka.

Aby obliczyć powierzchnię ostrosłupa, trzeba do powierzchni dna dodać powierzchnię pobocznic:

$$P = D + M$$

Jeżeli ostrosłup jest umiaryowy  $n$  — boczny, to ściany boczne są przystającymi trójkątami (dlaczego?) a więc powierzchnia pobocznic wynosi:

$$M = \frac{n a h}{2}$$

gdzie  $a$  oznacza krawędź podstawy a  $h$  wysokość ściany bocznej. Dla ostrosłupów nieumiarywych trzeba każdą ścianę boczną osobno obliczać.

Rozwinięcie ostrosłupa prostego podanego w rzutach jest trudniejsze, ponieważ krawędzie boczne nie wszystkie występują w prawdziwej wielkości i to tak w rzucie pionowym, jak i w rzucie poziomym. Trzeba obrócić cały ostrosłup tak, aby jedna krawędź boczna była równoległa do płaszczyzny pionowej. Na fig. 311

obraliśmy już takie położenie, że krawędź  $SA$  jest równoległa do płaszczyzny pionowej, więc  $S'A'$  jest prawdziwą długością krawędzi ( $S'C'$  już nie!). Ponieważ i wszystkie inne krawędzie boczne mają tę samą wielkość, rozwinięcie pobocznic da się już wykonać. Zakreślamy promieniem  $S'A'$  koło (fig. 312) i odcinamy po kolei cięciwy  $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$ ,  $CD = C'D'$  i t. d.; ich końce łączymy z punktem  $S$ . Przy jednym z boków, n.p. przy  $BC$ , rysujemy wielokąt

Fig. 312.

$$(A) BC (D) (E) \cong A'' B'' C'' D'' E''$$

Jeżeli ostrosłup jest pochyły, rozwinięcie jest trudniejsze.

### § 104. Ostrosłup ścięty.

Z przekrojów ostrosłupa najważniejszy jest dla nas przekrój równoległy do podstawy. Poprowadźmy płaszczyznę:  $k \parallel K$  (fig. 313).

Krawędzie przekroju są równoległe do krawędzi podstawy; wskutek tego odpowiednie kąty wielokątów  $K$  i  $k$  są równe:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A', \sphericalangle B = \sphericalangle B', \sphericalangle C = \sphericalangle C' \dots$$

Boki wielokątów  $K$  i  $k$  są proporcjonalne, albowiem

$$AB : A'B' = SB : SB' = BC : B'C' \text{ a więc } AB : A'B' = BC : B'C'.$$

Stąd wniosek: przekrój ostrosłupa płaszczyzną równoległą do podstawy jest wielokątem podobnym do podstawy.

Pola figur podobnych mają się do siebie, jak kwadraty odpowiednich boków (por. § 69), więc

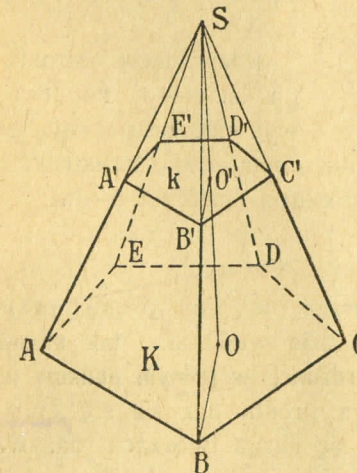


Fig. 313.



$K:k = AB^2 : A'B'^2$ . Wykreślmy wysokość  $SO$ , to:

$$AB : A'B' = SB : SB' = SO : SO'$$

$$K:k = SO^2 : SO'^2$$

więc  
słowami:

Pola podstawy i przekroju równoległego w ostrosłupie tak się mają do siebie, jak kwadraty ich odległości od wierzchołka.

Twierdzenie to odnosi się do dowolnego pęku promieni, przeciętego dwoma równoległymi płaszczyznami. Stosując to twierdzenie n. p. do optyki widzimy, że jeżeli pęk promieni światła pada na dwie płaszczyzny równoległe, to ta sama ilość promieni oświetla z odległości 3, 4, 5 razy większej pole 9, 16, 25 razy większe. Wobec tego natężenie światła słabnie w stosunku do kwadratu odległości.

Bryłę, powstającą z ostrosłupa przez odcięcie mniejszego ostrosłupa zapomocą płaszczyzny równoległej do dna, nazywamy ostrosłupem ściętym. Jest on ograniczony dwoma równoległymi i podobnymi do siebie dnami i tyloma trapezami (ścianami bocznymi), ile dno ma boków. Więc powierzchnia ostrosłupa ściętego wynosi:

$$P = D + d + M$$

Co nazwiemy wysokością ostrosłupa ściętego? Co nazwiemy wysokością ścian bocznych? Jakie bryły z życia codziennego są ostrosłupami ściętymi?

Rozwinięcie ostrosłupa ściętego najłatwiej wykonać, uzupełniając go

do zwykłego ostrosłupa. Fig. 314 wyjaśnia dostatecznie konstrukcję, potrzebną do rozwinięcia pobocznic ostrosłupa ściętego.

### § 105. Stożek.

Podobnie, jak ostrosłup powstał przez ruch linii prostej przytwierdzonej w jednym punkcie po obwodzie wielokąta, tak **stożek powstaje przez ruch linii prostej przytwierdzonej w jednym punkcie po obwodzie dowolnej linii krzywej**. Ta linia prosta nazywa się **tworzącą stożka** a linia krzywa, po której się ślizga tworząca, nazywa się **kierownicą stożka**. Jeżeli kierownica jest kołem, **stożek** nazywa

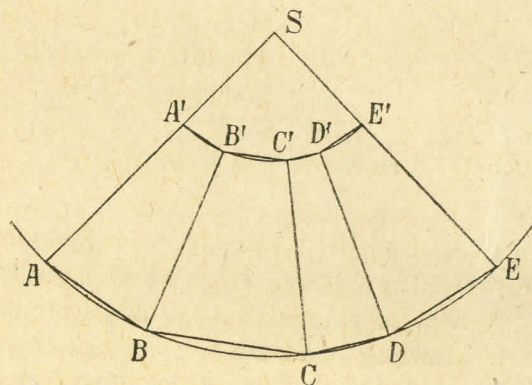


Fig. 314.

się **kołowy**. Kierownicę nazywamy także podstawą stożka a stały punkt  $S$  wierzchołkiem (fig. 315). Stożek kołowy jest więc ograniczony jedną powierzchnią płaską, mianowicie kołem i poboczną, która jest powierzchnią krzywą, ale prostolinjową. Taka powierzchnia krzywa nazywa się **powierzchnią stożkową**. Odcinek tworzącej, zawarty między wierzchołkiem a podstawą, nazywa się **bokiem stożka**. Prostopadła odległość wierzchołka  $S$  od podstawy nazywa się **wysokością** a prosta, łącząca wierzchołek ze środkiem podstawy, **osią stożka**.

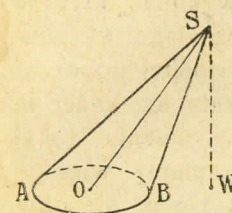


Fig. 315.

Jeżeli boki stożka są wszystkie równe, stożek nazywa się **prosty**, w przeciwnym razie **pochyły**. W stożku prostym wierzchołek leży na linii prostopadłej do podstawy wykreślonej w jej środku; oś jest więc w nim zarazem wysokością. Każdy przekrój stożka płaszczyzną, zawierającą oś, jest trójkątem. Jeżeli stożek jest prosty, przecięcie osiowe jest trójkątem równoramiennym. (Czy w stożku pochylonym jest jakie przecięcie osiowe trójkątem równoramiennym?). Jeżeli prócz tego bok równa się średnicy podstawy:

$$b = 2r$$

to przecięcie osiowe jest trójkątem równobocznym a stożek nazywa się **stożkiem równobocznym**.

(Jakim ruchem obrotowym można otrzymać stożek prosty?).

Aby stożek przedstawić w rzutach, ustawiamy go równo-

legle do płaszczyzny poziomej i otrzymujemy fig. 316 a) lub b) dla stożka prostego i pochylego. Przedstawienie stożka w perspektywie równoległej nie sprawia żadnej trudności, skoro potrafimy narysować dno w perspektywie. (Por. fig. 272 b) na str. 212).

### § 106. Powierzchnia stożka. Siatka.

Aby obliczyć powierzchnię stożka, postępujemy tak samo, jak z walcem, korzystając z tego, że pobocznica stożka jest także powierzchnią rozwijalną. Rozwinięcie to wykonujemy mechanicznie,

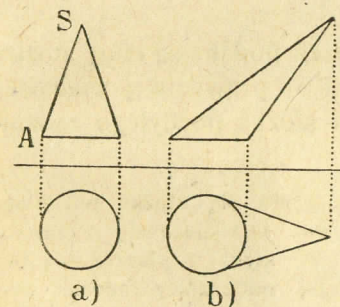


Fig. 316.



tocząc stożek po płaszczyźnie tak, aby punkt  $S$  pozostał nieruchomy. Na modelu można także wykonać rozwinięcie, przecinając pobocznice wzdłuż tworzącej.

Dla stożka prostego możemy łatwo wykonać to rozwinięcie konstrukcyjnie. Ponieważ boki stożka prostego są równe i wychodzą także w rozwiniętej pobocznicie z jednego punktu  $S$ , przeto ich końce leżą na obwodzie koła o promieniu  $SA = b$  ( $b = \text{bok}$ ) fig. 317. Otrzymamy więc wycinek koła, którego łuk równa się obwodowi podstawy stożka. Dla pobocznic stożka otrzymujemy więc wzór (por. § 74):

$$M = 2r\pi \cdot \frac{b}{2} = r\pi b$$

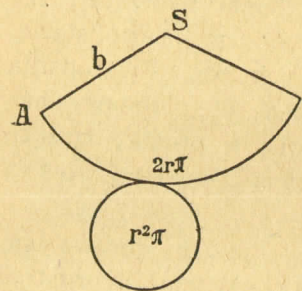


Fig. 317.

Cała powierzchnia wynosi:

$$P = r^2\pi + r\pi b = r\pi(r + b)$$

Jeżeli stożek jest równoboczny, to  $b = 2r$ , więc

$$P = r\pi \cdot 3r$$

$$P = 3r^2\pi$$

czyli:

Konstrukcję siatki łatwo wykonać, jeżeli podane są rzuty stożka, bo w rzucie pionowym występuje bok  $SA$  w prawdziwej wielkości. Wszystko to dotyczy stożka prostego. Dla stożka pochyłego zadanie to jest o wiele trudniejsze.

Z góry można przewidzieć, że przy toczeniu się stożka pochyłego około punktu  $S$  podstawa zakreśli linię krzywą, składającą się z falistych wzniesień i obniżień. Najpierw bowiem będzie się stykał z płaszczyzną bok najdłuższy, więc odpowiedni punkt rozwiniętej pobocznicie będzie leżał najdalej od punktu  $S$ . Później styka się z płaszczyzną bok coraz to krótszy, wreszcie najkrótszy bok zaznaczy miejsce, w którym linia rozwiniętej podstawy najbardziej się zbliży do  $S$ . Stąd począwszy znowu się oddalamy od  $S$  i t. d.

### § 107. Przekroje stożka, przechodzące przez wierzchołek i przekroje równoległe do podstawy.

Płaszczyzna, przechodząca przez wierzchołek stożka, albo wcale nie przecina jego pobocznic (poza  $S$ ), albo ma z nią całą tworzącą wspólną i nazywa się płaszczyzną styczną, albo przecina pobocznice wzdłuż dwóch tworzących. Z każdego punktu poza stożkiem można do niego poprowadzić dwie płaszczyzny styczne: ich krawędź przecięcia się musi przechodzić

przez wierzchołek stożka, albowiem dwie linie tworzące, wzdłuż których te płaszczyzny dotykają stożka, przechodzą przez wierzchołek. Konstrukcję płaszczyzny stycznej do stożka, narysowanego w perspektywie równoległej, w punkcie  $A$ , wyjaśnia fig. 318. Kiedy ostrosłup nazwiemy opisanym na stożku a kiedy wpisanym w stożek?

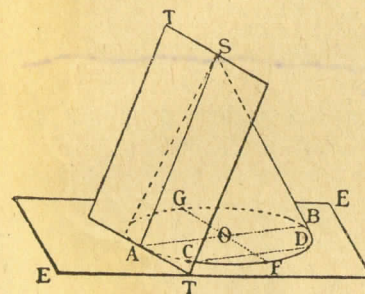


Fig. 318.

Zbadajmy teraz przekroje równoległe do dna. Wykażemy przedewszystkiem, że taki przekrój jest kołem. Otóż z trójkątów  $SAO$  i  $SCO$  (na fig. 319) widzimy, że

$AO : A'O' = SO : SO'$   
 $CO : C'O' = SO : SO'$  } z tych dwóch proporcji wynika trzecia:  
 $AO : A'O' = CO : C'O'$ . Ale  $AO = CO$  jako promienie koła, więc musi być także  $A'O' = C'O'$ . Tak samo wszystkie inne punkty przekroju są równo oddalone od punktu  $O'$  a więc ten przekrój jest kołem.

Łatwo teraz wykazać, podobnie jak dla ostrosłupa, że pola obu kół tak się mają do siebie, jak kwadraty ich odległości od wierzchołka (udowodnij!).

Bryłę, pozostałą po odcięciu górnego stożka, nazywamy stożkiem ściętym. Jest on ograniczony dwoma równoległymi kołami i pobocznica krzywą, która jest częścią powierzchni stożkowej.

Więc:

$$P = D + d + M.$$

Jeżeli stożek jest prosty, to pobocznice tę łatwo rozwinać. Rozwijamy najpierw pobocznice całego stożka  $SA A_0$  (fig. 320) i odcinamy od niej pobocznice stożka odciętego  $SA' A'_0$ . Figura pozostała jest wycinkiem pierścienia kołowego czyli trapezem kołowym. Jego bokami równoległymi są obwody den a szerokością bok stożka ściętego (por. § 74). Zatem:

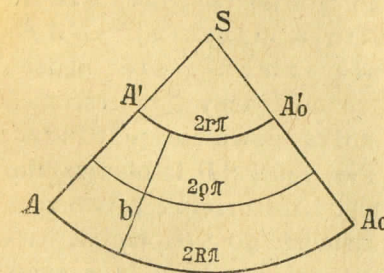


Fig. 320.

$$M = \frac{2R\pi + 2r\pi}{2} b = (R + r)\pi b.$$



Wprowadzając w ten wzór zamiast  $\frac{R+r}{2}$  promień  $\varrho$  przekroju średniego otrzymamy wzór:

$$M = 2\varrho\pi b.$$

Pobocznica stożka ściętego prostego równa się obwodowi przekroju średniego, pomnożonemu przez bok.

Wzór na obliczenie całej powierzchni stożka ściętego prostego jest:

$$P = R^2\pi + r^2\pi + (R+r)\pi b$$

lub wyciągając  $\pi$  za nawias:

$$P = [R^2 + r^2 + (R+r)b]\pi.$$

### § 108. Ukośne przekroje stożka.

Dla dokładniejszego rozpatrzenia istoty przekrojów stożka weźmy pod uwagę stożek podwójny, powstający przez przedłużenie pobocznic stożka poza wierzchołek.

(Stożki te są symetryczne względem wierzchołka). Narysujmy najpierw przekrój kołowy  $AB$  równoległy do podstawy. Jeżeli płaszczyznę pochylamy ku dołowi (obracając ją koło p.  $A$ ) to przekrój wydłuża się, koło  $AB$  spłaszcza się i otrzymujemy elipsy  $AC$ .... coraz bardziej wydłużone (fig. 321). Że to są istotnie elipsy, te same, które poznaliśmy przy przekrojach walca, udowodnimy później. Jeżeli płaszczyznę  $\alpha$  obrócimy tak, aby była równoległa do tworzącej  $SD$ , to linia przekroju  $EAF$  nie zamknie się nigdzie, chociażbyśmy powierzchnię stożka dowolnie przedłużyli. Tworzącej  $SD$  ta płaszczyzna nigdy nie przetnie a tworzące sąsiednie do  $SD$  przetnie bardzo daleko. Linia ta nazywa się parabolą. Jeżeli płaszczyznę przekroju obracamy

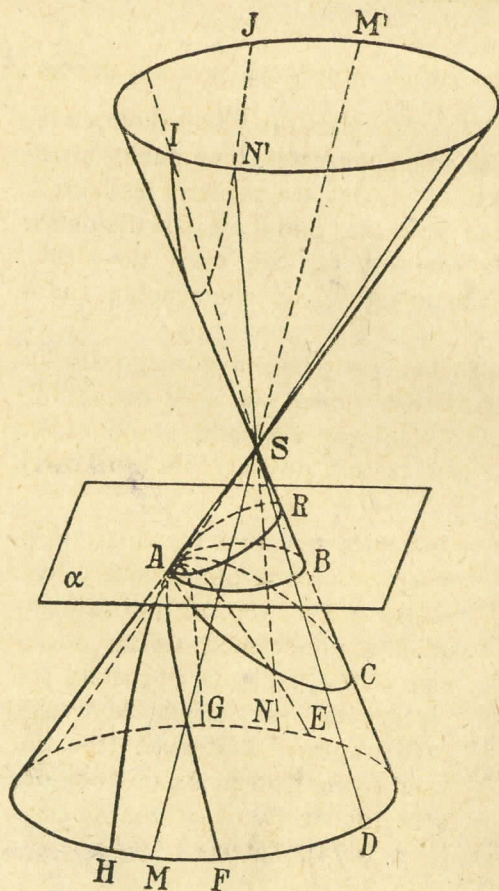


Fig. 321.

jeszcze dalej, to ona przetnie także i górną część powierzchni stożkowej. Przekrojem będzie więc linia, złożona z dwóch gałęzi. Gałęzie te rozciągają się także nieograniczenie i nie zamykają się nigdzie, ponieważ płaszczyzna przekroju jest teraz równoległa do dwóch linii tworzących (n. p. na figurze naszej płaszczyzna przekroju  $HAG...IJ$  jest równoległa do tworzących  $SM$  i  $SN$ ). Inne tworzące przecina ta płaszczyzna w odległościach coraz to większych. Linia ta nazywa się hyperbolą. Przy dalszym obrocie otrzymujemy nowe hyperbole; wreszcie płaszczyzna będzie się stykała ze stożkiem wzdłuż tworzącej  $SA$ . Stąd począwszy otrzymujemy znowu elipsy  $AR$ ..., aż po wykonaniu obrotu o  $180^\circ$  wrócimy znowu do położenia  $AB$ .

Wszystkie te linie: koło, elipsę, hyperbolę i parabolę obejmujemy wspólną nazwą: przekroje stożka. Na naszej figurze wszystkie te linie występują w perspektywie. Ich kształt prawdziwy omówimy przy innej sposobności (§ 123).

Ponieważ powierzchnię stożkową możemy uważać za pęk promieni, wychodzących z  $S$  a przechodzących przez obwód koła, przeto przekroje stożka są rzutami środkowymi koła  $AB$  na rozmaite płaszczyzny, nachylone pod różnymi kątami do kierunków promieni rzucających. Widzimy więc, że rzutem koła może być koło, elipsa, hyperbola lub parabola. W perspektywie malarskiej może więc koło występować w takich rozmaitych postaciach; cieniem koła może być elipsa, parabola lub gałąź hyperboli. (Jaki musi być kierunek światła, aby linie te otrzymać?) Każdą elipsę, hyperbolę lub parabolę można także odwrotnie uważać za przekrój odpowiednio dobranego stożka kołowego. Wszystkie te linie są więc ze sobą „spokrewnione“, jak się w geometrii rzutowej wyrażamy: przez rzut można jedną linję otrzymać z drugiej. Takie geometryczne pokrewieństwo linij nazywamy związkiem projektywicznym (rzutowym) lub kollineacją (jednokreślnością). (Proicio = rzucam, collineo = ustawiam na jednej linji).

Wszystkie przekroje stożka są w kollineacji z kołem (są jednokreślne z kołem).

Ponieważ linia prosta przecina koło najwyżej w dwóch punktach, to i w rzucie będzie przecinała w dwóch punktach nową linję, na którą się zamieni koło. Linje, mające z linją prostą dwa punkty wspólne, nazywamy linjami drugiego stopnia. Otóż wszystkie przekroje stożka są linjami drugiego stopnia. Według tego określenia linia prosta jest linją pierwszego stopnia.

Udowodniono, że niema innych linij drugiego stopnia, oprócz kół, elips, parabol i hyperbol. Określenie to wiąże się z algebrą. Wykazuje się miano-



wicie w algebrze, że obrazem geometrycznym każdego równania pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych jest linia prosta, obrazami zaś równań drugiego stopnia są właśnie przecięcia stożka. Podobnie badano linie wyższych stopni. Badania te stanowią przedmiot osobnego działu geometrii: geometrii analitycznej.

Przekrojami stożka zajmowano się już w starożytności bez pomocy metod geometrii analitycznej. Najwięcej badań w tym kierunku zawdzięczamy Apolloniuszowi z Pergamon (żył między rokiem 250 a 200 przed n. Chr. w Aleksandrii a później w Pergamon). Obok Euklidesa i Archimidesa uważają Apolloniusza za największego matematyka starożytności.

### § 109. Objętość ostrosłupa i stożka. Twierdzenie Cavalieriego.

Aby wyprowadzić wzory na obliczenie objętości stożków i ostrosłupów, musimy się najpierw nauczyć porównywać rozmaite ostrosłupy pod względem objętości. W planimetrii porównanie trójkątów i wielokątów nie sprawiało trudności, ponieważ zawsze można było zamienić z dwóch wielokątów o równym polu jeden na drugi. Ostrosłupy nawet trójboczne, o równych podstawach i wysokościach, nie zawsze dają się złożyć z przystających parami części. Dlatego do porównania objętości ostrosłupów musimy używać rozważań zupełnie odmiennej natury, podobnych do pogładowego dowodu na równość graniastosłupów prostych i pochyłych (str. 241). Oprzemy się na twierdzeniu ogólnym, odnoszącym się do wszystkich gatunków brył.

Jeżeli dwie bryły, których podstawy leżą na tej samej płaszczyźnie, przecięte płaszczyznami równoległymi do podstawy, mają w każdej wysokości równe (wzajemnie) przekroje, to objętości ich są równe.

*Uwaga:* prawo to podał matematyk włoski Cavalieri w XVII. wieku. Pozostawał on pod wpływem wielkiego astronoma i fizyka Galileusza i astronoma Keplera, który używał podobnych rozważań przy obliczaniu objętości beczek rozmaitych kształtów.

Bryły takie muszą mieć naturalnie także równe wysokości, bo w przeciwnym razie istniałyby takie przekroje jednej (wyższej) bryły, którym w drugiej odpowiadałby przekrój równy zero, a więc nierówny.

Ścisły dowód *twierdzenia Cavalieriego* dla brył dowolnych kształtów jest trudny. Pogładowo natomiast można to twierdzenie łatwo pojąć. Możemy sobie bowiem wyobrazić obydwie bryły rozcięte na bardzo wiele cienkich płytek, równoległych do podstawy, o równej grubości. Ponieważ według założenia także podstawy każdej pary płytek są równe, przeto ich objętości możemy uważać z wielkim przybliżeniem za równe. Wobec tego będą równe także objętości całych brył, składających się z takiej samej liczby płytek parami równych. Dla ostrosłupów i stożków udowodnimy ściśle prawdziwość tego twierdzenia.

Weźmy pod uwagę *dwa ostrosłupy o równych podstawach i równych wysokościach:*

$$D = D', \quad w = w'.$$

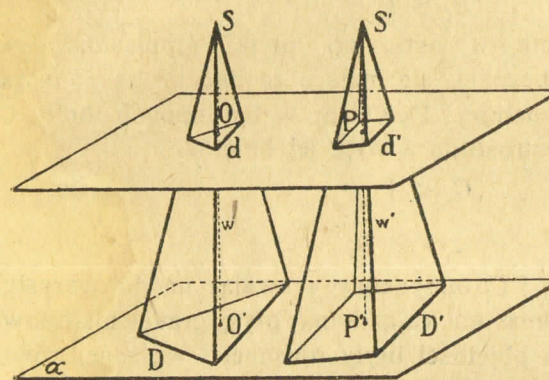


Fig. 322.

$$\text{więc } D : d = D' : d'$$

$$\text{Ponieważ zaś: } D = D', \text{ to i } d = d'$$

Ostrosłupy takie spełniają więc warunki twierdzenia Cavalieriego. Udowodnimy, że *objętości takich ostrosłupów są równe*. Wykażemy to najpierw dla ostrosłupów trójbocznych. Umieszczamy obydwa

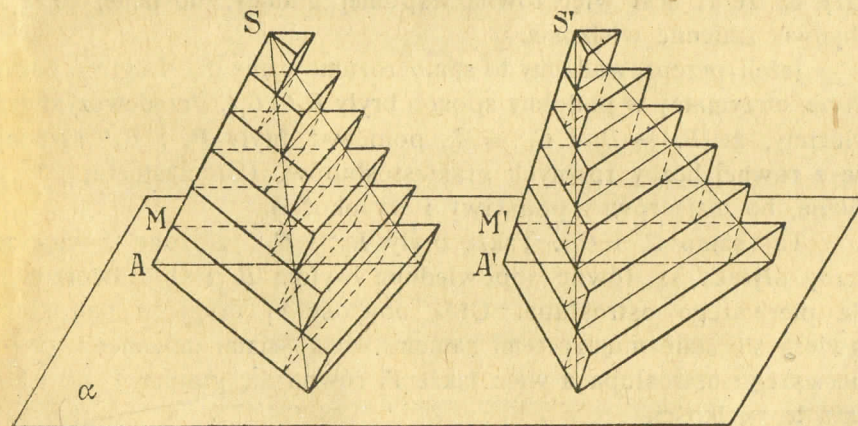


Fig. 323.

ostrosłupy (o równych dnach i wysokościach) na tej samej płaszczyźnie i prowadzimy kilka płaszczyzn równoległych do podstawy w równych odstępach (fig. 323). Każdą płytkę uzupełniamy do graniastosłupa mającego podstawę dolną równą dolnej podstawie płytki

Ustawiamy je (fig. 322) na jednej płaszczyźnie  $\alpha$  i przecinamy płaszczyzną równoległą do podstawy. Przekroje tych ostrosłupów są równe, albowiem według znanego twierdzenia:

$$D : d = S O^{2'} : S O^2$$

$$D' : d' = S P^{2'} : S P^2$$

Alte:

$$S O = S P$$

$$\text{i } S O' = S P'$$



a krawędzie boczne równe odcinkowi jednej krawędzi bocznej n. p.  $MA$  ( $M'A'$  w drugim ostrosłupie). W ten sposób otrzymujemy bryłę schodkową  $B_1$ , zawierającą cały ostrosłup  $V$ , a więc jej objętość:

$$B_1 > V$$

Następnie wpisujemy w ostrosłup płytki graniastosłupowe o takiej samej krawędzi bocznej, ale mające za dno górną podstawę odpowiedniej płytki ostrosłupa. Powstaje w ten sposób bryła  $C_1$ , zawarta cała wewnątrz ostrosłupa a więc jej objętość:

$$C_1 < V$$

Otóż:

$$C_1 < V < B_1$$

Różnicę objętości  $B_1$  i  $C_1$  otrzymamy, zsuwając na dół wszystkie schodki wystające. Zapełnią one całą dolną płytę graniastosłupową. Widzimy stąd, że różnica objętości bryły opisanej i wpisanej równa się dolnemu graniastosłupowi. Jeżeli poprowadzimy więcej przekrojów, to zamknijemy  $V$  w granice ciaśniejsze:

$$C_2 < V < B_2.$$

Prowadząc bardzo wiele przekrojów w bardzo małych odstępach, otrzymamy bardzo cienkie płytki. Objętości tych płytek dążą więc do zera (nawet objętość dolnej, największej płytki). Objętość pierwszego ostrosłupa zawiera się między dwoma wielkościami, których różnica dąży do zera, jest więc równa wspólnej granicy, do jakiej dążą te obydwie zmienne wielkości.

Jeżeli przeprowadzimy to samo rozumowanie dla drugiego ostrosłupa, otrzymamy w podobny sposób bryły  $B_1'$  i  $C_1'$ . Przedewszystkiem widzimy, że  $B_1' = B_1$  i  $C_1' = C_1$ , ponieważ bryły  $B_1$  i  $B_1'$  składają się z równej liczby równych graniastosłupów. (Graniastosłupy te są równe, bo mają równe podstawy i wysokości).

Tak samo  $C_1$  i  $C_1'$ . Także bryły  $B_2'$  i  $C_2'$ , złożone z większej liczby płytek, są równe odpowiednim bryłom  $B_2$  i  $C_2$ , utworzonym dla pierwszego ostrosłupa. Otóż objętość  $V_1$  drugiego ostrosłupa zawiera się stale między temi samymi wielkościami zmiennymi, co i  $V$  pierwszego ostrosłupa a więc także  $V_1$  równa się granicy  $V$ , do jakiej dążą te wielkości.

A więc ostatecznie:

$$V_1 = V$$

Wykazaliśmy w ten sposób równość ostrosłupów trójbocznych o równych podstawach i wysokościach. Ostrosłupy wieloboczne o równych podstawach i wysokościach rozkładamy zapomocą płaszczyzn, przechodzących przez wierzchołek, na trójboczne o równych

podstawach. Objętości tych składowych ostrosłupów są równe a więc i objętości całych ostrosłupów, jako sumy równych wielkości, muszą być równe.

Stożki można porównać wprost z ostrosłupem trójbocznym, wykonując odpowiednie przekroje i wykreślając odpowiednie schodki w postaci walców wpisanych i opisanych (w ogólności pochyłych). Otrzymujemy więc — jako wynik tych rozważań — następujące prawo:

**Ostrosłupy i stożki o równych dnach i wysokościach mają równe objętości.** Jeżeli więc zdołamy obliczyć objętość jakiegoś jednego

gatunku ostrosłupów o dowolnie wielkiej podstawie i dowolnie wielkiej wysokości, to na zasadzie udowodnionego prawa obliczymy objętość każdego innego ostrosłupa lub stożka.

Najprościej będzie nawiązać do znanych już objętości graniastosłupów, wychodząc od dowolnego ostrosłupa trójbocznego  $ABCG$  o podstawie  $D$  i wysokości  $w$ . Przesuńmy jego podstawę ruchem postępowym o odcinek  $AG$  wzdłuż tej krawędzi, to otrzymamy graniastosłup trójboczny  $ABCGEF$  o równej podstawie  $D$  i równej wysokości  $w$  (fig. 324).

Wykażemy, że objętość ostrosłupa trójbocznego równa się trzeciej części objętości odpowiedniego graniastosłupa.

Poprowadźmy dla dowodu jeszcze przekrój  $GEC$  (zrób to na modelu!).

Otrzymamy trzy ostrosłupy

$$I = ABCG, II = GEFC \text{ i } III = EBCG$$

Ostrosłupy  $I$  i  $II$  mają przystające dna  $ABC \cong GEF$  i równą wysokość (bo odległość punktu  $C$  od górnego dna jest taka sama, jak odległość punktu  $G$  od dolnego dna, jako odległości dwóch płaszczyzn równoległych). Objętości tych ostrosłupów są więc równe:

$$I = II$$

Porównajmy teraz ostrosłupy  $II$  i  $III$ , uważając  $G$  za ich wspólny wierzchołek a trójkąty  $CEF$  i  $CEB$  za ich dna. Ich podstawy są równe, bo  $CEF \cong CEB$  a wysokość mają także tę samą (odległość punktu  $G$  od ściany  $CEFB$ ). Więc także  $II = III$ .

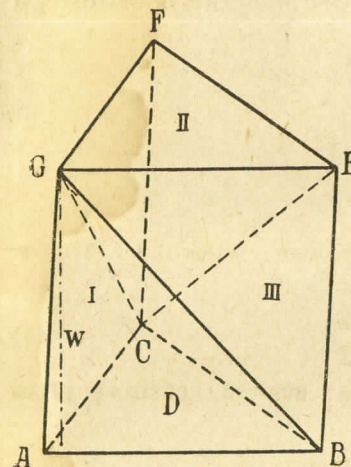


Fig. 324.



Wszystkie trzy ostrosłupy mają więc równą objętość, zatem objętość każdego z nich równa się trzeciej części objętości graniastostupa. Ponieważ zaś objętość graniastostupa wynosi  $D \cdot w$ , więc objętość ostrosłupa  $ABCG$  wynosi:

$$V = \frac{D \cdot w}{3} \text{ (wyrzucić słowami!).}$$

Objętość  $V$  każdego innego ostrosłupa otrzymamy, porównując go z ostrosłupem trójbocznym. Jeżeli bowiem jakkolwiek ostrosłup wieloboczny ma dno  $D$  a wysokość  $w$ , to dobieramy ostrosłup trójboczny  $V'$ , mający tak samo wielkie dno i równą wysokość:  $D' = D$ ,  $w' = w$ . Wtedy i  $V' = V$ . Objętość trójbocznego ostrosłupa wynosi według udowodnionego wzoru:

$$V' = \frac{D' \cdot w'}{3}$$

więc i

$$V = \frac{D' w'}{3}$$

ale za  $D'$  i  $w'$  możemy podstawić równe wielkości  $D$  i  $w$  i otrzymamy:

$$V = \frac{D w}{3} = D \cdot \frac{w}{3} \quad (1)$$

Objętość każdego ostrosłupa oblicza się, mnożąc podstawę przez trzecią część wysokości.

Stosując ten wzór do stożka, otrzymamy:

$$V = r^2 \pi \cdot \frac{w}{3} \quad (2)$$

Jeżeli stożek jest równoboczny, to jego bok wynosi  $2r$  (fig. 325),

$$\text{więc: } w = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3}r^2 = r\sqrt{3}$$

$$\text{więc: } V = \frac{r^3 \pi \sqrt{3}}{3} \quad (3)$$

Z tego wzoru widzimy, że objętości dwóch stożków równobocznych mają się do siebie tak, jak trzecie potęgi promieni. Prawo to dotyczy wszystkich stożków podobnych do siebie.

Obliczenie objętości ostrosłupów może posłużyć do obliczenia objętości dowolnego wielościanu, ponieważ każdy wielościan można

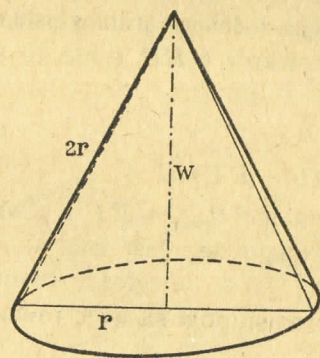


Fig. 325.

rozłożyć na ostrosłupy (podobnie jak w planimetrii każdy wielokąt oblicza się przy pomocy trójkątów).

### § 110. Objętość ostrosłupa ściętego i stożka ściętego.

W ostrosłupie ściętym mamy podane zwykle dna  $D$ ,  $d$  i wysokość  $w$  (fig. 326). Chcemy obliczyć objętość jego przy pomocy tych wielkości.

Objętość ostrosłupa ściętego jest różnicą objętości całego ostrosłupa i ostrosłupa odciętego, o wysokości nieznanej  $x$ .

$$\text{Więc: } V = D \cdot \frac{w+x}{3} - d \cdot \frac{x}{3}$$

Biorąc  $\frac{1}{3}$  przed nawias, otrzymamy:

$$V = \frac{1}{3} [Dw + (D-d)x] \quad (a).$$

Aby obliczyć  $x$ , oprzemy się na znanym twierdzeniu o przekrojach ostrosłupa (str. 252):

$$D : d = (w+x)^2 : x^2$$

czyli po spierwiastkowaniu całej proporcji:

$$\sqrt{D} : \sqrt{d} = (w+x) : x$$

Zastosujmy do tej proporcji twierdzenie o różnicy wyrazów, to:

$$(\sqrt{D} - \sqrt{d}) : \sqrt{d} = w : x$$

a stąd:

$$x = \frac{w\sqrt{d}}{\sqrt{D} - \sqrt{d}}$$

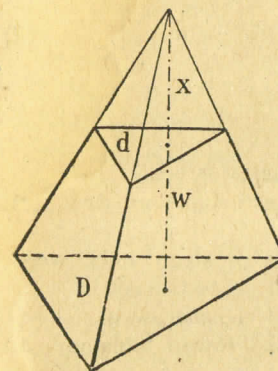


Fig. 326.

Wprowadzając tę wartość do wzoru (a), otrzymamy:

$$V = \frac{1}{3} \left[ Dw + \frac{(D-d)w\sqrt{d}}{\sqrt{D} - \sqrt{d}} \right]$$

Ale

$$D-d = (\sqrt{D} + \sqrt{d}) \cdot (\sqrt{D} - \sqrt{d})$$

więc:

$$V = \frac{1}{3} [Dw + (\sqrt{D} + \sqrt{d})\sqrt{d} \cdot w]$$

czyli ostatecznie:

$$V = (D + d + \sqrt{D \cdot d}) \frac{w}{3} \quad (1)$$

Objętość ostrosłupa ściętego równa się sumie den i średniej geometrycznej obu den, pomnożonej przez trzecią część wysokości.



Uwalniając ten wzór od nawiasów, otrzymamy formę łatwiejszą do wysłowienia:

$$V = D \cdot \frac{w}{3} + d \cdot \frac{w}{3} + \sqrt{D \cdot d} \cdot \frac{w}{3}$$

to znaczy:

objętość ostrosłupa ściętego równa się objętości trzech ostrosłupów zupełnych o równej mu wysokości a mających za podstawy: wielkie dno, małe dno i średnią geometryczną obydwu den.

Stosując wzór (1) do stożka ściętego, otrzymamy:

$$V = (R^2 \pi + r^2 \pi + \sqrt{R^2 \pi \cdot r^2 \pi}) \frac{w}{3}$$

$$V = (R^2 \pi + r^2 \pi + R \cdot r \cdot \pi) \frac{w}{3}$$

$$V = (R^2 + r^2 + Rr) \frac{\pi w}{3} \quad (2)$$

### Ćwiczenia X

- § 102. 1. Kiedy kształt ostrosłupa zbliża się do graniastosłupa?  
 2. Wykazać, że wysokość ściany bocznej w ostrosłupie prostym jest zawsze większa od wysokości ostrosłupa.  
 3. Obliczyć wysokość ściany bocznej ostrosłupa prostego umiarowego, znając wysokość ostrosłupa i promień koła wpisanego w podstawę.  
 4. Wykazać, że w każdym czworoscianie, nawet nieumiarowym, istnieje punkt równo oddalony od wszystkich ścian i punkt równo oddalony od wszystkich naroży.  
 5. Wykazać, że ostrosłup, którego podstawa jest wielokątem umiarowym a wierzchołek leży na prostopadłej, przechodzącej przez środek koła, jest prosty.  
 6. Wykazać, że w czworoscianie umiarowym o krawędzi  $a$  punkt przecięcia się czterech wysokości jest równo oddalony od wszystkich ścian (odległość ta wynosi  $AO = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ ) i równo oddalony od wszystkich naroży.

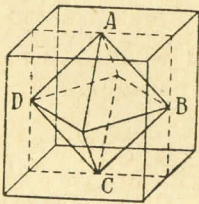


Fig. 327.

Uwaga: dla dowodu poprowadzić płaszczyznę, zawierającą jedną krawędź a przechodzącą przez środek przeciwległej krawędzi.

7. Wykazać, że z przekątni ścian sześciannu można utworzyć dwa czworosciany umiarowe. Rysunek!  
 8. Wykazać, że środki ścian sześciannu są wierzchołkami ośmiościanu umiarowego. (Dla dowodu przeprowadzić przekrój  $ABCD$  i wykazać, że jest kwadratem [por. fig. 327]).

9. Obliczyć wysokość ośmiościanu umiarowego, znając jego krawędź  $k = 12 \text{ dm}$  (użyj fig. 327).  
 10. Obliczyć powierzchnię: a) czworoscian umiarowego, b) ośmiościanu umiarowego, znając krawędź  $k = 5 \text{ cm}$ .

11. Obliczyć powierzchnię: a) czworoscian umiarowego, b) ośmiościanu umiarowego, wpisanego w kostkę o boku  $a = 1 \text{ dm}$ .

12. Narysować siatkę ośmiościanu i czworoscian umiarowego na kartonie i wykonać modele przestrzenne tych brył, n. p.  $k = 4 \text{ cm}$ .

13. Wykazać, że przeciwległe (wichrowate!) krawędzie czworoscian umiarowego tworzą kąt  $90^\circ$ .

14. Wykreślić w rzutach ostrosłup umiarowy sześcioboczny, znając krawędź podstawy  $k = 1.5 \text{ cm}$  i wysokość  $w = 5 \text{ cm}$ . Tę samą bryłę przedstawić w perspektywie równoległej.

15. Wykreślić w rzutach ostrosłup pochyły, którego podstawą jest sześciokąt umiarowy o boku  $a = 2 \text{ cm}$  a linia, łącząca wierzchołek ze środkiem podstawy, jest do niej nachylona pod kątem  $75^\circ$  i wynosi  $8 \text{ cm}$ . Ten sam ostrosłup narysować w perspektywie równoległej.

16. Mając dany dowolny ostrosłup pięcioboczny w rzutach, narysować go w perspektywie.

17. Ostrosłupy opisane w zadaniach 15 i 14 ustawić dnem równoległe do płaszczyzny pionowej i wykreślić ich rzuty!

18. Ile wynosi suma kątów płaskich wszystkich ścian w ostrosłupie 3-bocznym, 4-bocznym, 5-bocznym,  $n$ -bocznym.

- § 103. 19. Wykonać rozwinięcie dowolnego ostrosłupa danego w rzutach a tak ustawionego, aby jedna krawędź boczna była równoległa do płaszczyzny pionowej.

20. Zrobić z kartonu model: a) ostrosłupa umiarowego sześciobocznego, b) dowolnego ostrosłupa prostego, c) ostrosłupa przedstawionego na fig. 309.

21. Mając podany dowolny ostrosłup prosty w rzutach, przeciąć go płaszczyzną równoległą do podstawy i przerysować tę figurę w perspektywie.

22. Obliczyć powierzchnię ostrosłupa umiarowego sześciobocznego, znając krawędź podstawy i krawędź boczną ( $a = 2 \text{ cm}$ ,  $b = 6 \text{ cm}$ ).

23. Obliczyć powierzchnię ostrosłupa umiarowego sześciobocznego, znając wysokość i krawędź podstawy ( $w = 6 \text{ cm}$ ,  $a = 1.5 \text{ cm}$ ).

- Ile razy powiększy się powierzchnia ostrosłupa, jeżeli  $w$  i  $a$  powiększą się równocześnie 3 razy, 4 razy, 5 razy?

24. Obliczyć powierzchnię ostrosłupa umiarowego: a) trójbocznego, b) czworobocznego, c) pięciobocznego, d) ośmiobocznego, znając wysokość i promień koła opisanego na podstawie (n. p.  $w = 3.4 \text{ cm}$ ,  $r_0 = 1 \text{ cm}$ ).

25. Obliczyć powierzchnię ostrosłupa prostego, którego podstawa jest trójkątem równobocznym a krawędzie boczne są do siebie prostopadłe.

- § 104. 26. Ostrosłup prosty ścięty narysowany w rzutach rozwinąć (jedną krawędź boczną obrać równoległe do płaszczyzny pionowej).

27. Obliczyć powierzchnię ostrosłupa ściętego prostego, jeżeli dno dolne jest kwadratem o boku  $a = 5 \text{ cm}$ , dno górne kwadratem o boku  $a = 3 \text{ cm}$  a wysokość bryły  $w = 4 \text{ cm}$ .

28. Obliczyć powierzchnię ostrosłupa ściętego, powstającego przez przecięcie ostrosłupa umiarowego sześciobocznego w połowie wysokości. Dane: krawędź podstawy  $a = 3.6 \text{ cm}$ , krawędź boczna  $b = 14.4 \text{ cm}$ .

29. Wykazać, że a) wszystkie sześcianny są do siebie podobne, b) wszystkie czworosciany są do siebie podobne, c) wszystkie ośmiościany są do siebie podobne.



Ustawić dwie takie bryły w położenie podobne i znaleźć środek podobieństwa zewnętrznego lub wewnętrznego.

30. Ilu świec normalnych trzeba użyć, aby z odległości 4 m oświetlały ścianę tak silnie, jak pięć świec z odległości 5 dm?

31. Przez mały otwór oświetlają promienie przestrzeń  $8 \text{ dm}^2$  z odległości 6 dm. Jak daleko należy odsunąć ten otwór, aby oświetlić przestrzeń  $20 \text{ m}^2$ ?

§ 105—107. 32. Narysować w rzutach i w perspektywie równoległej stożek prosty, znając promień podstawy i bok ( $r = 2 \text{ cm}$ ,  $b = 6 \text{ cm}$ ).

33. Narysować w rzutach i w perspektywie równoległej stożek pochyły, którego promień podstawy  $r = 1.5 \text{ cm}$  a oś wynosi  $a = 7 \text{ cm}$  i jest nachylona do podstawy pod kątem  $60^\circ$ .

34. W stożku z poprzedniego zadania wykreślić przecięcie osiowe, zawierające rzut osi i przecięcie osiowe prostopadłe do tego przekroju.

35. Mając podany dowolny stożek w rzutach, narysować go w perspektywie równoległej i odwrotnie.

36. Wykazać, że wszystkie stożki równoboczne są bryłami podobnymi. Ustawić je odpowiednio i znaleźć środek podobieństwa.

37. Narysować w rzutach i w perspektywie równoległej stożek ścięty prosty.

38. Do dowolnego stożka narysowanego w perspektywie równoległej wykreślić płaszczyznę styczną z dowolnego punktu, leżącego na stożku. (Trzeba najpierw znaleźć linię styczną do elipsy, przedstawiającej dno; por. fig. 318).

39. Z punktu poza stożkiem poprowadzić do niego dwie płaszczyzny styczne (w perspektywie równoległej).

40. Jakie płaszczyzny i osie symetrii posiada stożek?

41. Dowolny stożek prosty podany w rzutach rozwinąć na płaszczyźnie i zrobić model stożka z kartonu.

42. Zbudować z kartonu stożek równoboczny o boku  $b = 8 \text{ cm}$ .

43. Narysować w perspektywie równoległej lejek, złożony ze stożka ściętego i rurki w formie walca, znając rzuty tej bryły.

44. Obliczyć powierzchnię stożka równobocznego o wysokości  $w = 0.72 \text{ dm}$ .

45. Obliczyć powierzchnię stożka prostego, którego obwód podstawy wynosi  $u = 62 \text{ m}$  a wysokość  $15 \text{ m}$ .

46. Jakie rozmiary ma stożek równoboczny, którego powierzchnia wynosi  $1 \text{ m}^2$ ?

47. Trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątnia wynosi  $8.4 \text{ cm}$  a jedna przyprostokątnia  $5.4 \text{ cm}$ , zakreślił powierzchnię obrotem około przeciwprostokątnej. Obliczyć wielkość tej powierzchni. Rysunek!

48. Obliczyć powierzchnię stożka prostego: a) wpisanego w ostrosłup umiarowy sześcioboczny, znając bok sześciokąta i wysokość ostrosłupa  $b = 3.6 \text{ cm}$ ,  $w = 2.7 \text{ cm}$ , b) opisanego na tym ostrosłupie.

49. W walcu równobocznym o promieniu  $r = 3 \text{ cm}$  wydrążono stożek, sięgający aż do dna. Obliczyć powierzchnię tej bryły.

50. Ze stożka prostego wycięto część zapomocą dwóch przecięć osiowych, tworzących kąt  $90^\circ$ . Obliczyć powierzchnię bryły wyciętej, znając promień podstawy  $r = 2 \text{ cm}$  i wysokość  $w = 5 \text{ cm}$ .

51. Obliczyć powierzchnię, jaką zakreśla trapez równoramienny, obracający się: a) koło swej osi symetrii, b) koło jednego z boków równoległych, znając boki równoległe trapezu  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$  i wysokość  $w = 3 \text{ cm}$ .

52. Obliczyć powierzchnię lejka, w którym obwód górnego koła wynosi  $2 \text{ dm}$ , dolnego  $5 \text{ cm}$ , długość całkowita  $1 \text{ dm}$  a długość samej rurki  $6 \text{ cm}$ .

53. Stożek ścięty dany w rzutach rozwinąć i sporządzić model tej bryły.

54. Kopiec w formie stożka mamy pokryć darnią. Jakie pomiary trzeba wykonać, aby obliczyć, ile potrzeba  $\text{m}^2$  darni. Obierz dowolnie liczby wymiarowe.

55. Znamy odległości wierzchołków trójkąta od pewnej osi, leżącej na tej samej płaszczyźnie:  $x_1 = 4 \text{ cm}$ ,  $x_2 = 6 \text{ cm}$ ,  $x_3 = 3 \text{ cm}$ . Rzuty dwóch boków na tę oś wynoszą  $y_1 = 4 \text{ cm}$ ,  $y_2 = 1 \text{ cm}$ . Obliczyć powierzchnię bryły, powstającej przez obrót trójkąta dokoła tej osi (por. str. 128, fig. 167).

§ 108. 56. Stożek prosty podwójny przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy. Obracać ten przekrój koło osi poziomej prostopadłej do płaszczyzny rysunku a przechodzącej przez oś stożka. Jakie przekroje kolejno otrzymamy? Narysować w rzutach!

57. Stożek prosty przeciąć płaszczyzną prostopadłą do boku. Wykazać, że otrzymamy elipsę, parabolę lub hyperbolę zależnie od tego, czy kąt u wierzchołka przecięcia osiowego jest ostry, prosty, czy też rozwarty. (Zadaniem tem zajmował się uczeń Platona, Menechmos już w IV. wieku przed n. Chr.).

§ 109. 58. Wykazać, że słup kręcony, którego przekrojem równoległym do podstawy jest w każdym miejscu koło większe z dwoma kołami mniejszemi, stykającymi się zewnętrźnie, równa się objętości trzech walców.

59. Wykazać, że objętość wspólna dwom walcom o równych przekrojach, przenikających się prostopadle, równa się objętości kostki o boku = średnicy walca, z której wydrążono dwa ostrosłupy czworoboczne, sięgające do środka a mające za podstawę górne i dolne dno kostki. Narysuj!

60. Obliczyć objętość: a) czworościanu umiarowego, b) ośmiościanu umiarowego, znając krawędź.

61. Obliczyć objętość ostrosłupa sześciobocznego umiarowego, znając krawędź podstawy i krawędź boczną ( $a = 4 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$ ).

62. Obliczyć objętość ostrosłupa, powstającego przez odcięcie jednego naroża sześciianu o boku  $a = 5 \text{ cm}$  płaszczyzną, przechodzącą przez środki trzech krawędzi tego naroża.

63. Na kwadratowej podstawie ostrosłupa prostego, którego krawędź podstawy  $k = 32 \text{ cm}$  a wysokość  $w = 50 \text{ cm}$ , spoczywa kostka, dotykająca narożami krawędzi bocznych ostrosłupa. Obliczyć stosunek objętości obu brył.

64. Jakie pomiary należy wykonać, aby obliczyć objętość kupy szutru? Podstawa jest prostokątem a dwie ściany boczne schodzą się w krawędzi równoległej do podstawy. Wyprowadź wzór!



65. Znając obwód podstawy stożka i bok, obliczyć jego objętość, n. p.  $u = 12.56 \text{ cm}$ ,  $b = 16 \text{ cm}$ .

66. Obliczyć objętość stożka równobocznego, którego wysokość  $w = 10 \text{ cm}$ .

67. Boja (beczka) w postaci podwójnego stożka równobocznego o promieniu  $1 \text{ m}$  ma pływać po wodzie morskiej ( $c. g. = 1.03$ ), wynurzając się do połowy. Ile waży ta beczka?

68. Obliczyć objętość stożka, znając wysokość  $3 \text{ cm}$  tudzież sumę boku i promienia podstawy  $s = 8 \text{ cm}$ .

69. Promień podstawy stożka prostego wynosi  $r = 5 \text{ cm}$  a kąt u wierzchołka przecięcia osiowego jest prosty; obliczyć objętość stożka.

70. Wysokość piramidy Cheopsa wynosi  $137.2 \text{ m}$  a kwadratowa podstawa ma  $227.5 \text{ m}$  długości. Obliczyć jej objętość.

71. Trójkąt prostokątny o przyprostokątniach  $a = 10 \text{ cm}$  i  $b = 12 \text{ cm}$  wiruje około przyprostokątnej  $a$ . Obliczyć powierzchnię i objętość tej bryły obrotowej.

72. Obliczyć objętość bryły obrotowej, powstającej przez obrót sześciokąta umiarowego koło symetralnej kąta. Bok sześciokąta  $a = 13.7 \text{ m}$ .

§ 110. 73. Przeciąć dowolny ostrosłup w połowie wysokości i obliczyć stosunek objętości obydwu części.

74. Podstawą prostego ostrosłupa ściętego jest kwadrat o boku  $a = 3.2 \text{ cm}$ , bok górnego dna  $a = 1 \text{ cm}$  a krawędź boczna  $b = 2 \text{ cm}$ . Obliczyć objętość tej bryły.

75. Obliczyć objętość basenu w formie stożka ściętego, znając obwody den:  $a = 90 \text{ m}$ ,  $b = 80 \text{ m}$  i głębokość:  $g = 2 \text{ m}$ .

76. Obliczyć objętość okrągłego kloca, znając promień większego dna  $R = 2 \text{ dm}$ , promień mniejszego dna  $r = 1.2 \text{ dm}$  i długość kloca  $b = 6 \text{ m}$ . Jaki błąd popełnimy, obliczając objętość wzorem  $V = Q \cdot b$ , jeżeli  $Q$  oznacza średni przekrój?

77. Wysokość komina fabrycznego wynosi  $30 \text{ m}$ . U dołu szerokość komina wynosi  $3.6 \text{ m}$  a grubość ścian  $5 \text{ dm}$ , u góry szerokość  $2 \text{ m}$  a grubość ścian  $3 \text{ dm}$ . Ile  $\text{m}^3$  cegieł użyto na zbudowanie tego komina? Jaki jest jego ciężar, jeżeli c. g. cegły wynosi  $1.8$ .

## Rozdział XI

### Wielościany umiarowe

#### § 111. Naroża umiarowe.

Wielościan nazywa się umiarowym, jeżeli jest ograniczony przystającymi wielokątami umiarowymi i przystającymi narożami umiarowymi. (Trzeba odróżnić te wielościany od graniastosłupów i ostrosłupów umiarowych, w których tylko niektóre ściany są wielokątami umiarowymi). Ponieważ suma kątów płaskich w każdym narożu musi wynosić mniej

aniżeli  $360^\circ$ , z góry więc można przewidzieć, że może istnieć tylko kilka gatunków naroży umiarowych. Jeżeli bryła ma być ograniczona samymi trójkątami równobocznymi, to kąty płaskie naroża wynoszą po  $60^\circ$ . Z takich kątów da się utworzyć naroże 1) trójszczienne, 2) czworościennie i 3) pięciostienne. Sześciu kątów po  $60^\circ$  nie może już takie naroże zawierać, bo mielibyśmy sumę kątów płaskich równą  $360^\circ$ . Z kwadratów można utworzyć naroże umiarowe, jeżeli weźmiemy 4) trzy kąty po  $90^\circ$ ; czterech kątów po  $90^\circ$  nie można już użyć. Wreszcie 5) z pięciokątów umiarowych można znowu utworzyć jedno tylko naroże trójszczienne umiarowe. Z sześciokątów, ani z innych wielokątów umiarowych nie można już utworzyć naroża. Mamy więc tylko pięć możliwych gatunków wielościanów umiarowych. Udowodnimy, że z każdego gatunku istnieje tylko jedna bryła — wszystkie zaś inne są podobne do nich.

#### § 112. Twierdzenie Eulera.

Do dowodu twierdzenia o liczbie wielościanów umiarowych potrzebne nam będzie pewne twierdzenie, odnoszące się do wszystkich wielościanów wypukłych\*) bez wyjątku, umiarowych i nieumiarowych. Istnieje mianowicie bardzo prosty związek między liczbą ścian, naroży i krawędzi, wspólny dla wszystkich takich wielościanów. Zaczniemy od specjalnego przykładu. Policzmy naroża, ściany i krawędzie kostki. Liczba ścian  $S = 6$ , liczba naroży  $N = 8$  a liczba krawędzi  $K = 12$ , jest więc o dwa mniejsza od liczby ścian i naroży razem.

$$S + N = K + 2. \quad (1)$$

Zetnijmy jedno naroże kostki płaszczyzną, to ta nowa bryła ma o jedną ścianę więcej, więc teraz

$$S' = S + 1, \quad \text{naroże ubyło jedno a przybyły trzy nowe, więc} \quad N' = N - 1 + 3; \quad \text{krawędzie przybyły trzy, więc}$$

$$K' = K + 3$$

Spostrzegamy, że i teraz  $S' + N' = K' + 2$

$$\text{bo} \quad S' + N' = S + 1 + N - 1 + 3 = S + N + 3 = K + 5 \text{ według (1)}$$

$$\text{a także} \quad K' + 2 = K + 3 + 2 = K + 5$$

Jakkolwiek obcinaliśmy naroża, zawsze dojdziemy do tego samego związku (1).

(Spróbuj to samo obliczyć dla graniastosłupa sześciobocznego!).

\*) Wielościan nazywa się wypukły, jeżeli leży po jednej stronie każdej ze swych ścian dowolnie przedłużonych.



Tak samo, jeżeli zetniemy jedną krawędź całą, otrzymamy wzór (1).

Przez odcinanie naroży i krawędzi możemy z kostki wyciąć dowolny wielościan wypukły a więc w każdym wielościanie wypukłym zachodzi ten sam związek (1).

**Liczba ścian powiększona o liczbę naroży jest o dwa większa od liczby krawędzi w każdym wielościanie wypukłym.**

Dowód: powyższe rozumowanie, oparte na poglądzie, możemy zastąpić zupełnie ścisłym dowodem, sprowadzając całe zagadnienie do zadania czysto planimetrycznego.

Niech  $N$  oznacza liczbę naroży,  $S$  liczbę ścian a  $K$  liczbę krawędzi dowolnego wielościanu wypukłego.

Utwórzmy rzut tego wielościanu na płaszczyznę taką, aby rzut żadnego naroża nie nakrył się z rzutem innego naroża ani rzut krawędzi z inną krawędzią. Sumę kątów wszystkich wielokątów znajdujących się na tym rzucie możemy obliczyć w dwojaki sposób. Zliczmy najpierw sumy kątów, znajdujących się przy wszystkich narożach (w rzucie). Jeżeli  $N'$  naroży leży wewnątrz konturu a  $N''$  na konturze rzutu, to przy każdym narożu pierwszego rodzaju suma kątów wynosi  $360^\circ$  czyli  $4R$ , razem więc przy narożach pierwszego rodzaju suma kątów wynosi  $N' \cdot 4R$ . Naroża drugiego rodzaju (w rzutach) są wierzchołkami  $N''$  — kąta a więc suma kątów przy nich leżących wynosi  $(N'' - 2) \cdot 2R$  (por. § 43) i tę liczbę należy wziąć podwójnie, ponieważ rzut powierzchni wielościanu pokrywa płaszczyznę podwójnie. Razem więc suma kątów wynosi  $N' \cdot 4R + (N'' - 2) \cdot 4R = (N' + N'' - 2) \cdot 4R$ , lub oznaczając liczbę wszystkich naroży  $N' + N''$  jedną literą  $N$ :

$$(N - 2) \cdot 4R.$$

Obliczmy teraz sumę wszystkich kątów rzutu nie według naroży, ale według ścian. Jeżeli ściany mają kolejno  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$  krawędzi, to suma wszystkich kątów wynosi (według § 43):

$$(n_1 - 2) \cdot 2R + (n_2 - 2) \cdot 2R + (n_3 - 2) \cdot 2R + \dots + (n_s - 2) \cdot 2R$$

$$\text{czyli} \quad (n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_s) \cdot 2R - 4R \cdot S.$$

W sumie  $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_s$  występuje jednak każda krawędź podwójnie, jako należąca do dwóch sąsiednich ścian, więc  $n_1 + n_2 + \dots + n_s = 2K$ . Wobec tego suma kątów obliczona w ten drugi sposób wynosi

$$2K \cdot 2R - 4R \cdot S$$

Porównując tę sumę z sumą poprzednio obliczoną otrzymamy po podzieleniu przez  $4R$  związek:  $N - 2 = K - S$

czyli

$$S + N = K + 2.$$

Jest to twierdzenie Eulera (1707—1783). Łatwo się przekonać, że do wielościanów wklęsłych twierdzenie to się nie odnosi. N. p. wytnijmy z kostki (fig. 328) ze środka kostkę mniejszą, ale tak, aby, jedno jej dno dotykało górnego dna większej kostki. Liczba ścian jest teraz  $S = 6 + 5 = 11$ ; liczba naroży

$$N = 8 + 8 = 16;$$

$$\text{razem} \quad S + N = 27.$$

Liczba krawędzi wynosi

$$K = 12 + 12 = 24$$

a więc jest o trzy mniejsza od  $S + N$ .

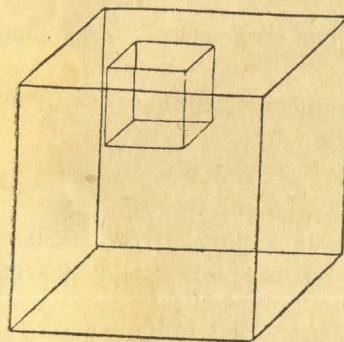


Fig. 328.

### § 113. Dowód istnienia pięciu wielościanów umiarowych.

Wielościan umiarowy jest ograniczony samymi  $m$ -kątami umiarowymi i narożami  $p$ -ściennymi. Zliczmy wszystkie krawędzie bryły umiarowej w dwa sposoby. Każda ściana ma  $m$  boków a liczba ścian jest  $S$ , przeto wszystkich krawędzi byłoby oddzielnie  $S \cdot m$ . Jednakowoż każda krawędź jest wspólna dwom ścianom, prawdziwa więc liczba krawędzi jest dwa razy mniejsza

$$K = \frac{S \cdot m}{2} \quad \text{a stąd} \quad S = \frac{2K}{m} \quad (2)$$

Każde naroże ma  $p$  krawędzi a liczba naroży jest  $N$ , przeto wszystkich krawędzi oddzielnie byłoby  $N \cdot p$ .

Znowu jednak każda krawędź wspólna jest dwom narożom, więc liczba krawędzi bryły jest

$$K = \frac{N \cdot p}{2} \quad \text{a stąd} \quad N = \frac{2K}{p} \quad (3)$$

Podstawiając znalezione wartości we wzór (1) Eulera, dostaniemy:

$$\frac{2K}{m} + \frac{2K}{p} = K + 2 \quad \text{czyli}$$

$$2Kp + 2Km = Kmp + 2mp \quad \text{a stąd}$$

$$K = \frac{2mp}{2p + 2m - mp} \quad (4)$$

Jeżeli podamy  $m$ , t. j. jakimi wielokątami ma być wielościan ograniczony i  $p$ , t. j. jakie mają być naroża, otrzymamy na  $K$  jedną, ściśle oznaczoną wartość. Wtedy z wzorów (2) i (3) obliczymy także, ile będzie ścian i naroży.



Podstawimy najpierw najmniejsze możliwe wartości, t. j.  $m = 3$  (trójkąty),  $p = 3$  (naroża trójsienne), to otrzymamy  $K = 6$ ,  $S = 4$ ,  $N = 4$ .

Dla  $m = 3$  (trójkąty),  $p = 4$  (naroża czworościenne), otrzymamy  $K = 12$ ,  $S = 8$ ,  $N = 6$ .

Dla  $m = 3$  (trójkąty),  $p = 5$  (naroża pięciościenne), otrzymamy  $K = 30$ ,  $S = 20$ ,  $N = 12$ .

Dla  $m = 3$ ,  $p = 6$ , otrzymalibyśmy  $K = \frac{2 \cdot 3 \cdot 6}{2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 - 18} = \frac{36}{0} = \infty$

a więc taka bryła nie istnieje, jak to zresztą z góry przewidzieliśmy w § 111. Biorąc teraz dalsze wartości na  $m$ , otrzymamy jeszcze dwie możliwości:

dla  $m = 4$ ,  $p = 3$ , jest  $K = 12$ ,  $S = 6$ ,  $N = 8$ , wreszcie

dla  $m = 5$ ,  $p = 3$ , jest  $K = 30$ ,  $S = 12$ ,  $N = 20$ .

Otrzymane liczby wraz z nazwami brył umieszczamy dla lepszego przeglądu w tabelce:

| $m$ | $p$ | $K$ | $N$ | $S$ | nazwa           |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----------------|
| 3   | 3   | 6   | 4   | 4   | czworościan     |
| 3   | 4   | 12  | 6   | 8   | ośmiościan      |
| 3   | 5   | 30  | 12  | 20  | dwudziestościan |
| 4   | 3   | 12  | 8   | 6   | sześcián        |
| 5   | 3   | 30  | 20  | 12  | dwunastościan   |

Więcej możliwości nie ma, jak to łatwo sprawdzić prostym rachunkiem. Pozostaje jeszcze tylko wykazać, że każda z tych brył rzeczywiście istnieje, że każdą z nich można zbudować.

Wykazaliśmy już dawniej istnienie czworościanu, ośmiościanu i sześciánu. Nowe są dla nas tylko dwudziestościan i dwunastościan.

Dwudziestościan zbudujemy, biorąc dwa ostrosłupy pięcioboczne umiarowe, których krawędź podstawy równa się krawędzi bocznej i ustawiając je dnami równoległe a wierzchołkami w strony przeciwne. Skręcamy jeden z nich względem drugiego o  $36^\circ$  i zbliżywszy odpowiednio, łączymy każdy wierzchołek dna z dwoma sąsiednimi wierzchołkami drugiego dna. Odległość pięciokątów wynosi

$$\eta = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - (r - \varrho)^2}$$

(por. fig. 329), gdzie  $a$  oznacza bok dwudziestościanu a  $r$  i  $\varrho$  promienie koła wpisanego i opisanego na pięciokącie umiarowym o boku  $a$ .

Dwunastościan umiarowy pięciokątowy można także w podobny sposób zbudować. Prościej jednak będzie użyć siatki. Obieramy dowolny pięciokąt umiarowy (fig. 330) i na jego bokach budujemy nowe

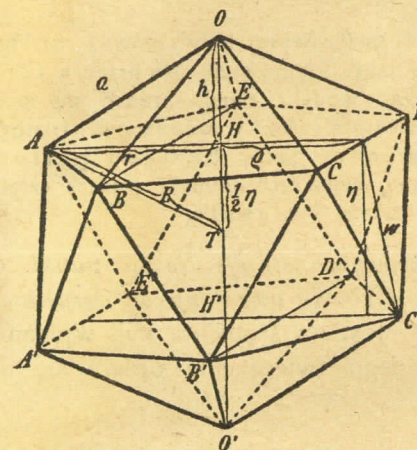


Fig. 329.

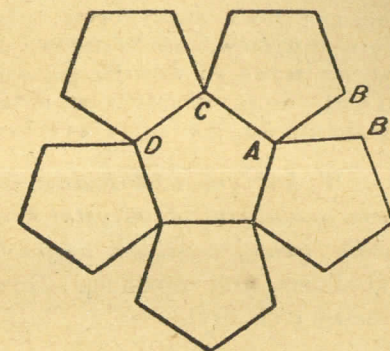


Fig. 330.

pięciokąty umiarowe i obracamy je tak długo dokoła boków  $AC$ ,  $CD$  i t. d., aż ich krawędzie n. p.  $AB$  i  $AB'$  padną na tę samą linię prostą. Otrzymamy

połowę powierzchni dwunastościanu. Sporządzając drugą taką samą powierzchnię otwartą, umieszczamy ją nad pierwszą, skręcamy o  $36^\circ$  i nakrywamy pierwszą powierzchnię. Obydwie części zamkną zupełnie pewną część przestrzeni. W ten sposób otrzymuje się dwunastościan, przedstawiony na fig. 331 w perspektywie równoległej (wraz z wpisanym sześciánem).

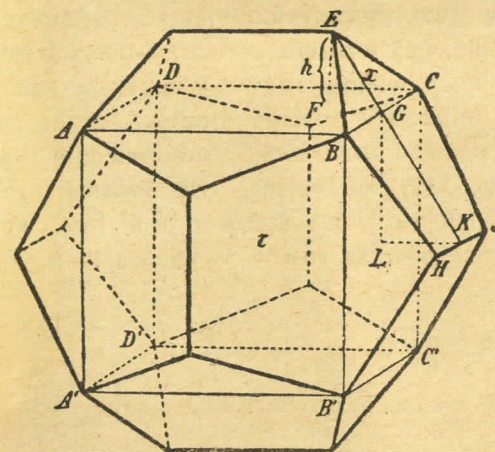


Fig. 331.

Można udowodnić, że środki ścian dwudziestościanu są wierzchołkami dwunastościanu i odwrotnie. Między temi bryłami zachodzi



więc podobny związek, jak między sześcianiem a ośmiościanem. (Wykaż ten związek rysunkiem!)

Zbierając wszystkie te wnioski razem, powiemy: **istnieje tylko 5 wielościanów umiarowych wypukłych: czworościan, sześciąt, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan.**

Poznanie i konstrukcja pięciu brył umiarowych były główną zasługą szkoły pitagorejczyków, do której należał także Platon (429—348 przed n. Chr.). Według Platona atomy ognia, powietrza, wody i ziemi składać się mają z czworościanów, ośmiościanów, dwudziestościanów i sześciąt. Dlatego bryły umiarowe do dzisiejszego dnia nazywamy także bryłami platońskimi. Prócz wielościanów umiarowych wypukłych istnieją jeszcze cztery wielościany um. gwiaździste zwane bryłami Poinso'ta.

W każdym wielościanie umiarowym istnieje jeden punkt  $O$  równo oddalony od wszystkich ścian i równo oddalony od wszystkich naroży, zwany **środkiem wielościanu**. Jest on środkiem kuli wpisanej i środkiem kuli opisanej. Dowód tego twierdzenia opiera się na symetrii tych brył.

#### § 114. Objętość wielościanów umiarowych.

Objętość niektórych wielościanów umiarowych potrafimy już obliczyć, mianowicie sześcianu, czworościanu, który jest ostrosłupem trójbocznym i ośmiościanu, który się składa z dwóch ostrosłupów czworobocznych. Objętość pozostałych dwu brył obliczymy wzorem wspólnym dla wszystkich umiarowych wielościanów. Wiemy, że każdy wielościan umiarowy posiada środek. Łącząc ten punkt z narożami i przesuwając odpowiednie płaszczyzny (fig. 332), otrzymamy tyle przystających ostrosłupów, ile bryła ma ścian, n. p. n. Ponieważ objętości wszystkich tych ostrosłupów są równe, wynoszą n. p.  $V_0$ , to objętość całej bryły:

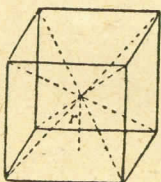


Fig. 332.

$$V = n \cdot V_0$$

Ale  $V_0 = F \cdot \frac{r}{3}$ , gdzie  $F$  oznacza powierzchnię jednej ściany a  $r$  promień kuli wpisanej w bryłę, który jest zarazem wysokością każdego ostrosłupa.

Więc:

$$V = n \cdot F \cdot \frac{r}{3}$$

Ale  $n \cdot F = P$  jest powierzchnią całej bryły. Otrzymujemy więc:

$$V = P \cdot \frac{r}{3} \quad (1)$$

Objętość wielościanu umiarowego oblicza się, mnożąc jego powierzchnię przez trzecią część promienia kuli wpisanej. (Podobne prawo mieliśmy w planimetrii dla wielokątów umiarowych!).

Uwaga: wzoru (1) można użyć do obliczenia objętości dowolnego wielościanu, opisanego na kuli, niekoniecznie umiarowego.

#### Cwiczenia XI

§ 112. 1. Sprawdzić, że wzór  $S + N = K + 2$  pozostaje prawdziwy, jeżeli zetniemy całą krawędź wielościanu wypukłego.

2. Belkę prostokątną przenika nawskróś mniejsza belka, czy dla tej bryły  $S + N = K + 2$ ? Rysunek!

§ 113. 3. Ile krawędzi ma bryła wypukła, posiadająca 10 ścian i 16 naroży?

4. Oblicz wysokość ostrosłupów pięciobocznych, z których się buduje dwudziestościan (por. fig. 329).

5. Obliczyć powierzchnię dwudziestościanu, znając jego krawędź.

6. Sporządzić model dwunastościanu.

7. Obliczyć powierzchnię dwunastościanu, znając jego bok.

8. Obliczyć powierzchnię sześcianu wpisane go w dwunastościan na fig. 331, znając krawędź dwunastościanu.

9. Obliczyć powierzchnię daszka, wznoszącego się nad każdą ścianą sześcianu na fig. 331.

10. Jakie płaszczyzny, osie, środki symetrii ma: a) dwunastościan, b) dwudziestościan?

11. Jakie obroty sprowadzają do nakrycia z samym sobą: a) dwudziestościan, b) dwunastościan. (Jest 60 takich obrotów).

12. Obliczyć promień kuli wpisanej w dwunastościan i opisanej na dwunastościanie (fig. 331), znając jego krawędź. [Odp.  $r = \frac{k}{20} \sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})}$ ;

$$R = \frac{k}{4} \sqrt{3} (\sqrt{5} + 1)]$$

13. Obliczyć promień kuli wpisanej w dwudziestościan i opisanej na dwudziestościanie, znając jego krawędź. [Odp.  $r = \frac{k}{12} \sqrt{3} (\sqrt{5} + 3)$ ;

$$R = \frac{k}{4} \sqrt{2(5 + \sqrt{5})}]$$

14. Obliczyć stosunek powierzchni: a) czworościanu, b) sześcianu, c) ośmiościanu, opisanego na kuli, do powierzchni podobnego wielościanu wpisane go w tę kulę.



15. Sporządzić siatkę i model dwudziestościanu (siatka składa się z 20 trójkątów równobocznych).

16. Mając narysowany w perspektywie dwudziestościan lub dwunastościan, znaleźć rysunkiem środek kuli wpisanej i opisanej.

§ 114. 17. Obliczyć objętość; a) czworościanu, b) ośmiościanu, znając promień kuli wpisanej  $r = 3 \text{ cm}$ .

18. Znając powierzchnię ścian dowolnego czworościanu nieumiarowego opisanego na kuli i jego objętość, obliczyć promień kuli.

19. Obliczyć objętość dwudziestościanu umiarowego, znając krawędź (por. ćw. 13).

20. Obliczyć objętość dwunastościanu umiarowego, znając krawędź (por. ćw. 12).

## Rozdział XII

### Powierzchnie i bryły obrotowe

#### § 115. Powierzchnie obrotowe prostolinjowe.

Powierzchnię zakreślą przez obrót dowolnej linii prostej lub krzywej około osi nazywamy powierzchnią obrotową. Najprostsze są powierzchnie obrotowe, powstające obrotem linii prostej, to znaczy powierzchnie obrotowe prostolinjowe.

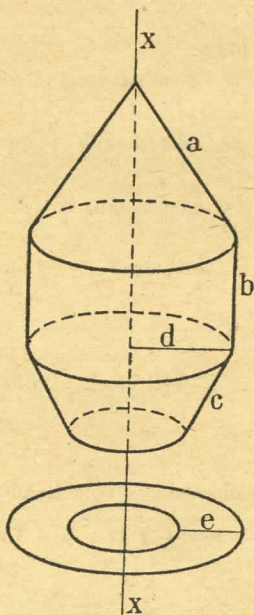


Fig. 333.

Weźmy najpierw pod uwagę linię prostą, leżącą w tej samej płaszczyźnie, co oś. Przez obrót odcinka takiej prostej (fig. 333) może powstać: a) pobocznica stożka prostego, jeżeli odcinek przecina oś; b) pobocznica walca prostego, jeżeli prosta jest równoległa do osi obrotu; c) pobocznica stożka ściętego, jeżeli przedłużenie odcinka przecina oś; d) koło, jeżeli odcinek przecina prostopadłe oś lub wreszcie e) pierścień kołowy, jeżeli odcinek jest prostopadły do osi, ale dopiero przedłużony ją przecina. Widzimy więc, że wiele powierzchni poznanych już w dotychczasowej nauce występuje tutaj z jednej wspólnej zasady powstawania. Pobocznicę walców pochyłych i stożków pochyłych nie należą już do brył obrotowych.

Nową powierzchnię obrotową otrzymamy, biorąc pod uwagę linię prostą wchrowatą względem osi. Model takiej powierzchni otrzymamy, biorąc dwa

przystające koła (n. p. z drutu lub z deski), umieszczone na wspólnej osi prostopadłej, dające się przesuwac po tej osi i obracać koło niej. Łączymy ich obwody kilkunastoma liniami równoległymi n. p. nitkami. Wszystkie te nitki leżą na pobocznicy walca obrotowego (t.j. prostego). Jeżeli jednak skreścimy jedno koło względem drugiego o pewien kąt, to linie a, b, c, d (fig. 334) pozostaną prostymi, ponieważ nitki są napięte, ale będą wchrowate względem osi. Wszystkie te linie będą jednak w równej odległości od osi i będą tworzyły równe kąty z podstawą; będą więc one tylko różnemi położeniami tej samej prostej wchrowatej przy obrocie dokoła osi. Spostrzeżemy, że zarys

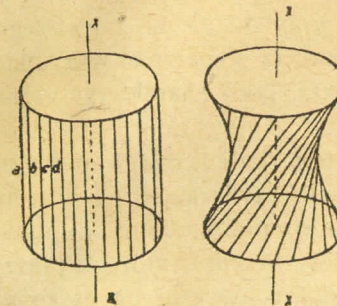


Fig. 334.

powstałej powierzchni jest teraz hyperbolą. Powierzchnia taka nazywa się hyperboloidą obrotową (o jednej powłoce), może bowiem powstać także przez obrót hyperboli, leżącej na tej samej płaszczyźnie, co oś. Wskutek symetrii tej powierzchni zawiera ona także drugą gromadę prostych, pochyłonych w przeciwną stronę o ten sam kąt. Powierzchnia ta mimo to jest nierozwijalna.

#### § 116. Kula.

Przejdźmy do powierzchni obrotowych, powstających przez obrót linii krzywych a więc przedewszystkiem koła.

Powierzchnię obrotową, powstającą przez obrót półkola dokoła średnicy, nazywamy powierzchnią kulistą a przestrzeń zamkniętą przez tę powierzchnię nazywamy kulą. (Czasem używamy słowa kula także na oznaczenie samej powierzchni). Ponieważ każdy punkt półkola jest równo oddalony od środka O, przeto i przy obrocie te odległości nie doznają zmiany. Stąd widzimy, że każdy punkt powierzchni kuli jest równo oddalony od stałego punktu, zwanego środkiem kuli. Tę stałą odległość nazywamy promieniem kuli. Każda linia prosta, przechodząca przez środek kuli, przecina jej powierzchnię w dwóch punktach (dlaczego?); odcinek zawarty między temi punktami nazy-

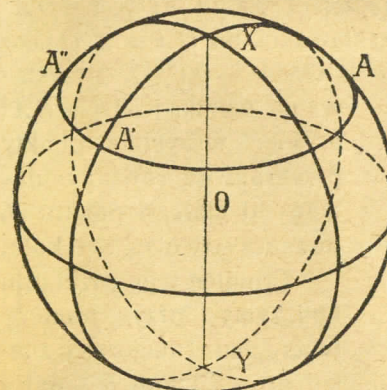


Fig. 335\*).

przechodząca przez środek kuli, przecina jej powierzchnię w dwóch punktach (dlaczego?); odcinek zawarty między temi punktami nazy-

\*) Na fig. 335 przedstawiona jest kula w rzucie prostopadłym a tylko jej oś XY jest nachylona do płaszczyzny obrazowej (pionowej).



wamy średnicą kuli; długość jej jest widocznie dwa razy większa od promienia. Łatwo wykazać, że każda powierzchnia, mająca tę własność, iż każdy jej punkt jest równo oddalony od stałego punktu  $O$ , jest powierzchnią kuli, t. j., że można wyczerpać wszystkie jej punkty przez obrót półkola. Własność ta, jako charakterystyczna dla kuli, może służyć do definicji kuli.

Koło  $XA'Y$ , tworzące swoim obrotem kulę, nazywamy południkiem kuli. Jest to więc przekrój kuli, zawierający oś obrotu. Drogę, jaką zakreśla przy obrocie każdy punkt południka, n. p. punkt  $A'$ , nazywamy równoleżnikiem kuli. Jest to koło, którego płaszczyzna jest prostopadła do osi obrotu. Punkty, w których oś przebija kulę, nazywamy biegunami. Możemy więc powiedzieć, że południk jest kołem, przechodzącym przez obydwa bieguny. Równoleżnik, którego płaszczyzna przechodzi przez środek kuli, nazywa się równikiem. Wszystkie te nazwy pochodzą z geografii matematycznej. Ośią kuli może być każda prosta, przechodząca przez środek, ponieważ każdy przekrój, przechodzący przez środek jest kołem (dlaczego?). Inne powierzchnie obrotowe nie mają tej własności. Ale nie tylko taki przekrój kuli jest kołem. Wykażemy, że *każdy płaski przekrój kuli jest kołem*. Nie mamy więc tu takiej różnorodności, jak u walca lub stożka!

Dla dowodu poprowadźmy z środka kuli linię prostopadłą do płaszczyzny przekroju (fig. 336)  $OS \perp \alpha$ . Połączmy dowolne punkty  $A$  i  $A'$  przekroju ze spodkiem  $S$  prostopadłej. Trójkąty  $SOA$  i  $SOA'$  są przystające według (III) przypadku przystawiania, bo  $OA = OA'$  jako promienie kuli,  $SO = SO$  a  $\angle OSA = \angle OSA' = 90^\circ$ . Z przystawiania wynika:  $SA = SA'$

a więc wszystkie punkty przekroju są równo oddalone od stałego punktu  $S$ , to znaczy tworzą one koło.

Promień tego przekroju obliczymy przy pomocy twierdzenia Pitagorasa, znając promień kuli  $R$  i odległość przekroju od środka kuli  $z$ :  $r = \sqrt{R^2 - z^2}$

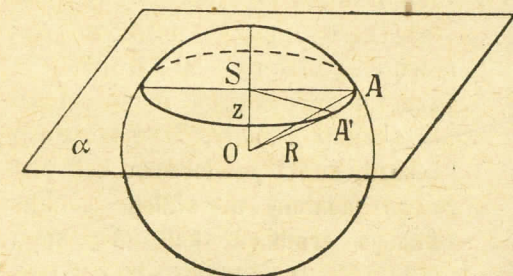


Fig. 336.

Widzimy stąd, że wielkość przekroju zależy od oddalenia jego płaszczyzny od środka kuli. Największy jest przekrój, jeżeli jego płaszczyzna przechodzi przez środek kuli, bo wtedy  $z = 0$ ,  $r = R$ . Przekrój taki nazywamy kołem wielkim. Inne przekroje

nazywamy kołami małymi. Jeżeli przekrój oddala się od środka kuli, promień jego maleje, wreszcie, jeżeli jego odległość od środka kuli będzie równa promieniowi:  $z = R$ , to  $r = 0$ , więc przekrój zmaleje do jednego punktu. Płaszczyzna ma wtedy z kulą tylko jeden punkt wspólny i nazywa się płaszczyzną styczną. Jest ona prostopadła do promienia przechodzącego przez punkt styczności.

W każdym punkcie kuli istnieje tylko jedna płaszczyzna styczna. (Dlaczego?). Z punktu poza kulą można jednakowoż poprowadzić nieskończenie wiele płaszczyzn stycznych: ich krawędzie utworzą

cały stożek styczny do kuli. Stożek ten można otrzymać w prostszy sposób. Weźmy na płaszczyźnie półkole i poprowadźmy styczną z punktu  $P$  (fig. 337) leżącego na przedłużeniu średnicy. Jeżeli całą figurę obrócimy koło osi  $OP$ , to półkole zakreśli kulę a styczna  $PA$  zakreśli stożek prosty, którego podstawą jest koło małe kuli. Stożek ten

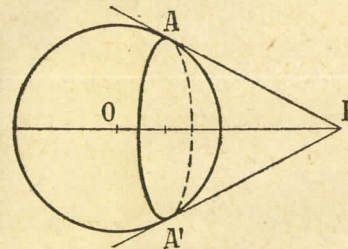


Fig. 337.

zawiera wszystkie linie styczne do powierzchni kuli, jakie się dadzą z punktu  $P$  poprowadzić. Z tego sposobu powstania stożka stycznego wynika, że odcinki wszystkich stycznych poprowadzonych z jednego punktu  $P$  do kuli, mierzone od punktu  $P$  do kuli, są równe.

Jeżeli punkt  $P$  oddala się od kuli, koło  $AA'$  powiększa się a stożek zbliża się coraz więcej do postaci walca. Styczne, dotykające kuli w punktach koła wielkiego, tworzą powierzchnię walcową styczną, są więc wszystkie równoległe. Stożki i walce styczne mają zastosowanie przy szukaniu cieni kuli (zaćmienia) i rzutów kuli.

Kiedy cień kuli będzie kołem, elipsą, parabolą? Jaka jest granica cienia i światła na kuli oświetlonej?

Wielościan, którego wszystkie ściany są płaszczyznami stycznymi kuli, nazywa się opisany na kuli. Jeżeli zaś naroża wielościanu leżą na powierzchni kuli, wielościan nazywa się wpisanym w kulę. Czy każdy graniastosłup da się opisać na kuli? (wpisać w kulę?). Walec i stożek nazywają się wpisane w kulę, jeżeli ich podstawy są kołami (wielkimi lub małymi) kuli a wierzchołek leży na kuli. Walec i stożek są opisane na kuli, jeżeli ich dna są płaszczyznami stycznymi a pobocznica walcem lub stożkiem stycznymi.

Części objętości i powierzchni kuli, odcięte przekrojem płaskim, mają osobne nazwy. I tak części, na jakie się rozpada powierzchnia



kuli przez poprowadzenie płaskiego przekroju, nazywamy czasami kuli a odpowiednie części objętości kuli nazywamy odcinkami kuli.

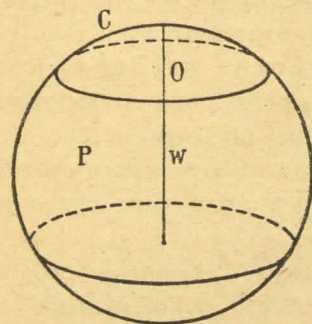


Fig. 338.

bryły i powierzchnie obrotowe, powstające przez obrót łuków i odcinków linii prostych.

Rozważ wzajemne położenie dwóch kul! Kiedy ich wspólną częścią jest soczewka dwuwypukła?

Jedno koło wielkie dzieli powierzchnię kuli na dwie półkule. Dwa koła wielkie przecinają się zawsze w dwóch punktach  $A, A_1$  (fig. 339) biegunowo przeciwległych (końce średnicy) i dzielą powierzchnię kuli na cztery części, zwane dwukątami sferycznymi.

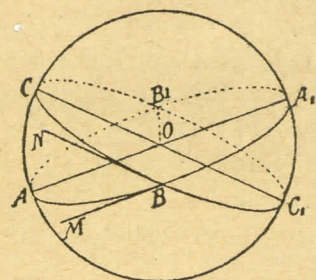


Fig. 339.

liniami prostymi, tak na kuli należy przedewszystkiem omówić trójkąty ograniczone łukami kół wielkich.

Łuki kół wielkich mają nawet w geometrii na kuli, w t. zw. geometrii sferycznej, podobne własności, jak linie proste w geometrii na płaszczyźnie, t. j. w planimetrii. Między dwoma punktami na płaszczyźnie da się poprowadzić tylko jedna linia prosta: podobnie między dwoma punktami na kuli da się poprowadzić tylko jedno koło wielkie, jeżeli tylko te punkty nie są biegunowo przeciwległe. Dalej: linia prosta jest na płasz-

część powierzchni kuli, zawartą między dwoma przekrojami równoległymi (fig. 338), nazywamy pasem sferycznym a odpowiednią część objętości warstwą kuli. Co nazwiemy wysokością odcinka? (warstwy?) Z odcinków kuli można utworzyć rozmaite gatunki soczewek: dwuwypukła składa się z dwóch odcinków o tej samej podstawie, dwukęśła powstaje z walca po wycięciu dwóch odcinków kuli, podobnie też inne rodzaje soczewek. Wszystko to są także

czyźnie najkrótszą drogą, łączącą dwa punkty; na kuli jest łuk koła wielkiego najkrótszą drogą (po powierzchni), łączącą dwa punkty kuli. (Dlaczego?) Nitka wyprężona między dwoma punktami powierzchni kuli dotyka jej wzdłuż łuku koła wielkiego. (Jeżeli n. p. chcemy znaleźć najkrótszą drogę z Warszawy do Tokio, nie należy jej szukać wzdłuż równoleżnika, ale wzdłuż koła wielkiego). Z tej przyczyny nazywamy ten łuk koła wielkiego odległością sferyczną.

Badanie trójkątów sferycznych i wogóle figur, leżących na powierzchni kuli, jest dla nas sprawą bardzo ważną, ponieważ ziemia jest kulą i pozorne sklepienie niebios również uważamy za kulę. Wszelkie obliczenia i pomiary geograficzne lub astronomiczne muszą się opierać na geometrii sferycznej.

Łącząc wierzchołki trójkąta sferycznego  $ACB$  z środkiem kuli, otrzymujemy kąt bryłowy trójsięenny  $OACB$ . Jest on ściśle związany z trójkątem sferycznym: boki trójkąta sferycznego są łukami, należącymi do kątów płaskich naroża, jako do kątów środkowych. Dlatego wyrażamy zwykle boki trójkąta sferycznego w stopniach. Kąty trójkąta sferycznego (są to kąty zawarte między liniami stycznymi do kół, ograniczających ten trójkąt) są znowu równe kątom dwusięnnym naroża. Albowiem (fig. 340):

$$NB \perp OB \text{ i leży na płaszczyźnie } BOC$$

$$MB \perp OB \text{ i leży na płaszczyźnie } AOB$$

a więc  $\angle MBN$  jest miarą kąta dwusięnnego, utworzonego przez płaszczyzny  $AOB$  i  $COB$ .

Badanie trójkąta sferycznego jest więc zarazem badaniem naroża trójsięnnego i odwrotnie: prawa poznane dla naroża trójsięnnego można przenieść bez zmiany na trójkąty sferyczne. Tak n. p. przypadki przystawiania kątów bryłowych trójsięnnych podają zarazem przypadki przystawiania trójkątów sferycznych. (Wymień!) Ze związku z narożem trójsięnnym wynika także bardzo ważne prawo:

suma kątów trójkąta sferycznego musi być zawsze większa od  $180^\circ$  a mniejsza o  $540^\circ$ . (Dlaczego?) Nadmiar ten:

$$A + B + C - 180^\circ$$

nazywamy **pepełnieniem sferycznem** i zaznaczymy literą  $e$ . W trójkącie sferycznym może się znajdować jeden, dwa a nawet trzy kąty proste (jeżeli trzy płaszczyzny odpowiedniego kąta bryłowego są parami prostopadłe do siebie). Trójkąt sferyczny, zawierający jeden przynajmniej kąt prosty, nazywa się prostokątnym. Narysuj!



Jeżeli w wierzchołku naroża trójsiennego, t. j. w środku kuli wykreślimy naroże biegunowe do niego, otrzymamy na powierzchni kuli trójkąt sferyczny biegunowy do pierwszego trójkąta. Jego boki wyrażone w mierze katowej spełniają się do  $180^\circ$  z kątami pierwotnego trójkąta a kąty spełniają się do  $180^\circ$  z bokami pierwotnego trójkąta. (Dlaczego?)

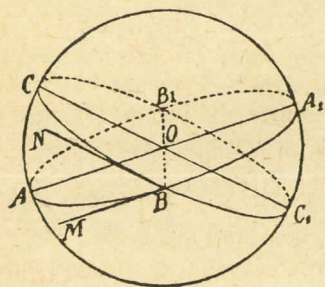


Fig. 340.

Jaki trójkąt sferyczny powstanie, jeżeli krawędzie odpowiedniego naroża trójsiennego przedłużymy poza wierzchołek naroża aż do przecięcia się z kulą? Czy przystaje do pierwotnego trójkąta? Nazywamy go trójkątem sferycznym przeciwległym. Dwa trójkąty sferyczne, zajmujące razem połowę kuli, nazywamy trójkątami przyległymi. N. p. do trójkąta  $ABC$  przyległym jest trójkąt o bokach  $AB_1A_1B$ ,  $AC$ ,  $BC$  a przeciwległym  $B_1A_1C_1$ .

## § 117. Inne powierzchnie obrotowe.

Z innych powierzchni obrotowych zasługują na uwagę:

1. Elipsoida obrotowa, t. j. powierzchnia zakreślona obrotem elipsy około jednej osi głównej; kształt taki ma w przybliżeniu ziemia.
2. Hyperboloida obrotowa, o której wspominaliśmy już przy powierzchniach obrotowych prostoliniowych (fig. 334, str. 277). Inny rodzaj hyperboloidy otrzymamy, obracając hyperbolę koło osi symetrii, przechodzącej przez obydwie gałęzie; wtedy powstaje hyperboloida o dwóch powłokach.
3. Paraboloida obrotowa, powstająca przez obrót paraboli dokoła jej osi symetrii.

Powierzchni takiej używa się w optyce, jako zwierciadła wklęsłego do reflektorów.

4. Obręcz kołowa, powstająca przez obrót koła dokoła osi, leżącej w jego płaszczyźnie, ale nie przecinającej koła.

Powierzchniami temi zajmowano się już w starożytności. Archimedes, któremu zawdzięczamy obliczenie obwodu i powierzchni koła, badał i te powierzchnie a wyniki badań przekazał nam w dziele p. t.: „O konoidach i sferoidach”. Także obliczenie powierzchni i objętości kuli zawdzięczamy Archimedesowi.

W budownictwie i w przemyśle używa się wielu powierzchni obrotowych o linjach południkowych (tworzących) bardziej skomplikowanych. Tak n. p. kopuły, wyroby tokarskie, garncarskie są najczęściej powierzchniami obrotowymi. Wskutek tak wielkiego rozpowszechnienia ważnym zadaniem jest obliczenie powierzchni i objętości brył obrotowych.

## § 118. Powierzchnia kuli i jej części.

Rozwinięcie powierzchni kuli na płaszczyźnie jest niemożliwe. Powierzchnia kuli nie da się przenieść na płaszczyznę bez zniekształcenia długości i kątów ani w sposób mechaniczny, ani matematyczny.

Jest to rzecz wielkiej doniosłości dla geografii. Wynika stąd bowiem, że żadna karta geograficzna nie jest wiernym obrazem kuli ziemskiej. Jedynie globus mógłby być wiernym pomniejszeniem kuli ziemskiej, jednakże w praktyce także globus sporządza się przez naklejanie płaskich kawałków w postaci dwukątów sferycznych, ograniczonych łukami kół lub sinusoid. Można zrobić taką mapę, na której wszystkie kąty występują w prawdziwej wielkości, wtedy jednak powierzchnie i odcinki doznają silnych zniekształceń (n. p. rzut Merkatora). Można także przedstawić części ziemi z zachowaniem równości powierzchni; wtedy jednak kąty albo długości odcinków będą zmienione. (N. p. rzuty Lamberta równo-powierzchniowe).

Wobec tego przy obliczaniu powierzchni kuli nie możemy się posługiwać siatką tej powierzchni, ale musimy użyć rozważań przybliżonych, granicznych.

Opisujemy na kuli szereg pobocznic stożków ściętych, dotyczących kuli wzdłuż swego przekroju średniego. Oznaczamy bok jednego takiego stożka ściętego literą  $s_1$ , promień przekroju średniego  $\varrho_1$  a rzut boku na oś literą  $w_1$  (fig. 341). Wyprowadziliśmy już wzór na obliczenie pobocznic takiego stożka (por. str. 256).

$$p_1 = 2\pi \varrho_1 s_1$$

Ale iloczyn  $\varrho_1 \cdot s_1$  można zastąpić iloczynem  $R \cdot w_1$ , ponieważ  $\varrho_1 : R = w_1 : s_1$ , jak to wynika z podobieństwa trójkątów  $AEB$  i  $OCD$ ; więc

$$p_1 = 2\pi R w_1$$

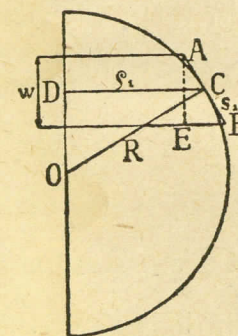


Fig. 341.

Jeżeli opisujemy na kuli bardzo wiele takich pasów bardzo wąskich, to one w granicy pokryją całą kulę. Powierzchnię kuli możemy więc uważać za granicę, do jakiej dąży suma powierzchni tych pasków, jeżeli ich szerokość maleje nieograniczenie. Obliczamy sumę powierzchni kilku takich pasków:

$$p_1 = 2\pi R w_1$$

$$p_2 = 2\pi R w_2$$

$$p_3 = 2\pi R w_3$$

$$\dots$$

$$p_n = 2\pi R w_n$$



Stąd:  $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 2\pi R(w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n)$

Jeżeli wyczerpiemy całą powierzchnię kuli, to odcinki  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$  pokryją całą oś kuli: ich suma równa się więc średnicy.

Zatem:

$$P = 2\pi R \cdot 2R, \text{ czyli ostatecznie}$$

$$P = 4R^2\pi$$

Powierzchnia kuli jest więc cztery razy większa od powierzchni koła wielkiego. Gdybyśmy z tych pobocznic stożków dodali tylko część, mianowicie tylko te, które pokrywają część powierzchni kuli od bieguna do wysokości  $w_c$ , otrzymalibyśmy powierzchnię czaszy:

$$P = 2R\pi \cdot w_c \quad (1)$$

Powierzchnię czaszy obliczamy, mnożąc obwód koła wielkiego przez wysokość czaszy.

Narysuj walec, mający pobocznice tak wielką, jak czasza kuli na fig. 342!

To samo rozumowanie odnosi się do powierzchni pasa sferycznego:

$$P = 2R\pi \cdot w_p$$

Jeżeli na kuli opiszemy walec równoboczny, to jego pobocznica wynosi  $2R\pi \cdot 2R = 4R^2\pi$ , równa się więc powierzchni kuli. (Jest to odkrycie Archimedesesa).

Powierzchnię dwukąta sferycznego, którego łuki tworzą kąt  $\alpha$ , obliczymy z proporcji:

$$P : 4R^2\pi = \alpha : 360^\circ \text{ stąd}$$

$$P = R^2\pi \frac{\alpha}{90^\circ}$$

Dla trójkąta sferycznego  $ABC$  (fig. 343) wyprowadzimy wzór, opierając się na dwukątach. I tak trójkąty  $ABC$  i  $BCA_1$  tworzą razem dwukąt o powierzchni:

$$ABC + BCA_1 = R^2\pi \cdot \frac{\angle A}{90^\circ}$$

Tak samo trójkąty  $ABC$  i  $ABC_1$

$$ABC + ABC_1 = R^2\pi \cdot \frac{\angle C}{90^\circ}$$

Wreszcie aby uzupełnić półkulę przednią, potrzeba nam jeszcze powierzchni trójkąta  $BA_1C_1$ . Powierzchnia ta równa się powierzchni trójkąta  $ACB_1$

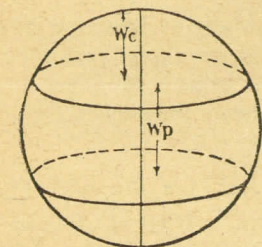


Fig. 342.

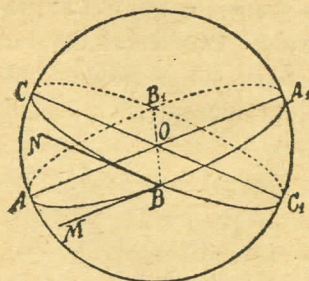


Fig. 343.

(dlaczego?), przeto  $ABC + BA_1C_1 = ABC + ACB_1$  a te tworzą razem dwukąt, więc

$$ABC + BA_1C_1 = R^2\pi \cdot \frac{\angle B}{90^\circ}$$

Dodając powierzchnie tych trzech par trójkątów, otrzymamy:

$$\begin{aligned} 2ABC + (ABC + BCA_1 + BA_1C_1 + ABC_1) = \\ = \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{90^\circ} \cdot R^2\pi \end{aligned}$$

Ale  $ABC$  jest żadaną powierzchnią  $P$  trójkąta, suma zaś zawarta w nawiasie daje powierzchnię półkuli, t. j.

$$\frac{4R^2\pi}{2}. \text{ Więc}$$

$$2 \cdot P + 2R^2\pi = R^2\pi \cdot \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{90^\circ}. \text{ Upraszczając przez 2, otrzy-}$$

$$\text{mamy: } P = R^2\pi \cdot \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{180^\circ} - R^2\pi \text{ czyli}$$

$$P = R^2\pi \cdot \frac{\angle A + \angle B + \angle C - 180^\circ}{180^\circ}$$

Wyrażenie zawarte w liczniku jest to przepełnienie sferyczne:  $e$  (por. str. 281).

Ostatecznie więc otrzymujemy:

$$P = \frac{R^2\pi \cdot e}{180^\circ}$$

Z tego wzoru widzimy, że powierzchnia trójkąta sferycznego zależy od sumy kątów i odwrotnie: im większą powierzchnię ma trójkąt sferyczny, tem większa jest suma jego kątów.

W trójkątach płaskich nie spotkaliśmy takiej ciekawej zależności w geometrii euklidesowej, natomiast w geometriach nieeuklidesowych pole trójkąta płaskiego zależy także od sumy jego kątów (por. planimetria str. 33).

Podobnie, jak w planimetrii długość łuku koła o promieniu 1 służy za miarę kąta, tak w stereometrii powierzchnię trójkąta sferycznego można przyjąć za miarę odpowiedniego kąta bryłowego trójsięciennego, jeżeli tylko promień kuli wynosi jednostkę długości. W podobny sposób można zmierzyć wielkość kątów bryłowych wielościennych.



### § 119. Objętość kuli.

Do wzoru na objętość kuli dochodzimy w podobny sposób, jak dla wielościanów opisanych na kuli (por. § 114). Podzielmy powierzchnię kuli na bardzo drobne czworokąty sferyczne, prowadząc n. p. system równoleżników i południków (fig. 344). Wierzchołki każdego takiego czworokąta połączmy ze środkiem kuli, to kula rozpadnie się na bryły bardzo zbliżone do ostrosłupów czworobocznych, których wysokość równa się promieniowi kuli a podstawą jest mały czworokąt płaski, stykający się z kulą.

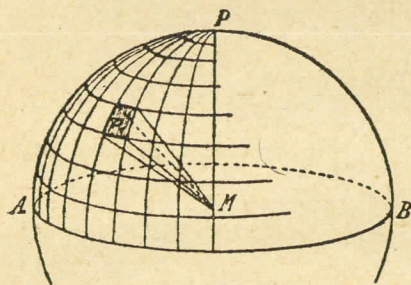


Fig. 344.

Jeżeli podział poprowadzimy odpowiednio daleko, to suma tych ostrosłupów różni się dowolnie mało od objętości kuli a suma ich podstaw tak samo dąży do powierzchni kuli. Dodając więc obliczone wartości, otrzymujemy:

$$V = (p_1 + p_2 + \dots + p_n) \cdot \frac{R}{3}$$

$$V = P \cdot \frac{R}{3}, \text{ ale } P \text{ kuli wynosi } 4 R^2 \pi$$

więc:

$$V = \frac{4}{3} R^3 \pi$$

Z tego wzoru widzimy, że objętości dwóch różnych kul mają się do siebie, jak trzecie potęgi promieni, zgodnie z ogólnym prawem, że, jeżeli wymiary bryły wzrastają, to powierzchnie rosną w stosunku drugich potęg tych wymiarów a objętości w stosunku trzecich potęg. (Sprawdzić dla innych poznanych brył!)

Do tego samego wyniku możemy dojść, opierając się na twierdzeniu Cavalieriego.

Objętości tych ostrosłupów wynoszą:

$$v_1 = p_1 \frac{R}{3}$$

$$v_2 = p_2 \frac{R}{3}$$

$$v_n = p_n \cdot \frac{R}{3}$$

Wśród brył o znanej objętości szukamy takiej, któraby miała wszystkie przekroje równe odpowiednim przekrojom kuli. Przekrój kuli poprowadzony w odległości  $x$  od środka (fig. 345) ma powierzchnię:

$$\rho^2 \pi = R^2 \pi - x^2 \pi.$$

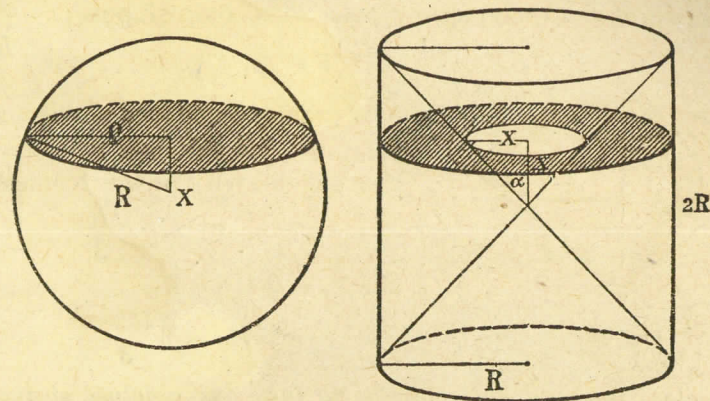


Fig. 345.

Wzór ten naprowadza nas na to, że przekroje szukanej bryły będą pierścieniami kołowymi o większym promieniu stałym  $R$  a mniejszym zmiennym, mianowicie równym odległości  $x$  przekroju kuli od środka.

Bryłą taką jest walec równoboczny z wydrążeniami stożkowymi, sięgającymi do środka walca. Promień tego walca ma być równy promieniowi kuli. Ponieważ  $\alpha = 45^\circ$ , to istotnie promień mniejszego koła przekroju równa się odległości tego przekroju od środka.

Ponieważ wszystkie przekroje tego wydrążonego walca są równe odpowiednim przekrojom kuli, więc według twierdzenia Cavalieriego objętość kuli równa się objętości walca pomniejszonej o podwójną objętość wgłębień stożkowatych:

$$V_k = V_w - 2 V_s$$

Stąd:

$$V_k = 2 R^2 \pi - 2 \cdot R^2 \pi \cdot \frac{R}{3} = \frac{6 R^3 \pi - 2 R^3 \pi}{3}$$

więc otrzymujemy wzór:

$$V_k = \frac{4}{3} R^3 \pi$$

ten sam, któryśmy poprzednio wyprowadzili inną drogą.



## § 120. Objętość części kuli.

To samo rozumowanie, które pozwoliło obliczyć objętość kuli, prowadzi także do obliczenia objętości wycinka kuli, (t. j. bryły, powstającej przez obrót wycinka koła około dwusiecznej kąta środkowego) (fig. 346). Dzielać czaszę, ograniczającą wycinek, na drobne czworokąty, otrzymujemy jako sumę ostrosłupów:

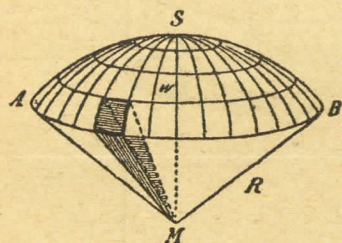


Fig. 346.

Objętość wycinka kuli oblicza się tak, jak objętość stożka, którego podstawa równa się czaszy, ograniczającej wycinek a wysokość równa się promieniowi kuli.

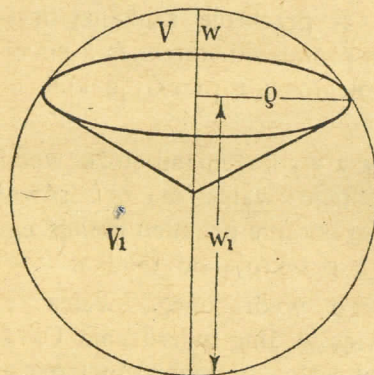


Fig. 347.

Objętość odcinka kuli można obliczyć jako różnicę między objętością odpowiedniego wycinka i stożka, jeżeli chodzi o odcinek mniejszy od półkuli lub też jako sumę wycinka i stożka (por. fig. 347). Obliczymy najpierw objętość mniejszego odcinka V.

$$V = 2R\pi w \cdot \frac{R}{3} - \rho^2 \pi \cdot \frac{R-w}{3}.$$

Ale  $\rho$  jest średnią geometryczną między obydwooma odcinkami średnicy. (Por. planimetria § 57).

$$\rho^2 = w(2R - w) \quad (a)$$

więc:

$$V = \frac{2R^2\pi w}{3} - \frac{\pi w}{3}(R-w)(2R-w)$$

skąd po wykonaniu prostych działań otrzymamy:

$$V = \pi w^2 \left( R - \frac{w}{3} \right) \quad (2)$$

Taki sam wzór otrzymamy dla większego odcinka (tylko zamiast  $w$  trzeba użyć wysokości  $w_1$ ).

Wzór ten można sprowadzić do innej formy, łatwiejszej do zapamiętania. Wyrazimy objętość odcinka zapomocą wielkości  $\rho$  i  $w$ , które możemy wprost zmierzyć na odcinku, nie uzupełniając go do kuli. Z wzoru (a) otrzymujemy:

$$R = \frac{\rho^2 + w^2}{2w},$$

a podstawiając tę wartość we wzór (2), otrzymamy po uporządkowaniu:

$$V = \frac{\rho^2 \pi \cdot w}{2} + \frac{4}{3} \left( \frac{w}{2} \right)^3 \pi \quad (2a)$$

Słowami: objętość odcinka kuli równa się połowie objętości walca opisanego na tym odcinku, powiększonej o objętość kuli wpisanej w ten odcinek.

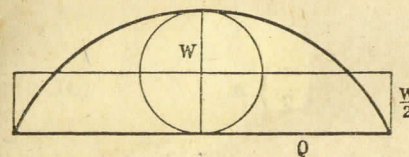


Fig. 348.

Na fig. 348 są te były przedstawione w przekroju (w rzucie pionowym).

Objętość warstwy kuli można obliczyć jako różnicę objętości dwóch odcinków kuli.

Używając wzoru (2a) na obliczenie objętości odcinków o wysokościach  $w_1$  i  $w_2$ , otrzymamy:

$$V = \frac{\rho_1^2 \pi w_1}{2} + \frac{4}{3} \left( \frac{w_1}{2} \right)^3 \pi - \frac{\rho_2^2 \pi w_2}{2} - \frac{4}{3} \left( \frac{w_2}{2} \right)^3 \pi.$$

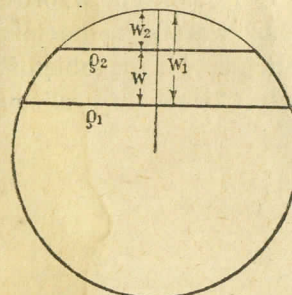


Fig. 349.

Wzór ten można także przekształcić na formę wygodną do zapamiętania a zawierającą te tylko wielkości, które się dadzą bezpośrednio zmierzyć na samej warstwie, t. j.  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  i  $w$ . (Por. fig. 349).

Zamiast  $w_1$  i  $w_2$  podstawiamy we wzorze na objętość wartości:

$$w_1 = w + w_2$$

$$w_2 = w_1 - w$$

$$\text{to: } V = \frac{\rho_1^2 \pi w}{2} + \frac{\rho_1^2 \pi w_2}{2} + \frac{w_1^3 \pi}{6} - \frac{\rho_2^2 \pi w_1}{2} + \frac{\rho_2^2 \pi w}{2} - \frac{w_2^3 \pi}{6}$$

$$V = \frac{\rho_1^2 \pi w}{2} + \frac{\rho_2^2 \pi w}{2} + \frac{\pi}{6} (3\rho_1^2 w_2 - 3\rho_2^2 w_1 + w_1^3 - w_2^3).$$



Ale:  $\varrho_1^2 w_2 - \varrho_2^2 w_1 = w_1 w_2^2 - w_1^2 w_2$

jak to wynika z równości:

$$\begin{aligned} \varrho_1^2 &= w_1 (2R - w_1) \\ \varrho_2^2 &= w_2 (2R - w_2) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot w_2 \\ \cdot w_1 \end{array} \right. \text{odejmujemy dolne równanie:}$$

$$\varrho_1^2 w_2 - \varrho_2^2 w_1 = -w_1^2 w_2 + w_2^2 w_1.$$

Uwzględniając ten związek, otrzymujemy:

$$V = \frac{\varrho_1^2 \pi w}{2} + \frac{\varrho_2^2 \pi w}{2} + \frac{\pi}{6} (w_1 - w_2)^3$$

ale  $w_1 - w_2 = w$

$$V = \frac{\varrho_1^2 \pi w}{2} + \frac{\varrho_2^2 \pi w}{2} + \frac{\pi}{6} w^3$$

lub ostatecznie:

$$V = \frac{\varrho_1^2 \pi w}{2} + \frac{\varrho_2^2 \pi w}{2} + \frac{4}{3} \left( \frac{w}{2} \right)^3 \pi \quad (3)$$

Objętość warstwy kulistej oblicza się, dodając do połowy objętości walca opisanego na tej warstwie połowę objętości walca wpisanego i objętość kuli wpisanej.

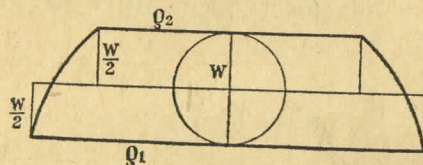


Fig. 350.

Na fig. 350 są przedstawione te bryły w przekroju (w rzucie pionowym).

Do tych samych wzorów na objętość warstwy i odcinka można dojść, używając twierdzenia Cavalieriego. N. p. objętość warstwy równa się objętości pierścienia bryły, której używaliśmy

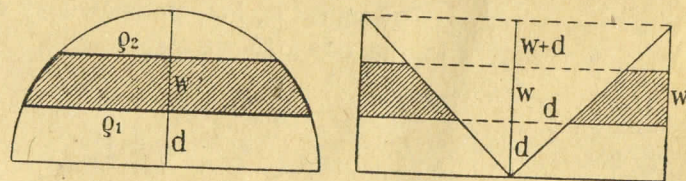


Fig. 351.

przy obliczaniu objętości kuli. (Por. fig. 351). Wykonaj ten rachunek!

## § 121. Reguła Guldina do obliczania pola powierzchni obrotowych.

Posiadamy metodę obliczania pola powierzchni brył obrotowych wspólną dla wszystkich rodzajów takich powierzchni. Zastanówmy się najpierw nad znanymi nam już wzorami na obliczanie pobocznic prostego walca, stożka i stożka ściętego. Widzieliśmy n. p., że pobocznica stożka ściętego wynosi:

$$M = 2\rho\pi s$$

Ponieważ punkt  $C$  możemy uważać za środek ciężkości odcinka  $AB$ , obłożonego jednostajnie masą, przeto wzór nasz możemy także wypowiedzieć w następującej formie:

Pole powierzchni obrotowej powstającej przez obrót odcinka, leżącego w tej samej płaszczyźnie, co oś obrotu, równa się długości  $s$  tego odcinka, pomnożonej przez drogę  $2\rho\pi$ , zakreśloną przez środek ciężkości tego odcinka (fig. 352).

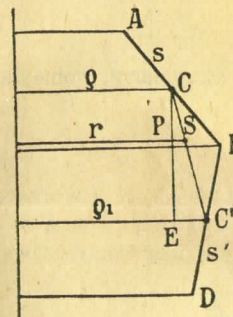


Fig. 352.

Tak samo można wyśłowić wzory na pobocznice walca i stożka. (Wykaż!).

Jeżeli teraz weźmiemy linię łamaną, złożoną z dwóch odcinków, to przez obrót otrzymamy pobocznice dwóch stożków ściętych. Cała powierzchnia obrotowa ma więc wielkość:

$$P = 2\rho\pi s + 2\rho'\pi s' = 2\pi(\rho s + \rho' s') \quad (1)$$

Środek ciężkości całej linii łamanej  $ABD$  leży w odległości średniej między  $\rho$  i  $\rho'$  od osi obrotu. Tę średnią odległość tworzymy według następującego wzoru:

$$r = \frac{\rho s + \rho' s'}{s + s'}$$

Albowiem: jeżeli masa jest rozmieszczona jednostajnie, to znaczy na każdy centymetr długości przypada tyle samo gramów, n. p.  $m$  gramów, to odcinek o długości  $s$  ma masę  $m \cdot s$  a odcinek  $s'$  masę  $m \cdot s'$ . Środek ciężkości  $S$  musi leżeć na linii, łączącej  $C$  i  $C'$ , bliżej większej masy i to tyle razy bliżej, ile razy ta masa jest większa.

Stąd wynika proporcja:

$$CS : C'S = m s' : m s$$

czyli po uproszczeniu przez  $m$

$$CS : C'S = s' : s$$

Z tej proporcji wynika także prawdziwość proporcji:

$$CS : (CS + C'S) = s' : (s' + s) \quad \text{czyli}$$

$$CS : C'C = s' : (s' + s).$$

Ale z trójkątą  $CEC'$  widzimy, że

$$CS : C'C = PS : EC' = (r - \rho) : (\rho' - \rho)$$



Więc  $(r - \rho) : (\rho' - \rho) = s' : (s + s')$ . Stąd łatwo obliczymy:

$$r = \frac{\rho s + \rho' s'}{s + s'}$$

Gdyby się linia łamana składała z większej liczby odcinków, to odległość środka ciężkości tej linii od osi obrotu wynosiłaby:

$$r = \frac{\rho s + \rho' s' + \rho'' s'' + \dots}{s + s' + s'' + \dots}$$

Wprowadzając znaną wartość  $r$  we wzór (1), otrzymamy, ponieważ:

$$\rho s + \rho' s' = r(s + s'), \text{ wzór}$$

$$P = 2r\pi(s + s').$$

Trzeba więc pomnożyć całkowitą długość linii (tworzącej) południkowej  $s + s'$  przez drogę  $2r\pi$ , zakreśloną przez środek ciężkości przy obrocie. Ilekolwiek odcinków weźmiemy, zawsze otrzymamy na powierzchnię wzór:

$$P = 2r\pi l$$

gdzie  $r$  oznacza odległość środka ciężkości linii południkowej od osi a  $l$  całkowitą długość tej linii.

To samo rozumowanie możemy zastosować do linii krzywej, obracającej się dokoła osi. Trzeba ją podzielić na drobne cząstki, w przybliżeniu proste i zastosować poprzednie rozumowanie. Postępując ściślej, trzeba by w tę linię wpisać linię łamaną o wielkiej liczbie boków lub opisać taką linię i badać, do jakiej granicy dąży powierzchnia obrotowa, zakreślona przez taką linię łamaną. Wtedy jednakże obliczenie środka ciężkości linii południkowej sprawia znacznie trudności.

Wzór ten nazywamy regułą Guldina (XVII. wiek), jakkolwiek już u Pappusa z Aleksandrii (około 300 lat po n. Chr.) znajdujemy tę samą metodę.

W praktyce, jeżeli linia południkowa (profil) jest bardzo skomplikowana, n. p. przy kopułach bizantyńskich, nie szuka się środka ciężkości całej linii, tylko rozdziela się powierzchnię na pasy w przybliżeniu stożkowe lub walcowe i oblicza się powierzchnię każdego pasa osobno.

Gdybyśmy chcieli zastosować regułę Guldina do kuli, musielibyśmy znać środek ciężkości połowy okręgu koła. Posiadamy jednakże wzór na powierzchnię kuli, obliczony inną drogą; możemy więc odwrotnie wykryć, gdzie leży środek ciężkości linii południkowej. Ponieważ jej długość

$$l = \frac{2R\pi}{2} = R\pi$$

przeto według reguły Guldina powierzchnia kuli wynosi:

$$P = 2r\pi \cdot R\pi \quad \text{ale wiemy że}$$

$$P = 4R^2\pi \quad \text{stąd}$$

$$2rR\pi^2 = 4R^2\pi \quad \text{czyli}$$

$$r = \frac{2R}{\pi}$$

Taka jest odległość środka ciężkości obwodu półkola od osi obrotu. Wyprowadzić na powierzchnię obręczy kołowej wzór:

$$P = 4Rr\pi^2$$

gdzie  $r$  oznacza promień koła obracanego a  $R$  odległość jego środka od osi obrotu!

## § 122. Reguła Guldina do obliczania objętości brył obrotowych.

Przy obliczaniu powierzchni brył obrotowych wyprowadziliśmy ogólne prawo  $P = l \cdot 2r\pi$ , gdzie  $r$  oznaczało odległość środka ciężkości linii obracającej się od osi obrotu a  $l$  całkowitą długość tej linii. Zupełnie podobne prawo odnosi się do objętości brył obrotowych. Udowodnimy mianowicie:

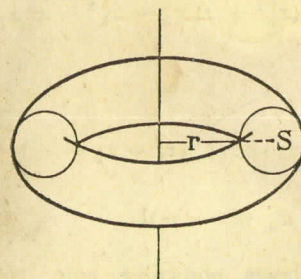


Fig. 353.

Jeżeli jakakolwiek część płaszczyzny wiruje koło osi, nie przecinającej jej ograniczenia, to objętość tej bryły obrotowej równa się polu figury obracającej się, pomnożonemu przez drogę, zakreśloną przez środek ciężkości tej powierzchni.

Prawdopodobność tego twierdzenia wykażemy najłatwiej, biorąc pod uwagę obręcz,

powstającą przez obrót koła koło osi, leżącej w jego płaszczyźnie a nie przecinającej go. Gdybyśmy taką obręcz wyprostowali, otrzymalibyśmy walec, mający za podstawę koło tworzące. Przy tem wyginaniu musiałyby doznać wewnętrzne części powierzchni pierścienia rozciągnięcia a zewnętrzne zgniecenia. Wysokość tego walca musi być krótsza od zewnętrznego równoleżnika a dłuższa od wewnętrznego. Wydaje się więc bardzo prawdopodobnem, że wysokość walca będzie równa średniemu równoleżnikowi, przechodzącemu przez środek ciężkości  $S$  koła tworzącego (fig. 353). Nazywając promień tego równoleżnika (t. j. odległość tego środka ciężkości od osi obrotu) literą  $r$ , otrzymamy na objętość tego walca (a więc i obręczy) wzór:

$$V = P \cdot 2r\pi.$$

Ścisły dowód przeprowadzimy dla trójkąta. Inne wielokąty można bowiem złożyć z trójkątów a powierzchnie ograniczone liniami krzywymi możemy aproksymować zapomocą wielokątów.

Weźmy więc pod uwagę trójkąt  $ABC$  i rozważmy bryłę, jaka powstaje przez obrót tego trójkąta koło osi  $TT$  (fig. 354). Oznaczmy odległości wierzchołków od osi literami  $x_1, x_2, x_3$  a odległość środka ciężkości  $S$  od osi obrotu literą  $r$ . Łatwo wykażać, że

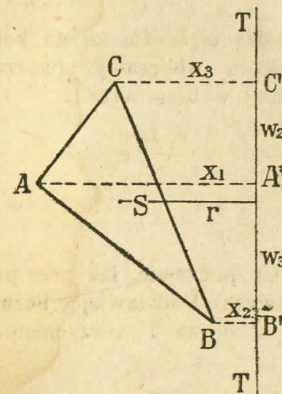


Fig. 354.

$$r = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

(Por. planimetria ćw. 57 str. 128).



Objętość bryły obrotowej, zakreślonej przez obrót tego trójkąta, składa się z dwóch stożków ściętych o bokach  $AC$  i  $AB$ , od których jednak trzeba odjąć wewnętrzny stożek ścięty o boku  $BC$ . Więc:

$$V = \frac{w_2 \pi}{3} (x_1^2 + x_3^2 + x_1 x_3) + \frac{w_3 \pi}{3} (x_2^2 + x_1^2 + x_1 x_2) - \frac{w_2 + w_3}{3} \pi (x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3)$$

Zbierając osobno wyrazy, zawierające  $w_2$  a osobno  $w_3$ , otrzymujemy:

$$V = \frac{\pi}{3} w_2 (x_1^2 + x_1 x_3 - x_2^2 - x_2 x_3) + \frac{\pi}{3} w_3 (x_1^2 + x_1 x_2 - x_3^2 - x_2 x_3)$$

Wyłączmy przed nawias:

$$x_1 - x_2 \text{ i } x_1 - x_3$$

$$V = \frac{\pi}{3} w_2 (x_1 - x_2) (x_1 + x_2 + x_3) + \frac{\pi}{3} w_3 (x_1 - x_3) (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$V = \pi \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} [w_2 (x_1 - x_2) + w_3 (x_1 - x_3)]$$

Ale wyrażenie zawarte w nawiasie przedstawia podwójne pole trójkąta, otrzymane jako różnica pomiędzy trapezami  $ABB'A'$  i  $AA'CC'$  a trapezem  $BB'CC'$  (oblicz!)

Więc:

$$V = \pi \cdot r \cdot 2P$$

czyli:

$$V = P \cdot 2r\pi$$

a to jest prawo Guldina.

Biorąc teraz dowolny wielokąt (fig. 355), rozkładamy go na trójkąty. Oznaczywszy odległości środków ciężkości od osi literami  $r_1, r_2, r_3 \dots$  a pola tych trójkątów  $f_1, f_2, f_3 \dots$ , otrzymamy:

$$V = f_1 \cdot 2r_1 \pi + f_2 \cdot 2r_2 \pi + f_3 \cdot 2r_3 \pi + \dots$$

$$V = 2\pi (r_1 f_1 + r_2 f_2 + r_3 f_3 + \dots)$$

Odległość środka ciężkości całego wielokąta od osi obrotu obliczamy, tworząc średnią (arytmetyczną) według wzoru:

$$r = \frac{r_1 f_1 + r_2 f_2 + r_3 f_3 + \dots}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots} = \frac{r_1 f_1 + r_2 f_2 + r_3 f_3 + \dots}{P}$$

(Udowadnia się podobnie, jak przy powierzchniach obrotowych). Podstawiając licznik tego wyrażenia we wzór na  $V$ , otrzymamy:

$$V = 2\pi \cdot r \cdot P$$

a więc tak samo, jak dla trójkąta.

Dla powierzchni ograniczonej linią krzywą udowadnia się przez szereg kolejnych przybliżeń zapomocą wielokątów. Twierdzenie pozostaje prawdziwe i w granicy.

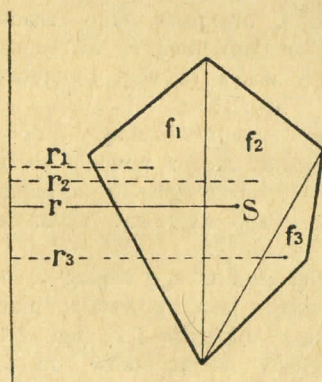


Fig. 355.

Do użycia wzoru Guldina trzeba znać środek ciężkości obracającej się powierzchni. Jeżeli ograniczenie powierzchni jest linią skomplikowaną, rozkłada się ją na małe trójkąty i oblicza się każdą część objętości osobno.

Jeżeli znamy wzór na obliczenie objętości jakiejś bryły obrotowej, znaleziony inną drogą, to możemy znaleźć położenie środka ciężkości figury tworzącej. Wiemy n. p., że dla kuli:

$$V = \frac{4}{3} R^3 \pi$$

Stąd można obliczyć środek ciężkości powierzchni półkula, tworzącego swoim obrotem kulę. Oznaczmy literą  $d$  odległość środka ciężkości od osi obrotu (leży on na symetralnej łuku  $ABC$ ) fig. 356, to według reguły Guldina objętość kuli wynosi:

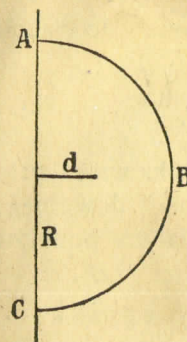


Fig. 356.

A więc:

$$V = P \cdot 2d\pi = \frac{R^2 \pi}{2} 2d\pi = \pi^2 R^2 d$$

$$\frac{4}{3} R^3 \pi = \pi^2 R^2 d$$

skąd wynika:

$$d = \frac{4R^3 \pi}{3\pi^2 R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

(Wzór inny, jak dla środka ciężkości obwodu półkula; por. str. 292).

Obliczenie objętości innych brył, zamkniętych powierzchniami krzywymi, da się w wielu wypadkach wykonać przez rozważania graniczne lub też przy pomocy rachunków wyższych (rachunek całkowy), to jednak przekracza już zakres elementarnej geometrii.

### § 123. Charakterystyczne własności przecięć stożkowych.

Przy pomocy kul wpisanych w stożek i w walec można zbadać dokładniej własności elipsy, hyperboli i paraboli.

Zajmijmy się najpierw elipsą, pojmowaną jako ukośny rzut koła, t. j. przekrój walca. Weźmy walec prosty przecięty płaszczyzną  $AA'$ , nachyloną do kierownicy. Otrzymamy elipsę  $A'PA$  (fig. 357). Poprowadźmy przecięcie osiowe  $DEE'D'$  prostopadłe do tego przekroju; ono przetnie płaszczyznę  $AA'$  wzdłuż prostej  $AA'$ . Wpiszmy w górną i dolną część powierzchni walcowej kule, dotykające płaszczyzny  $AA'$ . Kule te stykają się z walcem wzdłuż kół  $DCE$  i  $D'C'E'$  a z płaszczyzną  $AA'$  w punktach  $F$  i  $F'$ . Zbadajmy, jaką własność ma każdy punkt przekroju, n. p.  $P$ , leżący na tworzącej  $CC'$ . Połączmy  $P$  z punktami  $F$  i  $F'$ , to widzimy, że:



$PF = PC$  jako odcinki stycznych, poprowadzonych do kuli z tego samego punktu  $P$  (na rysunku perspektywicznym linia  $PF$  wydaje się o wiele krótszą od  $PC$ ). Tak samo  $PF' = PC'$ .

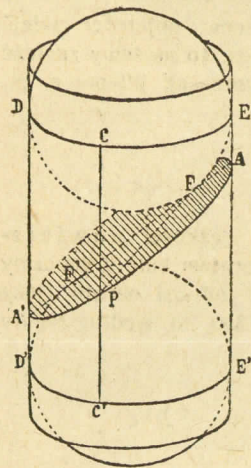


Fig. 357.

Istotnie  $DD' = DA' + A'D' = A'F + A'F'$  jako odcinki stycznych.

Ale także  $DD' = EE' = AE + AE' = AF + AF'$ . Stąd wniosek:

$$A'F + A'F' = AF + AF' \quad (1)$$

Ale z figury odczytujemy, że  $A'F = A'F' + FF'$  i

$$AF' = AF + FF' \text{ czyli, podstawiając te wartości}$$

w (1), otrzymamy po zredukowaniu:  $A'F' = AF$

$$\text{Wobec tego } DD' = A'F + AF = AA'$$

Widzimy stąd, że w każdej elipsie suma promieni wodzących jest stała dla wszystkich punktów, mianowicie równa się osi wielkiej.

Żaden inny punkt oprócz punktów, leżących na obwodzie elipsy, nie ma tej własności. Istotnie, gdyby n. p.  $Q$  miał tę własność, to łącząc punkt  $R$ , w którym promień wodzący  $QF'$  przecina elipsę, z drugim ogniskiem, otrzymalibyśmy

$$RF + RF' = AA'$$

Droga  $FQF'$  jest dłuższa od drogi  $FRF'$  (dlaczego?) więc suma  $QF' + QF$  nie może być równa osi  $AA'$  (fig. 358). Otóż  $Q$  nie

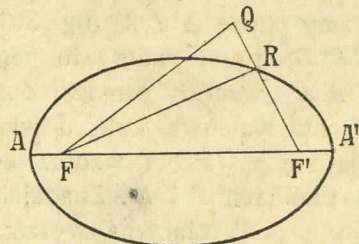


Fig. 358.

może leżeć poza elipsą. Tak samo nie może leżeć wewnątrz elipsy a więc musi leżeć na obwodzie.

Udowodniona własność jest więc dla elipsy charakterystyczna. Możemy jej użyć do definicji elipsy i na tej własności oprzeć

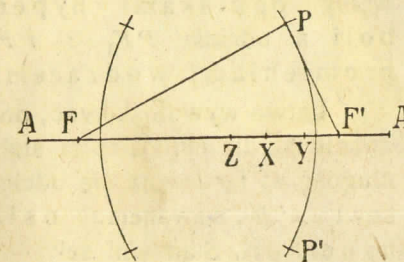


Fig. 359.

nowy sposób konstrukcji elipsy. Obieramy w tym celu (fig. 359) ogniska i na tej samej prostej dwa punkty  $A, A'$  w równych odległościach poza odcinkiem  $FF'$ , jako końce osi wielkiej. Na  $FF'$  obieramy dowolny punkt  $X$  i łukami  $AX$  i  $A'X$  zakreślamy koła z punktów  $F$  i  $F'$ .

Koła te przecinają się w dwóch punktach  $P$  i  $P'$ , leżących na elipsie. Tak samo koła zakreślone promieniami  $A'X$  i  $AX$  z punktów  $F$  i  $F'$ . Biorąc dalsze punkty  $Y, Z, \dots$  i kreśląc odpowiednie koła,

otrzymamy coraz więcej punktów elipsy. Wystarczy kreślić niewielkie łuki kół. Otrzymane punkty łączymy jedną nieprzerwaną linią krzywą (przy pomocy przyrządu rysunkowego zwanego krzywką) i otrzymamy w ten sposób elipsę. Elipsę można także wykreślić mechanicznie, używając nitki związanej o długości  $2 \cdot AF'$  i szpilek wbitych w punktach  $F$  i  $F'$ . (Wytlumacz tę konstrukcję!)

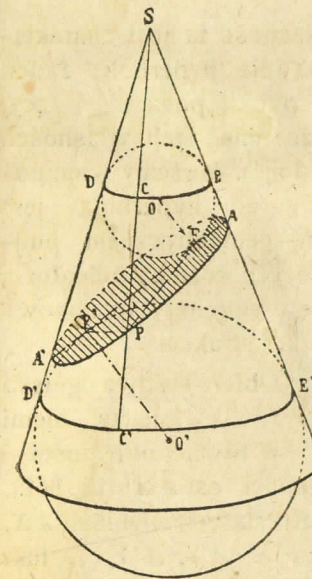


Fig. 360.

Zupełnie taką samą drogą udowodnimy, że przekrój stożka prostego nachylony do kierownicy a nierównoległy do żadnej tworzącej jest elipsą t. j., że suma promieni wodzących dla każdego punktu równa się stałej wielkości. (Por. fig. 360).

Przechodząc do hyperboli, musimy zbudować stożek prosty podwójny (fig. 361). Prowadzimy przekrój  $J_1J_2$  i wpisujemy odpowiednie kule. Obierając dowolny punkt  $P$  przekroju, spostrzeżemy znowu, że



$$\left. \begin{array}{l} PF_2 = PP_2 \\ PF_1 = PP_1 \end{array} \right\} \text{ więc } PF_2 - PF_1 = PP_2 - PP_1 = P_1P_2$$

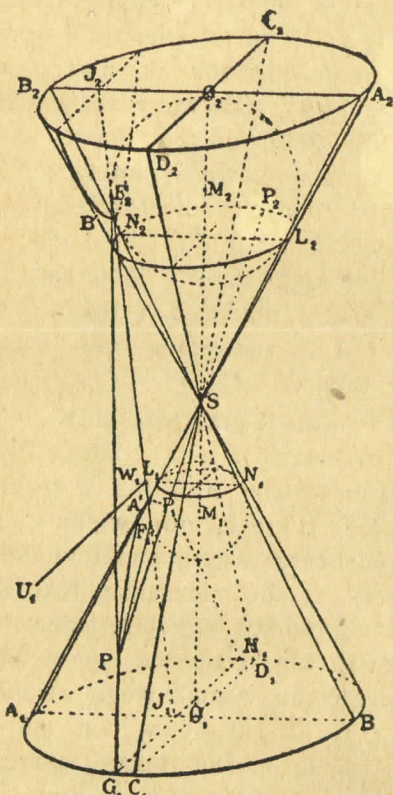


Fig. 361.

od dwóch stałych punktów równa się stałemu odcinkowi. Na takim określeniu hyperboli polega jej konstrukcja.

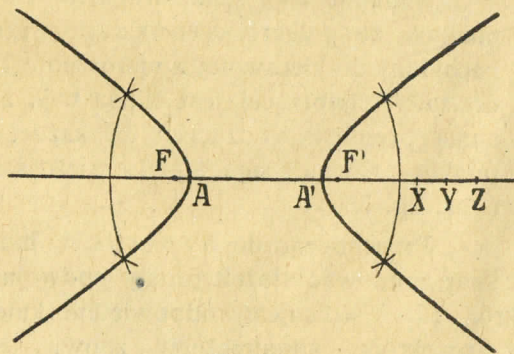


Fig. 362.

Dla każdego punktu hyperboli różnica jego odległości od dwóch stałych punktów  $F_1$  i  $F_2$  jest stała. Punkty  $F_1$  i  $F_2$  nazywamy ogniskami hyperboli a odcinki  $PF_1$  i  $PF_2$  promieniami wodzącymi.

Łatwo wywnioskować, podobnie jak dla elipsy, że ta stała długość  $P_1P_2$  równa się odcinkowi  $A'B'$ , zwanemu osią hyperboli. Stąd wniosek:

**hyperbola** ma tę własność, że różnica promieni wodzących dla wszystkich jej punktów ma stałą wielkość a mianowicie równa się osi hyperboli.

Własność ta jest charakterystyczna dla hyperboli, żaden bowiem punkt, poza nią leżący, nie może mieć tej własności. (Udowodnij!). Możemy więc powiedzieć, że hyperbola jest miejscem geometrycznym punktów, których różnica odległości

Obiera się dwa ogniska  $FF'$  a między nimi w równej odległości końce osi  $AA'$  (fig. 362). Kreśląc promieniami  $AX$ ,  $A'X$ ,  $AY$ ,  $A'Y$ , ... łuki kół z ognisk  $F$  i  $F'$ , otrzymujemy dowolnie wiele punktów hyperboli. W ten sposób dla badania własności hyper-

boli nie trzeba się już odtąd uciekać do przestrzeni, do stożków i kul: całe badanie sprowadza się do planimetrycznych konstrukcji.

Pozostaje jeszcze do zbadania trzeci gatunek przekrojów stożka: parabola. Przecinając stożek prosty (fig. 363) płaszczyzną równoległą do jednej tworzącej n. p. do  $SB$ , otrzymamy parabolę  $GA'H$ . Wykreślamy płaszczyznę  $SAB$  prostopadłą do płaszczyzny przekroju. Jej krawędzią przecięcia z płaszczyzną przekroju jest linia  $WA'J$  równoległa do  $SB$ .

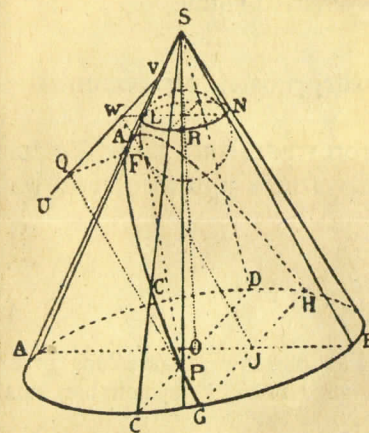


Fig. 363.

Przedłużmy płaszczyznę koła  $LRN$  aż do przecięcia się z płaszczyzną przekroju wzdłuż linii  $UV$ . Krawędź ta jest prostopadła do linii  $WN$ , ponieważ obydwie płaszczyzny  $LN$  i  $WJ$  są prostopadłe do płaszczyzny  $SBA$ . Obierzmy dowolny punkt przekroju  $P$ , wykreślimy tworzącą  $SP$  i poprowadźmy  $PQ \perp UW$ .

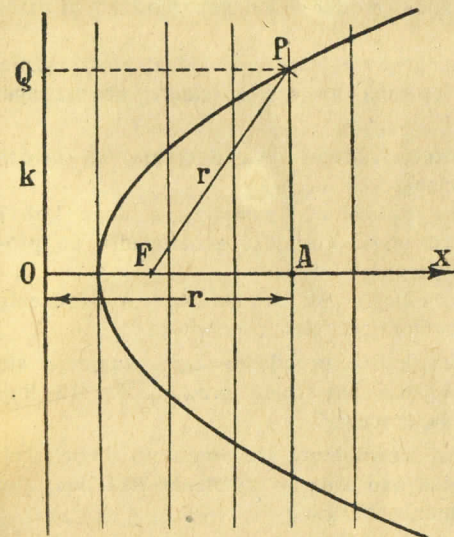


Fig. 364.

Łącząc  $P$  z  $F$  widzimy, że  $PF = PR$  jako odcinki stycznych do kuli. Ale  $PR = PQ$ , jak to wynika z podobieństwa trójkątów  $PRQ$  i  $RNS$ , z których  $RNS$  jest równoramienny. (Dlaczego?). Otóż i

$$PF = PQ.$$

Każdy punkt paraboli jest równo oddalony od stałego punktu  $F$ , zwanego ogniskiem i od stałej prostej  $UV$ , zwanej kierownicą paraboli (fig. 364).



Prosta  $WJ$  nazywa się osią paraboli. Jest to własność charakterystyczna paraboli. Na niej opiera się konstrukcja dowolnie wielu punktów paraboli. Obiera się prostopadłe do  $OX$  kierownicę  $k$  a na osi ognisko  $F$ . (Parabola ma tylko jedno ognisko). Kreśli się dowolnie wiele linii prostopadłych do osi i promieniem  $OA$  zakreśla się z ogniska łuk, przecinający prostą  $AP$ . Wtedy istotnie

$$PF = PQ.$$

Wykonując taką konstrukcję dla każdej prostej, otrzymamy więcej punktów paraboli.

W ten sposób badanie paraboli sprowadziliśmy także do zagadnienia planimetrycznego. Podobne rozważania można przeprowadzić dla stożka pochyłego.

## Ćwiczenia XII

§ 115. 1. Z jakich części składa się powierzchnia obrotowa, zakreślona przez obrót sześciokąta umiarowego koła: a) symetralnej boku, b) symetralnej kąta. Narysuj w perspektywie i w rzutach te bryły!

2. Narysuj w perspektywie hiperboloidę obrotową z obydwoma gromadami prostych tworzących (koła podzielić na kilkanaście równych części).

3. Z jakich części składa się powierzchnia obrotowa, zakreślona obrotem rombu koło osi równoległej do jego osi symetrii.

§ 116. 4. Wykazać, że dwa koła wielkie na kuli muszą się przeciąć w dwóch punktach.

5. Co jest miejscem geometrycznym środków kul, przechodzących przez trzy dane punkty?

6. Wykazać, że przez cztery punkty, nie leżące na jednej płaszczyźnie, jest wyznaczona tylko jedna kula (opisana na czworoscianie utworzonym z tych punktów).

7. Jakie jest miejsce geometryczne środków kul, dotykających dwóch płaszczyzn: a) równoległych, b) przecinających się.

8. Jak znajdziemy kulę o danym promieniu i zawierającą dane koło?

9. Wykazać, że płaszczyzna styczna do kuli jest prostopadła do promienia, przechodzącego przez punkt styczności.

10. Punkt świecący jest o  $2m$  odległy od środka kuli o promieniu  $R = 3dm$ . Jak wielkie jest koło, odgraniczające cień od światła?

11. W odległości  $3m$  od środka kuli o promieniu  $1dm$  znajduje się punkt świecący. Jak wielki cień rzuca kula na ścianę prostopadłą do linii środkowej, odległą o  $5m$  od punktu świecącego?

12. Znaleźć środek podobieństwa wewnętrzny i zewnętrzny dwóch kul.

13. Jak wysoko trzeba się wznieść nad kulę o promieniu  $7000km$ , aby zobaczyć cały jej równoleżnik o promieniu  $100km$ ?

14. W jakiej odległości od środka należy przeciąć kulę o promieniu  $R = 6dm$ , aby pole przekroju było o połowę mniejsze od pola koła wielkiego?

15. Wykazać, że wszystkie linie styczne do kuli równoległe do jakiejś prostej leżą na poboczniczy walca, dotykającej kuli wzdłuż koła prostopadłego do tej prostej.

16. Które ostrosłupy dadzą się wpisać w kulę a które dadzą się na niej opisać?

17. Na kuli opisano stożek ścięty o promieniach:  $r_1 = 30cm$ ,  $r_2 = 10cm$ . Ile wynosi promień kuli? (Wykazać, że średnica kuli jest średnią gnometryczną między średnicami podstaw stożka ściętego!)

18. Obliczyć promień kuli: a) wpisanej, b) opisanej na a) czworoscianie umiarowym, znając jego krawędź, b) na ośmiościanie, znając jego krawędź.

19. Znając promienie podstaw warstwy kuli i jej grubość, obliczyć promień kuli.

20. Znając grubość  $2g = 6mm$  soczewki dwuwypukłej i obwód  $2\rho\pi = 15cm$ , obliczyć promień kuli (promień krzywizny).

21. Gdzie leżą wszystkie punkty przestrzeni, z których widać odcinek  $8cm$  pod kątem  $90^\circ$ ?

22. Znaleźć na kuli wszystkie punkty, mające daną odległość sferyczną od jednego punktu kuli.

23. Znając boki i kąty trójkąta sferycznego, obliczyć boki i kąty ośmiu trójkątów, utworzonych na kuli przez te same trzy koła.

§ 118. 24. Obliczyć powierzchnię kuli ziemskiej, znając obwód koła wielkiego  $U = 40.000km$ .

25. Jak wielki jest promień kuli, której powierzchnia wynosi  $1m^2$ ?

26. Jak wielkiej mapy trzeba użyć, aby przedstawić kulę ziemską na poboczniczy walca opisanego na kuli w podziałce  $1:200.000$ ?

27. Jaka część powierzchni ziemi zmieści się na mapie o długości  $4dm$  a szerokości  $2,5dm$  w podziałce  $1:100.000$ ?

28. Obliczyć powierzchnię czaszy, należącej do kuli o promieniu  $R = 12dm$ , jeżeli promień podstawy czaszy  $r = 8dm$ .

29. Wewnątrz kuli o promieniu  $2dm$  panuje ciśnienie  $\frac{1}{4}kg$  na każdy  $cm^2$  a zewnątrz ciśnienie atmosferyczne, t. j.  $1kg/cm^2$ . Jakie jest całkowite ciśnienie na powierzchnię kuli?

30. W jakiej odległości od środka należy przeciąć kulę, aby powierzchnia czaszy była czwartą częścią powierzchni całej kuli?

31. Jak wysoko trzeba się wznieść nad kulę, aby zobaczyć  $\frac{1}{3}$  część jej powierzchni (promień kuli  $R = 6778km$ ).

32. W jakim stosunku pozostaje powierzchnia półkuli do powierzchni stożka równobocznego o tej samej podstawie?

33. Wyprowadzić wzór na powierzchnię czaszy, znając jej wysokość i promień podstawy.

34. Obliczyć powierzchnię soczewki dwuwypukłej utworzonej z odcinków równych kul, znając jej grubość  $2g = 3mm$  i obwód  $u = 10cm$ .

35. Znamy promienie dwóch kul i odległość ich środków, obliczyć, jaką część powierzchni mniejszej kuli oświetla większa kula (n. p. promień ziemi  $r_1 = 6378km$ , promień słońca  $r_2 = 693.345km$ , odległość środków  $c = 146.620.000km$ . (Wynik:  $50,235\%$  całej powierzchni ziemi).

36. Obliczyć powierzchnię kuli wpisanej w stożek prosty, znając jego promień  $r = 5cm$  i wysokość  $w = 8cm$ .



37. Obliczyć powierzchnię, zawartą między dwoma południkami ziemi, różniąciami się o  $1^\circ$  w długości geograficznej ( $R = 6378 \text{ km}$ ).

38. Jaka część kuli wycina kąt bryłowy trójsienny, którego wierzchołek leży w środku kuli a kąty dwusienne wynoszą: a)  $136^\circ, 74^\circ, 62^\circ$ ; b)  $108^\circ 30', 42^\circ 36', 97^\circ 51'$ .

§ 119. 39. Obliczyć objętość kuli ziemskiej ( $R = 6378 \text{ km}$ ).

40. Obliczyć pojemność kotła walcowego zakończonego dwoma półkulami, znając promień walca  $r = 0.8 \text{ m}$  i jego długość  $w = 9 \text{ m}$ .

41. Obliczyć stosunek objętości kuli opisanej na czworoszczanie umiarywym do objętości czworoszczanu i do objętości kuli wpisanej.

42. Wykonać poprzednie zadanie dla ośmiościanu umiarywego.

43. Obliczyć objętość czarki półkulistej, znając promień kuli wewnętrznej  $R = 6 \text{ cm}$  i grubość ścian czarki  $g = 2 \text{ mm}$ .

44. Kulę o znanej objętości  $V = 1 \text{ m}^3$  powleczone warstwą taką, że nowa kula ma dwa razy większą objętość. Jaka jest grubość tej warstwy?

45. Porównać wielkość objętości kuli z objętością innych brył o równej powierzchni, n. p. z walcem równobocznym, z sześciannem, ze stożkiem równobocznym i t. p. Jaki stąd wniosek wyprowadzimy?

46. Z kuli o promieniu  $1 \text{ dm}$  zrobiono 100 mniejszych równych kul. Ile wynosi promień takiej jednej kuli? Czy powierzchnia wszystkich tych kul razem równa się powierzchni kuli?

47. Znając objętość  $V = 30 \text{ dm}^3$  kuli, obliczyć promień kuli podwojonej.

48. Z kuli o promieniu  $1 \text{ cm}$  wydrążono nawskróś symetrycznie wałek o promieniu  $8 \text{ mm}$ . Jaka objętość ma pozostały pierścień?

49. Jaka jest siła dźwignia balonu, napełnionego wodorem, o promieniu  $4 \text{ m}$  (c. g. powietrza jest  $0.0012$  a wodór jest 18 razy lżejszy).

§ 120. 50. Obliczyć objętość wycinka kuli, jeżeli przecięcie osiowe jest wycinkiem koła, należącym do kąta  $60^\circ$ . Znany jest promień kuli  $R = 6 \text{ cm}$ .

51. Obliczyć objętość symetrycznej soczewki dwuwypukłej, znając jej grubość  $g = 4 \text{ mm}$  i obwód  $u = 20 \text{ cm}$ .

52. Kula z drzewa pływa po wodzie tak, że  $\frac{2}{3}$  pionowej średnicy wynurza się z wody. Obliczyć ciężar gatunkowy tego drzewa.

53. Obliczyć objętość soczewki dwuwklęsłej, utworzonej z walca o promieniu  $r = 3 \text{ cm}$ , o wysokości  $5 \text{ mm}$ , przez wycięcie dwóch odcinków o wysokości  $1 \text{ mm}$ .

54. Znając średni przekrój warstwy kuli  $P = 40 \text{ cm}^2$  i wysokość  $w = 2 \text{ cm}$ , obliczyć jej objętość. Wypowiedzieć otrzymany wzór!

§ 121—122. 55. Obliczyć powierzchnię i objętość obręczy, powstałej przez obrót kwadratu o boku  $1 \text{ cm}$  koło osi równoległej do jego boku a oddalonej o  $4 \text{ dm}$  od boku.

56. Obręcz kołowa ma w przekroju grubość  $2 \text{ cm}$  a zewnętrzny obwód całej obręczy wynosi  $2 \text{ m}$ . Obliczyć jej ciężar, jeżeli c. g.  $c = 0.6$ .

57. Obliczyć objętość beczki, powstającej przez obrót łuku koła o promieniu  $r = 12 \text{ dm}$ , należącego do kąta środkowego  $60^\circ$  koło osi oddalonej o  $1 \text{ dm}$  od środka ciężkości powierzchni obracającej się.

§ 123. 58. Opierając się na określeniu elipsy zapomocą sumy promieni wodzących, wykazać, że elipsa posiada dwie osie symetrii.

59. Wykazać, że odległość ogniska elipsy od końca małej osi równa się osi wielkiej.

60. Znając oś małą i wielką elipsy, obliczyć odległość ogniska od środka. (Patrz poprzednie zadanie!)

61. Jak można znaleźć konstrukcyjnie oś małą, znając tylko ognisko i oś wielką elipsy? Jak znaleźć konstrukcyjnie ogniska, znając osie?

62. Zakreślić z ogniska koło promieniem równym osi wielkiej; wykazać, że każdy punkt elipsy jest równo oddalony od obwodu tego koła i od drugiego ogniska!

63. Przeprowadzić dla stożka dowód, że przekrój, przechodzący przez wszystkie tworzące a nie równoległy do kierownicy jest elipsą.

64. Wykreślić hyperbolę, znając jej ogniska i oś.

65. Wykazać, że hyperbola posiada dwie osie symetrii!

66. Wykreślić koło z ogniska hyperboli promieniem równym osi. Wykazać, że każdy punkt hyperboli jest równo oddalony od tego koła i od drugiego ogniska.

67. Wykreślić parabolę, znając jej kierownicę i ognisko.

68. Wykazać, że parabola posiada jedną oś symetrii.

69. Wykazać, że odcinek prostopadłej do osi paraboli wykreślonej w ognisku jest dwa razy dłuższy od odległości ogniska od kierownicy.





## Spis rzeczy

|                                                           | strona |                                                                                       | strona |
|-----------------------------------------------------------|--------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 1. Przedmiot i cel geometrii . . .                        | 1      | 20. Czwarty przypadek przystawiania i znaczenie przystawiania w geometrii . . . . .   | 46     |
| 2. Pewniki . . . . .                                      | 4      | 21. Ruch postępowy i obrotowy . . .                                                   | 49     |
| <b>Część I. Planimetria</b>                               |        |                                                                                       |        |
| Rozdział I. O linii prostej                               |        |                                                                                       |        |
| 3. Zasadnicze własności linii prostej . . . . .           | 8      | 22. Odległość punktu od prostej. Proste pochyłe. Rzuty . . . . .                      | 52     |
| 4. Odcinki . . . . .                                      | 10     | 23. Odległość prostych równoległych. Równoległe w trójkącie . . . . .                 | 54     |
| Cwiczenia I . . . . .                                     | 14     | 24. Zastosowanie twierdzeń o przystawianiu trójkątów do koła. Prosta i koło . . . . . | 55     |
| Rozdział II. O dwóch liniach prostych. Kąty               |        |                                                                                       |        |
| 5. Proste nakrywające się . . . . .                       | 15     | 25. O kątach środkowych . . . . .                                                     | 57     |
| 6. Proste przecinające się. Kąty . . .                    | 16     | 26. O kątach obwodowych . . . . .                                                     | 58     |
| 7. Kąty przyległe i wierzchołkowe . .                     | 20     | 27. Kąt między styczną a cięciwą . .                                                  | 60     |
| 8. Proste równoległe . . . . .                            | 22     | Cwiczenia IV . . . . .                                                                | 61     |
| Cwiczenia II . . . . .                                    | 23     | <b>Rozdział V. Symetria</b>                                                           |        |
| Rozdział III. Trzy linie proste. Trójkąty. Koło           |        |                                                                                       |        |
| 9. Położenie trzech linii prostych . .                    | 24     | 28. Twierdzenia o trójkątach równoramiennych . . . . .                                | 63     |
| 10. Trzy linie proste równoległe . . .                    | 25     | 29. Utwory symetryczne . . . . .                                                      | 64     |
| 11. O trójkątach . . . . .                                | 26     | 30. Symetralna odcinka . . . . .                                                      | 66     |
| 12. Dwie proste równoległe przecięte trzecią . . . . .    | 28     | 31. Symetralna kąta . . . . .                                                         | 68     |
| 13. O kątach w trójkącie . . . . .                        | 32     | 32. Ogólniejsze rodzaje symetrii . . .                                                | 69     |
| 14. Koło i inne linie krzywe . . . . .                    | 34     | 33. Zastosowanie symetrii do koła . .                                                 | 70     |
| Cwiczenia III . . . . .                                   | 38     | 34. Koło opisane na trójkącie . . . . .                                               | 71     |
| Rozdział IV. Przystawianie i ruch                         |        |                                                                                       |        |
| 15. Przystawianie trójkątów . . . . .                     | 40     | 35. Koło wpisane w trójkąt . . . . .                                                  | 73     |
| 16. Pierwszy przypadek przystawiania . . . . .            | 41     | Cwiczenia V . . . . .                                                                 | 73     |
| 17. Drugi przypadek przystawiania . . .                   | 42     | Rozdział VI. Cztery linie proste. Czworoboki                                          |        |
| 18. Zastosowanie I i II przypadku przystawiania . . . . . | 43     | 36. Podział czworoboków . . . . .                                                     | 75     |
| 19. Trzeci przypadek przystawiania . . .                  | 45     | 37. Równoległoboki. Kąty o ramionach równoległych i prostokątów . . . . .             | 76     |
|                                                           |        | 38. Warunki, wyznaczające równoległoboki. Konstrukcje . . . . .                       | 80     |
|                                                           |        | 39. Trapez . . . . .                                                                  | 81     |
|                                                           |        | 40. Trapezoidy. Deltoid . . . . .                                                     | 82     |
|                                                           |        | 41. Czworoboki wpisane w koło . . . .                                                 | 82     |
|                                                           |        | 42. Czworoboki opisane na kole . . . .                                                | 83     |
|                                                           |        | Cwiczenia VI . . . . .                                                                | 84     |

| Rozdział VII. Wieloboki              |    | strona |
|--------------------------------------|----|--------|
| 43. Opis wieloboków. Kąty . . . . .  | 86 |        |
| 44. Wieloboki umiarowe . . . . .     | 88 |        |
| 45. Aproksymacja obwodu koła . . . . | 91 |        |
| Cwiczenia VII . . . . .              | 92 |        |

### Rozdział VIII. Zadania konstrukcyjne

|                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------|-----|
| 46. Ogólne uwagi o zadaniach konstrukcyjnych . . . . .             | 93  |
| 47. Zasadnicze zadania konstrukcyjne . . . . .                     | 94  |
| 48. Systematyczny sposób rozwiązywania zadań konstrukcyjnych . . . | 96  |
| 49. Metoda miejsc geometrycznych . . .                             | 98  |
| 50. Metoda figur pomocniczych . . . . .                            | 100 |
| Cwiczenia VIII . . . . .                                           | 101 |

### Rozdział IX. Proporcjonalność odcinków. Podobieństwo figur

|                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 51. Stosunek odcinków . . . . .                                                     | 104 |
| 52. Stosunek podziału odcinka . . . . .                                             | 106 |
| 53. Proporcjonalność odcinków . . . . .                                             | 107 |
| 54. Zastosowanie twierdzeń o promieniach przeciętych liniami równoległymi . . . . . | 110 |
| 55. Podobieństwo figur . . . . .                                                    | 112 |
| 56. Znamiona podobieństwa trójkątów . . . . .                                       | 114 |
| 57. Zastosowanie podobieństwa trójkątów do trójkąta prostokątnego . .               | 118 |
| 58. Środek ciężkości trójkąta . . . . .                                             | 119 |
| 59. Średnia harmoniczna . . . . .                                                   | 120 |
| 60. Zastosowanie podobieństwa trójkątów do koła . . . . .                           | 121 |
| 61. Dziesięciokąt umiarowy. Podział złoty . . . . .                                 | 122 |
| Cwiczenia IX . . . . .                                                              | 125 |

### Rozdział X. Pole figur płaskich

|                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 62. Ogólne uwagi o mierzeniu pól . . .                                              | 129 |
| 63. Pole prostokąta . . . . .                                                       | 132 |
| 64. Pole równoległoboku . . . . .                                                   | 135 |
| 65. Pole trójkąta . . . . .                                                         | 135 |
| 66. Pole trapezu . . . . .                                                          | 136 |
| 67. Pole wielokąta . . . . .                                                        | 137 |
| 68. Zamiana i podział figur . . . . .                                               | 138 |
| 69. Pola figur podobnych . . . . .                                                  | 139 |
| 70. Twierdzenie Pitagorasa (w formie geometrycznej) . . . . .                       | 140 |
| 71. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa . . . . .                                   | 142 |
| 72. Obliczanie boków wielokątów umiarowych wpisanych w koło. Podział koła . . . . . | 144 |
| 73. Obwód koła . . . . .                                                            | 148 |
| 74. Pole koła. Kwadratura koła . . . . .                                            | 151 |
| Cwiczenia X . . . . .                                                               | 153 |

## Część II. Stereometria

### Rozdział I. Zasadnicze utwory stereometryczne

|                                                 |     |
|-------------------------------------------------|-----|
| 75. Pewniki stereometryczne . . . . .           | 159 |
| 76. Pęk płaszczyzn i pęk przestrzenny . . . . . | 163 |
| Cwiczenia I . . . . .                           | 164 |

### Rozdział II. Położenie linii prostych i płaszczyzn w przestrzeni. Proste i płaszczyzny równoległe

|                                          |     |
|------------------------------------------|-----|
| 77. Dwie linie proste . . . . .          | 165 |
| 78. Linia prosta i płaszczyzna . . . . . | 167 |
| 79. Dwie płaszczyzny . . . . .           | 169 |
| Cwiczenia II . . . . .                   | 172 |

### Rozdział III. Proste i płaszczyzny prostopadłe

|                                                 |     |
|-------------------------------------------------|-----|
| 80. Prosta prostopadła do płaszczyzny . . . . . | 173 |
| 81. Płaszczyzny prostopadłe do siebie . . . . . | 178 |

### Rozdział IV. Proste i płaszczyzny nachylone

|                                                    |     |
|----------------------------------------------------|-----|
| 82. Prosta nachylona do płaszczyzny . . . . .      | 180 |
| 83. Twierdzenia o rzutach . . . . .                | 182 |
| 84. Dwie płaszczyzny nachylone do siebie . . . . . | 185 |
| Cwiczenia III i IV . . . . .                       | 186 |

### Rozdział V. O narożach

|                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------|-----|
| 85. Określenie naroża bryłowego . . . .                       | 188 |
| 86. Przystawianie kątów bryłowych. Naroże biegunowe . . . . . | 189 |
| 87. O sumie kątów w narożu . . . . .                          | 191 |
| Cwiczenia V . . . . .                                         | 192 |

### Rozdział VI. Symetria w przestrzeni

|                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------|-----|
| 88. Naroża trójsienne symetryczne względem siebie . . . . . | 193 |
| 89. Utwory symetryczne. Inne rodzaje symetrii . . . . .     | 195 |
| Cwiczenia VI . . . . .                                      | 198 |

### Rozdział VII. O rysunku perspektywicznym

|                                                     |     |
|-----------------------------------------------------|-----|
| 90. O perspektywie środkowej (malarzkiej) . . . . . | 199 |
| 91. Perspektywa równoległa . . . . .                | 201 |
| 92. Ukośny rzut koła. Elipsa . . . . .              | 211 |
| Cwiczenia VII . . . . .                             | 217 |



strona

Rozdział VIII. Metoda geometrii wykreslnej

93. O dwóch płaszczyznach rzutów 219  
 94. Rzuty punktu . . . . . 221  
 Ćwiczenia VIII . . . . . 223

Rozdział IX. Graniastopy i walce

95. Podział brył . . . . . 224  
 96. Graniastopy . . . . . 225  
 97. Powierzchnia graniastopy. Siatka . . . . . 227  
 98. Walec . . . . . 231  
 99. Rozwijanie walca. Powierzchnia walca . . . . . 234  
 100. Przybliżone pomiary objętości 236  
 101. Objętość graniastopy i walca 239  
 Ćwiczenia IX . . . . . 242

Rozdział X. Ostrosłupy i stożki

102. Ostrosłupy . . . . . 248  
 103. Powierzchnia ostrosłupa. Siatka 250  
 104. Ostrosłup ścięty . . . . . 251  
 105. Stożek . . . . . 252  
 106. Powierzchnia stożka. Siatka . 253  
 107. Przekroje stożka, przechodzące przez wierzchołek i równoległe do podstawy . . . . . 254  
 108. Ukośne przekroje stożka . . 256

- strona
109. Objętość ostrosłupa i stożka. Twierdzenie Cavallieri'ego . . 258  
 110. Objętość ostrosłupa i stożka ściętego . . . . . 263  
 Ćwiczenia X . . . . . 264

Rozdział XI. Wielościany umiarowe

111. Naroża umiarowe . . . . . 268  
 112. Twierdzenie Eulera . . . . . 269  
 113. Dowód istnienia pięciu wielościanów umiarowych . . . . . 271  
 114. Objętość wielościanów umiarowych . . . . . 274  
 Ćwiczenia XI . . . . . 275

Rozdział XII. Powierzchnie i bryły obrotowe

115. Powierzchnie obrotowe prostolinijowe . . . . . 276  
 116. Kula . . . . . 277  
 117. Inne powierzchnie obrotowe . 282  
 118. Powierzchnia kuli i jej części 283  
 119. Objętość kuli . . . . . 286  
 120. Objętość części kuli . . . . . 288  
 121. Reguła Guldina do obliczania pola powierzchni obrotowych 291  
 122. Reguła Guldina do obliczania objętości brył obrotowych . . 293  
 123. Charakterystyczne własności przecięć stożkowych . . . . . 295  
 Ćwiczenia XII . . . . . 300

Średnica narysowany geometryczny sposób  
 konstrukcji równoległych linii.

Średnica sprężony narysowany walec,  
 kulej jedna część równoległa do drugiej średni:  
 cy a samobczworne

One Elipsy przy cięciwach prostokątnych