

Juliusz i Józef
S. BANACH i W. STOŻEK

A L G E B R A

DLA II KLASY GIMNAZJALNEJ

KSIĄŻNICA-ATLAS * LWÓW-WARSZAWA

Co. Jaroszewicz
S. BANACH i W. STOŻEK

Jaroszewicz Bestow

ALGEBRA

DLA II KLASY GIMNAZJALNEJ

CENA WRAZ ZE ZNACZKIEM
NA TOWARZYSTWO POPIERANIA BUDOWY
PUBLICZNYCH SZKÓŁ POWSZECHNYCH
WYNOSI zł 1,10



KSIAŻNICA-ATLAS * LWÓW - WARSZAWA
1939



513 (075.3)

Podręcznik zatwierdzony do użytku szkolnego
pismem Ministerstwa W. R. i O. P. z 8 czerwca 1934
(nr I Pr. — 1945/34).

2499

WYDAWCA: KSIĄŻNICA-ATLAS S. A., ZJEDN. ZAKŁADY KARTOGR. i WYDAWNICZE TNSW.
LWÓW, CZARNIECKIEGO 12 — ODDZIAŁ: WARSZAWA, NOWY ŚWIAT 59

ODBITO W ZAKŁ. GRAF. S. A. KSIĄŻNICA-ATLAS, LWÓW, GEN. ROZWADOWSKIEGO 20

D IX

Liczby względne

Rozdział I

Wprowadzenie liczb względnych

§ 1. Zmiany dodatnie i ujemne

1. Jeżeli poziom wody w rzece w ciągu pewnego czasu zmienił się, to mogły zajść dwa wypadki:

- a) poziom wody podniósł się np. o 5 cm,
- b) poziom wody opadł np. o 5 cm.

W wypadku pierwszym mówimy, że zmiana poziomu wody jest dodatnia, w drugim zaś, że ujemna.

Mówimy również, że w pierwszym wypadku zmiana poziomu wynosi plus 5 cm, co piszemy: + 5 cm, w drugim zaś minus 5 cm, co piszemy: — 5 cm.

2. Jeżeli liczba mieszkańców miasta w ciągu pewnego czasu wzrosła np. o 5000, to mówimy, że zmiana liczby mieszkańców jest dodatnia i wynosi + 5000 mieszkańców; jeżeli liczba mieszkańców zmalała np. o 5000 mieszkańców, to zmiana jest ujemna i wynosi: — 5000 mieszkańców.

3. Jeżeli czyjś majątek zwiększył się np. o 2000 zł, to mówimy, że zmiana majątku jest dodatnia i wynosi: + 2000 zł; jeżeli majątek zmalał np. o 2000 zł, to zmiana jest ujemna: — 2000 zł.

4. Jeżeli temperatura podniosła się o 5° C, to zmiana temperatury jest dodatnia: + 5° C; jeżeli temperatura opadła o 5° C, to zmiana temperatury jest ujemna: — 5° C.

Uwaga 1. Podobnie postępujemy, gdy badamy zmiany innych wielkości, jak np. pól, objętości, ciężarów, prędkości itp. Jeżeli badana wielkość zwiększa się, to zmianę nazywamy dodatnią, w przeciwnym zaś wypadku ujemną.

Uwaga 2. W matematyce zmianę nazywamy również przyrostem. Może więc być przyrost dodatni lub ujemny. W mowie potocznej słowo przyrost oznacza zawsze zmianę dodatnią. Np.: Przy-

rost majątku wynosił 2000 zł, to znaczy w mowie potocznej, że majątek wzrósł o 2000 zł. W matematyce natomiast mówimy: Przyrost majątku wynosił $+1000$ zł lub -2000 zł; w pierwszym wypadku majątek wzrósł o 1000 zł, w drugim zmalał o 2000 zł.

Zmianę ujemną w mowie potocznej nazywamy ubytkiem.

Zadania

- Poziom wody w rzece wynosił 1,82 m; nastąpiła zmiana poziomu wody, wynosząca: a) $-0,17$ m; b) $+0,2$ m; c) $-0,12$ m; d) $+0,04$ m; e) $+\frac{1}{4}$ m. Ile wynosi poziom wody po zmianie?
- Stan wody w rzece wynosił 2,14 m. W czasie wylewu wynosił dzienny przyrost w ciągu tygodnia: $+27$ cm, $+35$ cm, $+31$ cm, -4 cm, $+18$ cm, -10 cm, -15 cm; jaki był stan wody każdego dnia tygodnia?
- Pod wpływem temperatury przyrost długości drutu miedzianego wynosił: a) -2 mm, b) $+1$ mm, c) -1 mm. Jaka była długość drutu, jeżeli po zmianie wynosi 1,375 m?
- Stan kasy w ciągu godziny zmienił się o $-12,32$ zł; jaki był stan kasy przed godziną, jeżeli obecny jest 236,18 zł?
- W ciągu roku zmieniała się wartość parceli o $+2000$ zł i wynosi obecnie 13 500 zł; jaka była wartość przed rokiem?
- Stan kasy wynosił o godz. 16. 127,50 zł, a o godz. 18. 142,78 zł; ile wynosi zmiana stanu kasy?
- Liczba osób, zamieszkujących hotel, wynosiła w ciągu tygodnia (w poszczególnych dniach): 84, 75, 92, 90, 72, 81, 87. Ile wynosił przyrost liczby mieszkańców w poszczególnych dniach?
- Ktoś zapisał swoje dochody i rozchody następująco: -5 zł, $+4$ zł, -2 zł, -7 zł, $+6$ zł. Ile zł posiada, jeżeli na początku miał 10 zł majątku? (Znak $+$ oznacza dochód, znak $-$ rozchód).
- Ktoś posiadał najpierw: a) 10 zł, b) 15 zł, a następnie a) 12 zł, b) 10 zł. Ile wynosi przyrost majątku?
- W pewnym miesiącu zużyto dziennie w ciągu tygodnia wody: 21 200 m³, 22 700 m³, 19 400 m³, 18 900 m³, 20 600 m³, 19 000 m³, 21 400 m³; wyraż kolejne zmiany zużycia wody!

§ 2. Liczby względne

Liczby poznane w poprzedniej nauce nazywać będziemy również liczbami bezwzględnymi. A więc 1, 2, $\frac{3}{4}$, 0 itd. są liczbami bezwzględnymi. W ustępie tym poznamy nowe liczby.

Jeżeli przed liczbą umieścimy znak $+$, to otrzymane wyrażenie oznacza tę samą liczbę. A więc:

$$+5 = 5, \quad +1 = 1, \quad +\frac{3}{4} = \frac{3}{4}, \quad +0 = 0.$$

Wyrażenia, które otrzymamy pisząc przed liczbą (różną od zera) znak $-$, oznaczają nowe liczby zwane liczbami ujemnymi. A więc wyrażenia: -1 , -2 , $-\frac{3}{4}$, $-0,5$ oznaczają liczby ujemne.

Przyjmujemy, że -0 oznacza również 0. Zatem: $-0 = +0 = 0$.

Wyrażenia, które otrzymamy pisząc przed różnymi liczbami znak $-$, oznaczają różne liczby ujemne. A więc -1 , -2 , $-\frac{3}{4}$ są to różne liczby ujemne. Liczby bezwzględne (z wyjątkiem 0) nazywać będziemy również liczbami dodatnimi, dla odróżnienia ich od liczb ujemnych. A więc: $+1$, $+2$, 3 , $\frac{3}{4}$ są liczbami dodatnimi.

Liczby 0 nie nazywamy ani dodatnią, ani ujemną.

Liczby poprzednio poznane wraz z liczbami ujemnymi nazywamy liczbami względnymi. Pierwszą korzyścią, jaką dają liczby względne, jest to, że przy pomocy nich możemy oznaczać zmiany dodatnie i ujemne. Inne korzyści poznamy później.

§ 3. Bezwzględna wartość (moduł). Liczby przeciwne

Bezwzględną wartością (modułem) liczby dodatniej lub 0 nazywamy samą liczbę, bezwzględną wartością zaś liczby ujemnej liczbę, którą otrzymamy opuszczając znak. Bezwzględną wartością więc liczb: $+5$, -1 , -3 , 2 , 0 są odpowiednio liczby: $+5$, 1 , 3 , 2 , 0 .

Bezwzględną wartość liczby np.: -5 oznaczamy: $|-5|$.

A więc: $|-5| = 5$, $|+6| = +6 = 6$, $|-4| = 4$, $|0| = 0$.

Widzimy, że bezwzględna wartość liczby dodatniej czy ujemnej jest zawsze dodatnia.

Dwie liczby, jak $+5$ i -5 , mające tę samą bezwzględną wartość, lecz znaki przeciwne, nazywamy liczbami przeciwnymi.

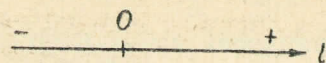
Liczbami przeciwnymi są np.: -3 i $+3$, 2 i -2 , 0 i 0 .

Zadania

- Ile wynosi $|+7|$, $|-2\frac{1}{2}|$, $|-0,71|$, $|\frac{2}{7}|$, $|+19\frac{1}{3}|$, $|217,64|$, $|-719,52|$, $|101|$?
- Jakie to są liczby, których moduł wynosi: a) 7; b) 15,4; c) 129,18; d) $\frac{5}{8}$; e) $9\frac{1}{5}$?
- Podaj liczby przeciwne do: -5 , $+1$, 0 , 4 , $-\frac{3}{5}$!
- Jaka to jest liczba, do której przeciwna jest jej równa?

§ 4. Oś liczbowa

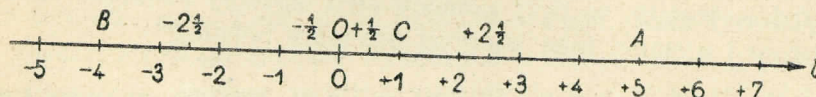
Obierzmy dowolną prostą l i punkt na niej O . (Rys. 1).



Rys. 1.

Punkt O nazywać będziemy punktem początkowym lub początkiem. Początek dzieli prostą l na dwie części. Jedną z nich nazwijmy dodatnią, drugą ujemną. Na rys. 1 część prawą obraliśmy jako dodatnią, część lewą jako ujemną. Moglibyśmy również postąpić odwrotnie. Część dodatnią zaznaczamy często strzałką. Mówimy także, że na prostej obraliśmy kierunek (zwrot) dodatni zaznaczony strzałką. W naszym wypadku kierunek dodatni jest od ręki lewej do prawej. Kierunek przeciwny nazywamy ujemnym.

Prostą, na której obrany jest kierunek dodatni, nazywamy osią.



Rys. 2.

Przyjmijmy dowolną jednostkę i zaznaczmy na prostej l punkty, które od punktu O po obu jego stronach znajdują się w odległościach: 1, 2, 3, ..., $\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ itd. obranej jednostki.

W punktach położonych w części dodatniej zaznaczmy odpowiednio liczby względne: $+1$, $+2$, $+3$, ..., $+\frac{1}{2}$, $+2\frac{1}{2}$...

W punktach położonych w części ujemnej zaznaczamy odpowiednio liczby: -1 , -2 , -3 , ..., $-\frac{1}{2}$, $-2\frac{1}{2}$ itd.

W punkcie O zaznaczamy 0.

Prostą l (rys. 2), na której punktom odpowiadają liczby względne, nazywamy osią liczbową.

Liczbę odpowiadającą danemu punktowi nazywamy współrzędną tego punktu. Zatem na rys. 2 punkty A , B , C mają odpowiednio współrzędne: $+5$, -4 , $+1$. Początek O ma współrzędną 0.

Znając współrzędną punktu możemy punkt ten wyznaczyć. Jeżeli np. współrzędna punktu D wynosi -4 , to wiemy, że punkt ten znajduje się w odległości 4 jedn. od początku O w kierunku ujemnym, tj. na lewo.

Zadania

15. Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej punkty o współrzędnych: $+5$, $+3$, -4 , -2 , -6 , $+\frac{1}{2}$, $-1\frac{1}{2}$, $+3\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$!

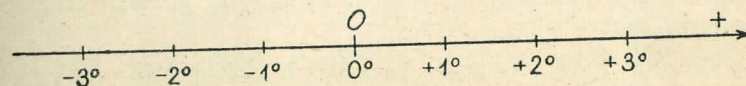
16. Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej oba punkty, których współrzędne są liczbami względnymi o module: a) 6, b) $3\frac{1}{2}$, c) $\frac{3}{2}$!
17. Narysuj oś liczbową obierając jako jednostkę 1,5 cm. Jaka jest odległość od siebie punktów o współrzędnych: a) $+3$, $+5$, b) -2 , $+5$, c) -7 , -32 ?
18. Zaznacz na prostej dwa dowolne punkty A i B . Obierz następnie początek, kierunek dodatni i jednostkę tak, aby na otrzymanej osi liczbowej punkty A i B miały odpowiednio współrzędne: a) -1 , $+3$, b) -2 , -5 , c) 5 , -3 , d) $+3$, $+2$. Jaka jest odległość punktu A od początku, jeżeli długość odcinka AB wynosi 2 cm? Rysunek!

§ 5. Majątek. Temperatura. Czas

I. Jeżeli ktoś posiada np. 5 zł, to mówimy, że stan jego majątku jest dodatni i że posiada: $+5$ zł. Jeżeli natomiast ktoś nie tylko, że nic nie ma, ale posiada np. 5 zł długu, to mówimy, że stan jego majątku jest ujemny i że posiada: -5 zł. A więc przy pomocy liczb względnych możemy oznaczać stan majątku.

II. Jeżeli termometr wskazuje np. 5°C ponad zero, to mówimy, że temperatura wynosi: $+5^{\circ}\text{C}$. Jeżeli termometr wskazuje np. 5°C poniżej zera, to mówimy, że temperatura wynosi: -5°C . Przy pomocy więc liczb względnych możemy oznaczać temperaturę. Liczby dodatnie oznaczają temperaturę powyżej zera, liczby ujemne temperaturę poniżej zera.

Podobnie jak liczby względne możemy temperaturę zaznaczać na osi.



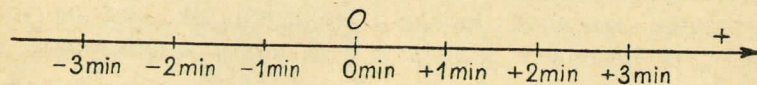
Rys. 3.

Na rys. 3, temperatura 0° zaznaczona jest w początku, temperatury $+1^{\circ}$, $+2^{\circ}$, $+3^{\circ}$, -1° , -2° , -3° , na prawo względnie na lewo od początku w odległości odp. 1, 2, 3, jednostki. Prostą, na której punktom odpowiadają temperatury, nazywamy osią temperatur.

III. Przy obserwowaniu jakiegoś zjawiska ważną jest rzeczą oznaczanie momentów (chwil), w których zjawisko badamy. Postępujemy zazwyczaj w następujący sposób: obieramy dowolną chwilę (moment) i nazywamy ją chwilą początkową. Jeżeli teraz jakaś chwila następuje np. w 4 min. po początkowej, to oznaczamy ją:

+4 min. Jeżeli natomiast badana chwila jest wcześniejszą od początkowej np. o 4 min., to oznaczamy ją: -4 min. Chwilę początkową oznaczamy: 0 min. Podobnie chwila: +5 min. oznacza chwilę następującą w 5 minut po początkowej, -6 min. chwilę wcześniejszą od początkowej o 6 minut.

Podobnie jak liczby względne możemy i chwile zaznaczać na osi (rys. 4).



Rys. 4.

Na rys. 4 chwila początkowa oznaczona jest: 0 min. Chwile +1 min., +2 min., -1 min., -2 min. są zaznaczone w odległości 1 jedn., 2 jedn., na prawo wzgl. na lewo od chwili początkowej. Prosta, na której punktom odpowiadają chwile, nazywamy osią czasu.

Zadania

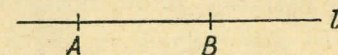
19. Pierwsza liczba oznacza stan początkowy majątku, druga zaś zmianę. Jaki był stan majątku po zmianie?
a) +30 zł, +10 zł, b) +20 zł, -15 zł, c) +15 zł, -20 zł, d) -10 zł, +8 zł, e) -7 zł, -15 zł.
20. Pierwsza liczba oznacza stan początkowy majątku, druga zaś stan końcowy. Ile wynosi przyrost majątku?
a) +30 zł, +10 zł, b) +10 zł, +50 zł, c) +20 zł, +80 zł, d) -10 zł, -15 zł, e) -8 zł, -5 zł, f) -6 zł, -7 zł.
21. Temperatura w południe wynosiła +3°C, za godzinę zmiana temperatury wynosiła a) +2°C, b) -2°C, c) -7°C. Jaka była temperatura o 1 po południu.
22. Przyjmując jako chwilę 0 narodzenie Chrystusa a) przedstaw przy pomocy liczb względnych: rok 1934 po nar. Chr. i rok 1934 przed nar. Chr.! b) ile lat upłynęło od roku -5 do roku +30?
23. Przyjmując jako chwilę 0 koniec roku 1918 oznacz lata: +3, -5, +6! Jaką liczbą oznaczy się: a) rok wybuchu wielkiej wojny? b) rok cudu nad Wisłą? c) bieżący rok?
24. Ile minut upłynęło: a) od -4 min. do +3 min., b) od -7 min. do -6 min., c) od +5 min. do +9 min.?
25. Zaznacz na osi temperatur następujące temperatury krzepnięcia i wrzenia: wody 0°C i +100°C, alkoholu -115°C i 78°C, odcinając 1°C co 1 mm.
26. Długość geograficzną liczymy dodatnią na wschód od Greenwich,

ujemną na zachód. Zaznacz na osi punkty (odcinając 1° co 1 mm), odpowiadające miejscowościom o następujących (zaokrąglonych do stopni) długościach geograficznych: Gdańsk 18° na wschód, Warszawa 21° na wschód, Berlin 13° na wschód, Fez 6° na zachód, Glasgow 4° na zachód, Rio de Janeiro 43° na zachód.

27. Szerokość geograficzną liczymy dodatnią na północ od równika, ujemną zaś na południe. Zaznacz na osi (odcinając 1° co 1 mm) punkty, odpowiadające miejscowościom o następujących (zaokrąglonych do stopni) szerokościach geograficznych: Warszawa 52° na półn., Kapstadt 34° na połud., Paryż 49° na półn., Rio de Janeiro 23° na połud.
28. Długość odcinka wynosi 14 m. Przy pomiarach otrzymano następujące wartości przybliżone tej długości: 13,95 m, 14,06 m, 13,94 m, 14,02 m, 13,92 m. Błąd popełniony przy pomiarze liczymy za dodatni, jeżeli wartość przybliżona jest większa, a za ujemny, jeżeli jest mniejsza od prawdziwej. Narysuj oś liczbową obierając jako jednostkę 1 cm i zaznacz na tej osi punkty, odpowiadające kolejnym błędom!

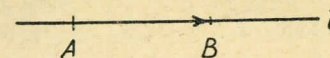
§ 6. Wektory

Przypuśćmy, że na prostej l punkt przesunął się od A do B (rys. 5). W odcinku AB , który przedstawia nam przesunięcie punktu,



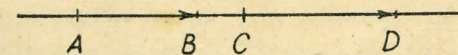
Rys. 5.

rozdzielamy początek A i koniec B . Dla zaznaczenia, że B jest końcem, dajemy strzałkę jak na rys. 6. Odcinki takie, w których odróżniamy początek i koniec, nazywamy wektorami.



Rys. 6.

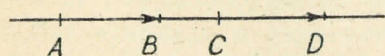
Wektory oznaczamy, pisząc naprzód początek, potem koniec i dając u góry kreskę. Na rys. 7 mamy więc wektory: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$.



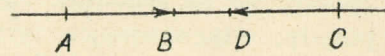
Rys. 7.

Do wektorów zaliczamy również punkty, które nazywamy wektorami zerowymi. Wektor zerowy oznacza, że punkt nie doznał przesunięcia. Wektory zerowe oznaczamy: 0.

Jeżeli mamy dwa wektory (niezerowe), położone na tej samej prostej, to wektory te mogą mieć zwroty równe, rys. 8a, lub przeciwny, rys. 8b.

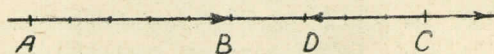


Rys. 8 a.



Rys. 8 b.

Zwrot i długość wektora, położonego na danej osi, możemy określić przy pomocy jednej liczby względnej.



Rys. 9.

W tym celu obierzmy na prostej l zwrot dodatni.

Wektor $\overline{AB}$ ma 5 jednostek długości i zwrot dodatni; mówimy, że $\overline{AB}$ ma $+5$ jedn. Wektor $\overline{CD}$ ma 3 jednostki długości i zwrot ujemny; mówimy, że $\overline{CD}$ ma -3 jedn. Rys. 9.

Liczbę $+5$ (wzgl. -3) nazywamy miarą algebraiczną wektora, $\overline{AB}$ (wzgl. $\overline{CD}$). Miarą algebraiczną wektora 0 jest 0.

W ten sposób przy pomocy jednej liczby względnej podajemy długość i zwrot wektora, położonego na danej osi.

Zadania

29. Narysuj oś, a na niej zaznacz wektor, którego miara algebraiczna wynosi: a) $+5$ cm, b) -3 cm, c) $+2\frac{1}{2}$ cm, d) $-2,5$ cm!

30. Zaznacz na osi liczbowej wektor $\overline{AB}$, jeżeli:

I. Współrzędne punktów A i B są odpowiednio: a) 2 i 5, b) 4 i 1, c) 3 i -2 , d) -3 i 2, e) -4 i -6 , f) 0 i 3, g) 0 i -2 . Jaka jest miara algebraiczna wektora $\overline{AB}$?

II. Współrzędna punktu A i miara algebraiczna wektora $\overline{AB}$ są odpowiednio: a) 3 i 5, b) 2 i -3 , c) -2 i 4, d) -3 i -5 . Jaka jest współrzędna punktu B ?

III. Współrzędna punktu B i miara algebraiczna wektora $\overline{AB}$ są odpowiednio: a) 0 i -3 , b) 2 i 4, c) -3 i 3, d) -1 i -5 . Jaka jest współrzędna punktu A ?

31. Miara algebraiczna wektora $\overline{AB}$ wynosi: a) -5 , b) 3, c) 0. Jaka jest jego długość, jeżeli jako jednostkę obraliśmy $1,5$ cm?
32. Punkt A o współrzędnej $+5$ przesunęliśmy na osi liczbowej do punktu B o: a) 3 jednostki na prawo, b) o 7 jednostek na lewo; jaka jest współrzędna punktu B i jaka jest miara algebraiczna wektora $\overline{AB}$, jeżeli kierunek dodatni jest od ręki lewej do prawej? (Rysunek)!

Rozdział II

Działania na liczbach względnych

§ 1. Wstęp

Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie umiemy wykonać na liczbach dodatnich (względnie zero), gdyż to są liczby bezwzględne, poprzednio poznane. Określimy teraz te działania w wypadku, gdy będziemy mieli je wykonać na liczbach ujemnych lub na liczbach dodatnich łącznie z ujemnymi.

Działania na liczbach względnych oznaczać będziemy podobnie jak na liczbach bezwzględnych. Zapisując działania będziemy na początku brać zazwyczaj liczby względne w nawias, aby uniknąć zbiegnięcia się dwóch znaków. Działania więc na liczbach np. -5 , $+7$ zapiszemy w następujący sposób:

Suma: $(-5) + (+7)$ a nie: $-5 + +7$

Różnica: $(-5) - (+7)$ a nie: $-5 - +7$

Iloczyn: $(-5) \cdot (+7)$

Iloraz: $(-5) : (+7)$ lub $\frac{-5}{+7}$.

Później poznamy prostsze sposoby zapisywania sumy i różnicy.

§ 2. Dodawanie

Jeżeli ktoś miał z początku $+5$ zł majątku, a następnie zmiana wynosiła $+3$ zł, to ostatecznie posiada $+8$ zł. Na tabelce mamy zaznaczone również i inne wypadki:

Stan majątku początkowy	Zmiana	Stan końcowy
$+5$	$+3$	$+8$
-5	-3	-8
$+5$	-3	$+2$
-5	$+3$	-2

W wypadku pierwszym stan końcowy: $+8$ otrzymamy dodając do siebie liczby $+5$ i $+3$. Mamy bowiem $5 + 3 = 8$, czyli

$(+5) + (+3) = +8$. Aby i w pozostałych wypadkach stan końcowy otrzymać przy pomocy dodawania, należy tak dodawanie liczb względnych określić, abyśmy mieli:

$$\begin{array}{ll} (+5) + (+3) = +8 & (+5) + (-3) = +2 \\ (-5) + (-3) = -8 & (-5) + (+3) = -2. \end{array}$$

Sumę więc określamy w następujący sposób:

Liczby tego samego znaku dodajemy dodając do siebie ich bezwzględne wartości i dając znak wspólny.

Liczby, mające znaki przeciwne, dodajemy odejmując ich bezwzględne wartości od siebie (jeśli są nierówne, to mniejszą bezwzględną wartość od większej) i dając znak tej liczby, której bezwzględna wartość jest większa.

Np.:
$$\begin{array}{ll} (+7) + (+6) = +13, & (+8) + (-3) = +5 \\ (-3) + (-2) = -5, & (-8) + (+9) = +1 \\ (-4) + (+4) = 0, & (+2) + (-2) = 0 \\ (+4) + 0 = +4, & (+5) + (-9) = -4 \\ 0 + (-5) = -5, & 0 + 0 = 0. \end{array}$$

Uwaga: W sumie można opuścić nawias pierwszego składnika.

Np.:
$$\begin{array}{l} (-3) + (+5) = -3 + (+5) \\ (-7) + (-8) = -7 + (-8) \\ (+3) + (-5) = +3 + (-5). \end{array}$$

Opuśzczenie nawiasu przy pierwszym składniku nie doprowadzi do dwuznaczności. Znak na początku nie może bowiem oznaczać dodawania, względnie odejmowania, tylko jedynie znak liczby względnej.

Zamiast liczb dodatnich możemy pisać ich bezwzględne wartości.

Np.:
$$\begin{array}{l} (+3) + (-8) = 3 + (-8). \\ (-7) + (+3) = (-7) + 3 = -7 + 3 \end{array}$$

Na odwrót wyrażenie: $-2 + 5$ oznacza sumę; mamy bowiem $-2 + 5 = (-2) + 5 = (-2) + (+5)$.

Sumę kilku liczb obliczamy wykonując dodawanie po kolei.

Np.: sumę $(-3) + (+5) + (-4)$ obliczamy: $(-3) + (+5) = +2$, $(+2) + (-4) = -2$, zatem: $(-3) + (+5) + (-4) = -2$.

Uwaga: Sumę liczb względnych nazywamy także sumą algebraiczną. Składniki sumy nazywamy również wyrazami.

Zadania

1. Oblicz:

$$\begin{array}{lll} a) (+3) + (-5), & (-4) + (-2), & (-6) + (+3); \\ b) (-1) + (+1), & (+2) + (-8), & (-3) + (-7); \\ c) (+4) + (+8), & (+10) + (-10), & (-6) + (-6); \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} d) (-7) + (+6), & (+6) + (-4), & (+9) + (+12); \\ e) (-8) + (+9), & (-1) + (-10), & (+12) + (-1); \\ f) (-25) + (+30), & (+30) + (-50), & (-50) + (-10); \\ g) (+52) + (-2), & (+35) + (+5), & (-68) + (-2); \\ h) (+42) + (+42), & (-18) + (-32), & (-41) + (-9). \end{array}$$

2. Oblicz:

$$\begin{array}{lll} a) (+1,4) + (+0,6), & (-0,2) + (+1,5), & (-2,4) + (-2,6); \\ b) (+\frac{3}{4}) + (-1\frac{2}{3}), & (-2\frac{2}{5}) + (+1\frac{1}{5}), & (-\frac{4}{5}) + (-\frac{1}{2}); \\ c) (-4\frac{3}{4}) + (+2\frac{1}{8}), & (-1,4) + (-\frac{1}{2}), & (+2,7) + (-\frac{2}{5}). \end{array}$$

3. Ile wynosi suma liczb przeciwnych? Podaj kilka przykładów!

4. Zaznacz i oblicz sumę liczb:

$$\begin{array}{llll} a) -3 \text{ i } +5, & -1 \text{ i } +2, & +7 \text{ i } -3, & -8 \text{ i } -7; \\ b) +6 \text{ i } +2, & +4 \text{ i } -6, & -3 \text{ i } +8, & -8 \text{ i } -5; \\ c) -8 \text{ i } +8, & -9 \text{ i } -1, & +4 \text{ i } +5, & +7 \text{ i } -9; \\ d) +9 \text{ i } -5, & -2 \text{ i } +6, & +3 \text{ i } +4, & -5 \text{ i } -6; \\ e) +12 \text{ i } -5, & +15 \text{ i } -6, & -18 \text{ i } +2, & -27 \text{ i } -4. \end{array}$$

5. Oblicz:

$$\begin{array}{ll} a) (+1) + (-1) + (+1), & (+1) + (-2) + (-3); \\ b) (-5) + (-2) + (+3), & (-4) + (+5) + (-6); \\ c) (+7) + (+1) + (-3), & (+2) + (-5) + (+6); \\ d) (+8) + (-4) + (-5), & (-2) + (+7) + (+1); \\ e) (-5) + (+8) + (-9), & (-3) + (-4) + (+6); \\ f) (-4) + (-3) + (-8), & (+6) + (+3) + (+9); \\ g) (+9) + (+1) + (-4), & (+3) + (-7) + (+8); \\ h) (+2) + (-6) + (-3), & (-5) + (+4) + (+6). \end{array}$$

6. Oblicz:

$$\begin{array}{ll} a) (+1,2) + (+0,3) + (-0,5), & (+3,4) + (-2,5) + (-1,3); \\ b) (+3,7) + (-2,5) + (-3,3), & (+8,6) + (-2,2) + (-4,5); \\ c) (+\frac{1}{2}) + (+\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{6}), & (-1,2) + (+\frac{1}{2}) + (+\frac{2}{3}). \end{array}$$

7. W następujących sumach opuść zbędne nawiasy i oblicz:

$$\begin{array}{ll} a) (+8) + (+5), & (-8) + (+3), & (-4) + (-6); \\ b) (+2) + (-6) + (-3), & (-7) + (-2) + (+8); \\ c) (-4) + (-3) + (+5) + (-6), & (-1) + (+4) + (+9) + (-2); \\ d) (+\frac{1}{2}) + (-2) + (+5), & (-1,3) + (-2,7) + (+6). \end{array}$$

8. Przedstaw następujące wyrażenia jako sumy liczb względnych i oblicz:

$$\begin{array}{llll} a) 9 + 14, & -5 + 3, & -6 + 4 + 7, & -2 + (-3) + 5; \\ b) -8 + 5 + 1 + (-4), & -11 + (-5) + (-2) + 6; \\ c) -9 + (-3) + 5 + 7, & -6 + (-2) + 5 + 4 + (-3). \end{array}$$

9. Oblicz:

- a) $[(-3) + (+5)] + [(-1) + (-3)], [(+1) + (-3)] + [(+2) + (-4)];$
 b) $[(+1) + (-3) + (+2)] + [(+1) + (-4) + (+2)];$
 c) $5 + [(+7) + (-3)] + [2 + (-7)];$
 d) $1 + [(-2) + (-3)] + [(-2) + (+3)] + [4 + (-5)].$

Uwaga: Obliczaj najpierw sumy, zawarte w nawiasach (klamrach). Np.: $2 + [(-1) + (+4)] = 2 + [+3] = 5.$

10. Oblicz:

- a) $3 + \{[(+2) + (-3)] + [(-4) + (-3)]\};$
 b) $(-1) + \{(+5) + [(-3) + (+4)]\};$
 c) $1 + [(-4) + (+2)] + \{(-6) + [(-5) + (+7)]\};$
 d) $-2 + \{1 + [(-4) + (+3)]\} + \{(-5) + [4 + (-2)]\}.$

Uwaga: Obliczamy najpierw wartości sum w tych nawiasach, wewnątrz których nie ma już innych nawiasów, poza nawiasami, obejmującymi poszczególne liczby względne. Np. liczymy:

$$2 + \{[(-1) + (-2)] + [3 + (-4)]\} = 2 + \{[-3] + [-1]\} = 2 + \{-4\} = -2.$$

11. Ktoś miał: a) +6 zł, b) +8 zł, c) -5 zł, d) -4 zł, e) +12 zł, f) -15 zł; zmiana jego majątku wynosiła: a) -2 zł, b) +3 zł, c) -4 zł, d) +2 zł, e) -15 zł, f) +30 zł. Ile miał na końcu? Przekonaj się, że otrzymasz stan końcowy majątku dodając zmianę do stanu początkowego!

12. Temperatura wynosiła: a) -5°C , b) $+8^{\circ}\text{C}$, c) -7°C , d) $+6^{\circ}\text{C}$, e) $+10^{\circ}\text{C}$, f) -18°C ; zmiana temperatury w ciągu dnia wyniosła: a) -3°C , b) $+7^{\circ}\text{C}$, c) $+4^{\circ}\text{C}$, d) -2°C , e) $+5^{\circ}\text{C}$, f) $+20^{\circ}\text{C}$. Jaka była temperatura końcowa? Przekonaj się, że otrzymasz temperaturę końcową dodając do temperatury początkowej zmianę.

13. Na osi liczbowej punkt A ma współrzędne: a) -1, b) +6, c) -7, d) +8, e) -4, f) +3; jaka jest współrzędna punktu B, jeżeli miara algebraiczna wektora $\overline{AB}$ wynosi: a) -3, b) +5, c) +8, d) -4, e) +2, f) -5? Rysunek! Przekonaj się, że współrzędną punktu B otrzymasz dodając do współrzędnej punktu A miarę algebraiczną wektora $\overline{AB}$.

14. Ktoś miał +5 zł majątku; zmiany jego majątku wynosiły: a) -3 zł, +7 zł, +2 zł, -6 zł, +8 zł, b) +6 zł, -4 zł, -8 zł, +5 zł, -2 zł, c) -8 zł, +10 zł, +1 zł, -4 zł, +3 zł.

Jaki był stan jego majątku na końcu? Otrzymasz stan końcowy dodając poszczególne zmiany do stanu początkowego!

15. Na osi liczbowej mamy punkty A, B, C, D i E. Miary algebraiczne wektorów $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ są odpowiednio:

- a) -1, +3, -4, -5, b) +4, -6, +3, -4,
 c) +8, -9, +2, +1, d) -7, +4, -2, +5,
 e) -1, -2, -3, -4; f) $+\frac{1}{2}$, $+\frac{3}{2}$, $+\frac{5}{2}$, +1.

Jaka jest miara algebraiczna wektora $\overline{AE}$?

Przekonaj się, że miara algebraiczna wektora $\overline{AE}$ jest sumą miar algebraicznych wektorów $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$. Rysunek!

16. Dotychczas przy pomocy liter oznaczaliśmy liczby bezwzględne. Będziemy odtąd również liczby względne oznaczać literami.

Wyrażenie: $(-3) + x$, jeżeli $x = +5$, wynosi $(-3) + (+5) = +2$.

Wyrażenie $x + y + z$, jeżeli $x = -2$, $y = +3$, $z = -5$, wynosi: $(-2) + (+3) + (-5) = -4$.

Oblicz wartość następujących wyrażeń:

- a) $(+5) + a$, $(-3) + b$, $a + 5$, $b + (-5) + (+6)$;
 b) $a + b$, $(+5) + a + (-3) + c$, $b + c + (-4)$;
 c) $-3 + a$, $5 + a + 3 + c$, $-4 + b + (-5) + c$;
 d) $a + b + c$, $-2 + a + 5 + b + c$, $a + 4 + b + (-3) + c$,
 jeżeli $a = -2$, $b = +6$, $c = -7$.

17. Oblicz wyrażenia:

$$a + (b + c), (a + b) + (c + d), a + [b + (c + d)],$$

$$a + (b + c) + [d + (a + b)], -9 + a + (d + c),$$

jeżeli $a = -1$, $b = +5$, $c = -3$, $d = +4$.

Uwaga: Jeżeli w wyrażeniu $x + (x + y)$ położymy $x = -1$, $y = +3$, otrzymamy: $(-1) + [(-1) + (+3)] = (-1) + (+2) = 1$.

§ 3. Odejmowanie

Różnicę liczb względnych określamy podobnie jak różnicę liczb bezwzględnych.

Różnicą dwóch liczb względnych nazywamy liczbę, która, dodana do drugiej, da na wynik pierwszą. A więc:

$$(+8) - (+5) = +3 \text{ bo } (+3) + (+5) = +8,$$

$$(-4) - (-6) = +2 \text{ „ } (+2) + (-6) = -4.$$

Podobnie jak dla liczb bezwzględnych w różnicy $(+8) - (+5)$, liczbę +8 nazywamy odjemną, liczbę +5 odjemnikiem.

§ 4. Związek między dodawaniem i odejmowaniem

Czyjś majątek zmienił się o -3 zł i wynosił (po zmianie): +8 zł; jaki był stan majątku przed zmianą?

Zadanie rozwiążemy dwoma sposobami.

I. Jeżeli do stanu początkowego majątku dodamy zmianę -3 zł, to otrzymamy stan końcowy $+8$ zł. Zatem stan początkowy wyraża się w zł różnicą: $(+8) - (-3)$.

II. Stan początkowy otrzymamy dodając do stanu końcowego zmianę przeciwną, tj. $+3$. Zatem stan początkowy wyraża się w zł sumą: $(+8) + (+3)$.

A więc: $(+8) - (-3) = (+8) + (+3)$.

Podobnie przekonamy się w następujących wypadkach:

Zmiana w zł: $+3, -3, +3$.

Stan końcowy w zł: $+8, -8, -8$,

ze: $(+8) - (+3) = (+8) + (-3)$

$(-8) - (-3) = (-8) + (+3)$

$(-8) - (+3) = (-8) + (-3)$.

Widzimy stąd, że różnicę otrzymamy dodając do odjemnej przeciwną wartość odjemnika.

Np.: $(-6) - (+4) = (-6) + (-4) = -10$;

$(+5) - (-6) = (+5) + (+6) = +11$ itp.

Uwaga: Napiszmy te równości w odwrotnym porządku:

$(+8) + (+3) = (+8) - (-3)$,

$(+8) + (-3) = (+8) - (+3)$,

$(-8) + (+3) = (-8) - (-3)$,

$(-8) + (-3) = (-8) - (+3)$.

Tutaj mamy sumę zamienioną na różnicę. Zatem dodać liczbę tj. to samo, co odjąć przeciwną.

A więc w zakresie liczb względnych możemy łatwo zamienić sumę na różnicę i na odwrot.

W różnicy nawias odjemnej możemy opuścić; zamiast liczb dodatnich możemy napisać ich bezwzględne wartości.

Np.: $(-3) - (-5) = -3 - (-5)$; $(-7) - (+5) = -7 - 5$ itp.

Uwaga: W zakresie liczb bezwzględnych różnica nie zawsze istnieje. Np. różnica $5 - 8$ nie istnieje, gdyż odjemna jest mniejsza od odjemnika. W zakresie liczb względnych możemy napisać:

$5 - 8 = (+5) - (+8) = (+5) + (-8) = -3$.

W zakresie liczb względnych różnica zawsze istnieje.

Zadania

18. Oblicz:

- a) $(+3) - (+4)$, $(-3) - (-2)$, $(-5) - (+4)$;
 b) $(-2) - (+41)$, $(+3) - (-7)$, $(-3) - (-8)$;
 c) $(+5) - (+9)$, $(+10) - (-9)$, $(-6) - (+6)$;
 d) $(-9) - (-6)$, $(+6) - (-3)$, $(+8) - (+12)$;

- e) $(-8) - (-10)$, $(-1) - (-1)$, $(+12) - (-2)$;
 f) $(-24) - (+30)$, $(+32) - (-50)$, $(-63) - (-10)$;
 g) $(+81) - (-2)$, $(+35) - (+8)$, $(-78) - (-2)$;
 h) $(+43) - (+42)$, $(-18) - (-32)$, $(-31) - (-9)$;
 i) $(+3) - (+14)$, $(+6) - (-24)$, $(-5) - (-43)$.

19. Oblicz:

- a) $(+1,6) - (+0,4)$, $(-0,3) - (+1,6)$, $(-2) - (-2,6)$;
 b) $(+\frac{3}{4}) - (-1\frac{1}{4})$, $(-3\frac{3}{5}) - (+2\frac{1}{5})$, $(-\frac{4}{5}) - (-\frac{1}{5})$;
 c) $(-2\frac{3}{4}) - (+3\frac{1}{4})$, $(-\frac{1}{2}) - (-1,2)$, $(+3,6) - (-\frac{3}{5})$.

20. W następujących parach liczb przyjmij pierwszą za odjemną, drugą za odjemnik, zaznacz ich różnicę i oblicz:

- a) $-4, +6$, $-2, +1$, $+8, -4$, $-7, +8$;
 b) $+9, +2$, $+3, -6$, $-4, +7$, $-9, -8$;
 c) $-3, +8$, $-7, -1$, $+5, +4$, $+9, -6$;
 d) $+5, -3$, $-4, +6$, $+3, +4$, $-6, -7$.

21. Jaką liczbę należy dodać do pierwszej, aby otrzymać drugą?

- a) $+5, +8$, $+16, +4$, $-7, -23$, $-21, -8$,
 b) $+27, -49$, $-36, +11$, $+\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$, $-2,1, +3$.

22. Jaką liczbę względną należy podstawić w miejsce litery x:

- a) $(+5) + x = +12$, $(+14) + x = +9$;
 b) $(-15) + x = -8$, $(-7) + x = -21$;
 c) $(-16) + x = +12$, $(-18) + x = -4$.

23. W następujących różnicach opuść zbędne nawiasy i oblicz:

- a) $(+27) - (+19)$, $(+48) - (-25)$, $(-65) - (+16)$;
 b) $(-59) - (-84)$, $(+76) - (+128)$, $(-145) - (+96)$;
 c) $(+46) - (+25)$, $(-28) - (+13)$, $(+89) - (-42)$.

24. Oblicz: $5 - 6$, $8 - 7$, $2\frac{1}{2} - 3$, $-1 - 5$, $-2 - 7$, $-\frac{1}{2} - 3$,
 $4\frac{1}{2} - 5\frac{1}{2}$, $-1,7 - 2,3$, $-4 - 6,2$, $-3 - 5$, $-3 - 5,1$, $0 - 3$.

25. Ktoś miał: a) $+11$ zł, b) -8 zł, c) $+10$ zł, d) -7 zł, potem majątek jego wynosił: a) $+3$ zł, b) $+4$ zł; c) -2 zł, d) -4 zł; wyraż zmianę stanu majątkowego w postaci różnicy i oblicz!

26. Zmiana majątku wynosiła: a) -8 zł, b) 16 zł, c) 4 zł, d) -2 zł; majątek ten wynosi obecnie: a) 2 zł, b) 9 zł, c) -6 zł, d) -7 zł. Wyraż stan początkowy w postaci różnicy i oblicz!

27. Temperatura wynosiła: a) $+12^{\circ}\text{C}$, b) -15°C , c) -4°C , d) $+18^{\circ}\text{C}$, a obecnie wynosi: a) -2°C , b) -7°C , c) $+5^{\circ}\text{C}$, d) $+12^{\circ}\text{C}$; wyraż zmianę temperatury w postaci różnicy i oblicz!

28. Zmiana temperatury w ciągu godziny wynosiła: a) $+8^{\circ}\text{C}$,

b) -6°C , c) -11°C , d) $+3^{\circ}\text{C}$, na końcu godziny temperatura wynosiła: a) $+2^{\circ}\text{C}$, b) -2°C , c) -18°C , d) $+9^{\circ}\text{C}$. Wyraż temperaturę początkową w postaci różnicy i oblicz!

29. Na osi liczbowej punkt A ma współrzędne: a) -6 , b) $+5$, c) $+3\frac{1}{2}$, d) $-4\frac{1}{2}$, punkt zaś B ma współrzędne: a) $+3$, b) -2 , c) -1 , d) $+1\frac{1}{2}$; jaka jest miara algebraiczna wektora $\overline{AB}$? Wyraż ją w postaci różnicy. Rysunek!

30. Miara algebraiczna wektora $\overline{AB}$ wynosi: a) $+5$, b) -9 , c) $+1\frac{1}{2}$, d) $-3\frac{1}{2}$, współrzędna zaś punktu B jest: a) $+2$, b) -5 , c) $+\frac{1}{2}$, d) -8 ; jaka jest współrzędna punktu A ? Wyraż ją w postaci różnicy. Rysunek!

31. Oblicz wyrażenia:

- a) $(-8) + (-3) - (+5)$, $(+7) + (-4) - (+6) - (-2)$;
 b) $(-3) - (+7) + (+6) - (+1)$, $(+12) + (-4) - (-5)$;
 c) $10 - (+5) - (-7) + (+6)$, $8 + (+11) - (-15) + (-9)$;
 d) $-6 - (-3) + (+9) + (-13)$, $-11 - (+5) + (-10) - (+2)$;
 e) $-1 + (+9) + (-6) - (-4) - (+3) + (+2)$;
 f) $5 - (+3) - (-8) + (-5) + (+9) - (-2)$.

32. Oblicz:

- a) $(-2) + [(-4) - (-5)]$, $(+5) - [(+7) - (+9)]$,
 $(-4) + [(+12) - (+3)]$;
 b) $(+8) + [(+20) - (+11)] - [(12) + (-3)]$;
 c) $(+7) - [(-9) + (+19)] + [(-25) - (-8)]$;
 d) $(-21) + [(+7) + (-35) - (-5)] - [(+3) - (+5) - (-6)]$;
 e) $-6 - [(-2) - (+7) + (-4)] + [(-3) - (-5) - (+9)]$.

§ 5. Uproszczone zapisywanie sum

Utwórzmy sumę kilku liczb, np. -8 , $+3$, -6 , $+1$, -7 . Sumą tych liczb jest wyrażenie:

$$(-8) + (+3) + (-6) + (+1) + (-7).$$

Jak wiemy, zamiast dodać jakąś liczbę, możemy odjąć liczbę przeciwną. W powyższej więc sumie możemy dodawanie liczb ujemnych (poza pierwszym składnikiem) zamienić na odejmowanie liczb przeciwnych. Otrzymamy w ten sposób wyrażenie:

$$(-8) + (+3) - (+6) + (+1) - (+7).$$

Wyrażenie powyższe możemy napisać bez użycia nawiasów:

$$-8 + 3 - 6 + 1 - 7.$$

Widzimy stąd, że sumę kilku liczb otrzymamy pisząc te liczby obok siebie z ich znakami.

Podobnie sumą liczb 8 , -1 , -3 , 2 jest wyrażenie:

$$8 - 1 - 3 + 2.$$

Na odwrót wyrażenie $-3 + 1 - 2 + 5$ oznacza sumę liczb:

$$-3, +1, -2, +5.$$

Podobnie: $5 - 3 + 1 - 4 = (+5) + (-3) + (+1) + (-4)$,
 $-2 - 7 + 4 - 6 = (-2) + (-7) + (+4) + (-6)$.

Dogodnie jest wyrażenia takie, jak np.: $-8 + 3 - 6 + 1 - 7$, obliczać od razu jako sumy. Obliczanie przedstawia się następująco: -8 plus $+3$ jest -5 ; -5 plus -6 jest -11 ; -11 plus $+1$ jest -10 ; -10 plus -7 jest -17 . Więc -17 jest wartością danego wyrażenia.

Uwaga: Przypuśćmy, że mamy wyrażenie, w którym jest kilka liczb połączonych znakami $+$ i $-$, jak np.:

$$(-2) + (-3) - (+4) - (+5).$$

Możemy dodawania zamieniać na odejmowania lub odejmowania na dodawania liczb przeciwnych. Zatem;

$$(-2) + (-3) - (+4) - (+5) = (-2) + (+3) + (-4) + (-5).$$

Podobnie:

$$(-2) + (-4) - (-5) - (-6) = (-2) + (-4) + (+5) + (+6) = (-2) - (+4) + (+5) - (-6) \text{ itp.}$$

Możemy np. wszystkie odejmowania zamienić na dodawania liczb przeciwnych. Np.:

$$(-2) - (-5) - (+6) + (-7) = (-2) + (+5) + (-6) + (-7).$$

Ostatnią sumę możemy napisać bez użycia nawiasów następująco: $-2 + 5 - 6 - 7$.

$$\text{Zatem } (-2) - (-5) - (+6) + (-7) = -2 + 5 - 6 - 7.$$

Podobnie bez użycia nawiasów napiszemy następujące wyrażenia zamieniając je najpierw na sumy. Np.:

$$(-1) - (-3) + (-4) = (-1) + (+3) + (-4) = -1 + 3 - 4$$

$$(+7) - (-6) - (+4) - (+5) = (+7) + (+6) + (-4) + (-5) = 7 + 6 - 4 - 5.$$

Zadania

33. Napisz sumy następujących liczb bez użycia nawiasów i oblicz:

- a) -1 , $+3$; -7 , $+5$; -2 , $+3$; $+3$, $+4$; $+8$, -9 ;
 b) -1 , $+2$, -3 ; $+4$, -5 , -6 ; $+9$, -5 , -8 ;
 c) $+2$, -3 , -1 , $+3$; -8 , $+4$, -6 , $+7$;
 d) $+5$, $+7$, -9 , -3 , $+4$; -12 , $+8$, -11 , -20 , $+7$.

34. Oblicz następujące wyrażenia uważając je za sumy:

- a) $-1 + 2, -3 + 4, -2 + 3, 2 - 8, -9 + 6, 7 - 11$;
 b) $6 - 12, -11 + 5, -8 + 7, -4 - 12, -18 - 2, -8 + 12$;
 c) $-1 - 7, 5 - 9, -13 + 14, -16 + 13, -21 - 7, -5 + 12$;
 d) $5 + 7 - 9, -4 + 12 - 3, 8 - 20 - 11, -25 - 4 + 2$;
 e) $12 - 8 + 3, -9 + 21 + 4, -3 - 8 - 18, 7 - 9 + 19$;
 f) $-24 - 6 + 8, -15 + 16 + 12, -23 - 8 + 7, 5 - 6 - 3$;
 g) $4 - 3 - 8 + 7, 17 - 15 + 16 - 21, -8 + 13 - 17 + 9$;
 h) $-32 + 4 - 16 + 27 - 29, -12 + 15 - 28 + 3 - 11$.

35. Przedstaw następujące wyrażenia jako sumy i oblicz:

- a) $(+2) - (-5) + (-4) - (+6), 4 - (+6) + (-3) - (-8)$;
 b) $(-9) - (+5) - (-8) + (-3), -7 + (+4) + (-2) - (+1)$;
 c) $10 + (-7) - (-3) + (-8), -1 + (-4) - (-7) + (-5)$;
 d) $2,5 - (+3,1) - (-0,3) + (+3,2), \frac{1}{2} + (-\frac{3}{4}) - (-\frac{3}{4}) + (+\frac{1}{5})$.

36. Przedstaw jako wyrażenia, w których liczby występujące (poza ewentualnie pierwszą) są dodatnie, i oblicz:

- a) $(+15) - (+28) - (-8) + (-16), 4 + (-10) + (+6) - (-12)$;
 b) $(-40) + (+17) - (+26) - (-14) + (-21) - (-7) + (-3)$;
 c) $25 - (+12) - (-7) - (-21) + (-13) + (-2) - (+7)$;
 d) $-0,3 + (-2,4) + (+3,1) - (+7,3) - (-4,2) - (-8,5)$.

37. Przedstaw następujące wyrażenia bez użycia nawiasów i oblicz:

- a) $(-3) + (+5), (+5) + (-7), (+4) - (-2), (-6) - (+8)$;
 b) $(-3) - (+5) + (-6), (+4) + (-9) - (-5)$;
 c) $(+5) + (-7) - (+9) - (-6), (-12) + (-3) - (-4) - (+8)$;
 d) $(-7) + (-14) + (+4) - (+3) + (-2),$
 $(-1) + (-6) - (+5) + (-8) - (-3)$.

38. a) Zmiany temperatury wynosiły:

I) $-5^{\circ}, +4^{\circ}, -6^{\circ}, -2^{\circ}, +3^{\circ}$, II) $-1^{\circ}, +2^{\circ}, -4^{\circ}, +8^{\circ}$.

Zaznacz ostateczną temperaturę, jako sumę zmian poszczególnych bez użycia nawiasów, i oblicz.

b) Ktoś zapisywał swoje dochody i rozchody następująco:

I) $+5 \text{ zł}, -4 \text{ zł}, +8 \text{ zł}, -10 \text{ zł}, +2 \text{ zł}$, II) $-7 \text{ zł}, +4 \text{ zł}, -6 \text{ zł}, +9 \text{ zł}, -5 \text{ zł}$.

Zaznacz ostateczną zmianę majątku, jako sumę zmian poszczególnych bez użycia nawiasów, i oblicz.

39. Oblicz:

- a) $-3 - [-1 + 2], 7 - 4 - [5 - 8], -6 - [-1 + 12] - 3$;
 b) $[-1 + 3] - [-2 - 3], 3 - [7 - 9] - [-4 - 5]$;
 c) $-4 - [8 - 5 + 12], 9 + [-11 + 7 - 3]$;
 d) $-1 - [-1 + 5 - 7] + [-2 - 6], -5 + [-6 - 4 + 11] - 8$.

40. Oblicz:

- a) $-2 - [3 - (7 - 5)], -3 + 2 - [4 - (-2 + 8)]$;
 b) $4 + [-1 + 8 - (-3 - 5)], -9 - [3 - (-8 + 1 + 4)]$;
 c) $7 - [2 - (3 - 6)] + [-5 - (12 - 16)]$;
 d) $-2 + [-1 - (2 - 8)] + 4 - [2 + (-5 - 1)]$;
 e) $-19 - [-4 + 8 - (-2 - 5)] + [-3 - (4 + 9)]$;
 f) $5 + \{-3 - [2 - (4 + 12)]\} + (8 - 6)$.

41. Oblicz:

- a) $a - b + c, a + b - c, a - b - c$, jeżeli $a = 1, b = +5, c = -3$;
 b) $x + y - z - d, x - y + z - d, x - y - z - d$, jeżeli $x = -2, y = +1, z = -4, d = +3$.

42. Oblicz:

- a) $a - (b + c), a - (b - c), a + (b - c)$, jeżeli $a = -1, b = +2, c = +4$.
 b) $x + (y - z) - d, (x + y) - (z - d), x - (y + z - d)$, jeżeli $x = -6, y = +3, z = -5, d = -2$.

§ 6. Mnożenie

Iloczyn dwóch liczb względnych określamy następująco:

1. Bezwzględna wartość iloczynu równa się iloczynowi bezwzględnych wartości czynników;

2. Iloczyn ma znak $+$, jeżeli oba czynniki mają ten sam znak; iloczyn ma znak $-$, jeżeli czynniki mają różne znaki.

$$\begin{aligned} \text{Np.:} \quad (+3) \cdot (+5) &= +15, & (+3) \cdot (-5) &= -15, \\ (-3) \cdot (-5) &= +15, & (-3) \cdot (+5) &= -15. \end{aligned}$$

Jeżeli jeden czynnik jest zero, to iloczyn równy jest zeru. Np: $(+3) \cdot 0 = 0, 0 \cdot (-5) = 0, 0 \cdot 0 = 0$.

Przykłady.

1. Przypuśćmy, że na osi liczbowej (na której jako jednostkę długości obraliśmy 1 cm) porusza się punkt z prędkością np. 2 cm/sek .

Jeżeli punkt porusza się w kierunku dodatnim, to mówimy, że prędkość jest dodatnia i wynosi: $+2 \text{ cm/sek}$, jeżeli punkt porusza się w kierunku ujemnym, to prędkość jest ujemna i wynosi: -2 cm/sek . Obierzmy dowolną chwilę jako chwilę początkową.

Zadanie. Punkt porusza się po osi liczbowej z prędkością: $+2 \text{ cm/sek}$; w chwili początkowej znajdował się w początku osi; jaka jest współrzędna punktu w chwili: $+4 \text{ sek}$?

Odpowiedź. Współrzędna punktu poruszającego się w chwili $+4$ sek. wynosi: $+8 = (+2) \cdot (+4)$.

Jeżeli więc przez t, v, s oznaczymy liczby względne określające odpowiednio: chwilę badaną, prędkość i współrzędną, to w naszym wypadku mamy: $t = +4, v = +2, s = +8$, zatem: $s = v \cdot t$.

Przekonaj się, że powyższa formuła jest również ważna w następujących wypadkach: $v = +2, -2, -2$
 $t = -4, +4, -4$

2. Ktoś posiadał 5 dolarów; kurs dolara podniósł się o 0,3 zł. Ile wynosi zmiana majątku w zł?

Rozwiązanie. Ponieważ dolar wzrósł o 0,3 zł, więc przyrost majątku wynosi $5 \cdot 0,3 \text{ zł} = 1,5 \text{ zł}$.

Niechaj a oznacza liczbę względną określającą stan majątku w dolarach, b zmianę kursu dolara, c zmianę majątku w zł.

W naszym wypadku $a = +5, b = +0,3, c = 1,5$.

A więc $c = a \cdot b$.

Przekonaj się, że wzór powyższy zachodzi również w wypadkach, gdy odpowiednio: $a = +5, -5, -5$
 $b = -0,3, +0,3, -0,3$.

Np. Gdy $a = -4, b = +0,3$, tzn. ktoś posiadał 4 dolary długu i kurs dolara wzrósł o 0,3 zł; zatem dług jego wzrósł o $4 \cdot 0,3 \text{ zł} = 1,2 \text{ zł}$. Zmiana jego majątku jest więc ujemna i wynosi w zł: $c = -1,2 = (-4) \cdot (+0,3)$.

Iloczyn kilku czynników obliczamy wykonując po kolei mnożenia. Np. iloczyn: $(-1) \cdot (+2) \cdot (-6) \cdot (+5)$, obliczamy:

$$(-1) \cdot (+2) = -2; \quad (-2) \cdot (-6) = +12; \quad (+12) \cdot (+5) = 60.$$

A więc 60 jest wartością danego iloczynu.

Jeżeli w iloczynie liczba czynników ujemnych jest parzysta, to znak iloczynu jest $+$; jeśli liczba czynników ujemnych jest nieparzysta, to znak iloczynu jest $-$.

Np. $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = +1$; $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$;
 $(-2) \cdot (+1) \cdot (-3) \cdot (-4) = -24$; $(+3) \cdot (-5) \cdot (-2) \cdot (+2) = +60$.

43. Oblicz:

Zadania

- a) $(+2) \cdot (+3)$; $(-1) \cdot (+3)$; $(+2) \cdot (-1)$; $(-4) \cdot (-5)$;
 b) $(-4) \cdot (+6)$; $(-5) \cdot (-7)$; $(-6) \cdot (+5)$; $(+6) \cdot (+3)$;
 c) $(+3) \cdot (-7)$; $(-8) \cdot (+3)$; $(+7) \cdot (+4)$; $(-9) \cdot (-2)$;
 d) $(-8) \cdot (-5)$; $(-7) \cdot (+6)$; $(+9) \cdot (-4)$; $(+8) \cdot (+7)$;
 e) $(+9) \cdot (+5)$; $(-6) \cdot (+9)$; $(-8) \cdot (-8)$; $(+7) \cdot (-9)$;

- f) $(-7) \cdot (+7)$; $(+9) \cdot (+8)$; $(-6) \cdot (+8)$; $(-9) \cdot (-9)$;
 g) $(-2) \cdot (+12)$; $(+3) \cdot (-11)$; $(-5) \cdot (-16)$; $(+3) \cdot (+13)$;
 h) $(+14) \cdot (-2)$; $(+17) \cdot (+2)$; $(-15) \cdot (-3)$; $(-12) \cdot (+4)$.

44. Zaznacz i oblicz iloczyn liczb:

- a) $+8, +7$; $+4, -3$; $-7, +5$; $-6, -8$; $-3, -4$;
 b) $-3, -5$; $+\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}$; $-6, -\frac{2}{3}$; $-0,2$ i $+2,5$; $+0,1$ i $-0,1$.

45. Jeżeli liczbę jakąś pomnożymy przez -1 , to otrzymamy liczbę przeciwną. Podaj przykłady!

46. Ktoś posiada dolarów: $+5, -6, -12, +18$; zmiana kursu dolara wynosi w zł: $-0,4$; $-0,2$; $+0,5$; $+0,3$; ile wynosi zmiana majątku w zł?

47. Pociąg osobowy jedzie z prędkością 50 km/godz. z miejscowości A do miejscowości B, pociąg zaś pośpieszny z prędkością 70 km/godz. z miejscowości B do miejscowości A. Oba pociągi mijają się w miejscowości C. Czas przed chwilą spotkania liczymy jako ujemny, po chwili spotkania jako dodatni. Jako dodatni kierunek obu torów obieramy kierunek od miejscowości A do miejscowości B.

a) Podaj prędkości obu pociągów za pomocą liczb względnych!

b) Wyznacz przy pomocy liczb względnych położenie obu pociągów w odniesieniu do miejscowości C w chwilach:

$$-\frac{1}{2} \text{ godz.}, \quad -\frac{1}{3} \text{ godz.}, \quad -\frac{1}{6} \text{ godz.}, \quad +\frac{1}{4} \text{ godz.}, \quad +\frac{3}{4} \text{ godz.}$$

48. Oznaczmy przez l długość drutu miedzianego w temperaturze 0°C , wyrażoną w m , przez L długość tego drutu w temperaturze $t^\circ \text{C}$; w takim razie, jak doświadczenie uczy, mamy wzór: $L = l(1 + 0,00017 \cdot t)$. Oblicz L , jeżeli $l = 8$, zaś t wynosi a) $+4^\circ \text{C}$, b) -5°C , c) $+8^\circ \text{C}$, d) -10°C !

49. Oblicz:

- a) $(+2) \cdot (-3) \cdot (+4)$, $(-3) \cdot (-5) \cdot (-4)$, $(-1) \cdot (+5) \cdot (-6)$;
 b) $(-5) \cdot (-4) \cdot (+7)$, $(+8) \cdot (+2) \cdot (-15)$, $(-6) \cdot (+7) \cdot (-2)$;
 c) $(-2) \cdot (+4) \cdot (-7)$, $(+\frac{1}{2}) \cdot (-6) \cdot (-8)$, $(-\frac{2}{3}) \cdot (-10) \cdot (+9)$;
 d) $(-3) \cdot (-\frac{1}{4}) \cdot (+35)$, $(+5) \cdot (-11) \cdot (-\frac{2}{5})$, $(-\frac{1}{2}) \cdot (+\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{1}{4})$;
 e) $(-3) \cdot (+2) \cdot (-5) \cdot (+7)$, $(-4) \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot (+2)$;
 f) $(+4) \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot (-6) \cdot (-4)$, $(+0,3) \cdot (-10) \cdot (+2) \cdot (-8) \cdot (-1)$.

50. Oznacz i oblicz iloczyn liczb:

- a) $-1, +2, +3$; $+4, -2, -3$; $-5, -7, +1$; $-6, -8, +3$;
 b) $+3, -6, -2$; $-10, +7, -3$; $+9, +6, -5$; $+4, -2, -2$;
 c) $+7, -2, +1, -4$; $-5, +3, +2, -1$; $-3, -2, -1, -11$;
 d) $-2, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, +6, -4$; $+\frac{2}{5}, -10, -\frac{1}{4}, -21, +3$.

51. Oblicz następujące wyrażenia:

- a) $(-1) + (-2) \cdot (+3)$, $4 - (-3) \cdot (+2)$, $-2 - (+4) \cdot (-5)$;
 b) $2 - (-6) \cdot (-1)$, $-5 + (+9) \cdot (-2)$, $-7 + (-3) \cdot (+7)$;
 c) $(+2) \cdot (-5) - 6$, $(-7) \cdot (+3) + (-8)$, $(-11) \cdot (-2) - (+10)$;
 d) $(-6) \cdot (-3) - (-10)$, $(+11) \cdot (-8) - 10$, $(-9) \cdot (+7) + (-12)$;
 e) $(-3) - (+2) \cdot (-4) + (-1) \cdot (+5)$, $(-6) \cdot (+8) - (-3)$.

Uwaga: Najpierw wykonujemy mnożenia, a następnie działania dodawania względnie odejmowania; wyniki mnożenia bierzemy w nawias. Np.: $(-5) + (-4) \cdot (+2) = (-5) + (-8) = -13$.

52. Oblicz następujące wyrażenia:

- a) $(-1 + 5) \cdot (-2 + 3)$, $2 + (4 - 5) \cdot (-8 + 3)$;
 b) $-3 + (5 - 7 + 9) \cdot (-8 + 2)$, $(-9 + 4) \cdot (5 - 7) - 8$;
 c) $1 - [-2 - (-1) \cdot (+2)]$, $(-2 + 7 - 9) \cdot (-5 + 6 - 4) - 10$.

53. Oblicz:

- a) $2a$, $5a$, $(-3)a$, $2a - 5b$, $3a + b - 4c$;
 b) $3a - 5b + 7c - 2d$, $4a - 5b + c - 8d$, $2a - \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}c - d$;
 c) ab , $2ab$, $(-3)ab$, $4abc$, $abcd$;
 d) $2ab + c$, $5ab + cd$, $(-2)ab - cd$, $ab + bc + cd$;
 e) $(a + 2b)c$, $(a - b)c$, $(a + b + c)d$, $(a - b - c)d$;
 f) $(a + b)(c + d)$, $(a - b)(c - 3d)$, $(a + 2b - c)(b - d)$,
 jeżeli $a = -1$, $b = +5$, $c = -2$, $d = -4$.

§ 7. Dzielenie

Iloraz liczb względnych określamy podobnie jak iloraz liczb bezwzględnych.

Ilorazem dwóch liczb nazywamy liczbę, przez którą pomnożona druga liczba daje na wynik pierwszą.

Np.: $(+8) : (+4) = +2$, bo $(+8) = (+4) \cdot (+2)$
 $(-8) : (+4) = -2$, „ $(-8) = (+4) \cdot (-2)$

W ilorazie np. $(+8) : (-4)$ liczbę $+8$ nazywamy dzielną, liczbę -4 dzielnikiem.

Podobnie jak dla liczb bezwzględnych iloraz określamy tylko wtedy, gdy dzielnik jest różny od zera.

Iloraz piszemy również w postaci ułamka.

Np. zamiast $(+8) : (-4)$ piszemy $\frac{+8}{-4}$.

Podobnie $\frac{-8}{-4} = (-8) : (-4)$ itp.

Jeżeli mamy obliczyć iloraz dwóch liczb względnych, np. iloraz $(-8) : (+4)$, to mamy znaleźć taką liczbę x , aby: $(+4) \cdot x = -8$.

Na mocy więc określenia iloczynu, iloczyn liczby 4 przez bezwzględną wartość x równa się 8. Wynika stąd, że bezwzględna wartość liczby x równa się ilorazowi $8 : 4 = 2$. A więc:

Bezwzględna wartość ilorazu równa się ilorazowi bezwzględnych wartości dzielnej i dzielnika.

Zajmiemy się teraz wyznaczaniem znaku ilorazu. Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} (+8) : (+4) &= +2, \text{ bo } (+4) \cdot (+2) = +8, \\ (-8) : (-4) &= +2, \text{ „ } (-4) \cdot (-2) = -8, \\ (+8) : (-4) &= -2, \text{ „ } (-4) \cdot (+2) = +8, \\ (-8) : (+4) &= -2, \text{ „ } (+4) \cdot (-2) = -8. \end{aligned}$$

Widzimy stąd, że reguła znaków przy dzieleniu jest podobna do reguły znaków przy mnożeniu, a mianowicie:

Jeżeli dzielna i dzielnik są tego samego znaku, to iloraz jest dodatni, jeżeli dzielna i dzielnik mają różne znaki, to iloraz jest ujemny.

Jeżeli dzielna jest zerem, a dzielnik jest różny od zera, to iloraz jest zerem. Np. $0 : (+5) = 0$, $0 : (-5) = 0$.

Zadania

54. Oblicz:

- a) $(+5) : (+1)$, $(+7) : (-1)$, $(-3) : (+1)$;
 b) $(-4) : (+2)$, $(+6) : (-2)$, $(-6) : (-3)$;
 c) $(+18) : (-2)$, $(-18) : (+3)$, $(-18) : (-6)$;
 d) $(-30) : (-3)$, $(+30) : (+5)$, $(+30) : (-6)$;
 e) $(-24) : (+6)$, $(+24) : (-3)$, $(+36) : (+6)$;
 f) $(+13) : (-13)$, $(-17) : (+17)$, $(-21) : (-7)$;
 g) $(+50) : (+2)$, $(-50) : (-5)$, $(-50) : (+10)$;
 h) $(+48) : (-12)$, $(+48) : (+6)$, $(-48) : (+16)$;
 i) $(+100) : (+10)$, $(-100) : (+20)$, $(-100) : (-25)$.

55. Oblicz:

- a) $(+238) : (+17)$, $(+714) : (-21)$, $(-357) : (+51)$;
 b) $(+49,2) : (+4,1)$, $(-14,04) : (-2,6)$, $(+3,51) : (-3,9)$;
 c) $(+\frac{1}{3}) : (-\frac{2}{3})$, $(-\frac{3}{16}) : (+\frac{3}{4})$, $(-\frac{7}{12}) : (-\frac{2}{3})$, $(+\frac{6}{11}) : (+\frac{9}{10})$.

56. Oblicz:

- a) $\frac{+16}{+4}$, $\frac{-36}{+12}$, $\frac{+120}{-24}$, $\frac{-280}{-35}$;
 b) $\frac{-84}{+27}$, $\frac{-712}{-456}$, $\frac{+8136}{-273}$, $\frac{+4527}{+312}$;

$$c) \frac{+2,7}{-9}, \frac{-6,4}{-0,16}, \frac{-0,32}{+0,512}, \frac{+1,47}{+2,8};$$

$$d) \frac{+2\frac{1}{5}}{+5\frac{1}{3}}, \frac{-4\frac{3}{8}}{+\frac{1}{4}}, \frac{+\frac{21}{5}}{-1\frac{2}{3}}, \frac{-10\frac{5}{6}}{-2\frac{2}{3}}.$$

57. Jeżeli liczbę jakąś podzielimy przez -1 , to otrzymamy liczbę przeciwną. Podaj przykłady!
58. Ktoś miał 15 dolarów majątku; przyrost majątku wskutek zmiany kursu dolara wynosi: a) $+4,5$ zł, b) $-4,5$ zł. Oblicz zmianę kursu dolara!
59. Ktoś miał 18 dolarów długu; przyrost majątku wskutek zmiany kursu wynosi: a) $+5,4$ zł, b) $-4,14$ zł. Oblicz zmianę kursu!
60. Ktoś miał majątek umieszczony w dolarach.
I. Kurs dolara zmienił się o $+0,3$ zł, wskutek czego przyrost majątku wynosił: a) $+360$ zł, b) -510 zł; ile wynosił majątek?
II. Kurs dolara zmienił się o $-0,5$ zł, wskutek czego przyrost majątku wynosił: a) $+650$ zł, b) -140 zł; ile wynosił majątek?
61. Auto jedzie po prostej drodze z prędkością 55 km na godzinę. Jako kierunek dodatni drogi obieramy kierunek jazdy, a jako początek drogi most, znajdujący się na tej drodze. Czas przed przejazdem auta przez most liczymy jako ujemny, a po przejeździe jako dodatni. Jakim czasem odpowiadają położenia auta, określone liczbami: -165 km; -82 km; -41 km; $+44$ km; $+58$ km?

62. Oblicz:

$$a) (-2 + 3) : (-5 + 1), \frac{-2 + 7}{-4 + 2}, (-5 + 2 - 1) : (4 - 8 - 1);$$

$$b) \frac{(-2) - (-8)}{(-7) + (-4)}, \frac{(-2) \cdot (+5)}{(-3) \cdot (+8)}, \frac{2 - (-7) \cdot (+3)}{-5 + (-2) \cdot (+4)};$$

$$c) \frac{(-11) \cdot (+2) - (-5) \cdot (+3)}{1 + (-4) \cdot (+8)}, \frac{(-5 + 7 - 3) \cdot (2 - 1 - 4)}{(12 - 8) + (+5) : (-3)};$$

$$d) (3 - 4) \cdot (-8) - \frac{2 - 7}{4 - 19}, \frac{5 - (+3) \cdot (-4)}{(-2) \cdot (+5)} - (-4 + 6) \cdot (8 - 7).$$

Uwaga. Wartość ułamków, jak np. $\frac{-1 + (-3) \cdot (+4)}{-2 + (-5) \cdot (-3)}$, obliczamy obliczając osobno wartość licznika i osobno wartość mianownika, a następnie dzielimy wyniki przez siebie. Liczymy zatem:

$$-1 + (-3) \cdot (+4) = -1 + (-12) = -13.$$

$$-2 + (-5) \cdot (-3) = -2 + (+15) = +13.$$

$$\text{A więc: } \frac{-1 + (-3) \cdot (+4)}{-2 + (-5) \cdot (-3)} + \frac{-13}{+13} = -1.$$

Jeżeli w wyrażeniach występują takie ułamki, to najpierw obliczamy wartości tych ułamków, a następnie wykonujemy dzielenie, potem mnożenie, a w końcu dodawanie i odejmowanie.

Np.:

$$\frac{(-4) \cdot (+6) + 3}{(-8) \cdot (-2) + 4} + (-2) \cdot (+5) = \frac{(-24) + 3}{(+16) + 4} + (-10) = \frac{-21}{+20} + (-10) = (-1,05) + (-10) = -11,05.$$

63. Oblicz:

$$a) \frac{a}{b}, \frac{2a}{3b}, \frac{(-4)a}{(+5)b}, \frac{a-b}{c}, \frac{a+2b}{c}, \frac{2a+4b}{c+d};$$

$$b) \frac{a+b-8c}{a-b}, \frac{2a-3b+4d}{3a-2c}, \frac{(a+b)c}{(c-d)a}, ab + \frac{5c}{d-a};$$

$$c) (a+b)c - \frac{3d-a}{b}, \frac{2abc}{d}, \frac{(a+2b+d)c}{a-2c};$$

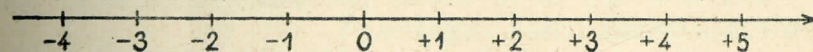
$$d) \frac{(3ab-c)(c-d)}{a-b}, \frac{(a+b)(c+d)}{(a-b)(c-d)}, \frac{(2a-3b)(c-2d)}{4-3ab};$$

$$e) \frac{a+b}{c} - \frac{b+d}{a} + \frac{b}{c}, \frac{a-2b}{3+d} - \frac{3a+b}{c-8} + \frac{d}{2c+4d},$$

$$\text{jeśli } a = -2, b = -1, c = +3, d = +1.$$

§ 8. Porównywanie liczb względnych

Nierówności pomiędzy liczbami względnymi tak określimy, że jeśli będziemy poruszać się po osi liczbowej w kierunku dodatnim, to będziemy napotykać na coraz to większe liczby.



Rys. 10.

1. Jakakolwiek liczba dodatnia jest większa od jakiegokolwiek liczby ujemnej.

Np. $+3$ jest większe od -4 , co piszemy: $+3 > -4$.

Mówimy również -4 jest mniejsze od $+3$, co piszemy:

$$-4 < +3.$$

Podobnie: $-1 < +2$, $-6 < +4$ itd.

2. Z dwóch liczb dodatnich ta jest większa, której bezwzględna wartość jest większa.

Np.: $+3 < +5$, $+6 > +2$, $+1 < +2$.

3. Z dwóch liczb ujemnych ta jest większa, której bezwzględna wartość jest mniejsza.

Np.: $-3 < -1$, $-2 > -5$, $-100 < -2$.

4. Liczba 0 jest mniejszą od każdej liczby dodatniej, a większą od każdej liczby ujemnej.

Np.: $0 < +5$, $0 < +1$, $+2 > 0$, $-1 < 0$, $-6 < 0$.

Uwaga. Dla zaznaczenia, że jakaś liczba a nie jest większą od b , piszemy: $a \leq b$,
co czytamy: a jest niewiększe od b , albo a jest mniejsze lub równe b .

Podobnie piszemy: $a \geq b$
(czytaj: a jest większe lub równe b , albo a jest niemniejsze od b),
co wyraża, że a nie jest liczbą mniejszą od b .

Np.: $-1 \leq +2$, $+5 \leq +7$, $-3 \geq -10$.

Jeżeli dwie liczby, np. a , b , nie są równe, to zaznaczamy to pisząc: $a \neq b$ lub $b \neq a$, czytamy a różne od b , b różne od a .

Np.: $-1 \neq +2$, $-5 \neq -6$ itp.

Zadania

64. Uporządkuj następujące liczby według wielkości:

a) 1 , $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $+5$, -6 ; -1 , 0 , $-\frac{1}{4}$, $+2$, $+3$, -3 ;

b) $-\frac{1}{2}$, -1 , $-1\frac{1}{2}$, $+1$, -2 , $+3$, -6 , $+1\frac{1}{2}$. Rysunek!

65. Ustaw według kolejności następujące chwile, wyrażone liczbami względnymi (w min.):

a) $+1$, -5 , -6 , 0 , $+2$, b) -2 , $+4$, -3 , -1 , $+5$, $+6$
i przekonaj się, że ta chwila jest wcześniejsza, której odpowiada mniejsza liczba względna!

66. Z dwóch temperatur ta jest wyższa, której odpowiada większa liczba względna. Podaj przykłady!

67. A posiada -5 zł majątku, B zaś $+3$ zł; kto ma więcej?

68. Obierz trzy liczby a , b , c tak, aby:

a) $a < b$ i $b < c$, b) $a > b$ i $b > c$.

Porównaj następnie liczby a i c ; co zauważysz?

69. Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{|x-y|+x+y}{2}$, jeśli:

a) $x=5$, $y=3$, b) $x=-2$, $y=+1$;

c) $x=-4$, $y=-1$, d) $x=-8$, $y=-2$.

Przekonaj się, że wartość wyrażenia równa się większej z liczb x i y !

70. Wyznacz x tak, by $|x-5|=1$.

71. Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{1}{2} \cdot |x+1| - |x-1| + |x-3| - \frac{1}{2} \cdot |x-5|$ dla x całkowitych większych od -8 , a mniejszych od $+8$.

72. Podaj wszystkie liczby całkowite x spełniające nierówności: $x > -7,5$ i $x < -\frac{3}{4}$.

Rozdział III

Własności sumy

§ 1. Oznaczanie liczb przeciwnych

Jeżeli a oznacza dowolną liczbę względną, to symbolem $+a$ oznaczamy tę samą liczbę co a , zaś symbolem $-a$ liczbę przeciwną do a .

Np.: Jeżeli $a = +3$, to $+a = +3$, $-a = -3$,

„ $a = -5$, to $+a = -5$, $-a = +5$,

$+(+5) = +5$, $- (+5) = -5$, $+(-5) = -5$, $-(-5) = +5$.

Widzimy stąd, że $+a$ nie oznacza koniecznie liczby dodatniej, ani $-a$ nie musi być liczbą ujemną.

Nawias wraz z wyrażeniem w nim zawartym oznacza liczbę, którą otrzymamy obliczając wyrażenie zawarte w nawiasie. Zatem przed nawiasem możemy kłaść również znak $+$ lub $-$. Np.:

$+(-7+5) = +(-2) = -2$; $-(-7+5) = -(-2) = +2$,

$+(a-b) = a-b$; $-(a-b)$ oznacza liczbę przeciwną do $a-b$,

$-(-3+8+4) = -(+9) = -9$.

Zadania.

1. Ile to jest:

a) $+(+3)$, $+(-4)$, $-(+8)$, $-(-6)$;

b) $-(+3)$, $+(+1)$, $-(-2)$, $+(+1)$;

c) $-(-x)$, $+(+a)$, $-(+x)$, $+(-a)$;

d) $-[+(-6)]$, $+[-(+a)]$, $-[-[-(+1)]]$.

2. Oblicz:

a) $+(-8+15)$, $+(-12+4)$, $-(-13+7)$;

b) $-(-11-27)$, $-(17-26)$, $+(-11-14)$;

c) $-(-8-10+17)$, $-(28-16-4)$;

d) $-[+(-4+5)]$, $-[-(2-3)]$;

e) $+[-[-(-3+5+6)]]$, $-[-[-(-2-3+9)]]$.

3. Oblicz:

- a) $-[+(a-b)], +\{-[-(a-b-c)]\};$
 b) $-\{+[-(3-a)]\}, -\{-[-(-4+a-b+c)]\};$
 jeśli $a = -1, b = +5, c = -8.$

§ 2. Suma algebraiczna

Utwórzmy sumę kilku liczb, np. $a, -b, -c, d, -9.$

Sumą ich jest: $a + (-b) + (-c) + d + (-9).$

Zamieńmy dodawanie liczb $-b, -c, -9$ na odejmowanie liczb przeciwnych, tj.: $+b, +c, +9.$

Otrzymamy: $a - (+b) - (+c) + d - (+9).$

Wyrażenie to możemy napisać bez użycia nawiasów:

$$a - b - c + d - 9.$$

Zatem sumę kilku liczb (czy to danych, czy to oznaczonych literami) otrzymamy pisząc je obok siebie z ich znakami. Jeżeli przed liczbą nie stoi znak, to możemy ją poprzedzić znakiem $+$.

Podobnie sumą liczb $-a, 7, -b, c, -6$ jest:

$$-a + 7 - b + c - 6;$$

$$(-x) + y + (-9) + z + 8 = -x + y - 9 + z + 8.$$

Na odwrót wyrażenie $a - b + c - d$ jest sumą algebraiczną liczb $a, -b, c, -d.$ Z tego powodu wyrażenie powyższe będziemy uważać za sumę algebraiczną. Składniki tej sumy otrzymamy pisząc przed liczbami a, b, c, d (tj. przed tymi liczbami, na których mamy wykonać dodawania wzgl. odejmowania) znaki, stojące przed nimi w danym wyrażeniu.

Podobne wyrażenie $-3 + a - b + 9$ jest sumą algebraiczną o wyrazach (składnikach): $-3, +a, -b, 9.$

Wyrażenie $-(-3) + (-5) + a - (-b)$ jest sumą algebraiczną o wyrazach:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 3 & & -5 & & a & & -b \\ \text{czyli:} & & & & & & & & \end{array}$$

$$\text{Zatem: } -(-3) + (-5) + a - (-b) = 3 - 5 + a + b;$$

$$-a + (-5) - b + (-c) = -a - 5 - b - c.$$

Zadania

4. Wypisz wyrazy sumy algebraicznej:

- a) $-1 + 3 - 5 - 6, 4 - 2 - 7 + 11 + 5, -8 + 3 - 2 + 11;$
 b) $a - b + c - d, x - y - z + u, a - b - c - d + e;$
 c) $a - 3 + b - c, -4 + x - y - 5 + z - 8 + u;$
 d) $(-2) + (+3) - (+4), 8 + (-1) - (-7) - (-2) + (-9);$
 e) $(-3) + a - (-5) - b, 7 - x + (-4) - y + (+3) + z.$

5. Przedstaw wyrażenia jako sumy:

- a) $a - b; b) a + b - c; c) -a - c + b; d) -a - 7 + b;$
 e) $-a + 6 - c + 8; f) -a - b + 5 - d; g) a - b + c - d.$

6. Oblicz sumy algebraiczne poprzedniego zadania, jeśli:

$$a = -5, b = +3, c = -2, d = +1.$$

Np. Obliczyć sumę algebraiczną $a - b + c - d$

$$\text{dla: } a = -1, b = +3, c = -4, d = +2!$$

Wyrazami tej sumy są: $a, -b, c, -d$, t. j. $-1, -3, -4, -2.$

Zatem wartość tej sumy wynosi: $-1 - 3 - 4 - 2 = -10.$

7. Oblicz:

- a) $(a - b) - (c - d), a - (b - c - d);$
 b) $-a - (-b + c + d), -(a + b) + (c + d);$
 c) $-(a - b + c) - d, -(-a + b) - (c - d),$
 jeśli $a = -2, b = +4, c = -1, d = -8.$

§ 3. Prawo przemienności i łączności sumy

Określiśmy sumę i różnicę liczb względnych. Nie tylko dodawanie, lecz i odejmowanie jest zawsze możliwe. Poznamy teraz pewne własności sumy.

Prawo przemienności

Jeżeli w sumie $(-1) + (+5)$ zmienimy porządek składników, otrzymamy sumę: $(+5) + (-1).$ Wartości obu sum są równe i wynoszą $+4.$ Zatem: $(-1) + (+5) = (+5) + (-1).$

Podobnie:

$$(+5) + (-3) = (-3) + (+5); (-7) + (-6) = (-6) + (-7).$$

Zmieńmy w sumie: $(-2) + (+3) + (-5) + (+1)$ w dowolny sposób porządek składników; utwórzmy np. sumę:

$$(-5) + (+1) + (+3) + (-2).$$

Wartości obu sum są znowu równe i wynoszą $-3.$ Zatem:

$$(-2) + (+3) + (-5) + (+1) = (-5) + (+1) + (+3) + (-2).$$

$$\text{Podobnie: } (-2\frac{1}{2}) + (+1\frac{1}{2}) + (-6) = (+1\frac{1}{2}) + (-6) + (-2\frac{1}{2}).$$

Własność powyższą sumy wypowiadamy w następujący sposób: Wartość sumy nie zależy od porządku składników. Jest to tzw. prawo przemienności sumy.

Suma $-2 + 3 - 5$ ma składniki: $-2, +3, -5.$ Zmieniając porządek składników otrzymamy:

$$-2 + 3 - 5 = -5 + 3 - 2 = 3 - 2 - 5 \text{ itp.}$$

$$(-3) + 5 - 7 + (-8) = -7 + 5 + (-8) + (-3) = 5 - 7 + (-3) + (-8);$$

$$5 - 3 = -3 + 5; -5 - 3 = -3 - 5; -5 + 3 = 3 - 5$$

Jeżeli a, b, c, d oznaczają dowolne liczby względne, to:

$$a + b = b + a; \quad a + b + c = a + c + b = b + c + a; \\ a - b = -b + a; \quad a - b + c - d = -d + a - b + c = c - b - d + a.$$

Uwaga: W wyrażeniu jak np.: $5 - 3 + 7 - 6$ nie mogliśmy w zakresie liczb bezwzględnych zmieniać dowolnie porządku wyrazów. Np. wyrażenie: $5 - 3 - 6 + 7$ nie oznacza w zakresie liczb bezwzględnych. Po wprowadzeniu liczb względnych, możemy porządek wyrazów dowolnie zmieniać. Upraszcza to często rachunki. Jest to ważna korzyść, którą dają liczby względne.

Zadania

8. Zmień w następujących sumach kilkoma sposobami porządek składników i oblicz za każdym razem sumę:

$$\begin{array}{ll} a) (+2) + (-3); & b) (-2) + (-5) + (+7); \\ c) -1 + 2 - 6; & d) +5 - 8 + 3 - 4. \end{array}$$

9. Kupiec zarobił 126 zł, potem stracił 16 zł i znowu stracił 15 zł, potem zarobił 53 zł i wreszcie stracił 32 zł. Wyraż ostateczną zmianę stanu majątku kupca jako sumę kolejnych zmian i oblicz tę sumę! Czy ostateczna zmiana zależy od porządku, w jakim kolejne zmiany następowały?

Prawo łączności

Zastąpmy w sumie np. $(-1) + (+3) + (+4) + (-5)$ składniki $+3$ i -5 ich sumą -2 . Otrzymamy sumę:

$$(-1) + (-2) + (+4).$$

Wartości obu sum są równe i wynoszą $+1$.

$$\text{Zatem: } (-1) + (+3) + (+4) + (-5) = (-1) + (-2) + (+4).$$

Sumę składników $+3$ i -5 możemy również zaznaczyć przy pomocy nawiasu. Zatem:

$$(-1) + (+3) + (+4) + (-5) = (-1) + [(+3) + (-5)] + (+4).$$

$$\text{Podobnie: } (-1) + (-2) + (+3) = [(-1) + (+3)] + (-2),$$

$$(-\frac{1}{2}) + (-4) + (+2\frac{1}{2}) + (-3) = (-4) + [(-\frac{1}{2}) + (+2\frac{1}{2}) + (-3)].$$

Własność powyższą sumy wypowiadamy: W sumie możemy dowolne składniki zastąpić ich sumą.

Własność ta nosi nazwę prawa łączności sumy.

Łącząc obie własności sumy możemy powiedzieć, że w sumie możemy dowolnie zmieniać porządek składników i dowolne składniki zastępować ich sumą.

W sumie $-2 + 3 - 5 + 7$ zastąpmy składniki $-2, +7$ ich

$$\text{sumą: } (-2 + 7); \text{ zatem: } -2 + 3 - 5 + 7 = (-2 + 7) + 3 - 5; \\ 4 - 5 - 6 + 7 - 8 = (-5 + 7) + (4 - 8) - 6.$$

Jeżeli a, b, c, d, e oznaczają dowolne liczby, to możemy napisać:

$$a + b + c + d + e = a + (b + c + d) + e = a + (b + c) + (d + e) = \\ = b + (a + e + c) + d = (b + d) + (c + e) + a \text{ itp.}$$

W sumie algebraicznej $a - b - c + d$ zastąpmy wyrazy $-b, -c$ ich sumą: $(-b - c)$; otrzymamy $a - b - c + d = a + (-b - c) + d$. Podobnie w sumie $-a + b - c - d + e$ zastąpmy wyrazy $-a, +e$ sumą $(-a + e)$, jako też wyrazy $+b$ i $-c$ ich sumą $(+b - c)$. Otrzymamy:

$$\begin{aligned} -a + b - c - d + e &= (-a + e) + (+b - c) - d, \\ -5 + a - b - 6 + b + 8 &= (-5 - 6 + 8) + a + (-b + b) = \\ &= -3 + a = a - 3. \end{aligned}$$

Uwaga. W sumie możemy nie tylko nawiasy umieszczać, możemy również na odwrót nawiasy opuszczać. Np.:

$$\begin{aligned} [(-1) + (+3)] + [(-4) + (+2)] &= (-1) + (+3) + (-4) + (+2); \\ a + (b + c) &= a + b + c; \\ a + (b + c + d + e) &= a + b + c + d + e; \\ a + (b + c) + (d + e) &= a + b + c + d + e. \end{aligned}$$

W sumie: $a + (b - c)$ wyrażenie w nawiasie jest sumą składników $+b, -c$.

$$\text{Zatem: } a + (b - c) = a + b - c.$$

$$\text{Podobnie: } a + (-b + c - 5) = a - b + c - 5;$$

$$a + (-3 + b) + (-5 - c) = a - 3 + b - 5 - c.$$

Z powyższych przykładów widzimy, że: Jeżeli w sumie przed nawiasem znajduje się znak $+$, to nawias ten i znak możemy opuścić.

Jeżeli przed pierwszym wyrazem w nawiasie nie znajduje się żaden znak, to wyobrażamy sobie, że znak $+$ poprzedza ten wyraz. Należy zatem po opuszczeniu nawiasu przed tym wyrazem umieścić znak $+$.

$$\begin{aligned} \text{Np.: } a - b + (c - d) &= a - b + c - d \\ a + b - c + (-d - e) &= a + b - c - d - e \\ a + (-b - c) + d &= a - b - c + d \\ -1 + (-3 + 5) + (7 - 8) &= -1 - 3 + 5 + 7 - 8. \end{aligned}$$

Zadania

10. Oblicz:

$$\begin{array}{l} a) (+18) + (-9) + (-21) + (+4) + (-5); \\ b) (-17) + (+13) + (+8) + (12) + (-10) + (-6); \\ c) (-16) + (-4) + (+7) + (+13) + (-15) + (-9). \end{array}$$

Uwaga: Utwórz sumę składników dodatnich, następnie ujemnych, a wreszcie sumę wyników!

$$\text{Np.: } (+5) + (-4) + (+3) + (-9) = (+8) + (-13) = -5.$$

11. Oblicz:

- $(-58) + (+4) + (-9) + (+58) + (+9) + (-2);$
- $(+19) + (-5) + (-4) + (-19) + (+5) + (+8);$
- $(-2) + (+4\frac{1}{2}) + (+6) + (-4\frac{1}{2}) + (-6) + (-5);$
- $(+13) + (+17) + (-7) + (-17) + (-13) + (+7).$

Uwaga: Połącz po dwa składniki, z których jeden jest liczbą przeciwną do drugiego, a potem obliczaj!

$$\begin{aligned} \text{Np.: } & (-7) + (+4) + (+7) + (-4) + (+3) = \\ & = [(-7) + (+7)] + [(+4) + (-4)] + (+3) = 3. \end{aligned}$$

12. Oblicz:

- $1 + 2 - 3 - 5 + 8, \quad -4 + 14 + 3 - 11 + 8 - 2;$
- $-7 + 11 + 3 - 6 + 4, \quad -9 + 7 - 8 - 3 + 13;$
- $-11 + 2 + 7 - 9 + 5 - 1, \quad 2 - 6 - 15 + 23 + 5;$
- $-8 + 7 + 3 + 8 - 7 + 2, \quad 4 - 16 - 9 + 16 - 3 + 1.$

Uwaga: Łącz najpierw wyrazy przeciwne, następnie utwórz sumę wyrazów dodatnich, potem sumę wyrazów ujemnych, wreszcie dodaj oba wyniki.

$$\begin{aligned} \text{Np.: } & -4 + 8 - 5 + 7 - 8 + 3 = \\ & = (8 - 8) + (7 + 3) + (-4 - 5) = 10 + (-9) = 1. \end{aligned}$$

13. W następujących wyrażeniach zastąp liczby dane ich sumą:

- $(-3) + a + (-4) + b + (+4) + (+3);$
- $(+\frac{2}{3}) + a + b + (+8) + (-\frac{2}{3});$
- $(-\frac{4}{5}) + a + (+7) + (+\frac{4}{5}) + (-7) + (+1);$
- $(+11) + x + (-13) + (-11) + y + (+13).$

14. Przedstaw w najprostszej postaci następujące wyrażenia:

- $-4 + a - 5 + 8 - a + 3, \quad -a + 4 - b + a + 1;$
- $a - 11 + b - a + 12, \quad b - a + a - 1 + 1;$
- $a - a + a - a + a + 3, \quad -a + 1 + a - 1 + 4;$
- $a - b + c - a + b + 8, \quad -\frac{5}{2} + 1 - a + \frac{3}{2} + 5;$
- $\frac{5}{4} - a + \frac{1}{4} - 3 + a - 1, \quad -\frac{1}{3} + 4 + a - b + b.$

15. Uwolnij od nawiasów i sprowadź do najprostszej postaci:

- $4 + (-3 + a) + (-4 + 3), \quad -2 + (-5 + 8) + (7 - a);$
- $a + (-b + c) + d, \quad x + (y - z) + (-y + z);$
- $c + (a - c + b - d), \quad z + (-x - y + u - z);$
- $x + (y - z) + (z + u - y), \quad (a - b) + (b - c) + (c - d).$

16. O ile zmieni się suma dwóch liczb, jeżeli:

- do pierwszej dodamy $+5$, do drugiej dodamy $+3$
- " " " -4 " " " $+2$
- od " odejmiemy -5 " " " $+4$
- " " " -7 od " odejmiemy -5 ?

Uwaga. Oznaczmy te liczby przez a i b . Sumą ich jest $a + b$; jeżeli do pierwszej dodamy -9 , od drugiej odejmiemy $+3$, otrzymamy sumę:

$$(a - 9) + (b - 3) = a - 9 + b - 3 = a + b - 9 - 3 = a + b - 12.$$

A więc suma zmalała o 12.

17. Zaznacz sumę następujących wyrażeń, a następnie sprowadź do najprostszej postaci.

- $2 - 5, \quad -3 + 1, \quad 4 + 6 - 8;$
- $a - b + c, \quad b - d + e;$
- $-b - c, \quad a + b + 5;$
- $a + b - c, \quad -b + d + 6, \quad -a + c;$
- $x - 5 - z, \quad y + 7 - u, \quad u + 6.$

18. Ktoś zarobił 215 zł, potem wydał 150 zł i znowu wydał 42 zł. Następnie zarobił 160 zł i 86 zł, a w końcu wydał 102 zł; wyraż ostateczną zmianę jego majątku jako sumę kolejnych zmian! Oblicz tę sumę obliczając najpierw sumę zmian, wyrażających zarobki, a następnie sumę zmian, wyrażających wydatki!

Odejmowanie sum algebraicznych

Niechaj a, b, c, d oznaczają dowolne liczby względne. Sumą ich jest wyrażenie: $a + b + c + d$.

Liczbami przeciwnymi są: $-a, -b, -c, -d$; sumą tych liczb jest wyrażenie: $-a - b - c - d$.

Dodajmy do siebie obie sumy. Otrzymamy wyrażenie:

$$(a + b + c + d) + (-a - b - c - d).$$

Opuszczając nawiasy otrzymamy:

$$a + b + c + d - a - b - c - d.$$

Pisząc liczby przeciwne obok siebie dostaniemy:

$$a - a + b - b + c - c + d - d = 0.$$

Zatem: $(a + b + c + d) + (-a - b - c - d) = 0$.

Wynika stąd, że wartości sum: $a + b + c + d$ i $-a - b - c - d$ są przeciwne. Ponieważ wartością przeciwną sumy $a + b + c + d$ jest wyrażenie:

$$-(a + b + c + d) = -a - b - c - d.$$

Możemy więc powiedzieć: Wartość przeciwną sumy otrzymamy tworząc sumę przeciwnych składników (czyli zmieniając znaki wyrazów).

Np. Następujące sumy mają wartości przeciwne:

$$\begin{aligned} &(-3) + (-5) \text{ i } (+3) + (+5), \\ &(-1) + (+2) + (-3) \text{ i } (+1) + (-2) + (+3). \end{aligned}$$

Suma algebraiczna np. $a - b + c - d$ ma wyrazy $a, -b, +c, -d$. Przeciwnymi wyrazami są: $-a, +b, -c, +d$.

Więc: $-(a - b + c - d) = -a + b - c + d$.

Podobnie: $-(-a - b + c - d) = a + b - c + d$.

Jeżeli mamy różnicę: $a - (b - c + d - e)$, to należy do a dodać wartość przeciwną sumy zawartej w nawiasie; mamy zatem do a dodać $-b + c - d + e$.

Otrzymamy: $a + (-b + c - d + e) = a - b + c - d + e$.

A więc: $a - (b - c + d - e) = a - b + c - d + e$.

Widzimy więc, że sumę algebraiczną odejmujemy dodając po kolei wyrazy przeciwne do wyrazów danej sumy.

Możemy również powiedzieć: Jeżeli w sumie algebraicznej przed nawiasem znajduje się znak $-$, to znak ten i nawias możemy opuścić zmieniając równocześnie znaki wyrazów stojących w nawiasie.

$$\begin{aligned} \text{Np.: } a - (b + c - d) &= a - b - c + d; & a - (-b - c + d) &= \\ &= a + b + c - d; & a - (b + c + d) &= a - b - c - d; \\ -2 - (3 - 5 + 7) &= -2 - 3 + 5 - 7. \end{aligned}$$

Zadania

19. Uwolnij od nawiasów:

$$\begin{aligned} a) &-(2 - b), & -(a - 5 + b), & -(-4 - a + b); \\ b) &-(7 + a + b + c), & -(a - b + c - d); \\ c) &-(x - y + z - u), & -(-4 + a - b + c + d - e). \end{aligned}$$

20. Podaj przeciwną wartość wyrazów:

$$\begin{aligned} a) &a - b, & b - a - c, & c + a - b, & a - c - b; \\ b) &a + b + c - d, & a - b - c + d, & -a - b + c + d; \\ c) &x - y + z - u + w, & x - y - z + u - w. \end{aligned}$$

21. Uwolnij od nawiasów i sprowadź do najprostszej postaci:

$$\begin{aligned} a) &a - (b - c), & a + 4 - (5 + a), & -7 - (8 - a) + 5; \\ b) &a - (b - 4) - (c + 5), & b - (a - c + b - 7) + (8 + a); \\ c) &(b - a) - (b - c) - (c - d), & -(a - b) - (-c); \\ d) &a + b - (a - c + d) - (b - c); \\ e) &-(a + b - c) - (c + d - 7) + (-7). \end{aligned}$$

22. Odejm:

$$\begin{aligned} a) &a - b \text{ od } c - d, & a - 2 \text{ od } -3 + a; \\ b) &3 - a - b \text{ od } -5 - d, & a + b - c \text{ od } b - d + c \end{aligned}$$

i sprowadź do najprostszej postaci.

23. O ile zmieni się różnica dwóch liczb, jeżeli:

$$\begin{aligned} a) &\text{do odjemnej dodamy } -3, \text{ do odjemnika dodamy } +4; \\ b) &" & " & " & +7, \text{ od } " & \text{odejmiemy } -6; \\ c) &\text{od } " & \text{odejmiemy } -6, & " & " & +9; \\ d) &" & " & " & +9, \text{ do } " & \text{dodamy } -10. \end{aligned}$$

§ 4. Uwalnianie od nawiasów

Twierdzenia, poznane w poprzednich ustępach, pozwalają uwolnić się od nawiasów w sumach algebraicznych.

$$\begin{aligned} \text{Np.: } (2 - a) - (b - 3) + (c - 7) &= 2 - a - b + 3 + c - 7 = \\ &= -2 - a - b + c; \end{aligned}$$

$$(a - x) + (x - b) - (c - b) = a - x + x - b - c + b = a - c.$$

Jeżeli w sumie algebraicznej występują nawiasy w nawiasach, to aby nie popełnić błędu, należy się od tych nawiasów uwalniać po kolei. Np.:

$$a - [b - (c + d)].$$

Uwalniamy się najpierw np. od nawiasu $()$;

$$\text{otrzymujemy: } a - [b - c - d] = a - b + c + d.$$

Moglibyśmy postąpić odwrotnie. Należy wtedy pamiętać, że $-(c + d)$ jest wyrazem sumy zawartej w nawiasie $[]$. A więc:

$$a - [b - (c + d)] = a - b + (c + d) = a - b + c + d.$$

$$\begin{aligned} \text{Podobnie: } a - [c - d - (e - f) + (g - h)] &= \\ = a - c + d + (e - f) - (g - h) &= a - c + d + e - f - g + h. \end{aligned}$$

W sumie algebraicznej możemy również nawiasy wprowadzać.

$$\begin{aligned} \text{Np.: } a - b - c &= a - (b + c); \\ a - b + c - d &= a + (-b + c) - d; \\ a - b + c - d &= a - (b - c + d). \end{aligned}$$

Uwaga. Przy pomocy przekształceń sum algebraicznych możemy otrzymywać rozmaite twierdzenia.

$$\text{Np.: } (a - b) + c = a - b + c = a + c - b = (a + c) - b.$$

$$\text{Zatem: } (a - b) + c = (a + c) - b.$$

Wzór powyższy możemy wyrazić słowami: Do różnicy dodajemy liczbę dodając tę liczbę do odjemnej.

$$(a - b) + c = a - b + c = a - (b - c).$$

$$\text{Zatem: } (a - b) + c = a - (b - c).$$

A więc: Do różnicy dodajemy liczbę odejmując ją od odjemnika.

Mamy: $a - (b - c) = a - b + c$.

Więc różnicę odejmujemy odejmując odjemną, a następnie dodając odjemnik. Wzór powyższy w zakresie liczb bezwzględnych nie był zawsze ważny. Np. nie mogliśmy napisać $7 - (10 - 4) = 7 - 10 + 4$, gdyż wyrażenie $7 - 10 + 4$ w zakresie liczb bezwzględnych nie dało się obliczyć.

Wzór $a - (b - c) = a - b + c$ w zakresie liczb bezwzględnych był ważny tylko przy dodatkowych założeniach $a \geq b$ i $b \geq c$. W zakresie liczb względnych wzór ten jest natomiast zawsze słuszny. Widzimy tutaj nową korzyść, jaką dają liczby względne.

Zadania

24. Oblicz następujące wyrażenia: a) wykonując naznaczone działania, b) uwalniając się najpierw od nawiasów:
- $16 - (2 - 3) - (3 - 4); 4 - 8 - (7 - 20) + (4 - 15);$
 - $(-12 + 4) - \{20 - [(7 - 15) - (25 - 8 - 30)]\};$
 - $- \{ - [6 - (2 - 3)] \} - \{ 2 - [-7 - (8 - 11)] \};$
 - $7 - [-4 - (2 - 5)] - [-9 - (-6) - (-4)].$
25. Uwolnij się od nawiasów i przedstaw najprościej:
- $(5 - a) - (b + 6) + (c - 8); (a - 7) - (b - 3) - (a + 6);$
 - $(x - 3) - (x - y + z) - (-4); (x + y) - (x - 4) - (y + z);$
 - $a + [b - (c - d)]; a - [b + (c + d - e)];$
 - $a - [b - (c - d - e)]; a - [b - (c + d) - (e - f)];$
 - $x - [x - (4 + y) + 5 - (7 - y)];$
 - $[a - (b - c)] - [a - (d + e)] + [b - (c + d)];$
 - $\{a - [b - (c - d)]\} - \{a - [b - (e - f)]\}.$
26. a) Ktoś miał a zł majątku, a następnie przyrosty wynosiły: -6 zł, b zł, $+5$ zł; zaznacz w najprostszy sposób stan końcowy. Ile wynosi b , jeżeli stan końcowy wynosi również a zł?
- b) Ktoś miał a zł majątku, następnie zyskał b zł, potem wydał $(a - 3)$ zł, a wreszcie zyskał $(a - b)$ zł; jaki jest stan końcowy majątku?
- c) Ktoś miał a zł majątku, następnie zyskał 5 zł, w końcu wydał 7 zł; zaznacz w najprostszy sposób stan końcowy; ile miał na początku, jeśli na końcu posiadał 9 zł?
27. Temperatura wynosiła w pewnym momencie: $+10^\circ \text{C}$, potem co godzinę zaznaczono następujące zmiany: -4°C , $+5^\circ \text{C}$, $x^\circ \text{C}$, $+2^\circ \text{C}$; zaznacz stan końcowy temperatury; jaka była zmiana, oznaczona literą x , jeżeli stan końcowy wynosił $+15^\circ \text{C}$?
28. a) Jeżeli na osi liczbowej punkty A i B mają odpowiednio współrzędne a , b , wówczas miara algebraiczna wektora $\overline{AB}$

wynosi: $b - a$. Sprawdź przyjmując a, b odpowiednio: a) $+5, +7$; b) $-3, +4$; c) $+2, -1$; d) $-3, -5$. Rysunek!

- b) Miara algebraiczna wektora $\overline{AB}$ wynosi a ; zaznacz miarę algebraiczną wektora $\overline{BA}$; podaj przykłady liczbowe!
- c) Punkty A, B, C na osi liczbowej mają odpowiednio współrzędne a, b, c ; zaznacz miary algebraiczne wektorów $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$; ile wynosi suma miar algebraicznych tych wektorów? Sprawdź przyjmując a, b, c odpowiednio: a) $-1, +2, +3$; b) $+3, -4, -1$. Rysunek!
- d) Miara algebraiczna wektora $\overline{AB}$ jest x ; jaka jest współrzędna punktu B , jeżeli współrzędna punktu A jest a ; jaka jest współrzędna punktu A , jeżeli współrzędna punktu B jest b ? Podaj przykłady liczbowe!

29. Do liczby a dodano $+5$, następnie b , w końcu -3 i otrzymano na wynik: -4 ; ile wynosi suma liczb a i b ?
30. Uczeń miał obliczyć wyrażenia: $-3 + x - 5$ przyjmując za x pewną liczbę; pomylił się i obliczył wyrażenie $-3 + x + 5$; jaka była pomyłka w wyniku?
31. Z punktu O na osi wylatują dwa punkty równocześnie, jeden z prędkością v cm/sek., drugi z prędkością u cm/sek. Oznaczając przez B i C położenie tych punktów po sekundzie podaj miary algebraiczne wektorów: $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{AB}$.
32. Punkt poruszył się z początku układu o a jednostek na prawo, następnie o b jednostek na lewo, a w końcu o c jednostek na prawo. Jaka jest współrzędna końcowego położenia, jeżeli kierunek od ręki lewej do prawej jest dodatni, a jaka, jeśli kierunek ten jest ujemny? Podaj przykłady liczbowe. Rysunek!
33. Do różnicy liczb a i b , dodaj różnicę liczb b i c , a w końcu dodaj różnicę liczb c i a . Ile wynosi suma?
34. Ile jest liczb całkowitych większych od a i równocześnie mniejszych od b , przy czym a i b są liczbami całkowitymi, spełniającymi nierówność $a < b$? Sprawdź wzór dla $a = -5, b = +6$ i $a = -8, b = -3$!
35. Sprawdź następujące wzory i wyraż słowami, jakie własności różnicy przedstawiają:
- $$a - b = (a + c) - (b + c); \quad a - b = (a - c) - (b - c);$$
- $$(a - b) + c = (a + c) - b; \quad (a - b) + c = a - (b - c);$$
- $$(a - b) - c = (a - c) - b; \quad (a - b) - c = a - (b + c).$$
36. Ktoś miał oddać 30 zł długu, oddał jednak o a zł mniej. Ile

mu zostało, jeżeli miał na początku a) 70 zł, b) 15 zł? Podaj przykłady liczbowe.

37. a) Jeden wieśniak ma o 5 kur więcej niż gęsi, drugi zaś ma o 3 kury więcej niż pierwszy i o 4 gęsi mniej niż pierwszy. O ile ma drugi wieśniak więcej kur niż gęsi?

Rozwiązanie: Oznaczmy przez x liczbę kur, przez y liczbę gęsi, którą posiada pierwszy wieśniak. Zatem $x - y = 5$. Drugi wieśniak ma $x + 3$ kur, $y - 4$ gęsi. Różnica wynosi:

$$(x + 3) - (y - 4) = x + 3 - y + 4 = x - y + 7.$$

Ponieważ $x - y = 5$, więc drugi wieśniak ma o $5 + 7$, tj. o 12 kur więcej niż gęsi. Rozwiąż podobnie następujące zadania:

- b) Jaś miał o 5 zł więcej niż Staś, a wydatki Stasia były następnie o 7 zł mniejsze niż Jasia. Kto miał na końcu więcej i o ile?
- c) A i B poszli na dwudniową wycieczkę: A miał o 7 zł więcej niż B. Pierwszego dnia A wydał o 3 zł więcej niż B, drugiego dnia B wydał o 5 zł więcej niż A. Ile pieniędzy miał na końcu B, jeżeli A miał na końcu 10 zł?
- d) Jedna beczka zawierała o 10 l wina więcej niż druga. Z pierwszej odlano pewną ilość wina, z drugiej zaś odlano o 15 l więcej. W końcu dolano do obu beczek znowu wina, przy czym do drugiej dolano o 3 l więcej niż do pierwszej. W której beczce było na końcu więcej wina i o ile?

Rozdział IV

Własności iloczynu

§ 1. Prawo przemienności i łączności

Poprzednio określiliśmy iloczyn liczb względnych. Iloczyn liczb względnych zawsze istnieje. Poznamy teraz pewne własności iloczynu.

Podobnie jak suma, iloczyn nie zależy od porządku czynników. Np.:

$$\begin{aligned} (-3) \cdot (+5) &= (+5) \cdot (-3); & (+1) \cdot (-4) &= (-4) \cdot (+1); \\ (-2) \cdot (+3) \cdot (-1) &= (-2) \cdot (-1) \cdot (+3) = (+3) \cdot (-2) \cdot (-1); \\ (-1) \cdot (+4) \cdot (-2\frac{1}{2}) \cdot (-5) &= (-5) \cdot (+4) \cdot (-1) \cdot (-2\frac{1}{2}); \\ ab &= ba, & abc &= cab, & abcd &= dacb = cdab \text{ itp.} \end{aligned}$$

Własność powyższą nazywamy prawem przemienności iloczynu.

W iloczynie możemy zastąpić dowolne czynniki ich iloczynem i wykonywać mnożenia w dowolnym porządku.

Np.: $(-1) \cdot (+2) \cdot (-4) = (+4) \cdot (+2)$; tutaj czynniki $-1, -4$ zastąpiliśmy ich iloczynem $+4$. Możemy to zapisać przy pomocy nawiasów następująco: $(-1) \cdot (+2) \cdot (-4) = [(-1) \cdot (-4)] \cdot (+2)$.

$$\begin{aligned} \text{Podobnie: } (-2) \cdot (-3) \cdot (+4) \cdot (-5) &= (-2) \cdot [(-3) \cdot (-5)] \cdot (+4), \\ (-1) \cdot a \cdot (+2) \cdot (-3) b &= [(-1) \cdot (+2) \cdot (-3)] a \cdot b = 6ab, \\ abc &= (ab)c = a(bc), & abcde &= (ac)(be)d \text{ itp.} \end{aligned}$$

Własność iloczynu, orzekającą, że dowolne czynniki iloczynu możemy zastąpić ich iloczynem, nazywamy prawem łączności.

$$\text{Mamy: } (abc)d = abcd = (ad)bc = a(bd)c = ab(cd).$$

Wzór powyższy możemy w następujący sposób wypowiedzieć: Iloczyn mnożymy przez liczbę mnożąc jeden tylko (którykolwiek) czynnik przez tę liczbę.

Chcąc iloczyn $(-2) \cdot (+4) \cdot (-5)$ pomnożyć przez -3 mnożymy którykolwiek czynnik przez -3 .

$$\begin{aligned} \text{Zatem: } [(-2) \cdot (+4) \cdot (-5)] \cdot (-3) &= (+6) \cdot (+4) \cdot (-5) = \\ &= (-2) \cdot (-12) \cdot (-5) = (-2) \cdot (+4) \cdot (+15), \\ [(-3)a] \cdot (-2) &= [(-3) \cdot (-2)] a = 6a. \end{aligned}$$

Uwaga. Znak $+$ lub $-$ stojący przed iloczynem odnosi się do wartości całego iloczynu. Np.: $+(-3) \cdot (+5) = +(-15) = -15$.

Wartość przeciwną liczby otrzymamy mnożąc tę liczbę przez -1 .

$$\text{Np.: } -(+5) = (-1) \cdot (+5); \quad -(-5) = (-1) \cdot (-5).$$

Zadania

1. Sprawdź:

$$\begin{aligned} a) & (+6) \cdot (-3) = (-3) \cdot (+6), & (-4) \cdot (-8) &= (-8) \cdot (-4); \\ b) & (-3) \cdot (+9) = (+9) \cdot (-3), & (-2) \cdot (+1) &= (+1) \cdot (-2). \end{aligned}$$

2. Zmień porządek czynników na wszystkie sposoby i oblicz:

$$a) (+3) \cdot (-2) \cdot (+6), \quad b) (-1) \cdot (+5) \cdot (-3).$$

3. Sprowadź do najprostszej postaci:

$$\begin{aligned} a) & (-1) \cdot a \cdot (-3) \cdot 5, & a \cdot (+2) \cdot (-3), & 5a \cdot (+1), & \frac{2}{3}a \cdot (-1); \\ b) & (+2) \cdot (-3) \cdot 4, & \frac{3}{5} \cdot (-7) \cdot (+1), & (-\frac{2}{3}) \cdot (+1) \cdot (+\frac{2}{5}); \\ c) & a \cdot (+3) \cdot b \cdot 2, & \frac{3}{4}a \cdot (-2) \cdot b, & \frac{5}{6}b \cdot (+4) \cdot a, & \frac{4}{3}ba \cdot (-3). \end{aligned}$$

4. Oblicz:

$$\begin{aligned} a) & +(-3) \cdot (+5), & -(+4) \cdot (-2), & -(-2) \cdot (+1) \cdot (-1); \\ b) & +(+2) \cdot (-2) \cdot (+2), & -(+2) \cdot (-2) \cdot (+2); \\ c) & -(-3) \cdot (+2) \cdot (+3) \cdot (-2), & -(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4). \end{aligned}$$

5. Oblicz:

$-ab$, $-2ab$, $3abc$, $-(-2)abc$, jeśli: $a = -3$, $b = -1$, $c = +2$.

6. Pomnóż $(-3) \cdot (+8)$ przez $(+2) \cdot (-4)$.

§ 2. Znak iloczynu

Wyrażenie $-ab$ oznacza wartość przeciwną iloczynu ab . Możemy zatem napisać $-ab = (-1)ab$.

Mamy następujące wzory:

$$(+a)(+b) = +ab = ab, \quad (+a)(-b) = -ab;$$

$$(-a)(-b) = +ab = ab, \quad (-a)(+b) = -ab.$$

Wzór pierwszy jest oczywisty. Sprawdzimy następne wzory.

Mamy: $-a = (-1)a$, $-b = (-1)b$,

$$(-a)(-b) = (-1)a \cdot (-1)b = (-1) \cdot (-1)ab = ab,$$

$$(+c)(-b) = a \cdot (-1)b = (-1)ab = -ab,$$

$$(-a)(+b) = (-1)a \cdot b = -ab.$$

Widzimy stąd, że przy mnożeniu liter (wyrażeń) opatrzonych znakami $+$, $-$ reguła znaków jest ta sama, co przy mnożeniu liczb względnych.

Np.: $(-3)a = -3a$, $(+3)(-b) = -3b$, $(-4)(-x) = 4x$,
 $(-ab)c = -abc$, $(-3a)(-b) = +3ab$, $(+2x)(-y) = -2xy$,
 $(+2a)(-3b) = -2 \cdot 3ab = -6ab$, $(-3x)(-5y) = 15xy$.

Wyrażenia następne obliczamy wykonując po kolei naznaczone mnożenia: $(-a)(+b)(-c) = (-ab)(-c) = abc$,
 $(-2a)(+3b)(-5c) = 30abc$, $2x(-3y)(+7z) = -42xyz$.

Uwaga. Jeżeli przed iloczynem stoi znak $-$, to znak ten odnieść możemy do któregoś z czynników.

Np.: $-ab = (-a)b = a(-b)$, $-3a = (-3)a$,
 $-abc = (-a)bc = a(-b)c = ab(-c)$ itd.

Zadania

7. Uwolnij od nawiasów:

$$a) +(+4x), -(-4x), -(+4x), +(-4x);$$

$$b) +(-2xy), -(+3xyz), -(-2xyz), ++2xy).$$

8. Sprowadź do najprostszej postaci:

$$a) (-4)(+2a), (+3a)(-b), (-a)(+2b), (-3a)(-2b);$$

$$b) (-3)(-a)(-b) \cdot (+5), (+4)(-x)(-2y);$$

$$c) (-3a) \cdot (+5)(+2b)(-4c), (+1)(-2x) \cdot (-1)(+2y);$$

$$d) (-2x)(+3y)(-2z), (-4)(+3x) \cdot (-4)(-3y)(-z);$$

$$e) -(-2a)(-3bc), -(+2ab)(-2xy), -(-3a)(-2xyz).$$

9. Przedstaw najprościej:

$$a) (+2a)(-3b)(+2x), (+3a)(-2bc)(-4x);$$

$$b) -(-3a)(+4)(-2bc), -(+3ab)(-2xy)(+6);$$

$$c) -(+2ab)(-3cd)(+2xy)(-4uv).$$

Wyrażenie, jak np.: $3x - 2ab + 4y$, obliczamy wykonując najpierw mnożenia, a na końcu dodawania, względnie odejmowania.

Możemy więc uważać dane wyrażenie jako sumę algebraiczną o wyrazach: $+3x, -2ab, +4y$.

$$\text{Zatem: } 3x - 2ab + 4y = (+3x) + (-2ab) + (+4y).$$

Podobnie:

$$-2a - 3b + 4x - 2ay = (-2a) + (-3b) + (+4x) + (-2ay).$$

10. Wskaż wyrazy następujących sum algebraicznych:

$$a) -3a + 2b - 4ac + 3, \quad 2x + 3y + 2z;$$

$$b) 4a - 2b + 3c - d, \quad x - 2y + 3z - 4;$$

$$c) -3xy + 2yz - 4zx, \quad -3 + 5x - 2y + 8z.$$

11. Następujące sumy napisz bez użycia nawiasów:

$$a) (-2)x(-y) + (-3)x, \quad -(-2a) + (-3x)(-4b);$$

$$b) (-3x)(+2y) + (-4)(+2x) - (+2y)(-x) - (-x)(+4);$$

$$c) (+2ab) \cdot (-3) - (-2ab)(+2c) + (-3bc)(+2a);$$

$$d) -(-2)(+3x)(-4y) + (-3)(-2x)(+2z) - (+2xy)(-3z).$$

Uwaga. Wykonujemy naznaczone mnożenia i wyniki bierzemy w nawias, a potem uwalniamy się od nawiasów.

$$\text{Np.: } -(-3x)(+2y) + (-4)(+2x) - (-2y)(+6) = \\ = -(-6xy) + (-8x) - (-12y) = 6xy - 8x + 12y.$$

§ 3. Prawo rozdzielności iloczynu względem sumy

Mnożenie sumy przez liczbę

Iloczyn sumy przez liczbę otrzymamy mnożąc składniki sumy przez tę liczbę i wyniki dodając.

Jest to prawo rozdzielności iloczynu względem sumy.

$$\text{Np. } [(-3) + (+2)] \cdot (-4) = (-3) \cdot (-4) + (+2) \cdot (-4).$$

Mamy bowiem:

$$[(-3) + (+2)] \cdot (-4) = [-1] \cdot (-4) = 4$$

$$(-3) \cdot (-4) + (+2) \cdot (-4) = (+12) + (-8) = 4.$$

Podobnie przekonamy się, że:

$$(+2) \cdot [(+5) + (-6)] = (+2) \cdot (+5) + (+2) \cdot (-6)$$

$$(-3) \cdot [(+1) + (-2) + (+4)] = (-3) \cdot (+1) + (-3) \cdot (-2) + (-3) \cdot (+4)$$

W iloczynie $(3 - 5 - 2 + 7) \cdot (-4)$ wyrazami sumy, zawartej w nawiasie, są: 3, -5, -2, +7. Iloczyn więc otrzymamy mnożąc każdy wyraz przez -4 i wyniki dodając. Otrzymamy w ten sposób iloczynny:

$$\begin{array}{cccc} 3 \cdot (-4), & (-5) \cdot (-4), & (-2) \cdot (-4), & (+7) \cdot (-4), \\ \text{czyli} & -12 & +20 & +8 & -28; \end{array}$$

sumę tych liczb otrzymamy pisząc je obok siebie z ich znakami.

$$\text{Zatem: } (3 - 5 - 2 + 7) \cdot (-4) = -12 + 20 + 8 - 28.$$

$$\text{Podobnie: } (-2) \cdot (-1 + 3 - 5) = 2 - 6 + 10.$$

Jeżeli a, b, c, d, e oznaczają dowolne liczby względne, to:

$$(a + b) \cdot c = ac + bc \quad c(a + b) = ca + cb$$

$$(a + b + c) d = ad + bd + cd$$

$$(a - b + c - d) e = ae - be + ce - de$$

$$(-a - b + c + d) \cdot (-e) = ae + be - ce - de.$$

W iloczynie $(2x - 3y + 5a) \cdot (-3)$ wyrazami sumy zawartej w nawiasie są: $2x, -3y, +5a$. Mnożąc te wyrazy przez -3 otrzymamy iloczynny: $-6x, +9y, -15a$.

$$\text{Zatem: } (2x - 3y + 5a) \cdot (-3) = -6x + 9y - 15a.$$

$$\text{Podobnie: } (-4) \cdot (-5a + 7b - 2c) = 20a - 28b + 8c$$

$$(3z - 2y + 5x) \cdot (-3a) = -9az + 6ay - 15ax.$$

Uwaga. Składnikami sumy $ad + bd + cd$ są iloczyny, które mają jeden czynnik d wspólny. Sumę taką możemy napisać w postaci iloczynu, a mianowicie:

$$ad + bd + cd = (a + b + c) d = d(a + b + c).$$

Postępowanie powyższe nazywamy wyjęciem (wyciąganiem) wspólnego czynnika za (przed) nawias. Podobnie:

$$3x + 2x + 5x = (3 + 2 + 5)x = 10x,$$

$$ad - bd + cd - ed = (a - b + c - e)d$$

$$(5x - 3x + 2x - 7x) = (5 - 3 + 2 - 7)x = (-3)x = -3x.$$

W sumie $2a - 3a + 5a + a$ możemy ostatni składnik uważać za iloczyn $1 \cdot a$. Zatem wyciągając a za nawias otrzymamy:

$$(2a - 3a + 5a + a) = (2 - 3 + 5 + 1)a = 5a.$$

$$\text{Podobnie: } (7x - x + 4x + x) = (7 - 1 + 4 + 1)x = 11x.$$

Mnożenie sumy przez sumę

Mamy iloczyn dwóch sum, np.: $(a + b)(c + d + e)$.

$$\text{Położmy: } c + d + e = x.$$

$$\text{Zatem: } (a + b)(c + d + e) = (a + b)x = ax + bx.$$

(1)

$$\begin{aligned} \text{Lecz: } ax &= a(c + d + e) = ac + ad + ae \\ bx &= b(c + d + e) = bc + bd + be. \end{aligned}$$

Na mocy więc (1):

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be.$$

Widzimy więc, że iloczyn sumy przez sumę otrzymamy mnożąc każdy składnik jednej sumy przez każdy składnik drugiej sumy i dodając wyniki.

$$\text{Np.: } [(-3) + (+5)] \cdot [(+2) + (-4)] =$$

$$= (-3) \cdot (+2) + (-3) \cdot (-4) + (+5) \cdot (+2) + (+5) \cdot (-4);$$

$$[(-1) + (+3) + (+5)] \cdot [(-3) + (+4)] = (-1) \cdot (-3) + (-1) \cdot (+4) + (+3) \cdot (-3) + (+3) \cdot (+4) + (+5) \cdot (-3) + (+5) \cdot (+4).$$

Mamy iloczyn $(a - b + c) \cdot (-d + e)$.

Wyrazami pierwszej sumy są: $a, -b, c$, drugiej zaś $-d, e$. Mnożąc wyrazy pierwszej sumy przez wyrazy drugiej otrzymamy iloczynny:

$$-ad, ae, bd, -be, -cd, ce.$$

Sumę tych iloczynów otrzymamy pisząc je obok siebie z ich znakami (jeżeli żaden znak nie poprzedza iloczynu, to piszemy znak +).

A więc:

$$(a - b + c) \cdot (-d + e) = -ad + ae + bd - be - cd + ce.$$

$$(-3 + 6 - 2) \cdot (-4 + 3) = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 3 - 6 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 12 - 9 - 24 + 18 + 8 - 6 = -1,$$

$$(5 - 3) \cdot (4 - 7) = 5 \cdot 4 - 5 \cdot 7 - 3 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 20 - 35 - 12 + 21 = -6,$$

$$(3 - 5 + a) \cdot (-b + 2) = -3b + 3 \cdot 2 + 5b - 10 - ab + 2a = -3b + 6 + 5b - 10 - ab + 2a,$$

$$(a - b) \cdot (c - d) = ac - ad - bc + bd,$$

$$(2a - 3x)(3y - 2c) = 6ay - 4ac - 9xy + 6xc.$$

Zadania

12. Sprawdź:

$$a) [(-2) + (-3)](-5) = (-2)(-5) + (-3)(-5);$$

$$b) [(+3) + (-1)](+2) = (+3)(+2) + (-1)(+2);$$

$$c) (-3 - 5 + 7)(-4) = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 - 7 \cdot 4.$$

13. Uwolnij od nawiasów:

$$a) (a + b)c, (2 + a)(-5), (a + b + c)(-3);$$

$$b) (2a + 3b)(-4), (a + 2b + 3c)(-1);$$

$$c) (a + 2b)(-3c), (3a + 2b + c)x.$$

14. Wyjmij wspólny czynnik przed nawias:

- a) $2x + 7x + x$, $(-3)a + (-2)a + a$;
 b) $(-3)x + (-3)y + (-3)z$, $\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}x$, $16x + 72y$;
 c) $(-4)x + (+8)x + (-24)x$, $6y + 14y + y$;
 d) $\frac{3}{4}xy + \frac{5}{4}xy$, $\frac{3}{4}xz + 1,4yz$, $(+2)xyz + (-3)yz$;
 e) $(+4)xy + (-2)yz + (-6)zx$, $(-9)xy + (-6)xz + (+54)xz$.

15. Uwolnij od nawiasów:

- a) $(x + y) \cdot (a + b)$, $(a + x) \cdot (b + y)$, $(a + b) \cdot (3 + x)$;
 b) $(x + y + z)(u + v)$, $(x + y + 4)(z + 3)$;
 c) $[x + y + (-5)][z + (+3)]$, $[a + (-2) + c][(+2) + b]$;
 d) $(a + b + 2)(x + y + 3)$, $[a + b + c + (-2)](x + y)$.

16. Uwolnij od nawiasów:

- a) $(+2 + x) \cdot (-3)$, $(-3 + 4y) \cdot (+5)$, $(2x - 4) \cdot (-2)$,
 $(-x + 5y) \cdot (-6)$, $(+2x + 3y) \cdot (+2)$, $(+x - y) \cdot (+1)$,
 $(x + y + z) \cdot (-1)$, $(2x - 3y + 4z) \cdot (-4)$;
 b) $(2x - 4y + xy) \cdot (-6)$, $(a + 2b - 3c) \cdot (-4x)$,
 $(-2x - 3y) \cdot (+2a)$, $(-3x - 5y - z) \cdot (-4ab)$;
 c) $(-3x + 2y - 4z) \cdot (+1)$, $(-3x + 8yz) \cdot (-4ab)$,
 $(-2) \cdot (x - y)$, $(-3x) \cdot (a + b)$, $(-2xy) \cdot (-4a + 3b)$.

17. Uwolnij od nawiasów:

- $(-3x + 4y) \cdot (-6) \cdot (+2a)$, $(-5) \cdot (2x - 3y) \cdot (-5ab)$,
 $(-2x) \cdot (+3y) \cdot (2a - 4b)$, $(-2x) \cdot (+3y) \cdot (-z) \cdot (a - b)$,
 $(2a - 4b) \cdot (-3x) \cdot (+5y) \cdot (-7)$, $(2a - b + c) \cdot (-x) \cdot (+3y)$.

18. Uwolnij od nawiasów:

- $(-4x + 2y) \cdot (-5) + (-2a + 3b) \cdot (-b)$,
 $(-2x + 3y) \cdot (-7) + (-4x - 7y) \cdot (+2a) - (-5x + 3y) \cdot (-3b)$,
 $a - (-2b) \cdot (+7) + (-3c) \cdot (-4) - (-2d) \cdot (-6) + (-2e) \cdot (+7)$.

19. Uwolnij od nawiasów:

- $- \{ + (2x - 4y) (-3z) + (-3x) (2y + 3) \}$,
 $\{ c - (2x + 3y) (-4z) + (2a - 3b) (-4) \} - \{ - (3a + b) (-2c) \}$.

20. Uwolnij od nawiasów:

- a) $(x + 4)(y - 5)$; b) $(2x - 3)(-y + 2)$;
 c) $(2a - b)(x + 3)$; d) $(x + y)(a - 2b)$;
 e) $(2a + b - c)(x + 2)$; f) $(x - 2y + z)(-2a + 3)$.

21. Sprawdź następujące wzory:

- $(a + b)c = ac + bc$; $(a - b)c = ac - bc$; $(a + b + c)d = ad + bd + cd$;
 $(a - b + c)d = ad - bd + cd$; $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$;
 $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$, przyjmując $a = -1$, $b = +3$,
 $c = -5$, $d = 4$.

§ 4. Redukcja wyrazów podobnych

Mamy daną sumę algebraiczną:

$$2x - 3xy + 5abc - 3x + 2xy - 7abc.$$

Dwa wyrazy takie, jak: $2x$, $-3x$ lub $-3xy$, $+2xy$, lub $5abc$, $-7abc$, mające te same czynniki literowe, nazywamy wyrazami podobnymi.

Wyrazy $2x$ i $-3x$ lub $2xy$ i $-7abc$ nie są podobnymi.

Wyrazy, będące liczbami danymi, nazywamy również podobnymi. Przypuśćmy, że dana jest suma algebraiczna, której wszystkie wyrazy są podobne, jak np.: $3x - 7x + 2x - 4x$.

W sumie powyższej możemy wyjąć x za nawias, tzn. sumę tę możemy uważać za iloczyn: $(3 - 7 + 2 - 4)x$.

Obliczając wyrażenia, zawarte wewnątrz nawiasu, otrzymamy $(-6)x = -6x$. Zatem: $3x - 7x + 2x - 4x = -6x$.

Podobnie: $-3a + 6a - 7a + a = (-3 + 6 - 7 + 1)a = -3a$,
 $2xy - 3xy - 5xy - xy = (2 - 3 - 5 - 1)xy = -7xy$.

Postępowanie to nazywamy redukcją wyrazów podobnych. W praktyce redukcję przeprowadzamy inaczej.

Np. sumę algebraiczną: $-3y + 2y - 6y - 5y - y$ redukujemy redukując wyrazy po kolei. Liczymy zatem w pamięci:

$-3y + 2y = -y$; $-y - 6y = -7y$; $-7y - 5y = -12y$;
 $-12y - y = -13y$. Wynik wynosi więc: $-13y$.

Jeżeli w sumie algebraicznej niektóre wyrazy są podobne, np.:

$$-3 + 2a - 5b - 3c - 7a - b - 6c - 4 + 4a + 9b + 2,$$

to możemy zredukować wyrazy podobne. W tym celu na mocy prawa przemienności przestawiamy tak wyrazy, aby wyrazy podobne były obok siebie. Otrzymamy np.:

$$-3 - 4 + 2 + 2a - 7a + 4a - 5b - b + 9b - 3c - 6c.$$

Na mocy prawa łączności możemy liczby dane, względnie wyrazy podobne, zastąpić ich sumą.

Ponieważ:

$$\begin{aligned} -3 - 4 + 2 &= -5 \\ 2a - 7a + 4a &= -a \\ -5b - b + 9b &= 3b \\ -3c - 6c &= -9c, \end{aligned}$$

więc sumę daną przedstawimy w postaci: $-5 - a + 3b - 9c$.

W praktyce redukcję wyrazów podobnych przeprowadzamy nie wypisując sumy w zmienionym porządku, tylko od razu redukując.

Np.: $7x - 5 + 3y - x - 6 - 2y.$

Liczmy: $7x - x = 6x$, piszę $6x$; $-5 - 6 = -11$, piszę -11 ;
 $+3y - 2y = y$, piszę $+y$. Otrzymamy:
 $7x - 5 + 3y - x - 6 - 2y = 6x - 11 + y$.

Zadania

22. Wymień wyrazy podobne:

- a) $2x$, 5 , -3 , $-4x$, $+5$; b) $2a$, $-b$, $-3b$, $-4a$, $-b$;
 c) $2ab$, b , $-a$, ab , $4b$, $2a$; d) xy , yz , $-2xz$;
 e) $2ab$, $-3bc$, $7ab$, $4bc$, $-bc$.

23. Zredukuj:

- a) $3x + 4x$; b) $4a - 2a$; c) $\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}a$;
 d) -2 , $4a + 3$, $7a$; e) $-3x - 5x$; f) $2x - 7x + 4x$;
 g) $2ab - 4ab$; h) $\frac{2}{3}ab - 3ab$; i) $-2ab + 5ab$.

24. Wykonaj następujące redukcje:

- a) $3a - a + 4a - 2a - 7a + 6a - 5a$;
 b) $x - 4x + 3x - 2x + 3x - x$;
 c) $-x + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x$; d) $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x$;
 e) $\frac{1}{2}x + 2 - 2x + \frac{1}{4} - 3 + \frac{3}{2}x - 5$;
 f) $2a - 3 + 4a - 5a - 7 - 2a + a - 4$;
 g) $-2a + 3b + 3a - a + 4b - 7b - 3b - 5a$;
 h) $2x - 4y + 7 - 6y + 3x - 5 - 5x - 4y - 3y + 6$;
 i) $a + x - 2x - 2a + a + x + 2x - 2a - 2x + 2a$;
 j) $3a - 2b + 4c - 7a - 6c - 3b - 4c - 2c + 3b$.

25. Uwolnij od nawiasów, po czym zredukuj wyrazy podobne:

- a) $(3x + 8) + (2x + 4)$; b) $(2x + 5) + (3x - 8)$;
 c) $(\frac{1}{2}x - \frac{9}{4}) + (-\frac{2}{3}x + \frac{5}{6})$; d) $(6x + 3) + (-3x - 5)$;
 e) $(2x + 5) - (3x + 9)$; f) $(3x - 4) - (-3x + 6)$;
 g) $(-4x + 5) - (-6x - 9)$; h) $(-3x - 5) - (+2x - 6)$;
 i) $(4x + 5) - (7x - 4) + (3x - 5)$;
 j) $(2x - 4) + (-3x - 6) - (2x + 4) - (-3x + 5) + (-2x - 7)$;
 k) $(2x - 3y) + (4z - 5) + (-3x + 5y - 2z + 6)$;
 l) $(x - y) + (y - z) - (z - x) - (x - y) + (y - z) - (-y + z)$;
 m) $(3xy + 2xz) + (-2xz + 4xy) - (-3xy + 5xz)$.

26. Uwolnij od nawiasów, po czym zredukuj wyrazy podobne:

- a) $[(3a + 4b) - (2a + b)] + [(2a - b) + (-a + 2b)]$;
 b) $[(2x + 3y) + (-3x - 2y)] + [-(2x + 3y) + (2x - y)]$;
 c) $[-(ab + 2ac + 3bc) - (3ac - 2bc)] - [(4ab - 2ac - 3bc) + (-2ab + ac - 2bc)]$; d) $x - \{x - [x - (x + 2)]\}$;
 e) $\{2x + y + [(3x - 4y) - (2x + y)]\} - \{(-x - 2y) - [(3x + 4y) - (2x + y)]\}$;

$$f) -[(3a - 2b + c) + (2a - 3b + 4c)] - \\ - \{ - [(-2a + b) + (-3a - c)] + [(-2a + b - 2c) - (3a - b - c)] \}.$$

27. Uwolnij od nawiasów, po czym zredukuj wyrazy podobne:

- a) $5(3x + 4) + 4(2x + 8) + 6(x + 2)$;
 b) $(+2a + 3b) \cdot \frac{5}{6} + (3a + 4b) \cdot \frac{3}{4} - \frac{2}{3}(+5a + 2b)$;
 c) $4(ab + 2bc) - 5(ab + 2bc) + 3(ac + 2bc) - 2(ab + ac)$;
 d) $(a + 2b + c) \cdot (-4) + (4a + 2b + 3c) \cdot (+5)$;
 e) $(2x + 4) \cdot (-y) + (2y + 3) \cdot (+2x)$;
 f) $(2a + 3b) \cdot (-2c) + (4a + c) \cdot (+3b) + (2a + b) \cdot (-2c)$;
 g) $5,1(2x - 4) + 8,2(2x + 3) + 6,3(x - 4)$;
 h) $(2a - 4b) \cdot 7 + 3(a - b) + 5(-2a + 3b)$.

28. Uwolnij od nawiasów, po czym zredukuj wyrazy podobne:

- a) $3ax + [2a(3x - 2) + 4 - (-2x + 3a)]$;
 b) $[3(x - y) + 3(x + y)] - 2[(x + y) + 4(x - y)]$;
 c) $5[-2(-a + 2b) + 3(-2b + 4a)] - 7[2(5a - b) - 6(a + b)]$.

29. Uwolnij od nawiasów, po czym zredukuj wyrazy podobne:

- a) $(+3x - 4)(y + 2) + (7x - 2)(2y + 3)$;
 b) $(2a - 3b)(c - 7) + (-a + 3c)(-2b + 3)$;
 c) $(2a + 4c)(-3b - 5) + (a - b)(2c - 4)$;
 d) $2a(+b - 4c) + (+2a - b)(-3c + 7) + 5(a - bc)$;
 e) $(a - 2b)(c + 3) - (5a - 3b)(-c + 4)$;
 f) $(-a + 3b)(2 - c) - (4a + 7)(b - 3c)$;
 g) $(-2a - b)(+b - 2c) - (a + b)(2c - 3) + (b - 2c)(7 - 5a)$;
 h) $\frac{3}{4}(2x - 4)(y + 5) + \frac{1}{2}(2y + 5)(x - 2)$.

Wykonaj naprzód mnożenia, wyniki bierz w nawias, a następnie uwalniaj od nawiasów, w końcu zredukuj!

30. Uwolnij od nawiasów:

- a) $(x + 2)(3y - 4)(2z + 5)$; b) $(2a - 6)(-3b + 4)(2c - 5)$;
 c) $(a - 2b)(x + y)(z - 6)$; d) $(a + b)(c - d)(e + f)$.

31. Uwolnij od nawiasów, po czym zredukuj wyrazy podobne:

- a) $8x - [(3x + 4)(y + 2) + (x - 2)(y + 3)]$;
 b) $7(2a - b) + [-(a + 2)(b + 4) + (2b - 7)(-a + 3)]$;
 c) $(-a + 2b)(x - y) - [(x - 2y)(a - 2b) - (a - b)(x + y)]$;
 d) $(-3a + b)(2x - 4) - 5[3x(a + 3b) - 4(-2a - 3b)(-x + 6)]$.

32. Po mnożeniu i wykonaniu redukcji wyciągnij w następujących wyrażeniach wspólny czynnik za nawias:

- a) $(2a - 2ab)(x + y) - (a + 2ab)(x - y)$;

- b) $(2x + 4xy)(a - 3b) + (x - 2xy)(-a + 3b - 4)$;
 c) $(-\frac{3}{4}xy + \frac{5}{6}xz)(-\frac{1}{2}a + \frac{5}{3}) - 3(-\frac{2}{3}xy - \frac{1}{5}xz)(\frac{7}{3}a - \frac{4}{5})$;
 d) $4(-2ab + 3ac)(-5x + 3y) - 5x(2ac - 7ab)$.

33. W jednym worku jest a kg cukru, w drugim o b kg cukru mniej; ile cukru jest w obu workach?
34. W pierwszym tygodniu woda podnosiła się o a cm dziennie, w drugim tygodniu opadała o b cm dziennie; jaka była ostateczna zmiana poziomu wody, jeżeli $a - b = -1$?
35. Robotnik zarabiał dziennie a zł, wydawał zaś b zł; ile zaoszczędził w ciągu c dni?
36. Kupiec sprzedał a kg towaru, następnie b kg towaru, w cenie c zł za 1 kg; ile otrzymał za towar?
37. a) Do liczby x dodaj 11, wynik pomnóż przez 2 i od tego iloczynu odejmij 20; to, co otrzymasz, pomnóż przez 5, następnie odejmij 10. Ile wynosi x , jeżeli wynik końcowy jest 30?
 b) Od liczby x odejmij 5, wynik pomnóż przez 2, do iloczynu tego dodaj x , to, co otrzymasz, pomnóż przez 3 i dodaj potem 30; ile wynosi x , jeżeli ostateczny wynik jest 18?
38. a) Zaznacz najprościej sumę pięciu kolejnych liczb całkowitych, z których a) najmniejszą jest a , b) największą jest a , c) środkową jest a . Ile wynosi a , jeżeli suma ta równa się 100?
 b) Zaznacz najprościej sumę trzech liczb, z których najmniejsza jest a , każda zaś następna różni się od poprzedniej o b . Ile wynosi ta suma, jeżeli $a = -4$, $b = +2$?
39. a) Do sumy liczb a i b dodaj ich różnicę!
 b) Od sumy liczb a i b odejm ich różnicę; wyniki zapisz w najprostszej postaci!
40. a) Z początku układu wyruszają dwa punkty równocześnie, jeden z prędkością v cm/sek., drugi z prędkością u cm/sek.; zaznacz ich odległość od siebie po t sek. Ile ta odległość wynosi, jeżeli $t = 4$, zaś $v - u = -3$.
 b) Z dwóch miast wyszli naprzeciw siebie dwaj posłańcy. Jeden szedł z prędkością x km/godz., drugi z prędkością y km/godz. Spotkali się po 4 godzinach. Jaka jest odległość tych miast od siebie, jeżeli $x + y = 13$.
41. Dwaj wspólnicy rozdzielili a zł zysku w ten sposób, że pierwszy otrzymał b zł, drugi resztę; o ile więcej otrzymał pierwszy niż drugi? Podaj przykład liczbowy!

42. Kupiec sprzedał w 3 dniach x kg towaru. W pierwszym dniu sprzedał a kg, w drugim o b kg mniej, a w trzecim resztę. Ile sprzedał każdego dnia i o ile więcej sprzedał pierwszego dnia niż trzeciego?
43. a) Liczba trójcyfrowa ma na miejscu setek cyfrę x , dziesiątek y , jednostek z ; zaznacz tę liczbę!
 b) Obierz dowolną liczbę trójcyfrową, następnie liczbę, która ma te same cyfry, tylko w odwrotnym porządku. Oblicz różnicę tych liczb, jeżeli różnica cyfr setek i jednostek wynosi 2.
44. a) Suma dwóch liczb wynosi a ; jak się zmieni ich iloczyn, jeżeli obie liczby powiększymy o 4, a jak się zmieni, jeżeli obie liczby pomniejszymy o 4? (Oznacz liczby przez x , y).
 b) Różnica dwóch liczb wynosi a ; jak się zmieni iloczyn, jeżeli jedną z nich powiększymy o 4, a drugą pomniejszymy o 4?
 c) Obwód prostokąta wynosi 16 cm; o ile zmieni się jego pole, jeżeli każdy bok zwiększymy o 1 cm, a o ile, jeżeli zmniejszymy o 1 cm?
45. Do basenu wpływa jedną rurą na godzinę a l wody, drugą b l, trzecią zaś wypływa o c l mniej niż pierwszą. Ile l wody będzie w basenie po n godzinach?
46. Wypełń puste miejsca, tak by powstał kwadrat magiczny, tj. by sumy liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie i w każdej przekątnej były równe. Przyjmij następnie $a = 5, 8, 10$.

	$2a-1$	$a-1$
	a	
	1	

47. W sali restauracyjnej są 3 świeczniki; każdy z dwóch mniejszych ma po a żarówek, a większy ma o 4 żarówki mniej niż oba mniejsze razem. Większy świecznik oświetla dziennie salę przez n godzin; mniejsze świecą o 3 godziny dłużej. Ile wynosi rachunek miesięczny za oświetlenie sali, jeżeli koszt oświetlenia przez godzinę jedną żarówką wynosi x gr?
48. W prostopadłościanie o wymiarach a, b, c cm zwiększono każdą krawędź o 1 cm. O ile wzrosła powierzchnia, jeżeli $a + b + c = 10$? O ile zmniejszy się powierzchnia, jeżeli każdą krawędź zmniejszymy o 1 cm?
49. Na wycieczkę wybrało się a osób dorosłych i 3 razy tyle dzieci. Koszta każdej z osób dorosłych wynosiły b zł, każdego dziecka o 4 zł mniej. Ile wyniosły ogólne koszta wycieczki? Ile było osób dorosłych, jeżeli ogólne koszta wyniosły 100 zł, zaś koszta osób dorosłych 40 zł?

Własności ilorazu

§ 1. Przekształcanie ilorazu

Jeżeli a i b są dowolnymi liczbami względnymi, przy czym b jest różne od zera, to istnieje tylko jedna liczba c taka, że: $a = bc$.

Liczbę c nazwalimy ilorazem. Iloraz oznaczamy $a : b$ lub $\frac{a}{b}$.

Iloraz $1 : a$ lub $\frac{1}{a}$ (gdzie $a \neq 0$) nazywamy odwrotnością liczby a .

Np. Odwrotnościami liczb: 5, -3, $\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{5}$ są: $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{4}$.

Iloraz równa się iloczynowi dzielnej przez odwrotność dzielnika.

Np.: $(-3) : (-5) = (-3) \cdot (-\frac{1}{5})$, $\frac{3}{4} : (-\frac{2}{3}) = \frac{3}{4} \cdot (-\frac{3}{2})$,

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}; \quad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}, \text{ jeżeli } b \neq 0.$$

Wynika stąd, że iloraz możemy zawsze zamienić na iloczyn.

Iloraz się nie zmieni, jeżeli dzielną i dzielnik pomnożymy (wzgl. podzielimy) przez tę samą liczbę różną od zera. Np.:

$$\frac{-3}{+5} = \frac{(-3) \cdot (+2)}{(+5) \cdot (+2)}, \quad \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{5}{7}} = \frac{(-\frac{3}{4}) \cdot 28}{(-\frac{5}{7}) \cdot 28} = \frac{-21}{-20} = \frac{21}{20};$$

$$\frac{-6}{-8} = \frac{(-6) : (-2)}{(-8) : (-2)} = \frac{3}{4}; \quad \frac{(-2) \cdot 3}{(-2) \cdot (-5)} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5};$$

$$a : b = (ac) : (bc); \quad \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \text{ jeżeli } b \neq 0 \text{ i } c \neq 0;$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}, \text{ jeżeli } b \neq 0 \text{ i } c \neq 0.$$

Uwaga. Znak stojący przed ilorazem w postaci ułamka odnosi się do wartości ilorazu. Np.:

$$-\frac{+3}{-5} = -\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}; \quad +\frac{-2}{+3} = +\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3} \text{ itp.}$$

Zadania

1. Oblicz odwrotności liczb:

a) +7, 8, -3, $\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, $+\frac{4}{9}$;

b) -11, $\frac{13}{4}$, $-\frac{1}{9}$, -1, $-\frac{4}{7}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{9}{16}$.

2. Napisz w postaci iloczynu następujące ilorazy:

a) $(-2) : (-3)$, $3 : (-4)$, $(-5) : (-\frac{4}{7})$, $\frac{2}{3} : (-3)$;

b) $(-\frac{7}{5}) : (-\frac{3}{4})$, $\frac{9}{11} : (-8)$, $(-\frac{3}{4}) : 5$, $\frac{7}{13} : (-\frac{4}{9})$;

c) $(-\frac{1}{4}) : (-9)$, $(-\frac{3}{7}) : \frac{4}{5}$, $(-12) : \frac{2}{3}$, $(-\frac{3}{8}) : (-12)$.

3. Oblicz:

a) $-\left(\frac{-3}{+4}\right)$, $-\left(\frac{-6}{+7}\right)$, $-\left(\frac{-5}{2}\right)$, $-\left(\frac{3}{-7}\right)$, $-\left(\frac{-4}{-5}\right)$;

b) $-\left(\frac{+1}{-4}\right)$, $-\left(\frac{-\frac{3}{4}}{+2}\right)$, $-\left(\frac{+\frac{1}{2}}{-3}\right)$, $-\left(\frac{2}{-\frac{4}{9}}\right)$, $-\left(\frac{+5}{-\frac{1}{6}}\right)$;

c) $-\left(\frac{-\frac{2}{11}}{+\frac{3}{7}}\right)$, $-\left(\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{1}{2}}\right)$, $-\left(\frac{-\frac{1}{9}}{\frac{4}{5}}\right)$, $-\left(\frac{-\frac{4}{11}}{+\frac{3}{13}}\right)$, $-\left(\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{4}}\right)$.

4. Ile wynosi x , jeżeli:

a) $(-4)x = 8$, $(-\frac{3}{4})x = 3$, $\frac{4}{5}x = -4$, $(-5)x = -3$;

b) $(-\frac{4}{5})x = -\frac{2}{3}$, $(-\frac{1}{8})x = -1$, $(-\frac{3}{11})x = 7$, $\frac{9}{13}x = -\frac{5}{2}$;

c) $x \cdot (-5) = -\frac{1}{2}$, $x \cdot (+2) = -18$, $x \cdot (-\frac{2}{7}) = 1$, $x \cdot (-\frac{4}{5}) = -2$.

5. Mnożąc dzielną i dzielnik przez odpowiednie liczby przedstaw następujące ilorazy jako ilorazy liczb całkowitych:

a) $(-\frac{1}{3}) : (+\frac{3}{4})$, $(-\frac{2}{5}) : (+\frac{7}{10})$, $(+\frac{3}{8}) : (-\frac{4}{12})$;

b) $(-8) : (-\frac{1}{5})$, $(+\frac{6}{13}) : (-4)$, $(-\frac{2}{7}) : (-\frac{5}{11})$;

c) $\frac{4}{5} : (-\frac{8}{27})$, $(-\frac{5}{18}) : \frac{3}{20}$, $18 : (-\frac{1}{5})$, $(-\frac{3}{20}) : (-\frac{1}{2})$.

§ 2. Dzielenie iloczynu

Mamy iloraz: $(abc) : e$,

gdzie dzielna jest iloczynem, zaś dzielnik $e \neq 0$. Zamieniając dzielenie na mnożenie otrzymamy $(abc) : e = (abc) \cdot \frac{1}{e}$.

Na mocy więc prawa łączności i przemienności iloczynu:

$$(abc) \cdot \frac{1}{e} = \left(a \cdot \frac{1}{e}\right) bc = a \left(b \cdot \frac{1}{e}\right) c = ab \left(c \cdot \frac{1}{e}\right).$$

Ponieważ: $a \cdot \frac{1}{e} = \frac{a}{e}$ itd.

więc: $(abc) : e = \frac{a}{e} bc = a \cdot \frac{b}{e} c = ab \cdot \frac{c}{e}$.

Zatem: Iloczyn dzielimy przez liczbę (różną od zera) dzieląc jeden (którykolwiek) jego czynnik przez tę liczbę.

Np.: $[(-3) \cdot (+5)] : (-2) = (+\frac{3}{2}) \cdot (+5) = (-3) \cdot (-\frac{5}{2})$

$$[(-8)a] : (-4) = 2a,$$

$$[(-2) \cdot (+3) \cdot (-7)] : (-4) = (+\frac{2}{4}) \cdot (+3) \cdot (-7) = (-2) \cdot (-\frac{3}{4}) \cdot (-7) = (-2) \cdot (+3) \cdot (+\frac{7}{4}),$$

$$(abc) : b = a \cdot \frac{b}{b} \cdot c = ac, \quad (b \neq 0).$$

W ułamku $\frac{abc}{cbd}$ (gdzie $c \neq 0$, $b \neq 0$, $d \neq 0$) dzielimy najpierw licznik i mianownik przez b , następnie przez c i otrzymujemy:

$$\frac{abc}{cbd} = \frac{ac}{cd} = \frac{a}{d}.$$

Zadania

6. Przedstaw najprościej:

- a) $[(-3)a] : (-2)$, $[(-6)b] : (+3)$, $[(-\frac{4}{5})a] : (-\frac{3}{5})$;
 b) $[(-5) \cdot (-8)a] : (-8)$, $[(-\frac{1}{2})x] : (-11)$, $\frac{3}{4}a : (-\frac{3}{8})$;
 c) $\frac{8}{3}a : (-\frac{3}{4})$, $[(-\frac{2}{3})ab] : \frac{4}{5}$, $\frac{7}{2}ab : (-\frac{3}{2})$;
 d) $\frac{\frac{3}{4}x}{-\frac{7}{6}}$, $\frac{(-2)a}{-\frac{1}{3}}$, $\frac{(-\frac{3}{5})x}{-8}$, $\frac{2ab}{-\frac{4}{5}}$, $\frac{(-3)xy}{-\frac{2}{7}}$;
 e) $[(-8)abc] : (-4)$, $[(-\frac{2}{3})xyz] : (-\frac{4}{7})$, $[(-\frac{1}{8})abcd] : (-\frac{3}{5})$;
 f) $[(-\frac{3}{7})xyz] : (-\frac{5}{2})$, $[(-\frac{3}{4})abcd] : (-6)$, $[(-\frac{5}{12})abx] : (-\frac{1}{9})$.

7. Podziel licznik i mianownik przez wspólne czynniki:

- a) $\frac{4a}{6}$, $\frac{8a}{4}$, $\frac{15a}{10}$, $\frac{18x}{24}$, $\frac{(-10)a}{5}$, $\frac{(-8)a}{(-2)}$;
 b) $\frac{12a}{(-3)}$, $\frac{(-14)x}{(-7)}$, $\frac{(-16)x}{8}$, $\frac{(-24)a}{(-30)}$, $\frac{26x}{(-13)}$;
 c) $\frac{2ab}{a}$, $\frac{3ab}{b}$, $\frac{4xy}{2x}$, $\frac{8ab}{4a}$, $\frac{12c}{18c}$;
 d) $\frac{16ax}{18x}$, $\frac{12ab}{36ab}$, $\frac{24abc}{18ab}$, $\frac{54abx}{81ab}$, $\frac{48abx}{64ax}$.

§ 3. Znak ilorazu

Wyrażenie $-\frac{a}{b}$ oznacza wartość przeciwną ilorazu $\frac{a}{b}$.

Łatwo sprawdzimy następujące równości:

$$1. \frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b} = \frac{a}{b}, \quad 3. \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b},$$

$$2. \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b} = \frac{a}{b}, \quad 4. \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}.$$

Równość pierwsza jest oczywista. Równość drugą otrzymamy mnożąc licznik i mianownik przez -1 .

$$\text{A więc:} \quad \frac{-a}{-b} = \frac{(-a)(-1)}{(-b)(-1)} = \frac{a}{b}.$$

Sprawdźmy równość trzecią:

$$\frac{-a}{+b} = (-a) \cdot \left(+\frac{1}{b}\right) = -\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = -\frac{a}{b}.$$

Sprawdźmy równość czwartą:

$$\frac{+a}{-b} = \frac{(+a)(-1)}{(-b)(-1)} = \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}.$$

Widzimy stąd, że reguła znaków przy ilorazie liter, opatrzonych znakami, jest ta sama, co przy ilorazie liczb względnych.

Wynika stąd: odwrotnością liczby $-a$ jest $-\frac{1}{a}$, czyli $-\frac{1}{a}$.

Uwaga. Znak $-$ stojący przed ułamkiem możemy również odnieść do licznika lub do mianownika.

$$\text{Np.: } -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}; \quad -\frac{-5}{+3} = \frac{-(-5)}{+3} = \frac{-5}{-(+3)}.$$

Zadania

8. Wykonaj dzielenia:

$$\frac{-a}{-3}, \frac{+a}{-3}, \frac{-a}{+3}, \frac{+2}{+a}, \frac{-2}{+a}, \frac{-2}{-a}.$$

9. Wykonaj dzielenia:

- a) $(-8a) : (-4)$, $(-6x) : (+2)$, $10a : (-\frac{6}{5})$, $(-12a) : \frac{3}{4}$,
 b) $(-4ab) : (+3)$, $(-8ab) : (-\frac{5}{3})$, $(-12ab) : 8$;
 c) $(-16xy) : (-12)$, $\frac{4}{5}xyz : (-28)$, $(-\frac{3}{4}xyz) : (-\frac{3}{2})$;
 d) $(-12abc) : (-4a)$, $16abc : (-8ab)$, $(-10abc) : (-4ab)$;
 e) $\frac{5}{7}xyz : (-\frac{3}{2}xy)$, $(-1,2xyz) : (-8xy)$, $(-2xya) : (-xy)$;
 f) $(-24abcd) : (-16ab)$, $(-30abcd) : (-45ad)$;
 g) $(-25xyz) : (-10x)$, $(-100xyz) : (-25xyz)$.

10. Upość:

- a) $\frac{-4a}{+2b}$, $\frac{-8x}{-4y}$, $\frac{16a}{-8b}$, $\frac{-24a}{-12b}$, $\frac{-8abc}{+2ac}$;
 b) $\frac{-12ab}{+4ab}$, $\frac{+24abc}{-18abx}$, $\frac{-27axy}{-54aby}$, $\frac{-24abc}{-32ac}$.

§ 4. Prawo rozdzielności ilorazu względem sumy

Mamy iloraz: $(a + b + c) : d$, gdzie $d \neq 0$.

Zamieniając dzielenie na mnożenie otrzymamy:

$$(a + b + c) : d = (a + b + c) \cdot \frac{1}{d}.$$

Ponieważ sumę mnożymy mnożąc każdy składnik z osobna i dodając wyniki, zatem:

$$(a + b + c) \cdot \frac{1}{d} = a \cdot \frac{1}{d} + b \cdot \frac{1}{d} + c \cdot \frac{1}{d}.$$

Lecz:

$$a \cdot \frac{1}{d} = a : d \text{ itd.,}$$

więc: $(a + b + c) : d = (a : d) + (b : d) + (c : d)$.

Widzimy stąd, że iloraz sumy przez liczbę (różną od zera) otrzymamy dzieląc każdy składnik sumy przez tę liczbę i wyniki dodając.

Jest to tzw. prawo rozdzielnosci ilorazu względem sumy.

Np.: $[(+8) + (-6) + (-10)] : (-2) = (-4) + (+3) + (+5)$.

$$\frac{a + b + c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} \quad (d \neq 0).$$

Mamy iloraz: $(a - b + c - d) : e \quad e \neq 0$.

Wyrazami sumy algebraicznej są: $a, -b, +c, -d$. Iloraz otrzymamy dzieląc każdy wyraz przez e i dodając wyniki.

Otrzymamy w ten sposób ilorazy: $a : e, (-b) : e, (+c) : e, (-d) : e$ czyli $a : e, -(b : e), +(c : e), -(d : e)$.

Otrzymamy sumę tych ilorazów pisząc je obok siebie z ich znakami. Zatem:

$$(a - b + c - d) : e = (a : e) - (b : e) + (c : e) - (d : e) = \\ = \frac{a}{e} - \frac{b}{e} + \frac{c}{e} - \frac{d}{e}.$$

$$(-3 + 5 - 2 - 4) : (-7) = \frac{3}{7} - \frac{5}{7} + \frac{2}{7} - \frac{4}{7} \\ (3x - 6y + 4a) : (-2) = -\frac{3}{2}x + 3y - 2a.$$

Zadania

11. Sprawdź:

$$\frac{(-3) + (-5)}{-2} = \frac{-3}{-2} + \frac{-5}{-2}, \quad \frac{-8 + 5 - 4}{-3} = \frac{-8}{-3} + \frac{5}{-3} + \frac{-4}{-3}.$$

12. Sprawdź: $\frac{a+b}{3} = \frac{a}{3} + \frac{b}{3}, \quad \frac{a+b}{-2} = \frac{a}{-2} + \frac{b}{-2}$, jeśli:

$$a) a = +6, b = +4; \quad b) a = +8, b = -4.$$

13. Uwolnij od nawiasów:

$$a) (a + b + c) : 3, \quad (4a + 2b + 8c) : 2, \quad (6a + 5b + 4c) : 5; \\ b) [(-2)a + 3b + (-6)c] : 3; \\ c) (x + y + z) : (-4), \quad (x + y + z + 5u) : 10; \\ d) (2x + 8y + 6z + 10u) : (-2); \\ e) [(-18)a + (-9)b + (-6)c + (-12)d + (-3)e] : (-3).$$

14. Uwolnij od nawiasów:

$$a) (6x - 2y + 4) : (-2), \quad (-3x + 7y - 2z - 8) : (-6); \\ b) (-16a + 5b - 4c - d) : (-3);$$

$$c) (\frac{3}{4}x - \frac{5}{8}y - \frac{4}{5}z + 6u - 3w) : (-\frac{2}{3});$$

$$d) (-3a + \frac{1}{2}b - \frac{4}{3}c - 12d) : (-1)$$

15. Uwolnij od nawiasów, po czym zredukuj wyrazy podobne:

$$a) -2(-4x + 8) - [(6x - 2y) : 3]; \quad x - y - [(x + y) : 3];$$

$$b) -3x - 2(x - y) + [(x + y) : 4]; \quad x - \{2x - [(2y + x) : 5]\};$$

$$c) 15x - \{7x + [(3x - 4) : (-2)]\};$$

$$d) a + \{-3b - [(-2a + 3b) : (-2)]\};$$

$$e) [(a - b) : (-4)] - [(b - c) : (-2)] + [(c - a) : (-8)];$$

$$f) [(-12x + 5y) : (-3)] - \{-x - [(2x - y) : (-2)]\};$$

$$g) 5x - 2y - [(14x - 8y) : (-2)] - [(-5x + 8y) : (-3)].$$

16. a) Między c osób rozdzielono równo a zł; ile otrzymała każda osoba?

b) Robotnik, pracujący przez a dni po b godzin dziennie, zarobił c zł; ile zł płacono mu za godzinę?

c) Piechur szedł a godzin, a resztę drogi, tj. b km, przeszedł z prędkością c km/godz. Jak długo był w drodze?

W zadaniach powyższych podaj przykłady liczbowe.

17. Do naczynia o pojemności a l rura dopływowa dostarcza b l w 1 minucie, rura zaś odpływowa odprowadza c l w 1 minucie; w jakim czasie napełni się to naczynie, jeśli obie rury otworzymy równocześnie? Oblicz przyjmując $a = 45, b = 6, c = 3$!

18. a) Liczbę x pomnóż przez 2, do tego dodaj a , wynik podziel przez 2 i odejmij x . Co otrzymasz? Ile wynosi a , jeżeli wynik końcowy jest 10?

b) Liczbę x pomnóż przez 4, odejmij następnie 8, wynik podziel przez 2 i dodaj 4. Ile wynosi x , jeżeli ostateczny wynik jest 16?

19. a) Ze stacji wyjeżdżają dwa pociągi; po czasie t godz. jeden przejechał a km, drugi b km. Ile wynosi różnica ich prędkości, jeżeli $a - b = 20, t = 2$?

b) Kupiec sprzedał jednemu z kupujących 7 m sukna, drugiemu 5 m sukna tego samego gatunku i otrzymał a zł. Ile zapłacił każdy z kupujących?

20. Z pewnej miejscowości wyruszył piechur, który szedł z prędkością v km na godz. Po upływie a godz. wyjechał cyklista, który dopędził piechurę po b godzinach. Z jaką prędkością jechał cyklista?

21. Podróżny mając przebyć s km drogi odbył a km drogi pieszo w m godz., a resztę drogi końmi. Z jaką szybkością odbył resztę drogi, jeżeli przeciętna szybkość podróżnego wynosiła v km/godz.?

22. Pociąg osobowy, jadący z prędkością v km na godz., przebył pewną drogę w t godz.; w jakim czasie przebędzie tę drogę pociąg pospieszny, jadący z prędkością w km na godz.?
23. Kupiec zmieszał a kg kawy po r zł za 1 kg z b kg kawy po s zł za 1 kg. Ile kosztuje 1 kg tej mieszaniny?
24. Z pewnej stacji wyjeżdża pociąg towarowy z prędkością v km/godz. W t godz. później wyjeżdża pociąg pospieszny z prędkością u km/godz. Po jakim czasie dopędzi pociąg pospieszny pociąg towarowy?
25. Robotnik wykonałby pewną pracę pracując przez a dni po b godzin dziennie. W ilu dniach wykona tę pracę, gdy będzie pracował po c godzin dziennie? Przez ile godzin dziennie musiałby pracować, by wykonać pracę w d dniach?
26. Do pewnego stopu użyto dwóch metali, a mianowicie zmieszano a kg pierwszego o ciężarze właściwym r z pewną ilością drugiego o ciężarze właściwym s . Ile kg drugiego metalu użyto, jeżeli ciężar stopu wynosi m kg?
27. Przy dzieleniu liczby $2a$ przez pewną liczbę, otrzymujemy na iloraz $a + b$, a na resztę $a - b$. Jaki jest dzielnik?

Rozdział VI

Wyrażenia ułamkowe

§ 1. Ułamki algebraiczne

Iloraz napisany w postaci ułamka nazywamy również ułamkiem algebraicznym. Uławkami algebraicznymi są zatem:

$$\frac{-2}{+3}, \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}}, \frac{a}{b}, \frac{-a}{-3} \text{ itd.}$$

Do ułamków algebraicznych stosują się podobne prawa jak do ułamków zwyczajnych.

Wartość ułamka algebraicznego nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik przez tę samą liczbę (różną od zera) pomnożymy lub podzielimy.

$$\text{A więc: } \frac{a}{b} = \frac{am}{bm}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m} \quad b \neq 0, m \neq 0.$$

Jest to inne wypowiedzenie znanej już własności ilorazu.

$$\text{Np.: } \frac{-2}{+3} = \frac{(-2)(-5)}{(+3)(-5)} = \frac{10}{-15}, \quad \frac{-8}{-6} = \frac{(-8):(-2)}{(-6):(-2)} = \frac{4}{3},$$

$$\frac{-\frac{3}{4}}{+\frac{7}{6}} = \frac{(-\frac{3}{4}) \cdot 12}{(+\frac{7}{6}) \cdot 12} = \frac{-9}{+14} = -\frac{9}{14}.$$

Odwrotność ułamka algebraicznego otrzymamy zamieniając licznik z mianownikiem.

$$\text{A więc: odwrotnością } \frac{a}{b} \text{ jest } \frac{b}{a}. \quad (a, b \text{ różne od zera})$$

$$\text{Mamy bowiem: } 1 : \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1 \cdot b}{\frac{a}{b} \cdot b} = \frac{b}{a}.$$

Widzimy więc, że odwrotnością ułamka $\frac{a}{b}$ jest $\frac{b}{a}$.

$$\text{Np.: Odwrotnością } \frac{-\frac{3}{4}}{+\frac{4}{5}} \text{ jest } \frac{+\frac{4}{5}}{-\frac{3}{4}}.$$

Sumę algebraiczną ułamków o równych mianownikach otrzymujemy tworząc odpowiednią sumę algebraiczną liczników i dzieląc ją przez wspólny mianownik.

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m} - \frac{d}{m} = \frac{a - b + c - d}{m} \quad (m \neq 0)$$

Mamy bowiem:

$$\frac{a - b + c - d}{m} = (a - b + c - d) : m = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m} - \frac{d}{m}.$$

$$\text{Podobnie: } \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} \quad (c \neq 0)$$

Iloczyn ułamków algebraicznych równa się ułamkowi, którego licznik jest iloczynem liczników, mianownik zaś iloczynem mianowników.

$$\text{Np.: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (b, d \text{ różne od zera})$$

$$\text{Mamy bowiem: } \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}, \quad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd} = bc \cdot \frac{1}{bd}. \text{ Zatem:}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a \cdot \frac{1}{b} \cdot bc \cdot \frac{1}{bd} = ac \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{1}{bd} = ac \cdot 1 \cdot \frac{1}{bd} = ac \cdot \frac{1}{bd}.$$

Zamieniając mnożenie przez $\frac{1}{bd}$ na dzielenie przez bd otrzy-

$$\text{mamy w końcu: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = ac : bd = \frac{ac}{bd}.$$

$$\text{Np.: } \frac{1,2}{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{-10}{-4} = \frac{-12}{+3} = -4.$$

Z reguły mnożenia otrzymujemy łatwo regułę dzielenia ułamków.

Mianowicie: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, (b, c, d różne od zera),

gdyż zamiast dzielić przez liczbę możemy mnożyć przez jej odwrotność.

Uwaga. Mamy: $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$, $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$. ($b \neq 0, c \neq 0$)

Możemy bowiem napisać:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{ac}{b}, \quad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}.$$

Zatem, prawa dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia ułamków algebraicznych są analogiczne jak ułamków zwykłych.

Zadania

1. Uprość:

$$a) \frac{(-4) \cdot (-15)}{(+2) \cdot (-25)}, \frac{(-21) \cdot (+40)}{(+24) \cdot (-70)}, \frac{(-50) \cdot (-18)}{(-30) \cdot (+6)};$$

$$b) \frac{ax}{bx}, \frac{abc}{abd}, \frac{-ax}{ay}, \frac{bxy}{-cxy}, \frac{3ab}{-9ac};$$

$$c) \frac{-3a}{6ab}, \frac{4ax}{-16ab}, \frac{-5xy}{15xyz}, \frac{3abcx}{15abc};$$

$$d) \frac{-15ab}{25bc}, \frac{21xy}{28yz}, \frac{-8ab}{-12bc}, \frac{12mnp}{-15mng}.$$

2. Wykonaj działania:

$$a) \frac{a}{2} + \frac{a}{3}, \frac{a}{4} - \frac{a}{5}, \frac{b}{3} - \frac{b}{4}, \frac{2a}{3} - \frac{a}{5};$$

$$b) \frac{a}{2} + \frac{b}{5}, \frac{a}{4} - \frac{b}{6}, \frac{x}{8} - \frac{y}{12}, \frac{2x}{15} - \frac{y}{5};$$

$$c) \frac{a}{7} - \frac{b}{28}, \frac{2x}{13} + \frac{y}{39}, \frac{x}{16} - \frac{5y}{48}, \frac{5a}{12} - \frac{7b}{36};$$

$$d) \frac{a}{2} - \frac{a}{3} + \frac{a}{5}, \frac{b}{4} - \frac{b}{8} + \frac{b}{12}, \frac{x}{3} - \frac{x}{6} - \frac{x}{9}.$$

Sprawdź dla $a = -2$, $b = +5$, $x = -3$, $y = -5$.

3. Wykonaj mnożenia:

$$a) \frac{-3}{+5} \cdot \frac{2}{-3}, \frac{-2}{\frac{3}{4}} \cdot \frac{3}{4}, \frac{a}{3} \cdot 5, (-4) \cdot \frac{a}{5}, \frac{x}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3}, \frac{2a}{5} \cdot \frac{3c}{4};$$

$$b) \frac{2a}{5} \cdot \frac{3c}{4}, \frac{7x}{-9} \cdot \frac{-6a}{5}, \frac{12x}{7} \cdot \frac{21y}{4}, \frac{15ab}{8} \cdot \frac{12x}{25};$$

$$c) \frac{-8ax}{9} \cdot \frac{27bz}{-40}, \frac{-5abx}{12} \cdot \frac{-18cyz}{35}.$$

4. Wykonaj dzielenia:

$$a) \frac{a}{5} : \frac{3}{4}, \frac{-2a}{3} : \frac{-3}{5}, \frac{-5x}{14} : \frac{-3x}{7}, \frac{a}{-5} : (-a), \frac{-2ab}{3} : (-5);$$

$$b) (-x) : \frac{2y}{5}, \frac{-3x}{8} : \frac{9a}{4}, \frac{7a}{9} : 2a, (-5a) : \frac{3a}{4};$$

$$c) \frac{3a}{8} : \frac{9a}{2}, \frac{12a}{25} : \frac{-8c}{15}, \frac{27a}{49} : \frac{-12a}{21}, \frac{22ab}{35} : \frac{-11a}{14}.$$

§ 2. Przekształcanie wyrażeń ułamkowych

Wyrażenie ułamkowe, jak np.: $\frac{3x - 2y + 7}{5}$,

w którym licznik jest sumą algebraiczną, zaś mianownik liczbą daną, możemy przedstawić w postaci sumy algebraicznej. Wystarczy w tym celu wyrażenie powyższe uważać za iloraz licznika przez mianownik. Zatem:

$$\frac{3x - 2y + 7}{5} = (3x - 2y + 7) : 5 = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y + \frac{7}{5};$$

$$\frac{-x - y - 3}{4} = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4};$$

$$\frac{2a - 3b}{\frac{3}{5}} = (2a - 3b) \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}a - 5b.$$

Wyrażenie ułamkowe, jak np.: $\frac{-\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y - \frac{7}{6}}{\frac{5}{3}}$,

możemy tak przekształcić, aby liczby dane, występujące w tym wyrażeniu, były liczbami całkowitymi. Wystarczy w tym celu pomnożyć licznik i mianownik danego wyrażenia ułamkowego przez wspólny mianownik ułamków $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{5}{3}$, tj. przez 12. Otrzymamy:

$$\frac{-12 \cdot \frac{3}{4}x + 12 \cdot \frac{2}{3}y - 12 \cdot \frac{7}{6}}{12 \cdot \frac{5}{3}} = \frac{-9x + 8y - 14}{20}.$$

Podobnie w wyrażeniu: $\frac{\frac{2}{3}a - \frac{3}{5}b + \frac{7}{6}}{\frac{4}{15}}$

mnożymy licznik i mianownik przez 30, tj. wspólną wielokrotność liczb 3, 5, 6, 15. Otrzymamy: $\frac{20a - 18b + 35}{8}$.

W wyrażeniu ułamkowym, jak np.: $\frac{10x - 15y + 30}{20}$,

liczby 10, 15, 30, 20 mają wspólny dzielnik 5; możemy przez ten dzielnik licznik i mianownik wyrażenia podzielić (tzn. uprościć). Otrzymamy w ten sposób prostsze wyrażenie:

$$\frac{2x - 3y + 6}{4}.$$

Jeżeli mamy kilka wyrażeń ułamkowych, w których mianowniki są liczbami całkowitymi, to możemy wyrażenia te przedstawić w postaci wyrażeń ułamkowych o wspólnym mianowniku (czyli sprowadzić do wspólnego mianownika).

$$\text{Np.: } \frac{3x-2}{6}, \frac{4x-2y+7}{15}, \frac{3x+2y-1}{5}.$$

Wspólnym mianownikiem jest 30. Postępując podobnie jak przy ułamkach zwyczajnych, a więc mnożąc licznik i mianownik tych ułamków odpowiednio przez 5, 2, 6, otrzymamy:

$$\frac{15x-10}{30}, \frac{8x-4y+14}{30}, \frac{18x+12y-6}{30}.$$

Zadania

5. Następujące ilorazy przedstaw w postaci ułamkowej:

$$\begin{aligned} a) (3a+2b):5, \quad b) (2x+3y):7, \quad c) (a-2b):6, \\ d) (-2a+4b):3, \quad e) (-x-3y):2, \quad f) (2a+3b-4):9. \end{aligned}$$

6. Przedstaw ułamki w postaci sumy algebraicznej:

$$\begin{aligned} a) \frac{3a+6b}{5}; \quad b) \frac{2x-3y}{4}; \quad c) \frac{-3x+5}{4}; \quad d) \frac{-2x-3y}{7}; \\ e) \frac{2a-3b+2c}{5}; \quad f) \frac{a-b+2c-d}{3}; \quad g) \frac{2x-3y+4z-2}{3}. \end{aligned}$$

7. Uwolnij od nawiasów, po czym wykonaj redukcje w licznikach:

$$\begin{aligned} a) \frac{(3x+4)+(2x+3)}{5}; \quad b) \frac{(x-2)+(+3x+5)}{6}; \\ c) \frac{(2x-3)+(3x-5)}{4}; \quad d) \frac{(-x+3)+(-2x+7)}{4}; \\ e) \frac{(3a-2b)-(2a+b)}{5}; \quad f) \frac{(-a+2b)-3(2b+c)}{4}. \end{aligned}$$

8. Przedstaw ułamki w postaci sum algebraicznych:

$$\begin{aligned} a) \frac{2(x+3)}{5}; \quad b) \frac{3(x-7)}{4}; \quad c) \frac{5(-2a+3b)}{6}; \\ d) \frac{2(-4a+2b-2c)}{5}; \quad e) \frac{(a-b)-2(a+b)}{2}; \\ f) \frac{3(2x-4y)+2(x-2y)}{5}; \quad g) \frac{5(x-2y)-(x+3y)}{6}. \end{aligned}$$

9. Przekształć poniżej podane wyrażenia ułamkowe tak, aby liczby dane w tych wyrażeniach były całkowite:

$$\begin{aligned} a) \frac{\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}}; \quad b) \frac{\frac{1}{3}a-\frac{4}{3}b}{\frac{6}{3}}; \quad c) \frac{-\frac{2}{5}a+\frac{3}{5}b-\frac{1}{5}c}{\frac{4}{5}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \frac{\frac{3}{4}ab+\frac{2}{4}bc-\frac{2}{4}ac}{\frac{4}{4}}; \quad e) \frac{2x-\frac{3}{4}y}{\frac{5}{4}}; \quad f) \frac{-3x+2y}{\frac{2}{3}}; \\ g) \frac{a-2b}{\frac{3}{4}}; \quad h) \frac{\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}b}{\frac{1}{3}}; \quad i) \frac{\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y-\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}}; \quad j) \frac{xy-\frac{1}{7}xz}{\frac{1}{7}}. \end{aligned}$$

10. Uprość następujące wyrażenia ułamkowe:

$$\begin{aligned} a) \frac{6x+12y+4z}{4}; \quad b) \frac{3a-6b+18c}{9}; \quad c) \frac{24a-36b+9}{12}; \\ d) \frac{-5a+15b-30c}{125}; \quad e) \frac{-4x+8y}{4}; \quad f) \frac{+9x-27y}{9}; \\ g) \frac{16xy+48yz}{16}; \quad h) \frac{3ab-12bc}{3}. \end{aligned}$$

11. Sprowadź do wspólnego mianownika następujące wyrażenia ułamkowe:

$$\begin{aligned} a) \frac{2a+3}{3}, \frac{3a-2}{4}; \quad b) \frac{x-3y}{2}, \frac{-y}{3}; \\ c) \frac{a+2b}{6}, \frac{3a-2b}{4}; \quad d) \frac{a-b}{8}, \frac{2a+b}{12}; \\ e) \frac{3x+y}{4}, \frac{-x+2y}{6}, \frac{2x-y}{18}; \quad f) \frac{x-4y}{9}, \frac{x+2y}{15}, \frac{-2x-y}{24}; \\ g) \frac{-3a+2}{4}, \frac{b}{6}, \frac{a}{2}, \frac{2a-3}{12}; \quad h) \frac{x-2y}{2}, 2x+3y; \\ i) \frac{x+y}{3}, x-y; \quad j) \frac{2a+b}{3}, a-2b, \frac{-3a+b}{2}; \\ k) \frac{ab-bc}{4}, 3a+b, \frac{a-2b}{3}, 2a+b, \frac{a-b}{6}. \end{aligned}$$

§ 3. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń ułamkowych

Aby obliczyć sumę algebraiczną:

$$\frac{2x+3}{4} - \frac{3x+8y}{6} + \frac{3y-7}{9},$$

sprowadzamy najpierw ułamki te do wspólnego mianownika. Wspólnym mianownikiem jest 36.

$$\text{Otrzymamy: } \frac{18x+27}{36} - \frac{18x+48y}{36} + \frac{12y-28}{36}.$$

Należy teraz na licznikach wykonać działania naznaczone dla ułamków. Aby uniknąć pomyłki, bierzemy zazwyczaj liczniki w nawiasy, przed którymi dajemy znak, stojący przed ułamkiem.

$$\text{Zatem otrzymamy: } \frac{(18x+27)-(18x+48y)+(12y-28)}{36}.$$

Po uwolnieniu od nawiasów i po redukcji dostaniemy:

$$\frac{-1-36y}{36} = -\frac{1}{36} - y.$$

Podobnie:

$$\begin{aligned} -\frac{3y-2x}{4} + \frac{2x-3y}{6} - 2x &= -\frac{9y-6x}{12} + \frac{4x-6y}{12} - \frac{24x}{12} = \\ &= \frac{-(9y-6x) + (4x-6y) - 24x}{12} = \frac{-14x-15y}{12}. \end{aligned}$$

Zadania

12. Dodaj następujące wyrażenia ułamkowe:

$$\begin{aligned} a) \frac{3x+5}{2} + \frac{x+3}{2}; & \quad b) \frac{2x-4}{3} + \frac{x+5}{3}; \\ c) \frac{2a+b}{6} + \frac{-a+3b}{6}; & \quad d) \frac{a-2b}{4} + \frac{-2a-3b}{4}; \\ e) \frac{-x+2y}{4} + \frac{2x-4y}{4}; & \quad f) \frac{x+y}{3} + \frac{2x-y}{3} + \frac{3x-4y}{3}. \end{aligned}$$

13. Wykonaj działania:

$$\begin{aligned} a) \frac{3a+2b}{4} + \frac{a-b}{2}; & \quad b) \frac{2a-b}{3} + \frac{2a+b}{6}; \\ c) \frac{-3+y}{4} + \frac{x-y}{6}; & \quad d) \frac{2x-y}{6} + \frac{-x+y}{8}; \\ e) \frac{a-b}{6} + \frac{3a+b}{4} + \frac{2a-b}{8}; & \\ f) \frac{x-y}{12} + \frac{-3x+2y}{8} + \frac{2x-5y}{16}; & \quad g) \frac{a-2b}{2} + a; \\ h) \frac{-a+3}{4} + a + \frac{a-2b}{2}; & \quad i) \frac{x-y}{2} + x + y. \end{aligned}$$

14. Wykonaj działania:

$$\begin{aligned} a) \frac{2a-4}{3} - \frac{a+6}{3}; & \quad b) \frac{+2a+3}{5} - \frac{3a-4}{5}; \\ c) \frac{a-2b}{2} - \frac{-2a+5}{2}; & \quad d) \frac{-x+3y}{4} - \frac{-2x-7y}{4}; \\ e) \frac{x+2y}{3} - \frac{2x-y}{3}; & \quad f) \frac{3x+4}{5} - \frac{2x-7}{5}. \end{aligned}$$

15. Wykonaj działania:

$$\begin{aligned} a) \frac{4a+3b}{2} - \frac{a+2b}{4}; & \quad b) \frac{2x-5}{6} - \frac{x-4}{12}; \\ c) \frac{3ab+a+b}{8} - \frac{a+b}{12}; & \quad d) \frac{2x+y}{4} - \frac{2x-3y}{5}. \end{aligned}$$

$$e) \frac{x+z}{2} - \frac{x-z}{3};$$

$$f) \frac{x+y}{13} - \frac{-2x+y}{26};$$

$$g) \frac{x+y}{4} - z;$$

$$h) \frac{x-2y}{6} - \frac{3x-4}{9} - x.$$

16. Wykonaj działania:

$$\begin{aligned} a) \frac{2a+3b}{2} - \frac{a-b}{4} + \frac{3a-2b}{6}; \\ b) \frac{x-y}{8} - \frac{2x+3y}{4} + \frac{x-2y}{12}; \\ c) \frac{3x-4y}{3} - \frac{-x+2y}{15} - \frac{2x-3y}{9}; \\ d) \frac{a-b}{2} - \frac{a+b}{4} + \frac{a+b}{3} - a + \frac{3b}{2}. \end{aligned}$$

17. Wykonaj działania:

$$\begin{aligned} a) \frac{\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}{2} + \frac{\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}}{3}; & \quad b) \frac{a - \frac{1}{2}b}{6} - \frac{3a + \frac{2}{3}b}{4}; \\ c) \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} + \frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y}{\frac{1}{2}}; & \quad d) \frac{-\frac{3}{5}a + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{2}a - 2b}{\frac{3}{2}}; \\ e) \frac{-a + \frac{b}{2} - \frac{2}{3}c}{\frac{1}{5}} - \frac{3a + \frac{1}{2}c}{\frac{2}{3}} + \frac{b - 2a + \frac{1}{3}c}{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

18. Uwolnij od nawiasów, po czym wykonaj działania:

$$\begin{aligned} a) \frac{3x+2}{4} + \left(\frac{x-y}{2} - \frac{2x-y}{3} \right); & \quad b) \frac{x-2y}{6} + \left(\frac{2x-y}{3} + \frac{x+y}{4} \right); \\ c) \frac{a+3}{4} - \left(\frac{2a-b}{6} - \frac{3a+b}{12} \right); \\ d) \left(\frac{2x-y}{4} - \frac{x+y}{3} \right) - \left(\frac{3x-y}{6} + \frac{x-2y}{8} \right); \\ e) x-y - \frac{x+y}{2} - \left(\frac{x+y}{2} - \frac{x+y}{4} \right). \end{aligned}$$

§ 4. Mnożenie i dzielenie wyrażeń ułamkowych

Mnożenie i dzielenie przeprowadza się podobnie jak mnożenie i dzielenie ułamków zwyczajnych.

$$\text{Np. } \frac{2x-3y}{5} \cdot (-3) = \frac{(2x-3y)(-3)}{5} = \frac{-6x+9y}{5};$$

$$\frac{3a-2b}{4} : \frac{3}{2} = \frac{(3a-2b) \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{9a-6b}{8}.$$

Przed obliczeniem iloczynu upraszczamy, jeśli można. Np.: Przed obliczeniem iloczynu:

$$\frac{2x-3}{18} \cdot 24$$

upraszczamy mianownik wyrażenia i mnożymy przez 6. Otrzymamy:

$$\frac{2x-3}{3} \cdot 4 = \frac{(2x-3) \cdot 4}{3} = \frac{8x-12}{3}.$$

Podobnie w iloczynie: $\frac{3y-5}{10} \cdot \frac{15}{8}$

upraszczamy mianownik wyrażenia i licznik mnożymy przez 5.

Otrzymamy: $\frac{3y-5}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9y-15}{16}.$

Iloraz zamieniamy na iloczyn mnożąc przez odwrotność dzielnika. Np.:

$$\frac{6a-8b}{19} : \frac{4}{15} = \frac{6a-8b}{19} \cdot \frac{15}{4}.$$

Upraszczamy teraz licznik wyrażenia i mianownik mnożymy przez 2, następnie mianownik wyrażenia i licznik mnożymy przez 3.

Otrzymamy: $\frac{3a-4b}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15a-20b}{6}.$

Zadania

19. Wykonaj następujące mnożenia:

a) $\frac{2x+3y}{4} \cdot 3$; b) $\frac{x-3y}{3} \cdot 4$; c) $\frac{2x-3y}{5} \cdot (+2)$;

d) $\frac{-3x+2y}{4} \cdot (-5)$; e) $\frac{a-2b}{3} \cdot (-4)$; f) $\frac{-3a-2b}{4} \cdot (-3)$.

20. Przed wykonaniem mnożenia uprość:

a) $\frac{2a-5}{15} \cdot 6$; b) $\frac{x-2y}{9} \cdot 12$; c) $\frac{x-2y}{4} \cdot (+10)$;

d) $\frac{2x-4}{9} \cdot (-12)$; e) $\frac{-2x+3}{4} \cdot (-18)$;

f) $\frac{3x-4y}{6} \cdot (+12)$; g) $\frac{2a-3b+c}{4} \cdot 8$;

h) $\frac{-x+y-3z}{4} \cdot (-4)$; i) $\frac{+2x-3y}{4} \cdot (-16)$.

21. Wykonaj działania:

a) $\frac{a-3b}{3} \cdot \frac{2}{5}$; b) $\frac{2a-3}{4} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)$; c) $\frac{2x-3y}{4} \cdot \frac{2}{3}$;

d) $\frac{-x+2y}{4} \cdot \frac{8}{9}$; e) $\frac{a-b}{2} \cdot \frac{4}{3}$; f) $\frac{2x-y}{2} \cdot \frac{2}{5}$;

g) $\frac{a-b+2c}{3} \cdot \left(-\frac{6}{5}\right)$; h) $\frac{-2x+4}{3} \cdot \frac{9}{4}$; i) $\frac{2a-b+3c}{2} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$.

22. Wykonaj działania:

a) $4 \cdot \frac{2x+5}{3} + 3 \cdot \frac{3x-2}{2}$; b) $\frac{a-b}{2} \cdot 3 - 4 \cdot \frac{2a+3b}{3}$;

c) $\frac{2a+b}{4} \cdot (-3) + \frac{a-b}{2}$;

d) $\frac{2x+y-4}{6} \cdot (-3) - \frac{-3x+2y}{2} \cdot (-5)$;

e) $\frac{2a+b}{3} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{a-b}{3} \cdot \frac{2}{3}$;

f) $\frac{a-2b}{4} \cdot \frac{3}{7} - 3 \cdot \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{6}$;

g) $-\frac{x-2y}{4} \cdot 3 + \frac{2x-y}{3} \cdot 5 - \frac{5}{6} \cdot \frac{x-y}{5}$.

23. Wykonaj działania:

a) $\frac{3x+4}{2} + 2 \left(\frac{x-6}{3} + \frac{2x-4}{5} \right)$;

b) $\frac{2x-3}{5} - 3 \left(\frac{2x-3}{3} - \frac{x-y}{2} \right)$;

c) $-\frac{3x+5}{4} + \frac{2}{3} \left(\frac{x+9}{2} - \frac{2x+3}{4} \right)$;

d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3x-2y}{6} - \frac{2}{3} \left(\frac{x}{4} + \frac{2x-1}{3} \right)$; e) $\left(\frac{a-2b}{2} - 3 \cdot \frac{a+b}{2} \right) \cdot \frac{3}{7}$;

f) $\left(\frac{2a+3b+c}{5} - \frac{a-b}{2} \right) \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) - \left(\frac{a-2b}{2} + \frac{2a+b}{3} \right) \cdot \left(+\frac{1}{4} \right)$;

g) $a - \frac{1}{2} \left[a - \frac{1}{2} \left[a + \frac{1}{2} (a+b) \right] \right]$.

24. Wykonaj dzielenie:

a) $\frac{4x-2y}{3} : 2$; b) $\frac{6x-9y}{4} : (-3)$; c) $\frac{-2a+6b}{3} : (-4)$;

d) $\frac{a-b}{3} : \frac{2}{7}$; e) $\frac{2a-b}{5} : \left(-\frac{3}{4}\right)$; f) $\frac{2x+4y}{6} : \frac{2}{3}$;

g) $\frac{3x-12y}{8} : \left(-\frac{3}{4}\right)$; h) $\frac{-2a+4y-6z}{3} : \left(-\frac{2}{3}\right)$.

25. Wykonaj działania:

$$\begin{aligned} a) \frac{2x-3}{4} : \frac{1}{2} + \frac{x-y}{2} \cdot 6; \quad b) \frac{-2a-b}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{a+b}{3} : \frac{1}{4}; \\ c) \left(\frac{2x+y}{2} + \frac{x-y}{4} \right) : \frac{2}{3}; \quad d) \left(\frac{x-y}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2x-3y}{3} \right) : \left(-\frac{1}{2} \right); \\ e) \frac{2x+3y}{3} - \left(\frac{x}{2} - \frac{x-2y}{3} \right) : \frac{1}{4}; \quad f) \frac{\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} : \frac{1}{2}; \\ g) \frac{2a - \frac{3}{4}b}{\frac{2}{3}} : \left(-\frac{3}{5} \right); \quad h) \frac{\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b + \frac{3}{4}c}{\frac{2}{3}} : (-2). \end{aligned}$$

26. a) Jaś dostał a zł, następnie b groszy; ile miał razem zł? ile miał razem groszy?
 b) Ktoś miał a zł i b dolarów; ile to jest razem zł, a ile dolarów? (1 dolar = 5,2 zł).
 c) Poziom wody w rzece podniósł się pierwszego dnia o a m, drugiego opadł o b dcm, trzeciego podniósł się o c cm; wyraż ostateczną zmianę a) w m, b) w dcm, c) w cm!
27. Kapitał a zł pożyczono na p %; jaki dochód przyniósł kapitał po roku?
28. $\frac{3}{4}$ kg towaru kosztuje a zł; ile kosztuje b kg tego towaru?
29. Obwód koła u wozu ma $\frac{2}{3}m$; ile razy koło obróci się na drodze długości a km?
30. Z dwóch miast odległych od siebie o a km wyszły naprzeciw siebie dwa pociągi. Jeden przebyłby całą drogę w 12 godz., drugi w 15 godz. Jaka będzie odległość między pociągami po 4 godz.?
31. Kupiec zmieszał 3 kg kawy po p zł za 1 kg i 5 kg kawy po q zł za 1 kg; ile kosztuje 1 kg mieszaniny? Jaka jest różnica w cenie 1 kg kawy pierwszego gatunku a 1 kg mieszaniny?
32. Czterej robotnicy zarobili razem a zł; ile zarobił każdy, jeżeli pierwszy pracował 6 dni, drugi i trzeci po 8 dni, czwarty zaś 9 dni?
33. Jeden kupiec sprzedaje 2 kg pewnego towaru za a zł, drugi 6 kg tego towaru za b zł. Jaka jest różnica w cenie przy kupnie 12 kg tego towaru?
34. Rozdzielono a zł między kilka osób w ten sposób, że każdej osobie dano 16 zł; ile osób obdzielono, jeżeli zostało b zł?
35. Rozdziel między dwóch chłopców a jabłek tak, aby jeden z nich otrzymał o b jabłek więcej niż drugi; ile otrzyma każdy z nich?

U w a g a. Daj naprzód jednemu z nich b jabłek, a resztę rozdziel równo między nich.

36. Pewną pracę wykona a robotników w b dniach; w jakim czasie wykona tę pracę 12 robotników?
37. Sumą dwóch kolejnych liczb parzystych wynosi a ; jakie to są liczby?
38. Jeżeli punkty A, B położone na osi mają współrzędne odpowiednio a, b , wówczas środek odcinka AB ma współrzędną $\frac{a+b}{2}$. Sprawdź przyjmując za a, b : a) $+1, 3$, b) $-2, -6$, c) $-4, +8$!
39. Punkty A, B, C mają współrzędne odpowiednio a, b, c . Punkt D jest środkiem odcinka AB , zaś E jest środkiem odcinka BC . Jaka jest współrzędna środka odcinka DE ?
40. Robotnik zarabia dziennie a zł, a wydaje b zł. Ile zarabia i ile zaoszczędza przeciętnie dziennie, jeżeli pracuje przez 24 dni w miesiącu? (Miesiąc = 30 dni.)
41. O ile zmieni się wartość ułamka $\frac{a}{5}$, jeżeli licznik i mianownik zwiększymy o 1? Dla jakich wartości a zmiana będzie dodatnia, a dla jakich ujemna?
42. Dwa auta wyruszyły jednocześnie z tej samej miejscowości. Pierwsze z nich jedzie z prędkością v km/godz. Po 5 godzinach drugie auto przejechało o a km więcej niż pierwsze. Ile wynosiłaby odległość aut od siebie po n godzinach jazdy, gdyby jechały: a) w tym samym kierunku, b) w kierunkach przeciwnych?
43. Kupiec kupił 50 m sukna po a zł za 1 m; po ile ma sprzedawać 1 m, jeżeli chce zarobić b zł?
44. Rolnik sprzedał a q żyta po x zł za 1 q i 90 q pszenicy. O ile drożej sprzedawał 1 q pszenicy niż 1 q żyta, jeżeli za zboże otrzymał b zł?
45. Jeden zegarek przyspiesza o a min. na godzinę, drugi zaś spóźnia się o $\frac{1}{2}a$ min. na godz. W pewnym momencie wskazują tę samą godzinę. Po jakim czasie będą wskazywać po raz pierwszy znowu tę samą godzinę?
46. Szerokość sali, zmierzona fałszywym metrem, wynosi a m. Jaka jest prawdziwa szerokość, jeżeli metr jest o x cm za długi?
47. Jeden chłopiec ma a pięciogroszówek i b dziesięciogroszówek; drugi zaś ma a dziesięciogroszówek i b pięciogroszówek. Ile mają razem monet, jeżeli razem mają c gr?

Równania pierwszego stopnia

Rozdział VII

Równania pierwszego stopnia, o jednej niewiadomej

§ 1. Określenia

Połączmy dwa wyrażenia, z których chociaż jedno zawiera litery, znakiem równości, a otrzymamy równanie.

Równaniami są np.:

$$\begin{aligned}x + 3 &= 5, \\ 3y - 5 &= 3x + 7, \\ 2a - 5 &= 7, \\ 3x + y &= 2y - x - 7.\end{aligned}$$

Litery występujące w równaniu które nie oznaczają znanych liczb, nazywamy niewiadomymi. W równaniu np. $2x - 3y + 2z = 5$ niewiadomymi są: x , y , z .

Możemy mieć równanie o jednej, dwóch lub o więcej niewiadomych. Na razie zajmijmy się równaniami o jednej niewiadomej.

Weźmy pod uwagę równanie o jednej niewiadomej.

Np.: $x + 7 = 9.$

Jeżeli w równaniu tym podstawimy $x = 3$, to równość nie będzie zachodziła, gdyż: $3 + 7 \neq 9.$

Jeżeli podstawimy $x = 2$, to równość zachodzi, gdyż: $2 + 7 = 9.$

O liczbie 2 mówimy, że spełnia powyższe równanie. Liczbę 2 nazywamy również pierwiastkiem danego równania.

Podobnie 6 jest pierwiastkiem równania: $x - 4 = 2$, gdyż 6 spełnia powyższe równanie, bo $6 - 4 = 2.$

Nie każde równanie posiada pierwiastek.

Np.: Równanie $x + 5 = x$

nie posiada pierwiastka. Gdyż jeżeli do jakiejś liczby dodamy 5, to zawsze otrzymamy na wynik liczbę większą.

Podobnie równanie: $0 \cdot x = 1$

nie posiada pierwiastka. Każda bowiem liczba, pomnożona przez 0, daje na wynik 0. Są równania posiadające kilka pierwiastków.

Np.: Równanie: $x = 7 - \frac{10}{x}$

ma pierwiastki: 2 i 5, mamy bowiem:

$$2 = 7 - \frac{10}{2}, \quad 5 = 7 - \frac{10}{5}.$$

Są równania, dla których każda liczba jest pierwiastkiem.

Np. $x + 5 = 5 + x.$

Wyrażenie stojące w równaniu po lewej (wzgl. po prawej) stronie równości nazywamy lewą (wzgl. prawą) stroną równania. Np. w równaniu $x - 3 = 8 - x$ lewą stroną jest $x - 3$, prawą $8 - x$. Rozwiązać równanie, to znaczy znaleźć jego pierwiastki.

Zadania

1. Zbadaj, czy liczba:

a) -3	spełnia równanie: $x + 1 = 3;$
b) $2\frac{1}{2}$	" " $2x - 3 = 2;$
c) $-\frac{3}{4}$	" " $4x - 1 = x - 3\frac{1}{4};$
d) $2,7$	" " $\frac{x}{3} + 0,1 = 2;$
e) $-3,5$	" " $2x - 3 = 4x + 1.$

2. Sprawdź, że liczby 1, 2, 3 są pierwiastkami równania:

$$\frac{11x - 6}{x} = x(6 - x).$$

3. Rozwiąż równania:

a) $x + 5 = 3;$	b) $x - 2 = 8;$	c) $3 \cdot x = -6;$
d) $8 - x = 3;$	e) $\frac{x}{3} = -90;$	f) $\frac{24}{x} = 6.$

§ 2. Rozwiązywanie równań

Przy rozwiązywaniu równań opierać się będziemy na następujących zasadach. Przypuśćmy, że a i b oznaczają pewne liczby.

I. Jeżeli

$$a = b$$

i jeżeli c oznacza dowolną liczbę, to oczywiście

$$a + c = b + c, \quad a - c = b - c, \quad ac = bc,$$

jeżeli ponadto $c \neq 0$, to $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

Widzimy stąd, że w równości wolno do obu stron dodać (wzgl. odjąć) tę samą liczbę, wolno obie strony pomnożyć przez tę samą liczbę, wzgl. podzielić, jeśli liczba ta jest różna od zera.

II. Jeżeli $a + b = c$, to $a = c - b$.

Podobnie, jeżeli $a - b = c$, to $a = c + b$.

Zatem w równości wolno wyraz z jednej strony przenieść na drugą ze znakiem przeciwnym.

Uwaga. Mamy równość: $a + b = c$.

Dodajmy do obu stron: $-b$, otrzymamy:

$$a + b - b = c - b, \text{ czyli redukując } a = c - b.$$

Podobnie jeżeli $a - b = c$, to dodając do obu stron $+b$ otrzymamy $a - b + b = c + b$, czyli $a = c + b$.

Zatem przenoszenie wyrazów polega na dodawaniu tej samej liczby do obu stron równości i na redukcji. Na przykładach poznamy, jak się stosuje powyższe zasady do rozwiązywania równań.

Przykład 1.

Rozwiąż równanie: $x - 7 = 2$.

Aby równanie jakieś rozwiązać, przyjmujemy, że równanie posiada pierwiastek i że x oznacza ten pierwiastek. Równanie dane możemy w ten sposób uważać za równość. Możemy je więc przekształcać. W naszym wypadku przenieśmy -7 na prawą stronę.

Otrzymamy: $x = 2 + 7$, czyli $x = 9$.

Ponieważ równanie rozwiązywaliśmy przy założeniu, że posiada pierwiastek, należy zatem sprawdzić, czy 9 jest pierwiastkiem.

W tym celu wstawiamy w dane równanie 9 zamiast x i otrzymujemy: $9 - 7 = 2$.

A więc 9 jest szukanym pierwiastkiem.

Podobnie postępujemy przy rozwiązywaniu innych równań.

Przykład 2.

Rozwiąż równanie: $11 = 9 - x$.

Przenosimy $-x$ na lewą stronę.

A więc: $11 + x = 9$.

Przenosimy teraz 11 na prawą stronę.

Zatem: $x = 9 - 11$, czyli $x = -2$.

Sprawdzenie: $11 = 9 - (-2) = 9 + 2 = 11$.

Pierwiastkiem jest więc: -2 .

Uwaga: Można było równocześnie przenieść $-x$ na lewą stronę, 11 na prawą, tak że otrzymalibyśmy od razu:

$$x = 9 - 11 = -2.$$

Przykład 3.

Rozwiąż równanie: $3x = 5$.

Dzielimy obie strony przez 3.

Zatem: $\frac{3x}{3} = \frac{5}{3}$, czyli $x = \frac{5}{3}$.

Sprawdzenie: $3 \cdot \frac{5}{3} = 5$.

Uwaga. Moglibyśmy zamiast dzielić przez 3, mnożyć obustronnie przez $\frac{1}{3}$.

Otrzymalibyśmy $\frac{1}{3} \cdot 3x = 5 \cdot \frac{1}{3}$, czyli $x = \frac{5}{3}$.

Przykład 4.

Rozwiąż równanie: $\frac{3}{4}x = -\frac{3}{5}$.

Dzielimy obustronnie przez $\frac{3}{4}$, czyli mnożymy przez $\frac{4}{3}$.

Zatem: $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}x = -\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5}$, czyli $x = -\frac{4}{5}$.

Sprawdzenie: $\frac{3}{4} \cdot (-\frac{4}{5}) = -\frac{3}{5}$.

Przykład 5.

Rozwiąż równanie: $-\frac{2}{3}x = \frac{4}{7}$.

Mnożymy obie strony przez $-\frac{3}{2}$.

Zatem: $(-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{2}{3}x) = (-\frac{3}{2}) \cdot \frac{4}{7}$,
czyli: $x = -\frac{6}{7}$.

Sprawdzenie: $(-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{6}{7}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{4}{7}$.

Przykład 6.

Rozwiąż równanie: $\frac{x}{2} = -3$.

Mnożymy obie strony równania przez 2;

otrzymamy: $2 \cdot \frac{x}{2} = -6$, czyli $x = -6$.

Sprawdzenie: $\frac{-6}{2} = -3$.

Przykład 7.

Rozwiąż równanie: $3 - 2x = 2 - 5x$.

Przenosimy $-5x$ na lewą stronę, 3 na prawą.

Zatem: $-2x + 5x = 2 - 3.$

Redukujemy: $3x = -1.$

Dzielimy obustronnie przez 3,

$$x = -\frac{1}{3}.$$

więc:

Sprawdzenie: $3 + 2 \cdot \frac{1}{3} = 2 + 5 \cdot \frac{1}{3}.$

Równość zachodzi, gdyż obie strony wynoszą $\frac{11}{3}.$

Przykład 8.

Rozwiąż równanie:

$$3 - 2x + 7 + 5x = 9 - x + 2 + 8x.$$

Najprzód redukujemy obustronnie.

Zatem: $10 + 3x = 11 + 7x.$

Przenosimy teraz $+7x$ na lewą stronę, 10 na prawą.

Otrzymamy: $3x - 7x = 11 - 10$, czyli $-4x = 1.$

Dzieląc obustronnie przez -4

dostajemy: $x = -\frac{1}{4}.$

Sprawdzenie: $3 + \frac{3}{4} + 7 - \frac{5}{4} = 9 + \frac{1}{4} + 2 - 2.$

Równość zachodzi, gdyż obie strony równają się $\frac{37}{4}.$

*Przykład 9.

Rozwiąż równanie: $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} + 2 = 5 - \frac{x}{4} + \frac{x}{6}.$

Jeżeli w równaniu występują wyrażenia ułamkowe, których mianowniki są danymi liczbami, to wygodną jest rzeczą uwolnić się od tych mianowników; uskuteczniamy to mnożąc obustronnie przez wspólny mianownik. W naszym wypadku wspólny mianownik wynosi 12. Mnożąc obie strony przez 12 otrzymamy:

$$12 \cdot \frac{x}{3} - 12 \cdot \frac{x}{2} + 12 \cdot 2 = 12 \cdot 5 - 12 \cdot \frac{x}{4} + 12 \cdot \frac{x}{6}.$$

Zatem: $4x - 6x + 24 = 60 - 3x + 2x,$

czyli: $-2x + 24 = 60 - x.$

Przenosząc wiadome na prawą stronę, niewiadome na lewą, otrzymamy: $-2x + x = 60 - 24$, czyli $-x = 36,$

więc: $x = -36.$

Sprawdzenie: $\frac{-36}{3} - \frac{-36}{2} + 2 = 5 - \frac{-36}{4} + \frac{-36}{6}.$

Równość zachodzi, gdyż obie strony wynoszą: $+8.$

Przykład 10.

Rozwiąż równanie:

$$\frac{x-3}{6} - \frac{5-x}{3} = -\frac{3x+1}{9} + \frac{2-3x}{2} - \frac{13}{18}.$$

Wspólnym mianownikiem jest 18. Mnożąc obustronnie przez 18 i upraszczając otrzymamy:

$$3(x-3) - 6(5-x) = -2(3x+1) + 9(2-3x) - 13.$$

Wymnażamy:

$$(3x-9) - (30-6x) = -(6x+2) + (18-27x) - 13.$$

Uwalniamy się od nawiasów:

$$3x - 9 - 30 + 6x = -6x - 2 + 18 - 27x - 13.$$

Redukujemy: $9x - 39 = -33x + 3.$

Przenosimy wiadome na prawą, niewiadome na lewą stronę:

$$9x + 33x = 3 + 39,$$

czyli:

$$42x = 42.$$

Zatem:

$$x = 1.$$

Sprawdzenie: $\frac{1-3}{6} - \frac{5-1}{3} = -\frac{3+1}{9} + \frac{2-3}{2} - \frac{13}{18}.$

Równość zachodzi, gdyż obie strony wynoszą $-\frac{30}{18}.$

Uwaga 1. Rozwiążmy równanie: $x + 5 = 7 + x.$

Przenosząc niewiadome na lewą stronę, wiadome na prawą, otrzymujemy: $x - x = 7 - 5$, czyli $0 = 2.$

Zatem przypuszczając, że równanie posiada pierwiastek, otrzymaliśmy fałsz, mianowicie $0 = 2.$ A więc równanie dane nie posiada pierwiastka.

Uwaga 2. Rozwiążmy równanie:

$$x + 5 = 5 + x.$$

Przenosząc niewiadome na lewą stronę, wiadome na prawą, otrzymujemy: $x - x = 5 - 5$, czyli $0 = 0.$

W tym wypadku łatwo sprawdzamy, że każda liczba jest pierwiastkiem naszego równania.

Zadania

4. Rozwiąż równanie, a następnie sprawdź:

a) $x + 7 = 4,$ $x - 8 = 3,$ $x + 9 = -1;$

b) $6 + x = 2,$ $-4 + x = 7,$ $-8 + x = -12.$

5. Rozwiąż równanie, a następnie sprawdź:

a) $3x = 21$, $8x = 40$, $15x = -105$;
b) $12x = 4$, $15x = -3$, $18x = -5$.

6. Rozwiąż równanie, a następnie sprawdź:

a) $\frac{2}{3}x = 8$, $\frac{3}{4}x = -18$, $\frac{5}{2}x = -45$;
b) $\frac{1}{3}x = -28$, $3\frac{2}{5}x = 34$, $3\frac{1}{2}x = 7,7$;
c) $0,1x = 5$, $0,4x = -22$, $1,4x = -21$.

7. Rozwiąż równanie, a następnie sprawdź:

a) $-x = -7$, $-x = 2$, $-\frac{1}{2}x = -3$;
b) $-\frac{2}{5}x = 12$, $-\frac{5}{2}x = -\frac{9}{4}$, $-\frac{3}{2}x = 15$;
c) $-\frac{1}{6}x = 0,5$, $-\frac{3}{5}x = -2,4$, $-0,3x = 21$.

8. Rozwiąż równanie, a następnie sprawdź:

a) $\frac{x}{3} = 7$, $\frac{x}{4} = 5$, $\frac{x}{7} = -2$;
b) $\frac{x}{2} = 3\frac{1}{2}$, $-\frac{x}{5} = -1,4$, $\frac{x}{8} = -4\frac{1}{4}$;
c) $\frac{2x}{5} = 6$, $\frac{3x}{7} = -9$, $-\frac{2x}{11} = -4$. $x = \frac{-4 \cdot 11}{2} = -22$

9. Rozwiąż równanie, a następnie sprawdź:

a) $6 = 7 - x$, $8 = 11 - x$, $-9 = 6 - x$;
b) $-16 = -x - 2$, $17 = -22 - x$, $2\frac{3}{4} = 10 - x$.

10. Rozwiąż równanie, a następnie sprawdź:

a) $4x + 17 = 29$, $7x - 34 = 15$, $12x - 55 = -19$;
b) $8x + 3 = -37$, $80 + 15x = -10$, $9 - 5x = -46$;
c) $6x - 41 = -83$, $3x - 14 = -36$, $17x + 69 = -50$.

11. Rozwiąż równanie i sprawdź:

a) $8x - 12 = 5x - 9$, $12x + 5 = -7x - 14$;
b) $14x - 5 = 9x + 30$, $8x + 40 = 13x - 35$;
c) $18x + 10 = 7x - 12$, $2x + 32 = 5x + 17$;
d) $-9x + 7 = 6x - 38$, $4x - 6 = 20x - 1$.

12. Rozwiąż równanie i sprawdź:

a) $3x - 2 - 4x = 9x + 18$, $12x - 17 = 7x - 15 + 11x$;
b) $8x - 9 + 5x = 14 - 10x$,
 $2 - 3x - 18 + 7x = -8 + 4x - 6 + 2x$;
c) $14x - 6 + 9x + 31 = 5x - 15 + 8x + 10$.

13. Rozwiąż równanie i sprawdź:

a) $5x + 7 + \frac{1}{4}x = \frac{1}{8}x + 4$, $\frac{2}{5}x - 15 = 8 + \frac{1}{5}x - 5 + 2x$;
b) $2\frac{1}{4}x - 15 - 8x = 6x + 30 - 11x$;

c) $\frac{3}{5}x - 12 - 3\frac{2}{3}x = 8x - 27$, $\frac{7}{8}x + 4 = \frac{9}{10}x + 9$;
d) $\frac{1}{2}x - 1 - \frac{2}{3}x = \frac{3}{4}x + 4,5$, $\frac{1}{3}x - \frac{1}{8}x + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}$;
e) $\frac{2}{3}x + 35\frac{1}{5} + \frac{1}{4}x = 0$, $3\frac{1}{3}x - 2 + 1\frac{1}{4}x - 3 = 7x - 8$;
f) $5x - 17 - \frac{3}{2}x - 5 = 6x - \frac{7}{3} - 8x + 115$;
g) $\frac{7}{3}x - 39 - 10x + 15 = 100 - \frac{3}{2}x + 26$.

14. Rozwiąż równanie i sprawdź:

a) $4(7x - 5) = 15$, $8x + 2 = 2(3x - 1)$;
b) $9(x - 3) = 5(4 - x) + 2$, $9(x + 1) = 7(x - 3) + 38$;
c) $8(x - 1) + 17(x - 3) = 4(4x - 9) + 4$;
d) $15(x - 1) + 4(x + 3) = 2(7 + x)$;
e) $5x - 6(x - 5) = 2(x + 5) + 5(x - 4)$;
f) $3(169 - x) - (78 + x) = 29x$;
g) $43(2x + 11) = 5x - 2(7x - 4) - 10$;
h) $5[4(7x - 30) + 100] = 11(16x + 40) + 18x$;
i) $x - \{3x + [x - (3 + x)]\} = 5$;
j) $5x - (3x - 7) - [4 - 2x - (6x - 3)] = 10$;
k) $14x - (5x - 9) - [4 - 3x - (2x - 3)] = 30$.

15. Rozwiąż równanie i sprawdź:

a) $\frac{7x - 6}{25} = x - 6$, $\frac{5x - 12}{16} = x + 2$, $\frac{4x - 9}{7} = 3x + 23$;
b) $\frac{19x + 5}{3} = \frac{15x + 7}{2}$, $\frac{5x + 10}{7} = \frac{7x + 8}{11}$;
c) $\frac{4x + 7}{3} - \frac{5x - 2}{4} = \frac{8x - 1}{5}$, $\frac{5x + 3}{3} - x = \frac{7x + 2}{2}$;
d) $\frac{x - 1}{2} + \frac{x - 2}{5} = \frac{1}{4} - \frac{x - 3}{4}$, $\frac{x - 1}{3} + \frac{x - 3}{5} + \frac{x - 5}{7} = -3$;
e) $\frac{2x - 5}{3} - \frac{4x - 3}{5} = \frac{1}{4}(x - 7) - \frac{7x - 11}{30}$;
f) $\frac{12x - 16}{5} - \frac{20x - 12}{10} = \frac{x - 5}{3}$;
g) $\frac{2x - 7}{9} - \frac{3x + 1}{5} + x = 5 - \frac{x - 6}{2}$;
h) $\frac{5(x + 5)}{8} - \frac{2(x - 3)}{7} = 5\frac{9}{28}$;
i) $\frac{3}{16}(x - 1) - \frac{5}{12}(x - 4) = \frac{2}{5}(x - 6) + \frac{5}{48}$;
j) $\frac{3x}{4} - \frac{6}{17}(x + 10) - (x - 3) = \frac{x - 7}{51} - 4\frac{3}{4}$;
k) $\frac{7x}{5} - \frac{1}{14}(x - 11) = \frac{3}{7}(x - 25) + 34$;

$$l) \frac{7x}{10} - \frac{3}{5}(11x - 5) = \frac{8}{15}(x + 10) - 24,5;$$

$$m) \frac{x}{2} - \frac{3}{5}(2x - 4) + \frac{7}{10}(4x + 15) - 38,1 = 0;$$

$$n) 3 + \frac{x}{4} = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{x}{3}\right) - \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\left(11 - \frac{x}{2}\right).$$

16. Przekonaj się, że równanie:

$$a) x + 4 = 9 + x; \quad b) 3x - 4 + 2x = 6x + 8 - x;$$

$$c) \frac{x-1}{2} - \frac{x+4}{3} = \frac{x}{6} + 1; \quad d) \frac{x+7}{4} - \frac{x-4}{6} = 5 + \frac{x-3}{12}$$

nie posiada pierwiastków!

17. Przekonaj się, że każda liczba spełnia równanie:

$$a) 2x + 7 = 7 + 2x; \quad b) 5x - 4 + 2x = 6 + 7x - 10;$$

$$c) \frac{x-1}{3} + \frac{3x-2}{2} = x - 2 + \frac{5x+4}{6}.$$

§ 3. Układanie równań

Zadania

18. Jeżeli pewną liczbę pomnożymy przez -5 , a do iloczynu dodamy 4 , to otrzymamy 19 ; jaka to jest liczba?

Rozwiązanie: Oznaczamy szukaną liczbę przez x . Iloczyn tej liczby przez -5 jest $(-5x)$; jeżeli do tego iloczynu dodamy 4 , otrzymamy: $(-5x) + 4$, czyli $-5x + 4$.

W zadaniu jest powiedziane, że na wynik otrzymujemy 19 .

$$\text{Zatem:} \quad -5x + 4 = 19.$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy: $x = -3$.

$$\text{Sprawdzenie:} \quad (-5) \cdot (-3) + 4 = 19.$$

Rozwiąż w ten sposób następujące zadania:

19. Jeżeli pewną liczbę pomnożymy przez 6 i do iloczynu dodamy 10 , to otrzymamy tę liczbę; co to za liczba?

20. Jeżeli pewną liczbę pomnożymy przez 4 , a od otrzymanego iloczynu odejmiemy 16 , to wypadnie 100 ; co to za liczba?

21. Jeżeli pewną liczbę pomnożymy przez 3 , to otrzymamy tyle, ile otrzymalibyśmy odejmując od tej liczby 10 ; co to za liczba?

22. Jeżeli pewną liczbę pomnożymy przez 9 i od otrzymanego ilo-

czynu odejmiemy 4 , to otrzymamy tyle, ile otrzymalibyśmy, mnożąc tę liczbę przez 7 i dodając do tego iloczynu 8 ; co to za liczba?

23. Połowa pewnej liczby jest o 4 większa od trzeciej części tej liczby; co to za liczba?

Rozwiązanie: Oznaczmy szukaną liczbę przez x . Połowa tej liczby jest $\frac{x}{2}$, trzecia część jest $\frac{x}{3}$.

$$\text{Zatem:} \quad \frac{x}{2} - 4 = \frac{x}{3}.$$

24. Piąta część pewnej liczby jest o 3 większa od połowy tej liczby; co to za liczba?

25. Świerk, o wysokości 15 m , złamał się wskutek burzy, tak że wierzchołek jego zwisał 3 m nad ziemią. W jakiej wysokości złamał się świerk?

26. Piechur miał przejechać 100 km ; ile przeszedł, jeżeli brakuje mu jeszcze do celu połowa tego, co przeszedł, i 10 km ?

27. Piechur miał odbyć pewną drogę; po przebyciu $\frac{2}{3}$ tej drogi zauważył, że zgubił pasek. Wrócił się i po przejściu 1 km znalazł pasek, a równocześnie przekonał się, że jest w połowie drogi. Jaką drogę miał odbyć piechur?

28. Dwaj chłopcy wyruszyli w podróż; starszy miał o 20 zł więcej niż młodszy. Starszy wydawał 9 zł dziennie, a młodszy 7 zł dziennie. Po ilu dniach będą mieli równą ilość pieniędzy?

29. Podczas strzelania konkursowego strzelec A uzyskał ilość punktów większą o $\frac{1}{10}$ od ilości uzyskanej przez strzelca B . Ile punktów uzyskał strzelec A , jeżeli obaj razem uzyskali 420 punktów?

30. Na jednej szalce wagi położono 13 kawałków mydła, na drugiej 1 kg i $\frac{1}{2}$ kawałka tegoż mydła. Ile waży jeden kawałek mydła?

31. Dwaj robotnicy zarobili razem 42 zł ; pierwszy z nich pracował 3 dni, drugi 4 dni. Ile zarobił każdy z nich?

Rozwiązanie: Jeżeli każdy z nich zarabiał $x \text{ zł}$ dziennie, to pierwszy zarobił $3x \text{ zł}$, drugi zaś $4x \text{ zł}$, zatem:

$$3x + 4x = 42.$$

32. Trzej robotnicy zarobili razem 324 zł ; pierwszy pracował 7 dni, drugi 8 dni, trzeci 12 dni. Ile zarobił każdy robotnik?

33. A otrzymał trzecią część pewnej kwoty, zaś B dziesiątą część; ile wynosiła kwota, jeżeli A otrzymał o 700 zł więcej niż B ?

34. Przy podziale zysków między 3 wspólników A otrzymał trzecią

- część tego zysku, B czwartą część, C piątą część, a D resztę, tj. 1300 zł; ile wynosił zysk?
35. Owczarz zapytany, ile ma owiec, odpowiedział: jeśli do tego, co mam, dodać drugie tyle i jeszcze połowę i czwartą część tego i doliczyć mego psa, to będzie razem 100 sztuk; ile owczarz miał owiec?
36. Wydałem połowę moich pieniędzy, następnie szóstą część reszty, po czym pozostało mi 8,95 zł; ile miałem pieniędzy?
37. Ojciec ma 30 lat, syn ma 2 lata; po ilu latach ojciec będzie pięć razy starszy od syna?
38. Ojciec ma lat 54, syn zaś 34; w jakim wieku ojciec był 2 razy starszy od syna?
39. Piłka sprężysta odskakuje na $\frac{2}{3}$ wysokości, z której spadła; jeżeli po 3 odbiciach jest na wysokości $\frac{1}{3}$ dm, to z jakiej wysokości ją puszczono?
40. Ktoś podzielił swój majątek między spadkobierców w ten sposób, że jedna osoba otrzymała $\frac{1}{6}$, druga $\frac{1}{3}$, a trzecia $\frac{1}{2}$ tego majątku, czwarta zaś osoba otrzymała resztę, tj. 6325 zł; ile wynosił majątek i ile otrzymała każda osoba?
41. 799 zł rozdzielono między dwie osoby tak, że jedna otrzymała o 87 zł więcej niż druga; ile otrzymała każda osoba?
42. Jan, Piotr i Józef mają razem 52 zł. Piotr ma o 7 zł więcej niż Jan, zaś Józef o 5 zł więcej niż Piotr; ile każdy z nich ma pieniędzy?
43. Rodzice wydali na książki szkolne dla trzech synów 75 zł. Książki średniego syna kosztowały o 5 zł mniej, a najmłodszego o 13 zł mniej niż najstarszego; ile kosztowały książki każdego syna?
44. Dwaj bracia mają razem 1200 zł; gdyby starszy brat dał młodszemu $\frac{3}{4}$ swego majątku, wówczas miałby dwa razy mniej niż młodszy. Ile posiadał każdy z braci?
45. Odcinek o długości 30 m podzielono na dwie części tak, że jedna część wynosi $\frac{2}{3}$ drugiej. Podaj długości tych części!
46. Staś w biegu na 100 m przybył do celu, gdy Jaś był za nim w odległości 5 m, przy czym liczba kroków obu była ta sama. Krok Stasia był o 10 cm dłuższy niż Jasia. Jak długie były ich kroki?
47. Kupiono 24 m sukna dwóch gatunków — po 14 zł za 1 m

- i po 10 zł za 1 m i zapłacono razem 300 zł; ile metrów droższego sukna kupiono?
48. Kupiono za 1 zł 44 gr piór i zeszytów, razem 16 sztuk, płacąc po 2 gr za pióro i po 30 gr za zeszyt; ile kupiono piór, a ile zeszytów?
49. Dwa pociągi wyszły jednocześnie naprzeciw siebie z dwóch stacji, których odległość wynosi 72 km; po upływie jakiego czasu spotkają się te pociągi, jeżeli jeden z nich jedzie z prędkością 40 km, drugi zaś z prędkością 50 km na godzinę?
50. Z dwóch miast, odległych od siebie o 243 km, wychodzą jednocześnie naprzeciw siebie dwa pociągi. Jeden ma prędkość 25 km na godzinę, drugi 35 km na godzinę; po jakim czasie odległość między pociągami wyniesie 39 km?
51. W trzeciej klasie pociągu jechało 3 razy tyle osób, co w drugiej. Ponieważ po drodze z trzeciej klasy 40 osób wysiadło, zaś do drugiej 20 wsiadło, było w trzeciej klasie 2 razy tyle osób, co w drugiej; ile osób znajdowało się przy końcu jazdy w klasie drugiej?
52. Jan rozdzielił pewną liczbę bochenków chleba w następujący sposób: dał Piotrowi $\frac{1}{3}$ wszystkich bochenków i jeszcze $3\frac{2}{3}$ bochenka, Pawłowi $\frac{1}{6}$ wszystkich bochenków i jeszcze $1\frac{1}{6}$ bochenka, a wreszcie Józefowi $\frac{1}{3}$ wszystkich bochenków i jeszcze $\frac{1}{2}$ bochenka; zostały 3 bochenki; ile bochenków dał każdemu?
53. Gospodarz przyjął parobka obiecując mu dać po roku służby 240 zł i ubranie. Po 8 miesiącach parobek odszedł i otrzymał 140 zł i ubranie. Ile kosztowało ubranie?
54. Z dwóch zegarków, wskazujących tę samą godzinę, jeden śpieszy o 2 sek., a drugi spaźnia się o 1 sek. na godzinę. Po jakim czasie zegarki te będą wskazywały po raz pierwszy znów tę samą godzinę?
55. Z dwóch zegarków pierwszy śpieszy o 3 sek. na 10 godzin, drugi zaś spaźnia się o 4 sek. na 5 godzin. Pierwszy zegarek wskazuje godzinę 19, drugi zaś 20. Po jakim czasie zegarki po raz pierwszy będą wskazywały tę samą godzinę i którą godzinę?
56. Uczeń pożyczył od swego kolegi tyle pieniędzy, ile sam posiadał, a następnie wydał 48 gr; od drugiego kolegi pożyczył znów tyle pieniędzy, ile obecnie sam posiadał i znowu wydał

48 gr. Podobnie postąpił jeszcze dwa razy. W końcu nie zostało mu nic pieniędzy. Ile pieniędzy posiadał na początku?

57. Czarodziej rzekł do skąpca: „Ile razy przejdiesz przez tę kładkę i rzucisz do strumyka 4 zł, podwoi ci się gotówka, jaką masz przy sobie“. Skąpiec przeszedł 3 razy przez kładkę i został bez pieniędzy; ile pieniędzy miał na początku?

58. Uprawna ziemia wynosi 55% majątku ziemskiego, a resztę, tj. 270 morgów, stanowi las; jak wielki jest ten majątek?

Rozwiązanie. Jeżeli x oznacza liczbę morgów tego majątku, to:

$$x \cdot \frac{55}{100} + 270 = x.$$

59. Kupiec sprzedał towar za a) 2632 zł, b) 483 zł, zyskując a) 12%, b) $7\frac{1}{2}\%$ ceny kupna; ile zapłacił za towar?
60. Kupiec sprzedał towar za a) 336 zł, b) 714 zł, tracąc a) 4%, b) 15% ceny kupna; ile zapłacił za towar?
61. Sprzedano dom za 47 000 zł tracąc przy tym 6% ceny kupna; za ile dom był kupiony?
62. Do następnej klasy przeszło 38 uczniów, przy czym 5% pozostało w tej samej klasie; ilu było uczniów w klasie?
63. Kupiec kupił towar po a) 4 zł za 1 kg, b) 13 zł 20 gr za 1 kg; po czemu winien sprzedawać 1 kg, jeśli chce mieć a) 20%, b) 12% zysku od ceny sprzedażnej?
64. Liczba mieszkańców pewnego miasta wzrosła w ostatnim roku o 6% i wynosi 47 700; ile było mieszkańców przed rokiem?
65. Na wybudowanie domu potrzeba 198 000 cegieł. Jeśli strata cegieł przy budowie wynosi 4%, to ile cegieł trzeba zakupić, aby ten dom postawić?
66. Do 2 kg kwasu siarkowego, w cenie 5 zł za 1 kg, dodano tyle kg wody, iż 1 kg mieszaniny kosztował 45 gr; ile kg wody dodano?

Rozwiązanie. Cena mieszaniny = cenie kwasu siarkowego. Zatem, jeśli x oznacza liczbę kg wody, to:

$$(x + 2) \cdot 0,45 = 2 \cdot 5, \text{ stąd } x = 20,222 \text{ kg.}$$

67. Kupiec zmieszał 2 gatunki tytoniu, jeden po 56 zł za 1 kg, drugi po 44 zł za 1 kg i otrzymał 18 kg tytoniu po 50 zł za 1 kg; ile wziął do tej mieszaniny z każdego gatunku tytoniu?

Rozwiązanie. Jeżeli x oznacza liczbę kg tytoniu jednego gatunku, to $18 - x$ oznacza liczbę kg drugiego gatunku. Cena mieszaniny wynosi więc z jednej strony:

$x \cdot 56 + (18 - x) \cdot 44$ złotych, z drugiej zaś strony: $50 \cdot 18$ złotych. Mamy zatem: $56x + (18 - x) \cdot 44 = 50 \cdot 18$, skąd $x = 9$.

68. Do 7 kg spirytusu po 8 zł za 1 kg dolano tyle kg wody, że 1 kg mieszaniny kosztował 3,50 zł; ile kg wody dolano?
69. Kupiec zmieszał dwa gatunki herbaty: 5 kg po 24 zł za 1 kg z herbatą w cenie 30 zł za 1 kg; jeśli 1 kg mieszaniny kosztował 26 zł 25 gr, to ile kg herbaty drugiego gatunku zużyto do tej mieszaniny?
70. Kupiec chce zmieszać 5 l wina po 6 zł za litr z 20 l wina po 3 zł za litr; ile l wina tańszego ma dolać wzgl. odlać, aby litr mieszaniny kosztował 4 zł?
71. Z czterech wodotrysków jeden jest w stanie napełnić cysternę w ciągu jednego dnia, drugi w ciągu dwóch, trzeci w ciągu trzech, a czwarty dopiero w ciągu czterech dni. W jakim czasie można napełnić tę cysternę puszczając wodę z 4 wodotrysków równocześnie?
72. Ojciec powiedział 3 synom, iż mają w pokoju jabłka do równego podziału. Najstarszy syn wziął trzecią część i wyszedł. Później wszedł do pokoju drugi syn, a nie wiedząc, że najstarszy wziął już swoją część, wziął trzecią część pozostałych jabłek i wyszedł. W końcu przyszedł ostatni syn, wziął także trzecią część reszty i wyszedł. Pozostało jeszcze 16 jabłek. Gdy potem wszyscy trzej zebrali się w pokoju, sprawa się wyjaśniła. Ile było jabłek na początku i ile wziął każdy z synów?
73. Przy zmianie 200 zł otrzymano 13 sztuk pieniędzy: po 5 zł i po 20 zł; ile było sztuk po 5 zł, a ile po 20 zł?
74. Pitagoras zapytany, ile ma uczniów, odpowiedział: Połowa moich uczniów uczy się matematyki, czwarta część fizyki, siódma część milczenia, a oprócz tego jest ich jeszcze 3. Ilu uczniów miał Pitagoras?

Rozdział VIII

Równania o dwóch i więcej niewiadomych

§ 1. Określenia

Dane mamy równanie o dwóch niewiadomych, np.:

$$3x - 4y = 10.$$

Jeżeli w równaniu tym podstawimy $x = 2$, $y = -1$, to równość będzie zachodziła, bo $3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) = 10$. Mówimy, że liczby

$x = 2$ i $y = -1$ spełniają powyższe równanie; parę liczb 2 i -1 nazywamy również układem pierwiastków danego równania. Aby znaleźć układ pierwiastków, podstawiamy za jedną niewiadomą dowolną liczbę, np. kładziemy $y = 2$. Otrzymamy zatem równanie o jednej niewiadomej: $3x - 4 \cdot 2 = 10$.

Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy $x = 6$.

Sprawdzając otrzymujemy: $3 \cdot 6 - 4 \cdot 2 = 10$.

Zatem para liczb 6, 2 jest układem pierwiastków. Gdybyśmy podstawili $y = 10$, to: $3x - 4 \cdot 10 = 10$, stąd $x = \frac{50}{3}$.

Sprawdzając przekonujemy się, że para $x = \frac{50}{3}$, $y = 10$ jest układem pierwiastków.

Podobnie układem pierwiastków równania o kilku niewiadomych, jak np.: $x - 2y + 4z = 17$,

nazywamy trójkę liczb, które podstawione odpowiednio za x , y , z spełniają równanie. Takim układem jest np. $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$; wstawiając bowiem w dane równanie otrzymamy:

$$1 - 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 = 17.$$

Aby znaleźć układ pierwiastków, podstawiamy za dwie niewiadome, np. y , z , dowolne liczby. Podstawiając $y = 3$, $z = 4$, otrzymamy:

$$x - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 17, \text{ stąd } x = 7.$$

Sprawdzając mamy: $7 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 17$.

Zatem $x = 7$, $y = 3$, $z = 4$ jest układem pierwiastków.

§ 2. Rozwiązywanie układu dwóch równań o dwóch niewiadomych

Przypuśćmy, że mamy dane dwa równania (mówimy również „układ dwóch równań”) o dwóch niewiadomych, jak np.:

$$x + y = 5$$

$$x - y = -1.$$

Jeżeli podstawimy $x = 2$, $y = 3$, to oba równania będą spełnione. Mamy bowiem $2 + 3 = 5$, $2 - 3 = -1$. Podobnie jak poprzednio, liczby $x = 2$ i $y = 3$ są układem pierwiastków.

Poznamy teraz metody, służące do rozwiązywania dwóch równań o dwóch niewiadomych. Mamy rozwiązać układ równań:

$$2x + 3y = -4$$

$$5x - 4y = 13.$$

Przypuśćmy, że równania powyższe mają pierwiastki i że x , y oznaczają te pierwiastki. Równania powyższe możemy zatem uwa-

żać za równości, zachodzące między liczbami; możemy je więc przekształcać.

Metoda podstawiania

Wyznaczamy z jednego równania (np. z pierwszego) jedną z niewiadomych, np. x tak, jakby druga była wiadoma. Otrzymamy:

$$x = \frac{-4 - 3y}{2} \dots \dots \dots (1)$$

Wyrażenie powyższe wstawiamy za x w drugie równanie.

$$\text{Zatem} \quad 5 \cdot \frac{-4 - 3y}{2} - 4y = 13.$$

Mamy już teraz równanie o jednej niewiadomej. Rozwiązując je otrzymamy $y = -2$. Wstawiając otrzymaną wartość na y w równanie (1) otrzymujemy $x = \frac{-4 - 3 \cdot (-2)}{2} = 1$. Sprawdzając przekonujemy się, że $x = 1$, $y = -2$ są pierwiastkami danego układu równań.

Metoda porównania

Wyznaczamy z obu równań jedną z niewiadomych, np. x tak, jakby druga była wiadomą. Zatem:

$$x = \frac{-4 - 3y}{2}; \quad x = \frac{13 + 4y}{5}$$

$$\text{otrzymujemy stąd:} \quad \frac{-4 - 3y}{2} = \frac{13 + 4y}{5}.$$

Rozwiązując powyższe równanie dostajemy $y = -2$; następnie jak poprzednio $x = 1$. Sprawdzając przekonujemy się, że liczby 1, -2 są pierwiastkami.

Metoda równych współczynników

Pomnożmy obie strony pierwszego równania przez 5, drugiego przez 2. Otrzymamy:

$$10x + 15y = -20$$

$$10x - 8y = 26.$$

Doprowadziliśmy zatem do tego, że czynnik stojący przy niewiadomej x jest w obu równaniach ten sam, tj. 10. To jest istotną cechą tej metody. Odejmijmy stronami dolne równanie od górnego (tzn. odejmujemy lewą stronę równania dolnego od lewej strony równania górnego i podobnie postępujemy z prawymi stronami).

$$\text{Otrzymamy: } (10x + 15y) - (10x - 8y) = -20 - 26,$$

$$\text{czyli} \quad 23y = -46, \text{ stąd } y = -2.$$

Dogodną jest rzeczą nie wypisywać powyższej różnicy z nawiasami, tylko zmienić znaki w obu stronach równania dolnego i na wypisanych równaniach przeprowadzić redukcję. A więc:

$$\begin{array}{r} 10x + 15y = -20 \\ -10x + 8y = -26 \\ \hline \end{array}$$

$$23y = -46, \text{ stąd } y = -2.$$

Wstawiając otrzymaną wartość na y w jedno z równań, np. w górne, wyznaczamy x .

A więc: $2x + 3 \cdot (-2) = -4$, stąd $x = 1$. Następnie sprawdzamy.

Moglibyśmy niewiadomą y wyznaczyć podobnie jak x . Pomnożmy w tym celu obie strony równania górnego przez 4, dolnego zaś przez 3. Zatem:

$$\begin{array}{r} 8x + 12y = -16 \\ 15x - 12y = 39 \\ \hline \end{array}$$

Dodajemy równania stronami: $23x = 23$, stąd $x = 1$.

Aby móc użyć metody równych współczynników, należy uwolnić się od nawiasów i wyrażeń ułamkowych, następnie zebrać niewiadome na jedną stronę i zredukować.

§ 3. Rozwiązywanie równań o kilku niewiadomych

Jeżeli mamy np. rozwiązać układ trzech równań o trzech niewiadomych, jak np.:

$$\begin{array}{l} 2x - 3y + z = -1 \\ x - 2y + 3z = 6 \\ 4x + y - z = 3, \end{array}$$

to rozwiązujemy go przy pomocy metody podstawiania. Wyznaczamy z jednego równania jedną z niewiadomych, tak jakby inne były wiadome i podstawiamy w pozostałe równania. Otrzymamy w ten sposób układ dwóch równań o dwóch niewiadomych.

Wyszukujemy np. z pierwszego równania z .

A więc: $z = -1 - 2x + 3y$ (1)

Wstawiamy w dwa pozostałe; otrzymamy:

$$\begin{array}{l} x - 2y + 3(-1 - 2x + 3y) = 6 \\ 4x + y - (-1 - 2x + 3y) = 3. \end{array}$$

Rozwiązując te równania jedną z poprzednio poznanych metod otrzymujemy $x = 1$, $y = 2$. Wstawiając w (1) dostajemy:

$$z = -1 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 3.$$

Sprawdzamy dane równania i przekonujemy się, że $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ jest układem pierwiastków danych równań.

Podobnie rozwiązujemy układ czterech równań o czterech niewiadomych, jak np.:

$$\begin{array}{l} 2x + y + 2z - u = -1 \\ x + 3y - z + 2u = 14 \\ 5x - 4y - 3z + u = 3 \\ 3x - y + 4z - 3u = -12. \end{array}$$

Wyszukujemy np. z pierwszego równania u .

A więc: $u = 2x + y + 2z + 1$ (2)

Wstawiamy w trzy pozostałe równania; otrzymamy:

$$\begin{array}{l} x + 3y - z + 2(2x + y + 2z + 1) = 14 \\ 5x - 4y - 3z + (2x + y + 2z + 1) = 3 \\ 3x - y + 4z - 3(2x + y + 2z + 1) = -12. \end{array}$$

Ten układ trzech równań o trzech niewiadomych x , y , z rozwiązujemy jak w przykładzie poprzednim.

Znajdziemy: $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$.

Wstawiając w (2) dostajemy:

$$u = 2 \cdot 1 + 2 + 2(-1) + 1 = 3.$$

Przekonujemy się, że: $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$, $u = 3$ jest układem pierwiastków danych równań!

Zadania

1. Rozwiąż układ równań:

- | | | |
|---------------------------------------|--|---|
| a) $x + y = 19$ | b) $3x + 4y = 10$ | c) $x + 2y = 13$ |
| $x - y = 7$; | $4x + y = 9$; | $3x + y = 14$; |
| d) $4x + 7y = 29$ | e) $2x - y = 9$ | f) $5x + 6y = 17$ |
| $x + 3y = 11$; | $3x - 7y = 19$; | $6x + 5y = 16$; |
| g) $2x + y = 10$ | h) $-5x + 7y = 21$ | i) $3x - 5y = -10$ |
| $7x + 8y = 53$; | $21x - 9y = 75$; | $-4x + 7y = 13$; |
| j) $13x - 17y = 11$ | k) $3x - 7y = 0$ | l) $\frac{1}{5}x - \frac{1}{4}y = 0$ |
| $29x - 39y = 17$; | $\frac{2}{7}x + \frac{5}{3}y = 7$; | $3x + \frac{1}{2}y = 17$; |
| m) $\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}y = 1$ | n) $\frac{1}{10}x + \frac{1}{3}y = -8$ | o) $1,4x + 1,5y = 175$ |
| $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 5$; | $\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y = 26$; | $0,3x + 4,2y = 309$ |
| p) $\frac{1}{3}x + 0,5y = 5$ | q) $\frac{1}{5}x + 3y = 8$ | r) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 6$ |
| $\frac{1}{5}x + \frac{1}{4}y = 1,5$; | $\frac{4}{5}x - 6\frac{1}{2} = 22$; | $\frac{3}{4}x + \frac{1}{5}y = 10\frac{1}{5}$. |

2. Rozwiąż układ równań.

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $2x - y = 3y - x + 2$ | b) $4x + 7 = 2y + x + 2$ |
| $x + y = 3$; | $7y - 3x = x + 2y + 3$; |

$$\begin{array}{ll} c) 3x + 5y + 3 = 5x - 7y + 8 & d) x - 5y + 3 = 2x - 8y + 3 \\ 4x - 4y + 7 = 7x + y + 3; & 6x - 11y + 5 = 11x - \\ & -13y + 18; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} e) \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}y + 3 = x - \frac{1}{4}y & f) \frac{1}{6}x + 6y = \frac{1}{24}x + 24y \\ \frac{2}{3}x + 3\frac{1}{3}y = 10 - x + y; & 7x - 60y = 5x + 19; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} g) 2,5x - 0,3y + 1 = 4x + y & h) x - \frac{1}{2} = y - \frac{1}{3} \\ x + \frac{3}{4}y = 0,2y - 1. & 2x + 5 = 2y + \frac{1}{3} + 10x. \end{array}$$

3. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{array}{ll} a) 4(2x - y) = 5 & b) 3(x + 2) - (y - 1) = 2x \\ 3(x - 1) = y; & x - 2(y + 2) = 4(x - 2); \\ c) 7(x - 5) + 4(y + 1) = 0 & d) 3(\frac{1}{5}x - 2) + 4 = 2(\frac{1}{3}y - 1) \\ x + 5y + 3 = 3(x - 4); & 2(x - y) = 8x + \frac{1}{2}y; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} e) 5x = 50 - 7y & f) 10x = 11 - \frac{y + 5}{7} \\ x + y = \frac{14 - y}{3}; & 8y = 17 - \frac{x + 3}{4}; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} g) \frac{x}{3} + 2y = 5 & h) \frac{9x - y}{8} = 1 \\ \frac{2x - 1}{5} + 1 = y; & x - 1 = \frac{1 - y}{63}; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} i) \frac{2x + 3y}{7} = \frac{2x - 3y}{11} & j) \frac{3x + 2y}{5} = \frac{30 - y}{3} \\ \frac{10y - 7}{10} = \frac{x}{9}; & \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{3y + 4}{4}; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} k) \frac{x}{18} + \frac{y}{15} = \frac{2}{3} & l) \frac{x - 1}{4} = \frac{2y + 1}{3} - 1; \\ \frac{5x - 3}{9} - \frac{3y - 5}{5} = 1; & \frac{x + 1}{5} = \frac{3y + 4}{6} - \frac{2}{3}; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} m) \frac{x + 1}{3} + \frac{x - y}{4} = 2\frac{1}{2} & n) 3 \cdot \frac{x - 3}{5} - 2 \cdot \frac{x - y}{3} + 1 = 0 \\ \frac{3x + y}{4} - \frac{2y + x}{6} = 1\frac{1}{2}; & 4 \cdot \frac{x + y}{5} = x + y - 2. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} o) \frac{4x - 3y + 7}{3} - \frac{4(x + y)}{5} + \frac{x - 4y}{6} = 6 \\ \frac{x}{2} + \frac{y + 2}{4} = 1. \end{array}$$

4. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{array}{ll} a) x + y + z = 9 & b) 2x + 3y + z = 20 \\ x - y + z = 3 & 3x - 2y - z = 8 \\ x - y - z = -5; & 4x - y + 2z = 19; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} c) 3x + y - 2z = 9 & d) x - y - z = 0 \\ 4x + y + z = 5 & 2x - 3y + z = 1 \\ x + 2y + z = 6; & 3x - 4y + 2z = 5; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} e) x + 2y - 3z = 1 & f) x - 3y - 2z = -11 \\ 2x - 3y + 8z = -5 & 3x + 2y - z = 26 \\ 3x - 4y + 6z = -12; & 2x - y + 3z = 19; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} g) -2 + 3y + 4z = 9 & h) \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{5}z = 5 \\ 7x - 6y + 5z = 9 & \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{10}z = 2 \\ 15x + 2y - 4z = 9; & x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{15}z = 6; \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} i) x + y = 2 & j) \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 7 & k) \frac{x + y}{2} + \frac{y + z}{3} = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x + z = 11 & \frac{x}{3} + \frac{z}{2} = 14 & \frac{x + z}{5} + \frac{y - x}{2} = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} y + z = 1; & \frac{y}{4} - \frac{z}{9} = 1; & \frac{x + y + z + 5}{4} = 5; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} l) 3(x - y) + z = 7 & m) \frac{x + 1}{2} + \frac{3y - 4}{4} = \frac{z - 4}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \frac{-x + z}{5} = x - y & x + y + z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \frac{2x + y}{6} = 4 - z; & \frac{2}{3}(x + z) = 25y; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} n) 3x + 2y + z = 0 & o) x + y + z + u = 8 \\ \frac{1}{3}(2x + y) + \frac{1}{2}(x + 2z) = y - 10 & x - y - z + u = 10 \\ \frac{1}{5}(x + 2y) + \frac{1}{4}(2x + z) = x - 20. & x - y + z - u = -10 \\ & -x + y - z - u = 0. \end{array}$$

§ 4. Układanie równań

5. Suma dwóch liczb wynosi 95, a ich różnica 23; jakie to liczby?

Rozwiązanie:

Oznaczmy jedną z szukanych liczb przez x , drugą zaś przez y . Suma tych liczb wynosi z jednej strony $x + y$, z drugiej 95,

Mamy więc: $x + y = 95$.

Różnica tych liczb wynosi z jednej strony $x - y$, z drugiej 23.

Mamy więc: $x - y = 23$.

Otrzymaliśmy zatem na szukane liczby układ równań:

$$x + y = 95$$

$$x - y = 23.$$

Rozwiązując ten układ znajdziemy:

$$x = 59, y = 36.$$

Sprawdzenie: $59 + 36 = 95$, $59 - 36 = 23$.

6. Suma dwóch liczb wynosi 17, a ich różnica 69; jakie to liczby?
7. Jakie dwie liczby mają następującą własność: gdy do pierwszej z nich dodamy 21, otrzymamy iloczyn drugiej przez 3, gdy zaś do drugiej dodamy 18, otrzymamy iloczyn pierwszej przez 2?
8. Trzecia część sumy dwóch liczb wynosi 14, a połowa ich różnicy 4; co to za liczby?
9. W klasie II i III jest razem 68 uczniów; w klasie II jest o 6 uczniów więcej niż w III. Ilu uczniów jest w każdej klasie?
10. Uczeń zapłacił za 3 zeszyty i 4 ołówki 1,02 zł, a drugi uczeń za 5 takich samych zeszytów i 2 ołówki 1,14 zł; ile kosztował zeszyt, a ile ołówek?
11. 4 robotników i 8 robotnic zarabiają dziennie w fabryce 32 zł, a 10 robotników i 6 robotnic zarabiają w tej samej fabryce 45 zł; ile zarabia dziennie robotnik, a ile robotnica?
12. Chłopiec sądził, że za kwotę, którą posiada, może kupić 9 ołówków. Ponieważ jednak ołówek kosztował o 4 gr drożej, niż on się spodziewał, kupił tylko 6 ołówków; ile kosztował ołówek i ile pieniędzy chłopiec posiadał?
13. W grudniu spalono 1,5 t koksu i 6 q węgla, a koszt opału wyniosły 135 zł, w styczniu zaś spalono 1,8 t koksu i 8 q węgla, a koszt opału wyniosły 166 zł. Ile kosztuje 1 t węgla, a ile 1 t koksu?
14. Ojciec ma dwa razy tyle lat, co obaj jego synowie razem; młodszy syn ma lat 8; za 23 lat będzie miał ojciec tyle lat, ile synowie razem. Ile lat ma ojciec, a ile synowie?
15. Suma liczby dwucyfrowej i odwróconej do niej (tj. takiej, która na miejscu jednostek ma cyfrę dziesiątek i na odwrót) wynosi 110; różnica cyfr tej liczby równa się 6. Jaka to liczba?

Uwaga: Liczba, która na miejscu setek ma cyfrę a , na miejscu dziesiątek ma cyfrę b , na miejscu jednostek cyfrę c , wynosi:

$$100a + 10b + c.$$

Liczba do niej odwrócona wynosi: $100c + 10b + a$.

16. Suma liczby dwucyfrowej i odwróconej do niej wynosi 55, ich zaś różnica równa się 27; jaka to jest liczba?
17. Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 14; jeżeli przestawimy cyfry, otrzymamy liczbę o 36 większą. Jaka to liczba?
18. Staś wydawał w podróży 12 zł dziennie i zostało mu 40 zł. Gdyby był wydawał 15 zł dziennie, to musiałby wrócić o jeden dzień wcześniej i zostałoby mu 13 zł. Jak długo był w podróży i ile posiadał pieniędzy?
19. W głosowaniu przyjęto wniosek większością 86 głosów przy 340 głosujących; ile głosów oddano za wnioskiem?
20. Koszta wycieczki wyniosły 180 zł. Gdyby każdy z uczestników wycieczki złożył na pokrycie tej kwoty 4 zł, brakowałoby 4 zł do tej sumy; gdyby natomiast każdy mężczyzna dał 5 zł, a każda kobieta 3 zł, zebrana kwota byłaby o 8 zł za duża. Ilu mężczyzn, a ile kobiet brało udział w wycieczce?
21. Kupiec zamówił pewną ilość wina po 6 zł za 1 l i pewną ilość po 4,50 zł za 1 l i miał zapłacić 1020 zł. Dostawca wystawił rachunek na 1080 zł, gdyż przez omyłkę dostarczył tyle wina droższego, ile miał dostawić tańszego i na odwrót. Ile wina droższego, a ile tańszego zamówił kupiec?
22. Handlarz owoców zakupił 1500 kg jabłek i 1000 kg gruszek i zapłacił razem 1800 zł. Jabłka sprzedał o 20%, a gruszki o 15% drożej, niż kupił, i zarobił 315 zł. Ile płacił za 1 kg jabłek, a ile za 1 kg gruszek?
23. Ktoś żądał 10 kg kawy po 7 zł za 1 kg; kupiec miał 2 gatunki kawy: po 6 zł i po 10 zł za 1 kg. Ile kg kawy każdego z obu gatunków musiał zmieszać, by otrzymać 10 kg kawy po 7 zł za 1 kg?
24. Adam i Paweł byli na polowaniu. Adam powiedział do Pawła: dam ci po 5 zł za każdy mój strzał chybiony. Paweł zaś na to odpowiedział: a ja ci dam po 3 zł za każdy twój strzał celny. Po 12 strzałach Paweł zapłacił Adamowi 4 zł. Ile razy Adam chybił?
25. Gdybym z jednego wora mąki przesypał 4 kg do drugiego, byłoby w drugim dwa razy więcej mąki niż w pierwszym;

- gdybym 4 kg mąki przesypał z drugiego wora do pierwszego, byłaby w obu worach ta sama ilość mąki. Ile kg mąki jest w każdym worze?
26. Statek, płynąc z prądem rzeki przebywa drogę 56 km w 3 godz., płynąc zaś przeciw prądowi w $3\frac{1}{2}$ godz. Jaka jest prędkość statku, a jaka prądu?
27. Jaś mówi do Stasia: Jeśli mi dasz 2 gr, to będę miał tyle, ile tobie zostanie. Staś zaś odpowiedział: Jeśli mi dasz 2 gr, to będę miał dwa razy tyle, ile tobie zostanie. Ile groszy miał Jaś, a ile Staś?
28. Z dwóch miejscowości odległych o 18 km wyruszają jednocześnie dwaj cykliści w tym samym kierunku. Jeden cyklista dopędza drugiego po $2\frac{1}{2}$ godz. Gdyby jechali naprzeciw siebie, byłiby się spotkali po $\frac{1}{2}$ godz. Z jaką prędkością jechał każdy z nich?
29. Dwaj piechurzy wyruszyli naprzeciw siebie z dwóch miast odległych o 55 km i spotkali się po 5 godz. Gdyby pierwszy z nich wyruszył o $2\frac{1}{5}$ godz. wcześniej niż drugi, byłiby się spotkali po 4 godz. Ile km na godz. przebywał każdy z nich?
30. Na torze kołowym, długości 660 m, jadą dwaj cykliści. Gdy jadą w tę samą stronę, cyklista A wymija cyklistę B co 11 min.; gdy jadą naprzeciw siebie, spotykają się co 1 min. Z jaką prędkością jedzie każdy z nich?
31. Jeśli pociąg pośpieszny, jadący z Krakowa do Lwowa, powiększy prędkość, z jaką powinien jechać wedle planu jazdy, o $4\frac{3}{4}$ km na godzinę, to przyjedzie do Lwowa o $\frac{3}{10}$ godz. za wcześnie, jeśli zaś zmniejszy prędkość o 2,85 km na godzinę, to przyjedzie do Lwowa z opóźnieniem $\frac{1}{5}$ godz. Jaka jest odległość Krakowa od Lwowa i jaka jest prędkość pociągu, przepisana planem jazdy?
32. A przechodzi w 8 godz. o 4 km więcej niż B w 6 godz., zaś B przechodzi w 9 godz. o 4 km więcej niż A w 10 godz. Jaką przeciętną prędkość na godzinę posiada A i B?
33. Kapitały 1800 zł i 2200 zł, oddane na różne procenty, przynoszą rocznie razem 182 zł dochodu; gdyby zamienić z sobą oprocentowania tych kapitałów, przynosiłyby tylko 178 zł dochodu. Na jakie procenty oddano kapitały?
34. Obwód trójkąta wynosi 46 cm. Największy bok jest o 6 cm

- mniejszy od sumy pozostałych, średni zaś bok jest dwa razy większy od różnicy pozostałych. Oblicz boki tego trójkąta!
35. Jaś i Staś oglądają flobert wartości 35 zł. Jaś mówi: pożycz mi połowę pieniędzy, które masz, a ja będę mógł kupić ten flobert. Na to Staś odpowiada: jeśli ty pożyczysz mi $\frac{2}{3}$ swych pieniędzy, to ja będę mógł kupić ten flobert. Ile pieniędzy każdy z nich posiadał?
36. A, B, C i D mają razem 290 zł. A ma 2 razy tyle co C, a B ma 3 razy więcej niż D. C i D mają razem o 50 zł mniej niż A. Ile każdy z nich posiada?
37. Rozdziel 100 zł pomiędzy 3 mężczyzn, 5 kobiet, 4 chłopców i 3 dziewczęta w taki sposób, aby każdy mężczyzna dostał tyle, ile jedna kobieta i 1 dziewczyna, każda kobieta dostała tyle, ile chłopiec i dziewczyna, a każdy chłopiec połowę tego, co mężczyzna i dziewczyna.
38. Znajdź takie trzy liczby, aby iloczyn pierwszej przez 2 dodany do różnicy drugiej i trzeciej dał na wynik 20, iloczyn drugiej przez 2 dodany do różnicy pierwszej i trzeciej dał 9, a suma pierwszej i drugiej była o 3 większa aniżeli iloczyn trzeciej przez 2.
39. W pociągu jedzie 600 osób. W klasie drugiej znajduje się trzy razy tyle co w pierwszej, a w pierwszej i trzeciej trzy razy tyle co w drugiej; ile osób jedzie w każdej klasie?
40. Jan, Piotr i Paweł rozdzielili między siebie 100 zł w ten sposób, że Piotr otrzymał o 3 zł więcej od Jana, zaś Jan i Paweł o 7 zł więcej niż podwójna kwota, jaką otrzymał Piotr; ile otrzymał każdy?
41. 300 uczestników wycieczki zapłaciło za podróż koleją tam i z powrotem 17 955 zł. W II klasie było 3 razy tyle osób co w I i III razem. Ile osób było w każdej klasie, jeżeli I klasa kosztowała 84 zł na osobę, II klasa 63 zł, zaś III klasa 42 zł?

Jednomiany i wielomiany

Rozdział IX

Potęgi

§ 1. Potęga o wykładniku naturalnym

Iloczyn, jak np. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, w którym wszystkie czynniki są równe, zapisujemy krócej w postaci: 2^4 . A więc czynnik, który się powtarza, piszemy raz, u góry zaś liczbę, wskazującą, ile razy ten czynnik się powtarza.

Czytamy: dwa podniesione do potęgi czwartej lub krótko dwa do czwartej. Mamy więc $2^4 = 16$.

Liczbę 2 nazywamy podstawą, 4 wykładnikiem potęgowym, wynik zaś 16 potęgą.

Podobnie: $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a; \quad (-x)^3 = (-x) \cdot (-x) \cdot (-x).$$

Jeżeli n oznacza liczbę naturalną, większą od 1, to wyrażenie a^n możemy przedstawić w postaci iloczynu następująco:

$$a^n = \overset{1}{a} \cdot \overset{2}{a} \cdot \overset{3}{a} \cdot \overset{4}{a} \dots \overset{n}{a}.$$

Liczby u góry wskazują, którym z kolei jest dany czynnik.

Wyrażenie, jak: a^1 na razie nic nie oznacza; nie istnieje bowiem iloczyn, posiadający tylko jeden czynnik. Umówimy się na przyszłość, że

$$a^1 = a.$$

Zatem: $3^1 = 3$; $(-5)^1 = -5$, $x^1 = x$, $(-b)^1 = -b$.

Zadania

1. Napisz jako potęgę:

- $(+2) \cdot (+2) \cdot (+2)$, $(-1) \cdot (-1)$, $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$;
- $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$, $(+5) \cdot (+5)$, $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$;
- $(-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{2}{3})$, $(1,2) \cdot (1,2) \cdot (1,2) \cdot (1,2) \cdot (1,2)$;

$$d) a \cdot a, \quad b \cdot b \cdot b, \quad x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x, \quad c \cdot c \cdot c \cdot c;$$

$$e) (-a) (-a) (-a), \quad (+a) (+a), \quad (-x) (-x), \quad (-c) (-c).$$

2. Oblicz:

$$a) (+2)^2, (-3)^2, (-1)^2, (+1)^2, (-1)^3, (+1)^3, (-7)^2, (-1)^4;$$

$$b) (-2)^4, (-2)^5, (+2)^3, (-1)^{10}, (-1)^{13}, (-3)^4;$$

$$c) (-\frac{1}{2})^3, (+\frac{2}{3})^2, (-\frac{1}{2})^5, (-\frac{1}{3})^2, (-0,1)^2, (+1,2)^2;$$

$$d) (+\frac{5}{7})^2, (0,2)^3, (0,2)^4, (0,1)^5, (-10)^8, (1,1)^2.$$

$$e) (-0,01)^3, (0,001)^2, (-\frac{2}{5})^3, (-\frac{2}{5})^4, (+\frac{2}{5})^5, (-0,3)^4.$$

3. Oblicz: a^5 , jeśli: a) $a = +2$, b) $a = -1$, c) $a = 3$, d) $a = -\frac{1}{2}$.

4. Oblicz:

$$a) (-2)^2 + (+2)^2, \quad (-3)^2 + (-2)^3, \quad (-1)^4 - (-1)^5;$$

$$b) (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6;$$

$$c) (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3, \quad (-2)^2 - (-2)^3 + (-2)^4 - (-2)^5.$$

5. Sprawdź następujące wzory:

$$a) 1 + x + x^2 = \frac{x^3 - 1}{x - 1}; \quad 1 + x + x^2 + x^3 = \frac{x^4 - 1}{x - 1}, \text{ podstawiając } x = 2, 3, 10, -2, -3, -10.$$

6. Znajdź dwie różne liczby naturalne x i y takie, żeby $x^y = y^x$!

7. Podaj trzy liczby naturalne x, y, z takie, że: $x^2 + y^2 = z^2$!

§ 2. Znak potęgi

Znak $+$ lub $-$, przed potęgą, odnosi się do wartości potęgi.

$$\text{Np.: } -(+3)^2 = -(+9) = -9; \quad -(-4)^3 = -(-64) = 64.$$

$$-(-a)^3 = -[(-a) (-a) (-a)] = -[-a \cdot a \cdot a] = a \cdot a \cdot a = a^3, \\ -a^3 = -a \cdot a \cdot a = -(a^3).$$

Jeżeli podstawa jest różna od zera, a wykładnik jest liczbą parzystą, to wartość potęgi jest liczbą dodatnią.

$$\text{Np.: } (-3)^4 = (-3) (-3) (-3) (-3) = 81;$$

Zamieniając bowiem potęgę na iloczyn zauważymy, że iloczyn zawierać będzie parzystą liczbę czynników tego samego znaku; zatem wynik będzie liczbą dodatnią.

$$\text{Podobnie: } (+2)^4 = 2^4; \quad (-2)^4 = 2^4 \text{ itd.}$$

$$(-a)^2 = a^2, \quad (-a)^6 = a^6, \quad (-a)^8 = a^8 \text{ itd.}$$

$$(+a)^2 = a^2, \quad (+a)^6 = a^6, \quad (+a)^8 = a^8 \text{ itd.}$$

Jeżeli podstawa jest różną od zera, zaś wykładnik jest liczbą nieparzystą, to wartość potęgi jest tego samego znaku co podstawa.

$$\text{Np.: } (-3)^1 = -3, \quad (-3)^5 = (-3) (-3) (-3) (-3) (-3) = -243.$$

Jeżeli bowiem wykładnik równa się 1, to potęga równa się podstawie. Jeżeli natomiast wykładnik jest liczbą nieparzystą większą od 1, to zamieniając potęgę na iloczyn zauważymy, że iloczyn zawierać będzie nieparzystą liczbę równych czynników tego samego znaku; a więc wartość iloczynu będzie mieć ten sam znak co czynniki.

$$\text{Np.: } (-3)^7 = -3^7, \quad (-1)^5 = -1, \quad (-1)^9 = -1, \\ (-a)^3 = -a^3, \quad (-a)^5 = -a^5.$$

Jeżeli n oznacza liczbę naturalną, to:

$$(+a)^n = +a^n = a^n, \quad (-a)^n = a^n, \quad \text{jeżeli } n \text{ parzyste,} \\ (-a)^n = -a^n, \quad \text{jeżeli } n \text{ nieparzyste.}$$

Wzór pierwszy jest oczywisty, gdyż $+a = a$. Dwa pozostałe wzory sprawdzamy zamieniając jak poprzednio potęgę na iloczyny.

Uwaga. Jeżeli n oznacza liczbę naturalną, to $2n$ jest liczbą parzystą, zaś $2n+1$ jest liczbą nieparzystą. Możemy więc napisać:

$$(-a)^{2n} = a^{2n}; \quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

Zadania

8. Jaki znak będą miały następujące potęgi:

$$\begin{aligned} a) & (+5)^4, \quad (+7)^7, \quad (+3)^{20}, \quad (+5)^{35}, \quad (+4)^1; \\ b) & (-2)^6, \quad (-6)^7, \quad (-4)^{44}, \quad (-9)^{75}, \quad (-2)^1; \\ c) & (+\frac{2}{5})^{18}, \quad (-\frac{3}{4})^{15}, \quad (-\frac{3}{4})^{18}, \quad (-\frac{1}{2})^{12}, \quad (-\frac{1}{2})^{11}. \end{aligned}$$

9. Oblicz:

$$\begin{aligned} a) & -3^5, \quad -2^7, \quad -2^8, \quad +(+3)^4, \quad +(-3)^6; \\ b) & +(-5)^5, \quad -(+4)^2, \quad -(-3)^4, \quad -(-7)^3, \quad -(-1)^1; \\ c) & -(+\frac{2}{3})^2, \quad -(-\frac{2}{3})^2, \quad -(-\frac{2}{3})^3, \quad -(-0,1)^2, \quad -(-0,1)^3. \end{aligned}$$

10. Oblicz:

$$\begin{aligned} a) & 1 + 2 + 2^2 + 2^3; \quad b) 2^5 - 2^4; \quad c) (+3)^4 - (-3)^4; \\ d) & (+2)^5 - (-2)^5; \quad e) 2^4 - (2^2 + 2)^3. \end{aligned}$$

11. Oblicz: $(-1)^{2n}$ oraz $(-1)^{2n+1}$, gdzie n jest liczbą naturalną!

12. Oblicz:

$$\begin{aligned} a) & 3 \cdot 5^2, \quad 4 \cdot 7^3, \quad (-3) \cdot 2^4, \quad 3(+2)^5, \quad 5(-3)^3; \\ b) & 4(-2)^4, \quad (+2)(-2)^2, \quad (-2)(+3)^3, \quad (-3)(-4)^3. \end{aligned}$$

13. Oblicz:

$$\begin{aligned} a) & 3 \cdot 2^4 - 5 \cdot 3^2, \quad -5 \cdot 2^3 + 4 \cdot (-2)^4, \quad -\frac{2}{3} \cdot 2^7 + (-\frac{1}{2})^2; \\ b) & 3 \cdot 2^6 - 4 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2^1. \end{aligned}$$

14. Uwolnij od nawiasów:

$$\begin{aligned} a) & -(+a)^5, \quad +(+b)^6, \quad -(-x)^7, \quad -(+a)^3, \quad +(-x)^4; \\ b) & (-x)^{2n}, \quad (-x)^{2n+1}, \quad -(-a)^{2n}, \quad -(-a)^{2n+1}, \\ & \text{jeśli } n \text{ jest liczbą naturalną.} \end{aligned}$$

15. Podaj wszystkie liczby względne, których

$$\begin{aligned} a) & \text{kwadrat wynosi } 1, 4, 9, 16, 25; \\ b) & \text{sześcian wynosi } 1, 8, 27, -64. \end{aligned}$$

16. Czy istnieje liczba względna, której kwadrat równa się: -1 ?

§ 3. Iloczyn potęg o równych podstawach

Przypuśćmy, że mamy iloczyn potęg o równych podstawach np.:

$$a^m \cdot a^n,$$

gdzie m, n oznaczają dowolne liczby naturalne.

Jeżeli $m > 1$ i $n > 1$, to możemy napisać:

$$a^m \cdot a^n = \overset{1}{a} \cdot \overset{2}{a} \dots \overset{m}{a} \cdot \overset{1}{a} \cdot \overset{2}{a} \dots \overset{n}{a}.$$

Widzimy, że iloczyn potęg przedstawiliśmy w postaci iloczynu, którego wszystkie czynniki (w liczbie $m+n$) są równe.

Zatem:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Podobnie postępujemy, gdy $m=1$ lub $n=1$.

$$\text{Np.: } 2^3 \cdot 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{3+4} = 2^7,$$

$$(-3)^5 \cdot (-3)^2 = (-3)^7.$$

A więc: Iloczyn potęg o równych podstawach równa się potędze, której podstawa jest ta sama, a wykładnik jest sumą danych wykładników.

$$\text{Np.: } a^3 \cdot a^5 = a^8; \quad a^5 \cdot a = a^5 \cdot a^1 = a^6; \quad a \cdot a^3 = a^1 \cdot a^3 = a^4.$$

Jeżeli m, n, p oznaczają liczby naturalne, to

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}.$$

Mamy bowiem: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^{m+n} \cdot a^p = a^{m+n+p}$.

$$\text{Np.: } a^2 \cdot a^3 \cdot a^5 = a^{2+3+5} = a^{10}; \quad x^4 \cdot x \cdot x^6 = x^{4+1+6} = x^{11}.$$

Zatem powyższe twierdzenie odnosi się do iloczynu ilużkolwiek potęg o równych podstawach.

Zadania

17. Sprawdź:

$$\begin{aligned} a) & 2^3 \cdot 2^4 = 2^7, \quad (-2)^2 \cdot (-2)^3 = (-2)^5, \quad (-3)^2 \cdot (-3)^4 = (-3)^6; \\ b) & (-1)^7 \cdot (-1)^8 = (-1)^{15}, \quad 2^5 \cdot 2 = 2^6, \quad a^4 \cdot a = a^5. \end{aligned}$$

18. Przedstaw jako potęgę:

- a) $3^4 \cdot 3^7$, $2^5 \cdot 2^8$, $2^6 \cdot 2$, $3^4 \cdot 3$, $(+3)^5 \cdot (+3)^7$;
 b) $(-2)^6 \cdot (-2)^9$, $(-4)^7 \cdot (-4)^{11}$, $(+\frac{2}{3})^5 \cdot (+\frac{2}{3})^2$, $(0,2)^3 \cdot (0,2)^4$;
 c) $a^2 \cdot a^3$, $x^4 \cdot x^7$, $b^5 \cdot b^4$, $a^7 \cdot a$, $x^5 \cdot x$, $a^4 \cdot a^2$;
 d) $(+a)^5 \cdot (+a)^4$, $(+x)^3 \cdot (+x)^2$, $(-a)^2 \cdot (-a)^3$;
 e) $(-c)^6 \cdot (-c)^2$, $(-x)^7 \cdot (-x)^5$, $(-x)^4 \cdot (-x)^3$;
 f) $3^4 \cdot 3^6 \cdot 3^5$, $2^3 \cdot 2^7 \cdot 2^4$, $(\frac{2}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})^4 \cdot (\frac{2}{3})$;
 g) $(-5)^2 \cdot (-5)^5 \cdot (-5)$, $(+\frac{3}{8})^3 \cdot (+\frac{3}{8})^4 \cdot (+\frac{3}{8})^2$;
 h) $a^2 \cdot a^5 \cdot a^3$, $x^5 \cdot x^2 \cdot x^7$, $b^2 \cdot b^{11} \cdot b^8$;
 i) $(-a)^5 \cdot (-a) \cdot (-a)^2$, $(-x)^4 \cdot (-x)^5 \cdot (-x)^7$.

19. Przedstaw najprościej:

- a) $a^2 b^3 a^4 \cdot b^5$, $a \cdot b^2 \cdot b^4 \cdot a^5 \cdot a^2$, $x^4 y^2 x y^3$;
 b) $(-a)^3 \cdot b^4 \cdot (-a)^2 \cdot (-a)^5 \cdot b$, $x^3 \cdot (-y)^2 \cdot x^2 \cdot (-y)^4 \cdot x$;
 c) $a^2 \cdot b^3 \cdot 2 a^5 \cdot b^7$, $x^2 \cdot y^3 \cdot 3 x^3 y^2$;
 d) $a^4 \cdot b^2 \cdot a^3 \cdot c^5 \cdot c^2 \cdot b^4 \cdot a^6$, $x^2 \cdot y^3 \cdot z^2 \cdot y^1 \cdot x^3 \cdot z^2$.

20. Kwadrat pewnej liczby pomnożono przez czwartą potęgę tej liczby. Ile otrzymano?

21. Pomnóż piątą potęgą liczby 2 przez iloczyn trzech czynników, z których każdy równa się 2. Przedstaw wynik w postaci potęgi liczby 2!

22. Przez jaką potęgę o podstawie 5 musisz pomnożyć liczbę 5^9 , aby otrzymać liczbę 5^{20} .

§ 4. Iloraz potęg o równych podstawach

Mamy iloraz potęg o równych podstawach: $\frac{a^m}{a^n}$,

gdzie $a \neq 0$, zaś m i n oznaczają liczby naturalne. Przypuśćmy, że $m > n$. Jeżeli $n > 1$, to możemy napisać:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overset{1}{a} \cdot \overset{2}{a} \cdot \dots \cdot \overset{m}{a}}{\underset{1}{a} \cdot \underset{2}{a} \cdot \dots \cdot \underset{n}{a}}.$$

Ponieważ $m > n$, więc możemy licznik i mianownik n razy po kolei podzielić przez a . Otrzymamy w ten sposób w liczniku o n czynników mniej, czyli pozostanie czynników $m - n$. Zatem:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overset{1}{a} \cdot \overset{2}{a} \cdot \dots \cdot \overset{m-n}{a}}{1}, \text{ więc } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Podobnie sprawdzamy wzór powyższy, gdy $n = 1$.

Np.: $\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = \frac{a \cdot a}{1} = a^2 = a^{5-3}.$

Zatem (gdy wykładnik dzielnej jest większy od wykładnika dzielnika) iloraz potęg o równych podstawach równa się potędze, której podstawa jest ta sama, a wykładnik jest różnicą wykładników dzielnej i dzielnika.

Uwaga. Wzór powyższy moglibyśmy również sprawdzić w następujący sposób:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

gdy $a \neq 0$, m , n naturalne liczby i $m > n$, bo:

$$a^n \cdot a^{m-n} = a^{n+m-n} = a^m.$$

Jeżeli $m > n$, to dzieląc dzielną i dzielnik przez a^m dostaniemy:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^n : a^m} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Np.: $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}.$

Jeżeli zatem $a \neq 0$, m i n oznaczają liczby naturalne, to:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ jeżeli } m > n, \quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ jeżeli } m < n.$$

Zadania

23. Sprawdź:

- a) $3^8 : 3^5 = 3^3$, $(+4)^4 : (+4)^2 = (+4)^2$;
 b) $\frac{(-3)^6}{(-3)^2} = (-3)^4$, $\frac{(-2)^7}{(-2)^4} = (-2)^3$, $\left(\frac{3}{5}\right)^4 : \left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^3$.

24. Wyraż jako potęgę:

- a) $\frac{3^7}{3^5}$, $2^8 : 2^4$, $2^7 : 2^2$, $\frac{3^5}{3^1}$;
 b) $\frac{(+4)^8}{(+4)^3}$, $(+5)^{12} : (+5)^8$, $(-3)^9 : (-3)^4$, $(-6)^{14} : (-6)^7$;
 c) $\frac{a^8}{a^3}$, $\frac{x^{12}}{x^4}$, $\frac{b^{15}}{b^7}$, $a^9 : a^6$, $b^8 : b$, $x^9 : x^6$;
 d) $\frac{(+a)^5}{(+a)^2}$, $\frac{(-a)^4}{(-a)^3}$, $(-x)^6 : (-x)^2$, $(-y)^8 : (-y)^7$.

25. Sprawdź:

a) $\frac{3^5}{3^8} = \frac{1}{3^3}$, $\frac{2^6}{2^8} = \frac{1}{2^2}$, $\frac{(+3)^4}{(+3)^5} = \frac{1}{(+3)}$;

$$b) \frac{(-2)^5}{(-2)^7} = \frac{1}{(-2)^2}, \quad \frac{x^4}{x^6} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{a^9}{a^{10}} = \frac{1}{a}.$$

26. Przedstaw jako odwrotności potęg:

$$a) 3^4 : 3^8, \quad 5^2 : 5^7, \quad (+6)^5 : (+6)^6;$$

$$b) (-4) : (-4)^3, \quad (-7)^2 : (-7)^{11};$$

$$c) \frac{a^2}{a^5}, \quad \frac{x^7}{x^{15}}, \quad \frac{b^3}{b^8}, \quad a^7 : a^{20}, \quad b : b^{10}, \quad x : x^8;$$

$$d) \frac{(+a)^2}{(+a)^5}, \quad \frac{(-a)^3}{(-a)^7}, \quad (-x)^2 : (-x)^9, \quad (-y)^7 : (-y)^9.$$

27. Przedstaw najprościej:

$$a) (a^5 : a^3) \cdot a^4, \quad (b^3 \cdot b^2) : b^2, \quad (x^5 : x^2) \cdot x^7;$$

$$b) [a^8 (a^5 \cdot a^3)] : a^4, \quad [x^3 (x^8 : x^2)] : x^4;$$

$$c) [a^5 (a^{11} : a^3)] \cdot a^5.$$

28. Uprość:

$$a) \frac{a^3}{a^2}, \quad \frac{x^5}{x^2}, \quad \frac{a^4}{a^3}, \quad \frac{a^2 b}{b}; \quad b) \frac{a^2 b^3}{a^2}, \quad \frac{a^3 b^4}{a^3 b}, \quad \frac{x^5 y^2}{x^3 y^2}, \quad \frac{x^7 y^8}{x^5 y^6};$$

$$c) \frac{a^4 b^5 c^3}{a^2 b^5 c}, \quad \frac{x^7 y^2 z^3}{x^5 y z^3}, \quad \frac{x^2 y^5 z^4}{y^4 z^2}, \quad \frac{a^2 b^3 c d^4}{a b^2 d^3};$$

$$d) \frac{a^8}{a^9}, \quad \frac{x^4}{x^7}, \quad \frac{a b^2}{x^2 b}, \quad \frac{x^2 y z}{x^3 y}, \quad \frac{a^2 b^3 c^2}{a b^4 c^2};$$

$$e) \frac{a^3 b^4 c^2}{a^4 b^2 c}, \quad \frac{x^5 y^6 z^2}{x^4 y^5 z^6}, \quad \frac{a^2 b^3 c^2 d^4}{a^3 b^4 c^3 d^5}.$$

§ 5. Potęga potęgi

Mamy potęgę potęgi: $(a^m)^n$, gdzie m, n są dowolne liczby naturalne. Przypuśćmy, że $n > 1$. W tym wypadku możemy przedstawić powyższe wyrażenie w postaci iloczynu:

$$(a^m)^n = \overset{1}{a^m} \cdot \overset{2}{a^m} \cdot \dots \cdot \overset{n}{a^m}.$$

Czynnikami powyższego iloczynu są potęgi o równych podstawach. Ponieważ suma wykładników wynosi

$$\overset{1}{m} + \overset{2}{m} + \dots + \overset{n}{m} = nm,$$

możemy zatem napisać: $(a^m)^n = a^{nm}$.

Wzór powyższy jest również ważny, gdy $n = 1$; w tym bowiem wypadku mamy: $(a^m)^1 = a^m = a^{1 \cdot m}$.

Zatem możemy w każdym wypadku napisać:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

A więc: Potęga potęgi równa się potędze, której podstawa jest ta sama, zaś wykładnik jest iloczynem wykładników.

$$\text{Np.: } (a^5)^3 = a^5 \cdot a^5 \cdot a^5 = a^{5+5+5} = a^{3 \cdot 5}, \quad (2^4)^5 = 2^{4 \cdot 5} = 2^{20}.$$

Zadania

29. Przedstaw jako potęgę:

$$a) (2^5)^2, \quad (3^2)^4, \quad (4^3)^7, \quad [(3^5)^2]^4, \quad [(2^3)^4]^2, \quad \{[(3^3)^2]^3\}^5;$$

$$b) [(+3)^2]^5, \quad [(+5)^4]^2, \quad [(-2^4)^5], \quad [(-3)^7]^2, \quad \{[(-1)^2]^3\}^4;$$

$$c) [(\frac{3}{5})^2]^4, \quad [(\frac{3}{5})^7]^2, \quad [(+\frac{1}{2})^3]^{25}, \quad [(-\frac{3}{5})^7]^8, \quad \{[(-\frac{1}{2})^3]^4\}^6;$$

$$d) (a^2)^3, \quad (x^4)^2, \quad (b^5)^{11}, \quad (y^7)^8, \quad (c^{12})^6;$$

$$e) [(+a)^5]^2, \quad [(+x)^7]^3, \quad [(-a)^3]^2, \quad [(-a)^7]^9;$$

$$f) [(a^3)^4]^7, \quad [(x^2)^4]^5, \quad [(y^3)^5]^8, \quad \{[(c^3)^3]^5\}^2.$$

30. Przedstaw jako potęgę:

$$a) (a^5)^3 \cdot a^2, \quad (x^7)^4 \cdot x^3, \quad (b^2)^7 \cdot b^4, \quad (c^{11})^2 \cdot c^8;$$

$$b) (a^3)^4 : a^5, \quad (x^{11})^2 : x^{10}, \quad (b^7)^3 : b^5, \quad (c^2)^4 : c^3;$$

$$c) [(a^2)^6 \cdot a^4] : a^3, \quad [(x^9)^4 \cdot x^3] : x^2, \quad [(b^7)^3 \cdot b^5] : b^8;$$

$$d) [(a^5)^2 : a^3] \cdot a^4, \quad [(x^7)^2 : x^{10}] \cdot x^6, \quad [(b^5)^5 : b^{15}] \cdot b;$$

$$e) [(a^{11})^3 : a^4] : a^2, \quad [(x^9)^5 : x^{11}] : x^5, \quad [(b^{10})^2 : b^{12}] : b^6.$$

31. Przedstaw jako potęgę:

$$a) (a^5)^3 \cdot (a^2)^2, \quad (x^2)^4 \cdot (x^3)^7, \quad (b^{11})^2 \cdot (b^3)^5;$$

$$b) (a^4)^6 : (a^5)^2, \quad (x^7)^2 : (x^2)^3, \quad (b^8)^3 : (b^2)^4;$$

$$c) [(a^9)^3 \cdot (a^4)^5] \cdot a^6, \quad [(x^4)^5 \cdot (x^2)^6] : x^{10};$$

$$d) (b^{12})^4 \cdot (b^5)^7 \cdot (b^3)^4, \quad [(y^2)^8 \cdot (y^{10})^3] : (y^2)^4.$$

32. Ile wynosi iloczyn 5 czynników, równych a^8 ?

33. Co jest większe $(9^3)^3$ czy $9^{(3^3)}$?

34. Do jakiej potęgi należy podnieść liczbę 3^5 , aby otrzymać 3^{30} ?

§ 6. Potęga iloczynu, ilorazu

Mamy potęgę iloczynu, np.: $(a \cdot b)^n$, gdzie n jest liczbą naturalną. Przypuśćmy, że $n > 1$. Pisząc potęgę w postaci iloczynu otrzymamy:

$$(ab)^n = \overset{1}{ab} \cdot \overset{2}{ab} \cdot \dots \cdot \overset{n}{ab}.$$

Na moc w więc prawa przemienności: $(ab)^n = \overset{1}{a} \cdot \overset{2}{a} \cdot \dots \cdot \overset{n}{a} \cdot \overset{1}{b} \cdot \overset{2}{b} \cdot \dots \cdot \overset{n}{b}.$

Zatem: $(ab)^n = a^n b^n$.

Wzór powyższy jest również ważny, gdy $n=1$. W tym wypadku mamy bowiem: $(ab)^1 = ab = a^1 \cdot b^1$.

Np.: $(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 b^3$

Podobnie postępując otrzymujemy:

$$(abc)^n = a^n b^n c^n; \quad (abcd)^n = a^n b^n c^n d^n.$$

Np.: $(abc)^3 = abc \cdot abc \cdot abc = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c = a^3 b^3 c^3$.

Zatem: Potęga iloczynu równa się iloczynowi czynników podniesionych do tej potęgi.

Np.: $(a^3 \cdot b^5)^4 = (a^3)^4 \cdot (b^5)^4 = a^{12} b^{20}$

$$(a^5 b^6 c^2)^3 = (a^5)^3 \cdot (b^6)^3 \cdot (c^2)^3 = a^{15} b^{18} c^6.$$

Mamy potęgę ilorazu np.: $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, gdzie n jest liczbą naturalną, zaś $b \neq 0$. Przypuśćmy, że $n > 1$.

$$\text{Mamy: } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdots a}{b \cdot b \cdots b}.$$

$$\text{Widzimy stąd, że: } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Wzór powyższy jest również ważny dla $n=1$. Mamy bowiem:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1}.$$

$$\text{Np.: } \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^7 = \frac{3^7}{5^7}.$$

A więc: potęga ilorazu jest ilorazem, którego dzielna i dzielnik jest potęgą odpowiednio dzielnej i dzielnika danego ilorazu.

$$\text{Np.: } \left(\frac{a^3}{b^5}\right)^2 = \frac{(a^3)^2}{(b^5)^2} = \frac{a^6}{b^{10}}; \quad \left(\frac{x^4}{y^3}\right)^5 = \frac{(x^4)^5}{(y^3)^5} = \frac{x^{20}}{y^{15}}.$$

Zadania

35. Wykonaj działania:

$$a) (3a)^4, (5x)^3, (-2a^2)^3, (+3x^6)^4, (-2x^3)^5;$$

$$b) (ab)^4, (-xy)^6, (a^2 b^3)^3, (a^5 b^7)^2, (+a^4 b^3)^2;$$

$$c) (-a^9 b^7)^8, (a^2 b^3 c)^5, (a^2 b^3 c^4)^6, (3a^2 b^5)^3;$$

$$d) (-3a^5 b^4 c)^2, (-2x^7 y^6 z^3)^3, (-4n^2 v^2 w^3)^3.$$

36. Wykonaj działania:

$$a) \left(\frac{2}{5}\right)^3, \left(\frac{3}{4}\right)^6, \left(\frac{1}{2}\right)^9, \left(-\frac{1}{2}\right)^8, \left(-\frac{2}{3}\right)^5, \left(+\frac{3}{7}\right)^3;$$

$$b) \left(\frac{a}{4}\right)^2, \left(\frac{x}{5}\right)^3, \left(-\frac{a}{3}\right)^4, \left(-\frac{a}{5}\right)^3, \left(\frac{a^2}{7}\right)^3, \left(\frac{a^3}{4}\right)^4;$$

$$c) \left(\frac{5}{2}\right)^2, \left(\frac{7}{x}\right)^5, \left(\frac{-11}{a}\right)^5, \left(\frac{3}{x^2}\right)^3, \left(\frac{+5}{a^4}\right)^3, \left(\frac{-3}{a^7}\right)^2;$$

$$d) \left(\frac{a}{b}\right)^2, \left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2, \left(\frac{x^3}{y^5}\right)^4, \left(\frac{+a}{-b}\right)^2, \left(\frac{+a^4}{b^7}\right)^8, \left(\frac{-x^9}{y^{15}}\right)^6.$$

37. Wykonaj działania:

$$a) \left(\frac{2}{5}a\right)^2, \left(-\frac{3}{7}x\right)^3, \left(\frac{4}{7}a^5\right)^2, \left(-\frac{1}{2}x^5\right)^8;$$

$$b) \left(\frac{3a^3}{b^2}\right)^8, \left(\frac{5a^4}{b^3}\right)^2, \left(-\frac{7a^6}{3b^4}\right)^2, \left(\frac{4x^8}{5y^6}\right)^4;$$

$$c) \left(\frac{a^2 b^5}{x^3 y^4}\right)^2, \left(-\frac{a b^4}{x^3 y^2}\right)^3, \left(\frac{3x^2 y^5}{4a^3 b^4 c^2}\right)^3.$$

38. Ile razy zwiększy się wartość potęgi o wykładniku 3, jeżeli nie zmieniając wykładnika powiększymy podstawę 2, 3, 4.... razy?

39. W iloczynie $a^2 b^3$ pierwszy czynnik zastąpiono czynnikiem $2a$ zaś drugi czynnikiem $2b$. Ile razy zwiększył się iloczyn?

40. Podziel ciężar 7 kg na 4 równe części, po czym oblicz wartość iloczynu liczb, wyrażających ciężary poszczególnych części!

Rozdział X

Jednomiany

§ 1. Określenia

Jednomianem nazywamy iloczyn (ilukolwiek liczb), opatrzone znakiem lub nie. Np. Jednomianami są:

$$3x, -2a, 4ab, -(-3)a(-5)x, (-3)aba.$$

Jeżeli w jednomianie niektóre czynniki są liczbami danymi, to obliczając ich iloczyn przedstawimy jednomian w postaci prostszej.

$$\text{Np. } (-3)x(-2)z = 6xz; \quad -(-2)a(+4)b = -(-8)ab = 8ab.$$

Jeżeli w jednomianie niektóre czynniki literowe są równe, to możemy zastąpić je przez potęgę.

$$\text{Np. } 3xaxx = 3ax^3; \quad -2aabb = -2a^2b^3.$$

Wyrażenie algebraiczne w którym działania wykonywane na ostatku nie jest dodawaniem ani odejmowaniem nazywamy jednomianem.

Jeżeli jednomian przedstawimy tak, że tylko jeden czynnik jest liczbą daną, to liczbę tę wraz ze znakiem jednomianu nazywamy współczynnikiem liczbowym lub krótko współczynnikiem.

Np. Jednomiany: $-3x$, $5a^2b$, $-(-4)xyz$, $(-3)a^3b^5$, mają współczynniki: -3 , 5 , $-(-4)=4$, -3 .

Do jednomianów zaliczamy również litery (poprzedzone ewentualnie znakiem), jak np.: x , a , $-y$, $-z$.

Uważamy je bowiem za iloczyny:

$$x = 1 \cdot x, \quad a = 1 \cdot a, \quad -y = (-1)y, \quad -z = (-1)z.$$

Współczynnikiem jednomianów: $-a$, $-x$, $-z$ jest -1 .

Współczynnikiem jednomianów: a , x , z jest $+1$.

Dwa jednomiany, jak np.: $-3a^2bc^3$, $5a^2bc^3$, w których czynniki literowe są te same i w tych samych potęgach, nazywamy jednomianami podobnymi. Jednomianami podobnymi są np.: $3x$ i $-5x$, $2a^3$ i $-5a^3$; $3a^2b$ i $-\frac{7}{4}a^2b$; $4a^2xy^3$ i $-2,5a^2xy^3$.

Stopniem jednomianu ze względu na pewną literę nazywamy wykładnik, w którym dana litera występuje.

Np.: Jednomian $3a^2b^3c$ jest drugiego stopnia ze względu na a , trzeciego ze względu na b , pierwszego ze względu na c .

Jeżeli w jednomianie dana litera nie występuje, to mówimy, że jednomian jest stopnia zerowego ze względu na daną literę. Np. $3ab^2$ jest stopnia zerowego ze względu na literę c .

Zadania

1. Przedstaw następujące jednomiany w najprostszej postaci:

- $-(-2)a(-3)b$, $4a(-5)abb$, $-(-8)ab(-2)b$;
- $a \cdot x(-3)ax$, $(-2)abx(-7)abx$, $6x^2y(-10)xy$;
- $+(-6)xy^23xy$, $-(-4)ab(-7)a^2b^2$, $(-\frac{5}{3})a^2x^3(-\frac{3}{2})axa$;
- $xyz(-5)x^2y^2z$, $-(-3)abcd(-2)a^2b^3c^4d^5$;
- $(-7)x^2y(-5)xy^3(-4)x^2y^3$, $(-5)x^2yz(-2)abcx$.

2. Wyznacz współczynnik następujących jednomianów:

- $+3a$, $+a$, $-4a$, $-a$, $-(-3)a$, $+(-4)a$;
- $-4ab$, $-2abc$, $+\frac{4}{3}xy$, $-\frac{2}{7}x^2$, $-\frac{3}{5}ax^2$;
- $+0,1ab^3$, $-4,2xy^2$, $+2,1xyz$, $-\frac{1}{2}axy$.

3. Które spośród jednomianów są podobne:

- $-3x$; $2ax$; $-\frac{3}{4}x$; $-5ax$; $+8ax$; $-11x$;
- $-24xy$; $2,2x^2$; $+\frac{2}{3}xy$; $-4x^2$; $-6xy$; $-0,2x^2$;
- $-\frac{2}{3}ab^2$; $0,1a^2b$; $2a^2b$; $3ab^2$; $-0,5a^2b$; $\frac{1}{4}ab^2$.

4. Które spośród jednomianów są podobne:

- $2x^33ax$; $(-5)ax^4a$; $\frac{4}{3}ax^25x$; $(-\frac{1}{2})a2x\frac{1}{3}a$; $4ax^25x$;
- $(-3)a2xy3y$; $5x3ay2a - ay(-2)x4y$; $-x2a3a(-y)$; $\frac{2}{3}a3a2x$.

5. Jaki stopień posiada jednomian $5x^4y^2z^3$ ze względu na literę:

- x , $b) y$, $c) z$, $d) u$?

§ 2. Suma jednomianów

Jednomiany dodajemy, pisząc je obok siebie z ich znakami. Np. suma jednomianów $2x$, $-3a^2b$, $4xy$, $-2a$ jest sumą algebraiczną:

$$2x - 3a^2b + 4xy - 2a.$$

Jeżeli wyrazy sumy algebraicznej są jednomianami podobnymi jak np.:

$$3x^2y - 5x^2y + 7x^2y - x^2y,$$

to możemy sumę taką przedstawić prościej. Wyjmijmy za nawias x^2y ; otrzymamy: $(3 - 5 + 7 - 1)x^2y = (+4)x^2y = 4x^2y$.

Postępowanie powyższe nazywa się redukcją jednomianów podobnych. Widzimy stąd, że jednomiany podobne redukujemy dodając do siebie współczynniki i wynik mnożąc przez wspólną część literową. Np.: $-3a^2bc^3 + 10a^2bc^3 - 4a^2bc^3 = 3a^2bc^3$.

Zadania

6. Zredukuj:

- $a - 3a$, $5x + 7x$, $-3a + 5a + 2a$, $2x - 3x - x + 4x$;
- $5ax - 7ax$, $ab + 2ab - 5ab$, $-3ax + 2ax - \frac{1}{2}ax$;
- $15ab - 27ab - 6ab$, $14xy - 18xy + 10xy - 2xy$;
- $5a^2b + 4a^2b - 7a^2b$, $9a^3x - 12a^3x - 3a^3x - 2a^3x$;
- $\frac{2}{3}x^2y + \frac{1}{3}x^2y - \frac{1}{4}x^2y$, $-x^2y^3 - \frac{2}{5}x^2y^3 + 2x^2y^3 + \frac{1}{2}x^2y^3$;
- $\frac{1}{2}a^3b^2x - 2a^3b^2x - \frac{3}{2}a^3b^2x$, $\frac{3}{4}a^2bx^2 - \frac{5}{2}a^2bx^2 + 2a^2bx^2$;
- $\frac{2}{3}a^2b^3xy - 4a^2b^3xy + 6a^2b^3xy + a^2b^3xy - 10a^2b^3xy$.

§ 3. Iloczyn jednomianów

Mamy iloczyn jednomianów, jak np.: $(-3x^2y) \cdot (5ab^3)$.

Ponieważ w iloczynie możemy wykonywać mnożenia w dowolnym porządku, więc mnożymy współczynniki przez siebie, a następnie piszemy pozostałe czynniki. Otrzymamy na wynik jednomian:

$$-15x^2yab^3.$$

Podobnie: $\frac{3}{4}a^2b \cdot (-\frac{2}{3}xz) = -\frac{1}{2}a^2bxz$.

Jeżeli niektóre czynniki w obu jednomianach są potęgami tych samych liter, jak np.: $(-3a^2bc^3) \cdot (-4a^5c^2x)$,

to wymnażamy również potęgi o równych podstawach. A więc otrzymujemy: $12(a^2 \cdot a^5)b \cdot (c^3 \cdot c^2) \cdot x = 12a^7bc^5x$.

Praktycznie rachunek przeprowadzamy w myśli. Np.:

$$(-2xy^2z) \cdot (4x^3yz^4) = -8x^4y^3z^5, \quad 3a^2bc^3 \cdot (-\frac{1}{4}ab^5) = -\frac{3}{4}a^3b^6c^3.$$

Zadania

7. Wykonaj działania:

- $4y \cdot 5x$; $5a \cdot 2ab$; $3a^2 \cdot (-4ab)$; $(-5a^3) \cdot ab$;
- $5x^2 \cdot 7x^5$; $7ab \cdot 8a^2b^2$; $3xy^2 \cdot (-8x^3)$;
- $7xyz \cdot (-5x^2)$; $(-4xy) \cdot (-2x^2y)$; $(-abc) \cdot (-abc)$;
- $x^3y^2 \cdot 8a^2x^5$; $8x^2y \cdot (-10xy)$; $(-abcd) \cdot (-4a^2b^2c^2d^2)$;
- $3x^4y \cdot (-2x^3y^2z)$; $5x^2y^3z^2 \cdot 8xy^4z^5$; $0,2a^4b \cdot 2,5ab^4$;
- $4a^2y \cdot 2aby \cdot 3b^2y^2$; $4x^4y^4 \cdot (-8x^3y^2z) \cdot (-6xy^3z^4)$;
- $\frac{1}{2}x^3y^2z^2 \cdot 4x^4yz^3 \cdot (-3xz^5)$; $(-2a^5x^3y) \cdot \frac{7}{2}a^4x^4y^3 \cdot \frac{3}{4}a^3x^2y^4$.

§ 4. Potęga jednomianu

Mamy potęgę jednomianu, jak np.: $(-3ab)^2$.

Opierając się na twierdzeniu o potęgowaniu iloczynu możemy napisać:

$$(-3ab)^2 = (-3)^2 a^2 b^2 = 9a^2 b^2.$$

$$\text{Podobnie: } (-\frac{2}{3}x^2y^4z)^3 = (-\frac{2}{3})^3 (x^2)^3 \cdot (y^4)^3 \cdot z^3 = -\frac{8}{27}x^6y^{12}z^3.$$

Zadania

8. Wykonaj działania:

- $(2x)^2$, $(-3a)^2$, $(+\frac{2}{3}x)^3$, $(-2a)^4$, $(-\frac{1}{2}x)^5$;
- $(3a^2b)^2$, $(8ab^2)^2$, $(-5c^2)^3$, $(6a^2c^3)^2$, $(4a^3y)^3$;
- $(-7a^3bc)^2$, $(-2a^4bx^3)^3$, $(4a^2c^4x)^3$, $(-3c^2x^2y)^4$;
- $(-\frac{1}{2}c^3x^2y)^3$, $(-8ab^4x^3)^2$, $(2a^5b^6x^2)^4$, $(-\frac{1}{3}a^6b^2c^4)^5$;
- $(-5x^2y^3z)^2$, $(\frac{1}{3}x^4y^2z^5)^4$, $(-\frac{3}{2}a^2b^4c^2d^5)^2$.

§ 5. Iloraz jednomianów

Iloraz dwóch jednomianów możemy napisać w postaci ułamka.

$$\text{Np.: } \frac{-3x^2y^2z^3}{4ay^3}, \quad a \neq 0, y \neq 0.$$

Ułamek ten możemy uprościć dzieląc licznik i mianownik przez y^2 ; otrzymamy: $\frac{-3x^2z^3}{4ay} = -\frac{3x^2z^3}{4ay}$.

$$\text{Podobnie: } \frac{-\frac{7}{8}a^2b^4c}{-\frac{3}{4}ab^2c^2} = \frac{7ab^2}{6c}, \quad a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0.$$

Pomnożyliśmy najpierw licznik i mianownik przez -8 , następnie podzieliliśmy po kolei przez a , b^2 , c . Jeżeli czynniki literowe dzielnika występują również w dzielnej, i to w potęgach nie mniejszych, to iloraz możemy napisać w postaci jednomianu.

$$\text{Np.: } \frac{-4x^3y^6}{3xy^3} = -\frac{4}{3}x^2y^3, \quad x \neq 0, y \neq 0.$$

Uprościliśmy najpierw przez x , potem przez y^3 .

Dogodnie jest ilorazy takie obliczać dzieląc dzielną po kolei przez czynniki dzielnika. Dzielimy przy tym współczynnik przez współczynnik, czynniki literowe dzielnika przez odpowiednie czynniki dzielnika.

$$\text{Np.: } -2a^3b^4c : 3ab^3c = -\frac{2}{3}a^2b, \quad a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0;$$

$$-\frac{3}{4}a^5x^3y : \frac{5}{2}ax^2 = -\frac{3}{10}a^4xy, \quad a \neq 0, x \neq 0.$$

Zadania

9. Uprość:

- $\frac{6a^4}{a^3}$, $\frac{-9x^3}{3x^2}$, $\frac{ab}{-a}$, $\frac{a^2}{-a}$, $\frac{-x}{xy}$, $\frac{a^5}{-a^4}$, $\frac{abc}{bc}$;
- $\frac{-45x^6}{-9x^3}$, $\frac{abx^2}{-ax}$, $\frac{8x^2y^3}{2ax^2y}$, $\frac{-35a^4x^2}{-a^2x^2}$, $\frac{10a^2b^2c^2}{5ab^2c^2}$;
- $\frac{-24x^2y^2}{-8xy^2}$, $\frac{45x^3y^4z^5}{-9x^2y^2z^2}$, $\frac{-34a^2bc}{17abc}$, $\frac{a^4c^3}{-c^3}$, $\frac{32x^4y^3}{-8x^4}$;
- $(+68x^3) : (-17x^5)$, $(-36x^4y^3) : (+18x^3y^2)$;
- $(-64a^3b^3c^2) : (-24a^2b^2c^2)$, $(+112x^5y^3) : (-14x^2y)$;
- $(-\frac{3}{4}a^2x^2) : (\frac{1}{2}ax)$, $(\frac{1}{2}xyz^2) : (-\frac{1}{4}xz)$;
- $(-3,2xy^2z) : (-4,2y^2z)$, $(-2\frac{1}{2}a^2bc) : (7\frac{1}{2}ac)$;
- $\frac{12xy^2z}{15x^2yz^2}$, $\frac{25a^2b^3}{40a^4b}$, $\frac{39x^2y^4z^3}{52x^3y^5z^4}$, $\frac{46a^3b^4c^5}{69a^2b^3c^4}$.

Rozdział XI

Wielomiany

§ 1. Określenia. Redukcja

Sumę algebraiczną, której wyrazami są jednomiany lub liczby dane, nazywamy wielomianem. Np. wielomianami są:

$$3x^2 - 2x + 5; \quad ax^3 + bx^2 + c - 6,$$

$$4a^2bc - 2a + 5ab^2 - 6bc + 7 \text{ itp.}$$

Wyrażenie algebraiczne składające się z kilku jednomianów potęgowanych ze sobą znakami + albo - nazywa się wielomianem.

Jeżeli niektóre wyrazy wielomianu są wyrazami podobnymi, to wyrazy te możemy zredukować. Np.:

$$\begin{aligned} 5 + 2x - 3y - 5x + 4y - 6 &= -1 - 3x + y, \\ -4a^6 - 2a^2b - 5 + 5a^6 - 3a^6 + 4a^2b &= -2a^6 + 2a^2b - 5, \\ 3xy^2 - 4x^2y - y + 2x^2y - xy^2 - 3y &= 2xy^2 - 2x^2y - 4y. \end{aligned}$$

Stopniem zredukowanego wielomianu ze względu na pewną literę nazywamy najwyższy stopień ze względu na tę literę wyrazów wielomianu.

Np.: $3x^2 - x^5 + 2$ jest ze względu na x wielomianem stopnia piątego. $3x^2y - y^3 - 2x^4y^2$ jest wielomianem czwartego stopnia ze względu na x , a trzeciego ze względu na y .

Zazwyczaj wielomiany porządkujemy ze względu na pewną literę, tak aby stopnie wyrazów ze względu na tę literę wzrastały lub malały.

Np.: $x^2 - 4x^3 + 5x - 2 + x^4$ porządkujemy ze względu na literę x :
 $x^4 - 4x^3 + x^2 + 5x - 2$, lub $-2 + 5x + x^2 - 4x^3 + x^4$.

Jeśli wielomian zredukowany ma dwa wyrazy, nazywa się dwumianem, jeśli zaś ma trzy wyrazy, trójmianem.

Np.: $3x^2y - 4ax^2y^5$ jest dwumianem,
 $-4x^3y^2 + 2abx - 5ax^2$ jest trójmianem.

Zadania

- Zredukuj podobne wyrazy w następujących wielomianach:
 - $3a + 2b - c - a + 3b - 2c, -x + 2y + 3z - y + 3x + 2z;$
 - $-x + 4y - z + 1 + 2z - x - 5y;$
 $4a + 3b - 2a + 5c + 6b - 8c;$
 - $-5ab + 8bc - 9ac - 4bc + 3ac - 6ab;$
 - $15ab - 27bc - 6ac + 14ab + 10ac - 16bc + 21ab;$
 - $2x^2 - 2xy + 3y^2 + 5xy + 4y^2 - 2x^2 - 8xy;$
 - $x^2 + 5y^2 - 6xy + 2y^2 - 3x^2 - 4xy + 2x^2 - 8 + 2y^2 - 3xy;$
 - $-\frac{3}{4}x^3 + 5ax^2 - \frac{5}{8}a^2x - \frac{1}{8}ax^2 + 3x^3 + \frac{1}{2}a^2x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}a^2x;$
 - $\frac{1}{2}a^3 - 2a^2b - \frac{3}{2}b^3 + \frac{3}{2}a^2b - \frac{3}{4}ab^2 + 2b^3 - \frac{3}{2}a^3 + \frac{1}{2}b^3 + 3ab^2;$
 - $x^5 - 7x^4y + 4x^3y^3 - 12x^4y - 8xy^4 + 6x^3y^3 + 5x^3y^3 - 9xy^4 + y^5;$
 - $a^3 - 7a^2b + 9abc + a^2b - 11abc - 2c^3 + b^3 - 4a^2b - c^3 - 5abc.$
- Jaki stopień posiada wielomian $3x^4y - 12x^2y^2 + 21xy^3 + y^5$ ze względu na literę a) x , b) y ? Uporządkuj ten wielomian ze względu na literę a) x , b) y !
- Za dom zapłacono 6000 zł gotówką, następnie zapłacono dwie

raty po x złotych i 3 raty w wysokości podwójnej. Ile zapłacono za dom?

4. A posiadał x złotych i z tego wydał połowę; po jakimś czasie otrzymał 3 razy tyle, ile mu zostało, po czym znowu z całej sumy wydał trzecią część. Ile miał na końcu pieniędzy?

§ 2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Jeżeli mamy dodać dwa wielomiany, np.:

$$(3x^2 - 2yz - 3t - 5) + (-3 - 5yz + 6x^2 + 2zt),$$

to możemy opuścić nawiasy; otrzymamy zatem:

$$3x^2 - 2yz - 3t - 5 - 3 - 5yz + 6x^2 + 2zt.$$

Redukując otrzymamy jako sumę wielomianów:

$$9x^2 - 7yz - 3t - 8 + 2zt.$$

Często dla ułatwienia rachunku (jeżeli wielomiany są zredukowane) podpisujemy wielomiany pod sobą, tak aby wyrazy podobne były pod sobą, a następnie redukujemy.

$$\begin{array}{r} \text{Piszemy zatem:} \quad 3x^2 - 2yz - 3t - 5 \\ + 6x^2 - 5yz \quad \quad - 3 + 2zt \\ \hline 9x^2 - 7yz - 3t - 8 + 2zt. \end{array}$$

Podobnie:

$$\begin{array}{r} (2a^2b - 5 - 3ab^2) + (5a^2b - 2xy^2 - 7) + (3a^2b - 6 - 4xy^2) \\ 2a^2b - 5 - 3ab^2 \\ \quad - 7 + 5ab^2 - 2xy^2 \\ 3a^2b - 6 \quad \quad - 4xy^2 \\ \hline 5a^2b - 18 + 2ab^2 - 6xy^2. \end{array}$$

Podobnie postępujemy przy przekształcaniu różnicy.

$$\begin{array}{r} \text{Np.:} \quad (3x^2y - 2ab^2 + 7) - (3ab^2 - 2yz - 6) = \\ = 3x^2y - 2ab^2 + 7 - 3ab^2 + 2yz + 6 = 3x^2y - 5ab^2 + 13 + 2yz. \end{array}$$

Możemy również pod wyrazami odjemnej podpisać podobne wyrazy odjemnika ze znakami przeciwnymi.

$$\begin{array}{r} 3x^2y - 2ab^2 + 7 \\ \quad - 3ab^2 + 6 + 2yz \\ \hline 3x^2y - 5ab^2 + 13 + 2yz. \end{array}$$

Następujące wyrażenie przekształcamy analogicznie:

$$\begin{aligned} 3a^2b^3 - 2bx^2 - 7 - (5x^3y^2 - 2a^2b^3 - 7bx^2) - (-6 + 2a^2b^3 - 4x^3y^2) = \\ = 3a^2b^3 - 2bx^2 - 7 - 5x^3y^2 + 2a^2b^3 + 7bx^2 + 6 - 2a^2b^3 + 4x^3y^2 = \\ = 3a^2b^3 + 5bx^2 - 1 - x^3y^2. \end{aligned}$$

Lub:

$$\begin{array}{r}
 3a^2b^3 - 2bx^2 - 7 \\
 + 2a^2b^3 + 7bx^2 - 5x^3y^2 \\
 - 2a^2b^3 + 6 + 4x^3y^2 \\
 \hline
 3a^2b^3 + 5bx^2 - 1 - x^3y^2.
 \end{array}$$

Zadania

5. Wykonaj działania, po czym zredukuj:

- a) $(2x^2 - 4xy + 3y^2) + (4y^2 - 7xy + 2x^2)$;
 b) $(3a^2 + 6ab - 4b^2) + (-6a^2 - 10ab + 6b^2)$;
 c) $(x^4 + x^2y^2 - y^4) + (-3x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$;
 d) $(-x^2 - 5xy + 4y^2) + (6x^2 - 4xy + 8y^2) + (x^2 + 2xy + y^2)$;
 e) $(x^3 - 4x^2 + 2x - 1) + (3x^2 - 2x + 6) + (-3x^3 - 7x^2 - 4x + 3)$;
 f) $(5a^4 - 4c^4 + 2d^4) + (b^4 - 2a^4 + 6d^4) + (5c^4 - 2a^4 + 4d^4)$;
 g) $(x^3 - 3x^2y + 3xy^2) + (-6x^2y + 12xy^2 - 2x^3)$;
 h) $(a^3 + 7ab^2 + b^3) + (3a^2b - 2a^3 + 4b^3) + (7ab^2 - 2b^3 + 2a^2b)$;
 i) $(x^3 - 6x^2y + 7xy^2) + (4x^2y - 6xy^2 - 4x^3)$;
 j) $(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}xy - \frac{1}{4}y^2) + (-\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{3}xy - \frac{3}{4}y^2)$;
 k) $(\frac{1}{2}a^3 - \frac{3}{5}a^2b - \frac{5}{2}b^3) + (\frac{9}{2}a^2b - \frac{3}{4}ab^2 + 4b^3)$.

6. Wykonaj działania, po czym zredukuj:

- a) $(x^3 + x^2 - x + 1) - (x^3 - x^2 + x + 1)$;
 b) $(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - (x^3 + 3xy^2 - 3x^2y - y^3)$;
 c) $(a^5 + b^5 - 5a^3bc) - (-a^5 + b^5 + 7a^3bc)$;
 d) $(x^4 - 1 + x - 3x^2) - (x^5 - 2x^4 + 4x^2 - 2x + 3)$;
 e) $(5a^2b - 8ab^2 - 7a^3b^3) - (20a^2b - 4b^4 - 16a^3b^3)$;
 f) $(3a^2 - 5a^5 - 7 + 4a^3) - (7a^4 - 9a^2 - 2a^5 + 3a)$;
 g) $(\frac{5}{2}x^2 + 2x - 3) - (\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4})$;
 h) $(-\frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{5}xy - \frac{3}{4}y^2) - (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{10}xy - \frac{3}{8}y^2)$;
 i) $(\frac{1}{3}a^2x + \frac{1}{4}a^3 - \frac{5}{4}ax^2) - (\frac{1}{16}a^3 + \frac{3}{8}ax^2 - \frac{1}{9}a^2x)$;
 j) $(0,2x^4 - 0,01x^2 + 2,7x - 3,2) - (-0,02x^4 + 0,16x^2 - 3,4)$.

7. Wykonaj działania, po czym zredukuj:

- a) $(5x^2 + 7x - 3) + (3x^2 - 4x + 2) - (2x^2 - 8x + 4)$;
 b) $(a^3 - 3a^2b + b^3) + (-2a^3 - 3ab^2 - 2b^3) - (-2a^3 + 3a^2b)$;
 c) $(2a^4 - 4a^2b^2 + 2b^4) - (-4a^4 + 7a^2b^2 - 2b^4) + (-3a^4 - 2a^2b^2 + 3b^4)$.

8. Jaki wielomian należy dodać do $2x^2 - 4x + 8$, aby otrzymać $-4x^2 + 6x - 10$?

9. Uwolnij od nawiasów, po czym zredukuj:

- a) $[(3x^2 - 6x + 8) - (-x^2 + 3x - 4)] + [-(2x^2 - 4) - (3x - 10)]$;
 b) $(3a^2 - 6ab + 2b^2) - [(3a^2 - 4ab - 2b^2) + (-4a^2 + 7ab - 2b^2)]$;

$$c) x^2 - \{3x - [x^2 - (-2x + x^2 - 2)]\};$$

$$d) \{[a^2 - (-2a^2 + 2a - 4)] - (-3a^2 + 7a - 5)\} - [a^2 - 2a + (-3a^2 + 7a - 2)].$$

10. Piotr zarobił w styczniu x złotych, w lutym y złotych, od marca do czerwca kolejno po $3x$, $2y$, $x + y$, $x + 2y$ złotych. Jego wydatki w poszczególnych miesiącach wynosiły $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$, x , y , $\frac{1}{2}x$, $2y$ zł. Ile posiadał pieniędzy z końcem czerwca?

§ 3. Mnożenie wielomianów

Mamy iloczyn: $(3x^2 - \frac{1}{2}x + 7) \cdot (-2x)$.

Ponieważ wielomian jest sumą algebraiczną, więc powyższy iloczyn otrzymamy mnożąc każdy wyraz wielomianu przez jedno-
mian i wyniki dodając. Tworzymy zatem iloczyny:

$$3x^2 \cdot (-2x) = -6x^3; \quad (-\frac{1}{2}x) \cdot (-2x) = x^2; \quad 7 \cdot (-2x) = -14x;$$

$$\text{A więc: } (3x^2 - \frac{1}{2}x + 7) \cdot (-2x) = -6x^3 + x^2 - 14x.$$

$$\text{Podobnie: } (3a^2b - \frac{2}{3}ab^2) \cdot (-2ab^2) = -6a^3b^3 + \frac{4}{3}a^2b^4.$$

$$\text{Mamy iloczyn wielomianów: } (5x - 3y) \cdot (-3x + 4y).$$

Iloczyn otrzymamy mnożąc każdy wyraz jednego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu i wyniki dodając. Otrzymamy:

$$-5x \cdot 3x + 5x \cdot 4y + 3y \cdot 3x - 3y \cdot 4y =$$

$$= -15x^2 + 20xy + 9xy - 12y^2 = -15x^2 + 29xy - 12y^2.$$

Podobnie:

$$(a^2 - 2ab + b^2)(a + b) = a^2a + a^2b - 2aba - 2abb + b^2a + b^2b =$$

$$= a^3 + a^2b - 2a^2b - 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3.$$

Często dla ułatwienia redukcji wyrazy podobne iloczynowi podpisujemy pod sobą.

$$\text{Np.: } (x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1)(x - 3).$$

Mnożymy wyrazy mnożnika przez x , następnie przez -3 i podobne iloczyny częściowe podpisujemy pod sobą. Rachunek przedstawia się następująco:

$$\begin{array}{r}
 x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x \\
 - 3x^4 + 15x^3 - 6x^2 + 9x - 3 \\
 \hline
 x^5 - 8x^4 + 17x^3 - 9x^2 + 10x - 3.
 \end{array}$$

$$\text{Podobnie: } (3x^3 - 2x^2y + 4xy^2 - y^3)(2x - y)$$

$$\begin{array}{r}
 6x^4 - 4x^3y + 8x^2y^2 - 2xy^3 \\
 - 3x^3y + 2x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 \\
 \hline
 6x^4 - 7x^3y + 10x^2y^2 - 6xy^3 + y^4.
 \end{array}$$

Wyrażenie: $-3x(x^2-5)-(x+5)(x-2)+(x-1)(x+5)$ przekształcamy wykonując najpierw mnożenia. Wyniki bierzemy w nawias, a następnie wykonujemy naznaczone dodawania i odejmowania. Rachujemy zatem:

$$\begin{aligned} & -(3x^3-15x)-(x^2-2x+5x-10)+(x^2+5x-x-5)= \\ & =-3x^3+15x-x^2+2x-5x+10+x^2+5x-x-5= \\ & =-3x^3+16x+5. \end{aligned}$$

Zadania

11. Wykonaj działania:

- $(x^2-3x+2)x^4, (-2y^2+5y-4)5y^6;$
- $3a^2 \cdot (-2a^4+3a^3-2a^2+5a-7);$
- $5ab(-a^2+4ab-3b^2);$
- $-3ab^2(4a^3+3a^2b-2ab^2-5b^3);$
- $(-5abc)(a^3+3abc+2c^3).$

12. Wykonaj działania:

- $(x+9)(x-4), (a+5)(a+2), (b+7)(b-3);$
- $(3x-2)(3x+5), (-2x+9)(-x-3);$
- $(a-2b)(3a+b), (x-4y)(y-x);$
- $(3x+2y)(x+y), (x-5a)(x+4a);$
- $(x^2-2x+4)(x-3), (3a^2-2a+6)(-2a^2+3a-4);$
- $(a^2b-2ab^2)(a^3-b^3), (a^2-5ab-b^2)(2a^2+5ab+b^2);$
- $(x^4-2xy^3+2x^3y)(-x^2-xy+2y^2).$

13. Wykonaj działania:

- $(x+1)(x+2)(x+3), (a-b)(a+b)(a^2+b^2);$
- $(2x+3y)(x+y^2)(x^2-2y), 3xy(5x+2y)(-x^2+2xy+4y^2).$

14. Wykonaj działania:

- $(2x+1)(x-2)+(x^2-3x+4);$
- $(x-6)(x^2-4x+5)-3(-x^2+6x-8);$
- $(a-b)(a^2+b^2)-(a+b)(a^2-b^2);$
- $ab(a^2+b^2)-3(-2a^3+a^2b+ab^2-2b^3);$
- $(x-y)(x+y)(x-2y)-[x^2-(x-y)(x+y)].$

15. Wykonaj działania:

- $-4x(x^3-8)+(x-4)(x-2)-5x(x-1);$
- $(2x-3)(x-8)-3x(x-4)-(2-x)(7-x);$
- $(x^2-2)2x-(x+1)(4x-3)-3x(x+2)(x-5).$

16. a) O ile zwiększy się pole prostokąta o bokach a cm i b cm, jeżeli boki zwiększymy o x cm?

b) O ile zwiększy się objętość prostopadłościanu o bokach a cm, b cm, c cm, jeżeli boki te zwiększymy o x cm?

17. a) Oblicz iloczyn sumy kwadratów liczb a i b przez różnicę tych liczb!

b) Pomnóż sumę kwadratów liczb a , b i c przez różnicę kwadratów liczby pierwszej i trzeciej!

§ 4. Iloraz wielomianu przez jednomian

Wielomian dzielimy przez jednomian dzieląc każdy wyraz wielomianu przez ten jednomian i wyniki dodając. Np., jeżeli $x \neq 0$, to

$$\begin{aligned} & (5x^4-3x^3+2x^2-x):(-2x)= \\ & =-\frac{5x^4}{2x}+\frac{3x^3}{2x}-\frac{2x^2}{2x}+\frac{x}{2x}=-\frac{5}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Podobnie postępując, jeżeli $x \neq 0$, otrzymamy:

$$(3x^3y^2-2x^2y^3-4xy^4):(-2xy^2)=-\frac{3}{2}x^2+xy+2y^2.$$

Zadania

18. Wykonaj działania:

- $(x^3-3x^2+x):x, (-a^2+a):2a;$
- $(10x^7-6x^6+5x^5):3x^2;$
- $(15a^5-25a^4):(-5a^3);$
- $(8a^2b^2+4a^3b^5-2a^7b^2):2a^2b^2;$
- $(4x^4y^4-10x^3y^3+8xy^8):(-2xy);$
- $(\frac{1}{2}x^5y^2-3x^3y^4):(-\frac{3}{2}x^3y^2).$

19. Wykonaj działania:

- $(x^2-2x^4+4):x, (a^2-3a-9):2a^2;$
- $(3x^3-4x+8):9x^4, (b^3-2b^2+3b-2):b^2;$
- $(a^5-4a^4+7a^3-2a^2+4a-3):(-2a^3);$
- $(x^2+4xy+y^2):xy;$
- $(3x^4-2x^3y+4xy^5+y^6):x^3y^7;$
- $(2a^5b^7-3ab^4-5ab^2):7a^6b^6.$

20. Wykonaj działania:

- $[(-a^2+7a^5-4a^3):(-3a)]:a;$
- $[(x^2-xy+y^2)(x+y)]:x^2y;$
- $[(x-y)(-4x^4+2x^2y^2+y^4)]:(-2x^2y^2).$

§ 5. Iloraz wielomianu przez wielomian stopnia pierwszego

Mamy iloraz:
$$\frac{5x^3 - 9x^2 + 4x - 12}{x - 2}.$$

Wyrazem najwyższego stopnia w dzielnej jest $5x^3$, w dzielniku: x . Obliczamy iloraz $5x^3 : x = 5x^2$. Przez otrzymany iloraz $5x^2$ pomnóżmy dzielnik i wynik odejmijmy od dzielnej. Dostaniemy: $(5x^3 - 9x^2 + 4x - 12) - 5x^2(x - 2) = x^2 + 4x - 12$.

Dzieląc obustronnie przez $x - 2$ mieć będziemy:

$$\frac{5x^3 - 9x^2 + 4x - 12}{x - 2} - \frac{5x^2(x - 2)}{x - 2} = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}.$$

Przenosząc wyraz: $= -\frac{5x^2(x - 2)}{x - 2} = -5x^2$ z lewej strony na

prawą otrzymamy:
$$\frac{5x^3 - 9x^2 + 4x - 12}{x - 2} = 5x^2 + \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}.$$

Obliczenie więc danego ilorazu sprowadziło do obliczenia ilorazu $\frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$, w którym dzielna jest stopnia o jeden niższego niż początkowa dzielna. Postępujemy znowu jak poprzednio. Tworzymy iloraz $x^2 : x = x$. Otrzymanym ilorazem mnożymy dzielnik i uzyskany wynik odejmujemy od dzielnej. A więc:

$$(x^2 + 4x - 12) - x(x - 2) = 6x - 12.$$

Dzielimy obustronnie przez $x - 2$.

Zatem:
$$\frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} - x = \frac{6x - 12}{x - 2}.$$

Przenosząc $-x$ na prawą stronę dostajemy:

$$\frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} = x + \frac{6x - 12}{x - 2}.$$

Obliczamy teraz iloraz $\frac{6x - 12}{x - 2}$. Mamy $6x : x = 6$.

$(6x - 12) - 6(x - 2) = 0$; dzieląc więc przez $x - 2$ obustronnie, otrzymamy: $\frac{6x - 12}{x - 2} - 6 = 0$ czyli $\frac{6x - 12}{x - 2} = 6$.

A więc:
$$\frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} = x + 6.$$

Zatem:
$$\frac{5x^3 - 9x^2 + 4x - 12}{x - 2} = 5x^2 + x + 6.$$

Rachunek powyższy zapisujemy następująco:

$$\begin{array}{r} 5x^2 + x + 6 \\ (5x^3 - 9x^2 + 4x - 12) : (x - 2) \\ \underline{-5x^3 + 10x^2} \\ x^2 + 4x - 12 \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ 6x - 12 \\ \underline{-6x + 12} \\ = = \end{array}$$

skaną resztą $x^2 + 4x - 12$ postępujemy jak poprzednio.

U w a g a. Wynik jest słuszny, jakkolwiek liczbę x oznacza, z wyjątkiem wypadku, gdy $x = 2$. Wtedy bowiem dzielnik $x - 2 = 0$, a dzielnik nie może być zerem.

Podobnie obliczamy iloraz:

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 5x + 5 \\ (8x^3 - 2x^2 - 5x - 15) : (2x - 3) \\ \underline{-8x^3 + 12x^2} \\ 10x^2 - 5x - 15 \\ \underline{-10x^2 + 15x} \\ 10x - 15 \\ \underline{-10x + 15} \\ = = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 5x^2 + 4x + 4 \\ (5x^4 - x^2 + 3) : (x - 1) \\ \underline{-5x^4 + 5x^3} \\ 5x^3 - x^2 + 3 \\ \underline{-5x^3 + 5x^2} \\ 4x^2 + 3 \\ \underline{-4x^2 + 4x} \\ 4x + 3 \\ \underline{-4x + 4} \\ +7 \end{array}$$

Otrzymaliśmy zatem resztę 7, którą należy przez $x - 1$ podzielić.

A więc:

$$\begin{array}{r} 5x^4 - x^2 + 3 \\ \underline{x - 1} \\ = 5x^3 + 5x^2 + 4x + 4 + \frac{7}{x - 1}. \end{array}$$

U w a g a. Przed obliczaniem ilorazu korzystną jest rzeczą uporządkować dzielną i dzielnik wedle potęg malejących.

Zadania

21. Wykonaj dzielenie:

- a) $(x^2 - 3x + 2) : (x - 1)$; b) $(x^2 - 7x + 12) : (x - 3)$;
c) $(5x^2 + 11x + 2) : (x + 2)$; d) $(4x^2 + 23x + 15) : (4x + 3)$;

- e) $(x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}) : (x + \frac{1}{4})$; f) $(6x^2 - 7x - 3) : (2x - 3)$;
 g) $(x^3 - x^2 - 7x - 5) : (x + 1)$;
 h) $(7x^3 + 96x^2 - 28x) : (7x - 2)$;
 i) $(9x^2 - 3x + 27x^3 - 10) : (5x - 2)$;
 j) $(39x - 46x^2 + 16x^3 - 9) : (8x - 3)$;
 k) $(2x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 5x + 2) : (2x - 1)$.

22. Wykonaj dzielenie i sprawdź:

- a) $(x^3 + 1) : (x + 1)$, $(x^5 + 1) : (x + 1)$, $(x^7 + 1) : (x + 1)$;
 b) $(x^2 - 1) : (x - 1)$, $(x^3 - 1) : (x - 1)$, $(x^4 - 1) : (x - 1)$;
 c) $(x^3 + 3) : (x + 3)$, $(x^3 - 3) : (x - 3)$.

§ 6. Wielomiany o współczynnikach literowych

Zdarza się często, że w danym wyrażeniu niektóre litery oznaczają ściśle określone liczby, za inne zaś możemy rozmaite liczby podstawić.

Np.: Jeżeli r oznacza długość promienia koła, np. w cm , to obwód w cm wynosi: $2\pi r$. Litera π oznacza ściśle określoną liczbę 3,14, za literę r możemy rozmaite liczby podstawiać, zależnie od tego, jakie koło badamy. Zazwyczaj do oznaczania danych liczb używamy początkowych liter alfabetu, jak $a, b, c \dots$. Liter końcowych, jak $x, y, z \dots$, używamy dla zaznaczenia, że za nie możemy rozmaite liczby podstawić; o literach takich będziemy mówili, że oznaczają zmienne.

Mamy jednomian, jak np. $-3abx^2y^3$, w którym x, y oznaczają zmienne, zaś a, b liczby dane. Współczynnikiem (literowym) powyższego jednomianu ze względu na zmienne x i y nazywać będziemy iloczyn czynników pozostałych, przy czym iloczyn ten opatrujemy znakiem jednomianu. W naszym więc wypadku współczynnikiem jest $-3ab$.

Jednomiany: $-2ax$, $3bx^2y^3$, $-\frac{3}{4}ab^2cx$ mają współczynniki ze względu na zmienne x, y odpowiednio: $-2a$, $3b$, $-\frac{3}{4}ab^2c$.

Uwaga. Do jednomianów zaliczamy również wyrażenia, jak: $(a+b)x$, $-3(a+2b)cx^2y$, gdzie a, b, c oznaczają liczby dane, zaś x, y, z zmienne. Możemy bowiem uważać, że ułamek, względnie nawias wraz z wyrażeniem w nim zawartym, oznacza liczbę określoną, którą otrzymamy wykonując na liczbach danych a, b, c naznaczone działania. Współczynnikiem tych jednomianów ze względu na zmienne x, y, z są odpowiednio: $a+b$, $-3(a+2b)c$.

Dwa jednomiany, jak np.: $2ax^2y$, $-3abx^2y$, nazywają się po-

dobnymi ze względu na zmienne x, y , jeżeli w obu występują zmienne x, y w tych samych potęgach.

Jednomiany: 1) $2ax$, $3bx$, $-2abx$, lub 2) $3a^2x^3y^2$, $-2abx^3y^2$, $-2x^3y^2$ są podobnymi ze względu na zmienne x, y .

Jednomiany podobne ze względu na pewne zmienne redukujemy ze względu na te zmienne wyjmując za nawias wspólne czynniki. Np.: $2ax - 3bx + cx = (2a - 3b + c)x$

$$3a^2bxy^2 - ab^2xy^2 + 2xy^2 = (3a^2b - ab^2 + 2)xy^2$$

$$6axy - 5bxy - 2axy + 4bxy = (6a - 5b - 2a + 4b)xy = (4a - b)xy.$$

Zadania

23. Wyznacz współczynniki (literowe) ze względu na zmienną x :

- a) ax^2 , abx , $-4ax^3$, $5a^2bx^4$, $-7ab^3c^2x^2$;
 b) $(a+b)x^3$, $-2(a-b)x^4$, $5(3a+2b^2)x^2$, $(a-3b) \cdot x$.

24. Wyznacz współczynniki (literowe) ze względu na zmienne x, y, z, t :

- a) axy , b^2cx^2y , $-5a^2b^3x^2yz$, $4ab^2xy^3zt^2$;
 b) $(2a-3b)x^2y$, $-4(a^2-b^2)x^3y^2zt$.

25. Które z następujących jednomianów są podobne ze względu na zmienne x, y, z ?

- a) $-2ax^2y$, $5axy^2$, $\frac{1}{2}bx^2y$, $-3bcxy$, xy^2 , $(a+1)xy$;
 b) ax^2y^3z , $-2bxy^2z^3$, bcx^2y^3z , ab^2cxyz^4 , axy^2z^3 , $\frac{2}{3}b^3cx^2y^3z$;
 c) $\frac{1}{2}x^4y^3z^2$, $3(a+2b)x^2y^3z^4$, $ab^2cx^2y^3z^2$, $-b^2cx^2y^3z^4$;
 $(a+1)x^2y^2z^2$, $-5bx^2y^3z^4$, $7(a-b)x^4y^3z^2$.

26. W następujących wielomianach zredukuj wyrazy podobne ze względu na zmienne x, y, z :

- a) $ax^2 + bxy - cy^2 - bx^2 - axy + dy^2$;
 b) $5a^2x^2 - y^2 - 5abyz - 2z^2 + axy - by^2 + 2cyz - 3x^2 - bxy + ay^2 - abz^2$;
 c) $ax^3 - 2ax^2y - \frac{1}{2}a^2bxz - aby^2 + a^2y^3z + bx^3 - abx^2z^2 + \frac{1}{3}cxz - b^2y^3z + 5x^2z^2 + 3bx^2y - \frac{1}{4}bcxz + 4y^2$;
 d) $ax^4 + by^2 - 3cz^3 - at + cy^2 - bz^3 + 2bx^4 - bz^3 - ct$.

27. Wykonaj działania i zredukuj wedle zmiennej x :

- a) $(x+a)(x+b)$, b) $(x-a)(x-b)$, c) $(x+a)(x-b)$;
 d) $(x+a)(x+b)(x+c)$, e) $(x-a)(x-b)(x-c)$.

28. Uwolnij od nawiasów i zredukuj ze względu na zmienne x, y, z :

- a) $(ax^3 - bx^2y + cxy^2 + ay^3) + (bx^3 - cx^2y + bxy^2 - cy^3)$;

- b) $(2ay^3 - 5bxy^2 + 3cx^2y - x^3) - (2bx^2y - ax^3 + 8cy^3 - axy^2)$;
 c) $(5bx^2 + 7ay^2 - 6yz - cz^2) - (axy - 3by^2 + 4ayz) +$
 $+ (-2cx^2 + bxy + cy^2 + bz^2)$;
 d) $(ax^2 + bxy + cy^2 - dz) + (3bx^2 - 3cxy - 7dy^2 - 4az) -$
 $(2cx^2 - 6dxy - 2ay^2 + 3bz) - (5dx^2 + 8axy - 4by^2 + cz)$.

29. Wykonaj działania:

- a) $(ax + by)cx^2, (ax^2 - by^2)(-2acxy)$;
 b) $(ax^2 + 5bxy + 4cy^2) \cdot 3acxy^2, (x^2 + axy + by^2)(-4cx^2y)$;
 c) $(x + a)(x + b), (x - a)(2x + b), (2ax + b)(x - 2)$;
 d) $(3x^2 + 4ax - a^2)(3x^2 - 4ax + a^2)$.

30. Wykonaj działania:

- a) $(ax^4y - 2bx^3y + 3cx^2y^3) : (-x^2y)$;
 b) $(a^2x^3y^3 - a^4x^2y^2 + a^2bxy^2) : (-a^2xy^2)$;
 c) $(ax^3y^2 - 3bx^4y^3 + 2cx^2y^4) : dx^2y^2$.

Rozdział XII

Wzory specjalne

§ 1. Kwadrat dwumianu

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

A więc: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

Możemy więc powiedzieć: kwadrat dwumianu równa się sumie, której wyrazami są: kwadrat pierwszego wyrazu, podwójny iloczyn obu wyrazów i kwadrat drugiego wyrazu.

Np.: $(3 + 5)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 5^2 = 64.$

Dwumian: $a - b$ ma wyrazy $a, -b$,

zatem: $(a - b)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

Dwumian: $-a + b$ ma wyrazy $-a, +b$,

zatem: $(-a + b)^2 = (-a)^2 + 2(-a)b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

Dwumian: $3a + 5b$ ma wyrazy $3a, 5b$,

zatem: $(3a + 5b)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 5b + (5b)^2 = 9a^2 + 30ab + 25b^2.$

Dwumian: $2x - 3y$ ma wyrazy $2x, -3y$,

zatem: $(2x - 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3y) + (-3y)^2 =$
 $= 4x^2 - 12xy + 9y^2.$

Dwumian: $3a^2 - 2b^3$ ma wyrazy $3a^2, -2b^3$,

zatem: $(3a^2 - 2b^3)^2 = (3a^2)^2 + 2 \cdot 3a^2 \cdot (-2b^3) + (-2b^3)^2 =$
 $= 9a^4 - 12a^2b^3 + 4b^6.$

Dwumian: $-3x^2y^3 - 5a^2b^3$ ma wyrazy $-3x^2y^3, -5a^2b^3$,

zatem: $(-3x^2y^3 - 5a^2b^3)^2 = (-3x^2y^3)^2 + 2(-3x^2y^3)(-5a^2b^3) +$
 $+ (-5a^2b^3)^2 = 9x^4y^6 + 30x^2y^3a^2b^3 + 25a^4b^6.$

Przy obliczaniu kwadratu dwumianu należy nabrać takiej wprawy, by móc od razu pisać wynik.

Zadania

- Sprawdź wzór: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ podstawiając a) $a = -1, b = 4$; b) $a = 5, b = -3$.
- Uwolnij od nawiasów:

a) $(3x + 7y)^2$; b) $(2a + 3b)^2$; c) $(3x - y)^2$;
 d) $(2x - 4y)^2$; e) $(-3x + y)^2$; f) $(-2a + 3b)^2$;
 g) $(-6x + 4y)^2$; h) $(\frac{2}{5}x + 3y)^2$; i) $(\frac{3}{4}a - b)^2$;
 j) $(2a - \frac{4}{3}b)^2$; k) $(\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y)^2$; l) $(\frac{5}{6}x - \frac{3}{5}y)^2$;
 m) $(-\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y)^2$; n) $(-\frac{3}{5}a - \frac{4}{3}b)^2$; o) $(2,4x - 3,5y)^2$.
- Uwolnij od nawiasów:

a) $(2a + a^2)^2$; b) $(3x^2 + 2x^3)^2$; c) $(2x^3 - 3x^4)^2$;
 d) $(-3a^3 + 4a^5)^2$; e) $(-2a^2 - 3a^6)^2$; f) $(\frac{3}{4}x^3 - 5x)^2$;
 g) $(-\frac{2}{3}a^4 + a^3)^2$; h) $(-\frac{2}{5}x^6 - \frac{3}{4}x^9)^2$; i) $(3ab + 2a^2)^2$;
 j) $(2a^2b + 4ab^2)^2$; k) $(3x^3y^4 - 2xy^5)^2$; l) $(2x^5y^3z^2 - 6x^2y^4z)^2$;
 m) $(-a^5b^2c^3 + a^9b^3c^4)^2$; n) $(-4a^4b^3c^2 - 3a^7b^{11}c^5)^2$;
 o) $(\frac{3}{4}x^5y^3 + \frac{2}{3}x^2y^6)^2$; p) $(-3x^2y^3 + \frac{2}{3}x^3y^7)^2$.
- Wykonaj działania:

a) $(3x - 4y)^2 + (-2x + y)^2$; b) $5(3x - 2)^2 - 4(x + 2)^2$;
 c) $(3x + 3y)^2 \cdot (x^2 - 2y)$; d) $(-3a^2b + 2ab^3)^2 : (-4ab)$.
- Wykonaj działania:

a) $(3a + 5)^2(2a - 7)$; b) $[(-2a^3 + a^2)(3a)]^2$;
 c) $[(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4})(\frac{3}{5}x)]^2 - 3(\frac{3}{4}x + \frac{1}{2})^2$;
 d) $(a + b)^2 - (a - b)^2$; e) $(a + b)^2 + (a - b)^2$;
 f) $(a + b)^2(a - b)^2$; g) $4(3x^2 + 8)^2 - (x - 3)^2(x + 1)$;
 h) $(x + 2)^2 - [3(x^2 + 1) - 4(x + 2)(x - 3) + 2(2x - 3)^2]$;
 i) $[(-2x^3y^2 + \frac{3}{4}xy^2)^2 - (2x^3y + \frac{3}{4}xy^2)^2] \cdot (x^2 + y^2)$.
- Jaki dwumian trzeba podnieść do kwadratu, aby otrzymać:

a) $x^2 + 4x + 4$; b) $x^2 + 6x + 9$; c) $x^2 - 8x + 16$;
 d) $x^2 - 6x + 9$; e) $x^4 + 2x^2 + 1$; f) $a^4 - 4a^2 + 4$;
 g) $b^6 - 8b^3 + 16$; h) $a^{10} + 18a^5 + 81$; i) $4x^4 + 4x^2 + 1$.

7. Sprawdź, że: $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.
8. Sprawdź, że: $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$.
9. W kwadracie dwumianu $a + 6$ powiększono pierwszy wyraz o 1. O ile zmienił się kwadrat dwumianu?
10. Oblicz różnicę kwadratów dwóch sąsiednich liczb naturalnych!

§ 2. Sześcián dwumianu

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

A więc: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Możemy więc powiedzieć: Sześcián dwumianu równa się sumie, której wyrazami są: sześcián pierwszego wyrazu, potrójny iloczyn kwadratu pierwszego wyrazu przez drugi, potrójny iloczyn wyrazu pierwszego przez kwadrat drugiego, sześcián wyrazu drugiego.

Stosując powyższą regułę otrzymamy:

$$(a-b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(2x-3y)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot (-3y) + 3 \cdot 2x \cdot (-3y)^2 + (-3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$$

$$(3a^2 - b^3)^3 = (3a^2)^3 + 3 \cdot (3a^2)^2 \cdot (-b^3) + 3 \cdot 3a^2 \cdot (-b^3)^2 + (-b^3)^3 = 27a^6 - 27a^4b^3 + 9a^2b^6 - b^9$$

$$(-2x^2y + \frac{1}{3}a^2b^3)^3 = (-2x^2y)^3 + 3(-2x^2y)^2 \cdot \frac{1}{3}a^2b^3 + 3 \cdot (-2x^2y) \cdot (\frac{1}{3}a^2b^3)^2 + (\frac{1}{3}a^2b^3)^3 = -8x^6y^3 + 4x^4y^2a^2b^3 - \frac{2}{3}x^2ya^4b^6 + \frac{1}{27}a^6b^9.$$

Uwaga. Wygodną jest czasami rzeczą odpowiednio wyrazi sześciánu wyliczać na boku. Np. sześcián: $(2a^4b^2 - 3ab^4)^3$ obliczamy:

$$(2a^4b^2)^3 = 8a^{12}b^6; \quad 3 \cdot (2a^4b^2)^2 \cdot (-3ab^4) = -3 \cdot 4a^8b^4 \cdot 3ab^4 = -36a^9b^8; \quad 3 \cdot 2a^4b^2 \cdot (-3ab^4)^2 = 3 \cdot 2a^4b^2 \cdot 9a^2b^8 = 54a^6b^{10}; \quad (-3ab^4)^3 = -27a^3b^{12}.$$

Zatem: $(2a^4b^2 - 3ab^4)^3 = 8a^{12}b^6 - 36a^9b^8 + 54a^6b^{10} - 27a^3b^{12}.$

Zadania

11. Sprawdź wzór: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ podstawiając a) $a = -2, b = +5$, b) $a = -3, b = -3$.
12. Uwolnij od nawiasów:
a) $(3x+5y)^3$; b) $(a+4b)^3$; c) $(3a-2b)^3$;

- d) $(4x-5)^3$; e) $(-3x+4y)^3$; f) $(-2a+5b)^3$;
g) $(-3x-a)^3$; h) $(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2})^3$; i) $(\frac{3}{5}a - 6b)^3$;
j) $(2a - \frac{7}{3}b)^3$; k) $(\frac{4}{5}x + \frac{2}{3}y)^3$; l) $(\frac{5}{6}x - \frac{7}{8}y)^3$;
m) $(-\frac{2}{3}a + \frac{1}{9}b)^3$; n) $(-\frac{4}{5}a - \frac{2}{3}b)^3$; o) $(3,7x + 2,4y)^3$.

13. Uwolnij od nawiasów:

- a) $(3a+2a^2)^3$; b) $(4x^2+2x^3)^3$; c) $(2x^3-5x^5)^3$;
d) $(-7a^3+4a^4)^3$; e) $(-4a^2+3a^8)^3$; f) $(\frac{3}{4}x^3+7x)^3$;
g) $(-\frac{2}{3}a^5+a^3)^3$; h) $(-\frac{2}{5}x^8-\frac{4}{7}x)^3$; i) $(6ab+a^2)^3$;
j) $(4a^2b+2ab^2)^3$; k) $(3x^3y^4-2x^2y^5)^3$;
l) $(3x^5y^3z^2-4x^2y^4z)^3$.

14. Wykonaj działania:

- a) $(a+b)^3 - (a-b)^3$; b) $(a+2b)^3(a+b)$;
c) $(x-y)^2(x+y)^3$; d) $(1+a)^3(1+b)^3$;
e) $3x^2y(x-2y)^3$; f) $(x+y)^3 - [(x-y)^2 + 2(2x-3y)^3]$.

15. O ile zwiększy się wartość wyrażenia $(1+b)^3$, jeżeli składnik b powiększymy o 2?

16. Oblicz różnicę sześciánów dwóch sąsiednich liczb naturalnych!

§ 3. Iloczyn sumy dwóch wyrażeń przez ich różnicę

Mamy: $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.

A więc: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Zatem: iloczyn sumy dwóch liczb przez ich różnicę równa się różnicy kwadratów tych liczb.

Np.: $(2a+3b)(2a-3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$

$$(3a^2x-4b^2x^3)(3a^2x+4b^2x^3) = (3a^2x)^2 - (4b^2x^3)^2 = 9a^4x^2 - 16b^4x^6$$

$$(-3a-5b)(3a-5b) = -(3a+5b)(3a-5b) = -(9a^2-25b^2) = 25b^2-9a^2$$

$$(5x+3y+2)(5x+3y-2) = (5x+3y)^2 - 2^2 = 25x^2 + 30xy + 9y^2 - 4.$$

Zadania

17. Sprawdź wzór: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ podstawiając:
a) $a = 2, b = 5$; b) $a = -3, b = -7$.
18. Uwolnij od nawiasów:
a) $(x+2y)(x-2y)$; b) $(3a+2b)(3a-2b)$;
c) $(5a+4b)(5a-4b)$; d) $(\frac{2}{3}a + \frac{3}{4})(\frac{2}{5}a - \frac{3}{4})$;
e) $(2x^2+1)(2x^2-1)$; f) $(3x^4+2x^3y^5)(3x^4-2x^3y^5)$;

- g) $(-4x + 6y)(+4x + 6y)$; h) $(-12x^3 + 3x)(+12x^3 + 3x)$;
 i) $(2a^3b^2c^4 + 5a^4b^3c^2)(-2a^3b^2c^4 + 5a^4b^3c^2)$;
 j) $(-5x - 3a)(5x - 3a)$; k) $(-2x - 7y)(7y - 2x)$;
 l) $(2x - 5a)(-2x - 5a)$; m) $(3x^2y - 5x)(-5x^2y - 5x)$.

19. Uwolnij od nawiasów:

- a) $[(2a + 3b) + 2c][(2a + 3b) - 2c]$;
 b) $(3x^2 + 2x + 1)(3x^2 + 2x - 1)$;
 c) $(-x^3 + 2x^2 + 1)(+x^3 + 2x^2 + 1)$;
 d) $[-(2x + 3y) + 4z][(2x + 3y) + 4z]$;
 e) $[-(2x - 5y) - 7z][(2x - 5y) - 7z]$;
 f) $[(3a + b) - (4x - y)][(3a + b) + (4x - y)]$.

20. Wykonaj działania:

- a) $7(3x + 1)(3x - 1)$; b) $(2a + b)(2a - b)(a + b)$;
 c) $(3a^2b + 2ab^3)(3a^2b - 2ab^3)(a - 2b)$;
 d) $(2a - b)^2 - (2a - b)(2a + b) + (2a + b)^2$;
 e) $(-3x^3y^2 + 2x^2y^3)^2 - 4(2x^3y^2 - 3x^2y^3)(3x^2y^3 + 2x^3y^2)$;
 f) $(3x + 2)^2 - [2(x - 4)^2 - 3(x + 2)(x - 2)]$;
 g) $(4x^2 + 3y^2)^2(2x + y)(2x - y)$.

21. Oblicz:

- a) $69 \cdot 71$, b) $58 \cdot 62$, c) $229 \cdot 231$, d) $205 \cdot 195$, e) $602 \cdot 598$.
 Np.: $98 \cdot 102 = (100 - 2)(100 + 2) = 100^2 - 2^2 = 10\,000 - 4 = 9996$.

§ 4. Rozkładanie wielomianów na czynniki

Często jest rzeczą wygodną przedstawić wielomian w postaci iloczynu, którego czynniki są wielomianami stopni niższych. Podamy niektóre przykłady.

I. Jeżeli istnieje wspólny czynnik, to można go wyjąć za nawias.

Np.: $3a^2 - 6ab = 3a(a - 2b)$
 $5a^2b^3x^2 - 3a^2bx^2 + 4ax^2 = ax^2(5ab^3 - 3ab + 4)$
 $3x(x - a) + 5b(x - a) + 3a(a - x)$.

Wyraz ostatni: $+3a(a - x)$ można napisać w postaci:
 $-3a(x - a)$.

Wyciągając zatem czynnik: $x - a$ za nawias otrzymamy:
 $(3x + 5b - 3a)(x - a)$.

II. Wielomian $x^2 - ax + bx - ab$ przekształcamy następująco:
 $x^2 - ax + bx - ab = (x^2 - ax) + (bx - ab) = x(x - a) + b(x - a) =$
 $= (x + b)(x - a)$.

Podobnie: $ax^2 - 3bxy - axy + 3by^2 = (ax^2 - 3bxy) +$
 $+ (-axy + 3by^2) = (ax - 3by)x + (-ax + 3by)y =$
 $= (ax - 3by)x - (ax - 3by)y = (ax - 3by)(x - y)$.

III. Jeżeli występuje różnica kwadratów dwóch wyrażeń, to możemy ją przedstawić jako iloczyn sumy przez różnicę tych wyrażeń.

Np.: $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$
 $x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4) =$
 $= (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$,
 $16a^4 - 81b^4 = (4a^2)^2 - (9b^2)^2 = (4a^2 - 9b^2)(4a^2 + 9b^2) =$
 $= (2a - 3b)(2a + 3b)(4a^2 + 9b^2)$,
 $(a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$,
 $x^2 - (2b - 3c)^2 = [x - (2b - 3c)][x + (2b - 3c)]$,
 $(a - 2b)^2 - (2a - 3b)^2 =$
 $= [(a - 2b) + (2a - 3b)][(a - 2b) - (2a - 3b)] =$
 $= (3a - 5b)(-a + b)$,
 $x^2 - 4 + ax - 2a = (x^2 - 4) + (ax - 2a) =$
 $= (x - 2)(x + 2) + a(x - 2) = (x - 2)(x + 2 + a)$.

IV. W następujących przykładach należy zauważyć, że pewne wyrażenie jest kwadratem dwumianu:

$x^2 + 2xy + y^2 - a^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - a^2 = (x + y)^2 - a^2 =$
 $= (x + y + a)(x + y - a)$,
 $1 - x^2 - 2xy - y^2 = 1 - (x^2 + 2xy + y^2) = 1 - (x + y)^2 =$
 $= (1 + x + y)(1 - x - y)$,
 $a^2 - 2ab + b^2 - ax + bx = (a^2 - 2ab + b^2) - (ax - bx) =$
 $= (a - b)^2 - (a - b)x = (a - b)(a - b - x)$.

Zadania

22. Wyjmij wspólny czynnik poza nawias:

- a) $ax + ay$, $a^2x + ay$, $ax^2 + ay$, $3ax - ay$;
 b) $x^2 - 2xy$, $3xy - y^2$, $xy - yz$, $x - xy$;
 c) $6ax - 3ax^2$, $4x - 16x^2y$, $ax - a^2x^2$;
 d) $-14x - 21x^2y$, $10x^3 - 25x^4y$, $2ax^2 - 3axy$;
 e) $x - x^2 + x^3$, $2x^3 - 4x^2 + 8x$, $3x^3 + 18x^2 - 6x$;
 f) $7 - 14x + 14yz^2$, $x^3 - ax^2 + bx$, $4x^3y - 12xy^2 - 8xy$;
 g) $4a^3x - 12a^2x^2 - 8ax^3$, $9x^3b - 18x^2b^2 + 54xb$;
 h) $15a^5 - 10a^2x^2 - 25a^3x^3$, $2ax^3y - 3axy^3 + 4ax^2y^3$;
 i) $17a^2x^3 - 34a^5x^4y$, $19a^3bx + 57a^4bx^2$;
 j) $11x^2y^3z^4 - 19x^4y^3z^2 + 25x^3y^4z^5$.

23. Przedstaw jako iloczyn:

- | | |
|------------------------------|-----------------------------------|
| a) $ax + by + ay + bx$; | b) $ax - by - ay + bx$; |
| c) $ax - ay - bx + by$; | d) $ax - by + ay - bx$; |
| e) $2ax + ay + 2bx + by$; | f) $3ax - bx - 3ay + by$; |
| g) $x^2 + ax + bx + ab$; | h) $x - ax + a^4 - a^5$; |
| i) $ax^2 + ax - bx - b$; | j) $ax^2 + ax - x - 1$; |
| k) $x^2 - xy - xz + yz$; | l) $5ax - 4bx - 5ay + 4by$; |
| m) $axy + bcxy - az - bcz$; | n) $ax^2 - 4bxy - axy + 4by^2$; |
| o) $mx - 2my - nx + 2ny$; | p) $amx^2 + bmx - anxy - bny^2$. |

24. Przedstaw w kształcie iloczynu:

- | | | |
|---|--------------------------------|--|
| a) $x^2 - y^2$; | b) $4a^2 - b^2$; | c) $9a^2 - 4b^2$; |
| d) $4x^2 - 16y^2$; | e) $4a^2 - 9b^2$; | f) $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{8}b^4$; |
| g) $x^4 - y^4$; | h) $x^4 - 16$; | i) $9a^4 - 144$; |
| j) $81a^4 - 49x^4$; | k) $9x^4 - a^2$; | l) $a^2y^4 - 121$; |
| m) $x^2 - 25a^6$; | n) $x^2y^2 - 4a^6$; | o) $x^6y^6 - 4$; |
| p) $1 - x^2y^2$; | r) $25x^2 - 49y^6$; | s) $16x^4 - 9y^4$; |
| t) $4x^4z^6 - 25y^2$; | u) $x^{16} - 4y^6$; | v) $25x^{20} - 9y^{14}$; |
| w) $1 - 100x^2y^4z^6$; | x) $-16x^{10}y^6 + 25x^4y^8$; | |
| z) $\frac{1}{16}x^4y^2z^6 - \frac{1}{128}x^8y^{10}z^{12}$. | | |

25. Oblicz:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| a) $375^2 - 225^2$; | b) $145^2 - 144^2$; | c) $850^2 - 350^2$; |
| d) $538^2 - 518^2$; | e) $963^2 - 253^2$; | f) $102^2 - 98^2$; |
| g) $2825^2 - 175^2$; | h) $1639^2 - 739^2$; | i) $10\,001^2 - 1$. |

26. Przedstaw jako iloczyn:

- | | | |
|--------------------------------------|-------------------------------|---------------------------|
| a) $(a + b)^2 - c^2$; | b) $(x - y)^2 - a^2$; | c) $(x + a)^2 - 4y^2$; |
| d) $(2x + y)^2 - a^2$; | e) $(a + 2b)^2 - 9x^2$; | f) $(x + 4b)^2 - 1$; |
| g) $(a - 3x)^2 - y^2$; | h) $(2x - 3a)^2 - 4b^2$; | i) $a^2 - (b - c)^2$; |
| j) $x^2 - (y + z)^2$; | k) $16x^2 - (y - z)^2$; | l) $4x^2 - (3a - 2b)^2$; |
| m) $1 - (x - y)^2$; | n) $(a - b)^2 - (x + y)^2$; | |
| o) $(a + b)^2 - (c + d)^2$; | p) $(a + b)^2 - (x - y)^2$; | |
| q) $(a - b)^2 - (x - y)^2$; | r) $(5x + y)^2 - (a + b)^2$; | |
| s) $1 - (5x - 4y)^2$; | t) $(3x - 2y)^2 - 1$; | |
| u) $(a - b + c)^2 - (x - y + z)^2$. | | |

27. Przedstaw jako iloczyn:

- | | | |
|----------------------------------|------------------------------------|---------------------------|
| a) $(a + b)^2 - a^2$; | b) $a^2 - (b - a)^2$; | c) $(x + 4y)^2 - 25y^2$; |
| d) $(24x + y)^2 - (25x - y)^2$; | e) $(5x + 2y)^2 - (3x - y)^2$; | |
| f) $16x^2 - (4x - 5y)^2$; | g) $(4x + 5)^2 - (2x - 3)^2$; | |
| h) $(4x + 1)^2 - (3x - 1)^2$; | i) $(5x + a - 4)^2 - (4 - 5x)^2$. | |

28. Przedstaw jako iloczyn:

- | | |
|---|-----------------------------------|
| a) $(a + x)^2 + a^2 - x^2$; | b) $(a - x)^2 + a^2 - x^2$; |
| c) $(a + x)^2 - a^2 + x^2$; | d) $(a - x)^2 - a^2 + x^2$; |
| e) $(5 + x)^2 + 25 - x^2$; | f) $(x - 7)^2 - x^2 + 49$; |
| g) $(ax + b)^2 + a^2x^2 - b^2$; | h) $(7x + 3)^2 + 49x^2 - 9$; |
| i) $(ax - by)^2 + a^2x^2 - b^2y^2$; | j) $(3x - 4y)^2 - 16y^2 + 9x^2$; |
| k) $(7ax - 2by)^2 + 4b^2y^2 - 49a^2x^2$. | |

29. Przedstaw jako iloczyn:

- | | |
|---|---|
| a) $a^2 + 2xy + y^2 - a^2$; | b) $x^2 - 2xy + y^2 - a^2$; |
| c) $x^2 - 8ax + 16a^2 - 9y^2$; | d) $4x^2 + 4xy + y^2 - 25a^2$; |
| e) $x^2 + a^2 + 2ax - y^2$; | f) $2ax + a^2 + x^2 - 4y^2$; |
| g) $a^2 - x^2 - 2xy - y^2$; | h) $x^2 - a^2 + 2ab - b^2$; |
| i) $x^2 + y^2 + 2xy - 4x^2y^2$; | j) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 4a^2x^2$; |
| k) $x^2 + 2xy + y^2 - a^2 - 2ab - b^2$; | l) $x^2 - 2xy + y^2 - a^2 + 2ab - b^2$; |
| m) $x^2 - 4ax + 4a^2 - b^2 + 2by - y^2$; | n) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 - 6by - 9y^2$; |
| o) $x^2 - 2x + 1 - y^2 - 4ay - 4a^2$; | p) $16x^2 - 8x + 1 - y^2 - 8ay - 16a^2$; |
| q) $x^2 - a^2 + y^2 - b^2 - 2xy + 2ab$; | r) $4x^2 - 12ax - b^2 - y^2 - 2by + 9a^2$. |

30. Przedstaw jako iloczyn:

- | | |
|--|--|
| a) $2x^3 - x^2 + 10x - 5$; | b) $x^3 + 3x + xy + 3y$; |
| c) $x^2 - 5x - xy + 5y + x - 5$; | d) $axy + bcxy - bcz - az$; |
| e) $1 - x - x^2 + x^3$; | f) $1 + x^2 + x^3 + x^5$; |
| g) $6x^2 + 3xy - 2xz - yz$; | h) $1 - x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5$; |
| i) $1 + x^2 + x^3 + x^5 - x^4 - x^6$; | j) $6x^2 - 9xy^2 + 8xz^2 - 12y^2z^2$; |
| k) $12x^4 - 20x^2z^2 + 9x^2y^3 - 15y^3z^2$. | |

31. Oblicz wyrażenia a) $a^2 - b^2$ dla $a = 257$, $b = 260$;
b) $ac - bc$ dla $a = -153$, $b = -158$, $c = 371$.

32. Przedstaw najprościej sumę kwadratów a) trzech, b) pięciu liczb całkowitych następujących po sobie przyjmując, że środkowa jest x . Oblicz te sumy dla $x = 100$!

33. Przedstaw najprościej sumę sześciu liczb całkowitych po sobie następujących przyjmując, że środkowa jest x . Suma ta jest zawsze podzielna przez liczbę środkową; dlaczego?

34. a) Różnica kwadratów dwóch liczb całkowitych po sobie następujących jest równa ich sumie; dlaczego? (oznacz mniejszą z nich przez x , zaznacz różnicę ich kwadratów a następnie przedstaw tę różnicę w postaci iloczynu!).

b) Podaj dwie liczby całkowite po sobie następujące, których różnica kwadratów wynosi 87!

35. Z flaszki zawierającej 1 l wina odlano kieliszek o pojemności q l wina i dolano wody; następnie odlano znowu kieliszek mieszaniny i dolano wody. Ile w końcu było we flasce wina, a ile wody? Podaj wzór i oblicz go dla: a) $q = \frac{1}{10}$; b) $q = \frac{1}{8}$.

36. Sprawdź, że jeżeli $x = ab$, $y = \frac{a^2 - b^2}{2}$, $z = \frac{a^2 + b^2}{2}$, gdzie a, b oznaczają dowolne liczby, to $x^2 + y^2 = z^2$. Podaj przykład liczbowy przyjmując: a) $a = 3$, $b = 1$; b) $a = 4$, $b = 6$.

37. O ile wzrośnie kwadrat liczby a , jeżeli ją zwiększymy o x ? Podaj przykłady liczbowe!

38. Ze wszystkich prostokątów o obwodzie 10 cm podaj ten, który ma największe pole. (Oznacz boki prostokąta przez a i b i oprzyj się na wzorze zadania 7 str. 120.)

39. Wypełń puste miejsca tak, aby powstał kwadrat magiczny, w którym sumy liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie, w każdej przekątnej wynoszą: a) $3a$, b) $2(a + b + c + d)$.

a)

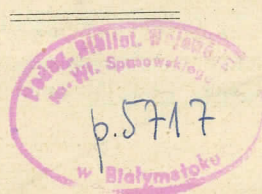
	b	c
	a	

b)

	$a+d$	c	$b+d$
$c+d$	b		a
		d	$b+c$

40. Obierz dowolną liczbę dwucyfrową i utwórz jej kwadrat, następnie zmień porządek cyfr w obranej liczbie i utwórz znowu kwadrat otrzymanej liczby. Różnica obu kwadratów jest podzielna przez 99. Dlaczego?

41. Prostopadłościan ma objętość v cm³, powierzchnię p cm²; suma wszystkich krawędzi wynosi s cm. Jaka będzie objętość prostopadłościanu, jeżeli krawędzie zwiększymy o x cm? (Oznacz krawędzie prostopadłościanu przez a , b , c , następnie oblicz objętość prostopadłościanu o krawędziach $a + x$, $b + x$, $c + x$, a w końcu zredukuj wyrazy podobne ze względu na zmienną x).



Treść

Liczby względne

	Str.
I. Wprowadzenie liczb względnych	3
§ 1. Zmiany dodatnie i ujemne	3
§ 2. Liczby względne	4
§ 3. Bezwzględna wartość (moduł). Liczby przeciwne	5
§ 4. Oś liczbowa	6
§ 5. Majątek. Temperatura. Czas	7
§ 6. Wektory	9
II. Działania na liczbach względnych	11
§ 1. Wstęp	11
§ 2. Dodawanie	11
§ 3. Odejmowanie	15
§ 4. Związek między dodawaniem a odejmowaniem	15
§ 5. Uprozczone zapisywanie sum	18
§ 6. Mnożenie	21
§ 7. Dzielenie	24
§ 8. Porównywanie liczb względnych	27
III. Własności sumy	29
§ 1. Oznaczanie liczb przeciwnych	29
§ 2. Suma algebraiczna	30
§ 3. Prawo przemienności i łączności sumy	31
§ 4. Uwalnianie od nawiasów	37
IV. Własności iloczynu	40
§ 1. Prawo przemienności i łączności	40
§ 2. Znak iloczynu	42
§ 3. Prawo rozdzielności iloczynu względem sumy	43
§ 4. Redukcja wyrazów podobnych	47
V. Własności ilorazu	52
§ 1. Przekształcanie ilorazu	52
§ 2. Dzielenie iloczynu	53
§ 3. Znak ilorazu	54
§ 4. Prawo rozdzielności ilorazu względem sumy	55
VI. Wyrażenia ułamkowe	58
§ 1. Ułamki algebraiczne	58
§ 2. Przekształcanie wyrażeń ułamkowych	61
§ 3. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń ułamkowych	63
§ 4. Mnożenie i dzielenie wyrażeń ułamkowych	65

Równania pierwszego stopnia

VII. Równania pierwszego stopnia, o jednej niewiadomej	70
§ 1. Określenia	70
§ 2. Rozwiązywanie równań	71
§ 3. Układanie równań	78
VIII. Równania o dwóch i więcej niewiadomych	83
§ 1. Określenia	83
§ 2. Rozwiązywanie układu dwóch równań o dwóch niewiadomych	84
§ 3. Rozwiązywanie równań o kilku niewiadomych	86
§ 4. Układanie równań	89

Jednomiany i wielomiany

IX. Potęgi	94
§ 1. Potęga o wykładniku naturalnym	94
§ 2. Znak potęgi	95
§ 3. Iloczyn potęg o równych podstawach	97
§ 4. Iloraz potęg o równych podstawach	98
§ 5. Potęga potęgi	100
§ 6. Potęga iloczynu, ilorazu	101
X. Jednomiany	103
§ 1. Określenia	103
§ 2. Suma jednomianów	105
§ 3. Iloczyn jednomianów	105
§ 4. Potęga jednomianu	106
§ 5. Iloraz jednomianów	106
XI. Wielomiany	107
§ 1. Określenia. Redukcja	107
§ 2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów	109
§ 3. Mnożenie wielomianów	111
§ 4. Iloraz wielomianu przez jednomian	113
§ 5. Iloraz wielomianu przez wielomian stopnia pierwszego	114
§ 6. Wielomiany o współczynnikach literowych	116
XII. Wzory specjalne	118
§ 1. Kwadrat dwumianu	118
§ 2. Sześciąt dwumianu	120
§ 3. Iloczyn sumy dwóch wyrażeń przez ich różnicę	121
§ 4. Rozkładanie wielomianów na czynniki	122

4970
30180 p. 5717

WALNĄ POMOC PRZY NAUCE SZKOLNEJ
W ZAKRESIE WSZYSTKICH PRZEDMIOTÓW
NAUCZANIA STANOWI ENCYKLOPEDIA

ŚWIAT i ŻYCIE

REDAKTOR: PROF. DR ZYGMUNT ŁEMPICKI

Polecona do użytku szkolnego przez Ministerstwo W. R. i O. P. Bogato ilustrowana, drukowana na bezdrzewnym papierze.

Z ZAKRESU MATEMATYKI i FIZYKI

zawiera encyklopedia takie artykuły, jak: arytmetyka i algebra, astronomia, atmosfera ziemi, atom, ciążenie powszechne, ciepło, ciśnienie, Curie-Skłodowska, czas astronomiczny, dźwięk, elektron, elektryczność, energia, fizyka, fotoelektryczność, geometria i w. i.

CENA

Całość w płótnie	zł 300,—
w półskórku „	340,—
Tomy od I—IV w płótnie po „	60,—
w półskórku „	68,—
Tom V w płótnie	90,—
w półskórku „	100,—

PROSPEKTY WYSYŁA NA ŻĄDANIE BEZPŁATNIE
ADMIN. ŚWIATA i ŻYCIA — KSIĄŻNICA-ATLAS S. A.
LWÓW, CZARNIECKIEGO 12 — WARSZAWA 1, NOWY ŚWIAT 59