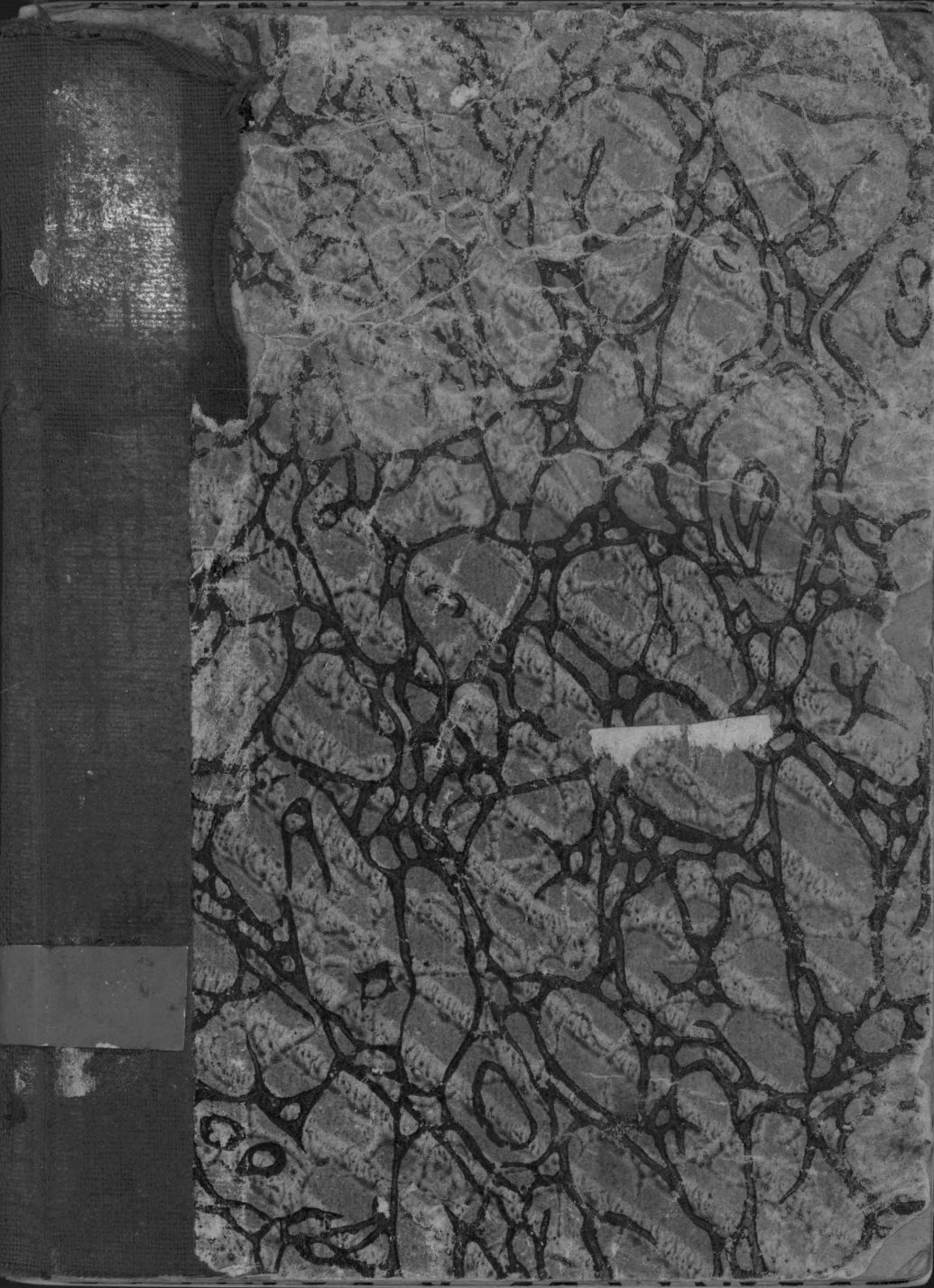




1937

S
HERMAN VON HELMHOLTZ.

LICZENIE I MIERZENIE

Z PUNKTU WIDZENIA TEORYI POZNANIA.

PRZEKŁAD

Prof. D-ra Ludwika Silbersteina.

Wydawnictwo „Przeglądu Filozoficznego.”

WARSZAWA.

Druk J. Sikorskiego, Warecka 14.

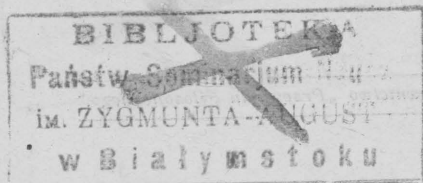
1901.

3384





Дозволено Цензурою
Варшава 16 Октября 1901 года.



Pomimo to, iż liczenie i mierzenie stanowią podwójny najpłodniejszych, najpewniejszych i najściślejszych metod naukowych, które w ogóle znamy, podstawy ich teoretyczno-poznawcze badano stosunkowo mało tylko. Po stronie filozoficznej, ściśli zwolennicy *Kanta*, wierzący w system jego w postaci takiej, w jakiej pod wpływem ówczesnych poglądów i wiadomości rozwinął się był historycznie, musieli w każdym razie uważać pewniki arytmetyki jako twierdzenia dane nam *a priori*, a określające bliżej transcendentalną formę postrzegania czasu w tem samym znaczeniu słowa, w jakim czynią to pewniki geometryczne względem przestrzeni. Dzięki temu pogładowi pytanie nad dalszem uzasadnieniem i wyprowadzeniem tych twierdzeń zostało odcięte zarówno w pierwszym jak i w drugim wypadku.

W dawniejszych artykułach starałem się dowieść, że pewniki geometryi nie są twierdzeniami danymi nam *a priori*, lecz że przeciwnie dają się stwierdzić lub obalić za pomocą doświadczenia. Zaznaczam tu raz jeszcze, że w skutek tego pogląd *Kanta* na przestrzeń jako na transcendentalną formę postrzegania bynajmniej nie zostaje zarzuconym; zdaniem mojem usuwamy tylko w skutek tego pewną szczególną a nieusprawiedliwioną cechę specjalną poglądu *Kanta*, która bądź co bądź stała się bardzo zgubną dla dążeń metafizycznych jego następców.

Owóż nie ulega wątpliwości, że broniona przezemnie teoria empirystyczna, nie uznając pewników geometryi jako twierdzeń nie dających się dowieść i nie potrzebujących też dowodu, musi również zdać sprawę z pochodzenia pewników arytmetycznych, które do formy postrzegania w czasie w analogicznym pozostają stosunku.

Dotychczas arytmetycy umieszczali na czele swych wywodów następujące twierdzenia jako pewniki:

Pewnik I. Dwie wielkości równe trzeciej są sobie równe.

Pewnik II. Według nomenklatury *H. Grassmanna*, *prawo asocjacyjne dodawania*:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Pewnik III. Prawo komutacyjne [przemiennościowe] *dodawania*:

$$a + b = b + a.$$

Pewnik IV. Wielkości równe dodane do równych dają równe.

Pewnik V. Wielkości równe dodane do nierównych dają wielkości różne.

Głębiej niż inni arytmetycy, których prace są mi znane, i dbając jednocześnie o punkty widzenia filozoficzne, wniknęli w badania te panowie *Herman* i *Robert Grassmann* ¹⁾; w dalszych też wywodach arytmetycznych będę się trzymał obranej przez nich drogi. Sprowadzają oni pewniki II i III do jednego, który nazywać będę *pewnikiem Grassmanna*, mianowicie:

$$(a + b) + 1 = a + (b + 1),$$

¹⁾ *Herman Grassmann*, *Die Ausdehnungslehre*. Wyd. I., Lipsk 1844; wyd. II — 1878. — *Robert Grassmann*, *Die Formenlehre oder Mathematik*. Szezecin, 1872.

z którego to pewnika wyprowadzają oni obadwa powyższe twierdzenia ogólniejsze za pomocą tak zwanego $(n + 1)$ -go dowodzenia. Dzięki temu zyskuje się istotnie, jak to spodziewam się pokazać w ciągu dalszym, słuszną podstawę dla nauki o dodawaniu liczb czystych. Do pytania atoli, tyczącego się przedmiotowego zastosowania arytmetyki do wielkości fizycznych, wkracza w skutek tego oprócz dwóch pojęć: *wielkości* i *równości*, których znaczenie w dziedzinie faktów pozostaje niewyjaśnionem, jeszcze jedno, trzecie więc pojęcie, mianowicie pojęcie *jednostki*; jednocześnie też wydaje mi się niepotrzebnem ograniczeniem obszaru prawomocności znalezionych twierdzeń, skoro z góry rozważamy wielkości fizyczne jako takie tylko, które składają się z jednostek.

W ślad za braćmi *Grassmann* poszedł, z pośród nowszych arytmetyków, p. *E. Schröder* ¹⁾; w pewnych atoli ważnych wywodach idzie on dalej jeszcze niż oni. Dawniejsi arytmetycy, rozważając zwyczajnie ostatnie pojęcie liczby jako pojęcie ilości przedmiotów, nie mogli uwolnić się zupełnie od praw, rządzących zachowywaniem się tych przedmiotów; to też uważali oni to poprostu jako fakt, że liczba przedmiotów, stanowiących pewną grupę, daje się znaleźć niezależnie od porządku, w jakim je liczymy. Pan *Schröder* był natomiast, o ile wiem, pierwszym, który dostrzegł (l. c. str. 14), iż ukryty jest tu pewien problemat: on też — słusznie, zdaniem mojem. — przyznał, że mamy tu do czynienia z pewnem zadaniem psychologii i — że, z drugiej strony, należałoby określić te empiryczne własności, które muszą przysługiwać przedmiotom, aby je można było liczyć.

Odnosne rozważania, a mianowicie dotyczące pojęcia wielkości, znajdujemy też oprócz tego w *Ogólnej teorii fun-*

¹⁾ *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*. Lipsk, 1873.

keyi *Paula du Bois Reymonda* (Tübingen, 1882), Cz. I, Rozdz. 1, i w artykule *A. Elsas* „o psychofizyce“ (Marburg, 1886), str. 49 i następne. Obie te prace są atoli poświęcone badaniom specjalniejszym i nie zawierają roztrząsań, dotyczących całokształtu podwalin arytmetyki. Autorowie ich hołdują pogładowi, iż pojęcie wielkości można wyprowadzić z pojęcia linii, pierwszy — w znaczeniu empiryicznym, drugi — w duchu ścisłego *Kantyanizmu*. Poprzednio już wspomniałem i w dawniejszych swych pismach wyłuszczyłem, co mam do zarzucenia temu ostatniemu pogładowi; pan *du Bois-Reymond* kończy zaś badanie swe paradoksem, według którego dwa wprost przeciwne sobie punkty widzenia, z których każdy prowadzi do sprzeczności, są w jednakowym stopniu możliwe.

Ponieważ wymieniony dopiero co autor jest nader głębokim matematykiem, który ze szczególnem zainteresowaniem się badał najgłębsze zasady swojej nauki, przeto otrzymany przezeń wniosek ostateczny tem bardziej zachęcił mnie do ogłoszenia własnych moich rozmyślań nad wzmiankowanym problematem.

Dla krótkiego zaznaczenia mojego punktu widzenia, który prowadzi do prostych, konsekwentnych wywodów i do rozwiązania wspomnianych wyżej sprzeczności, przytaczam z góry już, co następuje: Arytmetykę, czyli naukę o czystych liczbach uważam jako zbudowaną na faktach czysto psychologicznych metodę, która uczy nas, jak należy posługiwać się konsekwentnie pewnym układem znaków (mianowicie liczb) o nieograniczonej rozciągłości i dopuszczającym nieograniczoną dokładność. Arytmetyka bada mianowicie, jakie z pośród rozmaitych sposobów łączenia tych znaków (t. j. jakie działania rachunkowe) prowadzą do jednego i tegoż samego wyniku ostatecznego. Uczy nas ona między innymi również, jak można rachunki nadzwyczaj zawile, ba nawet takie, które w żadnym skończenie

długim czasie nie dałyby się wykończyć, zastąpić przez rachunki prostsze. Pomijając dany w skutek tego probierz wewnętrznej konsekwencji naszego myślenia, postępowanie takie należałoby uważać jako pustą grę naszych myśli z urojonymi przedmiotami, — którą p. *P. du Bois-Reymond* drwiąco z ruchami konika na szachownicy porównywa, — gdyby nie to, że postępowanie to dopuszcza tak niesłychanie pożyteczne zastosowania. Za pomocą bowiem tego układu znaków, mianowicie liczb, dajemy opisy stosunków, zachodzących między przedmiotami rzeczywistymi, które — gdzie tylko dają się zastosować — mogą osiągnąć wszelki wymagany stopień dokładności, i za pomocą tegoż układu znaków przepowiadamy rachunkowo w wielkiej liczbie wypadków, w których ciała przyrody spotykają się lub współdziałają pod panowaniem znanych praw natury, wartości liczebne, będące miarą wyniku tych zjawisk.

Z kolei atoli należy zapytać: Jakież jest znaczenie przedmiotowe tego, że stosunki, zachodzące między przedmiotami rzeczywistymi, wyrażamy przez liczby mianowane jako wielkości, i: — pod jakimi warunkami możemy to czynić? Pytanie to, jak zobaczymy, rozpada się na dwa inne, prostsze, mianowicie:

1. Jakież jest znaczenie przedmiotowe tego, że uznajemy dwa przedmioty jako pod pewnym względem *równe*?
2. Jaki charakter powinno posiadać skojarzenie fizyczne dwóch przedmiotów, aby wolno było uważać porównywalne ich atrybuty jako *dodajnie* (*additiv*), ze sobą związane, i w skutek tego same te atrybuty uznawać jako *ilości*, dające się wyrazić za pomocą liczb mianowanych? Liczby mianowane bowiem rozważamy jako złożone ze swych części, względnie jednostek, za pomocą dodawania.

Prawidłowy szereg liczb.

Liczenie jest to pewne postępowanie (działanie), które opiera się na tem, że możemy zachować w pamięci porządek, w jakim następowały po sobie w czasie akty świadomości. Liczby możemy, na początek, uważać jako szereg znaków dowolnie obranych, bylebyśmy tylko ustanowili dla nich raz na zawsze jakikolwiek określony porządek następstwa jako prawidłowy, czyli — według zwykłego sposobu wyrażania się — jako „naturalny.“ Nazwa „naturalnego“ szeregu liczb nawiązała się do pewnego określonego zastosowania liczenia, mianowicie do znajdowania *liczby* danych przedmiotów rzeczywistych. Gdy z pośród przedmiotów tych rzucamy jeden po drugim do kupy już przeliczonych, liczby przy procesie naturalnym następują po sobie w swym porządku prawidłowym. Nie ma to nic wspólnego z porządkiem znaków liczebnych; podobnie jak znaki te są różne w różnych językach, tak też kolejny ich porządek możnaby dowolnie ustanowić, byleby tylko jakikolwiek określony porządek był niezmiennie uważany jako porządek normalny, czyli prawidłowy. Porządek ten jest w rzeczy samej pewną normą czyli prawem, danem przez ludzi, naszych prarodziców, którzy wypracowali język. Umysłnie kładę nacisk na tę różnicę; albowiem ów rzekomo „naturalny“ charakter szeregu liczb ma swoje źródło w niezupełnej analizie pojęcia liczby. Matematycy nazywają ten prawidłowy szereg liczb szeregiem *liczb całkowitych dodatnich*.

Szereg liczb utrwalił się w pamięci naszej znacznie głębiej niż jakikolwiek inny szereg, co niewątpliwie polega na znacznie częstszym jego powtarzaniu. Za pomocą tegoż szeregu liczb utrwalamy też przedewszystkiem wspomnienia innych szeregów w naszej pamięci, t. j. używamy liczb jako *liczb porządkowych*.

Jednoznaczność porządku kolejnego.

W szeregu liczbowym postępowanie naprzód i posuwanie się wstecz nie są bynajmniej procesami równoważącymi, lecz istotnie różnymi, podobnie jak następstwo postrzeżeń w czasie, podczas gdy dla linii, które istnieją w przestrzeni i bez zmiany czasowej, żaden z dwóch możliwych kierunków posuwania się nie jest wyszczególnionym wobec drugiego.

W rzeczy samej, każdy obecny akt naszej świadomości, bądź to postrzeżenie, bądź też uczucie lub wola, działa wspólnie z obrazami wspomnieniowymi aktów przeszłych, lecz nie przyszłych, które w danej chwili nie istnieją jeszcze zgoła w świadomości, i jesteśmy świadomi aktu obecnego jako specyficznie różnego od wspomnień, które mu towarzyszą. W skutek tego przeciwstawiamy wyobrażenie obecne, tworząc charakterystyczne dla formy postrzegania w czasie przeciwstawienie następującego do poprzedzającego, stosunek, który nie daje się odwrócić i któremu każde wkraczające w świadomość naszą wyobrażenie musi z konieczności podlegać. W tem to znaczeniu umieszczenie w porządku czasowym jest nieodłączną formą naszego postrzegania wewnętrznego.

Znaczenie nazw.

Według powyższych wyjaśnień każda liczba jest określona tylko przez swe położenie w szeregu prawidłowym.

Znak *jeden* kładziemy na tym członie szeregu, od którego zaczynamy.

Dwa jest liczbą, która bezpośrednio, t. j. bez wstawienia jakiegokolwiek innej liczby, następuje po liczbie jeden w szeregu prawidłowym.

Trzy jest liczbą, która również bezpośrednio następuje po dwóch, i t. d.

Niema żadnej przyczyny, dla której mielibyśmy szereg ten gdziekolwiek zakończyć albo też postępując naprzód, napotkać znak poprzednio już użyty. System dziesiętny [np] daje nam istotnie możność nieograniczonego przedłużania tego szeregu bez powtarzania jakiegokolwiek znaku liczbowego ¹⁾, a to przez prostą i łatwo zrozumiałą kombinację dziesięciu tylko różnych znaków liczbowych.

Liczby, które w szeregu prawidłowym następują po pewnej danej liczbie, nazywany *wyższymi* od niej, te, które ją poprzedzają, *niższymi*. ²⁾ Daje nam to zupełną dysjunkcję uzasadnioną przez istotę kolejności czasowej, a którą wyrazić możemy w postaci pewnika:

Pewnik VI. *Jeżeli dwie liczby są różne od siebie, jedna z nich musi być wyższą od drugiej.*

Dodawanie liczb czystych.

Przy wyprowadzaniu twierdzeń ogólnych o liczbach będę się posługiwał znanymi oznaczeniami rachunku za pomocą liter. Każda litera małego alfabetu łacińskiego może oznaczać jakąkolwiek bądź liczbę, w danym jednak twierdzeniu lub w danym rachunku — zawsze jedną i też samą.

¹⁾ „Teorya liczb“ bada takie szeregi liczbowe, w których po pewnej liczbie następuje zawsze znowu *jeden*, które przeto powtarzają się peryodycznie.

²⁾ Unikam tu jeszcze wyrazów *wiekszy* i *mniejszy*; różnica ta nawiązuje się bardziej do pojęcia ilości [Anzahl], o czem później będzie mowa.

Objaśnienie znaków: *Skoro oznaczę jakąkolwiek liczbę przez pewną literę, np. przez a, będę przez $(a + 1)$ rozumiał liczbę następującą po niej bezpośrednio, w szeregu normalnym.*

Symbol $(a + 1)$ nie ma więc tymczasem nic innego oznaczać, jak tylko to, co podałem w powyższem objaśnieniu. W ogóle zaś nawiasy, jak zwykle, wyrażają, że zamknięte w nich liczby należy połączyć nasamprzód w jedną liczbę, potem zaś dopiero wykonać resztę przepisanych działań.

Znak równości $a = b$ oznaczać ma tu, w czystej nauce o liczbach, tylko to, że „a jest tą samą liczbą co b.“ Dla tego też z równań

$$a = b$$

$$c = b$$

wynika bezpośrednio $a = c$; obadwa bowiem powyższe równania wyrażają, że obie liczby, zarówno a jak i c są tą samą liczbą b. Tym sposobem konstatujemy prawomocność pewnika (I) dla szeregu liczb całkowitych w czystej nauce o liczbach.

Liczenie liczb.

Uważamy obecnie normalny szereg liczb jako postawiony i dany. Możemy teraz człony tego szeregu uważać jako dany szereg wyobrażeń w naszej świadomości, których porządek, poczynawszy od dowolnie wybranego członka, możemy znowu oznaczyć przez normalny szereg liczb, rozpoczynający się od liczby *jeden*.

Określenie: Przez $(a + b)$ rozumiem tę liczbę szeregu głównego, którą napotykam, jeżeli przy $(a + 1)$ liczę: je-

den, przy $[(a + 1) + 1]$ — dwa, i t. d. dopóty, dopóki nie przeliczyłem aż do b włącznie.

Opis postępowania tego daje się streścić w następującym równaniu (*H. Grassmann'a* pewnik o dodawaniu):

$$(a + b) + 1 = a + (b + 1) \quad . \quad . \quad . \quad (1.)$$

Objaśnienie: Równanie to wyraża, że jeżeli zaczynając od $(a + 1)$ jako od „jeden” liczę do b i znajduję tym sposobem liczbę oznaczoną przez $(a + b)$, wówczas — licząc dalej o jeden, otrzymam w pierwszym szeregu $(b + 1)$, w drugim zaś liczbę następującą bezpośrednio po $(a + b)$, t. j. liczbę $[(a + b) + 1]$. Zgodnie z tem oznaczam więc liczbę wzmiankowaną w określeniu: $[(a + 1) + 1]$ również przez $[a + (1 + 1)]$ albo przez $(a + 2)$, dalej $[(a + 2) + 1]$ przez $(a + 3)$, i dalej, bez końca.

W języku arytmetyki nazwalibyśmy procedurę tę *dodawaniem*, liczbę $(a + b)$ sumą liczb a i b , same zaś liczby a i b — *dodajnikami*; zwracam atoli uwagę na to, że w powyższej procedurze wielkości a i b nie odgrywają ról jednokowych, i że należy dopiero dowieść, że można je wzajemnie zamienić, nie zmieniając sumy, — czego w dalszym ciągu dowiedzimy. Zachowując atoli wątpliwość tę w pamięci, możemy oznaczenie to przyjąć i powiedzieć, że forma $(a + b)$ wyraża, iż b należy dodać do a , że $(a + b)$ jest sumą liczb a i b , kładąc jednak dotychczas jeszcze nacisk na porządek, t. j. pomnając, że b następuje po a . Niechaj przeto a nazywa się *pierwszym*, b zaś — *drugim dodajnikiem*. Zgodnie z tem możemy, stosując konsekwentnie powyższy sposób oznaczania, każdą liczbę $(a + 1)$ nazwać sumą liczb poprzedzającej, mianowicie a , i liczby jeden.

Wymieniona powyżej procedura dodawania musi, w prawidłowym szeregu liczb, w każdym wypadku doprowadzić do pewnego wyniku i mianowicie zawsze do jednego i tegoż samego dla jednych i tych samych liczb a i b . Albowiem każdy krok, z którego składa się dodawanie $(a + b)$, jest postępowaniem naprzód o jeden stopień w szeregu dodatnich liczb całkowitych, od $(a + b)$ do $(a + b) + 1$ i od b do $(b + 1)$. Każdy z kroków jest wykonalnym i każdy z nich musi zawsze ten sam wydać skutek według założeń naszych o niezmiennem przechowywaniu szeregu liczbowego w naszej świadomości.

Z pewnością więc istnieje jedna i jedyna tylko liczba odpowiadająca $(a + b)$. Twierdzenie to odpowiadałoby treści pewnika IV, skorobyśmy zastosowali go do liczb czystych i do rozważanego tu rodzaju dodawania.

Z drugiej strony możemy z powyższego opisu tej procedury wywnioskować, że $(a + b)$ z konieczności musi być różne od a i mianowicie wyższe od a , skoro tylko b jest jedną z całkowitych liczb dodatnich.

Jeżeli c jest liczbą wyższą niż a , musimy zawsze, licząc stopniowo w górę od a , koniecznie napotkać c i móc przeliczyć, którą z kolei liczbą jest c , gdy liczenie rozpoczynamy od a . Niechaj będzie ona b — tą; wówczas mamy

$$c = (a + b).$$

Twierdzenie to, gwoli późniejszym cytatom, oznaczam jako:

Pewnik VII. *Jeżeli jedna liczba c , jest wyższą niż inna a , wówczas można wyrazić c jako sumę a i pewnej dającej się znaleźć całkowitej liczby dodatniej b .*

Twierdzenie I: *O porządku wykonywania dwóch lub więcej aktów dodawania. (Prawo asocjacyjne, według Grassmann'a).*

Jeżeli do sumy $(a + b)$ mam dodać liczbę c , otrzymam ten sam rezultat, skoro dodam do liczby a sumę $(b + c)$ t. j. — w postaci równania —:

$$(a + b) + c = a + (b + c). \quad (2.)$$

Dowód:

Twierdzenie to jest słuszne dla $c = 1$, według równania (1). Dowiedzimy obecnie, że jeżeli jest ono słuszne dla jakiegokolwiek wartości c , jest ono również słuszne dla wartości bezpośrednio następującej: $(c + 1)$.

Według równania (1) mamy bowiem:

$$[(a + b) + c] + 1 = (a + b) + (c + 1)$$

$$\begin{aligned} [a + (b + c)] + 1 &= a + [(b + c) + 1] \\ &= a + [b + (c + 1)]. \end{aligned}$$

Jeżeli więc twierdzenie (2) jest słuszne dla występującej tu wartości c , wyrazy po lewej stronie dwóch pierwszych równań są jednemi i temi samemi liczbami; mamy więc również:

$$(a + b) + (c + 1) = a + [b + (c + 1)],$$

t. j. twierdzenie nasze jest słuszne również dla $(c + 1)$.

Ponieważ zaś, jak zaznaczyliśmy poprzednio, jest ono słuszne dla $c = 1$, jest więc też słuszne dla $c = 2$, a więc również dla $c = 3$ i t. d., bez granic.

Dodatek: Ponieważ obadwa wyrazy, zawarte w równaniu (2), mają jedno i toż samo znaczenie, możemy — z opuszczeniem nawiasów — dla jednego i drugiego wprowadzić oznaczenie następujące:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) \quad (2^a)$$

Nie wolno nam jednak w wyrazach tych zmieniać porządku kolejnego dodajników a, b, c , dopóki nie dowiedzimy dopuszczalności takiej zamiany.

Uogólnienie prawa asocjacyjnego.

Uogólniamy przedewszystkiem oznaczenie dane w (2^a) . Niechaj mianowicie

$$R = a + b + c + d + i \text{ t. d. } + k + l \quad (2^b.)$$

wyraża sumę, w której poszczególne dodawania mają być wykonane w takim porządku, w jakim są wypisane, i niechaj — dla krótszego oznaczenia — będzie

$$m + R = m + a + b + c + d + i \text{ t. d. } + k + l,$$

zaś

$$m + (R) = m + (a + b + c + d + i \text{ t. d. } + k + l);$$

ze znaczenia samych symbolów wynika:

$$(R) + m = R + m.$$

Inne jeszcze litery alfabetu łacińskiego będą miały znaczenia podobne, jak R .

Mamy wówczas

$$R + b + c + S = [(R) + b + c] + S,$$

ponieważ są to wyrazy równoznaczne. Z drugiej zaś strony mamy według równania (2^a)

$$(R) + b + c = (R) + (b + c),$$

a więc:

$$\begin{aligned} R + b + c + S &= [R + (b + c)] + S \\ &= R + (b + c) + S, \end{aligned}$$

t. j.: zamiast dodać kolejno wszystkie człony, można najprzód połączyć dwa jakiejkolwiek środkowe w sumę, po czem wystarczy tak utworzoną sumę $(b + c)$ zastąpić tylko

przez jedną liczbę, aby można było w podobny sposób pójść dalej i zjednoczyć znowu jakąkolwiek inną par następujących po sobie liczb, i t. d.

A więc przy dowolnie wielu dodajnikach można również zmienić porządek, w którym mają być wykonane poszczególne przez znak $+$ zaznaczone dodawania, nie zmieniając wskutek tego sumy całkowitej.

Twierdzenie II. (według *H. Grassmann'a* prawo komutaryjne): *Jeżeli w sumie dwóch dodajników jeden z dodajników równa się jedności, wówczas porządek ich może być przemieniony, t. j.:*

$$1 + a = a + 1 \dots \dots \dots (3.)$$

Dowód: Równanie to jest słuszne dla $a = 1$. Znowuż mamy dowieść, że jeżeli jest ono słuszne dla jakiejkolwiek oznaczonej wartości a , będzie ono również słusznem dla $(a + 1)$. Według równania (1) jest mianowicie

$$(1 + a) + 1 = 1 + (a + 1).$$

Według założenia równanie (3) ma być słuszne dla a , a więc

$$(1 + a) + 1 = (a + 1) + 1;$$

z tych zaś dwóch równań wynika:

$$1 + (a + 1) = (a + 1) + 1, \dots \dots \dots (3^a.)$$

co było do dowiedzenia.

Ponieważ twierdzenie nasze jest słuszne dla $a = 1$, jest więc również słuszne dla $a = 2$, będąc zaś słusznem dla $a = 2$, jest też słuszne dla $a = 3$, i t. d. bez granic.

Twierdzenie III: *W każdej sumie składającej się z dwóch dodajników można zmienić porządek dodajników nie zmieniając liczby odpowiadającej sumie, t. j.*

$$a + b = b + a. \dots \dots \dots (4.)$$

Równanie to jest, według twierdzenia II, słuszne dla $b = 1$. Jeżeli jest ono słuszne dla jakiejkolwiek danej wartości b , będzie ono również słuszne dla $(b + 1)$; albowiem według twierdzenia I mamy:

$$(a + b) + 1 = a + (b + 1),$$

według naszego założenia jest zaś

$$\begin{aligned} (a + b) + 1 &= (b + a) + 1 = 1 + (b + a) \\ &= (1 + b) + a = (b + 1) + a. \end{aligned}$$

Z trzech ostatnich przekształceń pierwsze i ostatnie opierają się na twierdzeniu II, równ. (3), drugie zaś—na twierdzeniu I, równ. (2). Mamy przeto

$$a + (b + 1) = (b + 1) + a,$$

co było do dowiedzenia.

Z twierdzenia

$$a + 1 = 1 + a$$

wynika przeto

$$a + 2 = 2 + a,$$

stąd zaś znowu

$$a + 3 = 3 + a$$

i tak dalej, bez końca.

Dowód pewnika V. Jeżeli a i f są liczby różne, możemy, jak pokazano w pewniku VII, znaleźć zawsze dodatnią liczbę całkowitą b taką, aby było:

$$(a + b) = f.$$

Wówczas mamy

$$c + f = c + (a + b) = (c + a) + b.$$

Według tego jest więc $(c + a)$ z konieczności różne od $(c + f)$, t. j.: *Różne liczby, dodane do liczby jednej i tej samej, dają sumy różne.*

Ponieważ zaś według twierdzenia III

$$c + f = f + c$$

$$a + c = c + a,$$

można więc ostatni wniosek napisać także w kształcie równania

$$(f + c) = (a + c) + b;$$

t. j.: *jedna i taż sama liczba, dodana do liczb różnych, daje sumy różne.*

Wynika stąd ważne dla teorii odejmowania i teorii równań twierdzenie, że dwie liczby, które po dodaniu do każdej z nich jednej i tej samej liczby dają jedną i tę samą sumę, muszą być identyczne.

Zmiana porządku dowolnie wielu elementów.

W powyżej opisanym sposobie odliczania w celu dodawania kombinowaliśmy ze sobą parami dwa szeregi liczb z zachowaniem ich normalnego porządku kolejnego, tak iż $(n + 1)$ było podporządkowane liczbie 1, $(n + 2)$ — liczbie 2, i t. d. Li tylko punkty początkowe tych szeregów liczb były różne.

Obecnie rozważymy wypadek ogólniejszy podporządkowania elementów dwóch szeregów, z których mianowicie jeden zachowuje określone następstwo i daje się przeto wyrazić przez nasze znaki liczebne, drugi atoli posiada następstwo [elementów] zmienne. Elementy drugiego szeregu oznaczymy przez litery alfabetu greckiego. Litery te

posiadają wprawdzie również pewien porządek kolejny, alfabetyczny, utrwalony w pamięci naszej; porządek ten atoli uważać będziemy jako jeden z bardzo wielu możliwych, wyszczególniony tylko przez pewne momenty przypadkowe, ułatwiające nam przegląd, i zachowamy sobie prawo zmieniać go dowolnie. Stawiamy jednak warunek dodatkowy, aby przy wszelkich zmianach porządku tych elementów żaden z nich nie był opuszczony ani też powtórzony. Warunek ten zaś skontrolować możemy najłatwiej w pamięci naszej, zakładając, że grupa omawiana ma zawierać jako elementy wszystkie litery, które w przekazanym nam porządku alfabetycznym poprzedzają pewną określoną literę, np. k.

Przestawienie dwóch następujących po sobie elementów szeregu.

Jeżeli dwom następującym po sobie liczbom n i $(n + 1)$ są podporządkowane dwa elementy, np. ϵ i ζ , natenczas n może być połączone albo z ϵ albo też z ζ ; mamy więc dwa rodzaje podporządkowania:

$$n \quad (n + 1)$$

$$\epsilon \quad \zeta$$

albo

$$n \quad (n + 1)$$

$$\zeta \quad \epsilon.$$

Jeżeli zamiast pierwszego z tych porządków wprowadzamy drugi, nie zmieniając w niczem żadnej z pozostałych par podporządkowanych sobie liczb i liter, natenczas żadna z liczb nie traci podporządkowanej sobie



litery ani też żadna z liter podporządkowanej sobie liczby, tak iż nie powtarzamy ani też nie opuszczamy żadnej litery. Jeżeli więc szereg, zawierający dwie pierwsze z pośród powyższych par, był przed przestawieniem grupą bez luk i bez powtórzeń, natenczas szereg, otrzymany po przestawieniu [elementów], również będzie stanowił grupę bez luk i bez powtórzeń.

Za pomocą odpowiedniego powtórzenia takich przestawień sąsiednich elementów możemy jakikolwiek dowolnie obrany element grupy uczynić pierwszym w szeregu, nie wytwarzając jednocześnie ani powtórzeń, ani luk. Jeżeli bowiem wybrany element ξ jest n -tym, możemy zamienić go z $(n-1)$ -ym, następnie z $(n-2)$ -im i t. d., tak iż liczba, oznaczająca jego miejsce, staje się coraz niższą, dopóki nie stanie się najniższą w grupie, t. j. 1.

W podobny sposób możemy każdy element szeregu, którego miejsce jest wyższe niż m -te, uczynić m -tym członem grupy, nie wytwarzając przy tem ani luk, ani też powtórzeń. Przy procedurze tej człon szeregu, których miejsca wyrażone są przez liczby niższe od m , zachowują miejsca swe bez zmiany.

Stąd wynika, że za pomocą wielokrotnego przestawienia sąsiednich członów grupy można otrzymać wszelkie możliwe porządki kolejne, nie opuszczając ani też nie powtarzając żadnych elementów. Możemy bowiem dowolnie przepisać, który element szeregu ma się stać pierwszym, i osiągnąć to za pomocą powyższej metody. Następnie możemy w podobny sposób jakikolwiek przepisany element uczynić drugim, nie zmieniając przy tem miejsca elementu, który dopiero co został pierwszym. Następnie możemy oznaczyć trzeci element i t. d., aż do ostatniego.

Twierdzenie IV. *Atrybuty szeregu elementów, nie zmieniające się przy przestawieniu dwóch jakichkolwiek elementów sąsiednich, nie zmieniają się też przy żadnej możliwej zmianie porządku kolejnego elementów.*

Własność ta naprowadza nas przedewszystkiem na uogólnienie prawa komutacyjnego dodawania.

Niechaj wielkie litery oznaczają znowu, podobnie jak przy uogólnieniu prawa asocjacyjnego, sumy dowolnie wielu liczb. Wówczas mamy według uogólnionego prawa asocjacyjnego

$$R + a + b + S = R + (a + b) + S.$$

Według prawa komutacyjnego dla dwóch dodajników mamy

$$a + b = b + a;$$

a więc, ponieważ zgodnie z tem $(a + b)$ jest tą samą liczbą co $(b + a)$:

$$\begin{aligned} R + a + b + S &= R + (b + a) + S \\ &= R + b + a + S, \end{aligned}$$

gdzie ostatnie przekształcenie uczyniliśmy znowuż na mocy prawa asocjacyjnego.

Ponieważ zaś można w danej sumie przestawić wzajemnie dwa następujące po sobie elementy, nie zmieniając wartości sumy, można przeto według twierdzenia IV przestawić wszystkie dodajniki i ugrupować je w dowolnym porządku, nie zmieniając sumy.

Tak więc wyprowadziliśmy z pojęcia dodawania pięć podstawowych dla działania tego pewników. Obecnie mamy jeszcze tylko dowieść, że wprowadzone to przez nas pojęcie dodawania jest zgodne z tem, które za punkt wyjścia ma znalezienie ilości [Anzahl] dających się policzyc przedmiotów.

Prowadzi nas to przedewszystkiem do pojęcia *ilości* [Anzahl] elementów danej grupy. Jeżeli dla podporządkowania każdemu z elementów grupy po jednej liczbie zużywamy zupełny szereg liczb od 1 do n , natenczas nazywamy n *ilością* członów tej grupy. Wywody, poprzedzające wysłowienie Twierdzenia IV, pokazują, że *ilość członów nie zmienia się w skutek zmian ich porządku kolejnego*, skoro tylko unikamy opuszczeń i powtórzeń tych członów.

Owóż twierdzenie to stosuje się do przedmiotów rzeczywistych, które przejściowo oznaczyć możemy przez α, β, γ i t. d. Przedmioty te, aby można je było policzyc, muszą atoli istotnie czynić zadość pewnym warunkom, przynajmniej dopóty, dopóki wynik wykonanego liczenia ma zachowywać swą ważność. Nie powinny one znikać ani też zlewać się z innymi, żaden z nich nie powinien rozpadać się na dwa [lub więcej], żaden nowy przedmiot nie powinien przyłączać się do rozważanych, tak aby każdej w formie greckiej litery danej nazwie odpowiadał też stale jeden i tylko jeden odgraniczony przedmiot, który też stale jako jedyny daje się rozpoznać. Tylko za pomocą doświadczenia oczywiście można się upewnić, czy dla danej klasy przedmiotów warunki te są spełnione.¹⁾

¹⁾ Podczas druku dowiaduję się, że p. profesor *L. Kronecker* w wykładach mianych w ciągu ostatniego półrocza zimowego pojęcia liczby i ilości rozwinął w podobny sposób.

Z powyżej opisanej metody liczenia wynika bezpośrednio, że *liczba ogólna członków dwóch grup, nie mających ze sobą ani jednego elementu wspólnego, równa się, według poprzednio rozwiniętego pojęcia dodawania, sumie ilości członów obydwu tych grup poszczególnych*. Aby mianowicie znaleźć liczbę ogólną, moglibyśmy nasamprzód przeliczyć jedną grupę; jeżeli składa się ona z p członów, liczba $(p + 1)$ padnie na pierwszy człon drugiej grupy, $(p + 2)$ — na drugi, i tak dalej, tak iż liczbę wszystkich członów obydwu grup znajdujemy za pomocą dokładnie tej samej procedury liczenia, jak powyżej określoną sumę dwóch liczb, które wyrażają ilość elementów, zawartych w każdej grupie.

Powyżej opisane pojęcie dodawania jest więc istotnie identyczne z pojęciem dodawania, wynikającym z wyznaczenia liczby ogólnej elementów dwóch lub więcej grup przedmiotów, dających się liczyć; ma ono jednak tę zaletę, że można je utworzyć, nie uciekając się do doświadczenia zewnętrznego.

Tym więc sposobem wykazaliśmy szereg pewników o dodawaniu, niezbędnych dla uzasadnienia arytmetyki, a odnoszących się do pojęcia liczb i sumy, zaczerpniętego tylko z postrzegania wewnętrznego, pojęcia, z któregośmy wyszli; jednocześnie zaś dowiedliśmy zgodności rezultatów tego rodzaju dodawania i dodawania, które można wyprowadzić z liczenia zewnętrznego, a dających się liczyć, przedmiotów.

Stąd łatwo już rozwinąć można teorię odejmowania i mnożenia, określając *różnicę* $(a - b)$ jako tę liczbę, którą należy dodać do b , aby otrzymać a , jako sumę, mnożenie zaś jako dodawanie pewnej ilości liczb równych. Wystarczy w tem miejscu powołać się na pana *Grassmann'a*, któ-

ry określa mnożenie liczb czystych za pomocą dwóch następujących równań:

$$1. a = a,$$

$$(b + 1). a = b. a + a.$$

Co się tyczy odejmowania, zaznaczę jeszcze tylko, że liczby, jako znaki pewnego szeregu, można również przedłużyć bezgranicznie w kierunku zstępującym, idąc od 1 wstecz do 0, stąd do (— 1), (— 2) i t. d. i postępując z temi liczbami nowemi podobnie, jak z wyłącznie tylko dotychczas rozważanemi dodatniemi liczbami całkowitemi. Wówczas różnica dwóch liczb zawsze posiada pewne znaczenie, a mianowicie jedyne tylko; jest ona więc jednoznacznie określona.

Ze względu na ciąg dalszy należy tu jeszcze omówić zarówno zgodność, jak i różnicę między prawami dodawania i mnożenia.

Prawa asocjacyjne i komutacyjne rozciągają się zarówno do jednego, jak i drugiego działania. Jak widzieliśmy, —

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a + b = b + a;$$

lecz mamy również:

$$(a. b). c = a. (b. c)$$

$$a. b = b. a.$$

Różnica między własnościami zasadniczymi tych działań pokazuje się wówczas dopiero, gdy łączymy za pomocą każdej z nich n równych liczb a . Połączone przez dodawanie, dają one mianowicie iloczyn $n. a$, który podlega prawu komutacyjnemu:

$$n. a = a. n,$$

podczas gdy mnożąc n równych czynników, otrzymujemy potęgę a^n , w której — z wyjątkiem szczególnych wypadków — nie można zamienić ze sobą a i n , nie zmieniając wartości potęgi.

Podobnie też pokazuje się analogija dla stosunku każdego z tych działań przy jego połączeniu z działaniem bezpośrednio wyższem w jednym wypadku, mianowicie:

$$(a + b). c = (a. c) + (b. c)$$

$$c^{a+b} = c^a. c^b;$$

analogija ta jednak znika przy komutacyi; nie zachodzi już bowiem podobny związek między $(a + b)^c$ z jednej i $a^c. b^c$ z drugiej strony.

Liczby mianowane.

Opisanem powyżej liczeniem przedmiotów niejednakowych posługujemy się w zasadzie tylko w celu skonstatowania ich kompletu [Vollzähligkeit].

Znacznie większą ważność i szersze zastosowanie posiada natomiast liczenie równych przedmiotów. Przedmioty takie, liczone i równe pod pewnym określonym względem, nazywamy *jednostkami* liczenia, ilość ich *liczbą mianowaną*, szczególny rodzaj zjednoczonych w niej jednostek — *mianowaniem liczby*.

Ilość [Anzahl] daje się rozłożyć na części, zjednoczone w całości, *addytywnie*, jak to widzieliśmy wyżej. Suma dwóch liczb mianowanych o równym mianowaniu jest liczbą ogólną wszystkich ich jednostek, a więc z konieczności i znowuż liczbą mianowaną o temże mianowaniu. Jeżeli mamy porównać ze sobą dwie różne grupy o różnych ilościach,

nazywamy *większą* tę, której odpowiada wyższa, *mniejszą* zaś — tę grupę, której odpowiada niższa ilość [elementów]. Jeżeli obie zawierają tę samą ilość, nazywamy je *równymi*.

Przedmioty albo atrybuty przedmiotów, które w porównaniu z podobnymi im dopuszczają różnicę większości, równości i mniejszości, nazywamy *wielkościami*. Jeżeli wielkość można wyrazić za pomocą liczby mianowanej, nazywamy liczbę tę *wartością* danej wielkości, procedurę zaś samą, za pomocą której znajdujemy ową liczbę mianowaną, nazywamy *mierzeniem* wielkości. W wielu w rzeczy samej wykonanych badaniach udaje nam się zresztą tylko sprowadzić pomiar do jednostek dowolnie obranych albo też danych przez instrument mierniczy; wówczas znalezione przez nas liczby posiadają tylko znaczenie *liczb stosunkowych* [względnych], dopóki nie uda się nam sprowadzić owych jednostek do jednostek ogólnie znanych (*bezwzględnych jednostek fizyki*). Tych ogólnie znanych jednostek nie można atoli bynajmniej określić przez ich pojęcie, lecz można wykazać je tylko na pewnych ciałach przyrody (ciężarach, sztabach mierniczych) albo też na pewnych zjawiskach przyrody (jak np. dzień lub uderzenie wahadła). Okoliczność ta, że są one wskutek przekazania od jednej do następnych generacji ludzkich ogólniej znane, nie zmienia bynajmniej procedury ani też samego pojęcia mierzenia i występuje w obec nich jako prosta przypadkowość.

W ciągu dalszym zbadamy, pod jakimi warunkami można wyrażać wielkości za pomocą liczb mianowanych, t. j. znajdować ich wartość, i co dla faktycznej wiedzy naszej dzięki temu zyskujemy.

W tym celu atoli musimy nasamprzód poznać pojęcia równości i wielkości w ich znaczeniu przedmiotowym

Równość fizyczna.

Szczególne stosunek, mogący zachodzić między atrybutami dwóch przedmiotów, a który ochrzcziliśmy mianem „równości”, jest scharakteryzowany przez *Pewnik I*, wyżej już przytoczony: *I wie wielkości równe trzeciej są sobie równe*. W tem już zawiera się jednocześnie prawda, że stosunek równości jest wzajemnym; albowiem z

$$a = c$$

$$b = c$$

wynika zarówno $a = b$ jak i $b = a$.

Równość porównywalnych atrybutów dwóch przedmiotów jest wypadkiem wyjątkowo tylko zachodzącym i może więc objawić się w faktycznej obserwacji tylko przez to, że owe dwa równe przedmioty, spotykając się lub współdziałając przy odpowiednich warunkach, pozwalają nam dostrzec pewien szczególny skutek, który w zasadzie przy współdziałaniu innych par podobnych przedmiotów nie zachodzi.

Procedurę, za pomocą której wprowadzamy dwa przedmioty w warunki odpowiednie, tak aby można było obserwować wzmiakowany skutek i skonstatować jego obecność lub nieobecność, procedurę tę nazwiemy *metodą porównywania*.

Jeżeli procedura ta porównywania ma nas pouczać w sposób niewątpliwy o równości pewnego atrybutu dwóch przedmiotów, wynik jej powinien zależeć wyłącznie i jedynie tylko od tego warunku, że obadwa przedmioty posiadają odnośny atrybut w oznaczonym stopniu, skoro tylko założymy, że procedurę porównywania wykonywa się w każdym wypadku prawidłowo.

Z pewnika powyżej przytoczonego wynika przede wszystkim, że *skutek porównania powinien zostać niezmiennym przy wzajemnej zamianie dwóch przedmiotów* [porównywanych].

Dalej, wynika stąd, że jeżeli dwa przedmioty a i b okazują się równymi sobie i jeżeli z poprzedniej obserwacji, wykonanej za pomocą tejże metody porównywania, okazało się, że a jest też równe pewnemu trzeciemu przedmiotowi c , że natenczas z odpowiedniego porównania przedmiotów b i c powinna też wynikać równość *tych* dwóch przedmiotów.

Oto są warunki, których powinniśmy wymagać od odpowiedniej metody porównywania. *Dowieść równości można tylko za pomocą takich metod, które czynią zadość wspomnianym wymaganiom.*

Twierdzenie, według którego „równe wielkości można zastąpić przez równe“, wynika z powyższych założeń przede wszystkim dla owego skutku, na którego obserwacji opieramy sprawdzian ich równości.

Z równością atoli w dotychczasowym znaczeniu słowa może też z natury rzeczy iść w parze równość dalszych działań lub stosunków rozważanych przedmiotów, tak iż zarówno pod tymi względami jeden przedmiot można zastąpić przez drugi. Wyrażamy to zwykle w mowie naszej tak, jak gdybyśmy zdolność przedmiotów do wytwarzania owego skutku, który jest miarodajnym w porównaniu pierwszego rodzaju, objektywizowali jako atrybut tych przedmiotów, przypisując przedmiotom, uznanym za równe, równe wielkości tego atrybutu i uważając wszelkie dalsze działania, w których równość także się zachowuje, jako działania owego atrybutu albo też jako działania, które — wedle doświadczenia — zależą jedynie tylko od owego atrybutu. Podobne twierdzenie wyraża jednak zawsze to tylko, że przedmioty, które okazały się równymi przy *tych* spo-

sobie porównania, który rozstrzyga o równości tego szczególnego atrybutu, mogą się również we wszelkich dalszych zaznaczonych wyżej wypadkach wzajemnie zastąpić, bez zmiany wyniku.

Wielkości, o których równości lub nierówności rozstrzyga jedna i taż sama metoda porównywania, nazywamy „jednorodnemi“ [„gleichartig“]. Skoro za pomocą abstrakcji odrywamy atrybut, którego równość lub nierówność mamy przy tem oznaczyć, od wszystkich pozostałych właściwości, które są różne dla porównywanych przedmiotów, natenczas dla odpowiednich atrybutów różnych przedmiotów pozostaje jedynie tylko różnica wielkości ¹⁾.

Niechaj mi będzie dozwolonem objaśnić znaczenie tych abstrakcyjnych twierdzeń na kilku znanych przykładach.

Ciężary. Jeżeli położymy dwa dowolne ciała na szalkach rzetelnej wagi, waga wogóle nie będzie w równowadze i jedna szalka opadnie.

Wyjątkowo tylko znajdziemy pewne pary ciał a i b , które położone na szalkach, nie wyprowadzą ich z równowagi.

Jeżeli wówczas przełożę a i b , waga powinna nadal zachowywać stan równowagi. Jest to znany probierz dobroci wagi, t. j. dowód, że równowaga na tej wadze istotnie wskazuje równość ciężarów.

Wreszcie sprawdza się to, że jeżeli ciężar ciała a równa się nie tylko ciężarowi b , lecz także ciężarowi c , wówczas $b = c$. Na równowadze ciężarów, położonych na do-

¹⁾ P. H. Grassmanna określenie równości: „Równe jest to, o czem można zawsze jedno i toż samo wypowiedzieć, albo ogólniej, to co w każdym sądzie może być wzajemnie za siebie podstawione“, określenie to wymagałoby zastosowania tego nadzwyczaj ogólnego warunku (wystawionego na niebezpieczeństwo fałszywej interpretacji) w każdym poszczególnym wypadku, w którym mamy wnioskować o równości.

brej wadze, istotnie więc oprzeć można metodę określania pewnego rodzaju równości.

Ciała, których ciężary porównujemy ze sobą, mogą zresztą składać się z najrozmaitszych substancyj, posiadać najrozmaitsze kształty i objętość. Ciężar porównywany jest tylko pewnym przez abstrakcję wydzielonym ich atrybutem. Mówić o ciałach jako o ciężarach i o ciężarach tych jako wielkościach możemy wówczas tylko, gdy abstrahujemy od wszystkich innych ich własności, i jeżeli abstrakcja taka jest dozwoloną. Posiada to praktyczne swoje znaczenie, ilekroć obserwujemy lub też wywołujemy zjawiska, przy których przebiegu jedynie tylko ten atrybut współdziałających ciał wchodzi w rachubę, t. j. przy których, mogą zastępować się wzajemnie ciała, równoważące się na wadze. Zachodzi to wówczas np., gdy mierzymy bezwładność odnośnych ciał. Ta jednak okoliczność, że ciała o równych ciężarach posiadają też jednakową bezwładność [równe masy] i również pod tym względem mogą się wzajemnie zastępować, nie wynika bynajmniej z pojęcia równości, lecz jedynie tylko z naszej znajomości tego szczególnego prawa natury dla rozważanego stosunku.

Odległość dwóch punktów.

Najprostszym utworem geometrycznym, dopuszczającym wyznaczenie wielkości, jest odległość wzajemna pary punktów. Jeżeli jednak odległość ta ma posiadać, przynajmniej podczas mierniczego porównywania, pewną oznaczoną wartość, punkty powinny znajdować się w stałym ze sobą połączeniu, jak np. ostrza cyrkla. Znana metoda porównywania odległości dwóch par punktów polega na tem, czy można doprowadzić je do zgodności kongruencyjnej, czyli też nie. Że metoda ta nadaje się do wykazywa-

nia równości, że kongruencya zachodzi przy każdym położeniu, przy jakiegokolwiek zamianie wzajemnej obydwu par punktów, że dwie pary punktów kongruencyjne z trzecią są też między sobą kongruencyjne,—wszystko to sprawdza się doświadczalnie. Tak więc możemy utworzyć pojęcie równych odstępów czyli odległości.

Wychodząc stąd, otrzymać można pojęcie linii prostej i jej długości. Wyobraźmy sobie dwa nieruchome punkty, przez które linia ma przechodzić; owóz *linią prostą* nazywa się taka linia, której żaden punkt nie może zmienić swego położenia, nie zmieniając odległości swej przynajmniej od jednego z punktów nieruchomych. *Linie krzywą* natomiast możemy obracać naokoło dwóch jej punktów, przy czem zmienia się położenie, lecz nie odległość pozostałych punktów od owych dwóch jej punktów nieruchomych. Powiadamy, że *długości* dwóch ograniczonych linii prostych są sobie równe, jeżeli ich punkty końcowe posiadają równe odstępki, jeżeli więc punkty te można doprowadzić do kongruencyi, przy czem też same linie zlewają się ze sobą. O tyle też pojęcie długości zawiera nieco więcej niż pojęcie odległości. Jeżeli wyobrazimy sobie dwie pary punktów: a, b i a, c o różnych odległościach, mające punkt a wspólny i umieszczone na jednej i tej samej linii prostej, tak iż pewna część tej linii jest wspólną dla obydwu par, wówczas punkt b znajduje się na odcinku ac albo też punkt c na odcinku ab . Wynika więc stąd przeciwstawienie, odpowiadające przeciwstawieniu wielkości większej i mniejszej, podczas gdy pojęcie odległości daje bezpośrednio tylko pojęcie równości i nierówności.

Mierzenie czasu opiera się na założeniu, że możemy znaleźć zjawiska fizyczne, powtarzające się przy jednakowych warunkach zawsze w jeden i ten sam sposób i kończące się też jednocześnie, skoro tylko rozpoczynają się w jednej

i tej samej chwili, jak np. dnie, uderzenia wahadła, bieg zegarów piaskowych lub wodnych. Założenie niezmiennego trwania przy powtórzeniu usprawiedliwia się przy tem tylko przez tę okoliczność, że wszelkie najrozmaitsze metody mierzenia czasu, wykonane starannie, prowadzą zawsze do zgodnych ze sobą rezultatów. Jeżeli dwa takie zjawiska *a* i *b* rozpoczynają i kończą się równocześnie, zachodzą one nie tylko w równych czasach, lecz w jednym i tymże samym czasie. Ze względu na czas nie istnieje między nimi żadna różnica, nie można więc przeto mówić o ich zamianie obopólnej; jeżeli zaś jakiegokolwiek trzeciego zjawisko *c* rozpoczyna się i kończy jednocześnie z *a*, posiada ono też wspólny początek i koniec z równocześnie zachodzącym zjawiskiem *b*. —

Natężenia świetlne dwóch widzialnych pól porównujemy, przysuwając jedno do drugiego, tak iż oprócz różnicy jasności wszelkie inne odgraniczenie między nimi odpada, i badając następnie, ażali pozostaje między nimi jeszcze jakakolwiek dostrzegalna granica.

Stosunkowo mało różniące się od siebie *wysokości tonów* porównujemy za pomocą zjawiska dudnienia, które musi zniknąć, skoro wysokości stają się równymi. *Natężenia prądów elektrycznych* porównujemy za pomocą galwanometru różnicowego, który trwa w stanie spoczynku, dopóki tylko prądy te są równe, i tak dalej.

Dla skonstatowania więc równości pod rozmaitymi względami i w różnych okolicznościach należy posługiwać się najrozmaitszymi środkami fizycznymi; wszystkie one jednak muszą czynić zadość powyżej sformułowanym wymaganiom, skoro za pomocą nich mamy wykazywać stosunki równości.

Pierwszy pewnik: „Dwie wielkości równe trzeciej są sobie równe“ nie jest więc prawem o znaczeniu przedmio-

towem, lecz określa tylko, jakie stosunki fizyczne wolno nam uważać za stosunki równości.

Przykład, w którym pewnik powyższy tworzy istotną podstawę procedury mechanicznej, mamy w szlifowaniu płaskich powierzchni szklanych. Jeżeli szlifujemy o siebie dwie bryły szkła przez ustawiczny obrót jednej z nich, powierzchnie obydwu brył mogą się stać kulistemi, jedna wypukłą, druga wklęsłą. Jeżeli jednak szlifujemy o siebie naprzemian trzy powierzchnie, musimy ostatecznie otrzymać płaszczyznę. Podobnie też przy sporządzaniu dokładnych liniałów metalowych otrzymujemy proste krawędzie, szlifując o siebie naprzemian trzy takie liniały.

Addytywne kojarzenie ¹⁾ fizyczne wielkości jednorodnych.

Rozważane przez nas dotychczas porównywanie wielkości rozstrzyga jedynie o ich równości lub nierówności, nie daje nam ono jednak żadnej jeszcze miary dla wielkości ich różnicy, gdy są one różne. Jeżeli jednak rozważane wielkości dają się zupełnie określić przez liczby mianowane, natenczas większa z dwóch liczb musi się dać wyrazić jako suma mniejszej i ich różnicy. Należy przeto zbadać, pod jakimi warunkami wolno nam wyrazić fizyczne skojarzenie jednorodnych wielkości za pomocą dodawania.

Sposób kojarzenia, o który tu chodzi, będzie w ogóle zależeć od rodzaju wielkości, które mamy skojarzyć.

¹⁾ „Kojarzenie“ [„Verknüpfung“] jest terminem Grassmann'a, używanym przezeń przeważnie w znaczeniu subiektywnem, podczas gdy tu posiada on tylko znaczenie przedmiotowe.

Ciężary np. dodajemy, kładąc je poprostu na tę samą szalkę wagi; okresy czasu dodajemy, rozpoczynając drugi dokładnie w tej samej chwili, w której pierwszy się skończył; dodajemy długości, przykładając je do siebie w pewien określony sposób, mianowicie w *linii prostej*; i t. d.

1. *Jednorodność sumy i dodajników.* Ponieważ omawiane kojarzenie ma dotyczyć *wielkości pewnego określonego rodzaju*, skutek jego nie powinien się zmienić, jeżeli zastąpimy jedną lub więcej tych wielkości przez równe wielkości tegoż rodzaju. Czyniąc to bowiem, zastępujemy tylko wielkości te przez też same liczby o tem samem namianowaniu, które posiadały już poprzednio. Lecz rezultat skojarzenia, skoro ma być sumą wielkości skojarzonych, musi być również jednorodnym ze swojemi częściami, albowiem suma dwóch liczb mianowanych jest również liczbą o tem samem namianowaniu, jak powiedzieliśmy już poprzednio. *O niezmienności więc rezultatu skojarzenia przy wzajemnej zamianie części musi rostrzygać też sama metoda porównywania, za pomocą której konstatowaliśmy równość zamienianych wzajemnie części.* Oto jest faktyczne znaczenie wymagania, aby suma wielkości jednorodnych była jednorodną z dodajnikami.

Tak np. możemy w sumie ciężarów poszczególne bryły zastąpić przez bryły innego materiału, posiadające jednak też same ciężary. Suma zachowuje wówczas ten sam ciężar, który miała poprzednio; pozostałe jej atoli atrybuty mogą wskutek tego ulegz zmianie.

2. *Prawo komutacyjne.* Rezultat dodawania jest niezależnym od porządku, w którym kojarzymy ze sobą dodajniki. Toż samo musi zachodzić dla tych kojarzeń fizycznych, które mogą być uważane jako dodawania.

3. *Prawo asocjacyjne.* Połączenie dwóch wielkości jednorodnych można też ukuteć w sposób fizyczny, podstawiając zamiast nich jedną niepodzielną wielkość te-

goż samego rodzaju, równą ich sumie. Wskutek tego owe dwie wielkości będą wówczas przed wszelkimi innemi połączone ze sobą addytywnie.

Tak np. przy ważeniu możemy przez ciężarek pięciogramowy zastąpić pięć oddzielnych ciężarków gramowych. Rezultat kojarzenia nie powinien się więc zmieniać przy zastąpieniu kilku kojarzonych ze sobą wielkości przez inne, które równają się ich sumie.

Można zresztą dowieść, że jeżeli dwa pierwsze wymagania są w ogóle spełnione, również trzecie jest spełnione.

Wyobraźmy sobie elementy ugrupowane w porządku takim, w jakim mają być ze sobą skojarzone w jednym wypadku, tak iż każdy poszczególny element ma być przyłączonym do rezultatu skojarzenia wszystkich poprzedzających go elementów, tak jak to wyżej przepisaliśmy dla dodawania [$a + b + c + i$ t. d.]. Otóż, jeżeli w drugim wypadku wymagamy, aby niektóre z tych wielkości zostały skojarzone przed innemi, możemy je — według prawa komutacyjnego, — które według założenia ma być słusznem — umieścić na pierwszym i drugim miejscu, aby skojarzyć je tamże przed innemi, nie zmieniając tym sposobem rezultatu. Następnie, zgodnie z pierwszym z pośród wyżej przytoczonych warunków naszych, możemy rezultat tego skojarzenia zastąpić również przez inny niepodzielony przedmiot, który — rozważany jako wielkość tegoż samego rodzaju — jest równy temu rezultatowi.

Następnie możemy znowu przenieść na pierwsze dwa miejsca dwie dalsze wielkości lub sumy wielkości, które mają być skojarzone, i t. d., dopóki wszystkie wielkości nie zostaną skojarzone w przepisany porządku.

Przy żadnej z tych operacji nie zmienia się wielkość ostatecznego wyniku kojarzeń.

Możemy przeto uważać fizyczny sposób kojarzenia wielkości jednorodnych jako dodawanie, jeżeli rezultat kojarzenia jako wielkość tegoż rodzaju nie zmienia się ani przez wzajemne przestawienie poszczególnych elementów, ani też przez zastąpienie elementów kojarzonych przez wielkości równe tegoż samego rodzaju.

Poznawszy tym sposobem metodę kojarzenia odnośnych wielkości, możemy też osądzić, które z nich są większe, które zaś — mniejsze. Wynik skojarzenia addytywnego, t. j. całość, jest większą aniżeli części, z których się składa. Co się tyczy najprostszych wielkości, z którymi mieliśmy do czynienia już w najwcześniejszej młodości, — jako to czasy, długości, ciężary, — to nie wątpiliśmy nigdy, która z nich jest większą, a która — mniejszą, ponieważ znaliśmy właśnie oddawna metody addytywnego ich kojarzenia. Tu jednak musimy uwzględnić, że metoda porównywania, w kształcie powyżej opisanym, poucza nas w ogóle o tem tylko, czy rozważane wielkości są równe, czy też nie równe. Jeżeli dwie wielkości x są sobie równe, wszystkie w jednakowy sposób utworzone z nich za pomocą rachunku funkcyjne są także równe. Z pośród tych funkcyj atoli nie — które będą rosnać, inne zaś — maleć przy wzrastającym x . Należy więc przeto rozstrzygnąć dopiero za pomocą odpowiedniego doświadczenia, które z pośród tych funkcyj dopuszczają addytywne kojarzenie fizyczne. Pouczające są wówczas takie wypadki, w których możliwe jest kojarzenie addytywne dwojakiiego rodzaju. Tak np. znajdujemy za pomocą dokładnie tej samej metody porównawczej, czy dwa druty posiadają równe opory galwaniczne w lub też równe zdolności przewodzenia λ ; jest bowiem

$$w = \frac{1}{\lambda}.$$

Opory dodajemy, łącząc druty jeden za drugim, tak iż przewodzona elektryczność musi przepływać kolejno wzdłuż każdego z nich. Przewodnictwo natomiast drutów dodaje się, kładąc druty obok siebie i łącząc wzajemnie wszystkie ich początki z jednej strony i wszystkie ich końce z drugiej. Tak więc obiektywizujemy tu jako wielkości fizyczne dwie różne funkcyjne tej samej zmiennej. Drut, posiadający większy opór, posiada mniejszą zdolność przewodzenia i odwrotnie. Na pytanie więc, co jest większe a co mniejsze, otrzymujemy w dwóch tych wypadkach odpowiedzi wprost sobie przeciwne. Podobnie też można łączyć kondensatory elektryczne (butelki lejdejskie) bądź to obok siebie, bądź też jeden za drugim. W pierwszym wypadku dodają się pojemności, w drugim — napięcie (potencjał), przy niezmiennym ładunku. Pojemność rośnie, gdy napięcie maleje.

Znowu nie powinniśmy się dziwić, że pewniki dodawania sprawdzają się w biegu zjawisk natury; uznajemy bowiem jako dodawanie takie tylko kojarzenia fizyczne, które czynią zadość pewnikom dodawania.

Podzielność wielkości i jednostki.

Dotychczas nie mieliśmy jeszcze potrzeby rozkładać wielkości na jednostki. Pojęcie wielkości jakoteż ich równości i dodawania można otrzymać, jak się okazało, bez podobnego rozkładania. Najwyższe uproszczenie w wyrażaniu wielkości otrzymujemy jednak istotnie wówczas dopiero, gdy rozkładamy je na jednostki i wyrażamy za pomocą liczb mianowanych.

Wielkości, które można dodawać, są też w ogóle podzielne. Jeżeli każdą z rozważanych wielkości można uważać jako dającą się złożyć addytywnie (według procedury, dotyczącej tego rodzaju wielkości) z pewnej ilości równych części, natenczas każdą z tych wielkości, gdzie tylko wartość jej sama jest rozstrzygającą, można według prawa asocjacyjnego dodawania zastąpić przez sumę jej części. Tym sposobem będzie ona zastąpiona przez pewną liczbę mianowaną, podobnie też inne wielkości tegoż rodzaju — przez inne ilości tychże samych części. Opis poszczególnych wielkości jednego i tego samego rodzaju można wówczas zakomunikować słuchaczowi, który zna owe części równe, wybrane jako jednostki, podając mu tylko same liczby.

Jeżeli rozważane wielkości nie dają się bez reszty wyrazić przez obrane jednostki, dzielimy wówczas w wiadomy sposób jednostki te i możemy na tej drodze wyznaczyć wartość każdej z rozważanych wielkości z dowolną dokładnością. Dokładność doskonałą można naturalnie osiągnąć tylko dla stosunków współmiernych [racjonalnych].

Na przedmiotach rzeczywistych możemy jednak napotkać również stosunki niewspółmierne [i racjonalne]; lecz stosunki te nie dają się nigdy wyrazić w liczbach z dokładnością zupełną; można tylko zamknąć ich wartość między granicami, dającymi ścieśnić się dowolnie. Ścieśnienie to granic wystarcza dla wszelkich obliczeń takich funkcji, których wartości przy malejących ustawicznie zmianach wielkości, od jakich zależą, podlegają również coraz to mniejszym zmianom, które nareszcie stają się mniejszemi od wszelkiej skończonej wartości. Dotyczy to mianowicie obliczenia wszystkich dających się różniczkować funkcji wielkości niewspółmiernych. Można natomiast utworzyć funkcje

nieciągłe, dla których obliczenia nie wystarcza znajomość najciaśniejszych nawet granic, między którymi leży poszukiwana wartość niewspółmierna. W tych wypadkach przedstawienie wielkości niewspółmiernych za pomocą naszego systemu liczebnego nigdy nie wystarcza. W geometrii i fizyce atoli nie napotkalismy jeszcze nieciągłości takiego rodzaju.

Ilościowe wyznaczenie własności. (*Stale fizyczne, współczynniki*). Oprócz wielkości, któreśmy dotychczas rozważali, które poznajemy jako takie bezpośrednio, ponieważ dopuszczają połączenie za pomocą dodawania, istnieje jednak inny jeszcze szereg stosunków, dających się również wyrazić przez liczby mianowane lub niemianowane, dla których jednak nie znamy dotychczas połączenia addytywnego ze stosunkami tegoż samego rodzaju. Stosunki takie znajdujemy, ilekroć pokazuje się związek naturalny między wielkościami addytywnymi w zjawiskach, na które wywierają wpływ albo pewne szczególne właściwości jakiegokolwiek substancji lub też określonego ciała albo też wreszcie sam sposób wywołania tych zjawisk.

Tak np. prawo załamania światła orzeka, że między wstawą kąta padania a wstawą kąta załamania promienia światła o danej długości fali, przenikającego z próżnej przestrzeni do danej substancji przezroczystej, zachodzi pewien określony stosunek. Liczba atoli wyrażająca ten stosunek jest różną dla różnych substancji przezroczystych, oznacza więc pewną ich własność, t. zw. zdolność załamania światła. Przykłady podobnych wielkości mamy w ciężarze gatunkowym, przewodnictwie cieplnem, zdolności przewodzenia elektrycznego, pojemności cieplnej i t. d. Do wielkości tego rodzaju należą też owe wartości (dynamiczne stałe całkowania), które pozostają bez zmiany podczas niezakłó-

canego odbywania się ruchu udzielonego ograniczonemu układowi ciał.¹⁾

Fizyce udało się stopniowo sprowadzić wszystkie te wartości do jednostek, które dają się utworzyć z trzech zasadniczych jednostek mierniczych: czasu, długości i masy, przez mnożenie, potęgowanie i działania odwrotne.

W języku fizyków i matematyków różnica między temi wartościami a wielkościami addytywnymi nie jest wyraźnie zaznaczoną, o ile mianowicie wartości te również otrzymują nazwę wielkości, ponieważ można je wyrazić za pomocą liczb mianowanych; lepiej stosunkowo wyraża fizyczną ich naturę termin *współczynnik*. Różnica wspomniana nie jest atoli istotną; nowe bowiem odkrycia mogą naprowadzić nas na połączenia addytywne takich współczynników; wówczas zaś należałyby one również do szeregu wielkości, dających wyznaczyć się bezpośrednio. Wzmiankowana powyżej różnica odpowiada poniekąd tej różnicy, którą starsi metafizycy pragnęli wykazać w przeciwieństwie *wielkości ekstensywnych i intensywnych*. P. P. du Bois-Reymond nazywa pierwsze *wielkościami liniowymi*, drugie zaś—*nieliniowymi*.

Z powyższych wywodów wynika atoli, że przedewszystkiem należy utworzyć wielkości addytywne, po tem zaś dopiero wyznaczyć można współczynniki. Równanie bowiem, wyrażające pewne prawo natury, może dać nam

¹⁾ Istnieją atoli pewne stałe całkowania, w dynamice, które pod tym względem stanowią wyjątek; tak np. całkując jednokrotnie równania różniczkowe ruchu kilku izolowanych układów, otrzymujemy dla każdego z nich pewną stałą całkowania, t zw. energię układu, która jest wielkością addytywną; łącząc bowiem wszystkie te układy i uważając połączenie ich jako *jeden* układ, otrzymujemy dla tego układu stałą całkowania, energię całkowitą, która jest sumą energii wszystkich układów poszczególnych.—Uwaga tłumacza.

określenie wartości współczynnika wówczas dopiero, gdy wszystkie inne zawarte w niem wielkości są już wyznaczone jako takie. Wyznaczenie wielkości addytywnych musi więc poprzedzać wyznaczenie wartości nieaddytywnych.

Dodawanie wielkości niejednorodnych.

Ważną w fizyce rolę odgrywają takie przedmioty, które przy różnych metodach porównywania przedstawiają jednocześnie dwie, lub trzy albo więcej nawet wielkości różnorodnych, które przy tym samym rodzaju kojarzenia fizycznego przedmiotów ulegają dodawaniu. Należy tu przedewszystkiem bardzo liczna klasa wielkości, posiadających kierunek w przestrzeni, t. j. wielkości, które posiadają pewną wartość i jednocześnie pewien kierunek, które jednak można wyobrazić sobie jako złożone z kilku składowych (dwóch na płaszczyźnie, trzech w przestrzeni) o stałym kierunku. Stosunki te przybierają w ogóle kształt najprostsz. jeżeli obieramy składowe, które dla otrzymania wypadkowej należy łączyć ze sobą według prawa o równoległoboku sił, równoległe do trzech prostopadłych do siebie osi współrzędnych. Do klasy tej należą przesunięcia punktu w przestrzeni, jego prędkość, przyspieszenie i odpowiednia siła poruszająca, dalek prędkości obrotu i znikomo małe obroty, prędkości prądu płynów ważkich, jako też elektryczności i ciepła, momenty magnetyczne i t. d.

Przy połączeniach addytywnych sumują się składowe, posiadające ten sam kierunek; sumy stąd powstałe można znowu połączyć w jedną wypadkową. Wszelkie skojarzenia fizyczne takich wielkości, przy których skutek zależy tylko od wielkości i od kierunku ostatecznej wypadkowej,

można uważać jako polegające na takich skojarzeniach adytywnych, jak to dla dwóch wymiarów przeprowadził *Gauss* w interpretacji geometrycznej wielkości urojonych, dla większej zaś liczby wymiarów *H. Grassmann* przez dodawanie odcinków geometrycznych i *R. Hamilton* w nauce o kwaternionach. Przy tem znowu stać się musi zadość prawu komutacyjnemu; tak np. możemy nieskończenie małe obroty ciała sztywnego naokoło dwóch różnych osi połączyć w jeden obrót wypadkowy, podobnie też jakiekolwiek prędkości obrotowe, lecz nie obroty skończenie wielkie; przy takich bowiem obrotach nie jest już obojętnem, czy obracamy ciało najpierw naokoło osi a , po tem zaś naokoło osi b , czy też odwrotnie.

Przy mieszaniu światła barwnego występuje również podobny stosunek. Każdą ilość barwnego światła można, ze względu na wzbudzone przez nie wrażenie zmysłowe, przedstawić jako połączenie trzech ilości światła o odpowiednio dobranych barwach zasadniczych. Mieszanina pewnej liczby barw jakichkolwiek działa wówczas na oko tak, jak działałyby w połączeniu ze sobą trzy ilości światła o trzech barwach zasadniczych, które to ilości otrzymujemy dla każdej poszczególnej barwy zasadniczej, dodając do siebie odpowiednie ilości barw zasadniczych, zawarte we wszystkich zmieszanych barwach. Na tem polega możliwość przedstawienia geometrycznego praw mieszania barw za pomocą konstrukcyi środków ciężkości, zaproponowanego po raz pierwszy przez *Newtona*.

Mnożenie liczb mianowanych.

Liczbę mianowaną $(a \cdot x)$, gdzie x oznacza rodzaj rozważanych jednostek, zaś a ich ilość, można pomnożyć przez czystą liczbę n . Podpada to poprostu pod przytoczone po-

wyżej określenie iloczynu, jako sumy n równych dodajników a . Ponieważ suma dodajników jednorodnych jest wielkością tegoż samego rodzaju, co dodajniki, przeto iloczyn $(n \cdot a)$ jest również wielkością o temże namianowaniu co a . Prawo komutacyjne rządzi również tym iloczynem, o ile

$$n \cdot (a \cdot x) = a \cdot (n \cdot x),$$

t. j.: można też uważać a jako liczbę czystą i utworzyć nowe dodajniki mianowane $(n \cdot x)$.

Podobnie też jest dane bezpośrednio prawo mnożenia sumy:

$$(m + n) \cdot (a \cdot x) = m \cdot (a \cdot x) + n \cdot (a \cdot x)$$

$$n \cdot (a \cdot x + b \cdot x) = n \cdot (a \cdot x) + n \cdot (b \cdot x).$$

Mnożenie liczb mianowanych przez liczby czyste pozostaje więc zupełnie w ramach określeń i twierdzeń, które powyżej wyprowadziliśmy dla mnożenia liczb czystych przez liczby czyste.

Inaczej rzecz się ma atoli z mnożeniem dwóch lub więcej liczb mianowanych przez siebie. Mnożenie takie ma sens w pewnych tylko wypadkach, jeżeli między rozważanymi jednostkami są możliwe szczególne kojarzenia fizyczne, które podlegają mianowicie trzem prawom mnożenia:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

W geometryi najbardziej znanym przykładem takich połączeń mnożeniowych jest wartość powierzchni równoległoboków i objętości równoległoscianów, wyrażona przez iloczyn dwóch, względnie trzech długości, mianowicie jednego boku i jednej, względnie dwóch wysokości. Fizyka

natomiast tworzy bardzo wiele takich iloczynów różnych jednostek i odpowiednio temu także przykłady ilorazów, potęg i pierwiastków różnych jednostek. Jeżeli przez l oznaczymy pewną długość, przez t — czas, przez m — masę, wówczas otrzymamy następujące namianowania:

dla powierzchni	l^2
„ objętości	l^3
„ prędkości	$\frac{l}{t}$
„ siły poruszającej	$\frac{m \cdot l}{t^2}$
„ pracy	$\frac{m \cdot l^2}{t^2}$
„ ciśnienia na powierzchnię	$\frac{m}{l \cdot t^2}$
„ napięcia powierzchni	$\frac{m}{t^2}$
„ gęstości	$\frac{m}{l^3}$
„ ilości magnetyzmu	$\frac{l}{t} \sqrt{\frac{m \cdot l}{t}}$
„ siły magnetycznej	$\frac{l}{t} \sqrt{\frac{m}{l}}$

i t. d.

Większa część połączeń, napotykaných we fizyce, polega na wyznaczeniu współczynników; wiele z tych wielkości atoli może przecież dać także skojarzenia fizyczne addytywne, jak np. prędkości, prądowania, siły, ciśnienia, gęstości i t. d.

Wszystkie te multiplikatywnie określone jednostki są jednak innego rodzaju niż te, z których je utworzono, i otrzymują zrozumiałe znaczenie wówczas dopiero, gdy poznamy pewne szczególne prawa geometryczne lub fizyczne.

Zaznaczymy tu jeszcze szczególne zwyrodnienie mnożenia, które *H. Grassmann* wprowadził dla wielkości kierunkowych w swojej „*Ausdehnungslehre*“ i które stanowi też podstawę teorii kwaternionów. Teoria ta wprowadza odmienne prawo komutacyjne, mianowicie

$$a \cdot b = -b \cdot a$$

i daje w rzeczy samej znaczne uproszczenie w oznaczeniu, aczkolwiek nie w obliczeniu wartości, powstających przez współdziałanie wielkości, które posiadają rozmaite kierunki.

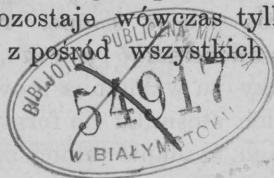
Iloczyn dwóch odcinków wyraża w teorii tej powierzchnię równoległoboku, posiadającego odcinki te jako boki; powierzchnię tę równoległoboczną uważa się jednak z jednej strony jako dodatnią, z drugiej — jako ujemną. Patrząc na jedną stronę tej powierzchni, muszę wykonać obrót w prawą stronę, aby od boku a przejść do boku b ; patrząc zaś na drugą stronę, muszę przy przejściu od b do a wykonać obrót w lewą stronę. Na tem polega różnica w porządku umnożenia: $(b \cdot a)$ i $(a \cdot b)$.

Wystarczy tu wzmianka powyższa o tych formach rachunku i o ich stosunku do form rachunkowych czystej nauki o liczbach; zadanie niniejszej pracy wymagało bowiem tylko, abyśmy wskazali znaczenie i dali uzasadnienie rachunku z liczbami czystymi, oraz wykazali możliwość ich zastosowania do wielkości fizycznych.

Uznać jakkolwiek stosunek fizyczny jako wielkość można więc jedynie tylko na podstawie empirycznej znajomości pewnych stron jego zachowania się fizycznego przy spotkaniu się lub współdziałaniu z innymi. Kongruencję dwóch wielkości przestrzennych, danych w ciałach lub ograniczonych przez ciała, uważam przy tem również jako stosunek fizyczny, który należy skonstatować empirycznie, — zgodnie z moimi dawniejszemi pracami nad pewnikami geometrii. Aby wyrazić odnośne wielkości za pomocą

liczb mianowanych, musimy *po pierwsze* poznać metodę ich porównywania, która jest charakterystyczną dla ich rodzaju, *po drugie* zaś — poznać metody ich kojarzenia addytywnego albo też prawa natury, w których występują one jako współczynniki.

Znaczne uproszczenie i przejrzystość poglądów, które osiągamy przez sprowadzenie pstrej różnorodności otaczających nas rzeczy i zmian na stosunki ilościowe, są głęboko zakorzenione w istocie naszego tworzenia pojęć. Gdy tworzymy pojęcie klasy, łączymy w niem wszystko to, co dla przedmiotów, należących do tej klasy, jest równe. Jeżeli uważamy stosunek fizyczny jako liczbę mianowaną, wyrzucamy z pojęcia jej jednostek wszystko, co w rzeczywistości jest w nich różne. Są one przedmiotami, które uważamy już tylko jako egzemplarze swej klasy i których skuteczność pod rozważanym względem zależy też od tego tylko, że stanowią one takie egzemplarze. W utworzonych z nich wielkościach pozostaje wówczas tylko jeszcze najbardziej wypadkowa z ~~pośród wszystkich~~ różnie, mianowicie różnica ilości.



1893

