

BARBARA SADOWSKA-BURACZEWSKA

STROPOWE PŁYTY TRÓJWARSTWOWE MODELU HOFFA

Zastosowanie, obliczenia statyczne,
weryfikacja doświadczalna
obliczeń numerycznych



Politechnika
Białostocka

Barbara Sadowska-Buraczewska

STROPOWE PŁYTY TRÓJWARSTWOWE MODELU HOFFA

**Zastosowanie, obliczenia statyczne,
weryfikacja doświadczalna obliczeń numerycznych**



OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI BIAŁOSTOCKIEJ
BIAŁYSTOK 2023

Recenzenci:

dr hab. inż. Anna Szymczak-Graczyk, prof. UPP
prof. dr hab. inż. Łukasz Sadowski

Redaktor naukowy dyscypliny inżynieria lądowa, geodezja i transport:
prof. dr hab. inż. Katarzyna Zabielska-Adamska

Redakcja i korekta językowa:
Edyta Chrzanowska

Skład, grafika i okładka:
Marcin Dominów

Zdjęcie na okładce: _Marion,

<https://pixabay.com/pl/photos/komponowanie-betonowa-%C5%9Bciana-%C5%9Bciana-331294/>

© Copyright by Politechnika Białostocka, Białystok 2023

ISBN 978-83-67185-78-3

ISBN 978-83-67185-77-6 (e-Book)

DOI: 10.24427/978-83-67185-77-6



Publikacja jest udostępniona na licencji
Creative Commons Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 4.0
(CC BY-NC-ND 4.0).

Pełną treść licencji udostępniono na stronie
creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.pl.

Druk: PPH Remigraf sp. z o.o.

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronie Oficyny Wydawniczej PB.
Oficina Wydawnicza Politechniki Białostockiej
ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok
www.pb.edu.pl

Spis treści

Ważniejsze oznaczenia.....	7
1. Wstęp, cel i zakres pracy.....	9
2. Przykłady współczesnych prefabrykowanych płytych systemów stropowych.....	15
2.1. Lekki strop panelowy SMART	15
2.2. Strop TERIVA PANEL	16
2.3. Strop panelowy KONBET S-PANEL (strop sprężony typu Filigran)	18
2.4. Wnioski	19
3. Idea stropowych płyt trójwarstwowych o okładzinach betonowych.....	21
3.1. Informacje ogólne.....	21
3.2. Rozwiązania materiałowe okładzin	23
3.3. Beton zbrojony włóknami	25
3.4. Materiały stosowane na rdzeń.....	27
3.5. Podsumowanie	29
4. Płyty trójwarstwowe modelu Hoffa - obliczenia statyczne.....	30
4.1. Informacje ogólne.....	31
4.2. Zasadnicze równania teorii płyt trójwarstwowych.....	31
4.3. Naturalne warunki brzegowe	35
4.4. Zastosowanie energetycznej metody różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym do poszukiwania rozwiązań dla płyt trójwarstwowych i płyt jednorodnych, izotropowych	36
4.5. Przykłady obliczeniowe.....	58
4.5.1. Przykład nr 1. Płyta trójwarstwowa (moduł Kirchoffa materiału rdzenia $G_w = 450$ MPa)	59
4.5.2. Przykład nr 2. Płyta trójwarstwowa (moduł Kirchoffa materiału rdzenia $G_w = 4450$ MPa)	70
4.5.3. Przykład nr 3. Płyta jednorodna, izotropowa	78
4.5.4. Zestawienie i porównanie wyników przykładowych obliczeń	85

5. Badania doświadczalne.....	87
5.1. Cel i zakres badań doświadczalnych	87
5.2. Materiały użyte do wykonania płyt i elementów badawczych.....	87
5.2.1. Cement.....	87
5.2.2. Kruszywo	88
5.2.3. Perlit	88
5.2.4. Keramzyt.....	91
5.2.5. Domieszki.....	93
5.2.6. Woda zarobowa	93
5.2.7. Składy i wykonanie mieszanek betonowych.....	93
5.3. Podstawowe charakterystyki wytrzymałościowo-odkształceniowe betonów 94	
5.3.1. Badanie betonu na ściskanie	94
5.3.2. Badanie modułu sprężystości.....	96
5.3.3. Badanie modułu Kirchoffa	98
5.3.3.1. Sposób wyznaczania modułu Kirchoffa na podstawie badania próbek na skręcanie.....	100
5.3.3.2. Doświadczalne wyznaczanie wielkości modułu G_w na podstawie badań zginanych belek trójwarstwowych.....	102
5.3.4. Badanie współczynnika przewodzenia ciepła λ	105
5.3.5. Badanie struktury betonów za pomocą mikroskopu skaningowego.....	106
5.4. Przygotowanie płytowych elementów badawczych	109
5.5. Badania eksperymentalne płyt warstwowych z rdzeniem z perlitobetonu przeprowadzone z wykorzystaniem systemów Aramis i Hysdozok.....	111
5.5.1. Informacje o systemach Aramis i Hysdozok	111
5.5.2. Dokumentacja badań płyt trójwarstwowych z rdzeniem z perlitobetonu przeprowadzonych z zastosowaniem systemu Aramis	114
5.5.3. Podsumowanie wyników badań płyt z rdzeniem z perlitobetonu z wykorzystaniem systemu Aramis	121

5.6. Badania doświadczalne płyt pod obciążeniem doraźnym.....	121
5.6.1. Badania płyt warstwowych z rdzeniem z perlitobetonu – ugięcia	121
5.6.2. Badania płyt warstwowych z rdzeniem z keramzytobetonu – ugięcia	122
5.6.3. Analiza nośności na zginanie płyt warstwowych	123
5.6.3.1. Płyty warstwowe z rdzeniem z perlitobetonu	123
5.6.3.2. Płyty warstwowe z rdzeniem z keramzytobetonu	124
5.6.3.3. Dokumentacja badań płyt trójwarstwowych z rdzeniem z keramzytobetonu przeprowadzonych z zastosowaniem systemu Aramis	125
5.7. Analiza porównawcza wyników badań doświadczalnych i obliczeń numerycznych	128
5.8. Wpływ modułu Kirchoffa na pracę statyczną konstrukcji przekładkowych płyt trójwarstwowych	129
6. Podsumowanie i wnioski końcowe	133
Literatura.....	135
Spis tabel.....	141
Spis rysunków.....	143
Streszczenie.....	147
Summary	149

Ważniejsze oznaczenia

λ	- współczynnik przewodzenia ciepła
δ	- grubość warstwy zewnętrznej (okładziny)
$2h$	- grubość warstwy środkowej (rdzenia)
$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$	- sztywność płytowa warstwy zewnętrznej
$D_z = \frac{E\delta(2h+\delta)^2}{2(1-\nu^2)} + 2D$	- sztywność całej płyty
E	- moduł Younga (moduł sprężystości) materiału warstwy zewnętrznej
G_w	- moduł odkształcenia postaciowego warstwy środkowej (moduł Kirchoffa)
ν	- współczynnik Poissona materiału warstw zewnętrznych (okładzin)
m_x, m_y, m_{xy}	- momenty zginające w warstwach zewnętrznych
N_x, N_y, N_{xy}	- siły tarczowe w warstwie dolnej
N_{xz}, N_{yz}	- wypadkowe siły tnące w wypełnieniu
q_x, q_y	- siły tnące w warstwach zewnętrznych
$u(x,y)$	- przemieszczenie w płaszczyźnie środkowej dolnej warstwy w kierunku osi x
$v(x,y)$	- przemieszczenie w płaszczyźnie środkowej dolnej warstwy w kierunku osi y
$w(x,y)$	- ugięcia pionowe płyty jednakowe dla wszystkich warstw
τ_{xz}^w, τ_{yz}^w	- naprężenia styczne w wypełnieniu (w rdzeniu)
S	- obszar płyty
V	- funkcjonal energii odkształcenia sprężystego płyty

1. Wstęp, cel i zakres pracy

Budownictwo to dział gospodarki narodowej obejmujący wszelką działalność związaną z wykonywaniem i techniką wznoszenia budowli. Budownictwo uprzemysłowione dotyczy wytwarzania fabrycznego lub na placu budowy gotowych elementów budowlanych o odpowiednich parametrach technicznych ułatwiających zmechanizowanie metod wykonawczych.

W ostatnich latach obserwuje się bardzo dynamiczny rozwój wielu elementów i konstrukcji budowlanych. W szczególności jest to widoczne w przykładowych rozwiązaniach konstrukcji stropowych, o czym piszą m.in.: Drobiec (2018), Jasiński i in. (2022), Kisiołek (2017, 2018), Nagrodzka-Godycka i in. (2019). KONBET Poznań, jeden z czołowych producentów stropów w Polsce, w materiałach reklamowych napisał: „o stropach wiemy wszystko..., ale wciąż się uczymy”. Ta właśnie myśl przyświecała autorce tej monografii – była inspiracją do podjęcia tematu płyt trójwarstwowych w kontekście zastosowania ich jako prefabrykowanych płyt stropowych o bardzo dobrych parametrach wytrzymałościowych oraz zapewniających bardzo dobrą izolacyjność termiczną i akustyczną. Pojawiające się coraz to nowsze rozwiązania konstrukcji stropów wynikają z możliwości zastosowania do ich wykonania nowych materiałów konstrukcyjnych o coraz to lepszych parametrach technicznych, a także z rozwoju numerycznych metod obliczeniowych umożliwiających i ułatwiających wykonywanie obliczeń statycznych dla tak złożonych ustrojów jak np. płyty trójwarstwowe, dla których wykonanie obliczeń analitycznych nastęrczało wielu trudności.

Inną, równie istotną przesłanką, którą kierowała się autorka, podejmując problem płyt trójwarstwowych, było poszukiwanie rozwiązań umożliwiających wykorzystanie przy ich produkcji kruszyw odpadowych pozostających po hydroklasyfikacji lub pochodzących z recyklingu. We współczesnym świecie przy dynamicznym rozwoju budownictwa z wykorzystaniem betonów zaczyna brakować kruszyw naturalnych. W niektórych rejonach, np. w Polsce na Pomorzu Zachodnim, przy pozyskiwaniu kruszywa o odpowiednich frakcjach w procesie hydroklasyfikacji powstają hałdy drobnego kruszywa traktowanego jako odpad.

Rzówój technologii w produkcji materiałów budowlanych przyczynił się do uzyskiwania materiałów izolacyjnych o coraz lepszych właściwościach umożliwiających inny, bardziej efektywny sposób ich wykorzystania w konstrukcji. Biorąc powyższe pod uwagę, niebagatelnym problemem będzie opracowanie konstrukcji płyt trójwarstwowych wykorzystywanych jako elementy stropowe, spełniających wymagania

wytrzymałościowe, o odpowiedniej izolacyjności termicznej i akustycznej, ograniczających do minimum zakres prac budowlanych niezbędnych do wykonania na budowie. Przy konstrukcji wspomnianych płyt możliwe będzie wykorzystanie zarówno współczesnych materiałów zapewniających izolację termiczną, jak i wykorzystanie kruszyw z recyklingu (Sadowska-Buraczewska i in. 2020) oraz odpadowych (Domski, Zakrzewski 2020; Lehmann, Głodkowska 2021) lub też innych dodatków w betonie, takich jak np. miąż gumowy SBR (Korentz, Szmatuła 2020), perlit lub keramzyt (Szymczak-Graczyk i in. 2022).

Trzy równorzędne cele, jakie przyświecały autorce monografii, to:

- Wykazanie, że bazując na modelu Hoffa płyty trójwarstwowej, istnieje realna szansa skonstruowania elementu płytowego z przeznaczeniem głównie na konstrukcje stropowe, który będzie spełniał wymogi nośności, izolacyjności termicznej i akustycznej, a jednocześnie będzie elementem o wysokim stopniu wykończenia, niewymagającym zbyt wielu robót uzupełniających w trakcie budowy.
- Wskazanie, że przy produkcji trójwarstwowych elementów płytowych do wykonywania okładzin betonowych możliwe będzie wykorzystanie kruszyw z recyklingu oraz odpadowego piasku drobnego pozostającego po hydroklasyfikacji.
- Wykazanie, że pomimo złożonego układu różniczkowych równań równowagi wyższego rzędu dla płyt trójwarstwowych modelu Hoffa możliwe będzie uzyskanie rozwiązania przy zastosowaniu metody numerycznej – wariacyjnego ujęcia metody różnic skończonych.

Płyty trójwarstwowe modelu Hoffa składają się z dwóch zewnętrznych okładzin, np. betonowych, spełniających wszystkie założenia teorii płyt cienkich, oraz z warstwy środkowej, czyli rdzenia wykonanego z lekkiego materiału o bardzo dobrych parametrach zapewniających izolacyjność termiczną i akustyczną. Tak skonstruowane płyty, przy stosunkowo małym ciężarze własnym, mogą zapewnić zarówno dużą nośność, jak i wysokie wymagania dotyczące izolacyjności termicznej i akustycznej.

Kolejną zaletą takich płyt jest to, że do ich wykonania oprócz pełnowartościowych materiałów można także użyć materiałów odpadowych. Na przykład okładziny betonowe można wykonać z zastosowaniem kruszywa recyklingowego lub wykorzystując piasek drobny, którego hałdy zalegają na Pomorzu, a które powstają w wyniku hydroklasyfikacji kruszyw w celu pozyskania kruszyw o grubszych frakcjach. Na ten temat pisali (Domski 2005; Głodkowska i in. 2020; Głodkowska, Laskowska-Bury 2015). Ziarkiewicz (2018) wskazał na możliwość wykorzystania piasku drobnego, traktowanego po hydroklasyfikacji jako odpad, do wykonywania pełnowartościowych elementów konstrukcyjnych, gdzie oprócz tradycyjnego zbrojenia przewidywał zastosowanie zbrojenia rozproszanego. Ziarkiewicz (2018) pisał: „Pozostały z procesu hydroklasyfikacji piasek, który stanowi 75% do 80%, traktowany jest w efekcie jako odpad, co z punktu widzenia definicji jest prawidłowym określeniem, gdyż odpadami wydobywczymi definiuje się odpady powstające przy poszukiwaniu, wydobywaniu,

fizycznej i chemicznej przeróbce rud oraz innych kopalin”. W swej pracy zamieścił wzory dostosowane do wymiarowania elementów żelbetowych wykonanych na drobnym odpadowym kruszywie piaskowym.

Na rdzeń można wykorzystać tradycyjne materiały, takie jak styropian, szkło piankowe białe lub czarne, bądź też można go wykonać z lekkiego betonu izolacyjnego zrobionego z wykorzystaniem perlitu (perlitobeton) albo keramzytu (keramzytobeton). Perlitobeton uzyskuje się w wyniku częściowego zastąpienia w mieszance betonowej piasku perlitem, a w keramzytobetonie głównym kruszywem w tej mieszance jest keramzyt. Poprzez układanie w płycie trójwarstwowej kolejnych warstw „mokre” na „mokre” nie ma obaw o ich przyczepność między sobą. Płyty trójwarstwowe mogłyby być produkowane w formach na stołach wibracyjnych lub jako sprężone, na torach naciągowych, analogicznie jak produkowane są płyty kanałowe sprężone.

Jednym z celów, jaki sobie postawiła autorka, było wykazanie możliwości i pokazanie praktycznego sposobu obliczania płyt trójwarstwowych modelu Hoffa przy wykorzystaniu numerycznej metody wariacyjnego ujęcia różnic skończonych. Wskazanie praktycznej metody obliczania tych płyt powinno być impulsem do ich szerszego stosowania.

Płyty trójwarstwowe modelu Hoffa, jak już wspomniano wyżej, mają szereg zalet, a ich mała popularność w praktycznym zastosowaniu może wynikać z trudności wykonywania obliczeń statyczno-wytrzymałościowych.

W związku z realizacją celów niniejszej monografii jej zakres obejmuje:

- wykazanie zasadności podjęcia próby zaprojektowania trójwarstwowej płyty stropowej wynikające z analizy porównawczej aktualnie stosowanych konstrukcji stropowych;
- przedstawienie założeń teorii płyt trójwarstwowych modelu Hoffa wraz z podaniem równań równowagi oraz zależności umożliwiających obliczenie poszczególnych wielkości statycznych;
- podanie funkcjonału opisującego energię odkształcenia sprężystego dla płyt trójwarstwowych będącego podstawą do wykonania obliczeń metodą różnic skończonych;
- omówienie wariacyjnego ujęcia metody różnic skończonych w zastosowaniu do obliczania płyt trójwarstwowych oraz płyt jednorodnych, izotropowych;
- przeprowadzenie badań modelowych płyt trójwarstwowych, aby zweryfikować uzyskane rozwiązania numeryczne;
- wykonanie niezbędnych badań materiałowych w celu określenia parametrów E , G_w , λ dla perlitobetonu i keramzytobetonu, a więc materiałów, z których wykonano rdzenie badanych płyt, a także badań pobranych w trakcie realizacji próbek, by określić cechy wytrzymałościowe użytego betonu do wykonania okładzin;
- zbudowanie macierzy globalnej na współczynnikach ogólnych, która pozwala na prosty sposób uzyskać macierz szczegółową i wykonać obliczenia dla płyt

trójwarstwowych o stosunku boków (długość : szerokość) $l_x : l_y = 2 : 1$ i dowolnych parametrach geometrycznych i materiałowych okładzin i rdzeni;

- wykonanie obliczeń (z wykorzystaniem powyższej macierzy) dla dowolnego schematu obciążenia płyty, gdyż współczynniki prawych stron są wyrażeniami wolnymi na prawej stronie rozwiązywanego układu równań.

W publikacji zamieszczono rozwiązania dla płyt obciążonych równomiernie oraz siłą skupioną działającą w punkcie środkowym płyty. Wykonano też obliczenia dla obciążenia pasmowego (np. ścianką działową) biegnącego w osi symetrii płyty, prostopadle do dłuższego boku. Wyników tych nie zamieszczono jednak w pracy, aby nadmiernie nie powiększać jej objętości.

Monografia składa się z sześciu rozdziałów oraz spisu literatury.

W rozdziale pierwszym, *Wstęp, cel i zakres pracy*, uzasadniono potrzebę i celowość podjęcia tematu trójwarstwowych płyt modelu Hoffa pod kątem możliwości stosowania ich jako elementów stropowych o bardzo dobrych parametrach wytrzymałościowych i izolacyjnych. Podano cele, jakie zamierzono osiągnąć poprzez realizację założeń, oraz zakres prac niezbędnych do wykonania, aby uzyskać postawione cele.

W rozdziale drugim, *Przykłady współczesnych prefabrykowanych płytowych systemów stropowych*, omówiono trzy przykłady. Skupiono się na elementach prefabrykowanych, fabrycznie docieplonych, o dobrych parametrach izolacyjności termicznej i akustycznej, a także odpowiednim wykończeniu powierzchni.

W rozdziale trzecim, *Idea stropowych płyt trójwarstwowych o okładzinach betonowych*, po analizie systemów stropowych autorka doszła do wniosku, że to dzięki współczesnym rozwiązaniom stropowym można osiągnąć dobre efekty, które mogłyby być jeszcze lepsze, gdyby opracowano trójwarstwowe płyty stopowe modelu Hoffa. Dodatkową zaletą takiej konstrukcji jest możliwość zastosowania do produkcji wspomnianych płyt z różnorodnych materiałów budowlanych: kruszywa z recyklingu, kruszywa odpadowego pozostającego po hydroklasyfikacji oraz różnych materiałów izolacyjnych (np. styropianu, szkła piankowego, perlitobetonu, keramzytobetonu). W rozdziale przedstawiono również przykłady wybranych materiałów budowlanych, które można użyć do wykonania okładzin oraz rdzeni.

W rozdziale czwartym, *Płyty trójwarstwowe modelu Hoffa – obliczenia statyczne*, zaprezentowano zasadnicze równania równowagi dla płyt trójwarstwowych w postaci układu trzech równań różniczkowych cząstkowych wyprowadzonych przez Hoffa. Wskazano trudności uzyskania praktycznych rozwiązań z uwagi na problemy natury matematycznej. Korzystając z funkcjonału energii odkształcenia sprężystego dla zginanej płyty trójwarstwowej, zaproponowano poszukiwanie rozwiązań dla wspomnianych płyt, mianowicie zastosowania wariacyjnego ujęcia metody różnic skończonych. Szczegółowo omówiono sposób postępowania przy stosowaniu tej metody, podano wykorzystywane schematy różnicowe i dla przykładowej płyty stworzono macierz globalną na współczynnikach ogólnych. Wykorzystując

tę macierz, zbudowano układy równań przemieszczeniowych dla przykładowych konkretnych płyt, dla których zbudowano modele i przeprowadzono badania modelowe.

W rozdziale piątym, *Badania doświadczalne*, scharakteryzowano materiały budowlane, które wykorzystano do wykonania płyt trójwarstwowych. Przedstawiono wyniki badań laboratoryjnych niezbędnych cech mechanicznych materiałów użytych do wykonania okładzin i rdzeni. Szczegółowo omówiono sposób wykonania płyt przeznaczonych do badań oraz opisano i udokumentowano przeprowadzone badania w laboratorium z wykorzystaniem systemów Aramis i Hysdozok. Przeprowadzono analizę porównawczą wyników obliczeń numerycznych i uzyskanych z badań płyt trójwarstwowych.

W *Podsumowaniu i wnioskach końcowych* zestawiono wyniki badań, obliczeń i analiz porównawczych oraz omówiono osiągnięte cele. Zaprezentowano wnioski końcowe wpływające z przeprowadzonych obliczeń i badań trójwarstwowych płyt stropowych z rdzeniem z perlitobetonu i keramzytobetonu, których wynikiem było określenie zależności pomiędzy wielkością obciążenia, a przemieszczeniami pionowymi (ugięciami). Wykazano praktyczną możliwość stosowania metody wariacyjnego ujęcia różnic skończonych do obliczania płytowych elementów trójwarstwowych modelu Hoffa oraz płyt jednorodnych, izotropowych.

Na końcu pracy zamieszczono uporządkowaną alfabetycznie literaturę, odpowiadającą poruszonym w poszczególnych rozdziałach kwestiom.

2. Przykłady współczesnych prefabrykowanych płytowych systemów stropowych

W ostatnich latach obserwuje się dynamiczny rozwój prefabrykowanych płytowych systemów stropowych. Zaletą tych rozwiązań jest znacząco lepsza jakość otrzymywanych wyrobów, a w połączeniu ze współczesnymi materiałami konstrukcyjnymi i termoizolacyjnymi uzyskuje się elementy stropowe o bardzo dobrej nośności oraz doskonałych parametrach izolacyjności termicznej i akustycznej. Takie elementy stropowe w zdecydowany sposób przyspieszają szybkość montażu i eliminują znaczną część prac budowlanych koniecznych do wykonania na budowie. Poniżej pokrótce omówiono trzy współcześnie stosowane stropy płytowe.

Bliższe informacje na temat stropów belkowych, płytowych, także typu Filigran, można znaleźć np. w pracach Starosolskiego (2006, 2007).

2.1. Lekki strop panelowy SMART

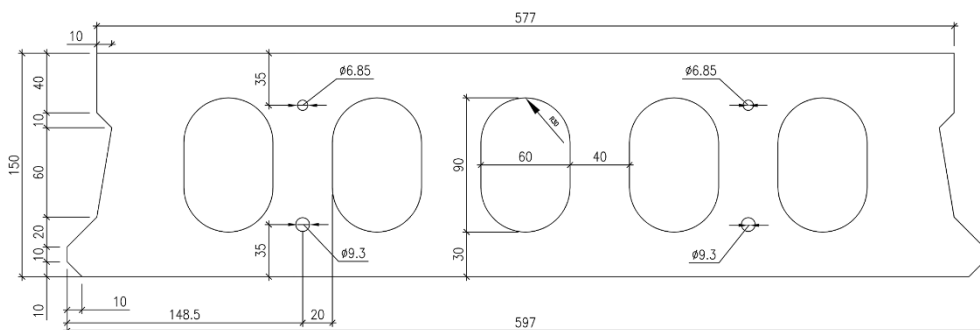
Strop SMART to pięcioletniowa płyta strunobetonowa o szerokości 60 cm. Płyty produkowane są w dwóch wysokościach – 15 lub 20 cm – i rozpiętości odpowiednio do 8,1 m oraz do 10,5 m. Do ich wykonania używany jest beton klasy C 40/50, a izolacyjność cieplna – opór cieplny – wynosi $R = 0,17 \text{ m}^2\text{K/W}$. Masa 1 m^2 stropu SMART 15 wynosi 250 kg, a SMART 20 – 310 kg. Panele SMART to produkty strunobetonowe, które odznaczają się odwrotną strzałką ugięcia. Produkowane są na torach naciągowych i zbrojone dołem splotami siedmiodrutowymi o średnicach 9,3 i 12,5 mm, a górą $2 \times 6,85 \text{ mm}$. W zależności od zastosowanego zbrojenia ich nośność wynosi od 5 do 40 kN/m^2 .

Po ułożeniu paneli i zaślepieniu otworów betonuje się wieńce i styki między płytami. Na stropie nie układa się nadbetonu.

Podstawowe zalety stropu SMART:

- lekkość konstrukcji,
- dobre parametry techniczne (nośność, izolacyjność),
- płaskie i równe powierzchnie dolnej i górnej płyty,
- łatwość i szybkość montażu,

- nie wymaga podpór montażowych,
- niewielki zakres prac wykończeniowych – betonowych (brak nadbetonu),
- dźwiękoizolacyjność stropu do 55 dB.



Rys. 2.1. Panel SMART 15/60 – kanały 60 × 90, zbrojone 2 × Ø9,3 mm dołem + 2 × Ø6,85 mm górą
 Źródło: oprac. na podstawie www.stropsmart.pl.

Panele SMART przenosi się za pomocą trawersu wyposażonego w uchwyty szczękowe dopasowane do szerokości płyty, tj. 60 cm. Można je również przenosić za pomocą zawiesi hakowych oraz chwyteków palcowych. Stosowanie tego typu rozwiązań pozwala znacznie przyspieszyć montaż (dla przykładu około 100 m² lekkiego stropu panelowego SMART dzięki użyciu specjalnych chwyteków można ułożyć w niecałe dwie godziny).

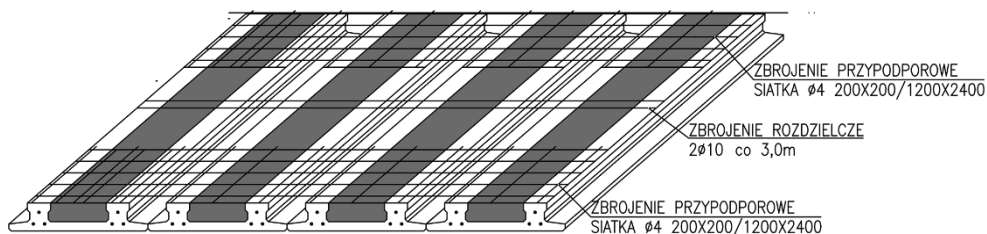
2.2. Strop TERIVA PANEL

Strop TERIVA PANEL jest stropem gęstożebrowym, zbudowanym z prefabrykatów (paneli), w których żebrawi są dwie strunobetonowe sprężone belki połączone betonową stopką. Przestrzeń pomiędzy nimi wypełniona jest betonem jamistym lekkim (keramzytobetonem lub styrobetonem), pełniącym funkcję pustaków, poprawiającym jednocześnie parametry termiczne i dźwiękochłonne. Całość wypełnia się nadbetonem grubości od 4 do 8 cm. Widok stropu TERIVA PANEL pokazano na rys. 2.2a, a przekrój przez jego panel na rys. 2.2b.

Strop TERIVA PANEL 16 o szerokości panelu 60 cm i wysokości 12 cm przy grubości konstrukcyjnej stropu po wykonaniu warstwy nadbetonu wynosi odpowiednio 16 cm, przy nadbetonie grubości 4 cm oraz 20 cm, przy nadbetonie grubości 8 cm o długości od 2,4 m do 7,2 m w module co 10 cm. Na budowie na płytach układa się dodatkowe zbrojenie (rys. 2.2a) w postaci:

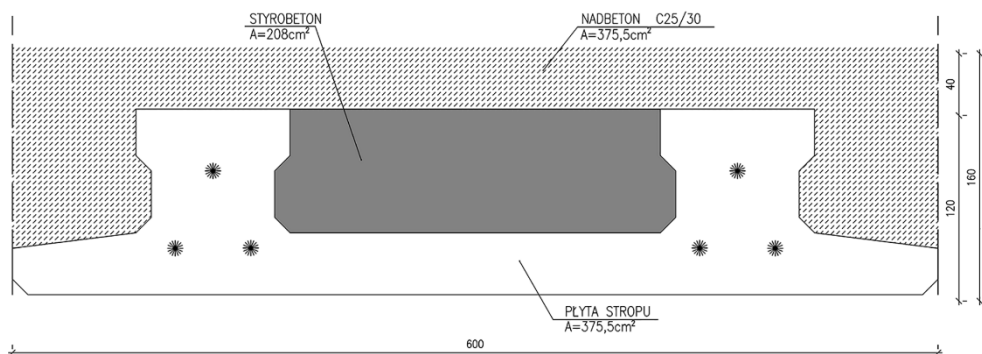
- zbrojenia rozdzielczego, w przypadku stosowania płyt o długości powyżej 4 m,
- zbrojenia nadpodporowego, w przypadku stosowania płyt o długości powyżej 4,5 m,

- dodatkowego zbrojenia wynikającego z projektu konstrukcji (np. wzmocnienie pod ściankami działowymi, wymiany, wzmocnienia większych otworów).



Rys. 2.2a. Widok stropu TERIVA PANEL w aksonometrii

Źródło: oprac. na podstawie materiałów KONBET Poznań.



Rys. 2.2b. Przekrój przez strop TERIVA PANEL 16

Źródło: oprac. na podstawie materiałów KONBET Poznań.

Nośność stropu uzależniona jest od grubości płyty, jej zbrojenia i rozpiętości. Prefabrykaty produkowane są w następujących konfiguracjach zbrojenia (splotów): $4 \text{ } \varnothing 6,85 + 2 \text{ } \varnothing 6,85$ oraz $4 \text{ } \varnothing 9,3 + 2 \text{ } \varnothing 6,85$.

Ciężar 1 mb prefabrykatu wypełnionego styrobetonem wynosi 0,94 kN, co daje wartość powierzchniową równą $1,57 \text{ kN/m}^2$. Ciężar stropu po wykonaniu warstwy nadbetonu wynosi odpowiednio: $3,07 \text{ kN/m}^2$ – w przypadku stropu grubości 16 cm (4 cm nadbetonu) i $4,04 \text{ kN/m}^2$ – w przypadku stropu grubości 20 cm (8 cm nadbetonu).

Dźwiękoizolacyjność stropu TERIVA PANEL wynosi 52,1 dB przy grubości stropu 16 cm oraz 55,9 dB przy grubości stropu 20 cm.

Płyty o rozpiętości do 4 m nie wymagają żadnych podpór montażowych. Przy rozpiętości powyżej 4 m stosuje się jedną podporę montażową umieszczoną w środku rozpiętości płyty.

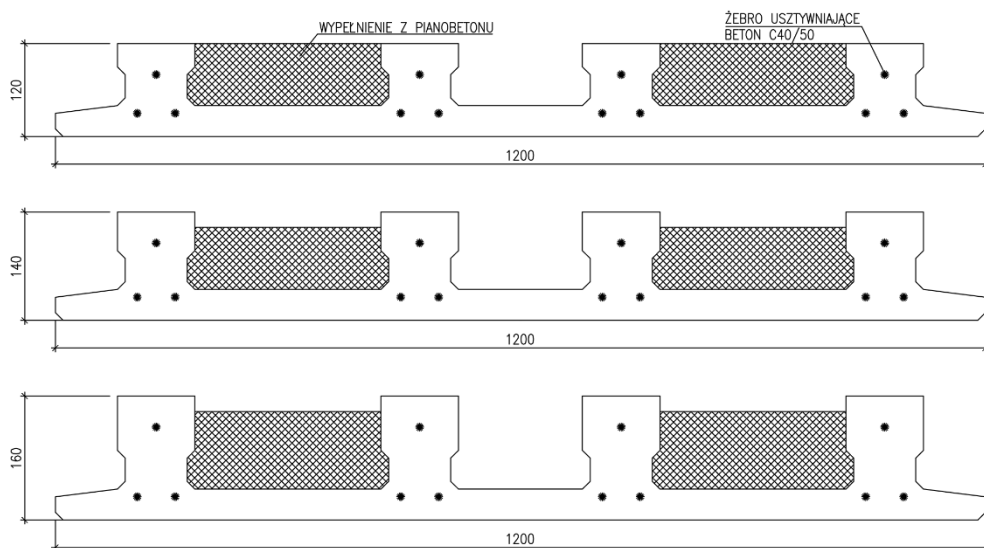
2.3. Strop panelowy KONBET S-PANEL (strop sprężony typu Filigran)

Strop KONBET S-PANEL jest swego rodzaju modyfikacją stropu Filigran, gdzie stalowe żeberka kratownicowe zastąpiono teowymi żebrami sprężonymi. Jest to płyta strunobetonowa składająca się z płytowego elementu prefabrykowanego z teowymi żebrami usztywniającymi, wystającymi ponad górną powierzchnię prefabrykatu, zintegrowanymi z płytą konstrukcyjną za pomocą warstwy betonu lekkiego (pianobetonu) oraz nadbetonu układanego na budowie.

Dzięki specjalnie ułożonym żebrům teowym cała konstrukcja została wzmocniona, a wypełnienie środka panelu pianobetonem pozwoliło zachować lekkość stropu, co w konsekwencji oznacza większą nośność, rozpiętość, termoizolacyjność oraz prostotę i szybkość montażu.

Do zalet stropu KONBET S-PANEL można zaliczyć: obniżenie kosztów robocizny, mniejsza ilość zbrojenia i nadbetonu, bezpodporowy i błyskawiczny montaż (100 m² stropu w godzinę), wysoka dźwiękoizolacyjność, dobra termoizolacyjność termiczna pianobetonu, równa powierzchnia dolna, większa sztywność płyty, duża nośność i duża rozpiętość.

Poniżej podano podstawowe parametry stropu KONBET S-PANEL, zaprezentowano przekrój przez panel o wysokości 120, 140 i 160 mm (rys. 2.3). W panelach o wysokości 140 i 160 mm główka belki wystaje ponad wypełnienie z pianobetonu, co zwiększa powierzchnię styku panelu z nadbetonem wykonywanym na budowie i w efekcie otrzymujemy większe zespolenie tych elementów.



Rys. 2.3. Typoszereg stropu KONBET S-PANEL

Źródło: oprac. na podstawie materiałów KONBET Poznań.

Dostępna wysokość konstrukcyjna stropu KONBET S-PANEL wynosi 16, 18, 20, 22 cm, natomiast szerokość panelu 120 cm przy rozpiętości do 9 m. Do wykonania stropu używa się betonu klasy C 40/50, projektując stropy na odporność ogniową klasy REI 60.

2.4. Wnioski

Przedstawione powyżej wybrane typy stropów to nowe produkty, które obecnie są chętnie stosowane ze względu na ich cechy:

- wszystkie omawiane stropy to elementy konstrukcyjne prefabrykowane, płytowe,
- charakteryzują się dużą nośnością uzależnioną od zastosowanego zbrojenia i od wysokości stropu oraz dobrymi parametrami akustycznymi i termicznymi, gdyż fabrycznie są docieplone betonem jamistym (keramzytobetonem lub styrobetonem),
- omówione stropy płytowe w znacznym stopniu przyspieszają prace montażowe na budowie, co minimalizuje jej koszty,
- produkowane panele zapewniają minimalny zakres prac niezbędnych do wykonania na budowie,
- jako że są to elementy prefabrykowane, gwarantują płaską powierzchnię dolną stropu, co uznawane jest za zaletę, gdyż w niektórych przypadkach nie będzie wymagane tynkowanie sufitu,
- zużycie betonu na budowie jest znacznie ograniczone; dotyczy to wypełnienia zamków między panelami, zabetonowania wieńców i ewentualnie wykonania nadbetonu,
- ograniczona jest również liczba niezbędnych podpór przy montażu stropu.

3. Idea stropowych płyt trójwarstwowych o okładzinach betonowych

3.1. Informacje ogólne

Od połowy XX wieku znany jest model płyty trójwarstwowej podany przez Hoffa (1950), który z powodzeniem może być stosowany przy konstruowaniu płyt przeznaczonych dla budownictwa. Płyty warstwowe stropowe używane w budownictwie powinny przenosić duże obciążenia użytkowe, zapewniać dobrą izolacyjność termiczną i akustyczną. W latach 70. i 80. XX wieku w Akademii Rolniczej w Poznaniu powstał pomysł opracowania projektu płyt stropowych trójwarstwowych przeznaczonych do stosowania w budownictwie rolniczym. Wykonano kilka płyt doświadczalnych z rdzeniem ze styropianu i szkła piankowego, które przeszły pomyślne badania poligonowe (Buczowski 1981; Mikołajczak i in. 1975). Na tym jednak etapie prace w poznańskim ośrodku przerwano i dalej ich nie kontynuowano.

W czasie tych badań na placu budowy wykonano płyty trójwarstwowe o określonych wymiarach i danych materiałowych, zmierzono też ugięcia przy obciążeniu równomiernym i porównano wyniki z obliczonymi. Przykładowe badania zaprezentowano na rys. 3.1 i 3.2.



Rys. 3.1. Badania poligonowe płyt warstwowych (fot. W. Buczowski)

Źródło: zbiory W. Buczowskiego.

Rysunek 3.1. przedstawia badania płyty wolnopodpartej o rozpiętości 3,0 m i szerokości 1,2 m. Płyta warstwowa zbudowana jest z dwóch okładzin o grubości 4 cm i rdzenia ze szkła piankowego białego o grubości 13 cm. Okładziny były zbrojone: dołem $3,52 \text{ cm}^2$, górą $2,01 \text{ cm}^2$. Przy zadanym obciążeniu zewnętrznym $q = 14,38 \text{ kN/m}^2$ zostało zmierzone ugięcie, które wyniosło $w = 2,46 \text{ mm}$, natomiast ugięcie obliczone analitycznie – $2,05 \text{ mm}$ (Mikołajczak i in. 1975).



Rys. 3.2. Badania poligonowe nośności i ugięć płyt warstwowych (fot. W. Buczkowski)
Źródło: zbiory W. Buczkowskiego.

Badana płyta wolnopodparta warstwowa przedstawiona na rys. 3.2 miała rozpiętość 3,0 m i szerokość 1,2 m, zbudowano ją z okładziny $2 \times 5 \text{ cm}$ oraz rdzenia ze styropianu o grubości 8 cm. Była zbrojona górą i dołem o polu przekroju równym $2,54 \text{ cm}^2$. Przy obciążeniu całkowitym $8,40 \text{ kN/m}^2$ zostało pomierzone ugięcie, które wyniosło $w = 4,7 \text{ mm}$, natomiast wartość obliczona analitycznie wyniosła $w = 4,6 \text{ mm}$ (Buczkowski 1981).

Stropowe płyty trójwarstwowe modelu Hoffa składające się z okładzin betonowych (żelbetowych) i rdzenia izolacyjnego mają skumulowane w jednym rozwiązaniu wszystkie cechy, którymi charakteryzowały się opisane powyżej współczesne systemy stropowe.

Najważniejsze cechy płyt trójwarstwowych modelu Hoffa to:

- ich duża nośność, na którą wpływ mają grubość okładzin i ich zbrojenie, wysokość (grubość) płyty oraz parametry betonu,
- dobra izolacyjność termiczna i akustyczna uzależniona od materiału i grubości rdzenia,
- duży stopień wykończenia, w tym płaskość powierzchni dolnej i górnej, co niekiedy nie będzie wymagało tynkowania,
- łatwość i szybkość montażu oraz minimalizacja robót wykończeniowych na budowie,

- możliwość wykonania płyt o określonej długości, zbrojonych w sposób tradycyjny, a także po odpowiednim przygotowaniu możliwość wykonania takich płyt jako sprężonych.

Nieliczna grupa naukowców (np. Boniecki, Grafunder 1989; Boniecki i in. 1997) podejmowała badania i analizowała zagadnienia związane z komputerową symulacją deformacji płyt trójwarstwowych modelu Hoffa, które poddano losowemu obciążeniu o rozkładzie normalnym, oraz z wpływem losowości cech wypełniacza (rdzenia) na rozkład składowych wektora przemieszczeń ugiętej płyty trójwarstwowej (Boniecki, Dworecki 1995; Boniecki i in. 2000). W pracy zbiorowej pod redakcją Magnuckiego i Ostwalda (2001) omówiono problemy dotyczące stabilności i optymalnego kształtowania poszczególnych warstw w celu uzyskania najlepszych w danych warunkach właściwości struktury trójwarstwowej.

Staszak i in. (2022) przedstawili dwa podejścia do obliczania płyt trójwarstwowych modelu Hoffa. W pierwszym zaprezentowali algorytm obliczeniowy przy zastosowaniu metody różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym, przyjmując rzeczywiste parametry geometryczne i materiałowe. W drugim przypadku zastosowali metodę numerycznej homogenizacji płyty warstwowej, zastępując sztywność poszczególnych warstw jednorodną płytą zastępczą o sztywności zastępczej skorygowanej przy ścinaniu analitycznie wyprowadzonym współczynnikiem korekcyjnym ścinania. Porównując obydwie podejścia, autorzy stwierdzili, iż można przyjąć, że analiza statyczna płyty metodami uproszczonymi z wykorzystaniem homogenizacji numerycznej z analitycznym współczynnikiem korekcji ścinania jest właściwa i może być zastosowana do konstrukcji warstwowych.

Ciekawe podejście do homogenizacji, która pozwala uprościć model obliczeniowy i zastąpić skomplikowaną strukturę kompozytową jednorodną płytą, zaproponowali Staszak i in. (2021). Wyprowadzili numeryczną metodę homogenizacji opartą na równoważności energii odkształcenia w prefabrykowanych płytach betonowych zbrojonych stalowymi kratownicami przestrzennymi, homogenizując je do pojedynczego elementu płytowego o efektywnej sztywności.

Wachowiak i Wilde (1966) oraz Wilde (1966) zajmowali się metodą różnic skończonych (MRS) w ujęciu wariacyjnym w poszukiwaniu rozwiązań zagadnień z zakresu teorii powłok. Podali również funkcjonal opisujący energię odkształcenia sprężystego dla płyt trójwarstwowych, który wykorzystwała autorka monografii i który był podstawą wykonanych obliczeń numerycznych prezentowanych w pracy.

3.2. Rozwiązania materiałowe okładzin

Stropowe płyty trójwarstwowe nie były dotychczas stosowane w praktyce. Mikołajczak (1963) wykonał badania modelowe płyt trójwarstwowych, a kilka pilotażowych płyt o rozpiętości 3,0 m oraz 6,0 m i szerokości 1,2 m (Buczkowski 1981; Mikołajczak

i in. 1975), o których napisano w punkcie 3.1, miało okładziny żelbetowe o grubości od 4 do 6 cm, a rdzeń z lekkiego materiału izolacyjnego miał grubość od 8 do 13 cm. Okładziny betonowe w płytach trójwarstwowych modelu Hoffa muszą spełniać założenia teorii płyt cienkich.

Do wykonania okładzin stropowych płyt trójwarstwowych można zastosować tradycyjny beton lub beton wykonany na kruszywie piaskowym (odpadowym). Ziarkiewicz (2018) w rozprawie doktorskiej omówił zagadnienie wykorzystania piasku drobnokruszywowego w belkach z fibrokompozytu. Z danych zebranych przez Europejskie Stowarzyszenie Kruszyw (UEPG) w latach 2013–2014 wynika, że w krajach europejskich wytwarzano około 2,5 mld t kruszyw rocznie, z czego udział kruszyw żwirowo-piaskowych stanowił 39%. Większość kruszyw, niemal 91%, pochodzi ze złóż kopalni lądowych. W Polsce mamy zróżnicowane występowanie kruszyw piaskowo-żwirowych pod względem ilościowym i jakościowym. Na północy, jak podkreślił autor, znajdują się złoża piaszczyste pochodzenia lodowcowego i wodnolodowcowego, charakteryzujące się małą zawartością frakcji żwirowych i jednocześnie dużą zawartością piasku drobnego. Przyjmuje się, że około 90% złóż kruszyw grubych występuje w regionie południowym Polski, 6% w środkowym i 4% w północnym. Na północy kraju uwarunkowania geologiczne zmuszają producentów kruszyw do pozyskiwania kruszyw grubych poprzez hydroklastyfikację. Efektem są hałdy piasku, który stanowi od 75% do 80% całości urobku poddanego hydroklastyfikacji. Piasek traktowany jest jako odpad, zatem odpad wydobywczy definiuje się jako odpady powstające przy poszukiwaniu, wydobywaniu, fizycznej i chemicznej przeróbce rud oraz innych kopalin. Wyrobiska te powinny być poddane kosztownej rekultywacji. Alternatywą jest wykorzystanie tego piasku odpadowego jako pełnowartościowego surowca budowlanego, stanowiącego podstawowy składnik kompozytu zbrojonego włóknami stalowymi (Ziarkiewicz 2018). Zastosowanie drobnokruszywowego piasku w kompozycie z dodatkiem włókien stalowych było tematem badań pracowników naukowych Politechniki Koszalińskiej (Głodkowska, Kobaka 2012, 2013; Głodkowska, Laskowska-Bury 2014, 2015).

Przedmiotem rozprawy Ziarkiewicza był fibrokompozyt drobnokruszywowy na bazie kruszywa odpadowego z zawartością włókien stalowych stanowiącą 1,2% objętości kompozytu ($94,5 \text{ kg/m}^3$), wykorzystany jako materiał konstrukcyjny. Celem pracy była ocena metod wymiarowania zginanych elementów fibrobetonowych wg RILEM TC-162-TDF oraz prenormy *fib Model Code for Concrete Structures* (2010) – z uwagi na międzynarodowy charakter tych przepisów – pod kątem możliwości zastosowania metod do projektowania zginanych elementów wykonanych z fibrokompozytu na bazie kruszyw odpadowych. Przeprowadzone badania eksperymentalne potwierdziły, że dodatek włókien stalowych do kompozytu drobnokruszywowego przyczynił się do zwiększenia nośności na zginanie, zmniejszenia szerokości rozwarcia rys prostopadłych i ugięć oraz umożliwił częściową redukcję zbrojenia konwencjonalnego. Badania wykazały, że możliwe jest projektowanie zginanych elementów konstrukcyjnych wykonanych z fibrokompozytu drobnokruszywowego

na podstawie metod wymiarowania wg rekomendacji RILEM TC-162-TDF i prenormy *fib Model Code for Concrete Structures*, po weryfikacji eksperymentalnej i odpowiedniej korekcie. Badania te pozwoliły na opracowanie wdrożenia fibrokompozytu na bazie piasku drobnokruszywowego do praktyki inżynierskiej.

3.3. Beton zbrojony włóknami

Głównymi celami autorki było opracowanie praktycznej metody obliczania płyt trójwarstwowych, a także wskazanie możliwości wykorzystania do konstrukcji płyt odpadowego kruszywa piaskowego pozostającego po hydroklastyfikacji, którego hałdy zalegają na Pomorzu Zachodnim.

Korzystając z wyników badań Ziarkiewicza (2018), można te cele uzyskać. Wykazał on również, że dodatek włókien stalowych do kompozytu wykonanego na bazie kruszyw odpadowych w istotny sposób przyczynia się do zwiększenia nośności na zginanie elementów konstrukcyjnych, zmniejsza szerokość rozwarcia rys prostopadłych i ugięć oraz umożliwia częściową redukcję zbrojenia konwencjonalnego. Poprzez zastosowanie odpowiedniego zbrojenia można zapewnić wymaganą dużą nośność betonu na rozciąganie.

W wielu pracach naukowych poruszane jest też zagadnienie kształtu włókien. Rodzaj włókna i średnica wpływają na przyczepność zbrojenia rozproszonego do matrycy cementowej, mają też na nią wpływ krótko- i długotrwały. Wśród podstawowych przekrojów włókien są m.in. włókna pryzmatyczne, nieregularne oraz łączone. Włókna mogą być proste lub zakończone haczykami, mogą być wykonane z materiałów takich jak: szkło, stal, tworzywo sztuczne, bazalt. Włókna były tematem zainteresowań i badań takich naukowców, jak: Chajec, Sadowski (2020), Facconi i in. (2016), Głodkowska i in. (2013), Grimaldi, Luciano (2000), Habel (2004), Henager, Doherty (1976), Holschemacher i in. (2010), Mayer, Kaczmar (2008), Serbeńska (2014), Stankiewicz (2008), di Prisco i in. (2013).

Popularne wśród badaczy stały się włókna polipropylenowe. Dość wnikliwie modelowaniem i badaniami doświadczalnymi betonu wysokowartościowego zbrojonego takimi właśnie włóknami w aparacie ciągliwości zajmował się Demby (2022). Kompozyty ze zbrojeniem z włókien syntetycznych wykazują dobrą trwałość przy działaniu zmiennych warunków atmosferycznych, zachowują stabilność w większości środowisk agresywnych chemicznie. Cechy te przyczyniły się do wzrostu zainteresowania włóknami polipropylenowymi. Temat zastosowania warstwy nadbetonu z użyciem włókien polipropylenowych i stalowych w elementach płytowych podjęła Sadowska-Buraczewska i in. (2020) wraz z zespołem.

Innym rodzajem włókien niż stalowe są kompozyty z zastosowaniem włókien szklanych, o których pisali m.in. Nowak i Brzezicki (2020). W porównaniu z betonem zwykłym beton zbrojony włóknami stalowymi charakteryzuje się większą wytrzymałością na rozciąganie przy zginaniu, na ściskanie oraz ścinanie, a także

zwiększoną odpornością zmęczeniową i udarnością. Ze względu na te właściwości wykorzystywany jest w elementach narażonych na działanie dużych obciążeń. Włókna w betonie są aktywne z chwilą pojawienia się w nim mikrorys. Według *fib Model Code for Concrete Structures* (2010) główną korzyścią z dodawania włókien do betonu lub zaprawy jest to, iż generują resztkową wytrzymałość na rozciąganie po zarysowaniu, w kombinacji z dużymi odkształceniami przy rozciąganiu, wykazując tym samym większą ciągliwość i odporność mechaniczną. Właściwości kompozytu zależą zarówno od charakterystyki składników, jak i ich proporcji. Projektowanie konstrukcji z fibrobetonu opiera się na resztkowej wytrzymałości po zarysowaniu zapewnionej przez zbrojenie z włókien.

Według Zycha (2010) fibrobetony charakteryzują się wysoką rysoodpornością, wysoką wytrzymałością na ściskanie i rozciąganie, odpornością uderzeniową, mrozoodpornością oraz większą odpornością na skurcz podczas utwardzania betonu. Ze względu na wysoką odporność na znaczne obciążenia fibrobetony wykorzystuje się do wykonywania posadzek przemysłowych, nawierzchni lotnisk oraz w konstrukcjach mostowych, a także prefabrykatów betonowych, betonu natryskiwanego itp. Głównymi powodami dodawania włókien do betonu są zwiększenie twardości, wytrzymałości na zginanie oraz poprawa odporności na pękanie otrzymanej mieszanki.

Analizując pracę Glinickiego (2010), można wnioskować, że najwłaściwszą średnicą kruszywa w matrycy betonowej są ziarna nieprzekraczające 8 mm. Autor pisze, że problem z kruszywem większej średnicy prowadzi do powstawania tzw. jeży. Aby temu zapobiec, muszą być: właściwa technologia produkcji betonu, odpowiednia ilość dobranego włókna, długości i średnicy włókna stalowego, adekwatny superplastyfikator, a także odpowiednia kolejność dozowania składników w zależności od rodzaju kruszywa i jego średnicy. Ważne jest, aby włókna były równomiernie rozprowadzone w mieszance betonowej celem uzyskania jednorodności materiału. Stosowanie właściwej domieszki upłynniającej powoduje lepszą urabialność, zmniejszenie porowatości oraz – jak wspomniano wyżej – eliminację „jeży” (Sadowska-Buraczewska 2017).

Rozkład włókien stalowych w matrycy betonowej opisuje się na podstawie odniesienia do wyidealizowanych struktur zbrojenia, o czym pisał Glinicki (2010).

W *fib Model Code for Concrete Structures* (2010) zawartość procentowa włókien waha się w granicach 0,5–3% objętości mieszanki betonowej, a większa zawartość włókna powoduje wzrost wytrzymałości na rozciąganie przy zginaniu. Zawartość włókien stalowych (fibry) powoduje mniejszy skurcz betonu. Korzystając z formuły (3.1) [*fib Model Code for Concrete Structures* 2010 (formuła 1.19); Garas i in. 2009], możemy obliczyć nominalną zawartość włókien V_f :

$$V_f = W_f / \rho_f \quad (3.1)$$

gdzie:

W_f – zawartość włókien w jednostkach masy w $1/m^3$,

ρ_f – gęstość stali w kg/m^3 .

Przyczepność zostaje utracona przy zjawisku ścięcia matrycy betonowej, o czym pisali Jasiczak i Mikołajczak (2003) oraz Kaszyńska (2002). Fibrokompozyt przy zastosowaniu włókna stalowego zachowuje się jak quasi-plastyczny materiał, co pozwala zmniejszyć koncentrację naprężeń w betonie.

Beton jest jednym z najbardziej rozpowszechnionych materiałów konstrukcyjnych. Łatwa produkcja, niska cena i korzystne właściwości mechaniczne powodują, że jest atrakcyjnym materiałem. Element wykonany z betonu zwykłego ulega zniszczeniu jak materiał kruchy, co jest jego wadą, a próbka z włóknem stalowym utrzymuje nośność i pomimo dalszej deformacji jednak się nie niszczy (Jasiczak i in. 2008), co stwierdzono wg *fib Model Code for Concrete Structures* (2010).

Pod wpływem obciążenia zarysowanie w betonach z włóknem rozproszonym jest dość ograniczone. Według Jasiczaka i in. (2008) pęknięcia ulegają redukcji poprzez modyfikację mikrorys powstających w fibrobetonie. W chwili pojawienia się pęknięć lub rys struktura fibrobetonu staje się nieciągliwa, a włókna stalowe poprzez pęknięcie przenoszą siły z jednej strony na drugą, co powoduje zmniejszenie naprężeń na końcu pęknięcia.

Według *fib Model Code for Concrete Structures* (2010) rola włókien ujawnia się po zarysowaniu. Siły rozciągające oraz zależności od ściskania (przy osiowym ściskaniu próbki walcowej) dla betonu niezbrojonego stosuje się również dla fibrobetonu. Cechuje się on zwiększoną wytrzymałością na rozciąganie oraz odpornością na propagację zarysowań. Zależność ta jest widoczna po wystąpieniu pierwszej rysy. Następuje zatem wzmocnienie materiału, czyli fibrobetonu, w przeciwieństwie do tradycyjnego betonu, w którym zachodzi osłabienie, co wskazano w *fib Model Code for Concrete Structures* (2010).

Według *fib Model Code for Concrete Structures* (2010) zauważono, że w przypadku zachowania próbki z osłabieniem odkształcenia koncentrują się w jednej rysie, natomiast w przypadku zachowania ze wzmocnieniem pojawia się wiele rys przed osiągnięciem szerokości granicznej rysy.

Zachowanie materiału z osłabieniem przy rozciąganiu może odpowiadać zachowaniu konstrukcji ze wzmocnieniem przy zginaniu, a osłabienie materiału przy zginaniu może wystąpić przy monotonicznym przyroście obciążenia konstrukcji (*fib Model Code for Concrete Structures* 2010).

3.4. Materiały stosowane na rdzeń

Rdzeń w płytach trójwarstwowych może być wykonany z materiałów o niewielkim ciężarze i dobrych parametrach izolacyjnych, np. ze styropianu, szkła piankowego, z perlitobetonu, keramzytu itp. W tabeli 3.1 zamieszczono informacje o ciężarach i współczynnikach przewodzenia ciepła λ dla wybranych materiałów.

Tabela 3.1. Współczynniki przewodzenia ciepła dla wybranych materiałów

Nazwa materiału	Gęstość w stanie suchym (średnia) [kg/m ³]	Współczynnik przewodzenia ciepła λ [W/mK]	
		warunki średniowilgotne	warunki wilgotne
Żelbet	2500	1,70	1,80
Beton zwykły na kruszywie kamiennym	2400	1,70	1,80
	2200	1,30	1,50
	1900	1,00	1,10
Beton z kruszywa keramzytowego	1600	0,90	1,00
	1400	0,72	0,80
	1200	0,54	0,60
	1000	0,39	0,43
Szkło piankowe białe	300	0,12	0,13
Szkło piankowe czarne	180	0,07	0,07
Styropian	10	0,045	0,045
	do 40	0,040	0,040
Perlit	60–160	0,045–0,065	–

Źródło: oprac. na podstawie normy PN-EN ISO 6946:1999 oraz wartości podanych przez producentów.

Opór cieplny przegrody R_T oraz współczynnik przenikania ciepła przez przegrodę U oblicza się z zależności:

$$R_T = R_{si} + \sum R_i + R_{se} \quad (3.2)$$

$$R_i = \frac{d}{\lambda}, \quad U = \frac{1}{R_T} \quad (3.3)$$

gdzie:

R_{si} – opór przejmowania ciepła na wewnętrznej powierzchni [m²K/W],

R_{se} – opór przejmowania ciepła na zewnętrznej powierzchni [m²K/W],

R_i – obliczeniowy opór każdej warstwy [m²K/W],

R_T – całkowity opór cieplny [m²K/W],

U – współczynnik przenikania ciepła [W/(m²K)],

λ – współczynnik przewodzenia ciepła [W/mK],

d – grubość warstwy materiału w komponencie [m].

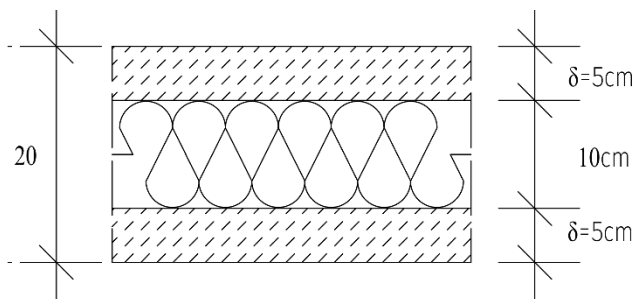
Dla przykładu obliczono opór cieplny płyt o grubości 20 cm – w całości żelbetowej oraz o okładzinach żelbetowych i z rdzeniem ze styropianu:

- płyta żelbetowa o grubości np. 20 cm

$$d = 0,2 \text{ m}; \quad \lambda = 1,70 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$$

$$R_i = \frac{d}{\lambda} = \frac{0,20}{1,70} = 0,118 \frac{\text{m}^2\text{K}}{\text{W}}$$

- płyta trójwarstwowa z okładzinami żelbetowymi, rdzeń ze styropianu



Rys. 3.3. Płyta trójwarstwowa z okładzinami żelbetowymi, rdzeń ze styropianu

Źródło: oprac. własne.

$\delta = 5 \text{ cm}$, rdzeń o grubości 10 cm – styropian ($\lambda = 0,045 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$)

$$R_i = \frac{2\delta}{1,7} + \frac{0,10}{0,045} = \frac{0,10}{1,7} + \frac{0,10}{0,045} = 0,0588 + 2,222 = 2,281 \frac{\text{m}^2\text{K}}{\text{W}}$$

Opór cieplny płyty z rdzeniem styropianowym wzrósł $\frac{2,281}{0,118} \cong 19,4$ razy.

Podany przykład pokazuje, jakie zalety można uzyskać pod względem izolacyjności, stosując płyty trójwarstwowe w stosunku do płyty żelbetowej o tej samej grubości.

3.5. Podsumowanie

Płyty trójwarstwowe można również produkować jako sprężone, wówczas ich powierzchnie dolna i górna będą gładkie. Nie będzie też konieczne wykonywanie nadbetonu, a prace betonowe będą ograniczone do wypełnienia zamków między płytami. Przy układaniu płyt nie trzeba będzie stosować podpór wewnętrznych.

Buczkowski (1981) w swojej pracy sugerował, że powodem niestosowania płyt trójwarstwowych w budownictwie jest brak przystępnych metod obliczeniowych takich płyt. Wynika to w głównej mierze z dużego nakładu pracy rachunkowej potrzebnej do uzyskania rozwiązań. Dla modelu Hoffa równania równowagi dane są w postaci układu trzech równań różniczkowych cząstkowych.

Dalsza część monografii poświęcona jest właśnie obliczaniu, badaniom modelowym i rozwiązaniom konstrukcyjnym płyt trójwarstwowych modelu Hoffa przeznaczonych do użytkowania jako płyty stropowe.

4. Płyty trójwarstwowe modelu Hoffa – obliczenia statyczne

4.1. Informacje ogólne

Od połowy XX wieku znana jest teoria płyt trójwarstwowych modelu Hoffa (1950). Model płyt warstwowych Hoffa zakłada, że konstrukcja składa się z trzech warstw i jest symetryczna względem płaszczyzny środkowej. Na warstwę środkową (rdzeń) stosuje się najczęściej lekki materiał o bardzo dobrych parametrach izolacyjnych (termicznych i akustycznych), a okładziny stanowią płyty o odpowiedniej grubości, które można wykonać jako betonowe również na kruszywie recyklingowym lub kruszywie odpadowym. W literaturze przedmiotu znaleźć można nieliczne wyniki obliczeń i badań stropowych płyt trójwarstwowych (w skali naturalnej) z rdzeniem ze szkła piankowego białego, czarnego i styropianu (Buczowski 1981; Mikołajczak i in. 1975; Mikołajczak 1977). Badane płyty charakteryzowały się wieloma zaletami: miały dużą nośność, ugięcia mieściły się poniżej wartości dopuszczalnych, ciężar metra kwadratowego był mniejszy niż płyt jednorodnych z dociepleniem, miały dobrą izolacyjność termiczną i akustyczną, wymagały mniejszego nakładu pracy na budowie (por. rozdz. 3).

4.2. Zasadnicze równania teorii płyt trójwarstwowych

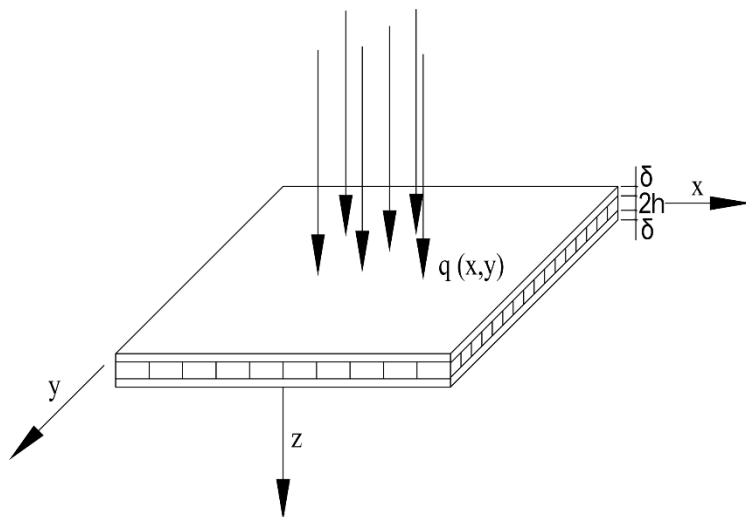
Dla przyjętego modelu płyt trójwarstwowych obowiązują założenia:

- płyta składa się z trzech warstw i jest symetryczna względem płaszczyzny środkowej;
- materiał warstwy środkowej jest nieodkształcalny w kierunku pionowym, $E_z = \infty$, natomiast $E_x = E_y = 0$ oraz $G_{xy} = 0$. W warstwie środkowej występują więc tylko naprężenia tnące τ_{xz}^w i τ_{yz}^w , rozłożone równomiernie wzdłuż grubości. Wskaźnik „w” oznacza, że dana wielkość odnosi się do warstwy środkowej;
- warstwy zewnętrzne spełniają wszystkie założenia teorii płyt cienkich izotropowych oraz teorii tarcz.

Zgodnie z powyższymi założeniami otrzymano:

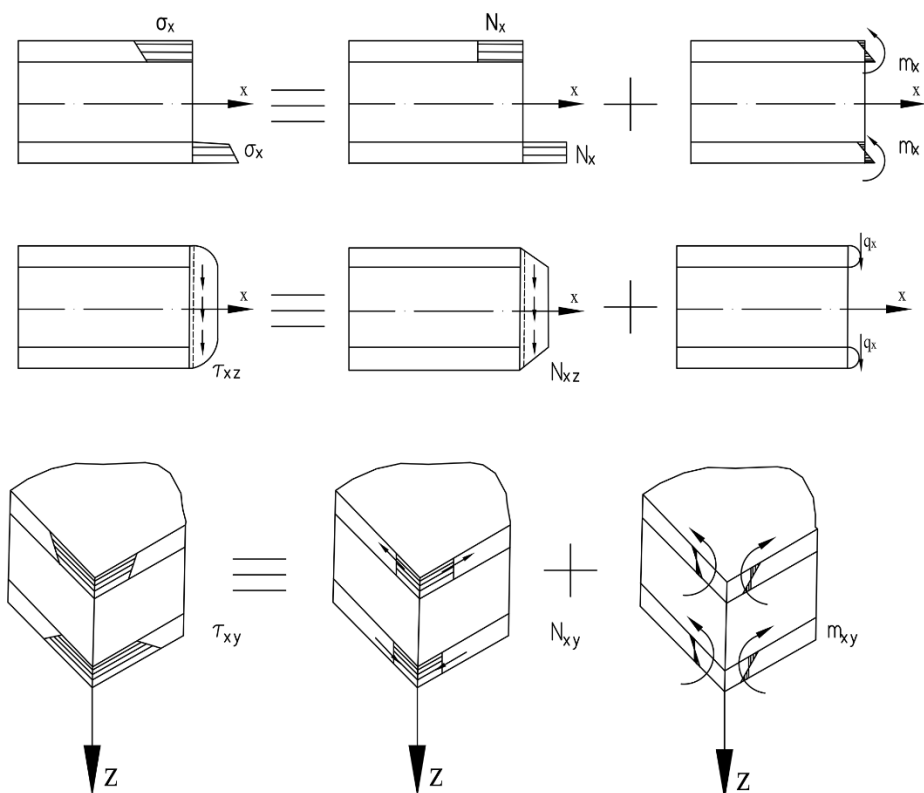
- $\sigma_x^w = \sigma_y^w = 0$, $\tau_{xy}^w = 0$, τ_{xz}^w i τ_{yz}^w rozłożone równomiernie,
- $w^w = w_{pl.d} = w_{pl.g}$ (ugięcie warstwy środkowej jest identyczne jak ugięcie warstw dolnej i górnej).

Przyjęty układ współrzędnych oraz podstawowe oznaczenia sił wewnętrznych pokazano na rys. 4.1 i 4.2.



Rys. 4.1. Przyjęty układ współrzędnych oraz podstawowe oznaczenia: δ – grubość okładzin, $2h$ – grubość rdzenia, $q(x,y)$ – obciążenie prostopadłe do płaszczyzny płyty

Źródło: oprac. na podstawie Mikołajczak, Buczkowski (1977).



Rys. 4.2. Wykresy naprężeń normalnych i stycznych wraz z rozłożeniem na siły składowe w przekroju płyty trójwarstwowej

Źródło: oprac. na podstawie Buczkowski (1977).

Wielkości statyczne określone są przez przemieszczenia poniższymi wyrażeniami różniczkowymi 4.1 ÷ 4.5 (Mikołajczak, Buczkowski 1977).

Siły tarczowe w warstwie dolnej:

$$N_x = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$N_y = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (4.1)$$

$$N_{xy} = \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Naprężenia styczne w wypełnieniu i wypadkowe siły tnące:

$$\tau_{xz}^w = G_w \left(\frac{u}{h} + \frac{2h+\delta}{2h} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz}^w = G_w \left(\frac{v}{h} + \frac{2h+\delta}{2h} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (4.2)$$

$$N_{xz} = G_w(2h + \delta) \left[\frac{u}{h} + \frac{2h+\delta}{2h} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right]$$

$$N_{yz} = G_w(2h + \delta) \left[\frac{v}{h} + \frac{2h+\delta}{2h} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

Wielkości płytowe:

$$\begin{aligned} m_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ m_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$m_{xy} = -(1 - \nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w)$$

$$q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w)$$

Naprężenia normalne w warstwach zewnętrznych:

$$\sigma_{x \text{ } \acute{s}r} = \frac{N_x}{\delta}$$

$$\sigma_{y \text{ } \acute{s}r} = \frac{N_y}{\delta} \quad (4.4)$$

$$\sigma_{x \text{ } max} = \sigma_{x \text{ } \acute{s}r} + \frac{6m_x}{\delta^2}$$

$$\sigma_{y \text{ } max} = \sigma_{y \text{ } \acute{s}r} + \frac{6m_y}{\delta^2}$$

Wypadkowe siły wewnętrzne dla całej płyty:

$$M_x = N_x(2h + \delta) + 2m_x$$

$$M_y = N_y(2h + \delta) + 2m_y$$

$$M_{xy} = N_{xy}(2h + \delta) + 2m_{xy} \quad (4.5)$$

$$Q_x = N_{xz} + 2q_x$$

$$Q_y = N_{yz} + 2q_y$$

Dla modelu o przedstawionych założeniach równania równowagi są dane w postaci układu trzech równań różniczkowych cząstkowych wyprowadzonych przez Hoffa (1950). Poniżej zaprezentowano te równania zaczerpnięte z pracy Mikołajczaka (1965). Zagadnienie jest opisane przez trzy przemieszczenia: $u(x,y)$ w płaszczyźnie środkowej dolnej warstwy w kierunku osi x , $v(x,y)$ w płaszczyźnie środkowej dolnej warstwy w kierunku osi y oraz $w(x,y)$ ugięcie pionowe płyty jednakowe dla wszystkich warstw.

$$\begin{aligned}
& \left[D \frac{1-v^2}{E\delta} \nabla^2 \nabla^2 - \frac{(1-v^2)G_w(2h+\delta)^2}{4E\delta h} \nabla^2 \right] w - \frac{(1-v^2)G_w(2h+\delta)}{2E\delta h} \frac{\partial u}{\partial x} - \\
& \quad - \frac{(1-v^2)G_w(2h+\delta)}{2E\delta h} \frac{\partial v}{\partial y} = q \frac{(1-v^2)}{2E\delta} \\
& - \frac{(1-v^2)G_w(2h+\delta)}{2E\delta h} \frac{\partial w}{\partial x} + \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{(1-v^2)G_w}{E\delta h} \right] u + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4.6.) \\
& - \frac{(1-v^2)G_w(2h+\delta)}{2E\delta h} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{(1-v^2)G_w}{E\delta h} \right] v = 0
\end{aligned}$$

W powyższych równaniach przyjęto oznaczenia: E , ν – moduł Younga i współczynnik Poissona materiału warstw zewnętrznych, G_w – moduł odkształcenia postaciowego warstwy środkowej, δ i $2h$ – grubości warstw zewnętrznych i środkowej, $D = E\delta^3/12(1-\nu^2)$ – sztywność płytowa warstwy zewnętrznej (okładziny).

Z uwagi na duży nakład pracy rachunkowej w literaturze przedmiotu mało jest podanych rozwiązań analitycznych dla omawianych płyt trójwarstwowych.

4.3. Naturalne warunki brzegowe

Omawiając warunki brzegowe, należy zauważyć, że określeń znanych z teorii płyt cienkich, takich jak krawędź swobodna, krawędź swobodnie podparta i krawędź zamocowana, nie da się przenieść bezpośrednio do teorii płyt warstwowych ze względu na ich wieloznaczność. W swojej pracy Gołaś (1969) przy użyciu rachunku wariacyjnego wykazał, że istnieje szesnaście jednorodnych naturalnych warunków brzegowych dla omawianych płyt trójwarstwowych modelu Hoffa.

Układ równań różniczkowych (4.6) wymaga spełnienia czterech warunków na każdym brzegu. Przez analogię do płyt zwykłych przyjmujemy, że „brzegiem swobodnie podpartym” jest krawędź spełniająca warunki antysymetrii. Wszystkie inne warunki podparcia nazywamy „brzeg zamocowany”. Wynika z tego, że pojęcie brzegu zamocowanego jest wieloznaczne i w każdym przypadku musi być ściśle określone przez wyrażenia analityczne.

Na zamieszczonych w niniejszym rozdziale rysunkach przyjęto identyczne oznaczenia graficzne jak dla płyt zwykłych.

Na brzegu swobodnie podpartym (rys. 4.3) muszą być spełnione następujące warunki:

$$\begin{aligned}
w &= 0 - \text{ugięcie} \\
m_x &= 0 - \text{moment zginający} \\
N_x &= 0, N_{xy} = 0 - \text{siły tarczowe}
\end{aligned} \quad (4.7)$$

Warunki brzegowe dla brzegu swobodnego (rys. 4.3) przedstawiają się zależnościami:

$$m_y = 0, Q_y = 0, N_x = 0, N_{xy} = 0 \quad (4.8)$$

4.4. Zastosowanie energetycznej metody różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym do poszukiwania rozwiązań dla płyt trójwarstwowych i płyt jednorodnych, izotropowych

W literaturze przedmiotu brak jest praktycznych rozwiązań dla płyt trójwarstwowych modelu Hoffa. Wynika to z konieczności poświęcenia dużego nakładu pracy rachunkowej do ich uzyskania oraz dobrego opanowania metod rozwiązywania równań różniczkowych wyższego rzędu. Biorąc to pod uwagę, wydaje się, że praktycznych rozwiązań dla tego typu ustrojów można poszukiwać na drodze obliczeń numerycznych, stosując metodę różnic skończonych. Buczkowski (1981) przedstawił zastosowanie metody wariacyjnego ujęcia różnic skończonych do poszukiwania rozwiązań dla wspomnianych płyt.

Istota zagadnienia polega na wyznaczeniu minimum dla funkcjonału energii odkształcenia sprężystego zginanej płyty trójwarstwowej. Funkcjonał ten ma postać (Mikołajczak, Buczkowski 1977; Wachowiak, Wilde 1966):

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2} \iint_S \left\{ 2D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{2E\delta}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + 2hG_w \left[\frac{u^2}{h^2} + 2\frac{u}{h} \frac{2h+\delta}{2h} \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(2h+\delta)^2}{4h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{v^2}{h^2} + 2\frac{v}{h} \frac{2h+\delta}{2h} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{(2h+\delta)^2}{4h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy - \\ - \iint_S (q_z w + q_x u + q_y v) dx dy \end{aligned} \quad (4.9.)$$

Przyjmijmy, że poszukujemy funkcji $u(x,y)$, $v(x,y)$, $w(x,y)$ w postaci dyskretnych wartości w węzłach siatki podziału płyty. Pochodne w funkcjonałe (4.9.) należy zastąpić odpowiednimi schematami różnicowymi (Kączkowski 1968). Podstawiając w nim wyrażenia na pochodne w postaci różnicowej i wykonując całkowanie numeryczne, otrzymuje się funkcję V jako funkcję wielu zmiennych.

$$V = V(w_{ik}, u_{ik}, v_{ik}) \quad (4.10)$$

gdzie w_{ik} , u_{ik} , v_{ik} są składowymi wektora przemieszczeń w poszczególnych węzłach przyjętej siatki podziału.

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcji wielu zmiennych jest

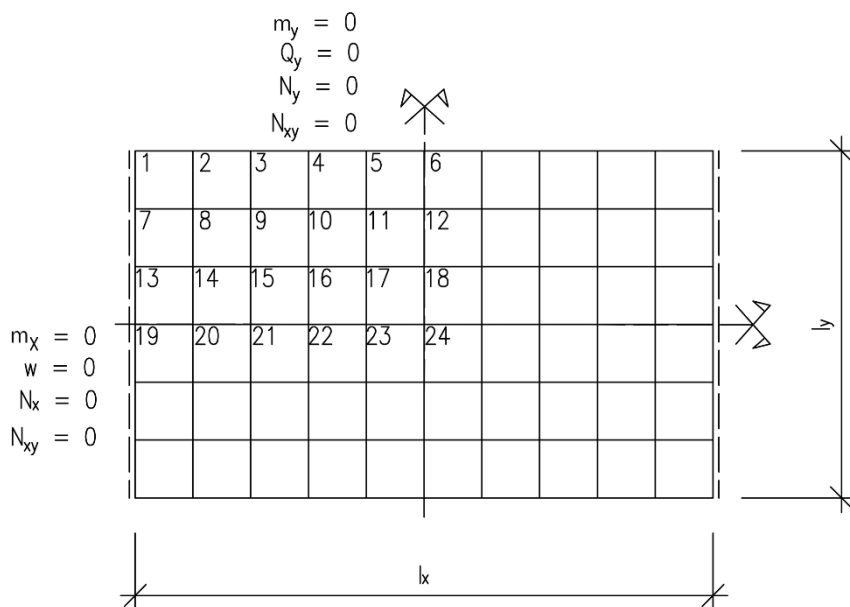
$$\frac{\partial V}{\partial w_{ik}} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial u_{ik}} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial v_{ik}} = 0 \quad (4.11)$$

dla każdego w_{ik} , u_{ik} , v_{ik} .

Nieznane przemieszczenia w węzłach siatki podziału występują w równaniu (4.10) w formie kwadratowej. Z zależności (4.11) otrzymuje się na wyznaczenie przemieszczeń symetryczny układ algebraicznych równań liniowych. Liczba równań odpowiada liczbie niewiadomych.

Istotną zaletą wariacyjnego ujęcia metody różnic skończonych jest to, że w przyjętym układzie niewiadomych należy spełnić tylko geometryczne warunki brzegowe, a warunki statyczne są spełnione w sposób naturalny przez sam funkcjonal.

Na każdym brzegu płyty trójwarstwowej wymagane jest spełnienie czterech warunków. Na rys. 4.3 pokazano przykładową siatkę podziału obliczanej płyty oraz zaznaczono wcześniej opisane warunki brzegowe dla płyty trójwarstwowej o krawędziach swobodnie podpartych i swobodnych.



Rys. 4.3. Przykładowa siatka podziału dla płyty trójwarstwowej o krawędziach swobodnie podpartych i krawędziach swobodnych z zaznaczonymi warunkami brzegowymi

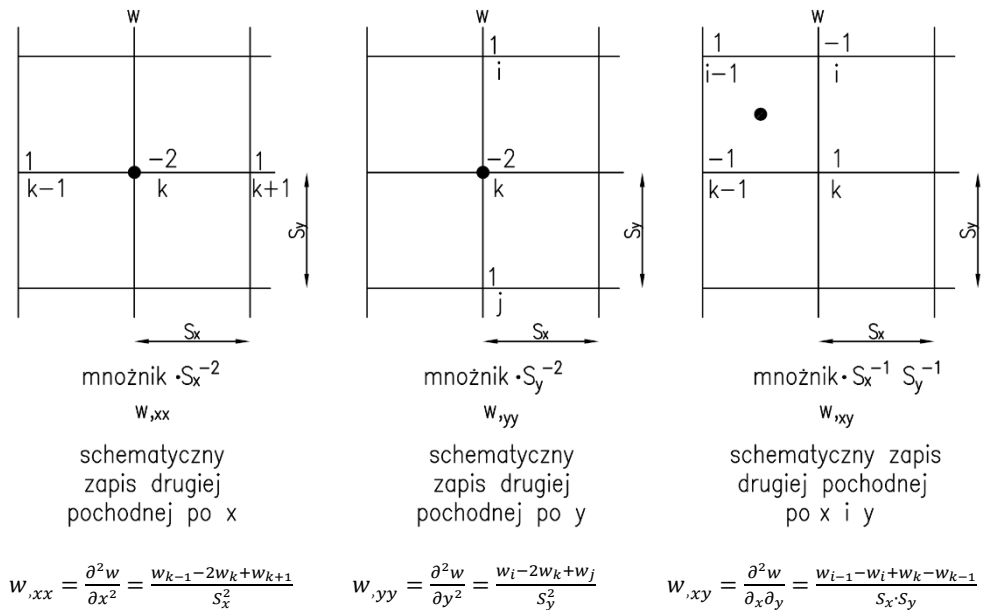
Źródło: oprac. własne.

W celu uproszczenia obliczeń do dalszych rozważań przyjęto współczynnik Poissona $\nu = 0$. Dzięki temu znacznie upraszcza się funkcjonal energii odkształcenia sprężystego zginanej płyty (wzory 4.9, 4.12). Buczkowski (1977) zamieścił porównanie rozwiązań dla trójwarstwowego pasma płytowego dla $\nu = 0$ i 0,167. Z ich analizy wynikało, że uwzględnienie w obliczeniach $\nu = 0,167$ wpływa nieznacznie na uzyskane wyniki w porównaniu z uzyskanymi dla $\nu = 0$. Wartości ugięć różniły się max. o 2,5%, a największe różnice, dochodzące do 6,5%, dotyczyły naprężeń ścinających τ_{\max} .

W takim przypadku (dla $\nu = 0$) funkcjonal energii sprężystej zginanej płyty przyjmuje postać:

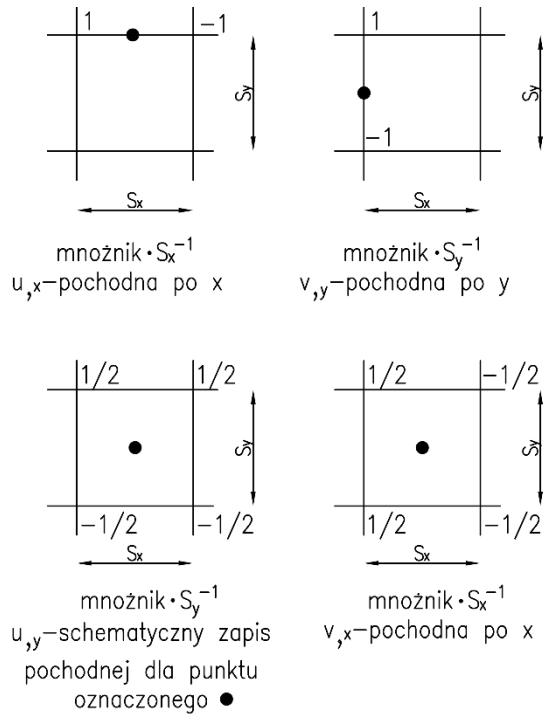
$$V = \frac{1}{2} \iint_S \left\{ 2D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + 2E\delta \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + 2hG_w \left[\frac{u^2}{h^2} + 2 \frac{u}{h} \frac{2h+\delta}{2h} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(2h+\delta)^2}{4h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{v^2}{h^2} + \frac{2v}{h} \frac{2h+\delta}{2h} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{(2h+\delta)^2}{4h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy - \iint_S (q_z w + q_x u + q_y v) dx dy \quad (4.12)$$

Poszukując funkcji u , v , w , które mają postać dyskretnych wartości w węzłach siatki podziału płyty, pochodne w funkcjonale (4.12) należy zastąpić schematami różnicowymi. Na rys. 4.4, 4.5, 4.6 i 4.7 pokazano przyjęte schematy różnicowe wraz z zaznaczonymi punktami, do których się one odnoszą.

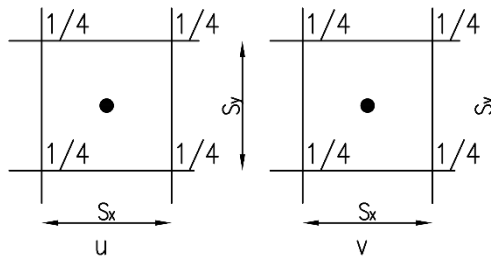


Rys. 4.4. Przyjęte schematy różnicowe dla pochodnych $w_{,xx}$, $w_{,yy}$, $w_{,xy}$

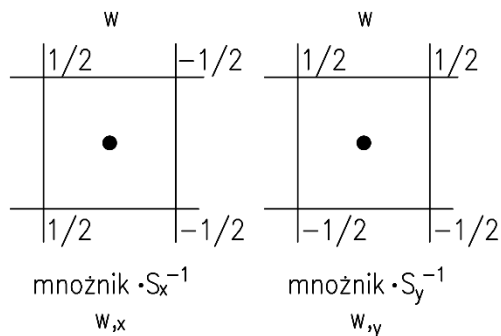
Źródło: oprac. własne.



Rys. 4.5. Przyjęte schematy różnicowe dla pochodnych $u_{,x}$, $u_{,y}$, $v_{,x}$, $v_{,y}$
 Źródło: oprac. własne.



Rys. 4.6. Przyjęte schematy różnicowe dla przemieszczeń u i v
 Źródło: oprac. własne.



Rys. 4.7. Przyjęte schematy różnicowe dla pochodnych $w_{,x}$ i $w_{,y}$

Źródło: oprac. własne.

Podstawiając wyrażenia na pochodne w postaci różnicowej i wykonując całkowanie numeryczne, otrzymuje się funkcję V jako funkcję wielu zmiennych w_{ik} , u_{ik} , v_{ik} (patrz wzór 4.10).

Przy budowie globalnych macierzy układów równań przemieszczeniowych należy podzielić obszar płyty regularną siatką linii. Dla przykładu obliczeniowego zamieszczonego w monografii (rys. 4.8) przyjęto siatkę podziału o oczkach kwadratowych, przy czym w kierunku długości płytę podzielono na 12 części (oczko siatki $s = \frac{l_x}{12}$), a w kierunku szerokości na 6 części ($s = \frac{l_y}{6}$) [rys. 4.8]. Ze względu na przyjęcie w obliczeniach przykładowych siatki podziału o oczkach kwadratowych i podziale wymiarów l_x i l_y jak opisano wyżej na 12 i 6 części obliczane płyty powinny mieć wymiary o stosunku $l_x : l_y = 2 : 1$. Do obliczeń przyjęto płytę o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych, a dwóch pozostałych swobodnych (rys. 4.8).

Przy rozpisywaniu macierzy układu równań przemieszczeniowych uwzględniono dwie osie symetrii, co w konsekwencji skutkowało tym, że do rozwiązania otrzymuje się układ równań o 69 niewiadomych (24 ugięcia „ w ” w węzłach siatki podziału, 24 przemieszczenia „ u ” w kierunku osi x oraz 21 przemieszczeń „ v ” w kierunku osi y). Jako obciążenie przyjęto dwa przypadki: obciążenie równomiernie rozłożone na całej płycie oraz obciążenie siłą skupioną przyłożoną w centralnym punkcie płyty. Siatkę podziału i schematy obciążeń pokazano na rys. 4.8.

Dla wygody budowania przemieszczeniowych równań różnicowych funkcjonal określony zależnością (4.12) podzielono na poszczególne składniki, wprowadzając przy tym oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 A &= 2E\delta \\
 B &= 2G_w h^{-1} \\
 C &= 2G_w h^{-1}(2h + \delta)
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

$$F = 0,5G_w h^{-1}(2h + \delta)^2$$

Przy powyższych oznaczeniach funkcjonał (4.12) przyjmie postać

$$V = \sum_{i=1}^7 V_i$$

gdzie:

$$V_1 = \iint_S D(w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2) dx dy$$

$$V_2 = \iint_S 2Dw_{,xy}^2 dx dy \quad (4.14)$$

$$V_3 = \frac{A}{2} \iint_S (u_{,x}^2 + v_{,y}^2) dx dy$$

$$V_4 = \frac{A}{4} \iint_S (u_{,y} + v_{,x})^2 dx dy$$

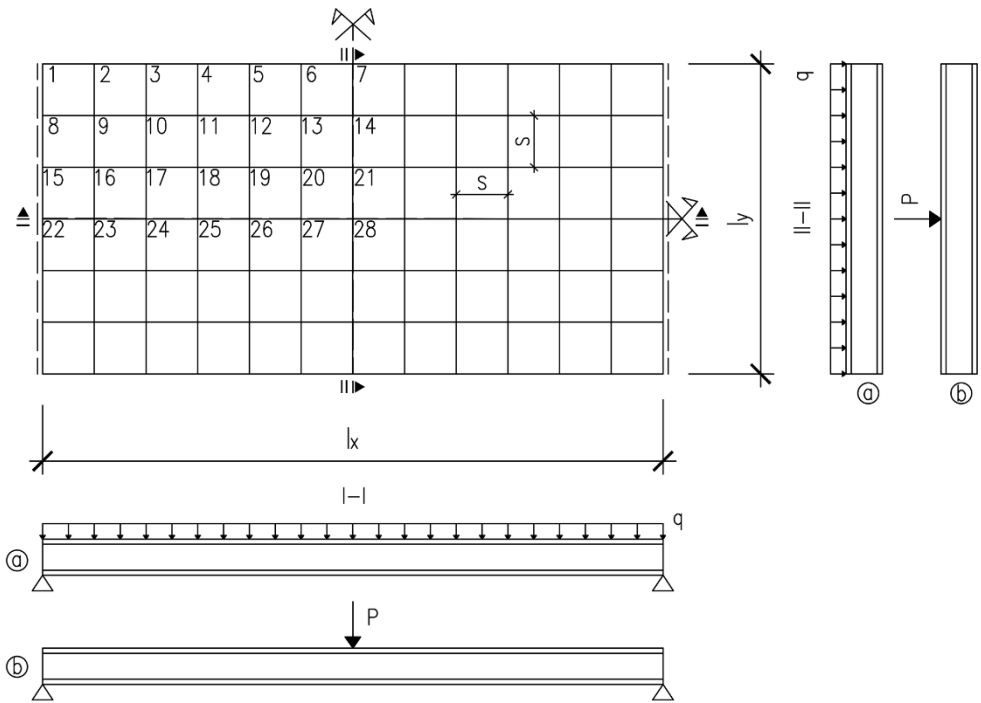
$$V_5 = \frac{B}{2} \iint_S (u^2 + v^2) dx dy$$

$$V_6 = \frac{C}{2} \iint_S (uw_{,x} + vw_{,y}) dx dy$$

$$V_7 = \frac{F}{2} \iint_S (w_{,x}^2 + w_{,y}^2) dx dy$$

Przyjmując powyższy podział funkcjonału energii na poszczególne składniki, zastosowano analogiczny sposób, jaki przyjął Buczkowski (1977), co doprowadziło do uzyskania pozytywnych wyników.

Poszczególne człony energii (4.14) $V_3 \div V_7$ dla płyty pokazanej na rys. 4.8, z uwzględnieniem dwóch osi symetrii, rozpisano na przyjętej siatce podziału (rys. 4.10 \div 4.14).

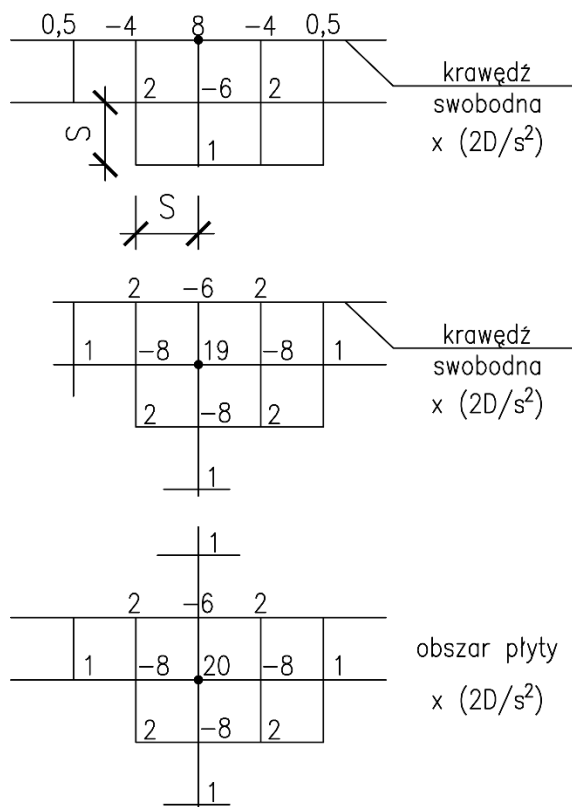


Rys. 4.8. Przyjęta siatka podziału dla „ćwiartki” płyty oraz schematy obciążeń: a) dla równomiernego obciążenia, b) dla siły skupionej

Źródło: oprac. własne.

Dla członów energii V_1 i V_2 skorzystano z gotowych schematów („gwiazd”) przedstawiających zapisy ilorazów różnicowych dla charakterystycznych punktów dla płyt jednorodnych, izotropowych. Schematy te (rys. 4.9) zaczerpnięto z pracy Buczkowskiego (2007) [oczka siatki kwadratowe o wielkości s i współczynnik Poissona $\nu = 0$]. Przy korzystaniu z nich należy uwzględnić warunki brzegowe.

Dla punktów leżących w obszarze płyty, biorąc pod uwagę sztywność dwóch okładzin 2D.



Rys. 4.9. Schematy odpowiadające fragmentowi energii $V_1 + V_2 = D \iint_S (w_{ixx}^2 + w_{iyy}^2 + 2w_{ixy}^2) dx dy$

Źródło: oprac. na podstawie Buczkowski (2007).

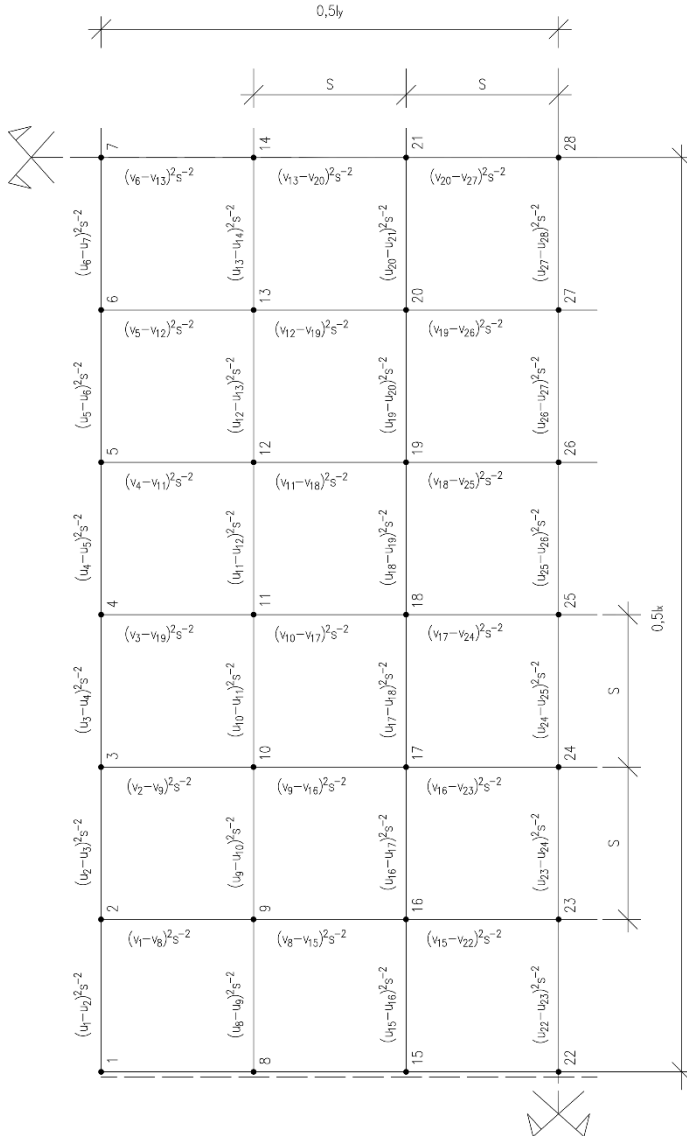
Podane na powyższych schematach wartości należy pomnożyć przez $\frac{2D}{s^2}$ (mnożnik ten dotyczy płyt trójwarstwowych; dla płyt jednorodnych wynosi $\frac{D}{s^2}$).

$$V_3 = 0,5A \iint (u_{ix}^2 + v_{iy}^2) dx dy$$

$$A = 2E\delta$$

$$v_{22} = v_{23} = v_{24} = v_{25} = v_{26} = v_{27} = v_{28} = 0 \text{ (symetria)}$$

$$u_7 = u_{14} = u_{21} = u_{28} = 0 \text{ (symetria)}$$



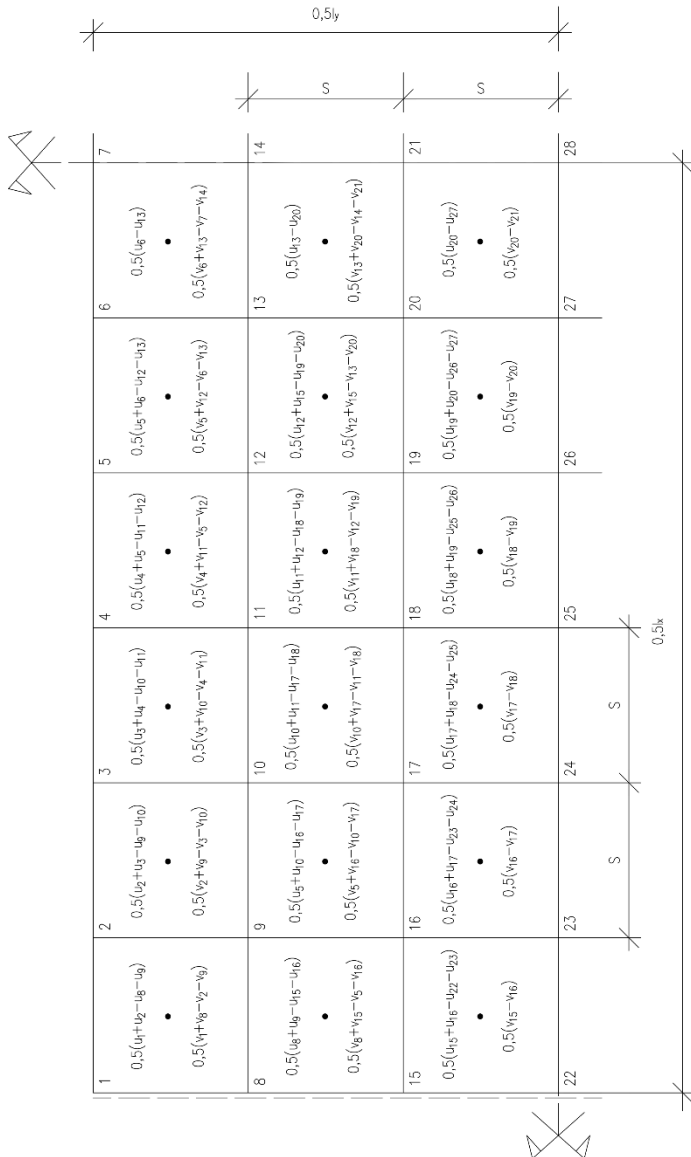
Rys. 4.10. Rozpisane na siatce podziału pochodne u_x^2 i v_y^2

Źródło: oprac. własne.

$$V_4 = 0,25A \iint (u_{iy} + v_{ix})^2 dx dy$$

$$v_{22} = v_{23} = v_{24} = v_{25} = v_{26} = v_{27} = v_{28} = 0$$

$$u_7 = u_{14} = u_{21} = u_{28} = 0$$



Rys. 4.11. Rozpisane na siatce podziału pochodne u_y i v_x

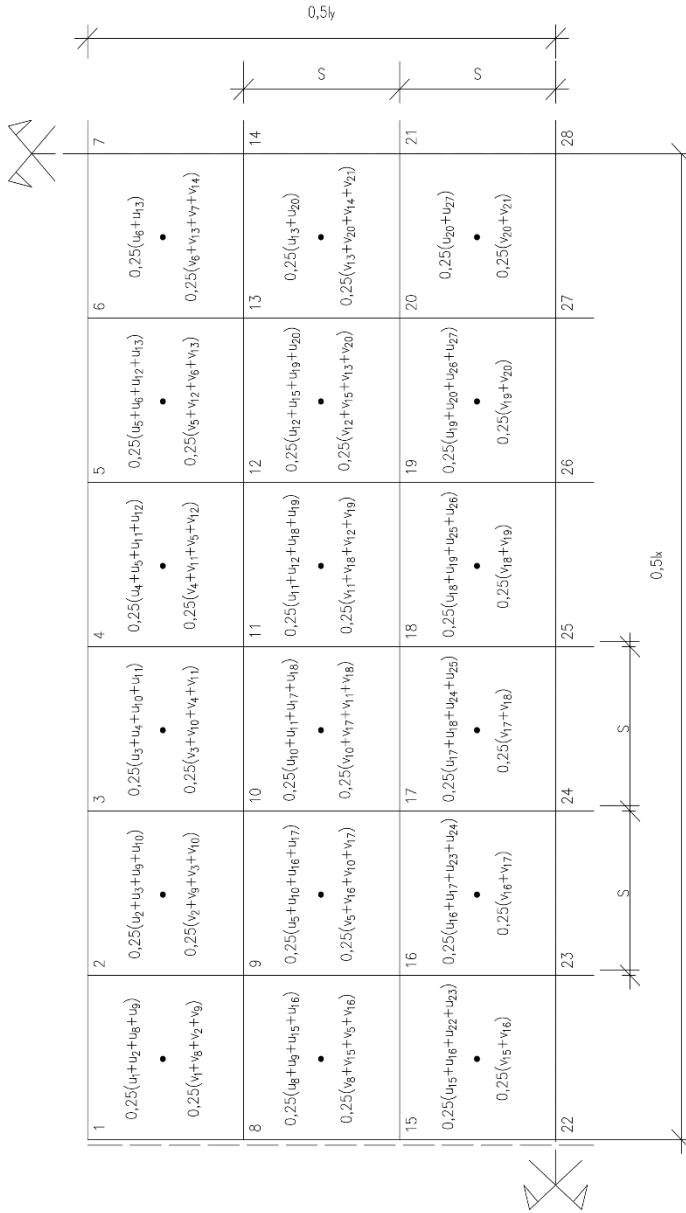
Źródło: oprac. własne.

$$V_5 = 0,5B \iint (u^2 + v^2) \, dx dy$$

$$B = 2G_w \cdot h^{-1}$$

$$v_{22} = v_{23} = v_{24} = v_{25} = v_{26} = v_{27} = v_{28} = 0$$

$$u_7 = u_{14} = u_{21} = u_{28} = 0$$



Rys. 4.12. Rozpisane na siatce pochodne podziału przemieszczenia u i v

Źródło: oprac. własne.

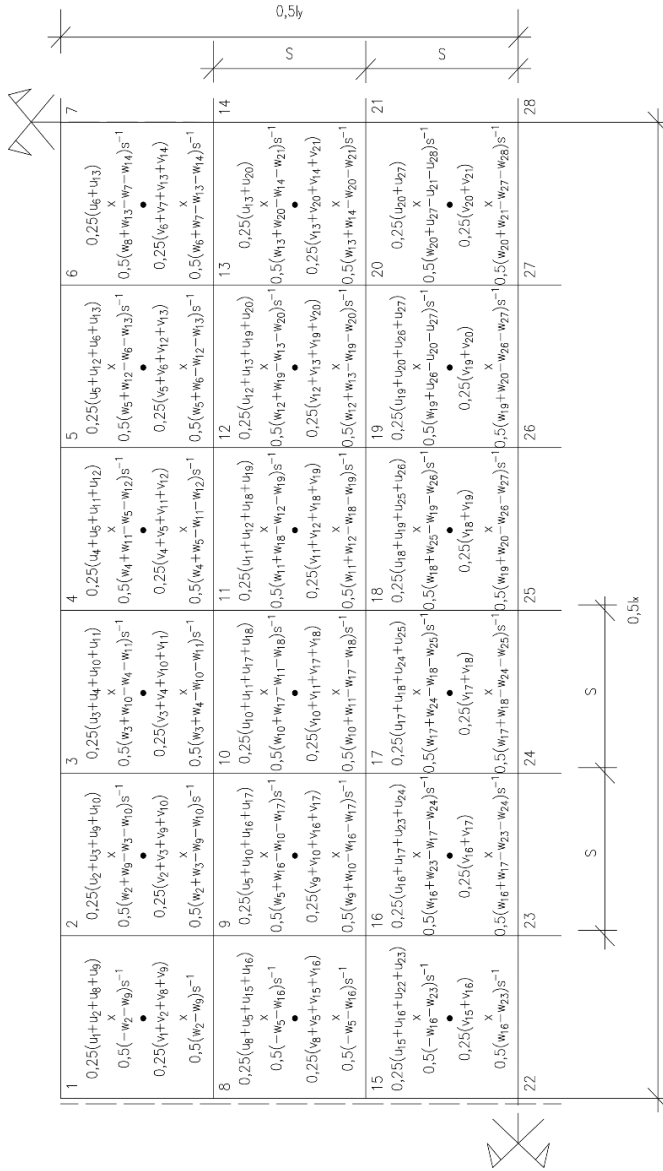
$$V_6 = 0,5C \iint (uw_{ix} + vw_{iy}) \, dx dy$$

$$C = 2G_w \cdot h^{-1}(2h + \delta)$$

$$w_1 = w_8 = w_{15} = w_{22} = 0$$

$$v_{22} = v_{23} = v_{24} = v_{25} = v_{26} = v_{27} = v_{28} = 0$$

$$u_7 = u_{14} = u_{21} = u_{28} = 0$$

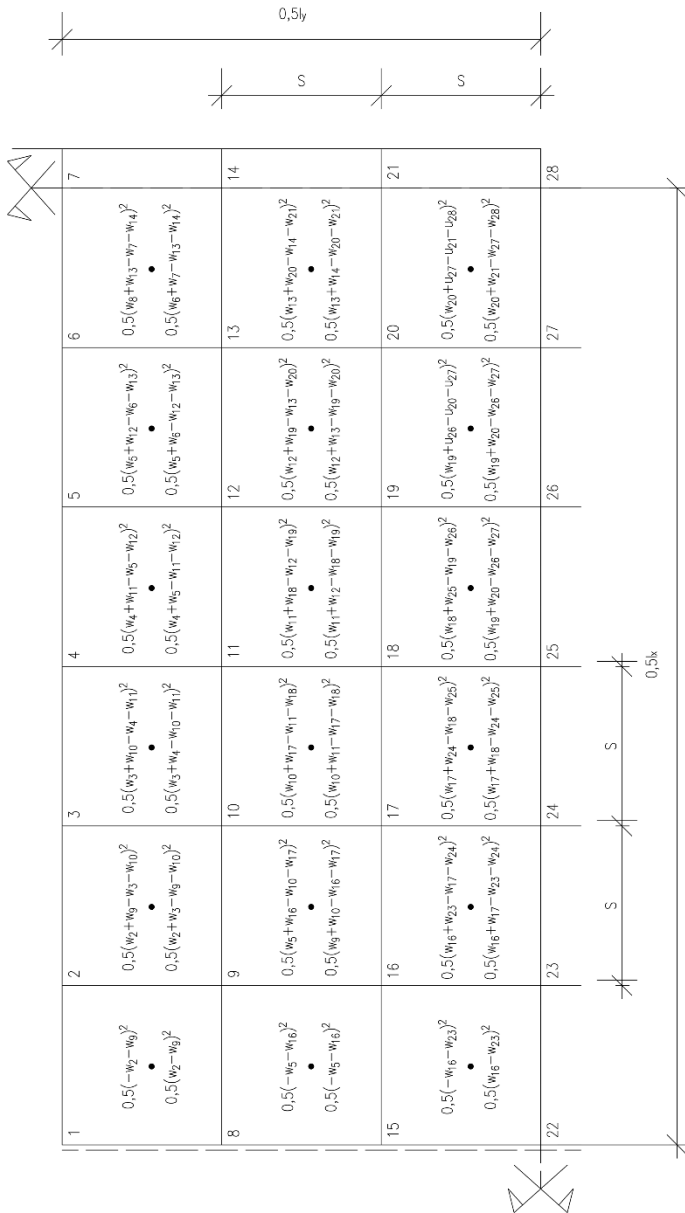


Rys. 4.13. Rozpisanie na siatce podziału iloczynny $u \times w_x$ oraz $v \times w_y$

Źródło: oprac. własne.

$$V_7 = 0,5F \iint (w_{ix}^2 + w_{iy}^2) dx dy$$

$$F = 0,5G_w \cdot h^{-1}(2h + \delta)^2$$



Rys. 4.14. Rozpisane na siatce podziału pochodne w_{ix}^2 i w_{iy}^2

Źródło: oprac. własne.

Po scałkowaniu graficznym oraz wykorzystaniu warunków (4.11) na minimum funkcjonału (4.9) otrzymuje się algebraiczny układ równań liniowych do wyznaczenia przemieszczeń (w_i , u_i , v_i) w poszczególnych węzłach przyjętej siatki podziału. Dla płyty o schemacie statycznym i numeracji węzłów na rys. 4.8 pokazano przykładowy (dla węzłów 2, 3 i 10) sposób budowania poszczególnych równań, z uwzględnieniem warunków brzegowych.

$$\frac{\partial(V_1+V_2)}{\partial w_2} = 2Ds^{-2}(7,5w_2 - 4w_3 + 0,5w_4 - 6w_9 + 2w_{10} + w_{16})$$

$$\frac{\partial(V_1+V_2)}{\partial w_3} = 2Ds^{-2}(-4w_2 + 8w_3 - 4w_4 + 0,5w_5 + 2w_9 - 6w_{10} + 2w_{11} + w_{17})$$

$$\frac{\partial(V_1+V_2)}{\partial w_{10}} = 2Ds^{-2}(2w_2 - 6w_3 + 2w_4 - 8w_9 + 19w_{10} - 8w_{11} + w_{12} + 2w_{16} - 8w_{17} + 2w_{18} + w_{24})$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial u_1} = 0,5A(u_1 - u_2)$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial u_2} = 0,5A(-u_1 + 2u_2 - u_3)$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial u_{10}} = A(-u_9 + 2u_{10} - u_{11})$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial v_1} = 0,5A(v_1 - v_8)$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial v_2} = A(v_2 - v_9)$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial v_{10}} = A(-v_3 + 2v_{10} - v_{17})$$

$$\frac{\partial V_4}{\partial u_1} = 0,125A(u_1 + u_2 - u_8 - u_9 + v_1 + v_8 - v_2 - v_9)$$

$$\frac{\partial V_4}{\partial u_2} = 0,125A(u_1 + 2u_2 + u_3 - u_8 - 2u_9 - u_{10} + v_1 - v_3 + v_8 - v_{10})$$

$$\frac{\partial V_4}{\partial u_{10}} = 0,125A(-u_2 - 2u_3 - u_4 + 2u_9 + 4u_{10} + 2u_{11} - u_{16} - 2u_{17} - u_{18} - v_2 + v_4 + v_{16} - v_{18})$$

$$\frac{\partial V_4}{\partial v_1} = 0,125A(u_1 + u_2 - u_8 - u_9 + v_1 + v_8 - v_2 - v_9)$$

$$\frac{\partial V_4}{\partial v_2} = 0,125A(-u_1 + u_3 + u_8 - u_{10} - v_1 + 2v_2 - v_3 - v_8 + 2v_5 - v_{10})$$

$$\frac{\partial V_4}{\partial v_{10}} = 0,125A(-u_2 + u_4 + u_{16} - u_{18} - v_2 + 2v_3 - v_4 - 2v_9 + 4v_{10} - 2v_{11} - v_{16} + 2v_{17} - v_{18})$$

$$\frac{\partial V_5}{\partial u_1} = 0,0625Bs^2(u_1 + u_2 + u_8 + u_9)$$

$$\frac{\partial V_5}{\partial u_2} = 0,0625Bs^2(u_1 + 2u_2 + u_3 + u_8 + 2u_9 + u_{10})$$

$$\frac{\partial V_5}{\partial u_{10}} = 0,0625Bs^2(u_2 + 2u_3 + u_4 + 2u_9 + 4u_{10} + 2u_{11} + u_{16} + 2u_{17} + u_{18})$$

$$\frac{\partial V_5}{\partial v_1} = 0,0625Bs^2(v_1 + v_2 + v_8 + v_9)$$

$$\frac{\partial V_5}{\partial v_2} = 0,0625Bs^2(v_1 + 2v_2 + v_3 + v_8 + 2v_9 + v_{10})$$

$$\frac{\partial V_5}{\partial v_{10}} = 0,0625Bs^2(v_2 + 2v_3 + v_4 + 2v_9 + 4v_{10} + 2v_{11} + v_{16} + 2v_{17} + v_{18})$$

$$\frac{\partial V_6}{\partial w_2} = 0,0625Cs(-u_1 + u_3 - u_8 + u_{10} + v_1 + 2v_2 + v_3 + v_8 + 2v_5 + v_{10})$$

$$\frac{\partial V_6}{\partial w_3} = 0,0625Cs(-u_2 + u_4 - u_9 + u_{11} + v_2 + 2v_3 + v_4 + v_9 + 2v_{10} + v_{11})$$

$$\frac{\partial V_6}{\partial w_{10}} = 0,0625Cs(-u_2 + u_4 - 2u_9 + 2u_{11} - u_{16} + u_{18} - v_2 - 2v_3 - v_4 + v_{16} + 2v_{17} + v_{18})$$

$$\frac{\partial V_6}{\partial u_1} = 0,0625Cs(-w_2 - w_9)$$

$$\frac{\partial V_6}{\partial u_2} = 0,0625Cs(-w_3 - w_{10})$$

$$\frac{\partial V_6}{\partial u_{10}} = 0,0625Cs(w_2 - w_4 + 2w_9 - 2w_{11} + w_{16} - w_{18})$$

$$\frac{\partial V_6}{\partial v_1} = 0,0625Cs(w_2 - w_9)$$

$$\frac{\partial V_6}{\partial v_2} = 0,0625Cs(2w_2 + w_3 - 2w_9 - w_{10})$$

$$\frac{\partial V_6}{\partial v_{10}} = 0,0625Cs(w_2 + 2w_3 + w_4 - w_{16} - 2w_{17} - w_{18})$$

$$\frac{\partial V_7}{\partial w_2} = 0,25F(4w_2 - 2w_{10})$$

$$\frac{\partial V_7}{\partial w_3} = 0,25F(4w_3 - 2w_9 - 2w_{11})$$

$$\frac{\partial v_7}{\partial w_{10}} = 0,25F(-2w_2 - 2w_4 + 8w_{10} - 2w_{16} - 2w_{18})$$

Po zsumowaniu poszczególnych składników dla $\frac{\partial v}{\partial w_2}$ otrzymano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w_2} &= 2Ds^{-2}(7,5w_2 - 4w_3 + 0,5w_4 - 6w_9 + 2w_{10} + w_{16}) + \\ &+ 0,0625Cs(-u_1 + u_3 - u_8 + u_{10} + v_1 + 2v_2 + v_3 + v_8 + 2v_5 + v_{10}) + \\ &+ 0,25F(4w_2 - 2w_{10}) = (15Ds^{-2} + F)w_2 - 8Ds^{-2}w_3 + Ds^{-2}w_4 - \\ &- 12Ds^{-2}w_9 + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{10} + 2D^{-2}w_{16} + 0,0625Cs(-u_1 + u_3 - \\ &- u_8 + u_{10} + v_1 + 2v_2 + v_3 + v_8 + 2v_9 + v_{10}) \end{aligned}$$

Po zsumowaniu i uporządkowaniu jak wyżej dla $\frac{\partial v}{\partial w_3}$ otrzymano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w_3} &= -8Ds^{-2}w_2 + (16Ds^{-2} + F)w_3 - 8Ds^{-2}w_4 + Ds^{-2}w_5 + \\ &+ (4Ds^{-2} - 0,5F)w_9 - 12Ds^{-2}w_{10} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{11} + 2Ds^{-2}w_{17} + \\ &+ 0,0625Cs(-u_2 + u_4 - u_9 + u_{11} + v_2 + 2v_3 + v_4 + v_9 + 2v_{10} + v_{11}) \end{aligned}$$

Po zsumowaniu i uporządkowaniu jak wyżej dla $\frac{\partial v}{\partial w_{10}}$ otrzymano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w_{10}} &= (4Ds^{-2} - 0,5F)w_2 - 12Ds^{-2}w_3 + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_4 - 16Ds^{-2}w_9 + \\ &+ (38Ds^{-2} + 2F)w_{10} - 16Ds^{-2}w_{11} + 2Ds^{-2}w_{12} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{16} - \\ &- 16Ds^{-2}w_{17} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{18} + 2Ds^{-2}w_{24} + 0,625Cs(-u_2 + \\ &+ u_4 - 2u_9 + 2u_{11} - u_{16} + u_{18} - v_2 - 2v_3 - v_4 + v_{16} + 2v_{17} + v_{18}) \end{aligned}$$

Postępując analogicznie, zsumowano w kolejności $\frac{\partial v}{\partial w_i}$ dla 24 węzłów, gdzie występowały ugięcia w_i , $\frac{\partial v}{\partial u_i}$ dla 24 węzłów z przemieszczeniami u_i oraz $\frac{\partial v}{\partial \vartheta_i}$ dla 21 węzłów, gdzie występowały przemieszczenia ϑ_i . Ogółem dla płyty z siatką podziału jak na rys. 4.8 otrzymano układ równań o 69 niewiadomych. Z uwagi na kwadratową formę wyrażenia na energię odkształcenia sprężystego (4.12) otrzymuje się każdorazowo macierz układu symetryczną względem głównej przekątnej. Symetria układu pozwala na wychwycenie ewentualnych błędów przy tworzeniu układu równań.

Z uwagi na rozwiązywanie układu równań programem, który wymaga zapisu połowy macierzy (od przekątnej), poniżej podano ogólny zapis otrzymanej macierzy właśnie w zapisie od przekątnej. Globalna macierz układu równań dotyczy płyty

o przekroju trójwarstwowym i proporcjach wymiarów rzutu $l_x : l_y = 2 : 1$ (podział i numeracja węzłów jak na rys. 4.8).

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w_2} = & (15Ds^{-2} + F)w_2 - 8Ds^{-2}w_3 + Ds^{-2}w_4 - 12Ds^{-2}w_9 + \\ & +(4Ds^{-2} - 0,5F)w_{10} + 2Ds^{-2}w_{16} + 0,0625Cs(-u_1 + u_3 - u_8 + u_{10} + \\ & +v_1 + 2v_2 + v_3 + v_8 + 2v_9 + v_{10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w_3} = & (16Ds^{-2} + F)w_3 - 8Ds^{-2}w_4 + Ds^{-2}w_5 + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_9 - \\ & -12Ds^{-2}w_{10} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{11} + 2Ds^{-2}w_{17} + 0,0625Cs(-u_2 + \\ & +u_4 - u_9 + u_{11} + v_2 + 2v_3 + v_4 + v_9 + 2v_{10} + v_{11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w_4} = & (16Ds^{-2} + F)w_4 - 8Ds^{-2}w_5 + Ds^{-2}w_6 + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{10} - \\ & -12w_{11} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{12} + 2Ds^{-2}w_{18} + 0,0625Cs(-u_3 + u_5 - \\ & -u_{10} + u_{12} + v_3 + 2v_4 + v_5 + v_{10} + 2v_{11} + v_{12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w_5} = & (16Ds^{-2} + F)w_5 - 8Ds^{-2}w_6 + Ds^{-2}w_7 + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{11} - \\ & -12Ds^{-2}w_{12} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{13} + 2Ds^{-2}w_{19} + 0,0625Cs - u_4 + \\ & +u_6 - u_{11} + u_{13} + v_4 + 2v_5 + v_6 + v_{11} + 2v_{12} + v_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w_6} = & (17Ds^{-2} + F)w_6 - 8Ds^{-2}w_7 + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{12} - 12Ds^{-2}w_{13} + \\ & +(4Ds^{-2} - 0,5F)w_{14} + 2Ds^{-2}w_{20} + 0,0625Cs(-u_5 - u_{12} + v_5 + 2v_6 + \\ & +v_7 + v_{12} + 2v_{13} + v_{14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w_7} = & (8Ds^{-2} + 0,5F)w_7 + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{13} - 6Ds^{-2}w_{14} + Ds^{-2}w_{21} + \\ & +0,0625Cs(-u_6 - u_{13} + v_6 + v_7 + v_{13} + v_{14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w_9} = & (36Ds^{-2} + 2F)w_9 - 16Ds^{-2}w_{10} + 2Ds^{-2}w_{11} - 16Ds^{-2}w_{16} + \\ & +(4Ds^{-2} - 0,5F)w_{17} + 2Ds^{-2}w_{23} + 0,0625Cs(-u_1 + u_3 - 2u_8 + \\ & +2u_{10} - u_{15} + u_{17} - v_1 - 2v_2 - v_3 + v_{15} + 2v_{16} + v_{17}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w_{10}} = & (38Ds^{-2} + 2F)w_{10} - 16Ds^{-2}w_{11} + 2Ds^{-2}w_{12} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{16} - \\ & -16Ds^{-2}w_{17} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{18} + 2Ds^{-2}w_{24} + 0,0625Cs(-u_2 + \\ & +u_4 - 2u_9 + 2u_{11} - u_{16} + u_{18} - v_2 - 2v_3 - v_4 + v_{16} + 2v_{17} + v_{18}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w_{11}} = & (38Ds^{-2} + 2F)w_{11} - 16Ds^{-2}w_{12} + 2Ds^{-2}w_{13} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{17} - \\ & -16Ds^{-2}w_{18} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{19} + 2Ds^{-2}w_{25} + 0,0625Cs(-u_3 + \\ & +u_5 - 2u_{10} + 2u_{12} - u_{17} + u_{19} - v_3 - 2v_4 - v_5 + v_{17} + 2v_{18} + v_{19}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial w_{12}} &= (38Ds^{-2} + 2F)w_{12} - 16Ds^{-2}w_{13} + 2Ds^{-2}w_{14} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{18} - \\
&\quad - 16Ds^{-2}w_{19} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{20} + 2Ds^{-2}w_{26} + 0,0625Cs(-u_4 + \\
&\quad + u_6 - 2u_{11} + 2u_{13} - u_{18} + u_{20} - v_4 - 2v_5 - v_6 + v_{18} + 2v_{19} + v_{20}) \\
\frac{\partial V}{\partial w_{13}} &= (40Ds^{-2} + 2F)w_{13} - 16Ds^{-2}w_{14} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{19} - \\
&\quad - 16Ds^{-2}w_{20} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{21} + 2Ds^{-2}w_{27} + 0,0625Cs(-u_5 - \\
&\quad - 2u_{12} - u_{19} - v_5 - 2v_6 - v_7 + v_{19} + 2v_{20} + v_{21}) \\
\frac{\partial V}{\partial w_{14}} &= (19Ds^{-2} + F)w_{14} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{20} - 8Ds^{-2}w_{21} + Ds^{-2}w_{28} + \\
&\quad + 0,0625Cs(-u_6 - 2u_{13} - u_{20} - v_6 - v_7 + v_{20} + v_{21}) \\
\frac{\partial V}{\partial w_{16}} &= (40Ds^{-2} + 2F)w_{16} - 16Ds^{-2}w_{17} + 2Ds^{-2}w_{18} - 16Ds^{-2}w_{23} + \\
&\quad + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{24} + 0,0625Cs(-u_8 + u_{10} - 2u_{15} + 2u_{17} - u_{22} + \\
&\quad + u_{24} - v_8 - 2v_9 - v_{10}) \\
\frac{\partial V}{\partial w_{17}} &= (42Ds^{-2} + 2F)w_{17} - 16Ds^{-2}w_{18} + 2Ds^{-2}w_{19} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{23} - \\
&\quad - 16Ds^{-2}w_{24} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{25} + 0,0625Cs(-u_9 + u_{11} - 2u_{16} + \\
&\quad + 2u_{18} - u_{23} + u_{25} - v_9 - 2v_{10} - v_{11}) \\
\frac{\partial V}{\partial w_{18}} &= (42Ds^{-2} + 2F)w_{18} - 16Ds^{-2}w_{19} + 2Ds^{-2}w_{20} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{24} - \\
&\quad - 16Ds^{-2}w_{25} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{26} + 0,0625Cs(-u_{10} + u_{12} - 2u_{17} + \\
&\quad + 2u_{19} - u_{24} + u_{26} - v_{10} - 2v_{11} - v_{12}) \\
\frac{\partial V}{\partial w_{19}} &= (42Ds^{-2} + 2F)w_{19} - 16Ds^{-2}w_{20} + 2Ds^{-2}w_{21} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{25} - \\
&\quad - 16Ds^{-2}w_{26} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{27} + 0,0625Cs(-u_{11} + u_{13} - 2u_{18} + \\
&\quad + 2u_{20} - u_{25} + u_{27} - v_{11} - 2v_{12} - v_{13}) \\
\frac{\partial V}{\partial w_{20}} &= (44Ds^{-2} + 2F)w_{20} - 16Ds^{-2}w_{21} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{26} - \\
&\quad - 16Ds^{-2}w_{27} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{28} + 0,0625Cs(-u_{12} - 2u_{19} - u_{26} - \\
&\quad - v_{12} - 2v_{13} - v_{14}) \\
\frac{\partial V}{\partial w_{21}} &= (21Ds^{-2} + F)w_{21} + (4Ds^{-2} - 0,5F)w_{27} - 8Ds^{-2}w_{28} + \\
&\quad + 0,0625Cs(-u_{13} - 2u_{20} - u_{27} - v_{13} - v_{14}) \\
\frac{\partial V}{\partial w_{23}} &= (19Ds^{-2} + F)w_{23} - 8Ds^{-2}w_{24} + Ds^{-2}w_{25} + \\
&\quad + 0,0625Cs(-u_{15} + u_{17} - -u_{22} + u_{24} - v_{15} - 2v_{16} - v_{17})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial w_{24}} &= (20Ds^{-2} + F)w_{24} - 8Ds^{-2}w_{25} + Ds^{-2}w_{26} + \\
&\quad + 0,0625Cs(-u_{16} + u_{18} - -u_{23} + u_{25} - v_{16} - 2v_{17} - v_{18}) \\
\frac{\partial V}{\partial w_{25}} &= (20Ds^{-2} + F)w_{25} - 8Ds^{-2}w_{26} + Ds^{-2}w_{27} + \\
&\quad + 0,0625Cs(-u_{17} + u_{19} - u_{24} + u_{26} - v_{17} - 2v_{18} - v_{19}) \\
\frac{\partial V}{\partial w_{26}} &= (20Ds^{-2} + F)w_{26} - 8Ds^{-2}w_{27} + Ds^{-2}w_{28} + \\
&\quad + 0,0625Cs(-u_{18} + u_{20} - u_{25} + u_{27} - v_{18} - 2v_{19} - v_{20}) \\
\frac{\partial V}{\partial w_{27}} &= (21Ds^{-2} + F)w_{27} - 8Ds^{-2}w_{28} + \\
&\quad + 0,0625Cs(-u_{19} - u_{26} - v_{19} - 2v_{20} - -v_{21}) \\
\frac{\partial V}{\partial w_{28}} &= (10Ds^{-2} + 0,5F)w_{28} + 0,0625Cs(-u_{20} - u_{27} - v_{20} - v_{21}) \\
\frac{\partial V}{\partial u_1} &= 0,5A(u_1 - u_2) + 0,0625Bs^2(u_1 + u_2 + u_8 + u_9) + \\
&\quad + 0,125A(u_1 + u_2 - u_8 - u_9 + v_1 + v_8 - v_2 - v_9) \\
\frac{\partial V}{\partial u_2} &= 0,5A(2u_2 - u_3) + 0,0625Bs^2(2u_2 + u_3 + u_8 + 2u_9 + u_{10}) + \\
&\quad + 0,125A(2u_2 + u_3 - u_8 - 2u_9 - u_{10} + v_1 - v_3 + v_8 - v_{10}) \\
\frac{\partial V}{\partial u_3} &= 0,5A(2u_3 - u_4) + 0,0625Bs^2(2u_3 + u_4 + u_9 + 2u_{10} + u_{11}) + \\
&\quad + 0,125A(2u_3 + u_4 - u_9 - 2u_{10} - u_{11} + v_2 - v_4 + v_9 - v_{11}) \\
\frac{\partial V}{\partial u_4} &= 0,5A(2u_4 - u_5) + 0,0625Bs^2(2u_4 + u_5 + u_{10} + 2u_{11} + u_{12}) + \\
&\quad + 0,125A(2u_4 + u_5 - u_{10} - 2u_{11} - u_{12} + v_3 - v_5 + v_{10} - v_{12}) \\
\frac{\partial V}{\partial u_5} &= 0,5A(2u_5 - u_6) + 0,0625Bs^2(2u_5 + u_6 + u_{11} + 2u_{12} + u_{13}) + \\
&\quad + 0,125A(2u_5 + u_6 - u_{11} - 2u_{12} - u_{13} + v_4 - v_6 + v_{11} - v_{13}) \\
\frac{\partial V}{\partial u_6} &= 0,5A(2u_6) + 0,0625Bs^2(2u_6 + u_{12} + 2u_{13}) + \\
&\quad + 0,125A(2u_6 - u_{12} - 2u_{13} + v_5 - v_7 + v_{12} - v_{14}) \\
\frac{\partial V}{\partial u_8} &= A(u_8 - u_9) + 0,0625Bs^2(2u_8 + 2u_9 + u_{15} + u_{16}) + \\
&\quad + 0,125A(2u_8 + 2u_9 - u_{15} - u_{16} - v_1 + v_2 + v_{15} - v_{16}) \\
\frac{\partial V}{\partial u_9} &= A(2u_9 - u_{10}) + 0,0625Bs^2(4u_9 + 2u_{10} + u_{15} + 2u_{16} + u_{17}) + \\
&\quad + 0,125A(4u_9 + 2u_{10} - u_{15} - 2u_{16} - u_{17} - v_1 + v_3 + v_{15} - v_{17})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial u_{10}} &= A(2u_{10} - u_{11}) + 0,0625Bs^2(4u_{10} + 2u_{11} + u_{16} + 2u_{17} + u_{18}) + \\
&\quad + 0,125A(4u_{10} + 2u_{11} - u_{16} - 2u_{17} - u_{18} - v_2 + v_4 + v_{16} - v_{18}) \\
\frac{\partial V}{\partial u_{11}} &= A(2u_{11} - u_{12}) + 0,0625Bs^2(4u_{11} + 2u_{12} + u_{17} + 2u_{18} + u_{19}) + \\
&\quad + 0,125A(4u_{11} + 2u_{12} - u_{17} - 2u_{18} - u_{19} - v_3 + v_5 + v_{17} - v_{19}) \\
\frac{\partial V}{\partial u_{12}} &= A(2u_{12} - u_{13}) + 0,0625Bs^2(4u_{12} + 2u_{13} + u_{18} + 2u_{19} + u_{20}) + \\
&\quad + 0,125A(4u_{12} + 2u_{13} - u_{18} - 2u_{19} - u_{20} - v_4 + v_6 + v_{18} - v_{20}) \\
\frac{\partial V}{\partial u_{13}} &= A(2u_{13}) + 0,0625Bs^2(4u_{13} + u_{19} + 2u_{20}) + \\
&\quad + 0,125A(4u_{13} - u_{19} - 2u_{20} - v_5 + v_7 + v_{19} - v_{21}) \\
\frac{\partial V}{\partial u_{15}} &= A(u_{15} - u_{16}) + 0,0625Bs^2(2u_{15} + 2u_{16} + u_{22} + u_{23}) + \\
&\quad + 0,125A(2u_{15} + 2u_{16} - u_{22} - u_{23} - v_8 + v_9) \\
\frac{\partial V}{\partial u_{16}} &= A(2u_{16} - u_{17}) + 0,0625Bs^2(4u_{16} + 2u_{17} + u_{22} + 2u_{23} + u_{24}) + \\
&\quad + 0,125A(4u_{16} + 2u_{17} - u_{22} - 2u_{23} - u_{24} - v_8 + v_{10}) \\
\frac{\partial V}{\partial u_{17}} &= A(2u_{17} - u_{18}) + 0,0625Bs^2(4u_{17} + 2u_{18} + u_{23} + 2u_{24} + u_{25}) + \\
&\quad + 0,125A(4u_{17} + 2u_{18} - u_{23} - 2u_{24} - u_{25} - v_9 + v_{11}) \\
\frac{\partial V}{\partial u_{18}} &= A(2u_{18} - u_{19}) + 0,0625Bs^2(4u_{18} + 2u_{19} + u_{24} + 2u_{25} + u_{26}) + \\
&\quad + 0,125A(4u_{18} + 2u_{19} - u_{24} - 2u_{25} - u_{26} - v_{10} + v_{12}) \\
\frac{\partial V}{\partial u_{19}} &= A(2u_{19} - u_{20}) + 0,0625Bs^2(4u_{19} + 2u_{20} + u_{25} + 2u_{26} + u_{27}) + \\
&\quad + 0,125A(4u_{19} + 2u_{20} - u_{25} - 2u_{26} - u_{27} - v_{11} + v_{13}) \\
\frac{\partial V}{\partial u_{20}} &= A(2u_{20}) + 0,0625Bs^2(4u_{20} + u_{26} + 2u_{27}) + \\
&\quad + 0,125A(4u_{20} - u_{26} - 2u_{27} - v_{12} + v_{14}) \\
\frac{\partial V}{\partial u_{22}} &= 0,5A(u_{22} - u_{23}) + 0,0625Bs^2(u_{22} + u_{23}) + \\
&\quad + 0,125A(u_{22} + u_{23} - v_{15} + v_{16}) \\
\frac{\partial V}{\partial u_{23}} &= 0,5A(2u_{23} - u_{24}) + 0,0625Bs^2(2u_{23} + u_{24}) + \\
&\quad + 0,125A(2u_{23} + u_{24} - v_{15} + v_{17})
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial u_{24}} = 0,5A(2u_{24} - u_{25}) + 0,0625Bs^2(2u_{24} + u_{25}) + \\ + 0,125A(2u_{24} + u_{25} - v_{16} + v_{18})$$

$$\frac{\partial V}{\partial u_{25}} = 0,5A(2u_{25} - u_{26}) + 0,0625Bs^2(2u_{25} + u_{26}) + \\ + 0,125A(2u_{25} + u_{26} - v_{17} + v_{19})$$

$$\frac{\partial V}{\partial u_{26}} = 0,5A(2u_{26} - u_{27}) + 0,0625Bs^2(2u_{26} + u_{27}) + \\ + 0,125A(2u_{26} + u_{27} - v_{18} + v_{20})$$

$$\frac{\partial V}{\partial u_{27}} = 0,5A(2u_{27}) + 0,0625Bs^2(2u_{27}) + 0,125A(2u_{27} - v_{19} + v_{21})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_1} = 0,125A(v_1 + v_8 - v_2 - v_9) + 0,5A(v_1 - v_8) + \\ + 0,0625Bs^2(v_1 + v_2 + v_8 + v_9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_2} = 0,125A(2v_2 - v_3 - v_8 + 2v_9 - v_{10}) + A(v_2 - v_9) + \\ + 0,0625Bs^2(2v_2 + v_3 + v_8 + 2v_9 + v_{10})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_3} = 0,125A(2v_3 - v_4 - v_9 + 2v_{10} - v_{11}) + A(v_3 - v_{10}) + \\ + 0,0625Bs^2(2v_3 + v_4 + v_9 + 2v_{10} + v_{11})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_4} = 0,125A(2v_4 - v_5 - v_{10} + 2v_{11} - v_{12}) + A(v_4 - v_{11}) + \\ + 0,0625Bs^2(2v_4 + v_5 + v_{10} + 2v_{11} + v_{12})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_5} = 0,125A(2v_5 - v_6 - v_{11} + 2v_{12} - v_{13}) + A(v_5 - v_{12}) + \\ + 0,0625Bs^2(2v_5 + v_6 + v_{11} + 2v_{12} + v_{13})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_6} = 0,125A(2v_6 - v_7 - v_{12} + 2v_{13} - v_{14}) + A(v_6 - v_{13}) + \\ + 0,0625Bs^2(2v_6 + v_7 + v_{12} + 2v_{13} + v_{14})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_7} = 0,125A(v_7 - v_{13} + v_{14}) + 0,5A(v_7 - v_{14}) + 0,0625Bs^2(v_7 + v_{13} + v_{14})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_8} = 0,125A(2v_8 - 2v_9 + v_{15} - v_{16}) + 0,5A(2v_8 - v_{15}) + \\ + 0,0625Bs^2(2v_8 + 2v_9 + v_{15} + v_{16})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_9} = 0,125A(4v_9 - 2v_{10} - v_{15} + 2v_{16} - v_{17}) + A(2v_9 - v_{16}) + \\ + 0,0625Bs^2(4v_9 + 2v_{10} + v_{15} + 2v_{16} + v_{17})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_{10}} = 0,125A(4v_{10} - 2v_{11} - v_{16} + 2v_{17} - v_{18}) + A(2v_{10} - v_{17}) + \\ + 0,0625Bs^2(4v_{10} + 2v_{11} + v_{16} + 2v_{17} + v_{18})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_{11}} = 0,125A(4v_{11} - 2v_{12} - v_{17} + 2v_{18} - v_{19}) + A(2v_{11} - v_{18}) + \\ + 0,0625Bs^2(4v_{11} + 2v_{12} + v_{17} + 2v_{18} + v_{19})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_{12}} = 0,125A(4v_{12} - 2v_{13} - v_{18} + 2v_{19} - v_{20}) + A(2v_{12} - v_{19}) + \\ + 0,0625Bs^2(4v_{12} + 2v_{13} + v_{18} + 2v_{19} + v_{20})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_{13}} = 0,125A(4v_{13} - 2v_{14} - v_{19} + 2v_{20} - v_{21}) + A(2v_{13} - v_{20}) + \\ + 0,0625Bs^2(4v_{13} + 2v_{14} + v_{19} + 2v_{20} + v_{21})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_{14}} = 0,125A(2v_{14} - v_{20} + v_{21}) + 0,5A(2v_{14} - v_{21}) + \\ + 0,0625Bs^2(2v_{14} + v_{20} + v_{21})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_{15}} = 0,125A(2v_{15} - 2v_{16}) + 0,5A(2v_{15}) + 0,0625Bs^2(2v_{15} + 2v_{16})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_{16}} = 0,125A(4v_{16} - 2v_{17}) + A(2v_{16}) + 0,0625Bs^2(4v_{16} + 2v_{17})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_{17}} = 0,125A(4v_{17} - 2v_{18}) + A(2v_{17}) + 0,0625Bs^2(4v_{17} + 2v_{18})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_{18}} = 0,125A(4v_{18} - 2v_{19}) + A(2v_{18}) + 0,0625Bs^2(4v_{18} + 2v_{19})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_{19}} = 0,125A(4v_{19} - 2v_{20}) + A(2v_{19}) + 0,0625Bs^2(4v_{19} + 2v_{20})$$

$$\frac{\partial V}{\partial v_{20}} = 0,125A(4v_{20} - 2v_{21}) + A(2v_{20}) + 0,0625Bs^2(4v_{20} + 2v_{21})$$

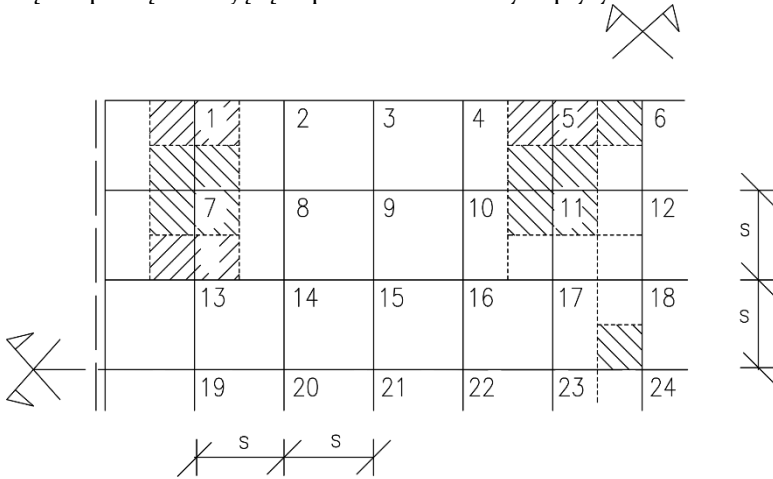
$$\frac{\partial V}{\partial v_{21}} = 0,125A(2v_{21}) + 0,5A(2v_{21}) + 0,0625Bs^2(2v_{21})$$

Podana wyżej macierz globalna umożliwia zbudowanie układu równań przemieszczeniowych dla dowolnej płyty trójwarstwowej o schemacie jak na rys. 4.8, o stosunku wymiarów $l_x : l_y = 2 : 1$. Pozostałe parametry: δ, h, E, G_w mogą być dowolne, gdyż na podstawie ich wartości oblicza się wyrażenia A, B, C i F (4.13) występujące w macierzy. Oczka siatki podziału pokazanej na rys. 4.8 oblicza się w zależności od wymiarów obliczanej płyty: $s = \frac{l_x}{12} = \frac{l_y}{6}$.

4.5. Przykłady obliczeniowe

W punktach 4.5.1 i 4.5.2 przedstawiono obliczenia oraz wyniki obliczonych wielkości statycznych dla płyt trójwarstwowych, a w punkcie 4.5.3 dla płyty jednorodnej, izotropowej. Schemat statyczny i schematy obciążeń obliczanych płyt pokazano na rys. 4.8.

Poniżej podano współczynniki prawych stron równań przemieszczeniowych dla obciążenia równomiernego działającego na całej powierzchni płyty oraz dla obciążenia siłą skupioną działającą w punkcie centralnym płyty.



Rys. 4.15. Fragment siatki podziału z numeracją węzłów dotyczącą przemieszczeń pionowych – ugięcie „w”. Przy numeracji węzłów pokazanych na rys. 4.8 dla punktów leżących na krawędzi swobodnie podpartej ugięcia „w” są równe 0

Źródło: oprac. własne.

Prawa strona dla obciążenia równomiernie rozłożonego na całej powierzchni o intensywności q [MN/m^2]:

- w węzłach od 1 do 5 współczynnik obciążenia wynosi: $0,5 \cdot qs^2$,
- w węźle 6 współczynnik obciążenia wynosi: $0,25 \cdot qs^2$,
- w węzłach od 7 do 11 współczynnik obciążenia wynosi: qs^2 ,
- w węźle 12 współczynnik obciążenia wynosi: $0,5 \cdot qs^2$,
- w węzłach od 13 do 17 współczynnik obciążenia wynosi: qs^2 ,
- w węźle 18 współczynnik obciążenia wynosi: $0,5 \cdot qs^2$,
- w węzłach od 19 do 23 współczynnik obciążenia wynosi: $0,5 \cdot qs^2$,
- w węźle 24 współczynnik obciążenia wynosi: $0,25 \cdot qs^2$.

Prawa strona dla obciążenia siłą skupioną P [MN] przyłożona w punkcie środkowym płyty:

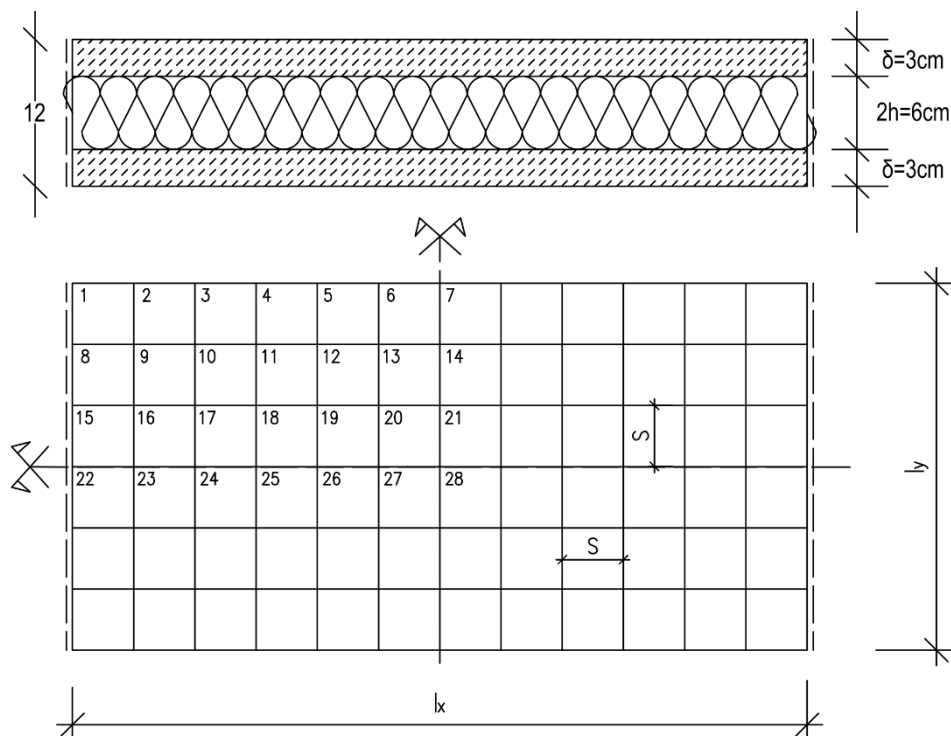
- w węzłach od 1 do 23 współczynnik obciążenia wynosi: 0,
- w węźle 24 współczynnik obciążenia wynosi: 0,25 P .

4.5.1. Przykład nr 1. Płyta trójwarstwowa (moduł Kirchoffa materiału rdzenia $G_w = 450$ MPa)

Do obliczeń przyjęto płytę o wymiarach $l_x = 120$ cm, $l_y = 60$ cm, ($\frac{l_x}{l_y} = 2$), swobodnie podpartą na dwóch przeciwległych krawędziach, a na dwóch pozostałych swobodną.

Przyjęto: okładziny z betonu C20/25 o module sprężystości $E = 30\,000$ MPa, $\nu = 0$ (współczynnik Poissona), rdzeń, np. szkło piankowe dla $G_w = 450$ MPa (moduł Kirchoffa). Do obliczeń przyjęto siatkę podziału o oczkach kwadratowych i numerację węzłów pokazaną na rys. 4.8. Oczko siatki podziału wynosi $s = \frac{l_x}{12} = \frac{l_y}{6} = 0,1$ m

Przekrój poprzeczny i rzut płyty pokazano na rys. 4.16.



Rys. 4.16. Rzut i przekrój płyty trójwarstwowej obliczanej w przykładzie 1. oraz przyjęta siatka podziału jak na rys. 4.8.

Źródło: oprac. własne.

Wymiary płyty trójwarstwowej w powyższym przykładzie obliczeniowym wynikały z możliwości wykonania modelu o przyjętych wymiarach i przeprowadzenia badań w laboratorium Katedry Konstrukcji Budowlanych na Wydziale Budownictwa i Nauk o Środowisku Politechniki Białostockiej, przy wykorzystaniu stendu badawczego i systemu Hysdozok, co da możliwość weryfikacji otrzymanych wyników obliczeń numerycznych.

Aby skorzystać przy budowaniu układu równań przemieszczeniowych z uzyskanej i przedstawionej wcześniej macierzy globalnej (patrz punkt 4.5), przeprowadzono poniższe obliczenia:

- sztywność okładziny $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$; $\nu = 0$; $D = \frac{30\,000 \cdot 0,03^3}{12} = 0,0675 \text{ MNm}$

$$Ds^{-2} = 0,0675 \cdot 0,1^{-2} = 6,75 \text{ (współczynnik występujący w macierzy globalnej)}$$

- wielkości wg zależności 4.13 oraz występujące przy współczynnikach macierzy globalnej

$$A = 2E\delta = 2 \cdot 30\,000 \cdot 0,03 = 1800$$

$$B = 2G_w h^{-1} = 2 \cdot 450 \cdot 0,03^{-1} = 30\,000 \quad B \cdot s^2 = 30\,000 \cdot 0,1^2 = 300$$

$$C = 2G_w h^{-1}(2h + \delta) = 30\,000 \cdot 0,09 = 2700 \quad C \cdot s = 2700 \cdot 0,1 = 270$$

$$F = 0,5G_w h^{-1} (2h + \delta)^2 = 0,5 \cdot 450 \cdot 0,03^{-1} (0,06 + 0,03)^2 = 60,75$$

Podstawiając powyższe wartości do współczynników macierzy globalnej, uzyskano macierz układu równań przemieszczeniowych dla obliczanego przykładu liczbowego. Otrzymałą macierz w postaci zapisu połowy macierzy, od przekątnej, zamieszczono poniżej. Macierz ma 69 niewiadomych (24 w, 24 u, 21 v).

W poszczególnych wierszach pierwsza cyfra (**wytluszczona**) podaje liczbę współczynników występujących w danym wierszu, następnie podaje się wartość poszczególnych współczynników (zaczynając zawsze od przekątnej) i numer kolumny (**wartość wytluszczona**), w której występuje.

Płyta trójwarstwowa 120 × 60 cm, $G_w = 450 \text{ MPa}$

Zapis „połowy” macierzy układu równań przemieszczeniowych

69 – liczba niewiadomych – 24 w_i, 24 u_i, 21 v_i:

16 162 **1** -54 **2** 6,75 **3** -81 **7** -3,375 **8** 13,5 **13** -16,875 **25** 16,875 **27** -16,875
31 16,875 **33** 16,875 **49** 33,75 **50** 16,875 **51** 16,875 **56** 33,75 **57** 16,875 **58**

17 168,75 **2** -54 **3** 6,75 **4** -3,375 **7** -81 **8** -3,375 **9** 13,5 **14** -16,875 **26** 16,875
28 -16,875 **32** 16,875 **34** 16,875 **50** 33,75 **51** 16,875 **52** 16,875 **57** 33,75 **58**
 16,875 **59**

17 168,75 **3** -54 **4** 6,75 **5** -3,375 **8** -81 **9** -3,375 **10** 13,5 **15** -16,875 **27** 16,875
29 16,875 **33** 16,875 **35** 16,875 **51** 33,75 **52** 16,875 **53** 16,875 **58** 33,75 **59**
 16,875 **60**

17 168,75 4 -54 5 6,75 6 -3,375 9 -81 10 -3,375 11 13,5 16 -16,875 28
16,875 30 16,875 34 16,875 36 16,875 52 33,75 53 16,875 54 16,875 59 33,75
60 16,875 61

14 175,5 5 -54 6 -3,375 10 -81 11 -3,375 12 13,5 17 -16,875 29 -16,875
35 16,875 53 33,75 54 16,875 55 16,875 60 33,75 61 16,875 62

10 84,375 6 -3,375 11 -40,5 12 6,75 18 -16,875 30 -16,875 36 16,875 54
16,875 55 16,875 61 16,875 62

18 364,5 7 -108 8 13,5 9 -108 13 -3,375 14 13,5 19 -16,875 25 16,875 27
-33,75 31 33,75 33 -16,875 37 16,875 39 -16,875 49 -33,75 50 -16,875 51
16,875 63 33,75 64 16,875 65

19 378 8 -108 9 13,5 10 -3,375 13 -108 14 -3,375 15 13,5 20 -16,875 26
16,875 28 33,75 32 33,75 34 -16,875 38 16,875 40 -16,875 50 -33,75 51
-16,875 52 16,875 64 33,75 65 16,875 66

19 378 9 -108 10 13,5 11 -3,375 14 -108 15 -3,375 16 13,5 21 -16,875 27
16,875 29 33,75 33 33,75 35 -16,875 39 16,875 41 -16,875 51 -33,75 52
-16,875 53 16,875 65 33,75 66 16,875 67

19 378 10 -108 11 13,5 12 -3,375 15 -108 16 -3,375 17 13,5 22 -16,875 28
16,875 30 33,75 34 33,75 36 -16,875 40 16,875 42 -16,875 52 -33,75 53
-16,875 54 16,875 66 33,75 67 16,875 68

15 391,5 11 -108 12 -3,375 16 -108 17 -3,375 18 13,5 23 -16,875 29 -33,75
35 -16,875 41 -16,875 53 -33,75 54 -16,875 55 16,875 67 33,75 68 16,875
69

11 189 12 -3,375 17 -54 18 6,75 24 -16,875 30 -33,75 36 -16,875 42 -16,875
54 16,875 55 16,875 68 16,875 69

14 391,5 13 -108 14 13,5 15 -108 19 -3,375 20 -16,875 31 16,875 33 -33,75
37 33,75 39 -16,875 43 16,875 45 -16,875 56 -33,75 57 -16,875 58

15 405 14 -108 15 13,5 16 -3,375 19 -108 20 -3,375 21 -16,875 32 16,875
34 -33,75 38 33,75 40 -16,875 44 16,875 46 -16,875 57 -33,75 58 -16,875
59

15 405 15 -108 16 13,5 17 -3,375 20 -108 21 -3,375 22 -16,875 33 16,875
35 -33,75 39 33,75 41 -16,875 45 16,875 47 -16,875 58 -33,75 59 -16,875
60

15 405 16 -108 17 13,5 18 -3,375 21 -108 22 -3,375 23 -16,875 34 16,875
36 -33,75 40 33,75 42 -16,875 46 16,875 48 -16,875 59 -33,75 60 -16,875
61

11 418,5 17 -108 18 -3,375 22 -108 23 -3,375 24 -16,875 35 -33,75 41
-16,875 47 -16,875 60 -33,75 61 -16,875 62

8 202,5 18 -3,375 23 -54 24 -16,875 36 -33,75 42 -16,875 48 -16,875 61
-16,875 62

10 189 19 -54 20 6,75 21 -16,875 37 16,875 39 -16,875 43 16,875 45 -16,875
63 -33,75 64 -16,875 65

10 195,75 20 -54 21 6,75 22 -16,875 38 16,875 40 -16,875 44 16,875 46
-16,875 64 -33,75 65 -16,875 66

10 195,75 21 -54 22 6,75 23 -16,875 39 16,875 41 -16,875 45 16,875 47
-16,875 65 -33,75 66 -16,875 67

10 195,75 22 -54 23 6,75 24 -16,875 40 16,875 42 -16,875 46 16,875 48
-16,875 66 -33,75 67 -16,875 68

7 202,5 23 -54 24 -16,875 41 -16,875 47 -16,875 67 -33,75 68 -16,875 69

5 97,875 24 -16,875 42 -16,875 48 -16,875 68 -16,875 69

8 1143,75 25 -656,25 26 -206,25 31 -206,25 32 225 49 -225 50 225 56 -225
57

9 2287,5 26 -656,25 27 -206,25 31 -412,5 32 -206,25 33 225 49 -225 51 225
56 -225 58

9 2287,5 27 -656,25 28 -206,25 32 -412,5 33 -206,25 34 225 50 -225 52 225
57 -225 59

9 2287,5 28 -656,25 29 -206,25 33 -412,5 34 -206,25 35 225 51 -225 53 225
58 -225 60

9 2287,5 29 -656,25 30 -206,25 34 -412,5 35 -206,25 36 225 52 -225 54 225
59 -225 61

7 2287,5 30 -206,25 35 -412,5 36 225 53 -225 55 225 60 -225 62

8 2287,5 31 -1312,5 32 -206,25 37 -206,25 38 -225 49 225 50 225 63 -225
64

9 4575 32 -1312,5 33 -206,25 37 -412,5 38 -206,25 39 -225 49 225 51 225
63 -225 65

9 4575 33 -1312,5 34 -206,25 38 -412,5 39 -206,25 40 -225 50 225 52 225
64 -225 66

9 4575 34 -1312,5 35 -206,25 39 -412,5 40 -206,25 41 -225 51 225 53 225
65 -225 67

9 4575 35 -1312,5 36 -206,25 40 -412,5 41 -206,25 42 -225 52 225 54 225
66 -225 68

7 4575 36 -206,25 41 -412,5 42 -225 53 225 55 225 67 -225 69

6 2287,5 37 -1312,5 38 -206,25 43 -206,25 44 -225 56 225 57

7 4575 38 -1312,5 39 -206,25 43 -412,5 44 -206,25 45 -225 56 225 58

7 4575 39 -1312,5 40 -206,25 44 -412,5 45 -206,25 46 -225 57 225 59

7 4575 40 -1312,5 41 -206,25 45 -412,5 46 -206,25 47 -225 58 225 60

7 4575 41 -1312,5 42 -206,25 46 -412,5 47 -206,25 48 -225 59 225 61

5 4575 42 -206,25 47 -412,5 48 -225 60 225 62

4 1143,75 43 -656,25 44 -225 63 225 64

4 2287,5 44 -656,25 45 -225 63 225 65

4 2287,5 45 -656,25 46 -225 64 225 66

4 2287,5 46 -656,25 47 -225 65 225 67

4 2287,5 47 -656,25 48 -225 66 225 68
3 2287,5 48 -225 67 225 69
4 1143,75 49 -206,25 50 -656,25 56 -206,25 57
5 2287,5 50 -206,25 51 -206,25 56 -1312,5 57 -206,25 58
5 2287,5 51 -206,25 52 -206,25 57 -1312,5 58 -206,25 59
5 2287,5 52 -206,25 53 -206,25 58 -1312,5 59 -206,25 60
5 2287,5 53 -206,25 54 -206,25 59 -1312,5 60 -206,25 61
5 2287,5 54 -206,25 55 -206,25 60 -1312,5 61 -206,25 62
3 1143,75 55 -206,25 61 -656,25 62
4 2287,5 56 -412,5 57 -656,25 63 -206,25 64
5 4575 57 -412,5 58 -206,25 63 -1312,5 64 -206,25 65
5 4575 58 -412,5 59 -206,25 64 -1312,5 65 -206,25 66
5 4575 59 -412,5 60 -206,25 65 -1312,5 66 -206,25 67
5 4575 60 -412,5 61 -206,25 66 -1312,5 67 -206,25 68
5 4575 61 -412,5 62 -206,25 67 -1312,5 68 -206,25 69
3 2287,5 62 -206,25 68 -656,25 69
2 2287,5 63 -412,5 64
2 4575 64 -412,5 65
2 4575 65 -412,5 66
2 4575 66 -412,5 67
2 4575 67 -412,5 68

2 4575 68 -412,5 69

1 2287,5 69

Współczynniki prawych stron

Przy zapisie prawych stron podaje się numer punktu z siatki podziału (numery punktów) i wartości obciążenia przypisane do danego punktu wraz z uwzględnieniem powierzchni obciążonego pola.

Obciążenie równomiernie rozłożone na całej płycie (patrz punkt 4.6):

- w węzłach od 1 do 5 0,005 współczynnik obciążenia wynosi: $(0,5qs^2 = 0,5 \cdot 0,1^2 q = 0,005q)$,
- w węźle 6 współczynnik obciążenia wynosi: 0,0025,
- w węzłach od 7 do 11 współczynnik obciążenia wynosi: 0,01,
- w węźle 12 współczynnik obciążenia wynosi: 0,005,
- w węzłach od 13 do 17 współczynnik obciążenia wynosi: 0,01,
- w węźle 18 współczynnik obciążenia wynosi: 0,005,
- w węzłach od 19 do 23 współczynnik obciążenia wynosi: 0,005,
- w węźle 24 współczynnik obciążenia wynosi: 0,0025,
- w węzłach od 25 do 69 współczynnik obciążenia wynosi: 0 (zero).

Siła skupiona działająca w środkowym punkcie płyty (patrz punkt 4.6):

- w węzłach od 1 do 23 i od 25 do 69 współczynnik obciążenia wynosi: 0 (zero), tylko w węźle 24 współczynnik obciążenia wynosi: 0,25.

Schematy obciążeń pokazano na rys. 4.8. Obciążenie siłą skupioną w punkcie środkowym płyty przyjęto z uwagi na fakt, że taki schemat obciążenia przewidziano w badaniach modelowych.

W tym miejscu należy zwrócić uwagę, że w dostępnych tablicach przedstawiających rozwiązania dla płyt (np. Bareš 1969; Stiglat, Wippel 1973; Timoshenko, Woinowsky-Krieger 1962) brak jest rozwiązań dla płyt podpartych na dwóch przeciwnych krawędziach i dwóch pozostałych swobodnych, obciążonych siłą skupioną w punkcie środkowym płyty. W pracy Starosolskiego (2006) znaleźć można informacje dotyczące pasma płytowego podpartego wzdłuż dłuższych krawędzi, obciążonego siłą skupioną w połowie szerokości pasma.

Po rozwiązaniu układów równań dla poszczególnych prawych stron otrzymano współczynniki proporcjonalne do przemieszczeń (w_i , u_i , v_i). Aby uzyskać poszczególne wartości przemieszczeń w metrach, współczynniki te należy pomnożyć przez wielkości obciążenia: dla obciążenia równomiernego przez q [MPa], dla siły skupionej przez P [MN].

Otrzymane wyniki w postaci wydruku z komputera zamieszczono poniżej. Dla $l_x = 120$ cm, $l_y = 60$ cm, $\delta = 3$ cm, $2h = 6$ cm, $E = 30\,000$ MN/m², $G_w = 450$ MN/m² (liczba niewiadomych: $w_i = 24$, $u_i = 24$, $v_i = 21$).

Obciążenie równomiernie rozłożone – współczynniki proporcjonalne do przemieszczeń.

Mnożnik $\times q$ [MN/m²]. Po pomnożeniu otrzymuje się wartości przemieszczeń w metrach.

$$w_2 = 0,002673q$$

$$w_3 = 0,005075q$$

$$w_4 = 0,007069q$$

$$w_5 = 0,00856q$$

$$w_6 = 0,009481q$$

$$w_7 = 0,009793q$$

$$w_9 = 0,002673q$$

$$w_{10} = 0,005075q$$

$$w_{11} = 0,007069q$$

$$w_{12} = 0,00856q$$

$$w_{13} = 0,009481q$$

$$w_{14} = 0,009793q$$

$$w_{16} = 0,002673q$$

$$w_{17} = 0,005075q$$

$$w_{18} = 0,007069q$$

$$w_{19} = 0,00856q$$

$$w_{20} = 0,009481q$$

$$w_{21} = 0,009793q$$

$$w_{23} = 0,002673q$$

$$w_{24} = 0,005075q$$

$$w_{25} = 0,007069q$$

$$w_{26} = 0,00856q$$

$$w_{27} = 0,00941q$$

$$w_{28} = 0,009793q$$

$$u_1 = 0,000838q$$

$$u_2 = 0,000806q$$

$$u_3 = 0,000716q$$

$$u_4 = 0,000579q$$

$$u_5 = 0,000406q$$

$$u_6 = 0,000209q$$

$$u_8 = 0,000838q$$

$$u_9 = 0,000806q$$

$$u_{10} = 0,000716q$$

$$u_{11} = 0,000579q$$

$$u_{12} = 0,000406q$$

$$u_{13} = 0,000209q$$

$$u_{15} = 0,000838q$$

$$u_{16} = 0,000806q$$

$$u_{17} = 0,000716q$$

$$u_{18} = 0,000579q$$

$$u_{19} = 0,000406q$$

$$u_{20} = 0,000209q$$

$$u_{22} = 0,000838q$$

$$u_{23} = 0,000806q$$

$$u_{24} = 0,000716q$$

$$u_{25} = 0,000579q$$

$$u_{26} = 0,000406q$$

$$u_{27} = 0,000209q$$

przemieszczenia v

$$v_1 \div v_{21} = 0$$

Obciążenie siłą skupioną w punkcie środkowym płyty (rys. 4.8, punkt 28)

Mnożnik $\times P$ [MN]. Po przemnożeniu otrzymuje się przemieszczenia w metrach.

$w_2 = 0,005132P$	$u_1 = 0,001772P$	$v_1 = 7,1E - 06P$
$w_3 = 0,010023P$	$u_2 = 0,001724P$	$v_2 = 1,62E - 05P$
$w_4 = 0,014403P$	$u_3 = 0,001578P$	$v_3 = 3,36E - 05P$
$w_5 = 0,017956P$	$u_4 = 0,001329P$	$v_4 = 6,30E - 05P$
$w_6 = 0,020314P$	$u_5 = 0,000975P$	$v_5 = 0,000104P$
$w_7 = 0,021133P$	$u_6 = 0,00052P$	$v_6 = 0,000144P$
$w_9 = 0,005177P$	$u_8 = 0,001765P$	$v_7 = 0,000161P$
$w_{10} = 0,010126P$	$u_9 = 0,001715P$	$v_8 = 7,24E - 06P$
$w_{11} = 0,014608P$	$u_{10} = 0,001564P$	$v_9 = 1,46E - 05P$
$w_{12} = 0,018345P$	$u_{11} = 0,001313P$	$v_{10} = 3,02E - 05P$
$w_{13} = 0,020956P$	$u_{12} = 0,000961P$	$v_{11} = 5,70E - 05P$
$w_{14} = 0,021928P$	$u_{13} = 0,000514P$	$v_{12} = 9,54E - 05P$
$w_{16} = 0,005214P$	$u_{15} = 0,001763P$	$v_{13} = 0,000136P$
$w_{17} = 0,010218P$	$u_{16} = 0,001714P$	$v_{14} = 0,000154P$
$w_{18} = 0,014811P$	$u_{17} = 0,001564P$	$v_{15} = 5,24E - 06P$
$w_{19} = 0,018806P$	$u_{18} = 0,001318P$	$v_{16} = 9,03E - 06P$
$w_{20} = 0,021954P$	$u_{19} = 0,000975P$	$v_{17} = 1,86E - 05P$
$w_{21} = 0,023535P$	$u_{20} = 0,000535P$	$v_{18} = 3,55E - 05P$
$w_{23} = 0,005229P$	$u_{22} = 0,001764P$	$v_{19} = 6,23E - 05P$
$w_{24} = 0,010253P$	$u_{23} = 0,001714P$	$v_{20} = 9,73E - 05P$
$w_{25} = 0,014892P$	$u_{24} = 0,001566P$	$v_{21} = 0,000116P$
$w_{26} = 0,019039P$	$u_{25} = 0,001322P$	
$w_{27} = 0,022799P$	$u_{26} = 0,000985P$	
$w_{28} = 0,026274P$	$u_{27} = 0,00055P$	

Analiza otrzymanych wyników (rdzeń $G_w = 450$ MPa)

Płyta trójwarstwowa na dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podparta, a na pozostałych swobodnych: $l_x = 120$ cm, $l_y = 60$ cm, $\delta = 3$ cm, $2h = 6$ cm, $E = 30\,000$ MPa, $G_w = 450$ MPa, $\nu = 0$, $s = \frac{l_x}{12} = \frac{l_y}{6} = 0,1$ m.

Obciążenia równomierne q [MPa]

$$\begin{aligned}w_{28} &= 0,009793q \\w_{27} &= 0,009481q \\u_{27} &= 0,000209q\end{aligned}$$

W zapisie różnicowym, przy siatkach podziału pokazanych na rys. 4.8 czy 4.16, drugą pochodną funkcji ugięcia „w” po x w punkcie 28 oblicza się z zależności:

$$w_{,xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{27} - 2w_{28} + w_{27}}{s^2} = \frac{2(w_{27} - w_{28})}{s^2}.$$

Pochodną po x z funkcji przemieszczeń u: $u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{27}}{s}$.

Sztywność okładziny: $D = \frac{E\delta^3}{12} = \frac{30\,000 \cdot 0,03^3}{12} = 0,0675 \text{ MNm}$.

Obliczenia dla punktu środkowego płyty (28). Moment zginający w okładzinie (wg 4.3):

$$m_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -0,0675 \cdot 2 (0,009481 - 0,009793) \cdot 0,1^{-2} q = 4,212 \cdot 10^{-3} q.$$

Siła tarczowa w dolnej okładzinie (wg 4.1):

$$N_x = E\delta \frac{\partial u}{\partial x} = 30\,000 \cdot 0,03 \cdot \frac{0,000209}{0,1} q = 1,881 q.$$

Moment zginający dla całego przekroju płyty

$$M_x = N_x (2h + \delta) + 2m_x = 1,881 \cdot 0,09 q + 2 \cdot 4,212 \cdot 10^{-3} q = 0,178 q \text{ MNm/m}.$$

Otrzymany rezultat porównano z rozwiązaniem dla pasma płytowego, dla którego moment zginający przy równomiernym obciążeniu wynosi

$$M_x = \frac{ql^2}{8} = \frac{1,2^2}{8} q = 0,18 q \text{ MNm/m}.$$

Zgodność wyników jest bardzo dobra.

Naprężenia normalne w okładzinie obliczone dla punktu 28, wzory (4.4)

$$\sigma_{xsr} = \frac{N_x}{\delta} = \frac{1,881 q}{0,03} = 62,7 q$$

$$\sigma_{xmax} = \sigma_{xsr} + \frac{6m_x}{\delta^2} = 62,7 q + \frac{6 \times 4,212 \cdot 10^{-3} q}{0,03^2} = 90,78 q$$

W celu zweryfikowania otrzymanych rozwiązań zamieszczono poniższe wyliczenia.

Dla betonu C20/25 średnia wytrzymałość na rozciąganie $f_{ctm} = 2,2 \text{ MPa}$.

Moment rysujący dla zginanego elementu betonowego $M_r = W_x \cdot f_{ctm}$.

Wskaźnik wytrzymałości dla przekroju trójwarstwowego o wymiarach $\delta = 3 \text{ cm}$, $2h = 6 \text{ cm}$ obliczony tylko dla okładzin wynosi:

$$W_x = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$M_r = 2,1 \cdot 10^{-3} \cdot 2,2 = 4,62 \cdot 10^{-3} \text{ MNm/m}$$

Korzystając z zależności $M = 0,18q$, wyznaczono obciążenie q pod działaniem którego wystąpi moment zginający odpowiadający momentowi rysującemu.

$$q = \frac{M_r}{0,18} = \frac{4,62 \cdot 10^{-3}}{0,18} = 0,0257 \text{ MPa}$$

Dla obciążenia $q = 0,0257 \text{ MPa}$

$$\sigma_{xsr} = 62,7 \cdot 0,0257 = 1,61 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x\max} = 90,78 \cdot 0,0257 = 2,33 \text{ MPa}$$

Otrzymane wartości naprężeń w okładzinach są zbliżone do średniej wytrzymałości betonu na rozciąganie $f_{ctm} = 2,2 \text{ MPa}$, co potwierdza poprawność otrzymanych wyników.

Płyta trójwarstwowa – obciążenie siłą skupioną P [MN], $s = 0,1$ [m]

Obliczenia momentów zginających w okładzinie dolnej, dla punktów leżących na osi symetrii (rys. 4.8, punkty 28, 21, 14 i 7).

$$w_{28} = 0,026274P$$

$$w_{27} = 0,022799P$$

$$m_x = -D \frac{2(w_{27} - w_{28})}{s^2}$$

$$m_{x28} = -0,0675 \cdot 2(0,022799 - 0,026274) \cdot 0,1^{-2} \cdot P = 0,04691P \text{ [MNm/m]}$$

$$w_{21} = 0,023535P$$

$$w_{20} = 0,021954P$$

$$m_{x21} = -0,0675 \cdot 2(0,021954 - 0,023535) \cdot 0,1^{-2} \cdot P = 0,02134P \text{ [MNm/m]}$$

$$w_{14} = 0,021928P$$

$$w_{13} = 0,020956P$$

$$m_{x14} = -0,0675 \cdot 2(0,020956 - 0,021928) \cdot 0,1^{-2} \cdot P = 0,01312P \text{ [MNm/m]}$$

$$w_7 = 0,021133P$$

$$w_8 = 0,020314P$$

$$m_{x7} = -0,0675 \cdot 2(0,020314 - 0,021133) \cdot 0,1^{-2} \cdot P = 0,01106P \text{ [MNm/m]}$$

Obliczenia sił tarczowych w okładzinie dolnej:

$$u_{27} = 0,00055P \quad N_x^{28} = 30\,000 \cdot 0,03 \frac{0,00055P}{0,1} = 4,95P \text{ [MN/m]}$$

$$u_{20} = 0,000535P \quad N_x^{20} = 30\,000 \cdot 0,03 \frac{0,000535P}{0,1} = 4,815P \text{ [MN/m]}$$

$$u_{13} = 0,000514P \quad N_x^{13} = 30\,000 \cdot 0,03 \frac{0,000514P}{0,1} = 4,626P \text{ [MN/m]}$$

$$u_6 = 0,00052P \quad N_x^6 = 30\,000 \cdot 0,03 \frac{0,00052P}{0,1} = 4,68P \text{ [MN/m]}$$

Obliczenie momentów zginających dla całego przekroju płyty:

$$M_x^{28} = (4,95 \cdot 0,09 + 2 \cdot 0,04691)P = 0,5393P \text{ [MNm/m]}$$

$$M_x^{21} = (4,815 \cdot 0,09 + 2 \cdot 0,02134)P = 0,4760P \text{ [MNm/m]}$$

$$M_x^{14} = (4,626 \cdot 0,09 + 2 \cdot 0,01312)P = 0,4426P \text{ [MNm/m]}$$

$$M_x^7 = (4,68 \cdot 0,09 + 2 \cdot 0,01106)P = 0,4433P \text{ [MNm/m]}$$

Naprężenia normalne w okładzinie dolnej:

$$\begin{aligned} \sigma_{sr}^{28} &= \frac{N_x^{28}}{\delta} = \frac{4,95P}{0,03} = 165P \\ \sigma_{max}^{28} &= \sigma_{sr}^{28} + \frac{6m_x^{28}}{\delta^2} = 165P + \frac{6 \cdot 0,04691P}{0,03^2} = 165P + 313P = 478P \end{aligned}$$

4.5.2. Przykład nr 2. Płyta trójwarstwowa (moduł Kirchoffa materiału rdzenia $G_w = 4450 \text{ MPa}$)

Do obliczeń przyjęto identyczne parametry płyty jak w przykładzie 1., zmieniono jedynie wielkość modułu Kirchoffa, przyjmując $G_w = 4450 \text{ MPa}$. Siatka podziału i numeracja węzłów takie same jak poprzednio (rys. 4.8). Przy budowie macierzy układu równań przemieszczeniowych skorzystano z zamieszczonej wcześniej macierzy globalnej (na współczynnikach ogólnych), podstawiając wartości:

$$A = 2E\delta = 2 \cdot 30\,000 \cdot 0,03 = 1800$$

$$B = 2G_w h^{-1} = 2 \cdot 4450 \cdot 0,03^{-1} = 296\,667$$

$$C = 2G_w h^{-1}(2h + \delta) = 296\,667 \cdot 0,09 = 26\,700$$

$$F = 0,5G_w h^{-1}(2h + \delta)^2 = 0,5 \cdot 4450 \cdot 0,03^{-1} \cdot 0,09^2 = 600,75$$

$$D = \frac{E\delta^3}{12} = \frac{30\,000 \cdot 0,03^3}{12} = 0,0675 \text{ MNm}$$

$$s = 0,01 \text{ m}$$

Otrzymaną macierz w zapisie jak w przykładzie 1 (połowa macierzy zapisana od przekątnej) zamieszczono poniżej. Obliczenia wykonano dla obciążeń jak poprzednio: równomiernie rozłożonego oraz siłą skupioną w punkcie środkowym.

$$l_x = 120 \text{ cm}, l_y = 60 \text{ cm}, \delta = 3 \text{ cm}, 2h = 6 \text{ cm}, E = 30\,000 \text{ MPa}, G_w = 4450 \text{ MPa}$$

Macierz układu równań przemieszczeniowych (zapis połowy macierzy od przekątnej)

69 – liczba niewiadomych: 24 w_i , 24 u_i , 21 v_i

16 702 **1** -54 **2** 6,75 **3** -81 **7** -273,375 **8** 13,5 **13** -166,875 **25** 166,875 **27**
-166,875 **31** 166,875 **33** 166,875 **49** 333,75 **50** 166,875 **51** 166,875 **56** 333,75
57 166,875 **58**

17 708,75 **2** -54 **3** 6,75 **4** -273,375 **7** -81 **8** -273,375 **9** 13,5 **14** -166,875
26 166,875 **28** -166,875 **32** 166,875 **34** 166,875 **50** 333,75 **51** 166,875
52 166,875 **57** 333,75 **58** 166,875 **59**

17 708,75 3 -54 4 6,75 5 -273,375 8 -81 9 -273,375 10 13,5 15 -166,875 27
166,875 29 -166,875 33 166,875 35 166,875 51 333,75 52 166,875 53 166,875
58 333,75 59 166,875 60

17 708,75 4 -54 5 6,75 6 -273,375 9 -81 10 -273,375 11 13,5 16 -166,875
28 166,875 30 -166,875 34 166,875 36 166,875 52 333,75 53 166,875 54
166,875 59 333,75 60 166,875 61

14 715,5 5 -54 6 -273,375 10 -81 11 -273,375 12 13,5 17 -166,875 29
-166,875 35 166,875 53 333,75 54 166,875 55 166,875 60 333,75 61 166,875
62

10 354,375 6 -273,375 11 -40,5 12 6,75 18 -166,875 30 -166,875 36 166,875
54 166,875 55 166,875 61 166,875 62

18 1444,5 7 -108 8 13,5 9 -108 13 -273,375 14 13,5 19 -166,875 25 166,875
27 -333,75 31 333,75 33 -166,875 37 166,875 39 -166,875 49 -333,75 50
-166,875 51 166,875 63 333,75 64 166,875 65

19 1458 8 -108 9 13,5 10 -273,375 13 -108 14 -273,375 15 13,5 20 -166,875
26 166,875 28 -333,75 32 333,75 34 -166,875 38 166,875 40 -166,875 50
-333,75 51 -166,875 52 166,875 64 333,75 65 166,875 66

19 1458 9 -108 10 13,5 11 -273,375 14 -108 15 -273,375 16 13,5 21 -166,875
27 166,875 29 -333,75 33 333,75 35 -166,875 39 166,875 41 -166,875 51
-333,75 52 -166,875 53 166,875 65 333,75 66 166,875 67

19 1458 10 -108 11 13,5 12 -273,375 15 -108 16 -273,375 17 13,5 22
-166,875 28 166,875 30 -333,75 34 333,75 36 -166,875 40 166,875 42 -166,875
52 -333,75 53 -166,875 54 166,875 66 333,75 67 166,875 68

15 1471,5 11 -108 12 -273,375 16 -108 17 -273,375 18 13,5 23 -166,875 29
-333,75 35 -166,875 41 -166,875 53 -333,75 54 -166,875 55 166,875 67 333,75
68 166,875 69

11 729 12 -273,375 17 -54 18 6,75 24 -166,875 30 -333,75 36 -166,875 42
-166,875 54 -166,875 55 166,875 68 166,875 69

14 1471,5 13 -108 14 13,5 15 -108 19 -273,375 20 -166,875 31 166,875 33
-333,75 37 333,75 39 -166,875 43 166,875 45 -166,875 56 -333,75 57 -166,875
58

15 1485 14 -108 15 13,5 16 -273,375 19 -108 20 -273,375 21 -166,875
32 166,875 34 -333,75 38 333,75 40 -166,875 44 166,875 46 -166,875 57
-333,75 58 -166,875 59

15 1485 15 -108 16 13,5 17 -273,375 20 -108 21 -273,375 22 -166,875
33 166,875 35 -333,75 39 333,75 41 -166,875 45 166,875 47 -166,875 58
-333,75 59 -166,875 60

15 1485 16 -108 17 13,5 18 -273,375 21 -108 22 -273,375 23 -166,875
34 166,875 36 -333,75 40 333,75 42 -166,875 46 166,875 48 -166,875 59
-333,75 60 -166,875 61

11 1498,5 17 -108 18 -273,375 22 -108 23 -273,375 24 -166,875 35 -333,75
41 -166,875 47 -166,875 60 -333,75 61 -166,875 62

8 742,5 18 -273,375 23 -54 24 -166,875 36 -333,75 42 -166,875 48 -166,875
61 -166,875 62

10 729 19 -54 20 6,75 21 -166,875 37 166,875 39 -166,875 43 166,875 45
-166,875 63 -333,75 64 -166,875 65

10 735,75 20 -54 21 6,75 22 -166,875 38 166,875 40 -166,875 44 166,875 46
-166,875 64 -333,75 65 -166,875 66

10 735,75 21 -54 22 6,75 23 -166,875 39 166,875 41 -166,875 45 166,875 47
-166,875 65 -333,75 66 -166,875 67

10 735,75 22 -54 23 6,75 24 -166,875 40 166,875 42 -166,875 46 166,875 48
-166,875 66 -333,75 67 -166,875 68

7 742,5 23 -54 24 -166,875 41 -166,875 47 -166,875 67 -333,75 68 -166,875
69

5 367,875 24 -166,875 42 -166,875 48 -166,875 68 -166,875 69

8 1310,4375 25 -489,5625 26 -39,5625 31 -39,5625 32 225 49 -225 50 225
56 -225 57

9 2620,875 26 -489,5625 27 -39,5625 31 -79,125 32 -39,5625 33 225 49 -225
51 225 56 -225 58

9 2620,875 27 -489,5625 28 -39,5625 32 -79,125 33 -39,5625 34 225 50 -225
52 225 57 -225 59

9 2620,875 28 -489,5625 29 -39,5625 33 -79,125 34 -39,5625 35 225 51 -225
53 225 58 -225 60

9 2620,875 29 -489,5625 30 -39,5625 34 -79,125 35 -39,5625 36 225 52 -225
54 225 59 -225 61

7 2620,875 30 -39,5625 35 -79,125 36 225 53 -225 55 225 60 -225 62

8 2620,875 31 -979,125 32 -39,5625 37 -39,5625 38 -225 49 225 50 225 63
-225 64

9 5241,75 32 -979,125 33 -39,5625 37 -79,125 38 -39,5625 39 -225 49 225
51 225 63 -225 65

9 5241,75 33 -979,125 34 -39,5625 38 -79,125 39 -39,5625 40 -225 50 225
52 225 64 -225 66

9 5241,75 34 -979,125 35 -39,5625 39 -79,125 40 -39,5625 41 -225 51 225
53 225 65 -225 67

9 5241,75 35 -979,125 36 -39,5625 40 -79,125 41 -39,5625 42 -225 52 225
54 225 66 -225 68

7 5241,75 36 -39,5625 41 -79,125 42 -225 53 225 55 225 67 -225 69

6 2620,875 37 -979,125 38 -39,5625 43 -39,5625 44 -225 56 225 57

7 5241,75 38 -979,125 39 -39,5625 43 -79,125 44 -39,5625 45 -225 56 225
58

7 5241,75 39 -979,125 40 -39,5625 44 -79,125 45 -39,5625 46 -225 57 225
59

7 5241,75 40 -979,125 41 -39,5625 45 -79,125 46 -39,5625 47 -225 58 225
60

7 5241,75 41 -979,125 42 -39,5625 46 -79,125 47 -39,5625 48 -225 59 225
61

5 5241,75 42 -39,5625 47 -79,125 48 -225 60 225 62

4 1310,4375 43 -489,5625 44 -225 63 225 64

4 2620,875 44 -489,5625 45 -225 63 225 65

4 2620,875 45 -489,5625 46 -225 64 225 66

4 2620,875 46 -489,5625 47 -225 65 225 67

4 2620,875 **47** -489,5625 **48** -225 **66** 225 **68**
3 2620,875 **48** -225 **67** 225 **69**
4 1310,4375 **49** -39,5625 **50** -489,5625 **56** -39,5625 **57**
5 2620,875 **50** -39,5625 **51** -39,5625 **56** -979,125 **57** -39,5625 **58**
5 2620,875 **51** -39,5625 **52** -39,5625 **57** -979,125 **58** -39,5625 **59**
5 2620,875 **52** -39,5625 **53** -39,5625 **58** -979,125 **59** -39,5625 **60**
5 2620,875 **53** -39,5625 **54** -39,5625 **59** -979,125 **60** -39,5625 **61**
5 2620,875 **54** -39,5625 **55** -39,5625 **60** -979,125 **61** -39,5625 **62**
3 1310,4375 **55** -39,5625 **61** -489,5625 **62**
4 2620,875 **56** -79,125 **57** -489,5625 **63** -39,5625 **64**
5 5241,75 **57** -79,125 **58** -39,5625 **63** -979,125 **64** -39,5625 **65**
5 5241,75 **58** -79,125 **59** -39,5625 **64** -979,125 **65** -39,5625 **66**
5 5241,75 **59** -79,125 **60** -39,5625 **65** -979,125 **66** -39,5625 **67**
5 5241,75 **60** -79,125 **61** -39,5625 **66** -979,125 **67** -39,5625 **68**
5 5241,75 **61** -79,125 **62** -39,5625 **67** -979,125 **68** -39,5625 **69**
3 2620,875 **62** -39,5625 **68** -489,5625 **69**
2 2620,875 **63** -79,125 **64**
2 5241,75 **64** -79,125 **65**
2 5241,75 **65** -79,125 **66**
2 5241,75 **66** -79,125 **67**
2 5241,75 **67** -79,125 **68**
2 5241,75 **68** -79,125 **69**
1 2620,875 **69**

Prawe strony są identyczne jak w przykładzie 1. (punkt 4.6.1).

Wyniki obliczeń dla obciążenia równomiernego

$l_x = 120 \text{ cm}$, $l_y = 60 \text{ cm}$, $\delta = 3 \text{ cm}$, $2h = 6 \text{ cm}$, $E = 30\,000 \text{ MPa}$, $G_w = 4450 \text{ MPa}$,

$$D = \frac{E\delta^3}{12} = 0,0675 \text{ MNm}, s = 0,01 \text{ m}$$

Współczynniki proporcjonalne do przemieszczeń w_i , u_i i v_i . Aby otrzymać wartość przemieszczenia w metrach, należy podane w tabeli 4.3 współczynniki pomnożyć przez wartość obciążenia q [MPa].

Tabela 4.3. Współczynniki proporcjonalne do przemieszczeń w_i , u_i i v_i (obciążenie równomiernie rozłożone)

W ₂	0,001937	u ₁	0,000848	V ₁	0
W ₃	0,003719	u ₂	0,000816	V ₂	0
W ₄	0,005229	u ₃	0,000724	V ₃	0
W ₅	0,006373	u ₄	0,000584	V ₄	0
W ₆	0,007086	u ₅	0,000409	V ₅	0
W ₇	0,007328	u ₆	0,000211	V ₆	0
W ₉	0,001937	u ₈	0,000848	V ₇	0
W ₁₀	0,003719	u ₉	0,000816	V ₈	0
W ₁₁	0,005229	u ₁₀	0,000724	V ₉	0
W ₁₂	0,006373	u ₁₁	0,000584	V ₁₀	0
W ₁₃	0,007086	u ₁₂	0,000409	V ₁₁	0
W ₁₄	0,007328	u ₁₃	0,000211	V ₁₂	0
W ₁₆	0,001937	u ₁₅	0,000848	V ₁₃	0
W ₁₇	0,003719	u ₁₆	0,000816	V ₁₄	0
W ₁₈	0,005229	u ₁₇	0,000724	V ₁₅	0
W ₁₉	0,006373	u ₁₈	0,000584	V ₁₆	0
W ₂₀	0,007086	u ₁₉	0,000409	V ₁₇	0
W ₂₁	0,007328	u ₂₀	0,000211	V ₁₈	0
W ₂₃	0,001937	u ₂₂	0,000848	V ₁₉	0
W ₂₄	0,003719	u ₂₃	0,000816	V ₂₀	0
W ₂₅	0,005229	u ₂₄	0,000724	V ₂₁	0
W ₂₆	0,006373	u ₂₅	0,000584		
W ₂₇	0,007086	u ₂₆	0,000409		
W ₂₈	0,007328	u ₂₇	0,000211		

Źródło: oprac. własne.

Wyniki obliczeń dla obciążenia siłą skupioną działającą w punkcie środkowym płyty:

$l_x = 120 \text{ cm}$, $l_y = 60 \text{ cm}$, $\delta = 3 \text{ cm}$, $2h = 6 \text{ cm}$, $E = 30\,000 \text{ MPa}$, $G_w = 4450 \text{ MPa}$,

$$D = \frac{E\delta^3}{12} = 0,0675 \text{ MNm}, s = 0,01 \text{ m}$$

Współczynniki proporcjonalne do przemieszczeń w , u i v . Aby uzyskać wartość szukanego przemieszczenia w metrach, należy otrzymane współczynniki zestawione w tabeli 4.4 pomnożyć przez wartości obciążenia P [MN].

Tabela 4.4. Współczynniki proporcjonalne do przemieszczeń w_i , u_i i v_i (obciążenie siłą skupioną w punkcie środkowym)

w_2	0,003979	u_1	0,00177	v_1	1,2E - 05
w_3	0,007744	u_2	0,001722	v_2	1,75 E - 05
w_4	0,011047	u_3	0,001576	v_3	3,57 E - 05
w_5	0,01364	u_4	0,001324	v_4	6,24 E - 05
w_6	0,015319	u_5	0,000967	v_5	9,76 E - 05
w_7	0,01589	u_6	0,000514	v_6	0,00013
w_9	0,004023	u_8	0,001773	v_7	0,000145
w_{10}	0,007825	u_9	0,001723	v_8	1,22 E - 05
w_{11}	0,011181	u_{10}	0,001573	v_9	1,56 E - 05
w_{12}	0,013875	u_{11}	0,001322	v_{10}	3,23 E - 05
w_{13}	0,015616	u_{12}	0,00097	v_{11}	5,61 E - 05
w_{14}	0,016249	u_{13}	0,000518	v_{12}	9,14 E - 05
w_{16}	0,004055	u_{15}	0,001786	v_{13}	0,000128
w_{17}	0,007889	u_{16}	0,001736	v_{14}	0,000144
w_{18}	0,011295	u_{17}	0,001588	v_{15}	8,67 E - 05
w_{19}	0,014047	u_{18}	0,001344	v_{16}	9,52 E - 05
w_{20}	0,016009	u_{19}	0,001003	v_{17}	1,99 E - 05
w_{21}	0,016606	u_{20}	0,00056	v_{18}	3,48 E - 05
w_{23}	0,004068	u_{22}	0,001791	v_{19}	5,84 E - 05
w_{24}	0,007915	u_{23}	0,001741	v_{20}	0,000102
w_{25}	0,011334	u_{24}	0,001594	v_{21}	0,00013
w_{26}	0,014139	u_{25}	0,001352		
w_{27}	0,016067	u_{26}	0,001017		
w_{28}	0,017441	u_{27}	0,000589		

Źródło: oprac. własne.

Analiza otrzymanych wyników (rdzeń $G_w = 4450$ MPa)

Parametry obliczanej płyty

$l_x = 120$ cm, $l_y = 60$ cm, $\delta = 3$ cm, $2h = 6$ cm, $E = 30\,000$ MPa, $G_w = 4450$ MPa,

$$D = \frac{E\delta^3}{12} = 0,0675 \text{ MNm}, s = 0,01 \text{ m}$$

Obciążenie równomierne q [MPa]

$$w_{28} = 0,007328q$$

$$w_{27} = 0,007086q$$

$$u_{27} = 0,000211q$$

Obliczenia dla płyt punktu środkowego (28)

Moment zginający w okładzinie:

$$m_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{27} - 2w_{28} + w_{28}}{s^2} = \frac{2(w_{27} - w_{28})}{s^2}$$

$$m_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -0,0675 \cdot 2(0,007086 - 0,007328) \cdot 0,1^{-2} \cdot q = 3,267 \cdot 10^{-3} q$$

Siła tarczowa w dolnej okładzinie:

$$N_x = E\delta \frac{\partial u}{\partial x} = 30\,000 \cdot 0,03 \cdot \frac{0,000211}{0,1} q = 1,899q$$

Moment zginający dla całego przekroju płyty:

$$M_x = N_x (2h + \delta) + 2m_x = 1,899 \cdot 0,09q + 2 \cdot 3,267 \cdot 10^{-3}q = 0,177q$$

Naprężenia normalne w okładzinie:

$$\sigma_{sr} = \frac{N_x}{\delta} = \frac{1,899q}{0,03} = 63,3q$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{sr} + \frac{6m_x}{\delta^2} = 63,3q + \frac{6 \cdot 3,267 \cdot 10^{-3}q}{0,03^2} = 63,3q + 21,78q = 85,08q$$

Płyta trójwarstwowa – obciążenie siłą skupioną w punkcie środkowym (28)

$l_x = 120$ cm, $l_y = 60$ cm, $\delta = 3$ cm, $2h = 6$ cm, $E = 30\,000$ MPa, $G_w = 4450$ MPa,

$$D = \frac{E\delta^3}{12} = 0,0675 \text{ MNm}, s = 0,01 \text{ m}$$

Momenty zginające w okładzinie

Po podstawieniu siły P w [MN] otrzyma się wartość m_x w [MNm/m]

$$w_{28} = 0,017441P$$

$$w_{27} = 0,016067P$$

$$m_{x28} = -0,0675 \cdot 2(0,016067 - 0,017441) \cdot 0,1^{-2} \cdot P = 0,018549P \text{ [MNm/m]}$$

$$w_{21} = 0,016606P$$

$$w_{20} = 0,016009P$$

$$m_{x21} = -0,0675 \cdot 2(0,016009 - 0,016606) \cdot 0,1^{-2} \cdot P = 0,008060P \text{ [MNm/m]}$$

$$w_{14} = 0,016249P$$

$$w_{13} = 0,015616P$$

$$m_{x14} = -0,0675 \cdot 2(0,015616 - 0,016249) \cdot 0,1^{-2} \cdot P = 0,008546P \text{ [MNm/m]}$$

$$w_7 = 0,01589P$$

$$w_6 = 0,015319P$$

$$m_{x7} = -0,0675 \cdot 2(0,015319 - 0,01589) \cdot 0,1^{-2} \cdot P = 0,007709P \text{ [MNm/m]}$$

Siły tarczowe w dolnej okładzinie:

$$u_{27} = 0,000589P \quad N_x^{28} = 30\,000 \cdot 0,03 \frac{0,000589}{0,1} P = 5,301P$$

$$u_{20} = 0,00056P \quad N_x^{21} = 30\,000 \cdot 0,03 \frac{0,00056}{0,1} P = 5,04P$$

$$u_{13} = 0,000518P \quad N_x^{14} = 30\,000 \cdot 0,03 \frac{0,000518}{0,1} P = 4,662P$$

$$u_6 = 0,000514P \quad N_x^8 = 30\,000 \cdot 0,03 \frac{0,000514}{0,1} P = 4,626P$$

Momenty zginające dla całego przekroju płyt:

$$M_x^{28} = (5,301 \cdot 0,09 + 2 \cdot 0,018549)P = 0,5142P$$

$$M_x^{21} = (5,04 \cdot 0,09 + 2 \cdot 0,00806)P = 0,4697P$$

$$M_x^{14} = (4,662 \cdot 0,09 + 2 \cdot 0,0085456)P = 0,4367P$$

$$M_x^7 = (4,626 \cdot 0,09 + 2 \cdot 0,0007709)P = 0,4318P$$

Naprężenia normalne w okładzinie dla punktu centralnego:

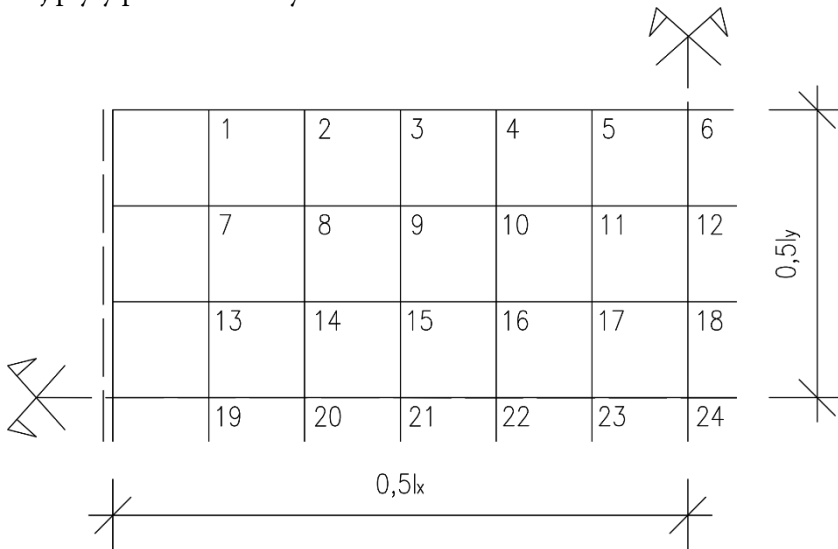
$$\sigma_{sr} = \frac{N_x}{\delta} = \frac{5,301P}{0,03} = 176,7P$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{sr} + \frac{6m_x}{\delta^2} = 176,7P + \frac{6 \cdot 0,018549P}{0,03^2} = 300,36P$$

4.5.3. Przykład nr 3. Płyta jednorodna, izotropowa

W celach porównawczych wykonano również obliczenia dla płyty jednorodnej, izotropowej, wykorzystując wariacyjne ujęcie metody różnic skończonych. Zastosowano analogiczny podział płyty dyskretną siatką linii, o oczkach kwadratowych

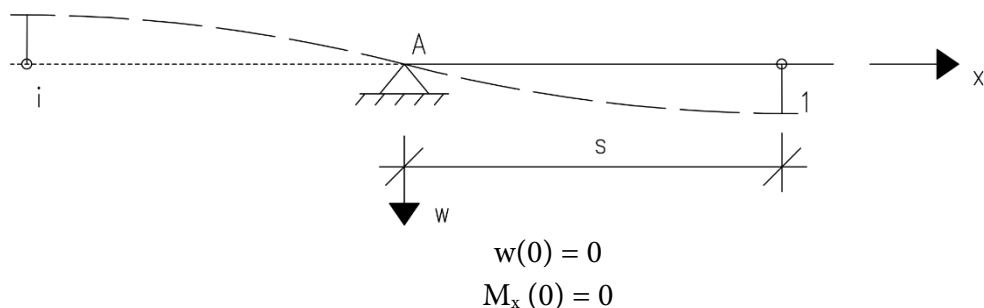
$s = \frac{l_x}{12} = \frac{l_y}{6}$, jak w przykładach poprzednich. Numerację węzłów i schemat statyczny obliczanej płyty pokazano na rys. 4.17.



Rys. 4.17. „Ćwiartka” płyty jednorodnej, izotropowej z numeracją węzłów; $s = \frac{l_x}{12} = \frac{l_y}{6}$; $l_x : l_y = 2 : 1$

Źródło: oprac. własne.

Przy budowie macierzy równań przemieszczeniowych skorzystano z gotowych schematów ilorazów różnicowych zaczerpniętych z pracy Buczkowskiego (2007) [patrz rys. 4.9]. Przy rozpisywaniu równań różnicowych uwzględniono warunki brzegowe, które dla krawędzi swobodnie podpartej opisano poniżej: w punkcie podparcia ugięcie oraz moment zginający muszą być równe zero.



Rys. 4.18. Schemat i oznaczenia podpory swobodnie podpartej

Źródło: oprac. na podstawie Buczkowski (2007).

Moment zginający dla płyty dany jest zależnością: (dla $\nu = 0$)

$$M_x = -D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Aby spełnić warunki brzegowe, wartość drugiej pochodnej w punkcie A musi być równa zero. Warunek ten w zapisie różnicowym można przedstawić jak niżej:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_i - 2w_A + w_1}{s^2} = 0 \rightarrow$$

Ponieważ $w_A = 0$, więc $w_i = -w_1$ (punkt A jest punktem przegięcia).

Rozwiązań macierzy poszukiwano dla dwóch prawych stron uzyskanych dla obciążenia równomiernie rozłożonego oraz siłą skupioną działającą w punkcie środkowym płyty. Otrzymaną macierz pokazano poniżej (tabela 4.5). Dołączono również zapis „połowy” macierzy w wersji identycznej, jak w przykładach 1 i 2.

Rozwiązania dla poszczególnych obciążeń zamieszczono w tabelach 4.6 i 4.7.

Tabela 4.5. Macierz układu równań przemieszczeniowych – płyta jednorodna, izotropowa (numeracja węzłów – rys. 4.17)

W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8	W9	W10	W11	W12	W13	W14	W15	W16	W17	W18	W19	W20	W21	W22	W23	W24	Obciążenie równomierne	Obciążenie siłą skupioną	
7,5	-4	0,5				-6	2					1												0,5		
-4	8	-4	0,5			2	-6	12					1												0,5	
0,5	-4	8	-4	0,5		2	2	-6	2					1											0,5	
	0,5	-4	8	-4	0,5			2	-6	2					1										0,5	
		0,5	-4	8,5	-4				2	-6	2					1	0,5								0,25	
			0,5	-4	4				2	-3															1	
-6	2					18	-8	1				-8	2					1							1	
2	-6	2				-8	19	-8	1			2	-8	2					1						1	
	2	-6	2			1	-8	19	-8	1			2	-8	2					1					1	
		2	-6	2			1	-8	19	-8	1			2	-8	2					1				1	
			2	-6	2			1	-8	20	-8				2	-8	2					1			1	
				2	-3				1	-8	9,5					2	-4						0,5	0,5	0,5	
1						-8	2					20	-8	1				-8	2						1	
	1					2	-8	2				-8	21	-8	1			2	-8	2					1	
		1				2	2	-8	2			1	-8	21	-8	1			2	-8	2				1	
			1				2	-8	2			1	-8	21	-8	1				2	-8	2			1	
				1					2	-8	2			1	-8	22	-8				2	-8	2		1	
					0,5					2	-4				1	-4	10,5					2	-4		0,5	
						1						-8	2					9,5	-4	0,5					0,5	
							1					2	-8	2				-4	10	-4	0,5				0,5	
								1					2	-8	2			0,5	-4	10	-4	0,5			0,5	
									1				2	-8	2			0,5	-4	10	-4	0,5			0,5	
										1			2	-8	2			0,5	-4	10	-4	0,5			0,5	
															2	-8	2		0,5	-4	10	-4	0,5		0,5	
																2	-8	2		0,5	-4	10,5	-4	0,5	0,5	
											0,5					2	-4			0,5	-4	5		0,25	0,25	

Źródło: oprac. własne.

Zapis macierzy

W poszczególnych wierszach zapisanej macierzy: pierwsza cyfra oznacza liczbę współczynników w danym wierszu, następnie podane są wartość współczynnika i numer kolumny, w której ta wartość występuje. W poszczególnych wierszach zapisy zaczynają się od kolumny leżącej na osi symetrii macierzy.

Można to sprawdzić, analizując zapisy macierzy podane w tabeli 4.5, np. w pierwszym wierszu, licząc od przekątnej, mamy 6 współczynników i tak 7,5 w kolumnie 1; -4 w kolumnie 2; 0,5 w kolumnie 3; -6 w kolumnie 7; 2 w kolumnie 8 i 1 w kolumnie 13.

Płyta 24

Macierz układu równań

Zapis połowy macierzy – od przekątnej

24 – liczba równań

6 7,5 1 -4 2 0,5 3 -6 7 2 8 1 13
7 8 2 -4 3 0,5 4 2 7 -6 8 2 9 1 14
7 8 3 -4 4 0,5 5 2 8 -6 9 2 10 1 15
7 8 4 -4 5 0,5 6 2 9 -6 10 2 11 1 16
6 8,5 5 -4 6 2 10 -6 11 2 12 1 17
4 4 6 2 11 -3 12 0,5 18
6 18 7 -8 8 1 9 -8 13 2 14 1 19
7 19 8 -8 9 1 10 2 13 -8 14 2 15 1 20
7 19 9 -8 10 1 11 2 14 -8 15 2 16 1 21
7 19 10 -8 11 1 12 2 15 -8 16 2 17 1 22
6 20 11 -8 12 2 16 -8 17 2 18 1 23
4 9,5 12 2 17 -4 18 0,5 24
5 20 13 -8 14 1 15 -8 19 2 20
6 21 14 -8 15 1 16 2 19 -8 20 2 21
6 21 15 -8 16 1 17 2 20 -8 21 2 22
6 21 16 -8 17 1 18 2 21 -8 22 2 23
5 22 17 -8 18 2 22 -8 23 2 24
3 10,5 18 2 23 -4 24
3 9,5 19 -4 20 0,5 21

3 10 20 -4 21 0,5 22

3 10 21 -4 22 0,5 23

3 10 22 -4 23 0,5 24

2 10,5 23 -4 24

1 5 24

Płyta 24

Obciążenie równomierne

Mnożnik $\frac{qs^4}{D_1}$; q [MPa]

Tabela 4.6. Wyniki obliczeń płyty jednorodnej, izotropowej (przykład 3). Obciążenie równomierne (q[MPa]), mnożnik $\frac{qs^4}{D_1}$

W ₁	71,5
W ₂	137,5
W ₃	193,5
W ₄	236
W ₅	262,5
W ₆	271,5
W ₇	71,5
W ₈	137,5
W ₉	193,5
W ₁₀	236
W ₁₁	262,5
W ₁₂	271,5
W ₁₃	71,5
W ₁₄	137,5
W ₁₅	193,5
W ₁₆	236
W ₁₇	262,5
W ₁₈	271,5
W ₁₉	71,5
W ₂₀	137,5
W ₂₁	193,5
W ₂₂	236
W ₂₃	262,5
W ₂₄	271,5

Źródło: oprac. własne.

Dla płyty wolnopodpartej na dwóch przeciwległych krawędziach i dwóch pozostałych swobodnych, równomiernie obciążonej, maksymalne ugięcie powinno być identyczne, jak dla belki swobodnie podpartej równomiernie obciążonej (pasma płytowego):

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} = 0,01302 \frac{ql^4}{EI}$$

Z obliczeń MRS $w_{24} = 271,5 \frac{qs^4}{D_1}$ $s = \frac{l_x}{12}$

$$w_{24} = 271,5 \frac{ql_x^4}{12^4 D_1} = 0,01309 \frac{ql_x^4}{D}$$

Dokładność wyników z obliczeń MRS jest prawie stuprocentowa.

Płyta 24

Siła skupiona działająca w punkcie środkowym płyty (w węźle 24 – rys. 4.17).

Tabela 4.7. Wyniki obliczeń płyty jednorodnej, izotropowej (przykład 3). Obciążenie siłą skupioną (P [MN]) w punkcie środkowym płyty. Mnożnik $\frac{Ps^2}{D_1}$

W1	1,4827
W2	2,87968
W3	4,10515
W4	5,07386
W5	5,7038
W6	5,92528
W7	1,49635
W8	2,90856
W9	4,15217
W10	5,14217
W11	5,79359
W12	6,02708
W13	1,50685
W14	2,93137
W15	4,19126
W16	5,20393
W17	5,88472
W18	6,14245
W19	1,5109
W20	2,94047
W21	4,20798
W22	5,23396
W23	5,9396
W24	6,23565

Źródło: oprac. własne.

Ugięcie w punkcie środkowym

$$w_{24} = 6,23565 \frac{Ps^2}{D_1}$$

Analiza otrzymanych wyników dla płyty jednorodnej, izotropowej

Poniższe obliczenia wykonano dla danych: $l_x = 1,2$ m; $l_y = 0,6$ m; $s = \frac{l_x}{12} = 0,1$ m; grubość płyty $H = 0,12$ m; $E = 30\,000$ MPa.

Obciążenie równomierne

$$w_{24} = 271,5 \frac{qs^4}{D_1} \quad D_1 = \frac{EH^3}{12} = \frac{30\,000 \times 0,12^3}{12} = 4,32 \text{ MNm}, \quad s = 0,1 \text{ m}$$

$$w_{24} = 271,5 \frac{q \times 0,1^4}{4,32} = 0,006285q$$

$$M_x^{24} = -D_1 \frac{2(w_{23} - w_{24})}{s^2} \frac{qs^4}{D_1} = 2(271,5 - 262,5)qs^2 = 0,18q$$

$$\sigma_{x\max} = \frac{M}{W} = \frac{0,18q \cdot 6}{0,12^2 \cdot 1,0} = 75q$$

Obciążenie siłą skupioną w punkcie środkowym płyty

$$w_{24} = 6,23565 \frac{Ps^2}{D_1} = 6,23565 \frac{P \cdot 0,1^2}{4,32} = 0,014434P$$

$$M_x^{24} = -D_1 \frac{2(w_{23} - w_{24})}{s^2} \frac{Ps^2}{D_1} = 2(w_{24} - w_{23})P = 2(6,23565 - 5,9396)P = 0,5921P$$

$$M_x^{18} = 2(w_{18} - w_{17})P = 2(6,14245 - 5,88472)P = 0,51546P$$

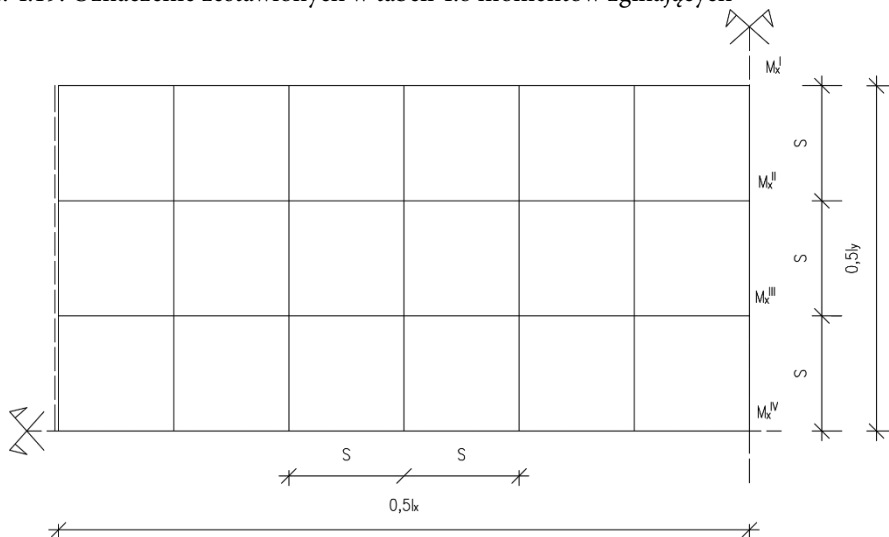
$$M_x^{12} = 2(w_{12} - w_{11})P = 2(6,02708 - 5,79359)P = 0,46698P$$

$$M_x^6 = 2(w_6 - w_5)P = 2(5,92528 - 5,7038)P = 0,44296P$$

$$\sigma_{x\max} = \frac{M}{W} = \frac{0,5921P \cdot 6}{1,0 \cdot 0,12^2} = 246,71P$$

4.5.4. Zestawienie i porównanie wyników przykładowych obliczeń

Rys. 4.19. Oznaczenie zestawionych w tabeli 4.8 momentów zginających



Źródło: oprac. własne.

Tabela 4.8. Zestawienie rozwiązań otrzymanych z przykładów obliczeniowych 1–3

Obciążenie	Porównywana wielkość	Płyta wolnopodparta na dwóch przeciwległych krawędziach $l_x = 1,2 \text{ m}$; $l_y = 0,6 \text{ m}$		
		Przykład 1. Płyta trójwarstwowa $\delta = 3 \text{ cm}$, $2h = 6 \text{ cm}$ $E = 30\,000 \text{ MPa}$ $G_w = 450 \text{ MPa}$	Przykład 2. Płyta trójwarstwowa $\delta = 3 \text{ cm}$, $2h = 6 \text{ cm}$ $E = 30\,000 \text{ MPa}$ $G_w = 4450 \text{ MPa}$	Przykład 3. Płyta jednorodna, izotropowa $H = 12 \text{ cm}$ $E = 30\,000 \text{ MPa}$
Obciążenie równomierne rozłożone na całej płycie q	ugięcie w środku płyty	0,009793 q	0,007328 q	
	moment zginający M_x^I			
	moment zginający M_x^{II}			
	moment zginający M_x^{III}			
	moment zginający M_x^{IV}	0,178 q	0,177 q	0,18 q
	naprężenia $\sigma_{x\max}$	90,78 q	85,08 q	75 q

Obciążenie	Porównywana wielkość	Płyta wolnopodparta na dwóch przeciwnych krawędziach $l_x = 1,2$ m; $l_y = 0,6$ m		
		Przykład 1. Płyta trójwarstwowa $\delta = 3$ cm, $2h = 6$ cm $E = 30\ 000$ MPa $G_w = 450$ MPa	Przykład 2. Płyta trójwarstwowa $\delta = 3$ cm, $2h = 6$ cm $E = 30\ 000$ MPa $G_w = 4450$ MPa	Przykład 3. Płyta jednorodna, izotropowa $H = 12$ cm $E = 30\ 000$ MPa
Siła skupiona działająca w punkcie środkowym płyty P	ugięcie w środku płyty	0,026274P	0,017441P	0,014434P
	moment zginający M_x^I	0,4433P	0,4318P	0,44296P
	moment zginający M_x^{II}	0,4426P	0,4367P	0,46698P
	moment zginający M_x^{III}	0,4760P	0,4697P	0,51546P
	moment zginający M_x^{IV}	0,5393P	0,5142P	0,5921P
	naprężenia $\sigma_{x\max}$	478P	300,36P	246,71P

Źródło: oprac. własne.

Na podstawie analizy wartości zestawionych w tabeli 4.8 możemy wyciągnąć następujące wnioski: im większa sztywność przekroju płyty, tym mniejsze wartości ugięć oraz mniejsze maksymalne naprężenia otrzymuje się w skrajnych płaszczyznach płyty.

5. Badania doświadczalne

5.1. Cel i zakres badań doświadczalnych

Przedmiotem badań i rozważań były betonowe płyty trójwarstwowe o okładzinach betonowych wykonane z betonu zwykłego i z rdzeniami z perlitobetonu oraz keramzytobetonu.

Podstawowymi celami przeprowadzonych analiz były potwierdzenie założeń teoretycznych modelu Hoffa (1950), sformułowanych przy opracowaniu koncepcji konstrukcji warstwowych zespolonych, oraz weryfikacja obliczeń płyt metodą różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym. Badania doświadczalne płyt przeprowadzono z wykorzystaniem systemu Aramis (Goszczyńska, Tworzewska 2014).

Wykonano dwie serie płyt warstwowych, po trzy sztuki w każdej serii, o przekroju 600×1200 mm i grubości 120 mm, przeznaczone do badań pod obciążeniem doraźnym. Każda płyta składała się z trzech warstw – górną i dolną wykonano z betonu zwykłego, a warstwę środkową, rdzeń, z perlitobetonu w serii pierwszej i keramzytobetonu w serii drugiej.

Elementy badawcze i próbki kontrolne wykonano z wcześniej zaprojektowanych i przetestowanych receptur mieszanek betonowych. Wybrano receptury mieszanek o najbardziej optymalnych składach w celu uzyskania prognozowanych charakterystyk wytrzymałościowo-odkształceniowych stwardniałego betonu. Podstawowe cechy materiałów zastosowanych do przygotowania mieszanek betonowych wykorzystanych w badaniach własnych przedstawiono w następnych rozdziałach.

5.2. Materiały użyte do wykonania płyt i elementów badawczych

5.2.1. Cement

Do wykonania modelowych elementów badawczych użyto cementu CEM I–42,5 R z firmy CEMEX – opis charakterystyki zestawiono w tabeli 5.1.

Tabela 5.1. Podstawowe charakterystyki cementu zastosowanego w badaniach

Cecha	Jedn.	Wartości średnie	Wymagania
Początek wiązania	min	167	≥ 60
Koniec wiązania		213	
Wodoządnosc	%	27,4	
Stalosc objętości	mm	1,2	≤ 10
Powierzchnia właściwa	cm ² / g	3659	
Wytrzymałość na ściskanie: po 2 dniach po 28 dniach	MPa	26,1	≥ 20
		55,0	≥ 42,5 i ≤ 62,5
Analiza chemiczna: SO ₃ Cl	%	2,97	≤ 4,0
		0,068	≤ 0,10
Pozostalosc nierozpuszczalna		1,63	≤ 5,0
Strata prażenia		2,90	≤ 5,0
Gęstość właściwa	g/cm ³	3,12	

Źródło: oprac. na podstawie: *Świadectwo jakości cementu*.

Cement CEM I-42,5 R zastosowano do wykonania płyt warstwowych, mieszanki betonowej betonu zwykłego warstw dolnej i górnej oraz do perlitobetonu i keramzytobetonu, który stanowi rdzeń płyt.

5.2.2. Kruszywo

Kruszywo użyte do wykonania mieszanek betonowych z betonu zwykłego było mieszaniną piasku o średnicy ziaren od 0 do 2 mm i żwiru o średnicy od 2 do 8 mm, zgodnie z normą PN-EN 12620.

Kruszywo, które wykorzystano do mieszanek betonów z perlitem, ma uziarnienie od 2 do 8 mm, zgodnie z wymaganiami normy PN-EN 12620. Kruszywo drobne – piasek o średnicy ziaren 0–2 mm – zostało zastąpione perlitem. Do wykonania keramzytobetonu użyto piasku o średnicy ziaren od 0 do 2 mm, a kruszywo grube o uziarnieniu od 2 do 8 mm zastąpiono keramzytem.

5.2.3. Perlit

W warstwie środkowej, czyli rdzeniu płyt warstwowych, użyto perlitobetonu, a w opracowanych recepturach mieszanek betonowych piasek drobny zastąpiono perlitem EP 180.



Rys. 5.1. Perlit EP 180

Źródło: materiały własne.

Perlit jest skałą pochodzenia wulkanicznego. Nazywany jest również szkłem wulkanicznym, ponieważ powstaje naturalnie na skutek hydratacji stygnącej lawy. Wskutek jego ekspansacji otrzymywany jest materiał o bardzo niskiej wadze i zdolności do retencjonowania wody. W handlu dostępny jest perlit ekspandowany pod postacią lekkiego drobnego ziarna. Ekspansacja to proces technologiczny, w wyniku którego perlit zwiększa swoją objętość nawet kilkunastokrotnie. Perlit występuje naturalnie w wielu miejscach na świecie. Większość jego znanych zasobów znajduje się w Turcji, natomiast w Europie najpowszechniejszy jest w Karpatach – na terenach Słowacji, Węgier i Ukrainy. W Polsce materiał ten stosowany jest od niedawna. Perlit wydobywany jest ze złoża metodą odkrywkową. Po wydobyciu skała jest kruszona i mielona do postaci rudy, a następnie, jeszcze w kopalniach, ruda jest sortowana na różne frakcje. To ważny proces, ponieważ od wielkości konkretnej frakcji zależy, jakiego rodzaju perlit ekspandowany uzyskamy w dalszej obróbce. W dalszej kolejności ruda perlitu trafia do zakładów ekspansacji, gdzie poddawana jest obróbce termicznej. Perlit mięknie w temperaturze około 900°C. Wtedy uwalniane są chemicznie związane cząsteczki wody, które stanowią jego charakterystyczną cechę. Uchodząca woda powoduje rozszerzanie materiału. W wyniku tego procesu perlit zwiększa swoją objętość, a jego gęstość spada kilkunastokrotnie, dzięki czemu uzyskujemy lekkie i porowate kruszywo (*Co to jest perlit?*).

Do wykonania przedmiotowych płyt warstwowych użyto perlitu EP 180.

Tabela 5.2. Właściwości fizyczne perlitu

Barwa	biała
Współczynnik załamania światła	1,5
pH	6,5–8,0
Wilgotność	0,5%
Ciężar właściwy	2,2–2,4
Gęstość nasypowa rudy	960–1200 kg/m ³
Gęstość nasypowa perlitu ekspandowanego	60–160 kg/m ³
Granulacja	0–2,5 mm
Temperatura mięknięcia	871–1093°C
Temperatura topnienia	1260–1343°C
Ciepło właściwe	837 J/kgK
Przewodność cieplna (λ)	0,045–0,065 W/mK

Źródło: oprac. na podstawie: *Co to jest perlit?*

Tabela 5.3. Skład chemiczny perlitu (w przeliczeniu na tlenki)

SiO ₂	70–75%
Al ₂ O ₃	12–15%
Na ₂ O ₂	3–4%
K ₂ O	3–5%
Fe ₂ O ₃	0,5–2%
MgO	0,2–0,7%
CaO	0,5–1,5%
Strata prażenia (woda chemicznie związana)	3–5%

Źródło: oprac. na podstawie: *Co to jest perlit?*

Perlit to kruszywo: bardzo lekkie, doskonale izolujące, porowate, o szerokiej gamie uziarnienia, naturalne, obojętne chemicznie, jałowe, delikatne jako materiał ścierny, tłumiące dźwięki, bezpieczne dla środowiska, ekologiczne, niepalne, odporne na wysokie temperatury. W nowoczesnym budownictwie stosuje się perlit ekspandowany – lekki materiał, o bardzo dużej izolacyjności termicznej, a jednocześnie niepalny. Używa się go jako izolatora w jego podstawowej formie (jako granulatu) lub jako składnika ciepłochronnych mas i zapraw. W budownictwie głównie wykorzystuje się go do: izolacji posadzek betonowych, strychów i poddaszy, zasypywania pustek w pustakach ceramicznych, jako domieszkę do tynków gipsowych, do tynków i zapraw cementowo-wapiennych, w docieplaniu kominów poprzez zasypianie przestrzeni pomiędzy wkładem a cegłami, jako składnik perlitobetonu używanego w prefabrykacjach, np. pustakach kominowych, ściennych i innej galanterii betonowej dla budownictwa (*Zastosowanie perlitu*).

Izolacje akustyczne mają wyciszyć przestrzeń, w której żyją i pracują ludzie. Są one zazwyczaj komponentem podłóg i ścian zaprojektowanych, aby zapewnić

użytkownikom budynków komfort akustyczny. Projektowanie izolacji akustycznych polega na redukowaniu przenoszenia niechcianych hałasów od ich źródeł do miejsc przebywania ludzi. Liczą się tu zarówno kształt izolacji, jak i materiały, z których są one wykonane. W zależności od zastosowanych materiałów izolacje mogą odbijać dźwięki, ale je absorbują. Do odbijania dźwięków nadają się materiały twarde, o dużej gęstości. Natomiast materiały absorbujące dźwięki są lekkie i porowate, jak np. dywany, panele z włókniny oraz lekkie porowate betony. Do produkcji tych ostatnich nadaje się perlit ekspandowany (*Zastosowanie perlitu*). Jako izolacje akustyczne stosuje się go m.in. w postaci: tynków, zapraw, paneli dźwiękochłonnych, kształtek stropowych, akustycznych bloczków ściennych, obudów agregatów i innych urządzeń, drogowych ekranów dźwiękochłonnych. Zaletą perlitu ekspandowanego jest fakt, że może on pełnić jednocześnie funkcję izolacji akustycznej i termicznej. Jest on bardzo lekkim materiałem, 60–160 kg/m³, o wyjątkowo niskim współczynniku przewodności cieplnej (λ), tj. 0,045–0,065 W/mK. Te właściwości powodują, że jest szeroko stosowany jako izolator termiczny. Jego wysoka odporność ogniowa umożliwia wykorzystanie go nawet w miejscach, gdzie temperatura przekracza 1000°C, np. w: piecach hutniczych, kotłach i kominkach, koncentrycznych przewodach rurowych, obudowach agregatów, obudowach chłodni, przegrodach budowlanych, posadzkach i stropach, obudowach zbiorników paliw płynnych, kominach, drzwiach przeciwpożarowych, podbudowach basenów, gruntowych wymiennikach ciepła (*Zastosowanie perlitu*). Wysoka izolacyjność perlitu przyczynia się do znacznego ograniczenia ilości zużywanej energii w licznych gałęziach przemysłu, a także w użytkowaniu domów i innych budowli. Jego użycie jest więc pomocne w ograniczeniu globalnej emisji gazów cieplarnianych, a zatem w walce o poprawę klimatu. Poprzez swoją budowę perlit jest materiałem chłonnym, porowata struktura doskonale pochłania i magazynuje płynne substancje zapachowe, a następnie stopniowo je uwalnia (*Zastosowanie perlitu*).

5.2.4. Keramzyt

Keramzyt to kruszywo ceramiczne, które wykorzystuje się głównie do budowy stropów i ścian, izolacji podłóg, podziemnych instalacji czy pokryw zbiorników wodnych. Dzięki swoim właściwościom, takim jak odporność na ogień, mróz, działanie pleśni, lekkość czy wytrzymałość na ściskanie, ma on szerokie zastosowanie w budownictwie. Charakteryzuje się porowatą strukturą wewnętrzną, zamkniętą w trwałej ceramicznej powłoce, która jednocześnie odznacza się wysoką termoizolacyjnością. Trwałość keramzytu można porównać z ceramiką wysokiej jakości, jak wyroby klinkierowe czy kamionkowe (*Keramzyt – definicja, rodzaje, zastosowanie*).



Rys. 5.2. Keramzyt

Źródło: materiały własne.

Keramzyt jest sztucznym kruszywem ceramicznym, wypalonym z ilastej gliny, która pęcznieje pod wpływem wysokiej temperatury. Naturalny surowiec poddawany jest leżakowaniu, następnie uplastycznieniu i rozdrobnieniu, po czym trafia do obrotowego pieca, gdzie jest wypalany w temperaturze około 1200°C. W efekcie tego procesu powstają bardzo lekkie porowate grudki, pokryte ceramiczną skorupą. Keramzyt jest odporny na wilgoć, ma także zdolność do skutecznego izolowania ciepła. W wyniku działania wody zawilgoceniu ulega jedynie jego zewnętrzna powłoka. Porowata struktura keramzytu powoduje również szybsze przepuszczanie pary wodnej, przez co wyrób prędzej wysycha, co też korzystnie wpływa na poziom termoizolacyjności. Keramzyt to wytrzymałe tworzywo. Ceramiczne kruszywo jest niepalne, podobnie jak keramzytobeton, którego odporność na ogień sięga około czterech godzin, co umożliwia bezpieczną ewakuację mieszkańców w czasie ewentualnego pożaru (*Keramzyt – definicja, rodzaje, zastosowanie*). Wyroby z keramzytobetonu mogą być również swobodnie wystawiane na działanie niskich temperatur, ponieważ nawet silny mróz nie powoduje ich zniszczeń.

Izolacyjność akustyczna keramzytu wynika z porowatości jej struktury wewnętrznej. Wystarczy już 5-centymetrowa warstwa lekkiego kruszywa ceramicznego na stropie, aby poprawić izolacyjność ściany o 3 decybele. Keramzyt budowlany ma swoje zastosowanie przy budowie i ocieplaniu elementów stropów, ścian i posadzek. Tworzony z niego beton umożliwia skuteczne zmniejszenie wymiarów przekrojów różnych konstrukcji, zwłaszcza słupów, a także pozwala oszczędzić na ilości wymaganego zbrojenia. Pustak keramzytowy można wykorzystać jako izolator akustyczny przy tworzeniu dźwiękochłonnych elementów budowlanych. Keramzyt impregnowany może też zastąpić podłoże betonowe i podsypkę piaskową (keramzyt podsypkowy) w czasie budowy podłogi na gruncie (*Keramzyt – definicja, rodzaje, zastosowanie*).

5.2.5. Domieszki

Do wykonania mieszanek perlitobetonu i keramzytobetonu użyto superplastyfikatora Sika ViscoCrete 20 GOLD.

5.2.6. Woda zarobowa

Zgodnie z normą PN-EN 1008:2004 jako wody zarobowej użyto wody z ogólnodostępnej instalacji wodociągowej.

5.2.7. Składy i wykonanie mieszanek betonowych

Mieszanki betonowe do próbek oraz elementów badawczych wykonywano w mieszarce wolnoobrotowej zgodnie z PN-EN 206:2021. Zrobiono kostki sześciennie o wymiarach 100 × 100 × 100 mm, walce o średnicy $d = 150$ mm i wysokości $H = 300$ mm, kostkę 300 × 300 × 60 mm oraz 6 płyt o wymiarach 600 × 1200 × 120 mm. Próbkę i elementy przechowywano przez 28 dni, odpowiednio je pielęgnując. Przy projektowaniu receptur mieszanek betonowych wykorzystano wiedzę i zasady wg Jamrożego (2015), Neville'a (2012), Zielińskiego (2010), Sadowskiego (2019) oraz pogłębioną wiedzę w zakresie modyfikacji betonu nanododatkami, z myślą o przyszłym wykorzystaniu tego typu betonów w elementach konstrukcji (Hoła, Niewiadomski 2021). Składy mieszanek zastosowanych do wykonania płyt zestawiono w tabeli 5.4.

Tabela 5.4. Składy mieszanek betonowych (na 1 m³) użyte do wykonania płyt

Składnik			Ilość składników na 1 m ³		
			beton zwykły	perlitobeton	keramzytobeton (Bujnarowski, Grygo 2022)
Cement CEM I-42,5R [kg]			350	350	360
Kruszywo [kg]	piasek	0-2 mm	637	-	870
	żwir	2-4 mm	355	355	-
	żwir	4-8 mm	828	828	-
Perlit 0-2 mm [l]			-	600	-
Keramzyt 4-8 mm [kg]			-	-	210
Superplastyfikator SikaViscoCrete 20 GOLD [l]			-	5	4,5
Woda [l]			178	178	180

Źródło: oprac. własne.

Przygotowanie mieszanki perlitobetonu wymagało innej kolejności i czasu dozowania oraz mieszania składników niż przy tradycyjnym betonie, aby nie uszkodzić ziaren perlitu i keramzytu. Do mieszarki wolnoobrotowej dodawano kolejno: żwir, trochę wody, cement, a następnie mieszano około 3 minut. Potem dodano pozostałą ilość wody i perlit, mieszając około minuty, aby nie uszkodzić ziaren perlitu. Podczas mieszania składników w ciągu tej minuty wiano pozostałą część wody wraz z superplastyfikatorem. Mieszankę z keramzytem przygotowano w bardzo podobny sposób. Dodawano kolejno: piasek, cement, wodę, keramzyt i pozostałą wodę z superplastyfikatorem. Czas mieszania wynosił tyle, ile w przypadku mieszanki z perlitem. Kolejność składników i sposób mieszania nie powodowały uszkodzenia perlitu czy keramzytu.

5.3. Podstawowe charakterystyki wytrzymałościowo-odkształceniowe betonów

Przeprowadzono niezbędne badania betonów wykorzystanych do wykonania płyt, m.in. wytrzymałość na ściskanie, moduł sprężystości i in. (Nagrodzka-Godycka 1999; Neville 2012). Przygotowano próbki (patrz rozdz. 5.2) do badań wytrzymałości na ściskanie, badań modułu sprężystości, badania modułu Kirchoffa oraz próbki do badań materiałowych w zakresie współczynnika przewodzenia ciepła λ .

5.3.1. Badanie betonu na ściskanie

Badanie próbek sześciennych przeprowadzono zgodnie z normą PN-EN 12390-3:2019 i wykonano na maszynie wytrzymałościowej Advantest 9 firmy Controls do badania betonu. Urządzenie jest wyposażone w ramę o nacisku do 3000 kN. Maszyna znajduje się na wyposażeniu Katedry Konstrukcji Budowlanych na Wydziale Budownictwa i Nauk o Środowisku Politechniki Białostockiej.

Zapewniono czyste i równe powierzchnie docisku; zamontowany w górnej części maszyny przegub gwarantował osiowe i dokładnie prostopadłe przyłożenie siły ściskającej (poprzecznie do kierunku układania betonu w danej próbce), a sam proces zwiększania siły odbywał się powoli i równomiernie. Prędkość przyrostu naprężeń ściskających w próbce powinna być stała i wynosić 0,5 MPa.

Zniszczenie próbki było równocześnie końcem badania, a siłę niszczącą w tym momencie notowano w celu obliczenia wytrzymałości danej próbki na ściskanie. Stanowisko badawcze podczas przeprowadzania badań pokazano na rys. 5.3.



Rys. 5.3. Stanowisko badawcze do badań wytrzymałościowych betonów. Wybrana z przedmiotowych badań próbka badawcza

Źródło: materiały własne.

W celu ustalenia wytrzymałości na ściskanie poszczególnych próbek posłużono się wzorem (5.1).

Obliczenia wytrzymałości na ściskanie próbek sześciennych przeprowadzono zgodnie z normą PN-EN 12390-3:2019, korzystając ze wzoru:

$$f_c = \frac{F}{A_c} \quad (5.1.)$$

w którym:

f_c – wytrzymałość na ściskanie [MPa];

F – maksymalne obciążenie przy zniszczeniu [N];

A_c – pole przekroju poprzecznego próbki, na które działa siła ściskająca [mm²].

Otrzymano następujące wyniki wytrzymałości betonów pokazane w tabeli 5.5.

Tabela 5.5. Średnia kostkowa wytrzymałość na ściskanie $f_{c,cube}$ [MPa]

Badany beton	Średnia wytrzymałość na ściskanie kostkowa z sześciu próbek [MPa]
Beton zwykły BZ	32,40
Perlitobeton BZP	10,09
Keramzytobeton BZK	9,82

Źródło: oprac. własne.

5.3.2. Badanie modułu sprężystości

Badanie modułu sprężystości betonu przeprowadzono zgodnie z normą PN-EN 12390-13:2021. Do badań próbek walcowych użyto maszyny wytrzymałościowej Advantest 9 firmy Controls będącej na wyposażeniu Katedry Konstrukcji Budowlanych na Wydziale Budownictwa i Nauk o Środowisku Politechniki Białostockiej. Na rys. 5.4 pokazano maszynę wraz z próbką badawczą.



Rys. 5.4. Maszyna wytrzymałościowa Controls wraz z przygotowaną próbką do badań modułu sprężystości

Źródło: materiały własne.

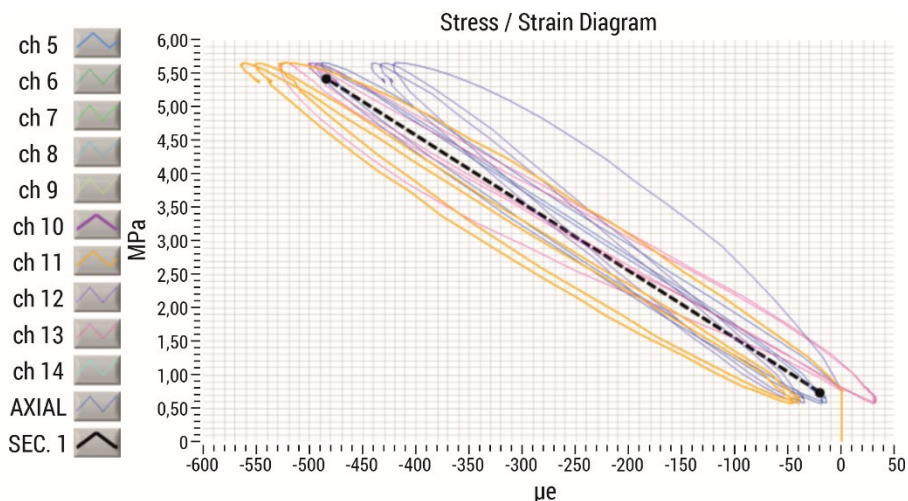
Do określenia poziomu naprężeń wstępnych wykorzystano wyniki badań wytrzymałości betonu na ściskanie f_{cm} . Wartości modułów sprężystości uzyskane z badań były zgodne z zasadami normowymi. Określano wartości zgodnie ze wzorem (5.2):

$$E_{cm} = \frac{\sigma_G - \sigma_D}{\left(\frac{\varepsilon_G^I + \varepsilon_G^{II} + \varepsilon_G^{III}}{3} \right) - \left(\frac{\varepsilon_D^I + \varepsilon_D^{II} + \varepsilon_D^{III}}{3} \right)} \quad [\text{GPa}] \quad (5.2.)$$

gdzie:

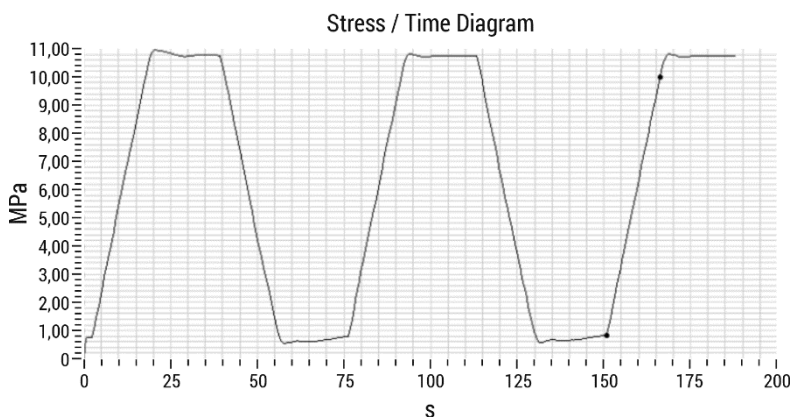
- ε_G – odkształcenie przy górnym zakresie siły (wartość ta jest podyktowana maksymalną siłą nacisku, którą może wytworzyć obsługiwana maszyna wytrzymałościowa);
- ε_D – odkształcenie przy dolnym zakresie siły (wartość ta jest podyktowana minimalną siłą nacisku, przy której występują pierwsze zauważalne odkształcenia);
- σ_G – naprężenia przy górnym zakresie siły.

Na rys. 5.5 i 5.6 przedstawiono wybrane wyniki z systemu pomiarowego dla próbki walcowej z keramzytobetonu. Na rys. 5.5 zaprezentowano przykładową zależność naprężenie–odkształcenie oraz schemat obciążenia próbki dla keramzytobetonu.



Rys.5.5. Wybrana zależność naprężenie–odkształcenie dla keramzytobetonu

Źródło: oprac. własne.



Rys. 5.6. Schemat obciążenia próbki z badań z pomiaru modułu sprężystości dla keramzytobetonu

Źródło: oprac. własne.

Z protokołu badań odczytać można wartość średnią modułu sprężystości danej próbki. Wytrzymałość słupowa betonu na ściskanie nie może się różnić o więcej niż $\pm 20\%$ od wyniku badania próbek towarzyszących. Ważne jest, aby powierzchnia styku badanej próbki w maszynie wytrzymałościowej była równa.

Wyniki średnich wartości modułów sprężystości dla betonów pokazano w tabeli 5.6.

Tabela 5.6. Średni moduł sprężystości betonów E_c [GPa]

Badany beton	Średni moduł sprężystości E [GPa]
Beton zwykły BZ	32,60
Perlitobeton BZP	10,07
Keramzytobeton BZK	10,10

Źródło: oprac. własne.

5.3.3. Badanie modułu Kirchoffa

Przedmiotem było badanie modułu sprężystości poprzecznej próbki walcowej perlitobetonu i keramzytobetonu, które przeprowadzono na Wydziale Budownictwa i Architektury Politechniki Lubelskiej, w zakresie oznaczenia współczynnika Poissona jako stosunku odkształceń poprzecznych do odkształceń podłużnych w stanie jednoosiowego naprężenia na walcowych próbkach betonowych o średnicy 150 mm.

Oznaczenie modułu sprężystości poprzecznej wykonano metodą pośrednią wykorzystującą zależność modułu Kirchoffa (moduł sprężystości poprzecznej) od modułu Younga (moduł sprężystości podłużnej) i liczby Poissona wg wzoru 5.3:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.3)$$

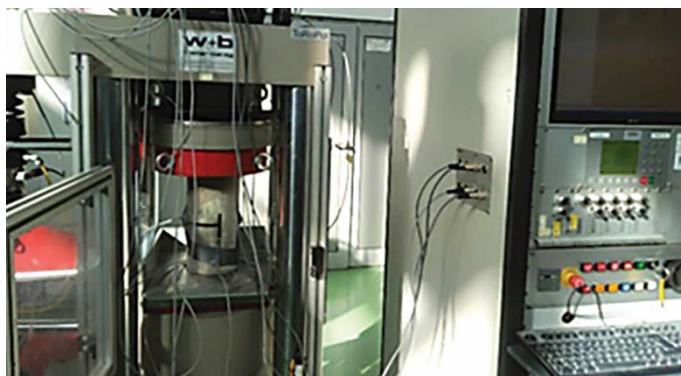
Badanie modułu sprężystości podłużnej przeprowadzono zgodnie z normami PN-EN 12390-2:2019-07E oraz PN-EN 12390-13:2021-12. Współczynnik Poissona oznaczono jako stosunek odkształceń poprzecznych do odkształceń podłużnych w stanie jednoosiowego naprężenia.

Tabela 5.7. Charakterystyka próbek

Lp.	Oznakowanie próbki	Istniejące oznakowanie	Wymiary	Materiał	Masa
1.	1/1/02/23	BZK – keramzytobeton	d = 150 mm h = 300 mm	beton	8,473 kg
2.	1/2/02/23	BZP – perlitobeton	d = 150 mm h = 300 mm	beton	10,303 kg

Źródło: oprac. własne.

Badanie przeprowadzono w laboratorium, zachowując następujące parametry: temperatura $(18,9 \div 19,4) \pm 0,5^\circ\text{C}$; wilgotność względna $(28,6 \div 42,7) \pm 3\%$. Próbkę na stanowisku badawczym pokazano na rys. 5.7.



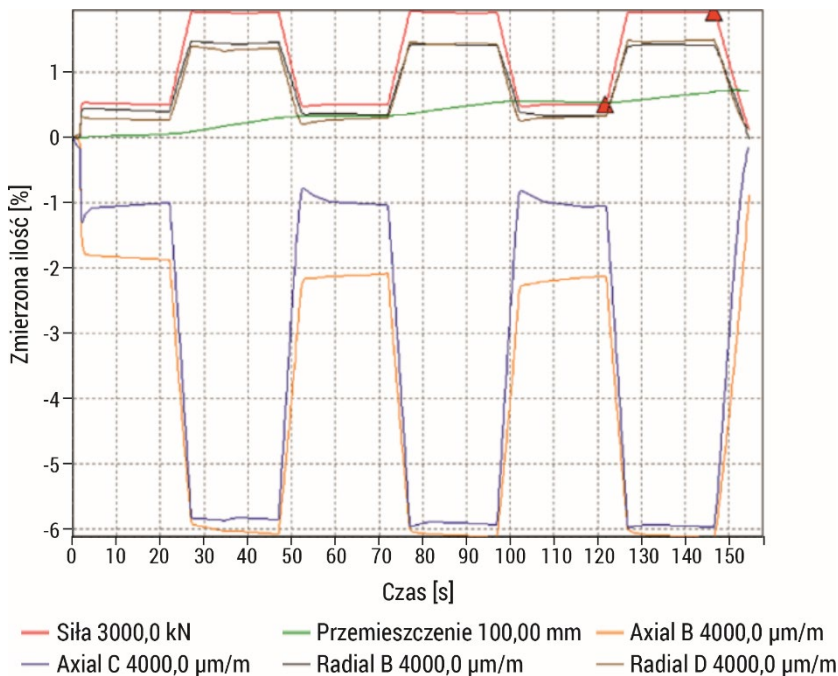
Rys. 5.7. Badanie próbki w stanie jednoosiowego naprężenia

Źródło: materiały własne.

Tabela 5.8. Moduł Kirchoffa dla keramzytobetonu i perlitobetonu

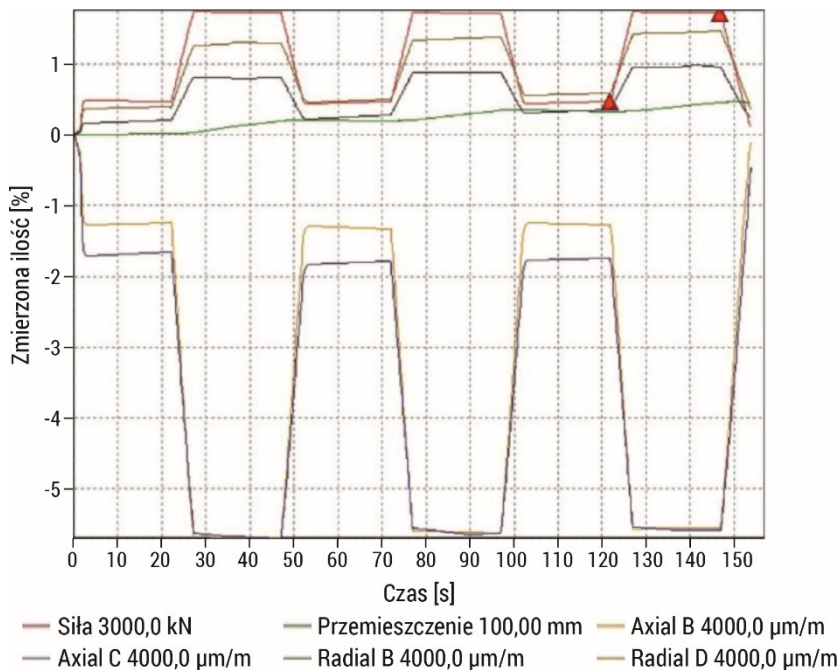
Lp.	Oznakowanie próbki	Próbki	Moduł Kirchoffa [MPa]
1.	1/1/02/23	BZK – keramzytobeton	5,42
2.	1/2/02/23	BZP – perlitobeton	5,64

Źródło: oprac. własne.



Rys. 5.8. Przebieg odkształceń poprzecznych oraz podłużnych keramzytobetonu w stanie jednoosiowego naprężenia

Źródło: oprac. własne.



Rys. 5.9. Przebieg odkształceń poprzecznych oraz podłużnych perlitobetonu w stanie jednoosiowego naprężenia

Źródło: oprac. własne.

Przedstawione schematy pokazują przebieg badania modułu sprężystości dla perlitobetonu i keramzytobetonu. Widoczny jest na nich przebieg odkształceń poprzecznych i podłużnych w stanie jednoosiowego naprężenia keramzytobetonu i perlitobetonu.

5.3.3.1. Sposób wyznaczania modułu Kirchoffa na podstawie badania próbek na skręcanie

Szymczak-Graczyk i Mikołajczak (2016) opisali przykład wyznaczania modułu Kirchoffa dla styropianu. Moduł odkształcenia postaciowego G wyznaczono w próbie skręcania styropianowego walca o średnicy $2r = 25$ mm i wysokości $l = 200$ mm, obciążonego jedynie momentem skręcającym (rys. 5.10).



Rys. 5.10. Przyrząd służący do wyznaczania modułu Kirchoffa dla próbki poddanej skręcaniu (fot. W. Buczkowski)

Źródło: zbiory W. Buczkowskiego.

Zależność między kątem skręcania, momentem skręcającym, biegunowym momentem bezwładności oraz modułem Kirchoffa określa formuła:

$$\vartheta = \frac{M_s L}{G J_0} \quad (5.4)$$

gdzie:

M_s – moment skręcający [kNm],

L – długość elementu [m],

G – moduł Kirchoffa [kN/m²],

J_0 – biegunowy moment bezwładności przekroju kołowego [m⁴] opisany wzorem

$$J_0 = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Dla badanego styropianu uzyskano moduł Kirchoffa o wartości $G = 790 \text{ kN/m}^2 = 0,79 \text{ MPa}$.

Dla porównania podano, że $G_{\text{stali}} = 80 \text{ GPa}$, a dla gumy $G = 0,6 \text{ MPa}$.

Romanów i in. (1972) w jednym z przykładów podali wartość G dla rdzenia piankowego $G = 700 \text{ kG/cm}^2 = 70 \text{ MPa}$.

Dla betonu, korzystając z zależności $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, obliczono dla $\nu = 0,2$.

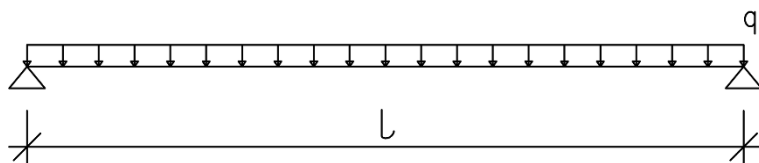
$$\text{Beton C 12/15 } E = 27\,000 \text{ MPa} \quad G = \frac{27\,000}{2,4} = 11\,250 \text{ MPa}$$

$$\text{Beton C 30/37 } E = 32\,000 \text{ MPa} \quad G = \frac{32\,000}{2,4} = 13\,333 \text{ MPa}$$

5.3.3.2. Doświadczalne wyznaczanie wielkości modułu G_w na podstawie badań zginanych belek trójwarstwowych

Romanów i in. (1972) opisali doświadczalne metody wyznaczania sztywności belki na zginanie oraz sztywności poprzecznej (na ścinanie). Badania te pozwalają z dostatecznym przybliżeniem określić moduł odkształcenia postaciowego rdzenia belki trójwarstwowej, który ma istotny wpływ na ugięcie belek, a także płyt. Można to zaobserwować, analizując wpływ sił poprzecznych na ugięcia belek.

Dla belki wolnopodpartej równomiernie obciążonej strzałka ugięcia belki z uwzględnieniem wpływu siły poprzecznej określona jest wzorem:



Rys. 5.11. Schemat belki jednoprzęsłowej wolnopodpartej równomiernie obciążonej

Źródło: oprac. własne.

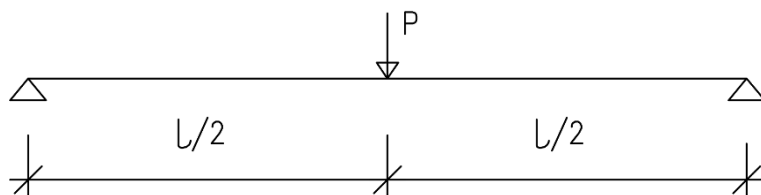
$$f = \frac{5ql^4}{384EJ} \left[1 + \frac{4KE}{5G} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right] \quad (5.5)$$

gdzie:

- h – wysokość przekroju belki $K = \frac{3}{2}$ (dla przekroju prostokątnego),
- G – moduł odkształcenia postaciowego,
- K – współczynnik dla przekroju prostokątnego wg Romanów i in. (1972),
- E – moduł sprężystości okładzin,
- h – wysokość całkowita belki,
- l – długość belki.

Dla belki obciążonej siłą skupioną strzałkę ugięcia można obliczyć ze wzoru:

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ} + K \frac{Pl}{4Ghb} = \frac{Pl^3}{48bh^3} \left[1 + \frac{KE}{G} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right] \quad (5.6)$$



Rys. 5.12. Schemat belki jednoprzęsłowej wolnopodpartej obciążonej siłą skupioną

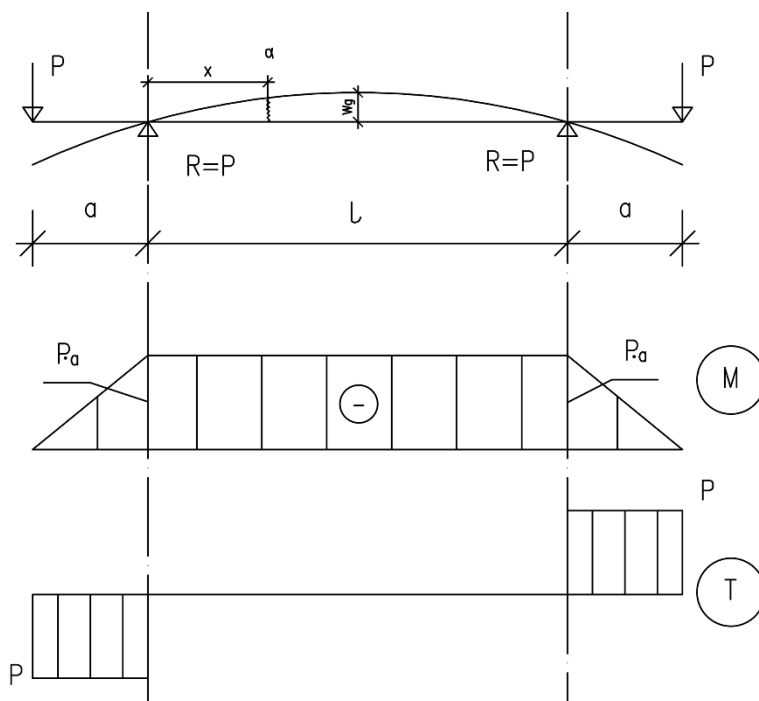
Źródło: oprac. własne.

Z powyższych wzorów wynika, że jeżeli belka jest stosunkowo krótka, h i l są tego samego rzędu, to $\frac{h}{l}$ jest wartością dużą i nie powinno się pomijać wpływu siły poprzecznej na ugięcia belki. Jeżeli moduł odkształcenia postaciowego G jest bardzo mały, co zdarza się w konstrukcjach warstwowych, np. gdy rdzeń wykonany jest z tworzywa piankowego czy styropianu, to również wpływa to w znacznym stopniu na ugięcia belki spowodowane siłą poprzeczną.

W konstrukcjach przekładkowych, gdzie rdzeń nie przenosi naprężeń podłużnych, lecz tylko ścinające, współczynnik K jest zawsze równy jedności ($K = 1$).

Wyznaczenie sztywności belki na zginanie

Na rys. 5.13 przedstawiono schemat i sposób wyznaczenia sztywności belki na zginanie. Do wyznaczenia sztywności zastosowano wzory Eulera.



Rys. 5.13. Schemat obciążenia belki w celu wyznaczenia sztywności elementu

Źródło: oprac. własne.

Równanie Eulera

$$EJy'' = M$$

$$EJy'' = -P \cdot a$$

$$EJy' = -P \cdot a \cdot x + C_1$$

$$\text{Dla } x = \frac{l}{2}; y' = 0 \rightarrow C_1 = \frac{P \cdot a \cdot l}{2}$$

$$EJy' = -P \cdot a \cdot x + \frac{P \cdot a \cdot l}{2}$$

$$EJy = -\frac{P \cdot a \cdot x^2}{2} + \frac{P \cdot a \cdot l}{2}x + C_2$$

$$\text{Dla } x = 0; y = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$EJy = -\frac{Pa}{2}x^2 + \frac{Pal}{2}x$$

$$\text{Dla } x = \frac{l}{2} \rightarrow w_g$$

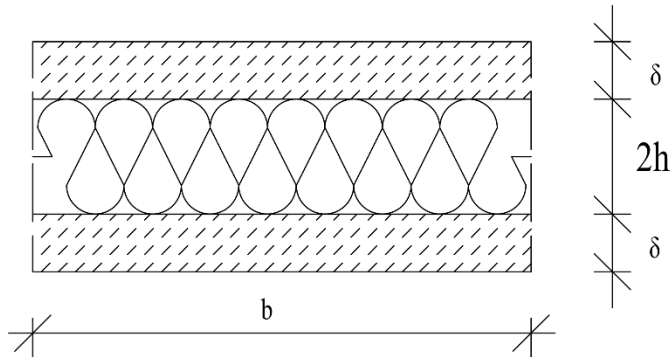
$$EJ \cdot w_g = -\frac{Pa}{2} \cdot \frac{l^2}{4} + \frac{Pal}{2} \cdot \frac{l}{2}$$

$$EJ \cdot w_g = \frac{Pal^2}{8}$$

Sztywność belki na zginanie

$$EJ = \frac{Pal^2}{8w_g} \text{ dla płyty sztywność na zginanie } D_z = \frac{EJ}{b}$$

Wyznaczenie modułu odkształcenia postaciowego rdzenia



Sztywność poprzeczna określona jest zależnością:

$$S = A \cdot G_w = 2h \cdot b \cdot G_w$$

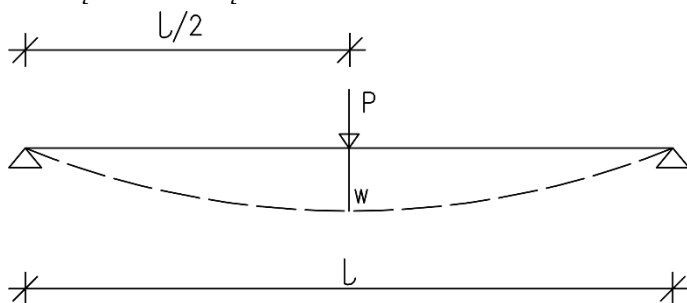
gdzie:

A – powierzchnia przekroju rdzenia $A = 2h \cdot b$,

b – szerokość belki,

G_w – moduł odkształcenia postaciowego rdzenia.

Dla belki wolnopodpartej, obciążonej siłą skupioną w środku rozpiętości, ugięcie pod siłą w składa się z dwóch części:



$$w_g = \frac{Pl^3}{48EJ} - \text{ugięcie od momentu gnącego,}$$

$$w_s = \frac{Pl}{4S} - \text{ugięcie od siły poprzecznej,}$$

$$w - w_g = \frac{Pl}{4S} \quad s = \frac{Pl}{4(w-w_g)} \quad 2h \cdot b \cdot G_w = \frac{Pl}{4(w-w_g)} \quad G_w = \frac{Pl}{8hb(w-w_g)}$$

Zaprezentowany sposób wyznaczenia modułu odkształcenia postaciowego rdzenia wg Romanów i in. (1972) uzyskamy poprzez zmierzenie ugięcia w i obliczenia ugięcia w_g z dostateczną dokładnością. Powyżsi badacze zalecają, aby długość belki była nie mniejsza niż 10-krotna wysokość jej przekroju.

5.3.4. Badanie współczynnika przewodzenia ciepła λ

W Katedrze Budownictwa Zrównoważonego i Instalacji Budowlanych na Wydziale Budownictwa i Nauk o Środowisku Politechniki Białostockiej przeprowadzono badania współczynnika przewodności cieplnej, do których wykorzystano metodę stacjonarną na aparacie płytowym HFM436 (rys. 5.14). Służy on do pomiaru strumienia cieplnego metodą stacjonarną wtórną. Za jego pomocą można zbadać próbki o wymiarach 30×30 cm o grubości od 0,5 do 10 cm w zakresie przewodności cieplnej od 0,002 do 1,0 W/mK w temperaturach od 0 do 40°C. Próbkę umieszczano w komorze między dwoma płytami. Podczas pomiaru płyty były podgrzewane w różnych stopniach, wytwarzając różnicę temperatur przedzieloną badaną próbką. Po osiągnięciu przez próbkę równowagi termicznej ustalała się między płytami różnica temperatur. Oprogramowanie sprawuje kontrolę nad urządzeniem, zapisuje i analizuje dane, określając współczynnik przewodzenia ciepła λ [W/mK] badanego materiału.



Rys. 5.14. Aparat płytowy HFM436 do pomiaru strumienia ciepłego metodą stacjonarną wtórną z próbką perlitobetonu

Źródło: materiały własne.

W wyniku badania próbki perlitobetonu o wymiarach $30 \times 30 \times 6$ cm w aparacie płytowym HFM436 stwierdzono, że współczynnik przewodzenia ciepła λ wyniósł $0,350$ [W/mK].

5.3.5. Badanie struktury betonów za pomocą mikroskopu skaningowego

Badania struktury betonów wykonano za pomocą mikroskopu skaningowego QUANTA-FEG 250 podczas stażu naukowego autorki w 2022 roku w Katedrze Budownictwa Ogólnego Wydziału Budownictwa i Architektury Politechniki Lubelskiej.

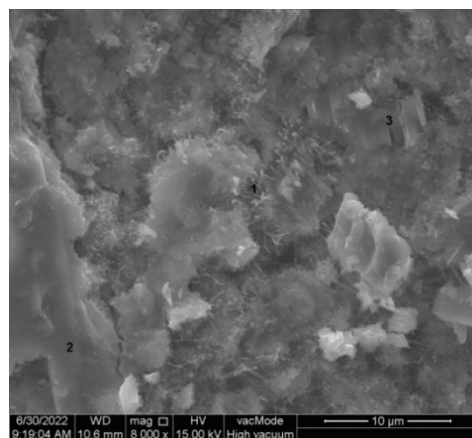
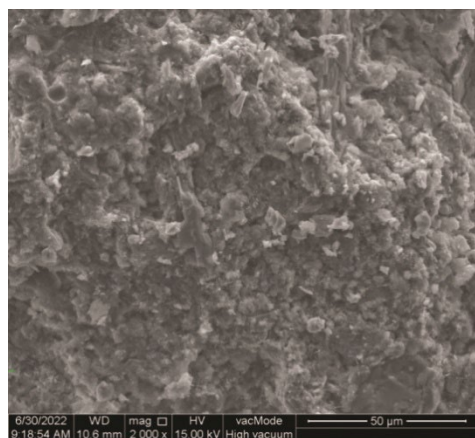
Skaningowy mikroskop elektronowy używa skupionej wiązki wysokoenergetycznych elektronów, która bombarduje próbkę linia po linii (Swap 2017). Większość padających elektronów reaguje z atomami na próbce, co prowadzi do rozproszenia tych elektronów, które może być elastyczne i nieelastyczne. To pierwsze polega na zmianie ich trajektorii przy jednocześnie niezmiennych energii kinetycznej i prędkości. Jest to związane z dużą różnicą pomiędzy masą elektronu i jądra atomowego. Interakcje nieelastyczne natomiast produkują elektrony wtórne, elektrony wstecznie rozproszone, katodoluminescencję, ciągłe promieniowanie rentgenowskie, charakterystyczne promieniowanie rentgenowskie, ciepło (<http://www4.nau.edu/microanalysis/Microprobe-SEM/Signals.html>). Sygnały generowane podczas interakcji elektron–próbka ujawniają wiele informacji na temat badanej próbki. Należą do nich: morfologia, pokrój i rozmiar obiektów, skład chemiczny i struktura krystaliczna, orientacja obiektów wchodzących w skład danej próbki, wady sieci

krystalicznej. Dane są zbierane z wybranych obszarów próbki i generowany jest dwuwymiarowy obraz, który wyświetla przestrzenne zmiany tych właściwości (Zdera 2012).



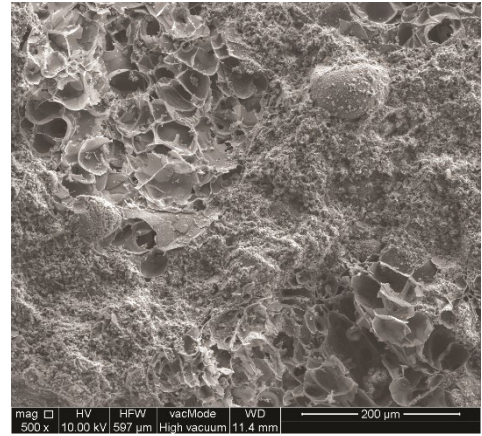
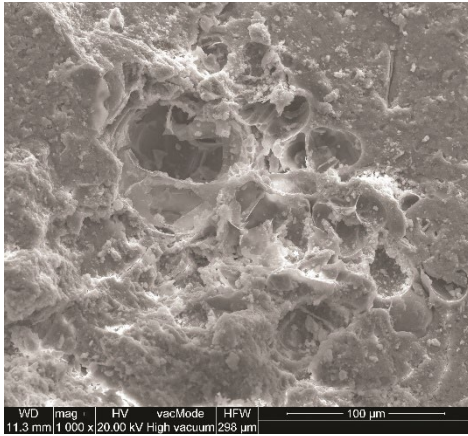
Rys. 5.15. Skanujący mikroskop QUANTA-FEG 250

Źródło: materiały własne.



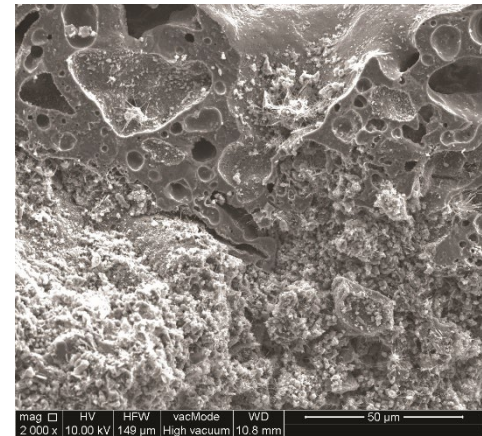
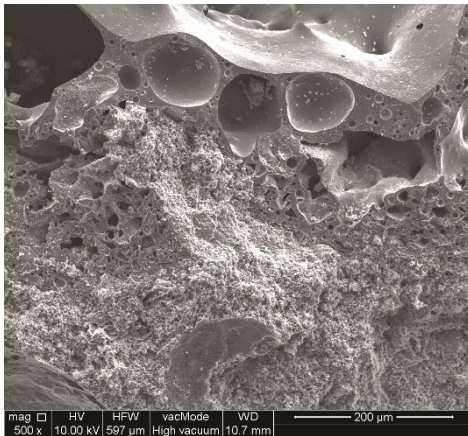
Rys. 5.16. Struktura betonu zwykłego ze skanującego mikroskopu elektronowego w powiększeniu 2 po lewej 2000 razy, po prawej 8000 razy

Źródło: materiały własne.



Rys. 5.17. Struktura perlitobetonu ze skaningowego mikroskopu elektronowego w powiększeniu – po lewej 500 razy, po prawej 1000 razy

Źródło: materiały własne.



Rys. 5.18. Struktura keramzytobetonu ze skaningowego mikroskopu elektronowego w powiększeniu – po lewej 500 razy, po prawej 2000 razy

Źródło: materiały własne.

Porowatą strukturę lekkich kruszyw w betonie zaobserwowano na zdjęciach z mikroskopu skaningowego (rys. 5.17 i 5.18). Pory są bardzo zróżnicowane pod względem kształtu i wymiarów, dominują te o okrągłych kształtach, którym sporadycznie towarzyszą pory nieregularne. Mniejsze pory o okrągłym kształcie osiągają wymiary 10 μm , a wymiary większych wahają się od 30 do 100 μm . Na wewnętrznej powierzchni porów wyraźnie widoczna jest obecność pokrywającej je fazy szklistej.

Na zdjęciach z mikroskopu skaningowego widoczne są forma i morfologia faz krystalicznych tworzących się w betonie lekkim. Utwardzona zaprawa cementowa otrzymana z cementu portlandzkiego składa się w 70% z uwodnionych krzemianów wapnia, tzw. faz C-S-H. Około 20% stanowią wodorotlenek wapnia i produkty hydratacji glinianu i glinianu-żelazianu wapnia. Badania mikroskopowe potwierdziły dobrą przyczepność w punktach styku kruszyw lekkich z zaprawą cementową. Nie zaobserwowano rys, pęknięć ani pustych przestrzeni w wyżej wymienionych miejscach styku. Wysoki poziom chropowatości i dobra przyczepność między kruszywem lekkim a zaczynem cementowym gwarantują wysoką trwałość i wytrzymałość betonu.

W zaprawie cementowej widoczne są dwie charakterystyczne fazy mineralne. Pierwszą z nich tworzy faza C-S-H, której morfologia przypomina trójwymiarową strukturę typu plastra miodu oraz ściśle zagęszczone aglomeraty amorficznej fazy C-S-H.

5.4. Przygotowanie płytowych elementów badawczych

Przy wykonywaniu płyt warstwowych z perlitobetonem i keramzytobetonem warstwy betonu układano sposobem „mokre na mokre”. Po ułożeniu pierwszej warstwy betonu o grubości 3 cm układano drugą warstwę (rdzeń) o grubości 6 cm z perlitobetonu lub z keramzytobetonu, a następnie trzecią warstwę betonu o grubości 3 cm. Całkowita grubość wykonanych płyt trójwarstwowych wynosiła 12 cm. Płyty i próbki badawcze po zabetonowaniu zakrywano folią i pielęgnowano przez 24 godziny w celu uniknięcia utraty wilgotności. Następnie przechowywano je w warunkach powietrzno-suchych (przy średniej temperaturze $T = 20^{\circ}\text{C}$ i wilgotności $\text{RH} = 50\text{--}55\%$) do czasu przeprowadzenia badania, czyli przez 28 dni.

Na rys. 5.19 pokazano układanie jednej z warstw betonu w formie płytowej oraz gotowe elementy po 28 dniach dojrzewania (w każdej serii wykonano po trzy płyty trójwarstwowe).



Rys. 5.19. Betonowanie płyty i gotowe elementy badawcze

Źródło: materiały własne.

Tabela 5.9. Parametry wytrzymałościowe użytych betonów – wartości średnie

Parametry wytrzymałościowe betonów	Perlitobeton	Keramzytobeton	Beton zwykły
	średnie wartości		
Wytrzymałość na ściskanie kostkowa $f_{c, cube}$ z sześciu próbek	10,09 MPa	9,89 MPa	32,4 MPa
Odchylenie standardowe	1,12	0,09	1,26
Współczynnik zmienności	10,67%	0,93%	3,73%
Wytrzymałość na ściskanie walcowa $f_{c, cyl}$ z sześciu próbek	8,82 MPa	7,68 MPa	25,41 MPa
Odchylenie standardowe	0,84	4,13	0,28
Współczynnik zmienności	9,55%	16,26%	3,58%
Moduł sprężystości E z trzech próbek	10,07 GPa	10,10 GPa	32,6 GPa
Odchylenie standardowe	0,18	0,65	0,20
Współczynnik zmienności	1,79%	2,00%	1,93%

Źródło: oprac. własne.

5.5. Badania eksperymentalne płyt warstwowych z rdzeniem z perlitobetonu przeprowadzone z wykorzystaniem systemów Aramis i Hysdozok

Celem badań była ocena nośności trójwarstwowych płyt wykonanych z betonów o różniących się charakterystykach materiałowych. Przeprowadzono je z wykorzystaniem systemu Aramis będącego na wyposażeniu Katedry Konstrukcji Budowlanych na Wydziale Budownictwa i Nauk o Środowisku Politechniki Białostockiej.

5.5.1. Informacje o systemach Aramis i Hysdozok

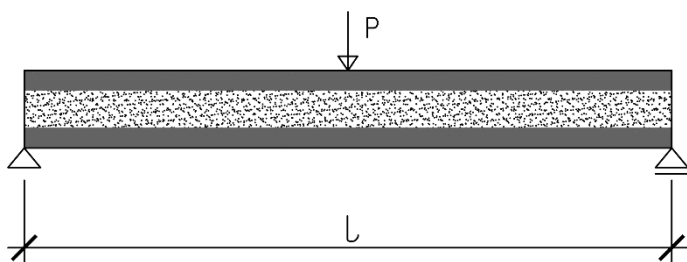
System optyczno-pomiarowy Aramis wykorzystywany jest do trójwymiarowych bezdotykowych pomiarów odkształceń i przemieszczeń w elementach. Składa się z dwóch skorelowanych kamer oraz komputera z odpowiednim oprogramowaniem, który umożliwia rejestrację deformacji. Przed właściwym pomiarem trzeba skalibrować system, używając krzyża lub tablicy kalibracyjnej w zależności od wielkości badanej próbki. Próbki zaś należy odpowiednio przygotować, malując na kolor biały badane powierzchnie, a następnie nanieść na nie czarne punkty zgodnie z zaleceniami producenta (Aramis User Manual-Software; Aramis v.6.1 and higher.GOM 2007). Prawidłowo przygotowane sprzęt i próbki to gwarancja uzyskania poprawnych i dokładnych wyników. Podczas badania system Aramis analizuje przemieszczenia we wszystkich kierunkach, oblicza odkształcenia główne, czego wynikiem są powstające i rzeczywiste zarysowania, oraz dokumentuje zarysowania i odkształcenia pod zadaniem obciążenia. Wyniki przedstawiane są w postaci graficznej. System rejestruje też strukturę badanego obiektu. Zdjęcia wykonywane są przez cały czas obciążania aż do momentu zniszczenia. Na rys. 5.20 przedstawiono element badawczy na stanowisku wraz z systemem optycznym (pomiarowym) typu Aramis.



Rys. 5.20. Element badawczy na stendzie wraz z systemem pomiarowym Aramis

Źródło: materiały własne.

Płyty warstwowe badano także jako elementy wolnopodparte. Wymiary badanych elementów to: długość 120 cm, szerokość 60 cm oraz grubość 12 cm. Obciążenie przykładano punktowo w środku płyty poprzez przekładkę o wymiarach 12 × 12 cm. Schemat obciążenia przedstawiono na rys. 5.21. Stanowisko badawcze płyt na stendzie badawczym z systemem obciążenia Hysdozok zaprezentowano na rys. 5.22.

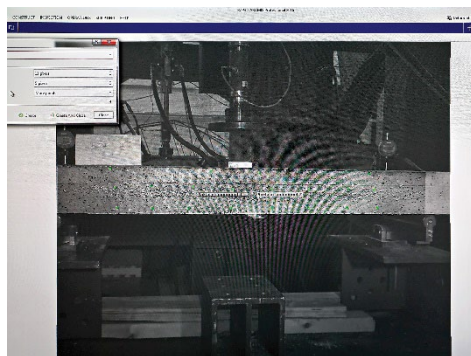
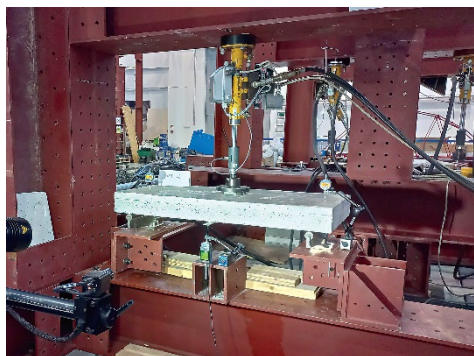


Rys. 5.21. Schemat obciążenia płyt warstwowych BZP (z perlitobetonem) lub BZK (z keramzytobetonem) z wyszczególnieniem warstw

Źródło: oprac. własne.

System obciążenia Hysdozok umożliwiał sterowanie szybkością przyrostu przemieszczenia oraz rejestrację wartości siły i ugięć. Przed przystąpieniem do badań maszyna została odpowiednio skalibrowana i przygotowana. Czytelne obrazy pomiarów były możliwe na współpracującym z prasą monitorze komputera, który rejestrował cały przebieg badania oraz system Aramis. Płyty warstwowe obciążano miejscowo. Obciążenie przekazywane było w punkcie centralnym elementu poprzez centrycznie ustawioną płytkę stalową przy stałym wzroście obciążenia wg zaleceń zawartych w RILEM TC-119-TCE. Pomiaru ugięć dokonywano za pomocą czujnika przemieszczeń znajdującego się w maszynie i rejestrowano automatycznie w pamięci urządzenia, kontrolnie rejestrowano też ugięcia za pomocą czujników elektronicznych umieszczonych w środkowym punkcie płyty oraz w strefach podporowych (z lewej i prawej strony).

Na rys. 5.22 pokazano stanowisko badawcze podczas obciążania oraz widok elementu z systemu Aramis, w którym 12 megapikselowych kamer zapewniło wysoką rozdzielczość przestrzenną. Umożliwiło to pomiar małych odkształceń, ale także lokalnych efektów odkształcenia w dużym obszarze pomiarowym, jakim była płyta. Działanie systemu pomiarowego Aramis opiera się na technice cyfrowej korelacji obrazów. Pomiar odbywa się bezdotykowo i jest niezależny od charakterystyki badanych materiałów. Użytkownik może skorzystać zarówno z analizy danych całej powierzchni, jak i danych uzyskanych metodą punktową.

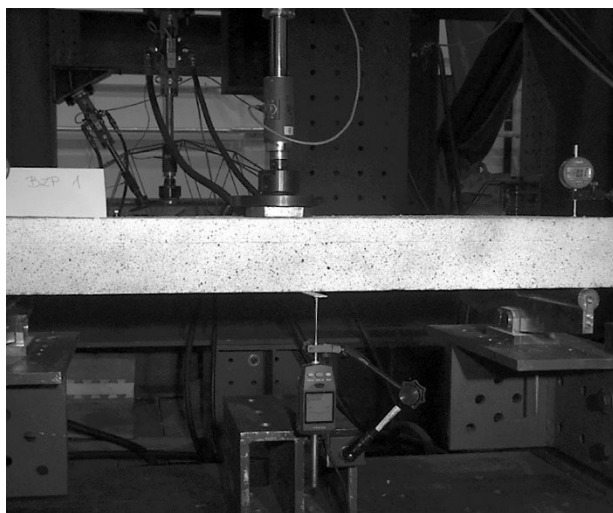


Rys. 5.22. Stanowisko do badań i element poddany próbie obciążania na stendzie badawczym
Źródło: materiały własne.

Badania przeprowadzono za pomocą systemu zadawania obciążeń Hysdozok oraz systemu pomiarowego przemieszczeń Aramis. Ponadto zastosowano dodatkowe cyfrowe czujniki zegarowe przemieszczeń, które rozstawiono w charakterystycznych miejscach badanych płyt. System Hysdozok składa się z centrali komputerowej zarządzającej ustawieniami i pracą siłowników hydraulicznych. W badaniach wykorzystano siłownik o maksymalnej sile wynoszącej 40 kN. Dzięki systemowi Aramis dokonano precyzyjnych pomiarów przemieszczeń metodą rejestracji wizyjnej 3D. System ten pozwolił na mapowanie przemieszczeń wybranej powierzchni zewnętrznej próby. Przygotowanie powierzchni, bez ingerencji mechanicznej, polegało na pokryciu jej tzw. deseniem naniesionym za pomocą czarnej farby (na powierzchni wcześniej całkowicie pokrytej farbą koloru białego). Podczas całego badania dwie zsynchronizowane kamery rejestrowały pomiar z zadaną częstotliwością – w zakresie od 14 do 16 pomiarów na sekundę (maksymalnie możliwe technicznie wartości przy posiadanym sprzęcie).

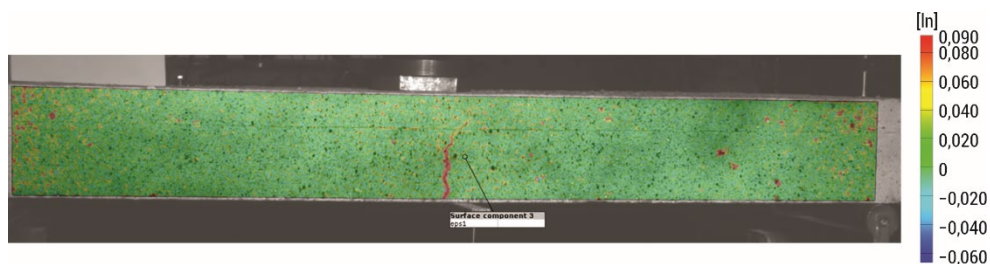
5.5.2. Dokumentacja badań płyt trójwarstwowych z rdzeniem z perlitobetonu przeprowadzonych z zastosowaniem systemu Aramis

Płyta BZP nr 1 z rdzeniem z perlitobetonu



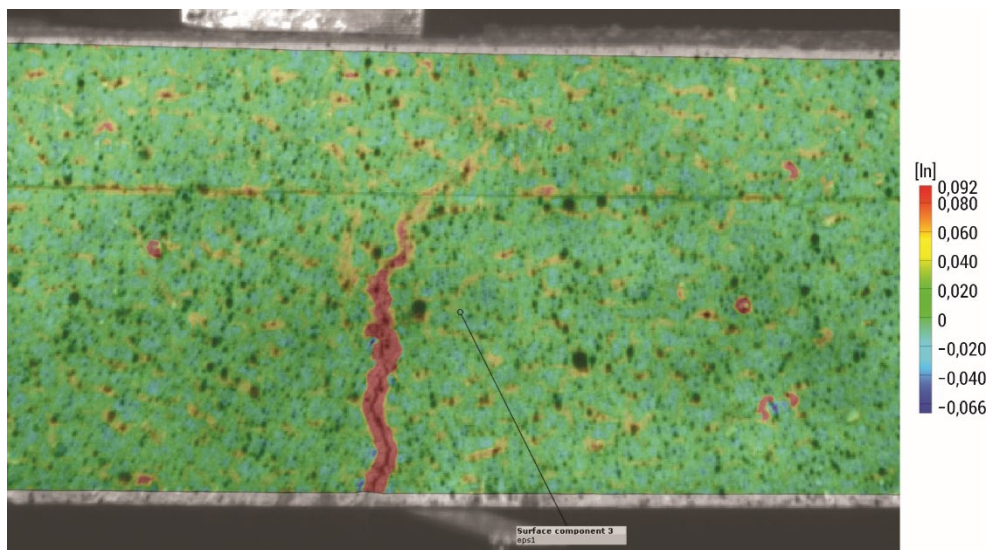
Rys. 5.23. Widok przygotowanej próby badawczej zarejestrowany przez jedną z kamer

Źródło: materiały własne.



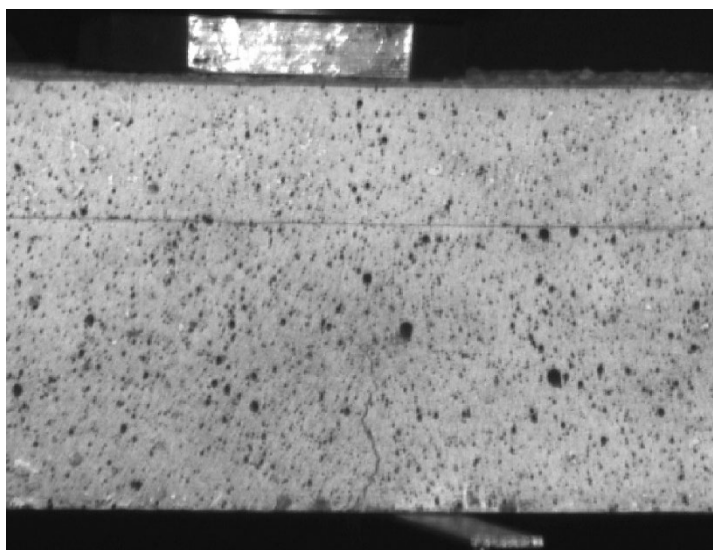
Rys. 5.24. Mapa odkształceń przy zarysowaniu (siła powodująca powstanie rysy – 16,75 kN zmierzona w czasie 0,2 s przed powstaniem rysy)

Źródło: oprac. własne.



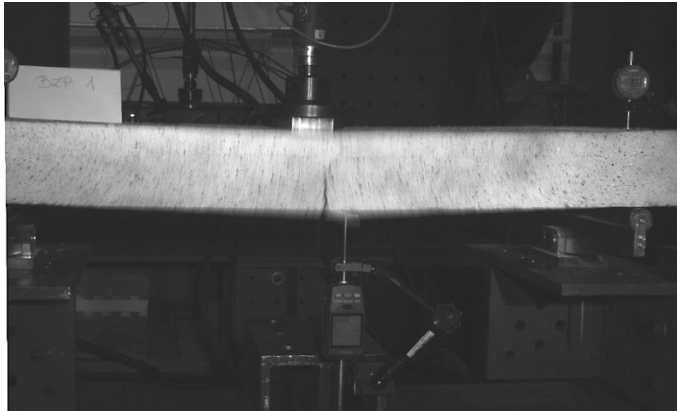
Rys. 5.25. Mapa odkształceń przy zarysowaniu – widok w przybliżeniu

Źródło: oprac. własne.



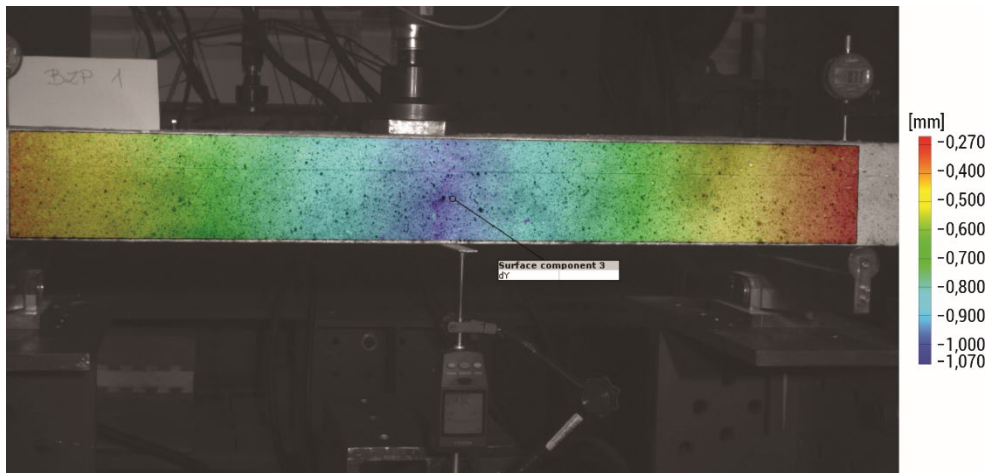
Rys. 5.26. Widok powstałej rysy

Źródło: oprac. własne.



Rys. 5.27. Widok całkowicie zniszczonej płyty bezpośrednio przed upadkiem (ukazany w celu zobrazowania finalnego charakteru zniszczenia)

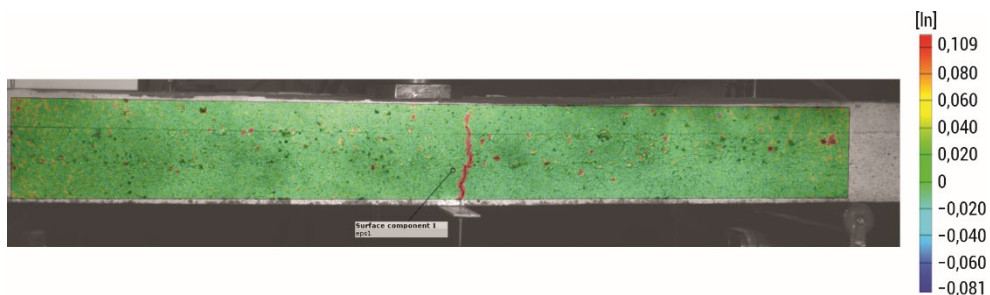
Źródło: materiały własne.



Rys. 5.28. Mapa przemieszczeń pionowych powierzchni płyty w czasie 0,2 s przed powstaniem rysy (przy sile zarejestrowanej przed powstaniem rysy)

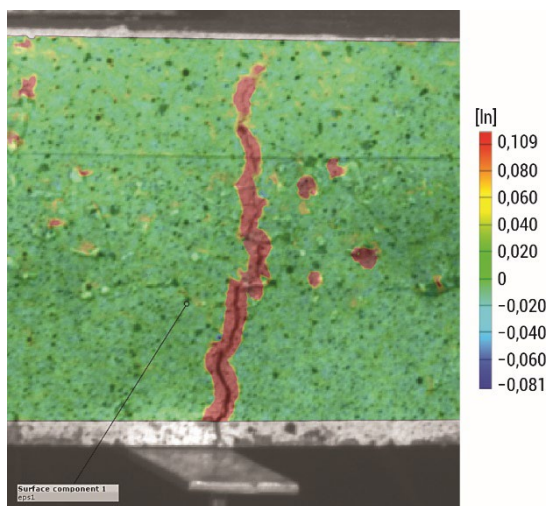
Źródło: oprac. własne.

Płyta BZP nr 2 z rdzeniem z perlitobetonu



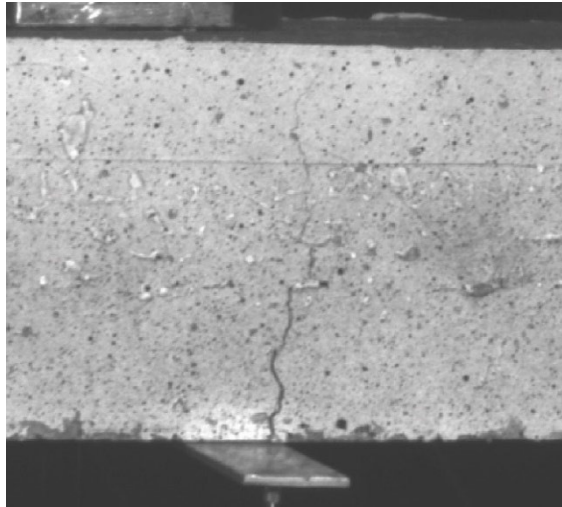
Rys. 5.29. Mapa odkształceń przy zarysowaniu (siła powodująca powstanie rysy – 17,45 kN zmierzona w czasie 0,2 s przed powstaniem rysy)

Źródło: oprac. własne.



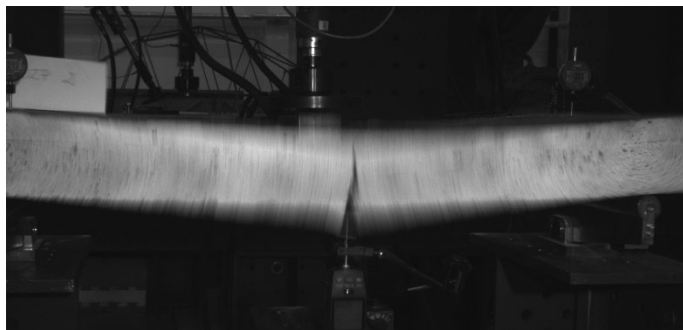
Rys. 5.30. Mapa odkształceń przy zarysowaniu – widok w przybliżeniu

Źródło: oprac. własne.



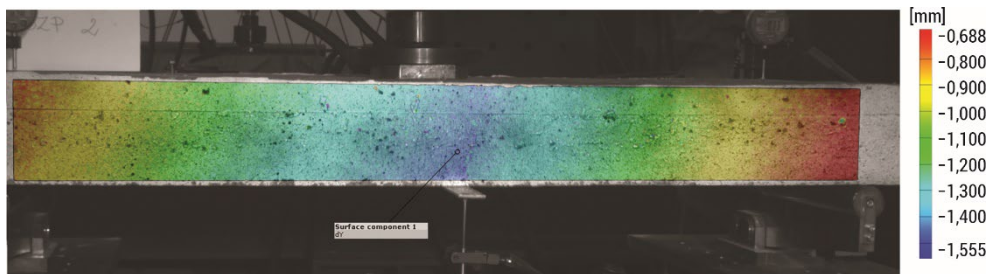
Rys. 5.31. Widok powstałej rysy

Źródło: materiały własne.



Rys. 5.32. Widok całkowicie zniszczonej płyty bezpośrednio przed upadkiem (ukazany w celu zobrazowania finalnego charakteru zniszczenia)

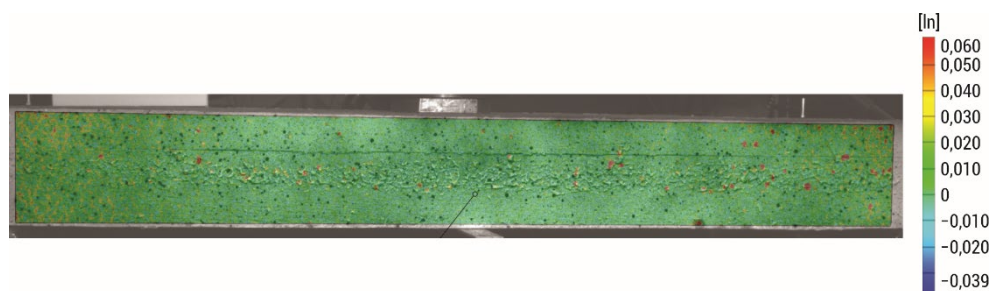
Źródło: materiały własne.



Rys. 5.33. Mapa przemieszczeń pionowych powierzchni płyty w czasie 0,2 s przed powstaniem rysy (przy sile zarejestrowanej przed powstaniem rysy)

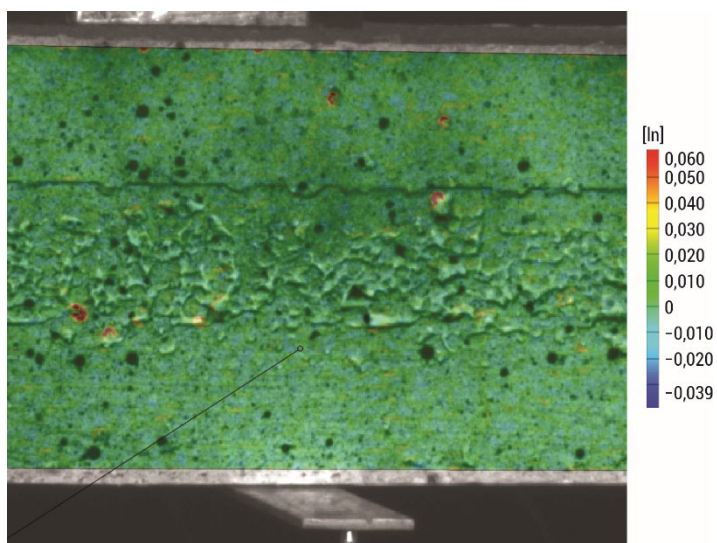
Źródło: oprac. własne.

Płyta BZP nr 3 z rdzeniem z perlitobetonu



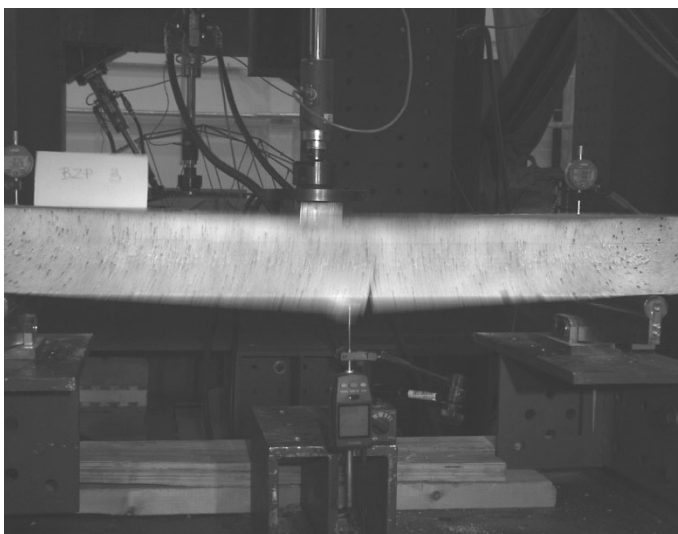
Rys. 5.34. Mapa odkształceń bezpośrednio przed zniszczeniem (siła – 17,91 kN, nie zarejestrowano powstania zarysowania, zniszczenie nastąpiło w przedziale między pomiarami – w czasie 0,2 s)

Źródło: oprac. własne.



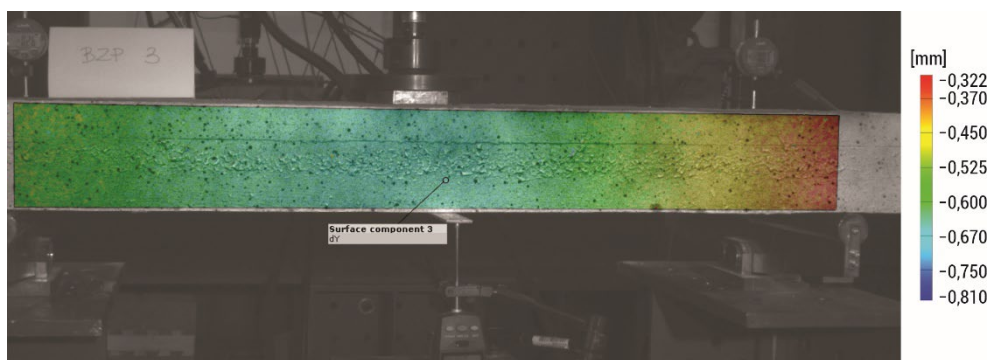
Rys. 5.35. Mapa odkształceń bezpośrednio przed zniszczeniem – widok w przybliżeniu

Źródło: oprac. własne.



Rys. 5.36. Widok całkowicie zniszczonej płyty bezpośrednio przed upadkiem (ukazany w celu zobrazowania finalnego charakteru zniszczenia)

Źródło: materiały własne.



Rys. 5.37. Mapa przemieszczeń pionowych powierzchni płyty w czasie 0,2 s przed powstaniem rysy (przy sile zarejestrowanej przed powstaniem rysy)

Źródło: oprac. własne.

5.5.3. Podsumowanie wyników badań płyt z rdzeniem z perlitobetonu z wykorzystaniem systemu Aramis

- Zniszczenie nastąpiło natychmiast po powstaniu pierwszej i jedynej rysy w przęśle w przypadku płyt BZP nr 2 oraz BZP nr 3.
- W przypadku płyty BZP nr 3 nie było możliwe wyraźne zarejestrowanie powstania rysy, tak jak przy poprzednich płytach. Zarejestrowano jednak siłę niszczącą oraz opracowano mapę przemieszczeń jak dla pozostałych płyt.
- Na fotografii zniszczonej płyty BZP nr 3, wykonanej bezpośrednio przed upadkiem, widoczny jest mniejszy zakres powstałej szczeliny w przęśle względem pozostałych płyt, przy których udało się zarejestrować zarysowanie. To znaczy, że powstało ono w krótkim czasie przed zarejestrowaniem tego zdarzenia. Dowodzi to, że zarysowanie pojawiło się w przestrzeni między pomiarami (w czasie około 0,2 s, co nie mogło być mniejsze z przyczyn technicznych).
- Forma zniszczenia była przewidywana i charakterystyczna dla płyt bez zbrojenia (pojedyncza rysa i natychmiastowe zniszczenie).
- Rozdzielczość pomiarów wizyjnych wynosiła 0,2 s. W tej jednostce czasowej możliwe jest zwykle zarejestrowanie pierwszego zarysowania.

5.6. Badania doświadczalne płyt pod obciążeniem doraźnym

5.6.1. Badania płyt warstwowych z rdzeniem z perlitobetonu – ugięcia

Wymiary płyt: $l_x = 120$ cm, $l_y = 60$ cm, $\delta = 3$ cm, $2h = 6$ cm.

W tabeli 5.10 przedstawiono wartości ugięć doraźnych płyt warstwowych. Odczytów dokonywano co 2 kN. Płyty obciążane były za pomocą systemu do zadawania obciążeń Hysdozok będącego na wyposażeniu Katedry Konstrukcji Budowlanych na Wydziale Budownictwa i Nauk o Środowisku. Wartości przyrostu siły i przemieszczenia zapisywane były przez systemy Hysdozok oraz Aramis.

Tabela 5.10. Zestawienie wyników badań płyt z rdzeniem z perlitobetonu

Nr badanej płyty	Siła niszcząca [kN]	Maksymalne ugięcia [mm]
1	16,8	0,49
2	17,5	0,44
3	18,0	0,49
średnia	17,4	0,47

Źródło: oprac. własne.

Analizując wyniki badań w zakresie ugięć płyt warstwowych, można zauważyć, że ugięcia te narastały łagodnie. Podczas badania nie były widoczne zarysowania, co w przypadku płyty betonowej bez zbrojenia jest zjawiskiem oczywistym. Średnia wartość siły niszczącej dla płyt warstwowych z rdzeniem z perlitobetonu wyniosła 17,4 kN, a maksymalne średnie ugięcie 0,47 mm.

5.6.2. Badania płyt warstwowych z rdzeniem z keramzytobetonu – ugięcia

Wymiary płyt: $l_x = 120$ cm, $l_y = 60$ cm, $\delta = 3$ cm, $2h = 6$ cm.

W tabeli 5.11 przedstawiono średnie wartości ugięć doraźnych płyt warstwowych. Odczytów dokonywano co 2 kN. Sposób zadawania obciążeń i rejestracji był taki sam jak w przypadku płyt warstwowych z rdzeniem z perlitobetonu, zgodnie z punktem 5.5.1.

Tabela 5.11. Zestawienie wyników badań płyt z rdzeniem z keramzytobetonu

Nr badanej płyty	Siła niszcząca [kN]	Maksymalne ugięcia [mm]
1	20,0	0,56
2	18,9	0,53
3	18,9	0,545
średnia	19,27	0,545

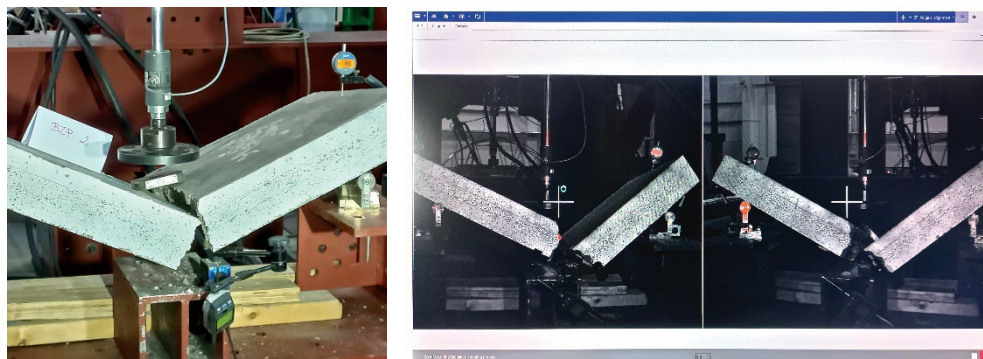
Źródło: oprac. własne.

Analizując wyniki badań w zakresie ugięć płyt warstwowych, można zauważyć, że ugięcia te narastały łagodnie. Podczas badania nie były widoczne zarysowania, co w przypadku płyty betonowej bez zbrojenia jest zjawiskiem oczywistym. Średnia wartość siły niszczącej dla płyt warstwowych z rdzeniem z keramzytobetonu wyniosła 19,27 kN, a maksymalne średnie ugięcie 0,545 mm.

5.6.3. Analiza nośności na zginanie płyt warstwowych

5.6.3.1. Płyty warstwowe z rdzeniem z perlitobetonu

Betonowe płyty były obciążane aż do zniszczenia. Mechanizm zniszczenia nie wykazywał poślizgu w styku między warstwami perlitobetonu i betonu zwykłego.



Rys. 5.38. Zniszczenie badanego warstwowego elementu wskutek wyczerpania nośności

Źródło: materiały własne.

Sposób zniszczenia płyty warstwowej z perlitobetonem, ukazany na rys. 5.38, był zgodny z przewidywaniem. Zniszczenie nastąpiło w środku elementu, gwałtownie, słyszalne było pęknięcie. W całym procesie nie było poślizgu w warstwie kontaktowej – spełniła ona swoje zadanie i uniemożliwiła rozwarstwienie oraz poślizg. Doświadczalnie określone wartości siły niszczącej dla płyt warstwowych zestawiono w tabeli 5.12.

Tabela 5.12. Wartość średniej siły niszczącej płyt warstwowych z perlitobetonem

Serie płyt	Siła [kN]	
	siła niszcząca [kN]	średnia siła niszcząca [kN]
Płyta BZP nr 1	16,80	17,40
Płyta BZP nr 2	17,50	
Płyta BZP nr 3	18,00	

Źródło: oprac. własne.

Z porównania wartości sił niszczących poszczególnych płyt warstwowych wynika, że wielkości sił są porównywalne.

5.6.3.2. Płyty warstwowe z rdzeniem z keramzytobetonu

Betonowe płyty były obciążane aż do zniszczenia. Mechanizm zniszczenia nie wykazywał poślizgu w styku między warstwami keramzytobetonu i betonu zwykłego. Sposób zniszczenia płyt betonowych warstwowych był zgodny z przewidywaniem. Zniszczenie nastąpiło w środku elementu, gwałtownie, słyszalne było pęknięcie. Cały proces przebiegł bez poślizgu w warstwie kontaktowej – spełniła ona swoje zadanie i uniemożliwiła rozwarstwienie oraz poślizg.



Rys. 5.39. Płyta betonowa trójwarstwowa z rdzeniem z keramzytobetonu

Źródło: materiały własne.

Doświadczalnie określone wartości siły niszczącej dla płyt warstwowych zestawiono w tabeli 5.13.

Tabela 5.13. Analiza w zakresie średnich sił niszczących płyt zespolonych w porównaniu z płytami jednorodnymi

Serie płyt	Siła [kN]	
	siła niszcząca [kN]	średnia siła niszcząca [kN]
Płyta BZK nr 1	20,00	19,27
Płyta BZK nr 2	18,90	
Płyta BZK nr 3	18,90	

Źródło: materiały własne.

Z porównania wartości sił niszczących poszczególnych płyt warstwowych wynika, że wielkości sił są porównywalne.

5.6.3.3. Dokumentacja badań płyt trójwarstwowych z rdzeniem z keramzytobetonu przeprowadzonych z zastosowaniem systemu Aramis

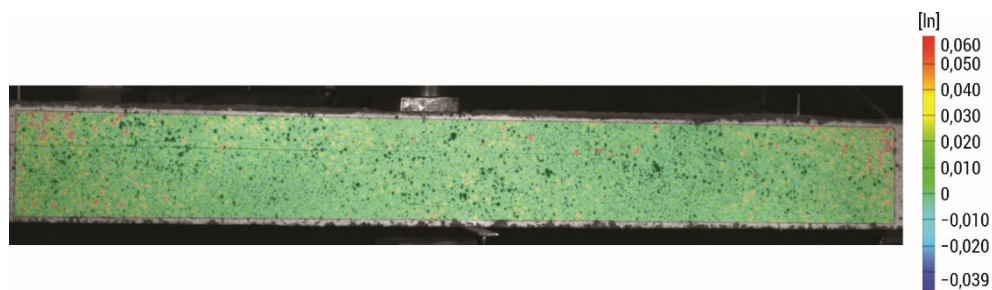
Badania wykonano dla trzech płyt trójwarstwowych z rdzeniem z keramzytobetonu o danych geometrycznych zgodnych z punktem 5.6.2. Poniżej przedstawiono wybrane wyniki z systemu Aramis dla jednej z płyt z rdzeniem z keramzytobetonu.

Płyta BZK nr 1 z rdzeniem z keramzytobetonu



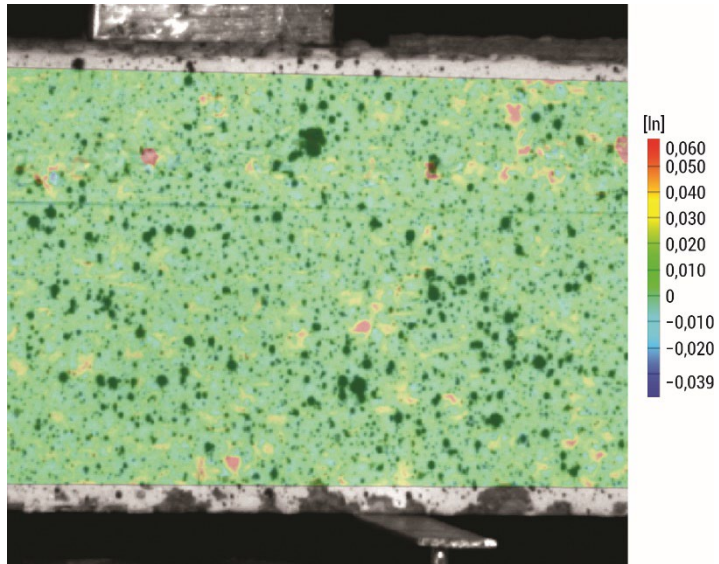
Rys. 5.40. Widok przygotowanej próby badawczej zarejestrowany przez jedną z kamer

Źródło: materiały własne.

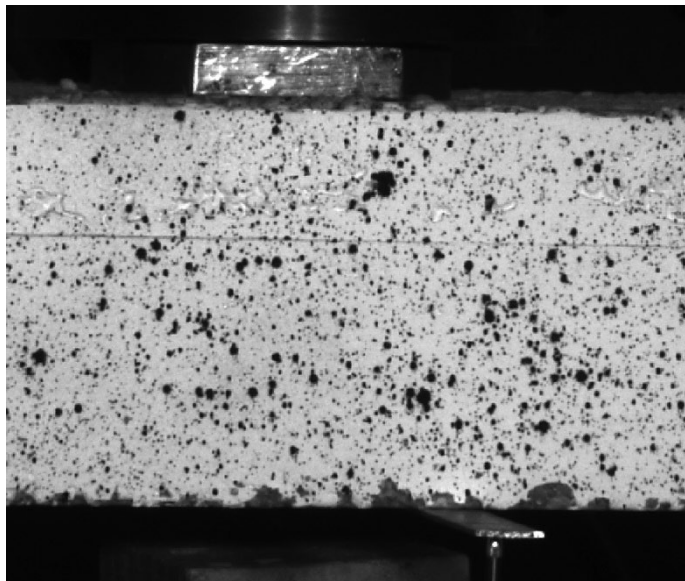


Rys. 5.41. Mapa odkształceń bezpośrednio przed zniszczeniem (siła – 19,94 kN, nie zarejestrowano powstania zarysowania, zniszczenie nastąpiło w przedziale między pomiarami – w czasie 0,2 s)

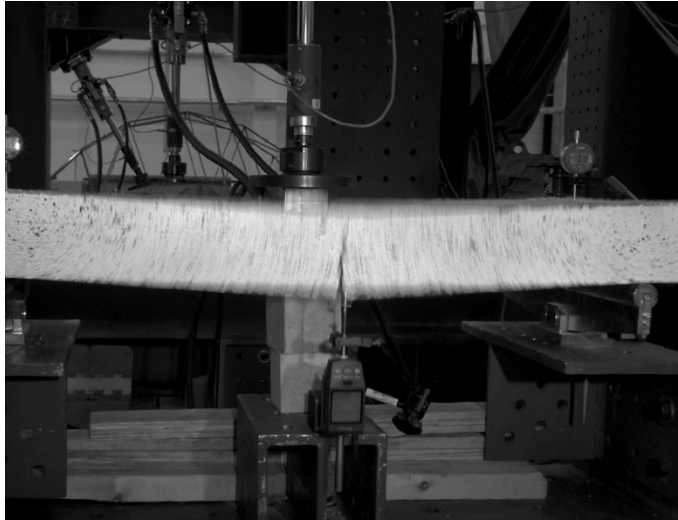
Źródło: oprac. własne.



Rys. 5.42. Mapa odkształceń bezpośrednio przed zniszczeniem – widok w przybliżeniu
 Źródło: oprac. własne.

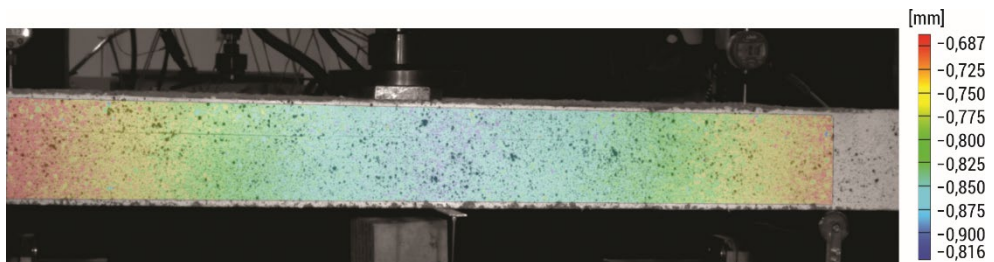


Rys. 5.43. Widok bezpośrednio przed zniszczeniem
 Źródło: oprac. własne.



Rys. 5.44. Widok całkowicie zniszczonej płyty bezpośrednio przed upadkiem (ukazany w celu zobrazowania finalnego charakteru zniszczenia)

Źródło: materiały własne.



Rys. 5.45. Mapa przemieszczeń pionowych powierzchni płyty w czasie 0,2 s przed powstaniem rysy (przy sile zarejestrowanej przed powstaniem rysy)

Źródło: oprac. własne.

Podsumowanie wyników badań z systemu Aramis:

- Zniszczenie następowało natychmiast po powstaniu pierwszej i jedynej rysy.
- Forma zniszczenia była przewidywana i charakterystyczna dla płyt bez zbrojenia (pojedyncza rysa i natychmiastowe zniszczenie).
- Rozdzielczość pomiarów wizyjnych wynosiła 0,2 s. W tej jednostce czasowej możliwe jest zwykle zarejestrowanie pierwszego zarysowania.

5.7. Analiza porównawcza wyników badań doświadczalnych i obliczeń numerycznych

Badania doświadczalne przeprowadzono dla trzech płyt trójwarstwowych o parametrach: $l_x = 120$ cm, $l_y = 60$ cm, $\delta = 3$ cm, $2h = 6$ cm, obciążenia: ciężarem własnym (płyta o wymiarach $1,2 \times 0,6$ m ważyła 188 kg) $q = 2,61$ kN/m² oraz siłą skupioną działającą w centralnym punkcie płyty. Siła niszcząca średnia z trzech badań $P = 17,4$ kN. Wyniki pomiarów porównano z obliczeniami dla następujących danych: moduł sprężystości $E = 30\,000$ MPa, moduł Kirchoffa przyjęto $G_w = 4450$ MPa oraz $G_w = 450$ MPa.

W tabeli zamieszczono zależności przedstawione w przykładach obliczeniowych 1 i 2 (patrz punkty 4.5.1 i 4.5.2) dla obciążeń płyt równomiernie rozłożonych (q) i siłą skupioną (P) w środku centralnym płyty.

Wartości obciążeń, które należy podstawić do wzorów $q = 2,61$ kN/m² = $2,61 \cdot 10^{-3}$ MPa; $P = 17,4$ kN = $17,4 \cdot 10^{-3}$ MN.

Tabela 5.14. Wyniki obliczeń MRS i wyniki eksperymentalne

Porównywane wielkości	Wyniki obliczeń MRS $G_w = 450$ MPa	Wyniki obliczeń MRS $G_w = 4450$ MPa	Pomiary na modelach
w_{\max}	$0,009793q + 0,026274P = 0,483$ mm	$0,007328q + 0,017441P = 0,323$ mm	śr. 0,47 mm
m_x	$4,212 \cdot 10^{-3}q + 0,04691P = 0,827$ mm	$3,267 \cdot 10^{-3}q + 0,018549P = 0,331$ kNm	
N_x	$1,881q + 4,95P = 91,039$ kN/m	$1,899q + 5,301P = 97,194$ kN/m	
M_x	$0,178q + 0,5393P = 9,848$ kNm	$0,177q + 0,5142P = 9,409$ kNm	
σ_{sr}	$62,7q + 165P = 3034,647$ kN/m ²	$63,3q + 176,7P = 3239,793$ kN/m ²	
σ_{\max}	$90,78q + 478P = 8554,136$ kN/m ²	$85,08q + 300,36P = 5448,323$ kN/m ²	

Źródło: oprac. własne.

Pomierzone podczas badań modelowych ugięcia były zbliżone do obliczonych dla parametrów betonu $E = 30$ GPa i rdzenia $G_w = 450$ MPa.

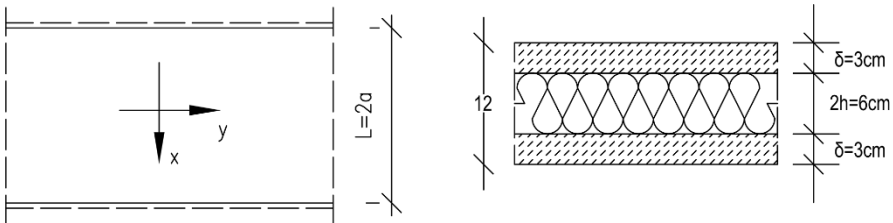
Średnie naprężenia rozciągające (obliczone) w dolnej okładzinie dla powyższych parametrów wynosiły $\sigma_{sr} = 3034$ kN/m².

Średnia wytrzymałość betonu na rozciąganie f_{ctm} wynosi odpowiednio: 2200 kN/m² dla C20/25; 2600 kN/m² dla C25/30; 2900 kN/m² dla C30/37.

5.8. Wpływ modułu Kirchoffa na pracę statyczną konstrukcji przekładkowych płyt trójwarstwowych

Moduł odkształcenia postaciowego ma istotny wpływ na pracę statyczną zginanego elementu trójwarstwowego, szczególnie na wielkość ugięcia i sił tarczowych. Analizę wpływu modułu G_w na ugięcia i siły tarczowe dla trójwarstwowego pasma swobodnie podpartego na krawędziach i równomiernie obciążonego przedstawił Mikołajczak (1977).

Wyniki tych obliczeń dla pasma o rozpiętości między podporami $l = 120$ cm (o rozpiętości odpowiadającej badanym płytom) zamieszczono poniżej.



Dla: C20/25, $E = 30$ GPa, $\nu = 0$

Sztywność płyty

$$D_z = \frac{E\delta(2h+\delta)^2}{2(1-\nu^2)} + 2D$$

Sztywność okładziny

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{30000 \cdot 0,03^3}{12} = 0,0675 \text{ MNm} = 67,5 \text{ kNm}$$

$$D_z = \frac{30000000 \cdot 0,03 \cdot 0,09^2}{2} + 2 \cdot 67,5 = 3645 + 135 = 3780 \text{ kNm}$$

$$l = 120 \text{ cm} \quad a = 60 \text{ cm}$$

Obliczenia dla płyty trójwarstwowej przy założeniu, że moduł Kirchoffa materiału rdzenia $G_w \rightarrow \infty$.

Maksymalne ugięcie dla obciążenia równomiernego

$$w = \frac{q}{24D_z} (x^4 - 6a^2x^2 + 5a^4) \quad \text{dla } x = 0 \quad w = \frac{q}{24D_z} 5a^4$$

$$w_{\max} = \frac{q \cdot 5 \cdot 0,6^4}{24 \cdot 3780} = 7,14q \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad \text{np. } q = 5 \text{ kN/m}^2 \quad w_{\max} = 0,0357 \text{ mm}$$

Obliczenia dla płyty trójwarstwowej przy założeniu, że moduł Kirchoffa materiału rdzenia $G_w \rightarrow 0$.

$$w = \frac{q}{24(2D)} (x^4 - 6a^2x^2 + 5a^4) \text{ dla } x = 0 \quad w = \frac{q}{24(2D)} 5a^4$$

$$w_{\max} = \frac{q \cdot 5 \cdot 0,6^4}{24 \cdot 2 \cdot 67,5} = 2 \cdot 10^{-4} q \quad \text{np. } q = 5 \text{ kN/m}^2 \quad w_{\max} = 1 \text{ mm}$$

W celach porównawczych zamieszczono stosowne wyniki:

- dla płyty jednorodnej obliczonej MRS $h = 0,12 \text{ m}$, $E = 30 \text{ GPa}$

$$w_{\max} = 271,5 \frac{qs^4}{D}, \quad s = \frac{l_x}{12} = 0,1 \text{ m}, \quad D = \frac{Eh^3}{12} = \frac{30\,000 \cdot 0,12^3}{12} = 4,320 \text{ MNm} = 4320 \text{ kNm}$$

$$w_{\max} = 271,5 \frac{q \cdot 0,1^4}{D} = 0,02715 \frac{q}{D} \quad \text{dla } q = 5 \text{ kN/m}^2 \quad w_{\max} = 0,02715 \frac{5}{4320} = 0,0314 \text{ mm}$$

W tabeli 5.15 porównano wyniki obliczeń numerycznych płyty o przekroju trójwarstwowym, swobodnie podpartej na dwóch przeciwległych krawędziach i dwóch pozostałych swobodnych, równomiernie obciążonej przy dwóch wartościach modułu G_w . Dodatkowo zamieszczono wyniki obliczeń płyty jednorodnej, izotropowej o identycznym schemacie statycznym, a także wyniki rozwiązań asymptotycznych przy wartości G_w zmniejszające do zera i do nieskończoności.

Wyniki zestawione w tabeli 5.15 dotyczą następujących danych: długość płyty $l_x = 120 \text{ cm}$, szerokość $l_y = 60 \text{ cm}$, płyta wolnopodparta na dwóch przeciwległych krawędziach, równomiernie obciążona, grubość okładzin $\delta = 3 \text{ cm}$, grubość rdzenia $2h = 6 \text{ cm}$, grubość płyty jednorodnej $H = 12 \text{ cm}$, moduł sprężystości betonu płyty jednorodnej oraz okładzin w płycie trójwarstwowej, $E = 30\,000 \text{ MPa}$ i moduł odkształcenia postaciowego $G_w = 450 \text{ MPa}$, $G_w = 4450 \text{ MPa}$ oraz $G_w \rightarrow 0$ i $G_w \rightarrow \infty$. Obciążenie równomierne.

Tabela 5.15. Porównywalna wartość ugięcia w punkcie środkowym

Porównywaną wielkość ugięcia w punkcie centralnym płyty	Płyta jednorodna, izotropowa (4.6.3.1)	Płyta trójwarstwowa		Pasma płytowe (Mikołajczak 1977)	
		$G_w = 450 \text{ MPa}$ (4.6.1.1)	$G_w = 4450 \text{ MPa}$ (4.6.2.1)	$G_w \rightarrow 0$	$G_w \rightarrow \infty$
w_{\max}	$6,285 \cdot 10^{-6} q$	$9,793 \cdot 10^{-6} q$	$7,328 \cdot 10^{-6} q$	$200 \cdot 10^{-6} q$	$7,14 \cdot 10^{-6} q$

Źródło: oprac. własne.

Po podstawieniu wartości obciążenia q w kN/m^2 otrzymuje się wartości ugięć w [m].

Na przykład: dla $G_w = 450 \text{ MPa}$ i $q = 5 \text{ kN/m}^2$

$$w_{\max} = 9,793 \cdot 10^{-6} \cdot 5 = 4,897 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,049 \text{ mm}$$

ciężar własny $g = 2,61 \text{ kN/m}^2$

- dla ciężaru własnego i obciążenia użytkowego 5 kN/m^2

$$q = 2,61 + 5 = 7,61 \text{ kN/m}^2$$

$$w_{\max} = 9,793 \cdot 7,61 \cdot 10^{-6} = 7,45 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,075 \text{ mm}$$

dla $G_w = 4450 \text{ MPa}$

$$w_{\max} = 7,328 \cdot 10^{-6} \cdot 7,61 = 7,45 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,056 \text{ mm}$$

- dla pasma płytowego Mikołajczak (1977) dla $G_w \rightarrow \infty$

$$w_{\max} = 7,14 \cdot 10^{-6} \cdot 7,61 = 5,43 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,054 \text{ mm}$$

$$\text{dla } G_w \rightarrow \infty \quad N_{x\max} = \frac{3(2h+\delta)}{8(3h^2+3h\delta+\delta^2)} \left(\frac{l_x}{2}\right)^2 q$$

$$\text{dla } h = 0,03 \text{ m}, \delta = 0,03 \text{ m}, l_x = 1,2 \text{ m}, N_{x\max} = 1,929q$$

Dla porównania zamieszczono wyniki uzyskane z obliczeń MRS (patrz rozdz. 4.5.1 i 4.5.2):

$$\text{dla } G_w = 450 \text{ MPa}, N_x = 1,881q$$

$$\text{dla } G_w = 4450 \text{ MPa}, N_x = 1,899q$$

Wartości z obliczeń numerycznych są zbliżone do uzyskanych z obliczeń analitycznych, co wskazuje na poprawność tych pierwszych.

Przeprowadzone obliczenia wykazały pełną zgodność wyników uzyskanych metodą różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym dla płyt trójwarstwowych z wynikami porównywanymi dla płyt izotropowych, z wynikami analitycznymi dla pasma płytowego o przekroju trójwarstwowym oraz wynikami badań modelowych dla płyt trójwarstwowych.

6. Podsumowanie i wnioski końcowe

Płyty trójwarstwowe modelu Hoffa mogą być z powodzeniem stosowane jako nowoczesne rozwiązania systemów stropowych. Do wykonania takich płyt można użyć pełnowartościowych materiałów, takich jak beton, i materiałów izolacyjnych, jak np. styropian czy szkło piankowe. Z kolei do betonowych okładzin można z powodzeniem wykorzystać kruszywa odpadowe, jak np.: piasek odpadowy pozostający z hydroklasyfikacji czy kruszywa z recyklingu. Rdzeń może powstać z tradycyjnych materiałów izolacyjnych, jak styropian czy szkło piankowe, ale również można tu zastosować perlit lub keramzyt.

Okładziny betonowe mogą być zbrojone tradycyjnie, przy wykorzystaniu zbrojenia stalowego lub niemetalicznego, a także mogą być fibrobetonowe.

Płyty trójwarstwowe można wykonywać w sposób tradycyjny w formach, na stołach wibracyjnych lub jako płyty sprężone.

Jeśli zaś chodzi o transport wyprodukowanych płyt, można wykorzystać systemy transportowe powszechnie stosowane w branży prefabrykatów. Jednym z takich rozwiązań jest system z kotwami gwintowymi 1D o podwyższonej nośności firmy TERWA, używany przy produkcji, transporcie oraz montażu elementów na placu budowy.

Zamieszczone w pracy wyniki obliczeń, badań i analiz wykazały możliwość i zasadność wykonywania płyt stropowych o konstrukcji trójwarstwowej charakteryzujących się stosunkowo małym ciężarem, dużą nośnością i dobrymi parametrami dotyczącymi izolacyjności termicznej i akustycznej. Przedstawiono też możliwość stosowania do ich konstrukcji materiałów z recyklingu i odpadowych.

Przeprowadzone badania modelowe potwierdziły prawidłowość obliczeń numerycznych wykonanych z użyciem metody różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym. Stosowanie tej metody do obliczania płyt trójwarstwowych powinno w znacznym stopniu ułatwić projektowanie takich konstrukcji.

Badania modelowe opisane w monografii ograniczono do płyt o niewielkich wymiarach, co wynikało z możliwości sprzętowych wyposażenia laboratoryjnego, a także z kosztów przeznaczonych na badania. W literaturze opisano pojedyncze przykłady wykonanych płyt stropowych trójwarstwowych o rozpiętości 3,0 m, które wykazały się dużą nośnością (rys. 3.1 i 3.2), co potwierdza realne możliwości produkcji płyt o wymiarach nadających się do stosowania w budownictwie.

Stosunkowo dużą trudnością w powszechnym zastosowaniu płyt trójwarstwowych mogą być problemy z prawidłowym wykonywaniem obliczeń statyczno-

-wytrzymałościowych, które są bardzo czasochłonne. Bazując na toku postępowania opisanym w monografii, należy dążyć do zbudowania programu numerycznego, co w zdecydowany sposób ułatwiłoby projektowanie takich płyt.

Charakterystyczne zalety płyt trójwarstwowych to: duża nośność, dobra izolacyjność termiczna i akustyczna, mały ciężar, brak stosowania podpór przy montażu, równość powierzchni, małe zużycie betonu na budowie, szybki montaż.

Przeprowadzone badania własne, obliczenia statyczne i ich analizy potwierdziły osiągnięcie postawionych na wstępie celów oraz pozwoliły na sformułowanie następujących wniosków:

- metoda różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym, stosowana z powodzeniem w teorii płyt izotropowych, w pełni nadaje się do rozwiązywania zagadnień płyt trójwarstwowych modelu Hoffa;
- wykonane płyty trójwarstwowe użyte do badań modelowych potwierdziły, że można skonstruować element płytowy stropowy, który spełnia wymogi nośności, izolacyjności termicznej i akustycznej, a jednocześnie ma duży stopień wykończenia;
- wykazano, że płyty stropowe modelu Hoffa mają lepsze parametry techniczne od dotychczas stosowanych rozwiązań systemów stropowych, a do ich wykonania można użyć dowolnych materiałów, dla których należy określić parametry wytrzymałościowe. Dzięki odpowiedniemu doborowi materiałów składowych można otrzymać element optymalnie wykorzystujący ich parametry;
- przeprowadzone obliczenia wykazały pełną zgodność wyników uzyskanych metodą różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym dla płyt trójwarstwowych z wynikami porównywanymi dla płyt izotropowych, z wynikami analitycznymi dla pasma płytowego o przekroju trójwarstwowym oraz z wynikami badań modelowych dla płyt trójwarstwowych;
- zbudowana i zamieszczona w pracy macierz globalna na współczynnikach ogólnych w prosty sposób może być wykorzystana do stworzenia programu komputerowego, który pozwoli na szybkie uzyskiwanie rozwiązań dla dowolnych parametrów materiałów składowych i parametrów geometrycznych płyty trójwarstwowej oraz na przeanalizowanie wpływu poszczególnych parametrów na wielkości ugięć i sił wewnętrznych w obliczanych płytach;
- przeprowadzone badania modelowe na płytach o przekroju trójwarstwowym polegały na określeniu zależności pomiędzy wielkością obciążenia a pomierzonymi przemieszczeniami pionowymi (ugięciami). Na podstawie badań laboratoryjnych określono parametry wytrzymałościowe materiałów składowych dla wykonanych modeli płytowych. Dla tych parametrów wykorzystując zamieszczoną w pracy globalną macierz, zbudowano układy równań przemieszczeniowych i wykonano obliczenia statyczne. Wyniki zmierzone podczas badań modelowych były całkowicie zgodne z wynikami obliczeń numerycznych.

Wyniki zawarte w monografii mogą być z powodzeniem wykorzystane przez profesjonalnych producentów elementów betonowych.

Literatura

1. Bareš R. (1969), *Berechnungstafeln für Platten und Wandscheiben*, wyd. 2, Bauverlag GmbH, Wiesbaden–Berlin, ss. 579.
2. Boniecki P., Graffunder W. (1989), *Komputerowa symulacja zagadnienia deformacji płyty trójwarstwowej*, „Zeszyty Naukowe Akademii Rolniczej w Krakowie. Mechanizacja i Energetyka Rolnictwa”, t. 7, s. 11–20.
3. Boniecki P., Dworecki Z. (1995), *Ocena wpływu losowości cech wypełniacza płyty trójwarstwowej na charakter rozkładu prawdopodobieństwa wektora deformacji obciążonej płyty*, „Prace Przemysłowego Instytutu Maszyn Rolniczych”, t. 40, nr 4, s. 53–57.
4. Boniecki P., Dworecki Z., Loboda M. (1997), *The Sandwich Plate Deformation with Stochastic Structure*, „Prace Przemysłowego Instytutu Maszyn Rolniczych”, t. 42, nr 2, s. 49–51.
5. Boniecki P., Mueller W., Weres J. (2000), *Random Deformation of a Three-Layer Hoff Plate with Stochastic Parameters*, „Prace Przemysłowego Instytutu Maszyn Rolniczych”, t. 45, nr 2, s. 67–69.
6. Buczkowski W. (1977), *Numeryczne obliczanie płyt trójwarstwowych stosowanych w budownictwie rolniczym*, praca doktorska, Akademia Rolnicza we Wrocławiu, Wrocław, ss. 126.
7. Buczkowski W. (1981), *Analiza numeryczna płyt warstwowych*, „Archiwum Inżynierii Lądowej”, t. 27, z. 1, s. 51–61.
8. Buczkowski W. (2007), *Obciążenia termiczne belek, płyt i konstrukcji inżynierskich*, Wydawnictwo SGGW, Warszawa, ss. 157.
9. Bujnarowski K., Grygo R. (2022), *Właściwości kruszyw lekkich do zastosowania w budownictwie*, „Instal”, t. 7/8, s. 71–75, DOI: 10.36119/15.2022.7-8.10.
10. Chajec A., Sadowski Ł. (2020), *The effect of steel and polypropylene fibres on the properties of horizontally formed concrete*, „Materials”, vol. 13, 5827, DOI: 10.3390/ma13245827.
11. Demby M. (2022), *Modelowanie i badania doświadczalne betonu wysokowartościowego zbrojonego włóknami polipropylenowymi w aparacie ciągliwości*, praca doktorska, Politechnika Poznańska, Poznań, ss. 162.
12. Domski J. (2005), *Nośność, ugięcie, zarysowanie belek piaskobetonowych z włóknami stalowymi pod obciążeniem doraźnym*, praca doktorska, Politechnika Koszalińska, Koszalin.
13. Domski J., Zakrzewski M. (2020), *Deflection of Steel Fiber Reinforced Concrete Beams Based on Waste Sand*, „Materials”, vol. 13(2), 392, <https://doi.org/10.3390/ma13020392>.

14. Drobiec Ł. (2018), *Stropy Vector. Koncepcja, kształtowanie, obliczenia, wykonawstwo*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.
15. Facconi L., Minelli F., Plizzari G. (2016), *Steel fiber reinforced self-compacting concrete thin slabs. Experimental study and verification against Model Code 2010 provisions*, „Engineering Structures”, no. 122, s. 226–237.
16. *FIB Model Code for Concrete Structures 2010*, Delft University of Technology, The Netherlands.
17. Garas V.Y., Kahn L.F., Kurtis K.E. (2009), *Short-term tensile creep and shrinkage of ultra-high performance concrete*, „Cement and Concrete Composites”, vol. 31(3), s. 147–152, DOI: 10.1016/j.cemconcomp.2009.01.002.
18. Glinicki M.A. (2010), *Beton ze zbrojeniem strukturalnym*, [w:] XXV Ogólnopolskie Warsztaty Pracy Projektanta Konstrukcji, Szczyrk 10–13 marca 2010, t. 1: Wykłady, Polski Związek Inżynierów i Techników Budownictwa, Gliwice, s. 279–308.
19. Głodkowska W., Kobaka J. (2012), *The model of brittle matrix composites for distribution of steel fibres*, „Journal of Civil Engineering and Management”, vol. 18, no. 1, s. 145–150, DOI: 10.3846/13923730.2012.657405.
20. Głodkowska W., Kobaka J. (2013), *Modelling of properties and distribution of steel fibres within a fine aggregate concrete*, „Construction and Building Materials”, vol. 44, no. 7, s. 645–653, DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2013.02.037.
21. Głodkowska W., Kobaka J., Laskowska-Bury J. (2020), *Fibrokompozyt z kruszywem odpadowym jako pełnowartościowy materiał konstrukcyjny*, „Przegląd Budowlany”, nr 7–8, s. 38–47.
22. Głodkowska W., Domski J., Laskowska-Bury J., Kobaka J., Ziarkiewicz M., Lehmann M. (2019), *Analiza wybranych wytrzymałości fibrokompozytów na bazie drobnego kruszywa odpadowego*, „Przegląd Budowlany”, nr 7–8, s. 66–69.
23. Głodkowska W., Laskowska-Bury J. (2014), *Właściwości fibrokompozytów wykonanych przy użyciu piasków odpadowych*, [w:] *Gospodarka odpadami komunalnymi*, Wydawnictwo Politechniki Koszalińskiej, Koszalin, s. 53–66.
24. Głodkowska W., Laskowska-Bury J. (2015), *Fibrokompozyt na bazie piasków odpadowych jako materiał do wytwarzania posadzek przemysłowych*, „Materiały Budowlane”, vol. 510, DOI: 10.15199/33.2015.02.09.
25. Głodkowska W., Laskowska-Bury J., Kobaka J. (2013), *Wpływ włókien stalowych na kształtowanie właściwości kompozytu drobnokruszywowego*, „Materiały Budowlane”, vol. 493, no. 9, s. 28–30.
26. Gołaś J. (1969), *Pewne przypadki nieciągłych warunków brzegowych dla kołowych płyt trójwarstwowych*, praca doktorska, Politechnika Poznańska, Poznań.
27. Goszczyńska B., Tworzewska J. (2014), *Określenie rysy na potrzeby analizy wyników badania procesu powstawania i rozwoju rys w belkach żelbetowych z zastosowaniem systemu Aramis*, „Przegląd Budowlany”, nr 12, s. 44–49.

28. Grimaldi A., Luciano R. (2000), *Tensile stiffness and strength of fiber-reinforced concrete*, „Journal of the Mechanics and Physics of Solids”, vol. 48, s. 1987–2008, DOI: 10.1016/S0022-5096(99)00079-4.
29. Habel K. (2004), *Structural behaviour combining ultra-high performance fibre reinforced concrete (UHPC) and reinforced concrete*, praca doktorska, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne.
30. Henager C.H., Doherty T.J. (1976), *Analysis of reinforced fibrous concrete beams*, „Journal of the Structural Division”, vol. 102, s. 177–188, Corpus ID: 137252485.
31. Hoff N.J. (1950), *Bending and Buckling of Rectangular Sandwich Plates*, Polytechnic Institute of Brooklyn, Washington.
32. Holschemacher K., Mueller T., Ribakov Y. (2010), *Effect of steel fibres on mechanical properties of high-strength concrete*, „Materials and Design”, no. 31(5), s. 2604–2615, DOI: 10.1016/j.matdes.2009.11.025.
33. Hoła J., Niewiadomski P. (2021), *Próby modyfikacji betonu nanododatkami w świetle literatury i badań własnych*, „Przegląd Budowlany”, t. 92, s. 23–30.
34. Jamróży Z. (2015), *Beton i jego technologie*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
35. Jasiczak J., Mikołajczak P. (2003), *Technologia betonu modyfikowanego domieszkami i dodatkami*, Politechnika Poznańska, Poznań.
36. Jasiczak J., Wdowska A., Rudnicki T. (2008), *Betony ultrawysokowartościowe. Właściwości, technologie, zastosowanie*, Stowarzyszenie Producentów Cementu, Kraków.
37. Jasiński R., Kisiołek A., Zając J. (2022), *Badania rynkowe systemów stropowych i potrzeb uczestników procesu budowlanego*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.
38. Kaszyńska M. (2002), *Early age properties of high-strength/high-performance concrete*, „Cement & Concrete Composites”, vol. 24(2), s. 253–261, [https://doi.org/10.1016/S0958-9465\(01\)00014-2](https://doi.org/10.1016/S0958-9465(01)00014-2).
39. Kączkowski Z. (1968), *Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa.
40. Kisiołek A. (2017), *Polski rynek rozwiązań stropowych – najpopularniejsze systemy, część I*, „Przegląd Budowlany”, nr 12, s. 25–29.
41. Kisiołek A. (2018), *Rynek systemów stropowych w Polsce. Analiza wybranych rozwiązań na przestrzeni lat 2015–2016*, wyd. 2, Wydawnictwa Wielkopolskiej Wyższej Szkoły Społeczno-Ekonomicznej, Poznań–Środa Wielkopolska.
42. Korentz J., Szmatuła F. (2020), *Wpływ dodatku mialu gumowego SBR na właściwości zapraw cementowych*, „Materiały Budowlane”, nr 12, s. 12–15.
43. Lehmann M., Głodkowska W. (2021), *Shear Capacity and Behaviour of Bending Reinforced Concrete Beams Made of Steel Fibre-Reinforced Waste Sand Concrete*, „Materials”, vol. 14(11), 2996, <https://doi.org/10.3390/ma14112996>.
44. Magnucki K., Ostwald M. (red.), (2001), *Stateczność i optymalizacja konstrukcji trójwarstwowych*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań–Zielona Góra.
45. Mayer P., Kaczmar W. (2008), *Właściwości i zastosowania włókien węglowych i szklanych*, „Tworzywa Sztuczne i Chemia”, nr 6, s. 52–56.

46. Mikołajczak H. (1963), *Badania modelowe płyt trójwarstwowych. Sympozjum na temat Badania modelowe dźwigarów powierzchniowych*, Wrocław, s. 61–69.
47. Mikołajczak H. (1965), *Zagadnienia nieciągłych warunków brzegowych dla prostokątnych płyt trójwarstwowych*, rozprawa habilitacyjna, „Roczniki Wyższej Szkoły Rolniczej w Poznaniu”, dodatek nr 12.
48. Mikołajczak H. (1977), *Rozwiązanie asymptotyczne dla trójwarstwowego pasma płytowego*, „Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej. Budownictwo Lądowe”, nr 272, s. 169–175.
49. Mikołajczak H., Buczkowski W. (1977), *Obliczenia statyczne płyt trójwarstwowych*, sesja naukowa „Aktualne problemy naukowo-badawcze budownictwa i gospodarki wodnej w rolnictwie”, Polska Akademia Nauk, Kraków, s. 153–163.
50. Mikołajczak H., Buczkowski W., Łęcki W., Wosiewicz B. (1975), *Stropowe płyty trójwarstwowe dla budynków inwentarskich*, „Roczniki Akademii Rolniczej w Poznaniu. Melioracje”, t. 77, s. 43–52.
51. Nagrodzka-Godycka K. (1999), *Badania właściwości betonu i żelbetu w warunkach laboratoryjnych*, Arkady, Warszawa.
52. Nagrodzka-Godycka K., Wesołowski M., Kondrat J., Stolarczyk M.T. (2019), *Dokumentacja oraz wnioski z badań prototypowego stropu typu filigran z wkładką styropianową dla firmy Strobud Prefabrykacja sp. z o.o.*, MOST Wiedzy, Politechnika Gdańska, Gdańsk.
53. Neville A.M. (2012), *Właściwości betonu*, Polski Cement, Kraków.
54. Nowak P., Brzezicki M. (2020), *Beton fasadowy z zastosowaniem włókna szklanego: najważniejsze technologie i przegląd dobrych praktyk na wybranych przykładach*, „Builder”, nr 11, s. 32–35, DOI: 10.5604/01.3001.0014.4530.
55. Prisco M. di, Colombo M., Dozio D. (2013), *Fibre-reinforced concrete in fib Model Code 2010: principles, models and test validation*, „Structural Concrete”, vol. 14, no. 4, s. 342–361.
56. Romanów F., Stricker L., Teisseyre J. (1972), *Stateczność konstrukcji przekładkowych*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
57. Sadowska-Buraczewska B. (2017), *Studium pracy konstrukcji warstwowych ukształtowanych z betonów o znacznie różniących się charakterystykach materiałowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok.
58. Sadowska-Buraczewska B., Barnat-Hunek D., Szafraniec M. (2020), *Influence of Recycled High-Performance Aggregate on Deformation and Load-Carrying Capacity of Reinforced Concrete Beams*, „Materials”, vol. 13(1), 186, DOI: 10.3390/ma13010186.
59. Sadowska-Buraczewska B., Szafraniec M., Barnat-Hunek D., Łagód G. (2020), *Flexural behavior of composite concrete slabs made with steel and polypropylene fibres reinforced concrete in the compression zone*, „Materials”, vol. 13(16), <https://doi.org/10.3390/ma13163616>.

60. Sadowski Ł. (2019), *Adhesion in Layered Cement Composites*, Springer Cham, Switzerland, doi.org/10.1007/978-3-030-03783-3.
61. Serbeńska A. (2014), *Zbrojenie niemetaliczne w konstrukcjach mostowych*, edroga.pl, <https://edroga.pl/drogi-i-mosty/zbrojenie-niemetaliczne-w-konstrukcjach-mostowych-02031669> (dostęp: 2.07.2023).
62. Stankiewicz B. (2008), *Świat włókien w budownictwie*, „Szkło i Ceramika”, R. 59, nr 2, s. 8–12.
63. Starosolski W. (2006), *Konstrukcje żelbetowe wg Eurokodu 2. i norm związanych*, t. 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
64. Starosolski W. (2007), *Konstrukcje żelbetowe wg Eurokodu 2. i norm związanych*, t. 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
65. Staszak N., Garbowski T., Szymczak-Graczyk A. (2021), *Solid Truss to Shell Numerical Homogenization of Prefabricated Composite Slabs*, „Materials”, vol. 14, 4120, <https://doi.org/10.3390/ma14154120>.
66. Staszak N., Szymczak-Graczyk A., Garbowski T. (2022), *Elastic Analysis of Three-Layer Concrete Slab Based on Numerical Homogenization with Analytical Shear Correction Factor*, „Applied Sciences”, vol. 12, 9918, <https://doi.org/10.3390/app12199918>.
67. Stiglat K., Wippel H. (1973), *Platten*, wyd. 2, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin.
68. Swap S. (2017), *Scanning Electron Microscopy (SEM)*, Science Education Resource Center at Carleton College, http://serc.carleton.edu/research_education/geochemsheets/techniques/SEM.html (dostęp: 22.08.2023).
69. Szymczak-Graczyk A., Gajewska G., Laks I., Kostrzewski W. (2022), *Influence of variable moisture conditions on the value of the thermal conductivity of selected insulation materials used in passive buildings*, „Energies”, vol. 15, 2626, <https://doi.org/10.3390/en15072626>.
70. Szymczak-Graczyk A., Mikołajczak H. (2016), *Wyznaczanie wybranych właściwości styropianu stosowanego jako wypełnienie żelbetowych pomostów pływakających*, [w:] *Nowoczesne rozwiązania materiałowe i konstrukcyjne oraz problemy eksploatacyjne dotyczące budownictwa ogólnego i hydrotechnicznego*, red. A. Szymczak-Graczyk, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu, Poznań, s. 317–328.
71. Timoshenko S., Wojnowsky-Krieger S. (1962), *Teoria płyt i powłok*, Arkady, Warszawa.
72. Wachowiak J., Wilde P. (1966), *Wolnopodparte prostokątne płyty trójwarstwowe*, „Archiwum Inżynierii Lądowej”, t. 12, z. 1, s. 71–90.
73. Wilde P. (1966), *Waricyjne ujęcie metody różnic skończonych w teorii powłok. Materiały XII Konferencji Naukowej Komitetu Nauki PZITB i Komitetu Inżynierii Lądowej PAN*, Krynica.
74. Zdera J. (2012), *Metoda scanningowej mikroskopii elektronowej innowacją w naukach mineralogicznych*, laboratoria.net, <http://laboratoria.net/arttykul/13741.html> (dostęp: 22.08.2023).

75. Ziarkiewicz M. (2018), *Doświadczalna ocena wybranych metod wymiarowania belek z fibrokompozytu drobnokruszywowego*, praca doktorska, Politechnika Koszalińska, Koszalin.
76. Zieliński K. (2010), *Podstawy technologii betonu*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań.
77. Zych T. (2010), *Współczesny fibrobeton – możliwość kształtowania elementów konstrukcyjnych i form architektonicznych*, „Czasopismo Techniczne. Architektura”, R. 107, z. 8-A, s. 371–386.

Normy:

1. PN-EN 1008:2004. Woda zarobowa do betonu. Specyfikacja pobierania próbek, badanie i ocena przydatności wody zarobowej do betonu, w tym wody odzyskanej z procesu produkcji betonu.
2. PN-EN 12390-2:2019-07E. Badania betonu. Część 2: Wykonywanie i pielęgnacja próbek do badań wytrzymałościowych.
3. PN-EN 12390-3:2019. Badania betonu. Część 3: Wytrzymałość na ściskanie próbek do badań.
4. PN-EN 12390-13:2021-12. Badania betonu. Część 13: Wyznaczanie siecznego modułu sprężystości przy ścisaniu.
5. PN-EN 12620. Kruszywa do betonu.
6. PN-EN ISO 6946:1999. Komponenty budowlane i elementy budynku. Opór cieplny i współczynnik przenikania ciepła. Metoda obliczenia.

Strony www:

1. *Co to jest perlit?*, Perlit24.pl, <https://perlit24.pl/co-to-jest-perlit> (dostęp: 13.03.2023).
2. *Keramzyt – definicja, rodzaje, zastosowanie*, Building Companion, <https://building-companion.pl/blog/artykuly/po-budowie/keramzyt-definicja-rodzaje-zastosowanie/> (dostęp: 13.03.2023).
3. *Świadectwo jakości cementu*, Cemex, https://www.cemex.pl/documents/46481509/60021021/Parametry_CEM_I_42-5-R-Chelm.pdf/ (dostęp: 8.02.2023).
4. *Zastosowanie perlitu*, Perlit24.pl, <https://perlit24.pl/zastosowanie-perlitu> (dostęp: 13.03.2023).
5. <http://www4.nau.edu/microanalysis/Microprobe-SEM/Signals.html> (dostęp: 22.08.2023).

Spis tabel

Tabela 3.1. Współczynniki przewodzenia ciepła dla wybranych materiałów.....	28
Tabela 4.3. Współczynniki proporcjonalne do przemieszczeń w_i , u_i i v_i (obciążenie równomiernie rozłożone).....	75
Tabela 4.4. Współczynniki proporcjonalne do przemieszczeń w_i , u_i i v_i (obciążenie siłą skupioną w punkcie środkowym)	76
Tabela 4.5. Macierz układu równań przemieszczeniowych – płyta jednorodna, izotropowa (numeracja węzłów – rys. 4.17)	80
Tabela 4.6. Wyniki obliczeń płyty jednorodnej, izotropowej (przykład 3). Obciążenie równomierne (q [MPa]), mnożnik $qs4D1$	82
Tabela 4.7. Wyniki obliczeń płyty jednorodnej, izotropowej (przykład 3). Obciążenie siłą skupioną (P [MN]) w punkcie środkowym płyty. Mnożnik $Ps2D1$	83
Tabela 4.8. Zestawienie rozwiązań otrzymanych z przykładów obliczeniowych 1–3	85
Tabela 5.1. Podstawowe charakterystyki cementu zastosowanego w badaniach	88
Tabela 5.2. Właściwości fizyczne perlitu.....	90
Tabela 5.3. Skład chemiczny perlitu (w przeliczeniu na tlenki).....	90
Tabela 5.4. Składy mieszanek betonowych (na 1 m^3) użyte do wykonania płyt.....	93
Tabela 5.5. Średnia kostkowa wytrzymałość na ściskanie $f_{c,cube}$ [MPa]	95
Tabela 5.6. Średni moduł sprężystości betonów E_c [GPa]	98
Tabela 5.7. Charakterystyka próbek	98
Tabela 5.8. Moduł Kirchoffa dla keramzytobetonu i perlitobetonu	99
Tabela 5.9. Parametry wytrzymałościowe użytych betonów – wartości średnie	110
Tabela 5.10. Zestawienie wyników badań płyt z rdzeniem z perlitobetonu.....	121
Tabela 5.11. Zestawienie wyników badań płyt z rdzeniem z keramzytobetonu.....	122
Tabela 5.12. Wartość średniej siły niszczącej płyt warstwowych z perlitobetonem	123
Tabela 5.13. Analiza w zakresie średnich sił niszczących płyt zespolonych w porównaniu z płytami jednorodnymi.....	124
Tabela 5.14. Wyniki obliczeń MRS i wyniki eksperymentalne.....	128
Tabela 5.15. Porównywalna wartość ugięcia w punkcie środkowym	130

Spis rysunków

Rys. 2.1. Panel SMART 15/60 – kanały 60×90 , zbrojone $2 \times \varnothing 9,3$ mm dołem + $2 \times \varnothing 6,85$ mm górną	16
Rys. 2.2a. Widok stropu TERIVA PANEL w aksonometrii	17
Rys. 2.2b. Przekrój przez strop TERIVA PANEL 16	17
Rys. 2.3. Typoszereg stropu KONBET S-PANEL	18
Rys. 3.1. Badania poligonowe płyt warstwowych (fot. W. Buczkowski)	21
Rys. 3.2. Badania poligonowe nośności i ugięć płyt warstwowych (fot. W. Buczkowski)	22
Rys. 3.3. Płyta trójwarstwowa z okładzinami żelbetowymi, rdzeń ze styropianu	29
Rys. 4.1. Przyjęty układ współrzędnych oraz podstawowe oznaczenia: δ – grubość okładzin, $2h$ – grubość rdzenia, $q(x,y)$ – obciążenie prostopadłe do płaszczyzny płyty	32
Rys. 4.2. Wykresy naprężeń normalnych i stycznych wraz z rozłożeniem na siły składowe w przekroju płyty trójwarstwowej	33
Rys. 4.3. Przykładowa siatka podziału dla płyty trójwarstwowej o krawędziach swobodnie podpartych i krawędziach swobodnych z zaznaczonymi warunkami brzegowymi	37
Rys. 4.4. Przyjęte schematy różnicowe dla pochodnych w_{xxx} , w_{yyv} , w_{xyy}	38
Rys. 4.5. Przyjęte schematy różnicowe dla pochodnych $u_{,xx}$, $u_{,yy}$, $v_{,xx}$, $v_{,yy}$	39
Rys. 4.6. Przyjęte schematy różnicowe dla przemieszczeń u i v	39
Rys. 4.7. Przyjęte schematy różnicowe dla pochodnych $w_{,x}$ i $w_{,y}$	40
Rys. 4.8. Przyjęta siatka podziału dla „ćwiartki” płyty oraz schematy obciążeń: a) dla równomiernego obciążenia, b) dla siły skupionej	42
Rys. 4.9. Schematy odpowiadające fragmentowi energii $V_1 + V_2 = D \text{swixx}^2 + \text{wiyy}^2 + 2\text{wixy}^2 \text{dxdy}$	43
Rys. 4.10. Rozpisane na siatce podziału pochodne u , x^2 i v , y^2	44
Rys. 4.11. Rozpisane na siatce podziału pochodne u , y i v , x	45
Rys. 4.12. Rozpisane na siatce pochodne podziału przemieszczenia u i v	46
Rys. 4.13. Rozpisane na siatce podziału iloczynu $u \times w_{,x}$ oraz $v \times w_{,y}$	47
Rys. 4.14. Rozpisane na siatce podziału pochodne $w_{,x^2}$ i $w_{,y^2}$	48
Rys. 4.15. Fragment siatki podziału z numeracją węzłów dotyczącą przemieszczeń pionowych – ugięć „w”. Przy numeracji węzłów pokazanych na rys. 4.8 dla punktów leżących na krawędzi swobodnie podpartej ugięcia „w” są równe 0	58

Rys. 4.16. Rzut i przekrój płyty trójwarstwowej obliczanej w przykładzie 1. oraz przyjęta siatka podziału jak na rys. 4.8.....	59
Rys. 4.17. „Cwiartka” płyty jednorodnej, izotropowej z numeracją węzłów; $s = l_x/12 = l_y/6$; $l_x : l_y = 2 : 1$	78
Rys. 4.18. Schemat i oznaczenia podpory swobodnie podpartej	79
Rys. 4.19. Oznaczenie zestawionych w tabeli 4.8 momentów zginających	85
Rys. 5.1. Perlit EP 180	89
Rys. 5.2. Keramzyt	92
Rys. 5.3. Stanowisko badawcze do badań wytrzymałościowych betonów. Wybrana z przedmiotowych badań próbka badawcza.....	95
Rys. 5.4. Maszyna wytrzymałościowa Controls wraz z przygotowaną próbką do badań modułu sprężystości.....	96
Rys.5.5. Wybrana zależność naprężenie–odkształcenie dla keramzytobetonu	97
Rys. 5.6. Schemat obciążenia próbki z badań z pomiaru modułu sprężystości dla keramzytobetonu	97
Rys. 5.7. Badanie próbki w stanie jednoosiowego naprężenia.....	99
Rys. 5.8. Przebieg odkształceń poprzecznych oraz podłużnych keramzytobetonu w stanie jednoosiowego naprężenia	99
Rys. 5.9. Przebieg odkształceń poprzecznych oraz podłużnych perlitobetonu w stanie jedno-osiowego naprężenia	100
Rys. 5.10. Przyrząd służący do wyznaczania modułu Kirchoffa dla próbki poddanej skręcaniu (fot. W. Buczkowski).....	101
Rys. 5.11. Schemat belki jednoprzęsłowej wolnopodpartej równomiernie obciążonej.....	102
Rys. 5.12. Schemat belki jednoprzęsłowej wolnopodpartej obciążonej siłą skupioną.....	102
Rys. 5.13. Schemat obciążenia belki w celu wyznaczenia sztywności elementu	103
Rys. 5.14. Aparat płytowy HFM436 do pomiaru strumienia cieplnego metodą stacjonarną wtórną z próbką perlitobetonu	106
Rys. 5.15. Skaningowy mikroskop QUANTA-FEG 250	107
Rys. 5.16. Struktura betonu zwykłego ze skaningowego mikroskopu elektronowego w powiększeniu 2 po lewej 2000 razy, po prawej 8000 razy	107
Rys. 5.17. Struktura perlitobetonu ze skaningowego mikroskopu elektronowego w powiększeniu – po lewej 500 razy, po prawej 1000 razy	108
Rys. 5.18. Struktura keramzytobetonu ze skaningowego mikroskopu elektronowego w powiększeniu – po lewej 500 razy, po prawej 2000 razy	108
Rys. 5.19. Betonowanie płyty i gotowe elementy badawcze	110
Rys. 5.20. Element badawczy na stendzie wraz z systemem pomiarowym Aramis	111
Rys. 5.21. Schemat obciążenia płyt warstwowych BZP (z perlitobetonem) lub BZK (z keramzytobetonem) z wyszczególnieniem warstw	112
Rys. 5.22. Stanowisko do badań i element poddany próbie obciążania na stendzie badawczym.....	113
Rys. 5.23. Widok przygotowanej próby badawczej zarejestrowany przez jedną z kamer ...	114

Rys. 5.24. Mapa odkształceń przy zarysowaniu (siła powodująca powstanie rysy – 16,75 kN zmierzona w czasie 0,2 s przed powstaniem rysy).....	114
Rys. 5.25. Mapa odkształceń przy zarysowaniu – widok w przybliżeniu	115
Rys. 5.26. Widok powstałej rysy	115
Rys. 5.27. Widok całkowicie zniszczonej płyty bezpośrednio przed upadkiem (ukazany w celu zobrazowania finalnego charakteru zniszczenia)	116
Rys. 5.28. Mapa przemieszczeń pionowych powierzchni płyty w czasie 0,2 s przed powstaniem rysy (przy sile zarejestrowanej przed powstaniem rysy).....	116
Rys. 5.29. Mapa odkształceń przy zarysowaniu (siła powodująca powstanie rysy – 17,45 kN zmierzona w czasie 0,2 s przed powstaniem rysy).....	117
Rys. 5.30. Mapa odkształceń przy zarysowaniu – widok w przybliżeniu	117
Rys. 5.31. Widok powstałej rysy	118
Rys. 5.32. Widok całkowicie zniszczonej płyty bezpośrednio przed upadkiem (ukazany w celu zobrazowania finalnego charakteru zniszczenia)	118
Rys. 5.33. Mapa przemieszczeń pionowych powierzchni płyty w czasie 0,2 s przed powstaniem rysy (przy sile zarejestrowanej przed powstaniem rysy).....	118
Rys. 5.34. Mapa odkształceń bezpośrednio przed zniszczeniem (siła – 17,91 kN, nie zarejestrowano powstania zarysowania, zniszczenie nastąpiło w przedziale między pomiarami – w czasie 0,2 s)	119
Rys. 5.35. Mapa odkształceń bezpośrednio przed zniszczeniem – widok w przybliżeniu	119
Rys. 5.36. Widok całkowicie zniszczonej płyty bezpośrednio przed upadkiem (ukazany w celu zobrazowania finalnego charakteru zniszczenia)	120
Rys. 5.37. Mapa przemieszczeń pionowych powierzchni płyty w czasie 0,2 s przed powstaniem rysy (przy sile zarejestrowanej przed powstaniem rysy).....	120
Rys. 5.38. Zniszczenie badanego warstwowego elementu wskutek wyczerpania nośności	123
Rys. 5.39. Płyta betonowa trójwarstwowa z rdzeniem z keramzytobetonu	124
Rys. 5.40. Widok przygotowanej próby badawczej zarejestrowany przez jedną z kamer	125
Rys. 5.41. Mapa odkształceń bezpośrednio przed zniszczeniem (siła – 19,94 kN, nie zarejestrowano powstania zarysowania, zniszczenie nastąpiło w przedziale między pomiarami – w czasie 0,2 s)	125
Rys. 5.42. Mapa odkształceń bezpośrednio przed zniszczeniem – widok w przybliżeniu ..	126
Rys. 5.43. Widok bezpośrednio przed zniszczeniem.....	126
Rys. 5.44. Widok całkowicie zniszczonej płyty bezpośrednio przed upadkiem (ukazany w celu zobrazowania finalnego charakteru zniszczenia)	127
Rys. 5.45. Mapa przemieszczeń pionowych powierzchni płyty w czasie 0,2 s przed powstaniem rysy (przy sile zarejestrowanej przed powstaniem rysy).....	127

Streszczenie

Praca dotyczy płyt trójwarstwowych modelu Hoffa w aspekcie zastosowania ich jako samodzielnych płytowych elementów stropowych. Płyty modelu Hoffa składają się z trzech warstw i są symetryczne względem płaszczyzny środkowej. Warstwy zewnętrzne – okładziny – muszą spełniać założenia teorii płyt cienkich izotropowych jednorodnych, a warstwa środkowa, czyli rdzeń, jest nieodkształcalna w kierunku pionowym, materiał zaś powinien zapewniać płycie odpowiednie parametry izolacyjności termicznej i akustycznej.

Dzięki odpowiednio dobranym materiałom składowym na okładziny i rdzeń konstrukcję trójwarstwową można zaliczyć do konstrukcji o rozwiązaniach prawie optymalnych, w której każdy element składowy przyczynia się do uzyskania najlepszych w danych warunkach właściwości całej struktury. Konstrukcje warstwowe są szeroko stosowane w takich dziedzinach, jak budowa pojazdów kosmicznych, samolotów i okrętów, a także w budownictwie. Są to jednak konstrukcje składające z dwóch cienkich warstw nośnych z tworzywa konstrukcyjnego o wysokich właściwościach wytrzymałościowych (stal, dural, tworzywa sztuczne, kompozyty), przedzielone warstwą wypełniającą, która ma zapewniać konstrukcjom odpowiednią sztywność oraz parametry izolacyjne i akustyczne.

Pomimo powszechnego stosowania stropów w każdej dziedzinie budownictwa w ostatnich latach obserwuje się dynamiczny rozwój płytowych elementów stropowych. Po przeglądzie aktualnie proponowanych współczesnych rozwiązań systemów stropowych autorka monografii doszła do wniosku, że jednym z bardzo dobrych sposobów w tym zakresie może być użycie w budownictwie płytowych elementów stropowych bazujących na rozwiązaniach płyt trójwarstwowych modelu Hoffa. Choć ich teoria znana jest od połowy XX w., konstrukcje te nie doczekały się powszechnego zastosowania w budownictwie. Pojedyncze próby opracowania takich płyt stropowych z przeznaczeniem dla budownictwa rolniczego podjęto w ośrodku poznańskim w latach 70.–80. XX stulecia.

Zagadnienie płyt trójwarstwowych z matematycznego punktu widzenia należy do trudnych i z tego powodu brakuje przystępnych metod ich obliczania. W prezentowanej monografii autorka – po krótkim przedstawieniu teorii płyt trójwarstwowych modelu Hoffa – zaproponowała, aby do ich obliczenia zastosować numeryczną metodę różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym. Pokazała sposób postępowania przy budowie macierzy układu równań przemieszczeniowych, zbudowała macierz globalną na współczynnikach ogólnych, którą można wykorzystać do obliczania płyt

trójwarstwowych swobodnie podpartych na dwóch przeciwległych krawędziach, o dowolnych parametrach materiałowych elementów składowych (dotyczy to płyt o stosunku długości do szerokości jak 2 : 1). W celu zweryfikowania otrzymanych rozwiązań numerycznych zbudowano modele płyt trójwarstwowych o wymiarach $120 \times 60 \times 12$ cm. Okładziny betonowe modeli miały grubość 3 cm, a rdzenie 6 cm. Rdzenie wykonano z perlitobetonu i keramzytobetonu. W trakcie badań określono niezbędne parametry wytrzymałościowe okładzin i rdzeni: wytrzymałość betonu na ściskanie, moduł sprężystości, moduł odkształcenia postaciowego. Wyniki badań modelowych potwierdziły wyniki obliczeń numerycznych, a więc wykazały słuszność użytej metody obliczeniowej i możliwość jej stosowania przy projektowaniu elementów płytowych w skali naturalnej.

Summary

The paper is concerned with three-layer slabs based on the Hoff model in terms of their use as independent slab elements. The Hoff model slabs consist of three layers and are symmetrical with respect to the median plane. The outer cladding layer must comply with the theory of thin, isotropic, homogeneous slabs, while the core layer is non-deformable in the vertical direction, and the material should provide the slab with adequate thermal and acoustic insulation.

Thanks to the properly selected component materials for the cladding and core, the three-layer structure can be categorised as a near-optimal solution where each component contributes to the best performance of the overall structure under specific conditions. Layered structures are widely used in fields such as aerospace vehicle, aircraft, and ship manufacturing, as well as in the construction industry. However, they are structures consisting of two thin support layers made of high-strength structural material (steel, dural, plastic, composites) separated by a filler layer, which is intended to provide the structure with adequate rigidity as well as ensure proper insulation and acoustic performance. Despite the widespread use of floors in every area of construction, recent years have seen a rapid development of slab-based floor elements. Following a review of the currently proposed contemporary floor system solutions, the author of the monograph concluded that one very good solution in this area could be the use of slab floor elements based on the Hoff model three-layer slab solutions for construction purposes. Although the theory of three-layer slabs based on the Hoff model has been known since the mid-twentieth century, such structures have not seen widespread use in construction. Single attempts to develop such floor slabs for agricultural buildings were made in a Poznań centre in the 1970s and 1980s. The probable reason for the lack of widespread interest in such structures was that the issue of three-layer slabs is mathematically a difficult one, so there are no accessible methods for their calculation. After briefly presenting the theory of three-layer slabs based on the Hoff model in the monograph, the author proposed that the numerical finite difference method from the variational perspective should be employed to calculate them. She showed the procedure for constructing the matrix of a system of displacement equations and built a global matrix based on general coefficients, which can be used to calculate three-layer slabs freely supported on two opposite edges with arbitrary material parameters of the components (this applies to slabs with a 2 : 1 length-to-width ratio. Models of three-layer panels with dimensions of $120 \times 60 \times 12$ cm were built to verify the numerical solutions obtained.

The concrete cladding of the models was 3 cm thick, and the cores were 6 cm thick. The cores were made of perlite concrete and expanded clay aggregate concrete. In the course of the study, the necessary strength parameters of the cladding and cores were determined: the compressive strength of the concrete, the modulus of elasticity, and the modulus of non-dilatational strain. The results of the model tests confirmed the results of the numerical calculations, thus demonstrating the validity of the calculation method applied as well as its applicability to the design of natural-scale slab elements.

