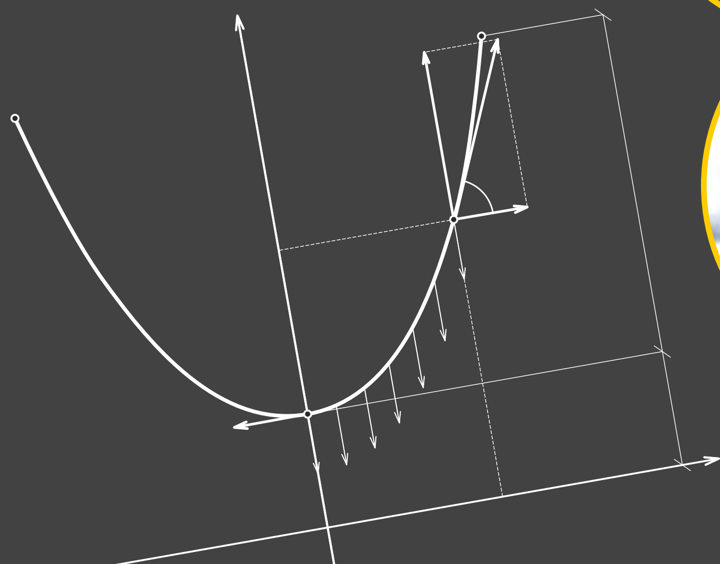
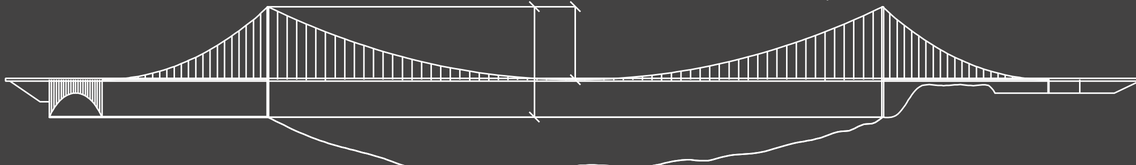
MATEMATYKA W PRZYKŁADACH Z BUDOWNICTWA I ARCHITEKTURY

Edwin Koźniewski
Agnieszka Tereszkiewicz





Politechnika Białostocka

Edwin Koźniewski • Agnieszka Tereszkiewicz

MATEMATYKA W PRZYKŁADACH Z BUDOWNICTWA I ARCHITEKTURY

Politechnika Białostocka
OFICYNA WYDAWNICZA POLITECHNIKI BIAŁOSTOCKIEJ
BIAŁYSTOK 2023

Recenzent:
dr hab. Krystyna Romaniak, prof. PK

Redaktor naukowy dyscypliny inżynieria lądowa, geodezja i transport:
prof. dr hab. inż. Katarzyna Zabielska-Adamska

Korekta językowa:
Edyta Chrzanowska

Okładka:
Marcin Dominów

Zdjęcia na okładce:
F. Sadowski, D. Gawryluk

ISBN 978-83-67185-96-7
ISBN 978-83-67185-97-4 (e-Book)
DOI: 10.24427/978-83-67185-97-4

Druk: PPH Remigraf sp. z o.o.

Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej
ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok
e-mail: oficyna.wydawnicza@pb.edu.pl
www.pb.edu.pl

Spis treści

Wstęp 7

Rozdział 1. Zwartość geometryczna budynku 11

1.1. Problemy optymalizacyjne prowadzące do pojęcia zwartości figury i bryły geometrycznej 11

1.2. Efektywność geometryczna i zwartość budynku 14

1.2.1. Wskaźniki zwartości 3D 16

1.2.2. Wskaźniki zwartości 2D 18

1.3. Wielokąty prostokątne 21

1.3.1. Defekt obwodu i pola 23

1.3.2. Rozpiętość wielokąta prostokątnego 25

1.4. Podsumowanie 27

1.5. Zadania 27

Rozdział 2. Izometrie w projektowaniu 29

2.1. Izometrie w E^2 29

2.2. Parkietaże 31

2.2.1. Parkietaże w E^2 – kilka przykładów 32

2.2.2. Izometrie w E^3 36

2.3. Między parkietażem a wielościanami foremnymi i półforemnymi 39

2.4. Zadania 44

Rozdział 3. Powierzchnie prostokreślne w budownictwie 47

3.1. Powierzchnie powstałe w wyniku obrotu prostej 47

3.2. Opis powierzchni hiperboloidalnych – kubatura chłodni kominowej 51

3.3. O krzywych i powierzchniach obrotowych 56

3.3.1. Równanie powierzchni obrotowej 57

3.4. Zadania 62

Rozdział 4. Kubatura 65

4.1. Kubatura dworca Warszawa Ochota 65

4.2. Konstrukcja płata powierzchni siodłowej jako powierzchni prostokreślnej 66

4.3. Twierdzenie Cavalieriego 69
4.4. Przekształcenia oparte na przekrojach 69
4.5. Zadania 74

Rozdział 5. Krzywe i powierzchnie offsetowe w budownictwie . 77

5.1. Krzywe offsetowe 78
5.1.1. Definicja krzywej offsetowej 78
5.1.2. Analityczna postać krzywej offsetowej 83
5.1.3. O grubości chłodni kominowej w aspekcie krzywych offsetowych 85
5.2. Powierzchnie offsetowe 86
5.2.1. Opis analityczny 86
5.2.2. Grubość powierzchni siodłowej 88
5.3. Zadania 88

Rozdział 6. Krzywa łańcuchowa w budownictwie i architekturze 89

6.1. Krzywa łańcuchowa 89
6.2. Zadania 95

Rozdział 7. Powierzchnie o szybkim rozbiegu – brachistochrona w skateparku, akwaparku i na skoczni narciarskiej 99

7.1. Zagadnienie brachistochrony — przykład ekstremum funkcjonału 99
7.2. Zadania 104

Rozdział 8. Drgania w mechanice budowli 107

8.1. Wartości i wektory własne operatora 107
8.2. Zwyczajne równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego 111
8.3. Równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego o współczynnikach stałych 112
8.4. Problem drgań w zagadnieniach mechaniki budowli 115
8.5. Triangularyzycja Banachiewicza – Choleskiego 117
8.6. Zadania 120

Rozdział 9. Opis pola wilgotności i kształtu membrany — zagadnienia brzegowe rozwiązywane metodą Ritza 123

9.1. O przybliżonych metodach rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych 123
9.1.1. Metoda Ritza 123
9.2. Metoda różnicowa 131
9.3. Zadania 136

Rozdział 10. Zapotrzebowanie na beton towarowy — próba opisu w postaci modelu liniowego 137

10.1. Model ekonometryczny 137
10.1.1. Dobór zmiennych objaśniających 138
10.2. Szacowanie parametrów modeli liniowych metodą najmniejszych kwadratów 144
10.2.1. Szacowanie parametrów modelu z jedną zmienną objaśniającą 145
10.2.2. Szacowanie parametrów modelu z wieloma zmiennymi objaśniającymi 147
10.2.3. Weryfikacja modeli liniowych 148
10.3. Zadania 154

Rozdział 11. Optymalizacja transportu mas ziemnych przy budowie drogi — programowanie liniowe 155

11.1. Programowanie liniowe 155
11.2. Ogólny problem programowania liniowego 159
11.3. Zasadnicze twierdzenie programowania liniowego 160
11.4. Zagadnienie transportowe 160
11.5. Optymalizacja transportu mas ziemnych z użyciem różnych środków transportu 166
11.6. Zadania 169

Rozdział 12. Metody matematyczne wielokryterialnej analizy porównawczej na przykładzie rozwiązań projektowych wybranych pokryć dachowych 171

12.1. Metody matematyczne 171
12.2. Założenia metody 171
12.3. Rodzaje kodowań 172
12.3.1. Standaryzacja 172
12.3.2. Normowanie 173
12.3.3. Kodowanie wg Neumanna – Morgensterna 173
12.3.4. Kodowanie metodą Pattern 174
12.4. Algorytm stosowania metod matematycznych 174
12.5. Formuły ocen syntetycznych 175
12.6. Diagramy Hassego 175
12.7. Reguły porządkowania zbiorów 177
12.8. Kryteria oceny cech wybranych pokryć dachowych 178
12.8.1. Koszty całkowite 178
12.8.2. Ciężar pokrycia 178
12.8.3. Trwałość pokrycia 179
12.8.4. Estetyka pokrycia 179
12.8.5. Łatwość eksploatacji 183
12.9. Propozycje wag do oceny syntetycznej 185

12.10. Analiza wielokryterialna wybranych wariantów 186
12.11. Podsumowanie 190
12.12. Zadania 190

Bibliografia 191

Skorowidz 197

Spis tablic 199

Spis rysunków 203

Wstęp

Opracowanie obejmuje tematykę zajęć z matematyki stosowanej, które prowadzone są przez autorów na studiach magisterskich na kierunku budownictwo na Wydziale Budownictwa i Nauk o Środowisku Politechniki Białostockiej. Z racji rozległości tematycznej dyscypliny, jaką jest matematyka, określenie treści nauczania w zakresie matematyki stosowanej nie było sprawą prostą. Zaprezentowane tematy wykładów i ćwiczeń pochodzą z różnych działów matematyki ukazują techniki rozwiązania sformułowanych wcześniej problemów związanych z problematyką budownictwa i architektury.

Są zagadnienia, które rozwiązuje się w sposób niewymagający zaawansowanych technik. O ile stwierdzenie, że długość obwodu obszaru kołowego jest mniejsza od długości obwodu obszaru kwadratowego o tym samym polu powierzchni wydaje się intuicyjnie oczywiste, o tyle już ocena, o ile długość obwodu kwadratu jest większa od obwodu koła, wymaga rozwiązania odpowiedniej proporcji. Jednak dowód, że spośród figur o tym samym polu koło ma najmniejszy obwód, prowadzi do trudniejszego zagadnienia tzw. izoperymetrycznego z zakresu rachunku wariacyjnego. Przy okazji pewnym zaskoczeniem jest fakt, że zagadnienie izoperymetryczne pojawia się w opowieści Wojskiego zawartej w *Panu Tadeuszu* Adama Mickiewicza.

Nieoczekiwany jest fakt, że kształt krzywej, jaki przyjmuje swobodnie zwisający, zaczepiony na dwóch palach łańcuch, może być inspiracją do budowy łuków i sklepień. Sam kształt otrzymuje się, rozwiązując równanie różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego. Ale dla inżyniera ważna jest (a może ważniejsza niż samo rozwiązanie) matematyzacja problemu. Doświadczenie przy formułowaniu problemu pokazuje, jak uprościć złożone zadanie i które wielkości można i warto pominąć.

Zadania wariacyjne pojawiają się w opracowaniu kilka razy. Zagadnienie brachistochrony to znów zadanie wariacyjne, którego wynik otrzymuje się poprzez rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu. Warto przy tym zauważyć, że typy równań różniczkowych prowadzących do wzoru na krzywą łańcuchową i wzorów na brachistochronę omawiane są w podręcznikach akademickich jako dwa szczególne przypadki ogólnej postaci równania rzędu drugiego. Dalej pokazuje się, że metody wariacyjne mogą pracować w stronę odwrotną. Mianowicie, aby rozwiązać zagadnienie brzegowe równania różniczkowego cząstkowego, formułuje się odpowiedni funkcjonał, dla którego równanie jest warunkiem koniecznym Eulera. Tak postępujemy w metodzie Ritza opisania i rozwiązania zagadnień postaci funkcji wilgotności oraz postaci funkcji opisującej kształt membrany.

Równania różniczkowe ruchu drgającego są uogólnione w aspekcie opisu drgań budowli i w tym kontekście pojawiają się nawiązania do wektorów i wartości własnych macierzy oraz wybranych metod rozwiązywania układów równań (triangularyzacja macierzy).

Z metod optymalizacyjnych autorzy omawiają programowanie liniowe, w tym zagadnienie transportowe z zastosowaniem do transportu mas ziemnych przy budowie drogi.

Z zakresu analizy danych statystycznych w publikacji zaprezentowano liniowy model ekonometryczny w kontekście analizy zapotrzebowania na beton towarowy przy wznoszeniu obiektów budowlanych.

W projektowaniu i wykonawstwie – z uwagi na wiele kryteriów – pojawia się problem wyboru rozwiązania projektowego, materiałów, technologii. Stąd jeden z rozdziałów został poświęcony matematycznym metodom wielokryterialnej analizy porównawczej.

Z racji wprowadzania koncepcji BIM w opracowaniu znajdziemy wiele odniesień do modeli geometrycznych obiektów architektonicznych lub elementów budowlanych z zastosowaniem narzędzi CAD. Wszak w podejściu BIM już we wstępnej fazie projektowej obiekt budowlany jest odwzorowany w przestrzeni trójwymiarowej. Następnie otrzymany model jest wiązany z całym procesem projektowym (m.in. model obliczeniowy) i wykonawczym (m.in. materiały, technologia). Dlatego AutoCAD, jako znane studentom środowisko programistyczne, jest często przywoływany poprzez wykorzystanie jego funkcji. Liczne są odwołania do łatwo dostępnych w przestrzeni wirtualnej aplikacji takich jak GeoGebra lub WolframAlpha. Ta ostatnia jest wykorzystywana do przekształceń symbolicznych (wyznaczanie rozwiązania metodą Ritza). Propozycja korzystania z wymienionych aplikacji ma być inspiracją do stosowanie innych programów, wedle możliwości i zainteresowań studentów.

Odniesienia do niestandardowych obiektów geometrycznych (powierzchni i krzywych) wyrażają się poprzez analizy geometryczne modeli chłodni kominowych, przekryć siodłowych i innych utworów (słupy kręcone), które omawiane były w ramach geometrii odwzorowań inżynierskich (geometrii i grafiki inżynierskiej, geometrii wykreślnej). Istotne są tu zarówno klasyczne przekształcenia izometryczne, podobieństwa, afiniczne i rzutowe, jak i przekształcenia oparte na przekrojach czy też przekształcenia offsetowe krzywych i powierzchni.

Opracowanie nie stanowi kompletnego wykładu wybranych metod matematycznych, a raczej jest wędrówką po mniej lub bardziej poznanych przez studentów faktach z matematyki dla inżynierów w ramach podstawowego wykładu. Stąd duża liczba odniesień do literatury, gdzie można znaleźć wyczerpujące opracowanie tematu.

Czytelnikom korzystającym z niniejszego opracowania autorzy będą wdzięczni za wszystkie zauważone usterki, a także za sugestie dotyczące zarówno treści, jak i formy.

Rozdział 1

Zwartość geometryczna budynku

1.1. Problemy optymalizacyjne prowadzące do pojęcia zwartości figury i bryły geometrycznej

Problem 1.1. Produkowane są rury o różnych kształtach przekroju: kołowym, kwadratowym, sześciokątnym (sześciokąt foremny), ale o takim samym polu przekroju (rys. 1.1). Do produkcji której z rur użyjemy więcej materiału? Zakładamy, że jego ilość użyta do wyprodukowania rury o przekroju kołowym stanowi 100%.

Rysunek 1.1: Profile stalowe w Semexie w Częstochowie [13]

Rozwiązanie. By rozwiązać ten problem, przyjmijmy następujący model: jeżeli F jest figurą przekroju, to ilość materiału (przy pominięciu grubości) będzie wyrażona przez obwód P figury F, sam przekrój zaś będzie wyrażony przez pole A figury F.
Porównajmy przekroje kołowy i kwadratowy. Mamy wówczas
dla przekroju kołowego (c): $P_c = 2\pi r$, $A_c = \pi r^2$;
dla przekroju kwadratowego (s): $P_s = 4a$, $A_s = a^2$,
gdzie r oznacza promień koła, a zaś jest długością boku kwadratu.
Z założenia $A_c = A_s$. Stąd $\pi r^2 = a^2$, czyli $a = r\sqrt{\pi}$. Obwody wyrażamy,

używając tego samego parametru, a więc r lub a. Zważywszy, że $P_c = 2\pi r$, $P_s = 4r\sqrt{\pi}$, możemy utworzyć diagram (proporcję)

$$\begin{tikzcd} 2\pi r \arrow[r] \arrow[dr, leftrightarrow] & 100\% \\ 4r\sqrt{\pi} \arrow[r] \arrow[ur, leftrightarrow] & x\% \end{tikzcd} \quad . \tag{1.1}$$

Rozwiązując proporcję, otrzymujemy
$x = \frac{4r\sqrt{\pi}\cdot 100\%}{2\pi r} \left(= \frac{200\%}{\sqrt{\pi}} = 112{,}84\%\right)$.
Do produkcji rur w kształcie kwadratowym zużyjemy o 12,84% więcej materiału niż do produkcji rur w kształcie kołowym. W tej sytuacji kształt rury o przekroju kołowym możemy nazwać *kształtem referencyjnym* i do niego odnosić zużycie materiału w przypadku innych kształtów. Możemy skonstatować, że koło jest bardziej zwartą figurą niż kwadrat, a właściwie najbardziej zwartą figurą na płaszczyźnie. Jest to tzw. *zagadnienie izoperymetryczne* (polega na wyznaczeniu figury, która przy danym obwodzie ma największe pole). Dodajmy, że dowód twierdzenia nie jest łatwy. Warto zajrzeć choćby do pozycji [61], [8]. Również interesującym doświadczeniem będzie przeczytanie zakończenia IV księgi *Pana Tadeusza* z uwzględnieniem przypisów [47].

(a) (b)

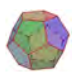
Rysunek 1.2: Przykładowe zbiorniki: (a) zbiorniki kuliste w Zakładach Azotowych „PUŁAWY” S.A. [14] (b) zbiornik sześcienny [15]

Problem 1.2. Wykonano dwa zbiorniki – kulisty i sześcienny (zamknięty) o tej samej objętości V. Ile więcej % materiału zużyto do zrobienia zbiornika sześciennego (rys. 1.2a, 1.2b)? Zakładając, że ilość materiału użyta do wyprodukowania zbiornika kulistego stanowi 100%. Wtedy kula jest bryłą referencyjną.

Rozwiązanie. Po przyjęciu odpowiedniego modelu i oznaczeń (r – promień kuli, a – długość krawędzi sześcianu) formułujemy diagram

$$\begin{tikzcd} 4\pi r^2 \arrow[r] \arrow[dr, leftrightarrow] & 100\% \arrow[dl, leftrightarrow] \\ 6r^2\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi}\right)^2 \arrow[r] & x\% \end{tikzcd} \quad . \tag{1.2}$$

Tablica 1.1: Miary zwartości $\frac{A_t}{V}$ brył platońskich i sfery obliczone przy założeniu, że $V=1$ (opr. A. Tereszkiewicz)

Nazwa bryły	Rysunek bryły	a	Wzory: powierzch. bryły A_t	Wzory: objętość V	Wzory: zwartość $\frac{A_t}{V}$	$\frac{A_t}{V}$ dla $V=1$
Czworościan		krawędź	$\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$	$\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{2}a}$	7,21
Sześcian		krawędź	$6a^2$	a^3	$\frac{6}{a}$	6
Ośmiościan		krawędź	$2\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$	$\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}a}$	5,72
Dwunastościan		krawędź	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$	$\frac{(15+7\sqrt{5})a^3}{4}$	$\frac{12\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{(15+7\sqrt{5})a}$	5,31
Dwudziestościan		krawędź	$5\sqrt{3}a^2$	$\frac{5(3+\sqrt{5})a^3}{12}$	$\frac{12\sqrt{3}}{(3+\sqrt{5})a}$	5,15
Kula		promień	$4\pi a^2$	$\frac{4\pi a^3}{3}$	$\frac{3}{a}$	4,84

Po obliczeniu otrzymujemy $x = 124{,}07\%$. Możemy skonstatować, że kula jest bryłą bardziej zwartą niż sześcian. Jak mierzyć ową zwartość? W szczególności zwartość brył platońskich może być określona stosunkiem

$\frac{A}{V}$ przy $V = 1$, tak jak zilustrowano to w tablicy 1.1. Im mniejsza jest wartość stosunku $\frac{A}{V}$, tym bryła jest bardziej zwarta.

Rozwiązania optymalizacyjne powyższych problemów dotyczą jedynie zużycia materiałów, natomiast nie dotyczą takich własności konstruowanych obiektów jak: wytrzymałość, statyka, funkcjonalność, estetyka.

W ten sposób dochodzimy do efektywności geometrycznej i zwartości bryły budynku.

1.2. Efektywność geometryczna i zwartość budynku

Efektywność geometryczna budynku, który spełnia założone parametry wielkości (powierzchnia użytkowa, kubatura), to zespół cech geometrycznych, które sprawiają, że budynek jest funkcjonalny, ekonomiczny (o niskim zapotrzebowaniu na energię) w budowie i utrzymaniu, bezpieczny w użytkowaniu i estetyczny.

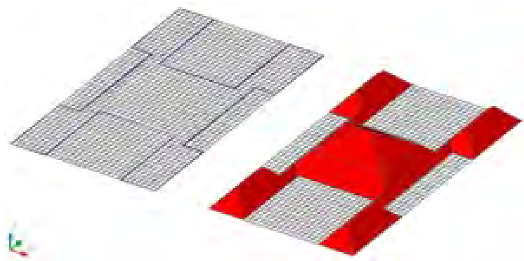
(a) (b)

Rysunek 1.3: (a) fragment plakatu – „tablicy informacyjnej” nowego osiedla wznoszonego w Druskiennikach na Litwie; (b) budynek (w kształcie walca o podstawie owalnej) wybudowany na wspomnianym osiedlu, fot. Ł. Kolendo

Ważną cechą geometryczną budynku jest jego *zwartość*. Przez *zwartość budynku* rozumiemy zwartość bryły, która jest izometrycznym modelem geometrycznym przegród budynku lub jego części. Geometryczna *zwartość bryły sztywnej* (S) to *stosunek między polem powierzchni bryły a objętością. Klasyczną miarę zwartości* określa bezwymiarowy stosunek $\frac{A_t^3}{V^2}$ (A_t – pole powierzchni całkowitej bryły S, V – objętość bryły S) [5].

Wtedy klasyczne miary zwartości kuli, ośmiościanu i sześcianu są odpowiednio równe $36\pi(\approx 113{,}09734)$, $108\sqrt{3}(\approx 187{,}06149)$, 216. Podobną klasyczną definicję miary zwartości możemy przyjąć w odniesieniu do figury (F); będzie to stosunek $\frac{P^2}{A}$ (A – pole figury F, P – obwód figury F). Wówczas klasyczne zwartości koła, sześciokąta foremnego, kwadratu są odpowiednio równe $4\pi(\approx 12{,}56637)$, $\frac{24\sqrt{3}}{3}(\approx 13{,}85641)$, 16. Jednak liczby takie nie są zbyt czytelne w zastosowaniach do analiz kształtu budynku.

(a)



(b)

Rysunek 1.4: (a) Ratusz w Białymstoku – przykład budynku na planie wielokąta prostokątnego, fot. E. Koźniewski; (b) Ratusz w Białymstoku – budynek o podstawie dwudziestokąta prostokątnego — studium rozwiązania kształtu dachu, opr. E. Koźniewski

Najprostszą i najczęściej używaną miarą, ale zależną od jednostek, jest wskaźnik $\frac{A_t}{V}$. Jest on zupełnie wystarczający, by scharakteryzować zwartość domu parterowego. Sposobu charakteryzacji zwartości geometrycznej, zaproponowanego dla brył platońskich, nie da się przenieść na dowolną bryłę. Na przykład dla prostopadłościanu o krawędziach: a, b, c tak rozumiana zwartość (tj. przy założeniu, że $V = 1$) wyraża się wzorem

$$\frac{A}{V} = \frac{2(a^2b^2 + a + b)}{ab} \left(= 2ab + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right). \tag{1.3}$$

Zależy ona bowiem od jednostek (j) i przy tym nie wyraża się jedną jednostką; mianowicie można ją podzielić na dwa składniki, gdzie jeden składnik ma jednostkę $[j^2]$, drugi $[1/j]$. Zatem trzeba tak sformułować miary zwartości figur (F) i brył (S), by były one uniwersalne; przynajmniej dla odpowiednio szerokiej klasy obiektów dających się zaimplementować jako modele budynków lub ich części.

1.2.1. Wskaźniki zwartości 3D

Wskaźnik zwartości danej bryły S (figury F) sensownie odnosić do ustalonej *bryły wzorcowej* (*referencyjnej*) S_{pat} (figury F_{pat}) [31, 35, 37, 40, 41]. Wtedy, używając ilorazu $\frac{A_t}{V}$, możemy określić *względny wskaźnik zwartości* w sposób następujący

$$RC_{\mathrm{S}_{pat}}(\mathrm{S}) = \frac{\frac{A_t(\mathrm{S})}{V(\mathrm{S})}}{\frac{A_t(\mathrm{S}_{pat})}{V(\mathrm{S}_{pat})}} \left(= \frac{A_t(\mathrm{S})}{A_t(\mathrm{S}_{pat})} \right). \tag{1.4}$$

Tablica 1.2: Ilustracja ideowa wskaźnika $RC_{\mathrm{S}_{pat}}(\mathrm{S})$, opr. E. Koźniewski na podstawie [41]

	S		S_{pat}
$A_t(\mathrm{S})$		$A_t(\mathrm{S}_{pat})$	
$V(\mathrm{S})$		$V(\mathrm{S}_{pat})$	

Jeśli S_{pat} jest sześcianem (ang. *cube*) o krawędzi a, to $V(\mathrm{S}_{pat}) = a^3$, czyli $a = \sqrt[3]{V(\mathrm{S}_{pat})}$. Wtedy dla bryły S przy założeniu $V(\mathrm{S}_{pat}) = V(\mathrm{S})$ jest $a = \sqrt[3]{V(\mathrm{S})}$. Zatem $A_t(\mathrm{S}_{pat}) = 6a^2$, czyli $A_t(\mathrm{S}_{pat}) = 6\left(\sqrt[3]{V(\mathrm{S})}\right)^2$, a stąd $RC_{cube} = \frac{A_t(\mathrm{S})}{A_t(\mathrm{S}_{pat})} \left(= \frac{A_t(\mathrm{S})}{6\left(\sqrt[3]{V(\mathrm{S})}\right)^2} \right)$. Mamy więc *względny wskaźnik zwartości bryły względem sześcianu*

$$RC_{cube} = \frac{A_t(\mathrm{S})}{6\left(\sqrt[3]{V(\mathrm{S})}\right)^2} .$$

W dalszym ciągu uprościmy zapis i zamiast $A_t(\mathrm{S})$ będziemy pisać A_t oraz zamiast $V(\mathrm{S})$ będziemy pisać V, rozumiejąc, że A_t i V oznaczają pole powierzchni całkowitej oraz objętość bryły S

$$RC_{cube} = \frac{A_t}{6\sqrt[3]{V^2}} \ . \tag{1.5}$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla sfery, otrzymujemy *względny wskaźnik zwartości bryły względem sfery*

$$RC_{sphere} = \frac{A_t}{4{,}84\sqrt[3]{V^2}} \ . \tag{1.6}$$

Zwróćmy uwagę na liczby 4,84 oraz 6, które widnieją w ostatniej kolumnie tablicy 1.1.

Przy omawianiu wskaźników (1.5) i (1.6) warto zwrócić uwagę na istniejące w literaturze wskaźniki-odwrotności wyrażeń (1.5), (1.6) [45], które podajemy tu w postaci „z gwiazdką”

$$R^*C_{cube} = \frac{6\sqrt[3]{V^2}}{A_t} \ , \tag{1.7}$$

$$RC^*_{sphere} = \frac{4{,}84\sqrt[3]{V^2}}{A_t} \ . \tag{1.8}$$

Jednakże ani sześcian, ani tym bardziej kula nie stanowią dobrego modelu bryły referencyjnej dla budynku, który z zasady musi mieć określoną wysokość podyktowaną m.in. względami funkcjonalności. Natomiast w sześcianie wysokość jest równa pozostałym wymiarom i przy porównywaniu powstaje pewnego rodzaju niepotrzebne „przesztywnienie”.

Dla mniejszej klasy brył, mianowicie graniastosłupów i ogólnie rozumianych walców, wprowadzimy nowy typ wskaźnika. Dla takiej klasy brył naturalnym modelem bryły referencyjnej S_{pat} będzie prostopadłościan prawidłowy o zadanej krawędzi a i wysokości h lub walec kołowy o zadanym promieniu r i wysokości h. Oznaczmy przez A pole podstawy graniastosłupa S (walca S), przez P obwód podstawy graniastosłupa S (podstawy walca S), a przez V objętość graniastosłupa S (walca S).

Tablica 1.3: Określenie wskaźników RC_{cd} i RC_{cyl}, opr. E. Koźniewski

Dla graniastosłupa		Dla walca	
$V(\mathrm{S}_{pat}) = a^2h$	$V(\mathrm{S}) = A(\mathrm{S})h$	$V(\mathrm{S}_{pat}) = \pi r^2 h$	$V(\mathrm{S}) = A(\mathrm{S})h$
$a^2h = A(\mathrm{S})h$		$\pi r^2 h = A(\mathrm{S})h$	
$a = \sqrt{A(\mathrm{S})}$		$r = \sqrt{\frac{A(\mathrm{S})}{\pi}}$	
$A_t(\mathrm{S}_{pat}) =$ $= 2a^2 + 4ah$	$A_t(\mathrm{S}) =$ $= A(\mathrm{S}) + P(\mathrm{S})h$	$A_t(\mathrm{S}_{pat}) =$ $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$	$A_t(\mathrm{S}) =$ $= 2A(\mathrm{S}) + P(\mathrm{S})h$
$RC_{cd} = \frac{\frac{A_t(\mathrm{S})}{V(\mathrm{S})}}{\frac{A_t(\mathrm{S}_{pat})}{V(\mathrm{S}_{pat})}} = \frac{A_t(\mathrm{S})}{A_t(\mathrm{S}_{pat})} = $ $= \frac{2A(\mathrm{S})+P(\mathrm{S})h}{2A(\mathrm{S})+4\sqrt{A(\mathrm{S})}h}$		$RC_{cyl} = \frac{\frac{A_t(\mathrm{S})}{V(\mathrm{S})}}{\frac{A_t(\mathrm{S}_{pat})}{V(\mathrm{S}_{pat})}} = \frac{A_t(\mathrm{S})}{A_t(\mathrm{S}_{pat})} = $ $= \frac{2A(\mathrm{S})+P(\mathrm{S})h}{2A(\mathrm{S})+2\sqrt{\pi A(\mathrm{S})}h}$	
Po pominięciu oznaczenia bryły S			
$RC_{cd} = \frac{2A+Ph}{2A+4\sqrt{A}h}$		$RC_{cyl} = \frac{2A+Ph}{2A+2\sqrt{\pi A}h}$	

Rozumowanie zawarte w tablicy 1.3 prowadzi nas do definicji wskaźników

$$RC_{cd} = \frac{2A + Ph}{2A + 4\sqrt{A}h}, \tag{1.9}$$

$$RC_{cyl} = \frac{2A + Ph}{2A + 2\sqrt{\pi A}h} . \tag{1.10}$$

1.2.2. Wskaźniki zwartości 2D

Odpowiednikami RC_{cd} i RC_{cyl} na płaszczyźnie są wskaźniki RC_{sq} i RC_{circle} (tablica 1.4).

Tablica 1.4: Określenie wskaźników RC_{cd} i RC_{cyl}, opr. E. Koźniewski

Dla wielokąta względem prostopadłościanu prawidłowego		Dla obszaru o brzegu w postaci krzywej zamkniętej względem koła	
$A(\mathrm{F}_{pat}) = a^2$	$A(\mathrm{F})$	$A(\mathrm{F}_{pat}) = \pi r^2$	$A(\mathrm{F})$
$a^2 = A(\mathrm{F})$		$\pi r^2 = A(\mathrm{F})$	
$a = \sqrt{(A(\mathrm{F})}$		$r = \sqrt{\frac{A(\mathrm{F})}{\pi}}$	
$A(\mathrm{F}) = A(\mathrm{F}_{pat})$			
$RC_{sq} = \frac{\frac{P(\mathrm{F})}{A(\mathrm{F})}}{\frac{P(\mathrm{F}_{pat})}{A(\mathrm{F}_{pat})}} = \frac{P(\mathrm{F})}{P(\mathrm{F}_{pat})} = \frac{P(\mathrm{F})}{4\sqrt{A(\mathrm{F})}}$		$RC_{circle} = \frac{\frac{P(\mathrm{F})}{A(\mathrm{F})}}{\frac{P(\mathrm{F}_{pat})}{A(\mathrm{F}_{pat})}} = \frac{P(\mathrm{F})}{P(\mathrm{F}_{pat})} = \frac{P(\mathrm{F})}{2\sqrt{\pi A(\mathrm{F})}}$	
Po pominięciu oznaczenia figury F			
$RC_{sq} = \frac{P}{4\sqrt{A}}$		$RC_{circle} = \frac{P}{2\sqrt{\pi A}}$	

Tablica 1.4 przedstawia definicję wskaźników

$$RC_{sq} = \frac{P}{4\sqrt{A}}, \tag{1.11}$$

$$RC_{cyl} = \frac{P}{2\sqrt{\pi A}}. \tag{1.12}$$

Wskaźnik RC_{sq} jest ściśle związany z podanym przez J. Cooke [29] wskaźnikiem $\frac{W}{F}$ (*Wall/Floor ratio*), który określony jest przez iloraz

$$JC = \frac{P - P_s}{P_s}, \tag{1.13}$$

gdzie P jest obwodem figury F o polu A, P_s jest obwodem kwadratu o tym samym polu A, czyli $JC = \frac{P-4\sqrt{A}}{4\sqrt{A}}$. Zatem $JC = \frac{P}{4\sqrt{A}} - 1$, czyli $JC = RC_{sq} - 1$. Wskaźnik RC_{sq} jest opisany zależnością wielkości pola A i obwodu P danej figury. Innym wskaźnikiem zwartości opisanym za pomocą wielkości pola A i obwodu P danej figury jest opisany przez D. Banks indeks LBI (*Length/Breadth Index*) określony wzorem [29]

$$LBI = \frac{P + \sqrt{P^2 - 16A}}{P - \sqrt{P^2 - 16A}}. \tag{1.14}$$

Jaka jest geneza wzoru (1.14)? Załóżmy, że dana figura ma pole A i obwód P. Zbudujmy prostokąt o polu A i obwodzie P. Zatem niech a, b będą długościami boków prostokąta ($a > 0, b > 0$). Wówczas otrzymujemy dwa równania $P = 2a + 2b$ oraz $A = a \cdot b$. Z drugiego równania wyznaczamy $a = \frac{A}{b}$ i po podstawieniu w drugim równaniu otrzymujemy $P = 2\frac{A}{b} + 2b$. Po przekształceniu otrzymujemy równanie kwadratowe $2b^2 - Pb + 2A = 0$ o rozwiązaniach $b_1 = \frac{P+\sqrt{P^2-16A}}{4}$, $b_2 = \frac{P-\sqrt{P^2-16A}}{4}$. Prostokąt o polu A i obwodzie P ma boki o długościach b_1, b_2. Liczby b_1, b_2 określają więc kształt takiego prostokąta, który można wyrazić właśnie liczbą $LBI \left(= \frac{b_1}{b_2}\right) = \frac{P+\sqrt{P^2-16A}}{P-\sqrt{P^2-16A}}$.

By opisać budynek wielopiętrowy o zróżnicowanych obwodach poszczególnych pięter, wskaźnik LBI uogólnia się do postaci

$$PSI = \frac{G + \sqrt{G^2 - 16R}}{G - \sqrt{G^2 - 16R}} \quad (\textit{Plan/Shape Index}), \tag{1.15}$$

gdzie G oznacza sumę obwodów poszczególnych pięter podzieloną przez liczbę pięter (średni obwód), R oznacza sumę powierzchni poszczególnych pięter podzieloną przez liczbę pięter (średnia powierzchnia) [29]. Dla budynku o tej samej powierzchni każdego piętra wskaźniki LBI i PSI są identyczne. Zauważmy też, że $\lim\limits_{h\to\infty} RC_{cd} = \lim\limits_{h\to\infty} \frac{2A+Ph}{2A+4\sqrt{A}h} = \lim\limits_{h\to\infty} \frac{\frac{2A}{h}+P}{\frac{2A}{h}+4\sqrt{A}} = \frac{P}{4\sqrt{A}} = RC_{sq}$. Oznacza to, że w budynku wysokim dobrą miarą zwartości jest wskaźnik RC_{sq}.
W literaturze funkcjonuje także wskaźnik

$$EWA/FA = \frac{Ph}{A} \quad (\textit{External Wall Area/Floor Area}) \tag{1.16}$$

wyrażający stosunek pola powierzchni ścian zewnętrznych budynku do powierzchni zabudowy [37], [11]. Mamy następujące zależności między wskaźnikiem EWA/FA a wskaźnikami RC_{cd} i RC_{sq}

$$RC_{sq} = \frac{P}{4\sqrt{A}} = \frac{\frac{Ph}{A}}{\frac{4h}{\sqrt{A}}} = \frac{EWA/FA}{\frac{4h}{\sqrt{A}}}\,, \tag{1.17}$$

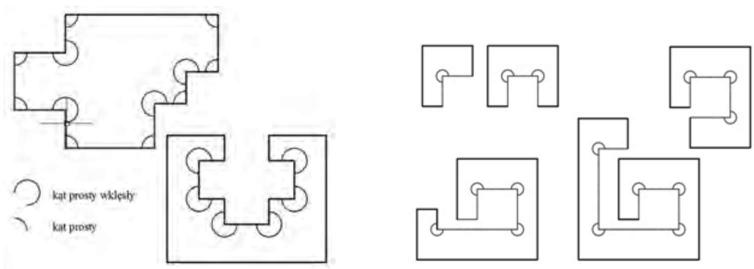
$$RC_{cd} = \frac{2A+Ph}{2A+4\sqrt{A}h} = \frac{2+EWA/FA}{2+\frac{4h}{\sqrt{A}}}\,. \tag{1.18}$$

Przy założeniu, że A (pole rzutu budynku) i h (wysokość) są wielkościami stałymi, to zależności (prosta i odwrotna) między wskaźnikami RC_{cd} i EWA/FA są liniowe. Wszak wielkości $\frac{4h}{\sqrt{A}}$ oraz $2+\frac{4h}{\sqrt{A}}$ są stałe. Zauważmy ponadto, że popularny wskaźnik $\frac{A}{V}$, przy przyjętych oznaczeniach opisany przez iloraz $\frac{A_t}{V}$ wyrażający się w postaci

$$\frac{A}{V} = \left(\frac{2A+Ph}{Ah} = \frac{1}{h}\cdot\frac{Ph}{A}+\frac{2}{h}\right) = \frac{1}{h}(EWA/FA)+\frac{2}{h}. \tag{1.19}$$

zależy liniowo od wskaźnika EWA/FA. W wyniku superpozycji odwrotnej funkcji liniowej otrzymujemy $RC_{cd} = \frac{2\sqrt{A}}{2\sqrt{A}+4h}(A/V)$. Ostatecznie przy stałych wartościach A, h zależności ($RC_{cd} \leftrightarrow EWA/FA$), ($A/V \leftrightarrow EWA/FA$), ($RC_{cd} \leftrightarrow A/V$) są liniowe. Jak wykazano w pracach [37] i [40], wskaźniki $A/V, EWA/FA$, RC_{cd} są w ścisłej korelacji z kosztami budowy oraz zapotrzebowaniem na energię w czasie eksploatacji domu jednorodzinnego. Wskaźnik RC_{cd} reprezentuje najlepszą miarę: $RC_{cd} = 1$ to kształt idealny, odchylenie wartości RC_{cd} od wartości 1 wskazuje na odchylenie od idealnej zwartości budynku referencyjnego. Po pomnożeniu przez 100% odchylenie można wyrazić w punktach procentowych.

1.3. Wielokąty prostokątne



(a) (b)

Rysunek 1.5: (a) wielokąty prostokątne; (b) wielokąty prostokątne: sześciokąt, ośmiokąt, dziesięciokąt, dwunastokąt, czternastokąt, opr. E. Koźniewski

Większość budynków, zwłaszcza domów jednorodzinnych, zbudowana jest na planie *wielokąta prostokątnego* (rys. 1.5). Jest to wielokąt, który ma tylko kąty proste: wypukłe ($90°$) lub wklęsłe ($270°$) [31], [35]. Wielokąty prostokątne mają m.in. taką własność, że liczba boków musi być parzysta, a różnica między liczbą kątów wypukłych i wklęsłych jest równa 4. Istotnie, oznaczając przez m liczbę kątów prostych wypukłych, a przez k liczbę kątów prostych wklęsłych dowolnego n-kąta otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{cases} m \cdot 90° + k \cdot 270° = (n-2) \cdot 180°, \\ m + k = n, \end{cases} \tag{1.20}$$

gdzie m, k i n są liczbami całkowitymi. Rozwiązaniem układu (1.20) jest para liczb

$$m = \frac{n}{2} + 2, \quad k = \frac{n}{2} - 2. \tag{1.21}$$

Żeby rozwiązanie (1.20) układu (1.21) istniało liczba n musi być parzysta. Jak widać, różnica między m i k jest równa 4. Czworokąt prostokątny (prostokąt) nie ma kątów wklęsłych, sześciokąt prostokątny ma jeden kąt wklęsły, ośmiokąt prostokątny ma dwa kąty wklęsłe, dziesięciokąt – trzy itd. (rys. 1.5a, 1.5b).

(a)

(b)

Rysunek 1.6: (a) patio [11]; (b) budynki atrialne w Białymstoku przy ul. Warszawskiej [31], fot. W. Wołkow

Bywa, że budynek ma wewnętrzne podwórko (tj. *dziedziniec*, inaczej *patio* (rys. 1.6a), [11]) lub *atrium* (rys. 1.6b). Zakładać będziemy, że opisywane tu wielokąty prostokątne są obszarami spójnymi oraz mogą mieć „dziury" (rys. 1.7c). Spójność wielokąta (określana ogólnie dla zbioru płaskiego) oznacza, że dowolne dwa punkty wielokąta można połączyć łamaną zawartą we wnętrzu wielokąta. Jeżeli rozważymy wielokąt prostokątny l-spójny (tj. z $l-1$ dziurami) RP^l o n wierzchołkach, to każda i-ta dziura jest wielokątem prostokątnym jednospójnym o h_i wierzchołkach ($i = 1, 2, \ldots, l-1$). Boki wielokąta prostokątnego l-spójnego są wzajemnie prostopadłe lub równoległe. Mamy wtedy $n = n_0 + \sum_{i=1}^{l-1} h_i$, gdzie n_0 jest liczbą wierzchołków wielokąta zawierającego dziury, traktowanego jako wielokąt jednospójny. Wówczas każdy kąt wypukły i-tego wielokąta h_i-kątnego jest wklęsłym i odwrotnie. Korzystając z rozwiązania (1.21), w przypadku wielokąta prostokątnego l-spójnego o $l-1$ h_i-kątnych dziurach ($i = 1, 2, \ldots, l-1$), liczba kątów wklęsłych jest równa

$$k = \frac{n_0}{2} - 2 + \sum_{i=1}^{l-1} \left(\frac{h_i}{2} + 2 \right), \tag{1.22}$$

liczba kątów wypukłych wyraża się zaś wzorem

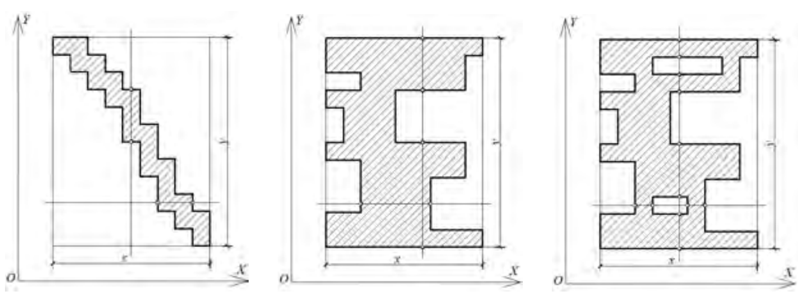
$$m = \frac{n_0}{2} + 2 + \sum_{i=1}^{l-1} \left(\frac{h_i}{2} - 2 \right). \tag{1.23}$$

Widoczne jest, że $m + k = n$ [35].

1.3.1. Defekt obwodu i pola

Wprowadzimy teraz dwa parametry charakteryzujące kształt wielokąta prostokątnego w odniesieniu do opisanego na nim prostokąta (rys. 1.7, 1.8), którą to figurę uważać będziemy za wzorcową zarówno z uwagi na pole A, jak i obwód P. Boki wielokąta prostokątnego l-spójnego RP^l są wzajemnie prostopadłe lub równoległe. Można obrazowo scharakteryzować to w sposób następujący: chodząc po brzegu wielokąta prostokątnego, idziemy w czterech kierunkach: do przodu (fd), w lewo (lt), w prawo (rt) i do tyłu (bk). Można więc wielokąt RP^l skojarzyć jednoznacznie z prostokątem R na nim opisanym. Mówić będziemy, że wielokąt prostokątny RP^l jest *wpisany w prostokąt* R wtedy i tylko wtedy, gdy $RP^l \subset R$ i każdy bok prostokąta R zawiera przynajmniej jeden bok wielokąta RP^l. Prostokąt R można uważać za *opisany* na wielokącie RP^l. Możemy umówić się, że boki prostokąta R są równoległe do osi pewnego prostokątnego układu współrzędnych OXY, przy czym oś OX jest pozioma, oś OY pionowa. Wówczas każdy punkt brzegu prostokąta R jest rzutem co najmniej dwóch punktów brzegowych wielokąta RP^l. Można więc bokami wielokąta RP^l (po przesunięciu równoległym odpowiednio do osi OX, OY na brzeg prostokąta R) „wytapetować” brzeg prostokąta R. Oznaczając przez $P(\mathrm{F})$ obwód obszaru F w odniesieniu do wielokąta RP^l wpisanego w prostokąt R, możemy zapisać następujący wzór

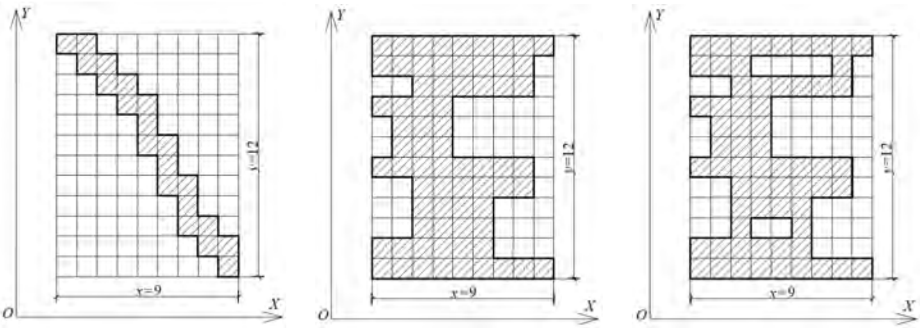
$$P(RP^l) = P(R) + \Delta P(RP^l). \tag{1.24}$$



(a) (b) (c)

Rysunek 1.7: Wielokąty prostokątne wpisane w prostokąt: (a) wielokąt jednospójny, monotoniczny (każda prosta równoległa do osi, ale niezawierająca boku, przecina brzeg w dwóch punktach) względem obu osi, czyli normalny; (b) wielokąt jednospójny monotoniczny względem osi OY, ale niemonotoniczny względem osi OX; (c) wielokąt 3-spójny niemonotoniczny względem obu osi [35]

Wielkość $\Delta P(RP^l)$, określoną wzorem (1.24), nazywać będziemy *defektem obwodu* wielokąta RP^l. Defekt obwodu wielokąta prostokątnego zawsze jest dodatni.



(a) (b) (c)

Rysunek 1.8: Wielokąty prostokątne wpisane w prostokąt o wymiarach $x \times y$, $x = 9u$, $y = 12u$: (a) z dużym defektem pola ($\Delta A = 88u^2$), $RDA = 0{,}81(81\%)$ i zerowym defektem obwodu, $RDP = 0(0\%)$; (b) z defektem obwodu dodatnim ($\Delta P = 24u$, $RDP = 0{,}57(57\%)$), z defektem pola ($\Delta A = 38u^2, RDA = 0{,}35(35\%)$); (c) z defektem obwodu dodatnim ($\Delta P = 40u, RDP = 0{,}95(95\%)$), z defektem pola ($\Delta A = 44u^2, RDA = 0{,}41(41\%)$) [35]

Drugim parametrem charakteryzującym geometrię wielokąta prostokątnego RP^l jest jego pole $A(RP^l)$ (ogólnie pole $A(F)$ obszaru F). Pole wielokąta prostokątnego $A(RP^l)$ wyraża się

$$A(RP^l) = A(R) - \Delta A(RP^l), \tag{1.25}$$

gdzie $\Delta A(RP^l)$ nazwać będziemy *defektem pola wielokąta prostokątnego.* Określone w sposób bezwzględny defekt obwodu i defekt pola wielokąta prostokątnego nie oddają wielkości miar odchyleń od odwodu i pola prostokąta. Poza tym w praktycznych zastosowaniach zależeć będą od przyjętych jednostek miary długości i pola. Stąd wskazane jest opisanie owych miar odchyleń (od figury idealnej – prostokąta) w sposób względny. Wprowadzimy zatem jeszcze dwa pojęcia: *względny defekt obwodu wielokąta prostokątnego*

$$RDP(RP^l) = \frac{\Delta P}{P(R)} \tag{1.26}$$

i *względny defekt pola wielokąta prostokątnego*

$$RDA(RP^l) = \frac{\Delta A}{A(R)}. \tag{1.27}$$

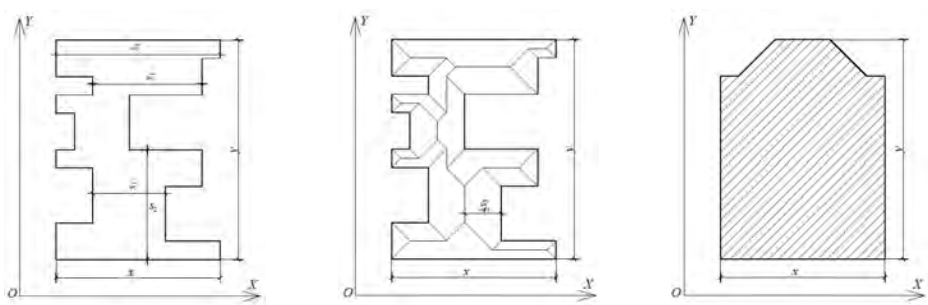
Względny defekt pola, przy defekcie obwodu równym zeru, pokazuje stopień „niedoskonałości” przebiegu linii brzegowej. Tą samą długością obwodu „opasane” jest o $\frac{\Delta A}{A(R)} \cdot 100\%$ mniejsze pole; a więc strata na polu przy tym samym obwodzie. Ponieważ im większy defekt obwodu, tym większy obwód, defekt pola przy zwiększonym obwodzie daje jeszcze większe straty pola. Oznaczając przez A pole, a przez P obwód wielokąta prostokątnego oraz przez A_R pole, przez P_R obwód prostokąta opisanego na wielokącie prostokątnym, wzory (1.26) i (1.27) można zapisać w bardziej czytelnej postaci

$$RDP = \frac{P - P_R}{P_R}, \tag{1.28}$$

$$RDA = \frac{A_R - A}{A_R}. \tag{1.29}$$

1.3.2. Rozpiętość wielokąta prostokątnego

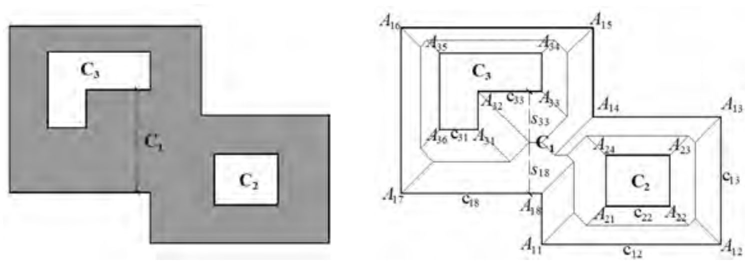
Ważnym parametrem konstrukcji budynku jest jego rozpiętość.



(a) (b) (c)

Rysunek 1.9: Wyznaczanie rozpiętości wielokąta prostokątnego: (a) z pierwszego oglądu wielokąta wartość rozpiętości nie jest bezpośrednio widoczna: s_2 czy s_3, a może s_4?; (b) po skonstruowaniu prostego szkieletu algorytm wyznaczania rozpiętości jest już łatwy do sformułowania; (c) figura zbliżona do wielokąta prostokątnego [35]

Okazuje się, że w przypadku budynku dobrze jest posłużyć się połaciami dachu, ale wcześniej dach ten trzeba rozwiązać. W przypadku wielokąta prostokątnego postąpimy podobnie konstruując prosty szkielet (jednoznacznie określony dla tego wielokąta) [31, 35]. Traktując brzeg wielokąta prostokątnego jako linię okapów, konstruujemy szkielet dachu (rys. 1.8b). Przez *rozpiętość* $s(RP^l)$ wielokąta prostokątnego rozumieć będziemy największą z wysokości rzutów wszystkich połaci mierzoną względem okapu (rys. 1.8). Dla danego rzutu prostokątnego szkieletu dachu rozpiętego nad brzegiem wielokąta prostokątnego znajdujemy zgodnie z poniższą procedurą (rys. 1.9).



(a) (b)

Rysunek 1.10: Wyznaczanie rozpiętości wielokąta prostokątnego 3-spójnego RP^3: (a) wielokąt prostokątny 3-spójny z zaznaczeniem wielokąta C_1 i podwielokątów – dziur C_2, C_3 z wyznaczonym na rysunku (b) odcinkiem definiującym rozpiętość; (b) proces wyznaczania rozpiętości $s(RP^3)$ poprzez rozwiązanie dachu: $s(RP^3) = 2 \cdot s_{18}$, $s(RP^3) = 2 \cdot s_{33}$, a także jako suma $s(RP^3) = s_{18} + s_{33}$ wysokości połaci do siebie przylegających wzdłuż kalenicy [35]

1. Z punktów wierzchołkowych szkieletu dachu konstruujemy odcinki s_{ij} o długościach s_{ij} opuszczone do okapu (i, j) (podstawy wielokąta odpowiedniej (i, j)-tej połaci) [47]. Przy czym dwuindeksowe oznaczenia połaci pochodzą z pracy [30], gdzie dla wielokątów uogólnionych l-spójnych: i oznacza numer wielokąta $(i = 1)$ lub podwielokąta–dziury $(i = 2, 3, \ldots, l)$, j-numer okapu (połaci) w danym wielokącie (podwielokącie) i $(i = 1, 2, 3, \ldots, l)$ (rys. 1.3a).
2. Długość największej wysokości połaci pomnożona przez 2 stanowi rozpiętość wielokąta, tj.

$$s(RP^l) = 2 \cdot \max_{ij}\{s_{ij}\}.$$

Jest to kolejne interesujące zastosowanie geometrii dachów (prostych szkieletów), tym razem ułatwiające sformułowanie i wyznaczanie rozpiętości wielokąta prostokątnego, w efekcie dość prostego procesu geometrycznego przeglądania wysokości połaci, idąc po okapach. Rozpiętość wielokąta to rodzaj jego „smukłości”. Zauważmy, że rozpiętość prostokąta jest równa długości krótszego jego boku. Warto dodać, że pojęcie rozpiętości można uogólnić na dowolny wielokąt, niekoniecznie prostokątny, i że wówczas np. rozpiętość trójkąta jest równa podwojonej odległości punktu przecięcia się dwusiecznych kąta od dowolnego boku. Pojęcie rozpiętości można uogólnić na dowolny obszar płaski, w który da się wpisać wielokąt.

1.4. Podsumowanie

Przedstawione własności wielokątów prostokątnych i ich parametry mogą być wykorzystane do opisu i analizy kształtu budynków (zwłaszcza domów jednorodzinnych) i ich optymalizacji. Własności te, w praktyce na przykład w zastosowaniu do optymalizacji kształtu budynku, można wykorzystać także w odniesieniu do wielu figur zbliżonych do wielokątów prostokątnych (rys. 1.9c). Wymaga to naturalnie dodatkowych analiz i dyskusji sprawdzających możliwość pominięcia braku pełnego kształtu (stopień dokładności) wielokąta prostokątnego.

1.5. Zadania

1. Zaprojektować prostopadłościenny zbiornik o pojemności 144 metrów sześciennych tak, aby zużyć jak najmniej materiału.
2. Do prostego odcinka drogi przylega las, który ze względu na zwierzęta las wzdłuż drogi jest ogrodzony. Jeden ze współwłaścicieli lasu zamierza na części obszaru leśnego założyć uprawę leśną w kształcie prostokąta przylegającego (z jednej strony) do drogi. Na jej ogrodzenie zarezerwowano 1000 m siatki leśnej. Jakie wymiary powinna mieć uprawa leśna, aby ogrodzony teren był jak największy?
3. Cylindryczny zbiornik otwarty o pojemności 10 metrów sześciennych ma być wykonany z blachy stalowej. Znaleźć wymiary zbiornika, które będą wymagały zużycia jak najmniejszej ilości materiału do jego wykonania.
4. Materiał na dno kosztuje o 60% więcej niż szkło wytrzymałościowe na cztery ściany otwartego akwarium. Znaleźć kształt najtańszego akwarium o określonej objętości $V = 1$ m^3.
5. Wyprowadzić wszystkie wzajemne zależności liniowe między wskaźnikami A/V, EWA/FA, RC_{cd}.

6. Dla wybranych dziesięciu domów jednorodzinnych zbadać zależność między wskaźnikami LBI i RC_{cd}.
7. Wyprowadzić wzory na względny wskaźnik zwartości, jeżeli figurą referencyjną jest prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy k. Dla jakich wartości k figurą referencyjną jest „złoty", „srebrny" prostokąt (por. [41])?

Rozdział 2

Izometrie w projektowaniu

Ważnymi przekształceniami zaimplementowanymi w systemach CAD są *izometrie*. Są to przekształcenia przestrzeni euklidesowej (E^n), które zachowują odległość punktów. Izometrie tworzą *grupę przekształceń*, tzn. zbiór wszystkich izometrii ma własności: (sup) złożenie dwu izometrii jest izometrią, (inv) przekształcenie odwrotne do izometrii jest izometrią, (id) przekształcenie tożsamościowe jest izometrią. Podstawową izometrią jest *symetria względem prostej* w E^2, *płaszczyzny* w E^3 i ogólnie *hiperpłaszczyzny* w E^n. Mówimy, że symetria jest *generatorem* grupy izometrii. Dowolne z przekształceń danej grupy możemy uważać za generator pewnej podgrupy tej grupy.

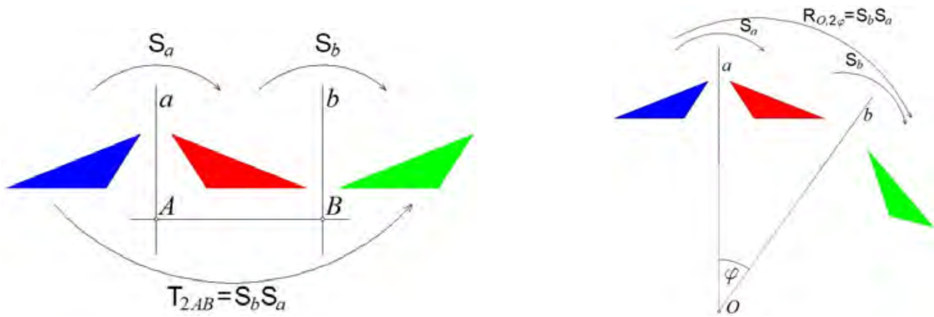
2.1. Izometrie w E^2

Na płaszczyźnie każda izometria jest:

1) symetrią osiową S_p o osi p
   lub
2) złożeniem dwu symetrii osiowych S_a, S_b, przy czym jest:
   A) *przesunięciem* (*translacją*) $T_{2AB} = S_b S_a$, gdy osie a, b są równoległe ($a \| b$, rys. 2.1a) lub
   B) *obrotem* $R_{O,2\varphi} = S_b S_a$, gdy osie a, b przecinają się ($a \cap b = \{O\}$, rys. 2.1b)

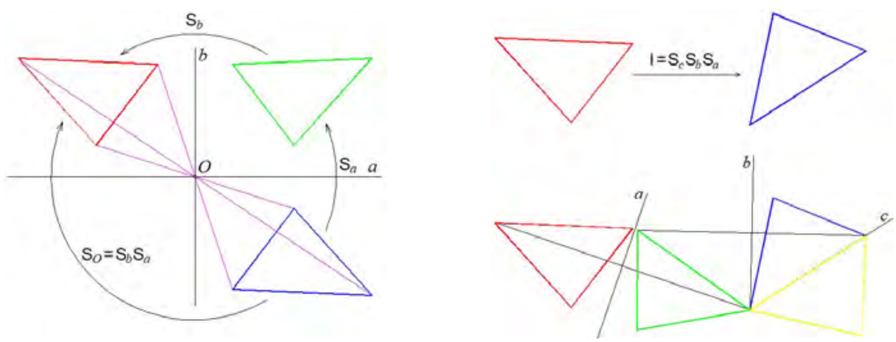
   lub
3) złożeniem trzech symetrii osiowych S_a, S_b, S_c (rys. 2.2b). Złożenie trzech symetrii jest *symetrią osiową* lub *symetrią z poślizgiem*.

Jeżeli $a \perp b$, to złożenie $S_b S_a$ jest obrotem $R_{O,2\cdot 90^\circ}$ o kąt 180°, czyli *symetrią środkową* (*półobrotem*) S_O (rys. 2.2a).



(a) (b)

Rysunek 2.1: (a) złożenie S_bS_a symetrii osiowych S_a, S_b o osiach równoległych $a|b$ jest przesunięciem T_{2AB} (AB – wektor określony przez punkty A, B leżące odpowiednio na prostych a i b, przy czym $AB \perp a$ i $AB \perp b$); (b) złożenie S_bS_a symetrii osiowych S_a, S_b o osiach a, b przecinających się $a \cap b = \{O\}$ jest obrotem $R_{O,2\varphi}$ o kąt 2φ, opr. E. Koźniewski



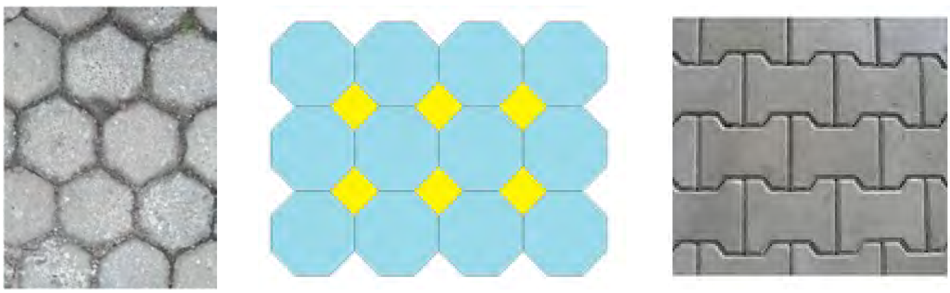
(a) (b)

Rysunek 2.2: (a) złożenie S_bS_a dwu symetrii S_a, S_b względem osi prostopadłych a, b ($a \perp b$) jest symetrią środkową S_O o środku O; (b) złożenie $S_cS_bS_a$ trzech symetrii S_a, S_b, S_c względem prostych a, b, c przekształca trójkąt na z góry zadany trójkąt do niego przystający, opr. E. Koźniewski

Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają odpowiednio równe boki. Wówczas istnieje izometria przekształcająca pierwszy z trójkątów na drugi (rys. 2.2b). Aby zrealizować tę izometrię, wystarczy złożyć co najwyżej trzy symetrie osiowe (rys. 2.2b). Każda figura (obiekt geometryczny) ma swoją grupę *izometrii własnych*, tzn. takich, które przekształcają tę figurę na siebie. Na przykład litera A (jako figura – zbiór punktów) ma grupę izometrii własnych Id, Sp, gdzie Id jest przekształceniem tożsamościowym, Sp jest symetrią osiową.

2.2. Parkietaże

Izometrie posłużą nam do zaprojektowania parkietaży. *Parkietaż* na płaszczyźnie to pokrycie jej figurami przylegającymi do siebie, ale niezachodzącymi na siebie (suma figur tworzy płaszczyznę, każde dwie figury mają wspólne tylko punkty brzegowe). Z parkietażami mamy do czynienia m.in. przy projektowaniu i układaniu podłóg, chodników itp.



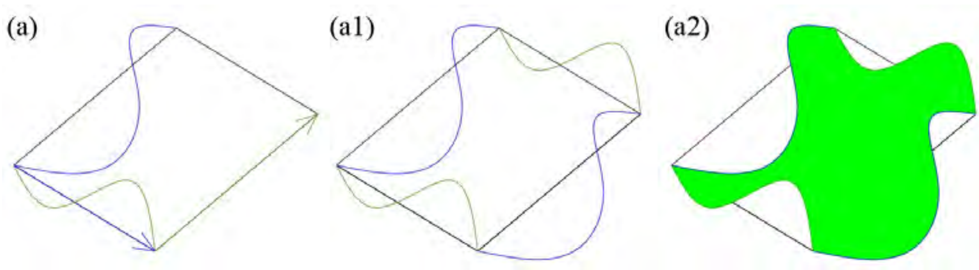
(a) (b) (c)

Rysunek 2.3: (a) parkietaże foremne (z wielokątów foremnych jednego rodzaju), popularna dawniej trylinka, fot. E. Koźniewski; (b) parkietaże półforemne (z wielokątów foremnych różnych rodzajów), opr. E. Koźniewski; (c) parkietaż jednorodny dowolnego kształtu, fot. E. Koźniewski

Stosunkowo prostą do kształtowania klasę parkietaży stanowią parkietaże wielokątowe foremne i półforemne (rys. 2.3a – 2.3c). W tworzeniu takich parkietaży istotne jest, ile i jakich figur foremnych może spotkać się w jednym punkcie. Nie trudno zauważyć, że suma kątów powinna być równa 360°. Parkietaż na rysunku 2.3a ma charakterystykę $6-6-6$, to znaczy w punkcie spotykają się wielokąty: sześciokąt–sześciokąt–sześciokąt ($120° + 120° + 120° = 360°$); parkietaż na rysunku 2.3b ma charakterystykę $8-8-4$, to znaczy w punkcie spotykają się wielokąty: ośmiokąt-ośmiokąt-czworokąt ($135° + 135° + 90° = 360°$). Program do ich tworzenia znajdziemy na stronie internetowej [12]. Parkietaż na rysunku 2.3c nie jest ani foremny, ani półforemny. O tworzeniu takich parkietaży piszemy poniżej.

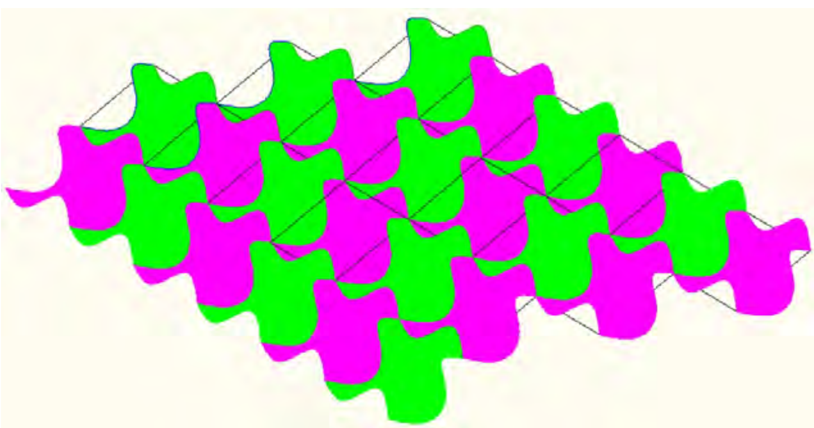
2.2.1. Parkietaże w E^2 – kilka przykładów

Przykład 2.1. Przekształcenia na równoległoboku (gołębie). Rozważamy dwie różne krzywe (2.4a) i przesuwamy je w dwóch kierunkach (rys. 2.4a1). Otrzymujemy obiekt elementarny „gołąb” (rys. 2.4a2).



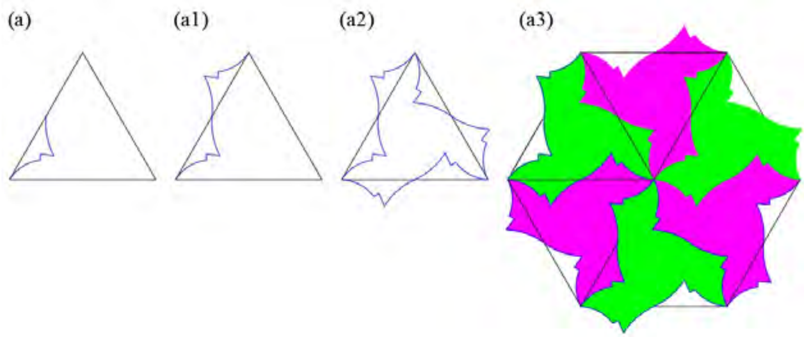
Rysunek 2.4: Przekształcenia na równoległoboku: (a) dwie dowolne krzywe o końcach w wierzchołkach wielokąta; (a1) przesuwamy krzywe o wektory indukowane przez równoległobok; (a2) otrzymany kształt („gołąb”), opr. E. Koźniewski na podstawie [51]

Przesunięcia otrzymanego obiektu o wektory określone przez równoległobok określają parkietaż (rys. 2.5).

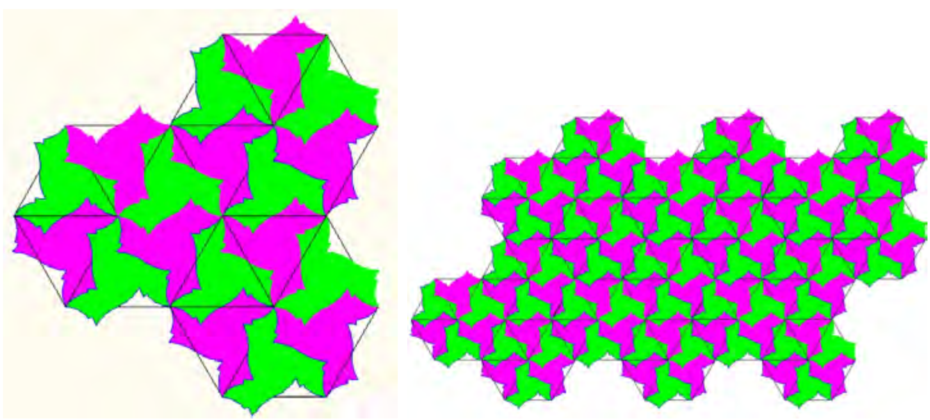


Rysunek 2.5: Parkietaże o dwu krzywych rozpięte na równoległoboku („gołębie”), opr. E. Koźniewski na podstawie [51]

Przykład 2.2. Przekształcenia na trójkącie równobocznym (wariacje na temat trzech motyli Eschera). Weźmy dowolną krzywą łączącą wierzchołek trójkąta równobocznego ze środkiem boku o tym wierzchołku (rys. 2.6a). Następnie przekształcamy tę krzywą przez symetrię środkową (rys. 2.6a1), dalej przez dwa obroty (rys. 2.6a2) i przez pięć obrotów (rys. 2.6a3).



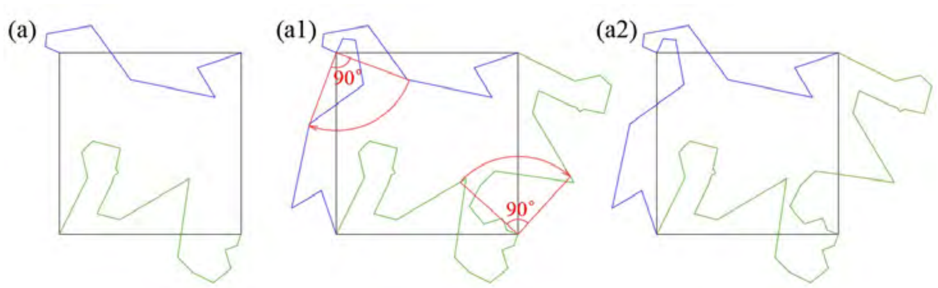
Rysunek 2.6: Transformacje na trójkącie równobocznym – wariacje na temat trzech motyli Eschera: (a) krzywa dowolna; (a1) jej centralny obraz symetrii; (a2) dwa obroty; (a3) sześć (pięć) obrotów, opr. E. Koźniewski na podstawie [51]



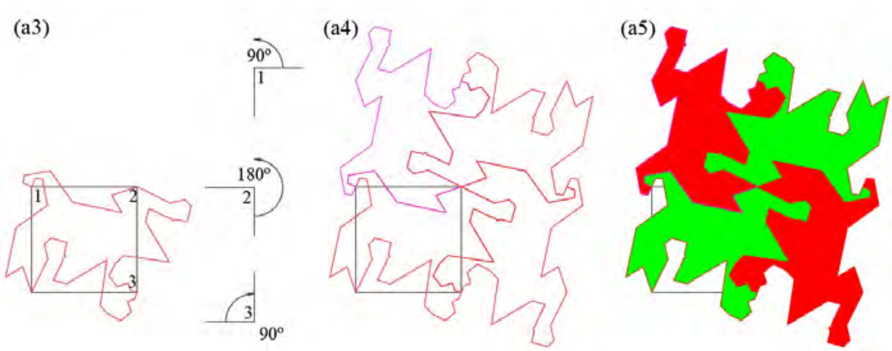
(a) (b)

Rysunek 2.7: (a) dwa obroty kształtu z rysunku 2.6 [36]; (b) kilka odpowiednich przesunięć kształtu z rysunku 2.7a w kierunkach równoległych do boków trójkątów (sześciokątów), opr. E. Koźniewski na podstawie [51]

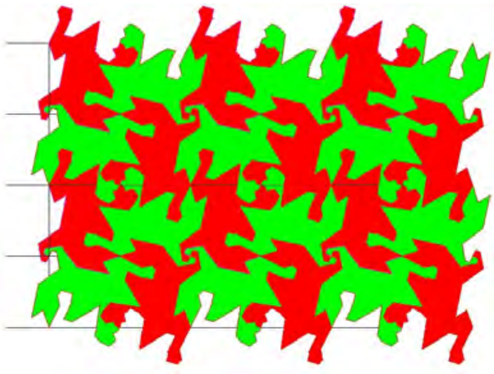
Przykład 2.3. Przekształcenia na kwadracie („jaszczurki"): dwie dowolne (ale odpowiednio dobrane) krzywe z początkiem w wierzchołku i punktem końcowym w drugim wierzchołku boku danego kwadratu (rys. 2.8a). Następnie takie krzywe obracamy wokół odpowiednich wierzchołków o kąt obrotu 90° (rys. 2.8a1) i uzyskujemy kształt jaszczurki (rys. 2.8a2).



Rysunek 2.8: Przekształcenia na kwadracie: (a) dwie krzywe; (a1) dwa obroty dokoła wierzchołków o kąt 90°; (a2) otrzymany kształt elementarny, opr. E. Koźniewski na podstawie [51]



Rysunek 2.9: Transformacje na kwadracie: (a3) trzy wyróżnione wierzchołki; (a4) konfiguracja uzyskana przez trzy obroty wokół wierzchołków o odpowiednich kątach obrotu 90°, 180°, 90°; (a5) uzyskany złożony kształt (opr. E. Koźniewski na podstawie [51])



(a)

(b)

Rysunek 2.10: (a) przekształcenia na kwadracie – otrzymane parkietaże, opr. E. Koźniewski na podstawie [51]; (b) kostka betonowa zaprojektowana na podstawie trójkąta równobocznego, fot. E. Koźniewski

Tablica 2.1: Siedemnaście krystalograficznych grup przestrzennych dwuwymiarowych wg Coxetera [7] (*półobrót = obrót o 180° lub symetria środkowa, **odbicie z poślizgiem = złożenie symetrii osiowej i translacji względem tej samej prostej, ***ćwierćobrót = obrót o 90°)

Symbol	Generatory
$p1$	dwie niezależne translacje
$p2$	trzy półobroty *
pm	dwa odbicia i jedna translacja
pg	dwa równoległe odbicia z poślizgiem **
cm	jedno odbicie i jedno równoległe odbicie z poślizgiem
pmm	odbicia względem czterech boków prostokąta
pmg	jedno odbicie i dwa półobroty
pgg	dwa prostopadłe odbicia z poślizgiem
cmm	dwa prostopadłe odbicia i jeden półobrót
$p4$	jeden półobrót i jeden ćwierćobrót ***
$p4m$	odbicia względem trzech boków trójkąta $(45°, 45°, 90°)$
$p4g$	jedno odbicie i jeden ćwierćobrót
$p3$	dwa obroty o 120°
$p3m1$	jedno odbicie i jeden obrót o 120°
$p31m$	odbicia względem trzech boków trójkąta równobocznego
$p6$	jeden półobrót i jeden obrót o 120°
$p6m$	odbicia względem trzech boków trójkąta $(30°, 60°, 90°)$

Interesujące informacje o parkietażach można znaleźć w wielu publikacjach, m.in. [7], [51], w których opisano siedemnaście dyskretnych grup izometrii obejmujących dwa niezależne parkietaże. Warto zauważyć, że sześć z tych grup powstaje jako grupy symetrii znanych wzorów prostokątów, które możemy uważać za cegły lub płytki [7]. Grupy te wyszczególniono w tablicy 2.1.

2.2.2. Izometrie w E^3

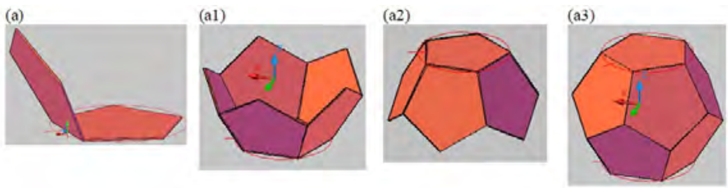
Jak wspomniano odbicie, przesunięcie i obrót w (dwuwymiarowej) płaszczyźnie można uogólnić do trzech wymiarów. Jednym z uogólnień dwuwymiarowego odbicia jest trójwymiarowe odbicie S_p względem linii prostej p, zwane symetrią osiową. Możemy również rozważyć inne odbicie S_ω względem płaszczyzny ω, zwane symetrią płaszczyznową. Izometrie na płaszczyźnie E^3 mają jako zbiór generatorów zbiór symetrii płaszczyznowych. Każda izometria to:

1) *symetria* względem płaszczyzny S_α
   albo
2) złożenie dwu symetrii płaszczyznowych S_α, S_β, przy czym jest to:
   A) *translacja* $T_{2AB} = S_\beta S_\alpha$, jeśli płaszczyzny α, β są równoległe ($\alpha \| \beta$)
      lub
   B) *obrót* $R_{c,2\varphi} = S_\beta S_\alpha$, jeśli płaszczyzny α, β przecinają się $\alpha \cap \beta = c$; dla $\varphi = 90°$ mamy symetrię osiową S_c względem prostej c
   albo
3) złożenie trzech symetrii płaszczyznowych S_α, S_β, S_γ, które jest:
   A) *symetrią z poślizgiem* (symetria z poślizgiem jest złożeniem symetrii płaszczyznowej i przesunięcia o wektor równoległy względem tej płaszczyzny)
      lub
   B) *obrót* z prostopadłym odbiciem względem płaszczyzny
   albo
4) złożenie czterech symetrii osiowych S_α, S_β, S_γ, S_δ, które jest ruchem śrubowym [7].

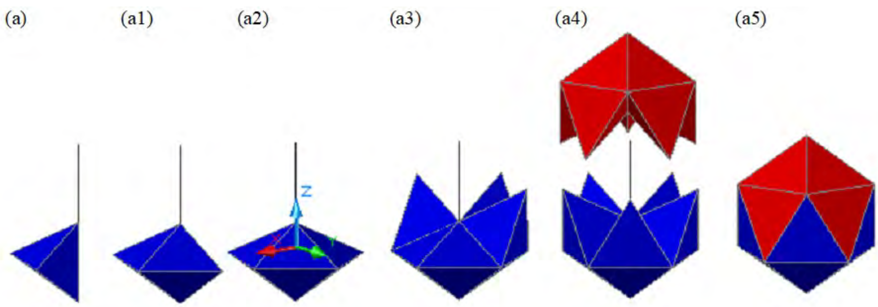
Izometrie 2 i 4 są parzyste (nie zmieniają orientacji), izometrie 1 i 3 są nieparzyste (zmieniają orientację na przeciwną). Izometrie są ważnym narzędziem do modelowania obiektów trójwymiarowych.

Przykład 2.4. Wykonać modele wirtualne dwóch wielościanów platońskich: dwunastościanu i dwudziestościanu.

Rozwiązanie. Dwunastościan konstruujemy metodą ściankową (każda ścianka w ujęciu CAD jest tu bryłą). Najpierw wykonujemy (poziomą) ścianę dwunastościanu, następnie metodą Monge'a wyznaczamy kąt nachylenia pięciu ścian [32] i obracamy ścianę poziomą tak, aby uzyskać pierwszą pochyloną ścianę (rys. 2.11a), następnie obracamy nachyloną ścianę czterokrotnie (rys. 2.11a1), odbijamy symetrycznie względem płaszczyzny (rys. 2.11a2), obracamy i przesuwamy do pozycji z rysunku 2.11a3.



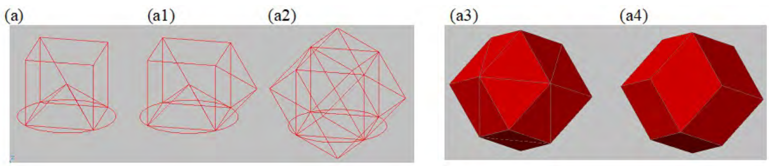
Rysunek 2.11: Modelowanie dwunastościanu: (a) znalezienie (metodą Monge'a) odpowiedniego kąta; (a1) pięć obrotów (cztery obroty) jednej ściany; (a2) symetria płaszczyznowa; (a3) jeden obrót i jedna translacja, opr. E. Koźniewski na podstawie [32]



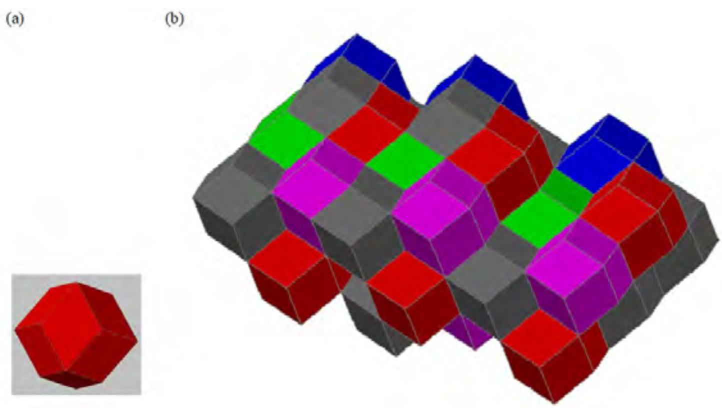
Rysunek 2.12: Tworzenie modelu dwudziestościanu foremnego: (a) wyznaczenie (metodą Monge'a) odpowiedniego ostrosłupa trójkątnego z krawędzią w pozycji pionowej; (a1) jedno odbicie względem ściany piramidy; (a2) trzy odbicia wokół odpowiednich płaszczyzn lub trzy obroty; (a3) trzy odbicia o odpowiednich ścianach; (a4) dwa kolejne odbicia i jedno odbicie względem płaszczyzny wyznaczonej przez pięć wierzchołków górnych bryły dolnej oraz jeden odpowiedni obrót wokół linii pionowej; (a5) jedno przesunięcie, opr. E. Koźniewski na podstawie [32]

Przykład 2.5. Wykonać model wirtualny *dwunastościanu rombowego.*

Rozwiązanie. Dwunastościan rombowy można wygenerować, dodając przystającą piramidę do sześciu ścian sześcianu (rys. 2.13). Najpierw konstruujemy czworokątną piramidę o wysokości równej połowie krawędzi sześcianu. Kolejna konstrukcja jest przedstawiona na rysunku 2.13. Dwunastościan rombowy ma ciekawą własność, całkowicie bowiem wypełnia przestrzeń (rys. 2.14). Ta operacja wypełniania przestrzennego przypomina parkietaż na płaszczyźnie. Używając translacji w dwóch kierunkach, możemy dwunastościanem rombowym wypełnić całą trójwymiarową przestrzeń euklidesową. Dwunastościan rombowy można traktować jako wyrafinowany kształt cegieł do wykonania muru.



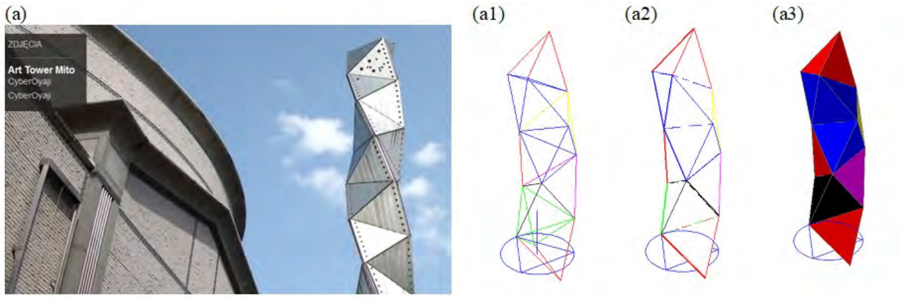
Rysunek 2.13: Tworzenie modelu dwunastościanu rombowego: (a) zbudowanie ostrosłupa czworokątnego o wysokości równej połowie krawędzi sześcianu; (a1) jeden obrót; (a2) jedno odbicie, trzy obroty i jedno przesunięcie; (a3) cała bryła z wizualnym rozkładem; (a4) bryła otrzymana w wyniku sumy (Boole'a), opr. E. Koźniewski na podstawie [36]



Rysunek 2.14: Dwunastościan rombowy można potraktować jako wyrafinowany ceglany kształt: (a) cegła; (b) mur wykonany z dwunastościanów rombowych, opr. E. Koźniewski

Przykład 2.6. Wykonać wirtualny model wieży Art Tower autorstwa Araty Isozakiego [51].

Rozwiązanie. Model uzyskuje się poprzez umiejętne powielenie zbudowanego wcześniej czworościanu foremnego za pomocą symetrii płaszczyznowej.

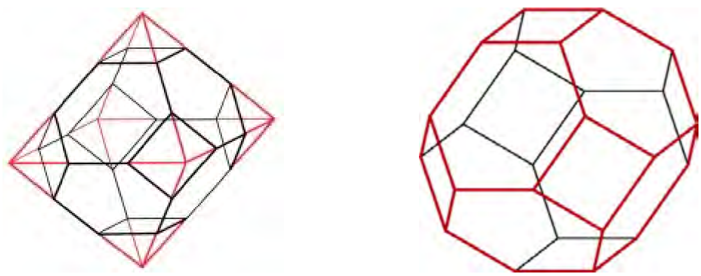


Rysunek 2.15: Tworzenie modelu Art Tower: (a) Art Tower w Mito, proj. Arata Isozaki [51], [16]; (a1)–(a3) sekwencja odbitych czworościanów w różnych stylach wizualizacji [36], opr. E. Koźniewski

2.3. Między parkietażem a wielościanami foremnymi i półforemnymi

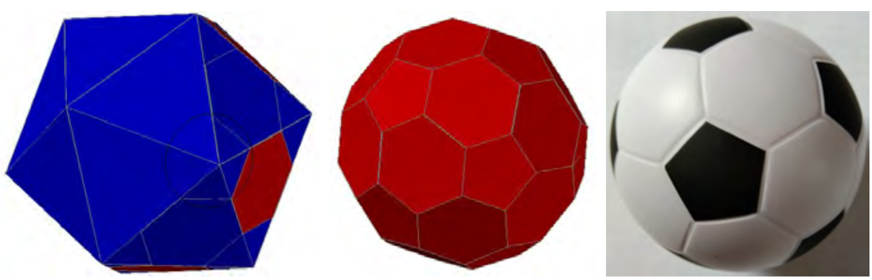
Dwunastościan i dwudziestościan (rys. 2.17a) należą do grupy pięciu *wielościanów foremnych* często nazywanych bryłami platońskimi (tab. 1.1). W wielościanie foremnym wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi oraz wszystkie kąty wielościenne (naroża) są przystające (izometryczne). Wielościany foremne są szczególnym przypadkiem wielościanów *półforemnych* (*archimedesowskich*), w których (foremne) ściany nie muszą być przystające. Wielościan foremny jest scharakteryzowany przez parę liczb (p, q) (symbol Schläfliego), która oznacza, że wielościan ma po q ścian w każdym wierzchołku, a każda ściana jest p-kątem. Jeśli liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian oznaczymy odpowiednio przez V, E, F, to zachodzi równość (wzór Eulera) $V - E + F = 2$. Zauważmy, że pary (czworościan, czworościan), (sześcian, ośmiościan), (dwunastościan, dwudziestościan) odpowiednio równe $((3,3),(3,3))$, $((4,3),(3,4))$, $((5,3),(3,5))$, mają wzajemnie przestawione pary w symbolach Schläfliego. Mówimy, że czworościan jest *samodualny*, sześcian i ośmiościan zaś oraz dwunastościan i dwudziestościan są wzajemnie *dualne*. Geometrycznie wyraża się to w ten sposób, że łącząc środki ścian dowolnego wielościanu foremnego odcinkami, otrzymujemy inny wielościan foremny do niego dualny.

Wielościanem półforemnym (*archimedesowym*) nazywamy wielościan, w którym wszystkie ściany są wielokątami foremnymi i wszystkie kąty wielościenne (naroża) są przystające. Istnieje 13 wielościanów półforemnych (15, jeśli liczyć odbicia lustrzane dwóch spośród nich) oraz dwie nieskończone serie (graniastosłupy prawidłowe, tj. o podstawie n-kąta foremnego i ścianach bocznych kwadratowych, np. trylinka, oraz tzw. *antygraniastosłupy*, w których podstawy są obrócone względem siebie o kąt $\frac{\pi}{n}$, a ściany boczne są trójkątami równobocznymi). Wielościany archimedesowe można otrzymać, odpowiednio „odcinając" ostrosłupy prawidłowe w wierzchołkach wielościanu foremnego (rys. 2.17b, 2.17c).



(a) (b)

Rysunek 2.16: (a) konstrukcja czternastościanu archimedesowego na bazie ośmiościanu; (b) czternastościan archimedesowy zbudowany na bazie ośmiościanu foremnego, opr. E.Koźniewski

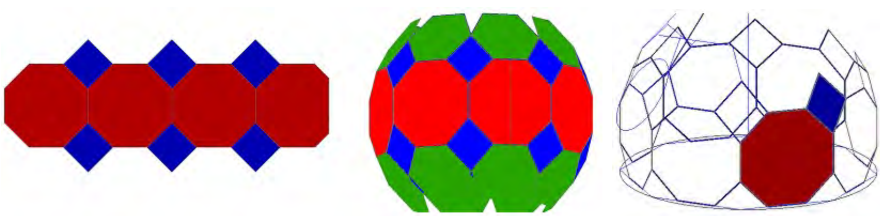


(a) (b) (c)

Rysunek 2.17: (a) dwudziestościan foremny, wyk. E. Koźniewski; (b) konstrukcja dwudziestościanu ściętego, wyk. E. Koźniewski; (c) sposób zszycia piłki nożnej według struktury dwudziestościanu ściętego, fot. E. Koźniewski

Klasycznym przykładem wykorzystania kształtu dwudziestościanu ściętego jest sposób, w jaki zszywa się piłkę nożną (rys. 2.17c).

Rysunek 2.18: Cerkiew pw. Zmartwychwstania Pańskiego w Białymstoku, proj. Jerzy Uścinowicz, 1991 – 1994. Kształt fragmentu kopuły przypominający płaski parkietaż półforemny 8 – 4 – 8 (kopuła od lewej), kształt pozostałych kopuł przypominający fragment czternastościanu archimedesowego (rys. 2.16) – kwadrat graniczący z czterema sześciokątami foremnymi (cztery kopuły od prawej), fot. M. Koźniewski

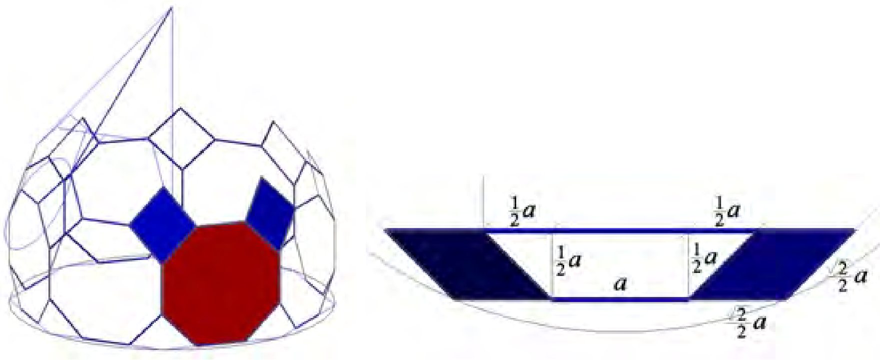


(a) (b)

Rysunek 2.19: (a) fragment parkietażu 8 – 8 – 4 rozmieszczony nad ośmiokątem feremnym (osiem ośmiokątów), kwadraty „stają się" rombami o niewielkiej deformacji względem kwadratu i nieoczekiwanie pojawia się możliwość uzupełnienia sześciokątem foremnym (AutoCAD); (b) przestrzenna struktura parkietażu 8 – 8 – 4 na ośmioboku (AutoCAD), opr. E. Koźniewski

Wielościany foremne można uważać za analogon parkietażu, tj. struktury, w której (w przestrzeni trójwymiarowej) układamy jednakowe (czyli przystające do siebie) wielokąty foremne (bryły platońskie), tak by „zamknąć" pewien obszar. Jeśli dopuścimy różne wielokąty foremne, to otrzymamy wielościany półforemne, inaczej archimedesowe. W obydwu przypadkach obszary te będą miały dość bogatą grupę izometrii własnych. Ale przestrzeń można także „zamykać" w mieszany sposób. Znakomitym przykładem takiego podejścia jest struktura geometryczna kopuł cerkwi pw. Zmartwychwstania Pańskiego w Białymstoku, zaprojektowanej przez prof. Jerzego Uścinowicza.

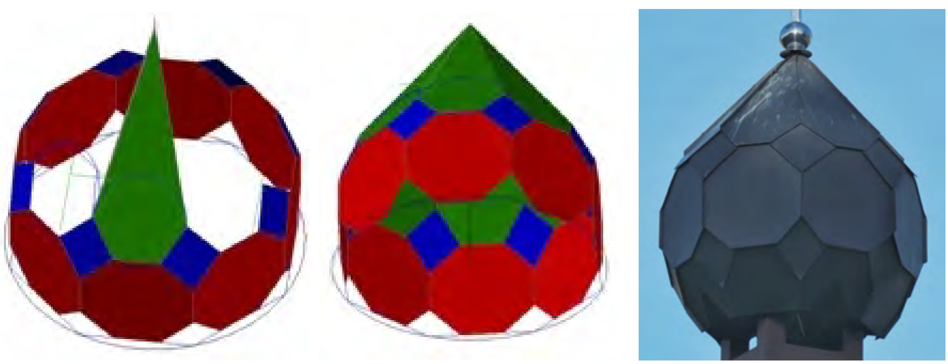
Przeanalizujmy strukturę geometryczną rozwiązań w kopułach rzeczonej cerkwi. Analogon modelu kopuły rozpoczynamy od skonstruowania ośmiokąta foremnego – podstawy ośmiokątnej „trylinki", której ściany boczne są kwadratami (rys. 2.19). W kwadraty te wpisujemy ośmiokąty foremne. Sąsiednie boki wspólnych krawędzi wpisanych ośmiokątów generują romby (rys. 2.19). Okazuje się, że boki dwóch rombów i bok ośmiokąta są kolejnymi bokami sześciokąta foremnego (rys. 2.19b). Rzeczywiście, w rzucie prostokątnym rzutami rombów są romby – wynika to stąd, że jedna z przekątnych każdego rombu jest równoległa do poziomu (rzutni poziomej). Wówczas na podstawie niezmiennika charakterystycznego rzutu prostokątnego rzutem prostopadłych przekątnych są przekątne prostopadłe. Równocześnie z konstrukcji modelu wynika, że boki rombu są równolegle do boków wyjściowego ośmiokąta (rys. 2.19a, 2.19b), czyli kąty rzutu każdego rombu mają miary 45° i 135° (rys. 2.20a, 2.20b). Mamy więc konfigurację trapezu równoramiennego, z czego wynika, że przekątna sześciokąta równoległa do rzutni jest dwukrotnie dłuższa od boku. Dowodzi to, że sześciokąt jest foremny.



(a) (b)

Rysunek 2.20: (a) modelowanie kopuły na bazie parkietażu $8-8-4$, konstrukcja sześciokąta foremnego jako uzupełnienie parkietażu przestrzennego(AutoCAD); (b) rzut prostokątny dwóch rombów, których boki wraz z bokiem ośmiokąta foremnego generują sześciokąt foremny (AutoCAD), opr. E. Koźniewski

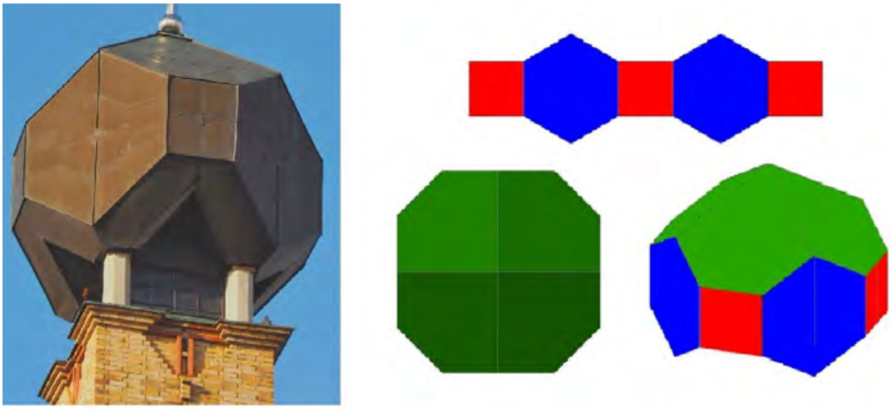
Z racji że kopuły cerkwi mają wydłużony kształt podobny do płomienia palącej się świecy (chociaż nie jest to regułą i zwykle zależy od obszaru kulturowego), sześciokąty zostały wydłużone i zamknięte jako pięciokąty (oczywiście nieforemne).



(a) (b) (c)

Rysunek 2.21: (a) modelowanie geometrycznej struktury kopuły – uzupełnienie sześciokąta do pięciokąta stanowiącego górną połać kopuły, opr. E. Koźniewski; (b) przestrzenna struktura parkietażu $8-8-4$ (bez dolnej części) topologicznie równoważna bryle kopuły cerkwi, opr. E. Koźniewski; (c) kopuła nad kaplicą cerkwi pw. Zmartwychwstania Pańskiego w Białymstoku, proj. Jerzy Uścinowicz, fot. M. Koźniewski

Struktura geometryczna kopuł drugiego typu przypomina fragment czternastościanu archimedesowego (rys. 2.16) – obejmujący kwadrat graniczący z czterema sześciokątami foremnymi.



Rysunek 2.22: Z lewej: główna kopuła cerkwi pw. Zmartwychwstania Pańskiego w Białymstoku, proj. Jerzy Uścinowicz, fot. M. Koźniewski; z prawej: model geometryczny topologicznie równoważny strukturze kopuły głównej cerkwi, opr. E. Koźniewski

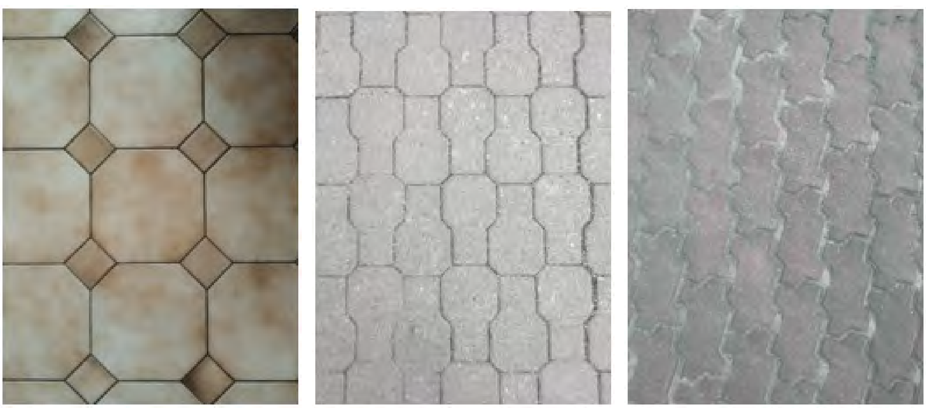
2.4. Zadania

1. Wypisać izometrie własne (wskazać grupę izometrii własnych):

   a) kwadratu;
   b) trójkąta równobocznego;
   c) trójkąta równoramiennego;
   d) półkola;
   e) koła;
   f) litery E;
   g) litery H;
   h) litery G;
   i) litery Z;
   j) litery N.

   Które pary liter mają te same grupy izometrii własnych?
2. Narysować parkietaże półforemne:
   a) $6-3-3-3$; c) $3-4-6-4$;
   b) $4-4-3-3-3$; d) $3-12-12$.
3. Które z parkietaży półforemnych istnieją:
   a) $8-6-\ldots$; b) $8-4-\ldots$; c) $8-3-\ldots$?
4. Zbudować mur z dwunastościanów rombowych.

5. Zaprojektować parkietaże, wzorując się na przykładach 2.1 – 2.3.
6. Opisać i narysować parkietaż półforemny – pierwowzór posadzki (rys. 2.23a).
7. Opisać i narysować parkietaż półforemny – pierwowzór nawierzchni parkingu (rys. 2.23b).
8. Zaprojektować (np. w środowisku AutoCAD) kostkę (rys. 2.23c) na podstawie schematów z przykładów 2.2, 2.3.
9. W odniesieniu do parkietaży foremnych sformułować zasadę dualności i wskazać parkietaże foremne dualne i samodualne.
10. Opisać grupy izometrii brył platońskich:
    a) czworościanu; b) sześcianu; c) ośmiościanu.
11. W odpowiednio przyjaźnie przyjętym układzie współrzędnych wyznaczyć współrzędne czternastościanu foremnego (rys. 2.17b).
    Wsk. Krawędzie ośmiościanu dzielimy na trzy równe części i porównujemy współrzędne trzech wektorów.



(a) (b) (c)

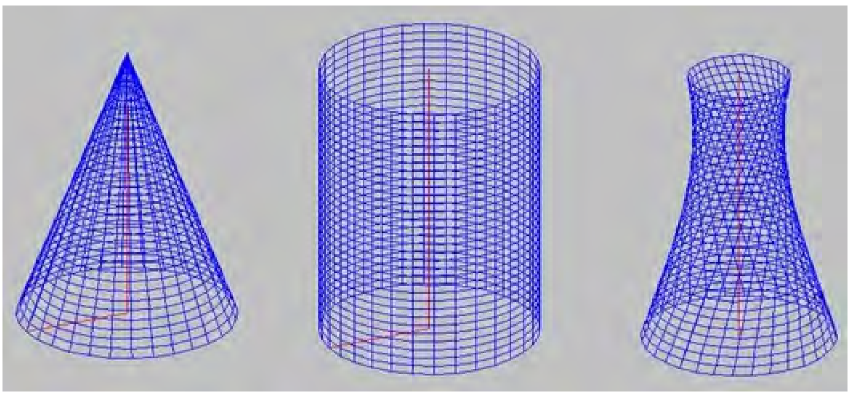
Rysunek 2.23: Przykłady praktycznych rozwiązań w projektowaniu posadzki i nawierzchni, fot. E. Koźniewski: (a) posadzka – stylizacja parkietażu półformnego $x - y - z$; (b) nawierzchnia parkingu – kostka „młotek” zaprojektowana na kanwie parkietażu półforemnego $p - q - r$; (c) nawierzchnia chodnika – kostka zaprojektowana wg parkietażu na bazie przekształceń na kwadracie (połączenie schematów z przykładów 2.2, 2.3 i sklejenie dwóch wzorów)

Rozdział 3

Powierzchnie prostokreślne w budownictwie

3.1. Powierzchnie powstałe w wyniku obrotu prostej

W wyniku obrotu prostej dokoła innej prostej otrzymujemy trzy powierzchnie: *prostokreślne powierzchnię stożkową* (*stożek*), *powierzchnię walcową* (*walec*) i *hiperboloidę obrotową jednopowłokową* (rys. 3.1 – 3.2).



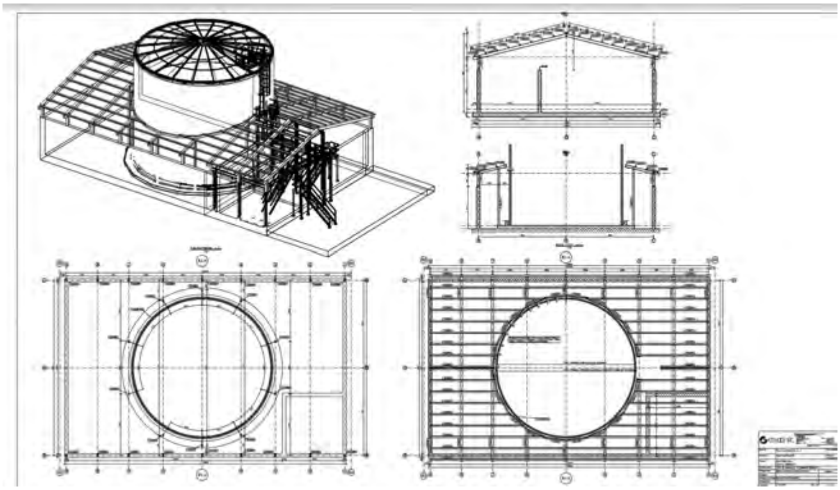
Rysunek 3.1: Trzy powierzchnie powstałe w wyniku obrotu prostej dokoła innej prostej (osi) (trzy warianty: prosta przecina oś, jest do niej równoległa, jest do niej skośna), opr. E. Koźniewski

Rysunek 3.2: Trzy powierzchnie powstałe w wyniku obrotu prostej dokoła innej prostej (widok z góry), opr. E. Koźniewski

Dwie pierwsze powierzchnie z rys. 3.1, 3.2 są wykorzystywane w realizacji silosów (rys. 3.3), natomiast trzecia często spotykana jest jako struktura nośna wieżowych zbiorników wyrównawczych, czyli tzw. wież ciśnień (rys. 3.4b, 3.6a), struktura stężająca budowli wieżowych (rys. 3.6b) i zwykle jako struktura kształtu chłodni kominowych w hutach i elektrowniach (rys. 3.8). Pierwsza na świecie budowla hiperboloidalna, jako wieża ciśnień, została zbudowana w roku 1896 w Niżnym Nowogrodzie (Rosja) wg projektu Włodzimierza Szuchowa [50]. Na uwagę zasługują również zbudowana w roku 1963 wieża Portowa w Kobe (Japonia), wzniesiona w roku 1970 katedra w Brazylii projektu Oscara Niemeyera czy też rekordowa pod względem wysokości (318 m) wieża Aspire, zbudowana w latach 2005 – 2007 w Dosze (Katar) wg projektu Hadi Simana [50].

W Polsce wyjątkową budowlą jest wieża ciśnień w Ciechanowie (rys. 3.4a), która w 1972 roku została zaprojektowana jako wieżowy zbiornik wyrównawczy. Autorem projektu był warszawski architekt Jerzy Michał Bogusławski, z którym współpracowali konstruktory: dr Jerzy Wiblik, Stanisław Gajowniczek i Bohdan Szczeszek. Technologię budowy opracował inż. Stanisław Majkowski. Projekt wykonano w Biurze Projektowo-Badawczym Budownictwa *Miastoprojekt Mazowsze* w Warszawie przy współpracy Politechniki Warszawskiej. W 1977 roku budowla otrzymała nagrodę Ministra Budownictwa i Przemysłu Materiałów Budowlanych, a twórcy – gratulacje od wojewody ciechanowskiego za wybitne osiągnięcie twórcze w dziedzinie architektury i budownictwa. Zbiornik ma kształt torusa osadzonego na hiperboloidzie jednopowłokowej reprezentowanej przez dwa pasma tworzących. Zbiornik o kubaturze 1560 m^3 znajduje się na 22-metrowej wieży o kształcie hiperboloidy obrotowej – jej średnica podstawy dolnej wynosi 11,25 m, górnej −17,70 m, a średnica zwężenia ok. 7 m. Pozostałe dane są następujące: średnica rury nośnej jest równa 20 cm, średnica torusa wynosi 17,70 m (taka sama jak podstawy górnej), średnica tuby torusa ma 6 m, a średnica pierścienia (osiowa) 6,20 m; z kolei słupki balustrady mają wysokość 1,20 m i średnicę 0,04 m (rys. 3.7, 3.14, 3.15). Budowla ta jest wieżowym zbiornikiem wyrównawczym, nie zaś wieżą ciśnień, jednak mieszkańcy Ciechanowa tak ją nazywają i pod taką obiegową nazwą tam funkcjonuje. Od lat osiemdziesiątych wieża stała opuszczona. Nie powiodły się plany urządzenia tu tarasu widokowego (wieża stoi na jednym z najwyżej położonych miejsc w mieście, 143 m n.p.m.) i restauracji wysokościowej. W ostatnich latach jednakże dokonano jej rewitalizacji, a w jej sąsiedztwie zbudowano

Eksploratorium Matematyki i Techniki. Wieża funkcjonuje pod nazwą Park Nauki Torus w Ciechanowie (rys. 3.5).



Rysunek 3.3: Projekt zadaszenia zbiornika na paliwo (struktura powierzchni walcowej i stożkowej). Współpraca proj. B. Koźniewski

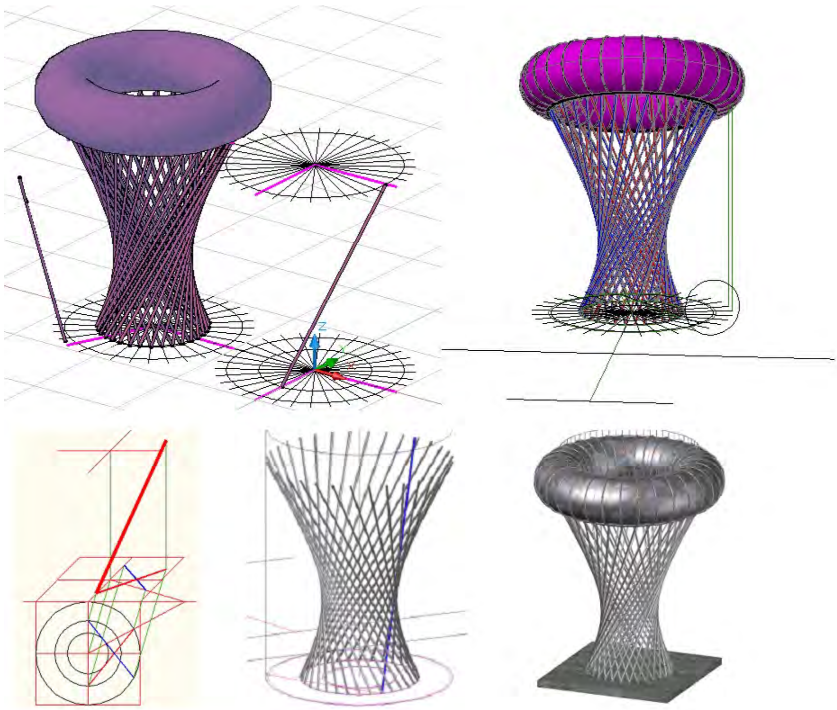
(a) (b)

Rysunek 3.4: Budowle w kształcie hiperboloidy: (a) wieża ciśnień w Ciechanowie – struktura nośna w kształcie hiperboloidy jednopowłokowej i zbiornik w kształcie torusa – stan przed renowacją; (b) wieża ciśnień w Ciechanowie po renowacji jako główny element parku nauki, fot. B. Koźniewski

Rysunek 3.5: Park Nauki Torus w Ciechanowie, fot. B. Koźniewski

(a) (b)

Rysunek 3.6: (a) Kaszubskie Oko w Gniewinie – geometria rozwiązań konstrukcyjnych (walec, powierzchnia śrubowa, hiperboloida jednopowłokowa); (b) Kaszubskie Oko w Gniewinie pełni funkcje społeczno-kulturalne i turystyczne, fot. W. Reglińska



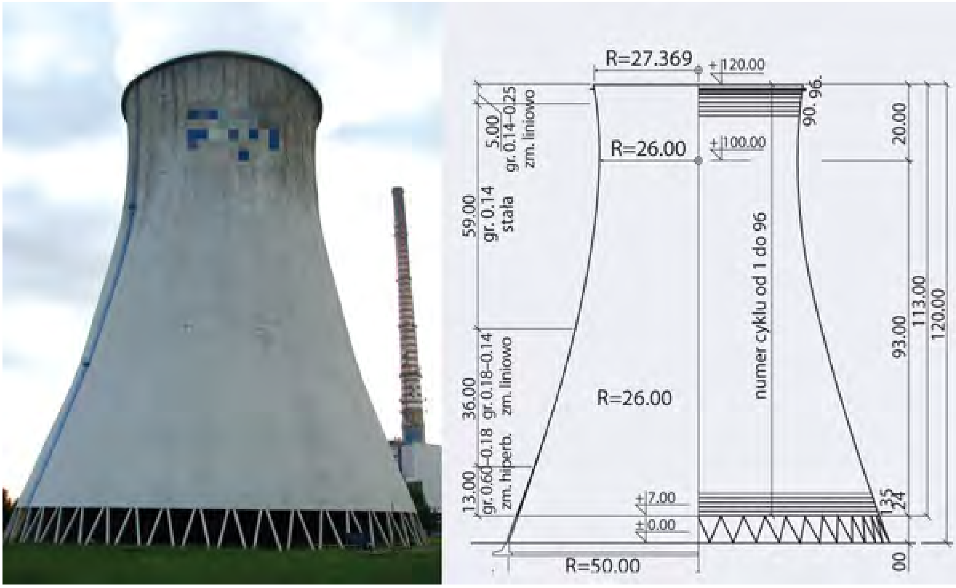
Rysunek 3.7: Model 3D wieży ciśnień w Ciechanowie zrealizowany w środowisku AutoCAD-a; w drugim wierszu z lewej strony podano ilustrację konstrukcji 2D tworzącej hiperboloidy w aksonometrii z zastosowaniem powinowactwa osiowego, wyk. E. Koźniewski

3.2. Opis powierzchni hiperboloidalnych – kubatura chłodni kominowej

Analizę geometryczną budowli hiperboloidalnej rozpoczniemy od rozwiązania problemu dotyczącego chłodni kominowej, której dane geometryczne mamy na podstawie [50].

Problem 3.1. Obliczyć:

A) objętość (kubaturę) chłodni kominowej (wymiary na rys. 3.8),
B) objętość materiału zużytego do budowy,
C) pole powierzchni chłodni kominowej.



Rysunek 3.8: Schemat chłodni kominowej [50, 54]

Rozwiązanie. Opis procedury obliczenia kubatury chłodni kominowej, objętości materiału zużytego do budowy (objętości ściany łupiny), pola zewnętrznej powierzchni łupiny przedstawimy na przykładzie chłodni typu Jaworzno III, Rybnik II, wykorzystując informacje z literatury [50, 54].

A) „Chłodnie kominowe stanowią konstrukcję złożoną z bardzo cienkiej powłoki, wiotkich słupów podtrzymujących powłokę oraz fundamentu najczęściej pierścieniowego posadowionego na zróżnicowanym, ze względu na swe gabaryty podłożu gruntowym. Powłokę chłodni konstruuje się zazwyczaj jako jednopowłokową hiperboloidę obrotową o wysokości, która osiąga już ponad 160 m, minimalnej grubości wynoszącej 16 cm i stosunku jej do najmniejszego promienia rzędu 1/200. Problem pracy statycznej tych powłok będących prostokreślnymi powierzchniami o ujemnej krzywiźnie Gaussa nie jest jeszcze całkowicie zbadany, a intensywny rozwój ich zastosowań w budownictwie energetycznym nie obył się bez katastrof". „Chłodnia w Elektrowni Kozienice osiągnęła docelową wysokość 185,1 m i jest tym samym największą chłodnią w Europie. Budowa obiektu rozpoczęła się w marcu zeszłego roku. Chłodnia jest częścią powstającego, nowego bloku w El. Kozienice" [26].

Ze wzoru hiperboli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.1}$$

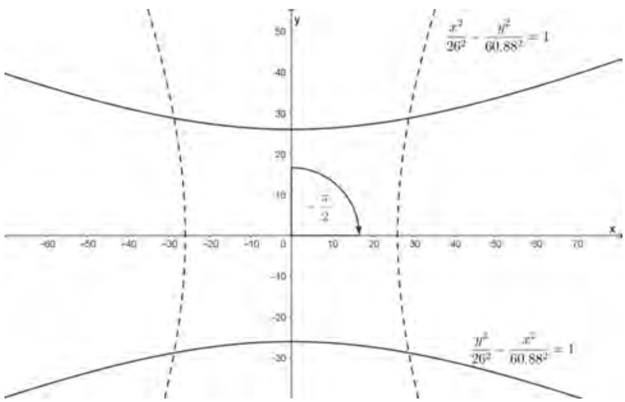
wyliczamy drugą półoś hiperboli

$$b = |y| \cdot \left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right)^{-1}. \tag{3.2}$$

Przyjmując odpowiednio układ współrzędnych, możemy odczytać z rysunku (3.8), że $a = 26$, $x = 50, y = -100$, i wstawiając do (3.2), otrzymać $b = 60{,}88$. W konsekwencji równanie hiperboli (3.1) przyjmuje postać

$$\frac{x^2}{26^2} - \frac{y^2}{60{,}88^2} = 1 \tag{3.3}$$

w układzie OXY. Aby obliczyć kubaturę, dokonujemy obrotu otrzymanej hiperboli (3.3) wokół punktu $(0,0)$ o kąt $-\frac{\pi}{2}$ (rys. 3.9).



Rysunek 3.9: Obrót hiperboli wokół punktu $(0,0)$ o kąt $-\frac{\pi}{2}$, wyk. A. Tereszkiewicz

Do matematycznego opisu obrotu punktu o współrzędnych (x,y) wokół początku układu współrzędnych OXY o kąt β wykorzystujemy tzw. macierz obrotu

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix},$$

czyli

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{inaczej} \quad \begin{cases} x' = x\cos\beta - y\sin\beta \\ y' = x\sin\beta + y\cos\beta \end{cases}.$$

Dla $\beta = -\frac{\pi}{2}$ otrzymujemy

$$\begin{cases} x' = x\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - y\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ y' = x\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + y\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}, \quad \text{po uproszczeniu} \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}.$$

Po wstawieniu do równania (3.3) i pominięciu $'$ otrzymujemy hiperbolę c

$$\frac{y^2}{26^2} - \frac{x^2}{60{,}88^2} = 1. \tag{3.4}$$

Możemy teraz obliczyć kubaturę chłodni, wykorzystując wzór na objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi OX w układzie współrzędnych OXY

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)dx \quad \text{lub równoważnie } V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx.$$

Z (3.4) otrzymujemy $y^2 = 26^2\left(1 + \frac{x^2}{60{,}88^2}\right)$ dla $-100 \leq x \leq 20$, więc

$$\begin{aligned} V_c &= \pi \int_{-100}^{20} 26^2 \left(1 + \frac{x^2}{60{,}88^2}\right) dx = \qquad (3.5) \\ &= \pi \cdot 26^2 \left[x + \frac{1}{60{,}88^2} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_{-100}^{20} \approx 447\,371 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

B) W celu obliczenia objętości ściany (konstrukcji łupinowej) o grubości 0,16 m możemy wykorzystać dwie krzywe otrzymane z (3.4)

$$c_1 : y = 26\sqrt{1 + \frac{x^2}{60{,}88^2}} - 0{,}16 \qquad c_2 : \frac{y^2}{(26 - 0{,}16)^2} - \frac{x^2}{60{,}88^2} = 1.$$

I tu interesująca uwaga. Obie krzywe c_1 i c_2 są hiperbolami, ale w wyniku obrotu tych hiperbol dokoła osi OX otrzymujemy hiperboloidę tylko w przypadku hiperboli c_2. Druga powierzchnia nie jest bowiem powierzchnią prostokreślną. Konsekwencją tego faktu jest m.in. bardziej złożony sposób obliczania całki w przypadku krzywej c_1.

Uwzględniając krzywą c_1 jako krzywą generującą wewnętrzną powierzchnię łupiny, objętość V będzie różnicą dwu całek $V_c - V_{c_1}$, czyli

$$\begin{aligned} V_c &= \pi\int\limits_{-100}^{20} 26^2\left(1+\frac{x^2}{60{,}88^2}\right)dx, \\ V_{c_1} &= \pi\int\limits_{-100}^{20} \left(26\sqrt{1+\frac{x^2}{60{,}88^2}}-0{,}16\right)^2 dx. \end{aligned}$$

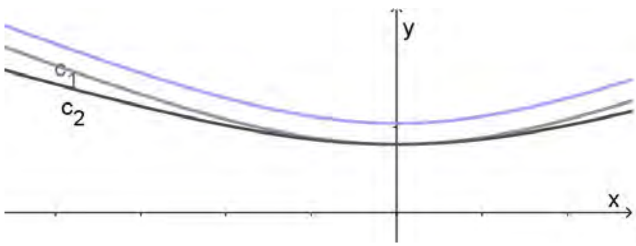
Całkę V_c obliczyliśmy (patrz (3.5)), natomiast do obliczenia całki V_{c_1} skorzystamy ze wzoru

$$\int\sqrt{x^2+k}dx = \frac{k}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k}\,.$$

Otrzymujemy $V_{c_1} \approx 443\,324$, czyli $V_{c-c_1} = V_c - V_{c_1} = 4\,047{,}11$.
Rozpatrując krzywą c_2 jako krzywą generującą wewnętrzną powierzchnię łupiny, objętość V^* będzie różnicą dwu całek $V_c - V_{c_2}$

$$\begin{aligned} V_c &= \pi\int\limits_{-100}^{20} 26^2\left(1+\frac{x^2}{60{,}88^2}\right)dx, \\ V_{c_2} &= \pi\int\limits_{-100}^{20} (26-0{,}16)^2\left(1+\frac{x^2}{60{,}88^2}\right)dx \end{aligned}$$

otrzymamy $V^* \approx 5489{,}16$ Różnica, jaką otrzymamy pomiędzy V i V^*, wynosi $|V - V^*| = 1442{,}05$. Jaka będzie różnica w technologii wykonania łupinowej ściany chłodni po przyjęciu krzywej c_2? Która z technologii kształtowania ściany jest prostsza? (patrz rys. 3.10)



Rysunek 3.10: Krzywe c_1, c_2 po przesunięciu gałęzi hiperboli o 0,16, wyk. A. Tereszkiewicz

C) W celu obliczenia pola powierzchni chłodni skorzystamy ze wzoru

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+(y')^2}dx. \tag{3.6}$$

Ze wzoru (3.4) wyznaczamy $y = 26\sqrt{1+\frac{x^2}{60{,}88^2}}$ i następnie $y' = 26\frac{\frac{1}{60{,}88^2}2x}{2\sqrt{1+\frac{x^2}{60{,}88^2}}}$. Po obliczeniu, przekształceniu i podstawieniu do (3.6) otrzymamy

$$A_c = 2\pi \cdot 26 \int_{-100}^{20} \sqrt{1+\frac{x^2}{60{,}88^2}\left(1+\frac{26^2}{60{,}88^2}\right)}dx. \tag{3.7}$$

Korzystając ze wzoru
$\int \sqrt{1+a^2x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1+ax^2} + \frac{1}{2\sqrt{a}}\operatorname{arsinh}(\sqrt{a}x)$,
mamy $A_c \approx 26200{,}4$ m^2.

3.3. O krzywych i powierzchniach obrotowych

Łukiem nazywamy ciągły i wzajemnie jednoznaczny obraz odcinka. Na przykład półokrąg jest obrazem odcinka $[-r, r]$ we wzajemnie jednoznacznym i ciągłym przekształceniu $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$. Półokrąg ten można zapisać inaczej, w postaci parametrycznej

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi). \tag{3.8}$$

Okręgu już nie da się przedstawić za pomocą jednej funkcji $y = f(x)$, ale dalej jest on łukiem. Równania parametryczne okręgu $x^2 + y^2 = r^2$ możemy zapisać w postaci (3.8). Jak zapisać równania parametryczne elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i hiperboli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$?

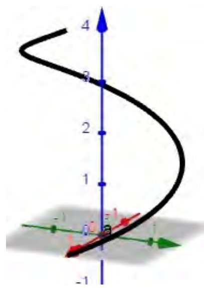
Krzywą natomiast nazywa się taki obiekt geometryczny, który można przedstawić jako sumę łuków. Zatem łuk jest krzywą. Krzywą w przestrzeni trójwymiarowej przedstawiamy za pomocą układu trzech równań

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi), \tag{3.9}$$

gdzie funkcje $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ są odpowiednio regularne (ciągłe, różniczkowalne). Na przykład za pomocą układu

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ht \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi), \tag{3.10}$$

przedstawiamy krzywą śrubową o skoku $2\pi h$ (rys. 3.11).



Rysunek 3.11: Krzywa śrubowa, wyk. A. Tereszkiewicz

3.3.1. Równanie powierzchni obrotowej

Rozważmy krzywą daną równaniem (3.10). Ustalmy jej dowolny punkt $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, przyjmując $t = t_0$, ustalamy punkt $\begin{cases} x = x(t_0) \\ y = y(t_0) \\ z = z(t_0) \end{cases}$ na krzywej. Obróćmy ten punkt dokoła osi OZ (rys. 3.12).
Równania parametryczne takiego okręgu zapiszemy w postaci

$$\begin{cases} x = \sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)}\cos u \\ y = \sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)}\sin u \\ z = z(t_0) \end{cases}.$$

Zmieniając parametr t, otrzymamy równania powierzchni obrotowej

$$\begin{cases} x = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\cos u, \\ y = \sqrt{(x^2(t) + y^2(t)}\sin u, \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],\ u \in [0, 2\pi). \tag{3.11}$$

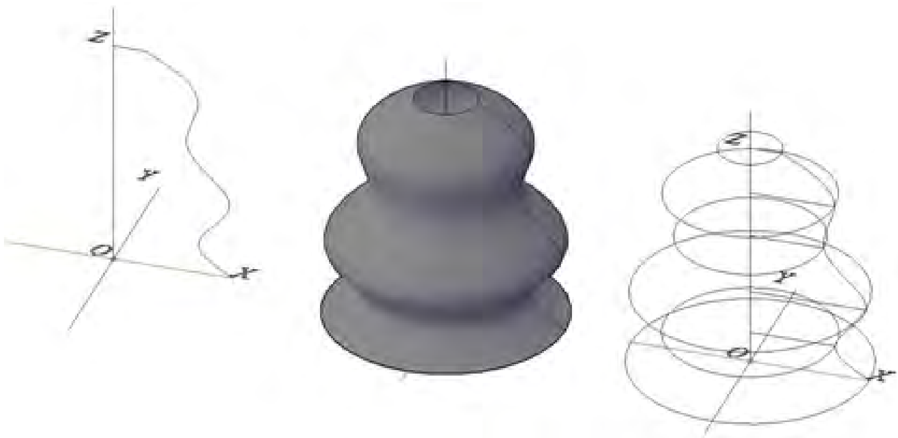
Zauważmy, że powierzchnię tę można zapisać też w postaci dwu równań

$$x^2 + y^2 = x^2(t) + y^2(t), \quad z = z(t) \text{ i jednego parametru } t \in [\alpha, \beta]. \tag{3.12}$$

Wyrugowanie (czyli wyznaczenie $t = t^{-1}(z)$ z $z = z(t)$) parametru $t \in [\alpha, \beta]$ w (3.12) pozwala otrzymać równanie powierzchni obrotowej w postaci jednego równania

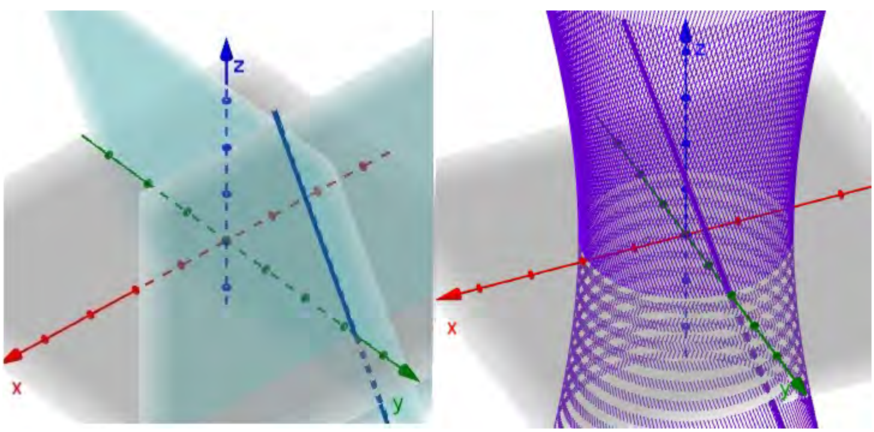
$$x^2 + y^2 = x^2(t^{-1}(z)) + y^2(t^{-1}(z)) \tag{3.13}$$

opisanego za pomocą trzech zmiennych x, y, z.



Rysunek 3.12: Tworzenie powierzchni obrotowej: oś obrotu OZ i krzywa obracana; otrzymana powierzchnia obrotowa; okręgi obrotu wybranych punktów, wyk. E. Koźniewski

Hiperboloida obrotowa (jako powierzchnia) może być otrzymana w wyniku obrotu prostej dokoła innej prostej (osi), przy czym prosta i oś obrotu są skośne.



Rysunek 3.13: Prosta skośna do osi z, opr. A. Tereszkiewicz

Rozważmy prostą l jako krawędź dwu płaszczyzn $z = px$ i $y = a$ (rys. 3.13). Przyjmując $x = t, t \in R$, prostą l zapisujemy w postaci

$$\begin{cases} x = t \\ y = a \\ z = pt \end{cases}, t \in R. \tag{3.14}$$

Otrzymujemy zatem kolejno hiperboloidę

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = t^2 + a^2 \\ z = pt \end{cases}, \quad t \in R, \quad \text{czyli} \quad x^2 + y^2 = \left(\frac{z}{p}\right)^2 + a^2. \tag{3.15}$$

Ostatnie równanie da się zapisać w postaci

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{z}{ap}\right)^2 = 1, \qquad \text{czyli} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{(ap)^2} = 1. \tag{3.16}$$

Jeśli zaś prostą l^* przyjmiemy jako krawędź dwu płaszczyzn $z = px + z_0$ i $y = a$, wówczas otrzymamy równanie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{(z - z_0)^2}{(pa)^2} = 1. \tag{3.17}$$

Przejście z postaci (3.17) do (3.15) może być zrealizowane przez przesunięcie układu współrzędnych

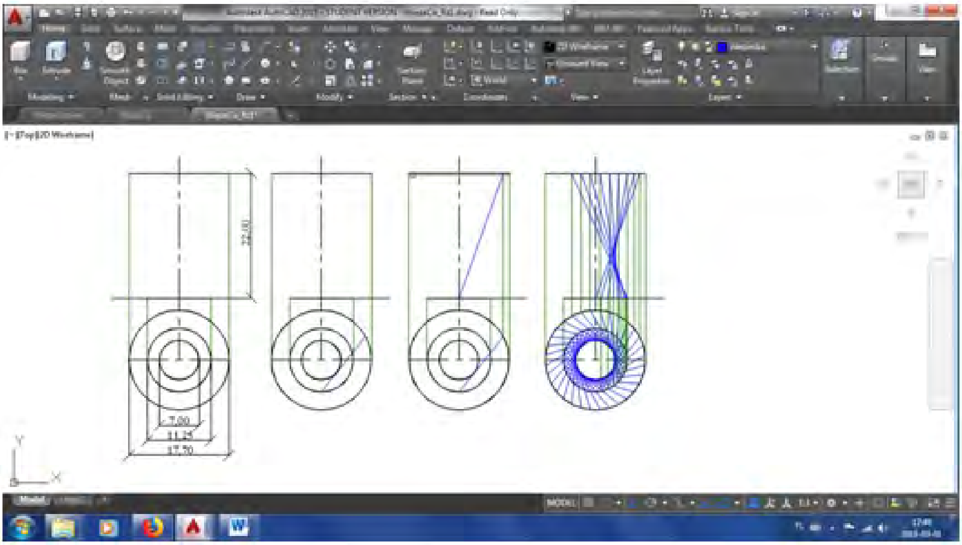
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z - z_0 \end{cases}, \tag{3.18}$$

a z postaci (3.15) do (3.17) może być zrealizowane poprzez przekształcenie (przesunięcie)

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z + z_0 \end{cases} \tag{3.19}$$

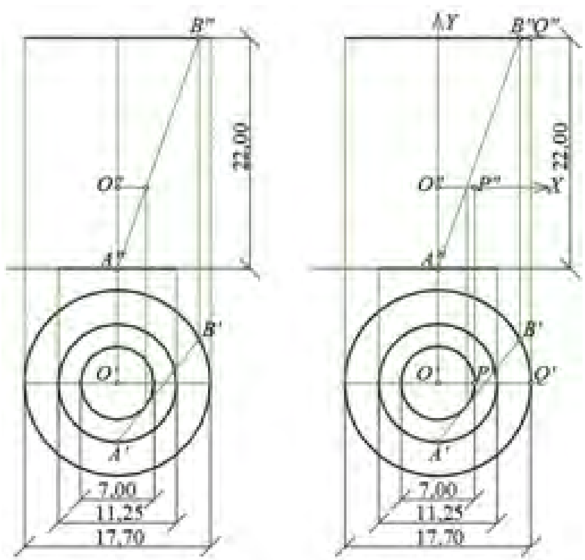
układu współrzędnych.

Problem 3.2. Wyznaczyć położenie (wysokość) okręgu zwężenia hiperboloidy (model wieży ciśnień w Ciechanowie); znaleźć równania powierzchni obrotowej opisującej model powierzchni nośnej i wyznaczyć kubaturę obiektu.



Rysunek 3.14: Założenia przyjęte w celu utworzenia modelu wieży ciśnień w środowisku programu AutoCAD, opr. E. Koźniewski

Rozwiązanie.



Rysunek 3.15: Konstrukcje obiektów potrzebnych do wyznaczenia równań prostej obracanej $l(AB)$ w środowisku programu AutoCAD, opr. E. Koźniewski

Aby wyznaczyć równanie powierzchni obrotowej opisującej model wieży ciśnień w Ciechanowie, znajdziemy najpierw równania prostej obracanej (krzywej obracanej) (rys. 3.12). Równania prostej przechodzącej przez punkty $A = (x_0, y_0, z_0)$, $B = (x_1, y_1, z_1)$, czyli

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases} \qquad t \in R, \tag{3.20}$$

liczby $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0$ są współrzędnymi wektora $\overrightarrow{AB} = [x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0]$.

```
Command: DIST
Specify first point:
Specify second point or [Multiple points]:
Distance = 7.7303,  Angle in XY Plane = 270,  Angle from XY Plane = 0
Delta X = 0.0000,  Delta Y = -7.7303,   Delta Z = 0.0000
```

(a) DIST $O''A''$

```
Command: DIST
Specify first point:
Specify second point or [Multiple points]:
Distance = 8.8500,  Angle in XY Plane = 28,  Angle from XY Plane = 0
Delta X = 7.7977,  Delta Y = 4.1855,   Delta Z = 0.0000
```

(b) DIST $O'B' \to B = (7{,}7977; 4{,}1855; 22{,}0000 - 7{,}7303) \to B = $
$= (7{,}7977; 4{,}1855; 14{,}2697)$

```
Command: DIST
Specify first point:
Specify second point or [Multiple points]:
Distance = 5.6250,  Angle in XY Plane = 270,  Angle from XY Plane = 0
Delta X = 0.0000,  Delta Y = -5.6250,   Delta Z = 0.0000
```

(c) DIST $O'A' \to A = (-5{,}6250; 0{,}0000; -7{,}7303)$

Rysunek 3.16: Mierzenie odległości skutkujące wyznaczeniem współrzędnych punktów A, B, P, Q, opr. E. Koźniewski

Na rysunku 3.15 przedstawiamy rzuty prostokątne trzech okręgów określających hiperboloidę. Przyjmując środek układu współrzędnych OXY w punkcie O (rys. 3.15), oś OY równolegle do osi rzutów (rys. 3.15), oś OX pionowo w dół rzutu poziomego, oś OZ pionowo (równolegle do

rzutni pionowej), wyznaczamy współrzędne punktu A, B. Współrzędne odczytujemy, korzystając z polecenia DIST (rys. 3.16).
Zatem $\overrightarrow{AB}$ ma współrzędne:
$\overrightarrow{AB} = [7{,}7977 - 5{,}6250; 4{,}1855 - 0{,}0000; 14{,}2697 - (-7{,}7303)]$,
czyli $\overrightarrow{AB} = [13{,}4227; 4{,}1855; 22{,}0000]$. Zatem równanie parametryczne prostej $l(AB)$ jest następujące

$$\begin{cases} x = -5{,}6250 + 13{,}4227t \\ y = 0{,}0000 + 4{,}1855t \qquad\qquad t \in R. \\ z = -7{,}7303 + 22{,}0000t \end{cases} \tag{3.21}$$

Dalszy ciąg według schematu (3.11)$\rightarrow$ (3.12) $\rightarrow$ (3.13).

Układ współrzędnych $OXYZ$ przyjmujemy tak, by okrąg zwężenia hiperboloidy leżał w płaszczyźnie OXY. Traktując rzut pionowy jako płaszczyznę, w której określamy układ współrzędnych OXY, przyjmujemy $P'' = P$ i $Q'' = Q$: $P = (3{,}5; 0)$, $Q = (8{,}8500; 14{,}2697)$. Wówczas możemy napisać równanie hiperboli

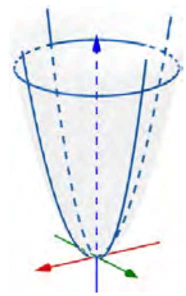
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.22}$$

gdzie $a = 3{,}5$, b zaś wyznaczamy ze wzoru (3.2). Zatem po podstawieniu w (3.2) współrzędnych punktu Q otrzymujemy
$b = |14{,}2697| \cdot \left(\sqrt{\frac{8{,}8500^2}{3{,}5^2} - 1}\right)^{-1}$.

3.4. Zadania

1. Wyznaczyć równanie powierzchni powstałej z obrotu prostej $\frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{6}$ wokół osi OZ. Jaką powierzchnię otrzymamy? (wsk. Sprawdzić, czy prosta jest równoległa, skośna, czy przecina oś OZ.)
2. Wyznaczyć równanie powierzchni powstałej z obrotu prostej k wokół osi OZ. Jaką powierzchnię otrzymamy?
   a) $k: \ [x, y, z] = [1, 2, 3] + t[0, 0, 2], \quad t \in R;$
   b) $k: \ [x, y, z] = [1, 2, 3] + t[0, 1, 2], \quad t \in R;$
   c) $k: \ [x, y, z] = [1, 2, 3] + t[-4, 0, 2], \quad t \in R;$
   d) $k: [x, y, z] = [-1, 2, 3] + t[0, 0, -2], \quad t \in R;$
   e) $k: [x, y, z] = [1, 2, 3] + t[-2, 1, 3], \quad t \in R.$

3. Wykazać, że przecięcie hiperboloidy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ płaszczyznami $x = k$ oraz $y = k$ daje w przekroju hiperbolę lub dwie proste.
4. Napisać równania prostych dla wybranych p i q dla hiperboloidy – modelu chłodni.
5. Opisać przekroje hiperboloidy parabolicznej płaszczyznami OXZ, OYZ, OXY.
6. Traktując kulę o promieniu a jako bryłę powstałą z obrotu okręgu (lub lepiej: półokręgu, a raczej półkola) o promieniu a, wyprowadzić (posługując się odpowiednią całką) wzór na objętość i powierzchnię kuli.
7. Rozumując podobnie jak w poprzednim zadaniu, sprawdzić wzór na objętość stożka o wymiarach a, h.
8. Zbiornik w kształcie paraboloidy obrotowej (powierzchni otrzymanej w wyniku obrotu paraboli) o wysokości 8 m i promieniu 4 m (rys. 3.17) napełniony jest cieczą do wysokości 3,5 m. Jaka jest objętość cieczy, która znajduje się w zbiorniku?



Rysunek 3.17: Zadanie 8, opr. A. Tereszkiewicz

9. Napisać równanie hiperboloidy obrotowej powstałej w wyniku obrotu prostej $\{y = a, z = c_1 x\}$ dokoła osi OZ. W otrzymanym równaniu przyjąć $c := ac_1$.
10. Napisać równanie torusa powstałego przez obrót okręgu $(x - R)^2 + z^2 = r^2$ $(r \leq R)$ dokoła osi OZ.
11. Obliczyć objętość elipsoidy powstałej z obrotu elipsy dookoła osi OX, OY [43].
12. Obliczyć objętość zbiornika otwartego/zamkniętego powstałego z obrotu funkcji $f(x) = e^x$ dla $x \in [0, 2]$ wokół osi OY.
13. Obliczyć objętość zbiornika otwartego/zamkniętego powstałego z obrotu funkcji $f(x) = 1 - e^{-2x}$ dla $x \in [0, 2]$ wokół osi OY i OX.

Rozdział 4

Kubatura

4.1. Kubatura dworca Warszawa Ochota

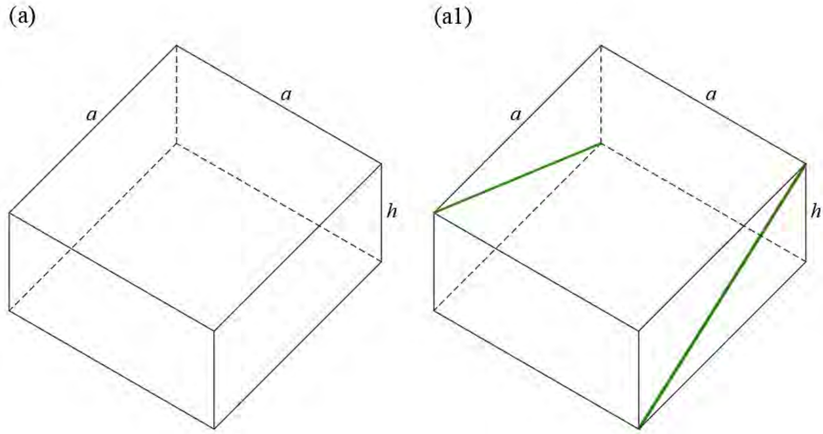
Problem 4.1.

1. Obliczyć *kubaturę* obiektu z przekryciem w postaci powierzchni siodłowej. Budynek dworca zbudowany jest na planie kwadratu o boku: $a = 17{,}25$ m; ma w dwóch wierzchołkach wysokość $h_{1,3} = 8{,}34$ m; pozostałe wierzchołki znajdują się na wysokości $h_{2,4} = 0{,}00$ m.
2. Obliczyć ilość materiału termoizolacyjnego do ocieplenia dachu, jeśli wysokość warstwy jest równa $q = 35$ cm.

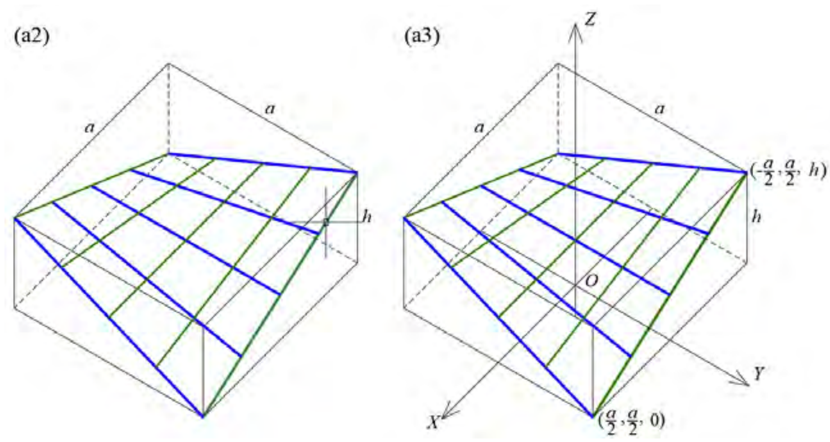
Rysunek 4.1: Dworzec Warszawa Ochota w Warszawie, projekt: Arseniusz Romanowicz, Piotr Szymaniak, realizacja 1960 – 1962, [17] fot. Marcin Czechowicz

Wskazówka. Równanie kanoniczne powierzchni siodłowej ma postać $z = kxy + p$, gdzie k i p są parametrami do wyznaczenia na podstawie danych. Przyjmijmy, że punkty $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, h)$, $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$ należą do powierzchni.

4.2. Konstrukcja płata powierzchni siodłowej jako powierzchni prostokreślnej



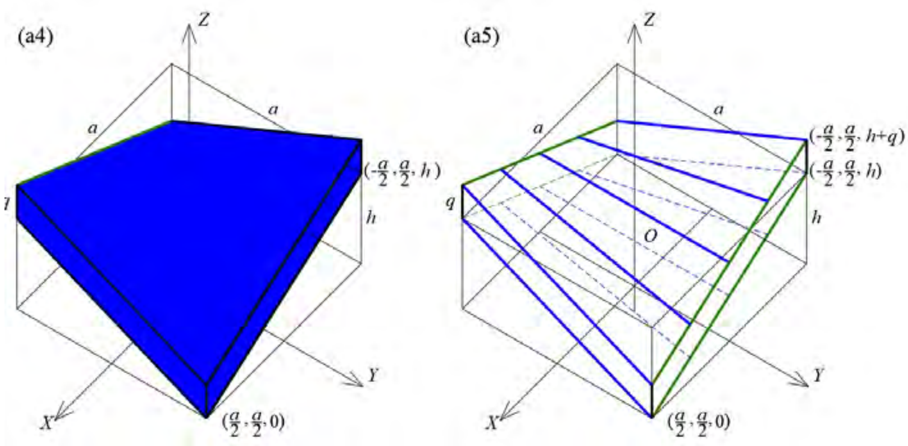
Rysunek 4.2: (a) wybieramy prostopadłościan o podstawie kwadratu o boku a i wysokości h; (a1) konstruujemy przekątne przeciwległych ścian bocznych wzajemnie skośne (kolor zielony), które stanowią bazę do kreowania prostoliniowych tworzących powierzchni (AutoCAD), opr. E. Koźniewski



Rysunek 4.3: (a2) łączymy punkty tych przekątnych odcinkami równoległymi do pozostałych ścian bocznych (w praktycznej realizacji dzielimy przekątne na tę samą liczbę równych odcinków i otrzymane w ten sposób punkty łączymy odpowiednio ze sobą – odcinki w kolorze niebieskim). Otrzymujemy tworzące, wszystkie ze sobą skośne (kolor niebieski), dwie z nich są przekątnymi pozostałych ścian bocznych. Te dwie przekątne mogą stanowić bazę do skonstruowania drugiej rodziny tworzących (kolor zielony); (a3) w celu przejścia od charakteryzacji geometrycznej do analitycznej wprowadzamy układ współrzędnych $OXYZ$ najbardziej przyjazny dla postaci równania kanonicznego powierzchni siodłowej (AutoCAD), opr. E. Koźniewski

Korzystając z rysunku 4.3a3, możemy zapisać równanie powierzchni siodłowej $z = kxy + p$. Po podstawieniu współrzędnych punktów $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$, $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, h)$ otrzymujemy $k = -\frac{2h}{a^2}$, $p = \frac{h}{2}$. Mamy więc równanie powierzchni

$$z = -\frac{2h}{a^2}xy + \frac{h}{2}. \tag{4.1}$$



Rysunek 4.4: (a4) w celu otrzymania modelu pokrycia dachowego nadajemy grubość poprzez przesunięcie wykreowanej powierzchni o wektor $[0, 0, q]$; (a5) pierwotna postać szkieletowa modelu pokrycia dachowego (AutoCAD), opr. E. Koźniewski

Nadajemy grubość powierzchni (4.1), przesuwając tę powierzchnię o wektor $[0, 0, q]$, i otrzymujemy warstwę

$$\left(z = -\frac{2h}{a^2}xy + \frac{h}{2}, z = -\frac{2h}{a^2}xy + \frac{h}{2} + q\right) \tag{4.2}$$

jako zbiór

$$\Big\{(x, y, z) : -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}, \\ -\frac{2h}{a^2}xy + \frac{h}{2} \leq z \leq -\frac{2h}{a^2}xy + \frac{h}{2} + q\Big\}. \tag{4.3}$$

Obliczymy teraz kubaturę obiektu. Wykorzystamy do tego pojęcie całki podwójnej funkcji $f(x, y) = -\frac{2h}{a^2}xy + \frac{h}{2}$ w kwadracie $K = \left\{(x, y) : -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}\right\}$. Zatem

$$V = \iint\limits_K \left(-\frac{2h}{a^2}xy + \frac{h}{2}\right) dxdy. \tag{4.4}$$

Obliczmy tę całkę

$$V = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(-\frac{2h}{a^2}xy + \frac{h}{2}\right) dy \right) dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(-\frac{2hy^2}{2a^2}x + \frac{h}{2}y \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \right) dx =$$

$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{ah}{2} dx = \frac{ah}{2} x \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{a^2h}{2}.$$

Zauważmy, że kubatura obiektu jest równa połowie objętości prostopadłościanu, na bazie którego powstała bryła. Zresztą wnikliwa analiza rysunku (4.3) wskazuje na ten wynik; wykreowana bowiem powierzchnia „dzieli” prostopadłościan na dwie przystające części.

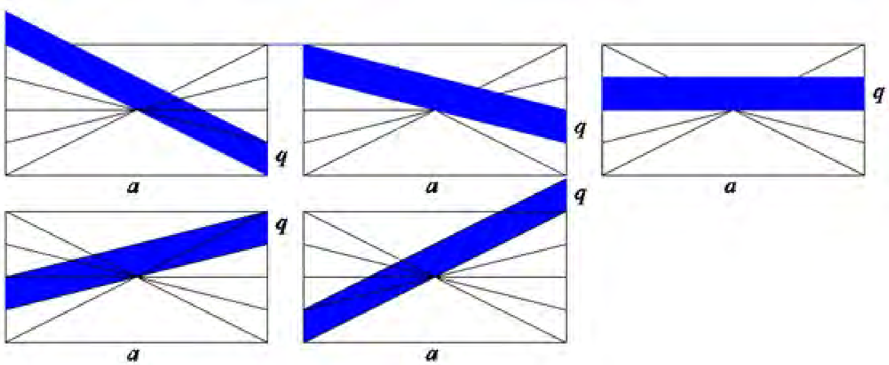
Obliczmy teraz kubaturę przekrycia dachowego w kształcie powierzchni siodłowej o wysokości h. Zauważmy, że wystarczy od kubatury bryły obiektu zawierającego przekrycie odjąć część bryły bez przekrycia, tzn.

$$V_q - V = \iint_K \left(-\frac{2h}{a^2}xy + \frac{h}{2} + q\right) dxdy - \iint_K \left(-\frac{2h}{a^2}xy + \frac{h}{2}\right) dxdy =$$

$$= \iint_K \left(-\frac{2h}{a^2}xy + \frac{h}{2} + q - \left(-\frac{2h}{a^2}xy + \frac{h}{2}\right)\right) dxdy = \iint_K q dxdy =$$

$$= q \iint_K dxdy = qa^2.$$

Ostatnia równość (bez obliczania całki) bezpośrednio wynika z interpretacji geometrycznej całki podwójnej, wiadomo bowiem, że $\iint_D dxdy = |D|$, $|D|$ – pole powierzchni obszaru D.



Rysunek 4.5: Ilustracja przekrojów, modelu przekrycia dachowego o grubości q, równoległych do płaszczyzn ścian (płaszczyzn prostopadłościanu bazowego) obiektu; są to równoległoboki o jednakowym polu aq – można przyjąć, że są to przekroje prostopadłościanu o podstawie kwadratu $a \times a$ i wysokości q, który można uznać za model dachu płaskiego (AutoCAD), opr. E. Koźniewski

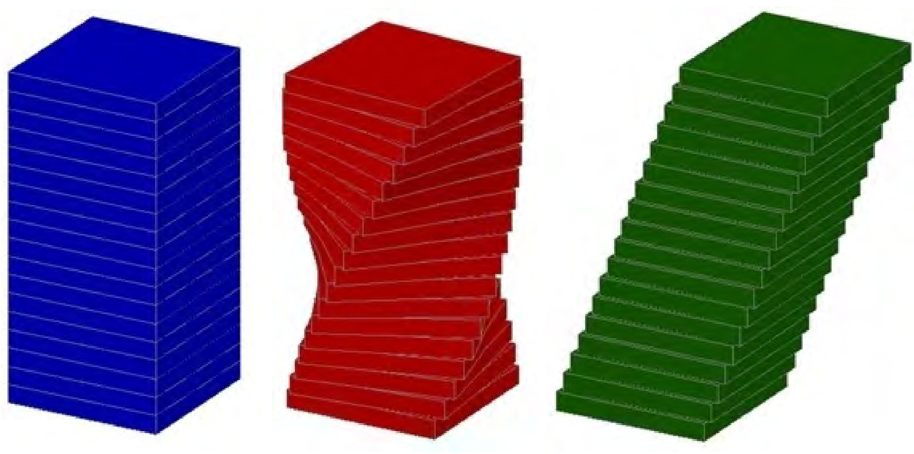
4.3. Twierdzenie Cavalieriego

Zauważmy, że kubatura warstwy ocieplenionowej przekrycia jest równa kubaturze dachu płaskiego o takiej samej grubości warstwy. Ten wynik jest nieoczekiwany, ale z matematycznego punktu widzenia nie jest to zaskoczenie. Znane jest bowiem *twierdzenie Cavalieriego*:

Twierdzenie 4.1. Jeżeli dwie bryły mają tę własność, że ich przekroje wszystkimi płaszczyznami równoległymi do jednej, z góry ustalonej płaszczyzny, mają te same pola, to te bryły mają równe objętości.

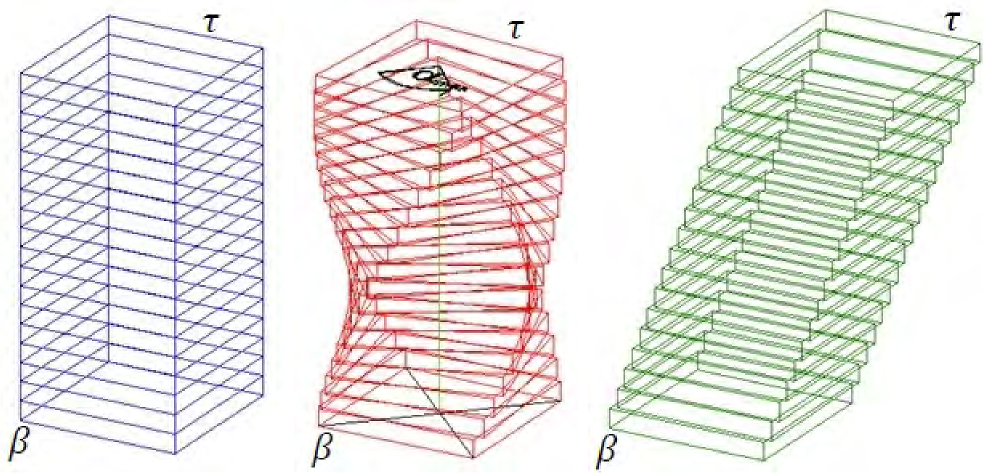
4.4. Przekształcenia oparte na przekrojach

Spostrzeżenie to pozwala zauważyć inną własność obiektów architektonicznych, będącą konsekwencją własności rodziny *przekształceń opartych na przekrojach*. Do takiej klasy przekształceń należą *skręcenie* (ang. *twist*) i *ścięcie* (ang. *shear*).



(a) (b) (c)

Rysunek 4.6: Ilustracja przekształceń opartych na przekrojach: (a) wyjściowy prostopadłościan, (b) skręcenie, (c) ścięcie (AutoCAD), opr. E. Koźniewski na podstawie [51]



(a) (b) (c)

Rysunek 4.7: Ilustracja przekształceń opartych na przekrojach: kąt maksymalny $\alpha_{\max}$, ścięcie (AutoCAD), opr. E. Koźniewski na podstawie [51]

Aby określić przekształcenie *skręcenie*, wybieramy dowolną płaszczyznę podstawy β, płaszczyznę wierzchołkową τ równoległą do β i odległą o h (obiekt skręcany ma wysokość h i znajduje się między płaszczyznami β i γ) oraz prostą l (zwaną osią skręcenia, ang. *twist axis*) prostopadłą do płaszczyzny β (rys. 4.6b, 4.7b). Warstwy obiektu leżące w płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu (tj. równoległych do β) obracają się o kąt $\alpha(z)$ dokoła l w sposób (4.5)

$$\alpha(z) = \frac{z}{h}\alpha_{\max}. \tag{4.5}$$

Płaszczyzna podstawy β pozostaje stała, a płaszczyzna τ obraca się o kąt $\alpha_{\max}$ wcześniej określony. Punkty leżące poza osią przekształcają się w sposób spiralny. Każda prosta równoległa do osi l przekształca się na linię śrubową (rys. 4.8). Ważną własnością tego przekształcenia jest zachowanie objętości obiektu.

(a) (b)

Rysunek 4.8: (a) skręcenie prostopadłościanu, krawędzie pionowe jako linie śrubowe (modele zrealizowane w AutoCAD-zie), opr. E. Koźniewski na podstawie [51]; (b) synagoga w Dreźnie (2001, architekci Rena Wandel-Hoefer oraz Wolfgang Lorch) – przykład zastosowania w architekturze przekształcenia skręcenie [18]

Rysunek 4.9: Turning Torso w szwedzkim Malmö (2005, architekt Santiago Calatrava) – inny przykład zastosowania przekształcenia skręcenie we współczesnej architekturze [19]

Innym przykładem przekształcenia opartego na przekrojach jest *ścięcie* . To przekształcenie afiniczne, które zapisuje się w postaci

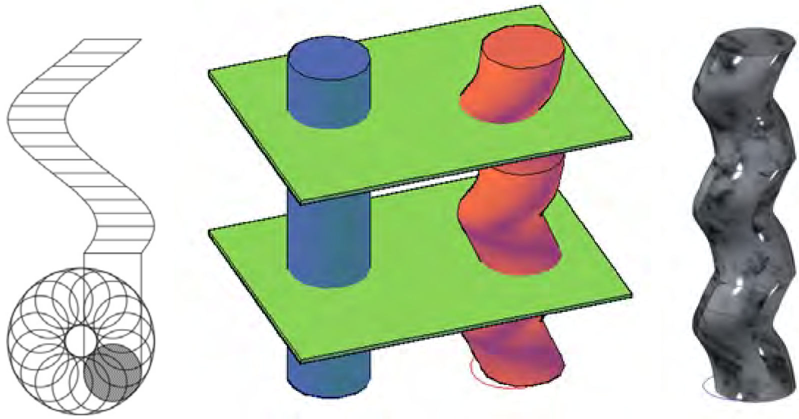
$$\begin{cases} x' = x + a \cdot z \\ y' = y + b \cdot z \\ z' = z \end{cases}, \tag{4.6}$$

gdzie a, b oznaczają stałe parametry.

Jak widać, jest to przesunięcie o wektor zależny od wysokości (z) obiektu. Przekształcenie to również zachowuje objętość obiektu (rys. 4.6c i 4.7c). Znane są realizacje architektoniczne przekształcenia *ścięcie* (rys. 4.10).

Rysunek 4.10: „Drzwi do Europy" w Madrycie – przykład wykorzystania przekształcenia ścięcie we współczesnej architekturze, fot. D. Gawryluk

I wreszcie, fenomenalne przykłady zastosowania przekształcenia przez przekroje obecne zwłaszcza w architekturze barokowej – *słup skręcony.*



(a) (b) (c)

Rysunek 4.11: (a) rzuty szkicu tworzenia słupa kręconego; (b) objętość słupa kręconego jest taka sama jak walca – twierdzenie Cavalieriego (model zrealizowany w środowisku AutoCAD-a); (c) model z rys. środkowego po renderingu, wyk. E. Koźniewski

(a) (b)

Rysunek 4.12: (a) kolumny w ołtarzu kościoła pw. Zmartwychwstania Pańskiego w Białymstoku, fot. M. Koźniewski; (b) skręcone kolumny hali na giełdzie jedwabiu w Walencji (Hiszpania), fot. D. Gawryluk

Rysunek 4.13: Współczesne pomysły w budownictwie jednorodzinnym, z lewej [20], z prawej [21]

4.5. Zadania

1. a) Wykazać analitycznie, że na powierzchni siodłowej (paraboloidzie hiperbolicznej) $z = -\frac{2h}{a^2}xy$ (dla $a = 17{,}25$ m, $h = 8{,}34$m); $z = -\frac{2\cdot 8{,}34}{17{,}25^2}xy$, czyli $z = -0{,}0561xy$ leżą dwie rodziny prostych, tak jak widoczne jest to na rysunkach 4.3 a2) – a3) .
   b) Wykazać, że proste jednej rodziny (nazwijmy ją $ROXZ$) są równoległe do płaszczyzny OXZ i są wzajemnie skośne, proste drugiej rodziny (nazwijmy ją $ROYZ$) są równoległe do OYZ i są wzajemnie skośne.
   c) Wykazać, że proste rodzin $ROXZ$ i $ROYZ$ wzajemnie się przecinają. Ustalić współrzędne przecięcia tego punktu.
   d) Do której płaszczyzny układu $OXYZ$ jest równoległa płaszczyzna $y = \alpha$?
   e) Inna postać powierzchni siodłowej może być zapisana w postaci: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. Analogicznie, jak wyżej opisać prostymi.
   f) Obliczyć kubaturę obiektu z przekryciem w postaci powierzchni siodłowej. Budynek dworca zbudowany jest na planie kwadratu o boku $a = 17{,}25$ m; ma w dwóch wierzchołkach wysokość

$h_{1,3} = 8{,}34$ m; pozostałe wierzchołki znajdują się na wysokości $h_{2,4} = 0{,}00$ m.

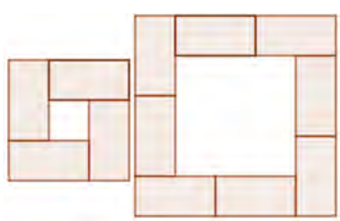
g) Obliczyć ilość materiału termoizolacyjnego do ocieplenia dachu, jeśli wysokość warstwy jest równa $q = 35$ cm.

Wskazówka. Powierzchnię siodłową można zapisać w najprostszej postaci $z = kxy$ $(k \neq 0)$. Równanie to można zapisać w sposób równoważny

$$z = kxy \Leftrightarrow z = \alpha x \text{ i } \alpha = y.$$

Mnożąc stronami ostatnie dwa równania, a są to równania prostych, otrzymujemy równanie pierwsze. Ale układ $z = \alpha x$ i $\alpha = y$ przedstawia rodzinę prostych. Jaką postać ma druga rodzina? Do której płaszczyzny układu $OXYZ$ jest równoległa płaszczyzna $y = \alpha$? Bardziej złożona, ale też prosta postać powierzchni siodłowej jest $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z$.

2. Rozważyć słup kręcony o wysokości 2,96 m o podstawie kwadratu o boku ok. 370 mm, wykonany z cegły klinkierowej o wymiarach $250 \times 120 \times 65$ mm (przyjmijmy grubość fugi 15 mm). Ile cegieł zużyto? Jaki powinien być $\alpha(z)$, tak aby efekt był jak na zdjęciu 4.12?
3. Przy kącie $\alpha(z) = 2°$ obliczyć kąt skręcenia słupa z poprzedniego zadania.
4. Jaki powinien być $\alpha(z)$, tak aby $\alpha_{\max}$ wynosiło 90°? (parametry cegły klinkierowej $250 \times 120 \times 65$ mm (przyjmując grubość fugi 15 mm, wysokość słupa 2,88m).
5. Jakiej wysokości słup otrzymamy, gdy zbudujemy go z cegieł klinkierowych o wymiarach $250 \times 120 \times 65$ mm i grubość fugi 15 mm o podstawie jak na rysunku 4.14, dla $\alpha_{\max} = 45°$ (90°, 180°) i $\alpha(z) = 3°$ $(1°, 2°)$? Ile cegieł klinkierowych zostanie zużytych?



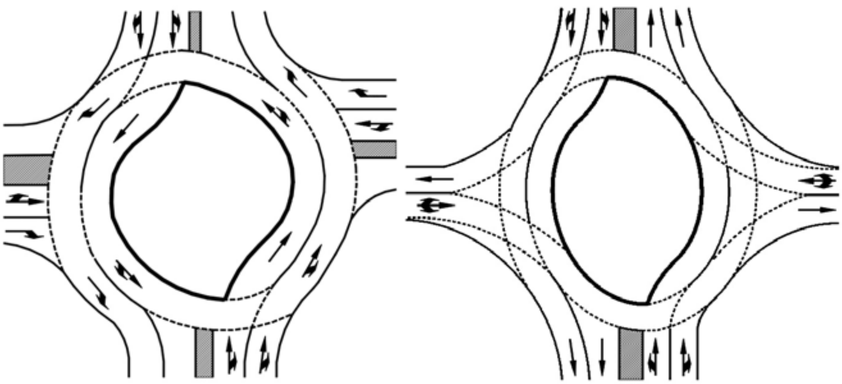
Rysunek 4.14: Podstawy słupa do zad. 5, wyk. A. Tereszkiewicz

6. Opisać parametry słupa kręconego z wybranej realizacji w architekturze.
7. Opisać przekształcenie (ST) dla Puerta de Europa (rys. 4.10).
8. Opisać przekształcenie (TwT) dla Turning Torso (rys. 4.9).
9. Wskazać inne obiekty architektoniczne, w których zastosowano podobne rozwiązania geometryczne.
10. Korzystając z zapisu równania powierzchni siodłowej w zadaniu 1e, opisać równania modelu przekrycia budynku o rzucie prostokątnym $a \times b$ i wysokości h. Wykonać obliczenia z zadań 1f, 1g przy założeniu, że $a = 16$ m, $b = 12$ m, $h = 8$ m, $q = 0{,}35$ m.

Rozdział 5

Krzywe i powierzchnie offsetowe w budownictwie

Problem 5.1. Dokonać studium rozkładu szerokości jezdni w rondzie drogowym zaprojektowanym z wykorzystaniem kształtu elipsoidalnego (rys. 5.1)



(a) (b)

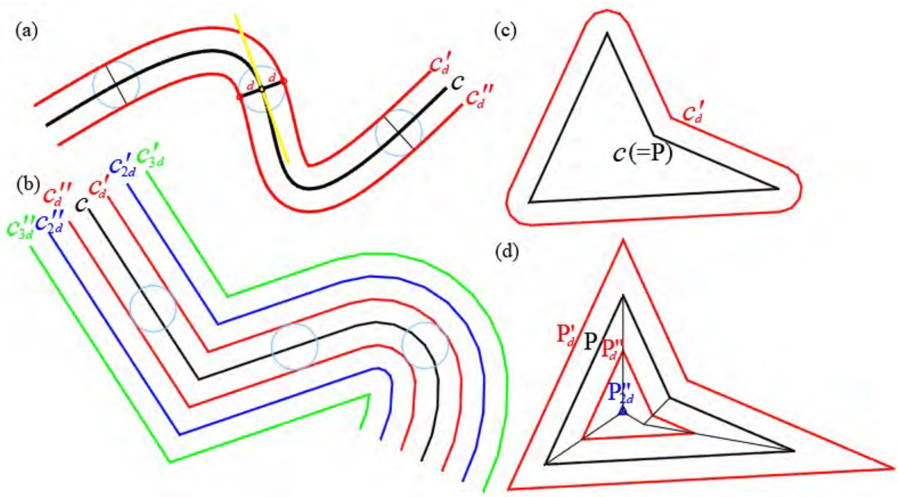
Rysunek 5.1: Szkic ronda turbinowego ukształtowanego za pomocą: (a) dwóch półokręgów, wyk. E. Koźniewski na podstawie [9]; (b) elipsy, wyk. E. Koźniewski na podstawie [9]

Przy projektowaniu np. pasa drogowego, gdzie krawędź jest łukiem okręgu lub odcinkiem prostoliniowym, wyznaczenie szerokości jezdni jest dość proste. Trudniej jest wyznaczyć szerokość drogi, gdy występuje dowolna krzywa. Mamy wtedy do czynienia z bardziej złożonym procesem konstruowania dwu odległych od siebie krawędzi. Tak będzie w przypadku wyznaczenia krawędzi ronda turbinowego ukształtowanego za pomocą elipsy [9]. Potrzeba wyznaczenia drugiej krawędzi jezdni prowadzi do wprowadzenia pojęcia krzywej offsetowej.

5.1. Krzywe offsetowe

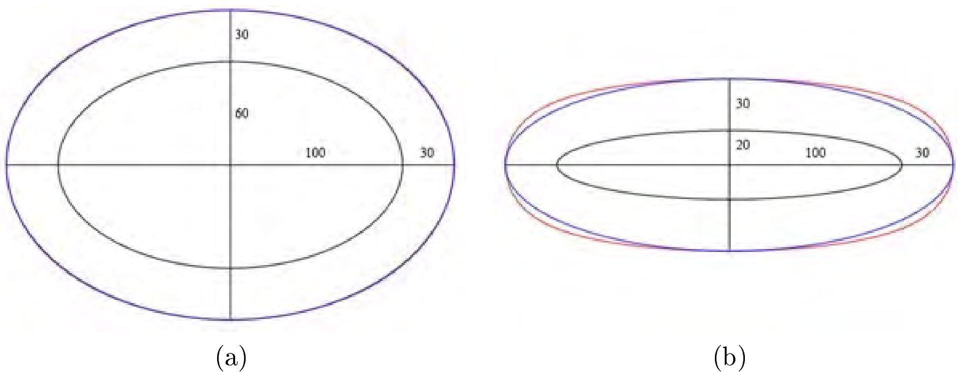
5.1.1. Definicja krzywej offsetowej

Dla dowolnej krzywej gładkiej c określamy *offset* (*kopię równoległą*) *krzywej* $c_d = c'_d \cup c''_d$ w odległości d (krócej mówimy *offset*) w następujący sposób: na każdej normalnej do krzywej c wybieramy dwa punkty w odległości d od krzywej c ([51], str. 335). Otrzymujemy dwie rodziny c'_d, c''_d punktów (rys. 5.2a), które utworzą *offset* c_d, poszczególne zaś krzywe c'_d, c''_d będziemy nazywać półoffsetami.

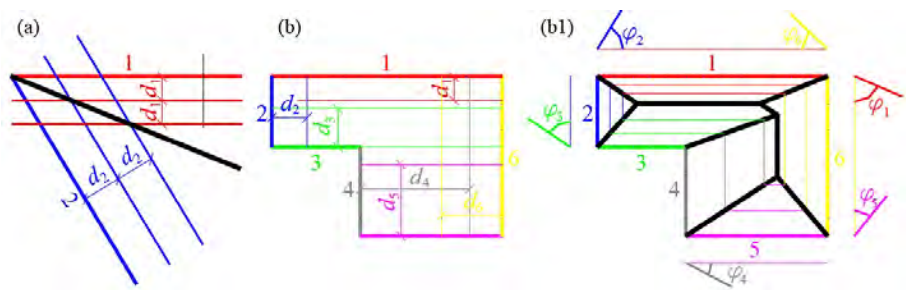


Rysunek 5.2: Offsety: (a) krzywej sklejanej; (b) polilinii; (c) półoffset wielokąta (otrzymany za pomocą programu AutoCAD ze stałą *Offsetgaptype* = 1); (d) dyskretne półoffsety wielokąta (otrzymany za pomocą programu AutoCAD ze stałą *Offsetgaptype* = 0), opr. E. Koźniewski

Program AutoCAD dopuszcza wiele możliwości tworzenia offsetów wielokąta płaskiego. Odpowiada za to zmienna systemowa *Offsetgaptype*. Dla wielokąta P, przy wartości 0 tej zmiennej, segmenty linii są przedłużane i pozostaje wielokąt P_d (rys. 5.2d), przy wartości 1 następuje zaokrąglenie kopii (rys. 5.2c), w przypadku wartości 2 kopia pozostaje wielokątem, ale ma ścięte naroża. W pierwszym przypadku P_d jest znów wielokątem i nazywamy go offsetem dyskretnym wielokąta P. Na rysunku 5.2d mamy dyskretne półoffsety P'_d, P''_d, P''_{2d}. Zauważmy, że krzywą offsetową prostej jest prosta (dokładniej: para prostych), okręgu zaś okrąg (dokładniej: para okręgów). Natomiast krzywą offsetową elipsy już nie jest elipsa (rys. 5.3). W przypadku wykorzystania elipsy do projektowania rond turbinowych, chcąc precyzyjnie zachować stałą szerokość drogi (jezdni), krawędzie ronda nie mogą być równocześnie elipsami (por. [3,9]).

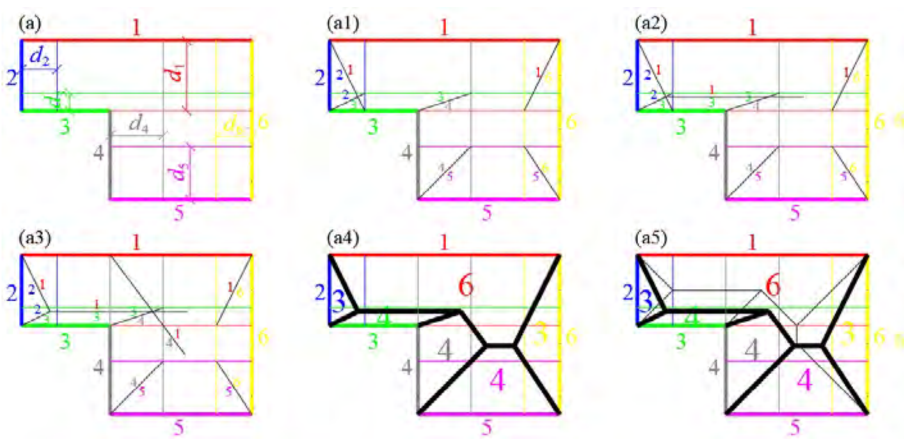


Rysunek 5.3: Offset e'_d elipsy $e(a,b)$ o półosiach a, b i elipsa o półosiach $a+d$, $b+d$: (a) $a = 100$, $b = 60$, $d = 30$; (b) $a = 100$, $b = 20$, $d = 30$. Różnica między offsetem e'_d elipsy $e(a,b)$ i elipsą $e(a+d, b+d)$ jest tym większa, im mniejszy jest stosunek b/a; w przypadku (a) $b/a = 3/5$ wizualnie krzywe pokrywają się, w przypadku (b) $b/a = 1/5$ jest wyraźna różnica między krzywymi (offset e'_d elipsy o półosiach a, b [kolor czerwony] i elipsa o półosiach $a+d, b+d$ [kolor niebieski], opr. E. Koźniewski

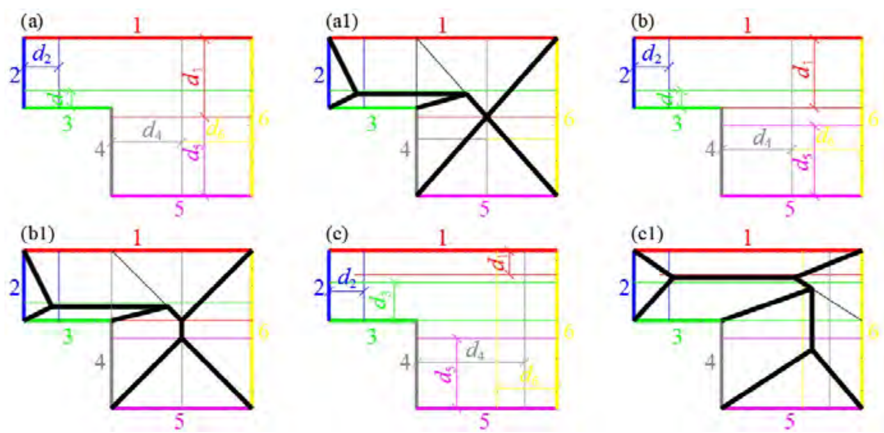


Rysunek 5.4: Uogólnione offsety dyskretne: (a) kąta z parametrami d_1, d_2; (b) dane odległości $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ dla offsetu dyskretnego wielokąta; (b1) ciąg półoffsetów dyskretnych wielokąta $(1, d_1; 2, d_2; 3, d_3; 4, d_4; 5, d_5; 6, d_6)$ ([3,9,34], wyk. E. Koźniewski)

Podobnie jak dla wielokąta, offset dyskretny możemy skonstruować dla kąta i tu dochodzimy do tzw. (d_1, d_2)-*siecznej* (rys. 5.4a). Dla danego n-kątnego wielokąta P_n i ciągu dodatnich liczb rzeczywistych $d_1, d_2, \ldots, d_n$ możemy skonstruować szkielet dachu [31,34] rozpiętego nad wielokątem P_n. Taka konstrukcja pozwala projektować dachy o zmiennym nachyleniu (rys. 5.2 – 5.6). Zachodzi wtedy nierówność $d_i\mathrm{tg}\varphi_i = d_j\mathrm{tg}\varphi_j$ dla dowolnych $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

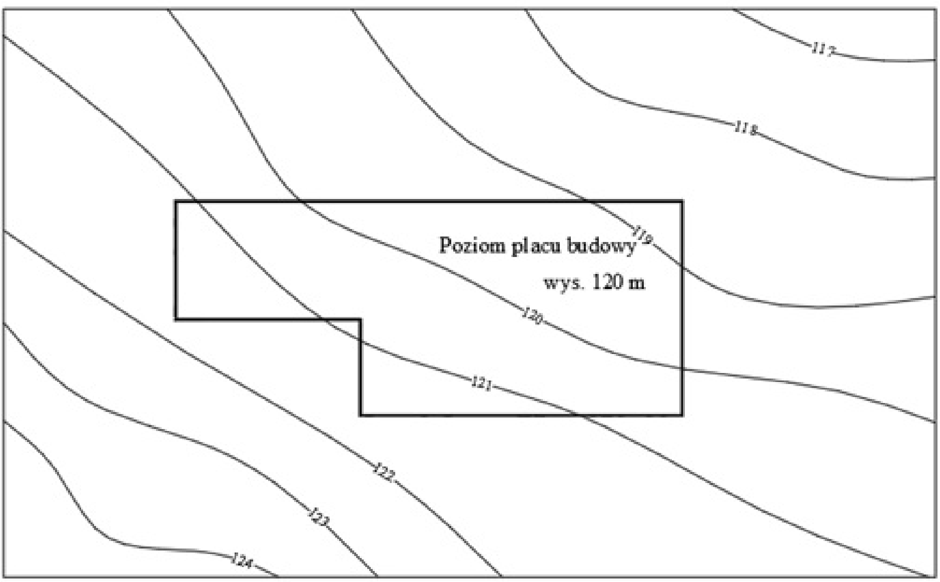


Rysunek 5.5: Konstrukcja szkieletu dachu generowanego przez sześciokąt $(1, d_1; 2, d_2; 3, d_3; 4, d_4; 5, d_5; 6, d_6)$, (por. [33]), wyk. E. Koźniewski

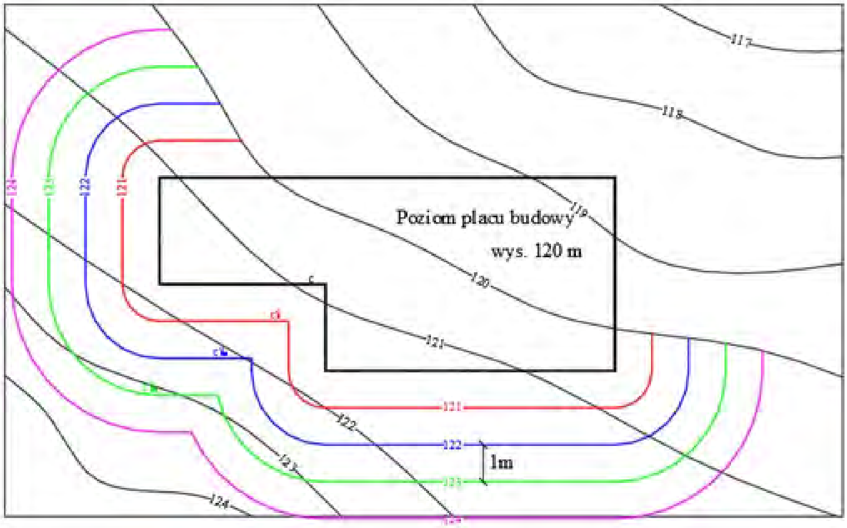


Rysunek 5.6: Typy topologiczne dachów o zmiennym nachyleniu nad tym samym sześciokątem $(1, d_1; 2, d_2; 3, d_3; 4, d_4; 5, d_5; 6, d_6)$ (por. [33]), wyk. E. Koźniewski

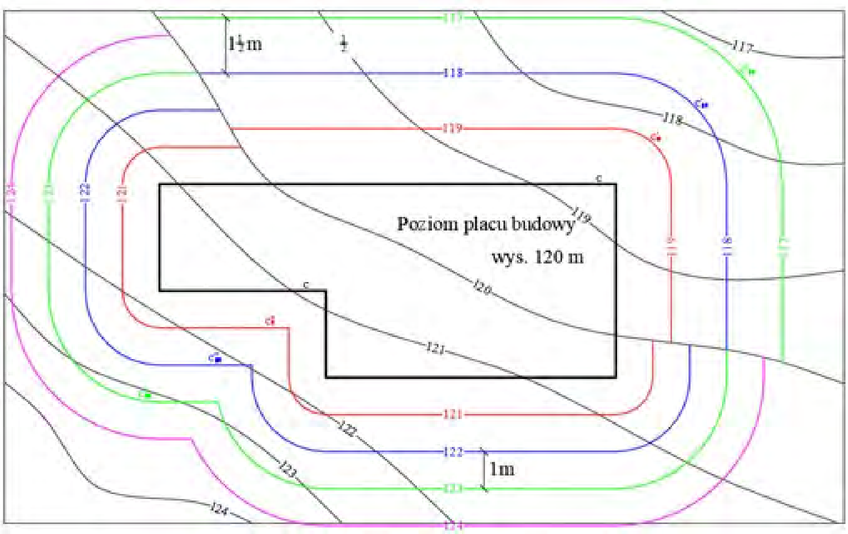
Okazuje się, że nad dowolnym wielokątem można otrzymać wszystkie typy topologiczne szkieletów dachów w zależności od ciągu liczb dodatnich $d_1, d_2, \ldots, d_n$ (rys. 5.6). Kształt zbliżony do dachu nad wielokątem przyjmuje nasyp powstający w wyniku naturalnego układu (sypania) gruntu. Jak wiadomo, w wyniku swobodnego sypania gruntu powstaje stożek o kącie naturalnego zsypu [38]. Stąd przy opisie robót ziemnych kształt warstwic, czyli krzywych offsetowych, będzie zaokrąglony. Stosując zasadę zaokrąglenia linii (zmienna *Offsetgaptype* przyjmuje wartość 1), możemy opisać geometrycznie, a następnie obliczyć wielkość mas gruntu w robotach ziemnych (por. [33]). Na rysunkach 5.7 – 5.10 przedstawiono budowę platformy na zboczu. Linia przecięcia pomiędzy poziomym placem budowy na rzędnej 120 m a poziomicą 120 będzie linią graniczną między obszarami wykopu i nasypu (rys. 5.7). Przecięcia 120-metrowego konturu z krawędziami placu budowy wyznaczają graniczne punkty zmiany wykopu w nasyp. Wyznaczone punkty dzielą wielokąt placu budowy na dwie części (rys. 5.7). Po lewej stronie obszaru (rys. 5.8, „dolna" część wielokąta) warstwice są ułożone w odległości 1 m, aby uzyskać nachylenie skarpy równe 1. Po prawej stronie obszaru (rys. 5.9, „górna" część wielokąta) warstwice są ułożone w odległości $1\frac{1}{2}$ m, aby uzyskać stosunek $1\frac{1}{2}$ do 1, czyli nachylenie $1\frac{1}{2}$.



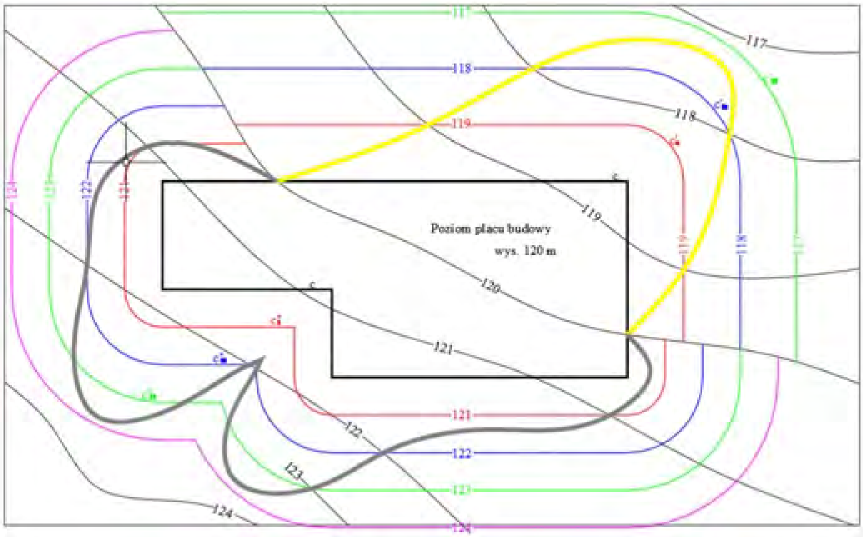
Rysunek 5.7: Przecięcia konturu 120 m z krawędziami placu budowy wyznaczą punkty zmiany od wykopu do nasypu (por. [33])



Rysunek 5.8: Po lewej stronie i na dole obszaru proponowane kontury warstwic (dla wykopu) w odległości $d = 1$ m, aby uzyskać nachylenie równe 1 (por. [33])



Rysunek 5.9: Po prawej stronie i u góry obszaru proponowane kontury warstwic (dla nasypu) w odstępach $d = 1\frac{1}{2}$ m, aby uzyskać nachylenie w stosunku $1\frac{1}{2}$ do 1 (por. [33])



Rysunek 5.10: Brzeg linii nasypu i wykopu (por. [33])

5.1.2. Analityczna postać krzywej offsetowej

Rozważmy krzywą $c : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ klasy C^1, $t \in [\alpha, \beta]$. W dowolnym punkcie znajdźmy wektor styczny $[x'(t), y'(t)]$, następnie normalny $\pm[y'(t), -x'(t)]$. Wersor normalny (wektor normalny o długości 1) ma postać $\frac{[y'(t), -x'(t)]}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}$. Wówczas równania krzywych offsetowych $c'_{off}(d)$, $c''_{off}(d)$ krzywej c mają postać

$$c'_{off}(d) : \begin{cases} X = x(t) + \frac{y'(t)d}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}} \\ Y = y(t) + \frac{-x'(t)d}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}} \end{cases}, \quad c''_{off}(d) : \begin{cases} X = x(t) + \frac{-y'(t)d}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}} \\ Y = y(t) + \frac{x'(t)d}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}} \end{cases},$$

gdzie $t \in [\alpha, \beta]$.

Przykład 5.1. Zapisać równania krzywych offsetowych dla hiperboli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

z parametryzacją funkcjami hiperbolicznymi (kosinus hiperboliczny: $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, sinus hiperboliczny: $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, w szczególności prawdziwa jest „jedynka hiperboliczna”: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$). Parametryzacja może być następująca: $x = a\cosh(t), y = b\sinh(t)$. Wówczas równania parametryczne krzywych offsetowych $c'_{off}(d), c''_{off}(d)$ hiperboli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ mają postać

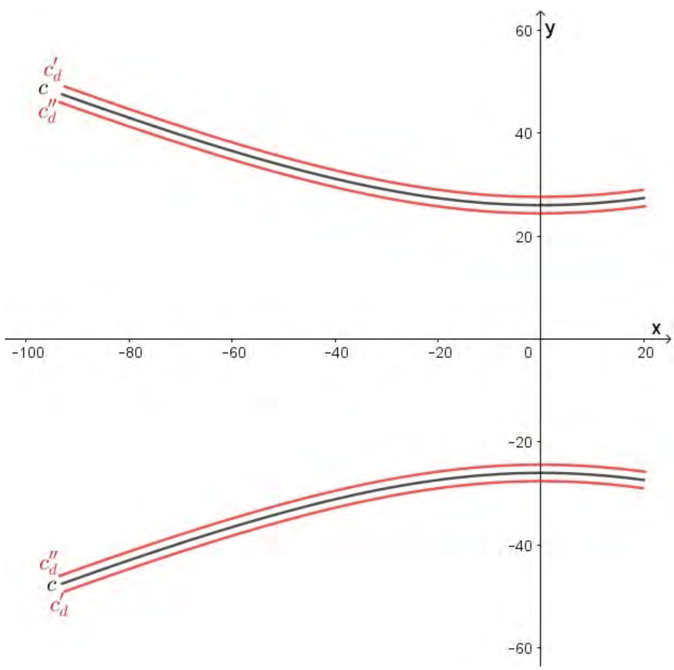
$$c'_{off}(d): \quad \begin{cases} X = a\cosh(t) + \frac{b\cosh(t)d}{\sqrt{a^2\sinh^2(t)+b^2\cosh^2(t)}} \\ Y = b\sinh(t) - \frac{a\sinh(t)d}{\sqrt{a^2\sinh^2(t)+b^2\cosh^2(t)}} \end{cases}, \text{ gdzie } t \in R,$$

$$c''_{off}(d): \quad \begin{cases} X = a\cosh(t) - \frac{b\cosh(t)d}{\sqrt{a^2\sinh^2(t)+b^2\cosh^2(t)}} \\ Y = b\sinh(t) + \frac{a\sinh(t)d}{\sqrt{a^2\sinh^2(t)+b^2\cosh^2(t)}} \end{cases}, \text{ gdzie } t \in R.$$

Przykład 5.2. Rozważmy hiperbolę $\frac{y^2}{26^2} - \frac{x^2}{0{,}83^2} = 1$ opisującą chłodnię kominową z rozdziału 3. Jej postać parametryczna jest następująca

$$\begin{cases} x = 60{,}83\sinh(t) \\ y = 26{,}00\cosh(t) \end{cases},$$

gdzie $t \in \left[\operatorname{arsinh}\left(\frac{-93}{60{,}83}\right); \operatorname{arsinh}\left(\frac{20}{60{,}83}\right)\right] = [-1{,}21066; 0{,}323132]$. Realizację wizualną krzywych offsetowych można otrzymać po implementacji w odpowiednim programie (np. Geogebra rys. 5.11, Matlab).



Rysunek 5.11: Ilustracja przykładu (ze względu na skalę zamiast $d = 0{,}16$ przyjęto $d = 1{,}6$), opr. A. Tereszkiewicz

5.1.3. O grubości chłodni kominowej w aspekcie krzywych offsetowych

Problem 5.2. Wyznaczyć funkcję (rozkład) grubości w rozumieniu krzywej offsetowej powłoki chłodni kominowej przy założeniu, że ścianę powłoki ograniczają powierzchnie powstałe z obrotu krzywych $c: y = 26\sqrt{1+\left(\frac{x}{60{,}83}\right)^2}$, $x \in [-93{,}20]$; $c_1 : y = 26\sqrt{1+\left(\frac{x}{60{,}83}\right)^2} - 0{,}16$, $x \in [-93{,}20]$. Krzywą offsetową $c'_{off}(0{,}16)$ tworzymy dla krzywej c w kierunku krzywej c_1 i porównujemy $c'_{off}(0{,}16)$ z krzywą c_1.

Rozwiązanie. (szkic)
Pierwszy sposób: Krzywa c parametrycznie dana jest wzorem

$$\begin{cases} x = 60{,}83\sinh(t) \\ y = 26{,}00\cosh(t) \end{cases},$$

gdzie $t \in \left[\operatorname{arsinh}\left(\frac{-93}{60{,}83}\right); \operatorname{arsinh}\left(\frac{20}{60{,}83}\right)\right] = [-1{,}21066; 0{,}323132]$.
Dla dowolnego, ale ustalonego punktu krzywej c, czyli dla ustalonego parametru t, znajdujemy równania prostej prostopadłej (normalnej). Wektor normalny ma współrzędne $[26\sinh(t), -60{,}83\cosh(t)]$, równania prostej normalnej mają zaś postać:

$$\begin{cases} x = 60{,}83\sinh(t) + 26{,}00\sinh(t)u \\ y = 26{,}00\cosh(t) - 60{,}83\cosh(t)u \end{cases}$$

gdzie $u \in R$.
Po podstawieniu do równania krzywej c_1 otrzymujemy:
$26\cosh(t) - 60{,}83\cosh(t)u = 26\sqrt{1+\left(\frac{60{,}83\sinh(t)+26\sinh(t)u}{60{,}83}\right)^2} - 0{,}16$. Stąd, rozwiązując równanie kwadratowe, wyznaczamy dwie wartości u_1. Z warunków zadania wynika, że należy wziąć wartość u_1 dodatnią. Otrzymujemy (x_{u_1}, y_{u_1}), gdzie

$$\begin{cases} x_{u_1} = 60{,}83\sinh(t) + 26\sinh(t)u_1 \\ y_{u_1} = 26\cosh(t) - 60{,}83\cosh(t)u_1 \end{cases}.$$

Odległość punktów $d(t)$:
$(60{,}83\sinh(t), 26\cosh(t))$;
$(60{,}83\sinh(t) + 26\sinh(t)u_1, 26\cosh(t) - 60{,}83\cosh(t)u_1)$

jest grubością powłoki dla wartości parametru t. Odległość ta wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} d(t) &= \sqrt{(26\sinh(t)u_1)^2 + (-60{,}83\cosh(t)u_1)^2} = \\ &= |u_1|\sqrt{(26\sinh(t))^2 + (-60{,}83\cosh(t))^2}. \end{aligned}$$

Wartość $roz(t) = |0{,}16 - d(t)|$ jest różnicą odległości między punktami na krzywej c_1 oraz $c'_{off}(0{,}16)$.

Drugi sposób: Niech $c : y = f(x)$, czyli $f(x) = 26\sqrt{1 + \left(\frac{x}{60{,}83}\right)^2}$ oraz $c_1 : y = f_1(x)$, gdzie $f_1(x) = 26\sqrt{1 + \left(\frac{x}{60{,}83}\right)^2} - 0{,}16$. Niech $x = u$, wtedy punkt krzywej ma współrzędne $(u, f(u))$, styczna w tym punkcie ma równanie: $t_c : y - f(u) = f'(u)(x - u)$, normalna $n_c : y - f(u) = \frac{-1}{f'(u)}(x - u)$. Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y - f(u) = \frac{-1}{f'(u)}(x - u) \\ y = f_1(x) \end{cases}$$

ze względu na x i y znajdujemy punkt $(x_u, f_1(x_u))$, zależny od parametru u, tzn. $x_u = x(u)$. Pamiętając, że $f(x) = 26\sqrt{1 + \left(\frac{x}{60{,}83}\right)^2}$ i $f_1(x) = 26\sqrt{1 + \left(\frac{x}{60{,}83}\right)^2} - 0{,}16$. Odległość $d(u)$ punktów $(u, f(u))$, $(x_u, f_1(x_u))$ jest grubością powłoki dla wartości $x = u$. Analizując funkcję $d(u)$ (lub funkcję $\Delta d(u) = d(u) - 0{,}16$), otrzymamy w szczególności opis zmienności grubości chłodni kominowej w kontekście krzywych c, c_1.

5.2. Powierzchnie offsetowe

5.2.1. Opis analityczny

Weźmy pod uwagę powierzchnię

$$P : \begin{cases} x_1 = x(u, v) \\ y_1 = y(u, v) \\ z_1 = z(u, v) \end{cases} \qquad (u, v) \in D,$$

gdzie D jest obszarem płaskim, a funkcje $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ są klasy C^1 (w przypadku prostokąta $D = \{(u,v) : u \in [u_1,u_2], v \in [v_1,v_2]\}$). Powierzchnię tę można też zapisać w postaci funkcji wektorowej $\mathbf{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]$. Dla wybranego punktu (u_0,v_0) powierzchni P pochodne cząstkowe funkcji wektorowej mają postać

$$\mathbf{r}_u(u_0,v_0) = \left[\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\right]$$

oraz

$$\mathbf{r}_u(u_0,v_0) = \left[\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\right].$$

Jeżeli $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ jest ustalonym punktem powierzchni P, a $P = (x,y,z)$ – dowolnym punktem płaszczyzny τ stycznej do powierzchni P w punkcie P_0, P_0P jest wektorem $[x-x_0, y-y_0, z-z_0]$, to równanie tej płaszczyzny stycznej τ do powierzchni P ma postać

$$\tau : \mathbf{r}_u(u_0,v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0,v_0) \cdot P_0P = 0,$$

gdzie symbol $\times$ oznacza iloczyn wektorowy wektorów, $\cdot$ oznacza iloczyn skalarny wektorów. Wektor $\mathbf{n}(u_0,v_0) = \mathbf{r}_u(u_0,v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0,v_0)$ jest wektorem normalnym do powierzchni P. We współrzędnych iloczyn wektorowy $\mathbf{r}_u(u_0,v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0,v_0)$ wyraża się wzorem

$$\mathbf{r}_u(u_0,v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0,v_0) = \\ = \left[\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix}\right].$$

Długość wektora wówczas jest równa

$$|\mathbf{r}_u(u_0,v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0,v_0)| = \\ = \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix}}.$$

Wersor normalny wyraża się wzorem $\mathbf{n}_{ver}(u_0,v_0) = \frac{\mathbf{r}_u(u_0,v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0,v_0)}{|\mathbf{r}_u(u_0,v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0,v_0)|}$. Zatem równanie powierzchni offsetowej zapiszemy w postaci

$$P_{off}(d) : \mathbf{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)] + d\,\mathbf{n}_{ver}(u,v).$$

Posługując się prezentowanymi tu wzorami, analizę grubości powierzchni siodłowej przeprowadzono w pracy [42]. Analiza jest uogólnieniem rozumowania zastosowanego w rozwiązaniu problemu pierwszego w rozdziale 5.1.3.

5.2.2. Grubość powierzchni siodłowej

Problem 5.3. Dokonać analizy grubości przekrycia budynku dworca Warszawa Ochota (wymiary $a = 17{,}35$ m, $h = 8{,}34$ m, *wysokość przekrycia* $q = 0{,}35$ m).

Wskazówka. W przypadku powierzchni siodłowej analizę grubości możemy przeprowadzić geometrycznie znacznie prościej. Wystarczy dokonać analizy rysunku 4.5 z rozdziału 4. Jest maksymalna (i minimalna) wysokość przekroju, który jest równoległobokiem.

5.3. Zadania

1. Dokonać analizy grubości przekrycia w kształcie powierzchni siodłowej rozpiętego nad budynkiem o rzucie prostokątnym o wymiarach $a = 16$ m, $b = 12$ m, $h = 8$ m, $q = 0{,}4$ m. Narysować odpowiednie wykresy.
2. Fragmenty krawędzi jezdni wewnętrznej i zewnętrznej projektowanego ronda są elipsami e_1, e_2 wpisanymi w prostokąty odpowiednio o wymiarach 53×43 m, 59×49 m. Porównać elipsę e_2 z krzywą offsetową tej elipsy e_1 odsuniętą o 6 m (por. rys. 5.2). Obliczyć wartość maksymalnego odchylenia szerokości jezdni od założonej wartości 6 m. Zagadnienie analizować w odniesieniu do całych elips [9].
3. Znaleźć krzywe offsetowe paraboli $y = ax^2$.

Rozdział 6

Krzywa łańcuchowa w budownictwie i architekturze

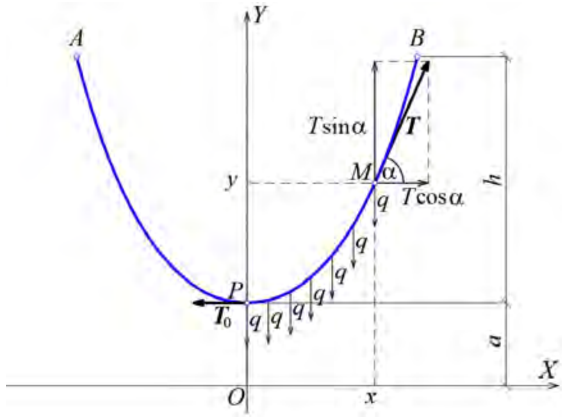
6.1. Krzywa łańcuchowa

Problem 6.1. Opisać kształt nierozciągliwej jednorodnej liny zawieszonej w dwóch punktach.

Rozwiązanie. W punktach A i B zawieszono linę – zakładamy, że jest nierozciągliwa i giętka (rys. 6.1). Lina zwisa jedynie pod wpływem własnego ciężaru. Przez $\boldsymbol{q}$ oznaczmy stałą wartość przedstawiającą ciężar liny przypadający na jej jednostkę długości [kG/m]. Należy wyznaczyć kształt krzywej zwisu jako wykresu pewnej funkcji $y(x)$. Za oś OX obieramy pewną prostą poziomą poniżej poziomego odcinka AB, a za oś OY prostą pionową przechodzącą przez najniższy punkt P krzywej zwisu. Oznaczmy przez T długość wektora napięcia $\boldsymbol{T}$ w punkcie $M(x, y)$ krzywej zwisu, a przez T_0 długość wektora napięcia $\boldsymbol{T}_0$ w punkcie P. Wektory te są styczne do krzywej, a ze względu na symetrię krzywej wektor $\boldsymbol{T}_0$ jest równoległy do osi OX. Weźmy pod uwagę łuk PM krzywej. Zauważmy, że ze względu na stan równowagi liny suma utworzona z sił $\boldsymbol{T}_0$, $\boldsymbol{T}$ i z sumy ciężkości poszczególnych elementarnych odcinków łuku PM równa się zeru. To samo dotyczy sumy ich składowych odpowiednio względem osi OX osi OY. A więc biorąc jeszcze pod uwagę wzór na długość $\int\limits_0^x \sqrt{1 + (y')^2}dx$ łuku $y = y(x)$ w przedziale $[0, x]$ otrzymamy

$$-T_0 + T\cos\alpha = 0, \qquad T\sin\alpha - \int\limits_0^x q\sqrt{1 + (y')^2}dx = 0, \tag{6.1}$$

gdzie α jest kątem, jaki tworzy wektor $\boldsymbol{T}$ z osią OX.



Rysunek 6.1: Krzywa łańcuchowa, opr. A. Tereszkiewicz

Stąd

$$T\cos\alpha = T_0 = const, \qquad \text{oraz} \quad T_0 \operatorname{tg}\alpha - \int\limits_0^x q\sqrt{1+(y')^2}dx = 0. \tag{6.2}$$

Różniczkując względem x obie strony ostatniego wzoru i zauważając, że $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$, otrzymamy

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+(y')^2} \tag{6.3}$$

jako równanie krzywej zwisu. Oznaczyliśmy przy tym $\frac{T_0}{q} = a$. Jest to równanie typu $F(x, y', y'') = 0$. Podstawiając $y' = u$ w równaniu (6.3), mamy

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{a}. \tag{6.4}$$

Całkując obustronnie, otrzymujemy

$$\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = \frac{x}{a} + C_1. \tag{6.5}$$

Równanie (6.5) możemy przekształcić, korzystając z pojęcia funkcji sinus hiperboliczny. Mamy bowiem $\ln\left(w + \sqrt{1+w^2}\right) = v \Leftrightarrow w + \sqrt{1+w^2} = = e^v \Leftrightarrow e^v - w = \sqrt{1+w^2} \Leftrightarrow (e^v - w)^2 = 1 + w^2 \Leftrightarrow e^{2v} - 2e^v w + w^2 =$

$= 1+w^2 \Leftrightarrow e^{2v}-1 = 2e^v w \Leftrightarrow w = \frac{e^{2v}-1}{2e^v} \Leftrightarrow w = \frac{e^v-e^{-v}}{2}$, czyli $w = \sinh(v)$. Przekształcając więc (6.5), otrzymujemy

$$u = \sinh\left(\frac{x}{a} + C_1\right), \qquad \text{czyli} \qquad y' = \sinh\left(\frac{x}{a} + C_1\right). \tag{6.6}$$

Po ponownym scałkowaniu ($\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$) otrzymamy całkę ogólną równania (6.3):

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a} + C_1\right) + C_2. \tag{6.7}$$

Dla ustalenia warunków początkowych tak obieramy oś OX, by rzędna punktu P równała się a (6.1). Należy zatem przyjąć $y'(0) = 0, y(0) = a$. Stąd $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ i równanie otrzymanej krzywej zwanej *krzywą łańcuchową* ma postać

$$y = a\cosh\frac{x}{a}. \tag{6.8}$$

Po uwzględnieniu oznaczeń na rysunku 6.1 otrzymujemy

$$y = \frac{T_0}{q}\cosh\left(\frac{qx}{T_0}\right). \tag{6.9}$$

Problem 6.2. Wyznaczyć parametr a łuku krzywej łańcuchowej $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ łuku Gateway Arch, obiektu architektonicznego, który znajduje się w Saint Louis w USA. Rozpiętość łuku przy podstawie wynosi 192 m (tyle samo co jego wysokość) i jest kształtu krzywej łańcuchowej. Każda część, z której jest zbudowany łuk, to trójkąt równoboczny o boku 16,5 m przy podłożu, do 5,2 m w najwyżej położonym punkcie. Konstrukcja wykonana jest z dwupłaszczowych modułów stalowych o przekroju trójkątnym. Wewnętrzny płaszcz ze stali węglowej grubości 0,01 m tworzy konstrukcję, natomiast zewnętrzny płaszcz ze stali nierdzewnej jest wykończeniem łuku. Nowatorska konstrukcja nie ma wewnętrznego szkieletu nośnego; moduły są samonośne.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

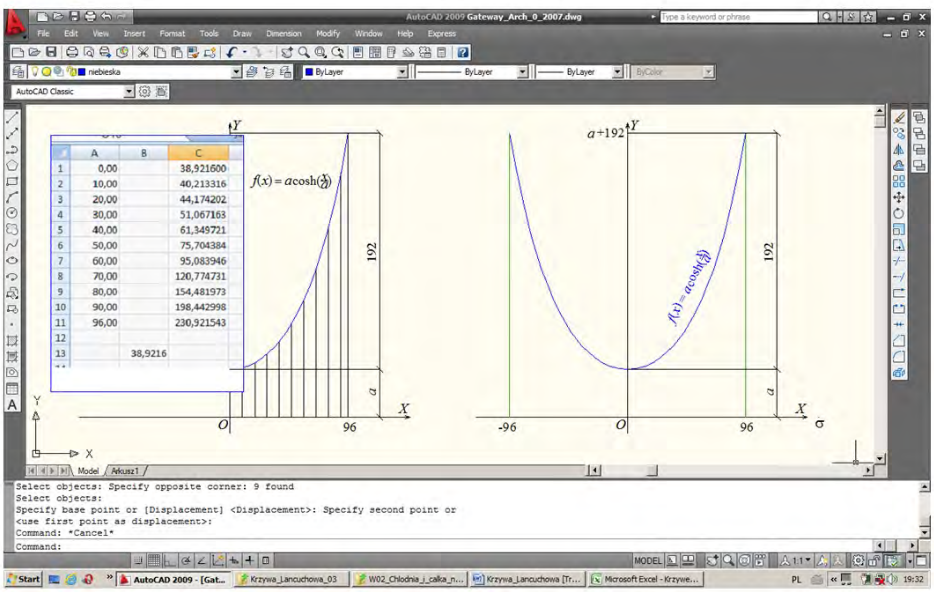
(f)

(g)

Rysunek 6.2: Realizacje architektoniczne na bazie krzywej łańcuchowej: (a) ogrodzenia łańcuchowe przy ul. Legionowej w Białymstoku, fot. E. Koźniewski; (b) most Grunwaldzki we Wrocławiu, fot. F. Sadowski; (c) wiadukt nad ul. Piastowską w Białymstoku, fot. E. Koźniewski; (d) przekrycie dworca Keleti w Budapeszcie, fot. E. Koźniewski; (e) Gateway Arch w Saint Luis w USA, [22]; (f) most łańcuchowy w Budapeszcie, fot. E. Omieljańczuk; (g) wiadukt nad Trasą Generalską w Białymstoku, fot. M. Koźniewski

Rozwiązanie. W celu wyznaczenia parametru a dla krzywej łańcuchowej opisującej Gateway Arch (i każdej krzywej opisującej jakikolwiek łańcuch tego typu) najpierw sporządzamy szkic (rys. 6.3, po prawej stronie). Po pierwotnym wyznaczeniu wartości parametru a rysunek ten można wykonać w środowisku AutoCAD, posiłkując się arkuszem Excel. Dla danej rozpiętości i wysokości łuku krzywej tworzymy dwie kolumny danych. Pierwsza kolumna to wartości zmiennej niezależnej z przedziału [0,96], czyli 0 i połowa rozpiętości łuku (na 6.3 jest równa 96 m), druga kolumna to a plus wysokość łuku (na 6.3 jest równa 192 m). Zatem do krzywej $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ należy punkt o współrzędnych (96,192). Podstawiając w (6.8) za $x = 96$ i za $y = a + 192$, otrzymujemy równanie $a + 192 = a\cosh\left(\frac{96}{a}\right)$. Równoważnie zapisujemy to w postaci

$$a\cosh\left(\frac{96}{a}\right) - a - 192 = 0. \tag{6.10}$$



Rysunek 6.3: Generowanie profilu krzywej łańcuchowej w programie AutoCAD: punkty wyznaczono dla krzywej łańcuchowej (6.8) dla $a = 38{,}9216$, dla wartości $10, 20, \ldots, 80, 90, 96$ (pierwsza kolumna liczb), obliczając w Excelu wartości funkcji (6.8) (druga kolumna) i odmierzając je na prostych pionowych wystawionych w punktach o odciętych $10, 20, \ldots$, opr. E. Koźniewski

Aby znaleźć a, rozwiązujemy równanie np. metodą bisekcji lub jakąkolwiek metodą bądź najprościej w programie Wolfram Alpha (solve). W naszym przypadku $a = 38{,}9216$. Wróćmy do sporządzania rysunku krzywej łańcuchowej o danym parametrze a. Otóż pierwszą sprawą jest rozwiązanie równania (6.10), a w ogólnym przypadku równania

$$a\cosh\left(\tfrac{b}{2a}\right) - a - h = 0,$$

gdzie b jest rozpiętością łuku, a h jest wysokością (w Gateway Arch $b = 192$ m, $h = 192$ m).

Problem 6.3. Stumetrowy drut ważący 20 kG zwisa 5 m od poziomej poprowadzonej przez punkty zawieszenia A, B (rys. 6.1). Znaleźć napięcie T w punktach zawieszenia. Wcześniej znajdziemy (poniekąd prosty) wzór obliczania napięcia T. Z pierwszej zależności z (6.1) otrzymujemy $T = \frac{T_0}{\cos\alpha} = \left| \begin{array}{c} \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha,}} \\ y' = \operatorname{tg}\alpha \end{array} \right| = T_0\sqrt{1+(y')^2}$, czyli $T = T_0\sqrt{1+(y')^2}$. Z (6.8) mamy $T = T_0\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}$. A dalej z faktu, że $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$, mamy $T = T_0\cosh\frac{x}{a}$. Ponieważ $\frac{T_0}{q} = a$, wobec (6.8) otrzymujemy

$$T = qy. \tag{6.11}$$

Przejdźmy teraz do rozwiązania zadania: $y = h + a$ jest rzędną punktu B (rys. 6.1). Aby wykorzystać wzór (6.11), wyznaczmy a. Znamy $h = 5$ m, $q = 0{,}2$ kG/m. Długość łuku krzywej łańcuchowej (6.8) równa się

$$\begin{aligned} s &= \int_0^x \sqrt{1+(y')^2}dx = \left| \begin{array}{l} y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) \\ y' = \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \end{array} \right| = \int_0^x \sqrt{1+\left(\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right)^2}dx = \\ &= \int_0^x \sqrt{\left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right)^2}dx = \int_0^x \cosh\left(\frac{x}{a}\right)dx = a\sinh\left(\frac{x}{a}\right) = \\ &= a\sqrt{\left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right)^2 - a^2} = \\ &= \sqrt{y^2 - a^2} = \sqrt{(h+a)^2 - a^2} = \sqrt{h^2 + 2ah}. \end{aligned}$$

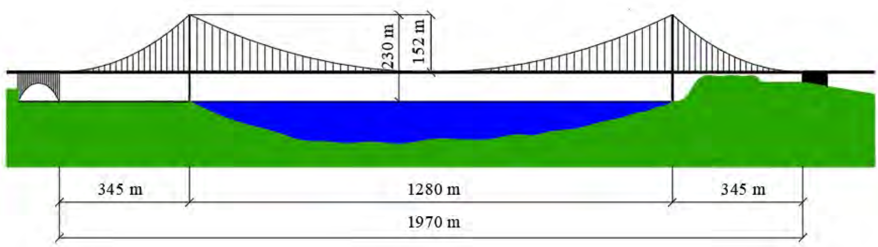
Zatem $s^2 = h^2 + 2ah$, a stąd $a = \frac{s^2-h^2}{2h}$. Zatem $a = \frac{50^2-5^2}{2\cdot 5} = 247{,}5$ m. Wracając do określenia napięcia drutu wobec (6.11), mamy

$$T = q(h+a) = 0{,}2 \cdot (5 + 247{,}5)\ \mathrm{kG} = 0{,}2 \cdot 252{,}5\ \mathrm{kG} = 52{,}5\ \mathrm{kG}.$$

Mając narysowane odcinki pionowe, rysujemy krzywą spline, łącząc kolejno górne końce odcinków.

6.2. Zadania

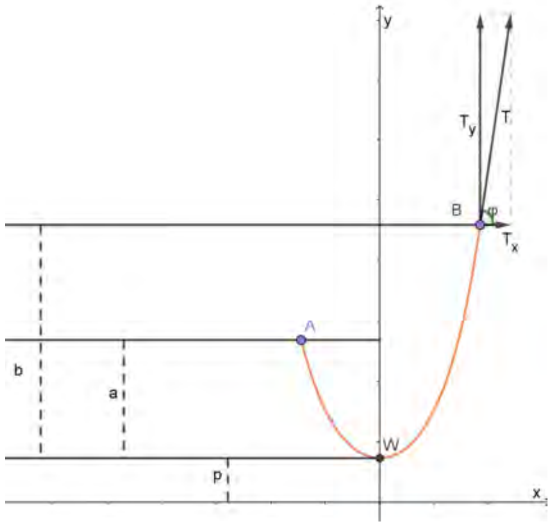
1. Znaleźć wartość parametru a kształtu krzywej łańcuchowej Golden Gate Bridge (rys. 6.4). Budowla ma długość 2700 m. Odległość między dwoma pylonami wynosi 1280 m. Wysokość pylonów jest równa 230 m, w tym wysokość pylonów, mierzona od jezdni (nawierzchni), wynosi 152 m.



Rysunek 6.4: Podstawowe wymiary mostu wiszącego Golden Gate Bridge łączącego San Francisco z Marin County w Kaliforni (USA), wyk. E. Koźniewski na podstawie [23]

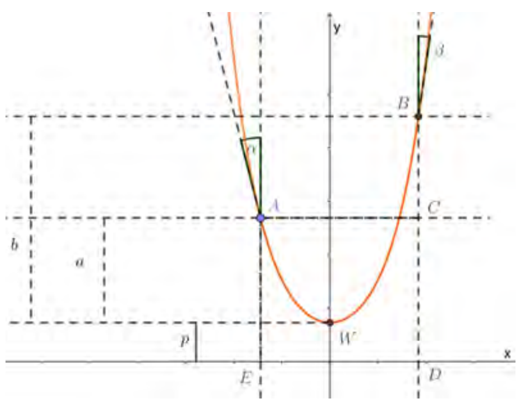
2. Ile metrów sznura/łańcucha należy zakupić, aby móc ogrodzić chodnik (z obydwu stron) o długości 10,4 m, a sznur/łańcuch ma zwisać swobodnie około 55 cm nad ziemią? Ile słupków wysokości 70 cm należy kupić i jaki rozstaw będą miały?
3. Rozważmy ciężki sznur o długości l[m], jego metr waży k[kg]. Jeden koniec jest umocowany w punkcie M, drugi zaś styka A z poziomą powierzchnią gruntu. Wysokość punktu M nad poziomem wynosi h. Wyznaczyć naprężenie sznura w punktach M, A [57].
4. Ciężki łańcuch, którego ciężar na jednostkę długości wynosi q, zawieszono na dwóch kołkach A i B. Różnica wysokości pomiędzy punktem B a najniższym punktem łańcucha W wynosi b, pomiędzy A i W

wynosi a, długość łańcucha od B do W jest równa β, z kolei od A do W wynosi α. Oblicz naprężenie (reakcje) łańcucha na kołki oraz kąty, jakie te naprężenia tworzą z poziomem (rys. 6.5) [60].



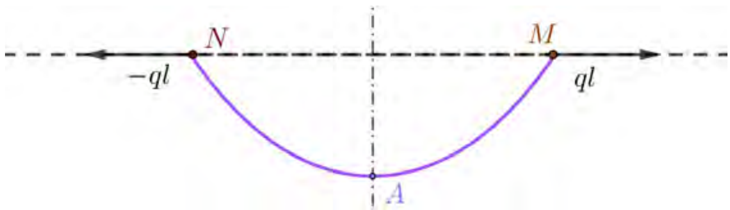
Rysunek 6.5: Ilustracja do zad. 4, opr. A. Tereszkiewicz

5. Styczne w punktach zawieszenia ciężkiego łańcucha o długości s tworzą z pionem kąty α, β. Oblicz wysokość jednego z punktów zawieszenia nad drugim (rys. 6.6) [60].



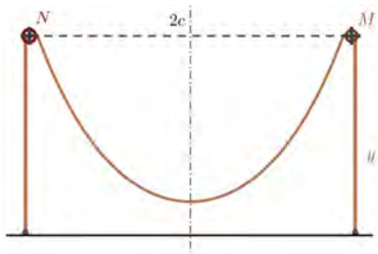
Rysunek 6.6: Ilustracja do zad. 5, opr. A. Tereszkiewicz

6. Na nieruchomy drążek poziomy, zupełnie gładki, nawleczono dwa pierścienie M i N, do których przymocowano końce ciężkiego łańcucha o długości $2l$. Gdyby układ pozostawiony był samemu sobie, to pierścienie M i N zeszłyby się i łańcuch przybrałby położenie pionowe. Aby temu zapobiec, przykładamy do pierścieni dwie równe i skierowane na zewnątrz siły – każda z tych sił jest równa ciężarowi połowy łańcucha. Wyznacz odległości pierścieni w stanie równowagi [57].



Rysunek 6.7: Ilustracja do zad. 6, opr. A. Tereszkiewicz

7. Dwa gładkie kołki M i N leżą na jednym poziomie. Odległość pomiędzy nimi jest równa $2c$. Zawieszamy na tych kołkach ciężki sznur (rys. 6.8). Jaka powinna być co najmniej długość sznura, aby równowaga była możliwa? (Jeżeli sznur będzie zbyt krótki, to zsunie się z kołków do środka) [57].



Rysunek 6.8: Ilustracja do zad. 7, opr. A. Tereszkiewicz

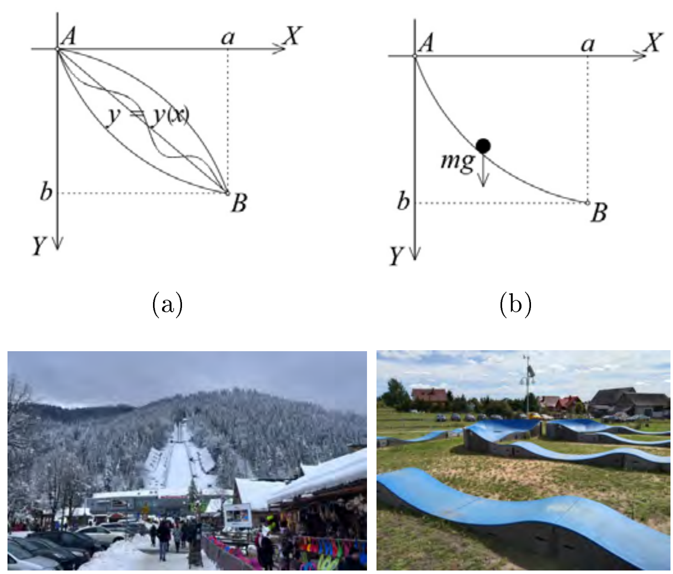
8. Znaleźć wymiary wybranych dwu budowli opartych na kształcie krzywych łańcuchowych: mosty, sklepienia, łuki; wyznaczyć parametr krzywej łańcuchowej i narysować tę krzywą w obydwu przypadkach.

Rozdział 7

Powierzchnie o szybkim rozbiegu – brachistochrona w skateparku, akwaparku i na skoczni narciarskiej

7.1. Zagadnienie brachistochrony — przykład ekstremum funkcjonału

Problem 7.1. Niech punkt materialny zsuwa się bez tarcia pod wpływem siły ciężkości po krzywej łączącej punkty A i B (rys. 7.1a). Tak zwane *zagadnienie brachistochrony* (gr. *brachys* – krótki, *chronos* – czas) polega na wyznaczeniu spośród wszystkich krzywych łączących punkty A i B takiej, po której punkt materialny zsunie się w najkrótszym czasie.



Rysunek 7.1: Ilustracja zagadnienia brachistochrony: (a) założenia do zagadnienia brachistochrony, opr. E. Koźniewski; (b) punkt materialny zsuwający się bez tarcia, opr. E. Koźniewski; (c) rozbieg Wielkiej Krokwi w Zakopanem, fot. S. Kudźma; (d) skatepark w Sobolewie. Czy tu szybkie zjazdy są pożądane? Fot. E. Koźniewski

Jest to pierwsze historycznie zagadnienie *rachunku wariacyjnego* (1696, Johann Bernoulli).

Rozwiązanie. Niech $y = y(x)$ będzie równaniem krzywej, po której zsuwa się punkt materialny (rys. 7.1b). W układzie OXY zgodnie z prawem ciążenia możemy zapisać $y = \frac{gt^2}{2}$, gdzie g oznacza przyśpieszenie ziemskie, t czas. Pomnóżmy obustronnie przez g i otrzymujemy $gy = \frac{g^2t^2}{2}$. Po uwzględnieniu $v = gt$, otrzymujemy $v = \sqrt{2gy}$. Równocześnie po oznaczeniu przez l drogi przebytej przez punkt, prędkość chwilowa v wyraża się $v = \frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}dx}{dt}$ (wszak $dl = \sqrt{1+(y')^2}dx$). Dostajemy

$$dt = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}dx. \tag{7.1}$$

Czas zsuwania się punktu jest równy całce

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^a \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}dx. \tag{7.2}$$

Otrzymujemy czas T jako funkcjonał $J[y] = \int\limits_0^a F(x,y,y')dx = \int\limits_0^a \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}dx$. Zgodnie z twierdzeniem Eulera punkt ekstremalny przestrzeni funkcyjnej $C_{[0,a]}$ (czyli funkcja) powinien spełniać warunek

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{7.3}$$

Obliczamy pochodną funkcji $F(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$ względem y (y' i g są stałymi, funkcję $F(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$ można zapisać w postaci $F(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)'_y = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g}}\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)'_y =$$
$$= \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g}}\left(-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g}}\frac{1}{y\sqrt{y}}.$$

Obliczamy pochodną funkcji $F(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$ względem y' (y i g są stałymi, funkcję $F(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$ można zapisać w postaci $F(x,y,y') = \frac{1}{\sqrt{2g}\sqrt{y}}\sqrt{1+(y')^2}$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y'} &= \frac{1}{\sqrt{2g}\sqrt{y}}\left(\sqrt{1+(y')^2}\right)'_{y'} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}\sqrt{y}}\frac{1}{2\sqrt{1+(y')^2}}\cdot 2y' = \frac{1}{\sqrt{2g}\sqrt{y}}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}.\end{aligned}$$

Po obliczeniu pochodnych $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{2y\sqrt{2gy}}$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gy(1+(y')^2)}}$ i podstawieniu do (7.3) otrzymujemy równanie

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{2y\sqrt{2gy}} - \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{2gy(1+(y')^2)}} = 0, \tag{7.4}$$

które możemy pomnożyć obustronnie przez $\sqrt{2g}$ i otrzymamy (wcześniej $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ wyłączamy przed pochodną)

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{2y\sqrt{y}} - \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{y(1+(y')^2}} = 0. \tag{7.5}$$

Pozostaje do obliczenia pochodna $\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{y(1+(y')^2)}}$. Tu trzeba pamiętać, że y i y' są funkcjami zmiennej x. Zatem korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu (uwzględniając pochodną iloczynu funkcji wewnętrznej)

$$\left(y(1+(y')^2)\right)' = y'\left(1+(y')^2\right) + y\cdot 2y'\cdot y'',$$

otrzymujemy

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{y(1+(y')^2}} = \frac{y''\sqrt{y(1+(y')^2)} - \frac{y'(y'(1+(y')^2)+y\cdot 2y'\cdot y'')}{2\sqrt{y(1+(y')^2)}}}{y(1+(y')^2)}. \tag{7.6}$$

Licznik sprowadzamy do wspólnego mianownika

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{y(1+(y')^2}} = \frac{\frac{2y''(y(1+(y')^2)-y'(y'(1+(y')^2)+2yy'y'')}{2\sqrt{y(1+(y')^2)}}}{y(1+(y')^2)}. \tag{7.7}$$

Porządkujemy licznik licznika ułamka i zapisujemy z użyciem jednej kreski ułamkowej

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{y(1+(y')^2}} = \frac{2y''y + 2yy'(y')^2 - (y')^2 - (y')^4 - 2y(y')^2y''}{2\sqrt{y(1+(y')^2)}y(1+(y')^2)}. \tag{7.8}$$

Po zredukowaniu dwóch iloczynów $2y(y')2y''$ w liczniku otrzymany wynik

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{y(1+(y')^2}} = \frac{2y''y - (y')^2 - (y')^4}{2\sqrt{y(1+(y')^2)}y(1+(y')^2)} \tag{7.9}$$

wstawiamy do (7.5)

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{2y\sqrt{y}} - \frac{2y''y - (y')^2 - (y')^4}{2\sqrt{y(1+(y')^2)}y(1+(y')^2)} = 0. \tag{7.10}$$

Po pomnożeniu obu stron równania przez $2\sqrt{y(1+(y')^2)}y$ otrzymamy

$$-(1+(y')^2) - \frac{2y''y - (y')^2 - (y')^4}{1+(y')^2} = 0. \tag{7.11}$$

Po zapisaniu na wspólnej kresce ułamkowej otrzymujemy

$$\frac{-(1+(y')^2)(1+(y')^2) - 2y''y + (y')^2 + (y')^4}{1+(y')^2} = 0. \tag{7.12}$$

Ułamek jest równy zeru wtedy i tylko wtedy, gdy licznik jest równy zeru. Zatem, po zredukowaniu wyrażeń $(y')^4$ mamy

$$-1 - (y')^2 - 2y''y = 0. \tag{7.13}$$

Po przekształceniu, ostatecznie otrzymujemy równanie różniczkowe rzędu drugiego w postaci

$$\frac{y''}{1+(y')^2} = -\frac{1}{2y}. \tag{7.14}$$

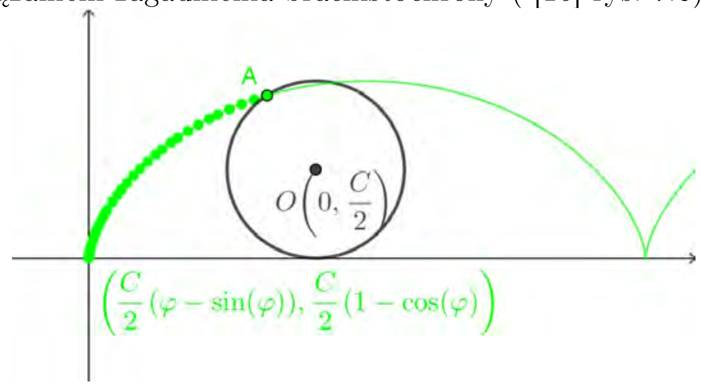
W celu rozwiązania równania (7.14) wprowadzamy nową zmienną $y' = u(y)$. Po obliczeniu pochodnej mamy $y'' = u'y' = uu'$. Po podstawieniu otrzymujemy

$$\frac{uu'}{1+u^2} = -\frac{1}{2y} \Leftrightarrow \frac{u}{1+u^2}\frac{du}{dy} = -\frac{1}{2y} \Leftrightarrow \frac{2u}{1+u^2}du = -\frac{1}{y}dy$$
$$\Leftrightarrow \ln(1+u^2) = -\ln y + C^* \Leftrightarrow \ln y = \ln C - \ln(1+u^2) \Leftrightarrow y = \frac{C}{1+u^2}.$$

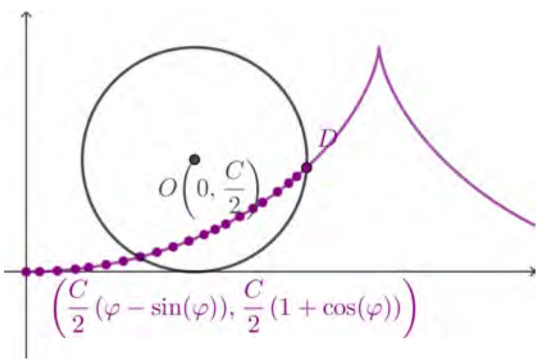
W ostatnim równaniu podstawiamy $u = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$, gdzie $\varphi(x)$ jest funkcją niewiadomą. Mamy $y = \frac{C}{2}(1-\cos\varphi)$. Ponieważ $y' = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}$ i $y' = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$, czyli $\frac{dx}{d\varphi} = \frac{C}{2}(1-\cos\varphi)$. Po scałkowaniu otrzymamy $x = \frac{C}{2}(\varphi - \sin\varphi) + C_1$. Z równości $y(0) = 0$ otrzymujemy $C_1 = 0$, z kolei z $y(a) = b$ wynika, że istnieje stała C, przy której cykloida (rys. 7.2)

$$\begin{cases} x = \frac{C}{2}(\varphi - \sin\varphi) \\ y = \frac{C}{2}(1-\cos\varphi) \end{cases}$$

jest rozwiązaniem zagadnienia brachistochrony ([10] rys. 7.3).



Rysunek 7.2: Cykloida, opr. A. Tereszkiewicz

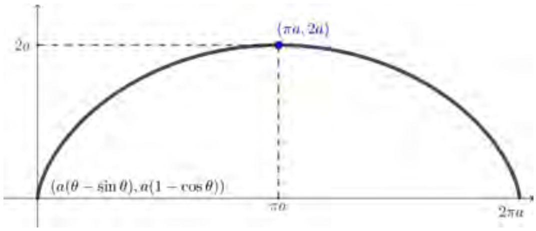


Rysunek 7.3: Brachistochrona, opr. A. Tereszkiewicz

Brachistochrona jest równocześnie *tautochroną*, [27] tj. krzywą, po której punkt materialny pod wpływem siły ciężkości stacza się do najniższego punktu krzywej w takim samym czasie, niezależnie od punktu startowego na tej krzywej.

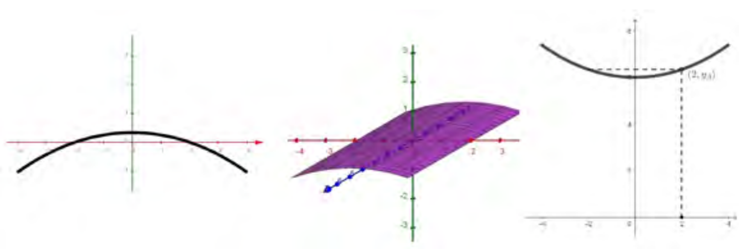
7.2. Zadania

1. Obliczyć pole i obwód otworu okiennego, którego krawędź jest cykloidą mającą w najwyższym punkcie wysokość 4 m. Jak długi parapet należałoby zamontować?

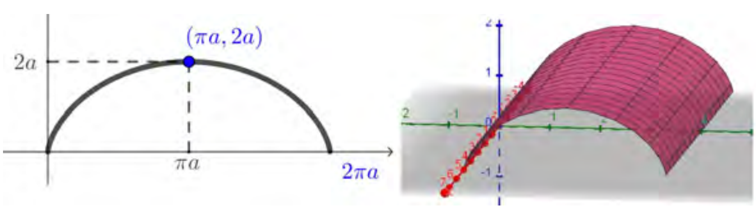


Rysunek 7.4: Ilustracja do zad. 1, opr. A. Tereszkiewicz

2. Do przekrycia wąskich prostokątów używamy najczęściej powłok walcowych. Ich przekrój poprzeczny może być kołem, elipsą, parabolą, cykloidą, krzywą łańcuchową. Oświetlenie można otrzymać przez wykonanie świetlików wzdłuż długości łupiny bądź też dzięki zastosowaniu świetlików gąsienicowych. Obliczyć powierzchnię dachu budynku o wymiarach 4×10 m, którego przekrojem poprzecznym jest:
   a) krzywa łańcuchowa dla $a = -6$,
   b) cykloida dla $a = \frac{2}{\pi}$.



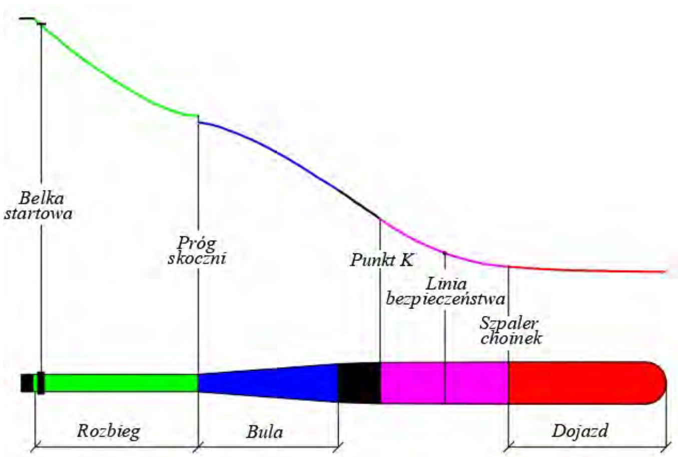
(a)



(b)

Rysunek 7.5: Ilustracja do zad. 2, opr. A. Tereszkiewicz

3. Obliczyć kubaturę budynku o wysokości 5 m z zadania 2.
4. Łuk cykloidy obraca się dokoła własnej osi symetrii. Znaleźć pole powstałej przy tym powierzchni. (Taka odwrócona cykloida może stanowić punkt wyjściowy przy planowaniu skateparków, a zwłaszcza jump boxów, z profilem wybicia będącym wycinkiem cykloidy, czyli krzywej stawiającej najmniejszy opór toczącemu się kołu, przez co taki jump box wybija rewelacyjnie mimo niezbyt dużej wysokości).
5. Wykorzystując równanie brachistochrony i paraboli, opisać model skoczni narciarskiej.
6. Wyznaczyć parametry φ i C dla cykloidalnych krzywych rozbiegu (rozwiązanie zagadnienia brachistochrony) wybranych dwóch skoczni narciarskich.



Rysunek 7.6: Schemat skoczni narciarskiej, wyk. E. Koźniewski na podstawie [24]

Rozdział 8

Drgania w mechanice budowli

8.1. Wartości i wektory własne operatora oraz diagonalizacja macierzy

Dla operatora liniowego (*endomorfizmu*) $A : X \to X$ określamy wartość własną i wektor własny operatora. Jeżeli I jest operatorem tożsamościowym (jednostkowym $x = Ix$) i istnieje taka liczba λ i niezerowy wektor $x \in X$, że dla operatora A zachodzi

$$Ax = \lambda x, \tag{8.1}$$

to liczbę λ nazywamy *wartością własną* operatora A, natomiast x nazywamy *wektorem własnym* operatora A. W przestrzeni n–wymiarowej nad ciałem liczb rzeczywistych (zespolonych) operator liniowy ma reprezentację macierzową. Wtedy zapis Ax oznacza iloczyn macierzy A i wektora x.

Twierdzenie 8.1. Dla macierzy A następujące warunki są równoważne:

$$\begin{aligned} &1)\quad \lambda \text{ jest wartością własną } A,\\ &2)\quad \text{układ równań } (A-\lambda I)x = 0 \text{ ma niezerowe rozwiązanie,}\\ &3)\quad \det(A-\lambda I) = 0. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Wielomian $\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ nazywamy *wielomianem charakterystycznym* macierzy A. W ciele liczb zespolonych wielomian ma n pierwiastków (liczonych z krotnościami). Dla macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(1 - \lambda)(2 - \lambda)(1 + \lambda)$.

Operator liniowy jest *diagonalizowalny*, jeżeli istnieje baza w przestrzeni, w której jego macierz jest diagonalna.

Mówimy, że macierz A jest podobna do macierzy B ($A \sim B$), jeżeli istnieje macierz nieosobliwa P, taka że $A = PBP^{-1}$. Podobieństwo $\sim$ macierzy jest relacją równoważnościową, tj. zwrotną ($A \sim A$), symetryczną ($A \sim B \to B \sim A$) i przechodnią ($A \sim B \wedge B \sim C \to A \sim C$).

Macierze podobne mają ten sam wielomian charakterystyczny. Rzeczywiście, niech $A = PBP^{-1}$, wówczas $\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(PBP^{-1} - \lambda I) = \det(PBP^{-1} - \lambda PIP^{-1}) = \det P(B - \lambda I)P^{-1} = \det P \det(B - \lambda I) \det P^{-1} = \det(B - \lambda I) = \varphi_B(\lambda)$.

Mówimy, że macierz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ jest *diagonalizowalna*, jeżeli jest podobna do macierzy diagonalnej $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn})$.

Z identyczności wielomianów charakterystycznych dwu macierzy nie wynika diagonalizowalność obu z nich. Jako przykład można wziąć macierze $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Prawdziwe jest

Twierdzenie 8.2. Macierz $An \times n$ ($A \in R^{n\times n}$) jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy:

(a) jej wielomian charakterystyczny ma n pierwiastków (liczonych z krotnościami);
(b) dla każdej wartości własnej macierzy A można wybrać tyle wektorów własnych, ile wynosi krotność tej wartości własnej jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego.

Ponadto, jeżeli $v_1, v_2, \ldots, v_n$ są liniowo niezależnymi wektorami własnymi macierzy diagonalizowalnej A odpowiadającymi jej wartościom własnym $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (niekoniecznie różnym), to macierz $P = [v_1 v_2 \ldots v_n]$ jest macierzą ustalającą podobieństwo pomiędzy macierzami A oraz $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, tj. $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ (lub $A = P\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$).

Przykład 8.1. Dokonać diagonalizacji macierzy $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie. Najpierw znajdujemy wartości własne macierzy, tj. poszukujemy niezerowych rozwiązań równania $(A - \lambda I)x = 0$. Ma być $\det(A - \lambda I) = 0$.

Obliczamy wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-10) = 0.$$

Otrzymujemy wartości własne i ich krotności algebraiczne $\lambda_1 = 1, k_1 = 2$; $\lambda_2 = 10, k_2 = 1$.

Niech $\lambda_1 = 1$. Za λ w równaniu $(A - \lambda I)x = 0$ podstawiamy 1 i rozwiązujemy układ $\begin{bmatrix} 5-1 & 4 & 2 \\ 4 & 5-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Przekształcamy macierz rozszerzoną układu (operując na wierszach)
$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[w_3 - \frac{1}{2}w_1 \to w_3]{w_2 - w_1 \to w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow{\frac{1}{4}w_1 \to w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Otrzymujemy równanie $x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0$. Podstawiając $x_3 := \alpha$, $x_2 := \beta$ mamy $x_1 = -\beta - \frac{1}{2}\alpha$, $x_2 := \beta, x_3 := \alpha$, czyli
$\begin{bmatrix} -\beta - \frac{1}{2}\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Mamy dwa wektory liniowo niezależne $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Rozpinają więc przestrzeń dwuwymiarową, zatem krotność geometryczna jest równa $n_1 = 2$.

Niech $\lambda_2 = 10$. Za λ w równaniu $(A - \lambda)x = 0$ podstawiamy 10 i rozwiązujemy układ $\begin{bmatrix} 5-10 & 4 & 2 \\ 4 & 5-10 & 2 \\ 2 & 2 & 2-10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Przekształcamy macierz rozszerzoną układu (operując na wierszach)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -5 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -8 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow{w_1+w_2\to w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -8 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[w_2+w_1\to w_2]{w_3+2w_1\to w_3}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow{\frac{1}{3}w_2\to w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow{w_2+w_1\to w_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow{\frac{1}{3}w_2\to w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[-w_2\to w_2]{-w_1\to w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Otrzymujemy równanie $\left\{\begin{array}{r} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{array}\right.$.

Po podstawieniu za $x_3 := \alpha$ i rozwiązaniu otrzymujemy $x_1 := 2\alpha$, $x_2 := 2\alpha$ i $x_3 := \alpha$. Mamy jeden wektor liniowo niezależny $\alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Mamy więc $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Stąd krotność geometryczna $n_2 = 1$. Macierz $P = [v_1 v_2 v_3] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ diagonalizuje macierz A. Aby to sprawdzić, wyznaczymy najpierw macierz odwrotną do macierzy $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Zastosujemy metodę eliminacji Gaussa:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow[w_2+w_1\to w_2]{-w_1\to w_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{w_1+w_2\to w_1}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{w_3+2w_2\to w_3} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow{\substack{w_1-\frac{2}{9}w_3\to w_1 \\ -w_2+\frac{4}{9}w_3\to w_2 \\ \frac{1}{9}w_3\to w_3}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right].$$

Otrzymujemy macierz $P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$.

Sprawdzamy poprawność wyznaczenia odwrotności macierzy przez pomnożenie:

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na koniec sprawdzamy, czy rzeczywiście macierz P diagonalizuje A. Realizujemy to przez pomnożenie

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{20}{9} & \frac{20}{9} & \frac{10}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

8.2. Zwyczajne równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego

a) **Drgania mechaniczne swobodne.** Niech na punkt materialny o masie m ($m > 0$) działa siła sprężysta proporcjonalna do odchylenia x ($x(t)$ jest funkcją czasu t) i skierowana zawsze ku punktowi równowagi O. Oznaczając współczynnik proporcjonalności przez k, na podstawie praw mechaniki zapisujemy

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{8.4}$$

Równoważnie możemy zapisać

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \tag{8.5}$$

W innych notacjach przedstawiania pochodnych mamy równoważne zapisy równania

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{lub} \quad mx'' + kx = 0. \tag{8.6}$$

Możemy jeszcze równanie przedstawić w postaci

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0. \tag{8.7}$$

Jest to równanie *różniczkowe liniowe rzędu drugiego jednorodne* o stałych współczynnikach.

b) **Drgania mechaniczne tłumione.** Załóżmy teraz, że na punkt materialny o masie m oprócz siły sprężystej działa siła oporu ośrodka proporcjonalna do prędkości $-\lambda\frac{dx}{dt}$, gdzie λ jest współczynnikiem oporu. Otrzymujemy wówczas

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda\frac{dx}{dt}, \tag{8.8}$$

czyli

$$x'' + \frac{\lambda}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0. \tag{8.9}$$

c) **Drgania mechaniczne wymuszone.** Możemy rozważyć także sytuację, w której działa dodatkowa siła $f(t)$ wymuszająca drgania. Otrzymujemy wtedy równanie niejednorodne

$$x'' + \frac{\lambda}{m}x' + \frac{k}{m}x = f(t). \tag{8.10}$$

8.3. Równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego o współczynnikach stałych

Aby rozwiązać zagadnienia ruchu drgającego, przypomnimy sposób rozwiązania równania różniczkowego liniowego rzędu drugiego o współczynnikach stałych i niewiadomej funkcji $y(x)$, które zapisujemy w postaci

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{8.11}$$

gdzie p, q są danymi liczbami (stałymi) rzeczywistymi, $f(x)$ jest daną funkcją ciągłą. Równanie jednorodne równania (8.11) ma wówczas postać

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{8.12}$$

Najpierw wyznaczymy tzw. układ podstawowy całek równania (8.12), który jest bazą przestrzeni liniowej stanowiącej rozwiązanie równania (8.12). Całek tych będziemy poszukiwać w postaci funkcji wykładniczej

$$y = e^{rx}. \tag{8.13}$$

Obliczmy $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$. Po podstawieniu mamy

$$r^2 + pr + q = 0. \tag{8.14}$$

Równanie kwadratowe (8.14) nazywamy równaniem charakterystycznym dla równania (8.12). Wówczas $\Delta = p^2 - 4q$. Mamy trzy przypadki:

- Przypadek $\Delta > 0$. Równanie ma wówczas dwa różne pierwiastki rzeczywiste r_1 i r_2. Łatwo sprawdzić, że funkcje $y_1(x) = e^{r_1 x}$ oraz $y_2(x) = e^{r_2 x}$ stanowią układ podstawowy całek (obliczamy wrońskian $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)) \end{vmatrix}$, który powinien być różny od zera). Istotnie, $W(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{r_1 x} e^{r_2 x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = e^{r_1 x} e^{r_2 x}(r_1 - r_2) \neq 0$, wszak $r_1 \neq r_2$.

Całki szczególne równania (8.11) możemy znajdować metodą przewidywań lub metodą uzmienniania stałych.

Przykład 8.2. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $y'' + 3y' + 2y = 0$.

- Przypadek $\Delta = 0$. Równanie ma wówczas jeden pierwiastek rzeczywisty podwójny r_0. Łatwo sprawdzić, że funkcje $y_1(x) = e^{r_0 x}$ oraz $y_2(x) = xe^{r_0 x}$ stanowią układ podstawowy całek (sprawdzamy, że $y_2(x) = xe^{r_0 x}$ jest całką szczególną i obliczamy wrońskian).

Przykład 8.3. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $y'' + 2y' + y = 0$.

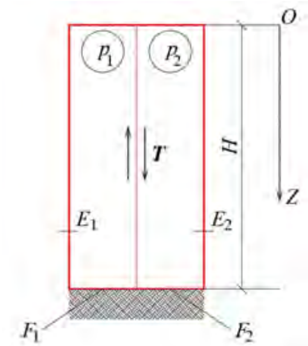
- Przypadek $\Delta < 0$. Równanie ma wówczas dwa różne pierwiastki zespolone sprzężone $r_1 = \alpha + \beta i$ i $r_2 = \alpha - \beta i$. Wówczas okazuje się, że funkcje postaci $y_1(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$ oraz $y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ stanowią układ podstawowy całek (sprawdzamy, że są to całki szczególne i obliczamy wrońskian).

Przykład 8.4. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $y'' + 4y = 0$.

Przykład 8.5. (sformułowanie zadania: prof. C. Miedziałowski na podstawie [52]) Rozpatrywany jest budynek obciążony poziomo. Układ statyczny złożony jest z dwóch pasm umownie rozciętych wzdłuż przekroju pionowego (rys. 8.1). Niech $T(z)$ oznacza sumę sił tnących (siłę tnącą) działającą wzdłuż przekroju poprzecznego (rys. 8.1). Siła $T(z)$ spełnia następujące równanie różniczkowe [52]

$$T''(z) - \alpha^2 T(z) = -\beta(z), \tag{8.15}$$

gdzie $\alpha^2 = \left(\frac{p_2}{E_2F_2} - \frac{p_1}{E_1F_1}\right)$, $\beta(z) = \left(\frac{p_2}{E_2F_2} - \frac{p_1}{E_1F_1}\right)z = pz$, $p = \frac{p_2}{E_2F_2} - \frac{p_1}{E_1F_1}$, przy czym E_i – moduł Younga, F_i – przekrój, p_i – obciążenie, $i = 1, 2$. Warunki początkowe mają postać $T(0) = 0$, $T'(H) = 0$.



Rysunek 8.1: Układ statyczny złożony z dwóch pasm (opr. E. Koźniewski na podstawie [52])

Rozwiązanie rozpoczyna się od zapisania równania zgodnie z (8.12)

$$T''(z) - 2T(z) = 0. \tag{8.16}$$

Rozwiązanie ogólne równania (8.16) ma postać

$$T^*(z) = c_1e^{\alpha z} + c_2e^{-\alpha z}. \tag{8.17}$$

Znajdźmy rozwiązanie szczególne (8.11), przyjmując $T_s(z) = az$. Stąd $T_s'(z) = a$, $T_s''(z) = 0$. Po podstawieniu do (8.15) otrzymujemy $-\alpha^2 az = -pz \leftrightarrow -\alpha 2a = -p \leftrightarrow a = \frac{p}{\alpha^2}$. Zatem rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego ma postać

$$T(z) = c_1e^{\alpha z} + c_2e^{-\alpha z} = \frac{p}{\alpha^2}z. \tag{8.18}$$

Po uwzględnieniu warunków początkowych otrzymujemy $c_1 + c_2 = 0$, $c_1\alpha e^{\alpha H} - c_2\alpha e^{-\alpha H} + \frac{p}{\alpha^2} = 0$. Rozwiązując układ równań, otrzymujemy: $c_2 = -c_1$, $c_1 = \frac{-p}{\alpha^3(e^{\alpha H}+e^{-\alpha H})} \leftrightarrow c_1 = \frac{-p}{\alpha^3(e^{\alpha H}+e^{-\alpha H})}$, $c_2 = \frac{p}{\alpha^3(e^{\alpha H}+e^{-\alpha H})}$. Zważywszy, że $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (definicja kosinusa hiperbolicznego), wartości c_1 i c_2 możemy zapisać $c_1 = \frac{-p}{2\alpha^3 \cosh(\alpha H)}$, $c_2 = \frac{p}{2\alpha^3 \cosh(\alpha H)}$. Zatem $T(z) = \frac{-p}{\alpha^3 \cosh(\alpha H)} \frac{1}{2} \left(e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}\right) + \frac{p}{\alpha^2} z$, czyli (jako rozwiązanie ostateczne)

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{-p}{\alpha^3 \cosh(\alpha H)} \sinh(\alpha z) + \frac{p}{\alpha^2} z = \\ &= \frac{p}{\alpha^2} \left(z - \frac{1}{a \cosh(\alpha H)} \sinh(\alpha z) \right). \end{aligned} \tag{8.19}$$

8.4. Problem drgań w zagadnieniach mechaniki budowli

Drgania konstrukcji o n stopniach swobody opisane są równaniem ruchu postaci [53]

$$Mq''(t) + Cq'(t) + Kq(t) = F(t), \tag{8.20}$$

z warunkami początkowymi $q(0) = q_0$, $q'(0) = q'_0$, gdzie:
M, C, K – odpowiednio macierze mas, tłumienia i sztywności,
$q''(t), q'(t), q(t)$ – odpowiednio wektory przyśpieszenia, prędkości i przemieszczeń uogólnionych,
$F(t)$ – obciążeń zewnętrznych.
Przyjmując z prawej strony wektor zerowy, otrzymamy tłumione drgania swobodne układu (konstrukcji):

$$Mq''(t) + Cq'(t) + Kq(t) = 0. \tag{8.21}$$

Rozwiązania przewidujemy w postaci

$$q(t) = ue^{\lambda t}, \tag{8.22}$$

gdzie u i λ są stałymi (ogólnie zespolonymi). Zgodnie z (8.21) otrzymujemy równanie postaci

$$M\lambda^2 + C\lambda + K = 0. \tag{8.23}$$

Po wyzerowaniu macierzy tłumienia C otrzymujemy nietłumione drgania swobodne układu

$$Mq''(t) + Kq(t) = 0. \tag{8.24}$$

Jest to układ jednorodnych równań różniczkowych o stałych współczynnikach. Rozwiązanie przewiduje się w postaci

$$q(t) = q_a \sin(\omega t), \tag{8.25}$$

gdzie:
q_a – wektor amplitud zwany też wektorem postaci drgań,
ω – częstość $[rad]$,
$f = \frac{\omega}{2\pi}$ – częstość kołowa $[Hz]$,
$T = \frac{1}{f}$ – okres $[s]$.
Po dwukrotnym zróżniczkowaniu

$$q''(t) = -\omega^2 q_a \sin(\omega t), \tag{8.26}$$

i podstawieniu do (8.24) otrzymujemy

$$(K - \omega^2 M) q_a = 0. \tag{8.27}$$

Podstawiając $\lambda = \omega^2$, mamy liniowy uogólniony problem własny (niestandardowy)

$$(K - \lambda M) q_a = 0. \tag{8.28}$$

Rozwiązuje się go przez wyznaczenie wielomianu charakterystycznego, obliczenie wyznacznika $\det|K - \lambda M| = 0$ i rozwiązanie równania. Jednakże jest to niewygodne i warte zastosowania jedynie w przypadku małych układów. Uogólniony problem własny rozwiązuje się, sprowadzając go najpierw do standardowego problemu własnego postaci

$$(H - \Lambda I) Y = 0, \tag{8.29}$$

gdzie:
H – macierz symetryczna,
I – macierz jednostkowa,
Y – wektor własny,
Λ – wartości własne macierzy H.
Mnożąc równanie (8.28) przez M^{-1}, otrzymamy

$$\left(M^{-1} K - \lambda I\right) q_a = 0. \tag{8.30}$$

Po podstawieniu $q_a = (L^T)^{-1} Y$ w równaniu (8.30) otrzymujemy

$$\left(M^{-1} K - \lambda I\right) (L^T)^{-1} Y = 0. \tag{8.31}$$

Przyjmując $M = LL^T$ i uwzględniając równość $M^{-1} = (LL^T)^{-1} = (L^T)^{-1} L^{-1}$, mamy

$$\left(\left(L^T\right)^{-1} L^{-1} K \left(L^T\right)^{-1} - \lambda I \left(L^T\right)^{-1}\right) Y = 0. \tag{8.32}$$

Jeszcze raz mnożymy (8.32) przez L^T od prawej strony i otrzymujemy

$$\left(L^T\left(L^T\right)^{-1}L^{-1}K\left(L^T\right)^{-1}-\lambda L^T I\left(L^T\right)^{-1}\right)Y=0. \tag{8.33}$$

Po przekształceniach upraszczających mamy $L^T\left(L^T\right)^{-1}=I, IL^{-1}=L^{-1}$

$$\left(L^{-1}K\left(L^T\right)^{-1}-\lambda I\right)Y=0, \tag{8.34}$$

a po podstawieniu $H=L^{-1}K\left(L^T\right)^{-1}$ otrzymujemy (8.29), gdzie H jest macierzą symetryczną, wszak $H^T=H$.

8.5. Triangularyzycja Banachiewicza – Choleskiego

Ponieważ macierz $M^{-1}K$ omawiana w rozdziale 8.4 nie jest symetryczna, chociaż M jest symetryczna, symetryzacji macierzy dokonuje się przez *triangularyzycję Banachiewicza – Choleskiego*. Jeżeli macierz A jest symetryczna oraz dodatnio określona $(X^TAX)>0$ dla każdego X takiego, że $X\neq 0$, to istnieje macierz dolna trójkątna L taka, że $A=LL^T$.

Metoda Choleskiego polega na zastąpieniu jednego układu równań o n niewiadomych opisanego macierzą pełną

$$AX=B\Leftrightarrow(LL^T)X=B\Leftrightarrow L(L^TX)=B\Leftrightarrow L^TX=Y \text{ i } LY=B \tag{8.35}$$

dwoma układami równań również o n niewiadomych, ale za to opisanymi macierzami trójkątnymi

$$L^TX=Y, \tag{8.36}$$

$$LY=B. \tag{8.37}$$

Macierz L wyznaczamy według wzorów

$$\begin{aligned} l_{ii}&=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}^2}, && i=1,2,\ldots,n,\\ l_{ji}&=\left(a_{ji}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{jk}l_{ik}\right)\frac{1}{l_{ii}}, && j=1,2,\ldots,i-1. \end{aligned} \tag{8.38}$$

Przykład 8.6. Rozwiązać równanie $AX=B$, gdzie

$$A=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&5&3\\2&3&6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix}. \tag{8.39}$$

Rozwiązanie. Przedstawiamy $A = LL^T$. Korzystając ze wzorów (8.38)

$$\begin{array}{lll} i=1: \; l_{11} = \sqrt{4} = 2, & l_{21} = \frac{2}{2} = 1, & l_{31} = \frac{2}{2} = 1, \\ i=2: \; l_{22} = \sqrt{5-1^2} = 2, & l_{32} = \frac{3-1\cdot 1}{2} = 1, & \\ i=3: \; l_{33} = \sqrt{6-1\cdot 1 - 1\cdot 1} = 2 & & \end{array} \tag{8.40}$$

otrzymujemy ostatecznie rozkład $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Dla małego układu równań można dokonać rozkładu, nie posługując się wzorami (8.38) (oczywiście nie możemy wtedy mówić o wykorzystaniu tego schematu w algorytmach komputerowych). Mnożymy macierze

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array} :$$

$l_{11}^2 = 4 \to l_{11} = 2;$
$l_{11} \cdot l_{12} = 2 \to l_{12} = 1;$
$l_{11} \cdot l_{13} = 2 \to l_{13} = 1;$
$l_{21} \cdot l_{11} = 2 \to l_{21} = 1;$
$l_{21} \cdot l_{12} + l_{22}^2 = 5 \to 1 \cdot 1 + l_{22}^2 = 5 \to l_{22} = 2;$
$l_{21} \cdot l_{13} + l_{22} \cdot l_{23} = 3 \to 1 \cdot 1 + 2 \cdot l_{23} = 3 \to l_{23} = 1;$
$l_{31} \cdot l_{11} = 2 \to l_{31} = 1;$
$l_{31} \cdot l_{12} + l_{32} \cdot l_{22} = 3 \to 1 \cdot 1 + l_{32} \cdot 2 = 3 \to l_{32} = 1;$
$l_{31} \cdot l_{13} + l_{32} \cdot l_{23} + l_{33}^2 = 3, 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + l_{33}^2 = 6 \to l_{33} = 2,$

czyli mamy

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Otrzymaliśmy więc dwa układy równań

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \tag{8.41}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{8.42}$$

Najpierw rozwiążemy drugi z układów, znajdujemy $y_1 = 2$ z pierwszego równania, $y_2 = \frac{1}{2}$ z drugiego równania, podstawiając za $y_1 = 2$, $y_3 = \frac{1}{4}$ z trzeciego równania, podstawiając za $y_1 = 2$, $y_2 = \frac{1}{2}$, ostatecznie mamy:

$$\left\{ \begin{aligned} 2y_1 &= 4 \\ y_1 + 2y_2 &= 3 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 &= 2 \end{aligned} \right. \leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}. \tag{8.43}$$

Potem, po podstawieniu za $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$, rozwiązujemy pierwszy układ, tzn. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$, czyli $\left\{ \begin{aligned} x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= \frac{1}{2} \\ 2x_3 &= -\frac{1}{4} \end{aligned} \right.$.
Teraz zaczynamy od ostatniego równania $2x_3 = \frac{1}{4} \leftrightarrow x_3 = -\frac{1}{8}$, podstawiając za $x_3 = -\frac{1}{8}$ w drugim równaniu otrzymujemy $2x_2 - \frac{1}{8} = = \frac{1}{2} \leftrightarrow x_2 = \frac{5}{16}$, podstawiając za $x_3 = -\frac{1}{8}$ oraz za $x_2 = \frac{5}{16}$ otrzymujemy $2x_1 + \frac{5}{16} - \frac{1}{8} = 2 \leftrightarrow x_1 = \frac{29}{32}$. Zatem rozwiązanie układu (8.39) ma postać $x_1 = \frac{29}{32}$, $x_2 = \frac{5}{16}$, $x_3 = -\frac{1}{8}$.

Gdy macierze M i K są symetryczne, możemy posłużyć się właśnie metodą Banachiewicza. Po dokonaniu rozkładu $M = LL^T$ jest to możliwe, ponieważ zwykle w zastosowaniach, zwłaszcza w metodzie elementów skończonych, macierz M jest symetryczna i dodatnio określona. Zapisujemy najpierw

$$M^{-1} = (LL^T)^{-1} = (L^T)^{-1}L^{-1}. \tag{8.44}$$

Znajdujemy H macierz podobną do $M^{-1}K$

$$\begin{aligned} L^T M^{-1} K (L^T)^{-1} &= L^T (L^T)^{-1} L^{-1} K (L^T)^{-1} = \\ &= L^{-1} K (L^T)^{-1} = L^{-1} K (L^{-1})^T = H. \end{aligned} \tag{8.45}$$

Macierz H ma więc takie samo widmo (zbiór wartości własnych) jak $M^{-1}K$.

Warto zauważyć, że dla dowolnej macierzy B macierz BB^T jest symetryczna i jeśli B jest nieosobliwa, to BB^T jest dodatnio określona. Sprawdźmy to:

1. Czy $(BB^T)^T = BB^T$. Ponieważ $(UV)^T = V^T U^T$, mamy $(BB^T)^T = (B^T)^T B^T = BB^T$. Zatem macierz BB^T jest symetryczna.
2. $X^T(B^T B)X = (BX)^T BX = \|BX\|^2 > 0$ dla $X > 0$. Macierz $B^T B$ jest więc dodatnio określona.

Uwaga ta pozwala uzyskać przykłady macierzy rozkładalnych metodą Banachiewicza – Choleskiego.

8.6. Zadania

1. Dokonać diagonalizacji macierzy lub wykazać, że macierz nie jest diagonalizowalna:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & -6 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; j) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; k) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; l) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; i) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; m) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Sprawdzić, że $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ nie są podobne, mimo że mają te same wartości własne.
3. Niech A i B będą macierzami obrotu $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ odpowiednio dla $\alpha = \frac{\pi}{2}$ i $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Czy są to macierze podobne?
4. Dokonać triangularyzacji metodą Banachiewicza – Choleskiego macierzy:

   a) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 14 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

   i rozwiązać odpowiednie układy równań:

   a') $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$;

   b') $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$;

   c') $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.
5. Znaleźć rozwiązania równań:

   a) $x'' + \frac{k}{m}x = 0$; b) $x'' + \frac{\lambda}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$.

Wskazówka. O równaniach ruchu drgającego można przeczytać np. pod adresem: `http://www.ftj.agh.edu.pl/~wierzbanowski/R_Harm(7).pdf` [59].

Rozdział 9

Opis pola wilgotności i kształtu membrany — zagadnienia brzegowe rozwiązywane metodą Ritza

9.1. O przybliżonych metodach rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych [29]

Równania różniczkowe cząstkowe można rozwiązywać następującymi metodami: charakterystyk, rozdzielania zmiennych, przekształceń całkowych, konforemnych, potencjałów, funkcji Grena, róznicowymi, a także metodami: Ritza, Kantorowicza, Galerkina [29].

9.1.1. Metoda Ritza

Niech $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ będzie ciągiem liniowo niezależnych funkcji, Φ zaś przestrzenią m-wymiarową, określoną jako zbiór wszystkich kombinacji liniowych

$$\psi_m = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k, \tag{9.1}$$

gdzie λ_k są dowolnymi liczbami rzeczywistymi (zespolonymi). Zauważmy, że ciąg $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ jest bazą przestrzeni Φ.

Wyznaczanie przybliżonego rozwiązania zagadnienia brzegowego o jednorodnych warunkach dla równania różniczkowego metodą Ritza polega na poszukiwaniu minimum funkcjonału $J[u]$, dla którego dane równanie różniczkowe (warunek Eulera) jest warunkiem koniecznym optymalności. Warunek Eulera dla funkcjonału

$$J[u] = \iiint\limits_{\Omega} F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z) dxdydz$$

ma postać $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial u_z} = 0$, a dla funkcjonału

$$J[u] = \iint\limits_{D} F(x, y, u, u_x, u_y) dxdy,$$

ma postać $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y} = 0$.
Owego minimum poszukujemy w m-wymiarowej przestrzeni Φ, tj. $\min\limits_{(\lambda_k)} J[\psi_m]$.

W zależności od rzędu równania różniczkowego oraz od warunków brzegowych funkcje będą spełniać:

a) dla zagadnienia Dirichleta
$$\forall_{P\in S}\ \forall_k\ \varphi_k|_P = 0, \tag{9.2}$$

b) dla zagadnienia von Neumanna
$$\forall_{P\in S}\ \forall_k\ \left.\frac{\partial\varphi_k}{\partial n}\right|_P = 0, \tag{9.3}$$
gdzie S jest powierzchnią ograniczającą obszar ω, w którym poszukujemy rozwiązania, P jest punktem powierzchni S.

W przypadku niejednorodnych zagadnień Dirichleta i Neumanna przybliżone rozwiązanie przedstawiamy w następujący sposób:
$$\psi_m^* = \varphi_0 + \psi_m,$$
gdzie ψ_m jest funkcją postaci (9.2) złożoną z elementów φ_k, przy czym φ_k spełniają odpowiednie warunki brzegowe jednorodne, natomiast φ_0 spełnia warunek niejednorodny.

Przy rozwiązywaniu zagadnień brzegowych wygodnie jest wprowadzać wielowskaźnikową notację elementów bazy przestrzeni Φ (dla dwu zmiennych – dwuwskaźnikową, dla trzech zmiennych – trójwskaźnikową itp.).

Przykład 9.1. (Zagadnienie wymiany masy i ciepła)
Wyznaczymy stacjonarne pole wilgotności $w(x,y)$ w ciele porowatym o kształcie nieskończenie długiego graniastosłupa o przekroju kwadratowym, gdy dana jest stała w czasie wilgotność ścian bocznych.

Funkcja $w(x,y)$ spełnia równanie Laplace'a w obszarze
$Q = (0,a)\times(0,a)$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{9.4}$$
oraz warunki brzegowe
$$w(0,y) = 0, \qquad w(a,y) = \frac{W_0}{a}y, \qquad \text{dla } y\in(0,a), \tag{9.5}$$
$$w(x,0) = 0, \qquad w(x,a) = \frac{W_0}{a}x, \qquad \text{dla } x\in(0,a), \tag{9.6}$$

gdzie $W_0 > 0$. Dla funkcjonału o następującej postaci

$$J[w] = \int_0^a \int_0^a \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy \tag{9.7}$$

równanie (9.4) jest warunkiem koniecznym optymalności. Rozwiązując sformułowane zagadnienie brzegowe metodą Ritza, dokonujemy aproksymacji funkcji wyrażeniem postaci

$$w_{MN}(x, y) = \varphi_0(x, y) + \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} A_{mn} \varphi_{mn}(x, y). \tag{9.8}$$

Funkcja $\varphi_0(x, y)$ musi spełniać warunki brzegowe (9.5) i (9.6), a $\varphi_{mn}(x, y)$ spełnia zerowe warunki brzegowe. Przyjmujemy

$$\varphi_0(x, y) = \frac{W_0}{a^2} xy, \tag{9.9}$$

$$\varphi_{mn}(x, y) = x^m y^n (x - a)(y - a), \tag{9.10}$$

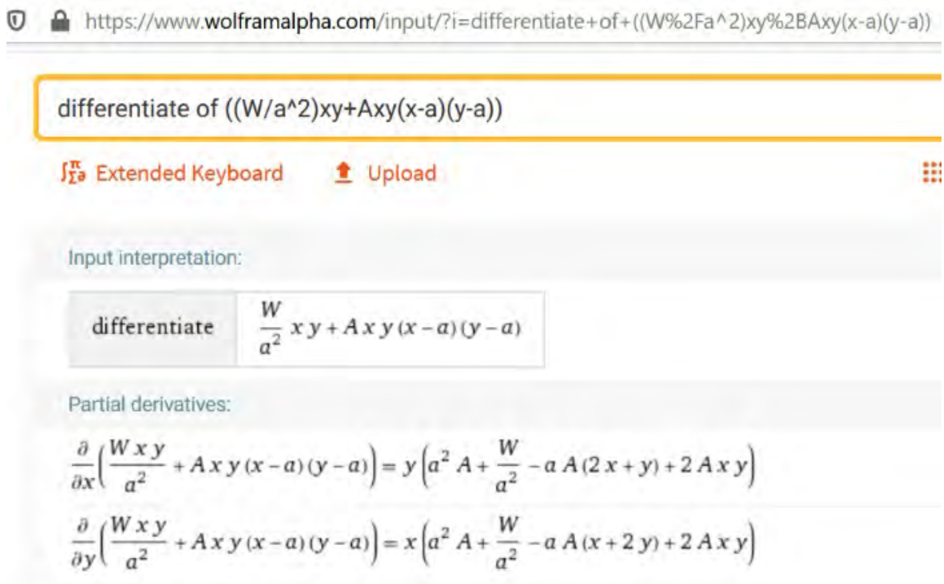
współczynniki A_{nm} dobieramy zaś tak, aby funkcjonał

$$J[w_{MN}] = \int_0^a \int_0^a \left[\left(\frac{\partial w_{MN}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_{MN}}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy \tag{9.11}$$

osiągał minimum.
W dalszych obliczeniach ograniczamy się do rozwiązania postaci ($M = 1$, $N = 1$) .

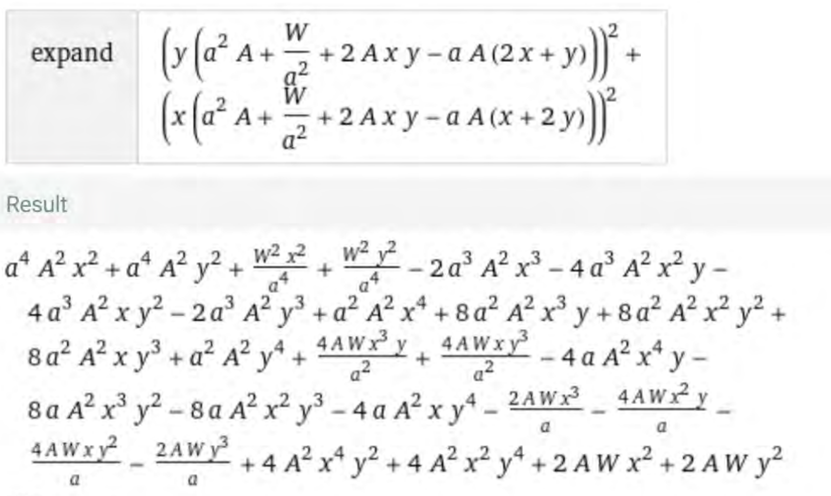
$$w_{11}(x, y) = \frac{W_0}{a^2} xy + A_{11} xy(x - a)(y - a), \tag{9.12}$$

a więc do wyznaczenia współczynnika A_{11}. W obliczeniach można wykorzystać program Wolfram Alpha, obliczamy pochodne cząstkowe (rys. 9.1).



Rysunek 9.1: Obliczenie pochodnych cząstkowych, wyk. E. Koźniewski

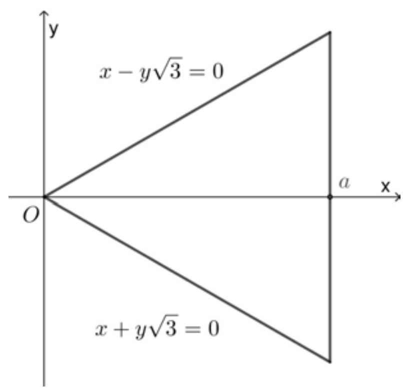
Podnosimy do kwadratu obliczone pochodne cząstkowe, sumujemy i rozwijamy (rys. 9.2).



Rysunek 9.2: Rozwinięcie kwadratów pochodnych cząstkowych, opr. E. Koźniewski

W wyniku obliczenia całki (9.7) dla w_{11} otrzymamy funkcję F zmiennej A_{11} postaci
$$J[w_{11}] = F(A_{11}) = B + CA_{11}^2. \tag{9.13}$$
Funkcja ta osiąga ekstremum dla $A_{11} = 0$. Zatem $w_{11}(x,y) = \frac{W_0}{a^2}xy$ jest rozwiązaniem zagadnienia brzegowego. Stąd funkcja $w(x,y) = \frac{W_0}{a^2}xy$ opisuje stacjonarne pole wilgotności.

Przykład 9.2. (Zagadnienie z mechaniki – ZM)
Membrana w kształcie trójkąta foremnego o wysokości $a > 0$ jest równomiernie obciążona. Znajduje się ona w stanie statycznym, przy czym jej brzeg położony jest w płaszczyźnie $z = 0$.



Rysunek 9.3: ZM, wyk. E. Koźniewski

Odkształcenie membrany $z(x,y)$ spełnia w obszarze
$$D = \left\{(x,y) : x \in (0,a), y \in \left(-\frac{x}{\sqrt{3}}, \frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right\} \tag{9.14}$$
równanie Poissona
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{p}{T}, \tag{9.15}$$
gdzie $p > 0$ oznacza ciśnienie wywierane przez obciążenie membrany, T – napięcie membrany, przy czym na brzegu obszaru D funkcja $z(x,y)$ przyjmuje wartość zero.

Dla funkcjonału

$$J[z] = \int_0^a \left\{ \int_{-\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\frac{x}{\sqrt{3}}} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{p}{T}z \right] dy \right\} dx \tag{9.16}$$

równanie (9.15) jest warunkiem koniecznym optymalności. Rozwiązując sformułowane zagadnienie brzegowe metodą Ritza, dokonujemy aproksymacji funkcji wyrażeniem postaci

$$z_{MN}(x,y) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} A_{mn}\varphi_{mn}(x,y). \tag{9.17}$$

Funkcja $\varphi_{mn}(x,y)$ musi spełniać warunki brzegowe (9.14). Przyjmujemy więc następującą postać wielomianową funkcji

$$\varphi_{mn}(x,y) = (x^2 - 3y^2)(x-a)^m y^{2n-2}. \tag{9.18}$$

Współczynniki A_{nm} dobieramy tak, aby funkcjonał

$$J[z_{MN}] = \int_0^a \left\{ \int_{-\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\frac{x}{\sqrt{3}}} \left[\left(\frac{\partial z_{MN}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_{MN}}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{p}{T}z_{MN} \right] dy \right\} dx \tag{9.19}$$

osiągał minimum w danej klasie funkcji. W dalszych obliczeniach ograniczamy się do rozwiązania przybliżonego postaci (dla $M = 1, N = 1$)

$$z_{11}(x,y) = A_{11}(x^2 - 3y^2)(x-a), \tag{9.20}$$

a więc znalezienia tylko jednego współczynnika A_{11}, w którym możemy opuścić indeksy i zapisać go jako A. Pochodne funkcji (9.20) wyznaczymy w środowisku Wolfram Alpha. Dla uproszczenia pomijamy chwilowo współczynnik A, który jest stałą .

Rysunek 9.4: Obliczenie pochodnych cząstkowych w środowisku Wolfram Alpha, wyk. E. Koźniewski

Podnosząc do kwadratu pochodne cząstkowe funkcji, otrzymamy (rys. 9.5)

Rysunek 9.5: Rozwinięcie sumy kwadratów pochodnych cząstkowych w środowisku Wolfram Alpha, wyk. E. Koźniewski

Uwzględniając dodatkowo różnicę
(odjemną $\frac{2p}{T}A\left(x^3-3xy^2-ax^2+3y^2a\right)$), wyrażenie pod całką przyjmie postać

$$A^2\left(4a^2x^2+36a^2y^2-12ax^3-60axy^2+9x^4+18x^2y^2+\right.$$
$$\left.+\,9y^4\right)-2\frac{p}{T}A\left(x^3-3xy^2-ax^2+3y^2a\right).$$

Wówczas całkę liczymy następująco

$$J[z_{MN}] \;=\; \int\limits_0^a \left\{ \int\limits_{-\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\frac{x}{\sqrt{3}}} \left[\left(\frac{\partial z_{MN}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_{MN}}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{p}{T}z_{MN} \right] dy \right\} dx =$$

$$= \int\limits_0^a \left\{ \int\limits_{-\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\frac{x}{\sqrt{3}}} \left[A^2\left(4a^2x^2+36a^2y^2-12ax^3-60axy^2+9x^4+18x^2y^2+9y^4\right)- \right.\right.$$

$$\left.\left. -\;\; 2\frac{p}{T}A\left(x^3-3xy^2-ax^2+3y^2a\right)\right] dy \right\} dx.$$

Po obliczeniu całki (9.19) otrzymamy

$$J[z_{11}] = F(A_{11}) = \frac{8a^6}{15\sqrt{3}}A_{11}^2 + \frac{4a^5p}{15\sqrt{3}T}A_{11}. \tag{9.21}$$

Współczynnik A_{11} jest pierwiastkiem równania

$$F'(A_{11}) = \frac{16a^6}{15\sqrt{3}}A_{11} + \frac{4a^5p}{15\sqrt{3}T} = 0, \tag{9.22}$$

stąd

$$A_{11} = -\frac{p}{4aT}. \tag{9.23}$$

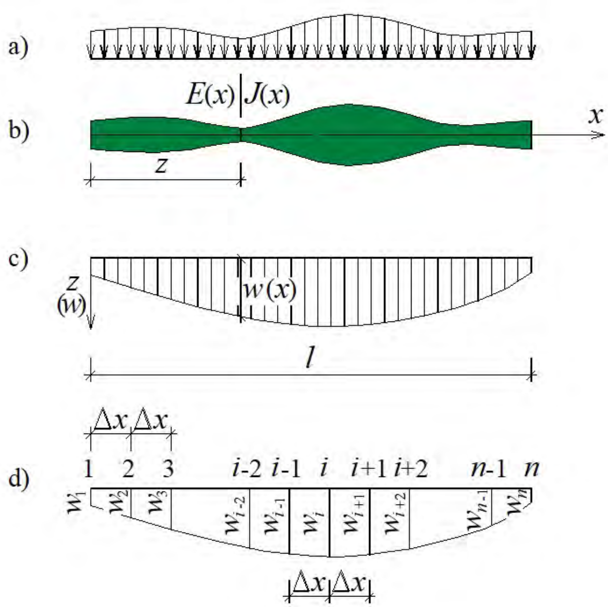
Wobec (9.20) mamy ostateczne rozwiązanie

$$z_{11}(x,y) = -\frac{p}{4aT}(x^2-3y^2)(x-a). \tag{9.24}$$

Otrzymana funkcja spełnia zarówno równanie (9.15), jak i zerowe warunki na brzegu, jest zatem rozwiązaniem sformułowanego zagadnienia brzegowego dla membrany w kształcie trójkąta.

9.2. Metoda różnicowa [53]

Jest to najczęściej stosowana metoda numeryczna. W metodzie tej pochodne zastępujemy ilorazami różnicowymi i otrzymane równania nazywamy równaniami różnicowymi. Równania te wiążą ze sobą wartości funkcji w odosobnionych punktach, które wybiera się tak, aby tworzyły siatkę regularną (prostokątną lub prostopadłościenną).



Rysunek 9.6: Metoda różnicowa. Model pręta zginanego, wyk. E. Koźniewski na podstawie [53]

Przykład 9.3.
Na rysunku 9.6 przedstawiony jest model fizyczny pręta zginanego w płaszczyźnie OXZ (rys. 9.6a,b). Poszukiwanym polem są ugięcia $w(x)$ ($z(x)$ w układzie OXZ, rys. 9.6c). Opis matematyczny wyraża się wzorem

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(E(x)J(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right) = q(x). \qquad (9.25)$$

Dyskretyzacja, której dokonamy, polegać będzie na zastąpieniu operatorów różniczkowych (pochodnych) operatorami różnicowymi (czyli ilorazami różnicowymi). W przedziale $(0, l)$ ustalamy skończoną liczbę punktów, węzłów w odstępach Δx oraz przypisujemy każdemu z nich parametry (w-ugięcia, E-moduł Younga, J-moment bezwładności, q_i-obciążenie), $i = 1, 2, \ldots, n$ (rys. 9.6d). Następnie dokonujemy rozwinięcia funkcji w szereg Taylora w otoczeniu punktu i i rozważamy trzy jego wyrazy.

$$w(x) = w_i + x \left.\frac{dw}{dx}\right|_i + \frac{x^2}{2}\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_i . \tag{9.26}$$

Oznacza to, że w przedziale $(0, l)$ przyjmujemy funkcję interpolacyjną w postaci wielomianu drugiego stopnia. Trzy parametry w_{i-1}, w_i, w_{i+1} określają jednoznacznie ten wielomian. W układzie o początku w punkcie i możemy napisać

$$\begin{aligned} \text{dla } x = -\Delta x, \qquad w_{i-1} &= w_i - \Delta x \left.\tfrac{dw}{dx}\right|_i + \tfrac{\Delta x^2}{2}\left.\tfrac{d^2w}{dx^2}\right|_i , \\ \text{dla } x = \Delta x, \qquad w_{i+1} &= w_i + \Delta x \left.\tfrac{dw}{dx}\right|_i + \left.\tfrac{d^2w}{dx^2}\right|_i , \end{aligned} \tag{9.27}$$

gdzie $w(-\Delta x) = w_{i-1}$, $w(0) = w_i$, $w(\Delta x) = w_{i+1}$.
Dodając stronami (9.27), otrzymujemy

$$w_{i-1} + w_{i+1} = 2w_i + \Delta x^2 \left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_i ,$$

czyli

$$\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_i \approx \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{\Delta x^2} = \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2}, \tag{9.28}$$

odejmując zaś stronami ((9.27); pierwsze od drugiego), otrzymujemy

$$w_{i+1} - w_{i-1} = 2\Delta x \left.\frac{dw}{dx}\right|_i , \tag{9.29}$$

czyli

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_i \approx \frac{-w_{i-1} + w_{i+1}}{2\Delta x} = \frac{\Delta w}{\Delta x}. \tag{9.30}$$

Operator trzeciej pochodnej wyznaczamy, korzystając z (9.30) i (9.28)

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^3w}{dx^3}\right|_i &= \frac{d}{dx}\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_i \approx \frac{1}{2\Delta x}\left(\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{i+1} - \left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{i-1}\right) = \\ &= \frac{1}{2\Delta x}\left(\frac{w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2}}{\Delta x^2} - \frac{w_{i-2} - 2w_{i-1} + w_i}{\Delta x^2}\right) = \\ &= \frac{1}{2\Delta x^3}\left(-w_{i-2} + 2w_{i-1} - 2w_{i+1} + w_{i+2}\right) = \frac{\Delta^3 w}{\Delta x^3}, \end{aligned} \tag{9.31}$$

natomiast operator czwartej pochodnej wyznaczamy, korzystając dwukrotnie z (9.28)

$$\left.\frac{d^4w}{dx^4}\right|_i = \left.\frac{d^2}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}\right|_i \approx \frac{1}{\Delta x^2}\left(\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{i-1} - 2\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_i + \left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{i+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{w_{i-2} - 2w_{i-1} + w_i}{\Delta x^2} - 2\frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{\Delta x^2} + \frac{w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2}}{\Delta x^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{\Delta x^4}\left(w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}\right) = \frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4}. \tag{9.32}$$

Zapiszemy teraz równanie (9.25) dla i-tego punktu, czyli $\frac{d^2}{dx^2}\left(E(x)J(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right) = q(x)$ zapiszemy za pomocą operatorów różniczkowych

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(E_{i-1}J_{i-1}\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{i-1} - 2E_iJ_i\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_i + E_{i+1}J_{i+1}\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{i+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{\Delta x^2}\left(E_{i-1}J_{i-1}\frac{w_{i-2} - 2w_{i-1} + w_i}{\Delta x^2} - 2E_iJ_i\frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{\Delta x^2} + \right.$$
$$\left. + E_{i+1}J_{i+1}\frac{w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2}}{\Delta x^2}\right) = q_i.$$

Przekształcając, otrzymujemy

$$E_{i-1}J_{i-1}\left(w_{i-2} - 2w_{i-1} + w_i\right) - 2E_iJ_i\left(w_{i-1} - 2w_i - w_{i+1}\right) +$$
$$+ E_{i+1}J_{i+1}\left(w_{i-2}w_{i+1} + w_{i+2}\right) = q_i\Delta x^4.$$

Po uporządkowaniu otrzymamy

$$E_{i-1}J_{i-1}w_{i-2} - 2(E_{i-1}J_{i-1} + E_iJ_i)w_{i-1} + (E_{i-1}J_{i-1} + 4E_iJ_i +$$
$$+ E_{i+1}J_{i+1})w_i - 2(E_iJ_i + E_{i+1}J_{i+1})w_{i+1} + E_{i+1}J_{i+1}w_{i+2} = q_i\Delta x^4. \tag{9.33}$$

Równania (9.33) układamy dla każdego węzła z przedziału $(0, l)$.
Dla $n = 5$, biorąc kolejno za $i = 1, 2, 3, 4, 5$, uwzględniając tylko węzły znajdujące się w przedziale (bierzemy tylko te składniki zawierające E_k, J_0, w_s, których indeksy spełniają warunek $1 \le k, o, s \le n = 5, \Delta x = \frac{l}{n-1}$) mamy

dla 1:
$(4E_1J_1 + E_2J_2)w_1 - 2(E_1J_1 + E_2J_2)w_2 + E_2J_2w_3 = q_1\left(\frac{l}{4}\right)^4$,

dla $i = 2$:
$-2(E_1J_1 + E_2J_2)w_1 + (E_1J_1 + 4E_2J_2 + E_3J_3)w_2 - 2(E_2J_2 + E_3J_3)w_3+$
$+E_3J_3w_4 = q_2 \left(\frac{l}{4}\right)^4,$

dla $i = 3$:
$E_2J_2w_1 - 2(E_2J_2 + E_3J_3)w_2 + (E_2J_2 + 4E_3J_3 + E_4J_4)w_3 - 2(E_3J_3+$
$+ E_4J_4)w_4 + E_4J_4w_5 = q_3 \left(\frac{l}{4}\right)^4,$

dla $i = 4$:
$E_3J_3w_2 - 2(E_3J_3 + E_4J_4)w_3+$
$+(E_3J_3 + 4E_4J_4 + E_5J_5)w_4 - (E_4J_4 + E_5J_5)w_5 = q_4 \left(\frac{l}{4}\right)^4,$

dla $i = 5$:
$E_4J_4w_3 - 2(E_4J_4 + E_5J_5)w_4 + (E_4J_4 + 4E_5J_5)w_5 = q_5 \left(\frac{l}{4}\right)^4.$
Otrzymujemy układ równań o macierzy (symetrycznej – (9.32)):

$$\begin{bmatrix} 4E_1J_1+E_2J_2 & -2(E_1J_1+E_2J_2) & E_2J_2 & 0 & 0 \\ -2(E_1J_1+E_2J_2) & E_1J_1+4E_2J_2+E_3J_3 & E_2J_2+E_3J_3 & E_3J_3 & 0 \\ E_2J_2 & E_2J_2+E_3J_3 & E_2J_2+4E_3J_3+E_4J_4 & -2(E_3J_3+E_4J_4) & E_4J_4 \\ 0 & E_3J_3 & -2(E_3J_3+E_4J_4) & E_3J_3+4E_4J_4+E_5J_5 & -2(E_4J_4+E_5J_5) \\ 0 & 0 & E_4J_4 & -2(E_4J_4+E_5J_5) & E_4J_4+4E_5J_5 \end{bmatrix} \tag{9.34}$$

o wektorze niewiadomych $[w_1, w_2, w_3, w_4, w_5]^T$ i wektorze wyrazów wolnych.
Po rozwiązaniu układu otrzymujemy jako dyskretny przybliżony opis funkcji ugięcia $w(x)$ w węzłach wartości wektora $[w_1, w_2, w_3, w_4, w_5]^T$.

Przykład 9.4. [29]

Zilustrujemy to na przykładzie równania Laplace'a. Poszukujemy funkcji $u(x, y)$ spełniającej równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{9.35}$$

w płaskim obszarze D ograniczonym linią L i czyniącej zadość warunkowi brzegowemu

$$u(P) = f(P) \text{ dla } P \in L, \tag{9.36}$$

gdzie f jest daną funkcją (zagadnienie Dirichleta).

Przyjmujemy $\Delta x = \Delta y = h > 0$ i wyznaczamy współrzędne x_i, y_j punktów, dla których będziemy obliczali przybliżone wartości funkcji u. Są to liczby

$$x_i = x_0 + ih, \qquad y_j = y_0 + jh, \tag{9.37}$$

gdzie x_0, y_0 są współrzędnymi obranego punktu. Przyjmujemy oznaczenie

$$u_{ij} = u(x_i, y_j). \tag{9.38}$$

Aby sprowadzić równanie (9.35) do postaci różnicowej, zastępujemy pochodne przez odpowiednie ilorazy różnicowe

$$\frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \tag{9.39}$$

$$\frac{\Delta^2 u}{\Delta y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}. \tag{9.40}$$

Po podstawieniu do (9.35) i przekształceniu ilorazów otrzymujemy

$$u_{ij} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{4}. \tag{9.41}$$

Wartość funkcji u w dowolnym węźle równa jest średniej arytmetycznej wartości funkcji u w węzłach sąsiednich. Węzłom leżącym na konturze L obszaru D przypisujemy liczby określone przez warunek brzegowy (9.36). Możemy zatem napisać tyle równań (9.41) z tą samą liczbą niewiadomych u_{nm}, ile jest węzłów leżących wewnątrz obszaru D. Otrzymany układ jest układem równań liniowych. Mogą pojawić się tu problemy:

– punkty węzłowe nie leżą na brzegu obszaru, wówczas dokonujemy interpolacji lub ekstrapolacji;
– w zapisie mamy dużą liczbę niewiadomych.

Do rozwiązania stosujemy wówczas tzw. metodę relaksacyjną, według której:

1) sporządzamy siatkę kwadratową o odległościach między sąsiednimi węzłami równych $h > 0$, rozpostartą na cały rozważany obszar, i na podstawie zadanego warunku przypisujemy wartości funkcji u węzłom brzegowym, węzłom wewnętrznym natomiast przypisujemy dowolne liczby;
2) sporządzamy ponownie analogiczną siatkę i przypisujemy jej węzłom wartości funkcji obliczone według wzoru (9.41), tzn. średnie arytmetyczne wartości funkcji odpowiadające węzłom sąsiednim na poprzedniej siatce. Wykazuje się, że ciągi wartości funkcji u otrzymane metodą relaksacyjną dla węzłów siatki są zbieżne do pierwiastków wymienionego układu równań.

9.3. Zadania

1. Zapisać funkcję $w_{MN}(x,y) = \varphi_0(x,y) + \sum\limits_{m=1}^{M}\sum\limits_{n=1}^{N} A_{mn}\varphi_{mn}$ dla $M = 2$, $N = 3$.
2. Zapisać układ równań (9.33) dla $n = 6$.
3. Membrana w kształcie trójkąta równoramiennego o wysokości $a = 3$ m, i długości podstawy $2a\sqrt{\frac{q}{r}}$ m (nr – numer studenta na liście, tablica 9.1) jest równomiernie obciążona. Membrana znajduje się w stanie statycznym, przy czym jej brzeg położony jest w płaszczyźnie $z = 0$, wierzchołek trójkąta membrany znajduje się w początku układu współrzędnych, oś OX jest osią symetrii membrany. Znaleźć rozwiązanie tak postawionego zagadnienia brzegowego, tj. opisać obszar D, sprawdzić spełnienie warunków brzegowych, sprawdzić poprawność opisu funkcjonału dla przyjętej postaci wielomianu $\varphi_{mn}(x,y)$, przyjmując $M = 1$ i $N = 1$. Wartości p i T pozostawić ogólne. W rozwiązaniu zagadnienia przyjąć:
$\varphi_{mn}(x,y) = (qx^2 - ry^2)(x-a)^m y^{2n-2}$.

Tablica 9.1: Dane do zad. 3, opr. E. Koźniewski

nr	q	r	**nr**	q	r	**nr**	q	r	**nr**	q	r
1	2	3	23	4	7	45	5	7	67	8	15
2	2	4	24	4	8	46	5	8	68	8	17
3	2	5	25	4	9	47	5	9	69	9	4
4	2	6	26	4	10	48	6	5	70	9	5
5	2	7	27	4	11	49	6	7	71	9	7
6	2	8	28	4	12	50	6	9	72	9	8
7	2	9	29	4	13	51	6	11	73	9	11
8	4	11	30	4	14	52	7	2	74	9	13
9	4	13	31	4	2	53	7	3	75	9	14
10	5	14	32	4	3	54	7	4	76	9	15
11	6	15	33	4	5	55	7	5	77	9	16
12	7	15	34	4	7	56	7	6	78	10	7
13	3	2	35	4	9	57	7	8	79	10	9
14	3	4	36	4	11	58	7	9	80	10	11
15	3	5	37	4	5	59	7	10	81	10	13
16	3	6	38	4	7	60	7	11	82	10	17
17	3	7	39	4	9	61	8	7	83	10	19
18	3	8	40	4	11	62	8	3	84	11	6
19	3	2	41	5	2	63	8	5	85	11	7
20	3	4	42	5	3	64	8	9	86	11	8
21	3	5	43	5	4	65	8	11	87	11	9
22	3	6	44	5	6	66	8	13	88	11	10

Rozdział 10

Zapotrzebowanie na beton towarowy — próba opisu w postaci modelu liniowego

10.1. Model ekonometryczny [48]

Ekonometria jest nauką o metodach badania ilościowych zależności występujących między zjawiskami ekonomicznymi. Podstawowym narzędziem analizy ekonometrycznej jest model ekonometryczny. *Opisowy model ekonometryczny* to opis stochastycznej zależności badanego zjawiska (*zmiennej objaśnianej*) od czynników (zjawisk) kształtujących go (*zmiennych objaśniających*), wyrażony w postaci równania lub układu równań. Zmienną objaśnianą oznaczamy przez Y, zmienne objaśniające przez $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Na kształtowanie się zmiennej objaśnianej ma wpływ wiele czynników, uwzględnienie wszystkich jest jednak niemożliwe. Do zmiennych objaśniających zalicza się czynniki najważniejsze. Ich wybór też nie jest rzeczą łatwą. Opisowy model ekonometryczny przedstawiający zależność zmiennej Y od zmiennych $X_1, X2, \ldots, X_m$ można zapisać w postaci analitycznej za pomocą funkcji

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_m, \varepsilon), \tag{10.1}$$

gdzie ε oznacza tzw. *odchylenia losowe.*
Jeśli zależność zmiennej objaśnianej Y od zmiennych objaśniających $X_1, X_2, \ldots, X_m$ ma charakter liniowy, to mamy do czynienia z opisowym modelem ekonometrycznym o postaci

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_m X_m + \varepsilon. \tag{10.2}$$

Po odrzuceniu odchyleń losowych ε otrzymamy równanie

$$\widehat{Y} = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_m X_m, \tag{10.3}$$

gdzie $\widehat{Y}$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej objaśnianej Y. W modelu ekonometrycznym występują pewne nieznane wielkości, które muszą być oszacowane, są to parametry modelu. Mamy dwa rodzaje: *parametry strukturalne* oraz *parametry struktury stochastycznej* modelu. W modelu (10.2) do tych pierwszych należą $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, z kolei parametry struktury stochastycznej modelu to parametry rozkładu odchyleń losowych, takie jak wartość oczekiwana i wariancja odchyleń losowych oraz współczynniki autokorelacji odchyleń.

Badanie modelu ekonometrycznego jest procesem wieloetapowym.

Etap wstępny. Określa się, jakie zjawisko będzie badane, a więc co jest zmienną objaśnianą.

Etap pierwszy. Wybór zmiennych objaśniających spośród wielu czynników.

Etap drugi. Wybór postaci analitycznej modelu (funkcji (10.1)).

Etap trzeci. Szacowanie parametrów (estymacja parametrów) modelu.

Etap czwarty. Weryfikacja modelu.

Etap piąty. Wnioskowanie na podstawie modelu, czyli jego praktyczne wykorzystanie w postaci analizy ekonomicznej lub prognozowania.

10.1.1. Dobór zmiennych objaśniających

Eliminowanie zmiennych prawie stałych. Zmienne objaśniające w liniowym modelu ekonometrycznym z formalnego punktu widzenia powinny odznaczać się następującymi własnościami: wysoką zmiennością, silną korelacją ze zmienną objaśnianą, słabą korelacją wzajemną, silną korelacją ze zmiennymi, które nie weszły w skład zmiennych objaśniających. Doboru zmiennych dokonujemy metodami statystycznymi.

Przykład 10.1.

Tablica 10.1: Wartości zmiennych w modelu w latach 1991 – 2000 [48]

Lata	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
1991	10	6	8	14	12
1992	10	6	8	14	12
1993	16	10	12	18	12
1994	16	10	12	18	14
1995	12	8	8	18	10
1996	14	10	8	18	12
1997	20	12	14	24	14
1998	20	12	16	24	12
1999	20	12	16	26	12
2000	22	14	18	26	10

Do opisu produkcji przedsiębiorstwa (Y) wyrażonej w mln zł przyjęto wstępnie cztery wielkości: X_1 – zatrudnienie [tys. osób], X_2 – wartość maszyn i urządzeń [mln zł], X_3 – czas przestoju maszyn [dni], X_4 – nakłady inwestycyjne [mln zł]. Wartości zmiennych w latach 1991 – 2000 podane są w tablicy **??**.
Budowa modelu:

1. Na podstawie rozpoznania merytorycznego sporządzamy zestaw potencjalnych (pierwotnych) zmiennych $X_1, X_2, \dots, X_m$, które naszym zdaniem (przy pierwszym oglądzie) oddziałują na zmienną objaśnianą (Y).
2. Zbiera się dane statystyczne będące realizacjami zmiennej objaśnianej i potencjalnych zmiennych objaśniających, tj. wektor $\boldsymbol{y}$ obserwacji zmiennej Y oraz macierz obserwacji $\boldsymbol{X}$ zmiennych $X_1, X_2, \dots, X_m$ w postaci

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix}. \tag{10.4}$$

3. Eliminuje się potencjalne zmienne objaśniające odznaczające się zbyt niskim poziomem zmienności.
4. Oblicza się współczynniki korelacji między wszystkimi rozpatrywanymi zmiennymi.
5. Przeprowadza się redukcję zbioru potencjalnych zmiennych objaśniających za pomocą wybranej procedury statystycznej.

Warunkiem wstępnym uznania wielkości za zmienną objaśniającą jest wysoka zmienność, której miarą poziomu jest współczynnik zmienności

$$\nu_i = \frac{S_i}{\overline{x}_i} \qquad i = 1, 2, \dots, m, \tag{10.5}$$

gdzie $\overline{x}_i$ jest średnią arytmetyczną zmiennej X_i

$$\overline{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} x_{li} \qquad i = 1, 2, \dots, m, \tag{10.6}$$

natomiast S_i jest odchyleniem standardowym zmiennej X_i

$$S_i = \left(\frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} (x_{li} - \overline{x}_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{10.7}$$

Obiera się wartość krytyczną współczynnika zmienności ν^*, np. $\nu^* = 0{,}01$. Zmienne spełniające nierówność

$$\nu_i \leq \nu^* \tag{10.8}$$

uznaje się za prawie stałe i wyklucza się ze zbioru zmiennych objaśniających. Przyjmuje się, że zmienne te nie wnoszą istotnych informacji w prowadzonej analizie.

Sprawdzamy, jaką zmiennością odznaczają się zmienne w przykładzie (10.1), przy założeniu, że wartością krytyczną współczynnika zmienności jest $\nu^* = 0{,}15$. Średnie arytmetyczne zmiennych X_1, X_2, X_3, X_4 są następujące

$$\overline{x}_1 = 10, \overline{x}_2 = 12, \overline{x}_3 = 20, \overline{x}_4 = 12.$$

Tablica 10.2: Obliczenia średniej i odchylenia standardowego dla danych z tablicy 10.1, opr. E. Koźniewski

l	$x_{11}-\overline{x}_1$	$x_{12}-\overline{x}_2$	$x_{13}-\overline{x}_3$	$x_{14}-\overline{x}_4$	$(x_{11}-\overline{x}_1)^2$	$(x_{12}-\overline{x}_2)^2$	$(x_{13}-\overline{x}_3)^2$	$(x_{14}-\overline{x}_4)^2$
1	-4	-4	-6	0	16	16	36	0
2	-4	-4	-6	0	16	16	36	0
3	0	0	-2	0	0	0	4	0
4	0	0	-2	2	0	0	4	4
5	-2	-4	-2	-2	4	16	4	4
6	0	-4	-2	0	0	16	4	0
7	2	2	4	2	4	4	16	4
8	2	4	4	0	4	16	16	0
9	2	4	6	0	4	16	36	0
10	4	6	6	-2	16	36	36	4
$\sum$	0	0	0	0	64	136	192	16

Z pomocą tablicy 10.2 wyznaczamy odchylenia standardowe

$$S_1 = \sqrt{\frac{1}{10} \cdot 64} = 2{,}530, \qquad S_2 = \sqrt{\frac{1}{10} \cdot 136} = 3{,}688,$$

$$S_3 = \sqrt{\frac{1}{10} \cdot 192} = 4{,}382, \qquad S_4 = \sqrt{\frac{1}{10} \cdot 16} = 1{,}265$$

i następnie współczynniki zmienności

$$\nu_1 = \frac{2{,}530}{10} = 0{,}253, \qquad \nu_2 = \frac{3{,}688}{12} = 0{,}307,$$
$$\nu_3 = \frac{4{,}382}{20} = 0{,}219, \qquad \nu_4 = \frac{1{,}265}{12} = 0{,}105.$$

Współczynnik zmienności ν_4 jest mniejszy od założonej wartości krytycznej $\nu^* = 0{,}15$, więc zmienną oznaczoną przez X_4 uznajemy za nieprzydatną.

Wektor i macierz współczynników korelacji. Do oceny siły liniowej zależności zmiennej objaśnianej Y i potencjalnych zmiennych objaśniających $X_1, X_2, \ldots, X_m$ oblicza się współczynniki korelacji r_i

$$r_i = \frac{\sum\limits_{l=1}^{n} (y_l - \overline{y})(x_{li} - \overline{x}_i)}{\sqrt{\sum\limits_{l=1}^{n} (y_l - \overline{y})^2 \sum\limits_{l=1}^{n} (x_{li} - \overline{x}_i)^2}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{10.9}$$

Współczynniki te są przedstawiane w postaci wektora korelacji

$$R_0 = [r_1, r_2, \ldots, r_m]^T. \tag{10.10}$$

Współczynniki korelacji między potencjalnymi zmiennymi objaśniającymi obliczane są według wzoru

$$r_{ij} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{n} (x_{li} - \overline{x}_i)(x_{lj} - \overline{x}_j)}{\sqrt{\sum\limits_{l=1}^{n} (x_{li} - \overline{x}_i)^2 \sum\limits_{l=1}^{n} (x_{lj} - \overline{x}_j)^2}}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m. \tag{10.11}$$

Współczynniki te tworzą macierz korelacji

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ r_{m1} & r_{m2} & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \tag{10.12}$$

Macierz R jest symetryczna, tj. $r_{ij} = r_{ji}$.

Metoda analizy macierzy współczynników korelacji. Sens tej metody jest taki, że wybieramy te zmienne objaśniające, które są silnie skorelowane ze zmienną objaśnianą i jednocześnie słabo skorelowane między sobą. Analizie poddajemy wektor R_0 i macierz R. Dla zadanego poziomu istotności γ oraz dla $n-2$ stopni swobody wyznacza się tzw. krytyczną wartość współczynnika korelacji

$$r^* = \left(\frac{(l^*)^2}{(l^*)^2 + n - 2} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{10.13}$$

gdzie: l^* jest wartością statystyki odczytanej z tablic testu t Studenta dla danego γ oraz dla $n-2$ stopni swobody. Krytyczna wartość współczynnika korelacji r^* może być także zadawana z góry przez badacza. Procedura jest następująca:

1. Ze zbioru potencjalnych zmiennych objaśniających eliminuje się te zmienne, dla których zachodzi nierówność
$$|r_i| \leq r^*; \tag{10.14}$$
te zmienne są nieistotnie skorelowane ze zmienną objaśnianą.
2. Spośród pozostałych zmiennych objaśniających wybiera się zmienną X_h, taką że
$$|r_h| = \max_i \{|r_i|\}; \tag{10.15}$$
zmienna ta jest nośnikiem największego zasobu informacji o zmiennej objaśnianej.
3. Ze zbioru potencjalnych zmiennych objaśniających eliminuje się te zmienne, dla których zachodzi nierówność
$$|r_{hi}| > r^*; \tag{10.16}$$
są to zmienne zbyt silnie skorelowane ze zmienną objaśniającą X_h, a więc powielające dostarczane przez nią informacje.

Postępowanie opisane w punktach $1, 2, 3$ kontynuuje się aż do momentu wyczerpania zbioru potencjalnych zmiennych objaśniających.

Przykład 10.2. Przedsiębiorstwo handlu materiałami budowlanymi zainteresowane wielkością sprzedaży cementu (Y) analizowało zestawienie sprzedaży także innych materiałów, by zbadać ich związek ze sprzedażą cementu. Zaproponowało wstępnie 8 potencjalnych zmiennych objaśniających określających wielkość sprzedaży w ciągu ostatnich 24 miesięcy: styropianu ekstrudowanego na fundamenty (X_1), dachówki ceramicznej (X_2), blachodachówki (X_3), wapna (X_4), pustaków ceramicznych porotherm (X_5), glazury (X_6), cegły klinkierowej (X_7), stali zbrojeniowej (X_8).

Na podstawie danych dotyczących sprzedaży materiałów budowlanych wyznaczono wektor współczynników korelacji zmiennej objaśnianej z potencjalnymi zmiennymi objaśniającymi $R_0 = [-0{,}59; -0{,}06; 0{,}08; 0{,}013; 0{,}54; -0{,}15; -0{,}10; 0{,}72]^T$ oraz macierz korelacji między potencjalnymi zmiennymi objaśniającymi

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}09 & 0{,}35 & -0{,}17 & -0{,}62 & -0{,}40 & -0{,}16 & -0{,}55 \\ -0{,}09 & 1 & -0{,}06 & -0{,}38 & 0{,}00 & 0{,}15 & 0{,}22 & 0{,}11 \\ 0{,}35 & -0{,}06 & 1 & 0{,}33 & -0{,}11 & -0{,}20 & -0{,}45 & -0{,}02 \\ -0{,}17 & -0{,}38 & 0{,}33 & 1 & 0{,}20 & -0{,}07 & -0{,}44 & 0{,}07 \\ -0{,}62 & 0{,}00 & -0{,}11 & 0{,}20 & 1 & 0{,}22 & 0{,}17 & -0{,}11 \\ -0{,}40 & 0{,}15 & -0{,}20 & -0{,}07 & 0{,}22 & 1 & -0{,}19 & 0{,}47 \\ -0{,}16 & 0{,}22 & -0{,}45 & -0{,}44 & 0{,}17 & -0{,}19 & 1 & 0{,}05 \\ -0{,}55 & 0{,}11 & -0{,}02 & 0{,}07 & -0{,}11 & 0{,}47 & 0{,}05 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dobór zmiennych objaśniających przeprowadzimy dla poziomu istotności $\gamma = 0{,}10$ oraz dla $n - 2 = 22$ stopni swobody. Z tablic t Studenta odczytujemy wartość statystyki teoretycznej $l^* = 1{,}717$, a następnie obliczamy wartość krytyczną współczynnika korelacji

$$r^* = \left(\frac{(1{,}717)^2}{(1{,}717)^2 + 24 - 2} \right)^{\frac{1}{2}} = 0{,}344.$$

Najpierw eliminujemy wszystkie zmienne, które są słabiej skorelowane ze zmienną objaśnianą niż na poziomie 0,344 (wartości r_i mniejsze od 0,344). Są to zmienne X_2, X_3, X_4, X_6, X_7, dla których $r_2 = -0{,}06$; $r_3 = 0{,}08$; $r_4 = 0{,}13$; $r_6 = -0{,}15$; $r_7 = -0{,}10$.

Z pozostałych zmiennych pierwotnych wybieramy zmienną najsilniej skorelowaną ze zmienną objaśnianą. Jest nią X_8 $(= 0{,}72)$ – pierwsza zmienna objaśniającą. Następnie eliminujemy pozostałe zmienne objaśniające, dla których $|r_{8i}| > 0{,}344$. Jest jedna taka zmienna: X_1, wszak $|r_{81}| = 0{,}55$ (ostatni wiersz lub ostatnia kolumna macierzy R), choć jest jeszcze inna (X_6, $|r_{86}| = 0{,}47$), ale tę wyeliminowaliśmy wcześniej. Z tak zredukowanego zbioru wybieramy kolejną (gorszą od najlepszej) zmienną objaśniającą, jest nią zmienna X_5. Ale ponieważ jest to jedyna już zmienna, więc ją zostawiamy. Ostatecznie zostają dwie zmienne objaśniające X_5, X_8 (pustaki ceramiczne porotherm i stal zbrojeniowa). Mamy więc model

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_5 + \alpha_2 X_8 + \varepsilon.$$

Współczynnik korelacji wielorakiej jest miarą siły związku liniowego zmiennej objaśnianej Y ze zmiennymi objaśniającymi $X_1, X_2, \ldots, X_m$ i określa się go następująco:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\det(W)}{\det(R)}}, \qquad (10.17)$$

gdzie $\det(R)$ oznacza wyznacznik macierzy R współczynników korelacji zmiennych objaśniających, łączonych parami, $\det(W)$ oznacza wyznacznik macierzy

$$W = \begin{bmatrix} 1 & R_0^T \\ R_0 & R \end{bmatrix}. \qquad (10.18)$$

W rozwiniętej postaci macierz W zapisujemy

$$W = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \ldots & r_m \\ r_1 & 1 & r_{12} & \ldots & r_{1m} \\ r_2 & r_{21} & 1 & \ldots & r_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ r_m & r_{m1} & r_{m2} & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \qquad (10.19)$$

Współczynnik korelacji wielorakiej R przyjmuje wartości $0 \leq R \leq 1$. Przyjmuje tym większe wartości, im silniejszy jest związek zmiennej objaśnianej ze zmiennymi objaśniającymi.

10.2. Szacowanie parametrów modeli liniowych metodą najmniejszych kwadratów

Szacowanie parametrów modelu ekonometrycznego sprowadza się do przypisania nieokreślonym liczbowo parametrom konkretnych wartości liczbowych. Często wykorzystywana metodą szacowania parametrów liniowych modeli ekonometrycznych

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_m X_m + \varepsilon \qquad (10.20)$$

jest metoda najmniejszych kwadratów. Polega na wyznaczeniu takich wartości ocen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$, parametrów $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, aby suma kwadratów odchyleń zaobserwowanych wartości zmiennej objaśnianej od jej wartości teoretycznych obliczonych z modelu była najmniejsza, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \to \min, \tag{10.21}$$

gdzie e_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jest odchyleniem empirycznych wartości zmiennej objaśniającej od jej wartości teoretycznych, zwanym również resztą modelu. Przez e_i rozumiemy różnicę

$$e_i = y_i - \widehat{y}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{10.22}$$

przy czym

$$\widehat{y}_i = a_0 + a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + \ldots + a_m x_{im}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10.23}$$

Zastosowanie metody najmniejszych kwadratów wymaga przyjęcia pewnych założeń. Szacowany model jest: (1) modelem liniowym, (2) zmienne objaśniające są wielkościami nielosowymi o elementach ustalonych, (3) zmienne objaśniające nie są współliniowe, (4) składnik losowy ma wartość oczekiwaną równą zeru i stałą skończoną wariancję, (5) nie występuje autokorelacja składnika losowego (składnika losowego w czasie).

10.2.1. Szacowanie parametrów modelu z jedną zmienną objaśniającą

Liniowy model ekonometryczny z jedną zmienną objaśniającą ma postać

$$Y = \beta + \alpha X + \varepsilon. \tag{10.24}$$

Wartości ocen a i b parametrów strukturalnych α i β otrzymujemy z warunku

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b - a x_i)^2 \to \min\,. \tag{10.25}$$

Funkcja $S(a, b)$ osiąga minimum, w punkcie (a, b), w którym zerują się pochodne cząstkowe tej funkcji. Warunek konieczny istnienia ekstremum jest, z uwagi na nierówność $S(a,b)>0$, równocześnie warunkiem dostatecznym. Po przyrównaniu do zera pochodnych cząstkowych otrzymujemy układ równań o niewiadomych a i b

$$\begin{cases} b\cdot n + a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i}^{n} y_i, \\ b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i. \end{cases} \tag{10.26}$$

Rozwiązując układ (10.26), otrzymujemy wzory na oceny a i b

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\overline{x})^2}, \tag{10.27}$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x}, \tag{10.28}$$

gdzie $\overline{y}$ oraz $\overline{x}$ oznaczają średnie arytmetyczne zmiennych Y i X. Wzór (10.27) równoważnie możemy zapisać w postaci

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}. \tag{10.29}$$

Wartość oceny a parametru α informuje, o ile jednostek zmieni się zmienna objaśniana Y, jeśli zmienna objaśniająca X zmieni się o jednostkę.

W przypadku, gdy t jest zmienną czasową, otrzymujemy liniowy model tendencji rozwojowej

$$Y = \beta + \alpha t + \varepsilon. \tag{10.30}$$

Jeśli zmienna t przyjmuje wartości $t = 1, 2, ..., n$, to $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(t - \overline{t}\right)^2 = \frac{n\left(n^2-1\right)}{12}$ i wówczas, z uwagi na $\overline{t} = \frac{n(n+1)}{2}$, ocenę a możemy wyznaczyć ze wzoru

$$a = \frac{12\sum\limits_{i=1}^{n} (y_t - \overline{y})\left(t - \frac{n(n+1)}{2}\right)}{n(n^2-1)}. \tag{10.31}$$

Ocenę wariancji odchyleń losowych modelu liniowego z jedną zmienną objaśniającą otrzymujemy ze wzoru

$$S_e^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2}. \tag{10.32}$$

Wielkość S_e jest odchyleniem standardowym reszt modelu, które informuje, o ile zaobserwowane wartości zmiennej objaśnianej przeciętnie różnią się od teoretycznych wartości tej zmiennej wyznaczonych z modelu. Błędy standardowe $S(a)$ i $S(b)$ szacunku parametrów strukturalnych α i β wyznacza się ze wzorów

$$S(a) = \frac{S_e}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\left(\overline{x}\right)^2}} \tag{10.33}$$

lub

$$S(a) = \frac{S_e}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}}, \tag{10.34}$$

$$S(b) = S_e \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\left(\overline{x}\right)^2\right)}} \tag{10.35}$$

lub

$$S(b) = S_e \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}}. \tag{10.36}$$

10.2.2. Szacowanie parametrów modelu z wieloma zmiennymi objaśniającymi

Aby przedstawić metodę najmniejszych kwadratów zastosowaną do modelu ekonometrycznego liniowego z wieloma (m) zmiennymi objaśniającymi

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_m X_m + \varepsilon, \tag{10.37}$$

wprowadzimy notację macierzową

$\mathbf{y}^T = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ – wektor obserwacji zmiennej objaśnianej,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nm} \end{bmatrix}$$ – macierz obserwacji zmiennych objaśniających,

$\mathbf{a}^T = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m]$ – wektor ocen parametrów strukturalnych,
$\mathbf{e}^T = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ – wektor reszt modelu.

Funkcję – kryterium metody najmniejszych kwadratów – zapisuje się następująco

$$S(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m) = \mathbf{e}^T\mathbf{e} \to \min, \tag{10.38}$$

gdzie

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a}. \tag{10.39}$$

Wzór na wektor $\mathbf{a}$ ocen parametrów strukturalnych modelu jest następujący

$$\mathbf{e} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}. \tag{10.40}$$

Wariancję odchyleń losowych szacuje się na podstawie wzoru

$$S_e^2 = \frac{\mathbf{e}^T\mathbf{e}}{n-m-1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} e_i^2}{n-m-1}. \tag{10.41}$$

Macierz wariancji i kowariancji ocen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$, parametrów strukturalnych $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ szacuje się na podstawie wzoru

$$\mathbf{D}^2(\mathbf{a}) = S_e^2(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}. \tag{10.42}$$

W macierzy (10.42) elementy na głównej przekątnej są wariancjami $V(a_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, m)$ ocen parametrów strukturalnych $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Wielkości

$$S(a_i) = \sqrt{V(a_i)} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m) \tag{10.43}$$

są standardowymi błędami szacunku parametrów strukturalnych.

10.2.3. Weryfikacja modeli liniowych

Po oszacowaniu parametrów modelu należy zbadać, czy dobrze opisuje on badane zależności. W przypadku dużej rozbieżności między modelem a danymi empirycznymi należy go skorygować. Weryfikacja sprowadza się do zbadania trzech własności:

1) stopnia zgodności modelu z danymi empirycznymi,
2) jakości ocen parametrów strukturalnych,
3) rozkładu odchyleń losowych.

Zajmiemy się tylko dwoma pierwszymi.

Ocena dopasowania modelu do danych empirycznych

Podstawowymi miarami tego dopasowania są: odchylenie standardowe reszt S_e (omówione wcześniej), współczynnik zmienności losowej, współczynnik zbieżności i współczynnik determinacji.

Współczynnik zmienności losowej W_e jest określony następująco

$$W_e = \frac{S_e}{\overline{y}} \cdot 100\% \tag{10.44}$$

i informuje, jaki procent średniej arytmetycznej zmiennej objaśnianej modelu stanowi odchylenie standardowe reszt. Mniejsza wartość wskazuje na lepsze dopasowanie modelu do danych empirycznych. Można przyjąć wartość krytyczną W^* (np. $W^* = 10\%$) i wtedy nierówność

$$W_e \leq W^* \tag{10.45}$$

wskazuje na dobre dopasowanie modelu do danych empirycznych.

Współczynnik zbieżności φ^2 wyraża się wzorem

$$\varphi^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2} \tag{10.46}$$

i informuje, jaka część całkowitej zmienności zmiennej objaśnianej nie jest wyjaśniana przez model. Zauważmy, że $0 \leq \varphi \leq 1$. Dopasowanie modelu do danych jest tym lepsze, im współczynnik zbieżności jest bliższy zeru.

Współczynnik determinacji R^2 wyraża się wzorem

$$R^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\widehat{y}_i - \overline{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2} \tag{10.47}$$

i informuje, jaką część całkowitej zmienności zmiennej objaśnianej stanowi zmienność wartości teoretycznych tej zmiennej. Zauważmy, że $0 \leq R^2 \leq 1$. Dopasowanie modelu do danych jest tym lepsze, im współczynnik zbieżności jest bliższy jedności.
Zachodzi równość

$$\varphi^2 + R^2 = 1. \tag{10.48}$$

Pierwiastek kwadratowy ze współczynnika determinacji R^2, czyli R, jest omawianym wcześniej współczynnikiem korelacji wielorakiej.

Aby stwierdzić, czy dopasowanie modelu jest dostatecznie duże, można zweryfikować hipotezę zerową postaci $H_0 : [R = 0]$ wobec hipotezy alternatywnej $H_1 : [R \neq 0]$. Sprawdzianem tej hipotezy jest statystyka

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}, \tag{10.49}$$

która ma rozkład F Fishera – Snedecora o $\nu_1 = m$, $\nu_2 = n - m - 1$ stopniach swobody. Z tablic testu F dla zadanego poziomu istotności γ oraz dla ν_1, ν_2 stopni swobody odczytuje się wartość krytyczną F^*. Jeśli $F \leq F^*$, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0, czyli współczynnik korelacji jest nieistotnie różny od zera, a więc dopasowanie jest zbyt słabe. Natomiast jeśli $F > F^*$, to hipotezę H_0 należy odrzucić na rzecz hipotezy H_1. Współczynnik korelacji wielorakiej jest istotny, a stopień dopasowania modelu do danych jest dostatecznie wysoki.

Badanie istotności parametrów strukturalnych

Badanie istotności parametrów $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ma na celu sprawdzenie, czy zmienne objaśniające istotnie oddziałują na zmienną objaśnianą. Dla każdego $i = 1, 2, \ldots, m$ weryfikuje się hipotezę zerową $H_0[\alpha_i = 0]$ wobec hipotezy alternatywnej $H_1[\alpha_i \neq 0]$. Sprawdzianem tej hipotezy jest statystyka

$$I_i = \frac{|a_i|}{S(a_i)}, \tag{10.50}$$

gdzie a_i jest wartością oceny parametru strukturalnego α_i, $S(a_i)$ standardowym błędem szacunku tego parametru dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Statystyka I_i ma rozkład t Studenta o $n - m - 1$ stopniach swobody. Z tablic testu t Studenta dla zadanego poziomu istotności γ oraz dla $n - m - 1$ stopni swobody odczytuje się wartość krytyczną I^*. Jeśli $I_i \leq I^*$, to nie podstaw do odrzucenia hipotezy H_0, czyli parametr strukturalny α_i jest nieistotnie różny od zera, a więc zmienna objaśniająca X_i nie wpływa w istotny sposób na zmienną objaśnianą Y. Natomiast jeśli $I_i > I^*$, to hipotezę H_0 należy odrzucić na rzecz hipotezy H_1. Współczynnik korelacji wielorakiej jest istotny, a stopień dopasowania modelu do danych jest dostatecznie wysoki. Parametr strukturalny α_i jest istotnie różny od zera, a więc zmienna objaśniająca X_i oddziałuje w istotny sposób na zmienną objaśnianą Y. Teraz możemy w pełni rozwiązać następujące zagadnienie.

Przykład 10.3. Zbadać zależność wielkości sprzedaży betonu [m^3] wybranej betonowni od wielkości wydanych zezwoleń na budowę (w rejonie jej oddziaływania), wyrażonych w metrach kwadratowych powierzchni użytkowej [m^2]. Poszczególne dane są zapisane w tablicach 10.3 i 10.4.

Tablica 10.3: Sprzedaż betonu ([m^3]) w latach 2000–2006 przez wybraną betonownię, opr. E. Koźniewski

Lata	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
$[m^3]$	15 573	9 900	12 233	10 470	15 616	24 135	37 590

Otrzymane klasy rodzajów budynków ponumerujemy następująco:
$1 \to (a)+(b)$, $2 \to (c)+(d)+(h)$, $3 \to (f)+(g)$, $4 \to (e)+(i)$ i wstawimy do tablicy 10.5.

Tablica 10.4: Zezwolenia na budowę wydane w latach 2000–2006 w powierzchni użytkowej [m^2] [2]

	Budynki/lata	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
	Mieszkalne (razem)	193 652	165 108	120 100	105 366	162 736	188 075	221 861
a	jednorodzinne	100 870	105 004	78 696	78 325	114 789	160 566	128 367
b	o 2 i więcej mieszkaniach	92 782	60 104	41 404	27 096	47 947	81 141	93 494
	Niemieszkalne (razem)	192 355	207 763	141 270	157 724	184 707	120 263	92 638
c	hotele i budynki zakwaterowania	1 814	4 707	4 180	327	492	1 469	4 883
d	biurowe	29 613	36 641	4 205	143	783	9 347	2 039
e	handlowo-usługowe	36 724	28 039	27 336	32 772	52 102	22 155	11 505
f	transportu i łączności	3 083	2 508	1 287	1 968	3 815	5 593	3 150
g	przemysłowe i magazynowe	29 176	20 756	33 458	36 802	35 949	25 323	25 294
h	ogólnodostępne obiekty	47 328	41 708	19 620	20 819	14 588	24 177	5 874
i	pozostałe niemieszkalne	44 616	73 404	51 185	64 893	76 978	32 199	39 893

Mamy więc nową tablicę 10.5.

Tablica 10.5: Zezwolenia na budowę wydane w latach 2000–2006 (agregacja), opr. E. Koźniewski

Lata/klasy	$(a)+(b)$	$(c)+(d)+(h)$	$(f)+(g)$	$(e)+(i)$
2000	193 652	78 755	32 260	81 340
2001	165 108	83 056	23 265	101 442
2002	120 100	28 005	34 745	78 521
2003	105 366	21 289	38 770	97 665
2004	162 736	15 863	39 764	129 080
2005	188 075	34 993	30 916	54 354
2006	221 861	12 796	28 444	51 398

Tworzymy wyjściową tablicę danych: zmiennej objaśnianej (Y) i zmiennych objaśniających (X_1, X_2, X_3, X_4) – tablica 10.6.

Tablica 10.6: Wyjściowa tablica danych dla tablicy 10.5

	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
Lata		$(a)+(b)$	$(c)+(d)+(h)$	$(f)+(g)$	$(e)+(i)$
2000	15 573	193 652	78 755	32 260	81 340
2001	9 900	165 108	83 056	23 265	101 442
2002	12 233	120 100	28 005	34 745	78 521
2003	10 470	105 366	21 289	38 770	97 665
2004	15 616	162 736	15 863	39 764	129 080
2005	24 135	188 075	34 993	30 916	54 354
2006	37 590	221 861	12 796	28 444	51 398

Tworzymy tablicę 10.7, licząc średnie $\overline{y}$, $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$, $\overline{x}_4$.

Tablica 10.7: Średnie dla tablicy 10.6, opr. E. Koźniewski

	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
Lata		$(a)+(b)$	$(c)+(d)+(h)$	$(f)+(g)$	$(e)+(i)$
2000	15 573	193 652	78 755	32 260	81 340
2001	9 900	165 108	83 056	23 265	101 442
2002	12 233	120 100	28 005	34 745	78 521
2003	10 470	105 366	21 289	38 770	97 665
2004	15 616	162 736	15 863	39 764	129 080
2005	24 135	188 075	34 993	30 916	54 354
2006	37 590	221 861	12796	28 444	51 398
Średnie	17 931,00	165 271,14	39 251,00	32 594,86	84 828,57

Dalsze obliczenia prowadzone są w Excelu.

Najpierw obliczamy współczynniki zmienności ze wzoru (10.5) i otrzymujemy odpowiednio $\nu_1 = 0{,}230554568$; $\nu_2 = 0{,}693956505$;

$\nu_3 = 0{,}063225748$; $\nu_4 = 0{,}777632324$. Po przyjęciu wartości krytycznej $v^* = 0{,}05$ dla wszystkich zmiennych mamy spełnioną nierówność $v^* \leq v_i$, dla $i = 1, 2, 3, 4$. Nie ma więc zmiennych quasi-stałych. Test ten nie eliminuje żadnej zmiennej objaśniającej.

Przechodzimy do analizy macierzy $\mathbf{R}_0$ i $\mathbf{R}$. Obliczamy wektor współczynników korelacji $\mathbf{R}_0$ między zmienną objaśnianą i potencjalnymi zmiennymi objaśniającymi oraz macierz R współczynników korelacji

$$R_0 \quad = \quad \begin{bmatrix} 0{,}77629646 \\ 0{,}42281913 \\ 0{,}06376574 \\ 0{,}69689022 \end{bmatrix},$$

$$R \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & 0{,}16009455 & -0{,}53572469 & -0{,}48585437 \\ 0{,}16009455 & 1 & -0{,}59428665 & 0{,}08473649 \\ -0{,}53572469 & -0{,}59428665 & 1 & 0{,}44035481 \\ -0{,}48585437 & 0{,}08473649 & 0{,}44035481 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dla analizy macierzy współczynników korelacji posłużymy się wzorem (10.13). Przyjmijmy poziom istotności $\gamma = 0{,}10$. Dla $n - 2 = 5$ stopni swobody odczytajmy najpierw z tablic t Studenta wartość $l^* = 2{,}015$, a następnie wyznaczmy (w programie Excel) tzw. krytyczną wartość współczynnika korelacji

$$r^* = \left(\frac{(2{,}015)^2}{(2{,}015)^2 + 7 - 2} \right)^{\frac{1}{2}} = 0{,}66943059.$$

Następnie ze zbioru potencjalnych zmiennych objaśniających eliminujemy te zmienne, które są słabiej skorelowane ze zmienną objaśnianą niż na poziomie 0,70974357, tj. takie zmienne X_i, dla których $r_i \leq r^*$. Są to zmienne X_2, X_3, dla których $r_2 = 0{,}42281913$, $r_3 = 0{,}06376574$. Po tej eliminacji zbiór zmiennych objaśniających redukuje się do dwu zmiennych X_1, X_4. Zależność między wielkością zezwoleń na budowę w budownictwie mieszkaniowym (jedno- i wielorodzinnym) oraz usługowo-handlowym i innym a wielkością produkcji betonu pozostaje dalej w mocy. W dalszym postępowaniu oszacujemy i zbadamy istotność parametrów zależności metodą najmniejszych kwadratów.

Przykład 10.4. Wyznaczyć trend liniowy sprzedaży betonu towarowego w latach 2001–2006 dla danych z przykładu 10.3. Dla ułatwienia przyjmiemy $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

10.3. Zadania

1. Dane są następujące obserwacje zmiennych X_1, X_2, X_3:

Tablica 10.8: Obserwacje zmiennych X_1, X_2, X_3, opr. E. Koźniewski

l	1	2	3	4	5	6
x_{l1}	18	22	25	27	30	34
x_{l2}	4,0	4,1	4,0	4,1	4,1	4,0
x_{l3}	8	3	7	4	9	11

Przy krytycznej wartości współczynnika zmienności $\nu^* = 0{,}10$ ocenić przydatność poszczególnych zmiennych do opisu zmiennej objaśnianej ze względu na poziom zróżnicowania ich wartości.

2. Zbadać zależność wielkości sprzedaży betonu [m^3] wybranej betonowni od wielkości wydanych zezwoleń na budowę (w rejonie jej oddziaływania), wyrażonych w metrach kwadratowych powierzchni użytkowej [m^2] wg poniższej agregacji.

Klasy rodzajów budynków ponumerujemy następująco:

1 :	$1 \to (a)$,	$2 \to (b)$,	$3 \to (c) + (d) + (h)$,	$4 \to (g)$,	$5 \to (f)$,	$6 \to (e) + (i)$,
2 :	$1 \to (a)$,	$2 \to (b)$,	$3 \to (c) + (d)$,	$4 \to (g) + (h)$,	$5 \to (f)$,	$6 \to (e) + (i)$,
3 :	$1 \to (a) + (b)$,	$2 \to (c)$,	$3 \to (d)$,	$4 \to (g) + (h)$,	$5 \to (f)) + (i)$,	$6 \to (e)$,
4 :	$1 \to (a) + (b)$,	$2 \to (c)$,	$3 \to (d) + (h)$,	$4 \to (f) + (g)$,	$5 \to (e) + (i)$,	
5 :	$1 \to (a) + (b)$,	$2 \to (c) + (d)$,	$3 \to (h)$,	$4 \to (f)$,	$5 \to (g) + (e) + (i)$,	
6 :	$1 \to (a)$,	$2 \to (b)$,	$3 \to (c) + (d)$,	$4 \to (h)$,	$5 \to (f)$,	$6 \to (g)$,
						$7 \to (e) + (i)$,
7 :	$1 \to (a)$,	$2 \to (b)$,	$3 \to (c)$,	$4 \to (d) + (h)$,	$5 \to (f) + (g)$,	$6 \to (e)$,
						$7 \to (i)$,
8 :	$1 \to (a) + (b)$,	$2 \to (c)$,	$3 \to (d)$,	$4 \to (h)$,	$5 \to (f) + (e)$,	$6 \to (g) + (i)$,
9 :	$1 \to (a) + (b)$,	$2 \to (c) + (d)$,	$3 \to (h)$,	$4 \to (f)$,	$5 \to (g)$,	$6 \to (e)$,
						$7 \to (i)$,
10 :	$1 \to (a)$,	$2 \to (b) + (c)$,	$3 \to (d) + (h) + (f)$,	$4 \to (e) + (g)$,	$5 \to (i)$.	

Poszczególne dane są zapisane w tablicach 10.3 i 10.4.

Rozdział 11

Optymalizacja transportu mas ziemnych przy budowie drogi — programowanie liniowe

11.1. Programowanie liniowe

Rozpatrzmy następującą parę problemów decyzyjnych:

Problem. (P) Należy zaplanować wykonanie roboty budowlanej tak, aby przy istniejących ograniczeniach zasobów realizacji budowy (materiały, robocizna, sprzęt) osiągnąć maksymalny efekt, np. liczbę m^3 kubatury budynków, liczbę m^2 powierzchni użytkowej mieszkań, zysk wykonawcy.

Problem. (D) Tak jednak zminimalizować zużycie materiałów i pracy maszyn, aby efekt wykonanej roboty był nie mniejszy od założonej wartości.

Przykład 11.1. Zakład produkcji prefabrykatów budowlanych wytwarza dwa rodzaje płyt o różnej wielkości. Przyjmijmy tu, że czynnikami limitującymi produkcję są jedynie wydajności betoniarki i wibratora (tablica 11.1 [49]).

Tablica 11.1: Czas potrzebny na zabetonowanie i wibrację jednej płyty, miesięczny limit czasu pracy i zyski jednostkowe dla dwóch rodzajów płyt, opr. E. Koźniewski

	Płyta 1	Płyta 2	Czas [h]
Betoniarka [h/1 pł]	0,50	0,25	300
Wibrator [h/1 pł]	0,40	0,50	300
Zysk jedn. [zł/1 pł]	60,00	45,00	

Rozwiązanie. Model matematyczny P:
Niech zmienne decyzyjne: x_1, x_2 – liczby płyt odpowiednio typu 1 i 2,

wyznaczyć $\max f(x_1, x_2) = 60x_1 + 45x_2$ – całkowity zysk, przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 &\leq 300, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 &\leq 300, \\ x1 &\geq 0, \\ x2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Problem ten rozwiązujemy w Excelu w sposób następujący:

1. W komórki $A1 : D4$ (lub w dowolne inne – ta uwaga dotyczy całego rozwiązania) wpisujemy tablicę 11.1.
2. W komórki $F1 : G2$ odpowiednio tekst „x_1", „x_2" i liczby 0,0. W komórkę $F4$ wpisujemy napis „funk. celu", w komórkę $G4$ – formułę $= B4 * F2 + C4 * G2$ (czyli $60x_1 + 45x_2$ z (11.1)).
3. W komórkę $B7$ wpisujemy formułę $= B2 * F2 + C2 * G2$ ($0{,}5x_1 + 0{,}25x_2$), w komórkę $B8$ wpisujemy formułę $= B3 * F2 + C3 * G2$ ($0{,}4x_1 + 0{,}5x_2$ z (11.1)). W celu wizualnego podkreślenia opisu problemu dopisujemy w komórkach $A7 : A8$ oznaczenia warunków ograniczających oraz w komórkach $C7 : C8$ wartości lewych stron warunków ograniczających (to ostatnie uzupełnienie nie jest niezbędne). Na tym kończy się przygotowanie problemu do zastosowania procedury Solver (należy upewnić się, że dodatek Solver został zainstalowany, jeżeli nie, należy go dodać). Wywołujemy więc Formula/Solver i ukazuje się okno dialogowe „Solver Parameters/Solver-Parametry".
4. W polu „Set Target Cell/Komórka celu" wpisujemy naszą funkcję celu, czyli adres komórki $G4$.
5. W polu „By Changing Cells/Komórki zmienne" wpisujemy adresy komórek zawierających wartości zmiennych, czyli $F2 : G2$.
6. Naciskamy przycisk „Add/Dodaj" i wpisujemy kolejno ograniczenia.
7. W „Cell Reference/Adres komórki" adres komórki $B7$ (czyli $0{,}5x_1 + 0{,}25x_2$ – lewą stronę nierówności (11.1)).
8. Zostawiamy zaproponowany przez system znak $\leq$,
9. w „Constraint/Warunek ograniczający" wpisujemy adres komórki $C7$ lub $D2$,
10. naciskamy przycisk „Add/Dodaj" i następnie podobnie wpisujemy
11. w „Cell Reference/Adres komórki" adres komórki $B8$ (czyli $0{,}4x_1 + 0{,}5x_2$-lewą stronę nierówności (11.1)).
12. zostawiamy zaproponowany przez system znak $\leq$,
13. W „Constraint/Warunek ograniczający" wpisujemy adres komórki $C8$ lub $D3$.

14. Naciskamy „Add/Dodaj”.
15. Następnie wpisujemy w „Cell Reference/Adres komórki” adres komórki $F2$.
16. Zamieniamy znak $\leq$ na znak $\geq$.
17. Wpisujemy w „Constraint/Warunek ograniczający” 0 (zero).
18. Naciskamy „Add/Dodaj”.
19. Wpisujemy w „Cell Reference/Adres komórki” adres komórki $G2$.
20. Zamieniamy znak $\leq$ na znak $\geq$.
21. Wpisujemy w „Constraint/Warunek ograniczający” 0 (zero).
22. Naciskamy „OK”.
23. Sprawdzamy poprawność wpisanych ograniczeń.
24. Naciskamy przycisk „Solve/Rozwiąż”.

Wtedy w tablicy 11.2

Tablica 11.2: Wartości potrzebne do obliczenia odchylenia standardowego, opr. E. Koźniewski

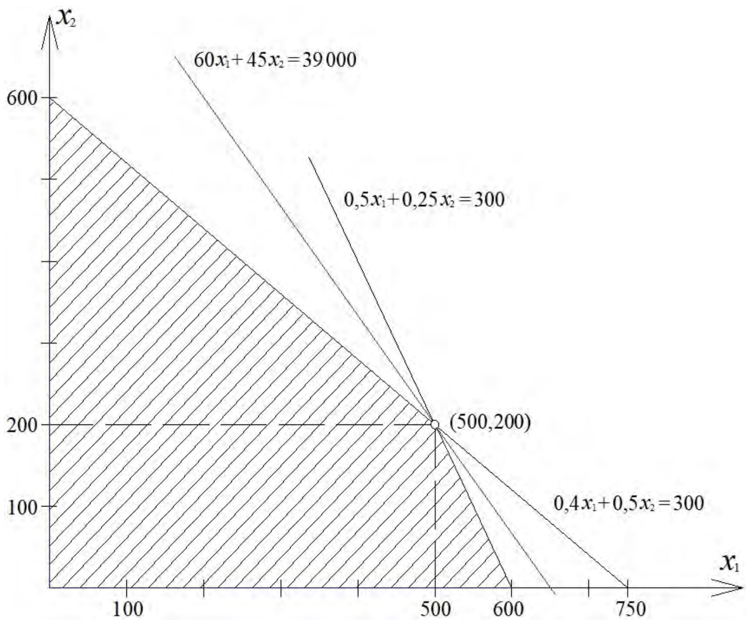
	A	B	C	D	E	F	G
1		Płyta 1	Płyta 2	Czas		x_1	x_2
2	Betoniarka	0,50	0,25	300		0	0
3	Wibrator	0,40	0,50	300			
4	Zysk jednostkowy	60,00	45,00			funk. celu	0
5							
6							
7	n1	0	300				
8	n2	0	300				

po zadziałaniu programu otrzymujemy tablicę 11.3.

Tablica 11.3: Widok arkusza Excel po wykonaniu działań dla modelu P, opr. E. Koźniewski

	A	B	C	D	E	F	G
1		Płyta 1	Płyta 2	Czas		x_1	x_2
2	Betoniarka	0,50	0,25	300		500	200
3	Wibrator	0,40	0,50	300			
4	Zysk jednostkowy	60,00	45,00			funk. celu	39 000
5							
6							
7	n1	300	300				
8	n2	300	300				

Rozwiązanie otrzymaliśmy w komórkach $F2 : G2$, komórki $B7 : B8$ wskazują, że czas został wykorzystany maksymalnie. Na rysunku 11.1 podano interpretację geometryczną powyższego rozwiązania.



Rysunek 11.1: Rozwiązanie geometryczne problemu z przykładu 11.1, opr. E. Koźniewski na podstawie [49]

Sformułujemy teraz zadanie dualne.

Przykład 11.2. Ustalić, w odniesieniu do zadania z przykładu 11.1, opłacalny plan produkcji minimalizujący koszty wytwarzania. Mamy zatem model D. Oznaczmy zmienne decyzyjne przez w_1, w_2 – są to wartości 1 godziny pracy odpowiednio betoniarki i wibratora [zł/h]. Należy wyznaczyć minimum funkcji $g(w_1, w_2) = 300w_1 + 300w_2$ – kosztu wytwarzania, przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} 0{,}5w_1 + 0{,}4w_2 &\geq 60, \\ 0{,}25w_1 + 0{,}5w_2 &\geq 45, \\ w_1 &\geq 0, \\ w_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Przykład 11.1 jest inspiracją do ogólnego postawienia problemu opisanego w rozdziale 11.2.

11.2. Ogólny problem programowania liniowego

Dana jest macierz oraz dwa wektory (kolumnowy i wierszowy)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{1m} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix}. \tag{11.2}$$

Na podstawie tych danych można sformułować dwa zagadnienia.

- **Zagadnienie maksimum**: znaleźć wektor kolumnowy

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \left(\text{można zapisać } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T\right) \tag{11.3}$$

taki, że funkcja liniowa

$$\boldsymbol{cx} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{11.4}$$

osiąga maksimum przy spełnieniu warunków

$$\boldsymbol{x} \geq 0, A\boldsymbol{x} \leq b. \tag{11.5}$$

- **Zagadnienie minimum**: znaleźć wektor wierszowy

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \ldots & w_m \end{bmatrix} \tag{11.6}$$

taki, że funkcja liniowa

$$\boldsymbol{wb} = b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_mw_m \tag{11.7}$$

osiąga minimum przy spełnieniu warunków

$$\boldsymbol{w} \geq 0, \boldsymbol{w}A \geq \boldsymbol{c}. \tag{11.8}$$

Problemy te nazywamy *dualnymi* względem siebie.

11.3. Zasadnicze twierdzenie programowania liniowego

Niech dane będą macierz i wektory (11.2) o elementach nieujemnych. Niech wektory (11.3) i (11.6) spełniają odpowiednio warunki (11.5) i (11.8). Jeżeli wektory

$$\boldsymbol{x}^o = \begin{bmatrix} x_1^o & x_2^o & \dots & x_n^o \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{w}^o = \begin{bmatrix} w_1^o & w_2^o & \dots & w_m^o \end{bmatrix} \tag{11.9}$$

spełniają warunki (11.5), (11.8) i zachodzi równość

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^o = \boldsymbol{w}^o\boldsymbol{b}, \tag{11.10}$$

to $\boldsymbol{x}^o$ jest wektorem, dla którego funkcja liniowa $\boldsymbol{cx} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ osiąga maksimum na zbiorze wypukłym określonym nierównościami (11.5), a $\boldsymbol{w}^o$ jest wektorem, dla którego funkcja liniowa $\boldsymbol{wb} = b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_mw_m$ osiąga minimum na zbiorze wypukłym określonym nierównościami (11.8) [46].

Dowód. Aby udowodnić, że $\boldsymbol{x}^o$ jest wartością optymalną dla zagadnienia maksimum, wystarczy pokazać, że dla każdego wektora $\boldsymbol{x}$ spełniającego warunki (11.5) zachodzi $\boldsymbol{cx} \leq \boldsymbol{cx}^o$. Niech więc $\mathbf{x}$ spełnia warunki (11.5). Ponieważ $\boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{w}^oA$ (drugi z warunków (11.8)), otrzymujemy $\boldsymbol{cx} \leq (\boldsymbol{w}^oA)\boldsymbol{x}$ (iloczyn dwu macierzy nieujemnych, tj. o nieujemnych wartościach). Stosując łączność mnożenia macierzy, otrzymujemy $\boldsymbol{cx} \leq \boldsymbol{w}^o(A\boldsymbol{x})$. Ponieważ $\boldsymbol{x}$ spełnia pierwszy z warunków $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, więc $\boldsymbol{cx} \leq \boldsymbol{w}^o\boldsymbol{b}$. Z założenia $\boldsymbol{w}^o\boldsymbol{b} = \boldsymbol{cx}^o$, zatem $\boldsymbol{cx} \leq \boldsymbol{cx}^o$, skąd wynika, że jest największą wartością w zbiorze wypukłym określonym nierównościami (11.5). Podobnie niech $\boldsymbol{w}$ będzie dowolnym wektorem spełniającym warunki (11.8). Rozumując podobnie i wykorzystując warunki $A\boldsymbol{x}^o \leq \boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{cx}^o = \boldsymbol{w}^o\boldsymbol{b}$, dostajemy $\boldsymbol{wb} \geq \boldsymbol{w}(A\boldsymbol{x}^o) = (\boldsymbol{w}A)\boldsymbol{x}^o \geq \boldsymbol{cx}^o = \boldsymbol{w}^o\boldsymbol{b}$. Tak więc $\boldsymbol{wb} \geq \boldsymbol{w}^o\boldsymbol{b}$. Stąd $\boldsymbol{w}^o\boldsymbol{b}$ jest najmniejszą wartością funkcji $\boldsymbol{wb}$ na zbiorze wypukłym określonym nierównościami (11.8). □

11.4. Zagadnienie transportowe [28, 55]

Spośród rozlicznych zastosowań programowania liniowego na szczególną uwagę zasługuje zagadnienie transportowe. Problem dotyczy zaplanowania przewozu jednorodnego materiału od m dostawców do n odbiorców, tak aby zminimalizować nakłady ponoszone na transport, przy

założeniu, że są one proporcjonalne do liczby przewożonych jednostek. Uproszczenie to jest możliwe do przyjęcia przy planowaniu masowych przewozów. Często przyjmowanym kryterium jest minimalizacja kosztów bądź nakładów wyrażonych iloczynem ton i kilometrów. Oznaczmy dla $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$:
a_i – liczba jednostek materiału u i-tego dostawcy,
b_j – liczba jednostek materiału potrzebna j-temu odbiorcy,
c_{ij} – odległość połączenia między i-tym dostawcą a j-tym odbiorcą [km] lub koszt przewozu jednostki materiału na tej trasie [zł],
x_{ij} – liczba jednostek materiału przewożonego od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy (zmienne decyzyjne).
Dane można zapisać w postaci macierzowej w tablicy:

Tablica 11.4: Dane do zagadnienia transportowego, opr. E. Koźniewski

c_{11}	c_{12}	$\ldots$	c_{1n}	a_1	ZAPASY
c_{21}	c_{22}	$\ldots$	c_{2n}	a_2	
$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	
c_{m1}	c_{m2}	$\ldots$	c_{mn}	a_m	
b_1	b_2	$\ldots$	b_n		
ZAPOTRZEBOWANIA					

Model matematyczny w ujęciu programowania liniowego jest następujący:
Wyznaczyć minimum funkcji celu $z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ przy ograniczeniach

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{11.11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{11.12}$$

i przy warunkach brzegowych

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{11.13}$$

Zadanie transportowe nazywamy *zbilansowanym*, jeżeli spełniony jest warunek

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{11.14}$$

Zadanie *niezbilansowane*, tzn. takie, w którym popyt (zapotrzebowania) nie równa się podaży (zapasy, zasoby), można sprowadzić do zadania zbilansowanego, co pozwoli rozwiązanie je typowym programem komputerowym. Aby sprowadzić je do postaci zbilansowanej

- w przypadku przewagi zapasów nad zapotrzebowaniami przyjmujemy fikcyjnego odbiorcę o zapotrzebowaniu $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$,
- w przypadku przeciwnym przyjmujemy fikcyjnego dostawcę o zapasach $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ i określamy koszty transportu jako zerowe lub nadajemy im wartości wynikające odpowiednio z niedoboru bądź nadwyżek materiału.

Jeżeli zadanie transportowe jest **zbilansowane**, to model jest następujący:
Wyznaczyć minimum $z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$, przy ograniczeniach

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \tag{11.15}$$

(od każdego dostawcy wywozi się cały zapas, $i = 1, ..., m$),

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \tag{11.16}$$

(zapotrzebowanie każdego odbiorcy zostanie zaspokojone, $j = 1, ..., n$) i warunkach brzegowych

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{11.17}$$

Zadanie transportowe jest szczególnym przypadkiem programowania liniowego w postaci standardowej o mn zmiennych i $m+n$ ograniczeniach. Stąd do rozwiązywania problemów transportowych można stosować algorytm simpleks, który jednak w tym przypadku nie jest metodą efektywną (choćby dlatego, że pojawia się duża liczba zmiennych). Istotą algorytmu simpleks jest badanie kolejno rozwiązań bazowych pod kątem optymalności. Jeśli rozwiązanie nie jest optymalne, to poszukujemy nowego rozwiązania bazowego lepszego od poprzedniego. Problemy transportowe z uwagi na pewną symetrię można rozwiązywać bardziej zwięzłymi metodami niż algorytm simpleks. Każde zbilansowane zadanie transportowe ma skończone rozwiązanie optymalne, w którym jest co najwyżej $m+n-1$ zmiennych niezerowych.

Warto zwrócić uwagę, że rozwiązania zadania transportowego mają następujące własności.

Twierdzenie 11.1. Każde zbilansowane zadanie transportowe ma skończone rozwiązanie optymalne i jest ono całkowitoliczbowe, jeśli wszystkie elementy a_i, b_j są całkowite.

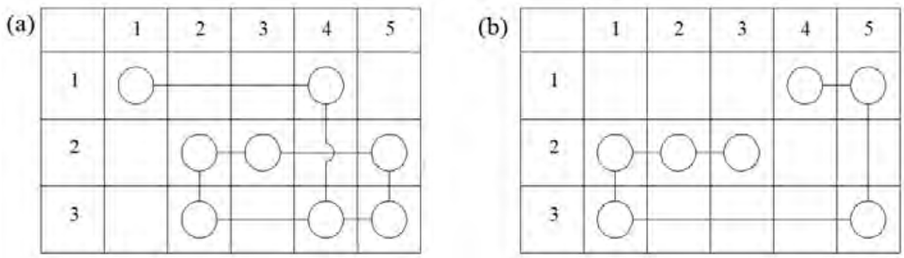
Rozwiązanie zadania transportowego ma interesujący związek z teorią grafów. Zanim sformułujemy odpowiednie twierdzenia, wprowadzimy trzy terminy związane z programowaniem liniowym: rozwiązanie dopuszczalne i rozwiązanie bazowe oraz cykl.

- Rozwiązaniem dopuszczalnym zadania programowania liniowego nazywamy każde rozwiązanie równań i nierówności ograniczających spełniających warunek nieujemności, tj. każdy punkt wielościanu wypukłego stowarzyszonego z problemem liniowym.
- Rozwiązaniem bazowym zadania programowania liniowego nazywamy każde rozwiązanie równań ograniczeń przy przyjęciu, że zmienne decyzyjne w liczbie $n - m$ (gdy $n > m$) są równe zeru.
- Cyklem nazywamy każdy prostokąt w tablicy grafów (rys. 11.2).

Twierdzenie 11.2. Rozwiązanie dopuszczalne zadania transportowego jest rozwiązaniem bazowym wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający mu graf jest grafem spójnym i bez cykli.

Twierdzenie 11.3. Na to, aby graf rozwiązania zadania transportowego był grafem spójnym i bez cykli, potrzeba i wystarcza, żeby zawierał dokładnie $m + n - 1$ wierzchołków.

Przy czym graf spójny to taki, w którym dwa dowolne wierzchołki (kółka na rys. 11.2) można połączyć ciągiem przemiennym wierzchołków i gałęzi (gałęzie są tylko poziome i pionowe).



Rysunek 11.2: Grafy w macierzy zadania transportowego: (a) z cyklami – nie jest rozwiązaniem ($8 > 3+5-1$); (b) bez cykli – jest rozwiązaniem ($3+5-1=7$), opr. E. Koźniewski

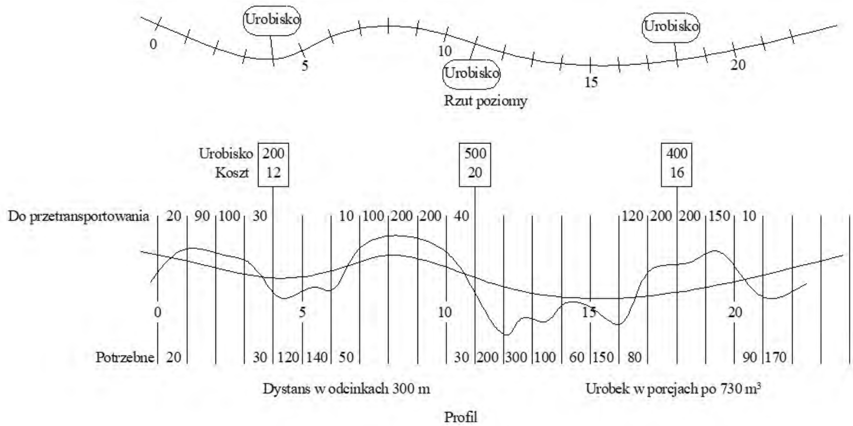
Na rysunku 11.2 przedstawiono grafy w macierzy rozwiązań zadania transportowego. Graf bez cykli jest rozwiązaniem bazowym ($3+5-1=7$).

Przykład 11.3. Minimalizacja kosztów transportu podczas przerzutowej metody wykonywania drogi [56].

Przy budowie drogi przerzuca się ogromne ilości ziemi, co zobrazowano na rysunku profilu drogi (rys. 11.3). Na planie zaznaczono lokalizację urobiska oraz koszty transportu ziemi dla 1 m^3/stację. Te ostatnie są funkcją profilu (od niego zależy siła holowania) i dlatego zależą od miejsca i kierunku przewożenia. Zakłada się, że niewykorzystana ziemia może być usunięta bez żadnych kosztów. W celu sformułowania problemu przyjmiemy za punkty początkowe (transportu) urobiska i stacje, gdzie znajduje się do dyspozycji ziemia, a za punkty docelowe te odcinki, które wymagają zasypania. Koszty jednostkowe otrzymuje się po obliczeniu jednostkowego kosztu transportu z każdego punktu początkowego do każdego punktu docelowego. Przybliżone koszty transportu dla ziemi leżącej pomiędzy dwiema stacjami oblicza się tak, jak gdyby transportowana ziemia znajdowała się w niższej stacji. Na przykład koszt transportu ze stacji 2 do stacji 5 jest równy $2{,}0+1{,}7+1{,}5 = 5{,}2(0{,}052\text{dol/m}^3)$; ze stacji 5 do stacji 3 wynosi $2{,}5+2{,}3 = 4{,}8(0{,}048\text{dol/m}^3)$; z urobiska B do stacji 3 wynosi $122{,}3 = 14{,}3$; z urobiska B do stacji jest równy $12{,}5+2{,}8 = 16{,}3$. Niech x_{ij} będzie liczbą metrów sześciennych ziemi, która ma być przewieziona ze stacji i do stacji j, oraz c_{ij} niech oznacza koszt jednostkowy. Rozpatrzymy jedynie część drogi, od stacji 3 do stacji 7. Odcinek ten zawiera jedno urobisko oznaczone literą B, zatem np. x_{Bj} oznacza ilość ziemi pobraną w urobisku B, która będzie przewieziona do stacji j.

Funkcja celu ma postać

$$
\begin{aligned}
z = {} & 1{,}7x_{34} + 3{,}2x_{35} + 6{,}0x_{36} + 14{,}3x_{B3} + \\
& + 12{,}0x_{B4} + 13{,}5x_{B5} + 16{,}3x_{B6} + 6{,}8x_{63} + \\
& + 4{,}5x_{64} + 2{,}0x_{65} + 8{,}3x_{73} + 6{,}0x_{74} + 3{,}5x_{75} + 1{,}5x_{76}.
\end{aligned}
$$



→ kierunek przemieszczania →																					
2,3	2,1	2,0	1,7	1,5	2,8	2,5	2,6	2,4	1,7	1,4	1,4	2,0	2,3	1,9	1,6	3,0	2,3	2,4	1,5	1,5	1,7
0					5					10					15					20	
1,7	1,8	2,0	2,3	2,5	2,0	1,5	1,4	1,5	2,3	2,6	2,6	2,0	1,7	2,1	2,9	1,0	1,7	1,6	2,5	2,5	2,3
← kierunek przemieszczania ←																					

Rysunek 11.3: Prace ziemne przy budowie autostrady [56], opr. E. Koźniewski

Przy ograniczeniach

$$
\left.
\begin{aligned}
x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} &\le 30, \\
x_{B3} + x_{B4} + x_{B5} + x_{B6} &\le 200, \\
x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{66} &\le 10, \\
x_{73} + x_{74} + x_{75} + x_{76} &\le 100,
\end{aligned}
\right\} \quad \text{(dysponowana ilość ziemi)}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
x_{33} + x_{B3} + x_{63} + x_{73} &\le 30, \\
x_{34} + x_{B4} + x_{64} + x_{74} &\le 120, \\
x_{35} + x_{B5} + x_{65} + x_{75} &\le 140, \\
x_{36} + x_{B6} + x_{66} + x_{76} &\le 50,
\end{aligned}
\right\} \quad \text{(potrzebna ilość ziemi)}
$$

$x_{ij} \ge 0$ dla wszystkich i, j.

Model jest bardziej jasny w zapisie, gdy przenumerujemy indeksy zmiennych: pierwszy indeks według schematu $(3, B, 6, 7) \to (1, 2, 3, 4)$; drugi indeks: $(3, 4, 5, 6) \to (1, 2, 3, 4)$ Zagadnienie to można rozwiązać metodą standardową, wtedy trzeba rozpisać macierz o dużych rozmiarach. O wiele prościej rozwiązuje się zagadnienie za pomocą specjalnej metody.

11.5. Optymalizacja transportu mas ziemnych z użyciem różnych środków transportu

Zadanie sformułujemy następująco [1]. Mając dane
a_i – objętość i-tej rezerwy ziemnej, $i = 1, \ldots, m$,
b_j – objętość j-tego odcinka nasypu, $j = 1, \ldots, n$,
k – rodzaj środka transportu, $k = 1, \ldots, l$,
c_{ij}^k – jednostkowy koszt przewozu jednostki towaru z i-tej rezerwy na j-ty odcinek nasypu k-tym środkiem transportu,

należy znaleźć ilości gruntu x_{ij}^k transportowanego z i-tej rezerwy na j-ty odcinek nasypu k-tym środkiem transportu, które minimalizują funkcję $m \cdot n \cdot k$ zmiennych

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} c_{ij}^k x_{ij}^k, \tag{11.18}$$

przy warunkach

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} x_{ij}^k = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{11.19}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} x_{ij}^k = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{11.20}$$

$$x_{ij}^k \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \; k = 1, 2, \ldots, l. \tag{11.21}$$

Przykład 11.4. Projekt techniczno-roboczy obwałowania przewiduje wykonanie nasypu liniowego (wału) z pobraniem gruntu z punktowych rezerw ziemnych. Przedsiębiorstwo wykonujące przed przystąpieniem do budowy ma następujące dane (tablica 11.5) [1]:

Tablica 11.5: Dane potrzebne do wykonania nasypu liniowego, opr. E. Koźniewski

	$b_1 = 47\,000$ m^3	$b_2 = 70\,500$m^3	$b_3 = 58\,750$ m^3	$\sum\limits_{j=1}^{3} b_j = 476\,250$ m^3
	odległości transportowe w m			
$a_1 = 67\,500$ m^3	1820	2490	2746	
$a_2 = 96\,400$ m^3	2750	2430	2895	
$a_3 = 62\,300$ m^3	2540	2150	1240	
$\sum\limits_{i=1}^{3} a_i = 476\,250$ m^3	$\sum\limits_{i=1}^{3} a_i > \sum\limits_{j=1}^{3} b_j$			

Do transportu gruntu znajdują się w dyspozycji następujące środki transportowe:
ciągniki z przyczepami 3 t (środek transportu $k = 1$),
zgarniarki przyczepne 6 m^3 (środek transportu $k = 2$),
samochody wywrotki 3,5 t (środek transportu $k = 3$).

Koszt przetransportowania 1 m^3 gruntu poszczególnymi środkami przy odległościach z tablicy 11.5 stanowi macierz zapisaną w tablicy 11.6.

Tablica 11.6: Jednostkowe koszty transportu na poszczególne odległości odcinków nasypu, opr. E. Koźniewski

		b_1	b_2	b_3
Rezerwy ziemi	a_1	$c_{11}^1 = 12{,}32$ $c_{11}^2 = 8{,}87$ $c_{11}^3 = 13{,}60$	$c_{12}^1 = 16{,}34$ $c_{12}^2 = 36{,}19$ $c_{12}^3 = 13{,}60$	$c_{13}^1 = 19{,}05$ $c_{13}^2 = 61{,}56$ $c_{13}^3 = 16{,}20$
	a_2	$c_{21}^1 = 12{,}32$ $c_{21}^2 = 16{,}67$ $c_{21}^3 = 13{,}60$	$c_{22}^1 = 19{,}05$ $c_{22}^2 = 49{,}86$ $c_{22}^3 = 16{,}20$	$c_{23}^1 = 10{,}05$ $c_{23}^2 = 50{,}91$ $c_{23}^3 = 16{,}20$
	a_3	$c_{31}^1 = 21{,}76$ $c_{31}^2 = 71{,}32$ $c_{31}^3 = 18{,}80$	$c_{32}^1 = 16{,}67$ $c_{32}^2 = 16{,}67$ $c_{32}^3 = 13{,}60$	$c_{33}^1 = 12{,}32$ $c_{33}^2 = 20{,}58$ $c_{33}^3 = 13{,}60$

Z uwagi na nierówność $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i > \sum\limits_{j=1}^{3} b_j$ wprowadzamy dodatkowe zmienne fikcyjne: y_1, y_2, y_3 (objętości gruntu transportowanego odpowiednio z rezerw a_1, a_2, a_3) i zapisujemy warunki (11.19) – (11.21).

Warunki (11.19) mają postać

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_{1j}^{k} + y_1 = a_1(= 67\,500),$$
$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_{2j}^{k} + y_2 = a_2(= 96\,400),$$
$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_{3j}^{k} + y_3 = a_3(= 62\,300).$$

Warunki (11.20) mają postać

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_{i1}^{k} = b_1(= 47\,000),$$
$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_{i2}^{k} = b_2(= 70\,500),$$
$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_{i3}^{k} = b_3(= 58\,750).$$

Funkcja celu ma postać

$$z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} c_{ij}^{k} x_{ij}^{k} = 12{,}32x_{11}^{1} + 16{,}34x_{12}^{1} + 19{,}05x_{13}^{1} + \ldots .$$

Do obliczeń trzeba przemianować zmienne i sformułować warunki do zagadnienia planowania liniowego.

Rozwiązując zadanie, otrzymujemy wyniki (tablica 11.7).

Tablica 11.7: Rozw. zagadnienia transportu mas ziemnych, opr. E. Koźniewski

		Odcinki nasypu			Niewykorzystana objętość rezerwy
		$b_1 = 47\,000$	$b_2 = 70\,500$	$b_3 = 58\,750$	
Rezerwy ziemi	$a_1 = 67\,500$	$x_{11}^1 = 0$ $x_{11}^2 = 47\,000$ $x_{11}^3 = 0$	$x_{12}^1 = 0$ $x_{12}^2 = 0$ $x_{12}^3 = 8\,200$	$x_{13}^1 = 0$ $x_{13}^2 = 0$ $x_{13}^3 = 0$	$y_1 = 12\,300$
	$a_2 = 96\,400$	$x_{21}^1 = 0$ $x_{21}^2 = 0$ $x_{21}^3 = 0$	$x_{22}^1 = 0$ $x_{22}^2 = 0$ $x_{22}^3 = 0$	$x_{23}^1 = 58\,750$ $x_{23}^2 = 0$ $x_{23}^3 = 0$	$y_2 = 37\,650$
	$a_3 = 62\,300$	$x_{31}^1 = 0$ $x_{31}^2 = 0$ $x_{31}^3 = 0$	$x_{32}^1 = 62\,300$ $x_{32}^2 = 0$ $x_{32}^3 = 0$	$x_{33}^1 = 0$ $x_{33}^2 = 0$ $x_{33}^3 = 0$	$y_3 = 0$

11.6. Zadania

1. Zapisać zagadnienie transportowe w postaci standardowego programowania liniowego o mn zmiennych i $m + n$ ograniczeniach (odpowiednie macierze, wektory i warunki).
2. Zilustrować na rysunku rozwiązanie problemu dualnego z przykładu 11.1.
3. Zaprojektować i rozwiązać zadanie minimalizacji kosztów przy przerzutowej metodzie wykonania drogi:
   a) od 3 do 17, b) od 4 do 20,
   c) od 6 do 21, d) od stacji 8 do stacji 22.
   Narysować odpowiednie grafy.
4. Zapisać zagadnienie transportowe dla różnych środków transportu w postaci standardowego programowania liniowego.
5. Sformułować zadanie transportowe w ujęciu klasycznym dla różnych środków transportu. Czy jest to możliwe?
6. Narysować kilka wariantów grafów rozwiązań zagadnienia transportowego dla wartości $m = 7$, $n = 6$. Ile potencjalnych rozwiązań teoretycznie istnieje?

Rozdział 12

Metody matematyczne wielokryterialnej analizy porównawczej na przykładzie rozwiązań projektowych wybranych pokryć dachowych

12.1. Metody matematyczne

Metody matematyczne wielokryterialnej analizy porównawczej oznaczają tu zasadę, według której algorytm porównywania opiera się na budowie *skalaru*, którego wartość liczbowa stanowi syntetyczny wskaźnik oceny. Budowa skalaru wymaga nadania wartościom kryteriów (mianowanym lub niemianowanych) liczbowych wartości niemianowanych. W algorytmie metod matematycznych stosuje się więc tzw. *kodowanie*, które polega na sprowadzeniu wartości mianowanych cech do niemianowanych. Cechy mogą być „rosnące” (*stymulanty*) lub „malejące” (*destymulanty*); zależnie od tego, czy daną wielkość chcemy maksymalizować (zysk, efektywność, jakość), czy minimalizować (koszty, czas, ciężar).

12.2. Założenia metody

Rozpatrujemy zbiór W określonych i dopuszczalnych wariantów rozwiązań

$$W = \{W_i : i = 1, 2, \ldots, n\}. \tag{12.1}$$

Przyjmujemy zbiór *kryteriów* K,

$$K = \{K_j : j = 1, 2, \ldots, m\}, \tag{12.2}$$

dla których wyznaczamy zbiór *miar*

$$X = \{x_{ij} : i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m\}. \tag{12.3}$$

Otrzymujemy więc *macierz danych*

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix}. \tag{12.4}$$

Wiersze macierzy przedstawiają *miary cząstkowe* poszczególnych wariantów, kolumny zaś – miary cząstkowe wszystkich wariantów wg określonego kryterium cząstkowego. Celem analizy wielokryterialnej jest znalezienie takiego wariantu (ew. wariantów), który wedle przyjętych kryteriów ma najkorzystniejszy układ miar cząstkowych. Miary te w praktyce są zazwyczaj wielkościami mianowanymi (jeśli K_j oznacza koszt, to miary będą wyrażone w [zł], jeśli K_j oznacza czas, to miary będą wyrażone w [dniach]). Dlatego, by prowadzić dalsze rozważania polegające na porównywaniu liczb, sensowne jest zastąpienie wyjściowych danych ich kodami. Przez kod będziemy rozumieć zastąpienie wartości miary cząstkowej wartością liczbową niemianowaną z określonego przedziału, najczęściej z przedziału $\langle 0, 1\rangle$.

12.3. Rodzaje kodowań

12.3.1. Standaryzacja [58]

Istotą tego kodowania jest zastąpienie wartości miary cząstkowej x_{ij} przez z_{ij} na podstawie wartości średniej i odchylenia standardowego dla kryterium K_j. Dla *stymulant* mamy

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \overline{x_j}}{s_j}, \tag{12.5}$$

i dla *destymulant*

$$z_{ij} = (-1) \cdot \frac{x_{ij} - \overline{x_j}}{s_j}, \tag{12.6}$$

gdzie

$$\overline{x_j} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}}{n} \tag{12.7}$$

jest wartością średnią miar analizowanych wariantów wg kryterium j,

$$s_j = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x_j})^2}{n}} \tag{12.8}$$

jest odchyleniem standardowym miar analizowanych wariantów wg kryterium j, dla $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$.

12.3.2. Normowanie

Istotą tego kodowania jest zastąpienie wartości miary cząstkowej x_{ij} przez z_{ij} na podstawie wartości maksymalnej dla kryterium K_j. Dla *stymulant* mamy

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_{jmax}}, \tag{12.9}$$

i dla *destymulant*

$$z_{ij} = \left(\frac{x_{ij}}{x_{jmin}}\right)^{-1}, \tag{12.10}$$

gdzie x_{jmin} jest minimalną wartością, a x_{jmax} jest maksymalną wartością miary według j-tego kryterium, dla $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$.

12.3.3. Kodowanie wg Neumanna – Morgensterna [58]

Istotą tego kodowania jest zastąpienie wartości miary cząstkowej x_{ij} przez z_{ij} wyrażonej przez stosunek różnicy tej miary i miary najgorszej z wszystkich miar wariantów wg kryterium K_j do różnicy miary najlepszej i najgorszej wg tego kryterium. Dla *stymulant* mamy

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - x_{jmin}}{x_{jmax} - x_{jmin}}, \tag{12.11}$$

i dla *destymulant*

$$z_{ij} = \frac{x_{jmax} - x_{ij}}{x_{jmax} - x_{jmin}}, \tag{12.12}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$.

12.3.4. Kodowanie metodą Pattern

Istotą tego kodowania jest zastąpienie wartości miary cząsteczkowej x_{ij} przez z_{ij} wyrażonej jako iloraz danej miary i sumy miar wszystkich wariantów wg kryterium K_j. Dla *stymulant* mamy

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}} \tag{12.13}$$

i dla *destymulant*

$$z_{ij} = \frac{1 - x'_{ij}}{n-1}, \tag{12.14}$$

gdzie $x'_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}}$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$.
Wzór (12.14) przedstawia przekształcenie liniowe *dopełnień do jedności*, które zachowuje równocześnie *unormowanie do jedności*, tzn. $\sum\limits_{i=1}^{n} z_{ij} = 1$. Rzeczywiście, ostatniej równości dowodzi następujący rachunek

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1 - x'_{ij}}{n-1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{x_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}}\right)}{n-1} = \frac{n - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}}}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} = 1.$$

Warto zauważyć, że w literaturze dla dystymulant często zamiast wzoru (12.14) proponowane jest przekształcenie nieliniowe $z_{ij} = \frac{x'_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x'_{ij}}$, gdzie $x'_{ij} = \frac{1}{x_{ij}}$. Ponieważ odwrotności małych liczb są wielkimi liczbami, rozwiązanie takie może być obarczone dużą niestabilnością.

12.4. Algorytm stosowania metod matematycznych [58]

Krok 1: dokonuje się wyboru cech – kryteriów, które będą decydowały o wyborze rozwiązania.
Krok 2: ustala się, przy udziale ekspertów, wagi ν_j poszczególnych kryteriów ($j = 1, 2, \ldots, m$), przy czym $\sum\limits_{j=1}^{m} \nu_j = 1$.

Krok 3: określa się miary liczbowe wariantów rozwiązań, czyli tworzy się macierz danych; w przypadku cech niemierzalnych wprowadza się skalę ocen i z pomocą ekspertów (sędziów) ocenia się warianty. Statystycznie ocenia się wiarygodność (zgodność) sędziów.
Krok 4: liczbowe miary wariantów wg poszczególnych kryteriów cząstkowych poddaje się kodowaniu jedną z opisanych wcześniej metod.
Krok 5: dokonuje się oceny wariantowych rozwiązań poprzez obliczenie syntetycznych wskaźników. Najkorzystniejsze rozwiązanie charakteryzuje się najniższą oceną, jeśli do kodowania wartości miar zastosowano minimalizację, lub najwyższą, gdy kodowanie polegało na maksymalizacji.

12.5. Formuły ocen syntetycznych [58]

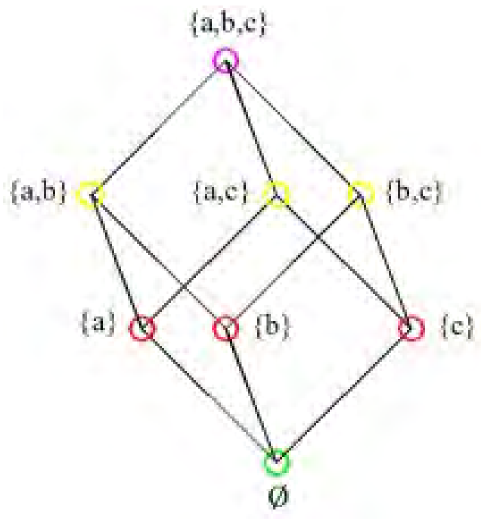
W przypadku, gdy zawiedzie formuła bezpośredniego porównania analizowanych wariantów, jako parametr porównań przyjmuje się inny wskaźniki, np. wskaźnik sumacyjny skorygowany

$$J_i = \sum_{j=1}^{m} \nu_j z_{ij}, \tag{12.15}$$

gdzie ν_j jest wagą kryterium, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$.

12.6. Diagramy Hassego

Są to rysunki zbiorów częściowo uporządkowanych. Rozważmy najpierw jako przykład zbiór wszystkich podzbiorów zbioru skończonego $\{a, b, c\} : \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$ z relacją zawierania $\subseteq$.



Rysunek 12.1: Ilustracja porządku częściowego podyktowanego inkluzją, opr. E. Koźniewski

Będziemy mówić, że element $\{b, c\}$ „nakrywa" $\{c\}$ i „nakrywa" $\{b\}$. Dalej $\{a, b, c\}$ „nakrywa" $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ i $\{b, c\}$, nie „nakrywa" zaś $\{a\}$, $\{b\}$ ani $\{c\}$. Częściowy porządek w zbiorze S to relacja $\subseteq$:
– (zw) *zwrotna*, czyli $s \subseteq s$ dla każdego s ze zbioru S,
– (as) *antysymetryczna*, tzn. $s \subseteq t$ i $t \subseteq s \Rightarrow s = t$,
– (prz) *przechodnia*, tzn. $s \subseteq t$ i $t \subseteq u \Rightarrow s \subseteq u$.
Zbiór S, w którym taką relację $\subseteq$, określono nazywamy *częściowo uporządkowanym*.
Wprowadzamy następnie relację $\subset$ w ten sposób, że $x \subset y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \subseteq y$ i $x \neq y$.
Mówimy, że element t „nakrywa" element s, gdy $s \subset t$ i nie ma w S elementu u takiego, że $s \subset u \subset t$.
Diagramem Hassego zbioru częściowo uporządkowanego $(S, \subseteq)$ jest *rysunek grafu skierowanego*, którego wierzchołkami są elementy zbioru S i w którym od wierzchołka t **do wierzchołka** s **biegnie krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy** t **„nakrywa"** s.
Relację $\subseteq$ – ogólniej oznaczaną także przez $s \leq t$, która wskazuje kierunek – interpretujemy:

$$s \leq t \Leftrightarrow t \text{ „jest lepszy od" } s.$$

Elementy odpowiadające punktom znajdującym się na diagramie Hassego w pobliżu samej góry uważamy za najlepsze.
Diagramy Hassego, podobnie jak drzewa z wyróżnionym korzeniem, są zazwyczaj rysowane z krawędziami skierowanymi w dół i (najczęściej) bez strzałek.

12.7. Reguły porządkowania zbiorów

Pierwsza reguła porządkowania zbiorów. Porządkowanie ma charakter bezpośredni. Termin „lepsze” rozumiany jest zgodnie z definicją: jeżeli zbiór $X = \{x_i\}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ oceniany jest z punktu widzenia m kryteriów K_s $(s \in \{1, \ldots, m\})$, dla których wartościami najlepszymi są ich wartości maksymalne, to x_i jest „lepszy od” x_j wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie r $(r \in \{1, \ldots, m\})$

$$K_r(x_i) > K_r(x_j)$$

i dla pozostałych K_p, $p \neq r$,

$$K_p(x_i) \geq K_p(x_j).$$

Druga reguła porządkowania zbiorów. Wybór elementów przeprowadza się z uwzględnieniem sumy (średniej) kryteriów, na podstawie zależności

$$x_i \text{ „jest lepszy od” } x_j \leftrightarrow \sum_{r=1}^{m} K_r(x_i) \geq \sum_{r=1}^{m} K_r(x_j).$$

Trzecia reguła porządkowania zbiorów. Według tej reguły wybór elementów lepszych przeprowadza się z uwzględnieniem sumy ważonej (średniej ważonej) przyjętych kryteriów. Poszczególnym kryteriom K_r $(r = 1, 2, \ldots, m)$ należy przypisać różne wagi liczbowe ν_r $(r = = 1, 2, \ldots, m)$. Wybór wariantów (elementów) „lepszych” przeprowadza się na podstawie zależności

$$x_i \text{ „jest lepszy od” } x_j \leftrightarrow \sum_{r=1}^{m} \nu_r K_r(x_i) \geq \sum_{r=1}^{m} \mu_r K_r(x_j).$$

Czwarta reguła porządkowania zbiorów (porządkowanie według pożądanych parametrów). Dla pary elementów i, j ustalamy, dla ilu kryteriów jest $K_r(x_i) \geq K_r(x_j)$ i liczbę tę oznaczamy przez $l(i,j)$ (x_i „jest lepsze od” x_j), z tym że w przynajmniej jednym r' żądamy $K_{r'}(x_i) > K_{r'}(x_j)$, wówczas dla pozostałych $g(i,j)$ kryteriów mamy $K_s(x_i) < K_s(x_j)$ (x_i „jest gorszy od” x_j). Mamy oczywiście $l(i,j) + g(i,j) = m$. Ostatecznie element x_i uznajemy za „lepszy od” x_j wtedy i tylko wtedy, gdy $l(i,j) > g(i,j)$. W szczególności regułę tę możemy stosować, gdy chcemy pominąć w analizie (w danej chwili) pewne kryteria.

12.8. Kryteria oceny cech wybranych pokryć dachowych

- Koszty całkowite (materiały, robocizna, sprzęt) [zł] – kryterium K_1,
- Ciężar pokrycia [kN/m^2] – kryterium K_2,
- Trwałość pokrycia [lata] – kryterium K_3,
- Estetyka pokrycia (ocena 1-6) – kryterium K_4,
- Łatwość eksploatacji (ocena 1-6) – kryterium K_5.

12.8.1. Koszty całkowite (materiały, robocizna i sprzęt)

Koszty materiałów, robocizny i sprzętu oraz koszty całkowite zostały opracowane za pomocą programu Norma Pro na podstawie kosztorysów.

Tablica 12.1: Zestawienie kosztów wykonania wybranych pokryć dachowych [zł], opr. E. Koźniewski

	Wariant 1 Dachówka ceram. Granat 13V	**Wariant** 2 Dachówka cem. Verona	**Wariant** 3 Blachodach. Finnea	**Wariant** 4 Blachodach. Monterrey Standard	**Wariant** 5 Gont bitumiczny	**Wariant** 6 Gont drewniany
MRS	52 428,26	63 620,02	41 711,10	33 788,91	64 511,38	74 029,33
Materiały	35 592,22	36 314,19	24 605,99	14 454,80	25 510,02	46 971,78
Robocizna	15 615,45	25 050,82	16 684,79	18 753,06	36 480,89	25 321,10
Sprzęt	1 220,59	2 255,01	420,32	581,05	2 520,47	1 736,45

12.8.2. Ciężar pokrycia

Przez ciężar pokrycia dachu rozumiemy tylko ciężar wykorzystanego do tego materiału. Nie wliczono ciężarów deskowania, łacenia itp.

Tablica 12.2: Zestawienie ciężaru pokrycia dachu [kN/m^2], opr. E. Koźniewski

	Wariant 1	Wariant 2	Wariant 3	Wariant 4	Wariant 5	Wariant 6
Ciężar pokrycia [kN/m^2]	0,474	0,479	0,053	0,048	0,095	0,459

Najmniejszy ciężar pokrycia ma wariant 4 – blachodachówka Monterrey Standard, natomiast najcięższym pokryciem jest dachówka cementowa Verona – wariant 2.

12.8.3. Trwałość pokrycia

Trwałość to słowo trudne do określenia. W budownictwie chcemy, aby użyte materiały były mocne, pewne, trwałe i odporne na działanie czynników zewnętrznych. Określeniem, którym często zastępujemy słowo trwałość, jest m. in. gwarancja wyrobu (materiału). Wartości tego kryterium określa się na podstawie gwarancji pochodzących z katalogów producentów wybranych pokryć dachowych.

Tablica 12.3: Zestawienie gwarancji pokryć dachowych [lata], opr. E. Koźniewski

	Wariant 1	Wariant 2	Wariant 3	Wariant 4	Wariant 5	Wariant 6
Trwałość [lata]	20	30	40	30	15	40

Dwa pokrycia – blachodachówka modułowa Finnera (wariant 3) i gont drewniany (wariant 6) – są objęte najwyższą gwarancją, natomiast najniższą gwarancję ma gont bitumiczny (wariant 5).

12.8.4. Estetyka pokrycia

Estetyka związana jest z poczuciem piękna i zależy od indywidualnej oceny człowieka. Dlatego jej wartość przygotowali eksperci poprzez ankietę. Autorzy publikacji, aby zweryfikować wiarygodność ekspertów (sędziów), poddali analizie statystycznej konkretny aspekt, mianowicie: jaki jest stopień korelacji między k zbiorami ocen (oceny ekspertów) dotyczących n obiektów (kryteria oceny dachów: K_1, K_2, K_3, K_4, K_5). Miarą tej współzależności jest *współczynnik zgodności W-Kendalla*, który przyjmuje przyjmuje wartość od „0” (brak zgodności) do „1” (całkowita zgodność). Należy podkreślić, że wysoki wynik W interpretujemy jako fakt zgodności sędziów co do kryteriów, którymi posługiwali się przy ocenianiu danych obiektów. Równocześnie trzeba zauważyć, że wysoka wartość

współczynnika W wcale nie oznacza, że ocena określonych obiektów jest poprawna. Może być tak, że sędziowie, posługując się fałszywym kryterium (z punktu widzenia kryterium zewnętrznego), doszli do zgodnych opinii.
Testowanie współczynnika W Kendalla dla ocen kryterium K_4 (estetyka pokrycia) odbywa się według następującej procedury. Wyniki ankiet dziesięciu ekspertów (sędziów) dla sześciu wariantów zestawiamy w tablicy (tab. 12.4). W celu wyznaczenia rang w każdym wierszu tablicy 12.4 ustawiamy wyniki malejąco od lewa do prawa, tworząc w ten sposób tablicę 12.5, obliczamy rangi i wstawiamy do tablicy 12.6.

Tablica 12.4: Zestawienie wyników ankiety dla kryterium K_4 – estetyka pokrycia, opr. E. Koźniewski

ESTETYKA	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$E5$	$E6$	$E7$	$E8$	$E9$	$E10$	Średnia
Wariant 1	5	4	4	5	5	3	4	3	5	4	4,2
Wariant 2	6	4	5	6	4	6	5	5	4	4	4,9
Wariant 3	4	5	4	4	6	4	4	5	6	5	4,7
Wariant 4	4	5	5	4	4	5	4	5	5	5	4,6
Wariant 5	2	3	3	3	1	4	4	1	4	4	2,9
Wariant 6	1	2	2	2	2	2	6	1	2	3	2,3

Tablica 12.5: Zestawienie wyników ankiety dla kryterium K_4 – estetyka pokrycia, uporządkowane malejąco, opr. E. Koźniewski

ESTETYKA	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$E5$	$E6$	$E7$	$E8$	$E9$	$E10$
Wariant 1	5	5	5	5	4	4	4	4	3	3
Wariant 2	6	6	6	5	5	5	4	4	4	4
Wariant 3	6	6	5	5	5	4	4	4	4	4
Wariant 4	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4
Wariant 5	4	4	4	4	3	3	3	2	1	1
Wariant 6	6	3	2	2	2	2	2	2	1	1

Omówimy szczegółowo wyznaczanie rang na podstawie pierwszego wiersza tablicy 12.4: ocena 5 jest na czterech pozycjach $1, 2, 3, 4$; obliczamy ich średnią $\frac{1+2+3+4}{4} = 2{,}5$ i wstawiamy ją do tablicy w miejsce ocen 5. Ocena 4 jest na pozycjach $5, 6, 7, 8$; obliczamy średnią $\frac{5+6+7+8}{4} = 6{,}5$ i tę liczbę wstawiamy zamiast ocen 4. Ocena 3 jest na pozycjach $9, 10$;

obliczamy średnią $\frac{9+10}{2} = 9{,}5$ i tę liczbę wstawiamy w tablicy zamiast ocen 3. Otrzymujemy w ten sposób pierwszy wiersz tablicy 12.6. Powtórzymy wyznaczanie rang na podstawie drugiego wiersza tablicy 12.4: ocena 6 jest na trzech pozycjach $1, 2, 3$; obliczamy ich średnią $\frac{1+2+3}{3} = 2$ i wstawiamy ją do tablicy 12.6 w miejsce ocen 6; ocena 5 jest na trzech pozycjach $4, 5, 6$; obliczamy średnią tych pozycji $\frac{4+5+6}{3} = 5$ i wstawiamy ją do tablicy 12.6 w miejsce ocen 5; ocena 4 jest na pozycjach $7, 8, 9, 10$; obliczamy średnią $\frac{7+8+9+10}{4} = 8{,}5$ i wstawiamy ją do tablicy 12.6 w miejsce ocen 4.

Tablica 12.6: Zestawienie wyników ankiety dla kryterium K_4 – estetyka pokrycia, opr. E. Koźniewski

ESTETYKA	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$E5$	$E6$	$E7$	$E8$	$E9$	$E10$
Wariant 1	2,5	6,5	6,5	2,5	2,5	9,5	6,5	9,5	2,5	6,5
Wariant 2	2	8,5	5	2	8,5	2	5	5	8,5	8,5
Wariant 3	8	4	8	8	1,5	8	8	4	1,5	4
Wariant 4	8,5	3,5	3,5	8,5	8,5	3,5	8,5	3,5	3,5	3,5
Wariant 5	8	6	6	6	9,5	2,5	2,5	9,5	2,5	2,5
Wariant 6	9,5	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5	1	9,5	5,5	2

Tablica 12.7: Tablica rang dla kryterium K_4 – estetyka pokrycia ($R_i = k \cdot \overline{EX}$), opr. E. Koźniewski

ESTETYKA	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$E5$	$E6$	$E7$	$E8$	$E9$	$E10$	Średnia $\overline{EX}$	R_i	$(R_i - R)^2$
Wariant 1	2,5	6,5	6,5	2,5	2,5	9,5	6,5	9,5	2,5	6,5	5,5	55	492,84
Wariant 2	2	8,5	5	2	8,5	2	5	5	8,5	8,5	5,5	55	492,84
Wariant 3	8	4	8	8	1,5	8	8	4	1,5	4	5,5	55	492,84
Wariant 4	8,5	3,5	3,5	8,5	8,5	3,5	8,5	3,5	3,5	3,5	5,5	55	492,84
Wariant 5	8	6	6	6	9,5	2,5	2,5	9,5	2,5	2,5	5,5	55	492,84
Wariant 6	9,5	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5	1	9,5	5,5	2	5,5	55	492,84
											$R = 33$	Suma_$R_i = 330$	$S = 2872{,}24$

Gdy wyniki oceny powtarzają się, to otrzymujemy tzw. rangi wiązane. Dla tych rang wyliczamy tzw. poprawki. Najpierw w kolumnach tablicy 12.7 znajdujemy powtarzające się rangi – w $E1$ są dwie: 8, 8; w $E2, E3$ i $E4$ nie ma; w $E5$ są dwie 8,5 i 8,5; w $E6$ i $E7$ nie ma; w $E8$ trzykrotnie występuje ranga 9,5; 9,5; 9,5; w $E10$ nie ma. Oznaczając przez t liczbę powtórzeń rang, w kolumnach $E1, E5, E9$ mamy $t = 2$, w kolumnie $E8$ $t = 3$, w pozostałych kolumnach $E2$, $E3$, $E4$, $E6$, $E7$, $E10$ $t = 0$. Obliczając poprawki $t^3 - t$, otrzymujemy odpowiednio wartości 6 $(2^3 - 2 = 6)$ oraz 24 $(3^3 - 3 = 24)$ oraz 0 $(0^3 - 0 = 0)$, które wpisujemy w drugiej kolumnie tablicy 12.8, sumujemy (tu tylko przepisujemy) i zapisujemy w trzeciej kolumnie tablicy 12.8, a po podzieleniu przez 12 wpisujemy w kolumnie czwartej tablicy 12.8.

Tablica 12.8: Wyliczenie poprawek dla kryterium K_4 – estetyka pokrycia, opr. E. Koźniewski

	$t^3 - t$	SUMA	$T_{EX} = \frac{\sum(t^3-t)}{12}$
T_{E1}	6	6	0,5
T_{E2}	0	0	0
T_{E3}	0	0	0
T_{E4}	0	0	0
T_{E5}	6	6	0,5
T_{E6}	0	0	0
T_{E7}	0	0	0
T_{E8}	24	24	2
T_{E9}	6	6	0,5
T_{E10}	0	0	0
			$\sum T_{EX} = 3{,}50$

Współczynnik W Kendalla dla $k = 10$; $n = 6$ obliczamy ze wzoru

$$W = \frac{S}{\frac{1}{12} \cdot n^2 \cdot (k^3 - k) - n \cdot \sum_{i=1}^{k} T_i} \tag{12.16}$$

na podstawie wyników zawartych w tablicach 12.7 i 12.8. Otrzymujemy $W = 0{,}98$. Po uwzględnieniu zależności $\chi^2 = k(n-1)W$ jest to ogólna

metoda sprawdzania wiarygodności sędziów.
W przypadku, gdy $3 \leq k \leq 20$ i $3 \leq n \leq 7$, istotność współczynnika W sprawdzamy w specjalnej tablicy. Korzystanie z niej polega na porównaniu liczby S_{kr} (S krytyczne) z tablicy dla k sędziów i n obiektów ocenianych z obliczoną wartością S z tablicy rang.
$S_{kr} = 376{,}7$ – wartość z tablicy 12.9.
Z uwagi na spełnioną nierówność $S_{kr} = 376{,}7 < S = 2872{,}24$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zgodności sędziów.

Tablica 12.9: Wartości krytyczne dla $3 \leq k \leq 20$ i $3 \leq n \leq 7$ (Siegiel S., Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences, McGraw-Hill, NY 1956, 286p).

$\alpha = 0{,}05$					n
k	3	4	5	6	7
3			64,4	103,9	157,3
4		49,5	84,4	143,3	217,0
5		62,6	112,3	182,4	276,2
6		75,7	136,1	221,4	335,2
8	48,1	101,7	183,7	299,0	453,1
9	54,0	–	–	–	–
10	60,0	127,8	231,2	376,7	571,0
12	71,9	–	–	–	–
14	83,8	–	–	–	–
15	89,8	192,9	349,8	570,5	864,9
16	95,8	–	–	–	–
18	107,7	–	–	–	–
20	119,7	258,0	468,5	764,4	1158,7

12.8.5. Łatwość eksploatacji

Użytkowanie dachu wiąże się z konserwacją i różnymi naprawami uszkodzonych jego fragmentów. Każdy ma indywidualne zdanie na temat eksploatacji danego pokrycia dachowego, dlatego tak jak w przypadku kryterium 4 (K_4 – estetyka pokrycia) jej wartość określili eksperci.
Testowanie współczynnika W Kendalla dla ocen kryterium K_5 – łatwość eksploatacji.

Tablica 12.10: Zestawienie wyników ankiety dla kryterium K_5 – łatwość eksploatacji, opr. E. Koźniewski

EKSPLOATACJA	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$E5$	$E6$	$E7$	$E8$	$E9$	$E10$	Średnia
Wariant 1	6	5	5	4	5	4	6	3	5	6	4,9
Wariant 2	6	5	5	5	4	5	6	3	3	5	4,7
Wariant 3	5	4	4	5	5	5	4	4	5	4	4,5
Wariant 4	5	4	4	5	5	5	4	4	5	4	4,5
Wariant 5	3	3	3	3	3	4	3	3	4	5	3,4
Wariant 6	1	2	3	2	3	3	5	3	2	4	2,8

Tablica 12.11: Tablica rang dla kryterium K_5 – łatwość eksploatacji, opr. E. Koźniewski

EKSPLOATACJA	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$E5$	$E6$	$E7$	$E8$	$E9$	$E10$	ŚREDNIA	R_i	$(R_i - R)^2$
Wariant 1	2	5,5	5,5	8,5	5,5	8,5	2	10	5,5	2	5,5	55	484
Wariant 2	1,5	5	5	5	8	5	1,5	9,5	9,5	5	5,5	55	484
Wariant 3	3	8	8	3	3	3	8	8	3	8	5,5	55	484
Wariant 4	3	8	8	3	3	3	8	8	3	8	5,5	55	484
Wariant 5	7	7	7	7	7	2,5	7	7	2,5	1	5,5	55	484
Wariant 6	10	8	4,5	8	4,5	4,5	1	4,5	8	2	5,5	55	484
											$R = 33$	Suma_ $R_i = 330$	$S = 2904$

Wyznaczenie współczynnika W: dla $k = 10$; $n = 6$ (na podstawie obliczeń, analiz i (12.16) oraz tablicy 12.12) znajdujemy wartość $W = 0{,}99$. W przypadku, gdy $3 \leq k \leq$ i $3 \leq n \leq 7$, istotność współczynnika W sprawdzamy w specjalnej tablicy 12.9. Korzystanie z niej polega na porównaniu liczby S_{kr} (S krytyczne) z tablicy dla k sędziów i n obiektów ocenianych z obliczoną wartością S z tablicy rang.

$S_{kr} = 376{,}70$ – wartość z tablicy.

Ponieważ $S_{kr} = 376{,}70 < S = 2904$, nie ma więc podstaw do odrzucenia hipotezy zgodności sędziów.

Gdy wyniki oceny powtarzają się, to otrzymujemy tzw. rangi wiązane, dla których wyliczamy tzw. poprawki:

Tablica 12.12: Wyliczenie poprawek dla kryterium K_5 – łatwość eksploatacji, opr. E. Koźniewski

	$t^3 - t$	SUMA	$T_{EX} = \frac{\sum(t^3-t)}{12}$
T_{E1}	6	6	0,5
T_{E2}	24	24	2
T_{E3}	6	6	0,5
T_{E4}	6	6	0,5
T_{E5}	6	6	0,5
T_{E6}	6	6	0,5
T_{E7}	6	6	0,5
T_{E8}	6	6	0,5
T_{E9}	6	6	0,5
T_{E10}	6	12	1
			$\sum T_i = 7$

12.9. Propozycje wag do oceny syntetycznej

Wagi, podobnie jak oceny kryteriów, można przyjąć korzystając z ocen sędziów i przeprowadzając analizę zgodności, ale można przyjąć arbitralnie. Ale też ważność poszczególnych kryteriów może przyjąć inwestor, ale też wykonawca lub inny decydent. W niniejszym przykładzie przyjmujemy wagi poszczególnych kryteriów na mocy decyzji inwestora.

Tablica 12.13: Kryteria wag zaproponowanych przez inwestora, opr. E. Koźniewski

	Wagi
$K1$ – Koszty całkowite	0,30
$K2$ – Ciężar pokrycia	0,10
$K3$ – Trwałość pokrycia	0,25
$K4$ – Estetyka pokrycia	0,15
$K5$ – Łatwość eksploatacji	0,20

Tablica 12.14: Dane wejściowe dla ocen syntetycznych, opr. E. Koźniewski

	$K1$ Koszty całkowite [zł]	$K2$ Ciężar [kN/m^2]	$K3$ Trwałość [lata]	$K4$ Estetyka (punkty 1-6)	$K5$ Łatwość eksploatacji (punkty 1-6)
W_1: Ceram. Granat 13 V	52 428,26	0,474	20	4,2	4,9
W_2: Cementowa Verona	63 620,02	0,479	30	4,9	4,7
W_3: Blach. Finnera	41 711,10	0,053	40	4,7	4,5
W_4: Blach. Montenerey	33 788,91	0,048	30	4,6	4,5
W_5: Gont bitumiczny	64 511,38	0,095	15	2,9	3,4
W_6: Gont drewniany	74 029,33	0,459	40	2,3	2,8
Suma	330 089,00	1,61	175,00	23,60	24,80

12.10. Analiza wielokryterialna wybranych wariantów

Wracamy do analizy podstawowej tablicy 12.14. Zastosujemy kodowanie Pattern (12.13) zarówno do stymulant ($K3, K4, K5$), jak i destymulant ($K1, K2$). W wyniku tej operacji otrzymujemy tablicę 12.15.

Tablica 12.15: Zastosowane kodowanie Pattern dla wszystkich kryteriów, opr. E. Koźniewski

	$K1$ Koszty całkowite [zł]	$K2$ Ciężar [kN/m^2]	$K3$ Trwałość [lata]	$K4$ Estetyka (punkty 1-6)	$K5$ Łatwość eksploatacji (punkty 1-6)
W_1: Ceram. Granat 13 V	0,158831	0,294776	0,114286	0,177966	0,197581
W_2: Cementowa Verona	0,192736	0,297886	0,171429	0,207627	0,189516
W_3: Blach. Finnera	0,126363	0,032960	0,228571	0,199153	0,181452
W_4: Blach. Montenerey	0,102363	0,029851	0,171429	0,194915	0,181452
W_5: Gont bitumiczny	0,195436	0,059080	0,085714	0,122881	0,137097
W_6: Gont drewniany	0,224271	0,285448	0,228571	0,097458	0,112903

Po zastosowaniu rekodowania Pattern ((12.14) dla $n = 6$) do destymulant ($K1, K2$) otrzymujemy ostatecznie zakodowaną tablicę 12.16.

Tablica 12.16: Zastosowane rekodowanie Pattern dla destymulant ($K1, K2$), opr. E. Koźniewski

	$K1$ Koszty całkowite [zł]	$K2$ Ciężar [kN/m^2]	$K3$ Trwałość [lata]	$K4$ Estetyka (punkty 1-6)	$K5$ Łatwość eksploatacji (punkty 1-6)
W_1: Ceram. Granat 13 V	0,168234	0,141045	0,114286	0,177966	0,197581
W_2: Cementowa Verona	0,161453	0,140423	0,171429	0,207627	0,189516
W_3: Blach. Finnera	0,174727	0,193408	0,228571	0,199153	0,181452
W_4: Blach. Montenerey	0,179527	0,194030	0,171429	0,194915	0,181452
W_5: Gont bitumiczny	0,160913	0,188184	0,085714	0,122881	0,137097
W_6: Gont drewniany	0,155146	0,142910	0,228571	0,097458	0,112903

Wartości kodów przedstawione w tablicy 12.16 nie pozwalają na konstruktywne wskazanie diagramu z wykorzystaniem pierwszej zasady (porównywanie odpowiednich wartości dwóch wierszy, każdego z każdym). Takie wyniki analizy stanowią zachętę do skorzystania z trzeciej reguły porównywania (tej z wagami) lub inaczej ze wskaźnika sumacyjnego skorygowanego.

Tablica 12.17: Wyniki trzeciej reguły porównywania (z wagami), opr. E. Koźniewski

	$\sum_{r=1}^{m} \nu_r K_r(x_i)$
W_1: Ceram. Granat 13 V	0,159357110
W_2: Cementowa Verona	0,174382567
W_3: Blach. Finnera	0,195065066
W_4: Blach. Montenerey	0,181645957
W_5: Gont bitumiczny	0,134372358
W_6: Gont drewniany	0,155176942

Wyniki porównania według trzeciej reguły porównywania prowadzą do uporządkowania $W_5 \leq W_6 \leq W_1 \leq W_2 \leq W_4 \leq W_3$. Stąd najlepszy jest wariant 3. Możemy zastosować drugą regułę porównywania, gdzie nie korzysta się z wag lub równoważnie zakłada, że wszystkie wagi ν_r są jednakowe, czyli $\nu_r = \frac{1}{m}$ dla $r = 1, 2, \ldots, m$. Wówczas otrzymujemy tablicę 12.18 i uporządkowanie $W_5 \leq W_6 \leq W_1 \leq W_2 \leq W_4 \leq W_3$.

Tablica 12.18: Wyniki drugiej reguły porównywania (bez wag), opr. E. Koźniewski

	$\sum_{r=1}^{m} K_r(x_i)$
W_1: Ceram. Granat 13 V	0,799111101
W_2: Cementowa Verona	0,870447513
W_3: Blach. Finnera	0,977310905
W_4: Blach. Montenerey	0,921352683
W_5: Gont bitumiczny	0,694789231
W_6: Gont drewniany	0,736988566

Jak widać, wynik porównania bez wag nie różni się i jest taki sam jak wynik porównania z wagami.

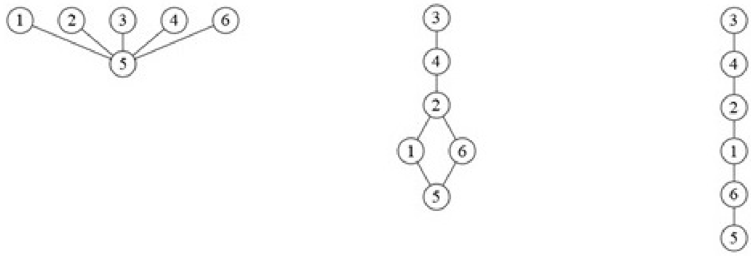
Inną kwestią są otrzymane wartości w tablicach 12.17 i 12.18. Jaka jest różnica między nimi? Możemy ją oceniać, np. zaokrąglając (przybliżenia z dokładnością) do dwóch miejsc lub jednego miejsca po przecinku.

Tablica 12.19: Wyniki drugiej reguły porównywania z założoną dokładnością (z wagami), opr. E. Koźniewski

	$\sum_{r=1}^{m} \nu_r K_r(x_{ij})$ dokładność do 1 miejsca po przecinku	$\sum_{r=1}^{m} \nu_r K_r(x_{ij})$ dokładność do 2 miejsc po przecinku	$\sum_{r=1}^{m} \nu_r K_r(x_{ij})$ dokładność do 3 miejsc po przecinku
W_1: Ceram. Granat 13 V	0,2	0,16	0,159
W_2: Cementowa Verona	0,2	0,17	0,174
W_3: Blach. Finnera	0,2	0,20	0,195
W_4: Blach. Montenerey	0,2	0,18	0,182
W_5: Gont bitumiczny	0,1	0,13	0,134
W_6: Gont drewniany	0,2	0,16	0,155

Wynik porównania według trzeciej reguły porównywania zilustrowano na rysunku 12.2.

dokładność do jednego miejsca po przecinku	dokładność do dwóch miejsc po przecinku	dokładność do trzech miejsc po przecinku



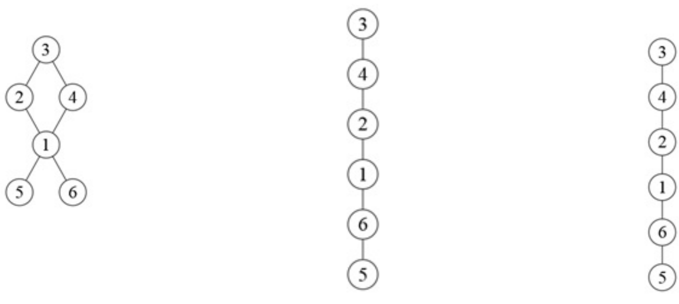
Rysunek 12.2: Diagramy Hassego skonstruowane dla różnych dokładności według trzeciej reguły porównywania, opr. E. Koźniewski

Tablica 12.20: Wyniki drugiej reguły porównywania z założoną dokładnością (bez wag), opr. E. Koźniewski

	$\sum\limits_{r=1}^{m} K_r(x_{ij})$ dokładność do 1 miejsca po przecinku	$\sum\limits_{r=1}^{m} K_r(x_{ij})$ dokładność do 2 miejsc po przecinku	$\sum\limits_{r=1}^{m} K_r(x_{ij})$ dokładność do 3 miejsc po przecinku
W_1: Ceram. Granat 13 V	0,8	0,80	0,799
W_2: Cementowa Verona	0,9	0,87	0,870
W_3: Blach. Finnera	1,0	0,98	0,977
W_4: Blach. Montenerey	0,9	0,92	0,921
W_5: Gont bitumiczny	0,7	0,69	0,695
W_6: Gont drewniany	0,7	0,74	0,737

Wynik porównania według drugiej reguły porównywania zaprezentowano na rysunku 12.3.

dokładność do jednego miejsca po przecinku	dokładność do dwóch miejsc po przecinku	dokładność do trzech miejsc po przecinku



Rysunek 12.3: Diagramy Hassego skonstruowane dla różnych dokładności według drugiej reguły porównywania, opr. E. Koźniewski

Zamieszczony na wykresach (rys. 12.2, 12.3) diagram wartości kodowanych wskazuje na dobrą reprezentację otrzymaną z dokładnością obliczeń do trzeciego miejsca po przecinku. Ale wyniki z dokładnością do drugiego miejsca wskazują na ostrożne posługiwanie się rankingiem. Warto sprawdzić, jaka jest różnica między poszczególnymi wartościami ocen syntetycznych (12.15). Rozstrzygnięcie ostateczne powinno odbywać się już w kontekście analizy danych rzeczywistych (tab. 12.14).

12.11. Podsumowanie

W wyniku analizy ustalono, że najlepszym pokryciem dachu z punktu widzenia omawianych kryteriów jest blachodachówka Finnea (wariant 3), natomiast najgorszym pokryciem w tej ocenie jest gont drewniany świerkowy (wariant 6) lub gont bitumiczny (wariant 5). Całkowity koszt pokrycia blachodachówką Finnea oszacowany został na kwotę 41 711,10zł. Nie jest to najniższy koszt wśród analizowanych pokryć, ale dość niski. Trwałość wybranego pokrycia jest najdłuższa. Ze względu na estetykę pokrycie to zostało sklasyfikowane najwyżej.

12.12. Zadania

1. Dokonać analizy porównawczej prezentowanych w rozdziale 12 pokryć dachowych z zastosowaniem kodowania:
   a) Neumanna – Morgensterna,
   b) normowanie.
   Przyjąć wartości i wagi określone w rozdziale 12.
2. W zadaniu 1 dokonać analizy porównawczej 12 pokryć dachowych, przyjąć własne oceny ekspertów oraz wartości wag.
3. Dokonać analizy porównawczej domów jednorodzinnych wykonanych w różnych technologiach i z różnych materiałów z uwagi na koszty.

Bibliografia

[1] Bala W., Koźniewski E., Paczyński W., *Metoda optymalizacji transportu mas ziemnych przy budowie wałów przeciwpowodziowych*, referat wygłoszony podczas XIV sesji referatowo-dyskusyjnej „Technologia i organizacja budowy wałów przeciwpowodziowych", Kraków 1973, 44–50.

[2] „Biuletyn Statystyczny Województwa Podlaskiego", lata 2000–2006.

[3] Borowska A., *Approximation of the Ellipse Offset Curves in Turbo Roundabouts Design*, „The Journal Biuletyn of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics" 2018, vol. 31, 43–51.

[4] Bostancioğlu E., *Effect of Building Shape on Residential Building's Construction, Energy and Life Cycle Costs*, „Architectural Science Review" 2010, vol. 53, 441–467.

[5] Bribiesca E., *A Measure of Compactness for 3D Shapes*, „Computers and Mathematics with Applications" 2000, vol. 40, 1275–1284.

[6] Brzeziński J., *Metodologia badań psychologicznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1987, 500–505.

[7] Coxeter H.S.M., *Introduction to Geometry*, John Willey and Sons, Inc., New York, 1961.

[8] Górnicki J., *Własności ekstremalne figur izoperymetrycznych na płaszczyźnie*, „Matematyka – Społeczeństwo – Nauczanie" 1990, nr 5, 43–48.

[9] Grabowski R.J., *Ellipse Offset Curves in the Formation of Turbo-Roundabouts*, „Roads and Bridges – Drogi i Mosty" 2015, vol. 14, 193–202.

[10] *Brachistochrona*, https://pl.wikipedia.org/wiki/Brachistochrona [dostęp 22.08.2022].

[11] *Patio*, https://pl.wiktionary.org/wiki/patio [dostęp 26.07.2022].

[12] *Tesselation Creator*, https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Tessellation-Creator/ [dostęp 16.09.2022].

[13] *Art. hutnicze* , https://semex.pl/art-hutnicze-czestochowa [dostęp 24.08.2023].

[14] *Grupa Azoty Zakłady Azotowe „PUŁAWY" S.A.*, https://www.linkedin.com/posts/grupa-azoty-zak%C5%82ady-azotowe-pu%C5%82awy

-s-a-_grupaazotypu%C5%82awy-takpracujemy-activity-70286803484 10462209-jmXy?trk=public_profile_like_view [dostęp 2.08.2023].

[15] *Pojemnik IBC UN EX 1000L z odprowadzeniem ładunków elektrostatycznych*, https://www.eco24.pl/Paletopojemnik-IBC-z-odprowadzeniem-ladunkow-elektrostatycznych-1000-L?gclid=Cj0KCQjwoK2mBhDzARIsADGbjeq67G2WG3jI_Baj2kRzZejxStLZobUvrLyQHdUscweYBfsE5qeGVPMaAruFEALw_wcB [dostęp 3.08.2023].

[16] Brown J.C., *Arata Izosaki – wybrane realizacje w Japonii*, https://architektura.info/architektura/polska_i_swiat/arata_izosaki_wybrane_realizacje_w_japonii[dostęp 3.08.2023].

[17] Archirama, https://archirama.smcloud.net/s/photos/t/114/stacja_warszawa_ochota_1846.jpg [dostęp 20.04.2022].

[18] Rögner K., *Jüdische Heimat in 3.000 Betonsteinen*, Der Sonntag, https://www.sonntag-sachsen.de/juedische-heimat-3000-betonsteinen [dostęp 31.08.2023].

[19] *Turning Torso Malmo*, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Turning_Torso_Malmo.jpg [dostęp 2.08.2023].

[20] https://www.google.com/search?client=firefox-b-d&q=s%C5%82up+kr%C4%99cony+z+klinkieru#imgrc=x2oGbFdSV7fA4M&imgdii=qwI2na6LuXiLbM [dostęp 2.08.2023].

[21] Witlinek, https://witlinek.mojabudowa.pl/galeria?current=8&page=26 [dostęp 20.04.2022].

[22] James K., *We've lived under McNutt's persistent surveillance. Here's why St. Louis should say 'no'*, Missouri Independent, https://missouriindependent.com/2021/01/05/weve-lived-under-mcnutts-persistent-surveillance-heres-why-st-louis-should-say-no/ [dostęp2.08.2023].

[23] *Golden Gate Bridge*, Wikipedia, https://pl.wikipedia.org/wiki/Golden_Gate_Bridge [dostęp 2.08.2023].

[24] *Skocznia narciarska*, Wikipedia, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d8/Skocznia_narciarska_schemat.png [dostęp 22.08.2022].

[25] *Hinterzarten Adler-Skistadion*, http://www.skisprungschanzen.com/PL/Skocznie/GER-Niemcy/BW-Badenia-Wirtembergia/Hinterzarten/0594-Adler-Skistadion/ [dostęp 22.08.2022].

[26] Derewienko E., *Największa chłodnia w Europie stanęła w Kozienicach*, Rynek Infrastruktury, https://www.rynekinfrastruktury.pl/wiadomosci/biznes-i-przemysl/najwieksza-chlodnia-w-europie-stanela-w-kozienicach-49052.html [dostęp 2.08.2023].

[27] *Wpis z mikrobloga*, Wykop.pl, https://www.wykop.pl/wpis/21839319/brachistochrona-jest-jednoczesnie-tautochrona-brac/ [dostęp 22.08.2022].

[28] Jaworski K. M., *Organizacja i planowanie w budownictwie*, t. 2, WPW, Warszawa 1992.

[29] Kącki E., *Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki*, Wydawnictwa Naukowo – Techniczne, Warszawa, 1989.

[30] Kirkham R., *Ferry and Brandon's Cost Planning of Buildings*, wyd. 9, Wiley-Blackwell: Chichester 2015.

[31] Koźniewski E., *Geometria dachów. Teoria i zastosowanie*, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok 2007.

[32] Koźniewski E., *Monge Method in Creating Regular Polyhedrons Models*, „The Journal Biuletyn of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics", 2014, vol. 26, 41–46.

[33] Koźniewski E., *Offsets in Geometric Creation of Roof Skeletons with Varying Slope and Cut-and-Fill Problems in Topographic Projection*, „The Journal of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics" 2010, vol. 21, 29–35.

[34] Koźniewski E., *On the Existence of Shapes of Roofs*, „Journal for Geometry and Graphics" 2004, vol.8(2), 185–198.

[35] Koźniewski E., *Rectangular polygons and its shape parameters*, „The Journal Biuletyn of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics" 2015, vol. 27, 9–15.

[36] Koźniewski E., *Wykłady z geometrii w urządzaniu przestrzeni*, preskrypt w wersji elektronicznej, Białystok 2014.

[37] Koźniewski E., Banaszak K., *Geometric Aspects of Assessing the Amount of Material Consumption in the Construction of a Designed Single-Family House*, „Energies" 2020, vol. 13, 5382.

[38] Koźniewski E., Koźniewski M., Orłowski M., Owerczuk J., *Modeling an embankment with a natural slope*, „The Journal of Polish Society of Geometry and Engineering Graphics" 2016, vol. 28, 2016, 25–32.

[39] Koźniewski E., Orłowski M., *The Implementation of the Slice-based Transformations in AutoCAD*, „The Journal of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics", vol. 23, 2012, 51–56.

[40] Koźniewski E., Sadowska B., Banaszak K., *Geometric Aspects of Assessing the Anticipated Energy Demand of Designed Single-Family House*, „Energies" 2022, 15, 3308.

[41] Koźniewski E., Żaba A., Dudzik P., *The Compactness Indicators of Solids Applied to Analysis of Geometric Efficiency of Buildings*, „Journal of Civil Engineering & Management" 2019, vol. 25, 742–756.

[42] Koźniewski M., *Thickness Analysis of a Saddle*, „The Journal of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics" 2016, vol. 28, 25–32.

[43] Krysicki W., Włodarski L., *Analiza Matematyczna w Zadaniach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.

[44] Kumaszka P., *O kilku rodzajach regularnych parkietaży płaszczyzny* , praca lic., Uniwersytet Wrocławski, Wrocław 2015, https://www.math.uni.wroc.pl/~swiatkow/_dydaktyka/parkiet/Patrycja_Kumaszka_praca_licencjacka.pdf [dostęp 16.09.2022].

[45] Mahdavi A., Gurtekin B., *Shapes, numbers, perception: Aspects and dimensions of the design-performance space*, w: *Proceedings of the 6th International Conference: Design and Decision Support Systems in Architecture*, Netherlands 2002, 291–300.

[46] Maurin L., Mączyński M., Traczyk T., *Matematyka*, t. 1, PWN, Warszawa 1975.

[47] Mickiewicz A., *Pan Tadeusz* https://wolnelektury.pl/media/book/pdf/pan-tadeusz.pdf [dostęp 26.07.2022].

[48] Nowak E., *Zarys metod ekonometrii. Zbiór zadań.*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.

[49] Olędzka D., Witkowski M., Żmijewski K. H., *Metody komputerowe w inżynierii lądowej*, WPW, Warszawa 1992.

[50] Owczarzy J., Kossowski J., *Nieklasyczne zachowanie się modelu hiperboloidalnej chłodni kominowej pod obciążeniem osiowo symetrycznym*, „Journal of Theoretical and Applied Mechanics"1981, vol. 19(2), 225–238.

[51] Pottmann H., Asperl A., Hofer M., Kilian A., *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press, Exton 2007.

[52] Rosman R., *Obliczanie ścian usztywniających osłabionych otworami*, Arkady, Warszawa 1971.

[53] Rakowski G., Kacprzyk Z., *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2005.

[54] Seręga S., Hojdys Ł., Krajewski P., Płachecki M., *Ocena bezpieczeństwa chłodni kominowej eksploatowanej od 35 lat*, „Inżynier Budownictwa" 2013, vol. 12, 96–102.

[55] Siudak M., *Badania operacyjne*, WPW, Warszawa 1994.

[56] Stark R. M., Nicholls R. L., *Matematyczne podstawy projektowania inżynierskiego*, PWN, Warszawa 1979.

[57] Straszewicz Z., *Mechanika. Według wykładów Zygmunta Straszewicza*, cz. 1: *Statyka* Skład Główny Komisji Wydawniczej, Politechnika, Warszawa 1923.

[58] Szwabowski J., Deszcz J., *Metody wielokryterialnej analizy porównawczej. Podstawy teoretyczne i przykłady zastosowań w budownictwie*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2001.

[59] Wierzbanowski K., *Materialy do wykładow z fizyki*, http://www.ftj.agh.edu.pl/~wierzbanowski/R_Harm(7).pdf [dostęp: 14-04-2021].

[60] Zarankiewicz K., *Mechanika teoretyczna*, t.1: *Statystyka*, PWN, Warszawa 1963.

[61] Żak T., *Izoperymetria gaussowska*, Politechnika Wrocławska, Wrocław 2010, http://prac.im.pwr.edu.pl/~zak/Izoperymetria_miar_gaussowskich.pdf [dostęp 26.07.2022].

Skorowidz

A
antygraniastosłup, 40
atrium, 22

B
bryły wzorcowej (referencyjnej), 16

C
czworościan samodualny, 39

D
defekt obwodu, 24
defekt pola wielokąta prostokątnego, 24
destymulant, 172, 173
destymulanty, 171, 173, 174
diagram Hassego, 176
dopełnień do jedności, 174
dualny, 159
dwunastościan rombowy, 38
dziedziniec, 22

E
efektywność geometryczna, 14
ekonometria, 137
endomorfizm, 107
External Wall Area/Floor Area, 20

G
generator, 29
grupa przekształceń, 29

H
hiperboloida obrotowa, 58
hiperboloida obrotowa jednopowłokowa, 47

I
izometrie, 29
izometrii własnych, 30

K
klasyczną miarę zwartości, 14
kodowanie, 171
kryteria, 171
krzywa, 56
krzywa łańcuchowa, 91
kształtem referencyjnym, 12
kubatura, 65

L
Length/Breadth Index, 19

Ł
łuk, 56

M
macierz danych, 172
macierz diagonalizowalna, 108
miary, 171
miary cząstkowe, 172
Miastoprojekt Mazowsze, 48

O
obrót, 29, 36
odchylenia losowe, 137
offset, 78
offsetgaptype, 78, 81
operator diagonalizowalny, 107
opisany, 23
opisowy model ekonometryczny, 137

P
parametry strukturalne , parametry struktury stochastycznej, 138
Park Nauki Torus, 49
parkietaż, 31
patio, 22
Plan/Shape Index, 19
powierzchnia walcowa, 47
powierzchnie prostokreślne, 47
powierzchnię stożkową, 47
prostopadłościan prawidłowy, 17
przekształcenia oparte na przekrojach, 69
przesunięcie (translacja), 29

R
rachunek wariacyjny, 100
relacja antysymetryczna, 176
relacja przechodnia, 176
relacja zwrotna, 176
rozpiętość, 26
rysunek grafu skierowanego, 176
różniczkowe liniowe rzędu drugiego jednorodne, 112

S
shear (ścięcie), 69
sieczna, 79
skalar, 171
skręcenie (twist), 69, 70
stosunek między polem powierzchni bryły a objętością, 14
stożek, 47
stymulant, 172, 173
stymulanty, 171, 173, 174
symetria, 36
symetria hiperpłaszczyzny, 29
symetria osiowa, 29
symetria płaszczyzny, 29
symetria względem prostej, 29
symetria z poślizgiem, 29, 36
symetria środkowa (półobrót), 29
słup skręcony, 72

Ś
ścięcie, 72
ścięcie (shear), 69, 72

T
tautochrona, 103
translacja, 36
triangularyzycja Banachiewicza – Choleskiego, 117
twierdzenie Cavalieriego, 69
twist axis, 70
twist (skręcenie), 69

U
unormowanie do jedności, 174

W
walec, 47
walec kołowy, 17
Wall/Floor ratio, 19
wartością własną, 107
wektorem własnym, 107

wielokąt prostokątny, 21
wielomian charakterystyczny, 107
wielościan archimedesowski, 39
wielościan archimedesowy, 40
wielościan dualny, 40
wielościan foremny, 39
wielościan półforemny, 39, 40
wpisany w prostokąt, 23
współczynnik zgodności W-Kendalla, 179
wysokość przekrycia, 88
względny defekt obwodu wielokąta prostokątnego, 24
względny defekt pola, 25
względny wskaźnik zwartości, 16
względny wskaźnik zwartości bryły względem sfery, 17
względny wskaźnik zwartości bryły względem sześcianu, 16

Z
zadanie niezbilansowane, 162
zadanie transportowe zbilansowane, 161
zagadnienie brachistochrony, 99
zagadnienie izoperymetryczne, 12
zbiór częściowo uporządkowany, 176
zmienna objaśniana, 137
zmienne objaśniające, 137
zwartość, 14
zwartość bryły sztywnej, 14
zwartość budynku, 14

Spis tablic

1.1 Miary zwartości $\frac{A_t}{V}$ brył platońskich i sfery obliczone przy założeniu, że $V=1$ (opr. A. Tereszkiewicz) 13
1.2 Ilustracja ideowa wskaźnika $RC_{\mathrm{S}_{pat}}$(S), opr. E. Koźniewski na podstawie [41] 16
1.3 Określenie wskaźników RC_{cd} i RC_{cyl}, opr. E. Koźniewski 18
1.4 Określenie wskaźników RC_{cd} i RC_{cyl}, opr. E. Koźniewski 18

2.1 Siedemnaście krystalograficznych grup przestrzennych dwuwymiarowych wg Coxetera [7] (*półobrót = obrót o 180° lub symetria środkowa, **odbicie z poślizgiem = złożenie symetrii osiowej i translacji względem tej samej prostej, ***ćwierćobrót = obrót o 90°) 35

9.1 Dane do zad. 3, opr. E. Koźniewski 136

10.1 Wartości zmiennych w modelu w latach 1991 – 2000 [48] 138
10.2 Obliczenia średniej i odchylenia standardowego dla danych z tablicy 10.1, opr. E. Koźniewski 140
10.3 Sprzedaż betonu ([m^3]) w latach 2000–2006 przez wybraną betonownię, opr. E. Koźniewski 151
10.4 Zezwolenia na budowę wydane w latach 2000–2006 w powierzchni użytkowej [m^2] [2] 151
10.5 Zezwolenia na budowę wydane w latach 2000–2006 (agregacja), opr. E. Koźniewski 152
10.6 Wyjściowa tablica danych dla tablicy 10.5 152
10.7 Średnie dla tablicy 10.6, opr. E. Koźniewski 152
10.8 Obserwacje zmiennych X_1, X_2, X_3, opr. E. Koźniewski 154

11.1 Czas potrzebny na zabetonowanie i wibrację jednej płyty, miesięczny limit czasu pracy i zyski jednostkowe dla dwóch rodzajów płyt, opr. E. Koźniewski 155
11.2 Wartości potrzebne do obliczenia odchylenia standardowego, opr. E. Koźniewski 157

11.3 Widok arkusza Excel po wykonaniu działań dla modelu P, opr. E. Koźniewski . . . 157
11.4 Dane do zagadnienia transportowego, opr. E. Koźniewski . . . 161
11.5 Dane potrzebne do wykonania nasypu liniowego, opr. E. Koźniewski . . 167
11.6 Jednostkowe koszty transportu na poszczególne odległości odcinków nasypu, opr. E. Koźniewski . . . 167
11.7 Rozw. zagadnienia transportu mas ziemnych, opr. E. Koźniewski 169

12.1 Zestawienie kosztów wykonania wybranych pokryć dachowych [zł], opr. E. Koźniewski . . . 178
12.2 Zestawienie ciężaru pokrycia dachu [kN/m^2], opr. E. Koźniewski 179
12.3 Zestawienie gwarancji pokryć dachowych [lata], opr. E. Koźniewski . . . 179
12.4 Zestawienie wyników ankiety dla kryterium K_4 – estetyka pokrycia, opr. E. Koźniewski . . . 180
12.5 Zestawienie wyników ankiety dla kryterium K_4 – estetyka pokrycia, uporządkowane malejąco, opr. E. Koźniewski . . . 180
12.6 Zestawienie wyników ankiety dla kryterium K_4 – estetyka pokrycia, opr. E. Koźniewski . . . 181
12.7 Tablica rang dla kryterium K_4 – estetyka pokrycia ($R_i = k \cdot \overline{EX}$), opr. E. Koźniewski . . . 181
12.8 Wyliczenie poprawek dla kryterium K_4 – estetyka pokrycia, opr. E. Koźniewski . . . 182
12.9 Wartości krytyczne dla $3 \leq k \leq 20$ i $3 \leq n \leq 7$ (Siegiel S., Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences, McGraw-Hill, NY 1956, 286p). . . . 183
12.10 Zestawienie wyników ankiety dla kryterium K_5 – łatwość eksploatacji, opr. E. Koźniewski . . . 184
12.11 Tablica rang dla kryterium K_5 – łatwość eksploatacji, opr. E. Koźniewski 184
12.12 Wyliczenie poprawek dla kryterium K_5 – łatwość eksploatacji, opr. E. Koźniewski . . . 185
12.13 Kryteria wag zaproponowanych przez inwestora, opr. E. Koźniewski . . 185
12.14 Dane wejściowe dla ocen syntetycznych, opr. E. Koźniewski . . . 186
12.15 Zastosowane kodowanie Pattern dla wszystkich kryteriów, opr. E. Koźniewski . . . 186
12.16 Zastosowane rekodowanie Pattern dla destymulant ($K1, K2$), opr. E. Koźniewski . . . 187
12.17 Wyniki trzeciej reguły porównywania (z wagami), opr. E. Koźniewski . . 187
12.18 Wyniki drugiej reguły porównywania (bez wag), opr. E. Koźniewski . . 188
12.19 Wyniki drugiej reguły porównywania z założoną dokładnością (z wagami), opr. E. Koźniewski . . . 188

12.20 Wyniki drugiej reguły porównywania z założoną dokładnością (bez wag), opr. E. Koźniewski 189

Spis rysunków

1.1 Profile stalowe w Semexie w Częstochowie [13] 11

1.2 Przykładowe zbiorniki: (a) zbiorniki kuliste w Zakładach Azotowych „PUŁAWY” S.A. [14] (b) zbiornik sześcienny [15] 12

1.3 (a) fragment plakatu – „tablicy informacyjnej” nowego osiedla wznoszonego w Druskiennikach na Litwie; (b) budynek (w kształcie walca o podstawie owalnej) wybudowany na wspomnianym osiedlu, fot. Ł. Kolendo 14

1.4 (a) Ratusz w Białymstoku – przykład budynku na planie wielokąta prostokątnego, fot. E. Koźniewski; (b) Ratusz w Białymstoku – budynek o podstawie dwudziestokąta prostokątnego — studium rozwiązania kształtu dachu, opr. E. Koźniewski 15

1.5 (a) wielokąty prostokątne; (b) wielokąty prostokątne: sześciokąt, ośmiokąt, dziesięciokąt, dwunastokąt, czternastokąt, opr. E. Koźniewski 21

1.6 (a) patio [11]; (b) budynki atrialne w Białymstoku przy ul. Warszawskiej [31], fot. W. Wołkow 22

1.7 Wielokąty prostokątne wpisane w prostokąt: (a) wielokąt jednospójny, monotoniczny (każda prosta równoległa do osi, ale niezawierająca boku, przecina brzeg w dwóch punktach) względem obu osi, czyli normalny; (b) wielokąt jednospójny monotoniczny względem osi OY, ale niemonotoniczny względem osi OX; (c) wielokąt 3-spójny niemonotoniczny względem obu osi [35] 23

1.8 Wielokąty prostokątne wpisane w prostokąt o wymiarach $x \times y$, $x = 9u$, $y = 12u$: (a) z dużym defektem pola ($\Delta A = 88u^2$), $RDA = 0{,}81(81\%)$ i zerowym defektem obwodu, $RDP = 0(0\%)$; (b) z defektem obwodu dodatnim ($\Delta P = 24u$, $RDP = 0{,}57(57\%)$), z defektem pola ($\Delta A = 38u^2, RDA = 0{,}35(35\%)$); (c) z defektem obwodu dodatnim ($\Delta P = 40u, RDP = 0{,}95(95\%)$), z defektem pola ($\Delta A = 44u^2, RDA = 0{,}41(41\%)$) [35] 24

1.9 Wyznaczanie rozpiętości wielokąta prostokątnego: (a) z pierwszego oglądu wielokąta wartość rozpiętości nie jest bezpośrednio widoczna: s_2 czy s_3, a może s_4?; (b) po skonstruowaniu prostego szkieletu algorytm wyznaczania rozpiętości jest już łatwy do sformułowania; (c) figura zbliżona do wielokąta prostokątnego [35] 25

1.10 Wyznaczanie rozpiętości wielokąta prostokątnego 3-spójnego RP^3: (a) wielokąt prostokątny 3-spójny z zaznaczeniem wielokąta C_1 i podwielokątów – dziur C_2, C_3 z wyznaczonym na rysunku (b) odcinkiem definiującym rozpiętość; (b) proces wyznaczania rozpiętości $s(RP^3)$ poprzez rozwiązanie dachu: $s(RP^3) = = 2 \cdot s_{18}$, $s(RP^3) = 2 \cdot s_{33}$, a także jako suma $s(RP^3) = s_{18} + s_{33}$ wysokości połaci do siebie przylegających wzdłuż kalenicy [35] 26

2.1 (a) złożenie S_bS_a symetrii osiowych S_a, S_b o osiach równoległych $a|b$ jest przesunięciem T_{2AB} (AB – wektor określony przez punkty A, B leżące odpowiednio na prostych a i b, przy czym $AB \perp a$ i $AB \perp b$); (b) złożenie S_bS_a symetrii osiowych S_a, S_b o osiach a, b przecinających się $a \cap b = \{O\}$ jest obrotem $R_{O,2\varphi}$ o kąt 2φ, opr. E. Koźniewski 30

2.2 (a) złożenie S_bS_a dwu symetrii S_a, S_b względem osi prostopadłych a, b ($a \perp b$) jest symetrią środkową S_O o środku O; (b) złożenie $S_cS_bS_a$ trzech symetrii S_a, S_b, S_c względem prostych a, b, c przekształca trójkąt na z góry zadany trójkąt do niego przystający, opr. E. Koźniewski . . . 30

2.3 (a) parkietaże foremne (z wielokątów foremnych jednego rodzaju), popularna dawniej trylinka, fot. E. Koźniewski; (b) parkietaże półforemne (z wielokątów foremnych różnych rodzajów), opr. E. Koźniewski; (c) parkietaż jednorodny dowolnego kształtu, fot. E. Koźniewski 31

2.4 Przekształcenia na równoległoboku: (a) dwie dowolne krzywe o końcach w wierzchołkach wielokąta; (a1) przesuwamy krzywe o wektory indukowane przez równoległobok; (a2) otrzymany kształt („gołąb”), opr. E. Koźniewski na podstawie [51] 32

2.5 Parkietaże o dwu krzywych rozpięte na równoległoboku („gołębie”), opr. E. Koźniewski na podstawie [51] 32

2.6 Transformacje na trójkącie równobocznym – wariacje na temat trzech motyli Eschera: (a) krzywa dowolna; (a1) jej centralny obraz symetrii; (a2) dwa obroty; (a3) sześć (pięć) obrotów, opr. E. Koźniewski na podstawie [51] 33

2.7 (a) dwa obroty kształtu z rysunku 2.6 [36]; (b) kilka odpowiednich przesunięć kształtu z rysunku 2.7a w kierunkach równoległych do boków trójkątów (sześciokątów), opr. E. Koźniewski na podstawie [51] 33

2.8 Przekształcenia na kwadracie: (a) dwie krzywe; (a1) dwa obroty dokoła wierzchołków o kąt 90°; (a2) otrzymany kształt elementarny, opr. E. Koźniewski na podstawie [51] 34

2.9 Transformacje na kwadracie: (a3) trzy wyróżnione wierzchołki; (a4) konfiguracja uzyskana przez trzy obroty wokół wierzchołków o odpowiednich kątach obrotu 90°, 180°, 90°; (a5) uzyskany złożony kształt (opr. E. Koźniewski na podstawie [51]) 34

2.10 (a) przekształcenia na kwadracie – otrzymane parkietaże, opr. E. Koźniewski na podstawie [51]; (b) kostka betonowa zaprojektowana na podstawie trójkąta równobocznego, fot. E. Koźniewski 35

2.11 Modelowanie dwunastościanu: (a) znalezienie (metodą Monge'a) odpowiedniego kąta; (a1) pięć obrotów (cztery obroty) jednej ściany; (a2) symetria płaszczyznowa; (a3) jeden obrót i jedna translacja, opr. E. Koźniewski na podstawie [32] 37

2.12 Tworzenie modelu dwudziestościanu foremnego: (a) wyznaczenie (metodą Monge'a) odpowiedniego ostrosłupa trójkątnego z krawędzią w pozycji pionowej; (a1) jedno odbicie względem ściany piramidy; (a2) trzy odbicia wokół odpowiednich płaszczyzn lub trzy obroty; (a3) trzy odbicia o odpowiednich ścianach; (a4) dwa kolejne odbicia i jedno odbicie względem płaszczyzny wyznaczonej przez pięć wierzchołków górnych bryły dolnej oraz jeden odpowiedni obrót wokół linii pionowej; (a5) jedno przesunięcie, opr. E. Koźniewski na podstawie [32] 37

2.13 Tworzenie modelu dwunastościanu rombowego: (a) zbudowanie ostrosłupa czworokątnego o wysokości równej połowie krawędzi sześcianu; (a1) jeden obrót; (a2) jedno odbicie, trzy obroty i jedno przesunięcie; (a3) cała bryła z wizualnym rozkładem; (a4) bryła otrzymana w wyniku sumy (Boole'a), opr. E. Koźniewski na podstawie [36] 38

2.14 Dwunastościan rombowy można potraktować jako wyrafinowany ceglany kształt: (a) cegła; (b) mur wykonany z dwunastościanów rombowych, opr. E. Koźniewski 38

2.15 Tworzenie modelu Art Tower: (a) Art Tower w Mito, proj. Arata Isozaki [51], [16]; (a1)–(a3) sekwencja odbitych czworościanów w różnych stylach wizualizacji [36], opr. E. Koźniewski 39

2.16 (a) konstrukcja czternastościanu archimedesowego na bazie ośmiościanu; (b) czternastościan archimedesowy zbudowany na bazie ośmiościanu foremnego, opr. E.Koźniewski 40

2.17 (a) dwudziestościan foremny, wyk. E. Koźniewski; (b) konstrukcja dwudziestościanu ściętego, wyk. E. Koźniewski; (c) sposób zszycia piłki nożnej według struktury dwudziestościanu ściętego, fot. E. Koźniewski . 40

2.18 Cerkiew pw. Zmartwychwstania Pańskiego w Białymstoku, proj. Jerzy Uścinowicz, 1991 – 1994. Kształt fragmentu kopuły przypominający płaski parkietaż półforemny 8 – 4 – 8 (kopuła od lewej), kształt pozostałych kopuł przypominający fragment czternastościanu archimedesowego (rys. 2.16) – kwadrat graniczący z czterema sześciokątami foremnymi (cztery kopuły od prawej), fot. M. Koźniewski 41

2.19 (a) fragment parkietażu 8 – 8 – 4 rozmieszczony nad ośmiokątem feremnym (osiem ośmiokątów), kwadraty „stają się" rombami o niewielkiej deformacji względem kwadratu i nieoczekiwanie pojawia się możliwość uzupełnienia sześciokątem foremnym (AutoCAD); (b) przestrzenna struktura parkietażu 8 – 8 – 4 na ośmioboku (AutoCAD), opr. E. Koźniewski 41

2.20 (a) modelowanie kopuły na bazie parkietażu 8 – 8 – 4, konstrukcja sześciokąta foremnego jako uzupełnienie parkietażu przestrzennego(AutoCAD); (b) rzut prostokątny dwóch rombów, których boki wraz z bokiem ośmiokąta foremnego generują sześciokąt foremny (AutoCAD), opr. E. Koźniewski 43

2.21 (a) modelowanie geometrycznej struktury kopuły – uzupełnienie sześciokąta do pięciokąta stanowiącego górną połać kopuły, opr. E. Koźniewski; (b) przestrzenna struktura parkietażu 8 – 8 – 4 (bez dolnej części) topologicznie równoważna bryle kopuły cerkwi, opr. E. Koźniewski; (c) kopuła nad kaplicą cerkwi pw. Zmartwychwstania Pańskiego w Białymstoku, proj. Jerzy Uścinowicz, fot. M. Koźniewski . 43

2.22 Z lewej: główna kopuła cerkwi pw. Zmartwychwstania Pańskiego w Białymstoku, proj. Jerzy Uścinowicz, fot. M. Koźniewski; z prawej: model geometryczny topologicznie równoważny strukturze kopuły głównej cerkwi, opr. E. Koźniewski 44

2.23 Przykłady praktycznych rozwiązań w projektowaniu posadzki i nawierzchni, fot. E. Koźniewski: (a) posadzka – stylizacja parkietażu półformnego $x - y - z$; (b) nawierzchnia parkingu – kostka „młotek" zaprojektowana na kanwie parkietażu półforemnego $p - q - r$; (c) nawierzchnia chodnika – kostka zaprojektowana wg parkietażu na bazie przekształceń na kwadracie (połączenie schematów z przykładów 2.2, 2.3 i sklejenie dwóch wzorów) 45

3.1 Trzy powierzchnie powstałe w wyniku obrotu prostej dokoła innej prostej (osi) (trzy warianty: prosta przecina oś, jest do niej równoległa, jest do niej skośna), opr. E. Koźniewski 47

3.2 Trzy powierzchnie powstałe w wyniku obrotu prostej dokoła innej prostej (widok z góry), opr. E. Koźniewski 47

3.3 Projekt zadaszenia zbiornika na paliwo (struktura powierzchni walcowej i stożkowej). Współpraca proj. B. Koźniewski 49

3.4 Budowle w kształcie hiperboloidy: (a) wieża ciśnień w Ciechanowie – struktura nośna w kształcie hiperboloidy jednopowłokowej i zbiornik w kształcie torusa – stan przed renowacją; (b) wieża ciśnień w Ciechanowie po renowacji jako główny element parku nauki, fot. B. Koźniewski . . . 49

3.5 Park Nauki Torus w Ciechanowie, fot. B. Koźniewski 50

3.6 (a) Kaszubskie Oko w Gniewinie – geometria rozwiązań konstrukcyjnych (walec, powierzchnia śrubowa, hiperboloida jednopowłokowa); (b) Kaszubskie Oko w Gniewinie pełni funkcje społeczno-kulturalne i turystyczne, fot. W. Reglińska 50

3.7 Model 3D wieży ciśnień w Ciechanowie zrealizowany w środowisku AutoCAD-a; w drugim wierszu z lewej strony podano ilustrację konstrukcji 2D tworzącej hiperboloidy w aksonometrii z zastosowaniem powinowactwa osiowego, wyk. E. Koźniewski 51

3.8 Schemat chłodni kominowej [50, 54] 52

3.9 Obrót hiperboli wokół punktu $(0, 0)$ o kąt $-\frac{\pi}{2}$, wyk. A. Tereszkiewicz . . 53

3.10 Krzywe c_1, c_2 po przesunięciu gałęzi hiperboli o 0,16, wyk. A. Tereszkiewicz 55

3.11 Krzywa śrubowa, wyk. A. Tereszkiewicz 57

3.12 Tworzenie powierzchni obrotowej: oś obrotu OZ i krzywa obracana; otrzymana powierzchnia obrotowa; okręgi obrotu wybranych punktów, wyk. E. Koźniewski 58

3.13 Prosta skośna do osi z, opr. A. Tereszkiewicz 58

3.14 Założenia przyjęte w celu utworzenia modelu wieży ciśnień w środowisku programu AutoCAD, opr. E. Koźniewski 60

3.15 Konstrukcje obiektów potrzebnych do wyznaczenia równań prostej obracanej $l(AB)$ w środowisku programu AutoCAD, opr. E. Koźniewski 60

3.16 Mierzenie odległości skutkujące wyznaczeniem współrzędnych punktów A, B, P, Q, opr. E. Koźniewski 61

3.17 Zadanie 8, opr. A. Tereszkiewicz 63

4.1 Dworzec Warszawa Ochota w Warszawie, projekt: Arseniusz Romanowicz, Piotr Szymaniak, realizacja 1960 – 1962, [17] fot. Marcin Czechowicz 65

4.2 (a) wybieramy prostopadłościan o podstawie kwadratu o boku a i wysokości h; (a1) konstruujemy przekątne przeciwległych ścian bocznych wzajemnie skośne (kolor zielony), które stanowią bazę do kreowania prostoliniowych tworzących powierzchni (AutoCAD), opr. E. Koźniewski 66

4.3 (a2) łączymy punkty tych przekątnych odcinkami równoległymi do pozostałych ścian bocznych (w praktycznej realizacji dzielimy przekątne na tę samą liczbę równych odcinków i otrzymane w ten sposób punkty łączymy odpowiednio ze sobą – odcinki w kolorze niebieskim). Otrzymujemy tworzące, wszystkie ze sobą skośne (kolor niebieski), dwie z nich są przekątnymi pozostałych ścian bocznych. Te dwie przekątne mogą stanowić bazę do skonstruowania drugiej rodziny tworzących (kolor zielony); (a3) w celu przejścia od charakteryzacji geometrycznej do analitycznej wprowadzamy układ współrzędnych $OXYZ$ najbardziej przyjazny dla postaci równania kanonicznego powierzchni siodłowej (AutoCAD), opr. E. Koźniewski . . 66

4.4 (a4) w celu otrzymania modelu pokrycia dachowego nadajemy grubość poprzez przesunięcie wykreowanej powierzchni o wektor $[0, 0, q]$; (a5) pierwotna postać szkieletowa modelu pokrycia dachowego (AutoCAD), opr. E. Koźniewski 67

4.5 Ilustracja przekrojów, modelu przekrycia dachowego o grubości q, równoległych do płaszczyzn ścian (płaszczyzn prostopadłościanu bazowego) obiektu; są to równoległoboki o jednakowym polu aq – można przyjąć, że są to przekroje prostopadłościanu o podstawie kwadratu $a \times a$ i wysokości q, który można uznać za model dachu płaskiego (AutoCAD), opr. E. Koźniewski 68

4.6 Ilustracja przekształceń opartych na przekrojach: (a) wyjściowy prostopadłościan, (b) skręcenie, (c) ścięcie (AutoCAD), opr. E. Koźniewski na podstawie [51] 69

4.7 Ilustracja przekształceń opartych na przekrojach: kąt maksymalny $\alpha_{\max}$, ścięcie (AutoCAD), opr. E. Koźniewski na podstawie [51] 70

4.8 (a) skręcenie prostopadłościanu, krawędzie pionowe jako linie śrubowe (modele zrealizowane w AutoCAD-zie), opr. E. Koźniewski na podstawie [51]; (b) synagoga w Dreźnie (2001, architekci Rena Wandel-Hoefer oraz Wolfgang Lorch) – przykład zastosowania w architekturze przekształcenia skręcenie [18] . . 71

4.9 Turning Torso w szwedzkim Malmö (2005, architekt Santiago Calatrava) – inny przykład zastosowania przekształcenia skręcenie we współczesnej architekturze [19] 71

4.10 „Drzwi do Europy” w Madrycie – przykład wykorzystania przekształcenia ścięcie we współczesnej architekturze, fot. D. Gawryluk 72

4.11 (a) rzuty szkicu tworzenia słupa kręconego; (b) objętość słupa kręconego jest taka sama jak walca – twierdzenie Cavalieriego (model zrealizowany w środowisku AutoCAD-a); (c) model z rys. środkowego po renderingu, wyk. E. Koźniewski 73

4.12 (a) kolumny w ołtarzu kościoła pw. Zmartwychwstania Pańskiego w Białymstoku, fot. M. Koźniewski; (b) skręcone kolumny hali na giełdzie jedwabiu w Walencji (Hiszpania), fot. D. Gawryluk 73

4.13 Współczesne pomysły w budownictwie jednorodzinnym, z lewej [20], z prawej [21] 74

4.14 Podstawy słupa do zad. 5, wyk. A. Tereszkiewicz 75

5.1 Szkic ronda turbinowego ukształtowanego za pomocą: (a) dwóch półokręgów, wyk. E. Koźniewski na podstawie [9]; (b) elipsy, wyk. E. Koźniewski na podstawie [9] 77

5.2 Offsety: (a) krzywej sklejanej; (b) polilinii; (c) półoffset wielokąta (otrzymany za pomocą programu AutoCAD ze stałą *Offsetgaptype* $= 1$); (d) dyskretne półoffsety wielokąta (otrzymany za pomocą programu AutoCAD ze stałą *Offsetgaptype* $= 0$), opr. E. Koźniewski 78

5.3 Offset e'_d elipsy $e(a, b)$ o półosiach a, b i elipsa o półosiach $a + d$, $b + d$: (a) $a = 100$, $b = 60$, $d = 30$; (b) $a = 100$, $b = 20$, $d = 30$. Różnica między offsetem e'_d elipsy $e(a, b)$ i elipsą $e(a + d, b + d)$ jest tym większa, im mniejszy jest stosunek b/a; w przypadku (a) $b/a = 3/5$ wizualnie krzywe pokrywają się, w przypadku (b) $b/a = 1/5$ jest wyraźna różnica między krzywymi (offset e'_d elipsy o półosiach a, b [kolor czerwony] i elipsa o półosiach $a + d, b + d$ [kolor niebieski], opr. E. Koźniewski 79

5.4 Uogólnione offsety dyskretne: (a) kąta z parametrami d_1, d_2; (b) dane odległości d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 dla offsetu dyskretnego wielokąta; (b1) ciąg półoffsetów dyskretnych wielokąta $(1, d_1;\ 2, d_2;\ 3, d_3;\ 4, d_4;\ 5, d_5;\ 6, d_6)$ ([3, 9, 34], wyk. E. Koźniewski) 79

5.5 Konstrukcja szkieletu dachu generowanego przez sześciokąt $(1, d_1; 2, d_2; 3, d_3; 4, d_4; 5, d_5; 6, d_6)$, (por. [33]), wyk. E. Koźniewski 80

5.6 Typy topologiczne dachów o zmiennym nachyleniu nad tym samym sześciokątem $(1, d_1; 2, d_2; 3, d_3; 4, d_4; 5, d_5; 6, d_6)$ (por. [33]), wyk. E. Koźniewski 80

5.7 Przecięcia konturu 120 m z krawędziami placu budowy wyznaczą punkty zmiany od wykopu do nasypu (por. [33]) 81

5.8 Po lewej stronie i na dole obszaru proponowane kontury warstwic (dla wykopu) w odległości $d = 1$ m, aby uzyskać nachylenie równe 1 (por. [33]) 82

5.9 Po prawej stronie i u góry obszaru proponowane kontury warstwic (dla nasypu) w odstępach $d = 1\frac{1}{2}$ m, aby uzyskać nachylenie w stosunku $1\frac{1}{2}$ do 1 (por. [33]) 82

5.10 Brzeg linii nasypu i wykopu (por. [33]) 83

5.11 Ilustracja przykładu (ze względu na skalę zamiast $d = 0{,}16$ przyjęto $d = 1{,}6$), opr. A. Tereszkiewicz 84

6.1 Krzywa łańcuchowa, opr. A. Tereszkiewicz 90
6.2 Realizacje architektoniczne na bazie krzywej łańcuchowej: (a) ogrodzenia łańcuchowe przy ul. Legionowej w Białymstoku, fot. E. Koźniewski; (b) most Grunwaldzki we Wrocławiu, fot. F. Sadowski; (c) wiadukt nad ul. Piastowską w Białymstoku, fot. E. Koźniewski; (d) przekrycie dworca Keleti w Budapeszcie, fot. E. Koźniewski; (e) Gateway Arch w Saint Luis w USA, [22]; (f) most łańcuchowy w Budapeszcie, fot. E. Omieljańczuk; (g) wiadukt nad Trasą Generalską w Białymstoku, fot. M. Koźniewski 92
6.3 Generowanie profilu krzywej łańcuchowej w programie AutoCAD: punkty wyznaczono dla krzywej łańcuchowej (6.8) dla $a = 38{,}9216$, dla wartości $10, 20, \ldots, 80, 90, 96$ (pierwsza kolumna liczb), obliczając w Excelu wartości funkcji (6.8) (druga kolumna) i odmierzając je na prostych pionowych wystawionych w punktach o odciętych $10, 20, \ldots$, opr. E. Koźniewski 93
6.4 Podstawowe wymiary mostu wiszącego Golden Gate Bridge łączącego San Francisco z Marin County w Kaliforni (USA), wyk. E. Koźniewski na podstawie [23] 95
6.5 Ilustracja do zad. 4, opr. A. Tereszkiewicz 96
6.6 Ilustracja do zad. 5, opr. A. Tereszkiewicz 96
6.7 Ilustracja do zad. 6, opr. A. Tereszkiewicz 97
6.8 Ilustracja do zad. 7, opr. A. Tereszkiewicz 97

7.1 Ilustracja zagadnienia brachistochrony: (a) założenia do zagadnienia brachistochrony, opr. E. Koźniewski; (b) punkt materialny zsuwający się bez tarcia, opr. E. Koźniewski; (c) rozbieg Wielkiej Krokwi w Zakopanem, fot. S. Kudźma; (d) skatepark w Sobolewie. Czy tu szybkie zjazdy są pożądane? Fot. E. Koźniewski 99
7.2 Cykloida, opr. A. Tereszkiewicz 103
7.3 Brachistochrona, opr. A. Tereszkiewicz 103
7.4 Ilustracja do zad. 1, opr. A. Tereszkiewicz 104
7.5 Ilustracja do zad. 2, opr. A. Tereszkiewicz 104
7.6 Schemat skoczni narciarskiej, wyk. E. Koźniewski na podstawie [24] . . 105

8.1 Układ statyczny złożony z dwóch pasm (opr. E. Koźniewski na podstawie [52]) 114

9.1 Obliczenie pochodnych cząstkowych, wyk. E. Koźniewski 126
9.2 Rozwinięcie kwadratów pochodnych cząstkowych, opr. E. Koźniewski . 126

9.3 ZM, wyk. E. Koźniewski 127
9.4 Obliczenie pochodnych cząstkowych w środowisku Wolfram Alpha, wyk. E. Koźniewski 129
9.5 Rozwinięcie sumy kwadratów pochodnych cząstkowych w środowisku Wolfram Alpha, wyk. E. Koźniewski 129
9.6 Metoda różnicowa. Model pręta zginanego, wyk. E. Koźniewski na podstawie [53] 131

11.1 Rozwiązanie geometryczne problemu z przykładu 11.1, opr. E. Koźniewski na podstawie [49] 158
11.2 Grafy w macierzy zadania transportowego: (a) z cyklami – nie jest rozwiązaniem ($8 > 3 + 5 - 1$); (b) bez cykli – jest rozwiązaniem ($3 + 5 - 1 = 7$), opr. E. Koźniewski 164
11.3 Prace ziemne przy budowie autostrady [56], opr. E. Koźniewski 165

12.1 Ilustracja porządku częściowego podyktowanego inkluzją, opr. E. Koźniewski 176
12.2 Diagramy Hassego skonstruowane dla różnych dokładności według trzeciej reguły porównywania, opr. E. Koźniewski 189
12.3 Diagramy Hassego skonstruowane dla różnych dokładności według drugiej reguły porównywania, opr. E. Koźniewski 189

Politechnika Białostocka