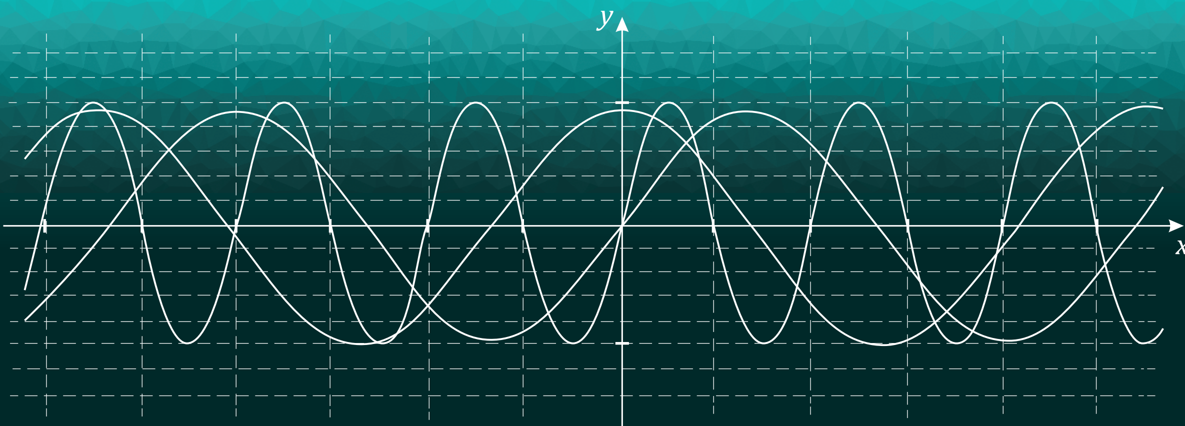
FUNKCJE JEDNEJ ZMIENNEJ I ICH GRANICE

Podręcznik dla studentów studiów licencjackich i inżynierskich



Anna Małgorzata Olszewska
Beata Madras-Kobus
Justyna Kozłowska
Marta Jarocka

Politechnika Białostocka
Białystok 2021

FUNKCJE JEDNEJ ZMIENNEJ I ICH GRANICE

Podręcznik dla studentów studiów licencjackich i inżynierskich

Anna Małgorzata Olszewska
Beata Madras-Kobus
Justyna Kozłowska
Marta Jarocka

Politechnika Białostocka

OFICYNA WYDAWNICZA POLITECHNIKI BIAŁOSTOCKIEJ
BIAŁYSTOK 2021

Recenzenci:
dr hab. Jarosław Morchało, prof. PP
dr hab. Ewa Schmeidel, prof. UwB

Redaktor naukowy dyscypliny matematyka:
prof. dr hab. inż. Zbigniew Bartosiewicz

Redaktor wydawnictwa:
mgr Janina Demianowicz

Skład, grafika i okładka:
Marcin Dominów

ISBN 978-83-66391-67-3 (eBook)
DOI: 10.24427/978-83-66391-67-3

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronie Oficyny Wydawniczej PB.
Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej
ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok
www.pb.edu.pl

SPIS TREŚCI

WSTĘP

Niniejszy podręcznik powstał z myślą o studentach Wydziału Inżynierii Zarządzania Politechniki Białostockiej kształcących się na kierunkach: logistyka, zarządzanie, zarządzanie i inżynieria produkcji, zarządzanie i inżynieria usług oraz inżynieria meblarstwa. Może on również służyć innym młodym adeptom matematyki – studentom studiów licencjackich i inżynierskich, którzy poznają tajniki analizy funkcji jednej zmiennej. Książka zawiera bowiem podstawowe treści, które są zgodne z obowiązującym programem przedmiotu matematyka na wielu kierunkach studiów.

Podręcznik składa się z pięciu rozdziałów. W pierwszym rozdziale przedstawiono definicję funkcji jednej zmiennej i omówiono jej podstawowe własności. Zaprezentowano w nim również wzory funkcji elementarnych. W rozdziale drugim zdefiniowano ciągi liczbowe i omówiono ich podstawowe własności. Ponadto pokazano w nim metody obliczania granic właściwych i niewłaściwych ciągów, a także zastosowania ciągów w zagadnieniach finansowych. Rozdział trzeci poświęcono granicom funkcji. Zdefiniowano w nim granice funkcji w punkcie i w nieskończoności oraz omówiono zastosowanie granic do badania ciągłości funkcji i wyznaczania asymptot wykresu funkcji. W rozdziale czwartym i piątym zawarto materiał powtórzeniowy w formie testu jednokrotnego wyboru oraz zadań do samodzielnego rozwiązania. Każdy z rozdziałów podręcznika (oprócz ostatnich – powtórzeniowych) zawiera wiele przykładów ze szczegółowym opisem ich rozwiązania oraz zadania do samodzielnej pracy wraz z odpowiedziami.

Podręcznik został napisany przez nauczycieli akademickich, którzy od wielu lat kształcą studentów podlaskich wyższych uczelni, w tym Wydziału Inżynierii Zarządzania Politechniki Białostockiej, w zakresie matematyki i jej zastosowań w naukach ekonomicznych i technicznych. Publikacja jest częścią zaplanowanej serii obejmującej całość materiału z matematyki wykładanego na pierwszym roku wielu studiów technicznych i ekonomicznych. Dotychczas ukazał się podręcznik z zakresu rachunku macierzowego.

Życzymy miłej pracy z podręcznikiem.

Autorki

Oznaczenia

$\boldsymbol{N}$ – zbiór liczb naturalnych,
$\boldsymbol{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych,
$\boldsymbol{R}_{+}$ – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich,
$\boldsymbol{Z}$ – zbiór liczb całkowitych,
$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ – zbiory,
x, y – elementy zbiorów $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ (odpowiednio),
$[a, b)$ – przedział lewostronnie zamknięty (przy a), prawostronnie otwarty (przy b),
$|x|$ – moduł (wartość bezwzględna) liczby definiowany wzorem:

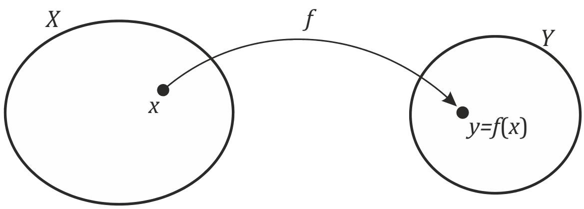
$$|x| = \begin{cases} x, \text{dla } x \geq 0, \\ -x \text{ dla } x < 0. \end{cases}$$

1. FUNKCJE JEDNEJ ZMIENNEJ

1.1. Definicja funkcji

Definicja

Funkcją określoną w zbiorze $X \subset R$ i przyjmującą wartości ze zbioru $Y \subset R$ nazywamy przyporządkowanie, które każdemu elementowi $x \in X$ przypisuje dokładnie jeden element $y \in Y$. Przyporządkowanie to zapisujemy $f: X \to Y$ (rys. 1.1).



RYS. 1.1. Funkcja $f: X \to Y$

Zbiór X nazywamy **dziedziną** (lub **zbiorem argumentów**) funkcji i oznaczamy jako D_f, a elementy $x \in X$ nazywamy **argumentami funkcji** f.

Zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji, zaś zbiór $f(X) = f(x) \in Y: x \in D_f$ nazywamy **zbiorem wartości funkcji**, oznaczamy jako W_f.

Funkcję możemy określać na kilka sposobów. Do najczęściej stosowanych należą:

a) analitycznie – funkcja określana jest za pomocą wzoru matematycznego $y = f(x)$,
b) graficznie – funkcja zobrazowana jest za pomocą wykresu,
c) tabelarycznie – funkcja przedstawiona jest w postaci tabelarycznej.

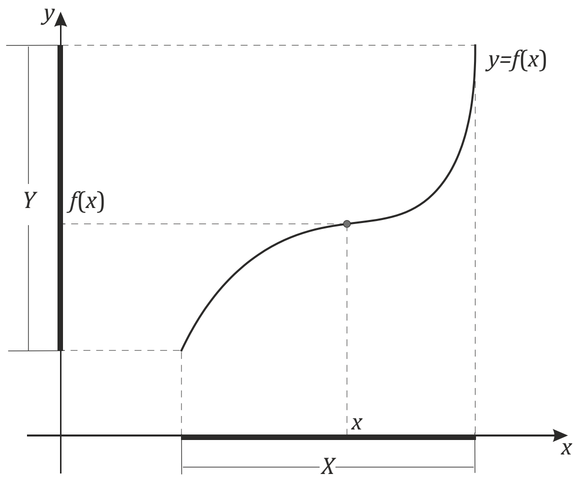
Definicja

Wykresem funkcji $f: X \to Y$ nazywamy zbiór:

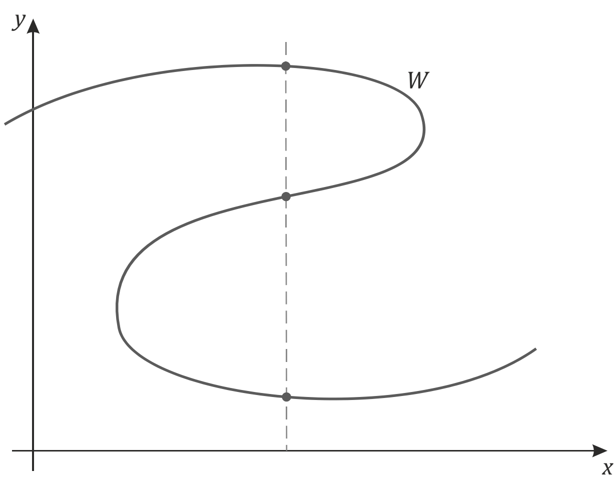
$$(x, y) \in X \times Y: x \in X \wedge y = f(x),$$

$$\text{gdzie } X \times Y = (x, y): x \in X \wedge y \in Y.$$

W ujęciu graficznym funkcję możemy przedstawić w postaci wykresu przedstawionego na rysunku 1.2, a na rysunku 1.3 zaprezentowano zbiór W, który nie jest wykresem funkcji.



RYS. 1.2. Wykres funkcji $f: X \to Y$



RYS. 1.3. Zbiór W, który nie jest wykresem funkcji

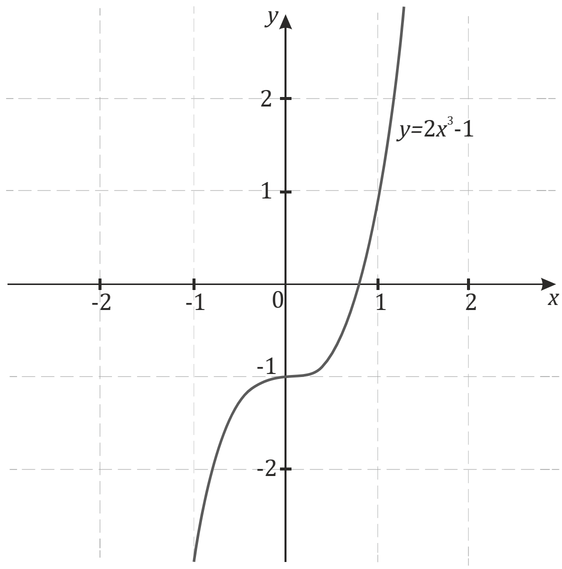
Przykład 1.1

a) W ujęciu analitycznym funkcję możemy opisać za pomocą wzoru matematycznego $y = f(x)$. Przykładem funkcji jest wzór:

$$y = 2x^3 - 1.$$

Dziedziną podanej funkcji jest zbiór: $D_f = \boldsymbol{R}$, zaś zbiorem wartości: $W_f = \boldsymbol{R}$.

b) W ujęciu graficznym funkcję z podpunktu a) możemy przedstawić w następujący sposób:



Dziedziną podanej funkcji jest zbiór: $D_f = \boldsymbol{R}$, zaś zbiorem wartości: $W_f = \boldsymbol{R}$.

c) W ujęciu tabelarycznym zestawienie argumentów x_i oraz wartości funkcji $f(x_i)$ definiując funkcję możemy zapisać w postaci tabeli. Przykładowo zyski przedsiębiorstwa ($f(x_i)$, wyrażone w mln zł) w kolejnych latach (x_i) przedstawia poniższa tabela:

x_i	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
$f(x_i)$	50	51	53	58	56	54	59

Dla podanej funkcji dziedzinę określamy jako zbiór:

$$D_f = \{2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017\},$$

zaś zbiór wartości to:

$$W_f = \{50, 51, 53, 54, 56, 58, 59\}.$$

☺

Przykład 1.2

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$. Oblicz podane wartości tej funkcji:

a) $f(0)$
b) $f(-1)$
c) $f(2)$

Rozwiązanie:

a) $f(0) = \frac{0+2}{0^2-9} = -\frac{2}{9}$

b) $f(-1) = \frac{(-1)+2}{(-1)^2-9} = -\frac{1}{8}$

c) $f(2) = \frac{2+2}{2^2-9} = -\frac{4}{5}$

☺

Przykład 1.3

Wyznacz dziedzinę i przeciwdziedzinę funkcji $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$.

Rozwiązanie:

Funkcja jest w postaci ilorazu, należy więc uwzględnić warunek mówiący, że mianownik jest różny od zera:

$$D_f = \{x: x \in \boldsymbol{R} \wedge x^2 - 9 \neq 0\} = \{x: x \in \boldsymbol{R} \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 3\} = \boldsymbol{R} \setminus \{-3{,}3\};$$

$$W_f = \boldsymbol{R}.$$

☺

Zadania

1. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$. Oblicz:
   a) $f(0)$
   b) $f(-1)$
   c) $f(1)$
2. Dana jest funkcja zapisana w postaci analitycznej za pomocą wzoru: $y = 2x - 3$. Przedstaw podaną funkcję w ujęciu graficznym i tabelarycznym.
3. Dana jest funkcja zapisana w postaci analitycznej za pomocą wzoru: $y = x^2$. Przedstaw podaną funkcję w ujęciu graficznym i tabelarycznym.
4. Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$

b) $f(x)=\frac{x}{x-7}$

c) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

d) $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x^2-9}}$

e) $f(x)=\log_2(x-1)$

f) $f(x)=\log_x 2x$

g) $f(x)=\log\frac{x-1}{x^2-4}$

h) $f(x)=x^3+3x^2-4x+5$

i) $f(x)=\sqrt{2x+1}+\frac{\ln(x^2-x-6)}{x+4}$

j) $f(x)=3\sqrt{x^2-1}+2\log_2(x+2)-\sin x$

k) $f(x)=2\sin x+\log_4(x^2-4)-\frac{2}{\sqrt{x-2}}$

l) $f(x)=\frac{e^x+1}{\sqrt{x^2-1}}+\cos x-\ln(x+1)$

m) $f(x)=\frac{\ln(x+x^2)}{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

n) $f(x)=\frac{5}{x+1}+\log(3x^2+2x-1)+\sqrt{x-1}$

Odpowiedzi

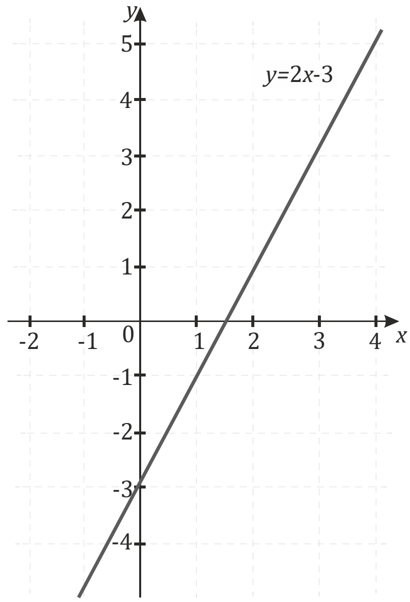
1.

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{2}{3}$

c) 0

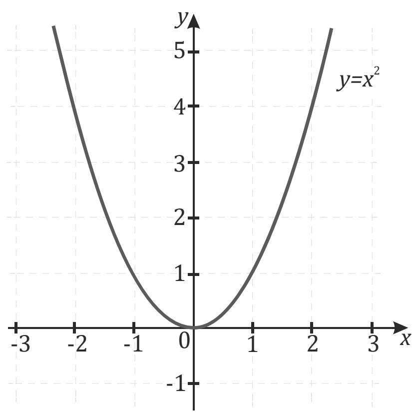
2. Postać graficzna funkcji $y = 2x - 3$:



Postać tabelaryczna funkcji $y = 2x - 3$:

x_i	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x_i)$	...	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	...

3. Postać graficzna funkcji $y = x^2$:



Postać tabelaryczna funkcji $y = x^2$:

x_i	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x_i)$	...	9	4	1	0	1	4	9	...

4.

a) $D_f = \boldsymbol{R}\backslash\{-2, 2\}$

b) $D_f = \boldsymbol{R}\backslash\{7\}$

c) $D_f = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

d) $D_f = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

e) $D_f = (1, \infty)$

f) $D_f = (0, 1) \cup (1, \infty)$

g) $D_f = (-2, 1) \cup (2, \infty)$

h) $D_f = \boldsymbol{R}$

i) $D_f = (3, \infty)$

j) $D_f = (-2, -1] \cup [1, \infty)$

k) $D_f = (2, \infty)$

l) $D_f = (1, \infty)$

m) $D_f = (-\infty, -1) \cup (0,1) \cup (1, \infty)$

n) $D_f = [1, \infty)$

1.2. Podstawowe własności funkcji

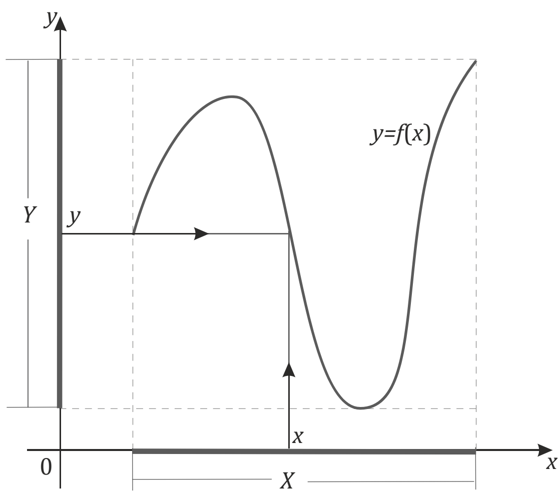
Definicja

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy „**na**” zbiór Y (**surjekcją**), jeżeli spełniony jest warunek $f(X) = Y$. Funkcję „na” zapisujemy:

$$f: X \xrightarrow{na} Y.$$

Zatem, jeżeli $f: X \xrightarrow{na} Y$, to $\bigwedge_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} y = f(x)$.

Możemy więc stwierdzić, że funkcja $f: X \to Y$ jest funkcją „na”, gdy rzut prostokątny jej wykresu na oś OY pokrywa się ze zbiorem Y, co przedstawiono na rysunku 1.4.



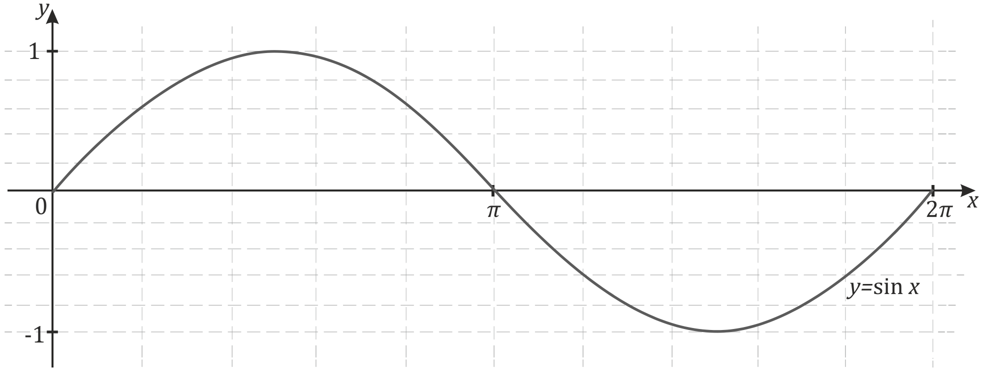
RYS. 1.4. Wykres funkcji „na”

Przykład 1.4

Zbadaj, czy funkcja $f: X \to Y$, $f(x) = \sin x$, $X = [0{,}2\pi]$, $Y = [-1{,}1]$ jest „na”.

Rozwiązanie:

Z wykresu funkcji wynika, że $\bigwedge_{y \in [-1,1]} \bigvee_{x \in [0,2\pi]} y = f(x)$.



Czyli funkcja $f(x) = \sin x$ jest „na” zbiór $Y = [-1,1]$.

☺

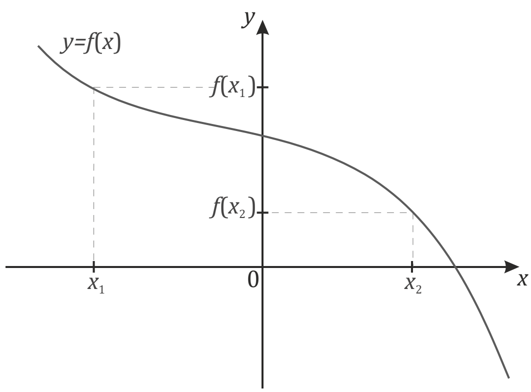
Definicja

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy **różnowartościową** (**injekcją**, **funkcją 1–1**), jeżeli dla różnych argumentów jej wartości też są różne. Funkcję różnowartościową zapisujemy:

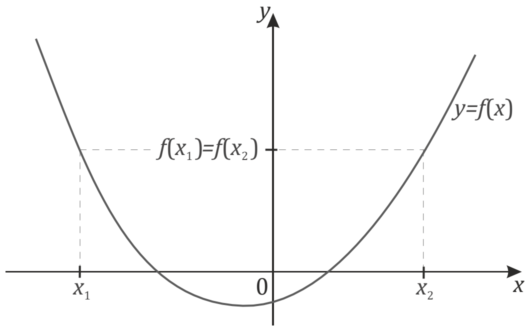
$$f: X \xrightarrow{1-1} Y.$$

Warunek ten możemy zapisać następująco:

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$



RYS. 1.5. Wykres funkcji różnowartościowej



RYS. 1.6. Wykres funkcji, która nie jest różnowartościowa

Na rysunkach 1.5 i 1.6 przedstawiono wykresy pokazujące różnicę między funkcją różnowartościową i funkcją, która nie jest różnowartościowa.

Przykład 1.5

Zbadaj, czy funkcja $f\colon X \to Y$, $f(x) = \sin x$, $X = [0{,}2\pi]$, $Y = [-1{,}1]$ jest różnowartościowa.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji jest zbiór: $D_f = \boldsymbol{R}$.

Niech $x_1 = 0$ i $x_2 = \pi$, wtedy $x_1, x_2 \in X$ oraz $x_1 \neq x_2$.

Podstawiamy wartości x_1 i x_2 do wzoru funkcji i otrzymujemy:

$$f(x_1) = f(0) = \sin 0 = 0 \text{ oraz } f(x_2) = f(\pi) = \sin\pi = 0, \text{ czyli } f(x_1) = f(x_2).$$

Zatem funkcja $f(x) = \sin x$ nie jest różnowartościowa, możemy to również zauważyć analizując wykres funkcji (przykład 1.4).

☺

Definicja

Funkcję $f\colon X \to Y$ nazywamy **wzajemnie jednoznaczną** (**bijekcją**), jeżeli jest różnowartościowa i „na” , co zapisujemy:

$$f\colon X \xrightarrow[na]{1-1} Y.$$

Przykład 1.6

Zbadaj, czy funkcja $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = 2x^3 - 1$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczną.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji jest zbiór: $D_f = \boldsymbol{R}$, zaś zbiorem wartości: $W_f = \boldsymbol{R}$ (przykład 1.1), czyli funkcja jest „na" zbiór $\boldsymbol{R}$.

Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$, takie że $x_1 \neq x_2$, wtedy ${x_1}^3 \neq {x_2}^3$, a więc $2{x_1}^3 - 1 \neq 2{x_2}^3 - 1$, czyli $f(x_1) \neq f(x_2)$, z tego wynika, że funkcja jest „1-1".

Zatem funkcja $f(x) = 2x^3 - 1$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczną.

☺

Definicja

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy **stałą** w X, jeżeli dla dowolnych argumentów przyjmuje takie same wartości, co zapisujemy następująco:

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} f(x_1) = f(x_2).$$

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy **rosnącą** w X, gdy wraz ze wzrostem wartości argumentu rośnie wartość funkcji, co zapisujemy następująco:

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy **malejącą** w X, gdy wraz ze wzrostem wartości argumentu maleje wartość funkcji, co zapisujemy następująco:

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy **niemalejącą** w X, gdy wraz ze wzrostem wartości argumentu nie maleje wartość funkcji, co zapisujemy następująco:

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)).$$

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy **nierosnącą** w X, gdy wraz ze wzrostem wartości argumentu nie rośnie wartość funkcji, co zapisujemy następująco:

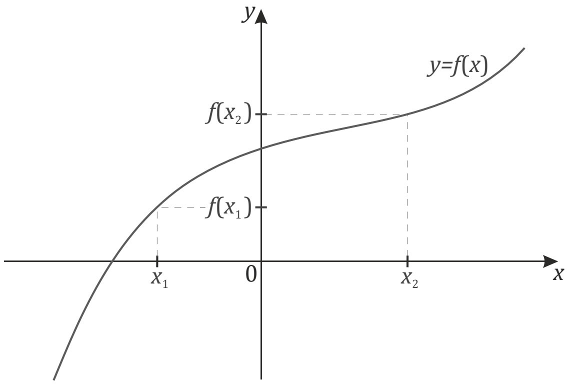
$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Funkcja $f: X \to Y$ nazywamy **monotoniczną** w X, jeżeli jest to funkcja rosnąca lub malejąca lub nierosnąca lub niemalejąca lub stałą w X.

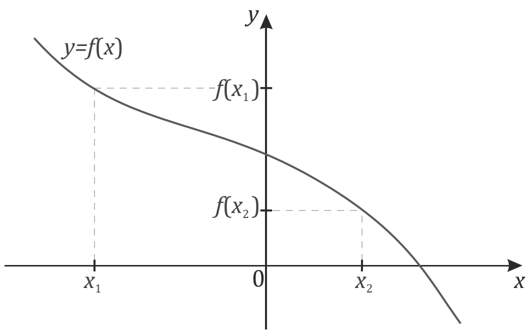
Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy **ściśle monotoniczną** w X, jeżeli jest to funkcja rosnąca lub malejąca w X.

Jeśli zbiór X, w którym określona jest funkcja można przedstawić w postaci sumy przedziałów, w których funkcja jest monotoniczna, to mówimy, że funkcja jest **przedziałami monotoniczna**.

W ujęciu graficznym monotoniczność funkcji możemy przedstawić w postaci wykresów zaprezentowanych na rysunkach 1.7 oraz 1.8.



RYS. 1.7. Wykres funkcji rosnącej



RYS. 1.8. Wykres funkcji malejącej

Przykład 1.7

Wykaż, że funkcja $f(x) = 2x^3 - 1$ jest funkcją rosnącą.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji jest zbiór: $D_f = \boldsymbol{R}$. Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$, takie że $x_1 < x_2$, wtedy ${x_1}^3 < {x_2}^3$, czyli ${x_1}^3 - {x_2}^3 < 0$.

Załóżmy, że funkcja nie jest rosnąca, czyli $f(x_1) > f(x_2)$, wtedy $f(x_1) - -f(x_2) > 0$.

$$f(x_1) - f(x_2) = 2{x_1}^3 - 1 - (2{x_2}^3 - 1) =$$
$$= 2{x_1}^3 - 1 - 2{x_2}^3 + 1 = 2{x_1}^3 - 2{x_2}^3 =$$
$$= 2({x_1}^3 - {x_2}^3) < 0$$

z założenia < 0

Otrzymujemy sprzeczność, więc $f(x_1) < f(x_2)$, co oznacza, że funkcja $f(x) = 2x^3 - 1$ jest funkcją rosnącą.

Możemy to również zaobserwować na wykresie funkcji (przykład 1.1 c).

☺

Przykład 1.8

Zbadaj, czy funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ jest monotoniczna.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji jest zbiór: $D_f = \boldsymbol{R}$. Dziedzinę funkcji możemy zapisać jako sumę dwóch przedziałów $[-\infty, 0)$ oraz $[0, +\infty,)$.

Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in [-\infty, 0)$, takie że $x_1 < x_2$, wtedy ${x_1}^2 > {x_2}^2$, czyli ${x_2}^2 - {x_1}^2 < 0$.

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1^2+1} - \frac{1}{x_2^2+1} = \frac{x_2^2+1-(x_1^2+1)}{(x_1^2+1)(x_1^2+1)} = \frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+1)(x_1^2+1)} < 0.$$

z założenia licznik < 0
mianownik > 0

Z tego wynika, że w przedziale $[-\infty, 0)$ funkcja jest rosnąca.

Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, takie że $x_1 < x_2$, wtedy ${x_1}^2 < {x_2}^2$, czyli ${x_2}^2 - {x_1}^2 > 0$.

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1^2+1} - \frac{1}{x_2^2+1} = \frac{x_2^2+1-(x_1^2+1)}{(x_1^2+1)(x_1^2+1)} = \frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+1)(x_1^2+1)} > 0$$

z założenia licznik > 0
mianownik > 0

Z tego wynika, że w przedziale $[0, +\infty)$ funkcja jest malejąca.

Zatem funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ jest przedziałami monotoniczna.

☺

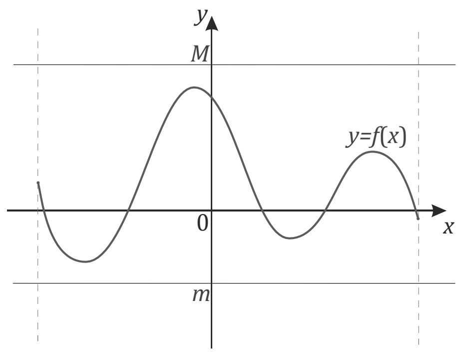
Definicja

Funkcja $f: X \to Y$ jest **ograniczona z dołu** w X, wtedy i tylko wtedy gdy $\bigvee_{m \in R} \bigwedge_{x \in X} f(x) \geq m$. Wartość m nazywamy ograniczeniem dolnym funkcji.

Funkcja $f: X \to Y$ jest **ograniczona z góry** w X, wtedy i tylko wtedy gdy $\bigvee_{M \in R} \bigwedge_{x \in X} f(x) \leq M$. Wartość M nazywamy ograniczeniem górnym funkcji.

Funkcja $f: X \to Y$ jest **ograniczona** w X, jeżeli $\bigvee_{m,M \in R} \bigwedge_{x \in X} m \leq f(x) \leq M$.

Funkcja jest ograniczona z góry, gdy jej wykres w całości jest położony poniżej pewnej prostej poziomej, zaś ograniczona z dołu, gdy leży powyżej pewnej prostej poziomej. Jeżeli funkcja jest ograniczona, wówczas jej wykres leży pomiędzy dwiema poziomymi prostymi. Przykład funkcji ograniczonej przedstawiono na rysunku 1.9.



RYS. 1.9. Wykres funkcji ograniczonej

Uwaga:

W definicji funkcji ograniczonej można tak dobrać stałe m i M, aby $0 < M = -m$, wtedy powyższą definicję możemy zapisać następująco:

Funkcja $f: X \to Y$ jest **ograniczona** w X, jeżeli $\bigvee_{M \in R_+} \bigwedge_{x \in X} |f(x)| \leq M$.

Przykład 1.9

Zbadaj, czy funkcja $f(x) = \sin x$ jest ograniczona.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji jest zbiór: $D_f = \boldsymbol{R}$. W przykładzie 1.4 wykazaliśmy, że funkcja $f(x) = \sin x$ jest „na" zbiór $Y = [-1,1]$, więc $W_f = [-1,1]$.

$\bigwedge_{x \in R} f(x) \geq -1$, czyli dowolna liczba $m \leq -1$ jest ograniczeniem dolnym funkcji $f(x)$.

$\bigwedge_{x\in R} f(x) \leq 1$, czyli dowolna liczba $M \geq 1$ jest ograniczeniem górnym funkcji $f(x)$.

Możemy więc stwierdzić, że $-1 \leq f(x) \leq 1$, czyli funkcja $f(x) = \sin x$ jest ograniczona.

☺

Definicja

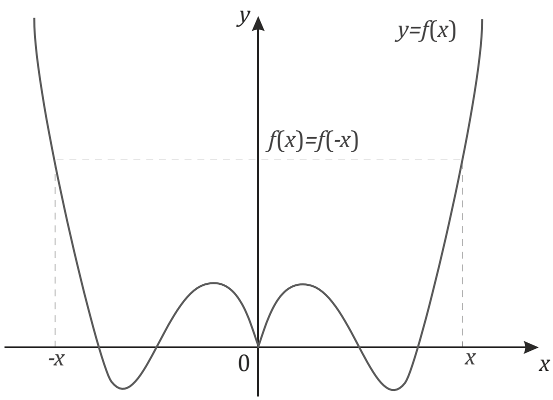
Funkcja $f: X \to Y$ jest **parzysta** w X jeżeli:

$$\bigwedge_{x\in X}\big((-x) \in X \wedge f(x) = f(-x)\big).$$

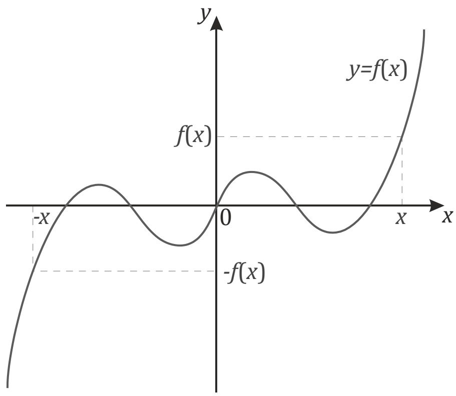
Funkcja $f: X \to Y$ jest **nieparzysta** w X jeżeli:

$$\bigwedge_{x\in X}\big((-x) \in X \wedge f(x) = -f(-x)\big).$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest parzysta, to jej wykres jest symetryczny względem osi OY. Przykład funkcji parzystej przedstawiono na rysunku 1.10. W przypadku, gdy funkcja $f(x)$ jest nieparzysta, jej wykres jest symetryczny względem początku układu współrzędnych, czyli względem punktu (0,0). Przykład funkcji nieparzystej przedstawiono na rysunku 1.11.



RYS. 1.10. Wykres funkcji parzystej



RYS. 1.11. Wykres funkcji nieparzystej

Przykład 1.10

Zbadaj parzystość funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji jest zbiór: $D_f = \boldsymbol{R}$, więc $\bigwedge_{x \in D_f} (-x) \in D_f$.

Weźmy więc dowolny $x \in D_f$, wtedy:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x).$$

Z tego wynika, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ jest parzysta.

☺

Definicja

Funkcja $f: X \to Y$ jest **okresowa** w $X \Leftrightarrow \bigvee_{T>0} \bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{k \in \boldsymbol{Z}} \big((x + kT) \in X \land f(x) =$
$= f(x + kT)\big)$.

Uwaga:

Liczbę T nazywamy okresem funkcji.

Najmniejszy dodatni (o ile istnieje) okres danej funkcji nazywamy okresem podstawowym.

Przykład 1.11

Sprawdź, czy funkcja $f(x) = \sin 4x$ jest okresowa. Jeśli tak, to wyznacz jej okres podstawowy.

Rozwiązanie:

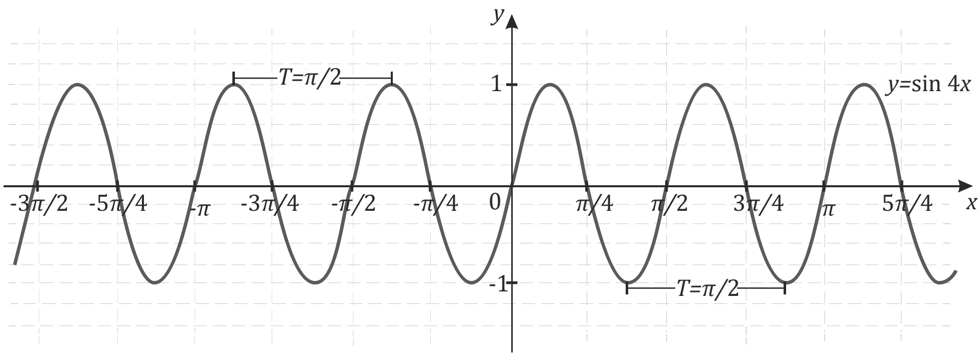
Dziedziną funkcji jest zbiór: $D_f = \boldsymbol{R}$, więc $\bigwedge_{x \in X} \left((x + kT) \in D_f \right)$.

$$f(x + kT) = \sin 4 \cdot (x + kT) = \sin(4x + 4kT),$$

Z własności funkcji $\sin x$ wiadomo, że $\sin z = \sin(z + 2\pi)$.

Niech $z = 4x$, wtedy $4 \cdot k \cdot T = 2\pi$, więc okres podstawowy (dla $k = 1$) funkcji wynosi:

$$T = \frac{2}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi.$$



RYS. 1.12. Wykres funkcji $f(x) = \sin 4x$

☺

Definicja

Niech $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$, wtedy funkcję $h: X \to Z$, spełniającą warunek $\bigwedge_{x \in X} h(x) = g(f(x))$, nazywamy **złożeniem** (lub **superpozycją**) funkcji f i g, którą oznaczamy $g \circ f$, co zapisujemy:

$$\bigwedge_{x \in X} (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

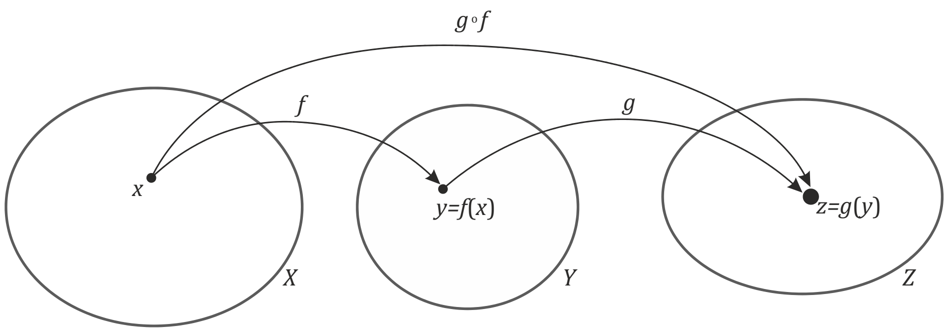
Funkcję $f(x)$ nazywamy funkcją wewnętrzną funkcji złożonej $g(f(x))$.

Funkcję $g(x)$ nazywamy funkcją zewnętrzną funkcji złożonej $g(f(x))$.

Złożenie funkcji (rys. 1.13) istnieje, jeśli zbiór wartości funkcji wewnętrznej zawiera się w dziedzinie funkcji zewnętrznej, czyli $W_f \subset D_g$.

Dziedziną funkcji złożonej jest dziedzina funkcji wewnętrznej, czyli $D_h = D_f$.

Zbiór wartości funkcji złożonej zawiera się w zbiorze wartości funkcji zewnętrznej, czyli $W_h \subseteq W_g$.



RYS. 1.13. Złożenie funkcji

Przykład 1.12

Podaj wzór funkcji złożonej $g(f(x))$ oraz $f(g(x))$, jeśli $f(x) = 3x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji $f(x) = 3x^2 + 1$ jest zbiór: $D_f = \boldsymbol{R}$, zaś zbiorem wartości: $W_f = [1, +\infty)$ oraz dziedziną funkcji $g(x) = \sqrt{x}$ jest zbiór: $D_g = \boldsymbol{R}_+ \cup 0$, zaś przeciwdziedziną: $W_g = \boldsymbol{R}_+ \cup 0$.

$W_f \subset D_g$, więc złożenie $g(f(x))$ istnieje i ma wzór:

$$g(f(x)) = g(3x^2 + 1) = \sqrt{3x^2 + 1}.$$

$W_g \subset D_f$, więc złożenie $f(g(x))$ istnieje i ma wzór:

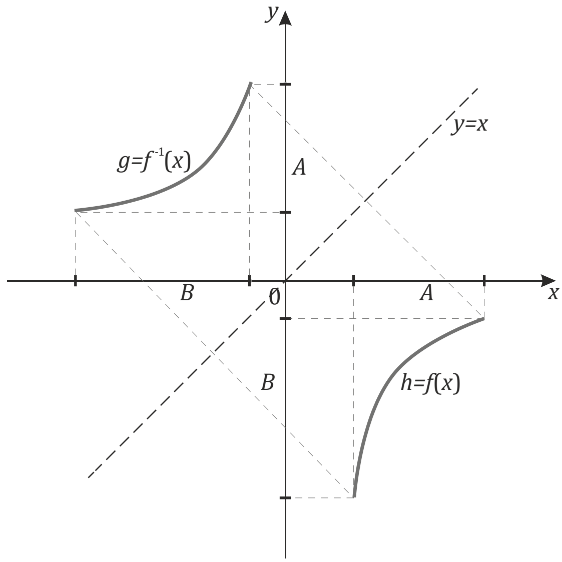
$$f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 3(\sqrt{x})^2 + 1 = 3x + 1.$$

☺

Definicja

Niech $f: X \to Y$ będzie funkcją wzajemnie jednoznaczną. Funkcją **odwrotną** do funkcji $f: X \to Y$ nazywamy funkcję $f^{-1}: Y \to X \Leftrightarrow \bigvee_{f^{-1}:Y \to X} \bigwedge_{x \in X} f^{-1}(f(x)) = x$.

Funkcją odwrotną do funkcji odwrotnej funkcji $f(x)$ jest funkcja $f(x)$, czyli $(f(x)^{-1})^{-1} = f(x)$. Wykresy funkcji f i f^{-1} są symetryczne względem prostej $y = x$. Przykład wykresu funkcji odwrotnej zaprezentowano na rysunku 1.14.



RYS. 1.14. Wykres funkcji $f(x)$ i funkcji do niej odwrotnej $f^{-1}(x)$

Przykład 1.13

Wyznacz wzór funkcji odwrotnej do funkcji $f(x) = 3x - 7$.

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x) = 3x - 7$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczną, więc istnieje do niej funkcja odwrotna.

Niech $y = 3x - 7$, więc $y + 7 = 3x$, stąd $x = \frac{y+7}{3}$. Zamieniając symbol x na y otrzymujemy funkcję odwrotną wyrażoną wzorem:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+7}{3}.$$

☺

Zadania

1. Zbadaj parzystość funkcji:

   a) $f(x) = x^3 + 5$

   b) $f(x) = 2cos^2 x + 6$

   c) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

   d) $f(x) = x \cdot \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$

2. Sprawdź, czy funkcje $f(x)$ są różnowartościowe:
   a) $f(x) = 4x - 5$
   b) $f(x) = ln(x^2 + 6)$
   c) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 3, & 1 \leq x < 2 \\ x + 1, & x \geq 2 \end{cases}$
3. Znajdź złożenia funkcji $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$ (o ile istnieją):
   a) $f(x) = x^2 + 1, g(x) = \cos x + 2$
   b) $f(x) = \log(x + 1), g(x) = \sin x - 2$
   c) $f(x) = \sqrt{x + 3}, g(x) = \ln x + 5$
4. Wyznacz funkcję odwrotną do funkcji $f(x)$ (o ile istnieje):
   a) $f(x) = 5x - 3$
   b) $f(x) = x^2 + 5$
   c) $f(x) = 3^{x+2} - 4$
5. Dana jest funkcja:
   a) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
   b) $f(x) = \frac{x^4}{x^2+1}$

   Wyznacz dziedzinę i przeciwdziedzinę funkcji. Zbadaj ograniczoność, monotoniczność, parzystość oraz różnowartościowość funkcji. Sprawdź, czy istnieje funkcja odwrotna do $f(x)$?

Odpowiedzi

1.
   a) brak parzystości
   b) funkcja parzysta
   c) funkcja parzysta
   d) funkcja parzysta
2.
   a) tak
   b) nie
   c) nie

3.

a) $f\big(g(x)\big) = (\cos x + 2)^2 + 1$; $g\big(f(x)\big) = \cos(x^2 + 1) + 2$;

$f(f(x)) = (x^2 + 1)^2 + 1$

b) $f\big(g(x)\big)$ nie istnieje; $g\big(f(x)\big) = \sin(\log(x + 1)) - 2$;

$f(f(x))$ nie istnieje

c) $f\big(g(x)\big)$ nie istnieje; $g\big(f(x)\big) = \ln\sqrt{x+3} + 5$; $f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x+3}+3}$

4.

a) $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{5}$

b) $f^{-1}(x)$ nie istnieje

c) $f^{-1}(x) \log_3(x + 4) - 2$

5.

a) $D_f = \boldsymbol{R}$, $W_f = (0,1]$, ograniczona, przedziałami monotoniczna: rosnąca w przedziale $(-\infty, 0)$, malejąca w przedziale $(0, +\infty)$, parzysta, nie jest różnowartościowa, nie istnieje funkcja odwrotna.

b) $D_f = \boldsymbol{R}$, $W_f = [0, +\infty]$, ograniczona z dołu, przedziałami monotoniczna: malejąca w przedziale $(-\infty, 0)$, rosnąca w przedziale $(0, +\infty)$, parzysta, nie jest różnowartościowa, nie istnieje funkcja odwrotna.

1.3. Funkcje elementarne

W matematyce wyróżnia się różne typy funkcji nazywane funkcjami elementarnymi. Oczywiście można też spotkać funkcje, które są sumą/różnicą/iloczynem/ilorazem lub złożeniem funkcji elementarnych. Do funkcji elementarnych zaliczamy:

- funkcję liniową,
- funkcję kwadratową,
- funkcję wielomianową,
- funkcję wymierną,
- funkcję potęgową,
- funkcję wykładniczą,
- funkcję logarytmiczną,
- funkcje trygonometryczne,
- funkcje cyklometryczne.

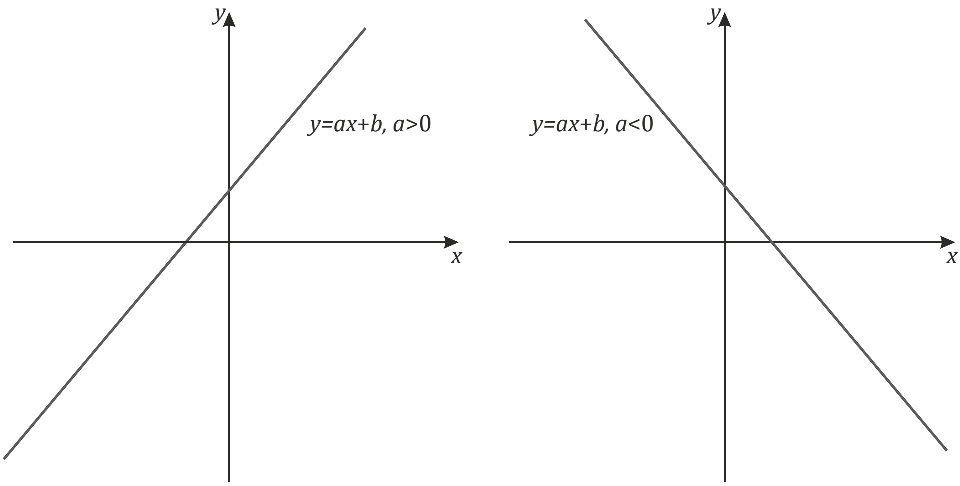
Definicja

Funkcję o równaniu $y = ax + b$, gdzie $a, b \in \boldsymbol{R}$ nazywamy **funkcją liniową**.

Podstawowe własności funkcji liniowej:

1. $D_f = \boldsymbol{R}$; $W_f = \boldsymbol{R}$.
2. Wykresem jest prosta, która przecina oś OX w punkcie $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, $a \neq 0$ (miejsce zerowe) oraz oś OY w punkcie $(0, b)$.
3. Dla $a > 0$ funkcja jest rosnąca, dla $a < 0$ funkcja jest malejąca, dla $a = 0$ funkcja jest stała.
4. Funkcja jest różnowartościowa.

Przykładowe wykresy funkcji liniowych przedstawiono na rysunku 1.15.



RYS. 1.15. Wykresy funkcji liniowych

Przykład 1

Wykaż, że funkcja liniowa $y = ax + b$ jest różnowartościowa.

Rozwiązanie:

Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$, takie że $x_1 \neq x_2$, wtedy $ax_1 \neq ax_2$, a więc $2ax_1 + b \neq$ $\neq ax_2 + b$, czyli $f(x_1) \neq f(x_2)$, z tego wynika, że funkcja jest „1-1".

☺

Definicja

Funkcję o równaniu $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \boldsymbol{R} \wedge a \neq 0$ nazywamy **funkcją kwadratową**.

Dla funkcji kwadratowej możemy policzyć $\Delta = b^2 - 4ac$ – wyróżnik funkcji kwadratowej.

Funkcję kwadratową możemy zapisać w postaci:

- iloczynowej:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ dla } \Delta > 0 \text{ gdzie } x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};$$

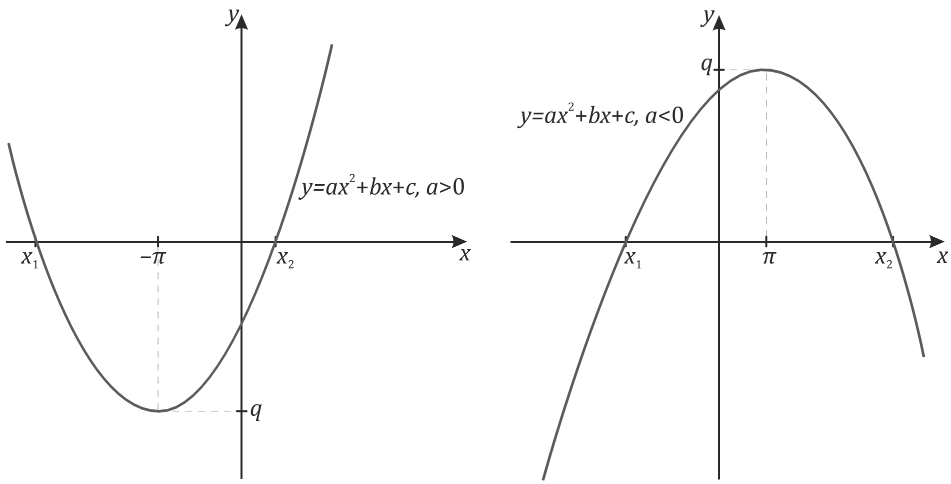
$$y = a(x - x_0)^2, \text{ dla } \Delta = 0 \text{ gdzie } x_0 = \frac{-b}{2a};$$

- kanonicznej: $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie $p = -\frac{b}{2a}, q = -\frac{\Delta}{4a}$.

Podstawowe własności funkcji kwadratowej:

1. $D_f = \boldsymbol{R}$; $W_f = [q, \infty)$ dla $a > 0$; $W_f = (-\infty, q]$ dla $a < 0$.
2. Wykresem jest parabola, o wierzchołku w punkcie (p, q).
3. Dla $a < 0$ funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, p)$ i malejąca w przedziale (p, ∞).
4. Dla $a > 0$ funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, p)$ i rosnąca w przedziale (p, ∞).
5. Funkcja nie jest różnowartościowa.

Przykładowe wykresy funkcji kwadratowych przedstawiono na rysunku 1.16.



RYS. 1.16. Wykresy funkcji kwadratowych

Przykład 2

Wykaż, że funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$ może być przedstawiona w postaci kanonicznej.

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru na postać kanoniczną funkcji:

$$y = a(x-p)^2 + q = a(x^2 - 2xp + p^2) + q = ax^2 - 2apx + ap^2 + q.$$

Podstawiamy: $p = -\frac{b}{2a}, q = -\frac{\Delta}{4a}, \Delta = b^2 - 4ac$ i otrzymujemy:

$$y = ax^2 + 2a\frac{b}{2a}x + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = ax^2 + bx + \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2-4ac}{4a} =$$

$$= ax^2 + bx - \frac{b^2-b^2-4ac}{4a} = ax^2 + bx + \frac{4a \cdot c}{4a} = ax^2 + bx + c$$

☺

Definicja

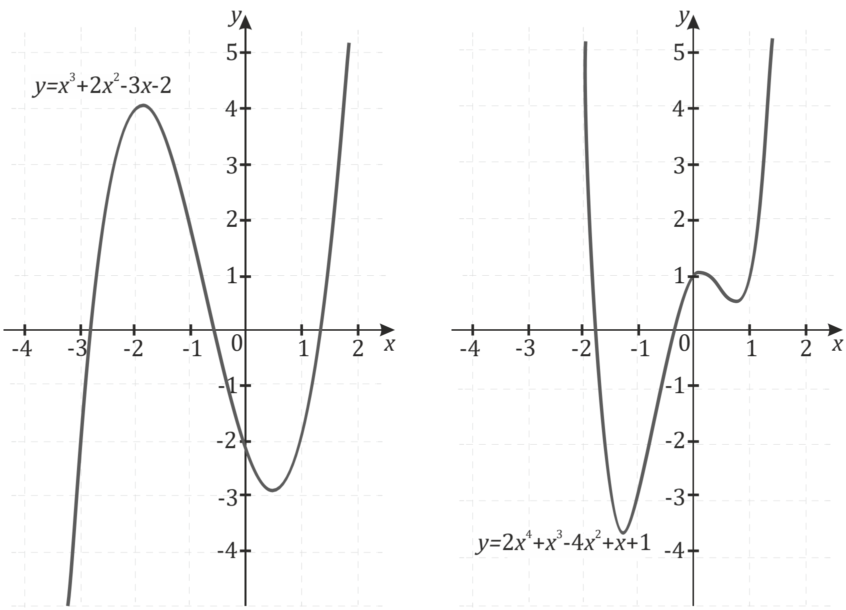
Funkcję o równaniu $y = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$, n – liczba całkowita, $n \geq 0$, $a_i \in \boldsymbol{R}$ nazywamy **funkcją wielomianową stopnia $\boldsymbol{n}$** (**wielomianem stopnia $\boldsymbol{n}$**).

Szczególnym przypadkiem funkcji wielomianowej jest wielomian stopnia 2, czyli funkcja kwadratowa.

Podstawowe własności funkcji wielomianowej:

1. $D_f = \boldsymbol{R}$.
2. Funkcja jest przedziałami monotoniczna.
3. Funkcja nie jest różnowartościowa.

Przykładowe wykresy funkcji wielomianowych zobrazowano na rysunku 1.17.



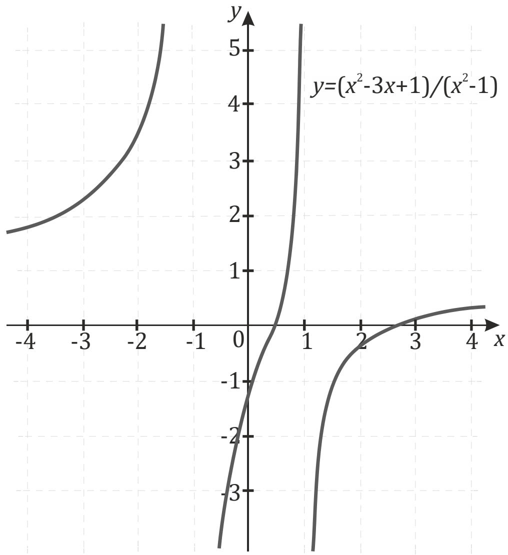
RYS. 1.17. Wykresy funkcji wielomianowych

Definicja

Funkcję o równaniu $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x), Q(x)$ są wielomianami, nazywamy **funkcją wymierną**.

Podstawowe własności funkcji wymiernej:

1. $D_f = \{x \in \boldsymbol{R}: Q(x) \neq 0\}$.
2. Funkcja jest przedziałami monotoniczna.
   Przykładowy wykres funkcji wymiernej przedstawiono na rysunku 1.18.



RYS. 1.18. Wykres funkcji wymiernej

Definicja

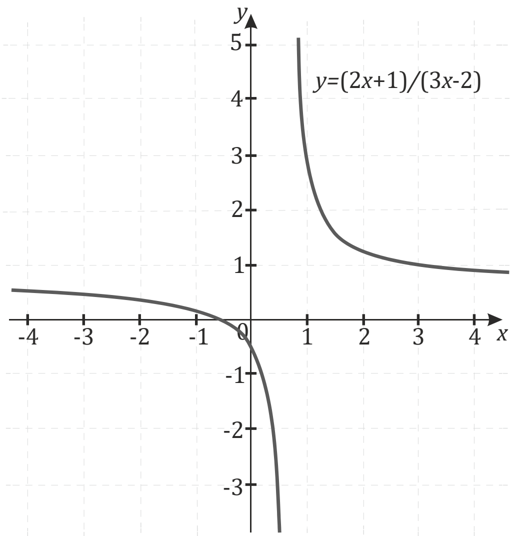
Funkcję o równaniu $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0, ad - bc \neq 0$, nazywamy **funkcją homograficzną**.

Funkcja homograficzna jest szczególnym przypadkiem funkcji wymiernej.
Podstawowe własności funkcji homograficznej:

1. $D_f = \boldsymbol{R} \backslash \left\{-\frac{d}{c}\right\}, W_f = \boldsymbol{R} \backslash \left\{\frac{a}{c}\right\}$.
2. Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola.

3. Proste $x = -\frac{d}{c}, y = \frac{a}{c}$ są asymptotami[1] wykresu funkcji homograficznej.
4. Dla $ad - bc > 0$ funkcja jest rosnąca w swojej dziedzinie, dla $ad - bc < 0$ jest malejąca w swojej dziedzinie.
5. Funkcja jest różnowartościowa.
6. Dla $a = 0$ i $d = 0$, funkcja homograficzna jest funkcją nieparzystą, a jej asymptotami są osie układu współrzędnych.

   Przykładowy wykres funkcji wymiernej przedstawiono na rysunku 1.19.



RYS. 1.19. Wykres funkcji homograficznej

Definicja

Funkcję o równaniu $y = ax^n$, gdzie $n \in \boldsymbol{R}$, nazywamy **funkcją potęgową**.

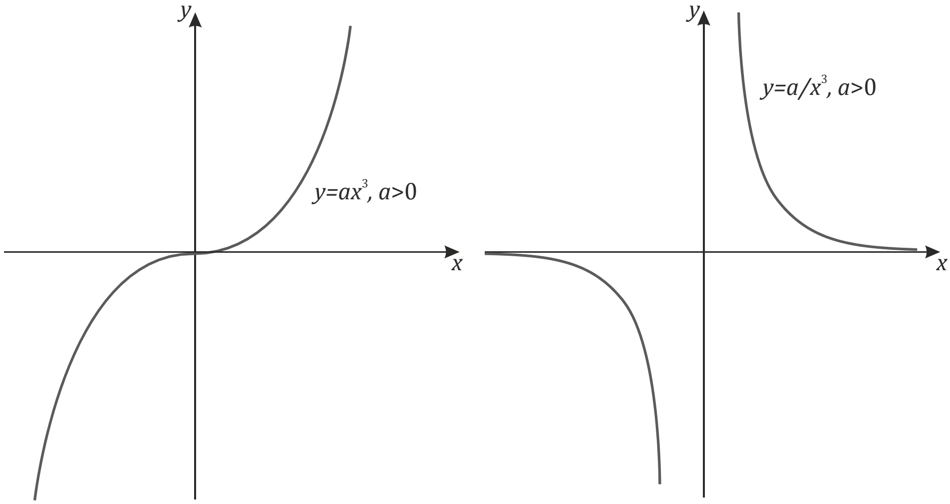
Podstawowe własności funkcji potęgowej:

Dziedzina funkcji potęgowej zależy od wartości parametru n, np.

1. jeżeli n jest liczbą naturalną, to $D_f = \mathbf{R}$,
   - jeżeli n jest liczbą całkowitą ujemną, to $D_f = \mathbf{R}\backslash\{0\}$,
   - jeżeli $n > 0$, to $D_f = \mathbf{R}_+$.

[1] Asymptota funkcji to prosta, która ogranicza wykres funkcji. Odległość między wykresem funkcji a jego asymptotą zmierza do zera. Mówimy też, że asymptota jest to prosta, do której coraz bardziej „zbliża się" wykres funkcji, ale jej nie przecina. Więcej na temat asymptot można znaleźć w rozdz. 3.4 niniejszego podręcznika.

2. Jeżeli n jest liczbą całkowitą parzystą, to funkcja jest parzysta. Jeżeli n jest liczbą całkowitą nieparzystą, to funkcja jest nieparzysta.
   Przykładowe wykresy funkcji potęgowych przedstawiono na rysunku 1.20.



RYS. 1.20. Wykresy funkcji potęgowych

Definicja

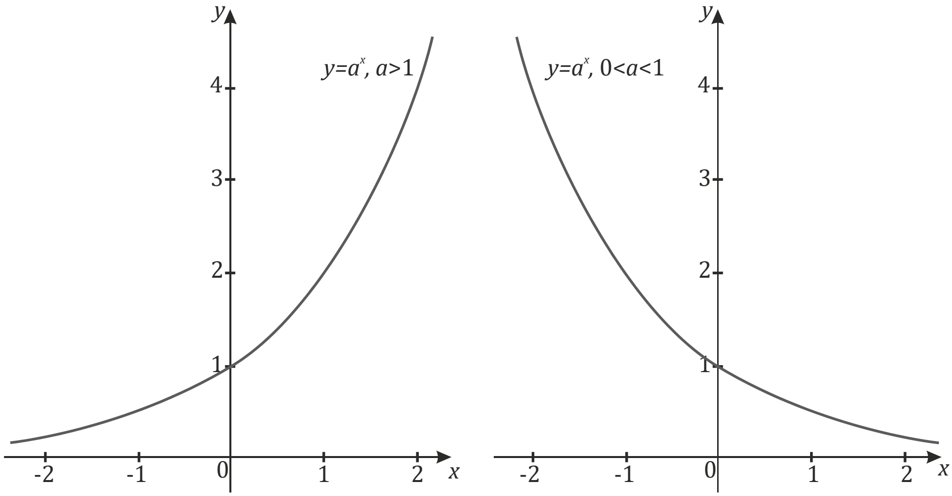
Funkcję o równaniu $y = a^x$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}_+ \ \wedge a \neq 1$, nazywamy **funkcją wykładniczą**.

Podstawowe własności funkcji wykładniczej:

1. $D_f = \boldsymbol{R}$, $W_f = \boldsymbol{R}_+$.
2. Wykresem funkcji jest krzywa nazywana krzywą wykładniczą.
3. Dla $a > 1$ funkcja jest rosnąca, dla $0 < a < 1$ funkcja jest malejąca.
4. Funkcja jest różnowartościowa.
5. Funkcja jest funkcją odwrotną do funkcji logarytmicznej[2].

[2] Funkcja logarytmiczna jest zdefiniowana w następnej definicji

Przykładowe wykresy funkcji wykładniczych zobrazowano na rysunku 1.21.



RYS. 1.21. Wykresy funkcji wykładniczych

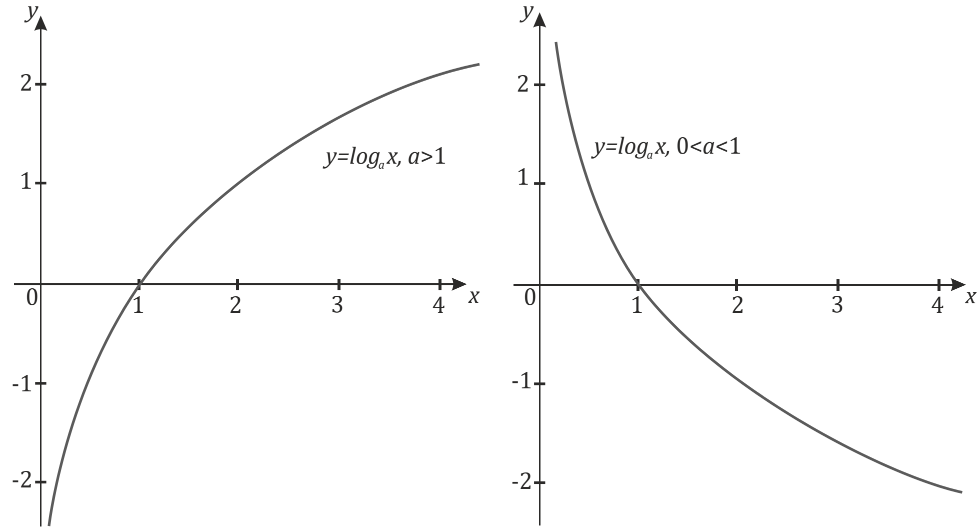
Definicja

Funkcję o równaniu $y = \log_a x$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}_+ \ \wedge a \neq 1$, nazywamy **funkcją logarytmiczną**.

Podstawowe własności funkcji logarytmicznej:

1. $D_f = \boldsymbol{R}_+, \ W_f = \boldsymbol{R}$.
2. Wykresem funkcji jest krzywa nazywana krzywą logarytmiczną.
3. Dla $a > 1$ funkcja jest rosnąca, dla $0 < a < 1$ funkcja jest malejąca.
4. Funkcja jest różnowartościowa.
5. Funkcja jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej.

Przykładowe wykresy funkcji logarytmicznych przedstawiono na rysunku 1.22.



RYS. 1.22. Wykresy funkcji logarytmicznych

Definicja

Funkcje **trygonometryczne**:

Funkcję o równaniu $y = \sin x$, nazywamy **funkcją sinus**:

1. $D_f = \boldsymbol{R}$, $W_f = [-1,1]$.
2. Wykresem funkcji jest krzywa nazywana sinusoidą.
3. Funkcja jest nieparzysta.
4. Funkcja jest okresowa, $T = 2\pi$ – okres podstawowy.

Funkcję o równaniu $y = \cos x$, nazywamy **funkcją cosinus**:

1. $D_f = \boldsymbol{R}$, $W_f = [-1,1]$.
2. Wykresem funkcji jest krzywa nazywana kosinusoidą.
3. Funkcja jest parzysta.
4. Funkcja jest okresowa, $T = 2\pi$ – okres podstawowy.

Funkcję o równaniu $y = \operatorname{tg} x$, nazywamy **funkcją tangens**:

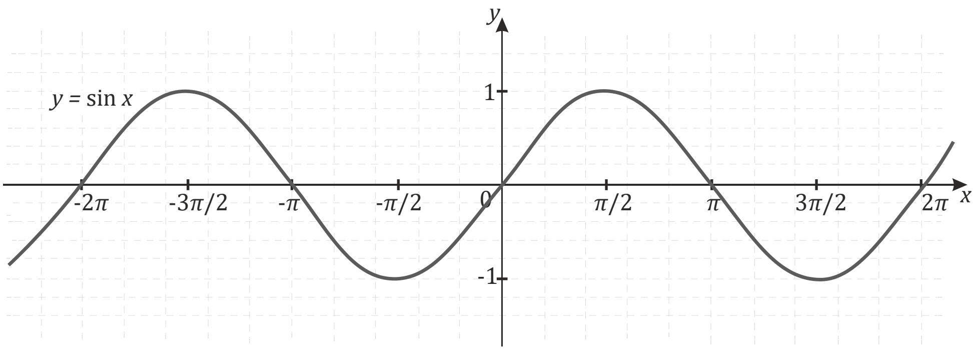
1. $D_f = \boldsymbol{R} \setminus x: x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, $W_f = \boldsymbol{R}$.
2. Wykresem funkcji jest krzywa nazywana tangensoidą.
3. Funkcja jest nieparzysta.

4. Funkcja jest okresowa, $T = \pi$ – okres podstawowy.
5. Funkcja ma asymptoty pionowe o równaniu $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$.

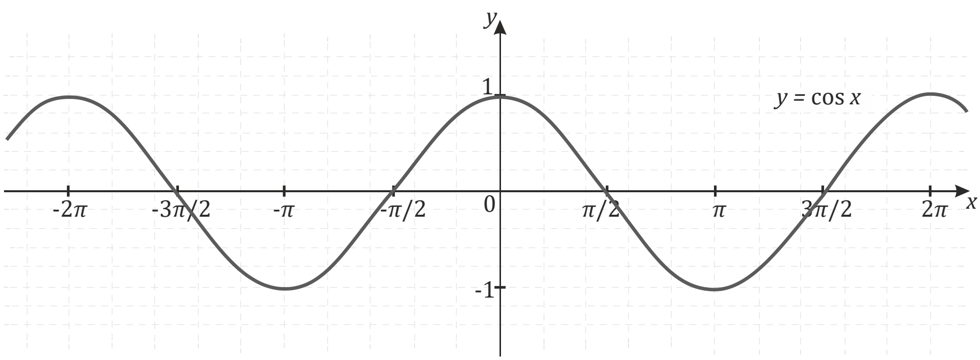
Funkcję o równaniu $y = \operatorname{ctg} x$, nazywamy **funkcją cotangens**:

1. $D_f = \boldsymbol{R} \setminus x: x = k\pi, k \in Z,\ W_f = \boldsymbol{R}$.
2. Wykresem funkcji jest krzywa nazywana kotangensoidą.
3. Funkcja jest nieparzysta.
4. Funkcja jest okresowa, $T = \pi$ – okres podstawowy.
5. Funkcja ma asymptoty pionowe o równaniu $x = k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$.

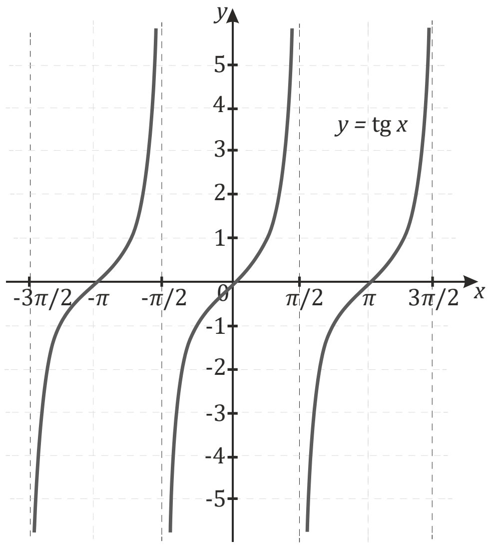
Wykresy funkcji trygonometrycznych przedstawiono na rysunkach 1.23, 1.24, 1.25 i 1.26.



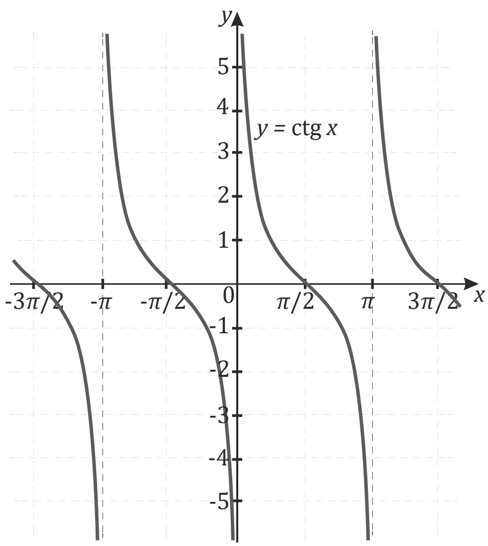
RYS. 1.23. Wykres funkcji sinus



RYS. 1.24. Wykres funkcji cosinus



RYS. 1.25. Wykres funkcji tanges



RYS. 1.26. Wykres funkcji cotanges

Definicja

Funkcje **cyklometryczne** (odwrotne do funkcji trygonometrycznych):

Funkcję o równaniu $y = \arcsin x$, nazywamy **funkcją arcus sinus**:

1. $D_f = [-1,1]$.
2. Jest funkcją odwrotną do funkcji $y = \sin x$ w przedziale w którym jest różnowartościowa.

Funkcję o równaniu $y = \arccos x$, nazywamy **funkcją arcus cosinus**:

1. $D_f = [-1,1]$.
2. Jest funkcją odwrotną do funkcji $y = \cos x$ w przedziale w którym jest różnowartościowa.

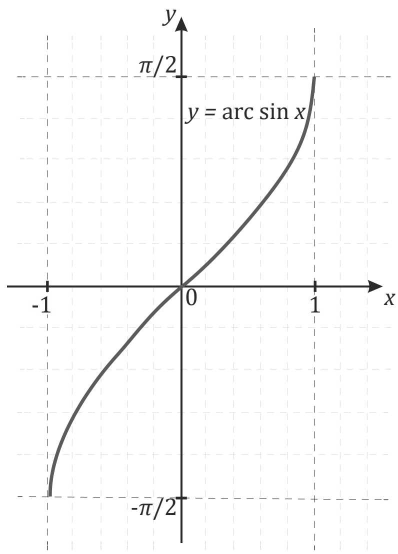
Funkcję o równaniu $y = \operatorname{arc\,tg} x$, nazywamy **funkcją arcus tangens**:

1. $D_f = \boldsymbol{R}$.
2. Jest funkcją odwrotną do funkcji $y = \operatorname{tg} x$ w przedziale w którym jest różnowartościowa.

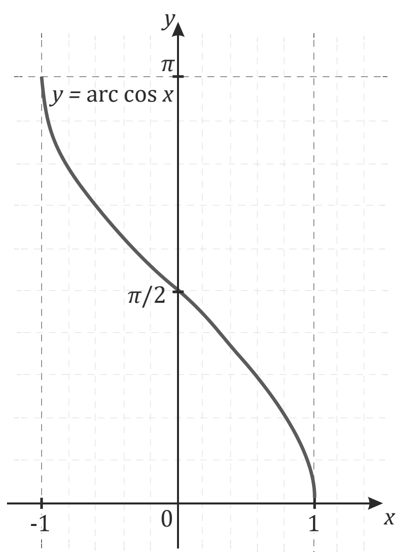
Funkcję o równaniu $y = \operatorname{arc\,ctg} x$, nazywamy **funkcją arcus cotangens**:

1. $D_f = \boldsymbol{R}$.
2. Jest funkcją odwrotną do funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ w przedziale w którym jest różnowartościowa.

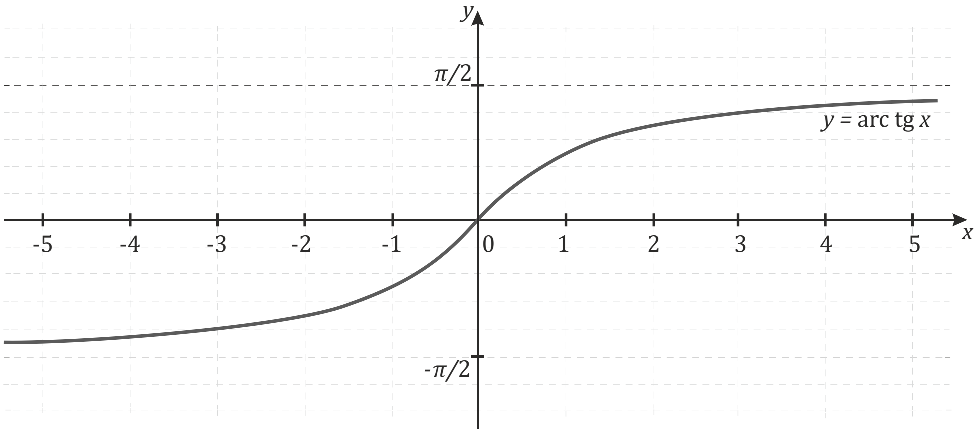
Wykresy funkcji cyklometrycznych zobrazowano na rysunkach 1.27, 1.28, 1.29 i 1.30.



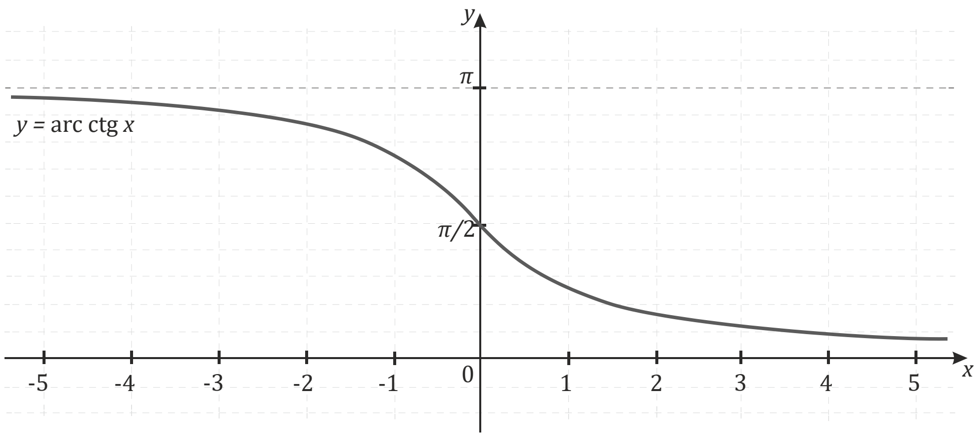
RYS. 1.27. Wykres funkcji arcus sinus



RYS. 1.28. Wykres funkcji arcus cosinus



RYS. 1.29. Wykres funkcji arcus tangens



RYS. 1.30. Wykres funkcji arcus cotangens

Zadania

Do jakich typów funkcji elementarnych zaliczysz funkcje:

a) $f(x) = 8x$

b) $f(x) = 5x + 2$

c) $f(x) = 13$

d) $f(x) = 4x^2 - 7x + 15$

e) $f(x) = 5x^2 + 15$

f) $f(x) = 3x^2 + 2x$

g) $f(x) = 4x^5 + 2x^4 - 9x^2 - 7x + 15$

h) $f(x) = 2x^3 + 11$

i) $f(x) = \frac{2x^3+7}{4x^5+2x^4-9}$

j) $f(x) = \frac{2x^3+7x-4}{7x^5+2x-3}$

k) $f(x) = \frac{7x-4}{2x-3}$

l) $f(x) = \frac{5x+2}{2x-1}$

m) $f(x) = x^7$

n) $f(x) = 3x^4$

o) $f(x) = x^{-5}$

p) $f(x) = 7^x$

q) $f(x) = 3^x$

r) $f(x) = \log_2 x$

s) $f(x) = \sin x$

t) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$

u) $f(x) = \operatorname{arc\,cos} x$

Odpowiedzi

a) liniowa
b) liniowa
c) liniowa
d) kwadratowa
e) kwadratowa
f) kwadratowa
g) wielomianowa
h) wielomianowa
i) wymierna
j) wymierna
k) homograficzna
l) homograficzna
m) potęgowa
n) potęgowa

o) potęgowa
p) wykładnicza
q) wykładnicza
r) logarytmiczna
s) trygonometryczna
t) cyklometryczna
u) cyklometryczna

2. CIĄGI LICZBOWE

2.1. Definicja ciągu

Definicja

Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję f, która każdej liczbie naturalnej przyporządkowuje liczbę rzeczywistą, co zapisujemy:

$$\bigwedge_{n \in \boldsymbol{N}} a_n = f(n).$$

Wartość a_n nazywamy ***n*-tym wyrazem ciągu** lub **wyrazem ogólnym** tego ciągu. Ciąg o wyrazach a_n oznaczamy jako (a_n), zaś zbiór wyrazów tego ciągu $\{a_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ krótko jako $\{a_n\}$.

Ciągi liczbowe możemy określać:

a) wzorem, np.:

$$a_n = n + 1;\ b_n = 5^n;\ c_n = \sqrt{n^2 + 1} - n;$$

b) rekurencyjnie (każdy wyraz ciągu wyrażamy poprzez wyraz poprzedni), np.:

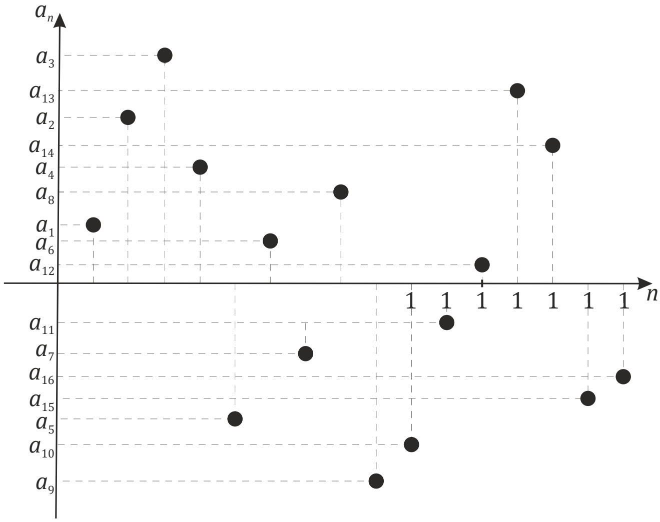
$$a_n:\ a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 1;$$

$$b_n:\ b_1 = \sqrt{5}, \quad b_{n+1} = 5b_n,$$

$$c_n:\ c_1 = 1, c_2 = 2, \quad c_{n+2} = c_{n+1} - c_n;$$

c) opisowo, np.:
a_n – n-ta cyfra po przecinku liczby π; b_n – n-ta liczba pierwsza; c_n – n-ta potęga liczby 2.

Ciąg możemy przedstawić na płaszczyźnie jako zbiór punktów o współrzędnych (n, a_n), gdzie $n \in \boldsymbol{N}$. Przykładowy ciąg przedstawiono na rysunku 2.1.



RYS. 2.1. Przykład ciągu $(\boldsymbol{a_n})$

Przykład 2.1

Wypisz pięć kolejnych wyrazów ciągu, dla którego ogólny wyraz ciągu przyjmuje postać:

a) $a_n = \frac{n!}{2^n}$

b) $b_n = 1 - (-1)^n$

Rozwiązanie:

a) Kolejne wyrazy ciągu powstają poprzez podstawienie zamiast n kolejnych liczb naturalnych. I tak dla $n = 1$ otrzymujemy: $a_1 = \frac{1!}{2^1} = \frac{1}{2}$,

$$\text{dla } n = 2 \text{ mamy: } a_2 = \frac{2!}{2^2} = \frac{1 \cdot 2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

i dalej kolejno:

$$a_3 = \frac{3!}{2^3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

$$a_4 = \frac{4!}{2^4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2},$$

$$a_5 = \frac{5!}{2^5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{32} = \frac{120}{32} = \frac{15}{4}.$$

b) Dla $n = 1$ otrzymujemy: $b_1 = 1 - (-1)^1 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$, i dalej kolejno:

$$b_2 = 1 - (-1)^2 = 1 - 1 = 0,$$

$$b_3 = 1 - (-1)^3 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2,$$

$$b_4 = 1 - (-1)^4 = 1 - 1 = 0,$$

$$b_5 = 1 - (-1)^5 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2.$$

☺

Przykład 2.2

Znajdź wzór określający n-ty wyraz ciągu:

a) $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

b) $(b_n) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots)$

c) $(c_n) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

d) $(d_n) = (1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots)$

e) $(e_n) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \dots\right)$

Rozwiązanie:

Ogólny wyraz ciągu przyjmuje postać:

a) $a_n = (-1)^n$

b) $b_n = n^2$

c) $c_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n)$

d) $d_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{dla} \quad n - \text{nieparzyste} \\ -\frac{n}{2} & \text{dla} \quad n - \text{parzyste} \end{cases}$

e) $e_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$

☺

Przykład 2.3

Wypisz pięć kolejnych wyrazów ciągów, które każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje:

a) n-tą potęgę liczby 3

b) silnię, która ma znak dodatni dla n parzystych i ujemny dla n nieparzystych

Po wypisaniu pierwszych wyrazów ciągu skonstruuj wzór ogólny i rekurencyjny n-tych wyrazów tych ciągów.

Rozwiązanie:

a) Dla $n = 1$ otrzymujemy: $a_1 = 3^1 = 3$, dla $n = 2$ mamy: $a_2 = 3^2 = 9$, a następnie:

$$a_3 = 3^3 = 27,$$

$$a_4 = 3^4 = 81,$$

$$a_5 = 3^5 = 243.$$

Zatem ogólny wzór tego ciągu będzie miał postać: $a_n = 3^n$, natomiast rekurencyjny: $a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n$ (kolejne wyrazy powstają poprzez pomnożenie poprzedniego przez liczbę 3).

b) Dla kolejnych n mamy:

$$b_1 = -2! = -1,$$

$$b_2 = 2! = 2,$$

$$b_3 = -3! = -6,$$

$$b_4 = 4! = 24,$$

$$b_5 = -5! = -120.$$

Zatem ogólny wzór ciągu przyjmuje postać: $b_n = (-1)^n \cdot n!$, a rekurencyjny:

$$b_1 = -1,\ b_{n+1} = -n \cdot b_n.$$

☺

Zadania

1. Wypisz pięć kolejnych wyrazów ciągu, dla którego ogólny wyraz ciągu przyjmuje postać:

   a) $a_n = \frac{1}{n^n}$

   b) $b_n = 2 - (-1)^n$

   c) $c_n = \sin\frac{(n+1)\cdot\pi}{2}$

   d) $d_n = |2 - (-2)^n|$

2. Znajdź ogólny wzór określający n-ty wyraz ciągu:

   a) $(a_n) = (0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, \dots)$

   b) $(b_n) = (0, -3, 1, -4,2, -5,3, -6, \dots)$

   c) $(c_n) = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\right)$

   d) $(d_n) = \left(3, \frac{5}{3}, 1, \frac{17}{27}, \frac{33}{81}, \frac{65}{243}, \frac{129}{729} \dots\right)$

3. Skonstruuj wzór rekurencyjny n-tego wyrazu ciągu:

   a) $(a_n) = (-1, 2, -4, 8, -16, 32, -64, 128, \dots)$

   b) $(b_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}, \dots\right)$

Odpowiedzi

1.

   a) $a_1 = 1;\ a_2 = \frac{1}{4};\ a_3 = \frac{1}{27};\ a_4 = \frac{1}{256};\ a_5 = \frac{1}{3125}$

   b) $b_1 = 3;\ b_2 = 1;\ b_3 = 3;\ b_4 = 1;\ b_5 = 3$

   c) $c_1 = 0;\ c_2 = -1;\ c_3 = 0;\ c_4 = 1;\ c_5 = 0$

   d) $d_1 = 4;\ d_2 = 2;\ d_3 = 10;\ d_4 = 14;\ d_5 = 34$

2.

   a) $a_n = \begin{cases} n-1 & \text{dla} \quad n - \text{nieparzyste} \\ n+1 & \text{dla} \quad n - \text{parzyste} \end{cases}$

   b) $b_n = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{dla} \quad n - \text{nieparzyste} \\ -n-1 & \text{dla} \quad n - \text{parzyste} \end{cases}$

c) $c_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

d) $d_n = \frac{2^n+1}{3^{n-1}}$

3.

a) $a_1 = -1, a_{n+1} = -2a_n$

b) $b_1 = 1,\ b_{n+1} = \frac{1}{n \cdot b_n}$

2.2. Podstawowe własności ciągów

Definicja

Ciąg (a_n) jest **ciągiem ograniczonym z dołu**, jeżeli zbiór jego wyrazów $\{a_n\}$ jest ograniczony z dołu, czyli:

$$\bigvee_{m\in\boldsymbol{R}} \bigwedge_{n\in\boldsymbol{N}} a_n \geq m.$$

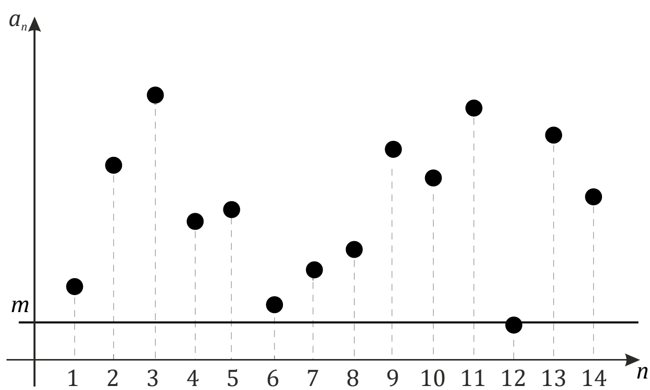
Ciąg (a_n) jest **ciągiem ograniczonym z góry**, jeżeli zbiór jego wyrazów $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry, czyli:

$$\bigvee_{M\in\boldsymbol{R}} \bigwedge_{n\in\boldsymbol{N}} a_n \leq M.$$

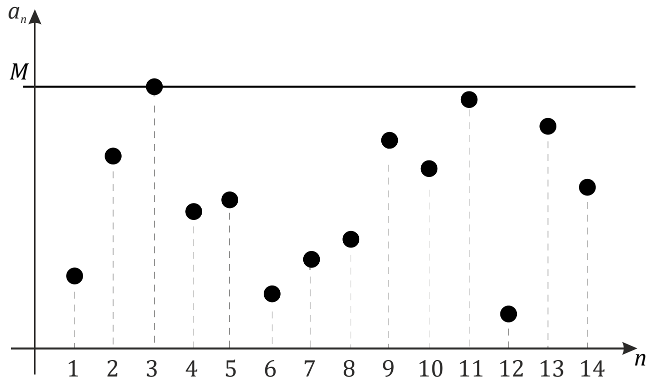
Ciąg (a_n) jest **ciągiem ograniczonym**, jeżeli zbiór jego wyrazów $\{a_n\}$ jest ograniczony (zarówno z dołu, jak i z góry), czyli:

$$\bigvee_{m,M\in\boldsymbol{R}} \bigwedge_{n\in\boldsymbol{N}} m \leq a_n \leq M.$$

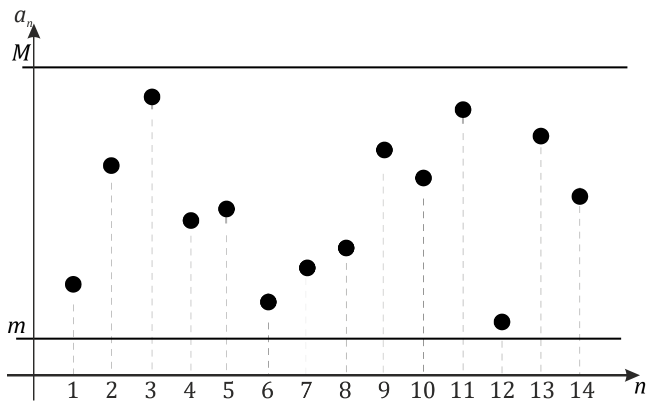
Ciąg ograniczony z dołu możemy przedstawić na płaszczyźnie jako zbiór punktów, które leżą nad pewną prostą, co przedstawiono na rysunku 2.2. Z kolei ciąg ograniczony z góry graficznie możemy zobrazować jako zbiór punktów, które znajdują się poniżej pewnej prostej, co widoczne jest na rysunku 2.3. Natomiast ciąg ograniczony graficznie może być przedstawiony jako zbiór punktów leżących miedzy dwoma prostymi, co zaprezentowano na rysunku 2.4.



RYS. 2.2. Przykład ciągu ograniczonego z dołu $(\boldsymbol{a_n})$



RYS. 2.3. Przykład ciągu ograniczonego z góry $(\boldsymbol{a_n})$



RYS. 2.4. Przykład ciągu ograniczonego $(\boldsymbol{a_n})$

Uwaga:

W definicji ciągu ograniczonego można tak dobrać stałe m i M, aby $0 < M = -m$, wtedy powyższą definicję możemy zapisać następująco:

Ciąg (a_n) jest **ciągiem ograniczonym**, jeżeli zbiór jego wyrazów $\{a_n\}$ jest ograniczony (zarówno z dołu, jak i z góry), czyli:

$$\bigvee_{M \in R_+} \bigwedge_{n \in N} |a_n| \leq M.$$

Przykład 2.4

Wykaż, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1}{n+2}$ jest ograniczony z dołu.

Rozwiązanie:

Należy znaleźć taką liczbę M, która jest mniejsza od każdego wyrazu ciągu a_n. Taką wartością jest liczba $M = 0$, bo $\frac{1}{n+2} > 0$ dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$. Zatem ciąg a_n jest ograniczony z dołu.

☺

Przykład 2.5

Wykaż, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{n-2}{n}$ jest ograniczony z góry.

Rozwiązanie:

Należy znaleźć taką liczbę m, która jest większa od każdego wyrazu ciągu a_n. Taką wartością jest liczba $m = 1$, bo $\frac{n-2}{n} < 1$ dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$. Zatem ciąg a_n jest ograniczony z góry.

☺

Przykład 2.6

Wykaż, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ jest ograniczony.

Rozwiązanie:

Należy znaleźć takie liczby m i M, które ograniczają wszystkie wyrazy ciągu, niemniej najpierw należy przekształcić podany wyraz ogólny:

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

W podanej postaci każdy wyraz ciągu dla $n \in \boldsymbol{N}$ jest ograniczony przez następujące wartości: $0 < \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} < 1$. Zatem ciąg a_n jest ograniczony.

☺

Definicja

Ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym, jeżeli:

$$\bigwedge_{n\in N} a_n < a_{n+1}.$$

Ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym, jeżeli:

$$\bigwedge_{n\in N} a_n > a_{n+1}.$$

Ciąg (a_n) jest ciągiem niemalejącym, jeżeli:

$$\bigwedge_{n \in \boldsymbol{N}} a_n \leq a_{n+1}.$$

Ciąg (a_n) jest ciągiem nierosnącym, jeżeli:

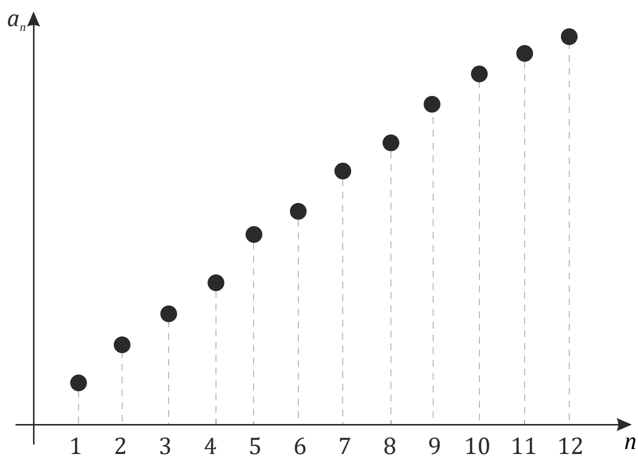
$$\bigwedge_{n \in \boldsymbol{N}} a_n \geq a_{n+1}.$$

Ciąg (a_n) jest ciągiem stałym, jeżeli:

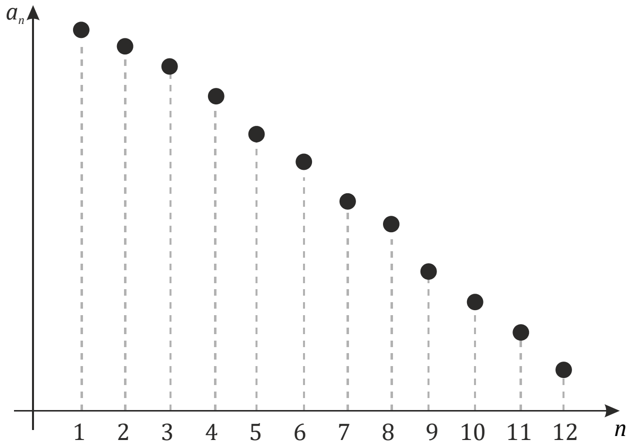
$$\bigwedge_{n \in \boldsymbol{N}} a_n = a_{n+1}.$$

Ciągi rosnące, malejące, niemalejące, nierosnące lub stałe nazywamy **ciągami monotonicznymi**.

Ciąg rosnący został graficznie przedstawiony na rysunku 2.5, a ciąg malejący na rysunku 2.6.



RYS. 2.5. Przykład ciągu rosnącego



RYS. 2.6. Przykład ciągu malejącego

Przykład 2.7

Wykaż, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{n+1}{n}$ jest malejący.

Rozwiązanie:

Należy wykazać, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ spełniona jest nierówność: $a_n > a_{n+1}$, która jest równoważna następującej: $a_{n+1} - a_n < 0$. Należy zatem zbadać znak wyrażenia $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)+1}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)\cdot n} - \frac{(n+1)\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot n} =$$

$$= \frac{(n^2+2n)-(n^2+2n+1)}{(n+1)\cdot n} = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{(n+1)\cdot n} = \frac{-1}{(n+1)\cdot n}$$

Ponieważ dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ wyrażenie $\frac{-1}{(n+1)\cdot n} < 0$, więc ciąg jest ciągiem malejącym.

☺

Przykład 2.8

Wykaż, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{n^2+3}{n+2}$ jest rosnący.

Rozwiązanie:

Należy wykazać, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ spełniona jest nierówność: $a_n > a_{n+1}$, która jest równoważna następującej: $a_{n+1} - a_n > 0$. Należy zatem zbadać znak wyrażenia $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(n+1)^2+3}{(n+1)+2}-\frac{n^2+3}{n+2}=\frac{n^2+2n+1+3}{n+3}-\frac{n^2+3}{n+2}=$$

$$=\frac{(n^2+2n+4)\cdot(n+2)}{(n+3)\cdot(n+2)}-\frac{(n^2+3)\cdot(n+3)}{(n+2)\cdot(n+3)}=\frac{(n^3+2n^2+4n+2n^2+4n+8)-(n^3+3n+3n^2+9)}{(n+2)\cdot(n+3)}=$$

$$=\frac{n^3+2n^2+4n+2n^2+4n+8-n^3-3n-3n^2-9}{(n+2)\cdot(n+3)}=\frac{n^2+5\mathrm{n}-1}{(n+2)\cdot(n+3)}.$$

Otrzymane wyrażenie $\frac{n^2+5n-1}{(n+2)\cdot(n+3)}$ dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ jest większe od zera, więc ciąg jest ciągiem rosnącym.

☺

Przykład 2.9

Sprawdź, czy ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 - n$ jest monotoniczny.

Rozwiązanie:

Należy sprawdzić znak wyrażenia $a_{n+1}-a_n$:

$$a_{n+1}-a_n=(n+1)^2-(n+1)-(n^2-n)=$$
$$=n^2+2n+1-n-1-n^2+n=2n.$$

Otrzymane wyrażenie $2n$ jest większe od zera dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$, więc ciąg jest ciągiem rosnącym.

☺

Zadania

1. Zbadaj czy ciągi o wyrazach ogólnych podanych poniżej są ograniczone:
   a) $a_n = \frac{2n-1}{n^2+1}$
   b) $b_n = 2\sin n + 5$
   c) $c_n = 3^n - 5\cdot 2^n$
   d) $d_n = \sqrt{n^2+1} - n$
2. Zbadaj monotoniczność podanych poniżej ciągów o wyrazie ogólnym:
   a) $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$
   b) $b_n = 2n - n^2$
   c) $c_n = 5^n - 3\cdot 2^n$
   d) $d_n = 1 - \frac{1}{n}$

Odpowiedzi

1.
   a) ograniczony (z dołu liczba 0 a z góry liczba 1)
   b) ograniczony (z dołu liczba 3 a z góry liczba 7)
   c) ograniczony z dołu (liczba -13)
   d) ograniczony (z dołu liczba 0 a z góry liczba 1)
2.
   a) rosnący
   b) malejący
   c) rosnący
   d) nie jest monotoniczny

2.3. Ciąg arytmetyczny i geometryczny

Definicja

Ciąg arytmetyczny (postęp arytmetyczny) – ciąg, w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie do niego stałej wartości r zwanej różnicą ciągu (postępu):

$$\bigwedge_{n\in\boldsymbol{N}}(a_{n+1}-a_n)=r \Leftrightarrow a_{n+1}=a_n+r.$$

Ciąg arytmetyczny możemy zapisać następująco:

$$a_1,\ a_1+r,\ a_1+2r,\ a_1+3r,\ a_1+4r, \dots,\ a_n=a_1+(n-1)\cdot r, \dots$$

Ciąg arytmetyczny ma tę własność, że dla trzech kolejnych wyrazów ciągu średnia arytmetyczna dwóch skrajnych wyrazów jest równa wyrazowi środkowemu. Analitycznie możemy to zapisać wzorem:

$$\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2}=a_n \text{ dla } n=2,3,\dots$$

Suma n-pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego wynosi:

$$S_n=\ (2a_1+(n-1)\cdot r)\cdot\frac{n}{2}=(a_1+a_n)\cdot\frac{n}{2}.$$

Przykład 2.10

Pomiędzy liczby 2 i 6,5 wstaw takie dwie liczby, żeby z podanymi tworzyły ciąg arytmetyczny.

Rozwiązanie:

Początek ciągu arytmetycznego tworzą następujące liczby:

$$a_1=2;\ \ a_2=2+r;\ \ a_3=2+2r;\ \ a_4=2+3r=6{,}5.$$

Z zapisu wyrazu czwartego możemy wywnioskować, że:

$$2+3r=6{,}5 \Rightarrow 3r=4{,}5 \Rightarrow r=1{,}5.$$

Zatem mając wyliczoną wartość różnicy postępu arytmetycznego, możemy zapisać podane liczby jako następujący ciąg:

$$a_1 = 2;\ \ a_2 = 3{,}5;\ \ a_3 = 5;\ \ a_4 = 6{,}5.$$

☺

Przykład 2.11

Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Ich suma wynosi 12. Oblicz długości tych boków.

Rozwiązanie:

Kolejne trzy wartości ciągu arytmetycznego możemy zapisać następująco:

$$a_1 = a - r;\ \ a_2 = a;\ \ a_3 = a + r.$$

Wiedząc, że suma tych wyrazów ciągu wynosi 12, wyznaczamy a:

$$(a - r) + a + (a + r) = 12 \Rightarrow 3a = 12 \Rightarrow a = 4.$$

Wiedząc, że podane wyrazy ciągu tworzą trójkąt prostokątny, możemy wyznaczyć różnicę postępu arytmetycznego:

$$(4 - r)^2 + 4^2 = (4 + r)^2\ \Rightarrow 16 - 8r + r^2 + 16 = 16 + 8r + r^2 \Rightarrow r = 1.$$

Poszukiwane boki mają zatem długości: 3, 4 i 5.

☺

Przykład 2.12

Oblicz sumę 100 pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego o różnicy postępu wynoszącej 3, zaczynającego się od 5.

Rozwiązanie:

Wiedząc, że: $a_1 = 5;\ r = 3$, sumę 100 pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego możemy wyznaczyć ze wzoru:

$$S_n = (2a_1 + (n - 1) \cdot r) \cdot \frac{n}{2}.$$

$$\text{Zatem } S_{100} = (2 \cdot 5 + (100 - 1) \cdot 3) \cdot \frac{100}{2} = 15\,350.$$

☺

Definicja

Ciąg geometryczny (postęp geometryczny lub **ilorazowy)** – ciąg, w którym stosunek wyrazu następnego do poprzedniego jest wielkością q zwaną ilorazem ciągu (postępu), co wyrażamy wzorem:

$$\bigwedge_{n\in \boldsymbol{N}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Ciąg geometryczny możemy także zapisać następująco:

$$a_1, \quad a_1 q, \quad a_1 q^2, \quad a_1 q^3, \quad a_1 q^3, \dots, \quad a_n = a_1 q^{n-1}, \dots$$

Dla ciągu geometrycznego spełniona jest własność oznaczająca, że wartość bezwzględna n-tego wyrazu ciągu geometrycznego jest średnią geometryczną wyrazu poprzedniego i następnego, którą możemy zapisać następująco:

$$|a_n| = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}} \text{ dla } n = 2, 3, \dots$$

Suma n-pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego wynosi:

$$S_n = a_1 \cdot n \text{ dla } q = 1$$

oraz

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \text{ dla } q \neq 1.$$

Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg geometryczny nazywamy zbieżnym (o skończonej sumie). Wtedy sumę takiego ciągu geometrycznego wyrażamy wzorem:

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Przykład 2.13

Wiedząc, że $a_1 = 3$, a $q = \frac{1}{2}$, wyznacz pięć pierwszych wyrazów i ogólny wyraz ciągu geometrycznego.

Rozwiązanie:

W celu wyznaczenia kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego korzystamy ze wzoru:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Zatem pięć kolejnych wyrazów ciągu przyjmuje postać:

$$a_1 = 3;$$

$$a_2 = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$a_3 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4};$$

$$a_4 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8};$$

$$a_5 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{16}.$$

Aby zapisać ogólny wyraz ciągu geometrycznego wykorzystamy wzór:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Zatem $a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$

☺

Przykład 2.14

Oblicz sumę 10 pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego, dla którego $a_1 = 5;$ $q = 2.$

Rozwiązanie:

Sumę 10 pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego możemy wyznaczyć ze wzoru:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Zatem szukana suma wynosi: $S_{20} = 5 \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = 5 \cdot \frac{-1\,023}{-1} = 5\,115.$

☺

Przykład 2.15

Oblicz dla ilu wyrazów ciągu geometrycznego, dla którego $a_1 = 2, q = 3$, suma pierwszych wyrazów ciągu przekroczy 2 000.

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru na sumę n-pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Podstawiając do wzoru znane wielkości i ograniczając wartością 2 000 otrzymamy następującą nierówność:

$$2 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} > 2\,000 \Rightarrow 1-3^n < \frac{2\,000 \cdot (-2)}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3^n > 2\,001 \Rightarrow n > \log_3 2\,001 \Rightarrow n > 6{,}92.$$

Zatem, w celu osiągnięcia sumy pierwszych wyrazów ciągu większej niż 2000, należy dodać do siebie siedem kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.

☺

Zadania

1. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego wiedząc, że:
   a) $a_1 = 3, a_3 = 4$
   b) $b_2 = -2, b_{10} = -20$
2. Oblicz długości boków prostokąta, które tworzą pierwszy i trzeci wyraz ciągu arytmetycznego o różnicy wynoszącej 5, wiedząc że prostokąt ten ma pole wynoszące 119.
3. Za pierwszy błąd student zdający pewien egzamin traci 5 pkt, zaś za każdy kolejny tyle co za poprzedni plus dodatkowe dwa punkty. Ile błędów może popełnić egzaminowana osoba, jeżeli może stracić maksymalnie 60 pkt., żeby zdać egzamin?
4. Między liczby 2 i $\frac{162}{2401}$ wstaw trzy liczby, tak aby tworzyły ciąg geometryczny z podanymi liczbami.
5. Przyznano cztery nagrody, z których każda kolejna była takim samym ułamkiem poprzedniej. Pierwsza wynosiła 10 000 zł, zaś łączna kwota wydana na nagrody to 27 343,75 zł. Oblicz kwoty pozostałych nagród.

Odpowiedzi

1.
   a) $a_n = \frac{5+n}{2}$
   b) $b_n = \frac{10-9n}{4}$
2. 7 i 17
3. Maksymalnie 6 błędów
4. $\frac{6}{7}, \frac{18}{49}, \frac{54}{343}$
5. II – 7 500 zł, III – 5 625 zł, IV – 4 218,75 zł.

2.4. Granice właściwe ciągów

Definicja Cauchy'ego

Liczbę $g \in \boldsymbol{R}$ nazwiemy **granicą właściwą ciągu** (a_n), jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna n_0, że dla każdej liczby $n > n_0$ spełniona jest nierówność:

$$|a_n - g| < \varepsilon.$$

Powyższą definicję możemy zapisać też w następujący sposób:

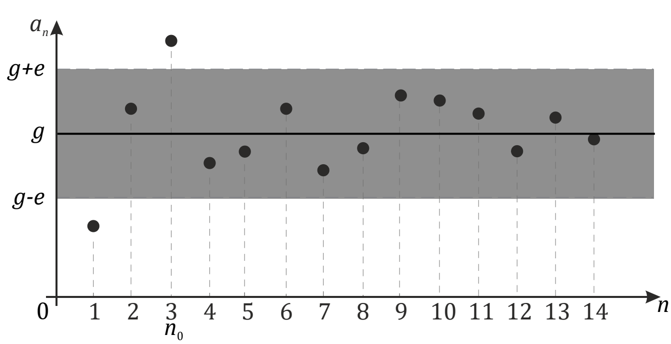
$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = g\right) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0\in \boldsymbol{N}} \bigwedge_{n\in \boldsymbol{N}} (n > n_0 \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon).$$

Ciąg mający granicę właściwą nazywamy **ciągiem zbieżnym**, a w przeciwnym przypadku **ciągiem rozbieżnym**.

Powyższa definicja oznacza, że w dowolnie małym otoczeniu punktu g istnieją prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n). Użyte tu określenie „prawie wszystkie" oznacza, że wszystkie poza skończoną liczbą wyrazów.

Zapis: $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ czytamy: „ciąg (a_n) ma granicę g". Możemy też użyć określenia, że „ciąg (a_n) dąży do granicy g", jak też zastosować zapis: $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$ lub $a_n \to g$, gdy $n \to \infty$.

Graficznie zbieżność ciągu możemy zobrazować w sposób przedstawiony na rysunku 2.7, na którym widoczne jest, że dla ustalonego ε wszystkie dalekie wyrazy ciągu, czyli te znajdujące się za punktem (n_0, a_{n_0}), znajdują się w obszarze $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$.



RYS. 2.7. Granica właściwa ciągu

Niestety, nie ma jednej uniwersalnej metody liczenia granic ciągów. Granice ciągów możemy wyznaczyć na przykład z definicji (przykład 2.16).

Przykład 2.16

Korzystając z definicji granicy ciągu wykaż, że $\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n}=\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie:

Zacznijmy od wyznaczenia odległości wyrazu ogólnego $a_n=\frac{n+2}{2n}$ od liczby $\frac{1}{2}$:

$$\left|\frac{n+2}{2n}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{n+2}{2n}-\frac{n}{2n}\right|=\left|\frac{n+2-n}{2n}\right|=\left|\frac{2}{2n}\right|=\frac{1}{n}.$$

Należy określić, dla jakich liczb naturalnych n odległość ta jest mniejsza od ε, czyli dla jakich n prawdziwa jest następująca nierówność: $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Przekształcając otrzymaną nierówność otrzymujemy $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

Istnieje zatem taka liczba n_0, np. $n_0=\frac{1}{\varepsilon}$, że w analizowanym przykładzie przy ustalonej wartości ε dla każdej liczby naturalnej $n>n_0$ spełniona jest nierówność: $\left|\frac{n+2}{2n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ co wskazuje, że $\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n}=\frac{1}{2}$.

Przykładowo powyższy zapis oznacza, że wybierając $\varepsilon=0{,}01$ możemy wskazać, że dla $n>\frac{1}{0{,}01}$, czyli dla n większych od 100 zawsze spełniona będzie nierówność: $\left|\frac{n+2}{2n}-\frac{1}{2}\right|<0{,}01$.

☺

W praktyce jednak rzadko wyznacza się granice ciągów z definicji. Częściej wykorzystuje się w tym celu następujące **własności granic ciągów**:

1. $\lim_{n\to\infty}c=c$;
2. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$;
3. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$;

Uwaga: Liczba $e\approx 2{,}7182818285$, nazywana liczbą Eulera, jest podstawą logarytmu naturalnego.

Powyższy wzór możemy uogólnić i zapisać w postaci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}=e,\ \text{dla każdego}\ \alpha\epsilon\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$$

lub

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^n\text{, dla każdego } \alpha\epsilon \boldsymbol{R}\backslash\{0\};$$

4. Granica ciągu geometrycznego: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{dla } |q| < 1, \\ 1 & \text{dla } q = 1, \\ \infty & \text{dla } q > 1, \\ \text{nie istnieje} & \text{dla } q \leq -1; \end{cases}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a \in \boldsymbol{R}_+$;

6. Jeżeli ciągi (a_n) **i** (b_n) są zbieżne do granic właściwych to:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

   b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

   c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

   d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, o ile $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$;

   e) $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, gdzie $c \in \boldsymbol{R}$;

   f) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^p = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^p$, gdzie $p \in \boldsymbol{Z}\backslash\{0\}$;

   g) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$, gdzie $p \in \boldsymbol{N}\backslash\{1\}$.

Poniżej omówimy kilka sposobów liczenia granic ciągów z wykorzystaniem własności granic ciągów oraz w zależności od typu ciągu.

1. **Ciąg typu $\boldsymbol{a_n = \frac{b_n}{c_n}}$, gdzie $\boldsymbol{b_n}$ oraz $\boldsymbol{c_n}$ są ciągami w postaci wielomianów** – granicę ciągu a_n wyznaczamy dzieląc każdy element licznika i mianownika przez n w największej potędze występującej w mianowniku (przykłady 2.17 i 2.18).

Przykład 2.17

Oblicz granice ciągu: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^3+3}$.

Rozwiązanie:

Licznik i mianownik dzielimy przez n w największej potędze w mianowniku, czyli przez n^3. Po skróceniu poszczególnych ułamków oraz wiedząc, że $\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^2}$ oraz $\frac{1}{n}$ dążą do 0, otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^3+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^3}+\frac{2}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}+\frac{3}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+2\cdot\frac{1}{n^3}}{1+3\cdot\frac{1}{n^3}}=\frac{0+2\cdot 0}{1+3\cdot 0}=\frac{0}{1}=0.$$

☺

Przykład 2.18

Oblicz granice ciągu: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-2}}{\sqrt{n^2+4}}$.

Rozwiązanie:

Wydaje się, że n w największej potędze występującej w mianowniku jest druga potęga. Jednak n^2 w mianowniku znajduje się pod pierwiastkiem drugiego stopnia, czyli po obliczeniu pierwiastka tą największą potęgą jest potęga równa 1 (gdyż: $\sqrt{n^2}=n$). Zatem należy podzielić licznik i mianownik przez n, co oznacza, że pod pierwiastkiem należy podzielić przez n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-2}}{\sqrt{n^2+4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-2\cdot\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+4\cdot\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-2\cdot\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1+4\cdot\frac{1}{n^2}}}=\frac{\sqrt{1-2\cdot 0}}{\sqrt{1+4\cdot 0}}=\frac{1}{1}=1.$$

☺

Granice ciągu omawianego typu $a_n=\frac{b_n}{c_n}$ możemy również wyznaczyć wyłączając przed nawias w liczniku i mianowniku n w największej potędze (przykład 2.19).

Przykład 2.19

Oblicz granice ciągu: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+3}{n^3+3n^2-n}$.

Rozwiązanie:

W liczniku wyłączamy przed nawias n w największej potędze, czyli n^2, zaś w mianowniku n^3. Po skróceniu poszczególnych ułamków oraz wiedząc, że $\frac{1}{n^3}$, $\frac{3}{n^2}$ oraz $\frac{3}{n}$ dążą do 0, otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+3}{n^3+3n^2-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0.$$

☺

2. W podobny sposób wyznaczamy **granice ciągów, w których w liczniku i mianowniku występują wyrażenia typu b^n, gdzie $b\in R\backslash\{0\}$.** Wtedy każdy element

licznika i mianownika dzielimy przez największą liczbę z mianownika podniesioną do potęgi n (przykład 2.20).

Przykład 2.20

Oblicz granice ciągu: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-4\cdot 3^n}{3^{2n+2}-5^n}$.

Rozwiązanie:

Licznik i mianownik należy podzielić przez największą liczbę z mianownika podniesioną do potęgi n, czyli przez 9^n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-4\cdot 3^n}{3^{2n+2}-5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n-4\cdot 3^n}{3^2\cdot 3^{2n}-5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n-4\cdot 3^n}{9\cdot 9^n-5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{2^n}{9^n}-4\cdot\frac{3^n}{9^n}}{9\cdot\frac{9^n}{9^n}-\frac{5^n}{9^n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n-4\cdot\left(\frac{3}{9}\right)^n}{9\cdot 1-\left(\frac{5}{9}\right)^n}.$$

Ponieważ q^n, gdy $|q|<1$, dąży do zera, więc granica wynosi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n-4\cdot\left(\frac{3}{9}\right)^n}{9\cdot 1-\left(\frac{5}{9}\right)^n}=\frac{2\cdot 0-4\cdot 0}{9-0}=\frac{0}{9}=0.$$

☺

3. Ciąg typu $\left(\sqrt{\boldsymbol{a_n}}-\sqrt{\boldsymbol{b_n}}\right)$ lub $\left(\boldsymbol{a_n}-\sqrt{\boldsymbol{b_n}}\right)$ lub $\left(\sqrt{\boldsymbol{a_n}}-\boldsymbol{b_n}\right)$ (różnica dwóch ciągów, przy czym co najmniej jeden z nich jest pod pierwiastkiem) – granicę tego typu ciągów wyznaczamy poprzez pomnożenie i podzielenie wyrażenia wyjściowego przez to samo wyrażenie, ale ze znakiem przeciwnym, czyli:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\right)\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}\right)}{\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}\right)};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\sqrt{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a_n-\sqrt{b_n}\right)\left(a_n+\sqrt{b_n}\right)}{\left(a_n+\sqrt{b_n}\right)};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n}-b_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{a_n}-b_n\right)\left(\sqrt{a_n}+b_n\right)}{\left(\sqrt{a_n}+b_n\right)}.$$

Następnie w liczniku stosujemy wzór skróconego mnożenia $(a+b)(a-b)=$ $=(a^2-b^2)$. Po uporządkowaniu licznika dzieli się każdy wyraz licznika i mianownika przez n w największej potędze z mianownika (przykład 2.21 i 2.22).

Przykład 2.21

Oblicz granice ciągu: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2}-\sqrt{n^2+1}\right)$.

Rozwiązanie:

Zanim rozpocznie się wyznaczanie granicy, należy pomnożyć ten ciąg przez ten sam ciąg, ale ze znakiem przeciwnym, a następnie podzielić przez n w najwyższej potędze z mianownika:

korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$\boxed{(a+b)(a-b)} = \boxed{(a^2-b^2)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2-2}-\sqrt{n^2+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{\left(\sqrt{n^2-2}-\sqrt{n^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2+1}\right)}}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{(n^2-2)-(n^2+1)}}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2-n^2-1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{0}{2}=0.$$

☺

Przykład 2.22

Oblicz granice ciągu: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+n}\right)$.

Rozwiązanie:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2+n}\right)\cdot\left(n+\sqrt{n^2+n}\right)}{n+\sqrt{n^2+n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(n^2+n)}{n+\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n^2-n}{n+\sqrt{n^2+n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=-\frac{1}{2}.$$

☺

4. **Typ ciągu, który można doprowadzić do postaci** $\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right]^k$ **lub** $\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right]^{b_n}$ – granicę tego typu ciągu wyznaczamy korzystając z własności granicy ciągów: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}=e$, dla każdego $\alpha\epsilon\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$. Wtedy granica ciągu wynosi odpowiednio: e^k lub $e^{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$ (przykład 2.23 i 2.24).

Przykład 2.23

Oblicz granice ciągu: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2}$.

Rozwiązanie:

Aby wyznaczyć granicę podanego ciągu należy wykonać takie przekształcenia, aby można było zastosować wzór: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}=e$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^2=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^2=e^2.$$

☺

Przykład 2.24

Oblicz granice ciągu: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{2n-1}$.

Rozwiązanie:

Podany przykład możemy rozwiązać na dwa sposoby. W pierwszym należy tak przekształcić licznik ułamka, żeby można było wyłączyć jedynkę, a następnie skorzystać ze wzoru $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}=e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^{2n-1}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n-1}+\frac{2}{n-1}\right)^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{2n-1}$$

Następnie należy przekształcić potęgę (mnożąc i dzieląc przez wyrażenie stojące przy jedynce) oraz odpowiednio zapisując nawiasy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{\frac{4n-2}{n-1}}.$$

Wykorzystując wzór $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}=e$ oraz wiedząc, że $\lim_{n\to\infty}\frac{4n-2}{n-1}=4$, wyznaczana granica wyniesie e^4.

Drugi sposób wyliczenia podanej granicy bazuje na wzorach dotyczących ilorazu i iloczynu ciegów:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}-\frac{1}{n}}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n-1}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{-2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{e^{2}\cdot 1}{e^{-2}\cdot 1} = e^{4}.$$

☺

Do wyznaczenia granic ciągów możemy również wykorzystać twierdzenie o trzech ciągach.

Twierdzenie o trzech ciągach

Dane są trzy ciągi: (a_n), (b_n) oraz (c_n). Jeżeli ciągi (a_n) oraz (c_n) mają tę własność, że:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g,$$

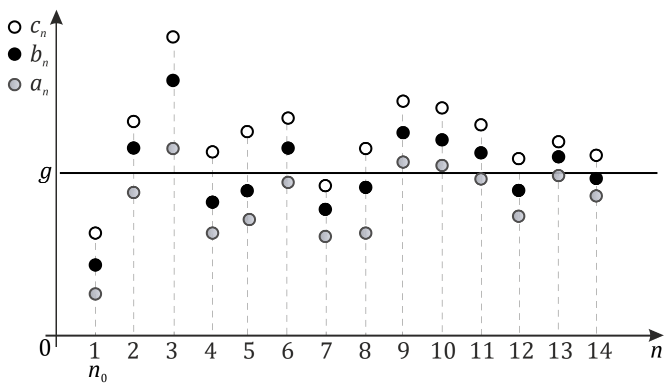
a ponadto dla każdego $n > n_0$ spełniona jest nierówność:

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

$$\text{to } \lim_{n\to\infty} b_n = g.$$

Na rysunku 2.8 widzimy, że dla każdego $n > n_0$ wyrazy ciągu b_n (czarne punkty) znajdują się „pomiędzy” wyrazami ciągów a_n (szare punkty) i c_n (białe punkty), czyli spełniają nierówność:

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$



RYS. 2.8. Ilustracja twierdzenia o trzech ciągach

Jeśli ciągi a_n i c_n mają wspólną granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$, to wyrazy ciągów a_n i c_n coraz bardziej „zbliżają" się do siebie, a więc ciąg b_n, którego wyrazy nie przekraczają wyrazów a_n i c_n, ma taką samą granicę, równą g.

Przykład 2.25

Oblicz granicę ciągu: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10\cdot 2^n + 3^n + 4^n}$.

Rozwiązanie:

Wyznaczając podaną granicę należy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach. Najpierw należy ograniczyć podane wyrażenie podpierwiastkowe (z lewej strony pozostawiamy wyłącznie jedną wartość o najwyższej potędze podniesioną do potęgi n, zaś z prawej każdą z potęg należy zastąpić wyrażeniem o najwyższej podstawie):

$$4^n < 10\cdot 2^n + 3^n + 4^n < 10\cdot 4^n + 4^n + 4^n,$$

które jest równoważne następującemu:

$$4^n < 10\cdot 2^n + 3^n + 4^n < 12\cdot 4^n.$$

Z podanego zapisu wynika, że:

$$\sqrt[n]{4^n} < \sqrt[n]{10\cdot 2^n + 3^n + 4^n} < \sqrt[n]{12\cdot 4^n}\,.$$

Podane wyrażenie jest równoważne następującemu:

$$4 < \sqrt[n]{10\cdot 2^n + 3^n + 4^n} < 4\sqrt[n]{12}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 4 = 4$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} 4\sqrt[n]{12} = 4\cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{12} = 4\cdot 1 = 4$, więc na mocy twierdzenia o trzech ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10\cdot 2^n + 3^n + 4^n} = 4$.

☺

Zadania

1. Oblicz granice ciągów:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-1}{2n^2-n+1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^2+4n-7}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^4-2n^3+2}{6n^4+25}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4-3n^3+1}{2n^4+3n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3-2}{4n^5-5n}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+6}{4^n+2^n-8}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7^n+12}{10^{n+1}-2}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7^n+12}{7^{n+1}-4^n+2}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{4^n+2^n-8}$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n-2\cdot 2^n}{3^{n+2}-2^{2n}}$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n-10\cdot 2^n}{20\cdot 2^n+3^n}$

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n-7}{5^{n-1}+2}$

2. Oblicz granice ciągów:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-3}-n\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-2n+2}-\sqrt{n^2-n-1}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2+n+2}-2n\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+2n-1}\right)$

3. Oblicz granice ciągów:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-4}{n}\right)^{2n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{4+n}\right)^{3n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n-2}\right)^{n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{n+3}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{3n}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n-4}\right)^{n}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{n-1}$

4. Oblicz granice ciągów:

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{2n}+3^n+7^n}$

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n+3^n+6^n}$

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+12\cdot 5^n+10^n}$

d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n+5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

Odpowiedzi

1.

a) $\frac{1}{2}$

b) 1

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

e) 0

f) 0

g) 0

h) $\frac{1}{7}$

i) 0

j) 0

k) 1

l) 5

2.

a) 0

b) $-\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{4}$

d) -1

3.

a) $\frac{1}{e^8}$

b) $\frac{1}{e^{12}}$

c) e^4

d) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

e) $\frac{1}{e^6}$

f) e^7

g) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

4.

a) 7

b) 6

c) 10

d) $\frac{1}{2}$

2.5. Granice niewłaściwe ciągów

Definicja

Ciąg (a_n) ma **granicę niewłaściwą $+\infty$,** jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ istnieje liczba naturalna n_0, że dla każdej liczby $n > n_0$ spełniona jest nierówność $a_n > M$.

Powyższą definicję możemy zapisać też w następujący sposób:

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \infty\right) \Leftrightarrow \bigwedge_{M>0} \bigvee_{n_0 \in \boldsymbol{N}} \bigwedge_{n \in \boldsymbol{N}} (n > n_0 \Longrightarrow a_n > M).$$

Ciąg (a_n) ma **granicę niewłaściwą $-\infty$,** jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ istnieje liczba naturalna n_0, że dla każdej liczby $n > n_0$ spełniona jest nierówność $a_n < -M$.

Powyższą definicję możemy zapisać też w następujący sposób:

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\right) \Leftrightarrow \bigwedge_{M>0} \bigvee_{n_0 \in \boldsymbol{N}} \bigwedge_{n \in \boldsymbol{N}} (n > n_0 \Longrightarrow a_n < -M).$$

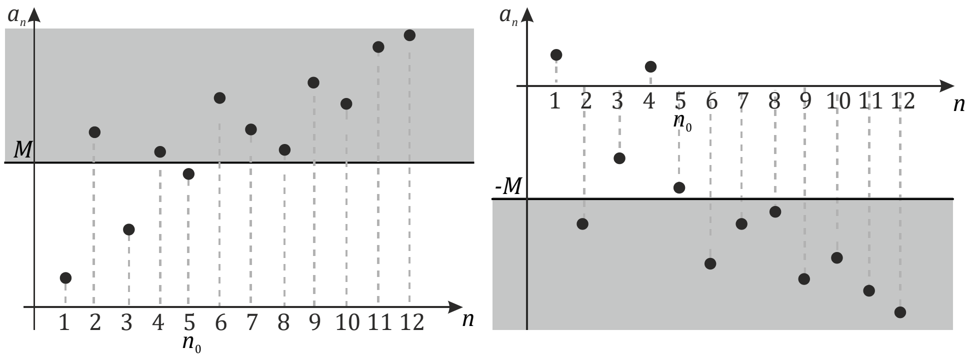
Zapis: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ czytamy jako „ciąg (a_n) ma granicę ∞ (plus nieskończoność)” lub „ciąg (a_n) dąży do plus nieskończoności”. Zapis ten równoważny jest zapisom: $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ lub $a_n \to \infty$, gdy $n \to \infty$.

Analogicznie zapis: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ czytamy jako „ciąg (a_n) ma granicę $-\infty$ (minus nieskończoność)” lub „ciąg (a_n) dąży do minus nieskończoności”. Jest on równoważny zapisom: $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ lub $a_n \to -\infty$, gdy $n \to \infty$.

Podane powyżej definicje granic niewłaściwych oznaczają, że ciąg jest rozbieżny do $+\infty$ (do $-\infty$), gdy dla pewnego n_0 wyrazy tego ciągu o numerach $n > n_0$ są większe (mniejsze) od dowolnie dużej (małej) liczby (rys. 2.9).

Uwaga: W niektórych podręcznikach zamiast określenia „rozbieżny do $+\infty$” lub „rozbieżny do $-\infty$” używane jest też sformułowanie „zbieżny do $+\infty$” lub „zbieżny do $-\infty$”.

Graficzną ilustrację granic niewłaściwych ciągów przedstawiono na rysunku 2.9.



RYS. 2.9. Granice niewłaściwe ciągów

W tabeli 2.1 przedstawiono podstawowe własności granic ciągów.

Tabela 2.1. Własności granic ciągów

Lp.	Własność granicy ciągu	Zapis symboliczny
1.	Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.	$\infty + \infty = \infty$
2.	Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.	$\infty \cdot \infty = \infty$
3.	Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.	$-\infty - \infty = -\infty$
4.	Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.	$-\infty \cdot (-\infty) = \infty$
5.	Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.	$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$
6.	Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, przy czym $b > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty$.	$\infty \cdot b = \infty$ dla $b > 0$
7.	Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, przy czym $b < 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = -\infty$.	$\infty \cdot b = -\infty$ dla $b < 0$
8.	Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, przy czym $a \neq 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.	$\frac{a}{\pm\infty} = 0$ dla $a \neq 0$
9.	Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, przy czym $\bigwedge_{n\in N} a_n > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.	$\frac{a}{0^+} = \infty$ dla $a > 0$
10.	Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, przy czym $\bigwedge_{n\in N} a_n < 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$.	$\frac{a}{0^-} = -\infty$ dla $a > 0$
11.	Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, przy czym $0 < a < 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ i to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = 0$.	$a^\infty = 0$ dla $0 < a < 1$

Lp.	Własność granicy ciągu	Zapis symboliczny
12.	Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, przy czym $a > 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ i to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \infty$.	$a^\infty = \infty$ dla $a > 1$
13.	Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, przy czym $b < 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = 0$.	$\infty^b = 0$ dla $b < 0$
14.	Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, przy czym $b > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \infty$.	$\infty^b = \infty$ dla $b > 0$
15.	Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \infty$.	$\infty^\infty = \infty$
16.	Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = 0$.	$\infty^{-\infty} = 0$

Twierdzenie o dwóch ciągach

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) spełniają własności: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ oraz $a_n \leq b_n$ dla każdego $n > n_0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) spełniają własności: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ oraz $a_n \leq b_n$ dla każdego $n > n_0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Definicja

Symbole: $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$ nazywamy **wyrażeniami (symbolami) nieoznaczonymi** i ich wartości zależą od postaci ciągów je tworzących.

Przykład 2.26

Korzystając z definicji granicy ciągu wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

Rozwiązanie:

Należy znaleźć taką liczbę naturalną n dla której wyrażenie 2^n jest większe od dowolnej liczby M, czyli rozwiązać następującą nierówność: $2^n > M$. Przekształcając otrzymaną nierówność otrzymujemy $n > \log_2 M$.

Istnieje zatem taka liczba n_0, która w analizowanym przykładzie przy ustalonej wartości M np.: $n_0 = \log_2 M$, że dla każdej liczby naturalnej $n > n_0$ spełniona jest nierówność: $2^n > M$ co wskazuje, że $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

Przykładowo powyższy zapis oznacza, że wybierając chociażby $M = 1\,000$ możemy wskazać, że dla $n > \log_2 1\,000$, czyli dla $n \geq 10$ (bo $\log_2 1\,000 = 9{,}97$) zawsze spełniona będzie nierówność: $2^n > 1\,000$.

☺

Przykład 2.27

Oblicz granice ciągu: $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - 3n + 12)$.

Rozwiązanie:

Granicę ciągu $\boldsymbol{a_n}$ mającego postać wielomianu, czyli: $\boldsymbol{a_n = an^k + \cdots + bn^2 + cn + d}$ wyznaczamy wyłączając największą potęgę zmiennej n przed nawias:

$$\lim_{n\to\infty}(n^2 - 3n + 12) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(1 - \frac{3n}{n^2} + \frac{12}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{12}{n^2}\right).$$

Wiedząc, że $\frac{3}{n} \to 0$ oraz $\frac{12}{n^2} \to 0$. Zatem:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 - 3n + 12 = \infty^2 \cdot 1 = \infty.$$

☺

Przykład 2.28

Oblicz granice ciągu: $\lim\limits_{n\to\infty}(-4n^3 - n)$.

Rozwiązanie:

$$\lim_{n\to\infty}(-4n^3 - n) = \lim_{n\to\infty} n^3\left(-4 - \frac{n}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty} n^3\left(-4 - \frac{1}{n^2}\right) = \infty^3 \cdot (-4) = -\infty.$$

☺

Przykład 2.29

Oblicz granice ciągu: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-n^2+2n+2}{n^2+2n-1}$.

Rozwiązanie:

Należy podzielić licznik i mianownik przez n w największej potędze z mianownika, czyli przez n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3-n^2+2n+2}{n^2+2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{n^3}{n^2}-\frac{n^2}{n^2}+2\cdot\frac{n}{n^2}+2\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+2\cdot\frac{n}{n^2}-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-n-1+2\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n^2}}{1+2\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = -\infty.$$

☺

Przykład 2.30

Oblicz granice ciągu: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{2n}-5}{7^n+2^{n+2}-12}$.

Rozwiązanie:

Po przekształceniu wyrażenia $3^{2n}=(3^2)^n=9^n$ należy podzielić licznik i mianownik przez największą liczbę podniesioną do potęgi n, jaka znajduje się w mianowniku. Przekształcenie do postaci q^n jest konieczne, gdyż bez niego nie można określić jaka jest największa podstawa podniesiona do potęgi n znajdująca się w mianowniku. Po podanych przekształceniach, możemy wyznaczyć granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n}-5}{7^n+2^{n+2}-12}=\lim_{n\to\infty}\frac{9^n-5}{7^n+4\cdot2^n-12}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{9}{7}\right)^n-5\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1-4\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^n-12\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^n}=\infty.$$

☺

Przykład 2.31

Oblicz granice ciągu: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n+2}-\sqrt{3n^2+2n-1}\right)$.

Rozwiązanie:

Z podanej postaci ciągu trudno od razu obliczyć, gdyż jest to symbol nieoznaczony $[\infty-\infty]$. W takiej sytuacji należy pomnożyć licznik i mianownik przez wyrażenie sprzężone, czyli takie jak podany ciąg, ale ze znakiem przeciwnym. Dzięki tej operacji pozbywamy się symbolu nieoznaczonego, a otrzymane wyrażenie należy podzielić przez n w najwyższej potędze z mianownika:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n+2}-\sqrt{3n^2+2n-1}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-n+2}-\sqrt{3n^2+2n-1}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2-n+2}+\sqrt{3n^2+2n-1}\right)}{\sqrt{n^2-n+2}+\sqrt{3n^2+2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2-3n^2-2n+1}{\sqrt{n^2-n+2}+\sqrt{3n^2+2n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2-3n+3}{\sqrt{n^2-n+2}+\sqrt{3n^2+2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n-3+\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}=-\infty.$$

☺

Zadania

1. Oblicz granice ciągów:

   a) $\lim_{n\to\infty}(2n^3+7n^2-3n)$

   b) $\lim_{n\to\infty}(-7n^2-2n-n)$

   c) $\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3+n-5}{5n^2+2n-1}$

   d) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4-2n^2+2}{6n^2+12n-5}$

   e) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2-4n+3}$

   f) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^5-2n^2+2}{6n^2+20n+3}$

   g) $\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3}{4n^2-14n+3}$

   h) $\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^6-2n+5}{n^4+4n+1}$

   i) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}-2}{2^n+2^{n-1}+2}$

   j) $\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^4-2}\right)$

   k) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+5}-n\right)$

   l) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n-5}-\sqrt{n+1}\right)$

   m) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n}\right)^{n^2}$

   n) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3-1}$

Odpowiedzi

1.

   a) ∞
   b) $-\infty$
   c) $-\infty$
   d) ∞
   e) ∞
   f) ∞
   g) $-\infty$

h) $-\infty$
i) ∞
j) $-\infty$
k) $-\infty$
l) ∞
m) ∞
n) ∞

2.6. Zastosowania ciągów w zagadnieniach finansowych

Definicja

Oprocentowanie kapitału polegające na tym, że okresowy (roczny, kwartalny, miesięczny) dochód z kapitału nie jest dodawany (kapitalizowany) do niego i nie bierze udziału w oprocentowaniu w następnym okresie nazywamy **oprocentowaniem prostym**.

Niech:
K_0 – kapitał początkowy,
r – stopa procentowa,
n – liczba okresów kapitalizacji,
K_n – kapitał po n okresach przy oprocentowaniu prostym.
Wówczas:

$$K_n = K_0(1 + nr).$$

Powyższy wzór możemy łatwo wyprowadzić. Kapitał po kolejnych okresach kapitalizacji wyznaczamy następująco:

- kapitał po 1 okresie kapitalizacji:

$$K_1 = K_0 + K_0 r = K_0(1 + r);$$

- kapitał po 2 okresie kapitalizacji:

$$K_2 = K_1 + K_0 r = K_0 + K_0 r + K_0 r = K_0(1 + 2r);$$

- kapitał po 3 okresie kapitalizacji:

$$K_3 = K_2 + K_0 r = K_0 + K_0 r + K_0 r + K_0 r = K_0(1 + 3r);$$

I otrzymujemy kapitał po n okresach kapitalizacji:

$$K_n = K_{n-1} + K_0 r = K_0(1 + nr).$$

Przykład 2.32

Wyznacz wartość kapitału, jaki inwestor otrzyma przy wpłacie 10 000 zł na 5 lat przy stałej stopie procentowej wynoszącej 2% w skali roku, przy zastosowaniu oprocentowania stałego.

Rozwiązanie:

Dane są następujące:
kapitał początkowy $K_0 = 10000$ zł;
roczna stopa procentowa $r = 2\% = 0{,}02$;
czas oszczędzania $n = 5$ lat.
Wtedy:

$$K_5 = 10000 \cdot (1 + 5 \cdot 0{,}02) = 11000.$$

Po 5 latach oszczędzania inwestor otrzyma 11 000 zł.

☺

Definicja

Oprocentowanie kapitału polegające na tym, że okresowy (roczny, kwartalny, miesięczny) dochód z kapitału jest dodawany (kapitalizowany) do niego i bierze udział w oprocentowaniu w następnym okresie nazywamy **oprocentowaniem składanym**.

Niech:
K_0 – kapitał początkowy,
r – stopa procentowa,
n – liczba okresów kapitalizacji,
K_n – kapitał po n okresach przy oprocentowaniu składanym.
Wówczas:

$$K_n = K_0(1 + r)^n.$$

Powyższy wzór również możemy łatwo wyprowadzić. Kapitał po kolejnych okresach kapitalizacji wyznaczamy następująco:

- kapitał po 1 okresie kapitalizacji:

$$K_1 = K_0 + K_0 r = K_0(1 + r);$$

- kapitał po 2 okresie kapitalizacji:

$$K_2 = K_1 + K_1 r = K_1(1 + r) = K_0(1 + r)(1 + r) = K_0(1 + r)^2;$$

- kapitał po 3 okresie kapitalizacji:

$$K_3 = K_2 + K_2 r = K_2(1 + r) = K_0(1 + r)^2(1 + r) = K_0(1 + r)^3;$$

- kapitał po n okresach kapitalizacji:

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-1} r = K_{n-1}(1 + r) = K_0(1 + r)^n.$$

Przykład 2.33

Wyznacz wartość kapitału, jaki inwestor otrzyma przy wpłacie 10 000 zł na 5 lat przy stałej stopie procentowej wynoszącej 2% w skali roku, przy zastosowaniu oprocentowania składanego.

Rozwiązanie:

Dane są następujące:
kapitał początkowy $K_0 = 10000$ zł,
roczna stopa procentowa $r = 2\% = 0{,}02$,
czas oszczędzania $n = 5$ lat.
Wtedy:

$$K_5 = 10000 \cdot (1 + 0{,}02)^5 = 11040{,}81.$$

Po 5 latach oszczędzania inwestor otrzyma 11 040,81 zł.

☺

Uwaga:

Przy oprocentowaniu składanym, jeśli stopa procentowa r dotyczy okresu rocznego, a odsetki naliczane są k-krotnie w ciągu roku (np. kwartalnie dla $k = 4$, miesięcznie dla $k = 12$), to kapitał uzyskany po n latach możemy obliczyć ze wzoru:

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn},$$

wtedy:
$\frac{r}{k}$ – stopa procentowa okresu podstawowego.

Zadania

1. Wyznacz wartość kapitału, jaki inwestor otrzyma przy wpłacie 1 000 zł na 3 lata przy stałej stopie procentowej wynoszącej 5% w skali roku, przy zastosowaniu oprocentowania prostego.
2. Wyznacz wartość kapitału, jaki inwestor otrzyma przy wpłacie 1 000 zł na 3 lata przy stałej stopie procentowej wynoszącej 5% w skali roku, przy zastosowaniu oprocentowania składanego.
3. Student WIZ PB odziedziczył 100 000 zł i chce je przeznaczyć na zakup mieszkania, ale dopiero po skończeniu studiów. Jest on świadomy faktu, że trzymanie środków finansowych w domu nie jest bezpieczne, ani nie przynosi żadnych zysków. Ponadto wie, że oprocentowanie składane jest korzystniejsze od oprocentowania prostego. Dlatego zwrócił się do dwóch banków z zapytaniem o warunki lokat terminowych przy oprocentowaniu składanym. W banku A może ulokować kapitał na 3 lata przy rocznej stopie procentowej $r_1 = 10\%$ i oprocentowaniu naliczanym co pół roku. W banku B może ulokować kapitał na 3 lata przy rocznej stopie procentowej $r_2 = 10\%$ i oprocentowaniu naliczanym co kwartał. W którym banku korzystniej jest ulokować posiadane środki finansowe i jaką kwotą będzie dysponował student po 3 latach?

Odpowiedzi

1. $K_3 = 1150$ zł.
2. $K_3 = 1157{,}63$ zł.
3. Korzystniej jest ulokować kapitał w banku B. Student będzie dysponował kwotą 134488,88 zł.

3. GRANICA I CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

3.1. Definicja granicy funkcji w punkcie

Pamiętamy, że ciąg liczbowy jest funkcją. Skoro znamy pojęcie granicy ciągu i umiemy już liczyć granice specyficznych funkcji jakimi są ciągi, w tym rozdziale poznamy metody obliczania granic dowolnych funkcji. Granice ciągów liczymy tylko w nieskończoności, granice funkcji możemy liczyć w punkcie oraz $\pm\infty$.

Definicja (Heinego)

Liczba g jest **granicą funkcji** $f(x)$ **w punkcie** x_0, co zapisujemy:

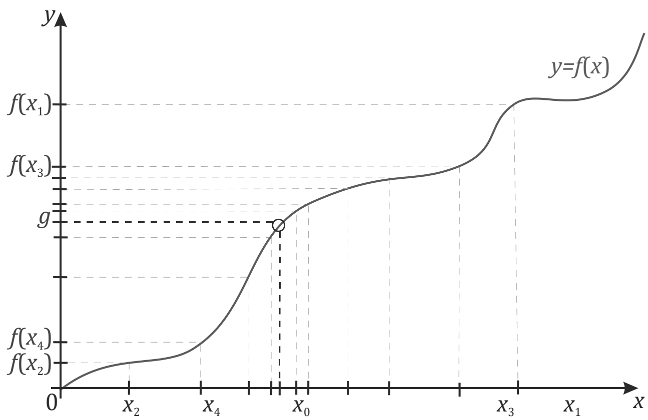
$$g = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

jeżeli dla każdego ciągu argumentów $\{x_n\}$ spełniającego następujące warunki:

1. $x_n \in D_f$,
2. $x_n \neq x_0$,
3. $x_n \to x_0$, gdy $n \to \infty$

ciąg wartości funkcji $\{f(x)\}$ jest zbieżny do g.

Na rysunku 3.1 przedstawiono graficzną interpretację granicy funkcji w punkcie.



RYS. 3.1. Graficzna interpretacja granicy funkcji w punkcie postaci: $g = \lim_{x \to x_0} f(x)$

Uwaga:

Liczba g, czyli granica funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, może być dowolną liczbą rzeczywistą lub $+\infty$ lub $-\infty$. W przypadku, gdy g jest $+\infty$ lub $-\infty$, mówimy, że funkcja $f(x)$ ma granicę niewłaściwą w punkcie x_0.

Przykład 3.1

Wyznacz granicę funkcji $f(x) = \frac{3x+5}{x^3+3}$ w punkcie $x_0 = 1$.

Rozwiązanie:

Wiemy, że $D_f = \boldsymbol{R}$, weźmy więc dowolny ciąg $\{x_n\}$ spełniający warunki 1., 2. i 3. z definicji granicy funkcji dla $x_0 = 1$.

Ogólny wyraz ciągu wartości funkcji ma wtedy postać: $f(x_n) = \frac{3x_n+5}{{x_n}^3+3}$.

Dla $x_n \to 1$ mamy: $3x_n + 5 \to 8$ oraz ${x_n}^3 + 3 \to 4$, czyli:

$$\frac{3x_n+5}{{x_n}^3+3} \to \frac{8}{4} = 2, \text{ a więc}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x+5}{x^3+3} = 2.$$

☺

Przykład 3.2

Wyznacz granicę funkcji $f(x) = \frac{4+x}{x-2}$ w punkcie $x_0 = -2$.

Rozwiązanie:

Wiemy, że $D_f = \boldsymbol{R}\backslash\{2\}$. Wybieramy ciąg $\{x_n\}$ spełniający warunki 1., 2. i 3. z definicji granicy funkcji dla $x_0 = -2$ i w pamięci obliczmy wartości ciągu $f(x_n)$, czyli w praktyce wstawiamy liczbę -2 za x do wzoru funkcji $f(x)$. Zatem granica funkcji wynosi:

$$\lim_{x\to -2} \frac{4+x}{x-2} = \frac{4+(-2)}{(-2)-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

☺

Definicja

Jeżeli warunek 2. w definicji granicy funkcji w punkcie zastąpimy warunkiem:

$$2\text{'})\ x_n < x_0,$$

to liczbę $\boldsymbol{g}$ nazywamy lewostronną granicą funkcji w punkcie $\boldsymbol{x_0}$, co zapisujemy:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g.$$

Zapis $x \to x_0^-$ oznacza, że x dąży do x_0 z lewej strony.

Jeżeli warunek 2. w definicji granicy funkcji w punkcie zastąpimy warunkiem:

$$2\text{”)}\ x_n > x_0,$$

to liczbę $\boldsymbol{g}$ nazywamy prawostronną granicą funkcji w punkcie $\boldsymbol{x_0}$, co zapisujemy:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g.$$

Zapis $x \to x_0^+$ oznacza, że x dąży do x_0 z prawej strony.

Twierdzenie

Funkcja o wartościach $f(x)$ ma w punkcie x_0 granicę g, wtedy i tylko wtedy, gdy granice jednostronne tej funkcji w punkcie x_0 są równe g.

Przykład 3.3

Wyznacz granicę funkcji $f(x) = \frac{4+x}{x-2}$ w punkcie $x_0 = 2$.

Rozwiązanie:

Wiemy, że $D_f = \boldsymbol{R} \backslash \{2\}$. Punkt $x_0 = 2$ nie należy do dziedziny funkcji. Obliczając granicę zgodnie z powyżej przedstawionym schematem otrzymujemy:

$$\lim_{x \to 2} \frac{4+x}{x-2} = \left[\frac{4+2}{2-2}\right] = \left[\frac{6}{0}\right].$$

Jeśli obliczając granicę funkcji w punkcie otrzymamy wyrażenie $\left[\frac{a}{0}\right]$ i $a \neq 0$, to należy liczyć granice jednostronne w punkcie $x_0 = 2$.

Weźmy więc dowolny ciąg $\{x_n\}$ spełniający powyższe warunki 1, 2’, 3 dla $x_0 = 2$.

Z punktu 2’. wynika, że wyrazy ciągu $x_n < 2$, więc $(x_n - 2) < 0$ oraz $x_n \to 2$ (z punktu 3.), więc $(x_n - 2) \to 0$, obie te informacje możemy zapisać w następujący sposób: $(x_n - 2) \to 0^-$, co oznacza, że ciąg $\{(x_n - 2)\}$ zbliża się do 0 z lewej strony.

Mamy więc $(x_n - 2) < 0$ oraz $(x_n - 2) \to 0$, zatem możemy stwierdzić, że ciąg odwrotności

$$\frac{1}{x_n - 2} \to -\infty \text{ , więc}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{4+x}{x-2}=\frac{4+2}{2-2}=\left[\frac{6}{0^-}\right]=-\infty.$$

Analogicznie obliczamy granicę prawostronną:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{4+x}{x-2}=\frac{4+2}{2-2}=\left[\frac{6}{0^+}\right]=+\infty.$$

W powyższego twierdzenia wynika, że granica $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4+x}{x-2}$ nie istnieje, gdyż granica lewostronna i prawostronna są różne. Granice jednostronne istnieją i są niewłaściwe.

☺

Przykład 3.4

Wyznacz granicę funkcji $f(x)=\frac{1}{x^2}$ w punkcie $x_0=0$.

Rozwiązanie:

Wiemy, że $D_f=\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$. Punkt $x_0=0$ nie należy zatem do dziedziny funkcji, więc obliczając granicę otrzymujemy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{0^2}=\left[\frac{1}{0}\right]$$

i w tej sytuacji obliczymy granice jednostronne:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{0^2}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{0^2}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty.$$

Z powyższego twierdzenia wynika, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$ i jest to granica niewłaściwa.

☺

Przykład 3.5

Wyznacz granicę funkcji $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2-4}$ w punkcie $x_0=2$.

Rozwiązanie:

Wiemy, że $D_f=\boldsymbol{R}\backslash\{-2,2\}$. Punkt $x_0=2$ nie należy do dziedziny funkcji. Obliczając granicę zgodnie z powyżej omówionym schematem otrzymujemy:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Jeśli obliczając granicę funkcji w punkcie otrzymamy wyrażenie $\left[\frac{0}{0}\right]$, czyli symbol nieoznaczony, to jedną z metod postępowania jest przekształcenie wzoru funkcji, tak aby pozbyć się symbolu nieoznaczonego:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

☺

Twierdzenie

Działania na granicach funkcji

Niech $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=g_1$ i $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=g_2$, wtedy:

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+h(x)\big)=g_1+g_2;$$

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-h(x)\big)=g_1-g_2;$$

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot h(x)\big)=g_1\cdot g_2;$$

$$g_2\neq 0\Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{h(x)}\right)=\frac{g_1}{g_2}.$$

Twierdzenie

Jeżeli $\bigwedge_{x\in X} f(x)\neq y_0 \wedge \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0 \wedge \lim\limits_{y\to y_0} h(y)=g$, to:

$$\lim_{x\to x_0} h\big(f(x)\big)=\lim_{y\to y_0} h(y)=g.$$

Zapamiętaj:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\ \lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^k;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ oraz } \lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k, k\in \boldsymbol{R} \text{ oraz } \lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=1, k\in \boldsymbol{R},$$

$$\lim_{x\to 0} a^x=1, \text{ dla } a>0,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{a}{x}=+\infty\ i\ \lim_{x\to 0^+}\frac{a}{x}=-\infty, \text{ dla } a<0,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{a}{x}=-\infty\ i\ \lim_{x\to 0^+}\frac{a}{x}=+\infty, \text{ dla } a>0.$$

Przykład 3.6

Wyznacz granicę funkcji $f(x) = \frac{\sin 3x}{\sin 7x}$ w punkcie $x_0 = 0$.

Korzystamy ze wzoru: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1$. Zatem:

$$\lim_{x\to o} \frac{\sin 3x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}.$$

Ponieważ $\frac{\sin 3x}{3x}$ dąży do 1 oraz $\frac{\sin 7x}{7x}$ dąży do 1, więc mamy:

$$\lim_{x\to o} \frac{\sin 3x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}.$$

☺

Przykład 3.7

Wyznacz granicę funkcji $f(x) = \frac{\sin x\cdot\cos x}{\mathrm{tg} 2x}$ w punkcie $x_0 = 0$.

Korzystamy ze wzoru: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1$. Zatem:

$$\lim_{x\to o} \frac{\sin x\cdot\cos x}{\mathrm{tg} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}\cdot x\cdot\cos x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}\cdot x\cdot\cos x}{\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\cos 2x}}.$$

Ponieważ $\frac{\sin x}{x}$ dąży do 1; $\frac{\sin 2x}{2x}$ dąży do 1 oraz $\cos 0 = 1$, więc mamy:

$$\lim_{x\to o} \frac{\sin x\cdot\cos x}{\mathrm{tg}\, 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{2x}{1}} = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{1}{2x} = \frac{1}{2}.$$

☺

Przykład 3.8

Oblicz granice funkcji: $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{3x}+10}$.

Rozwiązanie:

Aby wyznaczyć granicę podanej funkcji należy wykonać takie przekształcenia, aby można było zastosować wzór: $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k$.

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{3x}+10} = \lim_{x\to 0}\big(1+(-2x)\big)^{\frac{1}{x}\cdot x\cdot\left(\frac{1}{3x}+10\right)}.$$

Ponieważ:

$$\lim_{x\to 0}\big(1+(-2x)\big)^{\frac{1}{x}} \text{ dąży do } e^{-2}$$

oraz:

$$x \cdot \left(\frac{1}{3x}+10\right) = \frac{x}{3x}+10x=\frac{1}{3} \text{ przy } x \text{ dążącym do } 0,$$

zatem:

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{3x}+10} = e^{-2\cdot\frac{1}{3}} = e^{-\frac{2}{3}}.$$

2 sposób:

Możemy też przekształcić wzór podanego ciągu wykorzystując własności działań na potęgach:

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{3x}+10} = \lim_{x\to 0}\big(1+(-2x)\big)^{\frac{1}{3x}} \cdot \big(1+(-2x)\big)^{10} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\big(1+(-2x)\big)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \big(1+(-2x)\big)^{10}$$

Ponieważ:

$$\lim_{x\to 0}\big(1+(-2x)\big)^{\frac{1}{x}} = e^{-2}$$

oraz

$$\lim_{x\to 0}\big(1+(-2x)\big)^{10} = 1^{10} = 1$$

zatem:

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{3x}+10} = (e^{-2})^{\frac{1}{3}} \cdot 1 = e^{-\frac{2}{3}}.$$

☺

Zadania

1. Oblicz następujące granice funkcji:

a) $\lim_{x\to 3}(2x^3 - x^2 + 1)$

b) $\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2+6x+3}$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{x+4}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{x+8}{x-3}$

e) $\lim_{x\to e}\ln(2x-e)$

2. Oblicz następujące granice funkcji:

   a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+1}{x-3}$

   b) $\lim_{x\to -2}\frac{1}{x^2-4}$

   c) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}$

   d) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x-2}$

   e) $\lim_{x\to 1} e^{\frac{x^2}{1-x}}$

   f) $\lim_{x\to 2}\frac{2}{(x-2)^2}$

   g) $\lim_{x\to 2} 3^{\frac{1}{(2-x)^2}}$

   h) $\lim_{x\to 2} 2^{\frac{1}{2-x}}$

   i) $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x+1}$

3. Oblicz następujące granice funkcji:

   a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$

   b) $\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\sqrt{x+2}}{x^2-9}$

   c) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^4+3x^2-4x}{x}$

   d) $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}$

   e) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}$

   f) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

   g) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$

4. Oblicz następujące granice funkcji:

   a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{4x}$

5.

a) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} (1+4x)^{\frac{1}{x}-2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (1-5x)^{\frac{2}{3x}-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} (1+7x)^{\frac{4}{x}}$

Odpowiedzi

1.

a) 46

b) $\sqrt{10}$

c) $\frac{3}{5}$

d) $-\frac{8}{3}$

e) 1

2.

a) granica lewostronna $-\infty$, prawostronna $+\infty$
b) granica lewostronna $+\infty$, prawostronna $-\infty$
c) granica lewostronna $-\infty$, prawostronna $+\infty$
d) granica lewostronna $-\infty$, prawostronna $+\infty$
e) granica lewostronna $+\infty$, prawostronna 0
f) $+\infty$
g) $+\infty$
h) granica lewostronna $+\infty$, prawostronna 0
i) granica lewostronna $-\infty$, prawostronna $+\infty$

3.

a) 2

b) $\frac{\sqrt{5}}{6}$

c) -4

d) 5

e) $-\frac{3}{2}$

f) -1

g) 12

4.

a) 5

b) 1

c) $\frac{3}{2}$

d) $\frac{5}{4}$

e) $\frac{1}{4}$

5.

a) e^2

b) e^4

c) $\frac{1}{e^{\frac{10}{3}}}$

d) e^{28}

3.2. Definicja granicy funkcji w nieskończoności

Obliczając granice funkcji w $+\infty$ możemy wykorzystać twierdzenia i wzory, które stosowaliśmy przy obliczaniu granic ciągów. Dla funkcji możemy policzyć dodatkowo granice w $-\infty$. Metody obliczania granic w $+\infty$ oraz w $-\infty$ są podobne.

Definicja

Niech funkcja $f(x)$ będzie określona w przedziale $(a, +\infty)$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą lub niewłaściwą $-\infty$. **Liczbę g** nazywamy **granicą funkcji przy $x \to +\infty$**, co zapisujemy:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = g,$$

jeżeli dla ciągu argumentów $\{x_n\}$ rozbieżnego do $+\infty$ odpowiadający mu ciąg wartości funkcji $\{f(x_n)\}$ jest ciągiem zbieżnym do g.

Definicja

Niech f będzie określona w przedziale $(-\infty, b)$, gdzie b jest dowolną liczbą rzeczywistą lub niewłaściwą $+\infty$. **Liczbę g** nazywamy **granicą funkcji przy $x \to -\infty$**, co zapisujemy:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = g,$$

jeżeli dla ciągu argumentów$\{x_n\}$ rozbieżnego do $-\infty$ odpowiadający mu ciąg wartości funkcji $\{f(x_n)\}$ jest ciągiem zbieżnym do g.

Uwaga:

Liczba g, czyli granica funkcji przy $x \to -\infty$ lub $x \to +\infty$ może być dowolną liczbą rzeczywistą lub niewłaściwą $+\infty$ lub $-\infty$. W przypadku, gdy g jest liczba niewłaściwą, mówimy, że funkcja $f(x)$ ma granicę niewłaściwą przy $x \to -\infty$ lub $x \to +\infty$.

Zapamiętaj:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k, k \in \boldsymbol{R};$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{kx}\right)^{\frac{kx}{\alpha}} = e,\, k \in \boldsymbol{R};$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{dla } a > 1, \\ 1 & \text{dla } a = 1, \\ +\infty & \text{dla } 0 < a < 1 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 < a < 1, \\ 1 & \text{dla } a = 1, \\ +\infty & \text{dla } a > 1. \end{cases}$$

Przykład 3.9

Oblicz granicę funkcji $f(x) = -x^3 + x^2 + 5x - 2$ w $+\infty$ i w $-\infty$.

Rozwiązanie:

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^3 + x^2 + 5x - 2) = \lim_{x\to-\infty} -x^3\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) =$$
$$-(-\infty)^3(1 - 0 - 0 + 0) = -(-\infty) = \infty;$$
$$\lim_{x\to\infty}(-x^3 + x^2 + 5x - 2) = \lim_{x\to\infty} -x^3\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) =$$
$$-(\infty)^3(1 - 0 - 0 + 0) = -(\infty) = -\infty.$$

☺

Przykład 3.10

Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+x}{x-2}$.

Rozwiązanie:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+x}{x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot(4+0)}{1-0} = \infty \cdot 4 = \infty.$$

☺

Przykład 3.11

Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+x}{x^2-2}$.

Rozwiązanie:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+x}{x^2-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{4+0}{1-0} = 4.$$

☺

Przykład 3.12

Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2+x}{x^3-2x}$.

Rozwiązanie:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+x}{x^3-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4+0}{x(1-0)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x} = 0.$$

☺

Przykład 3.13

Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$.

Rozwiązanie:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty} \left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}\right)^{3} = (e^2)^3 = e^6.$$

☺

Zadania

1. Oblicz następujące granice funkcji:

   a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x^3 - 5x^2 + 2)$

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^3 - 5x^2 + 2)$

   c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-5x^2 - x + 2)$

   d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-5x^2 - x + 2)$

   e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3}{3x^2-1}$

   f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3}{3x^2-1}$

   g) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3+3}{3x^2-1}$

   h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x-2} - \sqrt{x}\right)$

2. Oblicz następujące granice funkcji:

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{2x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2}\right)^{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{\frac{3x+4}{x-3}}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{\frac{4x+1}{2x-1}}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\frac{x^2+5x-2}{x^2+3}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-3x+1\right)$

Odpowiedzi

1.

a) $-\infty$
b) ∞
c) $-\infty$
d) $-\infty$
e) 0
f) $\frac{2}{3}$
g) $-\infty$ w - nieskończoności, ∞ w +nieskończoności
h) 0

2.

a) e^{12}
b) $\frac{1}{e^6}$
c) e^{10}
d) e^5
e) 8
f) 9
g) 0
h) $-\infty$

3.3. Ciągłość funkcji

Znając definicje granicy funkcji w punkcie możemy zdefiniować pojęcie ciągłości funkcji. Intuicyjnie przyjmujemy, że funkcja jest ciągła, jeżeli jej wykres możemy narysować nie odrywając ołówka od kartki.

Definicja

Funkcja $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{R}$ jest ciągła w punkcie $\boldsymbol{x_0}$, jeżeli:

1. istnieje granica funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, czyli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,
2. istnieje wartość funkcji $f(x_0)$, czyli $x_0 \in D_f$,
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Uwaga:

Jeżeli jeden z powyższych warunków nie jest spełniony, to mówimy, że funkcja $\boldsymbol{f}$ jest nieciągła w punkcie $\boldsymbol{x_0}$, a punkt x_0 nazywamy punktem nieciągłości tej funkcji.

Definicja

Funkcja $f: X \to R$ jest lewostronnie ciągła w punkcie $\boldsymbol{x_0}$, jeżeli:

1. istnieje lewostronna granica funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, czyli $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$,
2. istnieje wartość funkcji $f(x_0)$, czyli $x_0 \in D_f$,
3. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Funkcja $f: X \to R$ jest prawostronnie ciągła w punkcie $\boldsymbol{x_0}$, jeżeli:

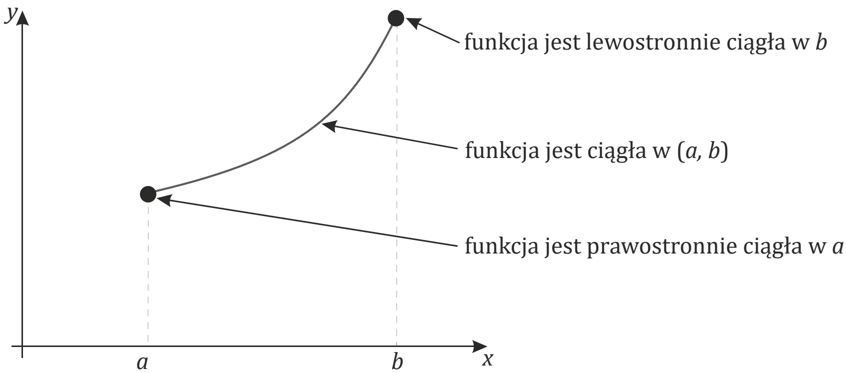
1. istnieje prawostronna granica funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, czyli $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$,
2. istnieje wartość funkcji $f(x_0)$, czyli $x_0 \in D_f$,
3. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Twierdzenie

Funkcja jest ciągła w przedziale (a, b), jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

Twierdzenie

Funkcja jest ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału oraz jest prawostronnie ciągła w punkcie a oraz lewostronnie ciągła w punkcie b (rys. 3.2).



RYS. 3.2. Graficzna interpretacja ciągłości funkcji w przedziale ⟨a,b⟩

Twierdzenie

Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe w punkcie x_0, to funkcje: $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ oraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ (gdy $g(x_0)\neq 0$) są również ciągłe w punkcie x_0.

Twierdzenie

1. Wielomian $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ jest funkcją ciągłą w każdym punkcie $x_0\in \boldsymbol{R}$.
2. Funkcja wymierna (iloraz dwóch wielomianów) jest funkcją ciągłą w każdym punkcie poza miejscami zerowymi mianownika.
3. Funkcja potęgowa $f(x)=x^a$, gdzie $a=const$ jest funkcją ciągłą dla $x>0$.
4. Funkcja wykładnicza $f(x)=a^x$, gdzie $a>0$ jest funkcją ciągłą dla $x\in \boldsymbol{R}$.
5. Funkcja logarytmiczna $f(x)=\log_a x$, gdzie $a>0$ i $a\neq 1$ jest funkcją ciągłą dla $x>0$.

Twierdzenie

Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej i rosnącej (malejącej) jest ciągła i rosnąca (malejąca).

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0 i funkcja $h(y)$ jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$, to także funkcja złożona $h\big(f(x)\big)$ jest ciągła w punkcie x_0.

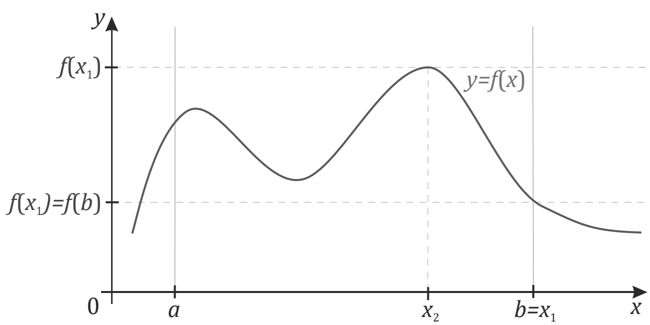
Twierdzenie

Jeżeli istnieje granica właściwa $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$ i funkcja $h(y)$ jest ciągła w punkcie $y_0 = g$, to:

$$\lim_{x \to x_0} h\big(f(x)\big) = h\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = h(g).$$

Twierdzenie (Weierstrassa o osiąganiu kresów)

Jeśli funkcja $f\colon \langle a, b\rangle \to \boldsymbol{R}$ w jest ciągła przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$, to jest w tym przedziale ograniczona oraz istnieją w tym przedziale takie punkty $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, że najmniejsza wartość funkcji (kres dolny) w przedziale $\langle a, b\rangle$ wynosi $f(x_1)$ oraz największa wartość funkcji (kres górny) w przedziale $\langle a, b\rangle$ wynosi $f(x_2)$.



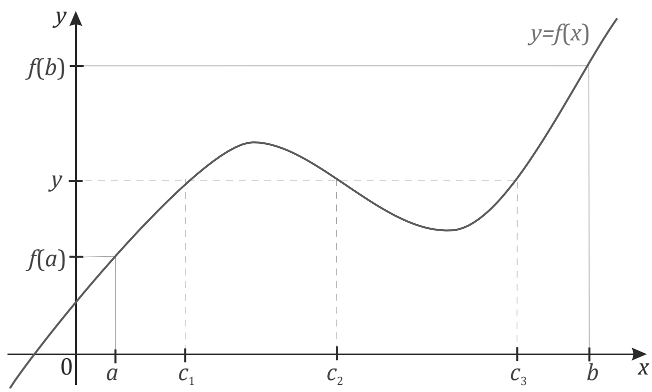
$$\inf_{x \in \langle a,b\rangle} f(x) = f(b) \text{ oraz } \sup_{x \in \langle a,b\rangle} f(x) = f(x_2)$$

RYS. 3.3. Graficzna interpretacja twierdzenia o osiąganiu kresów

Twierdzenie (Darboux)

Jeśli funkcja $f: \langle a, b \rangle \to \boldsymbol{R}$ w jest ciągła przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$ i na jego końcach przyjmuje wartości $f(a)$ i $f(b)$ oraz $f(a) \neq f(b)$ to funkcja $f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$ przyjmuje każdą wartość pośrednią z przedziału $\langle f(a), f(b) \rangle$, czyli:

$$\bigwedge_{y \in \langle f(a), f(b) \rangle} \bigvee_{c \in \langle a, b \rangle} f(c) = y.$$

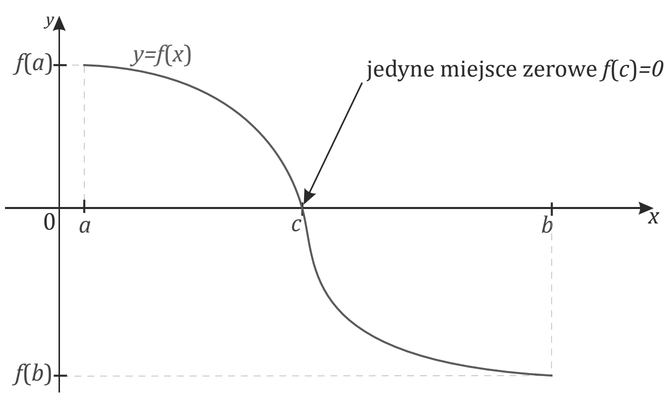


RYS. 3.4. Graficzna interpretacja twierdzenia Darboux

Uwaga:
Dla funkcji ściśle monotonicznej taki punkt c jest dokładnie jeden.

Wniosek z twierdzenia Darboux

Jeśli funkcja $f: \langle a, b \rangle \to \boldsymbol{R}$ jest ciągła i ściśle monotoniczna w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$ oraz zachodzi nierówność: $f(a) \cdot f(b) < 0$, wówczas istnieje dokładnie jedno miejsce zerowe funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$.



RYS. 3.5. Graficzna interpretacja wniosku z twierdzenia Darboux

Przykład 3.14

Zbadaj ciągłość funkcji $f(x) = 2x + 4$ w punkcie $x_0 = 3$.

Rozwiązanie:

1 sposób

1. istnieje granica funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = 3$, czyli $\lim\limits_{x\to 3}(2x + 4) = 10$,
2. istnieje wartość funkcji $f(x_0) = f(3) = 10$, czyli $x_0 = 3 \in D_f$,
3. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$,

czyli na mocy definicji ciągłości funkcji funkcja $f(x) = 2x + 4$ jest funkcją ciągłą w punkcie $x_0 = 3$.

2 sposób

Funkcja $f(x) = 2x + 4$ jest wielomianem, a każdy wielomian jest funkcją ciągłą w każdym punkcie $x_0 \in \boldsymbol{R}$, więc analizowana funkcja jest funkcją ciągłą w $x_0 = 3$.

☺

Przykład 3.15

Zbadaj ciągłość funkcji $f(x) = \frac{4x^2+x}{x-2}$ w punkcie $x_0 = 2$.

Rozwiązanie:

$$D_f = \boldsymbol{R}\backslash\{2\}, \text{ czyli } x_0 = 2 \notin D_f.$$

Nie jest spełniony punkt 2. definicji ciągłości funkcji, więc funkcja $f(x) = \frac{4x^2+x}{x-2}$ nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$.

Punkt $x_0 = 2$ jest punktem nieciągłości funkcji $f(x) = \frac{4x^2+x}{x-2}$.

☺

Przykład 3.16

Zbadaj ciągłość funkcji $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2+1, & x \geq 0 \end{cases}$ w punkcie $x_0 = 0$.

Rozwiązanie:

$$1.\ \lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}(x+1) \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1) \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases} = 1;$$

$$2.\ D_f = \boldsymbol{R}\text{, czyli } f(0) = 0^2 + 1 = 1 \text{ oraz } x_0 = 0 \in D_f;$$

$$3.\ \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1.$$

Zatem funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

☺

Przykład 3.17

Zbadaj ciągłość funkcji $f(x) = \begin{cases} x+2, & x<0 \\ 2x+1, & x \geq 0. \end{cases}$

Rozwiązanie:

Funkcje $x+2$ oraz $2x+1$ są ciągłe w swoich dziedzinach jako funkcje wielomianowe. Ciągłość funkcji $f(x)$ należy więc zbadać tylko na właściwych krańcach przedziałów określoności, czyli w punkcie $x_0 = 0$.

$$1.\ \lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}(x+2) \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(2x+1) \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) \text{ nie istnieje.}$$

Nie jest spełniony punkt 1. definicji ciągłości funkcji, więc funkcja $f(x)$ nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

Punkt $x_0 = 0$ jest punktem nieciągłości funkcji $f(x)$.

Jednak $\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+1) = 1 = f(0)$, więc funkcja jest prawostronnie ciągła.

☺

Przykład 3.18

Zbadaj ciągłość funkcji $f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ x^2+1, & x \geq 0. \end{cases}$

Rozwiązanie:

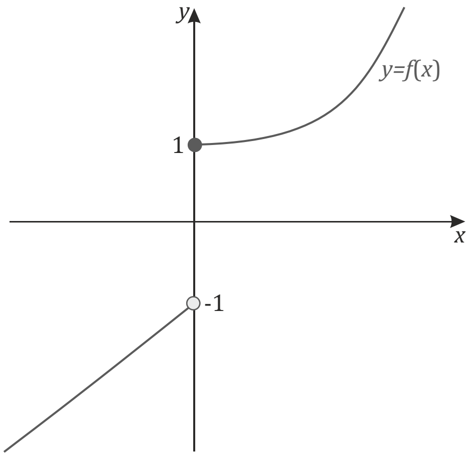
$$1.\ \lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}(x-1) \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1) \end{cases} = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}\text{, czyli: } \lim_{x\to 0} f(x) \text{ nie istnieje;}$$

2. $D_f = \boldsymbol{R}$, czyli $f(0) = 0^2 + 1 = 1$ oraz $x_0 = 0 \in D_f$;

3. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1$.

Funkcja $f(x)$ w punkcie $x_0 = 0$ jest prawostronnie ciągła, a nie jest lewostronnie ciągła.

Zatem $f(x)$ w punkcie $x_0 = 0$ nie jest ciągła.



RYS. 3.6. Graficzna interpretacja nieciągłości funkcji $f(x)$

☺

Zadania

1. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x)$, jeżeli:

a) $f(x) = \begin{cases} 2^x + 3, & x < 2 \\ \log_2 x, & 2 \leq x \leq 4 \\ x - 2, & x > 4 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ \sqrt{x + 1}, & 0 \leq x \leq 8 \\ 2^{x-6}, & x > 8 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x < 1 \\ \log_3 x, & 1 \leq x \leq 9 \\ \sqrt{x - 5}, & x > 9 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x \leq \pi \\ x, & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & x<0 \\ (1-x)^2, & 0\le x\le 2 \\ 4-x, & x>2 \end{cases}$

2. Dla jakich wartości parametru $a\in\boldsymbol{R}$ funkcja $f(x)$ jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych:

a) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{x-3}, & x\neq 3 \\ a, & x=3 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2}, & x\neq 2 \\ a, & x=2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x+a, & x<-1 \\ x^2, & -1\le x\le 2 \\ \log_2 x+3, & x>2 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} (x+a)^2, & x\le 0 \\ 1-x, & x>0 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} 3(x-a), & x<1 \\ \ln x, & x\ge 1 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} -x^2-x, & x\le 0 \\ e^x+a, & x>0 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ ax^2+1, & x\ge 0 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} x+a, & x<0 \\ 2^x, & x\ge 0 \end{cases}$

Odpowiedzi

1.

a) funkcja nieciągła w $x=2$
b) funkcja nieciągła w $x=1$
c) funkcja nieciągła w $x=8$
d) funkcja ciągła
e) funkcja ciągła
f) funkcja ciągła
g) funkcja nieciągła w $x=0$
h) funkcja nieciągła w $x=2$

2.

a) $a=4$
b) $a=12$

c) $a = 2$
d) $a = -1$ lub $a = 1$
e) $a = 1$
f) $a = -1$
g) $a \in \mathbf{R}$
h) $a = 1$

3.4. Asymptoty wykresu funkcji

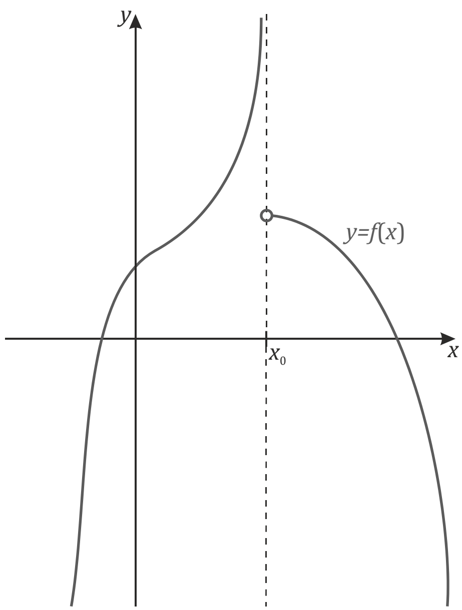
Często chcemy wiedzieć, jak zachowują się funkcje w otoczeniu punktu nienależącego do dziedziny (punktu nieokreśloności) funkcji lub w nieskończoności. Informacji na ten temat dostarczają asymptoty wykresu funkcji.

Niech funkcja $\boldsymbol{f(x)}$ będzie określona w pewnym przedziale $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ z wyłączeniem punktu $\boldsymbol{x_0}$ z tego przedziału.

Definicja

Prostą $\boldsymbol{x = x_0}$ nazywamy **lewostronną asymptotą pionową** krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy, gdy:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \text{ lub } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty.$$



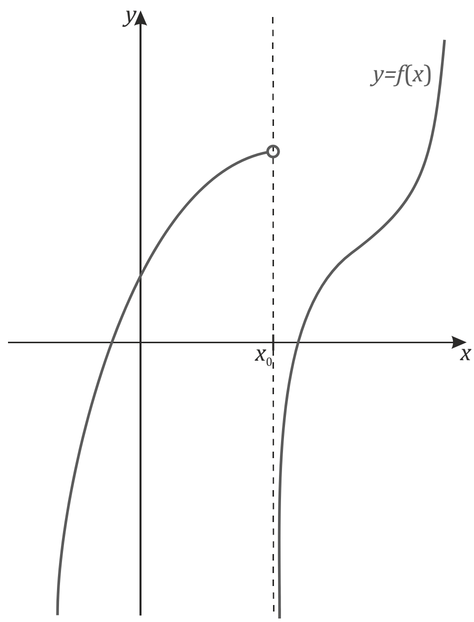
RYS. 3.7. Lewostronna asymptota pionowa krzywej o równaniu $\boldsymbol{y = f(x)}$

Przedstawiona na rysunku 3.7 prosta $x = x_0$ jest lewostronną asymptotą pionową funkcji $f(x)$.

Definicja

Prostą $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0}$ nazywamy prawostronną asymptotą pionową krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy, gdy:

$$\lim_{x \to x_0{}^+} f(x) = -\infty \text{ lub } \lim_{x \to x_0{}^+} f(x) = +\infty.$$

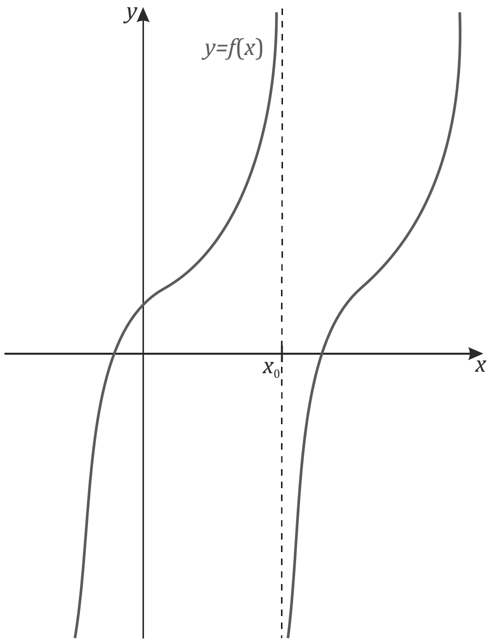


RYS. 3.8. Prawostronna asymptota pionowa krzywej o równaniu $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Przedstawiona na rysunku 3.8 prosta $x = x_0$ jest prawostronną asymptotą pionową funkcji $f(x)$.

Definicja

Prostą $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0}$ nazywamy **asymptotą pionową** krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy, gdy jest ona asymptotą lewostronną i prawostronną pionową danej krzywej.



RYS. 3.9. Asymptota pionowa krzywej o równaniu $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Przedstawiona na rysunku 3.9 prosta $x = x_0$ jest asymptotą pionową funkcji $f(x)$.

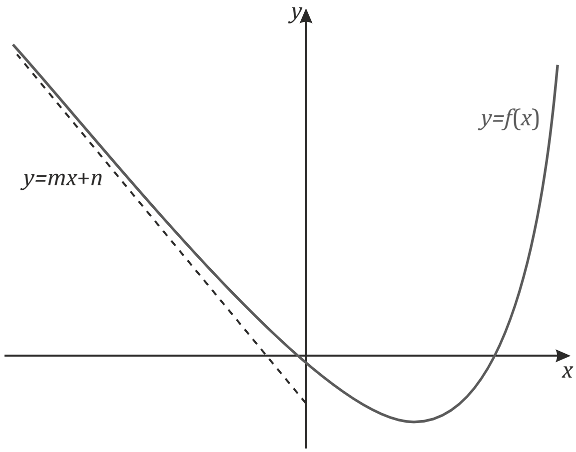
Niech funkcja $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ będzie określona odpowiednio w jednym z przedziałów $(-\infty, \boldsymbol{a})$, $(\boldsymbol{b}, +\infty)$.

Definicja

Prostą $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{mx} + \boldsymbol{n}$ nazywamy lewostronną (w $-\infty$) asymptotą ukośną krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy, gdy:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0.$$

Przedstawiona na rysunku 3.10 prosta $y = mx + n$ jest lewostronną asymptotą ukośną funkcji $f(x)$.



RYS. 3.10. Lewostronna asymptota ukośna krzywej $\boldsymbol{y = f(x)}$

Twierdzenie

Prostą $y = mx + n$ nazywamy lewostronną (w $-\infty$) asymptotą ukośną krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy, gdy istnieją granice:

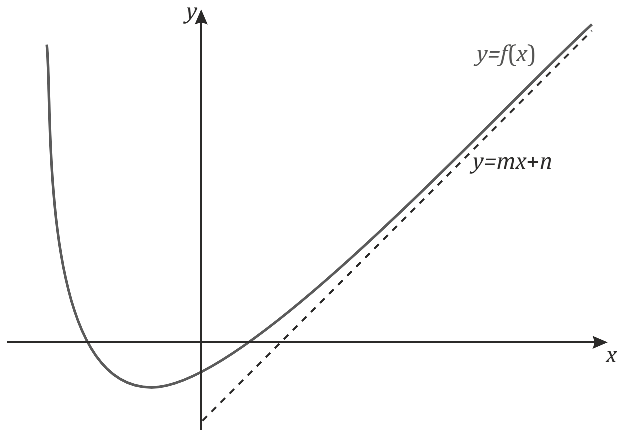
$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ oraz } n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx).$$

Definicja

Prostą $\boldsymbol{y = mx + n}$ nazywamy prawostronną (w $+\infty$) asymptotą ukośną krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy, gdy:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0.$$

Przedstawiona na rysunku 3.11 prosta $y = mx + n$ jest prawostronną asymptotą ukośną funkcji $f(x)$.



RYS. 3.11. Prawostronna asymptota ukośna krzywej $\boldsymbol{y = f(x)}$

Twierdzenie

Prostą $y = mx + n$ nazywamy prawostronną (w $+\infty$) asymptotą ukośną krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy, gdy istnieją granice:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ oraz } n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx).$$

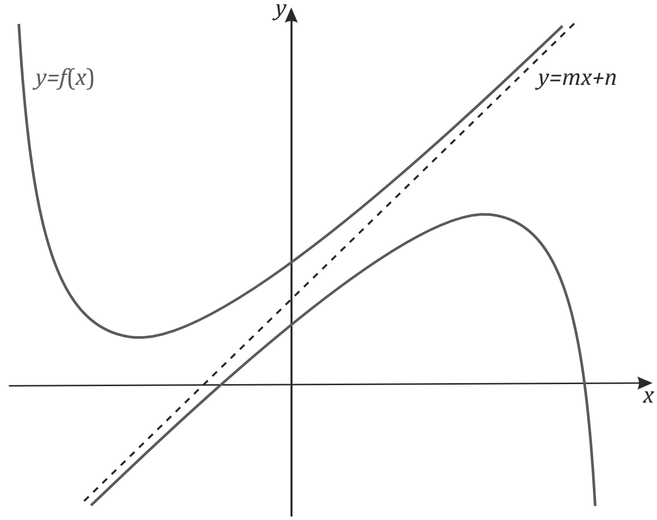
Niech funkcja $\boldsymbol{f(x)}$ będzie określona odpowiednio w sumie następujących przedziałów:

$$(-\infty, \boldsymbol{a}) \cup (\boldsymbol{b}, +\infty).$$

Definicja

Prostą $\boldsymbol{y = mx + n}$ nazywamy **asymptotą ukośną krzywej** o równaniu $y = f(x)$ wtedy, gdy jest ona asymptotą lewostronną i prawostronną ukośną danej krzywej.

Na rysunku 3.12 zobrazowano prostą o równaniu $y = mx + n$, która jest asymptotą ukośną funkcji $f(x)$.

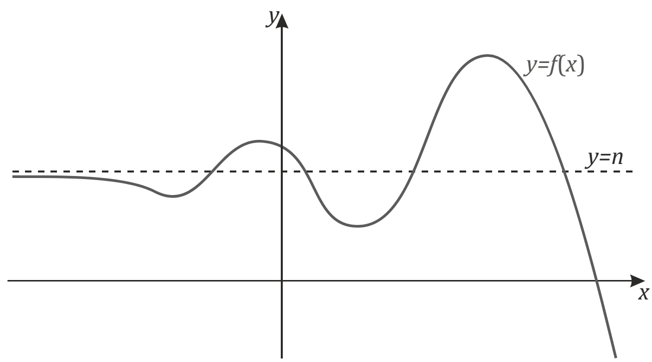


RYS. 3.12. Asymptota ukośna krzywej o równaniu $\boldsymbol{y = f(x)}$

Definicja

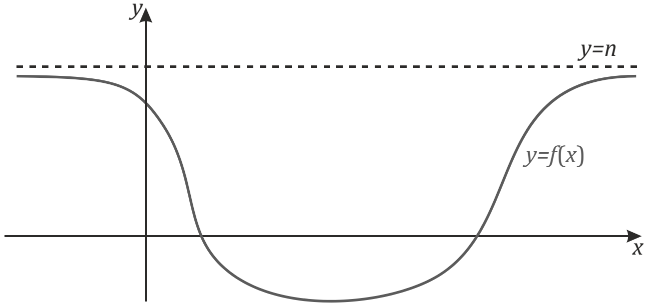
Jeśli w powyższych definicjach $m = 0$, to prostą $y = n$ nazywamy odpowiednio **asymptotą poziomą** lewostronną, prawostronną lub obustronną.

Na rysunku 3.13 przedstawiono prostą $y = n$, która jest asymptotą poziomą lewostronną funkcji $y = f(x)$.



RYS. 3.13. Asymptota pozioma lewostronna krzywej o równaniu $\boldsymbol{y = f(x)}$

Na rysunku 3.14 przedstawiono asymptotę poziomą wykresu funkcji $f(x)$ o równaniu $y = n$.



RYS. 3.14. Asymptota pozioma krzywej o równaniu $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Przykład 3.19

Wyznacz asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.

Rozwiązanie:

$D_f = \boldsymbol{R}\setminus\{2\}$, więc funkcja jest określona w przedziałach $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

1. Asymptota pionowa: należy obliczyć granice jednostronne w punkcie $x_0 = 2$ (nienależącym do dziedziny funkcji, czyli punkcie nieokreśloności):

$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{x-2} = \frac{2^2}{2-2} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$, więc $x = 2$ jest asymptotą pionową lewostronną;

$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{x-2} = \frac{2^2}{2-2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$, więc $x = 2$ jest asymptotą pionową prawostronną.

Więc prosta $x = 2$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.

2. Asymptota ukośna: aby znaleźć równanie asymptoty ukośnej postaci $y = mx + n$ należy obliczyć granice określone wzorami m i n:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x-2}\cdot\frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\cdot 1}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)} = 1.$$

$m \neq 0$, więc funkcja nie posiada asymptot poziomych.

W celu wyznaczenia równania asymptoty ukośnej, liczymy granicę określoną wzorem n:

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - \frac{x(x-2)}{x-2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - \frac{x^2-2x}{x-2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-x^2+2x}{x-2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x}{x-2}\right) = 2.$$

Więc prosta $y = x + 2$ jest asymptotą ukośną wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.

☺

Przykład 3.20

Wyznacz asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{x}{x+5}$.

Rozwiązanie:

$D_f = \boldsymbol{R}\backslash\{-5\}$, więc funkcja jest określona w przedziałach $(-\infty, -5) \cup (-5, \infty)$.

1. Asymptota pionowa: aby znaleźć równanie asymptoty pionowej należy obliczyć granice jednostronne w punkcie $x_0 = -5$:

$$\lim_{x \to -5^-} \frac{x}{x+5} = \frac{-5}{-5+5} = \left[\frac{-5}{0^-}\right] = +\infty,$$

więc $x = -5$ jest asymptotą pionową lewostronną;

$$\lim_{x \to -5^+} \frac{x}{x+5} = \frac{-5}{-5+5} = \left[\frac{-5}{0^+}\right] = -\infty,$$

więc $x = -5$ jest asymptotą pionową prawostronną.

Zatem prosta $x = -5$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \frac{x}{x+5}$.

2. Asymptota ukośna: aby znaleźć równanie asymptoty ukośnej postaci $y = mx + n$ należy obliczyć granice określone wzorami m i n:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x+5} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2+5x} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x \cdot 1}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x \cdot 1} = 0.$$

Sprawdzamy istnienie granicy określonej wzorem n:

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x}{x+5} - 0 \cdot x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x}{x+5}\right) = 1$$

Z powyższych wyliczeń wynika, że $m = 0, n = 1$, więc prosta $y = 1$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji $f(x) = \frac{x}{x+5}$.

☺

Zadania

1. Wyznacz asymptoty wykresu funkcji:

    a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

    b) $f(x) = \frac{3x^3}{x^3-8}$

    c) $f(x) = \frac{2x^3+x}{x+1}$

    d) $f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 1$

    e) $f(x) = \frac{3x+2}{x-8}$

    f) $f(x) = 3x + \frac{3}{x}$

    g) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

    h) $f(x) = \frac{1}{x^2} - x$

Odpowiedzi

1.

    a) $x = 1$ – asymptota pionowa, $y = x + 1$ – asymptota ukośna

    b) $x = 2$ – asymptota pionowa, $y = 3$ – asymptota pozioma

    c) $x = -1$ – asymptota pionowa

    d) brak asymptot

    e) $x = 8$ – asymptota pionowa, $y = 3$ – asymptota pozioma

    f) $x = 0$ – asymptota pionowa, $y = 3x$ – asymptota ukośna

    g) $x = 0$ – asymptota pionowa prawostronna, $y = 0$ – asymptota pozioma prawostronna

    h) $x = 0$ – asymptota pionowa, $y = -x$ – asymptota ukośna

4. POWTÓRZENIOWE PYTANIA TESTOWE

1. Przyporządkowanie, które każdemu elementowi $x \in X$ przypisuje dokładnie jeden element $y \in Y$ nazywamy:
   a) funkcją określoną w zbiorze X i przyjmującą wartości ze zbioru Y.
   b) funkcją określoną w zbiorze Y i przyjmującą wartości ze zbioru X.
   c) ciągiem liczbowym.
   d) żadna z odpowiedzi nie jest prawdziwa.
2. Zbiór $(x, y) \in X \times Y : x \in X \wedge y = f(x)$ nazywamy:
   a) dziedziną funkcji.
   b) wykresem funkcji.
   c) przeciwdziedziną funkcji.
   d) zbiorem wartości funkcji.
3. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x-2}{x^2-16}$. Wtedy $f(2) =$
   a) nie istnieje.
   b) 0.
   c) ∞.
   d) $-\frac{1}{12}$.
4. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x-2}{x^2-16}$. Wtedy $f(4) =$
   a) nie istnieje.
   b) 0.
   c) ∞.
   d) $-\frac{1}{12}$.
5. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x-2}{x^2-16}$. Wtedy $D_f =$
   a) $\boldsymbol{R}$.
   b) $\boldsymbol{R}\backslash\{-2, 2\}$.
   c) $\boldsymbol{R}\backslash\{-4, 4\}$.
   d) $(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$.
6. Dana jest funkcja $f(x) = 2x^2 + 4$. Wtedy $W_f =$
   a) $\boldsymbol{R}$.
   b) $\boldsymbol{R} \backslash\{0\}$.
   c) $[4,+\infty)$.
   d) $(4,+\infty)$.
7. Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy malejącą, wtedy i tylko wtedy, gdy:
   a) $\bigwedge_{x_1,x_2 \in X}(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$.
   b) $\bigwedge_{x_1,x_2 \in X}(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.
   c) $\bigwedge_{x_1,x_2 \in X}(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$.

d) $\bigwedge_{x_1,x_2\in X}(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$.

8. Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy nierosnącą, wtedy i tylko wtedy, gdy:
   a) $\bigwedge_{x_1,x_2\in X}(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$.
   b) $\bigwedge_{x_1,x_2\in X}(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.
   c) $\bigwedge_{x_1,x_2\in X}(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$.
   d) $\bigwedge_{x_1,x_2\in X}(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$.
9. Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy rosnącą, wtedy i tylko wtedy, gdy:
   a) $\bigwedge_{x_1,x_2\in X}(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$.
   b) $\bigwedge_{x_1,x_2\in X}(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.
   c) $\bigwedge_{x_1,x_2\in X}(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$.
   d) $\bigwedge_{x_1,x_2\in X}(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$.
10. Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy niemalejącą, wtedy i tylko wtedy, gdy:
   a) $\bigwedge_{x_1,x_2\in X}(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$.
   b) $\bigwedge_{x_1,x_2\in X}(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.
   c) $\bigwedge_{x_1,x_2\in X}(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$.
   d) $\bigwedge_{x_1,x_2\in X}(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$.
11. Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy różnowartościową, jeżeli:
   a) $\bigwedge_{x_1,x_2\in X}(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2))$.
   b) $\bigwedge_{x_1,x_2\in X}(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.
   c) $\bigwedge_{x_1,x_2\in X} f(x_1) = f(x_2)$.
   d) $\bigwedge_{x_1,x_2\in X} f(x_1) \neq f(x_2)$.
12. Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy parzystą, jeżeli:
   a) $\bigwedge_{x\in X}\big(f(x) = f(-x)\big)$.
   b) $\bigvee_{T>0}\bigwedge_{x\in X}\big((x+T)\in X \wedge f(x) = f(x+T)\big)$.
   c) $\bigwedge_{x\in X}\big((-x)\in X \wedge f(x) = -f(-x)\big)$.
   d) $\bigwedge_{x\in X}\big((-x)\in X \wedge f(x) = f(-x)\big)$.
13. Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy nieparzystą, jeżeli:
   a) $\bigwedge_{x\in X}\big(f(x) = -f(-x)\big)$.
   b) $\bigvee_{T>0}\bigwedge_{x\in X}\big((x+T)\in X \wedge f(x) = f(x+T)\big)$.
   c) $\bigwedge_{x\in X}\big((-x)\in X \wedge f(x) = -f(-x)\big)$.
   d) $\bigwedge_{x\in X}\big((-x)\in X \wedge f(x) = f(-x)\big)$.
14. Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy okresową w X, jeżeli:
   a) $\bigvee_{T>0}\bigwedge_{x\in X}\big(f(x) = f(x+T)\big)$.
   b) $\bigvee_{T>0}\bigwedge_{x\in X}\big((x+T)\in X \wedge f(x) = f(x+T)\big)$.
   c) $\bigvee_{T>0}\bigwedge_{x\in X}\big((x+T)\in X \wedge f(x) = -f(x+T)\big)$.
   d) $\bigvee_{T>0}\bigwedge_{x\in X}\big(f(x) = f(-x+T)\big)$.

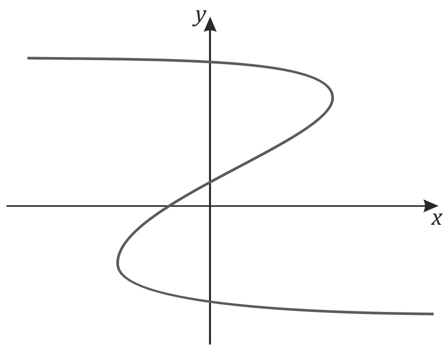
15. Jeżeli funkcja $f: X \to Y$ spełnia warunek $f(X) = Y$, to mówimy, że funkcja $f(x)$ jest:
    a) różnowartościowa.
    b) „na” .
    c) ograniczona.
    d) parzysta.
16. Jeżeli funkcja $f: X \to Y$ spełnia warunek $\bigvee_{M \in R} \bigwedge_{x \in X} m \leq f(x) \leq M$, to:
    a) różnowartościowa.
    b) „na”.
    c) ograniczona.
    d) parzysta.
17. Dane są funkcje $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \cos x$. Wtedy $g(f(x)) =$
    a) $\cos^2 x + 1$.
    b) $\cos x^2 + 1$.
    c) $\cos(x^2 + 1)$.
    d) nie istnieje.
18. Dane są funkcje $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \cos x$. Wtedy $f(g(x)) =$
    a) $\cos^2 x + 1$.
    b) $\cos x^2 + 1$.
    c) $\cos(x^2 + 1)$.
    d) nie istnieje.
19. Wykresy funkcji f i f^{-1} są symetryczne względem:
    a) prostej $y = -x$.
    b) prostej $y = 0$.
    c) punktu $(0,0)$.
    d) prostej $y = x$.
20. Funkcję o równaniu $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0, ad - bc \neq 0$, nazywamy funkcją:
    a) homograficzną.
    b) potęgową.
    c) wykładniczą.
    d) cyklometryczną.
21. Funkcję o równaniu $y = a^x$, gdzie $a \in R_+ \wedge a \neq 1$, nazywamy funkcją:
    a) homograficzną.
    b) potęgową.
    c) wykładniczą.
    d) cyklometryczną.

22. Ciąg, w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego poprzez dodanie do niego stałej wartości nazywamy ciągiem:
    a) ilorazowym.
    b) geometrycznym.
    c) arytmetycznym.
    d) rosnącym.
23. Dla $a \in \boldsymbol{R}_+$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} =$
    a) 1.
    b) $-\infty$.
    c) ∞.
    d) 0.
24. Granica ciągu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2-n+3}{2n^2+3n-5}$ wynosi:
    a) 1.
    b) 2.
    c) ∞.
    d) 0.
25. Granica ciągu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2-n+3}{2n^3+3n-5}$ wynosi:
    a) 1.
    b) 2.
    c) ∞.
    d) 0.
26. Granica ciągu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2-n+3}{2n^4+3n-5}$ wynosi:
    a) 1.
    b) 2.
    c) ∞.
    d) 0.
27. Granica ciągu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{12^n + 13^n + 14^n}$ wynosi:
    a) 12.
    b) 13.
    c) 14.
    d) ∞.

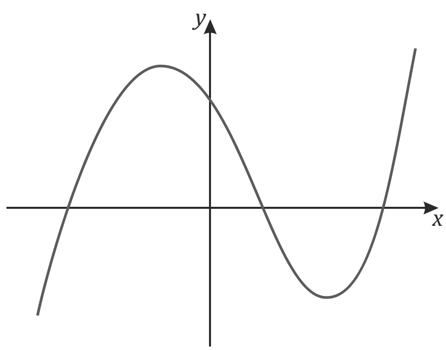
28. Granica ciągu $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^{2n}$ wynosi:
    a) e^3.
    b) e^2.
    c) ∞.
    d) e^6.
29. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ **i** $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to:
    a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.
    b) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$.
    c) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$.
    d) żadna z powyższych równości nie musi być prawdziwa.
30. Granica funkcji $\lim_{x\to 0}\frac{2x^4+3x^2-4x}{x}$ wynosi:
    a) -4.
    b) 2.
    c) ∞.
    d) 3.
31. Granica funkcji $\lim_{x\to 1} e^{\frac{x}{(1-x)^2}}$ wynosi:
    a) ∞.
    b) 0.
    c) $-\infty$.
    d) nie istnieje.
32. Funkcja $f(x) = \frac{3x^3}{x^3-8}$ posiada asymptotę poziomą o równaniu:
    a) $y = 2$.
    b) $x = 3$.
    c) $y = 3$.
    d) nie posiada asymptoty poziomej.
33. Funkcja $f(x) = \frac{3x^2}{x+3}$ posiada asymptotę pionową o równaniu:
    a) $x = 3$.
    b) $y = -3$.
    c) $x = -3$.
    d) nie posiada asymptoty pionowej.

34. Jeżeli istnieje lewostronna granica funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, czyli $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ i istnieje wartość funkcji $f(x_0)$, czyli $x_0 \in D_f$ oraz $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, to funkcja $f(x)$ jest:
   a) ciągła w punkcie x_0.
   b) lewostronnie ciągła w punkcie x_0.
   c) prawostronnie ciągła w punkcie x_0.
   d) żadna z powyższych.
35. Fałszywy jest wzór:
   a) $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$
   b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$
   c) $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$
   d) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 0.$
36. Jeżeli $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ lub $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$, to prostą $x = x_0$ nazywamy:
   a) asymptotą pionową krzywej o równaniu $y = f(x)$.
   b) prawostronną asymptotą pionową krzywej o równaniu $y = f(x)$.
   c) lewostronną asymptotą pionową krzywej o równaniu $y = f(x)$.
   d) styczną do krzywej o równaniu $y = f(x)$.
37. Jeżeli $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ lub $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, to prostą $x = x_0$ nazywamy:
   a) asymptotą pionową krzywej o równaniu $y = f(x)$.
   b) prawostronną asymptotą pionową krzywej o równaniu $y = f(x)$.
   c) lewostronną asymptotą pionową krzywej o równaniu $y = f(x)$.
   d) asymptotą poziomą krzywej o równaniu $y = f(x)$.
38. Jeżeli $m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ oraz $n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$, to prostą $y = mx + n$ nazywamy:
   a) asymptotą ukośną krzywej o równaniu $y = f(x)$.
   b) prawostronną asymptotą ukośną krzywej o równaniu $y = f(x)$.
   c) lewostronną asymptotą ukośną krzywej o równaniu $y = f(x)$.
   d) asymptotą pionową krzywej o równaniu $y = f(x)$.

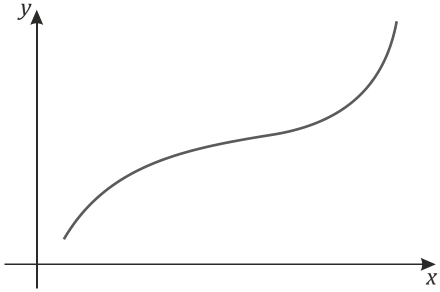
39. Jeżeli $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ oraz $n = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$, to prostą $y = mx + n$ nazywamy:
    a) asymptotą ukośną krzywej o równaniu $y = f(x)$.
    b) prawostronną asymptotą ukośną krzywej o równaniu $y = f(x)$.
    c) lewostronną asymptotą ukośną krzywej o równaniu $y = f(x)$.
    d) asymptotą pionową krzywej o równaniu $y = f(x)$.
40. Wykresem funkcji nie jest:
    a)



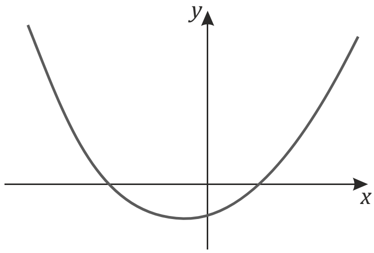
    b)



c)



d)



5. ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1. Wyznacz dziedzinę funkcji:

   a) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-25}$

   b) $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x^2-4}$

   c) $f(x) = \frac{3}{2x+4} + \sqrt{x^2-9}$

   d) $f(x) = \sqrt{x^2-1} - \frac{2}{x+2}$

   e) $f(x) = 4\cos x - \log_9(x^2-9) + \frac{5}{\sqrt{x-7}}$

   f) $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{\ln(x^2-x-6)}{x+4}$

   g) $f(x) = 3\sqrt{x^2-1} + 2\log_2(x+2) - \sin x$

   h) $f(x) = 2\sin x + \log_4(x^2-4) - \frac{2}{\sqrt{x-2}}$

   i) $f(x) = \frac{e^x+1}{\sqrt{x^2-1}} + \cos x - \ln(x+1)$

   j) $f(x) = \frac{\ln(x+x^2)}{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

   k) $f(x) = \frac{5}{x+1} + \log(3x^2+2x-1) + \sqrt{x-1} + \operatorname{tg} x$

2. Zbadaj parzystość funkcji:

   a) $f(x) = 2x^3 + 7$

   b) $f(x) = \sqrt{2+x^2}$

3. Znajdź złożenia funkcji $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$ (o ile istnieją), jeżeli:

   a) $f(x) = x^2 + 1,\ \ g(x) = \ln x + 2$

   b) $f(x) = \sqrt{x+2},\ \ g(x) = \sin^2 x + 1$

4. Wyznacz funkcję odwrotną do funkcji $f(x)$ (o ile istnieje):

   a) $f(x) = x^4 + 2$

   b) $f(x) = 2^{x+3} - 5$

5. Zbadaj monotoniczność podanych poniżej ciągów o wyrazie ogólnym:

   a) $a_n = \frac{7n-4}{n+3}$

   b) $b_n = 3 + 5n - n^2$

6. Oblicz granice ciągów:

a) $a_n = \frac{n^4-5n+1}{2n^3+n+3}$

b) $a_n = \frac{n^3+2n-1}{3n^2-14n+3}$

c) $a_n = \frac{n^3+2n-1}{4n^3-14n+3}$

d) $a_n = \frac{3n^6-2n+5}{n^4+4n+1}$

e) $a_n = \frac{n^3}{4n^2-14n+3}$

f) $a_n = \frac{3n^6-2n+5}{n^4+4n+1}$

g) $a_n = \frac{n^4-3n^3+1}{2n^4+3n}$

h) $a_n = \frac{2^n+6}{4^n+2^n-8}$

i) $a_n = \frac{7^n+12}{7^{n+1}-14^n+2}$

j) $a_n = \frac{7^n+12}{10^{n+1}-2}$

k) $a_n = \frac{2^{n+1}}{4^n+2^n-8}$

l) $a_n = \sqrt[n]{7 \cdot 2^n + 5^n + 7^n}$

m) $a_n = \sqrt[n]{4^n + 3^n + 6^n}$

n) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n + 10^n}$

o) $a_n = \sqrt[n]{6^n + 5^n + 2 \cdot 4^n}$

p) $a_n =\left(\sqrt{n^2 - 3} - \sqrt{n^2 + 2n - 1}\right)$

q) $a_n = \left(\sqrt{n^2 - 3} - n\right)$

r) $a_n = \left(\sqrt{n + 5} - n\right)$

s) $a_n = \left(\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 2n - 1}\right)$

t) $a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$

u) $a_n = \left(\frac{1-2n}{5-2n}\right)^{n+5}$

v) $a_n = \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{n+2}$

w) $a_n = \left(\frac{2+n}{4+n}\right)^{2n-1}$

x) $a_n = \left(\frac{n+2}{n-2}\right)^{n}$

y) $a_n = \left(\frac{n}{4+n}\right)^{3n}$

z) $a_n = \left(\frac{n-4}{n}\right)^{2n}$

7. Oblicz następujące granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x^3-4}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^5-7x^2-5x}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 8x}{\sin 7x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3 \sin x}{\sin 12x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x - \sin x}{4x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x - \cos 3x}{\sin 5x}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x - \sin 3x}{\sin 2x}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x - \sin 5x}{2x}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2}{2x^2}$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x+2}$

8. Oblicz następujące granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2+5x-7}{3x^2-2}$

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3x^5+5x-7}{3x^2-2}$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+5x-7}{3x^5-2}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^5-6x+1}{6x^7+21x+3}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+2}{4x^2-14x+3}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+x-1}{5x^3-4x-2}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x+5}{x}\right)^{2x}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x-5}{x}\right)^{2x+1}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{4+x}\right)^{2x}$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{x-1}$

l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x-6}{x+3}\right)^{2x-3}$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x-2}{x-4}\right)^{3x+1}$

n) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)$

o) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2+4}\right)$

p) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$

q) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$

r) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+4}\right)$

s) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}\right)$

t) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x-1}\right)$

u) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$

9. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x) = \begin{cases} 4^x + 4, & x < 2 \\ \log_4 x, & 2 \leq x \leq 4 \\ x - 3, & x > 4 \end{cases}$

10. Wyznacz asymptoty wykresu funkcji:

a) $f(x) = \frac{3-x^2}{2-x}$

b) $f(x) = \frac{x+2}{x-6}$

c) $f(x) = \frac{3x^2}{x-1}$

d) $f(x) = \frac{3x^3-2}{x^2}$

e) $f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2}$

f) $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$

g) $f(x) = \frac{x^2+1}{2-x}$

LITERATURA

1. Antoniewicz R., Misztal A., *Matematyka dla studentów ekonomii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
2. Bartosiewicz Z., Mozyrska D., Pawłuszewicz E., *Matematyka*, Politechnika Białostocka, Białystok 1998.
3. Batóg B., Bieszk-Stolorz B., Foryś I., Guzowska M., Helberlein K., *Matematyka dla kierunków ekonomicznych. Teoria, przykłady, zadania*, Difin, Warszawa 2016.
4. Bażańska T., Nykowska M., *Matematyka w zadaniach dla wyższych zawodowych uczelni ekonomicznych*, Oficyna Wydawnicza Branta, Warszawa 2007.
5. Białas S., Ćmiel A., Fitzke A., *Matematyka dla studiów inżynierskich*, cz. 1, *Algebra i geometria*, Wydawnictwa AGH, Kraków 2000.
6. Grzegorczyk J., *Matematyka,* cz. 1, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1977.
7. Gurgul H., Suder M., *Matematyka dla kierunków ekonomicznych*, Wolters Kluwer Polska, Warszawa 2012.
8. Krysicki W., Włodarski L., *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.
9. Matłoka M. (red.), *Matematyka dla ekonomistów. Zbiór zadań*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Poznań 2009.
10. Ostoja-Ostaszewski A., *Matematyka w ekonomii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
11. Piszczała J., *Matematyka i jej zastosowania w naukach ekonomicznych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Poznań 2008.
12. Piszczała J., *Matematyka i jej zastosowania w naukach ekonomicznych. Ćwiczenia*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Poznań 1997.
13. Roszkowska E. *Zadania z analizy matematycznej dla ekonomistów*, Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku, Białystok 2006.
14. Sokołowska D., Dębkowska K., *Matematyka dla studiujących nauki ekonomiczne*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Finansów i Zarządzania, Białystok 2008.
15. Stankiewicz W., *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych*, cz. 1 A, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.
16. Wrona W., *Matematyka. Podstawowy wykład politechniczny*, cz. 2, PWN, Warszawa 1969.

SKOROWIDZ

Spis tabel

Spis rysunków

Politechnika
Białostocka