

Zbigniew Bartosiewicz

Dorota Mozyrska

Ewa Pawłuszewicz

MATEMATYKA

skrypt dla studentów kierunku
zarządzanie i marketing



Wydawnictwo Politechniki Białostockiej

Białystok 2003

Wydawnictwo dydaktyczne
przygotowane w Katedrze Matematyki

Recenzent

dr Jan Popiołek

Opracowanie redakcyjne – Jadwiga Żukowska

Skład komputerowy przy użyciu programu $L^A T_E X$, rysunki, korekta – Autorzy

ISBN 83-86272-80-5

Spis treści

Wstęp	7
1 Podstawy	9
1.1 Elementy logiki i teorii zbiorów	9
1.1.1 Rachunek zdań	9
1.1.2 Kwantyfikatory	12
1.1.3 Zbiory	13
1.1.4 Zadania	15
1.2 Relacje	21
1.2.1 Relacja równoważności	21
1.2.2 Rozwarstwienie zbioru	22
1.2.3 Relacje porządku	23
1.2.4 Zadania	24
1.3 Funkcje	26
1.3.1 Zadania	28
2 Algebra	33
2.1 Układy równań liniowych	33
2.1.1 Układy równań dwóch zmiennych	33
2.1.2 Metoda eliminacji Gaussa dla dwóch zmiennych	33
2.1.3 Dowolna liczba zmiennych	35
2.1.4 Eliminacja Gaussa w przypadku ogólnym	36
2.1.5 Zadania	39
2.2 Zastosowania układów równań	42
2.2.1 Lotnicza akcja pomocy	42
2.2.2 Asortyment produkcji	43
2.2.3 Portfel akcji	44
2.2.4 Zadania	44
2.3 Algebra macierzy	47
2.3.1 Dodawanie macierzy	47
2.3.2 Mnożenie macierzy	48

2.3.3	Zadania	50
2.4	Wyznacznik macierzy	52
2.4.1	Definicja wyznacznika	52
2.4.2	Własności wyznacznika	53
2.4.3	Odwracanie macierzy	54
2.4.4	Rząd macierzy	55
2.4.5	Wzory Cramera	57
2.4.6	Zadania	58
2.5	Potęgowanie macierzy	63
2.5.1	Zadania	64
2.6	Zastosowania macierzy i wyznaczników	65
2.6.1	Planowanie produkcji	65
2.6.2	Liniiowe układy dynamiczne	67
2.6.3	Model przepływów międzygałęziowych	69
2.6.4	Model połączeń lotniczych	70
2.6.5	Zadania	72
2.7	Elementy algebry liniowej w $\mathbb{R}^n$	76
2.7.1	Liniowa niezależność wektorów	76
2.7.2	Rząd kolumnowy i rząd wierszowy macierzy	78
2.7.3	Baza przestrzeni liniowej	79
2.7.4	Baza własna	80
2.7.5	Odwzorowania liniowe	81
2.7.6	Zadania	83
2.8	Zastosowania funkcji liniowych	88
2.8.1	Funkcje liniowe jednej zmiennej	88
2.8.2	Funkcje wielu zmiennych	94
2.8.3	Zadania	96
3	Funkcje jednej zmiennej	101
3.1	Granice i ciągłość	101
3.1.1	Zadania	103
3.2	Funkcje elementarne	105
3.2.1	Funkcje kwadratowe	105
3.2.2	Funkcje wielomianowe	109
3.2.3	Funkcje wymierne	112
3.2.4	Funkcje wykładnicze	113
3.2.5	Funkcje logarytmiczne	115
3.2.6	Zadania	117
3.3	Pochodna funkcji jednej zmiennej	123
3.3.1	Definicja pochodnej	123
3.3.2	Własności pochodnej	124
3.3.3	Monotoniczność i ekstrema	125
3.3.4	Pochodne wyższych rzędów	126

3.3.5	Wklęsłość i wypukłość	127
3.3.6	Badanie funkcji	127
3.3.7	Zadania	128
3.4	Zastosowania pochodnych	135
3.4.1	Optymalizacja	135
3.4.2	Analiza krańcowa	138
3.4.3	Elastyczność funkcji	139
3.4.4	Przykłady geometryczne	140
3.4.5	Zadania	142
4	Funkcje wielu zmiennych	147
4.1	Opis, wykresy, warstwie, obrazy	147
4.1.1	Sposoby opisu funkcji wielu zmiennych	147
4.1.2	Wykresy	148
4.1.3	Warstwie	150
4.1.4	Funkcje z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^n$	152
4.1.5	Zadania	153
4.2	Pochodne funkcji wielu zmiennych	156
4.2.1	Ciągłość funkcji	156
4.2.2	Pochodne pierwszego rzędu	156
4.2.3	Warunki konieczne na ekstrema lokalne	158
4.2.4	Pochodne wyższych rzędów	159
4.2.5	Warunki wystarczające na ekstrema	160
4.2.6	Ekstrema globalne	161
4.2.7	Metoda mnożników Lagrange'a	163
4.2.8	Zadania	166
4.3	Zastosowania pochodnych cząstkowych	169
4.3.1	Optymalizacja	169
4.3.2	Elastyczność	172
4.3.3	Zadania	172
5	Rachunek całkowy	175
5.1	Całka nieoznaczona	175
5.1.1	Definicja	175
5.1.2	Całkowanie przez części	176
5.1.3	Całkowanie przez podstawienie	178
5.1.4	Całkowanie funkcji wymiernych	179
5.1.5	Zadania	182
5.2	Całka oznaczona	184
5.2.1	Całkowanie przez części i przez podstawienie dla całki oznaczonej	187
5.2.2	Zadania	188
5.3	Zastosowania całek	189
5.3.1	Obliczanie pól	189

5.3.2	Całkowanie stóp	190
5.3.3	Nadwyżka użyteczności towaru	191
5.3.4	Zadania	192
Spis Literatury		196
Skorowidz		199

Wstęp

Podręcznik ten powstał na bazie wykładów i ćwiczeń z matematyki prowadzonych przez nas dla studentów kierunku zarządzanie i marketing w Politechnice Białostockiej. Jest adresowany głównie do studentów tego kierunku, zwłaszcza tych, którzy studiują zaocznie, ale może też być przydatny dla studentów ekonomii i nauk pokrewnych. Zakładamy, że wielu z nich ma słabe przygotowanie matematyczne. W związku z tym podajemy wiele informacji podstawowych, częściowo znanych ze szkoły średniej, oraz staramy się ilustrować licznymi przykładami nowe pojęcia i fakty. Przykłady te często pochodzą z praktycznych problemów pojawiających się w zarządzaniu i ekonomii. Duża liczba zadań przeznaczonych do samodzielnego rozwiązania umożliwi czytelnikowi trwałe opanowanie wykładanego materiału.

W dużej mierze wzorowaliśmy się na dostępnych nam podręcznikach amerykańskich [Bu, BZ], zarówno jeśli chodzi o styl, jak i tematykę, czy przykłady. Staraliśmy się pokazać do czego matematyka może się przydać, jak jej użyć w rozwiązywaniu konkretnych problemów. Zrezygnowaliśmy więc całkowicie z dowodów twierdzeń, które podajemy i z których korzystamy. Dowody te można znaleźć w bardziej zaawansowanych książkach akademickich. Podręczniki amerykańskie wydają się w wielu miejscach mało precyzyjne, odwołując się do intuicji czytelnika a nie do jego umiejętności analitycznych. Staraliśmy się więc tam, gdzie to było możliwe, o precyzję i ścisłość.

Pierwszy rozdział, zatytułowany Podstawy, ma na celu bezbolesne wprowadzenie czytelnika w świat zbiorów, funkcji i relacji. Wszystko to jest poprzedzone elementami logiki, która leży u podstaw każdego ścisłego rozumowania, nie tylko w matematyce.

Zasadnicza część książki to algebra i analiza, a dokładniej elementy algebry liniowej i rachunku różniczkowego, które wydają się być szczególnie przydatne w zastosowaniach. Dużo miejsca poświęciliśmy funkcjom wielu zmiennych i ekstremom tych funkcji. Wynika to z faktu, że funkcje pojawiające się w zastosowaniach zależą zwykle od wielu, często bardzo wielu, zmiennych, a jednym z głównych problemów ekonomii jest optymalizacja.

Jesteśmy przekonani, że matematyka powinna być istotnym fragmentem wykształcenia na kierunkach ekonomicznych. Po pierwsze, dostarcza odpowiedniego języka do precyzyjnego wyrażania zależności ekonomicznych. Jest to język operujący funkcjami, relacjami, macierzami, zbiorami. Po drugie, matematyka jest źródłem licznych algorytmów, pozwalających rozwiązać praktyczne problemy. Przykładem może być tu pro-

blem minimalizacji kosztu i różne algorytmy minimalizacji, które mogą być użyte do jego rozwiązania. Upowszechnienie komputerów spowodowało, że praktycznie każdy ma pod ręką potężny instrument, pozwalający zamienić długie wzory w efektywne rachunki. Tym bardziej warto wiedzieć co można policzyć i jak to zrobić. Po trzecie wreszcie, poznawanie matematyki wymaga intensywnej pracy umysłowej. Owocuje to większą sprawnością intelektualną i bardziej precyzyjnym myśleniem.

Drugie wydanie naszego podręcznika różni się znacznie od wydania pierwszego. Główna różnica polega na połączeniu wykładów i zadań w jednym tomie. Co więcej, zadania zostały rozdzielone na kolejne podrozdziały. Wykładany materiał został nieco zmieniony i rozszerzony. Poprawiliśmy też błędy, które znalazły się w pierwszym wydaniu.

Znak $\square$ używany jest do oznaczenia końca twierdzenia, przykładu lub uwagi.

Rozdział 1

Podstawy

1.1 Elementy logiki i teorii zbiorów

Matematyka zbudowana jest z definicji i twierdzeń. Każde twierdzenie wynika z innych (prostszych lub bardziej pierwotnych) twierdzeń. Muszą być zatem twierdzenia najbardziej pierwotne, których nie da się wyprowadzić z innych. Nazywamy je *aksjomatami*. Definiując nowe pojęcia używamy innych, już zdefiniowanych. Te, których nie da się zdefiniować przy pomocy prostszych pojęć, te najprostsze, nazywamy *pojęciami pierwotnymi*. Takim pojęciem jest pojęcie zbioru. Aksjomatem jest na przykład stwierdzenie, że suma dwóch zbiorów też jest zbiorem.

Twierdzenia, które będziemy formułować, zostały udowodnione przy użyciu wnioskowania logicznego. Logika leży zatem u podstaw matematyki. Ale nie tylko matematyki. Każde precyzyjne rozumowanie, wyciąganie wniosków z posiadanych informacji, wymaga stosowania reguł logiki.

1.1.1 Rachunek zdań

Przez *zdanie* będziemy rozumieli zdanie w sensie logicznym, czyli zdanie, któremu możemy przyporządkować wartość logiczną: prawdę, oznaczaną przez 1, lub fałsz, oznaczany przez 0. Na przykład zdaniem będzie wypowiedź „W ubiegłym roku inflacja wyniosła 30%”. Natomiast pytania „Jaka była inflacja w ubiegłym roku?” nie będziemy uważali za zdanie. Zdania będziemy oznaczali małymi literami, zwykle p, q, r . Ze zdań prostych można tworzyć zdania złożone używając *funktorów logicznych*, zwanych inaczej *spójnikami*.

Najprostszym funktorem jest *negacja*, czyli *zaprzeczenie*, oznaczana przez $\sim$. Negacja jest funktorem jednoargumentowym, tzn. stosowana jest do jednego zdania. Jeśli p jest zdaniem prawdziwym, to $\sim p$ jest zdaniem fałszywym i na odwrót. Zaprzeczeniem zdania „W ubiegłym roku inflacja wyniosła 30%” jest zdanie „Nieprawda, że w ubiegłym roku inflacja wyniosła 30%”, lub „W ubiegłym roku inflacja nie wyniosła

30%”. Ale nie jest takim zaprzeczeniem zdanie „W ubiegłym roku inflacja wyniosła 27%”.

Inne ważne funktory logiczne są funktorami dwuargumentowymi, tzn. do ich użycia potrzebujemy dwóch zdań. Te funktory to

- *alternatywa*, oznaczana przez $\vee$; $p \vee q$ czytamy „ p lub q ”;
- *koniunkcja*, oznaczana przez $\wedge$; $p \wedge q$ czytamy „ p i q ”;
- *implikacja*, oznaczana przez $\Rightarrow$; $p \Rightarrow q$ czytamy „jeśli p to q ”;
- *równoważność*, oznaczana przez $\Leftrightarrow$; $p \Leftrightarrow q$ czytamy „ p wtedy i tylko wtedy, gdy q ”.

Znaczenie tych funktorów pokrywa się zwykle z ich potocznym rozumieniem. Na potrzeby logiki wystarczy podać tylko to, w jaki sposób wartości logiczne zdań złożonych zależą od wartości logicznych zdań podrzędnych. To w pełni definiuje te funktory. Zależności te podajemy w tabeli 1.1.

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Tabela 1.1: Wartości logiczne funktorów

Zwróć uwagę na to, że implikacja jest prawie zawsze prawdziwa. W szczególności jest prawdziwa, jeśli poprzednik implikacji jest fałszywy, a następnik prawdziwy. Zatem zdanie „Jeśli podatki w Polsce są niskie, to są one wysokie” jest zdaniem prawdziwym, jeśli zgodzimy się, że następnik, tzn. zdanie „Podatki w Polsce są wysokie”, jest zdaniem prawdziwym. Abstrahujemy tu od tego, czy wypowiedziane zdanie ma sens i co ono znaczy. Interesuje nas tylko jego prawdziwość lub fałszywość.

Mając do dyspozycji funktory logiczne możemy tworzyć zdania składające się z wielu zdań podrzędnych. Abstrakcyjne wersje takich zdań złożonych, zbudowane z funktorów logicznych i *zmiennych zdaniowych* nazywamy *schematami zdaniowymi* lub *formułami rachunku zdań*. Zmienne zdaniowe reprezentują zdania, nie mają jednak ustalonej wartości logicznej. Oznaczamy je podobnie jak zdania przez p , q , itp. Na przykład schematem zdaniowym jest wyrażenie

$$(p \vee q) \wedge p \Rightarrow q. \quad (1.1)$$

Nawiasy określają kolejność wykonywanych operacji logicznych. W przypadku, gdy brak jest nawiasów, operacje wykonujemy w następującej kolejności: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. W innych źródłach można znaleźć inną kolejność, zatem nie należy unikać nawiasów.

Wyrażenie (1.1) staje się zdaniem, gdy za p i q podstawimy konkretne zdania. Możemy otrzymać zdanie, które jest prawdziwe lub fałszywe. Są jednak takie schematy zdaniowe, które niezależnie od wartości logicznych podstawianych zdań zawsze dają zdanie złożone prawdziwe. Takie schematy zdaniowe nazywamy *tautologiami* lub *prawami rachunku zdań*. Tautologią jest na przykład następujące wyrażenie (zwane *prawem wyłączzonego środka*)

$$(\sim p) \vee p.$$

Mówi ono, że dla dowolnego zdania p zdanie to lub jego zaprzeczenie musi być prawdziwe.

Szczególnie cenne są tautologie zawierające równoważność. Pozwalają one przekształcać schematy zdaniowe na schematy im równoważne, czyli takie, które przyjmują te same wartości logiczne co schematy wyjściowe (dla wszystkich wartości logicznych zmiennych zdaniowych). Taką postać ma na przykład *prawo podwójnego przeczenia*

$$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p.$$

Prawo to mówi, że niezależnie od wartości logicznej zmiennej zdaniowej p , wartość ta jest równa wartości logicznej wyrażenia $\sim(\sim p)$. Oto inne ważne tautologie: *prawa rozdzielności*

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r);$$

prawa de Morgana

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q),$$

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q).$$

Prawa de Morgana są bardzo często używane w codziennym życiu, gdy musimy zaprzeczyć alternatywę lub koniunkcję dwóch zdań. Niezależnie od tego, czy mówimy o matematyce, o handlu, czy o pogodzie, reguła zaprzeczania jest taka sama.

Aby udowodnić któreś z podanych praw, należy rozważyć wszystkie wartości logiczne zmiennych p , q i r . Schemat zdaniowy powinien mieć zawsze wartość 1. W taki sposób można na przykład pokazać następujące prawo

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q).$$

Korzystając z niego oraz z praw de Morgana, otrzymamy prawo zaprzeczania implikacji, bardzo ważne w wielu rozumowaniach matematycznych:

$$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q) \Leftrightarrow p \wedge (\sim q).$$

Przykład 1.1. Zdanie „Jeśli śnieg jest biały, to śnieg jest czarny” jest fałszywe bo jest to implikacja z fałszywym następkiem. Zatem jego negacja jest prawdziwa. Zgodnie z powyższą regułą negacja ta będzie miała postać „Śnieg jest biały i śnieg nie jest czarny”. $\square$

1.1.2 Kwantyfikatory

Funkcja zdaniowa to wyrażenie zawierające zmienną, które staje się zdaniem, gdy za zmienną podstawimy element, należący do *dziedziny* (zakresu) funkcji zdaniowej. Funkcja zdaniowa może mieć również dwie lub więcej zmiennych.

Przykład 1.2. Funkcją zdaniową jest wyrażenie „ x jest większy od 2”; dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych. Dla pewnych liczb x otrzymane zdanie będzie prawdziwe, dla innych fałszywe, ale zawsze będzie miało jakąś wartość logiczną.

Przykładem funkcji zdaniowej z dwiema zmiennymi może być wyrażenie „ x jest żoną y -a”. Zakresem zmiennej x jest zbiór kobiet, a zmiennej y zbiór mężczyzn. $\square$

Podstawiając konkretny element za zmienną w funkcji zdaniowej otrzymujemy zdanie. Innym sposobem utworzenia zdania z funkcji zdaniowej jest użycie kwantyfikatora ogólnego lub szczególnego.

Kwantyfikator ogólny, oznaczany przez $\forall$ (z angielskiego „all”) i czytany „dla każdego”, oznacza, że w funkcji zdaniowej podstawiamy wszystkie dopuszczalne wartości zmiennej. Niech $P(x)$ będzie taką formą zdaniową, z dziedziną X . Zdanie $\forall x \in X : P(x)$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ustalonego $x \in X$ zdanie $P(x)$ jest prawdziwe.

Na przykład funkcja zdaniowa $x^2 > 0$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, staje się zdaniem fałszywym, gdy poprzedzimy ją kwantyfikatorem ogólnym.

Kwantyfikator szczególny, oznaczany przez $\exists$ (z angielskiego „exists”) i czytany „istnieje”, oznacza, że wybieramy z zakresu zmiennej tylko jeden element. Jeśli istnieje element, dla którego utworzone zdanie staje się prawdziwe, to prawdziwe jest również zdanie utworzone przez postawienie kwantyfikatora szczególnego przed funkcją zdaniową.

Na przykład zdanie $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ jest prawdziwe. Możemy wskazać liczbę rzeczywistą (a nawet nieskończenie wiele takich liczb), której kwadrat jest większy od zera.

Jeśli funkcja zdaniowa zawiera dwie zmienne, to aby utworzyć z niej zdanie, musimy użyć dwu kwantyfikatorów: jednego dla pierwszej zmiennej i jednego dla drugiej zmiennej. Jeśli są to kwantyfikatory tego samego typu, tzn. oba są ogólne lub oba szczególne, to ich kolejność nie ma znaczenia. Jeśli są to kwantyfikatory różnego typu, to kolejność ich występowania jest istotna i nie wolno jej zmieniać. Zmiana może spowodować, że ze zdania prawdziwego otrzymamy zdanie fałszywe.

Rozważmy następujący przykład. Niech zmienna x przebiega zbiór zameężnych kobiet, a zmienna y zbiór żonatych mężczyzn. Wtedy zdanie $\forall y \exists x : x$ jest żoną y -a jest prawdziwe. Po przestawieniu kwantyfikatorów otrzymamy zdanie $\exists x \forall y : x$ jest żoną y -a, które jest oczywiście fałszywe (dlaczego?).

Zaprzeczaniem zdań z kwantyfikatorami kierują *prawa de Morgana* dla kwantyfikatorów:

$$\sim (\exists x : P(x)) \Leftrightarrow \forall x : \sim P(x)$$

$$\sim (\forall x : P(x)) \Leftrightarrow \exists x : \sim P(x)$$

Znajomość tych praw pozwoli precyzyjnie sformułować wiele zdań pojawiających się w codziennym życiu.

Przykład 1.3. Rozważmy zdanie: $\exists x : x$ jest ojcem x . Zdanie jest oczywiście fałszywe, zatem jego negacja jest prawdziwa: $\forall x$: nieprawda, że x jest ojcem x , lub: $\forall x : x$ nie jest ojcem x . Ostatnie zdania brzmią trochę sztucznie. Prościej powiedzielibyśmy: żaden x nie jest swoim ojcem. Kwantyfikator ogólny zginął tutaj w słowie „żaden”, które zawiera w sobie przeczenie. Jest to jedna z niekonsekwencji języka polskiego. Język angielski zachowuje się tu bardziej poprawnie. $\square$

Zanotujmy jeszcze reguły rozdzielania dla zdań z kwantyfikatorami:

$$\exists x : P(x) \vee Q(x) \Leftrightarrow (\exists x : P(x)) \vee (\exists x : Q(x))$$

i

$$\forall x : P(x) \wedge Q(x) \Leftrightarrow (\forall x : P(x)) \wedge (\forall x : Q(x)).$$

Zauważmy, że kwantyfikator szczegółowy współgra z alternatywą, a ogólny z koniunkcją. Zamiana kwantyfikatorów w powyższych formułach może prowadzić do zdań fałszywych.

Przykład 1.4. Zdanie

$$\forall x : P(x) \vee Q(x)$$

może nie być równoważne zdaniu

$$(\forall x : P(x)) \vee (\forall x : Q(x)).$$

Niech x należy do zbioru ludzi, $P(x)$ oznacza funkcję zdaniową „ x jest kobietą”, a $Q(x)$ funkcję zdaniową „ x jest mężczyzną”. Wtedy pierwsze zdanie „każdy człowiek jest kobietą lub mężczyzną” jest prawdziwe, natomiast drugie „każdy człowiek jest kobietą lub każdy człowiek jest mężczyzną” jest fałszywe. $\square$

1.1.3 Zbiory

Zbiór jest podstawowym pojęciem w matematyce. Każdy zbiór składa się z *elementów*. Zbiory będziemy oznaczali dużymi literami (np. A, B, W, Z), a ich elementy małymi (np. a, x, y, t). Elementy mogą być rzeczami (np. zbiór płaszczy w szatni) lub tworem abstrakcyjnymi (np. zbiór liczb). Zbiory mogą być skończone lub nieskończone. Często definiujemy zbiór wyliczając jego elementy, np.

$$A = \{Jola, Ewa, Krysia\} \text{ lub } B = \{27\}.$$

Możemy to zrobić również dla zbiorów nieskończonych, np.

$$C = \{1, 3, 5, 7, \dots\},$$

zakładając, że reguła dopisywania kolejnych elementów jest zrozumiała dla czytelnika. Zapis

$$a \in A$$

oznacza, że element a należy do zbioru A . Jeśli a nie należy do A , piszemy $a \notin A$. Zbiór A zawiera się w zbiorze B , co zapisujemy $A \subset B$, jeśli

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Mówimy wtedy, że zbiór A jest *podzbiorem* zbioru B , zaś zbiór B jest *nadzbior*em zbioru A .

Podstawowe działania, które wykonujemy na zbiorach to suma, iloczyn (przecięcie) i dopełnienie. Zakładamy, że wszystkie rozważane zbiory zawierają się w jednym dużym zbiorze X , zwanym *przestrzenią*. Suma i iloczyn zbiorów są działaniami dwuargumentowymi, które definiujemy przy pomocy alternatywy i koniunkcji,

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B,$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B.$$

Dopełnienie zbioru A , oznaczane przez A' , zdefiniowane jest przy użyciu negacji,

$$x \in A' \Leftrightarrow \sim x \in A \Leftrightarrow x \notin A.$$

Czasami potrzebna będzie nam różnica zbiorów A i B , którą definiujemy następująco:

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B.$$

Łatwo zauważyć, że $A \setminus B = A \cap B'$. Mówimy, że zbiory A i B są *rozłączne*, jeśli $A \cap B = \emptyset$. Poniższe stwierdzenie zawiera inne ważne własności działań na zbiorach, których będziemy później potrzebować. Nawiasy, jak zwykle, wyznaczają kolejność wykonywanych działań.

Stwierdzenie 1.5. Dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą następujące równości:

- a) $A \cap B = B \cap A$ oraz $A \cup B = B \cup A$,
- b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ oraz $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
- c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
- e) $(A \cap B)' = A' \cup B'$,
- f) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

□

Uwaga 1.6. Punkt a) stwierdzenia 1.5 mówi, że suma i iloczyn zbiorów są przemienne, a punkt b), że są łączne. Punkty c) i d) opisują prawa rozdzielności, natomiast e) i f) zawierają prawa de Morgana. Zauważ, że wszystkie własności występujące w stwierdzeniu 1.5 są prostym przeniesieniem analogicznych własności odpowiednich operacji logicznych. □

Inną często używaną konstrukcją będzie iloczyn kartezjański dwóch zbiorów. Jest on zdefiniowany następująco:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Para elementów (a, b) jest tutaj parą uporządkowaną, tzn. istotna jest kolejność występujących w niej elementów.

Rozważane zbiory będą zwykle zbiorami liczbowymi. Najważniejsze z nich to zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, zbiór liczb całkowitych

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ oraz zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Liczby wymierne to liczby, które można zapisać w postaci ułamka $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Zbiór liczb rzeczywistych, oprócz liczb wymiernych, zawiera również liczby niewymierne, jak np. $\sqrt{3}$, $-\sqrt[3]{7}$ czy π . Wszystkie wymienione zbiory są nieskończone oraz

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Przez $[a, b]$ będziemy oznaczać przedział domknięty na prostej $\mathbb{R}$ (z końcami), a przez (a, b) przedział otwarty, tzn.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \wedge x \leq b\}, \quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : x > a \wedge x < b\}.$$

Forma zdaniowa występująca po dwukropku określa jakie elementy zbioru $\mathbb{R}$ należą do przedziału, który definiujemy. Ponieważ zapis (a, b) używany jest również do oznaczania pary uporządkowanej, niektórzy autorzy przedział otwarty oznaczają przez $]a, b[$.

Będziemy często rozważali iloczyn kartezjański $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Oznaczamy go zwykle przez $\mathbb{R}^2$ i utożsamiamy z płaszczyzną, na której naniesiono prostokąt (kartezjański) układ współrzędnych. Każdemu punktowi na płaszczyźnie można wtedy jednoznacznie przyporządkować parę jego współrzędnych.

1.1.4 Zadania

1.1. Zbudować schematy logiczne zdań:

- a) Jeżeli jesteś inteligentny, to nieprawda, że nie poradzisz sobie na studiach i masz kłopoty z nauką języka obcego.
- b) Myśl ma wartość wyłącznie wtedy, gdy nieprawdą jest, że nie przeradza się w czyn

lub jest zbyt teoretyczna.

Rozwiązanie:

a) Niech :

$p \equiv$ Jesteś inteligentny.

$q \equiv$ Poradzisz sobie na studiach.

$r \equiv$ Masz kłopoty z nauką języka obcego.

Wtedy zdanie "Jeżeli jesteś inteligentny, to nieprawda, że nie poradzisz sobie na studiach i masz kłopoty z nauką języka obcego." zapiszemy w postaci: $p \Rightarrow \sim (\sim q \wedge r)$.

b) Oznaczmy poszczególne zdania składowe:

$p \equiv$ Myśl ma wartość.

$q \equiv$ Myśl przeradza się w czyn.

$r \equiv$ Myśl jest zbyt teoretyczna.

Zdanie *Myśl ma wartość wyłącznie wtedy, gdy nieprawdą jest, że nie przeradza się w czyn lub jest zbyt teoretyczna.* ma postać: $p \Leftrightarrow \sim (\sim q \vee r)$.

1.2. Wykazać, że podane wyrażenia rachunku zdań są tautologiami:

a) $((\sim q) \Rightarrow (\sim p)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$,

b) $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q)$.

Rozwiązanie:

a) Układamy tablicę wartości logicznych zdań p i q i poszczególnych funktorów:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow q$	$((\sim q) \Rightarrow (\sim p)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Wszystkie "jedyńki" w ostatniej kolumnie oznaczają prawdziwość wyrażenia dla dowolnych wartościowań zdań p i q , więc jest to tautologia.

b) Zastosujemy tutaj skróconą metodę zero-jedynkową (wygodną w przypadku implikacji). Założymy, że dane zdanie jest fałszywe. Jeżeli to założenie nie doprowadzi nas do sprzeczności, to rzeczywiście wykażemy fałszywość zdania dla pewnych wartościowań. Nie będzie to więc tautologia. Jeżeli natomiast w naszym rozumowaniu natrafimy na sprzeczność, to tym samym zaprzeczmy założeniu o fałszywości wyrażenia. Czyli, jeśli skorzystamy z prawa podwójnego przeczenia $\sim (\sim s) \Leftrightarrow s$, zdanie będzie zawsze prawdziwe - będzie tautologią. Całe wyrażenie jest implikacją o poprzedniku: $(p \wedge q) \Rightarrow r$ oraz następniku: $(p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q$. Implikacja jest fałszywa jedynie wtedy, gdy poprzednik jest prawdziwy:

$$((p \wedge q) \Rightarrow r) \equiv 1 \quad (1.2)$$

a następnik fałszywy:

$$((p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q) \equiv 0 \quad (1.3)$$

Z wartościowania 1.3 znów otrzymujemy, że:

$$(p \wedge \sim r) \equiv 1 \text{ oraz } (\sim q) \equiv 0$$

czyli $p \equiv 1$, $r \equiv 0$, $q \equiv 1$. Przy takim wartościowaniu sprawdzmy wartościowanie poprzednika: $((1 \wedge 1) \Rightarrow 0) \equiv 0$, czyli zachodzi sprzeczność z wartościowaniem 1.2, więc całe wyrażenie jest tautologią.

1.3. Zbudować kwantyfikatorskie schematy podanych zdań:

a) Nieprawdą jest, że wszyscy umieją robić dobre interesy.

b) Istnieją ludzie nie robiący dobrych interesów.

c) Istnieje rzecz, której nikt nie kupi.

Rozwiązanie:

a) $\sim \forall x : P(x)$, gdzie $P(x)$ - x umie robić dobre interesy.

b) $\exists x : \sim P(x)$, gdzie $P(x)$ jest takie jak wyżej.

Warto zauważyć, że zdania a) i b) są równoważne.

c) $\exists x \forall y : \sim (y \text{ kupi } x)$.

1.4. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów zachodzi równość:

$$A \setminus (A \cap B) = A \setminus B.$$

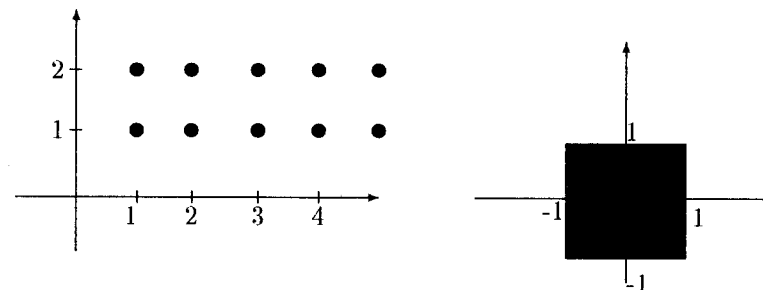
Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (A \cap B) &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin (A \cap B)) \Leftrightarrow (x \in A \wedge \sim (x \in A \wedge x \in B)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \notin A \vee x \notin B)) \Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow (x \in A \setminus B). \end{aligned}$$

1.5. Podać interpretację geometryczną zbiorów:

a) $\mathbb{N} \times \{1, 2\}$, b) $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Rozwiązanie: Odpowiednie ilustracje podano na rysunku 1.1.



Rysunek 1.1: Interpretacja geometryczna zbiorów $\mathbb{N} \times \{1, 2\}$ oraz $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1.6. Zbudować schematy logiczne niżej podanych zdań:

- Podniesiemy cenę produktu lub kupimy tańsze materiały.
- Osiągniemy cel wtedy i tylko wtedy, gdy wykorzystamy wszystkie środki.
- Jeżeli jutro nie załatwisz kredytu, to nie dojdzie do transakcji.
- Nieprawda, że jeżeli dokonamy komputeryzacji zakładu, to nie będzie łatwiej prowadzić dokumentację.
- Nieprawda, że nie wykonałem prawidłowo zadania i nie dotrzymałem umowy.

1.7. Sformułować w sposób stylistycznie poprawny sens wyrażenia:

- $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ dla zdań następującej treści:
p - cena towaru rośnie, q - popyt na dany towar maleje, r - firma traci klientów.
- $(p \Rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$, gdzie: p - cena towaru rośnie, q - podaż towaru rośnie.

1.8. Sprawdzić, czy następujące wyrażenia są tautologiami:

- $p \vee (\sim p)$,
- $(\sim \sim p) \Leftrightarrow p$,
- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$,
- $(p \wedge (p \wedge q)) \Rightarrow q$,
- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)$,
- $(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q) \Rightarrow p)$,
- $(\sim p) \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$,
- $(p \wedge p) \Rightarrow p$,
- $p \Rightarrow ((\sim p) \vee q)$,
- $p \Rightarrow ((\sim q \wedge q) \Rightarrow r)$,
- $((p \vee q) \Rightarrow (r \wedge (\sim r))) \Rightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$,
- $((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge ((p \vee q) \Rightarrow \sim r) \Rightarrow (p \wedge q \wedge \sim r)$,
- $(p \vee q \vee r) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow ((q \vee r) \wedge \sim p))$.

1.9. Zapisać symbolicznie zdanie: "Nieprawda, że ani na towar A, ani na towar B nie ma popytu". Zapisane zdanie przekształcić na równoważne mu prostsze zdanie.

1.10. Zapisać następujące zdania w równoważnej formie:

- Nieprawda, że akcje Banku Śląskiego nie pójdą w górę na następnej sesji.
- Jeśli myślisz, to podejmujesz właściwe decyzje.
- Nie jest możliwe, abyś nie mógł tego zorganizować.
- Nieprawda, że to przedsiębiorstwo nie upada.
- Jeśli liczba miejsc nie jest nieograniczona, to ważna jest kolejność zgłoszeń.

1.11. Zaprzeczyć następującym zdaniom:

- Jeśli wprowadzimy komputery, to zatrudnimy mniej pracowników biurowych.
- Jeśli firma przynosi większe zyski, to pracownicy więcej zarabiają.
- Kupię obligacje lub akcje "Wedla".
- Nieprawda, że ludzie nie mówią kłamstw.

1.12. Rozważane są decyzje p, q oraz s. Jeżeli podejmie się decyzje p i q, to pociągną one za sobą decyzję s, jeżeli podejmie się decyzje q i s, to pociągną one za sobą p. Czy wynika stąd, że jeżeli podejmie się decyzje p i s, to pociągną one decyzję q? Odpowiedź uzasadnij.

1.13. Czy prawdziwe jest zdanie: Jeżeli nie znam logiki, to, jeśli znam logikę, to urodziłem się w IV wieku p.n.e.

1.14. Czy prawdziwe jest zdanie: Jeżeli liczba naturalna a dzieli się przez 3, to z faktu, że a nie dzieli się przez 3 wynika, że a dzieli się przez 5.

1.15. Zapisać za pomocą symboli logicznych i sprawdzić poprawność rozumowania:
a) Dzisiaj jest ostatni dzień wakacji, a jeśli dzisiaj jest ostatni dzień wakacji, to jutro będzie pierwszy dzień roku akademickiego, a więc jutro będzie pierwszy dzień roku akademickiego.

b) Jeżeli wiesz, że umarłeś, to umarłeś, a jeżeli wiesz, że umarłeś to nie umarłeś, a więc nie wiesz, że umarłeś.

1.16. Zbudować kwantyfikatorowe schematy następujących zdań:

- Wszyscy studenci marketingu są operatywni.
- Niektórzy studenci marketingu są operatywni.
- Niektórzy studenci marketingu nie są operatywni.
- Żaden student marketingu nie jest operatywny.
- Istnieje film, który obejrżeli wszyscy.
- Nikt nie potrafi wszystkiego.
- Każdy towar zostanie kupiony.

1.17. Uzupełnić zapis: $\sim \forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \dots)$. Sprawdzić poprawność następującego rozumowania: "Nie jest prawdą, że każdy człowiek mający ciemne włosy ma ciemne oczy, bo są bruneci z niebieskimi oczami".

1.18. Podać równoważne wypowiedzi:

- Nieprawdą jest, że istnieje człowiek, który potrafi wszystko.
- Nie każda inwestycja przynosi duże zyski.
- Nie każdy popyt towaru mówi o jego wysokiej jakości.
- Nie wszyscy ludzie mogą piastować wysokie stanowiska.

1.19. Podać zaprzeczenie następującego wyrażenia:

- Istnieje rzecz, której nie da się kupić.
- Każdy pomysł jest dobry.
- Istnieje produkt, którego nie da się zareklamować.
- Nie istnieje towar, który nie znajdzie nabywcę.
- Każdy samochód ma właściciela.

1.20. Czy można przekształcić poniższe wypowiedzi bez zmiany wartości logicznej:

- Każda inwestycja i każdy dobry pomysł przyniosą zyski.
- Istnieją możliwości i istnieją wskazania, by zmienić kierunek produkcji.
- Dla każdego towaru istnieje jego producent.
- Dla każdego towaru istnieje liczba będąca jego ceną.

1.21. Niech $P(x)$ i $Q(x)$ będą funkcjami zdaniowymi następującej treści:
 $P(x)$ - jest towarem tanim,

$Q(x)$ - jest towarem niskiej jakości,
z badać prawdziwość następujących wyrażeń i uzasadnić, dlaczego pierwsze jest równoważnością a drugie implikacją:

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$

$$(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)).$$

1.22. Ocenic wartość logiczną zdań:

- a) $\forall x \in \mathbb{R} : x = 2x$, b) $\exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = x$,
c) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 > 0$, d) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{N} : x \geq y$,
e) $\forall y \in \mathbb{N} \exists x \in \mathbb{R} : x \geq y$, f) $\exists z \in \mathbb{R} \forall s \in \mathbb{R} : zs = 1$,
g) $\forall s \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} : zs = 1$, h) $\exists a \exists x : x = 2a$.

1.23. Zapisać negację następujących zdań i ocenić jej wartość logiczną:

- a) $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + 1 = 6$, b) $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 0$,
c) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x^2 - y^2 \geq 0$, d) $\forall x \in \mathbb{R}_+ \exists y \in \mathbb{R}_+ : x^2 + y^2 = 0$,
e) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 > 0$, f) $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = x$.

1.24. Na dowolnym przykładzie dwóch nierozłącznych zbiorów sprawdzić prawa de Morgana dla zbiorów.

1.25. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów prawdziwa jest równość:

- a) $A' \cap A = \emptyset$, b) $A \setminus B = A \cap B'$,
c) $(A \cap B)' = A' \cup B'$, d) $(A \cup B)' = A' \cap B'$,
e) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
g*) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

1.26. Niech $A = \{a, b, c\}$ oraz $B = \{a, d, e\}$. Wypisać elementy zbiorów: $A \times B$, $B \times A$. Czy $A \times B = B \times A$?

1.27. Podać interpretację geometryczną zbiorów:

- a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, b) $\mathbb{N} \times \{1\}$,
c) $\{-1, 1\} \times \mathbb{N}$, d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$,
e) $X \times \{0, 1\}$, jeżeli $X = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\}$,
f) $X \times Y$, jeżeli $X = \{x \in \mathbb{N} : 3 < x < 6\}$ i $Y = \{y \in \mathbb{R} : y^2 - 5y + 6 \leq 0\}$,
g) $X \times Y$, jeżeli $X = \{x \in \mathbb{R} : |x| \neq 1\}$ i $Y = \{y \in \mathbb{R} : |y| > 0\}$.

1.28. Niech W_1 będzie zbiorem liczb naturalnych mających resztę 1 z dzielenia przez 3, a W_2 - zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 3. Podać przykłady elementów zbioru $W_1 \times W_2$.

1.29. Z czym można utożsamiać iloczyn kartezjański $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}\}$. Podać interpretację zbioru $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

1.2 Relacje

Niech X i Y będą dwoma zbiorami. Za chwilę zdefiniujemy pojęcie relacji. Intuicyjnie, relacja oznacza pewien związek między elementami zbioru X i elementami zbioru Y .

Relacją (między zbiorami X i Y) nazywamy dowolny podzbiór R iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$. Jeśli para (x, y) należy do zbioru R , mówimy, że element x jest w relacji R z elementem y , co zapisujemy xRy .

Z formalnego punktu widzenia każdy podzbiór iloczynu $X \times Y$ jest relacją. Nas będą jednak interesować tylko niektóre z nich, posiadające dodatkowe własności lub pojawiające się w zastosowaniach.

Przykład 1.7. Niech X oznacza zbiór dziewcząt, a Y zbiór chłopców na pierwszym roku. Zdefiniujmy relację R następująco: $(x, y) \in R$, jeśli x lubi y -a. Zauważmy następującą cechę tej relacji. Dziewczyna x może lubić kilku (a nawet wszystkich) chłopców. Może też nie lubić żadnego. Podobnie dany chłopiec y może być lubiany przez jedną, kilka lub żadną z dziewczyn. $\square$

Jeśli potrafimy narysować zbiór $X \times Y$, to możemy na takim rysunku zaznaczyć dowolną relację między zbiorami X i Y . Taka graficzna reprezentacja zwykle ułatwia analizę relacji. Jeśli X i Y są zbiorami liczbowymi, ich iloczyn kartezjański jest podzbiorem płaszczyzny (lub całą płaszczyzną), a zatem ma prostą reprezentację graficzną. To samo dotyczy relacji między zbiorami liczbowymi.

Przykład 1.8. Niech $X = Y = \mathbb{R}$. Zdefiniujmy relację R następująco: $xRy \Leftrightarrow |x| + |y| \leq 1$. Łatwo sprawdzić, że zbiór punktów (x, y) płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ należących do relacji tworzy kwadrat (patrz rys. 1.2). $\square$

1.2.1 Relacja równoważności

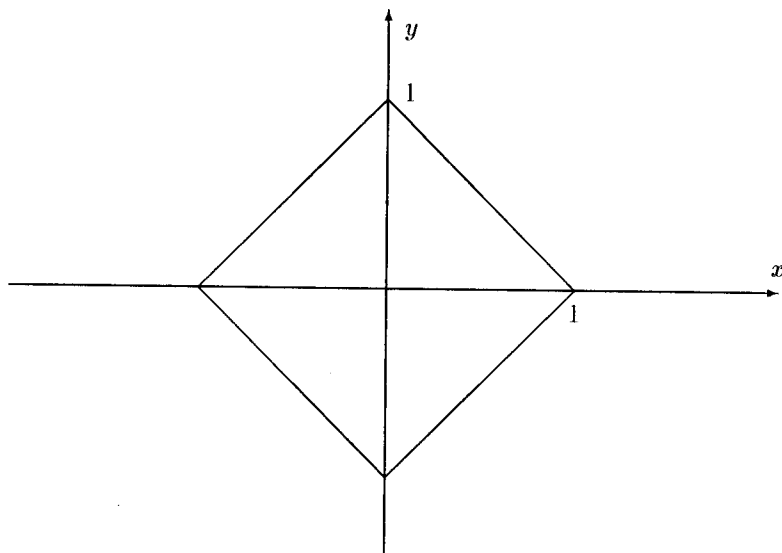
Teraz będziemy rozważać relacje w iloczynie $X \times X$. Ponieważ rozważamy elementy tylko zbioru X , mówimy często, że taka relacja określona jest w zbiorze X .

Relację R określoną w zbiorze X nazywamy *relacją równoważności*, jeśli spełnia ona następujące warunki:

1. $\forall x \in X : xRx$ (zwrotność),
2. $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$ (symetria),
3. $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (przechodność).

Relacje równoważności są szczególnie ważne. Pozwalają one rozbić zbiór X na rozłączne podzbiory o odpowiednich własnościach (patrz następny podrozdział).

Przykład 1.9. Niech X będzie zbiorem ludzi. Zdefiniujmy relację R następująco: xRy , jeśli buty x -a pasują na y -a („pasują” oznacza, że nie są ani za duże ani za małe). Sprawdź, że relacja R spełnia wszystkie warunki relacji równoważności. $\square$



Rysunek 1.2: Graficzna reprezentacja relacji z przykładu 1.8

Przykład 1.10. Niech X będzie zbiorem mieszkańców Białegostoku. Określamy, że xRy , jeśli x mieszka blisko y -a. Przyjmijmy, że „blisko” oznacza nie dalej niż 1 km. Jasne jest, że dwa pierwsze warunki są spełnione. Natomiast warunek przechodności nie jest spełniony, gdyż można znaleźć takich mieszkańców x , y i z , że x i y mieszkają blisko siebie, y i z mieszkają blisko siebie, ale x i z mieszkają w odległości większej niż 1 km. Zatem relacja *bliskości* R nie jest relacją równoważności. $\square$

Przykład 1.11. Niech X będzie zbiorem ludzi. Określimy relację R następująco: xRy , jeśli x zna y -a. Tutaj tylko pierwszy warunek jest spełniony (zakładamy, że każdy zna siebie). Relacja ta nie jest ani symetryczna, ani przechodnia. Podaj odpowiednie przykłady. $\square$

1.2.2 Rozwarstwienie zbioru

Niech R będzie relacją równoważności w zbiorze X . Dla elementu $x \in X$ zdefiniujemy *warstwę* (lub *klasę równoważności*) wyznaczoną przez x względem relacji R jako następujący zbiór

$$[x] := \{y \in X : xRy\}.$$

Zatem warstwa wyznaczona przez x składa się ze wszystkich elementów zbioru X , które są w relacji z elementem x . W szczególności element x jest w relacji z sobą (pierwsza własność relacji równoważności), zatem $x \in [x]$.

Rozważmy relację równoważności R z przykładu 1.9. Załóżmy, że x nosi buty o numerze 41. Wtedy warstwa wyznaczona przez x składa się z wszystkich ludzi noszących buty o takim właśnie numerze. Inne warstwy będą wyglądały podobnie. Każda warstwa będzie składała się z ludzi noszących pewien ustalony numer butów (niekoniecznie 41). Przykład ten pokazuje ważną własność warstw zdefiniowanych przez relację równoważności.

Twierdzenie 1.12. Niech R będzie relacją równoważności w zbiorze X . Wtedy dwie warstwy względem tej relacji albo są rozłączne, albo się pokrywają. $\square$

Ponieważ każdy element należy do „swojej” warstwy, więc zbiór X rozpada się na rozłączne warstwy. W każdej warstwie znajdują się „podobne” elementy, równoważne ze względu na relację R . Taką operację podziału zbioru X na warstwy nazywamy *rozwarstwieniem* zbioru X . Jest to rodzaj klasyfikacji elementów zbioru X , w której abstrahujemy od szczególnych cech elementów tego zbioru, skupiając się na cechach istotnych dla relacji. Na przykład w warstwie ludzi noszących buty o numerze 41 znajdują się ludzie w różnym wieku, różnej płci, o różnych ilorazach inteligencji. Będzie łączyć ich tylko jedno: numer buta. Ludzie z tej samej warstwy mogą bez przeszkód zamieniać się butami — nie grozi im otarcie skóry.

Rozwarstwienia zbioru nie uda się wykonać, gdy relacja R nie będzie relacją równoważności. Na przykład dla relacji bliskości warstwy nie będą rozłączne. Będą jednak dobrze określone. Warstwa wyznaczona przez ciebie będzie składać się z wszystkich mieszkańców Białegostoku, którzy mieszkają blisko ciebie (nie dalej niż 1 km).

Rozważmy jeszcze jeden ważny przykład.

Przykład 1.13. Przy pomocy relacji równoliczności można wprowadzić liczby naturalne. Niech X będzie zbiorem wszystkich zbiorów skończonych. Zbiory A i B są *równoliczne*, jeśli mają jednakową liczbę elementów (każde dziecko wie jak to sprawdzić). Relacja równoliczności jest relacją równoważności. Każda warstwa zawiera zbiory mające jednakową liczbę elementów, zatem może być utożsamiona z pewną liczbą naturalną, równą liczbie elementów każdego zbioru w tej warstwie. $\square$

1.2.3 Relacje porządku

Relację R w zbiorze X nazywamy relacją *porządku* (lub relacją *częściowego porządku*), jeśli spełnia ona następujące warunki:

1. $\forall x \in X : xRx$ (zwrotność),
2. $\forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ (antysymetria),
3. $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (przechodność).

Relacja porządku jest oznaczana często przez znak słabej nierówności $\leq$, gdyż słaba nierówność dla liczb rzeczywistych jest typowym przykładem relacji porządku.

Mówimy, że relacja porządku $\leq$ w zbiorze X jest relacją porządku *liniowego*, jeśli spełnia ona dodatkowy warunek:

$$\forall x, y \in X : x \leq y \vee y \leq x. \quad (1.4)$$

Przykład 1.14. Standardowa relacja $\leq$ w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest relacją porządku liniowego. Rozważmy inną naturalną relację porządku. Niech X oznacza zbiór wszystkich podzbiorów pewnego ustalonego zbioru Ω (np. $\Omega = \mathbb{R}$). Wtedy relacja inkluzji $\subset$ jest relacją częściowego porządku w X . Ponieważ inkluzja $A \subset B$ dopuszcza możliwość równości, więc w szczególności jest ona zwrotna: $A \subset A$. W odróżnieniu jednak od poprzedniej relacji inkluzja nie jest relacją porządku liniowego. Niech, na przykład, $\Omega = \mathbb{R}$. Rozważmy dwa elementy A i B zbioru X , czyli dwa podzbiory zbioru $\mathbb{R}$: $A = [0, 1]$ i $B = [1, 2]$. Wtedy warunek (1.4) nie jest spełniony, bo żadna z inkluzji $A \subset B$ i $B \subset A$ nie zachodzi. $\square$

Przykład 1.15. Ważnym przykładem porządku liniowego jest porządek leksykograficzny. Jest on używany do ustalania kolejności słów w słownikach i encyklopediach. Zbiorem, w którym rozważamy ten porządek, jest zbiór słów zapisanych w pewnym ustalonym alfabecie (np. alfabecie języka polskiego). Porządek leksykograficzny można przenieść na bardziej abstrakcyjne struktury. Często zachodzi konieczność liniowego uporządkowania punktów na płaszczyźnie $X = \mathbb{R}^2$. Porządek leksykograficzny definiujemy wtedy następująco:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ lub } x_1 = x_2 \text{ i } y_1 \leq y_2.$$

Mamy, na przykład, $(1, 5) \leq (2, 3)$ i $(2, 3) \leq (2, 5)$.

Inny, naturalny, porządek na płaszczyźnie może być wprowadzony następująco:

$$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \text{ i } y_1 \leq y_2.$$

Zauważmy, że R jest nie jest porządkiem liniowym, ponieważ istnieją elementy zbioru $\mathbb{R}^2$, których nie można porównać. Na przykład nie zachodzi ani $(1, 3) R (2, 2)$, ani $(2, 2) R (1, 3)$, czyli warunek (1.4) nie jest spełniony. $\square$

1.2.4 Zadania

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1.30. Zbadać własności relacji $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

- a) $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$, b) $xRy \Leftrightarrow |x - y| < 1$,
- c) $xRy \Leftrightarrow x < y \vee y < x$, d) $zRs \Leftrightarrow z = s \vee z > s$.

1.31. Zbadać własności relacji $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : tRv \Leftrightarrow \text{reszta z dzielenia } t + v \text{ przez } 3 \text{ wynosi } 1$.

1.2. RELACJE

W poniższych zadaniach sprawdzić, czy podane relacje są relacjami równoważności. Jeśli tak, to podać klasy abstrakcji tych relacji.

1.32. Niech U oznacza zbiór ludzi oraz niech $a, b \in U$

- a) $aRb \Leftrightarrow$ "a jest rówieśnikiem b",
- b) $aRb \Leftrightarrow$ "a jest krewnym b",
- c) $aRb \Leftrightarrow$ "a jest bratem lub siostrą b".

1.33. Niech $A = \{a, b, i, o\}$, $(x, y) \in A \times A$, $xRy \Leftrightarrow$ "istnieje słowo zaczynające się na x a kończące na y ".

1.34. Niech P będzie zbiorem produktów, $(p_1, p_2) \in P \times P$, $p_1Rp_2 \Leftrightarrow p_1$ "ma taką samą cenę, jak" p_2 .

1.35. Niech M oznacza zbiór ulic pewnego miasta, $(k, l) \in M \times M$, $kRl \Leftrightarrow$ "ulica k jest równoległa do ulicy l ".

1.36. $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, $xRy \Leftrightarrow x$ i y dają taką samą resztę z dzielenia przez 3.

1.37. Dany jest zbiór $A = \{a, b, c\}$ oraz relacja $R \subset A \times A$, $R = \{(a, a), (a, b), (c, b)\}$. Uzupełnić tę relację tak, aby była:

- a) zwrotna, b) przechodnia,
- c) symetryczna, d) relacją równoważności.

Sprawdzić czy poniższe relacje są relacjami porządku w zbiorze X . Czy jest to porządek liniowy?

1.38. Niech X oznacza zbiór ludzi oraz $a, b \in X$. $aRb \Leftrightarrow$ "a nie jest młodszy od b".

1.39. Niech $x, y \in \mathbb{R}$

- a) $xRy \Leftrightarrow x > y \vee y > x$, b) $xRy \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$,
- c) $xRy \Leftrightarrow |x - y| > 0$, d) $xRy \Leftrightarrow x - y + 2 < 0$.

1.40. Niech $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ i $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$

- a) $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2 \wedge y_1 > y_2$,
- b) $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2 \wedge y_1 > y_2 \text{ lub } x_1 < x_2 \wedge y_1 < y_2 \text{ lub } x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$.

1.41. Podać przykład relacji, która jest:

- a) relacją równoważności,
- b) relacją porządku,
- c) relacją porządku liniowego.

1.42. Niech $x, y \in \mathbb{R}$. Na płaszczyźnie XOY wykreślić zbiór punktów (x, y) spełniających relację R :

- a) $xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 9$, b) $xRy \Leftrightarrow x + y > 0 \vee x - y < 0$,
- c) $xRy \Leftrightarrow 2xy < 1$, d) $xRy \Leftrightarrow |x| > |y| \vee x = y$.

1.3 Funkcje

Przez *funkcję* f , określoną na zbiorze X i przyjmującą wartości w zbiorze Y , rozumiemy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$. Taki element y oznaczany jest przez $f(x)$ i nazywany jest *wartością* funkcji f na elemencie x (lub w punkcie x). Funkcję zapisujemy następująco:

$$f : X \longrightarrow Y.$$

Zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji f , a zbiór Y jej *przeciwdziedziną*. Przez $f(X)$ oznaczamy zbiór wartości funkcji f ,

$$f(X) = \{y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)\},$$

który nazywamy *obrazem* funkcji f . Mamy zatem $f(X) \subset Y$.

Jeśli $A \subset X$, to *obrazem zbioru* A względem funkcji $f : X \rightarrow Y$ nazywamy zbiór

$$f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\}.$$

Zatem obraz funkcji f to to samo, co obraz jej dziedziny względem f . Mamy oczywiście $f(A) \subset f(X) \subset Y$.

Przeciwbrazem zbioru B zawartego w przeciwdziedzinie Y względem funkcji f nazywamy zbiór

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Zauważmy, że $f^{-1}(B) \subset X$ oraz $f^{-1}(Y) = X$.

Jeśli $f(X) = Y$, funkcja f nazywa się *suriekcją*. Mówimy też, że funkcja f jest *na*, tzn. odwzorowuje zbiór X na zbiór Y . Funkcja f jest *różnowartościowa* (jest *iniekcją*), jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ zachodzi następująca implikacja: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Funkcja, która jest jednocześnie iniekcją i suriekcją, nazywa się *bijekcją*. Mówimy też, że jest ona *wzajemnie jednoznaczna*.

Przykład 1.16. Niech X będzie zbiorem mieszkańców Białegostoku, a Y zbiorem wszystkich znanych imion. Każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkujemy imię ojca x -a. Takie przyporządkowanie jest funkcją. Nie jest ona jednak ani iniekcją, ani suriekcją.

Przyporządkujmy teraz elementowi $x \in X$ imię syna x -a. Takie przyporządkowanie nie jest funkcją, gdyż nie każdy mieszkaniec Białegostoku ma syna. Co więcej, niektórzy mają dwóch lub więcej synów, co powoduje, że nie można im przyporządkować dokładnie jednego elementu. $\square$

Funkcja, której dziedzina i przeciwdziedzina są zbiorami liczbowymi, nazywa się *funkcją liczbową*.

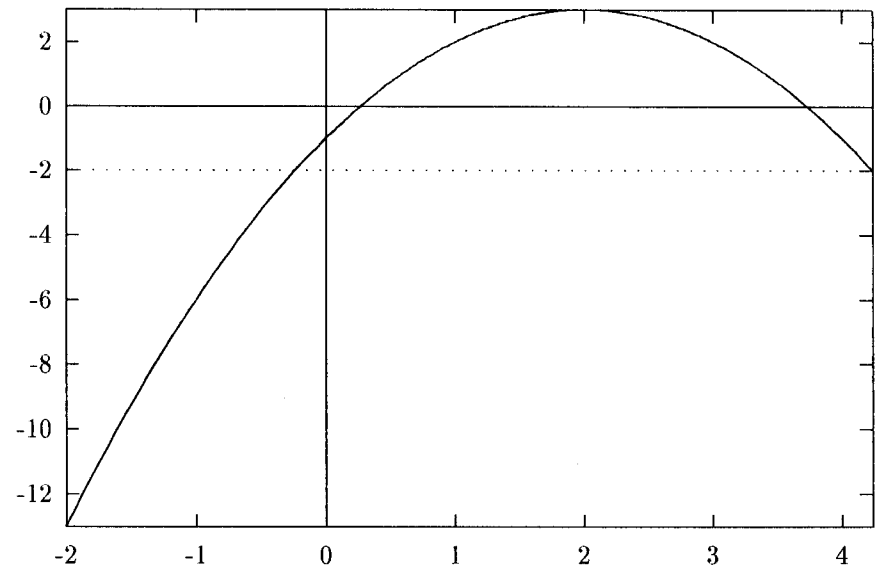
Przykład 1.17. Niech $X = Y = \mathbb{R}$ i $f(x) = x^2$. Funkcja f jest funkcją liczbową. Nie jest ona różnowartościowa, gdyż dla każdego $x \in X$, $f(x) = f(-x)$. Ponieważ $f(X) = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, funkcja ta nie jest też suriekcją. Jeśli zmienimy dziedzinę na $X' = \mathbb{R}_+$, otrzymamy funkcję różnowartościową. Jeśli przyjmiemy nową przeciwdziedzinę $Y' = \mathbb{R}_+$, to rozważane przyporządkowanie będzie również suriekcją. Warto jednak zauważyć, że chociaż wzór, za pomocą którego zapisujemy funkcję, nie uległ zmianie, jest to już inna funkcja (inna dziedzina i przeciwdziedzina) i powinna być inaczej nazwana (np. g). $\square$

Wykresem funkcji $f : X \rightarrow Y$ nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$, zdefiniowany następująco:

$$W(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

Mimo że wykres jest zdefiniowany dla każdej funkcji, rysowanie go ma sens tylko dla funkcji liczbowych. Jeśli $X = Y = \mathbb{R}$, to wykres jest podzbiorem płaszczyzny ($X \times Y = \mathbb{R}^2$). Dla funkcji dostatecznie regularnych wykres jest krzywą płaską.

Przykład 1.18. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, określoną wzorem $f(x) = -x^2 + 4x - 1$. Niech $A = [-2, 3] \subset \mathbb{R}$. Ponieważ A jest podzbiorem zarówno dziedziny jak i przeciwdziedziny, możemy znaleźć zarówno jego obraz jak i przeciwbraz względem f . Najprościej posłużyć się w tym celu wykresem funkcji. Z rysunku 1.3 odczytujemy,



Rysunek 1.3: Obraz i przeciwbraz odcinka $[-2, 3]$

że $f(A) = [-13, 7]$ oraz $f^{-1}(A) = [2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}]$. Końce tego drugiego przedziału

znajdujemy rozwiązując równanie $-x^2 + 4x - 1 = -2$. Zarówno dla obrazu, jak i dla przeciwobrazu, istotne jest uwzględnienie wierzchołka paraboli $(2, 3)$. $\square$

Niech $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$. Zdefiniujemy nową funkcję

$$g \circ f : X \rightarrow Z$$

określoną następująco:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Funkcję $g \circ f$ nazywamy *złożeniem* f i g . Zauważmy, że najpierw działamy na element x funkcją f , a potem funkcją g .

Przykład 1.19. Niech X, Y i f będą takie jak w przykładzie 1.16. Niech Z będzie zbiorem liter alfabetu polskiego. Zdefiniujemy funkcję $g : Y \rightarrow Z$ następująco: $g(y)$ jest pierwszą literą imienia y . Wtedy złożenie $g \circ f$ jest funkcją z X w Z , która x -owi przyporządkowuje pierwszą literę imienia jego ojca. $\square$

Niech id_X oznacza funkcję identycznościową z X w X , tzn. $\text{id}_X(x) = x$ dla każdego $x \in X$. Oczywiście id_X jest bijekcją. Niech $f : X \rightarrow Y$. Funkcję $g : Y \rightarrow X$ nazywamy funkcją odwrotną do funkcji f , jeśli $g \circ f = \text{id}_X$ i $f \circ g = \text{id}_Y$. Oczywiście wtedy f jest funkcją odwrotną do g . Funkcję odwrotną do funkcji f oznaczamy przez f^{-1} . Mówimy wtedy, że funkcja f jest odwracalna lub, że posiada funkcję odwrotną.

Zauważmy, że jeśli funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest odwracalna i $B \subset Y$, to przeciwobraz zbioru B względem funkcji f pokrywa się z obrazem zbioru B względem funkcji f^{-1} . Co więcej, zbiory te są identycznie oznaczone: $f^{-1}(B)$. Warto jednak pamiętać, że symbol f^{-1} ma sens tylko dla funkcji odwracalnej f . Jeśli f nie jest odwracalna, możemy użyć napisu f^{-1} tylko do oznaczenia przeciwobrazu, jak w wyrażeniu $f^{-1}(B)$.

Stwierdzenie 1.20. *Funkcja f jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest bijekcją.* $\square$

Przykład 1.21. Niech X oznacza zbiór mieszkańców Białegostoku, a Y zbiór ich numerów PESEL. Niech funkcja f przyporządkowuje każdemu mieszkańcowi jego numer PESEL. Funkcja f jest wzajemnie jednoznaczna, a zatem odwracalna. Funkcja f^{-1} przyporządkowuje każdemu numerowi ze zbioru Y dokładnie jednego mieszkańca Białegostoku. $\square$

1.3.1 Zadania

1.43. Sprawdzić różnowartościowość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+2}, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases}.$$

1.3. FUNKCJE

Rozwiązanie: Sprawdzimy najpierw różnowartościowość dla $x \neq -2$. Niech $x_1, x_2 \neq -2$, wtedy:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1+1}{x_1+2} = \frac{x_2+1}{x_2+2} \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2+2) = (x_2+1)(x_1+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + 2x_1 + x_2 + 2 = x_1x_2 + 2x_2 + x_1 + 2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

co dowodzi różnowartościowości w tym przypadku.

Rozważmy teraz sytuację, gdy $x_1 = -2, x_2 \neq -2$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 1 = \frac{x_2+1}{x_2+2} \Leftrightarrow x_2+1 = x_2+2 \Leftrightarrow 1 = 2,$$

co daje sprzeczność, czyli wartość 1 jest osiągnięta przez funkcję jedynie dla $x = -2$. Wobec tego funkcja jest różnowartościowa.

1.44. Wyznaczyć funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \log_2(x+1)$, $x > -1$.

Rozwiązanie: Aby wyznaczyć funkcję odwrotną do danej, wyznaczmy x z równania $y = \log_2(x+1)$:

$$x = 2^y - 1$$

Zmieniając rolę zmiennych, tzn. podstawiając za x , $f^{-1}(x)$, a za y zmienną x , otrzymujemy wzór funkcji odwrotnej do funkcji $f(x) = \log_2(x+1)$:

$$f^{-1}(x) = 2^x - 1.$$

Graficznie funkcję odwrotną wyznacza się odbijając wykres danej funkcji symetrycznie względem prostej $y = x$.

1.45. Niech $f(x) = 2^x$ a $g(x) = \log_4 x$, $x > 0$. Wyznaczyć funkcje $h_1 = f \circ g$ i $h_2 = g \circ f$.

Rozwiązanie: Z własności logarytmów oraz z definicji funkcji złożonej mamy

$$h_1(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_4 x) = 2^{\log_4 x} = 4^{\log_4 \sqrt{x}} = \sqrt{x}.$$

$$h_2(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2^x) = \log_4 2^x = x \log_4 2 = \frac{1}{2}x.$$

1.46. Wyznaczyć złożenie funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ x^2 + 2, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Rozwiązanie:

$$f(g(x)) = \begin{cases} g(x), & g(x) < 1 \\ 1, & g(x) \geq 1 \end{cases} = 1, \text{ gdyż } \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geq 2.$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} 2, & f(x) < 0 \\ (f(x))^2 + 2, & f(x) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ x^2 + 2, & 0 \leq x < 1 \\ 3, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1.47. Niech $P(t)$ oznacza funkcję opłaty za rozmowę telefoniczną prowadzoną w I strefie, w zależności od czasu trwania rozmowy (t). Podać wzór, którym można opisać tę funkcję oraz naszkicować wykres.

1.48. Sprawdzić różnowartościowość następujących funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } g(x) &= \frac{1}{1+|x|}, & \text{b) } f(x) &= 2^x - 2^{-x}, \\ \text{c) } f(x) &= \begin{cases} \frac{2x+1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1, \end{cases} & \text{d) } f(x) &= \begin{cases} x+1, & x \leq -1 \\ -x-1, & -1 < x \leq 0 \\ x-1, & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1.49. Wyznaczyć, o ile to możliwe, funkcję odwrotną do danej funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \frac{1}{x+1}, & \text{b) } f(x) &= (x^2 - 1)^3, \\ \text{c) } f(x) &= \sqrt{x} + x + 1, & \text{d) } f(x) &= 2^x + 2^{-x}. \end{aligned}$$

1.50. Liczbie dni pracy przyporządkujemy zarobek brutto za wykonaną pracę (funkcja g), natomiast zarobkom – podatek, który zostanie potrącony (funkcja f). Podać interpretację złożenia $g \circ f$.

1.51. Wyznaczyć złożenie funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= 2x - 1, g(x) = x^2, & \text{b) } f(x) &= 2x + \frac{\pi}{4}, g(x) = \sin x, \\ \text{c) } f(x) &= \operatorname{sgn} x^1, g(x) = x^2, & \text{d) } f(x) &= [x], g(x) = \sin x, \\ \text{e) } f(x) &= x^2, g(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0, \end{cases} \\ \text{f) } f(x) &= \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ 0, & x > 1, \end{cases} & g(x) &= \begin{cases} 2 - x^2, & x \leq 2 \\ 2, & x > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

1.52. Niech $f(x) = \frac{1}{x}$. Rozwiązać równanie $f(f(f(f(x)))) = f(\frac{1}{x})$.

1.53. Narysować wykres funkcji, podać dziedzinę i zbiór wartości:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} x, & \text{dla } -2 \leq x < 1 \\ -x + 2, & \text{dla } 1 \leq x \leq 2, \end{cases} \\ \text{b) } g(x) &= \begin{cases} -3, & \text{dla } x = -3 \\ x, & \text{dla } -3 < x \leq 3 \\ 3, & \text{dla } 3 < x \leq 10, \end{cases} \\ \text{c) } f \circ g, g \circ f, & \text{jeśli funkcje } f \text{ i } g \text{ są takie jak w punktach a i b.} \end{aligned}$$

1.54. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x)$:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \log \log x, & \text{b) } f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 6}}, \\ \text{c) } f(x) &= x^x, & \text{d) } f(x) &= (\sin x)^{\lg x}, \\ \text{e) } f(x) &= \log_{x^2-1} (2^{x-1} + \frac{1}{8}) - \frac{\sqrt{10+3x-x^2}}{x^2-4x}, \\ \text{f) } f(x) &= \frac{\sqrt{x-\frac{|x|}{x}} + \log_2 5}{\log^2 x - 4 \log_2 x \log 2 + 3}, \\ \text{g) } f(x) &= x + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \dots, \\ \text{h) } 1 + f(x) + (f(x))^2 + \dots &= x. \end{aligned}$$

1.55. Podać wykres funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= ||x+1| - 2|, & \text{b) } y &= -|x-1| + 1, \\ \text{c) } g(x) &= \sqrt{x-1} + 2, & \text{d) } f(x) &= 5^{x+2} + 4, \\ \text{e) } f(x) &= \sin(2x - \frac{\pi}{3}) + 1, & \text{f) } f(x) &= [x] + x, \\ \text{g) } f(x) &= \operatorname{sgn} x, & \text{h) } f(x) &= \operatorname{sgn} x + \frac{1}{x}, \\ \text{i) } f_1(x) &= (g \circ h)(x), f_2(x) = (h \circ g)(x), & \text{jeżeli } g(x) &= \operatorname{sgn} x, h(x) = x^2. \end{aligned}$$

1.56. Wyznaczyć obraz i przeciwobraz zbioru $\{-\frac{1}{2}, 0, 1\}$ względem funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \operatorname{sgn} x, & \text{b) } f(x) &= x^3 + 1, \\ \text{c) } f(x) &= [x], & \text{d) } f(x) &= [x] + x, \\ \text{e) } f(x) &= \begin{cases} -1 & \text{dla } x < -1 \\ -x + 2 & \text{dla } -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 & \text{dla } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1.57. Wyznaczyć obraz i przeciwobraz odcinka $(-1, 1]$ względem funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= x^2 + 1, & \text{b) } f(x) &= 2^{x-1} + 1, \\ \text{c) } f(x) &= \operatorname{sgn} x + x, & \text{d) } f(x) &= [x] + x, \\ \text{e) } f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{dla } x < -2 \\ x & \text{dla } -2 \leq x \leq 0 \\ -x & \text{dla } x > 0, \end{cases} \\ \text{f) } f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{dla } x < -\frac{1}{2} \\ 2x & \text{dla } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ x^2 & \text{dla } x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

1.58. Wyznaczyć obraz i przeciwobraz zbioru $[-1, 1) \cup (2, 5]$ względem funkcji podanych w poprzednim zadaniu.

Rozdział 2

Algebra

2.1 Układy równań liniowych

2.1.1 Układy równań dwóch zmiennych

Rozważmy następujący układ równań liniowych

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Możemy założyć, że przynajmniej jeden ze współczynników a i b jest różny od zera. W przeciwnym przypadku, jeśli $a = b = 0$, dostajemy albo równanie sprzeczne ($e \neq 0$), albo tożsamościowe ($e = 0$). To samo dotyczy drugiego równania. Przez *rozwiązanie* układu (2.1) rozumiemy parę liczb (x, y) , spełniającą oba równania.

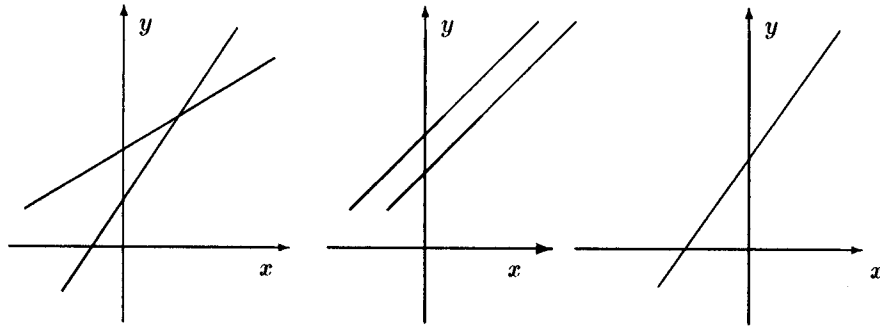
Każde równanie w (2.1) opisuje prostą na płaszczyźnie. Zatem układ równań opisuje zbiór punktów przecięcia tych prostych. Zwykle zbiór ten składa się tylko z jednego punktu, ale może być też pusty albo tworzyć prostą. Rys. 2.1 prezentuje te trzy możliwości.

W przypadku a) proste przecinają się w jednym punkcie, w przypadku b) są równoległe (nie przecinają się), w przypadku c) pokrywają się.

2.1.2 Metoda eliminacji Gaussa dla dwóch zmiennych

Rozważmy tablicę współczynników dla układu (2.1), zapisaną w dwóch wierszach

$$\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f. \end{array}$$



a) Jedno rozwiązanie b) Brak rozwiązań c) Układ nieoznaczony

Rysunek 2.1: Trzy możliwości położenia dwóch prostych

Linia pionowa oddziela kolumnę wyrazów wolnych. Będziemy chcieli przekształcić tę tablicę do postaci

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & t \end{array} \quad (2.2)$$

wykonując pewne operacje na wierszach. Nie zawsze będzie to możliwe. Jeśli uda nam się uzyskać żadaną postać, układ będzie miał jednoznaczne rozwiązanie. W przeciwnym przypadku nie będzie miał rozwiązań lub będzie miał ich nieskończenie wiele.

Będziemy dopuszczali trzy rodzaje operacji na wierszach:

- zamiana kolejności wierszy,
- pomnożenie wiersza przez liczbę różną od zera,
- dodanie do jednego wiersza innego wiersza pomnożonego przez dowolną liczbę.

Przez pomnożenie wiersza przez liczbę rozumiemy pomnożenie każdego elementu wiersza przez tę liczbę. Łatwo sprawdzić, że wymienione operacje nie zmieniają zbioru rozwiązań układu. Zatem układ równań (2.1) będzie miał ten sam zbiór rozwiązań, co układ, którego współczynniki przyjmą postać tablicy (2.2). Zauważmy, że ten zmodyfikowany układ będzie miał postać

$$\begin{array}{cc} x & + & 0 \cdot y & = & s \\ 0 \cdot x & + & y & = & t, \end{array} \quad (2.3)$$

z której natychmiast możemy odczytać rozwiązanie. Jeżeli postać (2.2) będzie nieosiągalna, otrzymamy jedną z poniższych postaci:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & p & s \\ 0 & 0 & t \end{array} \quad \text{lub} \quad \begin{array}{cc|c} r & 1 & s \\ 0 & 0 & t. \end{array} \quad (2.4)$$

Gdy $t = 0$, układ będzie nieoznaczony, tzn. będzie miał nieskończenie wiele rozwiązań. Dla $t \neq 0$ układ będzie sprzeczny.

Procedurę, która poprzez wymienione operacje na wierszach prowadzi do postaci (2.2) lub (2.4), nazywamy metodą *eliminacji Gaussa*.

Przykład 2.1. Rozważmy układ równań

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & = & 20 \\ 3x & + & y & = & 10. \end{array}$$

Definiuje on tablicę

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 20 \\ 3 & 1 & 10. \end{array}$$

Mnożąc pierwszy wiersz przez $1/2$ otrzymujemy

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 3 & 1 & 10. \end{array}$$

Następnie do wiersza drugiego dodajemy pierwszy wiersz pomnożony przez -3 . Otrzymamy w ten sposób pożądane 0 w drugim wierszu.

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 0 & -5 & -20 \end{array}$$

Mnożymy drugi wiersz przez $-1/5$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}$$

W końcu do pierwszego wiersza dodajemy drugi pomnożony przez -2

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4, \end{array}$$

co daje rozwiązanie układu: $x = 2$, $y = 4$. □

2.1.3 Dowolna liczba zmiennych

W praktycznych zastosowaniach liczba zmiennych i liczba równań jest zwykle dużo większa od dwóch. Układy równań pojawiające się w ekonomii mogą zawierać kilkadziesiąt lub nawet kilkaset zmiennych. Liczba równań może być inna niż liczba zmiennych. Zmienne będziemy oznaczać przez $x_1, x_2, \dots, x_n$, a współczynniki w równaniach przez a_{ij} . Jeśli liczba równań będzie równa m , układ przyjmie postać

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \quad (2.5)$$

Przez rozwiązanie tego układu równań będziemy rozumieli ciąg liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, które będą spełniały wszystkie równania układu. Geometryczna interpretacja takiego układu równań jest dużo bardziej skomplikowana niż dla dwóch zmiennych. Gdy $n = 3$, każde równanie opisuje płaszczyznę w przestrzeni (trójwymiarowej), a zatem układ równań może być interpretowany jako przecięcie (część wspólna) m płaszczyzn. Gdy $n > 3$, musimy przenieść się do przestrzeni n -wymiarowej, co wykracza poza nasze intuicje geometryczne i nie daje się obejść. Tym niemniej, jak zobaczymy później, w takiej przestrzeni można uprawiać algebrę zupełnie tak samo jak na płaszczyźnie czy w przestrzeni trójwymiarowej.

Teraz naszym celem jest rozwiązanie układu (2.5) lub stwierdzenie, że nie ma on rozwiązań (tzn. jest sprzeczny). Od strony jakościowej sytuacja wygląda dokładnie tak samo jak dla układu 2×2 , tzn. dla dwóch zmiennych i dwóch równań. Mianowicie, mogą zachodzić następujące przypadki:

- Układ jest oznaczony, czyli ma dokładnie jedno rozwiązanie, tzn. tylko jeden ciąg $x_1, \dots, x_n$ spełnia układ. Aby tak było, m musi być większe lub równe n .
- Układ jest sprzeczny, czyli nie ma rozwiązań. Musimy mieć wtedy przynajmniej dwa równania, czyli $m \geq 2$ (albo jedno równanie z zerową lewą stroną).
- Układ jest nieoznaczony, czyli ma nieskończenie wiele rozwiązań.

2.1.4 Eliminacja Gaussa w przypadku ogólnym

Uogólnimy teraz nasze rozważania z rozdziału 2.1.2 na dowolną liczbę zmiennych i dowolną liczbę równań. Tablica współczynników dla układu (2.5) wygląda następująco

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m. \end{array} \quad (2.6)$$

Będziemy dokonywali tych samych operacji na wierszach, co w przypadku dwóch zmiennych. Również nasz cel będzie podobny. Będziemy dążyli do uzyskania maksymalnej ilości zer w lewej części tablicy, a elementy, które nie będą zerowe, będziemy zamieniać na jedynki. Dla $n \geq m$ będziemy chcieli dostać następującą tablicę

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * & \dots & *, \end{array} \quad (2.7)$$

gdzie $*$ oznacza dowolną liczbę. Miejsca, gdzie stoją gwiazdki, na razie nas nie interesują. Zauważmy, że z układu równań zdefiniowanego przez tablicę (2.7) można natychmiast wyliczyć zmienne $x_1, x_2, \dots, x_m$. Jeśli $m = n$, zmienne te otrzymają jednoznaczne wartości, bo będziemy mieli tylko jedną kolumnę gwiazdek, odpowiadającą kolumnie wyrazów wolnych. Dla $m < n$, wyliczone zmienne zależą od pozostałych zmiennych, czyli od $x_{m+1}, \dots, x_n$. Te ostatnie zmienne będą mogły przyjmować dowolne wartości, a zatem otrzymamy nieskończenie wiele rozwiązań. Zobaczmy jak to wygląda w przykładach.

Przykład 2.2. Rozważmy układ

$$\begin{array}{rrrrr} -2x_1 & -2x_2 & & +x_4 & = & 0 \\ 20x_1 & +30x_2 & +8x_3 & +6x_4 & = & 6000 \\ 15x_1 & +10x_2 & +6x_3 & +7x_4 & = & 4000 \\ 10x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = & 1500 \end{array}$$

oraz związaną z nim tablicę współczynników

$$\begin{array}{cccc|c} -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & W_1 \\ 20 & 30 & 8 & 6 & 6000 & W_2 \\ 15 & 10 & 6 & 7 & 4000 & W_3 \\ 10 & 3 & 4 & 2 & 1500 & W_4 \end{array}$$

Przez W_i oznaczamy i -ty wiersz tablicy. Aby uzyskać 1 w lewym górnym rogu tablicy, mnożymy pierwszy wiersz przez $-0,5$. Zapisujemy to następująco $W_1 := -0,5W_1$ i mówimy, że nowy wiersz W_1 otrzymujemy ze starego przez wykonanie wspomnianej operacji. Poniżej podajemy ciąg tablic, które będziemy kolejno otrzymywać. Po prawej stronie zapisujemy, w jaki sposób otrzymaliśmy dany wiersz. Po prawej stronie znaku $:=$ występują stare wiersze.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -0,5 & 0 & W_1 := -0,5W_1 \\ 10 & 15 & 4 & 3 & 3000 & W_2 := 0,5W_2 \\ 15 & 10 & 6 & 7 & 4000 & W_3 := W_3 \\ 10 & 3 & 4 & 2 & 1500 & W_4 := W_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -0,5 & 0 & W_1 := W_1 \\ 0 & 5 & 4 & 8 & 3000 & W_2 := W_2 - 10W_1 \\ 0 & -5 & 6 & 14,5 & 4000 & W_3 := W_3 - 15W_1 \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 1500 & W_4 := W_4 - 10W_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -0,5 & 0 & W_1 := W_1 \\ 0 & 1 & 0,8 & 1,6 & 600 & W_2 := 0,2W_2 \\ 0 & 0 & 10 & 22,5 & 7000 & W_3 := W_3 + W_2 \\ 0 & 0 & 9,6 & 18,2 & 5700 & W_4 := W_4 + 1,4W_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0,8 & -2,1 & -600 \\ 0 & 1 & 0,8 & 1,6 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 2,25 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & -3,4 & -1020 \end{array}$$

$$\begin{aligned} W_1 &:= W_1 - W_2 \\ W_2 &:= W_2 \\ W_3 &:= 0,1W_3 \\ W_4 &:= W_4 - 0,96W_3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0,3 & -40 \\ 0 & 1 & 0 & -0,2 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 2,25 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 300 \end{array}$$

$$\begin{aligned} W_1 &:= W_1 + 0,8W_3 \\ W_2 &:= W_2 - 0,8W_3 \\ W_3 &:= 0,1W_3 \\ W_4 &:= \frac{-1}{3,4}W_4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 300 \end{array}$$

$$\begin{aligned} W_1 &:= W_1 + 0,3W_4 \\ W_2 &:= W_2 + 0,2W_4 \\ W_3 &:= W_3 - 2,25W_4 \\ W_4 &:= W_4 \end{aligned}$$

Z ostatniej tabeli odczytujemy rozwiązanie: $x_1 = 50, x_2 = 100, x_3 = 25, x_4 = 300$. $\square$

Przykład 2.3. Rozważmy układ równań z przykładu 2.2 bez ostatniego równania. Jego tablica będzie miała postać

$$\begin{array}{cccc|c} -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 20 & 30 & 8 & 6 & 6000 \\ 15 & 10 & 6 & 7 & 4000 \end{array}$$

$$\begin{aligned} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{aligned}$$

Powtarzając operacje z przykładu 2.7, z wyłączeniem tych, które dotyczą wiersza W_4 , otrzymamy tablicę

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0,3 & -40 \\ 0 & 1 & 0 & -0,2 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 2,25 & 700 \end{array}$$

$$\begin{aligned} W_1 &:= W_1 + 0,8W_3 \\ W_2 &:= W_2 - 0,8W_3 \\ W_3 &:= 0,1W_3 \end{aligned}$$

Zmienna x_4 jest teraz traktowana jako parametr. Wyliczając x_1, x_2 i x_3 otrzymamy: $x_1 = -40 + 0,3x_4, x_2 = 40 + 0,2x_4$ i $x_3 = 700 - 2,25x_4$. Podstawiając za x_4 dowolną liczbę rzeczywistą otrzymamy pewne rozwiązanie układu. Jest to zatem układ nieoznaczony, posiadający nieskończenie wiele rozwiązań. $\square$

Nie zawsze daje się uzyskać postać (2.7). Jest to niemożliwe na przykład, gdy $m > n$. W takiej sytuacji otrzymujemy wiersz składający się z samych zer lub z zer i ostatniej liczby różnej od zera. W pierwszym przypadku zerowy wiersz możemy odrzucić. Zerowanie się współczynników oznacza, że równanie odpowiadające temu wierszowi było kombinacją innych równań. W drugim przypadku otrzymujemy oczywistą sprzeczność. Możemy przerwać naszą pracę - układ nie ma rozwiązań.

Może się też zdarzyć, że wszystkie współczynniki w pewnej kolumnie staną się równe zero. Oznacza to, że zmienna odpowiadająca tej kolumnie faktycznie nie występuje w układzie i może służyć jako swobodny parametr rozwiązania. Należy wówczas szukać jedynki w następnej kolumnie, ignorując kolumnę zerową (tzn. traktując ją tak, jakby jej nie było).

Przykład 2.4. Rozważmy następującą tablicę współczynników

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{aligned}$$

Stosując metodę eliminacji Gaussa otrzymamy kolejno

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} W_1 &:= W_2 \\ W_2 &:= W_1 \\ W_3 &:= W_3 + W_2 \\ W_4 &:= W_4 - W_2 \\ W_5 &:= W_5 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -0,5 & 1,5 & 2 \\ 0 & 0 & 0,5 & -0,5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & -0,5 & -3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} W_1 &:= W_1 \\ W_2 &:= 0,5W_2 \\ W_3 &:= W_3 - 1,5W_2 \\ W_4 &:= W_4 - W_2 \\ W_5 &:= W_5 - 1,5W_2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0,5 & 5,5 & 2 \\ 0 & 1 & -0,5 & 1,5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} W_1 &:= W_1 + W_2 \\ W_2 &:= 0,5W_2 \\ W_3 &:= 2W_3 \\ W_4 &:= W_4 \\ W_5 &:= W_5 - W_3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} W_1 &:= W_1 + 0,5W_3 \\ W_2 &:= W_2 + 0,5W_3 \\ W_3 &:= W_3 \end{aligned}$$

Z ostatniej tabeli odczytujemy rozwiązania: $x_1 = -1 - 5x_4, x_2 = -1 - x_4, x_3 = -6 + x_4$, gdzie x_4 jest parametrem. $\square$

2.1.5 Zadania

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Rozwiązać następujące układy równań:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ 2.1. \quad x + 2y &= 0 \\ -4x + 2y &= 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x - y &= 0 \\ 2.2. \quad 2x + 4y &= 1 \\ -3x + 2y &= 4. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} x & + & y = 4 \\ 2x & - & 3y = 3 \\ 4x & - & 2y = 10 \\ -x & + & 3y = 0. \end{array}$$

2.3.

$$\begin{array}{rcl} x & - & 2y = -7 \\ 3x & + & y = 0 \\ 2x & + & 3y = 7 \\ 4x & + & 6y = 14. \end{array}$$

2.4.

Rozwiązać następujące układy równań metodą eliminacji Gaussa:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & x_2 + x_3 = -5 \\ 3x_1 & + & x_2 - x_3 = 25 \\ 2x_1 & + & x_2 + 3x_3 = 20. \end{array}$$

2.5.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 & - & 4x_2 + 3x_3 = 7 \\ -3x_1 & + & x_2 + 2x_3 = 9. \end{array}$$

2.6.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 & - & x_2 + 3x_3 = 13 \\ 3x_1 & - & 2x_2 + x_3 = 17. \end{array}$$

2.7.

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & + & x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 & - & x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 & + & x_2 + x_3 = 6. \end{array}$$

2.8.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & x_2 + x_3 = 10 \\ -3x_1 & + & x_2 - 2x_3 = 17 \\ -4x_1 & + & 2x_2 - 3x_3 = 7. \end{array}$$

2.9.

$$\begin{array}{rcl} -2x_1 & & + x_3 = 2 \\ x_1 & - & 2x_2 + x_3 = 30. \end{array}$$

2.10.

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & - & 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 & - & 2x_2 + x_3 = 10. \end{array}$$

2.11.

$$\begin{array}{rcl} -x_1 & + & 2x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 & - & 8x_2 - 4x_3 = 10. \end{array}$$

2.12.

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 & + & 5x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 & + & x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 = 2 \\ 3x_1 & & - 2x_3 = 6. \end{array}$$

2.13.

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 & - & x_2 + 3x_3 = 15 \\ x_1 & - & 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 & + & x_2 + x_3 = 2 \\ 6x_1 & - & x_2 + 2x_3 = 16. \end{array}$$

2.14.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 & + & x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_1 & - & x_2 - x_3 = -4 \\ 5x_1 & - & 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{array}$$

2.15.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 & - & x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 & + & x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 & - & 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{array}$$

2.16.

2.17. Jakie zbiory rozwiązań możliwe są dla układu równań liniowych (pierwsza z podanych liczb oznacza liczbę równań, druga zaś liczbę niewiadomych):

- a) 5×3 , b) 4×8 ,
c) 25×25 , d) 100×75 .

Poniżej podany jest rezultat rozwiązywania układu równań liniowych metodą eliminacji Gaussa. Zinterpretować otrzymany wynik.

$$\begin{array}{rcl} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3. \end{array}$$

2.18.

$$\begin{array}{rcl} 1 & 6 & 4 & | & 10 \\ 0 & 1 & -2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 16. \end{array}$$

2.19.

$$\begin{array}{rcl} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & -2. \end{array}$$

2.20.

$$\begin{array}{rcl} 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & | & 1. \end{array}$$

2.21.

$$\begin{array}{rcl} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 2. \end{array}$$

2.22.

$$\begin{array}{rcl} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -3. \end{array}$$

2.23.

2.24. Jeżeli układ równań 3×3 w interpretacji geometrycznej przedstawia trzy płaszczyzny, których część wspólna jest prostą, to od ilu parametrów będzie zależało rozwiązanie tego układu?

2.25. Zakładając że układ równań 3×3 przedstawia trzy identyczne płaszczyzny, ustalić od ilu parametrów zależy rozwiązanie tego układu.

2.26. Dany jest układ równań:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 & - & x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 & - & x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{array}$$

Wyznaczyć rozwiązanie, w którym parametrem byłaby niewiadoma x_4 .

2.27. Dany jest układ równań:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{array}$$

Wyznaczyć rozwiązanie układu we wszystkich trzech możliwych postaciach.

2.28. Zaznaczyć w układzie współrzędnych zbiór rozwiązań nieujemnych układu równań:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 & - & x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 & + & x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{array}$$

Rozwiązać poniższe układy równań metodą eliminacji Gaussa:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & 2x_2 - 4x_3 - x_4 = 7 \\ 2.29. & 2x_1 & + 5x_2 - 9x_3 - 4x_4 = 16 \\ & x_1 & + 5x_2 - 7x_3 - 7x_4 = 13. \end{array}$$

$$\begin{aligned}
2.30. \quad & 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 8 \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3. \\
2.31. \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16 \\
& 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 12 \\
& -x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 20 \\
& x_1 + 5x_2 - x_3 = 2. \\
2.32. \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\
& 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 12 \\
& 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 23 \\
& 2x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 = 12 \\
& 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_5 = -6. \\
2.33. \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 130 \\
& 3x_1 - 2x_3 + 4x_5 = 105 \\
& 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 = -5 \\
& 4x_1 - 10x_2 + x_3 - 5x_4 - x_5 = -55.
\end{aligned}$$

2.2 Zastosowania układów równań

W rozdziale tym podamy kilka zastosowań układów równań liniowych. Ograniczymy się tylko do sformułowania problemu w postaci układu równań, zostawiając rozwiązanie tego układu czytelnikowi.

2.2.1 Lotnicza akcja pomocy

Polski Czerwony Krzyż organizuje pomoc lotniczą ofiarom trzęsienia ziemi w Jugosławii. Pojemność samolotu wynosi 200 m^3 a jego dopuszczalne obciążenie 80 ton. PCK wyasygnowało na pomoc 150.000 zł. Zamierza wysłać wodę, krew, zestawy pierwszej pomocy i żywność. Liczba kontenerów z wodą powinna być dwa razy większa niż liczba kontenerów z żywnością. Tablica 2.1 zawiera dane dotyczące objętości, wagi i ceny kontenerów z wodą, krwią, zestawami pierwszej pomocy i żywnością.

rodzaj	obj. kontenera w l	ciężar kont. w kg	koszt kont. w zł
woda	200	250	200
krew	600	700	1000
zestawy	1000	500	300
żywność	200	200	400

Tabela 2.1: Dane dotyczące kontenerów

Wprowadźmy oznaczenia:

x_1 - liczba kontenerów wody,

2.2. ZASTOSOWANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ

x_2 - liczba kontenerów krwi,

x_3 - liczba kontenerów z zestawami pierwszej pomocy,

x_4 - liczba kontenerów z żywnością.

Otrzymujemy wówczas następujący układ równań

$$\begin{aligned}
200x_1 + 600x_2 + 1000x_3 + 200x_4 &= 200\,000 \\
250x_1 + 700x_2 + 500x_3 + 200x_4 &= 80\,000 \\
200x_1 + 1000x_2 + 300x_3 + 400x_4 &= 150\,000 \\
x_1 - 2x_4 &= 0
\end{aligned}$$

Otrzymane rozwiązanie powinno zawierać, oczywiście, liczby dodatnie. Trudno jednak oczekiwać, że będą one całkowite. Ponieważ kontenerów nie można dzielić, będziemy zmuszeni odrzucić części ułamkowe (nie możemy przeciążyć samolotu ani przekroczyć budżetu).

2.2.2 Asortyment produkcji

Firma produkuje 3 produkty w oddziałach A, B i C. Każdy oddział ma inną efektywność produkcji dla każdego z produktów, mierzoną liczbą godzin potrzebną do wyprodukowania jednostki produktu, oraz inne możliwości produkcyjne, wyrażone w godzinach na tydzień. Tablica 2.2 podaje te liczby.

oddział	produkt			możliwości produkcyjne
	1	2	3	
A	2	3,5	3	1200
B	3	2,5	2	1150
C	4	3	2	1400

Tabela 2.2: Efektywność produkcji i możliwości produkcyjne

Należy znaleźć liczby jednostek produktów 1, 2 i 3, które firma powinna produkować tygodniowo, aby wykorzystać możliwości produkcyjne wszystkich oddziałów, zakładając, że oddziały A, B i C produkują takie same ilości danego produktu. Oznaczmy przez x_i liczbę jednostek produktu i -tego, $i = 1, 2, 3$, produkowanego przez każdy zakład. Otrzymamy wtedy następujący układ równań

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3,5x_2 + 3x_3 &= 1200 \\
3x_1 + 2,5x_2 + 2x_3 &= 1150 \\
4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1400
\end{aligned}$$

Rozwiązanie tego układu daje żądane wielkości produkcji.

2.2.3 Portfel akcji

Inwestor chce kupić akcje za 500 tys. zł. Interesuje go przeciętny wzrost portfela o 12% kwartalnie i stopień ryzyka w wysokości 10%. Broker oferuje mu trzy pakiety akcji o różnym spodziewanym wzroście kwartalnym i o różnym stopniu ryzyka. Dane o tych pakietach przedstawia tabela 2.3.

pakiet	spodziewany wzrost	spodziewane ryzyko
1	16%	12%
2	8%	9%
3	12%	8%

Tabela 2.3: Pakiety akcji

Niech x_i oznacza liczbę tys. zł przeznaczonych na zakup i -tego pakietu. Otrzymujemy zatem pierwsze równanie

$$x_1 + x_2 + x_3 = 500.$$

Warunek wzrostu portfela o 12% daje kolejne równanie

$$\frac{0,16x_1 + 0,08x_2 + 0,12x_3}{500} = 0,12.$$

Podobnie otrzymamy równanie dające żądane ryzyko

$$\frac{0,12x_1 + 0,09x_2 + 0,08x_3}{500} = 0,1.$$

Otrzymujemy zatem układ trzech równań z trzema niewiadomymi. Szukamy tylko rozwiązań dodatnich.

2.2.4 Zadania

Zadania do samodzielnego rozwiązania

2.34. Pewien zakład produkuje dwa wyroby I i II. Do ich produkcji potrzebne są surowce S_1 , S_2 . Normy zużycia i zasoby surowców oraz zysk na jednostce każdego wyrobu są następujące:

wyroby	I	II	zasoby surowca
surowce			
S_1	1	2	2
S_2	2	4	4
zysk	4	8	×

2.2. ZASTOSOWANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ

Jaka powinna być produkcja tych wyrobów, aby w całości zużyte zostały zasoby surowców i aby osiągnąć maksymalny zysk?

2.35. Zabawka zrobiona jest z dwu detali rodzaju A oraz dziesięciu detali rodzaju B. Detale wycina się z arkusza plastyku, o ustalonych wymiarach, czterema sposobami. Liczbę detali obu rodzajów i wielkość odpadu (w kilogramach) w każdym sposobie wykroju podaje tabela:

detale	sposób wykroju			
	I	II	III	IV
A	4	3	1	0
B	0	4	9	12
odpad	12	5	3	1

Ile arkuszy należy ciąć każdym sposobem, aby dostarczyć detali A, B na wykonanie 90 zabawek? Podać przykładowe rozwiązania i ustalić przy każdym z nich ilość odpadów.

2.36. Firma wytwarza trzy rodzaje produktów A, B, C w trzech oddziałach I, II, III. Poniższe tabele podają efektywność produkcji każdego oddziału dla każdego z produktów, mierzoną liczbą godzin potrzebną do produkcji 1 sztuki towaru oraz możliwości produkcyjne (h) każdego oddziału w ciągu miesiąca. Znaleźć liczby jednostek towarów wyprodukowanych przy pełnym wykorzystaniu możliwości produkcyjnych wszystkich oddziałów.

a)

Oddział	Produkt			Możliwości produkcyjne
	A	B	C	
I	3	2	5	1800
II	4	1	3	1450
III	2	4	1	1900

b)

Oddział	Produkt			Możliwości produkcyjne
	A	B	C	
I	4	5	2	1600
II	3	2	3	800
III	1	4	2	1800

2.37. Pewne przedsiębiorstwo produkuje trzy różne towary. Tabela podaje czas potrzebny do wyprodukowania produkcji 1 sztuki każdego towaru (produkcja nie może odbywać się równolegle) oraz zapotrzebowania na środki do produkcji dla każdego typu towaru. Miesięczne możliwości produkcyjne tego zakładu wynoszą 1 500 h oraz miesięczne ograniczenia materiałowe to 3 800 kg. Dla miesięcznej produkcji wynoszącej w sumie 500 sztuk, wyznaczyć liczbę jednostek każdego typu towaru produkowaną

w ciągu miesiąca.

	Produkt		
	A	B	C
Czasochłonność	3	2	4
Zapotrzebowanie materiałowe (kg/szt)	10	8	6

2.38. Pewne przedsiębiorstwo produkuje pięć typów towaru. Każdy typ może być wytwarzany w pięciu różnych oddziałach: A, B, C, D, E. Tabela poniżej podaje tygodniowe możliwości produkcyjne tego przedsiębiorstwa. Podać układ równań odpowiadający tej sytuacji i wyznaczyć liczbę jednostek każdego typu towaru spełniającą ten układ.

Oddział	Produkt					Możliwości produkcyjne
	1	2	3	4	5	
A	2	1	4	3	2	330
B	4	2	3	2	1	330
C	5	4	2	4	3	440
D	3	2	2	2	3	320
E	1	1	1	1	1	130

2.39. Palarnia kawy jest zainteresowana zmieszaniem trzech gatunków kawy, tak aby uzyskać 10.000 kg mieszanki. Trzy rozważane składniki kosztują: 24 zł, 26 zł oraz 20 zł za 1 kg. Koszt 10.000 kg powinien wynosić 210.000 zł. Wymagane jest zmieszanie w taki sposób, aby pierwszego rodzaju kawy użyć tyle samo co drugiego. Przy tych warunkach wyznaczyć ilość kilogramów każdego gatunku wchodzących w skład 10.000 kg mieszanki.

2.40. Odlewnia wytwarza trzy różne elementy konstrukcyjne. Jej produkcja jest podzielona na dwa oddziały związane z bezpośrednim odlewem (I) i wykończeniem elementu (II). Możliwości produkcyjne podaje tabela. Wyznaczyć liczbę sztuk każdego produktu, która może być wytworzona przy pełnej produkcji (tygodniowej).

Oddział	Produkt			Możliwości produkcyjne (h / tydzień)
	A	B	C	
I	30	10	10	350
II	10	10	30	150

2.41. Inwestor chce kupić akcje za 10 000 zł. Są rozważane trzy pakiety akcji dające roczne oprocentowanie odpowiednio: 5 % , 10 % oraz 8 % . Inwestor chce uzyskać przeciętne roczne oprocentowanie w wysokości 6% oraz decyduje się na stopień ryzyka wynoszący 4% . Ryzyko związane z kolejnymi pakietami wynosi odpowiednio: 1% , 5% , 5% . Wyznaczyć kwoty przypadające na każdą z wymienionych możliwości.

2.42. Inwestor chce kupić akcje za 10 000 zł. Jest zainteresowany przeciętnym 13% zyskiem kwartalnym i stopniem ryzyka około 8%. Broker oferuje mu cztery pakiety akcji o różnym spodziewanym wzroście i różnym stopniu ryzyka. Odpowiednie dane podaje poniższa tabela:

Pakiet	Spodziewany wzrost	Ryzyko
1	8%	3%
2	15%	9%
3	10%	6%
4	20%	15%

Obliczyć kwoty jakie przypadną na odpowiednie pakiety tak, aby uzyskać spodziewane oprocentowanie.

2.3 Algebra macierzy

2.3.1 Dodawanie macierzy

Macierzą nazywamy prostokątną tablicę, której elementy są liczbami rzeczywistymi. Macierze będziemy oznaczali dużymi literami A , B , X , itp. i zapisywali następująco:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

W powyższej notacji pierwszy wskaźnik oznacza numer wiersza, a drugi – numer kolumny. Zatem macierz (2.8) ma m wierszy i n kolumn, a element a_{ij} stoi w i -tym wierszu i j -ej kolumnie. Mówimy, że jest macierzą $m \times n$ (m na n). Jeśli $m = n$, czyli gdy liczba wierszy jest równa liczbie kolumn, macierz nazywamy *kwadratową*. Mówimy, że macierze A i B mają jednakowe wymiary, jeśli liczba wierszy macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B oraz liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie kolumn macierzy B . Macierz (2.8) zapisujemy często skrótowo

$$A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}, \quad (2.9)$$

lub po prostu $A = (a_{ij})$ jeśli jej wymiary są ustalone lub nie są w danym momencie istotne. Wzór (2.9) mówi jak oznaczamy elementy macierzy A . Macierz $n \times 1$ nazywamy często *wektorem kolumnowym* (*kolumną*), a macierz $1 \times n$ *wektorem wierszowym* (*wierszem*).

Macierze o jednakowych wymiarach możemy dodawać. Jeśli $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$, to ich suma $A + B$ jest macierzą $C = (c_{ij})$, której elementy są zdefiniowane następująco:

$$c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}. \quad (2.10)$$

Wzór (2.10) oznacza, że aby otrzymać macierz $A + B$, dodajemy elementy macierzy A i B stojące w tych samych miejscach.

Przykład 2.5.

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & -7+1 & 0-5 \\ -6+6 & 4+2 & 1+6 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \square$$

Łatwo sprawdzić, że dodawanie macierzy jest łączne i przemienne, tzn.

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad \text{oraz} \quad A + B = B + A.$$

Macierz $m \times n$, której wszystkie elementy są równe 0, oznaczamy przez 0_{mn} lub po prostu przez 0. Macierz zerowa jest niezmiennikiem dodawania, tzn. $A + 0 = A$. Macierzą przeciwną do macierzy A nazywamy macierz, oznaczaną przez $-A$, której elementy są przeciwne do stojących w tych samych miejscach elementów macierzy A . Mamy zatem $A + (-A) = 0$.

2.3.2 Mnożenie macierzy

Jeśli $c \in \mathbb{R}$ a $A = (a_{ij})$ jest macierzą $m \times n$, to iloczyn $cA = Ac$ jest macierzą $m \times n$, zdefiniowaną następująco:

$$cA = (ca_{ij}).$$

Dla $c, d \in \mathbb{R}$ i A, B – macierzy $m \times n$ mamy następujące własności rozdzielności

$$(c + d)A = cA + dA \quad \text{oraz} \quad c(A + B) = cA + cB. \quad (2.11)$$

Oprócz mnożenia macierzy przez liczbę wprowadzimy mnożenie dwóch macierzy przez siebie. Mnożenie takie będzie wykonalne tylko w ściśle określonym przypadku, mianowicie tylko wtedy, gdy liczba kolumn pierwszej macierzy będzie równa liczbie wierszy drugiej macierzy. Czyli, żeby pomnożyć macierz $m \times n$ przez macierz $p \times r$, musimy mieć $n = p$.

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $m = 1$ i $r = 1$, tzn.

$$A = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}.$$

Wtedy A jest wektorem wierszowym a B jest wektorem kolumnowym. Definiujemy iloczyn $A \cdot B = AB$ jako liczbę (czyli macierz 1×1)

$$AB = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}.$$

Przykład 2.6.

$$(2, 3, 0, 5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 7 + 5 \cdot 2 = 6 \quad \square$$

Założmy teraz, że A jest $m \times n$, a B jest $n \times r$. Wtedy definiujemy iloczyn AB jako macierz $C = (c_{ij})$ o wymiarach $m \times r$, której element c_{ij} określony jest wzorem

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}. \quad (2.12)$$

Często sumę $x_1 + \dots + x_n$ zapisujemy krótko $\sum_{k=1}^n x_k$. Przy takiej notacji wzór (2.12) będzie miał postać

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Porównując powyższą definicję z definicją iloczynu wiersza przez kolumnę, możemy powiedzieć, że aby obliczyć element c_{ij} iloczynu AB , mnożymy i -ty wiersz macierzy A przez j -ą kolumnę macierzy B . Ilustruje to poniższy diagram.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nr} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ir} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mr} \end{pmatrix}$$

Mnożenie macierzy jest łączne, tzn.

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$$

oraz rozdzielne względem dodawania, tzn.

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

Jeśli macierze A i B są kwadratowe i mają te same wymiary, można określić zarówno AB jak i BA . Ogólnie, $AB \neq BA$, tzn. **mnożenie macierzy nie jest przemienne**.

Przykład 2.7. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Wtedy $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, natomiast $BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. $\square$

Przez I_n , lub po prostu przez I , oznaczamy macierz kwadratową (a_{ij}) o wymiarach $n \times n$, określoną przez $a_{ii} = 1$ dla $i = 1, \dots, n$, oraz $a_{ij} = 0$ dla wszystkich $i \neq j$. Elementy a_{ii} tworzą przekątną albo diagonalę macierzy kwadratowej. Macierz I_n nazywamy macierzą jednostkową lub identycznościową.

Stwierdzenie 2.8. Niech A będzie macierzą o wymiarach $m \times n$. Wtedy $A \cdot I_n = A$ oraz $I_m \cdot A = A$. $\square$

Niech A będzie macierzą $n \times n$. Macierz B , taką że $AB = BA = I$, nazywamy macierzą odwrotną do A i oznaczamy przez A^{-1} . Nie dla każdej macierzy A istnieje macierz odwrotna. Ponieważ $I \cdot I = I$, więc macierz identycznościowa jest odwrotna do siebie samej.

Niech A będzie macierzą $m \times n$. Transpozycją macierzy A (macierzą transponowaną do A) nazywamy macierz $n \times m$ oznaczaną przez $A^T = (b_{ij})$, taką że $b_{ij} = a_{ji}$. Oznacza to, że i -ty wiersz macierzy A^T jest równy i -tej kolumnie macierzy A . Transpozycja oznacza zatem zamianę kolumn na wiersze (i wiersze na kolumny).

2.3.3 Zadania

2.43. Wyznaczyć macierz $A = (a_{ij})$, o wymiarach 2×4 , taką że:

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{jeżeli } i = j \\ 0 & \text{jeżeli } i \neq j. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Mamy wyznaczyć macierz o dwóch wierszach i czterech kolumnach. W pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie szukanej macierzy będzie stał wyraz $a_{11} = 2$ (bo $i = j = 1$). Pozostałe wyrazy to $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$ oraz $a_{21} = a_{23} = a_{24} = 0$. Natomiast $a_{22} = 4$. A zatem

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.44. Obliczyć kwadrat macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 1 & 0 & 2a \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a & 0 & a^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

2.3. ALGEBRA MACIERZY

Zadania do samodzielnego rozwiązania

2.45. Wyznaczyć macierz $A = (a_{ij})$, o wymiarach 3×2 , taką że:

$$a_{ij} = \begin{cases} i - j & \text{jeżeli } i = j \\ i + j & \text{jeżeli } i \neq j. \end{cases}$$

2.46. Wyznaczyć (o ile to możliwe): a) $A + 3B$, b) $A^T + 2C - B$, c) AB , BA , d) $A(B + C)$, jeżeli:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.47. Niech dana będzie macierz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Czy można wykonać następujące działania: $A^T A$, A^2 , AA^T , $A^2 A^T$?

Wyznaczyć macierz $X = AB + aC$, jeżeli:

$$\mathbf{2.48.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = -2.$$

$$\mathbf{2.49.} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 10 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 6 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad a = 0,5.$$

Rozwiązać równanie $0,5AB + 2X^T = BA$ z niewiadomą X , wiedząc że:

$$\mathbf{2.50.} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.51.} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.52. a) Co można powiedzieć o macierzy $(A^T)^T$?

b) Co można powiedzieć o macierzy A , jeśli $A^T = A$?

2.53. Jeśli mnożenie macierzy A i B jest wykonalne, to czy wykonalne jest też mnożenie macierzy A^T przez B^T ? A B^T przez A^T ?

Obliczyć kwadrat następujących macierzy:

2.54. $\begin{pmatrix} -\sin x & \cos x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$.

2.55. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.56. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.57. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$.

2.4 Wyznacznik macierzy

2.4.1 Definicja wyznacznika

Przypomnijmy, że wyznacznik macierzy 2×2 definiujemy następująco

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Wyznacznik macierzy kwadratowej $n \times n$ zdefiniujemy indukcyjnie, stosując tzw. *rozwiniecie Laplace'a*. Przypuśćmy, że zdefiniowaliśmy już wyznacznik macierzy $(n-1) \times (n-1)$. Niech A będzie macierzą $n \times n$. Wykreślając z macierzy A i -ty wiersz i j -ą kolumnę, otrzymamy macierz $(n-1) \times (n-1)$. Oznaczmy przez A_{ij} wyznacznik tej macierzy przemnożony przez $(-1)^{i+j}$. Liczbę A_{ij} nazywamy *dopełnieniem algebraicznym elementu* a_{ij} macierzy A . Dopelnienia algebraiczne tworzą macierz o tych samych wymiarach co macierz A . Macierz dopełnień algebraicznych A_{ij} macierzy A oznaczana jest zwykle przez A^D i nazywana *macierzą dotęzowaną*.

Wybermy teraz dowolny wiersz macierzy A , np. i -ty. Zdefiniujemy wyznacznik $|A|$ przez

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}. \quad (2.13)$$

Można pokazać, że obliczony w ten sposób wyznacznik nie będzie zależał od wyboru wiersza, względem którego stosujemy rozwinięcie Laplace'a. Zamiast $|A|$ piszemy często $\det A$; $\det$ pochodzi od angielskiego słowa *determinant*.

Przykład 2.9. Zastosujemy rozwinięcie względem drugiego wiersza dla macierzy o wymiarach 3×3 .

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$3 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$-3 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) = 13 \quad \square$$

Dla wyznaczników macierzy 3×3 można stosować *metodę Sarrusa*. W tym celu dopisujemy do macierzy $A = (a_{ij})$ jej pierwsze dwa wiersze, tworząc następującą tablicę

$$\begin{array}{rrr} + & a_{11} & a_{12} & a_{13} - \\ + & a_{21} & a_{22} & a_{23} - \\ + & a_{31} & a_{32} & a_{33} - \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

Aby obliczyć $\det A$, mnożymy elementy na przekątnych tej tablicy, zaopatrując je w znak $+$ lub $-$ według powyższego schematu i tak otrzymane iloczyny sumujemy. Otrzymamy zatem:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Metoda ta nie może być stosowana do obliczania wyznaczników macierzy o wyższych wymiarach, gdyż nie generuje ona wszystkich iloczynów pojawiających się w rozwinięciu wyznacznika. Sprawdź to na przykładzie macierzy 4×4 .

2.4.2 Własności wyznacznika

Operacje na wierszach, które stosowaliśmy w metodzie eliminacji Gaussa, można stosować do obliczania wyznaczników:

- Zamiana miejscami dwóch dowolnych wierszy powoduje zmianę znaku wyznacznika.
- Dodanie do danego wiersza innego wiersza, przemnożonego przez dowolną liczbę, nie zmienia wyznacznika.

- Jeśli pomnożymy jeden z wierszy przez liczbę a , to wyznacznik zostanie też pomnożony przez a .

Często stosujemy następujące własności:

- Jeśli jeden z wierszy jest zerowy, to wyznacznik równa się zero.
- Jeśli dwa wiersze są identyczne, to wyznacznik równa się zero.
- $\det I_n = 1$.
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Jeśli macierz A jest odwracalna, to stosując ostatnią własność do równania $AA^{-1} = I$ otrzymamy $\det A \cdot \det A^{-1} = \det I = 1$. A zatem wtedy $\det A \neq 0$ i $\det A^{-1} = 1/\det A$. Oznacza to, że warunek $\det A \neq 0$ jest konieczny dla odwracalności macierzy A . Wkrótce zobaczymy, że jest również wystarczający.

Stwierdzenie 2.10. $\det A^T = \det A$. $\square$

Powyższe stwierdzenie pozwala nam przenieść wszystkie operacje, które wykonywaliśmy na wierszach, na analogiczne operacje wykonywane na kolumnach. W szczególności możemy stosować rozwinięcie Laplace'a względem kolumn.

2.4.3 Odwracanie macierzy

Używając wyznaczników możemy efektywnie znaleźć macierz odwrotną, jeśli istnieje. Macierz odwracalną nazywamy również nieosobliwą. Macierz osobliwa to taka, która nie ma macierzy odwrotnej.

Twierdzenie 2.11. *Macierz A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$. Wtedy $A^{-1} = (A^D)^T / \det A$, gdzie A^D oznacza macierz dopełnień algebraicznych macierzy A .* $\square$

Wzór na macierz odwrotną, zawarty w twierdzeniu 2.11, definiuje następującą procedurę odwracania macierzy:

- oblicz macierz dopełnień algebraicznych A^D dla macierzy A , wstawiając w miejscu (ij) liczbę A_{ij} ;
- dokonaj transpozycji powstałej macierzy;
- podziel każdy element otrzymanej macierzy przez $\det A$;
- otrzymana macierz będzie równa A^{-1} .

Przykład 2.12. Niech $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Wtedy

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -16, & A_{12} = 5, & A_{13} = 2, \\ A_{21} = -5, & A_{22} = -5, & A_{23} = 5, \\ A_{31} = 19, & A_{32} = 5, & A_{33} = 2, \end{array}$$

oraz $\det A = -2 \cdot (-5) + 5 \cdot 5 = 35$ (rozwinięcie względem drugiego wiersza). Otrzymujemy zatem

$$A^D = \begin{pmatrix} -16 & 5 & 2 \\ -5 & -5 & 5 \\ 19 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A^D)^T = \begin{pmatrix} -16 & -5 & 19 \\ 5 & -5 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

i ostatecznie

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-16}{35} & \frac{-5}{35} & \frac{19}{35} \\ \frac{5}{35} & \frac{-5}{35} & \frac{5}{35} \\ \frac{2}{35} & \frac{5}{35} & \frac{2}{35} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Szczególnie łatwo jest znaleźć macierz odwrotną dla macierzy 2×2 . Niech $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wtedy $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Inną, często bardziej efektywną, metodą odwracania macierzy jest eliminacja Gaussa. Zauważmy, że macierz odwrotna do A jest rozwiązaniem następującego równania macierzowego: $AX = I$, gdzie X jest szukaną macierzą, a I jest macierzą jednostkową. Rozpiszmy A i I na kolumny: $A = (A_1, \dots, A_n)$, $I = (E_1, \dots, E_n)$. Z własności mnożenia macierzy mamy $AX = (AX_1, \dots, AX_n)$. Otrzymujemy zatem równoważność równania macierzowego $AX = I$ z ciągiem rozpatrywanych już wcześniej układów równań liniowych: $AX_1 = E_1, \dots, AX_n = E_n$. Rozwiązując każdy z nich metodą eliminacji Gaussa otrzymujemy po kolei kolumny $X_1, \dots, X_n$ macierzy A^{-1} . Ponieważ we wszystkich tych układach macierz współczynników A jest jednakowa, można stosować eliminację Gaussa jednocześnie do wszystkich układów, wpisując po prawej stronie po kolei kolumny $E_1, \dots, E_n$ i wykonując standardowe operacje na wierszach tak powstałej tablicy. Oznacza to, że wyjściowa tablica ma postać

$$A|I.$$

Po dokonaniu odpowiednich przekształceń otrzymamy zatem

$$I|A^{-1}.$$

2.4.4 Rząd macierzy

Niech A będzie macierzą $m \times n$. *Minorem stopnia k* macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy powstałej z macierzy A przez wybranie k wierszy i k kolumn.

Z określenia wynika, że k musi być nie większe niż m i nie większe niż n . Z drugiej strony, jeśli k jest mniejsze od któregoś z wymiarów macierzy, można utworzyć kilka minorów stopnia k macierzy A . Dokładniej, dla macierzy $m \times n$ można utworzyć $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k}$ różnych minorów stopnia k . Dla macierzy kwadratowej $n \times n$ istnieje dokładnie jeden minor stopnia n , równy $\det A$, natomiast minory stopnia $n-1$ to wprowadzone wcześniej dopełnienia algebraiczne. Rzeczywiście, zamiast wybierać $n-1$ wierszy i $n-1$ kolumn, można wykreślić jeden wiersz i jedną kolumnę.

Mówimy, że macierz A ma rząd k , jeżeli istnieje różny od 0 minor stopnia k i wszystkie minory wyższych stopni (jeśli istnieją) są równe 0. Rząd macierzy A oznaczamy przez $\text{rank } A$ (lub $\text{rz } A$).

Przykład 2.13. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Wtedy elementy macierzy 1, 3, 0, 0, 2, 1 są minorami stopnia 1. Natomiast minory stopnia 2 są następujące:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Zatem $\text{rank } A = 2$. □

Oto najważniejsze własności rzędu macierzy. Niektóre z nich wynikają wprost z własności wyznaczników.

Twierdzenie 2.14.

1. Jeśli A jest macierzą $n \times n$, to A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{rank } A = n$.
2. $\text{rank } A^T = \text{rank } A$.
3. $\text{rank } A = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = 0$.
4. $A^D = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{rank } A < n-1$.
5. Jeśli wszystkie minory rzędu k są równe 0, to również wszystkie minory stopni wyższych od k są równe 0.
6. $\text{rank } AB \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$. □

Przykład 2.15. Niech $A = (1, 2, 3, 4, 5)$. Ponieważ $\text{rank } A = \text{rank } A^T = 1$, to $\text{rank } A^T A \leq 1$. Ponieważ $A^T A \neq 0$, więc $\text{rank } A^T A = 1$. Oznacza to, $\det A^T A = 0$. Zauważ, że macierz $A^T A$ ma wymiary 5×5 i wyliczenie jej wyznacznika z definicji wymagałoby sporego nakładu pracy. □

2.4.5 Wzory Cramera

Niech x i b oznaczają wektory kolumnowe

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Niech $A = (a_{ij})$ będzie macierzą $m \times n$. Wtedy układ równań z niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$, macierzą współczynników A i kolumną wyrazów wolnych b możemy zapisać jako równanie

$$Ax = b. \tag{2.14}$$

Załóżmy, że $n = m$ oraz, że macierz A jest odwracalna. Pomnóżmy obie strony równania (2.14) z lewej strony przez A^{-1}

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b.$$

Otrzymujemy zatem, że $x = A^{-1}b$. Rozwiązanie to wygląda bardzo prosto. Trzeba jednak pamiętać, że znalezienie macierzy odwrotnej wiąże się z dużym nakładem obliczeń. Zwykle wygodniej zastosować jest metodę Cramera, którą opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.16. Załóżmy, że A jest macierzą $n \times n$. Układ $Ax = b$ ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$. Rozwiązanie wyraża się wtedy wzorem

$$x_i = \det B_i / \det A, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie macierz B_i powstaje z macierzy A przez zastąpienie i -tej kolumny wektorem kolumnowym b . □

Wzory z twierdzenia 2.16 noszą nazwę wzorów Cramera, a układ, dla którego $\det A \neq 0$, nazywa się układem cramerowskim. Jeżeli nie jesteśmy pewni, czy rozwiązany układ jest cramerowski, lepiej jest zastosować metodę eliminacji Gaussa.

Przykład 2.17. Rozważmy układ $Ax = b$, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ i } \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wtedy $\det A = 35$, czyli układ jest cramerowski, oraz

$$\det B_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -13, \quad \det B_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 15,$$

$$\det B_3 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Zatem rozwiązaniem układu jest trójka liczb

$$x_1 = -13/35, x_2 = 15/35, x_3 = 6/35. \quad \square$$

2.4.6 Zadania

2.58. Obliczyć :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rozwiązanie: Dokonajmy najpierw operacji na wierszach bądź kolumnach danej macierzy. Do pierwszego wiersza dodajmy trzeci wiersz pomnożony przez -3 , a następnie do wiersza czwartego - wiersz trzeci:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -14 & 0 & -2 & -16 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -14 & 0 & -2 & -16 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 10 \end{vmatrix} =$$

Wyznacznik rozwinieśmy względem drugiej kolumny:

$$= (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -14 & -2 & -16 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 7 & 10 \end{vmatrix} = (\text{licząc np. za pomocą metody Sarrusa}) =$$

$$= 136.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć:

$$2.59. \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 10 \end{vmatrix}.$$

$$2.60. \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 6 \\ -6 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$2.61. \begin{vmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,1 & 0,5 \end{vmatrix}.$$

$$2.62. \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ x & 2x & 3x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Stosując metodę rozwinięcia Laplace'a, obliczyć wartości wyznaczników:

$$2.63. \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$2.64. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$2.65. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$2.66. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$2.67. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$2.68. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$2.69. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$2.70. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$2.71. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 & 7 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 7 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$2.72. \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$2.73. \text{ Obliczyć } \det(AB), \text{ gdzie: } A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązać następujące równania z niewiadomą x :

$$2.74. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & x^2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$2.75. \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & x & 5 \\ 2 & x+2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$2.76. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

$$2.77. \begin{vmatrix} \log x & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \log x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \log x^2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$2.78. \text{ Wykazać, że } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 2 & 3+y \end{vmatrix} = xy.$$

2.79. Dla jakich a macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2a & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

jest macierzą nieosobliwą?

2.80. Wyznaczyć k tak, aby macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \log(2k+1) \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & \log(2k+1) & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

była macierzą osobliwą.

Wyznaczyć macierz odwrotną do danej macierzy A :

$$2.81. A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.82. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.83. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.84. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$2.85. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2.86. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.87. Wyznaczyć wszystkie macierze A stopnia 2 o elementach 0 lub 1 lub -1 i takie, że:

$$a) A^{-1} = A,$$

$$b) A^{-1} = A^T,$$

$$c) A \cdot A = A.$$

Określić rząd następujących macierzy:

$$2.88. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.89. A = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 0 & -5 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$2.90. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & 10 \\ -1 & 9 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 9 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$2.91. A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 50 \\ 10 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -20 & 0 & 50 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 10 & 1 & -1 \\ 1 & 9 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.92. Zbadać rząd macierzy:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 2 & -1 & x & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 3 & 6 \\ x & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

w zależności od różnych wartości x .

Rozwiązać równanie $AX = B$ z niewiadomą X , wiedząc że:

$$2.93. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = (1, 2, 4)^T.$$

$$2.94. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2.95. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązać następujące układy równań:

$$2.96. \begin{array}{rrcr} 3x_1 & -2x_3 & +x_3 & = 4 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = 2 \\ & 2x_1 & +x_3 & = 1. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2.97. \quad \begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = -1 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & = -4 \\ 4x_1 & +x_2 & +4x_3 & = -2. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2.98. \quad \begin{array}{rrcr} 5x_1 & -x_2 & +x_3 & -2x_4 = 3 \\ & 7x_1 & -x_4 & = 3 \\ & 4x_1 & -2x_4 & = 3 \\ 5x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 = -1. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2.99. \quad \begin{array}{rrcr} x_1 & -x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = 0 \\ 3x_1 & +7x_2 & +3x_3 & = 0. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2.100. \quad \begin{array}{rrcr} x_1 & +4x_2 & -2x_3 & +x_4 = 2 \\ 2x_1 & +9x_2 & -3x_3 & -2x_4 = 5 \\ & x_1 & +5x_2 & -x_4 = 3 \\ 3x_1 & +14x_2 & +7x_3 & -2x_4 = 6. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2.101. \quad \begin{array}{rrcr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -x_4 = 1 \\ & 2x_1 & +x_3 & = 2 \\ x_1 & +x_2 & & -x_4 = 0 \\ & x_2 & -2x_3 & +x_4 = 3. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2.102. \quad \begin{array}{rrcr} x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -2x_4 = 0 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & +2x_4 = 0 \\ -x_1 & +4x_2 & +x_3 & +4x_4 = 0 \\ & 2x_1 & -x_2 & +4x_3 = 0. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2.103. \quad \begin{array}{rrcr} -x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 = 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 = 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 = 0 \\ -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 = 0. \end{array} \end{array}$$

W zależności od parametru a przeprowadzić dyskusję rozwiązalności układu równań:

$$\begin{array}{l} 2.104. \quad \begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +3x_3 & = a \\ 4x_1 & -8x_2 & +5x_3 & = 3 \\ ax_1 & -2x_2 & +2x_3 & = 1. \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2.105. \quad \begin{array}{rrcr} 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0 \\ x_1 & +ax_2 & -1x_3 & = 0. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2.106. \quad \begin{array}{rrcr} -x_1 & +x_2 & +x_3 & +ax_4 = 2 \\ x_1 & +x_2 & +ax_3 & -x_4 = 1 \\ x_1 & +ax_2 & -x_3 & +x_4 = 0 \\ ax_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 = -1. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2.107. \quad \begin{array}{rrcr} ax_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = 1 \\ x_1 & +ax_2 & +x_3 & +x_4 = a \\ x_1 & +x_2 & +ax_3 & +x_4 = a^2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +ax_4 = a^3. \end{array} \end{array}$$

2.5 Potęgowanie macierzy. Wielomian charakterystyczny

Macierze kwadratowe możemy mnożyć przez siebie, czyli potęgować. Mamy zatem $A^2 = A \cdot A$ i ogólnie, $A^n = A \cdot A^{n-1}$. Obliczenie wysokich potęg macierzy jest zwykle dość kłopotliwe. Dla niektórych macierzy liczy się to jednak bardzo prosto.

Jeśli A jest macierzą diagonalną, tzn. $a_{ij} = 0$ jeśli $i \neq j$, to n -ta potęga A też jest macierzą diagonalną, która w miejscu (i, i) zawiera a_{ii}^n . W szczególności $I^n = I$ oraz $(aI)^n = a^n I$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

Ważną rolę w algebrze macierzy odgrywa wielomian charakterystyczny. Niech A będzie macierzą kwadratową. Wtedy jej wielomian charakterystyczny zdefiniowany jest następująco

$$\chi_A(s) = \det(sI - A).$$

Z definicji wyznacznika wynika, że funkcja χ_A rzeczywiście jest wielomianem zmiennej s . Jeśli wymiary macierzy A wynoszą $n \times n$, to jej wielomian charakterystyczny ma stopień n .

Przykład 2.18. Niech $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Wtedy

$$\chi_A(s) = \begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 1 & s-4 \end{vmatrix} = (s-2)(s-4) - 3 = s^2 - 6s + 5. \quad \square$$

Jeśli zamiast s w wielomianie charakterystycznym wstawimy pewną macierz kwadratową, otrzymamy inną macierz o tych samych wymiarach. Twierdzenie Cayley'a-Hamiltona, sformułowane poniżej, mówi co się stanie, gdy podstawiona macierz będzie równa A .

Twierdzenie 2.19. Dla dowolnej macierzy kwadratowej A

$$\chi_A(A) = 0,$$

gdzie 0 oznacza macierz zerową o tych samych wymiarach co A . □

Twierdzenia tego możemy użyć do obliczenia n -tej potęgi macierzy A w zależności od niższych potęg. Na przykład, dla macierzy A z przykładu 2.18

$$A^2 = 6A - 5I,$$

gdzie macierz identycznościowa $I = A^0$ (zerowa potęga). Wzór ten można uogólnić następująco:

$$A^{k+2} = 6A^{k+1} - 5A^k.$$

Daje on prostą zależność rekurencyjną, która nie wymaga mnożenia macierzy.

2.5.1 Zadania

2.108. Dana jest macierz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Wyznaczyć wielomian charakterystyczny macierzy A .
- Wyznaczyć macierz A^3 .
- Wyznaczyć macierz odwrotną do danej macierzy.

Rozwiązanie:

- Wielomian charakterystyczny ma postać :

$$\chi_A(s) = \det(sI - A)$$

W tym przypadku:

$$\begin{aligned} \chi_A(s) &= \begin{vmatrix} s-3 & 0 & 1 \\ 0 & s+3 & 1 \\ 0 & -2 & s+1 \end{vmatrix} = \\ &= (s-3)(s+3)(s+1) + 2(s-3) \end{aligned}$$

$$\chi_A(s) = s^3 + s^2 - 7s - 15.$$

- Korzystając z tw. Cayley'a-Hamiltona:

$$A^3 + A^2 - 7A - 15I = 0, \quad (2.15)$$

czyli

$$A^3 = -A^2 + 7A + 15I,$$

stąd

$$A^3 = \begin{pmatrix} 27 & 2 & -5 \\ 0 & -13 & -12 \\ 0 & 22 & 9 \end{pmatrix}.$$

c) $\det A = 15$, więc A^{-1} istnieje. Po pomnożeniu obu stron równania 2.15 przez A^{-1} otrzymujemy równanie:

$$A^2 + A - 7I - 15A^{-1} = 0,$$

stąd:

$$A^{-1} = \frac{1}{15}(A^2 + A - 7I) = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Dokonać sprawdzenia, że $AA^{-1} = I$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Sprawdzić, czy prawdziwe jest twierdzenie Cayley'a-Hamiltona dla następujących macierzy:

$$2.109. \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2.110. \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad 2.111. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczyć A^3 oraz A^{-1} , wiedząc że macierz A ma postać:

$$\begin{aligned} 2.112. & \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & 2.113. & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \\ 2.114. & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, & 2.115. & \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.6 Zastosowania macierzy i wyznaczników

2.6.1 Planowanie produkcji

Zależność między produktami i składnikami potrzebnymi do ich wyprodukowania może być przedstawiona przy pomocy macierzy $P = (p_{ij})$, w której liczba wierszy równa się liczbie składników, a liczba kolumn — liczbie produktów. Element p_{ij} równa się liczbie jednostek składnika i -ego, potrzebnych do wyprodukowania jednostki produktu j -tego.

Podobnie, wyprodukowanie jednostki każdego ze składników wymaga użycia kilku surowców. Można to opisać przy pomocy macierzy $S = (s_{ij})$, w której element s_{ij} oznacza liczbę jednostek surowca i -ego, potrzebnych do wyprodukowania jednostki składnika j -tego.

Przypuśćmy, że mamy 5 produktów, 6 składników oraz 4 surowce. Macierze P i S mogą mieć wówczas następującą postać:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 8 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Może nas również interesować macierz $T = (t_{ij})$, opisująca zależność produktów od surowców. Dokładniej, niech t_{ij} oznacza liczbę jednostek i -ego surowca, potrzebnych do wyprodukowania jednostki produktu j -tego. Pokażemy, że macierze P , S i T związane są następującą zależnością:

$$T = S \cdot P. \quad (2.16)$$

Prześledźmy to na podstawie obliczenia elementu t_{11} . Na wyprodukowanie jednostki pierwszego produktu potrzebujemy:

0 jednostek pierwszego składnika

1 jednostka drugiego składnika

6 jednostek trzeciego składnika

1 jednostka czwartego składnika

8 jednostek piątego składnika

2 jednostki szóstego składnika.

Z kolei pierwszy surowiec używany jest do produkcji jednostki kolejnych składników w następujących proporcjach:

1 jednostkę dla pierwszego składnika

0 jednostek dla drugiego składnika

2 jednostki dla trzeciego składnika

3 jednostki dla czwartego składnika

1 jednostkę dla piątego składnika

2 jednostki dla szóstego składnika.

Zatem t_{11} otrzymamy dodając iloczyny kolejnych elementów:

$$t_{11} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 2 = 27.$$

Odpowiada to dokładnie mnożeniu pierwszego wiersza macierzy S przez pierwszą kolumnę macierzy P . Podobnie można uzasadnić powstawanie innych elementów macierzy T . Jest ona macierzą 4×5 .

Mając macierz T można obliczyć ilości kolejnych pięciu surowców potrzebne do wyprodukowania określonych ilości każdego z czterech produktów. Oznaczmy przez y_1, y_2, y_3, y_4 ilości kolejnych surowców niezbędnych do wyprodukowania kolejnych produktów w ilościach x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .

Utwórzmy wektory kolumnowe:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Argumentując podobnie jak przy obliczaniu macierzy T , możemy stwierdzić, że

$$y = Tx.$$

Podobnie, jeśli przez $z_1, \dots, z_6$ oznaczmy ilości składników potrzebnych do wyprodukowania produktów $x_1, \dots, x_5$, to otrzymamy zależność

$$z = Px.$$

2.6.2 Liniowe układy dynamiczne

W rozdziale tym rozpatrzmy dwa przykłady liniowych układów dynamicznych z czasem dyskretnym. Układ dynamiczny to układ zmiennych, które ewoluują wraz z upływem czasu. Czas może być ciągły lub dyskretny, tzn. zmieniający się skokowo. Liniowość oznacza, że w opisie układu dynamicznego pojawiają się kombinacje liniowe zmiennych, takie jakie pojawiły się w układach równań liniowych.

Wybór proszku do prania

Na rynku dominują cztery firmy produkujące proszki do prania. Nazwijmy je F_1, F_2, F_3, F_4 . Oznaczmy przez x_i udział firmy F_i w rynku, tzn. stosunek wartości sprzedaży firmy F_i do wartości sprzedaży wszystkich firm łącznie. Mamy zatem $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Wektor udziałów $x = (x_1, \dots, x_4)^T$ nie jest jednak stały. Klienci zmieniają swoje upodobania, zastępując jeden proszek drugim. Załóżmy, że wektor x obliczany jest na koniec roku, gdy znane są dane dotyczące wartości sprzedaży w tym roku. Niech p_{ij} oznacza prawdopodobieństwo zastąpienia proszku firmy F_j proszkiem firmy F_i . W

szczegółowości p_{ii} oznacza prawdopodobieństwo tego, że klienci zostaną przy prosku firmy F_i . Niech $P = (p_{ij})$ będzie macierzą 4×4 . Zauważmy, że dla każdego j , suma $p_{1j} + p_{2j} + p_{3j} + p_{4j} = 1$. Wynika to z faktu, że zwolennik prosku firmy F_j albo pozostanie przy tej firmie, albo porzuci ją dla jednej z trzech pozostałych. Macierz P nazywamy *macierzą przejścia* dla naszego modelu.

Przy pomocy macierzy P można przewidzieć, jak będzie wyglądał wektor udziałów x za rok, jeśli znamy jego wartość w roku bieżącym. Mianowicie, nowe x_i będzie równe $p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + p_{i3}x_3 + p_{i4}x_4$. (Jeśli masz kłopoty z uzasadnieniem tego wzoru, podstaw za x_i (stare i nowe) faktyczną liczbę klientów wybierających proszek firmy F_i). Aby móc rozróżniać między starymi i nowymi wektorami x , oznaczmy przez $x(0)$ wektor x w chwili 0, tzn. w roku, w którym rozpoczęliśmy pomiary. W roku następnym oznaczmy go przez $x(1)$, w kolejnym przez $x(2)$, itd. Powyższa analiza pozwala napisać prostą zależność między $x(k)$ i $x(k+1)$

$$x(k+1) = Px(k). \quad (2.17)$$

Powyższe równanie definiuje *liniowy układ dynamiczny z czasem dyskretnym*.

Znając początkową wartość wektora x , tzn. $x(0)$, możemy łatwo wyznaczyć jego wartość w chwili k (czyli po k latach)

$$x(k) = P^k x(0).$$

Wynika to z wzoru (2.17). Interesującym problemem jest znalezienie granicy, do której dąży $x(k)$, gdy k dąży do nieskończoności. Załóżmy, że taka granica istnieje i oznaczmy ją przez $\bar{x}$. Przechodząc do granicy w równaniu (2.17), otrzymamy

$$\bar{x} = P\bar{x}. \quad (2.18)$$

Zatem granica $\bar{x}$ musi być *punktem równowagi*, tzn. macierz P nie będzie zmieniać wektora $\bar{x}$ przy mnożeniu.

Równanie (2.18) przekształcamy do postaci

$$(P - I)\bar{x} = 0. \quad (2.19)$$

Równanie takie zawsze ma rozwiązanie, ale nie musi ono być jednoznaczne.

Przykład 2.20. Przypuśćmy, że macierz przejścia P ma następującą postać

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 & 0,0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,4 & 0,0 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Wtedy $\det(P - I) = 0$, a to oznacza, że układ (2.19) ma nieskończenie wiele rozwiązań. Tylko jedno z nich spełnia dodatkowy warunek $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Rozwiązując otrzymamy: $x_1 = 0,26$, $x_2 = 0,27$, $x_3 = 0,23$ i $x_4 = 0,24$. Macierz P nie zmienia otrzymanego wektora. Można pokazać, że $x(k)$ osiągnie go w granicy przy k dążącym do nieskończoności. $\square$

Migracja ludności

Co roku część mieszkańców wsi przenosi się do miast. Można jednak zaobserwować również inny trend. Niektórzy mieszkańcy miast przenoszą się na wieś. Niech $x = (x_1, x_2)$ oznacza strukturę demograficzną społeczeństwa, gdzie x_1 jest ułamkiem ludności mieszkającej w miastach, a x_2 ułamkiem ludności mieszkającej na wsi. Przez m_{ij} oznaczmy ułamek ludności migrującej ze środowiska j -ego do środowiska i -tego w ciągu roku, gdzie wskaźnik 1 oznacza miasto, a wskaźnik 2 oznacza wieś. Jeśli $i = j$, m_{ii} oznacza ułamek mieszkańców środowiska i -tego, którzy w nim pozostają. Przypuśćmy, że macierz migracji $M = (m_{ij})$ ma postać

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Niech $x(0)$ oznacza strukturę demograficzną w chwili zerowej, tzn. w roku, w którym zaczynamy obserwację. Po roku wektor struktury demograficznej wyniesie

$$x(1) = Mx(0),$$

a po k latach

$$x(k) = M^k x(0).$$

Aby znaleźć stan równowagi $\bar{x}$, rozwiążmy układ równań

$$\begin{aligned} Mx &= x \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Ma on jednoznaczne rozwiązanie $x_1 = 0,6$, $x_2 = 0,4$. Oznacza to, że po odpowiednio długim czasie (teoretycznie w nieskończoności), struktura demograficzna ustali się na wyliczonym poziomie, tzn. 60 % ludności będzie mieszkać w miastach a 40 % na wsi. Zauważmy, że początkowa struktura demograficzna nie ma tutaj znaczenia, zawsze w granicy dostaniemy punkt równowagi. Istotne jest natomiast to, że macierz M jest stała, tzn. zakładamy w naszym modelu, że tendencje demograficzne nie ulegają zmianom w czasie.

2.6.3 Model przepływów międzygałęziowych

Model ten został skonstruowany w latach dwudziestych przez Wassilego Leontiefa, amerykańskiego ekonomistę pochodzenia rosyjskiego. Leontief otrzymał za swe osiągnięcia w ekonomii nagrodę Nobla (1973).

Założmy, że przemysł składa się z trzech gałęzi, z których każda wytwarza jeden produkt. Niech x_i oznacza roczną wielkość produkcji i -tej gałęzi, mierzoną w złotych. Każdy z produktów jest częściowo konsumowany poza przemysłem, a częściowo przez przemysł (np. kopalnie używają stali produkowanej przez stalownię, a stalownię używają węgla produkowanego przez kopalnię). Niech a_{ij} oznacza wartość produktu i ,

która jest niezbędna do wyprodukowania produktu j o wartości 1 zł. Niech $A = (a_{ij})$. Przy trzech gałęziach macierz A mogłaby wyglądać następująco:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Zauważmy, że jeśli przez x oznaczymy wektor kolumnowy składający się z x_1 , x_2 i x_3 , to składowe wektora Ax dadzą część produkcji (z kolejnych gałęzi) konsumowaną przez przemysł. Niech d będzie wektorem kolumnowym, którego składowe d_1 , d_2 i d_3 , oznaczają zapotrzebowanie poza przemysłem na kolejne produkty wytwarzane przez gałęzie 1, 2 i 3. Aby system był w równowadze, tzn. aby zaspokoić zapotrzebowanie poza przemysłem i skonsumować całą produkcję, musi być spełnione następujące równanie macierzowe bilansu:

$$x = Ax + d, \quad (2.22)$$

które możemy przekształcić do

$$(I - A)x = d. \quad (2.23)$$

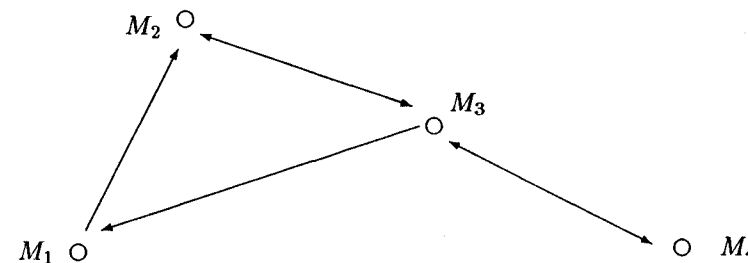
Rozwiązanie równania (2.23), jeśli istnieje, daje żadaną wielkość produkcji wszystkich trzech gałęzi. Jeśli macierz A zadana będzie przez (2.21), to macierz $I - A$ będzie odwracalna. Wtedy wektor x będzie wyznaczony jednoznacznie przez $x = (I - A)^{-1}d$.

Załóżmy, że wektor d ma postać $d = (2, 3, 5)^T$, gdzie składowe wyrażone są w miliardach złotych. Znajdź wektor produkcji x , dla którego system gospodarczy będzie w równowadze. Jeśli uda ci się to poprawnie zrobić, masz szansę na kolejnego Nobla w ekonomii.

2.6.4 Model połączeń lotniczych

Połączenia lotnicze między miastami można zilustrować przy pomocy *grafu skierowanego*. Taki graf składa się z *węzłów* i *strzałek* łączących wybrane węzły. Załóżmy, że rozważamy połączenia między czterema miastami M_1 , M_2 , M_3 i M_4 , które traktujemy jak węzły grafu i oznaczamy na rysunku kółeczkiem. Rysunek 2.2 przedstawia taki graf. Strzałka od węzła M_1 do węzła M_2 oznacza, że istnieje połączenie lotnicze z miasta M_1 do M_2 . Podwójna strzałka między węzłami M_2 i M_3 oznacza, że istnieją połączenia lotnicze zarówno z M_2 do M_3 , jak i z M_3 do M_2 .

Zaletą reprezentacji połączeń lotniczych przez graf jest to, że możemy odwołać się do intuicji geometrycznej. Przy dużej liczbie węzłów graf może stać się jednak mało czytelny. Trudno wtedy odpowiedzieć na bardziej skomplikowane pytania dotyczące połączeń, np. pytania o połączenia z przesiadkami. Często wygodniej jest posłużyć się modelem macierzowym zamiast korzystać z grafu. Dotyczy to szczególnie sytuacji, gdy chcemy korzystać z komputera. Komputery sprawnie wykonują operacje na macierzach, gorzej natomiast posługują się grafami.



Rysunek 2.2: Graf połączeń lotniczych

Zdefiniujmy macierz połączeń lotniczych P w następujący sposób. Będzie to macierz kwadratowa $n \times n$, gdzie n oznacza liczbę miast (lub liczbę węzłów grafu). Niech $P = (p_{ij})$ oraz $p_{ij} = 1$ jeśli istnieje połączenie lotnicze z miasta M_j do miasta M_i . Jeśli takie połączenie nie istnieje, kładziemy $p_{ij} = 0$. Zatem macierz P składa się z zer i jedynek; możemy ją zbudować dla dowolnego grafu skierowanego. W przypadku grafu z rysunku 2.2, reprezentującego połączenia lotnicze między czterema miastami, macierz P będzie miała postać

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Zauważmy, że nie interesuje nas tu liczba połączeń między określonymi miastami; bierzemy pod uwagę tylko to, czy takie połączenie istnieje czy też nie. Wszystkie elementy leżące na przekątnej macierzy P są równe 0. Oznacza to, że nie ma połączenia lotniczego z miasta M_i do miasta M_i . Zwykle tak jest, gdyż nie używamy samolotu do przemieszczania się w obrębie miasta. Gdybyśmy jednak rozważali połączenia kolejowe, być może wygodniej byłoby założyć, że takie połączenie istnieje.

Ponieważ macierz P jest kwadratowa, możemy obliczyć jej k -tą potęgę. Chcemy teraz zinterpretować jej znaczenie. Niech $P^2 = Q = (q_{ij})$. Obliczmy np. q_{31} . Ponieważ macierz P ma dużo zer, otrzymamy

$$q_{31} = p_{32}p_{21}.$$

Taki iloczyn możemy interpretować jako przejście z węzła M_1 do M_2 , a potem z M_2 do M_3 . Oznacza to, że istnieje połączenie lotnicze z miasta M_1 do miasta M_3 , ale jest to połączenie z przesiadką w mieście M_2 . Zatem macierz P^2 opisuje połączenia między miastami z jedną przesiadką. Zauważmy, że

$$q_{33} = p_{32}p_{23} + p_{34}p_{43} = 1 + 1 = 2.$$

Oznacza to, że istnieją dwa różne połączenia z jedną przesiadką z miasta M_3 do miasta M_3 , pierwsze przez miasto M_2 i drugie przez miasto M_4 . Oczywiście, oba są mało interesujące (chyba, że ktoś lubi podróżować samolotem).

Rozumując podobnie, możemy stwierdzić, że macierz P^k opisuje połączenia między miastami z $k - 1$ przesiadkami. Macierz będąca sumą

$$P + P^2 + \dots + P^{k+1}$$

opisuje połączenia między miastami z nie więcej niż k przesiadkami. Zauważmy, że wszystkie elementy macierzy P^k są nieujemne, zatem nie mogą się skracać przy dodawaniu.

2.6.5 Zadania

Zadania do samodzielnego rozwiązania

2.116. Pewna spółka prowadzi sprzedaż pięciu różnych modeli komputerów w trzech niezależnych punktach miasta. Stan ilościowy każdego modelu w danym sklepie podaje macierz M (sklepom odpowiadają wiersze, typom towaru kolumny). Cenę hurtową (kolumna 1) oraz detaliczną (kolumna 2) każdego modelu podaje macierz N (ceny w n.zł):

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 6 \\ 10 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 4000 & 3000 \\ 1400 & 1680 \\ 2800 & 4800 \\ 5400 & 6600 \\ 7000 & 9800 \end{pmatrix}.$$

- Jaka jest detaliczna wartość towaru w drugim sklepie?
- Jaka jest hurtowa wartość towaru w sklepie trzecim?
- Wyznaczyć i zinterpretować macierz MN .

2.117. Pewne przedsiębiorstwo wytwarza pięć produktów. Prowadzi ich sprzedaż w trzech różnych miastach kraju. Macierz S podaje oczekiwaną sprzedaż dla każdego z produktów w każdym mieście na następny miesiąc. Niech wyrazy macierzy $S = (s_{ij})$ oznaczają zapotrzebowanie i -tego produktu w j -tym mieście:

$$S = \begin{pmatrix} 500 & 200 & 350 \\ 400 & 300 & 100 \\ 250 & 425 & 50 \\ 100 & 150 & 350 \\ 200 & 175 & 225 \end{pmatrix}.$$

Pozwala to zaplanować kupno materiałów, gdyż każdy produkt wymaga użycia pewnej ilości jednostek z czterech podstawowych składników do produkcji. Macierz R podaje

to zapotrzebowanie:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

gdzie element r_{ij} - oznacza zapotrzebowanie j -tego produktu na i -ty składnik.

- Wyznaczyć globalne zapotrzebowanie na każdy z produktów.
- Wyznaczyć zapotrzebowanie na składniki.
- Wyznaczyć możliwą do wykonania produkcję z zapasów składników znajdujących się w magazynie w ilościach podanych przez wektor:

$$z = \begin{pmatrix} 1000 \\ 800 \\ 900 \\ 1100 \end{pmatrix}.$$

2.118. Produkowane są trzy towary przy użyciu czterech surowców. Odpowiednie zapotrzebowanie na surowce przedstawia macierz $M = (m_{ij})$, gdzie m_{ij} - oznacza zapotrzebowanie j -tego produktu na i -ty surowiec:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczyć zapotrzebowanie na surowce, jeśli chcemy wyprodukować 100 sztuk produktu pierwszego, 200-drugiego i 300- trzeciego produktu. Wyznaczyć koszt tej produkcji, jeśli ceny jednostki surowca (w zł) wynoszą odpowiednio: (5, 2, 1, 10).

2.119. Produkcja trzech towarów wymaga użycia pięciu surowców. Dana jest macierz zapotrzebowania na surowce:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Zinterpretować wynik iloczynu: $A(1, 1, 1, 1, 1)^T$.
- Wyznaczyć zapotrzebowanie na surowce przy produkcji: (10, 20, 10).

2.120. Dana jest macierz prawdopodobieństw przejścia między dwiema firmami:

$$P = \begin{pmatrix} 0,70 & 0,25 \\ 0,30 & 0,75 \end{pmatrix}.$$

Załóżmy, że w danym roku pierwszy produkt jest kupowany przez 70 % wszystkich klientów, a produkt drugi przez pozostałe 30 %.

- a) Wyznaczyć sytuację na rynku po roku.
 b) Wyznaczyć sytuację na rynku po trzech latach.
 c) Zakładając, że macierz P nie ulega zmianom w czasie, wyznaczyć wektor równowagi.

2.121. Następująca macierz jest macierzą przejścia związaną z trzema konkurującymi produktami:

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,6 & 0,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Założmy, że w danej chwili produkt pierwszy ma 40% popularności, drugi 40% i trzeci 20%.

- a) Wyznaczyć wektor sytuacji na rynku po roku.
 b) Zakładając stabilność macierzy przejścia w czasie, wyznaczyć stan równowagi.

2.122. Macierz migracji ma postać:

a) $M = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,05 \\ 0,10 & 0,95 \end{pmatrix}$, b) $M = \begin{pmatrix} 0,80 & 0,15 \\ 0,20 & 0,85 \end{pmatrix}$.

Wyraz m_{ij} oznacza ułamek ludności migrującej ze środowiska j -tego do i -tego, gdzie $i, j = 1, 2$ oraz 1-oznacza południe kraju a 2-północ kraju. Wyznaczyć stan równowagi.

2.123. Dana jest macierz migracji między trzema regionami:

$$\begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,05 \\ 0,05 & 0,80 & 0,10 \\ 0,05 & 0,10 & 0,85 \end{pmatrix}$$

Zakładając, że liczba ludności w regionach wynosiła ostatnio odpowiednio 40.000, 20.000, 30.000, wyznaczyć stan w kolejnych regionach po upływie dwóch lat.

2.124. Założmy, że system gospodarczy składa się z dwóch gałęzi: rolnictwa (R) i energetyki (E). Niech A będzie macierzą przepływu międzygałęziowego, w której wskaźnik 1 oznacza rolnictwo, a wskaźnik 2 oznacza energetykę. Dany jest również wektor zewnętrznych zapotrzebowań na produkty R i E: wektor d . Niech $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$. Wyznaczyć taką produkcję każdej gałęzi, aby system był w równowadze.

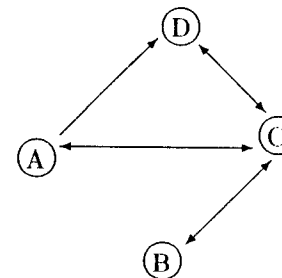
2.125. Założmy, że układ gospodarczy składa się z trzech gałęzi: 1,2,3. Macierz A jest macierzą przepływu międzygałęziowego, macierze D_1 , D_2 są macierzami zapotrzebowań zewnętrznych:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczyć wektor równowagi tego układu przy zapotrzebowaniach D_1 , D_2 .

2.126. Rozważmy dwie współzależne gałęzie gospodarki- transport i przemysł. Produkcja o wartości 1zł w transporcie wymaga nakładu 0,1 zł z transportu i przemysłu. Produkcja o wartości 1zł w przemyśle wymaga nakładów w wysokości: 0,4zł z każdej gałęzi. Zewnętrzne zapotrzebowanie na transport wynosi 5 mln zł, na przemysł - 20 mln zł. Wyznaczyć wymagany wektor produkcji.

2.127. Rysunek 2.3 przedstawia graf reprezentujący połączenia lotnicze między czterema miastami pewnego kraju. Podać macierz tych połączeń. Wyznaczyć jej kwa-

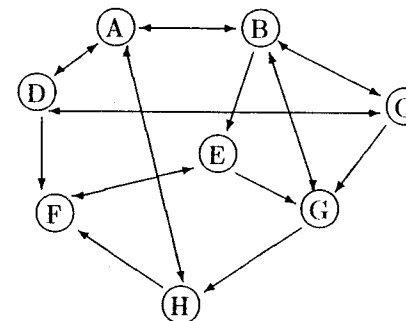


Rysunek 2.3: Połączenia lotnicze między miastami A,B,C,D

drat i podać interpretację.

2.128. Graf na rysunku 2.4 przedstawia połączenia między ośmioma miastami.

a) Podać macierz bezpośrednich połączeń.



Rysunek 2.4: Połączenia między ośmioma miastami

- b) Podać macierz połączeń z jedną przesiadką.
 c) Podać macierz połączeń z co najmniej dwiema przesiadkami.

2.129. Macierz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ jest macierzą bezpośrednich połączeń między

Stwierdzenie 2.22. Wektory $x^1, \dots, x^k$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich można wyrazić przez kombinację liniową pozostałych wektorów. $\square$

Przykład 2.23. Jeśli $k = 2$, sprawdzenie liniowej zależności wektorów jest szczególnie proste. Musimy wtedy mieć $x^1 = sx^2$ (lub $x^2 = sx^1$) dla pewnej liczby s (może być równa 0). Otrzymujemy zatem $x_i^1 = sx_i^2$, a zatem współrzędne obu wektorów są proporcjonalne. Na przykład wektory

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ i } x^2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix}$$

są liniowo zależne, ponieważ $x^2 = -3x^1$. $\square$

Wszystkie rozważania tego podrozdziału można powtórzyć dla wektorów wierszowych. Przestrzeń wektorów wierszowych o n składowych jest zwykle oznaczana przez $\mathbb{R}^{n*}$. Z punktu widzenia algebry liniowej wektory kolumnowe i wierszowe zachowują się dokładnie tak samo, a przestrzenie liniowe $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^{n*}$ są nieodróżnialne (matematycy mówią *izomorficzne*). Liniowa zależność wektorów wierszowych pojawiła się w metodzie eliminacji Gaussa. Jedną z operacji nie zmieniających zbioru rozwiązań układu było dodanie do wybranego wiersza kombinacji liniowej innych wierszy. To samo dotyczy obliczania wyznacznika.

2.7.2 Rząd kolumnowy i rząd wierszowy macierzy

Rozważmy macierz A o wymiarach $m \times n$. Kolumny macierzy A są elementami przestrzeni $\mathbb{R}^m$, a zatem możemy badać ich liniową niezależność. *Rzędem kolumnowym* macierzy A nazywamy maksymalną liczbę kolumn macierzy A , które są liniowo niezależne. Jasne jest, że rząd kolumnowy jest nie większy niż liczba wszystkich kolumn, czyli n . Podobnie *rzędem wierszowym* macierzy A nazywamy maksymalną liczbę liniowo niezależnych wierszy. Wiersze macierzy A są elementami przestrzeni $\mathbb{R}^{n*}$ i jest ich m , zatem rząd wierszowy nie może być większy od m . Następujące twierdzenie daje interesujące powiązanie wprowadzonych rzędów z rzędem macierzy zdefiniowanym w rozdziale 2.4.4.

Twierdzenie 2.24. Dla dowolnej macierzy A rząd wierszowy, rząd kolumnowy i rząd są równe. $\square$

Szczególnym przypadkiem tego twierdzenia jest twierdzenie 2.21. Rzeczywiście, liniowa niezależność wierszy (lub kolumn) dla macierzy kwadratowej $n \times n$ oznacza, że jej wyznacznik jest różny od zera, co z kolei jest równoważne temu, że jej rząd jest równy n .

Przykład 2.25. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Ponieważ minor stopnia drugiego $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ jest różny od zera, $\text{rank } A = 2$. Zatem pierwsze dwie kolumny są liniowo niezależne.

Trzecia musi być zatem kombinacją liniową dwóch pierwszych. Rzeczywiście,

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Wiersze macierzy są, oczywiście, liniowo niezależne. $\square$

2.7.3 Baza przestrzeni liniowej

Bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ będziemy nazywali zbiór n liniowo niezależnych wektorów tej przestrzeni.

Przykład 2.26. Niech $e^i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$, $i = 1, \dots, n$ (1 stoi na i -tym miejscu; używamy transpozycji, aby skrócić notację). Wektory $e^1, \dots, e^n$ są liniowo niezależne, ponieważ, gdy ustawimy je obok siebie, utworzą one macierz jednostkową, której wyznacznik jest różny od zera. Zatem tworzą one bazę, którą nazywamy *bazą standardową*. $\square$

Poniższe twierdzenie podaje najważniejszą własność bazy.

Twierdzenie 2.27. Każdy wektor przestrzeni $\mathbb{R}^n$ można zapisać jako kombinację liniową wektorów bazy. Współczynniki tej kombinacji dla danego wektora x są wyznaczone jednoznacznie. $\square$

Kombinacja liniowa, o której mowa w twierdzeniu 2.27, nazywa się *rozwinięciem* wektora w bazie, a jej współczynniki – *współczynnikami tego rozwinięcia*.

Przykład 2.28. Rozważmy bazę standardową w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz wektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Wtedy x możemy zapisać jako

$$x = x_1 e^1 + \dots + x_n e^n.$$

(Sprawdź to.) A zatem współrzędne wektora x są jednocześnie współczynnikami jego rozwinięcia w bazie standardowej. $\square$

Przykład 2.29. Rozważmy bazę B w $\mathbb{R}^2$ złożoną z wektorów $b^1 = (2, 0)^T$ i $b^2 = (1, 3)^T$. Weźmy $x = (4, 6)^T$. Wtedy

$$x = 1b^1 + 2b^2.$$

Rozwinięcie to jest jednoznaczne. $\square$

Współczynniki rozwinięcia wektora x w bazie B nazywamy też jego współrzędnymi w tej bazie. Oznaczmy je przez $x'_1, \dots, x'_n$. Wtedy wektor kolumnowy $x' = (x'_1, \dots, x'_n)^T$ pozwala zapisać relację między standardowymi i „nowymi” współrzędnymi

$$x = Sx',$$

gdzie przez S oznaczyliśmy macierz, której kolumny tworzą wektory bazy. Z równania tego łatwo wyliczamy x'

$$x' = S^{-1}x.$$

Macierz S nazywamy macierzą zmiany bazy.

2.7.4 Baza własna

Niech A będzie macierzą $n \times n$. Wektor $v \in \mathbb{R}^n$ nazywamy *wektorem własnym macierzy* A , jeśli istnieje liczba λ , taka, że $Av = \lambda v$. Liczba λ nazywana jest wtedy *wartością własną* macierzy A .

Baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywana jest *bazą własną macierzy* A , jeśli każdy wektor bazy jest wektorem własnym macierzy A .

Założmy, że wektory $v^1, \dots, v^n$ tworzą bazę własną macierzy A . Niech wtedy $S = (v^1, \dots, v^n)$ będzie macierzą zmiany bazy. Z zależności $Av^i = \lambda_i v^i = v^i \lambda_i$ otrzymamy równość macierzową

$$AS = SA,$$

gdzie Λ jest macierzą diagonalną, w której na przekątnej stoją wartości własne $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Otrzymujemy zatem

$$A = SAS^{-1}.$$

Ponieważ macierz diagonalną łatwo się potęguje, można to wykorzystać do obliczania potęg macierzy A . Otrzymujemy mianowicie:

$$A^2 = SAS^{-1}SAS^{-1} = SA^2S^{-1},$$

i ogólnie,

$$A^k = SA^kS^{-1}.$$

Baza własna nie zawsze istnieje. Jej znalezienie jest łatwiejsze, gdy znamy wartości własne macierzy A . Obliczamy je stosując następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.30. *Liczba λ jest wartością własną macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwiastkiem jej wielomianu charakterystycznego, tzn. gdy $\det(\lambda I - A) = 0$.* $\square$

Przykład 2.31. Spróbujmy obliczyć k -tą potęgę macierzy A ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.7. ELEMENTY ALGEBRY LINIOWEJ W $\mathbb{R}^N$

Wielomian charakterystyczny χ_A ma postać

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3,$$

a jego pierwiastki wynoszą $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 3$. Znajdźmy wektory własne v^1 i v^2 , odpowiadające λ_1 i λ_2 . Wektor v^1 spełnia równanie

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań. Wybierzmy $v^1 = (3, -1)^T$. Podobnie wektor v^2 spełnia równanie

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Za rozwiązanie możemy przyjąć $v^1 = (1, 1)^T$. Mamy zatem

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Stąd otrzymujemy

$$A^k = SA^kS^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3(-1)^k + 3^k & 3(-1)^{k+1} + 3^{k+1} \\ (-1)^{k+1} + 3^k & (-1)^k + 3^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Sprawdź dla $k = 2$ i $k = 3$, że otrzymany wzór daje żądane potęgi macierzy A . $\square$

Uwaga 2.32. Wielomian charakterystyczny może nie mieć pierwiastków rzeczywistych. Aby w pełni wykorzystać podaną tu teorię, należałoby rozpatrywać również pierwiastki będące liczbami zespolonymi. Liczby te pojawiają się zarówno w wielu działach matematyki jak i licznych zastosowaniach inżynierskich. Wydaje się jednak, że mało przydają się w naukach ekonomicznych i dlatego nie zostały tu wprowadzone. Zainteresowanego czytelnika odsyłamy do poważniejszych podręczników akademickich. $\square$

2.7.5 Odwzorowania liniowe

Odwzorowanie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nazywamy *liniowym*, jeśli spełnia ono następujące własności:

- 1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : f(x + y) = f(x) + f(y)$ (addytywność),
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}^n \forall \alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha x) = \alpha f(x)$ (jednorodność).

Przykład 2.33. Niech A będzie macierzą $m \times n$. Rozważmy odwzorowanie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zdefiniowane następująco

$$f(x) = Ax.$$

Oznaczmy wartości funkcji f przez $z = (z_1, \dots, z_m)^T$. Wtedy równanie $z = Ax$ możemy rozpisać we współrzędnych

$$z_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad (2.27)$$

dla $i = 1, \dots, m$. Z własności mnożenia i dodawania macierzy (wektorów) otrzymujemy

$$f(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = f(x) + f(y),$$

co oznacza, że takie odwzorowanie jest liniowe. $\square$

Okazuje się, że powyższy przykład opisuje wszystkie odwzorowania liniowe.

Twierdzenie 2.34. Każde odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ma postać $f(x) = Ax$ dla pewnej macierzy A . $\square$

Macierz A z twierdzenia 2.34 nazywamy *reprezentacją macierzową* odwzorowania f . Jest ona wyznaczona jednoznacznie. Jeśli wiemy, że odwzorowanie f jest liniowe, łatwo możemy znaleźć macierz A . Jeśli zamiast x podstawimy j -ty wektor bazy standardowej, e_j , to z (2.27) otrzymamy $z_i = a_{ij}$. Zatem wektor $z = f(e_j)$ będzie j -ą kolumną macierzy A . Możemy więc zapisać

$$A = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)).$$

Przykład 2.35. Rozważmy odwzorowanie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, które możemy opisać geometrycznie jako obrót o 180 stopni dookoła punktu $(0, 0)$. Możemy je zapisać wzorem: $f(x) = -x$. Odwzorowanie f jest liniowe, a macierz A ma postać

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rzeczywiście, $f(e_1) = -e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $f(e_2) = -e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\square$

Szczególnie prosto wyglądają odwzorowania liniowe $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, czyli odwzorowania o wartościach skalarnych. Wtedy reprezentacja macierzowa tego odwzorowania jest macierzą $1 \times n$, czyli wektorem wierszowym, i funkcja f może być zapisana wzorem

$$f(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n,$$

gdzie $A = (a_1, \dots, a_n)$ jest reprezentacją macierzową funkcji f .

2.7.6 Zadania

2.130. Sprawdzić czy wektor x jest kombinacją liniową wektorów:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Wektor x jest kombinacją liniową wektorów, jeśli można go przedstawić w postaci $x = \sum_{i=1}^n a_i x^i$, gdzie a_i są to współczynniki. W naszym przypadku mamy: $x = a_1 x^1 + a_2 x^2$, czyli

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Stąd otrzymujemy układ równań o niewiadomych a_1 i a_2

$$-2a_1 + a_2 = 0$$

$$a_2 = 1$$

$$a_1 - a_2 = 2$$

Jest to układ równań sprzecznych, czyli wektor x nie jest kombinacją liniową wektorów x^1, x^2 .

2.131. Sprawdzić liniową zależność wektorów:

a)

$$x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, x^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:

a) Wektory $x^1, \dots, x^n$ są liniowo niezależne wtedy, gdy $(\sum_{i=1}^n a_i x^i = \mathbf{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0)$. Wobec tego sprawdźmy jak wygląda rozwiązanie układu:

$$a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 = a_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

czyli

$$\begin{aligned} -a_1 + 2a_3 &= 0 \\ a_1 - a_2 + 3a_3 &= 0 \\ 3a_2 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ale $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$. Zatem, na podstawie twierdzenia Cramera, dany układ ma jedynie rozwiązanie trywialne: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, czyli wektory x^1 , x^2 , x^3 są liniowo niezależne.

b) Podobnie jak poprzednio rozważmy kombinację liniową danych wektorów i przyrównajmy ją do zera:

$$a_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0,$$

stąd

$$\begin{aligned} -a_1 + 2a_3 + 3a_4 &= 0 \\ a_1 - a_2 + 3a_3 + a_4 &= 0 \\ 3a_2 + a_3 + 3a_4 &= 0 \end{aligned}$$

Jest to układ nieoznaczony, mający rozwiązania nietrywialne. Oznacza to, że dane wektory są liniowo zależne.

2.132. Czy wektory

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

tworzą bazę przestrzeni $V = \mathbb{R}^3$?

Rozwiązanie: Zauważmy, że $\det(x_i^j) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$. Jest to więc zbiór trzech wektorów liniowo niezależnych w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Tworzy wobec tego jej bazę.

2.133. Wyznaczyć bazę własną macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Wielomian charakterystyczny macierzy A ma postać

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 3 \\ 2 & \lambda - 4 & 3 \\ 2 & -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2,$$

więc wartościami własnymi są: $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 2$.

Weźmy $\lambda_1 = -1$. Wektor własny odpowiadający tej wartości własnej wyznaczmy z równości: $(\lambda I - A)v^1 = 0$, czyli jeśli $v^1 = \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{pmatrix}$, to otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązania tego układu równań mają postać: $v^1 = t(1, 1, 1)^T$, więc możemy wybrać $v^1 = (1, 1, 1)^T$.

Weźmy teraz $\lambda_2 = 2$. W tym przypadku, jak łatwo zauważyć, układ równań $(2I - A)v^2 = 0$ redukuje się do jednego równania:

$$2v_1^2 - 2v_2^2 + 3v_3^2 = 0.$$

Musimy więc wprowadzić do rozwiązania dwa parametry $v_1^2 = r$, $v_3^2 = 2s$. Wobec tego rozwiązanie ma postać: $v = (r - 3s, r, 2s)^T$. Zatem jako dwa liniowo niezależne wektory możemy wybrać:

$$v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczone wektory stanowią bazę własną macierzy A :

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Sprawdź, czy wektor x jest kombinacją liniową wektorów x^i , jeżeli:

2.134. $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x^1 = x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2.135. $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x^2 = e^2, x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

$$2.136. \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.137. \quad x = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, x^3 = e^4, x^4 = e^1.$$

$$2.138. \quad x = u, x^1 = 1 - u, x^2 = u^2.$$

$$2.139. \quad x = \sin t, x^1 = \cos t, x^2 = \sin t.$$

Zbadać liniową niezależność wektorów:

$$2.140. \quad x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.141. \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$2.142. \quad x^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.143. \quad x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, x^4 = e^4.$$

$$2.144. \quad x^1 = u, x^2 = 1 - u, x^3 = u^2.$$

$$2.145. \quad x^1 = \sin t, x^2 = \cos 2t, x^3 = \sin 2t.$$

2.146. Dobrać liczbę a tak, aby liniowo zależne były wektory:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \end{pmatrix}.$$

2.147. Dobrać liczbę a tak, aby liniowo niezależne były wektory:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ a+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.148. Wykazać, że jeśli wektory x^1, x^2, x^3 są liniowo niezależne, to wektory $x^1 + x^2, x^2 + x^3, x^3 + x^1$ są też liniowo niezależne.

Czy dane wektory stanowią bazę przestrzeni V ?

$$2.149. \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V = \mathbb{R}^2.$$

$$2.150. \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V = \mathbb{R}^3.$$

$$2.151. \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V = \mathbb{R}^3.$$

2.152. Niech wektory

$$b^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

będą bazą w $\mathbb{R}^3$. Wyznaczyć współrzędne wektora x w tej bazie, jeśli:

$$a) \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b) \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.153. Wyznaczyć współrzędne wektora x w bazie (b^1, b^2) , jeśli w bazie (b^2, b^1) pierwsza współrzędna tego wektora wynosi 1, a druga 4.

Wyznaczyć wartości własne następujących macierzy:

$$2.154. \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.155. \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2.156. \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.157. \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -2 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$2.158. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.159. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.160. \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.161. \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczyć bazę własną danej macierzy A . W przypadku, gdy taka baza będzie istniała, wyznaczyć A^{10} :

$$2.162. \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.163. \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.164. \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2.165. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sprawdzić liniowość danego odwzorowania:

$$2.166. f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_3 + x_2.$$

$$2.167. f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

$$2.168. f(x) = Ax, \text{ gdzie } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2.169. f(x) = Ax, \text{ gdzie } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dane odwzorowanie przedstawić w postaci macierzowej $f(x) = Ax$:

$$2.170. f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)^T.$$

$$2.171. f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_2)^T.$$

$$2.172. f(x_1, x_2) = (x_1^2, -x_2)^T.$$

$$2.173. f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, 0, -x_3)^T.$$

2.8 Zastosowania funkcji liniowych

2.8.1 Funkcje liniowe jednej zmiennej

Niech $X = Y = \mathbb{R}$. Zgodnie z definicją z rozdziału 2.7.5, funkcja liniowa w tym przypadku powinna mieć postać $f(x) = ax$. Tradycyjnie jednak w zastosowaniach pojęcie to rozszerza się do funkcji zdefiniowanych wzorem

$$f(x) = a_1x + a_0, \quad (2.28)$$

które matematycy wolą nazywać afinicznymi. Z praktycznych względów również często dziedziną takiej funkcji jest tylko przedziałem. Wykresem funkcji liniowej (2.28) jest linia prosta przechodząca przez punkt $(0, a_0)$ i nachylona do osi odciętych (czyli osi argumentów) pod kątem, którego tangens równy jest a_1 .

Funkcje liniowe mogą opisywać wiele interesujących zależności ekonomicznych. Jakkolwiek często są to tylko przybliżenia zależności, które mają charakter nieliniowy, w

wielu przypadkach przybliżenia te są wystarczające.

Liniowa funkcja kosztu, dochodu i zysku

Często koszt całkowity w jednostce czasu (np. w ciągu roku) można przedstawić jako sumę kosztu stałego oraz kosztu zmiennego, który jest proporcjonalny do pewnej zmiennej wielkości.

Przykład 2.36. Rozważmy koszt utrzymania samochodu. Można go przedstawić jako funkcję liczby przejechanych kilometrów:

$$K(x) = 0,3x + 1500.$$

Współczynnik przy x wyrażony jest w zł na kilometr i związany jest z kosztami benzyny i oleju. Natomiast wyraz stały (liczony w zł) związany jest z kosztami ubezpieczenia, przeglądów technicznych, parkowania, itp., które nie zależą od liczby przejechanych kilometrów. $\square$

Dochód firmy sprzedającej produkty lub usługi zależy liniowo od liczby sprzedanych produktów lub usług. W przypadku, gdy firma sprzedaje tylko jeden towar po cenie c za sztukę, dochód firmy wyrazi się następująco:

$$D(x) = cx.$$

Zysk, oznaczany przez Z , jest różnicą między dochodem i kosztem:

$$Z = D - K.$$

Zysk może być dodatni lub ujemny. Jeśli dochód i koszt są funkcjami liniowymi ze względu na tę samą zmienną x , to również zysk będzie funkcją liniową tej zmiennej.

Przykład 2.37. Pewna firma sprzedaje pralki automatyczne po 900 zł za sztukę. Koszty robocizny wynoszą 100 na sztukę a koszty materiałów 300 na sztukę. Roczny koszt stały utrzymania firmy (administracja, ogrzewanie, itp.) wynosi 400 tys. zł. Oblicz roczny zysk firmy, jeśli sprzeda ona 1000 pralek.

Rozwiązanie:

Ponieważ $K(x) = 400x + 400.000$, a $D(x) = 900x$, to $Z(x) = D(x) - K(x) = 500x - 400.000$. Podstawiając $x = 1000$, otrzymujemy $Z(1000) = 100.000$. $\square$

Liniowe modele opłacalności

Produkcja jest opłacalna, jeśli zysk jest dodatni, czyli gdy dochody są większe od kosztów. W przypadku, gdy obie te wielkości uzależniamy od ilości wyprodukowanych jednostek x , wartość x^* , dla której zysk jest zerowy, nazywamy punktem opłacalności. W przypadku modeli liniowych produkcja będzie opłacalna, jeśli liczba wyprodukowanych jednostek x będzie większa od x^* . Rozważmy typową sytuację. Niech

$$D(x) = 30x,$$

oraz

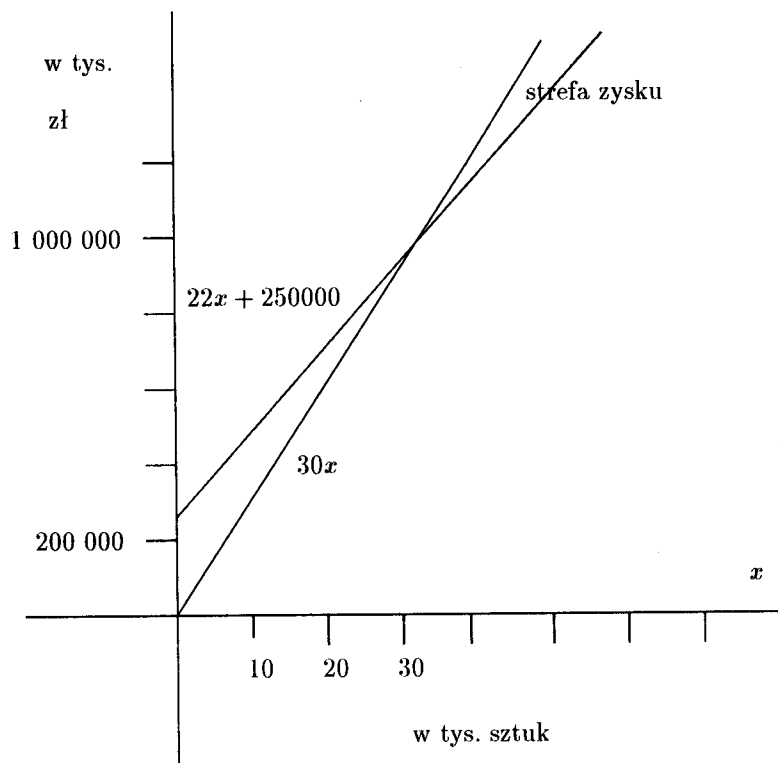
$$K(x) = 22x + 250000,$$

gdzie $D(x)$ i $K(x)$ są wyrażone w tys. zł. Punkt opłacalności x^* spełnia równanie

$$K(x^*) = D(x^*).$$

Rozwiązując równanie otrzymujemy $x^* = 31250$. Zatem produkcja będzie opłacalna, gdy liczba wyprodukowanych jednostek będzie wyższa niż 31250.

Punkt opłacalności możemy odczytać z rysunku, na którym naniesiono wykresy obu funkcji K i D . Jest to punkt przecięcia tych wykresów. (Patrz rys. 2.6.)



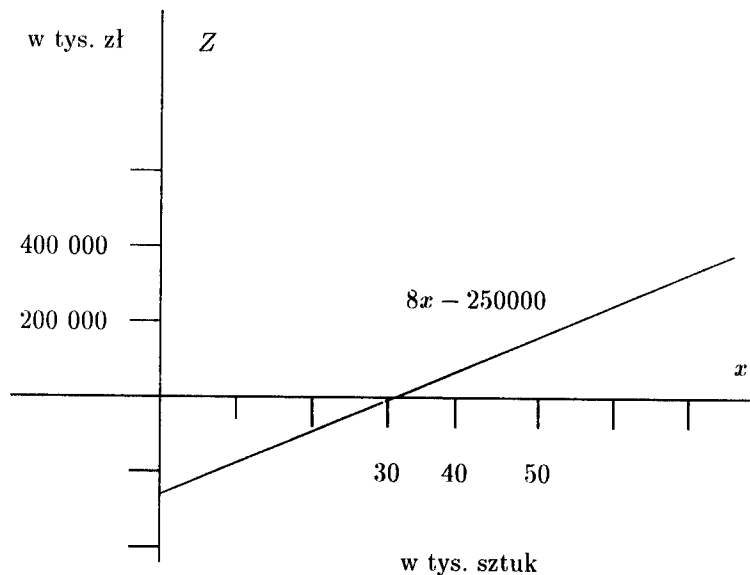
Rysunek 2.6: Wykresy funkcji dochodu i funkcji kosztów

W rozważanym przykładzie zysk wyrazi się wzorem

$$Z(x) = D(x) - K(x) = 8x - 250000.$$

Tak jak dochód i koszt, zysk jest wyrażony w tys. zł. Punkt opłacalności będzie odpowiadał sytuacji, gdy zysk wynosi zero. Na rys. 2.7 pokazany jest wykres funkcji

zysku w zależności od liczby x produkowanych jednostek wyrobu. Zauważ strefę zysku na prawo od x^* i strefę straty na lewo od x^* .



Rysunek 2.7: Wykres funkcji zysku

Przykład 2.38. Polskie Towarzystwo Małych Biznesmenów chce zorganizować w jednym z warszawskich hoteli trzydniową konferencję, poświęconą funkcjonowaniu małego biznesu. Każdy uczestnik zapłaci 1000 zł za uczestnictwo w konferencji. Suma ta pokrywa koszty pokoju, posiłków i opłatę konferencyjną. Hotel żąda 40.000 zł za możliwość korzystania z sali konferencyjnej i urządzeń rekreacyjnych oraz 600 zł za pobyt każdego uczestnika konferencji (nocleg i wyżywienie). Ilu Małych Biznesmenów powinno przyjechać na konferencję, aby przyniosła ona zysk?

Rozwiązanie. Znajdujemy punkt opłacalności porównując dochód i koszty:

$$1000x = 40.000 + 600x.$$

Otrzymujemy $x^* = 100$, zatem, aby impreza była opłacalna, musi w niej uczestniczyć więcej niż 100 osób. $\square$

Punkty opłacalności mogą pojawić się również przy porównywaniu kilku alternatywnych rozwiązań o różnych funkcjach kosztu.

Przykład 2.39. [Bu] Spółdzielnia lekarska zatrudnia kilka osób do wystawiania rachunków pacjentom i prowadzenia ewidencji, za co płaci 1 zł od jednego przyjętego pacjenta. Szef spółdzielni uważa, że czynności te powinien wykonywać komputer i

rozważa dwie opcje:

- 1) *leasing* komputera z oprogramowaniem za 1600 zł rocznie; obsługa administracyjna jednego pacjenta wyniosłaby wtedy 0,6 zł;
 - 2) zlecenie obsługi rachunków wyspecjalizowanej firmie, która żąda stałej opłaty 300 zł rocznie oraz 0,8 zł za jednego pacjenta.
- Spółdzielnia przyjmuje ok 3 tys. pacjentów rocznie. Co doradziłbyś szefowi spółdzielni?

Rozwiązanie. Gdy porównujemy trzy funkcje, wygodnie zilustrować je na wspólnym wykresie (patrz rys. 2.8). Punkty przecięcia prostych możemy odczytać z wykresu lub wyznaczyć analitycznie. Otrzymamy trzy punkty, z których dwa będą „punktami opłacalności”: punkt $x_1 = 1500$ odpowiada przejściu od dotychczasowego, ręcznego wystawiania rachunków do przypadku 2) (zlecenie firmie); punkt $x_2 = 6000$ odpowiada przejściu do wariantu 1) (*leasing* komputera). Zatem rozwiązaniem optymalnym jest zlecenie obsługi wyspecjalizowanej firmie (wariant 2)).

Gdyby wariant 2) był niemożliwy, punkt opłacalności dla wariantu 1) w stosunku do dotychczasowej metody wynosiłby $x^* = 4000$. Zatem szef spółdzielni powinien zostać w tym przypadku przy metodzie ręcznej. $\square$

Liniowa funkcja popytu i podaży

Popyt na określony towar zależy od jego ceny. Jakkolwiek zależność ta jest zwykle nieliniowa, w wielu przypadkach można posługiwać się modelem liniowym. Oczywiście jest, że gdy cena rośnie, popyt maleje. Typowa zależność popytu od ceny może mieć postać:

$$PP(c) = 5000 - 5c,$$

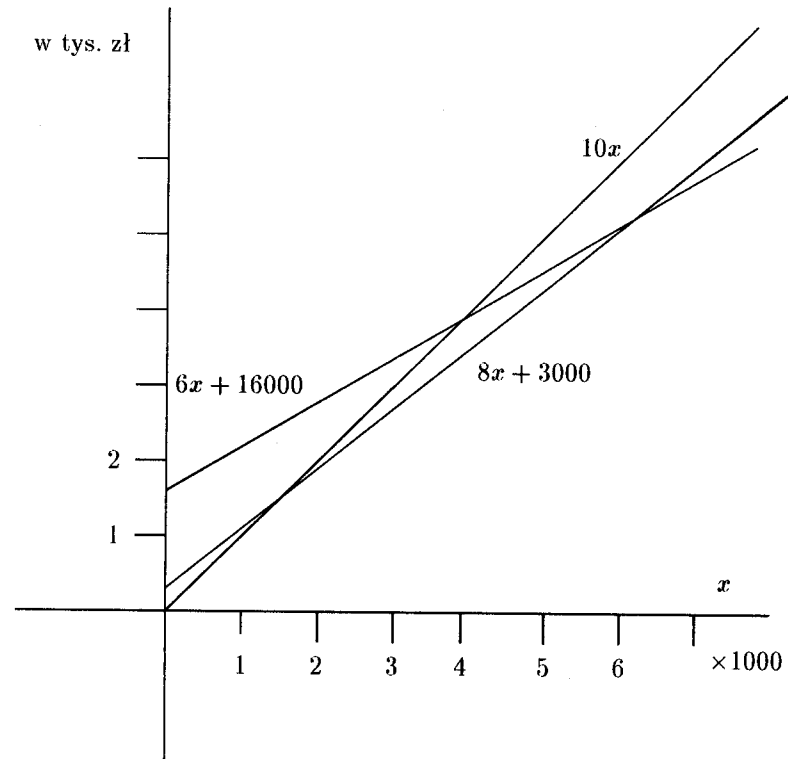
gdzie współczynnik 5 wyrażony jest w jednostkach towaru na 1 zł, a cena c wyrażona jest w zł. Łatwo zauważyć, że gdy cena osiągnie wartość 1000 zł, popyt spadnie do 0. Mniej realistycznie wygląda sytuacja, gdy cena zbliża się do zera. Klienci zachowują się wówczas raczej nieliniowo i kupują towar, nawet jeśli jest im zupełnie niepotrzebny.

W przypadku, gdy producent może bezkarnie podwyższać cenę (np. gdy jest monopolistą), chętnie produkuje więcej. A więc, im wyższa cena, tym większa podaż. Typowa zależność mogłaby wyglądać następująco:

$$PD(c) = 2c,$$

przy jednostkach jak poprzednio. Model ten jest jeszcze mniej realistyczny i zakłada, że zwiększona podaż spotyka się z odpowiednim popytem. Sytuacja taka może mieć miejsce w firmach zbrojeniowych, produkujących na zamówienia rządowe (tak było np. w USA w czasie zimnej wojny).

Cena równowagi to taka cena c^* , dla której popyt jest równy podaży, tzn. $PP(c^*) = PD(c^*)$. Ponieważ funkcja popytu zwykle jest malejąca, a funkcja podaży rosnąca, wykresy obu funkcji powinny się przeciąć, dając w punkcie przecięcia cenę równowagi.



Rysunek 2.8: Trzy warianty

W praktyce może się jednak okazać, że cena ta nie należy do przecięcia dziedzin (praktycznych) obu funkcji.

Amortyzacja i wartość księgowa

Sprzęt posiadany przez firmę ulega zużyciu. Zwykle zakłada się, że wartość tego zużycia, czyli amortyzacja, jest proporcjonalna do wieku sprzętu. Wartość księgowa sprzętu jest różnicą między jego wartością początkową a wartością amortyzacji. Zatem

$$WK(t) = c - at,$$

gdzie WK oznacza wartość księgową sprzętu, c – cenę, za jaką go zakupiono, t – czas oraz a – współczynnik amortyzacji.

2.8.2 Funkcje wielu zmiennych

Podobnie jak dla funkcji jednej zmiennej, również dla funkcji liniowych wielu zmiennych będziemy rozważali uogólnione funkcje liniowe (funkcje afiniczne) postaci $f(x) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, gdzie $x = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Funkcja dochodu, punkty opłacalności

Zwykle firmy sprzedają wiele różnych produktów lub usług. Wtedy funkcja dochodu zależy od wielu zmiennych:

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

Zmienne te reprezentują liczbę sztuk różnych towarów sprzedanych przez firmę.

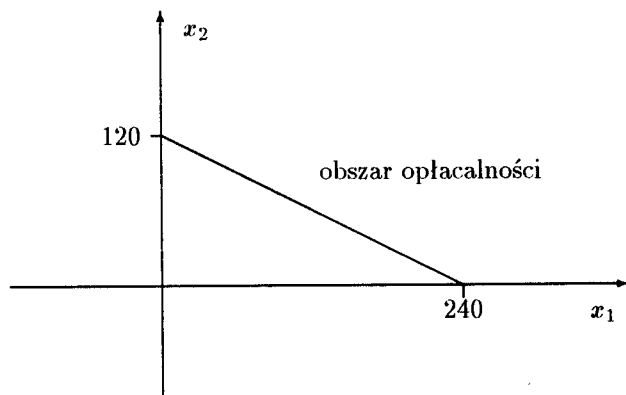
Funkcja kosztu powinna zawierać koszt stały, będzie więc uogólnioną funkcją liniową:

$$K(x_1, \dots, x_n) = k_0 + k_1x_1 + \dots + k_nx_n.$$

Rozważmy sytuację dla $n = 2$. Niech

$$D(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \text{ oraz } K(x_1, x_2) = 240 + 2x_1 + 2x_2.$$

Chcemy znaleźć punkt opłacalności, w którym $D(x_1, x_2) = K(x_1, x_2)$. Otrzymujemy $3x_1 + 4x_2 = 240 + 2x_1 + 2x_2$, co jest równoważne równaniu $x_1 + 2x_2 = 240$. Równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań i opisuje prostą na płaszczyźnie. Jeśli uwzględnimy fakt, że zarówno x_1 jak x_2 powinny być nieujemne, prosta zostanie ograniczona do odcinka. Zamiast jednego punktu opłacalności otrzymujemy więc cały odcinek takich punktów (patrz rys. 2.9).



Rysunek 2.9: Obszar opłacalności

Odcinek ten odpowiada wartościom produkcji x , dla których zysk $Z(x) = D(x) - K(x)$ jest równy 0. Produkcja będzie opłacalna, gdy zysk będzie dodatni, czyli, gdy $Z(x) = x_1 + 2x_2 - 240 > 0$. Nierówność ta opisuje otwartą półpłaszczyznę, której brzegiem jest otrzymana wcześniej prosta $x_1 + 2x_2 = 240$. Z dwóch możliwych półpłaszczyzn należy wybrać tę, która leży nad prostą. Widać to po przekształceniu nierówności do postaci $x_2 > -\frac{1}{2}x_1 + 120$. Można to ustalić inaczej, wybierając jakiś punkt w jednej z dwóch półpłaszczyzn i sprawdzając, czy spełnia on naszą nierówność. Jeśli spełnia, to półpłaszczyznę, do której należy ten punkt, jest właśnie tą, której szukamy. Musimy uwzględnić również naturalne ograniczenia $x_1 \geq 0$ i $x_2 \geq 0$, które również definiują półpłaszczyznę, tym razem domkniętą. Tym razem czytelnik nie powinien mieć trudności z zaznaczeniem tych półpłaszczyzn. Ostatecznie otrzymujemy, że działalność firmy jest opłacalna, gdy punkt $x = (x_1, x_2)$, reprezentujący wielkość produkcji leży w obszarze opłacalności, czyli należy do przecięcia trzech półpłaszczyzn.

Warto zauważyć, że część wspólna skończonej rodziny półpłaszczyzn, jeśli jest niepusta, jest wielobokiem (być może nieograniczonym). Zbiory takie pojawiają się często w wielu problemach matematycznych i ekonomicznych (np. w programowaniu liniowym).

Dla większej liczby zmiennych taka interpretacja graficzna jest niemożliwa, ale jakościowo sytuacja będzie podobna. W szczególności otrzymamy nieskończenie wiele punktów równowagi.

Równowaga rynkowa. Dwa konkurujące produkty

Niech PP_1 i PP_2 oznaczają popyt na dwa konkurujące ze sobą towary, natomiast PD_1 i PD_2 podaź tych towarów. Jeśli przez c_1 i c_2 oznaczymy ceny tych towarów, podaź i popyt mogłyby się wyrazić następująco:

$$PP_1 = 100 - 2c_1 + 3c_2,$$

$$PD_1 = 2c_1 - 4,$$

$$PP_2 = 150 + 4c_1 - c_2,$$

$$PD_2 = 3c_2 - 6.$$

Zauważmy, że popyt na każdy z towarów zależy od cen obu towarów. Rynek będzie w równowadze, jeśli popyt i podaź na każdy z towarów będą równe

$$PP_1 = PD_1 \text{ i } PP_2 = PD_2.$$

Rozwiązania c_1 i c_2 tego układu równań dadzą ceny równowagi. Znajdź te ceny.

Zarówno dla dwóch, jak i dla większej liczby produktów otrzymamy zwykle jednoznaczne ceny równowagi na każdy produkt. Będzie to zatem podobne do przypadku jednego towaru.

2.8.3 Zadania

Zadania do samodzielnego rozwiązania

2.174. Podać ogólną postać funkcji liniowej:

a) jednej zmiennej, b) dwóch zmiennych, c) trzech zmiennych, d) n -zmiennych.

2.175. Wykonać wykres funkcji:

$$a) f(x) = \begin{cases} 0,05x + 1,5 & 0 \leq x < 10 \\ -0,1x + 3 & 10 \leq x < 30 \\ 0 & x < 0 \text{ lub } x \geq 30, \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1000 \\ x - 999 & x > 1000 \end{cases}$$

2.176. Od podatku dochodowego w roku 1992 były zwolnione dochody poniżej 10mln zł. Za dochody przekraczające 10mln zł podatnik płacił podatek w wysokości 20% od dochodu pomniejszonego o 10mln zł. Jeśli dochód przekraczał 110mln zł podatnik płacił 20mln zł plus 30% nadwyżki powyżej 110mln zł. Wykonać wykres funkcji obrazującej zależność podatku od dochodu i podać jej wzór.

2.177. W roku 1994 obowiązywały następujące stawki podatkowe:

Dochód(w tys. zł)	Procent
1 212	kwota
	nieopodatkowana
1 212 - 90 800	21%
90 800 - 181 600	33%
powyżej 181 600	45%

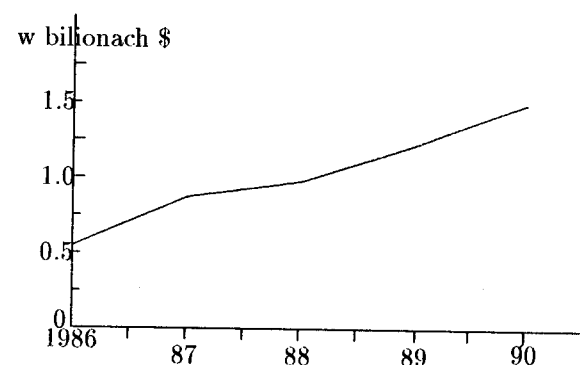
Niech x oznacza roczny dochód podatnika. Wyznaczyć i narysować liniową funkcję przedstawiającą wielkość podatku w zależności od rocznego dochodu, pamiętając o zasadzie ciągłości funkcji podatku.

2.178. Rysunek 2.10 pokazuje dane dotyczące zysków "Disneylandu" między 1986 a 1990 rokiem. W tym okresie przebiega on w przybliżeniu liniowo. W 1987r.- 0,762 bilionów \$, a w 1989r.- 1,220 bilionów \$. Używając tych danych:

- podać równanie prostej aproksymującej te dane.
- zinterpretować współczynnik kierunkowy tej prostej.
- wyznaczyć przypuszczalny zysk w roku 2000.

2.179. Spółka wytwarza towar, który sprzedaje po 55 zł za sztukę. Koszty stałe (mierzone w skali rocznej, niezależne od wielkości produkcji) wynoszą 400 zł. Wytworzenie każdej sztuki tego towaru kosztuje firmę 25 zł. Niech zmienna x oznacza liczbę wyprodukowanych i sprzedanych w ciągu roku sztuk towaru. Określić:

- funkcję kosztu, b) funkcję dochodu, c) funkcję zysku.



Rysunek 2.10: Zysk "Disneylandu".

- roczny zysk uzyskany ze sprzedaży 10 000 sztuk tego towaru.
- W jakim przypadku spółka otrzyma zysk zerowy?
- Podać ilustrację graficzną.

2.180. Firma sprzedaje radioodbiorniki w cenie 175 zł za sztukę. Koszty zmienne tej firmy kształtują się następująco: 105 zł - środki do produkcji, 15 zł - robocizna. Koszty stałe wynoszą 550 zł. W zależności od liczby wyprodukowanych i sprzedanych radioodbiorników określić:

- funkcję dochodu, b) funkcję kosztu, c) funkcję zysku,
- roczny zysk uzyskany ze sprzedaży 12.500 radioodbiorników.
- Przy jakiej wielkości produkcji firma staje się nierentowna? Podać ilustrację graficzną.

2.181. W przedsiębiorstwie wytwarzającym jednorodną produkcję stwierdzono, że koszt zmienny produkcji jest proporcjonalny do wielkości produkcji $x > 0$. Określić koszt produkcji wynoszącej 5 jednostek, jeżeli wiadomo, że przy produkcji wynoszącej 100 jednostek całkowite koszty wyniosły 310tys.zł, a przy produkcji 150 jednostek-460tys.zł.

2.182. Badania marketingowe przeprowadzone przez pewną firmę, a dotyczące liczby turystów mających zamiar w przyszłości odpoczywać na Mazurach, wykazały, że badane zjawisko można opisać za pomocą funkcji $p(t) = 7.500t + 275.000$, gdzie t oznacza czas w latach, $t = 0$ -rok bieżący, $t = 1$ -rok następny, p -liczbę turystów, którzy mają zamiar odpoczywać na Mazurach.

- Naszkicować wykres tej funkcji
- Podać współrzędne punktu przecięcia wykresu danej funkcji z osią OY. Jaka jest interpretacja tego punktu?
- Podać prognozę dotyczącą liczby turystów, zamierzających wypoczywać na Mazurach w roku 1995, 1996 i 2000.

2.183. Rolnik planuje trzy rodzaje upraw. Koszty stałe wynoszą 7500 zł. Koszty jednostkowe dla poszczególnych upraw przypadające na 1 ha podaje tabela:

uprawa	koszt	dochód
pszenica	1000	1300
kukurydza	1500	1650
ziemniaki	75	1500

Wyznaczyć funkcję kosztu i zysku. Podać przykład zagospodarowania 50ha, tak aby uprawy były opłacalne.

2.184. Firma mikrokomputerowa produkuje trzy rodzaje mikrokomputerów. Tabela podaje ceny sprzedaży, robociznę oraz koszty materiałowe związane z jednym mikrokomputerem:

	model 1	model 2	model 3
cena sprzedaży	1000 zł	1650 zł	2500 zł
koszty materiałowe	600 zł	800 zł	1250 zł
robocizna	150 zł	300 zł	4500 zł

- Wyznaczyć funkcję dochodu, kosztu i zysku.
- Jaki będzie zysk firmy przy sprzedaży 1000 egzemplarzy modelu 1, 5.500-modelu 2, 3000-modelu 3?
- Kiedy produkcja jest opłacalna?

2.185. Pewne urządzenie kosztowało 80mln zł. Zdecydowano, że po 6 latach użytkowania jego wartość spadła do zera. Wyznaczyć liniową funkcję amortyzacji tego urządzenia w zależności od czasu t użytkowania.

2.186. Kupiono pewne urządzenie za 20 000 zł. Zdecydowano się na jego liniową amortyzację ze współczynnikiem 3 500 rocznie. Po jakim czasie wartość księgowa urządzenia spadnie do zera ?

2.187. Popyt na pewien towar, w zależności od jego ceny (w zł), opisuje funkcja: $PP(c) = 4.500 - 1.800c$.

- Przy jakiej cenie popyt na ten towar zmaleje do zera?
- Jak zmieni się popyt na ten towar, jeżeli jego cenę

- zwiększymy dwukrotnie
- zmniejszymy o 1 zł
- zwiększymy o 1 zł .

2.188. Punkty $A(3,5;1.160)$ i $B(5,0;18.000)$ leżą na wykresie liniowej funkcji podaży pewnego produktu. Niech zmienna c oznacza cenę danego produktu, a $PD(c)$ jego podaż.

- Wyznaczyć funkcję $PD(c)$ i naszkicować jej wykres
- Jaka wartość ceny danego produktu wywoła jego podaż wynoszącą 13.000 jednostek?
- Podać interpretację ekonomiczną współczynnika kierunkowego tej prostej.

2.189. Niech PP_1 i PP_2 oznaczają popyt na dwa konkurujące ze sobą towary, natomiast PD_1 i PD_2 - podaż tych towarów, c_1 , c_2 - ceny tych towarów. Wtedy:

$$PP_1 = 82 - 3c_1 + c_2, \quad PD_1 = 15c_1 - 5,$$

$$PP_2 = 92 + 2c_1 - 4c_2, \quad PD_2 = 32c_2 - 6.$$

Wyznaczyć ceny równowagi rynkowej oraz wartości PP_1 i PP_2 przy tych cenach.

2.190. Dane są funkcje popytu i podaży dla trzech konkurujących produktów:

$$\begin{aligned} PP_1 &= 46 - 10c_1 + 2c_2 + 2c_3 \\ PD_1 &= 12c_1 - 16 \\ PP_2 &= 30 + 2c_1 - 6c_2 + 4c_3 \\ PD_2 &= 6c_2 - 22 \\ PP_3 &= 38 + 2c_1 + 4c_2 - 8c_3 \\ PD_3 &= 6c_3 - 10 \end{aligned}$$

Wyznaczyć c_1 , c_2 , c_3 - ceny równowagi oraz wartości funkcji podaży i popytu przy tych cenach.

2.191. Rozważana jest decyzja podjęcia produkcji pewnego towaru. Możliwe są cztery różne linie produkcyjne, przy czym ich kosztorys jest następujący:

Urządzenie	Cena urządzenia (w tys. zł)	Koszt prod. 1-sztuki (zł)
I	8	10
II	12	9
III	20	7,5
IV	30	5,5

Wyznaczyć obszary najmniejszych kosztów dla każdego urządzenia. Podać ilustrację graficzną funkcji kosztów.

Rozdział 3

Funkcje jednej zmiennej

W rozdziale tym zajmujemy się funkcjami nieliniowymi jednej zmiennej, tzn. funkcjami określonymi na podzbiorze prostej $\mathbb{R}$ (zwykle odcinku lub całej prostej) i o wartościach w zbiorze $\mathbb{R}$. Zaletą tych funkcji jest to, że można narysować ich wykresy, co znacznie ułatwia ich analizę. Jednak zależności ekonomiczne często wymagają użycia większej liczby zmiennych.

3.1 Granice i ciągłość

Aby zdefiniować ciągłość funkcji, potrzebujemy pojęcia ciągu. *Ciągiem (liczbowym)* nazywamy funkcję $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Wartości tej funkcji, ustawione w naturalnym porządku, nazywamy kolejnymi wyrazami ciągu i oznaczamy następująco:

$$a(1) = a_1, a(2) = a_2, \dots, a(n) = a_n, \dots$$

Ciąg zwykle utożsamiamy ze zbiorem wyrazów, co zapisujemy $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lub po prostu $a = (a_n)$.

Ciąg (a_n) ma granicę g (dla $n \rightarrow \infty$) jeśli $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |a_n - g| < \epsilon$. Piszemy wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g.$$

Na przykład ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ ma granicę 0 (mówimy też: dąży do 0). Podobnie definiujemy granice nieskończone (niewłaściwe)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \text{ } (-\infty)$$

jeśli $\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : a_n > M \text{ } (a_n < M)$.

Rozważmy funkcję $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ oraz punkt $x_0 \in (a, b)$. Funkcja f ma granicę g w punkcie x_0 , jeśli dla każdego ciągu (x_n) dążącego do x_0 , $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$. Piszemy wtedy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g.$$

W definicji tej g może być skończoną liczbą lub $\pm\infty$.

Na przykład funkcja $f(x) = 4x$ ma w punkcie $x_0 = 3$ granicę równą 12, bo jeśli $\lim x_n = 3$, to $\lim f(x_n) = \lim 4x_n = 4 \lim x_n = 12$. Natomiast funkcja $f(x) = 1/x^2$ ma granicę w $x_0 = 0$ równą $+\infty$.

Jeśli w definicji granicy funkcji zamiast wszystkich ciągów dążących do x_0 weźmiemy tylko ciągi dążące do x_0 z prawej strony (tzn. o wyrazach większych od x_0), otrzymamy definicję *granicy prawostronnej* funkcji f w punkcie x_0 , oznaczaną $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$. Analogicznie definiujemy *granice lewostronną* oznaczaną $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$. Jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ równa się $+\infty$ lub $-\infty$, to mówimy, że f ma *asymptotę pionową prawostronną* w x_0 . Podobnie definiujemy *asymptotę pionową lewostronną*. Funkcja f ma *asymptotę pionową obustronną*, jeśli ma jednocześnie asymptotę prawostronną i lewostronną w rozważanym punkcie.

Na przykład funkcja $f(x) = 1/x$ nie ma granicy w $x_0 = 0$, ale ma granice jednostronne: $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -\infty$. Zatem ma asymptotę pionową obustronną w $x_0 = 0$.

Jeśli x_0 należy do dziedziny funkcji f , funkcja f ma granicę w punkcie x_0 , oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, to mówimy, że funkcja f jest *ciągła* w punkcie x_0 . Funkcję ciągłą w każdym punkcie dziedziny nazywamy po prostu *ciągłą*.

Na przykład funkcja $f(x) = 4x$, $x \in \mathbb{R}$, jest ciągła, gdyż

$$\lim_{x \rightarrow x_0} 4x = 4x_0 = f(x_0)$$

dla dowolnego punktu $x_0 \in \mathbb{R}$. Natomiast funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x < 0 \\ 1 & \text{jeśli } x \geq 0 \end{cases}$$

nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, gdyż nie ma w tym punkcie granicy. Rzeczywiście, ciągi $(1/n)$ oraz $(-1/n)$ dążą do 0, natomiast

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(1/n) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(-1/n) = 0.$$

Funkcja ciągła ma wykres „ciągły”, bez dziur. Natomiast brak ciągłości funkcji w punkcie x_0 przejawia się dziurą (przerwą) w wykresie dla odciętej równej x_0 . Charakter tej dziury wiąże się z rodzajem nieciągłości. Wszystkie funkcje elementarne rozważane w tym rozdziale będą ciągłe. Gdy jednak sklejamy różne funkcje ciągłe, w punktach sklejania może pojawić się dziura, powodując brak ciągłości.

Jeśli funkcja zdefiniowana jest na prostej (lub półprostej), interesuje nas jej zachowanie w nieskończoności (plus lub minus). Określamy, że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g,$$

jeśli $\forall \epsilon > 0 \exists T \in \mathbb{R} \forall x > T : |f(x) - g| < \epsilon$. Podobnie definiujemy granicę w $-\infty$.

Często funkcje, które będziemy rozważać, nie będą miały skończonej granicy w $+\infty$ lub $-\infty$. Mogą mieć jednak granicę nieskończoną, co definiujemy następująco $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, jeśli $\forall M \in \mathbb{N} \exists T \in \mathbb{R} \forall x > T : f(x) > M$. Podobnie w pozostałych przypadkach.

Na przykład $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x = +\infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x = -\infty$. Skończone granice w nieskończoności otrzymujemy dla funkcji $f(x) = 1/x$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Natomiast funkcje sinus i kosinus nie mają granic ani w $+\infty$ ani w $-\infty$.

Jeśli funkcja f ma skończoną granicę a w $+\infty$, to ma prawostronną *asymptotę poziomą* $y = a$. Podobnie jest dla $-\infty$.

Jeśli $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$, to mówimy, że prosta $y = ax + b$ jest *asymptotą ukośną prawostronną* funkcji f . Podobnie definiujemy lewostronną asymptotę ukośną. Współczynniki a i b asymptoty ukośnej łatwo znajdujemy ze wzorów:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

Na odwrót, jeśli powyższe granice istnieją, to f ma asymptotę ukośną o wyliczonych parametrach.

Zauważmy, że asymptota pozioma jest szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej, gdy $a = 0$.

3.1.1 Zadania

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć:

$$3.1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}.$$

$$3.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}.$$

$$3.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 - 1}{x^4 + x^3 + 10x - 1}.$$

$$3.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}.$$

$$3.9. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right).$$

$$3.11. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3} - 3}{x-6}.$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}.$$

$$3.4. \lim_{x \rightarrow 25} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{5}}{x - 25}.$$

$$3.6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 + 2x^2 + x}{4x^4 + x^3 - 2x + 5}.$$

$$3.8. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}.$$

$$3.10. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x).$$

$$3.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$3.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x}.$$

$$3.15. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x} \right).$$

$$3.17. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

$$3.19. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi}.$$

$$3.21. \lim_{x \rightarrow 0} |x|.$$

$$3.23. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} - 1).$$

$$3.25. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}.$$

$$3.27. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2+x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x+2}}.$$

$$3.29. \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right).$$

$$3.14. \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2}{x+2} + \frac{2x}{x+2} \right).$$

$$3.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}.$$

$$3.18. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x.$$

$$3.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}.$$

$$3.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}.$$

$$3.24. \lim_{x \rightarrow 5^+} (\sqrt{x-5} + \sqrt{5x}).$$

$$3.26. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}.$$

$$3.28. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right).$$

$$3.30. \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right).$$

$$3.31. \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \text{ gdzie } f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 1 \\ x^3 + 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$3.32. \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \text{ gdzie } f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 2, & x < 0 \\ 3 - x, & x > 0. \end{cases}$$

Zbadać ciągłość funkcji:

$$3.33. f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$3.34. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

$$3.35. f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x}, & x > 1. \end{cases}$$

$$3.36. f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Uzupełnić określenie funkcji tak, aby otrzymać funkcję ciągłą dla $x \in \mathbb{R}$:

$$3.37. f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \text{ dla } x \neq 1.$$

$$3.38. f(x) = \frac{x^2-2x-8}{x-4} \text{ dla } x \neq 4.$$

$$3.39. f(x) = \frac{|x-7|}{x-7} \text{ dla } x \neq 7.$$

$$3.40. f(x) = \frac{2\sin^2 x}{x^2} \text{ dla } x \neq 0.$$

3.41. Dana jest funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 2x^2 + a, & x \geq 1 \end{cases}$$

Dla jakiego a jest to funkcja ciągła w punkcie $x = 1$?

3.42. Dla jakiego a funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a + 2^x, & x < 2 \\ 1 + 2x, & x \geq 2 \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x = 2$?

Zbadać istnienie asymptot następujących funkcji:

$$3.43. f(x) = \frac{x}{x^2-1}.$$

$$3.44. f(x) = \frac{x^3+8}{x^2-4}.$$

$$3.45. f(x) = \frac{\sin x}{x^2}.$$

$$3.46. f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

$$3.47. f(x) = \frac{2}{|x|} - 1.$$

$$3.48. f(x) = \sqrt[3]{8-x^3}.$$

3.2 Funkcje elementarne i ich zastosowania

3.2.1 Funkcje kwadratowe

Funkcja kwadratowa jest opisana przez wielomian stopnia 2,

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

(zakładamy, że $a \neq 0$). Jej dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych. Każda funkcja kwadratowa może być przedstawiona w postaci kanonicznej

$$f(x) = a(x-p)^2 + q.$$

Wykresem funkcji kwadratowej zadanej przez powyższe równanie jest parabola o wierzchołku w punkcie (p, q) . Jeśli $a > 0$, parabola jest zwrócona ramionami do góry; dla $a < 0$, ramiona zwrócone są do dołu. Miejsca zerowe funkcji kwadratowej znajdziemy ze wzoru:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

jeśli $b^2 - 4ac \geq 0$. Jeśli $b^2 - 4ac = 0$, to $x_1 = x_2$. W przypadku, gdy $b^2 - 4ac < 0$, funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

Ponieważ zawsze potrafimy znaleźć miejsca zerowe funkcji kwadratowej (o ile istnieje) oraz narysować jej wykres, jest ona pierwszym kandydatem do opisu zjawisk nieliniowych, tzn. takich, które nie dadzą się opisać przy pomocy funkcji liniowej. Funkcja kwadratowa jest szczególnie przydatna, gdy dysponujemy tylko kilkoma punktami opisującymi związek między dwiema wielkościami. Możemy wówczas tak dopasować współczynniki funkcji kwadratowej, aby te punkty należały do wykresu konstruowanej funkcji.

Przykład 3.1. [Bu] Przeciętne zarobki graczy ligi NBA rosną szybciej niż liniowo. W r. 1981 wynosiły one 190 tys. \$, w r. 1985 – 310 tys. \$, a w r. 1988 już 600 tys. \$. Znajdźmy funkcję kwadratową, która spełnia podane warunki. Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$ wyraża roczne zarobki mierzone w tys. \$, zaś x czas mierzony w latach pomniejszony o 1981. A więc r. 1981 odpowiada liczbie $x = 0$, r. 1985 liczbie $x = 4$,

a r. 1988 liczbie $x = 7$. Podstawiając dane do równania funkcji, otrzymamy trzy równania wiążące współczynniki a , b i c :

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 190$$

$$a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 310$$

$$a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c = 600.$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymamy $a = 9,524$, $b = -8,096$ i $c = 190$. Zakładając, że kwadratowy wzrost zarobków się utrzymał, możemy obliczyć ile chłopcy z NBA zarobili w roku 1995:

$$f(14) = 9,524 \cdot 14^2 - 8,096 \cdot 14 + 190 = 2178 \times 1000\$,$$

czyli ok. 2,2 mln dolarów (przeciętne wynagrodzenie roczne). $\square$

Uwaga 3.2. Nie zawsze układ równań, który otrzymamy wstawiając dane do ogólnej postaci funkcji kwadratowej, będzie miał rozwiązanie. Rozwiązania zwykle nie będą, gdy liczba punktów, które chcemy uwzględnić, jest większa od trzech. W takiej sytuacji można zaproponować model opisywany wielomianem wyższego stopnia. $\square$

Kwadratowa funkcja dochodu

Jeśli popyt jest liniową funkcją ceny, to dochód będzie funkcją kwadratową ceny. Przypuśćmy, że popyt, na przykład na pewien typ samochodu, wyraża się następująco:

$$PP(c) = 100 - 2c,$$

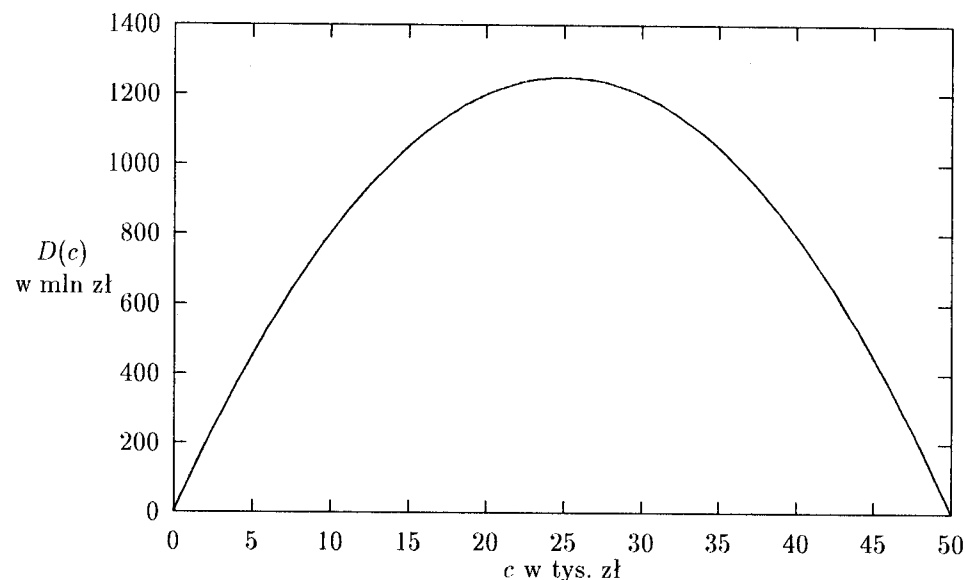
gdzie cenę wyrażamy w tys. zł, a popyt w tysiącach jednostek. Wtedy zależność dochodu od ceny będzie wyglądała następująco:

$$D(c) = PP(c) \cdot c = 100c - 2c^2.$$

Ponieważ współczynnik przy c^2 jest ujemny, funkcja osiągnie wartość maksymalną dla wartości c odpowiadającej wierzchołkowi paraboli. Zauważmy, że

$$D(c) = -2c(c - 50).$$

Wartości funkcji D liczone są w mln zł ($1000 \text{ sztuk} \times 1000 \text{ zł/sztuka}$). Z postaci D otrzymujemy dwie ważne informacje. Po pierwsze dla ceny $c_1 = 0 \text{ zł}$ oraz dla ceny $c_2 = 50 \text{ tys. zł}$, dochód będzie równy 0. Wartość maksymalna dochodu osiągana będzie dla ceny $c^* = 25 \text{ tys. zł}$, leżącej w środku, pomiędzy c_1 i c_2 (rys. 3.1). Warto zauważyć, że praktyczną dziedziną funkcji D jest przedział $[c_1, c_2]$, w odróżnieniu od dziedziny naturalnej, równej $\mathbb{R}$. Dziedzina praktyczna funkcji D pokrywa się z dziedziną praktyczną funkcji popytu (funkcja popytu nie może przyjmować wartości ujemnych).



Rysunek 3.1: Kwadratowa funkcja dochodu

Kwadratowe funkcje podaży i popytu. Równowaga rynkowa

Jak zauważyliśmy w rozdziale 2.8.1, liniowa funkcja podaży jest mało realnym modelem. Wydawałoby się, że funkcja kwadratowa, szybciej rosnąca od liniowej, jeszcze mniej nadaje się na taki model. Nie dotyczy to jednak sytuacji, gdy rozważana podaż jest tylko deklaracją producenta w ankiecie CBOS-u, a nie decyzją produkcyjną.

Ankieteryzy zapytali producentów proszków do prania, ile wynosiłaby ich produkcja, gdyby cena za standardowe pudełko proszku wynosiła odpowiednio: a) 2,5 zł, b) 5 zł, c) 10 zł. Łączne wartości deklarowanej miesięcznej podaży wynosiły: a) 112,5 tys., b) 1050 tys., c) 4800 tys. Ponieważ zależność deklarowanej podaży od ceny ma charakter nieliniowy, można spróbować opisać ją funkcją kwadratową $PD(c) = ac^2 + bc + d$. Postępując podobnie jak w przykładzie 3.1 otrzymamy następującą zależność kwadratową:

$$PD(c) = 50c^2 - 200,$$

gdzie c jest wyrażone w zł, a PD w tys. sztuk. Zauważmy, że przy $c = 2 \text{ zł}$ $PD(c)$ byłoby równe 0. Sugerowałoby to, że jest to minimalna cena, jaką w praktyce producenci mogliby rozważać. Wyznacza ona zatem praktyczną dziedzinę rozważanej funkcji podaży. Pamiętajmy jednak, że słowo „praktyczna” odnosi się tutaj do sondażu, a nie faktycznej produkcji.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, ankieteryzy CBOS-u ustalili spodziewany miesięczny popyt na proszek do prania w zależności od ceny pudełka proszku. Zależ-

ność okazała się również nieliniowa. Oto otrzymane wyniki (c wyrażone jest w zł, a PP w tys. jednostek):

$$PP(0,5) = 2025, PP(1) = 1600, PP(2) = 900.$$

Funkcja kwadratowa spełniająca powyższe warunki ma postać:

$$PP(c) = 100c^2 - 1000c + 2500,$$

i w interesującym nas zakresie cen jest malejąca. Minimum równe 0 osiągnięte jest dla ceny $c = 5$ zł, ale wyrokowanie o decyzjach konsumentów odpowiadających takiej cenie jest już ryzykowne. Tym bardziej nie możemy twierdzić, że popyt znowu wzrośnie, gdy cena przekroczy 5 zł, co wynikałoby z postaci funkcji PP .

Opierając się na poprzednich rozważaniach można ustalić dla jakiej ceny popyt zrówna się z podażą. Przyrównanie $PP(c) = PD(c)$ prowadzi do równania:

$$50c^2 - 200 = 100c^2 - 1000c + 2500,$$

co daje dwa przybliżone rozwiązania: $c_1 = 3,22$ zł oraz $c_2 = 16,78$ zł. Drugie rozwiązanie jest dużo większe od 5 zł, które uważaliśmy za granicę praktycznej dziedziny funkcji popytu. Zatem jedynym rozwiązaniem pozostaje cena c_1 , która jest tu ceną równowagi. Cenę równowagi można znaleźć również graficznie jako punkt przecięcia wykresów, co przedstawia rys. 3.2. Zauważmy, że praktyczne dziedziny obu funkcji są różne. Wynika to z różnych zakresów cen, przy których ustalano popyt oraz podaż. Punkt przecięcia musi odpowiadać cenie, która należy do dziedzin obu funkcji.

Optymalna lokalizacja

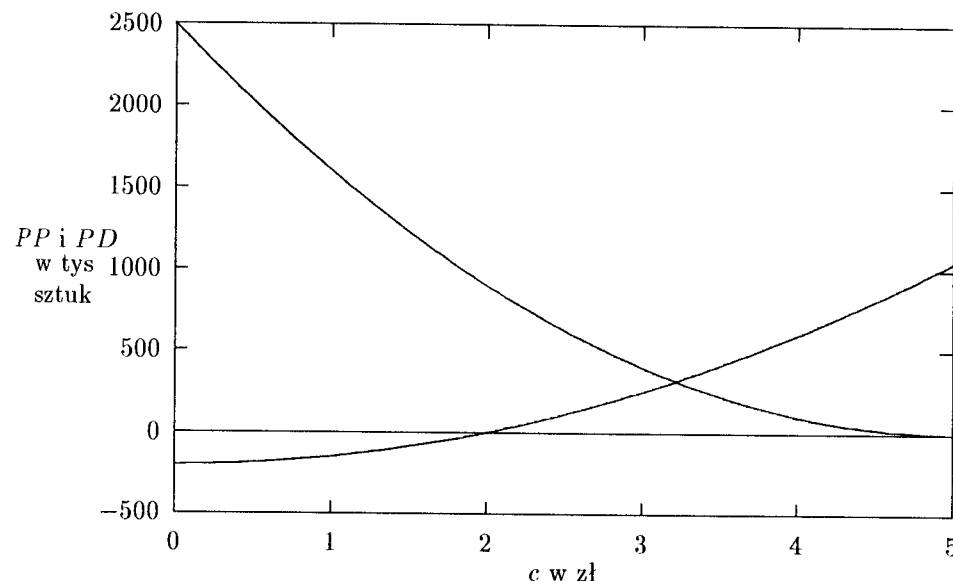
Niedaleko autostrady leżą dwie miejscowości: Wola Wielka z 4000 mieszkańców i Wola Mała z 1000 mieszkańców. W odpowiednim układzie współrzędnych autostrada może być utożsamiana z osią x -ów a Wola Wielka i Wola Mała z punktami o współrzędnych $(2, 1)$ i $(4, -2)$. Władze obu miejscowości postanowiły wybudować przy autostradzie stację benzynową. Chcą tak wyznaczyć lokalizację stacji, aby była ona możliwie blisko obu miejscowości. Oznaczmy przez d_1 i przez d_2 odpowiednio odległości od stacji do Woli Wielkiej i Woli Małej. Zdecydowano tak usytuować stację benzynową, aby zminimalizować następującą funkcję

$$f(x) = 4000d_1^2 + 1000d_2^2.$$

Zauważmy, że oprócz kwadratów odległości, pojawiły się tu też „wagi” związane z liczbami mieszkańców w obu miejscowościach. Zmienna x oznacza współrzędną stacji benzynowej (przy autostradzie). Mamy zatem $d_1^2 = (x - 2)^2 + 1$ i $d_2^2 = (x - 4)^2 + 4$, oraz

$$f(x) = 4000(x - 2)^2 + 4000 + 1000(x - 4)^2 + 4000 = 5000x^2 - 24000x + 40000.$$

Funkcja f osiąga minimum dla $x = 2,4$. Tam zatem zostanie postawiona stacja benzynowa.



Rysunek 3.2: Równowaga rynkowa

3.2.2 Funkcje wielomianowe

Funkcja wielomianowa stopnia n opisywana jest wzorem

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

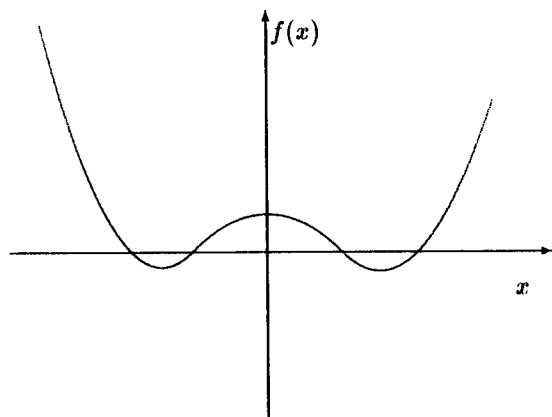
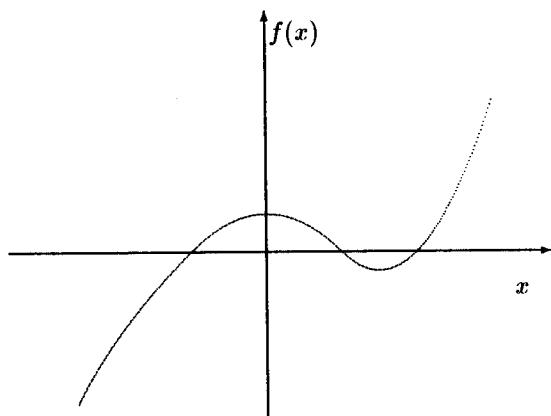
gdzie $a_n \neq 0$. Dla $n = 1$ otrzymamy funkcję liniową, a dla $n = 2$ funkcję kwadratową. Funkcja wielomianowa stopnia n może mieć co najwyżej n pierwiastków, czyli miejsc zerowych. Zwykle możemy znaleźć tylko ich przybliżone wartości. Gdy argument x dąży do $+\infty$ lub $-\infty$, wartość funkcji wielomianowej też rośnie lub maleje do $+\infty$ lub $-\infty$.

Dla n parzystego i $a_n > 0$, $f(x) \rightarrow +\infty$ gdy $x \rightarrow \pm\infty$. Typową sytuację przedstawia rys. 3.3. Jeśli $a_n < 0$, funkcja wielomianowa zachowuje się przeciwnie: jej wartość dąży do $-\infty$, gdy x dąży do $+\infty$ lub $-\infty$. Jeśli n jest nieparzyste, wartości funkcji wielomianowej dążą w przeciwnych kierunkach, gdy x dąży do $+\infty$ i $-\infty$. Dla $a_n > 0$ wykres takiej funkcji może wyglądać tak jak na rys. 3.4. Dla $a_n < 0$, sytuacja będzie przeciwna.

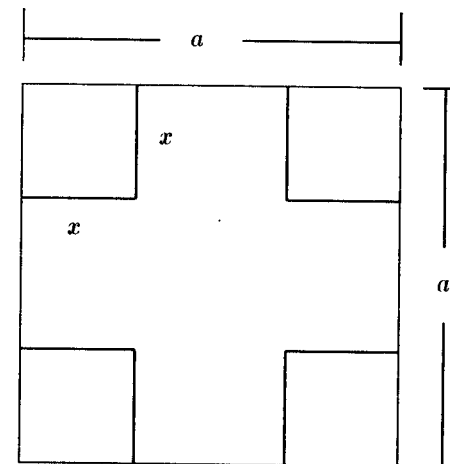
Przykład 3.3. Jeśli x oznacza długość krawędzi sześcianu, to jego objętość V jest funkcją wielomianową trzeciego stopnia względem x ,

$$V(x) = x^3.$$

Dziedziną praktyczną rozważanej funkcji będą dodatnie liczby rzeczywiste.

Rysunek 3.3: Szkic wykresu funkcji wielomianowej dla n parzystego i $a_n > 0$ Rysunek 3.4: Szkic wykresu funkcji wielomianowej dla n nieparzystego i $a_n > 0$

Ciekawszą zależność otrzymamy obliczając objętość otwartego pudełka, które da się skonstruować z kawałka tektury w kształcie kwadratu o boku a , przez wycięcie na rogach kwadratu małych kwadratów o boku x i sklejenie otrzymanej formy (patrz rys. 3.5).



Rysunek 3.5: Forma na pudełko

Objętość pudełka będzie wyrażać się następującym wzorem

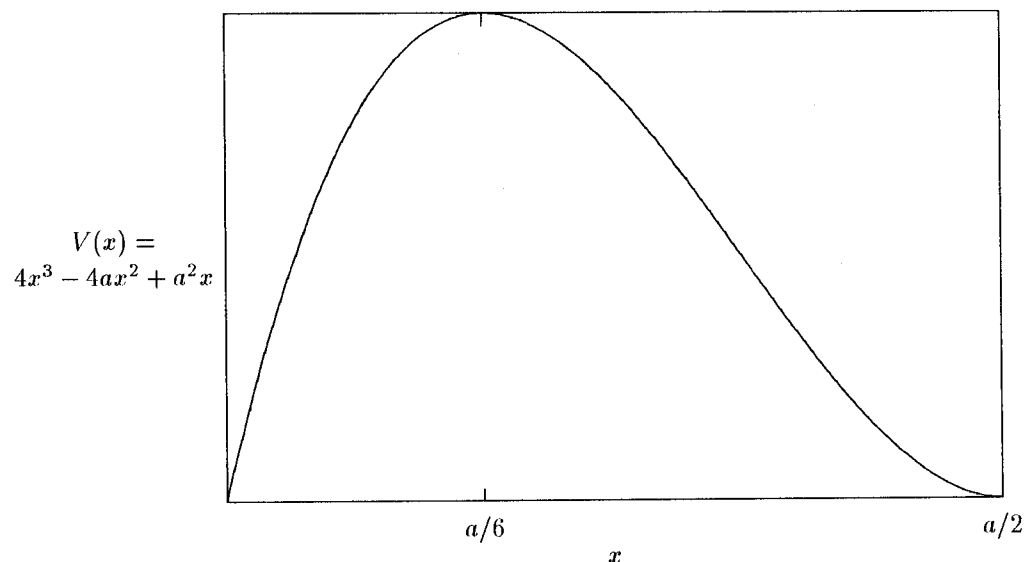
$$V(x) = (a - 2x)^2 x = 4x^3 - 4ax^2 + a^2 x.$$

Jest to również wielomian trzeciego stopnia. Tym razem dziedziną praktyczną funkcji V jest odcinek $(0, a/2)$. Funkcja V osiąga wartość największą dla $x = a/6$ (w rozważanym przedziale). Stwierdzenie tego nie jest już tak proste jak dla funkcji kwadratowej i wymaga odwołania się do metod rachunku różniczkowego (wrócimy do tego później). Wykres funkcji V przedstawia rys. 3.6. $\square$

Jeżeli mamy 4 punkty na płaszczyźnie, przez które chcemy poprowadzić wykres funkcji, to zwykle nie będzie to funkcja kwadratowa. Dla czterech punktów będziemy szukali funkcji wielomianowej trzeciego stopnia, dla $n + 1$ punktów – funkcji wielomianowej stopnia n . Aby taką funkcję wyznaczyć, należy znaleźć $n + 1$ współczynników, $a_0, \dots, a_n$. Będą one rozwiązaniem układu równań, który dostaniemy wstawiając współrzędne x_i i y_i kolejnych punktów do równania

$$y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

Otrzymamy zatem układ $n + 1$ równań liniowych z $n + 1$ niewiadomymi. Rozwiązując układ, znajdziemy poszukiwane współczynniki funkcji wielomianowej.



Rysunek 3.6: Szkic wykresu funkcji objętości pudełka

3.2.3 Funkcje wymierne

Iloraz dwóch funkcji wielomianowych nazywamy funkcją wymierną. Funkcja wymierna nie jest określona w punktach, w których mianownik przyjmuje wartość zero. Ma ona w tych punktach asymptoty pionowe.

Przykład 3.4. Jeśli x i y oznaczają długości boków prostokąta, to jego pole $S = xy$. Załóżmy, że S jest stałe. Otrzymamy wtedy zależność

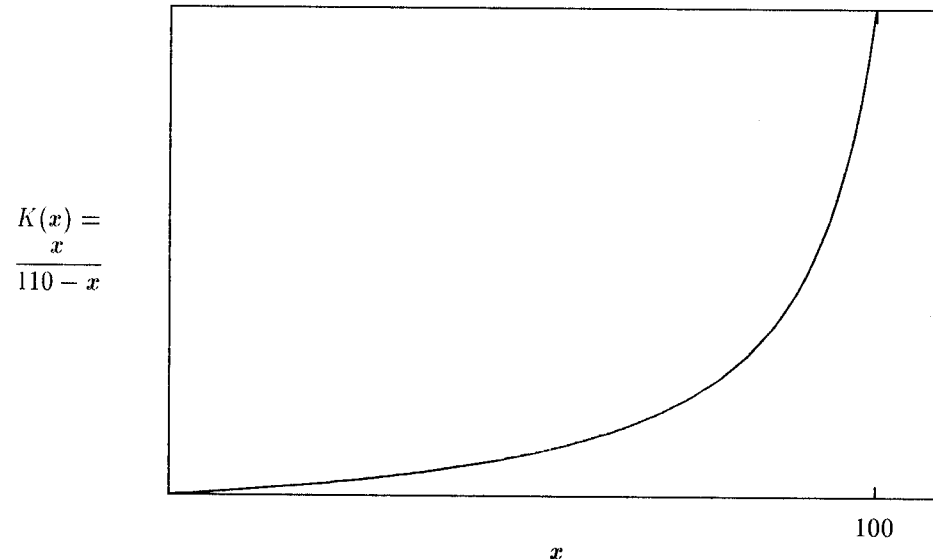
$$y = f(x) = \frac{S}{x}.$$

Funkcja f jest funkcją wymierną. Jej dziedziną naturalną jest $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a dziedziną praktyczną zbiór liczb rzeczywistych dodatnich. $\square$

Przykład 3.5. [Bu] Zauważono, że proces rehabilitacji pacjentów, którzy utracili sprawność po przejściu pewnej choroby, wiąże się z szybkim wzrostem kosztów przy zbliżaniu się do pełnego odzyskania tej sprawności. Ustalono, że zależność kosztu terapii od procentu odzyskanej sprawności można wyrazić wzorem

$$K(x) = \frac{x}{110 - x},$$

gdzie $x \in [0, 100]$, a K wyrażone jest w tys. zł. Wykres funkcji K przedstawia rys. 3.7. Zauważmy, że gdyby x mógł dążyć do 110, to $K(x)$ dążyłoby do $+\infty$. $\square$



Rysunek 3.7: Szkic wykresu kosztów rehabilitacji jako funkcji procentu odzyskanej sprawności

3.2.4 Funkcje wykładnicze

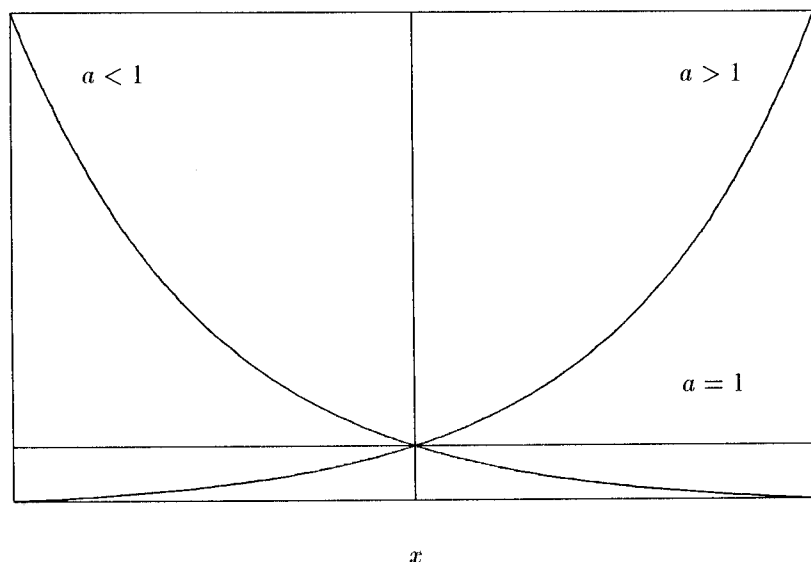
Funkcja wykładnicza o podstawie $a > 0$ wyraża się wzorem $f(x) = a^x$. Argument x może być dowolną liczbą rzeczywistą. Szczególnie ważna jest funkcja wykładnicza, której podstawa jest liczbą Eulera, oznaczaną przez e . Liczba Eulera zdefiniowana jest jako granica ciągu

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Jest ona liczbą niewymierną, równą w przybliżeniu 2,71. Dla każdego $a > 0$ i dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $a^x > 0$ oraz $a^0 = 1$. Dla $a > 1$ funkcja wykładnicza jest rosnąca, dla $0 < a < 1$ – malejąca, a dla $a = 1$ stała. Rys. 3.8 przedstawia te trzy możliwości. Jedną z najważniejszych własności funkcji wykładniczych jest dana wzorem

$$a^{x+y} = a^x a^y. \quad (3.1)$$

Przykład 3.6. Jeśli kapitalizacja odsetek w banku następuje raz w roku, to przy rocznej stopie oprocentowania wkładu równej $a \cdot 100\%$ oraz wkładzie początkowym równym S_0 , po roku na naszym koncie pojawi się suma $S(1) = S_0(1 + a)$. Po n latach będziemy mieli $S(n) = S_0(1 + a)^n$. Banki coraz częściej stosują częstszą kapitalizację,



Rysunek 3.8: Wykresy funkcji wykładniczych

np. raz na kwartał lub raz na miesiąc. Załóżmy, że kapitalizacja odbywa się k razy w roku, w równych odstępach. Po pierwszym takim okresie nasz wkład początkowy S_0 wzrośnie do $S(1/k) = S_0(1 + \frac{a}{k})$, a po roku do $S(1) = S_0(1 + \frac{a}{k})^k$, i po n latach wyniesie

$$S(n) = S_0(1 + \frac{a}{k})^{kn}. \quad (3.2)$$

Stąd jest już tylko krok do nieskończenia wielu okresów kapitalizacji, czyli do tzw. kapitalizacji ciągłej (powszechnej np. w USA). Wzór na $S(n)$ dla kapitalizacji ciągłej dostaniemy przechodząc do granicy we wzorze (3.2) przy $k \rightarrow \infty$. Otrzymamy wówczas

$$S(n) = S_0 e^{an}$$

(wiemy teraz do czego potrzebna jest liczba Eulera). Zauważmy, że po roku nasz wkład wzrośnie o $S_0(e^a - 1)$. Liczba $(e^a - 1) \cdot 100\%$ daje efektywną roczną stopę oprocentowania. Np. dla stopy 30%, czyli dla $a = 0,3$, efektywna stopa wyniesie ok. 35%. $\square$

Przykład 3.6 opisuje sytuację wzrostu wykładniczego, gdy współczynnik a występujący we wzorze funkcji $f(t) = e^{at}$ jest dodatni (t oznacza czas). Funkcja f może być inaczej wyrażona jako $f(t) = (e^a)^t$, gdzie podstawa e^a jest większa od 1. Jeśli a

będzie ujemne, e^a stanie się mniejsze od 1, i funkcja $f(t) = e^{at}$ będzie malejąca. Mamy wówczas do czynienia z rozpadem wykładniczym. Zarówno w przypadku wzrostu wykładniczego jak i rozpadu wykładniczego prędkość wzrostu lub rozpadu w chwili t jest proporcjonalna do wartości funkcji w tej chwili.

Przykład 3.7. Wartość nieruchomości spada zwykle wraz z upływem czasu; mówimy, że nieruchomość ulega deprecjacji. Często ten spadek wartości można opisać funkcją wykładniczą. Niech np. wartość nieruchomości wyraża się funkcją $W(t) = 300e^{-0,05t}$, gdzie t mierzone jest w latach, a W w tys. zł (zakładamy dla uproszczenia, że nie ma inflacji). Zatem wartość początkowa nieruchomości tzn. w chwili $t = 0$, wynosi 300 tys. zł. Znajdźmy jej wartość po 20 latach. Otrzymamy $W(20) = 300e^{-1} \approx 110$ tys. zł. Po ok. 14 latach wartość nieruchomości spadnie o połowę (trzeba użyć logarytmów – patrz następny rozdział) i będzie wynosiła 150 tys. zł. Po każdym czternastoletnim okresie wartość nieruchomości spadnie o połowę poprzedniej wartości. Jest to tzw. okres połowicznego rozpadu. Zauważmy, że w tym modelu wartość nieruchomości nigdy nie spadnie do zera. Wartość spada najszybciej na początku, potem spada coraz wolniej. Podobnie przedstawia się sytuacja ze spadkiem wartości samochodu. $\square$

Często używaną funkcją jest *funkcja logistyczna*, która wyraża się wzorem $f(x) = 1 - e^{-ax}$ dla $a > 0$. Jak łatwo zauważyć, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, zatem funkcja ta ma asymptotę poziomą $y = 1$. Wykres funkcji logistycznej nazywany jest często krzywą nasycenia. Krzywa ta pojawia się w wielu problemach technicznych i ekonomicznych (patrz rysunek 3.9).

3.2.5 Funkcje logarytmiczne

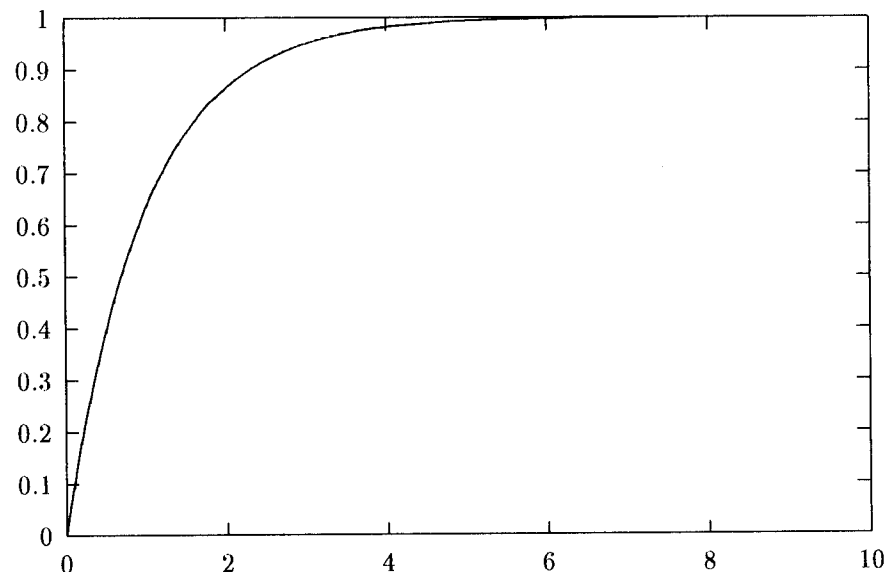
Funkcja logarytmiczna o podstawie a jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej o podstawie a . Aby funkcja odwrotna istniała, musimy założyć, że $a \neq 1$. Ponieważ funkcja wykładnicza nie jest suriekcją, musimy również zmienić jej przeciwdziedzinę, tak aby pokryła się ona z obrazem funkcji. Dla każdego $a \neq 1$, obraz funkcji wykładniczej jest zbiorem liczb rzeczywistych dodatnich, oznaczanym przez $\mathbb{R}_+$. Zatem $\mathbb{R}_+$ będzie dziedziną funkcji logarytmicznej $\log_a x$. Z definicji funkcji odwrotnej mamy

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{oraz} \quad \log_a(a^y) = y$$

dla $x \in \mathbb{R}_+$ i $y \in \mathbb{R}$. Własność (3.1) dla funkcji wykładniczych może być przetłumaczona na następującą własność funkcji logarytmicznych

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Wykres funkcji $\log_a x$ uzyskamy odbijając względem prostej $y = x$ wykres funkcji wykładniczej o podstawie a . Podobnie jak dla funkcji wykładniczej, $\log_a x$ jest funkcją rosnącą dla $a > 1$ i malejącą dla $0 < a < 1$. Jeżeli $a = e$, funkcja $\log_a x$ oznaczana jest przez $\ln x$ i nazywana logarytmem naturalnym z x .



Rysunek 3.9: Szkic wykresu funkcji logistycznej

Przykład 3.8. W Przykładzie 3.7 pojawił się okres połowicznego rozpadu T dla funkcji opisującej wartość nieruchomości $W(t) = 3e^{-0,05t}$. Liczba T spełnia równanie

$$e^{-0,05T} = 0,5,$$

które daje $-0,05T = \ln 0,5$. Ponieważ $\ln 0,5 \approx -0,69$ (znajdź w tablicach lub oblicz na kalkulatorze), więc $T \approx 13,86$. Ogólnie, okres połowicznego rozpadu T dla funkcji $f(t) = e^{-at}$ ($a > 0$) wynosi $T = (-\ln 0,5)/a$. $\square$

Przykład 3.9. [Bu] Telewizyjne transmisje zawodów futbolu amerykańskiego przyciągają coraz więcej widzów. Stacje telewizyjne podwyższają więc stale opłaty za reklamy nadawane w czasie transmisji. Wzrost opłat wydaje się mieć charakter wykładniczy. Spróbujmy znaleźć funkcję, która by opisywała cenę za 30 sekund reklamy, jako funkcję czasu postaci $C(t) = C_0 e^{at}$, gdzie t oznacza dany rok kalendarzowy, a C jest mierzone w tysiącach dolarów. Do wyznaczenia stałych C_0 i a potrzebujemy dwie pary danych (t_1, C_1) i (t_2, C_2) . Niech $t_1 = 1982$ i $t_2 = 1991$. Ceny reklam wyniosły wtedy $C_1 = 325$ i $C_2 = 800$ (tys. \$). Otrzymamy zatem dwa równania

$$325 = C_0 e^{1982a}$$

$$800 = C_0 e^{1991a}.$$

Logarytmując obie strony obu równań i korzystając z własności logarytmów otrzymamy

$$\ln 325 = \ln C_0 + 1982a$$

$$\ln 800 = \ln C_0 + 1991a.$$

Stąd łatwo wyliczamy $a = \frac{\ln 800 - \ln 325}{9} \approx 0,1$ oraz $\ln C_0 \approx -192,42$, co daje $C_0 \approx 2,71 \cdot 10^{-84}$. Używając skonstruowanego właśnie modelu, możemy obliczyć cenę 30-sekundowej reklamy w 1995 r.

$$C(1995) = 2,71 \cdot 10^{-84} \cdot e^{0,1 \cdot 1995} \approx 1188.$$

Zatem cena reklamy wyniosła ok. 1,188 mln \$.

□

3.2.6 Zadania

3.49. Na konto z kapitalizacją kwartalną i oprocentowaniem w stosunku rocznym wynoszącym 28% włożono 1000 zł. Obliczyć stan konta po upływie roku. Po ilu kwartałach stan konta przekroczy 1900 zł?

Rozwiązanie:

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{a}{k}\right)^{kt} = 1000 \left(1 + \frac{0,28}{4}\right)^{4t} = 1000(1,07)^{4t},$$

Stan konta po roku będzie więc wynosił: $S(1) = 1000(1,07)^4 = 1310$ zł.

Aby wyznaczyć czas, po jakim stan konta przekroczy 1900 zł rozwiążmy nierówność:

$$1000(1,07)^{4t} > 1900 \Leftrightarrow (1,07)^{4t} > 1,9$$

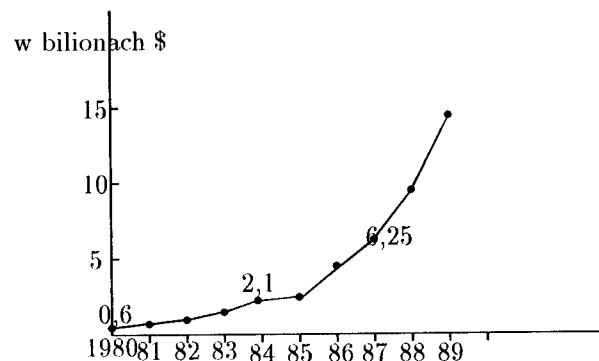
Logarytmując obie strony nierówności otrzymujemy:

$$4t \ln 1,07 > \ln 1,9 \Leftrightarrow 4t > \frac{\ln 1,9}{\ln 1,07} \approx 9,49$$

czyli stan konta przekroczy 1900 zł po upływie 10 pełnych kwartałów.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

3.50. Rysunek 3.10 przedstawia dane dotyczące wysokości inwestycji prowadzonych w Europie przez Japonię od roku 1980. W latach 1980, 1984, i 1987 wynosiły one odpowiednio: 0,6; 2,1; 6,25 bilionów \$. Używając tych trzech par danych wyznaczyć kwadratową funkcję przybliżającą te dane. Obliczyć przybliżoną wartość inwestycji w roku 1999.



Rysunek 3.10: Wysokość inwestycji

3.51. Tygodniowy popyt na pewien towar wyraża się w zależności od ceny c (w zł) następującym wzorem:

$$PP(c) = 2400 - 15c$$

- Wyznaczyć kwadratową funkcję dochodu $D(c) = cPP(c)$.
- Podać dla jakiej ceny dochód jest maksymalny i ile wtedy wynosi?
- Jaki dochód daje cena 60 zł?
- Czy istnieje cena, przy której dochód wynosi 82 500 zł? Jeżeli takie ceny będą dwie, przy której z nich większy jest popyt? Podać ilustrację graficzną.

3.52. Funkcja podaży pewnego produktu jest funkcją kwadratową. Na jej wykresie leżą trzy punkty $A(30, 1500)$, $B(40, 3600)$, $C(50, 6300)$, gdzie pierwsze współrzędne podane są w zł.

- Wyznaczyć równanie funkcji podaży.
- Podać jej dziedzinę praktyczną.
- Jaką wartość będzie miała podaż dla ceny 60 zł? Zinterpretować wynik.

3.53. Popyt pewnego produktu jest kwadratową funkcją ceny. Dane są trzy punkty należące do jej wykresu: $A(10, 3800)$, $B(30, 1000)$, $C(15, 2800)$.

- Wyznaczyć wzór funkcji popytu i podać jej wykres uwzględniając dziedzinę praktyczną.
- Podać graniczną cenę.
- Jaki będzie popyt przy cenie 20 zł, a jaki przy cenie 100 zł?

3.54. Funkcje podaży i popytu pewnego produktu mają postać:

$$PD(c) = 4c^2 - 500, \quad PP(c) = 3c^2 - 20c + 1000$$

Wyznaczyć cenę równowagi oraz wartość podaży i popytu przy tej cenie. Podać dziedziny praktyczne obu funkcji.

3.55. Funkcje podaży i popytu pewnego produktu mają postać:

$$PD(c) = c^2 - 100, \quad PP(c) = c^2 - 40c + 400$$

Wyznaczyć cenę równowagi oraz wartość podaży i popytu przy tej cenie.

3.56. Całkowity koszt produkcji pewnego towaru przedstawia funkcja:

$$K(x) = 10x^2 + 130x + 100,$$

gdzie x – liczba sztuk wyprodukowanego towaru, natomiast $K(x)$ – koszt wyrażany w zł. Każda sztuka omawianego produktu jest sprzedawana w cenie 200 zł.

- Podać funkcję dochodu $D(x)$.
- Podać funkcję zysku.
- Jaki będzie maksymalny zysk, dla jakiej produkcji – x .
- Podać interpretację graficzną tej sytuacji i zaznaczyć obszary zysku i strat.

3.57. Funkcja popytu ma postać: $p = PP(c) = 9000 - 30c$, natomiast funkcja kosztu: $K(p) = 90000 + 30p$.

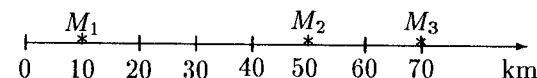
- Wyrazić koszt jako liniową funkcję ceny c .
- Wyznaczyć kwadratową funkcję dochodu $D(c)$.
- Podać wykres $K(c)$ i $D(c)$ w jednym układzie współrzędnych. Zaznaczyć obszary zysku i strat.
- Wyznaczyć punkty równowagi.
- Wyznaczyć cenę maksymalizującą dochód.

3.58. Na rysunku 3.11 podana jest lokalizacja trzech miejscowości M_1 , M_2 , M_3 . Pewna firma chce zbudować hurtownię spożywczą zaopatrującą te miejscowości, tak aby zminimalizować sumę kwadratów odległości od hurtowni, czyli:

$$S(x) = \sum_{j=1}^3 (x_j - x)^2,$$

gdzie x_j – lokalizacja miejscowości M_j , a x – lokalizacja hurtowni.

- Wyznaczyć funkcję $S(x)$.

Rysunek 3.11: Lokalizacja miejscowości M_1 , M_2 , M_3

- Wyznaczyć x , które minimalizuje $S(x)$.

3.59. Rozwiązać poprzednie zadanie, wiedząc że miejscowość M_1 - liczy 1000 mieszkańców, M_2 - 500, M_3 - 10 000.

3.60. Na osi OY wyznaczyć punkt P tak, aby zminimalizować sumę kwadratów odległości tego punktu od punktów o współrzędnych: $(9, 4)$, $(3, 2)$, $(1, 1)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

3.61. Mając do dyspozycji prostokątny kawałek tektury o wymiarach $30 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$ należy zbudować z niego pudełko, wycinając na rogach takie same kwadraty o boku długości $x \text{ cm}$.

a) Zbudować funkcję objętości tak otrzymanego pudełka oraz podać jej dziedzinę i wykres.

b)* Oszacować wartość x , dla którego ta objętość jest największa.

3.62. Wyznaczyć postać wielomianu (najniższego stopnia), którego wykres przechodzi przez punkty o danych współrzędnych :

a) $(2, 1)$; $(3, 2)$,

b) $(1, 1)$; $(2, 4)$; $(-1, 0)$,

c) $(-2, 0)$; $(-1, 0)$; $(0, 0)$; $(1, 0)$; $(10, 0)$.

3.63. Dostawa stali zwykłej i jakościowej do regionu X w latach 1970-1975 (w tys. ton) kształtowała się następująco:

Lata	1970	1971	1972	1973	1974	1975
Dostawa	1,1	2,2	6,0	5,0	4,3	6,1

Dobrać postać wielomianu przybliżającego te dane.

3.64. Podać wykres funkcji: $f(d) = 20 + 0,005(d - 10)^3$ dla $10 \leq d \leq 30$.

3.65. Czy następujące dane mogą być zobrazowane za pomocą funkcji wymiernej:

x	10	20	40	80	120
y	2,0	3,3	5,0	6,7	7,5

3.66. ([Kr,St]) H. Törnquist proponował, aby dla wydatków rodziny

– na dobra pierwszej potrzeby posługiwać się funkcją :

$$y = \frac{ax}{x+b},$$

– na dobra wyższego rodzaju funkcją :

$$y = ax \frac{x-c}{x+b}, \quad x > c,$$

gdzie x – oznacza miesięczny dochód rodziny w zł, y – liczbę jednostek nabytych towarów odpowiedniego rodzaju, $a, b, c > 0$ – parametry. Przyjmując :

a) $a = b = c = 100$,

b) $a = b = c = 1$,

c) $a = 200$, $b = 50$, $c = 20$

podać wykresy podanych funkcji Törnquista.

3.67. Wykonać wykresy następujących funkcji:

a) $f(x) = e^{-|x|}$,

b) $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}$,

c) $f(t) = 100e^{-0,1t}$,

d) $f(t) = \frac{100}{1+e^{-t}}$,

e) $f(t) = \frac{200}{1+3e^{-t}}$,

f) $f(x) = 2 - e^{-2x}$.

3.68. Uprościć wyrażenie:

a) $(\frac{e^u}{e-u})^2$,

b) $\frac{e^{-x}(e^x - e^{-x}) + e^{-x}(e^x + e^{-x})}{e^{-2x}}$,

c) $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})$,

d) $(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2$.

3.69. Do banku złożono 1 000 zł na 30 % . Wyznaczyć stan konta po roku i po dwóch latach, jeżeli kapitalizacja jest:

a) raz do roku, b) miesięczna, c) kwartalna, d) tygodniowa, e) ciągła.

3.70. Wykonać wykresy funkcji stanu konta z poprzedniego zadania, w zależności od długości okresu przechowywania dla kolejnych podpunktów a,b,c,d,e z poprzedniego zadania.

3.71. Załóżmy, że do banku złożono 2 500 \$ na 7 % z kapitalizacją kwartalną. Jaki będzie stan konta po upływie: a) 9 miesięcy, b) 15 lat.

3.72. Wkład początkowy wynosi 100 zł na 7,5 % . Zakładając ciągłą kapitalizację :

a) wyznaczyć funkcję wykładniczą opisującą stan konta w zależności od liczby lat t .

b) obliczyć efektywną roczną stopę oprocentowania.

3.73. Funkcja popytu na pewien towar ma postać :

$$PP(c) = 200000e^{-0,15c}$$

gdzie PP - popyt w jednostkach towaru, c -cena w zł.

a) Wyznaczyć wartość popytu dla ceny 20 zł.

b) Podać funkcję dochodu $D(c) = cPP(c)$.

c) Naszkicować obie funkcje na ich dziedzinach praktycznych.

d) Czy istnieje cena maksymalizująca dochód ?

3.74. Funkcje wykładnicze w postaci:

$$y = a - be^{-kx}, \quad a, b, k > 0$$

mogą być użyte do opisu procesu uczenia się, gdzie y mierzy stopień opanowania umiejętności, a x oznacza liczbę godzin lub ogólnie jednostek czasu nauki. Np. funkcja dana wzorem :

$$y = 120 - 80e^{-0,3x}$$

obrazuje krzywą nabierania umiejętności przez inżyniera w pewnej branży przemysłu, gdzie y jest tutaj liczbą elementów wytwarzanych w ciągu godziny, a x – liczbą godzin praktyki w zawodzie.

a) Podać wykres funkcji $y(x)$ ograniczonej do dziedziny praktycznej.

b) Podać ograniczenie wartości tej funkcji i jego interpretację.

3.75. Na podstawie badań stwierdzono, że ułamek wszystkich osób, które udzielają darowizn, jest funkcją czasu prowadzenia kampanii dobroczynnej na określony cel, gdzie czas t liczymy w dniach. Funkcja ta ma postać:

$$P(t) = 0,5(1 - e^{-0,05t})$$

- a) Podać wykres funkcji $P(t)$.
b) Jaka wartość ogranicza P ? Ile osób złoży datek po 10 dniach kampanii?

3.76. Do opisu pewnych zjawisk używana jest funkcja (funkcja Gompertza):

$$f(t) = pe^{-ce^{-kt}},$$

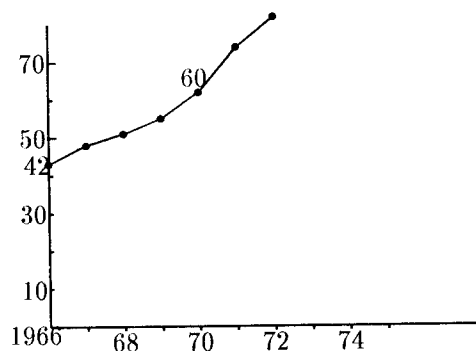
gdzie p, c, k - pewne stałe. Przyjmując: $p = 500$, $c = 0,2$; $k = 0,1$ - wyznaczyć $f(0)$, $f(10)$, $f(100)$.

3.77. Funkcja: $S(t) = S_0(1+a)^t$ podaje stan konta po t -latach od złożenia sumy S_0 na $100a$ % z kapitalizacją roczną.

- a) Podać czas podwojenia kwoty S_0 w zależności od a i wyrazić jako funkcję: $T_2(a)$. Podać wykres funkcji $T_2(a)$.
b) Podać czas potrojenia kwoty S_0 w zależności od a i wyrazić jako funkcję: $T_3(a)$. Podać wykres funkcji $T_3(a)$.

Oba wykresy wykonać na papierze milimetrowym (lub na komputerze).

3.78. Podać czas T - podwojenia stanu początkowego konta przy rocznym oprocentowaniu : a) 20 %, b) 18 % i kapitalizacji rocznej.



Rysunek 3.12: Dane empiryczne

3.79. Rysunek 3.12 prezentuje pewne dane empiryczne. Używając współrzędnych wyróżnionych punktów wyznaczyć funkcję przybliżającą te dane w postaci:

$$P(t) = P_0 e^{at}.$$

3.80. Wartość księgowa pewnego urządzenia wyraża się funkcją $V(t) = V_0 e^{-it}$ zależności od t -lat użytkowania. Wiadomo, że po dwóch latach wartość wynosiła 200.000 zł, a po pięciu 120.000 zł.

- a) Wyznaczyć funkcję $V(t)$.
b) Po ilu latach urządzenie będzie miało wartość 5.000 zł.

3.3 Pochodna funkcji jednej zmiennej

3.3.1 Definicja pochodnej

Rozważmy funkcję $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ oraz punkt $x_0 \in (a, b)$. Niech Δx oznacza przyrost argumentu. Wtedy odpowiadający mu *przyrost wartości funkcji w punkcie x_0* zdefiniujemy jako

$$\Delta f = \Delta f(x_0) = \Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \quad (3.3)$$

Przez *iloraz różnicowy* funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu argumentu Δx rozumiemy następujące wyrażenie

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (3.4)$$

Iloraz różnicowy ma prostą interpretację geometryczną. Poprowadźmy sieczną wykresu funkcji f przechodzącą przez punkty o współrzędnych $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ (patrz rysunek 3.13). Wtedy iloraz różnicowy (3.4) jest równy tangensowi kąta, jaki ta sieczna tworzy z dodatnią półosią odciętych (argumentów x).

Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę ilorazu różnicowego (3.4) (o ile istnieje) przy Δx dążącym do 0

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (3.5)$$

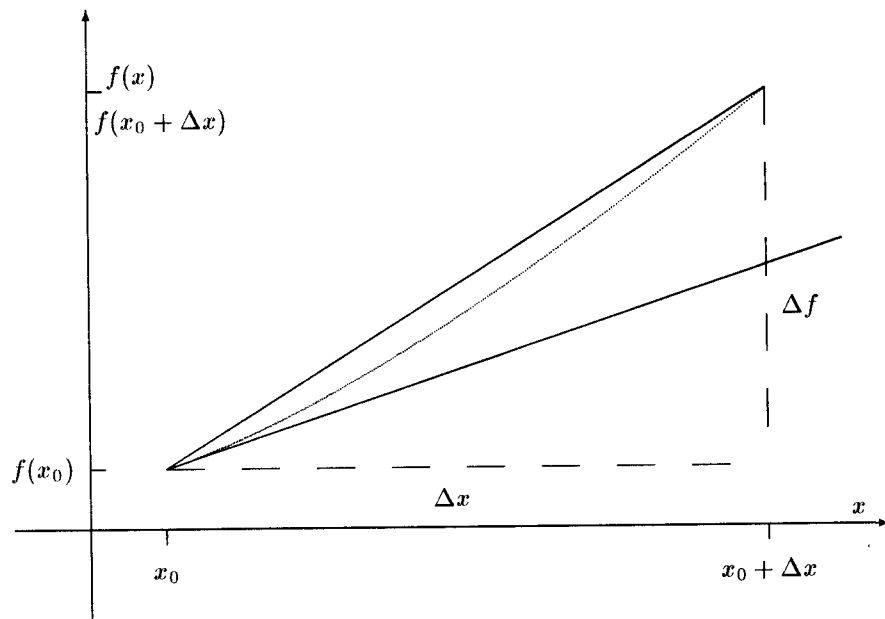
Przykład 3.10. Niech $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0. \quad \square$$

Funkcję $x \mapsto f'(x)$ oznaczamy przez f' i nazywamy (funkcją) pochodną funkcji f . Obliczanie pochodnej nazywamy *różniczkowaniem*. Funkcja f jest *różniczkowalna* jeśli ma pochodną w każdym punkcie dziedziny. Pochodną f' oznaczamy również przez $\frac{df}{dx}$. Jeśli funkcja zadana jest konkretnym wzorem, piszemy $\frac{d}{dx}$ dla oznaczenia operacji różniczkowania. Np. $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$.

Oto najważniejsze wzory do obliczania pochodnych:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^\alpha) &= \alpha x^{\alpha-1} \text{ dla } \alpha \in \mathbb{R}; \\ \frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x \text{ i } \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x; \\ \frac{d}{dx}(a^x) &= a^x \ln a \text{ i } \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}, \\ \text{w szczególności} \\ \frac{d}{dx}(e^x) &= e^x \text{ i } \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$



Rysunek 3.13: Sieczna i styczna

3.3.2 Własności pochodnej

Poniższe twierdzenie daje podstawowe własności pochodnej.

Twierdzenie 3.11. Niech funkcje f i g będą różniczkowalne w pewnym przedziale oraz $a \in \mathbb{R}$. Wtedy

a) $(f + g)' = f' + g'$,

b) $(af)' = af'$,

c) $(fg)' = f'g + fg'$,

d) $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$,

gdzie $g^2(x) = g(x)g(x)$ i $g(x) \neq 0$ w d). □

Własności a) i b) pozwalają obliczyć pochodne wielomianów, a d) — pochodne funkcji wymiernych oraz tangensa i kotangensa:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{ctg} x) = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Ważną umiejętnością jest różniczkowanie złożenia funkcji.

Twierdzenie 3.12. Niech $h = f \circ g$, tzn. $h(x) = f(g(x))$. Wtedy

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x),$$

czyli inaczej $h' = (f' \circ g) \cdot g'$. □

Przykład 3.13. Niech $h(x) = \ln(\sin x)$. Wtedy $f(y) = \ln y$ oraz $g(x) = \sin x$. Mamy zatem $\frac{d}{dx} \ln(\sin x) = \frac{1}{\sin x} \cos x$, ponieważ $f'(y) = \frac{1}{y}$, gdzie za y podstawiamy $\sin x$. □

Potrzebne nam będą również wzory na pochodne funkcji arcus:

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \frac{-1}{1+x^2}.$$

3.3.3 Monotoniczność i ekstrema

Pochodna funkcji f zawiera informacje o zachowaniu się tej funkcji, w szczególności informacje dotyczące monotoniczności.

Twierdzenie 3.14. Jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$ to funkcja f jest rosnąca w przedziale (a, b) .

Jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$ to funkcja f jest malejąca w przedziale (a, b) . □

Twierdzenie 3.14 można częściowo odwrócić.

Twierdzenie 3.15. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna i rosnąca w pewnym przedziale, to $f'(x) \geq 0$ w tym przedziale.

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna i malejąca w pewnym przedziale, to $f'(x) \leq 0$ w tym przedziale. □

Przykład 3.16. Funkcja $f(x) = x^3$ jest rosnąca w całym zbiorze $\mathbb{R}$ i $f'(x) = 3x^2 \geq 0$. Ale $f'(0) = 0$, zatem nie można twierdzić, że $f'(x) > 0$. □

Twierdzenie 3.14 pozwala sformułować warunki wystarczające na ekstrema lokalne, tzn. minima i maksima lokalne. Przypomnijmy, że funkcja f przyjmuje w punkcie x_0 minimum lokalne, jeśli istnieje otoczenie U punktu x_0 , takie, że dla każdego punktu $x \in U$, $f(x) \geq f(x_0)$. Podobnie definiujemy maksimum lokalne.

Twierdzenie 3.17. Niech U będzie otoczeniem punktu x_0 , funkcja f ciągła w U .

Jeśli dla $x \in U$ i $x > x_0$, $f'(x) > 0$, a dla $x \in U$ i $x < x_0$, $f'(x) < 0$, to w punkcie x_0 funkcja f ma minimum lokalne.

Jeśli dla $x \in U$ i $x > x_0$, $f'(x) < 0$, a dla $x \in U$ i $x < x_0$, $f'(x) > 0$, to w punkcie x_0 funkcja f ma maksimum lokalne. □

Na przykład funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła, $f'(x) = 1$ dla $x > 0$ i $f'(x) = -1$ dla $x < 0$. Zatem w punkcie $x_0 = 0$, f ma minimum. Zauważmy, że w tym punkcie pochodna funkcji f nie istnieje. Jeśli w punkcie ekstremalnym pochodna istnieje, możemy zastosować następujące twierdzenie, zawierające warunek konieczny dla ekstremum.

Twierdzenie 3.18. Jeśli funkcja f ma ekstremum w punkcie x_0 oraz istnieje pochodna tej funkcji w x_0 , to $f'(x_0) = 0$. □

Przykład 3.19. Funkcja $f(x) = x^2$ ma minimum w $x_0 = 0$ oraz $f'(x) = 2x$ przyjmuje wartość 0 w x_0 . Natomiast pochodna funkcji $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ również zeruje się w punkcie $x_0 = 0$, ale nie ma w tym punkcie ekstremum. Zerowanie się pochodnej jest warunkiem koniecznym ekstremum, ale nie jest warunkiem wystarczającym. $\square$

Z praktycznego punktu widzenia ważniejsze od ekstremów lokalnych są *ekstrema globalne* — maksimum i minimum globalne, czyli największa i najmniejsza wartość przyjmowane przez funkcję. Nie zawsze wartości te są określone (np. funkcja może rosnąć nieograniczenie, nie osiągając wartości największej). Poniższe twierdzenie daje warunki wystarczające na istnienie ekstremów globalnych.

Twierdzenie 3.20. Funkcja ciągła na przedziale ograniczonym i domkniętym przyjmuje wartość najmniejszą i największą. $\square$

Kolejne twierdzenie daje prosty przepis na znalezienie ekstremów globalnych.

Twierdzenie 3.21. Załóżmy, że funkcja zdefiniowana na odcinku domkniętym ma ekstrema globalne. Ekstrema te są osiągane w punktach, w których funkcja ma ekstrema lokalne lub na brzegu odcinka. $\square$

Zatem, aby znaleźć ekstrema globalne funkcji różniczkowalnej w przedziale domkniętym i ograniczonym, wystarczy obliczyć jej wartości w punktach krytycznych (tzn. tych, w których pochodna funkcji jest równa 0), w punktach brzegowych, i wybrać z nich wartość największą i najmniejszą.

Przykład 3.22. Niech funkcja $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Wtedy $f'(x) = 6x^2 - 6x$ i $f'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$ lub $x = 1$. Ekstrema globalne mogą zatem być osiągane tylko w punktach $-1, 0, 1, 2$. Obliczmy wartości funkcji: $f(-1) = -4$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ i $f(2) = 5$. Zatem wartość najmniejsza jest osiągnięta w -1 , a wartość największa w 2 . $\square$

3.3.4 Pochodne wyższych rzędów

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale (a, b) , to definiuje ona funkcję f' określoną na tym samym przedziale. Jeśli funkcja f' jest różniczkowalna, jej pochodną nazwiemy drugą pochodną funkcji f lub pochodną rzędu 2. Zapisujemy ją jako f'' lub $f^{(2)}$. Ogólnie, pochodną rzędu n definiujemy następująco

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Przykład 3.23. Niech $f(x) = x^{10}$. Wtedy $f'(x) = 10x^9$, $f''(x) = 10 \cdot 9x^8$, i ogólnie, $f^{(k)}(x) = 10 \cdot 9 \cdots (11 - k)x^{(10-k)}$ dla $k \leq 10$. W szczególności, $f^{(10)}(x) = 10!$ jest stała, a więc wszystkie następne pochodne będą równe zero. $\square$

Używając pochodnych wyższych rzędów, łatwiej możemy sprawdzić czy w rozważanym punkcie funkcja ma ekstremum.

Twierdzenie 3.24. Załóżmy, $f^{(i)}(x_0) = 0$ dla $i = 1, \dots, k$, gdzie k jest liczbą nieparzystą, oraz f ma ciągłą pochodną rzędu $k+1$ w otoczeniu x_0 . Jeśli $f^{(k+1)}(x_0) > 0$, to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum. Jeśli $f^{(k+1)}(x_0) < 0$, to f ma w x_0 maksimum. $\square$

Przykład 3.25. Niech $f(x) = x^{10}$. Warunek konieczny $f'(x) = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$. W tym punkcie wszystkie pochodne $f^{(i)}$ dla $i = 1, \dots, 9$ są równe zero oraz $f^{(10)}(0) = 10! > 0$. Zatem f ma w punkcie $x = 0$ minimum. $\square$

3.3.5 Wklęsłość i wypukłość

Funkcja f jest *wypukła* w przedziale (a, b) , jeśli dla każdych dwóch punktów $x_1, x_2 \in (a, b)$ i dla każdego $t \in [0, 1]$,

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1)).$$

Oznacza to, że odcinek siecznej wykresu funkcji f łączący punkty $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ leży nad wykresem. Jeśli dla każdych dwóch punktów x_1, x_2 taki odcinek leży pod wykresem funkcji, funkcję nazwiemy *wklęsłą*. Jeśli w punkcie x_0 funkcja zmienia się z wypukłej we wklęsłą lub na odwrót, punkt x_0 nazywa się *punktem przegięcia*.

Dla funkcji różniczkowalnej wypukłość i wklęsłość można opisać przy pomocy stycznej do wykresu. Mianowicie, jeśli styczna leży zawsze pod wykresem, funkcja jest wypukła, jeśli leży nad wykresem, funkcja jest wklęsła. Dla funkcji dwukrotnie różniczkowalnej sprawdzanie tych własności jest jeszcze prostsze. Charakteryzuje to poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.26. Jeśli dla każdego $x \in (a, b)$, $f''(x) > 0$, to funkcja f jest wypukła w tym przedziale.

Jeśli dla każdego $x \in (a, b)$, $f''(x) < 0$, to funkcja f jest wklęsła w tym przedziale. Jeśli f'' zmienia znak w punkcie x_0 , to x_0 jest punktem przegięcia funkcji f . $\square$

Twierdzenie 3.26 można częściowo odwrócić.

Twierdzenie 3.27. Załóżmy, że funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w przedziale (a, b) .

Jeśli f jest wypukła w przedziale (a, b) , to $f''(x) \geq 0$ dla $x \in (a, b)$.

Jeśli f jest wklęsła w przedziale (a, b) , to $f''(x) \leq 0$ dla $x \in (a, b)$. $\square$

Przykład 3.28. Niech $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x$. Wtedy $f'(x) = 6x^2 - 6x + 5$ oraz $f''(x) = 12x - 6$. Dla $x > 0,5$, $f''(x) > 0$, zatem f jest wypukła. Dla $x < 0,5$ funkcja f jest wklęsła. Punkt $x = 0,5$ jest punktem przegięcia. $\square$

3.3.6 Badanie funkcji

Celem badania przebiegu zmienności danej funkcji jest podanie jej podstawowych własności i naszkicowanie wykresu. Badanie obejmuje zwykle następujące czynności:

- Jeśli funkcja zadana jest pewnym wzorem, ale jej dziedzina nie została podana, należy ustalić jej naturalną dziedzinę, dla której podany wzór jest dobrze określony.
- Należy zbadać zachowanie funkcji na brzegu dziedziny. Jeśli dziedzina jest przedziałem domkniętym $[a, b]$, wystarczy obliczyć wartości $f(a)$ i $f(b)$. Jeśli dziedzina jest przedziałem ograniczonym otwartym (a, b) , należy zbadać granice jednostronne funkcji w a i b . Jeśli $a = -\infty$ lub $b = +\infty$, będą to granice w nieskończoności. Badanie tych granic można powiązać z szukaniem ewentualnych asymptot pionowych, poziomych lub ukośnych. Te same czynności należy wykonać, gdy dziedzina składa się z kilku odcinków. Często funkcja jest określona na całej prostej poza jednym lub kilkoma punktami. Badamy wtedy granice i asymptoty pionowe w tych punktach.
- Szukamy punktów nieciągłości. Badamy granice jednostronne w tych punktach.
- Szukamy punktów krytycznych i próbujemy ustalić ich charakter. W szczególności znajdujemy ekstrema lokalne. Ustalamy przedziały monotoniczności. Badamy też punkty, w których funkcja nie jest różniczkowalna.
- Znajdujemy punkty przegięcia i przedziały, w których funkcja jest wypukła i wklęsła.
- Ustalamy specyficzne informacje, które mogą pomóc w narysowaniu wykresu, jak miejsca zerowe, parzystość lub nieparzystość funkcji, okresowość.

Nie zawsze potrafimy znaleźć wszystkie wymienione tu wielkości. Znajdowanie miejsc zerowych lub punktów krytycznych funkcji wymaga rozwiązywania równań, zwykle nieliniowych, co rzadko daje się zrobić analitycznie. Często jednak informacje te nie są konieczne do naszkicowania wykresu.

3.3.7 Zadania

3.81. Wyznaczyć pochodną funkcji:

- a) $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + x^3 + 2$ b) $f(x) = xe^x$
 c) $f(x) = \frac{x^2-2}{x+1}$ d) $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$

Rozwiązanie:

a) $f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 3x^2$.

b) Korzystamy ze wzoru na pochodną iloczynu funkcji: $(uv)' = u'v + uv'$.

$f'(x) = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$.

c) Korzystamy ze wzoru na pochodną ilorazu funkcji: $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{(v)^2}$

$f'(x) = \frac{(x^2-2)'(x+1) - (x^2-2)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1) - (x^2-2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$.

d) Korzystając ze wzoru na pochodną funkcji $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ i pochodną funkcji złożonej $[u(v(x))]' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ otrzymujemy:

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x^2}}}(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

3.82. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = (2x+1)^{\sin x}$.

Rozwiązanie: W celu wyznaczenia pochodnej danej funkcji zlogarytmujemy stronami równość: $f(x) = (2x+1)^{\sin x}$:

$$\ln f(x) = \sin x \ln(2x+1) \quad (3.6)$$

Różniczkując stronami równanie (3.6) otrzymujemy

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \cos x \ln(2x+1) + \frac{2}{2x+1} \sin x.$$

Stąd

$$f'(x) = f(x) \left(\cos x \ln(2x+1) + \frac{2}{2x+1} \sin x \right),$$

czyli

$$f'(x) = (2x+1)^{\sin x} \left(\cos x \ln(2x+1) + \frac{2}{2x+1} \sin x \right).$$

3.83. Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $y = x^2e^x$ w punkcie $(1, e)$.

Rozwiązanie: Równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie (x_0, y_0) ma postać:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ponieważ w naszym przypadku $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$, więc $f'(1) = 3e$. Zatem poszukiwanym równaniem stycznej jest $y - e = 3e(x - 1)$ lub po przekształceniu $y = 3ex - 2e$.

3.84. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}.$$

Rozwiązanie: Najpierw ustalmy dziedzinę funkcji: $D : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ponieważ badanie monotoniczności funkcji przeprowadza się na podstawie badania zmian znaku pochodnej funkcji, więc obliczmy pochodną danej funkcji:

$$f'(x) = x - \frac{16}{x^3} = \frac{x^4 - 16}{x^3}.$$

Dziedzina pochodnej zgadza się z dziedziną funkcji (dzięki temu nie mamy dodatkowych punktów krytycznych).

Funkcja jest rosnąca, gdy:

$$f' > 0 \Leftrightarrow \frac{x^4 - 16}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 + 4)(x^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow x(x - 2)(x + 2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$$

Zatem roważana funkcja jest rosnąca w przedziałach: $(-2; 0)$, $(2; +\infty)$. Funkcja jest malejąca, gdy: $f'(x) < 0$ czyli, w naszym przypadku, gdy $x \in (-\infty, -2)$ oraz $x \in (0, 2)$.

Zbierając uzyskane wyniki w tabeli, otrzymujemy:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	N	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	4 (min)	$\nearrow$	N	$\searrow$	4 (min)	$\nearrow$

Funkcja nie ma maksimum, ma natomiast dwa minima lokalne o wartości 4 osiągnięte dla $x = \pm 2$: $f_{\min}(2) = f_{\min}(-2) = 4$.

3.85. Wyznaczyć ekstrema globalne (wartość najmniejszą, największą) funkcji:

$$f(x) = 1 - |x^2 - 2| \text{ na przedziale } [-2, 2].$$

Rozwiązanie: Aby wyznaczyć wartość największą oraz najmniejszą funkcji, należy porównać wartości ekstremalne funkcji oraz wartości jakie funkcja ta osiąga na końcach przedziału. W tym celu rozpiszemy najpierw daną funkcję:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3, & x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty) \\ x^2 - 1, & x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$$

Wtedy

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \\ 2x, & x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oraz że nie istnieje dla $x = \pm\sqrt{2}$. Wobec tego należy obliczyć wartość funkcji w trzech punktach krytycznych i na brzegach przedziału: $f(0) = -1$, $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 1$, $f(-2) = f(2) = -1$.

Wartość największa funkcji wynosi 1 i jest osiągnięta w $x = \pm\sqrt{2}$.

Wartość najmniejsza funkcji wynosi -1 i jest osiągnięta w $x = 0$, $x = \pm 2$.

3.86. Wyznaczyć ekstrema funkcji, stosując drugi warunek wystarczający istnienia ekstremum: $f(x) = (\ln x)^2 + \ln x$.

Rozwiązanie: Dziedziną danej funkcji jest $\mathbb{R}_+$. Obliczmy pierwszą pochodną i wyznaczmy punkty krytyczne tej funkcji: $f'(x) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2\ln x + 1}{x}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Druga pochodna ma postać: $f''(x) = -\frac{2}{x^2} \ln x + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{-2\ln x + 1}{x^2}$. Wartość drugiej pochodnej funkcji $f(x)$ w punkcie krytycznym to: $f''(\frac{1}{\sqrt{e}}) = 2e$. Ponieważ $f''(\frac{1}{\sqrt{e}}) > 0$, więc dla $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ funkcja $f(x)$ osiąga minimum o wartości $f_{\min}(\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{4}$.

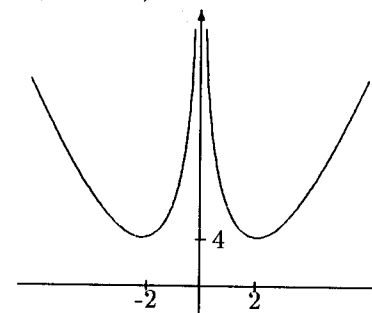
3.87. Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości wykresu funkcji:

a) $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$

b) $f(x) = e^{-x^2}$

Rozwiązanie:

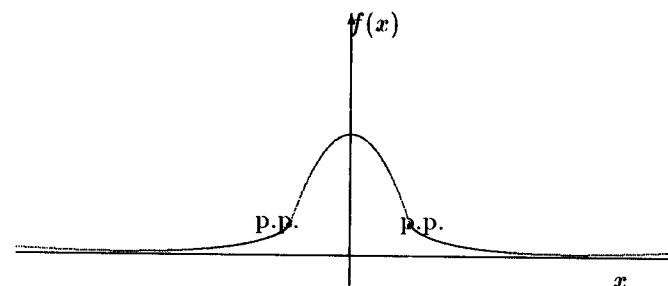
a) Ponieważ wklęsłość i wypukłość funkcji jest ściśle związana ze znakiem drugiej pochodnej danej funkcji, więc wyznaczmy $f''(x)$: ponieważ $f'(x) = x - \frac{16}{x^3}$, więc $f''(x) = 1 + \frac{48}{x^4}$. Widać, że $\forall x \neq 0 : f''(x) > 0$, wobec tego wykres funkcji jest wypukły na całej dziedzinie (rys. 3.14).



Rysunek 3.14: Szkic wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$

b) Ponieważ $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, więc $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$. Ponieważ $(\forall x : e^{-x^2} > 0)$, więc: $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2 > 0$, a stąd $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$. Natomiast $f''(x) < 0$ dla $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Czyli wykres funkcji $f(x)$ jest wypukły w przedziałach $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ i wklęsły dla $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Punkty $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ są punktami przegięcia wykresu funkcji.

Łatwo naszkicować wykres tej funkcji (rys. 3.15), zauważając, że funkcja jest rosnąca



Rysunek 3.15: Szkic wykresu funkcji $f(x) = e^{-x^2}$

dla $x < 0$ a malejąca dla $x > 0$ i w nieskończoności dąży do zera po wartościach dodatnich.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

3.88. Wyznaczyć iloraz różnicowy funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 dla przyrostu argumentu Δx :

a) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 11$, b) $f(x) = \sin x$, c) $f(x) = \frac{3}{x}$, d) $f(x) = \sqrt{x}$.

Na podstawie definicji wyznaczyć pochodne funkcji:

3.89. $f(x) = x^3$ w punkcie x_0 . **3.90.** $f(x) = \frac{2}{x}$ w punkcie $x_0 \neq 0$.

3.91. $f(x) = \sqrt{x}$ w punkcie $x_0 > 0$. **3.92.** $y = \sqrt[3]{x}$ w punkcie $x_0 \neq 0$.

3.93. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 1 \\ -1, & x \geq 1 \end{cases}$ w $x_0 = 1$.

3.94. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$ w $x_0 = 0$.

Wyznaczyć pochodne funkcji:

3.95. $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 6$.

3.97. $f(x) = \frac{x^5}{10} - \frac{x^3}{6} + 2x - 1$.

3.99. $f(x) = -\frac{3}{x^2}$.

3.101. $f(x) = (x^3 - 2x)(x^5 + 6x^2)$.

3.103. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$.

3.105. $f(x) = x - 2\sqrt{x}$.

3.107. $f(x) = x^2 - \sin x$.

3.109. $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3} + 4$.

3.111. $f(x) = -3 \cos x \operatorname{ctg} x$.

3.113. $f(x) = \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{\sin x}$.

3.115. $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$.

3.117. $f(x) = \frac{\arccos x}{1-x^2}$.

3.119. $f(x) = \frac{4\sqrt{x} \ln x}{e^x}$.

3.96. $f(x) = x + 3x^2 - \frac{x^3}{3}$.

3.98. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 1$.

3.100. $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$.

3.102. $f(x) = (\frac{x^2}{2} - 3)(x^3 - 7x^2 + 1)$.

3.104. $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

3.106. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

3.108. $f(x) = -2 \cos x + 4e^x + \ln x$.

3.110. $f(x) = x^2 \sin x$.

3.112. $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+3}$.

3.114. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$.

3.116. $f(x) = \frac{2-x^2}{2x^3+x+3}$.

3.118. $f(x) = x^2 e^x \sin x$.

3.120. $f(x) = 2 \arcsin x - 2x^2$.

Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej, wyznaczyć pochodne funkcji:

3.121. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

3.123. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

3.125. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2+1}{2x}}$.

3.127. $f(x) = \sin(2x-1)$.

3.129. $f(x) = (7x^2 - 3x + 1)^3$.

3.131. $f(x) = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$.

3.133. $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$.

3.135. $f(x) = ae^{-\sin x} + \sin x - 1$.

3.137. $f(x) = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \ln \sqrt{1+x^2}$.

3.139. $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$.

3.122. $f(x) = \sqrt{\sin x}$.

3.124. $f(x) = \ln(x^2 + x)$.

3.126. $f(x) = \ln \frac{x^3}{1-x^2}$.

3.128. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$.

3.130. $f(x) = \sin^2 x + \sin x^2$.

3.132. $f(x) = (5x - \ln x)^5$.

3.134. $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

3.136. $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.138. $f(x) = 5 \arcsin kx + 3 \arccos kx$.

3.140. $f(x) = \ln \frac{x}{2}$.

3.141. $f(x) = 4xe^{-x^2}$.

3.142. $f(x) = (e^x - 5)^4$.

Wyznaczyć pochodne funkcji:

3.143. $f(x) = 2^x + 2^{3x}$.

3.144. $f(x) = a^{x^2} - e^{-x^2}$.

3.145. $f(x) = \log^2 \frac{x}{2}$.

3.146. $f(x) = \sqrt[3]{3} + \frac{1}{2^{4x}} + 6\sqrt{x}$.

Wyznaczyć pochodne funkcji:

3.147. $y = x^x$.

3.148. $y = x^{e^x}$.

3.149. $y = (\sin x)^x$.

Wyznaczyć takie wartości x , dla których $f'(x) = 0$:

3.150. $f(x) = (5x^2 - 10)^6$.

3.151. $f(x) = xe^x$.

3.152. $f(x) = -x + \ln x$.

3.153. $f(x) = -\frac{x^2}{2} + \ln x$.

3.154. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$.

3.155. $f(x) = e^{-x}$.

3.156. Napisać równanie stycznej:

a) do paraboli $y = x^2 - 4x$ w punkcie $x_0 = 1$,

b) do paraboli $y = 4 - x^2$ w punkcie $x_0 = -1$,

c) do krzywej $y = \ln x$ w punkcie $x_0 = e$,

d) do krzywej $y = x^3 - x$ w punkcie $x_0 = 0$.

3.157. Korzystając ze wzoru: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ podać przybliżone wartości:

a) $\sqrt[4]{17}$, b) $\sin 29^\circ$, c) $\sqrt{83}$ d) $\ln 1,01$.

Podać interpretacje geometryczne.

Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji:

3.158. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$.

3.159. $f(x) = x^3 - 3x + 5$.

3.160. $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 8x$.

3.161. $f(x) = x(x-2)^2$.

3.162. $f(x) = x^2(1-x^3)$.

3.163. $f(x) = x(1+2\sqrt{x})$.

3.164. $f(x) = -x + \cos x$.

3.165. $f(x) = \sqrt{(x^2-9)^3}$.

3.166. $f(x) = \ln|x|$.

3.167. $f(x) = x|x|$.

3.168. $f(x) = \frac{x^4}{e^x}$.

3.169. $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$.

3.170. $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+5x+6}$.

3.171. $f(x) = 1 - 24x + 15x^2 - 2x^3$.

3.172. $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$.

3.173. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji:

3.174. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

3.175. $f(x) = 3 - 2x^2 - x^4$.

3.176. $f(x) = x^3 - 12x$.

3.177. $f(x) = (1-x^2)^3$.

3.178. $f(x) = x^2(x-6)$.

3.179. $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{8}{x}$.

3.180. $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

3.181. $f(x) = x^2 + \sqrt{x^5}$.

3.182. $f(x) = 3 - 2\sqrt[3]{x^2}$.

3.183. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

3.184. $f(x) = x^2 e^{-x}$.

3.185. $f(x) = e^{-x} + e^{2x}$.

3.186. $f(x) = |x^3 - 2x^2|$.

3.187. $f(x) = 1 + |\operatorname{arc} \operatorname{tg}(x-1)|$.

$$3.188. f(x) = 40e^{-0,05x} + 6x - 10. \quad 3.189. f(x) = \ln x - \frac{x^2}{4}.$$

Wyznaczyć ekstrema globalne funkcji:

$$3.190. f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35, \quad x \in [-4, 4].$$

$$3.191. f(x) = x^2 \ln x, \quad x \in [1, e].$$

$$3.192. f(x) = \sqrt{5-4x}, \quad x \in [-1, 1].$$

$$3.193. f(x) = x - 2 \ln x, \quad x \in [1, e].$$

$$3.194. f(x) = |x^2 - 4x + 3|, \quad x \in [-10, 10].$$

$$3.195. f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10, \quad x \in [0, 3].$$

$$3.196. f(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$3.197. f(x) = x^2 e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$3.198. f(x) = x^{\frac{2}{3}}, \quad x \in [0, 4].$$

$$3.199. f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - 20, \quad x \in [0, 5].$$

$$3.200. f(x) = -2x^3 - 15x^2 + 10, \quad x \in [-6, 2].$$

3.201. Obliczyć $f'(1)$ oraz $f''(1)$ dla następujących funkcji:

$$a) f(x) = e^{10-2x}, \quad b) f(x) = e^{2x} \ln x, \quad c) f(x) = \frac{x}{1-x^2}.$$

3.202. Wyznaczyć pochodną n -tego rzędu funkcji:

$$a) f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

$$b) f(x) = e^x, \quad c) f(x) = e^{-x}, \quad d) f(x) = \sin x,$$

$$e) f(x) = \frac{1}{x}, \quad f) f(x) = \ln x, \quad g) f(x) = \cos x.$$

3.203. Wykazać, że funkcja $y = \sin x$ spełnia równanie: $y'' + y = 0$.

3.204. Wykazać, że funkcja $y = e^x \cos x$ spełnia równanie: $y'' - 2y' + 2y = 0$.

3.205. Wykazać, że funkcja $f(x) = e^{-x^2}$ spełnia równanie

$$f^{(n)}(0) = -2(n-1)f^{(n-2)}(0).$$

Wyznaczyć ekstrema lokalne następujących funkcji stosując drugi warunek wystarczający istnienia ekstremum:

$$3.206. f(x) = x^3 - 2x^2 + x. \quad 3.207. f(x) = (x+1)^2 e^{-x}.$$

$$3.208. f(x) = (\ln x^2)^2 + \ln x. \quad 3.209. f(x) = -100e^{-0,25x} - 50x.$$

$$3.210. f(x) = -45e^{-0,2x} - 18x + 10. \quad 3.211. f(x) = (x^2 - 16)^3.$$

$$3.212. f(x) = \frac{x^2}{2} + 7x - 30 \ln x. \quad 3.213. f(x) = x^{100}.$$

Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia wykresów następujących funkcji:

$$3.214. f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 4. \quad 3.215. f(x) = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4.$$

$$3.216. f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 9. \quad 3.217. f(x) = \frac{1}{(x+1)^5}.$$

$$3.218. f(x) = \frac{1}{x^2-4}. \quad 3.219. f(x) = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}.$$

$$3.220. f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$

$$3.222. f(x) = 2 - |x^5 - 1|.$$

$$3.221. f(x) = x \ln x.$$

$$3.223. f(x) = 1 - |x^2 - 2|.$$

Zbadać przebieg zmienności funkcji:

$$3.224. f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2. \quad 3.225. f(x) = x + \frac{1}{x}. \quad 3.226. f(x) = x + 2\sqrt{-x}.$$

$$3.227. f(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}. \quad 3.228. f(x) = 2 + \frac{x^2-4}{x}. \quad 3.229. f(x) = \frac{x^4}{x^2-1}.$$

$$3.230. f(x) = 2^{\frac{1}{x}}. \quad 3.231. f(x) = \frac{\ln x}{x}. \quad 3.232. f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}.$$

$$3.233. f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-5}}. \quad 3.234. f(x) = \frac{x}{e^x}. \quad 3.235. f(x) = x^2 \ln x.$$

$$3.236. f(x) = x e^{\frac{1}{x}}. \quad 3.237. f(x) = x 2^{\frac{1}{x}}. \quad 3.238. f(x) = 2x \arctg x.$$

3.4 Zastosowania pochodnych

3.4.1 Optymalizacja

Jednym z najważniejszych zastosowań rachunku różniczkowego jest optymalizacja, czyli szukanie ekstremów lokalnych i globalnych dla funkcji opisujących wielkości ekonomiczne. W praktycznych problemach musimy brać pod uwagę nie tylko rozwiązanie matematyczne, ale również jego interpretację ekonomiczną. W szczególności musimy sprawdzić, czy rozwiązanie uzyskane na drodze matematycznej należy do dziedziny praktycznej rozważanej funkcji.

Przykład 3.29. Władze stolicy chcą ustalić cenę przejazdu metrem. Na podstawie ankiet ustalono zależność popytu PP od ceny c

$$PP(c) = 20.000 - 125c,$$

gdzie PP oznacza przeciętną liczbę pasażerów na godzinę, a c cenę biletu w groszach. Znajdź cenę biletu, która maksymalizuje dochód na godzinę oraz odpowiadającą jej liczbę pasażerów na godzinę i dochód.

Rozwiązanie

Ponieważ dochód D równa się

$$D = PP \cdot c,$$

więc

$$D(c) = (20.000 - 125c)c = -125c^2 + 20.000c.$$

Różniczkując otrzymamy

$$D'(c) = -250c + 20.000.$$

Pochodna zeruje się dla $c = 80$; jest to jedyny punkt krytyczny. Ponieważ $D''(c) = -250 < 0$, zatem dla $c = 80$ funkcja D przyjmuje maksimum. Jest ono równe $D(80) = 800.000$ gr., czyli 8.000 zł. Ponieważ D jest funkcją kwadratową, maksimum to jest jednocześnie wartością największą. Liczba pasażerów korzystająca z metra w ciągu godziny wyniesie wtedy $PP(80) = 10.000$. $\square$

Przykład 3.30. Właściciel sklepu z rowerami górskimi chce zbudować magazyn, w którym trzymałby zamówione rowery. Utrzymanie dużego magazynu jest bardziej kosztowne. Mały magazyn zmusza z kolei do częstych dostaw, co podraża koszty odnawiania zapasów. Właściciel sklepu, z pomocą znajomego matematyka, ustalił następującą zależność między rocznym kosztem utrzymania magazynu a liczbą rowerów, która się w nim mieści

$$K(i) = \frac{4.860}{i} + 15i + 5.000.$$

Jaka wielkość magazynu minimalizuje koszty jego utrzymania?

Rozwiązanie

Optymalna wielkość magazynu, mierzona liczbą i przechowywanych w nim rowerów, powinna minimalizować koszt K . Ponieważ

$$K'(i) = -4.860i^{-2} + 15 = 0$$

dla $i = 18$ lub $i = -18$, te wartości są jedynymi punktami krytycznymi. Wartość -18 nie należy do dziedziny praktycznej funkcji K . Druga pochodna

$$K''(i) = 9.720i^{-3} > 0$$

dla $i > 0$, zatem $K''(18) > 0$. Oznacza to, że w punkcie $i = 18$ funkcja kosztu osiąga minimum lokalne. Jest ono równe 5.540. Zauważmy, że gdy i dąży do 0 lub do $+\infty$, $K(i)$ dąży do $+\infty$. Zatem znalezione minimum lokalne jest jednocześnie minimum globalnym. $\square$

Przykład 3.31. Całkowity koszt miesięczny produkcji telewizorów kolorowych w pewnej firmie zależy następująco od liczby wyprodukowanych odbiorników

$$K(i) = 100.000 + 500i + 0,2i^2.$$

Znajdź liczbę i , dla której koszt jednostkowy jest minimalny.

Rozwiązanie

Koszt jednostkowy KJ otrzymamy dzieląc K przez i

$$KJ(i) = \frac{100.000}{i} + 500 + 0,2i.$$

Licząc pochodną otrzymujemy

$$KJ'(i) = -100.000i^{-2} + 0,2 = 0$$

dla $i = 707,11$ lub $i = -707,11$. Drugą wartość odrzucamy. Ponieważ $KJ''(i) = 200.000i^{-3} > 0$ dla $i > 0$, zatem w punkcie $i = 707,11$ funkcja KJ przyjmuje minimum, które wynosi 582,84 zł. $\square$

Przykład 3.32. Producent nowego modelu wrotek jednośladowych chce ustalić cenę oraz wielkość produkcji nowego towaru. Funkcja popytu na wrotki ma postać

$$PP(c) = 100.000 - 200c,$$

natomiast koszt całkowity wyprodukowania i par wrotek wynosi

$$K(i) = 150.000 + 100i + 0,003i^2,$$

przy ograniczeniu $i \leq 20.000$ (takie są możliwości produkcyjne). Przy jakiej wielkości produkcji producent osiągnie maksymalny zysk, zakładając, że cała produkcja zostanie sprzedana?

Rozwiązanie

Ponieważ zakładamy, że cała produkcja zostanie sprzedana, możemy przyjąć, że liczba wyprodukowanych wrotek $i = PP$. To daje nam maksymalną cenę, którą można uzyskać przy popycie równym i ,

$$c = 500 - 0,005i.$$

Ponieważ dochód ze sprzedaży i par wrotek równa się $D = c \cdot i$, więc ostatecznie

$$D(i) = 500i - 0,005i^2.$$

Natomiast zysk

$$Z(i) = D(i) - K(i) = -0,008i^2 + 400i - 150.000.$$

Ponieważ

$$Z'(i) = -0,016i + 400 = 0$$

dla $i = 25.000$ oraz $Z''(i) < 0$, więc dla $i = 25.000$ funkcja zysku osiąga maksimum lokalne. Jednak punkt ten nie należy do dziedziny praktycznej funkcji zysku: $0 \leq i \leq 20.000$. Wiemy, że funkcja ciągła może przyjmować wartość największą tylko w ekstremach lokalnych lub na brzegu. Zatem w tym przypadku maksymalny zysk będzie osiągnięty dla $i = 0$ lub $i = 20.000$. Jasne jest, że tylko druga możliwość wchodzi w grę. Cena, którą będzie mógł ustalić producent, wynosi

$$c = 500 - 0,005 \cdot 20.000 = 400 \text{ zł},$$

natomiast osiągnięty zysk $Z = 4.650.000$ zł. $\square$

3.4.2 Analiza krańcowa

Analiza krańcowa (marginalna) polega na badaniu wpływu małych zmian pewnych wielkości na inne wielkości ekonomiczne, na przykład, jak zmieni się zysk, gdy produkcja zostanie zwiększona o jedną jednostkę. Aby móc analizować taką sytuację, trzeba znać zależność dochodu oraz kosztu od liczby wyprodukowanych jednostek produktu.

Dochód krańcowy dla ustalonej wielkości produkcji i (mierzonej w jednostkach produktu) jest równy

$$DK(i) := D(i+1) - D(i),$$

czyli jest równy przyrostowi dochodu spowodowanemu wzrostem produkcji o 1.

Przykład 3.33. W przykładzie 3.32 dochód wyrażał się następująco

$$D(i) = 500i - 0,005i^2.$$

Zatem dochód krańcowy odpowiadający produkcji i będzie miał postać

$$DK(i) = D(i+1) - D(i) = 499,995 - 0,01i.$$

Jak widać, dochód krańcowy nie jest tu stały, zależy od i . □

Zauważmy, że dochód krańcowy jest równy ilorazowi różnicowemu funkcji D w punkcie i dla przyrostu $\Delta i = 1$. Jeśli i jest dostatecznie duże, możemy iloraz różnicowy zastąpić przez pochodną funkcji D . W przykładzie 3.33 $D'(i) = 500 - 0,01i$, i jak widać mało różni się od dochodu krańcowego. Możemy zatem przez dochód krańcowy rozumieć pochodną dochodu ze względu na wielkość produkcji

$$DK(i) = D'(i).$$

Podobnie definiujemy koszt krańcowy

$$KK(i) = K(i+1) - K(i)$$

jako przyrost kosztu spowodowany zwiększeniem produkcji o jednostkę. Zupełnie analogicznie jak dla dochodu możemy przyjąć, że

$$KK(i) = K'(i).$$

Dochód krańcowy i koszt krańcowy wyznaczają warunki opłacalności zwiększania produkcji (przy założeniu, że chcemy maksymalizować zysk). Mianowicie, jeśli $DK(i) > KK(i)$, opłaca się produkować o jedną jednostkę więcej. Jeśli zachodzi nierówność przeciwna, zwiększanie produkcji nie jest opłacalne. W typowej sytuacji produkcyjnej, dochód krańcowy jest większy od kosztu krańcowego przy małej produkcji, co zachęca do zwiększania produkcji. Przy przekroczeniu jednak pewnego poziomu produkcji relacja między tymi wielkościami się odwraca, co oznacza, że zwiększanie

produkcji prowadzi do zmniejszania zysku. W takiej sytuacji maksymalny zysk odpowiada produkcji i , dla której $DK(i) = KK(i)$, czyli $D'(i) = K'(i)$. Warunek ten oznacza, że styczne do wykresów funkcji dochodu i funkcji kosztu stają się równoległe w punkcie optymalnym (jednakowe współczynniki kierunkowe).

Warunek $D'(i) = K'(i)$ pojawia się w sposób naturalny przy maksymalizacji zysku. Ponieważ $Z(i) = D(i) - K(i)$, więc $Z'(i) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $D'(i) = K'(i)$. Jest to zatem warunek konieczny na maksimum funkcji zysku dla wielkości produkcji i . Aby zapewnić faktyczne maksimum w i , możemy założyć, że $Z''(i) < 0$, co oznacza, że $D''(i) < K''(i)$.

Jeśli funkcja dochodu jest liniowa, $D(i) = ai + b$, natomiast funkcja kosztu jest wypukła, otrzymujemy $D''(i) = 0$ oraz $K''(i) > 0$. Zatem warunek $D''(i) < K''(i)$ zachodzi dla każdego i . Poza tym $D'(i) = a$ jest stałe. Zatem optymalna wartość i może być wyznaczona z warunku $K'(i) = a$. W tym przypadku łatwo jest dokonać tego graficznie. Wystarczy poprowadzić styczną do wykresu funkcji kosztu, równoległą do prostej opisującej funkcję dochodu i odczytać wartość i w punkcie styczności. Ze względu na to, że praktyczna dziedzina jest zawsze ograniczona, takiego punktu i możemy czasem nie znaleźć.

3.4.3 Elastyczność funkcji

Współczynnik elastyczności jest także miarą zależności między dwiema wielkościami ekonomicznymi. Dobrym przykładem takich wielkości jest cena pewnego towaru i popyt lub podaż tego towaru. Współczynnik elastyczności mierzy procentową zmianę, na przykład popytu, jeśli cena towaru wzrośnie o 1%. Ogólnie *elastyczność przeciętna funkcji $f(x)$ w przedziale $[x_0, x_0 + \Delta x]$* będzie to stosunek względnego przyrostu funkcji $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)}$ do względnego przyrostu argumentu $\frac{\Delta x}{x_0}$:

$$Ef = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)} \cdot \frac{\Delta x}{x_0},$$

lub inaczej

$$Ef = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}.$$

Jeżeli $\Delta x \rightarrow 0$, to

$$E_{x_0}f = f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{f(x_0)} \quad (3.7)$$

$E_{x_0}f$ nazywamy *elastycznością funkcji $f(x)$ w punkcie x_0* .

Przykład 3.34. Zobaczymy jak zmiana zmiennej x o 1% wpłynie na zmianę wartości funkcji $f(x) = x^3 + 1$ w punkcie $x_0 = 1$. Ponieważ $f'(x) = 3x^2$, więc $E_{x_0=1}f = f'(1) \cdot \frac{1}{f(1)} = \frac{3}{2}$. Czyli wartość funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = 1$ w przybliżeniu wzrośnie o 1,5%. □

Twierdzenie 3.35. 1. *Elastyczność iloczynu funkcji f i g jest równa sumie elastyczności czynników iloczynu:*

$$E(fg) = Ef + Eg$$

2. *Elastyczność ilorazu funkcji f i g jest równa różnicy elastyczności dzielnej i dzielnika:*

$$E\left(\frac{f}{g}\right) = Ef - Eg.$$

Twierdzenie 3.36. *Jeżeli przyrostowi argumentu funkcji f o $p\%$ od poziomu x_0 odpowiada przyrost wartości tej funkcji o $q\%$, to*

$$q \approx pE_{x_0}f.$$

Przykład 3.37. ([Pi,OO]) Często jesteśmy świadkami zmian cen towarów. Załóżmy na przykład, że nieznacznie wzrosła cena chleba (artykuł pierwszej potrzeby) oraz cena telewizorów (artykuł luksusowy). O ile w pierwszym przypadku zmiana ceny nie powinna mieć wpływu na popyt, o tyle w drugim można się spodziewać, że popyt może zmaleć. Wielkość zmian popytu w zależności od zmian ceny można mierzyć za pomocą przeciętnej elastyczności cenowej popytu η :

$$\eta = f'(c) \frac{c}{f(c)} \quad (3.8)$$

gdzie c oznacza cenę artykułu. Często, w celu uniknięcia wartości ujemnych jako miary η we wzorze (3.8) przed iloczynem pisze się minus, czyli

$$\eta = -f'(c) \frac{c}{f(c)}$$

□

Przykład 3.38. Jeżeli funkcja popytu jest funkcją potęgową w postaci:

$$f(x) = ax^b, \quad a > 0, \quad 0 < x - \text{cena}, \quad f(x) - \text{popyt},$$

to $\eta = b$ w każdym punkcie. Zwiększenie ceny o 1% zmniejsza popyt o $|b|\%$ (zmniejsza, gdyż ze względu na monotoniczność funkcji popytu $b < 0$). Funkcja potęgowa jest jedyną funkcją o tej własności, że jej elastyczność jest stała w każdym punkcie i równa wykładnikowi zmiennej. □

3.4.4 Przykłady geometryczne

Przykład 3.39. Niedaleko autostrady leżą dwie miejscowości: Wola Wielka z 4000 mieszkańców i Wola Mała z 1000 mieszkańców. W odpowiednim układzie współrzędnych autostrada może być utożsamiana z osią x -ów, a Wola Wielka i Wola Mała

z punktami o współrzędnych $(2, 1)$ i $(4, -2)$. Władze obu miejscowości postanowiły wybudować przy autostradzie stację benzynową. Chcą tak wyznaczyć lokalizację stacji, aby była ona możliwie blisko obu miejscowości. Oznaczmy przez d_1 i przez d_2 odpowiednio odległości od stacji do Woli Wielkiej i Woli Małej. Zdecydowano tak usytuować stację benzynową, aby zminimalizować sumę odległości od stacji

$$f(x) = d_1 + d_2.$$

Zmienna x oznacza współrzędną stacji benzynowej (przy autostradzie). Mamy zatem $d_1 = \sqrt{(x-2)^2 + 1}$ i $d_2 = \sqrt{(x-4)^2 + 4}$ oraz

$$f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + 1} + \sqrt{(x-4)^2 + 4}.$$

Pochodna funkcji f wynosi

$$f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2 + 1}} + \frac{x-4}{\sqrt{(x-4)^2 + 4}}.$$

Pochodna przyjmuje wartość zero dla $x = 8/3$ (sprawdź to). Obliczając drugą pochodną otrzymamy

$$f''(x) = \frac{1}{((x-2)^2 + 1)^{3/2}} + \frac{4}{((x-4)^2 + 4)^{3/2}} > 0.$$

Zatem funkcja f osiąga minimum dla $x = 8/3$. Tam zatem zostanie postawiona stacja benzynowa. □

Przykład 3.40. Firma budowlana ma zbudować rurociąg łączący przeciwległe wierzchołki prostokątnego obszaru porośniętego lasem. Boki tego prostokąta wynoszą 2 km i 5 km (rys. 3.16). Firma rozważa zbudowanie rurociągu z dwóch prostych kawałków: pierwszego, biegnącego przez las, i drugiego, idącego wzdłuż lasu. Koszt budowy jednego kilometra rurociągu przez las jest α razy większy niż koszt budowy wzdłuż lasu. Należy znaleźć optymalny sposób poprowadzenia rurociągu, tak aby zminimalizować koszt budowy.

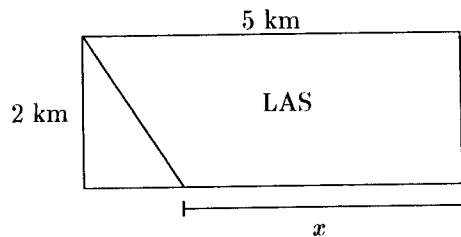
Rozwiązanie

Niech x oznacza długość odcinka rurociągu wzdłuż lasu, mierzoną w kilometrach, natomiast c — koszt budowy jednego kilometra wzdłuż lasu. Wtedy długość odcinka przez las wyniesie $\sqrt{2^2 + (5-x)^2}$, a koszt budowy rurociągu

$$K(x) = cx + \alpha c \sqrt{4 + (5-x)^2}$$

dla $x \in [0, 5)$ oraz $K(5) = 7c$ (cały rurociąg wzdłuż lasu). Zauważmy, że funkcja K nie jest ciągła w punkcie $x = 5$, jeśli $\alpha \neq 1$. Wtedy, jeśli $x < 5$,

$$K'(x) = c + \frac{\alpha c(x-5)}{\sqrt{4 + (5-x)^2}} = 0$$



Rysunek 3.16: Budowa rurociągu

dla

$$\bar{x} = 5 - \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}.$$

Druą pochodna ma postać

$$K''(x) = \frac{4\alpha c}{(4 + (5 - x)^2)^{3/2}},$$

a zatem jest stale dodatnia. W punkcie $\bar{x}$ mamy zatem minimum lokalne. Zauważmy, że dziedziną praktyczną dla funkcji K jest przedział $[0, 5]$, natomiast aby problem miał rozwiązanie, α powinno być większe od 1. Gdy α dąży do $+\infty$, $\bar{x}$ dąży do 5. Oznacza to, że przy koszcie budowy przez las dużo większym od kosztu budowy wzdłuż lasu nie opłaca się prowadzić rurociągu przez las. Już dla $\alpha > \sqrt{2}$, $K(5) < K(\bar{x})$. Natomiast, gdy α jest bliskie 1, możemy otrzymać $\bar{x} < 0$, co nie spełnia naszych ograniczeń. Optymalną decyzją jest wtedy przyjęcie $x = 0$ i poprowadzenie całego rurociągu przez las, po przekątnej prostokąta. $\square$

3.4.5 Zadania

Zadania do samodzielnego rozwiązania

3.239. Dochodowa funkcja popytu f na pewną grupę dóbr ma postać:

$$f(x) = \frac{50x - 150}{x + 3}, \quad x \geq 3.$$

Sprawdzić, czy wraz ze wzrostem dochodu popyt jest coraz wolniejszy. Wyznaczyć wartość, od której popyt jest mniejszy. Naszkicować wykres funkcji $f(x)$.

3.240. Roczne koszty utrzymania hurtowni towarów sportowych zależą od liczby i – sztuk przechowywanego towaru w następujący sposób:

$$K(i) = \frac{2.800.000}{i} + 0,007i + 2.000.000$$

- Określić i minimalizującą koszt $K(i)$.
- Podać wartość minimalnego kosztu.
- Rozwiązać problem a) i b) przy ograniczeniu wielkości magazynu do 12.000 sztuk. Podać odpowiednią ilustrację graficzną.

3.241. Koszt wyprodukowania x ton wyrobu wynosi:

$$K(x) = 0,001x^3 - 0,1x^2 + 40x + 1$$

tysięcy zł. Popyt wyrażony w tonach wynosi:

$$PP(c) = 880 - 10c,$$

gdzie c – w tys. zł za tonę. Zakładając, że cała produkcja zostaje sprzedana, wyznaczyć wielkość produkcji maksymalizującą zysk. Podać wartość maksymalnego zysku.

3.242. Całkowity koszt produkcji i jednostek pewnego towaru opisuje funkcja: $K(i) = 5.000.000 + 250i + 0,002i^2$, gdzie koszt w zł.

- Ile jednostek należy wyprodukować, aby zminimalizować koszt jednostkowy? Podać jego wartość i wartość kosztu całkowitego przy tej produkcji.
- Podać wykres funkcji kosztu jednostkowego z uwzględnieniem dziedziny praktycznej.

3.243. Całkowity koszt produkcji (w zł) wyraża funkcja:

$$K(i) = 350.000 + 7.500i + 0,25i^2.$$

- Ile jednostek należy wyprodukować, aby zminimalizować koszt jednostkowy? Podać jego wartość i wartość kosztu całkowitego przy tej produkcji.
- Podać wykres funkcji kosztu jednostkowego z uwzględnieniem dziedziny praktycznej.

3.244. Rozwiązać poprzednie zadanie przy założeniu, że maksymalna produkcja wynosi 1000 jednostek.

3.245. Na podstawie danych statystycznych ustalono, że pomiędzy kosztem jednostkowym produkcji- $KJ_p(i)$ a produkcją i pewnej wytwórni prefabrykatów zachodzi zależność: $KJ_p(i) = \frac{450.000}{i} + 130$. Między kosztem jednostkowym transportu $KJ_t(i)$ a produkcją zachodzi zależność: $KJ_t(i) = \frac{1}{2000}i + 15$. Określić produkcję minimalizującą całkowite koszty.

3.246. W pewnym przedsiębiorstwie wytwarzającym jednorodną produkcję stwierdzono, że pomiędzy kosztem produkcji a jej ilością zachodzi zależność:

$$K(i) = \frac{1}{3}i^3 - 8i^2 + 52i.$$

Wyznaczyć optymalną wielkość produkcji, przyjmując za kryterium optymalności koszt jednostkowy $KJ(i) = \frac{K(i)}{i}$.

3.247. Spółka szacuje, że popyt na jej wyroby waha się wraz z ceną tych wyrobów. Funkcja popytu ma postać:

$$PP(c) = 280.000 - 400c,$$

gdzie cena c w zł. Natomiast całkowity koszt wyprodukowania i -sztuk tego produktu opisuje funkcja:

$$K(i) = 350.000 + 300i + 0,0015i^2.$$

- Wyznaczyć produkcję maksymalizującą zysk.
- Ile wyniesie wartość tak wyznaczonego zysku i przy jakiej cenie c ?
- Rozwiązać to zadanie przy założeniu, że roczna zdolność produkcyjna wynosi 40.000 sztuk.

3.248. Miesięczna sprzedaż S (w tys. sztuk) pewnej płyty wyraża się następująco: $S(t) = \frac{200t}{t^2+36}$, gdzie t - oznacza liczbę miesięcy, które upłynęły od wydania płyty.

- Wyznaczyć $S(2)$ i $S'(2)$ oraz podać interpretację.
- Po jakim czasie sprzedaż osiągnie maksymalną wartość?
- Naszkicować wykres funkcji sprzedaży $S(t)$ z uwzględnieniem dziedziny praktycznej.

3.249. Koszt wykonania prac w firmie jest funkcją liczby zatrudnionych osób: $K(x) = 0,05x^2 - 0,4 \ln x + 5$.

- Jaka liczba pracowników minimalizuje koszt wykonania prac i ile on wtedy wynosi?
- Naszkicować wykres funkcji kosztu.

3.250. Miesięczny zysk firmy jest określony jako funkcja liczby pracowników- x : $Z(x) = 20xe^{-0,002x}$, gdzie Z - oznacza zysk w tys. zł.

- Podać liczbę pracowników, przy której zysk jest maksymalny.
- Naszkicować wykres funkcji zysku.

3.251. Funkcja: $PP(c) = 25.000e^{-0,05c}$ jest funkcją popytu na pewien towar, c - cena jednostki towaru. Wyznaczyć taką cenę, aby osiągnięty dochód był maksymalny, podać jego wartość. Podać wykres funkcji popytu i funkcji dochodu.

3.252. Dana jest funkcja zysku zależna od wartości nakładów na reklamę:

$$Z(x) = 40x^2e^{-0,5x},$$

gdzie x - nakłady w tys. zł i Z - zysk w tys. zł. Ile należy przeznaczyć na reklamę, aby osiągnąć maksymalny zysk?

3.253. W pewnym przedsiębiorstwie koszt produkcji miesięcznej i -ton kształtuje się według wzoru:

$$K(i) = 0,1i^3 - 4,5i^2 + 80i + 300.$$

Zbadać jak ze wzrostem produkcji zmienia się jej koszt.

3.254. Całkowity koszt oraz całkowity dochód dla pewnego produktu można opisać za pomocą funkcji:

$$K(i) = 500 + 100i + 0,5i^2, \quad D(i) = 500i,$$

gdzie i jest produkcją.

- Wyznaczyć krańcowy dochód i krańcowy koszt.
- Stosując analizę krańcową wyznaczyć maksimum funkcji zysku.
- Przedstawić ilustrację graficzną.

3.255. Dane są funkcje całkowitego kosztu i dochodu:

$$K(i) = 40.000 + 25i + 0,002i^2, \quad D(i) = 75i - 0,008i^2.$$

Używając analizy krańcowej wyznaczyć produkcję maksymalizującą zysk.

3.256. Pewna firma sprzedaje swój towar po 50 zł za sztukę. Całkowity koszt produkcji i tysięcy sztuk tego produktu jest opisany funkcją:

$$K(i) = 10 - 2,5i^2 + i^3.$$

Wyznaczyć optymalną produkcję. Podać wartość maksymalnego zysku. Ustalić, jaka jest w przybliżeniu wartość nakładów zużytych na wyprodukowanie dodatkowego 1000 sztuk produktu przy osiągniętej wielkości produkcji 10.000 sztuk?

3.257. Obliczyć elastyczność funkcji $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+5}$, $x > 0$, w punkcie $x_0 = 0,5$.

3.258. Jak zmieni się wartość funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2x+3}$ w punkcie $x_0 = 0$, jeżeli wartość argumentu tej funkcji zwiększy się o 1%?

3.259. Funkcje popytu $PP(c)$ i podaży $PD(c)$ pewnego towaru są następujące: $PP(c) = c^2 - 300c + 20.000$ i $PD(c) = c^2 - 3600$ dla ceny $c \in [60, 100]$. Wyznaczyć cenę równowagi oraz elastyczność popytu i podaży¹ przy cenie równowagi.

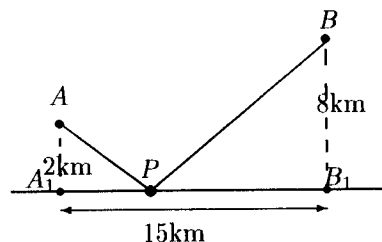
3.260. Niech c będzie ceną jednostkową pewnego artykułu, a x - liczbą sztuk tego artykułu, którą można sprzedać w ciągu jednego dnia po cenie c . Niech $c(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Wyznaczyć elastyczność utargu.

3.261. Podać wzór funkcji f , której elastyczność w każdym punkcie $x > 0$ wynosi:
a) 1; b) 0,2; c) -3,5.

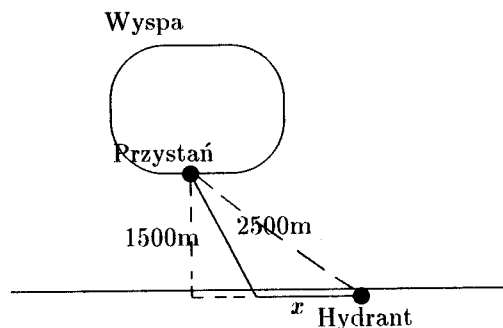
3.262. Na osi odciętych wyznaczyć taki punkt P , aby suma kwadratów jego odległości od punktów: $(2, 3)$, $(-1, 4)$, $(0, -2)$ była najmniejsza.

3.263. Który punkt paraboli $y = x^2$ leży najbliżej punktu $(0, 1)$?

¹Elastyczność podaży wyznacza się podobnie jak elastyczność cenową popytu (wzór 3.8).



Rysunek 3.17: Przedsiębiorstwo nad rzeką



Rysunek 3.18: Plan budowy wodociągu

3.264. Przedsiębiorstwo przemysłowe należy zlokalizować nad rzeką (prosta A_1B_1 na rysunku 3.17). Baza surowcowa znajduje się w punkcie A , a ośrodek zbytu w punkcie B . W jakim punkcie nad rzeką należy zlokalizować przedsiębiorstwo, aby koszty transportu były najmniejsze.

3.265. Na małą wysepkę na jeziorze należy dostarczać wodę z hydrantu znajdującego się blisko jego brzoza. Transport wody będzie odbywał się wodociągiem pod ziemią na brzoze i pod dnem jeziora do wyspy. Koszty budowy takiego wodociągu pod dnem jeziora są trzykrotnie wyższe niż brzoziem. Jak należy poprowadzić wodociąg, aby zminimalizować koszt jego budowy? Wymagane odległości podaje rysunek 3.18.

3.266. Dolny brzeg ekranu zawieszono na pionowej ścianie znajduje się o 9 m wyżej niż oko obserwatora. Ekran ma wysokość 7 m. Z jakiej odległości obserwator widzi ekran pod największym kątem?

Rozdział 4

Funkcje wielu zmiennych

4.1 Opis, wykresy, warstwy, obrazy

4.1.1 Sposoby opisu funkcji wielu zmiennych

Funkcje, którymi dotąd się zajmowaliśmy, były określone na zbiorze liczb rzeczywistych (lub odcinku) i przyjmowały wartości będące liczbami rzeczywistymi. W wielu praktycznych zastosowaniach funkcje zależą od kilku zmiennych rzeczywistych, często przyjmują również wartości będące wektorami w $\mathbb{R}^n$. Na przykład pole prostokąta jest funkcją dwóch zmiennych x i y , oznaczających długości jego boków

$$P(x, y) = x \cdot y.$$

Objętość akwarium zależy od jego długości, szerokości i wysokości

$$V(x, y, z) = x \cdot y \cdot z.$$

Jeśli liczba zmiennych niezależnych jest większa od trzech, zamiast liter x, y, z używamy zwykle oznaczeń $x_1, x_2, \dots$. Na przykład odległość punktu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ od punktu $0 = (0, \dots, 0)$ (środka układu współrzędnych) jest funkcją zmiennych $x_1, \dots, x_n$

$$d(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Dziedzina tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R}^n$ a przeciwdziedzina zbiór $\mathbb{R}$, co zapisujemy

$$d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Czasami wygodnie wprowadzić jest zmienną zależną, która opisuje wartości funkcji, np.

$$y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Jeśli funkcja przyjmuje wartości w zbiorze $\mathbb{R}^m$,

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

to obok n zmiennych niezależnych, np. $x_1, \dots, x_n$, będziemy mieli m zmiennych zależnych, np. $y_1, \dots, y_m$. Taką funkcję możemy opisać podając oddzielnie zależność każdego y_i od wszystkich zmiennych $x_1, \dots, x_n$,

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\dots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

lub używając zapisu wektorowego

$$y = f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))^T.$$

Na przykład, jeśli przez x oznaczymy wektor kolumnowy z $\mathbb{R}^2$, którego składowe oznaczają liczby mieszkańców żyjących obecnie w mieście i na wsi, a przez y podobny wektor opisujący strukturę demograficzną za rok, to otrzymamy funkcję liniową

$$y = Mx,$$

gdzie M jest macierzą opisującą migracje (w przeciągu roku).

Oznaczmy współrzędne na płaszczyźnie przez x_1 i x_2 . Wprowadźmy współrzędne biegunowe r i α , gdzie r jest odległością punktu $x = (x_1, x_2)$ od środka układu współrzędnych, a α kątem jaki tworzy z dodatnią półosią x_1 półprosta przechodząca przez 0 i x . Wtedy

$$x_1 = r \cos \alpha, \quad x_2 = r \sin \alpha.$$

Zauważmy, że $r \in [0, \infty)$ a $\alpha \in [0, 2\pi)$. Zatem powyższe równania definiują funkcję

$$f : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$f = (f_1, f_2)^T$ oraz $x_1 = f_1(r, \alpha)$ i $x_2 = f_2(r, \alpha)$. Zmienne x_1 i x_2 są tu zmiennymi zależnymi, a r i α zmiennymi niezależnymi.

4.1.2 Wykresy

Niech funkcja $f : X \rightarrow Y$. Przypomnijmy, że *wykresem* funkcji f nazywamy zbiór

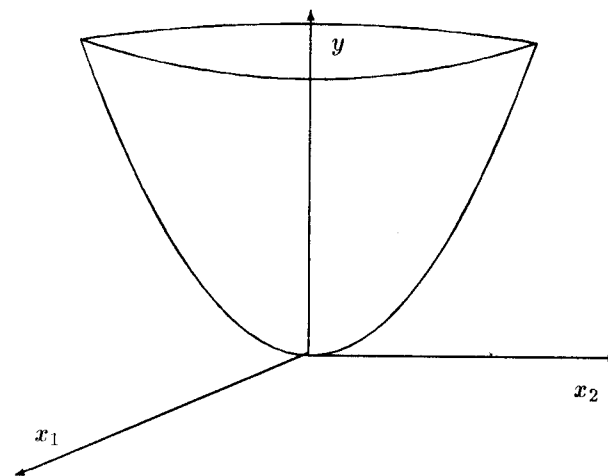
$$W(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

Zatem dla funkcji $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, wykres będzie podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1}$. Ponieważ nasza wyobraźnia ograniczona jest do obiektów trójwymiarowych, rysowanie wykresu ma sens tylko dla funkcji dwóch zmiennych. Wtedy $n = 2$, a wykres jest (zwykle) pewną powierzchnią w $\mathbb{R}^3$.

Przykład 4.1. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Aby zobaczyć jak wygląda wykres tej funkcji, przetnijmy go z kilkoma płaszczyznami, różnie usytuowanymi w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Najprostsze płaszczyzny to te, które są wyznaczone przez osie układu współrzędnych. Płaszczyzna rozpięta na osiach x_2 i y ma równanie $x_1 = 0$. Podstawiając tę zależność do funkcji f otrzymujemy funkcję zależną tylko od zmiennej x_2 : $f(x_1, 0) = x_1^2$, której wykresem jest parabola. Podobnie kładąc $x_2 = 0$ otrzymamy parabolę, będącą wykresem funkcji zależnej od x_1 : $f(0, x_2) = x_2^2$. Będzie ona leżała na płaszczyźnie wyznaczonej przez osie x_1 i y . Obie te płaszczyzny są pionowe. Aby przeciąć nasz wykres płaszczyzną poziomą, połóżmy $y = a$. Otrzymana krzywa będzie zbiorem punktów (x_1, x_2, y) , spełniających równania

$$x_1^2 + x_2^2 = a, \quad y = a.$$

Jeśli $a > 0$, krzywa ta będzie okręgiem o środku $(0, 0, a)$ i promieniu $\sqrt{a}$. Dla $a = 0$ okrąg stanie się punktem $(0, 0, 0)$. Dla $a < 0$ zbiór będzie pusty. Opisane tu cięcia powinny wystarczyć do wyobrażenia sobie i narysowania wykresu funkcji. (patrz rys. 4.1.) $\square$



Rysunek 4.1: Wykres funkcji $y = x_1^2 + x_2^2$

Dokonując odpowiednich cięć możemy naszkicować wykres dowolnej funkcji dwóch zmiennych. Czasami może tu być pomocne inne niż zwykle usytuowanie osi układu współrzędnych. Pamiętajmy, że faktycznie rysujemy tylko rzut wykresu znajdującego się w przestrzeni na płaszczyznę. Teoretycznie nic nie stoi na przeszkodzie w narysowaniu takiego rzutu na płaszczyznę obiektu z przestrzeni cztero- lub więcej wymiarowej. Problem polega tylko na naszych ograniczeniach w percepcji takich obiektów.

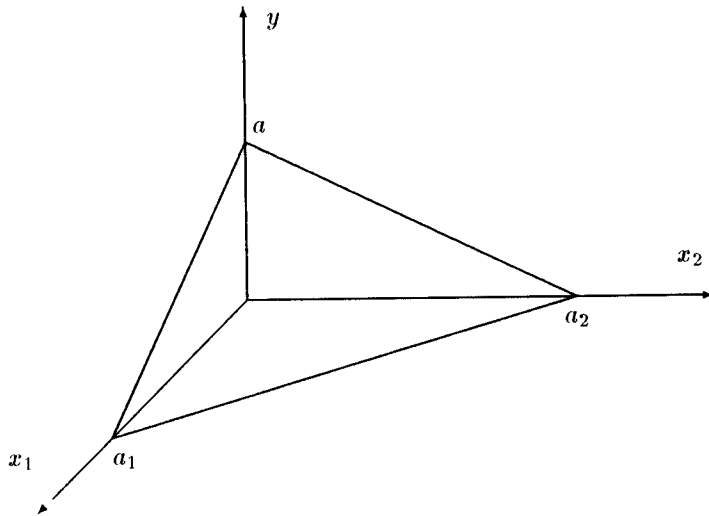
Paradoksalnie, dość kłopotliwe jest rysowanie wykresu (uogólnionej) funkcji liniowej

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + b. \quad (4.1)$$

Wykresem tej funkcji jest płaszczyzna. Żeby zobaczyć jej rzut na płaszczyźnie (czyli na kartce, na której rysujemy), musimy ograniczyć się tylko do pewnego jej fragmentu. Dobrze jest zaznaczyć punkty przecięcia płaszczyzny z osiami oraz proste, które otrzymamy przecinając ją z płaszczyznami wyznaczonymi przez te osie. W tym celu dobrze jest przekształcić równanie (4.1) do tzw. postaci odcinkowej

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{y}{a} = 1. \quad (4.2)$$

Można tak zrobić, jeśli c_1 i c_2 są różne od zera. Wtedy liczby a_1, a_2 i a wyznaczają współrzędne przecięcia płaszczyzny z osiami. (rys. 4.2)



Rysunek 4.2: Płaszczyzna $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{y}{a} = 1$

4.1.3 Warstwie

Często zamiast wykresu funkcji wielu zmiennych wygodniej jest narysować jej warstwie. *Warstwicą* funkcji $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dla wartości $a \in \mathbb{R}$ nazywamy przeciwobraz elementu a względem f , czyli zbiór punktów

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = a\}.$$

Warstwie potrafimy narysować dla $n = 2$ i $n = 3$ (również dla $n = 1$, ale ten przypadek jest mało ciekawy).

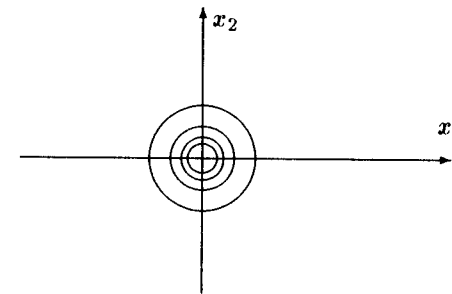
Jeśli $n = 2$, warstwica jest zazwyczaj krzywą na płaszczyźnie. Zgodnie z definicją, jest to zbiór punktów, w których funkcja f przyjmuje jednakowe wartości. Układ warstwic, narysowany dostatecznie gęsto, pozwala określić zachowanie się funkcji.

Jeśli za zmienne niezależne przyjmiemy długość i szerokość geograficzną (i ograniczymy się do małego obszaru kuli ziemskiej, aby zaniedbać jej zakrzywienie), natomiast zmienną zależną będzie wysokość nad poziomem morza, to warstwie tak zdefiniowanej funkcji będą znanymi nam skądinąd poziomiami. Poziomice łączą punkty o jednakowej wysokości nad poziomem morza. Ich układ na mapie pozwala zorientować się jaki charakter ma powierzchnia Ziemi w rozważnym rejonie. Zauważmy, że ta powierzchnia będzie dokładnie wykresem funkcji wysokości.

Przykład 4.2. Rozważmy funkcję $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ z Przykładu 4.1. Warstwie tej funkcji będą zadane równaniami

$$x_1^2 + x_2^2 = a$$

dla $a \geq 0$. Będą to koncentryczne okręgi na płaszczyźnie o środku w $(0, 0)$. Zauważmy, że okręgi te możemy otrzymać rzutując na płaszczyznę $x_1 x_2$ okręgi w $\mathbb{R}^3$, które otrzymaliśmy przecinając wykres funkcji f z płaszczyznami poziomymi. Warstwie ilustruje rys. 4.3. $\square$



Rysunek 4.3: Warstwie funkcji $y = x_1^2 + x_2^2$

Dla $n = 3$ warstwie funkcji będą (zwykle) powierzchniami w $\mathbb{R}^3$. Zauważmy, że w tym przypadku nie potrafimy narysować wykresu funkcji. Zatem, warstwie, które zwykle dają się narysować, stanowią cenną pomoc w opisywaniu funkcji trzech zmiennych. Jakkolwiek rachunek różniczkowy dla funkcji czterech czy pięciu zmiennych nie różni się zasadniczo od rachunku różniczkowego funkcji dwóch lub trzech zmiennych, możliwość zobaczenia wykresu lub warstwic funkcji znakomicie ułatwia zrozumienie i analizę studiowanych problemów. Jeśli jesteśmy w stanie cokolwiek narysować, nie unikajmy tej okazji.

Przykład 4.3. Zmodyfikujmy przykład 4.2 i rozważmy funkcję trzech zmiennych $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Warstwie tej funkcji będą miały postać

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a, \quad a \geq 0.$$

Równanie to opisuje sferę w $\mathbb{R}^3$ o środku w punkcie 0 i promieniu $\sqrt{a}$. Dla $a = 0$ sfera ta staje się punktem 0. $\square$

4.1.4 Funkcje z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^n$

Funkcje zadane na zbiorze liczb rzeczywistych (lub jego podzbiorze) można uważać za opisy parametryczne krzywych w $\mathbb{R}^n$. Zwykle nie rysuje się wykresów takich funkcji, chociaż dla $n = 2$ można by to zrobić. Zamiast tego rysujemy obraz takiej funkcji, czyli właśnie krzywą (lub prostą).

Przykład 4.4. Oznaczmy zmienną niezależną przez t . Czasami wygodnie jest interpretować ją jako czas. Niech $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

(traktujemy wartości funkcji f jako wektory kolumnowe). Każdemu t odpowiada dokładnie jeden punkt na okręgu jednostkowym $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Zatem funkcja f jest opisem parametrycznym okręgu o środku w $(0, 0)$ i promieniu 1. Łatwo ją zmodyfikować tak, aby opisywała dowolny okrąg na płaszczyźnie. Można ją też rozszerzyć na całą prostą. Będzie ona wtedy nadal opisem parametrycznym tego samego okręgu. Teraz jednak każdemu punktowi na okręgu będzie odpowiadało nieskończenie wiele parametrów t . Będą one różniły się między sobą o wielokrotność 2π . $\square$

Opis parametryczny krzywej możemy interpretować jako receptę na skonstruowanie tej krzywej. Recepta ta mówi: weź punkt t z prostej, oblicz $f(t)$, narysuj punkt $f(t)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (jeśli $n \leq 3$). Zrób to samo dla pozostałych punktów.

Szczególnie przydatny będzie dla nas opis parametryczny prostej. Prosta na płaszczyźnie lub w przestrzeni wyznaczona jest przez dwa elementy: punkt, przez który przechodzi, i wektor kierunkowy, do którego jest równoległa. Dokładnie tak samo można opisać prostą w przestrzeni n -wymiarowej. Niech $b = (b_1, \dots, b_n)$ będzie punktem w $\mathbb{R}^n$, przez który przechodzi rozważana prosta, natomiast $a = (a_1, \dots, a_n)$ wektorem kierunkowym tej prostej. Jak widać zapisy punktu i wektora niczym się tu nie różnią. Inna natomiast jest interpretacja geometryczna tych obiektów. Dodając wektor a do punktu b przesuwamy niejako punkt b wzdłuż prostej, otrzymując inny punkt na niej leżący, $a + b$. Zamiast przesuwać o a , można przesunąć b o wektor ta , gdzie $t \in \mathbb{R}$. Wektor ta ma ten sam kierunek co a , natomiast inną długość i, być może, zwrot (jeśli t jest ujemne). Zatem punkt $ta + b$ też należy do rozważanej prostej. Co więcej każdy punkt prostej ma postać $ta + b$ dla dokładnie jednego t . W szczególności,

punkt b odpowiada wartości parametru $t = 0$. Jeśli zatem przez $x = (x_1, \dots, x_n)$ oznaczymy punkt prostej, to otrzymamy jej opis parametryczny

$$x = ta + b.$$

Równość ta definiuje funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dla której t jest zmienną niezależną, a x zmienną zależną (lub zespołem zmiennych niezależnych $x_1, \dots, x_n$).

Przykład 4.5. Funkcja $f(t) = (3t+7, 15t-4)^T$ (T oznacza transpozycję) jest opisem parametrycznym prostej

$$x_1 = 3t + 7, \quad x_2 = 15t - 4.$$

Pozbywając się parametru t , otrzymamy zależność między x_1 i x_2

$$x_2 = 5x_1 - 39,$$

co jest standardowym opisem prostej na płaszczyźnie. $\square$

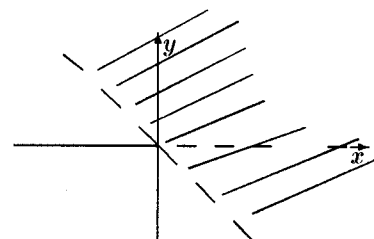
W przykładzie 4.5 prosta może być opisana jednym równaniem wiążącym x_1 i x_2 , co wydaje się prostsze niż dwa równania (lub równanie wektorowe) zadające opis parametryczny. W przestrzeni trójwymiarowej już tak jednak nie jest. Jedno równanie liniowe opisuje płaszczyznę, a nie prostą. Musimy użyć dwóch takich równań, aby opisać prostą. Opis parametryczny zapewnia jednolity opis, niezależnie od wymiaru przestrzeni, w której leży prosta.

4.1.5 Zadania

4.1. Wyznaczyć obszar określoności funkcji $f(x, y) = \frac{\ln(x+y)}{y}$.

Rozwiązanie: Dziedzina danej funkcji jest zbiór (rys. 4.4)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0 \text{ i } y \neq 0\}.$$



Rysunek 4.4: Obszar określoności funkcji $f(x, y) = \frac{\ln(x+y)}{y}$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Wyznaczyć obszar określoności (dziedzinę) danej funkcji:

4.2. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

4.3. $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$.

4.4. $z(x, y) = \ln xy$.

4.5. $f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - x_2^2}}$.

4.6. $f(x, y, z) = \sqrt{x+y+z}$.

4.7. $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1 - x_2 + x_3}$.

Naszkicować wykres funkcji:

4.8. $z = -x - y + 1$.

4.9. $f(x, y) = x^2 + y^2$, gdzie $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 5$.

4.10. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, gdzie $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$.

4.11. $f(x, y) = 25 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$, gdzie $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 10$.

4.12. $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ na obszarze jej określoności.

Wyznaczyć warstwicę funkcji:

4.13. $f(x, y) = 2x + y$.

4.14. $f(x, y) = x^2 + y$.

4.15. $f(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2$.

4.16. $f(x, y) = 4(x-2)^2 + (y+1)^2$.

4.17. $f(x_1, x_2) = \sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2}$.

4.18. $f(x, y) = \frac{x+y}{x+y+1}$.

4.19. $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 x_2$.

4.20. $f(x_1, x_2) = 10x_1^{1,1} x_2^{-0,2}$.

4.21. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9}$.

4.22. $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 - x_1 + x_2$.

4.23. Na rysunku 4.5 podane są szkice wykresów (A-F) funkcji dwóch zmiennych x, y zadanych wzorami:

a) $z = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$, b) $z = x^2 y^2 e^{-x^2 - y^2}$, c) $z = \frac{1}{x^2 + 4y^2}$,

d) $z = x^3 - 3xy^2$, e) $z = \sin x \sin y$, f) $z = \sin^2 x + \frac{1}{4}y^2$

oraz plany warstwiczne tych funkcji (I-VI). Należy dopasować wzory funkcji do odpowiednich wykresów i warstw.

Przedstawić dane równanie prostej w postaci parametrycznej:

4.24. $y = 2x + 1$.

4.25. $2x - y + 1 = 0$.

4.26. $y = ax + b$.

Podać parametryczne równanie danej krzywej i naszkicować tę krzywą:

4.27. $x^2 + y^2 = 9$.

4.28. $x^2 - 2x + y^2 = 5$.

4.29. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

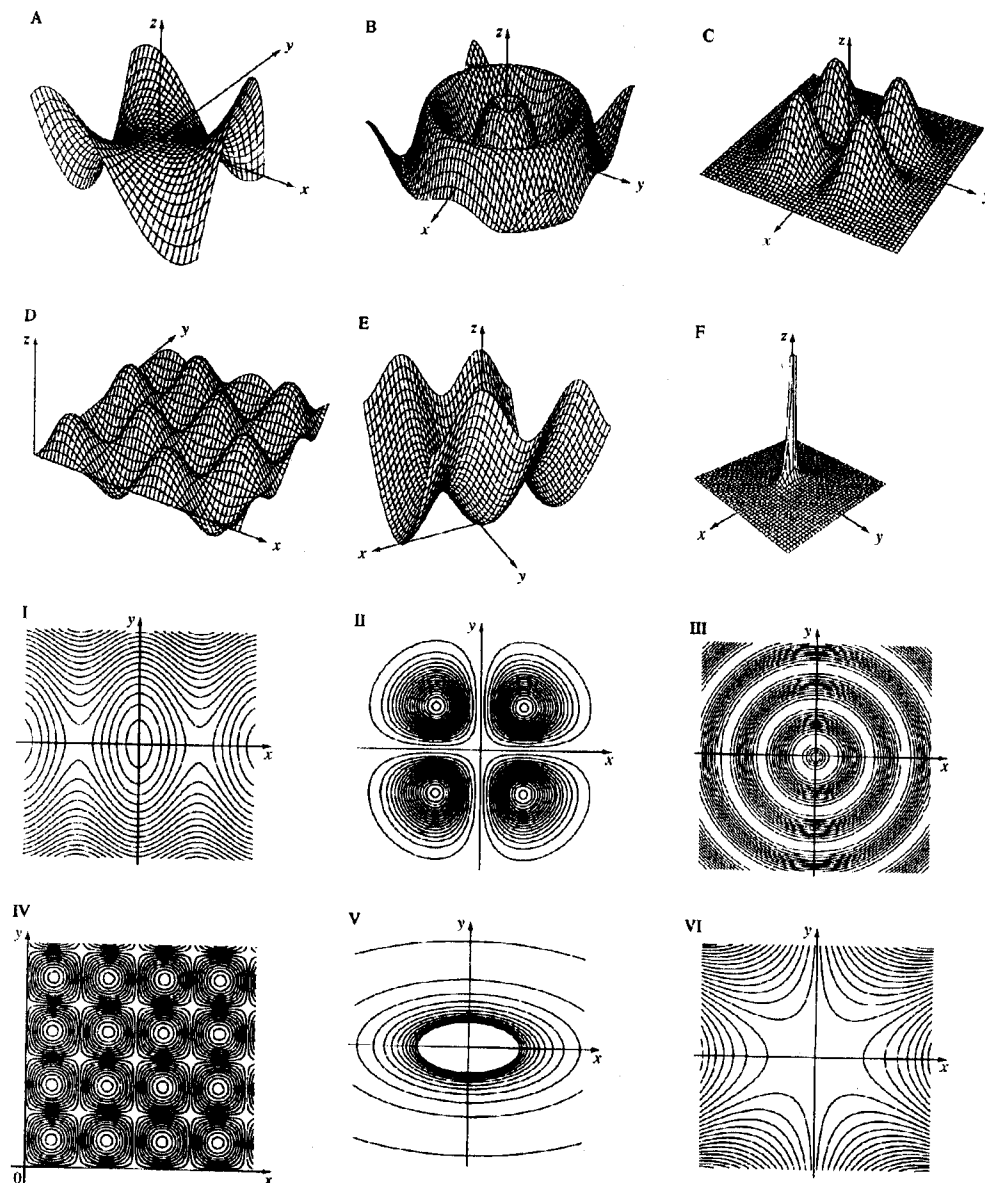
4.30. $y^2 = x$.

Jaką powierzchnię lub linię w przestrzeni przedstawia wykres danej funkcji:

4.31. $f(t) = \begin{pmatrix} 1+2t \\ -t \\ 2+2t \end{pmatrix}$.

4.32. $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$.

4.33. $f(\alpha, t) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ t \end{pmatrix}$.



Rysunek 4.5: Wykresy funkcji dwóch zmiennych i ich warstwicę

4.2 Pochodne funkcji wielu zmiennych

4.2.1 Ciągłość funkcji

Zanim zdefiniujemy pochodne funkcji wielu zmiennych sprecyzujmy pojęcie ciągłości takiej funkcji. Jest ono naturalnym uogólnieniem pojęcia ciągłości funkcji jednej zmiennej.

Rozważmy ciąg punktów $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Niech $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$. Mówimy, że ciąg (x_n) dąży do $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$, jeśli dla każdego $i = 1, \dots, n$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = x_{0i}$. Oznacza to zbieżność dla każdej współrzędnej.

Mając pojęcie zbieżności ciągu punktów w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, definiujemy granicę funkcji $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Definicja jest identyczna jak dla funkcji jednej zmiennej. Pojęcia ciągłości w punkcie i ciągłości w całej dziedzinie również przenoszą się bez problemu na przypadek wielowymiarowy. Większość funkcji wielu zmiennych, które będziemy rozważać, będzie funkcjami ciągłymi. Warto jednak wiedzieć, że czasami sprawdzenie ciągłości nie jest proste.

Rozważmy teraz odwzorowanie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Wtedy f można rozpisać na składowe, $f = (f_1, \dots, f_m)^T$. Mówimy, że f ma granicę w punkcie, lub jest ciągła, jeśli każda ze składowych f_i ma tę własność.

4.2.2 Pochodne pierwszego rzędu

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$. Zdefiniujemy *pochodną cząstkową* funkcji f względem zmiennej x_1 w punkcie p jako granicę następującego ilorazu różnicowego

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(p_1 + \Delta x_1, p_2) - f(p_1, p_2)}{\Delta x_1}. \quad (4.3)$$

Jest to faktycznie iloraz różnicowy funkcji jednej zmiennej x_1

$$x_1 \mapsto f(x_1, p_2)$$

obliczony w punkcie $x_1 = p_1$ dla przyrostu Δx_1 . Podobnie definiujemy pochodną cząstkową funkcji f ze względu na zmienną x_2 , oraz pochodne cząstkowe funkcji trzech lub więcej zmiennych. Pochodna $\partial f / \partial x_i(p)$ dla $p \in \mathbb{R}^n$ opisuje prędkość zmian funkcji f wzdłuż osi x_i w punkcie p . Jeśli będziemy zmieniać punkt p , w którym liczymy pochodną cząstkową, otrzymamy funkcję n zmiennych

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

zdefiniowaną w naturalny sposób

$$p \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

gdzie $p = (p_1, \dots, p_n)$ (zamiast p możemy teraz pisać x). Obliczanie pochodnych cząstkowych jest równie proste jak obliczanie pochodnych funkcji jednej zmiennej. Obliczając pochodną $\partial f / \partial x_i$ traktujemy pozostałe zmienne jako stałe, tak jakby nasza funkcja zależała tylko od x_i . Na przykład dla funkcji $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^4$ otrzymamy

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 x_2^4$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 4x_1^2 x_2^3.$$

Uogólnieniem pochodnych cząstkowych są pochodne kierunkowe. Opisują one prędkość zmian funkcji w punkcie p w kierunku dowolnego wektora $a \in \mathbb{R}^n$. *Pochodną kierunkową* definiujemy następująco

$$f'_a(p) = \frac{d}{dt} f(p + ta)|_{t=0}. \quad (4.4)$$

Zamiast zmiennej $x \in \mathbb{R}^n$ podstawiamy tu wyrażenie $p + ta$. Jest to opis parametryczny prostej o wektorze kierunkowym a przechodzącej przez punkt p . Zauważmy, że funkcja

$$t \mapsto f(p + ta)$$

jest zwykłą funkcją jednej zmiennej. Jej wartość dla $t = 0$ jest równa $f(p)$.

Niech e_i oznacza wersor i -tej osi. Składa się on z samych zer, oprócz miejsca i -tego, w którym stoi 1. Można pokazać, że

$$f'_{e_i}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p). \quad (4.5)$$

A więc rzeczywiście pochodne cząstkowe stanowią szczególny przypadek pochodnych kierunkowych. Zdefiniujmy *gradient* funkcji $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie p jako wektor wierszowy w $\mathbb{R}^n$

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right). \quad (4.6)$$

Gradient w punkcie p jest też często oznaczany przez $f'(p)$, tak jak pochodna funkcji jednej zmiennej, lub $\text{grad } f(p)$. Zauważmy, że dla $n = 1$ gradient rzeczywiście staje się zwykłą pochodną. Dla funkcji, które są dostatecznie regularne (np. pochodne cząstkowe są ciągłe) istnieje prosta zależność między pochodnymi kierunkowymi a gradientem

$$f'_a(p) = \nabla f(p) \cdot a, \quad (4.7)$$

gdzie kropka oznacza mnożenie macierzy (dokładniej wektora wierszowego przez wektor kolumnowy).

Przykład 4.6. Niech $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $p = (1, 2)$ i $a = (2, 3)$. Wtedy

$$\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2),$$

a zatem

$$f'_a(p) = (2, 4) \cdot (2, 3)^T = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 16. \quad \square$$

4.2.3 Warunki konieczne na ekstrema lokalne

Rozważmy funkcję n zmiennych $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcja ta osiąga *minimum lokalne* w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}^n$, jeśli istnieje otoczenie otwarte U punktu x_0 , takie że dla każdego punktu $x \in U$, $f(x) \geq f(x_0)$.

Zmieniając znak nierówności w powyższej definicji otrzymamy definicję maksimum lokalnego. Zauważmy, że obie te definicje są takie same jak w przypadku funkcji jednej zmiennej. Przez otoczenie otwarte punktu x_0 w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ rozumiemy zwykle kulę otwartą $K(x_0, r)$ o środku w x_0 i promieniu r .

Maksima i minima lokalne nazywamy ekstremami lokalnymi. Jednym z głównych problemów ekonomii jest optymalizacja, czyli szukanie ekstremów lokalnych pewnych funkcji. Funkcje te zwykle zależą od wielu zmiennych.

Następujące twierdzenie daje warunek konieczny na ekstremum w punkcie x_0 .

Twierdzenie 4.7. *Jeśli funkcja f ma ekstremum w punkcie x_0 oraz ma w tym punkcie pochodną kierunkową $f'_a(x_0)$ w kierunku a , to $f'_a(x_0) = 0$.* $\square$

Wniosek 4.8. *Jeśli funkcja f ma ekstremum w punkcie x_0 oraz ma wszystkie pochodne cząstkowe w tym punkcie, to są one równe zeru, tzn. $\partial f / \partial x_i(x_0) = 0$ dla każdego $i = 1, \dots, n$.* $\square$

Funkcje, którymi będziemy się zajmowali będą dostatecznie regularne; będą miały ciągłe pochodne cząstkowe w każdym punkcie, a pochodne kierunkowe będą kombinacjami liniowymi pochodnych cząstkowych. W takiej sytuacji będziemy sprawdzali tylko zerowanie się pochodnych cząstkowych.

Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dla którego wszystkie pochodne cząstkowe funkcji f są równe zero, nazywamy *punktem krytycznym funkcji f* .

Przykład 4.9. Niech $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Wtedy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu: $\partial f / \partial x_1(x_1, x_2) = 2x_1$ oraz $\partial f / \partial x_2(x_1, x_2) = 2x_2$. A zatem jedynym punktem krytycznym jest punkt o współrzędnych $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$. Ponieważ funkcja f przyjmuje wartość 0 w tym punkcie oraz $f(x) > 0$ dla $x \neq (0, 0)$, więc f ma minimum (lokalne) w zerze.

Jeśli zmienimy funkcję f na $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, znowu jedynym punktem krytycznym będzie punkt $(0, 0)$. Tym razem jednak, jak przekonamy się później, w punkcie tym funkcja f nie będzie miała ekstremum. Jest to bowiem *punkt siodłowy*. Gdy zmieniamy zmienną x_1 , funkcja rośnie, gdy zmieniamy x_2 , maleje. $\square$

4.2.4 Pochodne wyższych rzędów

Jeśli w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}^n$ funkcja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ma pochodną cząstkową $\partial f / \partial x_i(x)$, to możemy rozważać funkcję

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

która punktowi $x \in \mathbb{R}^n$ przyporządkowuje liczbę $\partial f / \partial x_i(x)$. Ponieważ jest ona znowu funkcją n zmiennych, możemy rozważać jej pochodne cząstkowe. Będą to pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f . Zdefiniujmy więc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

Jeśli $i \neq j$, takie pochodne nazywamy *mieszanymi*. Jeśli $j = i$, piszemy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Analogicznie definiujemy pochodne cząstkowe trzeciego, czwartego i wyższych rzędów.

Przykład 4.10. Niech $f(x, y) = x^3 y^2 - 2x + 4y$. Wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 y^2 - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3 y + 4.$$

Zatem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6xy^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 6x^2 y,$$

oraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6x^2 y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3.$$

Kontynuując, możemy na przykład obliczyć

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = 12xy. \quad \square$$

Zauważmy, że w przykładzie 4.10 pochodne mieszane rzędu drugiego są równe. Nie jest to przypadek.

Twierdzenie 4.11. *Jeśli pochodne mieszane $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ i $\partial^2 f / \partial x_j \partial x_i$ są ciągłe, to są równe:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}. \quad \square$$

W zagadnieniach optymalizacji będziemy używać macierzy składającej się z pochodnych cząstkowych drugiego rzędu. Nazywamy ją *hesjanem*:

$$Hf := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Zauważmy, że hesjan jest macierzą zależną od tych samych zmiennych, od których zależy funkcja f .

Przykład 4.12. Dla funkcji f z przykładu 4.10 hesjan będzie wyglądał następująco

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy^2 & 6x^2y \\ 6x^2y & 2x^3 \end{pmatrix}$$

□

4.2.5 Warunki wystarczające na ekstrema

Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ oraz zdefiniujmy następujące funkcje

$$\Delta_i := \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \end{vmatrix}$$

dla $i = 1, \dots, n$. Zauważmy, że $\Delta_1 = \partial^2 f / \partial x_1^2$ oraz $\Delta_n = \det Hf$.

Twierdzenie 4.13. Załóżmy, że punkt $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ jest punktem krytycznym funkcji f .

Jeśli $\Delta_i(x_0) > 0$ dla $i = 1, \dots, n$, to w punkcie x_0 funkcja f ma minimum.

Jeśli $(-1)^i \Delta_i(x_0) > 0$ dla $i = 1, \dots, n$, to w punkcie x_0 funkcja f ma maksimum. □

Oslabiając wprowadzone warunki otrzymamy warunki konieczne na ekstrema.

Twierdzenie 4.14. Załóżmy, że funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu w otoczeniu punktu x_0 .

Jeśli f ma w x_0 minimum lokalne, to $\Delta_i(x_0) \geq 0$ dla $i = 1, \dots, n$.

Jeśli f ma w x_0 maksimum lokalne, to $(-1)^i \Delta_i(x_0) \geq 0$. □

Dla funkcji dwóch zmiennych można zatem otrzymać następujący wniosek.

Stwierdzenie 4.15. Niech x_0 będzie punktem krytycznym funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Jeśli $\Delta_2(x_0) < 0$, to w punkcie x_0 nie ma ekstremum. □

Jeśli $n = 2$ oraz $\Delta_2(x_0) = 0$, to informacja zawarta w hesjanie, to znaczy drugie pochodne cząstkowe, nie wystarcza do rozstrzygnięcia czy w punkcie x_0 jest ekstremum, czy też go nie ma.

Następujący przykład wylicza typowe sytuacje, które mogą się zdarzyć dla $n = 2$.

Przykład 4.16. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$. Wtedy

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a zatem $\Delta_1 = 2 > 0$ oraz $\Delta_2 = 4 > 0$. Oznacza to, że w punkcie krytycznym $x_0 = (0, 0)$ funkcja f ma minimum.

b) $f(x, y) = -x^2 - y^2$. Punkt $(0, 0)$ jest jedynym punktem krytycznym. Tym razem jednak $\Delta_1 = -2 < 0$ i $\Delta_2 = 4 > 0$, a zatem w punkcie $(0, 0)$ funkcja osiąga maksimum.

c) $f(x, y) = x^2 - y^2$. Podobnie jak poprzednio, $(0, 0)$ jest jedynym punktem krytycznym. Zauważmy, że $\Delta_2 = -4 < 0$, zatem f nie ma ekstremum. Ponieważ wykres funkcji f w otoczeniu $(0, 0)$ przypomina siodło, punkt krytyczny nazywa się punktem siodłowym.

d) Zastąpmy w poprzednich przykładach x^2 przez x^4 , a y^2 przez y^4 . Punkt $(0, 0)$ pozostanie jedynym punktem krytycznym każdej z tak utworzonych funkcji. Pochodne cząstkowe rzędu 2 będą równe 0 w punkcie krytycznym, co spowoduje, że Δ_2 będzie równe 0 we wszystkich trzech przypadkach. Będzie to oznaczało, że na podstawie hesjanu nie potrafimy określić charakteru punktu krytycznego. Ponieważ zachowanie funkcji x^4 jest podobne do zachowania funkcji x^2 , możemy oczekiwać, że podobny będzie charakter punktów krytycznych. Tak będzie w istocie. Otrzymamy kolejno minimum, maksimum i punkt siodłowy. □

Podobną analizę można przeprowadzić dla funkcji trzech lub więcej zmiennych. W szczególności, jeśli $\Delta_2(x_0) < 0$, to w x_0 na pewno nie ma ekstremum.

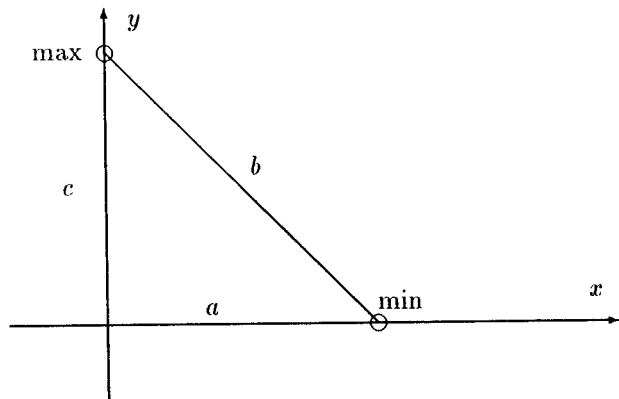
4.2.6 Ekstrema globalne

Ekstrema globalne to wartość największa i wartość najmniejsza przyjmowane przez funkcję, czyli maksimum globalne i minimum globalne. Nie zawsze funkcja osiąga wartość największą lub najmniejszą. Na przykład funkcja $f(x, y) = x^2 + y^2$ osiąga wartość najmniejszą w punkcie $(0, 0)$, ale nie osiąga wartości największej. Następujące twierdzenie podaje warunki wystarczające na to, aby istniały ekstrema globalne (porównaj z twierdzeniem 3.21).

Twierdzenie 4.17. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ i $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Jeśli zbiór A jest domknięty i ograniczony, natomiast funkcja f jest ciągła, to f osiąga w zbiorze A wartość największą i najmniejszą. □

Uwaga 4.18. Proste rozumowanie pozwala zredukować poszukiwania ekstremów globalnych do znanych już czynności. Mianowicie, wartość największa i wartość najmniejsza mogą być przyjmowane tylko w ekstremach lokalnych lub na brzegu zbioru A (zgodnie z twierdzeniem 4.17, zbiór A powinien być domknięty, a więc zawierać punkty brzegowe). To daje nam prostą strategię poszukiwania ekstremów globalnych. Znajdźmy najpierw wszystkie punkty krytyczne wewnątrz zbioru A i obliczmy w nich wartości funkcji. Następnie znajdziemy punkty krytyczne na brzegu. Porównajmy otrzymane wartości funkcji, znajdując wartość największą i wartość najmniejszą. $\square$

Przykład 4.19. Niech funkcja $f(x, y) = 3x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 1$ będzie określona na trójkącie ograniczonym prostymi $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 1$ (patrz rysunek 4.6).



Rysunek 4.6: Ekstremum funkcji zadanej na trójkącie

Znajdźmy najpierw punkty krytyczne. Pochodne cząstkowe wynoszą

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x - 6, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -8y + 8,$$

zatem jedynym punktem krytycznym jest punkt $(1, 1)$ nie należący do rozważanego zbioru. Zatem wartości: największa i najmniejsza osiągane są na brzegu. Składa się on z trzech odcinków a , b i c . Znajdźmy wartość największą i wartość najmniejszą funkcji f na każdym z nich.

Odcinek a możemy opisać następująco: $y = 0$ i $x \in [0, 1]$. Uwzględniając to, otrzymujemy funkcję jednej zmiennej

$$g(x) := f(x, 0) = 3x^2 - 6x - 1, \quad x \in [0, 1].$$

Stosując znane metody dla funkcji jednej zmiennej, znajdujemy, że wartość najmniejsza przyjmowana jest dla $x = 1$, $g(1) = -4$, natomiast wartość największa dla $x = 0$, $g(0) = -1$.

Odcinek b opisujemy przy pomocy warunków: $y = 1 - x$ i $x \in [0, 1]$. Znowu otrzymujemy funkcję na odcinku $[0, 1]$, tym razem $h(x) = f(x, 1 - x) = -x^2 - 6x + 3$. Wartość największa osiągana jest dla $x = 0$, $h(0) = 3$, wartość najmniejsza dla $x = 1$, $h(1) = -4$.

Odcinek c zadany jest przez warunki: $x = 0$ i $y \in [0, 1]$. Podstawiając otrzymujemy funkcję zmiennej y : $k(y) = f(0, y) = -4y^2 + 8y - 1$. Przyjmuje ona wartość najmniejszą dla $y = 0$, $k(0) = -1$, a wartość największą dla $y = 1$, $k(1) = 3$. Sprawdź wszystkie podane tu wyliczenia!

Zauważmy, że wszystkie punkty, które otrzymaliśmy leżą w wierzchołkach trójkąta. Przez proste porównanie znajdujemy wartość największą $3 = f(0, 1)$ oraz najmniejszą $-4 = f(1, 0)$. $\square$

4.2.7 Metoda mnożników Lagrange'a

Podczas szukania największej i najmniejszej wartości funkcji na zbiorze ograniczonym i domkniętym musimy zbadać zachowanie tej funkcji na brzegu rozważanego zbioru. Brzeg ten zwykle opisuje się jednym lub kilkoma równaniami typu

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (4.9)$$

Ekstrema funkcji $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ z ograniczeniem (4.9) nazywają się *ekstremami warunkowymi* lub *względny*.

Jeśli potrafimy wyliczyć z równania (4.9) jedną ze zmiennych, np.

$$x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

możemy podstawić tę zależność zamiast zmiennej x_n we wzorze badanej funkcji, redukując w ten sposób liczbę zmiennych o jeden.

Często jednak nie potrafimy rozwikłać równania (4.9). W takim przypadku możemy posłużyć się metodą mnożników Lagrange'a. Rozważmy problem optymalizacji funkcji $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ z ograniczeniem (4.9). Utwórzmy funkcję Lagrange'a

$$L(\lambda, x_1, \dots, x_n) := f(x_1, \dots, x_n, \lambda) + \lambda g(x_1, \dots, x_n). \quad (4.10)$$

Dodatkową zmienną λ nazywamy mnożnikiem Lagrange'a. Niech $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ spełnia ograniczenie $g(x_0) = 0$. Załóżmy, że funkcja f przyjmuje w x_0 ekstremum lokalne przy ograniczeniu (4.9), oraz, że gradient funkcji g w x_0 jest różny od zera.

Twierdzenie 4.20. *Jeśli x_0 jest punktem ekstremalnym, to istnieje liczba λ^* , taka, że punkt (λ^*, x_0) jest punktem krytycznym funkcji Lagrange'a L , tzn. zachodzą następujące warunki*

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(\lambda^*, x_0) = 0. \quad (4.11)$$

oraz

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\lambda^*, x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.12)$$

□

Twierdzenie 4.20 opisuje warunki konieczne na ekstrema warunkowe. Ponieważ L zależy liniowo (afinicznie) od λ , to warunek (4.11) jest równoważny warunkowi $g(x_0) = 0$. Oznacza on spełnienie ograniczenia przez punkt x_0 i nie pojawia się w nim mnożnik Lagrange'a λ^* . Mnożnik ten pojawia się w warunku (4.12), który może być interpretowany jako relacja między gradientami

$$f'(x_0) = -\lambda^* g'(x_0). \quad (4.13)$$

Ponieważ gradienty są wektorami (wierszowymi), zależność oznacza, że gradienty funkcji f i g w punkcie ekstremalnym x_0 mają ten sam kierunek (jeśli tylko $f'(x_0) \neq 0$). Mogą mieć natomiast różne długości i różne zwroty, co reprezentowane jest przez λ^* . Ponieważ gradient jest prostopadły do warstwy, warunek (4.13) oznacza, że w punkcie optymalnym (maksimum lub minimum), warstwa funkcji f jest styczna do zbioru dopuszczalnego zadanego przez ograniczenie $g(x) = 0$. Zbiór ten jest warstwicą zerową funkcji g . Jeśli $f'(x_0) = 0$, musimy wziąć $\lambda^* = 0$.

Twierdzenie 4.20 pozwala nam znaleźć punkty krytyczne. Aby ustalić, czy w punktach tych są rzeczywiście ekstrema, stosujemy warunki rzędu 2.

Zauważmy, że hesjan funkcji Lagrange'a ma następującą postać

$$HL = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Zdefiniujmy

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_i} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_i} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g}{\partial x_i} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_i} \end{vmatrix} \quad (4.15)$$

dla $i = 2, \dots, n$. Zauważmy, że Δ_i jest wyznacznikiem $(i+1) \times (i+1)$, oraz, że zależy ona od λ i x .

Twierdzenie 4.21. Załóżmy, że punkt (λ^*, x_0) jest punktem krytycznym funkcji Lagrange'a.

Jeśli $(-1)^i \Delta_i(\lambda^*, x_0) > 0$ dla $i = 2, \dots, n$, to w punkcie x_0 funkcja f osiąga maksimum względne (przy ograniczeniu (4.9)).

Jeśli $\Delta_i(\lambda^*, x_0) < 0$ dla $i = 2, \dots, n$, to w punkcie x_0 funkcja f osiąga minimum względne (przy ograniczeniu (4.9)). □

Wniosek 4.22. Niech $n = 2$ i niech (λ^*, x_0) będzie punktem krytycznym funkcji Lagrange'a.

Jeśli $\det HL(\lambda^*, x_0) > 0$, to w punkcie x_0 funkcja f osiąga maksimum lokalne względne (przy ograniczeniu (4.9)).

Jeśli $\det HL(\lambda^*, x_0) < 0$, to w punkcie x_0 funkcja f osiąga minimum lokalne względne (przy ograniczeniu (4.9)). □

Przykład 4.23. Znajdźmy ekstrema funkcji $f(x, y) = 2x + 3y$ przy ograniczeniu $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Funkcja Lagrange'a dla tego problemu ma postać

$$L(\lambda, x, y) = 2x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Rozwiążmy układ równań

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(\lambda, x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(\lambda, x, y) = 2 + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(\lambda, x, y) = 3 + 2\lambda y = 0$$

który opisuje punkty krytyczne funkcji Lagrange'a. Otrzymamy dwa rozwiązania: $\lambda^* = \sqrt{13}/2$, $x_0 = -2/\sqrt{13}$, $y_0 = -3/\sqrt{13}$. oraz $\lambda^* = -\sqrt{13}/2$, $x_0 = 2/\sqrt{13}$, $y_0 = 3/\sqrt{13}$. Hesjan będzie miał postać

$$HL(\lambda, x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

a zatem $\Delta_2(\lambda, x, y) = \det HL(\lambda, x, y) = -8\lambda(x^2 + y^2)$. W punkcie krytycznym otrzymamy $\det HL(\lambda^*, x_0, y_0) = -8\lambda^*$. Zatem dla $\lambda^* = \sqrt{13}/2$ otrzymamy minimum, a dla $\lambda^* = -\sqrt{13}/2$ maksimum. Zadanie można również rozwiązać graficznie. Punkty krytyczne będą odpowiadały tym punktom na okręgu, w których styczna do okręgu pokrywa się z warstwicą funkcji f . □

4.2.8 Zadania

4.34. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji względem każdej ze zmiennych niezależnych:

a) $f(x, y) = 10x^5 + 2xy - \frac{1}{y^4}$,

b) $z(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$,

c) $f(x, y, z) = -xyz + \frac{z}{x} + y^2 + 10$.

Rozwiązanie: W celu obliczenia pochodnych cząstkowych danych funkcji będziemy korzystać ze znanych reguł różniczkowania.

a) Daną funkcję można zapisać jako: $f(x, y) = 10x^5 + 2xy - y^{-4}$. Wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10 \cdot 5x^4 + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - (-4)y^{-5}.$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x + \sqrt{x^2 + y^2}) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x + \sqrt{x^2 + y^2}) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{(x + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

c)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -yz - \frac{z}{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -xz + 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -xy + \frac{1}{x}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

4.35. Korzystając z definicji wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji:

4.36. $f(x, y) = 3x^2 + 5y^2 + 10$.

4.37. $f(x, y) = 5x^3 - 3xy + 4y^2$.

4.38. $f(x, y) = 20x^{0,1}y^{-1,2}$.

4.39. $f(x, y) = \frac{3}{\sqrt{x^2 + y^3}}$.

4.2. POCHODNE FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

4.40. $f(x, y) = 2 + 4xy - x^2y$.

4.42. $f(x, y) = (x - y^3)^3$.

4.44. $f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.

4.46. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

4.48. $f(x_1, x_2) = \sqrt{2x_1 - x_2^2}$.

4.50. $f(x_1, x_2) = \frac{3x_1x_2 - x_2^2}{x_1^2 + 1}$.

4.52. $f(u, t) = e^u \ln(ut)$.

4.41. $f(x, y) = (x - 2)^2 - 3y^2$.

4.43. $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

4.45. $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$.

4.47. $f(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2}$.

4.49. $f(x_1, x_2) = x_1 \sin x_1 x_2$.

4.51. $f(u, v) = \sqrt[4]{4u^3 + 2uv}$.

4.53. $f(w, z) = e^{z^2} \ln w$.

4.54. Dana jest funkcja $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$. Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu tej funkcji.

4.55. Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji:

$$K(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2x_3^2 + 6x_2^2 - 9x_3^2 + 5.$$

4.56. Dla funkcji $f(x, y) = -x^2 + 2xy - 2y^2 - 4x + 12y - 5$ wyznaczyć takie wartości x i y , aby: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

4.57. Dana jest funkcja $K(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2)\sqrt{e^{x_2}}$. Wyznaczyć x_1, x_2 takie, że $\frac{\partial K}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0$ i $\frac{\partial K}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0$.

4.58. Dana jest funkcja: $f(x, y) = 100x^2 + 200y^2 - 10xy$. Obliczyć: $f(10, 20)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(10, 20)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(10, 20)$.

4.59. Sprawdzić, czy funkcja $f(x, y) = 100 + \ln(xy)$ spełnia równanie

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2}.$$

4.60. Sprawdzić, czy funkcja $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ spełnia równanie:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}}{f(x, y, z)} = z + y.$$

Wyznaczyć gradient funkcji w punkcie $(0, 0)$:

4.61. $f(x, y) = (8x - 3y)^4$.

4.62. $f(x, y) = -2x + 3y$.

4.63. $f(x, y) = e^x y + e^{-xy}$.

4.64. $f(x, y) = x \cos y + y \sin xy$.

Wyznaczyć gradient funkcji w punkcie p :

4.65. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

4.66. $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1x_2 + x_2x_3$.

4.67. $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$.

4.68. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2x_3 - x_1x_4$.

Wyznaczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x, y)$ w kierunku wektora $a = (a_x, a_y)^T$ w punkcie $p = (x_0, y_0)$:

4.69. $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$, $a = (1, 1)^T$, $p = (1, 1)$.

4.70. $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$, $a = (2, 1)^T$, $p = (0, 1)$.

4.71. $f(x, y) = 6x^2 + 30y^2 - xy$, $a = (-1, -1)^T$, $p = (3, -1)$.

4.72. Wyznaczyć pochodną funkcji $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 - x_1^3 x_2 + x_3$ w punkcie $p = (0, 0, 1)$ w kierunku wektora $a = (1, 1, 2)^T$.

Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego następujących funkcji:

4.73. $f(x, y) = x^3 + x^3 y^2 - 2xy + y^2 + x - y + 10$.

4.74. $f(x_1, x_2) = x_1^4 x_2^3 + x_1^6 - \sqrt{x_2} + 10$.

4.75. $f(x, y) = (x + y) \ln(x + y)$.

4.76. $f(x, y) = e^{-xy+x+y}$.

4.77. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{5xy}$.

4.78. $f(x_1, x_2) = \arctg \sqrt{x_1 + x_2}$.

4.79. $f(x, y) = \frac{xe^y}{ye^{-x}}$.

4.80. $f(x_1, x_2) = x_1 \sin(x_1 + x_2)$.

Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego następujących funkcji:

4.81. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz + x - y - z$.

4.82. $f(x, y, z) = e^{xyz}$.

4.83. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

4.84. $f(x, y, z) = x^3 y^2 + z^3 x^2 - \cos(x + y) + \sin xyz$.

4.85. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)e^{x_2 - x_3}$.

4.86. Która z wymienionych funkcji spełnia równanie $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$?

a) $u(x, y) = x^2 - y^2$, b) $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

4.87. Sprawdzić, czy funkcja $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ spełnia równanie:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

4.88. Wykazać, że funkcja $z(x, y) = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ spełnia równanie:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Wyznaczyć ekstrema lokalne następujących funkcji:

4.89. $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2$.

4.90. $f(x, y) = (x - y)^2 + (y - 1)^3$.

4.91. $f(x, y) = e^{0,5x}(x + y^2)$.

4.92. $f(x, y) = (x - y)^2 + xy - x$.

4.93. $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - x_1 x_2$.

4.94. $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$.

4.95. $f(x, y) = 3xy - x^2 y - xy^2$.

4.96. $f(x, y) = y\sqrt{x - y^2} - x + 6y$.

4.97. $f(x, y) = 25x - 25xe^{-y} - 50y - x^2$.

4.98. $f(x, y) = 1 + x + 2y - x^2 + y^2$.

4.99. $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \ln x_1 + x_2^2 - 10$, $x > 0$.

4.100. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 - 5x + 2y - xz$.

4.101. $f(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^3 - 2y + 3yz$.

4.102. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 4x_1 x_2 - x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_2 x_3$.

4.103. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1 - x_2^3 + 3x_2 + 5x_3^2$.

4.104. $f(x, y, z) = 3xz + xy + z^2 + 2x$.

4.105. $f(x, y, z) = xyz(1 - x + y + z)$.

4.106. * $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 - 3(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$.

Wyznaczyć ekstrema globalne danej funkcji w obszarze D :

4.107. $f(x, y) = x^2 y - x - y$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$.

4.108. $f(x, y) = x^2 y(2 - x - y)$ w obszarze ograniczonym prostymi:

$x = 0, y = 0, x + y = 6$.

4.109. $f(x, y) = x^4 - 8xy^2$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2\}$.

4.110. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2 y + 4$, $D = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

4.111. $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2xy$, D - trójkąt o wierzchołkach: $(-1, 1), (2, 1), (-1, -2)$.

Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji przy podanym warunku:

4.112. $f(x, y) = -3x^2 - 2y^2 + 20xy$, $x + y = 100$.

4.113. $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$, $x + 2y = 24$.

4.114. $f(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$, $x + y = 4$.

4.115. $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

4.116. $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $x^2 + y^2 = 1$.

4.117. $f(x, y, z) = x + y + z$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

4.118. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $x^4 + y^4 = 1$.

4.119. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$.

4.120. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$, $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 18$.

Wyznaczyć ekstrema globalne funkcji w obszarze D :

4.121. $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}(x^2 + 2y^2)$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4.122. $f(x, y) = x^2 y$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4.123. $f(x, y, z) = xyz$, $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 6\}$.

4.3 Zastosowania pochodnych cząstkowych

4.3.1 Optymalizacja

Przykład 4.24. Firma produkuje trzy rodzaje komputerów. Ustalono następujące

zależności popytu na te komputery od ich cen c_1 , c_2 i c_3 , wyrażonych w złotych

$$\begin{aligned} P_1 &= 4000 - 2c_1 + c_2 + c_3 \\ P_2 &= 6000 + c_1 - 3c_2 + c_3 \\ P_3 &= 5000 + c_1 + c_2 - 2c_3. \end{aligned}$$

Znajdź ceny komputerów, które zapewniają maksymalny dochód. Ile wyniesie dochód i jaki będzie wówczas popyt.

Rozwiązanie. Zakładając, że popyt na komputery będzie równy wielkości sprzedaży, obliczamy dochód firmy

$$D(c_1, c_2, c_3) = P_1 c_1 + P_2 c_2 + P_3 c_3 =$$

$$-2c_1^2 - 3c_2^2 - 2c_3^2 + 4000c_1 + 6000c_2 + 5000c_3 + 2c_1c_2 + 2c_2c_3 + 2c_1c_3.$$

Chcąc znaleźć punkty krytyczne funkcji D , obliczamy pochodne cząstkowe i przyrównujemy je do zera

$$\frac{\partial D}{\partial c_1}(c_1, c_2, c_3) = -4c_1 + 4000 + 2c_2 + 2c_3 = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial c_2}(c_1, c_2, c_3) = -6c_2 + 6000 + 2c_1 + 2c_3 = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial c_3}(c_1, c_2, c_3) = -4c_3 + 5000 + 2c_1 + 2c_2 = 0.$$

Otrzymujemy $c_1 = 9967$, $c_2 = 7600$ i $c_3 = 9833$. Aby sprawdzić, czy znalezione rozwiązanie jest rzeczywiście poszukiwanym maksimum, obliczamy hesjan funkcji D . Jest on stałą macierzą 3×3 .

$$HD = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Wyznaczniki Δ_i wynoszą: $\Delta_1 = -4 < 0$, $\Delta_2 = 20 > 0$ i $\Delta_3 = -24 < 0$. Zatem w znalezionym punkcie krytycznym funkcja D osiąga maksimum. Takie powinny być zatem ceny komputerów. Dochód i popyt na każdy komputer znajdziesz łatwo podstawiając uzyskane ceny do wzorów. $\square$

Przykład 4.25. Firma reklamuje swoje wyroby w telewizji i radiu. Ustalono następującą zależność wielkości sprzedaży z , wyrażoną w jednostkach wyrobu, od nakładów na reklamę w TV, x , i nakładów na reklamę w radiu, y , wyrażonych w 1000 zł

$$z(x, y) = 50.000x + 40.000y - 10x^2 - 20y^2 - 10xy.$$

Jakie nakłady na reklamę w telewizji i radiu przyniosą maksymalną wielkość sprzedaży?

Rozwiązanie. Obliczmy pochodne cząstkowe funkcji z i przyrównajmy je do zera.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 50.000 - 20x - 10y = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 40.000 - 40y - 10x = 0.$$

Otrzymamy $x = 428,57$ i $y = 2.285,72$. Hesjan funkcji z ma postać

$$Hz = \begin{pmatrix} -20 & -10 \\ -10 & -40 \end{pmatrix}$$

A więc $\Delta_1 = -20 < 0$ i $\Delta_2 = 700 > 0$. Zatem w znalezionym punkcie krytycznym funkcja z osiąga maksimum.

Można zmodyfikować to zadanie nakładając ograniczenie na sumę wydatków na reklamę

$$x + y \leq 2.500.$$

Do tego dochodzą naturalne ograniczenia $x \geq 0$ i $y \geq 0$. W tym przypadku szukalibyśmy ekstremum globalnego w trójkącie o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 2.500)$ i $(2.500, 0)$. Zauważmy, że maksimum lokalne znalezione wcześniej nie należy do tego zbioru. Zatem wartość największa (maksimum globalne) musi być przyjmowana na brzegu trójkąta. Pokaż, że będzie to punkt na prostej $x + y = 2.500$. $\square$

Przykład 4.26. Należy ustalić optymalną lokalizację ośrodka służby zdrowia, który ma obsługiwać mieszkańców trzech miejscowości o współrzędnych $(-20, 10)$, $(10, -10)$ i $(40, 20)$. Niech (x, y) oznaczają współrzędne ośrodka zdrowia. Optymalna lokalizacja może być zdefiniowana na wiele różnych sposobów. Najczęściej stosowanym kryterium jest suma kwadratów odległości ośrodka od kolejnych miejscowości. Szukamy zatem minimum funkcji

$$f(x, y) = (x + 20)^2 + (y - 10)^2 + (x - 10)^2 + (y + 10)^2 + (x - 40)^2 + (y - 20)^2.$$

Obliczmy pochodne cząstkowe i przyrównajmy je do 0

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2(x + 20) + 2(x - 10) + 2(x - 40) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2(y - 10) + 2(y + 10) + 2(y - 20) = 0.$$

Otrzymamy $x = 10$, $y = 6,66$. Łatwo sprawdzić, że jest to punkt, w którym funkcja f osiąga minimum. Zatem tam należy zlokalizować ośrodek służby zdrowia. Kryterium

optymalności można zmodyfikować uwzględniając liczby mieszkańców poszczególnych miejscowości. Każdy kwadrat odległości można pomnożyć przez liczbę mieszkańców. Jeśli tak wprowadzone wagi będą różne dla różnych miejscowości, optymalna lokalizacja zmieni się. Przesunie się ona w kierunku miejscowości o większej liczbie mieszkańców. $\square$

4.3.2 Elastyczność

Oznaczmy przez x_i oznaczmy ilość i -tego nakładu a przez $z = f(x_1, x_2)$ funkcję produkcji, czyli wielkość albo wartość wytworzonego produktu przy nakładach x_1, x_2 . Wtedy pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1, p_2)$ nazywana jest krańcową produktywnością i -tego czynnika przy poziomach nakładów p_1, p_2 . Natomiast elastyczność $E_{x_i} f$ produkcji względem i -tego czynnika obliczamy następująco:

$$E_{x_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2) \cdot \frac{x_i}{f(x_1, x_2)}.$$

Twierdzenie 4.27. Zwiększając nakład i -tego czynnika o $p\%$ uzyskamy przyrost produkcji o $q\%$:

$$q \approx p \cdot E_{x_i} f$$

Przykład 4.28. Bardzo często stosowaną postacią funkcji produkcji jest tzw. funkcja produkcji *Cobba-Douglasa*, która zależy od majątku produkcyjnego K oraz zatrudnienia L :

$$f(K, L) = aK^\alpha L^\beta, \quad L, K, a \geq 0$$

Zauważmy, że $E_K f = \alpha$, $E_L f = \beta$ w każdym punkcie (K, L) . Zwiększając wielkość majątku produkcyjnego o 1% uzyskamy w przybliżeniu przyrost produkcji o $\alpha\%$, a zwiększając zatrudnienie o 1% uzyskamy wzrost produkcji w przybliżeniu o $\beta\%$. $\square$

4.3.3 Zadania

Zadania do samodzielnego rozwiązania

4.124. Sklep rozprawdza dwa typy towaru. Funkcje popytu dla obu towarów są następujące:

$$\begin{aligned} PP_1 &= 110 - 4c_1 - c_2 \\ PP_2 &= 90 - 2c_1 - 3c_2 \end{aligned}$$

gdzie c_j jest ceną j -tego produktu, a PP_j - popytem j -tego produktu, wyrażonym w 1000-ach sztuk. Wyznaczyć cenę dla każdego z towarów, tak aby całkowity dochód uzyskany ze sprzedaży był maksymalny. Podać wartość takiego dochodu i odpowiadające wartości funkcji popytów.

4.125. Firma wytwarza trzy rodzaje mikrokomputerów. Funkcje popytu dla każdego rodzaju są następujące:

$$\begin{aligned} PP_1 &= 4000 - 2c_1 + c_2 + c_3 \\ PP_2 &= 6000 + c_1 - 3c_2 + c_3 \\ PP_3 &= 5000 + c_1 + c_2 - 2c_3 \end{aligned}$$

gdzie PP_j oznacza popyt j -tego komputera, c_j - cenę j -tego komputera. Wyznaczyć ceny, dla których całkowity dochód jest maksymalny. Podać jego wartość. Jaki będzie wtedy popyt na każdy z rodzajów komputera?

4.126. Całkowity roczny dochód ze sprzedaży dwóch towarów wyraża funkcja:

$$D(x, y) = 400x - 4x^2 + 1960y - 8y^2,$$

gdzie x i y oznaczają ilość sprzedanych w ciągu roku sztuk każdego z towarów. Koszt produkcji x -sztuk towaru pierwszego i y -sztuk towaru drugiego jest następujący:

$$K(x, y) = 100 + 2x^2 + 4y^2 + 2xy.$$

Wyznaczyć liczbę sztuk każdego z towarów wyprodukowanych i sprzedanych, dla których osiągnięty jest maksymalny zysk. Podać wartość zysku maksymalnego oraz odpowiadającego mu kosztu i dochodu.

4.127. Zakład wytwarza dwa typy produktów. Wspólna funkcja kosztu ma postać:

$$K(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2,$$

gdzie K oznacza tygodniowy koszt produkcji (wyrażony w tys. zł) x_1 -sztuk produktu A i x_2 - sztuk produktu B. Wiedząc, że tygodniowa produkcja musi wynosić 16 sztuk, wyznaczyć ile sztuk każdego towaru należy wyprodukować, aby zminimalizować tygodniowy koszt.

4.128. ([JKS]) Dwa młyny o zdolności przerobowej 10t i 15t ziarna dziennie, mają przerobić 1800t ziarna na mąkę. Straty powstałe w wyniku produkcji zależą zarówno od czasu składowania ziarna jak i od stosowanej technologii. Funkcję łącznych strat mąki w obu młynach określa wzór:

$$f(t_1, t_2) = t_1^2 + 20t_1 + 3t_2^2 + 45t_2$$

gdzie zmienne t_1, t_2 są czasem trwania kampanii odpowiednio w I i w II-gim młynie. Jak długo powinny trwać kampanie w I i II-gim młynie, aby ponoszone straty były najmniejsze?

4.129. Dane są trzy punkty $(2, 2)$, $(-3, 17)$, $(10, -22)$. Wyznaczyć równanie prostej $(y = ax + b)$ aproksymującej wartości tych punktów minimalizując sumę kwadratów odchyień:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{i=3} (ax_i + b - y_i)^2.$$

4.130. Firma planuje budowę magazynu zaopatrującego trzy oddziały produkcji zlokalizowane w punktach, którym w odpowiednim układzie współrzędnych można przypisać współrzędne: $A(30, 10)$, $B(0, 40)$, $C(-30, -10)$, współrzędne podane są w km. Wyznaczyć lokalizację magazynu tak, aby zminimalizować sumę kwadratów odległości oddziałów A, B, C od magazynu $P(x, y)$.

4.131. Wyznaczyć prostą aproksymującą poniższe dane, stosując metodę najmniejszych kwadratów. W jednym układzie współrzędnych zaznaczyć dane i narysować prostą o wyznaczonym równaniu.

a)

x_i	1	2	3	4
y_i	-2	-1	3	5

b)

x_i	1	2	3	4
y_i	20	14	11	3

4.132. Prostopadłościenne pudełko bez przkrywki jest podzielone na trzy części za pomocą dwóch przegródek i ma objętość 64cm^3 . Wyznaczyć jego wymiary, tak aby zminimalizować ilość materiału przeznaczonego na jego budowę.

4.133. Wyznaczyć punkt trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, o tej własności, że suma kwadratów jego odległości od wierzchołków trójkąta ma największą wartość.

4.134. Firma produkuje trzy towary. Wspólna funkcja kosztu jest następująca:

$$K(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 + 30x_2^2 + 20x_3^2 - 400x_1 - 900x_2 - 1000x_3 + 750000,$$

gdzie x_j oznacza wielkość produkcji odpowiadającą dla j -tego towaru. Wyznaczyć produkcję minimalizującą całkowity koszt. Podać jego wartość.

4.135. ([JKS]) Planowane są w trzech kopalniach k_1, k_2, k_3 prace modernizacyjne, w wyniku których dzienny przyrost wydobywania węgla ma wzrosnąć łącznie o 15%. Koszty tych prac, w zależności od planowanego przyrostu wydobywania w poszczególnych kopalniach, wyrażone są za pomocą funkcji:

$$f(k_1, k_2, k_3) = k_1^2 + 2k_2^2 + 3k_3^2 - 2k_1 - 4k_2 - 6k_3 + 14$$

Zaplanować wielkości przyrostu wydobywania dla poszczególnych kopalń tak, aby zminimalizować koszty prac modernizacyjnych. Podać wysokość tych kosztów.

4.136. W pewnym przedsiębiorstwie oszacowano funkcję produkcji typu Cobb-Douglasa i otrzymano: $V = 51K^{0,45}L^{0,5}$, przy czym V oznacza wielkość produkcji globalnej (w mln zł), K - wartość majątku trwałego (w mln zł), a L - średnią liczbę osób zatrudnionych w ciągu roku (w osobach).

- Obliczyć elastyczność produkcji względem poszczególnych czynników produkcji. Zinterpretować otrzymane wyniki.
- Określić, o ile procent wzrośnie wielkość produkcji, jeżeli wartość majątku trwałego wzrośnie o 3%, a zatrudnienie zostanie zwiększone o 2%.
- Obliczyć krańcową produktywność względem każdego z czynników przy poziomie majątku trwałego 3mln zł i średnim zatrudnieniu wynoszącym 2000 osób. Podać interpretację otrzymanych wyników.

Rozdział 5

Rachunek całkowy

5.1 Całka nieoznaczona

5.1.1 Definicja

Niech funkcja f będzie określona na przedziale (a, b) i przyjmuje wartości rzeczywiste. Funkcją pierwotną funkcji f nazywamy każdą funkcję $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, taką, że $F' = f$, tzn. $\forall x \in (a, b) : F'(x) = f(x)$.

Na przykład funkcja $f(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$, ma funkcję pierwotną $F(x) = x^2$, bo $d/dx(x^2) = 2x$. Jeśli C jest stałą, to funkcja $G(x) = x^2 + C$ też jest funkcją pierwotną funkcji f , gdyż stała znika przy różniczkowaniu. Jasne jest więc, że jeśli funkcja ma funkcję pierwotną, to ma ich również nieskończenie wiele. Można pokazać, że każde dwie funkcje pierwotne danej funkcji f różnią się o stałą. Zatem wszystkie funkcje pierwotne funkcji $f(x) = 2x$ mają postać $F(x) = x^2 + C$, gdzie C jest pewną stałą rzeczywistą.

Dokładnie tak samo można zdefiniować funkcję pierwotną funkcji f określonej na rozłącznej sumie przedziałów otwartych. Funkcje pierwotne będą jednak w takim przypadku zależały od większej liczby stałych. Dokładniej, na każdym przedziale otwartym, wchodzącym w skład dziedziny, możemy wybrać inną stałą.

Całką nieoznaczoną funkcji f (lub całką w sensie Newtona z f) nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f , oznaczany przez $\int f(x)dx$, lub krótko, $\int f$. Funkcję, która posiada całkę (czyli, taką, która ma funkcję pierwotną) nazywamy całkowalną (w sensie Newtona).

Na przykład, $\int 2xdx = x^2 + C$, gdzie C , jak poprzednio, oznacza dowolną stałą rzeczywistą.

Znajdowanie całek nieoznaczonych, jak sugeruje powyższy przykład, polega na zgadywaniu. Zgadywanie to nie zawsze jest jednak proste. W odróżnieniu od różniczkowania, które wymaga opanowania kilku podstawowych własności i kilku wzorów, całkowanie często sprawia kłopoty. Można powiedzieć, że różniczkowanie jest rzemio-

słom, a całkowanie sztuką. Jak każda sztuka, również sztuka całkowania obejmuje pewne techniki, które należy opanować. Niestety, nie zawsze jest jasne, która z tych technik prowadzi do celu, ani jak mają wyglądać poszczególne kroki. Skuteczne całkowanie wymaga wprawy i doświadczenia.

Można pokazać, że każda funkcja ciągła posiada funkcję pierwotną. Niestety, nie zawsze wiemy jak taką funkcję zapisać. Na przykład, funkcja

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad (5.1)$$

jest ciągła na całej prostej, zatem posiada funkcję pierwotną (czyli również całkę nieoznaczoną). Niestety, funkcji pierwotnej nie da się wyrazić przez funkcje elementarne, tzn. kombinacje funkcji trygonometrycznych, wykładniczych, wielomianowych i odwrotnych do nich. Funkcja (5.1) i jej całka nieoznaczona są bardzo ważne w zastosowaniach. To, że całka ta nie da się wyrazić przez funkcje elementarne, powoduje liczne kłopoty rachunkowe.

Mimo wspomnianych trudności, wiele funkcji potrafimy łatwo scałkować. Najprostsze wzory wynikają ze znajomości wzorów na różniczkowanie. Na przykład $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$ dla $\alpha \neq -1$, bo $\frac{d}{dx} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C = x^\alpha$. Podobnie

$$\begin{aligned} \int x^{-1} dx &= \ln x + C, \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C, \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C, \\ \int a^x dx &= a^x / \ln a + C, \\ \int e^x dx &= e^x + C. \end{aligned}$$

Najważniejszą własnością całki jest liniowość:

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g,$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, a f i g są funkcjami całkowalnymi, określonymi na tym samym przedziale. Własność ta pozwala, na przykład, policzyć całkę wielomianu.

$$\int (x^7 - 2x^3 + 4) dx = \int x^7 dx - 2 \int x^3 dx + 4 \int dx = \frac{1}{8} x^8 - \frac{2}{4} x^4 + 4x + C$$

5.1.2 Całkowanie przez części

Bardziej zaawansowane techniki całkowania, to całkowanie przez części i całkowanie przez podstawienie. Całkowanie przez części jest opisane przez następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.1.

$$\int f g' = f g - \int f' g,$$

czyli

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx. \quad \square$$

Przykład 5.2. Obliczmy całkę $\int x e^x dx$. Niech $f(x) = x$ i $g'(x) = e^x$. Wtedy $f'(x) = 1$ i $g(x) = e^x$. Zauważmy, że odtworzenie funkcji g wymaga scałkowania funkcji g' ; dokładniej, znalezienia jednej z funkcji pierwotnych funkcji g' . Korzystając z Twierdzenia 5.1, otrzymamy

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Gdybyśmy przyjęli na odwrót, $f(x) = e^x$ i $g'(x) = x$, zastosowanie całkowania przez części nie przyniosłoby spodziewanego rezultatu. Otrzymalibyśmy całkę bardziej skomplikowaną niż całka wyjściowa. Sprawdź to. $\square$

Całkowanie jest operacją odwrotną do różniczkowania. Warto zatem pamiętać zależności, które to opisują

$$(\int f)' = f \quad \text{ i } \quad \int f' = f + C,$$

lub inaczej

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) \quad \text{ i } \quad \int f'(x) dx = f(x) + C.$$

Kolejny przykład pokazuje, że rozkład funkcji podcałkowej na czynniki nie zawsze jest widoczny lub oczywisty.

Przykład 5.3. Obliczmy $\int \ln x dx$. Niech $f(x) = \ln x$ i $g'(x) = 1$. Wtedy $f'(x) = 1/x$ i $g(x) = x$. Zatem

$$\int \ln x dx = (\ln x) x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - x + C. \quad \square$$

Przykład 5.4. W całce $\int \cos^2 x dx$ przyjmijmy $f(x) = g'(x) = \cos x$. Wtedy $f'(x) = -\sin x$ i $g(x) = \sin x$. Zatem

$$\int \cos^2 x dx = \cos x \sin x + \int \sin^2 x =$$

$$\cos x \sin x + \int (1 - \cos^2 x) dx = \cos x \sin x + x - \int \cos^2 x dx.$$

Wyliczając z powyższej równości $\int \cos^2 x dx$ otrzymamy

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x \cos x + C. \quad \square$$

5.1.3 Całkowanie przez podstawienie

Całkowanie przez podstawienie wykorzystuje własności różniczkowania złożenia funkcji. Metoda ta zawarta jest w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 5.5.

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C,$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f . $\square$

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie ma również nieco inną wersję.

Twierdzenie 5.6. Niech $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, oraz niech $\varphi : (c, d) \rightarrow (a, b)$ będzie wzajemnie jednoznaczna i różniczkowalna. Wtedy

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

W całce po prawej stronie zmienną jest t , która zależy następująco od zmiennej x

$$x = \varphi(t), \quad t = \varphi^{-1}(x). \quad \square$$

Przykład 5.7. Całkę $\int (2x-7)^9 dx$ można obliczyć rozwijając wielomian w wyrażeniu podcałkowym. Całkowanie przez podstawienie szybciej prowadzi do celu. Zapiszmy $(2x-7)^9$ w postaci

$$(2x-7)^9 = \frac{1}{2}(2x-7)^9 \cdot 2.$$

Niech $f(y) = \frac{1}{2}y^9$ oraz $g(x) = 2x-7$. Wtedy $g'(x) = 2$ oraz

$$(2x-7)^9 = f(g(x))g'(x).$$

Łatwo znajdujemy funkcję pierwotną funkcji f : $F(y) = (1/20)y^{10}$ oraz

$$\int (2x-7)^9 dx = F(g(x)) + C = \frac{1}{20}(2x-7)^{10} + C. \quad \square$$

Przykład 5.8. Obliczmy $\int \sqrt{1-x^2} dx$, $x \in (-1, 1)$. Zastosujmy podstawienie $x = \varphi(t) = \sin t$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Wtedy $\varphi'(t) = \cos t$ oraz z twierdzenia 5.6 otrzymujemy

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t \cos t,$$

gdzie $t = \varphi^{-1}(x) = \arcsin x$. Zatem ostatecznie

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

Sprawdź otrzymany wynik przez różniczkowanie. $\square$

Tak jak podstawienie $x = \varphi(t)$ z twierdzenia 5.6 wprowadza nową zmienną t , tak też stosując wzór z twierdzenia 5.5 wprowadzamy nową zmienną y , zadaną przez $y = g(x)$. Twierdzenie to można wtedy inaczej zapisać jako

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy.$$

Zauważmy, że od strony formalnej sprowadza się to do zastąpienia $g(x)$ przez y oraz $g'(x)dx$ przez dy .

5.1.4 Całkowanie funkcji wymiernych

Podamy tu metodę, która pozwala scałkować każdą funkcję wymierną, o ile potrafimy rozłożyć mianownik tej funkcji na nierozkładalne czynniki. Czynniki takie mogą mieć postać $x+d$ lub x^2+bx+c , gdzie $b^2-4c < 0$. Niech rozważana funkcja podcałkowa ma postać

$$w(x) = \frac{m(x)}{n(x)},$$

gdzie m i n są wielomianami. Załóżmy, że rozłożyliśmy mianownik tej funkcji na czynniki liniowe i nierozkładalne czynniki kwadratowe

$$n(x) = (x+d_1) \dots (x+d_k)(x^2+b_1x+c_1) \dots (x^2+b_rx+c_r),$$

oraz, że czynniki te są różne. Możemy wtedy rozłożyć funkcję w na sumę wielomianu i ułamków prostych, których mianowniki są czynnikami z rozkładu funkcji n :

$$w(x) = u(x) + \frac{D_1}{x+d_1} + \dots + \frac{D_k}{x+d_k} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1} + \dots + \frac{B_rx+C_r}{x^2+b_rx+c_r}.$$

Wielomian u pojawi się tylko wtedy, gdy stopień wielomianu m będzie większy lub równy stopniowi wielomianu n . Współczynniki $D_1, \dots, D_k, B_1, C_1, \dots, B_r, C_r$ należy wyznaczyć sprowadzając powstałe ułamki proste do wspólnego mianownika i porównując otrzymany licznik z wielomianem m , tzn. licznikiem funkcji w .

Przykład 5.9. Niech

$$w(x) = \frac{2x+1}{(x+3)(x^2+2)}.$$

Wtedy

$$w(x) = \frac{D_1}{x+3} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+2} = \frac{D_1x^2+2D_1+B_1x^2+3B_1x+C_1x+3C_1}{(x+3)(x^2+2)}.$$

Porównując liczniki otrzymamy

$$2x+1 = (D_1+B_1)x^2 + (3B_1+C_1)x + (2D_1+3C_1)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Stąd

$$\begin{aligned} D_1 + B_1 &= 0 \\ 3B_1 + C_1 &= 2 \\ 2D_1 + 3C_1 &= 1 \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań otrzymamy: $D_1 = -5/11$, $B_1 = 5/11$ i $C_1 = 7/11$. $\square$

Jeśli w rozkładzie mianownika funkcji w na czynniki pojawiają się jednakowe wyrażenia, rozkład na czynniki nieco się komplikuje. Przypuśćmy, że zamiast czynnika $x+d_1$ pojawi się p takich czynników, czyli wyrażenie $(x+d_1)^p$. Wtedy, w rozkładzie na ułamki proste pojawi się p składników związanych z tym wyrażeniem

$$\frac{E_1}{x+d_1} + \frac{E_2}{(x+d_1)^2} + \dots + \frac{E_p}{(x+d_1)^p}.$$

Niektóre współczynniki mogą być równe 0, ale nie wiemy z góry które. Podobnie, gdy w rozkładzie na czynniki wielomianu n pojawi się $(x^2+b_ix+c_i)^p$, to w rozkładzie na ułamki proste będziemy musieli uwzględnić p ułamków odpowiadających temu wyrażeniu. Ich mianowniki będą kolejnymi potęgami wyrażenia $x^2+b_ix+c_i$.

Przykład 5.10. Niech

$$w(x) = \frac{2x^3-5x+4}{(x+3)^3(x^2+2)^2}.$$

Wtedy

$$w(x) = \frac{E_1}{x+3} + \frac{E_2}{(x+3)^2} + \frac{E_3}{(x+3)^3} + \frac{F_1x+G_1}{x^2+2} + \frac{F_2x+G_2}{(x^2+2)^2}.$$

Znajdź E_1 , E_2 , E_3 , F_1 , G_1 , F_2 i G_2 . $\square$

Rozkładając funkcję wymierną w na ułamki proste sprowadzamy problem całkowania funkcji w do całkowania ułamków prostych. Ułamki pierwszego rodzaju, czyli ułamki postaci

$$\frac{A}{(x+d)^k},$$

całkujemy przez podstawienie $y = x+d$:

$$\int \frac{A}{(x+d)^k} dx = \frac{A}{(1-k)(x+d)^{k-1}} + C$$

dla $k \neq 1$. Dla $k = 1$ całka wynosi $A \ln(x+d) + C$. Zajmijmy się ułamkiem drugiego rodzaju

$$\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}.$$

Zapiszmy mianownik w postaci kanonicznej $[(x-p)^2+q^2]^k$, gdzie $q > 0$ i przekształćmy licznik do postaci

$$\frac{(A/2)2(x-p) + (B+Ap)}{[(x-p)^2+q^2]^k} = \frac{A}{2} \frac{2(x-p)}{[(x-p)^2+q^2]^k} + (B+Ap) \frac{1}{[(x-p)^2+q^2]^k}.$$

Pierwszy ułamek całkujemy łatwo podstawiając $y = (x-p)^2+q^2$:

$$\int \frac{2(x-p)}{[(x-p)^2+q^2]^k} dx = \int \frac{1}{y^k} dy = (1/1-k)[(x-p)^2+q^2]^{1-k} + C,$$

jeśli $k \neq 1$. Dla $k = 1$ otrzymamy $\ln((x-p)^2+q^2)$. Pozostaje do wyliczenia całka

$$\int \frac{1}{[(x-p)^2+q^2]^k}.$$

Przekształćmy funkcję podcałkową do postaci

$$\frac{1}{q^{2k}[1+((x-p)/q)^2]^k}.$$

Podstawienie $y = (x-p)/q$ sprowadza całkę do

$$F_k := \int \frac{A}{(1+y^2)^k} dy.$$

Dla $k = 1$ jest ona równa $A \arctg y + C = A \arctg(x-p)/q + C$. Dla $k > 1$ stosujemy wzór redukcyjny obniżający potęgę w mianowniku:

$$F_k = \frac{2k-3}{2k-2} F_{k-1} + \frac{y}{2(k-1)(1+y^2)^{k-1}}.$$

Na przykład, $F_2 = (1/2) \arctg y + (1/2)y/(1+y^2)$.

5.1.5 Zadania

5.1. Obliczyć następujące całki

- a) $\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$,
 b) $\int \frac{1}{4x^2-4x+1} dx$,
 c) $\int \frac{4x+1}{x^2+2x+5} dx$.

Rozwiązanie:

a) Widać, że delta trójmianu $x^2 + 2x + 5$ jest ujemna, a zatem danej całki nie można policzyć przez rozkład na ułamki proste. Ale

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4,$$

czyli

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx &= \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 4} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{(\frac{x+1}{2})^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \arctg \frac{x+1}{2} + C. \end{aligned}$$

Całkę $\int \frac{1}{(\frac{x+1}{2})^2 + 1} dx$ obliczyliśmy korzystając ze wzoru

$$\int \frac{1}{1+t^2} dx = \arctg t + C.$$

b) Mamy $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$, czyli

$$\int \frac{1}{4x^2 - 4x + 1} dx = \int \frac{1}{(2x - 1)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2x - 1}\right) + C.$$

c) Daną funkcję podcałkową przekształcimy tak, aby w liczniku otrzymać pochodną mianownika $(x^2 + 2x + 5)' = 2x + 2$:

$$\frac{4x + 1}{x^2 + 2x + 5} = 2 \frac{2x + \frac{1}{2}}{x^2 + 2x + 5} = 2 \frac{2x + 2 - 2 + \frac{1}{2}}{x^2 + 2x + 5} = 2 \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} - 3 \frac{1}{x^2 + 2x + 5}.$$

Wobec tego:

$$\int \frac{4x + 1}{x^2 + 2x + 5} dx = 2 \ln(x^2 + 2x + 5) - \frac{3}{2} \arctg \frac{x + 1}{2} + C,$$

jeśli skorzysta się z podpunktu a) tego zadania.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Korzystając z podstawowych wzorów rachunku całkowego obliczyć podane całki nieoznaczone oraz sprawdzić otrzymany wynik przez różniczkowanie:

- 5.2. $\int (x^5 + 6x^2 - 5x + 1) dx$.
 5.4. $\int (\sqrt{x^5} + \sqrt[5]{x}) dx$.
 5.6. $\int (5^x - 3 \cos x) dx$.
 5.8. $\int \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x - 2} dx$.
 5.10. $\int (2e^x - \frac{13}{x^2}) dx$.
 5.3. $\int (x^2 + \sqrt{x} - 3\sqrt{x^3}) dx$.
 5.5. $\int (4 \sin x - \frac{3}{\cos^2 x}) dx$.
 5.7. $\int \frac{x^3 - 1}{x - 1} \frac{3}{x^4} dx$.
 5.9. $\int \frac{1 - x^2}{\sqrt[3]{x}} dx$.
 5.11. $\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} dx$.

Stosując wzór na całkowanie przez części obliczyć poniższe całki, a następnie sprawdzić wynik za pomocą różniczkowania:

- 5.12. $\int (x^2 + 1)e^x dx$.
 5.14. $\int x \cos x dx$.
 5.16. $\int e^t \sin t dt$.
 5.18. $\int x^2 \sin x dx$.
 5.20. $\int \arcsin z dz$.
 5.22. $\int \sin^2 x dx$.
 5.13. $\int t \sin t dt$.
 5.15. $\int x \ln x dx$.
 5.17. $\int e^x \cos x dx$.
 5.19. $\int \arctg x dx$.
 5.21. $\int x^2 e^x dx$.
 5.23. $\int x^2 \cos x dx$.

Korzystając z podstawowych wzorów rachunku całkowego obliczyć podane całki nieoznaczone oraz sprawdzić otrzymany wynik przez różniczkowanie:

- 5.24. $\int (x^5 + 6x^2 - 5x + 1) dx$.
 5.26. $\int (\sqrt{x^5} + \sqrt[5]{x}) dx$.
 5.28. $\int (5^x - 3 \cos x) dx$.
 5.30. $\int \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x - 2} dx$.
 5.32. $\int (2e^x - \frac{13}{x^2}) dx$.
 5.25. $\int (x^2 + \sqrt{x} - 3\sqrt{x^3}) dx$.
 5.27. $\int (4 \sin x - \frac{3}{\cos^2 x}) dx$.
 5.29. $\int \frac{x^3 - 1}{x - 1} \frac{3}{x^4} dx$.
 5.31. $\int \frac{1 - x^2}{\sqrt[3]{x}} dx$.
 5.33. $\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} dx$.

Obliczyć całki następujących funkcji wymiernych:

- 5.34. $\int \frac{1}{3 - 2x - x^2} dx$.
 5.36. $\int \frac{1}{4x - x^2} dx$.
 5.38. $\int \frac{4}{x^2 - 2x + 2} dx$.
 5.40. $\int \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx$.
 5.42. $\int \frac{x^2 + 2x}{x^4 - 1} dx$.
 5.44. $\int \frac{3x}{(2x + 1)^2(x^2 - 1)} dx$.
 5.35. $\int \frac{1}{4 - 25x^2} dx$.
 5.37. $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{-x^2 + 4}} dx$.
 5.39. $\int \frac{1}{2x^2 + 3x + 1} dx$.
 5.41. $\int \frac{1}{x(x^2 - 1)} dx$.
 5.43. $\int \frac{x^4 + 2x^2}{x^3 - 1} dx$.
 5.45. $\int \frac{2}{(4x^2 - 1)^2(x^2 + 2)} dx$.

Obliczyć następujące całki:

- 5.46. $\int x^2 e^{-3x} dx$.
 5.48. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.
 5.50. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx$.
 5.52. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.
 5.54. $\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx$.
 5.47. $\int e^{-x} \sin 3x dx$.
 5.49. $\int \frac{x^3 + 1}{x(x^2 + x + 1)^2} dx$.
 5.51. $\int \sin^5 x dx$.
 5.53. $\int \cos^4 x dx$.
 5.55. $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx$.

5.2 Całka oznaczona

Rozważmy ciągłą funkcję $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Niech $\Delta_n = (b - a)/n$ oraz $x_i^{(n)} = a + i\Delta_n$ dla $i = 0, \dots, n$. Punkty $a = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} = b$ tworzą podział odcinka $[a, b]$ na n równych części. Utwórzmy n -tą sumę całkową dla funkcji f

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)}) \Delta_n.$$

Granice ciągu (S_n) przy n dążącym do ∞ nazywamy *całką oznaczoną* (w sensie Riemanna) funkcji f w przedziale $[a, b]$ i oznaczamy przez

$$\int_a^b f(x) dx$$

(lub krócej przez $\int_a^b f$). Można pokazać, że dla funkcji ciągłej ta granica zawsze istnieje. W odróżnieniu od całki nieoznaczonej, która jest rodziną funkcji, całka oznaczona jest liczbą. Zmienna x występująca w całce oznaczonej nie ma większego znaczenia; może być zastąpiona przez dowolną inną zmienną, co często będziemy wykorzystywać.

Przykład 5.11. Niech $f(x) = ax$, $x \in [0, 1]$. Wtedy $\Delta_n = 1/n$, $x_i^{(n)} = i/n$ oraz

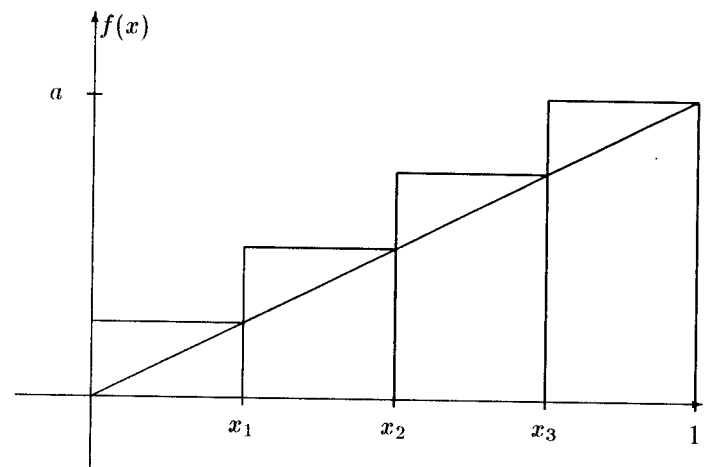
$$S_n = \sum_{i=1}^n a \frac{i}{n} \frac{1}{n} = \frac{a}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{an(n+1)}{2n^2}.$$

Przechodząc do granicy otrzymujemy

$$\int_0^1 ax dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{2}.$$

Rysunek 5.1 podaje interpretację sumy całkowej dla rozważanej funkcji. Jest to pole sumy prostokątów o podstawie Δ_n i wysokości $f(x_i^{(n)})$, dla $i = 1, \dots, n$. Gdy n dąży do nieskończoności, pole to dąży do pola trójkąta zawartego między wykresem funkcji a odcinkiem $[0, 1]$ na osi odciętych. $\square$

Z definicji całki oznaczonej i z definicji pola figury płaskiej wynika, że całka oznaczona z funkcji ciągłej i nieujemnej jest równa polu obszaru zawartego między wykresem funkcji a osią odciętych (porównaj z przykładem 5.11). Obliczanie pól figur płaskich jest jednym z ważnych zastosowań całek oznaczonych.



Rysunek 5.1: Suma całkową i całka dla $f(x) = ax$

Najważniejszą własnością całki jest jej liniowość. Jeśli f i g są funkcjami określonymi na $[a, b]$, a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Całka oznaczona ma również własność addytywności ze względu na przedział całkowania. Mianowicie, jeśli $c \in (a, b)$, to

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

dla dowolnej funkcji f ciągłej na $[a, b]$.

Powyższy wzór wykorzystamy do rozszerzenia definicji całki na funkcji posiadające skończoną liczbę punktów nieciągłości, czyli funkcje *kawałkami ciągłe*. Będziemy zakładali, że w każdym punkcie nieciągłości rozważana funkcja ma granicę prawostronną oraz granicę lewostronną. Przy tych założeniach przedział, na którym określona jest funkcja, można podzielić na skończoną liczbę podprzedziałów, na których funkcja będzie ciągła. Ewentualny brak ciągłości na końcu takiego przedziału możemy naprawić zmieniając wartość funkcji w tym punkcie. Możemy scałkować zatem rozważaną funkcję na każdym przedziale oddzielnie i dodać otrzymane całki. Suma ta będzie całką z rozważanej funkcji. Na przykład, jeśli funkcja f określona jest na przedziale $[a, b]$ i jedynym punktem nieciągłości jest punkt $c \in (a, b)$, to

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Obliczanie całek oznaczonych z definicji jest uciążliwe. Na szczęście są lepsze metody.

Twierdzenie 5.12 (I Twierdzenie Podstawowe Rachunku Całkowego). *Jeśli f jest ciągła na $[a, b]$, to*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f . $\square$

Ponieważ zbiór funkcji pierwotnych tworzy całkę nieoznaczoną, to twierdzenie 5.12 daje związek między całką oznaczoną i całką nieoznaczoną. Różnicę $F(b) - F(a)$ często zapisujemy jako $[F(x)]_a^b$ lub $F(x)|_a^b$.

Przykład 5.13. Niech $f(x) = ax$ na przedziale $[0, 1]$. Ponieważ $\int ax dx = (1/2)ax^2 + C$, to za funkcję pierwotną możemy przyjąć $F(x) = (1/2)ax^2$. Zatem

$$\int_0^1 ax dx = F(1) - F(0) = \frac{a}{2}.$$

Sprawdź, że dla każdej innej funkcji pierwotnej otrzymamy ten sam wynik. $\square$

Przykład 5.14. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in [0, 1] \\ e^{-x} & \text{dla } x \in (1, 2] \end{cases}$$

Funkcja f jest nieciągła w punkcie 1. Zatem

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 2x dx + \int_1^2 e^{-x} dx = 1 - 0 - e^{-2} + e^{-1}. \quad \square$$

Niech funkcja f będzie ciągła w przedziale $[a, b]$. Zdefiniujmy nową funkcję określoną na tym samym przedziale

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \quad (5.2)$$

Zauważmy, że x występuje tu jako górna granica całkowania, a zatem nie może być użyta jako zmienna wewnątrz całki.

Twierdzenie 5.15 (II Twierdzenie Podstawowe Rachunku Całkowego).

Funkcja F określona przez (5.2) jest funkcją pierwotną funkcji f , tzn.

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x). \quad \square$$

Często będziemy używali całki oznaczonej na przedziale nieograniczonym, np. $[a, +\infty)$. Definiujemy ją następująco

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_a^T f(x)dx.$$

Granica ta może nie istnieć lub może być nieskończona.

Przykład 5.16.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} (-e^{-T} + 1) = 1.$$

Ale

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} (\sin T - \sin 0)$$

nie istnieje. $\square$

Całkę na całej prostej definiujemy jako sumę całek na przedziałach $(-\infty, 0]$ i $[0, +\infty)$. Często wykorzystywana jest następująca całka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Niestety, wyliczenie jej wymaga trochę bardziej zaawansowanych technik. Nie możemy użyć tu twierdzenia 5.12 (z późniejszym przejściem do granicy), gdyż nie potrafimy znaleźć funkcji pierwotnej. Nie wyraża się ona przez funkcje elementarne.

5.2.1 Całkowanie przez części i przez podstawienie dla całki oznaczonej

Jeśli naszym głównym celem jest wyliczenie całki oznaczonej, możemy stosować wzory na całkowanie przez części i na całkowanie przez podstawienie bezpośrednio dla całki oznaczonej. Całkowanie przez części możemy zapisać następująco

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \quad (5.3)$$

Jeśli używamy podstawienia $y = g(x)$ oraz $x \in [a, b]$, to zmienna y będzie zmieniać się w przedziale $[c, d]$, gdzie $c = g(a)$ a $d = g(b)$.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_c^d f(y)dy \quad (5.4)$$

Może się zdarzyć, że $c > d$, tzn. górna granica całkowania jest mniejsza od dolnej. Wzór zachowuje wtedy swoją ważność a taką całkę rozumiemy następująco

$$\int_c^d f(y)dy := - \int_d^c f(y)dy.$$

W ten sposób całka we wzorze (5.4) zawsze będzie miała sens.

Podobnie postępujemy przy stosowaniu podstawienia $x = \varphi(t)$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

gdzie $a = \varphi(\alpha)$ i $b = \varphi(\beta)$.

5.2.2 Zadania

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć wartość następujących całek oznaczonych:

$$5.56. \int_0^1 (x^3 + 3^x) dx.$$

$$5.58. \int_0^1 x e^{3x} dx.$$

$$5.60. \int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx.$$

$$5.62. \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$5.64. \int_{-1}^1 \frac{x}{(x^2+4)(x-3)} dx.$$

$$5.66. \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{\sin x} \sin 2x dx.$$

$$5.68. \int_1^2 (x^{10} - 4e^x + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{x}) dx.$$

$$5.57. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos x dx.$$

$$5.59. \int_0^\pi e^x \cos 2x dx.$$

$$5.61. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x dx.$$

$$5.63. \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}} dx.$$

$$5.65. \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx.$$

$$5.67. \int_0^\pi \sin^5 2x dx.$$

$$5.69. \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos x dx.$$

Obliczyć wartość całki: $\int_a^b f(x)dx$, (na dziedzinie funkcji), jeżeli funkcja $f(x)$ dana jest następująco:

$$5.70. f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [-6; 1) \\ e^{2x} & \text{dla } x \in [1; 10]. \end{cases}$$

$$5.72. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } x \in [1; 2) \\ x & \text{dla } x \in [2; 4]. \end{cases}$$

$$5.74. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in [-5; 1) \\ \ln x & \text{dla } x \in [1; 5]. \end{cases}$$

$$5.71. f(x) = \begin{cases} x e^{-x^2} & \text{dla } x \in [-1; 0) \\ 2x+1 & \text{dla } x \in [0; 1]. \end{cases}$$

$$5.73. f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} & \text{dla } x \in [0; 0, 5) \\ \frac{x}{2x-1} & \text{dla } x \in [0, 5; 1]. \end{cases}$$

$$5.75. f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [-\frac{\pi}{2}; 0) \\ e^x \sin x & \text{dla } x \in [0; \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Obliczyć następujące całki niewłaściwe:

$$5.76. \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx.$$

$$5.78. \int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^2+1} dx.$$

$$5.80. \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$5.82. \int_0^2 \frac{1}{x^2-1} dx.$$

$$5.77. \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx.$$

$$5.79. \int_0^\infty x e^{-x^2} dx.$$

$$5.81. \int_0^3 \frac{1}{(x-1)^2} dx.$$

$$5.83. \int_0^\infty x e^{x^2} dx.$$

5.84. Obliczyć całkę $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, gdzie:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x \in [-\infty; -10) \\ \frac{1}{x^2} & \text{dla } x \in [-10; 10) \\ e^{-x} & \text{dla } x \in [10; +\infty). \end{cases}$$

5.3 Zastosowania całek

5.3.1 Obliczanie pól

Jednym z ważnych zastosowań całek jest obliczanie pól figur płaskich. Również pola powierzchni zakrzywionych, umieszczonych w przestrzeni trójwymiarowej, liczy się przy pomocy całek. Są to jednak bardziej zaawansowane rachunki, wymagające wprowadzenia nowych pojęć.

Przykład 5.17. Obliczmy pole koła o promieniu r . Załóżmy, że koło to ma środek w punkcie $(0, 0)$. Wtedy jego brzegiem jest okrąg opisany równaniem $x^2 + y^2 = r^2$. Najpierw znajdziemy pole półkola zawartego między wykresem funkcji $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ i osią x -ów. Pole to wyrazi się całką

$$P = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Podstawiając $x = r \sin t$, otrzymujemy $dx = r \cos t dt$ oraz nowe granice całkowania $\alpha = -\pi/2$ oraz $\beta = \pi/2$. Zatem

$$P = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos^2 t dt = [\frac{1}{2} r^2 t + \frac{1}{2} r^2 \sin t \cos t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} \pi r^2.$$

Zatem pole całego koła równe jest $2P = \pi r^2$. □

Jeśli mamy dwie funkcje $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, pole obszaru zawartego między wykresami tych funkcji obliczymy licząc całkę z modułu różnicy tych funkcji

$$P = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Wykresy tych funkcji mogą się przecinać. Wtedy obszar między wykresami będzie składał się z dwóch lub więcej części.

Przykład 5.18. Znajdźmy pole zawarte między parabolami o równaniach $y = f(x) = x^2$ i $y = g(x) = 2 - x^2$. Znajdźmy najpierw punkty ich przecięcia.

$$x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Wtedy pole, które nas interesuje wyrazi się wzorem

$$P = \int_{-1}^1 |x^2 - 2 + x^2| dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = [2x - \frac{2}{3}x^3]_{-1}^1 = \frac{8}{3}.$$

□

5.3.2 Całkowanie stóp

W wielu problemach zarządzania mamy dane stopy zmian pewnych wielkości jako funkcje czasu (lub innych wielkości), np. stopa przyrostu zysku, stopa zmian kosztu, stopa przyrostu dochodu. Stopa oznacza prędkość zmian i jest interpretowana zwykle jako iloraz różnicowy. Jeśli zmienne możemy uważać za ciągłe, iloraz różnicowy zastępujemy jego granicą, czyli pochodną. Znalezienie funkcji wyjściowej, np. funkcji kosztu, polega zatem na scałkowaniu stopy.

Przykład 5.19. Producent samochodów osobowych ocenia, że roczna stopa przyrostu kosztu utrzymania produkowanego przezeń samochodu wyraża się wzorem

$$s(t) = 100 + 10t^2,$$

gdzie t oznacza wiek samochodu w latach, a $s(t)$ mierzone jest w zł/rok. Ponieważ stopa ta zależy od t , jedyną rozsądną jej interpretację daje iloraz różnicowy. Zatem, w przybliżeniu, $s(t)$ jest równe $(K(t + \Delta t) - K(t))/\Delta t$ (dla małego przyrostu Δt), gdzie $K(t)$ oznacza koszt utrzymania samochodu przez t lat. Zatem $s(t)$ oznacza przyrost kosztów utrzymania w momencie t podzielony przez przyrost czasu Δt .

Obliczmy koszt utrzymania samochodu przez 3 lata, czyli $K(3)$.

$$K(3) = \int_0^3 s(t) dt = \int_0^3 (100 + 10t^2) dt = [100t + \frac{10}{3}t^3]_0^3 = 300 + 90 = 390 \text{ (zł)}$$

Zauważmy, że gdyby stopa kosztu była stała i wynosiła 100 zł/rok, to koszt obliczalibyśmy mnożąc po prostu liczbę lat przez stopę. Można to zinterpretować jako obliczanie pola prostokąta lub całkowanie funkcji stałej. □

Przykład 5.20. Wiadomo, że w czasie akcji charytatywnych przyrost dochodu jest wolniejszy wraz z upływem czasu akcji. Inaczej mówiąc, stopa przyrostu dochodu maleje z czasem. Załóżmy, że stopa ta wyraża się wzorem

$$s(t) = -100t^2 + 20.000,$$

i mierzona jest w zł/dzień. Czas t mierzony jest w dniach. Załóżmy, że stopa przyrostu kosztu akcji charytatywnej jest stała i równa 10.000 zł/dzień. Należy znaleźć:

a) czas trwania akcji, który daje maksymalny dochód, b) wielkość tego dochodu, c) koszt akcji, d) zysk.

Rozwiązanie. Akcję warto prowadzić do chwili, gdy stopa przyrostu dochodu zrówna się ze stopą kosztu. Od tego momentu koszt akcji w ciągu jednego dnia będzie większy od uzyskanego dochodu. Czas akcji znajdujemy zatem z równania

$$-100t^2 + 20.000 = 10.000.$$

Stąd $t = 10$. Wielkość dochodu otrzymamy całkując stopę przyrostu dochodu od 0 do 10.

$$D(10) = \int_0^{10} (-100t^2 + 20.000) dt = \left[-\frac{100}{3}t^3 + 20.000t \right]_0^{10} = 166.666 \text{ zł}$$

Koszt akcji wyniesie $K(10) = 10 \cdot 10.000 = 100.000$ zł. Zatem zysk po 10 dniach wyniesie $Z(10) = D(10) - K(10) = 66.666$ zł. □

5.3.3 Nadwyżka użyteczności towaru

Założmy, że popyt na pewien towar jest następującą funkcją ceny

$$PP(c) = c^2 - 40c + 400.$$

Niech podaż tego towaru wyraża się następująco

$$PD(c) = 10c.$$

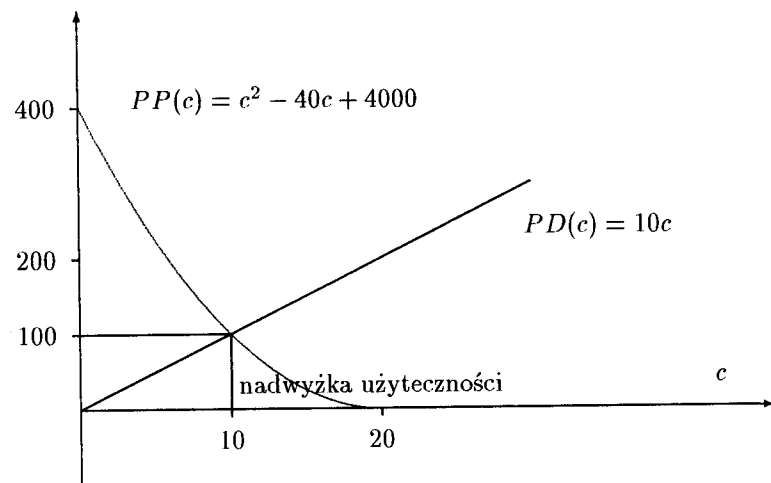
Łatwo znajdujemy, że cena równowagi wynosi $c = 10$ przy popycie równym 1000. Przez użyteczność towaru rozumiemy jego wartość przy cenie równowagi, czyli

$$U = 10 \cdot 100 = 1000.$$

Zatem użyteczność towaru wynosi tyle, ile zapłacą za niego klienci. Jest to pole prostokąta o przeciwległych wierzchołkach w $(0, 0)$ i $(10, 100)$. Ale są klienci, którzy kupiliby towar po cenie wyższej od ceny równowagi. Analizując funkcję użyteczności widzimy, że dopiero przy cenie $c = 20$ popyt spada do 0. Można zatem twierdzić, że pole pod wykresem funkcji popytu dla zakresu cen od 10 do 20 również reprezentuje użyteczność towaru. Jest to *nadwyżka użyteczności* tego towaru. Jest to nadwyżka użyteczności towaru dla tych klientów, którzy kupują towar po cenie równowagi, a kupiliby go również po wyższej cenie. Obliczmy nadwyżkę użyteczności towaru dla naszego przykładu. Jest ona równa

$$\int_{10}^{20} (c^2 - 40c + 400) dc = \left[\frac{1}{3}c^3 - 20c^2 + 400c \right]_{10}^{20} = 333.$$

Zatem pełna użyteczność wyniesie $1000 + 333 = 1333$. Rysunek 5.2 pokazuje graficzną interpretację nadwyżki użyteczności.



Rysunek 5.2: Nadwyżka użyteczności towaru

5.3.4 Zadania

Zadania do samodzielnego rozwiązania

5.85. Za pomocą całek oznaczonych zapisać pola obszarów: A, B, C, D, E, F zaznaczonych na rysunku 5.3.

Obliczyć pole obszaru między krzywymi:

5.86. $y = 2x^2 - 4x + 6$, $y = -x^2 + 2x$, $x = 0$, $x = 2$.

5.87. $y = x + 2$, $y = 1 - 2x$, $x = 0$, $x = 5$.

5.88. $y = x^2 + 2$, $y = -e^x$, $x = -1$, $x = 4$.

5.89. $y = 2x^2 - 2x + 10$, $y = -x^2 + x + 4$, $x = 1$, $x = 5$.

Obliczyć pole obszaru zawartego między wykresami funkcji:

5.90. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

5.91. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

5.92. $f(x) = 4 - x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$.

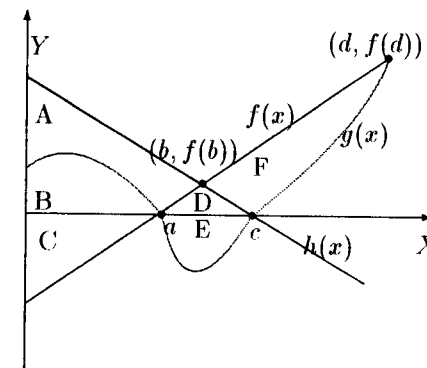
5.93. $f(x) = x^3$, $g(x) = x$, $h(x) = 2x$.

5.94. Dochód krańcowy z produktów pewnej firmy jest funkcją:

$$DK(i) = -0,04i + 10,$$

gdzie i – oznacza liczbę sprzedanych sztuk.

- Wyznaczyć całkowity dochód ze sprzedaży 200 jednostek tego produktu.
- Ile wynosi dochód związany ze wzrostem sprzedaży ze 100 do 200 sztuk.



Rysunek 5.3: Pola między liniami

5.95. Producent silników samolotowych szacuje, że stopa wzrostu kosztów użytkowania silnika jest funkcją liczby godzin pracy silnika- t i wyraża się następująco:

$$s(t) = 60 + 0,04t^2,$$

gdzie t -mierzone w godzinach, a $s(t)$ - w zł na godzinę pracy.

- Wyznaczyć wzrost kosztów użytkowania po 100h pracy.
- Jaki jest całkowity koszt utrzymania silnika w ciągu 100h pracy?

5.96. Firma rozpoczyna kampanię reklamową swoich produktów. Dzienny koszt reklamy wynosi 5 950 zł. Specjalista od marketingu szacuje, że stopa wzrostu zysku firmy z tytułu reklamy jest malejąca wraz z długością trwania kampanii. Oszacowano, że jest to funkcja:

$$s(t) = -50t^2 + 10.000,$$

gdzie t - kolejny dzień kampanii, a $s(t)$ - mierzone w zł na dzień. Aby zmaksymalizować zysk, firma powinna prowadzić reklamę, dopóki stopa zysku nie będzie mniejsza od dziennych kosztów reklamy.

- Jak długo powinna trwać kampania?
- Jaki jest całkowity koszt kampanii podczas jej trwania?

5.97. Stopa wzrostu kosztów utrzymania pewnego urządzenia ma postać:

$$s(t) = 1000 + 25t^2,$$

gdzie t -mierzone w latach.

- Wyznaczyć koszt utrzymania w drugim roku użytkowania.
- Wyznaczyć koszt utrzymania w ciągu dziesięciu pierwszych lat.

5.98. Stopa przyrostu dochodu z akcji reklamowej produktów pewnej firmy jest funkcją liczby dni (t) trwania akcji:

$$s(t) = -10t^2 + 60t + 70,$$

gdzie $s(t)$ jest liczone w zł na dzień.

- Wyznaczyć dochód uzyskany w ciągu drugiego dnia akcji.
- Wyznaczyć dochód uzyskany w ciągu pierwszych trzech dni akcji.
- Wyznaczyć liczbę dni, która maksymalizuje dochód z akcji.

5.99. Dana jest stopa kosztów utrzymania i zysków płynących z użytkowania pewnego urządzenia: $k(t) = 4t$, $z(t) = 20 - t^2$. Wyznaczyć realny zysk w ciągu pierwszego roku eksploatacji.

5.100. ([Kr]) W pewnym zakładzie produkcyjnym stwierdzono, że w przedziale czasu $\langle 0, T \rangle$ zapas surowca maleje zgodnie z funkcją $y = f(t)$ i na tej podstawie oszacowano, że średni zapas wynosi:

$$Z = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

gdzie Z - w tonach. Jaki będzie średni zapas surowca po upływie 6 dni od momentu dostawy (zakładamy, że w momencie dostawy stan magazynu wynosił 0), jeśli:

$$f(t) = \frac{2t - 1}{t^2 + 4}.$$

5.101. Popyt na pewien produkt maleje eksponencjalnie, zgodnie z funkcją:

$$P(t) = 250.000e^{-0,15t}.$$

Jeżeli popyt będzie malał nadal w ten sam sposób:

- Wyznaczyć roczny spadek popytu.
- Ile jednostek produktu zostanie sprzedanych przez kolejne 5 lat?

5.102. Firma wytwarzająca telewizory szacuje, że sprzedaż jej wyrobów wzrasta w czasie i jest następującą funkcją:

$$f(t) = \sqrt{1,2t + 10},$$

gdzie t - mierzone w latach, a $f(t)$ - w tysiącach jednostek. Ile wyniesie całkowita sprzedaż w ciągu następnych czterech lat?

5.103. Niech $PP(c)$ będzie funkcją popytu pewnego towaru przy cenie c , a $PD(c)$ - funkcją jego podaży.

- Naszkieować obie funkcje.
- Wyznaczyć punkt równowagi i wartość popytu w tym punkcie.

3. Wyznaczyć nadwyżkę użyteczności towaru, gdy rynek jest w równowadze, jeżeli:

- $PP(c) = c^2 - 100c + 2500$, $PD(c) = 0,5c^2 - 200$,
- $PP(c) = 4c^2 - 500$, $PD(c) = 3c^2 + 20c + 1000$,
- $PP(c) = 10.000e^{-0,1c}$, $PD(c) = 0,2c$,
- $PP(c) = \frac{1000}{c+10}$, $PD(c) = 10c$,
- $PP(c) = c^2 - 40c + 400$, $PD(c) = c^2 - 100$.

Spis Literatury

- [BZ] R.A. Barnett, M.R. Ziegler, *Applied Mathematics for Business and Economics, Life Sciences, and Social Sciences*, Dellen Publishing Co., San Francisco 1986.
- [BKN] T. Bażańska, I. Karwacka, M. Nykowska, *Zadania z matematyki. Podręcznik dla studiów ekonomicznych*, PWN, Warszawa 1977.
- [Bu] F.S. Budnick, *Applied Mathematics for Business, Economics, and the Social Sciences*, McGraw-Hill, New York 1993.
- [Ch] A.C. Chiang, *Podstawy ekonomii matematycznej*, PWE, Warszawa 1994.
- [Cz] T. Czechowski, *Wprowadzenie do zastosowań matematyki w ekonomii*, PWN, Warszawa 1979.
- [DFS] W. Dubnicki, L. Filus, H. Sosnowska, *Algebra liniowa w zadaniach*, PWN, Warszawa 1985.
- [JKS] Z. Jędrzejczyk, K. Kukuła, J. Skrzypek, A. Walkosz, *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*, PWN, Warszawa 1996.
- [Kr] H. Kryński, *Matematyka wyższa z elementami zastosowań w ekonomii*, PWN, Warszawa 1977.
- [LNZ] W. Leksiński, J. Nabiałek, W. Żakowski, *Matematyka. Definicje, twierdzenia, przykłady, zadania*, WNT 1992.
- [Mi] W.P. Minorski, *Zbiór zadań z matematyki wyższej*, WNT, Warszawa 1972.
- [OO] A. Ostoja-Ostaszewski, *Matematyka w ekonomii. Modele i metody*, PWN, Warszawa 1996.
- [Pi] J. Piszczala, *Matematyka i jej zastosowanie w naukach ekonomicznych*, Akademia Ekonomiczna, Poznań 1994.
- [Si] Praca zbiorowa pod red. L. Siewierskiego, *Ćwiczenia z analizy matematycznej z zastosowaniami*, PWN, Warszawa 1982.

- [St] T. Stanis, *Funkcje jednej zmiennej w badaniach ekonomicznych*, PWN, Warszawa 1993.
- [Sw] J. Stewart, *Calculus*, Brooks / Cole Publishing Co., Belmont California 1991.

Skorowidz

- aksjomat, 9
- alternatywa, 10
- amortyzacja, 93
- analiza krańcowa, 138
- asymptota
 - pionowa, 102
 - pozioma, 103
 - ukośna, 103
- baza
 - przestrzeni liniowej, 79
 - standardowa, 79
 - własna, 80
- bijekcja, 26
- całka
 - nieoznaczona, 175
 - oznaczona, 184
- całkowanie
 - przez części, 176, 187
 - przez podstawienie, 178, 187
 - stopy, 190
- ciąg, 101
- determinant*, 52
- diagonała macierzy, 50
- dochód krańcowy, 138
- dopełnienie
 - algebraiczne, 52
 - zbioru, 14
- dziedzina
 - funkcji, 26
 - funkcji zdaniowej, 12
- ekstremum
 - globalne, 126, 161
 - lokalne, 125, 158
 - warunkowe, 163
 - względne, 163
- elastyczność, 139, 172
- element zbioru, 13
- eliminacja Gaussa, 35
- formuła rachunku zdań, 10
- funkcja, 26
 - całkowalna, 175
 - ciągła, 102
 - Cobba-Douglasa, 172
 - dochodu, 106
 - kosztu, 89
 - kwadratowa, 105
 - Lagrange'a, 163
 - logarytmiczna, 115
 - logistyczna, 115
 - „na”, 26
 - pierwotna, 175
 - podaż, 92, 107
 - popytu, 92, 108
 - różniczkowalna, 123
 - różnowartościowa, 26
 - wielomianowa, 109
 - wklęsła, 127
 - wykładnicza, 113
 - wymierna, 112
 - wypukła, 127
 - wzajemnie jednoznaczna, 26
 - zdaniowa, 12
 - zysku, 89
- funktor logiczny, 9

gradient, 157
 graf skierowany, 70
 granica
 ciągu, 101
 funkcji, 102
 hesjan, 160
 iloczyn
 kartezjański, 15
 zbiorów, 14
 iloraz różnicowy, 123
 implikacja, 10
 iniekcja, 26
 kapitalizacja odsetek, 113
 klasa równoważności, 22
 kolumna, 47
 kombinacja liniowa wektorów, 77
 koniunkcja, 10
 koszt krańcowy, 138
 krańcowa produkcyjność, 172
 kwantyfikikator
 ogólny, 12
 szczegółowy, 12
 liniowa
 niezależność wektorów, 77
 zależność wektorów, 77
 liniowy układ dynamiczny, 68
 macierz, 47
 dołączona, 52
 identycznościowa, 50
 jednostkowa, 50
 kwadratowa, 47
 odwrotna, 50
 przejścia, 68
 maksimum
 globalne, 126, 161
 lokalne, 125, 158
 metoda Sarrusa, 53
 minimum
 globalne, 126, 161

 lokalne, 125, 158
 minor macierzy, 55
 mnożnik Lagrange'a, 163
 monotoniczność, 125
 $\mathbb{N}$, 15
 negacja, 9
 obraz
 funkcji, 26
 zbioru, 26
 odwzorowanie liniowe, 81
 opis parametryczny, 152
 optymalizacja, 135
 planowanie produkcji, 65
 pochodna
 cząstkowa, 156
 wyższego rzędu, 159
 funkcji, 123
 kierunkowa, 157
 mieszana, 159
 wyższego rzędu, 126
 pojęcie pierwotne, 9
 pole figury, 189
 prawa
 de Morgana, 11, 12, 15
 rozdzielności, 11
 prawo
 podwójnego przeczenia, 11
 rachunku zdań, 11
 wyłączonego środka, 11
 przeciwdziedzina funkcji, 26
 przeciwobraz
 zbioru, 26
 przekątna macierzy, 50
 przestrzeń, 14
 liniowa, 76
 wektorowa, 76
 punkt
 krytyczny, 126, 158
 opłacalności, 90
 przebiegu, 127
 równowagi, 68

$\mathbb{Q}$, 15
 $\mathbb{R}$, 15
 równowaga rynkowa, 95, 108
 równoważność, 10
 relacja, 21
 porządku, 23
 równoważności, 21
 reprezentacja macierzowa, 82
 rozwarstwienie, 23
 rozwinięcie Laplace'a, 52
 różnica zbiorów, 14
 rząd
 kolumnowy, 78
 macierzy, 56
 wierszowy, 78
 schemat zdaniowy, 10
 spójnik, 9
 strzałka grafu, 70
 suma zbiorów, 14
 suriekcja, 26
 tautologia, 11
 transpozycja macierzy, 50
 Twierdzenie Podstawowe Rachunku Cał-
 kowego, 186, 187
 układ
 cramerowski, 57
 równań liniowych, 33
 ułamki proste, 179
 warstwa, 22
 warstwica funkcji, 150
 wartość
 funkcji, 26
 własna, 80
 wektor
 kolumnowy, 47
 własny, 80
 wierszowy, 47
 węzeł grafu, 70

wielomian charakterystyczny macierzy,
 63
 wiersz, 47
 wykres
 funkcji, 27, 148
 wzory Cramera, 57
 $\mathbb{Z}$, 15
 zaprzeczenie, 9
 zbiór, 13
 zdanie, 9
 złożenie funkcji, 28
 zmienna zdaniowa, 10