

KOMITET AUTOMATYKI I ROBOTYKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

KOMITET AUTOMATYKI I ROBOTYKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK
POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

MONOGRAFIE

TOM 1

Komitety Redakcyjne

Zdzisław Bubnicki (przewodniczący), Władysław Findeisen,
Tadeusz Kaczorek, Roman Kulikowski, Adam Morecki,
Antoni Niederliński, Władysław Pelczewski, Jan Węglarz

Mikołaj Busłowicz

ODPORNĄ STABILNOŚĆ UKŁADÓW DYNAMICZNYCH LINIOWYCH STACJONARNYCH Z OPÓŹNIENIAMI

Opiniodawcy:

prof. zw. dr inż. Henryk Górecki
prof. zw. dr hab. inż. Tadeusz Kaczorek

**wydanie publikacji dofinansowane
przez Komitet Badań Naukowych**

Opracowanie redakcyjne – Jadwiga Żukowska
Skład komputerowy – Autor, Teresa Dawidowicz
Rysunki – Autor, Wiesława Markowska

ISSN 1640–8969

Skład komputerowy i druk w Dziale Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej. Nakład 300 egz. Format B-5. Ark. wyd. 17,0. Ark. druk. 20,5. Zam. 39/2000.

PRZEDMOWA

Praca prof. Mikołaja Busłowicza pt. „Odporna stabilność układów dynamicznych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami” jest pierwszym tomem cyklu monografii Komitetu Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk. Jest to wznowienie po długiej przerwie serii „Monografie Automatyki” wydawanej pod auspicjami naszego Komitetu. Korzystając z okazji, zwracam się z prośbą do potencjalnych autorów o przekazywanie propozycji wydawania kolejnych monografii w tym cyklu. Ustalona przez Komitet tematyka monografii obejmuje szeroki zakres automatyki i robotyki zawierający również zagadnienia teorii i techniki systemów (analizy systemowej), a także zagadnienia badań operacyjnych, inżynierii wiedzy, sztucznej inteligencji i informatyki związane z problemami sterowania i automatyki.

Miło mi, że z pełnym przekonaniem mogę zarekomendować książkę prof. Mikołaja Busłowicza otwierającą nasz cykl monografii. Jest to niewątpliwie wartościowa pozycja, łącząca wysokie walory naukowe z pożytecznymi aspektami informacyjnymi, które mogą być przydatne nie tylko pracownikom naukowym, ale również studentom odpowiednich kierunków studiów oraz projektantom układów dynamicznych (w szczególności – układów automatyki). Problematyka tak zwanej odporności systemów, a w szczególności stabilności niepewnych systemów sterowania jest obecnie bardzo aktualna i żywo rozwijająca się. Jest to związane z częstymi sytuacjami praktycznymi, w których występuje niepewność dotycząca stałych lub zmiennych parametrów systemu i zachodzi konieczność projektowania systemu tak, aby był on stabilny dla całego obszaru możliwych wartości nieznanymi parametrów. W książce w sposób jednolity i usystematyzowany omawiane są problemy i rezultaty z tego zakresu dla ważnego przypadku występowania opóźnień w systemie dynamicznym.

Mam nadzieję, że prezentowana praca przyczyni się do rozpowszechnienia i rozwoju tej problematyki w polskich środowiskach naukowych. Wyrażam również nadzieję, że jest to dobry początek przyszłego cyklu monografii Komitetu Automatyki i Robotyki PAN, których wydawanie będzie miało istotne znaczenie dla kształtowania nowoczesnej problematyki szeroko pojętej automatyki, robotyki i techniki systemów.

Przewodniczący Komitetu Automatyki i Robotyki
Polskiej Akademii Nauk

Zdzisław Bubnicki

Wrocław, maj 2000

SPIS TREŚCI

	Strona
1. Wstęp	11
2. Wprowadzenie	17
2.1. Rozkład zer asymptotycznych i typy quasi-wielomianów	18
2.2. Podstawowe definicje	21
2.3. Metody badania stabilności quasi-wielomianów	27
2.3.1. Stabilność przy ustalonych wartościach opóźnień	28
2.3.2. Stabilność niezależnie od wielkości współmiernych opóźnień	34
2.3.2.1. Uwagi końcowe	40
2.3.3. Stabilność niezależnie od wielkości niewspółmiernych opóźnień	41
2.3.4. Stabilność w zależności od wielkości współmiernych opóźnień	48
2.4. Właściwości argumentu asymptotycznie stabilnych quasi-wielomianów	57
3. Wprowadzenie do teorii odpornej stabilności rodzin quasi-wielomianów charakterystycznych	66
3.1. Podstawowe definicje i twierdzenia	67
3.2. Metody badania odpornej stabilności	69
3.2.1. Warunek wykluczenia zera	70
3.2.2. Metoda przestrzeni niepewnych parametrów	77
3.2.3. Badanie odpornej stabilności przy obszarach D ogólniejszych niż przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna	85
4. Odporna stabilność rodziny quasi-wielomianów o znanych opóźnieniach	89
4.1. Badanie odpornej stabilności w przypadku ogólnym	90
4.2. Odporna stabilność wypukłej kombinacji dwóch quasi-wielomianów	95
4.3. Odporna stabilność rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów	104

4.3.1. Zbiór wartości	106	6.4.3. Odporna stabilność przy niedokładnie znanej wielkości opóźnień	246
4.3.2. Warunek wykluczenia zera	109	6.4.4. Uwagi końcowe	250
4.3.3. Twierdzenie krawędziowe	116	7. Odporna stabilność rodziny quasi-wielomianów o niepewnych opóźnieniach	252
4.3.4. Metody funkcji testujących	121	7.1. Odporna stabilność rodziny quasi-wielomianów o znanych współczynnikach i o niepewnych opóźnieniach	252
4.3.4.1. Metoda funkcji testującej $d(\omega)$	122	7.1.1. Niewspółmierne opóźnienia	252
4.3.4.2. Metoda funkcji testującej $T(\omega)$	124	7.1.2. Współmierne opóźnienia	270
4.3.4.3. Metoda funkcji testującej $F(\omega)$	128	7.2. Odporna stabilność rodziny quasi-wielomianów o niepewnych współczynnikach i o niepewnych opóźnieniach	277
4.3.4.4. Metody funkcji testujących dla rodziny członów dominujących	130	7.2.1. Rodzina quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów	280
4.4. Odporna stabilność rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów	136	7.2.2. Quasi-wielomian przedziałowy	288
4.5. Odporna stabilność rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo lub wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów przy obszarach D ogólniejszych niż przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna	145	8. Uwagi końcowe	298
5. Odporna stabilność niezależnie od wielkości niewspółmiernych opóźnień rodziny quasi-wielomianów	160	Dodatki	302
5.1. Odporna stabilność niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianów przedziałowych	163	Dodatek A. Odporna stabilność wielomianów przedziałowych	302
5.2. Odporna stabilność niezależnie od wielkości opóźnień rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów	173	Dodatek B. Obliczanie odległości wypukłego wieloboku od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej	306
5.3. Odporna stabilność niezależnie od wielkości opóźnień rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów	184	Bibliografia	309
6. Odporna stabilność quasi-wielomianów przedziałowych	193		
6.1. Metody badania odpornej stabilności	194		
6.2. Odporna stabilność w pewnych przypadkach szczególnych	207		
6.2.1. Odporna stabilność przy niepewnych opóźnieniach	213		
6.3. Odporna stabilność zaburzonych quasi-wielomianów	222		
6.4. Odporna stabilność przedziałowego układu regulacji automatycznej z jednym opóźnieniem	232		
6.4.1. Odporna stabilność przy ustalonej wielkości opóźnienia	234		
6.4.2. Odporna stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia	243		

1. WSTĘP

Układami z opóźnieniami nazywamy takie układy dynamiczne, w których stan przyszły zależy nie tylko od stanu w danej chwili, ale też od stanów przeszłych (w pewnym przedziale czasu), których wpływu nie można pominąć. Chcąc uwzględnić czas opóźnienia w ich modelu matematycznym, należy stosować równania o ogólniejszej postaci niż równania różniczkowe, a mianowicie równania funkcyjne lub różniczkowo-różnicowe. Opóźnienia mogą być rozłożone lub dyskretne (skupione). Układy dynamiczne z rozłożonymi opóźnieniami opisuje się równaniami funkcyjnymi, a układy z dyskretnymi opóźnieniami opisuje się równaniami różniczkowo-różnicowymi, liniowymi bądź nieliniowymi. Pewne klasy układów z opóźnieniem rozłożonym można też w przybliżeniu dobrze opisać równaniami różniczkowo-różnicowymi.

Teoria równań różniczkowo-różnicowych i funkcyjnych ma bogatą literaturę, np. [84, 85, 97, 98, 82]. Problemowi analizy i syntezy układów dynamicznych z opóźnieniami są poświęcone monografie [27, 83, 91, 92, 93, 114, 116, 131, 134, 148, 152].

Zjawisko opóźnienia występuje nie tylko w technice, ale także w biologii, biochemii, ekonomii i innych dziedzinach. Typowymi procesami z opóźnieniem są procesy mieszania, spalania czy też inne, w których występuje transport mas, energii itp. Do układów z opóźnieniem należy też układ człowiek-maszyna. Udział człowieka w procesie sterowania wprowadza opóźnienie w sygnale sterującym. Wynika to z psychofizycznych właściwości człowieka. Modele matematyczne układów z opóźnieniami są podane np. w artykułach [96, 115, 132] oraz w monografiach [83, 85, 90, 91, 92, 93, 114, 119, 128, 131, 140, 148, 152, 164].

Niniejsza praca jest poświęcona problemowi badania stabilności ciągłych dynamicznych układów liniowych stacjonarnych z dyskretnymi opóźnieniami przy niepełnej informacji dotyczącej parametrów tych układów. Jest to ważny problem nie tylko ze względu na rozważania teoretyczne, ale też ze względu na zastosowania praktyczne. W działalności praktycznej nie znamy bowiem dokładnych wartości parametrów układów fizycznych. Znamy jedynie przybliżone ich wartości. Przyjmuje się najczęściej, że niepewne parametry mogą przyjmować swoje wartości ze znanych przedziałów liczbowych. Taka sytuacja ma miejsce np. przy opisie dynamiki procesów technologicznych, biologicznych czy ekonomicznych.

Układy dynamiczne, których modele matematyczne zawierają niepewność dotyczącą wartości parametrów, są nazywane układami o niepewnych parametrach. Stabilność takich układów jest nazywana stabilnością odporną lub krzepką.

Stabilność dynamicznego układu liniowego stacjonarnego jest w pełni określona przez rozkład na płaszczyźnie zmiennej zespolonej jego biegunów, tj. zer jego funkcji charakterystycznej, która jest wielomianem w przypadku układów bez opóźnień i quasi-wielomianem w przypadku układów z opóźnieniami. Współczynniki funkcji charakterystycznej zależą od fizycznych parametrów układu dynamicznego. Dlatego też, jeżeli ich wartości nie są znane dokładnie, to też nie są dokładnie znane współczynniki funkcji charakterystycznej. Z tego powodu badając odporną stabilność układów liniowych stacjonarnych z opóźnieniami o niepewnych parametrach rozpatruje się odporną stabilność rodzin quasi-wielomianów charakterystycznych.

Quasi-wielomian charakterystyczny jest wyznacznikiem macierzy charakterystycznej, którą tworzy się na podstawie znajomości macierzy występujących w równaniu stanu wielowymiarowych układów dynamicznych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami (np. [27]). Elementy tych macierzy nie są dokładnie znane w przypadku układów o niepewnych parametrach. Odporną stabilność takich układów można badać bez konieczności wyznaczania ich quasi-wielomianu charakterystycznego, stosując między innymi metodę Lapunowa. Jest to inne podejście do problemu badania odpornej stabilności układów z opóźnieniami, które nie będzie rozpatrywane w niniejszej pracy.

Problem badania odpornej stabilności wielowymiarowych dynamicznych układów liniowych z opóźnieniami (o niepewnych elementach w macierzach występujących w równaniu stanu lub/i o niepewnych opóźnieniach) był rozpatrywany np. w pracach [26, 28, 32, 73, 83, 101, 112, 113, 121, 124, 127, 129, 130, 149, 151, 154, 162].

Celem niniejszej monografii jest podanie komputerowych metod badania odpornej stabilności rodzin quasi-wielomianów charakterystycznych, typu neutralnego i opóźnionego, z opóźnieniami współmiernymi i niewspółmiernymi, o współczynnikach zależnych w sposób ciągły od niepewnych parametrów, które mogą przyjmować swoje wartości ze znanych przedziałów liczbowych.

Problem badania stabilności quasi-wielomianów charakterystycznych jest problemem trudnym, nawet w przypadku dokładnie znanych współczynników. Wynika to stąd, że quasi-wielomian ma nieskończenie wiele zer i nie istnieją ogólne analityczne metody służące do sprawdzania ich położenia na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Z powodzeniem mogą być tutaj stosowane metody graficzne (częstotliwościowe), wynikające z zasady argumentu. Mogą one być efektywnie wykorzystane jedynie przy stosowaniu obliczeń komputerowych.

W pracy rozpatrzono ogólniejszy rodzaj stabilności niż stabilność asymptotyczna, a mianowicie tzw. D -stabilność. Układ liniowy stacjonarny (z opóźnieniami lub bez opóźnień) jest D -stabilny, jeżeli wszystkie jego bieguny leżą w danym obszarze D na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Ze względu na specyfikę rozkładu zer quasi-wielomianów ograniczono się głównie do rozpatrywania D -stabilności w przypadku, gdy obszar D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną. W przypadku szczególnym, gdy D jest otwartą lewą półpłaszczyzną, D -stabilność jest równoważna ze stabilnością asymptotyczną.

W rozdziale 2, będącym wprowadzeniem do teorii stabilności układów z opóźnieniami, podano komputerowe metody służące do badania stabilności i D -stabilności quasi-wielomianów o dokładnie znanych współczynnikach, typu opóźnionego i neutralnego, z opóźnieniami współmiernymi i niewspółmiernymi. Rozpatrzono w nim stabilność przy ustalonych wartościach opóźnień, niezależnie od wielkości opóźnień (współmiernych i niewspółmiernych), a także w funkcji wielkości współmiernych opóźnień. Omówiono też właściwości argumentu asymptotycznie stabilnych quasi-wielomianów.

W przypadku, gdy obszar D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną, badanie D -stabilności quasi-wielomianu typu neutralnego z wykorzystaniem metod częstotliwościowych można znacznie ułatwić, badając oddzielnie D -stabilność członu dominującego tego quasi-wielomianu. Jest ona warunkiem koniecznym D -stabilności quasi-wielomianu typu neutralnego. Dlatego też w rozdziale 2 podano komputerowe metody badania D -stabilności członu dominującego.

Jednym z rodzajów stabilności układów z opóźnieniami jest asymptotyczna stabilność niezależnie od wielkości niewspółmiernych opóźnień. W literaturze istnieje kilka kryteriów takiego rodzaju stabilności. Nie one są sobie równoważne w przypadku ogólnym. Dlatego też, w punkcie 2.3.3 podano nowe kryterium asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości niewspółmiernych opóźnień quasi-wielomianów, które zostało sformułowane z wykorzystaniem klasycznego pojęcia takiej stabilności. Zgodnie z tym pojęciem, quasi-wielomian jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości niewspółmiernych opóźnień, jeżeli jest on asymptotycznie stabilny dla dowolnych ustalonych wartości opóźnień, dodatnich lub zerowych.

Rozdział 3 jest wprowadzeniem do teorii odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów charakterystycznych. Podano w nim podstawowe definicje i twierdzenia z zakresu odpornej D -stabilności, w przypadku gdy obszar D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną. Opisano też ogólne metody, które mogą być stosowane do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów charakterystycznych oraz rodziny członów dominujących rodziny quasi-wielomia-

nów typu neutralnego. Należy do nich metoda bezpośredniego sprawdzania warunku wykluczenia zera oraz metoda przestrzeni niepewnych parametrów.

W końcowej części rozdziału 3 podano wprowadzenie do teorii odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów charakterystycznych w przypadku obszarów D ogólniejszych niż przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna. Podano założenia, jakie musi spełniać obszar D , aby problem badania odpornej D -stabilności był sformułowany poprawnie.

Rozdział 4 jest poświęcony problemowi badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów oraz rodziny członów dominujących o znanych wartościach liczbowych opóźnień, głównie w przypadku, gdy obszar D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną. Rozpatrzono w nim problem badania odpornej D -stabilności wypukłej kombinacji dwóch quasi-wielomianów, rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych od niepewnych parametrów liniowo oraz wieloliniowo.

Do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów można stosować twierdzenie krawędziowe. Sprowadza ono problem badania odpornej D -stabilności takiej rodziny do problemu badania odpornej D -stabilności tzw. quasi-wielomianów krawędziowych, odpowiadających poszczególnym krawędziom zbioru wartości niepewnych parametrów. Ponieważ quasi-wielomiany krawędziowe są to kombinacje wypukłe dwóch quasi-wielomianów, do badania ich odpornej D -stabilności można stosować metody podane w punkcie 4.2.

Stosowanie twierdzenia krawędziowego nie jest dogodne przy dużej liczbie niepewnych parametrów, z powodu konieczności badania odpornej D -stabilności dużej liczby quasi-wielomianów krawędziowych. Aby uniknąć tej niedogodności, należy stosować tzw. metody funkcji testujących, podane w punkcie 4.3.4. Pozwalają one na jednoczesne badanie odpornej D -stabilności wszystkich quasi-wielomianów krawędziowych.

W końcowej części rozdziału 4 rozpatrzono problem badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych od niepewnych parametrów liniowo oraz wieloliniowo przy obszarach D ogólniejszych niż przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna.

W **rozdziale 5** podano komputerowe metody, zwane metodami funkcji testującej, badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości niewspółmiernych opóźnień rodzin quasi-wielomianów. Sformułowano ogólne kryterium takiego rodzaju stabilności oraz podano komputerowe metody i algorytmy badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości niewspółmiernych opóźnień rodziny quasi-wielomianów z przedziałowym oszacowaniem wartości poszczególnych współczynników, zwanej quasi-wielomianem przedziałowym, rodziny quasi-wielomia-

nów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów oraz rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów.

Rozdział 6 jest poświęcony problemowi badania odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego. Komputerowa metoda badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości niewspółmiernych opóźnień takiego quasi-wielomianu została podana w punkcie 5.1.

Quasi-wielomian przedziałowy jest przypadkiem szczególnym rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów. Dlatego do badania jego odpornej stabilności przy znanych opóźnieniach można stosować metody opracowane dla rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów, podane w rozdziale 4, tzn. twierdzenie krawędziowe oraz metody funkcji testujących. Jest to jednak trudny problem ze względu na dużą liczbę niepewnych parametrów. Na podstawie analizy struktury zbioru wartości wykazano, że przy stosowaniu wyżej wymienionych metod można ograniczyć się do rozpatrywania zbioru tzw. krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa, których jest znacznie mniej niż quasi-wielomianów krawędziowych. Ponadto, liczba krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa nie zależy od liczby niepewnych parametrów.

W rozdziale 6 podano też trzy komputerowe metody badania odpornej D -stabilności zaburzonego quasi-wielomianu, które pozwalają na wyznaczenie dopuszczalnych odchyłek współczynników quasi-wielomianu charakterystycznego od ich wartości nominalnych, przy których dany quasi-wielomian pozostaje odpornie D -stabilny.

W rozdziale 6 rozpatrzono też problem badania odpornej stabilności przedziałowego układu regulacji automatycznej z jednym opóźnieniem, w którym obiekt jest opisany rodziną transmitancji przedziałowych (licznik i mianownik są wielomianami przedziałowymi). Podano komputerowe metody badania odpornej stabilności tego układu. Rozpatrzono odporną stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia, przy ustalonej wartości opóźnienia, a także w przypadku, gdy wielkość opóźnienia nie jest dokładnie znana.

Rozdział 7 jest poświęcony problemowi badania odpornej stabilności rodziny quasi-wielomianów o niepewnych opóźnieniach. Jest to problem bardzo trudny ze względu na wykładniczą zależność quasi-wielomianu charakterystycznego od opóźnień. W literaturze są mu poświęcone tylko nieliczne prace, w których rozpatruje się pewne przypadki szczególne.

W rozdziale 7 rozpatrzono problem badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów o dokładnie znanych współczynnikach i o niepewnych opóźnieniach (niewspółmiernych i współmiernych) oraz problem badania odpornej

D -stabilności rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów (w tym quasi-wielomianów przedziałowych) i o niepewnych opóźnieniach. Zostały podane metody funkcji testujących służące do badania odpornej stabilności oraz odpornej D -stabilności przy obszarze D , będącym przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną. Pokazano, że metodę przestrzeni niepewnych parametrów można z powodzeniem stosować w przypadku, gdy granice D -stabilności rozpatruje się na płaszczyźnie dwóch niepewnych parametrów, które nie są opóźnieniami.

W rozdziale 8 krótko podsumowano rezultaty pracy.

W Dodatkach podano metodę badania odpornej stabilności wielomianów przedziałowych oraz algorytm wyznaczania odległości wypukłego wieloboku od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej. Jest on wykorzystywany przy badaniu odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień rodzin quasi-wielomianów rozpatrywanych w rozdziale 5 (punkty 5.2 i 5.3).

2. WPROWADZENIE

W niniejszym rozdziale podamy podstawowe wiadomości dotyczące rozkładu zer quasi-wielomianów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej oraz komputerowe metody służące do badania asymptotycznej stabilności i D -stabilności quasi-wielomianów typu opóźnionego i neutralnego o dokładnie znanych współczynnikach z opóźnieniami współmiernymi i niewspółmiernymi. Rozpatrzmy stabilność przy ustalonych wartościach opóźnień, niezależnie od wielkości opóźnień (współmiernych i niewspółmiernych), a także w funkcji wielkości współmiernych opóźnień. Omówimy też właściwości argumentu asymptotycznie stabilnych quasi-wielomianów.

Weźmy pod uwagę dynamiczny układ liniowy stacjonarny z opóźnieniami, opisany jednorodnym równaniem różniczkowo-różnicowym, o postaci

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^m a_{ki} x^{(k)}(t - h_i) = 0, \quad (2.1)$$

gdzie $x^{(k)}(t) = (d^k / dt^k)x(t)$, a_{ki} są to rzeczywiste współczynniki, zaś h_i są to stałe opóźnienia. Nie zmniejszając ogólności rozważań będziemy przyjmować, że $h_0 = 0 < h_1 < h_2 < \dots < h_m < \infty$.

Aby zapewnić jednoznaczność rozwiązania równania (2.1), należy określić funkcję początkową $x(t_0 + \tau) = \varphi(\tau)$, $\tau \in [-h_m, 0]$. Będziemy przyjmować, że $\varphi(\tau)$ jest funkcją ciągłą.

Jeżeli brak takiego h , dla którego $h_i = k_i h$ ($i = 1, 2, \dots, m$), gdzie k_i są to liczby naturalne, to równanie (2.1) opisuje dynamiczny układ z niewspółmiernymi opóźnieniami. Jeżeli zaś $h_i = k_i h$ dla $i = 1, 2, \dots, m$, to równaniem (2.1) opisany jest układ ze współmiernymi opóźnieniami. W dalszych rozważaniach, nie zmniejszając ich ogólności, przy opisie układu ze współmiernymi opóźnieniami będziemy przyjmować $k_i = i$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Funkcja charakterystyczna układu (2.1) jest quasi-wielomianem mającym postać

$$w(s, \mathbf{h}) = \sum_{k=0}^n s^k \sum_{i=0}^m a_{ki} e^{-sh_i}, \quad (2.2)$$

gdzie $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_m]$ jest wektorem niezerowych opóźnień. W wektorze $\mathbf{h}$ nie uwzględniamy opóźnień h_0 , bowiem z założenia jest ono równe zero.

W przypadku szczególnym, gdy układ (2.1) jest układem ze współmiernymi opóźnieniami, quasi-wielomian charakterystyczny (2.2) ma postać

$$w(s, h) = \sum_{k=0}^n s^k \sum_{i=0}^m a_{ki} e^{-s h}, \quad h > 0. \quad (2.2a)$$

Quasi-wielomian charakterystyczny (2.2) można napisać w postaci

$$w(s, \mathbf{h}) = w_0(s) + \sum_{i=1}^m w_i(s) e^{-sh_i}, \quad (2.3)$$

gdzie

$$w_i(s) = \sum_{k=0}^n a_{ki} s^k, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (2.4)$$

lub, równoważnie, w postaci

$$w(s, \mathbf{h}) = \sum_{k=0}^n s^k d_k(e^{-sh}), \quad (2.5)$$

gdzie

$$d_k(e^{-sh}) = a_{k0} + \sum_{i=1}^m a_{ki} e^{-sh_i}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (2.6)$$

przy czym $d_k(e^{-sh}) = d_k(e^{-sh_1}, \dots, e^{-sh_m})$.

2.1. Rozkład zer asymptotycznych i typy quasi-wielomianów

Quasi-wielomian (2.2) ma nieskończenie wiele zer w przypadku ogólnym. Zera o dużych wartościach bezwzględnych, zwane zerami asymptotycznymi, układają się na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wzdłuż kilku krzywych symetrycznych względem osi rzeczywistej, tworząc tzw. łańcuchy zer asymptotycznych. Rozróżnia się łańcuchy zer asymptotycznych trzech typów: opóźnionego, neutralnego i wyprzedzonego.

Łańcuch zer asymptotycznych jest łańcuchem typu (np. [27]):

- opóźnionego, jeżeli leży on całkowicie w otwartej lewej półpłaszczyźnie i części rzeczywiste tworzących go zer dążą do minus nieskończoności przy $|s| \rightarrow \infty$, tzn. przy wartościach bezwzględnych tych zer dążących do nieskończoności,
- wyprzedzonego, jeżeli leży on całkowicie w otwartej prawej półpłaszczyźnie i części rzeczywiste tworzących go zer dążą do plus nieskończoności przy $|s| \rightarrow \infty$,
- neutralnego, jeżeli części rzeczywiste tworzących go zer dążą do pewnej stałej, tzn. $\operatorname{Re} s \rightarrow c = \text{const.}$ przy $|s| \rightarrow \infty$.

Quasi-wielomian (2.2) może być quasi-wielomianem typu opóźnionego, wyprzedzonego lub neutralnego, w zależności od typów łańcuchów jego zer asymptotycznych. Typ quasi-wielomianu (2.2) określa się na podstawie znajomości funkcji $d_n(\exp(-sh))$, zdefiniowanej wzorem (2.6) przy $k = n$, zwanej członem dominującym (lub neutralnym).

W dalszych rozważaniach człon dominujący quasi-wielomianu (2.2) z niewspółmiernymi opóźnieniami będziemy oznaczać przez $\Delta(\exp(-sh))$, tzn.

$$\Delta(e^{-sh}) = a_{n0} + \sum_{i=1}^m a_{ni} e^{-sh_i}. \quad (2.7)$$

W przypadku szczególnym, gdy opóźnienia są współmierne, człon dominujący quasi-wielomianu (2.2a) ma postać

$$\Delta(e^{-sh}) = a_{n0} + \sum_{i=1}^m a_{ni} e^{-sh_i}. \quad (2.7a)$$

Człon dominujący (2.7) jest wielomianem m zmiennych e^{-sh_i} , $i = 1, 2, \dots, m$. Jest on funkcją charakterystyczną układu opisanego równaniem różnicowym

$$a_{n0}x(t) + a_{n1}x(t - h_1) + \dots + a_{nm}x(t - h_m) = 0. \quad (2.8)$$

Quasi-wielomian (2.2) jest quasi-wielomianem typu opóźnionego, jeżeli wszystkie łańcuchy jego zer asymptotycznych są łańcuchami typu opóźnionego. Zachodzi to wtedy, gdy w wielomianie (2.7) współczynnik $a_{n0} \neq 0$, zaś $a_{ni} = 0$ dla $i = 1, 2, \dots, m$.

Quasi-wielomian (2.2) jest quasi-wielomianem typu wyprzedzonego, jeżeli przynajmniej jeden łańcuch jego zer asymptotycznych jest łańcuchem typu wyprzedzonego. Zachodzi to wtedy, gdy $a_{nm} \neq 0$, zaś $a_{ni} = 0$ dla $i = 0, 1, \dots, m - 1$.

Quasi-wielomian (2.2) jest quasi-wielomianem typu neutralnego, jeżeli nie jest on quasi-wielomianem typu wyprzedzonego i przynajmniej jeden łańcuch jego zer asymptotycznych jest łańcuchem typu neutralnego. Zachodzi to wtedy, gdy $a_{n0} \neq 0$ oraz $a_{ni} \neq 0$ dla pewnych $i = 1, 2, \dots, m$.

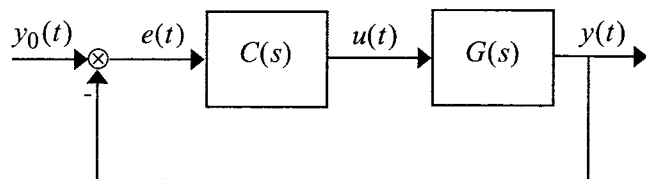
Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli quasi-wielomian (2.2) jest quasi-wielomianem typu opóźnionego lub neutralnego, to istnieje taka liczba rzeczywista b , dla której wszystkie jego zera asymptotyczne spełniają warunek $\text{Re } s < b$. Jeżeli natomiast jest on quasi-wielomianem typu wyprzedzonego, to istnieje taka liczba rzeczywista c , dla której wszystkie jego zera asymptotyczne leżą w półpłaszczyźnie $\text{Re } s > c$. Oznacza to, że quasi-wielomian (2.2) typu wyprzedzonego zawsze ma zera o dodatniej części rzeczywistej.

Typ układu dynamicznego z opóźnieniami określa się na podstawie typu jego quasi-wielomianu charakterystycznego. Rozróżnia się więc układy z opóźnieniami typu wyprzedzonego, neutralnego oraz opóźnionego. W zastosowaniach praktycznych spotyka się najczęściej układy typu opóźnionego, rzadziej układy typu neutralnego, natomiast prawie wcale nie spotyka się układów typu wyprzedzonego.

Przykład 2.1. Weźmy pod uwagę układ regulacji automatycznej o schemacie blokowym pokazanym na rysunku 2.1, gdzie $C(s)$ jest transmitancją operatorową regulatora, zaś

$$G(s) = \frac{k e^{-sh}}{1 + sT}, \quad (2.9)$$

przy czym $k > 0$, $T > 0$, $h > 0$, jest transmitancją operatorową obiektu z opóźnieniem.



Rys. 2.1. Schemat blokowy układu regulacji automatycznej

Jeżeli regulator jest regulatorem typu PI, o transmitancji operatorowej

$$C(s) = K_r(1 + 1/sT_i), \quad (2.10)$$

to quasi-wielomian charakterystyczny układu zamkniętego ma postać

$$w(s, h) = s^2 T T_i + s T_i + k K_r (1 + s T_i) e^{-sh}. \quad (2.11)$$

Jeżeli natomiast regulator jest regulatorem typu PID, o transmitancji operatorowej

$$C(s) = K_r(1 + 1/sT_i + sT_d), \quad (2.12)$$

to

$$w(s, h) = s^2 T T_i + s T_i + k K_r (s^2 T_i T_d + s T_i + 1) e^{-sh}. \quad (2.13)$$

Z powyższych rozważań wynika, że quasi-wielomian (2.11) jest quasi-wielomianem typu opóźnionego, zaś quasi-wielomian (2.13) jest quasi-wielomianem typu neutralnego. Oznacza to, że rozpatrywany układ regulacji automatycznej z regulatorem PI jest układem typu opóźnionego, natomiast jest on układem typu neutralnego w przypadku, gdy regulator jest regulatorem typu PID.

Wielomian zmiennej e^{-sh} , mający postać

$$\Delta(e^{-sh}) = T_i(T + k K_r T_d e^{-sh}), \quad (2.14)$$

jest członem dominującym (neutralnym) quasi-wielomianu (2.13) typu neutralnego. ■

2.2. Podstawowe definicje

Stabilność dynamicznego układu liniowego stacjonarnego z opóźnieniami jest całkowicie określona przez rozkład na płaszczyźnie zmiennej zespolonej zer jego quasi-wielomianu charakterystycznego. Z tego powodu dla uproszczenia sformułowań będziemy równoważnie mówić o stabilności układu dynamicznego z opóźnieniami i o stabilności jego quasi-wielomianu charakterystycznego. W rozważaniach ograniczymy się głównie do quasi-wielomianów o rzeczywistych współczynnikach.

Ogólną definicję asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (2.2) można sformułować w sposób podany poniżej.

Definicja 2.1. Quasi-wielomian (2.2) typu opóźnionego lub neutralnego będziemy nazywać quasi-wielomianem asymptotycznie stabilnym, jeżeli istnieje dodatnia liczba ϵ , dla której jest spełniony warunek

$$w(s, h) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq -\varepsilon, \quad (2.15)$$

tzn. części rzeczywiste wszystkich zer quasi-wielomianu (2.2) są mniejsze od $-\varepsilon$. ■

Spełnienie warunku (2.15) odpowiada stabilności wykładniczej rozwiązań równania (2.1) [16, 27, 84, 97, 98]. Ponadto, przy spełnieniu tego warunku zera quasi-wielomianu (2.2), typu neutralnego lub opóźnionego, zależą w sposób ciągły od wartości opóźnień $h_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ (np. [79]).

Z definicji 2.1 i z rozważań podanych powyżej przykładu 2.1 wynika, że quasi-wielomiany typu wyprzedzonego są zawsze niestabilne. Dlatego też w dalszych rozważaniach będziemy rozpatrywać tylko quasi-wielomiany typu neutralnego oraz opóźnionego.

Jeżeli $a_{n0} \neq 0$, to quasi-wielomian (2.2) nie jest quasi-wielomianem typu wyprzedzonego, może on być tylko quasi-wielomianem typu opóźnionego lub neutralnego. Dlatego też w dalszych rozważaniach, nie zmniejszając ich ogólności, będziemy przyjmować $a_{n0} > 0$.

Warunek (2.15) w przypadku quasi-wielomianu (2.2) typu opóźnionego jest równoważny z warunkiem

$$w(s, h) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0. \quad (2.16)$$

Powyższe wynika stąd, że części rzeczywiste zer asymptotycznych quasi-wielomianu (2.2) typu opóźnionego dążą do minus nieskończoności przy $|s| \rightarrow \infty$. Jeżeli więc jest spełniony warunek (2.16), to zawsze istnieje dowolnie mała dodatnia liczba ε , dla której zachodzi (2.15).

Spełnienie warunku (2.16) dla quasi-wielomianu (2.2) typu neutralnego nie jest równoważne z jego asymptotyczną stabilnością w pewnym przypadku szczególnym, zwanym przypadkiem asymptotycznie krytycznym. Taki przypadek jest omówiony w pracy [27] dla quasi-wielomianu ze współmiernymi opóźnieniami.

W przypadku asymptotycznie krytycznym wszystkie zera quasi-wielomianu (2.2) typu neutralnego leżą w otwartej lewej półpłaszczyźnie, przy czym istnieje przynajmniej jeden łańcuch zer asymptotycznych zbiegających do osi urojonej z lewej strony (oś urojona jest asymptotą). W takim przypadku rozwiązania równania (2.1) nie są wykładniczo asymptotycznie stabilne. Mogą one być rozwiązaniami asymptotycznie stabilnymi, ale wielomianowo. Przykład niestabilnego układu (2.1) typu neutralnego ze współmiernymi opóźnieniami, którego quasi-wielomian charakterystyczny, spełniający warunek (2.16), ma dwa łańcuchy zer asymptotycznych zbiegających do osi urojonej z lewej strony, jest podany w pracy [80] (patrz też [27]).

Położenie asymptot, do których zbiegają zera asymptotyczne quasi-wielomianu (2.2) typu neutralnego, zależy od wartości zer członu dominującego (2.7), bowiem quasi-wielomian (2.2) redukuje się do tego członu przy $|s| \rightarrow \infty$.

Definicja 2.2. Człon dominujący (2.7) będziemy nazywać członem asymptotycznie stabilnym, jeżeli istnieje dodatnia liczba ε , dla której jest spełniony warunek

$$\Delta(\exp(-sh)) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq -\varepsilon, \quad (2.17)$$

tzn. wszystkie zera członu dominującego mają części rzeczywiste mniejsze od $-\varepsilon$. ■

Zauważmy, że warunek (2.17) jest zawsze spełniony dla członu dominującego quasi-wielomianu (2.2) typu opóźnionego, bowiem w takim przypadku $\Delta(\exp(-sh)) = a_{n0}$.

Człon dominujący quasi-wielomianu (2.2a) ze współmiernymi opóźnieniami ma postać (2.7a). Stosując podstawienie $\exp(-sh) = z$, można go napisać w postaci

$$\Delta(z) = a_{n0} + a_{n1}z + \dots + a_{nm}z^m. \quad (2.18)$$

Zera wielomianu (2.18) i członu dominującego (2.7a) są związane zależnością $z = \exp(-sh)$, czyli $\operatorname{Re} s = -\ln|z|/h$.

Z powyższego wynika, że dla każdego skończonego $h > 0$ zera członu dominującego (2.7a) ze współmiernymi opóźnieniami leżą na płaszczyźnie zmiennej zespolonej na lewo od osi urojonej wtedy i tylko wtedy, gdy warunek $|z_i| > 1$ jest spełniony dla wszystkich zer z_i ($i = 1, 2, \dots, m$) wielomianu $\Delta(z)$. Warunek konieczny i wystarczający asymptotycznej stabilności członu dominującego (2.7a) ze współmiernymi opóźnieniami można wobec tego napisać w postaci

$$\Delta(z) \neq 0, \quad |z| \leq 1, \quad (2.19)$$

gdzie wielomian $\Delta(z)$ jest zdefiniowany wzorem (2.18). Zauważmy, że asymptotyczna stabilność tego członu nie zależy od wartości opóźnienia h .

Wielomian (2.18) jest inną postacią członu dominującego (2.7a) ze współmiernymi opóźnieniami. Dlatego też w dalszych rozważaniach wielomian (2.18) będziemy nazywać członem dominującym quasi-wielomianu (2.2a) typu neutralnego ze współmiernymi opóźnieniami, a warunek (2.19) będziemy nazywać warunkiem koniecznym i wystarczającym jego asymptotycznej stabilności.

Asymptoty, do których zbiegają łańcuchy zer asymptotycznych quasi-wielomianu (2.2a) typu neutralnego ze współmiernymi opóźnieniami, przecinają oś

rzeczywistą w punktach określonych zależnością $\operatorname{Re} s = -\ln|z_i|/h$, gdzie z_i są to zera członu dominującego (2.18) [27]. Wobec tego, jeżeli zachodzi (2.19), asymptoty te leżą na płaszczyźnie zmiennej zespolonej na lewo od osi urojonej dla każdego skończonego $h > 0$. Wtedy też istnieje dodatnia liczba ε , dla której jest spełniony warunek (2.15) [78]. Ponadto, jeżeli jest spełniony warunek (2.19), to granica spektralna $\sup\{\operatorname{Re} s: w(s, h) = 0\}$ jest ciągłą funkcją argumentu h w przedziale $[0, \infty)$. Jeżeli natomiast wielomian (2.18) ma przynajmniej jedno zero o module mniejszym niż 1, to granica spektralna nie jest ciągłą w punkcie $h = 0$ [27].

Z powyższych rozważań wynika, że warunkiem koniecznym asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (2.2a) typu neutralnego ze współmiernymi opóźnieniami jest asymptotyczna stabilność członu dominującego o postaci (2.18), lub równoważnie, członu dominującego (2.7a).

Przykład 2.2. Weźmy pod uwagę quasi-wielomian charakterystyczny (2.13) układu regulacji automatycznej (z regulatorem typu PID), rozpatrywanego w przykładzie 2.1. Stosując podstawienie $\exp(-sh) = z$, człon dominujący (2.14) tego quasi-wielomianu napiszemy w postaci

$$\Delta(z) = T_i(T + kK_r T_d z). \quad (2.20)$$

Człon dominujący (2.20) ma jedno zero $z = -T / kK_r T_d$. Łatwo zauważyć, że warunek (2.19) jest spełniony (czyli człon dominujący (2.20) jest asymptotycznie stabilny) wtedy i tylko wtedy, gdy $T > kK_r T_d$. Wobec tego, warunek konieczny asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (2.13) typu neutralnego ma postać $T > kK_r T_d$. Jeżeli zaś $T = kK_r T_d$, to łańcuch zer asymptotycznych tego quasi-wielomianu zbiega do osi urojonej płaszczyzny zmiennej zespolonej. Jeżeli natomiast $T < kK_r T_d$, to łańcuch zer asymptotycznych zbiega do asymptoty położonej w otwartej prawej półpłaszczyźnie. ■

Asymptotyczna stabilność członu dominującego (2.7) jest też warunkiem koniecznym asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (2.2) typu neutralnego z niewspółmiernymi opóźnieniami ([79, 97, 98]).

Uwzględniając powyższe rozważania warunek asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (2.2) typu neutralnego można sformułować w sposób podany poniżej [27].

Lemat 2.1. Quasi-wielomian (2.2) typu neutralnego jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki (2.16) i (2.17). ■

W teorii stabilności układów z opóźnieniami, oprócz stabilności przy ustalonych wielkościach opóźnień, rozpatruje się stabilność w funkcji wielkości współmiernych opóźnień oraz niezależnie od wielkości opóźnień współmiernych lub niewspółmiernych. Ostatni rodzaj stabilności można zdefiniować jako asymptotyczną stabilność dla dowolnych ustalonych wartości opóźnień $h_i \geq 0, i = 1, \dots, m$.

W pracy [141] wykazano, że jeżeli quasi-wielomian (2.2) typu neutralnego lub opóźnionego jest asymptotycznie stabilny dla małych wartości opóźnień $h_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) i przynajmniej jedno z opóźnień $h_i \rightarrow \infty$, to zera tego quasi-wielomianu albo przechodzą w prawą półpłaszczyznę płaszczyzny zmiennej zespolonej, albo dążą asymptotycznie do osi urojonej z lewej strony. W pierwszym przypadku quasi-wielomian (2.2) nie jest stabilny dla odpowiednio dużych wartości opóźnień. Natomiast w drugim przypadku przy $h_i \rightarrow \infty$ nie istnieje dodatnia liczba ε , dla której jest spełniony warunek (2.15).

Uwzględniając powyższe rozważania, definicję asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości niewspółmiernych opóźnień można sformułować w sposób podany poniżej.

Definicja 2.3. Quasi-wielomian (2.2) typu opóźnionego lub neutralnego z niewspółmiernymi opóźnieniami będziemy nazywać quasi-wielomianem asymptotycznie stabilnym niezależnie od wielkości opóźnień, jeżeli

$$w(s, h) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad \forall h_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.21)$$

przy czym poszczególne opóźnienia mogą przyjmować dowolne nieujemne wartości niezależnie od siebie. ■

Zauważmy, że jeżeli quasi-wielomian (2.2) typu neutralnego lub opóźnionego jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnień, to warunek (2.15) jest spełniony dla dowolnych ustalonych, ale skończonych wartości opóźnień $h_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$.

Podobnie jak w przypadku asymptotycznej stabilności przy zadanych wartościach opóźnień, warunkiem koniecznym asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianu (2.2) typu neutralnego jest asymptotyczna stabilność niezależnie od wielkości opóźnień członu dominującego (2.7) (np. [27, 97, 98]). Człon dominujący (2.7) będziemy nazywać członem asymptotycznie stabilnym niezależnie od wielkości opóźnień, jeżeli jest on asymptotycznie stabilny dla każdego $h_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$.

W przypadku szczególnym, gdy opóźnienia są współmierne, z definicji 2.3 wynika poniższa definicja.

Definicja 2.3a. Quasi-wielomian (2.2a) typu opóźnionego lub neutralnego ze współmiernymi opóźnieniami będziemy nazywać quasi-wielomianem asymptotycznie stabilnym niezależnie od wielkości opóźnienia, jeżeli

$$w(s, h) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad \forall h \geq 0. \quad (2.21a) \blacksquare$$

Człon dominujący quasi-wielomianu (2.2a) ma postać (2.7a). Można go też napisać w postaci (2.18).

Człon dominujący (2.7a) ze współmiernymi opóźnieniami będziemy nazywać członem asymptotycznie stabilnym niezależnie od wielkości opóźnienia, jeżeli jest on asymptotycznie stabilny dla każdego $h \geq 0$. Z rozważań podanych poniżej wzoru (2.18) wynika, że asymptotyczna stabilność członu dominującego (2.7a) nie zależy od wielkości opóźnienia $h \geq 0$. Wobec tego warunek konieczny asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia quasi-wielomianu (2.2a) typu neutralnego ma postać (2.19).

W teorii stabilności układów bez opóźnień rozpatruje się nie tylko stabilność asymptotyczną, ale tzw. D -stabilność (np. [52]), gdzie D jest jednospójnym otwartym obszarem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej (symetrycznym względem osi rzeczywistej) lub sumą skończonej liczby takich rozłącznych obszarów.

Podobnie jak w przypadku wielomianów, definicję D -stabilności quasi-wielomianów można zdefiniować w sposób podany poniżej.

Definicja 2.4. Quasi-wielomian (2.2) typu opóźnionego lub neutralnego będziemy nazywać quasi-wielomianem D -stabilnym, jeżeli wszystkie jego zera leżą w obszarze D . $\blacksquare$

Ze względu na specyfikę rozkładu zer quasi-wielomianów, omówioną w punkcie 2.1, w niniejszym rozdziale ograniczymy się do rozpatrywania D -stabilności quasi-wielomianu (2.2), w przypadku gdy obszar D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną, tzn.

$$D = \{s: \operatorname{Re} s < -\gamma\}, \quad (2.22)$$

gdzie γ jest zadaną liczbą rzeczywistą dodatnią. Parametryczny opis brzegu obszaru D ma postać $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, gdzie $\omega \in \Omega = (-\infty, \infty)$, przy czym możemy

ograniczyć się do przedziału $\Omega = [0, \infty)$ w przypadku quasi-wielomianów o rzeczywistych współczynnikach, których zespolone zera są sprzężone parami.

Warunkiem koniecznym D -stabilności quasi-wielomianu (2.2) typu neutralnego jest D -stabilność członu dominującego (2.7).

Weźmy pod uwagę quasi-wielomian

$$w(\hat{s}, h) = \sum_{k=0}^n (\hat{s} - \gamma)^k \sum_{i=0}^m a_{ki} e^{-(\hat{s}-\gamma)h_i}, \quad (2.23)$$

który otrzymuje się z quasi-wielomianu (2.2), stosując w nim podstawienie $s = \hat{s} - \gamma$, $\gamma > 0$. Łatwo zauważyć, że wszystkie zera quasi-wielomianu (2.2) leżą w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s < -\gamma - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie zera quasi-wielomianu (2.23) leżą w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} \hat{s} < -\varepsilon$.

Z powyższych rozważań wynika poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.1. Jeżeli obszarem D jest przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna (2.22), to D -stabilność quasi-wielomianu (2.2) jest równoważna z asymptotyczną stabilnością quasi-wielomianu (2.23). $\blacksquare$

2.3. Metody badania stabilności quasi-wielomianów

Quasi-wielomian (2.2) ma nieskończenie wiele zer, dlatego też nie istnieją analityczne kryteria, typu kryterium Hurwitza czy Routha dla wielomianów, służące do badania jego asymptotycznej stabilności. Analityczne kryteria asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (2.2) można sformułować jedynie w pewnych przypadkach szczególnych, wykorzystując ogólne kryteria, takie jak np. kryterium Pontriagina [146] (cytowane w monografiach [16, 27, 83, 91, 97, 114]), czy też Czebotariewa i Mejmana [64] (cytowane w [27, 91]).

Analityczne kryteria asymptotycznej stabilności wybranych klas quasi-wielomianów zostały sformułowane w pracach [14, 17, 23, 24, 25, 27, 91, 100, 152]. Jedno z takich kryteriów jest podane w poniższym lemacie.

Lemat 2.2 [27]. Quasi-wielomian

$$w(s, h) = s + a_0 + a_1 \exp(-sh) \quad (2.24)$$

jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_0 + a_1 > 0, \quad a_0 - a_1 \geq 0. \quad (2.25)$$

Jeżeli

$$a_0 + a_1 > 0, \quad a_0 - a_1 < 0, \quad (2.26)$$

to quasi-wielomian (2.24) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$0 \leq h < \frac{2}{\sqrt{a_1^2 - a_0^2}} \arctg \sqrt{\frac{a_1 + a_0}{a_1 - a_0}}. \quad (2.27)$$

Jeżeli natomiast $a_0 + a_1 \leq 0$, to quasi-wielomian (2.24) nie jest asymptotycznie stabilny dla dowolnych $h \geq 0$. ■

2.3.1. Stabilność przy ustalonych wartościach opóźnień

Do najbardziej ogólnych metod służących do badania asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (2.2) przy ustalonych wartościach opóźnień należą metody częstotliwościowe (graficzne), wykorzystujące zasadę argumentu (patrz np. [91, 93, 122]), takie jak metoda (kryterium) Michajłowa lub zmodyfikowane kryterium Michajłowa. Są one omówione w pracach [27] i [165] w przypadku quasi-wielomianów typu opóźnionego.

Stosując zasadę argumentu w pracy [93] udowodniono poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.2. Człon dominujący (2.7) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres $\Delta(\exp(-j\omega h))$, sporządzony w funkcji parametru $\omega \in [0, \infty)$, nie okrąża początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też przez niego nie przechodzi. ■

Zauważmy, że $\Delta(\exp(-j\omega h))$ jest funkcją okresową parametru ω , o okresie $2\pi/h$, gdzie $h = h$ w przypadku quasi-wielomianu (2.2a) ze współmiernymi opóźnieniami. Natomiast w przypadku quasi-wielomianu (2.2) z niewspółmiernymi opóźnieniami h jest największą liczbą rzeczywistą dodatnią, dla której zachodzą równości $h_i = k_i h$, $i = 1, 2, \dots, m$, gdzie k_i są to liczby naturalne, zaś h_i są to niewspółmierne opóźnienia. Liczbę h zawsze da się obliczyć dla niewspółmiernych opóźnień, określonych z dokładnością do skończonej liczby miejsc po prze-

cinku. Jeżeli np. $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.19$, to $h = 0.01$. Wtedy bowiem $h_1 = 10h$ zaś $h_2 = 19h$. Jeżeli natomiast $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.195$, to $h = 0.001$.

W opisany powyżej sposób można sprowadzić quasi-wielomian (2.2) z niewspółmiernymi opóźnieniami do postaci quasi-wielomianu (2.2a) ze współmiernymi opóźnieniami. Takie sprowadzenie powoduje jednak istotną zmianę charakteru opóźnień z niezależnych od siebie do będących całkowitymi wielokrotnościami opóźnień h , a więc zależnych od tego opóźnienia. Nie ma to znaczenia przy obliczaniu liczby h .

Z powyższych rozważań wynika, że przy sporządzaniu wykresu funkcji $\Delta(\exp(-j\omega h))$ można ograniczyć się do przedziału $[0, 2\pi/h]$ wartości parametru ω .

W przypadku opóźnień współmiernych człon dominujący (2.7a) można napisać w postaci (2.18). Warunek asymptotycznej stabilności tego członu ma postać (2.19). Wobec tego słuszny jest poniższy lemat.

Lemat 2.3. Człon dominujący (2.18) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie zera wielomianu

$$\tilde{\Delta}(z) = z^m \Delta(z^{-1}) = a_{n0}z^m + a_{n1}z^{m-1} + \dots + a_{nm} \quad (2.28)$$

leżą w otwartym kole jednostkowym. ■

Do sprawdzenia warunku podanego w lemacie 2.3 można stosować analityczne kryteria asymptotycznej stabilności układów dyskretnych, podane np. w pracach [103, 104, 105].

Z powyższych rozważań wynika, że do badania asymptotycznej stabilności członu dominującego quasi-wielomianu (2.2a) ze współmiernymi opóźnieniami można stosować analityczne kryterium podane w lemacie 2.3, zamiast kryterium graficznego podanego w twierdzeniu 2.2.

Podany w lemacie 2.3 warunek konieczny i wystarczający asymptotycznej stabilności członu dominującego (2.18) jest warunkiem koniecznym asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (2.2a) typu neutralnego ze współmiernymi opóźnieniami. Przy badaniu asymptotycznej stabilności tego quasi-wielomianu na podstawie warunku podanego poniżej w twierdzeniu 2.3, można więc najpierw sprawdzić warunek konieczny asymptotycznej stabilności stosując lemat 2.3.

Wykorzystując zasadę argumentu oraz postępując podobnie jak w pracy [165] w przypadku quasi-wielomianów (lub jak w pracy [52] w przypadku wielomianów), możemy udowodnić podane poniżej twierdzenie.

Niech $w_{\text{od}}(s)$ będzie dowolnym wielomianem (lub quasi-wielomianem) odniesienia stopnia n , którego wszystkie zera leżą w otwartej lewej półpłaszczyźnie.

Twierdzenie 2.3. Quasi-wielomian (2.2) typu opóźnionego lub neutralnego jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wykres funkcji $w(j\omega, h)$, sporządzony dla $\omega \in [0, \infty)$ (hodograf Michajłowa), przebiega w ten sposób, że

$$\Delta \arg w(j\omega, h) = n\pi / 2, \quad 0 \leq \omega < \infty \quad (2.29)$$

gdzie n jest stopniem quasi-wielomianu (2.2), lub równoważnie, gdy wykres funkcji (zmodyfikowany hodograf Michajłowa)

$$\tilde{w}(j\omega, h) = w(j\omega, h) / w_{\text{od}}(j\omega), \quad (2.30)$$

sporządzony dla $\omega \in [0, \infty)$ nie przechodzi przez początek układu współrzędnych płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też go nie obejmuje. ■

Inną częstotliwościową metodę badania asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (2.2), będącą pewną modyfikacją klasycznego kryterium Michajłowa, zaproponowano w pracy [93]. Polega ona na tym, że rozpatruje się wykres $w(j\omega, h)$, $\omega \in [0, \infty)$, na płaszczyźnie zmiennej zespolonej przekształconej w koło jednostkowe za pomocą odpowiedniej transformacji normalizującej moduł.

W przypadku gdy D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną (2.22), z twierdzeń 2.1, 2.2 i 2.3 wynikają poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 2.4. Człon dominujący (2.7) jest D -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji $\Delta(\exp(-f(\omega)h))$, przy czym $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, sporządzony dla wartości parametru ω należących do przedziału $[0, 2\pi/h]$, gdzie h oblicza się w sposób podany poniżej twierdzenia 2.2, nie okrąża początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też nie przechodzi przez niego. ■

Niech $w_{\text{od}}(s)$ będzie dowolnym wielomianem (lub quasi-wielomianem) odniesienia stopnia n , którego wszystkie zera leżą w obszarze D . Wygodnie jest przyjąć np. $w_{\text{od}}(s) = (s+a)^n$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią większą od γ . Wtedy $-a$ leży w obszarze D .

Twierdzenie 2.5. Quasi-wielomian (2.2) typu opóźnionego lub neutralnego jest D -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta \arg w(f(\omega), h) = n\pi / 2, \quad 0 \leq \omega < \infty \quad (2.31)$$

gdzie $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, zaś n jest stopniem quasi-wielomianu (2.2), lub równoważnie, wtedy i tylko wtedy, gdy wykres

$$\tilde{w}(f(\omega), h) = w(f(\omega), h) / w_{\text{od}}(f(\omega)), \quad (2.32)$$

sporządzony w funkcji parametru $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, nie przechodzi przez początek układu współrzędnych płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też go nie obejmuje. ■

Zauważmy, że dla bardzo dużych wartości parametru ω wyrazem dominującym funkcji $w(f(\omega), h)$, gdzie $w(s, h)$ jest quasi-wielomianem typu neutralnego, zaś $f(\omega) = -\gamma + j\omega$ (lub $f(\omega) = j\omega$), jest człon dominujący $\Delta(\exp(-f(\omega)h))$. Wartości pozostałych składników funkcji $w(f(\omega), h)$ są małe w porównaniu ze składnikiem $\Delta(\exp(-f(\omega)h))$. Wobec tego, w przypadku quasi-wielomianu (2.2) typu neutralnego, dla dużych wartości parametru ω hodograf $w(f(\omega), h)$ dąży do wykresu $\Delta(\exp(-f(\omega)h))$.

Podobnie można wykazać, że dla dużych wartości parametru ω wyrazem dominującym funkcji $\tilde{w}(f(\omega), h)$, zdefiniowanej wzorem (2.32) przy $w_{\text{od}}(s) = (s+a)^n$, $a > \gamma$, jest $\Delta(\exp(-f(\omega)h))$.

Z powyższych rozważań wynika, że badając D -stabilność quasi-wielomianu (2.2) typu neutralnego na podstawie twierdzenia 2.5 nie musimy oddzielnie sprawdzać (na podstawie twierdzenia 2.4) D -stabilności członu dominującego (2.7). Takie sprawdzenie może być potrzebne w przypadku, gdy końcowa część hodografu $w(f(\omega), h)$ (lub $\tilde{w}(f(\omega), h)$) przebiega blisko początku płaszczyzny zmiennej zespolonej.

W przypadku członu dominującego (2.7) z niewspółmiernymi opóźnieniami warunek podany w twierdzeniu 2.4 można sformułować w postaci analitycznej.

Twierdzenie 2.6. Jeżeli D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną (2.22), to człon dominujący (2.7) z niewspółmiernymi opóźnieniami jest D -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_{n0} > \sum_{i=1}^m |a_{ni}| e^{\gamma h_i}. \quad (2.33)$$

Dowód. Jeżeli opóźnienia są niewspółmierne i $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, to ze wzoru (2.7) wynika, że wykres funkcji $\Delta(\exp(-f(\omega)h))$, sporządzony dla $\omega \in [0, 2\pi/h]$, jest sumą liczby rzeczywistej a_{n0} oraz m okręgów o środkach w początku płaszczyzny zmiennej zespolonej i o promieniach $|a_{ni}| \exp(\gamma h_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Wobec tego, wykres funkcji $\Delta(\exp(-f(\omega)h))$, $\omega \in [0, 2\pi/h]$, nie okrąży początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też nie przechodzi przez niego wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (2.33). ■

W przypadku szczególnym, gdy D jest otwartą lewą półpłaszczyzną, w warunku (2.33) należy przyjąć $\gamma = 0$. Zauważmy, że w takim przypadku nierówność (2.33) nie zależy od wielkości opóźnień. Oznacza to, że asymptotyczna stabilność członu dominującego (2.7) z niewspółmiernymi opóźnieniami nie zależy od wielkości opóźnień. Taki sam rezultat dla członu dominującego (2.7a) ze współmiernymi opóźnieniami wynika z lematu 2.3.

Nierówność (2.33) jest tylko warunkiem wystarczającym D -stabilności członu dominującego (2.7a) ze współmiernymi opóźnieniami w przypadku ogólnym. Jest ona warunkiem koniecznym i wystarczającym przy $m = 1$.

Przykład 2.3. Rozpatrzmy układ automatycznej regulacji temperatury w reaktorze nuklearnym. Schemat blokowy tego układu jest pokazany na rysunku 2.1, gdzie $y(t)$ jest temperaturą wody chłodzącej reaktor, dopływającej do wytwornicy pary wodnej, $y_0(t)$ jest zadaną temperaturą wody chłodzącej, zaś $u(t)$ jest sygnałem sterującym położeniem prętów grafitowych w reaktorze. Transmitancja operatorowa reaktora nuklearnego ma postać (2.9), przy czym $k = 1$, $h = 0.5$, $T = 0.2$ [93]. Załóżmy, że regulator jest regulatorem typu PID, o transmitancji operatorowej (2.12), którego nastawy $K_r = 0.6$, $T_i = 0.38$, $T_d = 0.1$, zostały dobrane według kryterium optymalnego modułu, w sposób podany w pracach [91, 92].

Quasi-wielomian charakterystyczny rozpatrywanego układu regulacji automatycznej ma postać

$$w(s, h) = 0.076s^2 + 0.38s + (0.0228s^2 + 0.228s + 0.6)e^{-sh}. \quad (2.34)$$

Należy zbadać D -stabilność quasi-wielomianu (2.34) dla kilku wartości opóźnienia h z przedziału $[0.3, 1]$, gdzie $D = \{s: \operatorname{Re} s < -0.5\}$. Brzeg obszaru D ma opis parametryczny $f(\omega) = -0.5 + j\omega$, $\omega \in [0, \infty)$.

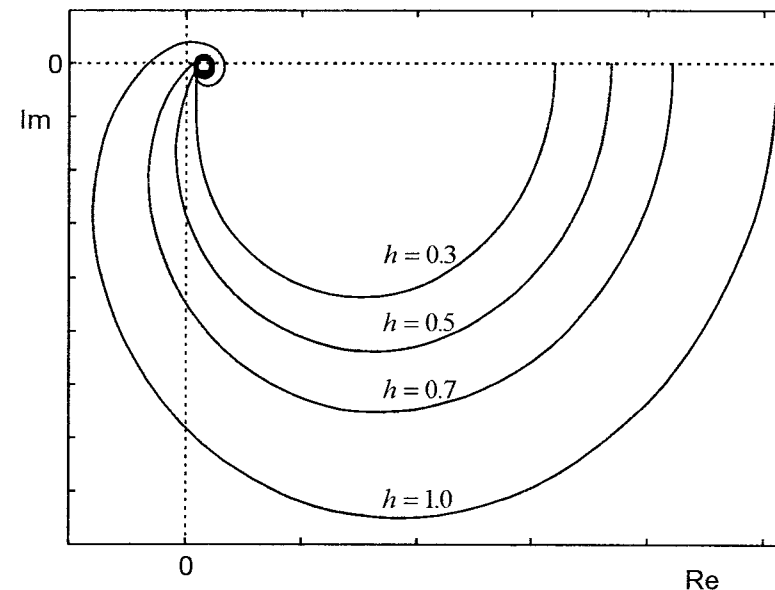
Człon dominujący quasi-wielomianu (2.34) ma postać

$$\Delta(\exp(-sh)) = 0.076 + 0.0228 \exp(-sh). \quad (2.35)$$

Wykres funkcji

$$\Delta(\exp(-f(\omega)h)) = 0.076 + 0.0228 \exp(-f(\omega)h), \quad (2.36)$$

sporządzony dla $\omega \in [0, 2\pi/h]$, jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej okręgiem o środku w punkcie $0.076 + j0$ i o promieniu $0.0228 \exp(0.5h)$. Łatwo sprawdzić, że leży on całkowicie w otwartej prawej półpłaszczyźnie (tzn. jest spełniona nierówność (2.33) przy $m = 1$, $\gamma = 0.5$ i $h_1 = h$) wtedy i tylko wtedy, gdy $h < 2.4079$. Oznacza to, zgodnie z twierdzeniem 2.4 (lub 2.6), że człon dominujący (2.35) jest D -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $h < 2.4079$.



Rys. 2.2. Wykresy funkcji $\tilde{w}(f(\omega), h)$, $\omega \in [0, 50]$

Wykresy funkcji $\tilde{w}(f(\omega), h)$, $\omega \in [0, 50]$, zdefiniowanej wzorem (2.30) przy $w_{od}(s) = (s+1)^2$, wyznaczone dla $h = 0.3$, $h = 0.5$, $h = 0.7$ oraz $h = 1$, są poka-

zane na rysunku 2.2. Przy $\omega \rightarrow \infty$ nawijają się one na wykres funkcji (2.36), sporządzony dla $\omega \in [0, 2\pi / h]$.

Z rysunku 2.2 oraz z twierdzenia 2.3 wynika, że quasi-wielomian (2.34) jest D -stabilny dla $h = 0.3$, $h = 0.5$ oraz $h = 0.7$ (wykresy $\tilde{w}(f(\omega), h)$ nie obejmują początku płaszczyzny zmiennej zespolonej). Natomiast nie jest on D -stabilny dla $h = 1$ (wykres $\tilde{w}(f(\omega), h)$ obejmuje początek płaszczyzny zmiennej zespolonej).

Wykresy funkcji $\tilde{w}(f(\omega), h)$, wyznaczone dla innych ustalonych wartości $h \in [0.3, 0.7]$, leżą pomiędzy hodografami, odpowiadającymi $h = 0.3$ oraz $h = 0.7$. Oznacza to, że quasi-wielomian (2.34) (i rozpatrywany układ regulacji automatycznej) jest asymptotycznie stabilny dla każdego $h \in [0.3, 0.7]$. ■

2.3.2. Stabilność niezależnie od wielkości współmiernych opóźnień

Quasi-wielomian charakterystyczny układu liniowego stacjonarnego ze współmiernymi opóźnieniami ma postać

$$w(s, h) = \sum_{i=0}^m w_i(s) e^{-shi}, \quad (2.37)$$

gdzie $h \geq 0$ jest opóźnieniem, zaś $w_i(s)$, $i = 0, 1, \dots, m$, są to wielomiany o postaci (2.4), przy czym $a_{n0} > 0$ zgodnie z przyjętym założeniem.

Przy powyższym założeniu quasi-wielomian (2.37) nie może być quasi-wielomianem typu wyprzedzonego. Może on być tylko quasi-wielomianem typu opóźnionego lub neutralnego. Człon dominujący quasi-wielomianu (2.37) typu neutralnego można napisać w postaci (2.18).

Zgodnie z definicją 2.3a, quasi-wielomian (2.37) typu opóźnionego lub neutralnego nazywamy quasi-wielomianem asymptotycznie stabilnym niezależnie od wielkości opóźnienia, jeżeli dla każdego ustalonego $h \geq 0$ wszystkie jego zera leżą w otwartej lewej półpłaszczyźnie, tzn.

$$w(s, h) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad \forall h \geq 0. \quad (2.38)$$

Weźmy pod uwagę wielomian dwóch niezależnych zmiennych zespolonych s i z , stowarzyszony z quasi-wielomianem (2.37), mający postać

$$w(s, z) = \sum_{i=0}^m w_i(s) z^i. \quad (2.39)$$

Wielomian (2.39) otrzymuje się z quasi-wielomianu (2.37) stosując w nim podstawienie $\exp(-sh) = z$.

Stosując w wielomianie (2.39) podstawienie $z = \exp(-jy)$, otrzymamy

$$w(s, \exp(-jy)) = \sum_{i=0}^m w_i(s) \exp(-jiy). \quad (2.40)$$

Ze względu na okresowość funkcji $\exp(-jy)$, zamiast wielomianu (2.40) można też równoważnie rozpatrywać wielomian $w(s, \exp(jy))$, który otrzymuje się z wielomianu (2.39), stosując w nim podstawienie $z = \exp(jy)$.

Wielomian (2.40) zmiennej s ma zespolone współczynniki. Jego zera, wyznaczone w funkcji parametru $y \in [0, 2\pi]$, tworzą na płaszczyźnie zmiennej zespolonej linie zer. Są one krzywymi zamkniętymi.

Przy $h = 0$ quasi-wielomian (2.37) ze współmiernymi opóźnieniami redukuje się do wielomianu

$$w(s, 0) = \sum_{i=0}^m w_i(s), \quad (2.41)$$

który jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w(s, 0) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0. \quad (2.42)$$

Twierdzenie 2.7. Quasi-wielomian (2.37) typu opóźnionego lub neutralnego jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia wtedy i tylko wtedy, gdy

1) człon dominujący $\Delta(z)$ jest asymptotycznie stabilny, tj.

$$\Delta(z) \neq 0, \quad |z| \leq 1, \quad (2.43)$$

2) quasi-wielomian (2.37) jest asymptotycznie stabilny dla $h = 0$,

3) jest spełniony warunek

$$w(j\omega, \exp(-jy)) \neq 0, \quad \forall \omega > 0, \quad \forall y \in [0, 2\pi], \quad (2.44)$$

tzn. linie zer wielomianu zespolonego $w(s, \exp(-jy))$, wyznaczone w funkcji parametru $y \in [0, 2\pi]$, nie przecinają osi urojonej płaszczyzny zmiennej zespolonej, co najwyżej są do niej styczne w punkcie $s = 0$.

Dowód. Zgodnie z rozważaniami podanymi w punkcie 2.2 niniejszej pracy, asymptotyczna stabilność członu dominującego $\Delta(z)$, mającego postać (2.18), jest warunkiem koniecznym asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (2.37) typu neutralnego dla dowolnego $h \geq 0$. Tymczasem warunek (2.43) jest zawsze spełniony dla quasi-wielomianu (2.37) typu opóźnionego.

Asymptotyczna stabilność quasi-wielomianu (2.37) dla $h=0$ jest prostym warunkiem koniecznym asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia tego quasi-wielomianu.

Warunki (2.42) i (2.43) są więc warunkami koniecznymi asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia quasi-wielomianu (2.37). Załóżmy, że są one spełnione.

Zera quasi-wielomianu (2.37) typu opóźnionego, a także typu neutralnego przy spełnieniu warunku (2.43), zależą w sposób ciągły od wartości opóźnienia $h \geq 0$. Wobec tego, jeżeli quasi-wielomian (2.37) jest asymptotycznie stabilny dla $h=0$, to jest on asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w(j\omega, h) \neq 0, \quad \forall \omega \geq 0, \quad \forall h > 0. \quad (2.45)$$

tzn. quasi-wielomian (2.37) nie ma zer na osi urojonej dla każdego $h > 0$.

Z porównania postaci quasi-wielomianu (2.37) przy $s = j\omega$ i wielomianu zespolonego (2.40) wynika, że jeżeli istnieje $h = h^* > 0$, dla którego quasi-wielomian (2.37) ma zera $s = \pm j\omega^*$, $\omega^* > 0$, na osi urojonej, to wielomian zespolony (2.40) ma zera $s = \pm j\omega^*$ na osi urojonej dla $y = y^* = \omega^* h^*$. Oznacza to, że jeżeli warunek (2.45) nie jest spełniony dla $h = h^*$ i $\omega = \omega^* > 0$, to wtedy warunek (2.44) nie jest spełniony dla $\omega = \omega^*$ i $y = y^* = \omega^* h^*$. Warunek (2.44) jest więc warunkiem wystarczającym na to, aby quasi-wielomian (2.37) nie miał zer $s = \pm j\omega^*$, $\omega^* > 0$, na osi urojonej.

Zauważmy, że zero $s=0$ wielomianu zespolonego (2.40) (o ile ono istnieje) nie jest zerem quasi-wielomianu (2.37) w przypadku, gdy jest spełniony warunek 2) twierdzenia 2.7. Wobec tego, jeżeli quasi-wielomian (2.37) jest asymptotycznie stabilny dla $h=0$, to nie ma on zera $s=0$ nawet wtedy, gdy linie zer wielomianu zespolonego (2.40) przechodzą przez początek płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli są spełnione warunki 1) i 3) twierdzenia 2.7, to zachodzi (2.45). Natomiast spełnienie warunków (2.45) i 2) oznacza, że quasi-wielomian (2.37) typu opóźnionego lub neutralnego ma tylko zera o ujemnej części rzeczywistej dla każdego $h \geq 0$, czyli jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia. ■

Z twierdzenia 2.7 wynika następujący warunek dostateczny asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia quasi-wielomianu (2.37).

Lemat 2.4. Jeżeli jest spełniony warunek konieczny (2.43), to quasi-wielomian (2.37) typu neutralnego lub opóźnionego jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia, jeżeli

$$w(s, \exp(-jy)) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad \forall y \in [0, 2\pi], \quad (2.46)$$

tzn. linie zer wielomianu zespolonego $w(s, \exp(-jy))$, wyznaczone w funkcji parametru $y \in [0, 2\pi]$, leżą całkowicie w otwartej lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Dowód. Ze wzorów (2.40) i (2.41) wynika, że jeżeli warunek (2.46) jest spełniony dla $y=0$, to jest też spełniony warunek (2.42), czyli wszystkie zera quasi-wielomianu (2.37) przy $h=0$ mają ujemne części rzeczywiste. W takiej sytuacji dla asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia quasi-wielomianu (2.37) potrzeba i wystarcza, aby nie miał on zer na osi urojonej dla każdego $h > 0$.

Zauważmy, że jeżeli zachodzi (2.46), to wtedy

$$w(j\omega, \exp(-jy)) \neq 0, \quad \forall \omega \geq 0, \quad \forall y \in [0, 2\pi], \quad (2.47)$$

czyli jest spełniony warunek (2.44). Z powyższych rozważań i dowodu twierdzenia 2.7 wynika zatem, że przy spełnieniu warunku (2.46) wszystkie zera quasi-wielomianu (2.37) mają ujemne części rzeczywiste dla każdego $h \geq 0$. ■

Warunek (2.46) można napisać w postaci $\alpha_w > 0$, gdzie

$$\alpha_w = -\max\{\operatorname{Re} s : w(s, \exp(-jy)) = 0, \quad y \in [0, 2\pi]\}. \quad (2.48)$$

Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli jest spełniony podany w twierdzeniu 2.7 warunek konieczny i wystarczający asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia quasi-wielomianu (2.37), to warunek dostateczny podany w lemacie 2.4 może nie być spełniony tylko wtedy, gdy linie zer wielomianu zespolonego $w(s, \exp(-jy))$, wyznaczone w funkcji parametru $y \in [0, 2\pi]$, są styczne do osi urojonej w punkcie $s=0$. Taka sytuacja może wystąpić tylko w pewnych szczególnych przypadkach, co ilustruje poniższy przykład.

Przykład 2.4. Weźmy pod uwagę quasi-wielomian (2.24) rozpatrywany w przykładzie 2.2. Ponieważ jest on quasi-wielomianem typu opóźnionego, warunek konieczny (2.43) jest zawsze spełniony.

Warunek (2.46) dla rozpatrywanego quasi-wielomianu można napisać w postaci

$$\operatorname{Re}\{-a_0 - a_1 \exp(-jy)\} < 0, \quad \forall y \in [0, 2\pi]. \quad (2.49)$$

Jest on spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_0 > |a_1|. \quad (2.50)$$

Z lematu 2.4 wynika zatem, że quasi-wielomian (2.24) jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia, jeżeli jest spełniona nierówność (2.50).

Zastosujmy teraz twierdzenie 2.7. Dla $h = 0$ quasi-wielomian (2.24) redukuje się do wielomianu $w(s, 0) = s + a_0 + a_1$. Wobec tego warunek konieczny i wystarczający asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (2.24) przy $h = 0$ ma postać

$$a_0 + a_1 > 0. \quad (2.51)$$

Warunek (2.44) dla quasi-wielomianu (2.24) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy linia zer wielomianu zespolonego

$$w(s, \exp(-jy)) = s + a_0 + a_1 \exp(-jy), \quad (2.52)$$

wyznaczona w funkcji parametru $y \in [0, 2\pi]$, leży całkowicie w otwartej lewej półpłaszczyźnie (tj. zachodzi (2.50)) lub jest styczna do osi urojonej w punkcie $s = 0$. Łatwo zauważyć, że istnieje $y \in [0, 2\pi]$, dla którego wielomian (2.52) ma zero $s = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 + a_1 = 0$ lub $a_0 - a_1 = 0$.

Z powyższych rozważań wynika, że warunki 2) i 3) twierdzenia 2.7 są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_0 > |a_1| \quad \text{lub} \quad a_0 = a_1 > 0. \quad (2.53)$$

Z porównania warunków (2.50) i (2.53) wynika, że jeżeli do warunku dostatecznego (2.50) dołączymy $a_0 = a_1 > 0$, to otrzymamy warunek konieczny i wystarczający asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia quasi-wielomianu (2.24). ■

Analityczne sprawdzanie warunków twierdzenia 2.7 lub lematu 2.4 jest dosyć trudne w przypadku ogólnym. Tych trudności można uniknąć stosując obliczenia komputerowe do wyznaczania zer wielomianu zespolonego (2.40) w funkcji parametru $y \in [0, 2\pi]$. W takim przypadku konieczna jest znajomość wartości liczbowych poszczególnych współczynników quasi-wielomianu (2.37).

Przykład 2.5. Należy zbadać asymptotyczną stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia quasi-wielomianu

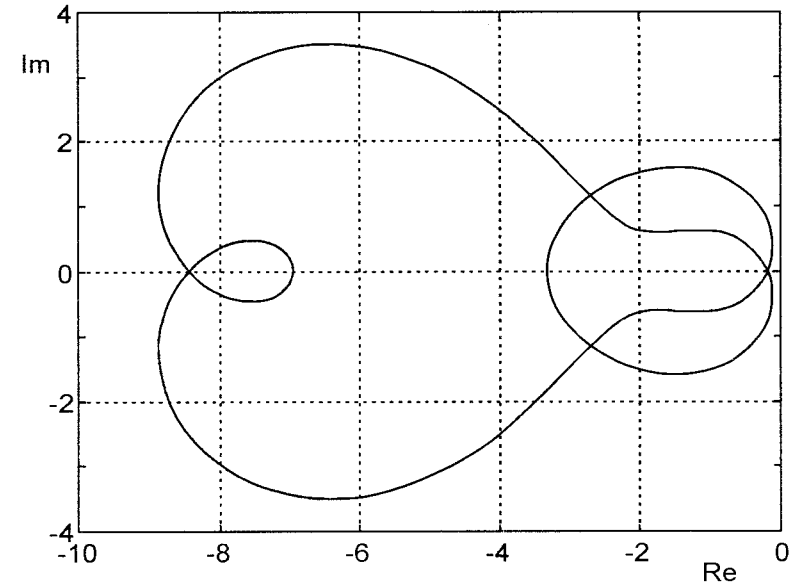
$$w(s, h) = s^2 + 6s + 5 + (s^2 + 2.8s + 0.9)e^{-sh} + (0.35s^2 + 0.4s + 4)e^{-2sh}. \quad (2.54)$$

Człon dominujący quasi-wielomianu (2.54) typu neutralnego ma postać $\Delta(z) = 0.35z^2 + z + 1$. Jest on asymptotycznie stabilny, bowiem wszystkie jego zera z_i spełniają warunek $|z_i| > 1$, $i = 1, 2$.

Dla $h = 0$ quasi-wielomian (2.54) redukuje się do wielomianu

$$w(s, 0) = 2.35s^2 + 9.2s + 9.9, \quad (2.55)$$

który jest asymptotycznie stabilny, tj. wszystkie jego zera mają ujemne części rzeczywiste. Warunki 1) i 2) twierdzenia 2.7 są więc spełnione.



Rys. 2.3. Linia zer wielomianu zespolonego $w(s, \exp(-jy))$, $y \in [0, 2\pi]$

Wielomian $w(s, z)$ dwóch niezależnych zmiennych zespolonych s i z , stowarzyszony z quasi-wielomianem (2.54), ma postać

$$w(s, z) = s^2 + 6s + 5 + (s^2 + 2.8s + 0.9)z + (0.35s^2 + 0.4s + 4)z^2. \quad (2.56)$$

Stosując w (2.56) podstawienie $z = \exp(-jy)$ i wyznaczając w funkcji parametru $y \in [0, 2\pi]$ (z krokiem $\Delta y = 0.02$) zera otrzymanego w ten sposób wielomianu $w(s, \exp(-jy))$, otrzymamy linię zer pokazaną na rysunku 2.3.

Z rysunku 2.3 wynika, że wyznaczona linia zer leży całkowicie w otwartej lewej półpłaszczyźnie, przy czym $\alpha_w = 0.1101$, gdzie α_w jest zdefiniowane wzorem (2.48). Warunki lematu 2.4 i twierdzenia 2.7 są więc spełnione. Oznacza to, że quasi-wielomian (2.54) jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia. ■

2.3.2.1. Uwagi końcowe

Związek pomiędzy asymptotyczną stabilnością niezależnie od wielkości opóźnienia quasi-wielomianu (2.37) typu opóźnionego a rozkładem zer wielomianu zespolonego (2.39) został po raz pierwszy podany w pracach [106, 107, 108]. Rezultaty prac [106, 107] uogólniono w [94, 102] na klasę quasi-wielomianów typu neutralnego ze współmiernymi opóźnieniami. Należy przy tym podkreślić, że podane w wyżej wymienionych pracach warunki asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia nie są równoważne z warunkiem (2.38) w przypadku ogólnym. Są one tylko warunkami dostatecznymi spełnienia (2.38). Bazują one bowiem na błędnym warunku asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia, podanym w [106] dla quasi-wielomianu (2.37) typu opóźnionego i skorygowanym w [108].

Rezultaty wyżej wymienionych prac są omówione w monografii [27]. Zostały one wykorzystane do sformułowania warunków stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia, podanych w twierdzeniu 2.7 i lemacie 2.4.

W pracy [106], rozpatrując problem asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia quasi-wielomianu (2.37) typu opóźnionego, wykazano, że warunek (2.38) jest równoważny z warunkiem

$$w(s, z) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad |z| = 1. \quad (2.57)$$

Potem jednak okazało się, że ta równoważność nie zachodzi w przypadku ogólnym. W pracy [108] pokazano bowiem, że dla quasi-wielomianu (2.37) typu opóźnionego warunek (2.57) jest równoważny z dwoma warunkami: (2.38) i

$$w(0, z) \neq 0, \quad |z| = 1. \quad (2.58)$$

Oznacza to, że w przypadku ogólnym (2.57) jest tylko warunkiem dostatecznym asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia quasi-wielomianu (2.37) typu opóźnionego.

Jeżeli zachodzi (2.43), to (2.57) jest też warunkiem dostatecznym asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia quasi-wielomianu (2.37) typu neutralnego [27].

Zauważmy, że warunek (2.57) można napisać w postaci (2.46). Natomiast warunek (2.58) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian (2.40) nie ma zera $s = 0$ dla każdego $y \in [0, 2\pi]$. Warunek (2.58) może nie być spełniony w pewnych szczególnych przypadkach, co ilustruje przykład 2.4. Oznacza to, że poza tymi szczególnymi przypadkami, warunek dostateczny podany w lemacie 2.4 jest równoważny z asymptotyczną stabilnością niezależnie od wielkości opóźnienia quasi-wielomianu (2.37) typu opóźnionego lub neutralnego.

W literaturze poświęconej problemowi badania asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia quasi-wielomianu (2.37) istnieje grupa prac (są one omówione w monografii [27]), w których warunek dostateczny podany w lemacie 2.4 jest traktowany jako konieczny i wystarczający. Dlatego też w monografii [27] quasi-wielomiany, dla których są spełnione warunki lematu 2.4, nazywano quasi-wielomianami mocno asymptotycznie stabilnymi niezależnie od wielkości opóźnienia. Klasyczne pojęcie asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia (definicja 2.3a) jest ogólniejsze od pojęcia mocnej asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia, tzn. jeżeli quasi-wielomian (2.37) typu opóźnionego lub neutralnego jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia, to jest on też mocno asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia. Stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe w przypadku ogólnym. Jest ono prawdziwe tylko wtedy, gdy zachodzi (2.58).

Oprócz wyżej wymienionych prac, problem badania asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia quasi-wielomianów charakterystycznych był rozpatrywany w [38, 45], zaś problem badania takiego rodzaju stabilności wielowymiarowych układów liniowych stacjonarnych z opóźnieniami (współmiernymi i niewspółmiernymi), opisanych równaniami stanu, był rozpatrywany w pracach [22, 29, 41, 73, 75, 77, 113, 126, 153].

2.3.3. Stabilność niezależnie od wielkości niewspółmiernych opóźnień

Weźmy pod uwagę quasi-wielomian charakterystyczny z niewspółmiernymi opóźnieniami, mający postać

$$w(s, \mathbf{h}) = \sum_{i=0}^m w_i(s) \exp(-sh_i), \quad (2.59)$$

gdzie $h_0 = 0$, $h_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$),

$$w_i(s) = \sum_{k=0}^n a_{ki} s^k, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (2.60)$$

przy czym $a_{n0} > 0$.

Zgodnie z definicją 2.3, quasi-wielomian (2.59) nazywamy quasi-wielomianem asymptotycznie stabilnym niezależnie od wielkości opóźnień, jeżeli wszystkie jego zera mają ujemne części rzeczywiste dla dowolnych $h_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), czyli

$$w(s, \mathbf{h}) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad \forall h_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.61)$$

Człon dominujący (2.7) quasi-wielomianu (2.59) typu neutralnego nazywamy członem asymptotycznie stabilnym niezależnie od wielkości opóźnień, jeżeli jest on asymptotycznie stabilny dla wszystkich $h_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Z quasi-wielomianem (2.59) jest stowarzyszony wielomian $m+1$ niezależnych zmiennych zespolonych s i z_i ($i = 1, 2, \dots, m$), mający postać

$$w(s, \mathbf{z}) = w_0(s) + \sum_{i=1}^m w_i(s) z_i, \quad (2.62)$$

gdzie $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_m]$ jest wektorem zmiennych z_i ($i = 1, 2, \dots, m$), zaś $w_i(s)$ ($i = 0, 1, \dots, m$) są to wielomiany o postaci (2.60).

Wielomian (2.62) otrzymuje się z quasi-wielomianu (2.59), stosując w nim podstawienia $\exp(-sh_i) = z_i$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Stosując z kolei podstawienia $z_i = \exp(-jy_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, wielomian (2.62) napiszemy w postaci

$$w(s, \exp(-j\mathbf{y})) = w_0(s) + \sum_{i=1}^m w_i(s) \exp(-jy_i), \quad (2.63)$$

gdzie $\exp(-j\mathbf{y}) = [\exp(-jy_1), \exp(-jy_2), \dots, \exp(-jy_m)]$.

Zera wielomianu (2.63) są okresowymi funkcjami parametrów $y_i \in [0, 2\pi]$, $i = 1, 2, \dots, m$, co wynika z okresowości funkcji $\exp(-jy_i)$.

Niech

$$\Phi(\omega) = 1 - \sum_{i=1}^m |w_i(j\omega)| / |w_0(j\omega)| \quad (2.64)$$

będzie funkcją testującą stowarzyszoną z quasi-wielomianem (2.59), przy czym ze wzorów

$$\Phi_0 = \Phi(0) = 1 - \sum_{i=1}^m |a_{0i}| / |a_{00}|, \quad (2.65)$$

$$\Phi_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Phi(\omega) = 1 - \sum_{i=1}^m |a_{ni}| / a_{n0}, \quad (2.66)$$

oblicza się jej wartość początkową oraz wartość końcową, odpowiednio.

Twierdzenie 2.8 [56]. Quasi-wielomian (2.59) typu opóźnionego lub neutralnego jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnień wtedy i tylko wtedy, gdy

- 1) wielomian $w_0(s)$ jest asymptotycznie stabilny, tzn. wszystkie jego zera mają ujemne części rzeczywiste,
- 2) człon dominujący (2.7) quasi-wielomianu (2.59) typu neutralnego jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnień, tzn.

$$\Phi_\infty > 0, \quad (2.67)$$

- 3) $\Phi_0 \geq 0$, przy czym, jeżeli $\Phi_0 = 0$, to

$$w(s, 0) = \sum_{i=0}^m w_i(s) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad (2.68)$$

tzn. jest asymptotycznie stabilny wielomian $w(s, 0)$,

- 4) jest spełniony warunek

$$\Phi(\omega) > 0 \quad \text{dla każdego skończonego } \omega > 0. \quad (2.69)$$

Dowód. Jeżeli wszystkie opóźnienia h_i ($i = 1, 2, \dots, m$) jednocześnie dążą do nieskończoności, quasi-wielomian (2.59) redukuje się do wielomianu $w_0(s)$. Warunek 1) jest więc prostym warunkiem koniecznym asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianu (2.59).

Warunkiem koniecznym asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianu (2.59) typu neutralnego jest też asymptotyczna stabilność niezależnie od wielkości opóźnień członu dominującego $\Delta(\exp(-s\hbar))$, mającego postać (2.7).

Z twierdzenia 2.6 przy $\gamma = 0$ wynika, że człon dominujący (2.7) jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnień wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_{n0} > \sum_{i=1}^m |a_{ni}|. \quad (2.70)$$

Powyższy warunek został też w inny sposób udowodniony w pracach [97, 98] (patrz też [142, 143]) oraz w punkcie 7.1.1 niniejszej pracy (por. lemat 7.2).

Uwzględniając wzór (2.66), nierówność (2.70) można napisać w postaci (2.67). Jest ona zawsze spełniona dla quasi-wielomianu (2.59) typu opóźnionego, bowiem w takim przypadku $\Phi_\infty = 1$, co wynika stąd, że $a_{ni} = 0$ dla $i = 1, 2, \dots, m$.

Jeżeli są spełnione warunki 1) i 2) twierdzenia 2.8, to dla asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianu (2.59) potrzeba i wystarcza, aby nie miał on zer na osi urojonej dla wszystkich $h_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Wynika to z ciągłej zależności zer quasi-wielomianu od wartości opóźnień.

Jeżeli wielomian zespolony (2.63) dla pewnych ustalonych $y_i \in [0, 2\pi]$, $i = 1, 2, \dots, m$, ma urojone zera $s = \pm j\omega$, $\omega > 0$, to quasi-wielomian (2.59) ma te same zera dla $h_i = (y_i + 2k\pi) / \omega$, $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 0, 1, \dots$, i odwrotnie. Natomiast zero $s = 0$ wielomianu (2.63) (o ile ono istnieje) nie jest zerem quasi-wielomianu (2.59) w przypadku, gdy wielomian $w(s, 0)$ ma zera tylko o ujemnych częściach rzeczywistych. Ponieważ quasi-wielomian (2.59) przy $h_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, redukuje się do wielomianu $w(s, 0)$, położenie wszystkich zer wielomianu $w(s, 0)$ w otwartej lewej półpłaszczyźnie jest warunkiem koniecznym asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianu (2.59).

Z powyższych rozważań wynika, że przy spełnieniu warunków 1) i 2) twierdzenia 2.8 mogą wystąpić dwa podane poniżej przypadki, w których quasi-wielomian (2.59) może być asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnień:

a) dla wszystkich $y_i \in [0, 2\pi]$, $i = 1, 2, \dots, m$, wielomian zespolony (2.63) ma tylko zera o ujemnych częściach rzeczywistych, czyli

$$w(s, \exp(-jy)) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad \forall y_i \in [0, 2\pi], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.71)$$

b) jest spełniony warunek (2.68) i dla pewnych $y_i \in [0, 2\pi]$, $i = 1, 2, \dots, m$, wielomian zespolony (2.63) ma zero $s = 0$, natomiast dla pozostałych wartości $y_i \in [0, 2\pi]$ wszystkie jego zera mają ujemne części rzeczywiste.

Z powyższego wynika, że aby quasi-wielomian (2.59) był asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnień, linie zer wielomianu zespolonego (2.63), wyznaczone w funkcji parametrów $y_i \in [0, 2\pi]$, $i = 1, 2, \dots, m$, muszą leżeć w otwartej lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej, przy czym mogą one być styczne do osi urojonej w punkcie $s = 0$.

Jeżeli wielomian $w_0(s)$ jest asymptotycznie stabilny, to z zasady argumentu wynika, że powyższe zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych wartości $y_i \in [0, 2\pi]$, $i = 1, 2, \dots, m$, wykres funkcji $w(j\omega, \exp(-jy))$, $\omega \in [0, \infty)$, rozpoczyna się przy $\omega = 0$ na nieujemnej półosi rzeczywistej (tzn. rozpoczyna się na dodatniej półosi rzeczywistej lub w początku płaszczyzny zmiennej zespolonej) i przy ω rosnącym od zera do nieskończoności przebiega przez $n/2$ ćwiartki płaszczyzny zmiennej zespolonej, nie trafiając w początek tej płaszczyzny dla $\omega > 0$. Łatwo zauważyć, że zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|w_0(j\omega)| > \sum_{i=1}^m |w_i(j\omega)|, \quad \forall \omega > 0, \quad (2.72)$$

oraz

$$|w_0(j0)| \geq \sum_{i=1}^m |w_i(j0)|. \quad (2.73)$$

Uwzględniając wzór (2.60) przy $s = j0$, powyższą nierówność napiszemy w postaci

$$|a_{00}| \geq \sum_{i=1}^m |a_{0i}|. \quad (2.74)$$

Warunek (2.69) wynika z nierówności (2.72) i wzoru (2.64). Natomiast warunek $\Phi_0 \geq 0$ wynika ze wzoru (2.65) i nierówności (2.74).

Łatwo zauważyć, że $\Phi_0 > 0$ w przypadku a), zaś $\Phi_0 \geq 0$ w przypadku b). Jeżeli natomiast $\Phi_0 < 0$, to wielomian zespolony (2.63) (i też quasi-wielomian (2.59)) ma zera o dodatnich częściach rzeczywistych.

Zauważmy, że warunek (2.71) przy $y_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, jest równoważny z warunkiem (2.68). Oznacza to, że warunku (2.68) nie musimy sprawdzać oddzielnie w przypadku a).

Z powyższych rozważań wynika zatem, że przy spełnieniu warunków 1) i 2) twierdzenia 2.8, warunki wymienione w przypadkach a) i b) są równoważne z warunkami 3) i 4), co kończy dowód twierdzenia. ■

Zauważmy, że $w_0(j\omega) \neq 0$, $\forall \omega \geq 0$, przy spełnieniu warunku 1) twierdzenia 2.8. Oznacza to, że nie wystąpią osobliwości przy obliczaniu funkcji testującej $\Phi(\omega)$ ze wzoru (2.64).

Badanie asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianu (2.59) na podstawie twierdzenia 2.8 wymaga analizy przebiegu funkcji testującej $\Phi(\omega)$, którą wyznacza się ze wzorów (2.64)-(2.66). Istotne znaczenie ma tu znajomość wartości końcowej tej funkcji. Pozwala ona bowiem na zakończenie procesu komputerowego wyznaczania $\Phi(\omega)$ w chwili, gdy obliczone wartości zaczną ustalać się na poziomie wartości końcowej Φ_∞ .

Z twierdzenia 2.8 wynika poniższy warunek dostateczny asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianu (2.59).

Lemat 2.5. Jeżeli wielomian $w_0(s)$ jest asymptotycznie stabilny i jest spełniony warunek $\Phi_\infty > 0$, to quasi-wielomian (2.59) typu opóźnionego lub neutralnego jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnień, jeżeli

$$\Phi(\omega) > 0, \quad \forall \omega \geq 0, \quad (2.75)$$

gdzie funkcję testującą $\Phi(\omega)$ oblicza się ze wzoru (2.64), natomiast ze wzoru (2.66) oblicza się jej wartość końcową Φ_∞ . ■

Warunek (2.75) można napisać w postaci $\alpha_n > 0$, gdzie

$$\alpha_n = \min\{\Phi(\omega): \omega \in [0, \infty)\}. \quad (2.76)$$

W literaturze poświęconej problemowi badania asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości niewspółmiernych opóźnień występuje tzw. kryterium absolutnej asymptotycznej stabilności, podane w pracy [170]. Jest ono cytowane w monografiach [85, 114].

Kryterium absolutnej asymptotycznej stabilności można napisać w postaci warunków podanych w lemacie 2.5 [38]. Oznacza to, że jeżeli quasi-wielomian (2.59) jest absolutnie asymptotycznie stabilny, to jest on też asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnień. Stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe w przypadku, gdy $\Phi_0 = 0$.

Pojęcie absolutnej asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (2.59) jest więc odpowiednikiem mocnej asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianów ze współmiernymi opóźnieniami (por. dyskusję podaną w p. 2.3.2.1 niniejszej pracy).

Przykład 2.6. Należy zbadać asymptotyczną stabilność niezależnie od opóźnienia quasi-wielomianu (2.24), który zgodnie ze wzorami (2.59) i (2.60), można napisać w postaci

$$w(s, h) = w_0(s) + w_1(s) \exp(-sh), \quad (2.77)$$

gdzie $w_0(s) = s + a_0$, $w_1(s) = a_1$, przy czym $a_0 > 0$.

Wielomian $w_0(s)$ jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 > 0$. Ponieważ $a_0 > 0$ z założenia, warunek 1) twierdzenia 2.8 jest spełniony.

Rozpatrywany quasi-wielomian jest quasi-wielomianem typu opóźnionego. Wobec tego $\Phi_\infty = 1$ i warunek (2.67) jest spełniony.

Wielomian $w(s, 0) = s + a_0 + a_1$, do którego redukuje się quasi-wielomian (2.77) przy $h = 0$, jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona nierówność $a_0 + a_1 > 0$.

Obliczając ze wzoru (2.65) wartość początkową funkcji testującej $\Phi(\omega)$, otrzymamy $\Phi_0 = 1 - |a_1|/a_0$. Oznacza to, że $\Phi_0 \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 \geq |a_1|$.

Obliczając $\Phi(\omega)$ ze wzoru (2.64) otrzymamy

$$\Phi(\omega) = 1 - \frac{|a_1|}{\sqrt{a_0^2 + \omega^2}}. \quad (2.78)$$

Ze wzoru (2.78) wynika, że $\Phi(\omega) > \Phi_0$ dla każdego $\omega > 0$.

Z powyższych rozważań wynika zatem, że quasi-wielomian (2.77) jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia, tzn. są spełnione warunki 1)-4) twierdzenia 2.8, wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 \geq |a_1|$ i $a_0 + a_1 > 0$, czyli gdy jest spełniony warunek (2.25). ■

Quasi-wielomian (2.37) ze współmiernymi opóźnieniami jest przypadkiem szczególnym quasi-wielomianu (2.59) z niewspółmiernymi opóźnieniami. Oznacza to, że jeżeli quasi-wielomian (2.59) jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnień, to quasi-wielomian (2.37) (o tych samych współczynnikach)

jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia. Stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe w przypadku ogólnym, co ilustruje poniższy przykład.

Przykład 2.7. Weźmy pod uwagę quasi-wielomian typu neutralnego z niewspółmiernymi opóźnieniami, mający postać

$$w(s, h) = s^2 + 6s + 5 + (s^2 + 2.8s + 0.9)e^{-sh_1} + (0.35s^2 + 0.4s + 4)e^{-sh_2}. \quad (2.79)$$

Łatwo sprawdzić, że wielomian $w_0(s) = s^2 + 6s + 5$ jest asymptotycznie stabilny. Warunek 1) twierdzenia 2.8 jest więc spełniony.

Obliczając ze wzorów (2.65) i (2.66) wartość początkową oraz wartość końcową funkcji testującej $\Phi(\omega)$, otrzymamy odpowiednio:

$$\Phi_0 = 1 - \sum_{i=1}^2 |a_{0i}| / |a_{00}| = 0.02 > 0, \quad (2.80)$$

$$\Phi_\infty = 1 - \sum_{i=1}^2 |a_{2i}| / a_{20} = -0.35 < 0, \quad (2.81)$$

bowiem $a_{00} = 5$, $a_{01} = 0.9$, $a_{02} = 4$, $a_{20} = 1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0.35$.

Ponieważ wartość końcowa (2.81) nie jest dodatnia, z twierdzenia 2.8 wynika, że człon dominujący quasi-wielomianu (2.79), mający postać

$$\Delta(\exp(-sh)) = 1 + \exp(-sh_1) + 0.35\exp(-sh_2),$$

nie jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnień. Oznacza to, że rozpatrywany quasi-wielomian nie jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnień, bowiem nie jest spełniony warunek konieczny (2.67).

Quasi-wielomian (2.79) jest natomiast asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia h w przypadku opóźnień współmiernych, tzn. gdy $h_1 = h$, $h_2 = 2h$. Zostało to pokazane w przykładzie 2.5. ■

2.3.4. Stabilność w zależności od wielkości współmiernych opóźnień

Weźmy pod uwagę quasi-wielomian charakterystyczny ze współmiernymi opóźnieniami, mający postać

$$w(s, h) = \sum_{i=0}^m w_i(s) \exp(-shi), \quad (2.82)$$

gdzie $h \geq 0$ jest opóźnieniem, zaś $w_i(s)$, $i = 0, 1, \dots, m$, są to wielomiany o postaci

$$w_i(s) = \sum_{k=0}^n a_{ki} s^k, \quad a_{n0} > 0. \quad (2.83)$$

Z quasi-wielomianem (2.82) jest stowarzyszony wielomian $w(s, z)$ dwóch niezależnych zmiennych zespolonych s i z , mający postać

$$w(s, z) = \sum_{i=0}^m w_i(s) z^i, \quad (2.84)$$

gdzie wielomiany $w_i(s)$, $i = 0, 1, \dots, m$, mają postać (2.83).

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że człon dominujący $\Delta(z)$, mający postać (2.18), jest asymptotycznie stabilny, tj.

$$\Delta(z) \neq 0, \quad |z| \leq 1. \quad (2.85)$$

Stabilność członu dominującego nie zależy od wartości opóźnienia $h \geq 0$.

Z rozważań podanych w punkcie 2.2 niniejszej pracy wynika, że jeżeli jest spełniony warunek (2.85), to stabilność quasi-wielomianu (2.82) typu opóźnionego lub neutralnego jest równoważna z położeniem wszystkich jego zer w otwartej lewej półpłaszczyźnie. Ponadto, granica spektralna

$$\sup\{\operatorname{Re} s : w(s, h) = 0\} \quad (2.86)$$

jest ciągłą funkcją argumentu h w przedziale $[0, \infty)$.

Quasi-wielomian (2.82) może być asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia $h \geq 0$ lub też dla określonych przedziałów wartości opóźnienia.

Zgodnie z twierdzeniem 2.7, quasi-wielomian (2.82) spełniający warunek (2.85) jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia wtedy i tylko wtedy, gdy linie zer wielomianu zespolonego $w(s, \exp(-jy))$, wyznaczone w funkcji parametru $y \in [0, 2\pi]$, leżą całkowicie w otwartej lewej półpłaszczyźnie i co najwyżej są styczne do osi urojonej w punkcie $s = 0$.

Jeżeli zaś linie zer wielomianu $w(s, \exp(-jy))$, $y \in [0, 2\pi]$, przecinają oś urojoną płaszczyzny zmiennej zespolonej, to quasi-wielomian (2.82) nie jest stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia. Natomiast może on być asymptotycznie

stabilny dla określonych przedziałów wartości opóźnienia. Te przedziały można wyznaczyć stosując tzw. metodę h -podziału, opisaną w pracy [27], podobną metodę, podaną w pracach [134, 161] lub też komputerową metodę, zaproponowaną w [44] dla quasi-wielomianów i uogólnioną w [46] na klasę wielowymiarowych układów ze współmiernymi opóźnieniami, opisanych równaniem stanu.

Poniżej, wykorzystując pracę [44], podamy komputerową metodę wyznaczania przedziałów wartości opóźnienia, dla których quasi-wielomian (2.82) jest asymptotycznie stabilny (o ile takie przedziały istnieją). Jest ona pewną modyfikacją metody h -podziału. Proponowana metoda bazuje na analizie położenia zer wielomianu zespolonego $w(s, \exp(-jy))$ w funkcji $y \in [0, 2\pi]$.

Założmy, że współczynniki quasi-wielomianu (2.82) są znane, zaś opóźnienie h zmienia się w sposób ciągły w przedziale $[0, \infty)$. Założmy ponadto, że spełniony jest warunek (2.85) oraz wielomiany $w_k(s)$, $k = 0, 1, \dots, m$, nie mają wspólnych zer na osi urojonej.

Zera quasi-wielomianu (2.82) przy h zmieniającym się od 0 do ∞ poruszają się po liniach zer, oznaczmy je przez $s(h)$, których jest nieskończenie wiele. W przypadku quasi-wielomianu (2.82) typu opóźnionego, a także i typu neutralnego przy spełnieniu warunku (2.85), liczba zer leżących w otwartej prawej półpłaszczyźnie jest skończona dla dowolnego ustalonego $h \geq 0$. Na powyższym fakcie bazuje metoda h -podziału. Polega ona na wyznaczaniu liczby zer quasi-wielomianu (2.82), leżących w otwartej prawej półpłaszczyźnie, w funkcji h zmieniającego się od 0 do ∞ .

W metodzie h -podziału oś liczbową opóźnienia $h \geq 0$ dzieli się punktami h_k , zwanymi granicami h -podziału, na przeliczalną liczbę rozłącznych przedziałów. Dla dowolnego h należącego do jednego z tych przedziałów quasi-wielomian (2.82) ma ustaloną liczbę zer o dodatniej części rzeczywistej. Liczba tych zer, przy ciągłej zmianie wartości h od 0 do ∞ , może ulec zmianie tylko przy przejściu zera przez oś urojoną, czyli przy przejściu wartości h przez granicę h -podziału.

Podstawą do wyznaczenia granic h -podziału i następnie do badania stabilności w funkcji wielkości opóźnienia quasi-wielomianu (2.82) jest znajomość tzw. par krytycznych (ω_r, h_r) oraz odpowiadających im wskaźników (współczynników) przejścia p_r , $r = 1, 2, \dots, M$, gdzie M jest liczbą par krytycznych. Przy $h = h_r$ quasi-wielomian (2.82) ma parę zer $s_r = \pm j\omega_r$ na osi urojonej płaszczyzny zmiennej zespolonej. Wskaźnik (współczynnik) przejścia p_r określa kierunek przejścia zer quasi-wielomianu (2.82) przez punkt $s_r = j\omega_r$ (lub $s_r = -j\omega_r$) przy rosnących wartościach opóźnienia h , przy czym

- jeżeli $p_r = -1$, to przy $h = h_r$ zera quasi-wielomianu (2.82) przechodzą w otwartą lewą półpłaszczyznę,
- jeżeli $p_r = 1$, to przy $h = h_r$ zera quasi-wielomianu (2.82) przechodzą w otwartą prawą półpłaszczyznę,
- jeżeli $p_r = 0$, to przy $h = h_r$ zera quasi-wielomianu (2.82) nie przekraczają osi urojonej płaszczyzny zmiennej zespolonej (linia zer quasi-wielomianu (2.82) jest styczna do osi urojonej).

Pary krytyczne (ω_r, h_r) wyznacza się rozwiązując (różnymi metodami) równanie

$$w(j\omega, h) = 0 \quad (2.87)$$

ze względu na $\omega > 0$ i $h > 0$, gdzie $w(s, h)$ jest quasi-wielomianem, mającym postać (2.82).

Wskaźnik p_r przy jednokrotnym pierwiastku $\omega = \omega_r$ równania (2.87) oblicza się ze wzoru

$$p_r = \operatorname{sgn} \operatorname{Re}[(ds/dh)|_{s=j\omega_r, h=h_r}], \quad (2.88)$$

gdzie $ds/dh = -w_h/w_s$, przy czym w_h i w_s są to pochodne cząstkowe quasi-wielomianu $w(s, h)$ ze względu na zmienne h i s , odpowiednio.

Weźmy pod uwagę wielomian zespolony $w(s, \exp(-jy))$, który otrzymuje się z wielomianu (2.84) przez podstawienie $z = \exp(-jy)$. Dla każdego ustalonego $y \in [0, 2\pi]$ ma on n zer, które przy zmianach wartości parametru y poruszają się po n liniach zer. Z okresowości funkcji $\exp(-jy)$ wynika, że te linie (oznaczymy je przez $s(y)$) są symetryczne względem osi rzeczywistej i tworzą krzywe zamknięte. Dlatego też, analizując linie zer $s(y)$ wielomianu zespolonego $w(s, \exp(-jy))$ można ograniczyć się do przedziału $[0, 2\pi]$.

Łatwo zauważyć, że jeżeli równanie (2.87) jest spełnione dla $\omega = \omega_r$ i $h = h_r$, to równanie

$$w(j\omega, \exp(-jy)) = 0 \quad (2.89)$$

jest spełnione dla $\omega = \omega_r$ i $y = y_r$, przy czym $y_r = \omega_r h_r$. Odwrotnie, jeżeli równanie (2.89) jest spełnione dla $\omega = \omega_r$ i $y = y_r$, to równanie (2.87) jest spełnione dla $\omega = \omega_r$ i $h = h_r = y_r / \omega_r$.

Z powyższego wynika, że jeżeli zera quasi-wielomianu (2.82), których jest nieskończenie wiele, przekraczają oś urojoną przy h zmieniającym się od 0 do ∞ , to przekraczają ją w skończonej liczbie punktów $s_r = \pm j\omega_r$, $r = 1, 2, \dots, M$. Dokładnie przez te same punkty, tj. przez $s_r = \pm j\omega_r$, przechodzą zera wielomianu zespolonego $w(s, \exp(-jy))$ przy y zmieniającym się od 0 do 2π .

Pary krytyczne (ω_r, h_r) możemy więc znaleźć rozwiązując równanie (2.89) względem $\omega > 0$ i $y \in [0, 2\pi]$. Znajdziemy w ten sposób najpierw pary (ω_r, y_r) , $r = 1, 2, \dots, M$, a następnie pary krytyczne (ω_r, h_r) , gdzie $h_r = y_r / \omega_r$, spełniające równanie (2.87).

Kierunek przejścia (a więc i wskaźnik przejścia) zer $s(y)$ wielomianu $w(s, \exp(-jy))$ przez oś urojoną w punkcie $s_r = j\omega_r$ przy $y = y_r$ jest taki sam jak kierunek przejścia przy $h = h_r$ zer $s(h)$ quasi-wielomianu (2.82) przez ten sam punkt, tj. $s_r = j\omega_r$. Przykładowo, jeżeli ω_r jest jednokrotnym pierwiastkiem równania (2.87), to wskaźnik przejścia linii zer quasi-wielomianu (2.82) przez punkt $s_r = j\omega_r$ przy $h = h_r$ oblicza się ze wzoru $p_r = \text{sgn Re } \vartheta_r$, gdzie ϑ_r jest liczbą zespoloną, zależną od współczynników quasi-wielomianu (2.82) oraz ω_r i h_r [27]. Natomiast wskaźnik przejścia linii zer $s(y)$ wielomianu zespolonego $w(s, \exp(-jy))$ przez punkt $s_r = j\omega_r$ przy $y = y_r$, obliczony w taki sam sposób jak w [27] (na bazie wzoru (2.88) przy zastąpieniu ds/dh przez ds/dy) ma postać $p_r = \text{sgn Re}(\vartheta_r / y_r)$, a więc jest taki sam jak w przypadku linii zer quasi-wielomianu (2.82).

Z okresowości funkcji $\exp(-j\omega h)$ wynika, że jeżeli para (ω_r, h_r) jest rozwiązaniem równania (2.87), to równanie (2.87) jest też spełnione dla $\omega = \omega_r$ i $h = h_{ri}$, gdzie

$$h_{ri} = h_r + 2\pi i / \omega_r, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.90)$$

przy czym wskaźnik przejścia p_{ri} , odpowiadający parom (ω_r, h_{ri}) jest taki sam jak wskaźnik przejścia, odpowiadający parze (ω_r, h_r) , tj. $p_{ri} = p_r$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Mamy więc M ciągów wartości h_{ri} ($r = 1, 2, \dots, M$, $i = 0, 1, 2, \dots$), przy których quasi-wielomian (2.82) ma zera na osi urojonej. Aby otrzymać granice h -podziału, należy wartości h_{ri} ($r = 1, 2, \dots, M$, $i = 0, 1, 2, \dots$) uporządkować w jeden ciąg rosnący i ponumerować je od nowa w następujący sposób (dołączając $h_0 = 0$)

$$0 = h_0 < h_1 < h_2 < \dots < h_k < \dots \quad (2.91)$$

Porządkując wartości h_{ri} w ciąg (2.91) należy od razu przyporządkować poszczególnym elementom tego ciągu odpowiednie wartości wskaźnika przejścia p_k , $k = 1, 2, \dots$.

Elementy ciągu (2.91) dzielą oś liczbową opóźnienia $[0, \infty)$ na przeliczalną liczbę rozłącznych przedziałów. Dla każdego $h \in (h_{k-1}, h_k)$, $k = 1, 2, \dots$, quasi-wielomian (2.82) ma określoną, skończoną liczbę zer w otwartej prawej półpłaszczyźnie.

Niech $N(h)$ oznacza liczbę zer o dodatniej części rzeczywistej quasi-wielomianu (2.82) przy ustalonej wartości h . Oblicza się ją ze wzoru

$$N(h) = N(0) + \sum_{k=0}^{\tilde{n}} 2p_k, \quad (2.92)$$

gdzie $N(0)$ jest liczbą zer quasi-wielomianu (2.82), leżących w otwartej prawej półpłaszczyźnie przy $h = 0$, $\tilde{n}$ jest liczbą elementów ciągu (2.91), leżących w przedziale $[0, h]$, zaś p_k jest wskaźnikiem przejścia, odpowiadającym $h = h_k$ ($p_k = -1$, $p_k = 1$ lub $p_k = 0$).

Quasi-wielomian (2.82) jest asymptotycznie stabilny (ma wszystkie zera o ujemnych częściach rzeczywistych) wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in H$, gdzie

$$H = \{h \in [0, \infty): N(h) = 0\}. \quad (2.93)$$

Z powyższych rozważań wynika następująca obliczeniowa procedura badania asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (2.82), spełniającego założenia podane na początku niniejszego punktu.

Krok 1. Oblicz miejsca zerowe wielomianu $w(s, \exp(-jy))$ w funkcji parametru $y \in [0, 2\pi]$, przyjmując odpowiednio mały krok Δy . Jeżeli wyznaczone zera leżą całkowicie w otwartej lewej półpłaszczyźnie, quasi-wielomian (2.82) jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia. Jeżeli zaś leżą one całkowicie w otwartej prawej półpłaszczyźnie lub w otwartej prawej półpłaszczyźnie całkowicie leży grupa zer, tworzących linię zer będącą krzywą zamkniętą, to quasi-wielomian (2.82) nie jest stabilny dla dowolnego $h \geq 0$. W przeciwnym przypadku idź do Kroku 2.

Krok 2. Na bazie obliczonych zer wielomianu $w(s, \exp(-jy))$ wyznacz pary (ω_r, y_r) , będące rozwiązaniem równania (2.89) oraz odpowiadające im wskaźniki przejścia p_r , $r = 1, 2, \dots, M$.

Krok 3. Dla każdego $r = 1, 2, \dots, M$ wartości h_{ri} oblicz ze wzoru

$$h_{ri} = (y_r + 2\pi i) / \omega_r, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.94)$$

i utwórz z nich jeden ciąg rosnący (2.91), przyporządkowując jednocześnie poszczególnym wartościom h_k tego ciągu odpowiadające im wartości wskaźnika przejścia p_k (pamiętając, że $p_{ri} = p_r$, $i = 0, 1, 2, \dots$).

Krok 4. Oblicz $N(h)$ ze wzoru (2.92) i zbiór H wartości opóźnienia h , przy których quasi-wielomian (2.82) jest asymptotycznie stabilny, wyznacz ze wzoru (2.93), o ile taki zbiór istnieje (tzn. nie jest pusty).

Uwagi:

1) W zastosowaniach praktycznych interesuje nas stabilność quasi-wielomianu (2.82) w skończonym przedziale, np. $[0, h_{kon}]$. Taki przedział należy brać pod uwagę przy obliczeniach realizowanych w Kroku 3, tj. ciąg (2.91) należy ograniczyć do elementów leżących w przedziale $[0, h_{kon}]$.

2) Wyznaczając parę (ω_r, y_r) można stosować obliczeniowe metody służące do rozwiązywania równań wielu zmiennych, wyznaczając początkowe przybliżenie na podstawie zer wielomianu $w(s, \exp(-jy))$ obliczonych w Kroku 1. Można też stosować np. metodę bisekcji, znając przedział w którym leży y_r (na podstawie obliczeń Kroku 1) i wyznaczając $y = y_r$, przy którym część rzeczywista analizowanej pary zer wielomianu $w(s, \exp(-jy))$ jest równa zeru zadaną dokładnością.

3) Wskaźnik przejścia p_r odpowiadający parze (ω_r, y_r) można obliczyć na podstawie położenia zer, wyznaczonych w Kroku 1, tj. na podstawie sprawdzenia położenia analizowanego zera przy $y = y_r - \Delta y$ oraz $y = y_r + \Delta y$.

4) Linie zer wielomianu $w(s, \exp(-jy))$, $y \in [0, 2\pi]$, składają się z odcinków linii krzywych, po których poruszają się zera (a jest ich n) tego wielomianu przy y zmieniającym się od 0 do 2π . Odcinki te tworzą krzywe zamknięte na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Przy obliczeniach zgodnie z zaproponowaną procedurą mogą pojawić się problemy dotyczące odpowiedniego uporządkowania wartości

zer $s_i(y)$, $i = 1, 2, \dots, n$, wielomianu $w(s, \exp(-jy))$, wyznaczonych w funkcji parametru $y \in [0, 2\pi]$. Dlatego też wygodnie jest oznaczać linie zer liniami kropkowanymi na rysunku.

Przykład 2.8. Dany jest quasi-wielomian charakterystyczny (2.82) typu neutralnego z pięcioma współmiernymi opóźnieniami, przy czym

$$w_0(s) = s^2 + 2s + 2; \quad w_1(s) = 0.4s^2 + 2;$$

$$w_2(s) = 0.1s^2 + s + 0.8; \quad w_3(s) = -0.6s + 0.2;$$

$$w_4(s) = 0.1s^2 + 0.3s + 0.4; \quad w_5(s) = 0.2s^2 - s + 0.3.$$

Należy wyznaczyć wartości opóźnienia h , dla których rozpatrywany quasi-wielomian jest asymptotycznie stabilny.

Wszystkie zera członu dominującego $\Delta(z) = 1 + 0.4z + 0.1z^2 + 0.1z^4 + 0.2z^5$ spełniają warunek $|z| > 1$. Oznacza to, że warunek (2.85) jest spełniony. Łatwo też sprawdzić, że wielomiany $w_k(s)$, $k = 0, 1, \dots, 5$, nie mają wspólnych zer, a więc i nie mają wspólnych zer na osi urojonej. Do badania asymptotycznej stabilności rozpatrywanego quasi-wielomianu można więc stosować zaproponowaną procedurę.

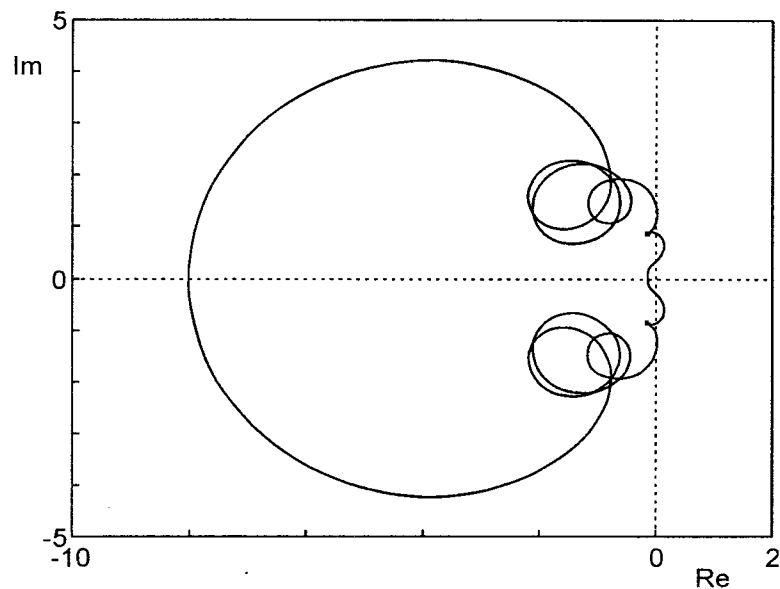
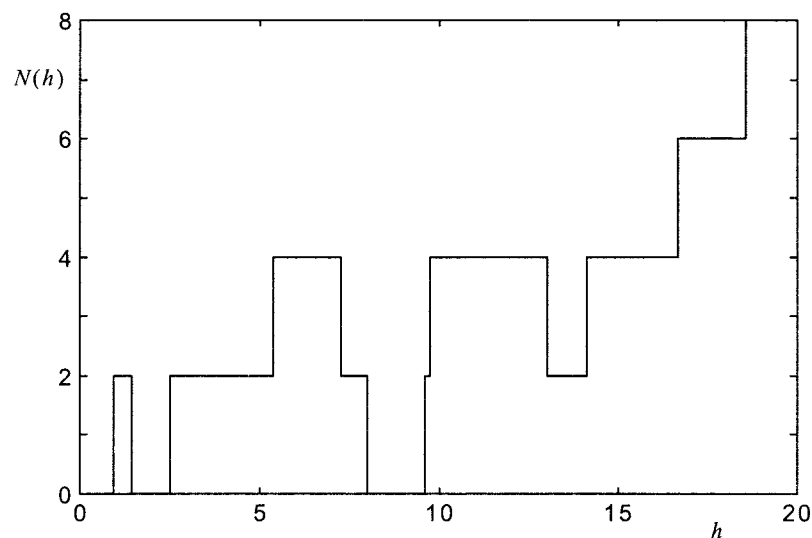
Obliczając zera wielomianu zespolonego $w(s, \exp(-jy))$ dla y zmieniającego się od 0 do 2π z krokiem $\pi/600$ i łącząc je otrzymamy pokazaną na rysunku 2.4 linię zer tego wielomianu. Z rysunku 2.4 wynika, że istnieją cztery pary krytyczne (ω_r, y_r) , $r = 1, 2, 3, 4$, spełniające równanie (2.89). Obliczając te pary (z dokładnością do $\varepsilon = 0.00001$) oraz wartości $h_r = y_r / \omega_r$ i odpowiadające im współczynniki przejścia p_r , otrzymamy

$$\omega_1 = 1.4260, \quad y_1 = 1.3359, \quad h_1 = 0.9368, \quad p_1 = 1;$$

$$\omega_2 = 1.0837, \quad y_2 = 1.5672, \quad h_2 = 1.4462, \quad p_2 = -1;$$

$$\omega_3 = 0.8839, \quad y_3 = 2.1889, \quad h_3 = 2.4765, \quad p_3 = 1;$$

$$\omega_4 = 0.3193, \quad y_4 = 2.5490, \quad h_4 = 7.9832, \quad p_4 = -1.$$

Rys. 2.4. Linia zer wielomianu zespolonego $w(s, \exp(-jy))$, $y \in [0, 2\pi]$ Rys. 2.5. Wykres $N(h)$ dla $h \in [0, 20]$

Dokonując obliczeń zgodnie z Krokami 3 i 4, otrzymamy pokazany na rysunku 2.5 wykres liczby zer o dodatniej części rzeczywistej (tj. $N(h)$) w funkcji $h \in [0, 20]$ (dla $\forall h \geq 20$ mamy $N(h) > 0$).

Z rysunku 2.5, obliczonych wartości granic h -podziału oraz ze wzoru (2.93) wynika, że

$$H = (0, 0.9368) \cup (1.4462, 2.4765) \cup (7.9832, 9.5851). \quad (2.95)$$

Rozpatrywany układ jest więc asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in H$, gdzie zbiór H ma postać (2.95). ■

2.4. Właściwości argumentu asymptotycznie stabilnych quasi-wielomianów

Z teorii stabilności ciągłych układów liniowych stacjonarnych wynika, że jeżeli wielomian charakterystyczny $w(s)$ jest asymptotycznie stabilny, tj. wszystkie jego zera mają ujemne części rzeczywiste, to argument funkcji $w(j\omega)$ jest monotonicznie rosnącą funkcją parametru $\omega \in [0, \infty)$.

W pracy [147] (patrz też [18]) wykazano, że jeżeli $w(s)$ jest asymptotycznie stabilnym wielomianem o rzeczywistych współczynnikach, to dla każdego dodatniego ω jest spełniony warunek

$$\frac{d}{d\omega} \arg w(j\omega) \geq \left| \frac{\sin(2 \arg w(j\omega))}{2\omega} \right|, \quad (2.96)$$

przy czym zachodzi równość tylko dla wielomianów stopnia pierwszego.

W niniejszym punkcie przeanalizujemy właściwości argumentu asymptotycznie stabilnych quasi-wielomianów.

Weźmy pod uwagę quasi-wielomian z niewspółmiernymi opóźnieniami, mający postać

$$w(s, h) = \sum_{i=0}^m w_i(s) \exp(-sh_i), \quad (2.97)$$

gdzie $h_0 = 0$, $h_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, oraz

$$w_i(s) = \sum_{k=0}^n a_{ki} s^k, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad a_{n0} \neq 0. \quad (2.98)$$

Rozpatrzmy dwa quasi-wielomiany, które tworzy się na bazie quasi-wielomianu (2.97) w następujący sposób

$$w(s, \bar{h}) = \exp(sh_m)w(s, h), \quad (2.99)$$

$$w(s, \hat{h}) = \exp(0.5sh_m)w(s, h). \quad (2.100)$$

Quasi-wielomian (2.99) można napisać w postaci

$$w(s, \bar{h}) = \sum_{i=0}^m w_{m-i}(s) \exp(s\bar{h}_i), \quad (2.101)$$

gdzie $\bar{h} = [\bar{h}_0, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m]$, przy czym $\bar{h}_i = h_m - h_{m-i}$, $i = 0, 1, \dots, m$, zaś wielomiany $w_{m-i}(s)$ oblicza się ze wzoru (2.98) podstawiając $m-i$ zamiast i .

Podobnie, quasi-wielomian (2.100) można napisać w postaci

$$w(s, \hat{h}) = \sum_{i=0}^m w_{m-i}(s) \exp(s\hat{h}_i), \quad (2.102)$$

gdzie $\hat{h} = [\hat{h}_0, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_m]$, przy czym $\hat{h}_i = 0.5h_m - h_{m-i}$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Zauważmy, że:

- w quasi-wielomianie (2.97) argumenty funkcji $\exp$ są niedodatnie, przy czym $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m$,
- w quasi-wielomianie (2.101) argumenty funkcji $\exp$ są nieujemne, przy czym odchyłone argumenty $\bar{h}_i = h_m - h_{m-i}$, $i = 0, 1, \dots, m$, spełniają nierówności $0 = \bar{h}_0 < \bar{h}_1 < \dots < \bar{h}_m = h_m$,
- w quasi-wielomianie (2.102) argumenty funkcji $\exp$ są ujemne i dodatnie, przy czym odchyłone argumenty $\hat{h}_i = 0.5h_m - h_{m-i}$, $i = 0, 1, \dots, m$, spełniają nierówności $-0.5h_m = \hat{h}_0 < \hat{h}_1 < \dots < \hat{h}_m = 0.5h_m$, przy czym $\hat{h}_0 + \hat{h}_m = 0$.

Quasi-wielomiany (2.97), (2.101) i (2.102) mają te same miejsca zerowe. Badając asymptotyczną stabilność quasi-wielomianu (2.97) możemy więc równoważnie rozpatrywać quasi-wielomian (2.101) lub (2.102).

Do badania asymptotycznej stabilności quasi-wielomianów (2.101) i (2.102) można stosować poniższe twierdzenie, podane w pracy [64] w przypadku opóźnień niewspółmiernych (patrz też np. [71]). Dla opóźnień współmiernych zostało ono

wcześniej sformułowane w pracy [146]. Rezultaty tej pracy są cytowane w monografiach [27, 83, 91, 98].

Weźmy pod uwagę quasi-wielomian

$$w(s, \tilde{h}) = \sum_{i=0}^m w_{m-i}(s) \exp(s\tilde{h}_i), \quad (2.103)$$

gdzie $w_i(s)$ są to wielomiany, mające postać (2.98), natomiast odchyłone argumenty $\tilde{h}_i$ spełniają relację $\tilde{h}_0 < \tilde{h}_1 < \dots < \tilde{h}_m$.

Wprowadźmy oznaczenia

$$\tilde{u}(\omega) = \operatorname{Re} w(j\omega, \tilde{h}), \quad \tilde{v}(\omega) = \operatorname{Im} w(j\omega, \tilde{h}). \quad (2.104)$$

Twierdzenie 2.9 [64]. Niech $\tilde{h}_0 + \tilde{h}_m \geq 0$. Quasi-wielomian (2.103) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy zera funkcji $\tilde{u}(\omega)$ i $\tilde{v}(\omega)$ są rzeczywiste, jednokrotne, wzajemnie się przedzielają i nierówność

$$\tilde{u}(\omega)\tilde{v}'(\omega) - \tilde{u}'(\omega)\tilde{v}(\omega) > 0 \quad (2.105)$$

jest spełniona dla każdego rzeczywistego ω , gdzie $f'(\omega) = (d/d\omega)f(\omega)$. ■

Spełnienie nierówności (2.105) dla każdego rzeczywistego ω oznacza, że argument funkcji $w(j\omega, \tilde{h})$ jest monotonicznie rosnącą funkcją parametru ω , tzn. $(d/d\omega) \arg w(j\omega, \tilde{h}) > 0$. Wynika to ze wzorów

$$\arg w(j\omega, \tilde{h}) = \arctg(\tilde{v}(\omega) / \tilde{u}(\omega)), \quad (2.106)$$

$$\frac{d}{d\omega} \arg w(j\omega, \tilde{h}) = \frac{\tilde{u}(\omega)\tilde{v}'(\omega) - \tilde{u}'(\omega)\tilde{v}(\omega)}{\tilde{u}^2(\omega) + \tilde{v}^2(\omega)}. \quad (2.107)$$

Zauważmy, że warunek $\tilde{h}_0 + \tilde{h}_m \geq 0$ twierdzenia 2.9 nie jest spełniony dla quasi-wielomianu (2.97) zapisanego w postaci (2.103), bowiem $\tilde{h}_0 + \tilde{h}_m = -h_m < 0$. Jest on natomiast spełniony dla quasi-wielomianów (2.101) i (2.102), bowiem odpowiednio mamy $\tilde{h}_0 + \tilde{h}_m = \bar{h}_m = h_m > 0$ oraz $\tilde{h}_0 + \tilde{h}_m = \hat{h}_0 + \hat{h}_m = 0$.

Wprowadźmy oznaczenia

$$\varphi(\omega) = \arg w(j\omega, h), \quad \bar{\varphi}(\omega) = \arg w(j\omega, \bar{h}), \quad \hat{\varphi}(\omega) = \arg w(j\omega, \hat{h}). \quad (2.108)$$

W pracy [71] udowodniono poniższy lemat.

Lemat 2.6. Jeżeli quasi-wielomian (2.101) jest asymptotycznie stabilny, to dla wszystkich dodatnich wartości parametru ω zachodzi nierówność

$$\bar{\varphi}'(\omega) \geq \frac{\bar{h}_0 + \bar{h}_m}{2} + \left| \frac{\sin(2\bar{\varphi}(\omega) - (\bar{h}_0 + \bar{h}_m)\omega)}{2\omega} \right|, \quad (2.109)$$

gdzie $\bar{\varphi}'(\omega) = (d/d\omega)\bar{\varphi}(\omega)$, przy czym zachodzi równość tylko dla quasi-wielomianów stopnia pierwszego. ■

Z powyższego lematu wynika, że jeżeli quasi-wielomian (2.101) jest asymptotycznie stabilny, to argument funkcji $w(j\omega, \bar{h})$ rośnie monotonicznie przy wzroście wartości parametru $\omega > 0$. Powyższy fakt został podany w pracy [146] dla quasi-wielomianu (2.101) ze współmiernymi odchylonymi argumentami, tj. przy $\bar{h}_i = i\bar{h}$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Z oznaczeń (2.108) oraz ze wzorów (2.99) i (2.100) dla $s = j\omega$ wynika, że

$$\bar{\varphi}(\omega) = \omega h_m + \varphi(\omega), \quad \hat{\varphi}(\omega) = 0.5\omega h_m + \varphi(\omega), \quad (2.110)$$

oraz

$$\bar{\varphi}'(\omega) = h_m + \varphi'(\omega), \quad \hat{\varphi}'(\omega) = 0.5h_m + \varphi'(\omega), \quad (2.111)$$

gdzie $\varphi'(\omega) = (d/d\omega)\varphi(\omega)$.

Lemat 2.7. Jeżeli quasi-wielomian (2.102) jest asymptotycznie stabilny, to dla wszystkich dodatnich wartości parametru ω zachodzi nierówność

$$\hat{\varphi}'(\omega) \geq \left| \frac{\sin(2\hat{\varphi}(\omega))}{2\omega} \right|, \quad (2.112)$$

przy czym zachodzi równość tylko dla quasi-wielomianów stopnia pierwszego.

Dowód. Ze wzorów (2.110) wynika, że $\bar{\varphi}(\omega) = \hat{\varphi}(\omega) + 0.5\omega h_m$. Wobec tego, $\bar{\varphi}'(\omega) = \hat{\varphi}'(\omega) + 0.5h_m$. Uwzględniając powyższe równości i oznaczenia (2.108)

oraz biorąc pod uwagę, że $\bar{h}_0 = 0$, $\bar{h}_m = h_m$, nierówność (2.112) otrzymamy z nierówności (2.109). Dowód wynika więc bezpośrednio z lematu 2.6. ■

Zauważmy, że warunek (2.112) ma taką samą postać jak warunek (2.96), podany w [147] dla asymptotycznie stabilnych wielomianów.

Inną postać warunku (2.112) można podać postępując w sposób podobny do zastosowanego w pracy [18] w przypadku wielomianów.

Lemat 2.8. Warunek (2.112) jest równoważny z warunkiem

$$\frac{d\hat{X}(\omega)}{d\omega} \geq \left| \frac{\hat{X}(\omega)}{\omega} \right|, \quad (2.113)$$

gdzie

$$\hat{X}(\omega) = \hat{v}(\omega) / \hat{u}(\omega), \quad \hat{u}(\omega) = \operatorname{Re} w(j\omega, \hat{h}), \quad \hat{v}(\omega) = \operatorname{Im} w(j\omega, \hat{h}). \quad (2.114)$$

Dowód. Z powyższych oznaczeń wynika, że $\hat{X}(\omega) = \operatorname{tg} \hat{\varphi}(\omega)$, $\hat{\varphi}(\omega) = \arctg \hat{X}(\omega)$, oraz

$$\hat{\varphi}'(\omega) = \frac{1}{1 + \hat{X}^2(\omega)} \frac{d\hat{X}(\omega)}{d\omega}. \quad (2.115)$$

Stosując proste przekształcenia trygonometryczne można wykazać, że

$$\frac{1}{1 + \hat{X}^2(\omega)} \left| \frac{\hat{X}(\omega)}{\omega} \right| = \cos^2 \hat{\varphi}(\omega) \left| \frac{\operatorname{tg} \hat{\varphi}(\omega)}{\omega} \right| = \left| \frac{\sin 2\hat{\varphi}(\omega)}{2\omega} \right|. \quad (2.116)$$

Nierówność (2.113) wynika z nierówności (2.112) po uwzględnieniu wzorów (2.115) i (2.116). ■

Przeanalizujemy teraz zachowanie się argumentu funkcji $w(j\omega, h)$, gdzie $w(s, h)$ jest quasi-wielomianem, mającym postać (2.97).

Lemat 2.9. Jeżeli quasi-wielomian (2.97) jest asymptotycznie stabilny, to dla wszystkich dodatnich wartości parametru ω zachodzi nierówność

$$\varphi'(\omega) \geq \frac{-h_m}{2} + \left| \frac{\sin(\omega h_m + 2\varphi(\omega))}{2\omega} \right|, \quad (2.117)$$

przy czym zachodzi równość tylko dla quasi-wielomianów stopnia pierwszego.

Dowód. Podstawiając do nierówności (2.109) pierwsze wzory podane w (2.110) i (2.111) oraz uwzględniając zależności $\bar{h}_0 = 0$ i $\bar{h}_m = h_m$, po przekształceniach otrzymamy nierówność (2.117). ■

Z lematu 2.9 wynika, że jeżeli quasi-wielomian (2.97) jest asymptotycznie stabilny, to argument funkcji $w(j\omega, h)$ w przypadku ogólnym nie jest monotonicznie rosnącą funkcją parametru $\omega > 0$.

Warunek (2.117) można napisać w postaci

$$F_{\arg}(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega > 0, \quad (2.118)$$

gdzie

$$F_{\arg}(\omega) = \varphi'(\omega) + \frac{h_m}{2} - \left| \frac{\sin(\omega h_m + 2\varphi(\omega))}{2\omega} \right|. \quad (2.119)$$

Warunek (2.117), lub równoważnie (2.118), jest warunkiem koniecznym asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (2.97). Przy komputerowym sprawdzaniu tego warunku mogą pojawić się problemy związane z obliczeniem argumentu funkcji $w(j\omega, h)$ w przypadku, gdy dla niektórych $\omega > 0$ jego wartość bezwzględna jest większa od π . Aby uniknąć tej niedogodności, poniżej podamy inny sposób wyznaczania funkcji (2.119), w którym bezpośrednio obliczanie argumentu $w(j\omega, h)$ nie jest konieczne.

Weźmy pod uwagę quasi-wielomian (2.97) i wprowadźmy oznaczenia

$$u(\omega) = \operatorname{Re} w(j\omega, h), \quad v(\omega) = \operatorname{Im} w(j\omega, h), \quad X(\omega) = v(\omega) / u(\omega). \quad (2.120)$$

Ze wzoru (2.100) i oznaczeń podanych w (2.114) i (2.120) wynika, że

$$\hat{u}(\omega) = u(\omega) \cos(0.5\omega h_m) + v(\omega) \sin(0.5\omega h_m), \quad (2.121)$$

$$\hat{v}(\omega) = v(\omega) \cos(0.5\omega h_m) - u(\omega) \sin(0.5\omega h_m). \quad (2.122)$$

Podstawiając (2.121) i (2.122) do pierwszego ze wzorów (2.114) oraz uwzględniając ostatni ze wzorów (2.120), po przekształceniach otrzymamy

$$\hat{X}(\omega) = \frac{X(\omega) - \operatorname{tg}(0.5\omega h_m)}{1 + X(\omega) \operatorname{tg}(0.5\omega h_m)}. \quad (2.123)$$

Biorąc pod uwagę drugi ze wzorów (2.110) oraz wzór (2.116), nierówność (2.117) napiszemy w postaci

$$\varphi'(\omega) > -0.5h_m + \frac{1}{1 + \hat{X}^2(\omega)} \left| \frac{\hat{X}(\omega)}{\omega} \right|. \quad (2.124)$$

Ponadto, ze wzoru (2.107) zastosowanego do quasi-wielomianu (2.97) wynika, że

$$\varphi'(\omega) = \frac{u(\omega)v'(\omega) - u'(\omega)v(\omega)}{u^2(\omega) + v^2(\omega)}. \quad (2.125)$$

Z powyższych rozważań wynika zatem, że dla ustalonego $\omega > 0$ wartość funkcji $F_{\arg}(\omega)$ można obliczyć ze wzoru

$$F_{\arg}(\omega) = \frac{u(\omega)v'(\omega) - u'(\omega)v(\omega)}{u^2(\omega) + v^2(\omega)} + \frac{h_m}{2} - \frac{1}{1 + \hat{X}^2(\omega)} \left| \frac{\hat{X}(\omega)}{\omega} \right|, \quad (2.126)$$

gdzie $\hat{X}(\omega)$ ma postać (2.123).

Przykład 2.9. Weźmy pod uwagę asymptotycznie stabilny quasi-wielomian, rozpatrywany w przykładzie 2.3, mający postać

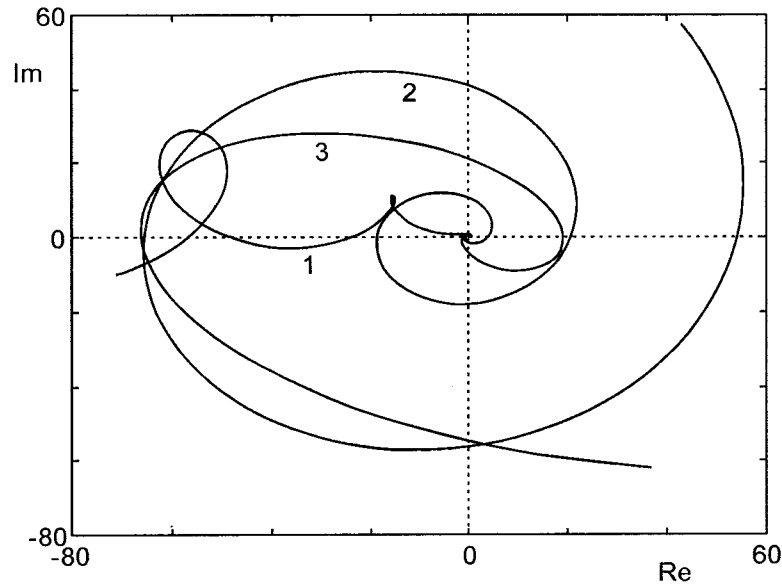
$$w(s, h) = 0.076s^2 + 0.38s + (0.0228s^2 + 0.228s + 0.6)e^{-0.5s}. \quad (2.127)$$

Tworząc quasi-wielomiany $w(s, \bar{h})$ i $w(s, \hat{h})$ w sposób podany w (2.99) i (2.100), odpowiednio otrzymamy

$$w(s, \bar{h}) = (0.076s^2 + 0.38s)e^{0.5s} + 0.0228s^2 + 0.228s + 0.6, \quad (2.128)$$

$$w(s, \hat{h}) = (0.076s^2 + 0.38s)e^{0.25s} + (0.0228s^2 + 0.228s + 0.6)e^{-0.25s}. \quad (2.129)$$

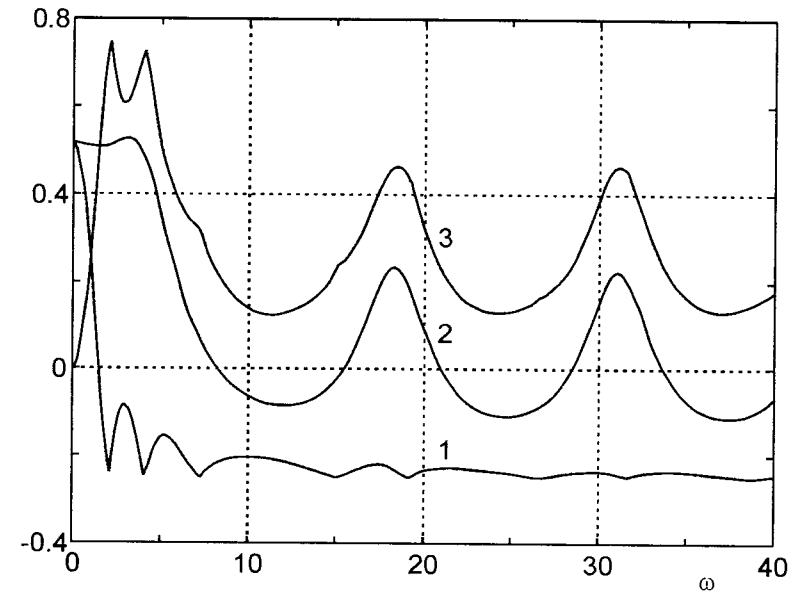
Fragmenty wykresów funkcji $w(j\omega, h)$, $w(j\omega, \bar{h})$ oraz $w(j\omega, \hat{h})$, sporządzone dla $\omega \in [0, 33]$, są pokazane na rysunku 2.6 (krzywe 1, 2 i 3, odpowiednio).



Rys. 2.6. Wykresy do przykładu 2.9: funkcji $w(j\omega, h)$ (krzywa 1), $w(j\omega, \bar{h})$ (krzywa 2) oraz $w(j\omega, \hat{h})$ (krzywa 3) dla $\omega \in [0, 33]$

Wykresy tych funkcji rozpoczynają się na dodatniej półosi rzeczywistej, przy czym $w(j0, h) = w(j0, \bar{h}) = w(j0, \hat{h}) = 0.6$. Wykres funkcji $w(j\omega, h)$ oscyluje wokół ujemnej półosi rzeczywistej i $\operatorname{Re} w(j\omega, h)$ dąży do minus nieskończoności przy ω dążącym do nieskończoności. Potwierdza to, zgodnie z twierdzeniem 2.3, że quasi-wielomian (2.127) jest asymptotycznie stabilny (przyrost argumentu $w(j\omega, h)$ jest równy π przy zmianach parametru ω od zera do nieskończoności). Natomiast wykresy funkcji $w(j\omega, \bar{h})$ i $w(j\omega, \hat{h})$ nieskończenie wiele razy okrążają początek płaszczyzny zmiennej zespolonej, przy czym rzeczywiste zera części rzeczywistej i części urojonej każdej z tych funkcji wzajemnie się przedzielają. Z twierdzenia 2.9 wynika więc, że quasi-wielomiany (2.128) i (2.129) są asymptotycznie stabilne.

Na rysunku 2.7 dla quasi-wielomianu (2.127) są pokazane przebiegi funkcji (2.125) (krzywa 2), będącej lewą stroną nierówności (2.124), funkcji będącej prawą stroną nierówności (2.124) (krzywa 1) oraz funkcji (2.126) (krzywa 3). Zostały one wyznaczone bez bezpośredniego obliczania argumentu funkcji $w(j\omega, h)$.



Rys. 2.7. Wykresy do przykładu 2.9: prawej strony nierówności (2.124) (krzywa 1), funkcji $\phi'(\omega)$ (krzywa 2) oraz funkcji (2.126) (krzywa 3)

Z rysunku 2.7 wynika, że funkcja $\phi'(\omega)$ (krzywa 2) przyjmuje wartości zarówno dodatnie jak i ujemne, przy czym nierówność (2.118) jest spełniona dla każdego $\omega > 0$. Jest to zgodne z lematem 2.9, bowiem quasi-wielomian (2.127) jest asymptotycznie stabilny. ■

3. WPROWADZENIE DO TEORII ODPORNEJ STABILNOŚCI RODZIN QUASI-WIELOMIANÓW CHARAKTERYSTYCZNYCH

Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów charakterystycznych dynamicznego układu liniowego stacjonarnego o niepewnych parametrach, mającą postać

$$w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^m a_{ki}(\mathbf{q}) s^k e^{-sh_i}, \quad \mathbf{q} \in Q, \quad (3.1)$$

gdzie $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_m]$, przy czym $h_0 = 0 < h_1 < h_2 < \dots < h_m < \infty$, współczynniki $a_{ki}(\mathbf{q})$ są ciągłymi funkcjami niepewnych parametrów, $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_l]$ jest wektorem niepewnych fizycznych parametrów układu dynamicznego, zaś

$$Q = \{\mathbf{q}: q_k \in [q_k^-, q_k^+], q_k^- < q_k^+, k = 1, 2, \dots, l\} \quad (3.2)$$

jest zbiorem wartości tych parametrów.

Człon dominujący quasi-wielomianu (3.1) typu neutralnego ma postać

$$\Delta(\exp(-sh), \mathbf{q}) = a_{n0}(\mathbf{q}) + \sum_{i=1}^m a_{ni}(\mathbf{q}) e^{-sh_i}, \quad \mathbf{q} \in Q. \quad (3.3)$$

Nie zmniejszając ogólności rozważań będziemy przyjmować, że $a_{n0}(\mathbf{q}) > 0$, $\forall \mathbf{q} \in Q$. Przy tym założeniu rodzina quasi-wielomianów (3.1) jest rodziną typu neutralnego lub opóźnionego.

W dalszych rozważaniach rodzinę (3.1) quasi-wielomianów będziemy oznaczać przez $W(s, \mathbf{h}, Q)$, tzn.

$$W(s, \mathbf{h}, Q) = \{w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}): \mathbf{q} \in Q\}. \quad (3.4)$$

Oznaczmy przez $w_0(s, \mathbf{h}) = w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}_0)$ quasi-wielomian nominalny (odniesienia) rodziny quasi-wielomianów (3.4). Odpowiada on nominalnym wartościom q_k^0 , $k = 1, 2, \dots, l$, niepewnych parametrów. Jeżeli nie są one określone, to za no-

minalne można przyjąć np. wartości obliczone ze wzorów

$$q_k^0 = 0.5(q_k^- + q_k^+), \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (3.5)$$

Rodzinie (3.4) quasi-wielomianów typu neutralnego odpowiada rodzina członów dominujących

$$\Delta(\exp(-sh), Q) = \{\Delta(\exp(-sh), \mathbf{q}): \mathbf{q} \in Q\}, \quad (3.6)$$

gdzie $\Delta(\exp(-sh), \mathbf{q})$ ma postać (3.3). Nominalnym członem dominującym rodziny (3.6) jest $\Delta(\exp(-sh), \mathbf{q}_0)$.

3.1. Podstawowe definicje i twierdzenia

Niech D będzie przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną, zdefiniowaną wzorem (2.22). Jej brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, $\gamma > 0$. Podaną poniżej teorię można uogólnić na obszary D ogólniejsze niż przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną w sposób opisany w punkcie 3.2.3 niniejszej pracy.

Definicja 3.1. Rodzinę quasi-wielomianów (3.4) typu opóźnionego lub neutralnego będziemy nazywać rodziną odpornie D -stabilną, jeżeli każdy quasi-wielomian należący do tej rodziny jest D -stabilny, tzn. wszystkie jego zera leżą w obszarze D . ■

W przypadku szczególnym, gdy obszar D jest otwartą lewą półpłaszczyzną, odporną stabilność można zdefiniować w sposób podany poniżej.

Definicja 3.1a. Rodzinę quasi-wielomianów (3.4) typu opóźnionego lub neutralnego będziemy nazywać rodziną odpornie stabilną, jeżeli każdy quasi-wielomian należący do tej rodziny jest asymptotycznie stabilny. ■

Jeżeli D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną, to dla każdego ustalonego $\mathbf{q} \in Q$ D -stabilność członu dominującego $\Delta(\exp(-sh), \mathbf{q})$ jest warunkiem koniecznym D -stabilności quasi-wielomianu $w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q})$ typu neutralnego. Wprowadźmy więc pojęcia odpornej D -stabilności i stabilności rodziny członów dominujących (3.6).

Definicja 3.2. Rodzinę członów dominujących (3.6) będziemy nazywać rodziną odpornie D -stabilną, jeżeli każdy człon dominujący $\Delta(\exp(-sh), \mathbf{q})$ należący do tej rodziny jest D -stabilny. ■

Definicja 3.2a. Rodzinę członów dominujących (3.6) będziemy nazywać rodziną odpornie stabilną, jeżeli każdy człon dominujący należący do tej rodziny jest asymptotycznie stabilny. ■

Uwzględniając rozważania podane w punkcie 2.2, definicje odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień rodziny quasi-wielomianów (3.4) i rodziny członów dominujących (3.6) można sformułować w sposób podany poniżej.

Definicja 3.3. Rodzinę quasi-wielomianów (3.4) typu opóźnionego lub neutralnego będziemy nazywać rodziną odpornie stabilną niezależnie od wielkości opóźnień, jeżeli każdy quasi-wielomian należący do tej rodziny jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnień. ■

Definicja 3.4. Rodzinę członów dominujących (3.6) będziemy nazywać rodziną odpornie stabilną niezależnie od wielkości opóźnień, jeżeli każdy człon dominujący należący do tej rodziny jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnień. ■

Jeżeli $a_{n0}(q) > 0$, $\forall q \in Q$, zaś współczynniki quasi-wielomianu $w(s, h, q)$ są ciągłymi funkcjami niepewnych parametrów, to zera $s_i(q)$ tego quasi-wielomianu zależą w sposób ciągły od wartości niepewnych parametrów. Wobec tego, postępując tak samo jak w przypadku rodziny wielomianów (np. [52]) można udowodnić poniższy lemat i twierdzenie, odgrywające istotną rolę w teorii odpornej stabilności układów z opóźnieniami o niepewnych parametrach.

Lemat 3.1. Jeżeli quasi-wielomian $w(s, h, q)$ jest D -stabilny dla przynajmniej jednego $q \in Q$, natomiast rodzina quasi-wielomianów $W(s, h, Q)$ typu opóźnionego lub neutralnego nie jest odpornie D -stabilna, to w zbiorze Q istnieje taki wektor q^* , dla którego zera quasi-wielomianu $w(s, h, q^*)$ leżą na brzegu obszaru D i w obszarze D . ■

Twierdzenie 3.1 (twierdzenie o przekroczeniu brzegu obszaru D). Niech quasi-wielomian nominalny $w_0(s, h) = w(s, h, q_0)$ będzie D -stabilny. Rodzina quasi-wielomianów (3.4) typu opóźnionego lub neutralnego jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w(f(\omega), h, q) \neq 0, \quad \forall q \in Q \quad \text{i} \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (3.7)$$

tzn. rodzina quasi-wielomianów $W(s, h, Q)$ nie ma zer na brzegu obszaru D . ■

Z twierdzenia 3.1 wynika, że badając odporną D -stabilność rodziny quasi-wielomianów (3.4) można ograniczyć się tylko do sprawdzenia, czy ma ona zera na brzegu obszaru D . Należy przy tym podkreślić, że warunek (3.7) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym położenia wszystkich zer rodziny quasi-wielomianów (3.4) w otwartym obszarze D tylko wtedy, gdy w tej rodzinie istnieje przynajmniej jeden quasi-wielomian, którego wszystkie zera leżą w D . Jeżeli taki quasi-wielomian nie istnieje, to warunek (3.7) może być spełniony np. wtedy, gdy wszystkie zera każdego quasi-wielomianu należącego do rodziny (3.4) leżą poza obszarem D , czyli gdy ta rodzina nie jest odpornie D -stabilna. Dlatego też w sformułowaniu twierdzenia 3.1 wprowadzono założenie, że wszystkie zera quasi-wielomianu nominalnego $w_0(s, h)$ leżą w obszarze D .

Lemat 3.1 oraz twierdzenie 3.1 pozostają też prawdziwe w przypadku rodziny członów dominujących (3.6). W szczególności, na bazie twierdzenia 3.1 można sformułować poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.2. Niech nominalny człon dominujący $\Delta(\exp(-sh), q_0)$ będzie D -stabilny. Rodzina członów dominujących (3.6) jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta(\exp(-f(\omega)h), q) \neq 0, \quad \forall q \in Q \quad \text{i} \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty), \quad (3.8)$$

tzn. każdy człon dominujący należący do rodziny (3.6) nie ma zer na brzegu obszaru D . ■

3.2. Metody badania odpornej stabilności

Metody badania odpornej D -stabilności rodzin wielomianów charakterystycznych są podane w pracy [52]. Ponieważ quasi-wielomian ma nieskończenie wiele zer, nie wszystkie z podanych tam metod mogą być stosowane do badania odpornej D -stabilności rodzin quasi-wielomianów. Dotyczy to w szczególności metody zbioru spektralnego oraz metod wykorzystujących analityczne kryteria asymptotycznej stabilności wielomianów.

Z grupy metod podanych w pracy [52] na klasę quasi-wielomianów o niepewnych współczynnikach można uogólnić warunek wykluczenia zera oraz metodę przestrzeni niepewnych parametrów.

3.2.1. Warunek wykluczenia zera

W teorii odpornej stabilności rodzin wielomianów oraz rodzin quasi-wielomianów ważną rolę odgrywa pojęcie zbioru wartości oraz tzw. warunek wykluczenia zera (np. [52]).

Definicja 3.5. Dla dowolnej liczby zespolonej z zbiór

$$w(z, h, Q) = \{w(z, h, q) : q \in Q\} \quad (3.9)$$

będziemy nazywać zbiorem wartości rodziny quasi-wielomianów (3.4). ■

Definicja 3.6. Dla dowolnej liczby zespolonej z zbiór

$$\Delta(\exp(-zh), Q) = \{\Delta(\exp(-zh), q) : q \in Q\} \quad (3.10)$$

będziemy nazywać zbiorem wartości rodziny członów dominujących (3.6). ■

Na płaszczyźnie zmiennej zespolonej postaci zbiorów wartości (3.9) i (3.10) zależą w sposób istotny od charakteru zależności (np. liniowa lub nieliniowa) współczynników quasi-wielomianu (3.1) od niepewnych parametrów. Boki tych zbiorów wartości są odcinkami linii prostych jedynie w przypadku, gdy współczynniki quasi-wielomianu $w(s, h, q)$ zależą liniowo od niepewnych parametrów.

Podobnie jak w pracy [52] wprowadzimy pojęcie unormowanego zbioru wartości.

Definicja 3.7. Dla dowolnej liczby zespolonej z zbiór

$$\tilde{w}(z, h, Q) = \{\tilde{w}(z, h, q) : q \in Q\}, \quad (3.11)$$

gdzie $\tilde{w}(z, h, q) = w(z, h, q) / w_0(z, h)$, przy czym $w_0(z, h) \neq 0$, będziemy nazywać unormowanym (względem $w_0(z, h)$) zbiorem wartości rodziny quasi-wielomianów (3.4). ■

Zauważmy, że $\tilde{w}_0(z, h) = 1$, co oznacza, że punkt $(1, j0)$ zawsze należy do zbioru wartości (3.11).

Zbiory wartości (3.9), (3.10) i (3.11) zmieniają swoje położenia, wymiary i kształty przy zmianach wartości z .

Postępując podobnie jak w pracy [52] w przypadku rodziny wielomianów, udowodnimy poniższe twierdzenie, zwane warunkiem wykluczenia zera.

Twierdzenie 3.3. Niech quasi-wielomian nominalny $w_0(s, h)$ będzie D -stabilny. Rodzina quasi-wielomianów (3.4) typu opóźnionego lub neutralnego jest odporne D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin w(f(\omega), h, Q), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (3.12a)$$

lub równoważnie, warunek wykluczenia zera dla unormowanego zbioru wartości

$$0 \notin \tilde{w}(f(\omega), h, Q), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (3.12b)$$

czyli dla każdego $\omega \in \Omega$ początek płaszczyzny zmiennej zespolonej leży na zewnątrz zbiorów wartości $w(f(\omega), h, Q)$ i $\tilde{w}(f(\omega), h, Q)$, przy czym te zbiory są zdefiniowane wzorami (3.9) i (3.11) przy $z = f(\omega)$.

Dowód. Jeżeli warunek (3.12a) nie jest spełniony, to $w(f(\omega^*), h, q^*) = 0$ dla pewnego $\omega^* \in \Omega$ oraz dla pewnego $q^* \in Q$. Wtedy quasi-wielomian $w(s, h, q^*)$ ma zero na brzegu obszaru D , a więc rodzina $W(s, h, Q)$ nie jest odporne D -stabilna. Warunek (3.12a) jest więc warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (3.4).

Aby wykazać dostateczność założymy, że rodzina $W(s, h, Q)$ nie jest odporne D -stabilna. Wtedy, zgodnie z lematem 3.1, istnieje wektor $q^* \in Q$, dla którego quasi-wielomian $w(s, h, q^*)$ ma przynajmniej jedno zero na brzegu obszaru D , czyli $w(f(\omega^*), h, q^*) = 0$ dla pewnego $\omega^* \in \Omega$ i warunek (3.12a) nie jest spełniony. Oznacza to, że (3.12a) jest warunkiem dostatecznym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (3.4).

Równoważność warunków (3.12a) i (3.12b) wynika z definicji 3.7 i z założenia, że quasi-wielomian nominalny $w_0(s, h)$ jest D -stabilny. ■

Z twierdzeń 2.3 i 3.3 wynika, że rodzina quasi-wielomianów (3.4) jest odporne D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione dwa równoważne sobie warunki:

- przy zmianach parametru $\omega \in \Omega = [0, \infty)$ zbiór wartości $w(f(\omega), h, Q)$, przemieszczając się na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w kierunku matematycznie dodatnim, okrąży $n/2$ razy początek tej płaszczyzny, przy czym dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ początek płaszczyzny zmiennej zespolonej leży na zewnątrz tego zbioru wartości,
- przy zmianach parametru $\omega \in \Omega$ unormowany zbiór wartości $\tilde{w}(f(\omega), h, Q)$ przemieszcza się na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w ten sposób, że ani razu

nie okrąży ani nie obejmuje początku układu współrzędnych, przy czym punkt $(1, j0)$ zawsze należy do tego zbioru wartości.

Postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3.3 można udowodnić poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.4. Niech nominalny człon dominujący rodziny (3.6) będzie D -stabilny. Rodzina członów dominujących (3.6) jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin \Delta(\exp(-f(\omega)h), Q), \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty), \quad (3.13)$$

czyli dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ początek płaszczyzny zmiennej zespolonej leży na zewnątrz zbioru wartości $\Delta(\exp(-f(\omega)h), Q)$, zdefiniowanego wzorem (3.10) przy $z = f(\omega)$. ■

W przypadku szczególnym, gdy D jest otwartą lewą półpłaszczyzną, z twierdzeń 3.3 i 3.4 wynikają poniższe lematy.

Lemat 3.2. Niech quasi-wielomian nominalny $w_0(s, h)$ będzie asymptotycznie stabilny. Rodzina quasi-wielomianów (3.4) typu opóźnionego lub neutralnego jest odpornie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin w(j\omega, h, Q), \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty), \quad (3.14a)$$

lub równoważnie, warunek wykluczenia zera dla unormowanego zbioru wartości

$$0 \notin \tilde{w}(j\omega, h, Q), \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty). \quad (3.14b) \blacksquare$$

Lemat 3.3. Niech nominalny człon dominujący $\Delta(\exp(-sh), q_0)$ będzie asymptotycznie stabilny. Rodzina członów dominujących (3.6) jest odpornie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin \Delta(\exp(-j\omega h), Q), \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty), \quad (3.15)$$

czyli dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ początek płaszczyzny zmiennej zespolonej leży na zewnątrz zbioru wartości $\Delta(\exp(-j\omega h), Q)$. ■

Warunki wykluczenia zera (3.12)-(3.15) można sprawdzić bezpośrednio stosując obliczenia komputerowe i wyświetlając na ekranie monitora położenia odpowiedniego zbioru wartości dla poszczególnych wartości parametru $\omega \in [0, \infty)$.

Wyznaczanie zbioru wartości jest problemem bardzo złożonym w przypadku ogólnym, gdy współczynniki quasi-wielomianu charakterystycznego zależą od niepewnych parametrów w sposób ogólniejszy niż liniowy, np. wieloliniowy lub nieliniowy. Wynika to stąd, że w takim przypadku punkty wewnętrzne (a nie tylko punkty brzegowe) zbioru Q niepewnych parametrów mogą być odwzorowywane w punkty leżące na brzegu zbioru wartości. Z tego powodu, przy komputerowym wyznaczaniu zbioru wartości należy stosować specjalne metody służące do jego konstrukcji. Są one opisane w pracach [1, 11] w przypadku wielomianów o niepewnych współczynnikach.

Zdefiniowane powyżej zbiory wartości można wyznaczyć w prosty sposób jedynie w przypadku rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów, rozpatrywanej w punkcie 4.3. W takim przypadku są one bowiem wypukłymi wielobokami na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Dla każdego ustalonego z zarys zbioru wartości $w(z, h, Q)$ można w przypadku ogólnym wyznaczyć stosując tzw. metodę siatki, tzn. dokonując dyskretyzacji (z odpowiednio małym krokiem) zbioru Q niepewnych parametrów i obliczając wartości quasi-wielomianu $w(z, h, q)$ dla wektorów q odpowiadających poszczególnym węzłom siatki utworzonej w zbiorze Q . Otrzymamy w ten sposób dyskretyzację zbioru wartości $w(z, h, Q)$, tj. skończony zbiór punktów należących do tego zbioru. W taki sam sposób można też wyznaczyć zarysy zbiorów wartości (3.10) i (3.11).

Aby prześledzić geometrię zbioru wartości $w(f(\omega), h, Q)$ quasi-wielomianu o współczynnikach zależnych od niepewnych parametrów w sposób ogólniejszy niż liniowy, rozpatrzmy poniższy przykład.

Przykład 3.1. Weźmy pod uwagę quasi-wielomian charakterystyczny z dwoma współmiernymi opóźnieniami, którego współczynniki zależą wielomianowo od dwóch niepewnych parametrów, mający postać

$$w(s, h, q) = w_0(s, h) + q_1 w_1(s, h) + q_2 w_2(s, h) + q_1 q_2 w_{12}(s, h) + q_2^2 w_{22}(s, h), \quad (3.16)$$

gdzie $h = 0.3$, $q = [q_1, q_2] \in Q$, przy czym

$$w_0(s, h) = s^2 - 0.5s + 3se^{-sh} + 0.75e^{-sh} + 2.25e^{-2sh}, \quad (3.17)$$

$$w_1(s, h) = s - 1.5e^{-sh}, \quad (3.18)$$

$$w_2(s, h) = -2se^{-sh} + 0.5e^{-sh} - 3e^{-2sh}, \quad (3.19)$$

$$w_{12}(s, h) = se^{-sh}, \quad w_{22}(s, h) = s^2e^{-2sh} + 2s + e^{-sh}, \quad (3.20)$$

$$Q = \{q = [q_1, q_2] : q_1 \in [-0.1, 0.1], q_2 \in [-0.2, 0.2]\}. \quad (3.21)$$

Niech obszarem D będzie przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -0.3 + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$.

Przyjmując $\omega = 11$ wyznaczmy zbiór wartości rodziny członów dominujących oraz zbiór wartości rozpatrywanej rodziny quasi-wielomianów.

Człon dominujący quasi-wielomianu (3.16) ma postać

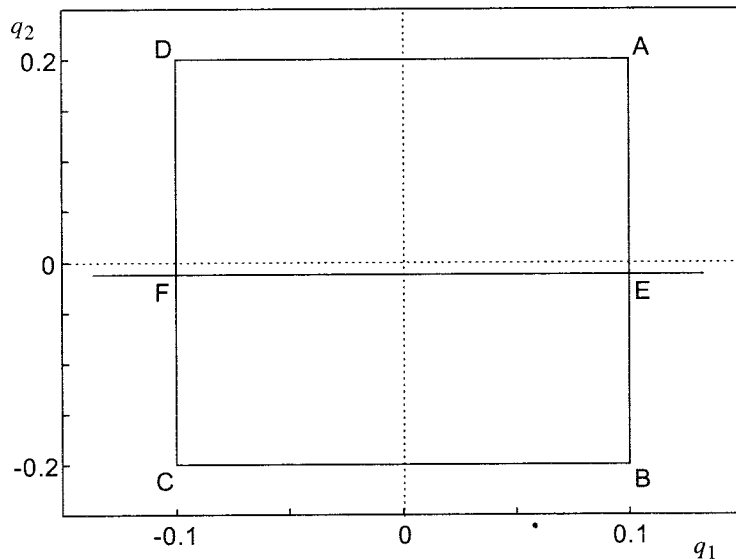
$$\Delta(\exp(-sh), q) = 1 + q_2^2 \exp(-2sh), \quad q \in Q. \quad (3.22)$$

Zależy on tylko od jednego niepewnego parametru.

Dla $\omega = 11$ zbiór wartości rodziny (3.22) członów dominujących można opisać zależnością

$$\Delta(\exp(-f(\omega)h), q) = 1 + q_2^2 \exp(-2(-0.3 + j11)0.3), \quad q_2 \in [-0.2, 0.2].$$

Na płaszczyźnie zmiennej zespolonej jest on odcinkiem linii prostej, łączącym punkty $1 + j0$ i $1.0455 - j0.0149$.

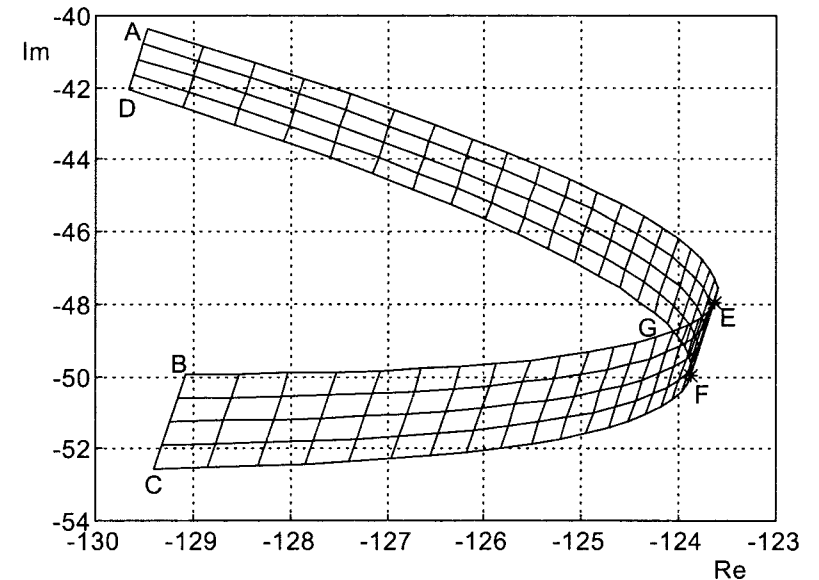


Rys. 3.1. Zbiór Q (prostokąt ABCD) do przykładu 3.1

Zbiór Q , zdefiniowany wzorem (3.21), na płaszczyźnie (q_1, q_2) jest prostokątem o wierzchołkach A, B, C i D. Jest on pokazany na rysunku 3.1.

Na rysunku 3.2 jest pokazany zbiór wartości $w(f(\omega), h, Q)$ quasi-wielomianu (3.16) przy $f(\omega) = -0.3 + j\omega$, $\omega = 11$. Został on wyznaczony metodą siatki utworzonej w zbiorze Q . Przy tworzeniu siatki przyjęto dyskretyzację wartości parametru q_1 w przedziale $[-0.1, 0.1]$ z krokiem 0.05 oraz dyskretyzację wartości parametru q_2 w przedziale $[-0.2, 0.2]$ z krokiem 0.01. Poszczególne punkty zbioru wartości, odpowiadające węzłom siatki utworzonej w zbiorze Q , zostały połączone z sąsiednimi punktami odcinkami linii prostych.

Za pomocą przekształcenia $w(f(\omega), h, q)$ poszczególne wierzchołki zbioru Q zostały odwzorowane w punkty brzegowe zbioru wartości, oznaczone literami A, B, C i D. Brzeg zbioru Q (linia łamana ABCDA na rysunku 3.1) został odwzorowany w linię ABCDA, pokazaną na rysunku 3.2.



Rys. 3.2. Zbiór wartości $w(-0.3 + j11, h, Q)$ do przykładu 3.1

Z rysunku 3.2. wynika, że brzegiem rozpatrywanego zbioru wartości jest linia AEFBCBGDA. Jej fragmenty AE i FCBGDA są odwzorowaniem części brzegów zbioru Q za pomocą przekształcenia $w(f(\omega), h, q)$. Natomiast pokazany na rysunku 3.2 odcinek EF brzegu zbioru wartości jest odwzorowaniem odcinka EF linii

pokazanej na rysunku 3.1, leżącego wewnątrz zbioru Q . Linia ta została wyznaczona w sposób opisany poniżej, z zastosowaniem metody służącej do wyznaczania zbioru wartości rodziny wielomianów o dwóch niepewnych parametrach, podanej w pracy [1].

Oznaczmy przez $J(f(\omega), h, q)$ jacobian odwzorowania zbioru Q w zbiór wartości $w(f(\omega), h, q)$ za pomocą przekształcenia $w(f(\omega), h, q)$.

Zgodnie z pracą [1], w punkty brzegowe zbioru wartości są odwzorowywane te punkty wewnętrzne zbioru Q , dla których zeruje się wyznacznik jacobianu $J(f(\omega), h, q)$.

Dla quasi-wielomianu (3.16) jacobian $J(f(\omega), h, q)$ wyznacza się ze wzoru

$$J(f(\omega), h, q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(f(\omega), q)}{\partial q_1} & \frac{\partial u(f(\omega), q)}{\partial q_2} \\ \frac{\partial v(f(\omega), q)}{\partial q_1} & \frac{\partial v(f(\omega), q)}{\partial q_2} \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

gdzie $u(f(\omega), q) = \operatorname{Re} w(f(\omega), h, q)$, $v(f(\omega), q) = \operatorname{Im} w(f(\omega), h, q)$.

Weźmy pod uwagę quasi-wielomiany (3.17)-(3.20) i wprowadźmy oznaczenia (dla $s = -0.3 + j11$ i $h = 0.3$)

$$u_i = \operatorname{Re} w_i(s, h), \quad v_i = \operatorname{Im} w_i(s, h), \quad (3.24)$$

$$u_{ik} = \operatorname{Re} w_{ik}(s, h), \quad v_{ik} = \operatorname{Im} w_{ik}(s, h). \quad (3.25)$$

Wyznaczając ze wzoru (3.23) jacobian i obliczając jego wyznacznik, po przekształceniach otrzymamy, że wyznacznik jacobianu zeruje się na krzywej

$$\det J(f(\omega), h, q) = b_0 + q_1 b_1 + q_2 b_2 + q_2^2 b_3 = 0, \quad (3.26)$$

gdzie

$$b_0 = u_1 v_2 - u_2 v_1, \quad b_1 = u_1 v_{12} - u_{12} v_1,$$

$$b_2 = 2(u_1 v_{22} - u_{22} v_1) + u_{12} v_2 - u_2 v_{12}, \quad b_3 = 2(u_{12} v_{22} - u_{22} v_{12}).$$

Fragment krzywej (3.26) jest pokazany na rysunku 3.1. Przecina ona zbiór Q wartości niepewnych parametrów na odcinku EF. ■

3.2.2. Metoda przestrzeni niepewnych parametrów

Metoda przestrzeni niepewnych parametrów jest pewnym rozwinięciem metody podziału D (np. [105, 117, 138]), znanej z klasycznej teorii sterowania. Idea metody podziału D polega na wyznaczeniu w przestrzeni niepewnych parametrów quasi-wielomianu (3.1) zbioru jego asymptotycznej stabilności, tj. zbioru takich wartości niepewnych parametrów, dla których jest on asymptotycznie stabilny.

Metodę podziału D można bezpośrednio stosować do badania odpornej stabilności quasi-wielomianów typu opóźnionego lub neutralnego o dwóch niepewnych parametrach (np. [27, 91]).

Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów $W(s, h, Q)$ o rzeczywistych współczynnikach, zdefiniowaną wzorem (3.4) i załóżmy, że quasi-wielomian nominalny $w_0(s, h) = w(s, h, q_0)$ jest D -stabilny, gdzie D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną.

Z twierdzenia 3.1 wynika, że przy powyższym założeniu rodzina quasi-wielomianów (3.4) typu opóźnionego lub neutralnego jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy quasi-wielomian należący do tej rodziny nie ma zer na brzegu ∂D obszaru D , czyli

$$w(s, h, q) \neq 0, \quad \forall q \in Q \quad \text{i} \quad \forall s \in \partial D. \quad (3.27)$$

Założmy, że wektor q może przyjmować dowolne wartości z rzeczywistej przestrzeni R^l , a nie tylko z zadanego zbioru $Q \subset R^l$ i przez Q_{stab} oznaczmy zbiór tych wartości niepewnych parametrów, dla których quasi-wielomian (3.1) jest D -stabilny. Niepusty zbiór Q_{stab} zawsze istnieje przy założeniu, że quasi-wielomian nominalny $w_0(s, h)$ jest D -stabilny.

Ponadto, przez

$$Q_g = \{q \in R^l : w(s, h, q) = 0 \text{ dla } s \in \partial D\} \quad (3.28)$$

oznaczmy granice podziału przestrzeni niepewnych parametrów R^l na obszary $D(N)$, przy czym dla każdego $q \in D(N)$ quasi-wielomian (3.1) ma N zer o dodatniej części rzeczywistej. Granice (3.28) będziemy nazywać granicami D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (3.4). Są one w przypadku ogólnym (tj. przy $l \geq 3$) powierzchniami, natomiast są one krzywymi przy dwóch niepewnych parametrach. Jeżeli przy zmianach wartości niepewnych parametrów zera quasi-wielomianu $w(s, h, q)$ przekraczają brzeg ∂D obszaru D , to może to nastąpić wtedy i tylko wtedy, gdy wartość wektora q przekracza jedną z granic D -stabilności.

W przestrzeni niepewnych parametrów granice D -stabilności wyznaczają zbiór Q_{stab} .

Rodzina quasi-wielomianów (3.4) jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy $Q \subset Q_{stab}$. Ponieważ quasi-wielomian nominalny $w_0(s, \mathbf{h})$ jest D -stabilny (tzn. $\mathbf{q}_0 \in Q_{stab}$), dla odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (3.4) potrzeba i wystarcza, aby granice D -stabilności (powierzchnie w $\mathbf{R}^l$ w przypadku ogólnym) nie przecinały brzegów zbioru Q . Wtedy $Q \subset Q_{stab}$.

Badanie odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (3.4) metodą przestrzeni niepewnych parametrów polega na wyznaczeniu granic D -stabilności (tj. zbioru Q_g) w przestrzeni niepewnych parametrów i sprawdzeniu, czy przecinają one zbiór Q wartości niepewnych parametrów, zdefiniowany wzorem (3.2), czy też nie. Ponieważ bezpośrednie sprawdzenie tego faktu w przestrzeni wielowymiarowej nie jest proste, powyższe zadanie należy sprowadzić do odpowiedniego zadania na płaszczyźnie. Można tu stosować metodę zaproponowaną w pracach [1, 3] w przypadku wielomianów (patrz też [52]). Polega ona na rzutowaniu granic D -stabilności i zbioru Q na płaszczyznę dwóch wybranych niepewnych parametrów.

Ideę metody przestrzeni niepewnych parametrów zilustrujemy na przykładzie badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (3.4) przy założeniu $a_{n0}(\mathbf{q}) > 0$, $\mathbf{q} \in Q$. Obszarem D jest przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, $\gamma > 0$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, zaś zbiór Q_g (granice D -stabilności) można zdefiniować następująco

$$Q_g = \{\mathbf{q} \in \mathbf{R}^l : w(f(\omega), \mathbf{h}, \mathbf{q}) = 0, \omega \geq 0\}. \quad (3.29)$$

Jeżeli quasi-wielomian nominalny $w_0(s, \mathbf{h})$ jest D -stabilny, to warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (3.4) jest nieprzecinanie zbioru Q przez zbiór Q_g .

Dla $s = f(\omega)$ quasi-wielomian $w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q})$ można przedstawić w postaci

$$w(f(\omega), \mathbf{h}, \mathbf{q}) = U(\omega, \mathbf{q}) + jV(\omega, \mathbf{q}), \quad (3.30)$$

gdzie

$$U(\omega, \mathbf{q}) = \operatorname{Re} w(f(\omega), \mathbf{h}, \mathbf{q}), \quad V(\omega, \mathbf{q}) = \operatorname{Im} w(f(\omega), \mathbf{h}, \mathbf{q}). \quad (3.31)$$

Jeżeli dla pewnego $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^l$ quasi-wielomian $w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q})$ ma zera na brzegu obszaru D , to może to być albo zero rzeczywiste $s = -\gamma$ (wtedy wektor $\mathbf{q}$ leży na granicy zer rzeczywistych) albo para zer zespolonych sprzężonych $s = -\gamma \pm j\omega$, $\omega > 0$ (wtedy wektor $\mathbf{q}$ leży na granicy zer zespolonych). Wobec tego zachodzi zależność $Q_g = Q_{gr} \cup Q_{gz}$, gdzie

$$Q_{gr} = \{\mathbf{q} : w(-\gamma, \mathbf{h}, \mathbf{q}) = 0\} \quad (3.32)$$

jest granicą zer rzeczywistych, zaś

$$Q_{gz} = \{\mathbf{q} : U(\omega, \mathbf{q}) = 0 \text{ i } V(\omega, \mathbf{q}) = 0 \text{ dla pewnych } \omega > 0\} \quad (3.33)$$

jest granicą zer zespolonych.

Z powyższych rozważań wynika, że rodzina (3.4) jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy powierzchnie opisane równaniem

$$w(-\gamma, \mathbf{h}, \mathbf{q}) = 0 \quad (3.34)$$

oraz układem równań

$$U(\omega, \mathbf{q}) = 0 \text{ i } V(\omega, \mathbf{q}) = 0, \quad (3.35)$$

gdzie $\omega \in (0, \infty)$ jest parametrem, nie przecinają zbioru Q .

Równanie (3.34) oraz układ równań (3.35) rozwiążemy względem dwóch niepewnych parametrów. Nie zmniejszając ogólności rozważań przyjmijmy, że są to parametry q_1 i q_2 , czyli będziemy rozpatrywać płaszczyznę (q_1, q_2) . Rzut zbioru Q na płaszczyznę (q_1, q_2) jest prostokątem

$$Q_p = \{\mathbf{q}_p = [q_1, q_2] : q_k \in [q_k^-, q_k^+], k = 1, 2\}. \quad (3.36)$$

Aby wyznaczyć rzut powierzchni opisanych równaniami (3.34) i (3.35) na płaszczyznę (q_1, q_2) , należy dokonać dyskretyzacji (z odpowiednimi krokami) wartości niepewnych parametrów $q_3, q_4, \dots, q_l$ w zadanych przedziałach oraz dyskretyzacji wartości parametru $\omega > 0$. Rozwiązując równanie (3.34) numerycznie względem rzeczywistych wartości q_2 (przy dyskretyzacji również wartości parametru q_1 w danym przedziale) otrzymamy na płaszczyźnie (q_1, q_2) rodzinę krzywych, którą można opisać ogólnym wzorem

$$q_2 = f_0(q_1, q_3^*, \dots, q_l^*), \quad (3.37)$$

gdzie $f_0(\cdot)$ jest w ogólności funkcją nieliniową, zaś każda krzywa odpowiada innym ustalonym wartościom q_k^* , $k = 3, 4, \dots, l$, niepewnych parametrów.

Podobnie, rozwiązując układ równań (3.35) względem rzeczywistych wartości q_1 i q_2 otrzymamy na płaszczyźnie (q_1, q_2) rodzinę krzywych, którą można opisać parametrycznie wzorami (w funkcji wartości ω^* parametru ω)

$$q_1 = f_1(q_3^*, \dots, q_l^*, \omega^*), \quad q_2 = f_2(q_3^*, \dots, q_l^*, \omega^*), \quad (3.38)$$

przy czym w przypadku ogólnym funkcje $f_1(\cdot)$ i $f_2(\cdot)$ są nieliniowe, zaś każda krzywa odpowiada innym ustalonym wartościom q_k^* , $k = 3, 4, \dots, l$, niepewnych parametrów.

Rodzina quasi-wielomianów (3.4) jest odporne D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy rodziny krzywych (3.37) i (3.38) nie przecinają prostokąta (3.36).

Opisaną powyżej metodę można też stosować do badania odpornej D -stabilności rodziny członów dominujących (3.6). Odporna D -stabilność tej rodziny jest warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (3.4) typu neutralnego.

Proces wyznaczania granic D -stabilności można znacznie uprościć, w przypadku gdy współczynniki quasi-wielomianu $w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q})$ zależą liniowo od niepewnych parametrów.

W takim przypadku quasi-wielomian (3.1) można napisać w postaci

$$w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}) = w_0(s, \mathbf{q}) + \sum_{i=1}^m w_i(s, \mathbf{q}) \exp(-sh_i), \quad (3.39)$$

gdzie

$$w_i(s, \mathbf{q}) = w_{i0}(s) + \sum_{k=1}^l q_k w_{ik}(s), \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (3.40)$$

przy czym $w_{ik}(s)$ są to znane wielomiany.

Dla quasi-wielomianu (3.39) równanie (3.34) można napisać w postaci

$$B_0 + \sum_{k=1}^l q_k B_k = 0, \quad (3.41)$$

gdzie

$$B_k = w_{0k}(-\gamma) + \sum_{i=1}^m w_{ik}(-\gamma) \exp(\gamma h_i), \quad k = 0, 1, \dots, l. \quad (3.42)$$

Natomiast układ równań (3.35) można napisać w postaci dwóch poniższych równań

$$U(\omega, \mathbf{q}) = R_0(\omega) + \sum_{k=1}^l q_k R_k(\omega) = 0, \quad (3.43)$$

$$V(\omega, \mathbf{q}) = I_0(\omega) + \sum_{k=1}^l q_k I_k(\omega) = 0, \quad (3.44)$$

gdzie (dla $k = 0, 1, \dots, l$)

$$R_k(\omega) = \operatorname{Re}\{w_{0k}(f(\omega)) + \sum_{i=1}^m w_{ik}(f(\omega)) \exp(-f(\omega)h_i)\}, \quad (3.45)$$

$$I_k(\omega) = \operatorname{Im}\{w_{0k}(f(\omega)) + \sum_{i=1}^m w_{ik}(f(\omega)) \exp(-f(\omega)h_i)\}. \quad (3.46)$$

Na płaszczyźnie (q_1, q_2) rozwiązaniem liniowego równania (3.41) jest rodzina prostych, przy czym każda prosta odpowiada innym ustalonym wartościom niepewnych parametrów $q_3, q_4, \dots, q_l$.

Aby rozwiązać układ równań (3.43), (3.44) względem q_1 i q_2 , zapiszemy go najpierw w postaci

$$\mathbf{A}(\omega) \mathbf{q}_p(\omega) = \mathbf{b}(\omega, \bar{\mathbf{q}}), \quad (3.47)$$

gdzie $\bar{\mathbf{q}} = [q_3, \dots, q_l]$ oraz

$$\mathbf{A}(\omega) = \begin{bmatrix} R_1(\omega) & R_2(\omega) \\ I_1(\omega) & I_2(\omega) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_p(\omega) = \begin{bmatrix} q_1(\omega) \\ q_2(\omega) \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

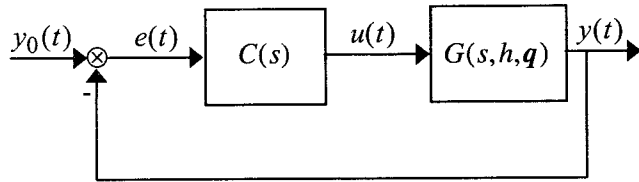
$$\mathbf{b}(\omega, \bar{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -R_0(\omega) - \sum_{k=3}^l q_k R_k(\omega) \\ -I_0(\omega) - \sum_{k=3}^l q_k I_k(\omega) \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Rozwiązanie równania (3.47) oblicza się ze wzoru

$$\mathbf{q}_p(\omega) = \mathbf{A}^{-1}(\omega)\mathbf{b}(\omega, \bar{\mathbf{q}}). \quad (3.50)$$

Wyznaczając ze wzoru (3.50) rozwiązanie równania (3.47) należy przyjmować dyskretne wartości niepewnych parametrów q_k , $k = 3, 4, \dots, m$, a także dyskretne wartości parametru $\omega > 0$. Dla każdego zbioru ustalonych wartości niepewnych parametrów q_k , $k = 3, 4, \dots, m$, punkty $(q_1(\omega), q_2(\omega))$, wyznaczone ze wzoru (3.50) w funkcji wartości parametru $\omega > 0$, tworzą na płaszczyźnie (q_1, q_2) krzywą będącą granicą D -stabilności (granicą zer zespolonych). Przy wykreślaniu tej krzywej należy ograniczyć się do takich wartości parametru ω , którym odpowiada krzywa przebiegająca w otoczeniu prostokąta Q_p .

Jeżeli macierz $\mathbf{A}(\omega)$ jest osobiwa dla niektórych wartości parametru $\omega > 0$, to krzywa utworzona z punktów $(q_1(\omega), q_2(\omega))$ ma asymptotę dla tej wartości ω . Taki przypadek można pominąć, jeżeli asymptota nie leży w pobliżu prostokąta Q_p . Jeżeli zaś leży ona w pobliżu tego prostokąta, taki przypadek należy przeanalizować dokładnie.



Rys. 3.3. Schemat blokowy układu regulacji automatycznej o niepewnych parametrach

Przykład 3.2. Stosując metodę przestrzeni niepewnych parametrów należy zbadać odporną D -stabilność układu regulacji automatycznej z opóźnieniem o niepewnych parametrach, o schemacie blokowym przedstawionym na rysunku 3.3, przy czym

$$G(s, h, \mathbf{q}) = \frac{(0.15 + q_1)s + 1}{s^2 + (1.9 + q_2)s + (2 + q_3)} e^{-sh}, \quad \mathbf{q} \in Q, \quad (3.51)$$

$$C(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s}, \quad (3.52)$$

gdzie $h = 0.1$, $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]$ oraz

$$Q = \{\mathbf{q}: q_1 \in [-0.1, 0.1], q_2 \in [-0.1, 0.1], q_3 \in [-0.1, 0.1]\}, \quad (3.53)$$

natomiast obszarem D jest przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, gdzie $\gamma = 0.05$.

Zbiór (3.53) jest zbiorem wartości odchyłek niepewnych parametrów od ich wartości nominalnych.

Quasi-wielomian charakterystyczny rozpatrywanego układu typu opóźnionego ma postać

$$w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}) = w_0(s, \mathbf{q}) + w_1(s, \mathbf{q}) \exp(-sh), \quad \mathbf{q} \in Q, \quad (3.54)$$

gdzie

$$w_0(s, \mathbf{q}) = (s^2 + 1.9s + 2)(s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s) + q_2s(s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s) + q_3(s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s), \quad (3.55)$$

$$w_1(s, \mathbf{q}) = (1 + 0.15s)(s^2 + 2s + 1) + q_1s(s^2 + 2s + 1). \quad (3.56)$$

Stosując twierdzenie 2.3 można łatwo sprawdzić, że jest D -stabilny quasi-wielomian nominalny

$$w_0(s, \mathbf{h}) = (s^2 + 1.9s + 2)(s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s) + (1 + 0.15s)(s^2 + 2s + 1) \exp(-0.1s), \quad (3.57)$$

odpowiadający nominalnym wartościom $q_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, niepewnych parametrów.

Problem badania odpornej D -stabilności będziemy rozpatrywać na płaszczyźnie (q_1, q_2) niepewnych parametrów. Rzut prostopadłością (3.53) na tę płaszczyznę jest prostokątem

$$Q_p = \{\mathbf{q}_p = [q_1, q_2]: q_1 \in [-0.1, 0.1], q_2 \in [-0.1, 0.1]\}. \quad (3.58)$$

Jego położenie na płaszczyźnie (q_1, q_2) jest pokazane na rysunku 3.4.

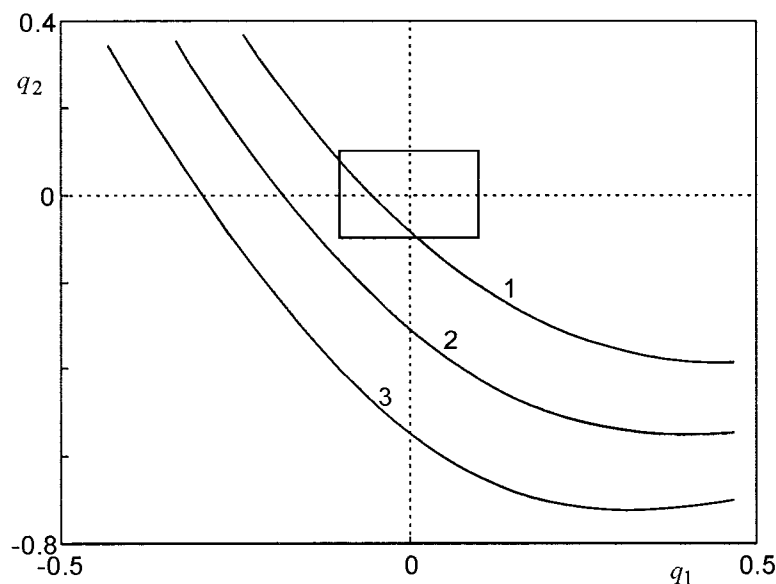
Obliczając w sposób opisany powyżej granicę zer zespolonych (tzn. rozwiązując równanie (3.47)) otrzymamy wykresy pokazane na rysunku 3.4. Zostały one wyznaczone dla wartości parametru q_3 równych: -0.1, 0.0 i 0.1 oraz dla

$\omega \in [0.77, 1.05]$, $\omega \in [0.76, 1.09]$ i $\omega \in [0.75, 1.14]$, odpowiednio. Dla innych wartości parametru $q_3 \in [-0.1, 0.1]$ odpowiednie krzywe leżą pomiędzy krzywymi odpowiadającymi $q_3 = -0.1$ oraz $q_3 = 0.1$.

Aby wyznaczyć granicę zer rzeczywistych, należy najpierw obliczyć ze wzoru (3.42) współczynniki B_k ($k = 0, \dots, 3$), a następnie rozwiązać liniowe równanie (3.41). Rozwiązanie tego równania dla quasi-wielomianu (3.54) ma postać

$$q_2 = -353.8696 + 19.6522q_3 + 19.7391q_1. \quad (3.59)$$

Dla każdego ustalonego $q_3 \in [-0.1, 0.1]$ linia prosta (3.59) leży na płaszczyźnie (q_1, q_2) daleko od prostokąta (3.58).



Rys. 3.4. Wykresy do przykładu 3.2: prostokąta (3.58) oraz granicy zer zespolonych, odpowiadającej $q_3 = -0.1$ (krzywa 1), $q_3 = 0$ (krzywa 2) oraz $q_3 = 0.1$ (krzywa 3)

Z rysunku 3.4 wynika, że granica D -stabilności odpowiadająca $q_3 = -0.1$ (krzywa 1) przecina prostokąt (3.58). Oznacza to, że rodzina quasi-wielomianów (3.54) nie jest odpornie D -stabilna przy $q_3 \in [-0.1, 0.1]$. Natomiast jest ona odpor-

nie D -stabilna dla $q_3 \in [0, 0.1]$, bowiem granica D -stabilności nie przecina prostokąta (3.58) przy dowolnej wartości parametru q_3 należącej do przedziału $[0, 0.1]$. ■

Metoda przestrzeni niepewnych parametrów może być efektywnie stosowana do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów o małej liczbie niepewnych parametrów, w zasadzie nie większej niż $l = 4$. Wynika to stąd, że rozpatrujemy problem stabilności na płaszczyźnie dwóch niepewnych parametrów i wobec tego musimy dokonać dyskretyzacji wartości pozostałych $l - 2$ niepewnych parametrów.

Metoda przestrzeni niepewnych parametrów może być stosowana do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (3.4), których współczynniki zależą od niepewnych parametrów liniowo, wieloliniowo i wielomianowo. W tym ostatnim przypadku, podobnie jak ma to miejsce w przypadku rodziny wielomianów [3], stosowanie tej metody jest dosyć trudne, wymaga bowiem dokonywania, oprócz złożonych obliczeń numerycznych, również obliczeń symbolicznych.

W przypadku, gdy współczynniki quasi-wielomianu (3.1) zależą liniowo od dwóch niepewnych parametrów, przy czym są one ciągłymi funkcjami (np. nieliniowymi) pozostałych $l - 2$ niepewnych parametrów, granice D -stabilności na płaszczyźnie tych dwóch niepewnych parametrów można wyznaczyć w sposób podobny do opisanego powyżej. W szczególności, w grupie pozostałych $l - 2$ niepewnych parametrów mogą też być niepewne opóźnienia (co zostało pokazane w rozdziale 7 niniejszej pracy), od których współczynniki quasi-wielomianu (3.1) zależą wykładniczo.

3.2.3. Badanie odpornej stabilności przy obszarach D ogólniejszych niż przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna

Podane w niniejszym rozdziale metody badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (3.4) można uogólnić na obszary D inne niż przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna, symetryczne względem osi rzeczywistej. Aby problem badania odpornej D -stabilności był sformułowany poprawnie, muszą to być takie obszary, w których leżą wszystkie zera quasi-wielomianu nominalnego tej rodziny.

Ze względu na istnienie łańcuchów zer asymptotycznych (omówionych w punkcie 2.1), obszar D powinien być albo otwartym obszarem nieograniczonym, zawierającym półpłaszczyznę $\operatorname{Re} s < -\gamma$, $\gamma > 0$, albo powinien składać się

z kilku otwartych rozłącznych podobszarów D_i ($i = 1, 2, \dots, N$), z których podob-szar leżący w lewej półpłaszczyźnie najdalej od osi urojonej jest obszarem nieograniczonym. W tym obszarze nieograniczonym muszą leżeć zera asymptotyczne quasi-wielomianu nominalnego $w_0(s, \mathbf{h})$.

Uwzględniając powyższe rozważania oraz definicję 3.1, rodzinę quasi-wielomianów (3.4), podobnie jak rodzinę wielomianów (np. [52]), będziemy nazywać rodziną odpornie D -stabilną, jeżeli każdy quasi-wielomian do niej należący ma w każdym podobszarze D_i , $i = 1, 2, \dots, N$, tyle samo zer co quasi-wielomian nominalny $w_0(s, \mathbf{h})$, przy czym ich liczba w podobszarze ograniczonym jest skończona, a jest nieskończona w podobszarze nieograniczonym.

Przykłady obszarów D , które mogą być rozpatrywane przy badaniu odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (3.4) typu opóźnionego są podane w pracy [88]. W pracy [89] zostały podane założenia, jakie musi spełniać obszar D przy badaniu odpornej D -stabilności tej rodziny typu neutralnego.

Przykładem obszaru D , który można rozpatrywać przy badaniu odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (3.4) typu opóźnionego lub neutralnego, jest obszar na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, składający się z dwóch podobszarów D_1 i D_2 , gdzie D_1 jest otwartym kołem o środku w punkcie $c_0 = -\alpha + j0$, $\alpha > 0$, i o promieniu $r < \alpha$, zaś D_2 jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną $\operatorname{Re} s < -\gamma$, gdzie $\gamma > r + \alpha$. Inne przykłady obszarów D są podane w punkcie 4.5.

Parametryczne opisy brzegów wymienionych powyżej podobszarów D_1 i D_2 mają odpowiednio postaci: $f_1(\omega) = c_0 + r \exp(j\omega\pi)$, $\omega \in \Omega_1 = [-1, 1]$; $f_2(\omega) = -\gamma + j\omega$, $\omega \in \Omega_2 = (-\infty, \infty)$. W przypadku quasi-wielomianów o rzeczywistych współczynnikach, których zespolone zera są sprzężone parami, możemy ograniczyć się do przedziałów $\Omega_1 = [0, 1]$ i $\Omega_2 = [0, \infty)$, odpowiednio.

Jeżeli obszar D jest ogólniejszy niż przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna i problem badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (3.4) jest sformułowany poprawnie, to postępując w ten sam sposób jak w pracy [52] w przypadku rodziny wielomianów można pokazać, że jest słuszny lemat 3.1 oraz twierdzenia 3.1 i 3.3. Jeżeli ponadto obszar D składa się z kilku rozłącznych podobszarów D_i ($i = 1, 2, \dots, N$), to przy stosowaniu twierdzenia 3.3 warunek (3.12a) (lub (3.12b)) należy sprawdzać oddzielnie dla każdego podobszaru D_i , tzn. należy oddzielnie przyjmować $f(\omega) = f_i(\omega)$, $\omega \in \Omega_i$, dla $i = 1, 2, \dots, N$, gdzie $f_i(\omega)$, $\omega \in \Omega_i$, jest opisem parametrycznym brzegu podobszaru D_i .

Należy przy tym zaznaczyć, że odporna D -stabilność rodziny członów dominujących (3.6) jest prostym warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (3.4) typu neutralnego w przypadku, gdy D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną lub otwartą lewą półpłaszczyzną. Dlatego też przy ogólniejszych obszarach D nie będziemy rozpatrywać odpornej D -stabilności rodziny członów dominujących (3.6).

Przy formułowaniu problemu badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (3.4) jest bardzo pomocna znajomość zer quasi-wielomianu nominalnego, leżących w pobliżu osi urojonej. Można je wyznaczyć stosując numeryczną metodę podaną w pracy [133] (patrz też [27]).

Idea tej metody polega na zlokalizowaniu położenia zer rozpatrywanego quasi-wielomianu $w(s, \mathbf{h})$, leżących w zadanym obszarze płaszczyzny zmiennej zespolonej i następnie obliczeniu ich przybliżonych wartości z wykorzystaniem numerycznej metody Newtona. Ponieważ krotność wyznaczanych zer quasi-wielomianu nie jest znana, w podanych w niniejszej pracy przykładach do obliczenia i -tego przybliżenia zastosowano wzór (np. [84])

$$s_i = s_{i-1} - \frac{w(s_{i-1}, \mathbf{h})}{w'(s_{i-1}, \mathbf{h}) - \frac{w(s_{i-1}, \mathbf{h})w''(s_{i-1}, \mathbf{h})}{w'(s_{i-1}, \mathbf{h})}}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.60)$$

gdzie $w'(s, \mathbf{h}) = (d/ds)w(s, \mathbf{h})$, $w''(s, \mathbf{h}) = (d^2/ds^2)w(s, \mathbf{h})$, zaś s_{i-1} jest poprzednim przybliżeniem. Za zerowe przybliżenie poszczególnych zer przyjmuje się wartości obliczone na podstawie podanej poniżej metody Kuhna lokalizacji położenia zer quasi-wielomianów [27, 133].

Założmy, że poszukujemy zer $s = x + jy$ quasi-wielomianu $w(s, \mathbf{h})$, leżących na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w zadanym obszarze $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$, $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$. Dzielimy ten obszar na małe prostokąty o bokach Δx i Δy . Powstaje w ten sposób siatka, w węzłach której liczymy wartości indeksu M w następujący sposób:

- $M = 1$, jeżeli $-\pi/3 \leq \varphi \leq \pi/3$ lub $w(s, \mathbf{h}) = 0$,
- $M = 2$, jeżeli $\pi/3 < \varphi \leq \pi$,
- $M = 3$, jeżeli $-\pi < \varphi < -\pi/3$,

gdzie $\varphi = \arg w(s, \mathbf{h})$.

Jeżeli w trzech sąsiednich węzłach indeks M przyjmuje różne wartości, tj. 1, 2 i 3, to zero quasi-wielomianu $w(s, \mathbf{h})$ leży w trójkącie, którego wierzchołkami są te

węzły. Znajdując wszystkie takie trójkąty, zlokalizujemy położenia wszystkich zer quasi-wielomianu $w(s, \mathbf{h})$, leżących w rozpatrywanym obszarze.

Nieuwzględnienie specyfiki rozkładu zer quasi-wielomianów (w tym istnienia łańcuchów zer asymptotycznych) na etapie formułowania problemu badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów prowadzi do błędnych wyników. Przykładem może być praca [120], w której rozpatrując problem badania odpornej D -stabilności wielowymiarowego układu dynamicznego z jednym opóźnieniem zmiennych stanu błędnie przyjęto, że D jest otwartym kołem o środku w punkcie $c_0 = -\alpha + j0$, $\alpha > 0$, i o promieniu $r < \alpha$, czyli pominięto istnienie zer asymptotycznych quasi-wielomianu charakterystycznego. Ponadto, podano w niej warunki, przy spełnieniu których wszystkie zera quasi-wielomianu charakterystycznego rozpatrywanego układu z opóźnieniem o niepewnych elementach w macierzy stanu leżą w otwartym kole D , co nie jest prawdziwe.

Dla ilustracji rozważań w pracy [120] rozpatrzono układ z opóźnieniem o niepewnych elementach w macierzy stanu, którego nominalny quasi-wielomian charakterystyczny ma postać

$$w_0(s, h) = s^2 + 6s + 9 + 0.36 \exp(-sh) + 0.3 \exp(-2sh), \quad (3.61)$$

gdzie $h = 0.1$, natomiast D jest otwartym kołem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej o środku w punkcie $c_0 = -3.5 + j0$ i o promieniu $r = 1.5$.

Stosując opisaną powyżej komputerową metodę oraz uwzględniając rozważania podane w punkcie 2.1 można pokazać, że quasi-wielomian (3.61) ma dwa zera $s_{1,2} \approx -2.9225 \pm j1.0065$ leżące w obszarze D , natomiast pozostałe jego zera, których jest nieskończenie wiele, leżą poza tym obszarem. Tworzą one dwa łańcuchy zer asymptotycznych dążących do minus nieskończoności przy $|s| \rightarrow \infty$. Najbliżej brzegu obszaru D leżą dwie pary zer: $s_{3,4} \approx -44.3573 \pm j20.3434$ oraz $s_{5,6} \approx -48.7923 \pm j55.9436$. Potwierdza to, że w pracy [120] zadanie badania odpornej D -stabilności nie zostało sformułowane poprawnie.

Z powyższych rozważań wynika, że w rozpatrywanym w pracy [120] problemie badania odpornej D -stabilności wielowymiarowego układu dynamicznego z jednym opóźnieniem zmiennych stanu należy przyjąć $D = D_1 \cup D_2$, gdzie D_1 jest otwartym kołem o środku w punkcie $c_0 = -\alpha + j0$, $\alpha > 0$, i o promieniu $r < \alpha$, zaś D_2 jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną $\operatorname{Re} s < -\gamma$, gdzie $\gamma > r + \alpha$. W omawianym powyżej przykładzie można na przykład przyjąć $\alpha = 3.5$, $r = 1.5$, $\gamma = -40$.

4. ODPORNA STABILNOŚĆ RODZINY QUASI-WIELOMIANÓW O ZNANYCH OPÓŹNIENIACH

Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów charakterystycznych

$$W(s, \mathbf{h}, Q) = \{w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}): \mathbf{q} \in Q\}, \quad (4.1)$$

gdzie

$$w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^m a_{ki}(\mathbf{q}) s^k e^{-sh_i}, \quad (4.2)$$

jest quasi-wielomianem o znanych opóźnieniach, przy czym $h_0 = 0$ oraz $0 < h_1 < h_2 < \dots < h_m < \infty$, $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_l]$ jest wektorem niepewnych fizycznych parametrów układu dynamicznego, zaś

$$Q = \{\mathbf{q}: q_k \in [q_k^-, q_k^+], q_k^- < q_k^+, k = 1, 2, \dots, l\} \quad (4.3)$$

jest zbiorem wartości tych parametrów.

Założmy, że współczynniki quasi-wielomianu (4.2) są ciągłymi funkcjami niepewnych parametrów, przy czym $a_{n0}(\mathbf{q}) > 0$, $\forall \mathbf{q} \in Q$, tzn. rodzina quasi-wielomianów (4.1) jest rodziną typu opóźnionego lub neutralnego.

Oznaczmy przez $w_0(s, \mathbf{h}) = w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}_0)$ quasi-wielomian nominalny rodziny quasi-wielomianów (4.1).

Rodzinie (4.1) quasi-wielomianów typu neutralnego odpowiada rodzina członów dominujących

$$\Delta(\exp(-sh), Q) = \{\Delta(\exp(-sh), \mathbf{q}): \mathbf{q} \in Q\}, \quad (4.4)$$

gdzie

$$\Delta(\exp(-sh), \mathbf{q}) = a_{n0}(\mathbf{q}) + \sum_{i=1}^m a_{ni}(\mathbf{q}) e^{-sh_i}, \quad (4.5)$$

przy czym $\Delta(\exp(-sh), \mathbf{q}_0)$ jest nominalnym członem dominującym.

W niniejszym rozdziale rozpatrzmy problem badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.1) w przypadku ogólnym oraz podamy metody badania odpornej D -stabilności w pewnych przypadkach szczególnych, gdy współczynniki quasi-wielomianu (4.2) zależą liniowo lub wieloliniowo od niepewnych parametrów.

Podobnie jak w rozdziale 3 będziemy zakładać, że D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną. Ogólniejsze obszary D , spełniające założenia wymienione w punkcie 3.2.3, zostaną rozpatrzone w punkcie 4.5.

Jeżeli D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną, to odporna D -stabilność rodziny członów dominujących (4.4) jest warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.1) typu neutralnego. Metody badania odpornej D -stabilności rodziny członów dominujących (4.4) w wymienionych powyżej przypadkach szczególnych podamy opierając się na twierdzeniu 3.4. Do badania odpornej D -stabilności tej rodziny z niewspółmiernymi opóźnieniami można też stosować warunek wynikający z twierdzenia 2.6. Mianowicie, jeżeli D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną (2.22), to rodzina członów dominujących (4.4) z niewspółmiernymi opóźnieniami jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy warunek (2.33) jest spełniony dla każdego członu dominującego (4.5) należącego do tej rodziny, czyli gdy

$$\min_{q \in Q} \{a_{n0}(q) - \sum_{i=1}^m |a_{ni}(q)| e^{\gamma h_i}\} > 0. \quad (4.6)$$

4.1. Badanie odpornej stabilności w przypadku ogólnym

W przypadku ogólnym do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.1) należy stosować metodę bezpośredniego sprawdzenia warunku wykluczenia zera lub metodę przestrzeni niepewnych parametrów. Są one opisane w punkcie 3.2.

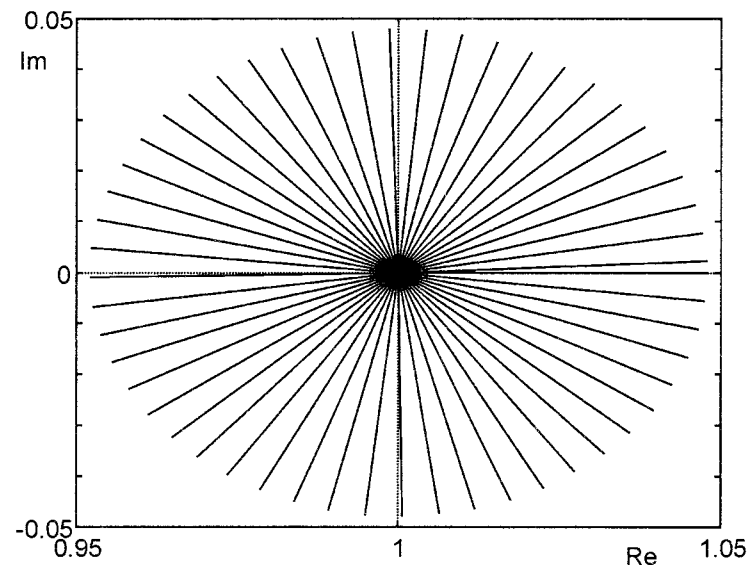
Zastosowanie wyżej wymienionych metod do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych wielomianowo od dwóch niepewnych parametrów ilustruje poniższy przykład.

Przykład 4.1. Należy zbadać odporną D -stabilność rodziny quasi-wielomianów (3.16) typu neutralnego, rozpatrywanej w przykładzie 3.1, gdzie D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną $\operatorname{Re} s < -0.3$, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -0.3 + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$.

Quasi-wielomian nominalny, odpowiadający nominalnym wartościom $q_1 = q_2 = 0$ niepewnych parametrów, ma postać (3.17). Stosując twierdzenie 2.3 można wykazać, że jest on D -stabilny. Jest więc też D -stabilny nominalny człon dominujący o postaci podanej w (3.22) przy $q_2 = 0$.

Zbadamy najpierw odporną D -stabilność rodziny (3.16) na podstawie bezpośredniego sprawdzenia warunku wykluczenia zera.

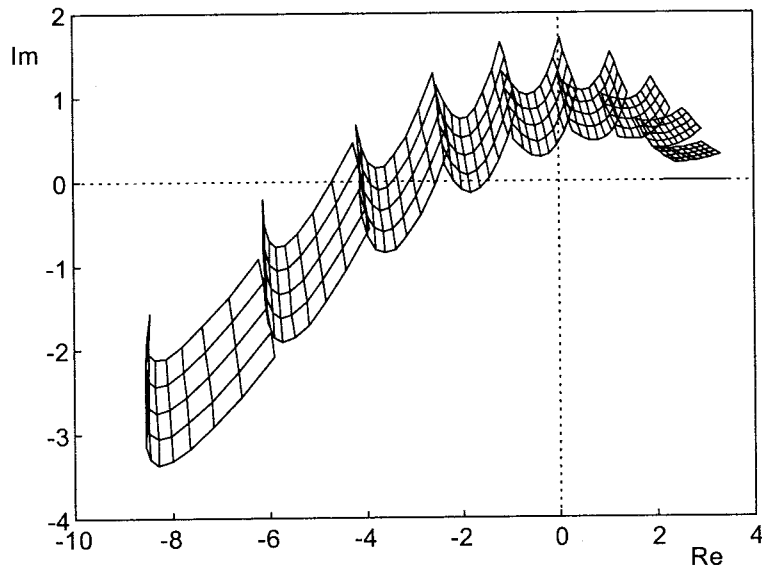
Rodzina członów dominujących rozpatrywanej rodziny quasi-wielomianów ma postać (3.22). Z przykładu 3.1 wynika, że dla każdego ustalonego ω zbiór wartości $\Delta(\exp(-f(\omega)h), Q)$ tej rodziny jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej odcinkiem linii prostej, którego jednym z końców jest punkt $1 + j0$. Położenia tego zbioru wartości, wyznaczone w funkcji parametru ω zmieniającego się od 0 do $\pi/h = 10.472$ z krokiem 0.2, są pokazane na rysunku 4.1. Z tego rysunku oraz ze wzoru (3.22) wynika, że dla każdego $\omega \geq 0$ zbiór wartości $\Delta(\exp(-f(\omega)h), Q)$ leży w kole o środku w punkcie $1 + j0$ i o promieniu $0.2^2 e^{2h\gamma} = 0.0479$. Warunek wykluczenia zera (3.13) jest więc spełniony i rodzina członów dominujących (3.22) jest odpornie D -stabilna, zgodnie z twierdzeniem 3.4.



Rys. 4.1. Położenia zbioru wartości rodziny członów dominujących (3.22)

Rodzina quasi-wielomianów (3.16) ma współmierne opóźnienia, natomiast rodzina członów dominujących (3.22) zależy od jednego opóźnienia $h_2 = 2h$. Można więc stosować warunek (4.6) do badania jej odpornej D -stabilności. Łatwo sprawdzić, że jest on spełniony, bowiem $\min_{q \in Q} \{1 - q_2^2 \exp(2h\gamma)\} = 1 - 0.0479 > 0$.

Wyznaczając na płaszczyźnie zmiennej zespolonej położenia zbioru wartości $w(f(\omega), h, Q)$ rodziny quasi-wielomianów (3.16) w funkcji parametru ω zmieniającego się od 0 do 4.5 z krokiem $\Delta\omega = 0.5$, otrzymamy wykresy pokazane na rysunku 4.2. Dla każdego ustalonego $\omega > 4.5$ zbiór wartości $w(f(\omega), h, Q)$ leży w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej dalej od osi urojonej niż zbiory pokazane na rysunku 4.2. Warunek wykluczenia zera (3.12a) jest więc spełniony. Oznacza to, zgodnie z twierdzeniem 3.3, że rodzina quasi-wielomianów (3.16) jest odpornie D -stabilna.



Rys. 4.2. Położenia zbioru wartości rodziny quasi-wielomianów (3.16), wyznaczone dla ω zmieniającego się od 0 do 4.5 z krokiem 0.5

Dla każdego ustalonego ω zbiór wartości $w(f(\omega), h, Q)$ został wyznaczony w sposób opisany w punkcie 3.2.1 i zastosowany w przykładzie 3.1, tzn. z zastosowaniem metody siatki. Przy tworzeniu siatki w zbiorze Q przyjmowano ustalone

wartości parametrów $q_1 \in [-0.1, 0.1]$ i $q_2 \in [-0.2, 0.2]$, zmieniające się z krokiem 0.05.

Aby zbadać odporną D -stabilność rodziny (3.16) metodą przestrzeni niepewnych parametrów, opisaną w punkcie 3.2.2, należy wyznaczyć granicę zer rzeczywistych (3.32) oraz granicę zer zespolonych (3.33).

Na granicy zer rzeczywistych jest spełnione równanie $w(-0.3, h, q) = 0$, które dla quasi-wielomianu (3.16) ma postać

$$w_0(-0.3, h) + q_1 w_1(-0.3, h) + q_2 w_2(-0.3, h) + q_1 q_2 w_{12}(-0.3, h) + q_2^2 w_{22}(-0.3, h) = 0. \quad (4.7)$$

Równanie (4.7) zależy liniowo od niepewnego parametru q_1 , co znacznie ułatwia wyznaczenie na płaszczyźnie (q_1, q_2) krzywej będącej jego rozwiązaniem.

Pokazana na rysunku 4.3 krzywa 1 jest rozwiązaniem równania (4.7), odpowiadającym wartościom parametru $q_2 \in [-0.045, 0.4]$.

Dla każdego ustalonego $q \in Q$ na granicy zer zespolonych jest spełniony układ równań

$$\operatorname{Re} w(f(\omega), h, q) = 0, \quad \operatorname{Im} w(f(\omega), h, q) = 0, \quad (4.8)$$

który można napisać w postaci

$$u_0(\omega) + q_1 u_1(\omega) + q_2 u_2(\omega) + q_1 q_2 u_{12}(\omega) + q_2^2 u_{22}(\omega) = 0, \quad (4.9a)$$

$$v_0(\omega) + q_1 v_1(\omega) + q_2 v_2(\omega) + q_1 q_2 v_{12}(\omega) + q_2^2 v_{22}(\omega) = 0, \quad (4.9b)$$

gdzie

$$u_i(\omega) = \operatorname{Re} w_i(f(\omega), h), \quad v_i(\omega) = \operatorname{Im} w_i(f(\omega), h), \quad (4.10)$$

$$u_{ik}(\omega) = \operatorname{Re} w_{ik}(f(\omega), h), \quad v_{ik}(\omega) = \operatorname{Im} w_{ik}(f(\omega), h), \quad (4.11)$$

przy czym odpowiednie quasi-wielomiany mają postaci podane w przykładzie 3.1.

Obliczając q_1 z równań (4.9a) i (4.9b) (przy założeniu $u_1(\omega) + q_2 u_{12}(\omega) \neq 0$ i $v_1(\omega) + q_2 v_{12}(\omega) \neq 0$), otrzymamy

$$\begin{aligned}
q_1 &= -\frac{u_0(\omega) + q_2 u_2(\omega) + q_2^2 u_{22}(\omega)}{u_1(\omega) + q_2 u_{12}(\omega)} \\
&= -\frac{v_0(\omega) + q_2 v_2(\omega) + q_2^2 v_{22}(\omega)}{v_1(\omega) + q_2 v_{12}(\omega)}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Równanie (4.12) można przekształcić do postaci

$$c_0(\omega) + c_1(\omega)q_2 + c_2(\omega)q_2^2 + c_3(\omega)q_2^3 = 0, \tag{4.13}$$

gdzie

$$c_0(\omega) = u_0(\omega)v_1(\omega) - u_1(\omega)v_0(\omega), \tag{4.14}$$

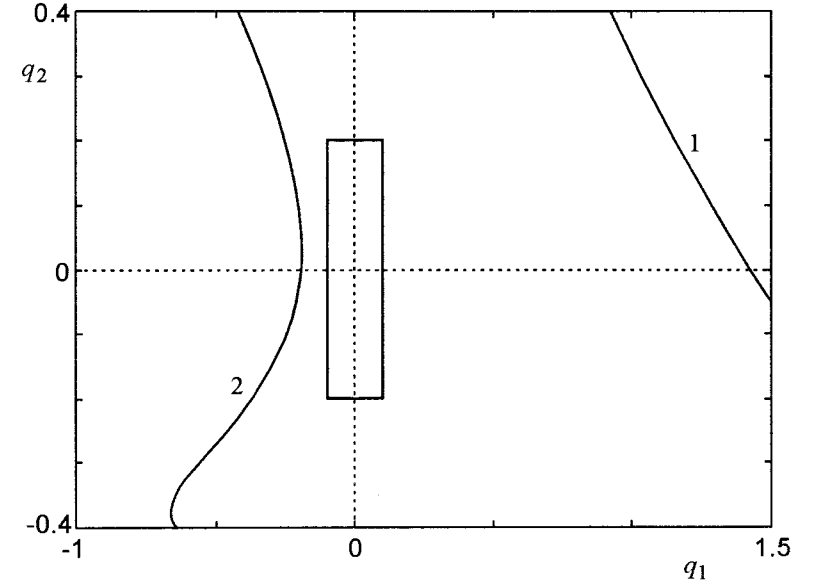
$$c_1(\omega) = u_2(\omega)v_1(\omega) - u_1(\omega)v_2(\omega) - u_{12}(\omega)v_0(\omega) + u_0(\omega)v_{12}(\omega), \tag{4.15}$$

$$c_2(\omega) = u_{22}(\omega)v_1(\omega) - u_1(\omega)v_{22}(\omega) - u_{12}(\omega)v_2(\omega) + u_2(\omega)v_{12}(\omega), \tag{4.16}$$

$$c_3(\omega) = u_{22}(\omega)v_{12}(\omega) - u_{12}(\omega)v_{22}(\omega). \tag{4.17}$$

Rozwiązaniem układu równań (4.9a), (4.9b), odpowiadającym wartościom parametru $\omega \in [1.915, 3.95]$, jest krzywa 2 pokazana na rysunku 4.3. Została ona wyznaczona w ten sposób, że przy ustalonej wartości ω obliczono najpierw pierwiastki równania (4.13), a następnie ze wzoru (4.12) obliczono wartość parametru q_1 , odpowiadającą każdemu rzeczywistemu pierwiastkowi równania (4.13).

Na płaszczyźnie (q_1, q_2) obszarem D -stabilności rozpatrywanej rodziny quasi-wielomianów jest obszar zawierający początek tej płaszczyzny, tzn. leżący pomiędzy krzywymi 1 i 2. Wynika to stąd, że jest D -stabilny quasi-wielomian nominalny, odpowiadający nominalnym wartościom $q_1 = q_2 = 0$ niepewnych parametrów. Ponieważ zbiór Q (prostokąt na rysunku 4.3) leży całkowicie w obszarze D -stabilności, rozpatrywana rodzina quasi-wielomianów jest odpornie D -stabilna. ■



Rys. 4.3. Wykresy do przykładu 4.1: granica zer rzeczywistych (krzywa 1), granica zer zespolonych (krzywa 2) oraz zbiór Q (prostokąt)

4.2. Odporna stabilność wypukłej kombinacji dwóch quasi-wielomianów

Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów (4.1) i założmy, że współczynniki (niekoniecznie wszystkie) quasi-wielomianu (4.2) zależą liniowo od jednego niepewnego parametru q , przy czym $q \in Q = [q^-, q^+]$. W takim przypadku rodzinę (4.1) można napisać w postaci

$$W(s, \mathbf{h}, \Lambda) = \{w(s, \mathbf{h}, \lambda) : \lambda \in \Lambda = [0, 1]\}, \tag{4.18}$$

gdzie

$$w(s, \mathbf{h}, \lambda) = (1 - \lambda)w_a(s, \mathbf{h}) + \lambda w_b(s, \mathbf{h}), \tag{4.19}$$

przy czym $w_a(s, \mathbf{h}) = w(s, \mathbf{h}, q^-)$, $w_b(s, \mathbf{h}) = w(s, \mathbf{h}, q^+)$, oraz $a_{n0}(\lambda) > 0$ dla każdego $\lambda \in \Lambda$, gdzie $a_{n0}(\lambda)$ jest współczynnikiem stojącym przy s^n w quasi-wielomianie (4.19). Przy tym założeniu rodzina quasi-wielomianów (4.18) jest rodziną typu opóźnionego lub neutralnego.

Nie zmniejszając ogólności rozważań przyjmijmy, że quasi-wielomianem nominalnym rodziny (4.18) jest quasi-wielomian $w_a(s, \mathbf{h})$.

Zgodnie z definicją 3.1, rodzinę quasi-wielomianów (4.18) będziemy nazywać odpornie D -stabilną, jeżeli każdy quasi-wielomian należący do tej rodziny jest D -stabilny.

Problem badania odpornej D -stabilności wypukłej kombinacji dwóch wielomianów był rozpatrywany w wielu pracach. Główne ich rezultaty są podane w monografiach [1, 8, 18, 52]. Należy przy tym podkreślić, że w przypadku wypukłej kombinacji dwóch wielomianów istnieją metody analityczne, służące do badania odpornej stabilności i odpornej D -stabilności, podane w pracach [2, 19, 169] (patrz też wymienione powyżej monografie). Nie ma natomiast analitycznych metod badania odpornej D -stabilności oraz odpornej stabilności wypukłej kombinacji dwóch quasi-wielomianów.

Rodzina członów dominujących rodziny quasi-wielomianów (4.18) typu neutralnego ma postać

$$\Delta(\exp(-s\mathbf{h}), \Lambda) = \{\Delta(\exp(-s\mathbf{h}), \lambda): \lambda \in \Lambda = [0, 1]\}, \quad (4.20)$$

gdzie

$$\Delta(\exp(-s\mathbf{h}), \lambda) = (1 - \lambda)\Delta_a(\exp(-s\mathbf{h})) + \lambda\Delta_b(\exp(-s\mathbf{h})), \lambda \in \Lambda, \quad (4.21)$$

przy czym $\Delta_a(\exp(-s\mathbf{h}))$ i $\Delta_b(\exp(-s\mathbf{h}))$ są to członów dominujące quasi-wielomianów $w_a(s, \mathbf{h})$ i $w_b(s, \mathbf{h})$, odpowiednio.

Jeżeli D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną, to odporna D -stabilność rodziny (4.20) jest warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.18) typu neutralnego.

Dla każdej ustalonej liczby zespolonej z zbiorem wartości rodziny quasi-wielomianów (4.18) jest zbiór

$$w(z, \mathbf{h}, \Lambda) = \{w(z, \mathbf{h}, \lambda): \lambda \in \Lambda = [0, 1]\}, \quad (4.22)$$

będący na płaszczyźnie zmiennej zespolonej odcinkiem linii prostej, łączącym punkty $w_a(z, \mathbf{h})$ i $w_b(z, \mathbf{h})$. Natomiast unormowanym zbiorem wartości tej rodziny jest zbiór

$$\tilde{w}(z, \mathbf{h}, \Lambda) = \{\tilde{w}(z, \mathbf{h}, \lambda): \lambda \in \Lambda = [0, 1]\}, \quad (4.23)$$

gdzie $\tilde{w}(z, \mathbf{h}, \lambda) = w(z, \mathbf{h}, \lambda) / w_a(z, \mathbf{h})$, przy czym $w_a(z, \mathbf{h}) \neq 0$. Jest on odcinkiem linii prostej, łączącym punkty $\tilde{w}(z, \mathbf{h}, 0) = 1 + j0$ i $\tilde{w}(z, \mathbf{h}, 1) = w_b(z, \mathbf{h}) / w_a(z, \mathbf{h})$.

Z powyższych rozważań i twierdzenia 3.3 wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1. Niech quasi-wielomian nominalny $w_a(s, \mathbf{h})$ będzie D -stabilny. Rodzina quasi-wielomianów (4.18) typu opóźnionego lub neutralnego jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin w(f(\omega), \mathbf{h}, \Lambda), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.24)$$

lub równoważnie, jest spełniony warunek wykluczenia zera dla unormowanego zbioru wartości

$$0 \notin \tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, \Lambda), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.25)$$

gdzie $w(f(\omega), \mathbf{h}, \Lambda)$ i $\tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, \Lambda)$ mają postaci podane w (4.22) i (4.23), odpowiednio, przy $z = f(\omega)$. ■

Zgodnie z definicją 3.6, dla dowolnej liczby zespolonej z zbiorem wartości rodziny członów dominujących (4.20) jest zbiór

$$\Delta(\exp(-z\mathbf{h}), \Lambda) = \{\Delta(\exp(-z\mathbf{h}), \lambda): \lambda \in \Lambda = [0, 1]\}. \quad (4.26)$$

Na płaszczyźnie zmiennej zespolonej jest on odcinkiem linii prostej, łączącym punkty $\Delta_a(\exp(-z\mathbf{h}))$ i $\Delta_b(\exp(-z\mathbf{h}))$.

Z twierdzenia 3.4 wynika poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.2. Niech nominalny człon dominujący $\Delta_a(\exp(-s\mathbf{h}))$ będzie D -stabilny. Rodzina członów dominujących (4.20) jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin \Delta(\exp(-f(\omega)\mathbf{h}), \Lambda), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.27)$$

gdzie $\Delta(\exp(-f(\omega)\mathbf{h}), \Lambda) = \Delta(\exp(-z\mathbf{h}), \Lambda)$ dla $z = f(\omega)$. ■

Spełnienie warunków wykluczenia zera (4.24), (4.25) i (4.27) można sprawdzić bezpośrednio, wykreślając na płaszczyźnie zmiennej zespolonej położenia odcinków $w(f(\omega), \mathbf{h}, \Lambda)$, $\tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, \Lambda)$ i $\Delta(\exp(-f(\omega)\mathbf{h}), \Lambda)$ w funkcji parametru $\omega \in \Omega$ (przyjmując odpowiednio mały krok $\Delta\omega$) i wizualnie sprawdzając, czy przechodzą one przez początek płaszczyzny zmiennej zespolonej czy też nie.

Zauważmy, że dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ odcinek $w(f(\omega), \mathbf{h}, \Lambda)$ nie przechodzi przez początek płaszczyzny zmiennej zespolonej wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\arg w_a(f(\omega), \mathbf{h}) - \arg w_b(f(\omega), \mathbf{h})| < \pi, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.28)$$

gdzie $\arg z \in [-\pi, \pi)$ jest głównym argumentem liczby zespolonej z .

Warunek (4.28) możemy napisać w postaci

$$\varphi(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.29)$$

gdzie

$$\varphi(\omega) = \pi - |\arg w_a(f(\omega), \mathbf{h}) - \arg w_b(f(\omega), \mathbf{h})| \quad (4.30)$$

jest funkcją testującą stowarzyszoną z obszarem D .

Postępując podobnie możemy wykazać, że dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ odcinek $\Delta(\exp(-f(\omega)\mathbf{h}), \Lambda)$ nie przechodzi przez początek płaszczyzny zmiennej zespolonej wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\varphi_d(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.31)$$

gdzie

$$\varphi_d(\omega) = \pi - |\arg \Delta_a(\exp(-f(\omega)\mathbf{h})) - \arg \Delta_b(\exp(-f(\omega)\mathbf{h}))| \quad (4.32)$$

jest funkcją testującą rodziny członów dominujących (4.20), stowarzyszoną z obszarem D .

Zauważmy, że ze względu na okresowość funkcji $\exp(-f(\omega)\mathbf{h})$ przy sprawdzaniu warunku (4.31) (lub (4.27)) możemy ograniczyć się do skończonego przedziału wartości parametru ω . Przedział ten można wyznaczyć w sposób opisany w punkcie 2.3.1 niniejszej pracy (poniżej twierdzenia 2.2).

Dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ odcinek $\tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, \Lambda)$, zaczepiony w punkcie $\tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, 0) = 1 + j0$, którego drugim końcem jest punkt $\tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, 1) = w_b(f(\omega), \mathbf{h}) / w_a(f(\omega), \mathbf{h})$, nie przechodzi przez początek płaszczyzny zmiennej zespolonej wtedy i tylko wtedy, gdy wykres

$$\tilde{w}_{ba}(f(\omega)) = w_b(f(\omega), \mathbf{h}) / w_a(f(\omega), \mathbf{h}), \quad (4.33)$$

sporządzony w funkcji parametru $\omega \in \Omega$, nie przecina ujemnej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$.

Powyższy warunek został w inny sposób udowodniony w pracy [88].

Lemat 4.1. Niech quasi-wielomian nominalny $w_a(s, \mathbf{h})$ będzie D -stabilny. Rodzina quasi-wielomianów (4.18) typu opóźnionego lub neutralnego jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wykres funkcji (4.33) nie przecina ujemnej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$.

Dowód. Dowód wynika z powyższych rozważań i twierdzenia 4.1. ■

Dla dowolnej liczby zespolonej z unormowanym zbiorem wartości rodziny członów dominujących (4.20) jest zbiór

$$\tilde{\Delta}(\exp(-z\mathbf{h}), \Lambda) = \{\tilde{\Delta}(\exp(-z\mathbf{h}), \lambda) : \lambda \in \Lambda = [0, 1]\}, \quad (4.34)$$

gdzie $\tilde{\Delta}(\exp(-z\mathbf{h}), \lambda) = \Delta(\exp(-z\mathbf{h}), \lambda) / \Delta_a(\exp(-z\mathbf{h}))$, $\Delta_a(\exp(-z\mathbf{h})) \neq 0$. Na płaszczyźnie zmiennej zespolonej jest on odcinkiem linii prostej, łączącym punkty $\tilde{\Delta}(\exp(-z\mathbf{h}), 0) = 1 + j0$ i $\tilde{\Delta}(\exp(-z\mathbf{h}), 1) = \Delta_b(\exp(-z\mathbf{h})) / \Delta_a(\exp(-z\mathbf{h}))$.

Z lematu 4.1 i powyższych rozważań bezpośrednio wynika następujący lemat.

Lemat 4.2. Niech nominalny człon dominujący $\Delta_a(\exp(-s\mathbf{h}))$ będzie D -stabilny. Rodzina członów dominujących (4.20) jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wykres funkcji

$$\tilde{\Delta}_{ba}(\exp(-f(\omega)\mathbf{h})) = \Delta_b(\exp(-f(\omega)\mathbf{h})) / \Delta_a(\exp(-f(\omega)\mathbf{h})) \quad (4.35)$$

nie przecina ujemnej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$. ■

Zauważmy, że w przypadku rodziny quasi-wielomianów (4.18) typu neutralnego $\tilde{w}_{ba}(s)$ dąży do $\tilde{\Delta}_{ba}(\exp(-s\mathbf{h}))$ przy $|s| \rightarrow \infty$. Ponadto, jeżeli $s = f(\omega) = -\gamma + j\omega$, to $|s| \rightarrow \infty$ przy $\omega \rightarrow \infty$. Z powyższego wynika zatem, że dla odpowiednio dużych wartości parametru ω wykres funkcji (4.33) dąży do wykresu funkcji (4.35), sporządzonego dla $\omega \in [0, 2\pi / \hbar]$, gdzie $\hbar$ oblicza się w sposób podany w punkcie 2.3.1. Oznacza to, że podany w lemacie 4.2 warunek konieczny odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.18) typu neutralnego musimy sprawdzać oddzielnie tylko w przypadku, gdy przy dużych wartościach parametru ω wykres funkcji (4.33) przebiega bardzo blisko początku płaszczyzny zmiennej zespolonej. W pozostałych przypadkach sprawdzanie tego warunku nie jest konieczne, co ilustruje podany poniżej przykład 4.2.

Przykład 4.2. Weźmy pod uwagę quasi-wielomian charakterystyczny (2.13), rozpatrywany w przykładach 2.1, 2.2 i 2.3. Załóżmy, że $h = 0.5$, $T = 0.2$, $K_r = 0.6$, $T_i = 0.38$, $T_d = 0.1$, natomiast wartość współczynnika wzmocnienia k nie jest dokładnie znana, przy czym $k \in [0.8, 1.2]$.

Przyjmując oznaczenie $q = k \in [0.8, 1.2]$, quasi-wielomian (2.13) napiszemy w postaci

$$w(s, h, q) = 0.076s^2 + 0.38s + q(0.0228s^2 + 0.228s + 0.6)e^{-sh}, q \in Q, (4.36)$$

gdzie $Q = [0.8, 1.2]$.

Stosując lemat 4.1 należy zbadać odporną stabilność rodziny quasi-wielomianów (4.36), którą można napisać w postaci

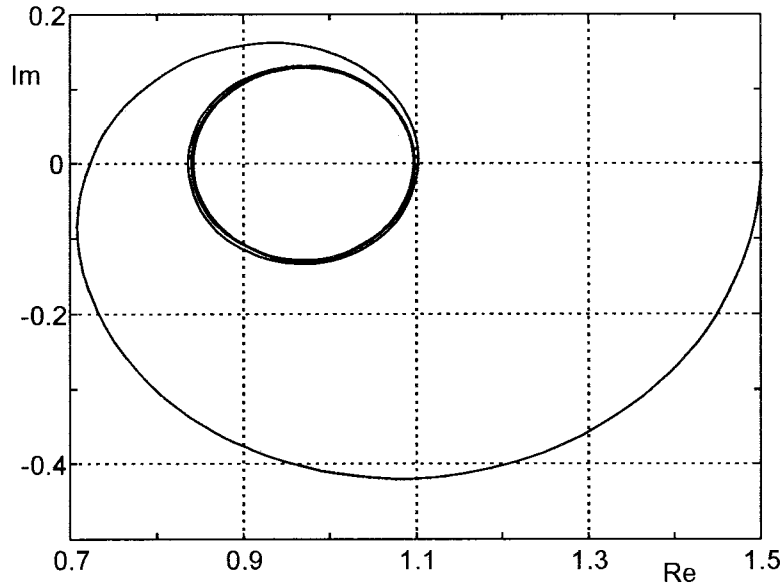
$$w(s, h, \lambda) = (1 - \lambda)w_a(s, h) + \lambda w_b(s, h), \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], (4.37)$$

gdzie

$$w_a(s, h) = 0.076s^2 + 0.38s + 0.8(0.0228s^2 + 0.228s + 0.6)e^{-sh}, (4.38)$$

$$w_b(s, h) = 0.076s^2 + 0.38s + 1.2(0.0228s^2 + 0.228s + 0.6)e^{-sh}. (4.39)$$

Łatwo sprawdzić, stosując np. twierdzenie 2.3, że powyższe quasi-wielomiany są asymptotycznie stabilne.



Rys. 4.4. Wykres funkcji $\tilde{w}_{ba}(j\omega)$, $\omega \in [0, 60]$

Wykres funkcji $\tilde{w}_{ba}(j\omega)$, zdefiniowanej wzorem (4.33), jest pokazany na rysunku 4.4. Został on wyznaczony dla ω zmieniającego się od 0 do 60 z krokiem $\Delta\omega = 0.05$. Rozpoczyna się on przy $\omega = 0$ w punkcie $1.5 + j0$ i przy $\omega \rightarrow \infty$ „nawija się” na wykres funkcji (4.35), która dla rodziny quasi-wielomianów (4.36) ma postać

$$\tilde{\Delta}_{ba}(\exp(-j\omega h)) = \frac{0.076 + 0.01824 \exp(-j\omega h)}{0.076 + 0.02736 \exp(-j\omega h)}. (4.40)$$

Funkcja (4.40) jest ilorazem (dla $s = j\omega$) członów dominujących quasi-wielomianów (4.39) i (4.38). Jest ona funkcją okresową parametru ω , o okresie $2\pi/h = 4\pi$. Dlatego też jej wykres na płaszczyźnie zmiennej zespolonej jest krzywą zamkniętą.

Z rysunku 4.4 wynika, że wykres funkcji $\tilde{w}_{ba}(j\omega)$ nie przecina ujemnej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$. Oznacza to, zgodnie z lematem 4.1, że rodzina quasi-wielomianów (4.36) jest odpornie stabilna. ■

W pracy [147] (patrz też np. [8, 18, 52]) wykazano, że istnieje klasa wypukłych kombinacji dwóch wielomianów, dla której odporna stabilność jest równoważna z asymptotyczną stabilnością wielomianów $w_a(s)$ i $w_b(s)$. Podobny rezultat został podany w pracach [71, 72] w przypadku wypukłej kombinacji dwóch quasi-wielomianów. Jest on cytowany w [83].

Wykorzystując rezultaty pracy [71] udowodnimy poniższe twierdzenie.

Weźmy pod uwagę quasi-wielomian

$$g(s, h) = w_b(s, h) - w_a(s, h) (4.41)$$

i wprowadźmy oznaczenia

$$\varphi_g(\omega) = \arg g(j\omega, h), \quad \varphi_g'(\omega) = (d/d\omega) \arg g(j\omega, h). (4.42)$$

Twierdzenie 4.3. Załóżmy, że quasi-wielomiany $w_a(s, h)$ i $w_b(s, h)$ są asymptotycznie stabilne. Jeżeli

$$\varphi_g'(\omega) \leq \frac{-h_m}{2} + \left| \frac{\sin(\omega h_m + 2\varphi_g(\omega))}{2\omega} \right| (4.43)$$

dla wszystkich $\omega > 0$, dla których pochodna jest dobrze określona, to rodzina quasi-wielomianów (4.18) typu opóźnionego lub neutralnego jest odpornie stabilna.

Dowód. W pracy [71] rozpatrywano problem badania odpornej stabilności wypukłej kombinacji dwóch quasi-wielomianów, mających postać (2.103). Do tej klasy należą też quasi-wielomiany o postaci (2.101), które tworzy się z quasi-wielomianu (2.97) w sposób podany w (2.99).

Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów typu opóźnionego lub neutralnego, mającą postać

$$W(s, \bar{h}, \Lambda) = \{w(s, \bar{h}, \lambda): \lambda \in \Lambda = [0, 1]\}, \quad (4.44)$$

gdzie

$$w(s, \bar{h}, \lambda) = (1 - \lambda)w_a(s, \bar{h}) + \lambda w_b(s, \bar{h}), \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (4.45)$$

przy czym $w_a(s, \bar{h}) = \exp(sh_m)w_a(s, h)$ i $w_b(s, \bar{h}) = \exp(sh_m)w_b(s, h)$ są to quasi-wielomiany, mające postać (2.101).

Odporna stabilność rodziny quasi-wielomianów (4.44) jest równoważna z odporną stabilnością rodziny (4.18). Wobec tego, jeżeli są asymptotycznie stabilne quasi-wielomiany $w_a(s, h)$ i $w_b(s, h)$, to są też asymptotycznie stabilne quasi-wielomiany $w_a(s, \bar{h})$ i $w_b(s, \bar{h})$ (i odwrotnie).

Wprowadźmy oznaczenia

$$\bar{\varphi}_g(\omega) = \arg g(j\omega, \bar{h}), \quad \bar{\varphi}_g'(\omega) = (d/d\omega) \arg g(j\omega, \bar{h}), \quad (4.46)$$

gdzie

$$g(s, \bar{h}) = w_b(s, \bar{h}) - w_a(s, \bar{h}). \quad (4.47)$$

W pracy [71] wykazano, że jeżeli quasi-wielomiany $w_a(s, \bar{h})$ i $w_b(s, \bar{h})$ są asymptotycznie stabilne i warunek

$$\bar{\varphi}_g'(\omega) \leq \frac{\bar{h}_0 + \bar{h}_m}{2} + \left| \frac{\sin(2\bar{\varphi}_g(\omega) - \omega(\bar{h}_0 + \bar{h}_m))}{2\omega} \right| \quad (4.48)$$

jest spełniony dla wszystkich $\omega > 0$, dla których pochodna jest dobrze określona, to rodzina quasi-wielomianów (4.44) jest odpornie stabilna.

Zauważmy, że obie strony nierówności (4.48) i (2.109) mają takie same postaci, inny jest tylko zwrot znaku nierówności. Wobec tego, postępując w taki sam sposób jak w dowodzie lematu 2.9, można wykazać, że warunek (4.48) dla rodziny (4.44) jest równoważny z warunkiem (4.43) dla rodziny (4.18). ■

Jeżeli (4.18) jest rodziną quasi-wielomianów o zespolonych współczynnikach, to warunek (4.43) przyjmuje postać [71]

$$\varphi_g'(\omega) \leq -\frac{h_m}{2}. \quad (4.49)$$

Z twierdzenia 4.3 wynika, że jeżeli jest spełniony warunek (4.43), to asymptotyczna stabilność quasi-wielomianów $w_a(s, h)$ i $w_b(s, h)$ jest warunkiem dostatecznym odpornej stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.18).

Warunek (4.43) można napisać w postaci

$$R(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega > 0, \quad (4.50)$$

gdzie $R(\omega)$ jest funkcją testującą, mającą postać

$$R(\omega) = -\varphi_g'(\omega) - \frac{h_m}{2} + \left| \frac{\sin(\omega h_m + 2\varphi_g(\omega))}{2\omega} \right|. \quad (4.51)$$

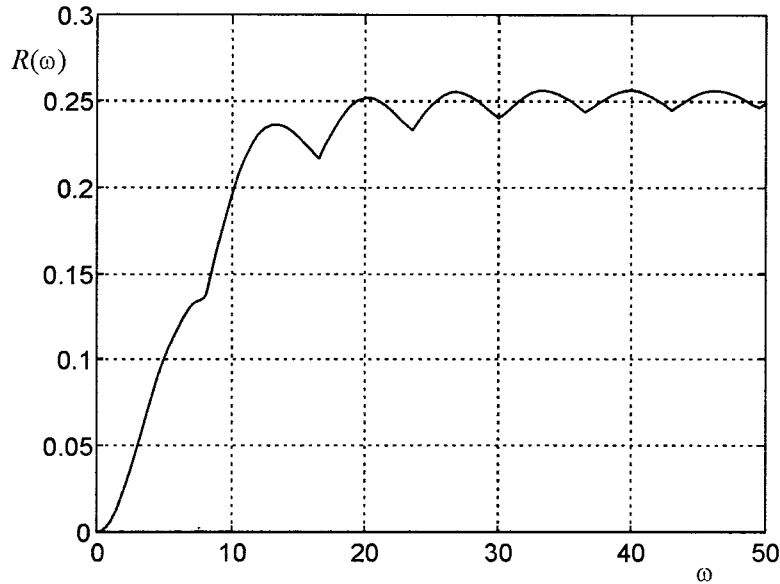
Zauważmy, że $R(\omega) = -F_{\arg}(\omega)$, gdzie funkcja $F_{\arg}(\omega)$ jest zdefiniowana wzorem (2.119). Wobec tego, funkcję (4.51) można wyznaczyć w sposób podany w punkcie 2.4, nie wymagający bezpośredniego obliczania argumentu quasi-wielomianu (4.47) dla $s = j\omega$.

Przykład 4.3. Weźmy pod uwagę rozpatrywaną w przykładzie 4.2 wypukłą kombinację (4.18) dwóch quasi-wielomianów (4.38) i (4.39).

Obliczając ze wzoru (4.41) quasi-wielomian $g(s, h)$ otrzymamy

$$g(s, h) = w_b(s, h) - w_a(s, h) = 0.4(0.0228s^2 + 0.228s + 0.6)e^{-sh}. \quad (4.52)$$

Wykres funkcji $R(\omega)$, wyznaczony na podstawie wzoru (4.51) dla ω zmieniającego się od 0.01 do 50 (ze zmiennym krokiem) jest pokazany na rysunku 4.5. Przy $\omega \rightarrow 0$ wykres $R(\omega)$ dąży do zera. Z rysunku 4.5 wynika, że warunek (4.50) (a więc i (4.43)) jest spełniony. Asymptotyczna stabilność quasi-wielomianów $w_a(s, h)$ i $w_b(s, h)$ jest więc warunkiem wystarczającym odpornej stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.18). Ponieważ są one asymptotycznie stabilne, z twierdzenia 4.3 wynika, że rozpatrywana wypukła kombinacja dwóch quasi-wielomianów (4.38) i (4.39) jest odpornie stabilna. ■

Rys. 4.5. Wykres funkcji $R(\omega)$

4.3. Odporna stabilność rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów

Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów opisaną wzorami (4.1)-(4.3) i załóżmy, że współczynniki quasi-wielomianu (4.2) są liniowymi funkcjami niepewnych parametrów.

Dla prostoty rozważań przyjmijmy (nie zmniejszając ich ogólności), że współczynniki quasi-wielomianu (4.2) zależą nie od niepewnych parametrów, a od odchyłek tych parametrów od ich wartości nominalnych. Odchyłki będziemy przy tym oznaczać tak samo jak niepewne parametry, tzn. przez q_k ($k = 1, 2, \dots, l$). Dla odróżnienia, że rozpatrujemy zapis quasi-wielomianu $w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q})$ w zależności od odchyłek, a nie od niepewnych parametrów, przyjmijmy zasadę, że k -ta odchyłka $q_k \in [b_k, c_k]$, $b_k \leq 0$, $c_k \geq 0$ (przy czym nie może być jednocześnie $b_k = 0$ i $c_k = 0$), podczas gdy k -ty niepewny parametr $q_k \in [q_k^-, q_k^+]$, $q_k^- < q_k^+$.

Przyjęcie wyżej wymienionego zapisu quasi-wielomianu $w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q})$ pozwoli na podanie w dalszej części niniejszego punktu prostych metod służących do wyznaczania funkcji testujących.

Quasi-wielomian o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów można napisać w postaci

$$w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}) = w_0(s, \mathbf{h}) + q_1 w_1(s, \mathbf{h}) + \dots + q_l w_l(s, \mathbf{h}), \quad (4.53)$$

gdzie $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_l]$ jest wektorem odchyłek q_k ($k = 1, 2, \dots, l$) niepewnych parametrów od ich wartości nominalnych, l jest liczbą niepewnych parametrów, zaś

$$w_k(s, \mathbf{h}) = \sum_{r=0}^n s^r \sum_{i=0}^m a_{ri}^{(k)} e^{-sh_i}, \quad k = 0, 1, \dots, l, \quad (4.54)$$

są to znane quasi-wielomiany, przy czym $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m$.

Niech obszarem D będzie przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, przy czym $\gamma > 0$.

Będziemy rozpatrywać odporną D -stabilność rodziny quasi-wielomianów

$$W(s, \mathbf{h}, Q) = \{w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}, \quad (4.55)$$

gdzie $w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q})$ jest quasi-wielomianem mającym postać (4.53), natomiast

$$Q = \{\mathbf{q} : q_k \in [b_k, c_k], b_k \leq 0, c_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, l\} \quad (4.56)$$

jest zbiorem wartości odchyłek niepewnych parametrów od ich wartości nominalnych.

Quasi-wielomianem nominalnym rodziny (4.55) jest $w_0(s, \mathbf{h}) = w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}_0)$,

gdzie $\mathbf{q}_0 = [0, 0, \dots, 0]$. Będziemy przyjmować, że jest on D -stabilny.

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że jest spełniony warunek

$$a_{n0}^{(0)} + \sum_{k=1}^l q_k a_{n0}^{(k)} > 0, \quad \forall \mathbf{q} \in Q, \quad (4.57)$$

tzn. rodzina quasi-wielomianów (4.55) jest rodziną typu opóźnionego lub neutralnego. Warunek (4.57) jest równoważny z warunkiem $a_{n0}(\mathbf{q}) > 0$, $\forall \mathbf{q} \in Q$, sformułowanym dla rodziny quasi-wielomianów (4.1).

W przypadku szczególnym, gdy $l=1$, rodzinę quasi-wielomianów (4.55) można napisać w postaci (4.18). Problem badania odpornej D -stabilności rodziny (4.18) został rozpatrzony w punkcie 4.2.

Rodzina członów dominujących rodziny quasi-wielomianów (4.55) typu neutralnego ma postać

$$\Delta(\exp(-sh), Q) = \{\Delta(\exp(-sh), q) : q \in Q\}, \quad (4.58)$$

gdzie

$$\Delta(\exp(-sh), q) = \Delta_0(\exp(-sh)) + \sum_{k=1}^l q_k \Delta_k(\exp(-sh)), \quad (4.59)$$

przy czym

$$\Delta_k(\exp(-sh)) = a_{n0}^{(k)} + \sum_{i=1}^m a_{ni}^{(k)} e^{-sh_i}, \quad k = 0, 1, \dots, l, \quad (4.60)$$

są to członów dominujące quasi-wielomianów (4.54) typu neutralnego. Nominalnym członem dominującym rodziny (4.58) jest $\Delta_0(\exp(-sh)) = \Delta(\exp(-sh), q_0)$.

Jeżeli obszarem D jest przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna, to odporna D -stabilność rodziny (4.58) jest warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.55) typu neutralnego.

4.3.1. Zbiór wartości

Zbiór Q o postaci (4.56) jest l -wymiarowym hiperprostokątnikiem. Ma on $K = 2^l$ wierzchołków i $L = l2^{l-1}$ krawędzi.

Oznaczmy przez

$$q_k = [q_1^k, q_2^k, \dots, q_l^k], \quad \text{gdzie } q_i^k = b_i \text{ lub } q_i^k = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

k -ty wierzchołek zbioru Q .

Zbiór Q można przedstawić w postaci

$$Q = \text{conv}\{q_1, q_2, \dots, q_K\} = \{q : q = \sum_{k=1}^K \lambda_k q_k, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^K \lambda_k = 1\}. \quad (4.61)$$

Wierzchołki $q_k, k = 1, 2, \dots, K$, zbioru Q będziemy nazywać jego generatorami.

Każdemu wierzchołkowi $q_k, k = 1, 2, \dots, K$, zbioru Q w zbiorze quasi-wielomianów (4.55) odpowiada tzw. quasi-wielomian wierzchołkowy

$$p_k(s, h) = w(s, h, q_k). \quad (4.62)$$

Uwzględniając powyższe rozważania, dowolny quasi-wielomian $w(s, h)$ należący do rodziny (4.55) można napisać w postaci

$$w(s, h) = \sum_{k=1}^K \lambda_k p_k(s, h), \quad \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^K \lambda_k = 1. \quad (4.63)$$

Oznacza to, że rodzinę quasi-wielomianów (4.55) można przedstawić w postaci

$$W(s, h, Q) = \text{conv}\{p_1(s, h), p_2(s, h), \dots, p_K(s, h)\}. \quad (4.64)$$

Rodzinę (4.64) będziemy nazywać wierzchołkowym zbiorem quasi-wielomianów.

Każdej krawędzi

$$q_{rk}(\lambda) = (1 - \lambda)q_r + \lambda q_k, \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1] \quad (4.65)$$

zbioru Q , będącej odcinkiem linii prostej łączącym wierzchołki q_r i q_k , w zbiorze quasi-wielomianów (4.64) odpowiada tzw. quasi-wielomian krawędziowy mający postać

$$p_{rk}(s, h, \lambda) = (1 - \lambda)p_r(s, h) + \lambda p_k(s, h), \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (4.66)$$

gdzie $p_r(s, h)$ i $p_k(s, h)$ są to quasi-wielomiany wierzchołkowe, odpowiadające wierzchołkom q_r i q_k zbioru Q , odpowiednio.

Ze wzoru (4.64) i definicji 3.5 wynika, że dla każdej liczby zespolonej z z zbioru wartości $w(z, h, Q)$ można przedstawić w postaci

$$w(z, h, Q) = \text{conv}\{p_1(z, h), p_2(z, h), \dots, p_K(z, h)\}. \quad (4.67)$$

Podobnie, unormowany zbiór wartości $\tilde{w}(z, h, Q)$, zdefiniowany wzorem (3.11), można przedstawić w postaci

$$\tilde{w}(z, h, Q) = \text{conv}\{\tilde{p}_1(z, h), \tilde{p}_2(z, h), \dots, \tilde{p}_K(z, h)\}, \quad (4.68)$$

gdzie $\tilde{p}_k(z, h) = p_k(z, h) / w_0(z, h)$, $k = 1, 2, \dots, K$, $w_0(z, h) \neq 0$, zaś $w_0(s, h)$ jest D -stabilnym quasi-wielomianem nominalnym.

Zbiór wartości $w(z, h, Q)$ jest wypukłym wielobokiem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, rozpiętym na punktach $p_1(z, h), \dots, p_K(z, h)$, przy czym w przypadku ogólnym nie wszystkie punkty $p_k(z, h), k = 1, 2, \dots, K$, muszą być

wierzchołkami tego zbioru, tj. niektóre z punktów $p_k(z, \mathbf{h})$ mogą leżeć we wnętrzu zbioru wartości $w(z, \mathbf{h}, Q)$.

Podobnie jak w przypadku rodziny wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów (np. [52]) możemy wykazać, że zbiór wartości $w(z, \mathbf{h}, Q)$ (wypukły wielobok) ma następujące właściwości:

- 1) Każdemu wierzchołkowi $p_r(z, \mathbf{h}) = w(z, \mathbf{h}, \mathbf{q}_r)$ wieloboku $w(z, \mathbf{h}, Q)$ odpowiada wierzchołek $\mathbf{q}_r$ zbioru Q , ale nie odwrotnie.
- 2) Każdej krawędzi $[p_r(z, \mathbf{h}), p_k(z, \mathbf{h})]$ wieloboku (4.67), będącej odcinkiem linii prostej łączącym wierzchołki $p_r(z, \mathbf{h})$ i $p_k(z, \mathbf{h})$, w zbiorze Q odpowiada krawędź (4.65), ale nie odwrotnie.
- 3) Liczba krawędzi wieloboku (4.67) jest nie większa niż $2l$, gdzie l jest liczbą niepewnych parametrów (wymiar hiperprostokąta Q).
- 4) Krawędzie wieloboku (4.67) są wzajemnie parami równoległe.

Postać zbioru wartości $w(z, \mathbf{h}, Q)$ i jego położenie na płaszczyźnie zmiennej zespolonej zależą istotnie od wartości liczby zespolonej z . Wielobok $w(z, \mathbf{h}, Q)$ może mieć maksymalnie $2l$ krawędzi, przy czym ich liczba może być różna w zależności od wartości z . Ponadto, niektóre punkty $p_k(z, \mathbf{h})$, które były wierzchołkami $w(z, \mathbf{h}, Q)$ przy jednej wartości z , mogą być punktami wewnętrznymi tego wieloboku przy innej wartości z .

Wymienione powyżej właściwości ma też unormowany zbiór wartości (4.68). Ponadto, takie same właściwości ma też zbiór wartości

$$\Delta(\exp(-z\mathbf{h}), Q) = \{\Delta(\exp(-z\mathbf{h}), \mathbf{q}): \mathbf{q} \in Q\} \quad (4.69)$$

rodziny członów dominujących (4.58).

Dla dowolnej liczby zespolonej z zbiór wartości (4.69) jest wypukłym wielobokiem, rozpiętym na punktach $p_k^\Delta(\exp(-z\mathbf{h}))$, $k = 1, 2, \dots, K$, będących wartościami dla $s = z$ wierzchołkowych członów dominujących

$$p_k^\Delta(\exp(-s\mathbf{h})) = \Delta(\exp(-s\mathbf{h}), \mathbf{q}_k), \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (4.70)$$

Z powyższych rozważań wynika, że aby przy ustalonym z wyznaczyć na płaszczyźnie zmiennej zespolonej zbiór wartości $w(z, \mathbf{h}, Q)$, należy wyznaczyć $L = l2^{l-1}$ odcinków linii prostych, będących odwzorowaniami poszczególnych krawędzi zbioru Q przez przekształcenie $w(z, \mathbf{h}, \mathbf{q})$. Odcinki zewnętrzne są krawędziami zbioru wartości $w(z, \mathbf{h}, Q)$.

W taki sam sposób wyznacza się unormowany zbiór wartości $\tilde{w}(z, \mathbf{h}, Q)$ oraz zbiór wartości $\Delta(\exp(-z\mathbf{h}), Q)$ rodziny członów dominujących, stosując przekształcenia $\tilde{w}(z, \mathbf{h}, \mathbf{q}) = w(z, \mathbf{h}, \mathbf{q}) / w_0(z, \mathbf{h})$ oraz $\Delta(\exp(-z\mathbf{h}), \mathbf{q})$, odpowiednio.

4.3.2. Warunek wykluczenia zera

Z twierdzeń 3.3 i 3.4 wynikają poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 4.4. Niech quasi-wielomian nominalny $w_0(s, \mathbf{h})$ będzie D -stabilny. Rodzina quasi-wielomianów (4.55) typu opóźnionego lub neutralnego o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin w(f(\omega), \mathbf{h}, Q), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.71)$$

lub równoważnie, warunek wykluczenia zera dla unormowanego zbioru wartości

$$0 \notin \tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, Q), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.72)$$

gdzie zbiory wartości $w(f(\omega), \mathbf{h}, Q)$ i $\tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, Q)$ są zdefiniowane wzorami (4.67) i (4.68), odpowiednio, przy $z = f(\omega)$. ■

Twierdzenie 4.5. Niech nominalny człon dominujący $\Delta_0(\exp(-s\mathbf{h}))$ będzie D -stabilny. Rodzina członów dominujących (4.58) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin \Delta(\exp(-f(\omega)\mathbf{h}), Q), \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty), \quad (4.73)$$

gdzie $\Delta(\exp(-f(\omega)\mathbf{h}), Q) = \Delta(\exp(-z\mathbf{h}), Q)$ przy $z = f(\omega) = -\gamma + j\omega$. ■

Bezpośrednie zastosowanie twierdzeń 4.4 i 4.5 do badania odpornej D -stabilności zilustrujemy poniżej dwoma przykładami układów regulacji automatycznej, typu opóźnionego oraz neutralnego.

Przykład 4.4. Weźmy pod uwagę quasi-wielomian charakterystyczny układu regulacji automatycznej tunelem aerodynamicznym, rozpatrywany w pracy [88], mający postać

$$\begin{aligned}
w(s, \mathbf{h}) = & s^3 \tau + s^2 (6\tau + 1) \\
& + s(13.75\tau + 6 + 1.82\tau \exp(-sh_1) + 0.42\tau \exp(-sh_2)) \\
& + 13.75 + 1.82 \exp(-sh_1) + (0.42 - 1305k) \exp(-sh_2),
\end{aligned} \quad (4.74)$$

gdzie $h_1 = 0.165$, $h_2 = 0.33$, natomiast niepewnymi parametrami są τ i k , przy czym

$$\tau \in [1.571, 2.357], \quad k \in [-0.0144, -0.0088], \quad (4.75)$$

o wartościach nominalnych $\tau_0 = 1.964$, $k_0 = -0.0117$.

Na podstawie bezpośredniego sprawdzenia warunku wykluczenia zera należy zbadać odporną D -stabilność quasi-wielomianu (4.74), gdzie

$$D = \{s: \operatorname{Re} s < -1\}. \quad (4.76)$$

Parametryczny opis brzegu obszaru D ma postać $f(\omega) = -1 + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$.

Quasi-wielomian (4.74) o niepewnych współczynnikach można napisać w postaci rodziny quasi-wielomianów

$$w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}) = w_0(s, \mathbf{h}) + q_1 w_1(s, \mathbf{h}) + q_2 w_2(s, \mathbf{h}), \quad \mathbf{q} \in Q, \quad (4.77)$$

gdzie $\mathbf{h} = [h_1, h_2]$, $\mathbf{q} = [q_1, q_2]$, oraz

$$\begin{aligned}
w_0(s, \mathbf{h}) = & 1.964s^3 + 12.784s^2 + (33.005 + 3.57448e^{-sh_1} \\
& + 0.82488e^{-sh_2})s + 13.75 + 1.82e^{-sh_1} + 15.6885e^{-sh_2},
\end{aligned} \quad (4.78)$$

$$w_1(s, \mathbf{h}) = s^3 + 6s^2 + (13.75 + 1.82e^{-sh_1} + 0.42e^{-sh_2})s, \quad (4.79)$$

$$w_2(s, \mathbf{h}) = -1305e^{-sh_2}, \quad (4.80)$$

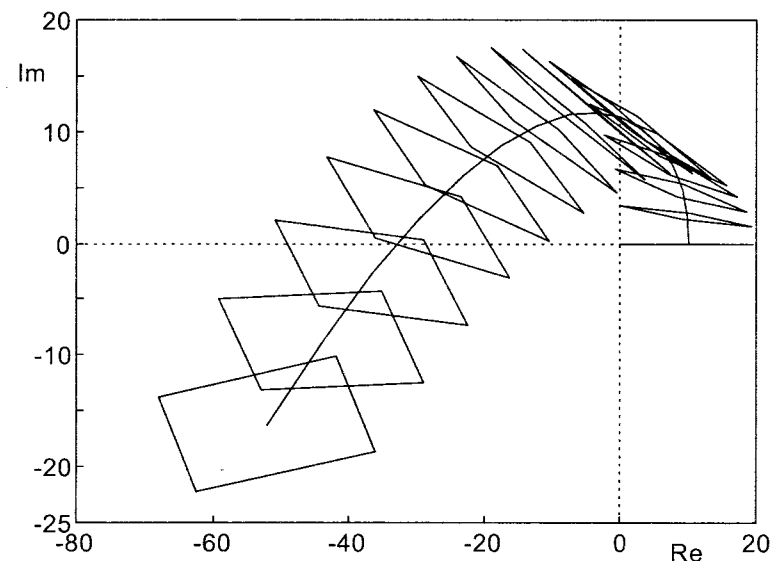
$$Q = \{\mathbf{q}: q_1 \in [-0.393, 0.393], \quad q_2 \in [-0.0027, 0.0029]\}. \quad (4.81)$$

Parametry q_1 i q_2 są odchyłkami niepewnych parametrów τ i k , odpowiednio, od ich wartości nominalnych.

Łatwo zauważyć, że warunek (4.57), mający postać $1.964 + q_1 > 0$, jest spełniony. Z powyższego i ze wzorów (4.77)–(4.80) wynika zatem, że rodzina quasi-wielomianów (4.77) jest rodziną quasi-wielomianów typu opóźnionego.

Stosując twierdzenie 2.3 sprawdzimy najpierw D -stabilność quasi-wielomianu nominalnego (4.78).

Wyznaczając dla $\omega \in [0, 3]$ wartości funkcji $w_0(f(\omega), \mathbf{h})$, otrzymamy linię krzywą pokazaną na rysunku 4.6, będącą fragmentem hodografu Michajłowa. Rozpoczyna się on na dodatniej półosi rzeczywistej i przebiega w kierunku dodatnim przez 3 ćwiartki płaszczyzny zmiennej zespolonej (dla $\omega > 3$ pozostaje on cały czas w trzeciej ćwiartce płaszczyzny zmiennej zespolonej). Oznacza to, że quasi-wielomian nominalny $w_0(s, \mathbf{h})$ jest D -stabilny, zgodnie z twierdzeniem 2.3.



Rys. 4.6. Położenia zbioru wartości $w(f(\omega), \mathbf{h}, Q)$ oraz hodograf Michajłowa $w_0(f(\omega), \mathbf{h})$

Na rysunku 4.6 są też pokazane położenia równoległoboku $w(f(\omega), \mathbf{h}, Q)$, będącego zbiorem wartości rodziny quasi-wielomianów (4.77). Zostały one wyznaczone dla wartości parametru ω , zmieniających się od 0 do 3 z krokiem 0.2. Dla każdego ustalonego ω krawędzie zbioru wartości $w(f(\omega), \mathbf{h}, Q)$ są odwzorowaniami krawędzi zbioru (4.81).

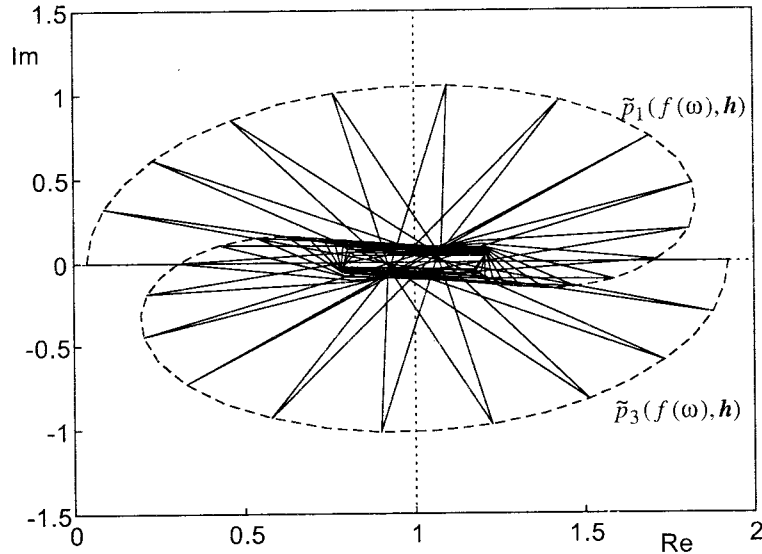
Najbliżej początku płaszczyzny zmiennej zespolonej leży zbiór wartości $w(f(0), \mathbf{h}, Q)$, będący odcinkiem linii prostej, łączącym punkty $(0.3946, j0)$ oraz $(19.5836, j0)$.

Z rysunku 4.6 wynika, że warunek wykluczenia zera (4.71) jest spełniony. Oznacza to, zgodnie z twierdzeniem 4.4, że rozpatrywany quasi-wielomian o niepewnych parametrach jest odpornie D -stabilny.

Położenia na płaszczyźnie zmiennej zespolonej unormowanego zbioru wartości $\tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, Q) = w(f(\omega), \mathbf{h}, Q) / w_0(f(\omega), \mathbf{h})$, wyznaczone dla wartości parametru ω zmieniających się od zera do 4 z krokiem $\Delta\omega = 0.2$, są pokazane na rysunku 4.7. Na tym rysunku są też pokazane przebiegi zmodyfikowanych hodoграфów Michajłowa $\tilde{p}_1(f(\omega), \mathbf{h})$ i $\tilde{p}_3(f(\omega), \mathbf{h})$, $\omega \in [0, 4]$ (linie przerywane), gdzie

$$\tilde{p}_1(s, \mathbf{h}) = w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}_1) / w_0(s, \mathbf{h}), \quad \tilde{p}_3(s, \mathbf{h}) = w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}_3) / w_0(s, \mathbf{h}),$$

przy czym $\mathbf{q}_1 = [0.393, 0.0029]$, $\mathbf{q}_3 = [-0.393, -0.0027]$.



Rys. 4.7. Położenia unormowanego zbioru wartości $\tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, Q)$, $\omega \in [0, 4]$

Unormowany zbiór wartości $\tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, Q)$ dla $\omega > 4$ pozostaje w obszarze ograniczonym krzywymi $\tilde{p}_1(f(\omega), \mathbf{h})$ i $\tilde{p}_3(f(\omega), \mathbf{h})$.

Z rysunku 4.7 wynika, że warunek wykluczenia zera (4.72) jest spełniony (najbliżej początku płaszczyzny zmiennej zespolonej leży punkt $(0.0388, j0)$), co oznacza, że rozpatrywany quasi-wielomian jest odpornie D -stabilny. ■

Przykład 4.5. Weźmy pod uwagę układ automatycznej regulacji temperatury w reaktorze nuklearnym (z regulatorem typu PID), rozpatrywany w przykładach 2.1 i 2.3. Quasi-wielomian charakterystyczny tego układu, typu neutralnego, ma postać

$$w(s, h) = s^2 T T_i + s T_i + k K_r (s^2 T_i T_d + s T_i + 1) e^{-sh}. \quad (4.82)$$

Załóżmy, że $h = 0.5$, natomiast wartości współczynnika wzmocnienia k i stałej czasowej T obiektu regulacji nie są dokładnie znane, przy czym $k \in [0.8, 1.2]$, $T \in [0.16, 0.24]$. Nastawy $K_r = 0.6$, $T_i = 0.38$, $T_d = 0.1$ regulatora PID zostały dobrane według kryterium optymalnego modułu dla wartości nominalnych $k_0 = 1$, $T_0 = 0.2$.

Oznaczmy przez q_1 i q_2 odchyłki niepewnych parametrów k i T , odpowiednio, od ich wartości nominalnych.

Podstawiając dane liczbowe i uwzględniając powyższe oznaczenia, quasi-wielomian charakterystyczny (4.82) o niepewnych współczynnikach napiszemy w postaci rodziny quasi-wielomianów

$$w(s, h, \mathbf{q}) = w_0(s, h) + q_1 w_1(s, h) + q_2 w_2(s, h), \quad \mathbf{q} \in Q, \quad (4.83)$$

gdzie $\mathbf{q} = [q_1, q_2]$, oraz

$$w_0(s, h) = 0.076s^2 + 0.38s + 0.6(0.038s^2 + 0.38s + 1)e^{-sh}, \quad (4.84)$$

$$w_1(s, h) = 0.6(0.038s^2 + 0.38s + 1)e^{-sh}, \quad (4.85)$$

$$w_2(s, h) = 0.38s^2, \quad (4.86)$$

$$Q = \{\mathbf{q}: q_1 \in [-0.2, 0.2], q_2 \in [-0.04, 0.04]\}. \quad (4.87)$$

Warunek (4.57) dla rozpatrywanej rodziny quasi-wielomianów jest spełniony, bowiem $0.076 + q_1 0.0228 + q_2 0.38 > 0$, $\forall \mathbf{q} \in Q$.

Na podstawie bezpośredniego sprawdzenia warunku wykluczenia zera należy zbadać odporną D -stabilność quasi-wielomianu (4.83), gdzie

$$D = \{s: \operatorname{Re} s < -0.5\}. \quad (4.88)$$

Parametryczny opis brzegu obszaru D ma postać $f(\omega) = -0.5 + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$.

Quasi-wielomian nominalny (4.84) rodziny (4.83) jest D -stabilny, co zostało pokazane w przykładzie 2.3.

Rodzina członów dominujących rodziny quasi-wielomianów (4.83) typu neutralnego ma postać

$$\Delta(\exp(-sh), q) = \Delta_0(\exp(-sh)) + q_1 \Delta_1(\exp(-sh)) + q_2 \Delta_2(\exp(-sh)), \quad q \in Q, \quad (4.89)$$

gdzie

$$\Delta_0(\exp(-sh)) = 0.076 + 0.0228e^{-sh}, \quad (4.90)$$

$$\Delta_1(\exp(-sh)) = 0.0228e^{-sh}, \quad (4.91)$$

$$\Delta_2(\exp(-sh)) = 0.38, \quad (4.92)$$

natomiast zbiór Q ma postać (4.87).

Sprawdzimy najpierw odporną D -stabilność rodziny członów dominujących (4.89), będącą warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.83) typu neutralnego.

Dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega = [0, \infty)$ zbiór wartości $\Delta(\exp(-f(\omega)h), Q)$ rodziny członów dominujących (4.89) jest równoległobokiem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Jego położenia, wyznaczone w funkcji parametru ω zmieniającego się od 0 do 4π z krokiem $4\pi/30$, są pokazane na rysunku 4.8. Na tym rysunku pokazano też wykres funkcji $\Delta_0(\exp(-f(\omega)h))$, gdzie $\Delta_0(\exp(-sh))$ ma postać (4.90), wyznaczony dla $\omega \in [0, 4\pi]$. Jest on krzywą zamkniętą, która nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej. Oznacza to, zgodnie z twierdzeniem 2.5, że nominalny człon dominujący jest D -stabilny.

Z rysunku 4.8 i twierdzenia 4.5 wynika, że rodzina członów dominujących (4.89) jest odpornie D -stabilna. Warunek konieczny odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.83) jest więc spełniony.

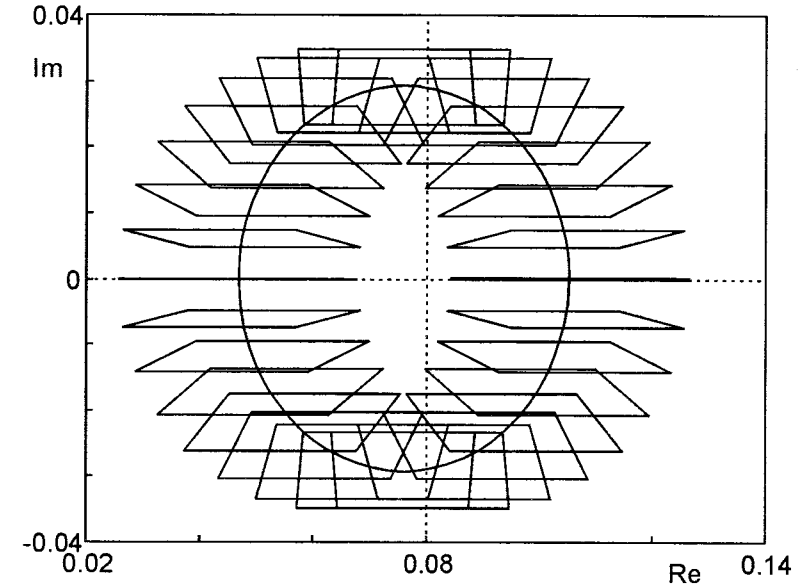
Dla rodziny członów dominujących (4.89) nierówność (4.6) ma postać

$$\min_{q \in Q} \{0.076 + 0.38q_2 - |0.0228(1 + q_1)|e^{0.25}\} = 0.0257 > 0.$$

Ponieważ jest ona spełniona, potwierdza to odporną D -stabilność rodziny (4.89).

Z powyższej nierówności oraz z rysunku 4.8 wynika, że dla każdego $\omega \geq 0$ zbiór wartości $\Delta(\exp(-f(\omega)h), Q)$ rodziny członów dominujących (4.89) leży

w prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej w odległości od osi urojonej nie mniejszej niż 0.0257.

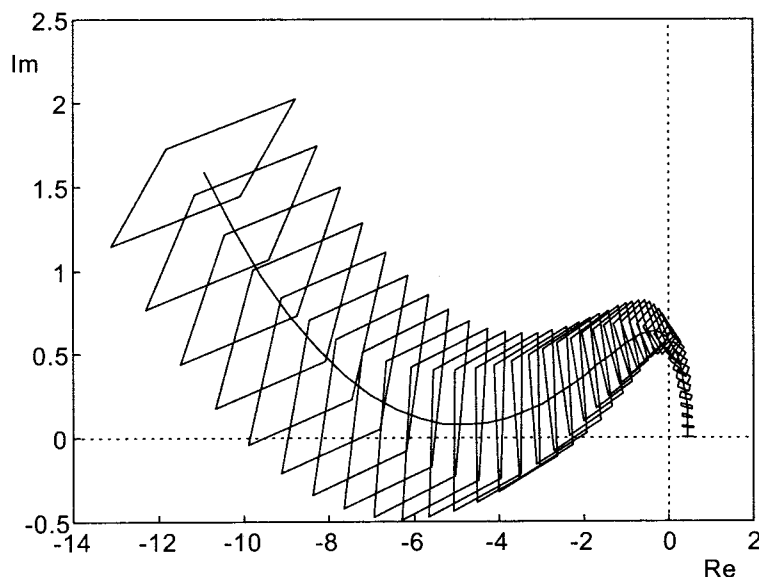


Rys. 4.8. Położenia zbioru wartości rodziny członów dominujących (4.89)

Sprawdzimy teraz spełnienie warunku wykluczenia zera (4.71) dla rodziny quasi-wielomianów (4.83).

Na rysunku 4.9 są pokazane położenia na płaszczyźnie zmiennej zespolonej zbioru wartości $w(f(\omega), h, Q)$, będącego równoległobokiem. Zostały one wyznaczone dla wartości parametru ω zmieniających się od 0 do 10 z krokiem 0.25. Na tym rysunku jest też pokazany fragment hodografu Michajłowa quasi-wielomianu nominalnego (wykresu funkcji $w_0(f(\omega), h)$), wyznaczony dla $\omega \in [0, 10]$. Hodograf Michajłowa rozpoczyna się na dodatniej półosi rzeczywistej i przy $\omega \rightarrow \infty$ oscylując wokół ujemnej półosi rzeczywistej oddala się od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej. Potwierdza to, zgodnie z twierdzeniem 2.6, D -stabilność quasi-wielomianu nominalnego $w_0(s, h)$.

Z rysunku 4.9 i powyższych rozważań wynika, że warunek wykluczenia zera (4.71) jest spełniony. Oznacza to, zgodnie z twierdzeniem 4.4, że rozpatrywany quasi-wielomian jest odpornie D -stabilny. ■



Rys. 4.9. Położenia zbioru wartości rodziny quasi-wielomianów (4.83)

Zastosowana w przykładach 4.4 i 4.5 metoda bezpośredniego sprawdzania warunków wykluczenia zera (4.71), (4.72) i (4.73) jest trudna w stosowaniu przy dużej liczbie niepewnych parametrów oraz w przypadku, gdy dla niektórych $\omega \in \Omega$ odpowiedni zbiór wartości leży na płaszczyźnie zmiennej zespolonej bardzo blisko początku układu współrzędnych. Z tego powodu stosuje się inne metody, służące do pośredniego sprawdzania tych warunków wykluczenia zera. Należy do nich metoda wykorzystująca tzw. twierdzenie krawędziowe oraz metody funkcji testujących.

4.3.3. Twierdzenie krawędziowe

Twierdzenie krawędziowe służy do badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów lub rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów. Zostało ono sformułowane w pracy [15] dla rodziny wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów w przypadku, gdy D jest jednym jednospójnym otwartym obszarem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej i uogólnione w [87] dla obszaru D , będącego

sumą skończonej liczby takich rozłącznych podobszarów. Twierdzenie krawędziowe jest cytowane w monografiach [8, 18, 52, 163].

W pracach [88] i [89] twierdzenie krawędziowe zostało uogólnione na klasę rodzin quasi-wielomianów (typu opóźnionego i neutralnego) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów.

Poniżej podamy dowód twierdzenia krawędziowego dla przypadku, gdy D jest jednospójnym nieograniczonym otwartym obszarem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, spełniającym założenia podane w punkcie 3.2.3. Przypadkiem szczególnym takiego obszaru jest przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, $\gamma > 0$. W dowodzie wykorzystamy rezultaty pracy [52], w której rozpatrywano problem badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów.

Twierdzenie 4.6 (twierdzenie krawędziowe). Rodzina quasi-wielomianów (4.55) typu opóźnionego lub neutralnego o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy są odporne D -stabilne wszystkie quasi-wielomiany krawędziowe (4.66), odpowiadające poszczególnym krawędziom (4.65) zbioru Q .

Dowód. Quasi-wielomiany krawędziowe należą do rodziny (4.55). Ich odporna D -stabilność jest więc warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności tej rodziny.

Warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności rodziny (4.55) jest też D -stabilność quasi-wielomianów wierzchołkowych (4.62). Nie zmniejszając ogólności rozważań założmy, że są one D -stabilne.

Weźmy pod uwagę quasi-wielomian krawędziowy (4.66). Zgodnie z rozważaniami podanymi w punkcie 4.2, dla dowolnego ustalonego $\omega \in \Omega$ odpowiadający mu zbiór wartości $p_{rk}(f(\omega), \mathbf{h}, \Lambda)$ jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej odcinkiem linii prostej łączącej punkty $p_r(f(\omega), \mathbf{h})$ i $p_k(f(\omega), \mathbf{h})$.

Dla dowodu warunku dostatecznego należy wykazać, że rodzina (4.55) jest odpornie D -stabilna, jeżeli warunek wykluczenia zera

$$0 \notin p_{rk}(f(\omega), \mathbf{h}, \Lambda), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.93)$$

jest spełniony dla wszystkich quasi-wielomianów krawędziowych (4.66), odpowiadających poszczególnym krawędziom (4.65) zbioru Q . Dowód przeprowadzimy nie wprost.

Założmy, że rodzina (4.55) nie jest odpornie D -stabilna, tzn. warunek wykluczenia zera (4.71) nie jest spełniony. Oznacza to, że istnieje $\omega_0 \in \Omega$, dla którego

$0 \in w(f(\omega_0), \mathbf{h}, Q)$, gdzie $w(f(\omega), \mathbf{h}, Q)$ jest zbiorem wartości (wypukłym wielobokiem) tej rodziny.

Ponieważ obszar D jest nieograniczony (z założenia), zawsze istnieje odpowiednio duża wartość parametru $\omega = \omega_1 \in \Omega$, dla której warunek wykluczenia zera $0 \notin w(f(\omega_1), \mathbf{h}, Q)$ jest spełniony. Nie zmniejszając ogólności rozważań założymy, że $\omega_1 > \omega_0$. Przy ciągłych zmianach wartości parametru $\omega \in \Omega$ zbiór wartości $w(f(\omega), \mathbf{h}, Q)$ przemieszcza się na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w sposób ciągły. Istnieje więc taka wartość $\omega^* \in (\omega_0, \omega_1)$, dla której jedna z krawędzi zbioru wartości $w(f(\omega^*), \mathbf{h}, Q)$ przechodzi przez początek układu współrzędnych. Ta krawędź jest zbiorem wartości jednego z quasi-wielomianów krawędziowych (4.66). Oznacza to, że istnieje takie $\lambda^* \in [0, 1]$, dla którego $p_{rk}(f(\omega^*), \mathbf{h}, \lambda^*) = 0$, czyli warunek wykluczenia zera (4.93) nie jest spełniony dla $\omega = \omega^*$. Z twierdzenia 4.1 wynika zatem, że wtedy jeden z quasi-wielomianów krawędziowych (4.66) nie jest odpornie D -stabilny.

Odporna D -stabilność wszystkich quasi-wielomianów krawędziowych (4.66) jest więc warunkiem wystarczającym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.55). ■

Twierdzenie krawędziowe 4.6 jest też prawdziwe w przypadku, gdy D jest sumą skończonej liczby otwartych rozłącznych podobszarów D_i ($i = 1, 2, \dots, N$), spełniającym założenia podane w punkcie 3.2.3. W takim przypadku dowód twierdzenia 4.6 można przeprowadzić w sposób podobny do podanego w pracy [52] dla rodziny wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów.

Twierdzenie krawędziowe 4.6 sprowadza problem badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów do problemu badania odpornej D -stabilności skończonej liczby quasi-wielomianów krawędziowych, odpowiadających poszczególnym krawędziom zbioru Q , których jest $L = l2^{l-1}$.

Do badania odpornej D -stabilności quasi-wielomianów krawędziowych można stosować metody podane w punkcie 4.2. W szczególności, z twierdzenia 4.6 i lematu 4.1 wynika poniższy lemat.

Lemat 4.3. Rodzina quasi-wielomianów (4.55) typu opóźnionego lub neutralnego o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione dwa poniższe warunki:

- 1) wszystkie quasi-wielomiany wierzchołkowe $p_k(s, \mathbf{h})$, $k = 1, 2, \dots, K$, są D -stabilne,
- 2) każdy z $L = l2^{l-1}$ wykresów funkcji

$$\vartheta_{kr}(\omega) = p_k(f(\omega), \mathbf{h}) / p_r(f(\omega), \mathbf{h}), \quad \omega \in \Omega, \quad (4.94)$$

sporządzonych oddzielnie dla każdego quasi-wielomianu krawędziowego (4.66), nie przecina niedodatniej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$. ■

Oznaczmy przez

$$p_{rk}^\Delta(\exp(-sh), \lambda) = (1 - \lambda)p_r^\Delta(\exp(-sh)) + \lambda p_k^\Delta(\exp(-sh)), \quad (4.95)$$

gdzie $\lambda \in \Lambda = [0, 1]$, $r, k = 1, 2, \dots, K$, $r < k$, krawędziowe człony dominujące rodziny (4.55).

Postępując w sposób podobny do zastosowanego w dowodzie twierdzenia 4.6 można udowodnić poniższe twierdzenie, które będziemy nazywać twierdzeniem krawędziowym dla rodziny członów dominujących (4.58). Odporna D -stabilność tej rodziny jest warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.55) typu neutralnego przy obszarze D , będącym otwartą lewą półpłaszczyzną.

Twierdzenie 4.7. Rodzina członów dominujących (4.58) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie D -stabilne wszystkie krawędziowe człony dominujące (4.95), odpowiadające poszczególnym krawędziom (4.65) zbioru Q . ■

Z twierdzenia 4.7 i lematu 4.2 wynika poniższy lemat.

Lemat 4.4. Rodzina członów dominujących (4.58) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione dwa poniższe warunki:

- 1) wszystkie wierzchołkowe człony dominujące (4.70) są D -stabilne,
- 2) każdy z $L = l2^{l-1}$ wykresów funkcji

$$\vartheta_{kr}^\Delta(\omega) = p_k^\Delta(\exp(-f(\omega)\mathbf{h})) / p_r^\Delta(\exp(-f(\omega)\mathbf{h})), \quad \omega \in \Omega, \quad (4.96)$$

sporządzonych oddzielnie dla każdego krawędziowego członu dominującego (4.95), nie przecina niedodatniej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$. ■

Do wyznaczania quasi-wielomianów wierzchołkowych i krawędziowych, a także wierzchołkowych członów dominujących i krawędziowych członów do-

minujących można stosować komputerową metodę podobną do podanej w [50] dla rodziny wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów.

Przykład 4.6. Należy zbadać odporną D -stabilność rodziny quasi-wielomianów (4.83), rozpatrywanej w przykładzie 4.5.

Na płaszczyźnie niepewnych parametrów zbiór Q , zdefiniowany wzorem (4.87), jest prostokątem o wierzchołkach $q_1 = [0.2, 0.04]$, $q_2 = [-0.2, 0.04]$, $q_3 = [-0.2, -0.04]$, $q_4 = [0.2, -0.04]$. Odpowiadają im quasi-wielomiany wierzchołkowe

$$p_k(s, h) = w(s, h, q_k), \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (4.97)$$

Quasi-wielomianami krawędziowymi $p_{rk}(s, h, \lambda)$ są quasi-wielomiany mające postać (4.66) dla $(r, k) = (1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 4)$. Zgodnie z twierdzeniem krawędziowym 4.6, odporna D -stabilność wszystkich czterech wyżej wymienionych quasi-wielomianów krawędziowych jest warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.83). Są one odporne D -stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki 1) i 2) lematu 4.3.

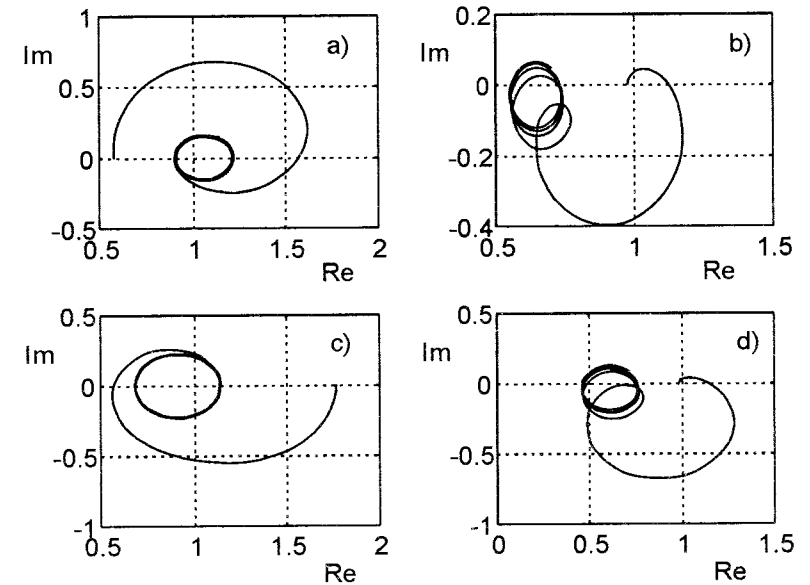
Łatwo sprawdzić, że quasi-wielomian wierzchołkowy $p_1(s, h)$ jest D -stabilny.

Wyznaczając przebiegi funkcji (4.94) (przy $f(\omega) = -0.5 + j\omega$) kolejno dla $(r, k) = (1, 2), (2, 3), (3, 4)$ i $(4, 1)$, otrzymamy odpowiednio wykresy a), b), c) i d), pokazane na rysunku 4.10. Zostały one wyznaczone dla wartości parametru ω zmieniających się od 0 do 60 ze zmiennym krokiem. Każdy z tych wykresów przy dużych wartościach parametru ω nawija się na wykres odpowiedniego wykresu funkcji (4.96).

Ponieważ wyznaczone wykresy nie przecinają niedodatniej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$, warunki lematu 4.3 są spełnione. Oznacza to, że rodzina quasi-wielomianów (4.83) jest odporne D -stabilna, bowiem są odporne D -stabilne cztery quasi-wielomiany krawędziowe, stowarzyszone z tą rodziną quasi-wielomianów.

Zauważmy, że badając odporną D -stabilność poszczególnych quasi-wielomianów krawędziowych w podanej powyżej kolejności nie musimy oddzielnie badać D -stabilności wszystkich quasi-wielomianów wierzchołkowych, co zostało zauważone w pracach [88, 89]. Wynika to stąd, że jeżeli quasi-wielomian wierzchołkowy $p_1(s, h)$ jest D -stabilny i wykres funkcji (4.94) dla $(r, k) = (1, 2)$ nie przecina ujemnej półosi rzeczywistej, to quasi-wielomian krawędziowy $p_{12}(s, h, \lambda)$ jest odporne D -stabilny. Wtedy jest też D -stabilny quasi-wielomian wierzchołkowy

$p_2(s, h)$. Badając z kolei odporną D -stabilność quasi-wielomianu krawędziowego $p_{23}(s, h, \lambda)$, nie musimy już sprawdzać D -stabilności quasi-wielomianu $p_2(s, h)$. ■



Rys. 4.10. Wykresy funkcji (4.94) do przykładu 4.6

Praktyczne stosowanie twierdzenia krawędziowego jest dosyć kłopotliwe ze względu na konieczność badania odpornej D -stabilności wszystkich quasi-wielomianów krawędziowych, mających postać (4.66), których jest $L = l2^{l-1}$, gdzie l jest liczbą niepewnych parametrów. Na przykład przy $l = 8$ mamy $L = 1024$.

Powyższej niedogodności można uniknąć stosując metody funkcji testujących.

4.3.4. Metody funkcji testujących

Metody funkcji testujących, bazując na twierdzeniu krawędziowym 4.6, służą do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.55) o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów. Pozwalają one na jednoczesne badanie odpornej D -stabilności wszystkich quasi-wielomianów krawędziowych (4.66). Pierwszą taką metodę zaproponowano w pracy [7] dla rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów,

uogólniając ją w [12] na klasę quasi-wielomianów. Jest to metoda dosyć złożona obliczeniowo i trudna w stosowaniu.

Prostsze metody funkcji testujących, służące do badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów, zostały podane w pracach [31, 33, 35]. Są one opisane w monografii [52]. W pracach [36, 42] te metody zostały uogólnione na klasę rodzin quasi-wielomianów typu opóźnionego o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów.

Weźmy pod uwagę obszar D , będący przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną, którego brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$. Z obszarem D jest stowarzyszony zbiór wartości

$$w(f(\omega), \mathbf{h}, \mathcal{Q}) = \text{conv}\{p_1(f(\omega), \mathbf{h}), \dots, p_K(f(\omega), \mathbf{h})\}, \quad (4.98)$$

rodziny quasi-wielomianów (4.55), będący dla każdego ustalonego ω wypukłym wielobokiem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

4.3.4.1. Metoda funkcji testującej $d(\omega)$

Niech $\Pi(\omega)$ będzie dla dowolnego ustalonego $\omega \in \Omega$ najmniejszym prostokątem, o bokach równoległych do osi układu współrzędnych płaszczyzny zmiennej zespolonej, w którym leży zbiór wartości (4.98).

Oznaczmy przez

$$\begin{aligned} (U^+(\omega), V^+(\omega)), \quad (U^-(\omega), V^+(\omega)), \\ (U^-(\omega), V^-(\omega)), \quad (U^+(\omega), V^-(\omega)), \end{aligned} \quad (4.99)$$

współrzędne wierzchołków prostokąta $\Pi(\omega)$.

Wprowadźmy funkcje testujące $d(\omega)$ i $\tilde{d}(\omega)$, zdefiniowane dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ wzorami

$$d(\omega) = \max\{U^-(\omega), -U^+(\omega), V^-(\omega), -V^+(\omega)\}, \quad (4.100)$$

$$\tilde{d}(\omega) = d(\omega) / |w_0(f(\omega), \mathbf{h})|, \quad (4.101)$$

gdzie $w_0(s, \mathbf{h})$ jest D -stabilnym quasi-wielomianem nominalnym rodziny (4.55).

Funkcję (4.101) będziemy nazywać unormowaną funkcją testującą.

Twierdzenie 4.8. Niech quasi-wielomian nominalny $w_0(s, \mathbf{h})$ będzie D -stabilny. Rodzina quasi-wielomianów (4.55) typu opóźnionego lub neutralnego o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna, jeżeli

$$d(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.102)$$

lub równoważnie, jeżeli

$$\tilde{d}(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (4.103)$$

Dowód. Jeżeli warunek (4.102) jest spełniony, to dla każdego $\omega \in \Omega$ prostokąt $\Pi(\omega)$ nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej. Ponieważ zbiór wartości (4.98) zawsze leży wewnątrz tego prostokąta, powyższe zachodzi też dla tego zbioru wartości. Oznacza to, że jeżeli jest spełniony warunek (4.102), to jest też spełniony warunek wykluczenia zera (4.71).

Warunek (4.103) wynika bezpośrednio z warunku (4.102) i wzoru (4.101) przy uwzględnieniu faktu, że jeżeli quasi-wielomian nominalny $w_0(s, \mathbf{h})$ jest D -stabilny, to $w_0(f(\omega), \mathbf{h}) \neq 0$ dla każdego $\omega \in \Omega$. ■

Zauważmy, że funkcja testująca (4.100) szybko dąży do nieskończoności przy ω dążącym do nieskończoności, natomiast wartości funkcji testującej (4.101) są zawsze ograniczone.

Jeżeli warunek (4.102) nie jest spełniony, to o odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.55) nic nie można powiedzieć, bowiem z tego, że prostokąt $\Pi(\omega)$ obejmuje początek płaszczyzny zmiennej zespolonej, nie wynika, że to samo zachodzi dla wieloboku (4.98).

Praktyczne stosowanie twierdzenia 4.8 wymaga wyznaczania współrzędnych (4.99) wierzchołków prostokąta $\Pi(\omega)$ dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$. Aby je wyznaczyć, należy obliczyć najmniejsze i największe wartości części rzeczywistej oraz części urojonej funkcji $w(f(\omega), \mathbf{h}, \mathbf{q})$ ze względu na $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$.

Zapis quasi-wielomianu o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów w postaci (4.53) przy zbiorze $\mathcal{Q}$ mającym postać (4.56), tzn. przyjęcie, że współczynniki tego quasi-wielomianu zależą nie od wartości niepewnych parametrów, a od wartości odchyłek tych parametrów od ich wartości nominalnych, pozwala na podanie prostej obliczeniowej metody wyznaczania współrzędnych wierzchołków prostokąta $\Pi(\omega)$ ([36]).

Wprowadźmy oznaczenia

$$u_k(\omega) = \text{Re } w_k(f(\omega), \mathbf{h}), \quad v_k(\omega) = \text{Im } w_k(f(\omega), \mathbf{h}), \quad k = 0, 1, \dots, l, \quad (4.104)$$

gdzie quasi-wielomiany $w_k(s, \mathbf{h})$, $k = 0, 1, \dots, l$, występujące we wzorze (4.53), mają postać (4.54).

Z powyższych rozważań i ze wzoru (4.53) wynika, że dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ współrzędne wierzchołków prostokąta $\Pi(\omega)$ można wyznaczyć ze wzorów

$$U^-(\omega) = u_0(\omega) + \sum_{k=1}^l u_k^-(\omega), \quad U^+(\omega) = u_0(\omega) + \sum_{k=1}^l u_k^+(\omega), \quad (4.105)$$

$$V^-(\omega) = v_0(\omega) + \sum_{k=1}^l v_k^-(\omega), \quad V^+(\omega) = v_0(\omega) + \sum_{k=1}^l v_k^+(\omega), \quad (4.106)$$

gdzie

$$\text{jeżeli } u_k(\omega) \geq 0, \text{ to } u_k^-(\omega) = b_k u_k(\omega), \quad u_k^+(\omega) = c_k u_k(\omega), \quad (4.107)$$

$$\text{jeżeli } u_k(\omega) < 0, \text{ to } u_k^-(\omega) = c_k u_k(\omega), \quad u_k^+(\omega) = b_k u_k(\omega), \quad (4.108)$$

$$\text{jeżeli } v_k(\omega) \geq 0, \text{ to } v_k^-(\omega) = b_k v_k(\omega), \quad v_k^+(\omega) = c_k v_k(\omega), \quad (4.109)$$

$$\text{jeżeli } v_k(\omega) < 0, \text{ to } v_k^-(\omega) = c_k v_k(\omega), \quad v_k^+(\omega) = b_k v_k(\omega). \quad (4.110)$$

Korzystając z powyższych wzorów i (4.100) można w prosty sposób wyznaczyć funkcję testującą $d(\omega)$. Zauważmy, że jest tu wymagana znajomość tylko $l+1$ quasi-wielomianów (4.54). Znajomość quasi-wielomianów wierzchołkowych (4.62), których jest $K = 2^l$, nie jest konieczna.

Metoda funkcji testującej $d(\omega)$ została w pracy [36] zastosowana do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.77), rozpatrywanej w przykładzie 4.4.

4.3.4.2. Metoda funkcji testującej $T(\omega)$

Weźmy pod uwagę unormowany zbiór wartości rodziny (4.55), zdefiniowany wzorem (4.68) przy $z = f(\omega)$, mający postać

$$\tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, Q) = \text{conv}\{\tilde{p}_1(f(\omega), \mathbf{h}), \dots, \tilde{p}_K(f(\omega), \mathbf{h})\}, \quad (4.111)$$

gdzie

$$\tilde{p}_k(f(\omega), \mathbf{h}) = p_k(f(\omega), \mathbf{h}) / w_0(f(\omega), \mathbf{h}), \quad k = 1, 2, \dots, K = 2^l, \quad (4.112)$$

zaś $w_0(s, \mathbf{h})$ jest D -stabilnym quasi-wielomianem nominalnym.

Z twierdzenia 4.4 wynika, że każdy quasi-wielomian należący do rodziny (4.55) jest D -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\omega \in \Omega$ początek płaszczyzny zmiennej zespolonej leży na zewnątrz wypukłego wieloboku (4.111).

Wprowadźmy funkcję testującą $B(\omega)$ stowarzyszoną z obszarem D , którą dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ oblicza się ze wzoru [42]

$$B(\omega) = \min\{\text{Re } \tilde{p}_k(f(\omega), \mathbf{h}), k = 1, 2, \dots, K\}, \quad (4.113)$$

gdzie $\tilde{p}_k(f(\omega), \mathbf{h})$ wyznacza się ze wzoru (4.112).

Zauważmy, że

$$B(\omega) = \min\{\text{Re } \tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, \mathbf{q}), \mathbf{q} \in Q\}, \quad (4.114)$$

gdzie, zgodnie ze wzorem (4.53),

$$\tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, \mathbf{q}) = 1 + q_1 \tilde{w}_1(f(\omega), \mathbf{h}) + \dots + q_l \tilde{w}_l(f(\omega), \mathbf{h}), \quad (4.115)$$

przy czym

$$\tilde{w}_k(s, \mathbf{h}) = w_k(s, \mathbf{h}) / w_0(s, \mathbf{h}), \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (4.116)$$

Ze wzoru (4.115) wynika, że unormowany zbiór wartości (4.111) zawsze zawiera w swoim wnętrzu punkt $(1, j0)$, a więc leży on częściowo lub całkowicie w otwartej prawej półpłaszczyźnie. Zauważmy, że jeżeli dla każdego $\omega \in \Omega$ leży on całkowicie w otwartej prawej półpłaszczyźnie, to jest spełniony warunek wykluczenia zera (4.72).

Lemat 4.5. Niech quasi-wielomian nominalny $w_0(s, \mathbf{h})$ będzie D -stabilny. Rodzina quasi-wielomianów (4.55) typu opóźnionego lub neutralnego o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna, jeżeli jest spełniony warunek

$$B(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.117)$$

gdzie funkcja testująca $B(\omega)$ jest zdefiniowana wzorem (4.113) (lub (4.114)).

Dowód. Dowód wynika z powyższych rozważań i twierdzenia 4.4. ■

Założmy, że dla ustalonego $\omega \in \Omega$ wartość minimalna (4.114) została osiągnięta dla $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}$, tj. $B(\omega) = \operatorname{Re} \tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, \hat{\mathbf{q}})$, i wprowadźmy oznaczenie

$$C(\omega) = \operatorname{Im} \tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, \hat{\mathbf{q}}). \quad (4.118)$$

Wprowadźmy zespoloną funkcję testującą

$$T(\omega) = B(\omega) + jC(\omega), \quad (4.119)$$

stowarzyszoną z obszarem D , gdzie $B(\omega)$ i $C(\omega)$ są zdefiniowane wzorami (4.114) i (4.118), odpowiednio.

Ze wzorów (4.112), (4.113) i (4.119) wynika, że wykres zespolonej funkcji testującej $T(\omega)$ tworzy się w ten sposób, że dla każdego ustalonego ω ze zbioru punktów $\tilde{p}_k(f(\omega), \mathbf{h})$, $k = 1, 2, \dots, K$, wybiera się punkt o najmniejszej części rzeczywistej. Wykres funkcji $T(\omega)$ składa się więc z fragmentów wykresów funkcji (4.112). Jest on kawałkami ciągły i gładki. Mogą w nim wystąpić przeskoki od wartości $\tilde{p}_k(f(\omega), \mathbf{h})$ do wartości $\tilde{p}_r(f(\omega), \mathbf{h})$, $k \neq r$.

Dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ wartość funkcji testującej $T(\omega)$ można wyznaczyć w drodze minimalizacji części rzeczywistej funkcji (4.115) ze względu na $\mathbf{q} \in Q$. Można to przeprowadzić w prosty sposób, uwzględniając postać (4.56) zbioru Q oraz liniową zależność współczynników quasi-wielomianu (4.53) od składowych wektora $\mathbf{q}$.

Dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ wartość funkcji testującej $T(\omega)$ wyznacza się na podstawie wzoru [42]

$$T(\omega) = 1 + t_1(\omega) + \dots + t_l(\omega), \quad (4.120)$$

gdzie (dla $k = 1, 2, \dots, l$)

$$t_k(\omega) = b_k \tilde{w}_k(f(\omega), \mathbf{h}), \quad \text{jeżeli} \quad \operatorname{Re} \tilde{w}_k(f(\omega), \mathbf{h}) \geq 0, \quad (4.121)$$

$$t_k(\omega) = c_k \tilde{w}_k(f(\omega), \mathbf{h}), \quad \text{jeżeli} \quad \operatorname{Re} \tilde{w}_k(f(\omega), \mathbf{h}) < 0. \quad (4.122)$$

Wyznaczanie funkcji testującej $T(\omega)$ na podstawie powyższych wzorów wymaga znajomości tylko $(l+1)$ quasi-wielomianów $w_k(s, \mathbf{h})$, $k = 0, 1, \dots, l$, mających postać (4.54), występujących we wzorze (4.53). Znajomość quasi-wielomianów wierzchołkowych $p_k(s, \mathbf{h})$, $k = 1, 2, \dots, K$, nie jest konieczna.

Twierdzenie 4.9. Niech quasi-wielomian nominalny $w_0(s, \mathbf{h})$ będzie D -stabilny.

1) Jeżeli

$$B(\omega) = \operatorname{Re} T(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.123)$$

to rodzina quasi-wielomianów (4.55) typu opóźnionego lub neutralnego o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna.

2) Jeżeli wykres funkcji $T(\omega)$ ma ciągły kawałek, który przecina niedodatnią część osi rzeczywistej, to rodzina (4.55) przy zbiorze Q mającym postać (4.56) nie jest odpornie D -stabilna.

3) Największy zbiór dopuszczalnych odchyłek niepewnych parametrów, przy którym jest spełniony warunek (4.123), ma postać

$$\hat{Q} = \{\mathbf{q}: q_k \in (\delta b_k, \delta c_k), \quad b_k \leq 0, \quad c_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, l\}, \quad (4.124)$$

gdzie

$$\delta = 1 / (1 - \alpha), \quad (4.125)$$

$$\alpha = \min\{B(\omega) = \operatorname{Re} T(\omega): \omega \in \Omega\}, \quad (4.126)$$

przy czym minimum oblicza się dla funkcji testującej $T(\omega)$, wyznaczonej ze wzorów (4.120)–(4.122) przy zbiorze Q mającym postać (4.56).

Dowód. Dowód warunku dostatecznego (4.123) wynika bezpośrednio z lematu 4.5.

Jeżeli wykres funkcji $T(\omega)$ ma ciągły kawałek, który przecina niedodatnią część osi rzeczywistej, to ze wzorów (4.119), (4.112) i (4.113) oraz z lematu 4.1 wynika, że nie jest odpornie D -stabilny quasi-wielomian

$$p_{0,k}(s, \mathbf{h}, \lambda) = (1 - \lambda)w_0(s, \mathbf{h}) + \lambda p_k(s, \mathbf{h}), \quad \lambda \in [0, 1], \quad (4.127)$$

gdzie $w_0(s, \mathbf{h})$ jest D -stabilnym quasi-wielomianem nominalnym, zaś $p_k(s, \mathbf{h})$ jest jednym z quasi-wielomianów wierzchołkowych. Ponieważ quasi-wielomian (4.127) należy do rodziny (4.55), nie jest ona odpornie D -stabilna, co kończy dowód warunku 2).

Dowód warunku 3). Ze wzorów (4.120)–(4.122) wynika, że wzór (4.126) można napisać w postaci $\alpha = 1 + g$, gdzie

$$g = \sum_{k=1}^l \min_{\omega \in \Omega} \operatorname{Re} t_k(\omega). \quad (4.128)$$

Łatwo zauważyć, że $g \leq 0$, a więc $\alpha \leq 1$. Oznacza to, że liczba δ obliczona ze wzoru (4.125) jest zawsze dodatnia, przy czym: jeżeli $\alpha < 0$ to $\delta \in (0, 1)$, jeżeli $\alpha = 0$ to $\delta = 1$, jeżeli zaś $0 < \alpha \leq 1$ to $\delta > 1$.

Jeżeli zamiast zbioru (4.56) weźmiemy pod uwagę zbiór

$$\tilde{Q} = \{q: q_k \in [\delta b_k, \delta c_k], b_k \leq 0, c_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, l\}, \quad (4.129)$$

to $\tilde{\alpha} = 1 + \delta g$, gdzie $\tilde{\alpha}$ oblicza się ze wzoru (4.126) dla zbioru (4.129), zaś g wyznacza się ze wzoru (4.128) dla zbioru (4.56).

Łatwo zauważyć, że $\tilde{\alpha} = 0$ dla zbioru (4.129), zaś $\tilde{\alpha} > 0$ dla zbioru (4.124). Zbiór (4.124) jest więc największym zbiorem wartości odchyłek niepewnych parametrów od ich wartości nominalnych, dla którego warunek (4.123) jest spełniony. ■

Stosując metodę funkcji testującej $T(\omega)$ zawsze znajdziemy (w sposób podany w twierdzeniu 4.9) największy zbiór odchyłek niepewnych parametrów, mający postać (4.124), dla którego warunek dostateczny (4.123) będzie spełniony.

Metoda funkcji testującej $T(\omega)$ została zastosowana w pracy [42] do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.77), rozpatrywanej w przykładzie 4.4.

Metoda funkcji testującej $T(\omega)$, podobnie jak i metoda funkcji testującej $d(\omega)$ (i też $\tilde{d}(\omega)$), bazuje głównie na warunku dostatecznym odpornej D -stabilności. Są to metody bardzo proste w stosowaniu (szczególnie metoda funkcji testującej $T(\omega)$). Jeżeli jednakże na podstawie tych metod nie uzyskamy zadowalającego wyniku, należy skorzystać z metody bazującej na warunku koniecznym i wystarczającym odpornej D -stabilności. Taką metodą jest metoda funkcji testującej $F(\omega)$.

4.3.4.3. Metoda funkcji testującej $F(\omega)$

Metoda funkcji testującej $F(\omega)$, podobnie jak i metoda funkcji testującej $T(\omega)$, została podana w pracy [42] dla rodziny quasi-wielomianów typu opóźnionego o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów. Podobne metody dla rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów są podane w pracach [8] i [18] oraz w [63].

Metoda funkcji testującej $F(\omega)$ służy do pośredniego sprawdzenia, czy dla każdego $\omega \in \Omega$ początek płaszczyzny zmiennej zespolonej leży na zewnątrz wypukłego wieloboku (4.111).

Twierdzenie 4.10. Niech quasi-wielomian nominalny $w_0(s, \mathbf{h})$ będzie D -stabilny. Rodzina quasi-wielomianów (4.55) typu opóźnionego lub neutralnego o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$F(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega, \quad (4.130)$$

gdzie $F(\omega)$ jest funkcją testującą mającą postać

$$F(\omega) = \pi - \phi(\omega), \quad (4.131)$$

$$\phi(\omega) = \max_{r,k} \{|\arg \tilde{p}_r(f(\omega), \mathbf{h}) - \arg \tilde{p}_k(f(\omega), \mathbf{h})|\}, \quad (4.132)$$

gdzie $\tilde{p}_k(f(\omega), \mathbf{h})$ jest zdefiniowane wzorem (4.112); maksimum liczy się uwzględniając wszystkie quasi-wielomiany krawędziowe (4.66), odpowiadające poszczególnym krawędziom (4.65) zbioru Q , zaś $\arg z \in [-\pi, \pi]$ jest głównym argumentem liczby zespolonej z .

Dowód. Dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej krawędziami zbioru wartości (4.111) są odcinki linii prostych, które łączą punkty $\tilde{p}_r(f(\omega), \mathbf{h})$ i $\tilde{p}_k(f(\omega), \mathbf{h})$, $r \neq k$. Ponieważ quasi-wielomian nominalny $w_0(s, \mathbf{h})$ jest D -stabilny, rodzina (4.55) jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z tych odcinków nie przecina półosi $(-\infty, 0]$, zgodnie z twierdzeniem 4.4. Z rozważań podanych w punkcie 4.2 wynika zatem, że powyższe zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi - \phi_{rk}(\omega) > 0$ dla każdego quasi-wielomianu krawędziowego (4.66), gdzie

$$\phi_{rk}(\omega) = |\arg \tilde{p}_r(f(\omega), \mathbf{h}) - \arg \tilde{p}_k(f(\omega), \mathbf{h})|. \quad (4.133)$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę jednocześnie wszystkie quasi-wielomiany krawędziowe, to otrzymamy warunek (4.130). ■

Stosowanie twierdzenia 4.10 wymaga znajomości wszystkich quasi-wielomianów krawędziowych, odpowiadających poszczególnym krawędziom zbioru Q .

Stosując twierdzenie 4.10 możemy wyznaczyć w sposób iteracyjny zadaną dokładnością największą liczbę dodatnią δ , dla której warunek konieczny i wy-

starczający (4.130) jest spełniony dla zbioru wartości niepewnych parametrów mającego postać (4.124). Może to jednak okazać się czasami zadaniem bardzo trudnym z tego powodu, że wartość funkcji testującej $F(\omega)$ nie daje informacji o odległości zbioru wartości (4.111) od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej. Ponadto, jej wartości zmieniają się skokowo przy obejmowaniu początku tej płaszczyzny przez zbiór wartości (4.111). Wymienione problemy ilustruje przykład 4.7.

4.3.4.4. Metody funkcji testujących dla rodziny członów dominujących

Metody funkcji testujących mogą być stosowane do badania odpornej D -stabilności rodziny członów dominujących (4.58), przy założeniu, że nominalny człon dominujący $\Delta_0(\exp(-s\mathbf{h}))$ jest D -stabilny. Odporna D -stabilność rodziny (4.58) jest warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.55) typu neutralnego, w przypadku gdy D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną.

W dalszych rozważaniach odpowiednie funkcje testujące rodziny (4.58), dla ich odróżnienia od funkcji testujących rodziny quasi-wielomianów (4.55), będziemy oznaczać odpowiednio przez $d_\Delta(\omega)$, $\tilde{d}_\Delta(\omega)$, $B_\Delta(\omega)$, $T_\Delta(\omega)$ oraz $F_\Delta(\omega)$. Są one okresowymi funkcjami parametru ω . Przy ich wyznaczaniu wystarczy więc ograniczyć się do skończonego przedziału $\Omega_\Delta = [0, 2\pi/\hbar]$ wartości parametru ω , gdzie $\hbar$ oblicza się w sposób opisany w punkcie 2.3.1 poniżej twierdzenia 2.2.

Podane powyżej twierdzenia i lematy pozostają też prawdziwe dla rodziny członów dominujących (4.58), po uwzględnieniu poniższych uwag.

Uwaga 4.1. Twierdzenie 4.8 jest prawdziwe dla rodziny (4.58), przy czym

- funkcję testującą $d_\Delta(\omega)$ wyznacza się ze wzorów (4.100) i (4.105)-(4.110), gdzie $u_k(\omega) = \operatorname{Re} \Delta_k(\exp(-f(\omega)\mathbf{h}))$, $v_k(\omega) = \operatorname{Im} \Delta_k(\exp(-f(\omega)\mathbf{h}))$, zaś człon $\Delta_k(\exp(-s\mathbf{h}))$, $k = 0, 1, \dots, l$, występujące we wzorze (4.59), mają postać (4.60),
- funkcję testującą $\tilde{d}_\Delta(\omega)$ wyznacza się ze wzoru (4.101), zastępując w nim $d(\omega)$ i $w_0(f(\omega), \mathbf{h})$ przez $d_\Delta(\omega)$ i $\Delta_0(\exp(-f(\omega)\mathbf{h}))$, odpowiednio. ■

Uwaga 4.2. Lemat 4.5 i twierdzenie 4.9 są prawdziwe dla rodziny członów dominujących (4.58), przy czym

- funkcję testującą $T_\Delta(\omega)$ wyznacza się ze wzorów (4.120)-(4.122), zastępując $\tilde{w}_k(f(\omega), \mathbf{h})$ przez $\tilde{\Delta}_k(\exp(-f(\omega)\mathbf{h}))$, gdzie (dla $k = 1, 2, \dots, l$)

$$\tilde{\Delta}_k(\exp(-f(\omega)\mathbf{h})) = \Delta_k(\exp(-f(\omega)\mathbf{h})) / \Delta_0(\exp(-f(\omega)\mathbf{h})), \quad (4.134)$$

- funkcję testującą $B_\Delta(\omega)$ oblicza się ze wzoru $B_\Delta(\omega) = \operatorname{Re} T_\Delta(\omega)$. ■

Uwaga 4.3. Twierdzenie 4.10 jest prawdziwe dla rodziny członów dominujących (4.58), przy czym funkcję testującą $F_\Delta(\omega)$ wyznacza się ze wzorów (4.131) i (4.132), zastępując unormowane quasi-wielomiany wierzchołkowe $\tilde{p}_k(f(\omega), \mathbf{h})$ rodziny quasi-wielomianów (4.55) przez unormowane wierzchołkowe człony dominujące $\tilde{p}_k^\Delta(\exp(-f(\omega)\mathbf{h}))$ rodziny członów dominujących (4.58), gdzie

$$\tilde{p}_r^\Delta(\exp(-f(\omega)\mathbf{h})) = p_r^\Delta(\exp(-f(\omega)\mathbf{h})) / \Delta_0(\exp(-f(\omega)\mathbf{h})), \quad (4.135)$$

zaś wierzchołkowe człony dominujące oblicza się ze wzoru (4.70). ■

Przykład 4.7. Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów opisaną wzorami (4.83)-(4.87), rozpatrywaną w przykładach 4.5 i 4.6. Jest ona rodziną quasi-wielomianów charakterystycznych układu automatycznej regulacji temperatury w reaktorze nuklearnym.

Należy wyznaczyć największą dodatnią liczbę ε , dla której rodzina quasi-wielomianów (4.83) typu neutralnego jest odpornie D -stabilna, gdzie D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -0.5 + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, a zbiór wartości odchyłek niepewnych parametrów od ich wartości nominalnych ma postać

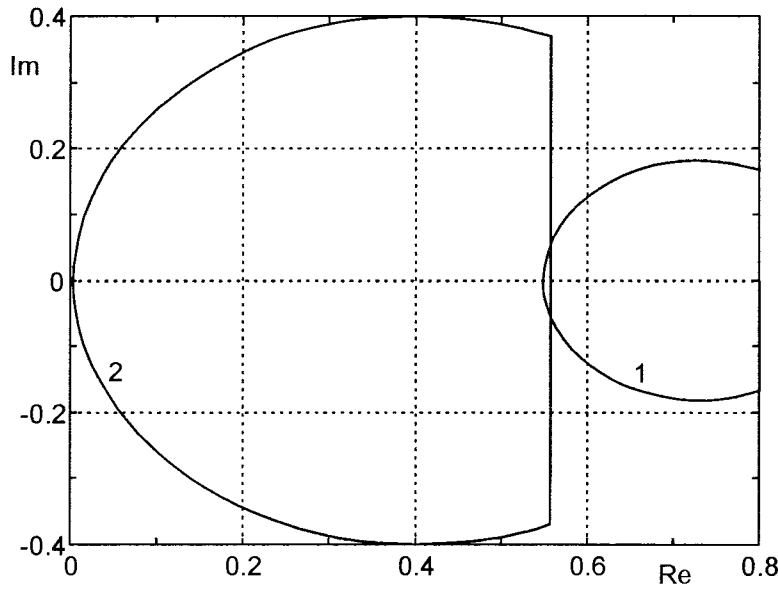
$$Q = \{q: q_1 \in [-0.2\varepsilon, 0.2\varepsilon], q_2 \in [-0.04\varepsilon, 0.04\varepsilon]\}. \quad (4.136)$$

Badając odporną D -stabilność rodziny quasi-wielomianów typu neutralnego wygodnie jest zbadać najpierw odporną D -stabilność rodziny członów dominujących.

Rodzina członów dominujących rodziny quasi-wielomianów (4.83) ma postać (4.89). Do zbadania jej odpornej D -stabilności zastosujemy twierdzenie 4.9 (z uwzględnieniem uwagi 4.2).

Zauważmy, że funkcje testujące rodziny (4.89) są okresowymi funkcjami parametru ω , o okresie $2\pi/h = 4\pi$. Dlatego też przy ich wyznaczaniu wystarczy ograniczyć się do przedziału $\Omega_\Delta = [0, 4\pi]$ wartości parametru ω .

Przyjmując $\varepsilon = 1$ we wzorze (4.136) i wyznaczając zespoloną funkcję testującą $T_\Delta(\omega)$, $\omega \in \Omega_\Delta$, w sposób opisany w uwadze 4.2, otrzymamy wykres pokazany na rysunku 4.11 (krzywa 1). Ponieważ $\alpha = \min\{B_\Delta(\omega) : \omega \in \Omega_\Delta\} = 0.5494$, gdzie $B_\Delta(\omega) = \operatorname{Re} T_\Delta(\omega)$, z twierdzenia 4.9 i uwagi 4.2 wynika, że rodzina członów dominujących (4.89) jest odpornie D -stabilna dla zbioru Q mającego postać (4.136) przy dowolnym dodatnim $\varepsilon < \delta = 2.2191$.



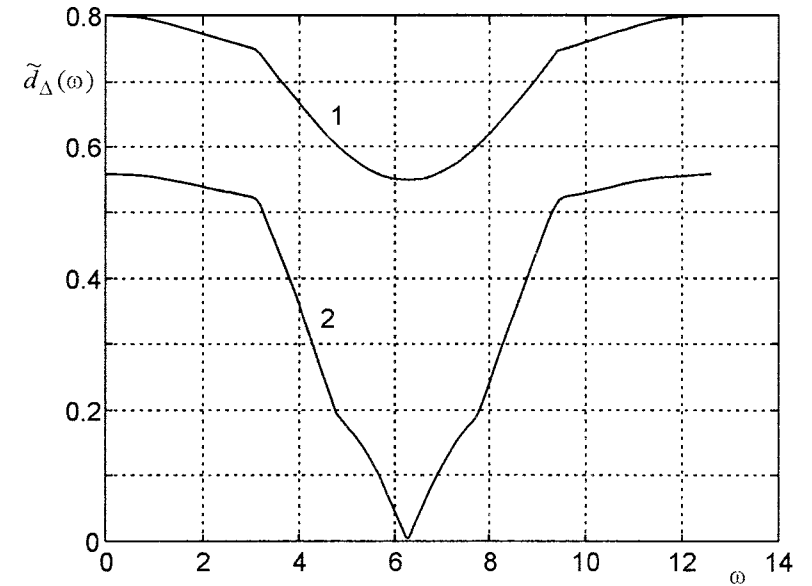
Rys. 4.11. Wykresy funkcji testującej $T_\Delta(\omega)$, $\omega \in [0, 4\pi]$, dla zbioru Q mającego postać (4.136) przy $\varepsilon = 1$ (krzywa 1) oraz $\varepsilon = 2.21$ (krzywa 2)

Wykres funkcji testującej $T_\Delta(\omega)$, $\omega \in \Omega_\Delta = [0, 4\pi]$, wyznaczony dla zbioru (4.136) przy $\varepsilon = 2.21 < \delta$ jest krzywą 2 na rysunku 4.11. Dla $\varepsilon > \delta = 2.2191$ wykres $T_\Delta(\omega)$ obejmuje początek płaszczyzny zespolonej.

Z rysunku 4.11, powyższych rozważań i twierdzenia 4.9 (z uwagą 4.2) wynika, że rodzina członów dominujących (4.89) jest odpornie D -stabilna dla zbioru Q

mającego postać (4.136) przy $\varepsilon < \delta = 2.2191$, natomiast nie jest ona odpornie D -stabilna przy $\varepsilon > \delta = 2.2191$.

Największą liczbę ε , dla której rodzina członów dominujących (4.89) jest odpornie D -stabilna, można też wyznaczyć stosując metodę funkcji testującej $\tilde{d}_\Delta(\omega)$, która bazuje na warunku dostatecznym podanym w twierdzeniu 4.8 (z uwagą 4.1). Jest to jednak metoda bardziej złożona w porównaniu z metodą funkcji testującej $T_\Delta(\omega)$, bowiem obliczenia należy przeprowadzać w sposób iteracyjny, czyli wyznaczać przebiegi funkcji $\tilde{d}_\Delta(\omega)$ dla różnych, odpowiednio dobranych wartości współczynnika skalującego $\varepsilon > 0$, i sprawdzać spełnienie warunku $\tilde{d}_\Delta(\omega) > 0$ dla każdego $\omega \in \Omega_\Delta = [0, 4\pi]$.

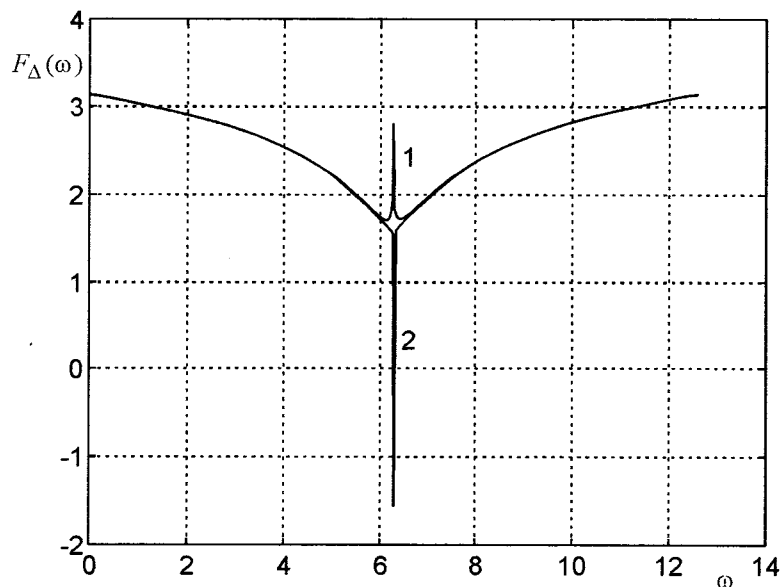


Rys. 4.12. Wykresy funkcji testującej $\tilde{d}_\Delta(\omega)$, $\omega \in [0, 4\pi]$, dla zbioru Q mającego postać (4.136) przy $\varepsilon = 1$ (krzywa 1) oraz $\varepsilon = 2.21$ (krzywa 2)

Poniżej, stosując metodę funkcji testującej $\tilde{d}_\Delta(\omega)$, wykorzystamy rezultat otrzymany na bazie metody funkcji testującej $T_\Delta(\omega)$.

Wykresy funkcji testującej $\tilde{d}_\Delta(\omega)$, $\omega \in [0, 4\pi]$, wyznaczone dla zbioru Q mającego postać (4.136) przy $\varepsilon = 1$ oraz przy $\varepsilon = 2.21$, są pokazane na rysunku

4.12. Wynika z niego, że warunek dostateczny $\tilde{d}_\Delta(\omega) > 0$, $\omega \in \Omega_\Delta = [0, 4\pi]$, jest dla obu wykresów spełniony. Ponadto możemy łatwo sprawdzić, że ten warunek nie jest spełniony dla dowolnego $\varepsilon > \delta = 2.2191$. Zauważmy, że przy $\varepsilon > 2.2191$ rodzina członów dominujących (4.89) nie jest odpornie D -stabilna, co wynika z metody funkcji testującej $T_\Delta(\omega)$. Oznacza to, że dla rodziny członów dominujących (4.89) warunek dostateczny podany w twierdzeniu 4.8 (z uwagą 4.1) jest też warunkiem koniecznym.



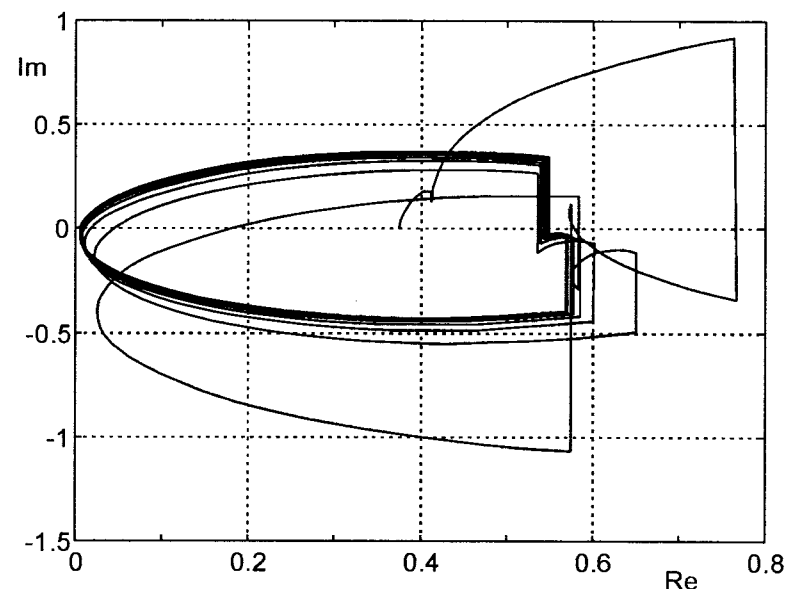
Rys. 4.13. Wykresy funkcji testującej $F_\Delta(\omega)$, $\omega \in [0, 4\pi]$, dla zbioru Q mającego postać (4.136) przy $\varepsilon = 2.21$ (krzywa 1) oraz $\varepsilon = 2.22$ (krzywa 2)

Dla rozpatrywanej rodziny członów dominujących (podobnie jak i w przypadku ogólnym) jest bardzo trudno wyznaczyć na podstawie twierdzenia 4.10 i uwagi 4.3 największą liczbę ε , dla której ta rodzina jest odpornie D -stabilna. Wynika to stąd, że wartości funkcji testującej $F_\Delta(\omega)$ ulegają dużym skokowym zmianom, jeżeli unormowany zbiór wartości zaczyna obejmować początek płaszczyzny zmiennej zespolonej. Ilustruje to rysunek 4.13.

Na rysunku 4.13 są pokazane wykresy funkcji testującej $F_\Delta(\omega)$, $\omega \in \Omega_\Delta = [0, 4\pi]$, wyznaczone dla zbioru (4.136) przy $\varepsilon = 2.21$ (krzywa 1, wyznaczona wartość minimalna funkcji testującej 1.7137) oraz $\varepsilon = 2.22$ (krzywa 2, wyznaczona

na wartość minimalną funkcji testującej -1.5681). Krzywe te różnią się istotnie w otoczeniu wartości $\omega = 2\pi$. Dla pozostałych wartości parametru ω oba przebiegi są prawie takie same.

Zbadamy teraz odporną D -stabilność rodziny quasi-wielomianów (4.83), przyjmując że zbiór Q ma postać (4.136) przy $\varepsilon = 2.21$. Wyznaczając zespoloną funkcję testującą $T(\omega)$ dla wartości parametru ω zmieniających się od 0 do 100 z krokiem 0.01, otrzymamy wykres pokazany na rysunku 4.14. Rozpoczyna się on w punkcie $T(0) = 0.3756$ i oscylując zbliża się powoli do początku płaszczyzny zmiennej zespolonej. Przy $\omega \rightarrow \infty$ wykres funkcji testującej $T(\omega)$ dąży do wykresu funkcji testującej $T_\Delta(\omega)$, pokazanego na rysunku 4.11.



Rys. 4.14. Wykres zespolonej funkcji testującej $T(\omega)$, $\omega \in [0, 100]$

Z analizy wykresów funkcji testujących $T(\omega)$ i $T_\Delta(\omega)$ wynika zatem, że rodzina quasi-wielomianów (4.83) typu neutralnego jest odpornie D -stabilna dla tych wartości współczynnika skalującego ε , dla których jest odpornie D -stabilna rodzina członów dominujących (4.89). Oznacza to, że rodzina quasi-wielomianów (4.83) jest odpornie D -stabilna dla zbioru Q mającego postać (4.136) przy $\varepsilon < \delta$, gdzie $\delta = 2.2191$, natomiast nie jest ona odpornie D -stabilna dla $\varepsilon > \delta = 2.2191$.

Za największy zbiór Q , dla którego rozpatrywana rodzina quasi-wielomianów jest odpornie D -stabilna, można przyjąć zbiór (4.136) przy $\varepsilon = 2.21$, tj. zbiór

$$Q = \{q : q_1 \in [-0.442, 0.442], q_2 \in [-0.0884, 0.0884]\}. \quad (4.137)$$

Zauważmy, że wyznaczenie zbioru (4.137) dla rodziny quasi-wielomianów (4.83) typu neutralnego jest bardzo trudne bez oddzielnego rozpatrywania odpornej D -stabilności rodziny członów dominujących (4.89). Wynika to stąd, że przy analizie funkcji testujących dla rodziny quasi-wielomianów (4.83) typu neutralnego należy rozpatrywać nieskończony przedział wartości parametru $\omega \geq 0$. ■

4.4. Odporna stabilność rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów

Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów $W(s, \mathbf{h}, Q)$, opisaną wzorami (4.1)-(4.3) przy założeniu, że współczynniki $a_{ki}(\mathbf{q})$ quasi-wielomianu (4.2) są wieloliniowymi funkcjami niepewnych parametrów, przy czym $a_{n0}(\mathbf{q}) > 0$ dla każdego $\mathbf{q} \in Q$.

Funkcję $f(q_1, q_2, \dots, q_l)$ nazywamy wieloliniową, jeżeli jest ona liniowa ze względu na każdą zmienną q_i oddzielnie, tzn. gdy jest ona liniowa względem q_i , w przypadku gdy wszystkie pozostałe zmienne q_k , $k = 1, 2, \dots, l$, $k \neq i$, są ustalone.

Problemowi badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów są poświęcone prace [5, 13, 51, 67, 76, 118, 144, 145, 155]. Wybrane ich rezultaty są podane w monografiach [1, 8, 18, 52].

W niniejszym punkcie rozpatrzmy problem badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów $W(s, \mathbf{h}, Q)$ o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów.

Założmy, że quasi-wielomian nominalny $w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}_0)$ rozpatrywanej rodziny quasi-wielomianów jest D -stabilny. Wtedy jest też D -stabilny nominalny człon dominujący $\Delta(\exp(-s\mathbf{h}), \mathbf{q}_0)$ rodziny członów dominujących $\Delta(\exp(-s\mathbf{h}), Q)$.

Quasi-wielomianami wierzchołkowymi rodziny $W(s, \mathbf{h}, Q)$ są quasi-wielomiany $p_k(s, \mathbf{h}) = w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}_k)$, $k = 1, 2, \dots, K = 2^l$. Odpowiadają one poszczególnym

wierzchołkom zbioru Q mającego postać (4.56). Ich D -stabilność jest warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności rodziny $W(s, \mathbf{h}, Q)$.

Dla dowolnej liczby zespolonej z przez

$$c(z, \mathbf{h}, Q) = \text{conv}\{p_k(z, \mathbf{h}), k = 1, 2, \dots, K\} \quad (4.138)$$

oznaczymy wypukły wielobok na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, rozpięty na punktach $p_k(z, \mathbf{h})$, $k = 1, 2, \dots, K$, będących wartościami dla $s = z$ quasi-wielomianów wierzchołkowych $p_k(s, \mathbf{h})$.

Ważną rolę w teorii odpornej stabilności rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów odgrywa tzw. twierdzenie o odwzorowaniu, sformułowane i udowodnione w monografii [168]. Inne dowody tego twierdzenia są podane w pracach [1, 8, 18, 52].

Twierdzenie o odwzorowaniu pozostaje też słuszne dla rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów.

Twierdzenie 4.11 (twierdzenie o odwzorowaniu). Jeżeli współczynniki quasi-wielomianu (4.2) zależą wieloliniowo od niepewnych parametrów, to dla każdej liczby zespolonej z zachodzi zależność

$$w(z, \mathbf{h}, Q) \subset c(z, \mathbf{h}, Q), \quad (4.139)$$

lub równoważnie,

$$\text{conv}(w(z, \mathbf{h}, Q)) = c(z, \mathbf{h}, Q), \quad (4.140)$$

gdzie $w(z, \mathbf{h}, Q)$ jest zbiorem wartości rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów, zaś $\text{conv}(w(z, \mathbf{h}, Q))$ jest wypukłą powłoką tego zbioru.

Dowód. Dowód można przeprowadzić dokładnie w ten sam sposób jak dowód twierdzenia o odwzorowaniu dla rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów, podany w [52]. ■

Z definicji 3.7 unormowanego zbioru wartości $\tilde{w}(z, \mathbf{h}, Q)$ wynika, że warunek (4.139) jest równoważny z warunkiem

$$\tilde{w}(z, \mathbf{h}, Q) \subset \tilde{c}(z, \mathbf{h}, Q), \quad (4.141)$$

gdzie $\tilde{c}(z, \mathbf{h}, Q) = \text{conv}\{\tilde{p}_k(z, \mathbf{h}), k = 1, 2, \dots, K\}$, $\tilde{p}_k(z, \mathbf{h}) = p_k(z, \mathbf{h}) / w(z, \mathbf{h}, \mathbf{q}_0)$, przy czym $w_0(z, \mathbf{h}, \mathbf{q}_0) \neq 0$.

Twierdzenie o odwzorowaniu jest też słuszne w przypadku rodziny członów dominujących $\Delta(\exp(-sh), Q)$ o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów, tzn. dla dowolnej liczby zespolonej z zachodzi zależność

$$\text{conv}(\Delta(\exp(-zh), Q)) = c_{\Delta}(\exp(-zh), Q), \quad (4.142)$$

gdzie $\Delta(\exp(-zh), Q)$ jest zbiorem wartości dla $s = z$ rodziny członów dominujących $\Delta(\exp(-sh), Q)$, mającej postać (4.4), zaś $c_{\Delta}(\exp(-zh), Q)$ jest wypukłą powłoką tego zbioru.

Dla ilustracji twierdzenia 4.11 o odwzorowaniu, sformułowanego w odniesieniu do unormowanego zbioru wartości rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów, rozpatrzmy poniższy przykład.

Przykład 4.8. Dana jest rodzina quasi-wielomianów typu opóźnionego o współczynnikach zależnych wieloliniowo od dwóch niepewnych parametrów

$$w(s, h, q) = q_1 q_2 s^4 + 0.8 q_2 s^3 + 2 q_1 s^2 + s + 2 + (0.8 q_1 s^3 + 2 q_2 s^2 + s + 1) \exp(-sh), \quad q \in Q, \quad (4.143)$$

gdzie $h = 0.2$, zaś zbiór Q ma postać

$$Q = \{q = [q_1, q_2] : q_1 \in [2, 4], q_2 \in [3, 5]\}, \quad (4.144)$$

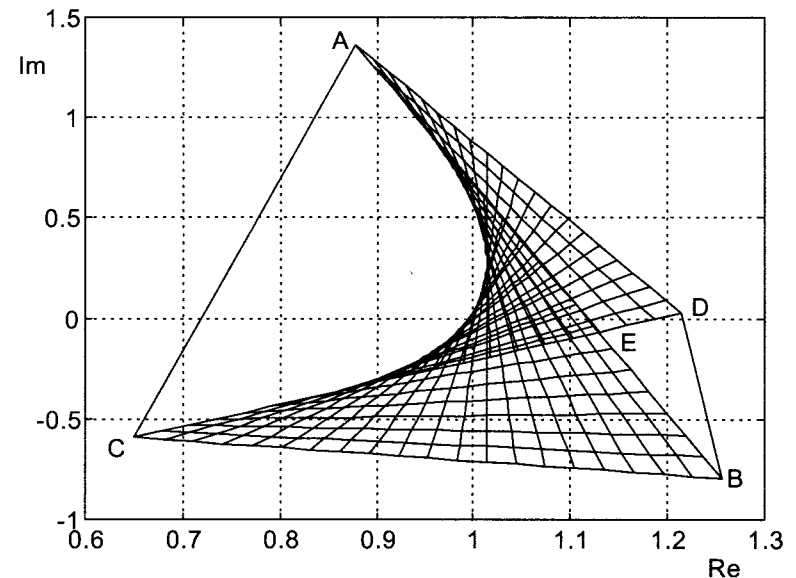
przy czym $q_0 = [3, 4]$.

Unormowany zbiór wartości $\tilde{w}(z, h, Q)$, $z = j0.88$, rodziny quasi-wielomianów (4.143) jest pokazany na rysunku 4.15. Został on wyznaczony metodą siatki utworzonej w zbiorze Q , przy przyjęciu dyskretyzacji wartości parametrów q_1 i q_2 z krokiem 0.1 w odpowiednich przedziałach. Wyznaczone punkty zbioru wartości, odpowiadające węzłom siatki utworzonej w zbiorze Q , zostały połączone odcinkami linii prostych z sąsiednimi punktami.

Za pomocą przekształcenia $\tilde{w}(j0.88, h, q)$ wierzchołki zbioru Q zostały odwzorowane w punkty wierzchołkowe zbioru wartości, oznaczone literami A, B, C i D. Natomiast brzeg zbioru Q został odwzorowany w linię łamaną zamkniętą ABCDA.

Z rysunku 4.15 wynika, że brzeg zbioru wartości $\tilde{w}(j0.88, h, Q)$ składa się z odcinka linii krzywej, łączącego punkty A i C oraz z linii łamanej ADEBC. Odcinek linii krzywej, będącej fragmentem brzegu zbioru wartości $\tilde{w}(j0.88, h, Q)$,

jest odwzorowaniem odcinka linii krzywej, leżącej wewnątrz zbioru Q . Można go wyznaczyć w sposób opisany w przykładzie 3.1.



Rys. 4.15. Unormowany zbiór wartości $\tilde{w}(j0.88, h, Q)$ rodziny quasi-wielomianów (4.143)

Zbiorem $\tilde{c}(j0.88, h, Q)$ jest wypukły wielobok o wierzchołkach A, D, B i C, którego boki AC i BD są odwzorowaniami przekątnych zbioru Q . Natomiast boki AD i BC są odwzorowaniami krawędzi tego zbioru. ■

Z twierdzenia 4.11 i powyższych rozważań wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.12. Niech quasi-wielomian nominalny $w(s, h, q_0)$ będzie D -stabilny. Rodzina quasi-wielomianów $W(s, h, Q)$ o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów, typu opóźnionego lub neutralnego, jest odpornie D -stabilna, jeżeli jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin c(f(\omega), h, Q), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.145)$$

lub równoważnie, warunek wykluczenia zera dla unormowanego zbioru wartości

$$0 \notin \tilde{c}(f(\omega), h, Q), \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (4.146)$$

Dowód. Z twierdzenia 4.11 i ze wzoru (4.141) wynika, że dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ zbiory wartości $w(f(\omega), \mathbf{h}, Q)$ i $\tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, Q)$ rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów są podzbiorami zbiorów $c(f(\omega), \mathbf{h}, Q)$ i $\tilde{c}(f(\omega), \mathbf{h}, Q)$, odpowiednio. Wobec tego, jeżeli są spełnione warunki (4.145) i (4.146), to są też spełnione warunki wykluczenia zera (3.12a) i (3.12b). Rozpatrywana rodzina quasi-wielomianów jest więc odpornie D -stabilna, zgodnie z twierdzeniem 3.3. ■

Zauważmy, że dla dowolnego ustalonego $\omega \in \Omega$ każda krawędź wypukłego wieloboku $c(f(\omega), \mathbf{h}, Q)$ jest odwzorowaniem jednej z krawędzi lub jednej z przekątnych zbioru Q . Jest więc ona zbiorem wartości (dla $s = f(\omega)$) jednej z rodzin quasi-wielomianów

$$p_{rk}(s, \mathbf{h}, \lambda) = (1 - \lambda)p_r(s, \mathbf{h}) + \lambda p_k(s, \mathbf{h}), \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (4.147)$$

gdzie $r, k = 1, 2, \dots, K$, $r < k$.

Postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia krawędziowego 4.6 możemy wykazać, że warunek wykluczenia zera (4.145) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie D -stabilne wszystkie rodziny quasi-wielomianów mające postać (4.147). Oznacza to, że odporna D -stabilność tych rodzin quasi-wielomianów jest warunkiem dostatecznym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów $W(s, \mathbf{h}, Q)$ o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów.

Do badania odpornej D -stabilności rodzin quasi-wielomianów (4.147) można stosować metody podane w punkcie 4.2.

Zauważmy, że jeżeli w pewnych przypadkach szczególnych zbiorów wartości $w(f(\omega), \mathbf{h}, Q)$ jest wypukłym wielobokiem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej dla każdego $\omega \in \Omega$, to odporna D -stabilność wszystkich rodzin quasi-wielomianów (4.147) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów $W(s, \mathbf{h}, Q)$ o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów. Takie przypadki szczególne dla rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów zostały rozpatrzone w pracach [76, 144, 145, 155]. Wybrane ich rezultaty są podane w monografii [52].

Do pośredniego sprawdzenia warunku wykluczenia zera (4.145) (lub (4.146)) można stosować podane w punkcie 4.3.4 metody funkcji testujących. Pozwalają one na jednoczesne badanie odpornej D -stabilności wszystkich rodzin quasi-wielomianów (4.147).

Stosując metody funkcji testujących do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów $W(s, \mathbf{h}, Q)$ o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów należy uwzględnić poniższe uwagi.

Uwaga 4.4. Warunki podane w twierdzeniu 4.8 są warunkami dostatecznymi odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów $W(s, \mathbf{h}, Q)$ o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów. Stosując to twierdzenie, funkcje testujące $d(\omega)$ i $\tilde{d}(\omega)$ wyznacza się ze wzorów (4.100) i (4.101), odpowiednio, gdzie

$$U^-(\omega) = \min\{\operatorname{Re} p_1(f(\omega), \mathbf{h}), \dots, \operatorname{Re} p_K(f(\omega), \mathbf{h})\}, \quad (4.148)$$

$$U^+(\omega) = \max\{\operatorname{Re} p_1(f(\omega), \mathbf{h}), \dots, \operatorname{Re} p_K(f(\omega), \mathbf{h})\}, \quad (4.149)$$

$$V^-(\omega) = \min\{\operatorname{Im} p_1(f(\omega), \mathbf{h}), \dots, \operatorname{Im} p_K(f(\omega), \mathbf{h})\}, \quad (4.150)$$

$$V^+(\omega) = \max\{\operatorname{Im} p_1(f(\omega), \mathbf{h}), \dots, \operatorname{Im} p_K(f(\omega), \mathbf{h})\}, \quad (4.151)$$

przy czym $p_k(s, \mathbf{h})$ są to quasi-wielomiany wierzchołkowe. ■

Uwaga 4.5. Warunek podany w lemacie 4.5 (warunek (4.123) twierdzenia 4.9) jest warunkiem dostatecznym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów $W(s, \mathbf{h}, Q)$ o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów. Stosując ten lemat, funkcję testującą $B(\omega)$ wyznacza się ze wzoru (4.113). ■

Metoda funkcji testującej $F(\omega)$, podana w punkcie 4.3.4.3, wymaga pewnej modyfikacji z tego powodu, że przy sprawdzaniu warunku (4.146) musimy brać pod uwagę wszystkie rodziny quasi-wielomianów mające postać (4.147), a nie tylko tzw. quasi-wielomiany krawędziowe, jak miało to miejsce w przypadku rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów.

Uwaga 4.6. Warunek podany w twierdzeniu 4.10 jest warunkiem dostatecznym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów $W(s, \mathbf{h}, Q)$ o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów. Stosując to twierdzenie, funkcję testującą $F(\omega)$ wyznacza się ze wzorów (4.131) i (4.132), przy czym funkcję (4.132) należy obliczać dla wszystkich $r, k = 1, 2, \dots, K$, $r < k$. ■

Dla rodziny quasi-wielomianów (lub wielomianów) o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów aproksymacja zbioru wartości $w(z, \mathbf{h}, Q)$ wypukłym wielobokiem (4.138) może być mało dokładna, co wynika np. z przykładu 4.8.

Można skonstruować inny wielobok, niekoniecznie wypukły, który będzie dokładniej aproksymować zbiór wartości $w(z, \mathbf{h}, Q)$. Taki wielobok otrzymamy dzieląc zbiór Q na podzbiory Q_i , $i = 1, 2, \dots, M$, i dokonując aproksymacji każdego z podzbiorów wartości $w(z, \mathbf{h}, Q_i) = \{w(z, \mathbf{h}, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q_i\}$ za pomocą wypukłego wieloboku $c(z, \mathbf{h}, Q_i)$. Wtedy warunkiem dostatecznym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów $W(s, \mathbf{h}, Q)$ o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów jest spełnienie M warunków wykluczenia zera

$$0 \notin c(f(\omega), \mathbf{h}, Q_i), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (4.152)$$

Do ich oddzielnego sprawdzenia można stosować albo metodę bezpośrednią, albo opisane powyżej metody funkcji testujących.

Idea podziału zbioru Q na podzbiory Q_i , mająca na celu dokładniejszą aproksymację zbioru wartości rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów, została zaproponowana w pracy [81]. Jej rezultaty zostały wykorzystane w pracach [1, 18, 52, 109].

Twierdzenie 4.11 o odwzorowaniu jest też prawdziwe dla rodziny członów dominujących $\Delta(\exp(-s\mathbf{h}), Q)$ o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów, tzn. zachodzi zależność (4.142). Z powyższych rozważań wynika zatem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.13. Niech nominalny człon dominujący $\Delta(\exp(-s\mathbf{h}), \mathbf{q}_0)$ będzie D -stabilny. Rodzina członów dominujących $\Delta(\exp(-s\mathbf{h}), Q)$ o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna, jeżeli jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin c_{\Delta}(\exp(-f(\omega)\mathbf{h}), Q), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.153)$$

gdzie dla dowolnej liczby zespolonej z zbiór

$$c_{\Delta}(\exp(-z\mathbf{h}), Q) = \text{conv}\{p_k^{\Delta}(\exp(-z\mathbf{h})), \quad k = 1, 2, \dots, K\} \quad (4.154)$$

jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wypukłym wielobokiem, rozpiętym na punktach $p_k^{\Delta}(\exp(-z\mathbf{h}))$, $k = 1, 2, \dots, K$, będących wartościami dla $s = z$ wierzchołkowych członów dominujących $p_k^{\Delta}(\exp(-s\mathbf{h}))$, odpowiadających wierzchołkom zbioru Q . ■

Do pośredniego sprawdzania warunku wykluczenia zera (4.153) można stosować opisane powyżej metody funkcji testujących, po odpowiedniej ich modyfikacji (z uwzględnieniem powyższych uwag oraz uwag podanych w punkcie 4.3.4.4).

Przykład 4.9. Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów (4.143) o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów, rozpatrywaną w przykładzie 4.8, przy czym zbiór Q ma postać

$$Q = \{\mathbf{q} = [q_1, q_2] : q_1 \in [3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon], q_2 \in [4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon]\}. \quad (4.155)$$

Należy wyznaczyć największą dodatnią liczbę ε , dla której ta rodzina quasi-wielomianów jest odpornie stabilna.

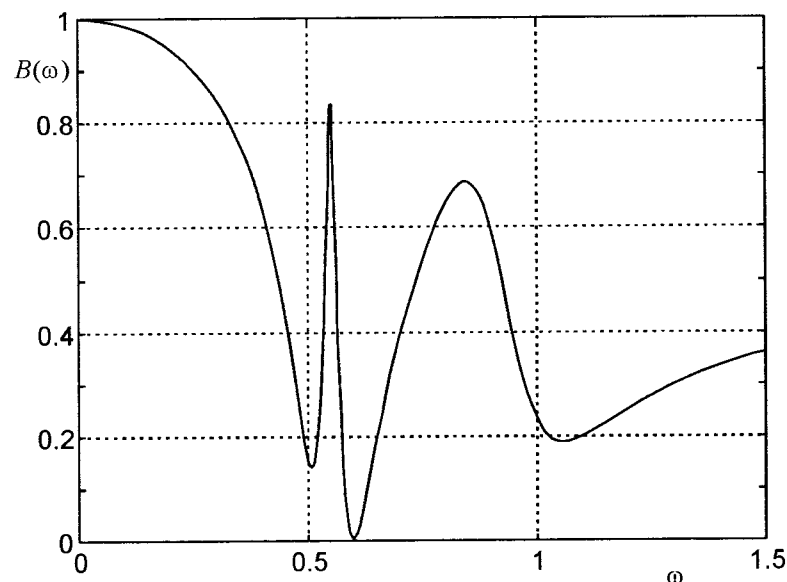
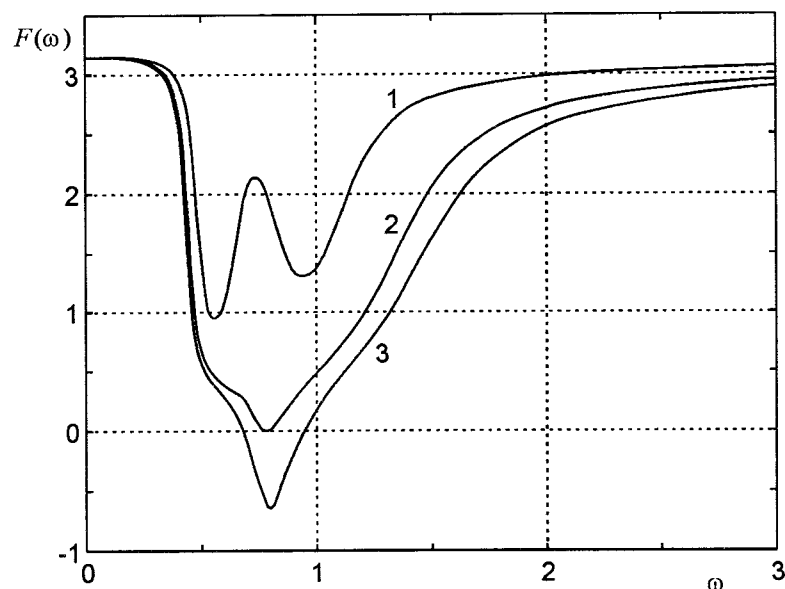
Łatwo sprawdzić, stosując np. twierdzenie 2.4, że quasi-wielomian nominalny $w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}_0)$, gdzie $\mathbf{q}_0 = [3, 4]$, jest asymptotycznie stabilny.

Przyjmując $\varepsilon = 1$ w (4.155) oraz obliczając ze wzoru (4.113) wartości funkcji testującej $B(\omega)$ dla parametru ω zmieniającego się od 0 do 1.5 ze zmiennym krokiem, otrzymamy wykres pokazany na rysunku 4.16. Dla $\omega > 1.5$ wartości funkcji testującej $B(\omega)$ są dodatnie, przy czym dążą one do 0.5 przy $\omega \rightarrow \infty$. Ponieważ $\alpha = \min\{B(\omega) : \omega \geq 0\} = 0.0056 > 0$, warunek dostateczny (4.117) jest spełniony.

Łatwo sprawdzić, że jeżeli we wzorze (4.155) przyjmiemy $\varepsilon = 1.01$, to otrzymamy $\alpha = -0.0067$.

Z lematu 4.5 i uwagi 4.5 wynika zatem, że warunek (4.117) jest spełniony przy $\varepsilon = 1$, natomiast nie jest on spełniony przy $\varepsilon > 1$. Oznacza to, że rodzina quasi-wielomianów (4.143) o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna dla dowolnego $\varepsilon \in (0, 1]$.

Zastosujemy teraz metodę funkcji testującej $F(\omega)$ do badania odpornej stabilności rozpatrywanej rodziny quasi-wielomianów.

Rys. 4.16. Wykres funkcji testującej $B(\omega)$ przy $\varepsilon = 1$ w (4.155)Rys. 4.17. Wykresy funkcji testującej $F(\omega)$ dla $\varepsilon = 1$ (krzywa 1), $\varepsilon = 1.787$ (krzywa 2) oraz $\varepsilon = 2$ (krzywa 3)

Przyjmując różne wartości współczynnika skalującego $\varepsilon \geq 1$ i wyznaczając (z uwzględnieniem uwagi 4.6) wykresy funkcji testującej $F(\omega)$ otrzymamy wynik, który mówi, że warunek dostateczny $F(\omega) > 0, \forall \omega \geq 0$, jest spełniony dla każdego $\varepsilon \in (0, 1.787]$. Natomiast nie jest on spełniony dla $\varepsilon > 1.787$. Wartości minimalne funkcji testującej $F(\omega)$ przy $\varepsilon = 1.787$ i $\varepsilon = 1.788$ są równe 0.028 i $-4.935 \cdot 10^{-4}$, odpowiednio.

Wykresy funkcji testującej $F(\omega)$, $\omega \in [0, 3]$, odpowiadające wartościom współczynnika skalującego $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1.787$ oraz $\varepsilon = 2$, są pokazane na rysunku 4.17. Dążą one do π przy $\omega \rightarrow \infty$.

Na podstawie twierdzenia 4.10 i uwagi 4.6 możemy więc stwierdzić, że rozpatrywana rodzina quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna dla dowolnego $\varepsilon \in (0, 1.787]$, czyli dla zbioru Q mającego postać

$$Q = \{q = [q_1, q_2] : q_1 \in [1.213, 4.787], q_2 \in [2.213, 5.787]\}. \quad (4.156)$$

Natomiast o odpornej stabilności rozpatrywanej rodziny quasi-wielomianów przy $\varepsilon > 1.787$ nic nie można powiedzieć na bazie warunku dostatecznego $F(\omega) > 0, \forall \omega \geq 0$, który w tym przypadku nie jest spełniony. ■

4.5. Odporna stabilność rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo lub wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów przy obszarach D ogólniejszych niż przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna

Niech D będzie na płaszczyźnie zmiennej zespolonej otwartym obszarem nieograniczonym zawierającym półpłaszczyznę $\operatorname{Re} s < -\gamma$, $\gamma > 0$, lub otwartym obszarem złożonym ze skończonej liczby jednospójnych rozłącznych podobszarów D_i ($i = 1, 2, \dots, N$), przy czym podobzar leżący w lewej półpłaszczyźnie najdalej od osi urojonej niech będzie obszarem nieograniczonym. Przyjmijmy, że w obszarze D leżą wszystkie zera quasi-wielomianu nominalnego $w_0(s, h)$ rodziny quasi-wielomianów (4.1), przy czym liczba tych zer jest skończona w każdym podobszarze ograniczonym i nieskończona w nieograniczonym.

Rodzinę quasi-wielomianów (4.1) będziemy nazywać odpornie D -stabilną, jeżeli każdy quasi-wielomian do niej należący ma w każdym podobszarze D_i ($i = 1, 2, \dots, N$) tyle samo zer co quasi-wielomian nominalny $w_0(s, \mathbf{h})$.

Zgodnie z rozważaniami podanymi w punkcie 3.2.3, przy powyższych założeniach problem badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.1) typu opóźnionego lub neutralnego jest sformułowany poprawnie i podane w niniejszym rozdziale metody badania odpornej D -stabilności, bazujące na warunku wykluczenia zera podanym w twierdzeniu 3.3, można uogólnić na wyżej wymienione obszary D .

Jeżeli obszar D jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej jednym otwartym obszarem nieograniczonym (innym niż przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna lub otwarta lewa półpłaszczyzna), którego brzeg ma opis parametryczny $f(\omega)$, $\omega \in \Omega$, to do badania odpornej D -stabilności rozpatrywanych w niniejszym rozdziale rodzin quasi-wielomianów charakterystycznych (lecz nie rodzin członów dominujących) można bezpośrednio stosować te same metody, które stosuje się w przypadku przesuniętej otwartej lewej półpłaszczyzny. Należy przy tym pamiętać, aby brać pod uwagę parametryczny opis brzegu rozpatrywanego obszaru D .

Wymienione powyżej metody można też bezpośrednio stosować do badania odpornej D -stabilności rozpatrywanych w niniejszym rozdziale rodzin quasi-wielomianów w przypadku, gdy obszar D składa się z kilku rozłącznych podobszarów D_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Stosując te metody, poszczególne warunki należy sprawdzać oddzielnie dla każdego podobszaru D_i ($i = 1, 2, \dots, N$).

W szczególności, przy obszarze D składającym się z kilku rozłącznych podobszarów D_i ($i = 1, 2, \dots, N$), lemat 4.3 można sformułować w postaci podanej poniżej.

Oznaczmy przez $f_i(\omega)$, $\omega \in \Omega_i$, parametryczny opis brzegu i -tego podobszaru D_i , $i = 1, 2, \dots, N$.

Lemat 4.6. Niech quasi-wielomian nominalny $w_0(s, \mathbf{h})$ będzie D -stabilny. Rodzina quasi-wielomianów (4.55) typu opóźnionego lub neutralnego o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy oddzielnie dla każdego podobszaru D_i , $i = 1, 2, \dots, N$, są spełnione dwa poniższe warunki:

1) każdy z K wykresów funkcji

$$p_k(f_i(\omega), \mathbf{h}) / w_0(f_i(\omega), \mathbf{h}), \quad \omega \in \Omega_i, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (4.157)$$

sporządzonych oddzielnie dla każdego quasi-wielomianu wierzchołkowego $p_k(s, \mathbf{h})$, nie okrąży początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani przez niego nie przechodzi,

2) każdy z $L = l2^{l-1}$ wykresów funkcji

$$p_k(f_i(\omega), \mathbf{h}) / p_r(f_i(\omega), \mathbf{h}), \quad \omega \in \Omega_i, \quad (4.158)$$

sporządzonych oddzielnie dla każdego quasi-wielomianu krawędziowego (4.66) nie przecina niedodatniej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$.

Dowód. Z twierdzenia krawędziowego 4.6 i powyższych rozważań wynika, że jeżeli D składa się z rozłącznych otwartych podobszarów D_i ($i = 1, 2, \dots, N$), to rodzina quasi-wielomianów (4.55) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie D -stabilne wszystkie quasi-wielomiany krawędziowe (4.66), odpowiadające poszczególnym krawędziom zbioru $\mathcal{Q}$. Warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności tych quasi-wielomianów jest D -stabilność wszystkich quasi-wielomianów wierzchołkowych.

Z zasady argumentu wynika, że quasi-wielomian wierzchołkowy $p_k(s, \mathbf{h})$ ma w podobszarze D_i tyle samo zer co quasi-wielomian nominalny $w_0(s, \mathbf{h})$ wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji $p_k(f_i(\omega), \mathbf{h}) / w_0(f_i(\omega), \mathbf{h})$, $\omega \in \Omega_i$, nie okrąży początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani przez niego nie przechodzi.

Z powyższych rozważań i lematu 4.1 wynika natomiast, że quasi-wielomian krawędziowy (4.66) dla każdego ustalonego $\lambda \in \Lambda = [0, 1]$ ma w podobszarze D_i tyle samo zer co quasi-wielomian nominalny $w_0(s, \mathbf{h})$ wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji (4.158) nie przecina niedodatniej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$.

Tezę lematu otrzymamy uwzględniając wszystkie quasi-wielomiany wierzchołkowe i krawędziowe oraz wszystkie podobszary D_i ($i = 1, 2, \dots, N$). ■

Podane w punktach 4.3.4.1, 4.3.4.2 i 4.3.4.3 metody funkcji testujących można bezpośrednio stosować do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów w przypadku, gdy D składa się z rozłącznych otwartych podobszarów D_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Należy przy tym poszczególne funkcje testujące rozpatrywać oddzielnie dla każdego podobszaru D_i . Funkcje testujące odpowiadające podobszarowi D_i będziemy nazywać funkcjami testującymi stowarzyszonymi z tym podobszarem.

W szczególności, uogólniając twierdzenia 4.9 i 4.10 na przypadek obszaru D złożonego z N rozłącznych otwartych podobszarów D_i , których brzegi mają opisy parametryczne $f_i(\omega)$, $\omega \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, otrzymamy poniższe twierdzenia, podane w [42] w przypadku rodziny quasi-wielomianów typu opóźnionego. Są one też prawdziwe w przypadku rodziny quasi-wielomianów typu neutralnego przy obszarach D spełniających założenia podane w początkowej części niniejszego punktu.

Oznaczmy przez $T_i(\omega)$ zespoloną funkcję testującą $T(\omega)$ stowarzyszoną z podobszarem D_i ($i = 1, 2, \dots, N$).

Twierdzenie 4.14. Niech quasi-wielomian nominalny $w_0(s, \mathbf{h})$ będzie D -stabilny.

1) Jeżeli

$$B_i(\omega) = \operatorname{Re} T_i(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \Omega_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.159)$$

to rodzina quasi-wielomianów (4.55) typu opóźnionego lub neutralnego o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna.

2) Jeżeli przynajmniej jeden z wykresów funkcji $T_i(\omega)$, $i = 1, 2, \dots, N$, ma ciągły kawałek, który przecina niedodatnią część osi rzeczywistej, to rodzina (4.55) przy zbiorze Q mającym postać (4.56) nie jest odpornie D -stabilna.

3) Największy zbiór dopuszczalnych odchyłek niepewnych parametrów, przy którym jest spełniony warunek (4.159), ma postać

$$\hat{Q} = \{q: q_k \in (\delta b_k, \delta c_k), \quad b_k \leq 0, \quad c_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, l\}, \quad (4.160)$$

gdzie

$$\delta = \min\{\delta_i, i = 1, 2, \dots, N\}, \quad (4.161)$$

$$\delta_i = 1 / (1 - \alpha_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.162)$$

$$\alpha_i = \min\{B_i(\omega) = \operatorname{Re} T_i(\omega): \omega \in \Omega_i\}, \quad (4.163)$$

przy czym minimum oblicza się dla funkcji testującej $T_i(\omega)$ wyznaczonej ze wzorów (4.120)-(4.122) przy $f(\omega) = f_i(\omega)$, $\omega \in \Omega_i$, dla zbioru Q mającego postać (4.56). ■

Oznaczmy przez $F_i(\omega)$ funkcję testującą $F(\omega)$ stowarzyszoną z i -tym podobszarem D_i ($i = 1, 2, \dots, N$).

Twierdzenie 4.15. Niech quasi-wielomian nominalny $w_0(s, \mathbf{h})$ będzie D -stabilny. Rodzina quasi-wielomianów (4.55) typu opóźnionego lub neutralnego o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$F_i(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \Omega_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.164)$$

gdzie $F_i(\omega)$ oblicza się ze wzorów

$$F_i(\omega) = \pi - \phi_i(\omega), \quad (4.165)$$

$$\phi_i(\omega) = \max_{r,k} \{|\arg \tilde{p}_r(f_i(\omega), \mathbf{h}) - \arg \tilde{p}_k(f_i(\omega), \mathbf{h})|\}, \quad (4.166)$$

przy czym $\tilde{p}_k(s, \mathbf{h}) = p_k(s, \mathbf{h}) / w_0(s, \mathbf{h})$ jest unormowanym quasi-wielomianem wierzchołkowym, maksimum liczy się uwzględniając wszystkie quasi-wielomiany krawędziowe (4.66), odpowiadające poszczególnym krawędziom (4.65) zbioru Q , zaś $\arg z \in [-\pi, \pi)$ jest głównym argumentem liczby zespolonej z . ■

Rozpatrzmy teraz problem badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów, w przypadku gdy obszar D składa się z kilku rozłącznych podobszarów D_i ($i = 1, 2, \dots, N$) i w obszarze D leżą wszystkie zera quasi-wielomianu nominalnego. W takim przypadku warunki wykluczenia zera (4.145) i (4.146) należy sprawdzać oddzielnie dla każdego podobszaru D_i , przyjmując w nich $f(\omega) = f_i(\omega)$ oraz $\omega \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Z powyższych rozważań i z punktu 4.4 wynika, że do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów można stosować metody funkcji testujących, podane w twierdzeniach 4.14 i 4.15, przy czym

- przy sprawdzaniu warunku dostatecznego (4.159) można ograniczyć się do rozpatrywania tylko funkcji testującej $B_i(\omega)$, stowarzyszonej z i -tym podobszarem D_i ($i = 1, 2, \dots, N$), którą dla ustalonego ω należy obliczać ze wzoru

$$B_i(\omega) = \min\{\operatorname{Re} \tilde{p}_k(f_i(\omega), \mathbf{h}), k = 1, 2, \dots, K\},$$

gdzie $\tilde{p}_k(s, \mathbf{h}) = p_k(s, \mathbf{h}) / w_0(s, \mathbf{h})$,

- w przypadku ogólnym warunek (4.164) jest tylko warunkiem dostatecznym odpornej D -stabilności, zaś funkcję (4.166) należy obliczać dla wszystkich wartości $r, k = 1, 2, \dots, K$, $r < k$.

Badanie odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo oraz wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów w przypadku obszarów D ogólniejszych niż przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna zilustrujemy trzema przykładami.

Przykład 4.10. Weźmy pod uwagę układ regulacji automatycznej o schemacie blokowym pokazanym na rysunku 3.3, gdzie

$$G(s, h, q) = \frac{(k_0 + q_1)e^{-sh}}{1 + s(T_0 + q_2)}, \quad q \in Q, \quad (4.167)$$

jest rodziną transmitancji operatorowych obiektu o niepewnych parametrach z opóźnieniem, przy czym $h = 0.5$, $k_0 = 1$, $T_0 = 0.2$, $q = [q_1, q_2]$,

$$Q = \{q: q_1 \in [-0.2, 0.2], q_2 \in [-0.04, 0.04]\}, \quad (4.168)$$

zaś

$$C(s) = K_r(1 + 1/sT_i + sT_d) \quad (4.169)$$

jest transmitancją operatorową regulatora typu PID, przy czym jego nastawy $K_r = 0.35$, $T_i = 0.32$, $T_d = 0.08$ zostały dobrane według kryterium stabilności aperiodycznej (w sposób podany w pracy [91]) dla nominalnego obiektu, tj. przy $q_1 = q_2 = 0$.

Rozpatrywany układ regulacji automatycznej z regulatorem typu PID przy nastawach dobranych według kryterium optymalnego modułu był analizowany w przykładzie 4.5.

Rodzina quasi-wielomianów charakterystycznych rozpatrywanego układu regulacji automatycznej typu neutralnego ma postać

$$w(s, h, q) = w_0(s, h) + q_1 w_1(s, h) + q_2 w_2(s, h), \quad q \in Q, \quad (4.170)$$

gdzie

$$w_0(s, h) = 0.064s^2 + 0.32s + 0.35(0.0256s^2 + 0.32s + 1)e^{-sh}, \quad (4.171)$$

$$w_1(s, h) = 0.35(0.0256s^2 + 0.32s + 1)e^{-sh}, \quad (4.172)$$

$$w_2(s, h) = 0.32s^2. \quad (4.173)$$

Obliczając w sposób opisany w punkcie 3.2.3 zera quasi-wielomianu nominalnego (4.171), leżące w obszarze $-6 \leq \operatorname{Re} s \leq 0$, $-45 \leq \operatorname{Im} s \leq 45$, otrzymamy:

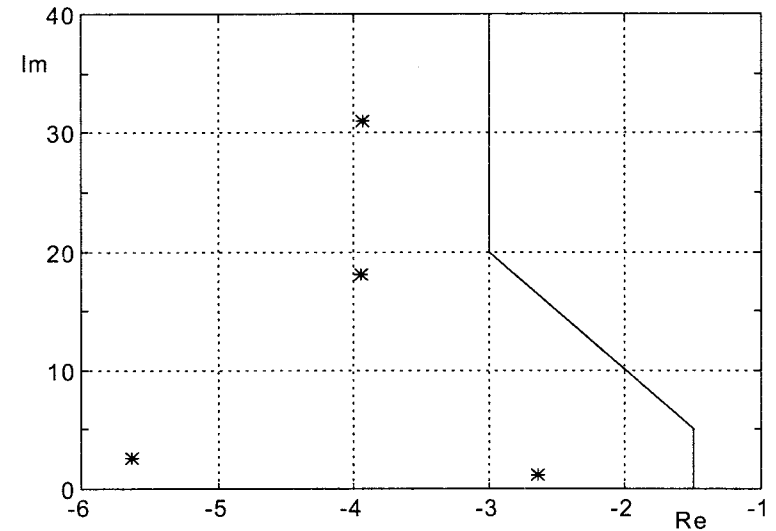
$$s_{1,2} \approx -2.6391 \pm j1.1160, \quad s_{3,4} \approx -5.6317 \pm j2.5780, \quad s_{5,6} \approx -3.9502 \pm j18.0269,$$

$$s_{7,8} \approx -3.9383 \pm j30.9329, \quad s_{9,10} \approx -3.9353 \pm j43.6392.$$

Z rozważań podanych w punkcie 2.2 wynika, że quasi-wielomian nominalny (4.171) ma łańcuchy zer asymptotycznych typu neutralnego, które przy $|s| \rightarrow \infty$ dążą do linii prostej $\operatorname{Re} s = -\ln|z|/h = -3.9322$, gdzie z jest zerem członu dominującego $\Delta(z) = 0.064 + 0.00896z$.

Z powyższego oraz z rozważań podanych w punkcie 3.2.3 wynika zatem, że dla rodziny quasi-wielomianów (4.170) można przyjąć, że D jest obszarem leżącym w otwartej lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej, którego brzeg ma opis parametryczny $f(\omega)$, $\omega \in \Omega = (-\infty, \infty)$, przy czym można ograniczyć się do przedziału $\Omega = [0, \infty)$, gdzie

$$f(\omega) = \begin{cases} -1.5 + j\omega / 0.3, & \omega \in [0, 1.5], \\ -\omega + j[10(\omega - 1.5) + 5], & \omega \in (1.5, 3], \\ -3 + j(17 + \omega), & \omega > 3. \end{cases} \quad (4.174)$$



Rys. 4.18. Brzeg obszaru D oraz kilka zer quasi-wielomianu nominalnego (4.171)

Brzeg obszaru D , opisany wzorem (4.174) przy $\Omega = [0, 28]$, oraz zera quasi-wielomianu nominalnego (4.171), leżące w pobliżu osi urojonej płaszczyzny zmiennej zespolonej, są pokazane na rysunku 4.18.

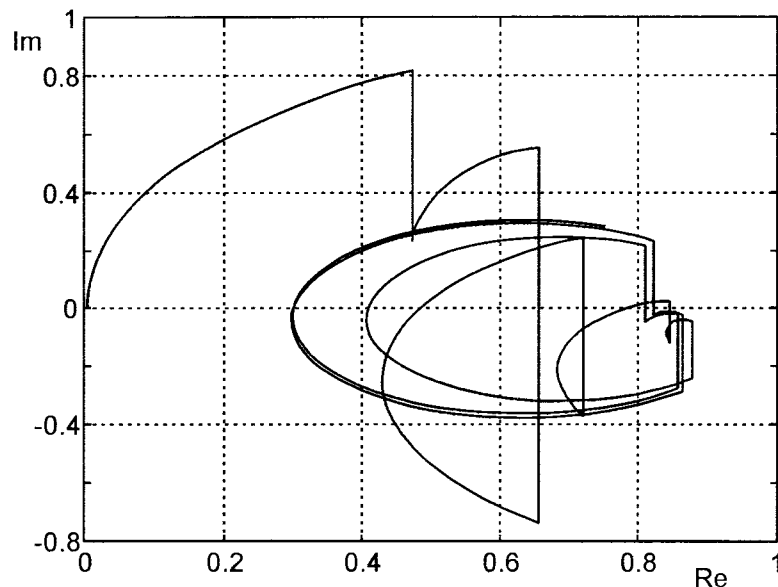
Do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.170) zastosujemy twierdzenie 4.14, w którym należy przyjąć $N = 1$.

Wyznaczając na podstawie wzorów (4.120)-(4.122), przy czym $f(\omega)$ ma postać (4.174), wartości zespolonej funkcji testującej $T(\omega)$ dla $\omega \in \Omega = [0, 28]$ otrzymamy, że $\alpha = \min\{\operatorname{Re} T(\omega) : \omega \in \Omega\} = \operatorname{Re} T(0) = -0.2438$. Oznacza to, zgodnie z twierdzeniem 4.14, że rodzina quasi-wielomianów (4.170) nie jest odpornie D -stabilna przy zbiorze Q mającym postać (4.168). Jest ona natomiast odpornie D -stabilna przy zbiorze Q mającym postać (4.160), gdzie, zgodnie ze wzorami (4.161) i (4.162), $\delta = 0.8040$.

Przyjmując $\delta = 0.8$ otrzymamy, że rodzina quasi-wielomianów (4.170) jest odpornie D -stabilna dla zbioru Q mającego postać

$$Q = \{q: q_1 \in [-0.16, 0.16], q_2 \in [-0.032, 0.032]\}. \quad (4.175)$$

Wykres zespolonej funkcji testującej $T(\omega)$, $\omega \in [0, 28]$, wyznaczony dla zbioru Q mającego postać (4.175) jest pokazany na rysunku 4.19. Rozpoczyna się on w punkcie $T(0) = 0.0050 + j0$.



Rys. 4.19. Wykres zespolonej funkcji testującej $T(\omega)$

Z rysunku 4.19 wynika, że warunek (4.159) jest spełniony. Oznacza to, zgodnie z twierdzeniem 4.14, że rodzina quasi-wielomianów (4.170) przy zbiorze Q mającym postać (4.175) jest odpornie D -stabilna. ■

Przykład 4.11. Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów charakterystycznych typu opóźnionego, rozpatrywaną w przykładzie 4.4, mającą postać

$$w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}) = w_0(s, \mathbf{h}) + q_1 w_1(s, \mathbf{h}) + q_2 w_2(s, \mathbf{h}), \quad \mathbf{q} \in Q, \quad (4.176)$$

gdzie

$$w_0(s, \mathbf{h}) = 1.964s^3 + 12.784s^2 + (33.005 + 3.57448e^{-sh_1} + 0.82488e^{-sh_2})s + 13.75 + 1.82e^{-sh_1} + 15.6885e^{-sh_2}, \quad (4.177)$$

$$w_1(s, \mathbf{h}) = s^3 + 6s^2 + (13.75 + 1.82e^{-sh_1} + 0.42e^{-sh_2})s, \quad (4.178)$$

$$w_2(s, \mathbf{h}) = -1305e^{-sh_2}, \quad (4.179)$$

przy czym $\mathbf{h} = [h_1, h_2]$, $h_1 = 0.165$, $h_2 = 0.33$, oraz $\mathbf{q} = [q_1, q_2]$, gdzie

$$Q = \{q: q_1 \in [-0.393, 0.393], q_2 \in [-0.0027, 0.0029]\}. \quad (4.180)$$

W przykładzie 4.4 wykazano, że rodzina quasi-wielomianów (4.176) jest odpornie D -stabilna w przypadku, gdy $D = \{s: \operatorname{Re} s < -1\}$.

Obliczając w sposób opisany w punkcie 3.2.3 zera quasi-wielomianu nominalnego (4.177), leżące w obszarze $-30 \leq \operatorname{Re} s \leq 0$, $-80 \leq \operatorname{Im} s \leq 80$, otrzymamy:

$$s_0 \approx -2.6571, \quad s_{1,2} \approx -1.9343 \pm j1.5021, \quad s_{3,4} \approx -24.6935 \pm j10.6057,$$

$$s_{5,6} \approx -25.3664 \pm j32.9950, \quad s_{7,8} \approx -27.7992 \pm j53.5970,$$

$$s_{9,10} \approx -29.0958 \pm j73.3492.$$

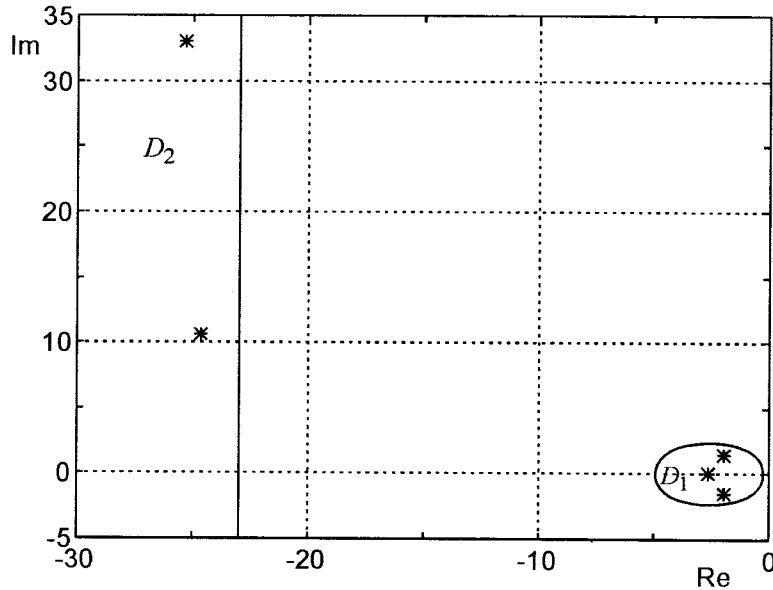
Quasi-wielomian nominalny (4.177) ma trzy dominujące zera: $s_0 \approx -2.6571$ oraz $s_{1,2} \approx -1.9343 \pm j1.5021$, leżące w pobliżu osi urojonej, natomiast wszystkie jego pozostałe zera leżą w lewej półpłaszczyźnie dalej od osi urojonej (istnieją łańcuchy zer asymptotycznych typu opóźnionego).

Uwzględniając rozważania podane w punkcie 3.2.3 przyjmijmy, że obszar D składa się z dwóch podobszarów: D_1 , będącego otwartym kołem o środku w punkcie $c_0 = -2.6 + j0$ i o promieniu $r = 2.35$, oraz D_2 , będącego przesuniętą otwartą

lewą półpłaszczyzną $\text{Re } s < -23$. W podobszarze D_1 leżą dominujące zera quasi-wielomianu nominalnego (4.177), natomiast w podobszarze D_2 leżą jego pozostałe zera.

Parametryczne opisy brzegów tych podobszarów mają odpowiednio postaci: $f_1(\omega) = -2.6 + 2.35 \exp(j\omega\pi)$, $\omega \in \Omega_1 = [-1, 1]$, oraz $f_2(\omega) = -23 + j\omega$, $\omega \in \Omega_2 = (-\infty, \infty)$.

Obszar $D = D_1 \cup D_2$ oraz zera quasi-wielomianu nominalnego (4.177), leżące w pobliżu osi urojonej płaszczyzny zmiennej zespolonej, są pokazane na rysunku 4.20.



Rys. 4.20. Obszar $D = D_1 \cup D_2$ oraz kilka zer quasi-wielomianu nominalnego (4.177)

Do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.176) zastosujemy twierdzenie 4.14.

Wyznaczając ze wzorów (4.120)-(4.122), odpowiednio przy $f(\omega) = f_1(\omega)$, $\omega \in \Omega_1 = [-1, 1]$, oraz $f(\omega) = f_2(\omega)$, $\omega \in \Omega_2 = [0, 40]$, zespolone funkcje testujące $T_1(\omega)$ i $T_2(\omega)$, stowarzyszone z podobszarami D_1 i D_2 , oraz obliczając ich minimalne części rzeczywiste, otrzymamy

$$\alpha_1 = \min\{\text{Re } T_1(\omega): \omega \in \Omega_1\} = 0.0140,$$

$$\alpha_2 = \min\{\text{Re } T_2(\omega): \omega \in \Omega_2\} = 0.1537.$$

Wykresy zespolonych funkcji testujących $T_1(\omega)$, $\omega \in \Omega_1 = [-1, 1]$, i $T_2(\omega)$, $\omega \in \Omega_2 = [0, 40]$, są pokazane na rysunkach 4.21 i 4.22, odpowiednio. Wykres zespolonej funkcji testującej $T_1(\omega)$ rozpoczyna się i kończy w punkcie $T_1(-1) = T_1(1) = 0.0821$ (brzeg podobszaru D_1 jest krzywą zamkniętą), natomiast wykres zespolonej funkcji testującej $T_2(\omega)$ rozpoczyna się w punkcie $T_2(0) = 0.3248$, a kończy się w punkcie $T_2(40) = 0.7945 + j0.0031$. Dla każdego $\omega > 40$ część rzeczywista funkcji $T_2(\omega)$ jest większa od $\alpha_2 = 0.1537$.

Z rysunków 4.21 i 4.22 oraz z powyższych rozważań wynika, że warunek dostateczny (4.159) jest spełniony. Oznacza to, zgodnie z twierdzeniem 4.14, że rodzina quasi-wielomianów (4.176) jest odpornie D -stabilna.

Każdy quasi-wielomian należący do rodziny (4.176) ma więc trzy dominujące zera, leżące w otwartym kole D_1 , natomiast wszystkie pozostałe zera, których jest nieskończenie wiele, mają części rzeczywiste mniejsze od -23. ■

Przykład 4.12. Weźmy pod uwagę układ regulacji automatycznej o schemacie blokowym pokazanym na rysunku 3.3, gdzie

$$G(s, h, q) = \frac{K \exp(-sh)}{(1 + s(T_{10} + q_1))(1 + s(T_{20} + q_2))}, \quad q \in Q, \quad (4.181)$$

jest rodziną transmitancji operatorowych obiektu o niepewnych parametrach z opóźnieniem, przy czym $K = 4$, $h = 0.6$, $T_{10} = 0.2$, $T_{20} = 1.2$, $q = [q_1, q_2]$,

$$Q = \{q: q_1 \in [-0.02, 0.02], q_2 \in [-0.2, 0.2]\}, \quad (4.182)$$

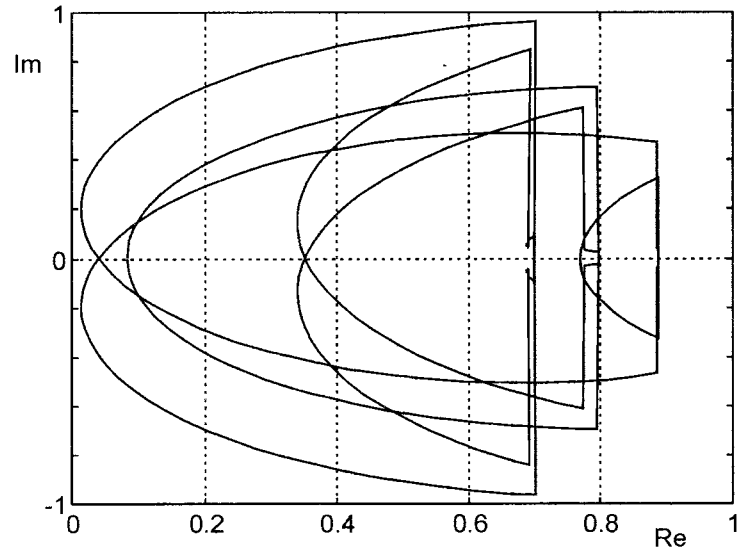
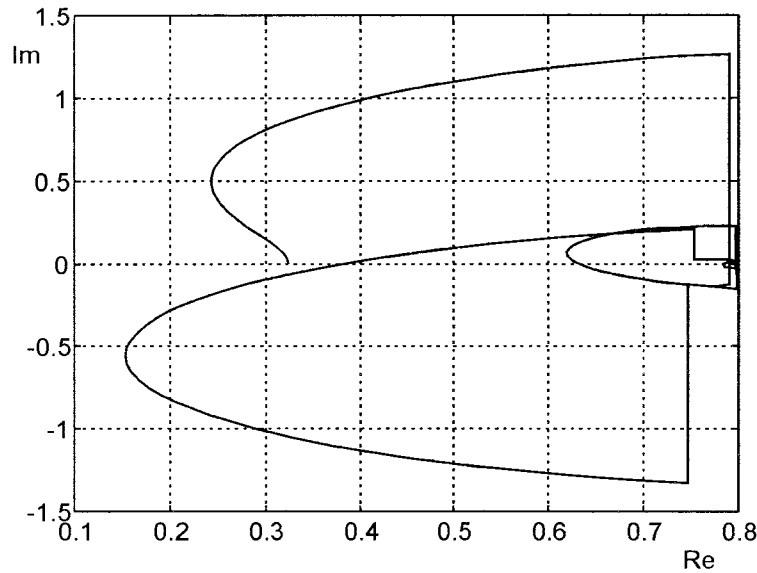
zaś

$$C(s) = K_r(1 + 1/sT_i) \quad (4.183)$$

jest transmitancją operatorową regulatora typu PI, przy czym $K_r = 3$, $T_i = 0.3$.

Rodzina quasi-wielomianów charakterystycznych rozpatrywanego układu regulacji automatycznej ma postać

$$w(s, h, q) = w_0(s, h) + 0.3q_1q_2s^3 + q_1(0.36s^3 + 0.3s^2) + q_2(0.06s^3 + 0.3s^2), \quad q \in Q, \quad (4.184)$$

Rys. 4.21. Wykres zespolonej funkcji testującej $T_1(\omega)$ stowarzyszonej z podoblastwem D_1 Rys. 4.22. Wykres zespolonej funkcji testującej $T_2(\omega)$ stowarzyszonej z podoblastwem D_2

gdzie

$$w_0(s, h) = 0.072s^3 + 0.42s^2 + 12(1 + 0.3s)e^{-0.6s} \quad (4.185)$$

jest quasi-wielomianem nominalnym.

Quasi-wielomian nominalny (4.185) ma następujące zera, leżące w pobliżu osi urojonej płaszczyzny zmiennej zespolonej (w obszarze $-7 \leq \operatorname{Re} s \leq 0$):

$$s_0 \approx -3.3702, \quad s_{1,2} \approx -1.3739 \pm j10.4154, \quad s_{3,4} \approx -3.6027 \pm j20.5667,$$

$$s_{5,6} \approx -4.9622 \pm j31.0205, \quad s_{7,8} \approx -5.9266 \pm j41.5149,$$

$$s_{9,10} \approx -6.6732 \pm j52.0141.$$

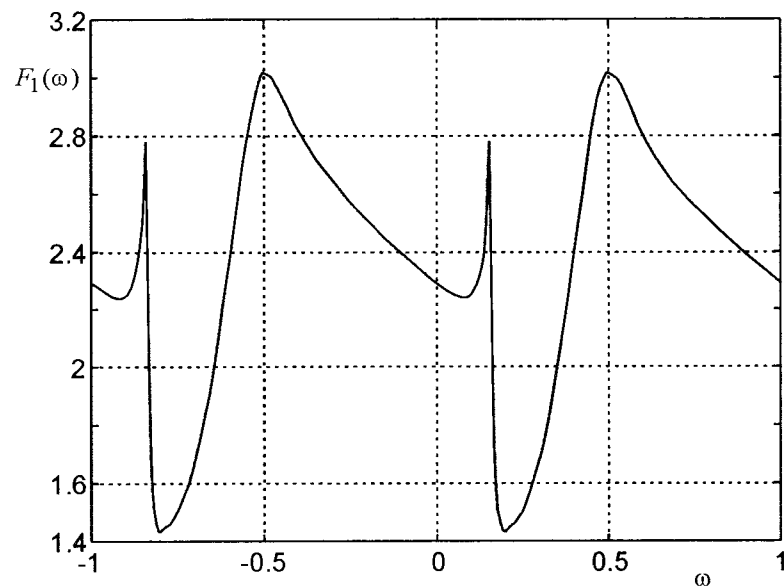
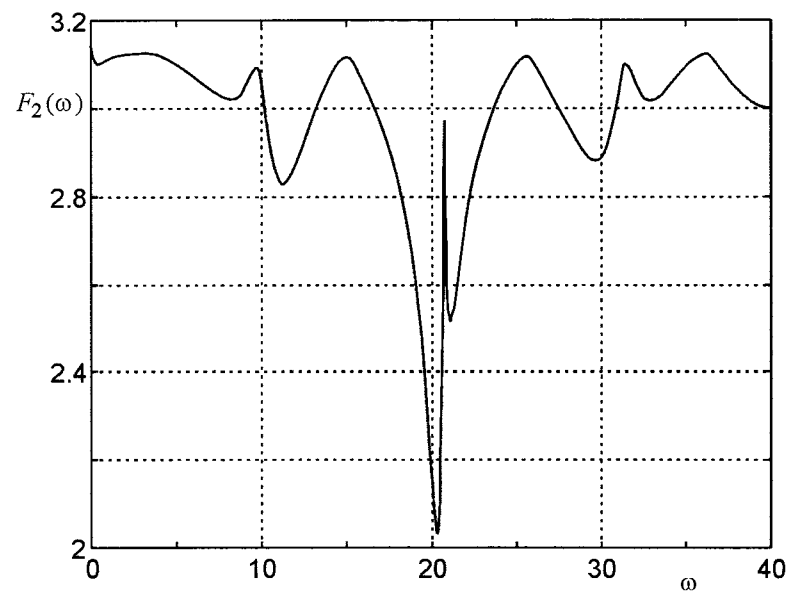
Z rozkładu tych zer i rozważań podanych w punkcie 3.2.3 wynika, że możemy badać odporną D -stabilność rodziny quasi-wielomianów (4.184) przy obszarze D , będącym sumą trzech podoblastw: dwóch otwartych kół o środkach $c_0 = -1.4 \pm j10$ i o promieniu $r = 0.8$ oraz przesuniętej otwartej lewej półpłaszczyzny $\operatorname{Re} s < -3$.

Ponieważ quasi-wielomian $w(s, h, q)$ ma rzeczywiste współczynniki, będziemy rozpatrywać obszar $D = D_1 \cup D_2$, gdzie D_1 jest otwartym kołem o środku w punkcie $c_0 = -1.4 + j10$ i o promieniu $r = 0.8$, zaś D_2 jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną $\operatorname{Re} s < -3$.

Parametryczne opisy brzegów podoblastw D_1 i D_2 mają odpowiednio postaci $f_1(\omega) = c_0 + r \exp(j\omega\pi)$, $\omega \in \Omega_1 = [-1, 1]$, oraz $f_2(\omega) = -3 + j\omega$, gdzie $\omega \in \Omega_2 = [0, \infty)$, przy czym możemy ograniczyć się do skończonego zbioru Ω_2 , np. $\Omega_2 = [0, 40]$.

Do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (4.184) zastosujemy twierdzenie 4.15 przy $N = 2$, uwzględniając rozważania podane poniżej tego twierdzenia.

Obliczając ze wzorów (4.165) i (4.166) (dla wszystkich $r, k = 1, 2, \dots, K = 4$, $r < k$) funkcje testujące $F_1(\omega)$, $\omega \in \Omega_1 = [-1, 1]$, i $F_2(\omega)$, $\omega \in [0, 40]$, stowarzyszone z podoblastwami D_1 i D_2 , otrzymamy wykresy pokazane na rysunkach 4.23 i 4.24, odpowiednio. Funkcja testująca $F_1(\omega)$ jest okresową funkcją parametru ω , bowiem brzeg obszaru D_1 jest krzywą zamkniętą, natomiast wartości funkcji testującej $F_2(\omega)$ dążą do π przy $\omega \rightarrow \infty$.

Rys. 4.23. Wykres funkcji testującej $F_1(\omega)$ stowarzyszonej z podobszarem D_1 Rys. 4.24. Wykres funkcji testującej $F_2(\omega)$ stowarzyszonej z podobszarem D_2

Ponieważ wartości funkcji testujących są dodatnie, rodzina quasi-wielomianów (4.184) jest odpornie D -stabilna, tzn. dla każdego ustalonego $q \in Q$ quasi-wielomian $w(s, h, q)$ mający postać jak w (4.184) ma w podobszarach D_1 i D_2 tyle samo zer co quasi-wielomian nominalny (4.185). ■

5. ODPORNA STABILNOŚĆ NIEZALEŻNIE OD WIELKOŚCI NIEWSPÓŁMIERNYCH OPÓŹNIEŃ RODZINY QUASI-WIELOMIANÓW

Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów charakterystycznych z niewspółmiernymi opóźnieniami, mającą postać

$$W(s, \mathbf{h}, Q) = \{w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}, \quad (5.1)$$

gdzie

$$w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}) = w_0(s, \mathbf{q}) + \sum_{i=1}^m w_i(s, \mathbf{q}) \exp(-sh_i), \quad (5.2)$$

przy czym $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_m]$, $h_i \geq 0$ dla $i = 0, 1, \dots, m$, $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_l]$ jest wektorem niepewnych fizycznych parametrów układu dynamicznego, zaś

$$w_i(s, \mathbf{q}) = \sum_{r=0}^n a_{ri}(\mathbf{q}) s^r, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (5.3)$$

są to wielomiany o niepewnych współczynnikach, przy czym $a_{n0}(\mathbf{q}) \neq 0$.

Zbiór wartości niepewnych parametrów ma postać

$$Q = \{\mathbf{q} : q_k \in [q_k^-, q_k^+], q_k^- < q_k^+, k = 1, 2, \dots, l\}. \quad (5.4)$$

Założmy, że współczynniki quasi-wielomianu (5.2) (a więc i wielomianów (5.3)) są ciągłymi funkcjami niepewnych parametrów, przy czym $a_{n0}(\mathbf{q}) > 0$ dla każdego $\mathbf{q} \in Q$. Przy tym założeniu rodzina quasi-wielomianów (5.1) jest rodziną typu opóźnionego lub neutralnego.

Rodzinę quasi-wielomianów (5.1) nazywamy rodziną odpornie stabilną niezależnie od wielkości opóźnień, jeżeli każdy quasi-wielomian należący do tej rodziny jest asymptotycznie stabilny niezależnie od wielkości opóźnień, tzn. warunek

$$w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad \forall h_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.5)$$

jest spełniony dla każdego $\mathbf{q} \in Q$.

Niech

$$W_0(s, Q) = \{w_0(s, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}, \quad (5.6)$$

gdzie wielomian $w_0(s, \mathbf{q})$ ma postać (5.3) przy $i = 0$, będzie rodziną wielomianów, do której redukuje się rodzina quasi-wielomianów (5.1), w przypadku gdy wszystkie $h_i \rightarrow \infty$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Jeżeli $h_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, rodzina quasi-wielomianów (5.1) redukuje się do rodziny wielomianów

$$W(s, Q) = \{w(s, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}, \quad (5.7)$$

gdzie

$$w(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^m w_i(s, \mathbf{q}) = \sum_{r=0}^n c_r(\mathbf{q}) s^r, \quad (5.8)$$

przy czym

$$c_r(\mathbf{q}) = \sum_{i=0}^m a_{ri}(\mathbf{q}), \quad r = 0, 1, \dots, n. \quad (5.9)$$

Wprowadźmy dla rodziny quasi-wielomianów (5.1) funkcję testującą $\Phi(\omega)$, zdefiniowaną dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ wzorem

$$\Phi(\omega) = 1 - \max_{\mathbf{q} \in Q} \frac{\sum_{i=1}^m |w_i(j\omega, \mathbf{q})|}{|w_0(j\omega, \mathbf{q})|}, \quad (5.10)$$

przy czym

$$\Phi_0 = \Phi(0) = 1 - \max_{\mathbf{q} \in Q} \frac{\sum_{i=1}^m |a_{0i}(\mathbf{q})|}{|a_{00}(\mathbf{q})|}, \quad (5.11)$$

$$\Phi_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Phi(\omega) = 1 - \max_{\mathbf{q} \in Q} \frac{\sum_{i=1}^m |a_{ni}(\mathbf{q})|}{|a_{n0}(\mathbf{q})|}, \quad (5.12)$$

są to, odpowiednio, wartość początkowa oraz wartość końcowa tej funkcji.

Wykorzystując twierdzenie 2.8 udowodnimy poniższe kryterium odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień.

Twierdzenie 5.1. Rodzina quasi-wielomianów (5.1) jest odpornie stabilna niezależnie od wielkości opóźnień wtedy i tylko wtedy, gdy

- 1) rodzina wielomianów (5.6) jest odpornie stabilna, tzn. każdy wielomian należący do tej rodziny ma tylko zera o ujemnych częściach rzeczywistych,
- 2) jest spełniony warunek

$$\Phi_{\infty} > 0, \quad (5.13)$$

- 3) $\Phi_0 \geq 0$, przy czym, jeżeli $\Phi_0 = 0$, to rodzina wielomianów (5.7) jest odpornie stabilna,

$$4) \quad \Phi(\omega) > 0 \text{ dla każdego skończonego } \omega > 0. \quad (5.14)$$

Dowód. Aby rodzina quasi-wielomianów (5.1) była odpornie stabilna niezależnie od wielkości opóźnień, potrzeba i wystarcza, aby warunki podane w twierdzeniu 2.8 były spełnione dla każdego quasi-wielomianu należącego do tej rodziny.

Warunek 1) twierdzenia 2.8 jest spełniony dla każdego wielomianu należącego do rodziny (5.6) wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona odpornie stabilna, czyli gdy jest spełniony warunek 1) twierdzenia 5.1. Podobnie, każdy wielomian $w(s, \mathbf{q})$ należący do rodziny (5.7) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona odpornie stabilna, czyli gdy jest spełniony warunek podany w końcowej części punktu 3) twierdzenia 5.1.

Funkcja testująca (5.10) została tak zdefiniowana, że dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ przyjmuje ona wartość najmniejszą ze zbioru $\Phi(\omega, \mathcal{Q}) = \{\Phi(\omega, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in \mathcal{Q}\}$, gdzie

$$\Phi(\omega, \mathbf{q}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m |w_i(j\omega, \mathbf{q})|}{|w_0(j\omega, \mathbf{q})|}. \quad (5.15)$$

Warunki twierdzenia 2.8 są więc spełnione dla każdego ustalonego quasi-wielomianu (5.2) należącego do rodziny (5.1) wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione podane powyżej warunki 1)-4). ■

Badanie na podstawie twierdzenia 5.1 odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień rodziny (5.1) jest dosyć trudne w przypadku ogólnym. Wymaga ono bowiem stosowania odpowiednich metod optymalizacyjnych przy wyznaczaniu funkcji testującej $\Phi(\omega)$ na podstawie wzoru (5.10) (dla każdego ustalonego ω).

Trudnym problemem jest też badanie odpornej stabilności rodzin wielomianów (5.6) i (5.7) w przypadku ogólnym. Stopień trudności zależy w sposób istotny od charakteru zależności współczynników wielomianu od niepewnych parametrów. Dotychczas istnieją metody i skończone algorytmy, pozwalające badać odporną stabilność rodziny zwanej wielomianem przedziałowym oraz rodzin wielomianów o współczynnikach zależnych od niepewnych parametrów liniowo lub wieloliniowo [52]. Dlatego też w dalszych rozważaniach ograniczymy się do podania komputerowych metod służących do badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianu przedziałowego oraz rodzin quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych od niepewnych parametrów liniowo oraz wieloliniowo.

5.1. Odporna stabilność niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianów przedziałowych

Podobnie jak w przypadku wielomianów, quasi-wielomianem przedziałowym będziemy nazywać taką rodzinę quasi-wielomianów, których każdy współczynnik zależy tylko od jednego niepewnego parametru i to innego. Wobec tego, quasi-wielomian przedziałowy można traktować jako rodzinę quasi-wielomianów, w których niepewnymi parametrami są poszczególne współczynniki.

Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów, zwaną quasi-wielomianem przedziałowym, o postaci

$$W(s, \mathbf{h}, A, B) = W_0(s, A) + \sum_{i=1}^m W_i(s, B_i) \exp(-sh_i), \quad (5.16)$$

gdzie $h_i \geq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, m$, $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_m]$, zaś wielomiany przedziałowe $W_0(s, A)$ i $W_i(s, B_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) są zdefiniowane następująco

$$W_0(s, A) = \{w_0(s, \mathbf{a}) : \mathbf{a} \in A\}, \quad (5.17)$$

przy czym $\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_n]$,

$$w_0(s, \mathbf{a}) = \sum_{k=0}^n a_k s^k, \quad (5.18)$$

$$A = \{\mathbf{a} : a_k \in [a_k^-, a_k^+], \quad a_k^- \leq a_k^+, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad a_n^- > 0\}, \quad (5.19)$$

oraz

$$W_i(s, B_i) = \{w_i(s, \mathbf{b}_i) : \mathbf{b}_i \in B_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.20)$$

przy czym $\mathbf{b}_i = [b_{0i}, \dots, b_{ni}]$,

$$w_i(s, \mathbf{b}_i) = \sum_{k=0}^n b_{ki} s^k, \quad (5.21)$$

$$B_i = \{\mathbf{b}_i : b_{ki} \in [b_{ki}^-, b_{ki}^+], \quad b_{ki}^- \leq b_{ki}^+, \quad k = 0, 1, \dots, n\}, \quad (5.22)$$

zaś $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_m$.

Dowolny quasi-wielomian należący do rodziny (5.16) ma postać

$$w(s, \mathbf{h}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = w_0(s, \mathbf{a}) + \sum_{i=1}^m w_i(s, \mathbf{b}_i) \exp(-sh_i), \quad (5.23)$$

gdzie $\mathbf{b} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m]$.

Quasi-wielomian przedziałowy (5.16) jest odpornie stabilny niezależnie od wielkości opóźnień, jeżeli jest on asymptotycznie stabilny dla wszystkich $h_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, i dla wszystkich wartości współczynników a_k ($k = 0, 1, \dots, n$) i b_{ki} ($k = 0, 1, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, m$) z zadanych przedziałów.

Oznaczmy przez $w_0^{(k)}(s)$, $k = 1, \dots, 4$, oraz przez $w_i^{(r)}(s)$, $r = 1, \dots, 4$, wielomiany Charitonowa stowarzyszone z wielomianami przedziałowymi (5.17) i (5.20), odpowiednio. Wyznacza się je w sposób podany w Dodatku A.

Ponadto, przez

$$w^{(k, r(i))}(s, \mathbf{h}) = w_0^{(k)}(s) + \sum_{i=1}^m w_i^{(r(i))}(s) \exp(-sh_i), \quad (5.24)$$

gdzie $k = 1, \dots, 4$, oraz $r(i) = 1, \dots, 4$ dla $i = 1, 2, \dots, m$, oznaczmy zbiór 4^{m+1} quasi-wielomianów stowarzyszonych z quasi-wielomianem przedziałowym (5.16). W dalszych rozważaniach będziemy je nazywać quasi-wielomianami Charitonowa.

Wprowadźmy oznaczenia

$$\beta_{ni} = \max(|b_{ni}^-|, |b_{ni}^+|), \quad \beta_{0i} = \max(|b_{0i}^-|, |b_{0i}^+|), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.25)$$

$$\alpha_n = \min(a_n^-, a_n^+), \quad \alpha_0 = \min(|a_0^-|, |a_0^+|). \quad (5.26)$$

Zauważmy, że $a_n^- > 0$, zgodnie z (5.19). Przy założeniu $a_n^- > 0$ quasi-wielomian przedziałowy (5.16) jest quasi-wielomianem typu opóźnionego lub neutralnego.

Problem badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianu przedziałowego (5.16) przy $a_n = 1$ w (5.18) był rozpatrywany w pracy [110]. Podane w niej kryterium takiego rodzaju stabilności bazuje na warunku tzw. absolutnej asymptotycznej stabilności, który został sformułowany w [170] dla quasi-wielomianu o znanych współczynnikach. Kryterium absolutnej asymptotycznej stabilności jest równoważne z warunkiem dostatecznym asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień, podanym w lemacie 2.5.

Rezultat pracy [110] został w [142, 143] uzupełniony w ten sposób, że powstał warunek konieczny i wystarczający odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianu przedziałowego (5.16).

Uogólniając podany w [143] warunek na klasę quasi-wielomianów przedziałowych (5.16), tj. przy $a_n \neq 1$ w (5.18), otrzymamy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 5.2 [143]. Quasi-wielomian przedziałowy (5.16) jest odpornie stabilny niezależnie od wielkości opóźnień wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{i=1}^m \beta_{ni} < \alpha_n, \quad \sum_{i=1}^m \beta_{0i} \leq \alpha_0, \quad (5.27)$$

i każdy z 4^{m+1} quasi-wielomianów Charitonowa (5.24) jest stabilny niezależnie od wielkości opóźnień. ■

Stosowanie twierdzenia 5.2 wymaga oddzielnego badania (np. na bazie twierdzenia 2.8 lub lematu 2.5) stabilności niezależnie od wielkości opóźnień każdego z 4^{m+1} quasi-wielomianów Charitonowa mających postać (5.24). Jest to trudny problem w przypadku dużej liczby m opóźnień. Jeżeli na przykład $m = 5$, to liczba quasi-wielomianów (5.24), których stabilność należy badać, wynosi 4096.

Poniżej, wykorzystując rezultaty prac [39, 53], podamy prostszą komputerową metodę, tzw. metodę funkcji testującej, badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień rodziny (5.16). Zostanie ona sformułowana na bazie twierdzenia 5.1.

Jeżeli $h_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, to quasi-wielomian przedziałowy (5.16) redukuje się do wielomianu przedziałowego

$$W(s, C) = \{w(s, \mathbf{c}) : \mathbf{c} \in C\}, \quad (5.28)$$

gdzie

$$w(s, c) = w_0(s, a) + \sum_{i=1}^m w_i(s, b_i) = \sum_{k=0}^n c_k s^k, \quad (5.29)$$

przy czym $c = [c_0, \dots, c_n]$,

$$c_k = a_k + \sum_{i=1}^m b_{ki}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (5.30)$$

$$C = \{c : c_k \in [c_k^-, c_k^+], \quad c_k^- \leq c_k^+, \quad k = 0, 1, \dots, n\}, \quad (5.31)$$

gdzie, zgodnie z arytmetyką przedziałową (np. [20]),

$$c_k^- = a_k^- + \sum_{i=1}^m b_{ki}^-, \quad c_k^+ = a_k^+ + \sum_{i=1}^m b_{ki}^+. \quad (5.32)$$

Oznaczmy przez $w_c^{(k)}(s)$, $k = 1, \dots, 4$, wielomiany Charitonowa stowarzyszone z wielomianem przedziałowym (5.28). Wyznacza się je w sposób podany w Dodatku A.

Dla quasi-wielomianu przedziałowego (5.16) funkcja testująca $\Phi(\omega)$, zdefiniowana wzorem (5.10), ma postać

$$\Phi(\omega) = 1 - n(\omega) / d(\omega), \quad (5.33)$$

gdzie

$$n(\omega) = \sum_{i=1}^m n_i(\omega), \quad (5.34)$$

$$n_i(\omega) = \max_{b_i \in B_i} |w_i(j\omega, b_i)|, \quad (5.35)$$

$$d(\omega) = \min_{a \in A} |w_0(j\omega, a)|. \quad (5.36)$$

przy czym, gdy uwzględnimy oznaczenia (5.25) i (5.26),

$$\Phi_0 = 1 - \sum_{i=1}^m \beta_{0i} / \alpha_0, \quad \Phi_\infty = 1 - \sum_{i=1}^m \beta_{ni} / \alpha_n. \quad (5.37)$$

Z twierdzenia 5.1, zastosowanego do rodziny quasi-wielomianów (5.16), wynika poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 5.3. Quasi-wielomian przedziałowy (5.16) jest odpornie stabilny niezależnie od wielkości opóźnień wtedy i tylko wtedy, gdy

- 1) wielomiany Charitonowa $w_0^{(k)}(s)$, $k = 1, \dots, 4$, stowarzyszone z wielomianem przedziałowym (5.17), są asymptotycznie stabilne,
- 2) jest spełniony warunek

$$\Phi_\infty > 0, \quad (5.38)$$

- 3) $\Phi_0 \geq 0$, przy czym, jeżeli $\Phi_0 = 0$, to wielomiany Charitonowa $w_c^{(k)}(s)$, $k = 1, \dots, 4$, stowarzyszone z wielomianem przedziałowym (5.28), są asymptotycznie stabilne,
- 4)

$$\Phi(\omega) > 0 \text{ dla każdego skończonego } \omega > 0. \quad (5.39)$$

Dowód. Quasi-wielomian przedziałowy jest przypadkiem szczególnym rodziny quasi-wielomianów (5.1). Dowód wynika więc z twierdzenia 5.1, zastosowanego do rodziny quasi-wielomianów (5.16), oraz stąd (patrz Dodatek A), że rodzina wielomianów przedziałowych jest odpornie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy są asymptotycznie stabilne cztery wielomiany Charitonowa stowarzyszone z tą rodziną. ■

Pierwotna wersja twierdzenia 5.3 została podana w pracy [53], przy czym błędnie pominięto w niej konieczność badania odpornej stabilności wielomianu przedziałowego (5.28) w przypadku, gdy $\Phi_0 = 0$.

Podamy teraz komputerową metodę wyznaczania funkcji testującej $\Phi(\omega)$, zdefiniowanej wzorami (5.33)-(5.36).

Zgodnie z Dodatkiem A, dla dowolnego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiór wartości $w_i(j\omega, B_i)$ wielomianu przedziałowego $W_i(s, B_i)$ jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych i o wierzchołkach $w_i^{(r)}(j\omega)$, $r = 1, \dots, 4$. Dlatego

$$n_i(\omega) = \max_{b_i \in B_i} |w_i(j\omega, b_i)| = \max\{|w_i^{(r)}(j\omega)|, \quad r = 1, \dots, 4\}, \quad (5.40)$$

oraz

$$n(\omega) = \sum_{i=1}^m \max\{|w_i^{(r)}(j\omega)|, \quad r = 1, \dots, 4\}. \quad (5.41)$$

Dla dowolnego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiór wartości $w_0(j\omega, A)$ wielomianu przedziałowego $W_0(s, A)$ jest prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych płaszczyzny zmiennej zespolonej i o wierzchołkach $w_0^{(r)}(j\omega)$, $r = 1, \dots, 4$. Ponadto, jeżeli jest spełniony warunek 1) twierdzenia 5.3, to $0 \notin w_0(j\omega, A)$ dla każdego $\omega \geq 0$. Wobec tego $d(\omega)$, zdefiniowane wzorem (5.36), jest odległością prostokąta $w_0(j\omega, A)$ od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Wprowadźmy oznaczenia

$$u_k(\omega) = \operatorname{Re} w_0^{(k)}(j\omega), \quad v_k(\omega) = \operatorname{Im} w_0^{(k)}(j\omega), \quad k = 1, \dots, 4, \quad (5.42)$$

gdzie wielomiany Charitonowa $w_0^{(k)}(s)$, $k = 1, \dots, 4$, zostały wyznaczone w sposób podany w Dodatku A z zachowaniem podanej tam numeracji.

Z powyższych rozważań i Dodatku A wynika następujący lemat.

Lemat 5.1. Wielkość $d(\omega)$, zdefiniowana wzorem (5.36), dla dowolnego ustalonego $\omega \geq 0$ może być obliczona według poniższego algorytmu

$$\text{jeżeli } u_1(\omega)u_2(\omega) \leq 0, \text{ to } d(\omega) = \min(|v_1(\omega)|, |v_2(\omega)|),$$

$$\text{jeżeli } v_1(\omega)v_2(\omega) \leq 0, \text{ to } d(\omega) = \min(|u_1(\omega)|, |u_2(\omega)|),$$

w przeciwnym przypadku

$$d(\omega) = \min\{|w_0^{(k)}(j\omega)|, k = 1, \dots, 4\}. \quad \blacksquare$$

Z twierdzenia 5.3 i lematu 5.1 wynika prosta komputerowa metoda, zwana metodą funkcji testującej $\Phi(\omega)$, służąca do badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianu przedziałowego (5.16). Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ przy wyznaczaniu funkcji testującej $\Phi(\omega)$ ze wzorów (5.33)–(5.36) i algorytmu podanego w lemacie 5.1 korzysta się ze znajomości wielomianów Charitonowa stowarzyszonych z wielomianem przedziałowym (5.17) oraz wielomianów Charitonowa stowarzyszonych z każdym z wielomianów przedziałowych (5.20).

Na bazie znajomości wymienionych powyżej wielomianów Charitonowa tworzy się też quasi-wielomiany Charitonowa (5.24), stowarzyszone z quasi-wielomianem przedziałowym (5.16). Z powyższego i z twierdzenia 5.2 wynika więc, że możliwe jest zaproponowanie innej funkcji testującej, na podstawie której można

będzie jednocześnie badać stabilność niezależnie od wielkości opóźnień wszystkich quasi-wielomianów Charitonowa (5.24), których jest 4^{m+1} .

Wprowadźmy nową funkcję testującą $\Phi_1(\omega)$, zdefiniowaną wzorem

$$\Phi_1(\omega) = 1 - n(\omega) / d_1(\omega), \quad (5.43)$$

gdzie $n(\omega)$ oblicza się ze wzoru (5.41), zaś

$$d_1(\omega) = \min\{|w_0^{(k)}(j\omega)|, k = 1, \dots, 4\}. \quad (5.44)$$

Uwzględniając oznaczenia (5.25) i (5.26) łatwo sprawdzić, że

$$\Phi_{10} = 1 - \sum_{i=1}^m \beta_{0i} / \alpha_0, \quad \Phi_{1\infty} = 1 - \sum_{i=1}^m \beta_{ni} / \alpha_n. \quad (5.45)$$

Z porównania wzorów (5.37) i (5.45) wynika, że $\Phi_{10} = \Phi_0$ oraz $\Phi_{1\infty} = \Phi_\infty$.

Zauważmy, że $d_1(\omega)$ oblicza się ze wzoru (5.44) przy wyznaczaniu funkcji testującej $\Phi_1(\omega)$, natomiast przy wyznaczaniu funkcji testującej $\Phi(\omega)$ odległość $d(\omega)$ oblicza się według algorytmu podanego w lemacie 5.1. Łatwo zauważyć, że $\Phi_1(\omega) > \Phi(\omega)$ dla tych wartości parametru $\omega > 0$, dla których prostokąt $w_0(j\omega, A)$ przecina osie płaszczyzny zmiennej zespolonej, zaś $\Phi_1(\omega) = \Phi(\omega)$ dla pozostałych wartości $\omega \geq 0$.

Ponadto,

$$\min_{\omega \geq 0} \Phi(\omega) = \min_{\omega \geq 0} \Phi_1(\omega), \quad (5.46)$$

ponieważ funkcja $n(\omega) / d(\omega)$, gdzie $n(\omega)$ i $d(\omega)$ są zdefiniowane wzorami (5.34), (5.35) i (5.36), odpowiednio, osiąga wartość maksymalną w jednym ze zbiorów wielomianów Charitonowa $w_0^{(k)}(s)$, $k = 1, \dots, 4$, i $w_i^{(r(i))}(s)$, $r(i) = 1, \dots, 4$, $i = 1, 2, \dots, m$ [110].

Lemat 5.2. Przy badaniu na podstawie twierdzenia 5.3 odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianu przedziałowego (5.16) możemy zamiast funkcji testującej $\Phi(\omega)$, zdefiniowanej wzorami (5.33)–(5.36), równoważnie rozpatrywać funkcję testującą $\Phi_1(\omega)$, zdefiniowaną wzorami (5.43), (5.41) i (5.44).

Dowód. Dowód wynika z definicji funkcji testującej $\Phi_1(\omega)$ i powyższych rozważań. ■

Z powyższych rozważań oraz twierdzenia 5.3 i lematu 5.2 wynika następujący algorytm badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianu przedziałowego (5.16).

Algorytm 5.1:

Krok 1. W sposób podany w Dodatku A utwórz cztery wielomiany Charitonowa $w_0^{(k)}(s)$, $k = 1, \dots, 4$, stowarzyszone z wielomianem przedziałowym (5.17) i sprawdź ich asymptotyczną stabilność (stosując np. twierdzenie Hurwitza). Jeżeli są one asymptotycznie stabilne, idź do Kroku 2. W przeciwnym wypadku quasi-wielomian przedziałowy (5.16) nie jest odporne stabilny niezależnie od wielkości opóźnień.

Krok 2. Oblicz wartość końcową Φ_∞ funkcji testującej $\Phi(\omega)$ (lub $\Phi_1(\omega)$) ze wzoru podanego w (5.37) i sprawdź spełnienie warunku (5.38). Jeżeli jest on spełniony, idź do Kroku 3. Jeżeli zaś nie jest on spełniony, quasi-wielomian przedziałowy (5.16) nie jest odporne stabilny niezależnie od wielkości opóźnień.

Krok 3. Oblicz β_{ni} , β_{0i} ($i = 1, 2, \dots, m$) oraz α_n i α_0 ze wzorów (5.25) i (5.26), odpowiednio. Z pierwszego ze wzorów (5.37) oblicz wartość początkową Φ_0 funkcji testującej $\Phi(\omega)$ (lub $\Phi_1(\omega)$) i sprawdź spełnienie warunku $\Phi_0 \geq 0$. Jeżeli jest on spełniony, idź do Kroku 4. Jeżeli nie jest on spełniony, quasi-wielomian przedziałowy (5.16) nie jest odporne stabilny niezależnie od wielkości opóźnień.

Krok 4. Jeżeli $\Phi_0 > 0$, idź do Kroku 5. Jeżeli $\Phi_0 = 0$, utwórz wielomiany Charitonowa $w_c^{(k)}(s)$, $k = 1, \dots, 4$, stowarzyszone z wielomianem przedziałowym (5.28) i sprawdź ich asymptotyczną stabilność. Jeżeli są one asymptotycznie stabilne, idź do Kroku 5. W przeciwnym wypadku quasi-wielomian przedziałowy (5.16) nie jest odporne stabilny niezależnie od wielkości opóźnień.

Krok 5. Utwórz wielomiany Charitonowa $w_i^{(r(i))}(s)$, $r(i) = 1, \dots, 4$, stowarzyszone z wielomianami przedziałowymi $W_i(s, B_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Krok 6. Stosując wzory (5.33), (5.41) i algorytm podany w lemacie 5.1 wyznacz przebieg funkcji testującej $\Phi(\omega)$ dla $\omega > 0$, przyjmując odpowiednio mały krok $\Delta\omega$. Ponieważ $\Phi(\omega) \rightarrow \Phi_\infty$ przy $\omega \rightarrow \infty$, wyznaczanie funkcji testującej można przerwać w chwili, gdy obliczone wartości $\Phi(\omega)$ są bliskie Φ_∞ i dążą asympto-

tycznie do granicy Φ_∞ . Podobnie, na bazie wzorów (5.43), (5.41) i (5.44), można wyznaczyć przebieg funkcji testującej $\Phi_1(\omega)$.

Krok 7. Sprawdź, czy warunek (5.39) jest spełniony dla funkcji testującej $\Phi(\omega)$ (lub $\Phi_1(\omega)$). Jeżeli jest on spełniony, quasi-wielomian przedziałowy (5.16) jest odporne stabilny niezależnie od wielkości opóźnień. W przeciwnym wypadku nie jest on odporne stabilny niezależnie od wielkości opóźnień. ■

Przykład 5.1. Należy zbadać odporną stabilność niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianu przedziałowego

$$w(s, \mathbf{h}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = w_0(s, \mathbf{a}) + \sum_{i=1}^3 w_i(s, \mathbf{b}_i) \exp(-sh_i), \quad (5.47)$$

gdzie

$$w_0(s, \mathbf{a}) = \sum_{k=0}^3 a_k s^k, \quad (5.48)$$

przy czym $a_0 \in [7, 17]$, $a_1 \in [10, 23]$, $a_2 \in [5, 12]$, $a_3 = 1$, oraz

$$w_i(s, \mathbf{b}_i) = \sum_{k=0}^3 b_{ki} s^k, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.49)$$

gdzie $b_{01} = 0$, $b_{02} \in [-2, 2]$, $b_{03} \in [-0.1, 0.7]$, $b_{11} \in [-0.3, 0.3]$, $b_{12} \in [0.1, 0.2]$, $b_{13} \in [-0.4, 0.4]$, $b_{21} \in [-0.2, 0.2]$, $b_{22} \in [-0.4, 0.4]$, $b_{23} \in [-0.5, 0.5]$, $b_{31} \in [-0.3, 0.3]$, $b_{32} \in [0, 0.2]$, $b_{33} = 0$.

Sprawdzając odporną stabilność niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianu przedziałowego (5.47) według Algorytmu 5.1, otrzymamy:

Krok 1. Wielomiany Charitonowa $w_0^{(k)}(s)$, $k = 1, \dots, 4$, są asymptotycznie stabilne.

Krok 2. $\Phi_\infty = \Phi_{1\infty} = 0.5 > 0$.

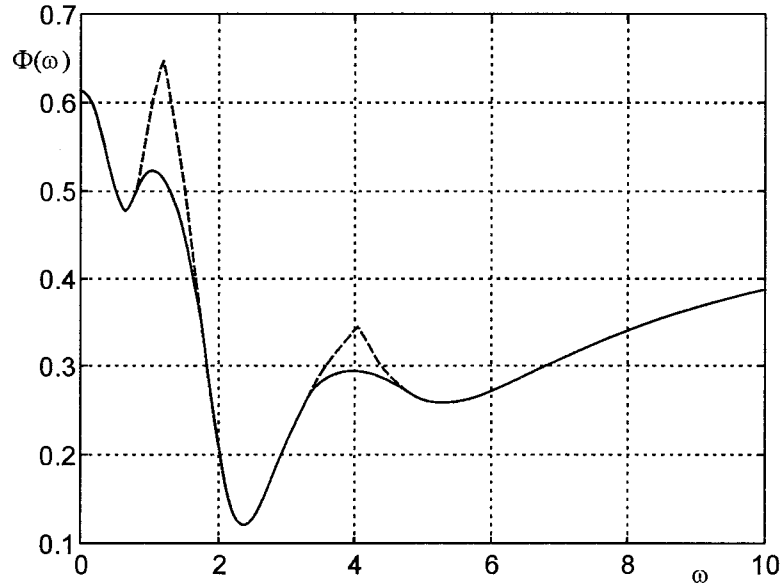
Krok 3. $\Phi_0 = \Phi_{10} = 0.6143 > 0$.

Krok 4. Ponieważ $\Phi_0 > 0$, przechodzimy do Kroku 5.

Krok 5, 6. Wykresy funkcji testujących $\Phi(\omega)$ i $\Phi_1(\omega)$, wyznaczone dla ω zmieniającego się od 0 do 10 ze zmiennym krokiem, są pokazane na rysunku 5.1. Dla

$\omega > 10$ wykresy tych funkcji dążą asymptotycznie do wartości końcowej $\Phi_\infty = \Phi_{1\infty} = 0.5$.

Krok 7. Z rysunku 5.1 wynika, że warunek (5.39) jest spełniony, przy czym $\min_{\omega \geq 0} \Phi(\omega) = \min_{\omega \geq 0} \Phi_1(\omega) = 0.1204 > 0$. Oznacza to, że quasi-wielomian przedziałowy (5.47) jest odpornie stabilny niezależnie od wielkości opóźnień.



Rys. 5.1. Wykresy funkcji testujących: $\Phi(\omega)$ (linia ciągła) i $\Phi_1(\omega)$ (linia przerywana)

Zauważmy, że stosując twierdzenie 5.2 do badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianu przedziałowego (5.47) należy badać (na podstawie twierdzenia 2.8) odporną stabilność niezależnie od wielkości opóźnień $4^{m+1} = 4^4 = 256$ quasi-wielomianów Charitonowa. ■

5.2. Odporna stabilność niezależnie od wielkości opóźnień rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów

Wykorzystując rezultaty pracy [47] rozpatrzmy problem badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości niewspółmiernych opóźnień rodziny quasi-wielomianów (5.1) o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów w przypadku, gdy współczynniki poszczególnych wielomianów (5.3) nie zależą od tych samych niepewnych parametrów. Dla prostoty rozważań, nie zmniejszając ich ogólności, będziemy rozpatrywać rodzinę quasi-wielomianów z jednym opóźnieniem.

Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów, o postaci

$$W(s, h, P, Q) = W_0(s, P) + W_1(s, Q) \exp(-sh), \quad (5.50)$$

gdzie $h \geq 0$, zaś rodziny wielomianów $W_0(s, P)$ i $W_1(s, Q)$ są zdefiniowane następująco

$$W_0(s, P) = \{w_0(s, p) : p \in P\}, \quad (5.51)$$

$$W_1(s, Q) = \{w_1(s, q) : q \in Q\}, \quad (5.52)$$

gdzie

$$w_0(s, p) = \sum_{i=0}^n a_i(p) s^i, \quad (5.53)$$

$$w_1(s, q) = \sum_{i=0}^n b_i(q) s^i, \quad (5.54)$$

są to wielomiany o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów, $p = [p_1, p_2, \dots, p_l]$ i $q = [q_1, q_2, \dots, q_r]$ są wektorami niepewnych parametrów p_k ($k = 1, 2, \dots, l$) i q_k ($k = 1, 2, \dots, r$), odpowiednio, oraz

$$P = \{p : p_k \in [p_k^-, p_k^+], p_k^- < p_k^+, k = 1, 2, \dots, l\}, \quad (5.55)$$

$$Q = \{q : q_k \in [q_k^-, q_k^+], q_k^- < q_k^+, k = 1, 2, \dots, r\}. \quad (5.56)$$

Dowolny quasi-wielomian należący do rodziny (5.50) ma postać

$$w(s, h, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = w_0(s, \mathbf{p}) + w_1(s, \mathbf{q}) \exp(-sh). \quad (5.57)$$

Nie zmniejszając ogólności rozważań założmy, że $a_n(\mathbf{p}) > 0$ dla każdego $\mathbf{p} \in P$. Przy tym założeniu rodzina quasi-wielomianów (5.50) jest rodziną typu opóźnionego lub neutralnego.

Rodzina quasi-wielomianów (5.50) jest odpornie stabilna niezależnie od wielkości opóźnienia, jeżeli jest ona stabilna dla każdego $h \geq 0$ i dla wszystkich $\mathbf{p} \in P$ oraz dla wszystkich $\mathbf{q} \in Q$, co oznacza, że $w(s, h, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \neq 0$ dla $\operatorname{Re} s \geq 0$ niezależnie od zmian wartości współczynników oraz wartości opóźnienia $h \geq 0$.

Jeżeli $h = 0$, to rodzina quasi-wielomianów (5.50) redukuje się do rodziny wielomianów

$$W(s, \bar{Q}) = \{w(s, \bar{\mathbf{q}}): \bar{\mathbf{q}} \in \bar{Q}\}, \quad (5.58)$$

gdzie

$$w(s, \bar{\mathbf{q}}) = w_0(s, \mathbf{p}) + w_1(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n c_i(\bar{\mathbf{q}}) s^i, \quad (5.59)$$

przy czym $\bar{\mathbf{q}} = [\mathbf{p}, \mathbf{q}]$, $\bar{Q} = P \times Q$, zaś współczynniki

$$c_i(\bar{\mathbf{q}}) = a_i(\mathbf{p}) + b_i(\mathbf{q}), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (5.60)$$

zależą liniowo od składowych wektora $\bar{\mathbf{q}}$.

Rodzina quasi-wielomianów (5.50) jest przypadkiem szczególnym rodziny (5.1). Wobec tego, na bazie wzorów (5.10)-(5.12) zdefiniujemy dla rodziny (5.50) funkcję testującą $\Phi(\omega)$ w sposób podany poniżej (dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$)

$$\Phi(\omega) = 1 - \frac{\max_{\mathbf{q} \in Q} |w_1(j\omega, \mathbf{q})|}{\min_{\mathbf{p} \in P} |w_0(j\omega, \mathbf{p})|}, \quad (5.61)$$

przy czym

$$\Phi_0 = \Phi(0) = 1 - \frac{\max_{\mathbf{q} \in Q} |b_0(\mathbf{q})|}{\min_{\mathbf{p} \in P} |a_0(\mathbf{p})|}, \quad (5.62)$$

$$\Phi_\infty = 1 - \frac{\max_{\mathbf{q} \in Q} |b_n(\mathbf{q})|}{\min_{\mathbf{p} \in P} |a_n(\mathbf{p})|}, \quad (5.63)$$

są to: wartość początkowa i wartość końcowa tej funkcji, odpowiednio.

Twierdzenie 5.4. Rodzina quasi-wielomianów (5.50) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna niezależnie od wielkości opóźnienia, wtedy i tylko wtedy, gdy

- 1) rodzina wielomianów $W_0(s, P)$ mająca postać (5.51) jest odpornie stabilna,
- 2) jest spełniony warunek

$$\Phi_\infty > 0, \quad (5.64)$$

- 3) $\Phi_0 \geq 0$, przy czym, jeżeli $\Phi_0 = 0$, to rodzina wielomianów $W(s, \bar{Q})$ mająca postać (5.58) jest odpornie stabilna,
- 4) dla każdego skończonego $\omega > 0$ jest spełniony warunek

$$\Phi(\omega) > 0. \quad (5.65)$$

Dowód. Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia 5.1 zastosowanego do rodziny (5.50) oraz z definicji (5.61) funkcji testującej $\Phi(\omega)$. ■

Oznaczmy przez $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_u$, gdzie $u = 2^l$, wierzchołki hiperprostopadłościanu P oraz przez $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_v$, $v = 2^r$, wierzchołki hiperprostopadłościanu Q . Ponadto, przez $w_0^{(i)}(s) = w_0(s, \mathbf{p}_i)$, $i = 1, 2, \dots, u$, oraz przez $w_1^{(k)}(s) = w_1(s, \mathbf{q}_k)$, $k = 1, 2, \dots, v$, oznaczmy wielomiany wierzchołkowe (zwane też wielomianami generującymi) rodzin wielomianów $W_0(s, P)$ i $W_1(s, Q)$, odpowiednio.

Zbiór wartości

$$w_0(j\omega, P) = \{w_0(j\omega, \mathbf{p}): \mathbf{p} \in P\} \quad (5.66)$$

jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wypukłym wielobokiem rozpiętym na punktach $w_0^{(i)}(j\omega)$, $i = 1, 2, \dots, u$ [52]. Podobnie, zbiór wartości

$$w_1(j\omega, Q) = \{w_1(j\omega, \mathbf{q}): \mathbf{q} \in Q\} \quad (5.67)$$

jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wypukłym wielobokiem rozpiętym na punktach $w_1^{(i)}(j\omega)$, $i = 1, 2, \dots, v$.

Niech $w_0^{(0)}(s) = w_0(s, \mathbf{p}_0)$ będzie wielomianem nominalnym rodziny wielomianów $W_0(s, P)$. Odpowiada on nominalnym wartościom $p_1^0, p_2^0, \dots, p_l^0$ niepewnych parametrów $p_1, p_2, \dots, p_l$. Za wielomian nominalny $w_0^{(0)}(s)$ można też przyjąć dowolny z wielomianów wierzchołkowych $w_0^{(i)}(s)$, $i = 1, 2, \dots, u$. Asymptotyczna stabilność wielomianu nominalnego jest warunkiem koniecznym odpornej stabilności rodziny $W_0(s, P)$. Dlatego też w dalszych rozważaniach będziemy przyjmować, że jest on asymptotycznie stabilny.

Do badania odpornej stabilności rodzin wielomianów $W_0(s, P)$ i $W(s, \bar{Q})$ można stosować metody opisane w monografii [52]. Są wśród nich te same metody, podane w rozdziale 4 niniejszej pracy (twierdzenie krawędziowe, metody funkcji testujących), które służą do badania odpornej stabilności rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów.

Poniżej podamy sposób badania odpornej stabilności rodziny wielomianów (5.51) z wykorzystaniem metody funkcji testującej $F(\omega)$.

Niech $[\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_k]$ będzie krawędzią hiperprostopadłością P . Oznaczmy przez $[w_0^{(i)}(j\omega), w_0^{(k)}(j\omega)]$ krawędź wypukłego wieloboku $w_0(j\omega, P)$, odpowiadającą krawędzi $[\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_k]$ zbioru P . Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ jest ona na płaszczyźnie zmiennej zespolonej odcinkiem linii prostej, łączącym punkty $w_0^{(i)}(j\omega)$ i $w_0^{(k)}(j\omega)$. Ten odcinek może być krawędzią wieloboku (5.66) dla jednych wartości parametru $\omega \geq 0$, zaś dla innych może leżeć wewnątrz tego wieloboku.

Wprowadźmy oznaczenie

$$\varphi_{ik}(\omega) = \arg \tilde{w}_0^{(i)}(j\omega) - \arg \tilde{w}_0^{(k)}(j\omega), \quad (5.68)$$

gdzie $\arg z \in [-\pi, \pi)$ oznacza główny argument liczby zespolonej z , oraz

$$\tilde{w}_0^{(i)}(j\omega) = \frac{w_0^{(i)}(j\omega)}{w_0^{(0)}(j\omega)}, \quad \tilde{w}_0^{(k)}(j\omega) = \frac{w_0^{(k)}(j\omega)}{w_0^{(0)}(j\omega)}, \quad (5.69)$$

gdzie $w_0^{(0)}(s)$ jest asymptotycznie stabilnym wielomianem nominalnym rodziny $W_0(s, P)$.

Lemat 5.3 [52]. Rodzina wielomianów $W_0(s, P)$ o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy $F(\omega) > 0$ dla każdego $\omega \geq 0$, gdzie dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ funkcję testującą $F(\omega)$ oblicza się ze wzoru

$$F(\omega) = \pi - \max_{i,k} |\varphi_{ik}(\omega)|, \quad (5.70)$$

gdzie $\varphi_{ik}(\omega)$ ma postać (5.68), zaś maksimum liczy się uwzględniając wszystkie krawędzie zbioru P . ■

Powyższy lemat można też stosować do badania odpornej stabilności rodziny wielomianów (5.58) o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów. Należy przy tym brać pod uwagę wielomiany wierzchołkowe oraz wielomian nominalny tej rodziny.

Podamy teraz komputerową metodę służącą do wyznaczania wartości funkcji testującej $\Phi(\omega)$, zdefiniowanej wzorami (5.61)–(5.63). Rozpatrzmy najpierw problem obliczania jej wartości początkowej oraz końcowej.

Zbiory wartości $\{b_i(\mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$ i $\{a_i(\mathbf{p}) : \mathbf{p} \in P\}$, $i = 0, 1, \dots, n$, są odcinkami linii prostych, leżącymi na osi rzeczywistej. Dlatego też (dla $i = 0, 1, \dots, n$)

$$\max_{\mathbf{q} \in Q} |b_i(\mathbf{q})| = \max_{k=1,2,\dots,v} |b_i(\mathbf{q}_k)|, \quad (5.71)$$

$$\min_{\mathbf{p} \in P} |a_i(\mathbf{p})| = \min_{k=1,2,\dots,u} |a_i(\mathbf{p}_k)|. \quad (5.72)$$

Uwzględniając (5.71) i (5.72), ze wzorów (5.62) i (5.63) otrzymamy

$$\Phi_0 = 1 - \frac{\max_{k=1,\dots,v} |b_0(\mathbf{q}_k)|}{\min_{i=1,\dots,u} |a_0(\mathbf{p}_i)|}, \quad (5.73)$$

$$\Phi_\infty = 1 - \frac{\max_{k=1,\dots,v} |b_n(\mathbf{q}_k)|}{\min_{i=1,\dots,u} |a_n(\mathbf{p}_i)|}. \quad (5.74)$$

Wzór (5.61) można napisać w postaci

$$\Phi(\omega) = 1 - \frac{n(\omega)}{d(\omega)}, \quad (5.75)$$

gdzie

$$n(\omega) = \max_{q \in Q} |w_1(j\omega, q)|, \quad (5.76)$$

$$d(\omega) = \min_{p \in P} |w_0(j\omega, p)|. \quad (5.77)$$

Jeżeli rodzina wielomianów $W_0(s, P)$ jest odpornie stabilna, to jest spełniony warunek wykluczenia zera [52]

$$0 \notin w_0(j\omega, P), \quad \forall \omega \geq 0. \quad (5.78)$$

To zaś oznacza, że $w_0(j\omega, p) \neq 0$ dla każdego $\omega \geq 0$ i dla wszystkich $p \in P$. Nie wystąpią więc osobliwości przy obliczaniu funkcji testującej ze wzoru (5.75)

Ponieważ zbiór wartości $w_1(j\omega, Q)$ jest wypukłym wielobokiem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ zachodzi równość

$$\max_{q \in Q} |w_1(j\omega, q)| = \max\{|w_1^{(k)}(j\omega)|, k = 1, 2, \dots, v\}, \quad (5.79)$$

gdzie $w_1^{(k)}(s) = w_1(s, q_k)$, $k = 1, 2, \dots, v$, są to wielomiany wierzchołkowe rodziny $W_1(s, Q)$. Z powyższego wynika, że

$$n(\omega) = \max\{|w_1^{(k)}(j\omega)|, k = 1, 2, \dots, v\}. \quad (5.80)$$

Jeżeli warunek (5.78) jest spełniony, to $d(\omega)$, zdefiniowane wzorem (5.77), jest odległością wypukłego wieloboku $w_0(j\omega, P)$ od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Dla dowolnego ustalonego $\omega \geq 0$ odległość $d(\omega)$ można obliczyć ze wzoru

$$d(\omega) = \min\{d_{ik}(\omega), i, k = 1, 2, \dots, u, i < k\}, \quad (5.81)$$

gdzie $d_{ik}(\omega)$ jest odległością od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej odcinka linii prostej $[w_0^{(i)}(j\omega), w_0^{(k)}(j\omega)]$, będącego odwzorowaniem jednej z krawędzi zbioru P .

Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ odległość $d(\omega)$ wieloboku $w_0(j\omega, P)$ od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej można więc obliczyć jako odległość najbliższego położonego odcinka linii prostej $[w_0^{(i)}(j\omega), w_0^{(k)}(j\omega)]$. Aby ją wyznaczyć, należy obliczyć odległości $d_{ik}(\omega)$ wszystkich odcinków, będących odwzorowaniami poszczególnych krawędzi zbioru P , a następnie $d(\omega)$ obliczyć ze wzoru (5.81). Algorytm obliczania odległości $d(\omega)$ jest podany w Dodatku B.

Wyznaczanie funkcji testującej $\Phi(\omega)$ ze wzorów (5.75), (5.80) i (5.81) z wykorzystaniem Algorytmu B2 podanego w Dodatku B wymaga znajomości:

- wielomianów wierzchołkowych $w_0^{(i)}(s) = w_0(s, p_i)$ ($i = 1, 2, \dots, u$) rodziny wielomianów (5.51), odpowiadających poszczególnym wierzchołkom zbioru P ,
- wielomianów wierzchołkowych $w_1^{(k)}(s) = w_1(s, q_k)$ ($k = 1, 2, \dots, v$) rodziny wielomianów (5.52), odpowiadających poszczególnym wierzchołkom zbioru Q ,
- wszystkich par wielomianów wierzchołkowych $w_0^{(i)}(s)$ i $w_0^{(k)}(s)$, tworzących wielomiany krawędziowe, które odpowiadają poszczególnym krawędziom zbioru P .

Wyżej wymienione wielomiany wierzchołkowe oraz pary tych wielomianów, które tworzą wielomiany krawędziowe, można wyznaczyć stosując komputerową metodę podaną w pracy [50].

Funkcja testująca $\Phi(\omega)$ powinna być wyznaczona z odpowiednio małym krokiem $\Delta\omega$ dla odpowiednio dużego przedziału wartości parametru $\omega \geq 0$. Ponieważ $\Phi(\omega) \rightarrow \Phi_\infty$ przy $\omega \rightarrow \infty$, obliczenia można zakończyć wtedy, gdy obliczone wartości $\Phi(\omega)$ są bliskie Φ_∞ i dążą asymptotycznie do granicy Φ_∞ .

Z powyższych rozważań i twierdzenia 5.4 wynika następujący algorytm badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia rodziny quasi-wielomianów (5.50) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów.

Algorytm 5.2:

Krok 1. Wyznacz wielomiany wierzchołkowe $w_0^{(i)}(s) = w_0(s, p_i)$, $i = 1, 2, \dots, u$, gdzie $u = 2^l$, rodziny wielomianów (5.51) i sprawdź odporną stabilność tej rodziny (stosując np. lemat 5.3). Jeżeli jest ona odpornie stabilna, idź do Kroku 2. W przeciwnym wypadku rodzina quasi-wielomianów (5.50) nie jest odpornie stabilna niezależnie od wielkości opóźnienia.

Krok 2. Oblicz wartość końcową Φ_∞ funkcji testującej $\Phi(\omega)$ ze wzoru (5.74) i sprawdź spełnienie warunku (5.64). Jeżeli jest on spełniony, idź do Kroku 3. Jeżeli zaś nie jest on spełniony, rodzina quasi-wielomianów (5.50) nie jest odpornie stabilna niezależnie od wielkości opóźnienia.

Krok 3. Oblicz wartość początkową Φ_0 funkcji testującej $\Phi(\omega)$ ze wzoru (5.73) i sprawdź spełnienie warunku $\Phi_0 \geq 0$. Jeżeli jest on spełniony, idź do Kroku 4. Jeżeli nie jest on spełniony, rodzina quasi-wielomianów (5.50) nie jest odpornie stabilna niezależnie od wielkości opóźnienia.

Krok 4. Jeżeli $\Phi_0 > 0$, idź do Kroku 5. Jeżeli $\Phi_0 = 0$, wyznacz wielomiany wierzchołkowe rodziny wielomianów (5.58) i sprawdź odporną stabilność tej rodziny, stosując np. metodę podaną w lemacie 5.3. Jeżeli rodzina wielomianów (5.58) jest odpornie stabilna, idź do Kroku 5. W przeciwnym wypadku rodzina quasi-wielomianów (5.50) nie jest odpornie stabilna niezależnie od wielkości opóźnienia.

Krok 5. Wyznacz wszystkie pary wielomianów wierzchołkowych $w_0^{(i)}(s)$, $w_0^{(k)}(s)$, które tworzą wielomiany krawędziowe odpowiadające poszczególnym krawędziom zbioru P . Wykorzystując wzory (5.75), (5.80) i Algorytm B2 podany w Dodatku B wyznacz przebieg funkcji testującej $\Phi(\omega)$ dla $\omega > 0$, przyjmując odpowiednio mały krok $\Delta\omega$. Wyznaczanie funkcji testującej można przerwać w chwili, gdy obliczone wartości $\Phi(\omega)$ są bliskie Φ_∞ i dążą asymptotycznie do granicy Φ_∞ .

Krok 6. Sprawdź spełnienie warunku (5.65). Jeżeli jest on spełniony, rodzina quasi-wielomianów (5.50) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna niezależnie od wielkości opóźnienia. W przeciwnym wypadku ta rodzina nie jest odpornie stabilna niezależnie od wielkości opóźnienia. ■

Przykład 5.2. Należy zbadać odporną stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów, o postaci

$$W(s, h, P, Q) = W_0(s, P) + W_1(s, Q) \exp(-sh), \quad (5.82)$$

gdzie $h \geq 0$, zaś rodziny wielomianów $W_0(s, P)$ i $W_1(s, Q)$ są zdefiniowane następująco

$$W_0(s, P) = \{w_0(s, p): p \in P\}, \quad (5.83)$$

$$w_0(s, p) = s^4 + s^3(1 + 2p_2) + s^2(4 + 2p_1 - p_2) + s + 2 + p_1 - 2p_2, \quad (5.84)$$

$$P = \{p = [p_1, p_2]: p_1 \in [-0.3, 0.8], p_2 \in [-0.2, 0.2]\}, \quad (5.85)$$

oraz

$$W_1(s, Q) = \{w_1(s, q): q \in Q\}, \quad (5.86)$$

$$w_1(s, q) = 0.1s^2 + s(0.2 + 0.4q_1 + 0.3q_2) + (0.2q_1 - 0.1q_2), \quad (5.87)$$

$$Q = \{q = [q_1, q_2]: q_1 \in [-0.1, 0.1], q_2 \in [-0.1, 0.1]\}. \quad (5.88)$$

Badając odporną stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia zgodnie z Algorytmem 5.2 otrzymamy:

Krok 1. Wykres funkcji testującej $F(\omega)$, stowarzyszonej z rodziną wielomianów (5.83), wyznaczony dla $\omega \in [0, 4]$ ze wzorów (5.70) i (5.68), (5.69) przy $w_0^{(0)}(s) = w_0(s, 0)$, jest pokazany na rysunku 5.2. Dla $\omega > 4$ wartości funkcji testującej $F(\omega)$ są dodatnie, przy czym dążą one do π przy $\omega \rightarrow \infty$. Ponieważ $F(\omega) > 0$ dla wszystkich $\omega \geq 0$, z lematu 5.3 wynika, że rodzina wielomianów (5.83) jest odpornie stabilna.

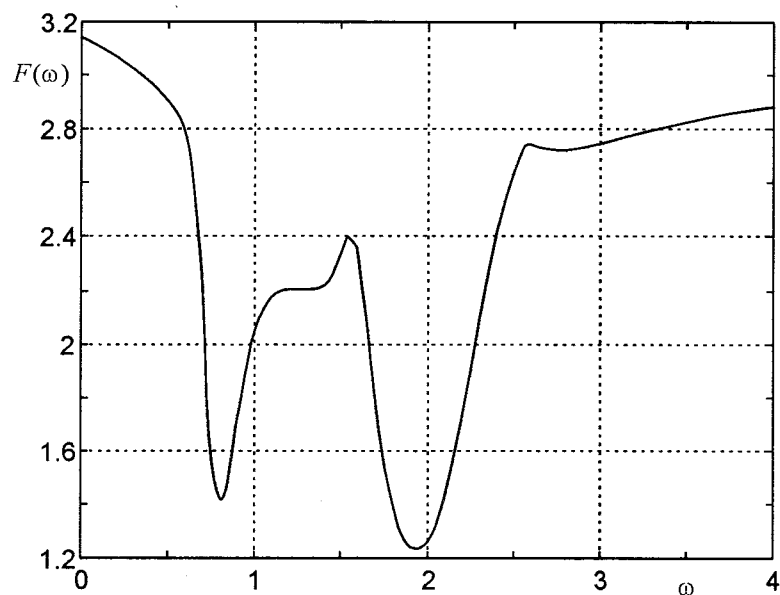
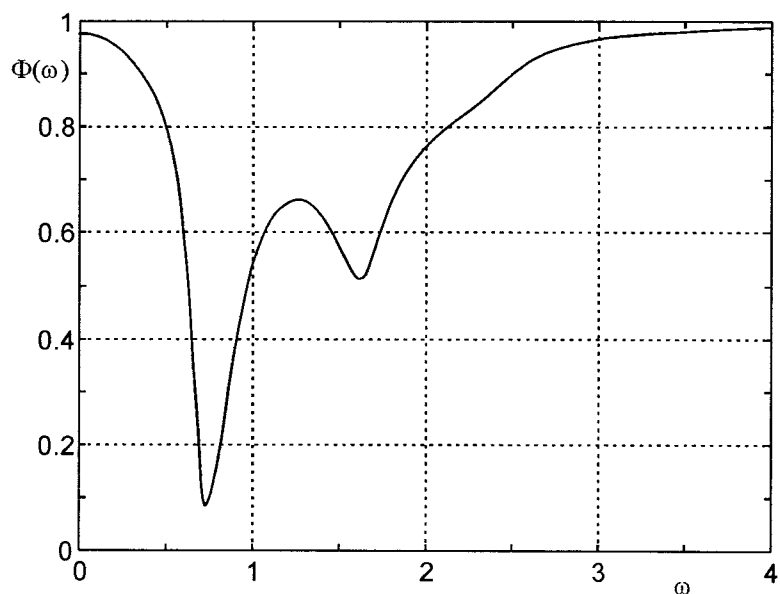
Krok 2. Rodzina quasi-wielomianów (5.82) jest rodziną typu opóźnionego. Wobec tego $\Phi_\infty = 1$ i warunek (5.64) jest spełniony.

Krok 3. Obliczając ze wzoru (5.73) wartość początkową funkcji testującej $\Phi(\omega)$ otrzymamy $\Phi_0 = 0.9769 > 0$.

Krok 4. Ponieważ $\Phi_0 > 0$, przechodzimy do Kroku 5.

Krok 5. Wyznaczając funkcję testującą $\Phi(\omega)$ dla $\omega \in [0, 4]$ ze wzorów (5.75), (5.80) i (5.81) oraz korzystając z Algorytmu B2 podanego w Dodatku B, otrzymamy wykres pokazany na rysunku 5.3.

Krok 6. Z rysunku 5.3 wynika, że warunek (5.65) jest spełniony. Wyznaczona wartość minimalna funkcji testującej wynosi $\min_{\omega \geq 0} \Phi(\omega) = 0.0838 > 0$.

Rys. 5.2. Wykres funkcji testującej $F(\omega)$ Rys. 5.3. Wykres funkcji testującej $\Phi(\omega)$

Z twierdzenia 5.4 wynika zatem, że rodzina quasi-wielomianów (5.82) jest odpornie stabilna niezależnie od wielkości opóźnienia. ■

Podaną powyżej metodę badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia rodziny quasi-wielomianów (5.50) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów można w prosty sposób uogólnić na rodzinę quasi-wielomianów z wieloma niewspółmiernymi opóźnieniami, mającą postać

$$W(s, \mathbf{h}, P, Q) = W_0(s, P) + \sum_{i=1}^m W_i(s, Q_i) \exp(-sh_i), \quad (5.89)$$

gdzie $h_i \geq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, m$, rodzina wielomianów $W_0(s, P)$ jest zdefiniowana wzorami (5.51), (5.53) i (5.55), zaś rodziny wielomianów $W_i(s, Q_i)$ są zdefiniowane następująco

$$W_i(s, Q_i) = \{w_i(s, \mathbf{q}_i) : \mathbf{q}_i \in Q_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.90)$$

gdzie

$$w_i(s, \mathbf{q}_i) = \sum_{k=0}^n b_{ki}(\mathbf{q}_i) s^k, \quad \mathbf{q}_i \in Q_i, \quad (5.91)$$

są to wielomiany o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów, $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_l]$ i $\mathbf{q}_i = [q_{1i}, q_{2i}, \dots, q_{r_i i}]$, $i = 1, 2, \dots, m$, są wektorami niepewnych parametrów, zaś zbiory Q_i mają postać (dla $i = 1, 2, \dots, m$)

$$Q_i = \{\mathbf{q}_i : q_{ki} \in [q_{ki}^-, q_{ki}^+], q_{ki}^- < q_{ki}^+, k = 1, 2, \dots, r_i\}, \quad (5.92)$$

przy czym $Q = Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_m$.

Ponadto, wykorzystując rezultaty podane w punkcie 5.1, możemy sformułować komputerową metodę badania odpornej stabilności rodziny quasi-wielomianów (5.89), w przypadku gdy niektóre z rodzin wielomianów $W_i(s, Q_i)$, $i = 0, 1, \dots, m$, są wielomianami przedziałowymi, a pozostałe są rodzinami wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów.

5.3. Odporna stabilność niezależnie od wielkości opóźnień rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów

Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów, mającą postać

$$W(s, h, P, Q) = W_0(s, P) + W_1(s, Q) \exp(-sh), \quad (5.93)$$

gdzie $h \geq 0$, zaś rodziny wielomianów $W_0(s, P)$ i $W_1(s, Q)$ o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów są zdefiniowane wzorami (5.51)-(5.56).

Z rozważań podanych w punktach 4.4 i 5.2 wynika, że twierdzenie 5.4 i algorytm 5.2 można bezpośrednio stosować do badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia rodziny quasi-wielomianów (5.93) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów w tych przypadkach szczególnych, w których zbiór wartości $w_0(j\omega, P)$ rodziny wielomianów $W_0(s, P)$ o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów jest dla każdego $\omega \geq 0$ wypukłym wielobokiem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Takie przypadki są omówione w monografii [52].

Do badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia rozpatrywanej rodziny quasi-wielomianów w przypadku ogólnym można stosować twierdzenie 5.4, przy czym dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ funkcję testującą $\Phi(\omega)$ należy obliczać nie w sposób podany w algorytmie 5.2, ale bezpośrednio ze wzoru

$$\Phi(\omega) = 1 - \frac{\max_{q \in Q} |w_1(j\omega, q)|}{\min_{p \in P} |w_0(j\omega, p)|}, \quad (5.94)$$

przy czym

$$\Phi_0 = 1 - \frac{\max_{q \in Q} |b_0(q)|}{\min_{p \in P} |a_0(p)|}, \quad (5.95)$$

$$\Phi_\infty = 1 - \frac{\max_{q \in Q} |b_n(q)|}{\min_{p \in P} |a_n(p)|}. \quad (5.96)$$

Przy stosowaniu twierdzenia 5.4 istotną trudność stanowi wyznaczenie funkcji testującej $\Phi(\omega)$ ze wzoru (5.94). Wynika to stąd, że dla każdego ustalonego $\omega > 0$ zbiory wartości

$$w_0(j\omega, P) = \{w_0(j\omega, p) : p \in P\}, \quad (5.97)$$

$$w_1(j\omega, Q) = \{w_1(j\omega, q) : q \in Q\}, \quad (5.98)$$

rodzin wielomianów $W_0(s, P)$ i $W_1(s, Q)$, odpowiednio, mogą mieć w przypadku ogólnym krzywoliniowe boki.

Ponadto, w przypadku ogólnym nie ma prostych metod służących do badania odpornej stabilności rodzin wielomianów o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów. Istnieją tylko warunki dostateczne, podobne do podanych w punkcie 4.4 niniejszej pracy w przypadku rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów [52].

Podobnie jak w przypadku rodziny quasi-wielomianów (5.50), oznaczmy przez $p_1, p_2, \dots, p_u$, gdzie $u = 2^l$, wierzchołki zbioru P oraz przez $q_1, q_2, \dots, q_v$, $v = 2^r$, wierzchołki zbioru Q . W zbiorach wielomianów $W_0(s, P)$ i $W_1(s, Q)$ odpowiadają im wielomiany wierzchołkowe $w_0^{(i)}(s) = w_0(s, p_i)$, $i = 1, 2, \dots, u$, oraz $w_1^{(k)}(s) = w_1(s, q_k)$, $k = 1, 2, \dots, v$, odpowiednio.

Ponadto, przez

$$c_0(j\omega, P) = \text{conv}\{w_0^{(i)}(j\omega), i = 1, 2, \dots, u\} \quad (5.99)$$

oznaczymy wypukły wielobok na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, rozpięty na punktach $w_0^{(i)}(j\omega)$, $i = 1, 2, \dots, u$, będących wartościami dla $s = j\omega$ wielomianów wierzchołkowych $w_0^{(i)}(s) = w_0(s, p_i)$ oraz przez

$$c_1(j\omega, Q) = \text{conv}\{w_1^{(k)}(j\omega), k = 1, 2, \dots, v\} \quad (5.100)$$

oznaczymy wypukły wielobok, rozpięty na punktach $w_1^{(k)}(j\omega)$, $k = 1, 2, \dots, v$, będących wartościami dla $s = j\omega$ wielomianów wierzchołkowych $w_1^{(k)}(s) = w_1(s, q_k)$.

Zgodnie z twierdzeniem o odwzorowaniu 4.11, dla każdego $\omega \geq 0$ zachodzą zależności

$$\text{conv}(w_0(j\omega, P)) = c_0(j\omega, P), \quad (5.101)$$

oraz

$$\text{conv}(w_1(j\omega, Q)) = c_1(j\omega, Q), \quad (5.102)$$

gdzie $\text{conv}(w(z, Q))$ jest wypukłą powłoką zbioru $w(z, Q)$.

W dalszych rozważaniach zbiory wartości (5.97) i (5.98) będziemy zastępować wypukłymi wielobokami (5.99) i (5.100), odpowiednio. W takim przypadku, uwzględniając rozważania podane w punkcie 5.2, dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ funkcję testującą $\Phi_c(\omega)$, stowarzyszoną z rodziną quasi-wielomianów (5.93) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów, można zdefiniować wzorem

$$\Phi_c(\omega) = 1 - \frac{n_c(\omega)}{d_c(\omega)}, \quad (5.103)$$

gdzie

$$n_c(\omega) = \max\{|w_1^{(k)}(j\omega)|, k = 1, 2, \dots, v\}, \quad (5.104)$$

natomiast $d_c(\omega)$ jest odległością wypukłego wieloboku (5.99) od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej przy założeniu, że jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin c_0(j\omega, P), \quad \forall \omega \geq 0. \quad (5.105)$$

Warunek (5.105) jest warunkiem dostatecznym spełnienia warunku wykluczenia zera

$$0 \notin w_0(j\omega, P), \quad \forall \omega \geq 0, \quad (5.106)$$

dla rodziny wielomianów $W_0(s, P)$ [52]. Natomiast warunek (5.106) jest konieczny i wystarczający dla odpornej stabilności rodziny wielomianów $W_0(s, P)$, przy asymptotycznej stabilności wielomianu nominalnego tej rodziny.

Dla dowolnego ustalonego $\omega \geq 0$ odległość $d_c(\omega)$ można obliczyć stosując Algorytm B2 podany w Dodatku B. Przy obliczaniu tej odległości należy brać pod uwagę wszystkie pary wielomianów wierzchołkowych $w_0^{(i)}(s)$, $w_0^{(k)}(s)$, $i, k = 1, 2, \dots, u$, $i < k$, a nie tylko pary tworzące tzw. wielomiany krawędziowe, które odpowiadają poszczególnym krawędziom zbioru P , jak ma to miejsce w przypadku

rodziny wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów.

Łatwo zauważyć, że

$$d_c(\omega) \leq d(\omega), \quad \forall \omega \geq 0, \quad (5.107)$$

gdzie

$$d(\omega) = \min_{p \in P} |w_0(j\omega, p)| \quad (5.108)$$

jest mianownikiem we wzorze (5.94).

Z powyższych rozważań wynika, że

$$\Phi_c(\omega) \leq \Phi(\omega), \quad \forall \omega \geq 0, \quad (5.109)$$

gdzie funkcje testujące $\Phi(\omega)$ i $\Phi_c(\omega)$ są zdefiniowane wzorami (5.94) i (5.103), odpowiednio.

Ponadto, ze wzorów (5.103), (5.104), (5.54) i definicji $d_c(\omega)$ oraz ze wzorów (5.99) i (5.53) wynika, że

$$\Phi_{c0} = 1 - \frac{n_c(0)}{d_c(0)} = 1 - \frac{\max_{k=1, \dots, v} |b_0(q_k)|}{\min_{i=1, \dots, u} |a_0(p_i)|} = \Phi_0, \quad (5.110)$$

oraz

$$\Phi_{c\infty} = 1 - \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{n_c(\omega)}{d_c(\omega)} = 1 - \frac{\max_{k=1, \dots, v} |b_n(q_k)|}{\min_{i=1, \dots, u} |a_n(p_i)|} = \Phi_\infty. \quad (5.111)$$

Oznacza to, że funkcje testujące $\Phi(\omega)$ i $\Phi_c(\omega)$ mają takie same wartości: początkową i końcową. Mogą się one różnić dla skończonych wartości parametru $\omega > 0$, przy czym zawsze zachodzi nierówność (5.109).

Z powyższych rozważań i twierdzenia 5.4 (które jest prawdziwe przy funkcji testującej zdefiniowanej wzorem (5.94)) wynika, że proste warunki konieczne odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia rodziny quasi-wielomianów (5.93) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów mają postać

$$\Phi_{c0} = \Phi_0 \geq 0 \quad \text{ i } \quad \Phi_{c\infty} = \Phi_\infty > 0. \quad (5.112)$$

Twierdzenie 5.5. Jeżeli rodzina wielomianów $W_0(s, P)$ jest odpornie stabilna i jest spełniony warunek konieczny $\Phi_{c\infty} > 0$, to rodzina quasi-wielomianów (5.93)

o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna niezależnie od wielkości opóźnienia, jeżeli $\Phi_{c0} > 0$ i dla każdego skończonego $\omega > 0$ jest spełniony warunek

$$\Phi_c(\omega) > 0, \quad (5.113)$$

gdzie funkcję testującą $\Phi_c(\omega)$ oblicza się ze wzoru (5.103), przy czym $n_c(\omega)$ oblicza się ze wzoru (5.104), zaś $d_c(\omega)$ jest odległością wypukłego wieloboku (5.99) od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Dowód. Jeżeli są spełnione podane powyżej warunki, to są też spełnione warunki twierdzenia 5.4. Dowód wynika więc z twierdzenia 5.4 zastosowanego do rodziny quasi-wielomianów (5.93) o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów. ■

Twierdzenie 5.5 w innym sformułowaniu jest podane w pracy [59].

Do badania asymptotycznej stabilności rodziny wielomianów $W_0(s, P)$ o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów można stosować warunki dostateczne podane w monografii [52]. Są to takie same warunki, które stosuje się do badania odpornej stabilności rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów (patrz punkt 4.4 niniejszej pracy). Poniżej podamy warunek dostateczny, bazujący na metodzie funkcji testującej $F(\omega)$.

Niech $w_0^{(0)}(s) = w_0(s, p_0)$ będzie asymptotycznie stabilnym wielomianem nominalnym rodziny wielomianów $W_0(s, P)$.

Wprowadźmy oznaczenie

$$\varphi_{ik}(\omega) = \arg \tilde{w}_0^{(i)}(j\omega) - \arg \tilde{w}_0^{(k)}(j\omega), \quad (5.114)$$

gdzie $\arg z \in [-\pi, \pi)$ oznacza główny argument liczby zespolonej z , zaś $\tilde{w}_0^{(i)}(j\omega)$, $i = 1, 2, \dots, u$, są to unormowane wielomiany wierzchołkowe, mające postać (5.69).

Lemat 5.4 [52]. Rodzina wielomianów $W_0(s, P)$ o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna, jeżeli $F(\omega) > 0$ dla każdego $\omega \geq 0$, gdzie dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ funkcję testującą $F(\omega)$ oblicza się ze wzoru

$$F(\omega) = \pi - \max\{|\varphi_{ik}(\omega)|, i, k = 1, 2, \dots, u, i < k\}, \quad (5.115)$$

przy czym maksimum liczy się uwzględniając wszystkie krawędzie i przekątne zbioru P . ■

Z twierdzenia 5.5 i powyższych rozważań wynika następujący algorytm badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia rodziny quasi-wielomianów (5.93) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów.

Algorytm 5.3:

Krok 1. Wyznacz wielomiany wierzchołkowe $w_0^{(i)}(s) = w_0(s, p_i)$, $i = 1, 2, \dots, u$, gdzie $u = 2^l$, rodziny wielomianów $W_0(s, P)$ i sprawdź ich asymptotyczną stabilność. Jeżeli są one asymptotycznie stabilne, idź do Kroku 2. W przeciwnym wypadku rodzina quasi-wielomianów (5.93) nie jest odpornie stabilna niezależnie od wielkości opóźnienia.

Krok 2. Sprawdź (stosując np. bezpośrednie sprawdzenie warunku wykluczenia zera) odporną stabilność rodziny wielomianów $W_0(s, P)$. Jeżeli jest ona odpornie stabilna, idź do Kroku 3. W przeciwnym wypadku rodzina quasi-wielomianów $W_0(s, P)$ nie jest odpornie stabilna niezależnie od wielkości opóźnienia. Jeżeli badamy odporną stabilność rodziny wielomianów $W_0(s, P)$ stosując lemat 5.4 i stwierdzimy, że podany tam warunek wystarczający nie jest spełniony, badanie należy przerwać, bowiem w takim wypadku nic nie można powiedzieć o odpornej stabilności tej rodziny wielomianów.

Krok 3. Oblicz wartość końcową $\Phi_{c\infty}$ funkcji testującej $\Phi_c(\omega)$ ze wzoru (5.111) i sprawdź spełnienie drugiego z warunków (5.112). Jeżeli jest on spełniony, idź do Kroku 4. Jeżeli zaś nie jest on spełniony, rodzina quasi-wielomianów (5.93) nie jest odpornie stabilna niezależnie od wielkości opóźnienia.

Krok 4. Oblicz wartość początkową Φ_{c0} funkcji testującej $\Phi_c(\omega)$ ze wzoru (5.110) i sprawdź spełnienie warunku $\Phi_{c0} > 0$. Jeżeli jest on spełniony, idź do Kroku 5. Jeżeli $\Phi_{c0} = 0$, przerwij badanie, bowiem na podstawie twierdzenia 5.5 nic nie można powiedzieć o odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia rodziny quasi-wielomianów (5.93). Jeżeli natomiast $\Phi_{c0} < 0$, rodzina quasi-wielomianów (5.93) nie jest odpornie stabilna niezależnie od wielkości opóźnienia.

Krok 5. Wyznacz wszystkie pary wielomianów wierzchołkowych $w_0^{(i)}(s)$, $w_0^{(k)}(s)$, $i, k = 1, 2, \dots, u$, $i < k$. Wykorzystując wzory (5.103), (5.104) oraz Algorytm B2 podany w Dodatku B (do obliczania odległości $d_c(\omega)$), wyznacz przebieg funkcji testującej $\Phi_c(\omega)$ dla $\omega > 0$, przyjmując odpowiednio mały krok $\Delta\omega$. Wyznaczanie funkcji testującej można przerwać w chwili, gdy obliczone wartości $\Phi_c(\omega)$ są bliskie $\Phi_{c\infty}$ i dążą asymptotycznie do granicy $\Phi_{c\infty}$.

Krok 6. Sprawdź spełnienie warunku (5.113). Jeżeli jest on spełniony, rodzina quasi-wielomianów (5.93) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna niezależnie od wielkości opóźnienia. W przeciwnym wypadku o odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia tej rodziny nic nie można powiedzieć na bazie warunku dostatecznego podanego w twierdzeniu 5.5. ■

Przykład 5.3. Należy zbadać odporną stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów, mającej postać

$$W(s, h, P, Q) = W_0(s, P) + W_1(s, Q) \exp(-sh), \quad (5.116)$$

gdzie $h \geq 0$, oraz

$$W_0(s, P) = \{w_0(s, p) : p \in P\}, \quad (5.117)$$

$$w_0(s, p) = s^4 + s^3(1 + 2p_2) + s^2(4 + 2p_1p_2) + s + 2 + p_1p_2 - 2p_2, \quad (5.118)$$

$$P = \{p = [p_1, p_2] : p_1 \in [-0.3, 0.8], p_2 \in [-0.2, 0.2]\}, \quad (5.119)$$

$$W_1(s, Q) = \{w_1(s, q) : q \in Q\}, \quad (5.120)$$

$$w_1(s, q) = 0.1s^4 + 0.25s^3 + 0.2s^2 + s(0.2 + 2q_1q_2 + 0.3q_2) + 8q_1q_2, \quad (5.121)$$

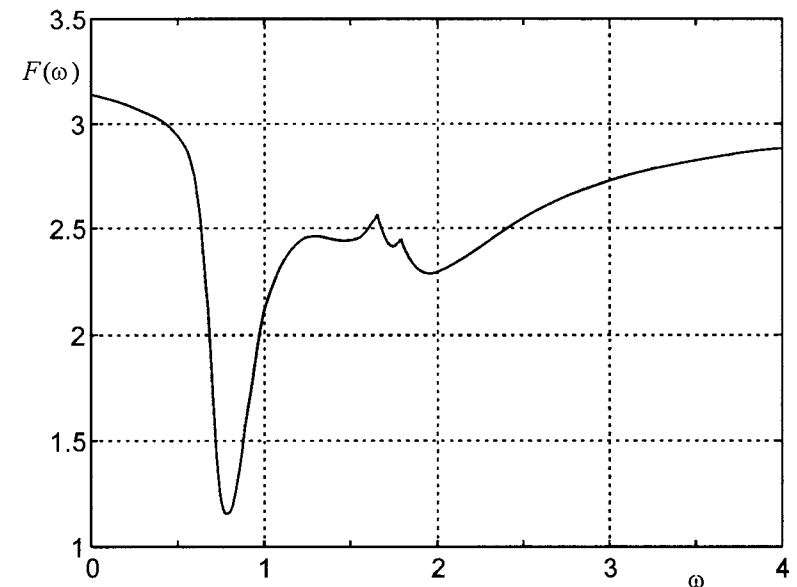
$$Q = \{q = [q_1, q_2] : q_1 \in [-0.1, 0.1], q_2 \in [-0.1, 0.1]\}. \quad (5.122)$$

Badając odporną stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia zgodnie z Algorytmem 5.3 otrzymamy:

Krok 1, 2. Wykres funkcji testującej $F(\omega)$ stowarzyszonej z rodziną wielomianów (5.117), wyznaczony dla $\omega \in [0, 4]$ ze wzorów (5.114) i (5.115) przy

$$w_0^{(0)}(s) = w_0(s, 0) = s^4 + s^3 + 4s^2 + s + 2, \quad (5.123)$$

jest pokazany na rysunku 5.4. Przy $\omega \rightarrow \infty$ wartość funkcji testującej $F(\omega)$ dąży do π . Ponieważ $F(\omega) > 0$ dla $\omega \geq 0$, z lematu 5.4 wynika, że rodzina wielomianów (5.117) jest odpornie stabilna.



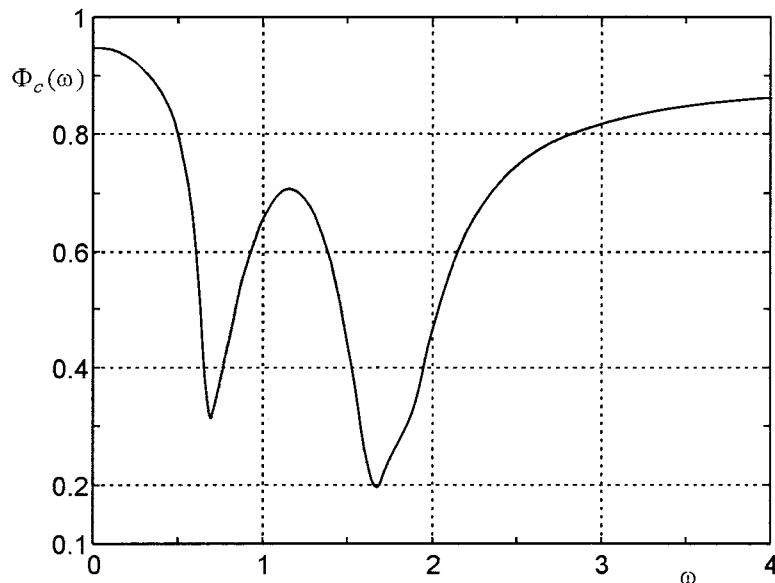
Rys. 5.4. Wykres funkcji testującej $F(\omega)$

Krok 3. $\Phi_{c\infty} = 0.9 > 0$. Drugi z warunków (5.112) więc jest spełniony.

Krok 4. $\Phi_{c0} = 0.9481$. Ponieważ $\Phi_{c0} > 0$, przechodzimy do Kroku 5.

Krok 5. Wykres funkcji testującej $\Phi_c(\omega)$, wyznaczany dla $\omega \in [0, 4]$ ze wzorów (5.103) i (5.104) z wykorzystaniem z Algorytmu B2 podanego w Dodatku B, jest pokazany na rysunku 5.5. Dla $\omega > 4$ wartości funkcji testującej $\Phi_c(\omega)$ są bliskie wartości końcowej $\Phi_{c\infty} = 0.9$.

Krok 6. Z rysunku 5.5 wynika, że warunek (5.113) jest spełniony. Wyznaczona wartość minimalna funkcji testującej wynosi $\min_{\omega \geq 0} \Phi_c(\omega) = 0.1967 > 0$.



Rys. 5.5. Wykres funkcji testującej $\Phi_c(\omega)$

Z twierdzenia 5.5 wynika, że rodzina quasi-wielomianów (5.116) jest odpor- nie stabilna niezależnie od wielkości opóźnienia. ■

Twierdzenie 5.5 i algorytm 5.3 można w prosty sposób uogólnić na rodzinę quasi-wielomianów z wieloma niewspółmiernymi opóźnieniami, mającą postać (5.89), o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów. Ponadto, na bazie twierdzeń 5.3, 5.4 i 5.5 można sformułować komputerową metodę badania odpornej stabilności rodziny quasi-wielomianów (5.89), w przypadku gdy niektóre z rodzin wielomianów $W_i(s, Q_i)$, $i = 0, 1, \dots, m$, są wielomianami przedziałowymi, zaś pozostałe są rodzinami wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo i/lub wieloliniowo od niepewnych parametrów.

6. ODPORNA STABILNOŚĆ QUASI-WIELOMIANÓW PRZEDZIAŁOWYCH

Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów, którą nazywa się też quasi-wielomianem przedziałowym, mającą postać

$$W(s, \mathbf{h}, B) = \sum_{i=0}^m W_i(s, B_i) \exp(-sh_i), \quad (6.1)$$

gdzie $\mathbf{h} = [h_0, h_1, \dots, h_m]$, przy czym $h_0 = 0$, $h_i \geq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, m$, zaś rodziny wielomianów $W_i(s, B_i)$, zwane wielomianami przedziałowymi, są zdefiniowane następująco

$$W_i(s, B_i) = \{w_i(s, \mathbf{b}_i) : \mathbf{b}_i \in B_i\}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (6.2)$$

gdzie $\mathbf{b}_i = [b_{0i}, \dots, b_{ni}]$, oraz

$$w_i(s, \mathbf{b}_i) = \sum_{k=0}^n b_{ki} s^k, \quad (6.3)$$

$$B_i = \{\mathbf{b}_i : b_{ki} \in [b_{ki}^-, b_{ki}^+], \quad b_{ki}^- \leq b_{ki}^+, \quad k = 0, 1, \dots, n\}, \quad (6.4)$$

zaś $B = B_0 \times B_1 \times \dots \times B_m$.

Dowolny quasi-wielomian należący do rodziny (6.1) ma postać

$$w(s, \mathbf{h}, \mathbf{b}) = \sum_{i=0}^m w_i(s, \mathbf{b}_i) \exp(-sh_i). \quad (6.5)$$

W dalszych rozważaniach będziemy przyjmować $b_{n0}^- > 0$. Przy tym założeniu wielomian przedziałowy $W_0(s, B_0)$ jest wielomianem przedziałowym stałego stopnia, zaś quasi-wielomian przedziałowy (6.1) jest quasi-wielomianem przedziałowym typu opóźnionego lub neutralnego.

Quasi-wielomian przedziałowy (6.1) będziemy nazywać quasi-wielomianem przedziałowym odpornie D -stabilnym, jeżeli quasi-wielomian (6.5) jest D -stabilny dla wszystkich ustalonych wartości $b_i \in B_i$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Quasi-wielomian przedziałowy (6.1) jest przypadkiem szczególnym rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów. Do badania jego odpornej D -stabilności można więc stosować opisaną w punkcie 3.2.2 metodę przestrzeni niepewnych parametrów, twierdzenie krawędziowe 4.6 oraz metody funkcji testujących podane w punkcie 4.3.4. Nie jest to jednak sprawą prostą w przypadku ogólnym ze względu na dużą liczbę niepewnych parametrów. W szczególności dotyczy to metody przestrzeni niepewnych parametrów.

Jeżeli przyjmujemy, że wszystkie współczynniki quasi-wielomianu przedziałowego (6.1) nie są dokładnie znane, to ma on $l = (n+1)(m+1)$ niepewnych współczynników. Zbiór B jest więc l -wymiarowym hiperprostopadłościannym. Ma on $K = 2^l$ wierzchołków i $L = l2^{l-1}$ krawędzi.

Bezpośrednie stosowanie twierdzenia krawędziowego 4.6 oraz metod funkcji testujących do badania odpornej D -stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.1) wymaga znajomości wszystkich quasi-wielomianów wierzchołkowych i krawędziowych, odpowiadających poszczególnym wierzchołkom i krawędziom zbioru B , odpowiednio.

W niniejszym rozdziale wykazemy, że badając odporną stabilność quasi-wielomianu przedziałowego (6.1) (D jest otwartą lewą półpłaszczyzną) można ograniczyć się do rozpatrywania tylko odpowiednich podzbiorów tych quasi-wielomianów. Znajomość wszystkich quasi-wielomianów wierzchołkowych i krawędziowych nie jest konieczna.

Problem badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianu przedziałowego (6.1) został rozpatrzony w punkcie 5.1. Dla uproszczenia rozważań zastosowano w nim inny zapis tego quasi-wielomianu.

Poniżej przeanalizujemy problem badania odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.1) przy znanych wartościach opóźnień. W pewnych przypadkach szczególnych rozpatrzmy też problem badania odpornej stabilności w zależności od wielkości opóźnień.

6.1. Metody badania odpornej stabilności

Do badania odpornej stabilności wielomianu przedziałowego służy twierdzenie Charitonowa (patrz Dodatek A), zgodnie z którym wielomian przedziałowy jest

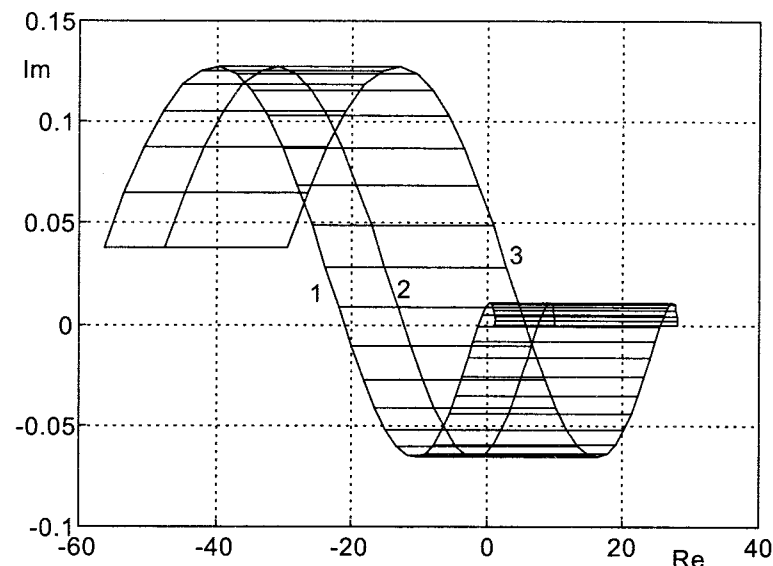
odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są asymptotycznie stabilne cztery wielomiany Charitonowa z nim stowarzyszone. Są to specjalne wielomiany ze zbioru wielomianów wierzchołkowych, odpowiadających poszczególnym wierzchołkom zbioru wartości niepewnych współczynników.

W pracy [88] na bazie przykładu pokazano, że asymptotyczna stabilność wszystkich quasi-wielomianów wierzchołkowych, odpowiadających poszczególnym wierzchołkom zbioru B , nie jest równoważna z odporną stabilnością quasi-wielomianu przedziałowego (6.1). Oznacza to, że twierdzenia Charitonowa nie da się uogólnić na quasi-wielomiany przedziałowe. Powyższe wynika stąd (patrz punkt 2.4), że pochodna argumentu funkcji $w(j\omega, h)$, gdzie $w(s, h)$ jest asymptotycznie stabilnym quasi-wielomianem, nie jest w przypadku ogólnym monotonicznie rosnącą funkcją parametru $\omega \in \Omega = [0, \infty)$.

Dla ilustracji powyższych rozważań rozpatrzmy następujący przykład (zmodyfikowany przykład z pracy [88]).

Przykład 6.1. Dany jest quasi-wielomian przedziałowy

$$w(s, h, b) = (s + 0.01 \exp(-sh))^2 + b, \quad h = 1, \quad b \in B = [1.2, 28]. \quad (6.6)$$



Rys. 6.1. Początkowe fragmenty hodografów Michajłowa $w(j\omega, h, b)$ dla $b = 1.2$ (krzywa 1), $b = 10$ (krzywa 2) i $b = 28$ (krzywa 3) oraz położenia zbioru wartości $w(j\omega, h, B)$ (odcinki linii poziomej)

Na rysunku 6.1 są pokazane początkowe fragmenty hodografów Michajłowa $w(j\omega, h, b)$ dla $b = 1.2$ (krzywa 1), $b = 10$ (krzywa 2) i $b = 28$ (krzywa 3) oraz położenia zbioru wartości $w(j\omega, h, B)$ (odcinki linii poziomej) quasi-wielomianu przedziałowego (6.6). Zostały one wyznaczone dla ω zmieniającego się od 0 do 7.6 z krokiem 0.1. Dla wartości parametru ω większych od 7.6 hodografy leżą w otwartej lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej i przy $\omega \rightarrow \infty$ dążą do minus nieskończoności oscylując wokół ujemnej półosi rzeczywistej.

Z rysunku 6.1 i twierdzenia 2.3 wynika, że quasi-wielomian (6.6) jest asymptotycznie stabilny dla $b = 1.2$ i $b = 28$, nie jest on natomiast asymptotycznie stabilny dla $b = 10$. Oznacza to, że wszystkie quasi-wielomiany wierzchołkowe, tzn. quasi-wielomiany $w(s, h, 1.2)$ i $w(s, h, 28)$, są asymptotycznie stabilne. Natomiast quasi-wielomian przedziałowy (6.6) nie jest odpornie stabilny, bowiem nie jest on asymptotycznie stabilny dla $b = 10 \in B = [1.2, 28]$.

Zauważmy, że powodem braku spełnienia warunku wykluczenia zera (3.14a) dla zbioru wartości $w(j\omega, h, B)$, będącego dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ odcinkiem poziomej linii prostej, łączącym punkty $w(j\omega, h, 1.2)$ i $w(j\omega, h, 28)$, jest to, że przy $s = j\omega$ argumenty quasi-wielomianów wierzchołkowych $w(s, h, 1.2)$ i $w(s, h, 28)$ nie są monotonicznie rosnącymi funkcjami parametru $\omega \geq 0$. ■

Z przykładu 6.1 wynika, że o odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.1) nie można wnioskować na podstawie asymptotycznej stabilności wszystkich jego quasi-wielomianów wierzchołkowych. Oznacza to, że twierdzenia Charitonowa nie można uogólnić na przypadek quasi-wielomianu przedziałowego.

Poniżej przeanalizujemy strukturę zbioru wartości quasi-wielomianu przedziałowego (6.1) oraz rozpatrzmy problem badania jego odpornej stabilności na podstawie twierdzenia krawędziowego 4.6 oraz metod funkcji testujących.

Oznaczmy przez $w_i^{(r_i)}(s)$, $r_i = 1, \dots, 4$, wielomiany Charitonowa stowarzyszone z wielomianami przedziałowymi (6.2).

Z Dodatku A wynika, że dla dowolnego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiór wartości $w_i(j\omega, B_i)$ wielomianu przedziałowego $W_i(s, B_i)$ jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych i o wierzchołkach $w_i^{(r_i)}(j\omega)$, $r_i = 1, \dots, 4$.

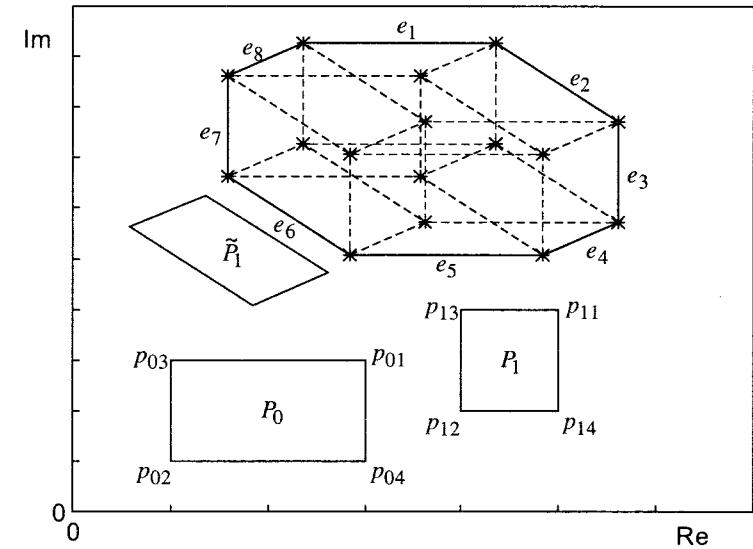
Zbiór wartości quasi-wielomianu przedziałowego (6.1) można opisać zależnością

$$w(j\omega, \mathbf{h}, B) = w_0(j\omega, B_0) + \sum_{i=1}^m w_i(j\omega, B_i) \exp(-j\omega h_i). \quad (6.7)$$

Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ jest on wypukłym wielobokiem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, który otrzymuje się dodając do prostokąta $w_0(j\omega, B_0)$ prostokąty $w_i(j\omega, B_i) \exp(-j\omega h_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Wierzchołkami każdego z tych prostokątów są punkty $w_i^{(r_i)}(j\omega) \exp(-j\omega h_i)$, $r_i = 1, \dots, 4$.

Wyznaczanie zbioru wartości (6.7) przy $m = 1$ przeanalizujemy na bazie poniższego przykładu.

Przykład 6.2. Należy wyznaczyć na płaszczyźnie zmiennej zespolonej zbiór $P = P_0 + P_1 \exp(-j\varphi)$, gdzie P_0 i P_1 są to prostokąty o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, zaś $\varphi = 5.6$.



Rys. 6.2. Konstrukcja zbioru $P = P_0 + P_1 \exp(-j\varphi)$

Na rysunku 6.2 są pokazane położenia prostokątów P_0 i P_1 oraz prostokąta $\tilde{P}_1 = P_1 \exp(-j\varphi)$. Otrzymuje się go obracając prostokąt P_1 o kąt $-\varphi = -5.6$ radianów względem początku układu współrzędnych.

Wierzchołki prostokątów P_0 i P_1 oraz ich współrzędne zostały na rysunku 6.2 oznaczone tak samo, np. p_{01} jest jednym z wierzchołków prostokąta P_0 i p_{01} oznacza też współrzędne tego wierzchołka. Numeracja tych wierzchołków jest zgodna z numeracją wierzchołków prostokąta Charitonowa podaną w Dodatku A.

Punkty oznaczone na rysunku 6.2 gwiazdkami mają współrzędne $p_{0i} + p_{1k} \exp(-j\varphi)$, $i, k = 1, \dots, 4$. Są one wierzchołkami ośmiu prostokątów, które otrzymuje się dodając prostokąt $\tilde{P}_1 = P_1 \exp(-j\varphi)$ do każdego z czterech wierzchołków prostokąta P_0 oraz dodając prostokąt P_0 do każdego z czterech wierzchołków prostokąta $\tilde{P}_1$. Bokami poszczególnych prostokątów są odcinki linii ciągłych i przerywanych, które można opisać wzorami

$$p_{0i} + [(1-\lambda)p_{1k} + \lambda p_{1r}] \exp(-j\varphi), \quad (6.8)$$

$$(1-\lambda)p_{0k} + \lambda p_{0r} + p_{1i} \exp(-j\varphi), \quad (6.9)$$

gdzie $\lambda \in \Lambda = [0, 1]$, $i = 1, \dots, 4$, oraz $(k, r) = (1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)$. Odcinki te otrzymuje się dodając krawędzie prostokąta P_0 do wierzchołków prostokąta $\tilde{P}_1$ oraz krawędzie prostokąta $\tilde{P}_1$ do wierzchołków prostokąta P_0 . Tylko 8 z 32 wyznaczonych w ten sposób odcinków są to boki zbioru P , który jest ośmiokątem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Na rysunku 6.2 są one oznaczone przez e_i , $i = 1, 2, \dots, 8$. Pozostałe odcinki, leżące wewnątrz zbioru P , są oznaczone liniami przerywanymi. Dla innej wartości φ , różnej od 5.6, niektóre z nich mogą być krawędziami tego zbioru. Wtedy niektóre z krawędzi e_i staną się odcinkami wewnętrznymi zbioru P . Podobnie, nie wszystkie z punktów oznaczonych gwiazdkami są punktami wierzchołkowymi zbioru P . Przy zmianach wartości φ ich położenie względem siebie może się zmieniać, tzn. niektóre z tych punktów, które są punktami wewnętrznymi zbioru P przy jednej wartości φ mogą być punktami wierzchołkowymi tego zbioru przy innej wartości φ (i odwrotnie).

W sytuacji pokazanej na rysunku 6.2 krawędzie (boki) zbioru P można opisać wzorami

$$e_i = e_i(\Lambda) = \{e_i(\lambda) : \lambda \in \Lambda = [0, 1]\}, \quad i = 1, 2, \dots, 8,$$

gdzie

$$e_1(\lambda) = (1-\lambda)p_{03} + \lambda p_{01} + p_{11} \exp(-j\varphi),$$

$$e_2(\lambda) = p_{01} + [(1-\lambda)p_{11} + \lambda p_{14}] \exp(-j\varphi),$$

$$e_3(\lambda) = (1-\lambda)p_{01} + \lambda p_{04} + p_{14} \exp(-j\varphi),$$

$$e_4(\lambda) = p_{04} + [(1-\lambda)p_{14} + \lambda p_{12}] \exp(-j\varphi),$$

$$e_5(\lambda) = (1-\lambda)p_{04} + \lambda p_{02} + p_{12} \exp(-j\varphi),$$

$$e_6(\lambda) = p_{02} + [(1-\lambda)p_{12} + \lambda p_{13}] \exp(-j\varphi),$$

$$e_7(\lambda) = (1-\lambda)p_{02} + \lambda p_{03} + p_{13} \exp(-j\varphi),$$

$$e_8(\lambda) = p_{03} + [(1-\lambda)p_{13} + \lambda p_{11}] \exp(-j\varphi).$$

Z powyższych rozważań wynika, że w przypadku ogólnym dla dowolnej ustalonej wartości φ zbiór P jest ośmiokątem. Każdy z 32 odcinków opisanych wzorami (6.8) i (6.9) może być bokiem tego ośmiokąta, a każdy z punktów oznaczonych gwiazdkami może być jego wierzchołkiem (w zależności od wartości φ). ■

Z przykładu 6.2 i powyższych rozważań wynika, że do konstrukcji zbioru wartości (6.7) quasi-wielomianu przedziałowego (6.1) przy $m = 1$ jest niezbędna znajomość 16 quasi-wielomianów mających postać

$$w^{(i,k)}(s, \mathbf{h}) = w_0^{(i)}(s) \exp(-sh_0) + w_1^{(k)}(s) \exp(-sh_1), \quad i, k = 1, \dots, 4, \quad (6.10)$$

gdzie $w_0^{(i)}(s)$ ($i = 1, \dots, 4$) i $w_1^{(k)}(s)$ ($k = 1, \dots, 4$) są to wielomiany Charitonowa stowarzyszone z wielomianami przedziałowymi $W_0(s, B_0)$ i $W_1(s, B_1)$, odpowiednio, oraz 32 quasi-wielomianów krawędziowych mających postaci

$$p_0^{(i,k,r)}(s, \mathbf{h}, \lambda) = [(1-\lambda)w_0^{(k)}(s) + \lambda w_0^{(r)}(s)] \exp(-sh_0) + w_1^{(i)}(s) \exp(-sh_1), \quad (6.11)$$

$$p_1^{(i,k,r)}(s, \mathbf{h}, \lambda) = [(1-\lambda)w_1^{(k)}(s) + \lambda w_1^{(r)}(s)] \exp(-sh_1) + w_0^{(i)}(s) \exp(-sh_0), \quad (6.12)$$

gdzie $\lambda \in \Lambda = [0, 1]$, $i = 1, \dots, 4$, oraz $(k, r) = (1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)$, zgodnie z przyjętą w Dodatku A numeracją wielomianów Charitonowa. Każdy ze wzorów (6.11) i (6.12) opisuje 16 quasi-wielomianów krawędziowych.

Wzory (6.11) i (6.12) można napisać w równoważnych postaciach

$$p_0^{(i,k,r)}(s, \mathbf{h}, \lambda) = (1 - \lambda)w^{(k,i)}(s, \mathbf{h}) + \lambda w^{(r,i)}(s, \mathbf{h}), \quad (6.11a)$$

$$p_1^{(i,k,r)}(s, \mathbf{h}, \lambda) = (1 - \lambda)w^{(i,k)}(s, \mathbf{h}) + \lambda w^{(i,r)}(s, \mathbf{h}). \quad (6.12a)$$

Zauważmy, że w powyższych wzorach występuje czynnik $\exp(-sh_0)$ pomimo tego, że $h_0 = 0$. Jest to zgodne z oznaczeniami przyjętymi przy opisie quasi-wielomianu przedziałowego (6.1).

W dalszych rozważaniach quasi-wielomiany mające postać (6.10) będziemy nazywać quasi-wielomianami Charitonowa stowarzyszonymi z quasi-wielomianem przedziałowym (6.1), natomiast quasi-wielomiany (6.11) i (6.12) będziemy nazywać krawędziowymi quasi-wielomianami Charitonowa.

W przypadku ogólnym (tj. przy $m > 1$) quasi-wielomiany Charitonowa można napisać w postaci

$$w^{(\mathbf{r})}(s, \mathbf{h}) = \sum_{i=0}^m w_i^{(r_i)}(s) \exp(-sh_i), \quad (6.13)$$

gdzie $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \dots, r_m)$, $r_i = 1, \dots, 4$ dla $i = 0, 1, \dots, m$. Zbiór wszystkich quasi-wielomianów Charitonowa liczy 4^{m+1} quasi-wielomianów. Natomiast krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa stowarzyszone z quasi-wielomianem przedziałowym (6.1) mają postać

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^m w_i^{(r_i)}(s) \exp(-sh_i) + [(1 - \lambda)w_k^{(\alpha_k)}(s) + \lambda w_k^{(\beta_k)}(s)] \exp(-sh_k), \quad (6.14)$$

gdzie $\lambda \in \Lambda = [0, 1]$, $r_i = 1, \dots, 4$, $(\alpha_k, \beta_k) = (1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)$, $k = 0, 1, \dots, m$.

Zbiór wszystkich krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa liczy $(m+1)4^{m+1}$ quasi-wielomianów. Można w nim wyróżnić $m+1$ grup quasi-wielomianów. Każda grupa odpowiada innej ustalonej wartości indeksu k , gdzie $k = 0, 1, \dots, m$, i liczy 4^{m+1} krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa.

Zauważmy, że liczby quasi-wielomianów Charitonowa i krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa, stowarzyszonych z quasi-wielomianem przedziałowym (6.1), nie zależą od stopnia n tego quasi-wielomianu i od liczby niepewnych parametrów. Zależą one tylko od liczby m niezerowych opóźnień.

Z przykładu 6.2 i powyższych rozważań wynika, że dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiór wartości (6.7) quasi-wielomianu przedziałowego (6.1) jest wypukłym wielobokiem rozpiętym na 4^{m+1} punktach, będących wartościami dla $s = j\omega$ wszystkich quasi-wielomianów Charitonowa mających postać (6.13), tj.

$$w(j\omega, \mathbf{h}, B) = \text{conv}\{w^{(\mathbf{r})}(j\omega, \mathbf{h}); r_i = 1, \dots, 4, i = 0, 1, \dots, m\}, \quad (6.15)$$

gdzie $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \dots, r_m)$. Każda krawędź wypukłego wieloboku (6.15) jest zbiorem wartości jednego z krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa (6.14). Wobec tego, wyznaczając przy ustalonym $\omega \geq 0$ zbiory wartości wszystkich krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa (6.14), otrzymamy na płaszczyźnie zmiennej zespolonej $(m+1)4^{m+1}$ odcinków linii prostych. Tworzą one wypukły wielobok, będący zbiorem wartości (6.15) quasi-wielomianu przedziałowego (6.1). Jego bokami są zewnętrzne odcinki z wyznaczonego zbioru odcinków.

Wyznaczając w wyżej opisany sposób położenia na płaszczyźnie zmiennej zespolonej zbioru wartości $w(j\omega, \mathbf{h}, B)$ dla odpowiednio dobranych wartości parametru $\omega \geq 0$, odporną stabilność quasi-wielomianu przedziałowego (6.1) można zbadać stosując lemat 3.2, tj. w drodze bezpośredniego sprawdzenia warunku wykluczenia zera

$$0 \notin w(j\omega, \mathbf{h}, B), \quad \forall \omega \geq 0. \quad (6.16)$$

Postępując w podobny sposób można też wyznaczyć położenia zbioru wartości rodziny członów dominujących quasi-wielomianu przedziałowego (6.1) typu neutralnego i zbadać odporną stabilność tej rodziny stosując lemat 3.3.

Przykład 6.3. Stosując metodę bezpośredniego sprawdzenia warunku wykluczenia zera należy zbadać odporną stabilność quasi-wielomianu przedziałowego

$$w(s, \mathbf{h}, \mathbf{b}) = \sum_{i=0}^2 \sum_{k=0}^3 b_{ki} s^k \exp(-sh_i), \quad (6.17)$$

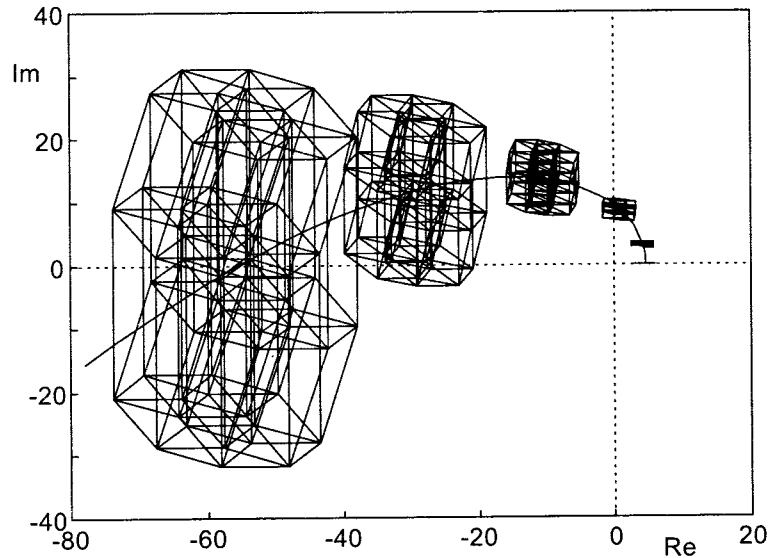
gdzie $\mathbf{h} = [h_0, h_1, h_2]$, przy czym $h_0 = 0$, $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.3$, oraz

$$\begin{aligned} b_{30} &\in [1, 2], & b_{20} &\in [3, 4], & b_{10} &\in [2, 3], & b_{00} &\in [1, 2], \\ b_{31} &\in [0, 0.6], & b_{21} &\in [3, 4], & b_{11} &\in [5, 6], & b_{01} &\in [2, 3], \\ b_{32} &\in [0.1, 0.2], & b_{22} &\in [1, 2], & b_{12} &\in [4, 5], & b_{02} &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Ponieważ $m = 2$, z quasi-wielomianem przedziałowym (6.17) jest stowarzyszonych $(m+1)4^{m+1} = 3 \cdot 4^3 = 192$ krawędziowych quasi-wielomianów Charito-

nowa mających postać (6.14). Ich zbiory wartości (odcinki linii prostych) dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ wyznaczają na płaszczyźnie zmiennej zespolonej zbiór wartości $w(j\omega, \mathbf{h}, B)$ quasi-wielomianu przedziałowego (6.17). Jest on wypukłym wielobokiem, którego liczba boków jest nie większa niż 12.

Położenia na płaszczyźnie zmiennej zespolonej zbioru wartości $w(j\omega, \mathbf{h}, B)$, wyznaczone dla $\omega = 0$, $\omega = 0.25$, oraz dla wartości ω zmieniających się od 0.75 do 3 z krokiem 0.75 są pokazane na rysunku 6.3. Dla $\omega > 3$ zbiór wartości $w(j\omega, \mathbf{h}, B)$ oddala się od początku układu współrzędnych.



Rys. 6.3. Położenia zbioru wartości quasi-wielomianu przedziałowego (6.17)

Na rysunku 6.3 jest też pokazana początkowa część hodografu Michajłowa quasi-wielomianu nominalnego (linia krzywa, wyznaczona dla $\omega \in [0, 3.5]$), którego współczynniki zostały obliczone ze wzoru $b_{ki}^{(0)} = 0.5(b_{ki}^- + b_{ki}^+)$, $k = 0, \dots, 3$, $i = 0, 1, 2$. Ponieważ przy rosnących wartościach parametru $\omega \geq 0$ hodograf Michajłowa przechodzi w kierunku matematycznie dodatnim przez trzy ćwiartki płaszczyzny zmiennej zespolonej, na podstawie twierdzenia 2.3 możemy stwierdzić, że quasi-wielomian nominalny jest asymptotycznie stabilny.

Z rysunku 6.3 wynika, że warunek wykluczenia zera (6.16) jest spełniony. Rozpatrywany quasi-wielomian przedziałowy jest więc odpornie stabilny, zgodnie z lematem 3.2.

Quasi-wielomian przedziałowy (6.17) ma $l = (n+1)(m+1) = 12$ niepewnych parametrów. Zbiór wartości tych parametrów jest 12-wymiarowym hiperprostokątnikiem, który ma $L = l^{l-1} = 12 \cdot 2^{11} = 24576$ krawędzi. Z quasi-wielomianem przedziałowym (6.17) jest więc stowarzyszonych 24576 quasi-wielomianów krawędziowych, natomiast zbiór krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa, mających postać (6.14), liczy 192 quasi-wielomianów.

Rozpatrywanie krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa zamiast quasi-wielomianów krawędziowych, odpowiadających poszczególnym krawędziom zbioru wartości niepewnych parametrów, znacznie upraszcza proces badania odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.17). ■

Z powyższych rozważań wynika, że stosując do badania odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.1) twierdzenie krawędziowe 4.6 oraz podane w punkcie 4.3.4 metody funkcji testujących, można ograniczyć się do rozpatrywania tylko quasi-wielomianów Charitonowa lub krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa (w zależności od metody). Jest ich znacznie mniej niż quasi-wielomianów wierzchołkowych i krawędziowych, odpowiednio. Ponadto, liczby quasi-wielomianów Charitonowa i krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa zależą tylko od liczby m niezerowych opóźnień. Nie zależą one natomiast od stopnia n quasi-wielomianu przedziałowego (6.1) i od liczby niepewnych parametrów.

Quasi-wielomiany Charitonowa (6.13) można napisać w postaci

$$w_k^{(\tilde{\mathbf{r}}, r_k)}(s, \mathbf{h}) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^m w_i^{(r_i)}(s) \exp(-sh_i) + w_k^{(r_k)}(s) \exp(-sh_k), \quad (6.18)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{r}} = (r_0, \dots, r_{k-1}, r_{k+1}, \dots, r_m)$, $k = 0, 1, \dots, m$, zaś $r_i = 1, \dots, 4$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Ze wzorów (6.14) i (6.18) wynika, że przy ustalonym k ($k = 0, 1, \dots, m$) grupę liczącą 4^{m+1} krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa można napisać w postaci

$$p_k^{(\tilde{\mathbf{r}}, \alpha_k, \beta_k)}(s, \mathbf{h}, \lambda) = (1 - \lambda) w_k^{(\tilde{\mathbf{r}}, \alpha_k)}(s, \mathbf{h}) + \lambda w_k^{(\tilde{\mathbf{r}}, \beta_k)}(s, \mathbf{h}), \quad (6.19)$$

gdzie $\lambda \in [0, 1]$, $(\alpha_k, \beta_k) = (1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)$, oraz

$$w_k^{(\tilde{\mathbf{r}}, \alpha_k)}(s, \mathbf{h}) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^m w_i^{(r_i)}(s) \exp(-sh_i) + w_k^{(\alpha_k)}(s) \exp(-sh_k), \quad (6.20)$$

$$w_k^{(\tilde{r}, \beta_k)}(s, h) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^m w_i^{(r_i)}(s) \exp(-sh_i) + w_k^{(\beta_k)}(s) \exp(-sh_k). \quad (6.21)$$

Wyznaczając funkcję (4.41) dla krawędziowego quasi-wielomianu Charitonowa mającego postać (6.19), otrzymamy

$$\begin{aligned} g_k^{(\alpha_k, \beta_k)}(s, h) &= w_k^{(\tilde{r}, \beta_k)}(s, h) - w_k^{(\tilde{r}, \alpha_k)}(s, h) \\ &= [w_k^{(\beta_k)}(s) - w_k^{(\alpha_k)}(s)] \exp(-sh_k). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Przy przyjętej w Dodatku A numeracji wielomianów Charitonowa (wzory (A.4)-(A.7)) wynika, że wyrażenie w nawiasach kwadratowych w (6.22) przy $(\alpha_k, \beta_k) = (1,3), (3,2), (2,4), (4,1)$ jest wielomianem zawierającym tylko parzyste lub tylko nieparzyste potęgi zmiennej s . Wobec tego zachodzi zależność

$$(d/d\omega) \arg g_k^{(\alpha_k, \beta_k)}(j\omega, h) = -h_k. \quad (6.23)$$

Uwzględniając powyższe łatwo sprawdzić, że dla krawędziowego quasi-wielomianu Charitonowa (6.19) nierówność (4.43) jest spełniona, jeżeli

$$h_m \leq 2h_k. \quad (6.24)$$

Z twierdzenia 4.3 wynika więc, że jeżeli jest spełniona nierówność (6.24), to k -ta ($k = 0, 1, \dots, m$) grupa krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa, mających postać (6.19) przy ustalonym k , jest odpornie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy są asymptotycznie stabilne odpowiadające jej quasi-wielomiany Charitonowa (6.18).

Z powyższych rozważań wynika następujące twierdzenie. W innym sformułowaniu zostało ono udowodnione w pracy [71].

Twierdzenie 6.1. Quasi-wielomian przedziałowy (6.1) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są asymptotycznie stabilne wszystkie quasi-wielomiany Charitonowa (6.18) oraz są odpornie stabilne te grupy krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa, mających postać (6.19) przy ustalonym k ($k = 0, 1, \dots, m$), dla których nierówność (6.24) nie jest spełniona.

Dowód. Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ boki zbioru wartości $w(j\omega, h, B)$ quasi-wielomianu przedziałowego (6.1) są zbiorami wartości krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa. Postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia krawędziowego 4.6 możemy wykazać, że quasi-wielomian przedziałowy (6.1) jest

odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie stabilne wszystkie krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa. Natomiast asymptotyczna stabilność wszystkich quasi-wielomianów Charitonowa (6.18) jest warunkiem koniecznym odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.1).

Przy spełnieniu warunku (6.24) odporna stabilność k -tej grupy krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa, mających postać (6.19) przy ustalonym k , jest równoważna z asymptotyczną stabilnością odpowiadających jej quasi-wielomianów Charitonowa (6.18). Oznacza to, że przy badaniu odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.1) należy badać odporną stabilność tylko tych grup krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa, dla których nierówność (6.24) nie jest spełniona. ■

Zauważmy, że nierówność (6.24) jest zawsze spełniona dla $k = m$. Oznacza to, że przy badaniu odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.1) można nie badać odpornej stabilności grupy 4^{m+1} krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa, mających postać (6.19) przy $k = m$.

W przypadku szczególnym $m = 1$ na podstawie twierdzenia 6.1 można sformułować poniższy lemat.

Lemat 6.1. Quasi-wielomian przedziałowy (6.1) przy $m = 1$ jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są asymptotycznie stabilne wszystkie quasi-wielomiany Charitonowa (6.10) oraz są odpornie stabilne wszystkie krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa mające postać (6.11), których jest 16.

Dowód. W rozpatrywanym przypadku mamy $h_0 = 0$, $h_1 = h_m$. Nierówność (6.24) jest spełniona dla $k = 1$, tj. $h_1 \leq 2h_1$. Oznacza to, że krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa (6.12) są odpornie stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy są asymptotycznie stabilne tworzące je quasi-wielomiany Charitonowa. Natomiast nierówność (6.24) nie jest spełniona dla $k = 0$, bowiem $h_1 > 2h_0 = 0$. Oznacza to, że asymptotyczna stabilność quasi-wielomianów Charitonowa, tworzących krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa (6.11), nie jest równoważna z ich odporną stabilnością. Dowód wynika więc bezpośrednio z twierdzenia 6.1. ■

Z twierdzenia 6.1 wynika, że mogą wystąpić pewne szczególne przypadki, w których dla odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.1) potrzeba i wystarcza, aby były asymptotycznie stabilne tylko quasi-wielomiany Charitonowa z nim stowarzyszone. Szerzej takie przypadki są omówione w punkcie 6.2 niniejszego rozdziału. Możliwość ich wystąpienia ilustruje poniższy przykład.

Przykład 6.4. Weźmy pod uwagę quasi-wielomian przedziałowy

$$W(s, \mathbf{h}, B) = w_0(s) \exp(-sh_0) + \sum_{i=1}^2 W_i(s, B_i) \exp(-sh_i), \quad (6.25)$$

gdzie $h_2 > h_1 > h_0 = 0$, $w_0(s)$ jest znanym wielomianem stopnia n , $W_1(s, B_1)$ i $W_2(s, B_2)$ są to wielomiany przedziałowe stopnia nie wyższego niż n .

Z quasi-wielomianem przedziałowym (6.25) jest stowarzyszonych 16 quasi-wielomianów Charitonowa

$$w^{(r)}(s, \mathbf{h}) = w_0(s) + \sum_{i=1}^2 w_i^{(r_i)}(s) \exp(-sh_i), \quad (6.26)$$

gdzie $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$, przy czym $r_i = 1, \dots, 4$ dla $i = 1$ i $i = 2$.

Krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa (których jest 32), stowarzyszone z quasi-wielomianem przedziałowym (6.25), można napisać w postaci

$$p_k^{(r_i, \alpha_k, \beta_k)}(s, \mathbf{h}, \lambda) = (1 - \lambda) w_k^{(r_i, \alpha_k)}(s, \mathbf{h}) + \lambda w_k^{(r_i, \beta_k)}(s, \mathbf{h}), \quad (6.27)$$

gdzie $\lambda \in [0, 1]$, $k = 2$, $i = 1$, $r_1 = 1, \dots, 4$, oraz $k = 1$, $i = 2$, $r_2 = 1, \dots, 4$, przy czym $(\alpha_k, \beta_k) = (1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)$ dla $k = 1$ i $k = 2$, zaś

$$w_k^{(r_i, \alpha_k)}(s, \mathbf{h}) = w_0(s) + w_i^{(r_i)}(s) \exp(-sh_i) + w_k^{(\alpha_k)}(s) \exp(-sh_k), \quad (6.28)$$

$$w_k^{(r_i, \beta_k)}(s, \mathbf{h}) = w_0(s) + w_i^{(r_i)}(s) \exp(-sh_i) + w_k^{(\beta_k)}(s) \exp(-sh_k). \quad (6.29)$$

W rozpatrywanym przypadku mamy $h_0 = 0$, $h_m = h_2$. Ponieważ $w_0(s)$ jest znanym wielomianem, aby odporna stabilność quasi-wielomianu przedziałowego (6.25) była równoważna z asymptotyczną stabilnością wszystkich quasi-wielomianów Charitonowa (6.26), nierówność (6.24) musi być spełniona dla $k = 1$ i $k = 2$. Łatwo zauważyć, że nierówność (6.24) jest spełniona dla $k = 2$. Aby była ona spełniona dla $k = 1$, musi być spełniony warunek $h_2 \leq 2h_1$.

Z twierdzenia 6.1 wynika zatem, że jeżeli $h_2 \leq 2h_1$, to quasi-wielomian przedziałowy (6.25) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są asymptotycznie stabilne wszystkie quasi-wielomiany Charitonowa (6.26), których jest 16.

Jeżeli natomiast $h_2 > 2h_1$, to quasi-wielomian przedziałowy (6.25) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są asymptotycznie stabilne wszystkie

quasi-wielomiany Charitonowa (6.26) oraz są odpornie stabilne krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa mające postać (6.27) przy $k = 1$. Jest ich 16. ■

6.2. Odporna stabilność w pewnych przypadkach szczególnych

Weźmy pod uwagę quasi-wielomian przedziałowy mający postać

$$W(s, \mathbf{h}, B_r) = w(s, \mathbf{h}) + W(s, B_r) \exp(-sh_r), \quad (6.30)$$

gdzie

$$w(s, \mathbf{h}) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq r}}^m w_i(s) \exp(-sh_i) \quad (6.31)$$

jest ustalonym quasi-wielomianem, przy czym $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m$,

$$w_i(s) = \sum_{k=0}^n b_{ki} s^k, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (6.32)$$

natomiast $W(s, B_r)$ jest wielomianem przedziałowym, tj.

$$W(s, B_r) = \{w_r(s, \mathbf{b}_r) : \mathbf{b}_r \in B_r\}, \quad (6.33)$$

gdzie $\mathbf{b}_r = [b_{0r}, b_{1r}, \dots, b_{nr}]$,

$$w_r(s, \mathbf{b}_r) = \sum_{k=0}^n b_{kr} s^k, \quad (6.34)$$

$$B_r = \{\mathbf{b}_r : b_{kr} \in [b_{kr}^-, b_{kr}^+], \quad k = 0, 1, \dots, n\}. \quad (6.35)$$

Rozpatrzmy problem badania odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.30) przy różnych ustalonych wartościach indeksu r , który może przyjmować dowolną całkowitą wartość z przedziału $[0, m]$.

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że $b_{n0}^- > 0$ przy $r = 0$ oraz $b_{n0} > 0$ przy $r \neq 0$.

Oznaczmy przez $w_r^{(i)}(s)$, $i = 1, \dots, 4$, wielomiany Charitonowa stowarzyszone z wielomianem przedziałowym (6.33), utworzone w sposób podany w Dodatku A, oraz przez

$$w_r^{(i)}(s, \mathbf{h}) = w(s, \mathbf{h}) + w_r^{(i)}(s) \exp(-sh_r), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (6.36)$$

oznaczymy cztery quasi-wielomiany Charitonowa stowarzyszone z quasi-wielomianem przedziałowym (6.30).

Ponadto, przez

$$\begin{aligned} p_{ik}(s, \mathbf{h}, \lambda) &= (1 - \lambda)w_r^{(i)}(s, \mathbf{h}) + \lambda w_r^{(k)}(s, \mathbf{h}) \\ &= w(s, \mathbf{h}) + [(1 - \lambda)w_r^{(i)}(s) + \lambda w_r^{(k)}(s)] \exp(-sh_r), \end{aligned} \quad (6.37)$$

gdzie $\lambda \in \Lambda = [0, 1]$, $(i, k) = (1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)$, oznaczmy krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa stowarzyszone z quasi-wielomianem przedziałowym (6.30).

Quasi-wielomian przedziałowy (6.30) jest przypadkiem szczególnym quasi-wielomianu przedziałowego (6.1). Stosując twierdzenie 6.1 do quasi-wielomianu przedziałowego (6.30) otrzymamy poniższy lemat.

Lemat 6.2. Niech r będzie dowolną ustaloną liczbą całkowitą należącą do przedziału $[0, m]$. Jeżeli jest spełniony warunek

$$h_m \leq 2h_r, \quad (6.38)$$

to quasi-wielomian przedziałowy (6.30) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są asymptotycznie stabilne cztery quasi-wielomiany Charitonowa (6.36). Jeżeli natomiast warunek (6.38) nie jest spełniony, to quasi-wielomian przedziałowy (6.30) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie stabilne cztery krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa (6.37). ■

Zauważmy, że warunek (6.38) jest spełniony dla $r = m$. Z lematu 6.2 wynika więc, że quasi-wielomian przedziałowy (6.30) przy $r = m$, mający postać

$$W(s, \mathbf{h}, B_m) = \sum_{i=0}^{m-1} w_i(s) \exp(-sh_i) + W(s, B_m) \exp(-sh_m) \quad (6.39)$$

jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są asymptotycznie stabilne cztery quasi-wielomiany Charitonowa mające postać (6.36) przy $r = m$. Powyższy rezultat został też podany w pracach [43, 71, 137].

Warunek (6.38) nie jest spełniony dla $r = 0$. Oznacza to, że o odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego

$$W(s, \mathbf{h}, B_0) = W(s, B_0) + \sum_{i=1}^m w_i(s) \exp(-sh_i) \quad (6.40)$$

nie można wnioskować na podstawie asymptotycznej stabilności quasi-wielomianów Charitonowa $w_0^{(i)}(s, \mathbf{h})$, $i = 1, \dots, 4$, stowarzyszonych z tym quasi-wielomianem. Ich asymptotyczna stabilność jest tylko warunkiem koniecznym odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.40).

Z Dodatku A wynika, że dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiór wartości $w(j\omega, B_0)$ wielomianu przedziałowego $W(s, B_0)$ jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych. Ponieważ dla każdego ustalonego $s = j\omega$ drugi składnik po prawej stronie wzoru (6.40) jest ustaloną liczbą zespoloną, zbiór wartości $w(j\omega, \mathbf{h}, B_0)$ quasi-wielomianu przedziałowego (6.40) dla każdego $\omega \geq 0$ też jest prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych płaszczyzny zmiennej zespolonej. Może się więc wydawać, że twierdzenie Charitonowa A.1 powinno dać się uogólnić na klasę quasi-wielomianów przedziałowych (6.40). Takie rozumowanie jest jednak błędne, co wynika między innymi z przykładu 6.1. Zasadniczym powodem niemożliwości uogólnienia twierdzenia Charitonowa na klasę quasi-wielomianów przedziałowych (6.40) jest to, że argument asymptotycznie stabilnych quasi-wielomianów, należących do rodziny (6.40), nie jest w przypadku ogólnym monotonicznie rosnącą funkcją parametru $\omega \geq 0$ (por. punkt 2.4).

Z lematu 6.2 wynika, że twierdzenie Charitonowa A.1 jest słuszne w przypadku quasi-wielomianu przedziałowego (6.39). Zauważmy, że zbiór wartości tego quasi-wielomianu nie jest dla każdego $\omega \geq 0$ prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Odporna stabilność quasi-wielomianu przedziałowego (6.39) jest równoważna z odporną stabilnością quasi-wielomianu przedziałowego

$$\tilde{W}(s, \mathbf{h}, B_m) = \sum_{i=0}^{m-1} w_i(s) \exp(s(h_m - h_i)) + W(s, B_m). \quad (6.41)$$

Wzór (6.41) otrzymuje się mnożąc obustronnie wzór (6.39) przez $\exp(sh_m)$.

Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiór wartości $\tilde{w}(j\omega, \mathbf{h}, B_m)$ quasi-wielomianu przedziałowego (6.41) jest prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych płaszczyzny zmiennej zespolonej. Ponadto, zgodnie z rozważaniami podanymi w punkcie 2.4, argument asymptotycznie stabilnych quasi-wielomianów, należących do rodziny (6.41), jest monotonicznie rosnącą funkcją parametru $\omega \geq 0$. Występuje więc taka sama sytuacja jak w przypadku wielomianu przedziałowego. Dlatego też twierdzenie Charitonowa jest słuszne w przypadku quasi-wielomianu przedziałowego (6.41), a więc i (6.39).

Z powyższych rozważań i lematu 6.2 wynika, że odporna stabilność quasi-wielomianu przedziałowego (6.30) jest równoważna z asymptotyczną stabilnością czterech quasi-wielomianów Charitonowa (6.36), w przypadku gdy $r = m$ oraz wtedy, gdy wartości opóźnień h_r i h_m spełniają nierówność (6.38). W pozostałych przypadkach asymptotyczna stabilność czterech quasi-wielomianów Charitonowa (6.36) jest tylko warunkiem koniecznym odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.30).

Rozpatrzmy teraz problem badania odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.30) w przypadku ogólnym, gdy nierówność (6.38) nie jest spełniona. Może to zajść tylko wtedy, gdy r jest liczbą całkowitą należącą do przedziału $[0, m - 1]$.

Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiór wartości $w(j\omega, \mathbf{h}, B_r)$ quasi-wielomianu przedziałowego (6.30) jest prostokątem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Jego boki są równoległe do osi układu współrzędnych tylko wtedy, gdy $r = 0$. Wierzchołkami tego prostokąta są punkty $w_r^{(i)}(j\omega, \mathbf{h})$, $i = 1, \dots, 4$, a jego krawędziami są odcinki linii prostych $[w_r^{(i)}(j\omega, \mathbf{h}), w_r^{(k)}(j\omega, \mathbf{h})]$, gdzie $(i, k) = (1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)$.

Odporną stabilność quasi-wielomianu przedziałowego (6.30) w przypadku ogólnym można badać albo sprawdzając bezpośrednio spełnienie warunku wykluczenia zera $0 \notin w(j\omega, \mathbf{h}, B_r)$, $\forall \omega \in [0, \infty)$, albo też stosując metody funkcji testujących opisane w punkcie 4.3.4. Przy stosowaniu tych metod należy rozpatrywać tylko quasi-wielomiany Charitonowa (6.36) lub krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa (6.37) (w zależności od metody). Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ ich wartości oraz zbiory wartości są wierzchołkami oraz krawędziami, odpowiednio, zbioru wartości $w(j\omega, \mathbf{h}, B_r)$ quasi-wielomianu przedziałowego (6.30).

Oznaczmy przez

$$\tilde{w}_r^{(i)}(s, \mathbf{h}) = w_r^{(i)}(s, \mathbf{h}) / w_r^{(0)}(s, \mathbf{h}), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (6.42)$$

unormowane quasi-wielomiany Charitonowa stowarzyszone z quasi-wielomianem przedziałowym (6.30), gdzie $w_r^{(0)}(s, \mathbf{h})$ jest asymptotycznie stabilnym quasi-wielomianem nominalnym rodziny (6.30).

Na bazie metody funkcji testującej $F(\omega)$ (patrz twierdzenie 4.10) można sformułować poniższy lemat.

Lemat 6.3. Załóżmy, że quasi-wielomian nominalny $w_r^{(0)}(s, \mathbf{h})$ jest asymptotycznie stabilny. Przedziałowy quasi-wielomian (6.30) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$F_h(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty), \quad (6.43)$$

gdzie dla każdego ustalonego ω funkcję testującą $F_h(\omega)$ oblicza się ze wzoru

$$F_h(\omega) = \pi - \max_{(i,k)} \{|\arg \tilde{w}_r^{(i)}(j\omega, \mathbf{h}) - \arg \tilde{w}_r^{(k)}(j\omega, \mathbf{h})|\}, \quad (6.44)$$

przy czym $\arg s \in [-\pi, \pi)$, zaś maksimum we wzorze (6.44) liczy się dla par indeksów $(i, k) = (1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)$. ■

Lemat 6.3 można stosować do badania odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.30) przy dowolnej ustalonej wartości indeksu r należącej do przedziału $[0, m - 1]$. Można go również stosować przy $r = m$, chociaż nie jest to konieczne. W takim przypadku wystarczy bowiem zbadać odporną stabilność czterech quasi-wielomianów Charitonowa (6.36).

Jeżeli $r = 0$, quasi-wielomian przedziałowy (6.30) przyjmuje postać (6.40). Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiór wartości tego quasi-wielomianu jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych. Dlatego też do badania odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.40) wygodnie jest stosować opisaną poniżej metodę funkcji testującej $d_h(\omega)$ zamiast metody funkcji testującej $F_h(\omega)$. Wynika to stąd, że funkcję testującą $d_h(\omega)$ wyznacza się znacznie prościej niż funkcję testującą $F_h(\omega)$ (por. wzory (6.44) i (6.46)). Ponadto, wartości funkcji $F_h(\omega)$ mogą zmieniać się skokowo dla tych wartości parametru $\omega \geq 0$, dla których zbiór wartości $w(j\omega, \mathbf{h}, B_r)$ zaczyna obejmować początek płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Na bazie metody funkcji testującej $d(\omega)$, podanej w punkcie 4.3.4.1, udowodnimy poniższy lemat. Został on sformułowany w [43] z wykorzystaniem podejścia zastosowanego w pracy [12].

Lemat 6.4. Załóżmy, że przynajmniej jeden z czterech quasi-wielomianów Charitonowa $w_0^{(i)}(s, \mathbf{h})$, $i = 1, \dots, 4$, jest asymptotycznie stabilny. Przedziałowy quasi-wielomian (6.40) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$d_h(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty), \quad (6.45)$$

gdzie

$$d_h(\omega) = \max\{\operatorname{Re} w_0^{(2)}(j\omega, \mathbf{h}), -\operatorname{Re} w_0^{(1)}(j\omega, \mathbf{h}), \\ \operatorname{Im} w_0^{(2)}(j\omega, \mathbf{h}), -\operatorname{Im} w_0^{(1)}(j\omega, \mathbf{h})\} \quad (6.46)$$

jest funkcją testującą stowarzyszoną z tym quasi-wielomianem.

Dowód. Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiór wartości $w(j\omega, \mathbf{h}, B_0)$ quasi-wielomianu przedziałowego (6.40) jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych. Jego wierzchołkami są punkty $w_0^{(i)}(j\omega, \mathbf{h})$, $i = 1, \dots, 4$. Przy przyjętej w Dodatku A numeracji wielomianów Charitonowa, współrzędne wierzchołków prostokąta $w(j\omega, \mathbf{h}, B_0)$ można wyznaczyć na podstawie znajomości tylko dwóch quasi-wielomianów Charitonowa: $w_0^{(1)}(s, \mathbf{h})$ i $w_0^{(2)}(s, \mathbf{h})$, mających postać (6.36) przy $r = 0$ i $i = 1$ oraz $i = 2$. Wobec tego, dla quasi-wielomianu przedziałowego (6.40) funkcję testującą (4.100) można wyznaczyć ze wzoru (6.46). Jeżeli jest asymptotycznie stabilny przynajmniej jeden z quasi-wielomianów Charitonowa $w_0^{(i)}(s, \mathbf{h})$, $i = 1, \dots, 4$, to dla odpornej stabilności przedziałowego quasi-wielomianu (6.40) potrzeba i wystarcza, aby był spełniony warunek wykluczenia zera $0 \notin w(j\omega, \mathbf{h}, B_0)$, $\forall \omega \in \Omega = [0, \infty)$. Jest on spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi (6.45). Dowód lematu wynika zatem z twierdzenia 4.4. ■

Lemat 6.4 można też stosować do badania odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.30) przy dowolnym ustalonym r należącym do przedziału $[0, m]$. Jednakże w przypadku, gdy $r \neq 0$, warunek (6.45) jest tylko warunkiem dostatecznym odpornej stabilności. Ponadto, w takim wypadku funkcję testującą $d_h(\omega)$ należy obliczać ze wzoru

$$d_h(\omega) = \max\{\operatorname{Re} w_0^{(2)}(j\omega, \mathbf{h}), -\operatorname{Re} w_0^{(1)}(j\omega, \mathbf{h}), \\ \operatorname{Im} w_0^{(4)}(j\omega, \mathbf{h}), -\operatorname{Im} w_0^{(3)}(j\omega, \mathbf{h})\}. \quad (6.46a)$$

Powyższe wynika stąd, że przy $r \neq 0$ zbiór wartości $w(j\omega, \mathbf{h}, B_r)$ quasi-wielomianu przedziałowego (6.30) nie jest dla każdego $\omega \geq 0$ prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych. Można go tylko aproksymować takim prostokątem.

Przy komputerowym sprawdzaniu warunków (6.43) i (6.45) można ograniczyć się do skończonego przedziału $\tilde{\Omega} = [0, \omega_{\max}]$ wartości parametru ω . Wynika to stąd, że przy $\omega \rightarrow \infty$ wykres funkcji testującej $F_h(\omega)$ ustala się na pewnym poziomie lub wokół niego oscyluje (w przypadku quasi-wielomianu typu neutralnego), zaś wykres funkcji testującej $d_h(\omega)$ dąży do nieskończoności. Wobec tego, przy oddzielnym sprawdzaniu warunków (6.43) i (6.45) dla kolejnych zadanych wartości parametru $\omega \geq 0$, obliczenia możemy przerwać, gdy stwierdzimy, że te warunki nie są spełnione lub stwierdzimy, że wartości funkcji testującej $d_h(\omega)$ dążą szybko do nieskończoności, zaś wartości funkcji testującej $F_h(\omega)$ ustalają się na pewnym poziomie lub oscylują wokół niego.

Podane powyżej metody można też stosować do badania odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.30) ze współmiernymi opóźnieniami, tzn. gdy $h_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, m$. W takim przypadku nierówność (6.38) przyjmuje postać $m \leq 2r$.

6.2.1. Odporna stabilność przy niepewnych opóźnieniach

Podane powyżej metody funkcji testujących, służące do badania odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego w pewnych przypadkach szczególnych, rozpatrywanych w punkcie 6.2, można uogólnić na przypadek, gdy opóźnienia nie są dokładnie znane.

Problem badania odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego z niepewnymi opóźnieniami w przypadku ogólnym jest rozpatrzony w punkcie 7.2.2 niniejszej pracy.

Przeanalizujemy najpierw problem badania odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego

$$W(s, h, B_r) = w(s, h) + W(s, B_r) \exp(-shr), \quad h \in H, \quad (6.47)$$

ze współmiernymi niepewnymi opóźnieniami, gdzie $H = [h^-, h^+]$, $0 \leq h^- < h^+$, $w(s, h)$ ma postać (6.31) przy $h_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, m$, zaś przedziałowy wielomian $W(s, B_r)$ jest opisany wzorami (6.33)-(6.35).

Przedziałowy człon dominujący stowarzyszony z przedziałowym quasi-wielomianem (6.47) można napisać w postaci (patrz punkt 2.2)

$$\Delta(z, b_{nr}) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq r}}^m b_{ni} z^i + b_{nr} z^r, \quad b_{nr} \in B_{nr}, \quad (6.48)$$

gdzie $z = e^{-sh}$, zaś $B_{nr} = [b_{nr}^-, b_{nr}^+]$. Jego odporna stabilność, która nie zależy od wartości opóźnienia h , jest warunkiem koniecznym odpornej stabilności przedziałowego quasi-wielomianu (6.47) typu neutralnego.

Z rozważań podanych w punkcie 2.2 wynika, że jeżeli człon dominujący (6.48) jest odpornie stabilny, to dla każdego $b_{nr} \in B_{nr}$ jest spełniony warunek ciągłości granicy spektralnej przedziałowego quasi-wielomianu (6.47) typu neutralnego. Oznacza to, że można rozpatrywać odporną stabilność tego quasi-wielomianu przy $h^- = 0$.

Do badania odpornej stabilności przedziałowego członu dominującego (6.48) można stosować metody podane w punkcie 4.2 niniejszej pracy.

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że przedziałowy człon dominujący (6.48) jest odpornie stabilny.

Z lematu 6.2 wynika, że jeżeli $m \leq 2r$, to quasi-wielomian przedziałowy (6.47) jest odpornie stabilny dla tych wartości opóźnienia h , dla których są jednocześnie asymptotycznie stabilne cztery quasi-wielomiany Charitonowa $w_r^{(i)}(s, h)$, $i = 1, \dots, 4$, stowarzyszone z tym quasi-wielomianem. Wobec tego, jeżeli $m \leq 2r$, to przedziałowy quasi-wielomian (6.47) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $H \subseteq H_r$, gdzie

$$H_r = \bigcap_{i=1}^4 H_r^{(i)}, \quad (6.49)$$

przy czym $H_r^{(i)}$ jest zbiorem wartości opóźnienia h , dla których i -ty quasi-wielomian Charitonowa $w_r^{(i)}(s, h)$ jest asymptotycznie stabilny. Jeżeli H_r jest zbiorem pustym, to przedziałowy quasi-wielomian (6.47) nie jest odpornie stabilny dla dowolnego $h \geq 0$.

Dla danego quasi-wielomianu $w_r^{(i)}(s, h)$ zbiór $H_r^{(i)}$ można wyznaczyć stosując metodę h -podziału podaną w punkcie 2.3.4 niniejszej pracy.

Odporną stabilność quasi-wielomianu przedziałowego (6.47) przy $m \leq 2r$ można też sprawdzić w drodze oddzielnego badania (na podstawie metody podanej w punkcie 7.1.2 niniejszej pracy) odpornej stabilności każdego z czterech quasi-wielomianów Charitonowa $w_r^{(i)}(s, h)$, $h \in H$, $i = 1, \dots, 4$.

Jeżeli $m > 2r$, to quasi-wielomian przedziałowy (6.47) jest odpornie stabilny dla tych wartości opóźnienia h , dla których są jednocześnie asymptotycznie stabilne cztery krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa $p_{13}(s, h, \lambda)$, $p_{32}(s, h, \lambda)$, $p_{24}(s, h, \lambda)$ i $p_{41}(s, h, \lambda)$, o postaci (6.37). Warunek $H \subseteq H_r$ jest tylko warunkiem koniecznym odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.47).

Do badania odpornej stabilności (dla każdego ustalonego $h \in H$) poszczególnych krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa można stosować metody podane w punkcie 4.2. Odporną stabilność tych quasi-wielomianów (a więc i quasi-wielomianu (6.47) przy $m > 2r$) możemy też zbadać stosując podany poniżej lemat.

Niech $w_r^{(0)}(s, h)$ będzie quasi-wielomianem nominalnym rodziny (6.47).

Lemat 6.5. Załóżmy, że quasi-wielomian nominalny $w_r^{(0)}(s, h)$ jest asymptotycznie stabilny dla każdego $h \in H$. Jeżeli $m > 2r$, to przedziałowy quasi-wielomian (6.47) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $F(\omega) > 0$ dla każdego $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, gdzie

$$F(\omega) = \min_{h \in H} F_h(\omega), \quad (6.50)$$

przy czym funkcja testująca $F_h(\omega)$ jest zdefiniowana wzorem (6.44).

Dowód. Warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.47) jest spełnienie warunku (6.43) dla każdego $h \in H$. Jest on spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $F(\omega) > 0$ dla każdego $\omega \in \Omega$, gdzie $F(\omega)$ oblicza się ze wzoru (6.50). ■

Lemat 6.5 można też stosować do badania odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.47) przy $m \leq 2r$. W takim przypadku można jednak ograniczyć się do badania odpornej stabilności tylko czterech quasi-wielomianów Charitonowa $w_r^{(i)}(s, h)$, $h \in H$, $i = 1, \dots, 4$.

Przy sprawdzaniu warunku $F(\omega) > 0$, $\forall \omega \in \Omega = [0, \infty)$, należy ograniczyć się do skończonego przedziału $\tilde{\Omega} = [0, \omega_{\max}]$ wartości parametru ω . Przedział ten można wstępnie oszacować wyznaczając wykresy funkcji $F_h(\omega)$ dla kilku odpowiednio dobranych wartości opóźnienia $h \in H$, np. równomiernie rozłożonych w tym przedziale. Funkcja testująca $F_h(\omega)$ w przedziale $\tilde{\Omega} = [0, \omega_{\max}]$ musi osiągać wartość minimalną dla każdego ustalonego $h \in H$. Jeżeli przy tych obli-

czeniuach stwierdzimy, że $F_h(\omega) \leq 0$ dla pewnego $\omega \geq 0$ i dla pewnego $h \in H$, to obliczenia należy przerwać, bowiem w takim przypadku przedziałowy quasi-wielomian (6.47) nie jest odpornie stabilny.

Stosując obliczenia komputerowe można funkcję testującą $F(\omega)$, $\omega \in \tilde{\Omega}$, wyznaczyć w sposób opisany poniżej.

Przyjmujemy kolejne dyskretne wartości parametru $\omega \in \tilde{\Omega}$ (wyznaczone z odpowiednio małym krokiem $\Delta\omega$) i dla każdego ustalonego ω obliczamy wartość minimalną funkcji $F_h(\omega)$ ze względu na $h \in H$.

Wyznaczając wartość minimalną funkcji $F_h(\omega)$ przy ustalonym ω dokonujemy dyskretyzacji (z odpowiednio małym krokiem Δh) wartości opóźnienia $h \in H$ i dla każdego ustalonego h ze wzoru (6.44) obliczamy wartość funkcji testującej $F_h(\omega)$. Na podstawie tak obliczonych wartości wyznaczamy przedział, w którym funkcja $F_h(\omega)$ osiąga minimum, i następnie obliczamy jej wartość minimalną zadaną dokładnością, np. wyznaczając w tym przedziale wartości $F_h(\omega)$ z odpowiednio mniejszym krokiem Δh i wybierając wartość najmniejszą tej funkcji.

Zamiast warunku $F(\omega) > 0$, $\forall \omega \in \Omega = [0, \infty)$, możemy równoważnie rozpatrywać warunek $F(h) > 0$ dla każdego $h \in H$, gdzie

$$F(h) = \min_{\omega \in \tilde{\Omega}} F_h(\omega), \quad (6.51)$$

przy czym funkcja testująca $F_h(\omega)$ jest zdefiniowana wzorem (6.44).

Przy komputerowym wyznaczaniu funkcji testującej (6.51) postępujemy podobnie jak przy wyznaczaniu funkcji testującej (6.50), z tą różnicą, że najpierw dokonujemy dyskretyzacji (z odpowiednio małym krokiem Δh) wartości opóźnienia $h \in H$, a następnie dla każdego ustalonego $h \in H$ wyznaczamy wartość minimalną funkcji testującej $F_h(\omega)$ ze względu na $\omega \in \tilde{\Omega}$. Jest tu niezbędna znajomość przedziału $\tilde{\Omega} = [0, \omega_{\max}]$, w którym funkcja $F_h(\omega)$ osiąga wartość minimalną dla każdego ustalonego $h \in H$.

W przypadku szczególnym, gdy $r = 0$, quasi-wielomian przedziałowy (6.47) przyjmuje postać

$$W(s, h, B_0) = W(s, B_0) + \sum_{i=1}^m w_i(s) \exp(-shi), \quad h \in H, \quad (6.52)$$

gdzie $H = [h^-, h^+]$, $0 \leq h^- < h^+$.

Ponieważ przy $r = 0$ nierówność $m \leq 2r$ nie jest spełniona, relacja $H \subseteq H_0$, gdzie H_0 wyznacza się ze wzoru (6.49) przy $r = 0$, jest tylko warunkiem koniecznym odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.52).

Do badania odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.52) wygodnie jest stosować podaną poniżej metodę funkcji testującej $d(\omega)$ zamiast metody funkcji testującej $F(\omega)$.

W pracy [43], uzupełniając rezultat podany w [40], udowodniono poniższy lemat.

Lemat 6.6. Załóżmy, że warunek konieczny $H \subseteq H_0$ jest spełniony. Przedziałowy quasi-wielomian (6.52) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $d(\omega) > 0$ dla każdego $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, gdzie

$$d(\omega) = \min_{h \in H} d_h(\omega), \quad (6.53)$$

przy czym funkcja testująca $d_h(\omega)$ jest zdefiniowana wzorem (6.46). ■

Zamiast warunku $d(\omega) > 0$, $\forall \omega \in \Omega = [0, \infty)$, można równoważnie rozpatrywać warunek $d(h) > 0$ dla każdego $h \in H$, gdzie

$$d(h) = \min_{\omega \in \tilde{\Omega}} d_h(\omega). \quad (6.54)$$

Przy komputerowym wyznaczaniu funkcji testujących $d(\omega)$ i $d(h)$ postępujemy podobnie jak przy wyznaczaniu funkcji testujących $F(\omega)$ i $F(h)$, odpowiednio.

Przykład 6.5. Dany jest quasi-wielomian przedziałowy typu opóźnionego

$$W(s, h, B_0) = W(s, B_0) + w(s, h), \quad (6.55)$$

gdzie $W(s, B_0)$ jest wielomianem przedziałowym, przy czym

$$w(s, \mathbf{b}_0) = \sum_{k=0}^5 b_{k0} s^k, \quad (6.56)$$

$b_{50} = 1$, $b_{40} \in [6, 6.4]$, $b_{30} \in [3.5, 4]$, $b_{20} \in [4.2, 5]$, $b_{10} \in [0.9, 1.1]$, $b_{00} \in [0.1, 0.2]$, zaś $w(s, h)$ jest ustalonym quasi-wielomianem, mającym postać

$$\begin{aligned}
w(s, h) = & (-0.1s^4 + 0.5s^2 - 0.8s + 0.2) \exp(-sh) \\
& + (0.1s^3 - 0.4s^2 + 0.5s) \exp(-2sh) \\
& + (0.1s^4 + 0.3s - 0.1) \exp(-3sh).
\end{aligned} \quad (6.57)$$

Należy wyznaczyć zbiór H wartości opóźnienia h , dla których quasi-wielomian przedziałowy (6.55) jest odpornie stabilny.

Quasi-wielomiany Charitonowa stowarzyszone z quasi-wielomianem przedziałowym (6.55) mają postać

$$w_0^{(1)}(s, h) = s^5 + 6.4s^4 + 3.5s^3 + 4.2s^2 + 1.1s + 0.2 + w(s, h), \quad (6.58)$$

$$w_0^{(2)}(s, h) = s^5 + 6s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 0.9s + 0.1 + w(s, h), \quad (6.59)$$

$$w_0^{(3)}(s, h) = s^5 + 6s^4 + 3.5s^3 + 5s^2 + 1.1s + 0.1 + w(s, h), \quad (6.60)$$

$$w_0^{(4)}(s, h) = s^5 + 6.4s^4 + 4s^3 + 4.2s^2 + 0.9s + 0.2 + w(s, h). \quad (6.61)$$

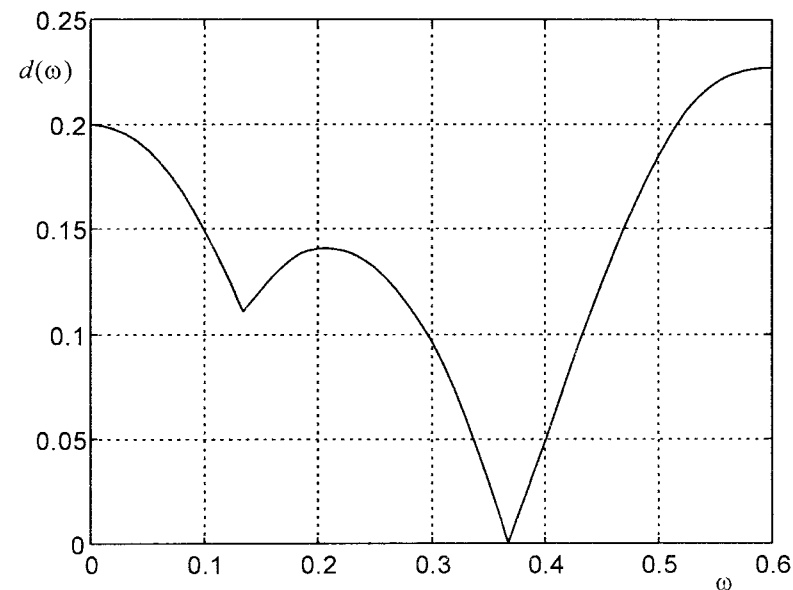
Stosując oddzielnie do każdego z quasi-wielomianów Charitonowa (6.58)-(6.61) podaną w punkcie 2.3.4 metodę h -podziału otrzymamy, że i -ty quasi-wielomian $w_0^{(i)}(s, h)$ jest asymptotycznie stabilny dla każdego $h \in H_0^{(i)}$, gdzie

$$H_0^{(1)} = [0, 1.6243), \quad H_0^{(2)} = [0, 2.1047), \quad H_0^{(3)} = [0, 2.2685), \quad H_0^{(4)} = [0, 1.2493).$$

Wszystkie quasi-wielomiany Charitonowa są więc jednocześnie asymptotycznie stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy $h \in H_0$, gdzie

$$H_0 = H_0^{(1)} \cap H_0^{(2)} \cap H_0^{(3)} \cap H_0^{(4)} = [0, 1.2493).$$

Dla quasi-wielomianu przedziałowego (6.55) warunek $m \leq 2r$ nie jest spełniony, bowiem $r = 0$. Oznacza to, że o odpornej stabilności tego quasi-wielomianu nie można powiedzieć na podstawie asymptotycznej stabilności quasi-wielomianów Charitonowa (6.58)-(6.61). Zastosujmy wobec tego lemat 6.6, przyjmując $H = [0, 1.249]$.



Rys. 6.4. Wykres funkcji testującej $d(\omega)$

Wyznaczając funkcję testującą $d(\omega)$ ze wzorów (6.53) i (6.46) przy $H = [0, 1.249]$ i $\tilde{\Omega} = [0, 0.6]$, otrzymamy wykres pokazany na rysunku 6.4. Obliczeń dokonano dla ω zmieniającego się od 0 do 0.6 ze zmiennym krokiem, przyjmując dyskretne wartości opóźnienia h zmieniające się od zera do 1.24 z krokiem 0.01 i od 1.241 do 1.249 z krokiem 0.001. Dla $\omega > \omega_{\max} = 0.6$ wartości funkcji testującej $d(\omega)$ szybko rosną dążąc do nieskończoności.

Wartość minimalna funkcji testującej $d(\omega)$, równa $2.4786 \cdot 10^{-4}$, została osiągnięta dla $h = 1.249$. Ponieważ $d(\omega) > 0, \forall \omega \geq 0$, quasi-wielomian przedziałowy (6.55) jest odpornie stabilny dla wszystkich wartości $h \in H = [0, 1.249]$.

Zauważmy, że rozpatrywany quasi-wielomian przedziałowy jest odpornie stabilny dla tych wartości opóźnienia h , dla których są jednocześnie asymptotycznie stabilne wszystkie stowarzyszone z nim quasi-wielomiany Charitonowa, pomimo tego, że warunek $m \leq 2r$ nie jest spełniony. ■

Podane powyżej metody można w prosty sposób uogólnić na klasę quasi-wielomianów przedziałowych (6.30) z niewspółmiernymi opóźnieniami wtedy, gdy jedno z opóźnień nie jest dokładnie znane. W przypadku ogólnym, gdy nie znamy dokładnych wartości kilku opóźnień (lub wszystkich), do badania odpornej

stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (6.30) należy zastosować metodę podaną w punkcie 7.2.2 niniejszej pracy.

Jeżeli w quasi-wielomianie (6.30) nie jest dokładnie znane np. k -te opóźnienie ($k = 1, 2, \dots, m$), tzn. $h_k \in H_k = [h_k^-, h_k^+]$, $0 \leq h_k^- < h_k^+$, zaś pozostałe opóźnienia są znane dokładnie, to przedziałowy quasi-wielomian (6.30) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie stabilne stowarzyszone z nim quasi-wielomiany Charitonowa (6.36) (tzn. są one stabilne dla każdego $h_k \in H_k$) i jest spełniony warunek $F(\omega) > 0$ dla każdego $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, gdzie

$$F(\omega) = \min_{h_k \in H_k} F_h(\omega), \quad (6.62)$$

lub równoważnie, jest spełniony warunek $F(h_k) > 0$ dla każdego $h_k \in H_k$, gdzie

$$F(h_k) = \min_{\omega \in \Omega} F_h(\omega), \quad (6.63)$$

przy czym funkcja testująca $F_h(\omega)$ ma postać (6.44).

Funkcje testujące (6.62) i (6.63) można wyznaczyć w taki sam sposób, opisany powyżej, jak funkcje testujące (6.50) i (6.51).

Jeżeli $r = 0$, wygodnie jest rozpatrywać zamiast funkcji (6.62) i (6.63), funkcje testujące $d(\omega)$ i $d(h_k)$, odpowiednio, które wyznaczają się ze wzorów

$$d(\omega) = \min_{h_k \in H_k} d_h(\omega), \quad (6.64)$$

$$d(h_k) = \min_{\omega \in \Omega} d_h(\omega), \quad (6.65)$$

zaś $d_h(\omega)$ oblicza się ze wzoru (6.46).

W przypadku szczególnym, gdy nie jest dokładnie znane r -te opóźnienie, przy czym $h_r \in H_r = [h_r^-, h_r^+]$, $0 \leq h_r^- < h_r^+$, zaś pozostałe opóźnienia są znane dokładnie, oraz jest spełniony warunek $h_m \leq 2h_r^-$, to przedziałowy quasi-wielomian (6.30) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie stabilne stowarzyszone z nim cztery quasi-wielomiany Charitonowa (6.36), tzn. są one stabilne dla każdego $h_r \in H_r$. Powyższe wynika z uogólnienia lematu 6.2.

Przykład 6.6. Należy zbadać odporną stabilność quasi-wielomianu przedziałowego typu neutralnego o postaci

$$W(s, \mathbf{h}, B_2) = W(s, B_2) \exp(-sh_2) + w(s, \mathbf{h}), \quad h_2 \in H_2 = [1, 2.5], \quad (6.66)$$

gdzie $W(s, B_2)$ jest wielomianem przedziałowym, przy czym

$$w(s, \mathbf{b}_2) = \sum_{k=0}^4 b_{k2} s^k, \quad (6.67)$$

gdzie $b_{42} \in [0.1, 0.3]$, $b_{32} \in [0, 0.2]$, $b_{22} \in [-0.6, -0.2]$, $b_{12} \in [0.3, 0.7]$, $b_{02} = 0$, zaś

$$\begin{aligned} w(s, \mathbf{h}) = & 6.2s^4 + 3.75s^3 + 4.6s^2 + s + 0.15 \\ & + (-0.1s^4 + 0.5s^2 - 0.8s + 0.2) \exp(-sh_1) \\ & + (0.1s^4 + 0.3s - 0.1) \exp(-sh_3) \end{aligned} \quad (6.68)$$

jest ustalonym quasi-wielomianem, przy czym $h_1 = 0.5$, $h_3 = 3$.

Przedziałowy człon dominujący quasi-wielomianu (6.66) ma postać

$$\Delta(\exp(-s\mathbf{h}), b_{42}) = 6.2 - 0.1e^{-sh_1} + b_{42}e^{-sh_2} + 0.1e^{-sh_3}, \quad b_{42} \in B_{42},$$

gdzie $B_{42} = [0.1, 0.3]$.

Łatwo sprawdzić, że dla powyższego członu dominującego warunek (2.33) (przy $\gamma = 0$) podany w twierdzeniu 2.6 jest spełniony dla każdego $b_{42} \in B_{42}$. Oznacza to, że rozpatrywany przedziałowy człon dominujący jest asymptotycznie stabilny dla dowolnych nieujemnych wartości opóźnień.

Dla quasi-wielomianu przedziałowego (6.66) warunek $h_m \leq 2h_r^-$, nie jest spełniony, bowiem $h_m = h_3 = 3$, $h_r^- = h_2^- = 1$. Oznacza to, że odporna stabilność quasi-wielomianu przedziałowego (6.66) nie jest równoważna z odporną stabilnością czterech quasi-wielomianów Charitonowa (6.36). Jest ona natomiast równoważna z odporną stabilnością czterech krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa o postaci (6.37). Do jednoczesnego badania ich odpornej stabilności zastosujemy metodę funkcji testującej $F(h_2)$.

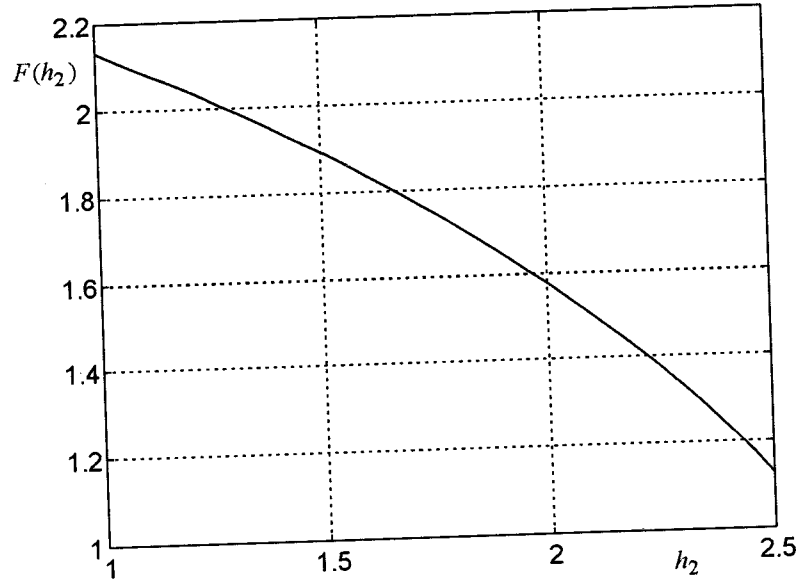
Przyjmijmy, że

$$w_2^{(0)}(s, \mathbf{h}) = (0.2s^4 + 0.1s^3 - 0.4s^2 + 0.5s) \exp(-sh_2) + w(s, \mathbf{h}) \quad (6.69)$$

jest quasi-wielomianem nominalnym rodziny (6.66). Jest on asymptotycznie stabilny dla dowolnych $h_2 \in [1, 2.5]$. Można to sprawdzić na bazie twierdzenia 2.3,

przyjmując różne wartości opóźnienia $h_2 \in [1, 2.5]$ i wyznaczając hodograpy Michajłowa.

Wyznaczając (w sposób opisany powyżej) funkcję testującą $F(h_2)$ ze wzorów (6.63) i (6.44) przy $\tilde{\Omega} = [0, 0.6]$ i $H_2 = [1, 2.5]$, otrzymamy wykres pokazany na rysunku 6.5. Obliczeń dokonano dla h zmieniającego się od 1 do 2.5 z krokiem 0.01 oraz dla ω zmieniającego się od 0 do 0.6 ze zmiennym krokiem.



Rys. 6.5. Wykres funkcji testującej $F(h_2)$

Z rysunku 6.5 wynika, że warunek $F(h_2) > 0$ jest spełniony dla każdego $h_2 \in H_2$, przy czym $F(2.5) = 1.1284$. Przedziałowy quasi-wielomian (6.66) jest więc odpornie stabilny. ■

6.3. Odporna stabilność zaburzonych quasi-wielomianów

Weźmy pod uwagę zaburzony quasi-wielomian

$$w(s, \mathbf{h}, \mathbf{e}) = w_0(s, \mathbf{h}) + w_e(s, \mathbf{h}, \mathbf{e}), \quad \mathbf{e} \in E, \quad (6.70)$$

gdzie

$$w_0(s, \mathbf{h}) = \sum_{k=0}^n s^k \sum_{i=0}^m a_{ki} \exp(-sh_i) \quad (6.71)$$

jest D -stabilnym quasi-wielomianem nominalnym, $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m$,

$$w_e(s, \mathbf{h}, \mathbf{e}) = \sum_{k=0}^n s^k \sum_{i=0}^m e_{ki} \exp(-sh_i), \quad \mathbf{e} \in E, \quad (6.72)$$

jest quasi-wielomianem zaburzeń (błędu), przy czym $\mathbf{e} = [e_{00}, \dots, e_{nm}]$, zaś

$$E = \{\mathbf{e}: e_{ki} \in [-\varepsilon q_{ki}, \varepsilon q_{ki}], \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots, m\}, \quad (6.73)$$

gdzie q_{ki} są to współczynniki wagowe, przy czym $q_{ki} \geq 0$, natomiast $\varepsilon > 0$ jest współczynnikiem skalującym.

Dla dowolnego ustalonego $\varepsilon > 0$ quasi-wielomian (6.70) jest quasi-wielomianem przedziałowym.

Zaburzony quasi-wielomian (6.70) można napisać w postaci

$$w(s, \mathbf{h}, \mathbf{e}) = \sum_{k=0}^n s^k \sum_{i=0}^m (a_{ki} + e_{ki}) \exp(-sh_i), \quad \mathbf{e} \in E. \quad (6.74)$$

W przypadku ogólnym nie wszystkie współczynniki quasi-wielomianu nominalnego (6.71) mogą podlegać zaburzeniom. Dlatego też w dalszych rozważaniach będziemy przyjmować, że jeżeli $e_{ki} \neq 0$, to $q_{ki} > 0$. Jeżeli natomiast $e_{ki} = 0$, to $q_{ki} = 0$.

Jeżeli $q_{n0} = 0$, to quasi-wielomian (6.70) jest quasi-wielomianem typu opóźnionego lub neutralnego niezależnie od zaburzeń poszczególnych jego współczynników. Jeżeli natomiast $q_{n0} \neq 0$, to nie jest on quasi-wielomianem typu wyprzedzonego wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n0} - \varepsilon q_{n0} > 0$, czyli gdy $\varepsilon < \varepsilon_n$, gdzie $\varepsilon_n = a_{n0} / q_{n0}$.

Ponieważ quasi-wielomiany typu wyprzedzonego są zawsze niestabilne, prosty warunek konieczny asymptotycznej stabilności (i też D -stabilności) zaburzonego quasi-wielomianu (6.70) ma postać

$$\varepsilon < \varepsilon_n = a_{n0} / q_{n0}. \quad (6.75)$$

Zauważmy, że jeżeli $q_{n0} = 0$, to $\varepsilon_n = \infty$ i warunek $\varepsilon < \varepsilon_n$ jest spełniony.

Niech D będzie przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną, której brzeg ma opis parametryczny $f(\gamma) = -\gamma + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, przy czym $\gamma > 0$.

Rozpatrzmy problem wyznaczenia największej liczby $\varepsilon = \varepsilon_{\max} > 0$ takiej, aby zaburzony quasi-wielomian (6.70) był odpornie D -stabilny dla każdego $\varepsilon \in [0, \varepsilon_{\max})$.

Powyższy problem dla zaburzonego wielomianu charakterystycznego był rozpatrywany w wielu pracach. W [20, 48, 49] podano metody analityczne (bazujące na twierdzeniu Charitonowa), a w pracach [105, 125, 160] podano częstotliwościowe metody wyznaczania liczby $\varepsilon_{\max}$ dla zaburzonych wielomianów charakterystycznych układów ciągłych. W [105, 125] podano też częstotliwościowe metody badania odpornej D -stabilności zaburzonych wielomianów w przypadku, gdy D jest jednospójnym otwartym obszarem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Rezultaty tych prac są opisane w monografii [52].

Uwzględniając podejście zastosowane w [105, 125] w przypadku zaburzonych wielomianów, w pracy [57] udowodniono poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 6.2. Załóżmy, że warunek konieczny (6.75) jest spełniony. Zaburzony quasi-wielomian (6.70) jest odpornie D -stabilny dla dowolnego $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, gdzie

$$\varepsilon_1 = \min_{0 \leq \omega < \infty} K(\omega), \quad (6.76)$$

przy czym

$$K(\omega) = \frac{|w_0(f(\omega), \mathbf{h})|}{\sum_{k=0}^n |(f(\omega))^k| \sum_{i=0}^m q_{ki} \exp(\gamma h_i)}. \quad (6.77)$$

Dowód. Załóżmy, że zbiór E mający postać (6.73) jest zadany, tj. jest zadana wartość współczynnika skalującego ε . Z twierdzenia 2.3 wynika, że dla każdego ustalonego $\mathbf{e} \in E$ quasi-wielomian (6.70) jest D -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji

$$\begin{aligned} \tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, \mathbf{e}) &= w(f(\omega), \mathbf{h}, \mathbf{e}) / w_0(f(\omega), \mathbf{h}) \\ &= 1 + w_e(f(\omega), \mathbf{h}, \mathbf{e}) / w_0(f(\omega), \mathbf{h}), \end{aligned} \quad (6.78)$$

sporządzony w funkcji parametru $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, nie przechodzi przez początek płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też go nie obejmuje.

Ze wzoru (6.78) wynika, że jeżeli dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega = [0, \infty)$ jest spełniona nierówność

$$\max_{\mathbf{e} \in E} \left| \frac{w_e(f(\omega), \mathbf{h}, \mathbf{e})}{w_0(f(\omega), \mathbf{h})} \right| < 1, \quad (6.79)$$

to wykres funkcji $\tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, \mathbf{e})$ nie przechodzi przez początek płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też go nie obejmuje dla każdego ustalonego $\mathbf{e} \in E$. Warunek (6.79) jest więc warunkiem dostatecznym odpornej D -stabilności zaburzonego quasi-wielomianu (6.70).

Ponieważ

$$\begin{aligned} |w_e(f(\omega), \mathbf{h}, \mathbf{e})| &\leq \sum_{k=0}^n |(f(\omega))^k| \sum_{i=0}^m e_{ki} \exp(-f(\omega)h_i) \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=0}^n |(f(\omega))^k| \sum_{i=0}^m q_{ki} \exp(\gamma h_i), \end{aligned} \quad (6.80)$$

zachodzi zależność

$$\max_{\mathbf{e} \in E} \left| \frac{w_e(f(\omega), \mathbf{h}, \mathbf{e})}{w_0(f(\omega), \mathbf{h})} \right| \leq \frac{\varepsilon \sum_{k=0}^n |(f(\omega))^k| \sum_{i=0}^m q_{ki} \exp(\gamma h_i)}{|w_0(f(\omega), \mathbf{h})|}. \quad (6.81)$$

Jeżeli więc jest spełniona nierówność

$$\frac{\varepsilon \sum_{k=0}^n |(f(\omega))^k| \sum_{i=0}^m q_{ki} \exp(\gamma h_i)}{|w_0(f(\omega), \mathbf{h})|} < 1, \quad (6.82)$$

to wtedy jest też spełniona nierówność (6.79), będąca warunkiem dostatecznym odpornej D -stabilności zaburzonego quasi-wielomianu (6.70).

Zauważmy, że nierówność (6.82) jest spełniona dla każdego $\omega \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varepsilon < \varepsilon_1$, gdzie ε_1 oblicza się ze wzoru (6.76), co kończy dowód twierdzenia. ■

W przypadku szczególnym, gdy obszarem D jest otwarta lewa półpłaszczyzna, wzór (6.77) przyjmuje postać

$$K(\omega) = \frac{|w_0(j\omega, \mathbf{h})|}{\sum_{k=0}^n \omega^k \sum_{i=0}^m q_{ki}}. \quad (6.83)$$

Do rozwiązania postawionego problemu można też zastosować podaną w punkcie 4.3.4.2 metodę funkcji testującej $B(\omega)$ [57]. Podobna metoda została zastosowana w pracy [55] do badania odpornej stabilności zaburzonego wielomianu charakterystycznego układu dyskretnego.

Wprowadźmy funkcję testującą $B(\omega)$ stowarzyszoną z zaburzoną quasi-wielomianem (6.70), zdefiniowaną dla każdego ustalonego $\omega \in [0, \infty)$ wzorem

$$B(\omega) = \min\{\operatorname{Re} \tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, \mathbf{e}) : \mathbf{e} \in E\}, \quad (6.84)$$

gdzie, zgodnie ze wzorami (6.78) i (6.70)-(6.72) dla $s = f(\omega)$,

$$\tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, \mathbf{e}) = 1 + \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n e_{ki} c_{ki}(f(\omega)), \quad (6.85)$$

przy czym

$$c_{ki}(f(\omega)) = (f(\omega))^k \exp(-f(\omega)h_i) / w_0(f(\omega), \mathbf{h}). \quad (6.86)$$

Ze wzorów (6.84)-(6.86) i (6.73) wynika, że jeżeli

$$B(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty), \quad (6.87)$$

to dla każdego ustalonego $\mathbf{e} \in E$ wykres funkcji $\tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, \mathbf{e})$ nie przechodzi przez początek płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też go nie obejmuje. Z twierdzenia 2.3 wynika więc, że warunek (6.87) jest warunkiem wystarczającym odpornej D -stabilności zaburzonego quasi-wielomianu (6.70).

Ponieważ funkcja (6.85) zależy liniowo od niepewnych współczynników e_{ki} , które mogą przyjmować dowolne wartości z przedziałów liczbowych podanych w (6.73), dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ funkcję testującą (6.84) można obliczyć ze wzoru

$$B(\omega) = 1 + \varepsilon \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n b_{ki}(\omega), \quad (6.88)$$

gdzie (dla $i = 0, 1, \dots, m, k = 0, 1, \dots, n$)

$$b_{ki}(\omega) = -q_{ki} \operatorname{Re} c_{ki}(f(\omega)), \quad \text{jeżeli} \quad \operatorname{Re} c_{ki}(f(\omega)) \geq 0, \quad (6.89)$$

$$b_{ki}(\omega) = q_{ki} \operatorname{Re} c_{ki}(f(\omega)), \quad \text{jeżeli} \quad \operatorname{Re} c_{ki}(f(\omega)) < 0, \quad (6.90)$$

przy czym $c_{ki}(f(\omega))$ oblicza się ze wzoru (6.86).

Na podstawie wzorów (6.88)-(6.90) można w prosty sposób wyznaczyć funkcję testującą $B(\omega)$, stowarzyszoną z zaburzoną quasi-wielomianem (6.70).

Twierdzenie 6.3 [57]. Załóżmy, że warunek konieczny (6.75) jest spełniony. Zaburzony quasi-wielomian (6.70) jest odpornie D -stabilny dla dowolnego ustalonego $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2)$, gdzie

$$\varepsilon_2 = 1 / (1 - \alpha), \quad (6.91)$$

$$\alpha = \min\{B(\omega) : \omega \in \Omega = [0, \infty)\}, \quad (6.92)$$

przy czym wartość minimalna α została obliczona dla funkcji testującej (6.88) przy $\varepsilon = 1$.

Dowód. Załóżmy, że wartość minimalna α została osiągnięta dla $\omega = \omega^*$, tzn. $\alpha = B(\omega^*)$. Ze wzoru (6.88) przy $\varepsilon = 1$ wynika, że

$$\alpha = 1 + g, \quad (6.93)$$

gdzie

$$g = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n b_{ki}(\omega^*), \quad (6.94)$$

przy czym $g < 0$, co oznacza, że $\alpha < 1$.

Niech α_ε oznacza minimalną wartość (ze względu na $\omega \in \Omega$) funkcji testującej (6.88) przy $\varepsilon \neq 1$. Łatwo zauważyć, że

$$\alpha_\varepsilon = 1 + \varepsilon g, \quad (6.95)$$

gdzie g jest obliczone ze wzoru (6.93), tj. $g = \alpha - 1$. Oznacza to, że $\alpha_\varepsilon = 0$ przy $\varepsilon = \varepsilon_2$, gdzie $\varepsilon_2 = -1/g$, czyli ε_2 oblicza się ze wzoru (6.91).

Z powyższych rozważań wynika zatem, że jeżeli $\varepsilon < \varepsilon_2$, to jest spełniony warunek dostateczny (6.87), co kończy dowód twierdzenia. ■

Zauważmy, że jeżeli $\alpha < 0$, to warunek dostateczny (6.87) nie jest spełniony dla $\varepsilon = 1$ w (6.73). Jest on natomiast spełniony dla $\varepsilon < \varepsilon_2 < 1$. Jeżeli zaś $\alpha > 0$, to

warunek dostateczny (6.87) jest spełniony dla $\varepsilon = 1$ i także dla dowolnych $\varepsilon < \varepsilon_2$, gdzie $\varepsilon_2 > 1$.

Przy wyznaczaniu liczby ε_2 w sposób podany w twierdzeniu 6.3 nie musimy koniecznie przyjmować $\varepsilon = 1$ w (6.73) (lub równoważnie, we wzorze (6.88)). Zamiast $\varepsilon = 1$ można też przyjąć dowolną wartość $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$. Wtedy zaburzony quasi-wielomian (6.70) jest odpornie D -stabilny dla dowolnego $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2 \varepsilon_0]$, gdzie ε_2 oblicza się ze wzoru (6.91), a wartość minimalną α oblicza się dla funkcji testującej (6.88) przy $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Z twierdzeń 6.2 i 6.3 wynika bezpośrednio poniższy lemat.

Lemat 6.7. Załóżmy, że warunek konieczny (6.75) jest spełniony. Zaburzony quasi-wielomian (6.70) jest odpornie D -stabilny dla dowolnego $\varepsilon \in [0, \varepsilon_{\max}]$, gdzie

$$\varepsilon_{\max} = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}, \quad (6.96)$$

przy czym ε_1 i ε_2 oblicza się w sposób podany w twierdzeniach 6.2 i 6.3, odpowiednio. ■

Podana powyżej metoda wyznaczania liczby $\varepsilon_{\max}$ bazuje na prostych warunkach dostatecznych odpornej D -stabilności zaburzonego quasi-wielomianu (6.70).

Liczbę $\varepsilon_{\max}$ można też wyznaczyć w sposób bardziej złożony (podany poniżej) stosując metodę funkcji testującej $F(\omega)$ (patrz punkt 4.3.4.3).

Niech l będzie liczbą zaburzonych współczynników quasi-wielomianu (6.70). Oznaczmy przez e_r , $r = 1, 2, \dots, K = 2^l$, wierzchołki zbioru E zdefiniowanego wzorem (6.73). Współrzędne tych wierzchołków zależą od wartości współczynnika skalującego ε . Każdemu wierzchołkowi e_r tego zbioru w rodzinie quasi-wielomianów (6.70) odpowiada unormowany quasi-wielomian wierzchołkowy o postaci $\tilde{p}_r(s, \mathbf{h}) = p_r(s, \mathbf{h}) / w_0(s, \mathbf{h})$, gdzie

$$p_r(s, \mathbf{h}) = w_0(s, \mathbf{h}) + w_e(s, \mathbf{h}, e_r), \quad (6.97)$$

zaś $w_0(s, \mathbf{h})$ jest D -stabilnym quasi-wielomianem nominalnym.

Każdej krawędzi zbioru E , łączącej wierzchołki e_r i e_k , odpowiada unormowany quasi-wielomian krawędziowy

$$\tilde{p}_{rk}(s, \mathbf{h}, \lambda) = (1 - \lambda)\tilde{p}_r(s, \mathbf{h}) + \lambda\tilde{p}_k(s, \mathbf{h}), \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1]. \quad (6.98)$$

Wprowadźmy funkcję testującą $F_\varepsilon(\omega)$ stowarzyszoną z zaburzonym quasi-wielomianem (6.70), którą dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ (przy zadanej wartości współczynnika skalującego $\varepsilon > 0$) oblicza się ze wzoru

$$F_\varepsilon(\omega) = \pi - \max_{r,k} \{|\arg \tilde{p}_r(f(\omega), \mathbf{h}) - \arg \tilde{p}_k(f(\omega), \mathbf{h})|\}, \quad (6.99)$$

gdzie $\arg z \in [-\pi, \pi)$ jest głównym argumentem liczby zespolonej z , zaś maksimum we wzorze (6.99) liczy się uwzględniając wszystkie unormowane quasi-wielomiany krawędziowe (6.98), odpowiadające poszczególnym krawędziom zbioru (6.73).

Z twierdzenia 4.10 wynika, że dla ustalonego $\varepsilon > 0$ zaburzony quasi-wielomian (6.70) jest odpornie D -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$F_\varepsilon(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty). \quad (6.100)$$

Liczbę $\varepsilon_{\max}$ można więc wyznaczyć stosując podaną poniżej metodę postępowania:

1. Przyjmujemy wartość początkową $\varepsilon = \varepsilon_0$ współczynnika skalującego ε , gdzie ε_0 jest liczbą np. trochę mniejszą od obliczonej ze wzoru (6.96).
2. Przyjmujemy odpowiednio mały krok $\Delta\varepsilon$ i dla kolejnych wartości $\varepsilon = \varepsilon_k$, gdzie $\varepsilon_k = \varepsilon_0 + k\Delta\varepsilon$, $k = 1, 2, \dots$, wyznaczamy funkcję testującą $F_\varepsilon(\omega)$ i sprawdzamy spełnienie warunku (6.100). Obliczenia przerywamy, gdy dla ustalonego $\varepsilon = \varepsilon_k$ warunek (6.100) nie jest spełniony. Oznacza to, że zaburzony quasi-wielomian (6.70) jest odpornie D -stabilny dla $\varepsilon = \varepsilon_{k-1}$, natomiast nie jest on odpornie D -stabilny dla $\varepsilon = \varepsilon_k$.
3. Przyjmujemy $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{k-1}$. Możemy też zmniejszyć krok $\Delta\varepsilon$ i powtórzyć obliczenia realizowane w kroku 2, przyjmując $\varepsilon_0 = \varepsilon_{k-1}$.

Przy wyznaczaniu funkcji testującej $F_\varepsilon(\omega)$ przy ustalonym $\varepsilon = \varepsilon_k$ przyjmujemy kolejne dyskretne wartości parametru $\omega \geq 0$ (wyznaczone z odpowiednio małym krokiem) i dla każdego ustalonego ω obliczamy $F_\varepsilon(\omega)$ ze wzoru (6.99). Obliczenia możemy przerwać, gdy obliczone wartości tej funkcji stają się ujemne lub są dodatnie i ustalają się na pewnym poziomie lub oscylują wokół niego. Przy obliczeniach należy zwrócić uwagę na dobór odpowiednio małego kroku $\Delta\omega$ w otoczeniu wartości minimalnej tej funkcji.

W przypadku badania odpornej stabilności zaburzonego quasi-wielomianu (6.70) (D jest otwartą lewą półpłaszczyzną) przy wyznaczaniu funkcji testującej

$F_\varepsilon(\omega)$ można ograniczyć się do rozpatrywania tylko unormowanych krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa zamiast wszystkich unormowanych quasi-wielomianów krawędziowych. Wynika to z rozważań podanych w punkcie 6.1.

Przykład 6.7. Niech D będzie przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, gdzie $\gamma = 0.2$.

Należy zbadać odporną D -stabilność zaburzonego quasi-wielomianu

$$w(s, h, e) = w_0(s, h) + w_e(s, h, e), \quad e \in E, \quad (6.101)$$

gdzie

$$w_0(s, h) = s^2 + 4s + 3 + (3s + 6)\exp(-sh) + (0.5s^2 + 4)\exp(-2sh) \quad (6.102)$$

jest D -stabilnym quasi-wielomianem nominalnym, przy czym $h = 0.2$, zaś quasi-wielomian zaburzeń ma postać

$$w_e(s, h, e) = e_{20}s^2 + e_{10}s + e_{00} + (e_{11}s + e_{01})\exp(-sh) + (e_{22}s^2 + e_{02})\exp(-2sh), \quad (6.103)$$

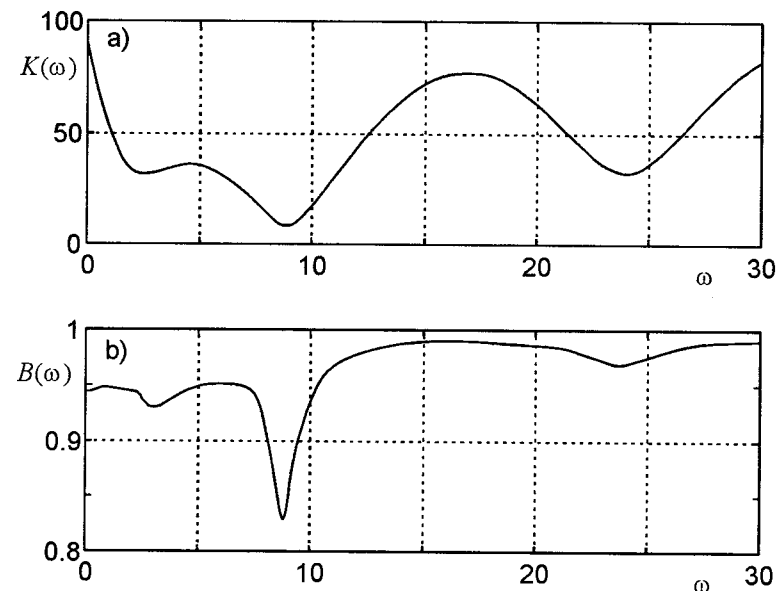
gdzie $e_{ki} \in [-\varepsilon q_{ki}, \varepsilon q_{ki}]$, przy czym $q_{20} = 0.01$, $q_{10} = 0.04$, $q_{00} = 0.03$, $q_{11} = 0.03$, $q_{01} = 0.06$, $q_{22} = 0.005$, $q_{02} = 0.04$.

Ze wzoru (6.75) wynika, że zaburzony quasi-wielomian (6.101) jest quasi-wielomianem zaburzonym typu neutralnego lub opóźnionego dla dowolnego $\varepsilon < \varepsilon_n$, gdzie $\varepsilon_n = a_{n0} / q_{n0} = 100$. Warunek $\varepsilon < \varepsilon_n = 100$ jest więc prostym warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności tego quasi-wielomianu.

Przyjmując dyskretne wartości parametru ω zmieniające się od 0 do 30 ze zmiennym krokiem i obliczając wartości funkcji $K(\omega)$ ze wzoru (6.77) przy $f(\omega) = -0.2 + j\omega$, otrzymamy wykres pokazany na rysunku 6.6a). Obliczając z kolei ε_1 ze wzoru (6.76), otrzymamy $\varepsilon_1 = 8.2564$. Dla $\omega > 30$ wartości funkcji $K(\omega)$ są większe od ε_1 . Z twierdzenia 6.2 wynika zatem, że zaburzony quasi-wielomian (6.101) jest odpornie D -stabilny dla każdego $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, gdzie $\varepsilon_1 = 8.2564$.

Przyjmując z kolei $\varepsilon = 1$ i wyznaczając wartości funkcji testującej $B(\omega)$ ze wzorów (6.88)-(6.90) (dla ω zmieniającego się od 0 do 30 ze zmiennym krokiem) otrzymamy wykres pokazany na rysunku 6.6b). Wartość minimalna tej funkcji jest równa $\alpha = 0.8293$. Dla $\omega > 30$ wartości funkcji testującej $B(\omega)$ są większe od $\alpha = 0.8293$. Ze wzoru (6.91) mamy zatem $\varepsilon_2 = 5.8575$. Oznacza to, zgodnie

z twierdzeniem 6.3, że zaburzony quasi-wielomian (6.101) jest odpornie D -stabilny dla każdego $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2)$, gdzie $\varepsilon_2 = 5.8575$.



Rys. 6.6. Wykresy do przykładu 6.7: a) wykres funkcji $K(\omega)$, b) wykres funkcji testującej $B(\omega)$

Na podstawie lematu 6.7 możemy więc stwierdzić, że zaburzony quasi-wielomian (6.101) jest odpornie D -stabilny dla każdego $\varepsilon \in [0, \varepsilon_{\max})$, gdzie $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = 8.2564$.

Wyznamy teraz liczbę $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ z dokładnością do jednego miejsca po przecinku, stosując metodę funkcji testującej $F_\varepsilon(\omega)$ oraz podaną powyżej metodę postępowania.

Przyjmując kolejne wartości współczynnika skalującego ε , zmieniające się od $\varepsilon = 8.2$ z krokiem 0.1, i wyznaczając dla każdej z nich funkcję testującą $F_\varepsilon(\omega)$ otrzymamy, że warunek (6.100) jest spełniony dla $\varepsilon = 10.0$, przy czym $\min_{\omega \geq 0} F_\varepsilon(\omega) = F_\varepsilon(8.9458) = 0.5372$, natomiast nie jest on spełniony dla $\varepsilon = 10.1$, przy czym $\min_{\omega \geq 0} F_\varepsilon(\omega) = F_\varepsilon(8.9331) = -1.4858$. Oznacza to, że zaburzony quasi-wielomian (6.101) jest odpornie D -stabilny dla $\varepsilon = 10.0$, natomiast nie jest on odpornie D -stabilny dla $\varepsilon = 10.1$.

Przyjmując $\varepsilon_{\max} = 10$ otrzymamy, że zaburzony quasi-wielomian (6.101) jest odpornie D -stabilny dla $e_{ki} \in [-\tilde{q}_{ki}, \tilde{q}_{ki}]$, gdzie $\tilde{q}_{ki} = 10q_{ki}$, tzn. $\tilde{q}_{20} = 0.1$, $\tilde{q}_{10} = 0.4$, $\tilde{q}_{00} = 0.3$, $\tilde{q}_{11} = 0.3$, $\tilde{q}_{01} = 0.6$, $\tilde{q}_{22} = 0.05$, $\tilde{q}_{02} = 0.4$.

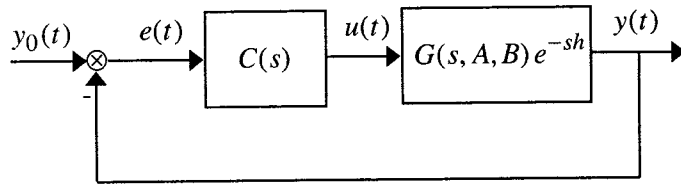
Zauważmy, że wartość $\varepsilon_{\max}$, wyznaczona na bazie metody funkcji testującej $F_{\varepsilon}(\omega)$, jest o około 21% większa od wartości wyznaczonej na bazie lematu 6.7. Została ona jednak wyznaczona dużym nakładem obliczeń, wymagających wielokrotnego wyznaczania funkcji testującej $F_{\varepsilon}(\omega)$ dla różnych, odpowiednio dobranych, wartości współczynnika skalującego ε . ■

6.4. Odporna stabilność przedziałowego układu regulacji automatycznej z jednym opóźnieniem

Dany jest układ regulacji automatycznej, złożony z szeregowego korektora (regulatora) o transmitancji operatorowej

$$C(s) = w_{c1}(s) / w_{c0}(s) \quad (6.104)$$

i przedziałowego obiektu z jednym opóźnieniem $h > 0$, objętych pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego. Schemat blokowy rozpatrywanego układu jest pokazany na rysunku 6.7.



Rys. 6.7. Schemat blokowy przedziałowego układu regulacji automatycznej z opóźnieniem

Przedziałowy obiekt bez opóźnienia jest opisany rodziną transmitancji operatorowych

$$G(s, A, B) = \frac{W_1(s, B)}{W_0(s, A)}, \quad (6.105)$$

gdzie przedziałowe rodziny wielomianów licznika i mianownika są zdefiniowane następująco

$$W_1(s, B) = \{w_1(s, \mathbf{b}): \mathbf{b} \in B\}, \quad (6.106)$$

$$W_0(s, A) = \{w_0(s, \mathbf{a}): \mathbf{a} \in A\}, \quad (6.107)$$

przy czym

$$w_1(s, \mathbf{b}) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0, \quad (6.108)$$

$$w_0(s, \mathbf{a}) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad (6.109)$$

$\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$, $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_m]$, $m < n$, oraz

$$A = \{\mathbf{a}: a_i \in [a_i^-, a_i^+], a_i^- \leq a_i^+, i = 0, 1, \dots, n-1\}, \quad (6.110)$$

$$B = \{\mathbf{b}: b_k \in [b_k^-, b_k^+], b_k^- \leq b_k^+, k = 0, 1, \dots, m\}. \quad (6.111)$$

Jeżeli nie jest dokładnie znana wartość współczynnika przy najwyższej potęgze zmiennej s w wielomianie mianownika rodziny transmitancji operatorowych $G(s, A, B)$, tj. $a_n \in [a_n^-, a_n^+]$, $0 < a_n^- < a_n^+$, to tę rodzinę można sprowadzić do postaci określonej wzorami (6.105)-(6.111), dzieląc przedziałowe wielomiany licznika i mianownika przez liczbę przedziałową $[a_n^-, a_n^+]$. Zasady dokonywania operacji na liczbach przedziałowych są podane w pracy [136] (patrz też np. [20]).

Rodzina quasi-wielomianów charakterystycznych rozpatrywanego układu regulacji automatycznej ma postać

$$W(s, h, A, B) = w_{c0}(s) W_0(s, A) + w_{c1}(s) W_1(s, B) \exp(-sh). \quad (6.112)$$

W dalszych rozważaniach będziemy przyjmować, że $n + n_c \geq m + m_c$, gdzie n_c i m_c są stopnie wielomianów mianownika i licznika, odpowiednio, transmitancji operatorowej (6.104) korektora. Przy powyższym założeniu rodzina quasi-wielomianów charakterystycznych (6.112) jest rodziną typu opóźnionego lub neutralnego.

Dowolny quasi-wielomian należący do rodziny (6.112) można napisać w postaci

$$w(s, h, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = w_{c0}(s) w_0(s, \mathbf{a}) + w_{c1}(s) w_1(s, \mathbf{b}) \exp(-sh). \quad (6.113)$$

Współczynniki quasi-wielomianu (6.113) zależą liniowo od niepewnych współczynników wielomianów (6.108) i (6.109). Rodzina quasi-wielomianów charakterystycznych (6.112) jest więc rodziną o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów. W pewnych przypadkach szczególnych, np. gdy $C(s) = K_p$ lub $C(s) = K_p / s$, jest ona quasi-wielomianem przedziałowym.

Oznaczmy przez $w^{(0)}(s, h) = w(s, h, a_0, b_0)$ asymptotycznie stabilny quasi-wielomian nominalny rodziny (6.112).

6.4.1. Odporna stabilność przy ustalonej wielkości opóźnienia

Do badania odpornej stabilności (i także D -stabilności) rozpatrywanego układu regulacji automatycznej (rodziny quasi-wielomianów charakterystycznych (6.112)) przy znanej wartości opóźnienia h można stosować metody podane w punktach 4.3 i 4.5. Natomiast do badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia można stosować metody podane w punkcie 5.2. Stosowanie tych metod wymaga znajomości quasi-wielomianów wierzchołkowych i krawędziowych, odpowiadających poszczególnym wierzchołkom i krawędziom, odpowiednio, zbioru wartości $A \times B$ niepewnych współczynników. Zbiór ten jest l -wymiarowym hiperprostokątem, gdzie $l = n + m + 1$. Ma on $K = 2^l$ wierzchołków i $L = l2^{l-1}$ krawędzi.

Poniżej pokażemy, analizując strukturę zbioru wartości rodziny quasi-wielomianów (6.112), że znajomość wszystkich quasi-wielomianów wierzchołkowych i krawędziowych nie jest konieczna przy badaniu odpornej stabilności rozpatrywanego układu regulacji automatycznej.

Oznaczmy przez $w_1^{(k)}(s)$ ($k = 1, \dots, 4$) oraz $w_0^{(i)}(s)$ ($i = 1, \dots, 4$) wielomiany Charitonowa stowarzyszone z wielomianami przedziałowymi (6.106) oraz (6.107), odpowiednio. Tworzy się je w sposób podany w Dodatku A. Ponadto, przez

$$G_{ik}(s) = w_1^{(k)}(s) / w_0^{(i)}(s), \quad i, k = 1, \dots, 4, \quad (6.114)$$

oznaczymy transmitancje operatorowe szesnastu obiektów, które będziemy nazywać obiektami Charitonowa stowarzyszonymi z obiektem przedziałowym (6.105).

Quasi-wielomiany charakterystyczne szesnastu układów regulacji automatycznej z opóźnieniem, o schemacie blokowym jak na rysunku 6.7, przy zastąpieniu obiektu przedziałowego (6.105) obiektami Charitonowa (6.114), mają postać

$$w^{(i,k)}(s, h) = w_{c0}(s)w_0^{(i)}(s) + w_{c1}(s)w_1^{(k)}(s)e^{-sh}, \quad (6.115)$$

gdzie $i, k = 1, \dots, 4$.

Quasi-wielomiany charakterystyczne mające postać (6.115) będziemy nazywać quasi-wielomianami Charitonowa stowarzyszonymi z rozpatrywanym przedziałowym układem regulacji automatycznej (rodziną quasi-wielomianów charakterystycznych (6.112)).

Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ zbioru wartości $w_0(j\omega, A)$ i $w_1(j\omega, B)$ rodzin wielomianów (6.107) i (6.106), odpowiednio, są na płaszczyźnie zmiennej zespolonej prostokątami o bokach równoległych do osi układu współrzędnych. Wierzchołkami prostokąta $w_0(j\omega, A)$ są wartości dla $s = j\omega$ czterech wielomianów Charitonowa $w_0^{(i)}(s)$ ($i = 1, \dots, 4$), zaś wierzchołkami prostokąta $w_1(j\omega, B)$ są wartości dla $s = j\omega$ wielomianów Charitonowa $w_1^{(k)}(s)$ ($k = 1, \dots, 4$). Krawędzie tych prostokątów są zbiorami wartości następujących krawędziowych wielomianów Charitonowa, stowarzyszonych z wielomianami przedziałowymi (6.107) i (6.106), odpowiednio,

$$p_0^{(k,i)}(s, \lambda) = (1 - \lambda)w_0^{(k)}(s) + \lambda w_0^{(i)}(s), \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (6.116)$$

$$p_1^{(k,i)}(s, \lambda) = (1 - \lambda)w_1^{(k)}(s) + \lambda w_1^{(i)}(s), \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (6.117)$$

gdzie $(k, i) = (1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)$, zgodnie z podaną w Dodatku A numeracją wielomianów Charitonowa,

Oznaczmy przez $\bar{w}_0(j\omega, A)$ prostokąt, który otrzymuje się „mnożąc” prostokąt Charitonowa $w_0(j\omega, A)$ przez liczbę zespoloną $w_{c0}(j\omega)$, natomiast przez $\bar{w}_1(j\omega, B)$ oznaczmy prostokąt, który otrzymuje się „mnożąc” prostokąt Charitonowa $w_1(j\omega, B)$ przez liczbę zespoloną $w_{c1}(j\omega) \exp(-j\omega h)$.

Z powyższych rozważań oraz z punktu 6.1 wynika, że dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiór wartości $w(j\omega, h, A, B)$ rodziny quasi-wielomianów (6.112) jest sumą ośmiu prostokątów:

- czterech prostokątów, które otrzymuje się dodając prostokąt $\bar{w}_1(j\omega, B)$ do każdego z wierzchołków prostokąta $\bar{w}_0(j\omega, A)$,
- czterech prostokątów, które otrzymuje się dodając prostokąt $\bar{w}_0(j\omega, A)$ do każdego z wierzchołków prostokąta $\bar{w}_1(j\omega, B)$.

Wierzchołkami wyżej wymienionych prostokątów są wartości dla $s = j\omega$ quasi-wielomianów Charitonowa mających postać (6.115) (patrz przykład 6.2). Krawędziom tych prostokątów odpowiadają krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa

$$p_0^{(i,k,r)}(s, h, \lambda) = w_{c0}(s) p_0^{(k,r)}(s, \lambda) + w_{c1}(s) w_1^{(i)}(s) e^{-sh}, \quad (6.118)$$

$$p_1^{(i,k,r)}(s, h, \lambda) = w_{c0}(s) w_0^{(i)}(s) + w_{c1}(s) p_1^{(k,r)}(s, \lambda) e^{-sh}, \quad (6.119)$$

gdzie $\lambda \in \Lambda = [0, 1]$, $i = 1, \dots, 4$, $(k, r) = (1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)$, zaś krawędziowe wielomiany Charitonowa mają postaci (6.116) i (6.117).

Uwzględniając (6.115)-(6.117), wzory (6.118) i (6.119) napiszemy w równoważnych postaciach

$$p_0^{(i,k,r)}(s, h, \lambda) = (1 - \lambda) w^{(k,i)}(s, h) + \lambda w^{(r,i)}(s, h), \quad \lambda \in \Lambda, \quad (6.118a)$$

$$p_1^{(i,k,r)}(s, h, \lambda) = (1 - \lambda) w^{(i,k)}(s, h) + \lambda w^{(i,r)}(s, h), \quad \lambda \in \Lambda, \quad (6.119a)$$

gdzie $i = 1, \dots, 4$, $(k, r) = (1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)$.

W przypadku ogólnym zbiór wartości $w(j\omega, h, A, B)$ jest dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ ośmiokątem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Każdemu wierzchołkowi tego ośmiokąta odpowiada wartość $w^{(i,k)}(j\omega, h)$ jednego z szesnastu quasi-wielomianów Charitonowa $w^{(i,k)}(s, h)$ mających postać (6.115). Natomiast każda krawędź tego ośmiokąta jest zbiorem wartości jednego z 32 krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa (6.118), (6.119). Wobec tego, wyznaczając przy ustalonym $\omega \geq 0$ zbiory wartości wszystkich krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa (6.118) i (6.119), otrzymamy na płaszczyźnie zmiennej zespolonej 32 odcinki linii prostych. Tworzą one wypukły wielobok, będący zbiorem wartości rodziny quasi-wielomianów (6.112). Zewnętrzne odcinki z wyznaczonego zbioru odcinków są bokami tego zbioru.

Podany powyżej sposób wyznaczania zbioru wartości rodziny quasi-wielomianów (6.112) można wykorzystać do bezpośredniego sprawdzenia warunku wykluczenia zera

$$0 \notin w(j\omega, h, A, B), \quad \forall \omega \geq 0. \quad (6.120)$$

Przykład 6.8. Dany jest przedziałowy układ regulacji automatycznej, o schemacie blokowym pokazanym na rysunku 6.7, gdzie $h = 0.5$, a przedziałowy obiekt bez opóźnień jest opisany transmitancją przedziałową (6.105)-(6.107), gdzie

$$w_1(s, b) = b_2 s^2 + b_1 s + b_0, \quad (6.121)$$

przy czym $b_2 \in [3, 5]$, $b_1 \in [2, 4]$, $b_0 \in [1, 2]$, oraz

$$w_0(s, a) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0, \quad (6.122)$$

przy czym $a_2 \in [4, 6]$, $a_1 \in [5, 7]$, $a_0 \in [7, 9]$.

Stosując metodę bezpośredniego sprawdzenia warunku wykluczenia zera (6.120) należy zbadać odporną stabilność rozpatrywanego układu regulacji automatycznej bez korektora (tj. przy $C(s) = 1$) oraz z korektorem o transmitancji operatorowej $C(s) = 1/(s+1)$.

Rodzina quasi-wielomianów charakterystycznych rozpatrywanego układu regulacji automatycznej bez korektora ma postać

$$W(s, h, A, B) = W_0(s, A) + W_1(s, B) \exp(-sh). \quad (6.123)$$

Łatwo sprawdzić, że dla rodziny quasi-wielomianów (6.123) warunek wykluczenia zera (6.120) nie jest spełniony np. dla $\omega = 4.5$. Oznacza to, że rodzina quasi-wielomianów (6.123) nie jest odpornie stabilna. Rozpatrywany układ regulacji automatycznej bez korektora nie jest więc odpornie stabilny.

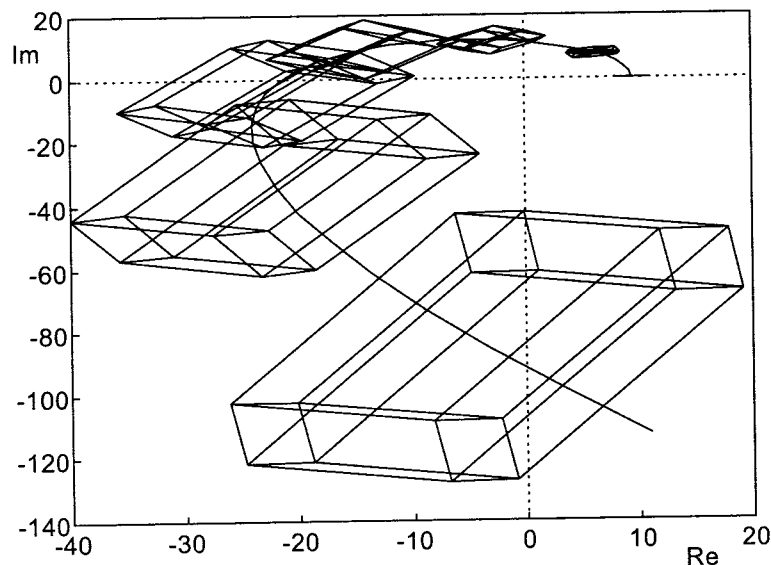
Zbadamy teraz odporną stabilność rozpatrywanego układu regulacji automatycznej z korektorem o transmitancji operatorowej $C(s) = 1/(s+1)$. Rodzina quasi-wielomianów charakterystycznych tego układu ma postać

$$W(s, h, A, B) = (s+1)W_0(s, A) + W_1(s, B) \exp(-sh). \quad (6.124)$$

Położenia zbioru wartości $w(j\omega, h, A, B)$ rodziny quasi-wielomianów charakterystycznych (6.124) na płaszczyźnie zmiennej zespolonej są pokazane na rysunku 6.8. Zostały one wyznaczone dla wartości parametru ω , zmieniających się od 0 do 3 z krokiem 0.5. Dla $\omega > 3$ zbiór wartości oddala się od początku układu współrzędnych. Na rysunku 6.8 jest też pokazana początkowa część hodografu Michajłowa (linia krzywa) quasi-wielomianu nominalnego

$$w^{(0)}(s, h) = (s+1)(s^3 + 5s^2 + 6s + 8) + (4s^2 + 3s + 1.5) \exp(-sh), \quad (6.125)$$

wyznaczona dla ω zmieniającego się od 0 do 3.2 z krokiem 0.1.



Rys. 6.8. Położenia zbioru wartości rodziny quasi-wielomianów charakterystycznych (6.124)

Przy rosnących wartościach parametru $\omega \geq 0$ hodograf Michajłowa przechodzi w kierunku matematycznie dodatnim przez cztery ćwiartki płaszczyzny zmiennej zespolonej. Na podstawie twierdzenia 2.3 możemy więc stwierdzić, że quasi-wielomian nominalny (6.125) jest asymptotycznie stabilny.

Z rysunku 6.8 wynika, że warunek wykluczenia zera (6.120) jest spełniony dla rodziny quasi-wielomianów (6.124). Na podstawie lematu 3.2 możemy więc stwierdzić, że ta rodzina quasi-wielomianów jest odpornie stabilna. Rozpatrywany przedziałowy układ regulacji automatycznej z korektorem $C(s) = 1/(s+1)$ jest więc odpornie stabilny. ■

Twierdzenie 6.4. Przedziałowy układ regulacji automatycznej z opóźnieniem o schemacie blokowym pokazanym na rysunku 6.7 jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie stabilne 32 krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa mające postać (6.118) i (6.119).

Dowód. Z powyższych rozważań wynika, że dla dowolnego ustalonego $\omega \geq 0$ każda krawędź zbioru wartości $w(j\omega, h, A, B)$ jest zbiorem wartości jednego z 32 krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa, które mają postaci (6.118) i (6.119). Też twierdzenia możemy więc udowodnić postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia krawędziowego 4.6. ■

Z twierdzenia 6.4 wynika, że badając odporną stabilność przedziałowego układu regulacji automatycznej można ograniczyć się do badania odpornej stabilności 32 krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa, mających postać (6.118) i (6.119). Znajomość wszystkich quasi-wielomianów krawędziowych rodziny quasi-wielomianów (6.112), których jest $L = l2^{l-1}$, gdzie $l = n + m + 1$, nie jest konieczna.

Zauważmy, że liczba krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa jest niezależna od stopni wielomianów (6.108) i (6.109) oraz od liczby niepewnych współczynników tych wielomianów.

W przypadku przedziałowego układu regulacji automatycznej bez opóźnienia, tj. przy $h = 0$, taki sam rezultat został udowodniony w pracy [66] (patrz też np. [8, 10, 18]). Został on wykorzystany w pracach [8, 9, 34] do syntezy stabilizującego korektora pierwszego rzędu.

Do badania odpornej stabilności poszczególnych krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa można stosować metody podane w punkcie 4.2. Natomiast do jednoczesnego badania odpornej stabilności wszystkich krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa (6.118) i (6.119) można stosować metody funkcji testujących, podane w punkcie 4.3.4.

Na bazie metody funkcji testującej $F(\omega)$ udowodnimy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 6.5. Niech quasi-wielomian nominalny $w^{(0)}(s, h)$ rodziny quasi-wielomianów (6.112) będzie asymptotycznie stabilny. Przedziałowy układ regulacji automatycznej, o schemacie blokowym pokazanym na rysunku 6.7, jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$F_h(\omega) > 0, \quad \forall \omega \geq 0, \quad (6.126)$$

gdzie

$$F_h(\omega) = \pi - \max\{\phi_0(\omega), \phi_1(\omega)\}, \quad (6.127)$$

$$\phi_0(\omega) = \max_{i, (r, k)} |\arg \tilde{w}^{(k, i)}(j\omega, h) - \arg \tilde{w}^{(r, i)}(j\omega, h)|, \quad (6.128)$$

$$\phi_1(\omega) = \max_{i, (r, k)} |\arg \tilde{w}^{(i, k)}(j\omega, h) - \arg \tilde{w}^{(i, r)}(j\omega, h)|, \quad (6.129)$$

$$\tilde{w}^{(i, k)}(s, h) = w^{(i, k)}(s, h) / w^{(0)}(s, h), \quad (6.130)$$

przy czym $w^{(i,k)}(s,h)$ są to quasi-wielomiany Charitonowa mające postać (6.115), $\arg z \in [-\pi, \pi]$, zaś maksimum we wzorach (6.128) i (6.129) liczy się dla $i = 1, \dots, 4$, $(k, r) = (1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)$.

Dowód. Weźmy pod uwagę unormowane quasi-wielomiany Charitonowa mające postać (6.130). Z rozważań podanych w punkcie 4.2 wynika, że krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa (6.118a) są odpornie stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\omega \geq 0$ jest spełniona nierówność $\pi - \phi_0(\omega) > 0$, gdzie $\phi_0(\omega)$ ma postać (6.128). Natomiast krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa (6.119a) są odpornie stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi - \phi_1(\omega) > 0$, $\forall \omega \geq 0$, gdzie $\phi_1(\omega)$ ma postać (6.129).

Krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa (6.118a) i (6.119a) są więc jednocześnie odpornie stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona nierówność (6.126). Dowód twierdzenia wynika zatem z twierdzenia 6.4. ■

Zauważmy, że każdy z 16 krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa mających postać (6.118) jest quasi-wielomianem charakterystycznym fikcyjnego układu regulacji automatycznej, złożonego z szeregowego korektora (6.104) i obiektu opisanego jedną z rodzin transmitancji operatorowych

$$\frac{w_1^{(i)}(s) \exp(-sh)}{(1-\lambda)w_0^{(k)}(s) + \lambda w_0^{(r)}(s)}, \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (6.131)$$

gdzie $i = 1, \dots, 4$, $(k, r) = (1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)$, objętych pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego. Schemat blokowy takiego układu ma postać jak na rysunku 6.7, przy zastąpieniu rodziny transmitancji operatorowych $G(s, A, B)e^{-sh}$ rodziną transmitancji (6.131).

Podobnie, każdy z 16 krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa mających postać (6.119) jest quasi-wielomianem charakterystycznym fikcyjnego układu regulacji automatycznej, złożonego z szeregowego korektora (6.104) i obiektu opisanego jedną z rodzin transmitancji operatorowych

$$\frac{[(1-\lambda)w_1^{(k)}(s) + \lambda w_1^{(r)}(s)] \exp(-sh)}{w_0^{(i)}(s)}, \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (6.132)$$

gdzie $i = 1, \dots, 4$, $(k, r) = (1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)$, objętych pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego.

Z powyższych rozważań i twierdzenia 6.4 wynika więc, że szeregowy korektor (6.104) odpornie stabilizuje przedziałowy obiekt opisany rodziną transmitancji operatorowych $G(s, A, B)e^{-sh}$ wtedy i tylko wtedy, gdy stabilizuje on odpornie 16 rodzin obiektów opisanych transmitancją operatorową (6.131) i 16 rodzin obiektów opisanych transmitancją operatorową (6.132).

W przypadku szczególnym układu regulacji automatycznej z korektorem o transmitancji operatorowej $C(s) = K_p / s$, rodzina quasi-wielomianów charakterystycznych (6.122) przyjmuje postać

$$W(s, h, A, B) = s W_0(s, A) + K_p W_1(s, B) \exp(-sh). \quad (6.133)$$

Jest ona quasi-wielomianem przedziałowym.

Lemat 6.8. Przedziałowy układ regulacji automatycznej z opóźnieniem, o schemacie blokowym pokazanym na rysunku 6.7 przy $C(s) = K_p / s$, jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są asymptotycznie stabilne quasi-wielomiany Charitonowa (6.115) przy $w_{c0}(s) = s$, $w_{c1}(s) = K_p$ i są odpornie stabilne krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa (6.118a).

Dowód. Dowód wynika z lematu 6.1 zastosowanego do quasi-wielomianu przedziałowego (6.133). ■

Z lematu 6.8 wynika, że jeżeli $C(s) = K_p / s$, to przy badaniu odpornej stabilności przedziałowego układu regulacji automatycznej z opóźnieniem nie jest konieczne badanie odpornej stabilności krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa mających postać (6.119a). Podobny rezultat został podany w pracy [61] w przypadku, gdy $C(s) = K_p$.

Uwzględniając rozważania podane w punkcie 6.2, warunki lematu 6.8 można uprościć w pewnych przypadkach szczególnych, kiedy to albo rodzina wielomianów licznika (6.106) albo rodzina wielomianów mianownika (6.107) transmitancji operatorowej (6.105) redukuje się do wielomianu o dokładnie znanych współczynnikach.

Lemat 6.9. Przedziałowy układ regulacji automatycznej z opóźnieniem o schemacie blokowym pokazanym na rysunku 6.7, w którym $C(s) = K_p / s$, a obiekt jest opisany rodziną transmitancji operatorowych

$$G(s, B) = \frac{W_1(s, B)}{w_0(s)} e^{-sh}, \quad (6.134)$$

gdzie przedziałowa rodzina wielomianów licznika ma postać (6.106), a mianownik jest wielomianem o dokładnie znanych współczynnikach, jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są asymptotycznie stabilne cztery quasi-wielomiany Charitonowa

$$w^{(k)}(s, h) = s w_0(s) + K_p w_1^{(k)}(s) e^{-sh}, \quad k = 1, \dots, 4, \quad (6.135)$$

przy czym $w_1^{(k)}(s)$ ($k = 1, \dots, 4$) są to wielomiany Charitonowa stowarzyszone z wielomianem przedziałowym $W_1(s, B)$.

Dowód. Funkcją charakterystyczną rozpatrywanego układu jest quasi-wielomian przedziałowy $W(s, h, B) = s w_0(s) + K_p W_1(s, B) e^{-sh}$. Z lematu 6.2 przy $m = r = 1$ wynika, że jest on odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie stabilne cztery quasi-wielomiany Charitonowa (6.135) z nim stowarzyszone. ■

Lemat 6.10. Przedziałowy układ regulacji automatycznej z opóźnieniem o schemacie blokowym pokazanym na rysunku 6.7, w którym $C(s) = K_p / s$, a obiekt jest opisany rodziną transmitancji operatorowych

$$G(s, A) = \frac{w_1(s)}{W_0(s, A)} e^{-sh}, \quad (6.136)$$

gdzie licznik jest wielomianem o dokładnie znanych współczynnikach, a przedziałowa rodzina wielomianów mianownika ma postać (6.107), jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie stabilne cztery krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa

$$p_0^{(k,i)}(s, h, \lambda) = (1 - \lambda) s w_0^{(k)}(s) + \lambda s w_0^{(i)}(s) + K_p w_1(s) e^{-sh}, \quad (6.137)$$

gdzie $\lambda \in \Lambda = [0, 1]$, $w_0^{(i)}(s)$ ($i = 1, \dots, 4$) są to wielomiany Charitonowa stowarzyszone z wielomianem przedziałowym $W_0(s, A)$, zaś $(k, i) = (1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)$.

Dowód. Funkcją charakterystyczną rozpatrywanego układu regulacji automatycznej jest quasi-wielomian przedziałowy

$$W(s, h, A) = s W_0(s, A) + K_p w_1(s) e^{-sh}. \quad (6.138)$$

Z lematu 6.2 przy $m = 1$ i $r = 0$ wynika, że quasi-wielomian przedziałowy (6.138) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie stabilne cztery krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa mające postać (6.137). ■

6.4.2. Odporna stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia

Do badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia przedziałowego układu regulacji automatycznej z opóźnieniem, o schemacie blokowym pokazanym na rysunku 6.7, można stosować metody podane w punkcie 5.2 (w przypadku ogólnym, gdy rodzina quasi-wielomianów (6.112) ma współczynniki liniowo zależne od niepewnych parametrów) lub metody podane w punkcie 5.1 (gdy rodzina quasi-wielomianów (6.112) jest quasi-wielomianem przedziałowym).

Wykorzystując podejście zastosowane w pracy [61] przy $C(s) = K_p$, podamy poniżej prosty warunek dostateczny odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia przedziałowego układu regulacji automatycznej z opóźnieniem.

Z rozważań podanych w punktach 5.1 i 5.2 wynika, że odporna stabilność rodziny quasi-wielomianów

$$W_{c0}(s, A) = w_{c0}(s) W_0(s, A) \quad (6.139)$$

jest warunkiem koniecznym odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia rodziny quasi-wielomianów charakterystycznych (6.112). Oznacza to, że aby rozpatrywany układ regulacji automatycznej z opóźnieniem był odpornie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia, musi być odpornie stabilny układ otwarty. Jest on odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy korektor jest asymptotycznie stabilny i jest odpornie stabilny przedziałowy obiekt (6.105).

Z twierdzenia Charitonowa A.1 wynika, że przedziałowy obiekt (6.105) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są asymptotycznie stabilne cztery quasi-wielomiany Charitonowa $w_0^{(i)}(s)$ ($i = 1, \dots, 4$), stowarzyszone z wielomianem przedziałowym (6.107).

Twierdzenie 6.6. Załóżmy, że układ otwarty jest odpornie stabilny. Przedziałowy układ regulacji automatycznej, o schemacie blokowym pokazanym na rysunku 6.7, jest odpornie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia, jeżeli jest spełniona nierówność

$$\max_{\omega \geq 0} |C(j\omega)| < 1/\mu, \quad (6.140)$$

gdzie $C(s)$ jest transmitancją operatorową asymptotycznie stabilnego korektora,

$$\mu = \max_{i,k} \|G_{ik}\|_{\infty}, \quad i, k = 1, \dots, 4, \quad (6.141)$$

zaś

$$\|G_{ik}\|_{\infty} = \sup_{\omega} |G_{ik}(j\omega)| \quad (6.142)$$

oznacza normę H^{∞} transmitancji $G_{ik}(s)$, gdzie $G_{ik}(s)$, $i, k = 1, \dots, 4$, są to transmitancje operatorowe (o postaci (6.114)) 16 obiektów Charitonowa stowarzyszonych z obiektem przedziałowym (6.105).

Dowód. Dla rodziny quasi-wielomianów (6.112) funkcję testującą $\Phi(\omega)$, zdefiniowaną wzorem (5.61), można napisać w postaci

$$\Phi(\omega) = 1 - \max_{a \in A, b \in B} |C(j\omega)G(j\omega, a, b)|. \quad (6.143)$$

Warunek $\Phi(\omega) > 0$, $\forall \omega \geq 0$, jest więc spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\max_{a \in A, b \in B} |C(j\omega)G(j\omega, a, b)| < 1, \quad \forall \omega \geq 0. \quad (6.144)$$

Warunek (6.144) jest spełniony, jeżeli dla wszystkich $a \in A$ i $b \in B$ jest spełniona nierówność

$$\max_{\omega \geq 0} |C(j\omega)| \cdot \max_{\omega \geq 0} |G(j\omega, a, b)| < 1. \quad (6.145)$$

Stosując notację normy H^{∞} , warunek (6.145) napiszemy w postaci

$$\max_{\omega \geq 0} |C(j\omega)| \max_{a \in A, b \in B} \|G(\cdot, a, b)\|_{\infty} < 1. \quad (6.146)$$

Ponieważ dla przedziałowej rodziny obiektów (6.105) zachodzi zależność (np. [8, 10])

$$\max_{a \in A, b \in B} \|G(\cdot, a, b)\|_{\infty} = \max_{i,k} \|G_{ik}\|_{\infty}, \quad i, k = 1, \dots, 4, \quad (6.147)$$

warunek (6.146) jest równoważny z warunkiem (6.140), co kończy dowód twierdzenia. ■

Zauważmy, że jeżeli jest spełniona nierówność (6.140), to $\Phi(\omega) > 0$ dla każdego $\omega \geq 0$. Oznacza to, że wtedy też jest spełniona nierówność $\Phi_{\infty} > 0$. Zgodnie z rozważaniami podanymi w rozdziale 5 oraz w punkcie 2.3.3, jest ona warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej stabilności rodziny członów dominujących stowarzyszonej z rodziną quasi-wielomianów charakterystycznych rozpatrywanego przedziałowego układu regulacji automatycznej.

Przykład. 6.9. Na podstawie warunku dostatecznego (6.140) należy określić, jakie warunki musi spełniać szeregowy asymptotycznie stabilny korektor, aby przedziałowy układ regulacji automatycznej, rozpatrywany w przykładzie 6.8, był odpornie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia h .

Łatwo sprawdzić, stosując np. twierdzenie Charitonowa A.1, że przedziałowy wielomian charakterystyczny (6.122) obiektu regulacji jest odpornie stabilny. Warunek konieczny odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnienia jest więc spełniony.

Wyznaczając transmitancje operatorowe (6.114) szesnastu obiektów Charitonowa, stowarzyszonych z rozpatrywanym przedziałowym obiektem bez opóźnienia, oraz obliczając ich normy H^{∞} , na podstawie wzoru (6.141) otrzymamy $\mu = \max_{i,k} \|G_{ik}\|_{\infty} = 3.4200$.

Z twierdzenia 6.6 wynika, że jeżeli jest spełniony warunek

$$\max_{\omega \geq 0} |C(j\omega)| < 1/\mu = 0.2924, \quad (6.148)$$

to rozpatrywany przedziałowy układ regulacji automatycznej jest odpornie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia.

Łatwo pokazać, że warunek (6.148) jest spełniony np. dla prostych korektorów o następujących transmitancjach operatorowych (o dodatnich współczynnikach):

- $C(s) = K_p$, $K_p < 0.2924$,
- $C(s) = K_p / (s + a)$, $K_p / a < 0.2924$,
- $C(s) = K_p(s + z) / (s + p)$, $\max\{K_p z / p, K_p\} < 0.2924$. ■

Z powyższych rozważań oraz z punktu 5.2 wynika, że aby przedziałowy układ regulacji automatycznej z opóźnieniem był odpornie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia, muszą być spełnione są dwa wymagania: układ otwarty musi być asymptotycznie stabilny, zaś wzmocnienie w układzie otwartym musi być odpowiednio małe. Jeżeli są one spełnione, to w rozpatrywanym układzie występuje duży uchyb ustalony przy wymuszeniu skokowym.

Aby zmniejszyć uchyb ustalony albo go wyzerować, należy albo zwiększyć współczynnik wzmocnienia w układzie otwartym, albo wprowadzić szeregowo z przedziałowym obiektem człon całkujący idealny. Jednakże w takich przypadkach układ zamknięty przestaje być odpornie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia. Może on być odpornie stabilny tylko dla określonych wartości opóźnienia.

6.4.3. Odporna stabilność przy niedokładnie znanej wielkości opóźnienia

Rozpatrzmy problem badania odpornej stabilności przedziałowego układu regulacji automatycznej (o schemacie blokowym pokazanym na rysunku 6.7), którego rodzina quasi-wielomianów charakterystycznych ma postać (6.112), w przypadku, gdy wielkość opóźnienia h nie jest dokładnie znana. Wiemy natomiast, że $h \in H = [h^-, h^+]$, gdzie $0 \leq h^- < h^+$.

Rodzina quasi-wielomianów (6.112) jest rodziną typu neutralnego, jeżeli jest spełniony warunek $n + n_c = m + m_c$, gdzie n i m oraz n_c i m_c są to, odpowiednio, stopnie wielomianów mianownika i licznika transmitancji operatorowej (6.105) obiektu oraz transmitancji operatorowej (6.104) korektora.

Oznaczmy przez c_{n_c} oraz d_{n_c} współczynniki przy najwyższych potęgach zmiennej s wielomianów mianownika oraz licznika transmitancji operatorowej (6.104) korektora.

Uwzględniając rozważania podane w punkcie 2.2 oraz wzory (6.108) i (6.109), rodzinę członów dominujących rodziny quasi-wielomianów (6.112) typu neutralnego napiszemy w postaci

$$\Delta(z) = b_m d_{n_c} z + c_{n_c}, \quad b_m \in [b_m^-, b_m^+]. \quad (6.149)$$

Jeżeli wartość współczynnika b_m jest ustalona, to człon dominujący $\Delta(z)$ jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (2.19), czyli gdy $|c_{n_c}| > |b_m d_{n_c}|$. Ta nierówność jest spełniona dla wszystkich

$b_m \in [b_m^-, b_m^+]$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|c_{n_c}| > \max\{|b_m^- d_{n_c}|, |b_m^+ d_{n_c}|\}. \quad (6.150)$$

Nierówność (6.150) jest więc warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej stabilności rodziny członów dominujących (6.149). Jest ona też prostym

warunkiem koniecznym odpornej stabilności rodziny quasi-wielomianów (6.112) (rozpatrywanego przedziałowego układu regulacji automatycznej) typu neutralnego. W dalszych rozważaniach będziemy przyjmować, że warunek (6.150) jest spełniony.

Rozpatrywany przedziałowy układ regulacji automatycznej jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy warunki twierdzenia 6.4 są spełnione dla każdego $h \in H$, tzn. gdy krawędziowe quasi-wielomiany Charitonowa (6.118a) i (6.119a) są odpornie stabilne dla każdego $h \in H$. Warunkiem koniecznym ich odpornej stabilności jest asymptotyczna stabilność dla każdego $h \in H$ wszystkich quasi-wielomianów Charitonowa mających postać (6.115).

Oznaczmy przez

$$H_c = \bigcap_{i,k=1,\dots,4} H_{ik} \quad (6.151)$$

zbiór wartości opóźnienia, dla których wszystkie quasi-wielomiany Charitonowa (6.115) są jednocześnie asymptotycznie stabilne, przy czym H_{ik} jest zbiorem wartości opóźnienia, dla których jest asymptotycznie stabilny quasi-wielomian Charitonowa $w^{(i,k)}(s, h)$. Zbiór H_{ik} można wyznaczyć stosując metodę h -podziału podaną w punkcie 2.3.4.

Jeżeli zbiór H_c jest zbiorem pustym, to rozpatrywany przedziałowy układ regulacji automatycznej nie jest odpornie stabilny. Jeżeli natomiast zbiór H_c nie jest zbiorem pustym, to $H \subseteq H_c$ jest warunkiem koniecznym odpornej stabilności rozpatrywanego układu regulacji automatycznej.

Uogólniając twierdzenie 6.5 na przypadek niedokładnie znanego opóźnienia h otrzymamy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 6.7. Niech quasi-wielomian nominalny $w^{(0)}(s, h)$ rodziny quasi-wielomianów (6.112) będzie asymptotycznie stabilny dla każdego $h \in H$. Przedziałowy układ regulacji automatycznej, o schemacie blokowym pokazanym na rysunku 6.7, jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$F(h) > 0, \quad \forall h \in H, \quad (6.152)$$

gdzie

$$F(h) = \min_{\omega \geq 0} F_h(\omega), \quad (6.153)$$

zaś dla każdego ustalonego $h \in H$ funkcję testującą $F_h(\omega)$ oblicza się ze wzorów (6.127)-(6.129). ■

Przy komputerowym wyznaczaniu funkcji testującej (6.153) należy postępować w ten sam sposób (podany w punkcie 6.2.1) jak przy wyznaczaniu funkcji testującej (6.51).

Przykład. 6.10. Należy wyznaczyć wartości opóźnienia h , dla których jest odpornie stabilny przedziałowy układ regulacji automatycznej, rozpatrywany w przykładzie 6.8 w przypadku, gdy szeregowy korektor ma transmitancję operatorową $C(s) = 1/s(s+1)$.

Rodzinę quasi-wielomianów charakterystycznych rozpatrywanego układu regulacji automatycznej, typu opóźnionego, można napisać w postaci

$$W(s, h, A, B) = s(s+1)W_0(s, A) + W_1(s, B) \exp(-sh). \quad (6.154)$$

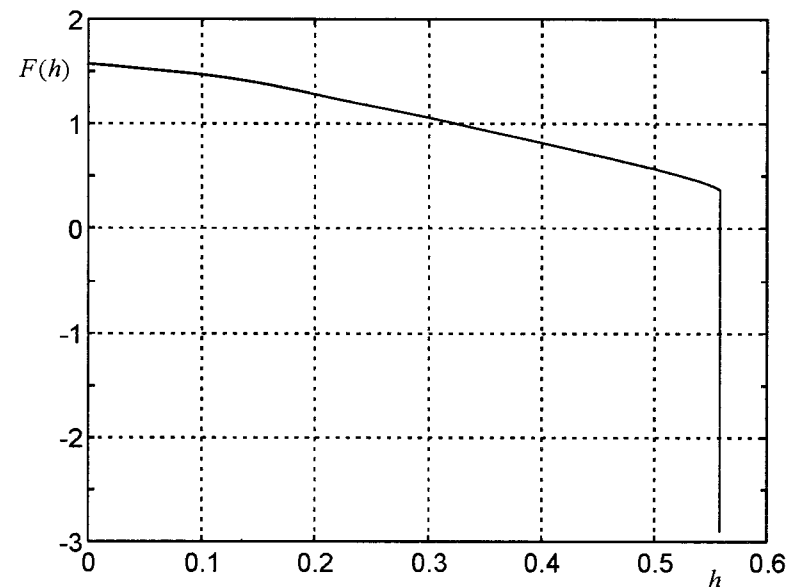
gdzie wielomiany przedziałowe $W_1(s, B)$ i $W_0(s, A)$ są zdefiniowane wzorami (6.106) i (6.121) oraz (6.107) i (6.122), odpowiednio.

Ponieważ układ otwarty, którego rodzina wielomianów charakterystycznych ma postać $s(s+1)W_0(s, A)$, nie jest odpornie stabilny, rozpatrywany układ zamknięty nie może być odpornie stabilny niezależnie od wielkości opóźnienia. Może on być natomiast odpornie stabilny dla określonych wartości opóźnienia.

Wyznaczając quasi-wielomiany Charitonowa (6.115), stowarzyszone z rodziną quasi-wielomianów (6.154) i obliczając na bazie metody h -podziału przedziały H_{ik} , $i, k = 1, \dots, 4$, wartości opóźnienia, dla których są one asymptotycznie stabilne, ze wzoru (6.151) otrzymamy $H_c = H_{13} = [0, 0.5589]$. Zbiór H_c jest więc przedziałem wartości opóźnienia, dla których jest asymptotycznie stabilny quasi-wielomian Charitonowa

$$w^{(1,3)}(s, h) = (s+1)(s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 9s) + (5s^2 + 4s + 1)e^{-sh}. \quad (6.155)$$

Wykres funkcji testującej $F(h)$, stowarzyszonej z rodziną quasi-wielomianów (6.154), jest pokazany na rysunku 6.9. Został on wyznaczony w sposób podany w twierdzeniu 6.7 (z uwzględnieniem metody postępowania opisanej w punkcie 6.2.1) dla wartości opóźnienia h zmieniających się od 0 do 0.55 z krokiem 0.01 i od 0.551 do 0.559 z krokiem 0.001. Końcowe wartości funkcji testującej $F(h)$ są następujące: $F(0.558) = 0.3753$, $F(0.559) = -2.8998$. Obliczenie wartości opóźnienia h , należącej do przedziału $[0.558, 0.559]$, dla której funkcja testująca $F(h)$ osiąga wartość zerową, jest bardzo trudne ze względu na skokową zmianę funkcji testującej $F(h)$ w otoczeniu tej wartości.



Rys. 6.9. Wykres funkcji testującej $F(h)$

Dla każdego ustalonego h funkcja testująca $F_h(\omega)$ była obliczana ze wzorów (6.127)-(6.129) przy ω zmieniającym się od 0 do 1.75 ze zmiennym krokiem. Dla każdego $h \in [0, 0.559]$ osiągała ona wartość minimalną w przedziale $[0, 1.75]$.

Z przebiegu funkcji testującej $F(h)$ i twierdzenia 6.7 wynika, że rozpatrywany przedziałowy układ regulacji automatycznej z korektorem $C(s) = 1/s(s+1)$ jest odpornie stabilny, jeżeli $h \in H = [0, 0.558]$. Natomiast nie jest on odpornie stabilny dla $h \geq 0.559$. Zauważmy, że o odpornej stabilności rozpatrywanego układu decyduje quasi-wielomian Charitonowa (6.155). ■

Do badania odpornej stabilności rozpatrywanego przedziałowego układu regulacji automatycznej z niepewnym opóźnieniem (rodziny quasi-wielomianów charakterystycznych (6.112) przy $h \in H$) można też stosować metodę podaną w punkcie 7.2.1 w przypadku ogólnym lub metodę podaną w punkcie 7.2.2 w przypadku szczególnym, gdy rodzina quasi-wielomianów (6.112) jest quasi-wielomianem przedziałowym.

Inne podejścia (graficzne) do problemu badania odpornej stabilności rozpatrywanego układu regulacji automatycznej zostały podane w pracach [139, 159].

6.4.4. Uwagi końcowe

W procesie analizy i syntezy przedziałowego układu regulacji automatycznej, o schemacie blokowym pokazanym na rysunku 6.7, ważną rolę odgrywa twierdzenie 6.4, które jest też prawdziwe w przypadku układu bez opóźnienia (patrz np. [8, 18, 66]). Zgodnie z tym twierdzeniem, projektując stabilizujący korektor wystarczy ograniczyć się do rozpatrywania tylko 32 fikcyjnych obiektów o transmitancjach operatorowych (6.131) i (6.132), które zależą od jednego niepewnego parametru $\lambda \in \Lambda = [0, 1]$. Do wyznaczenia tych transmitancji jest niezbędna znajomość wielomianów Charitonowa i krawędziowych wielomianów Charitonowa, stowarzyszonych z przedziałowymi wielomianami licznika i mianownika transmitancji przedziałowej (6.105).

Powyższy fakt został w pracach [4, 18, 167] wykorzystany do uogólnienia klasycznych częstotliwościowych metod projektowania układów regulacji automatycznej na klasę takich układów z przedziałowym obiektem bez opóźnienia. Pozwalają one na zaprojektowanie korektora (regulatora), który nie tylko zapewnia odporną stabilność rozpatrywanego układu regulacji automatycznej, ale też zapewnia spełnienie określonych wymagań dotyczących jakości regulacji, sformułowanych w odniesieniu do charakterystyk częstotliwościowych.

Podobnie jak w wyżej wymienionych pracach, do badania odpornej stabilności przedziałowego układu regulacji automatycznej z opóźnieniem, o schemacie blokowym pokazanym na rysunku 6.7, można stosować metody częstotliwościowe, bazujące na kryterium stabilności Nyquista. Jest to inne podejście do problemu badania odpornej stabilności układu regulacji automatycznej, które nie jest rozpatrywane w niniejszej pracy. Przy tym podejściu jest niezbędna znajomość brzegów odpowiednich rodzin charakterystyk częstotliwościowych obiektu opisanego rodziną transmitancji operatorowych (6.105).

Obiekt o niepewnych parametrach opisuje się w dziedzinie częstotliwości nie jedną charakterystyką np. amplitudowo-fazową, czy też logarytmiczną charakterystyką modułu i logarytmiczną charakterystyką fazy, ale rodzinami takich charakterystyk. Wobec tego, aby móc stosować metody częstotliwościowe do analizy i syntezy układów o niepewnych parametrach, należy wyznaczyć brzegi (dolne i górne) obszarów, w których leżą rodziny odpowiednich charakterystyk częstotliwościowych (np. modułu i fazy). Problem wyznaczania tych brzegów był rozpatrywany w monografii [18] i w pracach [54, 123] w przypadku przedziałowego obiektu bez opóźnienia oraz w pracach [58, 158] w przypadku przedziałowego obiektu z niepewnym opóźnieniem. Podejście zastosowane w [58, 158] zostało w pracach [157] i [156] uogólnione na klasę obiektów z niepewnym opóźnieniem i o współczynnikach wielomianów licznika i mianownika transmitancji operatorowej

rowej zależnych od niepewnych parametrów (różne niepewne parametry wielomianów licznika i mianownika) liniowo oraz wieloliniowo, odpowiednio. Problemowi wyznaczania brzegów rodzin charakterystyk częstotliwościowych obiektu bez opóźnienia o współczynnikach wielomianów licznika i mianownika transmitancji operatorowej zależnych liniowo od niepewnych parametrów są poświęcone prace [60, 62, 74, 86].

W wymienionych powyżej pracach do wyznaczenia brzegów odpowiednich rodzin charakterystyk częstotliwościowych obiektu o niepewnych parametrach wykorzystuje się znajomość struktury zbioru wartości rodziny transmitancji widmowych tego obiektu. Bez znajomości tej struktury wyznaczenie dla dowolnego ustalonego $\omega \geq 0$ brzegów zbioru wartości rodziny transmitancji widmowych jest trudnym problemem. Są tu niezbędne złożone obliczenia komputerowe (patrz np. [6, 95, 150]).

7. ODPORNA STABILNOŚĆ RODZINY QUASI-WIELOMIANÓW O NIEPEWNYCH OPÓŹNIENIACH

W niniejszym rozdziale przeanalizujemy problem badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów o znanych współczynnikach i o niepewnych opóźnieniach oraz o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów (w tym quasi-wielomianów przedziałowych) i o niepewnych opóźnieniach. Będziemy przy tym przyjmować, że obszarem D jest przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, gdzie γ jest zadaną liczbą rzeczywistą dodatnią.

7.1. Odporna stabilność rodziny quasi-wielomianów o znanych współczynnikach i o niepewnych opóźnieniach

7.1.1. Niewspółmierne opóźnienia

Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów charakterystycznych o dokładnie znanych współczynnikach, lecz o niepewnych opóźnieniach

$$W(s, H) = \{w(s, \mathbf{h}): \mathbf{h} \in H\}, \quad (7.1)$$

gdzie

$$w(s, \mathbf{h}) = w_0(s) + \sum_{i=1}^m w_i(s) e^{-sh_i}, \quad (7.2)$$

$$w_i(s) = \sum_{k=0}^n a_{ki} s^k, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad a_{n0} > 0, \quad (7.3)$$

$\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_m]$ jest wektorem opóźnień, zaś

$$H = \{\mathbf{h}: h_i \in H_i = [h_i^-, h_i^+], \quad 0 \leq h_i^- < h_i^+, \quad i = 1, 2, \dots, m\} \quad (7.4)$$

jest zbiorem wartości opóźnień.

W zapisie (7.4) zbioru H zostało przyjęte, że wszystkie opóźnienia h_i nie są dokładnie znane. Jeżeli natomiast niektóre z opóźnień są znane dokładnie, to H jest zbiorem wartości tych opóźnień, których wielkości są znane z dokładnością do przedziału liczbowego.

W dalszych rozważaniach będziemy przyjmować, że wartości opóźnień h_i , $i = 1, 2, \dots, m$, mogą zmieniać się w sposób ciągły w zadanych przedziałach.

Rodzinę quasi-wielomianów (7.1) będziemy nazywać rodziną odpornie D -stabilną, jeżeli quasi-wielomian (7.2) jest D -stabilny dla każdego $\mathbf{h} \in H$.

Rodzinie (7.1) quasi-wielomianów typu neutralnego odpowiada rodzina członów dominujących

$$\Delta(s, H) = \{\Delta(\exp(-s\mathbf{h})): \mathbf{h} \in H\}, \quad (7.5)$$

gdzie

$$\Delta(\exp(-s\mathbf{h})) = a_{n0} + \sum_{i=1}^m a_{ni} e^{-sh_i}. \quad (7.6)$$

Rodzinę członów dominujących (7.5) będziemy nazywać rodziną odpornie D -stabilną, jeżeli człon dominujący (7.6) jest D -stabilny dla każdego $\mathbf{h} \in H$.

Jeżeli D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną, to odporna D -stabilność rodziny członów dominujących (7.5) jest warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.1) typu neutralnego.

Niech $\mathbf{h}_0 = [h_1^0, h_2^0, \dots, h_m^0]$ będzie wektorem nominalnych wartości opóźnień rodziny quasi-wielomianów (7.1).

Oznaczmy przez $w(s, \mathbf{h}_0)$ oraz $\Delta(\exp(-s\mathbf{h}_0))$, odpowiednio, D -stabilny quasi-wielomian nominalny rodziny (7.1) oraz D -stabilny nominalny człon dominujący rodziny (7.5).

Uogólniając twierdzenie 3.4 na przypadek niepewnych opóźnień otrzymamy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 7.1. Niech nominalny człon dominujący $\Delta(\exp(-s\mathbf{h}_0))$ rodziny (7.5) będzie D -stabilny. Rodzina członów dominujących (7.5) jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin \Delta(f(\omega), H), \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty), \quad (7.7)$$

gdzie zbiór

$$\Delta(f(\omega), H) = \{\Delta(\exp(-f(\omega)h)): h \in H\} \quad (7.8)$$

jest dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ zbiorem wartości rodziny (7.5) członów dominujących. ■

Założmy, że jeżeli rodzina (7.1) jest rodziną typu neutralnego, to rodzina członów dominujących (7.5) jest odpornie D -stabilna.

Twierdzenie 7.2. Niech quasi-wielomian nominalny $w(s, h_0)$ będzie D -stabilny. Jeżeli jest spełnione powyższe założenie, to rodzina quasi-wielomianów (7.1) typu opóźnionego lub neutralnego jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin w(f(\omega), H), \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty), \quad (7.9)$$

gdzie

$$w(f(\omega), H) = \{w(f(\omega), h): h \in H\}, \quad (7.10)$$

lub równoważnie, warunek wykluczenia zera dla unormowanego zbioru wartości

$$0 \notin \tilde{w}(f(\omega), H), \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty), \quad (7.11)$$

gdzie

$$\tilde{w}(f(\omega), H) = \{\tilde{w}(f(\omega), h): h \in H\}, \quad (7.12)$$

przy czym $\tilde{w}(f(\omega), h) = w(f(\omega), h) / w(f(\omega), h_0)$.

Dowód. Zera quasi-wielomianu (7.2) typu opóźnionego oraz typu neutralnego przy założeniu, że rodzina członów dominujących (7.5) jest odpornie D -stabilna, zależą w sposób ciągły od wartości opóźnień $h_i \in [h_i^-, h_i^+]$, $0 \leq h_i^- < h_i^+$, $i = 1, 2, \dots, m$. Dowód możemy więc przeprowadzić postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3.3. ■

Poniżej przeanalizujemy struktury zbiorów wartości (7.8), (7.10) i (7.12). Wykorzystamy przy tym rezultaty pracy [21], w której przy rozpatrywaniu odpornej stabilności rodziny (7.1) quasi-wielomianów typu opóźnionego szczegółowo przeanalizowano strukturę zbioru wartości (7.10) przy $f(\omega) = j\omega$.

Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiór wartości $w(f(\omega), H)$ rodziny quasi-wielomianów (7.1) jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej sumą liczby zespolonej $w_0(f(\omega))$ oraz m odcinków linii krzywych o opisie parametrycznym

$$w_i(f(\omega)) \exp(-f(\omega)h_i), \quad h_i \in [h_i^-, h_i^+], \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.13)$$

Zbiór wartości $w(f(\omega), H)$ można opisać zależnością

$$w(f(\omega), H) = w_0(f(\omega)) + \sum_{i=1}^m w_i(f(\omega), H_i), \quad (7.14)$$

gdzie

$$w_i(f(\omega), H_i) = \{w_i(f(\omega)) \exp(-f(\omega)h_i): h_i \in H_i = [h_i^-, h_i^+]\}. \quad (7.15)$$

Dla $f(\omega) = -\gamma + j\omega$ wzór (7.13) przyjmuje postać

$$w_i(-\gamma + j\omega) \exp(\gamma h_i) \exp(-j\omega h_i), \quad h_i \in [h_i^-, h_i^+], \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.16)$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} w_i(-\gamma + j\omega) \exp(\gamma h_i) \exp(-j\omega h_i) \\ = |w_i(-\gamma + j\omega)| \exp(\gamma h_i) \exp(j[\alpha_i(\omega) - \omega h_i]), \end{aligned} \quad (7.17)$$

gdzie $\exp(j\alpha_i(\omega)) = w_i(-\gamma + j\omega) / |w_i(-\gamma + j\omega)|$, dla każdego ustalonego $\omega > 0$ zbiór wartości (7.15) przy $f(\omega) = -\gamma + j\omega$ jest linią krzywą leżącą w pierścieniu o środku w początku płaszczyzny zmiennej zespolonej, o promieniu zewnętrznym $|w_i(-\gamma + j\omega)| \exp(\gamma h_i^+)$ i o promieniu wewnętrznym $|w_i(-\gamma + j\omega)| \exp(\gamma h_i^-)$. Końce tej linii leżą na dwóch okręgach o środkach w początku płaszczyzny zmiennej zespolonej i o promieniach $|w_i(-\gamma + j\omega)| \exp(\gamma h_i^+)$, $|w_i(-\gamma + j\omega)| \exp(\gamma h_i^-)$.

Jeżeli $\omega = 0$, zbiór (7.15) redukuje się do odcinka osi rzeczywistej, którego końcami są punkty $w_i(-\gamma) \exp(\gamma h_i^-)$ i $w_i(-\gamma) \exp(\gamma h_i^+)$. Oznacza to, że zbiór wartości (7.14) przy $\omega = 0$ jest odcinkiem osi rzeczywistej, którego końcami są punkty: $w_{\min}(-\gamma, h) = w_0(-\gamma) + \sum_{i=1}^m \theta_i^-$ oraz $w_{\max}(-\gamma, h) = w_0(-\gamma) + \sum_{i=1}^m \theta_i^+$, gdzie (dla $i = 1, 2, \dots, m$)

- jeżeli $w_i(-\gamma) \geq 0$, to $\theta_i^- = w_i(-\gamma) \exp(\gamma h_i^-)$, $\theta_i^+ = w_i(-\gamma) \exp(\gamma h_i^+)$,
- jeżeli $w_i(-\gamma) < 0$, to $\theta_i^- = w_i(-\gamma) \exp(\gamma h_i^+)$, $\theta_i^+ = w_i(-\gamma) \exp(\gamma h_i^-)$.

Warunek wykluczenia zera (7.9) przy $f(\omega) = -\gamma + j\omega$ i $\omega = 0$ jest więc spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $w_{\min}(-\gamma, \mathbf{h}) w_{\max}(-\gamma, \mathbf{h}) > 0$.

Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ unormowany zbiór wartości (7.12), mający postać

$$\tilde{w}(f(\omega), H) = \tilde{w}_0(f(\omega)) + \sum_{i=1}^m \tilde{w}_i(f(\omega), H_i), \quad (7.18)$$

jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej sumą liczby zespolonej $\tilde{w}_0(f(\omega))$ oraz m odcinków linii krzywych o opisie parametrycznym

$$\tilde{w}_i(f(\omega), H_i) = \{\tilde{w}_i(f(\omega)) \exp(-f(\omega)h_i) : h_i \in H_i = [h_i^-, h_i^+]\}, \quad (7.19)$$

przy czym $\tilde{w}_i(f(\omega)) = w_i(f(\omega)) / w(f(\omega), \mathbf{h}_0)$.

Postępując podobnie jak w przypadku zbioru (7.15) możemy wykazać, że przy $f(\omega) = -\gamma + j\omega$ unormowany zbiór (7.19) jest dla każdego ustalonego $\omega > 0$ linią krzywą leżącą w pierścieniu o środku w początku płaszczyzny zmiennej zespolonej, o promieniu zewnętrznym $|\tilde{w}_i(-\gamma + j\omega)| \exp(\gamma h_i^+)$ i o promieniu wewnętrznym $|\tilde{w}_i(-\gamma + j\omega)| \exp(\gamma h_i^-)$. Końce tej krzywej leżą na dwóch okręgach tworzących wyżej wymieniony pierścień.

Unormowany zbiór wartości (7.18), podobnie jak zbiór wartości (7.14), przy $\omega = 0$ redukuje się do odcinka osi rzeczywistej, którego końce $\tilde{w}_{\min}(-\gamma, \mathbf{h})$ i $\tilde{w}_{\max}(-\gamma, \mathbf{h})$ wyznacza się w ten sam sposób (opisany powyżej) jak końce zbioru wartości (7.14) przy $\omega = 0$.

Warunek wykluczenia zera (7.11) przy $f(\omega) = -\gamma + j\omega$ i $\omega = 0$ jest więc spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{w}_{\min}(-\gamma, \mathbf{h}) \tilde{w}_{\max}(-\gamma, \mathbf{h}) > 0$.

W przypadku szczególnym, gdy obszarem D jest otwarta lewa półpłaszczyzna, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, dla każdego ustalonego $\omega > 0$ zbiór

$$w_i(j\omega, H_i) = \{w_i(j\omega) \exp(-j\omega h_i) : h_i \in [h_i^-, h_i^+]\} \quad (7.20)$$

jest łukiem okręgu o środku w początku płaszczyzny zmiennej zespolonej i o promieniu $|w_i(j\omega)|$. Wynika to z zależności

$$w_i(j\omega) \exp(-j\omega h_i) = r_i(\omega) \exp(j[\alpha_i(\omega) - \omega h_i]), \quad (7.21)$$

gdzie $r_i(\omega) = |w_i(j\omega)|$, $\exp(j\alpha_i(\omega)) = w_i(j\omega) / |w_i(j\omega)|$.

Punktami krańcowymi łuku (7.20) są punkty $r_i(\omega) \exp(j[\alpha_i(\omega) - \omega h_i^-])$ oraz $r_i(\omega) \exp(j[\alpha_i(\omega) - \omega h_i^+])$.

Dla $\omega = 0$ zbiór (7.20) redukuje się do punktu $w_i(0)$ położonego na osi rzeczywistej. Wobec tego, przy $\omega = 0$ zbiór wartości $w(j\omega, H)$ jest punktem położonym na osi rzeczywistej, o współrzędnej $w(0, \mathbf{h}) = w_0(0) + \sum_{i=1}^m w_i(0)$. Jego położenie nie zależy od wartości opóźnień. Warunkiem koniecznym odpornej stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.1) jest spełnienie nierówności $w(0, \mathbf{h}) > 0$.

Jeżeli $\omega \geq \hat{\omega}_i$, gdzie

$$\hat{\omega}_i = 2\pi / (h_i^+ - h_i^-), \quad (7.22)$$

to zbiór (7.20) jest okręgiem o środku w początku płaszczyzny zmiennej zespolonej i o promieniu $r_i(\omega) = |w_i(j\omega)|$. Wobec tego, dla $\omega \geq \hat{\omega}$, gdzie

$$\hat{\omega} = \max\{\hat{\omega}_i : i = 1, 2, \dots, m\}, \quad (7.23)$$

zbiór wartości

$$w(j\omega, H) = w_0(j\omega) + \sum_{i=1}^m w_i(j\omega, H_i), \quad (7.24)$$

przy czym $w_i(j\omega, H_i)$ ma postać (7.20), jest pierścieniem o środku w punkcie $w_0(j\omega)$, o promieniu zewnętrznym $r_z(\omega) = r_1(\omega) + r_2(\omega) + \dots + r_m(\omega)$ i o promieniu wewnętrznym $r_w(\omega)$, gdzie [21]

$$r_w(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } 2\hat{r}(\omega) \leq r_z(\omega), \\ 2\hat{r}(\omega) - r_z(\omega), & \text{jeżeli } 2\hat{r}(\omega) > r_z(\omega), \end{cases} \quad (7.25)$$

przy czym

$$\hat{r}(\omega) = \max\{r_1(\omega), r_2(\omega), \dots, r_m(\omega)\}. \quad (7.26)$$

Z powyższych rozważań wynika, że warunek wykluczenia zera

$$0 \notin w(j\omega, H), \quad \forall \omega \geq \hat{\omega}, \quad (7.27)$$

jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|w_0(j\omega)| > \sum_{i=1}^m |w_i(j\omega)|, \quad \forall \omega \geq \hat{\omega}. \quad (7.28)$$

Jeżeli $w_0(j\omega) \neq 0$ dla $\omega \geq \hat{\omega}$, to warunek (7.28) można napisać w postaci

$$\Phi(\omega) > 0, \quad \forall \omega \geq \hat{\omega}, \quad (7.29)$$

gdzie

$$\Phi(\omega) = 1 - \sum_{i=1}^m |w_i(j\omega)| / |w_0(j\omega)|. \quad (7.30)$$

Zauważmy, że funkcja testująca zdefiniowana wzorem (7.30) ma taką samą postać jak funkcja testująca (2.64). Natomiast warunek (7.29) jest tożsamy z warunkiem (2.69) dla $\omega \geq \hat{\omega}$.

Ze wzorów (7.30) i (7.3) wynika, że wartość końcową funkcji testującej (7.30) można obliczyć ze wzoru

$$\Phi_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Phi(\omega) = 1 - \sum_{i=1}^m |a_{ni}| / a_{n0}, \quad (7.31)$$

przy czym $a_{n0} > 0$ z założenia.

Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli $f(\omega) = j\omega$, to warunek wykluczenia zera (7.9) jest spełniony dla $\omega \geq \hat{\omega}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona nierówność (7.28) (lub (7.29)).

Przeanalizujemy teraz strukturę zbioru wartości (7.8) rodziny członów dominujących (7.5).

Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiór wartości $\Delta(f(\omega), H)$ rodziny członów dominujących (7.5) można opisać zależnością

$$\Delta(f(\omega), H) = a_{n0} + \sum_{i=1}^m \Delta_i(f(\omega), H_i), \quad (7.32)$$

gdzie

$$\Delta_i(f(\omega), H_i) = \{a_{ni} \exp(-f(\omega)h_i) : h_i \in [h_i^-, h_i^+]\}. \quad (7.33)$$

Jest on na płaszczyźnie zmiennej zespolonej sumą liczby rzeczywistej a_{n0} oraz m odcinków linii krzywych o opisie parametrycznym (7.33).

Jeżeli $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, to dla dowolnego ustalonego $\omega \in \Omega = [0, \infty)$ zbiór (7.33) jest linią krzywą leżącą w pierścieniu o środku w początku płaszczyzny

zmiennej zespolonej, o promieniu zewnętrznym $r_{iz} = |a_{ni}| \exp(\gamma h_i^+)$ i o promieniu wewnętrznym $r_{iw} = |a_{ni}| \exp(\gamma h_i^-)$. Końce tej linii leżą na dwóch okręgach o środkach w początku płaszczyzny zmiennej zespolonej i o promieniach r_{iz} oraz r_{iw} . Zauważmy, że te promienie nie zależą od wartości parametru ω .

Z powyższego i ze wzoru (7.32) wynika, że dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiór wartości $\Delta(f(\omega), H)$ leży na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w pierścieniu o środku w punkcie a_{n0} i o promieniu zewnętrznym $r_z = r_{1z} + r_{2z} + \dots + r_{mz}$. Dla $\omega = 0$ jest on odcinkiem osi rzeczywistej. Jeżeli wartość parametru ω zmienia się od 0 do ∞ , zbiór (7.32) przemieszcza się w tym pierścieniu zmieniając też kształt. Położenia zbioru (7.32), wyznaczonego dla wszystkich $\omega \geq 0$, tworzą pierścień o środku w punkcie a_{n0} i o promieniu zewnętrznym r_z . Ponieważ $a_{n0} > 0$ z założenia, z powyższych rozważań wynika, że warunek wykluczenia zera (7.7) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n0} - r_z > 0$, czyli gdy

$$a_{n0} > \sum_{i=1}^m |a_{ni}| \exp(\gamma h_i^+). \quad (7.34)$$

Zauważmy, że warunek (7.34) wynika z twierdzenia 2.6 zastosowanego do rodziny członów dominujących (7.5).

Uwzględniając powyższe rozważania można sformułować następujący lemat.

Lemat 7.1. Niech nominalny człon dominujący $\Delta(\exp(-sh_0))$ będzie D -stabilny. Rodzina członów dominujących (7.5) jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona nierówność (7.34). ■

W przypadku, gdy obszar D jest otwartą lewą półpłaszczyzną, zbiór wartości $\Delta(j\omega, H)$ można opisać zależnością

$$\Delta(j\omega, H) = a_{n0} + \sum_{i=1}^m \Delta_i(j\omega, H_i), \quad (7.35)$$

gdzie dla dowolnego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiór

$$\Delta_i(j\omega, H_i) = \{a_{ni} \exp(-j\omega h_i) : h_i \in [h_i^-, h_i^+]\} \quad (7.36)$$

jest łukiem okręgu o środku w początku płaszczyzny zmiennej zespolonej, o promieniu $|a_{ni}|$ i o końcach $|a_{ni}| \exp(j[\alpha_i - \omega h_i^-])$ i $|a_{ni}| \exp(j[\alpha_i - \omega h_i^+])$. Wynika to z zależności

$$a_{ni} \exp(-j\omega h_i) = |a_{ni}| \exp(j[\alpha_i - \omega h_i]), \quad (7.37)$$

gdzie $\exp(j\alpha_i) = a_{ni}/|a_{ni}|$.

Jeżeli $\omega \geq \hat{\omega}_i$, gdzie $\hat{\omega}_i$ oblicza się ze wzoru (7.22), to zbiór (7.36) jest okręgiem o środku w początku płaszczyzny zmiennej zespolonej i o promieniu $|a_{ni}|$. Wobec tego, dla $\omega \geq \hat{\omega}$, gdzie $\hat{\omega}$ wyznacza się ze wzoru (7.23), zbiór wartości (7.35) jest pierścieniem o środku w punkcie a_{n0} , o promieniu zewnętrznym $r_{dz} = |a_{n1}| + |a_{n2}| + \dots + |a_{nm}|$ i o promieniu wewnętrznym r_{dw} , gdzie

$$r_{dw} = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } 2r_d \leq r_{dz}, \\ 2r_d - r_{dz}, & \text{jeżeli } 2r_d > r_{dz}, \end{cases} \quad (7.38)$$

przy czym

$$r_d = \max\{|a_{n1}|, |a_{n2}|, \dots, |a_{nm}|\}. \quad (7.39)$$

Z powyższych rozważań wynika, że dla dowolnego $\omega < \hat{\omega}$ zbiór wartości (7.35) leży w pierścieniu będącym zbiorem wartości (7.35) dla $\omega \geq \hat{\omega}$. Oznacza to, że dla wszystkich $\omega \geq 0$ warunek wykluczenia zera $0 \notin \Delta(j\omega, H)$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $|a_{n0}| > r_{dz}$, czyli gdy jest spełniona nierówność

$$a_{n0} > |a_{n1}| + |a_{n2}| + \dots + |a_{nm}|. \quad (7.40)$$

Warunek (7.40) wynika też z nierówności (7.34) przy $\gamma = 0$.

Z powyższych rozważań wynika następujący lemat.

Lemat 7.2. Niech nominalny człon dominujący $\Delta(\exp(-sh_0))$ będzie asymptotycznie stabilny. Rodzina członów dominujących (7.5) jest odpornie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona nierówność (7.40). ■

Zauważmy, że warunek (7.40) jest równoważny z warunkiem $\Phi_\infty > 0$, gdzie Φ_∞ ma postać (7.31). Oznacza to, że jeżeli rodzina członów dominujących (7.5) jest odpornie stabilna, to wartość końcowa (7.31) funkcji testującej $\Phi(\omega)$, zdefiniowanej wzorem (7.30), jest dodatnia. Otrzymaliśmy więc potwierdzenie rezultatu wynikającego z punktu 2.2 niniejszej pracy, że odporna stabilność rodziny członów dominujących (7.5) jest warunkiem koniecznym odpornej stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.1) typu neutralnego.

Zauważmy ponadto, że (7.40) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym asymptotycznej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień członu dominującego (7.6) (por. nierówność (2.70) podaną w dowodzie twierdzenia 2.8).

Podsumowując powyższe rozważania możemy stwierdzić, że dla rodziny członów dominujących (7.5) warunek wykluczenia zera (7.7) przy $f(\omega) = -\gamma + j\omega$ można sprawdzić analitycznie, na podstawie nierówności (7.34) (lub na podstawie nierówności (7.40) przy $f(\omega) = j\omega$). Nie ma natomiast analitycznych metod służących do sprawdzenia spełnienia warunków wykluczenia zera (7.9) i (7.11) dla rodziny quasi-wielomianów (7.1). Można je sprawdzić wizualnie, wyznaczając na płaszczyźnie zmiennej zespolonej położenia zbioru wartości (7.10) (lub (7.12)) dla odpowiednio dobranych wartości parametru $\omega \geq 0$. W przypadku, gdy $f(\omega) = j\omega$, warunek wykluczenia zera (7.27) może być sprawdzony na podstawie nierówności (7.28), bez konieczności wyznaczania położenia zbioru wartości $w(j\omega, H)$ dla $\omega \geq \hat{\omega}$.

Wyznaczanie dla ustalonego $\omega \geq 0$ zbioru wartości $w(f(\omega), H)$ (lub unormowanego zbioru wartości $\tilde{w}(f(\omega), H)$) w drodze dodawania odpowiednich krzywych, opisanych powyżej, jest bardzo trudnym problemem. Dlatego też do wyznaczania wyżej wymienionych zbiorów będziemy stosować metodę siatki, opisaną w punkcie 3.2.1. Polega ona na obliczaniu wartości quasi-wielomianu (7.2) (lub unormowanego quasi-wielomianu $\tilde{w}(s, \mathbf{h}) = w(s, \mathbf{h}) / w(s, \mathbf{h}_0)$) przy $s = f(\omega) = -\gamma + j\omega$ dla wyznaczonych z odpowiednio małymi krokami dyskretnych wartości opóźnień $h_i \in H_i = [h_i^-, h_i^+]$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Bezpośredniego wizualnego sprawdzenia spełnienia warunku wykluczenia zera (7.11) można uniknąć, jeżeli zastosujemy metodę funkcji testującej, podobną do metody funkcji testującej $B(\omega) = \operatorname{Re} T(\omega)$, podanej w punkcie 4.3.4.2 przy dokładnie znanych opóźnieniach.

Wprowadźmy funkcję testującą $B(\omega)$, zdefiniowaną dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ wzorem

$$\begin{aligned} B(\omega) &= \min_{\mathbf{h} \in H} \operatorname{Re} \tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}) \\ &= \operatorname{Re} \tilde{w}_0(f(\omega)) + \sum_{i=1}^m \min_{h_i \in H_i} \operatorname{Re} [\tilde{w}_i(f(\omega)) \exp(-f(\omega)h_i)], \end{aligned} \quad (7.41)$$

gdzie $\tilde{w}(s, \mathbf{h}) = w(s, \mathbf{h}) / w(s, \mathbf{h}_0)$, $\tilde{w}_i(s) = w_i(s) / w(s, \mathbf{h}_0)$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Z definicji (7.41) funkcji testującej $B(\omega)$ wynika, że jeżeli jest spełniony warunek

$$B(\omega) > 0, \quad \forall \omega \geq 0, \quad (7.42)$$

to dla każdego $\omega \geq 0$ unormowany zbiór wartości (7.12) leży całkowicie w otwartej prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej. Warunek (7.42) jest więc warunkiem wystarczającym spełnienia warunku wykluczenia zera (7.11).

Wyznaczanie dla ustalonego $\omega \geq 0$ funkcji testującej (7.41), podobnie jak wyznaczanie zbioru wartości (7.12), też wymaga stosowania metody siatki. Jednakże, przy stosowaniu metody funkcji testującej $B(\omega)$, dla ustalonego $\omega \geq 0$ otrzymamy nie zbiór punktów wyznaczających na płaszczyźnie zmiennej zespolonej zarys zbioru wartości (7.12) lecz jedną liczbę, określającą najmniejszą część rzeczywistą ze zbioru tych punktów.

Z powyższych rozważań wynika następujący algorytm badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.1) typu opóźnionego lub neutralnego, w przypadku gdy D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, gdzie γ jest zadaną liczbą rzeczywistą dodatnią.

Niech quasi-wielomian nominalny $w(s, h_0)$ rodziny (7.1) będzie D -stabilny.

Algorytm 7.1:

Krok 1. Jeżeli rodzina (7.1) jest rodziną typu opóźnionego, idź do Kroku 2. Jeżeli zaś jest ona rodziną typu neutralnego, sprawdź spełnienie warunku (7.34). Jeżeli jest on spełniony, idź do Kroku 2. W przeciwnym wypadku rodzina quasi-wielomianów (7.1) typu neutralnego nie jest odpornie D -stabilna, bowiem nie jest odpornie D -stabilna rodzina członów dominujących (7.5).

Krok 2. Wyznacz wykres funkcji testującej $B(\omega)$ zdefiniowanej wzorem (7.41). Jeżeli warunek (7.42) jest spełniony, rodzina quasi-wielomianów (7.1) jest odpornie D -stabilna. W przeciwnym wypadku idź do Kroku 3.

Krok 3. Sprawdź spełnienie warunku wykluczenia zera (7.11) (lub (7.9)), stosując np. metodę siatki. Jeżeli jest on spełniony, rodzina quasi-wielomianów (7.1) jest odpornie D -stabilna. W przeciwnym wypadku ta rodzina nie jest odpornie D -stabilna.

Przy komputerowym sprawdzaniu warunków podanych w krokach 2 i 3 należy rozpatrywać odpowiednio duży przedział wartości parametru $\omega \geq 0$, teoretycznie nieskończony w przypadku rodziny quasi-wielomianów typu neutralnego,

przyjmując odpowiednio mały krok $\Delta\omega$. Dla każdego ustalonego ω należy dokonać dyskretyzacji z odpowiednio małymi krokami przedziałów wartości opóźnień $H_i = [h_i^-, h_i^+]$, $i = 1, 2, \dots, m$.

W przypadku, gdy D jest otwartą lewą półpłaszczyzną, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, z Algorytmu 7.1 i powyższych rozważań wynika następujący algorytm badania odpornej stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.1) typu opóźnionego lub neutralnego.

Algorytm 7.2:

Krok 1. Jeżeli rodzina (7.1) jest rodziną typu opóźnionego, idź do Kroku 2. Jeżeli zaś jest ona rodziną typu neutralnego, sprawdź spełnienie warunku (7.40). Jeżeli jest on spełniony, idź do Kroku 2. W przeciwnym wypadku rodzina quasi-wielomianów (7.1) typu neutralnego nie jest odpornie stabilna, bowiem nie jest odpornie stabilna rodzina członów dominujących (7.5).

Krok 2. Oblicz $\hat{\omega}$ ze wzorów (7.22), (7.23) i wyznacz wykres funkcji testującej $B(\omega)$, $\omega \in [0, \hat{\omega}]$, zdefiniowanej wzorem (7.41) przy $f(\omega) = j\omega$. Jeżeli warunek $B(\omega) > 0$, $\forall \omega \in [0, \hat{\omega}]$, jest spełniony, idź do Kroku 4. W przeciwnym wypadku idź do Kroku 3.

Krok 3. Sprawdź (stosując np. metodę siatki) spełnienie warunku wykluczenia zera

$$0 \notin w(j\omega, H), \quad \forall \omega \in [0, \hat{\omega}], \quad (7.43)$$

lub równoważnie, spełnienie warunku wykluczenia zera dla unormowanego zbioru wartości

$$0 \notin \tilde{w}(j\omega, H), \quad \forall \omega \in [0, \hat{\omega}]. \quad (7.44)$$

Jeżeli nie są one spełnione, rodzina quasi-wielomianów (7.1) nie jest odpornie stabilna. W przeciwnym wypadku idź do Kroku 4.

Krok 4. Wyznacz wykres funkcji testującej $\Phi(\omega)$, zdefiniowanej wzorem (7.30), dla odpowiednio dobranego skończonego przedziału wartości parametru $\omega \geq \hat{\omega}$ (przyjmując odpowiednio mały krok $\Delta\omega$) i sprawdź spełnienie nierówności (7.29). Przy wyznaczaniu wykresu tej funkcji wykorzystaj znajomość jej wartości końcowej, którą oblicza się ze wzoru (7.31). Jeżeli nierówność (7.29) jest spełniona, rodzina quasi-wielomianów (7.1) jest odpornie stabilna. W przeciwnym wypadku nie jest ona odpornie stabilna.

Powyższe rozważania zilustrujemy trzema przykładami.

Przykład 7.1. Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów (7.1), gdzie

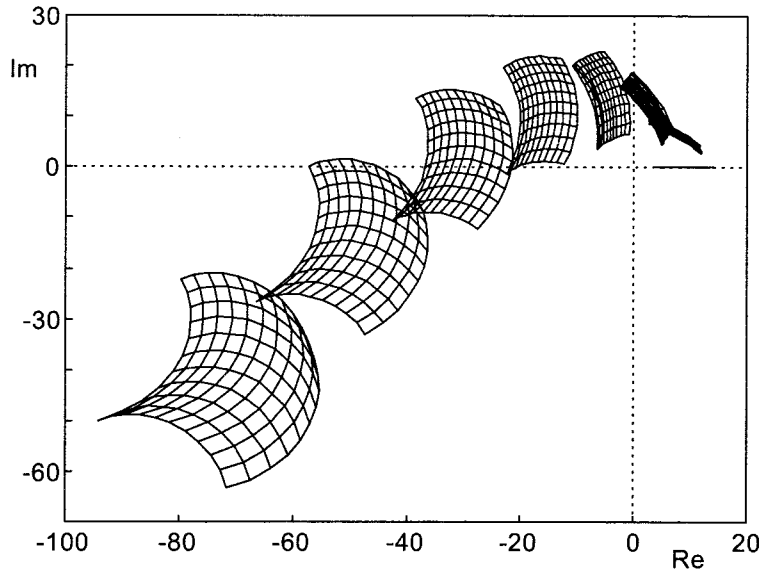
$$w(s, h) = s^3 \tau + s^2 (6\tau + 1) + s(13.75\tau + 6 + 1.82\tau \exp(-sh_1) + 0.42\tau \exp(-sh_2)) + 13.75 + 1.82 \exp(-sh_1) + (0.42 - 1305k) \exp(-sh_2), \quad (7.45)$$

przy czym $\tau = 1.964$, $k = -0.0117$, zaś

$$H = \{h = [h_1, h_2]^T : h_1 \in [0, 0.5], h_2 \in [0, 0.5]\}. \quad (7.46)$$

Stosując metodę bezpośredniego sprawdzenia warunku wykluczenia zera (7.9) należy zbadać odporną D -stabilność rozpatrywanej rodziny quasi-wielomianów typu opóźnionego, jeżeli D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -1 + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$.

Quasi-wielomian (7.45) o dokładnie znanych opóźnieniach i o niepewnych parametrach τ i k był rozpatrywany w przykładzie 4.4. Wynika z niego, że quasi-wielomian nominalny $w(s, h_0)$, gdzie $h_0 = [h_1^0, h_2^0] = [0.165, 0.33]$, jest D -stabilny.



Rys. 7.1. Położenia zbioru wartości $w(-1 + j\omega, H)$, $\omega \in [0, 3.5]$

Na rysunku 7.1 są pokazane położenia zbioru wartości $w(-1 + j\omega, H)$ rodziny quasi-wielomianów (7.45), wyznaczone dla ω zmieniającego się od 0 do 3.5 z krokiem 0.5. Dla każdego ustalonego ω zbiór wartości $w(-1 + j\omega, H)$ wyznaczono metodą siatki utworzonej w zbiorze (7.46), przyjmując dyskretne wartości opóźnień $h_1 \in [0, 0.5]$ i $h_2 \in [0, 0.5]$ zmieniające się z krokiem 0.05. Poszczególne punkty zbioru wartości, odpowiadające węzłom siatki utworzonej w zbiorze (7.46), na rysunku 7.1 połączono z sąsiednimi punktami odcinkami linii prostych.

Dla $\omega > 3.5$ zbiór wartości $w(-1 + j\omega, H)$ oddala się od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Z rysunku 7.1 i powyższych rozważań wynika, że warunek wykluczenia zera (7.9) jest spełniony. Rozpatrywana rodzina quasi-wielomianów jest więc odpornie D -stabilna, zgodnie z twierdzeniem 7.2. ■

Przykład 7.2. Należy zbadać odporną D -stabilność rodziny quasi-wielomianów typu neutralnego

$$w(s, h) = w_0(s) + w_1(s)e^{-sh}, \quad h \in H, \quad (7.47)$$

gdzie $w_0(s) = 0.076s^2 + 0.38s$, $w_1(s) = 0.0228s^2 + 0.228s + 0.6$, $H = [0.3, 0.7]$, zaś $D = \{s: \operatorname{Re} s < -0.5\}$. Brzeg obszaru D ma opis parametryczny $f(\omega) = -0.5 + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$.

Rodzina członów dominujących stowarzyszona z rodziną quasi-wielomianów (7.47) ma postać

$$\Delta(\exp(-sh)) = 0.076 + 0.0228 \exp(-sh), \quad h \in H = [0.3, 0.7]. \quad (7.48)$$

Quasi-wielomian (7.47) przy $h = 0.5$ jest quasi-wielomianem charakterystycznym układu automatycznej regulacji temperatury w reaktorze nuklearnym, który był rozpatrywany w przykładzie 2.3.

Niech $h = h_0 = 0.5$ będzie nominalną wartością opóźnienia h . Z przykładu 2.3 wynika, że quasi-wielomian nominalny $w(s, h_0)$ i nominalny człon dominujący $\Delta(\exp(-sh_0))$ są D -stabilne.

Badając odporną D -stabilność rodziny quasi-wielomianów (7.47) zgodnie z Algorytmem 7.1 otrzymamy:

Krok 1. Warunek (7.34) jest spełniony, bowiem

$$0.076 = a_{n0} > |a_{n1}| \exp(\gamma h^+) = 0.0228 \exp(0.5 \cdot 0.7) = 0.0324. \quad (7.49)$$

Rodzina członów dominujących (7.48) jest więc odpornie D -stabilna, zgodnie z lematem 7.1.

Krok 2. Na rysunku 7.2 jest pokazany wykres funkcji testującej $B(\omega)$, wyznaczony dla ω zmieniającego się od 0 do 40 z krokiem 0.1. Osiąga ona wartość minimalną, równą 0.2097 dla $\omega = 2.8$. Dla $\omega > 40$ wartości funkcji testującej $B(\omega)$ są większe od wyznaczonej wartości minimalnej.

Dla każdego ustalonego ω wartość funkcji $B(\omega)$ wyznaczano ze wzoru

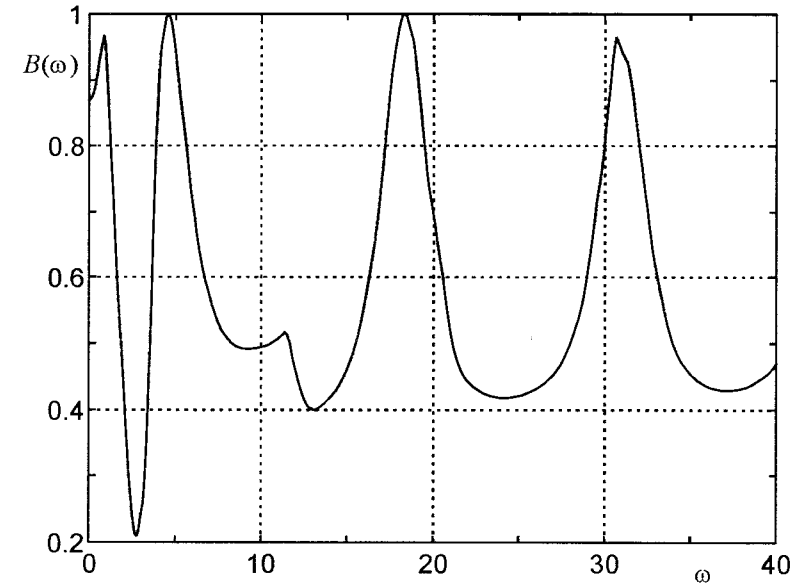
$$B(\omega) = \operatorname{Re} \tilde{w}_0(f(\omega)) + \min_{h \in H} \operatorname{Re} [\tilde{w}_1(f(\omega)) \exp(-f(\omega)h)], \quad (7.50)$$

gdzie $\tilde{w}_i(f(\omega)) = w_i(f(\omega)) / w(f(\omega), h_0)$, $i = 0, 1$, przyjmując dyskretne wartości opóźnień $h \in H = [0.3, 0.7]$, zmieniające się z krokiem 0.005.

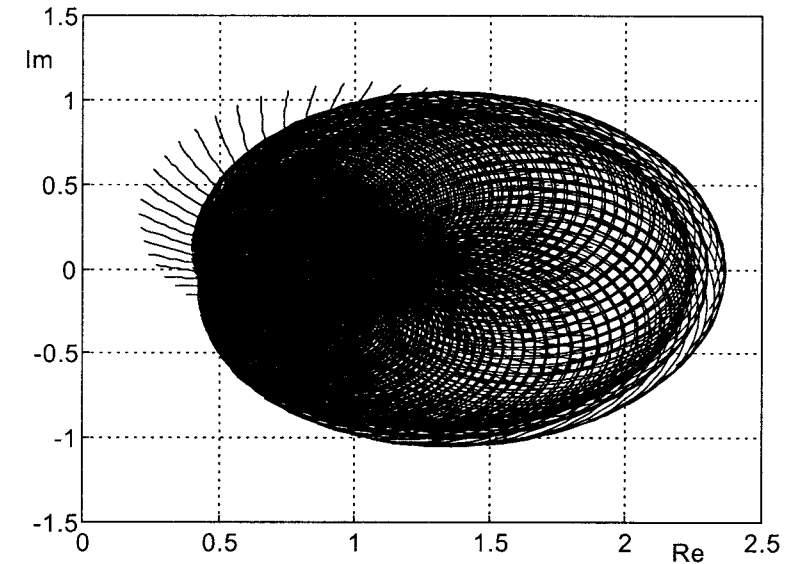
Z rysunku 7.2 i powyższych rozważań wynika, że warunek (7.42) jest spełniony, a więc rodzina quasi-wielomianów (7.47) jest odpornie D -stabilna. Proces badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.47) możemy więc zakończyć. Jednakże w celu bezpośredniego sprawdzenia warunku wykluczenia zera (7.11) wykonajmy obliczenia zgodnie z Krokiem 3.

Krok 3. Na rysunku 7.3 są pokazane położenia unormowanego zbioru wartości $\tilde{w}(-0.5 + j\omega, H)$ rodziny quasi-wielomianów (7.47) dla $\omega \in [0, 40]$, wyznaczone z krokiem $\Delta\omega = 0.1$. Dla każdego ustalonego ω zbiór wartości $\tilde{w}(-0.5 + j\omega, H)$ (odcinek linii krzywej) był wyznaczany metodą siatki, przyjmując dyskretne wartości opóźnień h zmieniające się w zbiorze $H = [0.3, 0.7]$ z krokiem 0.005.

Z rysunku 7.3 wynika, że zbiór $\tilde{w}(-0.5 + j\omega, H)$ dla $\omega \in [0, 40]$ leży w otwartej prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej. Jego minimalna część rzeczywista zmienia się w funkcji $\omega \in [0, 40]$ w sposób pokazany na rysunku 7.2. Dla każdego $\omega > 40$ zbiór wartości $\tilde{w}(-0.5 + j\omega, H)$ też leży w otwartej prawej półpłaszczyźnie. Warunek wykluczenia zera (7.11) jest więc spełniony i rodzina quasi-wielomianów (7.47) jest odpornie D -stabilna, zgodnie z twierdzeniem 7.2. ■



Rys. 7.2. Wykres funkcji testującej $B(\omega)$, $\omega \in [0, 40]$



Rys. 7.3. Położenia zbioru wartości $\tilde{w}(-0.5 + j\omega, H)$ dla $\omega \in [0, 40]$

Przykład 7.3. Należy zbadać odporną stabilność rodziny quasi-wielomianów charakterystycznych typu neutralnego

$$W(s, H) = \{w(s, \mathbf{h}) : \mathbf{h} \in H\}, \quad (7.51)$$

gdzie

$$w(s, \mathbf{h}) = w_0(s) + w_1(s) \exp(-sh_1) + w_2(s) \exp(-sh_2), \quad (7.52)$$

przy czym $w_0(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 1$, $w_1(s) = 0.5s^3 + 2s^2 + s + 2$, $w_2(s) = 0.2s^3 + s^2 + 3s - 1$, oraz

$$H = \{\mathbf{h} = [h_1, h_2] : h_1 \in [0, 0.8], h_2 \in [0.2, 1]\}. \quad (7.53)$$

Łatwo sprawdzić, stosując np. twierdzenie 2.3, że quasi-wielomian nominalny $w(s, \mathbf{h}_0)$, gdzie $\mathbf{h}_0 = [h_1^0, h_2^0] = [0.4, 0.6]$, jest asymptotycznie stabilny.

Rodzinnie (7.51) quasi-wielomianów typu neutralnego odpowiada rodzina członów dominujących

$$\Delta(s, H) = \{\Delta(\exp(-s\mathbf{h})) : \mathbf{h} \in H\}, \quad (7.54)$$

gdzie

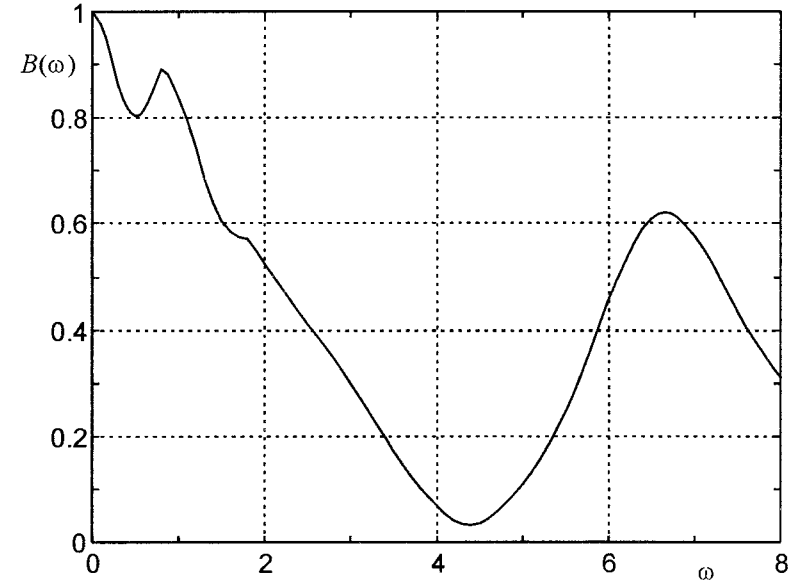
$$\Delta(\exp(-s\mathbf{h})) = 1 + 0.5 \exp(-sh_1) + 0.2 \exp(-sh_2), \quad (7.55)$$

przy czym nominalny człon dominujący $\Delta(\exp(-s\mathbf{h}_0))$ jest asymptotycznie stabilny.

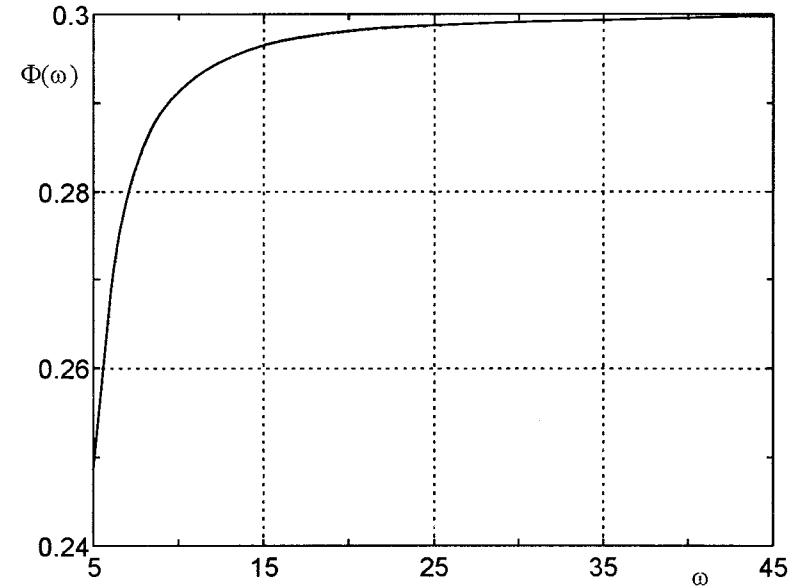
Badając odporną stabilność rodziny quasi-wielomianów (7.51) zgodnie z Algorytmem 7.2 otrzymamy:

Krok 1. Ponieważ $a_{n0} = 1 > |a_{n1}| + |a_{n2}| = 0.5 + 0.2 = 0.7$, warunek (7.40) jest spełniony. Oznacza to, zgodnie z lematem 7.2, że rodzina członów dominujących (7.54) jest odpornie stabilna.

Krok 2. Obliczając $\hat{\omega}$ ze wzorów (7.22) i (7.23), otrzymamy $\hat{\omega} = 7.8540$. Na rysunku 7.4 jest pokazany wykres funkcji testującej $B(\omega)$, wyznaczony dla ω zmieniającego się od 0 do 8 z krokiem 0.1. Dla każdego ustalonego ω wartość funkcji $B(\omega)$ wyznaczano ze wzoru (7.41) przy $f(\omega) = j\omega$ przyjmując dyskretne wartości opóźnień $h_1 \in [0, 0.8]$ i $h_2 \in [0.2, 1]$ zmieniające się z krokiem 0.025. Funkcja $B(\omega)$ osiąga wartość minimalną, równą 0.0327, dla $\omega = 4.4$. Ponieważ $B(\omega) > 0$ dla każdego $\omega \in [0, \hat{\omega}]$, przechodzimy do Kroku 4.



Rys. 7.4. Wykres funkcji testującej $B(\omega)$, $\omega \in [0, 8]$



Rys. 7.5. Wykres funkcji testującej $\Phi(\omega)$, $\omega \in [5, 45]$

Krok 4. Przyjmując dyskretne wartości parametru ω , zmieniające się od 5 do 45 z krokiem $\Delta\omega = 1$, i wyznaczając funkcję testującą $\Phi(\omega)$ ze wzoru (7.30), otrzymamy wykres pokazany na rysunku 7.5, przy czym $\Phi(5) = 0.2486$, $\Phi(45) = 0.2996$. Przy $\omega \rightarrow \infty$ wykres tej funkcji dąży asymptotycznie do wartości Φ_∞ , gdzie $\Phi_\infty = 0.3$, zgodnie ze wzorem (7.31).

Z rysunku 7.5 i powyższych rozważań wynika, że warunek (7.29) jest spełniony. Rodzina quasi-wielomianów (7.51) jest więc odpornie stabilna. ■

7.1.2. Współmierne opóźnienia

Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów charakterystycznych

$$W(s, H) = \{w(s, h): h \in H\}, \quad (7.56)$$

gdzie $H = [h^-, h^+]$, $0 \leq h^- < h^+$,

$$w(s, h) = w_0(s) + \sum_{i=1}^m w_i(s) e^{-shi}, \quad (7.57)$$

zaś wielomiany $w_i(s)$ mają postać (7.3).

Niech D będzie przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, gdzie $\gamma > 0$.

Rodzinę quasi-wielomianów (7.56) będziemy nazywać rodziną odpornie D -stabilną, jeżeli quasi-wielomian (7.57) jest D -stabilny dla każdego ustalonego $h \in H$.

Rodzinie (7.56) quasi-wielomianów typu neutralnego odpowiada rodzina członów dominujących

$$\Delta(s, H) = \{\Delta(\exp(-sh)): h \in H\}, \quad (7.58)$$

gdzie

$$\Delta(\exp(-sh)) = a_{n0} + \sum_{i=1}^m a_{ni} e^{-shi}. \quad (7.59)$$

Rodzinę członów dominujących (7.58) będziemy nazywać rodziną odpornie D -stabilną, jeżeli człon dominujący (7.59) jest D -stabilny dla każdego ustalonego

$h \in H$. Odporna D -stabilność rodziny członów dominujących (7.58) jest warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.56) typu neutralnego.

Niech h_0 będzie nominalną wartością opóźnienia. Oznaczmy przez $w(s, h_0)$ D -stabilny quasi-wielomian nominalny rodziny (7.56) oraz przez $\Delta(\exp(-sh_0))$ oznaczmy D -stabilny nominalny człon dominujący rodziny (7.58).

Z rozważań podanych w punkcie 2.3.1 wynika, że odporna stabilność (obszar D jest otwartą lewą półpłaszczyzną) rodziny członów dominujących (7.58) nie zależy od wartości opóźnienia h . Do jej badania służy analityczne kryterium podane w lemacie 2.3.

Do badania odpornej stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.56) można stosować metodę podaną w punkcie 2.3.4, służącą do wyznaczania zbioru H_0 wartości opóźnienia h , dla których jest asymptotycznie stabilny quasi-wielomian (7.57). Rodzina quasi-wielomianów (7.56) jest odpornie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy $H \subseteq H_0$.

Wymienionej powyżej metody nie można stosować do badania odpornej D -stabilności rodziny (7.56) w przypadku, gdy obszar D jest nie jest otwartą lewą półpłaszczyzną.

Rodzina quasi-wielomianów (7.56) jest przypadkiem szczególnym rodziny (7.1). Przyjmując we wzorze (7.2) $h_i = ih$ ($i = 1, 2, \dots, m$), otrzymamy wzór (7.57). Odporna D -stabilność rodziny quasi-wielomianów (7.1) przy $m > 1$ jest więc warunkiem wystarczającym odpornej D -stabilności rodziny (7.56) o tych samych współczynnikach. Wynika to z faktu, że w quasi-wielomianie (7.2) opóźnienia h_i ($i = 1, 2, \dots, m$) mogą przyjmować dowolne wartości z zadanych przedziałów niezależnie od siebie, natomiast w quasi-wielomianie (7.57) przy zmianie wartości opóźnienia h w zadanym przedziale liczbowym jednocześnie ulegają zmianie wartości wszystkich opóźnień $h_i = ih$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Z tego też powodu postać zbioru wartości rodziny quasi-wielomianów (7.56) jest bardziej złożona niż postać zbioru wartości rodziny (7.1).

Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiór wartości $w(j\omega, H)$ rodziny quasi-wielomianów (7.56) można opisać zależnością

$$w(j\omega, H) = w_0(j\omega) + w_m(j\omega, H), \quad (7.60)$$

gdzie

$$w_m(j\omega, H) = \left\{ \sum_{i=1}^m w_i(j\omega) \exp(-j\omega h_i) : h \in H \right\}. \quad (7.61)$$

Na płaszczyźnie zmiennej zespolonej jest on linią krzywą, będącą sumą liczby zespolonej $w_0(j\omega)$ oraz linii krzywej (7.61). Jego postać jest bardziej złożona niż postać zbioru wartości (7.24).

Twierdzenia 7.1 i 7.2 pozostają też prawdziwe dla rodziny członów dominujących (7.58) i rodziny quasi-wielomianów (7.56), odpowiednio, jeżeli uwzględnimy w nich, że $h_i = ih$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Przy badaniu odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.56) należy więc sprawdzać spełnienie podanych poniżej warunków wykluczenia zera:

- 1) warunek wykluczenia zera dla rodziny członów dominujących (7.58) (jeżeli rodzina (7.56) jest rodziną typu neutralnego)

$$0 \notin \Delta(f(\omega), H), \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty), \quad (7.62)$$

gdzie dla ustalonego $\omega \geq 0$

$$\Delta(f(\omega), H) = \{\Delta(\exp(-f(\omega)h)) : h \in H\} \quad (7.63)$$

jest zbiorem wartości rodziny członów dominujących (7.58),

- 2) warunek wykluczenia zera dla rodziny quasi-wielomianów (7.56)

$$0 \notin w(f(\omega), H), \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty), \quad (7.64)$$

gdzie dla ustalonego $\omega \geq 0$

$$w(f(\omega), H) = \{w(f(\omega), h) : h \in H\} \quad (7.65)$$

jest zbiorem wartości rodziny (7.56) lub, równoważnie, warunek wykluczenia zera dla unormowanego zbioru wartości

$$0 \notin \tilde{w}(f(\omega), H), \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty), \quad (7.66)$$

gdzie

$$\tilde{w}(f(\omega), H) = \{\tilde{w}(f(\omega), h) : h \in H\}, \quad (7.67)$$

przy czym $\tilde{w}(f(\omega), h) = w(f(\omega), h) / w(f(\omega), h_0)$.

Warunek wykluczenia zera (7.62) można sprawdzić bezpośrednio, wyznaczając na płaszczyźnie zmiennej zespolonej położenia zbioru wartości (7.63) dla poszczególnych wartości parametru $\omega \geq 0$, przyjmując odpowiednio mały krok $\Delta\omega$. Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiór (7.63) (linia krzywa) należy wyznaczać

przyjmując dyskretne wartości opóźnienia $h \in H$ wyznaczone z odpowiednio małym krokiem Δh .

Bezpośredniego sprawdzenia warunku wykluczenia zera (7.62) można uniknąć, jeżeli zastosujemy metodę funkcji testującej $B_d(\omega)$, która dla ustalonego $\omega \geq 0$ jest zdefiniowana wzorem

$$\begin{aligned} B_d(\omega) &= \min_{h \in H} \operatorname{Re} \Delta(\exp(-f(\omega)h)) \\ &= a_{n0} + \min_{h \in H} \operatorname{Re} \sum_{i=1}^m a_{ni} \exp(-f(\omega)hi). \end{aligned} \quad (7.68)$$

Łatwo zauważyć, że jeżeli

$$B_d(\omega) > 0, \quad \forall \omega \geq 0, \quad (7.69)$$

to warunek wykluczenia zera (7.62) jest spełniony i rodzina członów dominujących (7.58) jest odpornie D -stabilna.

Odporną D -stabilność rodziny członów dominujących (7.58) można też sprawdzić badając (na bazie twierdzenia 2.4) D -stabilność członu dominującego (7.57) dla ustalonych, odpowiednio dobranych wartości opóźnienia $h \in H$.

Warunek wykluczenia zera (7.64) (lub (7.66)) można sprawdzić bezpośrednio, wyznaczając na płaszczyźnie zmiennej zespolonej położenia zbioru wartości (7.65) (lub (7.67)) dla dyskretnych wartości parametru $\omega \geq 0$, przyjmując odpowiednio mały krok $\Delta\omega$. Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiór (7.65) (lub (7.67)) należy wyznaczać przyjmując dyskretne wartości opóźnienia $h \in H$ wyznaczone z odpowiednio małym krokiem Δh . Zbiory wartości (7.65) i (7.67) są liniami krzywymi na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Warunek wykluczenia zera (7.66) można też sprawdzić stosując podaną w punkcie 7.1.1 metodę funkcji testującej $B(\omega)$, która dla rodziny (7.56) jest zdefiniowana wzorem (dla ustalonego $\omega \geq 0$)

$$\begin{aligned} B(\omega) &= \min_{h \in H} \operatorname{Re} \tilde{w}(f(\omega), h) \\ &= \operatorname{Re} \tilde{w}_0(f(\omega)) + \min_{h \in H} \operatorname{Re} \sum_{i=1}^m \tilde{w}_i(f(\omega)) \exp(-f(\omega)hi), \end{aligned} \quad (7.70)$$

gdzie $\tilde{w}_i(f(\omega)) = w_i(f(\omega)) / w(f(\omega), h_0)$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Warunek wykluczenia zera (7.66) jest spełniony, jeżeli

$$B(\omega) > 0, \quad \forall \omega \geq 0. \quad (7.71)$$

Przy komputerowym sprawdzaniu warunków (7.69) i (7.71) należy rozpatrywać odpowiednio duży przedział wartości parametru $\omega \geq 0$, teoretycznie nieskończony w przypadku rodziny quasi-wielomianów typu neutralnego, przyjmując odpowiednio mały krok $\Delta\omega$. Przy wyznaczaniu (dla każdego ustalonego ω) wartości funkcji $B_d(\omega)$ oraz $B(\omega)$ należy przyjmować dyskretne wartości opóźnień $h \in H$, wyznaczone z odpowiednio małym krokiem Δh .

Przykład. 7.4. Niech D będzie przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -0.1 + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$. Należy zbadać odporną D -stabilność rodziny quasi-wielomianów typu neutralnego z pięcioma współmiernymi opóźnieniami

$$w(s, h) = w_0(s) + \sum_{i=1}^5 w_i(s) e^{-shi}, \quad h \in H = [0, 0.5], \quad (7.72)$$

gdzie

$$\begin{aligned} w_0(s) &= s^2 + 2s + 2; \quad w_1(s) = 0.4s^2 + 2; \quad w_2(s) = 0.1s^2 + s + 0.8; \\ w_3(s) &= -0.6s + 0.2; \quad w_4(s) = 0.1s^2 + 0.3s + 0.4; \quad w_5(s) = 0.2s^2 - s + 0.3. \end{aligned}$$

Quasi-wielomian nominalny, odpowiadający nominalnej wartości opóźnienia $h = h_0 = 0.25$ jest D -stabilny. Można to sprawdzić stosując np. twierdzenie 2.5.

Przy $h = 0$ quasi-wielomian (7.72) redukuje się do wielomianu $w(s, 0) = 1.8s^2 + 1.7s + 5.7$, którego zera $-0.4722 \pm j1.7157$ leżą w obszarze D . Rodzina quasi-wielomianów (7.72) jest więc D -stabilna dla $h = 0$.

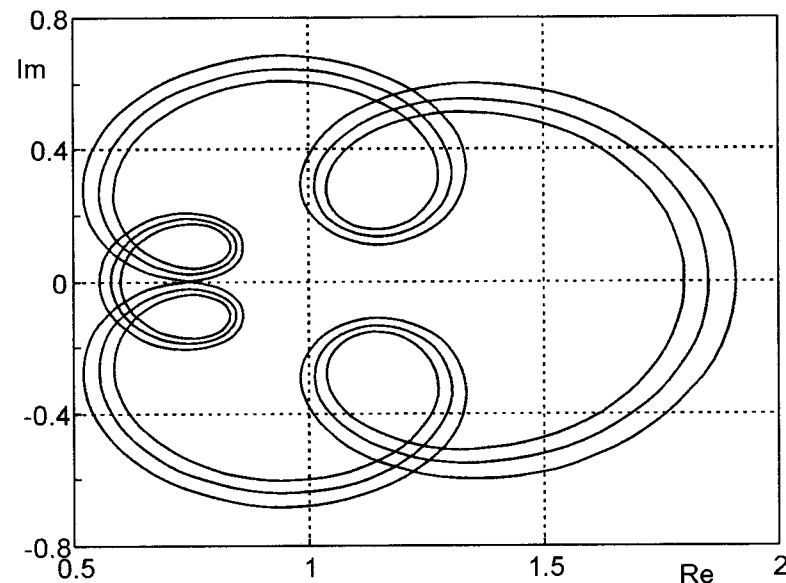
Rodzinnie quasi-wielomianów (7.72) odpowiada rodzina członów dominujących

$$\Delta(\exp(-sh)) = 1 + 0.4e^{-sh} + 0.1e^{-2sh} + 0.1e^{-4sh} + 0.2e^{-5sh}, \quad h \in H. \quad (7.73)$$

Odporną D -stabilność rodziny członów dominujących (7.73) sprawdzimy badając D -stabilność członu dominującego $\Delta(\exp(-sh))$ dla kilku odpowiednio dobranych wartości opóźnienia $h \in H$.

Na rysunku 7.6 są pokazane wykresy funkcji $\Delta(\exp(-f(\omega)h))$, wyznaczone dla $h = 0.000001$ (krzywa wewnętrzna), $h = 0.25$ (krzywa środkowa) i $h = 0.5$

(krzywa zewnętrzna). Dla innych wartości $h \in H = (0, 0.5]$ odpowiednie krzywe leżą wewnątrz obszaru ograniczonego krzywymi odpowiadającymi $h = 0.000001$ i $h = 0.5$. Dla każdego ustalonego h wykres $\Delta(\exp(-f(\omega)h))$ był wyznaczany dla $\omega \in [0, 2\pi/h]$ z krokiem $2\pi/(300h)$.

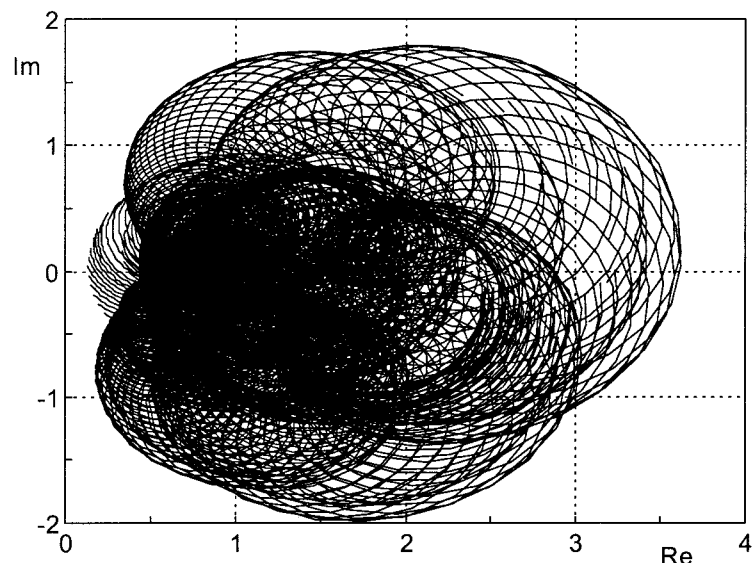
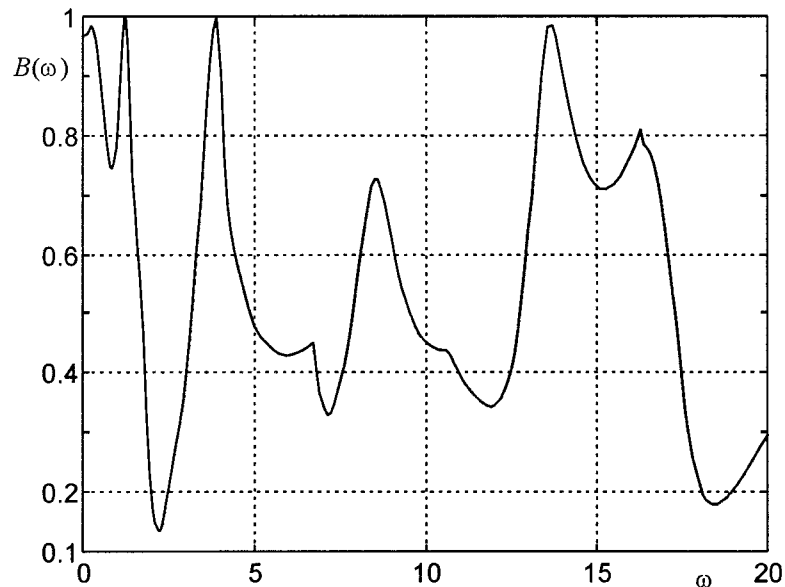


Rys. 7.6. Wykresy funkcji $\Delta(\exp(-f(\omega)h))$ dla $h = 0.000001$ (krzywa wewnętrzna), $h = 0.25$ (krzywa środkowa) i $h = 0.5$ (krzywa zewnętrzna)

Z rysunku 7.6, powyższych rozważań i twierdzenia 2.4 wynika, że człon dominujący $\Delta(\exp(-sh))$ jest asymptotycznie stabilny dla każdego $h \in H$. Oznacza to, że rodzina członów dominujących (7.73) jest odpornie D -stabilna, a więc jest spełniony warunek konieczny odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.72).

Sprawdźmy teraz spełnienie warunku wykluczenia zera (7.66) bezpośrednio oraz stosując metodę funkcji testującej $B(\omega)$.

Na rysunku 7.7 są pokazane położenia na płaszczyźnie zmiennej zespolonej zbioru wartości $\tilde{w}(f(\omega), H)$, wyznaczone dla ω zmieniającego się od 0 do 20 ze zmiennym krokiem. Dla każdego ustalonego ω zbiór ten (linia krzywa) był wyznaczany dla $h = 0.000001$ oraz dla h zmieniającego się od 0.005 do 0.5 z krokiem 0.005.

Rys. 7.7. Położenia zbioru wartości $\tilde{w}(f(\omega), H)$ dla $\omega = [0, 20]$ Rys. 7.8. Wykres funkcji testującej $B(\omega)$, $\omega = [0, 20]$

Na rysunku 7.8 jest pokazany wykres funkcji testującej $B(\omega)$, wyznaczony dla ω zmieniającego się od 0 do 20 z takim samym krokiem, z jakim były wyznaczone położenia zbioru wartości $\tilde{w}(f(\omega), H)$ i przy takiej samej dyskretyzacji zbioru H . Funkcja testująca $B(\omega)$ osiąga wartość minimalną, równą 0.1336, dla $\omega = 2.2$. Dla $\omega > 20$ wartości funkcji $B(\omega)$ są większe od wyznaczonej wartości minimalnej.

Z rysunków 7.7, 7.8 i powyższych rozważań wynika, że warunek wykluczenia zera (7.66) jest spełniony i rodzina quasi-wielomianów (7.72) jest odpornie D -stabilna. ■

7.2. Odporna stabilność rodziny quasi-wielomianów o niepewnych współczynnikach i o niepewnych opóźnieniach

Weźmy pod uwagę rodzinę quasi-wielomianów charakterystycznych

$$W(s, H, Q) = \{w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q, \mathbf{h} \in H\}, \quad (7.74)$$

gdzie

$$w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}) = w_0(s, \mathbf{q}) + \sum_{i=1}^m w_i(s, \mathbf{q}) e^{-sh_i}, \quad (7.75)$$

$$w_i(s, \mathbf{q}) = \sum_{k=0}^n a_{ki}(\mathbf{q}) s^k, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (7.76)$$

przy czym $a_{n0}(\mathbf{q}) > 0$, $\forall \mathbf{q} \in Q$, $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_m]$ i $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_l]$ są to wektory opóźnień oraz niepewnych fizycznych parametrów układu dynamicznego, odpowiednio, zaś

$$H = \{\mathbf{h} : h_i \in [h_i^-, h_i^+], 0 \leq h_i^- < h_i^+, i = 1, 2, \dots, m\}, \quad (7.77)$$

$$Q = \{\mathbf{q} : q_k \in [q_k^-, q_k^+], q_k^- < q_k^+, k = 1, 2, \dots, l\}, \quad (7.78)$$

są to zbiory wartości opóźnień oraz niepewnych parametrów.

Będziemy przyjmować, że współczynniki quasi-wielomianu (7.75) są ciągłymi funkcjami niepewnych parametrów, a wartości opóźnień h_i , $i = 1, 2, \dots, m$, mogą zmieniać się w sposób ciągły w zadanych przedziałach liczbowych.

Niech D będzie przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, gdzie $\gamma > 0$.

Rodzinę quasi-wielomianów (7.74) będziemy nazywać rodziną odpornie D -stabilną, jeżeli quasi-wielomian (7.75) jest D -stabilny dla każdego ustalonego $q \in Q$ i każdego ustalonego $h \in H$.

Oznaczmy przez $w(s, h_0, q_0)$ D -stabilny quasi-wielomian nominalny rodziny (7.74). Odpowiada on nominalnym wartościom q_k^0 , $k = 1, 2, \dots, l$, niepewnych parametrów oraz nominalnym wartościom h_i^0 , $i = 1, 2, \dots, m$, niepewnych opóźnień.

Rodzinie (7.74) quasi-wielomianów typu neutralnego odpowiada rodzina członów dominujących

$$\Delta(s, H, Q) = \{\Delta(\exp(-sh), q) : h \in H, q \in Q\}, \quad (7.79)$$

gdzie

$$\Delta(\exp(-sh), q) = a_{n0}(q) + \sum_{i=1}^m a_{ni}(q) e^{-sh_i}. \quad (7.80)$$

Rodzinę członów dominujących (7.79) będziemy nazywać rodziną odpornie D -stabilną, jeżeli człon dominujący (7.80) jest D -stabilny dla każdego ustalonego $q \in Q$ i każdego ustalonego $h \in H$. Odporna D -stabilność rodziny członów dominujących (7.79) jest warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.74) typu neutralnego.

Niech $\Delta(\exp(-sh_0), q_0)$ będzie nominalnym D -stabilnym członem dominującym rodziny (7.79).

Dla ustalonego $\omega \in \Omega = [0, \infty)$ przyjmijmy podane poniżej oznaczenia zbiorów wartości:

1) zbiór wartości rodziny quasi-wielomianów (7.74)

$$w(f(\omega), H, Q) = \{w(f(\omega), h, q) : h \in H, q \in Q\}, \quad (7.81)$$

2) unormowany zbiór wartości rodziny quasi-wielomianów (7.74)

$$\tilde{w}(f(\omega), H, Q) = \{\tilde{w}(f(\omega), h, q) : h \in H, q \in Q\}, \quad (7.82)$$

$$\text{gdzie } \tilde{w}(f(\omega), h, q) = w(f(\omega), h, q) / w(f(\omega), h_0, q_0),$$

3) zbiór wartości rodziny członów dominujących (7.79)

$$\Delta(f(\omega), H, Q) = \{\Delta(\exp(-f(\omega)h), q) : h \in H, q \in Q\}. \quad (7.83)$$

Dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega = [0, \infty)$ struktura powyższych zbiorów wartości jest bardziej złożona niż struktura odpowiednich zbiorów wartości rodziny quasi-wielomianów (7.1).

Uogólniając twierdzenia 7.1 i 7.2 na klasę quasi-wielomianów o niedokładnie znanych współczynnikach i opóźnieniach otrzymamy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 7.3. Niech quasi-wielomian nominalny $w(s, h_0, q_0)$ będzie D -stabilny. Rodzina quasi-wielomianów (7.74) jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy:

1) jest odpornie D -stabilna rodzina członów dominujących (7.79), tj. jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin \Delta(f(\omega), H, Q), \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty), \quad (7.84)$$

2) jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin w(f(\omega), H, Q), \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty), \quad (7.85)$$

dla zbioru wartości (7.81) lub równoważnie, warunek wykluczenia zera

$$0 \notin \tilde{w}(f(\omega), H, Q), \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty), \quad (7.86)$$

dla unormowanego zbioru wartości (7.82). ■

Z rozważań podanych w punkcie 3.2 wynika, że metoda bezpośredniego sprawdzenia podanych powyżej warunków wykluczenia zera należy do najbardziej ogólnych metod, które mogą być stosowane do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.74). Przy jej stosowaniu należy wyznaczyć położenia zbiorów wartości (7.81)-(7.83) na płaszczyźnie zmiennej zespolonej dla dużej liczby wartości parametru $\omega \geq 0$ (wyznaczonych z odpowiednio małym krokiem $\Delta\omega$) i wizualnie sprawdzić spełnienie odpowiednich warunków wykluczenia zera. Należy przy tym pamiętać, że w przypadku rodziny quasi-wielomianów typu neutralnego należy rozpatrywać odpowiednio duży przedział wartości parametru $\omega \geq 0$, teoretycznie nieskończony.

Ze względu na złożoną strukturę zbiorów wartości (7.81), (7.82) i (7.83), do ich wyznaczenia należy stosować metodę siatki. Stosując tę metodę dokonuje się dyskretyzacji z odpowiednio małymi krokami zbiorów (7.77) i (7.78) i dla wszystkich ustalonych h i q oblicza się wartości quasi-wielomianu (7.75), unormowanego

quasi-wielomianu (7.75) oraz wartości członu dominującego (7.80), odpowiednio. Dlatego też badanie odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.74) na bazie metody bezpośredniego sprawdzania warunków wykluczenia zera jest bardzo trudnym problemem w przypadku ogólnym. Można go uprościć w przypadku, gdy współczynniki quasi-wielomianu (7.75) zależą liniowo od niepewnych parametrów.

W dalszej części niniejszego punktu rozpatrzmy problem badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.74) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów oraz quasi-wielomianu przedziałowego. W rozważaniach ograniczymy się do rodzin quasi-wielomianów o niewspółmiernych niepewnych opóźnieniach. Wykorzystamy przy tym rezultaty podane w punktach 4.3, 6.1 (niepewne współczynniki, dokładnie znane opóźnienia) i 7.1.1 (dokładnie znane współczynniki, niepewne opóźnienia) niniejszej pracy.

W przypadku, gdy niepewne opóźnienia są współmierne, odpowiednie metody badania odpornej D -stabilności można sformułować stosując podejście podobne do zastosowanego poniżej, wykorzystując rezultaty podane w punktach 4.3, 6.1 i 7.1.2.

7.2.1. Rodzina quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów

Problem badania odpornej stabilności rodziny quasi-wielomianów typu opóźnionego ze współmiernymi niepewnymi opóźnieniami o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów był rozpatrywany w pracy [30], w której podano ogólną metodę postępowania podczas komputerowego badania odpornej stabilności w funkcji wielkości opóźnienia (wykorzystując opisaną w punkcie 2.3.4 metodę h -podziału) oraz w [37], w której rozpatrzono pewien przypadek szczególny.

Niech D będzie przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, gdzie $\gamma > 0$.

W niniejszym punkcie rozpatrzmy problem badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.74), typu neutralnego lub opóźnionego, o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów na bazie sprawdzenia spełnienia warunku wykluczenia zera (7.86). Pokażemy też, że do badania odpornej D -stabilności rozpatrywanej rodziny quasi-wielomianów można stosować metodę przestrzeni niepewnych parametrów.

Zbiór Q mający postać (7.78) jest l -wymiarowym hiperprostokątnikiem. Ma on $K = 2^l$ wierzchołków.

Oznaczmy k -ty wierzchołek zbioru Q przez

$$\mathbf{q}_k = [q_1^k, q_2^k, \dots, q_l^k], \text{ gdzie } q_i^k = q_i^- \text{ lub } q_i^k = q_i^+, i = 1, 2, \dots, l.$$

Każdemu wierzchołkowi $\mathbf{q}_k$, $k = 1, 2, \dots, K$, $K = 2^l$, zbioru Q odpowiada w zbiorze quasi-wielomianów (7.74) quasi-wielomian wierzchołkowy

$$p_k(s, \mathbf{h}) = w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}_k). \quad (7.87)$$

Z rozważań podanych w punkcie 4.3.1 wynika, że dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ i ustalonego $\mathbf{h} \in H$ zbiór wartości

$$w(f(\omega), \mathbf{h}, Q) = \text{conv}\{p_1(f(\omega), \mathbf{h}), \dots, p_K(f(\omega), \mathbf{h})\} \quad (7.88)$$

rodziny quasi-wielomianów (7.74) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wypukłym wielobokiem, rozpiętym na punktach $p_k(f(\omega), \mathbf{h})$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Podobnie, unormowany zbiór wartości

$$\tilde{w}(f(\omega), \mathbf{h}, Q) = \text{conv}\{\tilde{p}_1(f(\omega), \mathbf{h}), \dots, \tilde{p}_K(f(\omega), \mathbf{h})\}, \quad (7.89)$$

gdzie $\tilde{p}_k(s, \mathbf{h}) = p_k(s, \mathbf{h}) / w(s, \mathbf{h}_0, \mathbf{q}_0)$, zaś $w(s, \mathbf{h}_0, \mathbf{q}_0)$ jest D -stabilnym quasi-wielomianem nominalnym, też jest wypukłym wielobokiem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ i ustalonego $\mathbf{h} \in H$ zbiór wartości

$$\Delta(\exp(-f(\omega)\mathbf{h}), Q) = \{\Delta(\exp(-f(\omega)\mathbf{h}), \mathbf{q}): \mathbf{q} \in Q\} \quad (7.90)$$

rodziny członów dominujących (7.79) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów również jest wypukłym wielobokiem, rozpiętym na punktach $p_k^\Delta(\exp(-f(\omega)\mathbf{h}))$, $k = 1, 2, \dots, K$, gdzie

$$p_k^\Delta(\exp(-f(\omega)\mathbf{h})) = \Delta(\exp(-f(\omega)\mathbf{h}), \mathbf{q}_k). \quad (7.91)$$

Z lematu 7.1 wynika, że jeżeli $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, to dla ustalonego $\mathbf{q} \in Q$ rodzina członów dominujących (7.79) jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona nierówność

$$a_{n0}(\mathbf{q}) > \sum_{i=1}^m |a_{ni}(\mathbf{q})| \exp(\gamma h_i^+). \quad (7.92)$$

Powyższa nierówność jest spełniona dla wszystkich $q \in Q$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\min_{q \in Q} \left\{ a_{n0}(q) - \sum_{i=1}^m |a_{ni}(q)| \exp(\gamma h_i^+) \right\} > 0. \quad (7.93)$$

Zbiory $\{a_{ni}(q): q \in Q\}$ ($i = 0, 1, \dots, m$) są odcinkami linii prostych, leżącymi na osi rzeczywistej. Dlatego też powyższą nierówność można napisać w postaci

$$\min_{k=1, \dots, K} \left\{ a_{n0}(q_k) - \sum_{i=1}^m |a_{ni}(q_k)| \exp(\gamma h_i^+) \right\} > 0, \quad (7.94)$$

gdzie q_k , $k = 1, 2, \dots, K = 2^l$, są to wierzchołki hiperprostopadłościanu Q .

Z powyższych rozważań wynika następujący lemat.

Lemat 7.3. Niech nominalny człon dominujący $\Delta(\exp(-sh_0), q_0)$ będzie D -stabilny. Rodzina członów dominujących (7.79) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (7.94). ■

Warunki wykluczenia zera (7.85) i (7.86) można sprawdzić bezpośrednio, wyznaczając metodą siatki położenia odpowiednich zbiorów wartości na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Należy przy tym rozpatrywać odpowiednio duży przedział wartości parametru $\omega \geq 0$, teoretycznie nieskończony w przypadku rodziny quasi-wielomianów typu neutralnego, przyjmując odpowiednio mały krok $\Delta\omega$. Przy wyznaczaniu zbiorów wartości (7.81) i (7.82) należy dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ dokonać dyskretyzacji z odpowiednio małymi krokami przedziałów wartości opóźnień $H_i = [h_i^-, h_i^+]$, $i = 1, 2, \dots, m$, oraz zbioru Q wartości niepewnych parametrów.

Warunek wykluczenia zera (7.86) można też sprawdzić pośrednio stosując metodę funkcji testującej $B(\omega)$, będącej uogólnieniem metody podanej w punkcie 4.3.4.2.

Wprowadźmy dla rodziny quasi-wielomianów (7.74) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów funkcję testującą $B(\omega)$, zdefiniowaną dla ustalonego $\omega \geq 0$ wzorem

$$B(\omega) = \min_{h \in H} \{ \operatorname{Re} \tilde{p}_k(f(\omega), h), k = 1, 2, \dots, K \}, \quad (7.95)$$

gdzie $\tilde{p}_k(s, h) = \tilde{w}(s, h, q_k)$ jest unormowanym quasi-wielomianem wierzchołkowym (dla ustalonego $h \in H$).

Łatwo zauważyć, że warunek wykluczenia zera (7.86) jest spełniony, jeżeli

$$B(\omega) > 0, \quad \forall \omega \geq 0. \quad (7.96)$$

Z powyższych rozważań wynika następujący lemat.

Lemat 7.4. Niech quasi-wielomian nominalny $w(s, h_0, q_0)$ będzie D -stabilny. Warunek wykluczenia zera (7.86) dla rodziny quasi-wielomianów (7.74) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest spełniony, jeżeli jest spełniona nierówność (7.96).

Dowód. Z rozważań podanych w punkcie 4.3.4.2 wynika, że dla każdego ustalonego $h \in H$ unormowany zbiór wartości (7.89) przy ustalonym $\omega \geq 0$ jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wypukłym wielobokiem, zawierającym w swoim wnętrzu punkt $(1, j0)$. Zbiór ten leży całkowicie w otwartej prawej półpłaszczyźnie dla wszystkich $h \in H$, jeżeli $\min_{h \in H} \operatorname{Re} \tilde{p}_k(f(\omega), h) > 0$ dla każdego $k = 1, 2, \dots, K$. Biorąc pod uwagę wszystkie wartości parametru $\omega \geq 0$, otrzymamy tezę lematu. ■

Przy komputerowym sprawdzaniu warunku (7.96) należy rozpatrywać odpowiednio duży przedział wartości parametru $\omega \geq 0$, teoretycznie nieskończony w przypadku rodziny quasi-wielomianów typu neutralnego, przyjmując odpowiednio mały krok $\Delta\omega$. Przy wyznaczaniu (dla każdego ustalonego ω) ze wzoru (7.95) wartości funkcji testującej $B(\omega)$ należy przyjmować dyskretne wartości opóźnień $h_i \in H_i = [h_i^-, h_i^+]$, $0 \leq h_i^- < h_i^+$, $i = 1, 2, \dots, m$, wyznaczone z odpowiednio małymi krokami Δh_i . Zauważmy, że nie jest tutaj potrzebna dyskretyzacja zbioru Q wartości niepewnych parametrów.

Przykład 7.5. Weźmy pod uwagę układ automatycznej regulacji temperatury w reaktorze nuklearnym, którego quasi-wielomian charakterystyczny ma postać

$$w(s, h) = s^2 T T_i + s T_i + k K_r (s^2 T_i T_d + s T_i + 1) e^{-sh}. \quad (7.97)$$

Założmy, że wartość opóźnienia h oraz wartości stałej czasowej T i współczynnika wzmocnienia k nie są dokładnie znane, przy czym $h \in [0.4, 0.6]$, $k \in [0.8, 1.2]$, $T \in [0.16, 0.24]$, natomiast nastawy $K_r = 0.6$, $T_i = 0.38$, $T_d = 0.1$ re-

gulatora typu PID zostały dobrane według kryterium optymalnego modułu dla wartości nominalnych: $h_0 = 0.5$, $k_0 = 1$, $T_0 = 0.2$.

Rodzinę quasi-wielomianów charakterystycznych rozpatrywanego układu typu neutralnego można napisać w postaci

$$W(s, H, Q) = \{w(s, h, q) : q \in Q, h \in H\}, \quad (7.98)$$

gdzie

$$w(s, h, q) = w_0(s, q) + w_1(s, q)e^{-sh}, \quad (7.99)$$

$$w_0(s, q) = 0.38(q_2 s^2 + s), \quad w_1(s, q) = 0.6q_1(0.038s^2 + 0.38s + 1),$$

przy czym $q = [q_1, q_2]$, $q_1 = k$, $q_2 = T$, zaś

$$Q = \{q : q_1 \in [0.8, 1.2], q_2 \in [0.16, 0.24]\}, \quad (7.100)$$

$$H = \{h : h \in [0.4, 0.6]\}. \quad (7.101)$$

Należy zbadać odporną D -stabilność rodziny quasi-wielomianów (7.98), jeżeli obszarem D jest przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -0.5 + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$.

Rodzina członów dominujących rozpatrywanej rodziny quasi-wielomianów ma postać

$$\Delta(s, H, Q) = \{\Delta(\exp(-sh), q) : h \in H, q \in Q\}, \quad (7.102)$$

gdzie

$$\Delta(\exp(-sh), q) = 0.38q_2 + 0.0228q_1e^{-sh}. \quad (7.103)$$

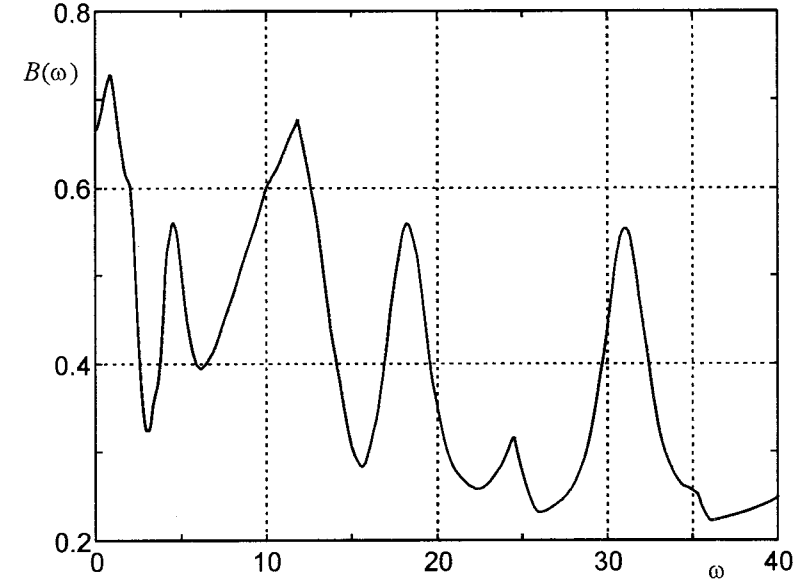
Quasi-wielomian nominalny rodziny (7.98) oraz nominalny człon dominujący rodziny (7.102) są D -stabilne, co zostało pokazane w przykładzie 4.5.

Łatwo sprawdzić, że dla rodziny (7.102) nierówność (7.94) jest spełniona (jej lewa strona ma wartość 0.0239). Oznacza to, zgodnie z lematem 7.3, że rodzina członów dominujących (7.102) jest odpornie stabilna.

Do zbadania spełnienia warunku wykluczenia zera (7.86) zastosujemy metodę funkcji testującej $B(\omega)$, podaną w lemacie 7.4.

Na rysunku 7.9 jest pokazany wykres funkcji testującej $B(\omega)$. Został on wyznaczony dla ω zmieniającego się od 0 do 40 z krokiem 0.1. Dla każdego ustalone-

go ω wartość funkcji testującej $B(\omega)$ obliczano ze wzoru (7.95) (po uprzednim wyznaczeniu unormowanych quasi-wielomianów wierzchołkowych) dla h zmieniającego się od 0.4 do 0.6 z krokiem 0.001. Wartość minimalna 0.2232 tej funkcji została osiągnięta dla $\omega = 36.1$. Dla $\omega > 40$ wartości funkcji $B(\omega)$ są większe od 0.2232.



Rys. 7.9. Wykres funkcji testującej $B(\omega)$

Z powyższych rozważań i lematu 7.4 wynika zatem, że warunek wykluczenia zera (7.86) jest spełniony i rodzina quasi-wielomianów (7.98) jest odpornie D -stabilna, zgodnie z twierdzeniem 7.3. ■

Postępując podobnie jak w punkcie 4.4 przy dokładnie znanych opóźnieniach, podane powyżej metody badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.74) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów można uogólnić na klasę rodziny quasi-wielomianów (7.74) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów.

Oprócz metody bezpośredniego sprawdzania warunków wykluczenia zera (7.85) i (7.86) oraz podanej powyżej metody funkcji testującej $B(\omega)$, do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.74) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów i o niepewnych opóźnieniach można też stosować metodę przestrzeni niepewnych parametrów, omówioną w punkcie

3.2.2. Należy przy tym granice D -stabilności rozpatrywać na płaszczyźnie dwóch niepewnych parametrów, które nie są opóźnieniami.

Zastosowanie metody przestrzeni niepewnych parametrów do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.74) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów ilustruje poniższy przykład.

Przykład. 7.6. Należy wyznaczyć wartości współczynnika $0 < \varepsilon < 1$, dla których jest odpornie stabilny quasi-wielomian typu opóźnionego

$$w(s, \mathbf{h}, \varepsilon) = s^2 + a_{10}s + a_{00} + 2se^{-sh_1} + e^{-sh_2}, \quad (7.104)$$

o niepewnych współczynnikach i o niepewnych opóźnieniach, gdzie $a_{10} \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $a_{00} \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, zaś $\mathbf{h} = [h_1, h_2]$, przy czym $h_1 \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, $h_2 \in [2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon]$.

Rozpatrywany quasi-wielomian można napisać w postaci rodziny quasi-wielomianów (7.74), gdzie

$$w(s, \mathbf{h}, \mathbf{q}) = s^2 + q_2s + q_1 + 2se^{-sh_1} + e^{-sh_2}, \quad (7.105)$$

przy czym $\mathbf{q} = [q_1, q_2]$, $q_1 = a_{00}$, $q_2 = a_{10}$, oraz

$$Q = \{\mathbf{q}: q_1 \in [-\varepsilon, \varepsilon], q_2 \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}, \quad (7.106)$$

$$H = \{\mathbf{h}: h_1 \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon], h_2 \in [2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon]\}. \quad (7.107)$$

Łatwo sprawdzić, stosując np. twierdzenie 2.3, że quasi-wielomian nominalny odpowiadający $\varepsilon = 0$, mający postać $w(s, \mathbf{h}) = s^2 + 2se^{-s} + e^{-2s}$, jest asymptotycznie stabilny.

Problem badania odpornej stabilności będziemy rozpatrywać na płaszczyźnie (q_1, q_2) niepewnych parametrów. Na tej płaszczyźnie zbiór Q przy ustalonym $\varepsilon > 0$ jest kwadratem.

Dla quasi-wielomianu (7.105) równanie (3.41) ma postać $q_1 + 1 = 0$. Opisuje ono granicę zer rzeczywistych. Na płaszczyźnie (q_1, q_2) granicą zer rzeczywistych jest więc pionowa linia prosta, leżąca poza kwadratem (7.106) przy $0 < \varepsilon < 1$.

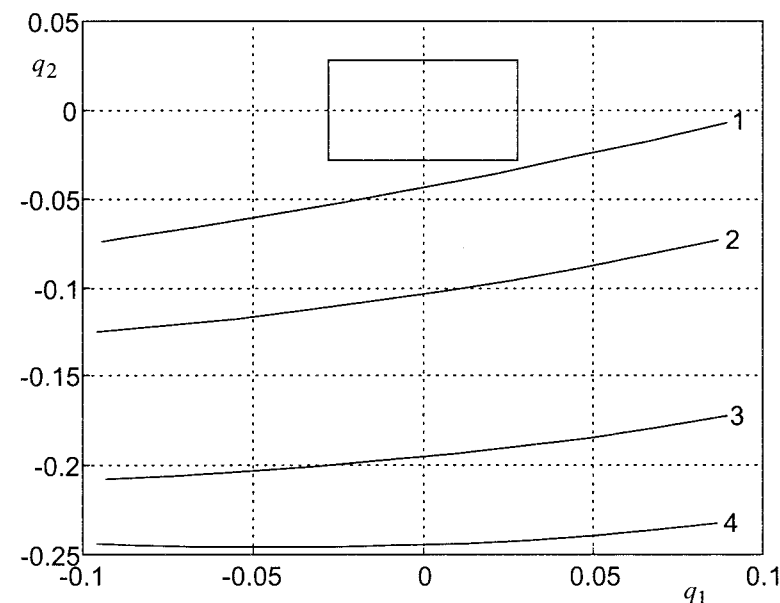
Obliczając w sposób opisany w punkcie 3.2.2 granice zer zespolonych (tzn. rozwiązując równania (3.43) i (3.44)), otrzymamy

$$q_1 = \omega^2 - 2\gamma \sin(\omega h_1) - \cos(\omega h_2), \quad (7.108)$$

$$q_2 = -2\cos(\omega h_1) + \sin(\omega h_2) / \omega, \quad (7.109)$$

przy czym $h_1 \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, $h_2 \in [2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon]$, $\omega > 0$.

Przyjmując różne wartości parametru $\varepsilon \in (0, 1)$ i wykreślając na płaszczyźnie (q_1, q_2) położenia kwadratu (7.106) oraz leżących w jego pobliżu fragmentów linii krzywych o opisie parametrycznym (7.108), (7.109), stwierdzamy, że te krzywe nie przecinają kwadratu Q przy $\varepsilon = 0.028$.



Rys. 7.10. Rysunek do przykładu 7.6

Położenia na płaszczyźnie (q_1, q_2) kwadratu (7.106) dla $\varepsilon = 0.028$ oraz fragmentów linii krzywych (7.108), (7.109) są pokazane na rysunku 7.10. Zostały one wyznaczone przy $\varepsilon = 0.028$ dla podanych poniżej wartości opóźnień oraz wartości parametru ω :

$$h_1 = 1 + \varepsilon = 1.028, \quad h_2 = 2 - \varepsilon = 1.972 \quad (\text{krzywa 1 przy } \omega \in [1.215, 1.38]),$$

$$h_1 = 1 + \varepsilon = 1.028, \quad h_2 = 2 + \varepsilon = 2.028 \quad (\text{krzywa 2 przy } \omega \in [1.17, 1.35]),$$

$h_1 = 1 - \varepsilon = 0.972$, $h_2 = 2 - \varepsilon = 1.972$ (krzywa 3 przy $\omega \in [1.16, 1.34]$),

$h_1 = 1 - \varepsilon = 0.972$, $h_2 = 2 + \varepsilon = 2.028$ (krzywa 4 przy $\omega \in [1.11, 1.3]$).

Dla innych wartości parametru $0 < \varepsilon < 0.028$ odpowiednie krzywe leżą pomiędzy krzywymi 1 i 4.

Z powyższych rozważań i z punktu 3.2.2 wynika, że rozpatrywana rodzina quasi-wielomianów jest odpornie stabilna dla każdego $0 < \varepsilon < 0.028$.

Odporna stabilność quasi-wielomianu (7.104) była badana w pracy [111]. Na podstawie podanej tam metody wykazano, że jest on odpornie stabilny dla każdego $0 < \varepsilon < 0.01$. Zauważmy, że wyznaczony powyżej przedział wartości parametru ε jest znacznie większy. ■

7.2.2. Quasi-wielomian przedziałowy

Weźmy pod uwagę quasi-wielomian przedziałowy o niepewnych opóźnieniach

$$W(s, H, A, B) = \{W(s, h, A, B) : h \in H\}, \quad (7.110)$$

gdzie $h = [h_1, h_2, \dots, h_m]$,

$$W(s, h, A, B) = W_0(s, A) + \sum_{i=1}^m W_i(s, B_i) \exp(-sh_i), \quad (7.111)$$

$$H = \{h : h_i \in [h_i^-, h_i^+], 0 \leq h_i^- < h_i^+, i = 1, 2, \dots, m\}, \quad (7.112)$$

zaś wielomiany przedziałowe $W_0(s, A)$ i $W_i(s, B_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) są zdefiniowane następująco

$$W_0(s, A) = \{w_0(s, a) : a \in A\}, \quad (7.113)$$

przy czym $a = [a_0, \dots, a_n]$,

$$w_0(s, a) = \sum_{k=0}^n a_k s^k, \quad (7.114)$$

$$A = \{a : a_k \in [a_k^-, a_k^+], a_k^- \leq a_k^+, k = 0, 1, \dots, n, a_n^- > 0\}, \quad (7.115)$$

oraz

$$W_i(s, B_i) = \{w_i(s, b_i) : b_i \in B_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (7.116)$$

przy czym $b_i = [b_{0i}, \dots, b_{ni}]$,

$$w_i(s, b_i) = \sum_{k=0}^n b_{ki} s^k, \quad (7.117)$$

$$B_i = \{b_i : b_{ki} \in [b_{ki}^-, b_{ki}^+], b_{ki}^- \leq b_{ki}^+, k = 0, 1, \dots, n\}, \quad (7.118)$$

zaś $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_m$.

Dowolny quasi-wielomian należący do rodziny (7.110) ma postać

$$w(s, h, a, b) = w_0(s, a) + \sum_{i=1}^m w_i(s, b_i) \exp(-sh_i). \quad (7.119)$$

Niech D będzie przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = -\gamma + j\omega$, $\omega \in \Omega = [0, \infty)$, gdzie $\gamma > 0$.

Oznaczmy przez $w(s, h_0, a_0, b_0)$ D -stabilny quasi-wielomian nominalny rodziny (7.110), gdzie h_0 jest wektorem nominalnych wartości opóźnień, zaś a_0 i b_0 są to wektory nominalnych wartości współczynników a_k ($k = 0, 1, \dots, n$) i b_{ki} ($k = 0, 1, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, m$), odpowiednio.

Quasi-wielomian przedziałowy (7.110) będziemy nazywać quasi-wielomianem przedziałowym odpornie D -stabilnym, jeżeli jest on D -stabilny dla wszystkich $h_i \in H_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, oraz dla wszystkich a_k ($k = 0, 1, \dots, n$) i b_{ki} ($k = 0, 1, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, m$) z zadanych przedziałów.

Rodzinnie quasi-wielomianów (7.110) typu neutralnego odpowiada rodzina członów dominujących, którą będziemy nazywać przedziałowym członem dominującym, mającym postać

$$\Delta(s, H, A_n, B_n) = \{\Delta(e^{-sh}, a_n, b_n) : h \in H, a_n \in A_n, b_n \in B_n\}, \quad (7.120)$$

gdzie

$$\Delta(\exp(-sh), a_n, b_n) = a_n + \sum_{i=1}^m b_{ni} e^{-sh_i}, \quad (7.121)$$

przy czym $A_n = [a_n^-, a_n^+]$ ($0 < a_n^- \leq a_n^+$ z założenia) oraz $b_n = [b_{n1}, \dots, b_{nm}]$, zaś $B_n = \{b_{ni} : b_{ni} \in [b_{ni}^-, b_{ni}^+], b_{ni}^- \leq b_{ni}^+, i = 1, 2, \dots, m\}$.

Przedziałowy człon dominujący (7.120) będziemy nazywać przedziałowym członem dominującym odpornie D -stabilnym, jeżeli jest on D -stabilny dla wszystkich $h_i \in H_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, oraz dla wszystkich wartości współczynników a_n i b_{ni} ($i = 1, 2, \dots, m$) z zadanych przedziałów.

Niech $\Delta(\exp(-sh_0), a_n^{(0)}, b_n^{(0)})$ będzie nominalnym D -stabilnym członem dominującym rodziny (7.120).

Rodzina (7.110) jest przypadkiem szczególnym rodziny quasi-wielomianów (7.74) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów. Dlatego też podane w punkcie 7.2.1 metody, służące do sprawdzania warunków twierdzenia 7.3, mogą być stosowane w przypadku rodziny (7.110). Jednak ze względu na specyfikę tej rodziny (każdy współczynnik jest niepewnym parametrem), te metody można zmodyfikować w sposób podany poniżej.

Uogólniając lemat 7.3 na rodzinę quasi-wielomianów (7.120) otrzymamy poniższy lemat.

Lemat 7.5. Niech nominalny człon dominujący rodziny (7.120) będzie D -stabilny. Przedziałowy człon dominujący (7.120) jest odpornie D -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_n^- > \sum_{i=1}^m \beta_{ni} \exp(\gamma h_i^+). \quad (7.122)$$

gdzie $\beta_{ni} = \max(|b_{ni}^-|, |b_{ni}^+|)$. ■

Zbiory (7.115) i (7.118) są $(n+1)$ -wymiarowymi hiperprostokątami. Mają one po $K = 2^{n+1}$ wierzchołków. Niech

$$a_k = [a_0^k, a_1^k, \dots, a_n^k], \text{ gdzie } a_i^k = a_i^- \text{ lub } a_i^k = a_i^+, i = 0, 1, \dots, n,$$

oznacza k -ty wierzchołek zbioru A , zaś

$$b_{ik} = [b_{0i}^k, b_{1i}^k, \dots, b_{ni}^k], \text{ gdzie } b_{0i}^k = b_{0i}^- \text{ lub } b_{0i}^k = b_{0i}^+, i = 0, 1, \dots, n,$$

oznacza k -ty wierzchołek zbioru B_i .

Każdemu wierzchołkowi a_k , $k = 1, 2, \dots, K$, zbioru A odpowiada w zbiorze wielomianów (7.113) wielomian wierzchołkowy

$$p_{0k}(s) = w_0(s, a_k), \quad (7.123)$$

natomiast każdemu wierzchołkowi b_{ik} , $k = 1, 2, \dots, K$, zbioru B_i odpowiada w zbiorze wielomianów (7.116) wielomian wierzchołkowy

$$p_{ik}(s) = w_i(s, b_{ik}). \quad (7.124)$$

Dla dowolnego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiory wartości

$$w_0(f(\omega), A) = \{w_0(f(\omega), a) : a \in A\}, \quad (7.125)$$

$$w_i(f(\omega), B_i) = \{w_i(f(\omega), b_i) : b_i \in B_i\}, i = 1, 2, \dots, m, \quad (7.126)$$

są w przypadku ogólnym wypukłymi wielobokami na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, rozpiętymi na punktach $p_{0k}(f(\omega))$ i $p_{ik}(f(\omega))$ ($k = 1, 2, \dots, K$), odpowiednio. Są one prostokątami Charitonowa tylko wtedy, gdy $f(\omega) = j\omega$. Każdy ze zbiorów (7.125), (7.126) ma liczbę krawędzi nie większą niż $2(n+1)$.

Dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ i ustalonego $h \in H$ zbiór wartości

$$w(f(\omega), h, A, B) = w_0(f(\omega), A) + \sum_{i=1}^m w_i(f(\omega), B_i) \exp(-f(\omega)h_i) \quad (7.127)$$

rodziny quasi-wielomianów (7.110) jest wypukłym wielobokiem, rozpiętym na punktach

$$p^{(k)}(f(\omega), h) = p_{0k_0}(f(\omega)) + \sum_{i=1}^m p_{ik_i}(f(\omega)) \exp(-f(\omega)h_i), \quad (7.128)$$

gdzie $k = (k_0, k_1, \dots, k_m)$, $k_i = 1, 2, \dots, K = 2^{n+1}$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Uwzględniając powyższe oznaczenia i wzór (7.95), wprowadźmy dla quasi-wielomianu przedziałowego (7.110) funkcję testującą $B(\omega)$, zdefiniowaną dla ustalonego $\omega \geq 0$ wzorem

$$B(\omega) = \min_{h \in H} \{\operatorname{Re} \tilde{p}^{(k)}(f(\omega), h), k_i = 1, 2, \dots, K, i = 0, 1, \dots, m\}, \quad (7.129)$$

gdzie $k = (k_0, k_1, \dots, k_m)$, zaś $\tilde{p}^{(k)}(s, h) = p^{(k)}(s, h) / w(s, h_0, a_0, b_0)$.

Z powyższych rozważań i lematu 7.4 wynika następujący lemat.

Lemat 7.6. Niech quasi-wielomian nominalny $w(s, \mathbf{h}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0)$ będzie D -stabilny. Warunek wykluczenia zera

$$0 \notin \tilde{w}(f(\omega), H, A, B), \quad \forall \omega \in \Omega = [0, \infty), \quad (7.130)$$

jest spełniony, jeżeli

$$B(\omega) > 0, \quad \forall \omega \geq 0, \quad (7.131)$$

gdzie funkcja testująca $B(\omega)$ jest zdefiniowana wzorem (7.129). ■

Przy komputerowym sprawdzaniu warunku (7.131) należy uwzględnić komentarz podany poniżej lematu 7.4, tzn. przy wyznaczaniu ze wzoru (7.129) wartości funkcji testującej $B(\omega)$ przy ustalonym ω należy przyjmować dyskretne wartości opóźnień $h_i \in H_i = [h_i^-, h_i^+]$, $0 \leq h_i^- < h_i^+$, $i = 1, 2, \dots, m$, wyznaczone z odpowiednio małymi krokami Δh_i .

W przypadku szczególnym, gdy D jest otwartą lewą półpłaszczyzną, której brzeg ma opis parametryczny $f(\omega) = j\omega$, $\omega \in [0, \infty)$, warunek konieczny i wystarczający (7.122) odpornej stabilności rodziny członów dominujących (7.120) przyjmuje postać

$$a_n^- > \sum_{i=1}^m \max(|b_{ni}^-|, |b_{ni}^+|). \quad (7.132)$$

Podaną w lemacie 7.6 metodę sprawdzania spełnienia warunku wykluczenia zera (7.130) można też stosować bezpośrednio do badania odpornej stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.110), przyjmując $f(\omega) = j\omega$. Jednakże, ze względu na specyfikę postaci zbioru wartości (7.127) przy $f(\omega) = j\omega$, proces badania odpornej stabilności tej rodziny można uprościć w sposób podany poniżej.

Oznaczmy przez $w_0^{(k_0)}(s)$, $k_0 = 1, \dots, 4$, oraz przez $w_i^{(k_i)}(s)$, $k_i = 1, \dots, 4$, wielomiany Charitonowa stowarzyszone z wielomianami przedziałowymi (7.113) i (7.116), odpowiednio. Wyznacza się je w sposób podany w Dodatku A.

Z rozważań podanych w punkcie 6.1 wynika, że dla ustalonego $\omega \geq 0$ i ustalonego $\mathbf{h} \in H$ zbiór wartości $w(j\omega, \mathbf{h}, A, B)$ quasi-wielomianu przedziałowego (7.110) jest wypukłym wielobokiem rozpiętym na 4^{m+1} punktach, będących war-

tościami dla $s = j\omega$ wszystkich quasi-wielomianów Charitonowa, stowarzyszonych z tym quasi-wielomianem, mających postać (por. wzór (6.13))

$$w^{(\mathbf{k})}(s, \mathbf{h}) = w_0^{(k_0)}(s) + \sum_{i=1}^m w_i^{(k_i)}(s) \exp(-sh_i), \quad (7.133)$$

gdzie $\mathbf{k} = (k_0, k_1, \dots, k_m)$, $k_i = 1, \dots, 4$ dla $i = 0, 1, \dots, m$.

Oznacza to, że przy badaniu odpornej stabilności rodziny quasi-wielomianów (7.110) funkcję testującą $B(\omega)$ dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ można obliczać ze wzoru

$$B(\omega) = \min_{\mathbf{h} \in H} \{\operatorname{Re} \tilde{w}^{(\mathbf{k})}(j\omega, \mathbf{h}), \quad k_i = 1, \dots, 4, \quad i = 0, 1, \dots, m\}, \quad (7.134)$$

gdzie $\mathbf{k} = (k_0, k_1, \dots, k_m)$, zaś $\tilde{w}^{(\mathbf{k})}(s, \mathbf{h}) = w^{(\mathbf{k})}(s, \mathbf{h}) / w(s, \mathbf{h}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0)$ jest unormowanym quasi-wielomianem Charitonowa.

Uwzględniając rozważania podane w punkcie 7.1.1 przeanalizujemy teraz strukturę zbioru wartości

$$w(j\omega, H, A, B) = \left\{ w_0(j\omega, A) + \sum_{i=1}^m w_i(j\omega, B_i) \exp(-j\omega h_i) : \mathbf{h} \in H \right\} \quad (7.135)$$

rodziny quasi-wielomianów (7.110).

Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiory wartości $w_0(j\omega, A)$ i $w_i(j\omega, B_i)$ są prostokątami Charitonowa o wierzchołkach $w_0^{(k_0)}(j\omega)$, $k_0 = 1, \dots, 4$, i $w_i^{(k_i)}(j\omega)$, $k_i = 1, \dots, 4$, odpowiednio.

Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ brzegi zbioru

$$w_i(j\omega, H_i, B_i) = \{w_i(j\omega, B_i) \exp(-j\omega h_i) : h_i \in H_i = [h_i^-, h_i^+]\} \quad (7.136)$$

przy ustalonym $i > 0$ są wyznaczone na płaszczyźnie zmiennej zespolonej przez dwa czworoboki $w_i(j\omega, B_i) \exp(-j\omega h_i^-)$ i $w_i(j\omega, B_i) \exp(-j\omega h_i^+)$ (obrócone prostokąty Charitonowa stowarzyszone z rodziną wielomianów (7.116)) oraz cztery łuki okręgów o środku w początku płaszczyzny zmiennej zespolonej i o promieniach $|w_i^{(k_i)}(j\omega)|$, $k_i = 1, \dots, 4$, które łączą wierzchołki tych czworoboków.

Jeżeli $\omega \geq \hat{\omega}_i$, gdzie

$$\hat{\omega}_i = 2\pi / (h_i^+ - h_i^-), \quad (7.137)$$

to zbiór (7.136) jest pierścieniem o środku w początku płaszczyzny zmiennej zespolonej, o promieniu zewnętrznym $r_{iz}(\omega) = \max\{|w_i^{(k_i)}(j\omega)|, k_i = 1, \dots, 4\}$ i o promieniu wewnętrznym $r_{iw}(\omega) = \min\{|w_i^{(k_i)}(j\omega)|, k_i = 1, \dots, 4\}$.

Wobec tego, dla $\omega \geq \hat{\omega}$, gdzie

$$\hat{\omega} = \max\{\hat{\omega}_i: i = 1, 2, \dots, m\}, \quad (7.138)$$

zbiór wartości

$$w(j\omega, H, B) = \sum_{i=1}^m w_i(j\omega, H_i, B_i), \quad (7.139)$$

gdzie $w_i(j\omega, H_i, B_i)$ ma postać (7.136), leży w kole o środku w początku płaszczyzny zmiennej zespolonej i o promieniu $r(\omega) = r_{1z}(\omega) + r_{2z}(\omega) + \dots + r_{mz}(\omega)$, przy czym $r_{iz}(\omega) = \max\{|w_i^{(k_i)}(j\omega)|, k_i = 1, \dots, 4\}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Brzeg tego koła należy do zbioru (7.139).

Z powyższych rozważań wynika, że warunek wykluczenia zera

$$0 \notin w(j\omega, H, A, B), \quad \forall \omega \geq \hat{\omega}, \quad (7.140)$$

jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy (patrz też [111])

$$w_0(j\omega, A) \cap w(j\omega, H, B) = \emptyset, \quad \forall \omega \geq \hat{\omega}, \quad (7.141)$$

tzn. gdy dla każdego $\omega \geq \hat{\omega}$ prostokąt Charitonowa $w_0(j\omega, A)$ leży na zewnątrz koła o środku w początku płaszczyzny zmiennej zespolonej i o promieniu

$$r(\omega) = \sum_{i=1}^m \max\{|w_i^{(k_i)}(j\omega)|, k_i = 1, \dots, 4\}. \quad (7.142)$$

Jeżeli $0 \notin w_0(j\omega, A)$ dla $\omega \geq \hat{\omega}$, to warunek (7.141) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r_0(\omega) > r(\omega), \quad \forall \omega \geq \hat{\omega}, \quad (7.143)$$

gdzie

$$r_0(\omega) = \min\{|w_0^{(k_0)}(j\omega)|, k_0 = 1, \dots, 4\}. \quad (7.144)$$

Warunek (7.143) można napisać w postaci

$$\Phi(\omega) > 0, \quad \forall \omega \geq \hat{\omega}, \quad (7.145)$$

gdzie

$$\Phi(\omega) = 1 - r(\omega) / r_0(\omega). \quad (7.146)$$

Zauważmy, że funkcja testująca zdefiniowana wzorem (7.146) ma taką samą postać jak funkcja testująca (5.43).

Ze wzorów (7.142), (7.144) i (7.3) wynika, że wartość końcową funkcji testującej (7.146) można obliczyć ze wzoru

$$\Phi_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Phi(\omega) = 1 - \sum_{i=1}^m \beta_{ni} / a_n^-, \quad (7.147)$$

przy czym $0 < a_n^- \leq a_n^+$ z założenia, oraz

$$\beta_{ni} = \max(|b_{ni}^-|, |b_{ni}^+|). \quad (7.148)$$

Zauważmy, że warunek $\Phi_\infty > 0$ jest tożsamy z warunkiem (7.132).

Z powyższych rozważań wynika następująca metoda postępowania przy badaniu odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego (7.110) na bazie twierdzenia 7.3 przy $f(\omega) = j\omega$:

- 1) jeżeli rodzina (7.110) jest rodziną typu neutralnego, badamy odporną stabilność przedziałowego członu dominującego (7.120) sprawdzając spełnienie warunku koniecznego i wystarczającego (7.132),
- 2) sprawdzamy spełnienie warunku wykluczenia zera $0 \notin w(j\omega, H, A, B)$ dla każdego $\omega < \hat{\omega}$, lub równoważnie, warunku wykluczenia zera $0 \notin \tilde{w}(j\omega, H, A, B)$, $\forall \omega < \hat{\omega}$, stosując metodę bezpośredniego ich sprawdzenia lub metodę funkcji testującej $B(\omega)$ do sprawdzenia drugiego z tych warunków (warunek dostateczny),
- 3) sprawdzamy spełnienie warunku (7.143) (lub (7.145)).

Przykład. 7.7. Należy zbadać odporną stabilność quasi-wielomianu przedziałowego typu opóźnionego z dwoma niepewnymi opóźnieniami, mającego postać

$$w(s, \mathbf{h}, \mathbf{a}) = w_0(s, \mathbf{a}) + 2se^{-sh_1} + e^{-sh_2}, \quad \mathbf{a} \in A, \quad \mathbf{h} \in H, \quad (7.149)$$

gdzie $w_0(s, \mathbf{a}) = s^2 + a_2s + a_1$, $\mathbf{a} = [a_1, a_2]$, $\mathbf{h} = [h_1, h_2]$, przy czym

$$A = \{a: a_1 \in [-0.028, 0.028], a_2 \in [-0.028, 0.028]\}, \quad (7.150)$$

$$H = \{h: h_1 \in [0.972, 1.028], h_2 \in [1.972, 2.028]\}. \quad (7.151)$$

Odporna stabilność rodziny quasi-wielomianów (7.149) była badana w przykładzie 7.6 metodą przestrzeni niepewnych parametrów. Poniżej do badania odpornej stabilności tej rodziny zastosujemy podaną powyżej metodę postępowania.

Ponieważ rodzina (7.149) jest rodziną typu opóźnionego, od razu przechodzimy do punktu 2).

Obliczając ze wzorów (7.137) i (7.138) wartość $\hat{\omega}$ parametru ω , otrzymamy $\hat{\omega} = 2\pi / 0.028 = 112.1997$.

Z quasi-wielomianem przedziałowym (7.149) są stowarzyszone cztery quasi-wielomiany Charitonowa

$$w^{(k)}(s, h) = w_0^{(k)}(s) + 2se^{-sh_1} + e^{-sh_2}, \quad k = 1, \dots, 4, \quad (7.152)$$

gdzie

$$w_0^{(1)}(s) = s^2 + 0.028s + 0.028, \quad w_0^{(2)}(s) = s^2 - 0.028s - 0.028, \quad (7.153)$$

$$w_0^{(3)}(s) = s^2 + 0.028s - 0.028, \quad w_0^{(4)}(s) = s^2 - 0.028s + 0.028, \quad (7.154)$$

są to cztery wielomiany Charitonowa stowarzyszone z wielomianem przedziałowym $w_0(s, a)$, $a \in A$.

Z postaci quasi-wielomianu $w(s, h, a)$ i wielomianów Charitonowa oraz ze wzorów (7.142) i (7.144) wynika, że $r(\omega) = 2\omega + 1$, $r_0(\omega) = \omega^2 - 0.028$. Łatwo zauważyć, że

$$r_0(\omega) = \omega^2 - 0.028 > r(\omega) = 2\omega + 1, \quad \forall \omega \geq \hat{\omega} = 112.1997, \quad (7.155)$$

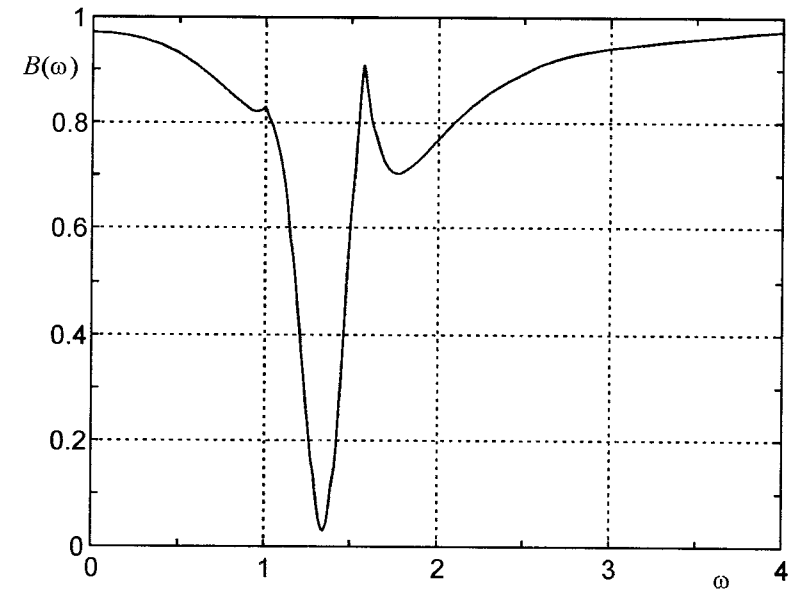
co oznacza, że nierówność (7.143) jest spełniona.

Do sprawdzenia warunku wykluczenia zera $0 \notin \tilde{w}(j\omega, H, A, B)$, $\forall \omega < \hat{\omega}$, zastosujemy metodę funkcji testującej $B(\omega)$.

Na rysunku 7.11 jest pokazany wykres funkcji testującej $B(\omega)$. Został on wyznaczony dla ω zmieniającego się od 0 do 4 ze zmiennym krokiem. Dla każdego ustalonego ω wartość funkcji testującej $B(\omega)$ obliczano ze wzoru

$$B(\omega) = \min_{h \in H} \{\operatorname{Re} \tilde{w}^{(k)}(j\omega, h), \quad k = 1, \dots, 4\}, \quad (7.156)$$

przyjmując dyskretne wartości opóźnień zmieniające się z krokiem 0.01 w zadanych przedziałach liczbowych, przy czym $\tilde{w}^{(k)}(s, h) = w^{(k)}(s, h) / w(s, h_0, q_0)$, zaś $w(s, h_0, q_0) = s^2 + 2se^{-s} + e^{-2s}$ jest asymptotycznie stabilnym quasi-wielomianem nominalnym.



Rys. 7.11. Wykres funkcji testującej $B(\omega)$

Wartość minimalna 0.0297 funkcji testującej $B(\omega)$ została osiągnięta dla $\omega = 1.34$. Dla każdego $\omega \in [4, \hat{\omega}]$, gdzie $\hat{\omega} = 112.1997$, wartości tej funkcji są większe od 0.0297. Oznacza to, że warunek wykluczenia zera $0 \notin \tilde{w}(j\omega, H, A, B)$, $\forall \omega < \hat{\omega}$, jest spełniony.

Z powyższego i z twierdzenia 7.3 wynika zatem, że quasi-wielomian przedziałowy (7.149) jest odpornie stabilny. ■

8. UWAGI KOŃCOWE

Praca jest poświęcona problemowi badania odpornej stabilności dynamicznych układów liniowych stacjonarnych z opóźnieniami o niepewnych parametrach. Ponieważ stabilność układu dynamicznego z opóźnieniami jest w pełni określona przez rozkład na płaszczyźnie zmiennej zespolonej zer jego quasi-wielomianu charakterystycznego, w pracy rozpatrzono problem badania odpornej stabilności rodzin quasi-wielomianów charakterystycznych.

Rozpatrzono przy tym ogólniejszy rodzaj stabilności niż stabilność asymptotyczna, a mianowicie tzw. D -stabilność. Rodzina quasi-wielomianów jest odpornie D -stabilna, jeżeli wszystkie zera każdego quasi-wielomianu należącego do tej rodziny leżą w zadanym otwartym obszarze D na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Ze względu na specyfikę rozkładu zer quasi-wielomianów, omówioną w punkcie 2.1, w pracy zostały podane komputerowe metody służące do badania odpornej D -stabilności głównie do przypadku, gdy obszar D jest przesuniętą otwartą lewą półpłaszczyzną. Zaproponowane metody można uogólnić na inne obszary D , spełniające warunki podane w punkcie 3.2.3. Spełnienie tych warunków jest niezwykle ważne ze względu na poprawność sformułowania problemu badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów. Uogólnienie podanych metod na obszary D ogólniejsze niż przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna podano w punkcie 4.5 w przypadku rodzin quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych od niepewnych parametrów liniowo oraz wieloliniowo.

Najogólniejsze metody, jakie mogą być stosowane do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów, są opisane w punkcie 3.2. Należą do nich: metoda przestrzeni niepewnych parametrów oraz metoda bazująca na tzw. warunku wykluczenia zera, podanym w twierdzeniu 3.3. Są to metody trudne w stosowaniu w przypadku ogólnym, przy nieliniowej zależności współczynników quasi-wielomianu charakterystycznego od niepewnych parametrów.

Rozpatrywany w niniejszej pracy problem badania odpornej D -stabilności rodzin quasi-wielomianów sprowadza się głównie do sformułowania kryteriów służących do sprawdzania spełnienia warunku wykluczenia zera.

W przypadku ogólnym występują jednakże istotne trudności związane ze sprawdzeniem tego warunku, a przede wszystkim z wyznaczeniem zbioru wartości

lub normowanego zbioru wartości (definicje 3.5 i 3.7, odpowiednio). Na płaszczyźnie zmiennej zespolonej postaci zbioru wartości oraz unormowanego zbioru wartości istotnie zależą od charakteru zależności współczynników quasi-wielomianu od niepewnych parametrów. Im bardziej złożona jest ta zależność, tym bardziej złożona jest postać zbioru wartości. W przypadku ogólnym, przy nieliniowej zależności współczynników quasi-wielomianu od niepewnych parametrów, brzeg zbioru wartości składa się z odcinków linii krzywych, przy czym ich analityczny opis nie jest znany. W takim przypadku dla dowolnego ustalonego s z brzegu obszaru D zarys zbioru wartości można wyznaczyć stosując metodę siatki (patrz przykład 4.1). Nie jest to jednak metoda dogodna do stosowania przy dużej liczbie niepewnych parametrów.

Warunek wykluczenia zera można sprawdzić bez stosowania metody siatki w tych przypadkach, w których dla wszystkich s z brzegu obszaru D brzeg zbioru wartości składa się z odcinków linii prostych. Dlatego też w pracy rozpatrzono problem badania odpornej D -stabilności następujących rodzin quasi-wielomianów charakterystycznych przy znanych opóźnieniach:

- 1) wypukła kombinacja dwóch quasi-wielomianów (na płaszczyźnie zmiennej zespolonej zbiór wartości jest odcinkiem linii prostej),
- 2) rodzina quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów (zbiór wartości jest wypukłym wielobokiem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej),
- 3) rodzina quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów (na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wypukła powłoka zbioru wartości jest wypukłym wielobokiem),
- 4) rodzina quasi-wielomianów zwana quasi-wielomianem przedziałowym, w której poszczególne współczynniki quasi-wielomianu są znane z dokładnością do przedziałów liczbowych (zbiór wartości jest wypukłym wielobokiem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej).

Warunki odpornej D -stabilności wyżej wymienionych rodzin quasi-wielomianów zostały podane w punktach 4.2, 4.3, 4.4 oraz w rozdziale 6, odpowiednio. Są to warunki konieczne i wystarczające odpornej D -stabilności rodzin wymienionych w punktach 1), 2) i 4), natomiast są to w ogólności warunki dostateczne odpornej D -stabilności rodziny wymienionej w punkcie 3).

Do sprawdzania warunku wykluczenia zera dla wszystkich wyżej wymienionych rodzin quasi-wielomianów w pracy zaproponowano stosowanie komputerowych metod, zwanych metodami funkcji testujących. Ułatwiają one znacznie badanie odpornej D -stabilności, szczególnie przy dużej liczbie niepewnych parametrów.

Quasi-wielomian przedziałowy jest przypadkiem szczególnym rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów. Do badania jego odpornej stabilności można stosować metody opracowane dla rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów, podane w punkcie 4.3. Jest to jednak trudny problem ze względu na dużą liczbę niepewnych parametrów. Na podstawie analizy struktury zbioru wartości w punkcie 6.1 wykazano, że w przypadku quasi-wielomianu przedziałowego wyżej wymienione metody można znacznie uprościć, tzn. ograniczyć się do rozpatrywania zbioru tylko krawędziowych quasi-wielomianów Charitonowa, których liczba nie zależy od liczby niepewnych parametrów.

Podane metody badania odpornej stabilności quasi-wielomianu przedziałowego zastosowano w punktach 6.3 i 6.4 do analizy odpornej D -stabilności zaburzonego quasi-wielomianu oraz przedziałowego układu regulacji automatycznej z jednym opóźnieniem, w którym obiekt jest opisany rodziną transmitancji przedziałowych. Rozpatrzono przy tym stabilność przy ustalonej wartości opóźnienia, niezależnie od wielkości opóźnienia, a także w przypadku, gdy wielkość opóźnienia nie jest dokładnie znana. Podano komputerowe metody służące do badania wyżej wymienionych rodzajów odpornej stabilności przedziałowego układu regulacji automatycznej z opóźnieniem.

W pracy podano ponadto warunki i algorytmy badania odpornej stabilności niezależnie od wielkości opóźnień quasi-wielomianu przedziałowego oraz rodzin quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych od niepewnych parametrów liniowo i wieloliniowo (rozdział 5). Do badania takiego rodzaju odpornej stabilności zaproponowano stosowanie metod funkcji testujących. Są one uogólnieniem metody podanej w punkcie 2.3.3 w przypadku dokładnie znanych współczynników quasi-wielomianu charakterystycznego.

W rozdziale 7 rozpatrzono problem badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów o niepewnych opóźnieniach. Należy on do najtrudniejszych ze względu na wykładniczą zależność quasi-wielomianu od opóźnień. Przy niepewnych opóźnieniach zbiór wartości ma zawsze krzywoliniowe boki, niezależnie od charakteru zależności współczynników quasi-wielomianu charakterystycznego od niepewnych parametrów. Pokazano, że metodę przestrzeni niepewnych parametrów można z powodzeniem stosować w przypadku, gdy granice D -stabilności rozpatruje się na płaszczyźnie dwóch niepewnych parametrów, które nie są opóźnieniami.

Podano metody funkcji testujących służące do badania odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów o dokładnie znanych współczynnikach i o niepewnych opóźnieniach (niewspółmiernych i współmiernych) oraz odpornej D -stabilności rodziny quasi-wielomianów z niepewnymi opóźnieniami i o współczynni-

kach liniowo zależnych od niepewnych parametrów oraz quasi-wielomianów przedziałowych. Służą one do sprawdzania spełnienia warunku wykluczenia zera.

Zaproponowane metody można uogólnić (w sposób podobny do zastosowanego w punkcie 4.4 w przypadku rodziny quasi-wielomianów o dokładnie znanych opóźnieniach) na rodzinę quasi-wielomianów z niepewnymi opóźnieniami i o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów.

Podane w monografii komputerowe metody zostały zilustrowane przykładami liczbowymi. Obliczeń dokonano z wykorzystaniem programów komputerowych opracowanych w środowisku systemu MATLAB.

W monografii wykorzystano rezultaty literaturowe oraz głównie własne rezultaty autora, w tym opublikowane w czasopismach krajowych i zagranicznych oraz w materiałach konferencji krajowych i międzynarodowych. Wiele rezultatów nie było publikowanych.

W pracy wykorzystano rezultaty projektu badawczego Komitetu Badań Naukowych nr rej. PB 3 0713 91 01 oraz prac własnych W/WE/12/91, W/WE/11/92, W/WE/1/95, W/WE/5/98 i W/WE/1/99, realizowanych w Politechnice Białostockiej.

A. ODPORNA STABILNOŚĆ WIELOMIANÓW PRZEDZIAŁOWYCH

Weźmy pod uwagę rodzinę wielomianów o rzeczywistych współczynnikach

$$W(s, A) = \{w(s, a) : a \in A\}, \quad (\text{A.1})$$

gdzie

$$w(s, a) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad (\text{A.2})$$

przy czym $a = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ jest wektorem współczynników wielomianu (A.2), zaś zbiór A jest zdefiniowany następująco

$$A = \{a : a_i \in [a_i^-, a_i^+], a_i^- \leq a_i^+, i = 0, 1, \dots, n, a_n^- > 0\}. \quad (\text{A.3})$$

Jeżeli niektóre ze współczynników wielomianu (A.2) są dokładnie znane, to dla tych współczynników $a_i^- = a_i^+ = a_i$.

Rodzina (A.1) nosi nazwę przedziałowej rodziny wielomianów. Często nazywa się ją w skrócie wielomianem przedziałowym.

W zbiorze wielomianów wierzchołkowych, odpowiadających wierzchołkom zbioru (A.3), istnieją cztery wielomiany, zwane wielomianami Charitonowa, o postaci

$$w^{(1)}(s) = a_0^+ + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + a_4^+ s^4 + \dots, \quad (\text{A.4})$$

$$w^{(2)}(s) = a_0^- + a_1^- s + a_2^+ s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^- s^4 + \dots, \quad (\text{A.5})$$

$$w^{(3)}(s) = a_0^- + a_1^+ s + a_2^+ s^2 + a_3^- s^3 + a_4^- s^4 + \dots, \quad (\text{A.6})$$

$$w^{(4)}(s) = a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4 + \dots \quad (\text{A.7})$$

Twierdzenie A.1 (Charitonowa). Wielomian przedziałowy (A.1) stałego stopnia jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są asymptotycznie stabilne cztery wielomiany Charitonowa (A.4)-(A.7), stowarzyszone z tym wielomianem. ■

Oryginalny dowód twierdzenia Charitonowa (dosyć złożony) jest podany w pracy [68]. Prostsze dowody tego twierdzenia zostały podane w pracach [8, 52, 65, 105, 135].

Twierdzenie A.1 można uogólnić na klasę wielomianów przedziałowych o zespolonych współczynnikach. Odporna stabilność takich wielomianów jest równoważna z asymptotyczną stabilnością ośmiu odpowiednio utworzonych wielomianów Charitonowa o zespolonych współczynnikach [69, 70, 135].

Twierdzenie Charitonowa A.1 pozostaje też prawdziwe w przypadku, gdy wielomian przedziałowy (A.1) nie jest wielomianem przedziałowym stałego stopnia. W pracy [99] udowodniono bowiem, że asymptotyczna stabilność czterech wielomianów Charitonowa (A.4)-(A.7) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej stabilności wielomianu przedziałowego (A.1), w przypadku gdy zbiór A ma postać (A.3) przy $a_i^- \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$. Łatwo wykazać, korzystając np. z warunku koniecznego kryterium Hurwitza, że w takim przypadku wielomian przedziałowy (A.1) może być odpornie stabilny tylko wtedy, gdy $a_n^- \geq 0$ oraz $a_i^- > 0$ dla $i = 0, 1, \dots, n-1$. Powyższy warunek jest też warunkiem koniecznym asymptotycznej stabilności wszystkich czterech wielomianów Charitonowa. Oznacza to, że jeżeli rodzina (A.1) nie jest rodziną stałego stopnia, to może ona być odpornie stabilna tylko wtedy, gdy w wielomianie (A.2) występuje redukcja stopnia nie więcej niż o jeden.

Twierdzenia Charitonowa A.1 nie da się uogólnić na klasę macierzy przedziałowych (z przedziałowym oszacowaniem wartości poszczególnych jej elementów) (np. [52]). Może ono być jednak wykorzystane do badania odpornej stabilności takich macierzy [166].

Dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ zbiór wartości

$$w(j\omega, A) = \{w(j\omega, a) : a \in A\} \quad (\text{A.8})$$

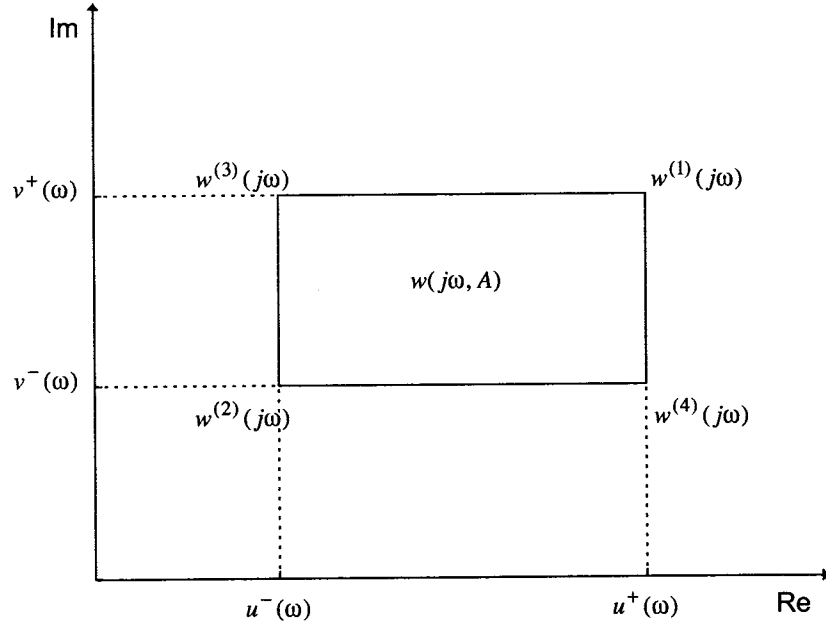
rodziny wielomianów (A.1) jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych. Prawym górnym wierzchołkiem prostokąta (A.8) jest $w^{(1)}(j\omega)$, a kolejnymi jego wierzchołkami przy poruszaniu się wzdłuż krawędzi w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara są: $w^{(3)}(j\omega)$, $w^{(2)}(j\omega)$ i $w^{(4)}(j\omega)$.

Prostokąt (A.8) nosi nazwę prostokąta Charitonowa. Jest on pokazany na rysunku A.1.

Zgodnie z oznaczeniami jak na rysunku A.1, dla $s = j\omega$ zachodzą zależności

$$w^{(1)}(j\omega) = u^+(\omega) + jv^+(\omega), \quad w^{(2)}(j\omega) = u^-(\omega) + jv^-(\omega), \quad (\text{A.9})$$

$$w^{(3)}(j\omega) = u^-(\omega) + jv^+(\omega), \quad w^{(4)}(j\omega) = u^+(\omega) + jv^-(\omega). \quad (\text{A.10})$$



Rys. A.1. Prostokąt Charitonowa

Oznaczmy przez (dla dowolnego ustalonego $\omega \in \Omega = [0, \infty)$)

$$d(\omega) = \min_{a \in A} |w(j\omega, a)| \quad (\text{A.11})$$

odległość prostokąta Charitonowa (A.8) od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Jeżeli wielomian przedziałowy (A.1) jest odpornie stabilny, to jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin w(j\omega, A), \quad \forall \omega \geq 0, \quad (\text{A.12})$$

czyli początek płaszczyzny zmiennej zespolonej leży na zewnątrz prostokąta Charitonowa (A.8) dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$.

Jeżeli wielomiany Charitonowa (A.4)-(A.7) są asymptotycznie stabilne, to dla dowolnego ustalonego $\omega \geq 0$ odległość $d(\omega)$ prostokąta Charitonowa (A.8) od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej oblicza się na podstawie następującego algorytmu (z uwzględnieniem oznaczeń jak na rysunku A.1).

Algorytm A1:

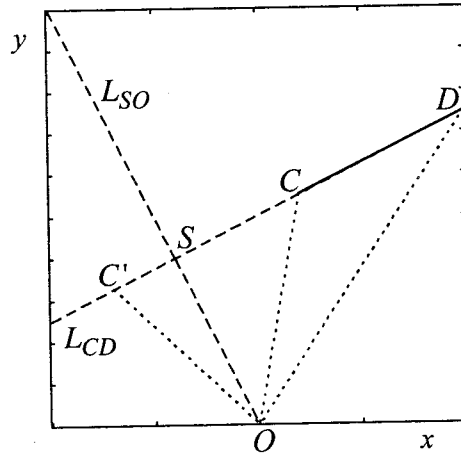
1. jeżeli $u^+(\omega)u^-(\omega) \leq 0$, to $d(\omega) = \min(|v^+(\omega)|, |v^-(\omega)|)$,
2. jeżeli $v^+(\omega)v^-(\omega) \leq 0$, to $d(\omega) = \min(|u^+(\omega)|, |u^-(\omega)|)$,
3. w przeciwnym przypadku

$$d(\omega) = \min\{|w^{(k)}(j\omega)|, k = 1, \dots, 4\}. \quad (\text{A.13})$$

B. OBLICZANIE ODLEGŁOŚCI WYPUKŁEGO WIELOBOKU OD POCZĄTKU PŁASZCZYZNY ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

B.1. Obliczanie odległości odcinka linii prostej od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej

Weźmy pod uwagę dwa odcinki $[C, D]$ i $[C', D]$ linii prostej. Ich położenia na płaszczyźnie (x, y) są pokazane na rysunku B.1. Linie proste L_{SO} i L_{CD} są względem siebie prostopadłe z punktem przecięcia S .



Rys. B.1

Współrzędne S_x i S_y punktu S oblicza się z poniższych wzorów (na bazie znajomości współrzędnych punktów C i D)

$$S_x = -E \cdot G / H, \quad S_y = -F \cdot G / H, \quad (\text{B.1})$$

gdzie

$$E = C_y - D_y, \quad F = D_x - C_x, \quad (\text{B.2})$$

$$G = C_x D_y - C_y D_x, \quad H = E^2 + F^2, \quad (\text{B.3})$$

przy czym α_x i α_y są to współrzędne punktu α .

W taki sam sposób oblicza się współrzędne punktu S na podstawie znajomości współrzędnych punktów C' i D .

Z rysunku B.1 wynika, że odległość d odcinka $[C, D]$ od początku O płaszczyzny (x, y) jest równa $\min(|CO|, |DO|)$. Natomiast odległość d odcinka $[C', D]$ od punktu O jest równa $|SO|$.

Z powyższych rozważań wynika następujący prosty algorytm obliczania odległości odcinka $[C, D]$ od początku płaszczyzny (x, y) .

Algorytm B1:

- jeżeli $S \in [C, D]$, to $d = |SO|$,
- jeżeli $S \notin [C, D]$, to $d = \min(|CO|, |DO|)$.

B.2. Obliczanie odległości wypukłego wieloboku od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej

Weźmy pod uwagę na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wypukły wielobok

$$\text{conv}\{w^{(k)}(j\omega), k = 1, 2, \dots, K\}, \quad j^2 = -1, \quad (\text{B.4})$$

rozpięty na punktach $w^{(k)}(j\omega)$, $k = 1, 2, \dots, K$, gdzie ω jest parametrem. Załóżmy, że dla każdego ustalonego $\omega \geq 0$ wielobok (B.4) nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Oznaczmy przez $d(\omega)$ odległość wieloboku (B.4) od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej. Odległość $d(\omega)$ można obliczać różnymi metodami. Poniżej podamy komputerową metodę, zaproponowaną w pracy [47]. Jest to metoda prosta, chociaż nie jest ona optymalna ze względu na czas obliczeń.

Dla dowolnego ustalonego $\omega \geq 0$ odległość $d(\omega)$ można obliczyć ze wzoru

$$d(\omega) = \min\{d_{ik}(\omega), i, k = 1, 2, \dots, K, i < k\}, \quad (\text{B.5})$$

gdzie $d_{ik}(\omega)$ jest odległością odcinka linii prostej $[w^{(i)}(j\omega), w^{(k)}(j\omega)]$ od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej. Odcinek ten łączy punkty $w^{(i)}(j\omega)$ i $w^{(k)}(j\omega)$.

Z powyższych rozważań, Algorytmu B1 i wzorów (B.1)-(B.3) wynika następujący algorytm obliczania odległości wypukłego wieloboku (B.4) od początku

płaszczyzny zmiennej zespolonej. Przyjmujemy, że znane są wartości liczbowe $w^{(k)}(j\omega)$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Algorytm B2:

1. Oblicz

$$U_i(\omega) = \operatorname{Re} w^{(i)}(j\omega), \quad V_i(j\omega) = \operatorname{Im} w^{(i)}(j\omega), \quad i = 1, 2, \dots, K. \quad (\text{B.6})$$

2. Dla każdej kombinacji indeksów $i, k = 1, 2, \dots, K$, $i < k$, wykonaj obliczenia według poniższych wzorów

$$E_{ik}(\omega) = V_i(\omega) - V_k(\omega), \quad F_{ik}(\omega) = U_k(\omega) - U_i(\omega), \quad (\text{B.7})$$

$$H_{ik}(\omega) = E_{ik}^2(\omega) + F_{ik}^2(\omega), \quad G_{ik}(\omega) = U_i(\omega)V_k(\omega) - V_i(\omega)U_k(\omega), \quad (\text{B.8})$$

$$S_{ik}^{(x)}(\omega) = -E_{ik}(\omega)G_{ik}(\omega) / H_{ik}(\omega), \quad (\text{B.9})$$

$$S_{ik}^{(y)}(\omega) = -F_{ik}(\omega)G_{ik}(\omega) / H_{ik}(\omega), \quad (\text{B.10})$$

$$U_{ik}^-(\omega) = \min(U_i(\omega), U_k(\omega)), \quad U_{ik}^+(\omega) = \max(U_i(\omega), U_k(\omega)), \quad (\text{B.11})$$

$$V_{ik}^-(\omega) = \min(V_i(\omega), V_k(\omega)), \quad V_{ik}^+(\omega) = \max(V_i(\omega), V_k(\omega)), \quad (\text{B.12})$$

• jeżeli

$$U_{ik}^-(\omega) \leq S_{ik}^{(x)}(\omega) \leq U_{ik}^+(\omega) \quad \text{ i } \quad V_{ik}^-(\omega) \leq S_{ik}^{(y)}(\omega) \leq V_{ik}^+(\omega), \quad (\text{B.13})$$

to

$$d_{ik}(\omega) = |S_{ik}(\omega)|, \quad (\text{B.14})$$

gdzie

$$S_{ik}(\omega) = S_{ik}^{(x)}(\omega) + jS_{ik}^{(y)}(\omega), \quad (\text{B.15})$$

• jeżeli przynajmniej jeden z warunków (B.13) nie jest spełniony, to

$$d_{ik}(\omega) = \min(|w^{(i)}(j\omega)|, |w^{(k)}(j\omega)|). \quad (\text{B.16})$$

3. Odległość $d(\omega)$ wypukłego wieloboku (B.4) od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej oblicz ze wzoru (B.5).

BIBLIOGRAFIA

1. **Ackermann J.** (in co-operation with **Bartlett A., Kaesbauer D., Sienel W., Steinhauser R.**): *Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters*. Springer-Verlag, London 1994.
2. **Ackermann J., Barmish B. R.**: *Robust Schur stability of a polytope of polynomials*. IEEE Trans. Automat. Control, 1988, vol. 33, no.10, pp. 984-986.
3. **Ackermann J., Kaesbauer D., Muench R.**: *Robust gamma-stability analysis in a plant parameter space*. Automatica, 1991, vol. 27, no. 1, pp. 75-85.
4. **Ahmad S. S., Keel L. H., Bhattacharyya S. P.**: *Robust PID control and lead-lag compensation for linear interval systems*. W: **Mansour M., Balemi S., Truol W. (Eds)**: *Robustness of Dynamic Systems with Parameter Uncertainties*. Birkhauser, Berlin 1992, pp. 251-260.
5. **Anderson B. D. O., Kraus F. J., Mansour M., Dasgupta S.**: *Easily testable sufficient conditions for the robust stability of systems with multiaffine parameter dependence*. W: **Mansour M., Balemi S., Truol W. (Eds)**: *Robustness of Dynamic Systems with Parameter Uncertainties*. Birkhauser, Berlin 1992, pp. 81-92.
6. **Bailey F. N., Hui C. H.**: *A fast algorithm for computing parametric rational functions*. IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no. 11, pp. 1209-1212.
7. **Barmish B. R.**: *A generalization of Kharitonov's four-polynomial concept for robust stability problems with linearly dependent coefficient perturbations*. IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no. 2, pp. 157-165.
8. **Barmish B. R.**: *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan Publishing Company, New York 1994.
9. **Barmish B. R., Hollot C. V., Kraus F. J., Tempo R.**: *Extreme point results for robust stabilization of interval plants with first order compensators*. IEEE Trans. Automat. Control, 1992, vol. AC-37, no. 2, pp. 707-714.
10. **Barmish B. R., Kang H. I.**: *A survey of extreme point results for robustness of control systems*. Automatica, 1993, vol. 29, no. 1, pp. 13-35.

11. **Barmish B. R., Tempo R.:** *On mappable nonlinearities in robustness analysis.* Proc. 3rd European Control Conf., 1995, pp. 1430-1435, Rome.
12. **Barmish B. R., Shi Z.:** *Robust stability of perturbed systems with time delays.* Automatica, 1989, vol. 25, no. 3, pp. 371-381.
13. **Barmish B. R., Shi Z.:** *Robust stability of a class of polynomials with coefficients depending multilinearly on perturbations.* IEEE Trans. Automat. Control, 1990, vol. 35, pp. 1040-1043.
14. **Barszcz M., Olbrot A.:** *Stability criterion for a linear differential-difference system.* IEEE Trans. Automat. Control, 1979, vol. AC-24, no. 2, pp. 368-369.
15. **Bartlett A. C., Hollot C. V., Lin H.:** *Root location of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges.* Math. Contr., Signals Syst., 1988, vol. 1, pp. 61-71.
16. **Bellman R., Cooke C. S.:** *Differential-Difference Equations.* Academic Press, New York 1963.
17. **Bhatt S. J., Hsu C. S.:** *Stability criteria for second-order dynamical systems with time-lag.* Trans. of ASME, Journal Appl. Mech., 1966, vol. E-33, no. 1, pp. 113-118.
18. **Bhattacharyya S. P., Chapellat H., Keel L. H.:** *Robust Control: The Parametric Approach.* Prentice Hall PTR, New York 1995.
19. **Białas S.:** *A necessary and sufficient condition for the stability of convex combinations of stable polynomials or matrices.* Bull. Polish Acad. Sci., Tech. Sci., 1985, vol. 33, no. 9-10, pp. 472-480.
20. **Białas S.:** *Systemy dynamiczne przedziałowe.* Zesz. Nauk. AGH, Automatyka, 1987, z. 41.
21. **Boese F. G.:** *On the stability of real exponential polynomials with interval-valued delays.* Multidimensional Systems and Signal Processing, 1994, vol. 5, pp. 363-395.
22. **Brierley S. D., Chiasson J. N., Lee E. B., Żak S. H.:** *On stability independent of delay for linear systems.* IEEE Trans. Automat. Control, 1982, vol. AC-27, no. 1, pp. 252-254.
23. **Busłowicz M.:** *Sufficient conditions for instability of delay differential systems.* Int. J. Control, 1983, vol. 37, no. 6, pp. 1311-1321.
24. **Busłowicz M.:** *Warunki stabilności skalarych układów liniowych stacjonarnych z opóźnieniem.* Podstawy Sterowania, 1983, t. 13, z. 4, s. 315-324.
25. **Busłowicz M.:** *Stabilność układów liniowych stacjonarnych drugiego rzędu z czystym opóźnieniem.* Podstawy Sterowania, 1985, t. 15, z. 3, s. 201-210.

26. **Busłowicz M.:** *Simple stability criterion for a class of delay differential systems.* Int. J. of Systems Science, 1987, vol. 18, no. 5, pp. 993-995.
27. **Busłowicz M.:** *Asymptotyczna stabilność dynamicznych układów liniowych stacjonarnych z opóźnieniem.* Zesz. Nauk. Polit. Biał., Elektryka, nr 7, 1987.
28. **Busłowicz M.:** *Exponential stability with a decay rate γ of a class of multivariable systems with delay.* Proc. of 12th World Congress on Scientific Computation (IMACS), 1988, vol. 1, pp. 295-297, Paris.
29. **Busłowicz M.:** *Warunki konieczne asymptotycznej stabilności niezależnie od opóźnienia wielowymiarowych układów ze współmiernymi opóźnieniami.* Zesz. Nauk. Polit. Biał., Elektryka, 1989, nr 9, s. 9-26.
30. **Busłowicz M.:** *Analiza stabilności układów z opóźnieniem o niepewnych parametrach.* Mat. XI Krajowej Konferencji Automatyki, 1991, tom I, s. 551-558, Białystok-Białowieża.
31. **Busłowicz M.:** *Częstotliwościowe metody analizy stabilności wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów.* Mat. XV Sem. z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, 1992, tom I, s. 175-182, Gliwice-Wisła.
32. **Busłowicz M.:** *Asymptotic stability of dynamical interval systems with pure delay.* Scientific Journal Białystok University of Technology, Techn. Sci., 1992, no. 83, Electricity no. 11, pp. 61-77.
33. **Busłowicz M.:** *A method for D-stability analysis of polynomials with linearly dependent coefficient perturbations.* Found. of Computing and Decision Sciences, 1993, vol. 18, no. 1, pp. 37-47.
34. **Busłowicz M.:** *Computation of robust first order compensators stabilizing interval plants.* Archives of Control Sciences, 1994, vol. 3, no. 1-2, pp. 95-103.
35. **Busłowicz M.:** *A simple method for robust D-stability analysis of polynomials with linearly dependent coefficient perturbations.* Found. of Computing and Decision Sciences, 1994, vol. 19, no. 4, pp. 299-308.
36. **Busłowicz M.:** *D-stabilność quasi-wielomianów typu opóźnionego o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów.* Zesz. Nauk. Polit. Biał., Elektryka, 1994, nr 13, s. 19-31.
37. **Busłowicz M.:** *Stabilność w przedziale wartości opóźnienia określonej klasy układów o niepewnych parametrach.* Zesz. Nauk. Polit. Biał., Elektryka, 1994, nr 13, s. 7-18.

38. **Busłowicz M.:** *Stabilność niezależnie od wielkości opóźnienia pewnej klasy układów z opóźnieniami.* Mat. XVII Sem. z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, 1994, tom II, s. 259-264, Gliwice-Ustroń.
39. **Busłowicz M.:** *Absolutna asymptotyczna stabilność jednowymiarowego przedziałowego układu z opóźnieniem.* Mat. XII Krajowej Konferencji Automatyki, 1994, s. 111-116, Gdynia.
40. **Busłowicz M.:** *Robust stability of a class of interval systems with perturbed delays.* Proc. of First Int. Symp. on Math. Models in Automation and Robotics, 1994, pp. 121-124, Szczecin-Międzyzdroje.
41. **Busłowicz M.:** *Delay-independent stability of multidimensional systems with commensurate delays.* Proc. Int. Conf. on Systems-Modelling-Control, 1995, vol. 1, pp. 161-164, Łódź-Zakopane.
42. **Busłowicz M.:** *Computational methods for robust stability analysis of a class of quasi-polynomials.* Control and Cybernetics, 1995, vol. 24, no. 2, pp. 129-139.
43. **Busłowicz M.:** *Extension of the Kharitonov theorem to a class of interval quasi-polynomials.* Proc. of Second Int. Symp. on Methods and Models in Automation and Robotics, 1995, vol. 1, pp. 181-185, Szczecin-Międzyzdroje.
44. **Busłowicz M.:** *Stabilność w zależności od wielkości opóźnienia układów ze współmiernymi opóźnieniami.* Mat. XVIII Sem. z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, 1995, tom II, s. 49-54, Gliwice-Ustroń.
45. **Busłowicz M.:** *Komputerowe metody badania stabilności układów ze współmiernymi opóźnieniami.* Mat. III Ogólnopolskiej Konf. nt. Układy dynamiczne w aspekcie teorii i zastosowań, 1995, s. 107-112. Łódź.
46. **Busłowicz M.:** *Stabilność w zależności od wielkości opóźnienia wielowymiarowych układów ze współmiernymi opóźnieniami.* Mat. XIX Sem. z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, 1996, tom II, s. 301-304, Gliwice-Ustroń.
47. **Busłowicz M.:** *Robust delay-independent stability of a class of uncertain delay-differential systems.* Proc. of Third Int. Symp. on Methods and Models in Automation and Robotics, 1996, vol. 1, pp. 287-292, Szczecin-Międzyzdroje.
48. **Busłowicz M.:** *Robust stability of perturbed polynomials.* Proc. of Fourth Int. Symp. on Methods and Models in Automation and Robotics, 1997, vol. 1, pp. 155-158, Szczecin-Międzyzdroje.
49. **Busłowicz M.:** *Stabilność zaburzonych układów liniowych stacjonarnych.* Mat. XX Sem. z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, 1997, tom II, s. 259-262. Gliwice-Ustroń.
50. **Busłowicz M.:** *Komputerowe metody wyznaczania wielomianów wierzchołkowych i krawędziowych wierzchołkowego zbioru wielomianów.* Mat. II Konf. Nauk.-Techn. „Zastosowania Komputerów w Elektrotechnice”, 1997, s. 5-8. Poznań/Kiekrz.
51. **Busłowicz M.:** *Stabilność wieloliniowej rodziny wielomianów charakterystycznych.* Mat. VI Krajowej Konf. Nauk.-Dyd. „Automatyzacja i eksploatacja systemów sterowania”, 1997, s. 164-171, Gdynia.
52. **Busłowicz M.:** *Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach.* Dział Wyd. i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Ser. Rozprawy Naukowe, Nr 48. Białystok 1997.
53. **Busłowicz M.:** *Robust stability independent of delays of interval delay-differential systems.* Computers & Electrical Engineering, An International Journal, 1997, vol. 23, no. 5, pp. 311-318.
54. **Busłowicz M.:** *Charakterystyki częstotliwościowe liniowych układów o niepewnych parametrach.* Mat. XXI Sem. z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, 1998, s. 435-438, Gliwice-Ustroń.
55. **Busłowicz M.:** *Robust Schur stability of perturbed polynomials.* Proc. of Fifth Int. Symp. on Methods and Models in Automation and Robotics, 1998, vol. 1, pp. 185-188, Szczecin-Międzyzdroje.
56. **Busłowicz M.:** *Stabilność niezależnie od wielkości niewspółmiernych opóźnień układów liniowych stacjonarnych.* Mat. XIII Krajowej Konferencji Automatyki, 1999, tom 1, s. 89-92, Opole.
57. **Busłowicz M.:** *Odporna stabilność zaburzonych quasi-wielomianów.* Mat. XIII Krajowej Konferencji Automatyki, 1999, tom 1, s. 93-96, Opole.
58. **Busłowicz M.:** *Frequency responses of linear interval plants with delay.* Control and Cybernetics, 1999, vol. 28, no. 2, pp. 281-289.
59. **Busłowicz M.:** *Robust stability independent of delay of delay-differential systems with multilinearly dependent coefficient perturbations.* Proc. of Sixth Int. Symp. on Methods and Models in Automation and Robotics, 2000, Szczecin-Międzyzdroje.
60. **Busłowicz M.:** *Komputerowa metoda wyznaczania zbioru wartości określonej klasy rodzin transmitancji operatorowych.* Mat. V Konf. Nauk.-Techn. „Zastosowania Komputerów w Elektrotechnice”, 2000, tom I, s. 17-20, Poznań/Kiekrz.

61. **Busłowicz M., Taran W.:** *Krzepka stabilność przedziałowego układu regulacji automatycznej z jednym opóźnieniem*. Mat. XIX Sem. z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, 1996, tom II, s. 309-312, Gliwice-Ustroń.
62. **Busłowicz M., Trzasko W.:** *Charakterystyki częstotliwościowe układów opisanych rodziną transmitancji operatorowych o liniowej strukturze niepewności*. Mat. XXIII Miedzynar. Konf. z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, 2000, s. 373-376, Gliwice-Ustroń.
63. **Cavallo A., Celentano G., De Maria G.:** *Robust stability analysis of polynomials with linearly dependent coefficient perturbations*. IEEE Trans. Automat. Control, 1991, vol. 36, no. 3, pp. 380-384.
64. **Cebotarev N. G., Mejman N. N.:** *Problema Rausa-Hurvica dla polinomów i celych funkcji*. Trudy Mat. Inst. im. Steklova, Izd. AN SSSR, vol. XXVI, Moskva 1949.
65. **Chapellat H., Bhattacharyya S. P.:** *An alternative proof of Kharitonov's theorem*. IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no. 4, pp. 448-450.
66. **Chapellat H., Bhattacharyya S. P.:** *A generalization of Kharitonov's theorem: robust stability of interval plants*. IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no. 3, pp. 306-311.
67. **Chapellat H., Keel L. H., Bhattacharyya S. P.:** *Robustness properties of multilinear interval systems*. W: **Mansour M., Balemi S., Truol W. (Eds):** *Robustness of Dynamic Systems with Parameter Uncertainties*. Birkhauser, Berlin 1992, pp. 73-80.
68. **Charitonov V. L.:** *Ob asimptotičeskoj ustojčivosti položenija ravnovesija seimejstva sistem linejnych differencial'nych uravnenij*. Diff. Uravn., 1978, vol. 14, no. 11, s. 2086-2088.
69. **Charitonov V. L.:** *Ob odnom obobščeenii kriterija ustojčivosti*. Izv. AN Kaz. SSR, Ser. Mat.-Fiz., 1978, no. 1, s. 53-57.
70. **Charitonov V. L.:** *Problema Rausa-Hurvica dla seimejstv polinomów i kwazipolinomów*. Izv. AN Kaz. SSR, Ser. Mat.-Fiz., 1979, no. 26, s. 69-79.
71. **Charitonov (Kharitonov) V.L., Zhabko A. P.:** *Robust stability of time-delay systems*. IEEE Trans. Automat. Control, 1994, vol. 39, no. 12, pp. 2388-2397.
72. **Charitonov (Kharitonov) V. L., Zhabko A. P.:** *Stability of convex hull of quasi-polynomials*. W: **Mansour M., Balemi S., Truol W. (Eds):** *Robustness of Dynamic Systems with Parameter Uncertainties*. Birkhauser, Berlin 1992, pp. 63-69.

73. **Chen J.:** *On computing the maximal delay intervals for stability of linear delay systems*. IEEE Trans. Automat. Control, 1995, vol. 40, no. 6, pp. 1087-1093.
74. **Chen J. J., Hwang C.:** *Computing frequency responses of uncertain systems*. IEEE Trans. Circuits Syst. I, 1998, vol. 45, no. 3, pp. 304-307.
75. **Chen J., Latchman H. A.:** *Frequency sweeping tests for stability independent of delay*. IEEE Trans. Automat. Control, 1995, vol. 40, no. 9, pp. 1640-1645.
76. **Chen W., Petersen I. R.:** *A class of multilinear uncertain polynomials to which the edge theorem is applicable*. IEEE Trans. Automat. Control, 1995, vol. 40, no. 12, pp. 2103-2107.
77. **Chen J., Xu D., Shafai B.:** *On sufficient condition for stability independent of delay*. IEEE Trans. Automat. Control, 1995, vol. 40, no. 9, pp. 1675-1680.
78. **Chiasson J.:** *A method for computing the interval of delay values for which a differential-delay system is stable*. IEEE Trans. Automat. Control, 1988, vol. 33, no. 12, pp. 1176-1178.
79. **Datko R.:** *A procedure for determination of the exponential stability of certain differential-difference equations*. Quart. Appl. Math., 1978, vol. 36, no. 4, pp. 279-292.
80. **Datko R.:** *An example of an unstable neutral differential equation*. Int. J. Control, 1983, vol. 38, no. 1, pp. 263-267.
81. **De Gaston R. R. E., Safonov M. G.:** *Exact calculation of the multiloop stability margin*. IEEE Trans. Automat. Control, 1988, vol. 33, no. 2, pp. 156-171.
82. **Driver R. D.:** *Ordinary and Delay Differential Equations*. Springer Verlag, New York 1977.
83. **Dugard L., Verriest E. I. (Eds):** *Stability and Control of Time-Delay Systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 228. Springer-Verlag, London 1998.
84. **Elsgolc L. E.:** *Równania różniczkowe z odchylnym argumentem*. Małe Monografie PWN, Warszawa 1966.
85. **Elsgolc L. E., Norkin S. B.:** *Vvedenie v teoriju differencialnych uravnenij s otklonjajuščimsja argumentom*. Nauka, Moskva 1971 (wydanie w języku angielskim: **Elsgolc L. E., Norkin S. B.:** *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*. Academic, New York 1973).

86. **Fu M.:** *Computing the frequency responses of linear control systems with parametric perturbations.* Syst. Contr. Letters, 1990, vol. 15, no. 1, pp. 45-52.
87. **Fu M., Barmish B. R.:** *Polytopes of polynomials with zeros in a prescribed set.* IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no. 5, pp. 544-546.
88. **Fu M., Olbrot A. W., Polis M. P.:** *Robust stability for time-delay systems: The edge theorem and graphical tests.* IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no. 8, pp. 813-820.
89. **Fu M., Olbrot A. W., Polis M. P.:** *Edge theorem and graphical test for robust stability of neutral time-delay systems.* Automatica, 1991, vol. 27, pp. 739-742.
90. **Gopalsamy K.:** *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics.* Kluwer Academic Publishers, Math. Its. Appl. Series, vol. 74, 1992.
91. **Górecki H.:** *Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem.* WNT, Warszawa 1971.
92. **Górecki H., Fuksa S., Grabowski P., Korytowski A.:** *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems.* PWN-J.Wiley, Warszawa-Chichester 1989.
93. **Górecki H., Korytowski A. (Eds):** *Advances in Optimization and Stability Analysis of Dynamical Systems.* Wydawnictwa AGH, Kraków 1993.
94. **Guiver J. P., Bose N. K.:** *On test for zero-sets of multivariable polynomials in noncompact polydomains.* Proc. IEEE, 1981, vol. 69, no. 4, pp. 467-469.
95. **Gutman P. O., Baril C., Neumann L.:** *An algorithm for computing value sets of uncertain transfer functions in factored real form.* IEEE Trans. Automat. Control, 1994, vol. 39, no. 6, pp. 1268-1273.
96. **Györi I.:** *Delay differential and integro-differential equations in biological compartment models.* Systems Science, 1982, vol. 8, no. 2-3, pp. 165-187.
97. **Hale J. K.:** *Theory of Functional Differential Equations.* Springer Verlag, New York 1977.
98. **Hale J. K., Lunel S. M. V.:** *Introduction to Functional Differential Equations.* Springer-Verlag, New York 1993.
99. **Hernandez R., Dormido S.:** *Kharitonov's theorem extension to interval polynomials which can drop in degree: a Nyquist approach.* IEEE Trans. Automat. Control, 1996, vol. 41, no. 7, pp. 1009-1012.
100. **Ho K. W., Chan W. K.:** *Stability of third-order control systems with time-lag using Pontryagin's method for zero determination.* Proc. IEE, 1969, vol. 116, no. 2, pp. 2064-2068.

101. **Hsiao F. H., Pan S. T., Teng C. C.:** *An efficient algorithm for finding D-stability bound of discrete singularly perturbed systems with multiple delays.* Int. J. Control, 1999, vol. 72, no. 1, pp. 1-17.
102. **Jury E. I., Mansour M.:** *Stability conditions for a class of delay differential systems.* Int. J. Control, 1982, vol. 35, no. 4, pp. 689-699.
103. **Kaczorek T.:** *Teoria układów regulacji automatycznej.* WNT, Warszawa 1974.
104. **Kaczorek T.:** *Teoria sterowania, tom 1.* PWN, Warszawa 1977.
105. **Kaczorek T.:** *Teoria sterowania i systemów.* PWN, Warszawa 1996.
106. **Kamen E. W.:** *On the relationship between zero criteria for two-variable polynomials and asymptotic stability of delay differential equations.* IEEE Trans. Automat. Control, 1980, vol. AC-25, no. 5, pp. 983-984.
107. **Kamen E. W.:** *Linear systems with commensurate delays: stability and stabilization independent of delay.* IEEE Trans. Automat. Control, 1982, vol. AC-27, no. 2, pp. 367-375.
108. **Kamen E. W.:** *Correction to Linear systems with commensurate delays: stability and stabilization independent of delay.* IEEE Trans. Automat. Control, 1983, vol. AC-28, no. 2, pp. 248-249.
109. **Keel L. H., Bhattacharyya S. P.:** *Robust stability of interval matrices: a computational approach.* Int. J. Control, 1995, vol. 62, no. 6, pp. 1491-1506.
110. **Kim K. D., Bose N. K.:** *Vertex implications of stability for a class of delay-differential interval systems.* IEEE Trans. Circuits Syst., 1990, vol. 37, no. 7, pp. 969-972.
111. **Kogan J., Leizarowitz A.:** *Frequency domain criterion for robust stability of interval time-delay systems.* Automatica, 1995, vol. 31, no. 3, pp. 463-469.
112. **Kokame H., Kobayashi H., Mori T.:** *Robust H_∞ performance for linear delay-differential systems with time-varying uncertainties.* IEEE Trans. Automat. Control, 1998, vol. 43, no. 2, pp. 223-226.
113. **Kolmanovskii V. B., Niculescu S. I., Richard J. P.:** *On the Liapunov-Krasovskii functionals for stability analysis of linear delay systems.* Int. J. Control, 1999, vol. 72, no. 4, pp. 374-384.
114. **Kolmanovskij V. B., Nosov V. R.:** *Uстойчивость i периодические режимы регулируемых систем с последействием.* Nauka, Moskva 1981.

115. **Kolmanovskij V. B., Nosov V. R.:** *Sistemy s posledejstviem nejtralnogo tipa.* Avtom. i Telemekh., 1984, no. 1, s. 5-35.
116. **Kozera W.:** *Aproksymacja i stabilizacja odporna wielowymiarowych układów liniowych stacjonarnych ze skupionymi, współmiernymi opóźnieniami.* Dział Wyd. Wyższej Szkoły Morskiej w Szczecinie, Studia Nr 30, Szczecin 1999.
117. **Krasowski A. A., Pospiełow G. S.:** *Podstawy automatyki i cybernetyki technicznej.* WNT, Warszawa 1965.
118. **Kraus F., Anderson B. D. O., Mansour M.:** *Robust stability of polynomials with multilinear parameter dependence.* Int. J. Control, 1989, vol. 50, pp. 1745-1762.
119. **Kuang Y.:** *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics.* Academic Press, Boston 1993.
120. **Lee C. H.:** *D-stability of continuous time-delay systems subject to a class of highly structured perturbations.* IEEE Trans. Automat. Control, 1995, vol. 40, no. 10, pp. 1803-1807.
121. **Lee C. H.:** *Simple stabilizability criteria and memoryless state feedback control design for time-delay systems with time-varying perturbations.* IEEE Trans. Circuits Syst. I, 1998, vol. 45, no. 11, pp. 1211-1215.
122. **Leja F.:** *Funkcje zespolone.* PWN, Warszawa 1976.
123. **Levkovich A., Zeheb E., Cohen N.:** *Frequency response envelopes of a family of uncertain continuous-time systems.* IEEE Trans. Circuits Syst. I, 1995, vol. 42, pp. 156-165.
124. **Li X., De Souza C. E.:** *Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: a linear matrix inequality approach.* IEEE Trans. Automat. Control, 1997, vol. 42, no. 8, pp. 1144-1148.
125. **Lin S. H., Fong I. K., Juang Y. T., Kuo T. S., Hsu C. F.:** *Stability of perturbed polynomials based on the argument principle and Nyquist criterion.* Int. J. Control, 1989, vol. 50, no. 1, pp. 55-63.
126. **Louisell J.:** *Absolute stability in linear delay-differential systems: ill-posedness and robustness.* IEEE Trans. Automat. Control, 1995, vol. 40, no. 7, pp. 1288-1291.
127. **Luo J. S., Van Den Bosch P. P. J.:** *Independent of delay stability criteria for uncertain linear state space models.* Automatica, 1997, vol. 33, no. 2, pp. 171-179.

128. **MacDonald N.:** *Time Lags in Biological Models.* Lecture Notes in Biomathematics, vol. 27, Springer Verlag, Berlin 1978.
129. **Mahmoud M. S.:** *Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems.* Marcel Dekker, Inc., New York-Basel 2000.
130. **Mahmoud M. S., Al-Muhtairi N. F.:** *Design of robust controllers for time-delay systems.* IEEE Trans. Automat. Control, 1994, vol. 39, no. 5, pp. 995-999.
131. **Malek-Zavarei M., Jamshidi M.:** *Time Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications.* North-Holland Systems and Control Series, vol. 9, Amsterdam 1987.
132. **Manitius A. Z.:** *Feedback controllers for a wind tunnel model involving a delay: analytical design and numerical simulation.* IEEE Trans. Automat. Control, 1984, vol. AC-29, no. 12, pp. 1058-1068.
133. **Manitius A. Z., Tran H., Payre G., Roy R.:** *Computation of eigenvalues associated with functional differential equations.* SIAM J. Sci. Stat. Comput., 1987, vol. 8, no. 3, pp. 222-247 (Report, Math. Sci., Rensselaer Polytechnic Institute, 1984).
134. **Marshall J. E., Górecki H., Walton K., Korytowski A.:** *Time-Delay Systems Stability and Performance Criteria with Applications.* Ellis Horwood, Chichester 1992.
135. **Minnichelli R. J., Anagnost J. J., Desoer C. A.:** *An elementary proof of Kharitonov's stability theorem with extension.* IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no. 9, pp. 995-998.
136. **Moore R. E.:** *Interval Analysis.* Prentice Hall 1966.
137. **Mori T., Kokame H.:** *An extension of Kharitonov's theorem and its application.* Proc. Am. Control Conf., 1987, pp. 892-896.
138. **Nejmark J. L.:** *D-razbijeńije prostranstva kvazipolinomov.* Prikl. Mat. Mech., 1949, vol. XIII, no. 4, s. 349-380.
139. **Nejmark L., Kogan J., Leizarowitz A., Zeheb E.:** *On rational stabilizing controllers for interval delay systems.* W: **Dugard L., Verriest E. I. (Eds):** *Stability and Control of Time-Delay Systems.* Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 228. Springer-Verlag, London 1998, pp. 184-204.
140. **Niederliński A.:** *Systemy komputerowe automatyki, tom 1 i 2.* WNT, Warszawa 1984/1985.

141. **Olbrod A. W.:** *A sufficiently large time delay in feedback loop must destroy exponential stability of any decay rate.* IEEE Trans. Automat. Control, 1984, vol. AC-29, no. 4, pp. 367-368.
142. **Olbrod A. W., Igwe C.:** *Necessary and sufficient conditions for robust stability independent of delays and coefficient perturbations.* Proc. 34th Conf. on Decision and Control, 1995, pp. 392-394. New Orleans, U.S.A.
143. **Olbrod, A. W., Polis M. P., Igwe C.:** *A comment on „Vertex implications of stability for a class of delay-differential interval systems”.* IEEE Trans. Circuits Syst., 1992, vol. 39, no. 1, pp. 68-69.
144. **Polyak B. T.:** *Robustness analysis of multilinear perturbations.* W: **Mansour M., Balemi S., Truol W. (Eds):** *Robustness of Dynamic Systems with Parameter Uncertainties.* Birkhauser, Berlin 1992, pp. 93-104.
145. **Polyak B. T., Kogan J.:** *Necessary and sufficient conditions for robust stability of linear systems with multi-affine uncertainty structure.* IEEE Trans. Automat. Control, 1995, vol. 40, no. 7, pp. 1255-1260.
146. **Pontriagin L. S.:** *O nalach nekotorich prostych transcendentnych funkcij.* Izv. AN SSSR, Ser. Mat., 1942, vol. 6, s. 115-134.
147. **Rantzer A.:** *Stability conditions for polytopes of polynomials.* IEEE Trans. Automat. Control, 1992, vol. 37, no. 1, pp. 79-89.
148. **Rezvan V.:** *Absolutnaja ustojčivost' avtomatičeskich sistem s zapazdyvaniem.* Nauka, Moskva 1983.
149. **Shaked U., Yaesh I., Souza C. E.:** *Bounded real criteria for linear time-delay systems.* IEEE Trans. Automat. Control, 1998, vol. 43, no. 7, pp. 1016-1022.
150. **Shen S. K., Wang B. C., Lee T. T.:** *An improved algorithm for computing the boundary of parametric rotational functions.* IEEE Trans. Automat. Control, 1999, vol. 44, no. 1, pp. 227-231.
151. **Song S. H., Kim J. K.:** *H_∞ control of discrete-time linear systems with norm-bounded uncertainties and time delay in state.* Automatica, 1998, vol. 34, no. 1, pp. 137-139.
152. **Stepan G.:** *Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions.* Longman, Essex 1989.
153. **Su J. H.:** *The asymptotic stability of linear autonomous systems with commensurate time delays.* IEEE Trans. Automat. Control, 1995, vol. 40, no. 6, pp. 1114-1117.
154. **Su J. H.:** *Quantitative robustness measure of uncertain time delay systems via nonsingularity analysis.* IEEE Trans. Automat. Control, 1998, vol. 43, no. 5, pp. 729-732.
155. **Tian Y., Feng C., Xin X.:** *Robust stability of polynomials with multilinearly dependent coefficient perturbations.* IEEE Trans. Automat. Control, 1994, vol. 39, pp. 554-558.
156. **Trzasko W.:** *Charakterystyki częstotliwościowe układów o niepewnych parametrach.* Mat. VII Krajowej Konf. Nauk.-Dyd. „Automatyzacja i eksploatacja systemów sterowania”, 1999, s. 95-100, Gdynia.
157. **Trzasko W.:** *Charakterystyki częstotliwościowe układów o niepewnych parametrach z opóźnieniem.* Mat. XIII Krajowej Konferencji Automatyki, 1999, tom 1, s. 103-106, Opole.
158. **Trzasko W.:** *Analiza obiektów przedziałowych z opóźnieniem.* Zesz. Nauk. Polit. Biał., Elektryka, 1999, z. 15, s. 157-174.
159. **Tsyppkin Y. Z., Fu M.:** *Robust stability of time-delay systems with an uncertain time-delay constant.* Int. J. Control, 1993, vol. 57, no. 4, pp. 865-879.
160. **Tsyppkin Y. Z., Polyak B. T.:** *Frequency domain criteria for the l^p -robust stability of continuous linear systems.* IEEE Trans. Automat. Control, 1991, vol. 36, no. 12, pp. 1464-1469.
161. **Walton K., Marshall J. E.:** *Direct method for TDS stability analysis.* Proc. IEEE, Part D, Contr. Theory Appl., 1987, vol. 134, no. 2, pp. 101-107.
162. **Wang W. J., Wang R. J.:** *Robust stability for noncommensurate time-delay systems.* IEEE Trans. Circuits Syst. I, 1998, vol. 45, no. 4, pp. 507-511.
163. **Weinmann A.:** *Uncertain Models and Robust Control.* Springer Verlag, Wien 1991.
164. **Wierzbicki A.:** *Modele i wrażliwość układów sterowania.* WNT, Warszawa 1977.
165. **Wright W. C., Kerlin T. W.:** *An efficient computer oriented method for stability analysis of large multivariable systems.* Trans. ASME Journal Basic Eng., 1970, vol. 92, no. 2, pp. 279-286.
166. **Xu S. J., Rachid A., Darouach M.:** *Robustness analysis of interval matrices based on Kharitonov's theorem.* IEEE Trans. Automat. Control, 1998, vol. 43, no. 2, pp. 273-278.
167. **Yaniv O.:** *Quantitative Feedback Design of Linear and Nonlinear Control Systems.* Kluwer Academic Publishers, Norwell 1999.

168. **Zadeh L. A., Desoer C. A.:** *Linear Systems Theory - A State Space Approach*. McGraw-Hill, New York 1963.
169. **Zeheb E.:** *Necessary and sufficient conditions for root clustering of a polytope of polynomials in a simply connected domain*. IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no. 9, pp. 986-990.
170. **Žyvotovskij L. A.:** *Absolutnaja ustojčivost' rešenij differencialnych uravnenij s neskolkimi zapazdyvanijami*. Trudy Sem. po Teorii Uravn. s Otkl. Arg., 1969, vol. 7, s. 82-91.