

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

ROZPRAWY NAUKOWE NR 48

Mikołaj Busłowicz

**STABILNOŚĆ UKŁADÓW
LINIOWYCH STACJONARNYCH
O NIEPEWNYCH PARAMETRACH**

BIAŁYSTOK 1997

DZIAŁ WYDAWNICTW I POLIGRAFII

Wydanie publikacji dofinansowane
przez Komitet Badań Naukowych

Opiniodawcy:

prof. dr hab. inż. Tadeusz Kaczorek
prof. dr hab. Krzysztof Kuźmiński

Opracowanie redakcyjne – Jadwiga Żukowska
Skład komputerowy – Mikołaj Busłowicz
Teresa Dawidowicz
Rysunki – Mikołaj Busłowicz

ISSN 0867-096X

Skład i druk w Dziale Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej. Nakład 100 egz. Format B-5. Ark. wyd. 10,0. Ark. druk. 13,5. Oddano do druku i druk ukończono w grudniu 1997 roku. Zam. 171/97.

SPIS TREŚCI

	Strona
1. Wstęp	7
2. Matematyczny opis układów liniowych stacjonarnych z niepewnością	12
2.1. Modele matematyczne układów z niepewnością	12
2.1.1. Modele z niepewnością strukturalną	12
2.1.2. Modele z niepewnością niestukturalną	13
2.2. Przykłady układów o niepewnych parametrach	15
3. Podstawowe definicje i twierdzenia	24
3.1. Definicje odpornej stabilności rodziny wielomianów charakterystycznych	25
3.2. Definicje odpornej stabilności rodziny macierzy stanu	26
3.3. Wprowadzenie do teorii odpornej stabilności	29
4. Metody badania odpornej stabilności	34
4.1. Metoda zbioru spektralnego	34
4.2. Uogólnienie klasycznych analitycznych metod badania stabilności wielomianów charakterystycznych	36
4.2.1. Odporna L -stabilność	37
4.2.2. Odporna K -stabilność	40
4.3. Warunek wykluczenia zera	43
4.4. Metoda przestrzeni niepewnych parametrów	49
4.5. Metody badania odpornej stabilności rodziny macierzy stanu	59
5. Odporna stabilność wypukłej kombinacji dwóch wielomianów oraz macierzy	65
5.1. Odporna stabilność wypukłej kombinacji dwóch wielomianów	65
5.1.1. Metody graficzne	66
5.1.2. Metody analityczne	70
5.1.3. Metoda wykorzystująca warunek wzrostu Rantzera	78

5.2. Odporna stabilność wypukłej kombinacji dwóch macierzy	83	8.2.3.1. Rodzina wielomianów o symetrycznej strukturze niepewności	176
5.2.1. Metody graficzne	84	8.2.3.2. Rodzina wielomianów sprowadzalnych do postaci wzajemnie niezależnej strukturze niepewności	178
5.2.2. Metody analityczne badania odpornej L -stabilności	85	9. Odporna stabilność rodziny macierzy stanu	183
6. Odporna stabilność wielomianów przedziałowych	90	9.1. Odporna stabilność rodziny macierzy o elementach liniowo zależ- nych od niepewnych parametrów	185
6.1. Odporna L -stabilność wielomianu przedziałowego	91	9.2. Odporna stabilność macierzy przedziałowych	193
6.1.1. Badanie odpornej L -stabilności	91	9.3. Uwagi końcowe	197
6.1.2. Wyznaczanie dopuszczalnych przedziałów zmian wartości współczynników	102	10. Uwagi końcowe	200
6.1.2.1. Metody analityczne	103	Dodatek: Parametryczne opisy brzegów wybranych obszarów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej	204
6.1.2.2. Metody częstotliwościowe	109	Bibliografia	208
6.2. Odporna D -stabilność wielomianu przedziałowego	116		
7. Odporna stabilność rodziny wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów	123		
7.1. Zbiór wartości	125		
7.2. Warunek wykluczenia zera	129		
7.3. Twierdzenie krawędziowe	131		
7.3.1. Odporna stabilność wielomianu przedziałowego	137		
7.4. Metody funkcji testujących	139		
7.4.1. Metoda funkcji testującej $d(y)$	139		
7.4.2. Metoda funkcji testującej $T(y)$	143		
7.4.3. Metoda funkcji testującej $F(y)$	148		
7.4.4. Uwagi końcowe	154		
8. Odporna stabilność rodziny wielomianów o zależności współ- czynników od niepewnych parametrów ogólniejszej niż liniowa	156		
8.1. Charakterystyka problemu w przypadku ogólnym	157		
8.2. Odporna stabilność rodziny wielomianów o współczynnikach za- leżnych wieloliniowo od niepewnych parametrów	162		
8.2.1. Twierdzenie o odwzorowaniu i warunki dostateczne odpornej stabilności	163		
8.2.2. Podział zbioru wartości niepewnych parametrów i słabsze warunki dostateczne odpornej stabilności	171		
8.2.3. Warunki konieczne i wystarczające w pewnych przypadkach szczególnych	176		

1. WSTĘP

W procesie analizy lub syntezy układu regulacji automatycznej bazujemy na modelu matematycznym obiektu fizycznego. Taki model opisuje dynamikę rzeczywistego obiektu w sposób przybliżony. Różnica pomiędzy modelem a rzeczywistym obiektem jest określana jako niepewność modelu matematycznego. Typowe źródła niepewności modelu to tzw. niemodelowana dynamika (wysokoczęstotliwościowa), pominięcie nieliniowości, efekty redukcji rzędu modelu czy też możliwość zmian (perturbacji) parametrów obiektu fizycznego, zależnych od czynników środowiskowych, takich jak np. temperatura, prędkość wiatru czy proces starzenia się elementów. Niepewność modelu matematycznego jest często określana (dla prostoty sformułowań) jako niepewność fizycznego układu dynamicznego (obektu), pomimo że dotyczy ona tylko modelu matematycznego.

Dynamiczny układ liniowy stacjonarny można opisać albo w dziedzinie czasu za pomocą równań stanu, albo w dziedzinie częstotliwości za pomocą macierzy transmitancji operatorowych. Jeżeli przy tym opisie uwzględnimy niepewność, to otrzymamy model układu dynamicznego z niepewnością. Rozróżnia się modele z niepewnością strukturalną (struktura niepewności jest znana) oraz modele z niepewnością niestukturalną (struktura niepewności nie jest znana).

Układy dynamiczne, których modele matematyczne zawierają niepewność strukturalną są nazywane układami o niepewnych parametrach. Przyjmuje się najczęściej, że niepewne parametry mogą przyjmować swoje wartości ze znanych przedziałów liczbowych. Efektem niedokładnej znajomości parametrów modelu matematycznego jest niedokładna znajomość współczynników wielomianu charakterystycznego oraz elementów macierzy stanu.

Stabilność układu liniowego stacjonarnego jest w pełni określona przez rozkład jego biegunów, tj. zer wielomianu charakterystycznego lub wartości własnych macierzy stanu. Z tego powodu przy badaniu stabilności układów o niepewnych parametrach rozpatruje się stabilność wielomianów o niedokładnie znanych współczynnikach oraz stabilność macierzy o niedokładnie znanych elemen-

tach. Oznacza to, że rozpatruje się problem stabilności rodzin wielomianów charakterystycznych oraz rodzin macierzy stanu. Stabilność rodziny wielomianów charakterystycznych lub stabilność rodziny macierzy stanu nazywa się stabilnością odporną (krzepką).

Problem odpornej stabilności układów o niepewnych parametrach jest tematem wielu publikacji od około dwudziestu lat. Wiele z nich dotyczy problematyki odpornej stabilizacji i odpornego sterowania. Od kilkunastu lat jest mocno rozwijana teoria tzw. sterowania H_∞ , szczególnie w odniesieniu do układów wielowymiarowych o niestrukturalnej niepewności dotyczącej macierzy stanu oraz macierzy transmitancji operatorowych.

W ostatnich latach ukazało się w literaturze zagranicznej wiele monografii poświęconych wyżej wymienionym problemom. Należą do nich prace [6, 12, 21, 55, 67, 127, 138].

W literaturze polskiej ukazały się dotychczas trzy monografie ([25, 77, 81]) poświęcone układom o niepewnych parametrach. Praca [25] oraz rozdział 8 monografii [81] są poświęcone problemowi odpornej stabilności określonych rodzin wielomianów oraz rodzin macierzy. W monografii [77] podano metody projektowania układów regulacji automatycznej zachowujących pożądane właściwości dynamiczne, mimo zmieniających się parametrów obiektu.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie metod badania odpornej stabilności układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach, tj. metod badania odpornej stabilności rodziny wielomianów charakterystycznych oraz rodziny macierzy stanu.

W pracy rozpatruje się ogólniejszy rodzaj stabilności niż stabilność asymptotyczna układów ciągłych i dyskretnych, a mianowicie tzw. D -stabilność. Układ liniowy stacjonarny jest D -stabilny, gdy wszystkie jego bieguny leżą w zadanym obszarze D na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, gdzie D jest jednospójnym otwartym obszarem lub sumą skończonej liczby takich rozłącznych obszarów. Przypadkami szczególnymi D -stabilności jest stabilność asymptotyczna układów ciągłych (tzw. L -stabilność – D jest otwartą lewą półpłaszczyzną) oraz stabilność asymptotyczna układów dyskretnych (tzw. K -stabilność – D jest otwartym kołem jednostkowym).

W pracy rozpatrzono głównie problem badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów charakterystycznych. Jest mu poświęcona zasadnicza część pracy.

W **rozdziale 2** podano postaci modeli matematycznych układów liniowych stacjonarnych z niepewnością strukturalną i niestrukturalną. Podano też przykłady

układów o niepewnych parametrach. Są one wykorzystywane w dalszej części pracy do ilustracji metod badania odpornej D -stabilności.

Podstawowe definicje z zakresu odpornej D -stabilności zawiera **rozdział 3**. Podano w nim między innymi ścisłe definicje odpornej D -stabilności rodziny wielomianów charakterystycznych oraz rodziny macierzy stanu. Zostały one sformułowane w odniesieniu do rozkładu zer wielomianu nominalnego (odniesienia) rodziny wielomianów oraz rozkładu wartości własnych macierzy nominalnej (odniesienia) rodziny macierzy. W rozdziale 3 podano też podstawowe twierdzenia z zakresu odpornej D -stabilności rodziny wielomianów oraz rodziny macierzy, będące wprowadzeniem do teorii odpornej D -stabilności.

W **rozdziale 4** opisano ogólne metody, które są stosowane przy badaniu odpornej D -stabilności rodziny wielomianów charakterystycznych oraz rodziny macierzy stanu. Do grupy metod stosowanych przy badaniu odpornej D -stabilności rodziny wielomianów należą: metoda zbioru spektralnego, tzw. warunek wykluczenia zera oraz metoda przestrzeni niepewnych parametrów, będąca uogólnieniem znanej metody podziału D . Do grupy metod stosowanych przy badaniu odpornej L -stabilności i K -stabilności rodziny macierzy należą przede wszystkim metody wykorzystujące teorię stabilności Lapunowa oraz metody sprowadzające problem odpornej stabilności rodziny macierzy do problemu odpornej nieosobliwości innej rodziny macierzy, odpowiednio utworzonej. W rozdziale 4 podano też możliwości uogólnienia klasycznych analitycznych metod badania stabilności, takich jak metoda Hurwitza czy metoda Jury, do badania odpornej L -stabilności oraz K -stabilności rodziny wielomianów. Wprowadzono pojęcie unormowanego (względem wielomianu nominalnego rodziny wielomianów) zbioru wartości i sformułowano warunek wykluczenia zera (odgrywający istotną rolę w teorii odpornej D -stabilności) w odniesieniu do tego zbioru wartości.

Rozdział 5 jest poświęcony problemowi badania odpornej D -stabilności wypukłej kombinacji dwóch wielomianów oraz dwóch macierzy. Podano w nim analityczne warunki odpornej L -stabilności oraz K -stabilności dla wielomianów oraz analityczne warunki odpornej L -stabilności dla macierzy. Zarówno dla wypukłej kombinacji wielomianów jak i dla macierzy podano graficzne metody badania odpornej D -stabilności, sformułowane w odniesieniu do wprowadzonego w rozdziale 4 unormowanego zbioru wartości.

W **rozdziale 6** rozpatrzono problem badania odpornej stabilności wielomianów przedziałowych (rodziny wielomianów z przedziałowym oszacowaniem wartości współczynników). Do badania L -stabilności takich wielomianów służy znane

twierdzenie Charitonowa [46]. Sprowadza ono problem odpornej L -stabilności wielomianu przedziałowego (nieskończona rodzina wielomianów) do problemu L -stabilności tylko czterech wielomianów, zwanych wielomianami Charitonowa. Twierdzenie Charitonowa, opublikowane w 1978 roku, spowodowało dynamiczny rozwój teorii odpornej stabilności rodziny wielomianów oraz rodziny macierzy. Do badania odpornej L -stabilności wielomianów przedziałowych można też stosować metody graficzne, podane w rozdziale 6. Jedną z nich jest tzw. metoda unormowanej funkcji testującej, zaproponowana w punkcie 6.1.1. W rozdziale 6 podano też proste metody analityczne służące do wyznaczania dopuszczalnych przedziałów zmian wartości poszczególnych współczynników danego L -stabilnego wielomianu (zwanego nominalnym), takich, że ten wielomian pozostaje L -stabilny dla dowolnych wartości współczynników z tych przedziałów.

Ponieważ twierdzenia Charitonowa nie da się uogólnić na przypadek badania odpornej D -stabilności wielomianu przedziałowego (gdy D jest obszarem innym od otwartej lewej półpłaszczyzny), oddzielny punkt rozdziału 6 poświęcono problemowi badania odpornej D -stabilności takiego wielomianu.

Rozdział 7 jest poświęcony problemowi badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów. Do badania odpornej D -stabilności takiej rodziny służy tzw. twierdzenie krawędziowe, będące odpowiednikiem twierdzenia Charitonowa dla wielomianów przedziałowych. Zostało ono podane w pracy [20] w 1988 roku. W rozdziale 7 dowód twierdzenia krawędziowego został podany w inny sposób niż w [20], z wykorzystaniem właściwości zbioru wartości. Twierdzenie krawędziowe sprowadza problem badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów do problemu badania odpornej D -stabilności tzw. wielomianów krawędziowych, odpowiadających poszczególnym krawędziom zbioru wartości niepewnych parametrów. Ponieważ wielomiany krawędziowe są to kombinacje wypukłe dwóch wielomianów, do badania ich D -stabilności można stosować metody podane w rozdziale 5.

Praktyczne stosowanie twierdzenia krawędziowego nie jest dogodne przy dużej liczbie niepewnych parametrów z powodu konieczności badania odpornej D -stabilności dużej liczby wielomianów krawędziowych. Aby uniknąć tej niedogodności, należy stosować tzw. metody funkcji testujących. Pozwalają one na jednocześnie badanie odpornej D -stabilności wszystkich wielomianów krawędziowych. Trzy takie metody zostały opracowane przez autora niniejszej pracy. Są one podane w punkcie 7.4 na bazie wcześniejszych publikacji.

Rozdział 8 jest poświęcony problemowi badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów, których współczynniki zależą od niepewnych parametrów w sposób ogólniejszy niż liniowy. Podano w nim krótką charakterystykę tego problemu w przypadku ogólnym oraz dokładnie rozpatrzono problem badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów o współczynnikach będących wieloliniowymi funkcjami niepewnych parametrów. Do badania odpornej D -stabilności takiej rodziny wielomianów zaproponowano stosowanie (jako warunków typu dostatecznego w przypadku ogólnym) metod funkcji testujących, będących uogólnieniem metod podanych w rozdziale 7.

W **rozdziale 9** podano wybrane metody badania odpornej D -stabilności określonych rodzin macierzy o niepewnych elementach, tj. rodziny macierzy o elementach zależnych liniowo od niepewnych parametrów oraz macierzy przedziałowej (tj. rodziny macierzy z przedziałowym oszacowaniem wartości elementów). Do sprawdzania warunku dostatecznego odpornej D -stabilności pewnego przypadku szczególnego rodziny macierzy o elementach zależnych liniowo od niepewnych parametrów zaproponowano stosowanie metod funkcji testujących, podanych w rozdziale 8. Dokonano też krótkiego przeglądu prac z zakresu odpornej L -stabilności i K -stabilności rodziny macierzy.

W **rozdziale 10** krótko podsumowano rezultaty pracy.

W Dodatku podano parametryczne opisy brzegów wybranych obszarów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Ich znajomość jest niezbędna przy badaniu odpornej D -stabilności metodami funkcji testujących.

2. MATEMATYCZNY OPIS UKŁADÓW LINIOWYCH STACJONARNYCH Z NIEPEWNOŚCIĄ

2.1. Modele matematyczne układów z niepewnością

Dynamiczny układ liniowy stacjonarny z niepewnością można opisać albo w dziedzinie czasu za pomocą równań stanu, albo w dziedzinie częstotliwości za pomocą macierzy transmitancji operatorowych. Biorąc pod uwagę różne sposoby uwzględniania niepewności, podane między innymi w pracach [55, 60, 126], modele układów z niepewnością można sklasyfikować w sposób podany poniżej.

2.1.1. Modele z niepewnością strukturalną

A. Model w przestrzeni stanów

Model w przestrzeni stanów ma postać

$$\dot{x}(t) = A(q)x(t) + B(q)u(t), \quad (2.1a)$$

$$y(t) = C(q)x(t), \quad (2.1b)$$

dla układu ciągłego oraz

$$x(k+1) = A(q)x(k) + B(q)u(k), \quad (2.2a)$$

$$y(k) = C(q)x(k), \quad (2.2b)$$

dla układu dyskretnego, przy czym $q \in Q$, gdzie $q = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T$ jest wektorem niepewnych fizycznych parametrów układu dynamicznego, a elementy macierzy $A(q)$, $B(q)$ i $C(q)$ są ciągłymi funkcjami niepewnych parametrów, które mogą przyjmować dowolne wartości z zadanego zbioru Q w rzeczywistej przestrzeni m -wymiarowej. Zazwyczaj przyjmuje się, że zbiór Q wartości niepewnych parametrów jest hiperprostokątnością, tj.

$$Q = \{q: q_k \in [q_k^-, q_k^+], q_k^- < q_k^+, k = 1, 2, \dots, m\}. \quad (2.3)$$

B. Modele w dziedzinie częstotliwości

- 1) Model w postaci nieskończonej rodziny macierzy transmitancji operatorowych o znanej postaci

$$\{G(s, q): q \in Q\}, \quad (2.4)$$

gdzie $q = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T$ jest wektorem niepewnych fizycznych parametrów układu dynamicznego, zbiór Q ma postać (2.3), a elementy macierzy transmitancji operatorowych $G(s, q)$ są wymiernymi funkcjami zmiennej s , zależącymi w sposób ciągły od niepewnych parametrów. Dla każdego ustalonego $q \in Q$ macierz $G(s, q)$ ma dokładnie znane współczynniki.

- 2) Model w postaci skończonej rodziny macierzy transmitancji operatorowych o znanej postaci

$$\{G_q(s): q \in \{1, 2, \dots, m\}\}. \quad (2.5)$$

2.1.2. Modele z niepewnością niestukturalną

A. Model w przestrzeni stanów

Model w przestrzeni stanów ma postać

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A)x(t) + (B_0 + \Delta B)u(t), \quad (2.6a)$$

$$y(t) = (C_0 + \Delta C)x(t), \quad (2.6b)$$

dla układu ciągłego, oraz

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A}_0 + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x}(k) + (\mathbf{B}_0 + \Delta\mathbf{B})\mathbf{u}(k), \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{y}(k) = (\mathbf{C}_0 + \Delta\mathbf{C})\mathbf{x}(k), \quad (2.7b)$$

dla układu dyskretnego, gdzie $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$ i $\mathbf{C}_0$ są to nominalne wartości macierzy stanu, wejść i wyjść, odpowiednio, zaś $\Delta\mathbf{A}$, $\Delta\mathbf{B}$ i $\Delta\mathbf{C}$ są to nieznane macierze perturbacji (zaburzeń) odpowiednich macierzy, takie, że $\|\Delta\mathbf{A}\| \leq a$, $\|\Delta\mathbf{B}\| \leq b$ oraz $\|\Delta\mathbf{C}\| \leq c$, przy czym liczby a , b i c są znane. Symbol $\|\cdot\|$ oznacza normę macierzy.

B. Modele w dziedzinie częstotliwości

1) Model z addytywną reprezentacją niepewności ma postać

$$\{\mathbf{G}_0(s) + \mathbf{L}(s): \|\mathbf{L}(j\omega)\| < |l(j\omega)|, \forall \omega \geq 0\}, \quad (2.8)$$

gdzie $\mathbf{G}_0(s)$ jest nominalną macierzą transmitancji operatorowych, $l(s)$ jest znaną funkcją wymierną, a $\mathbf{L}(s)$ jest całkowicie nieznaną macierzą (reprezentuje ona niepewność), której elementy są funkcjami wymiernymi zmiennej s .

2) Model z multiplikatywną reprezentacją niepewności ma postać

$$\{(\mathbf{I} + \mathbf{L}(s))\mathbf{G}_0(s): \|\mathbf{L}(j\omega)\| < |l(j\omega)|, \forall \omega \geq 0\}, \quad (2.9)$$

lub

$$\{\mathbf{G}_0(s)(\mathbf{I} + \mathbf{R}(s)): \|\mathbf{R}(j\omega)\| < |r(j\omega)|, \forall \omega \geq 0\}, \quad (2.10)$$

gdzie $\mathbf{G}_0(s)$ jest nominalną macierzą transmitancji operatorowych, $l(s)$ i $r(s)$ są to znane funkcje wymierne, a $\mathbf{L}(s)$ i $\mathbf{R}(s)$ są to nieznane macierze reprezentujące niepewność.

Oprócz wyżej wymienionych modeli można też rozpatrywać w dziedzinie częstotliwości modele z niepewnością strukturalną i niestrukturalną jednocześnie [126].

Układy dynamiczne, których modele matematyczne zawierają niepewność strukturalną są nazywane układami o niepewnych parametrach.

Analizując problem odpornej stabilności układów o niepewnych parametrach będziemy rozpatrywać układy opisane równaniami stanu (2.1) lub (2.2) oraz rodziną macierzy transmitancji operatorowych (2.4). Badanie odpornej stabilności układu opisanego rodziną macierzy transmitancji operatorowych (2.5) nie stanowi problemu, bowiem jest to skończona rodzina transmitancji.

Ponieważ badanie odpornej stabilności układów opisanych rodziną macierzy transmitancji operatorowych (2.4) sprowadzimy do badania położenia ich biegunów, będziemy przyjmować, że dla każdego ustalonego $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ macierz $\mathbf{G}(s, \mathbf{q})$ jest właściwa, tzn. $\mathbf{G}(\infty, \mathbf{q})$ jest macierzą ograniczoną (o ograniczonych elementach). Wynika to z faktu, że układy o niewłaściwych macierzach transmitancji operatorowych mogą być niestabilne nawet wtedy, gdy ich bieguny leżą w obszarze stabilności (np. w otwartej lewej półpłaszczyźnie w przypadku układów ciągłych). Na przykład ciągły układ o niewłaściwej transmitancji operatorowej $s^2/(s+1)$, którego biegun ma ujemną część rzeczywistą, jest niestabilny.

2.2. Przykłady układów o niepewnych parametrach

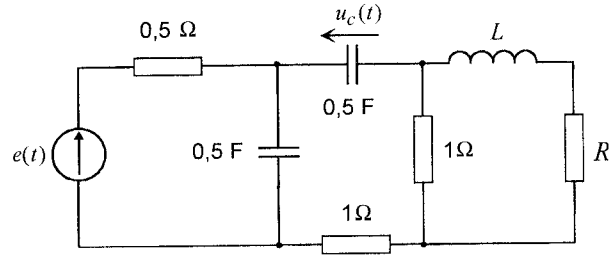
Przykład 2.1. Obwód elektryczny

Rozpatrzmy obwód elektryczny, którego schemat jest przedstawiony na rysunku 2.1. Napięciem wejściowym jest $e(t)$, a napięciem wyjściowym jest $u_c(t)$. Przyjmując, że wartości rezystancji R oraz indukcyjności L nie są dokładnie znane, przy czym $R = 1 + q_1$, $L = 1 + q_2$, gdzie $q_1 \in [-0.1, 0.1]$, $q_2 \in [-0.1, 0.1]$, model matematyczny obwodu można przedstawić w postaci rodziny transmitancji operatorowych (2.4), gdzie

$$G(s, \mathbf{q}) = \frac{s(1 + q_2) + 2 + q_1}{s^3 0.25(1 + q_2) + s^2(1.875 + 0.25q_1 + 1.5q_2) + s(3.5 + 1.5q_1 + q_2) + 2 + q_1}, \quad (2.11)$$

$\mathbf{q} \in Q$, przy czym $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$ jest wektorem odchyłek wartości rezystancji R oraz indukcyjności L od wartości nominalnych $R = 1 \text{ } [\Omega]$ i $L = 1 \text{ } [\text{H}]$, zaś

$$Q = \{\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T : q_k \in [-0.1, 0.1], k = 1, 2\}. \quad (2.12)$$



Rys. 2.1. Schemat obwodu do przykładu 2.1

Przykład 2.2. Układ regulacji położenia [136]

Rozpatrzmy układ automatycznej regulacji położenia z obcowzbudnym silnikiem prądu stałego, sterowanym od strony twornika przy stałym strumieniu wzbudzenia.

Zlinearyzowany układ równań, opisujących silnik, ma postać

$$U(t) - E(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}, \quad (2.13)$$

$$E(t) = K \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad (2.14)$$

$$M(t) = Ki(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad (2.15)$$

gdzie:

$U(t)$ – napięcie twornika,

$i(t)$ – prąd twornika,

R i L – rezystancja i indukcyjność twornika,

$E(t)$ – siła przeciwelektromotoryczna,

$\theta(t)$ – kąt obrotu wału,

$M(t)$ – moment obrotowy silnika,

J i B – moment bezwładności na wale twornika i współczynnik tarcia lepkiego,

K – stały współczynnik.

Przyjmijmy, że $R = 2 \text{ } [\Omega]$, $K = 1 \text{ } [\text{Vs}]$, $B = 0.1 \text{ } [\text{kgm}^2/\text{s}]$, niepewnymi zaś parametrami są: wartość momentu bezwładności J oraz wartość indukcyjności L , przy czym $0.01 \leq J \leq 0.1 \text{ } [\text{kgm}^2]$, $0.05 \leq L \leq 0.1 \text{ } [\text{H}]$.

Przyjmując $\mathbf{x}(t) = [\theta(t), \dot{\theta}(t), i(t)]^T$ oraz $y(t) = \theta(t)$ otrzymamy model silnika w postaci równań stanu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (2.16)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (2.17)$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1/J & 1/J \\ 0 & -1/L & -2/L \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]. \quad (2.18)$$

Stosując sprzężenie zwrotne $u(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + r(t)$, gdzie $\mathbf{F} = [-1 \ 1 \ 1]$, a $r(t)$ jest zadaniem położeniem kątowym wału twornika, otrzymamy model układu regulacji położenia w postaci równań stanu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{q})r(t), \quad (2.19)$$

$$y(t) = \mathbf{C}(\mathbf{q})\mathbf{x}(t), \quad (2.20)$$

gdzie

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1q_2 & q_2 \\ -q_1 & 0 & -q_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}(\mathbf{q}) = \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0], \quad (2.21)$$

$\mathbf{q} \in Q$, przy czym $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$, $q_1 = 1/L$, $q_2 = 1/J$ oraz

$$Q = \{\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T : q_1 \in [10, 20], q_2 \in [10, 100]\}. \quad (2.22)$$

Rozpatrywany układ regulacji o niepewnych parametrach można też zapisać w postaci rodziny transmitancji operatorowych (2.4), gdzie

$$G_z(s, q) = C(sI - A(q))^{-1} B(q) = \frac{q_1 q_2}{s^3 + s^2(q_1 + 0.1q_2) + 0.1q_1 q_2 s + q_1 q_2}, \quad (2.23)$$

$q \in Q$, przy czym zbiór Q ma postać (2.22).

Przykład 2.3. Sterowanie automatyczne orientacją w przestrzeni satelity badawczego [60]

Modelem fizycznym satelity badawczego dokonującego pomiarów astronomicznych (zdjęć) podczas lotu na orbicie wokółziemskiej są dwie masy połączone giętkim wałem, charakteryzującym się współczynnikiem sprężystości k i współczynnikiem tłumienia lepkiego d . Wartości tych współczynników podlegają zmianom wraz ze zmianami temperatury, przy czym $0.09 \leq k \leq 0.4$, zaś $0.04\sqrt{0.1k} \leq d \leq \sqrt{0.1k}$.

Linijowe równania ruchu satelity mają postać

$$J_1 \ddot{\theta}_1(t) + d(\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t)) + k(\theta_1(t) - \theta_2(t)) = T_c(t), \quad (2.24)$$

$$J_1 \ddot{\theta}_2(t) + d(\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_1(t)) + k(\theta_2(t) - \theta_1(t)) = 0, \quad (2.25)$$

gdzie J_1 i J_2 są to momenty bezwładności poszczególnych mas, $\theta_1(t)$ i $\theta_2(t)$ są to odchylenia katowe tych mas od położeń zadanych, a $T_c(t)$ jest sterującym momentem obrotowym.

Dla $J_1 = 1$ i $J_2 = 0.1$ transmitancja operatorowa satelity ma postać

$$G(s, q) = \frac{\theta_1(s)}{T_c(s)} = \frac{10q_2 s + 10q_1}{s^2(s^2 + 11q_2 s + 11q_1)}, \quad (2.26)$$

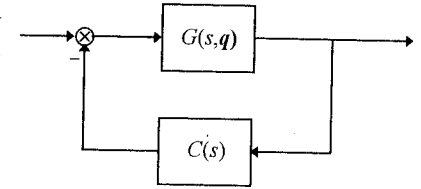
gdzie $q = [q_1, q_2]^T$, przy czym $q_1 = k$, $q_2 = d$.

W celu automatycznego sterowania położeniem satelity zastosowano układ regulacji automatycznej o schemacie blokowym przedstawionym na rysunku 2.2, gdzie

$$C(s) = 0.5(1.4s + 1) \frac{(s/0.9)^2 + 1}{[(s/25) + 1]^2}. \quad (2.27)$$

Na transmitancję operatorową korektora (2.27) składa się transmitancja operatorowa $G_r(s) = 0.5(1.4s + 1)$ regulatora PD oraz transmitancja operatorowa filtra środkowo-zaporowego.

Transmitancja operatorowa układu zamkniętego złożonego z obiektu (2.26) i korektora (2.27) ma postać



Rys. 2.2. Układ regulacji automatycznej z obiektem o niepewnych parametrach

$$G_z(s, q) = \frac{0.5 \cdot 625}{0.81} \cdot \frac{(q_1 s + q_2)(1.4s + 1)(s^2 + 0.81)}{w(s, q)}, \quad (2.28)$$

gdzie

$$w(s, q) = s^6 + s^5(50 + 11q_2) + s^4(625 + 11q_1 + 5951.23q_2) + s^3(5951.23q_1 + 10733q_2) + s^2(10733q_1 + 4375q_2) + s(4375q_1 + 3125q_2) + 3125q_1, \quad (2.29)$$

$q \in Q$, przy czym

$$Q = \{q = [q_1, q_2]^T : q_1 \in [0.09, 0.4], q_2 \in [0.0038, 0.04]\}. \quad (2.30)$$

Przykład 2.4. Automatyczne sterowanie kierunkiem ruchu pojazdu [5, 6]

Rozpatrzmy problem automatycznego sterowania ruchem autobusu, który porusza się bez udziału człowieka po zadanej drodze. Trajektorja ruchu jest zadana przez przewód umieszczony pod powierzchnią jezdni. Pole elektromagnetyczne wytwarzane przez ten przewód jest mierzone przez czujniki umieszczone w pojeździe, dzięki czemu w każdej chwili jest znane odchylenie toru ruchu autobusu od toru zadanego. Zadaniem układu regulacji automatycznej jest bieżące korygowanie toru ruchu autobusu (za pomocą silników sterujących), tak aby minimalizować odchylenie od zadanego toru.

Układ regulacji automatycznej ruchem autobusu Daimler Benz O 305 ma schemat blokowy pokazany na rysunku 2.2, gdzie

$$G(s, \mathbf{q}) = \frac{q_1(s^2 609.8 q_1 q_2 + s 388600 + 48280 q_1)}{s^3(s^2 q_1^2 q_2^2 + s 1077 q_1 q_2 + 270000 + 16.8 q_1^2 q_2)}, \quad (2.31)$$

$$C(s) = \frac{2344s^2 + 10938s + 9375}{s^3 + 50s^2 + 1250s + 15625}, \quad (2.32)$$

a niepewnymi parametrami są: $q_1 = v$ – prędkość autobusu, $q_2 = m / \mu$ – iloraz masy autobusu (zależnej od liczby pasażerów) i współczynnika tarcia (zależnego od stanu nawierzchni drogi, np. przy nawierzchni suchej $\mu = 1$), przy czym $q_1 \in [3, 20]$ [m/s], $q_2 \in [9.95, 32]$ [tony].

Transmitancja operatorowa układu zamkniętego złożonego z obiektu (2.31) i korektora (2.32) ma postać

$$G_z(s, \mathbf{q}) = \frac{q_1(s^2 609.8 q_1 q_2 + s 388600 + 48280 q_1)(2344s^2 + 10938s + 9375)}{w(s, \mathbf{q})}, \quad (2.33)$$

gdzie

$$w(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^8 a_i(\mathbf{q}) s^i, \quad \mathbf{q} \in Q, \quad (2.34)$$

$$a_8(\mathbf{q}) = q_1^2 q_2^2,$$

$$a_7(\mathbf{q}) = 50 q_1^2 q_2^2 + 1080 q_1 q_2,$$

$$a_6(\mathbf{q}) = 1.25 \cdot 10^3 q_1^2 q_2^2 + 16.8 q_1^2 q_2 + 53.9 \cdot 10^3 q_1 q_2 + 270 \cdot 10^3,$$

$$a_5(\mathbf{q}) = 15.6 \cdot 10^3 q_1^2 q_2^2 + 840 q_1^2 q_2 + 1.35 \cdot 10^6 q_1 q_2 + 13.5 \cdot 10^6,$$

$$a_4(\mathbf{q}) = 1.45 \cdot 10^6 q_1^2 q_2 + 16.8 \cdot 10^6 q_1 q_2 + 338 \cdot 10^6,$$

$$a_3(\mathbf{q}) = 6.93 \cdot 10^6 q_1^2 q_2 + 911 \cdot 10^6 q_1 + 4220 \cdot 10^6,$$

$$a_2(\mathbf{q}) = 5.72 \cdot 10^6 q_1^2 q_2 + 113 \cdot 10^6 q_1^2 + 4250 \cdot 10^6 q_1,$$

$$a_1(\mathbf{q}) = 528 \cdot 10^6 q_1^2 + 3640 \cdot 10^6 q_1,$$

$$a_0(\mathbf{q}) = 453 \cdot 10^6 q_1^2,$$

przy czym

$$Q = \{\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T : q_1 \in [3, 20], q_2 \in [9.95, 32]\}. \quad (2.35)$$

Przykład 2.5. Sterowanie pochyleniem wzdłużnym samolotu [12, 14]

Rozpatrzmy problem regulacji wielkości kąta pochylenia wzdłużnego samolotu Concorde podczas lotu z prędkością ponaddźwiękową.

Dynamikę samolotu można opisać transmitancją operatorową

$$G(s) = \frac{K(10s + 1)}{(s^2 / \omega_n^2) + (2\xi s / \omega_n) + 1}, \quad (2.36)$$

gdzie niepewnymi parametrami są: współczynnik wzmocnienia K , pulsacja drgań własnych nie tłumionych ω_n oraz względny współczynnik tłumienia ξ . K może przyjmować wartości z przedziału $[0.02, 0.2]$, w zależności od obciążenia samolotu (wartość nominalna $K_0 = 0.11$), wartość pulsacji ω_n zmienia się w zakresie $\pm 10\%$ wartości nominalnej $\omega_{n0} = 2.5$, a wartość współczynnika tłumienia ξ może zmieniać się w zakresie $\pm 10\%$ wartości nominalnej $\xi_0 = 0.3$.

Przyjmując $K = K_0 + q_1 = 0.11 + q_1$; $2\xi\omega_n = 2\xi_0\omega_{n0} + q_2 = 1.5 + q_2$; $\omega_n^2 = \omega_{n0}^2 + q_3 = 6.25 + q_3$, transmitancję (2.36) napiszemy w postaci

$$G(s, \mathbf{q}) = 39.06 \frac{s(0.176 + 1.6q_1) + (0.0176 + 0.16q_1)}{s^2 + s(1.5 + q_2) + (6.25 + q_3)}, \quad (2.37)$$

gdzie $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$, oraz $q_1 \in [-0.09, 0.09]$, $q_2 \in [-0.285, 0.315]$, $q_3 \in [-1.1875, 1.3125]$.

Schemat blokowy układu regulacji pochyleniem wzdłużnym samolotu ma postać jak na rysunku 2.2, przy czym

$$C(s) = 1280 \frac{25s^2 + 100s + 100}{s^5 + 80.1s^4 + 3808s^3 + 56380s^2 + 255600s + 25000}. \quad (2.38)$$

Transmitancja operatorowa układu zamkniętego ma postać

$$G_z(s, q) = \frac{49996.8[s(0.176 + 1.6q_1) + (0.0176 + 0.16q_1)](25s^2 + 100s + 100)}{w(s, q)}, \quad (2.39)$$

gdzie

$$w(s, q) = \sum_{i=0}^7 a_i(q)s^i, \quad q \in Q, \quad (2.40)$$

przy czym

$$\begin{aligned} a_7(q) &= 1, \\ a_6(q) &= 81.6 + q_2, \\ a_5(q) &= 3934.4 + 80.1q_2 + q_3, \\ a_4(q) &= 62592.63 + 3808q_2 + 80.1q_3, \\ a_3(q) &= 583955.92 + 1999872q_1 + 56380q_2 + 3808q_3, \\ a_2(q) &= 1662717.27 + 8019486.72q_1 + 255600q_2 + 56380q_3, \\ a_1(q) &= 2602938.05 + 8079482.88q_1 + 25000q_2 + 255600q_3, \\ a_0(q) &= 244244.37 + 79994.88q_1 + 25000q_3, \end{aligned}$$

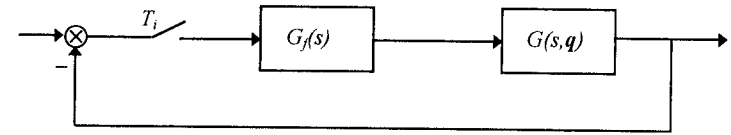
$$Q = \{q: q_1 \in [-0.09, 0.09], q_2 \in [-0.285, 0.315], q_3 \in [-1.1875, 1.3125]\}. \quad (2.41)$$

Przykład 2.6. Układ dyskretny

Rozpatrzmy dyskretny układ regulacji automatycznej, którego schemat blokowy jest przedstawiony na rysunku 2.3. Składa się on z członu formującego (ekstrapolatora zerowego rzędu) o transmitancji operatorowej $G_f(s) = (1 - \exp(-sT_i))/s$, gdzie T_i jest okresem impulsowania, oraz obiektu o niepewnych parametrach, o transmitancji operatorowej

$$G(s, q) = \frac{q_1 q_2}{s(s + q_2)}, \quad q = [q_1, q_2]^T, \quad (2.42)$$

gdzie $q_1 = k$ jest wzmocnieniem w układzie otwartym, a $q_2 = 1/T$ jest odwrotnością stałej czasowej obiektu, przy czym $q_1 \in [1, 3]$, $q_2 \in [2.5, 4]$.



Rys. 2.3. Układ dyskretny z obiektem o niepewnych parametrach

Transmitancja dyskretna układu zamkniętego ma postać

$$G_z(z, q) = L(z, q) / M(z, q), \quad q \in Q, \quad (2.43)$$

gdzie

$$L(z, q) = q_1[z(q_2 T_i - 1 + \exp(-q_2 T_i)) + 1 - \exp(-q_2 T_i) - q_2 T_i \exp(-q_2 T_i)], \quad (2.44)$$

$$M(z, q) = a_2(q)z^2 + a_1(q)z + a_0(q), \quad (2.45)$$

przy czym

$$\begin{aligned} a_2(q) &= q_2, \\ a_1(q) &= q_1[q_2 T_i - 1 + \exp(-q_2 T_i)] - q_2(1 + \exp(-q_2 T_i)), \\ a_0(q) &= q_1[1 - \exp(-q_2 T_i) - q_2 T_i \exp(-q_2 T_i)] + q_2 \exp(-q_2 T_i), \\ Q &= \{q = [q_1, q_2]^T: q_1 \in [1, 3], q_2 \in [2.5, 4]\}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

3. PODSTAWOWE DEFINICJE I TWIERDZENIA

Stabilność dynamicznego układu liniowego stacjonarnego jest całkowicie określona przez rozkład zer jego wielomianu charakterystycznego lub, równoważnie, przez rozkład wartości własnych jego macierzy stanu. Z tego powodu, dla prostoty sformułowań, będziemy równoważnie mówić o stabilności układu dynamicznego i jego wielomianu charakterystycznego lub jego macierzy stanu.

Analizując problem stabilności układów o niepewnych parametrach będziemy rozpatrywać stabilność wielomianów o niedokładnie znanych współczynnikach oraz stabilność macierzy o niedokładnie znanych elementach. W rozważaniach ograniczymy się głównie do wielomianów o rzeczywistych współczynnikach oraz macierzy o rzeczywistych elementach.

Niech D będzie jednospójnym otwartym obszarem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej lub sumą skończonej liczby takich rozłącznych obszarów, tzn.

$$D = \bigcup_{i=1}^N D_i, \quad D_i \cap D_k = \emptyset \quad \text{dla } i \neq k. \quad (3.1)$$

Założmy ponadto, że obszar D jest symetryczny względem osi rzeczywistej.

Przykłady pojedynczych obszarów D są podane w Dodatku. Przykładem obszaru D złożonego z kilku rozłącznych podobszarów jest obszar rozpatrywany w przykładzie 7.6.

Weźmy pod uwagę wielomian $w(s)$ o dokładnie znanych współczynnikach rzeczywistych lub zespolonych oraz kwadratową macierz A o znanych elementach, też rzeczywistych lub zespolonych.

Definicja 3.1. Wielomian $w(s)$ będziemy nazywać D -stabilnym, jeżeli wszystkie jego zera leżą w obszarze D . $\square$

Definicja 3.2. Macierz A będziemy nazywać D -stabilną, jeżeli wszystkie jej wartości własne leżą w obszarze D . $\square$

Pojęcie D -stabilności jest ogólniejsze od pojęcia asymptotycznej stabilności układów ciągłych (D jest otwartą lewą półpłaszczyzną) i dyskretnych (D jest otwartym kołem jednostkowym). Dlatego też wprowadźmy dodatkowe, podane poniżej definicje.

Definicja 3.3. Wielomian $w(s)$ będziemy nazywać L -stabilnym (K -stabilnym), jeżeli wszystkie jego zera leżą w otwartej lewej półpłaszczyźnie (w otwartym kole jednostkowym). $\square$

Definicja 3.4. Macierz A będziemy nazywać L -stabilną (K -stabilną), jeżeli wszystkie jej wartości własne leżą w otwartej lewej półpłaszczyźnie (w otwartym kole jednostkowym). $\square$

3.1. Definicje odpornej stabilności rodziny wielomianów charakterystycznych

Wielomian charakterystyczny układu liniowego stacjonarnego o niepewnych parametrach można przedstawić w postaci

$$w(s, q) = \sum_{i=0}^n a_i(q) s^i, \quad q \in Q, \quad (3.2)$$

gdzie $q = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T$ jest wektorem niepewnych fizycznych parametrów układu, współczynniki $a_i(q)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) są ciągłymi funkcjami swoich argumentów, zaś zbiór Q wartości niepewnych parametrów jest m -wymiarowym prostopadłościem, o postaci

$$Q = \{q: q_k \in [q_k^-, q_k^+], q_k^- < q_k^+, k = 1, 2, \dots, m\}. \quad (3.3)$$

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że wielomian (3.2) jest wielomianem stałego stopnia, tzn. $a_n(q) \neq 0, \forall q \in Q$. Nie zmniejszając ogólności rozważań będziemy przyjmować, że $a_n(q) > 0, \forall q \in Q$.

Dla każdego ustalonego $q \in Q$ wielomian (3.2) w przestrzeni swoich współczynników jest reprezentowany przez wektor $a(q) = [a_0(q), a_1(q), \dots, a_n(q)]^T$. Natomiast rodzina wielomianów

$$W(s, Q) = \{w(s, q) : q \in Q\} \quad (3.4)$$

w przestrzeni współczynników wielomianu (3.2) jest reprezentowana przez zbiór

$$A = \{a(q) : q \in Q\}. \quad (3.5)$$

Oznaczmy przez $w_0(s) = w(s, q_0)$ wielomian nominalny (odniesienia) rodziny (3.4). Odpowiada on nominalnym wartościom niepewnych parametrów q_k^0 , $k = 1, 2, \dots, m$. Jeżeli nie są one określone, to za nominalne można przyjąć np. wartości obliczone ze wzoru

$$q_k^0 = 0.5(q_k^- + q_k^+), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3.6)$$

Założmy, że wielomian nominalny $w_0(s) = w(s, q_0)$ ma $n_i \geq 1$ zer w podobzarze D_i , $i = 1, 2, \dots, N$, przy czym $n_1 + n_2 + \dots + n_N = n$.

Definicja 3.5. Rodzinę wielomianów $W(s, Q)$ będziemy nazywać odpornie D -stabilną, jeżeli dla każdego $q \in Q$ wszystkie zera wielomianu $w(s, q)$ leżą w obszarze D , tzn. dla każdego ustalonego $q \in Q$ ma on w każdym z podobzarów D_i , $i = 1, 2, \dots, N$, tyle samo zer co wielomian nominalny (odniesienia) $w_0(s)$. $\square$

Definicja 3.6. Zbiorem spektralnym $S[W]$ rodziny (3.4) wielomianów będziemy nazywać zbiór zer wszystkich wielomianów należących do tej rodziny, zdefiniowany następująco:

$$S[W] = \{s \in \mathbb{C} : w(s, q) = 0, q \in Q\}, \quad (3.7)$$

gdzie $\mathbb{C}$ jest ciałem liczb zespolonych. $\square$

Ponieważ wszystkie wielomiany należące do rodziny $W(s, Q)$ mają ten sam stopień, zbiór spektralny $S[W]$ jest ograniczony i domknięty.

Zgodnie z definicją 3.5 rodzina $W(s, Q)$ wielomianów jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór spektralny $S[W]$ jest podzbiorem zbioru D , tj. $S[W] \subseteq D$.

W przypadkach szczególnych, kiedy obszar D jest otwartą lewą półpłaszczyzną lub otwartym kołem jednostkowym, odporną stabilność można zdefiniować w sposób podany poniżej.

Definicja 3.7. Rodzinę wielomianów (3.4) będziemy nazywać odpornie L -stabilną (K -stabilną), jeżeli dla każdego $q \in Q$ wszystkie zera wielomianu $w(s, q)$ leżą w otwartej lewej półpłaszczyźnie (w otwartym kole jednostkowym). $\square$

W dalszych rozważaniach będziemy równoważnie mówić o odpornej D -stabilności (lub L -stabilności czy K -stabilności) rodziny wielomianów (3.4) i wielomianu $w(s, q)$ o niepewnych współczynnikach.

3.2. Definicje odpornej stabilności rodziny macierzy stanu

Macierz stanu układu liniowego stacjonarnego o niepewnych parametrach można przedstawić w postaci

$$A(q) = [a_{ij}(q)], \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad q \in Q, \quad (3.8)$$

gdzie $q = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T$ jest wektorem niepewnych fizycznych parametrów układu, elementy $a_{ij}(q)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) są ciągłymi funkcjami swoich argumentów, zaś zbiór Q wartości niepewnych parametrów ma postać (3.3).

Podobnie jak w przypadku wielomianów, przez q_0 oznaczmy wektor nominalnych wartości niepewnych parametrów. Jeżeli nie są one określone, to za nominalne można przyjąć wartości obliczone ze wzoru (3.6). Ponadto, przez $A_0 = A(q_0)$ oznaczmy macierz nominalną (odniesienia) rodziny macierzy

$$A(Q) = \{A(q) : q \in Q\}. \quad (3.9)$$

Założmy, że macierz nominalna $A_0 = A(q_0)$ ma $n_i \geq 1$ wartości własnych w podobzarze D_i , $i = 1, 2, \dots, N$, przy czym $n_1 + n_2 + \dots + n_N = n$.

Definicja 3.8. Rodzinę macierzy (3.9) będziemy nazywać odpornie D -stabilną, jeżeli dla każdego $q \in Q$ wszystkie wartości własne macierzy $A(q)$ leżą w obszarze D , tzn. dla każdego ustalonego $q \in Q$ ma ona w każdym z podobszarów D_i , $i = 1, 2, \dots, N$, tyle samo wartości własnych co macierz nominalna A_0 . $\square$

Z definicji 3.5 i 3.8 wynika, że formułując zadanie badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów (3.4) lub rodziny macierzy (3.9) nie można przyjąć dowolnego obszaru D na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Przy dobrze postawionym zadaniu badania odpornej D -stabilności, obszarem D jest taki obszar (3.1), że w każdym z jego podobszarów wielomian nominalny rodziny wielomianów (3.4) (lub macierz nominalna rodziny macierzy (3.9)) ma przynajmniej jedno zero (jedną wartość własną).

Definicja 3.9. Rodzinę macierzy (3.9) będziemy nazywać odpornie L -stabilną (K -stabilną), jeżeli dla każdego ustalonego $q \in Q$ wszystkie wartości własne macierzy $A(q)$ leżą w otwartej lewej półpłaszczyźnie (w otwartym kole jednostkowym). $\square$

W dalszych rozważaniach będziemy równoważnie mówić o D -stabilności (lub L -stabilności czy K -stabilności) rodziny macierzy (3.9) i macierzy $A(q)$ o niepewnych elementach.

Wartości własne macierzy stanu $A(q)$ są miejscami zerowymi jej wielomianu charakterystycznego

$$w(s, q) = \det(sI - A(q)), \quad (3.10)$$

który ma ogólną postać (3.2), przy $a_n(q) = 1$. Oznacza to, że rodzina macierzy (3.9) jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina (3.4) jej wielomianów charakterystycznych jest odpornie D -stabilna. Wobec tego problem badania odpornej D -stabilności rodziny macierzy stanu (3.9) można sprowadzić do problemu badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów charakterystycznych (3.4), wyznaczając ze wzoru (3.10) wielomian charakterystyczny $w(s, q)$ macierzy stanu $A(q)$. Nie jest to jednak sprawą prostą w przypadku macierzy o dużych wymiarach oraz przy dużej liczbie niepewnych parametrów. Ponadto, wymaga to obliczeń symbolicznych przy obliczeniach z użyciem komputerów.

Podobnie jak dla wielomianów, wprowadźmy pojęcie zbioru spektralnego rodziny macierzy stanu (3.9).

Definicja 3.10. Zbiór

$$S[A] = \{s \in C: \det(sI - A(q)) = 0, q \in Q\} \quad (3.11)$$

będziemy nazywać zbiorem spektralnym rodziny (3.9) macierzy stanu. $\square$

Zbiór spektralny (3.11) jest zbiorem wartości własnych wszystkich macierzy należących do rodziny (3.9). Zgodnie z definicją 3.8, rodzina $A(Q)$ macierzy jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór spektralny (3.11) jest podzbiorem zbioru D , tj. $S[A] \subseteq D$.

3.3. Wprowadzenie do teorii odpornej stabilności

Problem rozkładu zer wielomianów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej był rozpatrywany w wielu pracach, w tym np. w monografiach [65, 94]. Na ich podstawie można sformułować poniższy lemat, odgrywający istotną rolę w teorii odpornej stabilności układów o niepewnych parametrach.

Lemat 3.1. Jeżeli wielomian $w(s, q)$ o postaci (3.2) ma stopień n dla każdego $q \in Q$, a jego współczynniki są ciągłymi funkcjami niepewnych parametrów, to zera $s_i(q)$, $i = 1, 2, \dots, n$, tego wielomianu zależą w sposób ciągły od wartości niepewnych parametrów. $\square$

Ze wzoru (3.10) i lematu 3.1 wynika, że jeżeli elementy macierzy stanu $A(q)$ są ciągłymi funkcjami niepewnych parametrów, to jej wartości własne są też ciągłymi funkcjami tych parametrów.

Lemat 3.2. Jeżeli wielomian $w(s, q)$ jest D -stabilny dla przynajmniej jednego $q \in Q$, natomiast rodzina wielomianów $W(s, Q)$ stałego stopnia nie jest odpornie D -stabilna, to w zbiorze Q istnieje taki wektor q^* , że zera wielomianu $w(s, q^*)$ leżą na brzegu ∂D obszaru D i w otwartym obszarze D .

Dowód. Jeżeli rodzina $W(s, Q)$ nie jest odpornie D -stabilna, to istnieje np. wektor $q = q_1 \in Q$ taki, że nie wszystkie zera wielomianu $w(s, q_1)$ leżą w obszarze D . Przyjmijmy, że wielomian $w(s, q)$ jest D -stabilny np. dla $q = q_0$.

Wartości zer wielomianu $w(s, q)$ zmieniają się w sposób ciągły przy ciągłych zmianach wartości niepewnych parametrów (zgodnie z lematem 3.1). Jeżeli więc wszystkie zera wielomianu $w(s, q)$ leżą wewnątrz otwartego obszaru D przy $q = q_0$, zaś dla $q = q_1$ istnieje przynajmniej jedno zero tego wielomianu położone na zewnątrz D , to w zbiorze Q musi istnieć inny przynajmniej jeden wektor, np. $q = q^*$, dla którego $w(s, q^*) = 0$ dla $s \in \partial D$ i dla s położonych wewnątrz D . $\square$

Z lematu 3.2 i powyższych rozważań wynika poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.1. Niech wielomian nominalny $w_0(s) = w(s, q_0)$ będzie D -stabilny. Rodzina wielomianów (3.4) stałego stopnia jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w(s, q) \neq 0, \quad \forall q \in Q \text{ i } \forall s \in \partial D, \quad (3.12)$$

tzn. rodzina wielomianów $W(s, Q)$ nie ma zer na brzegu obszaru D . $\square$

Z twierdzenia 3.1 wynika, że przy badaniu odpornej D -stabilności rodziny wielomianów (3.4) można ograniczyć się tylko do sprawdzenia, czy ma ona zera na brzegu obszaru D . Należy przy tym podkreślić, że warunek (3.12) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym położenia wszystkich zer rodziny wielomianów (3.4) w otwartym obszarze D tylko wtedy, gdy w tej rodzinie istnieje przynajmniej jeden wielomian, którego wszystkie zera leżą w D . Jeżeli taki wielomian nie istnieje, to warunek (3.12) może być spełniony np. wtedy, gdy wszystkie zera każdego wielomianu należącego do rodziny (3.4) leżą poza obszarem D , czyli rodzina (3.4) nie jest odpornie D -stabilna.

Twierdzenie 3.1 nosi nazwę twierdzenia o przekroczeniu brzegu (obszaru D).

Uwzględniając wzór (3.10), twierdzenie 3.1 można sformułować w odniesieniu do rodziny $A(Q)$ macierzy.

Twierdzenie 3.2. Niech macierz nominalna $A_0 = A(q_0)$ będzie D -stabilna. Rodzina macierzy $A(Q)$ jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $q \in Q$ macierz $A(q)$ nie ma wartości własnych na brzegu ∂D obszaru D . $\square$

W dalszej części pracy (np. w punkcie 4.3) będziemy korzystać z graficznych warunków D -stabilności wielomianów, wynikających z zasady argumentu [91, 94]. Można ją w odniesieniu do wielomianów sformułować w sposób podany poniżej.

Niech ∂D będzie brzegiem otwartego obszaru D , złożonym z jednej zamkniętej krzywej gładkiej o opisie parametrycznym $s = f(y)$, $y \in [\alpha, \beta]$, zorientowanej dodatnio względem wnętrza D . Krzywa jest zorientowana dodatnio względem swego wnętrza, jeżeli w czasie obiegu po tej krzywej w kierunku odpowiadającym wzrostowi parametru y mamy wewnątrz D po stronie lewej (czyli ruch po krzywej ∂D odbywa się w kierunku matematycznie dodatnim).

Załóżmy, że dany jest wielomian $w(s)$ stopnia $n \geq m$, który nie ma zer na krzywej ∂D .

Twierdzenie 3.3. Wielomian $w(s)$ ma m zer w obszarze D wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta \arg w(f(y)) = m2\pi, \quad \alpha \leq y \leq \beta \quad (3.13)$$

czyli przyrost argumentu $w(s)$ wzdłuż ∂D wynosi $m2\pi$, lub równoważnie, wykres funkcji $w(f(y))$, nie trafiając w początek płaszczyzny zmiennej zespolonej, okrąży go m razy w kierunku matematycznie dodatnim przy y zmieniającym się od α do β . $\square$

Niech wielomian odniesienia $w_0(s)$ stopnia n ma m zer wewnątrz obszaru D i nie ma zer na jego brzegu.

Twierdzenie 3.4. Wielomian $w(s)$ ma m zer w obszarze D wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta \arg \tilde{w}(f(y)) = 0, \quad \alpha \leq y \leq \beta \quad (3.14)$$

gdzie $\tilde{w}(s) = w(s)/w_0(s)$, czyli przy y zmieniającym się od α do β wykres funkcji $\tilde{w}(f(y))$ nie okrąży początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też nie przechodzi przez niego.

Dowód. Dowód wynika bezpośrednio ze wzoru

$$\Delta \arg \tilde{w}(f(y)) = \Delta \arg w(f(y)) - \Delta \arg w_0(f(y))$$

oraz z twierdzenia 3.3. $\square$

W przypadku, gdy D jest otwartą lewą półpłaszczyzną, której brzeg ma opis parametryczny $s = jy$, $y \in (-\infty, \infty)$, przyrost argumentu $w(s)$ wzdłuż ∂D jest inny niż w przypadku obszaru ograniczonego krzywą zamkniętą. Mianowicie, wielomian $w(s)$ stopnia $n \geq m$ (który nie ma zer na krzywej ∂D) ma m zer w obszarze D wtedy i tylko wtedy, gdy przyrost argumentu $w(s)$ wzdłuż ∂D wynosi $m\pi$. Podobnie jest w przypadku przesuniętej otwartej lewej półpłaszczyzny, której opis parametryczny jest podany w Dodatku.

Znane w teorii sterowania twierdzenia: Michajłowa i Nyquista (np. [78, 79]) oraz zmodyfikowane twierdzenie Michajłowa [128] wynikają bezpośrednio z twierdzenia 3.3 (przy uwzględnieniu powyższej uwagi dotyczącej wielkości przyrostu argumentu) oraz z twierdzenia 3.4.

Przy badaniu L -stabilności wielomianów o rzeczywistych współczynnikach możemy ograniczyć się tylko do części obszaru D leżącej w półpłaszczyźnie $\text{Im } s \geq 0$, którego brzeg ma opis parametryczny $s = jy$, $y \in [0, \infty)$.

Twierdzenie 3.5. Wielomian $w(s)$ stopnia n jest L -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa poniższe równoważne sobie warunki

$$\Delta \arg w(jy) = n\pi / 2, \quad 0 \leq y < \infty \quad (3.15)$$

czyli wykres funkcji $w(jy)$ (zwany hodografem Michajłowa) rozpoczyna się na dodatniej półosi rzeczywistej dla $y = 0$ i przy y zmieniającym się od 0 do ∞ przebiega w kierunku matematycznie dodatnim, nie trafiając w początek płaszczyzny zmiennej zespolonej, przez n ćwiartek tej płaszczyzny, lub

$$\Delta \arg \tilde{w}(jy) = 0, \quad 0 \leq y < \infty \quad (3.16)$$

gdzie $\tilde{w}(s) = w(s) / w_0(s)$, przy czym $w_0(s)$ jest dowolnym L -stabilnym wielo-

mianem stopnia n , czyli przy y zmieniającym się od 0 do ∞ wykres funkcji $\tilde{w}(jy)$ (zwany zmodyfikowanym hodografem Michajłowa) nie okrąża początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też nie przechodzi przez niego. $\square$

Przy badaniu K -stabilności obszar D jest otwartym kołem jednostkowym, którego brzeg ma opis parametryczny $s = \exp(jy\pi)$, $y \in [0, 2]$, przy czym można ograniczyć się tylko do wartości $y \in [0, 1]$ przy rozpatrywaniu wielomianów o rzeczywistych współczynnikach, których zespolone zera są parami sprzężone.

Twierdzenie 3.6. Wielomian $w(s)$ stopnia n jest K -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa poniższe równoważne sobie warunki

$$\Delta \arg w(\exp(jy\pi)) = n\pi, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (3.17)$$

czyli wykres funkcji $w(\exp(jy\pi))$ (tzw. hodograf Michajłowa) przy y zmieniającym się od 0 do 1, nie trafiając w początek płaszczyzny zmiennej zespolonej, okrąża go $n/2$ razy w kierunku matematycznie dodatnim, lub

$$\Delta \arg \tilde{w}(\exp(jy\pi)) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (3.18)$$

gdzie $\tilde{w}(s) = w(s) / w_0(s)$, przy czym $w_0(s)$ jest dowolnym K -stabilnym wielomianem stopnia n , czyli przy y zmieniającym się od 0 do 1 wykres funkcji $\tilde{w}(\exp(jy\pi))$ (zmodyfikowany hodograf Michajłowa) nie okrąża początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też przez niego nie przechodzi. $\square$

4. METODY BADANIA ODPORNEJ STABILNOŚCI

Badanie odpornej D -stabilności układów dynamicznych o niepewnych parametrach polega na sprawdzeniu, czy zbiór spektralny rodziny wielomianów $W(s, Q)$ lub zbiór spektralny rodziny macierzy $A(Q)$ leży w zadanym otwartym obszarze D na płaszczyźnie zmiennej zespolonej (zgodnie z definicjami 3.5 i 3.8).

Położenie zbioru spektralnego względem obszaru D może być sprawdzone pośrednio (za pomocą odpowiednich metod) bądź też bezpośrednio (w drodze wyznaczania zer wielomianów lub wartości własnych macierzy za pomocą obliczeń komputerowych z graficzną prezentacją wyników).

Ogólne metody (zarówno bezpośrednie jak i pośrednie) sprawdzania położenia zbioru spektralnego względem obszaru D na płaszczyźnie zmiennej zespolonej będą omówione w niniejszym rozdziale.

4.1. Metoda zbioru spektralnego

Stosując obliczenia komputerowe z graficzną prezentacją wyników, odporną D -stabilność układu dynamicznego o niepewnych parametrach można badać bezpośrednio poprzez wyznaczenie zbioru spektralnego rodziny jego wielomianów charakterystycznych (lub rodziny jego macierzy stanu), wykreślenie brzegów obszaru D i „wizualne” sprawdzenie, czy zbiór spektralny leży wewnątrz obszaru D . W takiej metodzie wyznaczenie zbioru spektralnego wymaga odpowiednich, dosyć złożonych w przypadku ogólnym metod i programów komputerowych.

Brzeg zbioru spektralnego można w miarę prosto wyznaczyć (z zastosowaniem obliczeń komputerowych) jedynie w przypadku rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów, stosując np. obliczeniową metodę podaną w pracy [15] lub wykorzystując lemat 7.3.

W przypadku ogólnym zbiór spektralny (a właściwie jego ogólny zarys) można wyznaczyć dokonując dyskretyzacji (z odpowiednio małym krokiem) wartości poszczególnych niepewnych parametrów w zadanych przedziałach. Otrzymamy w ten sposób dyskretyzację zbioru Q wartości niepewnych parametrów poprzez utworzenie w nim siatki. Obliczając z kolei zera wielomianu (lub wartości własne macierzy) dla wartości niepewnych parametrów odpowiadających węzłom tej siatki, otrzymamy skończony zbiór zer (wartości własnych). Brzeg zbioru spektralnego jest obwiednią otrzymanego w ten sposób zbioru zer (wartości własnych).

Omówiona powyżej metoda pozwala na rozwiązanie problemu odpornej D -stabilności jedynie wtedy, gdy możemy wizualnie ocenić, że wyznaczony zbiór zer (wartości własnych) albo wyraźnie leży w otwartym obszarze D , albo też część tego zbioru leży na zewnątrz D . W przypadku, gdy część wyznaczonych zer (wartości własnych) jest położona bardzo blisko brzegów obszaru D , mogą wystąpić istotne trudności związane z rozstrzygnięciem problemu odpornej D -stabilności. Dodatkowo należy pamiętać, że przy zależności współczynników wielomianu $w(s, q)$ od niepewnych parametrów ogólniejszej niż liniowa, jego zera mogą leżeć na brzegach zbioru spektralnego przy wartościach wektora q , leżących wewnątrz zbioru Q . Istnieje więc potencjalna groźba, że przy dyskretyzacji zbioru Q można takie wartości wektora q pominąć. Dyskusja na temat możliwości wystąpienia takiego przypadku została przeprowadzona w pracy [4] (patrz też przykład 8.1).

Obliczeniowa efektywność omówionej powyżej metody zależy istotnie od mocy obliczeniowej posiadanego sprzętu komputerowego, z powodu konieczności wyznaczenia zer dużej liczby wielomianów lub wartości własnych dużej liczby macierzy. Zależy też ona od liczby niepewnych parametrów, zakresu ich zmienności i kroku dyskretyzacji, a także od stopnia wielomianu charakterystycznego.

Przykład 4.1. Niech D będzie otwartym sektorem odciętym, którego brzeg ma opis parametryczny dany wzorem (D.4) przy $\gamma = 1$ i $\theta = 0.35$. Brzeg rozpatrywanego obszaru D jest narysowany linią ciągłą na rysunku 4.1.

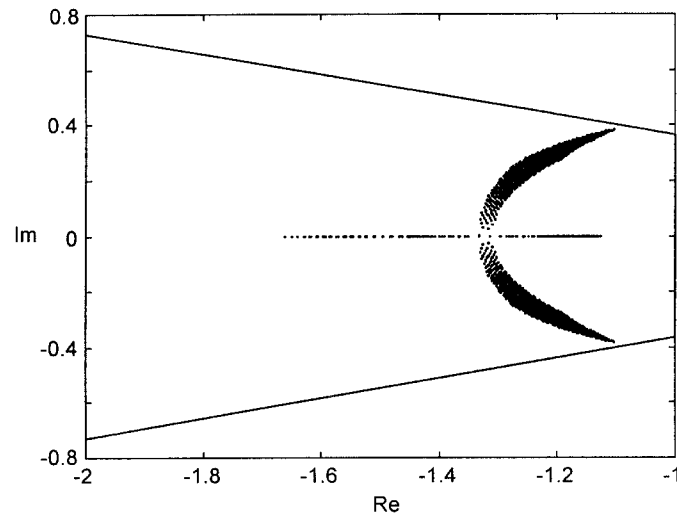
Należy zbadać odporną D -stabilność obwodu elektrycznego rozpatrywanego w przykładzie 2.1, którego wielomian charakterystyczny ma postać

$$w(s, q) = s^3 0.25(1 + q_2) + s^2(1.875 + 0.25q_1 + 1.5q_2) + s(3.5 + 1.5q_1 + q_2) + 2 + q_1, \quad (4.1)$$

przy czym $q_k \in [-0.1, 0.1]$, $k = 1, 2$.

Łatwo sprawdzić, że wszystkie zera wielomianu nominalnego $w(s, 0)$ leżą w obszarze D .

Przyjmując wartości q_1 z przedziału $[-0.1, 0.1]$ z krokiem 0.005 oraz wartości q_2 z przedziału $[-0.1, 0.1]$ z krokiem 0.01 i obliczając zera otrzymanego w ten sposób skończonego zbioru wielomianów, otrzymamy zbiór zer pokazany na rysunku 4.1. Na tym rysunku są pokazane położenia tylko dwóch zer, ponieważ trzecie zero (rzeczywiste) wielomianu (4.1) ma wartość równą około -5 i jego położenie właściwie nie zależy od wartości niepewnych parametrów.



Rys. 4.1. Brzeg obszaru D i wyznaczony zbiór zer wielomianu (4.1) o niepewnych współczynnikach

Z rysunku 4.1 wynika, że zera wielomianu (4.1) leżą w zadanym obszarze D (sektor odcięty) dla wszystkich wartości niepewnych parametrów z zadanych przedziałów, a więc rozpatrywany wielomian jest odpornie D -stabilny. $\square$

4.2. Uogólnienie klasycznych analitycznych metod badania stabilności wielomianów charakterystycznych

Do badania L -stabilności wielomianów charakterystycznych stosuje się kryterium Hurwitza oraz kryterium Routha, natomiast do badania K -stabilności stosuje się kryterium Jury (np. [79]). Badanie stabilności na podstawie wyżej wymienio-

nych kryteriów sprowadza się do sprawdzenia znaków współczynników wielomianu oraz znaków wyznaczników odpowiednich macierzy. Nie jest to sprawa prosta w przypadku wielomianów o niepewnych współczynnikach w przypadku ogólnym, bowiem wyznaczniki są nieliniowymi funkcjami niepewnych parametrów, które z kolei mogą przyjmować dowolne wartości z zadanych przedziałów.

W przypadku wielomianów niskiego stopnia oraz małej liczby niepewnych parametrów klasyczne metody badania stabilności mogą być z powodzeniem stosowane do badania odpornej L -stabilności i K -stabilności.

Weźmy pod uwagę rodzinę wielomianów stałego stopnia

$$W(s, Q) = \{w(s, q) : q \in Q\}, \quad (4.2)$$

gdzie

$$w(s, q) = \sum_{i=0}^n a_i(q) s^i, \quad (4.3)$$

przy czym współczynniki $a_i(q)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) są ciągłymi funkcjami swoich argumentów przy $a_n(q) > 0, \forall q \in Q$, oraz

$$Q = \{q : q_k \in [q_k^-, q_k^+], q_k^- < q_k^+, k = 1, 2, \dots, m\}. \quad (4.4)$$

Oznaczmy przez $w_0(s) = w(s, q_0)$ wielomian nominalny rodziny wielomianów (4.2).

4.2.1. Odporna L -stabilność

Oznaczmy przez

$$H(q) = \begin{bmatrix} a_{n-1}(q) & a_n(q) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-3}(q) & a_{n-2}(q) & a_{n-1}(q) & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-5}(q) & a_{n-4}(q) & a_{n-3}(q) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1(q) & a_2(q) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0(q) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

macierz Hurwitza stowarzyszoną z wielomianem (4.3).

Uogólniając kryterium Hurwitza na przypadek wielomianu o niepewnych współczynnikach otrzymamy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.1 (kryterium Hurwitza). Rodzina wielomianów (4.2) jest odpornie L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $q \in Q$ wszystkie współczynniki wielomianu (4.3) są dodatnie i wszystkie minory główne macierzy $H(q)$ są dodatnie. $\square$

Bezpośrednie stosowanie twierdzenia 4.1 do badania odpornej L -stabilności rodziny wielomianów (4.2) nie jest sprawą prostą między innymi z powodu konieczności sprawdzania znaków wszystkich n głównych minorów macierzy $H(q)$. Prostsze w stosowaniu jest poniższe kryterium [6].

Twierdzenie 4.2. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie L -stabilny. Rodzina wielomianów (4.2) stałego stopnia jest odpornie L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det H(q) \neq 0, \quad \forall q \in Q. \quad (4.6)$$

Dowód. Oznaczmy przez $s_i(q), i = 1, 2, \dots, n$, miejsca zerowe wielomianu (4.3). Zgodnie z lematem 3.1, zmieniają one swoje wartości w sposób ciągły przy ciągłych zmianach wartości niepewnych parametrów.

Z twierdzenia 4.1 wynika, że (4.6) jest warunkiem koniecznym odpornej L -stabilności rodziny (4.2). Dla dowodu wystarczy więc wykazać, że jest on też warunkiem wystarczającym. Dowód przeprowadzimy nie wprost.

Załóżmy, że rodzina wielomianów (4.2) nie jest odpornie L -stabilna. Z lematu 3.2 wynika, że wtedy istnieje taki wektor $q = q^* \in Q$, dla którego wielomian $w(s, q^*)$ ma przynajmniej jedno zero na osi urojonej. Jeżeli jest to zero rzeczywiste, to $a_0(q^*) = 0$. Jeżeli zaś jest to para zer urojonych $s_{i,k}(q^*) = \pm j\omega^*$, to $s_i(q^*) + s_k(q^*) = 0$.

Ze wzoru Orlando [65]

$$\det H(q) = (-1)^{n(n-1)/2} a_n^{n-1}(q) a_0(q) \prod_{1 \leq i < k \leq n} (s_i(q) + s_k(q)) \quad (4.7)$$

wynika, że w każdym z wyżej wymienionych przypadków warunek (4.6) nie jest spełniony dla $q = q^* \in Q$, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Oznaczmy przez

$$\tilde{H}(q) = \begin{bmatrix} a_{n-1}(q) & a_n(q) & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3}(q) & a_{n-2}(q) & a_{n-1}(q) & \dots & 0 \\ a_{n-5}(q) & a_{n-4}(q) & a_{n-3}(q) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1(q) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

zredukowaną macierzą Hurwitza (bez ostatniego wiersza i ostatniej kolumny) stowarzyszoną z wielomianem (4.3). Łatwo zauważyć, że

$$\det H(q) = a_0(q) \det \tilde{H}(q). \quad (4.9)$$

Z twierdzenia 4.2 oraz ze wzoru (4.9) wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.3. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie L -stabilny. Rodzina wielomianów (4.2) stałego stopnia jest odpornie L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy

- 1) $a_0(q) \neq 0, \quad \forall q \in Q$,
- 2) jest spełniony warunek

$$\det \tilde{H}(q) \neq 0, \quad \forall q \in Q. \quad (4.10)$$

$\square$

Przykład 4.2. Należy zbadać odporną L -stabilność układu regulacji automatycznej rozpatrywanego w przykładzie 2.2, którego wielomian charakterystyczny ma postać

$$w(s, q) = s^3 + s^2(q_1 + 0.1q_2) + s0.1q_1q_2 + q_1q_2, \quad q \in Q, \quad (4.11)$$

gdzie

$$Q = \{q = [q_1, q_2]^T : q_1 \in [10, 20]; q_2 \in [10, 100]\}. \quad (4.12)$$

Łatwo sprawdzić, że wielomian nominalny $w_0(s) = w(s, q_0)$, gdzie $q_0 = [15, 55]^T$, jest L -stabilny. Ponadto, wszystkie współczynniki wielomianu (4.11) są dodatnie dla każdego $q \in Q$. Oznacza to, że warunek 1) twierdzenia 4.3 jest spełniony.

Wyznaczając zredukowaną macierz Hurwitza, stowarzyszoną z wielomianem (4.11), oraz obliczając jej wyznacznik, otrzymamy $\det \tilde{H}(q) = q_1 q_2 (0.1 q_1 + 0.01 q_2 - 1)$. Łatwo sprawdzić, że jest on dodatni dla każdego $q \in Q$, co oznacza, że warunek 2) twierdzenia 4.3 jest spełniony. Rozpatrywany wielomian o niepewnych współczynnikach jest więc odpornie L -stabilny, zgodnie z twierdzeniem 4.3. $\square$

4.2.2. Odporna K -stabilność

Analityczne kryteria K -stabilności wielomianów charakterystycznych o dokładnie znanych współczynnikach są podane np. w pracach [79, 81]. Najbardziej dogodnym do uogólnienia na przypadek wielomianów o niepewnych współczynnikach jest kryterium sformułowane w pracy [76], będące innym sformułowaniem znanego kryterium Jury.

Oznaczmy przez

$$S(q) = X(q) - Y(q), \quad (4.13)$$

gdzie (pomijając zależność od q)

$$X = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_3 \\ 0 & 0 & a_n & \cdots & a_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{n-4} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

macierz występującą w kryterium Jury stabilności układów dyskretnych, stowarzyszoną z wielomianem (4.3).

Twierdzenie 4.4 [6]. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie K -stabilny. Rodzina wielomianów (4.2) stałego stopnia jest odpornie K -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy

- 1) $w(1, q) \neq 0, \forall q \in Q$,
- 2) $w(-1, q) \neq 0, \forall q \in Q$,
- 3) spełniony jest warunek

$$\det S(q) \neq 0, \quad \forall q \in Q. \quad (4.15)$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy nie wprost. Załóżmy, że dla $q = q_1 \in Q$ nie wszystkie zera wielomianu $w(s, q_1)$ leżą w otwartym kole jednostkowym.

Z lematu 3.2 wynika, że jeżeli wartość q zmienia się w zbiorze Q w sposób ciągły od $q = q_0$ do $q = q_1$, to np. przy $q = q^*$ część zer wielomianu (4.3) przekracza koło jednostkowe, przy czym może to być zero rzeczywiste lub para zer zespolonych sprzężonych.

Jeżeli jest to zero rzeczywiste, to $w(1, q^*) = 0$ lub $w(-1, q^*) = 0$, co oznacza, że wtedy nie jest spełniony warunek 1) lub warunek 2).

Jeżeli jest to para zer zespolonych sprzężonych $s_{i,k}(q^*) = \alpha \pm j\beta$, przy czym $|s_{i,k}(q^*)| = 1$, to $s_i(q^*)s_k(q^*) = 1$. Ze wzoru Orlando dla wielomianów charakterystycznych układów dyskretnych [65]

$$\det S(q) = a_n^{n-1}(q) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=i+1}^n (1 - s_i(q)s_k(q)) \quad (4.16)$$

wynika, że wtedy $\det S(q^*) = 0$, co przeczy warunkowi 3). $\square$

Przykład 4.3. Wielomian charakterystyczny układu dyskretnego rozpatrywanego w przykładzie 2.6 ma postać

$$w(s, q) = a_2(q)s^2 + a_1(q)s + a_0(q), \quad q \in Q, \quad (4.17)$$

gdzie, przyjmując $T_i = 1$,

$$a_2(\mathbf{q}) = q_2,$$

$$a_1(\mathbf{q}) = q_1[q_2 - 1 + \exp(-q_2)] - q_2(1 + \exp(-q_2)),$$

$$a_0(\mathbf{q}) = q_1[1 - \exp(-q_2) - q_2 \exp(-q_2)] + q_2 \exp(-q_2),$$

przy czym

$$\mathcal{Q} = \{\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T : q_1 \in [1, 3], q_2 \in [2.5, 4]\}. \quad (4.18)$$

Stosując twierdzenie 4.4 należy zbadać odporną K -stabilność wielomianu (4.17).

Wielomian nominalny $w_0(s) = w(s, \mathbf{q}_0)$, gdzie $\mathbf{q}_0 = [2, 3]^T$, jest K -stabilny.

Dla rozpatrywanego wielomianu warunki 1), 2) i 3) twierdzenia 4.4 mają postać

$$w(1, \mathbf{q}) = q_1 q_2 (1 - \exp(-q_2)) \neq 0, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (4.19)$$

$$w(-1, \mathbf{q}) = q_1[2 - 2\exp(-q_2) - q_2(1 + \exp(-q_2))] + 2q_2(1 + \exp(-q_2)) \neq 0, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \quad (4.20)$$

$$\det \mathbf{S}(\mathbf{q}) = a_2(\mathbf{q}) - a_0(\mathbf{q}) = q_2(1 - \exp(-q_2)) - q_1(1 - \exp(-q_2) - q_2 \exp(-q_2)) \neq 0, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \quad (4.21)$$

Łatwo zauważyć, że warunek (4.19) jest spełniony, bowiem wartości niepewnych parametrów są dodatnie.

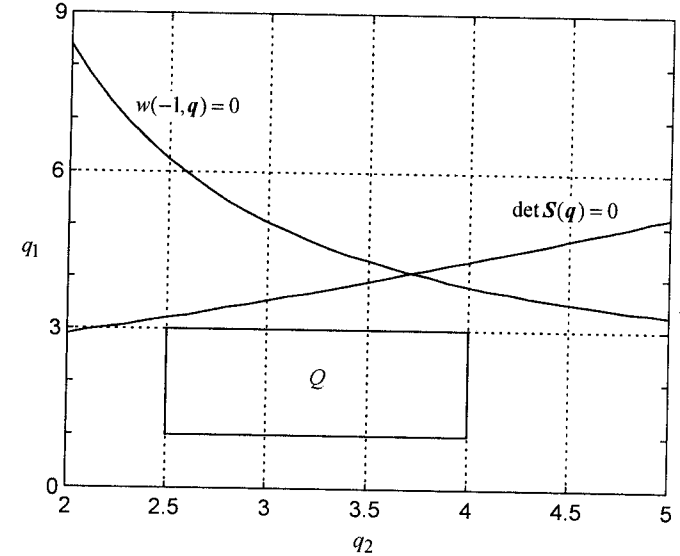
Warunki (4.20) i (4.21) sprawdzimy graficznie, wyznaczając na płaszczyźnie (q_2, q_1) krzywe będące rozwiązaniem równań $w(-1, \mathbf{q}) = 0$ i $\det \mathbf{S}(\mathbf{q}) = 0$. Zauważmy, że są one spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy te krzywe nie przecinają prostokąta (4.18).

Rozwiązując względem zmiennej q_1 równania $w(-1, \mathbf{q}) = 0$ i $\det \mathbf{S}(\mathbf{q}) = 0$, odpowiednio otrzymamy

$$q_1 = \frac{-2q_2(1 + \exp(-q_2))}{2(1 - \exp(-q_2)) - q_2(1 + \exp(-q_2))}, \quad (4.22)$$

$$q_1 = \frac{q_2(1 - \exp(-q_2))}{1 - \exp(-q_2) - q_2 \exp(-q_2)}. \quad (4.23)$$

Zbiór $\mathcal{Q}$ zdefiniowany wzorem (4.18) oraz fragmenty wykresów krzywych (4.22) i (4.23) na płaszczyźnie (q_2, q_1) są pokazane na rysunku 4.2. Ponieważ te krzywe nie przecinają prostokąta (4.18), warunki (4.20) i (4.21) są spełnione.



Rys. 4.2. Krzywe (4.22) i (4.23) na płaszczyźnie (q_1, q_2) oraz zbiór $\mathcal{Q}$ wartości niepewnych parametrów (prostokąt)

Z twierdzenia 4.4 wynika zatem, że rozpatrywany wielomian o niepewnych parametrach jest odpornie K -stabilny.

4.3. Warunek wykluczenia zera

Dla każdej ustalonej liczby zespolonej $s = z$ wartością wielomianu $w(s)$ o dokładnie znanych współczynnikach jest liczba zespolona $w(z)$ (punkt na płaszczyźnie zmiennej zespolonej), natomiast dla każdego ustalonego $s = z$ wartością wielomianu $w(s, \mathbf{q})$, $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$, jest zbiór liczb zespolonych $\{w(z, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in \mathcal{Q}\}$, przy czym jedna liczba zespolona odpowiada jednej ustalonej wartości $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$.

W teorii odpornej stabilności ważną rolę odgrywa zbiór wartości oraz tzw. warunek wykluczenia zera (np. [12]).

Definicja 4.1. Dla dowolnej liczby zespolonej z zbiór

$$w(z, Q) = \{w(z, q) : q \in Q\} \quad (4.24)$$

będziemy nazywać zbiorem wartości rodziny wielomianów $W(s, Q)$. $\square$

Zbiór wartości (zbiór na płaszczyźnie zmiennej zespolonej) jest odwzorowaniem zbioru niepewnych parametrów Q (m -wymiarowy hiperprostopadłościan) za pomocą przekształcenia $w(z, q)$. Postać zbioru wartości zależy w sposób istotny od charakteru zależności (np. liniowa, nieliniowa) współczynników wielomianu $w(s, q)$ od niepewnych parametrów. Boki zbioru wartości są odcinkami linii prostych jedynie w przypadku, gdy współczynniki wielomianu $w(s, q)$ zależą liniowo od niepewnych parametrów.

Wprowadźmy pojęcie unormowanego zbioru wartości.

Definicja 4.2. Dla dowolnej liczby zespolonej z zbiór

$$\tilde{w}(z, Q) = \{\tilde{w}(z, q) : q \in Q\}, \quad (4.25)$$

gdzie $\tilde{w}(z, q) = w(z, q) / w_0(z)$, $w_0(z) \neq 0$, przy czym $w_0(s)$ jest wielomianem nominalnym, będziemy nazywać unormowanym (względem $w_0(z)$) zbiorem wartości rodziny wielomianów $W(s, Q)$. $\square$

Zauważmy, że $\tilde{w}(z, q_0) = w(z, q_0) / w_0(z) = 1$, co oznacza, że zawsze $(1, j0) \in \tilde{w}(z, Q)$.

Zbiory wartości (4.24) i (4.25) zmieniają swoje położenia i wymiary (a także często i kształty) przy zmianach wartości z .

Niech D będzie obszarem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej zdefiniowanym wzorem (3.1), przy czym brzeg każdego z podobszarów D_i , $i = 1, \dots, N$, ma opis parametryczny $f_i(y)$, $y \in Y_i$, gdzie Y_i jest zbiorem wartości parametru y . Zbiór Y_i jest ograniczony przy ograniczonym podobszarze D_i i teoretycznie nieograniczony, tj. $Y_i = (-\infty, \infty)$ przy nieograniczonym D_i . Przyjmijmy, że jeżeli

wartość parametru y rośnie w zbiorze Y_i , to następuje ruch po brzegu podobszaru D_i w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Załóżmy, że wielomian nominalny $w_0(s) = w(s, q_0)$ ma $n_i \geq 1$ zer w podobszarze D_i ($i = 1, 2, \dots, N$), przy czym $n_1 + n_2 + \dots + n_N = n$.

Twierdzenie 4.5. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie D -stabilny. Rodzina wielomianów (4.2) stałego stopnia jest odporne D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy oddzielnie dla każdego z podobszarów D_i , $i = 1, 2, \dots, N$, jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin w(f_i(y), Q), \quad \forall y \in Y_i, \quad (4.26)$$

czyli dla każdego $y \in Y_i$ początek płaszczyzny zmiennej zespolonej leży na zewnątrz zbioru wartości $w(f_i(y), Q)$, gdzie $w(f_i(y), Q) = w(z, Q)$ dla $z = f_i(y)$.

Dowód. Jeżeli warunek (4.26) nie jest spełniony, to istnieje $y^* \in Y_i$ oraz $q^* \in Q$ takie, dla których $w(f_i(y^*), q^*) = 0$ dla pewnego $i = 1, 2, \dots, N$. Oznacza to, że wielomian $w(s, q^*)$ ma zero na brzegu jednego z podobszarów D_i , a więc rodzina $W(s, Q)$ nie jest odporne D -stabilna. Warunek (4.26) jest więc warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności.

Aby wykazać dostateczność załóżmy, że rodzina $W(s, Q)$ nie jest odporne D -stabilna. Wtedy, zgodnie z lematem 3.2, istnieje taki wektor $q^* \in Q$, dla którego wielomian $w(s, q^*)$ ma przynajmniej jedno zero na brzegu podobszaru D_i (dla pewnego $i = 1, 2, \dots, N$). Oznacza to, że istnieje $y^* \in Y_i$ takie, dla którego $w(f_i(y^*), q^*) = 0$, a więc warunek (4.26) nie jest spełniony. $\square$

Z twierdzenia 4.5 wynika, że każdy wielomian z rodziny wielomianów $W(s, Q)$ ma n_i zer w i -tym podobszarze D_i wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek wykluczenia zera (4.26), czyli gdy zbiór wartości $w(f_i(y), Q)$ przy zmianach parametru $y \in Y_i$ od wartości minimalnej do wartości maksymalnej przemieszcza się na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w ten sposób, że omijając początek układu współrzędnych okrąży go w kierunku matematycznie dodatnim tyle samo razy co wykres funkcji $w_0(f_i(y))$, $y \in Y_i$. Liczba tych okrążeń jest określona w twierdzeniach 3.3, 3.5 i 3.6, w zależności od postaci podobszaru D_i .

Uwzględniając definicję 4.2 unormowanego zbioru wartości, z twierdzenia 4.5 otrzymamy poniższy lemat.

Lemat 4.1. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie D -stabilny. Rodzina wielomianów (4.2) stałego stopnia jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy oddzielnie dla każdego z podobszarów D_i , $i=1,2,\dots,N$, jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin \tilde{w}(f_i(y), Q), \quad \forall y \in Y_i, \quad (4.27)$$

gdzie $\tilde{w}(f_i(y), Q) = \tilde{w}(z, Q)$ dla $z = f_i(y)$.

Z lematu 4.1 oraz definicji 4.2 wynika, że każdy wielomian należący do rodziny wielomianów $W(s, Q)$ ma n_i zer w i -tym podobszarze D_i wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek wykluczenia zera (4.27), czyli gdy unormowany zbiór wartości $\tilde{w}(f_i(y), Q)$ przy zmianach wartości parametru $y \in Y_i$ przemieszcza się na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w ten sposób, że ani razu nie okrąży początku układu współrzędnych (porównaj twierdzenie 3.4 oraz drugie części twierdzeń 3.5 i 3.6), przy czym punkt $(1, j0)$ zawsze należy do unormowanego zbioru wartości $\tilde{w}(f_i(y), Q)$.

W przypadkach szczególnych, gdy D jest otwartą lewą półpłaszczyzną lub otwartym kołem jednostkowym, a $W(s, Q)$ jest rodziną wielomianów o rzeczywistych współczynnikach, z twierdzenia 4.5 i lematu 4.1 wynikają poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 4.6. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie L -stabilny. Rodzina wielomianów (4.2) stałego stopnia jest odpornie L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin w(jy, Q), \quad \forall y \in Y = [0, \infty), \quad (4.28)$$

lub równoważnie, warunek wykluczenia zera

$$0 \notin \tilde{w}(jy, Q), \quad \forall y \in Y = [0, \infty). \quad (4.29)$$

□

Twierdzenie 4.7. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie K -stabilny. Rodzina wielomianów (4.2) stałego stopnia jest odpornie K -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin w(\exp(jy\pi), Q), \quad \forall y \in Y = [0, 1], \quad (4.30)$$

lub równoważnie, warunek wykluczenia zera

$$0 \notin \tilde{w}(\exp(jy\pi), Q), \quad \forall y \in Y = [0, 1]. \quad (4.31)$$

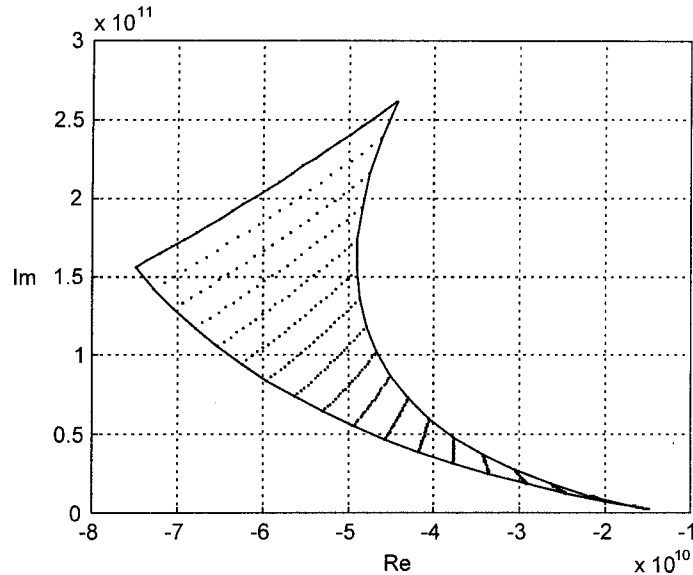
□

Warunek wykluczenia zera (4.26) (lub (4.27)) można bezpośrednio sprawdzić stosując obliczenia komputerowe i wyświetlając na ekranie monitora położenia zbioru wartości $w(f_i(y), Q)$ (lub $\tilde{w}(f_i(y), Q)$), stowarzyszonego z podobszarem D_i , dla poszczególnych wartości $y \in Y_i$. Przy tych obliczeniach możemy ograniczyć się do części podobszaru D_i leżącej w półpłaszczyźnie $\text{Im } s \geq 0$, tj. brać pod uwagę tylko opis parametryczny brzegu podobszaru D_i , leżącego w półpłaszczyźnie $\text{Im } s \geq 0$ (jak to ujęto w twierdzeniach 4.6 i 4.7). Wynika to z faktu, że rozpatrujemy wielomiany o rzeczywistych współczynnikach, których zespolone zera są sprzężone parami. Ponadto, w przypadku gdy D_i jest nieograniczony i teoretycznie $Y_i = [0, \infty)$, możemy rozpatrywać tylko skończony przedział $Y_i = [0, y_{i\max}]$. Wynika to z faktu, że przy nieograniczonym D_i zbiór wartości $w(f_i(y), Q)$ dąży do nieskończoności przy $y \rightarrow \infty$. Oznacza to, że przy wyznaczaniu zbioru wartości $w(f_i(y), Q)$ możemy obliczenia przerwać, gdy stwierdzimy, że zbiór wartości zaczyna szybko oddalać się od początku układu współrzędnych.

Wyznaczanie zbioru wartości jest problemem bardzo złożonym w przypadku ogólnym, przy zależności współczynników wielomianu charakterystycznego od niepewnych parametrów ogólniejszej niż liniowa (np. wieloliniowa lub nieliniowa). Wynika to z faktu, że w takich przypadkach punkty wewnętrzne (a nie tylko brzegowe) zbioru Q niepewnych parametrów mogą być odwzorowywane w punkty leżące na brzegu zbioru wartości. Z tego powodu, przy komputerowym wyznaczaniu zbioru wartości, wykorzystuje się specjalne metody służące do jego konstrukcji [6, 19].

Obliczeniowe metody, służące do wyznaczania zbioru wartości wielomianów przedziałowych oraz rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów, są omówione w rozdziałach 6 i 7 niniejszej pracy.

Dla każdego ustalonego z zarys zbioru wartości $w(z, Q)$ można wyznaczyć dokonując dyskretyzacji (z odpowiednio małym krokiem) zbioru Q niepewnych parametrów i obliczając wartości wielomianu $w(z, q)$ dla wektorów q odpowiadających poszczególnym węzłom siatki utworzonej w zbiorze Q . Otrzymamy w ten sposób dyskretyzację zbioru wartości, tj. skończony zbiór punktów należących do tego zbioru. Na podstawie tak wyznaczonego zbioru punktów można wnioskować o położeniu zbioru wartości $w(z, Q)$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Podobna obliczeniowa metoda wyznaczania zbioru spektralnego jest podana w punkcie 4.1 niniejszego rozdziału.



Rys. 4.3. Zbiór wartości $w(j1.28, Q)$ rodziny wielomianów (2.34)

Przykładowa postać zbioru wartości na płaszczyźnie zmiennej zespolonej jest pokazana na rysunku 4.3. Jest to zbiór wartości $w(j1.28, Q)$ rodziny wielomianów charakterystycznych (2.34) układu o niepewnych parametrach, rozpatrywanego w przykładzie 2.4. Jest on odwzorowaniem prostokąta (2.35) w przestrzeni niepewnych parametrów za pomocą przekształcenia $w(j1.28, q)$, gdzie $w(s, q)$ ma postać podaną w (2.34). Na rysunku 4.3 kropkami zaznaczono wartości wielomia-

nu $w(s, q)$ wyznaczone przy $s = j1.28$ dla q_1 zmieniającego się od 3 do 20 z krokiem 1 i dla q_2 równego 9.95 oraz zmieniającego się od 10 z krokiem 1 do 32. Natomiast liniami ciągłymi zaznaczono odwzorowania krawędzi zbioru Q wartości niepewnych parametrów. Z rysunku 4.3 wynika, że w rozpatrywanym przypadku brzegami zbioru wartości są krzywe będące odwzorowaniem krawędzi zbioru Q .

W przypadku ogólnym wielomianu o współczynnikach zależnych nieliniowo od niepewnych parametrów (a takim jest wielomian (2.34)) punkty wewnętrzne zbioru Q mogą być odwzorowane w punkty brzegowe zbioru wartości (patrz przykład 8.4).

4.4. Metoda przestrzeni niepewnych parametrów

Metoda przestrzeni niepewnych parametrów, podana w pracach [5, 6], jest pewnym rozwinięciem znanej z klasycznej teorii sterowania metody podziału D ([87, 81]). Idea metody podziału D (sformułowanej dla L -stabilności i K -stabilności) polega na wyznaczeniu zbioru asymptotycznej stabilności w przestrzeni niepewnych parametrów, tj. zbioru takich wartości niepewnych parametrów, przy których rozpatrywany wielomian jest asymptotycznie stabilny.

Metoda podziału D jest metodą graficzną. Z tego powodu jest ona szczególnie efektywna przy dwóch niepewnych parametrach, kiedy to wyznacza się zbiór asymptotycznej stabilności na płaszczyźnie. W takim przypadku, przy badaniu np. L -stabilności, istota metody podziału D polega na wyznaczeniu na płaszczyźnie niepewnych parametrów granic L -stabilności, tj. krzywych dzielących płaszczyznę na takie obszary, w których dla wartości niepewnych parametrów z poszczególnych obszarów wielomian ma ściśle określoną liczbę zer o dodatniej części rzeczywistej. Obszar, dla którego liczba zer o dodatniej części rzeczywistej jest równa zero, jest obszarem L -stabilności.

Metodę podziału D można bezpośrednio stosować do badania odpornej L -stabilności i K -stabilności wielomianów o dwóch niepewnych parametrach. Przykład jej zastosowania do syntezy korektora pierwszego rzędu stabilizującego obiekt przedziałowy jest podany w [33].

Weźmy pod uwagę rodzinę wielomianów $W(s, Q)$ stałego stopnia o rzeczywistych współczynnikach, zdefiniowaną wzorami (4.2)-(4.4) i założmy, że wielomian nominalny $w_0(s) = w(s, q_0)$ jest D -stabilny, gdzie D jest otwartym jedynym obszarem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Z twierdzenia 3.1 wynika, że przy powyższym założeniu rodzina wielomianów $W(s, Q)$ stałego stopnia jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wielomian z tej rodziny nie ma zer na brzegu ∂D obszaru D , czyli

$$w(s, q) \neq 0, \quad \forall q \in Q \quad \text{i} \quad \forall s \in \partial D. \quad (4.32)$$

Założmy, że wektor q może przyjmować dowolne wartości z rzeczywistej przestrzeni $\mathbf{R}^m$, a nie tylko z zadanego zbioru $Q \subset \mathbf{R}^m$.

Oznaczmy przez Q_{stab} taki zbiór w przestrzeni niepewnych parametrów $\mathbf{R}^m$, że rodzina wielomianów $W(s, Q)$ jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy $q \in Q_{stab}$. Niepusty zbiór Q_{stab} zawsze istnieje przy założeniu, że wielomian nominalny $w_0(s) = w(s, q_0)$ jest D -stabilny. Z lematu 3.1 wynika bowiem, że jeżeli wielomian $w(s, q)$ jest D -stabilny dla $q = q_0$, to zawsze istnieje otoczenie punktu q_0 takie, że dla każdego q z tego otoczenia wielomian $w(s, q)$ jest D -stabilny.

Oznaczmy przez

$$Q_g = \{q \in \mathbf{R}^m: w(s, q) = 0 \text{ dla } s \in \partial D\} \quad (4.33)$$

granice podziału przestrzeni niepewnych parametrów $\mathbf{R}^m$ na takie podprzestrzenie, że dla każdego q należącego poszczególnych podprzestrzeni wielomian $w(s, q)$ ma ściśle określoną liczbę zer w otwartym obszarze D . Granice (4.33) będziemy nazywać granicami D -stabilności rodziny wielomianów $W(s, Q)$. Są one w przypadku ogólnym (tj. przy $m \geq 3$) powierzchniami, natomiast są one krzywymi przy dwóch niepewnych parametrach. Jeżeli przy zmianach wartości niepewnych parametrów zera wielomianu $w(s, q)$ przekraczają brzeg ∂D obszaru D , to może to nastąpić wtedy i tylko wtedy, gdy wartość wektora q przekracza jedną z granic D -stabilności. W przestrzeni niepewnych parametrów granice D -stabilności wyznaczają zbiór Q_{stab} .

Rodzina wielomianów $W(s, Q)$, zdefiniowana wzorem (4.2), jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy $Q \subset Q_{stab}$. Ponieważ wielomian nominalny $w_0(s) = w(s, q_0)$ jest D -stabilny (tzn. $q_0 \in Q_{stab}$), dla odpornej D -stabilności rodziny wielomianów $W(s, Q)$ potrzeba i wystarcza, aby granice D -stabilności

(powierzchnie w $\mathbf{R}^m$ w przypadku ogólnym) nie przecinały brzegów zbioru Q . Wtedy $Q \subset Q_{stab}$.

Badanie odpornej D -stabilności rodziny wielomianów $W(s, Q)$ metodą przestrzeni niepewnych parametrów polega na wyznaczeniu granic D -stabilności (tj. zbioru Q_g) w przestrzeni niepewnych parametrów i na sprawdzeniu, czy przecinają one zbiór Q wartości niepewnych parametrów, zdefiniowany wzorem (4.4), czy też nie. Ponieważ bezpośrednie sprawdzenie tego faktu w przestrzeni wielowymiarowej nie jest proste, powyższe zadanie należy sprowadzić do odpowiedniego zadania na płaszczyźnie. Można tu zastosować metodę zaproponowaną w pracach [5, 6]. Polega ona na rzutowaniu granic D -stabilności i zbioru Q na płaszczyznę dwóch wybranych niepewnych parametrów.

Ideę metody przestrzeni niepewnych parametrów zilustrujemy na przykładzie badania odpornej L -stabilności rodziny wielomianów (4.2), dla której jest spełnione założenie $a_n(q) > 0$ dla każdego $q \in Q$. Obszarem D jest otwarta lewa półpłaszczyzna, której brzeg ma opis parametryczny $f(y) = jy$, $y \in Y = [0, \infty)$, a zbiór Q_g (granice L -stabilności) można zdefiniować następująco

$$Q_g = \{q \in \mathbf{R}^m: w(jy, q) = 0 \text{ dla } y \geq 0\}. \quad (4.34)$$

Jeżeli wielomian nominalny $w_0(s) = w(s, q_0)$ jest L -stabilny, to warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej L -stabilności rodziny wielomianów $W(s, Q)$ jest nieprzecinanie zbioru Q przez zbiór Q_g .

Dla $s = jy$ wielomian $w(s, q)$ można przedstawić w postaci

$$w(jy, q) = U(y, q) + jyV(y, q), \quad (4.35)$$

gdzie

$$U(y, q) = a_0(q) - a_2(q)y^2 + a_4(q)y^4 + \dots, \quad (4.36)$$

$$V(y, q) = a_1(q) - a_3(q)y^2 + a_5(q)y^4 + \dots \quad (4.37)$$

Jeżeli dla pewnego $q \in \mathbf{R}^m$ wielomian $w(s, q)$ ma zera na osi urojonej, to może to być albo zero rzeczywiste $s = 0$ (wtedy wektor q leży na granicy zer

rzeczywistych), albo para zer urojonych $s = \pm jy^*$ (wtedy wektor q leży na granicy zer urojonych). Wobec tego $Q_g = Q_{gr} \cup Q_{gz}$, gdzie

$$Q_{gr} = \{q: a_0(q) = 0\} \quad (4.38)$$

jest granicą zer rzeczywistych, zaś

$$Q_{gz} = \{q: U(y, q) = 0 \text{ i } V(y, q) = 0 \text{ dla pewnych } y > 0\} \quad (4.39)$$

jest granicą zer zespolonych.

Z powyższych rozważań wynika, że rodzina $W(s, Q)$ jest odpornie L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy powierzchnie opisane równaniem

$$a_0(q) = 0 \quad (4.40)$$

oraz układem równań

$$U(y, q) = 0 \text{ i } V(y, q) = 0, \quad (4.41)$$

gdzie $y \in (0, \infty)$ jest parametrem, nie przecinają zbioru Q .

Równanie (4.40) oraz równania (4.41) rozwiążemy względem dwóch niepewnych parametrów. Nie zmniejszając ogólności rozważań przyjmijmy, że są to parametry q_1 i q_2 , czyli będziemy rozpatrywać płaszczyznę (q_1, q_2) . Rzut zbioru Q na płaszczyznę (q_1, q_2) jest prostokątem

$$Q_p = \{q_p = [q_1, q_2]^T: q_k \in [q_k^-, q_k^+], k = 1, 2\}. \quad (4.42)$$

Aby wyznaczyć rzut na płaszczyznę (q_1, q_2) powierzchni opisanych równaniami (4.40) i (4.41), należy dokonać dyskretyzacji (z odpowiednim krokiem) wartości niepewnych parametrów $q_3, q_4, \dots, q_m$ w zadanych przedziałach (otrzymamy w ten sposób skończone zbiory $\{q_k^*\}$ wartości niepewnych parametrów $q_k, k = 3, 4, \dots, m$) oraz dyskretyzacji wartości parametru $y > 0$ (otrzymamy w ten sposób skończony zbiór $\{y^*\}$ wartości parametru y). Rozwiązując równanie (4.40) numerycznie względem rzeczywistych wartości q_2 (przy dyskretyzacji również wartości parametru q_1 w zadanym przedziale) otrzymamy na płaszczyźnie (q_1, q_2) rodzinę krzywych, którą można opisać ogólnym wzorem

$$q_2 = \beta_0(q_1, q_3^*, \dots, q_m^*), \quad (4.43)$$

gdzie $\beta_0(\cdot)$ jest w ogólności funkcją nieliniową, a każda krzywa odpowiada innym ustalonym wartościom niepewnych parametrów $q_k, k = 3, 4, \dots, m$.

Podobnie, rozwiązując układ równań (4.41) względem rzeczywistych wartości q_1 i q_2 otrzymamy na płaszczyźnie (q_1, q_2) rodzinę krzywych, którą można opisać parametrycznie wzorami (w funkcji wartości y^* parametru y)

$$q_1 = \beta_1(q_3^*, \dots, q_m^*, y^*) \text{ i } q_2 = \beta_2(q_3^*, \dots, q_m^*, y^*), \quad (4.44)$$

przy czym w przypadku ogólnym funkcje $\beta_1(\cdot)$ i $\beta_2(\cdot)$ są nieliniowe, a każda krzywa odpowiada innym ustalonym wartościom niepewnych parametrów $q_k, k = 3, 4, \dots, m$, z zadanych przedziałów.

Rodzina wielomianów $W(s, Q)$ jest odpornie L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy wyznaczone rodziny krzywych (4.43) i (4.44) nie przecinają prostokąta (4.42).

Proces wyznaczania granic L -stabilności i sprawdzania wyżej wymienionego warunku można znacznie uprościć w przypadku, gdy współczynniki wielomianu $w(s, q)$ zależą liniowo od niepewnych parametrów. W takim przypadku równania (4.40) i (4.41) można napisać w postaci

$$a_0(q) = a_{00} + \sum_{k=1}^m a_{0k} q_k = 0, \quad (4.45)$$

gdzie a_{0k} są to stałe współczynniki, oraz

$$U(y, q) = g_0(y) + \sum_{k=1}^m q_k g_k(y) = 0, \quad (4.46)$$

$$V(y, q) = h_0(y) + \sum_{k=1}^m q_k h_k(y) = 0, \quad (4.47)$$

gdzie $g_k(y)$ i $h_k(y)$ są to wielomiany względem y^2 .

Wyznaczenie rozwiązania liniowego równania (4.45) na płaszczyźnie (q_1, q_2) jest sprawą prostą. Aby rozwiązać układ równań (4.46), (4.47) względem q_1 i q_2 , zapiszmy go najpierw w postaci

$$A(y)q_p(y) = b(y, q_3, \dots, q_m), \quad (4.48)$$

gdzie

$$A(y) = \begin{bmatrix} g_1(y) & g_2(y) \\ h_1(y) & h_2(y) \end{bmatrix}; \quad q_p(y) = \begin{bmatrix} q_1(y) \\ q_2(y) \end{bmatrix}; \quad (4.49)$$

$$b(y, q_3, \dots, q_m) = \begin{bmatrix} -g_0(y) - \sum_{k=3}^m q_k g_k(y) \\ -h_0(y) - \sum_{k=3}^m q_k h_k(y) \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

Rozwiązanie układu równań (4.48) ma postać

$$q_p(y) = A^{-1}(y)b(y, q_3, \dots, q_m). \quad (4.51)$$

Wyznaczając na podstawie wzoru (4.51) rozwiązanie równania (4.48), należy przyjmować dyskretne wartości niepewnych parametrów $q_k, k = 3, 4, \dots, m$, a także dyskretne wartości parametru y w sposób opisany powyżej. Dla każdego zbioru ustalonych wartości niepewnych parametrów $q_k, k = 3, 4, \dots, m$, punkty $(q_1(y), q_2(y))$ (wyznaczone ze wzoru (4.51)), tworzą na płaszczyźnie (q_1, q_2) krzywą będącą granicą L -stabilności (granicą zer zespolonych). Przy wykreślaniu tej krzywej należy ograniczyć się do takich wartości parametru y , którym odpowiada krzywa przebiegająca w otoczeniu zbioru Q_p .

Jeżeli macierz $A(y)$ jest osobliwa dla niektórych wartości parametru y , to wtedy krzywa utworzona z punktów $(q_1(y), q_2(y))$ ma asymptotę dla tej wartości y . Taki przypadek można pominąć, jeżeli asymptota nie leży w pobliżu zbioru Q_p . Jeżeli zaś leży ona w pobliżu tego zbioru, należy taki przypadek przeanalizować dokładniej.

Przykład 4.4. Stosując metodę przestrzeni niepewnych parametrów należy zbadać odporną L -stabilność wielomianu charakterystycznego (2.40) układu regulacji automatycznej rozpatrywanego w przykładzie 2.5.

Łatwo sprawdzić, że wielomian nominalny $w_0(s) = w(s, 0)$ jest L -stabilny.

Problem odpornej L -stabilności będziemy rozpatrywać na płaszczyźnie (q_2, q_3) niepewnych parametrów. Rzut prostopadłościanu (2.41) na tę płaszczyznę jest prostokątem

$$Q_p = \{q_p = [q_2, q_3]^T : q_2 \in [-0.285, 0.315], q_3 \in [-1.1875, 1.3125]\}. \quad (4.52)$$

Jego położenie na płaszczyźnie (q_2, q_3) jest pokazane na rysunku 4.4.

Z postaci funkcji $a_0(q)$ i równania (4.45) wynika, że na płaszczyźnie (q_2, q_3) granicą zer rzeczywistych jest prosta pozioma o równaniu

$$q_3 = -(244244.37 + 79994.88q_1) / 25000. \quad (4.53)$$

Jest ona na rysunku 4.4 wykreślona dla wartości q_1 równych: -0.09, 0.0 i 0.09.

Podstawiając w wielomianie (2.40) $s = jy$ i uwzględniając wzory (4.35), (4.46)–(4.51) otrzymamy poniższe równanie, które jest spełnione na krzywych będących granicami zer zespolonych,

$$A(y)q_p(y) = b(y, q_1), \quad (4.54)$$

gdzie

$$A(y) = \begin{bmatrix} g_2(y) & g_3(y) \\ h_2(y) & h_3(y) \end{bmatrix}, \quad q_p(y) = \begin{bmatrix} q_2(y) \\ q_3(y) \end{bmatrix}, \quad b(y, q_1) = \begin{bmatrix} -g_0(y) - q_1 g_1(y) \\ -h_0(y) - q_1 h_1(y) \end{bmatrix},$$

przy czym

$$g_0(y) = 244244.37 - y^2 1662717.27 + y^4 62592.63 - y^6 81.6,$$

$$g_1(y) = 79994.88 - y^2 8019486.72,$$

$$g_2(y) = -y^2 255600 + y^4 3808 - y^6,$$

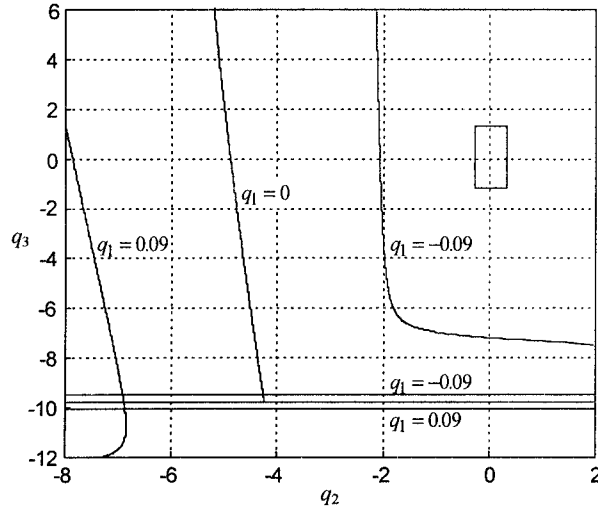
$$g_3(y) = 25000 - y^2 56380 + y^4 81.6,$$

$$h_0(y) = 2602938.05 - y^2 583955.92 + y^4 3934.4 - y^6,$$

$$h_1(y) = 8079482.88 - y^2 1999872,$$

$$h_2(y) = 25000 - y^2 56380 + y^4 80.1,$$

$$h_3(y) = 255600 - y^2 3808 + y^4.$$



Rys. 4.4. Wykresy na płaszczyźnie (q_2, q_3) : prostokąta (4.52), prostych (4.53) i rozwiązań równania (4.54) dla wartości q_1 równych: $-0.09, 0.0$ i 0.09

Wykresy rozwiązania równania (4.54) dla wartości q_1 równych: $-0.09, 0.0$ i 0.09 są pokazane na rysunku 4.4 przy $y \in [0.22, 3.6]$, $y \in [0.55, 3.54]$ i $y \in [0, 3.93]$, odpowiednio. Dla innych wartości parametru $q_1 \in [-0.09, 0.09]$ odpowiednie krzywe leżą pomiędzy krzywymi odpowiadającymi $q_1 = -0.09$ oraz $q_1 = 0.09$. Z rysunku 4.4 wynika, że granice L -stabilności nie przecinają prostokąta (4.52), co oznacza, że rozpatrywany wielomian o niepewnych parametrach jest odpornie L -stabilny. $\square$

Przy badaniu odpornej K -stabilności rodziny wielomianów $W(s, Q)$ metodą przestrzeni niepewnych parametrów postępujemy podobnie jak w przypadku badania odpornej L -stabilności. W takim przypadku obszarem D jest otwarte koło jednostkowe, którego brzeg (leżący w półpłaszczyźnie $\text{Im } s \geq 0$) ma opis para-

metryczny $f(y) = \exp(jy\pi)$, $y \in Y = [0, 1]$, a zbiór Q_g (granice K -stabilności) można zdefiniować następująco

$$Q_g = \{q \in \mathbf{R}^m: w(\exp(jy\pi), q) = 0 \text{ dla } y \in [0, 1]\}. \quad (4.55)$$

Zbiór (4.55) można przedstawić w postaci $Q_g = Q_{gr} \cup Q_{gz}$, gdzie

$$Q_{gr} = \{q: w(-1, q) = 0 \text{ lub } w(1, q) = 0\} \quad (4.56)$$

jest granicą zer rzeczywistych, zaś

$$Q_{gz} = \{q: w(\exp(jy\pi), q) = 0 \text{ dla pewnych } y \in (0, 1)\} \quad (4.57)$$

jest granicą zer zespolonych.

Badanie metodą przestrzeni niepewnych parametrów odpornej L -stabilności rodziny wielomianów $W(s, Q)$ możemy przeprowadzić w sposób nieco zmodyfikowany w porównaniu z opisanym powyżej. Mianowicie, zamiast rozpatrywania granicy zer zespolonych (4.39), możemy rozpatrywać powierzchnie, na których jest spełnione równanie

$$\det \tilde{H}(q) = 0, \quad (4.58)$$

gdzie macierz $\tilde{H}(q)$ ma postać (4.8). Z twierdzenia 4.3 wynika bowiem, że jeżeli wielomian nominalny $w_0(s)$ jest L -stabilny, to rodzina wielomianów $W(s, Q)$ jest odpornie L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór Q nie jest przecinany przez powierzchnię będącą granicą zer rzeczywistych (4.38) i przez powierzchnię będącą rozwiązaniem równania (4.58). Zauważmy, że w przypadku ogólnym powierzchnia, na której jest spełnione równanie (4.58), nie jest tożsama z granicą zer zespolonych (4.39). Ze wzorów (4.7) i (4.9) wynika bowiem, że $\det \tilde{H}(q) = 0$ nie tylko dla $s_{i,k} = \pm jy$, ale też dla $s_{i,k} = \pm \alpha$, $\alpha > 0$. Zbiór Q_{gz} , zdefiniowany wzorem (4.39), jest więc podzbiorem zbioru $Q_H = \{q: \det \tilde{H}(q) = 0\}$. Wartości wektora q należące do zbioru Q_H , ale nie należące do zbioru Q_{gz} , odpowiadają wielomia-

nom $w(s, \mathbf{q})$, które nie są L -stabilne. Wobec tego, aby rodzina $W(s, Q)$ była odpornie L -stabilna, zbiór Q_H nie może przecinać zbioru Q .

Postępując podobnie możemy pokazać, że badając odporną K -stabilność rodziny $W(s, Q)$ zamiast rozpatrywania granicy zer zespolonych (4.57), możemy rozpatrywać powierzchnię, na której jest spełnione równanie

$$\det S(\mathbf{q}) = 0, \quad (4.59)$$

gdzie macierz $S(\mathbf{q})$ ma postać określoną wzorami (4.13) i (4.14). Z twierdzenia 4.4 wynika bowiem, że jeżeli wielomian nominalny $w_0(s)$ jest K -stabilny, to rodzina wielomianów $W(s, Q)$ jest odpornie K -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór Q nie jest przecinany przez powierzchnię będącą granicą zer rzeczywistych (4.56) i przez powierzchnię będącą rozwiązaniem równania (4.59).

Opisana powyżej metoda badania odpornej K -stabilności została zastosowana w przykładzie 4.3.

Metoda przestrzeni niepewnych parametrów może być efektywnie stosowana do badania odpornej D -stabilności wielomianów o małej liczbie niepewnych parametrów, w zasadzie nie większej niż $m = 4$. Wynika to z faktu, że rozpatrujemy problem stabilności na płaszczyźnie dwóch niepewnych parametrów i wobec tego musimy dokonać dyskretyzacji wartości pozostałych $m - 2$ niepewnych parametrów.

Metoda przestrzeni niepewnych parametrów może być stosowana do badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów, których współczynniki zależą od niepewnych parametrów liniowo, wieloliniowo i wielomianowo. W tym ostatnim przypadku stosowanie metody jest dosyć trudne, wymaga bowiem dokonywania, oprócz złożonych obliczeń numerycznych, również obliczeń symbolicznych, np. przy wyznaczaniu zbioru Q_g zdefiniowanego wzorem (4.33).

Metoda przestrzeni niepewnych parametrów została zastosowana w pracy [5] do badania odpornej D -stabilności wielomianu (2.34), którego współczynniki zależą wielomianowo od dwóch niepewnych parametrów. Obszarem D jest otwarty sektor hiperboliczny, którego brzeg jest hiperbolą (D.5) przy $\gamma = 0.35$ i $b = 1.75$. W pracy [5] są też omówione pewne aspekty praktyczne związane ze stosowaniem tej metody.

4.5. Metody badania odpornej stabilności rodziny macierzy stanu

Weźmy pod uwagę rodzinę macierzy stanu (o wymiarach $n \times n$)

$$A(Q) = \{A(\mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}, \quad (4.60)$$

gdzie $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T$ jest wektorem niepewnych fizycznych parametrów układu, elementy $a_{ij}(\mathbf{q})$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) macierzy $A(\mathbf{q})$ są ciągłymi funkcjami swoich argumentów, a zbiór Q wartości niepewnych parametrów ma postać

$$Q = \{\mathbf{q} : q_k \in [q_k^-, q_k^+], q_k^- < q_k^+, k = 1, 2, \dots, m\}. \quad (4.61)$$

Wartości własne macierzy stanu $A(\mathbf{q})$ są miejscami zerowymi jej wielomianu charakterystycznego

$$w(s, \mathbf{q}) = \det(sI - A(\mathbf{q})), \quad (4.62)$$

który ma ogólną postać (3.2) przy $a_n(\mathbf{q}) = 1$. Rodzina macierzy $A(Q)$ jest więc odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy jej wielomian charakterystyczny $w(s, \mathbf{q})$ jest odpornie D -stabilny. Współczynniki wielomianu charakterystycznego (4.62) są sumami iloczynów odpowiednich elementów macierzy $A(\mathbf{q})$. Stąd zależność współczynników wielomianu charakterystycznego $w(s, \mathbf{q})$ od niepewnych parametrów jest bardziej złożona niż zależność elementów macierzy stanu $A(\mathbf{q})$ od tych parametrów. Na przykład, w układzie regulacji automatycznej rozpatrywanym w przykładzie 2.2 elementy macierzy stanu $A(\mathbf{q})$ (pierwszy ze wzorów (2.21)) zależą liniowo od niepewnych parametrów, a współczynniki wielomianu charakterystycznego $w(s, \mathbf{q})$ (mianownik transmitancji operatorowej (2.23)) zależą wieloliniowo od niepewnych parametrów.

Badanie odpornej D -stabilności rodziny macierzy $A(Q)$ jest problemem trudniejszym w porównaniu z badaniem odpornej D -stabilności rodziny wielomianów charakterystycznych. Dlatego też teoria odpornej D -stabilności rodziny wielomianów jest dotychczas bardziej rozwinięta niż teoria odpornej D -stabilności rodziny macierzy. W literaturze rozpatruje się najczęściej problem odpornej

L -stabilności oraz K -stabilności rodziny macierzy stanu, których elementy zależą liniowo od niepewnych parametrów.

Przy badaniu odpornej stabilności rodziny macierzy stanu wykorzystuje się najczęściej metody pozwalające na lokalizację wartości własnych macierzy (bazujące na metodzie Gerszgorina, opisanej np. w [65, 81]), metodę Lapunowa, a także metodę polegającą na sprowadzaniu problemu odpornej stabilności rodziny macierzy stanu do problemu odpornej nieosobliwości innej rodziny macierzy, którą otrzymuje się z rodziny macierzy stanu w drodze odpowiednich transformacji.

Z teorii stabilności Lapunowa (np. [81]) wynikają dwa poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 4.8. Kwadratowa macierz A jest L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej symetrycznej dodatnio określonej macierzy Q istnieje dodatnio określona symetryczna macierz P będąca rozwiązaniem równania Lapunowa

$$A^T P + PA = -Q. \quad (4.63)$$

□

Twierdzenie 4.9. Kwadratowa macierz A jest K -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej symetrycznej dodatnio określonej macierzy Q istnieje dodatnio określona symetryczna macierz P będąca rozwiązaniem równania Lapunowa

$$A^T P A - P = -Q. \quad (4.64)$$

□

W równaniach (4.63) i (4.64) najczęściej przyjmuje się $Q = I$ lub $Q = 2I$, gdzie I jest macierzą jednostkową.

Zauważmy, że jeżeli są spełnione warunki twierdzeń 4.8 i 4.9, odpowiednio, to lewe strony równań (4.63) i (4.64) są macierzami ujemnie określonymi.

Na bazie twierdzeń 4.8 i 4.9 można sformułować poniższe lematy.

Lemat 4.2. Jeżeli istnieje symetryczna dodatnio określona macierz P taka, dla której

$$A^T P + PA < 0, \quad (4.65)$$

tzn. macierz $A^T P + PA$ jest ujemnie określona, to kwadratowa macierz A jest L -stabilna. □

Lemat 4.3. Jeżeli istnieje symetryczna dodatnio określona macierz P taka, dla której

$$A^T P A - P < 0, \quad (4.66)$$

to kwadratowa macierz A jest K -stabilna. □

Bezpośrednie stosowanie twierdzeń 4.8 i 4.9 oraz lematów 4.2 i 4.3 do badania odpornej stabilności rodziny macierzy (4.60) nie jest proste w przypadku ogólnym, wymaga ono bowiem sprawdzania ich warunków oddzielnie dla każdej macierzy $A \in A(Q)$.

Stosując lematy 4.2 i 4.3 możemy bezpośrednio zbadać odporną stabilność rodziny macierzy (4.60) tylko w przypadkach szczególnych, gdy dla całej rodziny (4.60) istnieje jedna symetryczna dodatnio określona macierz P spełniająca zależność (4.65) lub (4.66), odpowiednio, dla każdej macierzy $A \in A(Q)$.

Macierz P o wyżej wymienionej właściwości nosi nazwę macierzy formy kwadratowej $V(x) = x^T(t)Px(t)$ (lub $V(x) = x^T(k)Px(k)$) wspólnej dla rodziny układów dynamicznych opisanych równaniem stanu $\dot{x}(t) = A(q)x(t)$, $q \in Q$ (lub $x(k+1) = A(q)x(k)$, $q \in Q$). W dalszych rozważaniach będziemy ją nazywać macierzą wspólnej formy kwadratowej rodziny macierzy $A(Q)$.

Problem określenia macierzy P wspólnej formy kwadratowej dla wybranych rodzin macierzy stanu był rozpatrywany w pracach [12], [40], [41], [53], [109].

Weźmy pod uwagę rodzinę macierzy symetrycznych, o postaci

$$\begin{aligned} A_{ws} &= \text{conv}\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \\ &= \{A: A = \sum_{k=1}^m \lambda_k A_k, \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, m\}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

gdzie A_k , $k = 1, 2, \dots, m$, są to znane macierze symetryczne.

W pracy [109] udowodniono poniższy lemat.

Lemat 4.4. Rodzina macierzy symetrycznych (4.67) jest odpornie L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy są L -stabilne macierze A_k , $k = 1, 2, \dots, m$.

Dowód. Macierze A_k , $k = 1, 2, \dots, m$, należą do rodziny (4.67). Ich L -stabilność jest więc warunkiem koniecznym odpornej L -stabilności tej rodziny.

Jeżeli symetryczne macierze A_k , $k = 1, 2, \dots, m$, są L -stabilne, to $A_k^T + A_k < 0$ dla każdego $k = 1, 2, \dots, m$. Z powyższego i z postaci macierzy $A \in A_{ws}$ wynika, że

$$A^T + A = \sum_{k=1}^m \lambda_k (A_k^T + A_k) < 0, \quad (4.68)$$

co oznacza, że przy $P = I$ warunek (4.65) jest spełniony dla każdej symetrycznej macierzy $A \in A_{ws}$. Macierz $P = I$ jest więc macierzą wspólną formy kwadratowej rodziny (4.67).

Z powyższych rozważań i lematu 4.2 wynika zatem, że L -stabilność macierzy A_k , $k = 1, 2, \dots, m$, jest warunkiem wystarczającym odpornej L -stabilności rodziny (4.67). $\square$

W przypadku ogólnym macierz P wspólnej formy kwadratowej rodziny macierzy $A(Q)$ nie istnieje, dlatego też w literaturze, na bazie twierdzeń 4.8 i 4.9 oraz lematów 4.2 i 4.3, formułuje się warunki dostateczne odpornej stabilności. Ogólną zasadę ich formułowania zilustrujemy na przykładzie L -stabilności.

Oznaczmy przez A_0 macierz nominalną rodziny $A(Q)$ i załóżmy, że jest ona L -stabilna.

Rodzinę macierzy (4.60) można przedstawić w postaci

$$A(q) = A_0 + E(q), \quad q \in Q, \quad (4.69)$$

gdzie $E(q)$ jest macierzą perturbacji (błędu).

Lemat 4.5. Niech macierz nominalna A_0 będzie L -stabilna. Rodzina macierzy (4.69) jest odpornie L -stabilna, jeżeli

$$-2I + E^T(q)P + PE(q) < 0, \quad \forall q \in Q, \quad (4.70)$$

gdzie macierz P jest rozwiązaniem równania Lapunowa $A_0^T P + PA_0 = -2I$.

Dowód. Jeżeli macierz nominalna A_0 jest L -stabilna, to istnieje symetryczna dodatnio określona macierz P , będąca rozwiązaniem równania Lapunowa $A_0^T P + PA_0 = -2I$.

Z lematu 4.2 wynika, że rodzina (4.69) jest odpornie L -stabilna, jeżeli warunek (4.65) jest spełniony dla $A = A_0 + E(q)$ i dla każdego $q \in Q$, tzn.

$$(A_0 + E(q))^T P + P(A_0 + E(q)) < 0, \quad \forall q \in Q. \quad (4.71)$$

Ponieważ $(A_0 + E(q))^T P + P(A_0 + E(q)) = -2I + E^T(q)P + PE(q)$, warunek (4.70) wynika natychmiast z warunku (4.71). $\square$

W literaturze, przyjmując określone struktury niepewności (klasy macierzy $E(q)$), formułuje się warunki, przy spełnieniu których zachodzi (4.70) i na tej podstawie otrzymuje się kryteria typu dostatecznego odpornej L -stabilności rodziny macierzy (4.69).

Innym podejściem stosowanym przy badaniu odpornej stabilności rodziny macierzy $A(Q)$ jest sprowadzenie problemu odpornej stabilności do problemu odpornej nieosobliwości odpowiednich rodzin macierzy, które otrzymuje się w drodze transformacji rodziny $A(Q)$. Jedną z takich transformacji, często stosowana w literaturze (np. [12], [66], [100]), wykorzystuje operację zwaną sumą Kroneckera, którą oznacza się symbolem $\oplus$.

Niech $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ będą kwadratowymi macierzami o wymiarach $n \times n$ i $m \times m$, odpowiednio. Iloczyn Kroneckera macierzy A i B , oznaczony przez $A \otimes B$, jest macierzą blokową o wymiarach $nm \times nm$ o postaci [80, 127]

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

Natomiast suma Kroneckera macierzy A i B , oznaczona przez $A \oplus B$, jest macierzą blokową o wymiarach $nm \times nm$, którą oblicza się ze wzoru

$$A \oplus B = A \otimes I_m + I_n \otimes B, \quad (4.73)$$

gdzie I_n jest macierzą jednostkową o wymiarach $n \times n$. Wartościami własnymi macierzy (4.73) są sumy wartości własnych macierzy A i B .

Weźmy pod uwagę rodzinę macierzy $A(Q)$ o postaci (4.60) i zdefiniujmy nową rodzinę

$$\tilde{A}(Q) = \{\tilde{A}(q) = A(q) \oplus A(q): q \in Q\}. \quad (4.74)$$

Lemat 4.6. Niech macierz nominalna A_0 będzie L -stabilna. Rodzina macierzy (4.60) jest odpornie L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina macierzy (4.74) jest odpornie nieosobliwa, tzn. $\det \tilde{A}(q) \neq 0$ dla każdego $q \in Q$.

Dowód. Z twierdzenia 3.2 wynika, że jeżeli macierz nominalna A_0 jest L -stabilna, to rodzina macierzy $A(Q)$ jest odpornie L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy $A(q)$ nie ma wartości własnych na osi urojonej dla każdego $q \in Q$. Ponieważ dla każdego ustalonego $q \in Q$ wartościami własnymi macierzy $\tilde{A}(q) = A(q) \oplus A(q)$ są sumy wartości własnych macierzy $A(q)$, powyższe zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \tilde{A}(q) \neq 0$ dla każdego $q \in Q$. $\square$

Zastosowanie lematu 4.6 do badania odpornej L -stabilności wypukłej kombinacji dwóch macierzy jest podane w punkcie 5.2.2 niniejszej pracy.

Zauważmy, że problem odpornej nieosobliwości rodziny macierzy (4.74) nie jest problemem trywialnym w przypadku ogólnym. Ma on swoje rozwiązanie (w postaci warunków dostatecznych) dla pewnych klas macierzy $A(q)$, np. dla macierzy o elementach zależnych liniowo od niepewnych parametrów (np. [66, 100]).

Inne transformacje, sprowadzające problem odpornej stabilności do problemu odpornej nieosobliwości, zostały wykorzystane w pracach [24, 25] (patrz też punkt 5.2.2 niniejszej pracy) oraz np. w [66, 117], w których wykorzystano tzw. iloczyn dwuprzemienny macierzy.

Iloczyn dwuprzemienny (*ang. bialternate product*) dwóch macierzy $B = [b_{ij}]$ i $D = [d_{ij}]$ o wymiarach $n \times n$, który będziemy oznaczać symbolem $\bullet$, jest zdefiniowany w sposób podany poniżej.

Macierz $F = B \bullet D$, o wymiarach $(n(n-1)/2) \times (n(n-1)/2)$ ma wiersze i kolumny o podwójnych indeksach. Jej elementy $f_{ij,rs}$ oblicza się ze wzoru (np. [117])

$$f_{ij,rs} = \frac{1}{2} \left[\det \begin{bmatrix} b_{ir} & b_{is} \\ d_{jr} & d_{js} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} d_{ir} & d_{is} \\ b_{jr} & b_{js} \end{bmatrix} \right] \quad (4.75)$$

dla $i = 2, 3, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, i-1$, oraz $r = 2, 3, \dots, n$; $s = 1, 2, \dots, r-1$. Kolejne wiersze macierzy F mają numerację ij ($i = 2, 3, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, i-1$), a kolejne kolumny tej macierzy mają numerację rs ($r = 2, 3, \dots, n$; $s = 1, 2, \dots, r-1$).

5. ODPORNA STABILNOŚĆ WYPUKŁEJ KOMBINACJI DWÓCH WIELOMIANÓW ORAZ MACIERZY

5.1. Odporna stabilność wypukłej kombinacji dwóch wielomianów

Weźmy pod uwagę wypukłą kombinację dwóch wielomianów, o postaci

$$w(s, \lambda) = (1 - \lambda)w_a(s) + \lambda w_b(s), \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (5.1)$$

gdzie $w_a(s)$ i $w_b(s)$ są to znane wielomiany stopnia n o dodatnich współczynnikach przy s^n . Dla każdego $\lambda \in \Lambda$ wielomian (5.1) ma stopień n .

Wielomian stopnia n , którego współczynniki (niekoniecznie wszystkie) zależą liniowo od tylko jednego niepewnego parametru q , o postaci

$$w(s, q) = w_1(s) + qw_2(s), \quad q \in Q = [q^-, q^+], \quad (5.2)$$

o dodatnim współczynniku przy s^n dla każdego $q \in [q^-, q^+]$, przy czym wielomian $w_1(s)$ ma stopień n , stopień wielomianu $w_2(s)$ jest nie większy niż n , można sprowadzić do postaci (5.1), gdzie $w_a(s) = w(s, q^-)$, $w_b(s) = w(s, q^+)$ oraz $\lambda = (q - q^-) / (q^+ - q^-)$.

Nie zmniejszając ogólności rozważań przyjmijmy, że wielomianem nominalnym rodziny

$$W(s, \Lambda) = \{w(s, \lambda) : \lambda \in \Lambda = [0, 1]\} \quad (5.3)$$

jest wielomian $w_a(s)$. Załóżmy, że wszystkie zera wielomianu $w_a(s)$ leżą na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w otwartym obszarze D , zdefiniowanym wzorem (3.1), przy czym ma on $n_i \geq 1$ zer w każdym z podobszarów D_i , $i = 1, 2, \dots, N$.

Zgodnie z definicją 3.5, rodzinę wielomianów (5.3) będziemy nazywać od-
pornie D -stabilną, jeżeli każdy wielomian z tej rodziny ma tyle samo zer w każ-
dym z podobszarów D_i , $i = 1, 2, \dots, N$, co wielomian nominalny $w_a(s)$.

Do badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów (5.3) można stoso-
wać metody graficzne lub analityczne, podane w rozdziale 4.

5.1.1. Metody graficzne

Zera wielomianu $w(s, \lambda)$, wykreślone w funkcji parametru $\lambda \in [0, 1]$, tworzą
linie zer na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Najprostszą graficzną metodą badania odpornej D -stabilności rodziny wielo-
mianów (5.3) jest wykreślenie linii zer wielomianu (5.1) na tle brzegów obszaru D
i sprawdzenie, czy leżą one w otwartym obszarze D czy też nie.

Dzieląc obie strony równania

$$(1 - \lambda)w_a(s) + \lambda w_b(s) = 0, \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (5.4)$$

przez $1 - \lambda$ (przy założeniu $\lambda \neq 1$), otrzymamy równanie

$$w_a(s) + k w_b(s) = 0, \quad k \in [0, \infty). \quad (5.5)$$

Równanie (5.5) jest równaniem charakterystycznym układu regulacji auto-
matycznej, złożonego z fikcyjnego obiektu o transmitancji operatorowej
 $G(s) = k w_b(s) / w_a(s)$ objętego pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego. Oznacza
to, że do wyznaczenia linii zer rodziny wielomianów (5.3) można wykorzystać
specjalizowane programy komputerowe służące do wyznaczania linii pierwiastko-
wych, tj. do wyznaczania na płaszczyźnie zmiennej zespolonej położenia pier-
wiastków równania (5.5) w funkcji parametru $k \in [0, \infty)$.

Z definicji 4.1 i 4.2 oraz ze wzoru (5.1) wynika, że dla każdej ustalonej liczby
zespolonej z zbiorem wartości rodziny wielomianów (5.3) jest zbiór

$$w(z, \Lambda) = \{w(z, \lambda) : \lambda \in \Lambda = [0, 1]\}, \quad (5.6)$$

będący na płaszczyźnie zmiennej zespolonej odcinkiem linii prostej, łączącym
punkty $w_a(z)$ i $w_b(z)$.

Unormowanym zbiorem wartości tej rodziny jest zbiór

$$\tilde{w}(z, \Lambda) = \{\tilde{w}(z, \lambda) : \lambda \in \Lambda = [0, 1]\}, \quad (5.7)$$

gdzie $\tilde{w}(z, \lambda) = w(z, \lambda) / w_a(z)$, $w_a(z) \neq 0$. Jest on odcinkiem linii prostej, łączą-
cym punkty $\tilde{w}(z, 0) = 1 + j0$ i $\tilde{w}(z, 1) = w_b(z) / w_a(z)$.

Z powyższych rozważań, twierdzenia 4.5 i lematu 4.1, wynika poniższe
twierdzenie.

Przypomnijmy, że zgodnie z przyjętymi oznaczeniami brzeg każdego z pod-
obszarów D_i , $i = 1, \dots, N$, ma opis parametryczny $f_i(y)$, $y \in Y_i$.

Twierdzenie 5.1. Niech wielomian nominalny $w_a(s)$ będzie D -stabilny. Rodzina
wielomianów (5.3) stałego stopnia jest od-
pornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy,
gdy oddzielnie dla każdego z podobszarów D_i , $i = 1, 2, \dots, N$, jest spełniony waru-
nek wykluczenia zera

$$0 \notin w(f_i(y), \Lambda), \quad \forall y \in Y_i, \quad (5.8)$$

gdzie $w(f_i(y), \Lambda) = w(z, \Lambda)$ dla $z = f_i(y)$, lub równoważnie, jest spełniony wa-
runek wykluczenia zera dla unormowanego zbioru wartości, o postaci

$$0 \notin \tilde{w}(f_i(y), \Lambda), \quad \forall y \in Y_i, \quad (5.9)$$

gdzie $\tilde{w}(f_i(y), \Lambda) = \tilde{w}(z, \Lambda)$ dla $z = f_i(y)$. □

Spełnienie warunku wykluczenia zera (5.8) (lub (5.9)) można sprawdzić bez-
pośrednio, wykreślając na płaszczyźnie zmiennej zespolonej położenia odcinka
 $w(f_i(y), \Lambda)$ (lub $\tilde{w}(f_i(y), \Lambda)$) w funkcji parametru $y \in Y_i$ (przyjmując odpo-
wiednio mały krok Δy) i wizualnie sprawdzając, czy przechodzi on przez począ-
tek płaszczyzny zmiennej zespolonej czy też nie.

Zauważmy, że dla każdego ustalonego $y \in Y_i$ odcinek $w(f_i(y), \Lambda)$ nie przechodzi przez początek płaszczyzny zmiennej zespolonej wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\arg(w_a(f_i(y))) - \arg(w_b(f_i(y)))| \neq \pi, \quad \forall y \in Y_i, \quad (5.10)$$

gdzie $\arg(z) \in [-\pi, \pi)$ jest argumentem liczby zespolonej z .

Warunek (5.10) możemy napisać w postaci

$$\varphi_i(y) \neq 0, \quad \forall y \in Y_i, \quad (5.11)$$

gdzie

$$\varphi_i(y) = \pi - |\arg(w_a(f_i(y))) - \arg(w_b(f_i(y)))| \quad (5.12)$$

jest funkcją testującą stowarzyszoną z podobszarem D_i .

Zauważmy, że dla każdego ustalonego $y \in Y_i$ odcinek $\tilde{w}(f_i(y), \Lambda)$, zaczepiony w punkcie $\tilde{w}(f_i(y), 0) = 1 + j0$, nie przechodzi przez początek płaszczyzny zmiennej zespolonej wtedy i tylko wtedy, gdy przy $y \in Y_i$ wykres funkcji $w_b(f_i(y))/w_a(f_i(y))$ nie przecina ujemnej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$.

Podany powyżej warunek został w inny sposób udowodniony w pracy [63] w odniesieniu do quasi-wielomianów.

Z powyższych rozważań i twierdzenia 5.1 wynika poniższy lemat.

Lemat 5.1. Niech wielomian nominalny $w_a(s)$ będzie D -stabilny. Rodzina wielomianów (5.3) stałego stopnia jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy warunek (5.11) jest spełniony oddzielnie dla każdego z podobszarów D_i , $i = 1, 2, \dots, N$, lub równoważnie, wtedy i tylko wtedy, gdy na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wykres funkcji $w_b(f_i(y))/w_a(f_i(y))$, stowarzyszony oddzielnie z każdym z podobszarów D_i , $i = 1, 2, \dots, N$, nie przecina ujemnej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$. []

Przykład 5.1. Weźmy pod uwagę wielomian charakterystyczny (2.45) układu dyskretnego rozpatrywanego w przykładzie 2.6. Załóżmy, że wartość parametru q_2 jest stała, natomiast parametr q_1 może przyjmować dowolne wartości z przedziału $[1, 3]$.

Przyjmując $T_i = 1$ oraz $q_2 = 4$, wielomian (2.45) napiszemy w postaci

$$w(s, q_1) = 4s^2 - 4.0733s + 0.0733 + q_1(3.0183s + 0.9084), \quad q_1 \in Q = [1, 3]. \quad (5.13)$$

Należy zbadać odporną K -stabilność wielomianu (5.13), stosując twierdzenie 5.1 oraz lemat 5.1.

Wielomian (5.13) można napisać w postaci

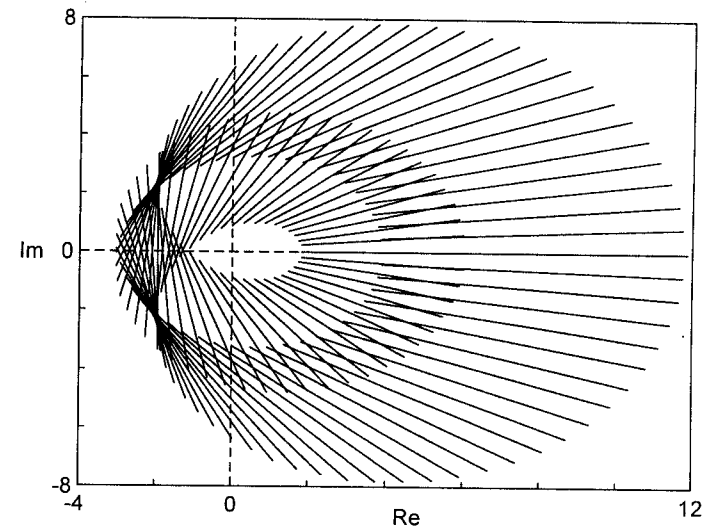
$$w(s, \lambda) = (1 - \lambda)w_a(s) + \lambda w_b(s), \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (5.14)$$

gdzie wielomiany

$$w_a(s) = 4s^2 - 1.055s + 0.9817, \quad w_b(s) = 4s^2 + 4.9816s + 2.7985$$

są K -stabilne.

Obszarem D jest otwarte koło jednostkowe, którego brzeg ma opis parametryczny $f(y) = \exp(jy\pi)$, $y \in Y = [0, 2]$. Dla każdego ustalonego $y \in Y$ zbiór wartości $w(\exp(jy\pi), \Lambda)$ jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej odcinkiem linii prostej.



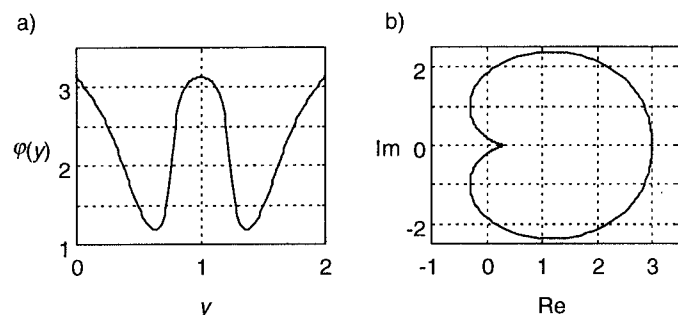
Rys. 5.1. Położenia zbioru wartości $w(\exp(jy\pi), \Lambda)$ dla $y \in [0, 2]$

Położenia zbioru wartości $w(\exp(jy\pi), \Lambda)$, wyznaczone dla y zmieniającego się od 0 do 2 z krokiem $\Delta y = 0.02$, są pokazane na rysunku 5.1. Wynika z niego, że warunek wykluczenia zera (5.8) jest spełniony. Wielomian (5.14) (i też (5.13)) jest więc odpornie K -stabilny, zgodnie z twierdzeniem 5.1.

Na rysunku 5.2 jest pokazany przebieg funkcji testującej

$$\varphi(y) = \pi - |\arg(w_a(\exp(jy\pi))) - \arg(w_b(\exp(jy\pi)))|, \quad y \in Y = [0, 2], \quad (5.15)$$

oraz wykres funkcji $w_b(\exp(jy\pi))/w_a(\exp(jy\pi))$, $y \in Y = [0, 2]$. Zgodnie z lematem 5.1, oba te wykresy potwierdzają, że rodzina (5.14), a więc i (5.13), jest odpornie K -stabilna. 11



Rys. 5.2. Wykresy do przykładu 5.1: a) wykres funkcji testującej $\varphi(y)$, b) wykres funkcji $w_b(\exp(jy\pi))/w_a(\exp(jy\pi))$ dla $y \in [0, 2]$

5.1.2. Metody analityczne

Analityczna metoda badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów (5.3) została podana w pracy [135]. Jej rezultaty są też cytowane w [21]. Jest to metoda, która pozwala na analityczne sprawdzenie warunku wykluczenia zera (5.8).

Poniżej, wychodząc z warunku wykluczenia zera (5.8) (lub (5.9)) podamy analityczne kryteria odpornej D -stabilności rodziny wielomianów (5.3), udowodnione w inny sposób w pracy [135].

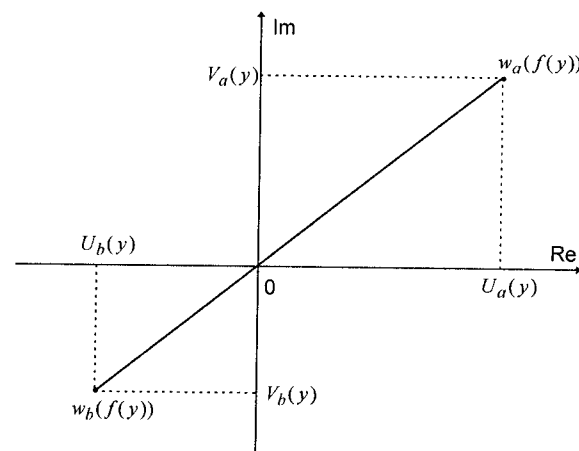
Wprowadźmy oznaczenia

$$U_{ki}(y) = \operatorname{Re} w_k(f_i(y)); \quad V_{ki}(y) = \operatorname{Im} w_k(f_i(y)), \quad \text{dla } k = a \text{ i } k = b. \quad (5.16)$$

Jeżeli dla pewnego ustalonego $y \in Y_i$ zbiór wartości $w(f_i(y), \Lambda)$, stowarzyszony z podobszarem D_i , przechodzi przez początek płaszczyzny zmiennej zespolonej, to zachodzi sytuacja podobna do pokazanej na rysunku 5.3, tzn. końce odcinka leżą w I i III lub w II i IV ćwiartkach płaszczyzny zmiennej zespolonej albo też leży on na jednej z osi przechodząc przez punkt (0,0). Z rysunku 5.3 wynika, że w każdej z opisanych powyżej sytuacji spełnione są następujące warunki

$$U_{ai}(y)V_{bi}(y) - U_{bi}(y)V_{ai}(y) = 0, \quad (5.17)$$

$$U_{ai}(y)U_{bi}(y) \leq 0, \quad V_{ai}(y)V_{bi}(y) \leq 0. \quad (5.18)$$



Rys. 5.3. Zbiór wartości $w(f(y), \Lambda)$ przechodzący przez początek płaszczyzny zmiennej zespolonej

Lemat 5.2. Niech wielomian nominalny $w_a(s)$ będzie D -stabilny. Rodzina wielomianów (5.3) stałego stopnia jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy oddzielnie dla każdego podobszaru D_i , $i = 1, 2, \dots, N$, nie istnieje $y = y_0 \in Y_i$, dla którego spełnione są zależności

$$U_{ai}(y_0)V_{bi}(y_0) - U_{bi}(y_0)V_{ai}(y_0) = 0, \quad (5.19)$$

$$U_{ai}(y_0)U_{bi}(y_0) \leq 0, \quad V_{ai}(y_0)V_{bi}(y_0) \leq 0. \quad (5.20)$$

Dowód. Weźmy pod uwagę podobszar D_i i stowarzyszony z nim zbiór wartości $w(f_i(y), \Lambda)$. Dla każdego ustalonego $y \in Y_i$ jest on odcinkiem linii prostej łączącym punkty $w_a(f_i(y))$ i $w_b(f_i(y))$.

Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli istnieje $y = y_0 \in Y_i$, dla którego są spełnione warunki (5.19) i (5.20), to $0 \in w(f_i(y_0), \Lambda)$. To zaś oznacza, że rodzina wielomianów (5.3) nie jest odpornie D -stabilna, zgodnie z twierdzeniem 5.1.

Jeżeli natomiast nie istnieje $y = y_0 \in Y_i$, dla którego są spełnione zależności (5.19) i (5.20), to warunek wykluczenia zera $0 \notin w(f_i(y), \Lambda)$ jest spełniony dla każdego $y \in Y_i$. Biorąc pod uwagę wszystkie podobszary obszaru D otrzymamy tezę lematu. $\square$

W przypadkach szczególnych, gdy D jest otwartą lewą półpłaszczyzną lub otwartym kołem jednostkowym, z lematu 5.2 wynikają poniższe kryteria L -stabilności i K -stabilności.

Lemat 5.3. Niech wielomian nominalny $w_a(s)$ będzie L -stabilny. Rodzina wielomianów (5.3) stałego stopnia jest odpornie L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje $y = y_0 \geq 0$ spełniające zależności

$$U_a(y_0)V_b(y_0) - U_b(y_0)V_a(y_0) = 0, \quad (5.21)$$

$$U_a(y_0)U_b(y_0) \leq 0, \quad V_a(y_0)V_b(y_0) \leq 0, \quad (5.22)$$

gdzie $U_a(y)$, $U_b(y)$ oraz $V_a(y)$ i $V_b(y)$ są to, odpowiednio, części rzeczywiste oraz części urojone wielomianów $w_a(s)$ i $w_b(s)$ dla $s = jy$.

Dowód. Dowód wynika z lematu 5.2 przy uwzględnieniu faktu, że obszarem D jest otwarta lewa półpłaszczyzna, której brzeg ma opis parametryczny $f(y) = jy$, $y \geq 0$. $\square$

Lemat 5.4. Niech wielomian nominalny $w_a(s)$ będzie K -stabilny. Rodzina wielomianów (5.3) stałego stopnia jest odpornie K -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje $y = y_0 \in Y = [0, 2]$, dla którego są spełnione warunki (5.21) i (5.22), gdzie $U_a(y)$, $U_b(y)$ oraz $V_a(y)$ i $V_b(y)$ są to, odpowiednio, części rzeczywiste oraz części urojone wielomianów $w_a(s)$ i $w_b(s)$ dla $s = \exp(jy\pi)$.

Dowód. Dowód wynika z lematu 5.2 dla obszaru D będącego otwartym kołem jednostkowym, którego brzeg ma opis parametryczny $f(y) = \exp(jy\pi)$, $y \in Y = [0, 2]$. $\square$

Stosowanie lematu 5.4 jest utrudnione ze względu na fakt, że części rzeczywiste i urojone wielomianów $w_a(s)$ i $w_b(s)$ przy $s = \exp(jy\pi)$ są trygonometrycznymi funkcjami parametru y . Dlatego też kryterium odpornej K -stabilności sformułujemy w innej postaci, wykorzystując pojęcie unormowanego zbioru wartości (5.7).

Lemat 5.5. Niech wielomian nominalny $w_a(s)$ będzie K -stabilny. Rodzina wielomianów (5.3) stałego stopnia jest odpornie K -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje liczba s_0 spełniająca warunek $|s_0| = 1$, dla której

$$s_0^n w_a(s_0) w_b(s_0^{-1}) - s_0^n w_b(s_0) w_a(s_0^{-1}) = 0, \quad (5.23)$$

$$\frac{w_b(s_0)}{w_a(s_0)} \leq 0. \quad (5.24)$$

Dowód. Z twierdzenia 5.1 wynika, że jeżeli wielomian $w_a(s)$ jest K -stabilny, to rodzina (5.3) stałego stopnia jest odpornie K -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \notin \tilde{w}(s, \Lambda)$ dla każdego $s = \exp(jy\pi)$, gdzie $y \in Y = [0, 2]$.

Dla każdego ustalonego $s_0 = \exp(jy_0\pi)$ unormowany zbiór wartości $\tilde{w}(s_0, \Lambda)$ jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej odcinkiem linii prostej łączącym punkty $\tilde{w}(s_0, 0) = 1 + j0$ i $\tilde{w}(s_0, 1) = w_b(s_0)/w_a(s_0)$, przy czym $w_a(s_0) \neq 0$ bowiem wielomian $w_a(s)$ jest K -stabilny z założenia. Wobec tego, warunek wykluczenia zera $0 \notin \tilde{w}(s_0, \Lambda)$ może nie być spełniony tylko wtedy, gdy odcinek $\tilde{w}(s_0, \Lambda)$ leży na osi rzeczywistej, czyli gdy $w_b(s_0)/w_a(s_0)$ jest liczbą rzeczywistą.

Wprowadźmy oznaczenia: $w_a(s_0) = U_a(y_0) + jV_a(y_0)$, $w_b(s_0) = U_b(y_0) + jV_b(y_0)$. Wtedy $w_a(s_0^{-1}) = U_a(y_0) - jV_a(y_0)$, $w_b(s_0^{-1}) = U_b(y_0) - jV_b(y_0)$.

Ze wzoru (przy pominięciu zależności od y_0)

$$\frac{w_b(s_0)}{w_a(s_0)} = \frac{U_b + jV_b}{U_a + jV_a} = \frac{(U_a U_b + V_a V_b) + j(U_a V_b - U_b V_a)}{U_a^2 + V_a^2}.$$

wynika, że część urojona wyrażenia $w_b(s_0)/w_a(s_0)$ jest równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy $s_0 = \exp(jy_0\pi)$, przy czym $y_0 \in Y = [0, 2]$ jest rozwiązaniem równania (5.21).

Podstawiając powyższe oznaczenia do równania

$$w_a(s_0)w_b(s_0^{-1}) - w_b(s_0)w_a(s_0^{-1}) = 0 \quad (5.25)$$

otrzymamy równanie (przy pominięciu zależności od y_0)

$$(U_a + jV_a)(U_b - jV_b) - (U_b + jV_b)(U_a - jV_a) = j2(U_bV_a - U_aV_b) = 0.$$

Oznacza to, że $y_0 \in Y = [0, 2]$ jest rozwiązaniem równania (5.21) wtedy i tylko wtedy, gdy s_0 jest rozwiązaniem równania (5.25), przy czym $s_0 = \exp(jy_0\pi)$.

Z powyższego wynika, że aby odcinek $\tilde{w}(s_0, \Lambda)$ leżał na osi rzeczywistej płaszczyzny zmiennej zespolonej potrzeba i wystarcza, aby s_0 , spełniające warunek $|s_0| = 1$, było rozwiązaniem równania (5.25). Zauważmy, że ten odcinek przechodzi przez początek układu współrzędnych (czyli nie jest spełniony warunek wykluczenia zera $0 \notin \tilde{w}(s_0, \Lambda)$) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi (5.24).

Mnożąc obustronnie równanie (5.25) przez s_0^n otrzymamy równanie (5.23), które zależy wielomianowo od s_0 . Takie mnożenie może w niektórych przypadkach spowodować, że $s_0 = 0$ będzie pierwiastkiem równania (5.23). Tego pierwiastka nie należy jednak brać pod uwagę przy sprawdzaniu warunku (5.24), bowiem wtedy $|s_0| = 0 \neq 1$. $\square$

Przykład 5.2. Należy zbadać odporną K -stabilność wielomianu

$$w(s, q) = s^4 + qs^3 + 1.5s - 1/3, \quad q \in Q = [-17/8, 17/8]. \quad (5.26)$$

Sprowadzając wielomian (5.26) do postaci (5.1) otrzymamy

$$w(s, \lambda) = (1 - \lambda)w_a(s) + \lambda w_b(s), \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (5.27)$$

gdzie

$$w_a(s) = s^4 - (17/8)s^3 + 1.5s - 1/3, \quad w_b(s) = s^4 + (17/8)s^3 + 1.5s - 1/3,$$

przy czym oba te wielomiany są K -stabilne.

Dla wielomianu (5.27) równanie (5.23) ma postać $s(2s^6 - 3s^4 + 3s^2 - 2) = 0$. Ma ono siedem pierwiastków, przy czym sześć z nich spełnia warunek $|s| = 1$. Są to: $s_{1,2} = \pm 1$, $s_{3,4} = s_{5,6} = -0.7906 \pm j0.6124$. Warunek (5.24) dla tych pierwiastków nie jest spełniony, ponieważ nie jest on spełniony, np. dla $s = -1$. Oznacza to, zgodnie z lematem 5.5, że wielomian (5.27) (i też (5.26)) nie jest odpornie K -stabilny. $\square$

Do badania odpornej L -stabilności oraz K -stabilności rodziny wielomianów (5.3) można stosować metody analityczne, bazujące na kryterium stabilności Hurwitza oraz kryterium Jury. Zostały one podane w pracach [3, 24]. Są one też cytowane w monografiach [6, 12].

Uwzględniając rezultaty wyżej wymienionych prac, udowodnimy poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 5.2. Niech wielomian nominalny $w_a(s)$ będzie L -stabilny. Rodzina wielomianów (5.3) stałego stopnia jest odpornie L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $H_a^{-1}H_b$ nie ma rzeczywistych niedodatnich wartości własnych (tzn. jeżeli ta macierz ma rzeczywiste wartości własne, to nie należą one do przedziału $(-\infty, 0]$), gdzie H_a i H_b są to macierze Hurwitza (o postaci (4.5)) stowarzyszone z wielomianami $w_a(s)$ i $w_b(s)$, odpowiednio.

Dowód. Macierz Hurwitza stowarzyszona z wielomianem (5.1) ma postać

$$H(\lambda) = (1 - \lambda)H_a + \lambda H_b, \quad (5.28)$$

przy czym $\det H(0) = \det H_a \neq 0$, bowiem wielomian $w_a(s)$ jest L -stabilny.

Z powyższego oraz z twierdzenia 4.2 wynika, że dla dowodu wystarczy wykazać, iż $\det H(\lambda) \neq 0$ dla każdego $\lambda \in (0, 1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $H_a^{-1}H_b$ nie ma rzeczywistych niedodatnich wartości własnych.

Dla każdego $\lambda \in (0, 1]$ zachodzi

$$\begin{aligned}\det \mathbf{H}(\lambda) &= \det[(1-\lambda)\mathbf{H}_a + \lambda\mathbf{H}_b] = \det\left(-\lambda\mathbf{H}_a\left[\frac{1-\lambda}{-\lambda}\mathbf{I} - \mathbf{H}_a^{-1}\mathbf{H}_b\right]\right) \\ &= (-\lambda)^n \det \mathbf{H}_a \det\left(\frac{1-\lambda}{-\lambda}\mathbf{I} - \mathbf{H}_a^{-1}\mathbf{H}_b\right),\end{aligned}$$

co oznacza, że $\det \mathbf{H}(\lambda) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det\left(\frac{1-\lambda}{-\lambda}\mathbf{I} - \mathbf{H}_a^{-1}\mathbf{H}_b\right) = 0. \quad (5.29)$$

Równanie (5.29) jest spełnione dla dowolnego $\lambda \in (0, 1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho = -(1-\lambda)/\lambda$ jest rzeczywistą wartością własną macierzy $\mathbf{H}_a^{-1}\mathbf{H}_b$, przy czym $\rho \in (-\infty, 0]$. Wobec tego, $\det \mathbf{H}(\lambda) \neq 0$ dla każdego $\lambda \in (0, 1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $\mathbf{H}_a^{-1}\mathbf{H}_b$ nie ma rzeczywistych wartości własnych w przedziale $(-\infty, 0]$. $\square$

Uwzględniając wzór (4.9), warunki twierdzenia 5.2 można uprościć w sposób podany poniżej.

Twierdzenie 5.3. Niech wielomian nominalny $w_a(s)$ będzie L -stabilny. Rodzina wielomianów (5.3) stałego stopnia jest odpornie L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy

1) $w_b(0) > 0$,

2) macierz $\tilde{\mathbf{H}}_a^{-1}\tilde{\mathbf{H}}_b$ nie ma rzeczywistych niedodatnich wartości własnych,

gdzie $\tilde{\mathbf{H}}_a$ i $\tilde{\mathbf{H}}_b$ są to zredukowane macierze Hurwitza (o postaci (4.8)) stowarzyszone z wielomianami $w_a(s)$ i $w_b(s)$, odpowiednio.

Dowód. Wykażemy, że powyższe warunki są równoważne z warunkami twierdzenia 4.3, zastosowanego do rodziny (5.3).

ad. 1) Dla wielomianu (5.1) warunek 1) twierdzenia 4.3 ma postać $a_0(\lambda) \neq 0$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, gdzie $a_0(\lambda) = (1-\lambda)w_a(0) + \lambda w_b(0)$. Ponieważ $w_a(0) > 0$ (bowiem $w_a(s)$ jest L -stabilny), powyższy warunek jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $w_b(0) > 0$.

ad. 2) Dowód przebiega dokładnie tak samo jak dowód twierdzenia 5.2. $\square$

Z twierdzenia 4.4 wynika poniższe kryterium odpornej K -stabilności rodziny wielomianów (5.3).

Twierdzenie 5.4. Niech wielomian nominalny $w_a(s)$ będzie K -stabilny. Rodzina wielomianów (5.3) stałego stopnia jest odpornie K -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy

1) $\operatorname{sgn} w_a(1) = \operatorname{sgn} w_b(1)$,

2) $\operatorname{sgn} w_a(-1) = \operatorname{sgn} w_b(-1)$,

3) macierz $\mathbf{S}_a^{-1}\mathbf{S}_b$ nie ma niedodatnich rzeczywistych wartości własnych, tj. jej rzeczywiste wartości własne nie należą do przedziału $(-\infty, 0]$,

gdzie $\mathbf{S}_a$ i $\mathbf{S}_b$ są to macierze zdefiniowane wzorami (4.13) i (4.14), stowarzyszone z wielomianami $w_a(s)$ i $w_b(s)$, odpowiednio.

Dowód. Dla dowodu wystarczy pokazać, że dla rodziny (5.3) warunki twierdzenia 4.4 są równoważne z powyższymi warunkami.

ad. 1) Dla wielomianu (5.1) warunek 1) twierdzenia 4.4 ma postać $(1-\lambda)w_a(1) + \lambda w_b(1) \neq 0$, $\forall \lambda \in \Lambda = [0, 1]$, przy czym $w_a(1) \neq 0$, bowiem $w_a(s)$ jest K -stabilny. Łatwo zauważyć, że powyższy warunek jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $w_a(1)$ i $w_b(1)$ mają ten sam znak.

ad. 2) Dowód przebiega dokładnie tak samo jak dowód warunku 1).

ad. 3) Macierz $\mathbf{S}(\lambda)$ stowarzyszona z wielomianem (5.1) ma postać

$$\mathbf{S}(\lambda) = (1-\lambda)\mathbf{S}_a + \lambda\mathbf{S}_b, \quad (5.30)$$

przy czym $\det \mathbf{S}(0) = \det \mathbf{S}_a \neq 0$, bowiem wielomian $w_a(s)$ jest K -stabilny.

Postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 5.2 wykazuje się, że $\det \mathbf{S}(\lambda) \neq 0$ dla każdego $\lambda \in (0, 1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(\rho\mathbf{I} - \mathbf{S}_a^{-1}\mathbf{S}_b) \neq 0$, $\forall \rho \in (-\infty, 0]$. Oznacza to, że warunek 3) twierdzenia 4.4 jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy rzeczywiste wartości własne macierzy $\mathbf{S}_a^{-1}\mathbf{S}_b$ nie leżą w przedziale $(-\infty, 0]$. $\square$

Przykład 5.3. Stosując twierdzenie 5.4 należy zbadać odporną K -stabilność wielomianu (5.26) rozpatrywanego w przykładzie 5.2.

Łatwo sprawdzić, że dla wielomianu (5.27) warunki 1) i 2) twierdzenia 5.4 są spełnione.

Wyznaczając ze wzorów (4.13) i (4.14) macierze S_a i S_b , stowarzyszone z wielomianami $w_a(s)$ i $w_b(s)$, odpowiednio, oraz obliczając wartości własne macierzy $S_a^{-1}S_b$ otrzymamy, że ma ona tylko rzeczywiste wartości własne: 1, -1.9143 i -0.5224. Ponieważ dwie wartości własne leżą w przedziale $(-\infty, 0]$, z twierdzenia 5.4 wynika, że rozpatrywany wielomian nie jest odpornie K -stabilny. $\square$

5.1.3. Metoda wykorzystująca warunek wzrostu Rantzera

Weźmy pod uwagę wielomian $f(s) + \lambda g(s)$, $\lambda \in [0, 1]$, gdzie wielomian $f(s)$ ma stopień n zaś stopień wielomianu $g(s)$ jest nie większy niż n . Załóżmy, że $\deg(f(s) + \lambda g(s)) = n$ dla każdego $\lambda \in [0, 1]$. Wprowadźmy poniższą definicję ([12], [102]).

Definicja 5.1. Przy powyższych założeniach wielomian $g(s)$ będziemy nazywać kierunkiem wypukłym w przestrzeni L -stabilnych wielomianów (stopnia n), jeżeli dla dowolnego L -stabilnego wielomianu $f(s)$ z L -stabilności wielomianu $f(s) + g(s)$ wynika L -stabilność wielomianu $f(s) + \lambda g(s)$ dla każdego $\lambda \in [0, 1]$. $\square$

Poniższy warunek, zwany warunkiem wzrostu Rantzera, pozwala w prosty sposób rozstrzygnąć, czy dany wielomian $g(s)$ jest kierunkiem wypukłym w przestrzeni L -stabilnych wielomianów.

Twierdzenie 5.5. Wielomian $g(s)$ o rzeczywistych współczynnikach jest kierunkiem wypukłym w przestrzeni L -stabilnych wielomianów wtedy i tylko wtedy, gdy [102]

$$\frac{d}{dy} \arg g(jy) \leq \left| \frac{\sin(2 \arg g(jy))}{2y} \right| \quad (5.31)$$

dla wszystkich $y > 0$ takich, że $g(jy) \neq 0$. $\square$

Dowód twierdzenia 5.5 (dosyć złożony) jest podany w pracy [102] oraz w monografiach [12, 21].

Warunek (5.31) można napisać w równoważnej postaci [21]

$$\frac{dX(y)}{dy} \leq \left| \frac{X(y)}{y} \right| \quad (5.32)$$

dla wszystkich $y > 0$ takich, że $g(jy) \neq 0$, gdzie $X(y) = V(y)/U(y)$, zaś $U(y) = \operatorname{Re} g(jy)$, $V(y) = \operatorname{Im} g(jy)$.

Warunek wzrostu Rantzera (5.31) można też napisać w postaci

$$F_R(y) \geq 0 \quad (5.33)$$

dla wszystkich $y > 0$ takich, że $g(jy) \neq 0$, gdzie

$$F_R(y) = \left| \frac{\sin(2 \arg g(jy))}{2y} \right| - \frac{d}{dy} \arg g(jy). \quad (5.34)$$

Problem określenia klas wielomianów $g(s)$, które są kierunkami wypukłymi w przestrzeni L -stabilnych wielomianów, był rozpatrywany w wielu pracach. Zbiorcze zestawienie ich rezultatów zostało podane w [13].

Wielomian $g(s)$ jest kierunkiem wypukłym w przestrzeni L -stabilnych wielomianów, jeżeli:

- $g(s)$ jest wielomianem zawierającym tylko parzyste lub tylko nieparzyste potęgi zmiennej s ,
- $g(s)$ jest wielomianem antystabilnym, tzn. wszystkie jego zera mają dodatnie części rzeczywiste,
- $g(s) = s^k(s + \alpha)$, gdzie α jest liczbą rzeczywistą, $k \geq 0$,
- $g(s) = s^k(s + \alpha)h(s)$, gdzie α jest liczbą rzeczywistą, $k \geq 0$, zaś $h(s)$ jest wielomianem zawierającym tylko parzyste lub tylko nieparzyste potęgi zmiennej s .

Wypukłą kombinację dwóch wielomianów, o postaci

$$w(s, \lambda) = (1 - \lambda)w_a(s) + \lambda w_b(s), \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (5.35)$$

gdzie $w_a(s)$ i $w_b(s)$ są to znane wielomiany stopnia n o dodatnich współczynnikach przy s^n , można napisać w postaci

$$f(s) + \lambda g(s), \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (5.36)$$

gdzie $f(s) = w_a(s)$, $g(s) = w_b(s) - w_a(s)$, przy czym $f(s) + g(s) = w_b(s)$.

Lemat 5.6. Jeżeli wielomian $g(s) = w_b(s) - w_a(s)$ jest kierunkiem wypukłym w przestrzeni L -stabilnych wielomianów, to warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej L -stabilności rodziny (5.35) jest L -stabilność wielomianów $w_a(s)$ i $w_b(s)$.

Dowód. Dowód wynika z definicji 5.1 oraz z powyższych rozważań. $\square$

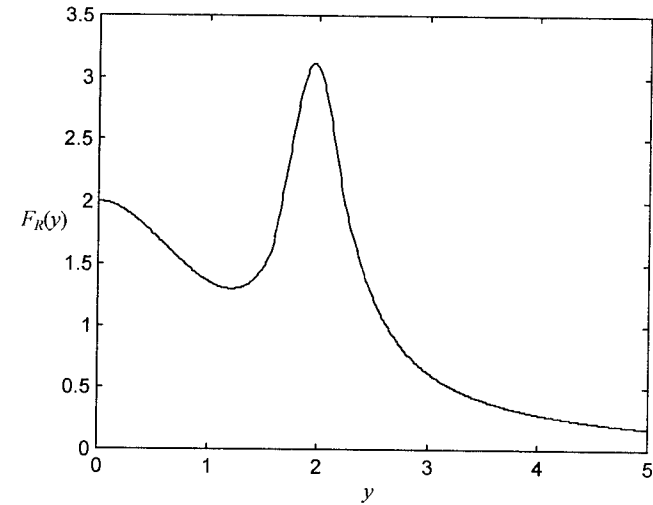
Z lematu 5.6 wynika, że jeżeli $g(s) = w_b(s) - w_a(s)$ nie jest kierunkiem wypukłym w przestrzeni L -stabilnych wielomianów, to o odpornej L -stabilności rodziny (5.35) nic nie można powiedzieć na podstawie L -stabilności wielomianów $w_a(s)$ i $w_b(s)$. Zauważmy, że w takim przypadku rodzina (5.35) może być odpornie L -stabilna.

Przykład 5.4. Rozpatrzmy wypukłą kombinację (5.35) dwóch L -stabilnych wielomianów

$$w_a(s) = s^4 + 11s^3 + 7s^2 + 17s + 3, \quad w_b(s) = 2s^4 + 9s^3 + 12s^2 + 10s + 3.$$

Wtedy $g(s) = w_b(s) - w_a(s) = s^4 - 2s^3 + 5s^2 - 5s$.

Wykres funkcji $F_R(y)$, wyznaczonej ze wzoru (5.34) dla y zmieniającego się od 0.01 do 5 z krokiem 0.01, jest pokazany na rysunku 5.4. Wynika z niego, że warunek (5.33) jest spełniony (przy $y \rightarrow \infty$ wykres $F_R(y)$ dąży asymptotycznie do zera). Na podstawie twierdzenia 5.5 możemy więc stwierdzić, że $g(s)$ jest kierunkiem wypukłym w przestrzeni L -stabilnych wielomianów czwartego stopnia. Rozpatrywana wypukła kombinacja dwóch L -stabilnych wielomianów $w_a(s)$ i $w_b(s)$ jest więc odpornie L -stabilna, zgodnie z lematem 5.6. $\square$



Rys. 5.4. Wykres funkcji $F_R(y)$ do przykładu 5.4

W podobny sposób jak w definicji 5.1 można zdefiniować pojęcie wielomianu $g(s)$ będącego kierunkiem wypukłym w przestrzeni K -stabilnych wielomianów.

Weźmy pod uwagę wielomian $f(s) + \lambda g(s)$, $\lambda \in [0, 1]$, gdzie wielomian $f(s)$ ma stopień n , stopień zaś wielomianu $g(s)$ jest nie większy niż n . Załóżmy, że $\deg(f(s) + \lambda g(s)) = n$ dla każdego $\lambda \in [0, 1]$.

Definicja 5.2. Przy powyższych założeniach wielomian $g(s)$ będziemy nazywać kierunkiem wypukłym w przestrzeni K -stabilnych wielomianów (stopnia n), jeżeli dla dowolnego K -stabilnego wielomianu $f(s)$ z K -stabilności wielomianu $f(s) + g(s)$ wynika K -stabilność wielomianu $f(s) + \lambda g(s)$ dla każdego $\lambda \in [0, 1]$. $\square$

Twierdzenie 5.6 [102]. Wielomian $g(s)$ jest kierunkiem wypukłym w przestrzeni K -stabilnych wielomianów (stopnia n) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{d}{dy} \arg g(\exp(jy)) \leq \frac{n}{2} + \left| \frac{\sin(2 \arg g(\exp(jy))) - ny}{2 \sin(y)} \right| \quad (5.37)$$

dla wszystkich $y > 0$ takich, że $g(jy) \neq 0$. $\square$

Uogólniając lemat 5.6 na przypadek badania K -stabilności rodziny wielomianów (5.35), otrzymamy poniższy lemat.

Lemat 5.7. Jeżeli wielomian $g(s) = w_b(s) - w_a(s)$ jest kierunkiem wypukłym w przestrzeni K -stabilnych wielomianów, to warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej K -stabilności rodziny (5.35) jest K -stabilność wielomianów $w_a(s)$ i $w_b(s)$. $\square$

Przykład 5.5. Rozpatrzmy wypukłą kombinację dwóch K -stabilnych wielomianów stopnia czwartego, o postaci (5.27), dla której $g(s) = w_b(s) - w_a(s) = 4.25s^3$.

Łatwo sprawdzić, że $\arg g(\exp(jy)) = 3y$, natomiast nierówność (5.37) ma postać

$$3 \leq 2 + \left| \frac{\sin(6y) - 4y}{2\sin(y)} \right|. \quad (5.38)$$

Nierówność (5.38) nie jest spełniona dla każdego $y > 0$, bowiem nie jest ona spełniona np. dla $y = 0.1$. Oznacza to, zgodnie z twierdzeniem 5.6, że wielomian $g(s) = 4.25s^3$ nie jest kierunkiem wypukłym w przestrzeni K -stabilnych wielomianów czwartego stopnia. Z lematu 5.7 wynika zatem, że o odpornej K -stabilności rodziny (5.27) nic nie można powiedzieć na podstawie K -stabilności wielomianów $w_a(s)$ i $w_b(s)$. $\square$

W przypadku, gdy wielomian $g(s)$ ma zespolone współczynniki, warunki (5.31) i (5.37) przyjmują prostszą postać, podaną w [102], a mianowicie:

- warunek (5.31) przyjmuje postać

$$\frac{d}{dy} \arg g(jy) \leq 0, \quad (5.39)$$

- warunek (5.37) przyjmuje postać

$$\frac{d}{dy} \arg g(\exp(jy)) \leq \frac{n}{2}. \quad (5.40)$$

Rezultaty pracy [102] zostały w [49] rozszerzone na klasę quasi-wielomianów o rzeczywistych oraz o zespolonych współczynnikach.

5.2. Odporna stabilność wypukłej kombinacji dwóch macierzy

Weźmy pod uwagę wypukłą kombinację dwóch macierzy, o postaci

$$A(\lambda) = (1 - \lambda)A + \lambda B, \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (5.41)$$

gdzie A i B są to znane rzeczywiste macierze o wymiarach $n \times n$.

Dowolną macierz, której elementy zależą liniowo od jednego niepewnego parametru, o postaci

$$A(q) = A_0 + qA_1, \quad q \in Q = [q^-, q^+], \quad (5.42)$$

można sprowadzić do postaci (5.41), gdzie $A = A(q^-) = A_0 + q^-A_1$, $B = A(q^+) = A_0 + q^+A_1$ oraz $\lambda = (q - q^-) / (q^+ - q^-)$.

Przyjmijmy, że macierzą nominalną rodziny macierzy

$$A(\Lambda) = \{A(\lambda) : \lambda \in \Lambda = [0, 1]\} \quad (5.43)$$

jest macierz A . Załóżmy, że wszystkie jej wartości własne leżą na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w otwartym obszarze D , zdefiniowanym wzorem (3.1), przy czym macierz A ma $n_i \geq 1$ wartości własnych w każdym z podobszarów D_i , $i = 1, 2, \dots, N$.

Zgodnie z definicją 3.8, rodzinę macierzy (5.43) będziemy nazywać odpornie D -stabilną, jeżeli każda macierz z tej rodziny ma tyle samo wartości własnych w każdym z podobszarów D_i , $i = 1, 2, \dots, N$, co macierz nominalna A .

Do badania odpornej D -stabilności rodziny macierzy (5.43) można stosować metody graficzne lub metody analityczne.

5.2.1. Metody graficzne

Wartości własne macierzy $A(\lambda)$, wykreślone w funkcji parametru $\lambda \in [0,1]$, tworzą na płaszczyźnie zmiennej zespolonej linie wartości własnych.

Najprostszą graficzną metodą badania odpornej D -stabilności rodziny macierzy (5.43) jest wykreślenie linii wartości własnych macierzy (5.41) na tle brzegów obszaru D i sprawdzenie, czy leżą one w otwartym obszarze D czy też nie.

Wielomian charakterystyczny macierzy (5.41) wyznacza się ze wzoru

$$w(s, \lambda) = \det[sI - ((1 - \lambda)A + \lambda B)]. \quad (5.44)$$

Dla każdej ustalonej liczby zespolonej z z zbiorem wartości wielomianu charakterystycznego rodziny macierzy (5.43) jest zbiór

$$w(z, \Lambda) = \{w(z, \lambda) : \lambda \in \Lambda = [0, 1]\}, \quad (5.45)$$

będący na płaszczyźnie zmiennej zespolonej odcinkiem linii krzywej, łączącym punkty $w_A(z) = w(z, 0) = \det(zI - A)$ i $w_B(z) = w(z, 1) = \det(zI - B)$.

Unormowanym zbiorem wartości wielomianu charakterystycznego tej rodziny jest zbiór

$$\tilde{w}(z, \Lambda) = \{\tilde{w}(z, \lambda) : \lambda \in \Lambda = [0, 1]\}, \quad (5.46)$$

gdzie $\tilde{w}(z, \lambda) = w(z, \lambda) / w_A(z)$, $w_A(z) \neq 0$. Jest on na płaszczyźnie zmiennej zespolonej odcinkiem linii krzywej, łączącym punkty $\tilde{w}(z, 0) = 1 + j0$ i $\tilde{w}(z, 1) = w_B(z) / w_A(z)$.

Z powyższych rozważań, twierdzenia 4.5 i lematu 4.1, wynika poniższe twierdzenie.

Przypomnijmy, że zgodnie z przyjętymi oznaczeniami brzeg każdego z podobszarów D_i , $i = 1, \dots, N$, ma opis parametryczny $f_i(y)$, $y \in Y_i$.

Twierdzenie 5.7. Niech macierz nominalna A będzie D -stabilna. Rodzina macierzy (5.43) jest odporne D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy oddzielnie dla każdego z podobszarów D_i , $i = 1, 2, \dots, N$, jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin w(f_i(y), \Lambda), \quad \forall y \in Y_i, \quad (5.47)$$

gdzie $w(f_i(y), \Lambda) = w(z, \Lambda)$ dla $z = f_i(y)$, lub równoważnie, jest spełniony warunek wykluczenia zera dla unormowanego zbioru wartości, o postaci

$$0 \notin \tilde{w}(f_i(y), \Lambda), \quad \forall y \in Y_i, \quad (5.48)$$

gdzie $\tilde{w}(f_i(y), \Lambda) = \tilde{w}(z, \Lambda)$ dla $z = f_i(y)$.

Spełnienie warunku wykluczenia zera (5.47) (lub (5.48)) można sprawdzić bezpośrednio, wykreślając (dla każdego ustalonego $y \in Y_i$) na płaszczyźnie zmiennej zespolonej położenie zbioru wartości $w(f_i(y), \Lambda)$ (lub $\tilde{w}(f_i(y), \Lambda)$) i wizualnie sprawdzając, czy przechodzi on przez początek płaszczyzny zmiennej zespolonej czy też nie.

Dla dowolnego ustalonego $y \in Y_i$ wyznaczenie zbioru wartości $w(f_i(y), \Lambda)$ wymaga obliczenia wartości funkcji $w(f_i(y), \lambda) = \det[f_i(y)I - ((1 - \lambda)A + \lambda B)]$ dla parametru λ zmieniającego się od 0 do 1 z odpowiednio małym krokiem $\Delta\lambda$. Jeżeli te wartości podzielimy przez $w_A(f_i(y)) = \det(f_i(y)I - A)$, to otrzymamy unormowany zbiór wartości $\tilde{w}(f_i(y), \Lambda)$.

Ponieważ w przypadku ogólnym unormowany zbiór wartości $\tilde{w}(f_i(y), \Lambda)$ nie jest odcinkiem linii prostej na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, spełnienie przez wykres funkcji $w_B(f_i(y)) / w_A(f_i(y))$ warunku podanego w lemacie 5.1 nie jest dostateczne dla odpornej D -stabilności rodziny macierzy (5.43).

5.2.2. Metody analityczne badania odpornej L -stabilności

Analityczna metoda badania odpornej L -stabilności rodziny macierzy (5.43) została podana w pracach [24, 25]. Problem badania odpornej L -stabilności rodziny macierzy (5.43) sprowadza się w nich do problemu badania odpornej nieosobliwości odpowiedniej macierzy, utworzonej na bazie macierzy A i B .

Poniżej podamy główny rezultat wyżej wymienionych prac w innym sformułowaniu i z innym dowodem.

Oznaczmy przez $L(A)$ macierz stowarzyszoną z macierzą A . Ma ona wymiary $(0.5n(n+1)) \times (0.5n(n+1))$. Wiersze i kolumny macierzy $L(A)$ mają podwójne indeksy. Jej elementy $l_{pq,rs}$ oblicza się ze wzoru

$$l_{pq,rs} = \begin{cases} a_{ps} & \text{gdy } q=r, r>s, p>q \\ a_{pr} & \text{gdy } q=s, p\neq r, p>q \\ a_{pp}+a_{qq} & \text{gdy } q=s, q=r, p>q \\ a_{qs} & \text{gdy } p=r, q\neq s, p>q \\ a_{qr} & \text{gdy } p=s, s<r, p>q \\ 0 & \text{w pozost. przypadkach przy } p>q \\ a_{ps} & \text{gdy } p=q, p=r, p>s \\ a_{pp} & \text{gdy } p=q, p=r, p=s \\ a_{pr} & \text{gdy } p=q, p<r, p=s \\ 0 & \text{w pozost. przypadkach przy } p=q \end{cases} \quad (5.49)$$

dla $p=1,2,\dots,n$; $q=1,2,\dots,p$; $r=1,2,\dots,n$; $s=1,2,\dots,r$.

Oznaczmy przez $L(A(\lambda))$ macierz stowarzyszoną z macierzą (5.41). Wyznacznik macierzy $L(A(\lambda))$ wyraża się w terminach wartości własnych $s_i(A(\lambda))$ tej macierzy następującym wzorem

$$\det L(A(\lambda)) = 2^{-(n+1)/2} \det A(\lambda) \prod_{1 \leq i < j \leq n} [s_i(A(\lambda)) + s_j(A(\lambda))]. \quad (5.50)$$

Lemat 5.8. Niech macierz nominalna A będzie L -stabilna. Rodzina macierzy (5.43) jest odpornie L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det L(A(\lambda)) \neq 0, \quad \forall \lambda \in [0,1]. \quad (5.51)$$

Dowód. Ze wzoru (5.50) wynika, że jeżeli macierz $A(\lambda)$ jest L -stabilna dla każdego $\lambda \in [0,1]$, to jest spełniony warunek (5.51). Jest więc on warunkiem koniecznym odpornej L -stabilności rodziny macierzy (5.43).

Dla dowodu warunku dostatecznego przyjmijmy, że istnieje $\lambda_1 \in (0,1]$, dla którego nie wszystkie wartości własne macierzy $A(\lambda_1)$ leżą w otwartej lewej półpłaszczyźnie. Z twierdzenia 3.2 wynika, że wtedy $A(\lambda)$ ma wartości własne na osi urojonej dla pewnego $\lambda^* \in (0, \lambda_1)$. To zaś oznacza, że warunek (5.51) nie jest spełniony dla $\lambda = \lambda^* < \lambda_1$. Warunek (5.51) jest więc warunkiem dostatecznym odpornej L -stabilności rodziny macierzy (5.43). $\square$

Twierdzenie 5.8. Niech macierz nominalna A będzie L -stabilna. Rodzina macierzy (5.43) jest odpornie L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $L^{-1}(A)L(B)$ nie ma rzeczywistych niedodatnich wartości własnych (tzn. albo ta macierz ma tylko zespolone wartości własne albo jej rzeczywiste wartości własne, o ile istnieją, są dodatnie).

Dowód. Dla dowodu twierdzenia wystarczy wykazać, że macierz $L^{-1}(A)L(B)$ nie ma rzeczywistych niedodatnich wartości własnych wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (5.51).

Ze wzoru (5.49) wynika, że $L(A(\lambda)) = (1-\lambda)L(A) + \lambda L(B)$. Postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 5.2 można wykazać, że $\det L(A(\lambda)) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det \left(\frac{1-\lambda}{-\lambda} I - L^{-1}(A)L(B) \right) = 0, \quad (5.52)$$

przy czym $\det L(A) \neq 0$ bowiem macierz A jest L -stabilna. To zaś oznacza, że warunek (5.51) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $L^{-1}(A)L(B)$ nie ma rzeczywistych wartości własnych w przedziale $(-\infty, 0]$. $\square$

W pracy [61] (patrz też [12, 127]) podano inną analityczną metodę badania odpornej L -stabilności rodziny macierzy (5.43), w której wykorzystuje się pojęcie sumy Kroneckera macierzy (patrz punkt 4.5). Metoda ta tym różni się od podanej w twierdzeniu 5.8, że zamiast macierzy $L(A)$ rozpatruje się macierz $A \oplus A$, a zamiast macierzy $L^{-1}(A)L(B)$ rozpatruje się macierz $M = (A \oplus A)^{-1}(B \oplus B)$, gdzie $\oplus$ jest symbolem sumy Kroneckera.

Twierdzenie 5.9. Niech macierz nominalna A będzie L -stabilna. Rodzina macierzy $A(\lambda)$ jest odpornie L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $M = (A \oplus A)^{-1}(B \oplus B)$ nie ma rzeczywistych niedodatnich wartości własnych.

Dowód. Z lematu 4.6 wynika, że jeżeli macierz A jest L -stabilna, to rodzina macierzy (5.43) jest odpornie L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det(A(\lambda) \oplus A(\lambda)) \neq 0, \quad \forall \lambda \in [0,1]. \quad (5.53)$$

Ponieważ $A(\lambda) \oplus A(\lambda) = (1-\lambda)(A \oplus A) + \lambda(B \oplus B)$, postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 5.2 wykazuje się, że warunek (5.53) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy rzeczywiste wartości własne macierzy $M = (A \oplus A)^{-1}(B \oplus B)$, o ile istnieją, nie należą do przedziału $(-\infty, 0]$. ||

Przykład 5.6. Macierz stanu układu regulacji automatycznej ma postać [12]

$$A_z(q) = \begin{bmatrix} A(q) & BK \\ LC & A(q) + BK - LC \end{bmatrix}, \quad q \in Q = [-30, 30], \quad (5.54)$$

gdzie

$$A(q) = \begin{bmatrix} -0.0605 & -32.37 & 0.0 & 32.2 \\ -0.00014 & -1.475 & 1.0 & 0.0 \\ -0.0111 & -34.72 + q & -2.793 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -0.1064 \\ -33.8 \\ 0.0 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad K = [0.9639 \ -14.0959 \ 1.1138 \ 19.79],$$

$$L = [9.1417 \ -0.1723 \ 1.6171 \ 1.1261]^T.$$

Należy zbadać, czy macierz (5.54) (o wymiarach 8×8) jest:

- 1) odpornie L -stabilna,
- 2) odpornie D -stabilna, gdzie $D = \{s: \operatorname{Re} s < -1\}$.

Macierz (5.54) można napisać w postaci (5.41), tj.

$$A(\lambda) = (1-\lambda)A + \lambda B, \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (5.55)$$

gdzie $A = A_z(-30)$, $B = A_z(30)$, przy czym macierz $A = A_z(-30)$ jest L -stabilna.

Do badania odpornej L -stabilności macierzy (5.55) zastosujemy twierdzenie 5.9. Własności macierzy $M = (A \oplus A)^{-1}(B \oplus B)$ (o wymiarach 64×64), rzeczywiste i zespolone, mają dodatnie części rzeczywiste. Na podstawie twierdzenia 5.9 możemy więc stwierdzić, że macierz (5.55) (i też (5.54)) jest odpornie L -stabilna.

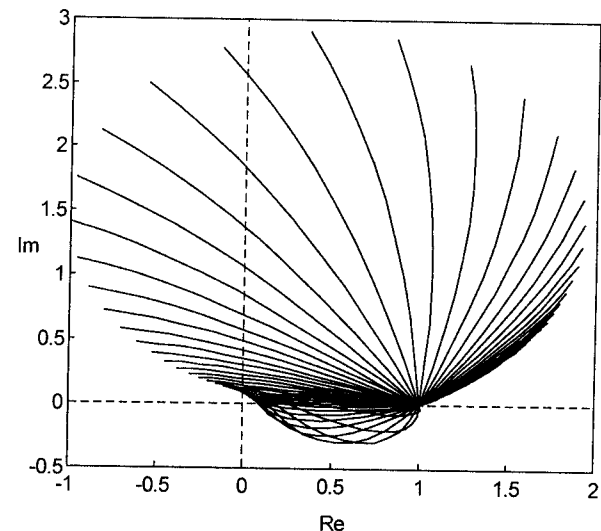
Aby zbadać odporną D -stabilność, zastosujemy twierdzenie 5.7. Macierz A jest D -stabilna, ponieważ wszystkie jej wartości własne leżą w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s < -1$.

Brzeg obszaru D ma opis parametryczny $f(y) = -1 + jy$, $y \in Y = [0, \infty)$.

Położenia unormowanego zbioru wartości $\tilde{w}(-1 + jy, \Lambda)$ (odcinków linii krzywych), wyznaczone dla y zmieniającego się od 0 do 15 z krokiem 0.2, są pokazane na rysunku 5.5.

Dla każdego ustalonego y unormowany zbiór wartości $\tilde{w}(-1 + jy, \Lambda)$ był wyznaczany dla parametru λ zmieniającego się od 0 do 1 z krokiem 0.1, na podstawie wzoru

$$\tilde{w}(z, \lambda) = \frac{\det[zI - ((1-\lambda)A + \lambda B)]}{\det(zI - A)}, \quad z = -1 + jy.$$



Rys. 5.5. Położenia unormowanego zbioru wartości $\tilde{w}(-1 + jy, \Lambda)$, $y \in [0, 15]$

Z rysunku 5.5 wynika, że warunek wykluczenia zera (5.48) jest spełniony. Na mocy twierdzenia 5.7 możemy więc stwierdzić, że macierz (5.55) (i też (5.54)) jest odpornie D -stabilna. □

6. ODPORNA STABILNOŚĆ WIELOMIANÓW PRZEDZIAŁOWYCH

Weźmy pod uwagę rodzinę wielomianów o rzeczywistych współczynnikach

$$W(s, A) = \{w(s, \mathbf{a}) : \mathbf{a} \in A\}, \quad (6.1)$$

gdzie

$$w(s, \mathbf{a}) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad \mathbf{a} \in A, \quad (6.2)$$

przy czym $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T$ jest wektorem współczynników wielomianu (6.2), a zbiór A jest zdefiniowany następująco

$$A = \{\mathbf{a} : a_i \in [a_i^-, a_i^+], \quad a_i^- \leq a_i^+, \quad i = 0, 1, \dots, n\}. \quad (6.3)$$

Jeżeli niektóre ze współczynników wielomianu (6.2) są dokładnie znane, to dla tych współczynników $a_i^- = a_i^+ = a_i$.

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że rodzina wielomianów (6.1) jest rodziną stałego stopnia, tzn. dla każdego ustalonego $\mathbf{a} \in A$ wielomian $w(s, \mathbf{a})$ ma stopień n . Nie zmniejszając ogólności rozważań będziemy przyjmować, że $a_n^- > 0$.

Rodzina wielomianów (6.1), będąca przypadkiem szczególnym rodziny (3.4), nosi nazwę przedziałowej rodziny wielomianów, bowiem poszczególne współczynniki wielomianu $w(s, \mathbf{a})$ są określone z dokładnością do odpowiednich przedziałów. Rodzinę (6.1) nazywa się też w skrócie wielomianem przedziałowym. Nazwę wielomian przedziałowy stosuje się też do wielomianu $w(s, \mathbf{a})$, o postaci (6.2), z przedziałowym oszacowaniem wartości jego współczynników.

Wielomianem przedziałowym jest wielomian o postaci (3.2) w przypadku, gdy perturbacje poszczególnych jego współczynników są wzajemnie niezależne, tzn. $a_i(\mathbf{q}) = a_i(q_i)$ dla $i = 0, 1, \dots, n$.

Przykład 6.1. Wielomian o niepewnych współczynnikach, o postaci

$$w(s, \mathbf{q}) = (2 + \cos q_1) s^2 + \exp(q_2) s + 4 + q_3, \quad q_i \in [-1, 1], \quad i = 1, 2, 3,$$

jest wielomianem przedziałowym, bowiem każdy z jego współczynników zależy od innego niepewnego parametru.

Powyższy wielomian można napisać w postaci (6.2) przy $n = 2$, gdzie $a_i \in [a_i^-, a_i^+]$, $i = 0, 1, 2$, przy czym

$$a_2^- = \min_{q_1 \in [-1, 1]} (2 + \cos q_1) = 2 + \cos 1, \quad a_2^+ = \max_{q_1 \in [-1, 1]} (2 + \cos q_1) = 3,$$

$$a_1^- = \min_{q_2 \in [-1, 1]} \exp(q_2) = \exp(-1), \quad a_1^+ = \max_{q_2 \in [-1, 1]} \exp(q_2) = \exp(1),$$

$$a_0^- = \min_{q_3 \in [-1, 1]} (4 + q_3) = 3, \quad a_0^+ = \max_{q_3 \in [-1, 1]} (4 + q_3) = 5. \quad \square$$

6.1. Odporna L -stabilność wielomianu przedziałowego

Zgodnie z definicją 3.7, rodzinę (6.1) (zwaną wielomianem przedziałowym) będziemy nazywać odpornie L -stabilną, jeżeli dla każdego ustalonego $\mathbf{a} \in A$ wszystkie zera wielomianu $w(s, \mathbf{a})$ mają ujemne części rzeczywiste.

6.1.1. Badanie odpornej L -stabilności

Przy założeniu $a_n^- > 0$ warunkiem koniecznym odpornej L -stabilności wielomianu przedziałowego (6.1) jest spełnienie nierówności $a_i^- > 0$ dla $i = 0, 1, \dots, n-1$ (warunek konieczny twierdzenia Hurwitza). W dalszych rozważaniach będziemy więc przyjmować, że $a_i^- > 0$ dla $i = 0, 1, \dots, n$. Ponadto, dla ułatwienia rozważań

przyjmujemy, nie zmniejszając ich ogólności, że wszystkie współczynniki wielomianu (6.2) nie są dokładnie znane.

Przy powyższym założeniu zbiór (6.3) jest m -wymiarowym prostopadłością, gdzie $m = n + 1$. Ma on $K = 2^m$ wierzchołków o współrzędnych $\mathbf{a}_k = [a_{0k}, a_{1k}, \dots, a_{nk}]^T$, $k = 1, 2, \dots, K$, gdzie $a_{ik} = a_i^-$ lub $a_{ik} = a_i^+$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Każdemu wierzchołkowi $\mathbf{a}_k$ zbioru (6.3) odpowiada tzw. wielomian wierzchołkowy $w(s, \mathbf{a}_k)$. Zbiór wielomianów wierzchołkowych należy do rodziny (6.1). Dlatego L -stabilność wszystkich wielomianów wierzchołkowych jest warunkiem koniecznym odpornej L -stabilności tej rodziny. W pracy [46] zostało wykazane, że powyższy warunek konieczny jest też warunkiem dostatecznym (tzw. słabe twierdzenie Charitonowa).

W zbiorze wielomianów wierzchołkowych istnieją cztery wielomiany, zwane wielomianami Charitonowa, o postaci

$$W_1(s) = a_0^+ + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + a_4^+ s^4 + \dots, \quad (6.4)$$

$$W_2(s) = a_0^- + a_1^- s + a_2^+ s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^- s^4 + \dots, \quad (6.5)$$

$$W_3(s) = a_0^- + a_1^+ s + a_2^+ s^2 + a_3^- s^3 + a_4^- s^4 + \dots, \quad (6.6)$$

$$W_4(s) = a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4 + \dots \quad (6.7)$$

Łatwo sprawdzić, że $W_1(s) = W_3(s) + W_4(s) - W_2(s)$.

Twierdzenie 6.1 (Charitonowa) [46]. Wielomian przedziałowy (6.1) stałego stopnia jest odpornie L -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są L -stabilne cztery wielomiany Charitonowa (6.4)–(6.7), stowarzyszone z tym wielomianem.

Dowód. Oryginalny dowód twierdzenia Charitonowa jest dosyć złożony. Prostsze dowody tego twierdzenia zostały podane w pracach [12, 44, 81, 95]. Poniżej podamy, wykorzystując rezultaty pracy [95], tzw. geometryczny dowód twierdzenia Charitonowa.

Wielomiany Charitonowa należą do rodziny (6.1), ich L -stabilność jest więc warunkiem koniecznym odpornej L -stabilności tej rodziny.

Wykażemy teraz, że L -stabilność czterech wielomianów Charitonowa (6.4)–(6.7) jest też warunkiem dostatecznym odpornej L -stabilności wielomianu przedziałowego (6.1).

Dla $s = jy$ wielomian (6.2) można przedstawić w postaci

$$w(jy, \mathbf{a}) = U(y, \mathbf{a}) + jV(y, \mathbf{a}), \quad j^2 = -1, \quad (6.8)$$

gdzie

$$U(y, \mathbf{a}) = a_0 - a_2 y^2 + a_4 y^4 - a_6 y^6 + \dots, \quad (6.9)$$

$$V(y, \mathbf{a}) = a_1 y - a_3 y^3 + a_5 y^5 - a_7 y^7 + \dots \quad (6.10)$$

Dla każdego ustalonego $y \geq 0$ oraz dla dowolnego $\mathbf{a} \in A$ zachodzą następujące zależności

$$U(y, \mathbf{a}) \in [U^-(y), U^+(y)], \quad (6.11)$$

$$V(y, \mathbf{a}) \in [V^-(y), V^+(y)], \quad (6.12)$$

gdzie

$$U^-(y) = \min\{U(y, \mathbf{a}) : \mathbf{a} \in A\} = a_0^- - a_2^+ y^2 + a_4^- y^4 - a_6^+ y^6 + \dots, \quad (6.13)$$

$$U^+(y) = \max\{U(y, \mathbf{a}) : \mathbf{a} \in A\} = a_0^+ - a_2^- y^2 + a_4^+ y^4 - a_6^- y^6 + \dots, \quad (6.14)$$

$$V^-(y) = \min\{V(y, \mathbf{a}) : \mathbf{a} \in A\} = a_1^- y - a_3^+ y^3 + a_5^- y^5 - a_7^+ y^7 + \dots, \quad (6.15)$$

$$V^+(y) = \max\{V(y, \mathbf{a}) : \mathbf{a} \in A\} = a_1^+ y - a_3^- y^3 + a_5^+ y^5 - a_7^- y^7 + \dots \quad (6.16)$$

Porównując wzory (6.4)–(6.7) dla $s = jy$ oraz (6.13)–(6.16), otrzymamy

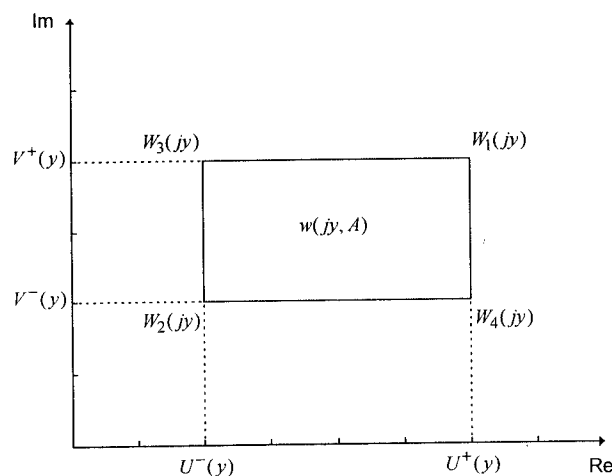
$$W_1(jy) = U^+(y) + jV^+(y); \quad W_2(jy) = U^-(y) + jV^-(y); \quad (6.17)$$

$$W_3(jy) = U^-(y) + jV^+(y); \quad W_4(jy) = U^+(y) + jV^-(y). \quad (6.18)$$

Z powyższych rozważań wynika, że dla każdego ustalonego $y \geq 0$ zbiór wartości

$$w(jy, A) = \{w(jy, a) : a \in A\} \quad (6.19)$$

jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych. Prawym górnym wierzchołkiem prostokąta (6.19) jest $W_1(jy)$, a kolejnymi jego wierzchołkami przy poruszaniu się wzdłuż krawędzi w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara są: $W_3(jy)$, $W_2(jy)$ i $W_4(jy)$. Prostokąt (6.19) nosi nazwę prostokąta Charitonowa. Jest on pokazany na rysunku 6.1.



Rys. 6.1. Prostokąt Charitonowa

Wraz ze wzrostem wartości parametru $y \geq 0$, prostokąt (6.19) zmienia swoje położenie i wymiary, przy czym jego wierzchołki zawsze leżą na krzywych $W_1(jy)$, $W_2(jy)$, $W_3(jy)$ i $W_4(jy)$, jego boki zaś zawsze są równoległe do osi układu współrzędnych. Oznacza to, że wykresy czterech funkcji $W_i(jy)$, $i = 1, \dots, 4$, sporządzone dla $y \in [0, \infty)$, wyznaczają na płaszczyźnie zmiennej zespolonej obszar, w którym porusza się prostokąt Charitonowa (6.19) w funkcji parametru $y \in [0, \infty)$.

Jeżeli wielomiany Charitonowa $W_i(s)$, $i = 1, \dots, 4$, są L -stabilne, to wykres każdej funkcji $W_i(jy)$, $i = 1, \dots, 4$, rozpoczyna się przy $y = 0$ na dodatniej półosi

rzeczywistej i przy y zmieniającym się od zera do nieskończoności przebiega w kierunku matematycznie dodatnim, nie trafiając w początek układu współrzędnych, przez n ćwiartek płaszczyzny zmiennej zespolonej (zgodnie z twierdzeniem 3.5). Ponadto, argument każdej funkcji $W_i(jy)$, $i = 1, \dots, 4$, jest rosnącą funkcją parametru y .

Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli są L -stabilne wielomiany Charitonowa (6.4)–(6.7), to przy wzroście y od 0 do ∞ prostokąt Charitonowa (6.19) porusza się na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w ten sposób, że warunek wykluczenia zera

$$0 \notin w(jy, A) \quad (6.20)$$

jest spełniony dla każdego $y \geq 0$. To zaś oznacza, zgodnie z twierdzeniem 4.6, że wielomian przedziałowy (6.1) jest odpornie L -stabilny. $\square$

Inny dowód twierdzenia 6.1 możemy podać uwzględniając rozważania podane w punkcie 5.1.3 niniejszej pracy.

Zauważmy, że jeżeli wielomiany Charitonowa są L -stabilne, to jest spełniony warunek wykluczenia zera (6.20) dla $y = 0$, bowiem zbiór wartości $w(j0, A)$ jest odcinkiem $[a_0^-, a_0^+]$ leżącym na dodatniej półosi rzeczywistej. Aby warunek (6.20) był spełniony dla każdego $y > 0$, potrzeba i wystarcza, aby był on spełniony dla każdej z czterech krawędzi prostokąta Charitonowa (6.19). Z rysunku 6.1 wynika, że te krawędzie są zbiorami wartości czterech tzw. wielomianów krawędziowych (wypukłych kombinacji dwóch wielomianów), o postaci

$$w_{ik}(s, \lambda) = (1 - \lambda)W_i(s) + \lambda W_k(s), \quad \lambda \in A = [0, 1],$$

dla $(i, k) = (1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)$.

Każdy z wielomianów krawędziowych można napisać w postaci $w_{ik}(s, \lambda) = f_i(s) + \lambda g_{ik}(s)$, gdzie $f_i(s) = W_i(s)$, $g_{ik}(s) = W_k(s) - W_i(s)$.

Zauważmy, że wielomiany $g_{ik}(s) = W_k(s) - W_i(s)$ przy $(i, k) = (1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 1)$, zawierają tylko parzyste bądź tylko nieparzyste potęgi zmiennej s . Są więc one kierunkami wypukłymi w przestrzeni L -stabilnych wielomianów (patrz punkt 5.1.3). W takim przypadku, zgodnie z lematem 5.6, L -stabilność wielo-

mianów Charitonowa $W_1(s)$, $W_2(s)$, $W_3(s)$ i $W_4(s)$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym L -stabilności wszystkich czterech wielomianów krawędziowych, a więc i wielomianu przedziałowego (6.1).

Twierdzenie 6.1 można uogólnić na klasę wielomianów przedziałowych o zespolonych współczynnikach. Odporna L -stabilność takich wielomianów jest równoważna z L -stabilnością ośmiu odpowiednio utworzonych wielomianów Charitonowa o zespolonych współczynnikach [47, 95].

Twierdzenie Charitonowa 6.1 pozostaje też prawdziwe w przypadku, gdy wielomian przedziałowy (6.1) nie jest wielomianem stałego stopnia. W pracy [70] udowodniono bowiem, że L -stabilność czterech wielomianów Charitonowa (6.4)–(6.7) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej L -stabilności wielomianu przedziałowego (6.1) w przypadku, gdy zbiór A ma postać (6.3) przy $a_i^- \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$. Łatwo wykazać, korzystając np. z warunku koniecznego kryterium Hurwitza, że w takim przypadku wielomian przedziałowy (6.1) może być odpornie L -stabilnym tylko wtedy, gdy $a_n^- \geq 0$ oraz $a_i^- > 0$ dla $i = 0, 1, \dots, n-1$. Powyższy warunek jest też warunkiem koniecznym L -stabilności wszystkich czterech wielomianów Charitonowa. Oznacza to, że jeżeli rodzina (6.1) nie jest rodziną stałego stopnia, to może ona być odpornie L -stabilna tylko wtedy, gdy w wielomianie (6.2) występuje redukcja stopnia nie więcej niż o jeden.

Twierdzenia Charitonowa 6.1 nie da się uogólnić na klasę quasi-wielomianów przedziałowych [63]. Jednakże, może ono być z powodzeniem wykorzystywane przy badaniu odpornej L -stabilności określonych klas takich quasi-wielomianów (np. [35, 42, 49]).

Twierdzenie Charitonowa 6.1 ma duże znaczenie praktyczne, ponieważ sprowadza ono badanie odpornej L -stabilności wielomianu przedziałowego (6.1) (nieskończona rodzina wielomianów) do badania L -stabilności tylko czterech wielomianów, o postaciach (6.4)–(6.7), o dokładnie określonych współczynnikach. Liczba tych wielomianów może być mniejsza od czterech dla $n \leq 5$, gdzie n jest stopniem wielomianu przedziałowego [7].

Łatwo zauważyć, że jeżeli $a_n^- > 0$, to warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej L -stabilności rodziny (6.1) jest $a_0^- > 0$ przy $n=1$, oraz $a_0^- > 0$ i $a_1^- > 0$ przy $n=2$.

Lemat 6.1. Jeżeli wielomian przedziałowy (6.1) jest wielomianem stałego stopnia (tj. $a_n^- > 0$) oraz jest spełniony warunek konieczny $a_0^- > 0$, to ten wielomian przy

$2 < n \leq 5$ jest odpornie L -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są L -stabilne następujące wielomiany Charitonowa:

- 1) $W_4(s)$ przy $n=3$,
- 2) $W_1(s)$ i $W_4(s)$ przy $n=4$,
- 3) $W_1(s)$, $W_3(s)$ i $W_4(s)$ przy $n=5$.

Dowód. Załóżmy, że są L -stabilne odpowiednie wielomiany Charitonowa wymienione w punktach 1), 2) i 3), tzn. są spełnione warunki konieczne odpornej L -stabilności wielomianu przedziałowego (6.1) dla $n=3, 4, 5$. Oznacza to, że dla każdego ustalonego $n=3, 4, 5$ w zbiorze wielomianów (6.1) istnieje L -stabilny wielomian, który będziemy traktować jako wielomian nominalny $w_0(s)$. Wobec tego, zgodnie z twierdzeniem 4.6, warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej L -stabilności wielomianu przedziałowego (6.1) jest spełnienie warunku wykluczenia zera (6.20) dla każdego $y \geq 0$. Zauważmy, że jeżeli $a_0^- > 0$, to przy dowolnym $n \geq 1$ warunek wykluczenia zera (6.20) jest spełniony dla $y=0$. Wynika to z faktu, że zbiór wartości $w(j\omega, A)$ jest odcinkiem $[a_0^-, a_0^+]$ leżącym na dodatniej półosi rzeczywistej przy $a_0^- > 0$. Należy więc wykazać, że jeżeli są L -stabilne odpowiednie wyżej wymienione wielomiany, to jest też spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin w(jy, A), \forall y > 0 \quad (6.21)$$

w tych ćwiartkach płaszczyzny zmiennej zespolonej, przez które przebiega wykres $w_0(jy)$.

Ad. 1) Przy $n=3$ należy rozpatrzyć spełnienie warunku (6.21) w trzech pierwszych ćwiartkach płaszczyzny zmiennej zespolonej. Łatwo zauważyć, że warunek (6.21) jest spełniony w ćwiartkach I i II przy $V^-(y) > 0$ oraz w ćwiartkach II i III przy $U^+(y) < 0$ (por. rys. 6.1). Warunki te są spełnione, jeżeli wielomian $W_4(s)$ stopnia trzeciego (określony przy $s = jy$ drugim ze wzorów (6.18)) jest L -stabilny.

Ad. 2) Przy $n=4$ należy rozpatrzyć spełnienie warunku (6.21) w czterech ćwiartkach płaszczyzny zmiennej zespolonej. Warunek (6.21) jest spełniony w ćwiartkach I i II przy $V^-(y) > 0$, w ćwiartkach II i III przy $U^+(y) < 0$ oraz w ćwiartkach III i IV przy $V^+(y) < 0$. Ze wzorów (6.11), (6.12) oraz (6.17)

i (6.18) wynika, że te trzy warunki są spełnione, jeżeli wielomiany $W_1(s)$ i $W_4(s)$ stopnia czwartego są L -stabilne.

Ad. 3) Przy $n=5$ oprócz warunków wymienionych w punkcie 2) należy spełnić też warunek $U^-(y) > 0$ w ćwiartkach IV i I płaszczyzny zmiennej zespolonej. Podobnie jak w przypadku 2) możemy stwierdzić, że wszystkie te warunki są spełnione, jeżeli wielomiany $W_1(s)$, $W_3(s)$ i $W_4(s)$ stopnia piątego są L -stabilne. Zauważmy, że jeżeli wielomian $W_3(s)$ jest L -stabilny, to warunek $a_0^- > 0$ jest spełniony i nie ma potrzeby oddzielnego jego sprawdzania. $\square$

Z dowodu lematu 6.1 wynika, że dla każdego $y \geq 0$ warunek wykluczenia zera (6.20) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ustalonego $y \geq 0$ albo $U^-(y) > 0$ albo $U^+(y) < 0$ albo $V^-(y) > 0$ albo $V^+(y) < 0$. Słuszne jest więc poniższe twierdzenie [11].

Twierdzenie 6.2. Jeżeli wielomian przedziałowy (6.1) stałego stopnia jest L -stabilny dla przynajmniej jednego $a \in A$, to jest on L -stabilny dla każdego $a \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$d(y) > 0, \quad \forall y \geq 0, \quad (6.22)$$

gdzie dla każdego ustalonego $y \geq 0$ funkcja testująca $d(y)$ jest zdefiniowana następująco

$$d(y) = \max\{U^-(y), -U^+(y), V^-(y), -V^+(y)\}. \quad (6.23)$$

Dowód. Z powyższych rozważań wynika, że warunek wykluczenia zera (6.20) jest spełniony dla każdego $y \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi (6.22). Ponieważ wielomian przedziałowy jest przypadkiem szczególnym rodziny wielomianów (4.2), dowód wynika z twierdzenia 4.6. $\square$

Łatwo zauważyć, że $d(y) \rightarrow \infty$ przy $y \rightarrow \infty$ i zawsze istnieje taka wartość $y = y_c$, że dla wszystkich $y > y_c$ warunek wykluczenia zera (6.20) jest spełniony, a więc jest też spełniony warunek $d(y) > 0$. Dlatego też, przy wyznaczaniu funkcji testującej (6.23) możemy obliczenia przerwać wtedy, gdy $d(y)$ osiągnie war-

tości „odpowiednio duże” (czyli ograniczyć się do skończonego przedziału $[0, y_{\max}]$ wartości y). Wartość $y_{\max}$ można też oszacować w sposób podany w pracach [11, 12]. Mianowicie, z faktu, że $\forall a \in A$

$$|w(jy, a)| \geq a_n^- y^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i^+ y^i, \quad \forall y \geq 0,$$

wynika, że za $y_{\max}$ można przyjąć największe rzeczywiste zero wielomianu

$$a_n^- y^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i^+ y^i. \quad (6.24)$$

Wartość $y_{\max}$ można też wyznaczyć obliczając promień spektralny wielomianu przedziałowego (6.1) ze wzoru (przy $a_n^- > 0$)

$$\rho = 1 + \frac{\max\{a_i^+, i = 0, 1, \dots, n-1\}}{a_n^-}, \quad (6.25)$$

i przyjmując $y_{\max} = \rho$. Możliwość takiego szacowania $y_{\max}$ wynika z faktu, że wartość bezwzględna zer wielomianu przedziałowego (6.1) jest nie większa niż ρ . Wobec tego, przy zmianach wartości parametru $a \in A$, te zera mogą przekroczyć oś urojoną tylko na odcinku $[-\rho, \rho]$. Wzór (6.25) jest uogólnieniem na klasę wielomianów przedziałowych wzoru na obliczanie promienia spektralnego wielomianów o dokładnie znanych współczynnikach [94].

Zamiast funkcji testującej $d(y)$, zdefiniowanej wzorem (6.23), możemy rozpatrywać funkcję testującą

$$\tilde{d}(y) = \max\left\{\frac{U^-(y)}{|w_0(jy)|}, \frac{-U^+(y)}{|w_0(jy)|}, \frac{V^-(y)}{|w_0(jy)|}, \frac{-V^+(y)}{|w_0(jy)|}\right\}, \quad (6.26)$$

będącą „unormowaną” względem $|w_0(jy)|$ funkcją $d(y)$. Wielomian $w_0(s)$ jest wielomianem nominalnym, którego współczynniki (o ile nie są one określone) oblicza się np. ze wzoru

$$a_i^0 = 0.5(a_i^- + a_i^+), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (6.27)$$

Za nominalny można też przyjąć np. jeden z wielomianów Charitonowa, stowarzyszonych z wielomianem przedziałowym (6.1).

L -stabilność wielomianu $w_0(s)$ jest warunkiem koniecznym odpornej L -stabilności wielomianu przedziałowego (6.1). Wobec tego $w_0(jy) \neq 0, \forall y \geq 0$ i funkcja (6.26) jest dobrze określona. Z twierdzenia 6.2 wynika poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 6.3. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie L -stabilny. Wielomian przedziałowy (6.1) stałego stopnia jest odpornie L -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\tilde{d}(y) > 0, \quad \forall y \geq 0, \quad (6.28)$$

gdzie funkcja testująca $\tilde{d}(y)$ jest zdefiniowana wzorem (6.26).

Dowód. Funkcje testujące $d(y)$ i $\tilde{d}(y)$ są związane zależnością $|\tilde{d}(y)|w_0(jy)| = d(y)$. Wobec tego warunek (6.22) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (6.28). Dowód wynika zatem z twierdzenia 6.2. $\square$

Zauważmy, że wartości funkcji testującej $\tilde{d}(y)$ są zawsze skończone, tzn. $\tilde{d}(y) \rightarrow \tilde{d}_u$ przy $y \rightarrow \infty$, gdzie $\tilde{d}_u = a_n^- / a_n^0$, przy czym a_n^0 jest wartością nominalną współczynnika a_n .

Liczby $\delta = \min_{y \geq 0} d(y)$ oraz $\tilde{\delta} = \min_{y \geq 0} \tilde{d}(y)$ można traktować jako miary zapasu odpornej L -stabilności wielomianu przedziałowego (6.1). Są one bowiem miarami najmniejszej odległości prostokąta Charitonowa (6.19) oraz „unormowanego” prostokąta Charitonowa

$$\tilde{w}(jy, A) = \{w(jy, a) / |w_0(jy)| : a \in A\}, \quad (6.29)$$

odpowiednio, od początku układu współrzędnych. Unormowany prostokąt Charitonowa (6.29), podobnie jak prostokąt Charitonowa (6.19), ma boki równoległe do osi układu współrzędnych. Dla każdego ustalonego $y \geq 0$ jego wierzchołkami są punkty $\tilde{W}_i(jy)$, $i = 1, \dots, 4$, gdzie $\tilde{W}_i(jy) = W_i(jy) / |w_0(jy)|$.

Przykład 6.2. Dany jest wielomian przedziałowy

$$w(s, a) = a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0, \quad (6.30)$$

gdzie

$$a_4 \in [0.9, 1.2], \quad a_3 \in [7, 10], \quad a_2 \in [14, 20], \quad a_1 \in [36, 48], \quad a_0 \in [20, 28].$$

Wyznaczając ze wzorów (6.4)–(6.7) wielomiany Charitonowa stowarzyszone z wielomianem przedziałowym (6.30), otrzymamy:

$$W_1(s) = 1.2s^4 + 7s^3 + 14s^2 + 48s + 28,$$

$$W_2(s) = 0.9s^4 + 10s^3 + 20s^2 + 36s + 20,$$

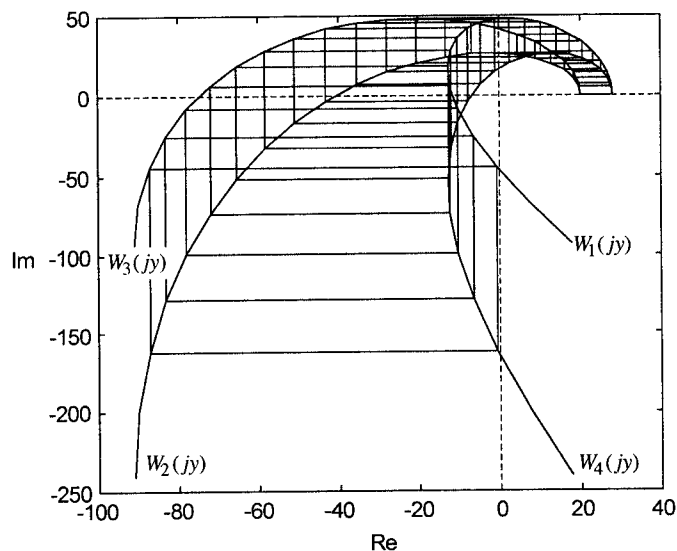
$$W_3(s) = 0.9s^4 + 7s^3 + 20s^2 + 48s + 20,$$

$$W_4(s) = 1.2s^4 + 10s^3 + 14s^2 + 36s + 28.$$

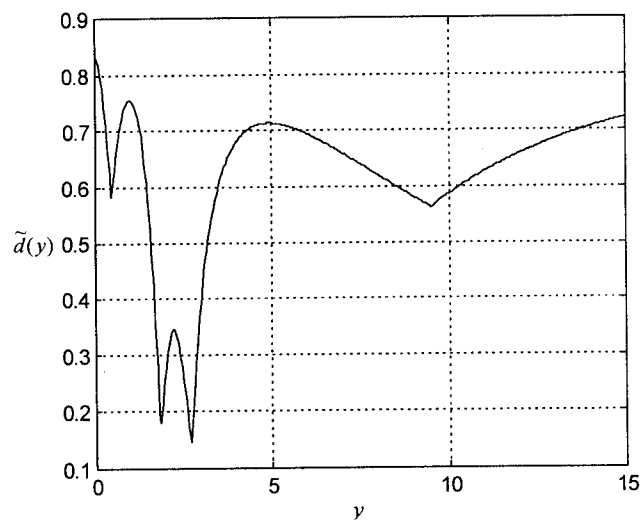
Korzystając np. z kryterium stabilności Hurwitza możemy sprawdzić, że wielomiany $W_1(s), \dots, W_4(s)$ są L -stabilne. Oznacza to, zgodnie z twierdzeniem Charitonowa, że wielomian przedziałowy (6.30) jest odpornie L -stabilny.

Położenia prostokąta Charitonowa (6.19), stowarzyszonego z wielomianem przedziałowym (6.30), są pokazane na rysunku 6.2 dla y zmieniającego się od 0 do 3.0 z krokiem 0.15. Na tym samym rysunku są też pokazane wykresy $W_1(jy), W_2(jy), W_3(jy)$ i $W_4(jy)$ dla $y \in [0, 3.3]$. Przebiegi pokazane na rysunku 6.2 są typowe dla odpornej L -stabilnego wielomianu przedziałowego stopnia czwartego.

Na rysunku 6.3 jest pokazany wykres funkcji testującej $\tilde{d}(y)$. Został on wyznaczony na podstawie wzoru (6.26) przy współczynnikach wielomianu nominalnego (który jest L -stabilny) obliczonych ze wzoru (6.27). Wykres $\tilde{d}(y)$ rozpoczyna się w punkcie $\tilde{d}(0) = a_0^- / a_0^0 = 0.8333$ i przy $y \rightarrow \infty$ dąży asymptotycznie do $\tilde{d}_u = a_4^- / a_4^0 = 0.8571$.



Rys. 6.2. Wykresy $W_1(jy)$, $W_2(jy)$, $W_3(jy)$ i $W_4(jy)$ oraz położenia prostokąta Charitonowa stowarzyszonego z wielomianem przedziałowym (6.30)



Rys. 6.3. Wykres funkcji testującej $\tilde{d}(y)$ do przykładu 6.2

Z rysunku 6.3 wynika, że warunek (6.28) jest spełniony. Oznacza to, że wielomian przedziałowy (6.30) jest odpornie L -stabilny, zgodnie z twierdzeniem 6.3.

6.1.2. Wyznaczanie dopuszczalnych przedziałów zmian wartości współczynników

Często w praktyce występuje potrzeba wyznaczenia dopuszczalnych przedziałów zmian wartości współczynników (ich perturbacji) danego L -stabilnego wielomianu charakterystycznego układu dynamicznego, takich, by dla dowolnych ich wartości z tych przedziałów dany wielomian był L -stabilny. Jest to problem odwrotny do problemu badania odpornej L -stabilności wielomianu przedziałowego. Można go sformułować w sposób podany poniżej.

Dany jest L -stabilny wielomian nominalny (odniesienia)

$$w_0(s) = a_n^0 s^n + a_{n-1}^0 s^{n-1} + \dots + a_1^0 s + a_0^0, \quad (6.31)$$

gdzie $a_i^0 > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$. Należy wyznaczyć taką największą liczbę rzeczywistą dodatnią $r = r_{\max}$, by dla dowolnego ustalonego $r \in [0, r_{\max})$ był odpornie L -stabilny wielomian przedziałowy (zwany też wielomianem zaburzonym), o postaci

$$w(s, r) = \sum_{i=0}^n a_i(r) s^i, \quad a_i(r) \in [a_i^0 - r q_i^-, a_i^0 + r q_i^+], \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (6.32)$$

gdzie $q_i^- \geq 0$ oraz $q_i^+ \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, są to zadane współczynniki wagowe, dolne i górne, odpowiednio.

Do rozwiązania powyższego problemu można stosować metody analityczne, podane w pracach [10, 25, 26, 38, 39, 68, 118], bądź metody częstotliwościowe, podane w [92, 123].

6.1.2.1. Metody analityczne

Przy $r = 0$ wielomian przedziałowy (6.32) redukuje się do wielomianu nominalnego (6.31), który jest L -stabilny z założenia. Z powyższego oraz z faktu, że zera wielomianu zależą w sposób ciągły od wartości jego współczynników, wynika, że zawsze istnieje dodatnia liczba r , dla której wielomian przedziałowy (6.32) jest odpornie L -stabilny.

Wielomian przedziałowy (6.32) jest wielomianem stałego stopnia wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n^0 - r q_n^- > 0$, tzn. $r < \tau_n$, gdzie

$$\tau_n = a_n^0 / q_n^- \quad \text{przy} \quad q_n^- > 0 \quad \text{i} \quad \tau_n = \infty \quad \text{przy} \quad q_n^- = 0. \quad (6.33)$$

Zauważmy, że wielomian przedziałowy (6.32) nie jest odpornie L -stabilny dla dowolnego ustalonego $r > \tau_n$, bowiem wtedy w zbiorze wielomianów (6.32) istnieje wielomian, który ma ujemny współczynnik przy najwyższej potęgce zmiennej s i dodatnie współczynniki przy wszystkich pozostałych potęgach tej zmiennej. Jeżeli natomiast $r = \tau_n$, to rodzina (6.32) składa się z wielomianów stopnia n i $n-1$. W takim przypadku, zgodnie z [70], twierdzenie Charitonowa 6.1 pozostaje prawdziwe. Oznacza to, że wielomian przedziałowy (6.32), który nie jest wielomianem stałego stopnia, może być odpornie L -stabilny. Główny rezultat pracy [70] jest krótko omówiony przed lematem 6.1.

W dalszych rozważaniach będziemy przyjmować, że wielomian przedziałowy (6.32) jest wielomianem stałego stopnia, tj. $r < \tau_n$, traktując ten warunek jako warunek konieczny jego odpornej L -stabilności. W sytuacji, gdy wyznaczając $r_{\max}$ na podstawie podanych poniżej twierdzeń 6.4 i 6.5 otrzymamy $r_{\max} = \tau_n$, przedziałowy wielomian (6.32) jest odpornie L -stabilny dla dowolnego ustalonego $r \in [0, r_{\max}]$.

Oznaczmy przez $W_k(s, r)$, $k = 1, \dots, 4$, wielomiany Charitonowa stowarzyszone z wielomianem przedziałowym (6.32) oraz przez $H_k(r)$, $k = 1, \dots, 4$, oznaczmy macierze Hurwitza (o postaci (4.5)) stowarzyszone z tymi wielomianami.

Zgodnie z twierdzeniem Charitonowa 6.1, przy dowolnym ustalonym $0 < r < \tau_n$ wielomian przedziałowy (6.32) jest odpornie L -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są L -stabilne wielomiany Charitonowa $W_k(s, r)$, $k = 1, \dots, 4$. Mają

one postaci określone wzorami (6.4)–(6.7), gdzie $a_i^- = a_i^-(r) = a_i^0 - r q_i^-$, $a_i^+ = a_i^+(r) = a_i^0 + r q_i^+$ dla $i = 0, 1, \dots, n$.

Z powyższego wynika, że dla rozwiązania problemu postawionego w początkowej części punktu 6.1.2 wystarczy znaleźć największy przedział $[0, r_{\max})$ taki, by dla dowolnego ustalonego $r \in [0, r_{\max})$ był spełniony warunek $r < \tau_n$ i wielomiany $W_k(s, r)$, $k = 1, \dots, 4$, były L -stabilne.

Do wyznaczenia wartości parametru r , dla których są L -stabilne poszczególne wielomiany $W_k(s, r)$ ($k = 1, \dots, 4$), traktowane jako wielomiany o niepewnych współczynnikach, można stosować albo twierdzenie Hurwitza 4.1 albo też twierdzenie 4.2.

Jeżeli zastosujemy twierdzenie Hurwitza 4.1, to musimy rozpatrywać wszystkie główne minory macierzy Hurwitza $H_k(r)$ dla $k = 1, \dots, 4$. Takie podejście, dosyć złożone, zostało zastosowane w pracach [10, 25].

Jeżeli natomiast zastosujemy twierdzenie 4.2 (podobnie jak w pracy [26]), to wystarczy ograniczyć się do rozpatrywania tylko wyznaczników macierzy Hurwitza $H_k(r)$, $k = 1, \dots, 4$.

Twierdzenie 6.4. Niech wielomian nominalny (6.31) będzie L -stabilny. Przedziałowy wielomian (6.32) jest odpornie L -stabilny dla dowolnego ustalonego $r \in [0, r_{\max})$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r_{\max} = \min\{\tau_n, r_{1\min}, r_{2\min}, r_{3\min}, r_{4\min}\}, \quad (6.34)$$

gdzie τ_n wyznacza się ze wzoru (6.33),

$$r_{k\min} = \min\{r > 0: \det H_k(r) = 0\}, \quad k = 1, \dots, 4, \quad (6.35)$$

przy czym, jeżeli $\det H_k(r) > 0, \forall r > 0$, to $r_{k\min} = \infty$.

Dowód. Warunek $r < \tau_n$, gdzie τ_n jest zdefiniowane wzorem (6.33), jest konieczny i wystarczający, aby wielomian przedziałowy (6.32) był wielomianem stałego stopnia. Wtedy też wielomiany $W_k(s, r)$, $k = 1, \dots, 4$, są wielomianami stałego stopnia.

Weźmy pod uwagę k -ty wielomian Charitonowa $W_k(s, r)$, traktując go jako wielomian o niepewnych współczynnikach. Jest on L -stabilny dla $r = 0$, bowiem wielomian nominalny $w_0(s) = W_k(s, 0)$ jest L -stabilny. Oznacza to, że $\det \mathbf{H}_k(0) > 0$. Z twierdzenia 4.2 wynika zatem, że wielomian $W_k(s, r)$ jest L -stabilny dla każdego $r \in [0, r_{k \min})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r_{k \min}$ wyznacza się ze wzoru (6.35).

Na podstawie powyższych rozważań możemy więc stwierdzić, że dla każdego ustalonego $r \in [0, r_{\max})$ wielomian (6.32) jest wielomianem stałego stopnia i wszystkie wielomiany Charitonowa są L -stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy $r_{\max}$ jest zdefiniowane wzorem (6.34). Teza twierdzenia wynika zatem z twierdzenia Charitonowa 6.1. $\square$

Oznaczmy przez $\tilde{\mathbf{H}}_k(r)$, $k = 1, \dots, 4$, zredukowane macierze Hurwitza (o postaci (4.8)), stowarzyszone z wielomianami Charitonowa $W_k(s, r)$, $k = 1, \dots, 4$.

Wprowadźmy oznaczenie

$$\tilde{r}_{k \min} = \min\{r > 0: \det \tilde{\mathbf{H}}_k(r) = 0\}, \quad k = 1, \dots, 4, \quad (6.36)$$

przy czym, jeżeli $\det \tilde{\mathbf{H}}_k(r) > 0, \forall r > 0$, to $\tilde{r}_{k \min} = \infty$.

Twierdzenie 6.5 [39]. Niech wielomian nominalny (6.31) będzie L -stabilny. Przedziałowy wielomian (6.32) jest on odpornie L -stabilny dla dowolnego ustalonego $r \in [0, r_{\max})$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r_{\max} = \min\{\tau_n, \tau_0, \tilde{r}_{1 \min}, \tilde{r}_{2 \min}, \tilde{r}_{3 \min}, \tilde{r}_{4 \min}\}, \quad (6.37)$$

gdzie τ_n wyznacza się ze wzoru (6.33), $\tilde{r}_{k \min}$ ($k = 1, \dots, 4$) wyznacza się ze wzoru (6.36), zaś

$$\tau_0 = a_0^0 / q_0^- \quad \text{przy} \quad q_0^- > 0 \quad \text{i} \quad \tau_0 = \infty \quad \text{przy} \quad q_0^- = 0. \quad (6.38)$$

Dowód. Przedziałowy wielomian (6.32) jest L -stabilny dla $r = 0$, co oznacza, że $a_0(0) > 0$ oraz $\det \tilde{\mathbf{H}}_k(0) > 0$.

Ze wzoru (4.9) wynika, że jeżeli rozpatrujemy zredukowane macierze Hurwitza $\tilde{\mathbf{H}}_k(r)$, $k = 1, \dots, 4$, zamiast pełnych macierzy Hurwitza $\mathbf{H}_k(r)$, $k = 1, \dots, 4$, to zamiast warunku $\det \mathbf{H}_k(r) > 0$, $k = 1, \dots, 4$, musimy rozpatrzyć warunek $\det \tilde{\mathbf{H}}_k(r) > 0$ dla $k = 1, \dots, 4$ oraz warunek $a_0^-(r) = a_0^0 - r q_0^- > 0$. Łatwo zauważyć, że $a_0^-(r) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r < \tau_0$, gdzie τ_0 jest zdefiniowane wzorem (6.38), natomiast najmniejszą dodatnią wartością parametru r , dla której przestaje być spełniony warunek $\det \tilde{\mathbf{H}}_k(r) > 0$, jest wartość $\tilde{r}_{k \min}$ zdefiniowana wzorem (6.36). Dowód wynika zatem z powyższych rozważań oraz z twierdzenia 6.4. $\square$

Zauważmy, że wartość $r_{\max}$ obliczona ze wzoru (6.34) lub (6.37) zależy w sposób istotny od wartości współczynników wagowych $q_i^- \geq 0$ oraz $q_i^+ \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Podana w twierdzeniach 6.4 i 6.5 metoda wyznaczania dopuszczalnych przedziałów zmian wartości współczynników L -stabilnego wielomianu nominalnego jest trudna w stosowaniu ze względu na konieczność znajomości postaci wielomianów $\det \mathbf{H}_k(r)$ lub $\det \tilde{\mathbf{H}}_k(r)$ ($k = 1, \dots, 4$). Prostsza metoda została zaproponowana w pracach [38, 39]. Wykorzystano w nich rezultaty pracy [12].

Wielomian przedziałowy (6.32) można napisać w postaci

$$w(s, r) = w_0(s) + r \cdot e(s), \quad (6.39)$$

gdzie $w_0(s)$ jest L -stabilnym wielomianem nominalnym, o postaci (6.31), zaś

$$e(s) = \sum_{i=0}^n e_i s^i, \quad e_i \in [-q_i^-, q_i^+], \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (6.40)$$

jest wielomianem perturbacji (błędu), przy czym $q_i^- \geq 0$ oraz $q_i^+ \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, są to zadane współczynniki wagowe, a r jest współczynnikiem skalującym.

W dalszych rozważaniach wielomian o postaci (6.39) będziemy nazywać wielomianem zaburzonym.

Oznaczmy przez $E_k(s)$, $k=1,\dots,4$, wielomiany Charitonowa stowarzyszone z wielomianem perturbacji (6.40), który jest wielomianem przedziałowym.

Wielomiany Charitonowa stowarzyszone z wielomianem zaburzonym (6.39) mają postać

$$W_k(s, r) = w_0(s) + rE_k(s), \quad k = 1, \dots, 4. \quad (6.41)$$

Oznaczmy przez H_0 i H_k^e macierze Hurwitza stowarzyszone z wielomianem nominalnym $w_0(s)$ oraz z wielomianem $E_k(s)$, odpowiednio.

Lemat 6.2. Dla danego wielomianu Charitonowa $W_k(s, r)$ liczbę $r_{k \min}$ zdefiniowaną wzorem (6.35) można wyznaczyć w następujący sposób:

- jeżeli macierz $M_k = -H_0^{-1}H_k^e$ ma rzeczywiste dodatnie wartości własne, to $r_{k \min} = 1/\lambda_{k \max}$, gdzie $\lambda_{k \max}$ jest największą rzeczywistą dodatnią wartością własną macierzy M_k ,
- jeżeli macierz M_k nie ma rzeczywistych dodatnich wartości własnych, to $r_{k \min} = \infty$.

Dowód. Wielomian nominalny $w_0(s) = W_k(s, 0)$ jest L -stabilny. Wobec tego $\det H_0 > 0$. Ze wzoru (6.35) wynika, że $r_{k \min}$ jest najmniejszym rzeczywistym dodatnim zerem wielomianu $\det H_k(r)$.

Ponieważ $\det H_k(r) = \det(H_0 + rH_k^e)$ oraz $\det H_0 \neq 0$, postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 5.2 możemy wykazać, że $\det H_k(r) = 0$ dla pewnego $r > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det(\lambda I - M_k) = 0, \quad (6.42)$$

gdzie $\lambda = 1/r$ zaś $M_k = -H_0^{-1}H_k^e$. Jeżeli macierz M_k nie ma rzeczywistych dodatnich wartości własnych, to równanie $\det H_k(r) = 0$ nie jest spełnione dla każdego $r > 0$. Wtedy należy więc przyjąć $r_{k \min} = \infty$.

Jeżeli natomiast macierz M_k ma rzeczywiste dodatnie wartości własne λ_j , to równanie (6.42) jest spełnione dla $\lambda = \lambda_j$. Wobec tego najmniejszą liczbą do-

datnią r , dla której $\det H_k(r) = 0$ jest $r_{k \min} = 1/\lambda_{k \max}$, gdzie $\lambda_{k \max}$ jest największą rzeczywistą dodatnią wartością własną macierzy $M_k = -H_0^{-1}H_k^e$. $\square$

Oznaczmy przez $\tilde{H}_0$ i $\tilde{H}_k^e$ ($k=1,\dots,4$) zredukowaną macierz Hurwitza stowarzyszoną z wielomianem nominalnym $w_0(s)$ oraz zredukowane macierze Hurwitza stowarzyszone z wielomianami $E_k(s)$ ($k=1,\dots,4$), odpowiednio.

Lemat 6.3. Dla danego wielomianu Charitonowa $W_k(s, r)$ liczbę $\tilde{r}_{k \min}$ zdefiniowaną wzorem (6.36) można wyznaczyć w następujący sposób:

- jeżeli macierz $\tilde{M}_k = -\tilde{H}_0^{-1}\tilde{H}_k^e$ ma rzeczywiste dodatnie wartości własne, to $\tilde{r}_{k \min} = 1/\lambda_{k \max}$, gdzie $\lambda_{k \max}$ jest największą rzeczywistą dodatnią wartością własną macierzy $\tilde{M}_k$,
- jeżeli macierz $\tilde{M}_k$ nie ma rzeczywistych dodatnich wartości własnych, to $\tilde{r}_{k \min} = \infty$.

Dowód. Dowód jest podobny do dowodu lematu 6.2. $\square$

Przykład 6.3. Dany jest zaburzony wielomian o postaci (6.39), gdzie

$$w_0(s) = s^6 + 14s^5 + 80s^4 + 251s^3 + 502s^2 + 667s + 433$$

jest L -stabilnym wielomianem nominalnym, a wielomian błędu ma postać (6.40) przy $n=6$, przy czym $e_6 \in [-0.1, 0.1]$, $e_5 \in [-1, 1]$, $e_4 \in [-5, 4]$, $e_3 \in [-10, 15]$, $e_2 \in [-20, 40]$, $e_1 \in [-30, 20]$, $e_0 \in [-80, 90]$.

Należy wyznaczyć największą liczbę $r = r_{\max}$ taką, by rozpatrywany zaburzony wielomian był odpornie L -stabilny dla dowolnego ustalonego $r \in [0, r_{\max})$.

Zgodnie ze wzorami (6.33) i (6.38) mamy $\tau_n = -a_n^0/q_n^- = 10$ oraz $\tau_0 = -a_0^0/q_0^- = 5.4125$.

Obliczając wartości własne macierzy $\tilde{M}_k = -\tilde{H}_0^{-1}\tilde{H}_k^e$ oraz liczby $\tilde{r}_{k \min}$, $k=1,\dots,4$, w sposób podany w lemacie 6.3, otrzymamy $\tilde{r}_{1 \min} = 1.4912$, $\tilde{r}_{2 \min} = 3.7170$, $\tilde{r}_{3 \min} = 2.1247$, $\tilde{r}_{4 \min} = 2.0021$.

Wyznaczając $r_{\max}$ ze wzoru (6.37) otrzymamy $r_{\max} = 1.4912$. Oznacza to, zgodnie z twierdzeniem 6.5 i lematem 6.3, że rozpatrywany zaburzony wielomian jest odpornie L -stabilny dla dowolnego ustalonego $r \in [0, 1.4912]$. $\square$

6.1.2.2. Metody częstotliwościowe

Weźmy pod uwagę zaburzony wielomian

$$w(s, r) = w_0(s) + r \cdot e(s), \quad (6.43)$$

gdzie $w_0(s)$ jest L -stabilnym wielomianem nominalnym o postaci (6.31), zaś

$$e(s) = \sum_{i=0}^n e_i s^i, \quad e_i \in [-q_i, q_i], i = 0, 1, \dots, n, \quad (6.44)$$

jest wielomianem perturbacji (błędu), przy czym $q_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, są to zadane współczynniki wagowe, zaś r jest współczynnikiem skalującym.

Odporną L -stabilność zaburzonego wielomianu (6.43) można badać stosując metodę częstotliwościową podaną w pracy [123]. Została ona sformułowana dla wielomianów o niepewnych współczynnikach, które mogą przyjmować swoje wartości z różnych zadanych zbiorów typu np. kula, elipsoida czy hiperprostopadłościan w przestrzeni niepewnych współczynników. Rezultaty pracy [123] są podane (z pewnymi modyfikacjami) w [6], [12] i [21]. W pracach [84] i [86] zostały one uogólnione na klasę wielomianów o zespolonych współczynnikach.

Wykorzystując rezultaty pracy [123] podamy poniżej częstotliwościowe kryterium L -stabilności zaburzonego wielomianu (6.43).

Wprowadźmy oznaczenia

$$w_0(jy) = U_0(y) + jyV_0(y), \quad (6.45)$$

$$u(y) = q_0 + q_2 y^2 + q_4 y^4 + \dots, \quad (6.46)$$

$$v(y) = q_1 + q_3 y^2 + q_5 y^4 + \dots \quad (6.47)$$

Ze wzorów (6.17), (6.18) i (6.44) oraz powyższych oznaczeń wynika, że dla $s = jy$ wielomiany Charitonowa stowarzyszone z zaburzonym wielomianem (6.43) można przedstawić w postaci

$$W_1(jy) = U_0(y) + ru(y) + jy(V_0(y) + rv(y)), \quad (6.48)$$

$$W_2(jy) = U_0(y) - ru(y) + jy(V_0(y) - rv(y)), \quad (6.49)$$

$$W_3(jy) = U_0(y) - ru(y) + jy(V_0(y) + rv(y)), \quad (6.50)$$

$$W_4(jy) = U_0(y) + ru(y) + jy(V_0(y) - rv(y)). \quad (6.51)$$

Dla każdego ustalonego $y \geq 0$ wartości powyższych wielomianów są na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wierzchołkami prostokąta Charitonowa stowarzyszonego z wielomianem przedziałowym (6.43). Środkiem tego prostokąta jest punkt $w_0(jy)$, a jego boki mają długość $2ru(y)$ i $2ryv(y)$, odpowiednio.

Twierdzenie 6.6. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie L -stabilny. Zaburzony wielomian (6.43) stopnia $n \geq 2$ przy dowolnym ustalonym $r > 0$ jest odpornie L -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $y \geq 0$ spełnione są dwa poniższe warunki:

$$1) |U_0(y)| > ru(y),$$

$$2) |V_0(y)| > rv(y).$$

Dowód. Ponieważ wielomian nominalny $w_0(s)$ jest L -stabilny, dla odpornej L -stabilności wielomianu (6.43) potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $y \geq 0$ początek płaszczyzny zmiennej zespolonej leżał na zewnątrz prostokąta Charitonowa stowarzyszonego z tym wielomianem. Ze wzorów (6.48)-(6.51) wynika, że zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki 1) i 2). $\square$

Podobnie jak w pracy [123], utwórzmy funkcję zespoloną

$$z(jy) = \frac{U_0(y)}{u(y)} + j \frac{V_0(y)}{v(y)} \quad (6.52)$$

oraz przez K_r oznaczmy kwadrat o środku w początku płaszczyzny zmiennej zespolonej, którego boki mają długość $2r$.

Jeżeli wielomian nominalny $w_0(s)$ jest L -stabilny, to z twierdzenia 3.5 i z faktu, że $u(y) > 0$ i $v(y) > 0$ dla każdego $y \geq 0$, wynika, że wykres funkcji $z(jy) = \alpha(y) + j\beta(y)$, gdzie $\alpha(y) = U_0(y)/u(y)$, $\beta(y) = V_0(y)/v(y)$, przy zmianach y od zera do nieskończoności przebiega w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara przez n ćwiartek płaszczyzny zmiennej zespolonej. Rozpoczyna się on przy $y = 0$ w punkcie $z(j0) = \alpha(0) + j\beta(0)$ i kończy się w punkcie $z(j\infty) = \alpha(\infty) + j\beta(\infty)$ przy $y \rightarrow \infty$, gdzie

$$\alpha(0) = \frac{a_0^0}{q_0}, \quad \beta(0) = \frac{a_1^0}{q_1}, \quad (6.53)$$

oraz

- przy n parzystym

$$\alpha(\infty) = (-1)^{n/2} \frac{a_n^0}{q_n}, \quad \beta(\infty) = (-1)^{(n-2)/2} \frac{a_{n-1}^0}{q_{n-1}}, \quad (6.54)$$

- przy n nieparzystym

$$\alpha(\infty) = (-1)^{(n-1)/2} \frac{a_{n-1}^0}{q_{n-1}}, \quad \beta(\infty) = (-1)^{(n-1)/2} \frac{a_n^0}{q_n}. \quad (6.55)$$

Twierdzenie 6.7. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie L -stabilny. Zaburzony wielomian (6.43) stopnia $n \geq 2$ przy dowolnym ustalonym $r > 0$ jest odpornie L -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $y \geq 0$ spełnione są dwa poniższe warunki:

- 1) kwadrat K_r leży wewnątrz krzywej $z(jy)$ dla każdego ustalonego $0 < y < \infty$,
- 2) punkty $z(j0)$ i $z(j\infty)$ mają współrzędne o wartości bezwzględnej większej od r , tzn. $a_0^0 > rq_0$, $a_1^0 > rq_1$ oraz $a_n^0 > rq_n$, $a_{n-1}^0 > rq_{n-1}$.

Dowód. Z warunków 1) i 2) twierdzenia 6.6 oraz ze wzoru (6.52) wynika, że wielomian (6.43) przy zadanym $r > 0$ jest odpornie L -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $r < |U_0(y)|/u(y)$ oraz $r < |V_0(y)|/v(y)$, czyli gdy kwadrat K_r leży całkowicie wewnątrz krzywej $z(jy)$ dla każdego $y \geq 0$. Uwzględniając wartości $y \in (0, \infty)$, z powyższego otrzymamy natychmiast dowód warunku 1).

Ponieważ wykres $z(jy)$ nie rozpoczyna się na osi rzeczywistej i nie zdąża do nieskończoności w przypadku ogólnym (jak to występuje w przypadku hodografu Michajłowa $w_0(jy)$ – por. twierdzenie 3.5), należy oddzielnie rozpatrzyć spełnienie warunków twierdzenia 6.6 dla $y = 0$ i dla $y = \infty$. Mają one postać $r < |U_0(0)|/u(0)$ oraz $r < |V_0(\infty)|/v(\infty)$. Z powyższego oraz ze wzorów (6.53)–(6.55) wynika dowód warunku 2. $\square$

Z powyższych rozważań wynika następujący lemat.

Lemat 6.4. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie L -stabilny. Zaburzony wielomian (6.43) stopnia $n \geq 2$ jest odpornie L -stabilny dla dowolnego ustalonego $r \in [0, r_{\max})$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r_{\max} = \min\{\tau, r_y^+\}, \quad (6.56)$$

gdzie

$$\tau = \min\left\{\frac{a_0^0}{q_0}, \frac{a_1^0}{q_1}, \frac{a_n^0}{q_n}, \frac{a_{n-1}^0}{q_{n-1}}\right\}, \quad (6.57)$$

$$r_y^+ = \min_{y \geq 0} r^+(y), \quad (6.58)$$

przy czym dla każdego ustalonego $y \geq 0$ wartość $r^+(y)$ oblicza się ze wzoru

$$r^+(y) = \max\left\{\frac{|U_0(y)|}{u(y)}, \frac{|V_0(y)|}{v(y)}\right\}. \quad (6.59)$$

$\square$

Przykład 6.4. Weźmy pod uwagę wielomian przedziałowy (6.30) rozpatrywany w przykładzie 6.2. Przekształcając go do postaci określonej wzorami (6.43), (6.44) i przyjmując $a_i^0 = 0.5(a_i^- + a_i^+)$, $i = 0, 1, \dots, 4$, otrzymamy

$$w(s, r) = w_0(s) + r \cdot e(s), \quad (6.60)$$

gdzie

$$w_0(s) = 1.05s^4 + 8.5s^3 + 17s^2 + 42s + 24 \quad (6.61)$$

jest L -stabilnym wielomianem nominalnym, zaś

$$e(s) = \sum_{i=0}^4 e_i s^i, \quad e_i \in [-q_i, q_i], \quad i = 0, 1, \dots, 4, \quad (6.62)$$

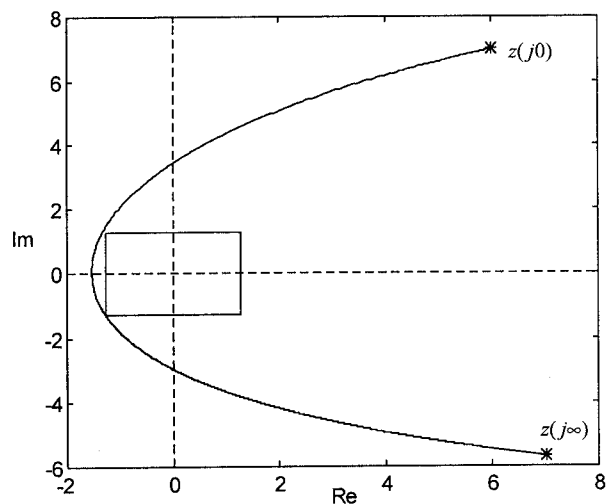
przy czym $q_4 = 0.15$, $q_3 = 1.5$, $q_2 = 3$, $q_1 = 6$, $q_0 = 4$.

Zauważmy, że przy $r = 1$ wielomian (6.60) redukuje się do wielomianu przedziałowego (6.30).

Należy wyznaczyć liczbę $r_{\max}$ taką, dla której zaburzony wielomian (6.60) jest odpornie L -stabilny dla każdego ustalonego $r \in [0, r_{\max}]$.

Obliczając wartość $r_{\max}$ w sposób podany w twierdzeniu 6.4 i lemacie 6.2, otrzymamy

$$r_{\max} = \min\{7, 1.2687, 7.5002, 5.2806, 1.3165\} = 1.2687.$$



Rys. 6.4. Wykres funkcji $z(jy)$ oraz kwadrat K_r przy $r = 1.2687$

Oznacza to, że wielomian (6.60) jest odpornie L -stabilny dla dowolnego ustalonego $r \in [0, 1.2687]$.

Stosując lemat 6.4 należy sporządzić wykres funkcji zespolonej $z(jy)$, zdefiniowanej wzorem (6.52). Jest on pokazany na rysunku 6.4. Wykres $z(jy)$ rozpoczyna się przy $y = 0$ w punkcie $z(j0) = 6 + j7$ i dąży do punktu $z(j\infty) = 7 - j5.6667$ przy $y \rightarrow \infty$. Na tym samym rysunku jest też narysowany kwadrat K_r o długości boków $2r_{\max}$, gdzie $r_{\max} = 1.2687$. Jeden z wierzchołków tego kwadratu leży na krzywej $z(jy)$.

Wartość $r_{\max} = 1.2687$ została wyznaczona w sposób podany w lemacie 6.4, tzn. $r_{\max} = \min\{\tau, r_y^+\}$, gdzie $\tau = 5.6667$ zaś $r_y^+ = 1.2687$, przy czym wartość r_y^+ została obliczona numerycznie na podstawie wzorów (6.58) i (6.59) z dokładnością do 0.00001.

Zauważmy, że taka sama wartość $r_{\max}$ została wyznaczona powyżej w sposób analityczny (i prostszy), z wykorzystaniem twierdzenia 6.4 i lematu 6.2.

Na podstawie powyższych rozważań można stwierdzić, że rozpatrywany zaburzony wielomian jest odpornie L -stabilny dla dowolnego ustalonego $0 < r < r_{\max} = 1.2687$, przy czym nie jest on odpornie L -stabilny dla $r = r_{\max} = 1.2687$.

Przyjmując np. $r = 1.26$, ze wzorów (6.60)–(6.62) otrzymamy, że wielomian przedziałowy (6.30) jest odpornie L -stabilny dla $a_4 \in [0.861, 1.239]$, $a_3 \in [6.61, 10.39]$, $a_2 \in [13.22, 20.78]$, $a_1 \in [34.44, 49.56]$, $a_0 \in [18.96, 29.04]$. Zauważmy, że wyznaczone dopuszczalne przedziały zmian poszczególnych współczynników wielomianu (6.30) są większe od zadanych w przykładzie 6.2. □

Podana w lemacie 6.4 częstotliwościowa metoda (podobnie jak i metody analityczne podane w twierdzeniach 6.4 i 6.5) pozwala na wyznaczenie wartości $r_{\max}$ takiej, dla której zaburzony wielomian (6.43) jest odpornie L -stabilny dla dowolnego ustalonego dodatniego $r < r_{\max}$ i nie jest on w przypadku ogólnym odpornie L -stabilny dla $r = r_{\max}$.

Inna częstotliwościowa metoda badania odpornej L -stabilności zaburzonego wielomianu (6.43) została zaproponowana w pracy [92] (patrz też [81]). Na bazie warunku dostatecznego L -stabilności, wynikającego z kryterium stabilności Nyquista, podano w niej sposób wyznaczania wartości $\tilde{r}_{\max}$ takiej, dla której dla dowolnego ustalonego $r < \tilde{r}_{\max}$ wielomian (6.43) jest odpornie L -stabilny.

Twierdzenie 6.8. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie L -stabilny. Zaburzony wielomian (6.43) jest odpornie L -stabilny dla dowolnego dodatniego $r < \tilde{r}_{\max}$, gdzie

$$\tilde{r}_{\max} = \min_{y \geq 0} \frac{|w_0(jy)|}{\sum_{i=0}^n q_i y^i}. \quad (6.63)$$

Dowód. Ze wzoru (6.44) mamy

$$|e(jy)| \leq \sum_{i=0}^n |(jy)^i e_i| = \sum_{i=0}^n |e_i| y^i \leq \sum_{i=0}^n q_i y^i. \quad (6.64)$$

Ze wzoru (6.64) wynika, że jeżeli $r < \tilde{r}_{\max}$, gdzie $\tilde{r}_{\max}$ ma postać (6.63), to $r \cdot \max_{y \geq 0} \frac{|e(jy)|}{|w_0(jy)|} < 1$. Oznacza to, że dla każdego $y \geq 0$ i dla każdego $0 \leq r < \tilde{r}_{\max}$ wykres funkcji $r \cdot e(jy) / w_0(jy)$ nie obejmuje punktu $(-1, j0)$.

Wielomian (6.43) jest wielomianem charakterystycznym układu zamkniętego, złożonego z fikcyjnego obiektu o transmitancji operatorowej $r e(s) / w_0(s)$, objętego pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego. Z powyższych rozważań i z twierdzenia Nyquista wynika, że jeżeli $r < \tilde{r}_{\max}$, to rozpatrywany układ zamknięty, a więc i wielomian (6.43), jest odpornie L -stabilny. $\square$

Przykład 6.5. Weźmy pod uwagę zaburzony wielomian opisany wzorami (6.60)–(6.62), rozpatrywany w przykładzie 6.4. Stosując twierdzenie 6.8 należy wyznaczyć liczbę $\tilde{r}_{\max}$.

Obliczając $\tilde{r}_{\max}$ zgodnie ze wzorem (6.63), otrzymamy $\tilde{r}_{\max} = 0.6568$. Wielomian (6.60) jest więc odpornie L -stabilny dla dowolnego ustalonego $r \in [0, 0.6568]$. Zauważmy, że otrzymany przedział wartości parametru r jest prawie dwukrotnie mniejszy od wyznaczonego w przykładzie 6.4. $\square$

6.2. Odporna D -stabilność wielomianu przedziałowego

Weźmy pod uwagę wielomian przedziałowy (6.1) stałego stopnia i założmy, że wszystkie jego współczynniki nie są dokładnie znane.

Oznaczmy przez

$$\{w(s, \mathbf{a}_k), k = 1, 2, \dots, 2^m\}, \quad (6.65)$$

gdzie $m = n + 1$, zbiór wielomianów wierzchołkowych. Odpowiadają one wszystkim wierzchołkom hiperprostokątnianu (6.3), będącego zbiorem wartości niepewnych współczynników.

Zgodnie z twierdzeniem Charitonowa 6.1, L -stabilność czterech odpowiednich wielomianów należących do zbioru (6.65), zwanych wielomianami Charitonowa, jest równoważna z odporną L -stabilnością wielomianu przedziałowego (6.1) stałego stopnia.

Problem uogólnienia bądź rozszerzenia twierdzenia Charitonowa 6.1 na przypadek badania odpornej D -stabilności wielomianu przedziałowego był rozpatrywany w wielu pracach. Zdecydowana ich większość była poświęcona problemowi odpornej K -stabilności. Przegląd rezultatów tych prac jest podany w [75].

W pracy [52] wykazano, że jeżeli stopień wielomianu przedziałowego n jest nie większy niż 3, to K -stabilność wszystkich wielomianów wierzchołkowych jest warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej K -stabilności rodziny (6.1) przy $a_n = 1$ w $w(s, \mathbf{a})$. W przypadku, gdy $n \geq 4$, K -stabilność wszystkich wielomianów wierzchołkowych jest tylko warunkiem koniecznym odpornej K -stabilności wielomianu przedziałowego (6.1). Ilustruje to poniższy przykład.

Przykład 6.6. Rozpatrzmy wielomian przedziałowy

$$w(s, \mathbf{a}) = s^4 + as^3 + 1.5s^2 - 1/3, \quad \mathbf{a} \in [-17/8, 17/8], \quad (6.66)$$

analizowany w przykładach 5.2 i 5.3.

Wszystkie zera wielomianu (6.66) przy $a = -17/8$ i przy $a = 17/8$ leżą w otwartym kole jednostkowym. Oznacza to, że wszystkie wielomiany wierzchołkowe (a są one dwa) są K -stabilne. Wielomian przedziałowy (6.66) nie jest natomiast odpornie K -stabilny, bowiem nie jest on K -stabilny np. dla $a = 0$. $\square$

Szczegółową analizę problemu odpornej K -stabilności wielomianu przedziałowego przeprowadzono w pracy [88]. Wykazano w niej, że K -stabilność wszystkich wielomianów wierzchołkowych jest warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej K -stabilności wielomianu o niepewnych współczynnikach tylko w przypadku wielomianów o specjalnej strukturze niepewności, odmiennej od przedziałowej i raczej rzadko spotykanej w zastosowaniach praktycznych. Podobny rezultat został podany w pracy [96].

W pracy [71] podano kryterium odpornej K -stabilności wielomianu przedziałowego w przypadku, gdy współczynniki przy najwyższych potęgach zmiennej s są dokładnie znane. Jest ono w pewnym sensie analogiem kryterium Charitonowa.

Lemat 6.5 [71]. Wielomian przedziałowy (6.1) stopnia $n > 1$, spełniający założenie $a_i^- = a_i^+ = a_i$ dla $i = n/2 + 1, \dots, n$ przy n parzystym i dla $i = (n+1)/2 + 1, \dots, n$ przy n nieparzystym, jest odpornie K -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są K -stabilne wszystkie wielomiany wierzchołkowe, odpowiadające poszczególnym wierzchołkom zbioru wartości niepewnych współczynników. $\square$

Przykład 6.7. Rozpatrzmy wielomian przedziałowy drugiego stopnia, o postaci

$$w(s, \mathbf{a}) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0, \quad a_i \in [a_i^-, a_i^+], i = 0, 1, 2. \quad (6.67)$$

Z lematu 6.5 wynika, że jeżeli $a_2^- = a_2^+ = a_2$ (czyli współczynnik przy s^2 jest dokładnie znany), to wielomian przedziałowy (6.67) jest odpornie K -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są K -stabilne cztery wielomiany wierzchołkowe

$$\begin{aligned} w_1(s) &= a_2 s^2 + a_1^- s + a_0^-, & w_2(s) &= a_2 s^2 + a_1^+ s + a_0^-, \\ w_3(s) &= a_2 s^2 + a_1^- s + a_0^+, & w_4(s) &= a_2 s^2 + a_1^+ s + a_0^+. \end{aligned} \quad \square$$

Ponieważ nie istnieje kryterium służące do badania odpornej K -stabilności wielomianu przedziałowego (6.1) w przypadku ogólnym, w literaturze podano (np. w pracach [27], [56], [88], [92]) szereg prostych warunków koniecznych i, oddzielnie, warunków dostatecznych odpornej K -stabilności takiego wielomianu.

Wykorzystując rezultaty pracy [92] (patrz też [81]) można sformułować poniższe twierdzenie, będące odpowiednikiem twierdzenia 6.8.

Twierdzenie 6.9. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie K -stabilny. Zaburzony wielomian (6.43) jest odpornie K -stabilny dla dowolnego dodatniego $r < r_{\max}$, gdzie

$$r_{\max} = \min_{0 \leq y \leq 1} \frac{|w_0(\exp(jy\pi))|}{\sum_{i=0}^n q_i}. \quad (6.68)$$

Dowód. Ze wzoru (6.44) dla $s = \exp(jy\pi)$ mamy

$$\max_{0 \leq y \leq 1} |e(\exp(jy\pi))| \leq \sum_{i=0}^n q_i. \quad (6.69)$$

Jeżeli $r < r_{\max}$, to ze wzoru (6.68) wynika, że $r \sum_{i=0}^n q_i < \min_{0 \leq y \leq 1} |w_0(\exp(jy\pi))|$.

Z powyższego i ze wzoru (6.69) mamy zatem

$$r \cdot \max_{0 \leq y \leq 1} \frac{|e(\exp(jy\pi))|}{|w_0(\exp(jy\pi))|} < 1.$$

Oznacza to, że dla każdego $y \in [0, 1]$ i dla każdego ustalonego $r \in [0, r_{\max})$ wykres funkcji $r \cdot e(\exp(jy\pi)) / w_0(\exp(jy\pi))$ nie obejmuje punktu $(-1, j0)$.

Wielomian (6.43) jest wielomianem charakterystycznym dyskretnego układu zamkniętego, złożonego z fikcyjnego obiektu o transmitancji dyskretniej $r e(s) / w_0(s)$, objętego pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego. Z powyższych rozważań i z twierdzenia Nyquista wynika, że jeżeli $r < r_{\max}$, to rozpatrywany układ zamknięty, a więc i zaburzony wielomian (6.43), jest odpornie K -stabilny. $\square$

Podsumowując powyższe rozważania możemy stwierdzić, że postać obszaru D decyduje o tym, czy D -stabilność wszystkich wielomianów wierzchołkowych (6.65) jest równoważna z odporną D -stabilnością wielomianu przedziałowego

(6.1), czy też nie. Wobec tego można sformułować następujący problem: dla jakich obszarów D na płaszczyźnie zmiennej zespolonej zbiór (6.65) jest zbiorem testującym, tzn. odporna D -stabilność wszystkich, lub tylko niektórych, wielomianów należących do tego zbioru jest warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej D -stabilności wielomianu przedziałowego (6.1).

Rozwiązanie postawionego problemu można uzyskać wprowadzając pojęcia słabego i mocnego obszaru Charitonowa.

Uwzględniając pracę [6], wprowadźmy następującą definicję.

Definicja 6.1. Otwarty obszar D na płaszczyźnie zmiennej zespolonej będziemy nazywać słabym obszarem Charitonowa, jeżeli D -stabilność wszystkich wielomianów wierzchołkowych (elementów zbioru (6.65)) implikuje odporną D -stabilność wielomianu przedziałowego (6.1). Obszar D będziemy nazywać mocnym obszarem Charitonowa, jeżeli istnieje podzbiór zbioru (6.65), o liczbie elementów zależnych tylko od obszaru D , a niezależnych od stopnia wielomianu przedziałowego (6.1), taki, dla którego D -stabilność wszystkich wielomianów należących do tego zbioru implikuje odporną D -stabilność wielomianu przedziałowego (6.1). $\square$

Charakterystykę obszaru D będącego słabym obszarem Charitonowa przedstawiono w pracy [103]. Jej główny rezultat jest podany w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 6.10. Obszar D jest słabym obszarem Charitonowa, jeżeli D i jego odwrotność

$$D^{-1} = \{z: z^{-1} \in D\}$$

są zbiorami wypukłymi.

Dowód. Dowód twierdzenia jest podany w pracach [103] i [12]. $\square$

Warunek podany w twierdzeniu 6.10 dotyczy wielomianu przedziałowego o rzeczywistych współczynnikach. Jeżeli współczynniki tego wielomianu są zespolone, to wypukłość D i D^{-1} jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby obszar D był słabym obszarem Charitonowa [103].

Z powyższego wynika, że jeżeli rozpatrujemy wielomiany przedziałowe o zespolonych współczynnikach, to otwarte koło jednostkowe nie jest słabym obszarem Charitonowa, bowiem jego odwrotność nie jest obszarem wypukłym.

Otwarte koło jednostkowe nie jest też słabym obszarem Charitonowa dla wielomianów przedziałowych o rzeczywistych współczynnikach. Wynika to nie z twierdzenia 6.10 (warunek dostateczny podany w tym twierdzeniu nie jest spełniony dla otwartego koła jednostkowego), ale z definicji 6.1 i np. z przykładu 6.6.

Korzystając z twierdzenia 6.10 można wykazać, że słabymi obszarami Charitonowa są:

- otwarta lewa półpłaszczyzna,
- przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna,
- otwarty sektor,
- otwarty sektor odcięty,
- otwarty sektor hiperboliczny,
- otwarte koło o dowolnym środku i dowolnym promieniu, jeżeli nie obejmuje ono początku płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Parametryczne opisy brzegów wyżej wymienionych obszarów są podane w Dodatku.

Z twierdzenia 6.10 i definicji 6.1 wynika, że jeżeli obszarem D jest jeden z wyżej wymienionych obszarów, to D -stabilność wszystkich wielomianów wierzchołkowych (elementów zbioru (6.65)) implikuje odporną D -stabilność wielomianu przedziałowego (6.1). Zauważmy, że liczba elementów zbioru (6.65) zależy od stopnia wielomianu przedziałowego (6.1).

Otwarta lewa półpłaszczyzna jest też mocnym obszarem Charitonowa, bowiem, zgodnie z twierdzeniem 6.1, warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej L -stabilności wielomianu przedziałowego (6.1), niezależnie od jego stopnia, jest L -stabilność tylko czterech wielomianów (6.4)-(6.7), zwanych wielomianami Charitonowa.

Mocnym obszarem Charitonowa jest też otwarty sektor, pokazany na rysunku D.1, przy określonych wartościach kąta θ .

W pracy [119] wykazano, że jeżeli $\theta = (1 - p/q)\pi$, gdzie p i q są to liczby całkowite dodatnie względnie pierwsze, przy czym $0.5 \leq p/q < 1$, to warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej D -stabilności wielomianu przedziałowego (6.1) jest D -stabilność $N_w = 2q$ odpowiednich wielomianów wierzchołkowych. Metoda ich wyznaczania, zaproponowana w [119], jest dosyć złożona. Uwzględnia się w niej geometrię zbioru wartości, który jest wypukłym wielobokiem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Prostsza metoda wyznaczania tych wielomianów podano w pracy [124].

Liczba wielomianów wierzchołkowych, których D -stabilność należy badać, może być mniejsza od $N_w = 2q$ w przypadku wielomianów przedziałowych niskiego stopnia, gdy $n(\pi - \theta) < 3\pi$ [58]. Jeżeli np. $\theta = \pi/3$, czyli $p = 2$, $q = 3$, to $N_w = 2q = 6$. Jeżeli ponadto stopień wielomianu przedziałowego jest niski, np. $n = 3$, to warunek $n(\pi - \theta) < 3\pi$ jest spełniony i wystarczy zbadać D -stabilność tylko trzech odpowiednich wielomianów wierzchołkowych [58].

Powyższy rezultat jest odpowiednikiem lematu 6.1, w którym podano warunki odpornej L -stabilności wielomianu przedziałowego niskiego stopnia ($n \leq 4$).

Z przedstawionych powyżej rozważań wynika, że najbardziej złożony jest problem badania odpornej K -stabilności wielomianu przedziałowego (6.1), bowiem K -stabilność wszystkich wielomianów wierzchołkowych, należących do zbioru (6.65), nie jest równoważna z odporną K -stabilnością tego wielomianu. Oznacza to, że nie istnieje skończony zbiór wielomianów o dokładnie znanych współczynnikach, których K -stabilność jest warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej K -stabilności wielomianu przedziałowego.

Do badania odpornej K -stabilności wielomianu przedziałowego można stosować albo ogólne metody opisane w rozdziale 4 niniejszej pracy albo warunki konieczne i oddzielnie warunki dostateczne, podane np. w pracach [27, 56, 88, 92] (warunek dostateczny udowodniony w [92] jest podany w twierdzeniu 6.9), albo też stosować metody opracowane dla wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów. Metody te można stosować nie tylko do badania odpornej K -stabilności, ale i D -stabilności. Wynika to z faktu, że wielomian przedziałowy (6.1) jest przypadkiem szczególnym wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów. Metody badania odpornej D -stabilności takich wielomianów są podane w rozdziale 7 niniejszej pracy.

Aby móc stosować te metody, a w szczególności podane w punkcie 7.4 metody funkcji testujących, wielomian przedziałowy (6.1) należy przekształcić do postaci

$$w(s, \mathbf{q}) = w_0(s) + q_1 w_1(s) + \dots + q_m w_m(s), \quad \mathbf{q} \in Q, \quad (6.70)$$

gdzie

$$w_0(s) = \sum_{i=0}^n a_i^0 s^i, \quad (6.71)$$

jest wielomianem nominalnym, $w_k(s) = s^{k-1}$ dla $k = 1, 2, \dots, m = n+1$, $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T$ jest wektorem odchyłek q_k ($k = 1, 2, \dots, m$) niepewnych współczynników od ich wartości nominalnych, zaś zbiór

$$Q = \{ \mathbf{q} : q_k \in [b_k, c_k], b_k \leq 0, c_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, m \} \quad (6.72)$$

jest zbiorem wartości tych odchyłek, przy czym $b_k = a_{k-1}^- - a_{k-1}^0$, zaś $c_k = a_{k-1}^+ - a_{k-1}^0$.

7. ODPORNA STABILNOŚĆ RODZINY WIELOMIANÓW O WSPÓŁCZYNNIKACH LINIOWO ZALEŻNYCH OD NIEPEWNYCH PARAMETRÓW

Weźmy pod uwagę rodzinę wielomianów opisaną wzorami (3.2)–(3.4) i założmy, że współczynniki wielomianu (3.2) są liniowymi funkcjami niepewnych parametrów.

Dla ułatwienia rozważań przyjmijmy (nie zmniejszając ich ogólności), że współczynniki wielomianu (3.2) zależą nie od niepewnych parametrów, ale od odchyłek tych parametrów od ich wartości nominalnych. Odchyłki będziemy przy tym oznaczać tak samo jak niepewne parametry, tzn. przez q_k ($k=1,2,\dots,m$). Dla odróżnienia, że rozpatrujemy zapis wielomianu $w(s, \mathbf{q})$ w zależności od odchyłek, a nie od niepewnych parametrów, przyjmujemy zasadę, że k -ta odchyłka $q_k \in [b_k, c_k]$, $b_k \leq 0, c_k \geq 0$ (przy czym nie może być jednocześnie $b_k = 0, c_k = 0$), podczas gdy k -ty niepewny parametr $q_k \in [q_k^-, q_k^+]$, $q_k^- < q_k^+$.

Uwzględniając powyższe rozważania, wielomian o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów można przedstawić w postaci

$$w(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{q}) s^i, \quad \mathbf{q} \in Q, \quad (7.1)$$

gdzie $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T$ jest wektorem odchyłek q_k ($k=1,2,\dots,m$) niepewnych parametrów od ich wartości nominalnych, m jest liczbą niepewnych parametrów,

$$a_i(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^m q_k a_{ik} + a_{i0}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (7.2)$$

są to liniowe ciągle funkcje swoich argumentów (a_{ik} są to znane współczynniki), zaś

$$Q = \{\mathbf{q} : q_k \in [b_k, c_k], b_k \leq 0, c_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, m\} \quad (7.3)$$

jest zbiorem wartości odchyłek niepewnych parametrów od ich wartości nominalnych.

Założmy, że wielomian (7.1) jest wielomianem stałego stopnia (tj. $\forall \mathbf{q} \in Q$ ma on stopień n) i nie zmniejszając ogólności rozważań przyjmijmy, że $a_n(\mathbf{q}) > 0$ dla każdego $\mathbf{q} \in Q$.

Wielomian (7.1) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów można napisać w postaci

$$w(s, \mathbf{q}) = w_0(s) + q_1 w_1(s) + \dots + q_m w_m(s), \quad \mathbf{q} \in Q, \quad (7.4)$$

gdzie

$$w_k(s) = \sum_{i=0}^n a_{ik} s^i, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (7.5)$$

są to znane wielomiany, przy czym $w_0(s) = w(s, 0)$ jest wielomianem nominalnym stopnia n .

Założmy, że wszystkie zera wielomianu nominalnego $w_0(s)$ leżą w otwartym obszarze D , zdefiniowanym wzorem (3.1), przy czym ma on $n_i \geq 1$ zer w każdym z podobszarów D_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Brzeg każdego z podobszarów D_i ma opis parametryczny $f_i(y)$, $y \in Y_i$. Jeżeli wartość parametru y rośnie w przedziale Y_i , to następuje ruch po brzegu podobszaru D_i w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Zgodnie z definicją 3.5, rodzinę wielomianów

$$W(s, Q) = \{w(s, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}, \quad (7.6)$$

gdzie $w(s, \mathbf{q})$ ma postać (7.4), będziemy nazywać odpornie D -stabilną, jeżeli każdy wielomian z tej rodziny ma tyle samo zer w każdym z podobszarów D_i , $i = 1, 2, \dots, N$, co wielomian nominalny $w_0(s)$.

Wielomian (7.4) jest przypadkiem szczególnym wielomianu (3.2) o niepewnych współczynnikach, ale ogólniejszym od wielomianu przedziałowego (6.2).

7.1. Zbiór wartości

Geometrię zbioru wartości rodziny wielomianów (7.6) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów przeanalizujemy poniżej, uwzględniając prace [12, 104].

Zbiór Q o postaci (7.3) jest m -wymiarowym prostopadłością. Ma on $K = 2^m$ wierzchołków i $L = m2^{m-1}$ krawędzi. Oznaczmy przez $q_k = [q_1^k, q_2^k, \dots, q_m^k]^T$, gdzie $q_i^k = b_i$ lub $q_i^k = c_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, k -ty wierzchołek zbioru Q .

Zbiór Q można przedstawić w postaci

$$Q = \text{conv}\{q_1, q_2, \dots, q_K\} = \{q: q = \sum_{k=1}^K \lambda_k q_k, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^K \lambda_k = 1\}. \quad (7.7)$$

Wierzchołki q_k , $k = 1, 2, \dots, K$, zbioru Q będziemy nazywać jego generatorami.

Dla każdego ustalonego $q \in Q$ wielomian (7.1) w przestrzeni swoich współczynników jest reprezentowany przez wektor $a(q) = [a_0(q), a_1(q), \dots, a_n(q)]^T$. Rodzina (7.6) w przestrzeni współczynników wielomianu (7.1) jest reprezentowana przez zbiór współczynników

$$A = \{a(q): q \in Q\}. \quad (7.8)$$

Jeżeli współczynniki wielomianu (7.1) zależą liniowo od niepewnych parametrów, to zbiór (7.8) jest zbiorem wielościennym wypukłym. Można go przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} A &= \text{conv}\{a(q_1), a(q_2), \dots, a(q_K)\} \\ &= \{a(q): a(q) = \sum_{k=1}^K \lambda_k a(q_k), \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^K \lambda_k = 1\}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

gdzie $a(q_k) = [a_0(q_k), a_1(q_k), \dots, a_n(q_k)]^T$ jest wektorem współczynników wielomianu (7.1), odpowiadającym wierzchołkowi q_k zbioru Q . Powyższe wynika z faktu, że dla każdego $q \in Q$

$$a_i(q) = a_i\left(\sum_{k=1}^K \lambda_k q_k\right) = \sum_{k=1}^K \lambda_k a_i(q_k), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (7.10)$$

Każdemu wierzchołkowi q_k , $k = 1, 2, \dots, K$, zbioru Q odpowiada w zbiorze wielomianów (7.6) tzw. wielomian wierzchołkowy

$$p_k(s) = w(s, q_k) = \sum_{i=0}^n a_i(q_k) s^i. \quad (7.11)$$

Uwzględniając (7.10) i (7.11), wielomian (7.1) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów możemy napisać w postaci

$$w(s, q) = \sum_{i=0}^n a_i(q) s^i = \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^K \lambda_k a_i(q_k) s^i = \sum_{k=1}^K \lambda_k \sum_{i=0}^n a_i(q_k) s^i = \sum_{k=1}^K \lambda_k p_k(s). \quad (7.12)$$

Oznacza to, że rodzinę wielomianów (7.6) można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} W(s, Q) &= \text{conv}\{p_1(s), p_2(s), \dots, p_K(s)\} \\ &= \{w(s): w(s) = \sum_{k=1}^K \lambda_k p_k(s), \sum_{k=1}^K \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, K\}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

gdzie tzw. wielomiany generujące (generatory) $p_k(s)$, $k = 1, 2, \dots, K$, tej rodziny wyznaczają się ze wzoru (7.11). Rodzinę (7.13) nazywa się często wierzchołkowym zbiorem wielomianów.

Ze wzoru (7.12) wynika, że każdej krawędzi

$$q_{rk}(\lambda) = (1 - \lambda)q_r + \lambda q_k, \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (7.14)$$

zbioru Q , będącej odcinkiem linii prostej łączącym wierzchołki q_r i q_k , w zbiorze wielomianów (7.13) odpowiada tzw. wielomian krawędziowy w postaci

$$p_{rk}(s, \lambda) = (1 - \lambda)p_r(s) + \lambda p_k(s), \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (7.15)$$

gdzie $p_r(s)$ i $p_k(s)$ są to wielomiany wierzchołkowe, odpowiadające wierzchołkom q_r i q_k zbioru Q , odpowiednio.

Ze wzoru (7.13) i definicji 4.1 wynika, że dla każdej liczby zespolonej z zbiór wartości $w(z, Q)$ można przedstawić w postaci

$$w(z, Q) = \text{conv}\{p_1(z), p_2(z), \dots, p_K(z)\}. \quad (7.16)$$

Jest on odwzorowaniem zbioru Q przez przekształcenie $w(z, \cdot)$, gdzie z jest zadaną liczbą zespoloną.

Podobnie, unormowany zbiór wartości $\tilde{w}(z, Q)$ zdefiniowany wzorem (4.25) można przedstawić w postaci

$$\tilde{w}(z, Q) = \text{conv}\{\tilde{p}_1(z), \tilde{p}_2(z), \dots, \tilde{p}_K(z)\}, \quad (7.17)$$

gdzie $\tilde{p}_k(z) = p_k(z) / w_0(z)$, $k = 1, 2, \dots, K$, $w_0(z) \neq 0$, zaś $w_0(s)$ jest D -stabilnym wielomianem nominalnym.

Zbiór wartości $w(z, Q)$ jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wypukłym wielobokiem, rozpiętym na punktach $p_1(z), p_2(z), \dots, p_K(z)$, przy czym w przypadku ogólnym nie wszystkie punkty $p_k(z)$, $k = 1, 2, \dots, K$, muszą być wierzchołkami tego zbioru, tj. niektóre z punktów $p_k(z)$ mogą leżeć we wnętrzu zbioru $w(z, Q)$.

Zbiór wartości $w(z, Q)$ (wypukły wielobok) ma następujące właściwości:

- 1) Każdemu wierzchołkowi $p_r(z) = w(z, q_r)$ wieloboku $w(z, Q)$ odpowiada wierzchołek q_r zbioru Q , ale nie odwrotnie.
- 2) Każdej krawędzi $[p_r(z), p_k(z)]$ wieloboku (7.16), będącej odcinkiem linii prostej łączącym wierzchołki $p_r(z)$ i $p_k(z)$, odpowiada w zbiorze Q krawędź (7.14), ale nie odwrotnie.

3) Liczba krawędzi wieloboku (7.16) jest nie większa niż $2m$, gdzie m jest liczbą niepewnych parametrów (wymiarom hiperprostokątów Q).

4) Krawędzie wieloboku (7.16) są wzajemnie parami równoległe.

Właściwości 1) i 2) wynikają z powyższych rozważań oraz ze wzorów (7.6)–(7.16). Aby pokazać właściwości 3) i 4) zauważmy (uwzględniając (7.3) i (7.4)), że k -tą krawędź zbioru (7.16) można opisać wzorem

$$w_0(z) + \sum_{i \neq k} q_i'' w_i(z) + q_k w_k(z), \quad q_k \in [b_k, c_k], \quad (7.18)$$

gdzie wartości q_i'' są ustalone (tzn. $q_i'' = b_i$ lub $q_i'' = c_i$), natomiast wartość q_k zmienia się w przedziale $[b_k, c_k]$. Tangens kąta nachylenia tej krawędzi wynosi

$\text{Im } w_k(z) / \text{Re } w_k(z)$ i nie zależy on od q_i'' . Wobec tego, krawędzie zbioru wartości mogą mieć tylko m różnych nachyleń, czyli tyle, ile jest niepewnych parametrów. Ponieważ wielobok, którego krawędzie mają m różnych nachyleń, może mieć nie więcej niż $2m$ krawędzi, zbiór wartości (7.16) ma co najwyżej $2m$ krawędzi. Jeżeli natomiast jest to wielobok wypukły, będący odwzorowaniem hiperprostokąta (7.3), to te krawędzie muszą być parami równoległe.

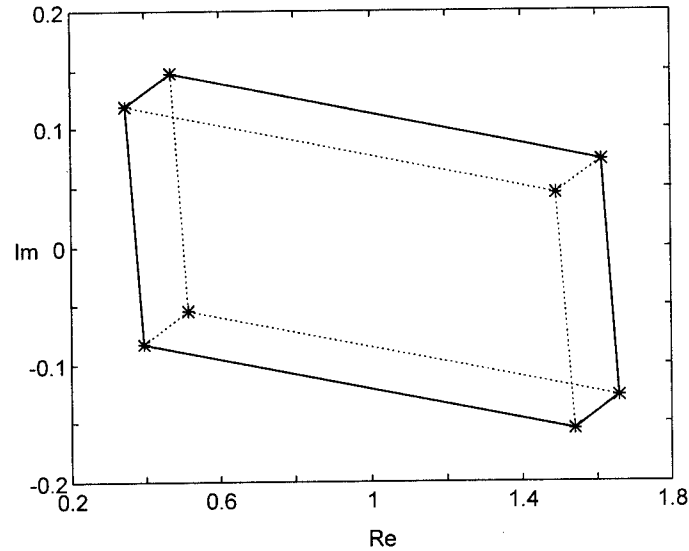
Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli z jest zespolonym parametrem, to przy ciągłych zmianach jego wartości wielobok $w(z, Q)$ przemieszcza się na płaszczyźnie zmiennej zespolonej zmieniając swoje wymiary i wierzchołki (w przypadku ogólnym), tj. niektóre z punktów $p_k(z)$, które były wierzchołkami $w(z, Q)$ przy jednej wartości z mogą być punktami wewnętrznymi tego wieloboku przy innej wartości z . Ponadto, dla niektórych wartości z zbiór $w(z, Q)$ może mieć mniej niż $2m$ krawędzi, przy czym liczba jego wierzchołków i krawędzi zależy od wartości z .

Zauważmy, że wymienione powyżej właściwości ma też unormowany zbiór wartości (7.17). Wynika to ze sposobu tworzenia tego zbioru.

Przykład 7.1. Weźmy pod uwagę wielomian charakterystyczny (2.40), (2.41) układu rozpatrywanego w przykładzie 2.5. Jest on wielomianem o współczynnikach zależnych liniowo od trzech niepewnych parametrów, przy czym q_1, q_2 i q_3 są to odchyłki niepewnych parametrów od ich wartości nominalnych. Wielomianem nominalnym $w_0(s)$ jest wielomian (2.40) przy $q = 0$, tzn. przy $q_1 = q_2 = q_3 = 0$. Jest on L -stabilny.

Ponieważ $m=3$, zbiór Q jest prostopadłościem. Ma on $K=2^3=8$ wierzchołków i $L=m2^{m-1}=12$ krawędzi.

Położenie na płaszczyźnie zmiennej zespolonej unormowanego zbioru wartości $\tilde{w}(z, Q)$ przy $z=j2.5$ jest pokazane na rysunku 7.1. Jest on wypukłym wielobokiem, który ma $2m=6$ boków (krawędzi). Na rysunku 7.1 gwiazdkami oznaczono punkty odpowiadające wartościom unormowanych wielomianów wierzchołkowych $\tilde{p}_k(z)=p_k(z)/w_0(z)$, $k=1,2,\dots,K=8$, wyznaczonym dla $z=j2.5$.



Rys. 7.1. Unormowany zbiór wartości $\tilde{w}(z, Q)$ dla $z=j2.5$ do przykładu 7.1

Z rysunku 7.1 wynika, że dwa wierzchołki i sześć krawędzi zbioru Q zostały odwzorowane odpowiednio w punkty i odcinki wewnętrzne (zaznaczone liniami kropkowanymi) unormowanego zbioru wartości $\tilde{w}(z, Q)$. □

7.2. Warunek wykluczenia zera

Z twierdzenia 4.5 i lematu 4.1 wynika poniższy lemat.

Lemat 7.1. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie D -stabilny. Rodzina wielomianów (7.6) stałego stopnia, o współczynnikach liniowo zależnych od nie-

pewnych parametrów, jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy oddzielnie dla każdego z podobszarów D_i , $i=1,2,\dots,N$, jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin w(f_i(y), Q), \quad \forall y \in Y_i, \quad (7.19)$$

lub równoważnie, warunek wykluczenia zera dla unormowanego zbioru wartości

$$0 \notin \tilde{w}(f_i(y), Q), \quad \forall y \in Y_i, \quad (7.20)$$

gdzie zbiory wartości $w(f_i(y), Q)$ i $\tilde{w}(f_i(y), Q)$ są zdefiniowane wzorami (7.16) i (7.17) przy $z=f_i(y)$.

Przykład 7.2. Na podstawie bezpośredniego sprawdzenia warunku wykluczenia zera należy zbadać odporną K -stabilność wielomianu

$$w(s, q) = w_0(s) + q_1 w_1(s) + q_2 w_2(s), \quad q \in Q, \quad (7.21)$$

gdzie

$$w_0(s) = s^3 - 0.8s^2 + 0.6s - 0.1, \quad w_1(s) = -0.6s^2 + 0.3s + 0.2,$$

$$w_2(s) = 0.3s^2 + 0.4s - 0.1,$$

$$Q = \{q: q_1 \in [-0.5, 0.5], q_2 \in [-0.2, 0.2]\}.$$

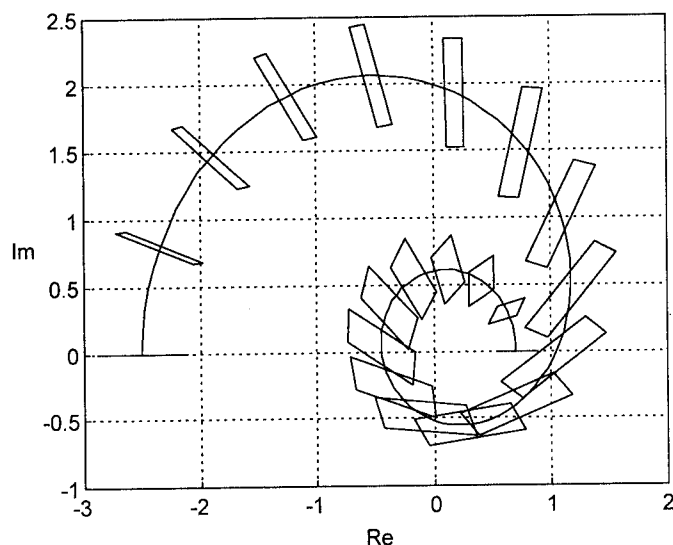
Obszarem D jest otwarte koło jednostkowe. Sprawdzając warunek wykluczenia zera dla wielomianu (7.21) o rzeczywistych współczynnikach możemy brać pod uwagę tylko część koła leżącą w półpłaszczyźnie $\text{Im } s \geq 0$. Brzeg tej części koła ma opis parametryczny $f(y) = \exp(j\pi y)$, $y \in Y = [0, 1]$.

Wielomian nominalny $w_0(s) = w(s, 0)$ ma trzy zera: $0.295 \pm j0.6238$ oraz 0.21 . Leżą one w otwartym kole jednostkowym, co oznacza że $w_0(s)$ jest K -stabilny.

Położenia na płaszczyźnie zmiennej zespolonej zbioru wartości $w(f(y), Q)$, stowarzyszonego z rozpatrywanym obszarem D , wyznaczone dla 21 wartości y z przedziału $Y = [0, 1]$ (z krokiem $\Delta y = 0.05$) są pokazane na rysunku 7.2. Na tym rysunku jest też pokazany przebieg $w_0(f(y))$, $y \in Y = [0, 1]$. Rozpoczyna się on

na dodatniej półosi rzeczywistej i przebiega w kierunku dodatnim przez 6 ćwiartek płaszczyzny zmiennej zespolonej. Potwierdza to, zgodnie z twierdzeniem 3.6, że $w_0(s)$ jest K -stabilny.

Z rysunku 7.2 wynika, że warunek wykluczenia zera (7.19) jest spełniony, co oznacza, że wielomian (7.21) jest odpornie K -stabilny. $\square$



Rys. 7.2. Położenia zbioru wartości $w(f(y), Q)$ oraz wykres $w_0(f(y))$

Zastosowana w przykładzie 7.2 metoda bezpośredniego sprawdzania warunku wykluczenia zera jest mało efektywna i trudna w stosowaniu szczególnie przy $m > 3$ oraz w przypadku, gdy dla niektórych wartości $y \in Y_i$ zbiór wartości leży na płaszczyźnie zmiennej zespolonej bardzo blisko początku układu współrzędnych. Z tego powodu stosuje się inne metody, służące do pośredniego sprawdzania warunku wykluczenia zera (7.19) lub (7.20). Należy do nich metoda, w której wykorzystuje się tzw. twierdzenie krawędziowe, oraz metody funkcji testujących.

7.3. Twierdzenie krawędziowe

Twierdzenie krawędziowe zostało udowodnione w pracy [20] dla obszaru D będącego jednym jednospójnym obszarem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej

i uogólnione dla skończonej sumy takich rozłącznych obszarów w [62]. Jest ono też podane w pracach [12] i [21].

W pracach [63] i [64] twierdzenie krawędziowe zostało uogólnione na klasę quasi-wielomianów (typu opóźnionego i neutralnego) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów.

Twierdzenie 7.1 (twierdzenie krawędziowe). Rodzina wielomianów (7.6) stałego stopnia, o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów, jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie D -stabilne wszystkie wielomiany krawędziowe (7.15), odpowiadające poszczególnym krawędziom (7.14) zbioru Q .

Dowód. Wielomiany krawędziowe należą do rodziny (7.6). Ich odporna D -stabilność jest więc warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności tej rodziny.

Nie zmniejszając ogólności rozważań założmy, że wszystkie wielomiany wierzchołkowe rodziny (7.6) są D -stabilne.

Dla dowolnego ustalonego $y \in Y_i$ oznaczmy przez $p_{rk}(f_i(y), \Lambda)$ zbiór wartości (odcinek linii prostej łączącej punkty $p_r(f_i(y))$ i $p_k(f_i(y))$) wielomianu krawędziowego (7.15), stowarzyszony z i -tym podobszarem D_i ($i = 1, 2, \dots, N$) obszaru D .

Dla dowodu warunku dostatecznego należy wykazać, że rodzina (7.6) jest odpornie D -stabilna, jeżeli warunek wykluczenia zera

$$0 \notin p_{rk}(f_i(y), \Lambda), \quad \forall y \in Y_i, \quad (7.22)$$

jest spełniony dla wszystkich wielomianów krawędziowych (7.15), odpowiadających poszczególnym krawędziom (7.14) zbioru Q i dla wszystkich podobszarów D_i , $i = 1, 2, \dots, N$, obszaru D . Dowód przeprowadzimy nie wprost.

Założmy, że rodzina (7.6) nie jest odpornie D -stabilna, tzn. warunek wykluczenia zera (7.19) nie jest spełniony dla przynajmniej jednego i ($i = 1, 2, \dots, N$). Oznacza to, że istnieje $y_0 \in Y_i$ oraz podobszar D_i takie, dla których $0 \in w(f_i(y_0), Q)$, gdzie $w(f_i(y), Q)$ jest zbiorem wartości (wypukłym wielobokiem) stowarzyszonym z podobszarem D_i . Rozpatrzmy dwa przypadki.

Przypadek 1. Istnieje wartość parametru $y = y_1 \in Y_i$, dla której jest spełniony warunek wykluczenia zera, tj. $0 \notin w(f_i(y_1), Q)$. Nie zmniejszając ogólności rozwa-

zań założymy, że $y_1 > y_0$. Ponieważ zbiór wartości $w(f_i(y), Q)$ przemieszcza się na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w sposób ciągły przy ciągłych zmianach wartości parametru $y \in Y_i$, istnieje taka wartość $y^* \in (y_0, y_1)$, dla której jedna z krawędzi zbioru wartości $w(f_i(y^*), Q)$ przechodzi przez początek układu współrzędnych. Ta krawędź jest zbiorem wartości jednego z wielomianów krawędziowych (7.15). Oznacza to, że istnieje taka wartość $\lambda^* \in [0, 1]$, dla której $p_{rk}(f_i(y^*), \lambda^*) = 0$, czyli warunek wykluczenia zera (7.22) nie jest spełniony dla $y = y^*$. Z twierdzenia 5.1 wynika zatem, że jeden z wielomianów krawędziowych (7.15) nie jest odpornie D -stabilny.

Przypadek 2. Założymy, że $0 \in w(f_i(y), Q)$ dla każdego $y \in Y_i$. Taka sytuacja może zajść jedynie w przypadku ograniczonego podobszaru D_i . Jeżeli bowiem D_i jest nieograniczony, to zawsze istnieje odpowiednio duża wartość y , przy której warunek wykluczenia zera jest spełniony. Jeżeli $0 \in w(f_i(y), Q)$, $\forall y \in Y_i$, to przy ciągłych zmianach parametru $y \in Y_i$ wielobok $w(f_i(y), Q)$ porusza się na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w ten sposób, że cały czas początek tej płaszczyzny leży wewnątrz wieloboku $w(f_i(y), Q)$ lub na jego brzegu.

Weźmy pod uwagę dowolną wartość $y = y_0 \in Y_i$. Oczywiście $0 \in w(f_i(y_0), Q)$. Niech $z_0 \in D^c$ (D^c jest uzupełnieniem zbioru D) będzie dowolną ustaloną liczbą zespoloną taką, dla której $0 \notin w(z_0, Q)$. Taka liczba zespolona z_0 zawsze istnieje, bowiem warunek wykluczenia zera $0 \notin w(z_0, Q)$ jest zawsze spełniony dla liczb zespolonych o odpowiednio dużych wartościach bezwzględnych. Wynika to z ograniczoności wartości bezwzględnych zer wielomianów.

Rozpatrzmy dowolną ciągłą linię leżącą całkowicie w D^c i łączącą punkty z_0 i $f_i(y_0)$. Jeżeli wartość zmiennej zespolonej z zmienia się w sposób ciągły wzdłuż tej linii od punktu z_0 do punktu $f_i(y_0)$, to zbiór wartości $w(z, Q)$ też przemieszcza się od położenia odpowiadającego $z = z_0$ do położenia odpowiadającego $z = f_i(y_0)$. Ponieważ $0 \notin w(z_0, Q)$, ale $0 \in w(f_i(y_0), Q)$, istnieje taka wartość $z = z^*$, dla której początek płaszczyzny zmiennej zespolonej leży na brzegu zbioru wartości $w(z^*, Q)$. Wtedy dla jednego z wielomianów krawędziowych (7.15) jest spełnione równanie $p_{rk}(z^*, \lambda^*) = 0$, gdzie $\lambda^* \in [0, 1]$. To zaś

oznacza, że ten wielomian krawędziowy ma zero $z = z^*$ leżące w D^c (poza obszarem D), czyli nie jest on odpornie D -stabilny. $\square$

Twierdzenie krawędziowe 7.1 pozostaje też prawdziwe, z pewnymi dodatkowymi założeniami dotyczącymi obszaru D , w przypadku gdy rodzina wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów nie jest rodziną stałego stopnia, tj. niektóre z wielomianów należących do tej rodziny mogą mieć stopień niższy niż n , ale nie niższy niż $n - 2$ [111].

Twierdzenie krawędziowe 7.1 sprowadza problem badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów do problemu badania odpornej D -stabilności skończonej liczby wielomianów krawędziowych, odpowiadających poszczególnym krawędziom zbioru Q .

Do badania odpornej D -stabilności wielomianów krawędziowych można stosować metody podane w punkcie 5.1. Do najbardziej ogólnych należy metoda podana w lemacie 5.1.

Lemat 7.2. Rodzina wielomianów (7.6) stałego stopnia, o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów, jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione dwa poniższe warunki:

- 1) wszystkie wielomiany wierzchołkowe $p_k(s)$, $k = 1, 2, \dots, K$, są D -stabilne,
- 2) oddzielnie dla każdego podobszaru D_i , $i = 1, 2, \dots, N$, każdy z $L = m2^{m-1}$ wykresów funkcji $p_k(f_i(y))/p_r(f_i(y))$, $y \in Y_i$, sporządzonych oddzielnie dla każdego wielomianu krawędziowego (7.15), nie przecina niedodatniej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$.

Dowód. Dowód wynika z twierdzenia krawędziowego 7.1 i lematu 5.1. $\square$

Oznaczmy przez

$$S[P] = \{s: p_{rk}(s, \lambda) = 0, \lambda \in \Lambda = [0, 1], \text{ dla wszystkich } p_{rk}(s, \lambda)\} \quad (7.23)$$

zbiór spektralny (zbiór zer) wszystkich wielomianów krawędziowych (7.15), odpowiadających wszystkim krawędziom (7.14) zbioru Q . Linie zer danego wielomianu krawędziowego można wyznaczyć w sposób opisany w punkcie 5.1.1 niniejszej pracy.

Lemat 7.3. Brzeg zbioru spektralnego $\partial S[W]$ rodziny wielomianów $W(s, Q)$ jest zawarty w zbiorze spektralnym $S[P]$ wszystkich wielomianów krawędziowych, tzn. $\partial S[W] \subseteq S[P]$.

Dowód. Z twierdzenia 7.1 wynika, że rodzina wielomianów $W(s, Q)$ stałego stopnia jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy $S[P] \subset D$, czyli gdy linie zer wszystkich wielomianów krawędziowych leżą całkowicie w otwartym obszarze D . Oznacza to, że zbiór spektralny $S[W]$, zdefiniowany wzorem (3.7), musi leżeć w obszarze, którego brzegiem są te linie zer. Ponieważ należą one do zbioru $S[W]$, linie zer wszystkich wielomianów krawędziowych (7.15) wyznaczają na płaszczyźnie zmiennej zespolonej brzegi zbioru spektralnego $S[W]$, czyli $\partial S[W] \subseteq S[P]$. $\square$

Zauważmy, że w przypadku ogólnym tylko część linii zer wielomianów krawędziowych tworzy brzegi zbioru spektralnego. Wynika to z faktu, że dla każdego ustalonego $y \in Y_i$ zbiór wartości $w(f_i(y), Q)$ ma mniej krawędzi niż zbiór Q .

Przykład 7.3. Weźmy pod uwagę wielomian (7.21), rozpatrywany w przykładzie 7.2. Należy zbadać odporną K -stabilność tego wielomianu stosując twierdzenie krawędziowe 7.1.

Zbiór Q jest prostokątem o wierzchołkach $q_1 = [-0.5, -0.2]^T$, $q_2 = [-0.5, 0.2]^T$, $q_3 = [0.5, -0.2]^T$, $q_4 = [0.5, 0.2]^T$. Odpowiadają im wielomiany wierzchołkowe

$$p_1(s) = s^3 - 0.56s^2 + 0.37s - 0.18, \quad p_2(s) = s^3 - 0.44s^2 + 0.53s - 0.22,$$

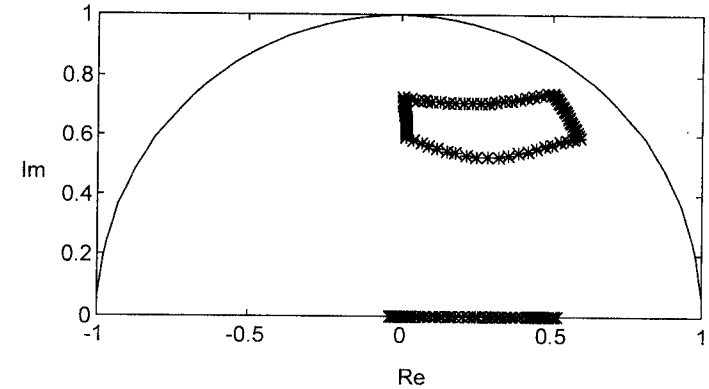
$$p_3(s) = s^3 - 1.16s^2 + 0.67s + 0.02, \quad p_4(s) = s^3 - 1.04s^2 + 0.83s - 0.02.$$

Wielomianami krawędziowymi $p_{rk}(s, \lambda)$ są wielomiany w postaci (7.15) dla $(r, k) = (1, 2), (2, 4), (3, 4), (1, 3)$. Zgodnie z twierdzeniem krawędziowym 7.1, odporna K -stabilność wszystkich czterech wyżej wymienionych wielomianów krawędziowych jest warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej K -stabilności wielomianu (7.21). Do zbadania odpornej K -stabilności wielomianów krawędziowych zastosujemy twierdzenie 5.4.

Łatwo sprawdzić, że warunki 1) i 2) twierdzenia 5.4 są spełnione dla każdego wielomianu krawędziowego $p_{rk}(s, \lambda)$, $(r, k) = (1, 2), (2, 4), (3, 4), (1, 3)$. Aby sprawdzić spełnienie warunku 3) tego twierdzenia, należy najpierw wyznaczyć macierze S_i , $i = 1, \dots, 4$, stowarzyszone z wielomianami wierzchołkowymi $p_i(s)$.

Wszystkie wartości własne macierzy $S_r^{-1}S_k$ dla $(r, k) = (1, 2), (2, 4), (3, 4), (1, 3)$ są rzeczywiste i dodatnie. Oznacza to, zgodnie z twierdzeniem 5.4, że rozpatrywane wielomiany krawędziowe są odpornie K -stabilne. Z twierdzenia 7.1 wynika zatem, że wielomian (7.21) też jest odpornie K -stabilny.

Zera czterech wyżej wymienionych wielomianów krawędziowych, leżące w półpłaszczyźnie $\text{Im } s \geq 0$ (obliczone z krokiem $\Delta\lambda = 0.05$), są oznaczone gwiazdkami na rysunku 7.3. Leżą one na liniach zer wielomianów krawędziowych, które tworzą zbiór spektralny $S[P]$ tych wielomianów. Są one jednocześnie brzegami zbioru spektralnego $S[W]$, zgodnie z lematem 7.3.



Rys. 7.3. Granica obszaru D (półokrąg) i zera wielomianów krawędziowych (oznaczone gwiazdkami), leżące w półpłaszczyźnie $\text{Im } s \geq 0$

Z rysunku 7.3 wynika, że wielomian (7.21) dla każdego ustalonego $q \in Q$ ma jedno zero rzeczywiste i parę zer zespolonych sprzężonych. Zero rzeczywiste leży na odcinku osi rzeczywistej oznaczonym gwiazdkami, zero zaś zespolone o dodatniej części urojonej leży w domkniętym obszarze, którego brzeg jest też oznaczony gwiazdkami. Drugie zero o ujemnej części urojonej leży w obszarze położonym symetrycznie względem osi rzeczywistej (nie jest on pokazany na rysunku 7.3).

Zbiór spektralny wielomianu (7.21) składa się z trzech wyżej wymienionych domkniętych obszarów (jednym z nich jest odcinek osi rzeczywistej). Leży on

całkowicie w otwartym kole jednostkowym, co oznacza, że wielomian (7.21) jest odpornie K -stabilny. $\square$

Praktyczne stosowanie twierdzenia krawędziowego jest dosyć kłopotliwe ze względu na konieczność badania odpornej D -stabilności dużej liczby wielomianów krawędziowych (7.15), których jest $L = m2^{m-1}$, gdzie m jest liczbą niepewnych parametrów. Na przykład przy $m = 8$ mamy $L = 1024$.

Powyższej niedogodności można uniknąć stosując tzw. metody funkcji testujących, podane w punkcie 7.4 niniejszej pracy.

7.3.1. Odporna stabilność wielomianu przedziałowego

Wielomian przedziałowy jest przypadkiem szczególnym wielomianu (7.1) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów. Dlatego też twierdzenie krawędziowe 7.1 może być stosowane do badania odpornej D -stabilności takiego wielomianu. Szczególnie jest to istotne przy badaniu odpornej K -stabilności (patrz punkt 6.2).

Wielomian przedziałowy, opisany wzorami (6.1)–(6.3), ma $L = (n+1)2^n$ wielomianów krawędziowych, o ogólnej postaci

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n a_k^u s^k + [(1-\lambda)a_i^- + \lambda a_i^+] s^i, \quad \lambda \in [0,1], \quad (7.24)$$

gdzie wartości a_k^u są ustalone (tzn. $a_k^u = a_k^-$ lub $a_k^u = a_k^+$) dla $k \neq i$, $i = 0,1,\dots,n$.

Z twierdzenia krawędziowego 7.1 wynika, że wielomian przedziałowy (6.1) jest odpornie D -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie D -stabilne wszystkie wielomiany krawędziowe (7.24), odpowiadające poszczególnym krawędziom zbioru (6.3).

Uwzględniając lemat 6.5 można wykazać [21], że przy badaniu odpornej K -stabilności wielomianu przedziałowego (6.1) nie musimy rozpatrywać wszystkich wielomianów krawędziowych.

Lemat 7.4. Wielomian przedziałowy (6.1) stałego stopnia jest odpornie K -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie K -stabilne wielomiany krawędziowe mające postać

$$\sum_{k \neq i} a_k^u s^k + [(1-\lambda)a_i^- + \lambda a_i^+] s^i, \quad \lambda \in [0,1], \quad (7.25)$$

gdzie wartości a_k^u są ustalone (tzn. $a_k^u = a_k^-$ lub $a_k^u = a_k^+$) dla $k = 0,1,\dots,n$, $k \neq i$, przy czym $i \in I$, gdzie

$$I = \left\{ \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \right\} \quad \text{dla } n \text{ parzystego,}$$

$$I = \left\{ \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n \right\} \quad \text{dla } n \text{ nieparzystego.}$$

Dowód. Zbiór wielomianów krawędziowych stowarzyszonych z wielomianem przedziałowym (6.1) możemy podzielić na dwa podzbiory. Do jednego z nich należą wielomiany, których ogólna postać podana jest w (7.25). Do drugiego podzbioru należą wielomiany krawędziowe mające postać

$$\sum_{\substack{i \in I \\ i \neq k}} a_i^u s^i + [(1-\lambda)a_k^- + \lambda a_k^+] s^k, \quad \lambda \in [0,1], \quad (7.26)$$

gdzie wartości a_i^u dla $i \in I$ są ustalone (tzn. $a_i^u = a_i^-$ lub $a_i^u = a_i^+$), natomiast $k \neq i$, przy czym $k = 0,1,\dots,n$.

Dla dowolnego ustalonego k ($k = 0,1,\dots,n$) wielomian (7.26) jest wielomianem przedziałowym. Z lematu 6.5 wynika zatem, że wielomiany krawędziowe (7.26) są odpornie K -stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy są K -stabilne tworzące je wielomiany wierzchołkowe. Zauważmy, że należą one do podzbioru wielomianów krawędziowych w postaci (7.25). Wobec tego, stosując twierdzenie krawędziowe 7.1 do badania odpornej K -stabilności wielomianu przedziałowego (6.1), można ograniczyć się tylko do zbioru wielomianów krawędziowych mających postać (7.25). $\square$

W zbiorze wielomianów krawędziowych w postaci (7.25) jest M wielomianów, gdzie $M = n2^{n-1}$ dla n parzystego i $M = (n+1)2^{n-1}$ dla n nieparzystego. Pełny zbiór wielomianów krawędziowych zawiera $L = (n+1)2^n$ takich wielomianów. Na przykład przy $n = 3$ mamy $L = 32$, zaś $M = 16$.

Przykład 7.4. Weźmy pod uwagę wielomian przedziałowy (6.67), rozpatrywany w przykładzie 6.7.

Z lematu 7.4 wynika, że rozpatrywany wielomian przedziałowy jest odpornie K -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie K -stabilne cztery wielomiany krawędziowe

$$\begin{aligned} a_0^- + a_1^- s + [(1-\lambda)a_2^- + \lambda a_2^+]s^2, & \quad a_0^- + a_1^+ s + [(1-\lambda)a_2^- + \lambda a_2^+]s^2, \\ a_0^+ + a_1^- s + [(1-\lambda)a_2^- + \lambda a_2^+]s^2, & \quad a_0^+ + a_1^+ s + [(1-\lambda)a_2^- + \lambda a_2^+]s^2. \end{aligned}$$

Zauważmy, że zbiór wielomianów krawędziowych wielomianu przedziałowego (6.67) składa się z dwunastu wielomianów krawędziowych. $\square$

Do badania odpornej K -stabilności wielomianów krawędziowych możemy stosować metody podane w punkcie 5.1, w tym metodę analityczną podaną w twierdzeniu 5.4.

7.4. Metody funkcji testujących

Metody funkcji testujących, bazując na twierdzeniu krawędziowym 7.1, służą do sprawdzania spełnienia warunku wykluczenia zera (7.19) lub (7.20). Pozwalają one na jednoczesne badanie odpornej D -stabilności wszystkich wielomianów krawędziowych. Pierwszą taką metodę zaproponowano w pracy [11], uogólniając ją w [17] na klasę quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów. Jest to metoda dosyć złożona obliczeniowo i trudna w stosowaniu.

Prostsze metody funkcji testujących zostały podane w pracach [30, 31, 32, 40] i uogólnione w [34, 36] na klasę quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów.

7.4.1. Metoda funkcji testującej $d(y)$

Weźmy pod uwagę podobszar D_i obszaru D , którego brzeg ma opis parametryczny $f_i(y)$, $y \in Y_i$. Z podobszarem D_i jest stowarzyszony zbiór wartości (wypukły wielobok)

$$w(f_i(y), Q) = \text{conv}\{p_1(f_i(y)), \dots, p_K(f_i(y))\}. \quad (7.27)$$

Niech $R_i(y)$ będzie dla każdego ustalonego $y \in Y_i$ najmniejszym prostokątem, o bokach równoległych do osi układu współrzędnych płaszczyzny zmiennej zespolonej, w którym leży zbiór wartości (7.27).

Oznaczmy przez

$$(U_i^-(y), V_i^-(y)); (U_i^+(y), V_i^-(y)); (U_i^+(y), V_i^+(y)); (U_i^-(y), V_i^+(y)) \quad (7.28)$$

współrzędne wierzchołków prostokąta $R_i(y)$. Oznaczenia (7.28) są takie same jak dla prostokąta Charitonowa, pokazanego na rysunku 6.1.

Twierdzenie 7.2. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie D -stabilny. Rodzina wielomianów (7.6) stałego stopnia, o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów, jest odpornie D -stabilna, jeżeli

$$d_i(y) > 0, \forall y \in Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7.29)$$

gdzie funkcję testującą $d_i(y)$, stowarzyszoną z podobszarem D_i , wyznacza się ze wzoru

$$d_i(y) = \max\{U_i^-(y), -U_i^+(y), V_i^-(y), -V_i^+(y)\}. \quad (7.30)$$

Dowód. Z twierdzenia 6.2 wynika, że jeżeli warunek (7.29) jest spełniony dla i -tego podobszaru D_i , to dla każdego $y \in Y_i$ prostokąt $R_i(y)$, stowarzyszony z tym podobszarem, nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej. Ponieważ zbiór wartości (7.27) zawsze leży wewnątrz tego prostokąta, powyższe

zachodzi też dla tego zbioru wartości. Biorąc pod uwagę wszystkie podobszary D_i obszaru D otrzymamy, że jeżeli zachodzi (7.29), to też zachodzi (7.19) dla każdego $i = 1, 2, \dots, N$. Dowód wynika zatem z lematu 7.1. $\square$

Zauważmy, że jeżeli dla pewnego podobszaru D_i warunek (7.29) nie jest spełniony, to o odpornej D -stabilności rodziny wielomianów (7.6) nic nie można powiedzieć, bowiem z faktu, że prostokąt $R_i(y)$ obejmuje początek płaszczyzny zmiennej zespolonej nie wynika, że to samo zachodzi dla wieloboku (7.27).

Praktyczne stosowanie twierdzenia 7.2 wymaga wyznaczania (dla każdego ustalonego $y \in Y_i$) współrzędnych (7.28) wierzchołków prostokąta $R_i(y)$ (argumentów funkcji (7.30)), stowarzyszonego oddzielnie z każdym z podobszarów D_i , $i = 1, 2, \dots, N$, obszaru D .

Z definicji prostokąta $R_i(y)$ oraz ze wzoru (7.27) wynika, że

$$U_i^-(y) = \min\{\operatorname{Re} p_1(f_i(y)), \dots, \operatorname{Re} p_K(f_i(y))\}, \quad (7.31)$$

$$U_i^+(y) = \max\{\operatorname{Re} p_1(f_i(y)), \dots, \operatorname{Re} p_K(f_i(y))\}, \quad (7.32)$$

$$V_i^-(y) = \min\{\operatorname{Im} p_1(f_i(y)), \dots, \operatorname{Im} p_K(f_i(y))\}, \quad (7.33)$$

$$V_i^+(y) = \max\{\operatorname{Im} p_1(f_i(y)), \dots, \operatorname{Im} p_K(f_i(y))\}. \quad (7.34)$$

Wyznaczanie współrzędnych wierzchołków prostokąta $R_i(y)$ na podstawie wzorów (7.31)–(7.34) wymaga znajomości wielomianów wierzchołkowych (7.11), których jest $K = 2^m$. Te współrzędne można wyznaczyć w inny sposób – na bazie znajomości tylko wielomianów (7.5) [31].

Ze wzorów (7.31)–(7.34) oraz (7.11), (7.12) wynika, że

$$U_i^-(y) = \min\{\operatorname{Re} w(f_i(y), q) : q \in Q\}, \quad U_i^+(y) = \max\{\operatorname{Re} w(f_i(y), q) : q \in Q\}, \quad (7.35)$$

$$V_i^-(y) = \min\{\operatorname{Im} w(f_i(y), q) : q \in Q\}, \quad V_i^+(y) = \max\{\operatorname{Im} w(f_i(y), q) : q \in Q\}. \quad (7.36)$$

Zapis wielomianu (7.1) w postaci (7.4) przy zbiorze Q mającym postać (7.3), tzn. przyjęcie zależności współczynników tego wielomianu nie od wartości niepewnych parametrów, ale od wartości odchyłek tych parametrów od ich wartości nominalnych, pozwala na podanie (na bazie wzorów (7.35), (7.36)) prostej obliczeniowej metody wyznaczania współrzędnych wierzchołków prostokąta $R_i(y)$.

Wprowadźmy oznaczenia

$$u_{ki}(y) = \operatorname{Re} w_k(f_i(y)), \quad v_{ki}(y) = \operatorname{Im} w_k(f_i(y)), \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (7.37)$$

gdzie wielomiany $w_k(s)$, $k = 0, 1, \dots, m$, mają postać (7.5).

Ze wzorów (7.35), (7.36) i (7.3), (7.4) wynika, że dla każdego ustalonego $y \in Y_i$ współrzędne wierzchołków prostokąta $R_i(y)$ można wyznaczyć ze wzorów

$$U_i^-(y) = u_{0i}(y) + \sum_{k=1}^m u_{ki}^-(y), \quad U_i^+(y) = u_{0i}(y) + \sum_{k=1}^m u_{ki}^+(y), \quad (7.38)$$

$$V_i^-(y) = v_{0i}(y) + \sum_{k=1}^m v_{ki}^-(y), \quad V_i^+(y) = v_{0i}(y) + \sum_{k=1}^m v_{ki}^+(y), \quad (7.39)$$

gdzie

$$\text{jeżeli } u_{ki}(y) \geq 0, \quad \text{to } u_{ki}^-(y) = b_k u_{ki}(y), \quad u_{ki}^+(y) = c_k u_{ki}(y), \quad (7.40)$$

$$\text{jeżeli } u_{ki}(y) < 0, \quad \text{to } u_{ki}^-(y) = c_k u_{ki}(y), \quad u_{ki}^+(y) = b_k u_{ki}(y), \quad (7.41)$$

$$\text{jeżeli } v_{ki}(y) \geq 0, \quad \text{to } v_{ki}^-(y) = b_k v_{ki}(y), \quad v_{ki}^+(y) = c_k v_{ki}(y), \quad (7.42)$$

$$\text{jeżeli } v_{ki}(y) < 0, \quad \text{to } v_{ki}^-(y) = c_k v_{ki}(y), \quad v_{ki}^+(y) = b_k v_{ki}(y). \quad (7.43)$$

Korzystając ze wzorów (7.37)–(7.43) oraz (7.30) można w prosty sposób wyznaczyć funkcję testującą $d_i(y)$, stowarzyszoną z podobszarem D_i obszaru D . Zauważmy, że jest tu wymagana znajomość tylko $m+1$ wielomianów (7.5). Znajomość wielomianów wierzchołkowych (7.11), których jest $K = 2^m$, nie jest konieczna.

Uogólnienie twierdzenia 7.2 (i obliczeniowej metody wyznaczania funkcji testującej (7.30)) dla rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów zostało podane w pracy [34].

Zauważmy, że funkcja testująca (7.30), podobnie jak funkcja testująca (6.23), szybko dąży do nieskończoności przy y dążącym do nieskończoności.

Wprowadźmy funkcję testującą

$$\tilde{d}_i(y) = \max\left\{\frac{U_i^-(y)}{|w_0(f_i(y))|}, \frac{-U_i^+(y)}{|w_0(f_i(y))|}, \frac{V_i^-(y)}{|w_0(f_i(y))|}, \frac{-V_i^+(y)}{|w_0(f_i(y))|}\right\}, \quad (7.44)$$

będącą unormowaną względem $|w_0(f_i(y))|$ funkcją testującą $d_i(y)$.

Twierdzenie 7.3. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie D -stabilny. Rodzina wielomianów (7.6) stałego stopnia, o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów, jest odpornie D -stabilna, jeżeli

$$\tilde{d}_i(y) > 0, \quad \forall y \in Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7.45)$$

gdzie dla każdego ustalonego $y \in Y_i$ funkcję testującą $\tilde{d}_i(y)$, stowarzyszoną z podobozarem D_i , wyznacza się ze wzoru (7.44).

Dowód. Dowód wynika z twierdzenia 7.2 przy uwzględnieniu faktu, że $w_0(f_i(y)) \neq 0$ dla każdego $y \in Y_i$ i dla każdego $i = 1, 2, \dots, N$, bowiem wielomian nominalny $w_0(s)$ jest D -stabilny. $\square$

Zauważmy, że wartości funkcji testującej (7.44), podobnie jak funkcji testującej (6.26), są zawsze ograniczone.

7.4.2. Metoda funkcji testującej $T(y)$

Weźmy pod uwagę unormowany zbiór wartości, zdefiniowany wzorem (7.17) dla $z = f_i(y)$, w postaci

$$\tilde{w}(f_i(y), Q) = \text{conv}\{\tilde{p}_1(f_i(y)), \tilde{p}_2(f_i(y)), \dots, \tilde{p}_K(f_i(y))\}, \quad (7.46)$$

gdzie

$$\tilde{p}_k(f_i(y)) = p_k(f_i(y)) / w_0(f_i(y)), \quad k = 1, 2, \dots, K = 2^m, \quad (7.47)$$

zaś $w_0(s)$ jest D -stabilnym wielomianem nominalnym.

Z lematu 7.1 wynika, że każdy wielomian należący do rodziny wielomianów (7.6) jest D -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i = 1, 2, \dots, N$ i dla każdego $y \in Y_i$ początek płaszczyzny zmiennej zespolonej leży na zewnątrz wypukłego wieloboku (7.46).

Wprowadźmy funkcję testującą $B_i(y)$ stowarzyszoną z podobozarem D_i , którą dla każdego ustalonego $y \in Y_i$ oblicza się ze wzoru

$$B_i(y) = \min\{\text{Re } \tilde{p}_k(f_i(y)), k = 1, 2, \dots, K\}, \quad (7.48)$$

gdzie $\tilde{p}_k(f_i(y))$ wyznacza się ze wzoru (7.47).

Zauważmy, że

$$B_i(y) = \min\{\text{Re } \tilde{w}(f_i(y), q) : q \in Q\}, \quad (7.49)$$

gdzie, zgodnie ze wzorem (7.4),

$$\tilde{w}(f_i(y), q) = 1 + q_1 \tilde{w}_1(f_i(y)) + \dots + q_m \tilde{w}_m(f_i(y)), \quad (7.50)$$

przy czym

$$\tilde{w}_k(s) = w_k(s) / w_0(s), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (7.51)$$

Ze wzoru (7.50) wynika, że unormowany zbiór wartości (7.46) zawsze zawiera w swoim wnętrzu punkt $(1, j0)$, a więc leży on częściowo lub całkowicie w otwartej prawej półpłaszczyźnie. Zauważmy, że jeżeli dla każdego $y \in Y_i$ leży on całkowicie w otwartej prawej półpłaszczyźnie, to jest spełniony warunek wykluczenia zera (7.20) dla i -tego podobozaru D_i obszaru D .

Uwzględniając wszystkie podobozary D_i ($i = 1, 2, \dots, N$) obszaru D , z powyższych rozważań otrzymamy poniższy lemat.

Lemat 7.5. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie D -stabilny. Rodzina wielomianów (7.6) stałego stopnia, o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów, jest odpornie D -stabilna, jeżeli dla każdego $i = 1, 2, \dots, N$ jest spełniony warunek

$$B_i(y) > 0, \forall y \in Y_i, \quad (7.52)$$

gdzie funkcja testująca $B_i(y)$, stowarzyszona z podobozszarem D_i , jest zdefiniowana wzorem (7.48) (lub (7.49)). $\square$

Załóżmy, że dla ustalonego $y \in Y_i$ wartość minimalna (7.49) zastała osiągnięta dla $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}$, tj. $B_i(y) = \operatorname{Re} \tilde{w}(f_i(y), \hat{\mathbf{q}})$, i wprowadźmy oznaczenie

$$C_i(y) = \operatorname{Im} \tilde{w}(f_i(y), \hat{\mathbf{q}}). \quad (7.53)$$

Wprowadźmy zespoloną funkcję testującą

$$T_i(y) = B_i(y) + jC_i(y), \quad (7.54)$$

stowarzyszoną z podobozszarem D_i , gdzie $B_i(y)$ i $C_i(y)$ są zdefiniowane wzorami (7.49) i (7.53), odpowiednio (dla każdego ustalonego $y \in Y_i$).

Ze wzorów (7.46)–(7.48) oraz (7.53), (7.54) wynika, że wykres zespolonej funkcji testującej $T_i(y)$ tworzy się w ten sposób, że (dla każdego ustalonego y) ze zbioru punktów $\tilde{p}_k(f_i(y))$, $k = 1, 2, \dots, K = 2^m$, wybiera się punkt o najmniejszej części rzeczywistej. Wykres funkcji $T_i(y)$ składa się więc z fragmentów wykresów funkcji (7.47). Jest on kawałkami ciągły i gładki. Mogą w nim wystąpić przeskoki od wartości $\tilde{p}_k(f_i(y))$ do wartości $\tilde{p}_r(f_i(y))$, $k \neq r$.

Dla każdego ustalonego $y \in Y_i$ wartość $T_i(y)$ można wyznaczyć w drodze minimalizacji części rzeczywistej funkcji (7.50) ze względu na $\mathbf{q} \in Q$. Można to przeprowadzić w prosty sposób, uwzględniając postać (7.3) zbioru Q oraz liniową zależność funkcji (7.50) od składowych wektora $\mathbf{q}$.

Funkcję testującą $T_i(y)$, stowarzyszoną z podobozszarem D_i , wyznacza się dla każdego ustalonego $y \in Y_i$ na podstawie wzoru [32]

$$T_i(y) = 1 + t_{1i}(y) + \dots + t_{mi}(y), \quad (7.55)$$

gdzie (dla $k = 1, 2, \dots, m$)

$$t_{ki}(y) = b_k \tilde{w}_k(f_i(y)), \quad \text{jeżeli } \operatorname{Re} \tilde{w}_k(f_i(y)) \geq 0, \quad (7.56)$$

$$t_{ki}(y) = c_k \tilde{w}_k(f_i(y)), \quad \text{jeżeli } \operatorname{Re} \tilde{w}_k(f_i(y)) < 0. \quad (7.57)$$

Zauważmy, że wyznaczanie funkcji testującej $T_i(y)$ na podstawie powyższych wzorów wymaga znajomości tylko $(m+1)$ wielomianów $w_k(s)$, $k = 0, 1, \dots, m$, występujących we wzorze (7.4). Znajomość wielomianów wierzchołkowych $p_k(s)$, $k = 1, 2, \dots, K$, nie jest konieczna.

Twierdzenie 7.4. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie D -stabilny.

1) Jeżeli

$$B_i(y) = \operatorname{Re} T_i(y) > 0, \quad \forall y \in Y_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \quad (7.58)$$

to rodzina wielomianów (7.6) stałego stopnia, o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów, jest odpornie D -stabilna.

2) Jeżeli przynajmniej jeden z wykresów funkcji $T_i(y)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) ma ciągły kawałek, który przecina niedodatnią część osi rzeczywistej, to rodzina (7.6) przy zbiorze Q w postaci (7.3) nie jest odpornie D -stabilna.

3) Największy zbiór dopuszczalnych odchyłek niepewnych parametrów, przy którym jest spełniony warunek (7.58), ma postać

$$\hat{Q} = \{\mathbf{q}: q_k \in (\delta b_k, \delta c_k), \quad b_k \leq 0, \quad c_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, m\}, \quad (7.59)$$

gdzie

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N\}, \quad (7.60)$$

$$\delta_i = 1 / (1 - \alpha_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7.61)$$

$$\alpha_i = \min\{B_i(y) = \operatorname{Re} T_i(y): y \in Y_i\}, \quad (7.62)$$

przy czym funkcja $T_i(y)$ jest wyznaczona (np. ze wzorów (7.55)–(7.57)) dla zbioru Q w postaci (7.3).

Dowód. Dowód warunku dostatecznego (7.58) wynika z lematu 7.5.

Jeżeli przynajmniej jeden z wykresów funkcji $T_i(y)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) ma ciągly kawałek, który przecina niedodatnią część osi rzeczywistej, to z lematu 5.1 wynika, że nie jest odpornie D -stabilny wielomian

$$p_{0,k}(s, \lambda) = (1 - \lambda)w_0(s) + \lambda p_k(s), \quad \lambda \in [0, 1], \quad (7.63)$$

gdzie $w_0(s)$ jest D -stabilnym wielomianem nominalnym, zaś $p_k(s)$ jest jednym z wielomianów wierzchołkowych. Ponieważ wielomian (7.63) należy do rodziny (7.6), nie jest ona odpornie D -stabilna, co kończy dowód warunku 2).

Dla dowodu warunku 3) weźmy pod uwagę podobzary D_i obszaru D . Ze wzorów (7.55)–(7.57) wynika, że wartość α_i , obliczoną ze wzoru (7.62), można napisać w postaci $\alpha_i = 1 + g_i$, gdzie

$$g_i = \sum_{k=1}^m \min_{y \in Y_i} \text{Re } t_{ki}(y). \quad (7.64)$$

Łatwo zauważyć, że $g_i \leq 0$, a więc $\alpha_i \leq 1$.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę zbiór

$$\tilde{Q} = \{q: q_k \in [\delta_i b_k, \delta_i c_k], b_k \leq 0, c_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, m\}, \quad (7.65)$$

zamiast zbioru (7.3), to $\tilde{\alpha}_i = 1 + \delta_i g_i$, gdzie $\tilde{\alpha}_i$ jest obliczone ze wzoru (7.62) dla zbioru (7.65), zaś g_i jest wyznaczone ze wzoru (7.64) dla zbioru (7.3).

Z powyższego wynika, że zawsze istnieje liczba $\delta_i > 0$ taka, dla której $\tilde{\alpha}_i = 0$. Tę liczbę wyznacza się ze wzoru (7.61), przy czym: jeżeli $\alpha_i < 0$ to $\delta_i \in (0, 1)$; jeżeli $\alpha_i = 0$ to $\delta_i = 1$; jeżeli zaś $0 < \alpha_i \leq 1$ to $\delta_i > 1$.

Łatwo zauważyć, że $\tilde{\alpha}_i > 0$ dla zbioru (7.59). Zbiór (7.59) jest więc „największym” zbiorem wartości odchyłek niepewnych parametrów od ich wartości nominalnych, dla którego warunek (7.58) jest spełniony dla i -tego podobzary obszaru D .

Biorąc pod uwagę wszystkie podobzary D_i obszaru D , otrzymamy dowód warunku 3). $\square$

Stosując metodę funkcji testującej $T(y)$ zawsze znajdziemy (w sposób podany w twierdzeniu 7.4) największy zbiór odchyłek niepewnych parametrów, w postaci (7.59), dla którego warunek dostateczny (7.58) będzie spełniony.

Metoda funkcji testującej $T(y)$, podobnie jak i metoda funkcji testującej $d(y)$, bazuje głównie na warunku dostatecznym odpornej D -stabilności. Są to metody bardzo proste w stosowaniu (szczególnie metoda funkcji testującej $T(y)$). Jeżeli jednakże na podstawie tych metod nie uzyskamy zadowalającego wyniku, należy skorzystać z metody bazującej na warunku koniecznym i wystarczającym odpornej D -stabilności. Taką metodą jest metoda funkcji testującej $F(y)$.

7.4.3. Metoda funkcji testującej $F(y)$

Metoda funkcji testującej $F(y)$ została podana w pracy [36] dla rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów. Podobne metody dla rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów są podane w pracach [12] i [21] oraz w [43].

Metoda funkcji testującej $F(y)$ służy do pośredniego sprawdzenia, czy dla każdego $y \in Y_i$ i dla każdego $i = 1, 2, \dots, N$, początek płaszczyzny zmiennej zespolonej leży na zewnątrz wypukłego wieloboku (7.46).

Twierdzenie 7.5. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie D -stabilny. Rodzina wielomianów (7.6) stałego stopnia, o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów, jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$F_i(y) > 0, \quad \forall y \in Y_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \quad (7.66)$$

gdzie $F_i(y)$ jest funkcją testującą stowarzyszoną z podobzarem D_i , w postaci

$$F_i(y) = \pi - \phi_i(y), \quad (7.67)$$

$$\phi_i(y) = \max_{r,k} \{|\arg(\tilde{p}_r(f_i(y))) - \arg(\tilde{p}_k(f_i(y)))|\}, \quad (7.68)$$

gdzie $\tilde{p}_k(f_i(y))$ jest zdefiniowane wzorem (7.47), maksimum liczy się uwzględniając wszystkie wielomiany krawędziowe (7.15), odpowiadające poszczególnym krawędziom (7.14) zbioru Q , zaś $\arg(z) \in [-\pi, \pi)$ jest argumentem liczby zespolonej z .

Dowód. Zauważmy, że na płaszczyźnie zmiennej zespolonej odcinek linii prostej $[a_1, a_2]$ łączący punkty a_1 i a_2 (a_1 i a_2 są to liczby zespolone) nie przecina półosi $(-\infty, 0]$, wtedy i tylko wtedy, gdy $|\arg a_1 - \arg a_2| < \pi$.

Jeżeli warunek (7.66) nie jest spełniony dla przynajmniej jednego podobszaru D_i , to istnieje takie $y \in Y_i$, dla którego dla jednej z krawędzi wieloboku (7.46), jest spełniona nierówność $\pi - \phi_i(y) \leq 0$, gdzie $\phi_i(y) = |\arg(\tilde{p}_r(f_i(y))) - \arg(\tilde{p}_k(f_i(y)))|$. To zaś oznacza, że ta krawędź przecina półoś $(-\infty, 0]$, a więc początek płaszczyzny zmiennej zespolonej leży albo na brzegu, albo we wnętrzu zbioru wartości (7.46) (część wieloboku (7.46) zawsze leży w otwartej prawej półpłaszczyźnie). Nie jest więc spełniony warunek wykluczenia zera (7.20) i rodzina wielomianów (7.6) nie jest odpornie D -stabilna, zgodnie z lematem 7.1.

Jeżeli zaś warunek (7.66) jest spełniony, to dla każdego $y \in Y_i$ i dla każdego $i = 1, 2, \dots, N$, żadna z krawędzi wieloboku (7.46) nie przecina półosi $(-\infty, 0]$. Oznacza to, że warunek wykluczenia zera (7.20) jest spełniony. Z lematu 7.1 wynika zatem, że rodzina wielomianów (7.6) jest odpornie D -stabilna. $\square$

Stosując twierdzenie 7.5 możemy wyznaczyć w sposób iteracyjny największą liczbę dodatnią δ taką, dla której warunek konieczny i wystarczający (7.66) jest spełniony dla zbioru wartości niepewnych parametrów w postaci (7.59). Należy w tym celu rozpatrywać oddzielnie każdy z podobszarów D_i obszaru D , wyznaczając w sposób opisany poniżej liczby δ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) i liczbę δ ze wzoru (7.60).

Weźmy pod uwagę i -ty podobszar obszaru D . Jeżeli wartość minimalna funkcji testującej $F_i(y)$, wyznaczona dla zbioru Q w postaci (7.3), jest ujemna (dodatnia), to należy przyjąć $\delta_{i1} < 1$ ($\delta_{i1} > 1$) i ponownie wyznaczyć $F_i(y)$ dla zbioru (7.65) przy $\delta_i = \delta_{i1}$. Jeżeli teraz wartość minimalna $F_i(y)$ jest dodatnia (ujemna), to należy przyjąć $\delta_{i2} > \delta_{i1}$ ($\delta_{i2} < \delta_{i1}$) i ponownie wyznaczyć $F_i(y)$ dla zbioru (7.65) przy $\delta_i = \delta_{i2}$. Powyższe obliczenia należy powtarzać wielokrotnie aż do wyznaczenia liczby δ_i , dla której wartość minimalna funkcji $F_i(y)$ jest równa zeru zadaną dokładnością.

Postępując w wyżej opisany sposób iteracyjny zawsze znajdziemy (z zadaną dokładnością) największą liczbę δ_i taką, dla której warunek konieczny i wystarczający (7.66) jest spełniony dla zbioru (7.59) przy $\delta = \delta_i$. Warunek ten jest spełniony jednocześnie dla wszystkich podobszarów obszaru D , jeżeli zbiorem odchylek jest zbiór (7.59) przy liczbie δ wyznaczonej ze wzoru (7.60).

Stosowanie twierdzenia 7.5 wymaga znajomości wszystkich wielomianów krawędziowych, odpowiadających poszczególnym krawędziom zbioru Q . Można je wyznaczyć stosując komputerową metodę podaną w pracy [37].

Przykład 7.5. Weźmy pod uwagę wielomian charakterystyczny (2.40) układu regulacji automatycznej rozpatrywanego w przykładzie 2.5. Jest on wielomianem stopnia siódmego o współczynnikach liniowo zależnych od trzech niepewnych parametrów.

Należy zbadać odporną D -stabilność tego wielomianu, gdzie D jest otwartym sektorem hiperbolicznym, którego brzeg jest pokazany na rysunku D.3 w Dodatku.

Parametryczny opis brzegu rozpatrywanego obszaru D ma postać $f(y) = -\gamma(\cosh y - j \tan \theta \sinh y)$, $y \in Y$, gdzie $\gamma = 0.05$, $\theta = 1.28$, oraz (zgodnie z uwagą D.1) $Y = [0, \infty)$.

Przekształcając wielomian (2.40) do postaci (7.4) otrzymamy

$$w(s, q) = w_0(s) + q_1 w_1(s) + q_2 w_2(s) + q_3 w_3(s), \quad q \in Q, \quad (7.69)$$

gdzie

$$w_0(s) = s^2 + 81.6s^6 + 3934.4s^5 + 62592.63s^4 + 583955.92s^3 + 1662717.27s^2 + 2602938.05s + 244244.37,$$

$$w_1(s) = 1999872s^3 + 8019486.72s^2 + 8079482.88s + 79994.88,$$

$$w_2(s) = s^6 + 80.1s^5 + 3808s^4 + 56380s^3 + 255600s^2 + 25000s,$$

$$w_3(s) = s^5 + 80.1s^4 + 3808s^3 + 56380s^2 + 255600s + 25000,$$

$$Q = \{q: q_1 \in [-0.09, 0.09], \quad q_2 \in [-0.285, 0.315], \quad q_3 \in [-1.1875, 1.3125]\}. \quad (7.70)$$

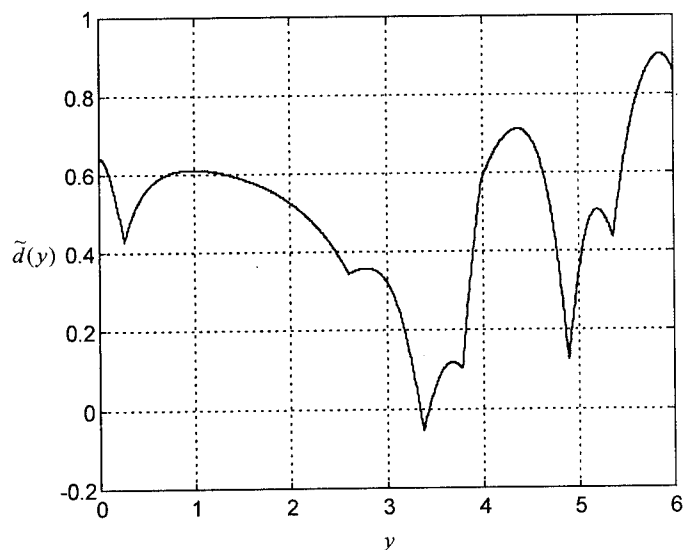
Wielomian nominalny $w_0(s) = w(s, 0)$ ma następujące zera: -0.1 ; $-1.6582 \pm j1.8724$; $-7.9248 \pm j9.6062$; $-31.1670 \pm j393227$. Łatwo sprawdzić, że leżą one w obszarze D , a więc wielomian nominalny $w_0(s)$ jest D -stabilny. Oznacza to, że problem odpornej D -stabilności jest dobrze postawiony (patrz definicja 3.5).

Do zbadania D -stabilności wielomianu nominalnego możemy też zastosować twierdzenie 3.3. Wtedy znajomość zer $w_0(s)$ nie jest konieczna.

Zbiór Q w postaci (7.70) jest prostopadłością. Ma on $K = 8$ wierzchołków i $L = 12$ krawędzi. Stosując bezpośrednio twierdzenie krawędziowe 7.1 należy więc badać odporną D -stabilność dwunastu wielomianów krawędziowych (7.15), odpowiadających wszystkim krawędziom (7.14) zbioru Q .

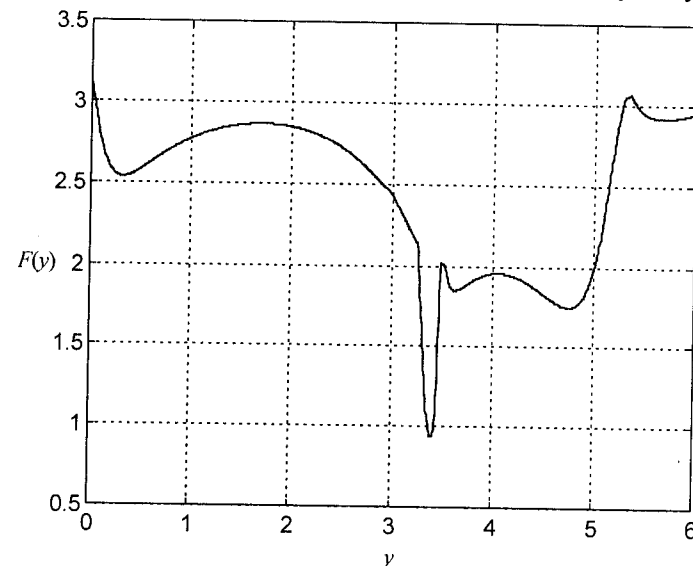
Do badania odpornej D -stabilności wielomianu (7.69) zastosujemy twierdzenie 7.3 oraz twierdzenie 7.5.

Wyznaczając funkcję testującą $\tilde{d}(y)$ ze wzorów (7.37)–(7.44) (przy y zmieniającym się od 0 do 6 z krokiem $\Delta y = 0.005$), otrzymamy wykres pokazany na rysunku 7.4. Ponieważ funkcja $\tilde{d}(y)$ nie jest dodatnia dla każdego $y \geq 0$, warunek dostateczny podany w twierdzeniu 7.3 nie jest spełniony i nic nie można powiedzieć o odpornej D -stabilności wielomianu (7.69).



Rys. 7.4. Wykres funkcji testującej $\tilde{d}(y)$ do przykładu 7.5

Wykres funkcji testującej $F(y)$, wyznaczony ze wzorów (7.67), (7.68) przy y zmieniającym się od 0 do 6 z krokiem $\Delta y = 0.005$, po uprzednim wyznaczeniu wielomianów wierzchołkowych i krawędziowych, jest pokazany na rysunku 7.5.



Rys. 7.5. Wykres funkcji testującej $F(y)$ do przykładu 7.5

Ponieważ wartość minimalna funkcji $F(y)$ wynosi 0.9356, warunek konieczny i wystarczający (7.66) jest spełniony. Z twierdzenia 7.5 wynika zatem, że wielomian (7.69) jest odpornie D -stabilny, tzn. dla każdego $q \in Q$, gdzie zbiór Q ma postać (7.70), wszystkie zera wielomianu (7.69) leżą w rozpatrywanym otwartym sektorze hiperbolicznym. $\square$

Przykład 7.6. Weźmy pod uwagę rodzinę wielomianów

$$w(s, q) = w_0(s) + q_1 w_1(s) + q_2 w_2(s), \quad q \in Q, \quad (7.71)$$

$$\text{gdzie } w_0(s) = s^3 + 10s^2 + 29s + 30, \quad w_1(s) = s^2 + 1, \quad w_2(s) = s + 1,$$

$$Q = \{q = [q_1, q_2]^T : q_k \in [-\rho, \rho], \quad k = 1, 2, \quad \rho > 0\}. \quad (7.72)$$

Wielomian nominalny $w_0(s)$ ma następujące zera: $s = -2 \pm j$ oraz $s = -6$.

Należy zbadać odporną D -stabilność rodziny (7.71), gdzie $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, przy czym D_1 jest otwartą przesuniętą lewą półpłaszczyzną $\text{Re } s < -5$, D_2 i D_3 są to otwarte koła o promieniu $r = 1$ i o środkach w punktach $s_1 = -2 + j$ i $s_2 = -2 - j$, odpowiednio.

Ponieważ rozpatrujemy wielomian o rzeczywistych współczynnikach, wystarczy ograniczyć się tylko do zbadania odpornej D -stabilności dla części obszaru D leżącej w półpłaszczyźnie $\text{Im } s \geq 0$. Wobec tego będziemy badać odporną D -stabilność rodziny (7.71) dla obszaru $D = D_1 \cup D_2$. Parametryczne opisy brzegów podobszarów D_1 i D_2 mają postać: $f_1(y) = -5 + jy$, $y \in Y_1 = [0, \infty)$, oraz $f_2(y) = -2 + j + \exp(j2\pi y)$, $y \in Y_2 = [0, 1]$, odpowiednio. Obszar D_1 jest nieograniczony, lecz przy wyznaczaniu funkcji testującej $T_1(y)$ możemy ograniczyć się np. do przedziału $Y_1 = [0, 5]$.

Odporna D -stabilność rodziny (7.71) była badana w pracy [11]. Na bazie podanej tam metody wykazano, że rodzina (7.71) jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho \approx 0.35$ w (7.72).

Przyjmując $\rho = 0.35$ i wyznaczając ze wzorów (7.55)–(7.57) zespolone funkcje testujące $T_1(y)$ i $T_2(y)$, stowarzyszone z podobszarami D_1 i D_2 , odpowiednio, otrzymamy

$$\alpha_1 = \min \text{Re } T_1(y) = \text{Re } T_1(0) = -0.05, \quad C_1(0) = \text{Im } T_1(0) = 0,$$

$$\alpha_2 = \min \text{Re } T_2(y) = 0.2719.$$

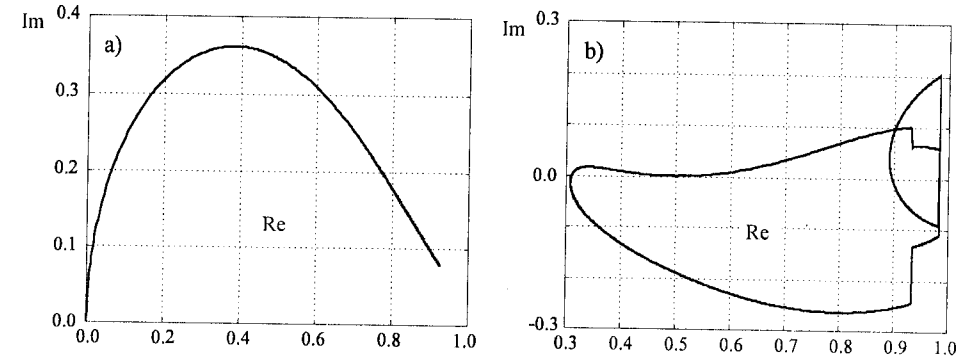
Ponieważ $T_1(0) = -0.05 + j0$, warunek dostateczny 1) twierdzenia 7.4 nie jest spełniony. Zauważmy, że nie jest też spełniony warunek konieczny 2) tego twierdzenia. Oznacza to, że rodzina (7.71) nie jest odpornie D -stabilna dla $\rho = 0.35$ w (7.72).

Obliczając δ_1 i δ_2 ze wzorów (7.61) i (7.62) oraz δ ze wzoru (7.60), otrzymamy $\delta_1 = 1/1.05$, $\delta_2 = 1.3734$ oraz $\delta = 1/1.05$. Oznacza to, zgodnie z warunkiem 3) twierdzenia 7.4, że rodzina wielomianów (7.71) jest odpornie D -stabilna, jeżeli $|q_k| < \bar{\rho} = 0.35\delta = 1/3$ dla $k = 1$ i $k = 2$. Powyższy warunek jest także warunkiem koniecznym, co wynika z warunku 2) twierdzenia 7.4.

Wykresy zespolonych funkcji testujących $T_1(y)$ i $T_2(y)$, wyznaczonych dla zbioru $\mathcal{Q}$ w postaci (7.72) przy $\rho = 0.333 < \bar{\rho} = 1/3$ są pokazane na rysunku 7.6.

Linie pionowe na rysunku 7.6b) oznaczają przeskok wykresu funkcji testującej $T_2(y)$ z wykresu $\tilde{p}_k(f_2(y))$ na wykres $\tilde{p}_r(f_2(y))$, $k \neq r$. Dyskusja dotycząca przebiegu funkcji $T_i(y)$ jest podana poniżej lematu 7.5.

Ponieważ $\min \text{Re } T_1(y) = 0.001$, $\min \text{Re } T_2(y) = 0.3072$, z warunku 1) twierdzenia 7.4 wynika, że rodzina wielomianów (7.71) przy $\rho = 0.333$ w (7.72) jest odpornie D -stabilna. □



Rys. 7.6. Zespolone funkcje testujące do przykładu 7.6: a) $T_1(y)$ stowarzyszona z obszarem D_1 (półpłaszczyzna); b) $T_2(y)$ stowarzyszona z obszarem D_2 (koło)

7.4.4. Uwagi końcowe

Podane w punkcie 7.4 metody funkcji testujących należą do grupy metod częstotliwościowych. Pozwalają one na jednoczesne badanie D -stabilności wszystkich wielomianów krawędziowych.

Funkcje testujące są stowarzyszone z poszczególnymi podobszarami D_i obszaru D , których brzeg ma opis parametryczny $f_i(y)$, $y \in Y_i$, przy czym przedział Y_i jest teoretycznie nieograniczony przy nieograniczonym podobszarze D_i . W takim przypadku funkcja testująca $d_i(y)$ jest też nieograniczona, tzn. dąży ona do nieskończoności przy $y \rightarrow \infty$. Natomiast pozostałe funkcje testujące (tj. $\tilde{d}_i(y)$, $B_i(y)$, $T_i(y)$, $F_i(y)$) są ograniczone. Wszystkie funkcje testujące są oczywiście, ograniczone przy ograniczonym D_i .

Stosowanie metod funkcji testujących wymaga badania ich przebiegów na podstawie wykresów otrzymanych z zastosowaniem obliczeń komputerowych.

Przebiegów funkcji testujących nie da się bowiem opisać analitycznie. Z tego powodu, przy wyznaczaniu wykresów poszczególnych funkcji testujących w funkcji parametru $y \in Y_i$, należy dokonywać obliczeń z odpowiednio małym krokiem Δy i ewentualnie stosować odpowiednie metody numeryczne do wyznaczenia ich wartości minimalnych. Szczególnie jest to istotne w przypadku, gdy wartości minimalne są bliskie zeru.

W przypadku, gdy przedział Y_i jest nieograniczony, wyznaczając przebiegi funkcji testujących możemy ograniczyć się do skończonego przedziału Y_i wartości parametru y , jeżeli stwierdzimy, że wyznaczone wartości

- rzeczywistej funkcji testującej $d_i(y)$ są odpowiednio duże i szybko rosną,
- rzeczywistej funkcji testującej ($\tilde{d}_i(y)$, $B_i(y)$ lub $F_i(y)$) ustalają się na pewnym poziomie,
- zespolonej funkcji testującej $T_i(y)$ oddalają się od początku płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Jeżeli natomiast stwierdzimy, że wartości rzeczywistych funkcji testujących maleją lub wartości zespolonej funkcji testującej $T_i(y)$ zdużają w kierunku początku płaszczyzny zmiennej zespolonej, należy rozpatrzyć odpowiednio „duży” przedział Y_i , analizując ewentualnie wartości tych funkcji przy $y \rightarrow \infty$.

Zauważmy, że analizę przebiegów poszczególnych funkcji testujących można przeprowadzić za pomocą obliczeń komputerowych bez wyznaczania ich wykresów. W takim przypadku utrudniona jest jednakże interpretacja otrzymanych wyników i istnieje potencjalna groźba otrzymania błędnych rezultatów. Może to nastąpić np. w przypadku przyjęcia do obliczeń zbyt małego skończonego przedziału Y_i przy nieograniczonym D_i .

Badając odporną D -stabilność wielomianów o rzeczywistych współczynnikach możemy ograniczyć się do rozpatrywania tylko części obszaru D leżących w półpłaszczyźnie $\text{Im } s \geq 0$. Wynika to z faktu, że zespolone zera wielomianów o rzeczywistych współczynnikach są parami sprzężone.

Do grupy metod częstotliwościowych należy metoda zaproponowana w pracy [110]. Można ją nazwać metodą najgorszej krawędzi, w której warunek wykluczenia zera jest sprawdzany tylko dla kilku odpowiednio wyznaczonych wartości parametru y , związanych z położeniem najgorszej krawędzi zbioru wartości (pod względem spełnienia warunku wykluczenia zera). Jest to jednak metoda dosyć złożona pod względem możliwych do wykonania sieci działań, chociaż prosta obliczeniowo. W pracy [110] jej algorytm jest rozpisany w szczegółach jedynie w przypadku, gdy D jest otwartą lewą półpłaszczyzną.

8. ODPORNA STABILNOŚĆ RODZINY WIELOMIANÓW O ZALEŻNOŚCI – OGÓLNIJSZEJ NIŻ LINIOWA – WSPÓŁCZYNNIKÓW OD NIEPEWNYCH PARAMETRÓW

Weźmy pod uwagę rodzinę wielomianów

$$W(s, Q) = \{w(s, q) : q \in Q\}, \quad (8.1)$$

gdzie

$$w(s, q) = \sum_{i=0}^n a_i(q) s^i, \quad (8.2)$$

przy czym współczynniki $a_i(q)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) są ciągłymi funkcjami swoich argumentów, w ogólności nieliniowymi, $a_n(q) > 0$, $\forall q \in Q$, zaś

$$Q = \{q : q_k \in [q_k^-, q_k^+], q_k^- < q_k^+, k = 1, 2, \dots, m\} \quad (8.3)$$

jest m -wymiarowym prostopadłościem.

Nie zmniejszając ogólności rozważań przyjmijmy, że D jest otwartym jednoczynnym obszarem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, którego brzeg ma opis parametryczny $f(y)$, $y \in Y$. Założmy też, że wielomian nominalny $w_0(s)$ rodziny (8.1) jest D -stabilny.

8.1. Charakterystyka problemu w przypadku ogólnym

Problem badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów, których współczynniki są w ogólności nieliniowymi funkcjami niepewnych parametrów jest ogólniejszy i trudniejszy w porównaniu z problemem rozpatrywanym w poprzednich rozdziałach.

Przykładem wielomianu o nieliniowej zależności współczynników od niepewnych parametrów jest wielomian charakterystyczny (2.45) układu regulacji automatycznej rozpatrywanego w przykładzie 2.6.

Szczególnymi przypadkami nieliniowej zależności współczynników od niepewnych parametrów jest zależność wieloliniowa (biliniowa w przypadku dwóch niepewnych parametrów) oraz wielomianowa.

Funkcję $f(q_1, q_2, \dots, q_m)$ nazywamy wieloliniową, jeżeli jest ona liniowa ze względu na każdą zmienną q_i oddzielnie, tzn. gdy jest ona liniowa względem q_i w przypadku, gdy wszystkie pozostałe zmienne q_k , $k = 1, 2, \dots, m$, $k \neq i$, są ustalone. Przykładem funkcji wieloliniowej jest np. funkcja $f(q_1, q_2) = a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_1 q_2$, gdzie a_i , $i = 1, 2, 3$, są to stałe współczynniki. Jeżeli w powyższej funkcji pierwszy składnik zastąpimy np. wyrażeniem $a_1 q_1^2$, to otrzymamy funkcję wielomianową dwóch zmiennych q_1 i q_2 .

Przykładami wielomianów, których współczynniki zależą wieloliniowo i wielomianowo od niepewnych parametrów są wielomiany charakterystyczne układów regulacji automatycznej rozpatrywanych w przykładach 2.2 i 2.4, odpowiednio.

Z rozważań podanych w rozdziałach 6 i 7 wynika, że jeżeli współczynniki wielomianu (8.2) zależą liniowo od niepewnych parametrów, to w zbiorze Q istnieje podzbiór Q_t , zwany testującym, który składa się ze wszystkich krawędzi zbioru Q . D -stabilność wielomianu (8.2) dla wszystkich $q \in Q_t$ jest równoważna z D -stabilnością tego wielomianu dla wszystkich $q \in Q$. W przypadku szczególnym, przy badaniu odpornej L -stabilności wielomianu przedziałowego, zbiór testujący składa się tylko z czterech odpowiednich wierzchołków zbioru wartości niepewnych współczynników, odpowiadających wielomianom Charitonowa.

Jeżeli współczynniki wielomianu (8.2) zależą od niepewnych parametrów w sposób ogólniejszy niż liniowy, w zbiorze Q da się określić podzbiór testujący Q_t tylko w pewnych przypadkach szczególnych. Należą do nich np. przypadki omówione w punkcie 8.2.3 oraz w pracy [48]. W przypadku ogólnym dla rodziny wielomianów (8.1) nie da się określić podzbioru testującego Q_t [2]. O odpornej D -stabilności rodziny (8.1) mogą bowiem decydować nie tylko punkty brzegowe zbioru Q , ale też jego punkty wewnętrzne (nawet izolowane). Ilustruje to poniższy przykład.

Przykład 8.1. Należy zbadać odporną L -stabilność wielomianu o współczynnikach zależnych biliniowo od niepewnych parametrów, o postaci [4]

$$w(s, q) = s^3 + (q_1 + q_2 + 1)s^2 + (q_1 + q_2 + 3)s + 2q_1 q_2 + 6q_1 + 6q_2 + 1 + r^2, \quad (8.4)$$

$q \in Q$, gdzie $r = 0.5$ jest parametrem, zaś zbiór

$$Q = \{q = [q_1, q_2]^T : q_1 \in [0.3, 2.5], q_2 \in [0, 1.7]\} \quad (8.5)$$

jest prostokątem na płaszczyźnie (q_1, q_2) .

Z kryterium Hurwitza wynika, że wielomian (8.4) jest odpornie L -stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(q_1 - 1)^2 + (q_2 - 1)^2 - r^2 > 0. \quad (8.6)$$

Zauważmy, że przy $r = 0.5$ warunek (8.6) jest spełniony dla wszystkich wartości q_1 i q_2 leżących na płaszczyźnie (q_1, q_2) na brzegu prostokąta Q , natomiast nie jest on spełniony dla tych wartości $q \in Q$, które leżą wewnątrz domkniętego koła o promieniu $r = 0.5$ i o środku w punkcie $q_1 = q_2 = 1$. Oznacza to, że są L -stabilne wszystkie wielomiany krawędziowe, odpowiadające poszczególnym krawędziom zbioru (8.5), natomiast wielomian (8.4) nie jest odpornie L -stabilny, przy czym o tym fakcie decydują punkty położone wewnątrz zbioru Q .

W przypadku szczególnym $r = 0$, wielomian (8.4) też nie jest odpornie L -stabilny, bowiem jest on L -stabilny dla wszystkich $q \in Q$ z wyjątkiem izolowanego punktu o współrzędnych $q_1 = 1$, $q_2 = 1$. $\square$

Do badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów (8.1) o nieliniowej zależności współczynników od niepewnych parametrów można stosować ogólne metody opisane w rozdziale 4 niniejszej pracy. Należą do nich obliczeniowe metody takie jak metoda zbioru spektralnego, metoda bazująca na bezpośrednim sprawdzaniu warunku wykluczenia zera, czy też metoda przestrzeni niepewnych parametrów. Ich efektywność w przypadku ogólnym nie jest jednak zbyt wielka.

Zależy ona w sposób istotny od charakteru zależności współczynników wielomianu (8.2) od niepewnych parametrów i ich liczby, a także od postaci obszaru D .

Dyskusja dotycząca efektywności wyżej wymienionych metod przy badaniu odpornej L -stabilności rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych biliniowo od niepewnych parametrów została przeprowadzona w pracy [4] na przykładzie wielomianu (8.4).

W przypadku, gdy współczynniki wielomianu charakterystycznego zależą od niepewnych parametrów w sposób ogólniejszy niż liniowy, istotną trudność przy stosowaniu metody bezpośredniego sprawdzania warunku wykluczenia zera stanowi wyznaczenie zbioru wartości. Jego brzegi nie są bowiem odcinkami linii prostych w przypadku ogólnym (patrz np. rys. 4.3 lub 8.2). Ponadto, wewnątrz obszaru ograniczonego zewnętrznym brzegiem zbioru wartości może istnieć podzbiór nie należący do tego zbioru, tzn. zbiór wartości w przypadku ogólnym może nie być zbiorem jednospójnym (może mieć „dziurę”) [6, 8]. Dlatego też przy bezpośrednim sprawdzaniu warunku wykluczenia zera niezbędne są odpowiednie metody i programy komputerowe, służące do wyznaczania zbioru wartości. Jedną z takich metod opisano w pracy [6]. Służy ona do konstrukcji zbioru wartości $w(z, Q)$ oraz jego „animacji”, tj. do wyznaczania jego ruchu przy zmianach wartości $z = jy$, $y \geq 0$. Inna obliczeniowa metoda służąca do aproksymacji zbioru wartości została podana w pracy [19].

Do badania odpornej L -stabilności i K -stabilności rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych nieliniowo od kilku niepewnych parametrów można też stosować metody analityczne podane w punkcie 4.2 niniejszej pracy, ewentualnie w ich powiązaniu z metodą przestrzeni niepewnych parametrów (w sposób opisany w końcowej części punktu 4.4 i zastosowany w przykładzie 4.3). Można tu też stosować analityczne metody podane w pracach [136] i [137], które są jednak trudne w stosowaniu w przypadku ogólnym. W wyżej wymienionych pracach zostały one zilustrowane przykładami wielomianów o współczynnikach zależnych wieloliniowo lub wielomianowo od dwóch niepewnych parametrów.

Analityczno-numeryczną metodę badania odpornej L -stabilności rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych wielomianowo od dwóch oraz od trzech niepewnych parametrów podano w pracy [82] (patrz też [6]).

Rodzinę wielomianów (8.1) o współczynnikach nieliniowo zależnych od niepewnych parametrów można aproksymować inną rodziną wielomianów (zwaną rodziną nadmiarową), których współczynniki zależą od niepewnych parametrów

w sposób prostszy niż nieliniowy. Wtedy odporna D -stabilność rodziny nadmiarowej jest warunkiem wystarczającym odpornej D -stabilności rodziny (8.1).

Najprostszą rodziną nadmiarową rodziny wielomianów (8.1) jest wielomian przedziałowy $W(s, A) = \{w(s, \mathbf{a}): \mathbf{a} \in A\}$.

Ponieważ

$$W(s, Q) \subset W(s, A), \quad (8.7)$$

odporna D -stabilność wielomianu przedziałowego jest warunkiem dostatecznym odpornej D -stabilności rodziny (8.1).

Nadmiarowy wielomian przedziałowy, utworzony na bazie rodziny wielomianów (8.1), ma postać

$$w(s, \mathbf{a}) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad \mathbf{a} \in A, \quad (8.8)$$

gdzie

$$A = \{\mathbf{a}: a_i \in [a_i^-, a_i^+], \quad a_i^- \leq a_i^+, \quad i = 0, 1, \dots, n\}, \quad (8.9)$$

$$a_i^- = \min_{\mathbf{q} \in Q} a_i(\mathbf{q}), \quad a_i^+ = \max_{\mathbf{q} \in Q} a_i(\mathbf{q}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (8.10)$$

W przypadku szczególnym, gdy współczynniki wielomianu (8.2) zależą wielomianowo od niepewnych parametrów, dla rodziny (8.1) można określić nadmiarową rodzinę wielomianów

$$W(s, \bar{Q}) = \{w(s, \bar{\mathbf{q}}): \bar{\mathbf{q}} \in \bar{Q}\} \quad (8.11)$$

o współczynnikach zależnych liniowo lub wieloliniowo od niepewnych parametrów [6, 12].

Występujący we wzorze (8.11) wektor $\bar{\mathbf{q}}$ jest wektorem nowych niepewnych parametrów $\bar{q}_k$, $k = 1, 2, \dots, \bar{m} > m$, zbiór zaś $\bar{Q}$ jest zbiorem wartości tych parametrów. Oczywiście $Q \subset \bar{Q}$, tzn. zbiór $\bar{Q}$ jest zbiorem nadmiarowym względem zbioru Q .

Ponieważ

$$W(s, Q) \subset W(s, \bar{Q}), \quad (8.12)$$

odporna D -stabilność nadmiarowej rodziny (8.11) jest warunkiem dostatecznym odpornej D -stabilności rodziny (8.1) o współczynnikach zależnych wielomianowo od niepewnych parametrów.

Sposób wyznaczania nadmiarowej rodziny wielomianów (8.11) o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów ilustruje poniższy przykład.

Przykład 8.2. Dana jest rodzina (8.1) wielomianów o współczynnikach wielomianowo zależnych od dwóch niepewnych parametrów, gdzie

$$w(s, q) = s^3 + (4q_1^2 + 2q_1 + 3q_2 + 3)s^2 + (q_1^2 + 2q_2^2 + 2)s + (6q_1 + q_2 + 4), \quad q \in Q, \quad (8.13)$$

$$Q = \{q = [q_1, q_2]^T : q_k \in [1, 2], \quad k = 1, 2\}. \quad (8.14)$$

Definiując nowe niepewne parametry $\bar{q}_1 = q_1$, $\bar{q}_2 = q_2$, $\bar{q}_3 = q_1^2$, $\bar{q}_4 = q_2^2$, otrzymamy nadmiarową rodzinę wielomianów (8.11), o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów, gdzie

$$w(s, \bar{q}) = s^3 + (4\bar{q}_3 + 2\bar{q}_1 + 3\bar{q}_2 + 3)s^2 + (\bar{q}_3 + 2\bar{q}_4 + 2)s + (6\bar{q}_1 + \bar{q}_2 + 4), \quad \bar{q} \in \bar{Q}, \quad (8.15)$$

przy czym

$$\bar{Q} = \{\bar{q} = [\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \bar{q}_4]^T : \bar{q}_k \in [1, 2], \quad k = 1, 2; \bar{q}_k \in [1, 4], \quad k = 3, 4\}. \quad (8.16)$$

□

Dla rodziny (8.1) wielomianów o współczynnikach wielomianowo zależnych od niepewnych parametrów, nadmiarową rodzinę wielomianów (8.11), o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów, można wyznaczyć w sposób podany poniżej.

Bierzemy pod uwagę po kolei każdy niepewny parametr q_k , $k = 1, 2, \dots, m$, występujący w wielomianie (8.2) w najwyższej potędze r_k . Następnie czynnik $q_k^{r_k}$ zastępujemy iloczynem $\bar{q}_{k1}\bar{q}_{k2}\dots\bar{q}_{kr_k}$, gdzie $\bar{q}_{kj}$, $j = 1, 2, \dots, r_k$, są to nowe niepewne parametry, które niezależnie od siebie mogą przyjmować dowolne wartości z takiego samego przedziału co q_k , tzn. z przedziału $[q_k^-, q_k^+]$. Każdy inny czynnik q_k^r przy $r < r_k$ zastępujemy iloczynem $\bar{q}_{k1}\bar{q}_{k2}\dots\bar{q}_{kr}$.

Przykład 8.3. Weźmy pod uwagę rodzinę wielomianów (8.13)–(8.14), rozpatrywaną w przykładzie 8.2 i zdefiniujmy nowe niepewne parametry w następujący sposób: $\bar{q}_1 = q_1$, $\bar{q}_2 = q_1$, $\bar{q}_3 = q_2$, $\bar{q}_4 = q_2$. Otrzymamy w ten sposób nadmiarową rodzinę wielomianów (8.11), o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów, gdzie

$$w(s, \bar{q}) = s^3 + (4\bar{q}_1\bar{q}_2 + 2\bar{q}_1 + 3\bar{q}_3 + 3)s^2 + (\bar{q}_1\bar{q}_2 + 2\bar{q}_3\bar{q}_4 + 2)s + (6\bar{q}_1 + \bar{q}_3 + 4), \quad (8.17)$$

$\bar{q} \in \bar{Q}$, przy czym

$$\bar{Q} = \{\bar{q} = [\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \bar{q}_4]^T : \bar{q}_k \in [1, 2], \quad k = 1, 2, 3, 4\}. \quad (8.18)$$

□

Rodzinę (8.1) wielomianów o współczynnikach wielomianowo zależnych od niepewnych parametrów można też przekształcić do postaci rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów, dla której zbiór Q wartości niepewnych parametrów jest zbiorem wielościennym wypukłym (nie jest hiperprostokątnościem) w przestrzeni niepewnych parametrów [112, 12].

8.2. Odporna stabilność rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów

W grupie rodzin wielomianów o zależności współczynników od niepewnych parametrów ogólniejszej niż liniowa, najbardziej rozwinięta jest teoria odpornej stabilności rodziny wielomianów, których współczynniki zależą wieloliniowo od niepewnych parametrów. Problemowi odpornej D -stabilności takiej rodziny są poświęcone prace [2, 4, 8, 18, 45, 51, 89, 98, 99, 121, 122, 136].

8.2.1. Twierdzenie o odwzorowaniu i warunki dostateczne odpornej stabilności

Oznaczmy przez

$$p_k(s) = w(s, \mathbf{q}_k) = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{q}_k) s^i, \quad k = 1, 2, \dots, K = 2^m, \quad (8.19)$$

wielomiany wierzchołkowe, odpowiadające poszczególnym wierzchołkom zbioru Q . Ich D -stabilność jest warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności rodziny (8.1).

Ponadto, dla dowolnej liczby zespolonej z przez

$$c(z, Q) = \text{conv}\{p_k(z), \quad k = 1, 2, \dots, K\} \quad (8.20)$$

oznaczmy wypukły wielobok rozpięty na punktach $p_k(z)$, $k = 1, 2, \dots, K$, będących wartościami dla $s = z$ wielomianów wierzchołkowych (8.19).

Ważną rolę w teorii odpornej stabilności rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów odgrywa tzw. twierdzenie o odwzorowaniu, sformułowane i udowodnione w monografii [134]. Inne dowody tego twierdzenia są podane w pracach [6, 12, 21].

Twierdzenie 8.1 (twierdzenie o odwzorowaniu). Jeżeli współczynniki wielomianu (8.2) zależą wieloliniowo od niepewnych parametrów, to dla każdej liczby zespolonej z zachodzi zależność

$$w(z, Q) \subset c(z, Q), \quad (8.21)$$

lub, równoważnie,

$$\text{conv}(w(z, Q)) = c(z, Q), \quad (8.22)$$

gdzie $w(z, Q)$ jest zbiorem wartości rodziny wielomianów (8.1), zaś $\text{conv}(w(z, Q))$ jest wypukłą powłoką tego zbioru.

Dowód. Aby udowodnić twierdzenie wystarczy wykazać, że $w(z, \mathbf{q}) \in c(z, Q)$ dla każdego ustalonego $\mathbf{q} \in Q$ i dla dowolnej liczby zespolonej z .

Dla ułatwienia rozważań przyjmijmy $m = 2$. W takim przypadku zbiór Q jest prostokątem na płaszczyźnie (q_1, q_2) , o wierzchołkach $\mathbf{q}_1 = [q_1^-, q_2^-]^T$, $\mathbf{q}_2 = [q_1^-, q_2^+]^T$, $\mathbf{q}_3 = [q_1^+, q_2^-]^T$, $\mathbf{q}_4 = [q_1^+, q_2^+]^T$. Zbiór Q jest pokazany na rysunku 8.1. Na tym rysunku poszczególne wierzchołki zbioru Q , a także inne punkty, zostały oznaczone tak samo jak wektory określające ich współrzędne.

Wykażemy, że $w(z, \mathbf{q}) \in \text{conv}\{p_k(z), \quad k = 1, 2, \dots, 4\}$ dla dowolnego ustalonego $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T \in Q$.

Zauważmy, że jeżeli poruszamy się w zbiorze Q wzdłuż jego krawędzi lub wzdłuż prostych równoległych do krawędzi, to zmienia się tylko jedna ze zmiennych q_1 lub q_2 , natomiast druga pozostaje stała. W takim przypadku $w(s, \mathbf{q})$ jest wielomianem o współczynnikach liniowo zależnych od jednego niepewnego parametru. Wobec tego, dla dowolnego $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T \in Q$ istnieje parametr $\lambda \in [0, 1]$ taki, dla którego zachodzą zależności (przy oznaczeniach jak na rysunku 8.1)

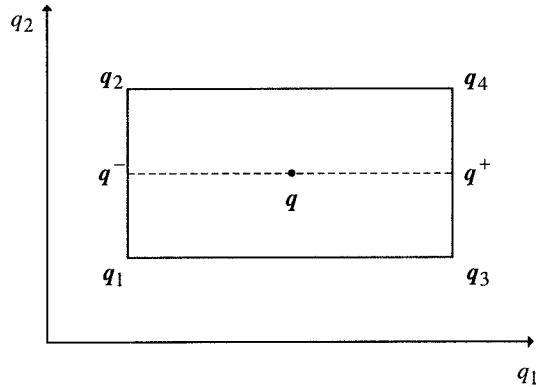
$$\mathbf{q} = (1 - \lambda)\mathbf{q}^- + \lambda\mathbf{q}^+, \quad w(z, \mathbf{q}) = (1 - \lambda)w(z, \mathbf{q}^-) + \lambda w(z, \mathbf{q}^+),$$

co oznacza, że

$$w(z, \mathbf{q}) \in \text{conv}\{w(z, \mathbf{q}^-), w(z, \mathbf{q}^+)\}. \quad (8.23)$$

Postępując podobnie możemy wykazać, że

$$w(z, q^-) \in \text{conv}\{p_1(z), p_2(z)\}, \quad w(z, q^+) \in \text{conv}\{p_3(z), p_4(z)\}. \quad (8.24)$$



Rys. 8.1. Rysunek do dowodu twierdzenia 8.1

Ze wzorów (8.23) i (8.24) wynika, że $w(z, q) \in c(z, Q) = \text{conv}\{p_k(z), k=1, \dots, 4\}$, co kończy dowód twierdzenia przy $m=2$. Dowód łatwo można uogólnić dla $m > 2$, stosując np. metodę indukcji matematycznej. $\square$

Z definicji 4.2 unormowanego zbioru wartości $\tilde{w}(z, Q)$ wynika, że warunek (8.21) jest równoważny z warunkiem

$$\tilde{w}(z, Q) \subset \tilde{c}(z, Q), \quad (8.25)$$

gdzie $\tilde{c}(z, Q) = \text{conv}\{\tilde{p}_k(z), k=1, 2, \dots, K\}$, $\tilde{p}_k(s) = p_k(s)/w_0(s)$, $k=1, 2, \dots, K$, zaś $w_0(s) = w(s, q_0)$ jest wielomianem nominalnym rodziny (8.1), przy czym $w_0(z) \neq 0$.

Przykład 8.4. Dany jest wielomian o współczynnikach zależnych biliniowo od niepewnych parametrów, w postaci

$$w(s, q) = q_1 q_2 s^4 + 0.8(q_1 + q_2)s^3 + (0.25 + 2q_1 + 2q_2)s^2 + 2s + 3, \quad q \in Q, \quad (8.26)$$

gdzie

$$Q = \{q = [q_1, q_2]^T : q_1 \in [1, 5], q_2 \in [1, 5]\}. \quad (8.27)$$

Zbiór wartości $w(z, Q)$ przy $z = j1$ rodziny wielomianów (8.26) jest pokazany na rysunku 8.2. Jest to obszar zakropkowany. Wartości wielomianów wierzchołkowych $p_k(z) = w(z, q_k)$ ($k=1, \dots, 4$) przy $z = j1$ odpowiadają poszczególnym wierzchołkom zbioru Q (z numeracją jak na rysunku 8.1), przy czym $p_2(z) = p_3(z)$. Z rysunku 8.2 wynika, że brzeg zbioru wartości $w(j1, Q)$ składa się z dwóch odcinków linii prostych, łączących punkty $p_1(z)$ i $p_2(z)$ oraz $p_2(z)$ i $p_4(z)$, a także z odcinka linii krzywej łączącego punkty $p_1(z)$ i $p_4(z)$. Jest on odwzorowaniem przekątnej zbioru Q , łączącej wierzchołki q_1 i q_4 tego zbioru. Krzywoliniowy brzeg zbioru wartości $w(j1, Q)$ ma opis parametryczny

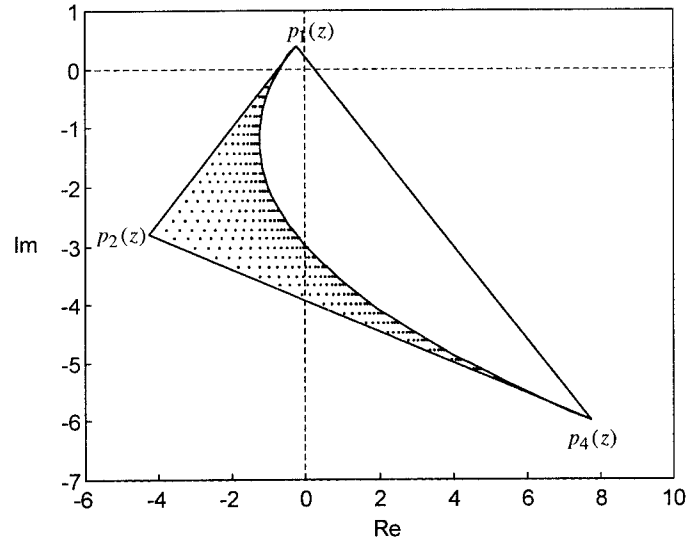
$$w(j1, q) = q^2 - 4q + 2.75 + j(2 - 1.6q), \quad q \in [1, 5]. \quad (8.28)$$

Został on wyznaczony w sposób opisany w [6], a wykorzystywany w konstrukcji zbioru wartości przy dwóch niepewnych parametrach. Mianowicie, krzywoliniowy brzeg zbioru wartości jest odwzorowaniem leżącego w zbiorze Q odcinka linii prostej, na której zeruje się wyznacznik Jakobianu $\det J(y, q)$. W rozpatrywanym przykładzie

$$\det J(y, q) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u(y, q)}{\partial q_1} & \frac{\partial u(y, q)}{\partial q_2} \\ \frac{\partial v(y, q)}{\partial q_1} & \frac{\partial v(y, q)}{\partial q_2} \end{bmatrix} = 0.8y^7(q_1 - q_2),$$

gdzie $u(y, q) = \text{Re } w(jy, q)$, $v(y, q) = \text{Im } w(jy, q)$, co oznacza, że wyznacznik Jakobianu zeruje się na prostej $q_1 = q_2$, która przechodzi przez wierzchołki q_1 i q_4 zbioru Q . Wobec tego krzywoliniowy brzeg zbioru wartości $w(j1, Q)$ jest odwzorowaniem przekątnej zbioru Q , łączącej wierzchołki q_1 i q_4 tego zbioru. Podstawiając do wzoru (8.26) $q_1 = q_2 = q$, $q \in [1, 5]$, otrzymamy opis parametryczny (8.28).

Z rysunku 8.2 wynika, że zbiorem $c(j1, Q) = \text{conv}(w(j1, Q)) = \text{conv}\{p_k(j1), k=1, \dots, 4\}$ jest trójkąt o wierzchołkach $p_1(z)$, $p_2(z)$ i $p_4(z)$ przy $z = j1$, w którym leży zbiór wartości $w(j1, Q)$. Zauważmy, że $0 \notin w(j1, Q)$, natomiast $0 \in c(j1, Q) = \text{conv}(w(j1, Q))$. $\square$



Rys. 8.2. Zbiór wartości $w(j1, Q)$ (obszar zakropkowany) i zbiór $c(j1, Q)$ (trójkąt)

Z definicji 3.5 oraz z powyższych rozważań wynika następujący lemat.

Lemat 8.1. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie D -stabilny. Jeżeli jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin c(z, Q), \quad \forall z \in \partial D, \quad (8.29)$$

to rodzina wielomianów (8.1) stałego stopnia, o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów, jest odpornie D -stabilna.

Dowód. Jeżeli warunek (8.29) jest spełniony, to zgodnie z twierdzeniem 8.1, jest też spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin w(z, Q), \quad \forall z \in \partial D, \quad (8.30)$$

gdzie $w(z, Q)$ jest zbiorem wartości rodziny (8.1). Z twierdzenia 4.5 wynika zatem, że rodzina wielomianów (8.1) jest odpornie D -stabilna. $\square$

Twierdzenie 8.2. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie D -stabilny. Rodzina wielomianów (8.1) stałego stopnia o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna, jeżeli jest odpornie D -stabilny zbiór wielomianów

$$P(s, \Lambda) = \{p_{rk}(s, \lambda) : \lambda \in \Lambda = [0, 1]; r, k = 1, 2, \dots, K = 2^m, r < k\}, \quad (8.31)$$

gdzie

$$p_{rk}(s, \lambda) = (1 - \lambda)p_r(s) + \lambda p_k(s), \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (8.32)$$

przy czym $p_r(s)$ i $p_k(s)$ są to wielomiany wierzchołkowe w postaci (8.19).

Dowód. Oznaczmy przez $p_{rk}(z, \Lambda)$ zbiór wartości rodziny wielomianów (8.32) dla $s = z$. Jest on na płaszczyźnie zmiennej zespolonej odcinkiem linii prostej, łączącym punkty $p_r(z)$ i $p_k(z)$. Ponadto, przez $p(z, \Lambda)$ oznaczmy zbiór wartości rodziny wielomianów (8.31) dla $s = z$. Składa się on z odcinków linii prostych $p_{rk}(z, \Lambda)$, $r, k = 1, 2, \dots, K$, $r < k$.

Ze wzoru (8.20) wynika, że $c(z, Q)$ jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wypukłym wielobokiem, rozpiętym na punktach $p_k(z)$, $k = 1, 2, \dots, K$. Wobec tego, jego krawędzie są odcinkami $p_{rk}(z, \Lambda)$, przy czym w przypadku ogólnym nie każdy odcinek $p_{rk}(z, \Lambda)$ jest krawędzią wieloboku $c(z, Q)$. Zbiór krawędzi wieloboku $c(z, Q)$ jest więc podzbiorem zbioru wartości $p(z, \Lambda)$.

Postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia krawędziowego 7.1 możemy wykazać, że warunek wykluczenia zera (8.29) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek wykluczenia zera $0 \notin p_{rk}(z, \Lambda)$ dla $r, k = 1, 2, \dots, K$, $r < k$. Z lematu 8.1 wynika zatem, że odporna D -stabilność zbioru wielomianów (8.31) jest warunkiem dostatecznym odpornej D -stabilności rodziny wielomianów (8.1) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów. $\square$

Zauważmy, że zbiór (8.31) tworzą wszystkie wypukłe kombinacje (8.32) wielomianów wierzchołkowych rodziny (8.1), odpowiadających poszczególnym wierzchołkom zbioru Q .

Do badania odpornej D -stabilności poszczególnych wielomianów (8.32), należących do zbioru (8.31), można stosować metody analityczne lub graficzne, podane w rozdziale 5.

Odporna D -stabilność całego zbioru wielomianów (8.31) jest równoważna ze spełnieniem warunku wykluczenia zera (8.29). Do jego sprawdzenia możemy stosować metody funkcji testujących, będące uogólnieniem metod podanych w punkcie 7.4 dla rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów. Metody funkcji testujących pozwalają na jednoczesne badanie odpornej D -stabilności wszystkich wielomianów (8.32) należących do zbioru (8.31).

Metody funkcji testujących $d(y)$ (lub $\tilde{d}(y)$) i $B(y)$, podane w punkcie 7.4, mogą być stosowane bezpośrednio do sprawdzenia warunku wykluczenia zera (8.29), a więc i do badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów (8.1) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów.

Metoda funkcji testującej $F(y)$ wymaga pewnej modyfikacji z tego powodu, że przy sprawdzaniu warunku (8.29) musimy brać pod uwagę wszystkie wielomiany w postaci (8.32), a nie tylko tzw. wielomiany krawędziowe, jak miało to miejsce w przypadku rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów.

Metody zespolonej funkcji testującej $T(y)$ nie będziemy stosować do badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów (8.1) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów. Ograniczymy się tylko do metody funkcji testującej $B(y) = \operatorname{Re} T(y)$.

Stosując metody funkcji testujących do badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów (8.1) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów, bazujemy na znajomości wielomianów wierzchołkowych $p_k(s)$, $k=1,2,\dots,K$. Ich D -stabilność jest warunkiem koniecznym odpornej D -stabilności tej rodziny.

Przypomnijmy, że D jest jednospójnym otwartym obszarem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, którego brzeg ma opis parametryczny $f(y)$, $y \in Y$.

Lemat 8.2. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie D -stabilny. Rodzina wielomianów (8.1) stałego stopnia o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna, jeżeli

$$d(y) > 0, \quad \forall y \in Y, \quad (8.33)$$

gdzie funkcję testującą $d(y)$ wyznacza się ze wzorów (7.30), (7.31)–(7.34), lub równoważnie, jeżeli

$$\tilde{d}(y) > 0, \quad \forall y \in Y, \quad (8.34)$$

gdzie unormowaną funkcję testującą $\tilde{d}(y)$ wyznacza się ze wzorów (7.44), (7.31)–(7.34).

Dowód. Postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 7.2 wykazuje się, że jeżeli jest spełniony warunek (8.33) (lub (8.34)), to jest też spełniony warunek (8.29) dla $z = f(y)$, $y \in Y$. To zaś oznacza, zgodnie z lematem 8.1, że rozpatrywana rodzina wielomianów jest odpornie D -stabilna. $\square$

Lemat 8.3. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie D -stabilny. Rodzina wielomianów (8.1) stałego stopnia o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna, jeżeli

$$B(y) > 0, \quad \forall y \in Y, \quad (8.35)$$

gdzie funkcję testującą $B(y)$ wyznacza się ze wzoru (7.48) na bazie znajomości unormowanych wielomianów wierzchołkowych $\tilde{p}_k(s) = p_k(s)/w_0(s)$, $k=1,2,\dots,K$.

Dowód. Postępując podobnie jak w punkcie 7.4.2 wykazuje się, że jeżeli jest spełniony warunek (8.35), to $0 \notin \tilde{c}(f(y), Q)$, $\forall y \in Y$, gdzie $\tilde{c}(z, Q) = \operatorname{conv}(\tilde{w}(z, Q))$, przy czym $\tilde{w}(z, Q)$ jest unormowanym zbiorem wartości rodziny (8.1). Z powyższego oraz z zależności (8.25) wynika, że wtedy jest też spełniony warunek wykluczenia zera $0 \notin \tilde{w}(f(y), Q)$, $\forall y \in Y$. Oznacza to, że rodzina wielomianów (8.1) jest odpornie D -stabilna. $\square$

Warunki dostateczne podane w powyższych lematach są dosyć mocne, ponieważ bazują one na warunkach dostatecznych spełnienia warunku wykluczenia zera dla zbioru $c(z, Q)$ (lub $\tilde{c}(z, Q)$), w którym leży zbiór wartości $w(z, Q)$ (lub $\tilde{w}(z, Q)$) rodziny wielomianów (8.1) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów.

Słabszy warunek dostateczny jest podany w poniższym lemacie.

Lemat 8.4. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie D -stabilny. Rodzina wielomianów (8.1) stałego stopnia o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odporne D -stabilna, jeżeli

$$F(y) > 0, \quad \forall y \in Y, \quad (8.36)$$

gdzie funkcję testującą $F(y)$ wyznacza się ze wzorów

$$F(y) = \pi - \phi(y), \quad (8.37)$$

$$\phi(y) = \max\{|\arg(\tilde{p}_r(f(y))) - \arg(\tilde{p}_k(f(y)))| : r, k = 1, 2, \dots, K, r < k\}, \quad (8.38)$$

gdzie $\arg(z) \in [-\pi, \pi)$ jest argumentem liczby zespolonej z , natomiast $\tilde{p}_k(s) = p_k(s) / w_0(s)$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Dowód. Postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 7.5 wykazuje się, że (8.36) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym spełnienia warunku wykluczenia zera $0 \notin \tilde{c}(f(y), Q)$, $\forall y \in Y$, który jest z kolei warunkiem dostatecznym odpornej D -stabilności rodziny (8.1) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów. $\square$

Podane powyżej warunki dostateczne odpornej D -stabilności rodziny wielomianów (8.1) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów zostały sformułowane na bazie aproksymacji (dla wszystkich z z brzegu obszaru D) zbioru wartości $w(z, Q)$ wypukłym wielobokiem (8.20). Taka aproksymacja może być mało dokładna, co pokazuje przykład 8.4.

Można skonstruować inny wielobok, niekoniecznie wypukły, który będzie dokładniej aproksymować zbiór wartości $w(z, Q)$. Taki wielobok otrzymamy dzieląc zbiór Q na podzbiory Q_i i dokonując aproksymacji każdego z podzbiorów wartości $w(z, Q_i)$ za pomocą wypukłego wieloboku.

Idea podziału zbioru Q na podzbiory Q_i , mająca na celu dokładniejszą aproksymację zbioru wartości $w(z, Q)$ została zaproponowana w pracy [54]. Jej rezultaty zostały wykorzystane w pracach [6, 21, 85].

8.2.2. Podział zbioru wartości niepewnych parametrów i słabsze warunki dostateczne odpornej stabilności

Założmy, że zbiór Q został podzielony na M podzbiorów Q_i , z których każdy jest hiperprostopadłościanem w rzeczywistej przestrzeni m -wymiarowej, tzn.

$$Q = \bigcup_{i=1}^M Q_i. \quad (8.39)$$

Oznaczmy przez $q_k^{(i)}$, $k = 1, 2, \dots, K = 2^m$, wierzchołki podzbioru Q_i . Każdemu wierzchołkowi $q_k^{(i)}$ podzbioru Q_i odpowiada w zbiorze (8.1) wielomian wierzchołkowy

$$p_k^{(i)}(s) = w(s, q_k^{(i)}), \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (8.40)$$

Ponadto, dla dowolnej ustalonej liczby zespolonej z , przez $w(z, Q_i)$ oznaczmy zbiór wartości rodziny wielomianów

$$W(s, Q_i) = \{w(s, q) : q \in Q_i\}, \quad (8.41)$$

gdzie wielomian $w(s, q)$ o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów ma postać (8.2) oraz przez

$$c(z, Q_i) = \text{conv}\{p_k^{(i)}(z), k = 1, 2, \dots, K\} \quad (8.42)$$

oznaczmy wypukły wielobok rozpięty na punktach $p_k^{(i)}(z)$, $k = 1, 2, \dots, K$, będących wartościami dla $s = z$ wielomianów wierzchołkowych (8.40).

Twierdzenie 8.3. Jeżeli współczynniki wielomianu (8.2) zależą wieloliniowo od niepewnych parametrów, to dla każdej liczby zespolonej z zachodzi zależność

$$w(z, Q) \subset c_p(z, Q), \quad (8.43)$$

gdzie $w(z, Q)$ jest zbiorem wartości rodziny wielomianów (8.1), $c(z, Q_i)$ jest wypukłym wielobokiem (8.42), zaś

$$c_p(z, Q) = \bigcup_{i=1}^M c(z, Q_i). \quad (8.44)$$

Dowód. Z twierdzenia 8.1 wynika, że $w(z, Q_i) \subset c(z, Q_i)$ dla dowolnej liczby zespolonej z i dla każdego $i = 1, 2, \dots, M$. Wobec tego

$$w(z, Q) = \bigcup_{i=1}^M w(z, Q_i) \subset \bigcup_{i=1}^M c(z, Q_i) = c_p(z, Q), \quad (8.45)$$

co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Zauważmy, że $c_p(z, Q) \subset c(z, Q)$, gdzie zbiór $c(z, Q)$ jest zdefiniowany wzorem (8.20). Wielobok (8.44) aproksymuje zbiór wartości $w(z, Q)$ tym dokładniej, im większa jest liczba M podzbiorów zbioru Q .

Lemat 8.5. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie D -stabilny. Rodzina wielomianów (8.1) stałego stopnia o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna, jeżeli oddzielnie dla każdego $i = 1, 2, \dots, M$ jest spełniony warunek wykluczenia zera

$$0 \notin c(z, Q_i), \quad \forall z \in \partial D. \quad (8.46)$$

Dowód. Dowód wynika ze wzorów (8.42)-(8.44) i z lematu 8.1. $\square$

Twierdzenie 8.4. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie D -stabilny. Warunkiem wystarczającym odpornej D -stabilności rodziny wielomianów (8.1) stałego stopnia, o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów,

jest D -stabilność zbiorów wielomianów $P_i(s, \Lambda)$, $i = 1, 2, \dots, M$, gdzie

$$P_i(s, \Lambda) = \{p_{rk}^{(i)}(s, \lambda): \lambda \in \Lambda = [0, 1]; r, k = 1, 2, \dots, K = 2^m, r < k\}, \quad (8.47)$$

$$p_{rk}^{(i)}(s, \lambda) = (1 - \lambda)p_r^{(i)}(s) + \lambda p_k^{(i)}(s), \quad \lambda \in \Lambda = [0, 1], \quad (8.48)$$

przy czym $p_r^{(i)}(s)$ i $p_k^{(i)}(s)$ są to wielomiany wierzchołkowe, odpowiadające wierzchołkom $q_r^{(i)}$ i $q_k^{(i)}$ zbioru Q_i , odpowiednio.

Dowód. Postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 8.2 wykazuje się, że dla każdego ustalonego $i = 1, 2, \dots, M$, warunek (8.46) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy jest D -stabilny zbiór wielomianów (8.47). Wobec tego, zgodnie z lematem 8.5, odporna D -stabilność wszystkich zbiorów $P_i(s, \Lambda)$, $i = 1, 2, \dots, M$, jest warunkiem wystarczającym odpornej D -stabilności rodziny wielomianów (8.1). $\square$

Do badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów (8.1) o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów, wykorzystując lemat 8.5 i twierdzenie 8.4, można stosować metody podane powyżej w lematach 8.2, 8.3 i 8.4, uogólniając je na przypadek M podzbiorów Q_i . W szczególności, uogólniając lemat 8.4 otrzymamy poniższy lemat.

Lemat 8.6. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie D -stabilny. Rodzina wielomianów (8.1) stałego stopnia o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna, jeżeli

$$F_i(y) > 0, \quad \forall y \in Y, \quad \forall i = 1, 2, \dots, M, \quad (8.49)$$

gdzie funkcję testującą $F_i(y)$, stowarzyszoną z podzbiorem Q_i , wyznacza się ze wzorów (8.37) i (8.38) na bazie znajomości unormowanych wielomianów wierzchołkowych $\tilde{p}_k^{(i)}(s) = p_k^{(i)}(s) / w_0(s)$, $k = 1, 2, \dots, K$, gdzie $w_0(s)$ jest wielomianem nominalnym rodziny (8.1). $\square$

Przykład 8.5. Należy zbadać odporną L -stabilność wielomianu (8.26), (8.27), rozpatrywanego w przykładzie 8.4.

Łatwo sprawdzić, że wielomian nominalny $w_0(s) = w(s, \mathbf{q}_0)$, $\mathbf{q}_0 = [3, 3]^T$, jest L -stabilny. Natomiast nie jest odpornie L -stabilny zbiór wielomianów (8.31), bowiem, jak to wynika z rysunku 8.2, warunek wykluczenia zera (8.29) nie jest spełniony dla $z = j1$. Oznacza to, że o odpornej L -stabilności wielomianu (8.26), (8.27) nic nie można powiedzieć na podstawie lematu 8.1 lub twierdzenia 8.2.

Podzielmy zbiór (8.27) na trzy podzbiory:

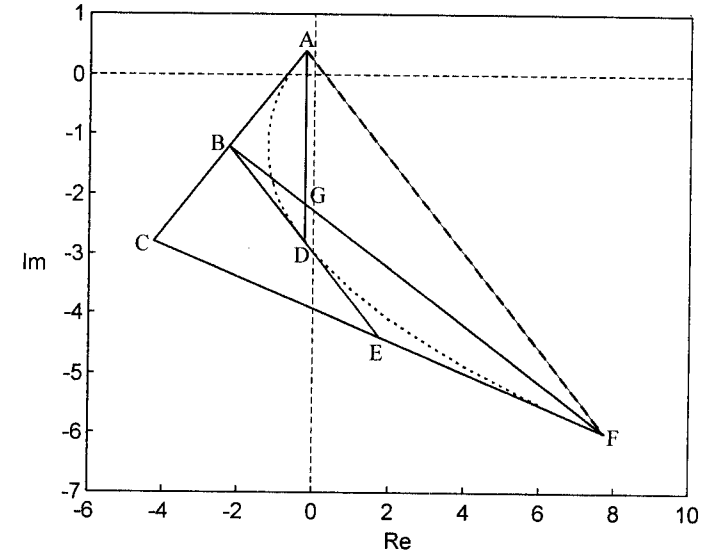
$$Q_1 = \{\mathbf{q}: q_1 \in [1, 3], q_2 \in [1, 3]\},$$

$$Q_2 = \{\mathbf{q}: q_1 \in [1, 3], q_2 \in [3, 5]\},$$

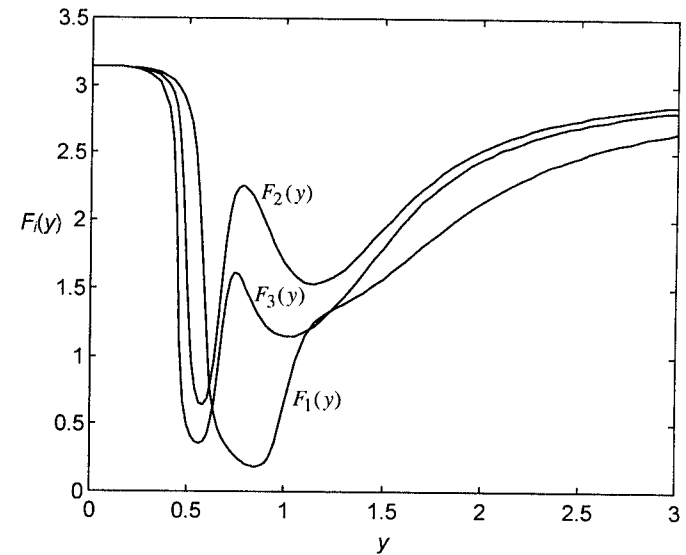
$$Q_3 = \{\mathbf{q}: q_1 \in [3, 5], q_2 \in [1, 5]\}.$$

Na rysunku 8.3 są pokazane zbiory: $c(j1, Q_i)$ dla $i = 1, 2, 3$ oraz niewypukły wielobok $c_p(j1, Q)$, o wierzchołkach A, C, F i G. Zauważmy, że warunek wykluczenia zera dla wieloboku $c_p(j1, Q)$ jest spełniony, podczas gdy nie jest on spełniony dla wieloboku $c(j1, Q)$ (trójkąt ACF) – porównaj przykład 8.4. Dodatkowo na rysunku 8.3 linią kropkowaną zaznaczono krzywoliniowy brzeg zbioru wartości $w(j1, Q)$ rozpatrywanej rodziny wielomianów. Zauważmy, że aproksymacja zbioru wartości $w(j1, Q)$ za pomocą wieloboku ACFG jest znacznie lepsza od aproksymacji za pomocą trójkąta ACF.

Wyznaczając ze wzorów (8.37), (8.38) przy $w_0(s) = w(s, \mathbf{q}_0)$, $\mathbf{q}_0 = [3, 3]^T$, funkcje testujące $F_i(y)$, $i = 1, 2, 3$, stowarzyszone z podzbiorymi Q_i , $i = 1, 2, 3$, otrzymamy przebiegi pokazane na rysunku 8.4. Ponieważ wyznaczone funkcje testujące są dodatnie dla każdego $y \geq 0$, warunek dostateczny podany w lemacie 8.6 jest spełniony, co oznacza, że rozpatrywana rodzina wielomianów jest odpornie L -stabilna. $\square$



Rys. 8.3. Rysunek do przykładu 8.5: zbiór $c_p(j1, Q)$ (wielobok ACFG) oraz podzbiory: $c(j1, Q_1)$ (trójkąt ABD), $c(j1, Q_2)$ (trójkąt BCE) i $c(j1, Q_3)$ (trójkąt BCF)



Rys. 8.4. Wykresy funkcji testujących $F_i(y)$, $i = 1, 2, 3$, do przykładu 8.5

8.2.3. Warunki konieczne i wystarczające w pewnych przypadkach szczególnych

Oprócz podanych powyżej warunków dostatecznych odpornej D -stabilności rodziny wielomianów (8.1) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów można sformułować warunki konieczne i wystarczające w pewnych przypadkach szczególnych. Obejmują one dwa przypadki, w których albo dla każdego zespolonego z zbiór wartości $w(z, Q)$ jest wypukłym wielobokiem, albo w zbiorze Q da się określić podzbiór testujący Q_t .

Zauważmy, że jeżeli dla każdego zespolonego z zbiór wartości $w(z, Q)$ jest wypukłym wielobokiem, to $w(z, Q) = c(z, Q) = \text{conv}(w(z, Q))$. Oznacza to, że w takim przypadku warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej D -stabilności rodziny wielomianów (8.1) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów jest spełnienie warunku wykluczenia zera (8.29). Wobec tego, warunki podane w twierdzeniu 8.2 i lemacie 8.4 są warunkami koniecznymi i wystarczającymi odpornej D -stabilności.

Problemowi badania odpornej D -stabilności wyżej wymienionych rodzin wielomianów są poświęcone prace [51, 98, 99, 121]. Poniżej podamy główne ich rezultaty, pomijając złożone dowody, oparte na szczegółowej analizie geometrii zbioru wartości.

8.2.3.1. Rodzina wielomianów o symetrycznej strukturze niepewności

Wielomian (8.2) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów będziemy nazywać wielomianem o symetrycznej strukturze niepewności, jeżeli $a_i(q) = a_i(q^*)$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie wektor q^* otrzymuje się z wektora q poprzez zamianę miejscami dwóch dowolnych niepewnych parametrów q_k i q_j , $k, j = 1, 2, \dots, m$, $k \neq j$.

Zbiór Q w postaci (8.3) będziemy nazywać zbiorem bez zakładek, jeżeli

$$q_m^+ > q_m^- > q_{m-1}^+ > q_{m-1}^- > \dots > q_1^+ > q_1^-. \quad (8.50)$$

Twierdzenie 8.5. Jeżeli wielomian (8.2) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów ma symetryczną strukturę niepewności, a Q jest

zbiorem bez zakładek, to rodzina wielomianów (8.1) stałego stopnia jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie D -stabilne wszystkie wielomiany krawędziowe, odpowiadające poszczególnym krawędziom zbioru Q .

Dowód. W pracy [51] wykazano, że jeżeli wielomian (8.2) ma symetryczną strukturę niepewności, a Q jest zbiorem bez zakładek, tj. zachodzi (8.50), to dla każdego zespolonego z zbiór wartości $w(z, Q)$ jest wypukłym wielobokiem, przy czym jego boki są odwzorowaniem krawędzi zbioru Q . Dowód twierdzenia wynika zatem bezpośrednio z twierdzenia krawędziowego 7.1. $\square$

Weźmy pod uwagę układ regulacji automatycznej o schemacie blokowym pokazanym na rysunku 2.2, gdzie $C(s) = L(s)/M(s)$ jest transmitancją operatorową korektora, zaś

$$G(s, q) = \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 + sq_k}, \quad q \in Q, \quad (8.51)$$

jest transmitancją operatorową wieloinercyjnego obiektu o niepewnych stałych czasowych, przy czym zbiór Q ma postać (8.3).

Wielomian charakterystyczny rozpatrywanego układu regulacji automatycznej ma postać

$$w(s, q) = L(s) + M(s) \prod_{k=1}^m (1 + sq_k), \quad q \in Q. \quad (8.52)$$

Jest on wielomianem o symetrycznej strukturze niepewności.

Nie zmniejszając ogólności rozważań założmy, że $M(s) \neq 0$ dla każdego s z brzegu obszaru D . Założmy ponadto, że wielomian nominalny rodziny (8.52) jest D -stabilny.

Z twierdzenia 8.5 wynika, że jeżeli zachodzą nierówności (8.50), to rodzina wielomianów (8.52) jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy są D -stabilne wszystkie wielomiany krawędziowe, odpowiadające poszczególnym krawędziom zbioru Q .

Podobny rezultat został podany między innymi w pracach [98, 99], w przypadku gdy D jest otwartą lewą półpłaszczyzną. Wykazano w nich ponadto, że jeżeli zachodzą nierówności (8.50), to przy badaniu odpornej L -stabilności rodziny (8.52) można ograniczyć się do badania L -stabilności tylko $2m$ odpowiednich

wielomianów krawędziowych, zamiast wszystkich takich wielomianów, których jest $m2^{m-1}$.

W pracach [98, 99] na bazie ogólniejszych rezultatów podano też warunki konieczne i wystarczające odpornej L -stabilności rodziny (8.52) w pewnych przypadkach szczególnych, w których zbiór wartości nie jest wypukłym wielobokiem, ale w których da się określić podzbiór testujący Q_t . Jeden z takich przypadków jest krótko omówiony poniżej.

Założmy, że przedziały zmian poszczególnych niepewnych parametrów są jednakowe, tzn.

$$Q = \{q: q_k \in [q^-, q^+], \quad k = 1, 2, \dots, m\}. \quad (8.53)$$

W pracy [99] wykazano, że przy badaniu odpornej L -stabilności rodziny wielomianów (8.52), (8.53), zbiorem testującym Q_t jest podzbiór złożony ze wszystkich krawędzi zbioru Q oraz z odcinka

$$\{q: q_1 = q_2 = \dots = q_m = q, \quad q \in [q^-, q^+]\}. \quad (8.54)$$

8.2.3.2. Rodzina wielomianów sprowadzalnych do postaci o wzajemnie niezależnej strukturze niepewności

Weźmy pod uwagę rodzinę wielomianów (8.1)–(8.3) stałego stopnia o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów i przyjmijmy, że nominalnymi wartościami niepewnych parametrów są wartości najmniejsze, tzn. $q_{k0} = q_k^-$, $k = 1, 2, \dots, m$. Wtedy $w_0(s) = w(s, q_0)$, gdzie $q_0 = [q_{10}, q_{20}, \dots, q_{m0}]^T$, jest wielomianem nominalnym tej rodziny. Założmy, że jest on D -stabilny.

Przez $\Delta q = [\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_m]^T$, gdzie $\Delta q_k \in [0, q_k^+ - q_k^-]$, $k = 1, 2, \dots, m$, oznaczymy wektor odchyłek niepewnych parametrów od ich wartości nominalnych.

Uwzględniając powyższe oznaczenia, wzory (8.1)–(8.3) można napisać w postaci

$$W(s, \Delta Q) = \{w(s, \Delta q): \Delta q \in \Delta Q\}, \quad (8.55)$$

gdzie

$$w(s, \Delta q) = w_0(s) + w_1(s, \Delta q), \quad (8.56)$$

$$w_1(s, \Delta q) = \sum_{i=0}^n a_i(\Delta q) s^i, \quad (8.57)$$

$$\Delta Q = \{\Delta q: \Delta q_k \in [0, q_k^+ - q_k^-], \quad k = 1, 2, \dots, m\}. \quad (8.58)$$

Aby opis (8.1)–(8.3) rodziny wielomianów sprowadzić do postaci (8.55)–(8.58), należy zastosować podstawienie $q_k = q_{k0} + \Delta q_k$, gdzie $q_{k0} = q_k^-$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Zapis rodziny wielomianów o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów w postaci (8.55)–(8.58) został zastosowany w pracy [121]. Wykazano w niej, że dla każdego zespolonego z zbiór wartości $w_1(z, \Delta Q) = \{w_1(z, \Delta q): \Delta q \in \Delta Q\}$ jest wypukłym wielobokiem, jeżeli wielomian (8.57) da się sprowadzić (poprzez odpowiednie grupowanie wyrazów i wyłączanie wspólnych czynników) do postaci, w której poszczególne czynniki zależne od odchyłek Δq_k , $k = 1, 2, \dots, m$, są wzajemnie niezależne.

Ze wzoru (8.56) wynika, że jeżeli dla każdego zespolonego z zbiór wartości $w_1(z, \Delta Q)$ jest wypukłym wielobokiem, to wtedy $w(z, \Delta Q) = \{w(z, \Delta q): \Delta q \in \Delta Q\}$ też jest wypukłym wielobokiem. W takim przypadku, warunki podane w lematkach 8.1 i 8.4 oraz w twierdzeniu 8.2 są koniecznymi i wystarczającymi odpornej D -stabilności rodziny (8.55), a więc i (8.1).

Uwzględniając rezultaty pracy [121], możemy sformułować podaną poniżej ogólną zasadę grupowania składników oraz metodę postępowania przy przekształcaniu wielomianu (8.57) o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów.

Weźmy pod uwagę dowolny wielomian $h(s, \Delta q)$ o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów, który będziemy dalej nazywać grupą składników.

Ogólna zasada grupowania składników w grupie składników (wielomianie) $h(s, \Delta q)$ jest następująca. Niech Δq_r będzie odchyłką, która występuje jako wspólny czynnik w $h(s, \Delta q)$ najczęściej. Zgrupujemy wszystkie składniki, w których występuje Δq_r , wyłączając tą odchyłkę. Niech Δq_k będzie odchyłką, która występuje najczęściej jako wspólny czynnik w pozostałych składnikach grupy

$h(s, \Delta q)$ i zgrupujemy te składniki, wyłączając Δq_k . Powtarzamy powyższą procedurę tak długo, aż zgrupujemy wszystkie składniki.

Metoda postępowania przy przekształcaniu wielomianu (8.57):

- 1) Zastosujemy podaną powyżej ogólną zasadę grupowania do wielomianu (8.57).
- 2) Zastosujemy ogólną zasadę grupowania oddzielnie do każdej z grup otrzymanych w kroku 1).
- 3) Zastosujemy ogólną zasadę grupowania oddzielnie do każdej z grup otrzymanych w kroku 2).
- 4) Procedurę powtarzamy tak długo, aż nie będzie wspólnych czynników w każdej z grup otrzymanych w kroku poprzednim.

Postać wielomianu $w_1(s, \Delta q)$, otrzymana w efekcie jego przekształcania zgodnie z powyższą metodą postępowania, może nie być jedyna. Aby stwierdzić, że zbiór wartości rodziny (8.55) jest wypukły dla każdego zespolonego z , wystarczy aby jedna z otrzymanych postaci miała wzajemnie niezależną strukturę niepewności, tzn. aby poszczególne czynniki zależne od odchyłek Δq_k , $k = 1, 2, \dots, m$, były wzajemnie niezależne.

Z powyższych rozważań i lematu 8.4 wynika poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 8.6. Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ będzie D -stabilny. Jeżeli wielomian (8.57) da się sprowadzić do postaci wielomianu o wzajemnie niezależnej strukturze niepewności, to rodzina wielomianów (8.55) (i też (8.1)) stałego stopnia o współczynnikach wieloliniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$F(y) > 0, \quad \forall y \in Y, \quad (8.59)$$

przy czym funkcję testującą $F(y)$ wyznacza się ze wzorów

$$F(y) = \pi - \phi(y), \quad (8.60)$$

$$\phi(y) = \max\{|\arg(\tilde{p}_r(f(y))) - \arg(\tilde{p}_k(f(y)))| : r, k = 1, 2, \dots, K, \quad r < k\}, \quad (8.61)$$

gdzie $\tilde{p}_k(s) = p_k(s) / w_0(s)$, $k = 1, 2, \dots, K$, są to unormowane wielomiany wierzchołkowe rodziny (8.55), zaś $w_0(s)$ jest wielomianem nominalnym tej rodziny. $\square$

Przykład 8.6 [121]. Należy zbadać odporną L -stabilność rodziny wielomianów (8.55), gdzie wielomian $w(s, \Delta q)$ ma postać (8.56), przy czym

$$w_0(s) = s^4 + 9s^3 + 31s^2 + 49s + 30 \quad (8.62)$$

jest L -stabilnym wielomianem nominalnym, zaś

$$w_1(s, \Delta q) = \Delta q_1 s^4 + \Delta q_1 \Delta q_2 (s^2 + 2s + 1) + \Delta q_3 \Delta q_4 \Delta q_5 (s^2 + 1) + \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_6 (s + 2) + \Delta q_3, \quad (8.63)$$

gdzie $\Delta q_1 \in [0, 3]$, $\Delta q_2 \in [0, 3.2]$, $\Delta q_3 \in [0, 4]$, $\Delta q_4 \in [0, 5]$, $\Delta q_5 \in [0, 7]$, $\Delta q_6 \in [0, 5]$.

Postać (8.63) wielomianu o niepewnych współczynnikach nie ma wzajemnie niezależnej struktury niepewności, bo czynniki zależne od odchyłek Δq_k , $k = 1, 2, \dots, 6$, nie są wzajemnie niezależne. Na przykład czynnik Δq_1 występuje w pierwszym, drugim i czwartym składniku, Δq_2 występuje w drugim i czwartym składniku itd. Na podstawie postaci (8.63) nie możemy więc stwierdzić, czy zbiór wartości $w_1(z, \Delta Q)$ jest wypukłym wielobokiem czy też nie. Wobec tego zastosujemy powyższą metodę postępowania przy przekształcaniu wielomianu (8.63).

W wielomianie (8.63) wspólny czynnik Δq_1 występuje w pierwszym, drugim i czwartym składniku. Te trzy składniki tworzą pierwszą grupę. Wspólny czynnik Δq_3 występuje w trzecim i piątym składniku. Należy więc je zgrupować tworząc drugą grupę składników. W efekcie, zgodnie z krokiem 1) metody postępowania, otrzymamy

$$w_1(s, \Delta q) = \Delta q_1 [s^4 + \Delta q_2 (s^2 + 2s + 1) + \Delta q_2 \Delta q_6 (s + 2)] + \Delta q_3 [\Delta q_4 \Delta q_5 (s^2 + 1) + 1].$$

W powyższym wielomianie mamy dwie grupy składników. Każda z nich jest ujęta w nawiasie kwadratowym. W pierwszej grupie w składnikach: drugim i trzecim występuje wspólny czynnik Δq_2 . Zgodnie z krokiem 2) te składniki należy zgrupować wyłączając Δq_2 . Druga grupa składników nie ma wspólnego czynnika, wobec tego grupowania nie przeprowadzamy. Efektem grupowania zgodnie z krokiem 2) jest poniższa postać wielomianu (8.63)

$$w_1(s, \Delta q) = \Delta q_1[s^4 + \Delta q_2[(s^2 + 2s + 1) + \Delta q_6(s + 2)]] + \Delta q_3[\Delta q_4 \Delta q_5(s^2 + 1) + 1]. \quad (8.64)$$

Ponieważ w wielomianie (8.64) w każdej z grup, otrzymanych w kroku 2), nie ma już wspólnych czynników, kończymy procedurę grupowania. Zauważmy, że w (8.64) poszczególnymi czynnikami zależnymi od odchyłek są: Δq_1 , Δq_2 , Δq_6 , Δq_3 i $\Delta q_4 \Delta q_5$. Ponieważ są one wzajemnie niezależne, zbiór wartości wielomianu (8.64), a więc i wielomianu (8.56), jest wypukłym wielobokiem dla każdego zespolonego z .

Do badania odpornej L -stabilności zastosujemy twierdzenie 8.6. Wyznaczając wielomiany wierzchołkowe $p_r(s)$, $r = 1, 2, \dots, K = 2^6 = 64$, odpowiadające poszczególnym wierzchołkom zbioru ΔQ , a następnie przebieg funkcji testującej $F(y)$ na podstawie wzorów (8.60) i (8.61) (przy $w_0(s)$ w postaci (8.62)) otrzymamy ujemną minimalną wartość funkcji testującej $F(y)$. Warunek (8.59) nie jest więc spełniony. Z twierdzenia 8.6 wynika zatem, że rozpatrywana rodzina wielomianów nie jest odpornie L -stabilna.

W pracy [121] na bazie sformułowanej tam metody badania odpornej D -stabilności, odmiennej od podanej w twierdzenie 8.6, błędnie stwierdzono, że rozpatrywana rodzina wielomianów jest odpornie L -stabilna.

Łatwo sprawdzić, że rozpatrywana rodzina wielomianów nie jest L -stabilna np. dla $\Delta q_1 = \Delta q_2 = 3$, $\Delta q_3 = 4$, $\Delta q_4 = 5$, $\Delta q_5 = 0$, $\Delta q_6 = 5$, co potwierdza powyższy rezultat, otrzymany na bazie twierdzenie 8.6. $\square$

9. ODPORNA STABILNOŚĆ RODZINY MACIERZY STANU

W literaturze najczęściej rozpatruje się problem odpornej L -stabilności oraz K -stabilności rodziny macierzy stanu, których elementy zależą liniowo od niepewnych parametrów.

Weźmy pod uwagę rodzinę macierzy stanu (o wymiarach $n \times n$) o elementach zależnych liniowo od niepewnych parametrów, w postaci

$$A(Q) = \{A(q) : q \in Q\}, \quad (9.1)$$

gdzie

$$A(q) = A_0 + \sum_{k=1}^m q_k E_k, \quad (9.2)$$

przy czym A_0 jest macierzą nominalną (odniesienia), E_k ($k = 1, 2, \dots, m$) są to znane stałe macierze, zaś

$$Q = \{q : q_k \in [q_k^-, q_k^+], 0 > q_k^- < q_k^+ > 0, k = 1, 2, \dots, m\} \quad (9.3)$$

jest zbiorem odchyłek niepewnych parametrów od ich wartości nominalnych.

W przypadku ogólnym współczynniki wielomianu charakterystycznego macierzy (9.2) są wielomianowymi funkcjami niepewnych parametrów.

Zbiór Q jest m -wymiarowym prostopadłościem. Ma on $K = 2^m$ wierzchołków. Każdemu wierzchołkowi q_k ($k = 1, 2, \dots, K$) tego zbioru odpowiada macierz wierzchołkowa $A_k = A(q_k)$.

Podobnie jak w przypadku wielomianów możemy wykazać, że rodzinę macierzy (9.1) można przedstawić w postaci wierzchołkowego zbioru macierzy

$$\begin{aligned}
A_w &= \text{conv}\{A_1, A_2, \dots, A_K\} \\
&= \{A: A = \sum_{k=1}^K \lambda_k A_k, \sum_{k=1}^K \lambda_k = 1, \lambda_k \in [0, 1], k = 1, 2, \dots, K\}.
\end{aligned} \quad (9.4)$$

Przypadkiem szczególnym rodziny macierzy (9.1) o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów jest rodzina macierzy, zwana macierzą przedziałową, w postaci

$$[B, C] = \{A = [a_{ij}]: b_{ij} \leq a_{ij} \leq c_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}, \quad (9.5)$$

gdzie $B = [b_{ij}]$ i $C = [c_{ij}]$ są to znane macierze.

Współczynniki wielomianu charakterystycznego macierzy przedziałowej (9.5) są wieloliniowymi funkcjami niepewnych elementów a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Macierz przedziałowa (9.5) ma w przypadku ogólnym $m = n^2$ niepewnych elementów, będących jednocześnie niepewnymi parametrami.

W pracy [23], uogólniając rezultaty pracy [46] (tzw. słabe twierdzenie Charitonowa omówione w początkowej części punktu 6.1.1), wykazano, że L -stabilność wszystkich macierzy wierzchołkowych jest warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej L -stabilności macierzy przedziałowej (9.5). Potem okazało się, że ten warunek jest tylko konieczny w przypadku ogólnym [16]. Natomiast jest on konieczny i wystarczający dla macierzy przedziałowych symetrycznych [109]. Podobnie, w pracy [73] wykazano, że K -stabilność wszystkich macierzy wierzchołkowych jest warunkiem koniecznym i wystarczającym odpornej K -stabilności macierzy przedziałowej (9.5). Ten rezultat okazał się jednak błędny w przypadku ogólnym [114]. Pozostaje on prawdziwy tylko w przypadku macierzy przedziałowych symetrycznych [115].

Takich błędnych rezultatów w teorii odpornej stabilności macierzy przedziałowych było więcej, patrz np. [97] i [28], czy też [9] i [116, 129].

W pracy [16] na bazie kontrprzykładu pokazano, że dla rodziny macierzy (9.1) (czyli równoważnie, dla wierzchołkowego zbioru macierzy (9.4)) nie istnieje kryterium typu twierdzenia krawędziowego 7.1, bowiem L -stabilność wszystkich macierzy $A_{rk}(\lambda) = (1 - \lambda)A_r + \lambda A_k$, $\lambda \in [0, 1]$, $r, k = 1, 2, \dots, K$, $r < k$, nie jest warunkiem dostatecznym (a tylko koniecznym) odpornej L -stabilności tej rodziny.

W literaturze analizując problem odpornej stabilności rodziny macierzy stanu o niepewnych elementach najczęściej rozpatruje się problem odpornej L -sta-

bilności oraz K -stabilności rodziny macierzy (9.1) (o elementach zależnych liniowo od niepewnych parametrów) oraz wierzchołkowego zbioru macierzy, w postaci (9.4). Oddzielnie rozpatruje się problem odpornej L -stabilności oraz K -stabilności macierzy przedziałowej (9.5).

W niniejszym rozdziale zostaną przedstawione wybrane metody badania odpornej stabilności wyżej wymienionych rodzin macierzy stanu o niepewnych elementach.

Dla rzeczywistej kwadratowej macierzy X o wymiarach $n \times n$ będziemy stosować następujące oznaczenia:

- $|X|$ – macierz, której elementami są moduły poszczególnych elementów macierzy X ,
- $X_s = (X^T + X) / 2$ – część symetryczna macierzy X ,
- $s_i(X)$ – wartości własne macierzy X ,
- $\sigma_{\max}(X) = \max_i \sqrt{s_i(X^T X)}$ – największa wartość singularna (osobliwa) macierzy X ,
- $\rho(X) = \max_i |s_i(X)|$ – promień spektralny macierzy X .

9.1. Odporna stabilność rodziny macierzy o elementach liniowo zależnych od niepewnych parametrów

W pracy [85] (patrz też [21]) wykazano, że jeżeli $\text{rząd}(E_k) = 1$ dla $k = 1, 2, \dots, m$, to współczynniki wielomianu charakterystycznego macierzy (9.2) są wieloliniowymi funkcjami niepewnych parametrów. W takim przypadku do badania odpornej D -stabilności rodziny macierzy (9.1) można więc stosować warunki dostateczne podane w punkcie 8.2 niniejszej pracy, a w szczególności lemat 8.4.

Z powyższych rozważań i lematu 8.4 wynika poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 9.1. Niech macierz nominalna A_0 będzie D -stabilna. Jeżeli $\text{rząd}(E_k) = 1$ dla $k = 1, 2, \dots, m$, to rodzina macierzy (9.1) o elementach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie D -stabilna, jeżeli

$$F(y) > 0, \quad \forall y \in Y, \quad (9.6)$$

gdzie funkcję testującą $F(y)$ wyznacza się ze wzorów

$$F(y) = \pi - \phi(y), \quad (9.7)$$

$$\phi(y) = \max\{|\arg(\tilde{p}_r(f(y))) - \arg(\tilde{p}_k(f(y)))| : r, k = 1, 2, \dots, K, r < k\}, \quad (9.8)$$

przy czym $\arg(z) \in [-\pi, \pi)$ jest argumentem liczby zespolonej z , natomiast $\tilde{p}_k(s) = p_k(s) / w_0(s)$, $k = 1, 2, \dots, K$, oraz $p_k(s) = \det(sI - A_k)$, $w_0(s) = \det(sI - A_0)$. $\square$

Zauważmy, że stosowanie twierdzenia 9.1 nie wymaga znajomości wielomianu charakterystycznego macierzy (9.2).

Przykład 9.1. Należy zbadać odporną K -stabilność rodziny macierzy (9.1) przy $m = 2$, gdzie

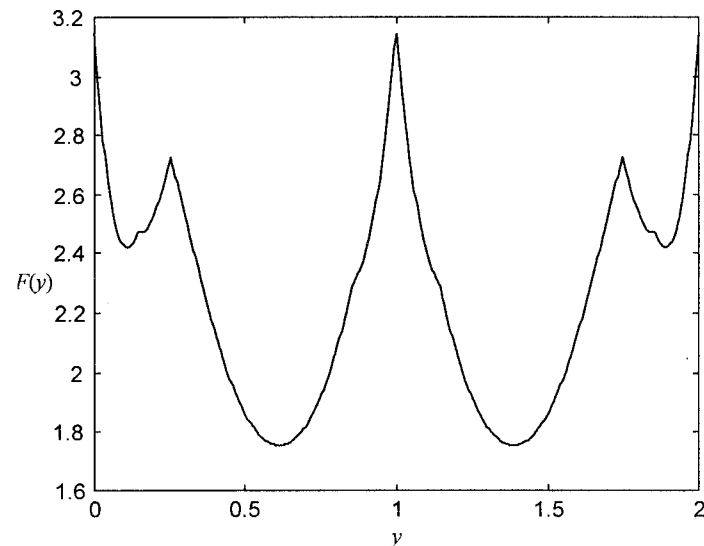
$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.3 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zaś $q_1 \in [-0.2, 0.2]$, $q_2 \in [-0.5, 0.5]$.

Macierz A_0 jest K -stabilna oraz $\text{rzęd}(E_k) = 1$ dla $k = 1, 2$. Oznacza to, że możemy stosować twierdzenie 9.1. Należy w tym celu wyznaczyć cztery wierzchołki zbioru Q , odpowiadające im macierze wierzchołkowe A_k , ich wielomiany charakterystyczne $p_k(s)$, $k = 1, 2, \dots, K = 4$, oraz wielomian nominalny $w_0(s) = \det(sI - A_0)$.

Obszarem D jest otwarte koło jednostkowe, którego brzeg ma opis parametryczny $f(y) = \exp(j\pi y)$, $y \in Y = [0, 2]$.

Wyznaczając na podstawie wzorów (9.7) i (9.8) funkcję testującą $F(y)$, $y \in Y = [0, 2]$, otrzymamy przebieg pokazany na rysunku 9.1. Wynika z niego, że warunek (9.6) jest spełniony. Oznacza to, że rozpatrywana rodzina macierzy jest odpornie K -stabilna, zgodnie z twierdzeniem 9.1. $\square$



Rys. 9.1. Wykres funkcji testującej $F(y)$ do przykładu 9.1

W przypadku ogólnym, gdy przynajmniej jedna z macierzy E_k jest macierzą rzędu wyższego niż jeden, twierdzenia 9.1 nie można stosować do badania odpornej D -stabilności rodziny macierzy (9.1). W takim przypadku, przy badaniu odpornej L -stabilności lub K -stabilności, należy stosować metody bazujące na warunkach dostatecznych wynikających z twierdzenia Lapunowa. Pozwalają one na wyznaczenie obszarów stabilności w przestrzeni niepewnych parametrów.

Twierdzenie 9.2 [139]. Niech macierz nominalna A_0 będzie L -stabilna. Rodzina macierzy (9.1) o elementach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie L -stabilna, jeżeli jest spełniony przynajmniej jeden z trzech poniższych warunków

$$\sum_{k=1}^m q_k^2 < 1 / \sigma_{\max}(P_e), \quad (9.9)$$

$$\sum_{k=1}^m |q_k| \sigma_{\max}(P_k) < 1, \quad (9.10)$$

$$\max_k |q_k| < 1 / \sigma_{\max}(\sum_{k=1}^m |P_k|), \quad (9.11)$$

gdzie macierz $\mathbf{P}$ jest rozwiązaniem równania Lapunowa

$$\mathbf{A}_0^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_0 = -2\mathbf{I}, \quad (9.12)$$

natomiast

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{E}_k^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{E}_k) / 2, \quad \mathbf{P}_e = [\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_m]. \quad (9.13)$$

Dowód. Jeżeli macierz $\mathbf{A}_0$ jest L -stabilna, to istnieje symetryczna dodatnio określona macierz $\mathbf{P}$ będąca rozwiązaniem równania Lapunowa (9.12).

Z lematu 4.5 wynika, że rodzina macierzy (9.1) jest odpornie L -stabilna, jeżeli

$$\sum_{k=1}^m q_k \mathbf{P}_k - \mathbf{I} < 0,$$

czyli

$$\sigma_{\max} \left(\sum_{k=1}^m q_k \mathbf{P}_k \right) < 1. \quad (9.14)$$

Należy więc wykazać, że jeżeli zachodzi przynajmniej jeden z warunków (9.9)–(9.11), to też zachodzi (9.14).

Ponieważ

$$\sum_{k=1}^m q_k \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_e [q_1 \mathbf{I}, q_2 \mathbf{I}, \dots, q_m \mathbf{I}]^T,$$

zachodzi nierówność

$$\sigma_{\max}(\mathbf{P}_e) \left(\sum_{k=1}^m q_k^2 \right)^{1/2} \geq \sigma_{\max} \left(\sum_{k=1}^m q_k \mathbf{P}_k \right).$$

Oznacza to, że jeżeli zachodzi (9.9), to też zachodzi (9.14).

Z zależności

$$\sum_{k=1}^m |q_k| \sigma_{\max}(\mathbf{P}_k) \geq \sigma_{\max} \left(\sum_{k=1}^m q_k \mathbf{P}_k \right)$$

wynika, że warunek (9.14) jest spełniony przy spełnieniu warunku (9.10).

Ponieważ

$$\max_j |q_j| \sigma_{\max} \left(\sum_{k=1}^m |\mathbf{P}_k| \right) \geq \sigma_{\max} \left(\sum_{k=1}^m q_k \mathbf{P}_k \right)$$

warunek (9.11) implikuje warunek (9.14).

Inną metodę wyznaczania obszaru odpornej L -stabilności rodziny macierzy (9.1) w przestrzeni niepewnych parametrów zaproponowano w pracach [66, 132]. Podano w nich metody wyznaczania wartości η (w terminach promienia spektralnego odpowiednich macierzy) takiej, dla której rodzina macierzy (9.1), o elementach liniowo zależnych od niepewnych parametrów (przy założeniu, że macierz $\mathbf{A}_0$ jest L -stabilna), jest odpornie L -stabilna dla $\max_k |q_k| < \eta$. Za wartość η można przyjąć liczby η_1 , η_{1k} , η_2 lub η_{2k} , wyznaczone z poniższych wzorów:

$$1) \quad \eta_1 = \left(\rho \left\{ \sum_{k=1}^m |\bar{\mathbf{E}}_k \bar{\mathbf{A}}_0^{-1}| \right\} \right)^{-1}, \quad (9.15)$$

$$2) \quad \eta_{1k} = \left(\rho \left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{k-1} |\bar{\mathbf{E}}_k \bar{\mathbf{A}}_0^{-1} \bar{\mathbf{E}}_i \bar{\mathbf{A}}_0^{-1} + \bar{\mathbf{E}}_i \bar{\mathbf{A}}_0^{-1} \bar{\mathbf{E}}_k \bar{\mathbf{A}}_0^{-1}| + \sum_{k=1}^m |(\bar{\mathbf{E}}_k \bar{\mathbf{A}}_0^{-1})^2| \right\} \right)^{-1/2}, \quad (9.16)$$

gdzie $\bar{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{A}_0 \oplus \mathbf{A}_0$, $\bar{\mathbf{E}}_k = \mathbf{E}_k \oplus \mathbf{E}_k$, zaś $\oplus$ jest symbolem sumy Kroneckera,

3) $\eta_2 = \min(\eta_0, \eta_d)$, gdzie

$$\eta_0 = \left(\rho \left\{ \sum_{k=1}^m |\mathbf{E}_k \mathbf{A}_0^{-1}| \right\} \right)^{-1}, \quad \eta_d = \left(\rho \left\{ \sum_{k=1}^m |\tilde{\mathbf{E}}_k \tilde{\mathbf{A}}_0^{-1}| \right\} \right)^{-1}, \quad (9.17)$$

4) $\eta_{2k} = \min(\eta_{0k}, \eta_{dk})$, gdzie

$$\eta_{0k} = \left(\rho \left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{k-1} \left| E_k A_0^{-1} E_i A_0^{-1} + E_i A_0^{-1} E_k A_0^{-1} \right| + \sum_{k=1}^m \left| (E_k A_0^{-1})^2 \right| \right\} \right)^{-1/2}, \quad (9.18)$$

$$\eta_{dk} = \left(\rho \left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{k-1} \left| \tilde{E}_k \tilde{A}_0^{-1} \tilde{E}_i \tilde{A}_0^{-1} + \tilde{E}_i \tilde{A}_0^{-1} \tilde{E}_k \tilde{A}_0^{-1} \right| + \sum_{k=1}^m \left| (\tilde{E}_k \tilde{A}_0^{-1})^2 \right| \right\} \right)^{-1/2} \quad (9.19)$$

przy czym $\tilde{A}_0 = A_0 \bullet I_n + I_n \bullet A_0$, $\tilde{E}_k = E_k \bullet I_n + I_n \bullet E_k$, zaś symbol $\bullet$ oznacza iloczyn dwuprzemienny macierzy (patrz punkt 4.5).

Przykład 9.2. Należy określić, dla jakich wartości niepewnych parametrów q_1 i q_2 jest odpornie L -stabilna macierz stanu

$$A(q) = A_0 + q_1 E_1 + q_2 E_2, \quad (9.20)$$

gdzie

$$A_0 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (9.21)$$

przy czym macierz nominalna A_0 jest L -stabilna.

Stosując twierdzenie 9.2, na podstawie wzorów (9.9)–(9.11) otrzymamy następujące nierówności, określające dopuszczalne wartości niepewnych parametrów q_1 i q_2 :

$$q_1^2 + q_2^2 < 0.3378; \quad 2.6180|q_1| + 1.5248|q_2| < 1; \quad \max\{|q_1|, |q_2|\} < 0.2737.$$

Stosując natomiast wzory (9.15)–(9.19), odpowiednio otrzymamy

$$\max\{|q_1|, |q_2|\} < \eta_1 = 0.2962; \quad \max\{|q_1|, |q_2|\} < \eta_{1k} = 0.3433;$$

$$\max\{|q_1|, |q_2|\} < \eta_2 = \min(\eta_0, \eta_d) = \min\{0.3723, 1.5\} = 0.3723;$$

$$\max\{|q_1|, |q_2|\} < \eta_{2k} = \min(\eta_{0k}, \eta_{dk}) = \min\{0.3987, 0.5077\} = 0.3987.$$

Zauważmy, że najlepsze (w sensie „największego” zbioru) oszacowanie zbioru wartości niepewnych parametrów, przy którym jest odpornie L -stabilna macierz (9.20), daje $\eta_{2k} = \min(\eta_{0k}, \eta_{dk})$. $\square$

Problem odpornej K -stabilności rodziny macierzy (9.1) o elementach liniowo zależnych od niepewnych parametrów był rozpatrywany w pracy [83]. Udowodniono w niej szereg warunków dostatecznych, w tym podobne w sformułowaniu do podanych w twierdzeniu 9.2.

Twierdzenie 9.3 [83]. Niech macierz nominalna A_0 będzie K -stabilna. Rodzina macierzy (9.1) o elementach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie K -stabilna, jeżeli jest spełniony przynajmniej jeden z trzech poniższych warunków:

$$\sum_{k=1}^m q_k^2 < 1 / \sigma_{\max} \left(\sum_{k=1}^m \tilde{H}_k^T \tilde{H}_k \right), \quad (9.22)$$

$$\sum_{k=1}^m |q_k| \sigma_{\max}(\tilde{H}_k) < 1, \quad (9.23)$$

$$\max_k |q_k| < 1 / \sigma_{\max} \left(\sum_{k=1}^m |\tilde{H}_k| \right), \quad (9.24)$$

gdzie

$$\tilde{H}_k = \begin{bmatrix} 0 & P^{1/2} \otimes P^{1/2} E_k + E_k^T P^{1/2} \otimes P^{1/2} \\ P^{1/2} \otimes E_k^T P^{1/2} + P^{1/2} E_k \otimes P^{1/2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (9.25)$$

$\otimes$ jest symbolem iloczynu Kroneckera, zaś macierz P jest rozwiązaniem równania Lapunowa $A_0^T P A_0 - P = -I$. $\square$

Przykład 9.3. Należy określić, dla jakich wartości niepewnych parametrów q_1 i q_2 jest odpornie K -stabilna macierz stanu rozpatrywana w przykładzie 9.1.

Stosując twierdzenie 9.3, na podstawie wzorów (9.22)–(9.24) otrzymamy następujące nierówności, określające dopuszczalne wartości niepewnych parametrów q_1 i q_2 :

$$q_1^2 + q_2^2 < 0.0376; \quad 4.0440|q_1| + 4.6932|q_2| < 1; \quad \max\{|q_1|, |q_2|\} < 0.1344.$$

Zauważmy, że wyznaczone dopuszczalne wartości niepewnych parametrów q_1 i q_2 są znacznie mniejsze od zadanych w przykładzie 9.1. $\square$

Problemowi odpornej L -stabilności wierzchołkowego zbioru macierzy (9.4) są poświęcone prace [57, 59, 100].

Oznaczmy przez A_0 macierz nominalną zbioru (9.4), wyznaczoną np. ze wzoru

$$A_0 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K A_k, \quad (9.26)$$

oraz wprowadźmy oznaczenie $M_k = A_k - A_0$, $k=1,2,\dots,K$.

Wykorzystując rezultaty pracy [57] udowodnimy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 9.4. Niech macierz nominalna A_0 będzie L -stabilna. Wierzchołkowy zbiór macierzy (9.4) jest odpornie L -stabilny, jeżeli $\mu(P_k) < 2$ dla $k=1,2,\dots,K$, gdzie $P_k = M_k^T P + P M_k$, zaś P jest rozwiązaniem równania Lapunowa (9.12), natomiast $\mu(P_k) = s_{\max}([P_k^T + P_k]/2) = s_{\max}(P_k)$ jest miarą symetrycznej macierzy P_k .

Dowód. Dowolną macierz A należącą do zbioru (9.4) można przedstawić w postaci

$$A = A_0 + \sum_{k=1}^K \lambda_k M_k, \quad \lambda_k \in [0, 1], \quad \sum_{k=1}^K \lambda_k = 1. \quad (9.27)$$

Postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 9.2 (tzn. stosując lemat 4.5) możemy wykazać, że rodzina macierzy (9.4) jest odpornie L -stabilna, jeżeli

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k P_k - 2I < 0, \quad (9.28)$$

czyli $\mu(\sum_{k=1}^m \lambda_k P_k) - 2 < 0$. To zaś oznacza, że jeżeli $\mu(P_k) < 2$ dla $k=1,2,\dots,K$, to zachodzi też (9.28) i rodzina macierzy (9.4) jest odpornie L -stabilna. $\square$

Przykład 9.4. Weźmy pod uwagę macierz stanu (9.20), rozpatrywaną w przykładzie 9.2 i załóżmy, że $q_1 = q_2 = q$, przy czym $q \in [-\beta, \beta]$. Z przykładu 9.2 wynika, że macierz (9.20) jest odpornie L -stabilna dla $|q| < 0.3987$. Wobec tego przyjmijmy $\beta = 0.3$.

Odporna L -stabilność rozpatrywanej macierzy przy $\beta = 0.3$ jest równoważna z odporną L -stabilnością wierzchołkowego zbioru macierzy $A_w = \text{conv}\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, gdzie

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3.3 & -2 \\ 0.7 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3.3 & -2 \\ 1.3 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -2.7 & -2 \\ 1.3 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -2.7 & -2 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

są to macierze wierzchołkowe, odpowiadające ekstremalnym wartościom niepewnych parametrów q_1 i q_2 . Badając na podstawie twierdzenia 9.4 odporną L -stabilność zbioru A_w , otrzymamy: $\mu(P_1) = 0.0924$, $\mu(P_2) = 0.1246$, $\mu(P_3) = 2.1924$, $\mu(P_4) = 1.6246$. Ponieważ warunki twierdzenia 9.4 nie są spełnione, o odpornej L -stabilności wierzchołkowego zbioru macierzy A_w i rozpatrywanej macierzy przy $\beta = 0.3$ nic nie można powiedzieć.

Przyjmując różne wartości $0 < \beta < 0.3$, wyznaczając macierze wierzchołkowe A_k ($k=1,\dots,4$) i dokonując obliczeń zgodnie z twierdzeniem 9.4 otrzymamy wynik, w którym warunki tego twierdzenia są spełnione dla $\beta = 0.273$, wtedy bowiem $\mu(P_1) = 0.0841$, $\mu(P_2) = 0.1134$, $\mu(P_3) = 1.9951$, $\mu(P_4) = 1.4784$. Z twierdzenia 9.4 wynika zatem, że rozpatrywana macierz jest odpornie L -stabilna dla $q \in [-\beta, \beta]$, gdzie $\beta = 0.273$. $\square$

9.2. Odporna stabilność macierzy przedziałowych

Macierz przedziałowa

$$[B, C] = \{A = [a_{ij}]: b_{ij} \leq a_{ij} \leq c_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n\}, \quad (9.29)$$

gdzie $B = [b_{ij}]$ i $C = [c_{ij}]$ są to znane macierze, jest przypadkiem szczególnym rodziny macierzy (9.1) o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów. Ma ona w przypadku ogólnym n^2 niepewnych elementów. Z tego powodu stosowanie do badania odpornej stabilności macierzy przedziałowych metod znanych z teorii odpornej stabilności macierzy o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów (podanych w punkcie 9.1) nie jest efektywne w przypadku ogólnym.

Warunki dostateczne odpornej L -stabilności macierzy przedziałowej (9.29) można sformułować na bazie warunku dostatecznego odpornej L -stabilności macierzy $A_0 + E$, gdzie A_0 jest L -stabilną macierzą nominalną, zaś E jest macierzą perturbacji (błędu), której elementy mogą być zależne od czasu. Problem odpornej L -stabilności takiej macierzy był rozpatrywany w pracach [130, 133].

Wprowadźmy oznaczenia

$$E = [e_{ij}], \quad e_{ij} \leq |e_{ij}| = \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon = \max_{i,j} \varepsilon_{ij}, \quad U = [u_{ij}], \quad u_{ij} = \varepsilon_{ij} / \varepsilon. \quad (9.30)$$

Twierdzenie 9.5 [130]. Macierz $A_0 + E$ jest odpornie L -stabilna, jeżeli macierz A_0 jest L -stabilna i

$$\varepsilon < 1 / \sigma_{\max}[(|P|U)_s], \quad (9.31)$$

gdzie P jest rozwiązaniem równania Lapunowa (9.12).

Jeżeli są spełnione warunki twierdzenia 9.5, to macierz przedziałowa $[A_0 - \varepsilon U, A_0 + \varepsilon U]$ jest odpornie L -stabilna dla każdego dodatniego ε spełniającego nierówność (9.31).

Na bazie twierdzenia 9.5 można sformułować proste warunki dostateczne odpornej L -stabilności macierzy przedziałowej (9.29), podane w poniższych lematach ([72, 131]).

Wprowadźmy oznaczenia

$$A_0 = (B + C) / 2, \quad D = (C - B) / 2, \quad d = \max_{ij} d_{ij}, \quad U = D / d. \quad (9.32)$$

Lemat 9.1. Macierz przedziałowa (9.29) jest odpornie L -stabilna, jeżeli macierz A_0 jest L -stabilna i

$$d < \mu_0 = 1 / \sigma_{\max}[(|P|U)_s], \quad (9.33)$$

gdzie P jest rozwiązaniem równania Lapunowa (9.12), natomiast odpowiednie macierze wyznacza się ze wzorów (9.32). $\square$

Przyjmując za macierz nominalną A_0 macierz B lub macierz C , na bazie twierdzenia 9.5 otrzymamy poniższe warunki dostateczne odpornej L -stabilności macierzy przedziałowej (9.29) [131].

Wprowadźmy oznaczenia

$$D = (C - B), \quad d = \max_{ij} d_{ij}, \quad U = D / d. \quad (9.34)$$

Lemat 9.2. Macierz przedziałowa (9.29) jest odpornie L -stabilna, jeżeli macierz B jest L -stabilna i

$$d < \mu_B = 1 / \sigma_{\max}[(|P_B|U)_s], \quad (9.35)$$

gdzie P_B jest rozwiązaniem równania Lapunowa (9.12) dla $A_0 = B$, zaś d i macierz U wyznacza się ze wzorów (9.34). $\square$

Jeżeli jest spełniony warunek (9.35), to macierz przedziałowa $[B - dU, C]$ jest odpornie L -stabilna.

Lemat 9.3. Macierz przedziałowa (9.29) jest odpornie L -stabilna, jeżeli macierz C jest L -stabilna i

$$d < \mu_C = 1 / \sigma_{\max}[(P_C|U)_s], \quad (9.36)$$

gdzie P_C jest rozwiązaniem równania Lapunowa (9.12) dla $A_0 = C$, zaś d i macierz U wyznacza się ze wzorów (9.34). $\square$

Jeżeli jest spełniony warunek (9.36), to macierz przedziałowa $[B, C + dU]$ jest odpornie L -stabilna.

Przykład 9.5. Należy zbadać odporną L -stabilność macierzy przedziałowej $[B, C]$, gdzie

$$B = \begin{bmatrix} -3.2 & -2.2 \\ 0.8 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stosując lematy 9.1, 9.2 i 9.3, odpowiednio otrzymamy: $d = 0.1 < \mu_0 = 0.27$, $d = 0.2 < \mu_B = 0.3052$ oraz $d = 0.2 < \mu_C = 0.2361$. Oznacza to, że rozpatrywana macierz przedziałowa jest odpornie L -stabilna, bowiem są spełnione warunki dostateczne (9.33), (9.35) i (9.36). $\square$

W pracy [125] podano metodę i algorytm obliczeniowy, służący do badania odpornej L -stabilności oraz odpornej K -stabilności macierzy przedziałowej (9.29). Poniżej przedstawimy główne rezultaty tej pracy.

Wprowadźmy oznaczenie

$$\alpha(A) = \max\{\|A\|_1, \|A\|_\infty\}, \quad (9.37)$$

gdzie odpowiednie normy macierzy są zdefiniowane następująco:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (9.38)$$

Założenie 1. Dla macierzy przedziałowej $[B, C]$ założmy, że:

- 1) macierz $A_0 = (B + C) / 2$ jest L -stabilna,
- 2) $\alpha(C - B) < (1 / \|P\|_\infty)$,

gdzie P jest symetryczną dodatnio określoną macierzą, będącą rozwiązaniem równania Lapunowa $A_0^T P + P A_0 = -I$. $\square$

Założenie 2. Dla macierzy przedziałowej $[B, C]$ założmy, że

- 1) macierz $A_0 = (B + C) / 2$ jest K -stabilna,
- 2) $0.5\alpha(C - B) < [(\alpha(A_0))^2 + (1 / \|P\|_\infty)]^{1/2} - \alpha(A_0)$,

gdzie P jest symetryczną dodatnio określoną macierzą, będącą rozwiązaniem równania Lapunowa $A_0^T P A_0 - P = -I$. $\square$

Główne rezultaty pracy [125] są podane w poniższym lemacie i twierdzeniach.

Lemat 9.4. Jeżeli macierz przedziałowa $[B, C]$ spełnia założenie 1 (założenie 2), to jest ona odpornie L -stabilna (K -stabilna). $\square$

Twierdzenie 9.6. Macierz przedziałowa $[B, C]$ jest odpornie L -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona liczba podmacierzy przedziałowych $[B_i, C_i] \subset [B, C]$, $1 \leq i \leq k$, dla których

$$[B, C] = \bigcup_{i=1}^k [B_i, C_i] \quad (9.41)$$

i dla każdego $1 \leq i \leq k$ podmacierz przedziałowa $[B_i, C_i]$ spełnia założenie 1. $\square$

Twierdzenie 9.7. Macierz przedziałowa $[B, C]$ jest odpornie K -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona liczba podmacierzy przedziałowych $[B_i, C_i] \subset [B, C]$, $1 \leq i \leq k$, takich, dla których zachodzi (9.41) i dla każdego $1 \leq i \leq k$ podmacierz przedziałowa $[B_i, C_i]$ spełnia założenie 2. $\square$

Dwa obliczeniowe algorytmy, podane w [125] na bazie powyższych twierdzeń, pozwalają w skończonej liczbie kroków stwierdzić albo odporną L -stabilność (K -stabilność) macierzy przedziałowej $[B, C]$, albo znajdują należącą do

tej rodziny macierz, która nie jest L -stabilna (K -stabilna). W przypadku ogólnym liczba tych kroków może być dosyć duża.

9.3. Uwagi końcowe

Problem badania odpornej stabilności rodziny macierzy stanu o niepewnych elementach był rozpatrywany w wielu pracach. W punktach 9.1 i 9.2 podano tylko wybrane rezultaty. Dlatego też poniżej podamy krótki przegląd innych prac poświęconych temu problemowi.

Warunki dostateczne podane w twierdzeniu 9.2 można osłabić w sposób podany np. w pracach [93] i [106]. Należy w tym celu przyjmować w równaniu Lapunowa (9.12) inną (różną od $2I$) symetryczną dodatnio określoną macierz Q , np. o postaci $Q = Q_1 Q_2$, gdzie Q_1 i Q_2 są to macierze pełnego rzędu. Można też zamiast macierzy $A(q)$ o postaci (9.2) równoważnie rozpatrywać macierz $\bar{A}(q) = M^{-1}A(q)M$, gdzie M jest dowolną macierzą nieosobliwą. Problem doboru macierzy Q i M jest dyskutowany w wyżej wymienionych pracach. Opisane powyżej postępowanie pozwala na lepsze (niż na podstawie wzorów (9.9)–(9.11)) określenie obszaru odpornej L -stabilności w przestrzeni niepewnych parametrów. Problemowi określenia obszaru odpornej L -stabilności rodziny macierzy stanu o niepewnych elementach są też poświęcone prace [90, 101, 108, 113].

Problem odpornej L -stabilności rodziny macierzy (9.4) był rozpatrywany w pracy [100]. W podanej w niej metodzie wykorzystuje się podejście zastosowane w lemacie 4.6, sprowadzające problem odpornej L -stabilności tej rodziny do problemu odpornej nieosobliwości rodziny (4.74). Podobna metoda, służąca do badania odpornej stabilności macierzy o wielomianowej zależności jej elementów od niepewnych parametrów została podana w pracy [120].

Wiele prac poświęconych problemowi badania odpornej stabilności macierzy przedziałowych bazuje na metodzie Gerszgorina (opisanej np. w [81]). Należą do nich prace [29, 69, 116, 129], w których sformułowano szereg warunków dostatecznych, głównie odpornej L -stabilności macierzy przedziałowej (9.29). Ogólniejszy problem rozpatruje się w pracach [50] i [74]. Bada się w nich położenie wartości własnych macierzy przedziałowej (9.29) w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s < -h$, gdzie $h \geq 0$. W pracy [74] rozpatruje się ponadto położenie wartości własnych macierzy (9.29) wewnątrz okręgu o środku w początku płaszczyzny zmiennej zespolonej i o promieniu $r = 1 - h$, $0 \leq h < 1$.

Metoda Gerszgorina wymaga, aby elementy na głównej przekątnej macierzy (9.29) były ujemne, co znacznie ogranicza obszar jej zastosowań. Aby pozbyć się tego ograniczenia, stosuje się przekształcenie tej macierzy przez podobieństwo, aby uzyskać macierz o elementach ujemnych na głównej przekątnej. W pracy [9], stosując takie przekształcenie, sformułowano kryterium odpornej L -stabilności macierzy przedziałowej (9.29), które okazało się jednak błędne (np. [129]). Zostało ono poprawione w pracach [50] i [116].

W pracy [105] został podany algorytm obliczeniowy, który w skończonej liczbie kroków pozwala stwierdzić albo L -stabilność symetrycznej macierzy przedziałowej (9.29), albo znajduje macierz symetryczną, która nie jest L -stabilna. Można go też stosować do badania odpornej K -stabilności takiej macierzy. Wynika to z faktu, że symetryczna macierz przedziałowa (9.29) jest odpornie K -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy są odpornie L -stabilne dwie macierze symetryczne przedziałowe [115]: $[B - I, C - I]$ i $[-C - I, -B - I]$. Wymieniony powyżej algorytm może być też stosowany do badania odpornej L -stabilności macierzy przedziałowych niesymetrycznych, bowiem niesymetryczna macierz przedziałowa (9.29) jest odpornie L -stabilna, jeżeli jest odpornie L -stabilna macierz przedziałowa symetryczna $[(B + B^T)/2, (C + C^T)/2]$.

Inne warunki dostateczne, a w niektórych przypadkach konieczne i dostateczne, odpornej L -stabilności i K -stabilności macierzy przedziałowej (9.29) zostały podane w pracach [22, 107, 117]. W pracach [22, 107] wykorzystuje się między innymi teorię M -macierzy oraz teorię tzw. macierzy Morishimy.

W pracy [117] podano warunki dostateczne odpornej L -stabilności i K -stabilności macierzy przedziałowej (9.29), sformułowane między innymi dla nowych macierzy, które powstały w drodze transformacji macierzy przedziałowej z wykorzystaniem operacji zwanej iloczynem dwuprzemiennym macierzy (patrz punkt 4.5).

10. UWAGI KOŃCOWE

Praca jest poświęcona problemowi badania odpornej stabilności dynamicznych układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach. Rozpatrzono w niej ogólniejszy rodzaj stabilności niż stabilność asymptotyczna układów ciągłych i dyskretnych, a mianowicie tzw. D -stabilność. Układ liniowy stacjonarny jest D -stabilny, jeżeli wszystkie jego bieguny leżą w zadanym otwartym obszarze D na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Przypadkami szczególnymi D -stabilności jest stabilność asymptotyczna układów ciągłych (tzw. L -stabilność) oraz stabilność asymptotyczna układów dyskretnych (tzw. K -stabilność).

Ponieważ stabilność układu dynamicznego jest w pełni określona przez rozkład jego biegunów, w pracy rozpatrzono problem odpornej stabilności rodziny wielomianów charakterystycznych oraz rodziny macierzy stanu.

Zasadnicza część pracy jest poświęcona problemowi badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów charakterystycznych.

Istotną rolę w teorii odpornej D -stabilności rodziny wielomianów odgrywa pojęcie zbioru wartości lub unormowanego zbioru wartości (definicje 4.1 i 4.2) oraz tzw. warunek wykluczenia zera (twierdzenie 4.5 oraz lemat 4.1). Kryteria odpornej D -stabilności, podane w twierdzeniu 4.5 i w lemacie 4.1, są najbardziej ogólne. Są one prawdziwe dla rodziny wielomianów o współczynnikach będących ciągłymi funkcjami (liniowymi lub nieliniowymi) niepewnych parametrów. W przypadku ogólnym występują jednakże istotne trudności związane ze sprawdzeniem warunku wykluczenia zera, a przede wszystkim z wyznaczeniem zbioru wartości. Jest on zbiorem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, którego postać istotnie zależy od charakteru zależności współczynników wielomianu od niepewnych parametrów. Im bardziej złożona jest ta zależność, tym bardziej złożona jest postać zbioru wartości. W przypadku ogólnym brzegi zbioru wartości są krzywoliniowe, może też on nie być zbiorem jednospójnym. Złożoność postaci zbioru wartości ma istotny wpływ na trudności, jakie występują tak przy bezpośrednim sprawdzaniu warunku wykluczenia zera (za pomocą obliczeń kompute-

rowych z graficzną prezentacją wyników) jak i przy sprawdzaniu pośrednim (za pomocą odpowiednich metod).

Rozpatrywany w niniejszej pracy problem odpornej D -stabilności rodziny wielomianów sprowadza się (podobnie jak w literaturze) do sformułowania kryteriów (analitycznych lub graficznych) spełnienia warunku wykluczenia zera. Są one bowiem jednocześnie kryteriami odpornej D -stabilności rodziny wielomianów charakterystycznych.

W pracy rozpatrzono problem odpornej D -stabilności następujących rodzin wielomianów charakterystycznych:

- 1) wypukła kombinacja dwóch wielomianów (na płaszczyźnie zmiennej zespolonej zbiór wartości jest odcinkiem linii prostej),
- 2) rodzina wielomianów zwana wielomianem przedziałowym (zbiór wartości jest prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych na płaszczyźnie zmiennej zespolonej),
- 3) rodzina wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów (zbiór wartości jest wypukłym wielobokiem na płaszczyźnie zmiennej zespolonej),
- 4) rodzina wielomianów o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów (na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wypukła powłoka zbioru wartości jest wypukłym wielobokiem).

Warunki odpornej D -stabilności wyżej wymienionych rodzin wielomianów zostały podane w rozdziałach 5, 6, 7 i 8, odpowiednio. Są to warunki konieczne i wystarczające odpornej D -stabilności rodzin wymienionych w punktach 1), 2) i 3), natomiast są to w ogólności warunki dostateczne odpornej D -stabilności rodziny wymienionej w punkcie 4).

Rodzina wielomianów o współczynnikach zależnych wieloliniowo od niepewnych parametrów jest szczególnie interesująca z punktu widzenia zastosowań praktycznych. Na przykład wielomian charakterystyczny wieloinercyjnego obiektu o niepewnych stałych czasowych ma współczynniki wieloliniowo zależne od niepewnych parametrów. Dlatego też niezbędne są dalsze badania naukowe, których celem jest sformułowanie warunków koniecznych i wystarczających odpornej stabilności takiej rodziny wielomianów.

Do sprawdzania warunku wykluczenia zera wszystkich wyżej wymienionych rodzin wielomianów w pracy zaproponowano stosowanie ogólnych obliczeniowych metod, zwanych metodami funkcji testujących. Ułatwiają one znacznie badanie odpornej D -stabilności, szczególnie przy dużej liczbie niepewnych para-

metrów oraz w przypadku, gdy zbiór D jest sumą kilku jednospójnych rozłącznych podobszarów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Metody funkcji testujących mogą też być stosowane do badania odpornej D -stabilności rodziny macierzy o elementach zależnych liniowo od niepewnych parametrów w pewnych przypadkach szczególnych, podanych w rozdziale 8.

Ogólne kryterium odpornej D -stabilności rodziny wielomianów, podane w twierdzeniu 4.5 i lemacie 4.1, pozostaje też prawdziwe w przypadku rodziny quasi-wielomianów, będącej rodziną funkcji charakterystycznych dynamicznego układu liniowego stacjonarnego o niepewnych parametrach, ale ze znanymi opóźnieniami. W szczególności, twierdzenie krawędziowe 7.1 jest też prawdziwe dla rodziny quasi-wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów [63, 64]. W teorii stabilności układów z opóźnieniami rozpatruje się nie tylko stabilność przy ustalonych wielkościach opóźnień, ale także stabilność niezależnie od wielkości opóźnień czy też przy niedokładnie znanych opóźnieniach. Dlatego też, w dalszych badaniach naukowych należy dążyć do sformułowania warunków odpornej stabilności określonych rodzin quasi-wielomianów o niepewnych współczynnikach i również z niepewnymi opóźnieniami.

Problem odpornej D -stabilności rodziny macierzy można sprowadzić do problemu odpornej D -stabilności rodziny jej wielomianów charakterystycznych. Jednakże nie jest to dogodne w przypadku ogólnym, bowiem zależność współczynników wielomianu charakterystycznego od niepewnych parametrów jest bardziej złożona niż zależność elementów macierzy od tych parametrów. Ponadto wymagana jest znajomość analitycznej postaci wielomianu charakterystycznego macierzy, której elementy są funkcjami niepewnych parametrów.

Z tego powodu, w przypadku ogólnym, do badania odpornej stabilności rodziny macierzy stanu (głównie L -stabilności i K -stabilności) stosuje się inne metody, opisane w punktach 4.5 i 5.2 oraz w rozdziale 9. Zdecydowana ich większość bazuje na metodzie Lapunowa. Są to jednak w przypadku ogólnym warunki typu dostatecznego. Dlatego też niezbędne są dalsze badania naukowe mające na celu sformułowanie warunków koniecznych i wystarczających odpornej stabilności rodziny macierzy stanu o niepewnych elementach.

Praca zawiera zwarte opracowanie najważniejszych rezultatów przedstawionych w literaturze (głównie zagranicznej) poświęconej problemowi badania odpornej stabilności układów dynamicznych ze strukturalną niepewnością, w tym własne rezultaty autora, szczególnie w zakresie wyznaczania dopuszczalnych

przedziałów zmian współczynników wielomianu przedziałowego oraz w zakresie metod funkcji testujących służących do badania odpornej D -stabilności rodziny wielomianów o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów oraz wieloliniowo, a także określonych rodzin macierzy o elementach zależnych liniowo od niepewnych parametrów.

Poszczególne metody, służące do badania odpornej D -stabilności, zostały zilustrowane przykładami liczbowymi. Obliczeń dokonano z wykorzystaniem programów komputerowych opracowanych w środowisku systemu MATLAB.

PARAMETRYCZNE OPISY BRZEGÓW WYBRANYCH OBSZARÓW NA PŁASZCZYŹNIE ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

1. Otwarta lewa półpłaszczyzna

Opis parametryczny brzegu:

$$s = jy, \quad y \in Y = (-\infty, \infty). \quad (\text{D.1})$$

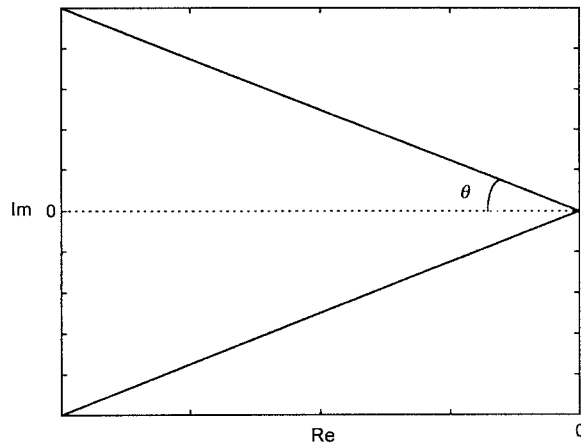
2. Przesunięta otwarta lewa półpłaszczyzna

Opis parametryczny brzegu:

$$s = -\gamma + jy, \quad y \in Y = (-\infty, \infty), \quad (\text{D.2})$$

gdzie $\gamma > 0$.

3. Otwarty sektor



Rys. D.1. Otwarty sektor

Opis parametryczny brzegu:

$$s = -y \operatorname{sgn}(y) + jy \operatorname{tg} \theta, \quad y \in Y = (-\infty, \infty), \quad (\text{D.3})$$

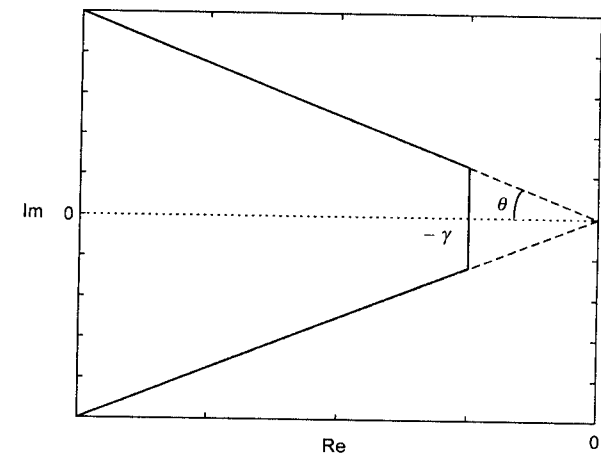
gdzie θ jest kątem pomiędzy ujemną półosią rzeczywistą a brzegiem obszaru, przy czym $\theta \in (0, \pi/2)$.

4. Otwarty sektor odcięty

Opis parametryczny brzegu:

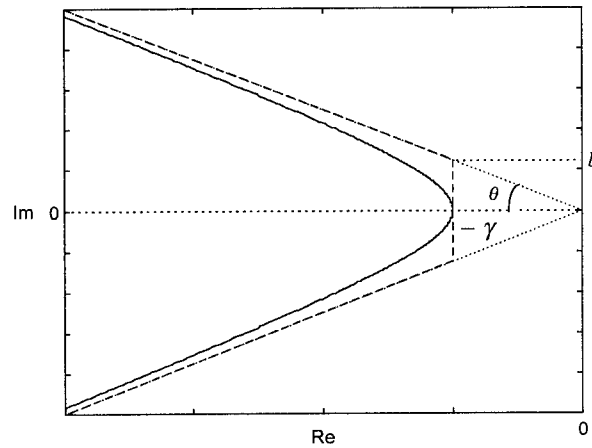
$$s = \begin{cases} -\gamma + jy \operatorname{tg} \theta, & \text{gdy } |y| \leq \gamma, \\ -y \operatorname{sgn}(y) + jy \operatorname{tg} \theta, & \text{gdy } |y| > \gamma, \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

gdzie oznaczenia są jak na rysunku D.2, zaś $y \in Y = (-\infty, \infty)$.



Rys. D.2. Otwarty sektor odcięty

5. Otwarty sektor hiperboliczny



Rys. D.3. Otwarty sektor hiperboliczny

W układzie współrzędnych (u, v) równanie hiperboli pokazanej na rysunku D.3 (brzeg obszaru) ma postać

$$\left(\frac{u}{\gamma}\right)^2 - \left(\frac{v}{b}\right)^2 = 1, \quad (D.5)$$

gdzie $b = \gamma \tan \theta$.

Na płaszczyźnie zmiennej zespolonej hiperbola (D.5) ma opis parametryczny:

$$s = y \pm j b \sqrt{\left(\frac{y}{\gamma}\right)^2 - 1}, \quad y \in Y = (-\infty, -\gamma), \quad (D.6)$$

przy czym znak plus odpowiada gałęzi hiperboli położonej w półpłaszczyźnie $\text{Im } s \geq 0$, a znak minus odpowiada gałęzi położonej w półpłaszczyźnie $\text{Im } s \leq 0$.

Hiperbola (D.6) przecina oś rzeczywistą w punkcie $-\gamma$, a jej gałęzie przy $y \rightarrow \pm\infty$ dążą asymptotycznie do brzegów sektora (D.4). Hiperbola (D.6) jest

stosowana do aproksymacji brzegu odciętego sektora (D.4), zaznaczonego na rysunku D.3 linią przerywaną [1].

Opis parametryczny hiperboli (D.5) można też przedstawić w postaci

$$s = -\gamma(\cosh y - j \tan \theta \sinh y), \quad y \in Y = (-\infty, \infty). \quad (D.7)$$

6. Otwarte koło o środku s_0 i promieniu r

Opis parametryczny brzegu:

$$s = s_0 + r \exp(j2\pi y), \quad y \in Y = [0, 1], \quad (D.8)$$

gdzie $s_0 = u_0 + jv_0$ jest środkiem koła.

7. Otwarte koło jednostkowe

Opis parametryczny brzegu:

$$s = \exp(j2\pi y), \quad y \in Y = [0, 1], \quad (D.9)$$

lub

$$s = \exp(j\pi y), \quad y \in Y = [0, 2]. \quad (D.10)$$

Uwaga D.1. Przy rozpatrywaniu D -stabilności wielomianów o rzeczywistych współczynnikach można ograniczyć się do fragmentów brzegów obszarów leżących w półpłaszczyźnie $\text{Im } s \geq 0$. Wtedy $Y = [0, \infty)$ przy opisie parametrycznym brzegów (D.1)–(D.4) i (D.7) oraz $Y = [0, 1]$ dla opisu parametrycznego krzywej (D.10).

BIBLIOGRAFIA

1. **Ackermann J.:** *Sampled-Data Control Systems: Analysis and Synthesis, Robust System Design*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1985.
2. **Ackermann J.:** *Does it suffice to check a subset of multilinear parameters in robustness analysis?* IEEE Trans. Automat. Control, 1992, vol. 37, no.4, pp. 487-488.
3. **Ackermann J., Barmish B.R.:** *Robust Schur stability of a polytope of polynomials*. IEEE Trans. Automat. Control, 1988, vol. 33, no.10, pp. 984-986.
4. **Ackermann J., Hu H.Z., Kaesbauer D.:** *Robustness analysis: A case study*. IEEE Trans. Automat. Control, 1990, vol. 35, no.3, pp. 352-356.
5. **Ackermann J., Kaesbauer D., Muench R.:** *Robust gamma-stability analysis in a plant parameter space*. Automatica, 1991, vol. 27, no. 1, pp. 75-85.
6. **Ackermann J., Kaesbauer D., Sienel W., Steinhauser R.:** *Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters*. Springer-Verlag, London 1994.
7. **Anderson B.D.O., Jury E.I., Mansour M.:** *On robust Hurwitz polynomials*. IEEE Trans. Automat. Control, 1987, vol. AC-32, no. 10, pp. 909-913.
8. **Anderson B.D.O., Kraus F.J., Mansour M., Dasgupta S.:** *Easily testable sufficient conditions for the robust stability of systems with multi-affine parameter dependence*. W: Mansour M., Balemi S., Truol W.: *Robustness of Dynamic Systems with Parameter Uncertainties*. Birkhauser, Berlin 1992, pp. 81-92.
9. **Argoun M.B.:** *On sufficient conditions for the stability of interval matrices*. Int. J. Control, 1986, vol. 44, no. 5, pp. 1245-1250.
10. **Barmish B.R.:** *Invariance of the strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients*. IEEE Trans. Automat. Control, 1984, vol. AC-29, no. 10, pp. 935-936.
11. **Barmish B.R.:** *A generalization of Kharitonov's four-polynomial concept for robust stability problems with linearly dependent coefficient perturbations*. IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no. 2, pp. 157-165.
12. **Barmish B.R.:** *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan Publishing Company, New York 1994.
13. **Barmish B.R., Kang H.I.:** *A survey of extreme point results for robustness of control systems*. Automatica, 1993, vol. 29, no. 1, pp. 13-35.
14. **Barmish B.R., Tempo R.:** *The robust root locus*. Automatica, 1990, vol. 26, no.2, pp. 283-292.
15. **Barmish B.R., Tempo R.:** *On the spectral set for a family of polynomials*. IEEE Trans. Automat. Control, 1991, vol. 36, no.1, pp. 111-115.
16. **Barmish B.R., Fu M., Saleh S.:** *Stability of polytopes of matrices: counter-examples*. IEEE Trans. Automat. Control, 1988, vol. 33, no. 6, pp. 569-572.
17. **Barmish B.R., Shi Z.:** *Robust stability of perturbed systems with time delays*. Automatica, 1989, vol. 25, no. 3, pp. 371-381.
18. **Barmish B.R., Shi Z.:** *Robust stability of a class of polynomials with coefficients depending multilinearly on perturbations*. IEEE Trans. Automat. Control, 1990, vol. 35, pp. 1040-1043.
19. **Barmish B.R., Tempo R.:** *On mappable nonlinearities in robustness analysis*. Proc. 3rd European Control Conf., Rome 1995, pp. 1430-1435.
20. **Bartlett A.C., Hollot C.V., Lin H.:** *Root location of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges*. Math. Contr., Signals Syst., 1988, vol. 1, pp. 61-71.
21. **Bhattacharyya S.P., Chapellat H., Keel L.H.:** *Robust Control: The Parametric Approach*. Prentice-Hall Inc., New Jersey 1995.
22. **Bhaya A., Kaszkurewicz E.:** *Comments regarding On stability of interval matrices*. IEEE Trans. Automat. Control, 1996, vol. 41, no. 5, pp. 762-766.

23. **Białas S.:** *A necessary and sufficient condition for the stability of interval matrices.* Int. J. Control, 1983, vol. 37, no. 4, pp. 717-722.
24. **Białas S.:** *A necessary and sufficient condition for the stability of convex combinations of stable polynomials or matrices.* Bull. Polish Acad. Sci., Tech. Sci., 1985, vol.33, no. 9-10, pp. 473-480.
25. **Białas S.:** *Systemy dynamiczne przedziałowe.* Zesz. Naukowe AGH, Automatyka, 1987, z. 41.
26. **Białas S., Garloff J.:** *Stability of polynomials under coefficient perturbations.* IEEE Trans. Automat. Control, 1985, vol. AC-30, no. 3, pp. 310-312.
27. **Bose N.K., Jury E.I., Zeheb E.:** *On robust Hurwitz and Schur polynomials.* IEEE Trans. Automat. Control, 1988, vol. 33, no. 12, pp. 1166-1168.
28. **Busłowicz M.:** *Comments on Stability analysis of interval matrices: improved bounds.* Int. J. Control, 1990, vol. 51, no. 6, pp. 1485-1486.
29. **Busłowicz M.:** *Asymptotic stability of dynamical interval systems with pure delay.* Scientific J. Białystok University of Technology, Techn. Sci., 1992, no. 83, Electricity no. 11, pp. 61-77.
30. **Busłowicz M.:** *Częstotliwościowe metody analizy stabilności wielomianów o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów.* Materiały XV Sem. z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, 1992, tom I, s. 175-182 (Gliwice-Wisła).
31. **Busłowicz M.:** *A method for D-stability analysis of polynomials with linearly dependent coefficient perturbations.* Found. of Computing and Decision Sciences, 1993, vol. 18, no. 1, pp. 37-47.
32. **Busłowicz M.:** *A simple method for robust D-stability analysis of polynomials with linearly dependent coefficient perturbations.* Found. of Computing and Decision Sciences, 1994, vol. 19, no. 1, pp. 299-308.
33. **Busłowicz M.:** *Computation of robust first order compensators stabilizing interval plants.* Archives of Control Sciences, 1994, vol. 3, no. 1-2, pp. 95-103.
34. **Busłowicz M.:** *D-stabilność quasi-wielomianów typu opóźnionego o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów.* Zesz. Nauk. Polit. Biał., Elektryka, 1994, nr 13, s. 19-31.
35. **Busłowicz M.:** *Extension of the Kharitonov theorem to a class of interval quasi-polynomials.* Proc. Second Int. Symp. Methods and Models in Automation and Robotics, 1995, vol. 1, pp. 181-185, Wyd. Uczelniane Polit. Szczecińskiej.
36. **Busłowicz M.:** *Computational methods for robust stability analysis of a class of quasi-polynomials.* Control and Cybernetics, 1995, vol. 24, no. 2, pp. 129-139.
37. **Busłowicz M.:** *Komputerowe metody wyznaczania wielomianów wierzchołkowych i krawędziowych wierzchołkowego zbioru wielomianów.* Materiały II Konf. Naukowo-Techn. Zastosowania Komputerów w Elektrotechnice, 1997, str. 5-8 (Poznań/Kiekrz).
38. **Busłowicz M.:** *Stabilność zaburzonych układów liniowych stacjonarnych.* Materiały XX Sem. z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, 1997, tom II, s. 259-262 (Gliwice-Ustroń).
39. **Busłowicz M.:** *Robust stability of perturbed polynomials.* Proc. Fourth Int. Symp. Methods and Models in Automation and Robotics, 1997, vol. 1, pp. 155-158, Wyd. Uczelniane Polit. Szczecińskiej.
40. **Busłowicz M., Leszczyński J.:** *Analiza i synteza układów dynamicznych z nieprobabilistycznym opisem niepewności.* Sprawozdanie z projektu badawczego Komitetu Badań Naukowych nr rej. PB 3 0713 91 01, Białystok 1994.
41. **Busłowicz M., Leszczyński J., Świercz M.:** *Analiza i synteza układów dynamicznych z nieprobabilistycznym opisem niepewności. Etap 1: Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach.* Sprawozdanie z projektu badawczego MEN nr DNS-T/02/096/90-2, Białystok 1991.
42. **Busłowicz M., Taran W.:** *Krzepka stabilność przedziałowego układu regulacji automatycznej z jednym opóźnieniem.* Materiały XIX Sem. z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, 1996, tom II, s. 309-312 (Gliwice-Ustroń).
43. **Cavallo A., Celentano G., De Maria G.:** *Robust stability analysis of polynomials with linearly dependent coefficient perturbations.* IEEE Trans. Automat. Control, 1991, vol. 36, no. 3, pp. 380-384.

44. **Chapellat H., Bhattacharyya S.P.:** *An alternative proof of Kharitonov's theorem.* IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no. 4, pp. 448-450.
45. **Chapellat H., Keel L.H., Bhattacharyya S.P.:** *Robustness properties of multilinear interval systems.* W: Mansour M., Balemi S., Truol W.: Robustness of Dynamic Systems with Parameter Uncertainties. Birkhauser, Berlin 1992, pp. 73-80.
46. **Charitonov V.L.:** *Ob asimptoticeskoj ustojcivosti polozenija ravnovesija se-mejstva sistem linejnych differencialnych uravnenij.* Diff. Uravn., 1978, vol. 14, no. 11, s. 2086-2088.
47. **Charitonov V.L.:** *Ob odnom obobszenii kriterija ustojcivosti.* Izv. AN Kaz. SSR, Ser. Mat.-Fiz., 1978, no. 1, s. 53-57.
48. **Charitonov (Kharitonov) V.L.:** *Robust stability of nested polynomials families.* Automatica, 1996, vol. 32, no. 3, pp. 365-367.
49. **Charitonov (Kharitonov) V.L., Zhabko A.P.:** *Robust stability of time-delay systems.* IEEE Trans. Automat. Control, 1994, vol. 39, no. 12, pp. 2388-2397.
50. **Chen J.:** *Sufficient conditions on stability of interval matrices: connections and new results.* IEEE Trans. Automat. Control, 1992, vol. 37, no. 4, pp. 541-544.
51. **Chen W., Petersen I.R.:** *A class of multilinear uncertain polynomials to which the edge theorem is applicable.* IEEE Trans. Automat. Control, 1995, vol. 40, no. 12, pp. 2103-2107.
52. **Cieřlik J.:** *On possibilities of the extension of Kharitonov's stability test for interval polynomials to the discrete case.* IEEE Trans. Automat. Control, 1987, vol. AC-32, no. 3, pp. 237-238.
53. **Dasgupta S., Chockalingam G.:** *Lyapunov functions for uncertain systems.* W: Mansour M., Balemi S., Truol W.: Robustness of Dynamic Systems with Parameter Uncertainties. Birkhauser, Berlin 1992, pp. 177-187.
54. **De Gaston R.R.E., Safonov M.G.:** *Exact calculation of the multiloop stability margin.* IEEE Trans. Automat. Control, 1988, vol. 33, no. 2, pp. 156-171.
55. **Dorato P., Fortuna L., Muscato G.:** *Robust Control for Unstructured Perturbations – An Introduction.* Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 168. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1992.
56. **Faxun L.:** *Simple criteria for stability interval polynomials.* Int. J. Control, 1988, vol. 50, no. 1, pp. 339-347.
57. **Foo Y.K., Soh Y.C.:** *Stability analysis of a family of matrices.* IEEE Trans. Automat. Control, 1990, vol. 35, no. 11, pp. 1257-1259.
58. **Foo Y.K., Soh Y.C.:** *Strong Kharitonov theorem for low-order polynomials.* IEEE Trans. Automat. Control, 1992, vol. 37, no. 11, pp. 1816-1820.
59. **Foo Y.K., Soh Y.C.:** *Robustness analysis of matrices with highly structured uncertainties.* IEEE Trans. Automat. Control, 1992, vol. 37, no. 12, pp. 1974-1976.
60. **Franklin G.F., Powell J.D., Emami-Naeini A.:** *Feedback Control of Dynamic Systems.* Addison-Wesley, New York 1986.
61. **Fu M., Barmish B.R.:** *Stability of convex and linear combinations of polynomials and matrices arising in robustness problems.* Proc. Conf. on Information Science Systems, 1987, pp. 16-21, Baltimore.
62. **Fu M., Barmish B.R.:** *Polytopes of polynomials with zeros in a prescribed set.* IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no. 5, pp. 544-546.
63. **Fu M., Olbrot A.W., Polis M.P.:** *Robust stability for time-delay systems: The edge theorem and graphical tests.* IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no. 8, pp. 813-820.
64. **Fu M., Olbrot A., Polis M.P.:** *Edge theorem and graphical test for robust stability of neutral time-delay systems.* Automatica, 1991, vol. 27, no. 4, pp. 739-742.
65. **Gantmacher F.R.:** *Teoria matric.* Nauka, Moskwa 1988.
66. **Gardiner J.D.:** *Computation of stability robustness bounds for state-space models with structured uncertainty.* IEEE Trans. Automat. Control, 1997, vol. 42, no. 2, pp. 253-256.
67. **Green M., Limebeer D.J.N.:** *Linear Robust Control.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1995.
68. **Gregor J., Tiser J.:** *On convex combinations of Hurwitz polynomials.* Appl. Math. and Comp. Sci., 1996, vol. 6, no. 1, pp. 33-47.

69. **Heinen J.A.:** *Sufficient conditions for stability of interval matrices.* Int. J. Control, 1984, vol. 39, no. 6, pp. 1326-1328.
70. **Hernandez R., Dormido S.:** *Kharitonov's theorem extension to interval polynomials which can drop in degree: a Nyquist approach.* IEEE Trans. Automat. Control, 1996, vol. 41, no. 7, pp. 1009-1012.
71. **Holot C.V., Bartlett A.C.:** *Some discrete counterparts to Kharitonov's stability criteria for uncertain systems.* IEEE Trans. Automat. Control, 1986, vol. 31, no. 4, pp. 335-336.
72. **Jiang C.L.:** *Another sufficient condition for the stability of interval matrices.* Int. J. Control, 1988, vol. 47, no. 1, pp. 181-186.
73. **Jiang C.L.:** *Sufficient and necessary condition for the asymptotic stability of discrete linear interval systems.* Int. J. Control, 1988, vol. 47, no. 5, pp. 1563-1565.
74. **Juang Y.T., Shao C.S.:** *Stability analysis of dynamic interval systems.* Int. J. Control, 1989, vol. 49, no. 4, pp. 1401-1408.
75. **Jury E.I.:** *Robastnost diskretnych sistem.* Avtomatika i Telemekhanika, 1990, pp. 3-28.
76. **Jury E.I., Pavlidis T.:** *Stability and aperiodicity constraints for systems design.* IEEE Trans. Circuits Theory, 1963, vol. 10, pp. 137-141.
77. **Kabziński J.:** *Projektowanie układów automatycznej regulacji z zastosowaniem warunków niewrażliwości modów.* Zesz. Nauk. Polit. Łódzkiej, z. 637, Seria: Rozprawy Naukowe, nr 162, Łódź 1992.
78. **Kaczorek T.:** *Teoria układów regulacji automatycznej.* WNT, Warszawa 1974.
79. **Kaczorek T.:** *Teoria sterowania*, tom 1. PWN, Warszawa 1977.
80. **Kaczorek T.:** *Macierze w automatyce i elektrotechnice.* WNT, Warszawa 1984.
81. **Kaczorek T.:** *Teoria sterowania i systemów.* PWN, Warszawa 1993 (II wydanie 1996).
82. **Kaesbauer D.:** *On robust stability of polynomials with polynomial parameter dependency: two/three parameter cases.* Automatica, 1992, vol. 29, no. 1, pp. 215-217.
83. **Karan M., Sezer M.E., Ocali O.:** *Robust stability of discrete-time systems under parametric perturbations.* IEEE Trans. Automat. Control, 1994, vol. 39, no. 5, pp. 991-995.
84. **Katbab A., Jury E.I.:** *Generalization and comparison of two recent frequency-domain stability robustness result.* Int. J. Control, 1991, vol. 53, no. 2, pp. 463-475.
85. **Keel L.H., Bhattacharyya S.P.:** *Robust stability of interval matrices: a computational approach.* Int. J. Control, 1995, vol. 62, no. 6, pp. 1491-1506.
86. **Kogan J.:** *Robust Hurwitz l^p stability of polynomials with complex coefficients.* IEEE Trans. Automat. Control, 1993, vol. 38, no. 8, pp. 1304-1308.
87. **Krasowski A.A., Pospiełow G.S.:** *Podstawy automatyki i cybernetyki technicznej.* WNT, Warszawa 1965.
88. **Kraus F., Anderson B.D.O., Mansour M.:** *Robust Schur polynomial and Kharitonov's theorem.* Int. J. Control, 1988, vol. 47, no. 5, pp. 1213-1225.
89. **Kraus F., Anderson B.D.O., Mansour M.:** *Robust stability of polynomials with multilinear parameter dependence.* Int. J. Control, 1989, vol. 50, no. 5, pp. 1745-1762.
90. **Kurek J.E.:** *Robust stability region for linear continuous-time systems.* Bull. Pol. Acad. Sci., Techn. Sci., 1995, vol. 43, no. 3, pp. 315-329.
91. **Leja F.:** *Funkcje zespolone.* PWN, Warszawa 1976.
92. **Lin S.H., Fong I.K., Juang Y.T., Kuo T.S., Hsu C.F.:** *Stability of perturbed polynomials based on the argument principle and Nyquist criterion.* Int. J. Control, 1989, vol. 50, no. 1, pp. 55-63.
93. **Luo J.S., Johnson A.:** *On Lyapunov stability robustness bounds for linear continuous-time systems with structured uncertainty.* Proc. European Control Conf., 1993, vol. 2, pp. 374-379.
94. **Marden M.:** *Geometry of Polynomials.* American Mathematical Society, Providence 1989.

95. **Minnichelli R.J., Anagnost J.J., Desoer C.A.:** *An elementary proof of Kharitonov's stability theorem with extension.* IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no. 9, pp. 995-998.
96. **Perez F., Docampo D., Abdallah C.:** *Extreme-point robust stability results for discrete-time polynomials.* IEEE Trans. Automat. Control, 1994, vol. 39, no. 7, pp. 1470-1472.
97. **Petkovski D.B.:** *Stability analysis of interval matrices: improved bounds.* Int. J. Control, 1988, vol. 48, no. 6, pp. 2265-2273.
98. **Polyak B.T.:** *Robustness analysis of multilinear perturbations.* W: Mansour M., Balemi S., Truol W.: Robustness of Dynamic Systems with Parameter Uncertainties. Birkhauser, Berlin 1992, pp. 93-104.
99. **Polyak B.T., Kogan J.:** *Necessary and sufficient conditions for robust stability of linear systems with multiaffine uncertainty structure.* IEEE Trans. Automat. Control, 1995, vol. 40, no. 7, pp. 1255-1260.
100. **Qian R.X., DeMarco C.L.:** *An approach to robust stability of matrix polytopes through copositive homogeneous polynomials.* IEEE Trans. Automat. Control, 1992, vol. 37, no. 6, pp. 848-852.
101. **Qiu L., Davison E.J.:** *New perturbation bounds for the robust stability of linear state space models.* Proc. of 25th Conf. on Decision and Control, Athens, Greece, 1986, pp. 751-755.
102. **Rantzer A.:** *Stability conditions for polytopes of polynomials.* IEEE Trans. Automat. Control, 1992, vol. 37, no. 1, pp. 79-89.
103. **Rantzer A.:** *Kharitonov's weak theorem holds if and only if the stability region and its reciprocal are convex.* Int. J. Nonlinear and Robust Control, 1992.
104. **Rockafellar R.T.:** *Convex Analysis.* Princeton University Press, Princeton, New York 1970.
105. **Rohn J.:** *An algorithm for checking stability of symmetric interval matrices.* IEEE Trans. Automat. Control, 1996, vol. 41, no. 1, pp. 133-136.
106. **Sezer M.E., Siljak D.D.:** *A note on robust stability bounds.* IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no. 11, pp. 1212-1215.
107. **Sezer M.E., Siljak D.D.:** *On stability of interval matrices.* IEEE Trans. Automat. Control, 1994, vol. 39, no. 2, pp. 368-371.
108. **Shafai B., Chen J., Kothandaraman M.:** *Explicit formulas for stability radii of nonnegative and Metzlerian matrices.* IEEE Trans. Automat. Control, 1997, vol. 42, no. 2, pp. 265-270.
109. **Shi Z.C., Gao W.B.:** *A necessary and sufficient conditions for the positive-definiteness of interval symmetric matrices.* Int. J. Control, 1986, vol. 43, no. 1, pp. 325-328.
110. **Siders A.:** *An efficient algorithm for checking the robust stability of a polytope of polynomials.* Mathematics of Control, Signals and Systems, 1991, vol. 4, pp. 315-337.
111. **Siders A., Barmish B.R.:** *An edge theorem for polytopes of polynomials which can drop in degree.* Systems and Control Letters, 1989, vol. 13, pp. 233-238.
112. **Siders A., Sanchez Pena R.S.:** *Fast computation of the multivariable stability margin for real interrelated uncertain parameters.* IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no. 12, pp. 1272-1276.
113. **Siljak D.D.:** *Parameter space methods for robust control design: a guided tour.* IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no. 7, pp. 674-688.
114. **Soh C.B.:** *Counter-example to Sufficient and necessary condition for the asymptotic stability of discrete linear interval systems.* Int. J. Control, 1989, vol. 49, no. 3, pp. 1107-1108.
115. **Soh C.B.:** *Necessary and sufficient conditions for stability of symmetric interval matrices.* Int. J. Control, 1990, vol. 51, no. 1, pp. 243-248.
116. **Soh C.B.:** *Correcting Argoun's approach for the stability of interval matrices.* Int. J. Control, 1990, vol. 51, no. 5, pp. 1151-1154.
117. **Soh C.B. :** *Robust stability of dynamic interval systems.* Contr.-Theory and Advanced Technology (C-TAT), 1994, vol. 10, no. 1, pp. 73-80.
118. **Soh Y.C.:** *Stric Hurwitz property of polynomials under coefficients perturbation.* IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no. 6, pp. 629-632.

119. **Soh Y.C., Foo Y.K.:** *Generalization of strong Kharitonov theorem to the left sector.* IEEE Trans. Automat. Control, 1990, vol. 35, pp. 1378-1382.
120. **Tesi A., Vicino A.:** *Robust stability of state-space models with structured uncertainties.* IEEE Trans. Automat. Control, 1990, vol. 35, no. 2, pp. 191-195.
121. **Tian Y., Feng C., Xin X.:** *Robust stability of polynomials with multilinearly dependent coefficient perturbations.* IEEE Trans. Automat. Control, 1994, vol. 39, pp. 554-558.
122. **Tsing N., Tits A.:** *On the multiaffine image of a cube.* W: Mansour M., Balemi S., Truol W.: Robustness of Dynamic Systems with Parameter Uncertainties. Birkhauser, Berlin 1992, pp. 105-110.
123. **Tsyppkin Y.Z., Polyak B.T.:** *Frequency domain criteria for the l^p -robust stability of continuous linear systems.* IEEE Trans. Automat. Control, 1991, vol. 36, no. 12, pp. 1464-1469.
124. **Wang L.:** *Robust performance of interval systems and diamond systems.* Proc. Third Int. Symp. Methods and Models in Automation and Robotics, 1996, vol. 1, pp. 407-410, Wyd. Uczelniane Polit. Szczecińskie.
125. **Wang K., Michel A.N., Liu D.:** *Necessary and sufficient conditions for the Hurwitz and Schur stability of interval matrices.* IEEE Trans. Automat. Control, 1994, vol. 39, no.6, pp. 1251-1255.
126. **Wei K., Yedavalli R.K.:** *Robust stabilizability for linear systems with both parameter variation and unstructured uncertainty.* IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no.2, pp. 149-156.
127. **Weinmann A.:** *Uncertain Models and Robust Control.* Springer Verlag, Wien 1991.
128. **Wright W.C., Kerlin T.W.:** *An efficient computer oriented method for stability analysis of large multivariable systems.* Trans. ASME Journal Basic Eng., 1970, vol. 92, no. 2, pp. 279-286.
129. **Xu S.J., Shao C.X.:** *Comment on On sufficient condition for the stability of interval matrices.* Int. J. Control, 1989, vol. 49, no. 1, pp. 379-381.
130. **Yedavalli R.K.:** *Perturbation bounds for robust stability in linear state space models.* Int. J. Control, 1985, vol. 42, no. 6, pp. 1507-1517.
131. **Yedavalli R.K.:** *Stability analysis of interval matrices : another sufficient condition.* Int. J. Control, 1986, vol. 43, no. 3, pp. 767-772.
132. **Yedavalli R.K.:** *Flight control application of new stability robustness bounds for linear uncertain systems.* J. Guidance, Contr., Dynamics, 1993, vol. 6, pp. 1032-1037.
133. **Yedavalli R.K., Liang Z.:** *Reduced conservatism in stability robustness bounds by state transformation.* IEEE Trans. Automat. Control, 1986, vol. 31, no. 9, pp. 863-866.
134. **Zadeh L.A., Desoer C.A.:** *Linear Systems Theory - A State Space Approach.* McGraw-Hill, New York 1963.
135. **Zeheb E.:** *Necessary and sufficient conditions for root clustering of a polytope of polynomials in a simply connected domain.* IEEE Trans. Automat. Control, 1989, vol. 34, no. 9, pp. 986-990.
136. **Zeheb E.:** *Necessary and sufficient conditions for robust stability of continuous system - the continuous dependency case illustrated via multilinear dependency.* IEEE Trans. Circuits and Systems, 1990, vol. 37, no. 1, pp. 47-53.
137. **Zeheb E.:** *Necessary and sufficient conditions for robust stability of discrete systems with coefficients depending continuously on two interval parameters.* Automatica, 1993, vol. 29, no. 1, pp. 241-244.
138. **Zhou K., Doyle J.C., Glover K.:** *Robust and Optimal Control.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1996.
139. **Zhou K., Khargonekar A.P.:** *Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainty.* IEEE Trans. Automat. Control, 1987, vol. 32, no. 7, pp. 621-623.